

О. Е. Акимов

# Дискретная математика

Логика

Группы

Графы

Фракталы





2005

**О. Е. АКИМОВ**

**ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА:**

логика, группы, графы, фракталы

МОСКВА  $\diamond$  АКИМОВА  $\diamond$  2005

УДК 681.5.01:512

ББК 22

А 39

Рецензенты:

заведующий кафедрой Высшей математики Московского энергетического института, доктор физико-математических наук, профессор И.М. Петрушко;

директор Института электротехники, заведующий кафедрой Физики электротехнических материалов и компонентов автоматизации электротехнологических комплексов, доктор технических наук, профессор В.А. Филиков.

**А 39**

**Акимов О.Е.** Дискретная математика: логика, группы, графы, фракталы. — М.: Издатель АКИМОВА, 2005. — 656 с.: илл.

ISBN 5-9900342-1-0

В учебном пособии излагаются основные разделы дискретной математики, являющейся базовой дисциплиной для специалистов по информатике, программированию, электротехнике, микроэлектронике, компьютерным сетям и технологиям. При изложении материала использовался конструктивный подход — наиболее современная и эффективная форма подачи материала. Текст отличается доступностью и ясностью написания, снабжен большим числом примеров решения задач по логике, группам, графам и фракталам. Предназначается для студентов и преподавателей технических университетов.

**ISBN 5-9900342-1-0**

© О.Е. Акимов, 2005

© АКИМОВА, 2005



## Предисловие

Успех к книге приходит тогда, когда появляются ее «пиратские» копии. Именно этой почетной участи удостоился данный курс «Дискретной математики». Московское издательство «Лаборатория Базовых Знаний» неожиданно для автора летом 2003 г. выбросило на книжный рынок 10 тысяч экземпляров этого курса. Можно было бы поблагодарить руководителя издательства, Бородина Михаила Николаевича, за популяризацию учебника, если бы он помнил о нелегком труде автора. Однако обращаем внимание читателей на следующие обстоятельства. Во-первых, «Лаборатория Базовых Знаний» выпустила новый тираж со старыми ошибками, обнаружившимися в предыдущем издании. Во-вторых, книга, которую вы держите в руках, дополнена совершенно новой главой — «Фракталы». Без этой актуальной темы курс «Дискретной математики» сейчас не может считаться современным. В-третьих, автор расширил старые главы новым теоретическим и практическим материалом, что также способствовало их привлекательности с дидактической точки зрения. Одновременно, чтобы не делать учебник слишком объемным, убрана последняя методологическая глава — «Конструктивизм». В скором будущем планируется выход отдельной книги под названием «Конструктивный подход к науке: история и современность», где будет рассмотрен широкий круг вопросов, связанный с методологией математики и естествознания. Эпистемологическая проблематика рассматривается также в серии книг этого же автора под названием «Психология познания».

Во всем остальном книга осталась прежней. Она закладывает прочный фундамент для изучения практически всех специализированных курсов технических университетов. Ее непосредственная цель — дать математическое обеспечение современным компьютерным и информационным технологиями, заложить алгебраические основы для изучения материалов микроэлектроники и электронной техники, а также ознакомить будущих программистов с формально-логической методикой. Книга окажется полезной при подготовке бакалавров и дипломированных специалистов по на-

правлениям «Электротехника, электромеханика и электротехнологии» и «Электроника и микроэлектроника», а также «Информатика и вычислительная техника», «Прикладная математика и информатика» и т.д. Содержание книги составляет базу для таких важнейших на сегодняшний день узкоспециализированных дисциплин, как «Теоретическая информатика», «Методы и алгоритмы принятия решений», «Функциональное и логическое программирование», «Структуры и организация данных для компьютеров», «Конструирование программ», «Системный анализ и моделирование», «Теория искусственного интеллекта» и т.п. В результате систематического и добросовестного изучения материала студенты освоят основные математические модели и алгоритмы, которые в дальнейшем позволят им профессионально формулировать и решать всевозможные задачи в конкретных областях информатики, программирования и вычислительной техники. Они смогут грамотно применять полученные знания для абстрактного проектирования логических структур и вычислительных процессов на графах. Читатель получит также глубокое и всестороннее представление о новейших тенденциях в развитии математического инструментария, главная особенность которого заключается в конструктивном подходе.

Хотя в книге затрагивается большая и разнообразная тематика, связанная с дискретной математикой и сферами ее приложения, она, тем не менее, представляет собой единое и взаимосвязанное целое, дает всестороннее и глубокое представление о предмете, который сегодня необходим специалистам по математическим, техническим и естественно-научным дисциплинам. Текст снабжен множеством рисунков, разъяснительных схем и диаграмм, которые в наглядной форме отражают содержание работы, а таблицы могут служить справочным материалом. Принятая форма математической символики понятна и удобна в использовании и не вызывает проблем с толкованием уравнений и формул. Автор заранее благодарит всех, кто выскажет свои замечания и пожелания как содержательного, так и формального характера — e-mail: [akimov\\_ol@mail.ru](mailto:akimov_ol@mail.ru).

# 1. Логика

## 1.1. Операции логики Буля

### Диаграммы Эйлера — Венна

Пусть дана некоторая совокупность предметов, которую после пересчета можно было бы обозначить как

$$V = \{1, 2, \dots, 11\}.$$

Предположим далее, что часть предметов, 1, 2, 4 и 6, имеет круглую форму, а часть — 2, 3, 4, 8 и 9 — окрашена в белый цвет. В этом случае говорят, что множество  $V$  имеет два *подмножества*

$$A = \{1, 2, 4, 6\} \text{ и } B = \{2, 3, 4, 8, 9\}$$

круглых и белых предметов. Можно исходное множество называть *фундаментальным*, а подмножества  $A$  и  $B$  — просто множествами.

В результате получим четыре класса элементов:

$C_0 = \{5, 7, 10, 11\}$  — элементы, которые не обладают ни одним из названных свойств,

$C_1 = \{1, 6\}$  — элементы, обладающие только свойством  $A$  (быть круглыми),

$C_2 = \{3, 8, 9\}$  — элементы, обладающие только свойством  $B$  (быть белыми),

$C_3 = \{2, 4\}$  — элементы, обладающие одновременно двумя свойствами.

На рис. 1.1. указанные классы изображены с помощью диаграммы Эйлера — Венна.

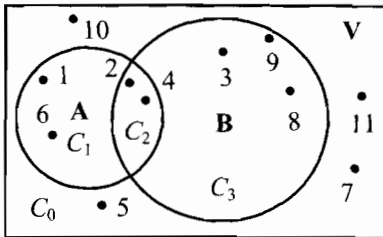


Рис. 1.1

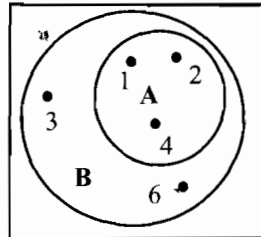


Рис. 1.2

Часто диаграммы не имеют всей полноты общности, например та, что изображена на рис. 1.2. На ней уже множество  $A$  полностью включено в  $B$ . Для такого случая используется специальный символ *включения* ( $\subset$ ):

$$A \subset B = \{1, 2, 4\} \subset \{1, 2, 3, 4, 6\}.$$

Если одновременно выполняются два условия:

$$\mathbf{A} \subset \mathbf{B} \text{ и } \mathbf{B} \subset \mathbf{A}, \text{ то } \mathbf{A} = \mathbf{B},$$

в этом случае говорят, что множества **A** и **B** *полностью эквивалентны*.

После того, как определены четыре класса элементов и даны необходимые сведения о диаграммах Эйлера — Венна, введем операции на множествах. В качестве первой рассмотрим операцию объединения.

### Объединение. Таблицы истинности

*Объединением* множеств

$$\mathbf{A} = \{1, 2, 4, 6\} \text{ и } \mathbf{B} = \{2, 3, 4, 8, 9\}$$

назовем множество

$$\mathbf{A} \cup \mathbf{B} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9\},$$

где  $\cup$  — символ объединения множеств. Таким образом, объединением охватываются три класса элементов —  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_3$ , которые на диаграмме (рис. 1.3) заштрихованы.

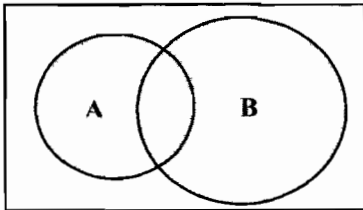


Рис. 1.3

Логически операцию объединения двух множеств можно охарактеризовать словами: элемент  $x$  *принадлежит* множеству **A** или множеству **B**.

При этом связка «или» одновременно означает и связку «и». Факт принадлежности элемента  $x$  множеству **A** обозначается как  $x \in A$ . Поэтому то, что  $x$  *принадлежит A или/и B*, выражается формулой:

$$x \in \mathbf{A} \cup \mathbf{B} = (x \in \mathbf{A}) \vee (x \in \mathbf{B}),$$

где  $\vee$  — символ логической связки *или*, которая называется *дизъюнкцией*.

С точки зрения логики, вместо одной *предметной* переменной  $x$  удобно ввести две *логические* переменные  $x_1$  и  $x_2$ . Областью определения  $x_1$  и  $x_2$  будут уже не числа натурального ряда, а только два логических значения: **1** для *истинного* значения и **0** для *ложного*.

Допустим, что  $x = 7$ . Поскольку это число не принадлежит ни

множеству **A**, ни множеству **B**, то и логические значения переменных будут:  $x_1 = 0, x_2 = 0$ . Эта комбинация переменных отвечает классу  $C_0$ . Теперь предположим, что выбрано число 4. Оно входит как в **A**, так и в **B**. Следовательно,  $x_1 = 1, x_2 = 1$ , что соответствует классу  $C_3$ . Существуют еще два варианта, например, для числа  $x = 6$  имеем  $x_1 = 1, x_2 = 0$  и для  $x = 8$  имеем  $x_1 = 0, x_2 = 1$ , которые отвечают классам  $C_1$  и  $C_2$ .

Переменные  $x_1$  и  $x_2$  определяют некоторую логическую функцию:

$$y = f(x_1, x_2),$$

которая, в случае дизъюнкции, записывается как  $y = x_1 \vee x_2$ .

**Таблица 1.1**

$x_1$	$x_2$	$y = x_1 \vee x_2$
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	1

Легко усматривается, что число 7 не входит в объединенное множество  $A \cup B$ , поэтому при  $x_1 = 0, x_2 = 0$  значение логической функции  $y$  равно нулю. Когда же выбираются числа 4, 6 или 8, то все они непременно попадут в заштрихованную область диаграммы, следовательно, при этих значениях функция  $y$  равна единице. Все это удобно оформить таблицей (табл. 1.1), которую называют *таблицей истинности*.

Между таблицей истинности и диаграммой Эйлера — Венна существует взаимно однозначное соответствие. Поэтому число единиц для  $y$  всегда будет совпадать с числом заштрихованных областей на диаграмме. Четыре комбинации аргументов  $x_1$  и  $x_2$  отвечают четырем областям  $C_i$ . Кроме того, нетрудно подсчитать, что число комбинаций нулей и единиц для функции  $y$  равно 16, значит и общее число возможных операций на двух множествах, т.е. число возможных функций  $y = f(x_1, x_2)$  тоже равно этому же числу.

### Пересечение, двойственность, дополнение

*Пересечением* множеств **A** и **B** называется множество  $A \cap B$ , содержащее те элементы из **A** и **B**, которые входят одновременно в оба множества. Для нашего числового примера будем иметь:

$$A \cap B = \{1, 2, 4, 6\} \cap \{2, 3, 4, 8, 9\} = \{2, 4\} = C_3.$$

Диаграмма Эйлера – Венна для пересечения изображена на рис. 1.4.

Таблица 1.2

$x_1$	$x_2$	$y = x_1 \wedge x_2$
0	0	0
1	0	0
0	1	0
1	1	1

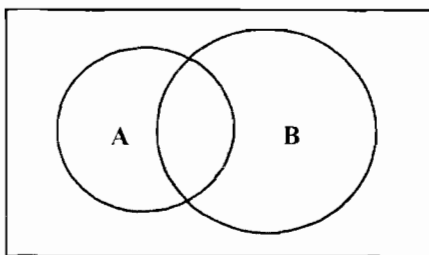


Рис. 1.4

То, что  $x$  принадлежит одновременно двум множествам  $A$  и  $B$ , можно представить выражением:

$$x \in A \cap B = (x \in A) \wedge (x \in B),$$

где  $\wedge$  — символ логической связки «и», которая называется *конъюнкцией*.

Если в таблице истинности для конъюнкции (табл. 1.2) все нули заменить единицами, а все единицы — нулями, то в итоге получим табл. 1.1. Этот факт определяет взаимную *двойственность* конъюнкции и дизъюнкции. Для любой логической операции можно найти двойственную. Представим себе операцию, в результате которой окажутся заштрихованными области  $C_1$  и  $C_3$ , образующие множество  $A$  (рис. 1.5). Затем еще одну операцию, которая охватит две другие области —  $C_0$  и  $C_2$ , не входящие в  $A$ , что обозначается как  $\underline{A}$  (рис. 1.6). Если объединить заштрихованные области на обеих диаграммах, то получим все заштрихованное множество  $1$ ; пересечение же  $A$  и  $\underline{A}$  даст пустое множество  $0$ , в котором не содержится ни одного элемента:

$$A \cup \underline{A} = 1, \quad A \cap \underline{A} = 0.$$

Аналогичные равенства выполняются и для логических функций, которые имеют соответствующие названия:

$$y = x \vee \underline{x} = 1 \text{ — тавтология, } y = x \wedge \underline{x} = 0 \text{ — противоречие.}$$

*Тавтология* — это всегда истинное логическое выражение, какое бы при этом значение ни принимала переменная  $x$ . *Противоречие*, напротив, всегда ложное выражение.

Множество  $\underline{A}$  *дополняет* множество  $A$  до фундаментального множества  $V$  (или  $1$ ); отсюда название: *дополнительное* множество  $\underline{A}$ , или *дополнение* как операция. Дополнение к логической перемен-

ной  $x$ , т.е.  $\underline{x}$  (*не  $x$* ), называется чаще всего *отрицанием  $x$* .

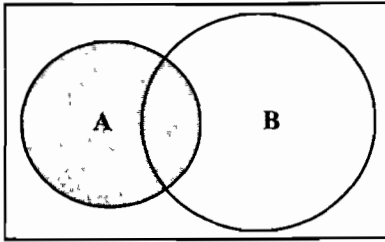


Рис. 1.5

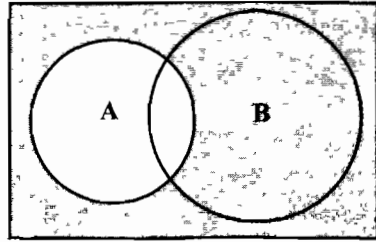


Рис. 1.6

После введения операций пересечения и дополнения все четыре области  $C_i$  на диаграмме Эйлера – Венна можно выразить следующим образом:

$$C_0 = \underline{A} \cap \underline{B}, C_1 = A \cap \underline{B}, C_2 = \underline{A} \cap B, C_3 = A \cap B.$$

Путем объединения соответствующих областей  $C_i$  можно представить любую множественную операцию, в том числе и само объединение:

$$A \cup B = (A \cap \underline{B}) \cup (\underline{A} \cap B) \cup (A \cap B).$$

Все это распространяется и на логику:

$$y = x_1 \vee x_2 = (x_1 \wedge \underline{x}_2) \vee (\underline{x}_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge x_2).$$

### Стрелка Пирса, штрих Шеффера и разность

На рис. 1.7 и 1.8 приведены диаграммы двух новых операций, которые называются, соответственно, *стрелка Пирса* и *штрих Шеффера*. Эти диаграммы дополняют объединение и пересечение до фундаментального множества  $V$ .

На языке логических формул этот факт выражается следующим образом: для стрелки Пирса —

$$(x_1 \vee x_2) \vee (x_1 \downarrow x_2) = 1, (x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \downarrow x_2) = 0,$$

для штриха Шеффера —

$$(x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \mid x_2) = 1, (x_1 \wedge x_2) \wedge (x_1 \mid x_2) = 0.$$

Из таблиц истинности для этих операций (табл. 1.3 и 1.4) видно, что

$$y = x_1 \downarrow x_2 = \underline{x_1} \vee \underline{x_2} = \underline{x_1} \wedge \underline{x_2} = (x_1 \vee x_2) \wedge (\underline{x_1} \vee x_2) \wedge (\underline{x_1} \vee \underline{x_2}),$$

$$y = x_1 \mid x_2 = \underline{x_1} \wedge \underline{x_2} = \underline{x_1} \vee \underline{x_2} = (x_1 \wedge x_2) \vee (\underline{x_1} \wedge x_2) \vee (\underline{x_1} \wedge \underline{x_2}).$$

На множествах эти операции выглядят следующим образом:

$$A \downarrow B = \{1, 2, 4, 6\} \downarrow \{2, 3, 4, 8, 9\} = \{5, 7, 10, 11\} = C_0,$$

$$A \mid B = \{1, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\} = C_0 \cup C_1 \cup C_2.$$

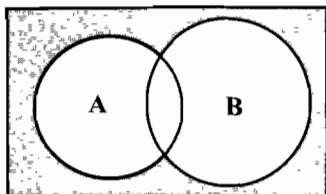


Рис. 1.7

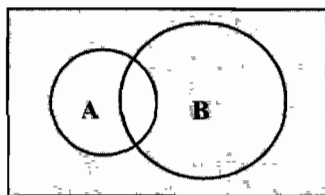


Рис. 1.8

Таблица 1.3

$x_1$	$x_2$	$y = x_1 \downarrow x_2$
0	0	1
1	0	0
0	1	0
1	1	0

Таблица 1.4

$x_1$	$x_2$	$y = x_1 \mid x_2$
0	0	1
1	0	1
0	1	1
1	1	0

*Разностью* между множествами **A** и **B** называется совокупность тех элементов множества **A**, которые не вошли во множество **B**:

$$A - B = \{1, 2, 4, 6\} - \{2, 3, 4, 8, 9\} = \{1, 6\} = C_1.$$

Диаграмма Эйлера — Венна для нее приведена на рис. 1.9. Дополнением к разности служит *импликация*. Таблицы истинности для разности и импликации представлены табл. 1.5 и 1.6.

$$y = x_1 \rightarrow x_2 = \underline{x_1} - \underline{x_2} = \underline{x_1} \vee x_2 = (x_1 \wedge x_2) \vee (\underline{x_1} \wedge x_2) \vee (\underline{x_1} \wedge \underline{x_2}),$$

$$(x_1 - x_2) \vee (x_1 \rightarrow x_2) = 1, \quad (x_1 - x_2) \wedge (x_1 \rightarrow x_2) = 0.$$

На диаграмме Эйлера — Венна для импликации (рис. 1.10) показано *частичное* включение множества **A** во множество **B**, которое нужно отличать от *полного* включения (рис. 1.2).



Таблица 1.5

$x_1$	$x_2$	$y = x_1 - x_2$
0	0	0
1	0	1
0	1	0
1	1	0

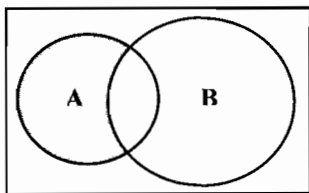


Рис. 1.9

Таблица 1.6

$x_1$	$x_2$	$y = x_1 \rightarrow x_2$
0	0	1
1	0	0
0	1	1
1	1	1

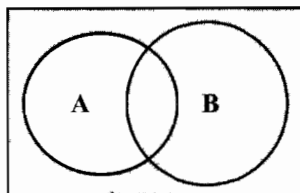


Рис. 1.10

Если утверждается, что «элементы множества  $A$  включены во множество  $B$ », то область  $C_3$  обязательно должна быть заштрихована, так как она соответствует истине, а область  $C_1$  с такой же необходимостью должна быть оставлена белой, поскольку ей отвечает прямо противоположное утверждение. Относительно областей  $C_0$  и  $C_2$ , находящихся в  $\underline{A}$ , заметим следующее. Мы не имеем права оставлять их белыми, поскольку они прямо не противоречат первому утверждению; но, так как логика *двухзначная*, мы обязаны все же области, попадающие в  $\underline{A}$ , заштриховать.

### Симметрическая разность и эквивалентность

Остается привести еще две взаимно дополняющих операции — симметрическую разность и эквивалентность. *Симметрическая разность* двух множеств  $A$  и  $B$  есть объединение двух разностей:

$$A + B = (A - B) \cup (B - A) = C_1 \cup C_2 = \{1, 3, 6, 8, 9\}.$$

*Эквивалентность* определяется теми элементами множеств  $A$  и  $B$ , которые для них являются общими. Однако элементы, не входящие ни в  $A$ , ни в  $B$ , также считаются эквивалентными:

$$A \sim B = (A \cap B) \cup (\underline{A} \cap \underline{B}) = C_0 \cup C_3 = \{2, 4, 5, 7, 10, 11\}.$$

На рис. 1.11 и 1.12 показана штриховка диаграмм Эйлера — Вен-

на, а табл. 1.7 и 1.8 представляют таблицы истинности соответствующих операций. Из условия дополненности операций вытекают следующие соотношения:

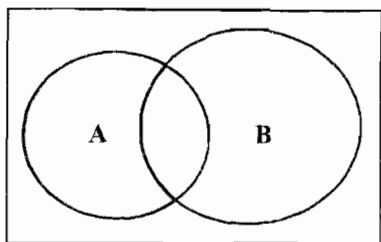


Рис. 1.11

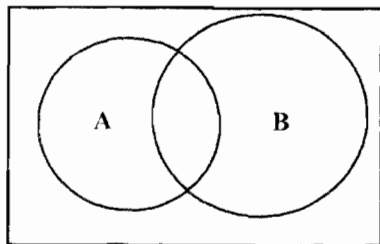


Рис. 1.12

$$(x_1 + x_2) \vee (x_1 \sim x_2) = 1, \quad (x_1 + x_2) \wedge (x_1 \sim x_2) = 0.$$

$$\begin{aligned} y = x_1 \sim x_2 &= \underline{x_1} + \underline{x_2} = (x_1 \wedge x_2) \vee (\underline{x_1} \wedge \underline{x_2}) = \\ &= (x_1 \vee \underline{x_2}) \wedge (\underline{x_1} \vee x_2) \wedge (\underline{x_1} \vee \underline{x_2}). \end{aligned}$$

Таблица 1.7

$x_1$	$x_2$	$y = x_1 + x_2$
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	0

Таблица 1.8

$x_1$	$x_2$	$y = x_1 \sim x_2$
0	0	1
1	0	0
0	1	0
1	1	1

В заключение отметим, что *симметрическая разность* имеет несколько названий: *строгая дизъюнкция*, *исключающая альтернатива*, *сумма по модулю два*. Эту операцию можно передать словами — «либо **A**, либо **B**», т.е. это логическая связка «или», но без включенной в нее связки «и».

## 1.2. Формы представления булевых функций

### Совершенные формы представления

Любую булеву функцию  $y = f(a, b)$  можно представить как некоторую комбинацию областей:

$$C_0 = \underline{a} \wedge \underline{b}, \quad C_1 = a \wedge \underline{b}, \quad C_2 = \underline{a} \wedge b, \quad C_3 = a \wedge b.$$

Тогда, в зависимости от значения функции и заданных  $C_i$ , которые в этом случае называются *конституентами*, получим 16 логиче-

ских операций:

$$y = [\underline{a} \wedge \underline{b} \wedge f(\mathbf{0},\mathbf{0})] \vee [a \wedge \underline{b} \wedge f(\mathbf{1},\mathbf{0})] \vee \\ \vee [\underline{a} \wedge b \wedge f(\mathbf{0},\mathbf{1})] \vee [a \wedge b \wedge f(\mathbf{1},\mathbf{1})].$$

Подобная форма представления логических функций называется *совершенной дизъюнктивной нормальной формой* (СДНФ).

В логике Буля действует *принцип двойственности*, который гласит: при одновременной замене символов  $\wedge \Leftrightarrow \vee$  и  $\mathbf{1} \Leftrightarrow \mathbf{0}$  все логические равенства остаются в силе. Поэтому СДНФ можно представить несколько иначе:

$$y = [\underline{a} \vee \underline{b} \vee f(\mathbf{1},\mathbf{1})] \wedge [a \vee \underline{b} \vee f(\mathbf{0},\mathbf{1})] \wedge \\ \wedge [\underline{a} \vee b \vee f(\mathbf{1},\mathbf{0})] \wedge [a \vee b \vee f(\mathbf{0},\mathbf{0})].$$

Эта форма представления называется *совершенной конъюнктивной нормальной формой* (СКНФ). Здесь уже конstituенты представлены не в виде *конъюнктов*, как в СДНФ, а в виде *дизъюнктов*. Соединены же эти дизъюнкты конъюнкцией, отсюда и название — СКНФ.

Существует еще и третья форма — *совершенная полиномиальная нормальная форма* (СПНФ). Ее можно получить из СДНФ путем замены:

$$a \vee b = a + b + ab, \quad \underline{a} = 1 + \bar{a}.$$

Поскольку конstituенты не пересекаются ( $C_i C_j = 0$ ), мы можем сразу же записать (в СПНФ символ конъюнкции опускается):

$$y = [(1 + a)(1 + b)f(\mathbf{0},\mathbf{0})] + [a(1 + b)f(\mathbf{1},\mathbf{0})] + [(1 + a)b f(\mathbf{0},\mathbf{1})] + [ab f(\mathbf{1},\mathbf{1})] = \\ = f(\mathbf{0},\mathbf{0}) + a[f(\mathbf{0},\mathbf{0}) + f(\mathbf{1},\mathbf{0})] + b[f(\mathbf{0},\mathbf{0}) + f(\mathbf{0},\mathbf{1})] + \\ + ab[f(\mathbf{0},\mathbf{0}) + f(\mathbf{1},\mathbf{0}) + f(\mathbf{0},\mathbf{1}) + f(\mathbf{1},\mathbf{1})].$$

В табл. 1.9 приведен полный список *элементарных логических функций* от двух аргументов и в трех *совершенных формах* — СДНФ, СКНФ и СПНФ. Совершенные формы представлений позволяют выразить аналитической формулой любую функцию, если известна ее таблица истинности.

Пусть задана конкретная таблица истинности (табл. 1.10) для функции, зависящей от трех аргументов. Тогда, выписывая соответствующие конъюнкты против единичных значений  $y$ , мы получим

СДНФ. Если же мы выпишем дизъюнкты против нулевых значений  $y$ , то в результате уже получим СКНФ. Наконец, СПНФ образуется путем замены в СДНФ:  $\vee$  на  $+$  и  $\underline{x}$  на  $1+x$ .

$$y_{\text{СДНФ}} = (\underline{x}_3 \wedge \underline{x}_2 \wedge x_1) \vee (\underline{x}_3 \wedge x_2 \wedge x_1) \vee (x_3 \wedge \underline{x}_2 \wedge \underline{x}_1) \vee (x_3 \wedge x_2 \wedge x_1),$$

$$y_{\text{СКНФ}} = (x_3 \vee x_2 \vee x_1) \wedge (x_3 \vee \underline{x}_2 \vee x_1) \wedge (\underline{x}_3 \vee x_2 \vee \underline{x}_1) \wedge (\underline{x}_3 \vee \underline{x}_2 \vee x_1),$$

$$y_{\text{СПНФ}} = (x_3 + 1)(x_2 + 1)x_1 + x_3x_2x_1 + (x_3 + 1)x_2x_1 + x_3(x_2 + 1)(x_1 + 1).$$

Таблица 1.9

$y = f(a, b)$	СДНФ = СКНФ = СПНФ
$y_0 = 0$	$= (a \vee b) \wedge (\underline{a} \vee b) \wedge (a \vee \underline{b}) \wedge (\underline{a} \vee \underline{b}) = 0$
$y_1 = a \wedge b$	$= (a \vee b) \wedge (\underline{a} \vee b) \wedge (a \vee \underline{b}) = ab$
$y_2 = b - a$	$= \underline{a} \wedge b = (a \vee b) \wedge (\underline{a} \vee b) \wedge (\underline{a} \vee \underline{b}) = b + ab$
$y_3 = b$	$= (\underline{a} \wedge b) \vee (a \wedge b) = (a \vee b) \wedge (\underline{a} \vee b) = b$
$y_4 = a - b$	$= a \wedge \underline{b} = (a \vee b) \wedge (a \vee \underline{b}) \wedge (\underline{a} \vee \underline{b}) = a + ab$
$y_5 = a$	$= (a \wedge \underline{b}) \vee (a \wedge b) = (a \vee b) \wedge (a \vee \underline{b}) = a$
$y_6 = a + b$	$= (a \wedge \underline{b}) \vee (\underline{a} \wedge b) = (a \vee b) \wedge (\underline{a} \vee \underline{b}) = a + b$
$y_7 = a \vee b$	$= (a \wedge \underline{b}) \vee (\underline{a} \wedge b) \vee (a \wedge b) = (a \vee b) = a + b + ab$
$y_8 = a \downarrow b$	$= \underline{a} \wedge \underline{b} = (a \vee b) \wedge (\underline{a} \vee b) \wedge (\underline{a} \vee \underline{b}) = 1 + a + b + ab$
$y_9 = a \sim b$	$= (\underline{a} \wedge \underline{b}) \vee (a \wedge b) = (\underline{a} \vee b) \wedge (a \vee \underline{b}) = 1 + a + b$
$y_{10} = \underline{a}$	$= (\underline{a} \wedge \underline{b}) \vee (\underline{a} \wedge b) = (\underline{a} \vee b) \wedge (\underline{a} \vee \underline{b}) = 1 + a$
$y_{11} = a \rightarrow b$	$= (\underline{a} \wedge \underline{b}) \vee (\underline{a} \wedge b) \vee (a \wedge b) = 1 + a + ab$
$y_{12} = \underline{b}$	$= (\underline{a} \wedge \underline{b}) \vee (a \wedge \underline{b}) = (a \vee \underline{b}) \wedge (\underline{a} \vee \underline{b}) = 1 + b$
$y_{13} = b \rightarrow a$	$= (\underline{a} \wedge \underline{b}) \vee (a \wedge \underline{b}) \vee (a \wedge b) = a \vee \underline{b} = 1 + b + ab$
$y_{14} = a   b$	$= (\underline{a} \wedge \underline{b}) \vee (a \wedge \underline{b}) \vee (\underline{a} \wedge b) = 1 + ab$
$y_{15} = 1$	$= (\underline{a} \wedge \underline{b}) \vee (a \wedge \underline{b}) \vee (\underline{a} \wedge b) \vee (a \wedge b) = 1$

В последнем случае выражение для  $y_{\text{СПНФ}}$  легко упростить, если раскрыть скобки и взаимно сократить все одинаковые слагаемые, входящие в формулу четное число раз:

$$y_{\text{СПНФ}} = x_1 + x_2 + x_2x_3.$$

Подобное упрощение, которое называется *минимизацией логической функции*, можно применить к СДНФ и СКНФ.

Таблица 1.10

В логике Буля действует закон склеивания:

$$(a \wedge \underline{b}) \vee (a \wedge b) = a,$$

$$(a \vee \underline{b}) \wedge (a \vee b) = a.$$

Применение этих законов позволяет найти более компактные аналитические выражения для заданной функции  $y$ , т.е. *минимальную дизъюнктивную нормальную форму*  $y_{\text{МДНФ}}$ .

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$y$
0	0	0	0
1	0	0	1
0	1	0	0
1	1	0	1
0	0	1	1
1	0	1	0
0	1	1	0
1	1	1	1

Приведем соответствующие формы представления функции  $y$ , заданной табл. 1. 10:

$$y_{\text{МДНФ}} = (\underline{x}_3 \wedge x_1) \vee (x_2 \wedge x_1) \vee (x_3 \wedge \underline{x}_2 \wedge \underline{x}_1),$$

и для СКНФ, т.е. *минимальную КНФ*:

$$y_{\text{МКНФ}} = (x_3 \vee x_1) \wedge (\underline{x}_3 \vee x_2 \vee \underline{x}_1) \wedge (\underline{x}_2 \vee x_1).$$

После того, как найдены *минимальные нормальные формы* (МНФ), их рекомендуется проверить на всех наборах аргументов  $x_i$ . Переменные  $x_j$  или  $\underline{x}_j$  часто называют *термами*. Именно полный набор из  $n$  термов образует *конституенту*. В процессе же минимизации некоторые термы из конституент пропадут. Тогда оставшуюся часть дизъюнкта или конъюнкта называют *импликантой*.

Как мы только что убедились на примере, импликанты появляются в результате склейки *смежных* конституент, различающихся одним термом. Однако для функций, зависящих от многих переменных, неконтролируемый процесс склейки неизбежно приводит к лишним импликантам. Требуемое число импликант может оказаться гораздо меньше возможного числа смежных склеек. В таких случаях истинную МНФ получают с помощью специальных методов минимизации, три из которых мы сейчас разберем. При этом следует помнить, что рассматриваемые далее методы минимизации касаются только СДНФ. Но на основании принципа двойственности они могут быть легко распространены и на СКНФ.

### Минимизация булевых функций по Куайну

Пусть будут заданы номера наборов четырех переменных, на которых логическая функция принимает единичное значение:

$$f(2, 5, 6, 7, 10, 12, 13, 14) = 1.$$

Выразим эту логическую функцию в СДНФ (символ конъюнкции писать не будем):

$$\begin{aligned} F(0010, 0101, 0110, 0111, 1010, 1100, 1101, 1110) = \\ = \underline{x_4x_3x_2x_1} \vee \underline{x_4x_3x_2x_1} \vee \underline{x_4x_3x_2x_1} \vee \underline{x_4x_3x_2x_1} \vee \\ \vee \underline{x_4x_3x_2x_1} \vee \underline{x_4x_3x_2x_1} \vee \underline{x_4x_3x_2x_1} \vee \underline{x_4x_3x_2x_1}. \end{aligned}$$

На первом этапе минимизации исходную СДНФ можно упростить за счет использования закона склеивания:

$$f = x_2x_1 \vee x_4x_3x_1 \vee x_1x_3x_2 \vee x_3x_2x_1 \vee x_4x_3x_2 \vee x_4x_3x_1.$$

Обращаем внимание на то, что одну и ту же конstituенту (импликанту) можно склеивать с другими конstituентами (импликантами) многократно, так как в логике Буля действует закон *идемпотентности*:

$$a = a \vee a = a \vee a \vee a = \dots, \quad a = a \wedge a = a \wedge a \wedge a = \dots,$$

поэтому любую конstituенту можно размножить.

Таблица 1.11

$x_4x_3x_2x_1$	0010	0101	0110	0111	1010	1100	1101	1110
<del>0010</del>	1	0	1	0	1	0	0	1
<del>0101</del>	0	1	0	1	0	0	0	0
0110	0	0	1	1	0	0	0	0
<del>1010</del>	0	1	0	0	0	0	1	0
<del>1100</del>	0	0	0	0	0	1	1	0
1101	0	0	0	0	0	1	0	1

На втором этапе воспользуемся *таблицей Куайна* (табл. 1. 11), в соответствии с которой метод минимизации получил наименование — *метод Куайна*. В таблице по вертикали перечислены все полученные на первом этапе упрощения импликанты, а по горизонтали — исходные конstituенты. Единица в табл. 1. 11 стоит там, где импликанта «накрывает» конstituенту. Дело в том, что конstituента всегда может быть заменена импликантой или даже отдельным термом по *закону поглощения*:

$$a = a \vee (a \wedge b) = a \vee (a \wedge abc) = \dots, \quad a = a \wedge (a \vee b) = a \wedge (a \vee abc) = \dots$$

После заполнения таблицы Куайна получилось так, что почти в каждой графе оказалось по две единицы; между тем достаточно иметь одну еди-

ницу на графе. Поэтому, по возможности, нужно исключить избыточные единицы. Выбор единиц производится из соображений минимальности числа термов (выбранные единицы заштрихованы). В итоге оказалось, что можно обойтись только тремя импликантами вместо шести:

$$f = x_2x_1 \vee x_4x_3x_1 \vee x_4x_3x_2.$$

С помощью таблиц истинности легко проверить, что полученная в МНФ функция воспроизводит все значения исходной функции. Отметим, что в общем случае решений по критерию минимума термов может быть несколько.

### Минимизация по методу сочетания индексов

Не менее эффективным способом минимизации логических функций является *метод сочетания индексов*. Для его изложения составим табл. 1.12, в графах которой записаны возможные сочетания индексов. В последней графе выписаны значения функции. Анализ таблицы начинается слева по столбцам. Принцип исключения  $i, j$ -кода следующий. На пересечении  $i$ -столбца, например с сочетанием индексов 23, и  $j$ -строки, например 3-ей, находится код 10, что соответствует импликанте  $x_2x_3$ . Следовательно, в этом столбце везде, где встречается код 10, т.е. в строках 2, 3, 10 и 11, эти коды исключаются, поскольку значение функции в 3-й строке равно нулю. Теперь возьмем столбец с сочетанием индексов 124. Здесь во 2-й и 6-й строках оставлены коды 010, а в 10-й и 14-й строках — код 011. Сделано это потому, что эти коды встречаются только на строках со значением функции, равным единице. Напротив, код 110 этого же столбца встречается как при единичных значениях функции, так и при нулевых.

Итак, все коды на строках, заканчивающихся нулевыми значениями функции, исключаются автоматически. Если эти коды попадают на строки, заканчивающиеся единичным значением функции, то они также не учитываются. Остаются только те коды, которые расположены на строках с единичным значением функции (эти коды подчеркнуты).

Далее руководствуются следующим правилом. Для того чтобы функция приняла значение, равное единице, достаточно того, чтобы только какая-нибудь одна импликанта на строке приняла единичное значение. Прежде всего оставляем минимальную импликанту  $x_2x_1$ , которая перекрывает единицы в строках 2, 6, 10 и 14. Затем, естест-

венно, обращаемся к 12-й строке. Здесь оставляем единственный на строке код 011, что отвечает импликанте  $x_4x_3x_2$ . Эта же импликанта ответственна за 13-ю строку, оканчивающуюся тоже единицей. Осталось рассмотреть 5-ю и 7-ю строки. Общей для них является импликанта  $x_4x_3x_1$ . Таким образом, тремя импликантами мы перекрыли все единичные значения функции, что совпадает с результатом, полученным на основе таблиц Куайна.

Таблица 1.12

<i>n</i>	1	2	3	4	12	13	14	23	24	34	123	124	134	234	1234	<i>y</i>
0	0	0	0	0	00	00	00	00	00	00	000	000	000	000	0000	0
1	1	0	0	0	10	10	10	00	00	00	100	100	100	000	1000	0
2	0	1	0	0	01	00	00	10	10	00	010	010	000	100	0100	1
3	1	1	0	0	11	10	10	10	10	00	110	110	100	100	1100	0
4	0	0	1	0	00	01	00	01	00	10	001	000	010	010	0010	0
5	1	0	1	0	10	11	10	01	00	10	101	100	110	010	1010	1
6	0	1	1	0	01	01	00	11	10	10	011	010	010	110	0110	1
7	1	1	1	0	11	11	10	11	10	10	111	110	110	110	1110	1
8	0	0	0	1	00	00	01	00	01	01	000	001	001	001	0001	0
9	1	0	0	1	10	10	11	00	01	01	100	101	101	001	1001	0
10	0	1	0	1	01	00	01	10	11	01	010	011	001	101	0101	1
11	1	1	0	1	11	10	11	10	11	01	110	111	101	101	1101	0
12	0	0	1	1	00	01	01	01	01	11	001	001	011	011	0011	1
13	1	0	1	1	10	11	11	01	01	11	101	101	111	011	1011	1
14	0	1	1	1	01	01	01	11	11	11	011	011	011	111	0111	1
15	1	1	1	1	11	11	11	11	11	11	111	111	111	111	1111	0

### Минимизация по картам Карно

Хотя табл. 1.12 более громоздка, чем табл. 1.11, метод сочетания индексов не считается более сложным, чем метод Куайна, если помнить, что до составления таблиц Куайна необходимо произвести многочисленные склейки конституент и импликант. Реализация на компьютере алгоритма метода сочетания индексов оказывается сравнительно простой. И напротив, внешняя простота и наглядность *третьего метода* минимизации логических функций с помощью карт Карно оборачивается сложной программой при реализации алгоритма на компьютере.

Карта Карно для четырех переменных представлена табл. 1.13. Каждая клетка карты соответствует конституенте. Заполненная карта представлена табл. 1.14 (функция взята та же, что и в первых двух методах). Согласно *закону склеивания*, две смежные конститу-

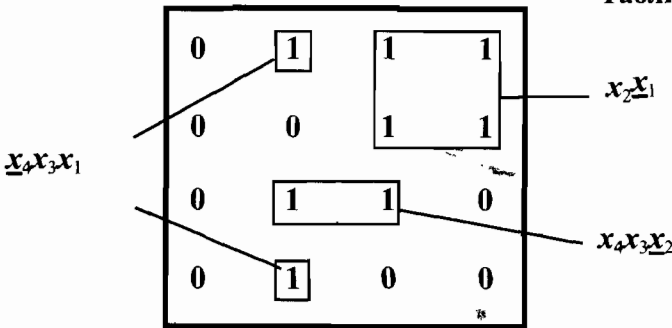


енты с единичными значениями всегда можно объединить для получения соответствующей импликанты. Причем смежными считаются и те, которые лежат на границах карты. Какие именно единицы требуется объединить для получения подходящей импликанты, легко определить визуально. Следует также помнить, что в соответствии с *законом идемпотентности* одна и та же единица табл. 1.14 может склеиваться с двумя или тремя смежными единицами.

Таблица 1.13

	$x_1$	$x_1$	$\underline{x}_1$	$\underline{x}_1$	
$x_2$	1100	1110	0110	0100	$\underline{x}_4$
$x_2$	1101	1111	0111	0101	$x_4$
$\underline{x}_2$	1001	1011	0011	0001	$x_4$
$\underline{x}_2$	1000	1010	0010	0000	$\underline{x}_4$
	$\underline{x}_3$	$x_3$	$x_3$	$\underline{x}_3$	

Таблица 1.14



**Базовые наборы булевых функций**

Рассмотренные здесь три метода используются для сравнительно небольшого числа переменных. Если же число их становится слишком большим, требуются более изощренные приемы отбора импликант. Представление функций в СДНФ и СКНФ образованы тремя операциями — дизъюнкцией, конъюнкцией и отрицанием, а СПНФ — сложением по модулю два, конъюнкцией и единицей как операцией. В логике Буля действует *принцип суперпозиции*, который гласит: любая сложная функция может быть представлена в виде совокупности элементарных функций двух аргументов, например:

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = ((x_1 | x_2) \rightarrow (x_2 \vee x_3)) \downarrow (x_3 + x_4) = \\ = f_8 \{ f_{11} [ f_{14}(x_1, x_2), f_7(x_2, x_3) ], f_6 [ f_{10}(x_3, x_4), x_4 ] \}.$$

Табл. 1.15 является таблицей истинности для сложной функции  $F(x_1, x_2, x_3, x_4)$ . На всех наборах аргументов, кроме двух, эта функция равна нулю. Поэтому ее можно представить в виде одного конъюнкта, который выражается через операцию вычитания:

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = \underline{x}_2 \wedge \underline{x}_3 \wedge x_4 = (x_4 - x_3) - x_2.$$

Таблица 1.15

$x_1$	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
$x_2$	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
$x_3$	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
$x_4$	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
$f_{14} = x_1   x_2$	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0
$f_7 = x_2 \vee x_3$	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1
$f_{10} = \underline{x}_3$	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
$f_6 = f_{10} + x_4$	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
$f_{11} = f_{14} \rightarrow f_7$	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1
$f_8 = f_{11} \downarrow f_6$	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0

Зададимся вопросом: через какие еще системы логических операций можно выразить произвольно взятую булеву функцию? В связи с этим вопросом определим пять классов функций.

Функция, сохраняющая нулевое значение на нулевом наборе термов:  $f(0, 0) = 0$ , определяет 0-класс. К этому классу относятся все элементарные функции с 0 по 7 (см. табл. 1.9).

Аналогично определяется 1-класс, сохраняющий константу 1 на единичном наборе:  $f(1, 1) = 1$ . К 1-классу относятся нечетные функции.

Класс линейных функций (2-класс) определяется линейностью полиномиальной формы. Например, эквивалентность является линейной функцией, так как  $f_9 = 1 + a + b$ , а стрелка Пирса за счет нелинейного слагаемого  $ab$  уже не будет являться таковой:  $f_8 = 1 + a + b + ab$ .

Класс самодвойственных функций (3-класс) описывается формулой:  $f(a, b) = \underline{f}(\underline{a}, \underline{b})$ . Таких элементарных функций всего четыре.

Наконец, класс монотонных функций (4-класс) определяется не-

равенством:  $f(a, b) \leq f(a', b')$ , при  $a \leq a'$ , и  $b \leq b'$ . Например, пусть  $a = 0$ ,  $a' = 1$ ,  $b = 1$  и  $b' = 1$ , тогда для дизъюнкции будем иметь:

$$(f_7 = a \vee b = 1) \leq (f_7 = a' \vee b' = 1).$$

И какие бы наборы  $a$ ,  $a'$ ,  $b$  и  $b'$  мы ни брали, если выполняются условия

$a \leq a'$  и  $b \leq b'$ , всегда будет иметь место  $f_7 \leq f_7$ ; значит, дизъюнкция является монотонной функцией.

Принадлежность элементарной функции к тому или иному классу ( $K$ ) отмечена единицей в табл. 1.16. По этой таблице уже легко можно определить систему базисных функций.

Таблица 1.16

$K$	$f_0$	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$	$f_6$	$f_7$	$f_8$	$f_9$	$f_{10}$	$f_{11}$	$f_{12}$	$f_{13}$	$f_{14}$	$f_{15}$
0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
2	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1
3	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0
4	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1

Система функций является базисной, если она перекрывает нулями все строки 0-, 1-, 2-, 3-, 4-классов. Например, СПНФ образована функциями  $f_1, f_6, f_{15}$ . Для этих трех функций нули стоят во всех пяти столбцах табл. 1.16. Следовательно, в СПНФ может быть представлена любая сколь угодно сложная функция.

СДНФ и СКНФ образованы функциями  $f_1, f_7, f_{10}$ . Перекрытие нулями всех пяти классов достигается уже двумя функциями: либо  $f_1$  и  $f_{10}$ , либо  $f_7$  и  $f_{10}$ , т.е. в этих формах имеется некоторая избыточность функций.

Итогом теории пяти классов функций является *теорема Поста*, которая гласит: для того чтобы система функций была базисной, необходимо и достаточно, чтобы она включала в себя хотя бы одну функцию, не принадлежащую 0, 1, 2, 3 и 4 классам (условие наличия нулей на всех строках табл. 1.16). Однако для установления базисной системы функций вовсе необязательно вводить пять классов функций: достаточно знать взаимосвязь между операциями. Коль скоро было установлено, что всякая логическая операция представима через три булевых, требуется лишь выразить эти три через все остальные. На основе таблиц истинности можно убедить-

ся в справедливости следующих равенств:

$$a \rightarrow b = \underline{a - b},$$

$$\underline{a} = 1 - a = a \rightarrow 0 = 1 + a = a \sim 0 = a | a = a \downarrow a,$$

$$a \wedge b = a - \underline{b} = (a | b) | (a | b) = (a \downarrow a) \downarrow (b \downarrow b),$$

$$a \vee b = \underline{a} \rightarrow b = (a | a) | (b | b) = (a \downarrow b) \downarrow (a \downarrow b),$$

$$a + b = \underline{a} + \underline{b} = \underline{a \sim b} = a \sim \underline{b} = \underline{a \sim b},$$

$$1 = a \rightarrow a = \underline{a} \vee a = a \sim a, \quad 0 = a - a = \underline{a} \wedge a = a + a.$$

### 1.3. Методы доказательства в логике Буля

#### Основные законы логики Буля

В качестве основных законов логики Буля чаще других называют:

1) *законы идемпотентности:*

$$a = a \wedge a, \quad a = a \vee a;$$

2) *законы коммутативности:*

$$a \wedge b = b \wedge a, \quad a \vee b = b \vee a;$$

3) *законы ассоциативности:*

$$a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c, \quad a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c;$$

4) *законы дистрибутивности:*

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c), \quad a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c);$$

5) *законы нуля и единицы:*

$$a \wedge \underline{a} = 0, \quad a \wedge 1 = a, \quad a \vee \underline{a} = 1, \quad a \vee 0 = a;$$

6) *законы поглощения:*

$$a \vee (a \wedge b) = a, \quad a \wedge (a \vee b) = a;$$

7) *законы де Моргана:*

$$\underline{a \vee b} = \underline{a} \wedge \underline{b}, \quad \underline{a \wedge b} = \underline{a} \vee \underline{b};$$

8) *законы склеивания:*

$$(a \vee \underline{b}) \wedge (a \vee b) = a, \quad (a \wedge \underline{b}) \vee (a \wedge b) = a.$$

Не все восемь законов независимы друг от друга. Так, закон идемпотентности можно получить из закона поглощения с использованием закона дистрибутивности:

$$a = a \vee (a \wedge b) = (a \vee a) \wedge (a \vee b) = (a \wedge (a \vee b)) \vee (a \wedge (a \vee b)) = a \vee a$$

Закон поглощения может быть выведен из закона нуля и единицы:

$$a \vee (a \wedge b) = (a \wedge 1) \vee (a \wedge b) = a \wedge (1 \vee b) = a \wedge 1 = a.$$

Закон идемпотентности относительно дизъюнкции непосредственно выводится из законов нуля и единицы:

$$a \vee a = (a \vee a) \wedge 1 = (a \vee a) \wedge (a \vee a) = a \vee (a \wedge a) = a \vee 0 = a.$$

При доказательствах логических выражений всегда надо иметь в виду принцип двойственности. Так, вышеприведенная цепочка равенств для закона поглощения может быть представлена следующим образом:

$$a \wedge (a \vee b) = (a \vee 0) \wedge (a \vee b) = a \vee (0 \wedge b) = a \vee 0 = a.$$

Итак, в качестве *независимой системы законов* можно выбрать законы: *коммутативности, ассоциативности, дистрибутивности, нуля и единицы.*

#### Аксиоматический и конструктивный способы обоснования

Как было сказано, в логике широко используются два подхода — *аксиоматический* и *конструктивный*. При аксиоматическом доказательстве используется жесткая *система аксиом*, состоящая, например, из четырех только что названных. Все остальные тождества необходимо представлять через эти законы. При конструктивном же доказательстве можно воспользоваться *системой конструктов*, примерами которых являются диаграмма Эйлера — Венна и таблица истинности. Продемонстрируем различие этих двух подходов.

Для доказательства простого тождества ( $a \wedge 0 = 0$ ) приверженец аксиоматического подхода приведет примерно такую цепочку преобразований:

$$\begin{aligned} a \wedge 0 &= a \wedge (a \wedge \underline{a}) = (a \wedge a) \wedge \underline{a} = ((a \wedge a) \vee 0) \wedge \underline{a} = \\ &= ((a \wedge a) \vee (a \wedge \underline{a})) \wedge \underline{a} = (a \wedge (a \vee \underline{a})) \wedge \underline{a} = (a \wedge 1) \wedge \underline{a} = a \wedge \underline{a} = 0. \end{aligned}$$

И сделает он это только ради того, чтобы формально привязаться к провозглашенной выше системе аксиом. Для конструктивиста же исходное тождество практически не потребует никаких доказательств.

Картина выглядит противоположным образом в отношении, например, закона дистрибутивности. Аксиоматик в данном случае не предпримет никаких действий, а сторонник конструктивного под-

хода обязан продемонстрировать эквивалентность левой и правой частей тождества:

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c).$$

Проведем доказательство с помощью диаграмм Эйлера – Венна. Построим две диаграммы, изображенные на рис. 1.13, которые отвечают двум операциям левой части тождества.

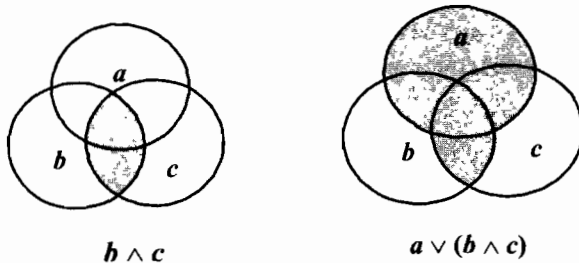


Рис. 1.13

Теперь построим еще три диаграммы (рис. 1.14), соответствующие трем операциям, фигурирующим в правой части закона дистрибутивности. Как видно из диаграмм, результаты построения логических операций левой и правой части закона дистрибутивности полностью совпали.

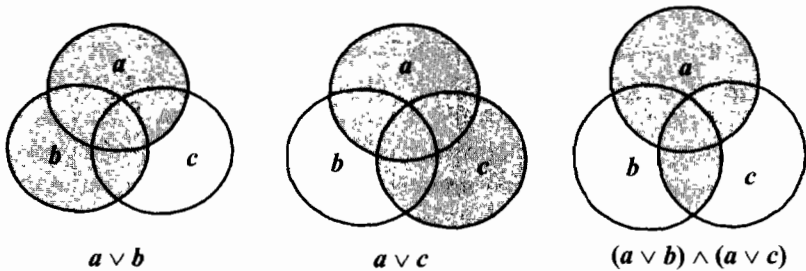


Рис. 1.14

Докажем с помощью диаграмм Эйлера – Венна справедливость более сложного тождества:

$$a + b + c + d = ((a \sim b) \rightarrow (c + d)) \wedge ((a + b) | (c + d)).$$

На рис. 1. 15 изображены две операции —  $a + b$  и  $c + d$ , — фигурирующие в левой части приведенного тождества. Следует заметить, что диаграмма Эйлера – Венна, нарисованная с помощью кругов, для четырех переменных  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$  не является полной, по-

сколько она содержит только 14 областей, а необходимо 16. Поэтому в роли исходных областей выбраны эллипсы.

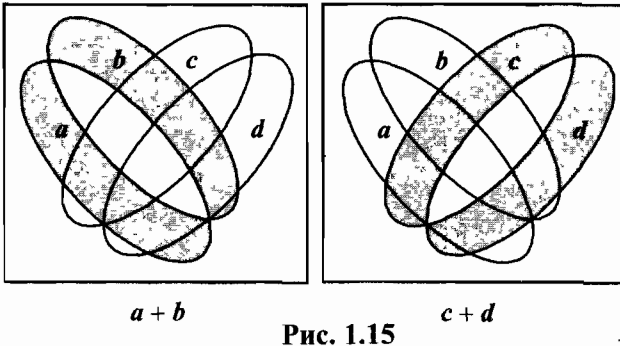


Рис. 1.15

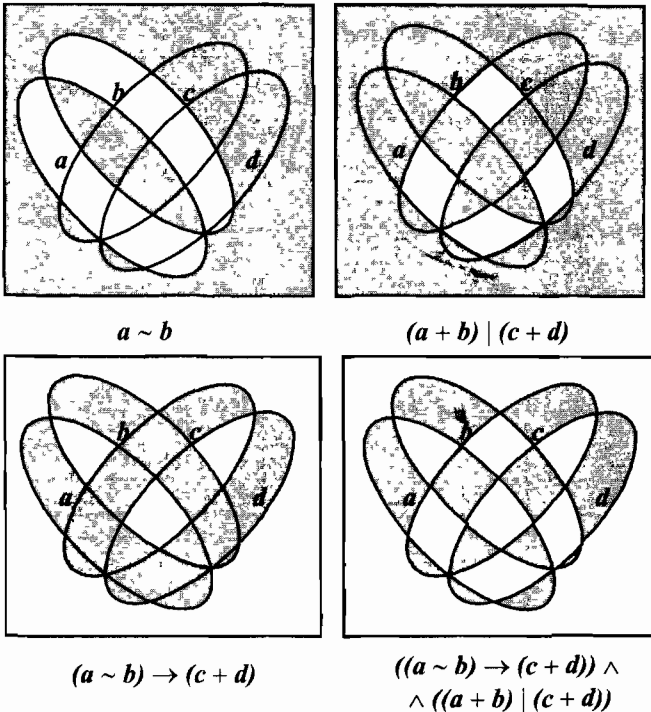


Рис. 1.16

На рис. 1.16 изображены четыре диаграммы, соответствующие операциям правой части тождества; последняя из них является результирующей. Но точно такая же результирующая диаграмма по-

лучится при сложении по mod (2) двух первых диаграмм:  $(a + b) + (c + d)$ . Так как результирующие диаграммы левой и правой частей одинаковы, приведенное тождество верно.

В правильности тождества можно убедиться с помощью таблицы истинности (табл. 1.17). Она показывает, что наборы значений из нулей и единиц для левой части ( $f_L$ ) совпали с наборами правой части ( $f_R$ ), значит исходное тождество верно. Можно ставить обратную задачу, т.е. по известной диаграмме находить отвечающее ей компактное аналитическое выражение. Пусть дана диаграмма, изображенная на рис. 1.17. Найдем соответствующее ей аналитическое выражение. Для этого заштрихованные области представим в виде конститuent:

$$C_1 = a \wedge b \wedge \underline{c}, \quad C_2 = \underline{a} \wedge b \wedge c.$$

Искомое выражение получается при объединении этих конститuent:

$$x = C_1 \vee C_2 = b \wedge ((a \wedge \underline{c}) \vee (\underline{a} \wedge c)) = b \wedge (a + c).$$

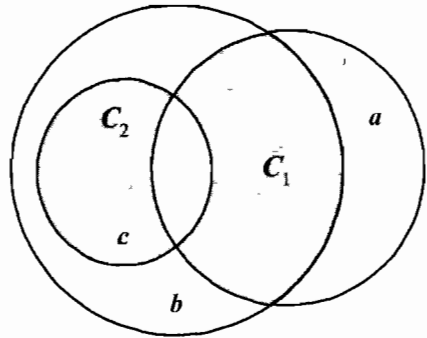


Рис. 1.17

Таблица 1.17

$a$	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
$b$	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
$c$	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
$d$	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
$f_1 = a + b$	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0
$f_2 = c + d$	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
$f_L = f_1 + f_2$	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0
$f_3 = a \sim b$	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1
$f_4 = f_3 \rightarrow f_2$	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0
$f_5 = f_1   f_2$	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1
$f_R = f_4 \wedge f_5$	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0



### Примеры доказательств булевых тождеств

Требуется выяснить, будет ли выполняться закон ассоциативности относительно штриха Шеффера:

$$(a | b) | c = a | (b | c)?$$

Здесь можно не прибегать к таблицам истинности или диаграммам Эйлера — Венна. Достаточно знать связь между операциями, чтобы показать, что закон не выполняется:

$$a | (b | c) = 1 + a(1 + bc) = 1 + a + abc;$$

$$(a | b) | c = 1 + (1 + ab)c = 1 + c + abc.$$

Позиция конструктивистов состоит в том, чтобы любое тождество в математической логике получило свое убедительное обоснование, будь то закон дистрибутивности для дизъюнкции и конъюнкции или закон ассоциативности для этих операций — ничто не должно браться в качестве «аксиом», т.е. утверждений без доказательств. Аналогичный конструктивный прием можно использовать для доказательства тавтологии:

$$(a \wedge a(a \rightarrow b)) \rightarrow b = 1.$$

Доказательство:

$$a(1 + a + ab) \rightarrow b = ab \rightarrow b = 1 + ab + abb = 1.$$

В следующем примере полиномиальная форма уже не используется, а доказательство ведется посредством булевых операций. Требуется доказать:

$$((a + b) \rightarrow (a \vee b)) \wedge ((a \vee b) \rightarrow (a + b)) = a | b.$$

Доказательство:

$$\begin{aligned} & ((a + b) \rightarrow (a \vee b)) \wedge ((a \vee b) \rightarrow (a + b)) = \\ & = (((\underline{a} \vee \underline{b}) \wedge (a \vee b)) \rightarrow (a \vee b)) \wedge (((\underline{a} \vee \underline{b}) \vee ((\underline{a} \vee \underline{b}) \wedge (a \vee b))) = \\ & = ((\underline{a} \wedge \underline{b}) \vee (\underline{a} \vee \underline{b}) \vee (a \vee b)) \wedge (((\underline{a} \vee \underline{b}) \vee (\underline{a} \vee \underline{b})) = \\ & = 1 \wedge ((\underline{a} \wedge \underline{b}) \vee (\underline{a} \vee \underline{b})) = \underline{a} \vee \underline{b} = a | b. \end{aligned}$$

Часто встречаются доказательства смешанного характера. Например, требуется установить, что

$$\underline{A} \cup \underline{B} = 1, \quad \text{если } A \subset B.$$

Когда встречается символ включения, его лучше всего перевести в тождество. Если  $A$  полностью включено в  $B$ , то с помощью диаграмм Эйлера — Венна легко проверить, что

$$A \cap B = A \text{ или } A \cup B = B.$$

Далее, используя последнее равенство и аксиомы булевой логики, получим:

$$\underline{A} \cup B = \underline{A} \cup (A \cup B) = (\underline{A} \cup A) \cup B = 1 \cup B = 1.$$

Предположим, требуется доказать тождество

$$A \cap B = B \text{ или } A \cup B = A.$$

В данном случае доказательство можно провести, по крайней мере, двумя способами. Первый способ:

$$\begin{aligned} B &= B \cup 0 = B \cup (A \cup \underline{A}) = (A \cup B) \cap (\underline{A} \cup B) = \\ &= A \cap (\underline{A} \cup B) = (A \cap \underline{A}) \cup (A \cap B) = 0 \cup (A \cap B) = A \cap B. \end{aligned}$$

Второй способ:

$$A \cap B = (A \cup B) \cap B = B.$$

При втором способе доказательства использовался закон поглощения, который, вообще говоря, не входит в систему провозглашенных ранее аксиом, но справедливость которого, тем не менее, легко установить отдельно. Отсюда вывод: всякое доказательство зависит от тех средств, которыми мы располагаем.

Закон де Моргана можно доказать следующим образом. «Умножим» тождество слева и справа на скобку  $(a \vee b)$ , получим:

$$(\underline{a \vee b}) \wedge (a \vee b) = (\underline{a} \wedge \underline{b}) \wedge (a \vee b).$$

Так как  $a \wedge \underline{a} = 0$ , то левая часть тождества равна нулю. Раскрывая скобки в правой части, убеждаемся, что и она равна нулю.

По аналогии с этим доказательством, вполне правдоподобным кажется и такое доказательство закона поглощения:

$$a = a \wedge (a \vee b).$$

Обе части тождества «умножаем» на скобку  $(a \vee b)$ :

$$a \wedge (a \vee b) = a \wedge (a \vee b) \wedge (a \vee b).$$

Используя закон идемпотентности, приходим к тождеству:

$$a \wedge (a \vee b) = a \wedge (a \vee b).$$

Однако такое доказательство ошибочно, поскольку произвольное «умножение» в логике недопустимо. Возможно лишь такое «умножение» и «сложение», которое отвечает законам нуля и единицы, т.е.  $a \wedge \underline{a} = 0$ ,  $a \vee \underline{a} = 1$ . Для иллюстрации сказанного возьмем заведомо ложное тождество:

$$(a \wedge b) \vee (\underline{a} \wedge c) \vee (a \wedge c) = (a \wedge b) \vee (\underline{a} \wedge c).$$

Воспользуемся законом поглощения в виде:

$$a = a \vee (a \wedge c).$$

«Сложив» его с исходным выражением, получим:

$$(a \wedge b) \vee (\underline{a} \wedge c) \vee (a \wedge c) \vee a = (a \wedge b) \vee (\underline{a} \wedge c) \vee (a \wedge c) \vee a,$$

что должно доказывать справедливость исходного выражения. Однако с помощью таблиц истинности (табл. 1.18) легко установить, что это не так. Две нижние строки, соответствующие правой ( $f_R$ ) и левой ( $f_L$ ) частям исходного выражения, отличаются друг от друга. Следовательно, тождество записано ошибочно. Истинным тождеством является:

$$(a \wedge b) \vee (\underline{a} \wedge c) \vee (b \wedge c) = (a \wedge b) \vee (\underline{a} \wedge c).$$

Таблица 1.18

$a$	0	1	0	1	0	1	0	1
$b$	0	0	1	1	0	0	1	1
$c$	0	0	0	0	1	1	1	1
$f_1 = a \wedge b$	0	0	0	1	0	0	0	1
$f_2 = \underline{a} \wedge c$	0	0	0	0	1	0	1	0
$f_3 = a \wedge c$	0	0	0	0	0	1	0	1
$f_R = f_1 \vee f_2$	0	0	0	1	1	0	1	1
$f_L = f_1 \vee f_2 \vee f_3$	0	0	0	1	1	1	1	1

Закончим этот подраздел примерами решения задач.

1) Доказать тождество:  $a \rightarrow (b \wedge c) = a \mid (b \mid c).$

Доказательство:  $a \rightarrow (b \wedge c) = \underline{a} \vee (\underline{b \wedge c}) = \underline{a} \vee (\underline{b} \mid \underline{c}) = a \mid (b \mid c).$

2) Доказать тождество:  $a + (b \wedge c) = (a \rightarrow b) \sim ((a + c) \wedge b).$

Доказательство:  $(a \rightarrow b) \sim ((a + c) \wedge b) =$   
 $= (1 + a + ab) \sim (ab + bc) = 1 + (1 + a + ab) + (ab + bc) = a + (b \wedge c).$

3) Доказать тождество:

$$(a \wedge b \wedge c) \rightarrow (a \vee b \vee c) = (a \rightarrow b) \vee (b \rightarrow c) \vee (c \rightarrow a).$$

Доказательство:

$$\begin{aligned} & (\underline{a} \wedge \underline{b} \wedge \underline{c}) \vee (a \vee b \vee c) = (\underline{a} \vee \underline{b} \vee \underline{c}) \vee (a \vee b \vee c) = \\ & = (\underline{a} \vee b) \vee (\underline{b} \vee c) \vee (\underline{c} \vee a) = (a \rightarrow b) \vee (b \rightarrow c) \vee (c \rightarrow a). \end{aligned}$$

4) Доказать тождество:

$$((a \downarrow b) \rightarrow (a + b)) \wedge ((a - b) \rightarrow (a | b)) = a \vee b.$$

Доказательство:

$$\begin{aligned} & ((a \downarrow b) \rightarrow (a + b)) \wedge ((a - b) \rightarrow (a | b)) = \\ & = ((a \vee b) \vee ((\underline{a} \wedge b) \vee (a \wedge \underline{b}))) \wedge ((\underline{a} \vee b) \vee (\underline{a} \vee \underline{b})) = \\ & = ((a \vee b) \wedge ((a \vee b) \vee (\underline{a} \vee \underline{b}))) \wedge (a \vee 1) = \\ & = (x \wedge (x \vee y)) \wedge 1 = x, \quad \text{где } x = a \vee b, \quad y = \underline{a} \vee \underline{b}. \end{aligned}$$

5) Доказать тождество:

$$(\underline{A} \cup \underline{C}) \cap (\underline{A} \cup \underline{B}) \cap (\underline{B} \cup \underline{C}) \cap (\underline{A} \cup \underline{B}) \cap (\underline{B} \cup \underline{C}) = 0.$$

Доказательство:

$$\underline{A} \cap \underline{C} \cap (\underline{A} \cup \underline{C}) = \underline{X} \cap \underline{X} = 0, \quad \text{где } \underline{X} = \underline{A} \cap \underline{C}.$$

6) Доказать тождество:

$$(\underline{A} \cup \underline{B} \cup \underline{C}) + (\underline{A} \cap \underline{B} \cap \underline{C}) = (\underline{A} \cup \underline{B} \cup \underline{C}) - (\underline{A} \cap \underline{B} \cap \underline{C}).$$

Доказательство:

$$\begin{aligned} & (\underline{A} \cup \underline{B} \cup \underline{C}) + (\underline{A} \cap \underline{B} \cap \underline{C}) = ((\underline{A} \cap \underline{B} \cap \underline{C}) \cap (\underline{A} \cap \underline{B} \cap \underline{C})) \cup \\ & \quad \cup ((\underline{A} \cup \underline{B} \cup \underline{C}) \cap (\underline{A} \cup \underline{B} \cup \underline{C})) = \\ & = 0 \cup ((\underline{A} \cup \underline{B} \cup \underline{C}) \cap (\underline{A} \cup \underline{B} \cup \underline{C})) = (\underline{A} \cup \underline{B} \cup \underline{C}) - (\underline{A} \cap \underline{B} \cap \underline{C}). \end{aligned}$$

7) Доказать тождество:

$$((\underline{A} \cup \underline{B}) \cap (\underline{B} \cup \underline{C})) \cup ((\underline{A} \cup \underline{C}) \cap (\underline{B} \cup \underline{C}) \cap (\underline{A} \cup \underline{B})) = 1.$$

Доказательство:

$$\begin{aligned} & ((\underline{A} \cup \underline{B}) \cap (\underline{B} \cup \underline{C})) \cup ((\underline{A} \cup \underline{C}) \cap (\underline{B} \cup \underline{C}) \cap (\underline{A} \cup \underline{B})) = \\ & = (\underline{B} \cup (\underline{A} \cap \underline{C})) \cup ((\underline{A} \cup \underline{C}) \cap (\underline{B} \cup (\underline{A} \cap \underline{C}))) = \\ & = (\underline{B} \cup \underline{X}) \cup (\underline{X} \cap (\underline{B} \cup \underline{X})) = (\underline{B} \cup \underline{X}) \cup (\underline{X} \cap \underline{B}) = \\ & = (\underline{B} \cup \underline{X}) \cup (\underline{B} \cup \underline{X}) = 1, \quad \text{где } \underline{X} = (\underline{A} \cap \underline{C}). \end{aligned}$$

Таблица 1.19

$x$	$y$	$z$	$x+z$	$x \rightarrow y$	$f$
0	0	0	1	1	0
0	0	1	0	1	0
0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	1	0
1	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	1
1	1	0	0	1	0
1	1	1	1	1	0

8) Преобразовать в СДНФ функцию:

$$f = (x+z) - (x \rightarrow y).$$

Решение:

$$\begin{aligned} f_{\text{СДНФ}} &= (x+z) - (x \rightarrow y) = \\ &= (x \vee z) \wedge (\underline{x} \vee \underline{z}) \wedge x \wedge \underline{y} = \\ &= (\underline{x} \vee \underline{z}) \wedge x \wedge \underline{y} = x \wedge \underline{y} \wedge z. \end{aligned}$$

Правильность нахождения  $f_{\text{СДНФ}}$  проверим с помощью таблицы истинности (табл. 1.19).

9) Используя операции над множествами, представить заштрихованные области рис. 1.18 в виде компактного аналитического выражения.

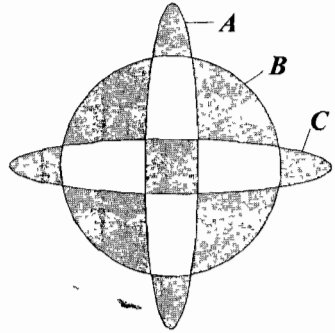


Рис. 1.18

Решение: заштрихованные области можно представить четырьмя конъюнктами:

$$\begin{aligned} &(\underline{A} \wedge \underline{B} \wedge \underline{C}) \cup (\underline{A} \wedge \underline{B} \wedge C) \cup (A \wedge \underline{B} \wedge C) \cup (\underline{A} \wedge B \wedge \underline{C}) = \\ &= (A \wedge ((\underline{B} \wedge \underline{C}) \cup (B \wedge C))) \cup (\underline{A} \wedge ((B \wedge C) \cup (B \wedge \underline{C}))) = \\ &= (A \wedge (B \sim C)) \cup (\underline{A} \wedge (B + C)) = \\ &= (A \wedge (B \sim C)) \cup (\underline{A} \wedge (\underline{B} \sim \underline{C})) = A \sim (B \sim C). \end{aligned}$$

### Практические задания по логике Буля

1. В табл. 1.20 заданы номера наборов аргументов, на которых логическая функция принимает значение, равное единице. Необходимо записать эту функцию в СДНФ и произвести ее минимизацию методом Куайна, методом сочетания индексов и методом Карно (результаты минимизации для всех трех случаев должны совпасть).

2. Логическую функцию вашего варианта из предыдущего задания запишите в СКНФ. Как нужно модифицировать метод Куайна, метод сочетания индексов и метод Карно, чтобы приспособить их к

СКНФ? Произведите минимизацию вашей функции, записанной в СКНФ, всеми тремя методами.

Таблица 1.20

№	Номера конституент							
	4	6	8	9	10	11	15	–
1	4	6	8	9	10	11	15	–
2	2	3	6	7	8	14	15	–
3	0	2	4	5	6	7	9	11
4	1	3	5	7	8	12	14	–
5	1	2	5	6	10	12	13	14
6	0	3	7	9	10	12	13	14
7	0	2	5	8	10	11	14	15
8	0	1	2	4	7	10	11	12
9	0	5	7	8	9	12	13	15
10	0	1	2	3	9	12	14	15
11	0	1	4	6	7	8	9	15
12	0	3	4	5	7	8	10	11
13	0	2	3	7	8	12	14	15
14	0	2	9	10	11	12	13	15
15	1	2	5	6	8	9	10	14
16	1	3	6	7	9	11	13	–
17	1	6	7	9	12	13	14	15
18	1	2	4	10	11	13	14	–
19	1	5	6	7	9	13	14	15
20	1	2	3	4	9	12	15	–
21	2	3	4	7	10	12	13	14
22	2	3	5	8	10	11	12	14
23	3	4	5	7	8	9	10	11
24	4	5	7	9	10	11	12	15

3. Ниже приведены логические выражения. Максимально упростите выражение своего варианта, воспользовавшись законами логики Буля. Затем с помощью таблиц истинности сравните ваше упрощенное выражение с исходным.

$$1. (a \vee (\underline{d} \wedge b)) \wedge ((\underline{a} \wedge (\underline{b} \vee d)) \vee c) \vee \underline{c} \vee (a \vee (b \wedge \underline{d})),$$

$$2. ((a \vee c) \wedge (a \vee d)) \wedge (((c \vee (c \wedge b)) \wedge \underline{c}) \vee \underline{a}),$$

$$3. (\underline{b} \vee d) \wedge ((\underline{d} \wedge c) \vee (a \wedge c) \vee (\underline{d} \wedge \underline{c}) \vee (a \wedge \underline{c})) \wedge (b \vee d),$$

4.  $(a \vee c) \wedge (\underline{a} \vee \underline{b}) \wedge (\underline{b} \vee c) \wedge (\underline{a} \vee b) \wedge (b \vee c),$
5.  $(a \wedge c) \vee ((b \vee \underline{d}) \wedge (\underline{a} \vee \underline{d}) \wedge (d \vee b) \wedge (\underline{a} \vee \underline{d})) \vee (a \wedge \underline{c}),$
6.  $((\underline{b} \vee \underline{c}) \wedge (a \vee b)) \vee (d \wedge \underline{c}) \vee (((\underline{b} \wedge \underline{a}) \vee c) \wedge (a \vee b)),$
7.  $(a \wedge \underline{c}) \vee (\underline{a} \wedge \underline{b}) \vee (b \wedge c) \vee (\underline{a} \wedge b) \vee (c \wedge \underline{b}),$
8.  $((a \vee (c \vee (b \wedge c))) \wedge (\underline{c} \wedge \underline{d}) \wedge (c \wedge \underline{d})) \wedge (c \vee (\underline{d} \wedge \underline{c}) \vee d),$
9.  $((a \vee \underline{a}) \wedge (\underline{b} \vee \underline{d}) \wedge (\underline{b} \vee \underline{c}) \wedge (\underline{c} \vee \underline{d})) \vee ((\underline{b} \vee c) \wedge (c \vee \underline{d})),$
10.  $(a \vee \underline{c}) \wedge ((\underline{a} \wedge \underline{d}) \vee (b \wedge \underline{d}) \vee (\underline{a} \wedge \underline{d}) \vee (b \wedge \underline{d})) \wedge (a \vee c),$
11.  $((d \wedge \underline{c}) \vee (\underline{d} \wedge \underline{b}) \vee (c \wedge \underline{b})) \wedge ((\underline{d} \wedge b) \vee (c \wedge b)) \wedge (\underline{a} \vee a),$
12.  $((\underline{c} \wedge \underline{d}) \vee (b \wedge c)) \wedge (\underline{a} \vee \underline{d}) \wedge (((\underline{c} \vee \underline{b}) \wedge d) \vee (c \wedge b)),$
13.  $((a \vee b) \wedge (\underline{b} \wedge c \wedge d) \vee (\underline{a} \wedge \underline{b} \wedge c \wedge d) \vee \underline{b} \vee \underline{c} \vee d,$
14.  $((a \wedge b) \vee (a \wedge \underline{b})) \vee ((\underline{a} \vee b) \wedge (c \vee \underline{d}) \wedge (\underline{a} \vee \underline{b}) \wedge (d \vee c)),$
15.  $((\underline{b} \wedge c) \vee (\underline{c} \vee \underline{d}) \vee \underline{a}) \wedge (\underline{a} \vee b \vee \underline{c} \vee d) \wedge (\underline{c} \vee \underline{d}) \wedge a,$
16.  $((b \vee c) \wedge (d \vee (\underline{b} \wedge \underline{c}))) \vee (\underline{d} \wedge \underline{a}) \vee ((c \vee b) \wedge (\underline{d} \vee \underline{c})),$
17.  $(b \wedge \underline{d}) \vee ((c \vee \underline{d}) \wedge (a \vee c) \wedge (\underline{d} \vee \underline{c}) \wedge (a \vee \underline{c})) \vee (\underline{b} \wedge d),$
18.  $((\underline{c} \vee \underline{d}) \wedge (d \vee a)) \vee ((b \vee \underline{b}) \wedge (\underline{c} \vee \underline{a}) \wedge (\underline{c} \vee \underline{d}) \wedge (\underline{d} \vee a)),$
19.  $(a \wedge \underline{d}) \vee (((\underline{c} \wedge \underline{b}) \vee d) \wedge (c \vee b)) \vee ((\underline{d} \vee \underline{c}) \wedge (c \vee b)),$
20.  $((\underline{d} \vee (d \wedge c)) \wedge \underline{d}) \vee \underline{b} \wedge ((b \vee d) \wedge (b \vee a)),$
21.  $((\underline{b} \wedge (\underline{c} \vee a)) \vee d) \vee \underline{d} \vee (b \vee (c \wedge a)) \wedge (b \vee (\underline{a} \wedge c)),$
22.  $((c \vee \underline{a}) \wedge (\underline{a} \vee \underline{b}) \wedge (a \vee c) \wedge (\underline{b} \vee a)) \vee (b \wedge \underline{d}) \vee (b \wedge d),$
23.  $(d \vee (\underline{a} \wedge \underline{d}) \vee a) \wedge ((b \vee (d \vee (d \wedge c))) \wedge (\underline{c} \wedge a) \wedge (d \wedge \underline{a})),$
24.  $(\underline{c} \wedge \underline{b}) \vee (d \wedge c) \vee (\underline{b} \wedge c) \vee (d \wedge \underline{c}) \vee (b \wedge \underline{d}).$

4. Аналитическим способом, т.е. на основе формул взаимосвязи между логическими операциями, докажите справедливость ниже приведенных тождеств. Затем, с помощью диаграмм Эйлера — Вена, подтвердите справедливость этого доказательства. Представьте одно из выражений (предварительно его упростив) в базисе элементарных функций. В наборе номеров базисных функций должны фи-

гурировать цифры вашего варианта. Например, для варианта 12 могут быть взяты следующие функции:  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $f_{12}$ . Недостающие функции отбираются на основе теории классов.

1.  $((a | b) | (a \sim b)) | ((c + d) \rightarrow (d - c)) =$   
 $= ((b \rightarrow c) \rightarrow (a - c)) \downarrow ((a | d) | (d \rightarrow \underline{b})),$
2.  $((a \wedge \underline{c}) \downarrow (b - c)) \wedge ((a | d) - (b \wedge d)) =$   
 $= ((a | b) | (a + \underline{b})) \rightarrow ((c + d) \wedge (d \rightarrow c)),$
3.  $((a \downarrow b) \vee (a + b)) - ((c - d) \downarrow (c \sim d)) =$   
 $= ((c \rightarrow a) \wedge (c \rightarrow b)) \rightarrow ((a \downarrow d) \vee (b \downarrow d)),$
4.  $((a \sim b) - (a \downarrow b)) \downarrow ((c \sim d) \downarrow (c - d)) =$   
 $= ((c - a) \downarrow (c - b)) | ((a \downarrow d) \downarrow (b \downarrow d)),$
5.  $((a \wedge b) \vee (a + b)) - ((d - c) \downarrow (d \sim c)) =$   
 $= ((a \rightarrow c) \wedge (b \rightarrow c)) \rightarrow ((a | d) | (b | d)),$
6.  $((a \vee b) - (a + b)) \vee ((c - d) \downarrow (c \sim d)) =$   
 $= ((c - a) \downarrow (c - b)) \wedge ((a \vee d) - (b \downarrow d)),$
7.  $((d \rightarrow b) \rightarrow (\underline{c} - b)) \downarrow ((c \vee a) | (d \rightarrow a)) =$   
 $= ((\underline{c} | d) | (c + d)) | ((a \sim b) \rightarrow (\underline{a} - b)),$
8.  $((a | b) - (\underline{a} + \underline{b})) \vee ((d - c) \downarrow (c \sim d)) =$   
 $= ((\underline{a} \downarrow \underline{d}) \downarrow (b - \underline{d})) \wedge ((a \rightarrow c) - (b - c)),$
9.  $((c - a) \vee (c \sim a)) - ((d - b) \downarrow (d \sim b)) =$   
 $= ((a \vee b) \wedge (c \rightarrow b)) \rightarrow ((d - a) \vee (c \wedge d)),$
10.  $((c \sim b) - (b \downarrow c)) \downarrow ((\underline{a} \sim \underline{d}) \downarrow (a - d)) =$   
 $= ((b \downarrow d) \downarrow (c \downarrow d)) | ((a - b) \downarrow (a - c)),$
11.  $((a - d) \vee (a \sim d)) - ((b - c) \downarrow (b \sim c)) =$   
 $= ((b \rightarrow d) \wedge (a | b)) \rightarrow ((c \vee d) | (a \rightarrow c)),$



12.  $((b \downarrow d) \downarrow (c \downarrow d)) \wedge ((a \rightarrow b) - (a - c)) =$   
 $= ((b \vee c) - (b + c)) \vee ((a - d) \downarrow (a \sim d)),$
13.  $((c \rightarrow d) | (c + d)) | ((a \sim b) \rightarrow (a \wedge b)) =$   
 $= ((a \rightarrow \underline{c}) \rightarrow (a - d)) \downarrow ((b \rightarrow d) | (b \rightarrow \underline{c})),$
14.  $((b \wedge d) \downarrow (b \wedge c)) \wedge ((d \rightarrow a) - (c - a)) =$   
 $= ((c | d) | (\underline{c} \sim \underline{d})) \rightarrow ((a + b) \wedge (b \rightarrow a)),$
15.  $((d - a) \vee (d \sim a)) - ((c - b) \downarrow (\underline{c} + b)) =$   
 $= ((a \vee b) \wedge (d \rightarrow b)) \rightarrow ((c \wedge d) \vee (c - a)),$
16.  $((c \rightarrow d) - (c \sim d)) \vee ((a \wedge b) \downarrow (a + b)) =$   
 $= ((b \wedge c) \downarrow (b - d)) \wedge ((a | c) - (a - d)),$
17.  $((\underline{c} \rightarrow b) \rightarrow (d \downarrow b)) \downarrow ((a \rightarrow d) | (a \rightarrow c)) =$   
 $= ((c \vee d) | (c \sim d)) | ((\underline{a} + \underline{b}) \rightarrow (a - b)),$
18.  $((a \wedge c) \downarrow (b - \underline{a})) \wedge ((c \rightarrow d) - (b - d)) =$   
 $= ((b | c) | (b \sim c)) \rightarrow ((a + d) \wedge (a \rightarrow d)),$
19.  $((b \downarrow \underline{d}) \vee (\underline{b} + d)) - ((a - c) \downarrow (a \sim c)) =$   
 $= ((\underline{c} \rightarrow b) \wedge (d \rightarrow c)) \rightarrow ((a - b) \vee (a \wedge d)),$
20.  $((d \wedge a) \downarrow (b \wedge d)) | ((a - c) \downarrow (b - c)) =$   
 $= ((a + \underline{b}) - (b \wedge a)) \downarrow ((\underline{c} \sim \underline{d}) \downarrow (d - c)),$
21.  $((a \downarrow b) \vee (\underline{a} \sim b)) - ((c - d) \downarrow (c \sim d)) =$   
 $= ((\underline{a} \rightarrow d) \wedge (\underline{d} \rightarrow b)) \rightarrow ((c \rightarrow a) | (c \rightarrow b)),$
22.  $((c \rightarrow a) - (a + \underline{c})) \vee ((d - b) \downarrow (b \sim d)) =$   
 $= ((a \downarrow b) \downarrow (c - b)) \wedge ((d \rightarrow a) - (c \wedge d)),$
23.  $((c | \underline{b}) | (c \sim \underline{b})) | ((\underline{a} + \underline{d}) \rightarrow (\underline{a} - \underline{d})) =$   
 $= ((c \rightarrow \underline{d}) \rightarrow (\underline{b} - \underline{d})) \downarrow ((\underline{b} | \underline{a}) | (\underline{a} \rightarrow c)),$
24.  $((c \downarrow \underline{b}) \vee (c + \underline{b})) - ((\underline{d} - \underline{a}) \downarrow (\underline{d} \sim \underline{a})) =$

$$= ((\underline{d} \rightarrow \underline{b}) \wedge (\underline{d} \rightarrow \underline{c})) \rightarrow ((\underline{b} \downarrow \underline{a}) \vee (\underline{c} \downarrow \underline{a})).$$

5. Воспользовавшись таблицами истинности, представьте логические выражения вашего варианта двух последних заданий в СПНФ. Затем произведите минимизацию (результаты расчета проверьте с помощью таблиц истинности). Наконец, определите, к каким классам (0, 1, 2, 3 или 4) относятся ваши логические выражения.

6. Докажите аналитическим путем справедливость выражений.

1.

$$(A - B) + (C - D) = A + C, \text{ если } A \cap B = C \cap D;$$

$$A \cup B \cup (\underline{A} \cap \underline{B} \cap C) \cup (\underline{A} \cap \underline{B} \cap \underline{C}) = 1;$$

$$(a \sim b) - (a | b) = a \wedge b.$$

2.

$$(A - B) + (B - C) + (B - A) + (C - B) = A + C;$$

$$((A \cup \underline{B}) \cap (\underline{B} \cup C)) \cup ((\underline{A} \cup B) \cap (B \cup \underline{C})) = 1;$$

$$a \rightarrow b = (a + b) \sim (b - a).$$

3.

$$(A - B) + (B - C) + (C - A) = (B - A) + (C - B) + (A - C);$$

$$((A \cup B) - C) \subset (A \cup (B - C));$$

$$((a \downarrow b) \downarrow (a \downarrow b)) + ((\underline{a} \downarrow a) \downarrow (b \downarrow b)) = a + b.$$

4.

$$(A \cup B) + (C \cup D) = B + C, \text{ если } A \cap B = D, C \cap D = A;$$

$$((B \cap \underline{C}) \cup (A \cap \underline{C})) \cap ((\underline{B} \cap C) \cup (\underline{A} \cap C)) = 0;$$

$$a \rightarrow c = (a \vee (b \wedge c)) \rightarrow (a \vee b) \wedge c.$$

5.

$$(A - (B - C)) - ((A - B) - C) = A \cap C;$$

$$((\underline{A} \cup \underline{B}) \cap (\underline{B} \cup C)) \cup ((\underline{A} \cup B) \cap (B \cup \underline{C})) = 1;$$

$$(\underline{b} \vee (\underline{c} \wedge \underline{a})) \vee (a \vee (b \wedge c)) = a \vee \underline{b}.$$

6.

$$(A \cap B \cap C) \cup (A \cap \underline{B}) \cup (A \cap \underline{C}) = A;$$

$$A \cap B = A, \text{ если } \underline{A} \cup B = 1;$$

$$\begin{aligned} (a | (b | c)) + (b | (a | c)) + (c | (a | b)) = \\ = (a \rightarrow (b \vee c)) \wedge (b \rightarrow (a \vee c)) \wedge (c \rightarrow (a \vee b)). \end{aligned}$$

7.

$$(A \cup B) + (A \cup C) + (B \cup C) = (A \cap B) + (A \cap C) + (B \cap C);$$

$$((A \cup B) - C) \subset ((A - C) \cup (B - A));$$

$$((a \downarrow b) \vee (a | b)) \rightarrow ((a \wedge b) | (a + b)) = 1.$$

8.

$$((A \cup B) \cap C) \cup (\underline{A} \cap (\underline{B} \cup \underline{C})) = \underline{A} \cup C;$$

$$(A - (B - C)) \subset ((A - B) \cup (B \cap C));$$

$$a \downarrow ((b - a) \sim b) = 0.$$

9.

$$(A \cap B) - (C \cup D) = (A - C) \cap (B - D);$$

$$(A \cap (B \cup C)) \subset ((A \cap B) \cup C);$$

$$a \sim (b | c) = ((a + b) \wedge c) + (a - c).$$

10.

$$(A - B) + (B - A) = A + B;$$

$$P - Q = A \cap C, \text{ если } P = A - (B - C), Q = (A - B) - C;$$

$$(a \sim b) - (a | b) = (a \downarrow a) \downarrow (b \downarrow b).$$

11.

$$((A \cap \underline{B}) \cup (\underline{B} \cap C)) \cap ((\underline{A} \cap B) \cup (B \cap \underline{C})) = 0;$$

$$(A - (B - C)) \subset (A \cup (B \cap C));$$

$$(b \vee (a \wedge c)) \rightarrow (b \vee c) \wedge a = b \rightarrow a.$$

12.

$$(A \cup B) + (C \cup D) = A + B + C + D, \text{ если } A \cap B = C \cap D;$$

$$(A - B) - C = (A - C) - (B - C);$$

$$(a \wedge (\underline{b \wedge c}) \vee ((\underline{a \vee c}) \wedge b) = a \vee b.$$

13.

$$((A \cap C) + (B \cap D)) \subset ((A + B) \cup (C + D));$$

$$(A + B) - C = (A - (B \cup C)) \cup (B - (A \cup C));$$

$$(a | b) \rightarrow (b \vee c) = b \vee c.$$

14.

$$((\underline{B \cap C}) \cup (\underline{A \cap B}) \cup (A \cap \underline{C})) \cap ((\underline{A \cap B}) \cup (B \cap C)) = 0;$$

$$(A - B) \cup (B - A) = (B - A) + (A - B);$$

$$(a \downarrow b) + (b \downarrow c) = (a + c) - b.$$

15.

$$P = (A - B) - C, Q = A - (B - C), \text{ если } P \subset Q;$$

$$(A - B) \cup (B - C) \cup (C - A) = (A \cup B \cup C) + (A \cap B \cap C);$$

$$(a \vee b \vee c) \sim (a \wedge b \wedge c) = (a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow c) \wedge (c \rightarrow a).$$

16.

$$((A \cup C) + (B \cup D)) \subset ((A + B) \cup (C + D));$$

$$((\underline{B \cap A}) \cup C) \cap ((\underline{A \cup C}) \cup B) = B \cap C;$$

$$((a + b) - c) | ((a - b) + c) = a \rightarrow (b \vee c).$$

17.

$$(C \cap B) \cup (\underline{B \cap A}) \cup (\underline{B \cap C}) \cup (\underline{A \cap B}) \cup (A \cap \underline{C}) = 1;$$

$$(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C), \text{ если } C \subset A;$$

$$(a \sim b) \downarrow ((a \downarrow c) \rightarrow (c \wedge d)) = (b - a) - c.$$

18.

$$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C);$$

$$P \subset Q, \text{ если } P = (A - B) - C, Q = A - (B - C);$$

$$((a | b) \rightarrow (b \vee c)) \downarrow (c \sim d) = (d - c) - b.$$

19.

$$(A - (B \cup C)) \cup (B - (A \cup C)) \cup (C - (A \cup B)) =$$

$$= A + B + C + (A \cap B \cap C);$$

$$((A \cup B) - C) \subset ((A \cup B \cup C) - (A \cap B \cap C));$$

$$(a - b) - c = (a \sim b) \downarrow (b \vee c).$$

20.

$$A + B = (\underline{A} \cup \underline{B}) + (A \cup B);$$

$$(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C) = (A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (A \cup C);$$

$$(a - b) + (a + c) \wedge b = \underline{a} + (b | c).$$

21.

$$(\underline{A} \cup \underline{B}) + (\underline{B} \cup \underline{A}) = (A \cap B) + (A \cup B);$$

$$(\underline{A} \cup \underline{B}) \cap (\underline{B} \cup \underline{C}) \subset (\underline{A} \cup \underline{C});$$

$$a + (c - b) = (a \sim c) + (b | c).$$

22.

$$A + B = (A - B) + (B - A);$$

$$C \supset (A \cup B), \text{ если } C \supset A, C \supset B;$$

$$(a \downarrow b) \downarrow ((\underline{a} | c) \downarrow (\underline{b} | d)) = a \vee b.$$

23.

$$(A - B) + ((A + C) \cap B) = (A - C) + ((A + B) \cap C);$$

$$(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C), \text{ если } A \subset C;$$

$$((a | b) \rightarrow (b \vee c)) \vee (c \sim d) = d \rightarrow (c \vee b).$$

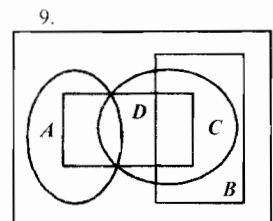
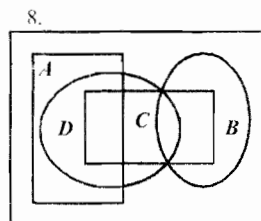
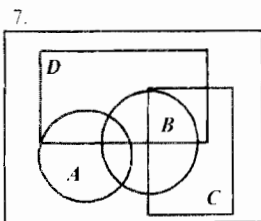
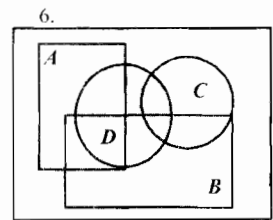
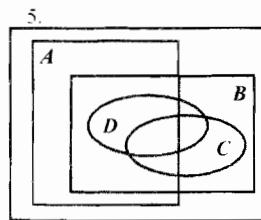
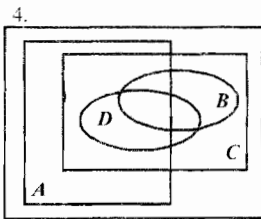
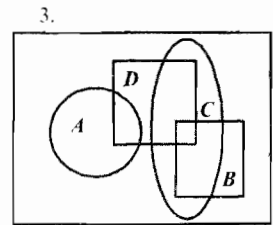
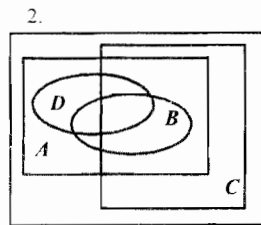
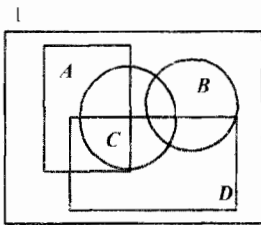
24.

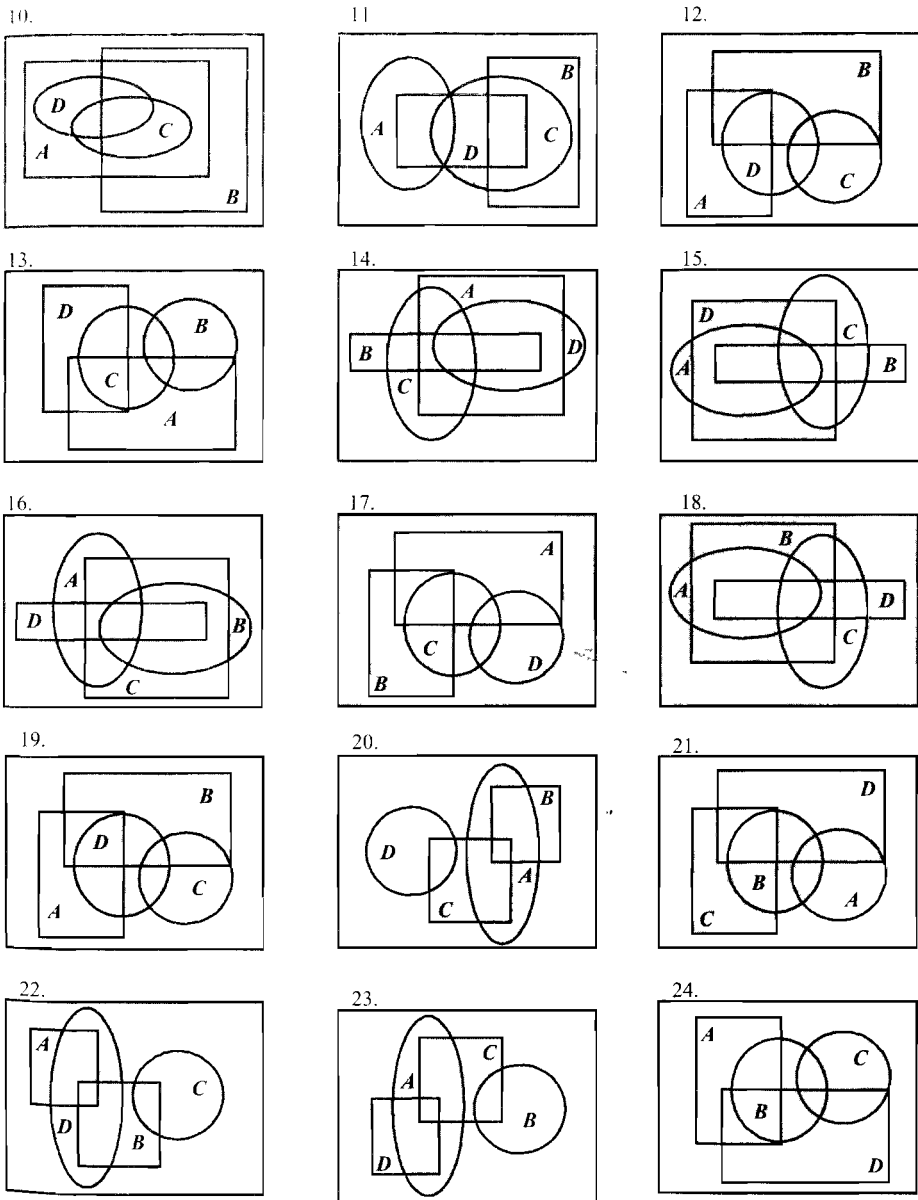
$$(A + (A - B)) \cap (1 - B) = 0;$$

$$((A - C) \cup (B - A)) \subset (A \cup B);$$

$$a \sim (b | c) = (a \rightarrow b) \sim (a + c) \wedge b.$$

7. Ниже приведены диаграммы Эйлера – Венна. Представьте заштрихованные и отдельно не заштрихованные области максимально компактными аналитическими выражениями, в которых бы использовалось минимальное количество логических операций и букв. С этой целью сначала выразите все заштрихованные области через конъюнкты-конъюнкты, а незаштрихованные — через конъюнкты-дизъюнкты, и только после этого приступайте к упрощению совершенных форм (результаты проверьте на таблицах истинности).





## 1.4. Введение в логику высказываний

### Высказывания и операции над ними

Под *высказыванием* понимают грамматически правильное повествовательное предложение, про которое можно сказать, что оно либо истинно, либо ложно, например:

«Киев — столица Украины», «Париж — столица России».

Первое высказывание *истинно*, второе — *ложно*.

Возьмем два *простых* высказывания:

**A** = «На улице идет дождь», **B** = «Над моей головой раскрыт зонтик».

С помощью пяти логических связок можно образовать следующие *сложные* высказывания:

1) *отрицание*:  $\underline{A}$  = «На улице *не* идет дождь»;

2) *дизъюнкция*:  $\underline{A} \vee B$  =  
= «На улице *не* идет дождь *или* над моей головой раскрыт зонтик»;

3) *конъюнкция*:  $A \wedge \underline{B}$  =  
= «На улице идет дождь *и* над моей головой *не* раскрыт зонтик»;

4) *импликация*:  $A \rightarrow B$  =  
= «*Если* на улице идет дождь, *то* над моей головой раскрыт зонтик»

5) *эквивалентность*:  $B \sim A$  = «Над моей головой раскрыт зонтик *тогда и только тогда, когда* на улице идет дождь».

Другие логические связки, известные нам по логике Буля, в логике высказывания не используются. Теперь сделаем по поводу каждой из пяти указанных связок небольшие замечания.

*Отрицание*. Высказывание **A** по-другому можно прочесть так:

«*Истинно* то, что на улице идет дождь».

Поэтому, если  $A = 0$ , то это означает, что на улице не идет дождь. Дополняющее высказывание  $\underline{A}$  также ориентируется на истинное высказывание, т.е. его следует понимать как

«*Истинно* то, что на улице *не* идет дождь».

Тогда  $\underline{A} = 1$  будет обозначать ту же самую ситуацию, что и в предыдущем случае, т.е. отсутствие дождя.



*Дизъюнкция.* В нашем конкретном примере дизъюнкция двух высказываний **A** и **B**, в принципе, может подразумевать и конъюнкцию этих же высказываний. Однако часто грамматический союз *или* не включает в себя союз *и*. Пусть даны два других высказывания:

**P** = «Петр находится в кинотеатре» ,

**Q** = «Петр находится в бассейне».

Если для нас не столь важно, где находится Петр, то мы, конечно, можем использовать союз *или* с включенным в него союзом *и*, формально записав:

$P \vee Q$  = «Петр находится в кинотеатре *или/и* в бассейне».

Но если нужно точно установить, где находится Петр, то мы обязаны исключить случай одновременного присутствия Петра в кинотеатре и бассейне, т.е. формально записать:

$(P \vee Q) \wedge (\underline{P} \wedge \underline{Q})$  .

Подобные высказывания называются *строгой дизъюнкцией*, которая означает «*либо P , либо Q , но не P и Q одновременно*». И хотя, с точки зрения логики Буля, эта логическая операция равносильна операции *симметрической разности*:

$P + Q = (P \vee Q) \wedge (\underline{P} \vee \underline{Q})$  ,

исторически сложилось так, что символ « + » в логике высказываний не используется.

*Конъюнкция.* Логический союз *и* необязательно должен представляться через грамматический союз *и*. В частности, выше приведенное выражение можно прочесть несколько иначе:

$A \wedge \underline{B}$  = «На улице идет дождь, *а* над моей головой *не* раскрыт зонтик» ;

Союзы *а* и *но* по смыслу часто совпадают с союзом *и*, поэтому они используются в сложных конъюнктивных предложениях.

Однако языковая ситуация может стать такой, что союз *и* перестает играть роль *конъюнкции*; приведем два предложения:

$P \wedge Q$  = «Ему стало страшно *и* он убил человека».

$Q \wedge P$  = «Он убил человека *и* ему стало страшно».

Здесь некоммутативность двух простых предложений очевидна, поскольку мы имеем дело со скрытой *импликацией*, когда одно простое предложение обуславливает другое.

$Q \rightarrow P$  = «Когда он убил человека, ему стало страшно».

*Импликация.* Высказывание типа «если **A**, то **B**» носит *объясняющий* характер. Оно как бы разъясняет нам, почему имеет место событие **B** — потому что имело место событие **A**. Это свойство импликации особенно ценно для логики высказываний, о чем мы подробно остановимся в следующем подразделе.

Объясняющий характер импликации тесно связан с *причинно-следственным отношением*, при котором **A** выступает в роли причины, а **B** — следствия. Причинно-следственная связь между **A** и **B** грамматически может быть оформлена предложениями: «**A** является достаточным основанием для **B**», «**B**, потому что **A**», «**B** при условии выполнения **A**» и т.д. Если под **A** и **B** понимать прежние высказывания, то результат причинно-следственного отношения можно оформить следующей таблицей истинности (табл. 1.21). Вторая строка таблицы говорит об отсутствии причинно-следственного отношения между событиями **A** и **B**.

<b>A</b>	<b>B</b>	$A \rightarrow B$	Результаты
0	0	1	Останусь сухим
1	0	0	Вымокну
0	1	1	Останусь сухим
1	1	1	Останусь сухим

Таблица 1.21

*Эквивалентность.* Высказывание «**A** эквивалентно **B**» может быть с успехом заменено на «**A** равно **B**», «**A** тождественно **B**», «**A** равносильно **B**», «**A** тогда и только тогда, когда **B**» и т.д. Так как эквивалентность выражается через конъюнкцию двух импликаций:

$$A \sim B = (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A),$$

то это отношение часто возникает при одновременном выполнении двух условий: «из **A** следует **B**» и «из **B** следует **A**». Таким образом, при эквивалентности двух событий невозможно одному из них приписать роль только причины, а другому — только следствия. Например, два события:

**R** = «Наращение анархии в обществе»,

**S** = «Падение авторитета власти»,

являются вполне равнопорядковыми событиями, поскольку причиной нарастания анархии в обществе является падение авторитета власти; и наоборот, падение авторитета власти происходит из-за нарастания анархии в обществе. В данной ситуации бессмысленно обвинять только власть в слабости и некомпетентности или обвинять народ в несознательности и недисциплинированности.

События **R** и **S** образуют *логический круг*; их будем называть сильно связанными событиями и выражать следующими тождественными формами:

$$R \sim S = (R \wedge S) \sim (R \vee S) = (R \vee S) \rightarrow (R \wedge S).$$

Понятие «сильной связанности» совпадает с понятием «эквивалентности», если речь идет о двух событиях. Но возьмем, например, хорошо известное объяснение, на чем держится Земля:

*Земля (X) держится на трех китах (Y), киты (Y) держатся на водах океана (Z), океан (Z) держится на Земле (X).*

Последовательность, куда входят три названных объекта **X**, **Y** и **Z**, тоже образуют логический круг:

$$(X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow Z) \wedge (Z \rightarrow X).$$

Однако отношение эквивалентности (быть взаимной опорой друг для друга) между всеми тремя объектами, т.е.

$$X \sim Y \sim Z,$$

здесь не возникает, да и не может возникнуть, так как мы не утверждаем, что Земля является непосредственной опорой для китов ( $X \sim Y$ ), или что киты являются непосредственной опорой для вод океана ( $Y \sim Z$ ). Поэтому эквивалентность в данном случае проявляется в весьма своеобразной форме:

$$(X \wedge Y \wedge Z) \sim (X \vee Y \vee Z) \quad \text{или} \quad (X \vee Y \vee Z) \rightarrow (X \wedge Y \wedge Z),$$

что можно истолковать в случае операции эквивалентности как: одновременное появление всех трех опор произойдет *тогда и только тогда*, когда возникнет хотя бы одна из опор, и наоборот; для операции импликации: *если* возникнет какая-нибудь одна из опор, *то* это приведет к появлению всех трех опор. Таким образом, *сильная связанность*, или *логический круг*, есть нечто промежуточное между *причинно-следственным отношением* и *отношением эквивалентности*. Подобные отношения возникают очень часто, например между членами преступной организации, где все связаны круговой порукой и невозможно найти крайнего.

### Парадоксальные высказывания

В заключение этого вводного подраздела хотелось бы подчеркнуть важность различия между *языком* и *метаязыком*, между *объектными* и *субъектными* высказываниями. Пренебрегая этим различием, мы рискуем впасть в противоречие, которое называется *логическим парадоксом*.

С древних времен известен парадокс лжеца. Изложим его суть.

*«Я лжец», — сказал лжец.*

Итак, некий лжец сообщает о себе, что он лжец. Следовательно, здесь он выступает в своем противоположном качестве, а именно — обманщика. Поэтому приведенное высказывание на самом деле нужно понимать иначе:

*«Я лжец», — сказал нелжец.*

Теперь получается, что правдивый человек сообщает о себе, что он лжец. Правдивому человеку мы, естественно, должны верить. Поэтому второе высказывание следует понимать все-таки так, как это отражено в первом высказывании. Здесь возникает неопределенность; непонятно, как квалифицировать говорящего — как лжеца или как обманщика, т.е. непонятно, каким образом идентифицировать высказывание — как истинное или как ложное.

Парадокс возник потому, что в приведенных высказываниях не делается разграничения между двумя принципиально разными логическими уровнями. Помимо *лжеца* и *обманщика* в данной логической ситуации участвует *субъект*, или *метанаблюдатель*. Если провести четкое синтаксическое отделение смыслового содержания, которое должно относиться к нам, как метанаблюдателям, от прочей семантики объектных персонажей, то логическое противоречие будет снято. Ситуацию с лжецом необходимо представлять следующим образом:

*«Я лжец», — сказал лжец.*

*«Это истинно», — сказал метанаблюдатель.*

*«Я лжец», — сказал нелжец.*

*«Это ложно», — сказал метанаблюдатель.*

*«Я нелжец», — сказал лжец.*

*«Это ложно», — сказал метанаблюдатель.*

*«Я нелжец», — сказал нелжец.*

*«Это истинно», — сказал метанаблюдатель.*

Если приведенные четыре конструкции записать через два слова *истинно* и *ложно*, то получим обыкновенную таблицу умножения для группы из двух элементов типа *плюс* и *минус* единицы.

*ложно \* ложно = истинно,*

*истинно \* ложно = ложно,*

*ложно \* истинно = ложно,*

*истинно \* истинно = истинно.*

Однако источником противоречий в логике высказываний необязательно является смешение именно *объектного* и *субъектного* уровней. Неопределенность может возникнуть между различными объектными уровнями. В качестве примера приведем следующую фразу: «*Нет правил без исключений*». Но фраза, стоящая здесь в кавычках сама является правилом. Так какое исключение должно следовать из него? Разберем это противоречие, несколько изменив его семантику. Пусть имеется высказывание:

$A = \text{«Любое высказывание является ложным»}$ .

Так как  $A$  является высказыванием, на него должно распространяться сказанное в предложении  $A$ . Рассмотрим два случая:

1. Пусть  $A = 1$ . Это означает, что  $A = \text{«}A = 0\text{»} = 1$ , т.е.  $A = 0$ .

2. Пусть  $A = 0$ . Это означает, что  $A = \text{«}A = 0\text{»} = 0$ , т.е.  $A = 1$ .

Таким образом, в обоих случаях имеем противоречие. Чтобы его избежать, нужно произвести логическое разграничение всего множества высказываний на два принципиально разных класса —  $A$  и  $B$ . В этом случае формальная запись первоначальной фразы будет иметь вид:  $A = \text{«}B = 0\text{»}$ ; тогда при  $A = 1, B = 0$  и при  $A = 0, B = 1$ .

Приведем еще один пример известного парадокса. Английский логик Бертран Рассел поведал притчу: в одной из деревень жил парикмахер; он брил тех жителей деревни, кто не брился сам. Рассел задался вопросом: *может ли парикмахер побрить самого себя?* Начинаем рассуждать: если парикмахер побрит самого себя, то, как житель этого селения, который бреется сам, он, не вправе это сделать; но если парикмахер не станет бриться, то, как житель селения, который не бреется сам, он обязан будет себя побрить.

Выразим семантику этого противоречия формальным языком. Обозначим через  $A$  парикмахера и пусть  $P(A, B)$  означает высказывание « $A$  бреет  $B$ ». Тогда ситуацию, которую мы имеем в селении, можно описать двумя метавысказываниями:

1) Если  $P(B, B) = 0$ , то  $P(A, B) = 1$ .

2) Если  $P(B, B) = 1$ , то  $P(A, B) = 0$ .

Когда парикмахер рассматривается в качестве рядового жителя селения ( $A = B$ ), оба метавысказывания становятся противоречивыми:

1) Если  $P(A, A) = 0$ , то  $P(A, A) = 1$ .

2) Если  $P(A, A) = 1$ , то  $P(A, A) = 0$ .

Выражение  $P(A, B)$  может означать « $A$  учит  $B$ », « $A$  развлекает  $B$ » и т.д. При этом под  $A$  понимается учитель, юморист и т.д. И хотя  $A$ , наряду с  $B$ , формально является объектной переменной, ее нельзя ставить на один уровень с  $B$ , так как именно относительно  $A$  сформулированы метавысказывания.

### Построение доказательств в логике высказываний

*Логика* — это наука о способах доказательства. Выясним, в чем, собственно, состоит различие в построении доказательств в логике высказываний и логике Буля.

В булевой логике все доказательства строились на *отношении эквивалентности*. Даже если во множественных выражениях и фигурировало отношение включения, что является частным случаем *отношения порядка*, то его мы переводили в тождество. Две логические функции считались эквивалентными, если они давали на соответствующих наборах аргументов абсолютно одинаковые значения нулей и единиц. При использовании формальной записи логических выражений отдельные звенья цепи любого доказательства там были связаны через символ равенства « $=$ ». Отношение эквивалентности удовлетворяет трем законам —

<i>рефлексивности:</i>	$A = A;$
<i>симметричности:</i>	если $A = B$ , то $B = A;$
<i>транзитивности:</i>	если $A = B$ и $B = C$ , то $A = C.$

В логике высказываний доказательства строятся на *отношении порядка*, т.е. на отношении, которое существует между причиной и следствием. Здесь уже отдельные звенья цепи доказательства связаны символом импликации. Однако символ импликации « $\rightarrow$ » при логическом выводе мы будем заменять на символ « $\Rightarrow$ », подобно тому, как в логике Буля используются два символа эквивалентности — « $\sim$ » и « $=$ ». Символ « $\sim$ » является *объектным*, а « $=$ » — *субъектным*. Таким образом, следует различать язык логики высказываний и *метаязык* исследователя. Чтобы избежать путаницы, введем еще два *метасимвола*: вместо *объектной конъюнкции* « $\wedge$ » будем использовать *субъектный символ метаконъюнкции* — « $,$ », а вместо *объектной дизъюнкции* « $\vee$ » — *субъектную метадизъюнкцию* « $;$ ». Тогда утверждение, которое требуется доказать, оформляется в виде следующего *причинно-следственного отношения*:

$$P_1, P_2, \dots, P_{n-1}, P_n \Rightarrow C \quad (1.1)$$

где  $P_i$  — посылка (причина),  $C$  — заключение (следствие). Читается: «Если посылки  $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}, P_n$  истинны, то заключение  $C$  тоже истинно» или, по-другому: «Если причины  $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}, P_n$  имели место, то будет иметь место и следствие  $C$ ».

Чтобы не спутать *объектное высказывание* (предложение) с *субъектным высказыванием*, справедливость которого мы намереваемся установить, условимся предложения типа (1.1) называть *клаузой* (*clause* — предложение). Клауза — это *метапредложение*, в котором использовано *отношение порядка*, оформленное через символ *метаимпликации* « $\Rightarrow$ ». Как и отношение эквивалентности отношение порядка удовлетворяет трем законам

*рефлексивности:*  $A \Rightarrow A$ ;  
*антисимметричности:* если  $A \Rightarrow B$ , то  $B \Rightarrow A$ ;  
*транзитивности:* если  $A \Rightarrow B$  и  $B \Rightarrow C$ , то  $A \Rightarrow C$ .

Отношение порядка предполагает выполнение закона антисимметричности, который записывается как:

если  $A \Rightarrow B$  и  $B \Rightarrow A$ , то  $A = B$ .

Клауза есть именно формальная запись доказываемого предложения. Вместо букв в ней можно подставить объектные высказывания, и тогда клауза наполняется конкретным содержанием, которое уже именуется *семантикой* или *легендой*. Пример клаузы:

$A \rightarrow B, A \Rightarrow B$ .

Если принять, что  $A$  = сверкнула молния,  $B$  = грянул гром, то можно составить следующую легенду: «Известно, что если сверкнула молния, то после этого грянет гром. Молния сверкнула. Следовательно, должен и грянуть гром».

Над субъектом, который формулирует метапредложения, может стоять другой субъект, для которого предложения первого субъекта окажутся объектными. Тогда клаузу (1.1) второй субъект или метасубъект запишет для себя следующим логическим выражением:

$(P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_{n-1} \wedge P_n) \rightarrow C$ .

Преобразуем это выражение в дизъюнкт, получим:

$\underline{P}_1 \vee \underline{P}_2 \vee \dots \vee \underline{P}_{n-1} \vee \underline{P}_n \vee C$ .

Отсюда легко находим:

$(P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_{n-1}) \rightarrow (\underline{P}_n \vee C)$ .

Поэтому клауза (1.1) может быть представлена в другой *эквивалентной* форме:

$$P_1, P_2, \dots, P_{n-1} \Rightarrow P_n; C. \quad (1.2)$$

В силу коммутативности конъюнкции на месте посылки  $P_n$  может оказаться любая другая, причем не одна. Например, клауза:

$$P_1, P_2, P_3, P_4 \Rightarrow C_1; C_2; C_3.$$

может быть преобразована в другую эквивалентную форму:

$$P_4, \underline{C}_2, P_1, \underline{C}_1 \Rightarrow \underline{P}_1; C_3; \underline{P}_2. \quad (1.3)$$

Однако клауза (1.1) по сравнению с (1.2) и другими подобными формами имеет определенные преимущества и, в частности, используется в языке логического программирования ПРОЛОГ. Ее называют *хорновской*. Произвольную клаузу всегда можно свести к хорновскому виду путем эквивалентных преобразований.

Если символ метаимпликации « $\Rightarrow$ » клаузы (1.2) сместить в крайнее левое положение, то она превратится в *тавтологию*; если же его сместить в крайнее правое положение, то — в *противоречие*:

$$1 \Rightarrow \underline{P}_1; \underline{P}_2; \dots; \underline{P}_{n-1}; \underline{P}_n; C \text{ — тавтология,}$$

$$P_1, P_2, \dots, P_{n-1}, P_n, \underline{C} \Rightarrow 0 \text{ — противоречие.}$$

Ниже мы рассмотрим пять конкретных методов доказательства справедливости логических клауз — *аксиоматический метод*, *метод таблиц истинности*, *метод резолюций*, *метод Вонга* и *метод натурального исчисления*. Как и в логике Буля, в логике высказываний существуют *аксиоматический* и *конструктивный* подходы доказательств логических выражений. Два первых из только что названных пяти как раз являются яркими представителями таких подходов, остальные три метода — смешанной стратегии. Аксиоматическое построение логики высказываний состоит в том, чтобы попытаться вычлениить из бесконечного числа истинных клауз *независимую систему аксиом*, с помощью которой можно было бы установить справедливость любых других клауз.

### Аксиома порядка и ее применение

Мы уже сказали, что доказательство в логике высказываний строится на отношении порядка, которое является *более общим случаем* отношения эквивалентности. В самом деле, закон симметричности:

$$\text{если } A = B, \text{ то } B = A,$$

всегда можно представить в антисимметричной форме:

$$\text{если } A = B, \text{ то } \underline{B} = \underline{A},$$

но не наоборот. Следовательно, логика высказывания является *расширением* логики Буля. Поэтому все истинные тождества логики



Буля *автоматически* становятся справедливыми клаузами логики высказываний. Например, *закон склеивания*:

$$(A \vee B) \wedge (A \vee \underline{B}) = A,$$

можно представить следующими справедливыми клаузами:

$$(A \vee B), (A \vee \underline{B}) \Rightarrow A, \quad A \Rightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee \underline{B}), \\ 1 \Rightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee \underline{B})) \sim A, \quad A \vee B \Rightarrow (A \vee \underline{B}) \rightarrow A.$$

Таким образом, независимая система аксиом логики Буля, которая состоит из четырех законов — *коммутативности, ассоциативности, дистрибутивности, нуля и единицы* — автоматически становится системой аксиом и логики высказываний. Для выражения же *отношения порядка*, в принципе, требуется лишь какое-то одно *элементарное* высказывание, к которому можно было бы сводить все остальные более сложные высказывания. Сейчас мы его введем.

Очевидное предложение: *Истину может изречь всякий*.

На формальном языке логики высказываний эту сентенцию можно представить следующей клаузой:

$$A \Rightarrow B \rightarrow A.$$

Она означает: «если **A** истинно, то источником этой истинности может быть что угодно, например **B**». Если произвести эквивалентное преобразование этой клаузы

$$A, B \Rightarrow A, \tag{1.4}$$

то семантика ее тоже изменится, и станет примерно такой: «если ранее было установлено, что **A** истинно, то истинность **B** не может проявиться так, что **A** станет ложным» или «истинность одного высказывания (**B**) не может повлиять на истинность другого высказывания (**A**)». Путем эквивалентных преобразований клаузу (1.4) всегда можно преобразовать к другим формам:

$$\underline{A} \Rightarrow \underline{A} \wedge \underline{B}, \quad A \Rightarrow A; B, \quad 1 \Rightarrow (A \wedge B) \rightarrow A, \dots$$

Однако в качестве основной аксиомы логики высказываний, выражающей отношение порядка, мы возьмем клаузу (1.4).

Теперь на первом нашем примере, который был приведен выше, выясним, как производится доказательство справедливости логической клаузы. Исходная клауза имела вид:

$$A, A \rightarrow B \Rightarrow B. \tag{1.5}$$

Преобразуем ее к несколько иному виду:

$$A \wedge (\underline{A} \vee \underline{B}) \Rightarrow B.$$

После раскрытия скобок и упрощения сразу же приходим к аксиоме порядка (1.4). Доказанная элементарная клауза (1.5) известна со

времен Аристотеля и играет исключительно важную роль в логике высказываний. Она имеет даже специальное латинское название — *modus ponens* — *правило отделения*. Если в процессе доказательства справедливости какой-либо сложной клаузы удалось свести ее к клаузе (1.5), будем считать, что доказательство состоялось.

Закон антисимметричности по существу определяет правила действия по переносу объектных высказываний относительно символа метаимпликации « $\Rightarrow$ ». Что же касается двух других законов отношения порядка, то они, в принципе, сводятся к аксиоме порядка. Так, закон *рефлексивности* путем использования закона о единице может быть записан как:

$$A, 1 \Rightarrow A,$$

что является частным случаем аксиомы порядка. Закон *транзитивности* также может быть представлен в несколько иной форме:

$$A \rightarrow B, B \rightarrow C \Rightarrow A \rightarrow C,$$

а эту клаузу уже можно доказывать путем сведения ее к аксиоме порядка. Доказательство проведем в три этапа:

1) перенесем  $A$  влево за знак метаимпликации —

$$A, A \rightarrow B, B \rightarrow C \Rightarrow C;$$

2) воспользуемся правилом отделения, которое нами уже доказано, для первых двух посылок —

$$B, B \rightarrow C \Rightarrow C;$$

3) затем еще раз воспользуемся этим же правилом, но для третьей посылки и вновь полученной, что приведет к аксиоме порядка

$$B, C \Rightarrow C.$$

Таким образом, закон транзитивности доказан.

Убедимся в истинности тавтологии:

$$1 \Rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)).$$

Доказательство:

1) произведем эквивалентные преобразования —

$$A \rightarrow (B \rightarrow C), A \rightarrow B, A \Rightarrow C;$$

2) воспользуемся правилом отделения —

$$B \rightarrow C, B \Rightarrow C;$$

3) воспользовавшись еще раз правилом отделения приходим к аксиоме порядка в форме предыдущего примера.

Докажем справедливость клаузы, которая построена на основе тождественного закона *склеивания*:

$$1 \Rightarrow (\underline{A} \rightarrow \underline{B}) \rightarrow ((\underline{A} \rightarrow \underline{B}) \rightarrow A).$$

После эквивалентных преобразований:

$$(A \vee B) \wedge (A \vee \underline{B}) \Rightarrow A,$$

она сводится к *закону рефлексивности*, т.е. к частному случаю аксиомы порядка, рассмотренному выше.

Исторически первой системой аксиом классической логики была система, предложенная Г. Фреге (1848 – 1925):

$$1. \mathbf{1} \Rightarrow A \rightarrow (B \rightarrow A),$$

$$2. \mathbf{1} \Rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)),$$

$$3. \mathbf{1} \Rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C)),$$

$$4. \mathbf{1} \Rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow (\underline{B} \rightarrow \underline{A}),$$

$$5. \mathbf{1} \Rightarrow A \rightarrow \underline{A}, \mathbf{1} \Rightarrow \underline{A} \rightarrow A.$$

Первая аксиома Фреге является нашей аксиомой порядка. Вторая «аксиома» нами доказана выше. Остальные «аксиомы» представляют собой тождества логики Буля, записанные в форме клауз.

Позднее Я. Лукасевич (1878 – 1956) уменьшил число аксиом в системе Фреге с пяти до трех —

$$1. \mathbf{1} \Rightarrow A \rightarrow (B \rightarrow A),$$

$$2. \mathbf{1} \Rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)),$$

$$3. \mathbf{1} \Rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow (\underline{B} \rightarrow \underline{A}).$$

Вместо третьей «аксиомы» в современной логике часто используют «аксиому» вида:

$$\mathbf{1} \Rightarrow (\underline{A} \rightarrow B) \rightarrow ((\underline{A} \rightarrow \underline{B}) \rightarrow A),$$

вытекающую из тождественного закона склейвания. Однако в процессе доказательств истинности клауз без аксиом булевой логики обойтись невозможно. Поэтому есть смысл говорить о *пяти* основополагающих законах логики высказываний: *закона отношения порядка*, а также *законов коммутативности, ассоциативности, дистрибутивности, нуля и единицы*.

Теперь вспомним о *логическом круге*, который возникал у нас в связи с «объяснением» опоры Земли. Тогда мы пришли к логическому соотношению вида:

$$(X \vee Y \vee Z) \rightarrow (X \wedge Y \wedge Z).$$

Если перейти на метаязык, то получим клаузу:

$$X; Y; Z \Rightarrow X, Y, Z.$$

Данное выражение противоречит аксиоме порядка. Это говорит об ошибке в объяснении. Сказав, что Земля держится на трех китах,

киты — на водах океана, а океан — на Земле, мы нарушили естественный порядок вещей — причину обусловили следствием, поэтому математический аппарат логики высказываний сразу же дал сбой. В приведенной клаузе уже нельзя будет переносить посылки через символ метаимпликации, так как

$$(X \vee Y \vee Z) \rightarrow (X \wedge Y \wedge Z) \neq (X \vee Y) \rightarrow (Z \wedge X \wedge Y \wedge Z).$$

Отсюда вывод: *метадизъюнкция* « ; » не может разделять две различные посылки, а *метаконъюнкция* « , » — два различных заключения; это приводит к невозможности использовать аппарат логики высказываний.

### Табличный способ доказательства

Противоположным *аксиоматическому* является *конструктивный* метод доказательства, основанный на *таблицах истинности*. Чтобы понять его, достаточно составить таблицу истинности для одного примера. Пусть дана следующая легенда: «Кассир Сидорова сказала, что она видела водителя контейнеровоза Иванова в комнате отдыха. Эта комната, по ее словам, находится рядом с помещением склада готовой продукции. Стреляли в складе. Водитель заявил, что он никаких выстрелов не слышал. Вывод следователя: если кассир говорит правду, то водитель вводит следствие в заблуждение; не могут кассир и водитель одновременно говорить правду».

Введем обозначения для высказываний:

**A** = Кассир сказала правду,

**B** = Водитель находился в комнате отдыха,

**C** = Комната отдыха находится вблизи склада,

**D** = Водитель слышал выстрелы,

**E** = Водитель сказал правду.

Посылки следователя:

Если кассир сказала правду, то водитель находился в комнате отдыха —

$$P_1 = A \rightarrow B.$$

Если водитель находился в комнате отдыха, то он должен был слышать все, что делается на складе —

$$P_2 = B \rightarrow C.$$

Если он имел возможность слышать, что делается на складе, то он слышал и выстрелы —

$$P_3 = C \rightarrow D.$$

Если верить водителю, то он не слышал выстрелов —

$$P_4 = E \rightarrow \underline{D}.$$

Заключение следователя:

Водитель обманывает при условии, что кассир говорит правду—

$$C_1 = A \rightarrow \underline{E}.$$

Кассир и водитель одновременно говорят правду —

$$C_2 = A \wedge E.$$

Формальная запись легенды:

$$A \rightarrow B, B \rightarrow C, C \rightarrow D, E \rightarrow \underline{D} \Rightarrow C_1.$$

Доказать истинность следствия  $C_1$  аксиоматическим методом не составит труда. Для этого нужно воспользоваться тождеством:

$$E \rightarrow \underline{D} = D \rightarrow \underline{E},$$

и затем трижды применить закон транзитивности. Заключение  $C_2$  ошибочно, так как

$$A \rightarrow \underline{E} \Rightarrow A \wedge E,$$

что означает

$$\underline{A} \vee \underline{E} \Rightarrow A \wedge E \text{ или } \underline{A \wedge E} \Rightarrow A \wedge E,$$

а это противоречит аксиоме порядка.

Составим таблицу истинности (табл. 1.22), в которой под  $P$  понимается обобщенная причина, т.е. конъюнкция всех  $P_j$ .

Клауза считается *истинной*, если единицы следствия ( $C$ ) *накрывают* все единицы обобщенной причины ( $P$ ), т.е. единицы обобщенной причины образуют подмножество единиц следствия. Это требование выполняется для следствия  $C_1$ , так как

$$P = \{0, 8, 12, 14, 15, 16\} \subset \{0, \dots, 16, \dots\} = C_1,$$

но не для  $C_2$  ( $C_1 = \underline{C_2}$ ), так как

$$P = \{0, 8, 12, 14, 15, 16\} \not\subset \{18, 20, 22, 24, 26, 28, 30\} = C_2.$$

С помощью скорректированной табл. 1.22 нетрудно установить справедливость тавтологии, составленной из этих же посылок, —

$$1 \Rightarrow \underline{P_1}; \underline{P_2}; \underline{P_3}; \underline{P_4}; C_1,$$

и противоречия —

$$P_1, P_2, P_3, P_4, \underline{C_1} \Rightarrow 0,$$

а также любых других клауз, полученных из первоначальной путем эквивалентных преобразований, например:

$$P_2, P_4, \Rightarrow \underline{P_1}; C_1; \underline{P_3}.$$

Если  $C_1$  заменить на  $C_2$ , то во всех указанных случаях условие при-

чинно-следственного отношения нарушится и клаузы обратятся в ложные метавысказывания.

Таблица 1.22

п	A	B	C	D	E	P <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>	P <sub>3</sub>	P <sub>4</sub>	P	C <sub>1</sub>	C <sub>2</sub>	C <sub>3</sub>	C <sub>4</sub>
0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0
2	0	1	0	0	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0
3	1	1	0	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0
4	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1
5	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0
6	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0
7	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0
8	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1
9	1	0	0	1	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0
10	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0
11	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0
12	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1
13	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	1	0	0	1
14	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1
15	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1
16	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1
17	1	0	0	0	1	0	1	1	1	0	0	1	0	0
18	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0
19	1	1	0	0	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0
20	0	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1
21	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0
22	0	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0
23	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	1	0	0
24	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	1
25	1	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0	1	0	0
26	0	1	0	1	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0
27	1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0
28	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	1
29	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	0	0
30	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0
31	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0

Заключения  $C_1$  и  $C_2$ , настолько очевидны, что никакой следователь в этом случае не стал бы прибегать к таблицам истинности. Но трудно найти такого следователя, который только путем одних рассуждений смог бы правильно выбрать из двух нижепредставленных заключений истинное:

*Водитель обманывает, он находился в комнате отдыха, а комната отдыха действительно расположена рядом со складом — все это так, но при условии, что кассир сказала правду или что водитель слышал выстрелы —*

$$C_3 = (A \vee D) \rightarrow (\underline{E} \wedge B \wedge C) .$$

*Водитель обманывает, он слышал выстрелы, а комната отдыха действительно расположена рядом со складом — все это так, но при условии, что кассир сказала правду или что водитель находился в комнате отдыха —*

$$C_4 = (A \vee B) \rightarrow (\underline{E} \wedge D \wedge C) .$$

Единичные наборы для заключений  $C_3$  и  $C_4$  тоже приведены в табл. 1. 22. Для заключения  $C_3$  в строках 8 и 12 стоят нули, следовательно, условие причинно-следственного отношения не выполняется, и поэтому  $C_3$  — ложное заключение. Для заключения  $C_4$  все его единицы накрывают единицы обобщенной посылки  $P$ . Следовательно,  $C_4$  — истинное заключение:

$$P = \{0, 8, 12, 14, 15, 16\} \not\subset \{0, 2, 4, 6, 7, 14, 15, 16, 18, 20, 22\} = C_3,$$

$$P = \{0, 8, 12, 14, 15, 16\} \subset \{0, 4, 8, 12, 13, 14, 15, 16, 20, 24, 28\} = C_4.$$

Истинность заключения тем очевиднее, чем большим числом его единиц накрываются единицы обобщенной причины. Отсюда можно составить объективный критерий для оценки логических способностей человека.

Вообще, опытный логик прежде всего должен построить все совместимые ряды событий. В нашем случае таких рядов 6 (они соответствуют 0, 8, 12, 14, 15, 16 строкам табл. 1. 22). Их объединение даст условия выполнения причинно-следственного отношения:

$$\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}, \underline{D}, \underline{E}; \underline{A}, \underline{B}, \underline{C}, \underline{D}, \underline{E}; \underline{A}, \underline{B}, \underline{C}, \underline{D}, \underline{E};$$

$$\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}, \underline{D}, \underline{E}; \underline{A}, \underline{B}, \underline{C}, \underline{D}, \underline{E}; \underline{A}, \underline{B}, \underline{C}, \underline{D}, \underline{E}$$

Перед нами не что иное, как СДНФ, отвечающая нашей конкретной причине  $P$ . Всевозможные покрытия шести конституент дают множество истинных следствий. Так, заключения —

$$C_1 = \underline{A}; \underline{E}, \quad C_4 = (\underline{A}, \underline{B}); (\underline{C}, \underline{D}, \underline{E}),$$

покрывают все шесть конституент; они — истинные. Что касается двух других заключений —

$$C_2 = A, E, \quad C_3 = (\underline{A}, \underline{D}); (\underline{C}, \underline{B}, \underline{E}),$$

то они не покрывают все или отдельные конституенты, значит являются ложными следствиями.

Не надо знать комбинаторный анализ, чтобы ощутить все многообразие возможных покрытий, т.е. истинных следствий из заданных причин. Однако опытный следователь должен уметь определять три вещи — минимальную нормальную форму (МНФ), минимальное и трансверсальное покрытия.

Ранее было рассмотрено нахождение точных МНФ по известной СДНФ. Минимизируя одним из известных способов нашу СДНФ, получим следующую МНФ:

$$\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}, \underline{D}; \quad \underline{A}, \underline{B}, \underline{D}, \underline{E}; \quad \underline{B}, \underline{C}, \underline{D}, \underline{E};$$

*Минимальное покрытие* — это покрытие с наименьшим числом термов. Мы его уже знаем — это заключение  $C_1$ . В него входят два *решающих* высказывания, связанные с правдивостью кассира ( $A$ ) и правдивостью водителя ( $E$ ). Все остальные утверждения ( $B, C, D$ ) являются *второстепенными* и могут выступать в результирующем заключении совместно с  $A$  и  $E$ .

*Трансверсальное покрытие* должно включать все имеющиеся термы. Для нашего примера существуют четыре таких покрытия:

$$\begin{array}{ll} \underline{A}; \underline{B}, \underline{C}, \underline{D}, \underline{E} & \underline{A}, \underline{B}; \underline{C}, \underline{D}, \underline{E} \\ \underline{A}, \underline{B}, \underline{C}; \underline{D}, \underline{E} & \underline{A}, \underline{B}, \underline{C}, \underline{D}; \underline{E}. \end{array}$$

Как видим, среди выписанных покрытий находится и заключение  $C_4$ , которое мы уже проинтерпретировали в имплицативной форме. Интерпретация заключений через ДНФ может показаться более предпочтительной. Возьмем для примера заключение

$$C_5 = \underline{A}, \underline{B}, \underline{C}; \underline{D}, \underline{E}.$$

Оно предполагает три исхода истинного значения при совместном действии всех пяти факторов:

$$\begin{array}{ll} \underline{A}, \underline{B}, \underline{C} = 1 & \underline{D}, \underline{E} = 0, \\ \underline{A}, \underline{B}, \underline{C} = 0 & \underline{D}, \underline{E} = 1, \\ \underline{A}, \underline{B}, \underline{C} = 1 & \underline{D}, \underline{E} = 1. \end{array}$$

Именно трансверсальные покрытия дают наиболее полную картину возможных следствий из сформулированных посылок.

### Метод резолюций

Рассмотрим еще один *полуконструктивный* метод доказательства истинности логических клауз, в котором используется так называемый *принцип резолюций*. Этот принцип играет роль *аксиомы порядка* и вместе с тем порождает очень эффективную *конструктивную процедуру*. Суть его сводится к тому, что два посылочных дизъюнк-



та с противоположными термами всегда можно склеить в один дизъюнкт, в котором уже не будет противоположных термов:

$$X \vee A, Y \vee \underline{A} \Rightarrow X \vee Y,$$

где  $X$  и  $Y$  — произвольные термы или целые дизъюнкты с любым набором термов, включая ноль;  $A$  и  $\underline{A}$  — произвольные термы.

При последовательном применении принципа резолюций происходит уменьшение числа букв, вплоть до их полного исчезновения. Исходную клаузу возьмем в форме *конъюнктивного противоречия*:

$$P_1, P_2, \dots, P_n \Rightarrow 0.$$

Докажем справедливость *правила отделения*:

$$A, A \rightarrow B \Rightarrow B \text{ или } 0 \vee A, \underline{A} \vee B, \underline{B} \vee 0 \Rightarrow 0.$$

Здесь три дизъюнкта. Склеивая их последовательно, получаем в результате ноль, который говорит о несовместимости заключения и посылок. Это свидетельствует о справедливости исходной клаузы.

*Принцип резолюций* целиком заменяет *аксиому порядка*, поскольку сама эта аксиома может быть доказана в рамках метода резолюций. Действительно,

$$A, B \Rightarrow A, \quad A, B, \underline{A} \Rightarrow 0, \quad 0, B \Rightarrow 0.$$

Обращаем внимание на то, что посылка  $B$  здесь вообще не используется. Это необходимо иметь в виду: необязательно использовать все посылки (их число часто бывает избыточным) — главное получить ноль. Пусть дана клауза:

$$\underline{A} \rightarrow B, C \vee A, B \rightarrow \underline{C} \Rightarrow A.$$

Доказательство ее справедливости следует начать с приведения ее в *нормальную конъюнктивную форму*:

$$A \vee B, C \vee A, \underline{B} \vee \underline{C}, \underline{A} \Rightarrow 0.$$

Выпишем по порядку все посылки и далее начнем их склеивать (справа от дизъюнкта записаны номера используемых дизъюнктов):

- |   |                       |       |
|---|-----------------------|-------|
| 1. $A \vee B$ ,                         | 8. $C$ ,              | (2,4) |
| 2. $C \vee A$ ,                         | 9. $A$ ,              | (2,5) |
| 3. $\underline{B} \vee \underline{C}$ , | 10. $\underline{C}$ , | (3,6) |
| 4. $\underline{A}$ ,                    | 11. $\underline{B}$ , | (3,8) |
| 5. $A \vee \underline{C}$ ,             | 12. $\underline{C}$ , | (4,5) |
| 6. $B$ ,                                | 13. $\underline{B}$ , | (4,7) |
| 7. $A \vee \underline{B}$ ,             | 14. $0$ .             | (4,9) |

Подобная стратегия поиска нуля очень непродуктивна. Если к этой же задаче подойти более творчески, то ноль обнаружится на четвертом шаге от начала поиска:

5. **B** (1,4), 6. **C** (2,4), 7. **B** (3,6), 8. **0** (5,7).

До сих пор мы говорили о форме *конъюнктивного противоречия*. Исходя из *принципа двойственности*, метод резолюций можно сформулировать относительно *дизъюнктивной тавтологии*, при этом принцип резолюций, естественно, изменится:

$$X \wedge Y \Rightarrow X \wedge A; Y \wedge \underline{A}.$$

Докажем одну и ту же клаузу двумя способами — в форме противоречия и форме тавтологии. Пусть дана клауза:

$$A, A \rightarrow B, B \rightarrow (A \rightarrow C) \Rightarrow C.$$

Доказательство в форме противоречия выглядит так:

$$A, \underline{A} \vee B, \underline{B} \vee \underline{A} \vee C, \underline{C} \Rightarrow 0.$$

1    2            3            4

Склейки: 5. **B** (1,2), 6. **A**  $\vee$  **C** (1,6), 7. **C** (3,5), 8. **0** (4,7).

Доказательство в форме тавтологии выглядит аналогично:

$$1 \Rightarrow \underline{A}; A \wedge \underline{B}; B \wedge A \wedge \underline{C}; C.$$

1    2            3            4

Склейки: 5. **B** (1,2), 6. **A**  $\wedge$  **C** (1,6), 7. **C** (3,5), 8. **1** (4,7).

Метод резолюций легко поддается *алгоритмизации*. Это позволяет использовать его в логических языках программирования и, в частности, в ПРОЛОГЕ. Алгоритм склеек образует структуру древовидной формы (рис. 1.19) для следующей клаузы:

$$S \vee \underline{R} \vee P, \underline{S} \vee Q \vee R, \underline{P} \vee \underline{S} \vee R, \underline{R} \vee \underline{S} \vee P, R \vee Q \vee S, S \vee Q \vee \underline{R}, \\ \underline{P} \vee S \vee Q, P \vee Q \vee R, S \vee \underline{P} \vee R, \underline{P} \vee \underline{S} \vee R, \underline{R} \vee \underline{S} \vee Q \Rightarrow 0.$$

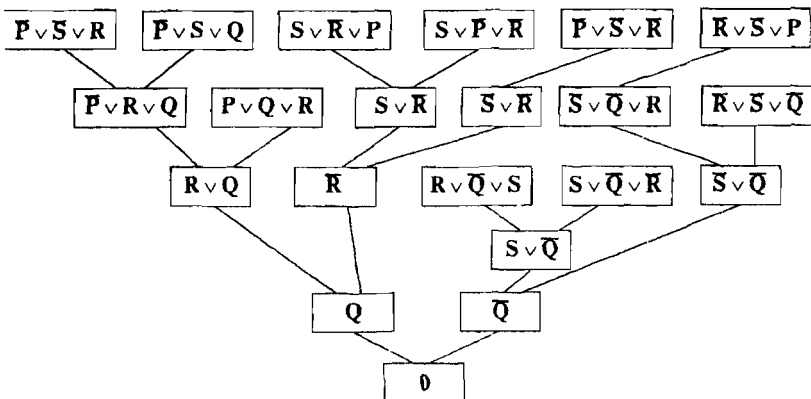


Рис. 1.19

### Метод Вонга

Близким к методу резолюций является *метод Вонга*, в котором тоже используется сконструированная *конъюнктивно-дизъюнктивная нормальная форма* представления исходной клаузы, а *аксиому порядка* заменяет *клауза Вонга*:

$$X, L \Rightarrow X; R,$$

здесь  $X$  пробегает некоторые буквы, входящие в клаузу, а  $L$  и  $R$  — определенные комбинации дизъюнктов и конъюнктов.

*Конструктивная* процедура доказательства сводится к последовательной разбивке дизъюнктов или конъюнктов таким образом, чтобы слева и справа от метаимпликации появилась одна и та же буква  $X$ . Если в результате такой разбивки все конечные клаузы приобретают вид клаузы Вонга, то и исходная клауза была составлена верно. Разберем метод Вонга на примере доказательства справедливости *правила отделения*:

$$A, A \rightarrow B \Rightarrow B \text{ или } A, \underline{A} \vee B \Rightarrow B.$$

Здесь имеется только один дизъюнкт, который можно разбить на две новых клаузы:

$$A, \underline{A} \Rightarrow B \text{ и } A, B \Rightarrow B.$$

Вторая клауза удовлетворяет и аксиоме порядка и клаузе Вонга. В качестве  $X$  в ней выступает  $B$ , а  $L = A$  и  $R = 0$ . Первая же клауза тоже будет удовлетворять необходимым требованиям, но только после того, как терм  $\underline{A}$  из левой части клаузы с противоположным знаком перенести в правую часть. Тогда будем иметь:

$$A \Rightarrow A; B \text{ где } X = A, L = 1 \text{ и } R = B.$$

При большом числе букв в исходной клаузе прибегают к специальной нумерации производных клауз, чтобы не запутаться. Пусть требуется установить справедливость следующей клаузы:

$$X \vee Y, (X \rightarrow Y) \vee U, Z \rightarrow (Y \rightarrow W) \Rightarrow (W \rightarrow X) \rightarrow (Z \rightarrow X).$$

Приведем ее в соответствующую конъюнктивно-дизъюнктивную нормальную форму:

$$X \vee Y, \underline{X} \vee Y \vee U, \underline{Z} \vee \underline{Y} \vee W \Rightarrow W \wedge \underline{X}; \underline{Z}; X.$$

Далее разобьем первый дизъюнкт, в результате получим две производные клаузы:

$$1. X, \underline{X} \vee Y \vee U, \underline{Z} \vee \underline{Y} \vee W \Rightarrow W \wedge \underline{X}; \underline{Z}; X,$$

$$2. Y, \underline{X} \vee Y \vee U, \underline{Z} \vee \underline{Y} \vee W \Rightarrow W \wedge \underline{X}; \underline{Z}; X.$$

Клауза (1) отбрасывается, так как она удовлетворяет клаузе Вонга. Разбивая дизъюнкт клаузы (2), получаем еще три клаузы:

$$2.1. Y, \underline{X}, \underline{Z} \vee \underline{Y} \vee W \Rightarrow W \wedge \underline{X}; \underline{Z}; X,$$

$$2.2. Y, Y, \underline{Z} \vee \underline{Y} \vee W \Rightarrow W \wedge \underline{X}; \underline{Z}; X,$$

$$2.3. Y, U, \underline{Z} \vee \underline{Y} \vee W \Rightarrow W \wedge \underline{X}; \underline{Z}; X.$$

Клаузы (2.1) и (2.2) сводятся к одной клаузе —

$$2.1. Y, \underline{Z} \vee \underline{Y} \vee W \Rightarrow W \wedge \underline{X}; \underline{Z}; X.$$

Разобьем ее:

$$2.1.1. Y, \underline{Z} \Rightarrow W \wedge \underline{X}; \underline{Z}; X,$$

$$2.1.2. Y, \underline{Y} \Rightarrow W \wedge \underline{X}; \underline{Z}; X,$$

$$2.1.3. Y, W \Rightarrow W \wedge \underline{X}; \underline{Z}; X.$$

Первые две клаузы удовлетворяют клаузе Вонга. У клаузы (2.1.3) нужно разбивать конъюнкт:

$$2.1.3.1. Y, W \Rightarrow W; \underline{Z}; X,$$

$$2.1.3.2. Y, W \Rightarrow \underline{X}; \underline{Z}; X.$$

Теперь обе клаузы имеют вид клаузы Вонга.

Но у нас осталась еще ветвь (2.3). Она отличается от рассмотренной ветви (2.1) наличием непарного терма  $U$ , который, однако, не может повлиять на конечный результат, т.е. разбиение клаузы (2.3) практически полностью совпадает с разбиением клаузы (2.1). Следовательно, исходная клауза была записана верно.

### Метод натурального исчисления (метод Генцена)

Недостатком метода Вонга, как и метода резолюций, является то, что исходная клауза обязательно должна иметь нормальную дизъюнктивную или конъюнктивную форму. Этот недостаток преодолен в *методе натурального исчисления*, к которому мы переходим.

Доказательный вывод в натуральном исчислении строится как упорядоченная цепь преобразований, связанных с удалением или введением логических связок на основе следующих десяти правил:

1) правило введения конъюнкции (ВК) —

$$(\Rightarrow A) \& (\Rightarrow B) // \Rightarrow A \wedge B;$$

2) правило удаления конъюнкции (УК) —

$$\Rightarrow A \wedge B // \Rightarrow A;$$

3) правило введения импликации (ВИ) —

- $$\Rightarrow B // \Rightarrow A \rightarrow B, A \Rightarrow B // \Rightarrow A \rightarrow B;$$
- 4) правило удаления импликации (УИ) —  
 $(\Rightarrow A) \& (\Rightarrow A \rightarrow B) // \Rightarrow B, \Rightarrow A \rightarrow B // A \Rightarrow B;$
- 5) правило введения дизъюнкции (ВД) —  
 $\Rightarrow A // \Rightarrow A \vee B;$
- 6) правило удаления дизъюнкции (УД) —  
 $(\Rightarrow A \vee B) \& (A \Rightarrow C) \& (B \Rightarrow C) // \Rightarrow C;$
- 7) правило введения отрицания (ВО) —  
 $A, B \Rightarrow 0 // A \Rightarrow \underline{B};$
- 8) правила удаления отрицания (УО) —  
 $(A \Rightarrow \underline{B}) \& (A \Rightarrow B) // A \Rightarrow 0;$
- 9) правило введения эквивалентности (ВЭ) —  
 $(A \Rightarrow B) \& (B \Rightarrow A) // \Rightarrow A \sim B;$
- 10) правило удаления эквивалентности (УЭ) —  
 $\Rightarrow A \sim B // (A \Rightarrow B) \& (B \Rightarrow A).$

Эти правила надо понимать так: если слева от символа «//» стоят истинные клаузы, то справа от символа «//» тоже будут стоять истинные клаузы. Например, первое правило *введения конъюнкции* можно прочесть следующим образом: если высказывания **A** и **B** (связка «и» передается знаком «&») порознь истинны (о чем говорят рядом стоящие с этими буквами символы метаимпликации « $\Rightarrow$ »), то будет истинной и их конъюнкция  $A \wedge B$ . При этом надо помнить, что во всех десяти правилах перед символом метаимпликации « $\Rightarrow$ » может стоять любой перечень посылок **P**. Так, десятое правило может выглядеть следующим образом:

$$P \Rightarrow A \sim B // (P, A \Rightarrow B) \& (P, B \Rightarrow A).$$

Кроме перечисленных десяти правил, имеется еще одно — *базовое правило* (БП), которое сначала сформулируем словами: во-первых, любая посылка может выступать в роли следствия, т.е.

$$A, B, C \Rightarrow A, \quad A, B, C \Rightarrow B \quad \text{и} \quad A, B, C \Rightarrow C,$$

будут всегда истинными и не требуют доказательства, так как удовлетворяют *аксиоме порядка*; во-вторых, в перечень посылок истинной клаузы всегда можно добавить новые посылки, т.е. если клауза

$$A, B, C \Rightarrow X$$

верна, то будут истинными и все клаузы, построенные на ее основе:

$$A, B, C, D \Rightarrow X, \quad A, B, C, \dots \Rightarrow X.$$

В обобщенной форме базовое правило можно записать так:

$$P \Rightarrow X // P, Y \Rightarrow X,$$

где  $X$  — любая посылка из  $P$ , а  $Y$  — произвольная посылка.

Действенность метода натурального исчисления продемонстрируем на примере следующей тавтологии:

$$1 \Rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \underline{B}) \rightarrow \underline{A}).$$

Доказательство:

1.  $A, A \rightarrow B \Rightarrow B$ , (УИ)
2.  $A, A \rightarrow \underline{B} \Rightarrow \underline{B}$ , (УИ)
3.  $A, A \rightarrow B, A \rightarrow \underline{B} \Rightarrow B$ , (1, БП)
4.  $A, A \rightarrow \underline{B}, A \rightarrow B \Rightarrow \underline{B}$ , (2, БП)
5.  $A, A \rightarrow B, A \rightarrow \underline{B} \Rightarrow 0$ , (3, 4, УО)
6.  $A \rightarrow B, A \rightarrow \underline{B} \Rightarrow \underline{A}$ , (5, ВО)
7.  $A \rightarrow B \Rightarrow (A \rightarrow \underline{B}) \rightarrow \underline{A}$ , (6, ВИ)
8.  $1 \Rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \underline{B}) \rightarrow \underline{A})$ . (7, ВИ)

Справа в круглых скобках указан номер строки, из которой получена данная клауза, а также начальные буквы используемого правила. Приведем доказательство еще одной клаузы:

$$1 \Rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow ((C \rightarrow D) \rightarrow ((A \vee C) \rightarrow (B \vee D))).$$

Доказательство:

1.  $A \rightarrow B \Rightarrow (C \rightarrow D) \rightarrow ((A \vee C) \rightarrow (B \vee D))$ , (УИ)
2.  $A \rightarrow B, C \rightarrow D \Rightarrow (A \vee C) \rightarrow (B \vee D)$ , (1, УИ)
3.  $A \rightarrow B, C \rightarrow D, A \vee C \Rightarrow B \vee D$ , (2, УИ)
4.  $P_1, P_2, P_3 \Rightarrow B \vee D$ , (3)
5.  $P \Rightarrow A \rightarrow B$ , ( $P_1$ , БП)
6.  $P, A \Rightarrow B$ , (5, УИ)
7.  $P, A \Rightarrow B \vee D$ , (6, ВД)
8.  $P \Rightarrow C \rightarrow D$ , ( $P_2$ , БП)
9.  $P, C \Rightarrow D$ , (8, УИ)
10.  $P, C \Rightarrow D \vee B$ , (9, ВД)
11.  $P \Rightarrow A \vee C$ , ( $P_3$ , БП)
12.  $P \Rightarrow B \vee D$ . (7, 10, 11, УД)

### Практические задания по логике высказываний

1. Ниже приведены по три клаузы в одном варианте. Каждую клаузу необходимо доказать следующими методами: аксиоматическим, натурального исчисления, резолюций и Вонга.

1.

$$(A \rightarrow C) \rightarrow (\underline{A} \wedge B) \Rightarrow A \vee B,$$

$$A \vee D, B \vee E, D \rightarrow C, D \vee C \Rightarrow A \wedge C; E \wedge D; B,$$

$$A \rightarrow B, C \rightarrow D, A \vee C, A \rightarrow \underline{D}, C \rightarrow \underline{B} \Rightarrow (A \vee B) \rightarrow (A \wedge B).$$

2.

$$C \rightarrow A, B \vee C, B \rightarrow D, D \rightarrow A \Rightarrow A,$$

$$D \rightarrow E, E \rightarrow C, A \sim D, B \sim C \Rightarrow A \rightarrow B,$$

$$A \vee B, A \rightarrow B, B \rightarrow (C \rightarrow \underline{D}), A \rightarrow D \Rightarrow \underline{A \wedge C}.$$

3.

$$(A \wedge B) \rightarrow C \Rightarrow A \rightarrow (B \rightarrow C),$$

$$A \rightarrow (B \rightarrow C), (C \wedge D) \rightarrow E, \underline{F} \rightarrow (D \wedge \underline{E}) \Rightarrow A \rightarrow (B \rightarrow F),$$

$$(A \wedge (B \rightarrow C)) \sim D, E \sim (A \wedge (\underline{B \vee C})) \Rightarrow (D \wedge \underline{E}) \sim (A \wedge C).$$

4.

$$A \rightarrow (B \rightarrow \underline{C}), \underline{A} \rightarrow B, \underline{A} \rightarrow (\underline{B} \rightarrow C) \Rightarrow C; B,$$

$$A, \underline{B} \rightarrow (A \rightarrow D), C \rightarrow (B \rightarrow E), D \rightarrow (E \vee \underline{C}) \Rightarrow C \rightarrow E,$$

$$\underline{C}, D \rightarrow C, A \rightarrow (\underline{B} \rightarrow D), B \Rightarrow A \rightarrow C.$$

5.

$$(A \vee C) \sim (\underline{B \vee D}) \Rightarrow \underline{A} \sim B; \underline{C} \sim D,$$

$$A \rightarrow B, C \rightarrow D, B \rightarrow E, D \rightarrow F, \underline{E \wedge F}, A \rightarrow C \Rightarrow \underline{A},$$

$$C \rightarrow (B \rightarrow A), \underline{B} \rightarrow D, C \Rightarrow A \vee D.$$

6.

$$\underline{C}, A \vee B \Rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow A,$$

$$A \rightarrow C, D \rightarrow F, B \rightarrow E, \underline{D} \rightarrow \underline{C}, A \rightarrow B \Rightarrow A \rightarrow (E \wedge F),$$

$$A, B \vee C, C \sim D \Rightarrow (B \rightarrow \underline{A}) \rightarrow (B \rightarrow D).$$

7.

$$A \rightarrow (C \rightarrow B), D \rightarrow A, C \Rightarrow D \rightarrow B,$$

$$E \rightarrow F, C \rightarrow (D \rightarrow E), (A \rightarrow B) \rightarrow C \Rightarrow \underline{D} \rightarrow (A \vee F),$$

$$\underline{A} \sim B, B \rightarrow C, \underline{C} \sim D \Rightarrow (C \rightarrow B) \rightarrow (D \rightarrow A).$$

8.

$$\begin{aligned} & A \sim B, C \sim D \Rightarrow (A \vee C) \sim (B \vee D), \\ & A \rightarrow (B \rightarrow C), C \rightarrow (B \rightarrow \underline{A}), D \rightarrow A, A \rightarrow B \Rightarrow \underline{D}, \\ & A \rightarrow B, B \rightarrow D, D \rightarrow A, B \vee C, C \rightarrow D \Rightarrow D. \end{aligned}$$

9.

$$\begin{aligned} & A, B \vee C \Rightarrow A \wedge B; C, \\ & C, (A \rightarrow B) \rightarrow (C \rightarrow A) \Rightarrow A, \\ & A \rightarrow (B \vee C), B \rightarrow (D \rightarrow A), C \rightarrow (B \rightarrow A), A \rightarrow (B \rightarrow C), \\ & D \rightarrow (A \vee B), D \rightarrow (A \rightarrow B), C \rightarrow (B \vee D), A \vee C \vee D, \\ & C \rightarrow (A \rightarrow B) \Rightarrow A \wedge B \wedge C; A \wedge B \wedge D. \end{aligned}$$

10.

$$\begin{aligned} & A, B \rightarrow C \Rightarrow A \wedge \underline{B}; B \wedge C, \\ & A \rightarrow (B \wedge C), \underline{B} \vee D, (E \rightarrow \underline{F}) \rightarrow \underline{D}, \underline{B} \vee (A \wedge \underline{E}) \Rightarrow B \rightarrow E, \\ & A \vee B, A \vee C, A \rightarrow C, C \rightarrow (A \rightarrow D) \Rightarrow B \vee D. \end{aligned}$$

11.

$$\begin{aligned} & A, B \rightarrow C \Rightarrow (A \rightarrow \underline{C}) \rightarrow \underline{B}, \\ & A \rightarrow B, A \sim D, C \sim E \Rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow (D \rightarrow E), \\ & A \rightarrow (C \rightarrow B), D \rightarrow A, C \Rightarrow D \rightarrow B. \end{aligned}$$

12.

$$\begin{aligned} & A \rightarrow (B \rightarrow C), A \rightarrow (B \vee C) \Rightarrow A \rightarrow C, \\ & A \sim \underline{B}, A \vee C, \underline{C} \wedge \underline{E}, B \rightarrow C, B \vee D, A \rightarrow E \Rightarrow D \sim E; \underline{C} \wedge \underline{D}, \\ & A, D \rightarrow C, B \vee (A \rightarrow D), B \rightarrow C \Rightarrow C. \end{aligned}$$

13.

$$\begin{aligned} & A \sim B, C \sim D \Rightarrow (A \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow D), \\ & A \vee C, C \rightarrow D, \underline{A} \wedge \underline{D}, \underline{B} \wedge \underline{C}, A \rightarrow B, A \vee B \Rightarrow A \wedge B, \\ & E \rightarrow D, C \vee E, A \vee D, D \rightarrow \underline{B} \Rightarrow C \wedge D; (E \wedge B) \rightarrow (E \rightarrow A). \end{aligned}$$

14.

$$\begin{aligned} & A, B \rightarrow C \Rightarrow A \wedge \underline{B}; B \wedge C, \\ & C \rightarrow (D \rightarrow E), E \rightarrow F \Rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow (D \rightarrow (\underline{A} \rightarrow F)), \\ & A \rightarrow B, A \sim C, D \sim E \Rightarrow (B \rightarrow D) \rightarrow (C \rightarrow E). \end{aligned}$$

15.

$$\begin{aligned} & (\underline{A} \vee \underline{C}) \sim (B \vee D), \underline{A} \sim B \Rightarrow C \rightarrow \underline{D}, \\ & A \rightarrow (B \vee C), A \vee B, B \rightarrow A, B \rightarrow D \Rightarrow C \vee D, \end{aligned}$$



$$E \rightarrow D, C \vee E, A \vee D, D \rightarrow B, E \Rightarrow A; B \wedge E; C \wedge D,$$

16.

$$A \rightarrow B, B \vee C, C \rightarrow A, B \rightarrow C \Rightarrow A \wedge B,$$

$$E \rightarrow D, E \sim C, C \sim A, D \sim B \Rightarrow A \rightarrow B,$$

$$A \vee B, B \sim C, C, D, A \sim D \Rightarrow A \wedge B.$$

17.

$$A \rightarrow B, A \vee C, C \rightarrow B, D \rightarrow A \Rightarrow (B \rightarrow D) \rightarrow B,$$

$$\underline{D}, E \Rightarrow ((A \wedge B) \rightarrow C) \sim \underline{D}; E \sim (A \wedge (B \rightarrow C)),$$

$$A \vee (B \rightarrow C), C \rightarrow (B \rightarrow A), A \rightarrow D \Rightarrow (A \vee B) \rightarrow D.$$

18.

$$(\underline{A} \rightarrow C) \sim (B \rightarrow D) \Rightarrow A \sim \underline{B}; \underline{C} \sim D,$$

$$C \rightarrow (A \vee B), D \rightarrow (B \vee C) \Rightarrow A \vee B; \underline{D},$$

$$A \rightarrow D, A \vee C, D \vee E, D \rightarrow B \Rightarrow (A \wedge B) \rightarrow (A \rightarrow E); C \wedge D.$$

19.

$$A \vee C, A \rightarrow B, C \rightarrow B \Rightarrow A \wedge B; B \wedge C,$$

$$A \rightarrow B, A \rightarrow C, D \sim E, D \rightarrow A, E \rightarrow A, B \rightarrow E, C \rightarrow D \Rightarrow B \sim C,$$

$$C \rightarrow (B \rightarrow A), C \vee D, D \rightarrow B, B \vee D \Rightarrow (D \rightarrow C) \rightarrow A.$$

20.

$$A, B \vee C \Rightarrow A \wedge C; B \wedge \underline{C},$$

$$A \rightarrow B, C \rightarrow D, (B \wedge D) \rightarrow E, E, A \Rightarrow \underline{C},$$

$$A \rightarrow (B \rightarrow C), B \vee C \vee D \Rightarrow (A \rightarrow C) \vee D.$$

21.

$$A \vee B, A \rightarrow C \Rightarrow \underline{A} \wedge B; C,$$

$$(A \rightarrow B) \rightarrow (C \rightarrow D), (D \rightarrow F) \rightarrow E \Rightarrow A \vee E,$$

$$A \vee C, C \rightarrow \underline{D}, A \rightarrow D, B \vee C \Rightarrow D \rightarrow (B \wedge D).$$

22.

$$A \vee B, C \rightarrow B, B \rightarrow A, A \rightarrow C \Rightarrow B \wedge C,$$

$$A \rightarrow C, \underline{B} \sim C, B \vee D, B \rightarrow A \Rightarrow D; A \wedge C,$$

$$A \vee B, D \vee E, D \vee C, D \rightarrow C \Rightarrow A \wedge D; B; C \wedge E.$$

23.

$$A \rightarrow C, A \vee B, B \rightarrow D, D \rightarrow C \Rightarrow C,$$

$$B \vee D, D \rightarrow B, C \vee D, D \rightarrow C, C \rightarrow (B \rightarrow A) \Rightarrow A,$$

$$A \rightarrow B, A \vee D, C \vee E, E \rightarrow A \Rightarrow (B \wedge E) \rightarrow (E \rightarrow D); A \wedge C.$$

24.

$$(A \wedge B) \vee (C \wedge D), \underline{A} \Rightarrow C,$$

$$C \rightarrow A \Rightarrow ((A \wedge B) \vee C) \sim (A \wedge (B \vee C)),$$

$$D \rightarrow F, A \rightarrow (E \rightarrow D), (C \rightarrow B) \rightarrow A \Rightarrow E \rightarrow (C \vee F).$$

2. По вашему выбору для двух из трех клауз составьте легенды.

3. Ниже приведены легенды. Запишите с использованием 4—6 различных букв клаузу, отвечающую содержанию легенды, для чего сформулируйте необходимые посылки и два следствия: одно истинное, другое ложное. С помощью таблицы истинности найдите МНФ, минимальное и все трансверсальные покрытия.

1. В одной старой легенде рассказывается, что греческий драматург Софокл погиб при очень странных обстоятельствах. На его лысый череп орел сбросил камень, приняв его за яйцо. Если бы Софокл не сочинял трагедии, то он не уединялся бы в горах и остался бы жить до своей естественной кончины. Он мог бы сочинять свои трагедии в горах при наличии волос на голове или при отсутствии там этих странных птиц.

2. «Ты меня уважаешь?» – «Да». – «Тогда дай мне денег». – «Дав тебе денег, я перестану тебя уважать». – «Разве ты меня уважаешь из-за денег?» – «Нет, как художника». – «Ну, тогда тем более ты должен дать их мне». – «Я даю деньги тем, у кого они в принципе водятся. Ты же мне долг не вернешь». – «Я открою свое дело. Через год у меня будет состояние. Займи под проценты». – «Я тебе не верю, но помогу организовать выставку твоих картин». – «Хорошо, идет».

3. Современный футбол – это надежная защита, хорошая скорость, напористая атака и убедительная результативность. Матвеев мне результативность обеспечит, но голы он забивает только по вдохновению, когда складывается игра. Без Федотова такой игры не получится. Он видит поле, чувствует, где надо находиться, но бегать не может. Скорость команде сообщит Комаров, хотя он может развалить всю защиту. Попробовать Петрова в обороне, но в паре с Матвеевым он не играет. Квасов умеет блокировать бомбардиров противника, но левой у него не получается. Надо ставить Земерова, чтобы левый край прикрыл. Однако Земеров точный пас отдать не может. Нет команды! Завтра точно проиграем встречу.

4. Мотоцикл я сначала не заметил, так как его заслонил бензовоз, а «Волга» вывернула из-за угла, когда «Жигули» были уже вблизи светофора. Иномарка проскочила на красный свет и явилась, как мне кажется, причиной этой аварии. Из-за нее «Волга» резко затормозила и мотоциклист оказался на асфальте. «Жигули», чтобы не задавить мотоциклиста, свернули на тротуар, а бензовоз в это время врезался в «Волгу». Если бы не было мотоцикла, то опасной ситуации тоже могло и не быть. Хотя виноват и водитель «Волги», поскольку он явно превысил скорость.

5. Если облака – это горы в небе и горы – это облака на земле, то гроза – это вулкан на небе и вулкан – это гроза на земле. Вулкан извергает пепел, а гроза – воду. Вулканический пепел и дождевая вода одинаково хорошо сказываются на урожайности полей. Урожай – это благо. Все благо – от Бога. Значит, пепел и вода, вулкан и гроза, горы и облака – от Бога.

6. «Я вижу, у Вас поднялось давление». – «Это последствие рыбалки, доктор». – «Рыбалка, напротив, должна успокаивать и укреплять здоровье». – «Верно, доктор, но я переволновался, так как ловил рыбу в запрещенном месте». – «Ай-ай-ай! Зачем же Вы на это пошли?» – «Там, где разрешено, доктор, рыбы нет». – «В таком случае, рыбы много в магазине. Я же Вам прописал отдых на свежем воздухе». – «Хорошо, доктор, тогда завтра я пойду охотиться». – «Только, пожалуйста, голубчик, не стреляйте в зоопарке».

7. Ваня и Петя – братья-близнецы. Ваня с огромной скоростью улетел на ракете в космос, а Петя остался на неподвижной Земле. Теория относительности утверждает, что если лететь на большой скорости, то время замедляется, поэтому Петя состарится, а Ваня – нет. Эта же теория учит, что движение относительно: если Ваня движется относительно Пети, то Петя движется относительно Вани. Однако по теории почему-то именно Ваня, вернувшись из полета, будет моложе Пети. Вывод: теория относительности не свободна от противоречий.

8. Если усложнить схему устройства, то возрастет его производительность, а если использовать новую элементную базу, то увеличится период эксплуатации. Устройство начнут хорошо раскупать только при одновременном росте его производительности и периода эксплуатации. Но устройство не пользуется спросом.

9. Увеличение денег в обращении влечет за собой инфляцию. Но

рост денежной массы происходит по двум причинам: из-за денежной эмиссии или снижения товарооборота. Снижение товарооборота приводит к безработице и спаду производства. Из-за инфляции падает курс денежной единицы. Рекомендации экономиста Иванова: увеличить денежную эмиссию и поднять производство, тогда избежим безработицы и курс денежной единицы останется неизменным.

10. «Что собираешься делать, честолюбивый полководец?» – «Хочу завоевать Африку, мудрый философ». – «Предположим, Африку ты завоевал. Что дальше будешь делать?» – «Пойду походом на Индию». – «Допустим, и Индию ты покорил. Что потом?» – «Потом я уединюсь в своем саду и стану наслаждаться чтением книг. Хочу быть таким же мудрым, как ты, философ». – «Почему бы тебе сразу же не отправиться в сад и не приняться за книги?» – «Так ведь ни Африки, ни Индии я еще не завоевал». – «Да, ты прав, полководец. Я рассуждаю немудро, поскольку не учитываю твое сегодняшнее честолюбие».

11. Чтобы сварить щи, нужны: капуста, свекла, картофель, лук, морковь и томаты. Свеклы и капусты в нашем магазине не оказалось. Все остальное я купила. Однако щи уже не получаются. Хорошо, тогда куплю огурцы и сметану, сделаю салат из огурцов, томатов и лука. Поджарю котлетки, отварю картошечку – второе у меня есть. Что приготовить на первое? Пожалуй, на говяжьих косточках неплоха будет домашняя лапша. А морковку я сейчас помою и отдам детям – пусть червячка заморят.

12. Любой марксист – диалектик, но не всякий диалектик – марксист. Любой марксист – материалист, но не всякий материалист – марксист. Гегель был диалектик, но не материалист. Фейербах был материалист, но не диалектик. Итак, если бы Гегель и Фейербах могли объединиться в один кружок, то Маркс уже не понадобился бы.

13. Преступник изготовит партию фальшивых денег, если у него будут соответствующие материалы и станок. Эти два условия, к сожалению, выполняются. Однако фальшивые деньги не появятся, если хорошо работает милиция. Милиция же работает хорошо тогда и только тогда, когда каждый милиционер получает высокую зарплату. Увы, пока такой зарплаты нет, но есть высокая сознательность всех работников милиции.

14. «Надо завести собаку», — сказал старик. «Она не даст жить моей кошечке», — сказала старуха. «Если не будет собаки, то я не смогу результативно охотиться и приносить в дом дичь». — «А если не будет моей кошечки, то в доме разведутся мыши, которые уничтожат все наши продовольственные запасы». — «Согласен, старуха. Давай собаку я заведу, но держать ее буду во дворе». — «Кошечку во двор я пускать не буду».

15. Существуют две теории возникновения человека на земле — теория эволюции Дарвина и теория сотворения человека Господом Богом. Если справедлива теория эволюции, то самопроизвольное возникновение человека без соответствующих превращений живых организмов невозможно. Как доказали ученые, такие превращения действительно имели место. По теории же сотворения, человек был слеплен из простой глины, а жизнь в него вдохнул Господь. Глины всегда было много, а насчет дыхания Бога тоже сомневаться не приходится, поскольку есть на то свидетельство Библии. Отсюда вывод — две названные теории друг другу не противоречат.

16. Человек, который решил свести счеты с жизнью, вряд ли будет за час до этого просматривать статистические данные по зерну за прошлый год. Сломанная герань только подчеркивает кем-то хорошо скрытые следы борьбы и насилия. Очень, конечно, странно, что дверь оказалась заперта изнутри, а вахтер ничего не заметил. Как же преступнику удалось выйти из помещения? И каковы, собственно, мотивы преступления? Такой тихий, скромный человек, ничего, кроме семьи и работы, его не интересовало. Правда, жена сообщила, что она вчера вечером видела его в обществе двух подозрительных молодых людей. Да и вахтер утверждал, что примерно в течение получаса отлучался для обхода территории. Тем не менее, не хватает какого-то звена в этой загадочной цепи событий, чтобы уверенно сказать — «самоубийство» кем-то старательно инсценировано.

17. Из утверждения «два плюс два равно пяти» следует, что я и папа римский — одно и то же лицо. В самом деле, если от обеих частей указанного равенства отнять по двойке, то будет справедливо равенство «два равно трем». Если от обеих частей нового равенства отнять по единице, то будет справедливо равенство — «один равен двум». Один — это я, а двойка — это я и папа римский. Поскольку верно, что «один равен двум», то я и есть папа римский.

18. «Хочешь яблоко?» – «Яблоки я не ем после рыбы, а рыбу я не ем после борща. Борщ я сегодня не ел, но съел немного горохового супа. После него я съел кусочек жареного хека. Если я ем гороховый суп, то в этот день уже не буду отказываться от яблок, но при условии, что к столу не подавали салат. Итак, давай сюда яблоко».

19. Слепой и глухой пошли погулять. «Смотри, вдали озеро, значит, напьемся», – сказал глухой. «Ага», – сказал слепой. «Послушай, гремит гром, значит дождь собирается», – сказал слепой. «Ага», – сказал глухой. Глухой и слепой набрали воды и достали плащи. Все это видел и слышал немой. «Я им не компания», – подумал немой.

20. Сегодня посмотрю футбол, если трамвай не задержится. Трамвай не опоздал, но случилась другая беда: у меня не оказалось денег на билет. Рискну доехать «зайцем». В салоне оказался контролер, и я лихорадочно стал рыться по карманам. К моему счастью, нашелся один неиспользованный трамвайный талон. До компостера я добрался вовремя, хотя футбольный матч я так и не увидел: вместе с деньгами я дома оставил и билет на матч.

21. Если в одном месте что-то убудет, то в другом месте что-то прибудет – это истина, не требующая доказательства. Но есть такая теория, которая утверждает: где-то в далеком космосе существуют «черные дыры», куда все проваливается, но оттуда ничего не появляется. Эта теория ничего не говорит о существовании «белых дыр», которые действовали бы противоположно «черным». Один иностранный астрономический журнал сообщил координаты «черной дыры». Российский астроном Иванов направил туда свой мощный телескоп и ничего не обнаружил.

22. Если в цепи будет большой перепад напряжения, то сторит предохранитель, что повлечет за собой необходимость его замены. При целом предохранителе телевизор, конечно, будет работать, но только если он включен в сеть питания. Если телевизор работает нормально, то я увижу сегодняшние «Новости». Итак, я смотрю телевизионные «Новости» при условии отсутствия перепада напряжения и подключения телевизора к сети питания.

23. «Иван Иванович, можно?» – «Входи, Петров. Ну, сделал, что я тебя просил?» — «Видите ли... Если бы Вы немного прибавили...» – «Ты что, Петров! Сидоров за эту же работу берет в два раза меньше». — «Сидоров и сделал бы ее в два раза хуже. Я же работаю с

личным клеймом. И потом, у меня семья – сами знаете». – «Ладно, проси что хочешь, но денег у меня нет». – «А как сделаю, на рыбалку отпустите?» – «Договорились, только ты моего Вовку с собой возьми, а то он тут с какой-то подозрительной компанией спутался». – «Если с Вовкой, то на Вашей лодке». – «Вот хитрец! Хорошо, поедем все вместе. Мне тоже не мешало бы проветриться. Ты дело только сделай».

24. Уменьшение температуры приводит к снижению давления и уменьшению объема. Увеличение объема приводит к росту скорости потока. Повышение давления приводит к падению уровня, если при этом уменьшать температуру. Снижение скорости приводит к уменьшению давления или росту температуры. Технолог Иванов рассудил так: «Мне надо повысить давление при одновременном снижении скорости потока, поэтому я должен увеличить объем и температуру».

25. «В эти брезентовые штаны не пытайся влезть – в них ты смотришься как маляр». – «Но и это шерстяное платье я тоже не надену – оно на мне как на вешалке». – «Как насчет кожаного пиджака и юбки с разрезом?» – «У юбки заело молнию, а пиджак вот здесь испачкан». – «Ну, это не беда; пятно прикроется сумкой». – «Да, пожалуй, ты права – сумку в любом случае брать нужно; она очень идет к моим любимым туфлям». – «Слюманную молнию заменит булавка, а ее прикроет пиджак». – «Хорошо, так и сделаем». – «Шерстяное платье одену я, если ты не возражаешь». – «Возражаю, надень уж лучше эти штаны».

### Примеры решения задач

1. Доказать методом натурального исчисления истинность следующей клаузы:

$$\mathbf{B} \rightarrow (\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{A}), \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{D}, \mathbf{C}, \mathbf{D} \Rightarrow \mathbf{A} .$$

Доказательство:

- |   |                             |
|---|-----------------------------|
| 1. $\mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{D},$                          | $(\mathbf{P}_2, \text{БП})$ |
| 2. $\mathbf{P}, \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{D},$                                     | $(1, \text{УИ})$            |
| 3. $\mathbf{P}, \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{D},$                                     | $(\mathbf{P}_4, \text{БП})$ |
| 4. $\mathbf{P}, \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{0},$                                     | $(2, 3, \text{УО})$         |
| 5. $\mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{B} \rightarrow (\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{A}),$ | $(\mathbf{P}_1, \text{БП})$ |

$$6. P \Rightarrow C \rightarrow A, \quad (4, 5, \text{УИ})$$

$$7. P \Rightarrow A. \quad (6, P_3, \text{БП, УИ}).$$

2. Доказать аксиоматическим методом истинность клаузы:

$$A, B \rightarrow D, C \rightarrow D, A \rightarrow (B \vee C) \Rightarrow D.$$

Доказательство:

$$1. B \rightarrow D, C \rightarrow D, B \vee C \Rightarrow D,$$

$$2. \underline{B} \vee D, \underline{C} \vee D, B \vee C \Rightarrow D,$$

$$3. (\underline{B} \wedge \underline{C}) \vee D, B \vee C \Rightarrow D,$$

$$4. (B \vee C) \rightarrow D, B \vee C \Rightarrow D,$$

$$5. B \vee C, D \Rightarrow D.$$

3. Доказать методом Вонга истинность следующей клаузы:

$$\underline{B} \rightarrow (D \rightarrow C), D, C \rightarrow (A \vee B) \Rightarrow A \vee B.$$

Доказательство:

$$1. B \vee \underline{D} \vee C, D, \underline{C} \vee A \vee B \Rightarrow A \vee B,$$

$$1.1. B, D, \underline{C} \vee A \vee B, \underline{A} \Rightarrow B,$$

$$1.2. \underline{D}, D, \underline{C} \vee A \vee B, \underline{A} \Rightarrow B,$$

$$1.3. C, D, \underline{C} \vee A \vee B \Rightarrow A \vee B,$$

$$1.3.1. C, D, \underline{C} \Rightarrow A \vee B,$$

$$1.3.1. C, D, A, \underline{A} \Rightarrow B,$$

$$1.3.1. C, D, B, \underline{A} \Rightarrow B.$$

4. Доказать методом резолюций истинность следующей клаузы:

$$A \rightarrow B, C \rightarrow D, B \rightarrow E, D \rightarrow F, E \rightarrow \underline{E}, A \rightarrow C \Rightarrow \underline{A}.$$

Доказательство:

$$\underline{A} \vee B, \underline{C} \vee D, \underline{B} \vee E, \underline{D} \vee F, \underline{E} \vee \underline{E}, \underline{A} \vee C, A \Rightarrow 0.$$

$$1. \underline{C} \vee F, \quad (P_2, P_4) \quad 4. \underline{A} \vee F, \quad (1, P_6)$$

$$2. \underline{B} \vee \underline{E}, \quad (P_3, P_5) \quad 5. \underline{A}, \quad (3, 4)$$

$$3. \underline{A} \vee \underline{E}, \quad (2, P_1) \quad 6. 0. \quad (6, P_7)$$

5. Пусть задана система аксиом :

$$A1. 1 \Rightarrow A \rightarrow (B \rightarrow A),$$

$$A2. 1 \Rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)),$$

$$A3. 1 \Rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \underline{B}) \rightarrow \underline{A});$$



и правило отделения (modus ponens — MP):

$$A, A \rightarrow B \Rightarrow B .$$

С помощью этих аксиом и правила MP доказать справедливость закона рефлексивности:

$$1 \Rightarrow A \rightarrow A .$$

Доказательство (символы «1  $\Rightarrow$ » здесь и в следующем примере писать не будем):

1.  $A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)$  , (A1)
2.  $(A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)) \rightarrow ((A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A))$ , (A2)
3.  $(A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A)$  , (1, 2, MP)
4.  $A \rightarrow (A \rightarrow A)$  , (A1)
5.  $A \rightarrow A$  . (3, 4, MP)

6. С помощью системы аксиом предыдущего примера доказать клаузу:

$$\underline{X}, Y, Z \rightarrow X, S \rightarrow (Y \vee Z), (T \vee U) \rightarrow S \Rightarrow \underline{T} .$$

Доказательство:

1.  $(Z \rightarrow X) \rightarrow ((Z \rightarrow \underline{X}) \rightarrow \underline{Z})$  , (A1)
2.  $(Z \rightarrow \underline{X}) \rightarrow \underline{Z}$  , (1, P<sub>3</sub>, MP)
3.  $\underline{X} \rightarrow (Z \rightarrow \underline{X})$  , (A1)
4.  $Z \rightarrow \underline{X}$  , (3, P<sub>1</sub>, MP)
5.  $(S \rightarrow (Y \rightarrow Z)) \rightarrow ((S \rightarrow Y) \rightarrow (S \rightarrow Z))$ , (A2)
6.  $(S \rightarrow Y) \rightarrow (S \rightarrow Z)$  , (5, P<sub>4</sub>, MP)
7.  $\underline{Y} \rightarrow (S \rightarrow \underline{Y})$  , (A1)
8.  $S \rightarrow \underline{Y}$  , (7, P<sub>2</sub>, MP)
9.  $S \rightarrow Z$  , (6, 8, MP)
10.  $(S \rightarrow Z) \rightarrow ((S \rightarrow \underline{Z}) \rightarrow \underline{S})$  , (A3)
11.  $(S \rightarrow \underline{Z}) \rightarrow \underline{S}$  , (9, 10, MP)
12.  $\underline{Z} \rightarrow (S \rightarrow \underline{Z})$  , (A1)
13.  $\underline{Z}$  , (2, 4, MP)
14.  $S \rightarrow \underline{Z}$  , (12, 13, MP)
15.  $\underline{S}$  , (11, 14, MP)

16.  $(T \vee U) \rightarrow S \equiv T \rightarrow S, U \rightarrow S, \quad (P_5)$   
 17.  $(T \rightarrow S) \rightarrow ((T \rightarrow \underline{S}) \rightarrow \underline{T}), \quad (A3)$   
 18.  $(T \rightarrow \underline{S}) \rightarrow \underline{T}, \quad (16, 17, MP)$   
 19.  $\underline{S} \rightarrow (T \rightarrow \underline{S}), \quad (A1)$   
 20.  $T \rightarrow \underline{S}, \quad (15, 19, MP)$   
 21.  $\underline{T}. \quad (18, 20, MP)$

7. Составить легенды для приведенных ниже четырех клауз.

*Клауза 1:*  $A \sim C, C \sim E, E \rightarrow D, D \rightarrow B \Rightarrow A \rightarrow B.$

**A** — Падение авторитета власти.

**B** — Политики, не способные управлять страной.

**C** — Нарастание анархии в обществе.

**D** — Высказывание абсурдных идей.

**E** — Появление безответственных политиков.

«Падение авторитета власти происходит тогда и только тогда, когда нарастает анархия в обществе ( $A \sim C$ ). Нарастание анархии в обществе равносильно появлению на политической арене безответственных политиков ( $C \sim E$ ). Появление подобных политиков приводит к тому, что они высказывают абсурдные идеи ( $E \rightarrow D$ ). Высказывание политиками таких идей демонстрирует неспособность их управлять страной ( $D \rightarrow B$ ). Итак, падение авторитета власти приводит к появлению политиков, не способных управлять страной ( $A \rightarrow B$ )».

*Клауза 2:*  $A \rightarrow B, B \rightarrow E, A \rightarrow C, C \rightarrow D, D \rightarrow F, \underline{E \wedge F} \Rightarrow \underline{A}.$

«Если человек занимается спортом (**A**), то он хочет быть здоровым (**B**). Хорошее здоровье (**B**) ведет к счастливой жизни (**E**). Кроме того, если человек занимается спортом (**A**), то он, как правило, стремится достичь высоких спортивных результатов (**C**). Наличие высоких результатов (**C**) позволяет одерживать победы на соревнованиях (**D**). Победы на соревнованиях (**D**) влекут за собой всеобщее признание (**F**). Однако человек не хочет жить счастливо и иметь всеобщее признание ( $\underline{E \wedge F}$ ). Значит, он не станет заниматься и спортом ( $\underline{A}$ )».

*Клауза 3:*  $J \rightarrow H, K \rightarrow H, I \rightarrow J, H \rightarrow I, \underline{H} \Rightarrow \underline{J} \wedge \underline{K}.$

«Если знать язык программирования (**J**), то можно составить ра-

бочую программу (**Н**). Рабочую программу можно также получить (**Н**) при наличии знакомого программиста (**К**). Овладеть языком программирования (**Ж**) можно, обучаясь в институте (**И**). Если программа работает (**Н**), то ее написал выпускник такого института (**И**). Но программа не работает (**Н**). Это говорит о том, что желающий получить правильный результат не знает языка программирования (**Ж**) и не имеет знакомых программистов (**К**)».

*Клауза 4:*  $A \rightarrow B, C \rightarrow D, B \wedge D \rightarrow E, A, E \Rightarrow C$ .

«Все живое способно чувствовать ( $A \rightarrow B$ ). Всякое материальное тело занимает определенный объем ( $C \rightarrow D$ ). Если нечто занимает пространственный объем и способно чувствовать, то это нечто есть ни что иное, как живой организм ( $B \wedge D \rightarrow E$ ). Пусть существует нечто живое (**A**), но не являющееся организмом (**E**). Тогда следует вывод, что это нечто нематериально (**C**)».

8. Выше приведены легенды. Запишем клаузы, отвечающие содержанию этих легенд, для чего сформулируем необходимые посылки и два следствия: одно истинное, другое ложное. С помощью таблицы истинности найдем МНФ, минимальное и все трансверсальные покрытия (последнее задание выполнено только для варианта 21).

Для варианта 21 можно предложить следующую клаузу:

$$A \sim B, C \rightarrow A, D \rightarrow B, C \rightarrow E, E \Rightarrow C \rightarrow B.$$

**A** — Где-то что-то убыло.

**B** — Где-то что-то прибыло.

**C** — “Черная дыра” существует.

**D** — “Белая дыра” существует.

**E** — Невозможность ничего увидеть.

Исходную легенду допустимо трансформировать в близкую по смыслу и составить таблицу истинности (табл. 1.23):

«Если в одном месте что-то убудет, то в другом что-то непременно прибудет, и наоборот ( $A \sim B$ ). Если существует черная дыра, то в нее все проваливается, т.е. в ее окрестностях что-то убывает ( $C \rightarrow A$ ). Если существует белая дыра, то из нее в окружающее пространство должно прибывать вещество ( $D \rightarrow B$ ). Если существует черная дыра, то ее невозможно увидеть, так как она не излучает

свет ( $C \rightarrow E$ ). Астроном ничего не увидел ( $E$ ). Итак, белая дыра существует( $D$ )». Это — ложное умозаключение. *Истинным* же заключением является, например, следующее: «Если существует черная дыра, то где-то в пространстве вселенной должно непременно появляться вещество ( $C \rightarrow B$ )».

Таблица 1.23

A	B	C	D	E	$A \sim B$	$C \rightarrow A$	$D \rightarrow B$	$C \rightarrow E$	P	D	$C \rightarrow B$
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0
0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	1	0
1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1
0	0	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1
1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1
0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	0	0
0	0	1	0	1	1	0	1	1	0	0	0
1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1
0	1	0	0	1	0	1	1	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0	1	1	1	0	0	1
0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1
1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1
1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1	0
1	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1
0	0	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	1
0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	1
0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1

Из табл. 1.23 видно, что три единицы обобщенной посылки (**P**) не покрываются единицами ложного следствия (**D**); единицы же истинного следствия ( $C \rightarrow B$ ) целиком накрывают единицы обобщенной посылки. По табл. 1. 23 составим СДНФ:

$$A, B, C, D, E; A, B, C, D, E; A, B, C, \underline{D}, E;$$

$$A, B, \underline{C}, \underline{D}, E; \underline{A}, \underline{B}, \underline{C}, \underline{D}, E.$$

После преобразований получим следующую МДФ:

$$A, B, D, E; \underline{A}, \underline{B}, \underline{C}, \underline{D}, E.$$

Трансверсальные покрытия:

$$\underline{A}; \underline{B}, \underline{C}, \underline{D}, E \quad A, B; \underline{C}, \underline{D}, E \quad A, B, E; \underline{C}, \underline{D}.$$

Минимальное покрытие: **E**.

Для варианта 22 можно составить следующую клаузу:

$$A \rightarrow B, B \rightarrow C, E \rightarrow (\underline{B} \rightarrow D), D \rightarrow F \Rightarrow (\underline{B} \wedge \underline{A} \wedge E) \rightarrow F.$$

Введем следующие обозначения:

- A** — Возникновение перепада напряжения в сети.
- B** — Перегорание предохранителя.
- C** — Необходимость замены предохранителя.
- D** — Телевизор работает нормально.
- E** — Телевизор подключен к сети питания.
- F** — Я смотрю “Новости”.

«Если в сети был перепад напряжения, то сгорит предохранитель ( $A \rightarrow B$ ). Если предохранитель сгорел, то необходима его замены ( $B \rightarrow C$ ). Если телевизор включен в сеть, то он работает нормально при условии целостности предохранителя ( $E \rightarrow (\underline{B} \rightarrow D)$ ). Если телевизор работает нормально, я увижу “Новости” ( $D \rightarrow F$ ). Я увижу “Новости” при условии отсутствия перепада напряжения и подключения телевизора к сети питания ( $(\underline{A} \wedge E) \rightarrow F$ )». Данное следствие является ложным. Истинным же следствием будет: «Я увижу “Новости” при условии целостности предохранителя, отсутствия перепада напряжения в сети и подключения телевизора к сети питания ( $(\underline{B} \wedge \underline{A} \wedge E) \rightarrow F$ )». Выделим ту строку табл. 1.24, для которой обобщенная посылка (**P**) и истинное следствие ( $(\underline{B} \wedge \underline{A} \wedge E) \rightarrow F$ ) принимают значения единицы, а ложное следствие ( $(\underline{A} \wedge E) \rightarrow F$ ) — значение нуля.

Таблица 1.24

A	B	C	D	E	F	$A \rightarrow B$	$B \rightarrow C$	$E \rightarrow (B \rightarrow D)$	$D \rightarrow F$	P	$(A \wedge E) \rightarrow F$	$(B \wedge A \wedge E) \rightarrow F$
0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1

Для варианта 23 допустимо составить следующую клаузу:

$$A \rightarrow B, B \rightarrow C, C \rightarrow D, D \rightarrow E \Rightarrow A \rightarrow E.$$

**A** — Работа выполнена. **D** — Рыбалку провести с лодкой.

**B** — Отпуск на рыбалку. **E** — На рыбалку поедут все вместе.

**C** — Взять на рыбалку сына.

«Если работа выполнена, то начальство отпустит на рыбалку ( $A \rightarrow B$ ). Если отпустят на рыбалку, то обязательно возьмут на нее и сына ( $B \rightarrow C$ ). Если берут сына, значит надо брать лодку ( $C \rightarrow D$ ). Если брать с собой лодку, то поедут все вместе ( $D \rightarrow E$ ). Таким образом, если работа выполнена, то все вместе едут на рыбалку ( $A \rightarrow E$ )». Данное следствие является истинным. Ложным следствием является, очевидно, такое: «Если работа сделана, то все вместе на рыбалку не едут ( $A \rightarrow \underline{E}$ )».

Для варианта 24 составим следующую клаузу:

$$A \rightarrow (B \wedge C), C \rightarrow D, B \rightarrow (A \rightarrow E), D \rightarrow (B \vee A) \Rightarrow (A \wedge B) \rightarrow C.$$

**A** — Уменьшение температуры.

**B** — Снижение давления. **D** — Снижение скорости.

**C** — Уменьшение объема. **E** — Падение уровня.

«Уменьшение температуры приводит к снижению давления и уменьшению объема ( $A \rightarrow (B \wedge C)$ ). Увеличение объема приводит к росту скорости потока ( $C \rightarrow D$ ). Повышение давления приводит к падению уровня, если при этом уменьшать температуру ( $B \rightarrow (A \rightarrow E)$ ). Снижение скорости приводит к уменьшению давления или росту температуры ( $D \rightarrow (B \vee A)$ ). Технолог Иванов рассудил так: «Мне надо повысить давление при одновременном снижении скорости потока, поэтому я должен увеличить объем и температуру» ( $(A \wedge C) \rightarrow (B \wedge D)$ ). Данное умозаключение является ложным. Истинным рассуждением будет, например, такое: «Уменьшение температуры и увеличение давления ведут к уменьшению объема ( $(A \wedge B) \rightarrow C$ )».

Для варианта 25 составим клаузу:

$A \vee B \vee C, (C \wedge D) \rightarrow E, (A \vee B) \rightarrow \underline{E}, C \rightarrow D, \Rightarrow C \rightarrow E.$

**A** — Надеть брезентовые штаны.

**B** — Надеть шерстяное платье.

**C** — Надеть пиджак и юбку с разрезом.

**D** — Взять с собой сумку.

**E** — Великолепно смотрится.

«Я могу надеть на себя брезентовые штаны, или шерстяное платье, или пиджак и юбку с разрезом ( $A \vee B \vee C$ ). Я буду выглядеть великолепно, если надену пиджак и юбку с разрезом и при этом возьму с собой сумку ( $(C \wedge D) \rightarrow E$ ). И наоборот, я буду выглядеть ужасно, если надену на себя брезентовые штаны или шерстяное платье ( $(A \vee B) \rightarrow \underline{E}$ ). Однако сумку надо брать обязательно, если надеть пиджак и юбку с разрезом ( $C \rightarrow D$ ). Итак, чтобы выглядеть великолепно, я выбираю последнее, т.е. надену на себя пиджак и юбку с разрезом ( $C \rightarrow E$ )». Данное заключение является *истинным*. *Ложным* может быть, например, такое: «Чтобы выглядеть великолепно, нужно надеть на себя брезентовые штаны ( $A \rightarrow E$ )».

## 1.5. Операции над предикатами и кванторами

### О предикатах, кванторах и многоместных функциях

*Предикат* — это функциональное высказывание, а высказывание — предикатная константа. *Логика предикатов* — это расширение логики высказываний за счет использования предикатов в роли логических функций. Эти функции несколько отличаются от функций, которые мы использовали в логике Буля. Булева функция *однородна*, т.е. для нее область значений функции и область изменений аргументов по типу одна и та же — *логическая* (либо *истина*, либо *ложь*). Для предикатов же область значений функции — *логическая*, а область изменений аргументов — *предметная*. Таким образом, эта функция *неоднородна*. Приведем примеры предикатных функций. Пусть имеется ряд простых высказываний:

$P_1 =$  «Иван читает Достоевского»,

$P_2 =$  «Петр читает Достоевского»,

... ..

$P_n =$  «Степан читает Достоевского».

Вместо высказываний  $P_1, P_2, \dots, P_n$  мы могли бы ввести *одноместный предикат*  $P(x)$ , для которого переменная  $x$  принимала бы значения из предметной области —

$$x = \{\text{Иван, Петр, } \dots, \text{ Степан}\},$$

а сама предикатная функция передавалась бы словами:

$$P(x) = \langle x \text{ читает Достоевского} \rangle.$$

Теперь изменим исходный ряд высказываний:

$$P_1 = \langle \text{Иван читает Достоевского} \rangle,$$

$$P_2 = \langle \text{Петр читает Толстого} \rangle,$$

... ..

$$P_n = \langle \text{Степан читает Чехова} \rangle.$$

Здесь можно было бы ввести уже *двухместный предикат* —

$$P(x, y) = \langle x \text{ читает } y \rangle,$$

с дополнительной предметной областью —

$$y = \{\text{Достоевский, Толстой, } \dots, \text{ Чехов}\}.$$

Введем *трехместный предикат*  $P(x, y, z)$ , который означает, что « $x$  есть сумма  $y$  и  $z$ ». Допустим, в процессе вычислений переменная  $x$  приняла конкретное значение, равное 5. Тогда трехместный предикат превратится в двухместный:

$$P(5, y, z) = P'(y, z) = \langle 5 \text{ есть сумма } y \text{ и } z \rangle.$$

При  $x = 5$  и  $y = 3$  получим одноместный предикат:

$$P(5, 3, z) = P'(3, z) = P''(z) = \langle 5 \text{ есть сумма } 3 \text{ и } z \rangle.$$

Наконец, если добавить условие  $z = 2$ , то исходный предикат становится *нульместным предикатом* (константой или высказыванием), который в данном случае принимает истинное значение:

$$P_1 = P(5, 3, 2) = \langle 5 \text{ есть сумма } 3 \text{ и } 2 \rangle = 1.$$

Но могло быть, что  $z = 1$ , тогда имели бы ложное высказывание:

$$P_0 = P(5, 3, 1) = \langle 5 \text{ есть сумма } 3 \text{ и } 1 \rangle = 0.$$

Таким образом, при замещении переменной  $x_i$  предметной постоянной  $a_i$  происходит превращение  $n$ -местного предиката  $P(x_1 \dots x_i \dots x_n)$  в  $(n - 1)$ -местный —  $P(x_1 \dots a_i \dots x_n)$ . Приписав конкретные значения всем аргументам предикатной функции —  $P(a_1 \dots a_i \dots a_n)$ , мы тем самым получаем предикатную константу, к которой приме-



нимы все законы логики высказываний.

Функциональная природа предиката влечет за собой введение еще одного понятия — *квантора*. Роль его выясним на следующих двух примерах:

- 1) «Все люди смертны. Сократ человек.  
Следовательно, Сократ смертен».
- 2) «Некоторые люди гениальны. Сократ человек.  
Следовательно, Сократ гениален».

Во втором примере хорошо чувствуется ложность заключения, поскольку интуитивно мы понимаем, что Сократ мог и не попасть в число гениальных людей.

Итак, ключевыми словами в наших примерах являются «все» и «некоторые». Когда какое-нибудь правило распространяется на *всех* индивидуумов, оно, естественно, распространяется и на Сократа. Когда же правило касается только *некоторых*, оно может оказаться в отношении Сократа как раз и неверным.

Термин «*все x*» обозначается в логике предикатов  $\forall x$  и называется *квантором общности* (символ  $\forall$  есть перевернутая буква *A*, которая является начальной буквой английского слова All — «все»). Термины «*некоторые x*» или «*существует хотя бы одно значение x*» обозначаются через  $\exists x$  и называются *квантором существования* (символ  $\exists$  есть перевернутая буква *E*, первая буква английского слова Exist — «существование»).

Выставляя кванторы перед предикатами, мы как бы усиливаем или ослабляем их действие. Так, выражение  $\forall x P(x)$  означает: «для всех без исключения *x* свойство *P* истинно», а выражение  $\exists x P(x)$  означает: «существует по крайней мере одно значение *x*, для которого свойство *P* истинно». Мы не будем использовать так называемые *свободные переменные*, т.е. не будем рассматривать предикатные функции, аргументы которых не связаны ни квантором общности, ни квантором существования. Сказать «для всех *x* свойство *P* истинно» — это все равно, что сказать «конъюнкция всех значений предикатной функции равна единице»:

$$\forall x P(x) = P(a) \wedge P(b) \wedge P(c) \wedge \dots$$

Квантор существования означает дизъюнкцию всех значений предикатной функции:

$$\exists x P(x) = P(a) \vee P(b) \vee P(c) \vee \dots$$

Оба квантора можно отрицать и выражать один через другой на основе закона де Моргана:

$$\forall x P(x) = \underline{P(a)} \wedge \underline{P(b)} \wedge \underline{P(c)} \wedge \dots = \underline{P(a)} \vee \underline{P(b)} \vee \underline{P(c)} \vee \dots = \exists x \underline{P(x)},$$

$$\exists x P(x) = \underline{P(a)} \vee \underline{P(b)} \vee \underline{P(c)} \vee \dots = \underline{P(a)} \wedge \underline{P(b)} \wedge \underline{P(c)} \wedge \dots = \forall x \underline{P(x)}.$$

Отсюда

$$\forall x \underline{P(x)} = \exists x P(x), \quad \exists x \underline{P(x)} = \forall x P(x).$$

Осмыслить формулы отрицания кванторов поможет следующий пример. Пусть предикат  $P(x)$  означает, что « $x$  является простым числом». Когда  $x$  будет пробегать ряд натуральных чисел —

$$x = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\},$$

предикатная функция пробежит ряд истинных и ложных значений

$$P(1) = 0, \quad P(2) = 1, \quad P(3) = 1, \quad P(4) = 0,$$

$$P(5) = 1, \quad P(6) = 0, \quad P(7) = 1, \quad \dots$$

Убедимся в справедливости первой формулы для отрицания квантора общности:

$$\begin{aligned} \forall x P(x) &= \text{«не все } x \text{ простые числа»} = \text{«существуют такие } x, \\ &\text{которые являются непростыми числами»} = \exists x \underline{P(x)} = 1. \end{aligned}$$

Оба эти высказывания истинны. Теперь убедимся в справедливости второй формулы для отрицания квантора существования:

$$\begin{aligned} \exists x P(x) &= \text{«нет ни одного } x, \text{ которое было бы простым»} = \\ &\text{«все } x \text{ являются непростыми числами»} = \forall x \underline{P(x)} = 0. \end{aligned}$$

Эти высказывания ложны.

### Конкретизация предикатов

Пусть предметная область предиката  $P(x)$  состоит всего из двух конкретных значений  $a$  и  $b$ . Учитывая, что

$$\forall x P(x) = P(a) \wedge P(b), \quad \exists x P(x) = P(a) \vee P(b),$$

составим табл. 1.25, из которой непосредственно вытекают три элементарных клаузы:

$$\forall x P(x) \Rightarrow P(a), \quad P(a) \Rightarrow \exists x P(x), \quad \forall x P(x) \Rightarrow \exists x P(x).$$

Вместо  $P(a)$  в последних выражениях можно было бы взять  $P(b)$  — семантика клауз от этого не изменится, а она такова: если выражение «для всех  $x$  свойство  $P$  выполняется» является истинным, то для конкретного значения  $x$ , равного  $a$ , это свойство тоже будет вы-

полняться. Первая клауза является предикатной формой выражения аксиомы порядка:  $\forall x P(x) = P(a), P(b) \Rightarrow P(a)$ .

Таблица 1.25

Действие ее продемонстрируем на знакомом примере, который сейчас мы сформулируем более отчетливо:

$P(a)$	$P(b)$	$\forall x P(x)$	$\exists x P(x)$
0	0	0	0
1	0	0	1
0	1	0	1
1	1	1	1

Для всех  $x$  справедливо правило: если  $x$  — человек, то  $x$  смертен.

Сократ человек. Следовательно, Сократ смертен.

Введем два предиката:  $A(x) = \langle x \text{ человек} \rangle$  и  $B(x) = \langle x \text{ смертен} \rangle$ .

Примем также, что  $a = \langle \text{Сократ} \rangle$ . Составим клаузу, соответствующую нашей легенде:  $\forall x (A(x) \rightarrow B(x)), A(a) \Rightarrow B(a)$ .

Для ее доказательства достаточно перенести вторую посылку вправо за знак метаимпликации, чтобы клауза сразу же удовлетворяла аксиоме порядка в предикатной форме:

$$\forall x (A(x) \rightarrow B(x)) \Rightarrow A(a) \rightarrow B(a).$$

Ясно, что второй пример (о гениальности Сократа) — ложен, поскольку приводит к клаузе, противоречащей аксиоме порядка:

$$\exists x (A(x) \rightarrow B(x)) \Rightarrow A(a) \rightarrow B(a).$$

Конъюнктивная природа квантора общности и дизъюнктивная природа квантора существования, с точки зрения *отношения эквивалентности*, накладывают определенные ограничения при использовании их совместно с дизъюнкцией и конъюнкцией как логическими операциями.

Пусть для определенности предметная область состоит из двух элементов  $a$  и  $b$  (в общем случае для областей, состоящих из  $n$  элементов, все представленные здесь доказательства останутся теми же, только окажутся более громоздкими). Убедимся, что следующие два тождества выполняются:

$$\forall x (A(x) \wedge B(x)) = \forall x A(x) \wedge \forall x B(x),$$

$$\exists x (A(x) \vee B(x)) = \exists x A(x) \vee \exists x B(x).$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \forall x (A(x) \wedge B(x)) &= (A(a) \wedge B(a)) \wedge (A(b) \wedge B(b)) = \\ &= (A(a) \wedge B(b)) \wedge (A(a) \wedge B(b)) = \forall x A(x) \wedge \forall x B(x). \end{aligned}$$

Аналогично расписывается второе равенство.

Однако ситуация изменится, если квантор общности использо-

вать совместно с дизъюнкцией, а квантор существования — с конъюнкцией:

$$\exists x (A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \wedge \exists x B(x).$$

В самом деле,

$$\exists x (A(x) \wedge B(x)) = (A(a) \wedge B(a)) \vee (A(b) \wedge B(b)) = R \wedge Q,$$

$$R = (A(a) \vee A(b)) \wedge (B(a) \vee B(b)) = \exists x A(x) \wedge \exists x B(x),$$

$$Q = (A(a) \vee B(b)) \wedge (A(b) \vee B(a)).$$

Первая клауза верна, так как она сводится к аксиоме порядка:

$$R, Q \Rightarrow R.$$

Аналогично доказывается клауза —

$$\forall x A(x) \vee \forall x B(x) \Rightarrow \forall x (A(x) \vee B(x)).$$

В логике предикатов, как и в логике высказываний или логике Буля, действует *принцип двойственности*. Клауза останется в силе, если ее посылки и заключения поменять местами, но при этом одновременно произвести замену:

$$\forall \Leftrightarrow \exists, \quad \wedge \Leftrightarrow \vee, \quad 0 \Leftrightarrow 1.$$

Благодаря этому принципу, последнюю клаузу можно не доказывать отдельно, а составить, исходя из истинности предыдущей.

Установленное свойство кванторов в отношении дизъюнкции отражается и на импликации, поскольку она может быть выражена через дизъюнкцию. Поэтому справедливы следующие выражения:

$$\exists x (A(x) \rightarrow B(x)) = \forall x A(x) \rightarrow \exists x B(x),$$

$$\exists x A(x) \rightarrow \forall x B(x) \Rightarrow \forall x (A(x) \rightarrow B(x)).$$

Но ситуация вновь изменится в пользу отношения эквивалентности, если любой из двух предикатов заменить высказыванием:

$$\forall x (A \vee B(x)) = A \vee \forall x B(x),$$

$$\exists x (A \wedge B(x)) = A \wedge \exists x B(x).$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \forall x (A \vee B(x)) &= (A \vee B(a)) \wedge (A \vee B(b)) = \\ &= A \vee (A \wedge B(a)) \vee (A \wedge B(b)) \vee (B(a) \wedge B(b)) = \\ &= A \vee (B(a) \wedge B(b)) = A \vee \forall x B(x). \end{aligned}$$

Раскрывая скобки и используя закон идемпотентности и поглощения или применяя вновь принцип двойственности, можно доказать второе равенство. Отсюда будут выполняться и равенства для импликации:

$$\forall x (A \rightarrow B(x)) = A \rightarrow \forall x B(x),$$

$$\forall x (A(x) \rightarrow B) = \exists x A(x) \rightarrow B,$$

$$\exists x (A \rightarrow B(x)) = A \rightarrow \exists x B(x),$$

$$\exists x (A(x) \rightarrow B) = \forall x A(x) \rightarrow B.$$

Чтобы сохранить отношение эквивалентности при вынесении за скобки квантора  $\exists$  при конъюнкции и квантора  $\forall$  при дизъюнкции, когда даны два различных предиката, прибегают к введению дополнительной переменной, например:

$$\begin{aligned} \exists x A(x) \wedge \exists x B(x) &= \exists x A(x) \wedge \exists y B(y) = \\ &= \exists x \exists y (A(x) \wedge B(y)) = (A(a) \vee A(b)) \wedge (B(a) \vee B(b)). \end{aligned}$$

Аналогично поступают в других случаях:

$$\begin{aligned} \forall x A(x) \vee \forall x B(x) &= \forall x \forall y (A(x) \vee B(y)), \\ \exists x A(x) \rightarrow \forall x B(x) &= \forall x \forall y (A(x) \rightarrow B(y)), \\ \exists x A(x) \vee \forall x B(x) &= \exists x \forall y (A(x) \vee B(y)) = \\ &= \forall x \exists y (A(x) \vee B(y)) = \forall x \exists y (A(y) \vee B(x)). \end{aligned}$$

Последний пример показывает, что кванторы  $\forall$  и  $\exists$  можно переставлять местами, если они независимы (в данном случае они относятся к независимым одноместным предикатам).

Рассмотрим всевозможные комбинации кванторов при двухместных предикатах. С помощью законов коммутативности и ассоциативности, для конъюнкции и дизъюнкции доказывается справедливость двух тождеств:

$$\forall x \forall y P(x, y) = \forall y \forall x P(x, y), \quad \exists x \exists y P(x, y) = \exists y \exists x P(x, y),$$

т.е. одинаковые кванторы при двухместных предикатах можно переставлять местами. Но перестановка кванторов  $\exists$  и  $\forall$  подчинена только отношению порядка:

$$\exists x \forall y P(x, y) \Rightarrow \forall y \exists x P(x, y).$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} \exists x \forall y P(x, y) &= \exists x (P(x, a) \wedge P(x, b)) = \\ &= (P(a, a) \wedge P(a, b)) \vee (P(b, a) \wedge P(b, b)) = R \wedge Q, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} Q &= (P(a, a) \vee P(b, b)) \wedge (P(a, b) \vee P(b, a)), \\ R &= (P(a, a) \vee P(b, a)) \wedge (P(a, b) \vee P(b, b)) = \\ &= \forall y (P(a, y) \vee P(b, y)) = \forall y \exists x P(x, y). \end{aligned}$$

Таким образом, исходная клауза свелась к аксиоме порядка —

$$R, Q \Rightarrow R.$$

Справедливость последней клаузы можно установить и с помощью таблицы истинности (табл. 1.26), в которой приняты следующие сокращения:

$$\forall \forall P = \forall x \forall y P(x, y), \quad \exists \forall P = \exists x \forall y P(x, y),$$

$$\forall \exists P = \forall y \exists x P(x, y), \quad \exists \exists P = \exists x \exists y P(x, y),$$

На основе этой же таблицы можно установить истинность множества других клауз ( $k$  и  $m$  принимают значения  $a$  или  $b$ ):

1.  $\forall x \forall y P(x, y) \Rightarrow \forall x \exists y P(x, y)$ , 6.  $\exists x \forall y P(x, y) \Rightarrow \forall y \exists x P(x, y)$ ,
2.  $\forall x \forall y P(x, y) \Rightarrow \exists x \forall y P(x, y)$ , 7.  $\forall x \forall y P(x, y) \Rightarrow \forall x P(x, x)$ ,
3.  $\forall x \forall y P(x, y) \Rightarrow \exists x \exists y P(x, y)$ , 8.  $\exists x P(x, x) \Rightarrow \exists x \exists y P(x, y)$ ,
4.  $\exists x \forall y P(x, y) \Rightarrow \exists x \exists y P(x, y)$ , 9.  $\forall x \forall y P(x, y) \Rightarrow P(k, m)$ ,
5.  $\forall x \exists y P(x, y) \Rightarrow \exists x \exists y P(x, y)$ , 10.  $P(k, m) \Rightarrow \exists x \exists y P(x, y)$ ,
11.  $\forall y P(k, y) \Rightarrow \forall y \exists x P(x, y)$ , 15.  $\forall x \exists y P(x, y) \Rightarrow \exists y P(k, y)$ ,
12.  $\forall y P(k, y) \Rightarrow \exists x \forall y P(x, y)$ , 16.  $\exists y \forall x P(x, y) \Rightarrow \exists y P(k, y)$ ,
13.  $\forall x P(x, m) \Rightarrow \exists y \forall x P(x, y)$ , 17.  $\exists x \forall y P(x, y) \Rightarrow \exists x P(x, m)$ ,
14.  $\forall x P(x, m) \Rightarrow \forall x \exists y P(x, y)$ , 18.  $\forall y \exists x P(x, y) \Rightarrow \exists x P(x, m)$ .

Таблица 1.26

$P(a, a)$	$P(a, b)$	$P(b, a)$	$P(b, b)$	$\forall \forall P$	$\exists \forall P$	$\forall \exists P$	$\exists \exists P$
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	1
0	1	0	0	0	0	0	1
1	1	0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	0	0	1
0	1	1	0	0	0	1	1
1	1	1	0	0	1	1	1
0	0	0	1	0	0	0	1
1	0	0	1	0	0	1	1
0	1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1	1
1	0	1	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Пять первых клауз из приведенного списка сейчас особенно важны, так как они дают ключ к пониманию процедуры составления истинных клауз для многоместных предикатов с любым числом кванторов. Эту процедуру схематично можно пояснить следующим образом. Для одноместных предикатов справедливы три клаузы:

$$\forall P \Rightarrow \forall P, \quad \forall P \Rightarrow \exists P, \quad \exists P \Rightarrow \exists P.$$

Клауза  $\exists P \Rightarrow \forall P$  ошибочна. Для двухместных предикатов будут верны уже девять клауз, четыре из которых являются тождествами, а пять других как раз и возглавляют приведенный список:

$$\begin{aligned} \forall(\forall P) &\Rightarrow \forall(\forall P), \forall(\forall P) \Rightarrow \exists(\forall P), \exists(\forall P) \Rightarrow \exists(\forall P), \\ \forall(\forall P) &\Rightarrow \forall(\exists P), \forall(\forall P) \Rightarrow \exists(\exists P), \exists(\forall P) \Rightarrow \exists(\exists P), \\ \forall(\exists P) &\Rightarrow \forall(\exists P), \forall(\exists P) \Rightarrow \exists(\exists P), \exists(\exists P) \Rightarrow \exists(\exists P). \end{aligned}$$

Клаузы-тождества не следует отбрасывать, если мы хотим построить следующий ряд для трехместных предикатов, например:

$$\forall(\forall\forall P) \Rightarrow \exists(\forall\forall P), \quad \forall(\forall\exists P) \Rightarrow \exists(\forall\exists P).$$

Зная процедуру построения правильных клауз, легко распознать истинность клауз, в частности:

$$\exists\forall\forall\exists P \Rightarrow \exists\exists\forall\exists P \text{ — истинная, } \exists\exists\forall\exists P \Rightarrow \exists\forall\forall\exists P \text{ — ложная.}$$

Соседние одинаковые кванторы в многоместных предикатах можно переставлять в любом направлении; что же касается различных кванторов, то здесь допустима лишь перестановка, описанная клаузой 6 в вышеприведенном списке:

$$\dots \exists u \forall v \dots P(\dots u, v \dots) \Rightarrow \dots \forall v \exists u \dots P(\dots u, v \dots).$$

Одинаковые кванторы могут быть объединены по схеме, продиктованной клаузами 7 и 8:

$$\begin{aligned} \dots \forall u \forall v \dots P(\dots u, v \dots) &\Rightarrow \dots \forall u \dots P(\dots \underline{u}, u \dots), \\ \dots \exists v \dots P(\dots v, v \dots) &\Rightarrow \dots \exists u \exists v \dots P(\dots u, v \dots). \end{aligned}$$

Законы конкретизации, представленные в списке следующими десятью клаузами (с 8 по 18) и являющиеся производными от первых шести клауз, естественно, распространяются и на многоместные предикаты.

В отношении дизъюнкции и конъюнкции двух многоместных предикатов действуют примерно те же законы эквивалентности, что и для одноместных. Если все кванторы соответствуют операции, то введение дополнительных переменных необязательно, например:

$$\forall x \forall y (A(x, y) \wedge B(x, y)) = \forall x \forall y A(x, y) \wedge \forall x \forall y B(x, y).$$

Во всех остальных случаях необходимо вводить переменные:

$$\begin{aligned} \forall x \exists y \forall z \exists u \forall v \forall w (A(x, y, z) \vee B(u, v, w)) &= \\ = \forall x \exists y \forall z A(x, y, z) \vee \exists u \forall v \forall w B(u, v, w). \end{aligned}$$

Формализм теории предикатов, конечно, будет неполным без рассмотрения операции отрицания многоместных предикатов. Для понимания существа дела достаточно привести одно доказательство для двухместного предиката:

$$\begin{aligned} \exists x \forall y P(x, y) &= \exists x (P(x, a) \wedge P(x, b)) = \forall x (P(x, a) \wedge P(x, b)) = \\ &= \forall x \forall y P(x, y) = (\underline{P}(a, a) \vee \underline{P}(a, b)) \wedge (\underline{P}(b, a) \vee \underline{P}(b, b)) = \\ &= \forall x \exists y \underline{P}(x, y). \end{aligned}$$

Отсюда вытекает простое правило перемещения символа отрицания слева направо для **многоместных предикатов**, например:

$$\forall \forall \exists \forall \exists \underline{P} = \exists \forall \exists \forall \exists \underline{P} = \exists \exists \forall \exists \forall \underline{P} = \exists \exists \forall \forall \exists \underline{P} = \exists \exists \forall \exists \forall \underline{P} = \exists \exists \forall \forall \exists \underline{P}.$$

Таким образом, чтобы произвести полное отрицание **многоместного предиката с кванторами**, необходимо прибегнуть к замене:

$$\exists \Leftrightarrow \forall, P \Leftrightarrow \underline{P}.$$

### Решетки вообще и булеан в частности

Процедура составления истинных клауз из предикатов с кванторами, описанная в предыдущем подразделе, позволяет построить *булеан* из кванторов (рис. 1.20).

Булеан — распространенный математический объект. Так, если в кванторном булеане все символы  $\forall$  заменить на 0, а  $\exists$  — на 1, то получим булеан на 0,1-векторах (рис. 1.21). Если дано множество из элементов  $a, b, c$ , то все его подмножества образуют точно такой же булеан (рис. 1.22). Наконец, приведем пример из арифметики: делители числа 30 образуют аналогичный булеан (рис. 1.23).

Булеан есть частично упорядоченное множество, на котором действуют законы логики множеств. Чтобы раскрыть его свойства, введем несколько определений.

Множество элементов любой природы называется *линейно-упорядоченным*, если любые два его элемента  $a$  и  $b$  связаны отношением порядка — либо  $a \Rightarrow b$ , либо  $b \Rightarrow a$ . Множество называется *частично упорядоченным*, если имеются по крайней мере два *несопоставимых элемента*, на которые не распространяется отношение порядка. *Верхней границей* подмножества  $Q \subset R$  называют такой элемент  $r \in R$ , что для всех  $q \in Q$  справедливо отношение порядка  $q \Rightarrow r$ . *Нижней границей* подмножества  $Q \subset R$  называют такой элемент  $r' \in R$ , что для всех  $q \in Q$  справедливо отношение  $r' \Rightarrow q$ . *Наименьшая* верхняя граница называется *супремумом* ( $sup Q$ ), а *наибольшая* нижняя граница — *инфимумом* ( $inf Q$ ). Помимо супремума и инфимума, вводятся понятия *точной верхней грани* и *точной нижней грани*, которые могут совпадать или не совпадать, соответственно, с супремумом и инфимумом. Точную верхнюю грань обозначим через дизъюнкцию  $a \vee b$ , точную нижнюю грань — че-



рез конъюнкцию  $a \wedge b$ . Тогда в общем случае имеем:

$$a \vee b \Rightarrow \sup(a, b), \quad \inf(a, b) \Rightarrow a \wedge b.$$

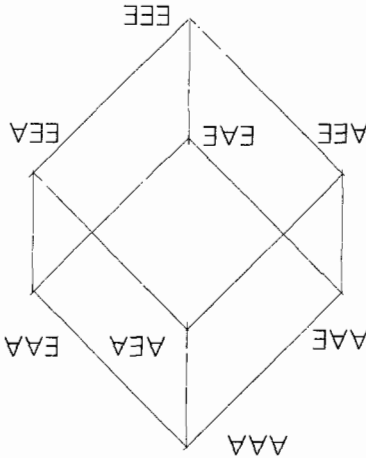


Рис. 1.20

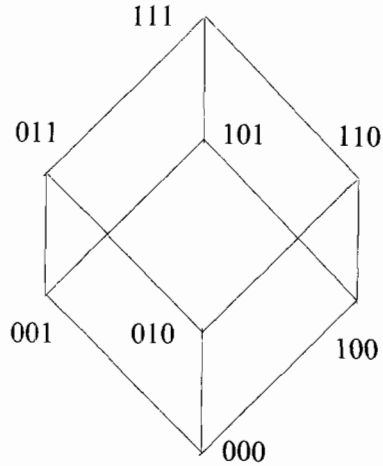


Рис. 1.21

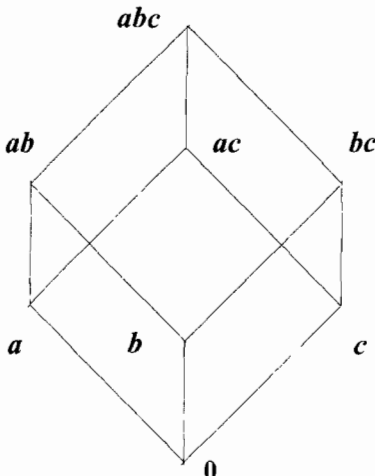


Рис. 1.22

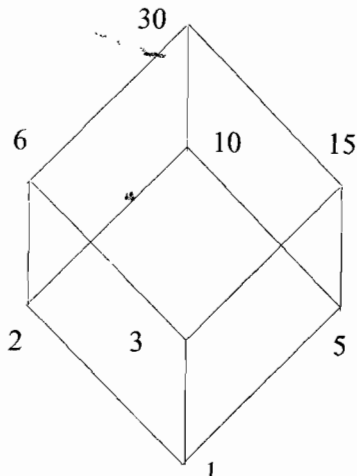


Рис. 1.23

Множество  $\mathbf{R}$  называется *решеткой*, если каждая пара его элементов обязательно имеет один супремум и один инфимум. Множество  $\forall\forall, \forall\exists, \exists\forall$  и  $\exists\exists$  (рис. 1.24) образует решетку, так как удовлетворяет указанному требованию, например:

$$\sup(\forall\exists, \exists\exists) = \exists\exists, \quad \sup(\forall\exists, \exists\forall) = \exists\exists,$$

$$\inf(\forall\exists, \exists\exists) = \forall\exists, \quad \inf(\forall\exists, \exists\forall) = \forall\forall,$$

Множество  $a, b, c, d$  (рис. 1.25) не образует решетки, так как  $a$  и  $b$  имеют два инфимума и ни одного супремума, элементы  $c$  и  $d$  имеют два супремума и ни одного инфимума.

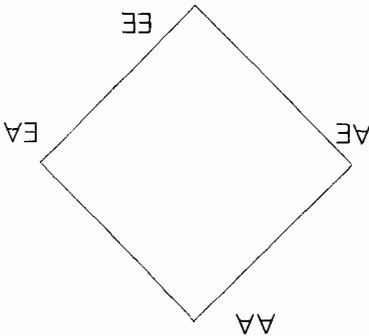


Рис. 1.24

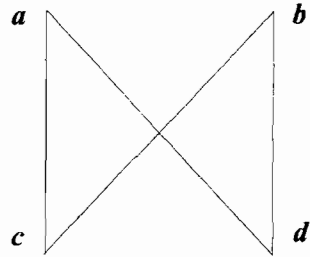


Рис. 1.25

Решетка называется *булевой*, или *булеаном*, если ее элементы удовлетворяют законам булевой логики — *коммутативности, ассоциативности, дистрибутивности, нуля и единицы*. Для кванторных решеток все четыре закона выполняются:

$$\begin{aligned} \forall\exists\forall \vee \forall\exists\forall &= \forall\exists\forall \vee \forall\forall\exists, \\ (\forall\exists\forall \vee \forall\forall\exists) \vee (\forall\forall\exists \vee \forall\exists\forall) &= \forall\exists\forall \vee \forall\forall\exists, \\ (\forall\exists\forall \wedge \forall\forall\exists) \vee (\forall\forall\exists \wedge \forall\exists\forall) &= \forall\exists\forall \vee \forall\forall\exists, \\ \forall\exists\forall \vee \forall\forall\exists &= \forall\exists\forall, \quad \forall\exists\forall \wedge \forall\forall\exists = \forall\forall\exists, \\ \forall\exists\forall \vee \forall\forall\exists &= \forall\exists\forall, \quad \forall\exists\forall \wedge \forall\forall\exists = \forall\forall\exists. \end{aligned}$$

Поскольку в кванторном булеане предполагаются только положительные предикаты, т.е. отсутствуют обратные элементы, типа  $\forall\exists\forall$ , то и в законе для нуля и единицы отсутствуют равенства, отражающие взаимное дополнение элементов. Однако вместо  $\forall\forall\forall$  и  $\exists\exists\exists$  можно взять полностью нулевой и единичный векторы, тогда уже все законы нуля и единицы будут выполняться, например:

$$\forall\exists\forall \underline{P} \vee \exists\forall\exists \underline{P} = 1, \quad \forall\exists\forall \underline{P} \wedge \exists\forall\exists \underline{P} = 0.$$

Если для кванторов справедливы аксиомы логики множеств, то на них должны распространяться и все выводимые из них тождества, например, *закон де Моргана*:

$$\forall \exists \forall \vee \exists \forall \forall = \forall \forall \exists \wedge \exists \forall \forall .$$

Аксиома порядка, которая может быть выражена клаузами:

$$\forall \forall \exists, \exists \forall \forall \Rightarrow \forall \forall \exists, \quad \exists \exists \forall \Rightarrow \forall \forall \exists; \exists \exists \forall, \dots$$

также имеет место в логике предикатов.

На первый взгляд выражения, типа

$$\forall \forall \exists \Rightarrow \forall \forall \exists \wedge \exists \forall \exists, \quad \forall \forall \exists \vee \exists \forall \exists \Rightarrow \exists \forall \exists,$$

противоречат аксиоме порядка. Однако подобные клаузы всегда заменимы тождествами, поэтому их можно представить аксиомой порядка. Тождества возникают для линейно-упорядоченных элементов, каковыми и являются элементы  $\forall \forall \exists$  и  $\exists \forall \exists$ :

$$\sup(\forall \forall \exists, \exists \forall \exists) = \forall \forall \exists \vee \exists \forall \exists = \exists \forall \exists,$$

$$\inf(\forall \forall \exists, \exists \forall \exists) = \forall \forall \exists \wedge \exists \forall \exists = \forall \forall \exists.$$

Несопоставимые же элементы, к которым относятся, например, элементы  $\forall \exists \exists$  и  $\exists \forall \forall$ , уже не будут описываться тождествами, а только отношением порядка:

$$\forall \exists \exists \vee \exists \forall \forall \Rightarrow \sup(\forall \exists \exists, \exists \forall \forall) = \forall \exists \exists \vee \exists \forall \forall, \quad \inf(\forall \exists \exists, \exists \forall \forall) = \forall \exists \exists \wedge \exists \forall \forall.$$

Так как

$$\sup(\forall \exists \exists, \exists \forall \forall) = \exists \exists \exists, \quad \inf(\forall \exists \exists, \exists \forall \forall) = \forall \forall \forall,$$

в логике предикатов будут возникать совершенно специфические клаузы, не сводящиеся к аксиоме порядка, типа —

$$\forall \exists \exists \vee \exists \forall \forall \Rightarrow \exists \exists \exists, \quad \forall \forall \forall \Rightarrow \forall \exists \exists \wedge \exists \forall \forall.$$

Рассматривая булеаны, нельзя не упомянуть о законе четырехплюсника. Действие его продемонстрируем сначала на числовом булеане делителей числа 30 (см. рис. 1.23). Если наибольший общий делитель (НОД) двух чисел  $a$  и  $b$  обозначить конъюнкцией ( $a \wedge b$ ), а наименьшее общее кратное (НОК) — через дизъюнкцию ( $a \vee b$ ), то в отношении этих двух арифметических понятий будут действовать все четыре закона булевой логики. Убедимся в справедливости закона дистрибутивности:  $(a \wedge b) \vee c = (a \vee c) \wedge (b \vee c)$ ; при  $a = 6$ ,  $b = 10$  и  $c = 5$ , получим:  $(6 \wedge 10) \vee 5 = (6 \vee 5) \wedge (10 \vee 5)$ , или  $2 \vee 5 = 30 \wedge 10$ , или  $10 = 10$ . Но из арифметики известен закон: произведение любых двух чисел равно произведению их НОД и НОК:  $a \cdot b = (a \vee b) \cdot (a \wedge b)$ . В частности,  $6 \cdot 10 = (6 \vee 10) \cdot (6 \wedge 10) = 30 \cdot 2$ .

Этот арифметический закон является следствием булеановой структуры делителей чисел. Подобный закон имеет место в любом

булеане (хотя смысл операций в нем может существенно меняться) и называется он *законом четырехполюсника*. Четыре полюса, соответствующие числам 6, 10, 2 и 30, взятые на булеане подмножеств (рис. 1.22), связаны соотношением:

$$\{a, b\} \oplus \{a, c\} = \{\{a, b\} \cup \{a, c\}\} \oplus \{\{a, b\} \cap \{a, c\}\}.$$

Под символом  $\oplus$  понимается *прямое сложение множеств*, при котором повторяющиеся элементы не удаляются, в частности:

$$\{a, b, c\} \oplus \{a\} = \{a, b, a, c\}.$$

Закон четырехполюсника выполняется и для 0,1-векторов (рис. 1.21). Прямое сложение заменяется обычным сложением единиц:

$$(111) + (001) = ((011) \vee (101)) + ((011) \wedge (101)); 3 + 1 = 4.$$

Число единиц в 0,1-векторе  $a$  будем называть его *модулем*, или *длиной*, и обозначать  $|a|$ . Из табл. 1.25 и табл. 1.26 выпишем в символической форме модули *предикатных векторов*:

$$|P(a)| = |P(b)| = 2, |\exists| = 3, |\forall| = 1;$$

$$|P(k, m)| = 8, |\exists\exists| = 15, |\forall\exists| = 9, |\exists\forall| = 7, |\forall\forall| = 1.$$

Нетрудно убедиться в справедливости закона четырехполюсника для двухмерного предикатного булеана:

$$|\exists\exists| + |\forall\forall| = |\forall\exists \vee \exists\forall| + |\forall\exists \wedge \exists\forall|; 15 + 1 = 11 + 5 = 16.$$

Таблица истинности для трехместных предикатов будет уже состоять из 256 строк. Чтобы определить модули 0,1-векторов кванторного булеана, таблицу истинности можно и не строить, но провести тщательный комбинаторный анализ. В итоге получим:

$$\begin{array}{lll} |\exists\forall\forall| = 31, & |\forall\exists\forall| = 49, & |\forall\forall\exists| = 81, \\ |\exists\exists\forall| = 175, & |\exists\forall\exists| = 207, & |\forall\forall\exists| = 225, \\ |\forall\forall\forall| = 1, & |\exists\exists\exists| = 255, & |P(k, m, n)| = 128. \end{array}$$

Кванторный булеан 3-го порядка наложен на векторный булеан 256-го порядка, причем его нижняя точка совпадает не с нулевым вектором, а с вектором первого уровня (00...01), верхняя же точка лежит на предпоследнем уровне (01...11). Таким образом, кванторный булеан оказывается немного развернутым относительно векторного булеана. Тем не менее, закон четырехполюсника для него тоже выполняется, в частности:

$$|\forall\forall\forall| + |\exists\exists\exists| = |\forall\forall\exists \vee \exists\forall\forall| + |\forall\forall\exists \wedge \exists\forall\forall|;$$

$$81 + 49 = 105 + 25 = 130.$$

Вообще, величина модуля вектора  $a$  является важной *собственной* характеристикой клауз, например:

$$|\exists \forall \forall| \Rightarrow |\forall \exists \forall \vee \exists \exists \forall|, \quad 31 \Rightarrow 151;$$

$$|\forall \exists \forall \vee \exists \forall \forall| \Rightarrow |\forall \exists \exists \forall|, \quad 105 \Rightarrow 225.$$

и тождеств, например:  $57 = 57$  для закона дистрибутивности:

$$|(\forall \forall \exists \wedge \exists \forall \forall) \vee \forall \exists \forall| = |(\forall \forall \exists \forall \vee \forall \exists \forall) \wedge (\exists \forall \forall \vee \forall \exists \forall)|.$$

С помощью модулей можно осуществлять частичную проверку правильности логических действий, хотя в случае многоместных предикатов для такого контроля понадобится уже компьютер, поскольку величина модулей даже для четырехместных предикатов исчисляется сотнями тысяч:

$$|\forall \exists \exists \exists| + |\exists \forall \exists \exists| = 65\,025 + 63\,135 = 128\,160.$$

### Построение доказательств в логике предикатов

Основной задачей логики предикатов является установление истинности предикатных тождеств и клауз. Обозначим через  $P_i$  какой-либо предикат с произвольным числом аргументов, а через  $q_i$  соответствующую ему кванторную группу. Тогда, например, закон дистрибутивности примет вид:

$$q_1 P_1 \vee (q_2 P_2 \wedge q_3 P_3) = (q_1 P_1 \vee q_2 P_2) \wedge (q_1 P_1 \vee q_3 P_3).$$

В том, что он выполняется для одноместных предикатов, можно убедиться через процедуру конкретизации, к которой мы уже не раз прибегали:

$$x = a, b;$$

$$q_1 = \forall x, P_1 = A(x);$$

$$y = c, d;$$

$$q_2 = \exists y, P_2 = B(y);$$

$$z = e, f;$$

$$q_3 = \forall z, P_3 = C(z).$$

$$\begin{aligned} & [A(a) \wedge A(b)] \vee ([B(c) \vee B(d)] \wedge [C(e) \wedge C(f)]) = \\ & = ([A(a) \wedge A(b)] \vee [B(c) \vee B(d)]) \wedge ([A(a) \wedge A(b)] \vee [C(e) \wedge C(f)]). \end{aligned}$$

От того, что в квадратных скобках появится вместо дизъюнкции конъюнкция, и наоборот, а также вместо одноместных предикатов будут фигурировать различные многоместные предикаты суть тождества не изменится. Оно останется истинным, в силу справедливости законов логики множеств и *принципа суперпозиции*, который

гласит: замена какой-либо константы другой константой или даже группой констант не может повлиять на истинность тождества. Именно отсюда проистекает уверенность в справедливости законов логики множеств и по отношению к предикатам.

Те же рассуждения можно провести и в отношении логики высказываний. Она отличается от логики Буля *аксиомой порядка* —

$$q_1 P_1, q_2 P_2 \Rightarrow q_1 P_1.$$

Процедура конкретизации сводит предикатную аксиому порядка к простому высказыванию, так что если клауза верна для высказываний, она будет справедлива и для предикатов.

Как показывает практика, много ошибок приходится на неправильное обозначение предикатов при их, в принципе, правильной идентификации. Следует помнить, что положительный предикат должен иметь больше единиц, чем отрицательный. Будет допущена ошибка, если противоречие

$$A_1, \underline{A}_2 \Rightarrow \mathbf{0} \quad \text{записать как } A_2, \underline{A}_1 \Rightarrow \mathbf{0}.$$

Перейдем к анализу конкретных предикатных выражений.

*Пример 1.* Пусть дано следующее тождество:

$$\begin{aligned} & (\exists x \forall y \underline{P}(x, y) \vee \exists u \forall v P(v, u)) \wedge (\forall v \exists u P(v, u) \wedge \\ & \wedge \exists y \forall x P(x, y)) = \exists x \forall y P(y, x) \wedge \forall u \exists v P(u, v). \end{aligned}$$

Здесь можно ввести следующие обозначения:

$$\begin{aligned} A &= \forall x \exists y P(x, y) = \forall v \exists u P(v, u) = \forall u \exists v P(u, v), \\ B &= \exists u \forall v P(v, u) = \exists y \forall x P(x, y) = \exists x \forall y P(y, x). \end{aligned}$$

В этих обозначениях тождество выглядит следующим образом:

$$(\underline{A} \vee B) \wedge (A \wedge B) = B \wedge A.$$

Производя элементарные преобразования, мы можем убедиться в справедливости последнего равенства. Следовательно, и исходное тождество составлено верно.

*Пример 2.* Пусть дана предикатная клауза:

$$\begin{aligned} & \forall x \exists y P(x, y) \rightarrow \forall v P(a, v), \forall x P(a, x) \rightarrow \\ & \rightarrow \exists x \forall y P(y, x) \Rightarrow \forall u \exists v P(u, v) \rightarrow \exists v \forall u P(u, v). \end{aligned}$$

Введем обозначения:

$$A = \forall x \exists y P(x, y) = \forall u \exists v P(u, v),$$

$$B = \forall v P(a, v) = \forall x P(a, x), \\ C = \exists x \forall y P(y, x) = \exists v \forall u P(u, v).$$

Получим:

$$A \rightarrow B, B \rightarrow C \Rightarrow A \rightarrow C.$$

Как известно, формула транзитивности верна, следовательно, и предикатная клауза тоже верна.

Итак, доказательство справедливости первых двух предикатных выражений свелось к простой процедуре *идентификации* их с соответствующими выражениями, существующими в логике Буля и логике высказываний. Рассмотрим более сложные примеры.

*Пример 3.* Доказать истинность клаузы:

$$\forall v \exists u P(u, v) \rightarrow \forall u \forall v P(u, v), \exists x \forall y P(x, y) \Rightarrow \forall u P(u, u).$$

Введем обозначения:

$$A_1 = \exists x \forall y P(x, y), \quad A_2 = \forall v \exists u P(u, v),$$

$$B_1 = \forall u \forall v P(u, v), \quad B_2 = \forall u P(u, u).$$

В этих обозначениях клауза будет иметь вид:

$$A_2 \rightarrow B_1, A_1 \Rightarrow B_2 \quad \text{или} \quad \underline{A_2} \vee B_1, A_1, \underline{B_2} \Rightarrow \mathbf{0}.$$

По методу резолюций противоречие возможно, если возможны два других противоречия —

$$A_1, \underline{A_2} \Rightarrow \mathbf{0}, \quad B_1, \underline{B_2} \Rightarrow \mathbf{0}.$$

Список из восемнадцати клауз, который мы вывели из табл. 1.26, предоставляет нам две истинных клаузы под номером 6 и 7. Если их представить в форме противоречия, то они будут полностью отвечать последним двум выражениям:

$$\exists x \forall y P(x, y), \forall y \exists x P(x, y) \Rightarrow \mathbf{0}, \forall x \forall y P(x, y), \forall x P(x, x) \Rightarrow \mathbf{0}.$$

Таким образом, истинность исходной клаузы можно считать установленной.

*Пример 4.* Доказать истинность клаузы:

$$\forall z B(z, z) \rightarrow \exists x \exists y B(x, y), \exists z \forall y \underline{A}(z, y) \rightarrow \forall u \forall v B(v, u), \exists x A(b, x) \Rightarrow \\ \Rightarrow \exists z \exists x \underline{B}(x, z) \wedge \exists z \forall y \underline{A}(z, y).$$

Процедура идентификации приводит к следующим выкладкам:

$$A_1 = \forall z \exists y A(z, y), A_2 = \exists x A(b, x), B_1 = \forall u \forall v B(v, u) = \forall z \forall x B(x, z),$$

$$B_2 = \forall z B(z, z), B_3 = \forall x \exists y B(x, y); B_2 \rightarrow \underline{B}_3, \underline{A}_1 \rightarrow B_1, \underline{A}_2 \Rightarrow \underline{B}_1 \wedge \underline{A}_1;$$

$$\underline{B}_2 \vee \underline{B}_3, A_1 \vee B_1, \underline{A}_2 \Rightarrow 0.$$

$$A_1, \underline{A}_2 \Rightarrow 0, \quad \forall x \exists y A(x, y), \exists y A(k, y) \Rightarrow 0,$$

$$B_1, \underline{B}_2 \Rightarrow 0, \quad \forall x \forall y B(x, y), \forall x B(x, x) \Rightarrow 0,$$

$$B_1, \underline{B}_3 \Rightarrow 0, \quad \forall x \forall y B(x, y), \forall x \exists y B(x, y) \Rightarrow 0.$$

Отсюда следует истинность исходной клаузы.

*Пример 5.* Докажем справедливость клаузы:

$$\forall x \exists y A(x, y) \vee \exists y \forall x B(x, y) \vee \forall u \forall v \forall w C(u, v, w),$$

$$\forall y \exists x A(y, x) \rightarrow \forall x \forall y C(x, y, b), \exists x \forall y B(y, x) \rightarrow \forall u \forall v C(u, v, a) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall x \exists y \exists z C(x, z, y) \wedge \exists u \forall v \exists w C(u, v, w).$$

Доказательство:

$$A = \forall x \exists y A(x, y) = \forall y \exists x A(y, x), B = \exists y \forall x B(x, y) = \exists x \forall y B(y, x),$$

$$C' = \forall x \exists y \exists z C(x, z, y), C'' = \exists u \forall v \exists w C(u, v, w), C_1 = \forall u \forall v C(u, v, a),$$

$$C_2 = \forall x \forall y C(x, y, b), C_3 = \forall u \forall v \forall w C(u, v, w).$$

$$A \vee B \vee C_3, \underline{A} \vee C_2, \underline{B} \vee C_1 \Rightarrow C' \wedge C''.$$

Воспользуемся свойством булеана:

$$C = \forall x \forall y \exists z C(x, y, z) = \inf(C', C'') \Rightarrow C' \wedge C''.$$

Тогда соответствующие противоречия для компенсации  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_3$  будут удовлетворены элементом  $C$ :

$$C_1, \underline{C} \Rightarrow 0, \quad C_2, \underline{C} \Rightarrow 0, \quad C_3, \underline{C} \Rightarrow 0.$$

После использования этого математического приема доказательство исходной клаузы становится очевидным.

*Пример 6.* Доказать истинность клаузы:

$$\forall x \forall y \underline{A}(x, y, c) \vee \forall y \exists z \underline{A}(a, y, z), \exists y A(a, y, c) \vee$$

$$\vee \exists z \underline{A}(b, a, z), \forall x \forall z A(x, a, z) \vee \forall y \forall z A(b, y, z) \Rightarrow \forall x \forall z A(x, b, z).$$

Доказательство:

$$\underline{A}' = \forall x \forall y \underline{A}(x, y, c), B' = \forall x \forall z A(x, a, z), \underline{A}'' = \forall y \forall z \underline{A}(a, y, z),$$

$$B'' = \forall y \forall z A(b, y, z), A = \exists y A(a, y, c) = \inf(A', A''),$$

$$\underline{B} = \exists z \underline{A}(b, a, z) = \underline{\sup}(B', B''), C = \forall x \forall z A(x, b, z);$$

$$\underline{A}' \vee \underline{A}'', \inf(A', A'') \vee \underline{\sup}(B', B''), B' \vee B'' \Rightarrow C.$$



Инфимум, супремум, верхняя и нижняя грани здесь частично конкретизированы; элемент  $C$  не влияет на истинность исходной клаузы. Продолжить доказательство клаузы далее уже не составит большого труда.

*Пример 7.* Любая семантика логики высказываний может быть выражена в предикатной форме. В качестве примера возьмем легенду о кассире и водителе (с. 52). Для нее введем следующие предикаты:

$A(x)$  —  $x$  говорит правду,

$B(x, y)$  —  $x$  находится внутри помещения  $y$ ,

$C(x, z)$  —  $x$  способен слышать звуки  $z$ .

Область определения переменных:

$x = \{a, b\}$ , где  $a$  — кассир,  $b$  — водитель;

$y = \{c, \dots\}$ , где  $c$  — комната отдыха;

$z = \{d, \dots\}$ , где  $d$  — звуки выстрелов.

Содержание посылок и заключений следователя нами уже было раскрыто в разделе логики высказываний; здесь же приведем только их предикатную запись и необходимые разъяснения:

$$P_1 = A(a) \rightarrow B(b, c), \quad P_2 = B(b, c) \rightarrow \forall z C(b, z),$$

$$P_3 = \forall z C(b, z) \rightarrow C(b, d), \quad P_4 = A(b) \rightarrow \underline{C}(b, d).$$

В предикатной форме посылка  $P_3$  является тавтологией, так как квантор существования можно расписать:

$$P_3 = \exists z \underline{C}(b, z) \vee C(b, d) = \underline{C}(b, d) \vee \dots \vee C(b, d) = 1.$$

Тавтология не влияет на процедуру установления истинности клаузы и поэтому может быть удалена из перечня посылок, что мы и сделаем. Использование кванторов позволяет также несколько иначе интерпретировать заключение  $C_1$ : «не все  $x$  говорят правду» или «существует  $x$ , который говорит ложь» —

$$C_1 = A(a) \rightarrow \underline{A}(b) = \underline{A}(a) \vee \underline{A}(b) = \exists x \underline{A}(x) = \forall x A(x).$$

Ложное второе следствие  $C_2$  тоже может быть записано через кванторы двумя эквивалентными способами: «все  $x$  говорят правду» или «нет ни одного  $x$ , который бы обманывал» —

$$C_2 = A(a) \wedge A(b) = \forall x A(x) = \exists x \underline{A}(x).$$

Формальная запись всей легенды без  $P_3$  и с заключением  $C_1$  будет:

$$A(a) \rightarrow B(b, c), B(b, c) \rightarrow \forall z C(b, z), A(b) \rightarrow \underline{C}(b, d) \Rightarrow \exists x \underline{A}(x).$$

Истинность ее установим методом резолюций:

$$\underline{A}(a) \vee B(b, c), \underline{B}(b, c) \vee \forall z C(b, z), \underline{A}(b) \vee \underline{C}(b, d), \forall x A(x) \Rightarrow 0.$$

Это противоречие имеет место, так как все клаузы, отвечающие необходимым склейкам, истинны:

$$\begin{aligned} B(b, c) \Rightarrow B(b, c), \forall z C(b, z) \Rightarrow C(b, d), \\ \forall x A(x) \Rightarrow A(a), \forall x A(x) \Rightarrow A(b). \end{aligned}$$

*Пример 8.* Дана следующая простая легенда:

*Если Иван повсюду ходит за Петром, а Петр находится в институте, то где же будет находиться Иван?*

$$P(x, y) \text{ — « } x \text{ находится там, где } y \text{ »}$$

Составим клаузу:

$$\forall z (P(\text{Петр}, z) \rightarrow P(\text{Иван}, z)), P(\text{Петр}, \text{институт}) \Rightarrow \exists z (P(\text{Иван}, z)).$$

По существу, здесь доказывается следующее предложение: существует ли такое место  $z$ , где находился бы Иван. Преобразуем исходную клаузу в противоречие:

$$\underline{P}(\text{Петр}, z) \vee P(\text{Иван}, z), P(\text{Петр}, \text{институт}), \underline{P}(\text{Иван}, z) \Rightarrow 0.$$

Здесь и ниже кванторы общности мы будем опускать, поскольку кванторы существования отсутствуют. Доказательство клаузы оформим в виде дерева (рис. 1.26)

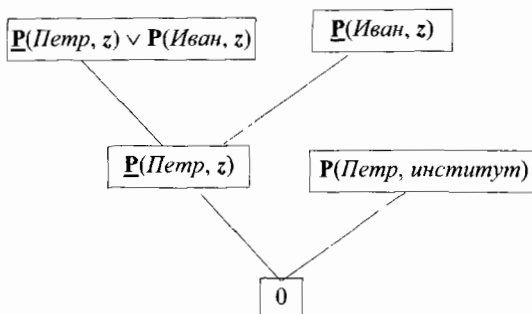


Рис. 1.26

При конкретизации  $z = \text{институт}$ , доказывается, что действительно

существует такое место  $z$ , в котором мог бы находиться Иван.

Однако метод резолюций можно модифицировать так, чтобы итогом доказательства был не ноль, а непосредственно ответ в предикатной форме: *Иван находится в институте*. Этого можно достичь, если к тому, что требуется доказать, прибавить через дизъюнкцию противоположное утверждение, образовав таким образом тавтологию:  $\underline{P}(\text{Иван}, z) \vee P(\text{Иван}, z)$ . Тогда дерево логического вывода будет выглядеть так, как это показано на рис. 1.27.

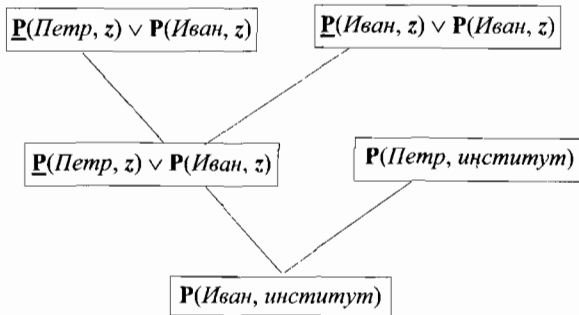


Рис. 1.27

Большинство задач с использованием предикатов носит *поисковый* характер. Поисковые задачи реализуются средствами языка логического программирования ПРОЛОГ. Остановимся на основных структурных и функциональных элементах этого языка.

Поскольку логика высказываний имеет дело с любыми правильно построенными предложениями, существует серьезная опасность смешения объектных и субъектных предложений, а также предложений, взятых с различных иерархических уровней предметной области логики высказываний. Чтобы избежать указанной опасности, доказываемую задачу оформляют в виде отчетливой *структуры древовидной формы*. В качестве корня дерева выбирается некая *цель*  $S$ , истинность которой необходимо установить. Она всегда фигурирует в качестве заголовка *правила*, которое представляет собой *хорновскую клаузу*. Эти клаузы в данном случае удобно записать в обратном порядке:  $S \Leftarrow B_1, B_2, \dots$  Каждая из посылок  $B_i$  представляет собой подцель основной цели  $S$  и зависит, в свою очередь, от других *правил*  $A_{ij}$ :

$$B_1 \Leftarrow A_{11}, A_{12}, \dots, \quad B_2 \Leftarrow A_{21}, A_{22}, \dots$$

Впрочем, в роли посылок  $V_i$  могут выступать не клаузы, а элементарные высказывания — *факты*. Далее посылки  $A_j$  опять могут быть либо заголовками новых правил, либо фактами. Так образуется *иерархическая структура древовидной формы*. В логических деревьях уже не возникает описанных выше парадоксов.

В ПРОЛОГе реализована *процедура унификации*, с помощью которой производится сравнение *цели* с *правилами*, а *правила* сопоставляются с *фактами*. В результате унификации переменным присваиваются конкретные значения, так что предикат цели становится истинным фактом в случае положительного исхода. Чтобы понять, как осуществляется унификация, разберем конкретный пример программы.

*Пример 9.* Имеется следующая легенда:

*Ивана интересуют компьютеры, книги и автомобили. Петра интересуется нечто, что интересуется Ивана, но если это нечто является техникой и если это произведено в России. Известно, что компьютеры и автомобили — это техника. Кроме того, известно, что компьютеры производятся в Америке, а автомобили — в Америке и России. Вопрос: "Что интересуется Петра?"*

Для удобства пользования программой все предикаты и конкретные значения переменных не кодируются отдельными буквами, а приводятся в словах непосредственно, передающих их семантику. Мы, однако, слева от текста программы приведем символичные выражения, чтобы далее у нас была возможность продемонстрировать в аналитической форме *метод резолюций*, который лежит в основе функционирования ПРОЛОГа. Будем помнить также, что все склейки осуществляются с квантором общности, хотя сам квантор не указывается.

Программа:

- |   |           |
|---|-----------|
| 1) <i>интерес (Иван, компьютеры).</i>               | $A(i, a)$ |
| 2) <i>интерес (Иван, книги).</i>                    | $A(i, b)$ |
| 3) <i>интерес (Иван, автомобили).</i>               | $A(i, c)$ |
| 4) <i>интерес (Петр, x) <math>\Leftarrow</math></i> | $A(p, x)$ |
| 5) $\Leftarrow$ <i>интерес (Иван, x).</i>           | $A(i, x)$ |
| 6) <i>техника (x),</i>                              | $T(x)$    |
| 7) <i>произведено(x, Россия).</i>                   | $P(x, r)$ |

8) техника (компьютеры).	$T(a)$
9) техника(автомобили).	$T(c)$
10) произведено (компьютеры, Америка).	$P(a, s)$
11) произведено (автомобили, Америка).	$P(c, s)$
12) произведено (автомобили, Россия).	$P(c, r)$
Цель:13) интерес (Петр, x).	$A(p, x)$

Данная программа позволяет составить следующее противоречие, которое может быть разрешено в рамках метода резолюций:

$$A(i, a), A(i, b), A(i, c), T(a), T(c), A(p, x) \vee \underline{A}(i, x) \vee \\ \vee \underline{T}(x) \vee \underline{P}(x, r), P(a, s), P(c, s), P(c, r), \underline{A}(p, x) \Rightarrow 0.$$

Ноль можно получить только в том случае, если  $x = c$ . Тогда

$$A(p, c) \vee \underline{A}(i, c) \vee \underline{T}(c) \vee \underline{P}(c, r)$$

нейтрализуется предикатами под номерами 3, 9, 12 и 13. Поиск нужного значения  $x$  как раз и осуществляется через процедуру унификации, которую можно отследить путем трассировки программы. Трассировка — это пошаговое протоколирование процесса выполнения программы. Приведем трассировку нашей программы:

1. В: цель ( ) - 13,
2. В: интерес (Петр, \_) - 1,
3. П: интерес (Петр, \_) - 2,
4. П: интерес (Петр, \_) - 3,
5. У: интерес (Петр, \_) - 4,
6. В: интерес (Иван, \_) - 5,
7. У: интерес (Иван, компьютеры) - 1 у,
8. В: техника (компьютеры) - 6,
9. У: техника (компьютеры) - 8,
10. В: произведено (компьютеры, Россия) - 7,
11. П: произведено (компьютеры, Россия) - 10,
12. П: произведено (компьютеры, Россия) - 11,
13. Н: произведено (компьютеры, Россия) - 12,
14. П: интерес (Иван, \_) - 5,
15. У: интерес (Иван, книги) - 2 у,

16. В: *техника (книги)* - 6,
17. П: *техника (книги)* - 8,
18. Н: *техника (книги)* - 9,
19. П: *интерес (Иван, \_)* - 5,
20. У: *интерес (Иван, автомобили)* - 3,
21. В: *техника (автомобили)* - 6,
22. П: *техника (автомобили)* - 8,
23. У: *техника (автомобили)* - 9,
24. В: *произведено (автомобили, Россия)* - 7,
25. П: *произведено (автомобили, Россия)* - 10,
26. П: *произведено (автомобили, Россия)* - 11,
27. У: *произведено (автомобили, Россия)* - 12,
28. У: *цель ( )* - 13.

Здесь использованы следующие обозначения: В — вызов нового предиката; П — повторный вызов предиката; У — успешное завершение процедуры унификации, т.е. вызванный предикат отвечает какому-либо факту; Н — неуспешное завершение унификации; у — указатель, который говорит о том, что существует по крайней мере еще один факт с подходящей унификацией. Символ подчеркивания на месте  $x$  называется *анонимной переменной* и полностью заменяет  $x$  при трассировке программы. Строка трассировки заканчивается числом, отвечающим номеру листинга программы.

Для того чтобы ответить на вопрос «Что интересует Петра?» или в предикатной форме — *интерес (Петр, x)*, ПРОЛОГ-система ищет факты и заголовки правил, сопоставимые с целью. Поиск всегда начинается с первой строки программы. Первые три факта несопоставимы с целью; далее следует правило, заголовок которого заменяется на три подцели. В строке 6 вызывается первая подцель. Затем ПРОЛОГ-система возвращается в начало программы, где ее ожидает «успех». Выставляется указатель «у», к которому система вернется в случае «неуспеха» (он может появиться в другом месте программы). В строке 8 производится вызов второй подцели — *техника (компьютеры)*, для которой тут же находится подходящий факт (строка 9). Однако для третьей подцели — *произведено (компьютеры, Россия)* — нужного факта не находится (строка 13). Тогда переменная  $x$  освобождается от своей прежней конкретизации (*ком-*

пьютеры) и принимает новое значение — книги. Эта конкретизация не удовлетворяет вторую подцель (строка 18). Переменная вновь освобождается и принимает значение *автомобили*. При этой конкретизации удовлетворены все три подцели, следовательно, и поиск ответа на основной вопрос заканчивается «успехом»: Петра интересуют автомобили, т.е. *интерес (Петр, автомобили)* является тем конкретизированным предикатом, при котором обеспечена истинность всей клаузы.

Граф поиска ответа, сформулированного в виде цели *интерес (Петр, x)*, представлен рис. 1. 28. Бинарное дерево получилось в итоге подстановок предметных констант на место переменных, правила заменялись фактами, а цель — подцелями. Трассировка показывает, что ПРОЛОГ-система не сразу вышла на это дерево склеек. В пунктах 7, 9 и 15 протокола трассирования также производились склейки, но они привели к «неуспеху». Скорейшее достижение цели зависит от правильного выбора стратегии поиска и искусства программирования.

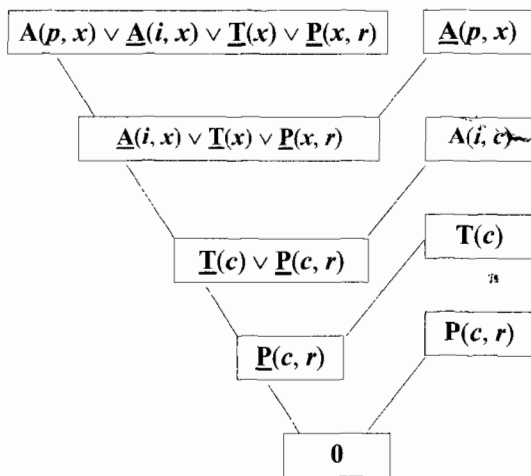


Рис. 1.28

### Практические задания по логике предикатов

1. Установить истинность логического выражения своего варианта путем конкретизации.

$$1. \forall x \forall y P(x, y) \Rightarrow \exists x \exists y P(x, y),$$

3.  $\forall y \exists z \mathbf{B}(y, c, z), \forall x \exists y \mathbf{A}(x, y, y) \vee \forall x \mathbf{B}(b, x, a) \vee \exists x \forall w \mathbf{A}(x, c, w) \vee$   
 $\forall u \exists w \mathbf{B}(u, c, w) \Rightarrow \exists z \mathbf{B}(z, c, z) \wedge \forall u \exists w \mathbf{A}(u, c, w);$   
 $\forall u \exists w \mathbf{B}(u, w, w) \wedge \exists u \mathbf{A}(b, u, u) \wedge \exists x \mathbf{B}(b, c, x).$
4.  $\forall x \exists z \mathbf{B}(x, z, a), \forall u \exists w \mathbf{A}(u, w, w) \vee \exists z \forall w \mathbf{B}(w, z, z) \vee$   
 $\exists z \forall x \mathbf{A}(x, c, z) \Rightarrow \forall x \exists w \mathbf{A}(x, x, w) \wedge \forall u \exists v \mathbf{B}(u, v, b);$   
 $\exists v \exists w \mathbf{B}(b, v, w) \wedge \exists z \mathbf{A}(b, z, z) \wedge \exists v \forall u \mathbf{B}(u, v, a).$
5.  $\forall x \forall z \mathbf{A}(x, x, z), \exists x \exists y \mathbf{B}(x, x, y) \rightarrow \forall z \mathbf{A}(z, b, z) \Rightarrow \exists u \exists v \mathbf{A}(u, v, v)$   
 $\wedge \exists z \mathbf{B}(z, z, z); \forall u \exists v \mathbf{A}(a, v, u) \wedge \exists y \mathbf{B}(a, y, a) \wedge \exists x \mathbf{A}(x, b, c).$
6.  $\mathbf{A}(b, b, c), \forall v \forall w \mathbf{B}(c, v, w), \forall u \mathbf{B}(u, u, a) \Rightarrow \forall v \mathbf{A}(b, v, b) \wedge$   
 $\exists u \mathbf{B}(c, u, u) \wedge \exists u \exists x \mathbf{A}(u, x, c);$   
 $\forall x \mathbf{B}(x, c, a) \wedge \forall y \forall z \mathbf{A}(y, y, z) \wedge \forall y \mathbf{B}(c, y, y).$
7.  $\forall u \exists w \mathbf{A}(b, u, w) \vee \mathbf{B}(c, c, c) \vee \exists w \forall u \mathbf{A}(u, c, w) \vee \forall w \mathbf{B}(b, w, w),$   
 $\forall w \exists u \mathbf{B}(w, u, a) \Rightarrow \exists u \mathbf{A}(u, c, a) \wedge \exists v \exists w \mathbf{B}(w, v, w);$   
 $\exists v \exists w \mathbf{B}(b, v, w) \wedge \exists z \mathbf{A}(z, c, z) \wedge \exists x \forall y \mathbf{B}(y, x, a).$
8.  $\forall y \forall z \mathbf{A}(a, y, z) \vee \forall v \exists w \mathbf{A}(w, v, v), \forall x \forall z \mathbf{B}(x, a, z) \vee \forall x \mathbf{B}(x, c, a)$   
 $\Rightarrow \exists u \forall z \mathbf{A}(u, z, c) \wedge \exists x \mathbf{B}(x, x, a); \exists y \mathbf{B}(b, y, b) \wedge \exists y \mathbf{B}(c, y, a).$
9.  $\forall z \mathbf{A}(z, b, z) \vee \forall x \mathbf{B}(x, x, x), \forall z \exists x \mathbf{A}(a, x, z) \vee \forall w \exists u \mathbf{A}(u, b, w) \Rightarrow$   
 $\exists w \mathbf{A}(a, w, w) \wedge \forall y \mathbf{B}(a, y, a); \exists x \mathbf{A}(x, x, c) \wedge \exists v \exists w \mathbf{B}(v, v, w).$
10.  $\forall y \forall z \mathbf{A}(a, y, z) \vee \forall w \mathbf{B}(a, w, w) \vee \forall y \exists x \mathbf{A}(x, y, c),$   
 $\exists u \forall z \mathbf{B}(u, u, z) \rightarrow \exists x \forall y \mathbf{A}(x, y, a) \Rightarrow \exists x \forall z \mathbf{B}(x, z, z) \wedge$   
 $\forall w \exists z \mathbf{A}(z, w, w) \wedge \forall w \exists u \mathbf{B}(u, b, w); \exists u \forall w \mathbf{A}(u, w, c).$
11.  $\forall x \forall y \mathbf{B}(x, y, y) \vee \forall w \mathbf{A}(w, w, w), \exists x \forall y \mathbf{B}(b, y, x) \vee$   
 $\forall v \mathbf{A}(b, v, b) \vee \forall u \mathbf{B}(u, c, a) \Rightarrow \exists u \exists w \mathbf{B}(u, u, w);$   
 $\forall u \forall v \mathbf{A}(u, u, v) \wedge \exists w \mathbf{B}(w, c, w).$
12.  $\forall y \forall z \mathbf{A}(a, y, z) \vee \forall w \mathbf{B}(w, b, w) \vee \forall u \exists v \mathbf{A}(v, u, c), \exists x \mathbf{B}(x, b, c) \rightarrow$   
 $\forall y \forall z \mathbf{A}(z, y, z) \Rightarrow \exists z \forall x \mathbf{A}(z, x, c); \exists x \forall z \mathbf{B}(a, x, z) \wedge \mathbf{A}(b, b, b) \wedge$   
 $\forall z \exists x \mathbf{B}(x, b, z) \wedge \exists z \mathbf{A}(a, z, z).$
13.  $\exists u \mathbf{A}(u, b, c) \rightarrow (\exists v \exists w \mathbf{B}(v, v, w) \rightarrow \exists v \mathbf{A}(b, v, v)),$   
 $\exists y \mathbf{B}(a, y, a) \vee \forall x \mathbf{A}(b, x, x) \vee \forall x \forall u \mathbf{B}(x, u, b) \Rightarrow$   
 $\forall x \mathbf{A}(x, x, c) \rightarrow \exists y \exists z \mathbf{A}(b, y, z); \mathbf{B}(a, a, b).$



2.  $\forall x \exists y (A(y) \vee B(x)) = \exists x A(x) \vee \forall x B(x)$ ,
3.  $\exists x (B(x) \wedge A) = \exists x B(x) \wedge A$ ,
4.  $\exists x (A(x) \rightarrow B) = \forall x A(x) \rightarrow B$ ,
5.  $\forall x \forall y P(x, y) \Rightarrow \forall x P(x, x)$ ,
6.  $\exists x (A(x) \vee B(x)) = \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$ ,
7.  $\exists x A(x) \rightarrow \forall x B(x) \Rightarrow \forall x (A(x) \rightarrow B(x))$ ,
8.  $\forall x (A(x) \rightarrow B) = \exists x A(x) \rightarrow B$ ,
9.  $\forall x \forall y (A(x) \rightarrow B(y)) = \exists x A(x) \rightarrow \forall x B(x)$ ,
10.  $\exists x (A(x) \rightarrow B(x)) = \forall x A(x) \rightarrow \exists x B(x)$ ,
11.  $\forall x A(x) \vee \forall x B(x) \Rightarrow \forall x (A(x) \vee B(x))$ ,
12.  $\exists x A(x) \vee \forall x B(x) = \exists x \forall y (A(x) \vee B(y))$ ,
13.  $\exists x (A \rightarrow B(x)) = A \rightarrow \exists x B(x)$ ,
14.  $\forall x \forall y P(x, y) \Rightarrow \forall x \exists y P(x, y)$ ,
15.  $\exists x \forall y P(x, y) \Rightarrow \exists x \exists y P(x, y)$ ,
16.  $\forall x \exists y P(x, y) \Rightarrow \exists x \exists y P(x, y)$ ,
17.  $\exists x \forall y (A(x) \vee B(y)) = \forall y \exists x (A(x) \vee B(y))$ ,
18.  $\forall y P(a, y) \Rightarrow \forall y \exists x P(x, y)$ ,
19.  $\exists x \forall y P(x, y) \Rightarrow \exists x P(x, b)$ ,
20.  $\forall x (A \vee B(x)) = A \vee \forall x B(x)$ ,
21.  $\forall x A(x) \vee \forall x B(x) = \forall x \forall y (A(x) \vee B(y))$ ,
22.  $\exists x A(x) \rightarrow \forall x B(x) = \forall x \forall y (A(x) \rightarrow B(y))$ ,
23.  $\forall x (A \rightarrow B(x)) = A \rightarrow \forall x B(x)$ ,
24.  $\exists x P(x, x) \Rightarrow \exists x \exists y P(x, y)$ ,
25.  $\forall x P(x, b) \Rightarrow \exists y \forall x P(x, y)$ .

2. Доказать истинность предикатных клауз методом резолюций.

1.  $\forall z B(b, z, z) \vee \exists v \underline{A}(b, v, b), \forall u B(u, u, a) \vee \forall y \forall z A(y, y, z) \Rightarrow$   
 $\exists w B(w, c, w) \wedge \exists u A(u, u, u); \exists w \forall u B(b, u, w) \wedge \exists z \forall x B(x, c, z)$ .
2.  $\exists x \forall z B(x, b, z) \rightarrow \forall w A(w, b, w), \exists x \forall z A(x, z, z) \vee \forall x B(a, x, x) \vee$   
 $\forall u A(a, b, u) \Rightarrow \exists v \forall w A(v, b, w); \exists u \forall v B(u, v, v) \wedge \exists u A(a, u, c) \wedge$   
 $\forall u \exists z B(u, b, z) \wedge \exists x \forall z A(x, b, z)$ .

$$\forall u \forall v \exists w A(u, v, w).$$

$$25. \exists y \forall z B(y, a, z) \rightarrow \forall u \forall v A(b, v, u), \forall u \forall v A(v, u, a) \vee$$

$$\forall y \exists u \forall z B(u, y, z), \forall z B(z, z, z) \Rightarrow \exists y B(a, y, b) \wedge$$

$$\exists x \forall y \exists z A(x, y, z); \exists u \forall v \exists w A(u, v, w).$$

3. Для легенды вашего варианта (с.66, задание 3) введите соответствующие предикаты, составьте предикатную клаузу и докажите ее истинность методом резолюций. Если предикаты для вашей клаузы ввести затруднительно, придумайте новую легенду, для которой введение предикатов и кванторов было бы возможно.

4. Задана ПРОЛОГ-программа «Родственные отношения». Необходимо выполнить трассировку программы отдельно для двух целей, предварительно введя недостающие предикаты и правила. Так как может существовать несколько значений для переменных  $x$  и  $y$ , удовлетворяющих одной и той же цели, при трассировке допустимо ограничиться одним истинным значением  $x$  или  $y$ . Кроме того, ввиду большого числа повторных вызовов, можно указывать только первую и последнюю строки повторяющихся вызовов, например:

...

81. В: муж (Феликс)  $\rightarrow$  85.

82. П: муж (Феликс) — 1,

...

99. П: муж (Феликс) — 18,

100. У: муж (Феликс) — 19.

ПРОЛОГ-программа «Родственные отношения»

*муж* ( $x$ ) —  $x$  мужчина.

*жен* ( $x$ ) —  $x$  женщина.

*отец* ( $x, y$ ) —  $x$  отец  $y$ .

*мать* ( $x, y$ ) —  $x$  мать  $y$

*сестра* ( $x, y$ ) —  $x$  сестра  $y$ .

*дочь* ( $x, y$ ) —  $x$  дочь  $y$ .

*сын* ( $x, y$ ) —  $x$  сын  $y$ .

*род* ( $x, y$ ) —  $x$  родитель  $y$ .

*брат* ( $x, y$ ) —  $x$  брат  $y$ .

Клаузы:

1) муж (Николай).

3) муж (Степан).

5) муж (Павел).

7) муж (Анатолий).

9) муж (Роман).

2) муж (Иван).

4) муж (Сергей).

6) муж (Игорь).

8) муж (Иосиф).

10) муж (Кирилл).

14.  $\forall w \underline{\mathbf{B}}(b, c, w), \forall x \exists z \mathbf{B}(x, b, z), \forall z \mathbf{A}(a, z, z) \Rightarrow \exists u \underline{\mathbf{B}}(u, c, a) \wedge$   
 $\exists w \mathbf{B}(c, b, w) \wedge \exists u \forall w \underline{\mathbf{A}}(b, u, w); \exists z \forall w \mathbf{A}(z, w, z) \wedge$   
 $\forall u \exists w \mathbf{B}(u, w, w) \wedge \exists w \mathbf{A}(w, a, w).$
15.  $\forall v \underline{\mathbf{A}}(a, v, b) \vee \forall v \mathbf{A}(c, v, c), \forall u \mathbf{A}(u, u, b) \vee \forall x \exists w \mathbf{B}(x, w, a) \Rightarrow$   
 $\exists v \exists w \mathbf{B}(b, v, w) \wedge \exists y \forall z \mathbf{B}(z, y, y); \exists u \exists w \mathbf{A}(u, b, w) \wedge \exists u \mathbf{A}(u, a, b).$
16.  $\exists x \mathbf{A}(x, b, c) \rightarrow (\exists x \forall z \mathbf{B}(a, x, z) \rightarrow \forall z \mathbf{A}(b, a, z)),$   
 $\forall w \exists z \mathbf{B}(w, z, w) \vee \exists x \forall z \mathbf{A}(x, z, z) \vee \forall z \mathbf{B}(z, c, z) \Rightarrow$   
 $\forall z \mathbf{A}(a, b, z) \rightarrow \exists u \forall w \mathbf{A}(u, a, w); \exists w \mathbf{B}(c, w, w).$
17.  $\exists z \forall x \underline{\mathbf{A}}(x, b, z), (\forall x \exists z \mathbf{A}(z, b, x) \rightarrow \forall x \forall z \mathbf{B}(x, a, z)) \rightarrow$   
 $(\exists u \forall y \underline{\mathbf{A}}(y, b, u) \wedge \forall x \exists y \forall z \mathbf{B}(x, y, z)) \Rightarrow \forall u \exists w \exists v \mathbf{B}(u, v, w) \wedge$   
 $\exists u \exists z \forall v \mathbf{B}(z, u, v).$
18.  $(\forall u \mathbf{A}(u, a, b) \rightarrow \exists z \forall y \exists x \underline{\mathbf{B}}(z, y, x)) \rightarrow (\forall u \exists v \forall w \mathbf{B}(u, v, w) \vee$   
 $\forall x \exists y \mathbf{A}(x, y, a)), \exists u \forall v \underline{\mathbf{A}}(u, v, a) \Rightarrow \forall u \exists w \exists v \mathbf{B}(u, v, w) \wedge$   
 $\exists x \exists y \forall z \mathbf{B}(x, y, z).$
19.  $\exists x \forall y \forall z \mathbf{B}(x, y, z), \exists u \forall y \forall x \mathbf{A}(u, x, y) \vee \forall x \exists z \mathbf{B}(x, a, z),$   
 $\forall z \exists x \mathbf{B}(z, a, x) \rightarrow \forall u \exists v \forall w \underline{\mathbf{B}}(u, v, w) \Rightarrow \exists u \exists v \forall w \mathbf{A}(u, v, w) \wedge$   
 $\exists v \exists w \forall u \mathbf{A}(w, v, u).$
20.  $\forall x \exists y \mathbf{A}(y, x) \rightarrow \forall x \forall y \exists z \mathbf{B}(x, y, z), \exists u \forall v \mathbf{A}(u, v) \rightarrow$   
 $\forall z \forall x \exists y \mathbf{B}(x, z, y), \forall y \exists x \mathbf{A}(x, y) \vee \exists v \forall u \mathbf{A}(v, u) \Rightarrow$   
 $\forall y \forall z \exists x \mathbf{B}(z, y, x) \wedge \exists y \forall z \exists x \mathbf{B}(y, z, x).$
21.  $\exists x \forall y \forall z \mathbf{A}(x, y, z) \rightarrow \mathbf{A}(a, b, c), \forall y \forall z \mathbf{A}(b, y, z) \vee \exists x \forall z \mathbf{A}(x, a, z),$   
 $\exists x \exists y \forall z \mathbf{A}(x, y, z) \rightarrow \mathbf{A}(a, b, d) \Rightarrow \forall x \exists z \mathbf{A}(x, b, z) \wedge \forall y \exists z \mathbf{A}(a, y, z).$
22.  $\forall x \exists y \exists z \mathbf{A}(x, z, y) \vee \exists u \forall v \exists w \mathbf{A}(u, v, w) \Rightarrow \exists x \forall z \underline{\mathbf{B}}(x, b, z),$   
 $(\forall u \exists v \mathbf{B}(u, b, v) \rightarrow \exists y \forall x \mathbf{A}(a, x, y)) \rightarrow (\forall z \exists x \mathbf{B}(z, b, x) \vee$   
 $\forall u \forall z \exists x \mathbf{A}(z, u, x)).$
23.  $\forall u \forall v \forall w \mathbf{A}(u, v, w) \vee \forall x \exists y \mathbf{B}(x, b, y) \vee \forall u \forall v \mathbf{C}(u, v, b),$   
 $\exists x \underline{\mathbf{A}}(x, a, b) \vee \forall y \exists z \mathbf{B}(a, y, z) \vee \forall v \forall u \mathbf{C}(v, u, a), \forall w \underline{\mathbf{B}}(a, b, w) \Rightarrow$   
 $\forall u \exists v \exists w \mathbf{C}(u, v, w) \wedge \exists x \forall y \exists z \mathbf{C}(x, y, z).$
24.  $\exists u \forall w \mathbf{A}(u, a, w) \vee \exists v \forall w \mathbf{A}(b, v, w) \Rightarrow \exists v \exists w \mathbf{A}(a, v, w) \wedge$   
 $\forall u \exists w \mathbf{A}(u, b, w); \forall u \exists v \exists w \mathbf{A}(u, v, w) \wedge \mathbf{A}(b, a, d); \mathbf{A}(b, a, c) \wedge$

- 11) *муж* (Дмитрий).  
12) *муж* (Максим).  
13) *муж* (Евгений).  
14) *муж* (Петр).  
15) *муж* (Ефим).  
16) *муж* (Юрий).  
17) *муж* (Вадим).  
18) *муж* (Олег).  
19) *муж* (Феликс).  
20) *жен* (Мария).  
21) *жен* (Ольга).  
22) *жен* (Татьяна).  
23) *жен* (Жанна).  
24) *жен* (Ирина).  
25) *жен* (Алиса).  
26) *жен* (Екатерина).  
27) *жен* (Елена).  
28) *жен* (Виктория).  
29) *жен* (Полина).  
30) *жен* (Луиза).  
31) *жен* (Наталья).  
32) *жен* (Барбара).  
33) *жен* (Белла).  
34) *жен* (Анна).  
35) *отец* (Николай, Иван).  
36) *отец* (Степан, Мария).  
37) *отец* (Иван, Ольга).  
38) *отец* (Иван, Сергей).  
39) *отец* (Иван, Татьяна).  
40) *отец* (Сергей, Виктория).  
41) *отец* (Павел, Роман).  
42) *отец* (Сергей, Дмитрий).  
43) *отец* (Иосиф, Ирина).  
44) *отец* (Ефим, Анатолий).  
45) *отец* (Ефим, Полина).  
46) *отец* (Юрий, Вадим).  
47) *отец* (Петр, Ефим).  
48) *отец* (Петр, Юрий).  
49) *отец* (Петр, Анна).  
50) *отец* (Максим, Петр).  
51) *отец* (Дмитрий, Наталья).  
52) *отец* (Феликс, Олег).  
53) *отец* (Олег, Евгений).  
54) *мать* (Алиса, Петр).  
55) *мать* (Екатерина, Елена).  
56) *мать* (Елена, Ефим).  
57) *мать* (Елена, Юрий).  
58) *мать* (Елена, Анна).  
59) *мать* (Мария, Ольга).  
60) *мать* (Анна, Виктория).  
61) *мать* (Луиза, Евгений).  
62) *мать* (Татьяна, Полина).  
63) *мать* (Мария, Сергей).  
64) *мать* (Анна, Олег).  
65) *мать* (Татьяна, Анатолий).  
66) *мать* (Анна, Дмитрий).  
67) *мать* (Виктория, Белла).  
68) *мать* (Мария, Татьяна).  
69) *мать* (Ольга, Жанна).  
70) *мать* (Ольга, Павел).  
71) *мать* (Жанна, Ирина).  
72) *мать* (Ирина, Игорь).  
73) *мать* (Ирина, Кирилл).  
74) *мать* (Барбара, Роман).

75)  $\text{род}(x, y) \Leftarrow \text{отец}(x, y)$ .      76)  $\text{род}(x, y) \Leftarrow \text{мать}(x, y)$ .

77)  $\text{сын}(x, y) \Leftarrow \text{род}(y, x)$ ,  $\text{муж}(x)$ .

78)  $\text{дочь}(x, y) \Leftarrow \text{род}(y, x)$ ,  $\text{жен}(x)$ .

79)  $\text{брат}(x, y) \Leftarrow \text{род}(z, x)$ ,  $\text{род}(z, y)$ ,  $\text{муж}(x)$ ,  $x \neq y$ .

80)  $\text{сестра}(x, y) \Leftarrow \text{род}(z, x)$ ,  $\text{род}(z, y)$ ,  $\text{жен}(x)$ ,  $x \neq y$ .

Цели:

1. *тесть* (Феликс,  $y$ ), *племянник* (Павел,  $y$ ).
2. *тетя* (Анна,  $y$ ), *внук* ( $x$ , Алиса).
3. *двоюр. брат* (Вадим,  $y$ ), *внучка* ( $x$ , Сергей).
4. *дядя* (Ефим,  $y$ ), *свекровь* (Мария,  $y$ ).
5. *невестка* ( $x$ , Максим), *внук* ( $x$ , Анна).
6. *племянница* (Жанна,  $y$ ), *внук* (Роман,  $y$ ).
7. *теща* (Елена,  $y$ ), *внучка* (Белла,  $y$ ).
8. *теща* (Мария,  $y$ ), *свекор* ( $x$ , Елена).
9. *внук* (Евгений,  $y$ ), *дядя* (Юрий,  $y$ ).
10. *тетя* (Татьяна,  $y$ ), *двоюр. брат* (Дмитрий,  $y$ ).
11. *зять* (Петр,  $y$ ), *тетя* (Ольга,  $y$ ).
12. *свекор* (Петр,  $y$ ), *внучка* (Полина,  $y$ ).
13. *свекровь* ( $x$ , Луиза), *дядя* (Сергей,  $y$ ).
14. *тесть* ( $x$ , Сергей), *двоюр. брат* (Вадим,  $y$ ).
15. *теща* ( $x$ , Сергей), *двоюр. сестра* ( $x$ , Виктория).
16. *троюр. сестра* ( $x$ , Белла), *зять* (Сергей,  $y$ ).
17. *племянник* (Вадим,  $y$ ), *внучка* (Ирина,  $y$ ).
18. *невестка* (Анна,  $y$ ), *двоюр. сестра* (Виктория,  $y$ ).
19. *невестка* (Елена,  $y$ ), *племянница* (Виктория,  $y$ ).
20. *двоюр. сестра* (Жанна,  $y$ ), *племянник* ( $x$ , Ефим).
21. *троюр. сестра* (Наталья,  $y$ ), *свекор* (Иван,  $y$ ).
22. *тесть* (Петр,  $y$ ), *троюр. брат* (Роман,  $y$ ).
23. *племянница* ( $x$ , Сергей), *зять* (Ефим,  $y$ ).
24. *внучка* ( $x$ , Мария), *двоюр. сестра* (Белла,  $y$ ).
25. *двоюр. сестра* ( $x$ , Полина), *зять* ( $x$ , Петр).

### Разбор решений задач по логике предикатов

1. Установим истинность следующих логических выражений путем конкретизации. Для *варианта 10* имеем следующее тождество:

$$\exists x (A(x) \rightarrow B(x)) = \forall x A(x) \rightarrow \exists x B(x).$$

Доказательство:

$$\begin{aligned} \exists x (A(x) \rightarrow B(x)) &= (A(a) \rightarrow B(a)) \vee (A(b) \rightarrow B(b)) = \\ &= \underline{A}(a) \vee B(a) \vee \underline{A}(b) \vee B(b) = (\underline{A}(a) \vee \underline{A}(b)) \vee (B(a) \vee B(b)) = \\ &= \exists x \underline{A}(x) \vee \exists x B(x) = \forall x A(x) \rightarrow \exists x B(x). \end{aligned}$$

Для *варианта 19* имеем следующую клаузу:

$$\exists x \forall y P(x, y) \Rightarrow \exists x P(b, x).$$

Для доказательства ее истинности избавимся от кванторов в обеих частях клаузы:

$$(P(a, a) \wedge P(a, b)) \vee (P(b, a) \wedge P(b, b)) \Rightarrow P(b, a) \vee P(b, b);$$

$$P(a, a) \vee P(a, b), P(a, b) \vee P(b, a), P(a, a) \vee P(b, b), P(b, a) \vee$$

$$P(b, b), \underline{P}(b, a) \Rightarrow P(b, b);$$

$$P(a, a) \vee P(a, b), P(a, b) \vee P(b, a), P(a, a) \vee P(b, b), P(b, a) \vee P(b, b).$$

Последняя клауза верна в силу *аксиомы порядка*.

2. Решения для второго задания приведем для всех вариантов. Ответы нетрудно будет отыскать, если знать, каким образом были составлены логические выражения. Замена в соответствии с принципом двойственности предполагает одновременную перестановку местами всех заключений и посылок, а также замену обозначений:

$$\forall \Leftrightarrow \exists, \vee \Leftrightarrow \wedge, \sup \Leftrightarrow \inf, (,) \Leftrightarrow (;), A \Leftrightarrow B,$$

$$a \Rightarrow b, b \Rightarrow c, c \Rightarrow a, x \Leftrightarrow u, y \Leftrightarrow v, z \Leftrightarrow w.$$

Для *варианта 1*: из принципа двойственности по варианту 9.

Для *варианта 2*:  $\underline{B}_3 \vee C_1, A_1 \vee B_1 \Rightarrow A_2; B_2 \wedge C_2.$

$$A_1 = A'_1 \vee A''_1 = \exists x \forall z A(x, z) \vee \forall u A(a, b, u),$$

$$A_2 = \sup(A'_1, A''_1) = \exists v \forall w A(v, b, w), A_1 \Rightarrow A_2,$$

$$B_1 = \inf(B'_2, B''_2) = \forall x B(a, x, x), B_1 \Rightarrow B_2,$$

$$B_2 = B'_2 \wedge B''_2 = \exists u \forall v B(u, v, v) \wedge \forall u \exists z B(u, b, z),$$

$$B_1 \Rightarrow B_3 = \exists x \forall z \mathbf{B}(x, b, z),$$

$$C_2 = C'_2 \wedge C''_2 = \exists u \mathbf{A}(a, u, c) \wedge \exists x \forall z \mathbf{A}(x, b, z),$$

$$C_1 = \inf(C'_2, C''_2) = \forall w \mathbf{A}(w, b, w).$$

Для варианта 3: из принципа двойственности по варианту 2.

Для варианта 4: из принципа двойственности по варианту 10.

Для варианта 5:  $A_1, B_3 \rightarrow C_1 \Rightarrow A_2 \wedge \underline{B}_1; C'_2 \wedge B_2 \wedge C''_2,$

$$A_1, \underline{B}_3 \vee C_1, \underline{A}_2 \vee B_1, \underline{B}_2 \vee \underline{C}_2 \Rightarrow 0,$$

$$A_1 = \forall x \forall z \mathbf{A}(x, x, z), A_2 = \exists u \exists v \mathbf{A}(u, v, v), A_1 \Rightarrow A_2,$$

$$\underline{B}_1 = \exists z \underline{\mathbf{B}}(z, z, z), B_2 = \exists y \mathbf{B}(a, y, a), B_1 \Rightarrow B_2,$$

$$B_3 = \exists x \exists y \mathbf{B}(x, x, y), B_1 \Rightarrow B_3,$$

$$C_1 = \inf(C'_2, C''_2) = \forall z \mathbf{A}(z, b, z), C_1 \Rightarrow C_2,$$

$$C_2 = C'_2 \wedge C''_2 = \forall u \exists v \mathbf{A}(a, v, u) \wedge \exists x \mathbf{A}(x, b, c).$$

Для варианта 6: из принципа двойственности по варианту 13.

Для варианта 7: из принципа двойственности по варианту 12.

Для варианта 8:  $A'_1 \vee A''_1, B_1 \vee C'_1 \Rightarrow A_2 \wedge C_2; B_2 \wedge C''_1,$

$$A'_1 \vee A''_1, B_1 \vee C'_1, \underline{A}_2 \vee \underline{C}_2, \underline{B}_2 \vee C''_1 \Rightarrow 0, A_1 \Rightarrow A_2,$$

$$A_1 = A'_1 \vee A''_1 = \forall y \forall z \mathbf{A}(a, y, z) \vee \forall v \exists w \mathbf{A}(w, v, v),$$

$$A_2 = \exists u \forall z \mathbf{A}(u, z, c), B_1 = \forall x \forall z \mathbf{B}(x, a, z), B_1 \Rightarrow B_2,$$

$$B_2 = \exists y \mathbf{B}(b, y, b), C'_1 = \forall x \mathbf{B}(x, c, a), C'_1 \Rightarrow C_2,$$

$$C_2 = \exists x \mathbf{B}(x, x, a), C''_1 = \forall y \mathbf{B}(c, y, a), C''_1 \Rightarrow C_2.$$

Для варианта 9: по клаузе 8 со следующими обозначениями:

$$A_1 = A'_1 \vee A''_1 = \forall z \exists x \mathbf{A}(a, x, z) \vee \forall w \exists u \mathbf{A}(u, b, w),$$

$$A_2 = \exists x \mathbf{A}(x, x, c), B_1 = \forall z \mathbf{A}(z, b, z),$$

$$B_2 = \exists w \mathbf{A}(a, w, w), C_2 = \exists v \exists w \mathbf{B}(v, v, w),$$

$$C'_1 = \forall x \mathbf{B}(x, x, x), C''_1 = \exists y \mathbf{B}(a, y, a).$$

Для варианта 10:  $A'_1 \vee B_1 \vee A''_1, B_3 \rightarrow C_1 \Rightarrow B'_2 \wedge C_2 \wedge B''_2; A_2,$

$$A'_1 \vee B_1 \vee A''_1, \underline{B}_3 \vee C_1, \underline{B}'_2 \vee \underline{C}_2 \vee \underline{B}''_2, \underline{A}_2 \Rightarrow 0,$$

$$A_1 = A'_1 \vee A''_1 = \forall y \forall z A(a, y, z) \vee \forall y \exists x A(x, y, c),$$

$$A_2 = \sup(A'_1, A''_1) = \exists u \forall w A(u, w, c), B_1 = \inf(B'_2, B''_2) = \forall w B(a, w, w),$$

$$B_2 = B'_2 \wedge B''_2 = \exists x \forall z B(x, z, z) \wedge \forall w \exists u B(u, b, w),$$

$$B_3 = \exists u \forall z B(u, u, z), A_1 \Rightarrow A_2, B_1 \Rightarrow B_2, B_1 \Rightarrow B_3,$$

$$C_1 = \exists x \forall y A(x, y, a), C_2 = \forall w \exists z A(z, w, w), C_1 \Rightarrow C_2.$$

Для варианта 11: из принципа двойственности по варианту 5.

Для варианта 12: по клаузе 10 со следующими обозначениями:

$$A_1 = A'_1 \vee A''_1 = \forall y \forall z A(a, y, z) \vee \forall u \exists v A(v, u, c),$$

$$A_2 = \exists z \forall x A(z, x, c), B_1 = \forall w B(w, b, w), B_3 = \exists x B(x, b, c),$$

$$C_1 = \forall y \forall z A(z, y, z), B_2 = B'_2 \wedge B''_2 = \exists x \forall z B(a, x, z) \wedge \forall z \exists x B(x, b, z),$$

$$C_2 = C'_2 \wedge C''_2 = A(b, b, b) \wedge \exists z A(a, z, z).$$

Для варианта 13:  $A_2 \rightarrow (B_2 \rightarrow C'_1), B_1 \vee C''_1 \vee D_1 \Rightarrow A_1 \rightarrow C_2; D_2,$

$$\underline{A}_2 \vee \underline{B}_2 \vee C'_1, B_1 \vee C''_1 \vee D_1, A_1, \underline{C}_2, \underline{D}_2 \Rightarrow 0,$$

$$A_1 = \forall x A(x, x, c), A_2 = \exists u A(u, b, c), A_1 \Rightarrow A_2,$$

$$B_1 = \exists y B(a, y, a), B_2 = \exists v \exists w B(v, v, w), B_1 \Rightarrow B_2,$$

$$C'_1 = \exists v A(b, v, v), C''_1 = \forall x A(b, x, x), C_2 = \exists y \exists z A(b, y, z),$$

$$C'_1 \Rightarrow C_2, C''_1 \Rightarrow C_2, D_1 = \forall x \forall u B(x, u, b), D_2 = B(a, a, b), D_1 \Rightarrow D_2.$$

Для варианта 14: из принципа двойственности по варианту 16.

Для варианта 15: из принципа двойственности по варианту 8.

Для варианта 16: по клаузе 13 со следующими обозначениями:

$$A_1 = \forall z A(a, b, z), A_2 = \exists x A(x, b, c), B_1 = \forall w \exists z B(w, z, w),$$

$$B_2 = \exists x \forall z B(a, x, z), C'_1 = \forall z A(b, a, z), C''_1 = \exists x \forall z A(x, z, z),$$

$$C_2 = \exists u \forall w A(u, a, w), D_1 = \forall z B(z, c, z), D_2 = \exists w B(c, w, w).$$

Для варианта 17:  $\underline{A}, (A \rightarrow C) \rightarrow (\underline{A} \wedge B_1) \Rightarrow B'_2 \wedge B''_2,$

$$\underline{A}, \underline{B}'_2 \vee \underline{B}''_2, A \vee B_1, \underline{A} \vee \underline{C}, \underline{C} \vee B_1 \Rightarrow 0,$$

$$A = \forall x \exists z A(z, b, x) = \forall z \exists x A(x, b, z) = \forall u \exists y A(y, b, u),$$

$$B_1 = \forall x \exists y \forall z B(x, y, z) = \inf(B'_2, B''_2) \Rightarrow B'_2 \wedge B''_2 =$$

$$= \forall u \exists w \exists v B(u, v, w) \wedge \exists u \exists z \forall v B(z, u, v), C = \forall x \forall z B(x, a, z).$$



Для варианта 18:  $(A \rightarrow \underline{B}_1) \rightarrow (B_1 \vee C), \underline{C} \Rightarrow B'_2 \wedge B''_2,$

$$A = \forall u A(u, a, b), C = \forall x \exists y A(x, y, a),$$

$$\begin{aligned} B_1 = \inf(B'_2, B''_2) &= \forall u \exists v \forall w B(u, v, w) = \forall z \exists y \forall x B(z, y, x) \Rightarrow \\ &\Rightarrow B'_2 \wedge B''_2 = \forall u \exists w \exists v B(u, v, w) \wedge \exists x \exists y \forall z B(x, y, z). \end{aligned}$$

Для варианта 19:  $\underline{C}, A_1 \vee B, B \rightarrow C \Rightarrow A'_2 \wedge A''_2,$

$$\begin{aligned} A_1 = \inf(A'_2, A''_2) &= \exists u \forall y \forall x A(u, x, y) \Rightarrow A'_2 \wedge A''_2 = \\ &= \exists u \exists v \forall w A(u, v, w) \wedge \exists v \exists w \forall u A(w, v, u), \\ B &= \forall x \exists z B(x, a, z) = \forall z \exists x B(z, a, x), \\ C &= \forall x \exists y \forall z B(x, y, z) = \forall u \exists v \forall w B(u, v, w). \end{aligned}$$

Для варианта 20:  $A \rightarrow C_1, B \rightarrow C_1, A \vee B \Rightarrow C'_2 \wedge C''_2,$

$$\begin{aligned} A &= \forall x \exists y A(y, x) = \forall y \exists x A(x, y), B = \exists u \forall v A(u, v) = \exists v \forall u A(v, u), \\ C_1 &= \forall x \forall y \exists z B(x, y, z) = \forall z \forall x \exists y B(x, z, y) = \\ &= \inf(C'_2, C''_2) \Rightarrow C'_2 \wedge C''_2 = \forall y \forall z \exists x B(z, y, x) \wedge \exists y \forall z \exists x B(y, z, x). \end{aligned}$$

Для варианта 21:  $B_2 \rightarrow A''_1, B_1 \vee C_1, C_2 \rightarrow A'_1 \Rightarrow A'_2 \wedge A''_2,$

$$\begin{aligned} A'_1 &= A(a, b, c), A''_1 = A(a, b, d), A_1 = \exists z A(a, b, z) = \\ &= \inf(A'_2, A''_2) \Rightarrow A'_2 \wedge A''_2 = \forall x \exists z A(x, b, z) \wedge \forall y \exists z A(a, y, z), \\ B_1 &= \forall y \forall z A(b, y, z) \Rightarrow \exists x \forall y \forall z A(x, y, z) = B_2, \\ C_1 &= \exists x \forall z A(x, a, z) \Rightarrow \exists x \exists y \forall z A(x, y, z) = C_2. \end{aligned}$$

Для варианта 22:  $C' \vee C'' \Rightarrow \underline{B}, (B \rightarrow \underline{A}) \rightarrow (B \vee C),$

$$\begin{aligned} \underline{A} &= \exists y \forall x A(a, x, y), C = \forall u \forall z \exists x A(z, u, x) = \sup(C', C''), \\ B &= \forall x \exists z B(x, b, z) = \forall u \exists v B(u, b, v) = \forall z \exists x B(z, b, x), \\ &\forall x \exists y \exists z A(x, z, y) \vee \exists u \forall v \exists w A(u, v, w) = C' \vee C'' \Rightarrow C. \end{aligned}$$

Для варианта 23:  $A_1 \vee B'_1 \vee C', \underline{A}_2 \vee B''_1 \vee C'', \underline{B}_2 \Rightarrow C_1 \wedge C_2,$

$$\begin{aligned} A_1 \Rightarrow A_2, B'_1 \Rightarrow B_2, B''_1 \Rightarrow B_2, C' \Rightarrow C, \\ A_1 &= \forall u \forall v \forall w A(u, v, w), A_2 = \forall x A(x, a, b), \\ B'_1 &= \forall x \exists y B(x, b, y), B''_1 = \forall y \exists z B(a, y, z), \\ B_2 &= \exists w B(a, b, w), C'' \Rightarrow C \Rightarrow C_1 \wedge C_2, C' = \forall u \forall v C(u, v, b), \end{aligned}$$

$$C'' = \forall v \forall u C(v, u, a), C = \forall u \forall v \exists w C(u, v, w), \\ C_1 = \forall u \exists v \exists w C(u, v, w), C_2 = \exists x \forall y \exists z C(x, y, z).$$

Для варианта 24: из принципа двойственности по варианту 21.

Для варианта 25:  $B_2 \rightarrow A'_1, A''_1 \vee B_1, D \Rightarrow C \wedge A_2; A_2,$

$$A'_1 = \forall u \forall v A(b, v, u), A''_1 = \forall u \forall v A(v, u, a),$$

$$A_2 = \exists x \forall y \exists z A(x, y, z), A'_1 \Rightarrow A_2, A''_1 \Rightarrow A_2,$$

$$B_1 = \forall y \exists u \forall z B(u, y, z), B_2 = \exists y \forall z B(y, a, z), B_1 \Rightarrow B_2,$$

$$C = \exists y B(a, y, b), D = \forall z B(z, z, z), C \wedge A_2; A_2 = A_2.$$

3. Для легенды варианта 2 практического задания 3 (с. 66) введем следующие предикаты:

$A(x, y, z)$  — « $x$  уважает  $y$  по причине  $z$ ».

$B(x, y, v)$  — « $x$  дает  $y$  материальные средства  $v$ ».

$C(x, y, w)$  — « $y$  возвращает  $x$  долг, выраженный в  $w$ ».

Области определения переменных:

$x = \{a, b, \dots\}$ , где  $a$  — бизнесмен,  $b$  — банкир, ...

$y = \{c, d, \dots\}$ , где  $c$  — художник,  $d$  — скульптор, ...

$z = \{e, f, \dots\}$ , где  $e$  — жalousть,  $f$  — мастерство, ...

$v = \{i, j, \dots\}$ , где  $i$  — деньги,  $j$  — помощь в организации выставки,

$w = \{g, h, \dots\}$ , где  $g$  — деньги,  $h$  — добрая репутация.

Посылки:

Если некоторый  $x$  уважает некоторого  $y$  по причине некоторого  $z$ , то первый всегда окажет второму конкретную материальную помощь, если имеется определенная вероятность того, что  $y$  как-то компенсирует затраты  $x$ :

$$\exists x \exists y \exists z A(x, y, z) \rightarrow (\exists x \exists y \exists w C(x, y, w) \rightarrow \forall x \forall y \forall v B(x, y, v)).$$

Из приведенной легенды следует, что бизнесмен уважает художника за его мастерство:  $A(a, c, f)$ . Понятно также, что бизнесмен будет иметь добрую репутацию мецената за то, что он помог художнику в организации выставки его картин:  $C(a, c, h)$ . Заключение: бизнесмен поможет художнику организовать выставку его

*картин*:  $\mathbf{B}(a, c, j)$ . Доказать истинность составленной из этих предикатов клаузы не составит большого труда.

Для легенды *варианта 5* практического задания 3 (с. 67) можно ввести следующие предикаты:

$\mathbf{A}(x, y)$  — « $x$  извергает  $y$ ».

$\mathbf{B}$  — «Высокая урожайность».

$\mathbf{C}(z)$  — «Источником блага является  $z$ ».

Области:

$x = \{a, b, \dots\}$ , где  $a$  — вулкан,  $b$  — гроза, ...

$y = \{c, d, \dots\}$ , где  $c$  — пепел,  $d$  — вода, ...

$z = \{e, f, \dots\}$ , где  $e$  — Бог,  $f$  — природа, ...

Посылки:

все  $x$  извергают какие-то  $y$ :  $\forall x \exists y \mathbf{A}(x, y)$ ;

если некоторые  $x$  извергают какие-то  $y$ , то будет высокая урожайность:  $\exists x \exists y \mathbf{A}(x, y) \rightarrow \mathbf{B}$  ;

высокая урожайность всегда несет благо людям:  $\mathbf{B} \rightarrow \forall z \mathbf{C}(z)$ .

Заключение: то, что источником блага является Господь Бог, не противоречит исходным посылкам:  $\mathbf{C}(e)$ .

Доказательство очевидно.

4. Произведем трассировку работы ПРОЛОГ-программы «Родственные отношения» для первой цели *варианта 12*. Для этого имеющуюся программу дополним клаузой:

81) *свекор* ( $x, y$ )  $\Leftarrow$

82) *отец* ( $x, z$ ),

83) *отец* ( $z, u$ ),

84) *мать* ( $y, u$ ).

Цель: 85) *свекор* (Петр,  $y$ ).

Трассировка программы:

1. В: *цель* ( ) – 85,

2. В: *свекор* (Петр, \_) – 81,

3. В: *отец* (Петр, \_) – 82,

4. П: *отец* (Петр, \_) – 35,  
 ...  
 15. П: *отец* (Петр, \_) – 46,  
 16. У: *отец* (Петр, Ефим) – 47у,  
 17. В: *отец* (Ефим, \_) – 83,  
 18. П: *отец* (Ефим, \_) – 35,  
 ...  
 26. П: *отец* (Ефим, \_) – 43,  
 27. У: *отец* (Ефим, Анатолий) – 44у,  
 28. В: *мать* (\_, Анатолий) – 84,  
 29. П: *мать* (\_, Анатолий) – 54,  
 ...  
 39. П: *мать* (\_, Анатолий) – 64,  
 40. У: *мать* (Татьяна, Анатолий) – 65у,  
 41. У: *цель* ( ) – 85.

Из соответствующих *фактов* и *правил* составим противоречие:

*свекор* (Петр, у)  $\vee$  *отец* (Петр, z)  $\vee$  *отец* (z, u)  $\vee$  *мать* (у, u),  
*отец* (Петр, Ефим), *отец* (Ефим, Анатолий),  
*мать* (Татьяна, Анатолий)  $\Rightarrow$  0.

Целевой дизъюнкт нейтрализуется предикатами под номерами 47, 44 и 65, когда переменные принимают конкретные значения:

$y = \text{Татьяна}, z = \text{Ефим}, u = \text{Анатолий}.$

## 2. Группы

### 2.1. Группа и связанные с ней понятия

#### Линейное преобразование

Линейное преобразование  $A$  вектора  $x$  в вектор  $y$  осуществляется с помощью квадратной матрицы:

$$y = Ax, \text{ где } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Если имеет место *прямое* преобразование (2.1), то должно существовать и *обратное* при условии, что матрица  $A$  имеет обратную:

$$y = A^{-1}x.$$

*Транзитивность* линейного преобразования задает операцию умножения. Пусть даны два линейных преобразования:

$$z = Ay, \quad y = Bx,$$

Тогда существует третье преобразование  $C$ , которое получается путем перемножения  $A$  и  $B$ , т.е.

$$z = Ay = A(Bx) = (AB)x = Cx. \quad (2.2)$$

Выражение (2.2) стало возможным благодаря действию закона ассоциативности в отношении операторов  $A$  и  $B$ , а также вектора  $x$ . Наряду с выполнением закона (2.2), действуют еще три закона — один ассоциативности и два дистрибутивности:

$$A(\lambda x) = (A\lambda)x = (\lambda A)x, \quad (A + B)x = Ax + Bx, \quad A(x + y) = Ax + Ay, \quad (2.3)$$

где  $\lambda$  — действительное или комплексное число.

Предположим, что матрица  $A$  в некотором базисе реализует линейное преобразование (2.1). В новом базисе это преобразование будет выглядеть иначе:

$$y' = A'x', \quad (2.4)$$

Обозначим через  $T$  матрицу перехода векторов из нового базиса в старый:

$$x = Tx', \quad y = Ty', \quad (2.5)$$

Подставим оба выражения (2.5) в преобразование (2.1), получим

$$Ty' = ATx', \quad (2.6)$$

Умножим (2.6) слева на  $T^{-1}$ :

$$y' = T^{-1}ATx', \quad (2.7)$$

Сравнивая равенства (2.4) и (2.7), окончательно находим:

$$A' = T^{-1}AT. \quad (2.8)$$

Линейное преобразование (2.8) называется *прямым преобразованием подобия*. Про матрицы  $A$  и  $A'$  говорят, что они *подобны*. Чтобы получить *обратное* преобразование подобия, нужно выражение (2.8) слева умножить на  $T$ , а справа — на  $T^{-1}$ , в результате получим:

$$A = TA'T^{-1}. \quad (2.9)$$

Прямое и обратное преобразования обладают следующими свойствами, которые мы выпишем здесь только для прямого:

$$\begin{aligned} T^{-1}(AB)T &= (T^{-1}AT)(T^{-1}BT), \\ T^{-1}(A+B)T &= T^{-1}AT + T^{-1}BT, \\ T^{-1}A^{-1}T &= (T^{-1}AT)^{-1}, \quad T^{-1}A^nT = (T^{-1}AT)^n. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Среди бесчисленного множества векторов  $x$  линейного преобразования (2.1) всегда найдется такой, что под действием оператор  $A$  вектор  $x$  перейдет в коллинеарный себе, т.е. если координаты преобразованного вектора отличаются от исходного только скалярным множителем  $\lambda$ :

$$Ax = \lambda x. \quad (2.11)$$

В этом случае ненулевой вектор  $x$  называется *собственным вектором* оператора  $A$ , а число  $\lambda$  — его *собственным значением*. Равенство (2.11) эквивалентно системе уравнений:

$$(A - \lambda E)x = 0, \quad (2.12)$$

которую можно использовать для нахождения собственных векторов  $x$  (здесь  $E$  — единичная матрица). Но прежде требуется найти все собственные значения оператора  $A$ . С этой целью составляют *характеристический определитель*, который затем разворачивается в *характеристический многочлен* —  $p(\lambda)$ :

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda E) = 0, \quad (2.13)$$

Корни многочлена (2.13) поочередно подставляются в систему (2.12). Решая ее отдельно для каждого собственного значения  $\lambda$ , находят соответствующие им собственные векторы  $x$ .

Собственные значения и собственные векторы часто ищутся с

помощью процедуры *диагонализации* матрицы  $A$ . В результате этой процедуры все собственные значения оказываются расположенными на главной диагонали *диагональной матрицы*  $\Lambda$ . Эта диагональная матрица также является линейным преобразованием типа (2.1), для которого остаются в силе свойства (2.2), (2.3) и, что особенно важно для нас сейчас,  $\Lambda$  связана с исходной матрицей  $A$  преобразованием подобия:

$$\Lambda = T^{-1}AT. \quad (2.14)$$

В силу *транзитивности* преобразования подобия, т.е. если

$$C = S^{-1}BS, \quad B = R^{-1}AR \quad \text{и} \quad RS = T,$$

то оператор  $C$  связан с оператором  $A$  преобразованием подобия:

$$C = S^{-1}(R^{-1}AR)S = (RS)^{-1}A(RS) = T^{-1}AT,$$

все подобные матрицы имеют одинаковые *собственные значения*.

Трансформационная матрица  $T$ , фигурирующая в преобразовании подобия (2.8), и матрица  $A$  в линейном преобразовании (2.1) на самом деле выполняют одинаковые функции, т.е. переводят одни векторы в другие. Далее мы будем рассматривать замкнутые по умножению *группы* линейных операторов, представленные в виде конечной совокупности матриц. С помощью преобразования подобия, в котором  $T$  пробегает все элементы группы, можно выявить *класс эквивалентных операторов*. В этом случае проявится *относительное* подобие. Но может получиться так, что рассматриваемая группа операторов является лишь *подгруппой* более обширного замкнутого множества. Тогда преобразование подобия по более широкой группе пополнит класс подобных операторов другими элементами. Диагональный оператор  $\Lambda$ , не являясь элементом рассматриваемой группы операторов, может символизировать *предельно* широкий класс подобных элементов, не входящих в данную группу операторов. Таким образом, *процедура диагонализации* матриц позволяет разбить группу операторов на несколько непересекающихся *абсолютных* классов подобных элементов с одинаковыми наборами собственных значений. Абсолютные классы либо совпадают, либо шире *относительных*.

В дальнейшем нам часто придется иметь дело с матрицами, поэтому напомним основные действия с ними. Правило перемножения матриц продемонстрируем на числовых примерах. Пусть даны две матрицы —

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Перемножим их слева направо, как они записаны, получим:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot (-6) & 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 3 \\ (-3) \cdot 5 + 4 \cdot (-6) & (-3) \cdot (-2) + 4 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ -39 & 18 \end{pmatrix}.$$

Теперь умножим их справа налево —

$$BA = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 1 + (-2) \cdot (-3) & 5 \cdot 2 + (-2) \cdot 4 \\ (-6) \cdot 1 + 3 \cdot (-3) & (-6) \cdot 2 + 3 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 2 \\ -15 & 0 \end{pmatrix}.$$

Про матрицы  $A$  и  $B$  говорят, что они *не коммутируют*, поскольку  $AB \neq BA$ . Две другие матрицы  $-A_1$  и  $B_1$  — коммутируют друг с другом, в чем можно убедиться путем их перемножения:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}; \quad A_1 B_1 = B_1 A_1.$$

Рассмотрим преобразование подобия. Пусть исходный базис выражается через  $\varphi$ , а новый — через  $\varphi'$ :

$$\varphi_1 = x, \quad \varphi'_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (x + y + z);$$

$$\varphi_2 = y, \quad \varphi'_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (\varphi_2 - \varphi_3) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (y - z);$$

$$\varphi_3 = z, \quad \varphi'_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot (2 \cdot \varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3) = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot (2 \cdot x - y - z).$$

Тогда трансформационная матрица  $T$  и обратная ей  $T^{-1}$  выглядят следующим образом:

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Наша трансформационная матрица  $T$  относится к *ортонормированным*, т.е. возведение любой строки или столбца в квадрат дает единицу, а перемножение различных строк и столбцов — ноль:



$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}\right)^2 = 1, \quad \frac{2}{\sqrt{6}} \cdot 0 + \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}\right) \cdot \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = 0.$$

Для ортонормированных матриц (а именно с такими мы чаще всего будем иметь дело) *обратная* матрица получается путем *транспонирования* исходной.

Пусть, далее, в старом базисе  $\varphi$  действует оператор  $A$ , который переводит координаты  $x, y, z$  в координаты  $x_A, y_A, z_A$ :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} x_A &= 0 \cdot x + 1 \cdot y + 1 \cdot z = y + z, \\ y_A &= 1 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot z = x + z, \\ z_A &= 1 \cdot x + 1 \cdot y + 0 \cdot z = x + y. \end{aligned}$$

В новом базисе оператор  $A$ , согласно (2.9), превратится в  $A'$ :

$$A' = TAT^{-1} = A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

В новом базисе действие оператора  $A'$  сводится к умножению всех координат на числа. Фактически, мы нашли *собственные значения* матрицы  $A$ , поскольку диагональная матрица  $A'$  является одновременно матрицей  $\Lambda$ :

Всю процедуру трансформации координат можно провести на уровне преобразования соответствующих векторов, не прибегая в явном виде к формуле преобразования подобия. В самом деле,

$$x' = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (x_A + y_A + z_A) = 2 \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (x + y + z)\right] = 2 \cdot \varphi_1 + 0 \cdot \varphi_2 + 0 \cdot \varphi_3;$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (y_A - z_A) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (x + z - x - y) =$$

$$= (-1) \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (y - z)\right] = 0 \cdot \varphi_1 - 1 \cdot \varphi_2 + 0 \cdot \varphi_3;$$

$$z' = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot (2 \cdot x_A - y_A - z_A) = (-1) \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{6}} \cdot (2x - y - z)\right] = 0 \cdot \varphi_1 + 0 \cdot \varphi_2 - 1 \cdot \varphi_3.$$

Последние выкладки призваны также показать, что любые преобразования — будь то  $A, A', T$  — не существуют сами по себе, но всегда предполагают присутствие *базисных векторов*.

Обращаем внимание на то, что сумма диагональных элементов матрицы  $A$  (она именуется *характером* матрицы  $A$ ) равна сумме диагональных элементов матрицы  $A'$ . И это неслучайно: *характеры подобных матриц всегда одинаковы*. Равенство характеров позволя-

ет проверить правильность нахождения собственных значений.

Перестановка строк матрицы с одновременной перестановкой соответствующих столбцов (а такая процедура также относится к преобразованию подобия) не меняет внутренней природы матрицы. Эта трансформация не влияет и на собственные значения. Если матрица  $A$  имела собственные значения  $\Lambda$ , то эквивалентная ей матрица  $A'$  будет иметь ту же самую матрицу  $\Lambda$ , в которой собственные значения окажутся на новых местах. Перестановка строк и столбцов возможна постольку, поскольку она не меняет связи диагональных элементов с недиагональными. Пусть в матрице  $A$  элемент  $a_{23}$  связывает элементы  $a_{22}$  и  $a_{33}$ , тогда после нового размещения элементов на диагонали в матрице  $A'$  указанная связь должна сохраниться:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{12} & a_{23} \\ a_{21} & a_{11} & a_{13} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

### Определение группы и примеры групп

Сейчас мы достаточно подготовлены, чтобы ввести *определение группы*. *Группой* называется *операционное множество*, в котором действует процедура *умножения* и которое подчинено следующим *четырем условиям*:

1) *замкнутости*: для каждой пары элементов  $g_1$  и  $g_2$  из группы  $G$  однозначно определено произведение  $g_1 g_2 = g_3$ ; причем элемент  $g_3$  тоже должен обязательно принадлежать группе  $G$ , т.е.

$$g_1, g_2 \in G, \quad g_1 g_2 = g_3 \in G.$$

2) *наличия тождественного элемента  $e$* : среди множества элементов группы  $G$  должен найтись такой элемент  $e$ , что для всякого  $g$  из  $G$  справедливы равенства:

$$eg = g, \quad ge = g; \quad e, g \in G.$$

3) *наличия обратных элементов*: для всякого  $g$  из  $G$  должен отыскаться единственный ему обратный элемент  $g^{-1}$ , принадлежащий  $G$ , при умножении на который получился бы тождественный элемент  $e$ ; суть данного положения математически выражается следующим образом:

$$e = g g^{-1}, \quad e = g^{-1} g; \quad e, g, g^{-1} \in G.$$

4) *ассоциативности*: для любых трех элементов  $g_1, g_2$  и  $g_3$  из  $G$  справедливо равенство:

$$g_1(g_2 g_3) = (g_1 g_2)g_3.$$

Последнее условие выполняется для квадратных матриц, в чем можно убедиться путем перемножения, в частности, матриц размерности  $2 \times 2$ :

$$\begin{aligned} (AB)C &= \left( \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix} = \\ &= A(BC) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \cdot \left( \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} d_1 & d_2 \\ d_3 & d_4 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} d_1 &= a_1 b_1 c_1 + a_2 b_3 c_1 + a_1 b_2 c_3 + a_2 b_4 c_3, \\ d_2 &= a_1 b_1 c_2 + a_2 b_3 c_2 + a_1 b_2 c_4 + a_2 b_4 c_4, \\ d_3 &= a_3 b_1 c_1 + a_4 b_3 c_1 + a_3 b_2 c_3 + a_4 b_4 c_3, \\ d_4 &= a_3 b_1 c_2 + a_3 b_2 c_4 + a_4 b_3 c_2 + a_4 b_4 c_4. \end{aligned}$$

Аналогичная процедура доказательства распространяется на матрицы любой размерности.

Ниже приводятся восемь степеней одной и той же матрицы  $a$ :

$$\begin{aligned} a^1 &= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} \\ -i/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, & a^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \\ a^3 &= \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} \\ -i/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, & a^4 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ a^5 &= \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} \\ i/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, & a^6 &= \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \\ a^7 &= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} \\ i/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, & a^8 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Выписанные матрицы составляют *операционное множество*, подчиненное четырем групповым условиям. В роли тождественного элемента выступает единичная матрица  $a^8 = e$ . Перед нами *коммутативная группа  $A$  восьмого порядка* с таблицей умножения — табл. 2.1. *Субстанционным* множеством для нее являются восемь базисных векторов (первые столбцы матриц), которые переходят друг в друга под действием преобразований  $a^i$ :

$$1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad 2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -i \end{pmatrix}, \quad 3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad 4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$5 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad 6 = \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix}, \quad 7 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad 8 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Таблица 2.1

$A$	$a^1$	$a^2$	$a^3$	$a^4$	$a^5$	$a^6$	$a^7$	$a^8$
$a^1$	$a^2$	$a^3$	$a^4$	$a^5$	$a^6$	$a^7$	$a^8$	$a^1$
$a^2$	$a^3$	$a^4$	$a^5$	$a^6$	$a^7$	$a^8$	$a^1$	$a^2$
$a^3$	$a^4$	$a^5$	$a^6$	$a^7$	$a^8$	$a^1$	$a^2$	$a^3$
$a^4$	$a^5$	$a^6$	$a^7$	$a^8$	$a^1$	$a^2$	$a^3$	$a^4$
$a^5$	$a^6$	$a^7$	$a^8$	$a^1$	$a^2$	$a^3$	$a^4$	$a^5$
$a^6$	$a^7$	$a^8$	$a^1$	$a^2$	$a^3$	$a^4$	$a^5$	$a^6$
$a^7$	$a^8$	$a^1$	$a^2$	$a^3$	$a^4$	$a^5$	$a^6$	$a^7$
$a^8$	$a^1$	$a^2$	$a^3$	$a^4$	$a^5$	$a^6$	$a^7$	$a^8$

Например,  $8 = a^3 \times 5$ ,  $7 = a^5 \times 2$ ,  $a^5 = a^3 \times a^2$ , или подробно:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -i \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

Подмножества  $\{a^2, a^4, a^6, a^8\}$  и  $\{a^4, a^8\}$  образуют *подгруппы* в группе  $A$ , поскольку элементы этих подмножеств удовлетворяют всем необходимым групповым условиям – замкнутости, ассоциативности, наличию в указанных подмножествах тождественного и обратных элементов.

Приведем множество  $B$ , которое также состоит из восьми матриц, полученных путем циклического возведения в степень матрицы  $b$ :

$$b^1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad b^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1+i) & \frac{1}{2}(1+i) \\ \frac{1}{2}(-1+i) & \frac{1}{2}(-1+i) \end{pmatrix},$$

$$b^3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad b^4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(-1+i) & \frac{1}{2}(-1+i) \\ \frac{1}{2}(-1-i) & \frac{1}{2}(-1-i) \end{pmatrix},$$

$$b^5 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad b^6 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(-1-i) & \frac{1}{2}(-1-i) \\ \frac{1}{2}(1-i) & \frac{1}{2}(1-i) \end{pmatrix},$$

$$b^7 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad b^8 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1-i) & \frac{1}{2}(1-i) \\ \frac{1}{2}(1+i) & \frac{1}{2}(1+i) \end{pmatrix}.$$

Множество  $B$  составляет группу, *изоморфную* группе  $A$ , поскольку ее элементы тоже перемножаются в соответствии с табл. 2.1 (если в последней символ  $a$  заменить на  $b$ ). В группе  $B$ , как и в группе  $A$ , имеются две подгруппы из четырех и двух элементов. Примечательной особенностью циклической группы  $B$  является то, что в качестве *тождественного элемента* здесь выступает не *единичная матрица*, а ничем не примечательная матрица  $b^8 = e$ . Если матрицу, обозначенную в списке как  $b^3$  (или  $b^5$ , или  $b^7$ ), взять за *образующую*, то матрица, обозначенная как  $b^8$ , по-прежнему будет выполнять роль тождественного элемента.

*Транспонируем* матрицы  $b^i$ . Получим новую циклическую группу  $C$ , *изоморфную* как группе  $B$ , так и группе  $A$ . Табл. 2.2 демонстрирует тоже циклический закон умножения исходных ( $b^i$ ) и транспонированных ( $c^j$ ) матриц:  $d^k = b^i \times c^j$ ,

Таблица 2.2

$b^i \times c^j$	$c^1$	$c^2$	$c^3$	$c^4$	$c^5$	$c^6$	$c^7$	$c^8$
$b^1$	$d^2$	$d^3$	$d^4$	$d^5$	$d^6$	$d^7$	$d^8$	$d^1$
$b^2$	$d^3$	$d^4$	$d^5$	$d^6$	$d^7$	$d^8$	$d^1$	$d^2$
$b^3$	$d^4$	$d^5$	$d^6$	$d^7$	$d^8$	$d^1$	$d^2$	$d^3$
$b^4$	$d^5$	$d^6$	$d^7$	$d^8$	$d^1$	$d^2$	$d^3$	$d^4$
$b^5$	$d^6$	$d^7$	$d^8$	$d^1$	$d^2$	$d^3$	$d^4$	$d^5$
$b^6$	$d^7$	$d^8$	$d^1$	$d^2$	$d^3$	$d^4$	$d^5$	$d^6$
$b^7$	$d^8$	$d^1$	$d^2$	$d^3$	$d^4$	$d^5$	$d^6$	$d^7$
$b^8$	$d^1$	$d^2$	$d^3$	$d^4$	$d^5$	$d^6$	$d^7$	$d^8$

Однако вся совокупность из 24 матриц  $B$ ,  $C$ ,  $D$  и даже отдельно 8 матриц  $D$  не образуют групп, поскольку в указанных множествах, во-первых, нет тождественного элемента (во всяком случае общего на все элементы), во-вторых, произведения элементов этих множеств равны нулевой матрице, которая, согласно групповым условиям, не может входить в состав групп:

$$c' \times b = d' \times d' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, произведение элементов двух групп породило *негрупповое множество*  $D$ :

$$\begin{aligned} d^1 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i) & \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) & \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i) \end{pmatrix}, & d^2 &= \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}, \\ d^3 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) & \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i) & \frac{1}{\sqrt{2}}(-1-i) \end{pmatrix}, & d^4 &= \begin{pmatrix} i & -1 \\ -1 & -i \end{pmatrix}, \\ d^5 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i) & \frac{1}{\sqrt{2}}(-1-i) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(-1-i) & \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i) \end{pmatrix}, & d^6 &= \begin{pmatrix} -1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}, \\ d^7 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(-1-i) & \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i) & \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) \end{pmatrix}, & d^8 &= \begin{pmatrix} -i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Приведем пример *некоммутативной группы*  $D_3$  на матрицах, элементами которых являются числа 0 и 1. Здесь при перемножении матриц следует учитывать, что сложение осуществляется по mod (2), т.е. сумма  $1 + 1 = 0$ . То, что группа  $D_3$  не коммутативна, видно из ее таблицы умножения (табл. 2.3), в которой не все элементы расположены симметрично относительно главной диагонали. Причем данная группа относится к весьма распространенному типу групп, имеющих общепринятое обозначение  $D_3$  и названных Клейном группами *диэдра*:

$$0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad 1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad 2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad 3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad 4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad 5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таблица 2.3

$D_3$	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	0	3	2	5	4
2	2	4	0	5	1	3
3	3	5	1	4	0	2
4	4	2	5	0	3	1
5	5	3	4	1	2	0

Таблица 2.4

$C_6$	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	4	3	5	0	2
2	2	3	0	1	5	4
3	3	5	1	4	2	0
4	4	0	5	2	1	3
5	5	2	4	0	3	1

Если в качестве *образующего элемента* из выписанных матриц взять матрицу, обозначенную цифрой 1, а при перемножении матриц использовать сложение по mod (3), когда  $1 + 2 = 0$ ,  $2 + 2 = 1$ , то

получим *циклическую*, а значит, *коммутативную* группу с общепринятым обозначением —  $C_6$ :

$$0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad 1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad 2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad 3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad 4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad 5 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Таблица умножения элементов группы  $C_6$  (табл. 2.4) уже будет симметричной относительно своей главной диагонали.

Приведенных примеров, по-видимому, достаточно, чтобы усвоить понятие группы. Занимаясь *морфологическим анализом* групп, мы позже убедимся, какую исключительно важную роль играет при этом *преобразование подобия* или, как часто его называют, *трансформационное преобразование* (2.8). Оно позволяет группу  $G$ , состоящую из элементов  $\{\dots, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}$ , разбить на *классы эквивалентности*. Отношение эквивалентности предполагает выполнение трех законов — *рефлексивности* (каждый элемент  $\mathbf{a}$  равен самому себе:  $\mathbf{a} = \mathbf{a}$ ), *симметричности* (если  $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ , то и  $\mathbf{b} = \mathbf{a}$ ) и *транзитивности* (если  $\mathbf{a} = \mathbf{b}$  и  $\mathbf{b} = \mathbf{c}$ , то  $\mathbf{a} = \mathbf{c}$ ). Все три закона выполняются для преобразования подобия, которое для группы  $G$  с указанными элементами запишется как

$$\mathbf{x} = \mathbf{z}^{-1} \mathbf{y} \mathbf{z}. \quad (2.15)$$

В теории групп в этом случае принято говорить, что элемент  $\mathbf{x}$  *сопряжен* элементу  $\mathbf{y}$  посредством элемента  $\mathbf{z}$ . Закон *рефлексивности* выполняется для преобразования подобия (2.15) в силу непрерывного существования в группе  $G$  такого элемента  $\mathbf{z}$ , что  $\mathbf{x} = \mathbf{z}^{-1} \mathbf{x} \mathbf{z}$ , в частности, когда  $\mathbf{z} = \mathbf{e}$ . Для того чтобы убедиться в справедливости закона *симметричности*, достаточно преобразование (2.15) умножить справа на  $\mathbf{z}^{-1}$  и слева на  $\mathbf{z}$ , получим  $\mathbf{y} = \mathbf{z} \mathbf{x} \mathbf{z}^{-1}$ . Но так как всякий элемент  $\mathbf{z}$  имеет себе обратный ( $\mathbf{w}$ ), последнее равенство можно переписать в нужном нам виде, т.е. как (2.15):  $\mathbf{y} = \mathbf{w}^{-1} \mathbf{x} \mathbf{w}$ .

Наконец, проверим выполнение закона *транзитивности*, который в данном случае формулируется следующим образом:

$$\text{если } \mathbf{x} = \mathbf{z}^{-1} \mathbf{y} \mathbf{z} \text{ и } \mathbf{y} = \mathbf{v}^{-1} \mathbf{u} \mathbf{v}, \text{ то } \mathbf{x} = \mathbf{w}^{-1} \mathbf{u} \mathbf{w}.$$

Это возможно в силу

$$\mathbf{x} = \mathbf{z}^{-1} \mathbf{y} \mathbf{z} = \mathbf{z}^{-1} (\mathbf{v}^{-1} \mathbf{u} \mathbf{v}) \mathbf{z} = (\mathbf{z}^{-1} \mathbf{v}^{-1}) \mathbf{u} (\mathbf{v} \mathbf{z}) = (\mathbf{v} \mathbf{z})^{-1} \mathbf{u} (\mathbf{v} \mathbf{z}) = \mathbf{w}^{-1} \mathbf{u} \mathbf{w}.$$

В *коммутативных* группах каждый элемент образует свой собственный *класс сопряженности*, так что число классов равно *порядку* т.е. числу элементов группы:  $\mathbf{x} = \mathbf{z}^{-1} \mathbf{y} \mathbf{z} = \mathbf{z}^{-1} \mathbf{z} \mathbf{y} = \mathbf{y}$ . Отсюда разбиение группы на относительные классы эквивалентности началь-

ных пяти порядков заранее предreshено, так как все они коммутативны. Впервые некоммутативность между элементами встречается в группе диэдра  $D_3$ , которая состоит, как мы уже видели, из шести элементов.

### Действия с 0,1-матрицами

Двум единицам – положительной (+1) и отрицательной (-1) – поставим в соответствие две 0,1-матрицы размером  $2 \times 2$ :

$$1 \rightarrow e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad -1 \rightarrow -e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.16)$$

Произведем обычное перемножение этих матриц:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{т.е. как } 1 \times (-1) = -1,$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{т.е. как } (-1) \times (-1) = 1.$$

Убеждаемся, что при перемножении 0,1-матрицы ведут себя аналогично традиционным единицам. Следовательно, замена (2.16) позволяет воссоздать действия с отрицательными числами без использования самих отрицательных чисел.

Рассмотрим конкретный числовой пример:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -7 & 5 \end{pmatrix},$$

Всем этим матрицам поставим в соответствие матрицы удвоенной размерности, в которых нет отрицательных чисел —

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 5 \\ 2 & 9 & 5 & 0 \\ 9 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 7 & 5 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

В матричных блоках  $2 \times 2$  были приняты следующие равенства:

$$4 - 3 = 1 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad 2 - 9 = -7 = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 9 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}.$$

Однако можно принять, что

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 9 & 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}.$$

Если мы не захотим смешивать положительные и отрицательные числа (подобно тому, как мы не смешиваем мнимую и веществен-



ную компоненты комплексного числа) —

$$4 \times e + 3 \times (-e) \neq 1 \times e + 0 \times (-e), \quad 2 \times e + 9 \times (-e) \neq 0 \times e + 7 \times (-e),$$

то каждому числу будет отвечать бесчисленное множество *матричных чисел*, а одной операции умножения чисел — бесчисленное множество матричных умножений. Например, произведению  $(-3) \times 4 = -12$ , будет соответствовать бесконечный ряд следующих эквивалентных операций:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 34 \\ 34 & 22 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 33 \\ 33 & 21 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 10 & 13 \\ 13 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 & 52 \\ 52 & 40 \end{pmatrix},$$

### Обобщенное комплексное число

Теперь обратимся к *комплексным числам*. Как известно, они строятся на базе четырех единиц:

$$i_0 = 1, \quad i_1 = i, \quad i_2 = -1, \quad i_3 = -i,$$

которые перемножаются в соответствии с табл. 2.5. Индексы базисных единиц подчиняются закону сложения по mod (4). Этот закон сложения получается путем сдвига каждой последующей строки таблицы умножения на одну позицию влево относительно каждой предыдущей строки. Одновременно рассмотрим табл. 2.6, в которой индексы базисных единиц также циклически сдвинуты на одну позицию вправо. На основе табл. 2.6 построим четыре 0,1-матрицы. Непосредственным перемножением убеждаемся, что в отношении этих матриц действует закон умножения, выраженный табл. 2.5:

$$i_0 = i_1 \times i_3 = 1, \quad i_3 = i_1 \times i_2 = -i \quad \text{и т.д.}$$

Таблица 2.5

	$i_0$	$i_1$	$i_2$	$i_3$
$i_0$	$i_0$	$i_1$	$i_2$	$i_3$
$i_1$	$i_1$	$i_2$	$i_3$	$i_0$
$i_2$	$i_2$	$i_3$	$i_0$	$i_1$
$i_3$	$i_3$	$i_0$	$i_1$	$i_2$

Таблица 2.6

	$i_0$	$i_1$	$i_2$	$i_3$
$i_0$	$i_0$	$i_1$	$i_2$	$i_3$
$i_1$	$i_3$	$i_0$	$i_1$	$i_2$
$i_2$	$i_2$	$i_3$	$i_0$	$i_1$
$i_3$	$i_1$	$i_2$	$i_3$	$i_0$

$$i_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, i_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, i_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, i_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.17)$$

Обобщенным комплексным числом  $x$  будем называть матрицу размером  $4 \times 4$ :

$$x = x_0 i_0 + x_1 i_1 + x_2 i_2 + x_3 i_3 = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_0 & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_0 & x_1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_0 \end{pmatrix}, \quad (2.18)$$

Формула умножения двух обобщенных комплексных чисел  $x$  и  $y$  вытекает из перемножения двух матриц вида (2.18):

$$xy = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_0 & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_0 & x_1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \\ y_3 & y_0 & y_1 & y_2 \\ y_2 & y_3 & y_0 & y_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_0 \end{pmatrix} = \quad (2.19)$$

$$= (x_0 y_0 + x_1 y_3 + x_2 y_2 + x_3 y_1) i_0 + (x_0 y_1 + x_1 y_0 + x_2 y_3 + x_3 y_2) i_1 + \\ + (x_0 y_2 + x_1 y_1 + x_2 y_0 + x_3 y_3) i_2 + (x_0 y_3 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_3 y_0) i_3.$$

При перемножении обобщенных комплексных чисел положительные и отрицательные компоненты результирующего числа не перемешиваются. Если принять обычные действия в отношении положительных и отрицательных единиц, которые мы обозначим как  $j_0$  и  $j_1$ , то из (2.19) получим:

$$(x_0 y_0 + x_1 y_3 + x_2 y_2 + x_3 y_1) j_0 + (x_0 y_1 + x_1 y_0 + x_2 y_3 + x_3 y_2) j_1 - \\ - (x_0 y_2 + x_1 y_1 + x_2 y_0 + x_3 y_3) j_0 - (x_0 y_3 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_3 y_0) j_1 = \\ = [(x_0 - x_2)(y_0 - y_2) - (x_1 - x_3)(y_1 - y_3)] j_0 + \\ + [(x_0 - x_2)(y_1 - y_3) + (x_1 - x_3)(y_0 - y_2)] j_1. \quad (2.20)$$

Введя новые обозначения для координат традиционных комплексных чисел  $a$  и  $b$ , образованных на базисе  $j_0$  и  $j_1$ , будем иметь знакомую нам со школы формулу умножения. Итак, обозначим

$$a_0 = x_0 - x_2, \quad a_1 = x_1 - x_3, \quad b_0 = y_0 - y_2, \quad b_1 = y_1 - y_3,$$

тогда из (2.20) имеем (2.21)

$$(a_0 b_0 - a_1 b_1) j_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) j_1 = (a_0 j_0 + a_1 j_1)(b_0 j_0 + b_1 j_1) = ab.$$

Из равенств (2.18) — (2.21) вытекает возможность представления в матричной форме действий над комплексными числами. Возьмем

для примера два конкретных комплексных числа  $a$  и  $b$ ; их произведение дает число  $c$  в соответствии с традиционной формулой:

$$ab = (-3 + i)(1 - 2i) = -1 + 7i = c.$$

В матричном представлении будем иметь:

$$ab = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 7 \\ 7 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 7 \\ 7 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = c.$$

Здесь для числа  $c$  положительное и отрицательное матричные числа вычитались:  $2 - 3 = -1$ . При перемножении же обобщенных комплексных чисел  $x$  и  $y$ , как уже было сказано, отрицательные и положительные компоненты не будут перемешиваться, как того требует формула (2.19):  $xy =$

$$\begin{aligned} &= (1i_0 + 3i_1 + 4i_2 + 2i_3)(2i_0 + 3i_1 + 1i_2 + 5i_3) = (27i_0 + 31i_1 + 28i_2 + 24i_3) = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 5 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 31 & 28 & 24 \\ 24 & 27 & 31 & 28 \\ 28 & 24 & 27 & 31 \\ 31 & 28 & 24 & 27 \end{pmatrix} = z. \end{aligned}$$

Геометрический смысл умножения двух комплексных чисел хорошо известен – это поворот в комплексной плоскости. «Вращательность» числам сообщается за счет цикличности базиса (табл. 2.2), которая проявляется еще и в том, что последовательное возведение в степень мнимой единицы даст все четыре типа единиц:

$$i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = i^0 = 1, \quad (2.22)$$

Мнимая единица называется образующей циклического базиса комплексного числа. Любые четыре 0,1-матрицы, обладающие свойством цикличности в смысле (2.22), будут давать изоморфные структуры. В частности, 0,1-матрицы вида:

$$i_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = e, \quad i_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = i, \quad (2.23)$$

$$i_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -e, \quad i_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -i$$

при перемножении дадут табл. 2.5.

Базис (2.23) подобен базису (2.17), т.е. одни матрицы можно получить из других путем перестановки 2-го и 3-го столбцов и соответствующих строк с одновременным переобозначением базисных единиц табл. 2.6. Эту процедуру, однако, легко можно осуществить и с помощью трансформационной матрицы  $T$ , которая участвует в преобразовании подобия (2.8), для  $i_1$  будем иметь

$$i_1 = T^{-1} \times i_1 \times T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрицы  $T$  и  $T^{-1}$  одинаковы, так как они симметричны.

Два базиса 0,1-матриц (2.17) и (2.23) образуют изоморфные циклические группы, поскольку имеют одну и ту же таблицу умножения (табл. 2.5). Положительная (+1) и отрицательная (-1) единицы и соответствующие им 0,1-матрицы (2.16) также составляют изоморфные группы из двух элементов. Можно сконструировать такую систему «комплексных» чисел, базис которых будет обладать свойством цикличности, но с периодом, равным не 4, а 3, 5, 6, 7, 8 и т.д. Все они будут группами. Соответствующие таблицы циклических сдвигов на позицию влево и на позицию вправо с периодом, равным 6, представлены табл. 2.7 и 2.8, в которых выписаны только индексы базисных единиц, так как именно они несут всю информацию о строении группы. Вид обобщенного комплексного числа на базе шести единиц и формула их перемножения аналогичны выражениям (2.18) и (2.19); ничего принципиально нового в них нет.

Таблица 2.7

0	1	2	3	4	5
1	2	3	4	5	0
2	3	4	5	0	1
3	4	5	0	1	2
4	5	0	1	2	3
5	0	1	2	3	4

Таблица 2.8

0	1	2	3	4	5
5	0	1	2	3	4
4	5	0	1	2	3
3	4	5	0	1	2
2	3	4	5	0	1
1	2	3	4	5	0

### Гиперкомплексные числа

Базисная 0,1-матрица отрицательного числа получалась путем удвоения размерности базисной 0,1-матрицы положительного числа. Комплексное число получилось за счет удвоения суммы положи-

тельного и отрицательного чисел, что можно представить формулой:  $x = [x_0 e + x_1 (-e)] + [x_2 e + x_3 (-e)] i$ . Теперь рассмотрим гиперкомплексное число, которое называется кватернионом и которое получается путем удвоения комплексного числа:

$$x = \{[x_0 e + x_1 (-e)] + [x_2 e + x_3 (-e)] i\} + \{[x_4 e + x_5 (-e)] + [x_6 e + x_7 (-e)] i\} j = x_0 e + x_1 (-e) + x_2 i + x_3 (-i) + x_4 j + x_5 (-j) + x_6 k + x_7 (-k).$$

Приведем таблицу умножения (табл. 2.9) и таблицу базисных единиц (табл. 2.10) кватерниона. Сравнивая обе таблицы, можно заметить, что они отличаются друг от друга только порядком строк. Отсюда вывод: для построения таблицы базисных 0,1-матриц необходимо строки таблицы умножения упорядочить так, чтобы все ее тождественные элементы оказались на главной диагонали. На основе табл. 2.10 можно выписать полную систему базисных единиц кватерниона. В частности, для базисной единицы  $k$  0,1-матрица выглядит следующим образом:

$$k = \left( \begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Таблица 2.9

$e$	$-e$	$i$	$-i$	$j$	$-j$	$k$	$-k$
$-e$	$e$	$-i$	$i$	$-j$	$j$	$-k$	$k$
$i$	$-i$	$-e$	$e$	$k$	$-k$	$-j$	$j$
$-i$	$i$	$e$	$-e$	$-k$	$k$	$j$	$-j$
$j$	$-j$	$k$	$-k$	$-e$	$e$	$i$	$-i$
$-j$	$j$	$-k$	$k$	$e$	$-e$	$-i$	$i$
$k$	$-k$	$j$	$-j$	$-i$	$i$	$-e$	$e$
$-k$	$k$	$-j$	$j$	$i$	$-i$	$e$	$-e$

Таблица 2.10

$e$	$-e$	$i$	$-i$	$j$	$-j$	$k$	$-k$
$-e$	$e$	$-i$	$i$	$-j$	$j$	$-k$	$k$
$-i$	$i$	$e$	$-e$	$-k$	$k$	$j$	$-j$
$i$	$-i$	$-e$	$e$	$k$	$-k$	$-j$	$j$
$-j$	$j$	$k$	$-k$	$e$	$-e$	$-i$	$i$
$j$	$-j$	$-k$	$k$	$-e$	$e$	$i$	$-i$
$-k$	$k$	$-j$	$j$	$-i$	$i$	$e$	$-e$
$k$	$-k$	$j$	$-j$	$i$	$-i$	$-e$	$e$

Аналогично сворачиваются все остальные базисные единицы. Полная система единиц на свернутых матрицах кватерниона имеет вид:

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, -e = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, i = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, -i = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$

$$j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, -j = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, k = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, -k = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix},$$

Приведенные матрицы образуют антикоммутиративную группу, так как, согласно табл. 2.9, имеем:

$$ij = k, \quad ji = -k, \quad jk = i, \quad kj = -i, \quad ik = -j, \quad ki = j.$$

Приведем обобщенную формулу перемножения двух кватернионов  $x$  и  $y$ , по которой отрицательные и положительные компоненты числового агрегата уже не перемешиваются:

$$\begin{aligned} & (x_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_3 + x_3y_2 + x_4y_5 + x_5y_4 + x_6y_7 + x_7y_6) \times e + \\ & + (x_0y_1 + x_1y_0 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4 + x_5y_5 + x_6y_6 + x_7y_7) \times (-e) + \\ & + (x_0y_2 + x_1y_3 + x_2y_0 + x_3y_1 + x_4y_6 + x_5y_7 + x_6y_5 + x_7y_4) \times i + \\ & + (x_0y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_3y_0 + x_4y_7 + x_5y_6 + x_6y_4 + x_7y_5) \times (-i) + \\ & + (x_0y_4 + x_1y_5 + x_2y_7 + x_3y_6 + x_4y_0 + x_5y_1 + x_6y_2 + x_7y_3) \times j + \\ & + (x_0y_5 + x_1y_4 + x_2y_6 + x_3y_7 + x_4y_1 + x_5y_0 + x_6y_3 + x_7y_2) \times (-j) + \\ & + (x_0y_6 + x_1y_7 + x_2y_4 + x_3y_5 + x_4y_3 + x_5y_2 + x_6y_0 + x_7y_1) \times k + \\ & + (x_0y_7 + x_1y_6 + x_2y_5 + x_3y_4 + x_4y_2 + x_5y_3 + x_6y_1 + x_7y_0) \times (-k). \end{aligned}$$

$e$	$-e$	$i$	$-i$	$j$	$-j$	$k$	$-k$
$-e$	$e$	$-i$	$i$	$-j$	$j$	$-k$	$k$
$i$	$-i$	$-e$	$e$	$k$	$-k$	$-j$	$j$
$-i$	$i$	$e$	$-e$	$-k$	$k$	$j$	$-j$
$j$	$-j$	$k$	$-k$	$i$	$-i$	$-e$	$e$
$-j$	$j$	$-k$	$k$	$-i$	$i$	$e$	$-e$
$k$	$-k$	$-j$	$j$	$-e$	$e$	$-i$	$i$
$-k$	$k$	$j$	$-j$	$e$	$-e$	$i$	$-i$

Таблица 2.11

Удвоение комплексного числа можно понимать иначе, а именно, как удвоение длины цикла с 4 до 8. Тогда новое гиперкомплексное число будет иметь таблицу умножения в виде табл. 2.11. Эта таблица умножения симметрична относительно главной

диагонали, в отличие от предыдущего случая. Это значит, что умножение двух гиперкомплексных чисел, построенных на базисных единицах табл. 2.7, будет уже коммутативным.

Две следующие группы базисных единиц —

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix},$$

изоморфны между собой, в чем можно убедиться, если составить для них таблицы умножения, сохранив при этом приведенный порядок элементов. Далее, если оба ряда матриц перемножить между собой, возникнут еще четыре матрицы:

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Объединив эти матрицы с двумя предыдущими рядами, получим новый коммутативный базис из 16 различных матриц.

Процедуру удвоения элементов группы можно продолжить, например, и так: удвоенные базисные единицы кватерниона —

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -j & 0 \\ 0 & -j \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -k & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix},$$

дополнить либо матрицами вида:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & j \\ j & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -j \\ -j & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & k \\ k & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -k \\ -k & 0 \end{pmatrix},$$

либо другими матрицами —

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & -j \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & -j \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix},$$

В обоих случаях получается некоммутативный базис из 16 матриц.

### Матричные конструкции

Для практических упражнений удобно воспользоваться системами из  $a$  и  $b$  0,1-матриц 8-го порядка, свернутых до матриц  $4 \times 4$ , которые по отдельности образуют некоммутативные подгруппы 8-го порядка, а все вместе — группу 32-го порядка:

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, a_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$-e = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, b_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$b_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

В группе и подгруппах выполняются следующие соотношения:

$$a_i a_i = -a_i a_i = a_i, \quad b_i b_i = -b_i b_i = b_i, \quad a_i b_i = b_i a_i,$$

$$a_i^2 = -e, \quad b_i^2 = -e, \quad a_i^4 = e, \quad b_i^4 = e.$$

Группы можно уменьшать, если использовать матрицы  $3 \times 3$  и  $2 \times 2$ , или, напротив, увеличивать, если добавлять матрицы  $4 \times 4$ , но с нечетным числом положительных и отрицательных единиц или с мнимой единицей. Интересные системы образуют матрицы совершенно иной природы:

$$\frac{1}{2}(a_1 - b_1) = \frac{1}{2}(b_1 - a_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\frac{1}{2}(a_2 - b_2) = \frac{1}{2}(b_2 - a_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\frac{1}{2}(a_3 - b_3) = \frac{1}{2}(b_3 - a_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$a_1 - b_2 = -(b_2 - a_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots$$

Матрица, описывающая структуру электромагнитного поля, может быть разложена по базисным 0,1-матрицам соответствующих координат:

$$\begin{pmatrix} 0 & H_3 & -H_2 & -E_1 \\ -H_3 & 0 & H_1 & -E_2 \\ H_2 & -H_1 & 0 & -E_3 \\ E_1 & E_2 & E_3 & 0 \end{pmatrix} = H_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \dots + E_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Аналогично, составляются агрегаты из  $a$  и  $b$  матриц:



$$A = p_0 \mathbf{a}_0 + p_1 \mathbf{a}_1 + p_2 \mathbf{a}_2 + p_3 \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} p_0 & -p_3 & p_2 & p_1 \\ p_3 & p_0 & -p_1 & p_2 \\ -p_2 & p_1 & p_0 & p_3 \\ -p_1 & -p_2 & -p_3 & p_0 \end{pmatrix},$$

$$B = q_0 \mathbf{b}_0 + q_1 \mathbf{b}_1 + q_2 \mathbf{b}_2 + q_3 \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} q_0 & -q_3 & q_2 & -q_1 \\ q_3 & q_0 & -q_1 & -q_2 \\ -q_2 & q_1 & q_0 & -q_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 & q_0 \end{pmatrix}.$$

Обратимся к вопросу о *собственных значениях*. Ранее мы показали, что всякую матрицу  $z$  вида:

$$z = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} y = x + iy$$

можно рассматривать в качестве комплексного числа. Несложно подобрать для  $z$  такую трансформационную матрицу  $T$ , чтобы с ее помощью осуществить преобразование подобия, результатом которого были бы собственные значения  $\lambda = T^{-1} z T$ :

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -i/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - iy & 0 \\ 0 & x + iy \end{pmatrix}.$$

Аналогичного результата можно добиться, если для матрицы  $z$  составить характеристический определитель и затем отыскать корни характеристического уравнения. Для определителя размерности  $2 \times 2$  действует простая формула, которая приводит к предыдущему результату:

$$\lambda_{1,2} = \frac{a_{11} + a_{22}}{2} \pm \sqrt{\frac{(a_{11} - a_{22})^2}{4} + a_{12} a_{21}} = x \pm iy$$

Есть и еще один способ нахождения собственных значений. Для этого с помощью замены (2.16) увеличим матрицу  $z$  размерности  $2 \times 2$  до размерности  $8 \times 8$ , при этом все  $x$  снабдим индексами, чтобы можно было видеть, каким образом следует производить перестановку строк и столбцов для получения нужной структуры:

$$z = \begin{pmatrix} x + iy & 0 \\ 0 & x - iy \end{pmatrix} =$$

$$= \left( \begin{array}{cccc|cccc} x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & x_3 & 0 & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 & 0 & y & 0 & 0 \\ \hline y & 0 & 0 & 0 & x_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 & 0 & 0 & x_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & 0 & 0 & 0 & x_7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y & 0 & 0 & 0 & x_1 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cccc|cccc} x_1 & 0 & 0 & y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_3 & y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y & 0 & x_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 & x_7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & x_4 & 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_2 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y & x_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y & 0 & 0 & x_8 \end{array} \right).$$

Собственными значениями 0,1-матриц являются корни  $n$ -ой степени из единицы. Если какая-либо 0,1-матрица  $a$  обращается в единичную матрицу  $e$  при показателе степени, равном, скажем, четырем, то собственными значениями матрицы  $a$  будут четыре корня из единицы. Матрицы, обладающие одинаковыми наборами собственных значений, подобны между собой, причем они образуют *абсолютные* классы эквивалентности, хотя сами матрицы могут быть элементами коммутативных групп, где каждый элемент, как известно, образует свой *относительный* класс эквивалентности. Приведем несколько базисных 0,1-матриц и рядом с ними выпишем наборы их собственных значений:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

Таким образом, наборы собственных значений базисных 0,1-матриц однозначно характеризуют *периодичность* матрицы.

На основе замены (2.16) можно получить многие важные математические результаты, которые, быть может, непосредственно и не связаны с группами. Так, легко показать, что матрицы вида

$$\begin{pmatrix} a & ic \\ -ic & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & -c \\ -c & b \end{pmatrix},$$

имеют одинаковые наборы собственных значений, поскольку все

три матрицы после разворачивания и соответствующей перестановки диагональных элементов обнаруживают свою идентичность:

$$\left( \begin{array}{cccc|cccc} a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 & c & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & c & b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_4 \end{array} \right), \quad \left( \begin{array}{cccc|cccc} a_1 & 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 & 0 & 0 & 0 & c \\ \hline c & 0 & 0 & 0 & b_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 & 0 & b_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 & b_1 \end{array} \right),$$

$$\left( \begin{array}{cccc|cccc} a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & a_4 & 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 & c & 0 \\ \hline 0 & c & 0 & 0 & b_1 & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 & b_4 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 \end{array} \right).$$

Несложно убедиться в справедливости цепи эквивалентных числовых матриц:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2i \\ -2i & 7 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 5.5 + 2.5i & 0 \\ 0 & 5.5 - 2.5i \end{pmatrix}.$$

Полученные результаты распространяются на матрицы больших размерностей. Кроме того, следует иметь в виду, что любую эрмитову матрицу ( $H$ ) можно представить комплексным числом из матриц симметричной ( $S$ ) и кососимметричной ( $K$ ) структуры:

$$H = S + iK = \begin{pmatrix} S & -K \\ K & S \end{pmatrix}.$$

Завершим этот раздел двумя нетривиальными примерами.

*Пример 1.* Перемножим две матрицы  $A$  и  $B$  с вещественными, в том числе, и отрицательными матричными элементами. Далее, используя замену (2.16), развернем матрицы  $A$  и  $B$  до матриц  $A_1$  и  $B_1$  и вновь их перемножим. Для всех результирующих матриц  $C$ ,  $C_1$  и  $C_2$  найдем собственные значения, которые выпишем в табл. 2.12.

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 7.3 & -4.5 & 3.1 \\ 0.5 & 8.2 & -5.9 \\ 3.4 & -2.7 & -6.3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1.8 & -4.4 & -5.9 \\ 3.7 & 1.1 & -7.6 \\ -2.5 & -6.4 & 8.7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11.26 & -56.91 & 18.10 \\ 45.99 & 44.58 & -116.6 \\ 11.88 & 22.39 & -54.35 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
 C_1 = A_1 \cdot B_1 &= \begin{pmatrix} 7.3 & 0.0 & 0.0 & 4.5 & 3.1 & 0.0 \\ 0.0 & 7.3 & 4.5 & 0.0 & 0.0 & 3.1 \\ 0.5 & 0.0 & 8.2 & 0.0 & 0.0 & 5.9 \\ 0.0 & 0.5 & 0.0 & 8.2 & 5.9 & 0.0 \\ 3.4 & 0.0 & 0.0 & 2.7 & 0.0 & 6.3 \\ 0.0 & 3.4 & 2.7 & 0.0 & 6.3 & 0.0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1.8 & 0.0 & 0.0 & 4.4 & 0.0 & 5.9 \\ 0.0 & 1.8 & 4.4 & 0.0 & 5.9 & 0.0 \\ 3.7 & 0.0 & 1.1 & 0.0 & 0.0 & 7.6 \\ 0.0 & 3.7 & 0.0 & 1.1 & 7.6 & 0.0 \\ 0.0 & 2.5 & 0.0 & 6.4 & 8.7 & 0.0 \\ 2.5 & 0.0 & 6.4 & 0.0 & 0.0 & 8.7 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 13.14 & 24.40 & 0.0 & 56.91 & 61.17 & 43.07 \\ 24.40 & 13.14 & 56.91 & 0.0 & 43.07 & 61.17 \\ 45.99 & 0.0 & 46.78 & 2.2 & 0.0 & 116.6 \\ 0.0 & 45.99 & 2.2 & 46.78 & 116.6 & 0.0 \\ 21.87 & 9.99 & 40.32 & 7.93 & 20.52 & 74.87 \\ 9.99 & 21.87 & 7.93 & 40.32 & 74.87 & 20.52 \end{pmatrix}, \\
 C_2 &= \begin{pmatrix} 0.0 & 11.26 & 0.0 & 56.91 & 18.10 & 0.0 \\ 11.26 & 0.0 & 56.91 & 0.0 & 0.0 & 18.10 \\ 45.99 & 0.0 & 44.58 & 0.0 & 0.0 & 116.6 \\ 0.0 & 45.99 & 0.0 & 44.58 & 116.6 & 0.0 \\ 11.88 & 0.0 & 22.39 & 0.0 & 0.0 & 54.35 \\ 0.0 & 11.88 & 0.0 & 22.39 & 54.35 & 0.0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Таблица 2.12

Собственные значения $C$	Собственные значения $C_1$	Собственные значения $C_2$
$-0.0481 + 51.9424 i$	$-0.0481 + 51.9424 i$	$-0.0481 + 51.9424 i$
$-0.0481 - 51.9424 i$	$-0.0481 - 51.9424 i$	$-0.0481 - 51.9424 i$
$-20.9338$	$-20.9338$	$-20.9338$
—	195.3817	122.02
—	0.4562	16.3986
—	-13.9279	-28.2267

*Комментарий к примеру 1.* Процедура умножения матриц  $A$  на  $B$  и  $A_1$  на  $B_1$  дала почти один и тот же результат: матрицы  $C$ ,  $C_1$  и  $C_2$  эквивалентны, на что указывает наличие в их собственных значениях трех одинаковых чисел. Однако есть и неэквивалентная компонента. Это связано с тем, что развернутые матрицы  $C_1$  и  $C_2$  несут более обширную информацию, чем матрица  $C$ . Поэтому мы говорим, что матрицы  $C_1$  и  $C_2$  подобны (гомоморфные)  $C$ .

*Пример 2.* Пусть дана эрмитова матрица  $H$ ; найдем ее собственные значения  $\lambda$ . Затем комплексную матрицу  $H$  развернем в вещественную матрицу  $H_1$  с отрицательными элементами и снова найдем собственные значения  $\lambda_1$ . Наконец, найдем собственные значения  $\lambda_2$  матрицы  $H_2$  с положительными элементами, полученными

по формуле (2.17).

$$H = \begin{pmatrix} 1.3 & 4.2 - 3.7i & 0.8i \\ 4.2 + 3.7i & -7.6 & 3.6 - 7.5i \\ -0.8i & 3.6 + 7.5i & 4.9 \end{pmatrix}, \Lambda = \begin{pmatrix} -13.69 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 2.75 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 9.54 \end{pmatrix}.$$

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1.3 & 4.2 & 0.0 & 0.0 & 3.7 & -0.8 \\ 4.2 & -7.6 & 3.6 & -3.7 & 0.0 & 7.5 \\ 0.0 & 3.6 & 4.9 & 0.8 & -7.5 & 0.0 \\ 0.0 & -3.7 & 0.8 & 1.3 & 4.2 & 0.0 \\ 3.7 & 0.0 & -7.5 & 4.2 & -7.6 & 3.6 \\ -0.8 & 7.5 & 0.0 & 0.0 & 3.6 & 4.9 \end{pmatrix}.$$

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} 2.75 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 2.75 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 9.54 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 9.54 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -13.69 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -13.69 \end{pmatrix}.$$

$$H_2 = \begin{pmatrix} 1.3 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 4.2 & 0.0 & 0.0 & 3.7 & 0.0 & 0.8 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.3 & 0.0 & 0.0 & 3.7 & 4.2 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.8 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.3 & 0.0 & 0.0 & 3.7 & 4.2 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.8 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.3 & 0.0 & 0.0 & 3.7 & 4.2 & 0.8 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 4.2 & 3.7 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 7.6 & 0.0 & 3.6 & 0.0 & 0.0 & 7.5 \\ 0.0 & 4.2 & 3.7 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 7.6 & 7.5 & 3.6 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 4.2 & 3.7 & 7.6 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 7.5 & 3.6 & 0.0 \\ 3.7 & 0.0 & 0.0 & 4.2 & 0.0 & 7.6 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 7.5 & 3.6 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.8 & 3.6 & 7.5 & 0.0 & 0.0 & 4.9 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.8 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 3.6 & 7.5 & 0.0 & 0.0 & 4.9 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.8 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 3.6 & 7.5 & 0.0 & 0.0 & 4.9 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.8 & 0.0 & 7.5 & 0.0 & 0.0 & 3.6 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 4.9 \end{pmatrix}.$$

Диагональные элементы матрицы  $\Lambda_2$  равны:

$$\begin{matrix} 2.75, & 2.75, & 9.54, & 9.54, & -13.69, & -13.69, \\ 2.25, & 1.82, & 1.09, & 10.46, & -7.81, & 19.79. \end{matrix}$$

*Комментарий к примеру 2.* Если применительно к  $H_1$  воспользоваться заменой (2.16) вместо (2.17), то у вновь получившейся матрицы были бы точно такие же собственные значения, что и у матрицы  $H_2$ . Это говорит о том, что для нахождения собственных значений важна именно связь диагональных элементов с недиагональными. При переходе от матрицы  $H$  к матрице  $H_1$  собственные значения просто удвоились, а при переходе от  $H_1$  к  $H_2$  добавились шесть различных вещественных значений. В *примере 1* дополни-

тельные собственные значения также появились за счет структурной перестройки матриц, которая привела к положительным матричным элементам. Таким образом, требование о недопустимости смешения положительных и отрицательных чисел породило неэквивалентную процедуру. Здесь матрица  $H_1$  *изоморфна* исходной матрице  $H$ , когда как матрица  $H_2$  только *гомоморфна*  $H$ .

### Подстановки

Комплексное число есть двухкоординатный *вектор*, кватернион — четырехкоординатный и т.д. В предыдущем разделе рассматривались базисные 0,1-матрицы, которые не дают смешиваться различным координатам числовых агрегатов и одновременно задают закон перемножения для их базисных единиц. Однако группы 0,1-матриц образуют все же *операционные* множества. Соответствующим *субстанциональным* множеством для них служат 0,1-векторы-столбцы, о которых ничего не было сказано. Между тем, для 0,1-матриц комплексного числа (2.17) в качестве базиса могут выступать, например, первые столбцы этих матриц. Не оперируя 0,1-векторами, прибегнем к более эффективной методике, введя в обращение новый математический объект — *подстановки*.

Всякая 0,1-матрица переставляет числа в векторе-столбце, который нумерует строки этой матрицы. Например, для базисных единиц комплексного числа  $i_1$  и  $i_2$ , имеем:

$$i_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad i_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, любой 0,1-матрице можно поставить в соответствие двухрядную таблицу; в нашем случае это

$$i_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad i_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Такие двухрядные таблицы и называются *подстановками* (алгебраический термин) или *перестановками* (комбинаторный термин, которым здесь не используется).

Пусть дана таблица перемножения индексов — табл. 2.13. Тогда искомая группа  $G$  регулярных подстановок, отвечающая столбцам табл. 2.13, выглядит следующим образом:

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}, \quad 1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 5 & 4 & 7 & 6 \end{pmatrix},$$

$$2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 6 & 7 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad 3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 4 & 7 & 6 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 7 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad 5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 4 & 5 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad 7 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Таблица 2.13

0	1	2	3	4	5	6	7
1	0	3	2	5	4	7	6
2	3	0	1	6	7	4	5
3	2	1	0	7	6	5	4
4	5	6	7	2	3	3	1
5	4	7	6	3	2	1	3
6	7	4	5	0	1	2	0
7	6	5	4	1	0	0	2

Подстановки имеют ряд достоинств перед 0,1-матрицами: во-первых, они менее громоздки, во-вторых, их проще перемножать, в-третьих, существует специальная запись подстановок, при которой сразу можно определить их степень периодичности.

Имеется теорема, утверждающая, что не существует такой группы, которую нельзя было бы представить подстановками.

Покажем, как производится перемножение подстановок на примере умножения базисных единиц комплексного числа  $i_1$  и  $i_2$ . С этой целью проследим переход индексов от одной подстановки к другой. Индекс 0 подстановки  $i_1$  переходит в 1, а 1 подстановки  $i_2$  переходит в 3; следовательно, в результирующей подстановке  $i_3$  0 будет переходить сразу в 3. Затем смотрим, во что переходит 1:  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 0$ , значит, для  $i_3$  индекс 1 перейдет в 0. Далее,  $2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$  и  $3 \rightarrow 0 \rightarrow 2$ , отсюда  $2 \rightarrow 1$  и  $3 \rightarrow 2$ . В итоге получим подстановку  $i_3$  вида:

$$i_1 \times i_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = i_3$$

Перемножая всеми возможными способами регулярные подстановки группы  $G$ , убеждаемся, что они дают табл. 2.13.

Легко перемножаются одновременно три или даже большее число подстановок, например:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix},$$

здесь  $0 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ , т.е. 0 в результирующей подстановке сразу переходит в 1.

Подстановка, не переставляющая ни одного индекса, называется *тождественной* (*нейтральной* или *единичной*). Она отвечает единичной матрице:

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots \\ 0 & 1 & 2 & \dots \end{pmatrix}.$$

Тождественными подстановками являются  $i_0$  в базисе комплексного числа и  $0$  в группе  $G$  (табл. 2.13). Две подстановки, дающие при перемножении тождественную подстановку  $e$ , называются *взаимно обратными*, в частности, таковыми являются подстановки  $i_1$  и  $i_3$  комплексного числа:

$$i_1 i_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = i_0.$$

Подстановки 1, 2, 3 группы  $G$  являются взаимно обратными, а для подстановок 4, 5, 6, 7 обратными служат 6, 7, 4, 5, соответственно.

Чтобы из заданной подстановки  $a$  получить взаимно обратную  $a^{-1}$ , необходимо верхнюю строку подстановки поменять с нижней и упорядочить индексы верхней строки. Пусть

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 4 & 1 & 3 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix},$$

тогда, согласно определению, будем иметь:

$$a^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 & 3 & 2 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Внимательный анализ всех подстановок группы  $G$  подтверждает эту взаимосвязь между исходными и обратными подстановками.

### Циклическая форма подстановок

Подстановки удобно записывать в *циклической форме*. При такой записи индексы, остающиеся на месте, обычно не пишутся. Так, подстановка  $a$  имеет следующие переходы индексов:  $0 \rightarrow 0$ ,  $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ ,  $3 \rightarrow 3$ ,  $5 \rightarrow 6 \rightarrow 5$ . Следовательно, в циклической форме она запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} a &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & 3 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix} = (0)(142)(3)(56) = \\ &= (0)(142)(3)(56)(7)(8)\dots = (142)(56). \end{aligned}$$

Считается, что индексы 7, 8 и т.д. так же, как 0 и 3, неявно присут-



ствуют в подстановке  $a$ , но тождественно переходят сами в себя. В связи с этим тождественную подстановку обозначают через единичный цикл:  $e = (0)$ . Регулярные подстановки группы  $G$  имеют следующий циклический вид:

$$\begin{aligned} 0 &= (0), & 1 &= (01)(23)(45)(67), \\ 2 &= (02)(13)(46)(57), & 3 &= (03)(12)(47)(56), \\ 4 &= (0426)(1537), & 5 &= (0527)(1436), \\ 6 &= (0624)(1735), & 7 &= (0725)(1634). \end{aligned}$$

Безразлично, с какой позиции записывать цикл:

$$(ij) = (ji), \quad (ijk) = (jki) = (kij), \quad (ijkl) = (jkli) = \dots,$$

поэтому

$$\begin{aligned} i_1 &= (0123) = (1230) = (2301) = (3012), \\ a &= (421)(56) = (421)(65) = (214)(56) = (214)(65), \\ 6 &= (6240)(1735) = (2406)(3517) = (4062)(3517). \end{aligned}$$

Циклы одной и той же подстановки можно переставлять, т.е. они коммутируют внутри этой подстановки:

$$\begin{aligned} (ijk)(l)(mn) &= (l)(ijk)(mn) = (mn)(jki)(l) = (nm)(kij)(l), \\ i_2 &= (02)(13) = (13)(02), \quad a = (142)(56) = (56)(142), \\ 6 &= (1735)(0624), \quad 4 = (3715)(4260). \end{aligned}$$

Разложению подстановки на систему независимых циклов отвечает разложение этой подстановки на систему коммутирующих множителей:

$$\begin{aligned} i_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \\ a &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 4 & 1 & 3 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 4 & 1 & 3 & 2 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}, \\ 6 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 4 & 5 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 1 & 4 & 3 & 0 & 5 & 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 7 & 2 & 5 & 4 & 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Элементарная циклическая подстановка, переставляющая два любых индекса  $i$  и  $j$ , называется *транспозицией*. Транспозиция обладает важным свойством: она обратна сама себе, т.е.  $(ij) = (ij)^{-1}$ , так как  $(ij)(ij) = e$ . Любую транспозицию  $(ij)$  можно представлять произведением смежных транспозиций по формуле:

$$(ij) = (j, j-1)(j-1, j-2) \dots \quad (2.25)$$

$$\dots (i+2, i+1)(i, i+1)(i+1, i+2) \dots (j-2, j-1)(j-1, j);$$

например  $(48) = (87)(76)(65)(54)(56)(67)(78)$ . А любой цикл может быть разложен на транспозиции, причем несколькими способами:

$$(ijk) = (ij)(ik) = (jk)(ji) = (ki)(kj), \quad (2.26)$$

$$(ijkl) = (ij)(ik)(il) = (jk)(jl)(ji) = (jk)(jli) = (ik)(lij) = (ik)(li)(lj) = \dots;$$

например:

$$\begin{aligned} a &= (142)(56) = (14)(12)(56) = (42)(41)(56) = \\ &= (21)(24)(56) = (56)(14)(12), \\ 6 &= (0624)(1735) = (06)(02)(04)(17)(13)(15) = \\ &= (26)(46)(06)(35)(37)(13) = \dots \end{aligned}$$

Справедливость формул (2.25) и (2.26) проверяется путем непосредственного перемножения смежных транспозиций.

Если дана подстановка, представленная в циклическом виде, то обратная ей ищется путем обратной записи последовательности всех ее индексов:

$$a = (ghijk)(lmn), \quad a^{-1} = (gkjih)(lnm);$$

например,

$$6 = (0624)(1735), \quad 6^{-1} = (0426)(1537) = 4.$$

Транспозиции, фигурирующие в формулах (2.25) и (2.26), *связанные*, так как имеют какой-либо общий индекс. Все связанные транспозиции не коммутируют и не могут быть переставлены местами. Если  $a$ ,  $b$  и  $c$  зависимые транспозиции, циклы или даже целые подстановки, то имеет место равенство:  $abc = c^{-1}b^{-1}a^{-1}$ . В частности, для связанных транспозиций имеем:

$$(ijkl)^{-1} = ((ij)(ik)(il))^{-1} = ((il)(ij)(ik))^{-1} = (il)(ik)(ij) = (lkji).$$

Более общий случай проиллюстрируем примером. Пусть дано следующее произведение подстановок:  $x = c^{-1}a f^3 b^{-2}$ . Чтобы найти  $x^{-1}$ , нужно исходное выражение записать в обратном порядке с противоположными показателями степеней:  $x^{-1} = b^2 f^{-3} a^{-1} c$ . Правильность нахождения обратного выражения проверяется так:

$$x x^{-1} = (c^{-1} a f^3 b^{-2})(b^2 f^{-3} a^{-1} c) = (c^{-1}(a(f^3(b^{-2}b^2)f^{-3})a^{-1})c) = e.$$

Используя указанные свойства подстановок, записанных в циклическом виде, можно составить несколько полезных правил, которые сделают процедуру их перемножения почти механической. Вот некоторые из таких правил.

*При умножении (слева или справа) смежной транспозиции на цикл длина последнего уменьшается на единицу и становится рав-*

ной  $n - 1$ :

$$(abcdef\dots) \times (cd) = (abdef\dots)(c), (cd) \times (abcdef\dots) = (abcef\dots)(d);$$

в частности,

$$(325614) \times (56) = (32614)(5), (123) \times (12) = (23)(1).$$

Более общее правило звучит так: произвольная транспозиция делит цикл на два несвязанных подцикла:

$$(abcdefgh\dots) \times (cf) = (abfgh\dots)(cde), (cf) \times (abcdefgh\dots) = (abcgh\dots)(fde);$$

в частности,

$$(1234) \times (13) = (12)(34), (13) \times (1234) = (14)(23).$$

Обратное правило, которое можно было бы назвать *правилом склейки двух циклов*, проиллюстрированы рис. 2.1.

$$(vwxyz)(abcdefgh) \times (yc) = (vwxcdefghabyz).$$

Склеивание циклов произойдет и в том случае, если в них имеются одинаковые индексы, которые удобно записать первыми (рис. 2.2):

$$(abc\dots) \times (aij\dots) \times (axy\dots) = (abc\dots ij\dots xy\dots).$$

При совпадении первых двух индексов склейки уже не получится:

$$(abcd\dots) \times (abij\dots) = (aij\dots) \times (bcd\dots).$$

Когда эти индексы в циклах переставлены местами, склейка снова возможна, но уже с выпадением одного из индексов:

$$(abcd\dots) \times (baij\dots) = (a)(bcd\dots ij\dots).$$

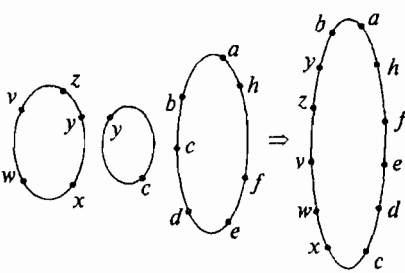


Рис. 2.1

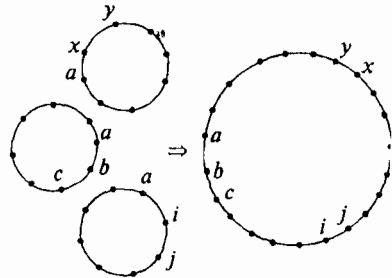


Рис. 2.2

В некоторых случаях полезными понятиями являются четность, декремент и число инверсий подстановки  $a$ . Декрементом ( $D$ ) подстановки  $a$  называется разность между числом всех индексов ( $n$ ) и количеством циклов ( $m$ ), включая циклы единичной длины. Число инверсий ( $I$ ) подсчитывается следующим образом: для каждого ин-

декса нижней строки подстановки  $a$  определяется количество стоящих правее его меньших индексов, затем полученные результаты складываются. *Четность* подстановки  $a$  определяется четностью числа транспозиций ( $T$ ), на которые можно разложить подстановку. Если декремент и число инверсий являются нечетными, то и число транспозиций также будет нечетным. Пусть задана подстановка:

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 3 & 7 & 6 \end{pmatrix} = (1)(253)(4)(67) = (1)(25)(23)(4)(67).$$

В соответствии с определениями имеем:

$$T = 3, D = n - m = 7 - 4 = 3, I = 0 + 3 + 0 + 1 + 0 + 1 + 0 = 5.$$

К сказанному добавим: тождественная подстановка  $e$  четна, любая транспозиция — нечетна. Произведение четных подстановок и двух нечетных всегда даст четную подстановку, а умножение четной и нечетной — нечетную.

С подстановками можно встретиться и при решении задач прикладной математики, в частности, при вычислении определителей. Вспомним, как ищется определитель третьего порядка:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Здесь индексы представляют собой шесть подстановок третьего порядка, причем перед четными подстановками стоит плюс, а перед нечетными — минус. Аналогично будут вычисляться определители 4-го, 5-го порядков, только число слагаемых будет равно 24, 120.

### Комбинаторные свойства подстановок

Ясно, что подстановки тесно связаны с *комбинаторикой*. Первый вопрос, который здесь возникает, звучит так: сколько подстановок можно составить из  $n$  индексов? Оказывается, это число равно  $n!$ , т.е. равно числу *перестановок* из  $n$  индексов. Отсюда получаются числа:  $3! = 6$ ,  $4! = 24$ ,  $5! = 120$ . Почему это так, понять несложно. Представим перестановку  $n$  индексов следующей подстановкой:

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & \dots & n-1 & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \dots & \dots & i_{n-1} & i_n \end{pmatrix}.$$

Первый индекс  $i_1$  можно выбрать  $n$  различными способами. После этого выбор  $i_2$  можно осуществить только  $(n - 1)$  способами; индекса

$i_1 - (n - 2)$  способами и т.д. Так как выбор каждого индекса  $i$  осуществляется независимо, общее число способов размещения  $n$  чисел по  $n$  позициям равно произведению:  $n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$ .

Второй вопрос: сколько классов подстановок различной циклической структуры можно составить из  $n$  индексов? Ответ на этот вопрос таков: количество классов определяется числом возможных разложений  $n$  на слагаемые, причем таким образом, чтобы каждое последующее слагаемое было не больше предыдущего. В частности: при  $n = 3$  имеем три способа разложения: 3, 21 и 111, так как

$$3 = 3, \quad 3 = 2 + 1, \quad 3 = 1 + 1 + 1.$$

Следовательно, может существовать три класса подстановок:  $(abc)$ ,  $(ab)(c)$ ,  $(a)(b)(c)$ . При  $n = 5$  будет уже семь классов: 5, 41, 32, 311, 221, 2111, 11111, с подстановками вида:

$$(01234), (0123), (012)(34), (034), (12)(34), (14), (0).$$

Наконец, возникает еще один вопрос комбинаторного характера: сколько подстановок содержится в классе  $C_i$ ? Для представления циклической структуры подстановок, образующих класс  $C_i$ , будем пользоваться следующей спецификацией:  $C_i(k_1, k_2, \dots, k_n)$ , здесь  $k_1$  — число 1-циклов, входящих в подстановку из класса  $C_i$ ;  $k_2$  — число 2-циклов, ...,  $k_n$  — число  $n$ -циклов. Рассмотрим случай  $n = 4$ . Тогда тождественная подстановка  $e = (0)(1)(2)(3)$ , образующая класс  $C_0$ , будет иметь спецификацию  $C_0(4, 0, 0, 0)$ ; подстановка  $(01)(23)$  из класса  $C_1$  имеет спецификацию  $C_1(0, 2, 0, 0)$ ; подстановка  $(0)(123)$  из класса  $C_2$  — спецификацию  $C_2(1, 0, 1, 0)$ ; подстановка  $(0123)$  из класса  $C_3$  — спецификацию  $C_3(0, 0, 0, 1)$ ; подстановка  $(0)(1)(23)$  из класса  $C_4$  — спецификацию  $C_4(2, 1, 0, 0)$ . Таким образом, мы перечислили все пять возможных классов для подстановок, состоящих из четырех индексов.

Так как  $r$ -циклов содержит  $r$  индексов, а всего индексов  $n$ , то для любого класса  $C_i$  справедливо равенство:  $1 \cdot k_1 + 2 \cdot k_2 + \dots + n \cdot k_n = n$ . Например, для классов  $C_2$  и  $C_4$  имеем:

$$1 \cdot k_1 + 3 \cdot k_3 = 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 4, \quad 1 \cdot k_1 + 2 \cdot k_2 = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 4.$$

Цикл, длина которого  $r$ , можно записать  $r!$  способами, причем элементы в каждом из этих циклов можно выбрать  $r^{k_r}$  способами. Так как все эти выборы можно сделать независимо, необходимо брать произведение  $r^{k_r} r!$ . Если помнить, что общее число подстановок равно  $n!$ , то формула для нахождения количества элементов в классе  $C_i(k_1, k_2, \dots, k_n)$  выглядит следующим образом:

$$C_i(k_1, k_2, \dots, k_n) = n! / 1^{k_1} \cdot k_1! \cdot 2^{k_2} \cdot k_2! \cdot \dots \cdot n^{k_n} \cdot k_n!$$

В нашем конкретном случае число элементов по классам распределится следующим образом:

$$C_0(4, 0, 0, 0) = 1, \quad C_1(0, 2, 0, 0) = 3, \quad C_2(1, 0, 1, 0) = 8,$$

$$C_3(0, 0, 0, 1) = 6, \quad C_4(2, 1, 0, 0) = 6.$$

Число элементов во всех пяти классах должно быть равно  $n!$ :

$$4! = 1 + 3 + 8 + 6 + 6 = 24.$$

Завершим этот раздел демонстрацией одного несложного, но полезного приема. Касается он быстрого отыскания сопряженной подстановки  $b$ , если известна исходная  $a$  и трансформационная  $t$ . Демонстрацию проведем на конкретном примере.

Пусть даны следующие подстановки —

$$a = (052)(134)(67), \quad t = (0235)(1467).$$

Чтобы найти сопряженную относительно  $a$  подстановку  $b$  необходимо осуществить преобразование подобия, сделав при этом умножение трех подстановок:

$$b = t^{-1} a t = (0532)(1764) \times (052)(134)(67) \times (0235)(1467) = (032)(17)(456).$$

Однако подстановку  $b$  можно найти без этого утомительного перемножения. Для этого нужно на место индексов подстановки  $a$  поставить индексы, указанные подстановкой  $t$ . Так, первый индекс 0 подстановки  $a$  заменяется на индекс 2, поскольку в подстановке  $t$  индекс 0 переходит в 2. Второй индекс 5 подстановки  $a$  необходимо заменить на 0, так как в подстановке  $t$  осуществляется переход  $5 \rightarrow 0$  и т.д. В результате получим:  $b = (203)(456)(71)$ . Сравнивая данную подстановку с предыдущей, убеждаемся в их тождественности.

## 2.2. Группы на матрицах и подстановках

### Представления групп до 11-го порядка

Тождественный элемент  $e$  образует группу первого порядка. Обозначим ее как  $C_1$ . Несмотря на немногочисленность ее элементов, она, тем не менее, удовлетворяет всем четырем условиям определения группы; в качестве элементов  $g, g^{-1}, g_1, g_2, g_3$  будет выступать один элемент  $e$ . Положительная (+1) и отрицательная (-1) единицы образуют группу второго порядка  $C_2$ . С группой третьего порядка ( $C_3$ ) мы ранее еще не сталкивались. Следующие подстановки и 0,1-матрицы составят такую группу:

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad 1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad 2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Базисные единицы комплексного числа  $\{i_0, i_1, i_2, i_3\}$  ранее нами уже рассматривались. Они образуют *группу четвертого порядка*  $C_4$ . Однако это не единственная группа из четырех элементов.

В самом деле, в роли *образующего элемента*  $a$  группы  $C_4$ , в силу условия цикличности (2.22), может выступать либо  $i_1$ , либо  $i_3$  — в обоих случаях таблицей умножения является табл. 2.14, что также отвечает ранее приведенной таблице (табл. 2.5). Но можно в качестве образующих взять две *несвязанные* транспозиции  $a$  и  $b$ . В этом случае мы также получим группу четвертого порядка ( $C_2^2$ ), но которая уже перемножается в соответствии с табл. 2.15 или, если перейти на язык только индексов, табл. 2.16. Последняя таблица нам также нужна для получения *регулярных подстановок*:

$$e = (0), \quad a = (01)(23), \quad b = (02)(13), \quad ab = (03)(12),$$

которые будут *изоморфны* исходным подстановкам группы  $C_2^2$ :

$$e = (0), \quad a = (01), \quad b = (23), \quad ab = (01)(23).$$

Таблица 2.14

$e$	$a$	$a^2$	$a^3$
$a$	$a^2$	$a^3$	$e$
$a^2$	$a^3$	$e$	$a$
$a^3$	$e$	$a$	$a^2$

Таблица 2.15

$e$	$a$	$b$	$ab$
$a$	$e$	$ab$	$b$
$b$	$ab$	$e$	$a$
$ab$	$b$	$a$	$e$

Таблица 2.16

0	1	2	3
1	0	3	2
2	3	0	1
3	2	1	0

Ситуация окажется несколько иной, если в качестве образующих одной группы ( $C_2C_3$ ) взять несвязанные 2-цикл и 3-цикл (табл. 2.17), а в качестве образующих другой ( $C_6$ ) — единственный 6-цикл (табл. 2.18). *Группы шестого порядка*, в отличие от групп четвертого порядка, имеют только одну коммутативную структуру, в чем можно убедиться, если соответствующие клетки табл. 2.17 и табл. 2.18 закодировать одноименными индексами — табл. 2.19. Таблицы становятся неразличимыми, т.е. группы *изоморфными*:  $C_2C_3 \approx C_6$ , что на элементном уровне позволяет записать следующие соответствия:

$$\begin{aligned} a &= (012345) & \approx ab &= (01)(234), \\ a^4 &= (042)(153) & \approx b &= (234), \\ a^2 &= (024)(135) & \approx b^2 &= (243), \\ a^5 &= (054321) & \approx ab^2 &= (01)(243), \\ a^3 &= (03)(14)(25) & \approx a &= (01). \end{aligned}$$

Здесь подстановки, получающиеся при последовательном возведении в степень исходного 6-цикла  $a$ , являются не чем иным, как регулярными подстановками по столбцам табл. 2.19.

Таблица 2.17

$e$	$ab$	$b^2$	$a$	$b$	$ab^2$
$ab$	$b^2$	$a$	$b$	$ab^2$	$e$
$b^2$	$a$	$b$	$ab^2$	$e$	$ab$
$a$	$b$	$ab^2$	$e$	$ab$	$b^2$
$b$	$ab^2$	$e$	$ab$	$b^2$	$a$
$ab^2$	$e$	$ab$	$b^2$	$a$	$b$

Таблица 2.18

$e$	$a$	$a^2$	$a^3$	$a^4$	$a^5$
$a$	$a^2$	$a^3$	$a^4$	$a^5$	$e$
$a^2$	$a^3$	$a^4$	$a^5$	$e$	$a$
$a^3$	$a^4$	$a^5$	$e$	$a$	$a^2$
$a^4$	$a^5$	$e$	$a$	$a^2$	$a^3$
$a^5$	$e$	$a$	$a^2$	$a^3$	$a^4$

Таблица 2.19

0	1	2	3	4	5
1	2	3	4	5	0
2	3	4	5	0	1
3	4	5	0	1	2
4	5	0	1	2	3
5	0	1	2	3	4

Две связанные (т.е. имеющие общий нулевой индекс) транспозиции  $a$  и  $b$  также образуют группу из шести элементов, но уже *некоммутативную*, с принципиально иной, *несимметричной* относительно главной диагонали, таблицей умножения (табл. 2.20). По названию геометрической фигуры эта группа называется *диэдральной* и обозначается как  $D_3$ . Табл. 2.20 удобно переписать в числовых индексах — табл. 2.21, тогда можно будет составить регулярные подстановки, которые, очевидно, должны быть изоморфны исходным подстановкам группы диэдра

$$D_3: \quad \begin{aligned} a &= (01) \approx (01)(24)(35), & b &= (02) \approx (02)(13)(45), \\ ba &= (021) \approx (043)(152), & ab &= (012) \approx (034)(125), \\ aba &= (12) \approx (05)(14)(23), & e &= (0). \end{aligned}$$

Таблица 2.20

$e$	$a$	$b$	$ab$	$ba$	$aba$
$a$	$e$	$ab$	$b$	$aba$	$ba$
$b$	$ba$	$e$	$aba$	$a$	$ab$
$ab$	$aba$	$a$	$ba$	$e$	$b$
$ba$	$b$	$aba$	$e$	$ab$	$a$
$aba$	$ab$	$ba$	$a$	$b$	$e$

Таблица 2.21

0	1	2	3	4	5
1	0	3	2	5	4
2	4	0	5	1	3
3	5	1	4	0	2
4	2	5	0	3	1
5	3	4	1	2	0

Перейдя к рассмотрению групп шестого порядка, мы пропустили *группу пятого порядка*. Однако нетрудно догадаться, что группы, порядок которых равен *простому числу* (2, 3, 5, 7, ...) всегда будут иметь и простое *циклическое* строение. Но чем больше делителей у порядка группы, пусть даже и одинаковых, тем разнообразнее варианты ее строения. Далее нам предстоит рассмотреть пять различных *групп восьмого порядка*. Анализ начнем с коммутативных групп.



Поскольку восемь можно представить тремя способами —  $1 \times 8$ ,  $2 \times 4$ ,  $2 \times 2 \times 2$ , существуют три различных *коммутативных* группы: первая ( $C_8$ ) строится с помощью одного-единственного 8-цикла, вторая ( $C_2C_4$ ) — на двух несвязанных 2- и 4-циклах, наконец, третья ( $C_2^3$ ) — на трех несвязанных 2-циклах.

$$\begin{array}{ll}
 C_2C_4: & C_2^3: \\
 a = (0123), & a = (01), \\
 b = (45), & b = (23), \\
 a^2 = (02)(13), & c = (45), \\
 a^3 = (0321), & ab = (01)(23), \\
 ab = (0123)(45), & ac = (01)(45), \\
 a^2b = (02)(13)(45), & bc = (23)(45), \\
 a^3b = (0321)(45); & abc = (01)(23)(45);
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 C_8: a = (01234567), & a^2 = (0246)(1357), \quad a^3 = (03614725), \\
 a^4 = (04)(15)(26)(37), & a^5 = (05274163), \\
 a^6 = (0642)(1753), & a^7 = (07654321).
 \end{array}$$

Из *некоммутативных* групп 8-ого порядка имеется две: одна обладает симметрией *диэдра* ( $D_4^1$ ), другая — *кватерниона* ( $D_4^2$ ). Диэдральная группа получается с помощью 4-цикла и транспозиции, индексы которой совпадают с индексами 4-цикла (табл. 2.22).

$$\begin{array}{l}
 D_4^1: \\
 e = (0), \\
 a = (0123), \\
 a^2 = (02)(13), \\
 a^3 = (0321), \\
 b = (02), \\
 ab = ba^3 = (01)(23), \\
 a^2b = ba^2 = (13), \\
 a^3b = ba = (03)(12).
 \end{array}$$

Таблица 2.22

$e$	$a$	$a^2$	$a^3$	$b$	$ab$	$a^2b$	$a^3b$
$a$	$a^2$	$a^3$	$e$	$ab$	$a^2b$	$a^3b$	$b$
$a^2$	$a^3$	$e$	$a$	$a^2b$	$a^3b$	$b$	$ab$
$a^3$	$e$	$a$	$a^2$	$a^3b$	$b$	$ab$	$a^2b$
$b$	$a^3b$	$a^2b$	$ab$	$e$	$a^3$	$a^2$	$a$
$ab$	$b$	$a^3b$	$a^2b$	$a$	$e$	$a^3$	$a^2$
$a^2b$	$ab$	$b$	$a^3b$	$a^2$	$a$	$e$	$a^3$
$a^3b$	$a^2b$	$ab$	$b$	$a^3$	$a^2$	$a$	$e$

Таблица 2.23

$e$	$a$	$a^2$	$a^3$	$b$	$b^3$	$ab$	$ba$
$a$	$a^2$	$a^3$	$e$	$ab$	$ba$	$b^3$	$b$
$a^2$	$a^3$	$e$	$a$	$b^3$	$b$	$ba$	$ab$
$a^3$	$e$	$a$	$a^2$	$ba$	$ab$	$b$	$b^3$
$b$	$ba$	$b^3$	$ab$	$a^2$	$e$	$a$	$a^3$
$b^3$	$ab$	$b$	$ba$	$e$	$a^2$	$a^3$	$a$
$ab$	$b$	$ba$	$b^3$	$a^3$	$a$	$a^2$	$e$
$ba$	$b^3$	$ab$	$b$	$a$	$a^3$	$e$	$a^2$

Кватернион образуется на двух 4,4-циклах, несмежные индексы которых взаимосвязаны так, что при возведении в квадрат получается одна и та же подстановка — 2,2,2-цикл (табл. 2.23). Для группы диэдра  $D_4^1$  были приведены только три

наиболее характерных соотношения. Однако общее число возможных соотношений определяется числом *перестановок* всех степеней образующих  $a$  и  $b$ . Для группы кватерниона  $D_4^2$  полный перечень соотношений выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}
 e &= a^0 b^4 = b^0 a^4 = a^2 b^2 = b^2 a^2 = (0), \\
 a &= a^1 b^4 = b^0 a^1 = a^3 b^2 = b^2 a^3 = (0123)(4756), \\
 b^2 &= a^2 = a^2 b^4 = b^0 a^2 = a^4 b^2 = b^2 a^4 = (02)(13)(45)(67), \\
 a^3 &= a^3 b^4 = b^0 a^3 = a^1 b^2 = b^2 a^1 = (0321)(4657), \\
 b &= a^0 b^1 = b^1 a^4 = a^2 b^3 = b^3 a^2 = (0425)(1637), \\
 & \quad a^1 b^1 = b^1 a^3 = a^3 b^3 = b^3 a^1 = (0627)(1534), \\
 b^3 &= a^2 b^1 = b^1 a^2 = a^4 b^3 = b^3 a^0 = (0524)(1736), \\
 & \quad a^3 b^1 = b^1 a^1 = a^1 b^3 = b^3 a^3 = (0726)(1435).
 \end{aligned}$$

Если в качестве образующих  $a$  и  $b$  взять два несвязанных друг с другом 3-цикла, то получится коммутативная группа  $C_3^2$ , которая не может быть сведена к циклической  $C_9$ . Последнее означает, что существуют две различных коммутативных группы девятого порядка:

$$\begin{aligned}
 C_9: \quad a &= (012345678), & C_3^2: \quad a &= (012), \\
 a^2 &= (024681357), & a^2 &= (021), \\
 a^3 &= (036)(147)(258), & b &= (345), \\
 a^4 &= (048372615), & b^2 &= (354), \\
 a^5 &= (051627384), & ab &= (012)(345), \\
 a^6 &= (063)(174)(285), & a^2 b &= (021)(345), \\
 a^7 &= (075318642), & ab^2 &= (012)(354), \\
 a^8 &= (087654321); & a^2 b^2 &= (021)(354).
 \end{aligned}$$

Некоммутативных групп девятого порядка не существует. Подобная ситуация напоминает аналогичную ситуацию, сложившуюся

с группами четвертого порядка. Действительно, число 9 раскладывается на два одинаковых простых множителя —  $3 \times 3$ ; число 4 также раскладывается на одинаковые простые множители —  $2 \times 2$ . Отсюда можно ожидать повторения данной ситуации на таких порядках, как  $25 = 5 \times 5$ ,  $49 = 7 \times 7$  и т.д.

Число 6 раскладывается на два различных простых множителя —  $2 \times 3$ . Как мы видели, коммутативная группа, построенная на одном 6-цикле, и коммутативная группа, построенная на 2- и 3-циклах, получились изоморфными. Можно ожидать, что группа десятого порядка ( $10 = 2 \times 5$ ) также имеет изоморфные коммутативные группы  $C_2C_5 \approx C_{10}$ . В самом деле, следующее соответствие целиком подтверждает наше предположение.

$$\begin{array}{ll}
 C_{10} & \approx C_2C_5 \\
 a = (0123456789) & \approx a b = (01)(23456), \\
 a^2 = (02468)(13579) & \approx b^2 = (24635), \\
 a^3 = (0369258147) & \approx ab^3 = (01)(25364), \\
 a^4 = (04826)(15937) & \approx b^4 = (26543), \\
 a^5 = (05)(16)(27)(38)(49) & \approx a = (01), \\
 a^6 = (06284)(17395) & \approx b = (23456), \\
 a^7 = (0741852963) & \approx ab^2 = (01)(24635), \\
 a^8 = (08642)(19753) & \approx b^3 = (25364), \\
 a^9 = (0987654321) & \approx ab^4 = (01)(26543).
 \end{array}$$

Кроме коммутативной структуры, группа 9-ого порядка, как и группа 6-ого, при  $b = (14)(23)$  имеет диэдральную структуру  $D_5^1$ :

$$\begin{array}{ll}
 a = (01234), & ab = ba^4 = (04)(13), \text{ " } \\
 a^2 = (02413), & a^2b = ba^3 = (03)(12), \\
 a^3 = (03142), & a^3b = ba^2 = (02)(34), \\
 a^4 = (04321), & a^4b = ba = (01)(24).
 \end{array}$$

Теперь мы вправе предположить, что в ряду групп 6-го и 10-го порядков окажутся также группы 14-го ( $2 \times 7$ ), 22-го ( $2 \times 11$ ) и т.д. порядков, но не 15-го ( $3 \times 5$ ), поскольку число 15 нечетно, а значит диэдральной группы для него не существует.

### Группа 12-го порядка и групповые закономерности

За простой циклической группой 11-го порядка следуют богатые на структурные вариации группы 12-го порядка. Если в качестве образующих коммутативных групп выбрать систему несвязанных цик-

лов, отвечающую делителям числа 12, то эти четыре группы распадутся на два класса изоморфных групп:  $C_3C_4 \approx C_{12}$  и  $C_2C_6 \approx C_2^2C_3$ . Изоморфизм существует и среди некоммутативных групп, а именно:  $C_2D_3 \approx D_6^1$ , образующими которых будут:

$$C_2D_3: \quad a = (012), \quad b = (02), \quad c = (34),$$

$$D_6^1: \quad a = (012345), \quad b = (15)(24).$$

Чтобы лучше понять сущность изоморфизма, все группы 12-го порядка сведем в табл. 2.24. В графах  $d_i$  этой таблицы приведены результаты деления порядка группы на *наименьшее общее кратное* длин циклов, входящих в подстановки. Изоморфные группы имеют одинаковые наборы этих чисел: для  $C_3C_4$  и  $C_{12}$  справедлив перечень чисел  $d_1$ , для  $C_2C_6$  и  $C_2^2C_3$  —  $d_2$ , а для  $C_2D_3$  и  $D_6^1$  —  $d_3$ .

Таблица 2.24

$C_{12}$	$C_3C_4$	$d_1$	$C_2C_6$	$C_2^2C_3$	$d_2$	$C_2D_3$	$D_6^1$	$d_3$	$D_6^2$	$d_4$	$T$	$d_5$
$a$	$ab$	1	$a$	$b$	6	$abc$	$a$	2	$a$	4	$a$	2
$a^2$	$a^2b^2$	2	$b$	$a^2c$	2	$ab$	$a^3$	4	$a^2$	4	$a^2$	4
$a^3$	$b^3$	3	$b^2$	$a$	4	$aba$	$a^3$	6	$b$	4	$a^3$	6
$a^4$	$a$	4	$b^3$	$c$	6	$ba$	$a^4$	4	$b^2$	4	$a^4$	4
$a^5$	$a^2b$	1	$b^4$	$a^2$	4	$bac$	$a^5$	2	$a^2b$	4	$a^5$	2
$a^6$	$b^3$	6	$b^5$	$ac$	2	$a$	$b$	6	$ba^2$	4	$b$	3
$a^7$	$ab^3$	1	$ab$	$a^2b^2c$	2	$b$	$ab$	6	$a^3b$	4	$ab$	3
$a^8$	$a^2$	4	$ab^2$	$ab$	2	$c$	$a^2b$	6	$b^2a$	4	$a^2b$	3
$a^9$	$b$	3	$ab^3$	$bc$	6	$ac$	$a^3b$	6	$ab$	6	$a^3b$	3
$a^{10}$	$ab^2$	2	$ab^4$	$a^2b$	2	$bc$	$a^4b$	6	$ba$	6	$a^4b$	3
$a^{11}$	$a^2b^3$	1	$ab^5$	$abc$	2	$abac$	$a^3b^2$	6	$ab^2a$	6	$a^5b$	3
$e$	$e$	12	$e$	$e$	12	$e$	$e$	12	$e$	12	$e$	12

Числа  $d_i$  отражают одинаковое циклическое строение подстановок. Однако одинаковые ряды  $d_i$  служат *необходимым* и *достаточным* условием изоморфизма только для *коммутативных* групп. Для *некоммутативных* групп данное условие является лишь *необходимым*, но далеко не *достаточным*, в чем мы убедимся, рассматривая группы 16-го порядка.

В табл. 2.24 приведены элементы и ряды  $d_i$  еще для двух групп 12-го порядка. Одна из них,  $D_6^2$  с рядом  $d_4$ , в чем-то напоминает группу кватерниона, так как для нее 2-циклы, полученные от образующих  $a$  и  $b$ , равны между собой:  $a^3 = b^2$ . Таким образом, в подобных группах (а они встречаются для всех групп, порядок которых делится на 4) существует одна-единственная подстановка, которая

состоит из совокупности транспозиций; все остальные подстановки имеют цикличность больше двух. Для сравнения  $D_4^2$  с  $D_6^2$  приведем полную систему равенств между элементами последней группы:

$$\begin{aligned}
 D_6^2: \quad e &= a^0 b^4 = b^0 a^6 = a^3 b^2 = b^2 a^3 = (0), \\
 a &= a^1 b^4 = b^0 a^1 = a^4 b^2 = b^2 a^4 = (012345)(6789AB), \\
 a^2 &= a^2 b^4 = b^0 a^2 = a^5 b^2 = b^2 a^5 = (024)(135)(68A)(79B), \\
 b^2 = a^3 &= a^3 b^4 = b^0 a^3 = a^6 b^2 = b^2 a^6 = (03)(14)(25)(69)(7A)(8B), \\
 a^4 &= a^4 b^4 = b^0 a^4 = a^1 b^2 = b^2 a^1 = (042)(153)(6A8)(7B9), \\
 a^5 &= a^5 b^4 = b^0 a^5 = a^2 b^2 = b^2 a^2 = (054321)(6BA987), \\
 b = a^0 b^1 &= b^1 a^6 = a^3 b^3 = b^3 a^3 = (0639)(1B48)(2A57), \\
 a^1 b^1 &= b^1 a^5 = a^4 b^3 = b^3 a^2 = (0B38)(1A47)(2956), \\
 a^2 b^1 &= b^1 a^4 = a^5 b^3 = b^3 a^1 = (0A37)(1946)(285B), \\
 b^3 = a^3 b^1 &= b^1 a^3 = a^6 b^3 = b^3 a^0 = (0936)(184B)(275A), \\
 a^4 b^1 &= b^1 a^2 = a^1 b^3 = b^3 a^5 = (083B)(174A)(2659), \\
 a^5 b^1 &= b^1 a^1 = a^2 b^3 = b^3 a^4 = (073A)(1649)(2B58).
 \end{aligned}$$

Оставшаяся некоммутативная группа 12-го порядка называется *группой тетраэдра* ( $T$ ), поскольку она отвечает группе вращения этой геометрической фигуры. На примере группы  $T$  проиллюстрируем одно, довольно неприятное, свойство определяющих соотношений — их *неоднозначность*. Для получения конкретных элементов группы тетраэдра в качестве образующих можно взять два связанных 3-цикла с двумя общими индексами, тогда система определяющих соотношений будет выглядеть так:

$$\begin{aligned}
 a &= (012), \quad a^2 b^2 = ba = (01)(23), \quad ab = b^2 a^2 = (02)(13), \\
 b &= (123), \quad a^2 b = ab^2 a^2 = (031), \quad ab^2 = b^2 a^2 b = (032), \\
 a^2 &= (021), \quad b^2 a = ba^2 b^2 = (013), \quad ba^2 = a^2 b^2 a = (023), \\
 b^2 &= (132), \quad a^2 b a^2 = ab^2 a = b^2 ab^2 = ba^2 b = (03)(12).
 \end{aligned}$$

Как видим, в этих равенствах фигурируют элементы, составленные из трех букв. Если в качестве образующих взять 2- и 3-циклы, то в определяющих соотношениях появятся элементы из четырех букв:

$$\begin{aligned}
 a &= (012), \quad ab = ba^2 ba^2 = (132), \quad abab = ba^2 = (123), \\
 a^2 &= (021), \quad a^2 b^2 = baba = (032), \quad a^2 ba^2 b = ba = (023), \\
 b &= (01)(23), \quad aba = ba^2 b = (013), \quad a^2 ba^2 = bab = (031), \\
 aba^2 &= ba^2 ba = (02)(13), \quad a^2 ba = baba^2 = (03)(12).
 \end{aligned}$$

Чтобы исчерпать все двенадцать подстановок комбинациями из двух букв, нужно выбрать в качестве образующих три 3-цикла. Однако в этом случае возрастет и число возможных равенств —  $T$ :

$$\begin{aligned} a &= bc = (012), & a^2c &= b a^2 = cb = (023), & c^2 &= a^2b = (031). \\ b &= ac^2 = (123), & ab^2 &= b^2c^2 = c^2a = (032), \\ c &= b^2a = (013), & ab &= ca = b^2a^2 = a^2c^2 = (02)(13), \\ a^2 &= c^2b^2 = (021), & a^2b^2 &= b^2c = ba = c^2b = (01)(23), \\ b^2 &= ca^2 = (132), & ac &= cb^2 = c^2a^2 = bc^2 = (03)(12), \end{aligned}$$

Число 12 раскладывается на три простых множителя —  $2 \times 2 \times 3$ . Зададимся вопросом, не будут ли группы 20-го ( $2 \times 2 \times 5$ ), 28-го ( $2 \times 2 \times 7$ ) и т.д. порядков иметь аналогичное строение? Имея перед собой упорядоченные таблицы умножения размером  $12 \times 12$ , можно попытаться составить аналогичные таблицы размером  $20 \times 20$ ,  $28 \times 28$  и т.д. Приведем таблицы  $12 \times 12$  для группы диэдра  $D_6^1$  (табл. 2.25), группы типа кватерниона  $D_6^2$  (табл. 2.26) и группы тетраэдра  $T$  (табл. 2.27).

Таблица 2.25

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B
1	2	3	4	5	0	B	6	7	8	9	A
2	3	4	5	0	1	A	B	6	7	8	9
3	4	5	0	1	2	9	A	B	6	7	8
4	5	0	1	2	3	8	9	A	B	6	7
5	0	1	2	3	4	7	8	9	A	B	6
6	7	8	9	A	B	0	1	2	3	4	5
7	8	9	A	B	6	5	0	1	2	3	4
8	9	A	B	6	7	4	5	0	1	2	3
9	A	B	6	7	8	3	4	5	0	1	2
A	B	6	7	8	9	2	3	4	5	0	1
B	6	7	8	9	A	1	2	3	4	5	0

Таблица 2.26

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B
1	2	3	4	5	0	B	6	7	8	9	A
2	3	4	5	0	1	A	B	6	7	8	9
3	4	5	0	1	2	9	A	B	6	7	8
4	5	0	1	2	3	8	9	A	B	6	7
5	0	1	2	3	4	7	8	9	A	B	6
6	7	8	9	A	B	3	4	5	0	1	2
7	8	9	A	B	6	2	3	4	5	0	1
8	9	A	B	6	7	1	2	3	4	5	0
9	A	B	6	7	8	0	1	2	3	4	5
A	B	6	7	8	9	5	0	1	2	3	4
B	6	7	8	9	A	4	5	0	1	2	3

Составить по аналогии таблицы умножения для коммутативных групп порядков 20-го, 28-го и т.д. не представляет большой сложности. Повторить приведенные таблицы для групп  $D_{10}^1$ ,  $D_{14}^1$ ,  $D_{10}^2$ ,  $D_{14}^2$  и т.д. тоже нетрудно. Однако придумать таблицы умножения размером  $20 \times 20$  и  $28 \times 28$ , аналогичные табл. 2.27, не удастся. Групп 20-го и 28-го порядков с тетраэдральной структурой просто

не существует. В табл. 2.28 приведены возможные варианты групп интересующих нас порядков. Оказывается, групп 28-го порядка только четыре, а групп 20-го — пять, однако группа, которую мы обозначили как  $D_5^2$ , далека от тетраэдрального строения. Возникает вопрос, как вообще осуществляется поиск новых групп?

Каких-то общих методик, срабатывающих во всех возможных случаях, здесь не существует. Ниже мы продемонстрируем один из приемов получения определяющих соотношений для новых групп. Эту демонстрацию сначала проведем на группе  $D_{10}^2$ , строение которой нам хорошо известно.

Таблица 2.27

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B
1	2	0	7	8	6	A	B	9	4	5	3
2	0	1	B	9	A	5	3	4	8	6	7
3	4	5	0	1	2	9	A	B	6	7	8
4	5	3	A	B	9	7	8	6	1	2	0
5	3	4	8	6	7	2	0	1	B	9	A
6	7	8	9	A	B	0	1	2	3	4	5
7	8	6	1	2	0	4	5	3	A	B	9
8	6	7	5	3	4	B	9	A	2	0	1
9	A	B	6	7	8	3	4	5	Q	1	2
A	B	9	4	5	3	1	2	0	7	8	6
B	9	A	2	0	1	8	6	7	5	3	4

Таблица 2.28

Группы 12-го порядка	Группы 20-го порядка	Группы 28-го порядка
$C_3C_4 \approx C_{12}$	$C_4C_5 \approx C_{20}$	$C_4C_7 \approx C_{28}$
$C_2C_6 \approx C_2^2C_3$	$C_2C_{10} \approx C_2^2C_5$	$C_2C_{14} \approx C_2^2C_7$
$C_2D_3 \approx D_6^1$	$C_2D_5^1 \approx D_{10}^1$	$C_2D_7^1 \approx D_{14}^1$
$D_6^2$	$D_{10}^2$	$D_{14}^2$
$T$	$D_5^2$	Отсутствует

Прежде всего, примем фундаментальное условие для образующих  $a$  и  $b$ , касающееся их цикличности:  $a^{10} = b^4 = e$ . Затем, по аналогии с группой  $D_6^2$ , предположим справедливость равенства  $ab = ba^9$ .

Ясно, что в группе  $D_{10}^2$  должен существовать элемент  $aba^9$ . Представим его двумя способами:

$$aba^9 = a \times ba^9 = a \times ab = a^2b, \quad aba^9 = ab \times a^9 = ba^9 \times a^9 = ba^8.$$

Следовательно, в искомым соотношениях есть равенство  $a^2b = ba^8$ . Далее, возьмем элемент  $a^2ba^8$  и снова распишем его двумя способами, получив новое соотношение  $a^3b = ba^7$ . Беря подходящие элементы, в том числе  $bab$ ,  $b^2a^3b$ , и представляя их двумя указанными способами, находим все необходимые соотношения группы  $D_{10}^2$ , которые мы сейчас выписывать не будем.

Если бы мы взяли за основу равенство  $ab = ba^3$ , нам не удалось бы его совместить с кватернионным условием  $a^5 = b^2$ , которое неизбежно возникает в группе  $D_{10}^2$ . Выбранное равенство влечет за собой соотношение  $ab^2 = b^2a^9$ . Если принять условия:  $a^{10} = b^4 = e$ ,  $ab = ba^3$  и  $a^5 \neq b^2$ , число элементов в новой группе возросло бы до 40, что также для нас неприемлемо. Поиск неизвестной группы 20-го порядка тетраэдрального строения уместно начать с равенства  $a^5 = b^4 = e$ . Далее, наудачу, берем снова равенство  $ab = ba^3$  и смотрим, что получится из элемента  $aba^3$ :

$$aba^3 = a \times ba^3 = a \times ab = a^2b, \quad aba^3 = ab \times a^3 = ba^3 \times a^3 = ba.$$

Получаем новое равенство  $a^2b = ba$ . Затем ищем равенство, отвечающее элементу  $a^2ba$ . Продолжая аналогичным образом, находим все элементы новой группы, которая, однако, совершенно не похожа на группу  $T$ . Обозначив ее как  $D_5^2$  (общепринятой системы обозначений для всех групп пока не выработано), выпишем все ее элементы, вместе с определяющими соотношениями  $D_5^2$ :

$$\begin{array}{lllll} a, & b, & ab = ba^3, & ab^2 = b^2a^4, & ab^3 = b^3a^2, \\ a^2, & b^2, & a^2b = ba, & a^2b^2 = b^2a^3, & a^2b^3 = b^3a^4, \\ a^3, & b^3, & a^3b = ba^4, & a^3b^2 = b^2a^2, & a^3b^3 = b^3a, \\ a^4, & e, & a^4b = ba^2, & a^4b^2 = b^2a, & a^4b^3 = b^3a^3. \end{array}$$

В данном случае нам повезло: выбор какого-то нового исходного равенства, например,  $ab = ba^4$ , приведет к изоморфной группе. Других же групп 20-го порядка, кроме перечисленных в табл. 2.28, не существует.



Итак, какой-либо универсальной формулы, по которой можно заранее рассчитать число групп и их структурную организацию для любого наперед заданного порядка, не существует, хотя имеются вполне закономерные ряды групп, порядки которых удовлетворяют определенной системе делителей, в частности:

$$\{4 = 2 \times 2, 9 = 3 \times 3, 25 = 5 \times 5, \dots\},$$

$$\{6 = 2 \times 3, 10 = 2 \times 5, 14 = 2 \times 7, \dots\}.$$

Только что рассмотренная группа  $D_5^2$  попадает в ряд групп, порядки которых определяется формулой:  $n = (p - 1)p$ , где  $p$  — простое число. Так получается последовательность:

$$\{2 = 1 \times 2, 6 = 2 \times 3, 20 = 4 \times 5, 42 = 6 \times 7, \dots\}.$$

Одни последовательности возрастают медленно, как например, ряды групп диэдра и кватерниона:

$$\{2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots, n = 2 \cdot k\}, \{4, 8, 12, 16, 20, \dots, n = 4 \cdot k\},$$

другие стремительно, как например, ряд из симметрических групп:

$$\{2, 6, 24, 120, 720, \dots, n = k!\}.$$

Последовательности пересекаются друг с другом. В точках пересечения могут получаться изоморфные группы или совершенно отличные — предсказывать здесь что-либо трудно. Существуют такие порядки, где пересекается множество рядов с самыми различными организационными принципами. Этими точками пересечения являются группы порядков 16, 24, 32, 48, 64 и т.д. Так, для 64-го порядка имеется 267 структурных разновидностей. Дать определяющие соотношения всем группам, даже для такого достаточно скромного порядка, как 64-й, представляется весьма непростой задачей.

### Отношение эквивалентности

*Изоморфизм* — одна из основных форм эквивалентности. Две группы  $A$  и  $B$  считаются изоморфными, если можно найти такую трансформационную подстановку  $t$ , не принадлежащую ни  $A$ , ни  $B$ , что все элемента  $a$  трансформируются в элементы  $b$ :

$$b = t^{-1} a t \quad (2.27)$$

В этом случае группы  $A$  и  $B$  имеют одинаковые таблицы умножения. Однако идентичность таблиц является не всегда очевидным фактом.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B
1	A	9	0	B	4	2	5	6	8	3	7
2	5	7	B	A	9	3	0	4	1	8	6
3	0	6	A	5	7	8	B	9	2	1	4
4	6	A	9	2	3	5	8	0	B	7	1
5	8	1	2	6	A	7	9	3	4	B	0
6	7	B	4	1	2	A	3	5	0	9	8
7	9	0	6	8	1	B	2	A	5	4	3
8	B	4	5	0	6	1	A	7	3	2	9
9	4	5	7	3	8	0	1	B	A	6	2
A	3	8	1	7	B	9	4	2	6	0	5
B	2	3	8	9	0	4	6	1	7	5	A

Таблица 2.29

Пусть дана конкретная таблица умножения — табл. 2.29. Поскольку она не симметрична относительно главной диагонали и имеет на ней два тождественных элемента, можно предположить, что группа, которую представляет табл. 2.29, по-видимому, является группой  $D_6^2$ . Следовательно,

нужно установить идентичность табл. 2.29 и 2.26. С этой целью из табл. 2.29 выберем, причем достаточно произвольно, регулярную подстановку  $4 = (042A78)(1B9356)$ . Этой подстановке поставим в соответствие упорядоченную подстановку  $1 = (012345)(6789AB)$  эквивалентной циклической структуры, взятой из табл. 2.26.

Теперь воспользуемся следующим приемом. Считаем подстановку 1 верхней строкой трансформационной подстановки  $t$ , а подстановку 4 ее нижней строкой:

$$t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & A & B \\ 0 & 4 & 2 & A & 7 & 8 & 1 & B & 9 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} = (0)(147B6)(2)(3A589).$$

Далее запишем обратное к (2.27) преобразование подобия —

$$a = t b t^{-1}.$$

Подставим вместо  $b$  регулярные подстановки из табл. 2.29:

$$\begin{aligned} 6 &= t(01A3)(258B)(4679) t^{-1} &= (0639)(1B48)(2A57), \\ 2 &= t(027)(195)(36B)(4A8) t^{-1} &= (024)(135)(68A)(79B), \\ 9 &= t(03A1)(2B85)(4976) t^{-1} &= (0936)(184B)(275A), \\ 1 &= t(042A78)(1B9356) t^{-1} &= (012345)(6789AB), \\ A &= t(05AB)(1437)(2986) t^{-1} &= (0A37)(1946)(285B), \\ B &= t(06A9)(1238)(457B) t^{-1} &= (0B38)(1A47)(2956), \\ 4 &= t(072)(159)(3B6)(48A) t^{-1} &= (042)(153)(6A8)(7B9), \\ 5 &= t(087A24)(16539B) t^{-1} &= (054321)(6BA987), \\ 8 &= t(09A6)(1832)(4B75) t^{-1} &= (083B)(174A)(2659), \\ 3 &= t(0A)(13)(28)(47)(5B)(69) t^{-1} &= (03)(14)(25)(69)(7A)(8B), \\ 7 &= t(0BA5)(1734)(2689) t^{-1} &= (073A)(1649)(2B58). \end{aligned}$$

Строя по вновь полученным подстановкам  $a$  таблицу умножения, убеждаемся, что она совпадает с табл. 2.26. Следовательно, табл. 2.29 есть не что иное, как таблица умножения группы  $D_6^2$ .

Изоморфизм является важной, но не единственной формой эквивалентности. Целью, даже поверхностного, *морфологического анализа группы* служит установление отношения эквивалентности между отдельными ее элементами. Всякое отношение эквивалентности, как мы уже знаем, разбивает группу на классы эквивалентных элементов. По причине коммутативности тождественного элемента  $e$  со всеми другими элементами группы, он всегда образует свой собственный класс. В группе может находиться несколько таких элементов, которые, как и тождественный элемент, коммутируют со всеми элементами группы. Тогда каждый из них будет образовывать свой класс эквивалентности. Совокупность таких элементов называется *центром* группы. Центр группы  $G$ , который обозначим через  $Z$ , всегда образует *подгруппу* в группе  $G$ . В коммутативных группах получается, что все элементы центральны.

Подгруппы  $G_i$  группы  $G$  делятся на *собственные* и *несобственные*. К *несобственным* относятся подгруппа тождественного элемента  $G_0$  и сама группа  $G$ , все остальные подгруппы — *собственные*. *Индексом* подгруппы  $G_i$  в группе  $G$ , что обозначается как  $|G : G_i|$ , называется частное от деления порядка группы  $G$  (обозначается  $|G|$ ) на порядок подгруппы  $|G_i|$ . В этом случае выполняются элементарные числовые соотношения:

$$|G : G_i| = |G| / |G_i|, \quad |G_i| = |G| / |G : G_i|, \quad |G_i| = |G : G_i| \times |G_i|,$$

(путаницы между терминами *индекс подгруппы* и *индекс подстановки* обычно не возникает). Индекс всегда является *целым* числом. Это значит, что порядок подгруппы должен быть одним из *делителей* порядка группы. Поэтому, в частности, в группе шестого порядка не может быть подгрупп четвертого или пятого порядков. Но из факта существования того или иного делителя еще не следует, что обязательно должна существовать соответствующая ему подгруппа. Например, в группе тетраэдра  $T$  нет подгрупп шестого порядка.

Вообще говоря, *подгруппы* являются объектами морфологического анализа, с точки зрения *отношения порядка*, которым мы сейчас подробно заниматься не будем. Вместе с тем отметим, что эквивалентность элементов тесно связана с их иерархией, поэтому нередко оба вида отношений трудно рассматривать раздельно. Наш анализ, с

точки зрения эквивалентности, начнем с первой некоммутативной группы диэдра, которую мы запишем как  $D_3$ :

$$\begin{aligned} 0 &= (0) = e, & 1 &= (01) = a, & 2 &= (02) = b, \\ 3 &= (12) = aba = bab, & 4 &= (012) = ab, & 5 &= (021) = ba. \end{aligned}$$

Элемент 1 трансформируется по элементам  $D_3$  следующим образом:

$$\begin{aligned} 0 \cdot 1 \cdot 0^{-1} &= e \cdot a \cdot e = a = 1, & 3 \cdot 1 \cdot 3^{-1} &= aba \cdot a \cdot bab = b = 2, \\ 1 \cdot 1 \cdot 1^{-1} &= a \cdot a \cdot a = a = 1, & 4 \cdot 1 \cdot 4^{-1} &= ab \cdot a \cdot ba = b = 2, \\ 2 \cdot 1 \cdot 2^{-1} &= b \cdot a \cdot b = bab = 3, & 5 \cdot 1 \cdot 5^{-1} &= ba \cdot a \cdot ab = bab = 3. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что элемент 1 сопряжен с элементами 2 и 3, т.е. в группе  $D_3$  имеется класс эквивалентности —

$$C_1 = \{1, 2, 3\} = \{a, b, bab\} = \{(01), (02), (12)\},$$

(обозначение классов эквивалентности и коммутативных групп совпадают, но путаницы не возникает, так как классы рассматриваются только в некоммутативных группах). Если любой из этих элементов подвергнуть трансформации, он не даст в результате элементы 4 и 5, поскольку последние объединены в свой класс эквивалентности —

$$\begin{aligned} 0 \cdot 4 \cdot 0^{-1} &= e \cdot ab \cdot e = ab = 4, & 3 \cdot 4 \cdot 3^{-1} &= aba \cdot ab \cdot bab = ba = 5, \\ 1 \cdot 4 \cdot 1^{-1} &= a \cdot ab \cdot a = ba = 5, & 4 \cdot 4 \cdot 4^{-1} &= ab \cdot ab \cdot ba = ab = 4, \\ 2 \cdot 4 \cdot 2^{-1} &= b \cdot ab \cdot b = ba = 5, & 5 \cdot 4 \cdot 5^{-1} &= ba \cdot ab \cdot ab = ab = 4. \end{aligned}$$

Таким образом, появился класс

$$C_2 = \{4, 5\} = \{ab, ba\} = \{(012), (021)\}.$$

Кроме того, имеется класс

$$C_0 = \{0\} = \{e\} = \{(0)\}.$$

Итак, группа диэдра  $D_3$  разбивается на три класса эквивалентности —  $C_0, C_1, C_2$ , что согласуется с нашими комбинаторными рассуждениями.

Классы эквивалентности можно перемножать. Произведение классов  $C_i \times C_j$  есть множество произведений элементов, взятых из  $C_i$  и  $C_j$ , причем совпадающие элементы не опускаются. В результате перемножения *целых* классов всегда получаются тоже *целое* число классов:

$$C_2 \times C_2 = \{4, 5\} \times \{4, 5\} = \{5, 0, 0, 4\} = 2 \cdot C_0 + C_2.$$

$$C_1 \times C_2 = \{1, 2, 3\} \times \{4, 5\} = \{2, 3, 3, 1, 1, 2\} = 2 \cdot C_1,$$

$$C_1 \times C_1 = \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\} = \{0, 4, 5, 5, 0, 4, 4, 5, 0\} = 3 \cdot C_0 + 3 \cdot C_2.$$

В группе  $D_3$  содержатся следующие *несобственные* подгруппы

$$G_0 = \{0\}, \quad G = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Три транспозиции образуют три *собственных* подгруппы второго порядка

$$G_1 = \{0, 1\}, \quad G_2 = \{0, 2\}, \quad G_3 = \{0, 3\}.$$

Еще одна *собственная* подгруппа образована 3-циклом —

$$G_4 = \{0, 4, 5\}.$$

Индексы подгрупп  $G_1, G_2, G_3$  равны 3, а для  $G_4$  — 2. Центр группы  $D_3$  состоит из одного тождественного элемента —  $Z = G_0 = \{0\}$ .

Подгруппы  $G_1, G_2, G_3$  отличаются от  $G_4$  не только порядком, но и еще одним важным обстоятельством:  $G_4$  состоит из полных классов  $C_0$  и  $C_2$ , в то время как *эквивалентные* элементы класса  $C_1$  оказываются поделенными между *различными* подгруппами второго порядка. Это отличие между подгруппами выявляется при составлении так называемых *классов смежности*. Существуют *левые* и *правые* смежные классы, поскольку каждый элемент  $g$  из группы  $G$ , но не входящий в подгруппу  $G_i$ , может образовывать всевозможные произведения справа  $G, g$  и слева  $gG_i$ . Найдем правые и левые смежные классы, например, для подгруппы  $G_1$ :

$$\{0, 1\} \cdot 2 = \{2, 4\} = C'_1, \quad 2 \cdot \{0, 1\} = \{2, 5\} = C''_1,$$

$$\{0, 1\} \cdot 3 = \{3, 5\} = C'_2, \quad 3 \cdot \{0, 1\} = \{3, 4\} = C''_2,$$

$$\{0, 1\} \cdot 4 = \{4, 2\} = C'_1, \quad 4 \cdot \{0, 1\} = \{4, 3\} = C''_2,$$

$$\{0, 1\} \cdot 5 = \{5, 3\} = C'_2, \quad 5 \cdot \{0, 1\} = \{5, 2\} = C''_1.$$

Левые и правые смежные классы для этой подгруппы не совпадают. Такая же картина наблюдается и для двух других подгрупп второго порядка. В отношении  $G_4$  ситуация изменится:

$$\{0, 4, 5\} \cdot 1 = \{1, 3, 2\} = C', \quad 1 \cdot \{0, 4, 5\} = \{1, 2, 3\} = C'',$$

$$\{0, 4, 5\} \cdot 2 = \{2, 1, 3\} = C', \quad 2 \cdot \{0, 4, 5\} = \{2, 3, 1\} = C'',$$

$$\{0, 4, 5\} \cdot 3 = \{3, 2, 1\} = C', \quad 3 \cdot \{0, 4, 5\} = \{3, 1, 2\} = C''.$$

Итак, для подгруппы  $G_4$  *левые* и *правые* классы совпали:  $C' = C''$ .

Такое положение вещей распространяется на любые подгруппы  $G_i$ , в состав которых входят *полные классы сопряженности*. Для

них выполняются равенства:

$$G_i g = g G_i, G_i = g G_i g^{-1}.$$

Последнее выражение демонстрирует тесную связь между классами смежности и классами сопряженности. Поскольку для подгруппы  $G_i$  отдельно левые и отдельно правые классы смежности *не пересекаются*, они также являются *классами эквивалентности*, и так как подгруппа  $G_i$  не изменяется под трансформационным действием элемента  $g$ , ее называют *инвариантной* или *нормальным делителем* группы  $G$  ( $N = G_i$ ).

### Факторгруппа, инвариант и внутренний автоморфизм

Введем понятие *факторгруппы*. С этой целью рассмотрим два класса смежности  $Nx$  и  $Ny$  (для нормального делителя  $N$  не имеет значения, какие классы — левые или правые). Выберем из этих классов по конкретному представителю:  $a \in Nx$ ,  $b \in Ny$ . и составим из них произведение  $a \cdot b$ . Полученный таким образом новый элемент будет принадлежать классу смежности  $Nxy$ , что нетрудно доказать. Для этого запишем:

$$\begin{aligned} a \cdot b &= mx \cdot ny = mx \cdot n \cdot e \cdot y = mx \cdot n \cdot (x^{-1}x) \cdot y = \\ &= m \cdot (xnx^{-1}) \cdot xy = mxy \in Nxy; \end{aligned}$$

$$a = mx, b = ny; \quad N = xNx^{-1}; \quad m, n, l, lm \in N.$$

Представленное доказательство одновременно демонстрирует условие *замкнутости*, при котором один смежный класс  $Nx$  умножается на другой  $Ny$  и получается третий  $Nxy$ , причем все элементы-классы принадлежат группе  $G$ . Так при помощи нормального делителя  $N$  получилась факторгруппа, которую обозначают  $G/N$ . Роль тождественного элемента для факторгруппы  $G/N$  играет сам нормальный делитель  $N$ . В качестве обратных элементов для  $Nx$  и  $Ny$  выступают  $Nx^{-1}$  и  $Ny^{-1}$ . Закон ассоциативности здесь также не нарушается. Порядок факторгруппы  $|G/N|$  равен индексу инвариантной подгруппы  $|G:N|$ .

В нашем примере с  $D_3$  имеется только один нормальный делитель — подгруппа  $G_4$ , поэтому здесь можно построить только одну факторгруппу  $D_3/G_4$  с таблицей умножения — табл. 2.30. Из таблицы видно, как элементы группы  $D_3$  *проецируются* на группу второго порядка. Такое отношение между группами называется *гомоморфизмом*. В случае построения именно факторгруппы получается так

называемый *естественный*, или *канонический*, гомоморфизм. Но элементы группы  $D_3$  можно проецировать ( $\rightarrow$ ) на *любую* подгруппу второго порядка, в том числе и на подгруппу, например  $G_1 = \{0, 1\}$ , т.е. имеет место *изоморфизм*:

Таблица 2.30

$$D_3 / G_4 \approx G_1: \quad \text{если } D_3 \rightarrow G_1, \text{ то}$$

$\{0, 4, 5\}$	$\{1, 2, 3\}$
$\{1, 2, 3\}$	$\{0, 4, 5\}$

$$\{0, 4, 5\} \rightarrow 0 \quad \text{и} \quad \{1, 2, 3\} \rightarrow 1.$$

В этом специальном случае, когда элементы группы  $G$  проецируются на элементы своей подгруппы, гомоморфизм уже называется *эндоморфизмом*.

Добавим также, что нормальный делитель, по которому строится факторгруппа, называется *ядром* гомоморфизма. При эндоморфизме ядро проецируется на тождественный элемент неинвариантной подгруппы. В проекции  $D_3 \rightarrow G_1$  группа  $G_1$  называется *образом*, а группа  $D_3$  — *прообразом*.

Введем понятие *внутреннего автоморфизма* группы  $G$ , которое определяется следующим преобразованием:

$$x = g y g^{-1}.$$

*Автоморфное* преобразование отличается от похожего на него *трансформационного* тем, что элемент  $g$  фиксирован, а  $x$  и  $y$  пробегают все элементы группы  $G$ .

Найдем внутренний автоморфизм для нашей группы  $D_3$ :

$$\begin{array}{lll} 0 \cdot 0 \cdot 0^{-1} = 0, & 1 \cdot 0 \cdot 1^{-1} = 0, & 2 \cdot 0 \cdot 2^{-1} = 0, \\ 0 \cdot 1 \cdot 0^{-1} = 1, & 1 \cdot 1 \cdot 1^{-1} = 1, & 2 \cdot 1 \cdot 2^{-1} = 3, \\ 0 \cdot 2 \cdot 0^{-1} = 2, & 1 \cdot 2 \cdot 1^{-1} = 3, & 2 \cdot 2 \cdot 2^{-1} = 2, \\ 0 \cdot 3 \cdot 0^{-1} = 3, & 1 \cdot 3 \cdot 1^{-1} = 2, & 2 \cdot 3 \cdot 2^{-1} = 1, \\ 0 \cdot 4 \cdot 0^{-1} = 4, & 1 \cdot 4 \cdot 1^{-1} = 5, & 2 \cdot 4 \cdot 2^{-1} = 5, \\ 0 \cdot 5 \cdot 0^{-1} = 5, & 1 \cdot 5 \cdot 1^{-1} = 4, & 2 \cdot 5 \cdot 2^{-1} = 4, \\ 3 \cdot 0 \cdot 3^{-1} = 0, & 4 \cdot 0 \cdot 4^{-1} = 0, & 5 \cdot 0 \cdot 5^{-1} = 0, \\ 3 \cdot 1 \cdot 3^{-1} = 2, & 4 \cdot 1 \cdot 4^{-1} = 2, & 5 \cdot 1 \cdot 5^{-1} = 3, \\ 3 \cdot 2 \cdot 3^{-1} = 1, & 4 \cdot 2 \cdot 4^{-1} = 3, & 5 \cdot 2 \cdot 5^{-1} = 1, \\ 3 \cdot 3 \cdot 3^{-1} = 3, & 4 \cdot 3 \cdot 4^{-1} = 1, & 5 \cdot 3 \cdot 5^{-1} = 2, \\ 3 \cdot 4 \cdot 3^{-1} = 5, & 4 \cdot 4 \cdot 4^{-1} = 4, & 5 \cdot 4 \cdot 5^{-1} = 4, \\ 3 \cdot 5 \cdot 3^{-1} = 4, & 4 \cdot 5 \cdot 4^{-1} = 5, & 5 \cdot 5 \cdot 5^{-1} = 5. \end{array}$$

Числа, отвечающее  $y$ , образуют верхнюю строку подстановок авто-

морфизма, а числа, отвечающие  $x$ , — нижнюю строку этих подстановок. Тогда в циклической форме подстановки внутреннего автоморфизма примут вид:

$$\begin{aligned} 0' &= (0), & 1' &= (23)(45), & 2' &= (13)(45), \\ 3' &= (12)(45), & 4' &= (123), & 5' &= (132). \end{aligned}$$

Вновь полученные подстановки образуют группу, изоморфную исходной группе  $D_3$ . Такое совпадение неслучайно и объясняется оно тем, что *внутренний автоморфизм группы  $G$  всегда изоморфен факторгруппе  $G/Z$* . Так как *центр  $Z$  группы  $D_3$  состоит из единственного тождественного элемента*, то и получилось:

$$D_3/Z \approx D_3 \approx \{0', 1', 2', 3', 4', 5'\}.$$

Здесь надо помнить, что центр любой группы является ее нормальным делителем и построение по нему соответствующей факторгруппы всегда возможно.

Проведем *морфологический анализ кватерниона  $D_4^2$* :

$$\begin{aligned} 0 &= (0), & 4 &= (0425)(1637), \\ 1 &= (0123)(4756), & 5 &= (0524)(1736), \\ 2 &= (02)(13)(45)(67), & 6 &= (0627)(1534), \\ 3 &= (0321)(4657), & 7 &= (0726)(1435). \end{aligned}$$

Группа  $D_4^2$  разбивается на пять классов сопряженности:

$$C_0 = \{0\}, C_1 = \{2\}, C_2 = \{1, 3\}, C_3 = \{4, 5\}, C_4 = \{6, 7\}.$$

Таблица умножения классов представлена табл. 2.31. Все подгруппы кватерниона  $G_i$  *инвариантны*.

**Таблица 2.31**

$C_0$	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$
$C_1$	$2 \cdot C_0 + 2 \cdot C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$
$C_2$	$C_2$	$2 \cdot C_0 + 2 \cdot C_1$	$2 \cdot C_4$	$2 \cdot C_3$
$C_3$	$C_3$	$2 \cdot C_4$	$2 \cdot C_0 + 2 \cdot C_1$	$2 \cdot C_2$
$C_4$	$C_4$	$2 \cdot C_3$	$2 \cdot C_2$	$2 \cdot C_0 + 2 \cdot C_1$

В группе  $D_4^2$  имеется четыре нетривиальные подгруппы:

$$G_1 = \{0, 2\}, G_2 = \{0, 1, 2, 3\}, G_3 = \{0, 2, 4, 5\}, C_4 = \{0, 2, 6, 7\}.$$

Таблица умножения смежных классов для факторгрупп  $D_4^2/G_3$  и



$D_4^2/G_1$  представлены, соответственно, табл. 2.32 и табл. 2.33. Таблицы умножения для  $D_4^2/G_2$  и  $D_4^2/G_4$  аналогичны табл. 2.32.

Таблица 2.32

{0, 2, 4, 5}	{1, 3, 6, 7}
{1, 3, 6, 7}	{0, 2, 4, 5}

Таблица 2.33

{0, 2}	{1, 3}	{4, 5}	{6, 7}
{1, 3}	{0, 2}	{6, 7}	{4, 5}
{4, 5}	{6, 7}	{0, 2}	{1, 3}
{6, 7}	{4, 5}	{1, 3}	{0, 2}

Центр кватерниона состоит из двух элементов —  $Z = G_1 = \{0, 2\}$ . Следовательно, его *внутренний автоморфизм* будет состоять только из четырех подстановок (табл. 2.33):

$$D_4^2/Z = \{(0), (45)(67), (13)(67), (13)(45)\} \approx C_2^2,$$

внутренний автоморфизм кватерниона изоморфен группе  $C_2^2$ .

### Голоморф диэдра и кватерниона

Введем понятие *голоморфа* и проанализируем его свойства. Сделаем это сначала на основе группы диэдра  $D_3$ , затем кватерниона  $D_4^2$ . С этой целью составим обычную таблицу умножения для  $D_3$  (табл. 2.34) и выпишем для нее *регулярные подстановки*, причем отдельно отвечающие *столбцам* (их называют *правыми*) и отдельно — *строкам* (*левые*, выделены штрихом):

 $D_3$ : $D'_3$ :

Таблица 2.34

$$\begin{aligned} 0 &= (0), & 0 &= (0), \\ 1 &= (01)(25)(34), & 1' &= (01)(24)(35), \\ 2 &= (02)(14)(35), & 2' &= (02)(15)(34), \\ 3 &= (03)(15)(24), & 3' &= (03)(14)(25), \\ 4 &= (045)(123), & 4' &= (045)(132), \\ 5 &= (054)(132), & 5' &= (054)(123). \end{aligned}$$

0	1	2	3	4	5
1	0	4	5	2	3
2	5	0	4	3	1
3	4	5	0	1	2
4	3	1	2	5	0
5	2	3	1	0	4

Перемножим эти подстановки:

$$11' = (23)(45), \quad 21' = (04)(12), \quad 31' = (05)(13),$$

$$\begin{array}{lll}
 12' = (05)(12), & 22' = (13)(45), & 32' = (04)(23), \\
 13' = (04)(13), & 23' = (05)(23), & 33' = (12)(45), \\
 14' = (035142), & 24' = (015243), & 34' = (025341), \\
 15' = (024153), & 25' = (034251), & 35' = (014352), \\
 \\ 
 41' = (025143), & 51' = (034152), & \\
 42' = (035241), & 52' = (014253), & \\
 43' = (015342), & 53' = (024351), & \\
 44' = (054), & 54' = (123), & \\
 45' = (132), & 55' = (045). & 
 \end{array}$$

Поскольку все левые регулярные подстановки коммутируют со всеми правыми, других подстановок здесь нет: перед нами группа 36-го порядка, которая и является *голоморфом группы диэдра*  $D_3$ .

Голоморф какой-либо группы  $G$ , который мы обозначим как  $\mathbf{H}(G)$ , является *группой* и обладает тем замечательным свойством, что среди его нормальных делителей всегда имеются две подгруппы, отвечающие его правым и левым регулярным подстановкам. Удостоверимся, что голоморф  $\mathbf{H}(D_3)$  имеет в своем составе две инвариантные подгруппы —  $D_3$  и  $D'_3$ . Для этого проведем морфологический анализ группы  $\mathbf{H}(D_3)$ . Прежде всего, найдем все классы сопряженности  $\mathbf{H}(D_3)$ :

$$\begin{array}{llll}
 C_0 = \{0\}, & C_1 = \{1, 2, 3\}, & C_2 = \{4, 5\}, & C_3 = \{1', 2', 3'\}, \\
 C_4 = \{4', 5'\}, & C_5 = \{11', 12', 13', 21', 22', 23', 31', 32', 33'\}, & & \\
 C_6 = \{44', 45', 54', 55'\}, & C_7 = \{14', 15', 24', 25', 34', 35'\}, & & \\
 C_8 = \{41', 42', 43', 51', 52', 53'\}. & & & 
 \end{array}$$

В голоморфе  $\mathbf{H}(D_3)$  имеется 15 подгрупп второго порядка, отвечающих подстановкам на транспозициях, и 4 подгруппы третьего порядка, причем две из них являются нормальными делителями —

$$N_1 = \{0, 4, 5\}, \quad N_2 = \{0, 4', 5'\}.$$

Далее, имеется 9 подгрупп четвертого порядка типа  $\{0, 1, 1', 11'\}$  (все они не инвариантны). Подгруппы шестого порядка распределены следующим образом: 6 подгрупп отвечают 6-циклам и 12 диэдральных, причем 6 из них типа  $\{0, 33', 44', 55', 12', 21'\}$  и 6 типа  $\{0, 11', 12', 13', 4', 5'\}$ . Сравнивая элементы этих подгрупп с элементами выписанных классов сопряженности, можно заключить, что ни одна

из упомянутых 18 подгрупп шестого порядка не будет инвариантной, и только две исходные группы на регулярных подстановках  $D_3$  и  $D'_3$  дадут нормальные делители индекса 6, которые обозначим как

$$N_3 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}, \quad N_4 = \{0, 1', 2', 3', 4', 5'\}.$$

В нашем голоморфе содержатся шесть неинвариантных диэдральных подгрупп 12-го порядка  $\{0, 1', 2', 3', 4', 5', 11', 12', 13', 14', 15'\}$ , один нормальный делитель 9-го порядка коммутативной структуры:

$$N_5 = \{0, 4, 5, 4', 5', 44', 54', 45', 55'\},$$

и три нормальных делителя 18-го порядка с двумя различными некоммутиативными структурами:

$$N_6 = \{0, 4, 5, 4', 5', 44, 54', 45', 55', 11', 12', 13', 21', 22', 23', 31', 32', 33'\},$$

$$N_7 = \{0, 1', 2', 3', 4', 5', 4, 5, 41', 42', 43', 44', 45', 51', 52', 53', 54', 55'\},$$

$$N_8 = \{0, 1', 2', 3', 4', 5', 4, 5, 14', 15', 24', 25', 34', 35', 44', 45', 54', 55'\}.$$

(Можно доказать, что все подгруппы индекса 2 являются нормальными делителями своих групп.) В голоморфе неинвариантные подгруппы *взаимно сопряжены*, т.е. переходят друг в друга ( $G_i \rightarrow G_j$ ) посредством элемента  $g$ , не входящего ни в  $G_i$ , ни в  $G_j$ , например:

$$\begin{array}{lll} 52' \cdot 0 \cdot 42' = 0, & 24' \cdot 0 \cdot 25' = 0, & 14' \cdot 0 \cdot 15' = 0, \\ 52' \cdot 1 \cdot 42' = 3, & 24' \cdot 3 \cdot 25' = 1, & 14' \cdot 2' \cdot 15' = 1', \\ 52' \cdot 4' \cdot 42' = 5', & 24' \cdot 5' \cdot 25' = 5', & 14' \cdot 4 \cdot 15' = 5, \\ 52' \cdot 5' \cdot 42' = 4', & 24' \cdot 4' \cdot 25' = 4', & 14' \cdot 5 \cdot 15' = 4, \\ 52' \cdot 14' \cdot 42' = 35', & 24' \cdot 35' \cdot 25' = 15', & 14' \cdot 42' \cdot 15' = 51', \\ 52' \cdot 15' \cdot 42' = 34', & 24' \cdot 34' \cdot 25' = 14', & 14' \cdot 52' \cdot 15' = 41'. \end{array}$$

Найдем гомоморфизм голоморфа  $\mathbf{H}(D_3)$  с ядром  $N_4$ , т.е.  $\mathbf{H}(D_3)/N_4$ :

$$\begin{array}{ll} \{0, 1', 2', 3', 4', 5'\} \rightarrow 0, & \{3, 31', 32', 33', 34', 35'\} \rightarrow 3, \\ \{1, 11', 12', 13', 14', 15'\} \rightarrow 1, & \{4, 41', 42', 43', 44', 45'\} \rightarrow 4, \\ \{2, 21', 22', 23', 24', 25'\} \rightarrow 2, & \{5, 51', 52', 53', 54', 55'\} \rightarrow 5. \end{array}$$

Элементы образа этого гомоморфизма удовлетворяют группе  $D_3$ :

$$\mathbf{H}(D_3)/D_3 \approx D_3, \quad (2.28)$$

— гомоморфизм голоморфа  $\mathbf{H}(D_3)/D_3$ , ядром которого является

исходная группа  $D_3$ , изоморфен ( $\approx$ ) внутреннему автоморфизму  $D_3$ .

Изящность формулы (2.28) объясняется тем, что центр  $Z$  группы  $D_3$  состоит из одного тождественного элемента. Ситуация будет несколько иной в случае кватерниона, но прежде чем мы преступим к анализу  $D_4^2$ , покажем на примере диэдрального голоморфа  $\mathbf{H}(D_3)$  действие одной важной формулы, которая, однако, применима к любым группам, где имеется соответствующий расклад нормальных делителей.

Найдем три системы гомоморфных проекций —

$\mathbf{H}(D_3)/N_1$ :

$$\begin{array}{ll} \{0, 4, 5\} \rightarrow 0, & \{1, 2, 3\} \rightarrow 1, \\ \{1', 41', 51'\} \rightarrow 1', & \{11', 21', 31'\} \rightarrow 11', \\ \{2', 42', 52'\} \rightarrow 2', & \{12', 22', 32'\} \rightarrow 12', \\ \{3', 43', 53'\} \rightarrow 3', & \{13', 23', 33'\} \rightarrow 13', \\ \{4', 44', 54'\} \rightarrow 4', & \{14', 24', 34'\} \rightarrow 14', \\ \{5', 45', 55'\} \rightarrow 5', & \{15', 25', 35'\} \rightarrow 15'; \end{array}$$

$\mathbf{H}(D_3)/N_5$ :

$$\begin{array}{l} \{0, 4, 5, 4', 5', 44', 54', 45', 55'\} \rightarrow 0, \\ \{1, 2, 3, 14', 15', 24', 25', 34', 35'\} \rightarrow 1, \\ \{1', 2', 3', 41', 51', 42', 52', 43', 53'\} \rightarrow 1', \\ \{11', 12', 13', 21', 22', 23', 31', 32', 33'\} \rightarrow 11'; \end{array}$$

$N_5/N_1$ :

$$\{0, 4, 5\} \rightarrow 0, \quad \{4', 44', 54'\} \rightarrow 4', \quad \{5', 45', 55'\} \rightarrow 5'.$$

Из 1-ой и 3-ей составим 4-ю проекцию  $(\mathbf{H}(D_3)/N_1)/(N_5/N_1)$ :

$$\begin{array}{l} \{0, 4', 5'\} \rightarrow 0, \quad \{1', 2', 3'\} \rightarrow 1', \\ \{1, 14', 15'\} \rightarrow 1, \quad \{11', 12', 13'\} \rightarrow 11'. \end{array}$$

Итак, мы получили, что

$$(\mathbf{H}(D_3)/N_1)/(N_5/N_1) \approx \mathbf{H}(D_3)/N_5 \approx \{0, 1, 1', 11'\}.$$

В общем случае справедлива формула сокращения наименьшего нормального делителя:

$$(A / C) / (B / C) \approx A / B, \quad (2.29)$$

т.е. нормальные делители групп ведут себя подобно числовым де-

лителям, в частности:

$$(36/3)/(9/3) = 36/9, (36/6)/(18/6) = 36/18.$$

Теперь по изложенной методике построим голоморф на базе кватерниона  $\mathbf{H}(D_4^2)$  (табл. 2.35). Его порядок равен уже не 64-м, как это могло показаться на первый взгляд ( $8 \times 8$ ), а только 32-м. Объясняется это тем, что порядок центра кватерниона равен двум. Формула, по которой рассчитывается порядок голоморфа  $\mathbf{H}(G)$ , следующая —

$$|\mathbf{H}(G)| = \frac{|G|^2}{Z_G}.$$

Выпишем все 32 подстановки  $\mathbf{H}(D_4^2)$ :

Таблица 2.35

$$\begin{aligned} 0 &= (0), & 0' &= 0, \\ 1 &= (0123)(4756), & 1' &= (0123)(4657), \\ 2 &= (02)(13)(45)(67), & 2' &= 2, \\ 3 &= (0321)(4657), & 3' &= (0321)(4756), \\ 4 &= (0425)(1637), & 4' &= (0425)(1736), \\ 5 &= (0524)(1736), & 5' &= (0524)(1637), \\ 6 &= (0627)(1534), & 6' &= (0627)(1435), \\ 7 &= (0726)(1435), & 7' &= (0726)(1534), \end{aligned}$$

0	1	2	3	4	5	6	7
1	2	3	0	6	7	5	4
2	3	0	1	5	4	7	6
3	0	1	2	7	6	4	5
4	7	5	6	2	0	1	3
5	6	4	7	0	2	3	1
6	4	7	5	3	1	2	0
7	5	6	4	1	3	0	2

$$\begin{aligned} 11' &= 33' = (02)(13), & 41' &= 53' = (06)(15)(27)(34), \\ 13' &= 31' = (45)(67), & 43' &= 51' = (0627)(1435), \\ 14' &= 35' = (07)(15)(26)(34), & 44' &= 55' = (02)(45), \\ 15' &= 34' = (06)(14)(27)(35), & 45' &= 54' = (13)(67), \\ 16' &= 37' = (04)(17)(25)(36), & 46' &= 57' = (03)(12)(47)(56), \\ 17' &= 36' = (05)(16)(24)(37), & 47' &= 56' = (01)(23)(46)(57), \\ 61' &= 73' = (05)(17)(24)(36), & 65' &= 74' = (03)(12)(46)(57), \\ 63' &= 71' = (04)(16)(25)(37), & 66' &= 77' = (02)(67), \\ 64' &= 75' = (01)(23)(47)(56), & 67' &= 76' = (13)(45). \end{aligned}$$

Разобьем голоморф  $\mathbf{H}(D_4^2)$  на классы:

$$\begin{aligned} C_1 &= \{1, 3\}, & C_5 &= \{4', 5'\}, & C_9 &= \{14', 15'\}, & C_{13} &= \{46', 47'\}, \\ C_2 &= \{2\}, & C_6 &= \{6, 7\}, & C_{10} &= \{16', 17'\}, & C_{14} &= \{61', 63'\}, \\ C_3 &= \{1', 3'\}, & C_7 &= \{6', 7'\}, & C_{11} &= \{41', 43'\}, & C_{15} &= \{64', 65'\}, \end{aligned}$$

$$C_4 = \{4, 5\}, \quad C_8 = \{11', 13'\}, \quad C_{12} = \{44', 45'\}, \quad C_{16} = \{66', 67'\}.$$

Один из кватернионов группы  $\mathbf{H}(D_4^2)$ , а именно —

$$N_1 = \{0, 1', 2', 3', 4', 5', 6', 7'\},$$

используем для построения проекции  $\mathbf{H}(D_4^2)/N_1$ :

$$\begin{aligned} \{0, 1', 2, 3', 4', 5', 6', 7'\} &\rightarrow 0, & \{1, 11', 3, 13', 14', 15', 16', 17'\} \\ &\rightarrow 1, \\ \{4, 41', 5, 43', 44', 45', 46', 47'\} &\rightarrow 4, & \{6, 61', 7, 63', 64', 65', 66', 67'\} \\ &\rightarrow 6. \end{aligned}$$

Элементы  $\{0, 1, 4, 6\}$  факторгруппы  $\mathbf{H}(D_4^2)/N_1$  перемножаются в соответствии с таблицей умножения группы  $C_2^2$ . Таким образом, для кватерниона имеем

$$\mathbf{H}(D_4^2)/D_4^2 \approx C_2^2,$$

что существенно отличается от результата для диэдра (2. 28).

В состав  $\mathbf{H}(D_4^2)$  входит делитель —

$$N_2 = \{0, 1, 2, 3, 1', 3', 4', 5', 6', 7', 11', 13', 14', 15', 16', 17'\},$$

используем его для нахождения еще двух гомоморфизмов —

$$\mathbf{H}(D_4^2)/N_2:$$

$$\begin{aligned} \{0, 1, 2, 3, 1', 3', 4', 5', 6', 7', 11', 13', 14', 15', 16', 17'\} &\rightarrow 0, \\ \{4, 5, 6, 7, 41', 43', 44', 45', 46', 47', 61', 63', 64', 65', 66', 67'\} &\rightarrow 1, \\ N_2/N_1: \end{aligned}$$

$$\{0, 1', 3', 4', 5', 6', 7'\} \rightarrow 0, \quad \{1, 3, 11', 13', 14', 15', 16', 17'\} \rightarrow 1.$$

Формула сокращения наименьшего нормального делителя (2.29) для делителей кватерниона тоже подтвердилась —

$$(\mathbf{H}(D_4^2)/N_1)/(N_2/N_1) \approx \mathbf{H}(D_4^2)/N_2.$$

### Геометрическая интерпретация групповых преобразований

На рис. 2.3 изображены ромб (а) и прямоугольник (б). Вершины этих простых геометрических фигур образуют *субстанционные*, или *базисные*, множества, которые насчитывают по четыре элемента. Начав вращать эти симметричные фигуры относительно обозначенных на рисунке горизонтальных и вертикальных осей, а также во-

круг необозначенных осей, направленных перпендикулярно к плоскости рисунка, мы получим множество *отображений* или *операционных элементов* в виде подстановок.

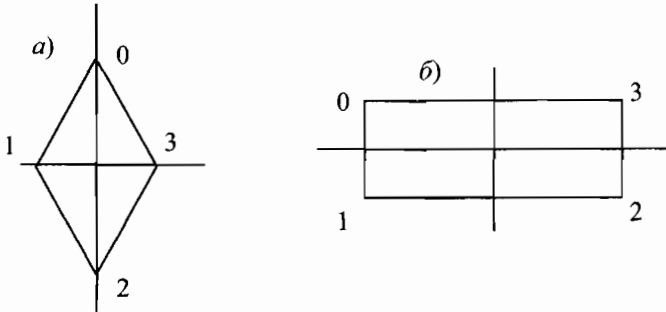


Рис. 2.3

Таким образом, появляются две изоморфных группы подстановок типа  $C_2^2$ : для ромба —

$$e = (0), \quad a = (02), \quad b = (13), \quad ab = (02)(13);$$

для прямоугольника —

$$e = (0), \quad a = (01)(23), \quad b = (03)(12), \quad ab = (02)(13).$$

Здесь в обоих случаях число субстанционных элементов, представленных вершинами фигур, совпадает с числом операционных.

Теперь изменим субстанционные множества: пусть для ромба в качестве базисных выступают два элемента — верхняя и нижняя его поверхности, а для прямоугольника — две его диагонали — 0-2 и 1-3. Тогда группы операционных элементов тоже уменьшатся в 2 раза и станут типа  $C_2$ .

Повороты геометрических фигур в пространстве представляют собой *линейные преобразования* (2.1), в которых в качестве операторов  $A$  могут выступать 0,1-матрицы. Степень периодичности наших матриц равна двум, значит их собственными значениями (2.11) являются числа  $(+1)$  и  $(-1)$ . Положительная и отрицательная единицы образуют группу  $C_2$ , гомоморфную группе  $C_2^2$ . В коммутативных группах каждый элемент образует класс эквивалентности. Поставим в соответствие каждому элементу группы  $C_2^2$  столбец из собственных значений (табл. 2.36). Классы эквивалентности не пересекаются. Этот факт отражается в том, что скалярные произведения столбцов должны быть равны нулю. Следовательно, в табл. 2.36

все положительные и отрицательные единицы надо расставить так, чтобы произведение векторов-столбцов отвечало этим требованиям. Такая расстановка собственных значений автоматически приводит к выполнению условия *ортонормированности* и в отношении строк  $E_i$ , которые называются *представлениями* группы  $C_2^2$ . Все представления у нас получились гомоморфными, причем представление  $E_0$  является *единичным*, так как элементы группы  $C_2^2$  проецируются на тривиальную *группу тождественного элемента*  $G_0$  (или  $C_1$ ). Проецирование  $C_2^2 \rightarrow C_2$  можно осуществить тремя способами —  $E_1, E_2$  и  $E_3$ .

В группе  $C_4$  так же, как и в группе  $C_2^2$ , четыре элемента. С точки зрения геометрии, она отвечает вращению квадрата в плоскости рисунка (рис. 2.4б). Собственными значениями 0,1-матриц, которые соответствуют группе подстановок  $C_4$ :

$$e = (0), \quad a = (0123), \quad a^2 = (02)(13), \quad a^3 = (0321),$$

служат корни четвертой степени из единицы (см. табл. 2.37). Проецирование элементов группы  $C_4$  на эти корни дает четыре возможных представления, два из которых ( $E_0$  и  $E_1$ ) являются *гомоморфизмами*, а два ( $E_2$  и  $E_3$ ) — *изоморфизмами*.

Представление  $E_0$  соответствует проецированию всей группы  $C_4$  на единицу  $\{e\}$ ; представление  $E_1$  есть проекция  $C_4$  на подгруппу  $\{e, a^2\}$ ; представления  $E_2$  и  $E_3$  осуществляют проецирование элементов  $C_4$  на собственные значения 0,1-матриц, отвечающие элементам  $a$  и  $a^3$ . Произведение столбцов  $a$  на  $a^3$  и строк  $E_2$  на  $E_3$  уже не равно нулю, т.е. *изоморфные представления не будут ортогональными*. Это связано с тем, что элементы  $a$  и  $a^3$  попадают в один *абсолютный класс эквивалентности*, в результате чего выполняются следующие соотношения:

$$E_0 \cdot E_1 = E_0 \cdot E_2 = E_0 \cdot E_3 = E_1 \cdot E_2 = E_1 \cdot E_3 = 0, \quad \text{но } E_2 \cdot E_3 = 4.$$

Введенные понятия об *относительном* и *абсолютном подобии* позволяют объяснить наличие или отсутствие ортогональности между отдельными представлениями коммутативных групп.

Таблица представлений для группы  $C_2$  тривиальна (табл. 2.38). Мы бы ее не приводили, если бы не одно обстоятельство: она поможет нам понять принцип построения таблиц представлений больших размерностей.



Таблица 2.36

$C_2^2$	$e$	$a$	$b$	$ab$
$E_0$	1	1	1	1
$E_1$	1	-1	1	-1
$E_2$	1	1	-1	-1
$E_3$	1	-1	-1	1

Таблица 2.37

$C_4$	$e$	$a$	$a^2$	$a^3$
$E_0$	1	1	1	1
$E_1$	1	-1	1	-1
$E_2$	1	$i$	-1	- $i$
$E_3$	1	- $i$	-1	$i$

Таблица 2.38

$C_2$	$e$	$a$
$E_0$	1	1
$E_1$	1	-1

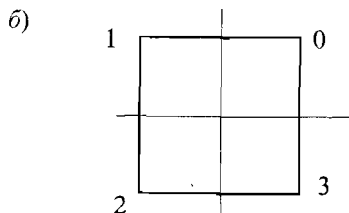
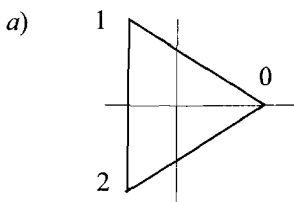


Рис. 2.4

Остановимся на вращениях в плоскости рисунка правильного треугольника (рис. 2.4а), пятиугольника (рис. 2.5) и семиугольника, которые образуют *простые циклические группы*  $C_3$ ,  $C_5$  и  $C_7$ . Для них все представления являются *изоморфизмами*, за исключением единичного  $E_0$ :  $C_3$  (табл. 2.39),  $C_5$  (табл. 2.40),  $C_7$  (табл. 2.41), причем прямая и обратная подстановки попадают в один абсолютный класс эквивалентности. Следовательно, в один класс неортогональных друг к другу представлений в группе  $C_5$ , например, попадут представления  $E_1$  и  $E_4$  или  $E_2$  и  $E_3$ .

Таблица 2.39

$C_3$	$e$	$a$	$a^2$
$E_0$	1	1	1
$E_1$	1	$\omega_1$	$\omega_2$
$E_2$	1	$\omega_2$	$\omega_1$

Таблица 2.40

$C_5$	$e$	$a$	$a^2$	$a^3$	$a^4$
$E_0$	1	1	1	1	1
$E_1$	1	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_4$
$E_2$	1	$\omega_2$	$\omega_4$	$\omega_1$	$\omega_3$
$E_3$	1	$\omega_3$	$\omega_1$	$\omega_4$	$\omega_2$
$E_4$	1	$\omega_4$	$\omega_3$	$\omega_2$	$\omega_1$

Корни 3-й, 5-й и 7-й степени из единицы ( $\omega_i$ ) расставляются по строкам и столбцам таблиц представлений соответственно своим подстановкам. Это значит, что индексы при  $\omega_i$ , например, для группы правильного пятиугольника  $C_5$ , чередуются в соответствии с индексами следующих четырех подстановок:

$$a = (01234), a^2 = (02413), a^3 = (03142), a^4 = (04321).$$

Таблица 2.41

$C_7$	$e$	$a$	$a^2$	$a^3$	$a^4$	$a^5$	$a^6$
$E_0$	1	1	1	1	1	1	1
$E_1$	1	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_4$	$\omega_5$	$\omega_6$
$E_2$	1	$\omega_2$	$\omega_4$	$\omega_6$	$\omega_1$	$\omega_3$	$\omega_5$
$E_3$	1	$\omega_3$	$\omega_6$	$\omega_2$	$\omega_5$	$\omega_1$	$\omega_4$
$E_4$	1	$\omega_4$	$\omega_1$	$\omega_5$	$\omega_2$	$\omega_6$	$\omega_3$
$E_5$	1	$\omega_5$	$\omega_3$	$\omega_1$	$\omega_6$	$\omega_4$	$\omega_2$
$E_6$	1	$\omega_6$	$\omega_5$	$\omega_4$	$\omega_3$	$\omega_2$	$\omega_1$

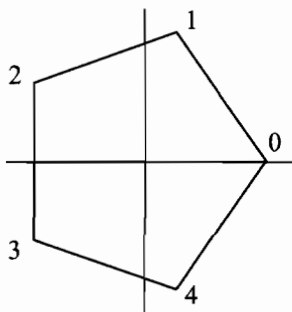


Рис. 2.5

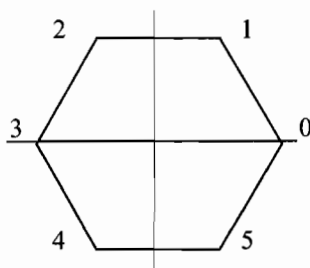


Рис. 2.6

Согласно симметрии правильного шестиугольника (рис. 2.6), группа  $C_6$  имеет, помимо *единичного* класса  $\{E_0\}$ , еще два *абсолютных* класса *гомоморфных* представлений —  $\{E_1\}$ ,  $\{E_2, E_3\}$ , а также один класс *изоморфных* представлений —  $\{E_4, E_5\}$ , которые расписаны в табл. 2.42. В ней приняты следующие обозначения корней:  $\omega = \omega^4$ ,  $-\omega^2 = \omega^5$ ,  $-1 = \omega^3$ .

Обозначения для элементов представлений группы  $C_8$  можно выбрать такие же, как и для группы  $C_6$  (табл. 2.42), если помнить, что

$$1 = \omega_0, -1 = \omega_4, i = \omega_2, -i = \omega_6, -\omega^3 = \omega_7, -\omega = \omega_5.$$

Однако при составлении табл. 2.43 использовалась методика чередования индексов корней при  $\omega_i$ , согласно подстановкам группы  $C_8$ . Здесь изоморфный класс состоит уже не из двух, а из четырех представлений —  $\{E_1, E_3, E_5, E_7\}$ . Остальные классы абсолютной эквивалентности гомоморфны —  $\{E_0\}$ ,  $\{E_4\}$ ,  $\{E_2, E_6\}$ .

Таблица 2.42

$C_6$	$e$	$a$	$a^2$	$a^3$	$a^4$	$a^5$
$E_0$	1	1	1	1	1	1
$E_1$	1	-1	1	-1	1	-1
$E_2$	1	$\omega^2$	$-\omega$	1	$\omega^2$	$-\omega$
$E_3$	1	$-\omega$	$\omega^2$	1	$-\omega$	$\omega^2$
$E_4$	1	$\omega$	$\omega^2$	-1	$-\omega$	$-\omega^2$
$E_5$	1	$-\omega^2$	$-\omega$	-1	$\omega^2$	$\omega$

Таблица 2.43

$C_8$	$e$	$a$	$a^2$	$a^3$	$a^4$	$a^5$	$a^6$	$a^7$
$E_0$	$\omega_0$	$\omega_0$	$\omega_0$	$\omega_0$	$\omega_0$	$\omega_0$	$\omega_0$	$\omega_0$
$E_1$	$\omega_0$	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_4$	$\omega_5$	$\omega_6$	$\omega_7$
$E_2$	$\omega_0$	$\omega_2$	$\omega_4$	$\omega_6$	$\omega_0$	$\omega_2$	$\omega_4$	$\omega_6$
$E_3$	$\omega_0$	$\omega_3$	$\omega_6$	$\omega_1$	$\omega_4$	$\omega_7$	$\omega_2$	$\omega_5$
$E_4$	$\omega_0$	$\omega_4$	$\omega_0$	$\omega_4$	$\omega_0$	$\omega_4$	$\omega_0$	$\omega_4$
$E_5$	$\omega_0$	$\omega_5$	$\omega_2$	$\omega_7$	$\omega_4$	$\omega_1$	$\omega_6$	$\omega_3$
$E_6$	$\omega_0$	$\omega_6$	$\omega_4$	$\omega_2$	$\omega_0$	$\omega_6$	$\omega_4$	$\omega_2$
$E_7$	$\omega_0$	$\omega_7$	$\omega_6$	$\omega_5$	$\omega_4$	$\omega_3$	$\omega_2$	$\omega_1$

Две следующие таблицы представлений для коммутативных групп 8-ого порядка —  $C_2^3 \cong C_2 C_2^2$  (табл. 2.44) и  $C_2 C_4$  (табл. 2.45) — получены из элементов  $C_2^2$  (табл. 2.36) и  $C_4$  (табл. 2.37), путем умножения их на 1 или  $-1$ , отвечающих группе  $C_2$  (табл. 2.38).

Таблицы представлений для коммутативных групп больших порядков составляются по аналогии с рассмотренными. Далее переходим к анализу *некоммутативных* групп.

Начнем с группы диэдра  $D_3$ . Она отвечает вращению равностороннего треугольника (рис. 2.4а) не только в плоскости рисунка, но и в пространстве оси  $z$ , перпендикулярной к осям  $x$  и  $y$ . В группу  $D_3$  входят шесть подстановок:

$$\begin{aligned}
 e &= (0), & a &= (012), & a^2 &= (021), \\
 b &= (02), & ab &= (01), & ba &= (12),
 \end{aligned}$$

которые разбиваются, как мы уже знаем, на три класса эквивалентности (для некоммутативных групп есть смысл говорить только об относительных классах эквивалентности):

$$C_0 = \{e\}, \quad C_1 = \{a, a^2\}, \quad C_2 = \{b, ab, ba\}.$$

Таблица 2.44

$C_2^3$	$e$	$a$	$b$	$ab$	$c$	$ac$	$bc$	$abc$
$E_0$	1	1	1	1	1	1	1	1
$E_1$	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
$E_2$	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
$E_3$	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
$E_4$	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
$E_5$	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
$E_6$	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
$E_7$	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1

Таблица 2.45

$C_2C_4$	$e$	$a$	$a^2$	$a^3$	$b$	$ab$	$a^2b$	$a^3b$
$E_0$	1	1	1	1	1	1	1	1
$E_1$	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
$E_2$	1	$i$	-1	$-i$	1	$i$	-1	$-i$
$E_3$	1	$-i$	-1	$i$	1	$-i$	-1	$i$
$E_4$	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
$E_5$	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
$E_6$	1	$i$	-1	$-i$	-1	$-i$	1	$i$
$E_7$	1	$-i$	-1	$i$	-1	$i$	1	$-i$

Этим классам отвечают два гомоморфных ( $E_0$  и  $E_1$ ) и одно изоморфное ортогональное представление —  $E_2$  (табл. 2.46). Поскольку свойство некоммутативности уже не может быть воспроизведено с помощью одномерных представлений из собственных значений,  $E_2$  является двухмерным. Кроме того, в табл. 2.46 включено еще одно неортогональное, эквивалентное (относительно  $E_2$ ) двухмерное представление  $E_3$  и одно трехмерное  $E_4$ . Матрицы последнего представления отвечают приведенным подстановкам группы  $D_3$  (в табл. 2.46 отсутствуют единичные матрицы).

Таблица 2.46

$D_3$	$a = (012)$	$a^2 = (021)$	$b = (02)$	$ab = (01)$	$ba = (12)$
$E_0$	1	1	1	1	1
$E_1$	1	1	-1	-1	-1
$E_2$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$
$E_3$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
$E_4$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

### Прямая сумма и прямое произведение

Можно подобрать такую трансформационную матрицу  $t$ , которая разобьет все 0,1-матрицы представления  $E_4$  на сумму  $E_0$  и  $E_3$ :

$$E_0 + E_3 = t E_4 t^{-1}.$$

В частности, для элемента  $a$  группы  $D_3$  будем иметь разложение:

$$\begin{aligned} E_4(a) &= E_0(a) + E_3(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Если все матрицы одного представления  $E_\alpha$  под действием трансформационной матрицы  $t$  разлагаются на сумму двух или большего числа других представлений ( $E_\beta + E_\gamma + \dots$ ), то говорят, что представление  $E_\alpha$  — *приводимо*. Если матрицы представлений  $E_\beta$ ,  $E_\gamma$  и т.д. больше нельзя разложить на меньшие матрицы, значит они являются *неприводимыми*. Так, все матрицы представлений  $E_0$ ,  $E_1$ ,  $E_2$  и  $E_3$  — *неприводимы*, поскольку невозможно найти такую трансформационную матрицу  $t$ , чтобы в результате преобразования из них получились матрицы меньших размерностей. Заметим, что под «суммой» матричных представлений следует понимать *прямую сумму* матриц, т.е. когда приводимая матрица трансформируется в *блочную-диагональную*.

Про представления  $E_2$  и  $E_3$  было сказано, что они эквивалентны, т.е. существует такая матрица  $t_1$ , которая способна трансформировать все матрицы  $E_2$  в матрицы  $E_3$ , и наоборот:

$$E_3 = t_1 E_2 t_1^{-1}, \quad E_2 = t_1^{-1} E_3 t_1,$$

Такая матрица  $t_1$  существует. Продемонстрируем действие этой матрицы на элементе  $\mathbf{a}$ :

$$\begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

Таким образом, все матрицы представлений  $E_3$  и  $E_4$  в табл. 2.46 взаимно связаны с ортогональным неприводимым представлением  $E_2$ .

Единичное представление  $E_0$  образовано базисом —

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Базисом другого одномерного представления —  $E_1$  — служит ось  $z$ . Оси  $x$  и  $y$  являются базисом для матриц  $E_2$ . Если учесть, что координаты на плоскости преобразуются по известным формулам:

$$x' = x \cdot \cos \varphi - y \cdot \sin \varphi, \quad y' = x \sin \varphi + y \cos \varphi;$$

то при повороте на угол  $2\pi/3$  имеем

$$\cos(2\pi/3) = -1/2, \quad \sin(2\pi/3) = \sqrt{3}/2,$$

тогда преобразование координат примет вид:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Вершины треугольника (рис. 2.4а) имеют координаты:

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{1} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{2} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix},$$

причем  $\mathbf{2} = -\mathbf{0} - \mathbf{1}$ . Этим вершинам соответствуют три не ортогональных вектора —  $\mathbf{0}$ ,  $\mathbf{1}$  и  $\mathbf{2}$ , которые образуют базис для представлений  $E_3$  и  $E_4$ . Ортогональное представление  $E_2(\mathbf{a})$  и неортогональное  $E_3(\mathbf{a})$  преобразуют свои системы базисных векторов:

$$\begin{pmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Следует также напомнить, что существует так называемая актив-

ная система координат, когда объект (например, наш треугольник) находится в покое, а координатные оси вращаются вокруг него; и *пассивная*, когда система координат покоится, а объект вращается внутри нее. Кроме того, для согласования действия подстановок и матричных преобразований может помочь противоположная расстановка множителей либо для матриц, либо для подстановок, т.е. для выполнения одного и того же группового преобразования для подстановок берется произведение  $ab$ , а для матриц —  $ba$  (или наоборот).

Если неприводимое матричное представление ортонормировано, то оно подчиняется следующему фундаментальному тождеству:

$$\sum_{g \in G} E_{\alpha}^{ij}(g) E_{\beta}^{kl}(g^{-1}) = \frac{n}{n_{\alpha}} \delta_{\alpha\beta} \delta_{ik} \delta_{jl}, \quad (2.30)$$

где  $g$  — элементы группы  $G$ ,  $n$  — порядок группы  $G$ ,  
 $n_{\alpha}$  — размерность матриц представления  $E_{\alpha}$ ,

$E_{\alpha}^{ij}(g), E_{\beta}^{kl}(g^{-1})$  — матричные элементы представлений,

$\delta_{xy}$  — символ Кронекера (при  $x = y$   $\delta_{xy} = 1$ , при  $x \neq y$   $\delta_{xy} = 0$ )

Проиллюстрируем справедливость (2.30) на наших конкретных ортонормированных неприводимых представлениях  $E_1$  и  $E_2$ :

$$\sum_{g \in G} E_1^{11}(g) E_2^{21}(g^{-1}) = 0 \quad \text{и} \quad \sum_{g \in G} E_2^{22}(g) E_2^{22}(g^{-1}) = 3,$$

поскольку

$$1 \cdot 0 + 1 \cdot \frac{-\sqrt{3}}{2} + 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + (-1) \cdot 0 + (-1) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + (-1) \cdot \frac{-\sqrt{3}}{2} = 0,$$

$$1^2 + \left(\frac{-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{-1}{2}\right)^2 + (-1)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{6}{2} = 3.$$

Теперь, в соответствии с таблицей умножения элементов группы  $D_3$ , построим одну 0,1-матрицу *регулярного* представления  $E_5(\mathbf{a})$  (аналогичным образом находятся все остальные матрицы *приводимого* представления  $E_5$ ):

$$\begin{pmatrix} a \\ a^2 \\ e \\ ab \\ ba \\ b \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} e \\ a \\ b \\ ab \\ ba \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e \\ a \\ b \\ ab \\ ba \end{pmatrix}.$$

Существует такая трансформационная матрица  $T$ , которая позволит все матрицы  $E_5$  разложить на матрицы *неприводимых* представлений  $E_0, E_1, E_2$ . Для нахождения элементов матрицы  $T$  пользуются элементами матриц  $E_0, E_1, E_2$  (табл. 2.46) и формулой —

$$T'_\alpha(g) = E'_\alpha(g) \sqrt{\frac{n_\alpha}{n}}. \quad (2.31)$$

Произведем разложение матрицы  $E_5(a)$  на неприводимые представления, используя конкретную трансформационную матрицу (2.31), получим:

$$E'_5(a) = T^{-1} \cdot E_5(a) \cdot T = E_0(a) + E_1(a) + 2 \cdot E_2(a), \quad (2.32)$$

где  $E'_5(a)$  — блочно-диагональная матрица, имеющая вид:

$$E'_5(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Трансформационная матрица  $T$  выглядит так —

$$T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/2\sqrt{3} & -1/2\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & -1/2\sqrt{3} & -1/2\sqrt{3} \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 1/\sqrt{3} & -1/2\sqrt{3} & -1/2\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & 1/2\sqrt{3} & 1/2\sqrt{3} \\ 0 & -1/2 & 1/2 & 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, все регулярные матрицы  $E_5(g)$  распадутся на прямую сумму блоков, причем каждый из блоков неприводимого представления  $E_\alpha(g)$  входит в блочно-диагональную матрицу  $E'_5(g)$  рав-



но  $n_\alpha$  раз. В нашем случае размерности представлений  $n_\alpha$  равны:  $n_0 = n_1 = 1, n_2 = 2$ .

Наряду с прямой суммой можно ввести понятие о *прямом произведении* матриц. Пусть даны две матрицы  $A$  и  $B$ :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Определим их прямое произведение следующим образом:

$$\begin{aligned} A \times B &= \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & a_{13}B \\ a_{21}B & a_{22}B & a_{23}B \\ a_{31}B & a_{32}B & a_{33}B \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} & a_{13}b_{11} & a_{13}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} & a_{13}b_{21} & a_{13}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} & a_{23}b_{11} & a_{23}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} & a_{23}b_{21} & a_{23}b_{22} \\ a_{31}b_{11} & a_{31}b_{12} & a_{32}b_{11} & a_{32}b_{12} & a_{33}b_{11} & a_{33}b_{12} \\ a_{31}b_{21} & a_{31}b_{22} & a_{32}b_{21} & a_{32}b_{22} & a_{33}b_{21} & a_{33}b_{22} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

В частности,

$$\begin{aligned} E_2(\mathbf{a}) \times E_2(\mathbf{a}) &= \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1/4 & \sqrt{3}/4 & \sqrt{3}/4 & 3/4 \\ -\sqrt{3}/4 & 1/4 & -3/4 & \sqrt{3}/4 \\ -\sqrt{3}/4 & -3/4 & 1/4 & \sqrt{3}/4 \\ 3/4 & -\sqrt{3}/4 & -\sqrt{3}/4 & 1/4 \end{pmatrix} * \end{aligned}$$

Ортонормированный базис двухмерного неприводимого представления  $E_2(\mathbf{a})$  имеет вид:

$$x' = -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y, \quad y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y.$$

Если составить всевозможные произведения  $x'$  и  $y'$ ,

$$x'x' = \frac{1}{4}xx + \frac{\sqrt{3}}{4}xy + \frac{\sqrt{3}}{4}yx + \frac{3}{4}yy, \quad x'y' = -\frac{\sqrt{3}}{4}xx + \frac{1}{4}xy - \frac{3}{4}yx + \frac{\sqrt{3}}{4}yy,$$

$$y'x' = -\frac{\sqrt{3}}{4}xx - \frac{3}{4}xy + \frac{1}{4}yx + \frac{\sqrt{3}}{4}yy, \quad y'y' = \frac{3}{4}xx - \frac{\sqrt{3}}{4}xy - \frac{\sqrt{3}}{4}yx + \frac{1}{4}yy,$$

то станет понятен и смысл матрицы прямого произведения. Добавим, что при прямом перемножении свойство ортонормированности сохраняется.

Сумма матриц прямых произведений образует новое представление группы  $D_3$ , причем *приводимое*, которое мы обозначим как

$$E_6(\mathbf{a}) = E_2(\mathbf{a}) \times E_2(\mathbf{a}).$$

Приводимость означает, что матрицы  $E_6(\mathbf{a})$  каким-то образом раскладываются в прямую сумму неприводимых представлений. Чтобы уметь решать подобного рода задачи, необязательно искать соответствующие трансформационные матрицы типа (2.31). Достаточно знать характеры матричных представлений по трем классам эквивалентности  $C_0$ ,  $C_1$  и  $C_2$  группы  $D_3$ . Затем, для определения числа неприводимых представлений  $E_\alpha$ , содержащихся в приводимом  $E_\beta$ , необходимо воспользоваться простым соотношением:

$$E_\beta = \sum_{\alpha} m_{\alpha} E_{\alpha}, \quad (2.33)$$

где  $m_{\alpha} = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} h_{\alpha} h_{\beta}$ ,  $n$  — порядок группы  $G$ ,  $h_{\alpha}$  и  $h_{\beta}$  — характеры представлений  $E_{\alpha}$  и  $E_{\beta}$ , которые приведены в табл. 2.47.

По формуле (2.33) найдем коэффициенты  $m_{\alpha}$  сначала для приводимого представления  $E_4$ .

$$m_0 = 1/6 \cdot [3 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1] = 1,$$

$$m_1 = 1/6 \cdot [3 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1)] = 0,$$

$$m_2 = 1/6 \cdot [3 \cdot 2 + 0 \cdot (-1) + 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0] = 1.$$

Отсюда получаем, что  $E_4 = E_0 + E_2$ . Аналогичным расчетом убеждаемся в справедливости еще одного известного разложения (2.32):

$$E_5 = E_0 + E_1 + 2 \cdot E_2.$$

В случае прямого произведения формула (2.33) не меняется, и результат будет следующим:

$$E_6 = E_2 \times E_2 = E_0 + E_1 + E_2.$$

Для нахождения характеров представления  $E_6$  необязательно искать матрицы прямых произведений  $E_2 \times E_2$ . Достаточно строку характеров  $E_2$  (табл. 2.47) возвести в квадрат. Все другие разложения приводимых представлений ( $E_4$  и  $E_5$ ) на неприводимые ( $E_0$ ,  $E_1$ ,  $E_2$ ) также можно проверить по таблице характеров.

Для характеров неприводимых представлений, как и для матриц, выполняется закон об ортонормированности (2.30), который удобно расписать на два соотношения — отдельно для *столбцов* (классов  $C_i$ ) табл. 2.47 и отдельно для *строк* (представлений  $E_\alpha$ ):

$$\sum_{i=1}^K n_i h_\alpha(C_i) \cdot h_\beta(C_i) = n \delta_{\alpha\beta},$$

$$\sum_{\alpha=1}^L n_i h_\alpha(C_i) \cdot h_\alpha(C_j) = n \delta_{ij},$$

где  $n_i$  — число элементов в классе  $C_i$ ,  
 $n$  — порядок группы  $G$ ,  
 $K$  — число классов  $C_i$ ,  
 $L$  — число представлений  $E_\alpha$ ,  
 $\delta_{\alpha\beta}$ ,  $\delta_{ij}$  — символы Кронекера.

Таблица 2.47

$D_3$	$C_0$	$C_1$	$C_2$
$E_0$	1	1	1
$E_1$	1	1	-1
$E_2$	2	-1	0
$E_3$	2	-1	0
$E_4$	3	0	1
$E_5$	6	0	0
$E_6$	4	1	0

Приведем примеры, подтверждающие ортонормированность характеров:

$$\sum_{i=1}^3 n_i \cdot h_3(C_i) \cdot h_3(C_i) = 1 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) \cdot (-1) + 3 \cdot 0 \cdot 0 = 6,$$

$$\sum_{\alpha=1}^3 n_i \cdot h_\alpha(C_1) \cdot h_\alpha(C_2) = 2 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 \cdot 0 = 0.$$

У нас получилось, что  $K = L$ . На самом деле, число неприводимых представлений  $E_\alpha$  всегда равно числу классов сопряженности  $C_i$ . Критерием неприводимости представления  $E_\alpha$  служит формула

$$\sum_{g \in G} h_\alpha^2(g) = n \quad (2.34)$$

Так, представление  $E_2$  является неприводимым, так как

$$\sum_{g \in G} h_2^2(g) = 2^2 + (-1)^2 + (-1)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 = 6,$$

а представление  $E_4$  будет уже приводимым:

$$\sum_{g \in G} h_4^2(g) = 3^2 + 0^2 + 0^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 = 12.$$

Еще одним важным критерием является критерий полноты набора неприводимых представлений, который гласит: сумма квадратов размерностей матриц всех неприводимых представлений долж-

на быть равна порядку группы:

$$\sum_{\alpha} n_{\alpha}^2 = n, \quad D_3: 6 = 1^2 + 1^2 + 2^2. \quad (2.35)$$

Разложение (2.35), вообще говоря, неоднозначно. Так, числа 27 и 92 можно разложить на сумму квадратов многими способами:

$$27 = 1^2 + 1^2 + 5^2 = 1^2 + 1^2 + 3^2 + 4^2 = 3^2 + 3^2 + 3^2 = 1^2 + \dots + 1^2 = \dots$$

$$92 = 1^2 + 1^2 + 3^2 + 9^2 = 3^2 + 3^2 + 3^2 + 4^2 + 7^2 = 1^2 + \dots + 1^2 + 2^2 = \dots$$

Критерий неприводимости представлений свидетельствуют о существовании определенной связи между *классами эквивалентности*  $C_i$  и *неприводимыми представлениями*  $E_{\alpha}$ . Каждому классу можно поставить в соответствие определенное представление. Для группы  $D_3$  это соответствие выглядит следующим образом:  $E_0 \leftrightarrow C_0$ ,  $E_1 \leftrightarrow C_2$ ,  $E_2 \leftrightarrow C_1$ .

Однако не все так просто, как может показаться на первый взгляд. Каждое неприводимое представление  $E_{\alpha}$  определяется своим *векторным базисом* (иначе говоря, своим *субстанционным* множеством), а каждый класс эквивалентности  $C_i$  определяется специфической *периодичностью подстановок*, входящих в класс (т.е. своим *операционным* множеством). Прямой связи между субстанционным и операционным множествами не существует. Тем не менее, используя так называемые *диаграммы Юнга* (иногда их называют *диаграммами Ферре*), можно однозначно установить *размерность базиса линейного преобразования*  $E_{\alpha}$  на основе *периодичности подстановок*  $C_i$ . На примере нашей группы диэдра  $D_3$  покажем, как это делается.

Заметим, что изложенная ниже методика применима только для *симметрических групп*  $S_n$ , порядок которых определяется формулой  $-n!$  и которая состоит из всевозможных перестановок из  $n$  индексов (рассматриваемая нами группа как раз такова:  $D_3 \equiv S_3$ ). Далее, подобную методику можно использовать для *полной группы симметрии тетраэдра*  $T_d$ , которая состоит не только из поворотов этой геометрической фигуры ( $T$ ), но и отражений ее в плоскостях симметрии ( $T_d \equiv S_4$ ), а также *группы вращений икосаэдра* ( $Y \equiv S_5$ ). Однако для несимметрических групп, например  $D_4^1$ , поиск всех неприводимых представлений  $E_{\alpha}$  является уже нестандартной задачей, требующей значительных творческих усилий.

### Размерность представления и диаграммы Юнга

Введем понятие *диаграммы Юнга*. Для группы первого порядка  $S_1 \equiv S_1$  диаграмма Юнга представляется единственной пустой клеткой, которая обозначается символом [1]. Для  $S_2 \equiv S_2$  имеем две диаграммы Юнга: *симметричную* [2] и *антисимметричную* [11], которые соответствуют двум способам разбиения числа 2. Для  $S_3$  к полностью симметричной [3] и антисимметричной [111] добавляется диаграмма со смешанной симметрией [21]. Перечисленные диаграммы Юнга изображены на рис. 2.7.

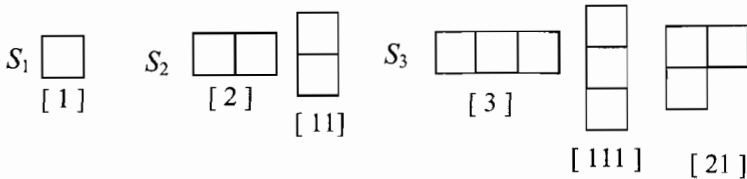


Рис. 2.7

*Размерность представления*, т.е. то, что нас сейчас больше всего интересует, зависит от числа возможных способов образования конкретной диаграммы Юнга. На рис. 2.8 показано, как получить двухмерное представление, отвечающее диаграмме [21] для  $S_3$ , из двух диаграмм ([11] и [2]) для  $S_2$ . С этой целью производят различную нумерацию клеток, при которой индексы могут только возрастать слева направо в каждой строке и сверху вниз в каждом столбце. Так, учитывая способы образования диаграмм Юнга для  $S_4$  из диаграмм для  $S_3$ , определяем, что для  $S_4$  будет существовать два *одномерных* ([4], [1111]), два *трехмерных* ([31], [211]) и одно *двухмерное* представление ([22]). Различные способы заполнения диаграмм обозначены в угловых скобках.

Размерность представления можно найти через так называемую угловую длину, которая определяется для каждой клетки диаграммы Юнга. *Угловая длина* ( $l_i$ ) равна числу клеток, расположенных справа и ниже  $i$ -ой клетки, плюс единица (т.е. учитывается сама  $i$ -ая клетка, для которой ищется угловая длина). Размерность диаграммы ( $D[\Lambda]$ ) определяется как частное от деления порядка симметрической группы ( $n!$ ) на произведение угловых длин от всех клеток данной диаграммы:

$$D[\Lambda] = \frac{n!}{\prod_i l_i}$$

Рассчитаем размерность представлений симметрической группы  $S_5$ :

$$D[11111] = D[5] = 5!/1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 1,$$

$$D[41] = D[2111] = 5!/1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 4,$$

$$D[32] = D[221] = 5!/1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 5,$$

$$D[311] = 5!/1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = 6.$$

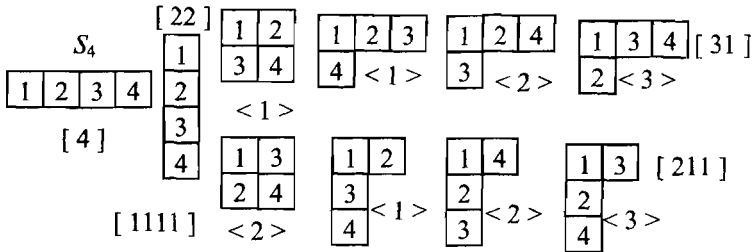
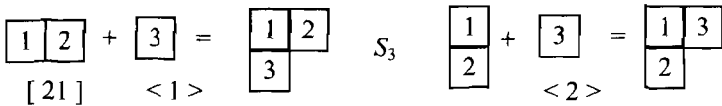


Рис. 2.8

С помощью диаграмм Юнга можно непосредственно вычислить характеры и сами ортонормированные неприводимые матричные представления без предварительного нахождения их базиса. Подробное изложение этой методики можно найти у М. Хамермеша в указанной книге, где помимо прочего описан способ нахождения так называемых *символов Яманучи*, придающих представлениям однозначность. Мы же предпримем сейчас сокращенное изложение, позволяющее, тем не менее, найти все матрицы двухмерного представления  $E_2$ , отвечающего диаграмме [21] группы  $D_3 \equiv S_3$ .

Диагональные матричные элементы для диаграммы  $\langle i \rangle$  и смежной транспозиции  $(k-1, k)$  определяются по формуле:

$$\langle i | k-1, k | i \rangle = [P_{(k-1, k)}^{<i>}]^{-1}, \tag{2.36}$$

$$\text{где } P_{(k-1,k)}^{<i>} = [C(k) - C(k-1)] - [R(k) - R(k-1)].$$

Здесь  $P_{(k-1,k)}^{<i>}$  — аксиальное расстояние между числами  $k-1$  и  $k$  в диаграмме  $<i>$ ;  $C(k)$  и  $C(k-1)$  — номер столбца  $k$  или  $k-1$  элемента в диаграмме  $<i>$ ;  $R(k)$  и  $R(k-1)$  — номер строки  $k$  или  $k-1$  элемента в диаграмме  $<i>$ . Если числа  $k$  и  $k-1$  находятся в одной строке, то аксиальное расстояние равно 1, а если  $k$  и  $k-1$  находятся в одном столбце, то аксиальное расстояние равно  $(-1)$ . Недиагональные матричные элементы между диаграммой  $<i>$  и диаграммой  $<j>$  транспозиции  $(k-1, k)$  не равны нулю, если  $<i>$  получается из  $<j>$  путем перемены мест индексов  $k$  и  $k-1$ , в противном случае недиагональный элемент равен нулю. Ненулевой матричный элемент определяется по формуле:

$$\langle i | k-1, k | j \rangle = \{1 - [P_{(k-1,k)}^{<i>}]^2\}^{1/2}. \quad (2.37)$$

Если помнить, что любую транспозицию можно представить произведением смежных транспозиций (2.25), а всякую подстановку можно разложить на произведение транспозиций (2.26), то приведенных формул будет достаточно для вычисления матричных представлений. При пользовании формулами (2.36) и (2.37) счет индексов у транспозиций  $(k-1, k)$  будет начинаться не с  $k=0$ , а с  $k=1$ , так что наша транспозиция  $(012) \equiv (123)$ . Методику вычисления матричных элементов продемонстрируем на примере двухмерного неприводимого представления  $E_2$  группы  $D_3$ , отвечающего диаграмме [21] с двумя способами расстановки индексов  $<1>$  и  $<2>$  (рис. 2.8).

Для смежной транспозиции (23) диаграммы  $<1>$  имеем диагональный элемент, равный

$$\langle 1 | 2\ 3 | 1 \rangle = [P_{(23)}^{<1>}]^{-1} = [1 - 2 - (2-1)]^{-1} = -1/2.$$

Для этой же транспозиции, но диаграммы  $<2>$  имеем другой диагональный элемент —

$$\langle 2 | 2\ 3 | 2 \rangle = [P_{(23)}^{<2>}]^{-1} = [2 - 1 - (1-2)]^{-1} = 1/2.$$

Недиагональные элементы равны между собой:

$$\langle 1 | 2\ 3 | 2 \rangle = \langle 2 | 2\ 3 | 1 \rangle = \{1 - [P_{(23)}^{<1>}]^2\}^{1/2} = \sqrt{3}/2.$$

Следовательно, матрица неприводимого представления  $E_2$  для

транспозиции (23) — она же выступает в роли одной из подстановок группы  $D_3$  — выглядит следующим образом:

$$(23) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Для транспозиции (12) имеем:

$$\langle 1 | 1 2 | 1 \rangle = 1, \langle 2 | 1 2 | 2 \rangle = -1, \langle 1 | 1 2 | 2 \rangle = \langle 2 | 1 2 | 1 \rangle = 0.$$

Соответствующая матрица равна:  $(23) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

Так как  $(13) = (32)(12)(23)$ ,  $(123) = (12)(13)$ ,  $(132) = (13)(12)$  после перемножения вычисленных матриц находим окончательно:

$$(13) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad (123) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad (132) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

### Представления группы квадрата

Перейдем к рассмотрению некоммутативной группы  $D_4^1$ . Она отвечает пространственному вращению квадрата (рис. 2.4б). Вращения описываются следующей системой преобразования координат:

$$\begin{array}{llll} \mathbf{e} = (0), & \mathbf{x}' = \mathbf{x}, & \mathbf{y}' = \mathbf{y}, & \mathbf{z}' = \mathbf{z}, \\ \mathbf{a} = (0123), & \mathbf{x}' = \mathbf{y}, & \mathbf{y}' = -\mathbf{x}, & \mathbf{z}' = \mathbf{z}, \\ \mathbf{a}^2 = (02)(13), & \mathbf{x}' = -\mathbf{x}, & \mathbf{y}' = -\mathbf{y}, & \mathbf{z}' = \mathbf{z}, \\ \mathbf{a}^3 = (0321), & \mathbf{x}' = -\mathbf{y}, & \mathbf{y}' = \mathbf{x}, & \mathbf{z}' = \mathbf{z}, \\ \mathbf{b} = (01)(23), & \mathbf{x}' = -\mathbf{x}, & \mathbf{y}' = \mathbf{y}, & \mathbf{z}' = -\mathbf{z}, \\ \mathbf{ab} = (13), & \mathbf{x}' = \mathbf{y}, & \mathbf{y}' = \mathbf{x}, & \mathbf{z}' = -\mathbf{z}, \\ \mathbf{a}^2\mathbf{b} = (03)(12), & \mathbf{x}' = \mathbf{x}, & \mathbf{y}' = -\mathbf{y}, & \mathbf{z}' = -\mathbf{z}, \\ \mathbf{a}^3\mathbf{b} = (02), & \mathbf{x}' = -\mathbf{y}, & \mathbf{y}' = -\mathbf{x}, & \mathbf{z}' = -\mathbf{z}, \end{array}$$

Все элементы  $D_4^1$  распадаются на пять классов эквивалентности:

$$C_0 = \{\mathbf{e}\}, \quad C_1 = \{\mathbf{a}^2\}, \quad C_2 = \{\mathbf{a}, \mathbf{a}^3\}, \quad C_3 = \{\mathbf{b}, \mathbf{a}^2\mathbf{b}\}, \quad C_4 = \{\mathbf{ab}, \mathbf{a}^3\mathbf{b}\}.$$

Число неприводимых представлений равно числу классов. Пользуясь критерием полноты набора неприводимых представлений (2.35), определим размерности пяти представлений:

$$\sum_{\alpha} n_{\alpha}^2 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2 = 8.$$



Таблица 2.48

$D_4^1$	$a$	$a^2$	$a^3$	$b$	$ab$	$a^2b$	$a^3b$
$E_0$	1	1	1	1	1	1	1
$E_1$	1	1	1	-1	-1	-1	-1
$E_2$	-1	1	-1	1	-1	1	-1
$E_3$	-1	1	-1	-1	1	-1	1
$E_4$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
$E_5$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Таблица 2.49

Неприводимые представления  $\{E_0, E_1, E_2, E_3, E_4\}$  приведены в табл. 2.48. Двухмерное представление  $E_4$  получается из преобразований координат для осей  $x$  и  $y$ ; одномерное  $E_1$  отвечает преобразованиям оси  $z$ ; минус единица представления  $E_3$  ставится для нечетных подстановок; строка для  $E_2$  записывается из соображений об ортогональности (2.30), когда известны три других одномерных представления. Помимо указанных пяти неприводимых представлений, в табл. 2.48 дано еще одно эквивалентное  $E_4$ , ортогональное, двухмерное представление  $E_5$ , полученное на базисе векторов, проведенных из центра координат к вершинам 0 и 3. Координаты вершин квадрата (рис. 2.2б) определяют базис для  $E_4$ :

$$\mathbf{0} = (1, 1), \quad \mathbf{1} = (1, -1), \quad \mathbf{2} = (-1, -1), \quad \mathbf{3} = (-1, 1).$$

В таблицу характеров (табл. 2.49), помимо неприводимых представлений, входят четыре приводимых:  $E_6$  – полученное на базисе  $x, y, z$ ;  $E_7$  – полученное на базисе  $\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}$ ;  $E_8 = E_4 \times E_4$ ;  $E_9$  – регулярное представление. Используя формулу (2.33), можно провести следующие разложения:

$$\begin{aligned} E_6 &= E_1 + E_4, & E_5 &= E_0 + E_1 + E_2 + E_3 + 2 \cdot E_4, \\ E_7 &= E_0 + E_3 + E_4, & E_8 &= E_0 + E_1 + E_2 + E_3. \end{aligned}$$

$D_4^{1,2}$	$C_0$	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$
$E_0$	1	1	1	1	1
$E_1$	1	1	1	-1	-1
$E_2$	1	1	-1	1	-1
$E_3$	1	1	-1	-1	1
$E_4$	2	-2	0	0	0
$E_5$	2	-2	0	0	0
$E_6$	3	-1	1	-1	-1
$E_7$	4	0	0	0	2
$E_8$	4	4	0	0	0
$E_9$	8	0	0	0	0

### Представления группы кватерниона

Из групп восьмого порядка осталась не рассмотренной группа кватерниона  $D_4^2$ . Если в качестве базиса взять векторы:

$$\mathbf{0} = (1, i), \quad \mathbf{2} = (i, 1), \quad \mathbf{4} = (1, -i), \quad \mathbf{6} = (-i, 1),$$

$$\mathbf{1} = (-1, -i), \quad \mathbf{3} = (-i, -1), \quad \mathbf{5} = (-1, i), \quad \mathbf{7} = (i, -1),$$

то они породят операционное множество, образующее двухмерное неприводимое представление:

$$e = (0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad -e = (01)(23)(45)(67) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$i = (0213)(4756) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad -i = (0312)(4657) = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix},$$

$$j = (0415)(2637) = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad -j = (0514)(2736) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

$$k = (0617)(2534) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad -k = (0716)(2435) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Группа кватерниона  $D_4^2$ , как и группа диэдра  $D_4^1$ , состоит из пяти классов —  $C_0 = \{e\}, C_1 = \{-e\}, C_2 = \{i, -i\}, C_3 = \{j, -j\}, C_4 = \{k, -k\}$ , следовательно, одномерные представления —  $E_0, E_1, E_2, E_3$  — у нее совпадают с предыдущим случаем (табл. 2.48).

В разделе, который называется «Геометрическая интерпретация групповых преобразований», нельзя не сказать о важнейшей интерпретации произведения двух кватернионов. Подобно тому, как произведению двух комплексных чисел —

$$z = \cos\varphi + i \sin\varphi = a + i b = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},$$

$$z' = \cos\varphi' + i \sin\varphi' = c + i d = \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix},$$

отвечают два последовательных поворота в плоскости  $x, iy$ :

$$\begin{aligned} Z = z z' &= (\cos\varphi + i \sin\varphi)(\cos\varphi' + i \sin\varphi') = \\ &= (a + i b)(c + i d) = (ac - bd) + i(ad + cb) = \\ &= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac - bd & -(ad + cb) \\ ad + cb & ac - bd \end{pmatrix} = \\ &= (ac - bd) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (ad + cb) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

произведению кватернионов соответствуют последовательные вращения в пространстве трех измерений.

Кватернион, как мы уже знаем, получается за счет удвоения комплексного числа или на базисных матрицах, которые могут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= \mathbf{z} + \mathbf{jz}' = (a + \mathbf{i}b) + \mathbf{j}(c + \mathbf{i}d) = a + \mathbf{i}b + \mathbf{j}c + \mathbf{k}d = \\ &= a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} \mathbf{i} & 0 \\ 0 & -\mathbf{i} \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{i} \\ \mathbf{i} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + \mathbf{i}c & -(b - \mathbf{i}d) \\ b + \mathbf{i}d & a - \mathbf{i}c \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Составим произведение двух кватернионов:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} = \mathbf{q} \mathbf{q}' &= (a + \mathbf{i}b + \mathbf{j}c + \mathbf{k}d)(a' + \mathbf{i}b' + \mathbf{j}c' + \mathbf{k}d') = \\ &= (aa' - bb' - cc' - dd') + a(\mathbf{i}b' + \mathbf{j}c' + \mathbf{k}d') + \\ &\quad + a'(\mathbf{i}b + \mathbf{j}c + \mathbf{k}d) + \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ b & c & d \\ b' & c' & d' \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Здесь скалярная часть произведения есть произведение скалярных частей множителей минус скалярное произведение их векторных частей. Векторная часть произведения состоит из суммы произведений скалярной части каждого множителя на векторную часть другого плюс произведение векторной части первого множителя на векторную часть второго. Таким образом, все существующие виды умножения в векторной алгебре являются осколками единой операции перемножения двух кватернионов.

Перемножение двух сопряженных кватернионов дает скаляр:

$$(a + \mathbf{i}b + \mathbf{j}c + \mathbf{k}d)(a - \mathbf{i}b - \mathbf{j}c - \mathbf{k}d) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

Кватернион с нормированными коэффициентами:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1,$$

можно представить через тригонометрические функции:

$$\mathbf{q} = \cos \varphi/2 + \sin \varphi/2(\mathbf{i} \cos \alpha + \mathbf{j} \cos \beta + \mathbf{k} \cos \gamma).$$

где  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  — углы между некоторым вектором  $\mathbf{p}$  и осями координат,  $\varphi$  — угол вращения вокруг  $\mathbf{p}$ .

Пространственное вращение, описываемое кватернионом  $\mathbf{q}$ , за которым следует вращение  $\mathbf{q}'$ , дает результирующее изменение ориентации, описываемое кватернионом  $\mathbf{Q}$ . Предположим, кватернион  $\mathbf{q}$  отвечает повороту вокруг оси  $x$  на угол  $\varphi = \pi/2$ , а  $\mathbf{q}'$  — точно на такой же угол, но вокруг оси  $y$ , что соответствует формулам:

$$\mathbf{q} = \cos \pi/4 + i \sin \pi/4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i), \quad \mathbf{q}' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + j).$$

Тогда результирующее вращение будет равно:

$$\mathbf{Q} = \cos \pi/3 + \sin \pi/3 \left[ \frac{1}{\sqrt{3}}(i + j - k) \right] = \frac{1}{2}(1 + i + j - k).$$

Таким образом, результирующее вращение происходит на угол  $2\pi/3$  вокруг вектора  $\mathbf{p}$  с направляющими косинусами, равными  $1/\sqrt{3}$ .

Известны другие формулы задания вращения в трехмерном пространстве. Так, матрица  $A$  в линейном преобразовании (2.1) может выглядеть либо так:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \cos \varphi \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \sin \varphi \begin{pmatrix} 0 & -\cos \gamma & \cos \beta \\ \cos \gamma & 0 & -\cos \alpha \\ -\cos \beta & \cos \alpha & 0 \end{pmatrix} + \\ + (1 - \cos \varphi) \begin{pmatrix} \cos^2 \alpha & \cos \alpha \cos \beta & \cos \alpha \cos \gamma \\ \cos \beta \cos \alpha & \cos^2 \beta & \cos \beta \cos \gamma \\ \cos \gamma \cos \alpha & \cos \gamma \cos \beta & \cos^2 \gamma \end{pmatrix},$$

и тогда взаимосвязь между параметрами вращения и матричными элементами будет такой:

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= 1/2(a_{11} + a_{22} + a_{33} - 1), \quad \cos \alpha = (1/2 \sin \varphi)(a_{32} - a_{23}), \\ \cos \beta &= (1/2 \sin \varphi)(a_{13} - a_{31}), \quad \cos \gamma = (1/2 \sin \varphi)(a_{21} - a_{12}); \\ a_{11} &= \cos \varphi + (1 - \cos \varphi) \cos^2 \alpha \quad \text{и т.д.;} \end{aligned}$$

либо через углы Эйлера  $\phi_1, \phi_2$  и  $\phi_3$ :

$$A = \begin{pmatrix} \cos \phi_1 & -\sin \phi_1 & 0 \\ \sin \phi_1 & \cos \phi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi_2 & 0 & \sin \phi_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi_2 & 0 & \cos \phi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi_3 & \sin \phi_3 & 0 \\ \sin \phi_3 & \cos \phi_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

и тогда

$$\cos \frac{\varphi}{2} = \cos \frac{\phi_1 + \phi_3}{2} \cos \frac{\phi_2}{2}, \quad a_{11} = \cos \phi_1 \cos \phi_2 \cos \phi_3 - \sin \phi_1 \sin \phi_3 \quad \text{и т.д.}$$

Если перемножить две матрицы  $A$  и  $B$ , то результирующая матрица  $C$  будет иметь вид исходных матриц сомножителей, т.е. закон замкнутости здесь тоже действует. В силу ассоциативности и существования обратных матриц можно говорить о бесконечных группах поворотов векторов в трехмерном пространстве.

**Октава и алгебра Клиффорда**

Введем удвоенные кватерниона, в результате чего получим *октаву*:

$$o = q_1 + E q_2 = (a + ib + jc + kd) + E(A + iB + jC + kD) = \\ = a + ib + jc + kd + EA + IB + JC + KD.$$

Закон умножения базисных единиц октавы будет задаваться табл. 2.50 (она задает умножения только для положительных базисных единиц). Для октав перестает выполняться закон ассоциативности:

$$(ij)E \neq i(jE), \text{ так как } (ij)E = K, \text{ а } i(jE) = -K,$$

поэтому базисные единицы октавы уже не образуют группы.

**Таблица 2.50**

В квантовой физике часто приходится иметь дело с *матрицами Паули*, которые в математике называются *спинорами*:

$$s_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad s_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ s_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad s_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1	<i>i</i>	<i>j</i>	<i>k</i>	<i>E</i>	<i>I</i>	<i>J</i>	<i>K</i>
<i>i</i>	-1	<i>k</i>	- <i>j</i>	<i>I</i>	- <i>E</i>	- <i>K</i>	<i>J</i>
<i>j</i>	- <i>k</i>	-1	<i>i</i>	<i>J</i>	<i>K</i>	- <i>E</i>	- <i>I</i>
<i>k</i>	<i>j</i>	- <i>i</i>	-1	<i>K</i>	- <i>J</i>	<i>I</i>	- <i>E</i>
<i>E</i>	- <i>I</i>	- <i>J</i>	- <i>K</i>	-1	<i>i</i>	<i>j</i>	<i>k</i>
<i>I</i>	<i>E</i>	- <i>K</i>	<i>J</i>	- <i>i</i>	-1	- <i>k</i>	<i>j</i>
<i>J</i>	<i>K</i>	<i>E</i>	- <i>I</i>	- <i>j</i>	<i>k</i>	-1	- <i>i</i>
<i>K</i>	- <i>J</i>	<i>I</i>	<i>E</i>	- <i>k</i>	- <i>j</i>	<i>i</i>	-1

Существует простая связь между спинорами и матрицами базисных единиц кватерниона:

$$i = is_2 = s_1s_3, \quad j = is_3 = s_2s_1, \quad k = is_1 = s_3s_2.$$

Закон ассоциативности для матриц Паули выполняется:

$$s_1(s_2s_3) = (s_1s_2)s_3 = -i.$$

Однако группы эти базисные единицы тоже не образуют, поскольку нарушен закон замкнутости. Тем не менее, на них можно построить любопытный математический объект — *алгебра Клиффорда*.

Алгебра Клиффорда на матрицах Паули представляет собой числовой агрегат следующего вида:

$$A = a_0s_0 + a_1s_1 + a_2s_2 + a_3s_3 + a_{12}s_1s_2 + a_{23}s_2s_3 + a_{31}s_3s_1 + a_{123}s_1s_2s_3.$$

В состав агрегата *A* входит один *скаляр*, три *вектора*, три *бивектора* и один *тривектор* (или *псевдоскаляр*). При перемножении таких агрегатов, в силу условий для спиноров  $s_i s_j + s_j s_i = 0$  и  $s_i^2 = 1$ , будут возникать два типа умножения базисных единиц — *внутрен-*

нее и внешнее. Внутреннее произведение (его еще называют *скалярным*) возникает тогда, когда  $s_i$  входит в базисную единицу  $n$ -вектора  $s_1 s_2 \dots s_n$ , например:

$$s_2 \cdot s_1 s_2 s_3 = s_2 s_1 s_2 s_3 = -s_1 s_2 s_2 s_3 = -s_1 s_3,$$

в результате чего, если говорить об общем случае,  $n$ -вектор переходит в  $(n - 1)$ -вектор; а внешнее, или *векторное*, когда  $s_i$  не входит в  $s_1 s_2 \dots s_n$ , например:  $s_2 \times s_1 s_3 = s_2 s_1 s_3 = -s_1 s_2 s_3$ , и тогда  $n$ -вектор переходит в  $(n + 1)$ -вектор. Поскольку путаницы между этими произведениями не возникает, их можно не различать специальными символами « $\cdot$ » и « $\times$ ». Так, при перемножении двух векторов —

$$s = u s_1 + v s_2 + w s_3 = \begin{pmatrix} w & u + iv \\ u - iv & -w \end{pmatrix},$$

$$s' = u' s_1 + v' s_2 + w' s_3 = \begin{pmatrix} w' & u' + iv' \\ u' - iv' & -w' \end{pmatrix},$$

возникает скаляр и бивектор —

$$S = ss' = (uu' + vv' + ww') + \begin{pmatrix} s_2 s_3 & s_3 s_1 & s_1 s_2 \\ u & v & w \\ u' & v' & w' \end{pmatrix}.$$

### Представления диэдров 5-го и 6-го порядков

Перейдем от геометрической интерпретации умножения  $z$ ,  $q$  и  $s$  к представлениям некоммутативной группы десятого порядка  $D_5^1$ . Она имеет четыре класса —

$$C_0 = \{e\}, C_1 = \{a, a^4\}, C_2 = \{a^2, a^3\}, C_3 = \{b, ab, a^2b, a^3b\}.$$

Здесь существует два одномерных и два двухмерных представления. Характеристики этих представлений помещены в табл. 2.51. Если принять, что

$$p = \cos(2\pi/5) = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}, \quad q = \cos(4\pi/5) = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4},$$

$$r = \sin(2\pi/5), \quad s = \sin(4\pi/5).$$

то базисными векторами для неприводимого представления  $E_2$  могут служить вершины правильного пятиугольника (рис. 2.5):

$$0 = (1, 0), \quad 1 = (p, r), \quad 2 = (q, s), \quad 3 = (q, -s), \quad 4 = (p, -r).$$

Эти векторы вращаются под действием матриц представления  $E_2$  в

соответствии с подстановками:

$$\mathbf{a} = (01234) = \begin{pmatrix} p & -r \\ r & p \end{pmatrix}, \mathbf{a}^2 = (02413) = \begin{pmatrix} q & -s \\ s & q \end{pmatrix}, \mathbf{a}^3 = (3142) = \begin{pmatrix} q & s \\ -s & q \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{a}^4 = (04321) = \begin{pmatrix} p & r \\ -r & p \end{pmatrix}, \mathbf{b} = (14)(23) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}^4 \mathbf{b} = (01)(24) = \begin{pmatrix} p & r \\ r & -p \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{a}^3 \mathbf{b} = (02)(34) = \begin{pmatrix} q & s \\ s & -q \end{pmatrix}, \mathbf{a}^2 \mathbf{b} = (03)(12) = \begin{pmatrix} q & -s \\ -s & -q \end{pmatrix}, \mathbf{a} \mathbf{b} = (04)(13) = \begin{pmatrix} p & -r \\ -r & -p \end{pmatrix},$$

Таблица 2.51

Проведем через середины сторон правильного пятиугольника перпендикуляры, получим новую систему векторов:

$$\mathbf{0} = (-q, s), \mathbf{1} = (-1, 0), \mathbf{2} = (-q, -s),$$

$$\mathbf{3} = (-p, r), \mathbf{4} = (-p, -r).$$

Они могут служить базой для ортогонального представления  $E_3$ :

$D_5^1$	$C_0$	$C_1$	$C_2$	$C_3$
$E_0$	1	1	1	1
$E_1$	1	1	1	-1
$E_2$	2	$2 \cdot p$	$2 \cdot q$	0
$E_3$	2	$2 \cdot q$	$2 \cdot p$	0

$$\mathbf{e} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} p & r \\ r & -p \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}^2 \mathbf{b} = \begin{pmatrix} q & s \\ s & -q \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} q & -s \\ s & q \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} p & -r \\ -r & -p \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}^3 \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{a}^2 = \begin{pmatrix} p & r \\ -r & p \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}^3 = \begin{pmatrix} p & -r \\ r & p \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}^4 = \begin{pmatrix} q & s \\ -s & q \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}^4 \mathbf{b} = \begin{pmatrix} q & -s \\ -s & -q \end{pmatrix}.$$

Из пяти групп двенадцатого порядка три некоммутативных. Начнем с анализа группы диэдра  $D_6^1$ . Она содержит шесть классов эквивалентности:  $C_0 = \{\mathbf{e}\}$ ,  $C_1 = \{\mathbf{a}^3\}$ ,  $C_2 = \{\mathbf{a}, \mathbf{a}^5\}$ ,  $C_3 = \{\mathbf{a}^2, \mathbf{a}^4\}$ ,

$$C_4 = \{\mathbf{b}, \mathbf{a}^2 \mathbf{b}, \mathbf{a}^4 \mathbf{b}\}, C_5 = \{\mathbf{a} \mathbf{b}, \mathbf{a}^3 \mathbf{b}, \mathbf{a}^5 \mathbf{b}\}.$$

Следовательно, для нее существует четыре одномерных и два двухмерных представления (табл. 2.52), причем одно из них ( $E_4$ ) гомоморфное, другое ( $E_5$ ) изоморфное.

Базисом для представления  $E_5$  служат векторы, проведенные из начала координат к вершинам шестиугольника (рис. 2.6):

$$\mathbf{0} = (1, 0), \quad \mathbf{1} = (1/2, \sqrt{3}/2), \quad \mathbf{2} = (-1/2, \sqrt{3}/2),$$

$$\mathbf{3} = (-1, 0), \quad \mathbf{4} = (-1/2, -\sqrt{3}/2), \quad \mathbf{5} = (1/2, -\sqrt{3}/2).$$

Пусть образующими будут  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b} = (15)(24) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ , тогда  $E_5$ :

$$\begin{aligned}
 a = (012345) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, & a^2 = (024)(135) &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \\
 a^3 = (03)(14)(25) &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, & a^4 = (042)(153) &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \\
 a^3 b = (03)(12)(45) &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & a^5 = (054321) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \\
 ab = (05)(14)(23) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, & a^4 b = (02)(35) &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \\
 a^2 b = (04)(13) &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, & a^5 b = (01)(25)(34) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Таблица 2.52

$D_6^{1,2}$	$C_0$	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	$C_5$
$E_0$	1	1	1	1	1	1
$E_1$	1	1	1	1	-1	-1
$E_2$	1	-1	-1	1	1	-1
$E_3$	1	-1	-1	1	-1	1
$E_4$	2	2	-1	-1	0	0
$E_5$	2	-2	1	-1	0	0

Базисом для гомоморфного представления  $E_4$  служат перпендикуляры, проведенные из начала координат к серединам сторон шестиугольника. Имеется только три таких прямых, каждую из которых мы обозначим двумя индексами:

$$\{0, 3\} = (\sqrt{3}/2, 1/2), \quad \{2, 5\} = (-\sqrt{3}/2, 1/2), \quad \{1, 4\} = (0, -1).$$

Операционное множество  $E_4$  тоже сократится вдвое:

$$\begin{aligned}
 \{e, a^3\} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & \{a, a^4\} &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \\
 \{a^2, a^5\} &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, & \{b, a^3 b\} &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$



$$\{ab, a^4b\} = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}, \quad \{a^2b, a^5b\} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Группа  $D_6^2$  отличается от  $D_6^1$  тем, что вместо шести элементов с периодом 2 появляются шесть элементов с периодом 4. Отличная от  $D_6^1$  часть операционного множества  $D_6^2$  изоморфного представления  $E_5$  выглядит следующим образом:

$$ab = (073A)(184B)(2956) = \begin{pmatrix} i/2 & -i\sqrt{3}/2 \\ -i\sqrt{3}/2 & -i/2 \end{pmatrix},$$

$$a^2b = (083B)(1946)(2A57) = \begin{pmatrix} -i/2 & -i\sqrt{3}/2 \\ -i\sqrt{3}/2 & i/2 \end{pmatrix},$$

$$a^4b = (0A37)(1B48)(2659) = \begin{pmatrix} -i/2 & -i\sqrt{3}/2 \\ -i\sqrt{3}/2 & i/2 \end{pmatrix},$$

$$a^3b = (0936)(1A47)(2B58) = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad b = (0639)(174A)(285B) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$

$$a^5b = (0B38)(1649)(275A) = \begin{pmatrix} i/2 & i\sqrt{3}/2 \\ i\sqrt{3}/2 & i/2 \end{pmatrix}.$$

Гомоморфное представление  $E_4: \{a^2b, a^5b\} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$ ,

$$\{b, a^3b\} = \begin{pmatrix} i/2 & i\sqrt{3}/2 \\ i\sqrt{3}/2 & -i/2 \end{pmatrix}, \quad \{ab, a^4b\} = \begin{pmatrix} i/2 & -i\sqrt{3}/2 \\ -i\sqrt{3}/2 & -i/2 \end{pmatrix}.$$

Дополнительными базисными векторами для представлений  $E_4$  и  $E_5$  группы  $D_6^2$  являются первые столбцы приведенных матриц.

### Представления групп тетраэдра, куба и икосаэдра

Группа *тетраэдра*  $T$  отличается от двух рассмотренных групп 20-го порядка. Характеры 4-х представлений выписаны в табл. 2.53.

Таблица 2.53

$D_6^1$	$C_0$	$C_1$	$C_2$	$C_3$
$E_0$	1	1	1	1
$E_1$	1	1	$\omega$	$\omega^2$
$E_2$	1	1	$\omega^2$	$\omega$
$E_3$	3	-1	0	0

Рассмотрим трехмерное представление  $E_3$ , базисом которого являются векторы:

$$\mathbf{0} = (-1/3, -\sqrt{2}/3, -\sqrt{6}/3),$$

$$\mathbf{1} = (-1/3, -\sqrt{2}/3, \sqrt{6}/3),$$

$$\mathbf{2} = (-1/3, -2\sqrt{2}/3, 0), \quad \mathbf{3} = (1, 0, 0).$$

Классы сопряженности группы тетраэдра  $T$ :

$$C_0 = \{e\}, \quad C_1 = \{ab, ba, ab^2a\}, \quad C_2 = \{a, b^2, a^2b, ba^2\}, \quad C_3 = \{a^2, b, ab^2, b^2a\}.$$

В представлениях  $E_1$  и  $E_2$  участвуют кубические корни из единицы —  $\{1, \omega, \omega^2\}$ , представление  $E_3$  состоит из двенадцати матриц:

$$a = (012) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}, \quad a^2 = (021) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix},$$

$$b = (123) = \begin{pmatrix} -1/3 & \sqrt{8}/3 & 0 \\ -\sqrt{8}/3 & -1/6 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{6}/3 & \sqrt{3}/6 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad b^2 = (132) = \begin{pmatrix} -1/3 & -\sqrt{8}/3 & \sqrt{6}/3 \\ \sqrt{8}/3 & -1/6 & \sqrt{3}/6 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix},$$

$$ab = (02)(13) = \begin{pmatrix} -1/3 & -\sqrt{2}/3 & \sqrt{6}/3 \\ -\sqrt{2}/3 & -2/3 & -\sqrt{3}/3 \\ \sqrt{6}/3 & -\sqrt{3}/3 & 0 \end{pmatrix}, \quad ba = (01)(23) = \begin{pmatrix} -1/3 & \sqrt{8}/3 & 0 \\ \sqrt{8}/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$ab^2a = (03)(12) = \begin{pmatrix} -1/3 & -\sqrt{2}/3 & -\sqrt{6}/3 \\ -\sqrt{2}/3 & -2/3 & \sqrt{3}/3 \\ -\sqrt{6}/3 & \sqrt{3}/3 & 0 \end{pmatrix}, \quad a^2b = (031) = \begin{pmatrix} -1/3 & -\sqrt{2}/3 & -\sqrt{6}/3 \\ -\sqrt{2}/3 & 5/6 & -\sqrt{3}/6 \\ \sqrt{6}/3 & \sqrt{3}/6 & -1/2 \end{pmatrix},$$

$$ba^2 = (023) = \begin{pmatrix} -1/3 & \sqrt{8}/3 & 0 \\ -\sqrt{8}/3 & -1/6 & -\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{6}/3 & -\sqrt{3}/6 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad ab^2 = (032) = \begin{pmatrix} -1/3 & -\sqrt{8}/3 & -\sqrt{6}/3 \\ \sqrt{8}/3 & -1/6 & -\sqrt{3}/6 \\ 0 & -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix},$$

$$e = (0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b^2a = (013) = \begin{pmatrix} -1/3 & -\sqrt{2}/3 & \sqrt{6}/3 \\ -\sqrt{2}/3 & 5/6 & \sqrt{3}/6 \\ -\sqrt{6}/3 & -\sqrt{3}/6 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Представление  $E_0$  — единичное;  $E_1$  и  $E_2$  — гомоморфные, возникшие благодаря наличию в группе тетраэдра  $T$  нормального делителя

$N = \{e, ab, ba, ab^2a\}$  типа  $C_2^2$ . Соответствие между классами и представлениями здесь такое:  $E_0 \leftrightarrow C_0, E_1 \leftrightarrow C_2, E_2 \leftrightarrow C_3, E_3 \leftrightarrow C_1$ . Таким образом, на первый взгляд возникла необычная ситуация: класс коммутативных элементов  $C_1$  породил изоморфное некоммутативное представление  $E_3$ , а два смежных класса некоммутативных элементов  $C_2$  и  $C_3$  отвечают двум коммутативным представлениям  $E_1$  и  $E_2$ . Станным кажется и то, что восемь внешне одинаковых 3-цикла распались на два различных класса эквивалентности.

Тетраэдр, который изображен на рис. 2.9, складывается из четырех равносторонних треугольников. Следовательно, он имеет четыре граневых оси третьего порядка, совпадающих с его вершинными осями, и три реберных оси второго порядка. Граневые оси дадут 8 элементов симметрии, вершинные — 3; добавив сюда один тождественный элемент, мы как раз и получим 12 элементов симметрии для этой геометрической фигуры.

Некоммутативную группу вращений тетраэдра ( $T$ ) можно получить путем перемножения элементов двух коммутативных —  $C_3$  и  $C_2^2$  — с образующими:  $a = (012), x = (01)(23), y = (02)(13)$ ; при перемножении  $C_3 \cdot C_2^2$  будем иметь

$$\begin{aligned} T &= \{e, a, a^2\} \cdot \{e, x, y, xy\} \stackrel{=}{=} \\ &= \{e, a, a^2, x, y, xy, ax, a^2x, ay, a^2y, axy, a^2xy\}. \end{aligned}$$

С геометрической точки зрения, рассмотренная группа симметрии тетраэдра  $T$  не является полной. Ее можно увеличить в два раза, если произвести умножение группы тетраэдра  $T = C_3 \cdot C_2^2$  на группу  $C_2 = \{e, z\}$ , где в качестве образующего  $z$  выбрать транспозицию  $(01)$ . Группа  $C_2$  будет отвечать плоскости зеркальной симметрии, проходящей через две вершины  $(2, 3)$  и середину ребра  $(0, 1)$  (см. рис. 2.9). Эта зеркальная плоскость за счет осей симметрии размножится на шесть (по числу ребер), что приведет к появлению шести различных транспозиций. Комбинируя эти транспозиции между собой, получим еще шесть циклических подстановок четвертого порядка. Полная группа симметрии тетраэдра  $T_d$  будет состоять из 24-х элементов симметрии, которые приведены в табл. 2.54.

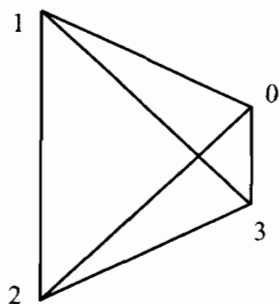


Рис. 2.9

Тетраэдр можно вписать в куб (рис. 2.10), который имеет 6 квадратных граней с тремя осями четвертого порядка, 8 вершин с четырьмя осями третьего порядка и 6 реберных осей второго порядка. Таким образом, группа вращений куба (октаэдра)  $O$  складывается из следующих операций: вокруг каждой вершинной оси имеется два нетождественных поворота, до полного совмещения всех геометрических элементов куба; вокруг каждой граневой оси также имеется по три нетождественных поворота; наконец, существует по одному повороту вокруг реберных осей. После того, как мы добавим один тождественный поворот, получится полная группа вращений куба, в состав которой тоже входит 24 элемента, т.е. полная (с отражениями) группа симметрии тетраэдра  $T$  изоморфна группе вращений куба  $O$ . Добавим к сказанному, что в кубе, как и в тетраэдре, можно провести зеркальные плоскости, а также ввести центр симметрии, тогда число элементов в группе куба возрастет до 48.

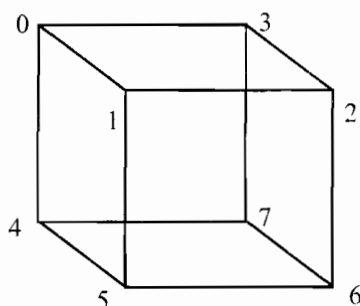


Рис. 2.10

Если пространственные диагонали куба пронумеровать числами от 0 до 3, вершины куба — от 0 до 7, как показано на рис. 2.10, а грани куба — числами от 0 до 5 (причем грань 0123 как 0, 4567 как 1, 1256 как 2, 2367 как 3, 0347 как 4 и 0145 как 5), то будем иметь три системы изоморфных подстановок —  $O(4)$ ,  $O(6)$ ,  $O(8)$ . Подстановки можно получить многими способами, в частности, как умножение группы тетраэдра ( $T$ ) на одну из 6

циклических подстановок четвертого порядка ( $u$ ), или как различные произведения двух образующих  $a$  и  $b$ . Упомянутые элементы симметрии приведены в табл. 2.54, в которой принято:  $\underline{a} = a^{-1}$  и  $\underline{b} = b^{-1}$ . Характеры пяти представлений полной группы симметрии тетраэдра  $T_d$  (группы вращений куба  $O$ ) приведены в табл. 2.55. Образующими гомоморфного представления  $E_2$  являются:

$$a = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Образующие изоморфного представления  $E_3$  —

$$a = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{8}}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{6} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix};$$

и образующие изоморфного представления  $E_4$  —

$$a = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{6} & \frac{\sqrt{8}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таблица 2.54

№	$T_d, O(4)$	$O(6)$	$O(8)$	$a, b$	$a, x, y, u$	$C_i$	
0	(0)	(0)	(0)	$e$	$e$	$C_0$	
1	(01)(23)	(01)(35)	(07)(16)(25)(34)	$\underline{baba}$	$x$	$C_1$	
2	(02)(13)	(24)(35)	(02)(13)(46)(57)	$a^2$	$y$		
3	(03)(12)	(01)(24)	(05)(14)(27)(36)	$\underline{baba}$	$xy$		
4	(012)	(043)(125)	(072)(146)	$\underline{b}$	$a$	$C_2$	
5	(021)	(034)(152)	(027)(164)	$\underline{b}$	$a^2$		
6	(123)	(054)(132)	(143)(257)	$\underline{babab}$	$a^2y$		
7	(132)	(045)(123)	(134)(275)	$\underline{babab}$	$ax$		
8	(023)	(025)(143)	(025)(364)	$\underline{babab}$	$axy$		
9	(032)	(052)(134)	(052)(346)	$\underline{babab}$	$a^2y$		
A	(013)	(032)(154)	(075)(136)	$a^2b$	$a^2xy$		
B	(031)	(023)(145)	(057)(163)	$\underline{ba^2}$	$ay$		
C	(0123)	(2345)	(0123)(4567)	$\underline{a}$	$u$		$C_3$
D	(0321)	(2543)	(0321)(4765)	$\underline{a}$	$uy$		
E	(0213)	(0513)	(0473)(1562)	$\underline{ba}$	$ua^2y$		
F	(0312)	(0315)	(0374)(1265)	$\underline{ab}$	$ua^2xy$		
G	(0132)	(0214)	(0154)(2673)	$\underline{ba}$	$uaxy$		
H	(0231)	(0412)	(0451)(2376)	$\underline{ab}$	$ua$		
I	(23)	(01)(25)(34)	(06)(17)(23)(45)	$\underline{ab}$	$ua^2$	$C_4$	
J	(13)	(03)(12)(45)	(06)(15)(24)(37)	$\underline{ababa}$	$ux$		
K	(12)	(02)(14)(35)	(06)(12)(35)(47)	$\underline{aba^2}$	$uay$		
L	(03)	(04)(12)(35)	(03)(17)(24)(56)	$\underline{ba}$	$uax$		
M	(02)	(01)(23)(45)	(04)(17)(26)(35)	$\underline{baba^2}$	$uxy$		
N	(01)	(05)(13)(24)	(01)(24)(35)(67)	$\underline{a^2ba}$	$ua^2y$		

Напомним, что группа  $T_d$  относится к симметрической —  $S_4$ , поэтому к ней применима методика диаграмм Юнга, которая использовалась нами для нахождения матриц неприводимых представле-

ний группы  $S_3 \cong D_3$ , а также для определения размерности неприводимых представлений  $S_4$  (рис. 2.8).

Таблица 2.55

$T_d$	$C_0$	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$
$E_0$	1	1	1	1	1
$E_1$	1	1	1	-1	-1
$E_2$	2	2	-1	0	0
$E_3$	3	-1	0	-1	1
$E_4$	3	-1	0	1	-1

Таблицу характеров для представлений полной группы симметрии куба  $O_d$  можно получить путем учетверения табл. 2.55, т.е. использовать методику, которая применялась для составления таблиц характеров коммутативных групп  $C_2^3$  (табл. 2.44) и  $C_2C_4$  (табл. 2.45).

Перейдя от группы вращений тетраэдра  $T$  12-го порядка к полной группе тетраэдра  $T_d$  24-го порядка, мы, конечно, пропустили множество интересных групп, о которых необходимо сказать хотя бы несколько слов. На примере циклической группы 13-го порядка мы сделаем одно существенное замечание к матричным представлениям. Дело в том, что представления необязательно должны быть ортонормированными. Во вступительном п. 2.1 для представления группы  $D_3$  использовались матрицы с элементами, рассчитанными по mod (2), а для коммутативной группы  $C_6$  — по mod (3). Следующие 12 матриц (без единичной) с элементами из целых чисел, взятых по mod (3), вполне *представляют* коммутативную группу  $C_{13}$ :

$$\left( \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right), \left( \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right), \left( \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right), \left( \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right), \left( \begin{array}{ccc} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array} \right), \left( \begin{array}{ccc} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{array} \right),$$

$$\left( \begin{array}{ccc} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{array} \right), \left( \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{array} \right), \left( \begin{array}{ccc} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{array} \right), \left( \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{array} \right), \left( \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{array} \right), \left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

Эти матрицы интересны тем, что все они симметричны относительно неглавной (второй) диагонали. Однако никакого геометрического содержания в приведенных матрицах не заключено.

Ортонормированные представления любой диэдральной группы имеют вполне определенный геометрический смысл, поскольку группе диэдра можно поставить в соответствие действия над *дипирамидами*. Группа диэдра 14-го порядка здесь не является исключением. Неприводимые представления группы  $D_7^1$  отличаются от ана-

логичных для группы  $D_3^1$  (табл. 2.51) наличием третьего двухмерного представления  $E_4$ . Характеры представлений приведены в табл. 2.56, в которой константами  $c_i$  обозначены косинусы углов:

$$c_1 = \cos(2\pi/7) \cong 0.6234, \quad c_2 = \cos(4\pi/7) \cong -0.2224, \\ c_3 = \cos(6\pi/7) \cong -0.9017.$$

Представления двух групп 16-го порядка  $D_8^1$  и  $D_8^2$  с одинаковыми таблицами характеров (табл. 2.57) строятся во многом по аналогии с представлениями групп  $D_6^1$  и  $D_6^2$ .

Таблица 2.56

$D_7^1$	$C_0$	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$
$E_0$	1	1	1	1	1
$E_1$	1	1	1	1	-1
$E_2$	2	$2 \cdot c_1$	$2 \cdot c_2$	$2 \cdot c_3$	0
$E_3$	2	$2 \cdot c_3$	$2 \cdot c_1$	$2 \cdot c_2$	0
$E_4$	2	$2 \cdot c_2$	$2 \cdot c_3$	$2 \cdot c_1$	0

Таблица 2.57

$D_8^{1,2}$	$C_0$	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	$C_5$	$C_6$
$E_0$	1	1	1	1	1	1	1
$E_1$	1	1	1	1	1	-1	-1
$E_2$	1	1	-1	1	-1	-1	1
$E_3$	1	1	-1	1	-1	1	-1
$E_4$	2	2	0	-2	0	0	0
$E_5$	2	-2	$\sqrt{2}$	0	$-\sqrt{2}$	0	0
$E_6$	2	-2	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	0	0

Таблицы характеров двух других групп 16-го порядка, типа  $C_2 D_4^1$  и  $C_2 D_4^2$ , получаются путем учетверения таблицы характеров для групп  $D_4^1$  и  $D_4^2$  (табл. 2.48). Для группы  $D_8^3$  16-го порядка двухмерное изоморфное представление уже заметно отличается от всех ранее рассмотренных; его образующими являются матрицы:

$$a = \begin{pmatrix} i/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} \\ -i/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Геометрический смысл для группы  $D_8^3$  все еще сохраняется, поскольку базисные векторы (первые столбцы матриц) могут быть вычерчены в геометрическом пространстве с мнимой осью. Завершим рассмотрение симметрии геометрических фигур *икосаэдром*.

Икосаэдр (рис. 2.11) имеет 20 треугольных граней, 30 ребер и 12 вершин, в каждой из которых сходятся по 5 ребер. Отсюда, очевидно, вытекает наличие у него 6 вершинных осей пятого порядка, 10 граневых осей третьего порядка и 15 реберных осей второго поряд-

ка. Несложный подсчет дает нам 60 элементов вращения. Группу симметрии икосаэдра ( $Y$ ) можно получить, перемножая элементы группы вращений тетраэдра ( $T$ ) на одну из циклических подстановок пятого порядка. Точно так же, как в группах тетраэдра и куба, число элементов симметрии икосаэдра удваивается за счет введения зеркальных отражений и центра симметрии. Напомним, что если центры граней правильных многогранников принять за вершины новых многогранников, то в тетраэдр, куб и икосаэдр можно вписать соответственно *сопряженные* тетраэдр, октаэдр и додекаэдр. Построенные таким образом геометрические фигуры относительно исходных называются *двойственными*. «Двойники» имеют ту же группу симметрии и систему подгрупп, что и исходные фигуры. *Тетраэдр, гексаэдр (куб), октаэдр, икосаэдр и додекаэдр* образуют пять *Платоновых тел*. Платон в своем сочинении *Тимей* атомам пяти элементов — *огню, воздуху, воде, земле и эфиру* — приписал форму этих пяти фигур.

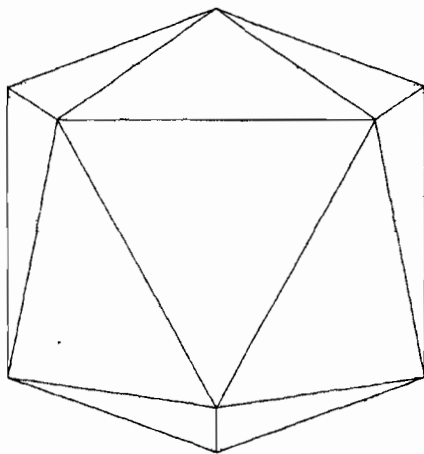


Рис. 2.11

Группа вращений икосаэдра  $Y$  не имеет *нормальных делителей*, т.е. в  $Y$  нет подгрупп, куда бы входили полные классы сопряженности. Если утверждается, что группа *проста*, значит, все ее представления будут *изоморфными*, одномерных представлений не будет, за исключением единичного  $E_0$  (табл. 2.58). (Константы  $p$  и  $q$  в табл. 2.58 те же, что и в табл. 2.51.) Критерий

полноты набора неприводимых представлений дает единственно возможное разложение числа 60:

$$60 = 1^2 + 3^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 1 + 12 + 12 + 20 + 15.$$

Клейн утверждает, что вращения икосаэдра периода 5 распадутся на два класса, в одном из которых окажутся повороты на угол  $\pm 2\pi/5$ , в другом — на угол  $\pm 4\pi/5$ . Теперь спросим себя: каким образом 24 подстановки «догадались» тоже разделиться на два класса по 12 подстановок в каждом; ведь подстановки ничего не «знали» о



существовании икосаэдра? Тем не менее, обыкновенная процедура преобразования подобия приводит к тому, что одна часть 5-циклов попадает в класс  $C_3$ , другая — в класс  $C_4$  (табл. 2.59). Следовательно, индексы подстановок удивительным образом обладают одинаковыми свойствами с вершинами, диагоналями и другими деталями икосаэдра. Оказывается, что в столь разнородные объекты, каковыми являются подстановки и геометрические фигуры, поселился один и тот же дух симметрии.

Таблица 2.58

$Y$	$C_0$	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$
$E_0$	1	1	1	1	1
$E_1$	3	-1	0	-2·p	-2·q
$E_2$	3	-1	0	-2·q	-2·p
$E_3$	4	0	1	-1	-1
$E_4$	5	1	-1	0	0

Таблица 2.59

Подстановки группы икосаэдра $Y (A_4)$				$C_i$
(02)(34)	(04)(12)	(14)(23)	(0)	$C_0$
(23)(04)	(01)(24)	(24)(03)	(02)(14)	$C_1$
(14)(03)	(02)(13)	(01)(34)	(03)(12)	
(12)(34)	(13)(04)	(01)(23)	(13)(24)	$C_2$
(024)	(042)	(013)	(031)	
(143)	(043)	(124)	(142)	
(134)	(034)	(014)	(041)	
(243)	(132)	(032)	(021)	
(234)	(123)	(023)	(012) <sup>*</sup>	
(01324)	(04231)	(03142)	(02413)	$C_3$
(04312)	(02134)	(03214)	(04123)	
(01243)	(03421)	(02341)	(01432)	
(01234)	(04321)	(02143)	(03412)	$C_4$
(03124)	(04213)	(01342)	(02431)	
(01423)	(03241)	(02314)	(04132)	

И все-таки не настолько уж они единосущностны, как это может показаться вначале. Стоит ввести для икосаэдра плоскости симметрии, как тут же обнаруживается расхождение его симметрии с симметрией 120 подстановок, переставляющих всеми возможными способами 5 индексов, т.е. с симметрией группы  $S_5$ . Полная (с отражениями) группа симметрии икосаэдра не содержит в своем составе

инвариантной подгруппы  $C_2$ , хотя подгруппа такого порядка там имеется. Геометрическая интерпретация есть проведение аналогии. Но всякое сравнение имеет свои границы: то, что справедливо для тетраэдра и икосаэдра как фигур вращения, уже неверно для них как фигур с элементами отражения.

Подгруппу четных подстановок в симметрической группе  $S_n$  часто называют *знакопеременной* и обозначают как  $A_n$ . У нас получилось следующее: знакопеременная подгруппа  $A_4$  четных подстановок изоморфна группе вращения тетраэдра  $T$ ; полная группа симметрических подстановок  $S_4$  изоморфна полной группе симметрии тетраэдра  $T_d$ , т.е. переходы  $A_4 \rightarrow S_4$  и  $T \rightarrow T_d$  эквивалентны. Что же касается икосаэдра, то здесь наблюдается иная картина: знакопеременная подгруппа  $A_5$  четных подстановок также изоморфна группе вращений икосаэдра  $Y$ , но полная группа симметрических подстановок  $S_5$  уже не изоморфна полной группе симметрии икосаэдра  $Y_d$ , т.е. переходы  $A_5 \rightarrow S_5$  и  $Y \rightarrow Y_d$  не эквивалентны. Судя по описанию симметрии икосаэдра, сделанному Клейном, такое различие довольно трудно уловить человеческим воображением.

### 2.3. Групповые решетки из подгрупп

#### Отношение порядка

В этом подразделе мы продолжим *морфологический анализ групп*, но теперь уже с заметным упором на *отношение порядка*, которое, прежде всего, реализуется в словах «быть подгруппой» или, более развернуто, «совокупность элементов  $G_1$  образует подгруппу в группе  $G_2$ ». Естественно, подгруппа  $G_1$  включена в группу  $G_2$ , однако *отношение включения* является слишком широким, а значит и более бедным понятием, чем *быть подгруппой*. Оно больше подходит к *аморфным множествам*, о которых речь впереди, хотя любое отношение порядка определяется через три закона: *рефлексивности*, *антисимметричности* и *транзитивности*. Для отношения *быть подгруппой* все три закона выполняются. Закон *рефлексивности* выполняется постольку, поскольку всякая группа  $G$  является *несобственной подгруппой* группы  $G$ . Закон *антисимметричности* также выполняется, так как если  $G_1$  является подгруппой  $G_2$  и  $G_2$  является подгруппой  $G_1$ , то группы  $G_1$  и  $G_2$  *изоморфны*. Наконец, для подгрупп справедлив и закон *транзитивности*: если  $G_1$  является подгруппой  $G_2$  и  $G_2$  является подгруппой  $G_3$ , то  $G_1$  непременно будет подгруппой  $G_3$ .

Подгруппы  $G_1, G_2, G_3$  и т.д. образуют узлы, а отношения типа « $G_1$  является подгруппой  $G_2$ » — связи между узлами  $G_1$  и  $G_2$ . Узлы и связи вместе составляют *решетку* или *структуру* подгрупп группы  $G$ , которая обозначается  $S(G)$ . Две *несобственных подгруппы* группы  $G$  ограничивают решетку  $S(G)$  снизу и сверху, являясь ее *полюсами*. Решетку  $S(G)$  удобно изображать графически и, как некий графический объект, она обладает определенными *групповыми* свойствами, отличными от групповых свойств исходной группы  $G$ . Группу симметрии решетки обозначим символами  $S[G]$ . Нередко группа  $S[G]$  *изоморфна* или *инвариантна* (т.е.  $G$  является подгруппой группы  $S[G]$ ) относительно всех преобразований исходной группы  $G$ ; в этих случаях она называется *прозрачной*.

Решетки всех коммутативных групп *инверсные*. Это значит, что существует такая подстановка  $i$ , которая без нарушения связей переворачивает решетку “с ног на голову” и заменяет полюса на противоположные. Встречаются такие некоммутативные группы, решетка которых совпадает с решеткой от какой-нибудь коммутативной группы. В таких случаях решетка от некоммутативной группы тоже будет инверсной. Инверсная подстановка  $i$  не входит в группу симметрии решетки  $S[G]$ . Это особая подстановка, осуществляющая преобразование узлов решетки вдоль ее вертикальной оси, соединяющей полюса, тогда как группа преобразований  $S[G]$  переставляет узлы, не изменяя их порядка. *Порядок узла* совпадает с порядком подгруппы, которую он представляет. Совокупность узлов одного порядка образует *уровень* соответствующего порядка. Порядок узла или порядок всего уровня, естественно, является *делителем* порядка группы  $G$ . Число уровней для групп с небольшим числом элементов в большинстве случаев равно числу делителей порядка группы. Если это условие выполняется, решетка называется *правильной*. В правильных решетках все пути от нижнего полюса до верхнего содержат одинаковое число связей. Группа тетраэдра  $T$  двенадцатого порядка, у которой отсутствуют подгруппы шестого порядка, начинает бесконечный ряд *неправильных* решеток. В неправильных решетках число связей между полюсами различно.

Чрезвычайно важно понять с самого начала одну простую истину: подгруппы не появляются в результате какой-либо нашей с вами деятельности, например, через процедуры объединения, пересечения или умножения элементов. Объективно существуют группы, и

они независимо от нас поделены на подгруппы. Наша задача состоит лишь в том, чтобы найти эти подгруппы и установить имеющиеся между ними связи. Для групп с большим числом элементов такая задача становится трудоемкой и требует особых приемов поиска. Часто сама решетка подсказывает нам, все ли подгруппы найдены и верно ли установлены связи. При последовательном изучении решеток обнаруживаются определенные закономерности. Для групп 16-го и 24-го порядка эти закономерности становятся особенно заметными. Так, для 14 решеток, построенных на подгруппах от групп 16-го порядка, можно сформулировать, например, такие правила: *число узлов на каждом из уровней нечетно и может быть одним из восьми следующих — 1, 3, 5, 7, 9, 11, 15 и 35; число подходящих или отходящих связей тоже нечетно и равно 1, 3, 5, 7, 9, 11 и 15 (два последних числа относятся к полюсам)*. Аналогичным образом выглядят правила для 12 правильных решеток, построенных от групп 24-го порядка: *количество узлов на всех уровнях нечетно — 1, 3, 5, 7, 9, 13, 15 и 19; число связей при полюсах всегда четно — 2, 4, 6, 8, 10, 14 и 16; число связей, отходящих от уровней 2-го и 4-го порядков, а также число связей, подходящих к уровням 6-го и 12-го порядков, четно — 2, 4, 6, 8; число связей, подходящих к уровням 4-го и 8-го порядков и отходящих от уровней 3-го и 6-го порядков, нечетно — 1, 3, 5, 7, 9, 13, 15 и 19*.

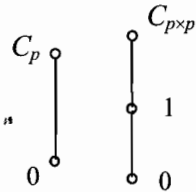
Нашей конечной целью будет построение так называемых *метарешеток*  $M_{16}$  и  $M_{24}$  от правильных решеток групп 16-го и 24-го порядков. Дело в том, что все правильные решетки от групп одного какого-то порядка являются подрешетками одной *верхнеполюсной* решетки. И, так как все правильные решетки, кроме того, включают в себя в качестве своей подрешетки одну общую для всех них *нижнеполюсную* решетку, они образуют «сверхрешетку», которая и называется *метарешеткой*. В роли верхнеполюсной могут выступать решетки от различных групп, например, решетки типа  $S(C_2^m)$  и  $S(D_n)$ , но в роли нижнеполюсной выступает всегда одна — решетка от простой циклической группы  $S(C_n)$ . Неправильные решетки тоже могут образовать свои метарешетки, в частности, две из трех неправильных решеток, построенных от групп 24-го порядка, находятся в отношении порядка.

Таким образом, наряду с отношением порядка типа *быть подгруппой* существует совершенно другое отношение порядка, а именно: *быть подрешеткой*. Если утверждается, что « $S(G_1)$  являет-

ся подрешеткой  $S(G_2)$ », то это еще не значит, что группа симметрии решетки  $S[G_1]$  является подгруппой группы симметрии решетки  $S[G_2]$ . Чаще всего группы симметрии решеток  $S[G_1]$  и  $S[G_2]$ , из-за принципиально различного строения, вообще несопоставимы. Отношение порядка типа « $S(G_1)$  является подрешеткой  $S(G_2)$ » означает, что множества узлов и связей решетки  $S(G_1)$  являются подмножествами множеств узлов и связей решетки  $S(G_2)$ . Здесь узлы и связи решеток выступают в роли аморфных, т.е. не групповых, множеств. Поэтому отношение *быть подрешеткой*, по существу, является *отношением включения* одного множества (меньшего по мощности) в другое (большее по мощности). С графической же точки зрения, метарешетки по сравнению с решетками значительно менее регулярны. В них нельзя, в частности, найти закономерности по четности узлов и связей. Они заметно отличаются даже от неправильных решеток, поэтому их можно охарактеризовать как *очень неправильные*. Такой термин хорошо подходит к метарешеткам  $M_{16}$  и  $M_{24}$ , хотя метарешетки от групп с небольшим числом структурных вариантов (т.е.  $M_6, M_8, M_{12}, M_{18}, M_{20}, M_{27}$ ) вполне правильны.

**Решетки групп с 1-го по 12-й порядок**

Простые циклические группы  $C_2, C_3, C_5, \dots, C_p$ , где  $p$  — простое число, имеют решетку, которая, если ее изобразить графически, выглядит как отрезок прямой, ограниченный двумя узлами, соответствующими несобственным подгруппам  $\{e\} = (0)$  и  $C_p$ . Из двух отрезков состоит решетка для групп типа  $C_4, C_9, C_{25}, C_{p \times p}$  (рис. 2.12). Группы 4-го, 9-го, 25-го порядков имеют еще по одному коммутативному варианту, обозначаемому как  $C_2^2, C_3^2, C_5^2 \dots C_p^2$ .



**Рис. 2.12**

Собственными подгруппами для  $C_3^2$ , к примеру, являются:

$$1 = \{e, a, a^2\}, \quad 2 = \{e, b, b^2\}, \quad 3 = \{e, ab, a^2b^2\}, \quad 4 = \{e, a^2b, ab^2\}.$$

Все четыре узла имеют порядок 3. Поскольку собственные подгруппы образуют единственный уровень между полюсами, то и инверсная подстановка  $i$  представляет собой транспозицию, у которой в качестве индексов выступают нижний и верхний полюса (транспозицию полюсов здесь и ниже писать не будем). Три решетки для

$p = 2, 3$  и  $5$  изображены на рис. 2.13. Группа симметрии таких решеток определяется формулой:

$$S[C_p^2] \approx D_{p+1},$$

Так, группа  $S[C_2^2]$  определяется подстановками  $D_3$ :

$$S[C_2^2] = \{(0), (12), (23), (13), (123), (132)\} \approx D_3.$$

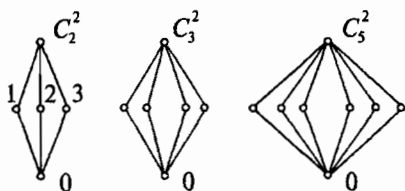


Рис. 2.13

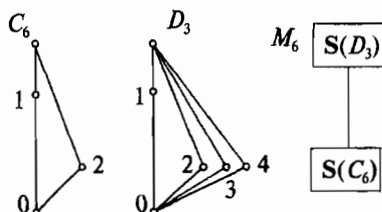


Рис. 2.14

Групп шестого порядка две —  $C_6 \approx C_2C_3$  и  $D_3$ . Их *правильные* решетки изображены на рис. 2.14. Для  $S(C_6)$  инверсная подстановка равна  $i = (12)$ . Несмотря на то, что узлы решеток  $S(C_6)$  и  $S(D_3)$  образованы непохожими собственными подгруппами —

$$C_6: 1 = \{e, a^2, a^6\}, 2 = \{e, a^3\};$$

$$D_3: 1 = \{e, a, a^2\}, 2 = \{e, b\}, 3 = \{e, ab\}, 4 = \{e, a^2b\},$$

графически решетку  $S(C_6)$  можно вписать в решетку  $S(D_3)$ , т.е. узлы и связи решетки  $S(C_6)$  образуют подмножества соответствующих множеств решетки  $S(D_3)$ . Следовательно, решетка  $S(C_6)$  образует *нижний*, а  $S(D_3)$  — *верхний* полюс метарешетки  $M_6$ . Симметрия решеток  $S(C_6)$ ,  $S(C_{10})$  и т.д. минимальна —  $C_1$ ; решетки  $S(D_3)$ ,  $S(D_5)$  и т.д. *прозрачны*:

$$S[C_2C_p] \approx S[C_{2 \times p}] \approx C_1, \quad S[D_p] \approx D_p.$$

Групп 8-го порядка пять; самой элементарной из них, с точки зрения структуры подгрупп, является циклическая группа  $C_8$ . Решетка  $S(C_8)$  представляет собой трехзвенную цепь; она является нижним полюсом метарешетки  $M_8$ . Теперь выпишем собственные подгруппы  $C_2^3$ :  $1 = \{e, a\}, 2 = \{e, b\}, 3 = \{e, c\}, 4 = \{e, ab\},$

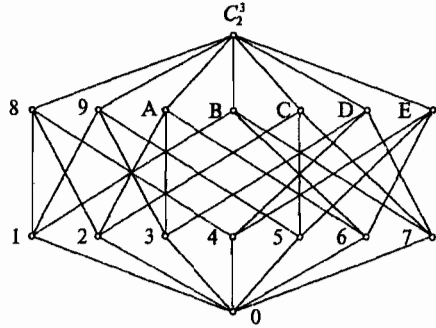
$$5 = \{e, ac\}, 6 = \{e, bc\}, 7 = \{e, abc\}, 8 = \{e, a, b, ab\},$$

$$9 = \{e, a, c, ac\}, A = \{e, b, c, bc\}, B = \{e, a, bc, abc\},$$

$$C = \{e, b, ac, abc\}, D = \{e, c, ab, abc\}, E = \{e, ab, ac, bc\}.$$

Решетка из этих подгрупп  $S(C_2^3)$  изображена на рис. 2.15. Она является верхним полюсом метарешетки  $M_8$ . Решетка  $S(C_2^3)$  является *инверсной*, причем инверсию можно осуществить несколькими способами, в частности, подстановкой  $i = (18)(29)(3A)(4B)(5C)(6D)(7E)$ .

Рис. 2.15



Группа симметрии  $S[C_2^3]$  обладает удивительными свойствами. Подобно группе вращения икосаэдра  $Y$ , она не имеет нормальных делителей, т.е. является *простой*. Все ее подстановки *четны*, поскольку образующими группы являются *антикоммутирующие четные транспозиции*. Действительно, если переобозначить узлы решетки в соответствии с подстановками —

$$\begin{aligned}
 a &= (23)(45)(89)(CD), & b &= (12)(56)(9A)(BC), \\
 c &= (24)(67)(AD)(CE), & d &= (13)(27)(8D)(AB),
 \end{aligned}$$

то графическая структура  $S(C_2^3)$  останется без изменения. Составим несколько произведений из этих подстановок, получим:

$$\begin{aligned}
 ab &= (123)(465)(8A9)(BCD), & ba &= (132)(456)(89A)(BDC), \\
 cb &= (124)(567)(9AD)(BCE), & bc &= (142)(576)(9DA)(BEC), \\
 cd &= (13)(2476)(8DBA)(CE), & dc &= (13)(2674)(8ABD)(CE).
 \end{aligned}$$

Если учесть, что узлы уровней 2-го и 4-го порядков при всех групповых преобразованиях не переставляются, то для представления группы  $S[C_2^3]$  достаточно взять подстановки, составленные для одного какого-то уровня, например, нижнего. Все 168 четных подстановок простой группы  $S[C_2^3]$  разбиты на пять классов и выписаны в табл. 2.60.

Как видно из этой таблицы, подстановки класса  $C_4$ , принадлежащие одному столбцу, коммутируют между собой; если подстановки берутся из различных столбцов, они будут антикоммутировать. Для аналогичных простых верхнеполюсных групп прослеживается та же самая закономерность: число коммутирующих подгрупп равно числу узлов (в данном случае 7), а число элементов, входящих в каж-

дую подгруппу, но отличных от тождественного, равно числу отходящих связей. У нас на каждый узел приходится по три таких связи, следовательно, максимальной коммутационной подгруппой является  $C_2^2$ , в силу чего наша группа *непрозрачна*.

Таблица 2.60

Подстановки простой группы симметрии $S[C_2^3]$						
(1476523)	(1523764)	(1375426)	(1742563)	(1345762)	(1235746)	(0)
(1753462)	(1635472)	(1624573)	(1234675)	(1736425)	(1367452)	(1462537)
(1637245)	(1274536)	(1432765)	(1627354)	(1647532)	(1642375)	(1657423)
(1542736)	(1467325)	(1746352)	(1524637)	(1452673)	(1726534)	(1276345)
(1264357)	(1342657)	(1453726)	(1267543)	(1724365)	(1435627)	(1543672)
(1325674)	(1253647)	(1576432)	(1472356)	(1563427)	(1573246)	(1324756)
(1756243)	(1567234)	(1365247)	(1653274)	(1376254)	(1254763)	(1735264)
(256)(374)	(135)(467)	(176)(254)	(175)(236)	(167)(234)	(135)(247)	(154)(236)
(236)(457)	(176)(345)	(127)(456)	(136)(275)	(162)(347)	(153)(274)	(145)(263)
(237)(456)	(165)(374)	(142)(576)	(157)(263)	(126)(374)	(124)(357)	(123)(465)
(265)(347)	(167)(354)	(172)(465)	(163)(257)	(174)(263)	(142)(375)	(132)(456)
(275)(346)	(156)(347)	(124)(567)	(167)(257)	(124)(376)	(134)(257)	(135)(264)
(273)(465)	(153)(476)	(164)(275)	(176)(235)	(147)(236)	(143)(275)	(153)(246)
(263)(475)	(173)(456)	(167)(245)	(135)(276)	(142)(367)	(152)(374)	(124)(365)
(257)(364)	(137)(465)	(146)(257)	(153)(267)	(176)(243)	(125)(347)	(142)(356)
(67)(2345)	(36)(1745)	(47)(1256)	(56)(1327)	(13)(2476)	(17)(2435)	(16)(2354)
(67)(2543)	(36)(1547)	(47)(1652)	(56)(1723)	(13)(2674)	(17)(2534)	(16)(2453)
(24)(3756)	(14)(3567)	(26)(1754)	(12)(3675)	(27)(1436)	(45)(1372)	(25)(1463)
(24)(3657)	(14)(3765)	(26)(1457)	(12)(3576)	(27)(1634)	(45)(1273)	(25)(1364)
(35)(2746)	(57)(1643)	(15)(2467)	(37)(1625)	(46)(1732)	(23)(1475)	(34)(1562)
(35)(2647)	(57)(1346)	(15)(2764)	(37)(1526)	(46)(1237)	(23)(1574)	(34)(1265)
(24)(35)	(16)(25)	(15)(47)	(17)(45)	(14)(57)	(12)(56)	(13)(46)
(24)(67)	(16)(34)	(15)(26)	(17)(23)	(14)(36)	(12)(37)	(13)(27)
(35)(67)	(25)(34)	(26)(47)	(23)(45)	(36)(57)	(37)(56)	(27)(46)

Группу  $S[C_2^3]$  можно задать, например, такими определяющими ее соотношениями:

$$\begin{aligned}
 a^6cb &= b^2c^2a = b^2a^6c = c^2ab^2, & ac^2b^2 &= bca = ca^6b^2, ca^2 = a^4bc^2, \\
 ab^3c^2 &= ba^6c^2 = cab^3 = cba^6, & a^4b^3c &= a^2cb = b^3a^4c^2 = c^2a^4, \\
 ac^2b &= b^2a^6c^2 = cb^3a = ca^6b, & a^4b^2 &= c^2b^2a^2, acb^2 = b^3a^3, \\
 a^2b^2c &= b^3a^2c^2 = ca^5b = c^2b^2a^5, & a^3b^2c &= bac^2 = bca^6 \text{ и т.д.}
 \end{aligned}$$

В справедливости этих соотношений можно убедиться, если вместо



букв  $a$ ,  $b$  и  $c$  подставить, например, следующие подстановки:

$$a = (1476523)(8DBECA9), \quad b = (67)(2345)(89)(ADEC),$$

$$c = (123)(465)(8A9)(CDB).$$

Все остальные решетки от групп 8-го порядка являются подрешетками решетки  $S(C_2^3)$ . Так, восемь собственных подгрупп диэдра

$$D_4^1: \quad 1 = \{e, b\}, \quad 2 = \{e, a^2\}, \quad 4 = \{e, a^2b\}, \quad 5 = \{e, ab\}, \quad 7 = \{e, a^3b\},$$

$$8 = \{e, a^2, b, a^2b\}, \quad A = \{e, a, a^2, a^3\}, \quad C = \{e, a^2, ab, a^3b\},$$

являются соответствующими узлами  $S(C_2^3)$ . Решетка диэдра  $S(D_4^1)$  изображена на рис. 2.16. Она *прозрачна*, поскольку восемь диэдральных подстановок оставляют графическую структуру рис. 2.16 неизменной —

$$S[D_4^1] \approx D_4^1 = \{(0), (14), (57), (14)(57), (15)(47)(8C), \\ (17)(45)(8C), (1547)(8C), (1745)(8C)\}.$$

Если из решетки диэдра  $S(D_4^1)$  исключить два узла — 5 и 7, то в результате получим решетку от коммутативной группы  $C_2C_4$ . Другими словами, непрозрачная, но инверсная  $i = (28)(1A)(4C)$  и  $i' = (28)(4A)(1C)$  решетка  $S(C_2C_4)$  вкладывается в прозрачную, но не инверсную решетку  $S(D_4^1)$ . Группа симметрии  $S[C_2C_4]$  определяется следующими четырьмя подстановками:

$$S[C_2C_4] \approx C_2^2 = \{(0), (14), (AC), (14)(AC)\}.$$

Наконец, решетка кватерниона  $S(D_4^2)$  получается из инверсной решетки  $S(C_2C_4)$  путем отбрасывания еще одной пары узлов — 1 и 4. Группа симметрии решетки кватерниона изоморфна группе  $D_3$ :

$$S[D_4^2] \approx D_3 = \{(0), (8A), (8C), (AC), (8AC), (8CA)\}.$$

Итак, пять решеток от групп 8-го порядка образуют одну метарешетку  $M_8$ , изображенную на рис. 2.17. Все решетки от групп 8-го порядка являются *правильными* и имеют четное число узлов (4, 6, 8, 10, 16) и нечетное число связей (3, 7, 11, 15, 35).

Пропуская очевидные решетки от групп 9-го, 10-го и 11-го порядков, перейдем к рассмотрению пяти решеток от групп 12-го порядка. Нам удобнее всего начать с верхнеполюсной решетки  $S(D_6^1)$ .

Группа диэдра  $D_6^1$  содержит следующие подгруппы:

$1 = \{e, a^3\}$ ,  $2 = \{e, a, a^2, a^3, a^4, a^5\}$ ,  $3 = \{e, a^2, a^4\}$ ,  $4 = \{e, a^3, b, a^3b\}$ ,  
 $5 = \{e, a^3, ab, a^4b\}$ ,  $6 = \{e, a^3, a^2b, a^5b\}$ ,  $7 = \{e, a^2, a^4, b, a^2b, a^4b\}$ ,  
 $8 = \{e, a^2, a^4, ab, a^3b, a^5b\}$ ,  $9 = \{e, b\}$ ,  $A = \{e, a^3b\}$ ,  $B = \{e, ab\}$ ,  
 $C = \{e, a^4b\}$ ,  $D = \{e, a^2b\}$ ,  $E = \{e, a^5b\}$ .

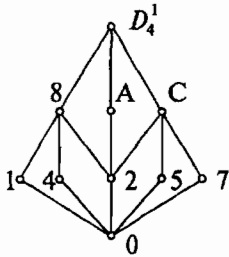


Рис. 2.16

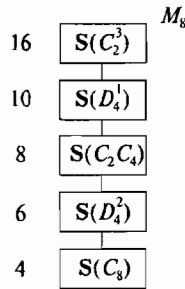


Рис. 2.17

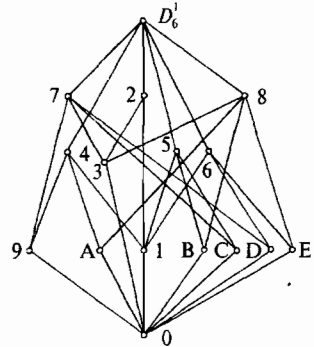


Рис. 2.18

Решетка  $S(D_6^1)$ , изображенная на рис. 2.18, является прозрачной, так как образующие —

$$a = (456)(78)(9BDACE), \quad b = (45)(78)(9B)(AC)(DE),$$

инвариантно переставляющие узлы решетки  $S(D_6^1)$ , порождают группу  $D_6^1$ , так что  $S[D_6^1] \approx D_6^1$ .

Восемь узлов верхнеполюсной решетки  $S(D_6^1)$ , а именно: 1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, A, дают все узлы инверсной решетки  $S(C_2C_6)$ , шесть узлов — 1, 2, 3, 4, 5, 6 — дают решетку  $S(D_6^2)$  и четыре узла — 1, 2, 3, 4 — дают нижнеполюсную решетку  $S(C_{12})$ . Четыре правильных решетки образуют одну метарешетку  $M_{12}$ , которая изображена на рис. 2.19. Число узлов у всех названных решеток — четно (6, 8, 10 и 16); число связей — нечетно (7, 11, 17 и 33).

Решетка тетраэдра  $S(T)$  (рис. 2.20) особая и образована следующими узлами:

$$\begin{aligned}
 1 &= \{e, ab\}, \quad 2 = \{e, a^2b^2\}, \quad 3 = \{e, ab^2a\}, \quad 4 = \{e, ab, a^2b^2, ab^2a\}, \\
 5 &= \{e, a, a^2\}, \quad 6 = \{e, b, b^2\}, \quad 7 = \{e, a^2b, b^2a\}, \quad 8 = \{e, ab^2, ba^2\}.
 \end{aligned}$$

На рисунке, где изображена решетка  $S(T)$ , можно увидеть, что 3 пути между полюсами образованы тремя связями, а 4 других пути составлены только из двух связей, поэтому  $S(T)$  и называется непрозрачной.

вильной. Три узла нижнего уровня подчинены симметрической группе  $S_3 \approx D_3$ , а четыре узла верхнего — симметрической группе  $S_4$ . В итоге, группа симметрии решетки тетраэдра содержит 144 элемента:  $S[T] \approx S_3 \times S_4$ , кроме того,  $S[C_2C_6] \approx S[D_6^2] \approx D_3$ .

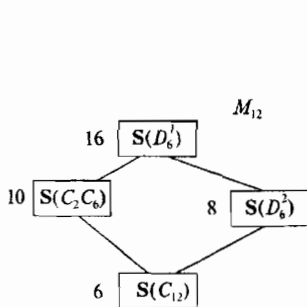


Рис. 2.19

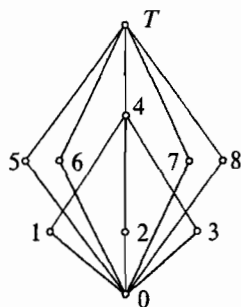


Рис. 2.20

### Решетки групп 16-го порядка

Структуры от групп 13-го, 14-го и 15-го порядков нам знакомы, поэтому не будем здесь на них останавливаться и сразу перейдем к морфологическому анализу групп 16-го порядка.

Самой простой из них является цепь из четырех звеньев структуры  $S(C_{16})$ , а наиболее разветвленной — решетка  $S(C_2^4)$ . Ее условно-схематическое изображение показано на рис. 2.21. Между полюсами имеется три уровня. Уровень 2-го порядка состоит из 15 узлов:

$$\begin{aligned}
 1 &= \{e, a\}, & 2 &= \{e, b\}, & 3 &= \{e, c\}, & 4 &= \{e, d\}, \\
 5 &= \{e, ab\}, & 6 &= \{e, ac\}, & 7 &= \{e, ad\}, & 8 &= \{e, bc\}, \\
 9 &= \{e, bd\}, & A &= \{e, cd\}, & B &= \{e, abc\}, & C &= \{e, abd\}, \\
 D &= \{e, bcd\}, & E &= \{e, acd\}, & F &= \{e, abcd\}.
 \end{aligned}$$

Уровень 8-го порядка также состоит из 15 узлов:

$$\begin{aligned}
 G &= \{e, a, b, c, ab, ac, bc, abc\}, & H &= \{e, a, b, d, ab, ad, bd, abd\}, \\
 I &= \{e, a, c, d, ac, ad, cd, acd\}, & J &= \{e, b, c, d, bc, bd, cd, bcd\}, \\
 K &= \{e, ab, ad, bd, ac, bc, cd, abcd\}, & L &= \{e, c, d, cd, ab, abc, abd, abcd\}, \\
 M &= \{e, a, d, ad, bc, abc, bcd, abcd\}, & N &= \{e, b, d, bd, ac, abc, acd, abcd\}, \\
 O &= \{e, a, c, bd, ac, abd, bcd, abcd\}, & P &= \{e, b, c, bc, ad, abd, acd, abcd\}, \\
 Q &= \{e, a, b, cd, ab, bcd, acd, abcd\}, & R &= \{e, a, bc, bd, cd, abc, abd, acd\},
 \end{aligned}$$

$S = \{e, b, ac, ad, cd, abc, abd, bcd\}$ ,  $T = \{e, c, ab, ad, bd, abc, acd, bcd\}$ ,

$U = \{e, d, bc, ab, ac, abd, acd, bcd\}$ .

Уровень 4-го порядка образован 35 узлами. Подгруппы мы перечислим, но присваивать им специальных обозначений не будем:

$\{e, a, b, ab\}$ ,  $\{e, a, c, ac\}$ ,  $\{e, a, d, ad\}$ ,  $\{e, b, c, bc\}$ ,  $\{e, b, d, bd\}$ ,  
 $\{e, c, d, cd\}$ ,  $\{e, a, bc, abc\}$ ,  $\{e, b, ac, abc\}$ ,  $\{e, c, ab, abc\}$ ,  
 $\{e, a, bd, abd\}$ ,  $\{e, b, ad, abd\}$ ,  $\{e, d, ab, abd\}$ ,  $\{e, b, ad, bcd\}$ ,  
 $\{e, c, bd, bcd\}$ ,  $\{e, d, bc, bcd\}$ ,  $\{e, a, cd, acd\}$ ,  $\{e, abc, bcd, ad\}$ ,  
 $\{e, abc, acd, bd\}$ ,  $\{e, abd, bcd, ac\}$ ,  $\{e, ab, acd, bcd\}$ ,  $\{e, d, abc, abcd\}$ ,  
 $\{e, ab, cd, abcd\}$ ,  $\{e, ac, bd, abcd\}$ ,  $\{e, ad, bc, abcd\}$ ,  $\{e, c, ad, acd\}$ ,  
 $\{e, d, ac, acd\}$ ,  $\{e, a, bcd, abcd\}$ ,  $\{e, b, acd, abcd\}$ ,  $\{e, ab, ad, bd\}$ ,  
 $\{e, ab, ac, bc\}$ ,  $\{e, ac, ad, cd\}$ ,  $\{e, bc, cd, bd\}$ ,  $\{e, abd, acd, bc\}$ ,  
 $\{e, c, abd, abcd\}$ ,  $\{e, abc, abd, cd\}$ .

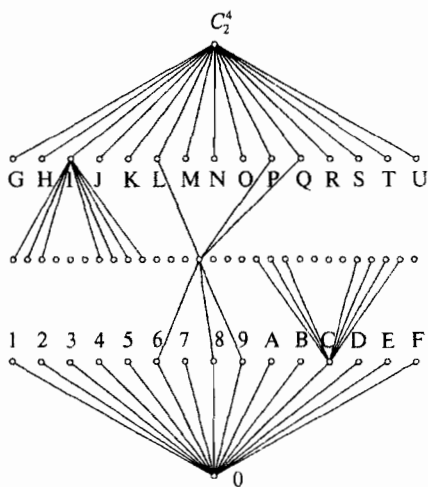


Рис. 2.21

Сравнивая выписанные подгруппы между собой, мы можем заключить: каждая подгруппа 2-го порядка входит в 7 различных подгрупп 4-го порядка; каждая подгруппа 4-го порядка состоит из элементов 3 подгрупп 2-го порядка (например, подгруппа  $\{e, a, b, ab\}$  состоит из элементов подгрупп 1, 2 и 5); каждая подгруппа 4-го порядка целиком входит в три подгруппы 8-го порядка (например, подгруппа  $\{e, a, b, ab\}$  входит в

подгруппы G, H и Q); каждая подгруппа 8-го порядка состоит из элементов 7 подгрупп 4-го порядка. Таким образом, число подходящих связей к каждому узлу 8-го порядка и число отходящих связей от каждого узла 2-го порядка равно 7. Это, в свою очередь, означает, что число связей для узлов названных уровней у других структур, построенных на основе групп 16-го порядка, также не может превосходить число 7. Далее, число подходящих и отходя-

щих связей для уровня 4-го порядка у других структур не может превосходить число 3.

Таблица 2.61

Группа  $S[C_2^4]$  *простая*. Все ее подстановки *четны*. Группа содержит 32 256 элементов, которые разбиты на 12 классов. В табл. 2.61 приведены примеры подстановок, взятые из каждого класса; здесь же указано количество подстановок в классе.

В классе  $C_1$  выполняются известные нам *антикоммутационные* соотношения. Все подстановки этого класса

$C_i$	Подстановки группы $S[C_2^4]$
$C_0$	(0)
$C_1$	(25)(36)(9C)(AE)
$C_2$	(2E)(36)(48)(5A)(7B)(9C)
$C_3$	(1FD)(2B6)(3E7)(89A)
$C_4$	(2BE7)(3C69)(58A4)
$C_5$	(2C4)(3BE)(597)(68A)
$C_6$	(DF)(24C)(579)(3AB6E8)
$C_7$	(16EBD)(258CA)(3497F)
$C_8$	(2E)(5A)(37C8)(49B6)
$C_9$	(1DF)(23BE67)(4AC859)
$C_{10}$	(2697E8D)(53C4ABF)
$C_{11}$	(124659E87DCFDA3)

приведены в табл. 2.62. Таблица разбита на 15 частей (по числу узлов на одном нижнем уровне); в каждую часть входит по 7 *коммутирующих* между собой подстановок (по числу связей, приходящихся на один узел). Последнее обстоятельство делает решетку  $S(C_2^4)$  *непрозрачной*.

Следующей группой 16-го порядка, решетка которой вписывается в верхнеполюсную решетку  $S(C_2^4)$ , является группа  $C_2 D_4^1$ . Прежде чем приступить к морфологическому анализу группы  $C_2 D_4^1$ , нам необходимо выписать все ее подстановки:

$$\begin{array}{ll}
 0 = (0), & 8 = (89), \\
 1 = (0123)(4657), & 9 = (0123)(4657)(89), \\
 2 = (02)(13)(45)(67), & A = (02)(13)(45)(67)(89), \\
 3 = (0321)(4756), & B = (0321)(4756)(89), \\
 4 = (04)(17)(25)(36), & C = (04)(17)(25)(36)(89), \\
 5 = (05)(16)(24)(37), & D = (05)(16)(24)(37)(89), \\
 6 = (06)(14)(27)(35), & E = (06)(14)(27)(35)(89), \\
 7 = (07)(15)(26)(34), & F = (07)(15)(26)(34)(89).
 \end{array}$$

Путаницы не произойдет, если для обозначения подгрупп (узлов) группы  $C_2 D_4^1$  мы используем те же самые символы, что и для ин-

дексов подстановок:  $1 = \{0, 2, 6, 7, 8, A, E, F\}$ ,  $2 = \{0, 2, 6, 7, 9, B, C, D\}$ ,  
 $3 = \{0, 2, 4, 5, 9, B, E, F\}$ ,  $4 = \{0, 1, 2, 3, 8, 9, A, B\}$ ,  $5 = \{0, 1, 2, 3, C, D, E, F\}$ ,  
 $6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ,  $7 = \{0, 2, 4, 5, 8, A, C, D\}$ ,  $8 = \{0, 2, 8, A\}$ ,  $9 = \{0, 2\}$ ,  
 $A = \{0, 8, 7, F\}$ ,  $B = \{0, 8, 6, E\}$ ,  $C = \{0, A, 6, F\}$ ,  $D = \{0, A, 7, E\}$ ,  $E = \{0, 2, E, F\}$ ,  
 $F = \{0, 2, 9, B\}$ ,  $G = \{0, 2, 6, 7\}$ ,  $H = \{0, 2, 4, 5\}$ ,  $I = \{0, 1, 2, 3\}$ ,  $L = \{0, 8, 4, C\}$ ,  
 $M = \{0, A, 4, D\}$ ,  $N = \{0, A, 5, C\}$ ,  $O = \{0, 8\}$ ,  $P = \{0, F\}$ ,  $R = \{0, 6\}$ ,  $T = \{0, 5\}$ ,  
 $S = \{0, 7\}$ ,  $Q = \{0, E\}$ ,  $U = \{0, 4\}$ ,  $X = \{0, D\}$ ,  $Y = \{0, C\}$ ,  $Z = \{0, A\}$ ,

Таблица 2.62

Наименьший класс ( $C_1$ ) подстановок группы симметрии $S[C_2^4]$				
(25)(36)(9C)(AE)	(15)(38)(7C)(AD)	(16)(28)(7E)(9D)	(29)(5C)(8D)(BF)	(68)(DE)(3B)(AF)
(25)(36)(47)(DE)	(15)(38)(49)(EF)	(16)(28)(4A)(CF)	(29)(17)(8D)(6E)	(68)(12)(79)(DE)
(25)(47)(8B)(AE)	(15)(49)(6B)(AD)	(16)(4A)(5B)(9D)	(29)(17)(3A)(BF)	(68)(12)(4C)(AF)
(25)(8B)(9C)(DF)	(15)(6B)(7C)(EF)	(16)(5B)(7E)(CF)	(29)(3A)(5C)(6E)	(68)(79)(3B)(4C)
(36)(8B)(AE)(DF)	(38)(6B)(AD)(EF)	(28)(5B)(9D)(CF)	(8D)(3A)(6E)(BF)	(4C)(79)(AF)(DE)
(36)(47)(8B)(9C)	(38)(49)(6B)(7C)	(28)(4A)(5B)(7E)	(8D)(17)(3A)(5C)	(12)(3B)(4C)(DE)
(47)(9C)(AE)(DF)	(49)(7C)(AD)(EF)	(4A)(7E)(9D)(CF)	(17)(5C)(6E)(BF)	(12)(3B)(79)(AF)
(CD)(4E)(9F)(7A)	(14)(6A)(59)(BD)	(1B)(4D)(23)(CE)	(24)(1C)(6F)(8A)	(34)(1E)(2D)(BC)
(CD)(4E)(13)(2B)	(14)(6A)(2C)(8F)	(1B)(4D)(9A)(56)	(24)(57)(8A)(BE)	(34)(1E)(5F)(89)
(CD)(13)(58)(7A)	(14)(2C)(3E)(BD)	(1B)(23)(9A)(7F)	(24)(1C)(3D)(BE)	(34)(67)(89)(BC)
(CD)(58)(2B)(9F)	(14)(3E)(59)(8F)	(1B)(56)(7F)(CE)	(24)(3D)(57)(6F)	(34)(2D)(5F)(67)
(4E)(58)(7A)(2B)	(6A)(3E)(BD)(8F)	(4D)(23)(56)(7F)	(8A)(3D)(1C)(57)	(1E)(5F)(67)(BC)
(4E)(13)(58)(9F)	(6A)(2C)(3E)(59)	(4D)(7F)(9A)(CE)	(8A)(3D)(6F)(BE)	(1E)(2D)(67)(89)
(13)(2B)(7A)(9F)	(2C)(59)(BD)(8F)	(23)(56)(9A)(CE)	(1C)(57)(6F)(BE)	(2D)(5F)(89)(BC)
(18)(26)(4F)(AC)	(6D)(3F)(8E)(AB)	(7B)(39)(48)(6C)	(2F)(1A)(46)(8C)	(78)(1D)(2E)(69)
(18)(35)(4F)(9E)	(6D)(AB)(19)(45)	(7B)(1F)(5E)(6C)	(2F)(5D)(8C)(9B)	(78)(1D)(3C)(5A)
(18)(35)(7D)(AC)	(6D)(27)(3F)(45)	(7B)(1F)(2A)(39)	(2F)(37)(46)(5D)	(78)(2E)(4B)(5A)
(18)(26)(7D)(9E)	(6D)(19)(27)(8E)	(7B)(2A)(48)(5E)	(2F)(1A)(37)(9B)	(78)(3C)(4B)(69)
(4F)(7D)(9E)(AC)	(AB)(19)(27)(3F)	(6C)(2A)(39)(5E)	(8C)(37)(46)(9B)	(1D)(2E)(3C)(4B)
(4F)(35)(26)(7D)	(AB)(27)(45)(8E)	(6C)(1F)(2A)(48)	(8C)(1A)(37)(5D)	(1D)(4B)(5A)(69)
(26)(35)(9E)(AC)	(19)(3F)(45)(8E)	(1F)(39)(48)(5E)	(1A)(46)(5D)(9B)	(2E)(3C)(5A)(69)

Решетка  $S(C_2 D_4^1)$  изображена на рис. 2.22. Она состоит как бы из трех решеток  $S(C_2^3)$  — одна сверху и две внизу. Характеристика ее такова: число узлов на всех уровнях *нечетно* — 7, 15 и 11; число связей тоже *нечетно* — 1, 3, 5 и 7. Решетка *прозрачна*, так как подстановки  $a$  и  $b$  порождают группу диэдра  $D_4^1$ , а коммутирующая  $c$  и

и  $b$  подстановка  $c$  расширяет группу  $D_4^1$  до  $C_2 D_4^1$ :

$$a = (25)(36)(EG)(FI)(ACBD)(KM)(LN)(OZ)(PQRS)(TU),$$

$$b = (AD)(BC)(OZ)(PQ)(KM)(LN)(TU), \quad c = (KL)(MN)(TU)(XY).$$

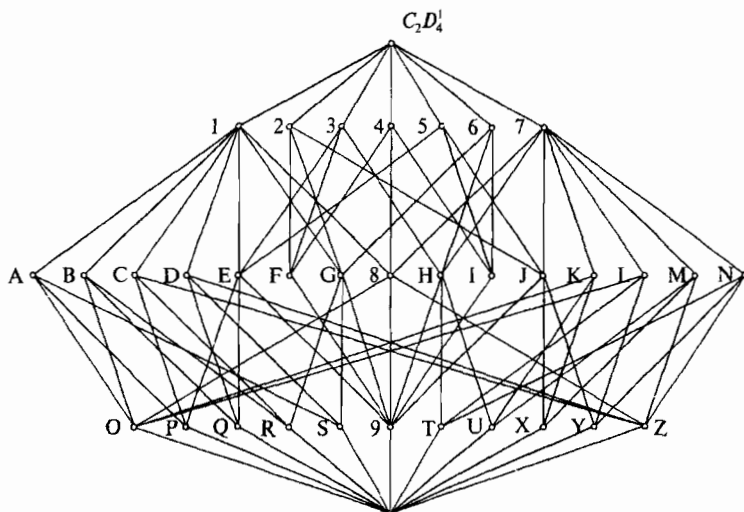


Рис. 2.22

Однако такие длинные подстановки, инвариантно переставляющие узлы на всех уровнях, можно не писать. Как и в предыдущем случае, группа симметрии  $S[C_2 D_4^1]$  вполне представима 64-мя подстановками, составленными по 11 узлам только одного нижнего уровня (табл. 2.63).

Решетка  $S(C_2^2 C_4)$  от коммутативной группы *инверсная* и состоит из двух симметрично расположенных решеток  $S(C_2^3)$ . Она получается из решетки  $S(C_2 D_4^1)$  путем удаления восьми узлов — A, B, C, D, P, Q, R, S. Инверсной подстановкой для  $S(C_2^2 C_4)$  является:

$$i = (1Z)(2X)(3T)(4O)(5Y)(6U)(79)(KF)(LI)(MG)(NE).$$

Решетка  $S(C_2^2 C_4)$  *прозрачна*, так как имеются три коммутирующие подстановки, образующие группу  $C_2^2 C_4$ :

$$a = (25)(36)(EG)(FI), \quad b = (14)(36)(EI)(FG), \quad c = (KLMN)(TU)(XOYZ).$$

Группу  $S[C_2^2 C_4]$  определяют подстановки, составленные по 11 узлам среднего уровня. При их нахождении очень удобно ориентиро-

ваться на хорошо известную нам группу  $S[C_2]$ , для которой ищется подгруппа, оставляющая один узел на месте (у нас это узел 7 для верхнего этажа и узел 9 для нижнего). Далее, необходимо помнить, что верхняя и нижняя подрешетки  $S(C_2)$  рассматриваемой решетки  $S(C_2^2 C_4)$  существуют практически независимо. Выпишем порождающие элементы двух подгрупп преобразований, действующих на этих подрешетках:

$$a = (EG)(FI), \quad a' = (KM)(LN), \quad b = (EFG)(8HJ), \quad b' = (LNM), \\ c = (EFGI)(HJ), \quad c' = (KMLN), \quad d = (EF)(8J), \quad d' = (KL).$$

Таблица 2.63

Подстановки группы симметрии $S[C_2 D_4^1]$			
(0)	(PTSX)(QURY)	(OZ)(PQ)(TU)	(OZ)(PTRX)(QUSY)
(TU)(XY)	(PUSY)(QTRX)	(OZ)(PQ)(XY)	(OZ)(PXRT)(QYSU)
(TX)(UY)	(PXST)(QYRU)	(OZ)(RS)(TU)	(OZ)(PURY)(QTSX)
(TY)(UX)	(PYSU)(QXRT)	(OZ)(RS)(TU)	(OZ)(PYRU)(QXST)
(PQ)(RS)	(PTRY)(QUSX)	(OZ)(PRQS)(TU)	(OZ)(PRQS)(TXUY)
(PQ)(RS)(TU)(XY)	(PURX)(QTSY)	(OZ)(PSQR)(TU)	(OZ)(PSQR)(TYUX)
(PQ)(RS)(TX)(UY)	(PXRU)(QYST)	(OZ)(TYUX)(RS)	(OZ)(PRQS)(TYUX)
(PQ)(RS)(TY)(UX)	(PYRT)(QXSU)	(OZ)(TXUY)(RS)	(OZ)(PSQR)(TXUY)
(PR)(QS)	(PTQU)(RYSX)	(OZ)(PRQS)(XY)	(OZ)(PXQY)(RTSU)
(PR)(QS)(TU)(XY)	(PUQT)(RXXSY)	(OZ)(PSQR)(XY)	(OZ)(PYQX)(RUST)
(PR)(QS)(TX)(UY)	(PXQY)(RUST)	(OZ)(TYUX)(PQ)	(OZ)(PTQU)(RXXSY)
(PR)(QS)(TY)(UX)	(PYQX)(RTSU)	(OZ)(TXUY)(PQ)	(OZ)(PUQT)(RYSX)
(PS)(QR)	(PX)(QY)(RU)(ST)	(OZ)(PTSY)(QURX)	(OZ)(PT)(QU)(RX)(SY)
(PS)(QR)(TU)(XY)	(PU)(QT)(RX)(SY)	(OZ)(PYST)(QXRU)	(OZ)(PU)(QT)(RY)(SX)
(PS)(QR)(TX)(UY)	(PY)(QX)(RT)(SU)	(OZ)(PUSX)(QTRY)	(OZ)(PX)(QY)(RT)(SU)
(PS)(QR)(TY)(UX)	(PT)(QU)(RY)(SX)	(OZ)(PXSU)(QYRT)	(OZ)(PY)(QX)(RU)(ST)

Обратим несколько большее внимание на группу диэдра 16-го порядка  $D_8^1$ . Это позволит нам понять структуру еще двух групп примерно этого же строения. С этой целью выпишем для нее все основные соотношения и подстановки:

$$D_8^1: \quad a = (01234567), \quad ab = ba^{-7} = (07)(16)(25)(34), \\ a^2 = (0246)(1357), \quad a^2 b = ba^0 = (06)(15)(24), \\ a^3 = (03614725), \quad a^3 b = ba^5 = (05)(14)(23)(67), \\ a^4 = (04)(15)(26)(37), \quad a^4 b = ba^3 = (04)(13)(57),$$



$$\begin{aligned}
 a^5 &= (05274163), & a^5 b &= ba^3 = (03)(12)(47)(56), \\
 a^6 &= (0642)(1753), & a^6 b &= ba^2 = (02)(37)(46), \\
 a^7 &= (07654321), & a^7 b &= ba = (01)(27)(36)(45), \\
 e &= (0), & b &= (17)(26)(35).
 \end{aligned}$$

Заметим, что помимо  $a$  и  $a^7$ , представляющих собой 8-циклы и фигурирующих в главном соотношении, имеется еще два элемента —  $a^3$  и  $a^5$  — точно с таким же периодом. Если возможна группа с равенством  $ab = ba^7$ , то нельзя ли попытаться построить еще две группы на равенствах  $ab = ba^3$  и  $ab = ba^5$ . Такая попытка увенчается успехом, если в качестве образующих  $b$  взять, соответственно:

$$D_8^3: \quad b = (02)(15)(46), \quad D_8^4: \quad b = (04)(26).$$

Тогда получим следующую картину определяющих соотношений:

$$\begin{array}{ll}
 D_8^3: & D_8^4: \\
 ab = ba^3 = (0541)(2367), & ab = ba^5 = (01674523), \\
 a^2 b = ba^6 = (13)(26)(57), & a^2 b = ba^2 = (0642)(1357), \\
 a^3 b = ba = (0347)(1652), & a^3 b = ba^7 = (03254761), \\
 a^4 b = ba^4 = (06)(24)(37), & a^4 b = ba^4 = (15)(37), \\
 a^5 b = ba^7 = (0145)(2763), & a^5 b = ba = (0\bar{5}634127), \\
 a^6 b = ba^2 = (04)(17)(35), & a^6 b = ba^6 = (0246)(1753), \\
 a^7 b = ba^5 = (0743)(1256), & a^7 b = ba^3 = (07214365).
 \end{array}$$

Здесь нужно не забыть о существовании еще одной группы *кватернионного типа* с образующими —

$$D_8^2: \quad a = (01234567)(89ABCDEF), \quad b = (084C)(1F5B)(2E6A)(3D79).$$

Теперь выпишем все подгруппы группы диэдра. Так как решетка  $S(D_8^1)$  вписывается в решетку  $S(C_2 D_4^1)$ , нам удобно узлы *подрешетки*  $S(D_8^1)$  обозначить через узлы *надрешетки*  $S(C_2 D_4^1)$ :

$$\begin{aligned}
 D_8^1: \quad 9 &= \{e, a^4\}, \quad Q = \{e, a^4 b\}, \quad E = \{e, a^4, b, a^4 b\}, \quad P = \{e, b\}, \quad U = \{e, a^5 b\}, \\
 G &= \{e, a^4, a^2 b, a^6 b\}, \quad R = \{e, a^2 b\}, \quad T = \{e, ab\}, \quad H = \{e, a^4, ab, a^5 b\}, \\
 S &= \{e, a^6 b\}, \quad X = \{e, a^3 b\}, \quad J = \{e, a^4, a^3 b, a^7 b\}, \quad 3 = \{e, a^2, a^4, a^6\}, \\
 4 &= \{e, a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7\}, \quad 7 = \{e, a^2, a^4, a^6, b, a^2 b, a^4 b, a^6 b\}, \\
 Y &= \{e, a^7 b\}, \quad 8 = \{e, a^2, a^4, a^6, ab, a^3 b, a^5 b, a^7 b\}.
 \end{aligned}$$

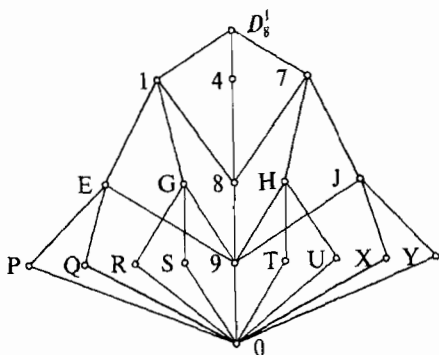


Рис. 2.23

Решетка  $S(D_8^1)$  изображена на рис. 2.23. Если из этой решетки удалить четыре узла —  $T, U, X, Y$ , — получим решетку  $S(D_8^3)$ . Затем, если удалить еще четыре узла —  $P, Q, R, S$ , — получим решетку  $S(D_8^2)$ . Наконец, если из решетки  $S(D_8^1)$  удалить восемь других узлов:  $H, J, R, S, T, U, X, Y$ , получим решетку  $S(D_8^4)$ .

Группа симметрии диэдральной решетки  $S[D_8^1]$  состоит из 96 подстановок, которые выписаны в табл. 2.64.

Для группы  $S[D_8^1]$  все определяется уровнем 2-го порядка. Из табл. 2.64 видно, что решетка диэдра прозрачна, что нельзя сказать о других решетках этой серии, в частности:  $S[D_8^2] \approx D_4^1 =$

$$= \{ (0), (HJ), (EG), (HJ)(EG), (EJGH), (EHGJ), (EH)(GJ), (EJ)(HG) \};$$

$$S[D_8^3] \approx C_2 D_4^1 = \{ (0), (PQ), (RS), (PQ)(RS), (PRQS), (PSQR), (PS)(QR),$$

$$(PR)(QS), (HJ), (PQ)(HJ), (RS)(HJ), (PQ)(RS)(HJ), (PRQS)(HJ),$$

$$(PSQR)(HJ), (PS)(QR)(HJ), (PR)(QS)(HJ) \};$$

$$S[D_8^4] \approx S[C_2 C_8] \approx C_2^2 = \{ (0), (47), (QP), (47)(QP) \}.$$

Самым поразительным математическим фактом здесь является то, что решетка  $S(D_8^4)$  от некоммутативной группы является инверсионной и в точности совпадает с решеткой  $S(C_2 C_8)$  от коммутативной группы. Их общей инверсионной подстановкой является

$$i = (19)(8E)(4Q)(7P).$$

Решетку  $S(D_8^1)$  (рис. 2.23) полезно сравнить с решеткой  $S(D_4^1)$  (рис. 2.16), поскольку они очевидным образом находятся в отношении порядка. Четыре узла —  $E, G, H, J$  — среднего уровня дают группу  $S[D_4^1] \approx D_4^1$ , которая является гомоморфным представлением группы  $S[D_8^1]$  из восьми узлов нижнего уровня —  $P, Q, R, S, T, U, X, Y$ . Причем из рис. 2.23 можно сразу записать систему проециро-

вания элементов группы  $S[D_8^1]$  на группу  $S[D_4^1]$ . Так, например, перестановка двух узлов (PQ) оставляет узел E на месте; перестановка же четырех узлов типа (PR)(QS), (PS)(QR) или (PSQR) проецируется на транспозицию (EG) и т.д.

Таблица 2.64

Подстановки группы симметрии $S[D_8^1]$			
(0)	(PSQR)(XY)	(PTRXQUSY)	(PQ)(RS)(TU)(XY)
(PQ)	(TYUX)(PQ)	(PXSTQYRU)	(PS)(QR)(TX)(UY)
(RS)	(TYUX)(RS)	(PURYQTSX)	(PS)(QR)(TY)(XU)
(TU)	(PQ)(RS)(TU)	(PYSUQXRT)	(PR)(SQ)(TX)(UY)
(XY)	(PQ)(RS)(XY)	(PXRUQYST)	(PR)(SQ)(TY)(UX)
(PQ)(RS)	(PQ)(TU)(XY)	(PUSXQTRY)	(PT)(QU)(RX)(SY)
(PQ)(TU)	(RS)(TU)(XY)	(PYRTQXSU)	(PU)(QT)(RX)(SY)
(PQ)(XY)	(PQ)(TY)(UX)	(PTSYQURX)	(PX)(QY)(RT)(SU)
(RS)(TU)	(RS)(TX)(UY)	(PUSYQTRX)	(PX)(QY)(RU)(ST)
(RS)(XY)	(RS)(TY)(UX)	(PYRUQXST)	(PT)(QU)(RY)(SX)
(TU)(XY)	(PQ)(TX)(UY)	(PTSXQURY)	(PU)(QT)(RY)(SX)
(PS)(QR)	(TU)(PS)(RQ)	(PXRTQYSU)	(PY)(QX)(RT)(SU)
(PR)(SQ)	(TU)(PR)(SQ)	(PURXQTSY)	(PY)(QX)(RU)(ST)
(TX)(UY)	(XY)(PS)(RQ)	(PXSUQYRT)	(PS)(RQ)(TU)(XY)
(TY)(XU)	(XY)(PR)(SQ)	(PTRYQUSX)	(PR)(SQ)(TU)(XY)
(PRQS)	(PS)(QR)(TU)	(PYSTQXRU)	(PQ)(RS)(TX)(UY)
(PSQR)	(PS)(QR)(XY)	(TYUX)(PR)(SQ)	(PQ)(RS)(TY)(XU)
(TXUY)	(TX)(UY)(PQ)	(TYUX)(PS)(QR)	(PSQR)(TX)(UY)
(TYUX)	(TX)(UY)(RS)	(TXUY)(PR)(SQ)	(PSQR)(TY)(UX)
(PRQS)(TU)	(PR)(SQ)(TU)	(TXUY)(PS)(QR)	(PRQS)(TX)(UY)
(PRQS)(XY)	(PR)(SQ)(XY)	(PSQR)(TYUX)	(PRQS)(TY)(UX)
(TXUY)(PQ)	(TY)(UX)(PQ)	(PSQR)(TXUY)	(PRQS)(TU)(XY)
(TXUY)(RS)	(TY)(UX)(RS)	(PRQS)(TYUX)	(PSQR)(TU)(XY)
(PSQR)(TU)	(PRQS)(TXUY)	(TYUX)(PQ)(RS)	(TXUY)(PQ)(RS)

Если построить следующую решетку  $S(D_{16}^1)$ , то ее узлы будут связаны с узлами  $S(D_8^1)$  аналогичным образом и группа  $S[D_8^1]$  уже станет гомоморфным представлением группы  $S[D_{16}^1]$ . Так возникает иерархия решеток от диэдральных групп, которая выражается в метарешетке MD в виде бесконечной цепи. Главное отличие диэдральной метарешетки MD от ранее рассмотренных метарешеток  $M_n$  состоит в том, что для MD цепь решетчатых вложений сопровождается цепью групповых вложений:

$$S(D_4^1) \subset S(D_8^1) \subset S(D_{16}^1) \subset \dots$$

$$S[D_4^1] \subset S[D_8^1] \subset S[D_{16}^1] \subset \dots$$

Рассмотрим следующие две группы 16-го порядка, которые мы обозначили как  $D_4^3$  и  $D_4^4$  (напомним, что  $D_4^1$  и  $D_4^2$  относятся к группам 8-го порядка). Для наглядности приведем основные групповые соотношения и подстановки —

$$D_4^3: \quad \begin{array}{ll} a = (0123)(4567), & ab = b^3a^3 = (02)(46)(57), \\ a^2 = (02)(13)(46)(57), & a^3b^3 = ba = (13)(46)(57), \\ a^3 = (0321)(4765), & a^2b = ba^2 = (01)(23)(4765), \\ b = (03)(12)(4567), & ab^2 = b^2a = (0123)(4765), \\ b^2 = (46)(57), & a^3b^2 = b^2a^3 = (0321)(4567), \\ b^3 = (03)(12)(4765), & a^2b^3 = b^3a^2 = (01)(23)(4567), \\ a^3b = b^3a = (13), & a^2b^2 = b^2a^2 = (02)(13), \\ ab^3 = ba^3 = (02), & e = (0); \end{array}$$

$$D_4^4: \quad \begin{array}{ll} a = (0123)(46)(57), & ab = ba^3 = (02)(4765), \\ a^2 = (02)(13), & a^3b = ba = (13)(4765), \\ a^3 = (0321)(46)(57), & a^2b = ba^2 = (01)(23)(4567), \\ b = (03)(12)(4567), & a^2b^3 = b^3a^2 = (01)(23)(4765), \\ b^2 = (46)(57), & ab^3 = b^3a^3 = (02)(4567), \\ b^3 = (03)(12)(4765), & a^3b^3 = b^3a = (13)(4567), \\ ab^2 = b^2a = (0123), & a^2b^2 = b^2a^2 = (02)(13)(46)(57), \\ a^3b^2 = b^2a^3 = (0321), & e = (0). \end{array}$$

Для группы  $D_4^4$  дадим еще один изоморфизм на базе кватерниона

$$D_4^4: \quad \begin{array}{l} a = (0123)(4657)(89AB), \quad a^2 = (02)(13)(45)(67)(8A)(9B), \\ a^3 = (0321)(4756)(8BA9), \quad b = (0425)(1736)(8A)(9B), \\ b^2 = (02)(13)(45)(67), \quad b^3 = (0524)(1637)(8A)(9B), \\ a^2b^3 = b^3a^2 = (01)(23)(4765), \quad a^3b = b^3a^3 = (0627)(1435)(89AB), \\ a^2b^2 = b^2a^2 = (8A)(9B), \quad a^3b^2 = b^2a^3 = (0123)(4657)(8BA9), \\ ab^3 = ba = (0627)(1435)(8BA9), \quad a^1b^3 = ba^3 = (0726)(1534)(89AB), \\ ab^2 = b^2a = (0321)(4756)(89AB), \quad a^2b = ba^2 = (0524)(1637). \end{array}$$

Выпишем подгруппы группы  $D_4^3$ :

$$\begin{aligned} 1 &= \{e, a, a^2, a^3, b^2, ab^2, a^2b^2, a^3b^2\}, \quad 4 = \{e, b, b^2, b^3, a^2, a^2b, a^2b^2, a^2b^3\}, \\ 7 &= \{e, a^2, b^2, a^2b^2, ab, a^3b, ab^3, a^3b^3\}, \quad 8 = \{e, a^2, b^2, a^2b^2\}, \quad 9 = \{e, b^2\}, \\ B &= \{e, a^2, ab^2, a^3b^2\}, \quad A = \{e, a, a^2, a^3\}, \quad H = \{e, b^2, a^3b^3, a^3b\}, \\ F &= \{e, b, b^2, b^3\}, \quad I = \{e, b^2, a^2b, a^2b^3\}, \quad Y = \{e, ab\}, \quad Z = \{e, a^2b^2\}, \end{aligned}$$

$$J = \{e, b^2, ab, ab^3\}, K = \{e, a^2, ab^3, a^3b^3\}, L = \{e, a^2, a^3b, ab\},$$

$$T = \{e, a^3b^3\}, U = \{e, a^3b\}, M = \{e, ab^3, a^2b^2, a^3b\}, O = \{e, a^2\},$$

$$N = \{e, ab, a^2b^2, a^3b^3\}, X = \{e, ab^3\}.$$

Как и в предыдущих случаях, воспользуемся обозначениями узлов решетки  $S(C_2 D_4^1)$ , поскольку узлы рассматриваемой решетки  $S(D_4^3)$  являются подмножеством узлов решетки  $S(C_2 D_4^1)$ .

Решетка  $S(D_4^3)$  изображена на рис. 2.24. Между уровнями 2-го и 4-го порядка расположена подрешетка  $S(C_2^3)$ , что облегчает поиск группы  $S[D_4^3]$ . В группе  $S[D_4^3]$  48-го порядка имеется подгруппа, изоморфная  $D_4^3$  с образующими —

$$a = (14)(90)(HL)(KJ)(TY)(AIBF), b = (14)(90)(MN)(HKJL)(TXYU)(AFBI).$$

Таким образом, решетка  $S(D_4^3)$  прозрачна. Узлы решетки  $S(D_4^4)$  и узлы инверсной ( $i = (10)(49)(7Z)$ ) решетки  $S(C_4^2)$  образуют два подмножества от множества узлов решетки  $S(D_4^3)$ :

$$S(D_4^4) = \{1, 4, 7, 8, 9, A, B, H, J, F, I, O, Z\},$$

$$S(C_4^2) = \{1, 4, 7, 8, 9, A, B, M, N, \tilde{F}, I, O, Z\}.$$

$$S[D_4^4] \approx C_2 D_4^1 = \{(0), (HJ), (FI), (HJ)(FI), (FHJ), (FH)(IJ), (FJIH), (AB),$$

$$(AB)(HJ), (AB)(FI), (AB)(HJ)(FI), (AB)(FHJ), (A\tilde{B})(FH)(IJ), (AB)(FJIH)\};$$

$$S[C_4^2] \approx C_2 D_4^1 = \{(0), (AB), (FI), (AB)(FI), (AFBI), (AF)(BI), (AIBF),$$

$$MN), (MN)(AB), (MN)(FI), (MN)(AB)(FI),$$

$$N)(AFBI), MN)(AF)(BI), (MN)(AIBF)\}.$$

Отсюда можно видеть, что решетки  $S(D_4^4)$  и  $S(C_4^2)$  непрозрачны.

Перейдем к группе  $D_4^5$ . Ее целиком определяют следующие простые соотношения:  $a^2 = b^2 = c^2 = e$ ,  $abc = bca = cab$ . Из этих равенств несложно вывести вспомогательные соотношения:

$$acb = cba = bac, \quad aba = cbc, \quad aca = bcb, \quad bab = cac,$$

которые позволяют составить таблицу умножения из 16 элементов группы  $D_4^5$ :

$$\{e, a, b, c, ab, ac, ba, ca, bc, cb, abc, acb, aba, aca, bab, abab\}.$$

Удобно образующие приводить в виде *регулярных подстановок*, тогда при их умножении сразу получаются столбцы таблицы умножения, а не ее отдельные элементы:

$$a = (01)(23)(45)(67)(89)(AB)(CD)(EF),$$

$$b = (02)(16)(3E)(4C)(5B)(7F)(8D)(9A),$$

$$c = (04)(18)(2A)(3D)(5E)(6B)(7C)(9F).$$

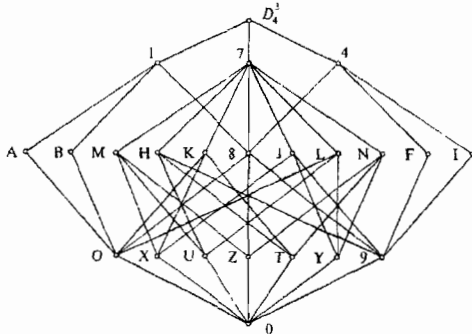


Рис. 2.24

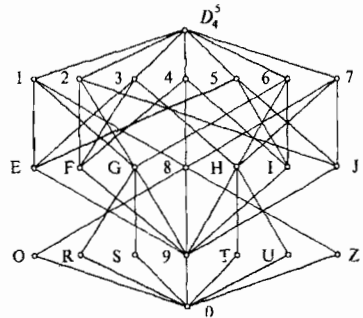


Рис. 2.25

Решетка  $S(D_4^5)$  изображена на рис. 2.25. Если из этой решетки удалить узлы R, S, T и U, то получим решетку  $S(C_2 D_4^2)$ . Несмотря на внешнее различие решеток, их группы симметрии одинаковые и изоморфны полной группе куба:

$$S[D_4^5] \approx S[C_2 D_4^2] \approx O_d.$$

Таким образом, у нас появился прекрасный повод для изучения  $O_d$  — этой важнейшей группы симметрии (хотя кое-что о ней было сказано в предыдущем разделе). В табл. 2.65 приведены подстановки  $S[D_4^5]$ , составленные по нижнему уровню решетки.

### Группа вращения декартовых координат и ее подгруппы

Табл. 2.65 для группы  $S[D_4^5]$  связана с табл. 2.54 для группы вращения куба (или октаэдра) следующим образом: если пронумерованные грани куба (рис. 2.10) обозначить буквами по следующей схеме:  $0 \rightarrow R$ ,  $1 \rightarrow S$ ,  $2 \rightarrow Z$ ,  $3 \rightarrow U$ ,  $4 \rightarrow O$ ,  $5 \rightarrow T$ , то первые 24 подстановки (с 0 по N) табл. 2.65 совпадут с 24 подстановками столбца  $O(6)$  табл. 2.54.

Группа  $O_d$  является одновременно группой симметрии декарто-

вых координат. В табл. 2.66 показано соответствие между нашими подстановками и матрицами, преобразующими всеми возможными способами оси координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Табл. 2.66 составить несложно, если помнить, что матрицы одного класса должны иметь один и тот же характер; подстановки на транспозициях соответствуют симметричным матрицам; обратные подстановки отвечают транспонированным матрицам. В виду важности группы  $O_d$ , перечислим все ее подгруппы. При это мы ставим перед собой цель напомнить два простых приема, позволяющих по нескольким известным подгруппам найти большое число неизвестных. Дело в том, что, когда группа небольшого порядка, то все ее подгруппы отыскать несложно. Но наша группа 48-го порядка содержит 84 подгруппы и отыскать их только на основе знания определения группы довольно тяжело.

Таблица 2.65

Подстановки группы симметрии $S[D_4^5] \approx O_d$							
0	(0)	C	(ZUOT)	0'	(RS)(ZO)(UT)	C'	(RZSO)(UT)
1	(RS)(UT)	D	(ZTOU)	1'	(RS)	D'	(ROSZ)(UT)
2	(ZO)(UT)	E	(RTSU)	2'	(ZO)	E'	(ZUOT)(RS)
3	(RS)(ZO)	F	(RUST)	3'	(UT)	F'	(ZTOU)(RS)
4	(ROU)(SZT)	G	(RZSO)	4'	(RT)(SU)	G'	(RUOSTZ)
5	(RUO)(STZ)	H	(ROSZ)	5'	(RU)(ST)	H'	(RZTSOU)
6	(RTO)(SUZ)	I	(RS)(ZT)(OU)	6'	(RZ)(SO)	I'	(RUZSTO)
7	(ROT)(SZU)	J	(RU)(ST)(ZO)	7'	(RO)(SZ)	J'	(ROTSZU)
8	(RZT)(SOU)	K	(RZ)(SO)(UT)	8'	(ZU)(OT)	K'	(RTOSUZ)
9	(RTZ)(SUO)	L	(RO)(SZ)(UT)	9'	(ZT)(OU)	L'	(RZUSOT)
A	(RUZ)(STO)	M	(RS)(ZU)(OT)	A'	(RUST)(ZO)	M'	(RTZSUO)
B	(RZU)(SOT)	N	(RT)(SU)(ZO)	B'	(RTSU)(ZO)	N'	(ROUSZT)

Самый эффективный способ поиска инвариантных подгрупп состоит в сопряжении одной какой-то известной подгруппы. Предположим, нам удалось отыскать одну из подгрупп 4-го порядка, не являющуюся нормальным делителем, —  $\{0, 2', 4', N\}$ . Тогда с помощью элемента K и D и с использованием приема поиска сопряженных подгрупп 6-го порядка для голоморфа  $H(D_3)$ , найдем группы  $\{0, 1', 8', M\}$  и  $\{0, 3', 7', L\}$ . Подробно: из табл. 2.65 находим подстановки  $K = (RZ)(SO)(UT)$  и  $D = (ZTOU)$ , тогда  $0 \rightarrow 0$  и далее автоматически:

Таблица 2.66

Матрицы преобразования декартовых координат группы $O_d$							
0	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	C	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	0'	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	C'	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
1	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	D	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	1'	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	D'	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	E	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	2'	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	E'	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	F	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	3'	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	F'	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	G	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	4'	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	G'	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	H	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	5'	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	H'	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
6	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	I	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	6'	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	I'	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	J	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	7'	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	J'	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
8	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	K	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	8'	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	K'	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	L	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	9'	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	L'	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
A	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	M	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	A'	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	M'	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
B	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	N	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	B'	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	N'	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$



$$2' = (ZO) \rightarrow (RS) = 1', \quad 4' = (RT)(SU) \rightarrow (ZU)(OT) = 8',$$

$$2' = (ZO) \rightarrow (TU) = 3', \quad 4' = (RT)(SU) \rightarrow (RO)(SZ) = 7',$$

$$N = (RT)(SU)(ZO) \rightarrow (ZU)(OT)(RS) = M,$$

$$N = (RT)(SU)(ZO) \rightarrow (RO)(SZ)(TU) = L.$$

Второй способ, наоборот, связан с нормальными делителями, и он нам тоже, в основном, известен: аналогичным образом мы искали систему гомоморфных проекций для голоморфа  $\mathbf{H}(D_3)/N_1$  и т.д. Очень несложно определить *нормальный делитель* группы  $\mathbf{S}[D_4^5] \approx O_4$  второго порядка  $\{0, 0'\}$ . Далее, ищем все *классы смежности* по этому делителю, т.е. *систему гомоморфных проекций*:

$$\{0, 0'\} \rightarrow 0,$$

$$\{1, 2'\} \rightarrow 1,$$

$$\{2, 1'\} \rightarrow 2,$$

$$\{3, 3'\} \rightarrow 3,$$

$$\{4, L'\} \rightarrow 4,$$

$$\{5, K'\} \rightarrow 5,$$

$$\{6, G'\} \rightarrow 6,$$

$$\{7, H'\} \rightarrow 7,$$

$$\{8, J'\} \rightarrow 8,$$

$$\{9, I'\} \rightarrow 9,$$

$$\{A, M'\} \rightarrow A,$$

$$\{B, N'\} \rightarrow B,$$

$$\{C, F'\} \rightarrow C,$$

$$\{D, E'\} \rightarrow D,$$

$$\{E, A'\} \rightarrow E,$$

$$\{F, B'\} \rightarrow F,$$

$$\{G, D'\} \rightarrow G,$$

$$\{H, C'\} \rightarrow H,$$

$$\{I, 8'\} \rightarrow I,$$

$$\{J, 4'\} \rightarrow J,$$

$$\{K, 7'\} \rightarrow K,$$

$$\{L, 6'\} \rightarrow L,$$

$$\{M, 9'\} \rightarrow M,$$

$$\{N, 5'\} \rightarrow N.$$

Затем, по известным группам 2-го порядка (*их* количество определяется числом подстановок на транспозициях, которые берутся из табл. 2.65), ищем группы 4-го порядка по схеме:

$$\{0, 1\} \rightarrow \{0, 0', 1, 2'\}, \{0, 2\} \rightarrow \{0, 0', 2, 1'\} \dots \{0, N\} \rightarrow \{0, 0', 5', N\}.$$

По известным подгруппам 3-го порядка находим неизвестные подгруппы 6-го порядка или по подгруппам 4-го порядка ищем подгруппы 8-го порядка и т.д.:

$$\{0, 8, 9\} \rightarrow \{0, 8, 9, 0', I', J'\}, \{0, 3, L, K\} \rightarrow \{0, 3, K, L, 0', 3', 6', 7'\}, \dots$$

Точно таким же образом находим смежные классы по другим инвариантным подгруппам, в частности, по нормальному делителю  $\{0, 1, 2, 3\}$  найдем все 12 проекций:

$$\{0, 1, 2, 3\} \rightarrow 0, \{0', 1', 2', 3'\} \rightarrow 0', \{E, F, J, N\} \rightarrow E, \{C, D, I, M\} \rightarrow C,$$

$$\{4, 7, 8, A\} \rightarrow 4, \{4', 5', A', B'\} \rightarrow 4', \{G, H, K, L\} \rightarrow G, \{G', I', K', M'\} \rightarrow G',$$

$$\{5, 6, 9, B\} \rightarrow 5, \{6', 7', C', D'\} \rightarrow 6', \{8', 9', E', F'\} \rightarrow 8', \{H', J', L', N'\} \rightarrow H'.$$

По известным подгруппам 2-го порядка сразу найдем подгруппы 8-го порядка:

$$\{0, 0'\} \rightarrow \{0, 1, 2, 3, 0', 1', 2', 3'\}, \{0, I\} \rightarrow \{0, 1, 2, 3, C, D, I, M\}, \dots$$

Таким образом, комбинируя оба изложенных способа, удается отыскать 84 подгруппы полной группы симметрии куба  $O_d$ :

$$\{0, 0'\}, \{0, 1'\}, \{0, 2'\}, \{0, 3'\}, \{0, 4'\}, \{0, 5'\}, \{0, 6'\}, \{0, 7'\}, \{0, 8'\}, \{0, 9'\},$$

$$\{0, 1\}, \{0, 2\}, \{0, 3\}, \{0, I\}, \{0, J\}, \{0, K\}, \{0, L\}, \{0, M\}, \{0, N\};$$

$$\{0, 4, 5\}, \{0, 6, 7\}, \{0, 8, 9\}, \{0, A, B\};$$

$$\{0, 1, I, N\}, \{0, 2, M, J\}, \{0, 3, L, K\}, \{0, 1, E, F\}, \{0, 2, C, D\}, \{0, 3, G, H\},$$

$$\{0, 1, 2, 3\}, \{0, 1, 1', 3'\}, \{0, 2, 2', 3'\}, \{0, 3, 1', 2'\}, \{0, 0', 1, 2'\}, \{0, 0', 2, 1'\},$$

$$\{0, 0', 3, 3'\}, \{0, 3', 6', K\}, \{0, 3', 7', L\}, \{0, 2', 5', J\}, \{0, 2', 4', N\}, \{0, 1', 8', M\},$$

$$\{0, 1', 9', I\}, \{0, 0', 8', I\}, \{0, 0', 4', J\}, \{0, 0', 5', N\}, \{0, 0', 6', L\}, \{0, 0', 7', K\},$$

$$\{0, 0', 9', M\};$$

$$\{0, 4, 5, 0', L', K'\}, \{0, 6, 7, 0', G', H'\}, \{0, 8, 9, 0', I', J'\}, \{0, A, B, 0', M', N'\},$$

$$\{0, 4, 5, K, M, N\}, \{0, 6, 7, I, J, K\}, \{0, 8, 9, J, L, M\}, \{0, A, B, I, L, N\},$$

$$\{0, 4, 5, 5', 7', 9'\}, \{0, 6, 7, 4', 7', 8'\}, \{0, 8, 9, 4', 6', 9'\}, \{0, A, B, 5', 6', 8'\};$$

$$\{0, 1, 2, 3, 0', 1', 2', 3'\}, \{0, 1, 2, 3, 4', 5', A', B'\}, \{0, 1, 2, 3, 6', 7', C', D'\},$$

$$\{0, 1, 2, 3, 8', 9', E', F'\}, \{0, 1, 2, 3, C, D, I, M\}, \{0, 1, 2, 3, E, F, J, N\},$$

$$\{0, 1, 2, 3, G, H, K, L\}, \{0, 3, K, L, 0', 3', 6', 7'\}, \{0, 1, J, N, 0', 2', 4', 5'\},$$

$$\{0, 2, I, M, 0', 1', 8', 9'\}, \{0, 1, E, F, 0', 2', A', B'\}, \{0, 2, C, D, 0', 1', E', F'\},$$

$$\{0, 3, G, H, 0', 3', C', D'\};$$

$$\{0, 4, 5, K, M, N, 0', 5', 7', 9', K', L'\}, \{0, 6, 7, I, J, K, 0', 4', 7', 8', G', H'\},$$

$$\{0, 8, 9, J, L, M, 0', 4', 6', 9', I', J'\}, \{0, A, B, I, L, N, 0', 5', 6', 8', M', N'\},$$

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B\};$$

$$\{0, 1, 2, 3, G, H, K, L, 0', 1', 2', 3', 6', 7', C', D'\},$$

$$\{0, 1, 2, 3, E, F, J, N, 0', 1', 2', 3', 4', 5', A', B'\},$$

$$\{0, 1, 2, 3, C, D, I, M, 0', 1', 2', 3', 8', 9', E', F'\};$$

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N\},$$

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, 0', 1', 2', 3', G', H', I', J', K', L', M', N'\},$$

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, 4', 5', 6', 7', 8', 9', A', B', C', D', E', F'\}.$$

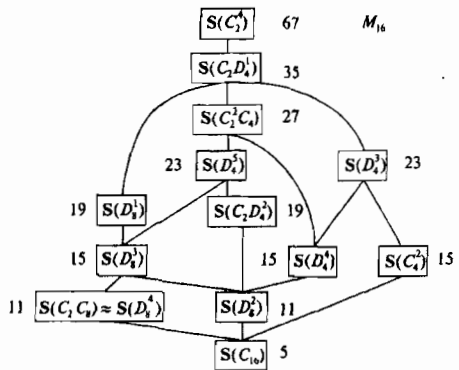
Итак, нами были рассмотрены все 14 групп 16-го порядка. Осталось сделать последний небольшой шаг — составить метарешетку  $M_{16}$ . Несложный анализ графических изображений всех 14 решеток дает результат, который представлен на рис. 2.26 (числа рядом с обозначениями решеток указывают количество узлов на уровнях).

**Решетки групп 18-го и 20-го порядков**

Не останавливаясь на достигнутом, пойдем дальше. За простой циклической группой  $C_{17}$  идет пять групп 18-го порядка. Как выглядят их метарешетка  $M_{18}$ ? Анализ проведем по сокращенной программе, без поиска групп симметрии решеток. Верхнеполусной является решетка, построенная от группы, которую обозначим, как  $D_{18}^2$ . Ее образующими являются:

$a = (012)(345), b = (02)(35),$   
 $c = (12)(34).$

Тогда главными определяющими соотношениями будут:



**Рис. 2.26**

$ab = ba^2 = (01)(34), ac = ca^2 = (02)(45), bcb = cbc = (01)(45),$   
 $a^2b = ba = (12)(45), a^2c = ca = (01)(35), abc b = bcb a^2 = (12)(35).$

Решетка  $S(D_{18}^2)$  изображена на рис. 2.27. Ее подгруппы —  $D_{18}^2$ :

- 1 = {e, c}, 2 = {e, ac}, A = {e, a, a^2, c, ac, a^2c},
- 3 = {e, a^2c}, 4 = {e, bc}, B = {e, a, a^2, a^2bc, abc, bc},
- 5 = {e, b^2c}, 6 = {e, abc}, C = {e, a, a^2, ab^2c, a^2b^2c, b^2c},
- 7 = {e, a^2bc}, 8 = {e, ab^2c}, D = {e, b, b^2, c, bc, b^2c}.
- 9 = {e, a^2b^2c},

Решетка  $S(D_{18}^1)$  изображена на рис. 2.27. Ее подгруппы —  $D_{18}^1$ :

- 1 = {e, c}, 2 = {e, ac}, 3 = {e, a^2c}, 4 = {e, bc}, 5 = {e, b^2c},
- 6 = {e, abc}, 7 = {e, a^2bc}, 8 = {e, ab^2c}, 9 = {e, a^2b^2c},
- A = {e, a, a^2, c, ac, a^2c}, B = {e, a, a^2, a^2bc, abc, bc},
- C = {e, a, a^2, ab^2c, a^2b^2c, b^2c}, D = {e, b, b^2, c, bc, b^2c},
- E = {e, b, b^2, abc, ab^2c, ac}, F = {e, b, b^2, a^2c, a^2b^2c, a^2bc},
- G = {e, a^2b, ab^2, c, a^2bc, ab^2c}, H = {e, a^2b, ab^2, ac, bc, a^2b^2c},
- I = {e, a^2b, ab^2, a^2c, b^2c, abc}, J = {e, ab, a^2b^2, c, a^2b^2c, abc},

$K = \{e, ab, a^2b^2, ac, b^2c, a^2bc\}$ ,  $L = \{e, ab, a^2b^2, a^2c, ab^2c, bc\}$ ,  
 $M = \{e, a, a^2\}$ ,  $N = \{e, b, b^2\}$ ,  $O = \{e, a^2b, ab^2\}$ ,  $P = \{e, ab, a^2b^2\}$ ,  
 $Q = \{e, a, a^2, b, b^2, ab, a^2b^2, a^2b, ab^2\}$ .

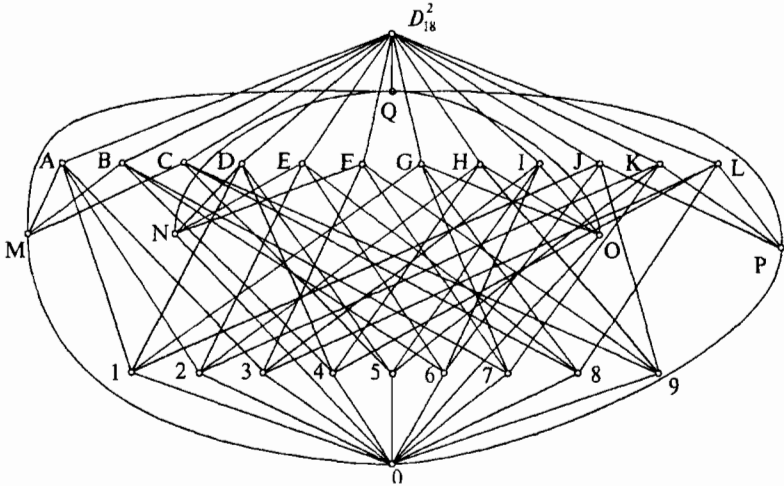


Рис. 2.27

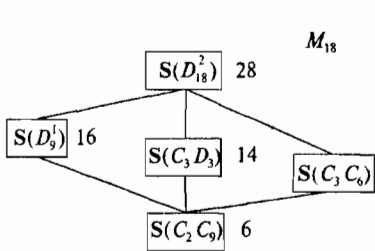


Рис. 2.28

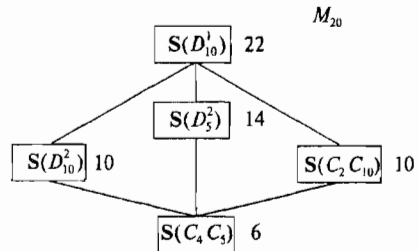


Рис. 2.29

Группу  $C_3D_3$  можно получить либо на трех образующих  $a = (012)$ ,  $b = (02)$ ,  $c = (345)$ , либо на двух:  $a = (012345)$ ,  $b = (024)$ . Решетка  $S(C_3D_3)$  сохраняет от решетки  $S(D_{18}^2)$  следующие узлы:  $\{1, 2, 3, A, D, E, F, M, N, P, O, Q\}$ . Решетка от группы диэдра  $S(D_9^1)$  образована узлами  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, D, E, F, N, Q\}$ , а две инверсных решетки  $S(C_3C_6)$  и  $S(C_2C_9)$  — соответственно, узлами  $\{5, C, D, I, K, M, N, O, P, Q\}$  и  $\{5, D, N, Q\}$ . Последняя решетка является нижнеполюсной ( $C_2C_9 \approx C_{18}$ ). Метарешетка  $M_{18}$  изображена на рис. 2.28. Аналогичная метарешетка получается на решетках от групп 20-го

порядка (рис. 2.29). Число рядом с обозначениями решеток указывает на количество узлов на уровнях. Верхним полюсом  $M_{20}$  является решетка  $S(D_{10}^1)$  (рис. 2.30).

$D_{10}^1$ :

1 = {e, b},      2 = {e, a<sup>5</sup>b},

3 = {e, a<sup>6</sup>b},    4 = {e, ab},

5 = {e, a<sup>2</sup>b},    6 = {e, a<sup>5</sup>},

7 = {e, a<sup>7</sup>b},    8 = {e, a<sup>8</sup>b},

9 = {e, a<sup>3</sup>b},    A = {e, a<sup>4</sup>b},

B = {e, a<sup>9</sup>b},

C = {e, a<sup>5</sup>, b, a<sup>5</sup>b},

D = {e, a<sup>5</sup>, ab, a<sup>6</sup>b},

E = {e, a<sup>5</sup>, a<sup>2</sup>b, a<sup>7</sup>b},

F = {e, a<sup>5</sup>, a<sup>3</sup>b, a<sup>8</sup>b},

G = {e, a<sup>5</sup>, a<sup>4</sup>b, a<sup>9</sup>b},

H = {e, a<sup>2</sup>, a<sup>4</sup>, a<sup>6</sup>, a<sup>8</sup>},

I = {e, a<sup>2</sup>, a<sup>4</sup>, a<sup>6</sup>, a<sup>8</sup>, b, a<sup>2</sup>b, a<sup>4</sup>b, a<sup>6</sup>b, a<sup>8</sup>b},

J = {e, a<sup>2</sup>, a<sup>4</sup>, a<sup>6</sup>, a<sup>8</sup>, ab, a<sup>3</sup>b, a<sup>5</sup>b, a<sup>7</sup>b, a<sup>9</sup>b},

K = {e, a, a<sup>2</sup>, a<sup>3</sup>, a<sup>4</sup>, a<sup>5</sup>, a<sup>6</sup>, a<sup>7</sup>, a<sup>8</sup>, a<sup>9</sup>}.

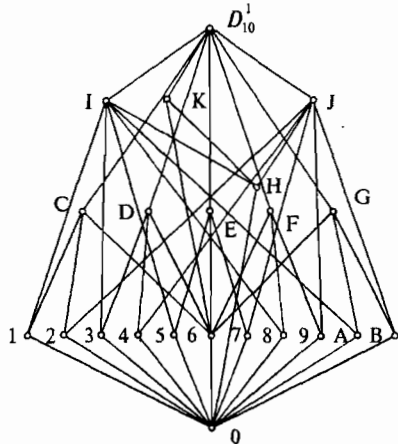


Рис. 2.30

Решетка  $S(D_{10}^2)$  сохраняет узлы {6, C, D, E, F, G, H, K}, решетка  $S(D_5^2) = \{1, 3, 5, 8, A, C, D, E, F, G, H, I\}$ , инверсные решетки  $S(C_2C_{10}) = \{1, 2, 6, C, H, I, J, K\}$  и  $S(C_4C_5) = \{6, C, H, K\}$ . Следует также напомнить, что для групп 20-го порядка имеют места изоморфизмы (табл. 2.28):  $C_2C_{10} \approx C_2^2 C_5$ ,  $C_4C_5 \approx C_{20}$ ,  $C_2D_5^1 \approx D_{10}^1$ .

### Решетки групп 24-го порядка

По понятным причинам пропускаем группы 21-го, 22-го, 23-го порядков и переходим к анализу групп 24-го порядка. Верхним полюсом метарешетки  $M_{24}$  из 12 правильных решеток является  $C_2D_6^1 \approx C_2^2D_3$  с образующими:  $a = (012)$ ,  $b = (02)$ ,  $c = (34)$ ,  $d = (56)$ .

Если элементы группы  $C_2^2D_3$  обозначить через:

0 = e,      1 = a,      2 = a<sup>2</sup>,      3 = b,      4 = ab,      5 = a<sup>2</sup>b,  
 6 = c,      7 = ac,      8 = a<sup>2</sup>c,      9 = bc,      A = abc,      B = a<sup>2</sup>bc,

$$\begin{array}{llllll}
 C = d, & D = ad, & E = a^2d, & F = bd, & G = abd, & H = a^2bd, \\
 I = cd, & J = acd, & K = a^2cd, & L = bcd, & M = abcd, & N = a^2bcd,
 \end{array}$$

то подгруппы для построения решетки  $S(C_2^2 D_3)$  будут такими:

$\{0, 3\}, \{0, 4\}, \{0, 5\}, \{0, 6\}, \{0, 9\}, \{0, A\}, \{0, B\}, \{0, C\}, \{0, F\},$   
 $\{0, G\}, \{0, H\}, \{0, I\}, \{0, L\}, \{0, M\}, \{0, N\}; \{0, 1, 2\}; \{0, 3, 6, 9\},$   
 $\{0, 4, 6, A\}, \{0, 5, 6, B\}, \{0, C, 6, I\}, \{0, 3, C, F\}, \{0, 4, C, G\},$   
 $\{0, 5, C, H\}, \{0, 3, I, L\}, \{0, 4, I, M\}, \{0, 5, I, N\}, \{0, 9, I, F\}, \{0, A,$   
 $I, G\}, \{0, B, I, H\}, \{0, 9, C, L\}, \{0, A, C, M\}, \{0, B, C, N\}, \{0, F, 6,$   
 $L\}, \{0, G, 6, M\}, \{0, H, 6, N\}; \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}, \{0, 1, 2, 6, 7, 8\}, \{0,$   
 $1, 2, 9, A, B\}, \{0, 1, 2, C, D, E\}, \{0, 1, 2, I, J, K\}, \{0, 1, 2, L, M, N\};$   
 $\{0, 6, C, I, 3, 9, F, L\}, \{0, 6, C, I, 4, A, G, M\}, \{0, 6, C, I, 5, B, H,$   
 $N\}; \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B\}, \{0, 1, 2, 3, 4, 5, C, D, E, F, G,$   
 $H\}, \{0, 1, 2, 3, 4, 5, I, J, K, L, M, N\}, \{0, 1, 2, 6, 7, 8, C, D, E, I, J,$   
 $K\}, \{0, 1, 2, 6, 7, 8, F, G, H, L, M, N\}, \{0, 1, 2, 9, A, B, F, G, H, I, J,$   
 $K\}, \{0, 1, 2, 9, A, B, C, D, E, L, M, N\}.$

Нет смысла анализировать многие решетки от групп 24-го порядка, так как их геометрия вполне понятна. Например, решетка  $S(D_{12}^1)$  является простым расширением решетки  $S(D_6^1)$ . В самом деле, следующие 15 подгрупп  $D_{12}^1$  образуют решетку  $S(D_6^1)$  (рис. 2.18):

$$\begin{array}{l}
 0 = \{e, a^6\}, 2 = \{e, a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7, a^8, a^9, a^{10}, a^{11}\}, \\
 1 = \{e, a^3, a^6, a^9\}, 3 = \{e, a^2, a^4, a^6, a^8, a^{10}\}, 9 = \{e, a^6, a^4b, a^{10}b\}, \\
 4 = \{e, a^3, a^6, a^9, ab, a^4b, a^7b, a^{10}b\}, A = \{e, a^6, ab, a^7b\}, \\
 5 = \{e, a^3, a^6, a^9, a^2b, a^5b, a^8b, a^{11}b\}, B = \{e, a^6, a^5b, a^{11}b\}, \\
 6 = \{e, a^3, a^6, a^9, b, a^3b, a^6b, a^9b\}, C = \{e, a^6, a^2b, a^8b\}, \\
 7 = \{e, a^2, a^4, a^6, a^8, a^{10}, b, a^2b, a^4b, a^6b, a^8b, a^{10}b\}, D = \{e, a^6, b, a^6b\}, \\
 8 = \{e, a^2, a^4, a^6, a^8, a^{10}, ab, a^3b, a^5b, a^7b, a^9b, a^{11}b\}, \\
 E = \{e, a^6, a^3b, a^9b\}.
 \end{array}$$

Таким образом,  $S(D_6^1)$  является верхней частью решетки  $S(D_{12}^1)$ , и вообще  $S(D_3^1) \subset S(D_6^1) \subset S(D_{12}^1) \subset \dots$

Далее опишем новую для нас (с точки зрения определяющих соотношений) группу  $D_6^3$  с образующими:

$$a = (012345)(6AEKLC)(7BFJMN)(8DGH19),$$

$$b = (0678)(19BC)(2LFI)(3HJK)(4EMG)(5DNA),$$

и соотношениями:

$$\begin{aligned} ab &= b^3 a^5, & a^5 b &= b^3 a, & a^3 b^3 &= ba^3, & a^2 b &= ba^4, & a^5 b^2 &= b^2 a^5, \\ a^5 b^3 &= ba, & ab^3 &= ba^5, & a^3 b &= b^3 a^3, & a^4 b &= ba^2, & a^3 b^2 &= b^2 a^3. \end{aligned}$$

Если элементы группы  $D_6^3$  обозначить через

$$\begin{aligned} 0 &= e, & 1 &= a, & 2 &= a^2, & 3 &= a^3, & 4 &= a^4, \\ 5 &= a^5, & 6 &= b, & 7 &= b^2, & 8 &= b^3, & 9 &= ab, \\ A &= ba, & B &= ab^2, & C &= ab^3, & D &= a^5 b, & E &= a^4 b, \\ F &= a^2 b^2, & G &= a^4 b^3, & H &= a^3 b, & I &= a^2 b^3, & J &= a^3 b^2, \\ K &= a^3 b^3, & L &= a^2 b, & M &= a^4 b^2, & N &= a^5 b^2, \end{aligned}$$

то подгруппы для построения решетки  $S(D_6^3)$  будут такими:

$$\begin{aligned} &\{0, 3\}, \{0, 7\}, \{0, 9\}, \{0, A\}, \{0, C\}, \{0, D\}, \{0, H\}, \{0, J\}, \\ &\{0, K\}; \{0, 1, 2\}; \{0, 6, 7, 8\}, \{0, E, 7, G\}, \{0, I, 7, L\}, \\ &\{0, 7, C, 9\}, \{0, 7, H, K\}, \{0, 7, A, D\}, \{0, 7, 3, J\}; \\ &\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}, \{0, 2, 4, B, J, N\}, \{0, 2, 4, 7, F, M\}, \\ &\{0, 2, 4, A, C, K\}, \{0, 2, 4, 9, H, D\}; \{0, 3, 6, 7, 8, H, J, K\}, \\ &\{0, 3, 7, 9, C, E, G, J\}, \{0, 3, 7, A, D, I, J, L\}; \\ &\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, B, F, J, M, N\}, \{0, 2, 4, 7, 9, A, C, D, F, H, K, \\ &M\}, \{0, 2, 4, 6, 7, 8, F, G, E, L, M\}. \end{aligned}$$

Весьма своеобразной является группа  $D_{12}^3$  с образующими:

$$\begin{aligned} a &= (0AK68I4EG2CM)(1JD7HB5N93LF), \\ b &= (01234567)(89ABCDEF)(GHIJKLMN) \end{aligned}$$

и определяющими соотношениями:

$$\begin{aligned} ab &= a^7 b^5 = ba^5 = b^3 a^8 = b^5 a^{11}, & ab^5 &= a^{11} b^5 = ba = b^3 a^4 = b^5 a^7, \\ ab^3 &= a^7 b^7 = ba^2 = b^3 a^5 = b^5 a^8, & ab^7 &= a^4 b = b^3 a^{11} = b^5 a^2 \text{ и т.д.} \end{aligned}$$

Группу  $D_{12}^3$  можно представить матрицами  $2 \times 2$  с элементами по mod (3):

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ &\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Если считать матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и т.д. недопустимыми, то общее число *допустимых* матриц рассматриваемого типа равно 48 и они образуют группу. Эта группа не изоморфна полной группе куба  $O_d$ , хотя бы потому, что  $D_{12}^3$  является у нее нормальным делителем (как известно, у группы  $O_d$  нет подгрупп  $D_{12}^3$ ). Решетка  $S(D_{12}^3)$  содержит всего 8 узлов, так как  $D_{12}^3$  имеет по одной подгруппе 2-го, 3-го, 4-го, 6-го и 12-го порядка и три подгруппы 8-го порядка. Остальные решетки, входящие в метарешетку  $M_{24}$ , ничего примечательного не представляют.

В табл. 2.67 содержится информация об узлах и связях как правильных, так и неправильных решеток от групп 24-го порядка. В заголовке табл. 2.67 решеткам присвоены следующие позиции:

$$\begin{array}{llll} 1 - S(C_2^2 D_3), & 2 - S(D_{12}^1), & 3 - S(C_2^2 C_6), & 4 - S(D_6^3), \\ 5 - S(C_4 D_3), & 6 - S(C_3 D_4^1), & 7 - S(C_2 D_6^2), & 8 - S(D_{12}^2), \\ 9 - S(C_2 C_{12}), & 10 - S(C_3 D_4^2), & 11 - S(D_{12}^3), & 12 - S(C_{24}), \\ 13 - S(T_d), & 14 - S(C_2 T_3), & 15 - S(T_6). \end{array}$$

Все связи условно поделены на «отходящие» (идущие от узла вверх) и «приходящие» (подходящие к узлу снизу). Если в ячейке стоит два числа, например 2, 4; это значит, что от одной части узлов отходит 2 связи, а от другой — 4 связи. Общее количество узлов дается без учета полюсов. На рис. 2.31 приведено графическое изображение метарешетки  $M_{24}$ , которое показывает иерархию всех 12 правильных решеток, построенных на базе групп 24-го порядка.

Анализ неправильных решеток начнем структурой подгруппы группы  $T_6$ , которая самым очевидным образом связана со структурой группы тетраэдра  $T_3 \equiv T$ . Образующими элементами для  $T_6$  являются:

$$\begin{aligned} a &= (012345)(6789AB)(CDEFGH)(IJKLMNOP), \\ b &= (08J3BM)(1G74DA)(2NF5KC)(GEL9HI); \end{aligned}$$

определяющими соотношениями —



$$\begin{aligned}
 a^2b &= a^5b^4 = b^2a^4 = b^5a, \quad ab^2 = a^4b^5 = ba^5 = b^4a^2, \quad b^4a = ba^4, \\
 a^5b &= a^2b^4 = b^2a = b^5a^4, \quad a^4b^2 = ab^5 = ba^2 = b^4a^5, \quad a^4b = ab^4, \\
 aba &= bab = a^2b^2a^2 = a^5b^2a^5 = b^2a^2b^2 = b^5a^2b^5 = a^4ba^4 = b^4ab^4, \\
 a^5b^5a^5 &= b^5a^5b^5 = a^4b^4a^4 = ab^4a = b^4a^4b^4 = ba^4b = a^2b^5a^2 = b^2a^5b^2.
 \end{aligned}$$

Таблица 2.67

Узлы и связи	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Верхнепол. связи	10	6	8	6	6	4	6	6	4	4	4	2	8	6	5
Отходящие связи	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	—
Узлы 12-го поряд.	7	3	7	3	3	3	3	3	3	3	1	1	1	1	—
Приходящие связи	4	2, 6	4	4, 6	2, 4, 6	2, 4	4	2, 4	2, 4	2	2	2	5	5	—
Отходящие связи	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Узлы 8-го порядка	3	3	1	3	3	1	1	3	1	1	3	1	3	1	1
Приходящие связи	7	3	7	3	3	3	3	3	3	3	1	1	3	7	3
Отходящие связи	3	1, 3	3	1, 3	1, 3	1, 3	1, 3	3	1, 3	3	1	1	1	1	1
Узлы 6-го порядка	7	5	7	5	3	5	3	1	3	1	1	1	4	4	4
Приходящие связи	2, 4	2, 4	2	2, 4	2, 4	2	2	2	2	2	2	2	4	2	2
Отходящие связи	2, 4	2, 4	2	2, 4	2, 4	2	2, 4	2, 4	2, 4	2	4	2	1, 4	1, 2	1
Узлы 4-го порядка	19	7	7	7	7	3	7	7	3	3	1	1	7	7	3
Приходящие связи	3	1, 3	3	1, 3	1, 3	3	1, 3	1	1, 3	1	1	1	1, 3	3	1
Отходящие связи	7	5	7	5	3	5	3	1	3	1	1	1	2	2	1
Узлы 3-го порядка	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	4	4	4
Приходящие связи	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Отходящие связи	4, 8	2, 8	4	2, 8	2, 8	2, 4	2, 8	8	2, 4	4	2	2	3	3, 7	7
Узлы 2-го порядка	15	13	7	9	7	5	3	1	3	1	1	1	9	7	1
Нижнеполос. связи	16	14	8	10	8	6	4	2	4	2	2	2	13	11	5
Общее число узлов	52	32	30	28	24	18	18	16	14	10	8	6	28	24	13

Решетка  $S(T_6)$  изображена на рис. 2.32. Ее структура является надрешеткой  $S(T_3)$  (рис. 2.20) и одновременно подрешеткой  $S(C_2T_3)$ , которая изображена на рис. 2.33. Выпишем подгруппы  $T_6$  и  $C_2T_3$ , используя общие символы для соответствующих узлов —  $T_6$ :

$$\begin{aligned}
 1 &= \{e, a^2, a^4\}, \quad 2 = \{e, a^2b^5, ba^4\}, \quad 3 = \{e, a^3\}, \quad 4 = \{e, ab^4, b^2a^5\}, \\
 5 &= \{e, b^2, b^4\}, \quad 6 = \{e, aba, a^3, ab^4a\}, \quad 7 = \{e, a^5b, a^3, a^2b\}, \\
 8 &= \{e, ab^2, a^3, ab^5\}, \quad 9 = \{e, a, a^2, a^3, a^4, a^5\}, \quad B = \{e, b, b^2, b^3, b^4, b^5\}, \\
 A &= \{e, ba, a^3, ba^4, a^2b^2, a^2b^5\}, \quad C = \{e, ab, b^3, ab^4, b^2a^2, b^2a^5\}, \\
 D &= \{e, aba, a^3, a^5b^5a^5, a^5b, a^2b, ab^2, ab^5\}.
 \end{aligned}$$

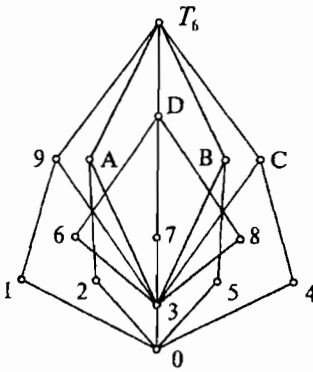


Рис. 2.31

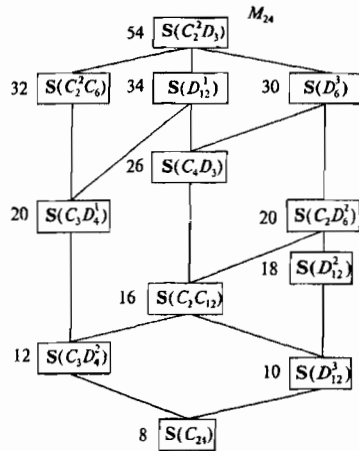


Рис. 2.32

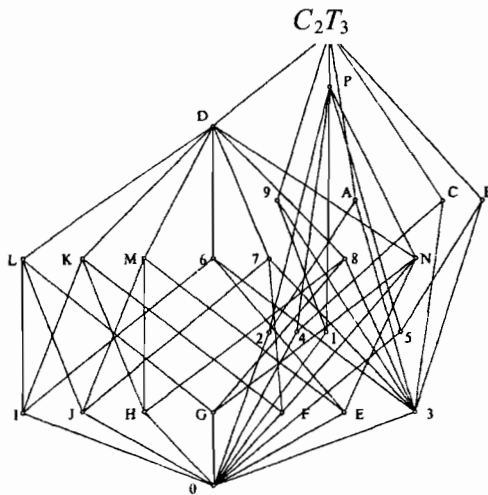


Рис. 2.33

$C_2T_3$ :  $1 = \{e, a, a^2\}$ ,  $2 = \{e, b, b^2\}$ ,  $3 = \{e, c\}$ ,  $4 = \{e, a^2b, b^2a\}$ ,  
 $5 = \{e, ab^2, ba^2\}$ ,  $6 = \{e, ab, c, abc\}$ ,  $7 = \{e, ba, c, bac\}$ ,  
 $8 = \{e, a^2ba^2, c, a^2ba^2c\}$ ,  $9 = \{e, a, a^2, c, ac, a^2c\}$ ,  
 $A = \{e, b, b^2, c, bc, b^2c\}$ ,  $B = \{e, a^2b, b^2a, c, a^2bc, b^2ac\}$ ,  
 $C = \{e, ab^2, ba^2, c, ab^2c, ba^2c\}$ ,  $E = \{e, ab\}$ ,  $G = \{e, a^2ba^2\}$ ,

$$\begin{aligned}
 D &= \{e, ab, ba, a^2ba^2, c, abc, bac, a^2ba^2c\}, N = \{e, ab, ba, a^2ba^2\}, \\
 H &= \{e, a^2ba^2c\}, I = \{e, abc\}, J = \{e, bac\}, K = \{e, ba, abc, a^2ba^2c\}, \\
 L &= \{e, a^2ba^2, bac, abc\}, M = \{e, ab, bac, a^2ba^2c\}, F = \{e, ba\}, \\
 P &= \{e, a, a^2, b, b^2, ab, ba, a^2b, b^2a, ab^2, ba^2, a^2ba^2\}.
 \end{aligned}$$

Если решетки  $S(C_2T_3)$  и  $S(T_6)$  являются верхним и нижним полюсами одной метарешетки, то третья неправильная решетка  $S(T_d)$  никак не связана с другими решетками от групп 24-го порядка. Ее 28 подгрупп приведены в списке 84 подгрупп для групп  $O_d$  (там необходимо выбрать те подмножества, куда не входят штрихованные символы).

Интересен и сравнительный анализ структур. Например, три решетки от коммутативных групп 40-го порядка —

$$C_{40} \approx C_5C_8, \quad C_2C_{20} \approx C_4C_{10} \approx C_2C_4C_5, \quad C_2^2C_{10} \approx C_2^3C_5,$$

с графической точки зрения полностью совпадают с решетками от групп  $C_{24}$ ,  $C_2C_{12}$  и  $C_2^2C_6$ . Очень схожи решетки  $S(C_2^2D_3)$  и  $S(C_2^2D_5)$  (несмотря на то, что первая насчитывает 52 узла, а вторая — 74),  $S(C_2D_6^2)$  и  $S(C_2D_{10}^2)$  (число узлов, соответственно, 18 и 26),  $S(C_4D_3)$  и  $S(C_4D_5^1)$  (24 и 34) и т.д. Хотя для правильной решетки  $S(C_2D_5^2)$  от группы 40-го порядка уже нельзя найти аналога среди решеток от групп 24-го порядка.

Мы знаем, сколь важную роль играют делители чисел. Схожесть разложений двух чисел:

$$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3, \quad 40 = 2 \times 2 \times 2 \times 5$$

обеспечивает и определенную схожесть в структурах для групп соответствующих порядков. Однако здесь нужно иметь в виду следующее обстоятельство. При последовательном возведении в степень подстановки  $a$ , представляющей собой 12-цикл, возникает еще три подстановки аналогичной периодичности —  $a^{11}$ ,  $a^7$  и  $a^5$ . Отсюда можно пытаться найти три группы 24-го порядка с определяющими соотношениями:  $ab = ba^{11}$ ,  $ab = ba^7$ ,  $ab = ba^5$ . Но для подстановок  $a$ , представляющей собой 20-цикл, существует уже семь таких композиций:

$$ab = ba^{19}, \quad ab = ba^{17}, \quad ab = ba^{13}, \quad ab = ba^{11}, \quad ab = ba^9, \quad ab = ba^7, \quad ab = ba^3.$$

Таким образом, число групп 40-го порядка будет заметно больше, чем групп 24-го порядка. Тем не менее, сравнительный анализ дает многое в понимании строения групп.

### Решетки групп 27-го порядка

Свой морфологический анализ мы закончим группами 27-го порядка ( $27 = 3 \times 3 \times 3$ ) с тем, чтобы можно было решетки от этих групп сравнить с решетками от групп 8-го порядка ( $8 = 2 \times 2 \times 2$ ). Подгруппы верхнеполюсной группы —  $C_3^3$ :

$$\begin{aligned}
 1 &= \{e, b, b^2\}, 2 = \{e, ab, a^2b^2\}, 3 = \{e, a^2b, ab^2\}, \\
 4 &= \{e, c, c^2\}, 5 = \{e, ac, a^2c^2\}, 6 = \{e, a^2c, ac^2\}, \\
 7 &= \{e, a, a^2\}, 8 = \{e, b^2c, bc^2\}, \\
 9 &= \{e, abc^2, a^2b^2c\}, A = \{e, a^2bc^2, ab^2c\}, B = \{e, bc, b^2c^2\}, \\
 C &= \{e, a^2bc, ab^2c^2\}, D = \{e, abc, a^2b^2c^2\}, \\
 E &= \{e, b, b^2, bc, b^2c^2, c, c^2, b^2c, bc^2\}, \\
 F &= \{e, ab, a^2b^2, ab^2c^2, a^2c^2, ac, bc^2, b^2c, a^2bc\}, \\
 G &= \{e, a, a^2, ab, a^2b^2, b, b^2, a^2b, ab^2\}, \\
 H &= \{e, a^2b, ab^2, a^2bc, ab^2c^2, c, c^2, a^2bc^2, ab^2c\}, \\
 I &= \{e, a^2c, ac^2, a^2b, ab^2, b^2c, bc^2, abc, a^2b^2c^2\}, \\
 J &= \{e, a, a^2, ac, a^2c^2, c, c^2, a^2c, ac^2\}, \\
 K &= \{e, a^2c, ac^2, a^2bc, ab^2c^2, b, b^2, abc^2, a^2b^2c\}, \\
 L &= \{e, b^2c, bc^2, ab^2c, a^2bc^2, a, a^2, a^2b^2c, abc^2\}, \\
 M &= \{e, ac, a^2c^2, abc, a^2b^2c^2, b, b^2, a^2bc^2, ab^2c\}, \\
 N &= \{e, bc, b^2c^2, a^2bc^2, ab, a^2b^2, ac^2, a^2c, ab^2c\}, \\
 O &= \{e, bc, b^2c^2, abc, a^2b^2c^2, a, a^2, ab^2c^2, a^2bc\}, \\
 P &= \{e, ab, a^2b^2, abc, a^2b^2c^2, c, c^2, abc^2, a^2b^2c\}, \\
 Q &= \{e, ac, a^2c^2, abc^2, a^2b^2c, a^2b, ab^2, bc, b^2c^2\}.
 \end{aligned}$$

Решетка  $S(C_3^3)$ , изображенная на рис. 2.34, обладает *простой* группой симметрии  $S[C_3^3]$ , которая разбивается на восемь классов сопряженности. Общее число элементов в группе равно 5 928. По одному представителю от каждого класса и количество элементов в классе отражено в табл. 2.68.

Представители могут играть роль образующих элементов группы. Для группы  $S[C_3^3]$  имеется 13 подгрупп 3-го порядка и такое же число подгрупп 9-го порядка, причем подгруппы четырежды связаны между собой отношением порядка, т.е. каждый узел решетки

имеет четыре связи. Несложно подсчитать, что решетка  $S(C_5^3)$  будет содержать 31 узел на одном уровне и на каждый узел будет приходиться уже 6 связей; далее, решетка  $S(C_7^3)$  имеет 57 узлов на уровне и 8 связей на узел и т.д. Отсюда можно вывести две простых формулы для подсчета числа связей (M) и числа узлов (N) верхнеплюсовых решеток  $S(C_p^3)$  ( $p$  — простое число):

$$M = p + 1, \quad N = 3 \cdot p + (p - 1)^2.$$

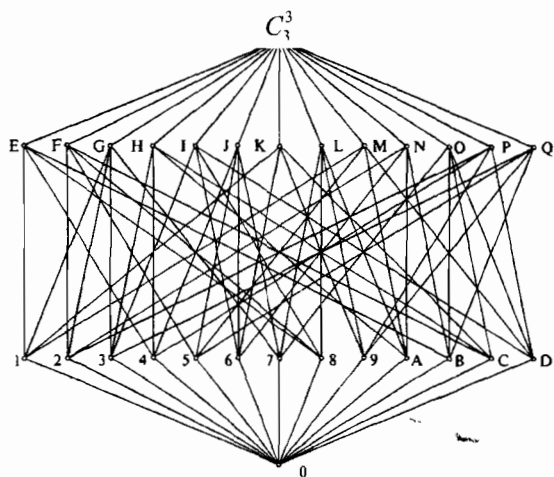


Рис. 2.34

Таблица 2.68

Если взять две четные подстановки:

$$a = (012)(345)(678),$$

$$b = (034)(578)(126)$$

и перемножить всеми возможными способами, мы уже не получим *простой* группы, но возникшие при этом 27 подстановок заслуживают самого пристального внимания. Дело в том, что получившаяся группа  $D_3^2$ , тдаленно напоминающая

группу диэдра  $D_3^1 \equiv D_3$ , обладает

замечательным свойством — все ее подстановки представляют собой 3-циклы. Группа распадается на одиннадцать классов сопря-

$C_i$	Подстановки из $S[C_3^3]$
$C_0$	(0)
$C_1$	(46)(8C)(9B)(AD)
$C_2$	(1)(5)(A)(D)(2C8)(39B)(476)
$C_3$	(5)(1AD)(263)(49C)(7B8)
$C_4$	(5)(13)(27)(486C)(9ABD)
$C_5$	(3)(5)(9B)(6D8)(1C7A24)
$C_6$	(5)(1237)(4A8B6DC9)
$C_7$	(14D5682A73CB9)

женности и имеет следующие подгруппы, обозначенные в соответствии с узлами  $S(C_3^3)$

$$\begin{aligned}
 D_3^2: \quad & 1 = \{e, a, a^2\}, \quad 2 = \{e, bab^2, ba^2b^2\}, \quad 3 = \{e, b^2ab, b^2a^2b\}, \\
 & 4 = \{e, b, b^2\}, \quad 5 = \{e, ab^2a^2, aba^2\}, \quad 6 = \{e, a^2ba, a^2b^2a\}, \\
 & 7 = \{e, aba^2b^2, bab^2a^2\}, \quad 8 = \{e, ab, b^2a^2\}, \quad 9 = \{e, ba, a^2b^2\}, \\
 & B = \{e, a^2b, b^2a\}, \quad A = \{e, ab^2a, b^2ab^2\}, \quad C = \{e, ba^2, ab^2\}, \\
 & D = \{e, aba, bab\}, \\
 & G = \{e, aba^2b^2, bab^2a^2, a, a^2, bab^2, ba^2b^2, b^2ab, b^2a^2b\}, \\
 & J = \{e, aba^2b^2, bab^2a^2, b, b^2, ab^2a^2, aba^2, a^2ba, a^2b^2a\}, \\
 & L = \{e, aba^2b^2, bab^2a^2, ab, b^2a^2, ba, a^2b^2, ab^2a, b^2ab^2\}, \\
 & O = \{e, aba^2b^2, bab^2a^2, a^2b, b^2a, ba^2, ab^2, aba, bab\}.
 \end{aligned}$$

Группу  $D_3^2$  можно воспроизвести на треугольных матрицах размером  $3 \times 3$  с элементами, взятыми по mod (3):

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \\
 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Эти матрицы образуют нормальный делитель в группе 216-го порядка, состоящей из подобных треугольных матриц, у которых на главной диагонали 8 способами расположены элементы 1 и 2. Решетка  $S(D_3^2)$  показана на рис. 2.35.

Следующую некоммутативную группу  $D_3^3$ , как и группу  $D_8^4$ , можно отнести в разряд особых, так как ее решетка  $S(D_3^3)$  в точности совпадает с инверсной решеткой  $S(C_2C_9)$  от коммутативной группы. Две регулярные подстановки:

$$a = (012345678)(9DHCGBFAE)(IPNLQOMK),$$

$$b = (09I)(1AJ)(2BK)(3CL)(4DM)(5EN)(6FO)(7GP)(8HQ)$$

могут играть роль образующих, при этом выполняются следующие равенства —

$$D_3^3: \quad ab = ba^7, a^2b = ba^5, a^3b = ba^3, a^4b = ba, a^5b = ba^8, a^6b = ba^6, \\ a^7b = ba^4, a^8b = ba^2, ab^2 = b^2a^4, a^2b^2 = b^2a^8, a^3b^2 = b^2a^3, a^4b^2 = b^2a^7, \\ a^5b^2 = b^2a^2, a^6b^2 = b^2a^6, a^7b^2 = b^2a.$$

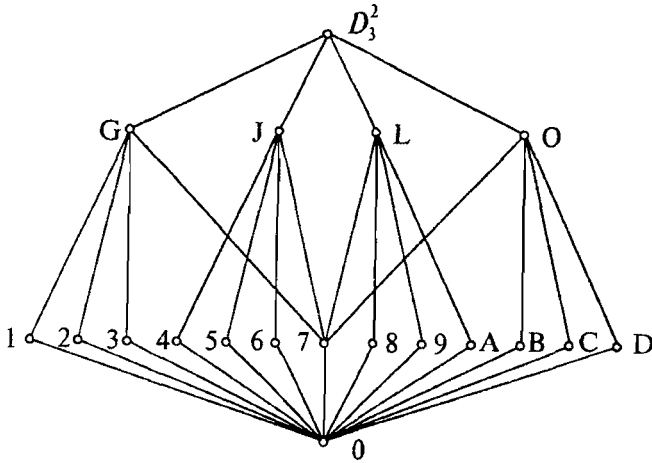


Рис. 2.35

Если подгруппы группы  $D_3^3$  обозначить соответствующим образом:

$$1 = \{e, b, b^2\}, 2 = \{e, a^3b, a^6b^2\}, 3 = \{e, a^6b, a^3b^2\}, 7 = \{e, a^3, a^6\}, \\ G = \{e, a^3, a^6, b, b^2, a^3b, a^3b^2, a^6b, a^6b^2\}, \\ J = \{e, a^3, a^6, ab, a^4b, a^7b, a^2b^2, a^5b^2, a^7b^2\}, \\ L = \{e, a^3, a^6, a^2b, a^5b, a^8b, ab^2, a^4b^2, a^8b^2\}, \\ O = \{e, a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7, a^8\},$$

то с помощью *инверсной подстановки*  $i = (1J)(2L)(3O)(7G)$  можно убедиться (рис. 2.38), что решетка  $S(D_3^3)$  окажется действительно *инверсной*. Но точно такие же подгруппы (причем здесь не нужно менять элементы) получаются для коммутативной группы  $C_2C_9$ , если в качестве образующих взять подстановки  $a = (012345678)$ ,  $b = (9AB)$ . Решетки  $S(C_3^3)$ ,  $S(D_3^2)$ ,  $S(D_3^3) \approx S(C_2C_9)$  и  $S(C_{27})$  образуют метарешетку  $M_{27}$ , цепь которой, в отличие от  $M_8$  (рис. 2.17), состоит из четырех звеньев.

## 2.4. Алгебраические системы на базе групп

### Какие бывают алгебраические системы

Группы являются краеугольным камнем *общей*, или *абстрактной*, алгебры. «Общей», или «абстрактной», алгебра называется потому, что ее объектами являются уже не конкретные «представления» (матрицы или подстановки), а *абстрактные символы*, для которых заранее вводятся определенные аксиомами операции. Не надо думать, что абстрактные символы к нам «падают с неба», их существование должно быть обеспечено наличием соответствующего представления. Если такового не находится, то убежденный конструктивист, ориентированный на содержательную математику ко всяким манипуляциям с «пустыми» знаками должен отнестись с остороженностью. Если нам говорят, что  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ , мы доверяем этому равенству в силу существования бесконечного множества конкретных равенств:

$$(2 + 3)^2 = 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 3 + 3^2 = 25, \quad (1 + 4)^2 = 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 4 + 4^2 = 25, \dots$$

Примеры с числами обуславливают действия с буквами, но никак не наоборот.

Абстрактная запись дает определенные преимущества. Так, например, вместо индуктивного поиска выражения для разложения кубического бинорма, мы могли бы воспользоваться общей формой записи чисел посредством букв, тем более что, с точки зрения письма, нет никакой разницы между символами, скажем,  $a$  и  $2$ ,  $b$  и  $3$ . Если взять значения  $a = 2$ ,  $b = 3$ , затем  $a = 1$ ,  $b = 4$  и т.д., то вероятность, что при  $a = 73$ ,  $b = 152$ , произойдет сбой и общая формула разложения квадратичного бинорма окажется неверной, маловероятно. С одной стороны, чтобы верить в сбой формулы при каком-то числовом значении буквы, нужно верить в чудеса, в сверхъестественную силу, которая бы нарушила монотонность числового ряда. С другой стороны, человек, отрицающий преимущества абстрактной (равно общей, алгебраической) записи, поступает неразумно. Античный математик Диофант, живший в III столетии в Александрии, сначала тоже использовал только цифры, но потом его числовые выкладки разрослись настолько, что он просто вынужден был прибегнуть к буквам. Эта его невинная уловка позволила нынешним историкам математики присвоить ему почетное звание первого алгебраиста мира. Однако трудно поверить, что где-нибудь в Древнем Египте или Вавилоне кто-нибудь из математиков уже не сделал



то же самое: этот естественный прием придет каждому в голову, когда дело имеешь с большими числами.

Для получения принципиально новых знаний буквенная запись дает крайне мало. Она практически не способна выполнять функцию лопаты для откапывания истин. Единственное ее неоспоримое достоинство: убеждать путем алгебраических выкладок в справедливости уже обнаруженных математических соотношений. Продемонстрируем это на следующем примере. Известно, что группа  $S_2^3$  коммутативна и для любого ее элемента выполняется равенство:  $a^2 = e$ . Этот тривиальный факт, вытекает мгновенно, стоит нам мельком бросить взгляд на подстановки:

$$e = (0), \quad a = (01), \quad b = (23), \quad c = (45), \quad ab = (01)(23), \\ ac = (01)(45), \quad bc = (23)(45), \quad abc = (01)(23)(45).$$

И мы прекрасно знаем, что обратное утверждение ошибочно, т.е. из коммутативности группы  $ab = ba$  вовсе не вытекает равенство  $a^2 = e$  для любого элемента  $a$ . В этом мы убедились при рассмотрении самых элементарных групп, в частности,  $C_2C_4$ :

$$e = (0), \quad a = (0123), \quad a^2 = (02)(13), \quad a^3 = (0321), \quad b = (45), \\ ab = (0123)(45), \quad a^2b = (02)(13)(45), \quad a^3b = (0321)(45).$$

Что же делает убежденный «формалист»? Он берется доказать, что для каждой группы, для которой имеет место равенство  $a^2 = e$ , будет выполняться коммутативный закон:  $ab = ba$ . Исходя из условий, абстрактно определяющих группу, он может провести свое доказательство, по крайней мере, двумя способами — (а) и (б):

- |   |  |
|---|--|
| <p>а) 1. <math>(ab)c = a(bc)</math>,</p> <p>2. <math>ae = ea = a</math>,</p> <p>3. <math>aa^{-1} = a^{-1}a = e</math>,</p> <p>4. <math>aa = e</math>.</p> <hr style="width: 100%;"/> <p>5. <math>ab = ba</math> ?</p> <hr style="width: 100%;"/> <p>6. <math>abab = e</math>,</p> <p>7. <math>ab = b^{-1}a^{-1}</math>,</p> <p>8. <math>ab = bb^{-1}b^{-1}a^{-1}a^{-1}a</math>,</p> <p>9. <math>ab = b(b^{-1})^2(a^{-1})^2a</math>,</p> <p>10. <math>ab = beea</math>,</p> <p>11. <math>ab = ba</math>.</p> | <p>б) 1. <math>(ab)c = a(bc)</math>,</p> <p>2. <math>ae = ea = a</math>,</p> <p>3. <math>aa^{-1} = a^{-1}a = e</math>,</p> <p>4. <math>aa = e</math>.</p> <hr style="width: 100%;"/> <p>5. <math>ab = ba</math> ?</p> <hr style="width: 100%;"/> <p>6. <math>abab = e</math>,</p> <p>7. <math>aabb = e</math>,</p> <p>8. <math>abab = aabb</math>,</p> <p>9. <math>bab = abb</math>,</p> <p>10. <math>ba = ab</math>,</p> <p>11. <math>ab = ba</math>.</p> |
|---|--|

После этих выкладок кто-то может попросить «формалиста» столь же ловко доказать обратное, а именно, что из условия коммутативности  $ab = ba$  вытекает равенство  $a^2 = e$ . У конструктивистов есть пример коммутативной группы  $C_2C_4$ , показывающий, что  $a^2 \neq e$ . Но как обязан поступить последовательный «формалист», у которого этого примера нет перед глазами? Он ведь должен, исходя из аксиом группы и общих алгебраических выкладок, показать возможность или невозможность этого утверждения. Промаявшись день-два, «формалист» скажет: «Не получается!». На что мы заметим: «Плохо искал!» Можно быть уверенным, что он никогда не подтвердит и не опровергнет это положение, поскольку для одних групп оно верно, а для других уже нет.

Между тем, коммутативные группы не представляют собой ничего такого, что может вызвать затруднения. Сложнее обстоит дело с так называемыми *нильпотентными группами*, для которых справедливо тождество  $a^m = e$ , где  $m > 2$ . Одну из таких групп мы хорошо знаем, это  $D_3^2$  с образующими:

$$a = (012)(345)(678), \quad b = (034)(578)(126),$$

которая состоит из 27 подстановок, представляющих собой 3-циклы; возведение в куб любого элемента этой группы дает  $e$ .

Для nilпотентных групп вводят понятие *коммутатора*, определяемого следующим образом:

$$[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab = aba^{-1}b^{-1}.$$

Коммутатор равен  $e$ , если группа коммутативна, в общем же случае он равен некоему другому элементу группы. Так, для группы  $D_3^2$  коммутатор, составленный из  $a$  и  $b$ , равен:  $[a, b] = (065)(173)(284)$ . Следовательно, коммутатор можно рассматривать как определенную на группе *метаоперацию*. Для любых коммутаторов справедлив следующие законы, которые проверяются подстановкой:

$$\begin{aligned} [a, b][b, a] &= e, & [a, b]^{-1} &= [b, a], & [a, b^{-1}] &= b[b, a]b^{-1}, \\ [a^{-1}, b] &= a[b, a]a^{-1}, & [ab, c] &= b^{-1}[a, c]b[b, c], \\ [a, bc] &= [a, c]c^{-1}[a, a]c. \end{aligned}$$

Но если группа nilпотентная, то для метаоперации выполняются законы ассоциативности, дистрибутивности и другие замечательные тождества:

$$[[a, b], c] = [a, [b, c]], \quad [ab, c] = [a, c][b, c],$$

$$[a, bc] = [a, b][a, c], [a, b]^{-1} = [a^{-1}, b] = [a, b^{-1}], [[a, b], b] = e, \dots$$

Чтобы доказать любое из этих тождеств, конструктивисту не требуется больших интеллектуальных усилий, особенно если у него под рукой компьютер. Нильпотентная группа  $D_3^2$  легко разбивается на одиннадцать классов эквивалентности и прямой подстановкой их представителей устанавливается справедливость любого тождества. Для алгебраиста-формалиста поиск доказательства подобных тождеств выливается в тяжелый и неблагодарный труд; никогда не знаешь, увенчаются ли твои поиски успехом или ты обречен на бесконечное манипулирование символами. Докажем в общем виде, что из равенства  $a^3 = e$  вытекает равенство  $[[a, b], b] = e$ :

- |  |   |
|--|---|
| 1. $(ab)c = a(bc)$ ,                     | 10. $aba = b^{-1}a^{-1}b^{-1}$ ,                    |
| 2. $ae = ea = a$                         | 11. $abaabaaba = e$ ,                               |
| 3. $aa^{-1} = a^{-1}a = e$ ,             | 12. $abaabab^{-1}a^{-1}b^{-1} = e$ ,                |
| 4. $aaa = e$ ,                           | 13. $aba^{-1}bab^{-1}a^{-1}b^{-1} = e$ ,            |
| 5. $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$ .           | 14. $aba^{-1}(b^{-1}b)bab^{-1}a^{-1}b^{-1} = e$ ,   |
| <u>6. <math>[[a, b], b] = e</math> ?</u> | 15. $(aba^{-1}b^{-1})b(bab^{-1}a^{-1})b^{-1} = e$ , |
| 7. $bababa = e$ ,                        | 16. $(aba^{-1}b^{-1})b(aba^{-1}b^{-1})b^{-1} = e$ , |
| 8. $ababa = b^{-1}$ ,                    | 17. $[a, b] b [a, b]^{-1} b^{-1} = e$ ,             |
| 9. $baba = a^{-1}b^{-1}$ ,               | 18. $[[a, b], b] = e$ .                             |

Теперь алгебраистам-формалистам предлагается установить: будет ли из равенства  $[[a, b], b] = e$  вытекать равенство  $a^3 = e$ ?

Конечно же, любое из выписанных тождеств для нильпотентных групп с определяющим ее равенством  $a^3 = e$  прежде устанавливалось индуктивно, на подстановках или выписанных выше матрицах, в частности, для конкретной группы  $D_3^2$ , и лишь затем разрабатывались какие-то общие схемы их доказательства. Искать же «втемную» правильное решение очень сложно, да и вряд ли необходимо. Число разнообразных групп огромно, а количество «красивых» соотношений между их элементами еще больше. Сейчас мы хотим познакомить нашего читателя с математическими объектами, тесно связанными с группами. Этими объектами являются *поля многочленов*, свойство которых сегодня широко используется в процедуре *кодирования информации*. Чтобы подступиться к конкретным многочленам, нам понадобится ряд новых понятий, в частности, мы

вновь вернемся к *линейным пространствам*, с которых начали главу, чтобы рассмотреть их уже с точки зрения *поля*. Оговоримся, в этом подразделе любое множество с определенными на нем законами будет называться *алгебраической системой*, а также просто *алгеброй* или *системой*. Группы и поля являются примерами таких алгебраических систем, но они не единственные алгебры, причем мы не станем рассматривать их абстрактно, поскольку это мало поможет в таком практическом деле, как кодирование информации.

Если введена какая-либо операция на множестве, не выводящая элементы за пределы этого множества, то данная алгебраическая система называется *группоидом*. Если в группоиде существует нейтральный элемент, то система называется *квазигруппой (луной)*. Если в квазигруппе выполняется закон ассоциативности, то система называется *полугруппой (моноидом)*. Если в полугруппе каждому элементу можно найти обратный, то система называется *группой*. Если в системе введены одновременно две операции — сложение и умножение, — причем для сложения выполняются все законы коммутативной группы, а по умножению законы группоида и дистрибутивный закон, то система называется *кольцом*. Если умножение в кольце еще и ассоциативно, то кольцо называется *ассоциативным*. Если в ассоциативном кольце умножение коммутативно, то система называется *ассоциативно-коммутативным кольцом*. Если все отличные от нуля элементы кольца составляют группу по умножению, то система называется *телом*. Если мультипликативная группа, входящая в тело, коммутативна, то система называется *полем*.

Приведем примеры этих алгебраических систем. Множество всех квадратных матриц образует ассоциативное кольцо. Множество многочленов с действительными коэффициентами от одной переменной с операциями сложения и умножения тоже образует ассоциативное кольцо. Множество векторов евклидова пространства с операциями сложения векторов и векторного умножения образуют просто кольцо. Множество действительных чисел без нуля по умножению образуют мультипликативную группу. Множество натуральных чисел по сложению образуют аддитивную полугруппу. Множество целых чисел с операциями сложения и умножения образуют поле. Поля образуют и комплексные числа, кватернионы же являются телами. Комплексные числа, кватернионы и числа Клиффорда подчиняются закону ассоциативности, октава ему не подчиняется.

Если в ассоциативной алгебре сохранить аддитивную группу, а операцию умножения заменить метаоперацией *симметрирования*, т.е.  $a * b = ab + ba$ , то будет получено неассоциативное кольцо, в котором для элементов  $a$  и  $b$  выполняются равенства:

$$a * b = b * a, \quad ((a * a) * b) * a = (a * a) * (b * a).$$

Проверим второе равенство прямой подстановкой, для чего распишем правую часть —

$$\begin{aligned} & [(aa + aa)b + b(aa + aa)]a + a[(aa + aa)b + b(aa + aa)] = \\ & = aaba + aaba + baaa + baaa + aaab + aaab + abaa + abaa = \\ & = (aa + aa)(ba + ab) + (ba + ab)(aa + aa) = (a * a) * (b * a). \end{aligned}$$

В результате получим левую часть равенства. Эта алгебраическая система носит название *кольца Ёрдана*. Если в ассоциативной алгебре вместо симметрирования ввести метаоперацию *антисимметрирования*, т.е.  $a \circ b = ab - ba$ , то будут выполняться два других равенства

$$a \circ b = 0, \quad (a \circ b) \circ c + (b \circ c) \circ a + (c \circ a) \circ b = 0,$$

(проверяется аналогично предыдущему случаю). Такая система получила название *кольца Ли*. Метаоперации симметрирования и антисимметрирования по своей сущности схожи с вышевведенной метаоперацией *коммутирования*. Кольца Ли и Ёрдана здесь введены абстрактно, как выше были введены нильпотентные группы. Сейчас перейдем к рассмотрению двух конкретных полей, а именно: линейные пространства векторов и пространства двухкомпонентных чисел на базе иррациональности.

### Числовые поля

Граница между понятиями числа и вектора, как мы убедились выше, достаточно условна. Тем не менее, зададим два разнородных множества элементов, одно из которых назовем *векторами*:  $a, b, c, \dots \in V$ , другое — *числами (скалярами)*:  $a, b, c, \dots \in U$ . Алгебраическая система называется *линейным пространством над полем чисел*, если векторы представлены через числа в виде некоторой комбинации базисных векторов  $e_i$ :

$$a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n.$$

При этом предполагается, что векторы по сложению образуют коммутативную группу, а числа удовлетворяют законам поля; кроме того, выполняются четыре следующих условия:

$$a(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = a\mathbf{a} + a\mathbf{b}, (\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{a} = a\mathbf{a} + \mathbf{b}\mathbf{a}, (ab)\mathbf{a} = a(\mathbf{b}\mathbf{a}), e\mathbf{a} = \mathbf{a}.$$

Говорят, что векторы  $\mathbf{e}_i$  образуют *базис* векторного пространства  $V$  размерности  $n$ . Базис будет считаться линейно независимым, если из равенства  $a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + \dots + a_n\mathbf{e}_n = 0$  следует  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0$ . Векторное пространство  $V$  может иметь несколько наборов базисных векторов, поскольку сам базисный вектор  $\mathbf{e}_i$  может быть выражен через систему векторов, в которой эта базисная составляющая заменена любым другим вектором:  $\mathbf{e}_i = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + \dots + b_i\mathbf{a} + \dots + b_n\mathbf{e}_n$ . Однако любой набор базисных векторов всегда имеет одинаковое количество базисных компонентов, определяющих размерность пространства  $V$ . При нахождении набора базисных векторов или при определении размерности пространств  $V$  важно установить, является ли данная совокупность векторов  $\mathbf{a}_i$  линейно независимой. Это можно сделать несколькими способами, в частности, если система векторов  $\mathbf{a}_i$  зависима, то составленный на их основе *определитель Грама* равен нулю; для трехмерного случая имеем:

$$\gamma = \begin{vmatrix} (a_1a_1) & (a_1a_2) & (a_1a_3) \\ (a_2a_1) & (a_2a_2) & (a_2a_3) \\ (a_3a_1) & (a_3a_2) & (a_3a_3) \end{vmatrix} = 0.$$

Если  $V_i$  подмножество базисных векторов пространства  $V$ , то говорят о *подпространстве*  $V_i$  относительно пространства  $V$ . *Прямой суммой* двух подпространств  $V_1$  и  $V_2$  называется множество векторов вида  $\mathbf{a}_i + \mathbf{b}_i$ , где  $\mathbf{a}_i \in V_1$ ,  $\mathbf{b}_i \in V_2$ . Размерность нового пространства  $N(V_1 + V_2)$  определяется формулой включения и исключения подмножеств. В нашем случае она выглядит следующим образом:

$$N(V_1 + V_2) = N(V_1) + N(V_2) + N(V_1 \cap V_2).$$

Доопределим линейное пространство  $V$  скалярным произведением векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ :  $(\mathbf{a}\mathbf{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n$ . В теории кодирования информации дело имеют, как правило, с двоичной системой, так что  $(\mathbf{a}\mathbf{b}) = \{0, 1\}$ . Если скалярное произведение равно нулю  $(\mathbf{a}\mathbf{b}) = 0$ , то векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  *ортогональны*. Подпространства  $V_1$  и  $V_2$  будем называть *ортогональными дополнениями* до пространства  $V$ , если каждый вектор из  $V_1$  ортогонален любому вектору из  $V_2$ , а прямая сумма подпространств  $V_1$  и  $V_2$  дает целиком пространство  $V$ .

Пусть задано линейное пространство  $V$  из 16 векторов  $\mathbf{a}_0 = 0000$ ,  $\mathbf{a}_1 = 0001$ ,  $\mathbf{a}_2 = 0010$ , ...,  $\mathbf{a}_{15} = 1111$ . Поставим перед собой задачу выбора системы базисных векторов таким образом, чтобы в нее вхо-

дили векторы  $\mathbf{a}_7 = 0111$  и  $\mathbf{a}_{14} = 1110$ . С помощью определителя Грама установим линейную независимость своего базиса, а затем разобьем двумя различными способами пространство  $V$  на два ортогональных дополнения.

Размерность нашего пространства равна  $N(V) = 4$ . Испытаем четыре вектора  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_7$  и  $\mathbf{a}_{14}$  на независимость. С этой целью вычислим соответствующие скалярные произведения:

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}_1\mathbf{a}_1) &= 00 + 00 + 00 + 11 = 1, & (\mathbf{a}_4\mathbf{a}_4) &= 1, & (\mathbf{a}_7\mathbf{a}_{14}) &= 0, \\ (\mathbf{a}_1\mathbf{a}_4) &= 00 + 01 + 00 + 10 = 0, & (\mathbf{a}_4\mathbf{a}_{14}) &= 1, & (\mathbf{a}_{14}\mathbf{a}_{14}) &= 1, \\ (\mathbf{a}_1\mathbf{a}_7) &= 1, (\mathbf{a}_1\mathbf{a}_{14}) = 0, (\mathbf{a}_4\mathbf{a}_7) = 1, & (\mathbf{a}_7\mathbf{a}_7) &= 1, \end{aligned}$$

Определитель Грама отличен от нуля:

$$\gamma = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Следовательно, четыре вектора  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_7$  и  $\mathbf{a}_{14}$  могут составить базис, а раз так, то все остальные векторы должны выражаться через них:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_0 &= 0\mathbf{a}_1 + 0\mathbf{a}_4 + 0\mathbf{a}_7 + 0\mathbf{a}_{14}, & \mathbf{a}_8 &= 1\mathbf{a}_1 + 0\mathbf{a}_4 + 1\mathbf{a}_7 + 1\mathbf{a}_{14}, \\ \mathbf{a}_1 &= 1\mathbf{a}_1 + 0\mathbf{a}_4 + 0\mathbf{a}_7 + 0\mathbf{a}_{14}, & \mathbf{a}_9 &= 0\mathbf{a}_1 + 0\mathbf{a}_4 + 1\mathbf{a}_7 + 1\mathbf{a}_{14}, \\ \mathbf{a}_2 &= 1\mathbf{a}_1 + 1\mathbf{a}_4 + 1\mathbf{a}_7 + 0\mathbf{a}_{14}, & \mathbf{a}_{10} &= 0\mathbf{a}_1 + 1\mathbf{a}_4 + 0\mathbf{a}_7 + 1\mathbf{a}_{14}, \\ \mathbf{a}_3 &= 0\mathbf{a}_1 + 1\mathbf{a}_4 + 1\mathbf{a}_7 + 0\mathbf{a}_{14}, & \mathbf{a}_{11} &= 1\mathbf{a}_1 + 1\mathbf{a}_4 + 0\mathbf{a}_7 + 1\mathbf{a}_{14}, \\ \mathbf{a}_4 &= 0\mathbf{a}_1 + 1\mathbf{a}_4 + 0\mathbf{a}_7 + 0\mathbf{a}_{14}, & \mathbf{a}_{12} &= 1\mathbf{a}_1 + 1\mathbf{a}_4 + 1\mathbf{a}_7 + 1\mathbf{a}_{14}, \\ \mathbf{a}_5 &= 1\mathbf{a}_1 + 1\mathbf{a}_4 + 0\mathbf{a}_7 + 0\mathbf{a}_{14}, & \mathbf{a}_{13} &= 0\mathbf{a}_1 + 1\mathbf{a}_4 + 1\mathbf{a}_7 + 1\mathbf{a}_{14}, \\ \mathbf{a}_6 &= 1\mathbf{a}_1 + 0\mathbf{a}_4 + 1\mathbf{a}_7 + 0\mathbf{a}_{14}, & \mathbf{a}_{14} &= 0\mathbf{a}_1 + 0\mathbf{a}_4 + 0\mathbf{a}_7 + 1\mathbf{a}_{14}, \\ \mathbf{a}_7 &= 0\mathbf{a}_1 + 0\mathbf{a}_4 + 1\mathbf{a}_7 + 0\mathbf{a}_{14}, & \mathbf{a}_{15} &= 1\mathbf{a}_1 + 0\mathbf{a}_4 + 0\mathbf{a}_7 + 1\mathbf{a}_{14} \end{aligned}$$

Смена базиса привела к *перекодированию* всех векторов, координаты которых можно представлять некими *кодowymi словами*. Так, вместо  $\mathbf{a}_{12} = 1100$  появился код 1111, что соответствовало кодовому слову  $\mathbf{a}_{15}$ , вместо  $\mathbf{a}_{13}$  появился код 0111.

Ортогональными дополнениями могут быть два векторных подпространства —  $V_1 = \{\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5\}$  и  $V_2 = \{\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_8, \mathbf{a}_{10}\}$ , поскольку соответствующие скалярные произведения —  $(\mathbf{a}_1\mathbf{a}_{10}) = 0$ ,  $(\mathbf{a}_5\mathbf{a}_2) = 0$  и т.д. — равны нулю. Ортогональными дополнениями будут и пространства  $V_1 = \{\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_2\}$  и  $V_2 = \{\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5, \mathbf{a}_8, \mathbf{a}_9, \mathbf{a}_{12}, \mathbf{a}_{13}\}$ ; комбинаций здесь существует множество.

Мы уже говорили, что векторы и матрицы есть некие специфические числа, над которыми можно осуществлять определенные математические действия. Так, традиционные *комплексные числа* — это двухкомпонентные числа на базе *действительной* (1) и *мнимой* ( $i = \sqrt{-1}$ ) единиц. В роли мнимой единицы может выступать какая-нибудь *иррациональная «единица»*, например,  $\sqrt{2}$  или  $\sqrt[3]{4}$ . Вообще, иррациональные числа подразделяются на *трансцендентные* ( $\pi$ ,  $e$ ,  $\lg 2$ ,  $\sin 5$ ) и *алгебраические*. Действительное число называют алгебраическим, если оно является корнем некоторого многочлена с целыми коэффициентами. С этой точки зрения, традиционные комплексные числа тоже будут алгебраическими, так как они являются корнями уравнения  $n$ -ой степени. В практических задачах электротехники рациональное число, например 2,1, часто складывают с иррациональным  $\sqrt{3} \approx 1,7$  и получают приблизительный результат 3,8. С точки зрения теории чисел, этого делать нельзя: иррациональные числа, как и комплексные, являются типичными представителями двухкомпонентных векторов. В частности, корнями квадратного уравнения с целыми коэффициентами  $x^2 - 6x + 1 = 0$  является пара двухкомпонентных чисел

$$x_1 = 3 + 2\sqrt{2} \quad \text{и} \quad x_2 = 3 - 2\sqrt{2}.$$

Общий вид таких чисел —  $c = a + bi$ ,  $i = \sqrt{2}$  — схож с видом комплексных чисел, только в роли мнимой единицы здесь выступает иррациональное число. Действия над двухкомпонентными числами на базе иррациональности во многом аналогичны действиям над комплексными числами. В частности, формула умножения в обоих случаях выглядит одинаково:

$$(a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) = (a_1a_2 + b_1b_2i^2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i.$$

Кроме того, нормированным комплексным числам удовлетворяет уравнение окружности:

$$1 = x^2 + y^2 = (x + yi)(x - yi), \quad \text{где } x = \cos\varphi, y = \sin\varphi.$$

Двухкомпонентным числам на базе  $\sqrt{2}$  также можно поставить в соответствие аналогичное уравнение:

$$1 = x^2 - 2y^2 = (x + y\sqrt{2})(x - y\sqrt{2}).$$

Решениями этого уравнения служат два числа  $x_0 = 3$ ,  $y_0 = 2$ , но не только. Чтобы найти другие решения этого уравнения, нужно последовательно возводить в степень числа  $3 \pm 2\sqrt{2}$ , в частности,  $(3 \pm$



$2\sqrt{2})^2 = 17 \pm 12\sqrt{2}$ , следовательно, пара чисел  $x_1 = 17, y_1 = 12$  также удовлетворяет уравнению. Следующее решение получается при возведении исходного числа в куб  $(3 \pm 2\sqrt{2})^3 = 90 \pm 70\sqrt{2}$ , значит,  $x_2 = 90, y_2 = 70$  и т.д. Уравнение вида  $1 = x^2 - Dy^2$  называется *уравнением Пелля*; ему удовлетворяет бесконечная последовательность пар чисел. Например, если  $D = 7$ , т.е.  $i = \sqrt{7}$ , то уравнение Пелля, имеющего вид  $1 = x^2 - 7y^2$ , выполняется при  $x_0 = 8, y_0 = 3; x_1 = 127, y_1 = 48$  и т.д.; если  $D = 13$ , то  $x_0 = 18, y_0 = 5; x_1 = 649, y_1 = 180$  и т.д.

Пусть дано уравнение  $2x^2 + 5x + 4 = 0$ . В поле действительных чисел оно не имеет решений, но в поле комплексных чисел решение уже есть. Существует оно и в поле вычетов по mod (11). В самом деле,

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{-7}}{4} = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{4} \pmod{11} = \{2, 1\}.$$

Данная ситуация схожа с решением кубического уравнения  $x^3 - 1 = 0$  в полях действительных и комплексных чисел. В поле действительных чисел он разлагается на два неприводимых множителя —  $(x - 1)(x^2 + x + 1)$ , а в поле комплексных чисел его можно представить тремя сомножителями

$$(x - 1)(x - \omega_1)(x - \omega_2),$$

$$\omega_1 = -1/2 + \sqrt{3}/2i, \quad \omega_2 = -1/2 - \sqrt{3}/2i,$$

— кубические корни, образующие группу с умножением по табл. 2.69. В поле двух чисел  $\{0, 1\}$ , т.е. в поле вычетов по mod (2), это кубическое уравнение может быть разложено на три скобки с корнями  $c_1 = 1, c_2 = x, c_3 = x + 1$ .

Таблица 2.69

$C_3$	1	$\omega_1$	$\omega_2$
1	1	$\omega_1$	$\omega_2$
$\omega_1$	$\omega_1$	$\omega_2$	1
$\omega_2$	$\omega_2$	1	$\omega_1$

Теперь рассмотрим только такие квадратные уравнения  $ax^2 + bx + c = 0$ , у которых коэффициенты являются всевозможными вычетами по mod (5). Тогда корнями этих уравнений станут числа 0, 1, 2, 3 или 4. Квадраты этих чисел могут дать только три из пяти чисел:  $0^2 = 0, 1^2 = 1, 2^2 = 4, 3^2 = 4, 4^2 = 1$ . Другими словами, среди вычетов по mod (5) нет чисел, квадраты которых равнялись бы 2 или 3, а это значит, что уравнения  $x^2 = 2$  или  $x^2 = 3$  не имеют решений. Чтобы эти уравнения все же решались, введем иррациональность  $\sqrt{2}$ . Тогда вместо пяти чисел получим поле из 25 чисел:

$$\begin{array}{ccccc}
0 + 0\sqrt{2}, & 1 + 0\sqrt{2}, & 2 + 0\sqrt{2}, & 3 + 0\sqrt{2}, & 4 + 0\sqrt{2}, \\
0 + 1\sqrt{2}, & 1 + 1\sqrt{2}, & 2 + 1\sqrt{2}, & 3 + 1\sqrt{2}, & 4 + 1\sqrt{2}, \\
0 + 2\sqrt{2}, & 1 + 2\sqrt{2}, & 2 + 2\sqrt{2}, & 3 + 2\sqrt{2}, & 4 + 2\sqrt{2}, \\
0 + 3\sqrt{2}, & 1 + 3\sqrt{2}, & 2 + 3\sqrt{2}, & 3 + 3\sqrt{2}, & 4 + 3\sqrt{2}, \\
0 + 4\sqrt{2}, & 1 + 4\sqrt{2}, & 2 + 4\sqrt{2}, & 3 + 4\sqrt{2}, & 4 + 4\sqrt{2}.
\end{array}$$

Не выходя за рамки этого множества, можно производить сложение и умножение чисел. Каждый элемент этой *финитной арифметики* является той или иной степенью *образующего элемента*  $2 + \sqrt{2}$  :

$$(2 + \sqrt{2})^2 = 1 + 4\sqrt{2}, \dots, (2 + \sqrt{2})^{24} = 1 + 0\sqrt{2}.$$

Можно ввести числа  $a + b\sqrt{3}$  и путем последовательного возведения в степень получить новое поле на базе иррациональности  $\sqrt{3}$ , в частности:

$$(3 + 2\sqrt{3})^2 = 1 + 2\sqrt{3}, \dots, (3 + 2\sqrt{3})^3 = 0 + 3\sqrt{3}, \dots$$

Возможно построение поля на базе двух иррациональностей —  $\sqrt{2}$  и  $\sqrt{3}$ ; в этом случае будем иметь трехкомпонентные числа типа  $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}$ , взятые по mod (5) и т.д.

### Сведения из теории чисел

Чтобы двигаться дальше, напомним некоторые общие сведения из *теории чисел*. Всякое натуральное число  $p$ , не имеющее других натуральных делителей, кроме единицы и самого себя, называется *простым*, в противном случае — *составным* (единица считается ни простым, ни составным). Всякое натуральное число  $a$ , кроме единицы, может быть представлено произведением простых множителей:  $a = p_1 p_2 \dots p_n$ . Среди простых сомножителей этого представления могут встретиться равные. Если через  $p_1, p_2, \dots, p_k$  обозначить различные простые числа и допустить, что они встречаются, соответственно,  $n_1, n_2, \dots, n_k$  раз, то получим *представление*  $a = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k}$ , которое называется *каноническим*. Так, каноническое разложение числа 360 выглядит следующим образом:  $2^3 3^2 5$ . Каноническое разложение показывает, что все делители числа  $a$  исчерпываются числами вида  $d = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_k^{m_k}$ , где  $0 \leq m_1 \leq n_1, 0 \leq m_2 \leq n_2, \dots, 0 \leq m_k \leq n_k$ . Отношение делимости не является *отношением эквивалентности*:  $a/b \neq b/a$ , но операция сравнения по mod( $m$ ) будет таковой, поскольку для нее выполняются все три закона эквивалентно-

сти:  $a = a \pmod{m}$  — *рефлексивности*, из  $a = b \pmod{m}$  следует  $b = a \pmod{m}$  — *симметричности*, если  $a = b \pmod{m}$  и  $b = c \pmod{m}$ , то  $a = c \pmod{m}$  — *транзитивности*.

Вычеты по  $\pmod{m}$  определяют разбиение множества целых чисел на  $t$  классов эквивалентности:  $\{C_0, C_1, C_2, \dots, C_{m-1}\}$ , где  $C_i = \{i, i + m, i + 2m, \dots\}$ . Например, для неотрицательных целых чисел по  $\pmod{4}$  имеется четыре класса:

$$\begin{aligned} C_0 &= \{0, 4, 8, 12, \dots\}, & C_2 &= \{2, 6, 10, 14, \dots\}, \\ C_1 &= \{1, 5, 9, 13, \dots\}, & C_3 &= \{3, 7, 11, 15, \dots\}. \end{aligned}$$

Объединение непересекающихся классов дает бесконечный монотонно возрастающий числовой ряд. Классы образуют *фактормножество*, которое может быть представлено в нашем случае четырьмя представителями —  $\{0, 1, 2, 3\}$ ; представители образуют *ядро* этого фактормножества. Для представителей можно ввести операции сложения и умножения по  $\pmod{4}$ , которые удобно оформить таблицами (табл. 2.70 и табл. 2.71).

Таблица 2.70

0	1	2	3
1	2	3	0
2	3	0	1
3	0	1	2

Таблица 2.71

0	0	0	0
0	1	2	3
0	2	0	2
0	3	2	1

По сложению (табл. 2.70) имеем коммутативную группу, а по умножению (табл. 2.71) — нет, так как у нас получилось  $2 \cdot 2 = 0$ , что не допустимо для группы, но допустимо<sup>4</sup> для кольца, которое имеет *делители нуля*. Примером кольца с делителем нуля является кольцо квадратных матриц:

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Кольца без делителей нуля называются *кольцами целостности*.

Если вычеты образованы по модулю простого числа, то фактормножество или ядро его представителей является полем  $GF(p)$ , которое имеет специальное название — *поле Галуа*. В этих полях делители нуля уже отсутствуют, поэтому они занимают особое место в алгебре. Отбросив окаймляющие нули в таблице умножения для полей Галуа, которые есть и в табл. 2.71, мы получим элементы, образующие *циклическую группу*. Табл. 2.72 и табл. 2.73 являются



$$\begin{aligned} a/b &= q_1 + r_1/b = q_1 + \frac{1}{b/r_1}; \\ b/r_1 &= q_2 + r_2/r_1 = q_2 + \frac{1}{r_1/r_2}; \\ r_1/r_2 &= q_3 + r_3/r_2 = q_3 + \frac{1}{r_2/r_3}; \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ r_{n-1}/r_n &= q_{n+1}. \end{aligned}$$

Последовательно подставляя эти равенства друг в друга, получаем цепную дробь:

$$a/b = q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3 + \frac{1}{\dots}}}$$

Заданы два числа  $a = 1656$  и  $b = 1150$ . Найдем НОД( $a, b$ ) и НОК( $a, b$ ), составим цепную дробь и линейную комбинацию:

$$\begin{aligned} 1656 &= 1150 \cdot 1 + 506, & 46 &= 138 - 92 = 138 - 506 + 138 \cdot 3 = \\ 1150 &= 506 \cdot 2 + 138, & &= 4 \cdot 138 - 506 = 4 \cdot 1150 - 9 \cdot 506 = \\ 506 &= 138 \cdot 3 + 92, & &= 4 \cdot 1150 - 9 \cdot 1656 + 9 \cdot 1150 = \\ 138 &= 92 \cdot 1 + 46, & &= 13 \cdot 1150 - 9 \cdot 1656; \\ 92 &= 46 \cdot 2; & m &= -9, \quad n = 13; \\ \text{НОД}(a, b) &= 46; & \text{НОК}(a, b) &= a \cdot b / \text{НОД}(a, b) = 41400; \end{aligned}$$

$$1656 / 1150 = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}$$

### Поля многочленов

Теперь мы приобрели необходимые сведения для действия и с многочленами  $n$ -ой степени вида:

$$a_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n.$$

Если  $a_n(c) = 0$ , то  $c$  — *корень* многочлена  $a_n(x)$ . Число  $c$  будет корнем  $a_n(x)$  тогда и только тогда, когда  $a_n(x)$  делится на скобку  $(x - c)$  без остатка. Действительно, пусть

$$a(x) = (x - c)b(x) + r(x)$$

при  $x = c$ , имеем  $a(c) = (c - c)b(c) + r(c)$ . Таким образом, остаток  $r(c) = a(c)$ , который равен нулю, по определению.

Поиск корней многочлена  $a_n(x)$  равносильно поиску его линейных делителей; при  $a_0 = 1$  получим

$$\begin{aligned} a_n(x) &= (x - c_1)b_1(x) = (x - c_1)(x - c_2)b_2(x) = \dots \\ &= (x - c_1)(x - c_2) \dots (x - c_n). \end{aligned}$$

Общее число корней многочлена  $a_n(x)$  всегда равно  $n$ . Однако могут встречаться кратные корни, тогда

$$a_n(x) = (x - c_1)^{n_1}(x - c_2)^{n_2} \dots (x - c_k)^{n_k}.$$

Это называется *каноническим разложением* многочлена  $a_n(x)$  на *простые (неприводимые)* множители. Многочлен  $a(x)$  называется *приводимым*, если он может быть разложен в произведение двух множителей без остатка —

$$a(x) = b(x)q(x).$$

Но известна ситуация, когда многочлен  $a(x)$  часть корней имеет в поле действительных чисел, а часть — в поле комплексных чисел. Таким образом, о приводимости или неприводимости многочленов можно говорить лишь по отношению к данному полю, поскольку многочлен, неприводимый в одном поле, может оказаться приводимым в другом. Ранее приведенный пример с многочленом  $x^3 - 1$  в этом отношении показателен.

Далее нас будут интересовать многочлены  $a(x)$ , у которых коэффициенты  $a_i$  взяты из числового поля  $GF(p)$ . Эти многочлены образуют кольцо относительно сложения и умножения. Пусть этими многочленами будут

$$a(x) = x^3 + x + 1 \text{ и } b(x) = x^2 + x + 1,$$

а числовое поле  $GF(2) = \{0, 1\}$ , тогда сумма и произведение  $a(x)$  и  $b(x)$  дадут два новых многочлена —

$$a(x) + b(x) = x^3 + x^2 \text{ и } a(x) \cdot b(x) = x^5 + x^4 + 1.$$

В своей совокупности многочлены образуют именно *ассоциативно-коммутативное кольцо*, но не поле, поскольку не существует таких многочленов степени больше единицы, которые бы при перемножении давали единицу:  $a(x) \cdot b(x) = 1$ , т.е. в алгебре многочленов для каждого ее элемента отсутствует обратный.

Многочлены можно делить друг на друга:

$$\begin{array}{r}
 a(x) = x^3 + x + 1 \\
 \underline{x^3 + x^3 + x} \\
 x^2 + 1 \\
 \underline{x^2 + x + 1} \\
 x = r(x)
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 |x^2 + x + 1 = b(x) \\
 x + 1 = q(x) \\
 \\
 a(x) = b(x)q(x) + r(x).
 \end{array}$$

Многочлен  $b(x)$  называется делителем  $a(x)$ , если остаток  $r(x)$  равен нулю. Наибольший общий делитель двух многочленов  $a(x)$  и  $b(x)$  находится по алгоритму Евклида, только роль чисел уже выполняют многочлены. Покажем, как его найти на многочленах  $a(x)$  и  $b(x)$  с коэффициентами, взятыми из числового поля  $GF(3)$ :

$$a(x) = x^6 + 2x^3 + x^2 + 2x + 2, \quad b(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1.$$

Следуем алгоритму Евклида:

$$\begin{array}{r}
 a(x) = x^6 + 2x^3 + x^2 + 2x + 2 \\
 \underline{x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1} \\
 2x^5 + 2x^4 + x^3 + x + 2 \\
 \underline{2x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 2} \\
 2x^3 + x^2 + 2x = r_1(x);
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 |x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = b(x) \\
 x + 2 = q_1(x)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 b(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \\
 \underline{x^5 + 2x^4 + x^3} \\
 2x^4 + x^2 + x + 1 \\
 \underline{2x^4 + x^3 + 2x^2} \\
 2x^3 + 2x^2 + x + 1 \\
 \underline{2x^3 + x^2 + 2x} \\
 x^2 + 2x + 1 = r_2(x);
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 |2x^3 + x^2 + 2x = r_1(x) \\
 2x^2 + x + 1 = q_2(x) \\
 \\
 a(x) = b(x)q_1(x) + r_1(x), \\
 b(x) = r_1(x)q_2(x) + r_2(x), \\
 r_1(x) = r_2(x)q_3(x);
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 r_1(x) = 2x^3 + x^2 + 2x \\
 \underline{2x^3 + x^2 + 2x} \\
 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 |x^2 + 2x + 1 = r_2(x) \\
 2x = q_3(x)
 \end{array}
 .$$

Таким образом,  $\text{НОД}(a(x), b(x)) = x^2 + 2x + 1 = r_2(x)$ . Чтобы найти НОК, необходимо знать результат от перемножения исходных многочленов; он равен:

$$a(x)b(x) = x^{11} + x^{10} + x^9 + x^7 + x^5 + x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 2;$$

$$\begin{aligned}
 \text{НОК}(a(x), b(x)) &= a(x)b(x) / \text{НОД}(a(x), b(x)) = \\
 &= x^9 + 2x^8 + 2x^7 + 2x^5 + 2x^4 + x^3 + 2.
 \end{aligned}$$

Коэффициенты  $m(x)$  и  $n(x)$  линейного разложения  $\text{НОД}(a(x), b(x))$  по  $a(x)$  и  $b(x)$  равны:

$$m(x) = x^3 + 2x^2 + x, \quad n(x) = 2x^4 + 2x^3 + x^2 + x + 1.$$

Для многочлена, как и для чисел, можно ввести сравнение многочлена  $a(x)$  по модулю многочлена  $q(x)$ :  $a(x) = r(x) \bmod q(x)$ . А раз так, то можно говорить и о *поле многочленов*  $GF(q)$  над числовым полем  $GF(p)$ . Если  $GF(2)$ , а  $q(x) = x^3 + 1$ , то имеем поле многочленов  $GF(x^3 + 1)$ , состоящее из восьми многочленов:  $\{0, 1, x, x + 1, x^2, x^2 + 1, x^2 + x, x^2 + x + 1\}$ . Здесь  $p = 2$  называется *характеристикой* поля  $GF(p)$ ; характеристика определяет *размерность* или *порядок* полей многочлена:  $q = p^n = 2^3 = 8$ , где  $n$  — *степень* многочлена  $q(x)$ . Перемножим два произвольных элемента поля  $GF(q)$  по  $\bmod q(x)$ :

$$(x^2 + 1)x^2 = x^4 + x^2 = x(x^3 + 1) + (x^2 + x) = x^2 + x.$$

Продолжая далее перемножать элементы  $GF(q)$ , мы могли бы составить таблицу умножения. Но мы составим таблицы сложения (табл. 2.74) и умножения (табл. 2.75) для другого поля многочленов —  $GF(x^2 + x + 1)$ , размерность которого в два раза меньше:  $\{0, 1, x, x + 1\}$ . Каждому элементу последнего множества можно поставить в соответствие либо двоичное число:  $\{00, 01, 10, 11\}$ , либо десятичное:  $\{0, 1, 2, 3\}$ , тогда таблицы сложения (табл. 2.74) и умножения (табл. 2.75) поля  $GF(x^2 + x + 1)$  предстанут в виде числовых таблиц (табл. 2.76) и (табл. 2.77), схожих с табл. 2.70 и табл. 2.71.

Таблица 2.74

0	1	$x$	$x+1$
1	0	$x+1$	$x$
$x$	$x+1$	0	1
$x+1$	$x$	1	0

Таблица 2.75

0	0	0	0
0	1	$x$	$x+1$
0	$x$	$x+1$	1
0	$x+1$	1	$x$

Таблица 2.76

0	1	2	3
1	0	3	2
2	3	0	1
3	2	1	0

Таблица 2.77

0	0	0	0
0	1	2	3
0	2	3	1
0	3	1	2

Обращаем внимание читателя на тот примечательный факт, что табл. 2.77 по сравнению с табл. 2.71 не имеет делителя нуля, а три элемента, отличных от 0, образуют циклическую группу; другими словами, множество  $GF(x^2 + x + 1)$ , состоящее из четырех элементов, образует *поле Галуа*. Напомним, что выше числовое поле Галуа



$GF(p)$  могло получиться только для простых чисел:  $p = 2, 3, 5, 7, \dots$ . У нас же  $q = p^n = 2^2 = 4$ , а поле получилось как от простого числа. В литературе [46, п. 4.2; 77, с. 252 — 256] показано, что поля Галуа возникают тогда, когда число элементов  $q$  равно степени простого числа; или, иначе,  $GF(q)$  будет полем Галуа, когда  $q(x)$  является простым (неприводимым) многочленом. Приведем по одному простому многочлену степени 2 — 27:

$$\begin{array}{ll}
 x^2 + x + 1, & x^{15} + x + 1, \\
 x^3 + x + 1, & x^{16} + x^{12} + x^3 + x + 1, \\
 x^4 + x + 1, & x^{17} + x^3 + 1, \\
 x^5 + x^2 + 1, & x^{18} + x^7 + 1, \\
 x^6 + x + 1, & x^{19} + x^5 + x^2 + x + 1, \\
 x^7 + x^3 + 1, & x^{20} + x^3 + 1, \\
 x^8 + x^4 + x^3 + x^2 + 1, & x^{21} + x^2 + 1, \\
 x^9 + x^4 + 1, & x^{22} + x + 1, \\
 x^{10} + x^3 + 1, & x^{23} + x^5 + 1, \\
 x^{11} + x^2 + 1, & x^{24} + x^7 + x^2 + x + 1, \\
 x^{12} + x^6 + x^4 + x + 1, & x^{25} + x^3 + 1, \\
 x^{13} + x^4 + x^3 + x + 1, & x^{26} + x^6 + x^2 + x + 1, \\
 x^{14} + x^{10} + x^6 + x + 1, & x^{27} + x^5 + x^2 + x + 1.
 \end{array}$$

Циклическая группа по умножению (табл. 2.75) изоморфна циклической группе корней кубических из единицы (табл. 2.69), только в качестве элементов в данном случае выступают многочлены:  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = x$ ,  $c_3 = x + 1$ , получающиеся за счет расширения числового поля, подобное расширению числового поля действительных чисел за счет комплексных. Если в качестве образующего взять элемент  $c_2 = x$ , то последовательным возведением его в первую, вторую и третью степень получим все три элемента:  $x^1 = x$ ,  $x^2 = x + 1$ ,  $x^3 = 1$ . Эти элементы являются корнями уравнения  $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 + x + 1) = 0$ , решенного в поле  $GF(2)$ .

Приведем примеры таблиц сложения и умножения для следующих полей многочленов:

$$\begin{aligned}
 GF(3^2) &= \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} = \\
 &= \{0, 1, 2, x, x + 1, x + 2, 2x, 2x + 1, 2x + 2\},
 \end{aligned}$$

с порождающим многочленом  $g(x) = x^2 + x + 2$ ; таблица сложения — табл. 2.78, таблица умножения — табл. 2.79.

Таблица 2.78

0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	0	4	5	3	7	8	6
2	0	1	5	3	4	8	6	7
3	4	5	6	7	8	0	1	2
4	5	3	7	8	6	1	2	0
5	3	4	8	6	7	2	0	1
6	7	8	0	1	2	3	4	5
7	8	6	1	2	0	4	5	3
8	6	7	2	0	1	5	3	4

Таблица 2.79

0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	2	1	6	8	7	3	5	4
0	3	6	7	1	4	5	8	2
0	4	8	1	5	6	2	3	7
0	5	7	4	6	2	8	1	3
0	6	3	5	2	8	7	4	1
0	7	5	8	3	1	4	2	6
0	8	4	2	7	3	1	6	5

$GF(2^5) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F\} =$   
 $= \{0, 1, x, x+1, x^2, x^2+1, x^2+x, x^2+x+1, x^3,$   
 $x^3+1, x^3+x, x^3+x+1, x^3+x^2, x^3+x^2+1, x^3+x^2+x, x^3+x^2+x+1\},$   
 с порождающим многочленом  $g(x) = x^4 + x^3 + 1$ ; таблица сложения  
 — табл. 2.80, таблица умножения — табл. 2.81.

Таблица 2.80

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
1	0	3	2	5	4	7	6	9	8	B	A	D	C	F	E
2	3	0	1	6	7	4	5	A	B	8	9	E	F	C	D
3	2	1	0	7	6	5	4	B	A	9	8	F	E	D	C
4	5	6	7	0	1	2	3	C	D	E	F	8	9	A	B
5	4	7	6	1	0	3	2	D	C	F	E	9	8	B	A
6	7	4	5	2	3	0	1	E	F	C	D	A	B	8	9
7	6	5	4	3	2	1	0	F	E	D	C	B	A	9	8
8	9	A	B	C	D	E	F	0	1	2	3	4	5	6	7
9	8	B	A	D	C	F	E	1	0	3	2	5	4	7	6
A	B	8	9	E	F	C	D	2	3	0	1	6	7	4	5
B	A	9	8	F	E	D	C	3	2	1	0	7	6	5	4
C	D	E	F	8	9	A	B	4	5	6	7	0	1	2	3
D	C	F	E	9	8	B	A	5	4	7	6	1	0	3	2
E	F	C	D	A	B	8	9	6	7	4	5	2	3	0	1
F	E	D	C	B	A	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Все выписанные таблицы определяют знакомые нам коммутативные группы. Если по таблицам составить регулярные подстановки, то их структура сразу же будет узнаваема. Естественно, для этих групп можно найти все их подгруппы, включая нормальные делители. Та роль, которая в группах принадлежит нормальным делителям, в кольцах принадлежит идеалам. Подмножество  $I$  кольца  $K$  на

зывается идеалом, если оно является подгруппой аддитивной группы кольца. Для того чтобы подмножество  $I$  было идеалом в  $K$ , необходимо выполнение единственного условия, а именно: если  $i \in I$  и  $k \in K$ , то их произведения  $ik$  и  $ki$  должны принадлежать подмножеству  $I$ . Если в определении идеала отказаться от требования, что оба произведения  $ik$  и  $ki$  принадлежат  $I$ , то придем к понятию *одностороннего идеала*: если  $ik \in I$  — *правый идеал*, если  $ki \in I$  — *левый идеал*. Всякий идеал кольца будет *подкольцом*. Пересечение любой системы идеалов кольца будет идеалом.

Таблица 2.81

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
0	2	4	6	8	A	C	E	9	B	D	F	1	3	5	7
0	3	6	5	C	F	A	9	1	2	7	4	D	E	B	8
0	4	8	C	9	D	1	5	B	F	3	7	2	6	A	E
0	5	A	F	D	8	7	2	3	6	9	C	E	B	4	1
0	6	C	A	1	7	D	B	2	4	E	8	3	5	F	9
0	7	E	9	5	2	B	C	A	D	4	3	F	8	1	6
0	8	9	1	B	3	2	A	F	7	6	E	4	C	D	5
0	9	B	2	F	6	4	D	7	E	C	5	8	1	3	A
0	A	D	7	3	9	E	4	6	C	B	1	5	F	8	2
0	B	F	4	7	C	8	3	E	5	F	A	9	2	6	D
0	C	1	D	2	E	3	F	4	8	5	9	6	A	7	B
0	D	3	E	6	B	5	8	C	1	F	2	A	7	9	4
0	E	5	B	A	4	F	1	D	3	8	6	7	9	2	C
0	F	7	8	E	1	9	6	5	A	2	D	B	4	C	3

23

В кольцах Ли и Ёрдана левые и правые идеалы совпадают; такие идеалы называются *двухсторонними*. Из определения идеала следует, что во всяком кольце  $K$  идеалами являются само кольцо  $K$  и так называемый *нуль-идеал*, состоящий из одного нулевого элемента. Кольцо, не содержащее других идеалов, кроме этих двух, называется *простым*. Все тела и поля являются *простыми кольцами*. Можно было бы продолжать вводить для колец и полей понятия гомоморфизма, фактормножества и т.д., только все это нас слишком уведет в сторону. Между тем, овладев техникой анализа групп, провести подобный анализ для полей не составит большого труда. Поэтому вернемся непосредственно к многочленам.

### Разложение многочлена на неприводимые множители

Рассмотрим самый общий случай. Пусть дано некоторое поле многочленов  $GF(q)$ , где  $q = p^n$ ,  $n$  — степень модуля  $q$ , а  $p$  — характеристика. Обозначим через  $g_1(x), g_2(x), \dots, g_{q-1}(x)$  различные неприводимые многочлены над полем чисел  $GF(p)$ , отвечающие *примитивным* корням:  $c_1, c_2, \dots, c_{q-1}$ . Утверждается, что существует единственно возможное разложение многочлена  $x^{q-1} - 1$  на множители  $g_i(x)$ ; или, что одно и то же, каждый элемент  $c_i$  является корнем многочлена  $x^{q-1} - 1$ ; или, наконец, исходный приводимый многочлен можно представить в виде произведения *порождающего*  $g(x)$  и *проверочного*  $h(x)$  многочленов:

$$x^{q-1} - 1 = \prod_{i=1}^{q-1} g_i(x) = \prod_{i=1}^{q-1} (x - c_i) = g(x)h(x),$$

где  $g(x) = (x - c)(x - c^p)(x - c^{p^2}) \dots (x - c^{p^{k-1}})$ ,  $h(x) = \prod_j (x - c^j)$ .

Здесь  $c$  — примитивный корень порождающего многочлена  $g(x)$ , а для проверочного многочлена  $h(x)$  берутся те степени  $c^j$ , которые не вошли в многочлен  $g(x)$ . Как видим, действия с многочленами во многом схожи с действиями над числами. Приводимый многочлен вида  $x^{q-1} - 1$  играет роль составного числа  $a$ , его примитивные корни  $c_1, c_2, \dots, c_{q-1}$  ассоциируются с простыми сомножителями  $p_1, p_2, \dots, p_k$ , а последняя формула разложения на множители аналогична каноническому разложению составного числа  $a = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k}$ . Многочлены  $g(x)$  и  $h(x)$  играют роль двух делителей числа  $a = g \times h$ . Корни исходного многочлена играют роль базиса, по которому многочлены  $g(x)$  и  $h(x)$  могут быть разложены. Таким образом, *теория полей многочленов* смыкается с *теорией линейных пространств*. Покажем, как это осуществляется практически.

Если  $c$  — примитивный корень многочлена  $g(x)$ , то

$$g(c) = g_0 + g_1c + g_2c^2 + \dots + g_nc^n = 0.$$

Выразим степени корней  $c^n$  и  $c^{n+1}$  через линейную комбинацию младших степеней корней  $c, c^2, \dots, c^{n-1}$  ( $g_n = 1$ ):

$$\begin{aligned} c^n &= g_0 + g_1c + g_2c^2 + \dots + g_{n-1}c^{n-1}, \\ c^{n+1} &= g_0c + g_1c^2 + g_2c^3 + \dots + g_{n-1}(g_0 + g_1c + g_2c^2 + \dots + g_{n-1}c^{n-1}). \end{aligned}$$

Следовательно, все степени  $c^i$  при  $i > n$  линейно выражаются через первые  $n$  степеней; число таких комбинаций не превышает величини-

ну  $q - 1$ . Следует также иметь в виду, что не только  $g(c) = 0$ , но и  $g(c^2) = g(c^3) = \dots = g(c^{q-1}) = 0$ .

Рассмотрим поле многочленов  $GF(q)$  по модулю неприводимого многочлена  $g(x) = x^2 + x + 1$ . Пусть примитивным корнем многочлена  $g(x)$  является корень  $c$ , тогда  $g(c) = c^2 + c + 1 = 0$ . Так как  $q = 2^3 = 8$ , то циклический порядок корня  $c$  равен  $q - 1 = 7$ . Все корни степени  $i > 2$  выражаются через  $c$  и  $c^2$ , при этом  $g(c)$  берется за модуль:

$$c^3 = (c^3 + c + 1) \cdot 1 + (c + 1) = c + 1,$$

$$c^4 = (c^3 + c + 1) \cdot c + (c^2 + c) = c^2 + c,$$

$$c^5 = (c^3 + c + 1) \cdot c^2 + (c^3 + c^2) = c^2 + c + 1,$$

$$c^7 = (c^3 + c + 1) \cdot c^3 + (c^4 + c^3) = c^2 + 1.$$

Проверим, что числа  $c$ ,  $c^2$  и  $c^4$  действительно являются корнями многочлена  $g(x) = x^2 + x + 1$ :

$$g(c) = c^3 + c + 1 = c + 1 + c + 1 = 0,$$

$$g(c^2) = c^6 + c^2 + 1 = c^2 + 1 + c^2 + 1 = 0,$$

$$g(c^4) = c^{12} + c^4 + 1 = c^5 + c^4 + 1 = 0.$$

Отсюда порождающий многочлен  $g(x)$  раскладывается на следующие примитивные множители:

$$g(x) = x^2 + x + 1 = (x + c)(x + c^2)(x + c^4),$$

на долю же проверочного многочлена  $h(x)$  приходятся все остальные степени корня  $c$ :

$$h(x) = (x + c^3)(x + c^5)(x + c^6)(x + c^7).$$

Таким образом, исходный приводимый многочлен  $x^7 + 1$  может быть разложен «каноническим» образом в расширенном поле примитивных корней (аналог поля комплексных чисел):

$$x^7 + 1 = (x + c)(x + c^2)(x + c^3)(x + c^4)(x + c^5)(x + c^6)(x + c^7),$$

и «неканоническим», где в скобках стоят простые сомножители (аналог поля действительных чисел):

$$x^7 + 1 = (x^3 + x + 1)(x^3 + x^2 + 1)(x + 1),$$

а также в виде двух сомножителей:

$$x^7 + 1 = g(x)h(x) = (x^3 + x + 1)(x^4 + x^2 + x + 1).$$

Если в роли модуля будет выступать порождающий многочлен  $g(x) = x^3 + x^2 + 1$ , то его примитивный корень  $d$  даст несколько отличный цикл высших степеней корней, а именно:

$$d^3 = d^2 + 1, d^4 = d^2 + d + 1, d^5 = d + 1, d^6 = d^2 + d,$$

во всем же остальном процедура не изменится.

### Примеры разложения многочленов

*Пример 1.* Составим полную таблицу неприводимых многочленов  $g_i(x)$  поля вычетов  $GF(2^4)$  по модулю  $g(x) = x^4 + x + 1$  над числовым полем  $GF(2)$ .

Заполнение таблицы неприводимых многочленов (табл. 2.82) начнем с исходного многочлена. Так как

$$g(x) = (x - c)(x - c^2)(x - c^4)(x - c^8),$$

против степеней  $c$ ,  $c^2$ ,  $c^4$  и  $c^8$  можно писать многочлен  $g(x)$ . Далее, выразим все степени  $c^j$  через  $c$ ,  $c^2$  и  $c^3$ , как это было сделано в предыдущем случае. Чтобы найти все остальные неприводимые множители, необходимо поступить следующим образом. Возьмем произвольный корень  $a = c^{14} = c^3 + 1$ . Тогда

$$g_a(x) = (x - a)(x - a^2)(x - a^4)(x - a^8).$$

Так как

$$a^2 = c^{28-15} = c^{13} = c^3 + c^2 + 1,$$

$$a^4 = c^{56-45} = c^{11} = c^3 + c^2 + c,$$

$$a^8 = c^{112-105} = c^7 = c^3 + c + 1,$$

можно написать

$$\begin{aligned} g_a(x) &= (x - c^{14})(x - c^{13})(x - c^{11})(x - c^7) = \\ &= [x^2 - (c^{14} + c^{13})x + c^{12}] \cdot [x - c^{11}] \cdot [x - c^7] = \\ &= (x^2 - c^2x + c^{12}) \cdot (x - c^{11}) \cdot (x - c^7) = \\ &= [x^3 - (c^{11} + c^2)x^2 + (c^{12} + c^{13})x - c^8] \cdot (x - c^7) = \\ &= (x^3 - c^9x^2 + cx - c^8) \cdot (x - c^7) = \\ &= x^4 - (c^9 + c^7)x^3 + (c + c)x^2 - (c^8 + c^8)x + c^{15}. \end{aligned}$$

Следовательно, против корней  $c^7$ ,  $c^{11}$ ,  $c^{13}$  и  $c^{14}$  ставим неприводимый многочлен  $g_a(x) = x^4 + x^3 + 1$ . Затем берется следующий неизвестный корень и предыдущая процедура повторяется. Так происходит последовательное заполнение всей табл. 2.82. Проверка правильности нахождения состоит в выполнении основного тождества:

$$x^{15} + 1 = (x^4 + x^3 + 1)(x^4 + x + 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)(x^2 + x + 1)(x + 1).$$

Таблица 2.82

$c^i$	$k \cdot c^3 + l \cdot c^2 + m \cdot c + n$	$g_i(x)$
$c^1$	$c$	$x^4 + x + 1$
$c^2$	$c^2$	$x^4 + x + 1$
$c^3$	$c^3$	$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$
$c^4$	$c + 1$	$x^4 + x + 1$
$c^5$	$c^2 + c$	$x^2 + x + 1$
$c^6$	$c^3 + c^2$	$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$
$c^7$	$c^3 + c + 1$	$x^4 + x^3 + 1$
$c^8$	$c^2 + 1$	$x^4 + x + 1$
$c^9$	$c^3 + c$	$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$
$c^{10}$	$c^2 + c + 1$	$x^2 + x + 1$
$c^{11}$	$c^3 + c^2 + c$	$x^4 + x^3 + 1$
$c^{12}$	$c^3 + c^2 + c + 1$	$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$
$c^{13}$	$c^3 + c^2 + 1$	$x^4 + x^3 + 1$
$c^{14}$	$c^3 + 1$	$x^4 + x^3 + 1$
$c^{15}$	1	$x + 1$

**Пример 2.** Рассмотрим поле  $GF(3^2)$  по модулю  $g(x) = x^2 + 1$  над полем  $GF(3)$ . Здесь многочлен  $g(x)$  является неприводимым, но он не является и порождающим или образующим многочленом поля, поскольку степени его корня дают единицу уже при  $c^4$ , а не 8:  $c^2 = (c^2 + 1) \cdot 1 + 2 = 2$ ,  $c^3 = (c^2 + 1) \cdot c + 2c = 2c$ ,  $c^4 = (c^2 + 1) \cdot c^2 + 1 = 1$ ,  $c^5 = c$ ,  $c^6 = 2$ ,  $c^7 = 2c$ ,  $c^8 = 1$ . Аналогичная ситуация возникает и в числовых полях, например, в поле  $GF(7)$  элемент 3 является образующим, так как его степени порождают все элементы поля:  $3^1 = 3$ ,  $3^2 = 2$ ,  $3^3 = 6$ ,  $3^4 = 4$ ,  $3^5 = 5$ ,  $3^6 = 1$ , тогда как элемент 2 уже не будет образующим; в самом деле, его степени не дают элементы 3, 5 и 6:  $2^1 = 2$ ,  $2^2 = 4$ ,  $2^3 = 1$ ,  $2^4 = 2$ ,  $2^5 = 4$ ,  $2^6 = 1$ . Поэтому исходным порождающим элементом нужно выбрать другой неприводимый многочлен, например,  $g(x) = x^2 + x + 2$ . При составлении полной таблицы неприводимых многочленов (табл. 2.83) для случая поля  $GF(3)$  действуем аналогично предыдущему примеру. Представителями классов вычетов по модулю 3 могут быть как числа 0, 1, 2, так и числа  $-1, 0, 1$ . Отсюда возникают две формы записи неприводимых многочленов с двумя проверочными соотношениями:

$$x^8 + 2 = (x^2 + x + 2)(x^2 + 2x + 2)(x^2 + 1)(x + 1)(x + 2),$$

$$x^8 - 1 = (x^2 + x^3 - 1)(x^4 - x - 1)(x^2 + 1)(x + 1)(x - 1).$$

Таблица 2.83

$c^i$	$k \cdot c + l$	$g_i(x) \{0, 1, 2\}$	$g_i(x) \{-1, 0, 1\}$
$c^1$	$c$	$x^2 + x + 2$	$x^2 + x - 1$
$c^2$	$c^2$	$x^2 + 1$	$x^2 + 1$
$c^3$	$c^3$	$x^2 + x + 2$	$x^2 + x - 1$
$c^4$	$c + 1$	$x + 1$	$x + 1$
$c^5$	$c^2 + c$	$x^2 + 2x + 2$	$x^2 - x - 1$
$c^6$	$c^3 + c^2$	$x^2 + 1$	$x^2 + 1$
$c^7$	$c^3 + c + 1$	$x^2 + 2x + 2$	$x^2 - x - 1$
$c^8$	$c^2 + 1$	$x + 2$	$x - 1$

Таблица 2.84

$c^i$	$k \cdot c + l$	$g_i(x)$
$c^1$	$c$	$3x^2 + 2x + 1$
$c^2$	$c + 3$	$x^2 + 2x + 4$
$c^3$	$4c + 3$	$x^2 + 3$
$c^4$	$2c + 2$	$x^2 + x + 1$
$c^5$	$4c + 1$	$3x^2 + 2x + 1$
$c^6$	$2$	$x^2 + 4x + 4$
$c^7$	$2c$	$x^2 + 2x + 3$
$c^8$	$2c + 1$	$x^2 + 4x + 1$
$c^9$	$3c + 1$	$x^2 + 2$
$c^{10}$	$4c + 4$	$x^2 + 2x + 4$
$c^{11}$	$3c + 2$	$x^2 + 2x + 3$
$c^{12}$	$4$	$x^2 + 3x + 1$
$c^{13}$	$4c$	$x^2 + 4x + 2$
$c^{14}$	$4c + 2$	$x^2 + 3x + 4$
$c^{15}$	$c + 2$	$x^2 + 3$
$c^{16}$	$3c + 3$	$x^2 + 4x + 1$
$c^{17}$	$c + 4$	$x^2 + 4x + 2$
$c^{18}$	$3$	$x^2 + x + 4$
$c^{19}$	$3c$	$x^2 + 3x + 3$
$c^{20}$	$3c + 4$	$x^2 + x + 1$
$c^{21}$	$2c + 4$	$x^2 + 2$
$c^{22}$	$c + 1$	$x^2 + 4$
$c^{23}$	$2c + 3$	$x^2 + 3x + 3$
$c^{24}$	$1$	$x + 1$

Таблица 2.85

$c^i$	$l \cdot c^2 + m \cdot c + n$	$g_i(x)$
$c^1$	$c$	$x^3 + 2x + 1$
$c^2$	$c^2$	$x^3 + x^2 + x + 2$
$c^3$	$c + 2$	$x^3 + 2x + 1$
$c^4$	$c^2 + 2c$	$x^3 + x^2 + 2$
$c^5$	$2c^2 + c + 2$	$x^3 + 2x^2 + x + 1$
$c^6$	$c^2 + c + 1$	$x^3 + x^2 + x + 2$
$c^7$	$c^2 + 2c + 2$	$x^3 + x^2 + 2x + 1$
$c^8$	$2c^2 + 2$	$x^3 + 2x^2 + 2x + 2$
$c^9$	$c + 1$	$x^3 + 2x + 1$
$c^{10}$	$c^2 + c$	$x^3 + x^2 + 2$
$c^{11}$	$c^2 + c + 2$	$x^3 + x^2 + 2x + 1$
$c^{12}$	$c^2 + 2$	$x^3 + x^2 + 2$
$c^{13}$	$2$	$x + 1$
$c^{14}$	$2c$	$x^3 + 2x + 2$
$c^{15}$	$2c^2$	$x^3 + 2x^2 + x + 1$
$c^{16}$	$2c + 1$	$x^3 + 2x + 2$
$c^{17}$	$2c^2 + c$	$x^3 + 2x^2 + 1$
$c^{18}$	$c^2 + 2c + 1$	$x^3 + x^2 + x + 2$
$c^{19}$	$2c^2 + 2c + 2$	$x^3 + 2x^2 + x + 1$
$c^{20}$	$2c^2 + c + 1$	$x^3 + 2x^2 + 2x + 2$
$c^{21}$	$c^2 + 1$	$x^3 + x^2 + 2x + 1$
$c^{22}$	$2c + 2$	$x^3 + 2x + 2$
$c^{23}$	$2c^2 + 2c$	$x^3 + 2x^2 + 1$
$c^{24}$	$2c^2 + 2c + 1$	$x^3 + 2x^2 + 2x + 2$
$c^{25}$	$2c^2 + 1$	$x^3 + 2x + 1$
$c^{26}$	$1$	$x + 2$

Полные таблицы неприводимых многочленов и линейные комбинации корней для полей  $GF(5^2)$ ,  $GF(3^3)$  и  $GF(2^5)$  приведены, соответственно, в табл. 2.84, 2.85 и 2.86.



Таблица 2.86

$c^i$	$jc^4 + kc^3 + lc^2 + mc + n$	$g_i(x)$
$c^1$	$c$	$x^5 + x^4 + x^2 + x + 1$
$c^2$	$c^2$	$x^5 + x^4 + x^2 + x + 1$
$c^3$	$c^3$	$x^5 + x^4 + x^3 + 1$
$c^4$	$c^4$	$x^5 + x^4 + x^2 + x + 1$
$c^5$	$c^4 + c^2 + c + 1$	$x^5 + x^3 + x^2 + x + 1$
$c^6$	$c^4 + c^3 + 1$	$x^5 + x^4 + x^3 + 1$
$c^7$	$c^2 + 1$	$x^5 + x^2 + 1$
$c^8$	$c^3 + c$	$x^5 + x^4 + x^2 + x + 1$
$c^9$	$c^4 + c^2$	$x^5 + x^3 + x^2 + x + 1$
$c^{10}$	$c^4 + c^3 + c^2 + c + 1$	$x^5 + x^3 + x^2 + x + 1$
$c^{11}$	$c^4 + c^3 + 1$	$x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1$
$c^{12}$	$c^4 + c$	$x^5 + x^4 + x^3 + 1$
$c^{13}$	$c^4 + c + 1$	$x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1$
$c^{14}$	$c^4 + 1$	$x^5 + x^2 + 1$
$c^{15}$	$c^4 + c^2 + 1$	$x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$
$c^{16}$	$c^4 + c^3 + c^2 + 1$	$x^5 + x^4 + x^2 + x + 1$
$c^{17}$	$c^3 + c^2 + 1$	$x^5 + x^4 + x^3 + 1$
$c^{18}$	$c^4 + c^3 + c$	$x^5 + x^3 + x^2 + x + 1$
$c^{19}$	$c + 1$	$x^5 + x^2 + 1$
$c^{20}$	$c^2 + c$	$x^5 + x^3 + x^2 + x + 1$
$c^{21}$	$c^3 + c^2$	$x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1$
$c^{22}$	$c^4 + c^3$	$x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1$
$c^{23}$	$c^2 + c + 1$	$x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$
$c^{24}$	$c^3 + c^2 + c$	$x^5 + x^4 + x^3 + 1$
$c^{25}$	$c^4 + c^3 + c^2$	$x^5 + x^2 + 1$
$c^{26}$	$c^3 + c^2 + c + 1$	$x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1$
$c^{27}$	$c^4 + c^3 + c^2 + c$	$x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$
$c^{28}$	$c^3 + c + 1$	$x^5 + x^2 + 1$
$c^{29}$	$c^4 + c^2 + c$	$x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$
$c^{30}$	$c^4 + c^3 + c + 1$	$x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$
$c^{31}$	$1$	$x + 1$

Для практического задания по теме составления полной таблицы неприводимых многочленов преподаватель может менять порождающий многочлен  $g(x)$ ;  $g(x)$  стоит в первых строчках приведенных таблиц; в этом случае происходит перегруппировка строк.

### Корректирующие коды

Рассмотрим вопрос, как используется теория полей многочленов для защиты информации от помех в канале связи. Считается, что помехи в канале связи действуют независимо и мы не в состоянии повлиять на случайное изменение нуля на единицу, и наоборот; мы можем лишь на выходе канала связи исправить кодовое слово, восстановив его первоначальную форму. С этой целью и используются специальные *корректирующие коды*, которые основываются на введении информационной *избыточности*. При корректирующем кодировании в каждое кодовое слово, помимо информационных символов, вводят *проверочные*, или *корректирующие*. Например, можно ввести лишь один корректирующий символ в конце информационного слова, для которого определить: 0 — число единиц в кодовом слове четно и 1 — число единиц в кодовом слове нечетно. Если принятое кодовое число имеет четное число единиц, а корректирующий символ равен 1, то в канале связи произошел сбой.

При регистрации сбоя осуществляется повторная передача сообщения. Такой корректирующий код с проверкой на четность единиц в информационном слове используется для контроля передачи информации между отдельными регистрами компьютера. Это самый простой способ проверки. Для контроля считываемой информации из оперативной памяти компьютера используются так называемые *коды Хэмминга*. *Циклические коды* применяются в основном при передаче данных между компьютером и периферийными устройствами, в частности, дисководами. В свою очередь, циклические коды являются подклассом в большом классе *линейных кодов*, удовлетворяющих дополнительным структурным требованиям. Важность циклических кодов обусловлена еще и тем, что они приводят к очень эффективным процедурам шифровки и дешифровки, легко реализуемым с помощью логических схем. Рассмотрим кратко принцип этого кодирования.

Информационное сообщение  $a = a_0a_1 \dots a_{k-1}$  будем записывать с помощью многочлена:

$$a(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{k-1}x^{k-1}.$$

Если многочлен  $a(x)$  умножить на  $x^m$ , то символы, составляющие сообщение, будут коэффициентами при более высоких степенях. Далее,  $a(x)x^m$  разделим на примитивный многочлен  $g(x)$ , тем самым, найдя частное от деления  $p(x)$  и остаток  $r(x)$ . Зашифрованное ин-

формационное слово определится многочленом:

$$f(x) = a(x)x^m - r(x) = g(x)p(x),$$

степень которого равна  $n = k + m$ . Кодовое слово  $f$  будет состоять из  $k$  информационных и  $m$  проверочных символов. В случае, когда полученное слово  $f'$  совпадает с переданным словом  $f$ , то при делении многочлена  $f'(x)$  на  $g(x)$  получается нулевой остаток  $r(x)$ . Но если остаток отличен от нуля, то в канале связи произошел сбой:

$$f'(x) = g(x)p(x) + r(x), \quad \text{где } r(x) \neq 0.$$

Пусть  $a = 1001$ ,  $k = 4$ ,  $m = 3$ ,  $n = 7$ ,  $g(x) = 1 + x + x^3$  — примитивный многочлен. Найдем многочлен  $f(x)$ , отвечающий коду  $a$ :

$$a(x) = 1 + x^3;$$

$$x^3 a(x) = g(x)p(x) + r(x) = (1 + x + x^3)(x + x^3) + (x + x^2);$$

$$f(x) = x + x^2 + x^3 + x^6; \quad f = 011\ 1001.$$

В кодовом слове  $f$  первые три символа 011 являются проверочными, последние четыре 1001 — информационными. Пусть при передаче  $f$  произошел сбой, и мы приняли слово  $f' = 011\ 1011$ . При делении многочлена  $f'(x)$  на  $g(x)$  получаем остаток  $r(x) = 1 + x + x^2$ , что соответствует коду ошибки  $r = 111$ . Если сбой произойдет не в шестом символе, а в любом другом месте, то код ошибки изменится.

Существует несколько иной способ кодирования и декодирования информации, а именно, при шифровке многочлен информационного слова  $a(x)$  умножается на порождающий многочлен  $g(x)$ ; так получается многочлен  $f(x)$ . При дешифровке кодовый многочлен  $f(x)$  умножается на проверочный  $h(x)$ , в результате получим:

$$A(x) = f(x)h(x) = a(x)g(x)h(x) = a(x)(x^n + 1) = a(x)s(x)a(x),$$

где  $s(x)$  — синдром ошибки, исполняющий роль кода ошибки:  $s = r$ . При такой форме кодирования при том же информационном слове и порождающем многочлене, что и в предыдущем случае, сформируется другой кодовый многочлен:

$$f(x) = (1 + x^3)(1 + x + x^3) = 1 + x + x^4 + x^6, \quad f = 1100101.$$

В процессе декодирования получим нулевой синдром:

$$A(x) = f(x)h(x) = (1 + x + x^4 + x^6)(1 + x + x^2 + x^4) = 1 + x^3 + x^7 + x^{10};$$

$$A = asa = 1001\ 000\ 1001; \quad s = 000.$$

Пусть произошел сбой и было получено слово  $f' = 1100001$ ; тогда в результате декодирования возникнет набор:  $A' = 1001\ 111\ 1101$  с синдромом ошибки  $s = 111$ .

Вместо многочленов можно использовать матрицы. Чтобы получить кодовое слово  $f$ , нужно информационное слово  $a$  умножить на порождающую матрицу  $G$ , т.е.  $f = aG$ . Так, если  $a = 011$  — информационное слово из  $k = 3$  символов и задана порождающая матрица  $G$  размерности  $3 \times 5$ , то кодовое слово  $f$  будет состоять из  $n = 5$  символов, из которых два последних ( $m = 2$ ) являются проверочными:

$$f = aG = (011) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 01110.$$

### Порождающая и проверочная матрицы

Откуда же берутся порождающие матрицы  $G$ ? Порождающая матрица получается путем последовательного сдвига соответствующего порождающего многочлена  $g(x)$  по разрядам вправо. Последовательному сдвигу вправо отвечает умножение  $g(x)$  на  $x^i$ :

$$G = \begin{pmatrix} g(x) \\ xg(x) \\ x^2g(x) \\ \dots \\ x^{k-1}g(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_0 & g_1 & g_2 & \dots & g_m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & g_0 & g_1 & \dots & g_{m-1} & g_m & \dots & 0 \\ 0 & 0 & g_0 & \dots & g_{m-2} & g_{m-1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & g_0 & g_1 & \dots & g_m \end{pmatrix}.$$

Порождающая матрица  $G$  имеет размерность  $(k-1) \times m$ , поскольку для сдвига берутся степени  $x^i$  в пределах  $0 < i < k-1$ , а степень порождающего многочлена  $g(x)$  равна  $m$ . Мы знаем, что каждому порождающему многочлену соответствует проверочный многочлен  $h(x)$ , который удобно записать в порядке убывания степеней:

$$g(x) = g_0 + g_1x + g_2x^2 + \dots + g_mx^m, \quad h(x) = h_kx^k + h_{k-1}x^{k-1} + \dots + h_0,$$

причем  $x^n + 1 = g(x)h(x)$ , где, напомним,  $n$  — общее число символов,  $k$  — число информационных, а  $m$  — число проверочных символов в кодовом слове. Если существует порождающая матрица  $G$ , то должна существовать и соответствующая ей проверочная матрица  $H$ . Действительно, такую матрицу можно получить путем последовательного сдвига проверочного многочлена  $h(x)$  влево:

$$H = \begin{pmatrix} h(x) \\ xh(x) \\ x^2h(x) \\ \dots \\ x^{m-1}h(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & h_k & \dots & h_2 & h_1 & h_0 \\ 0 & \dots & h_k & h_{k-1} & \dots & h_1 & h_0 & 0 \\ 0 & \dots & h_{k-1} & h_{k-2} & \dots & h_0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_k & \dots & h_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Предположим, у нас есть конкретный порождающий многочлен  $g(x) = 1 + x^2 + x^3$ . Проверочный многочлен  $h(x)$  находится простым делением многочлена  $x^7 + 1$  на заданный многочлен  $g(x)$ ; в результате имеем:  $h(x) = x^4 + x^3 + x^2 + 1$ . В соответствии с вышеприведенными определениями, находим конкретный вид порождающей  $G$  и проверочной  $H$  матриц:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, GH^* = (HG^*)^* = 0.$$

Последнее равенство говорит о том, что матрицы  $G$  и  $H$  ортогональны относительно друг друга (звездочка означает операцию транспонирования матрицы).

Рассмотренные  $G$  и  $H$  матрицы называются *ленточными*, потому что нули и единицы вдоль обеих диагоналей этих матриц образуют своеобразные ленты. Но любая ленточная матрица может быть сведена к *систематическому* виду:

$$G' = (E_{k \times k} \mid G_{m \times k}), \quad H' = (H_{k \times m} \mid E_{m \times m}),$$

где  $E_{k \times k}$  и  $E_{m \times m}$  — единичные матрицы.

Существует, по крайней мере, два способа сведения ленточных матриц к систематическому виду. Первый наиболее надежный способ состоит в нахождении ряда остаточных многочленов. Если  $r_i(x)$  остаточный многочлен от деления  $x^i$  на порождающий многочлен  $g(x)$ , то сумма элементов  $r_i(x) + x^i$  дает строки систематической матрицы  $G$ . Аналогичным способом находятся строки проверочной матрицы  $H$ . Второй способ заключается в том, чтобы найти соответствующие линейные комбинации строк или столбцов исходных матриц ленточного типа. Найдем  $G$  и  $H$  для предыдущего случая:

$$\begin{aligned} G: x^3 &= (x^3 + x^2 + 1) \cdot 1 + x^2 + 1, & 1 + x^2 + x^3; \\ x^4 &= (x^3 + x^2 + 1) \cdot (x + 1) + x^2 + x + 1, & 1 + x + x^2 + x^4; \\ x^5 &= (x^3 + x^2 + 1) \cdot (x^2 + x + 1) + x + 1, & 1 + x + x^5; \\ x^6 &= (x^3 + x^2 + 1) \cdot (x^3 + x^2 + 1) + x^2 + x, & x + x^2 + x^6. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H: x^6 &= (x^4 + x^3 + x^2 + 1) \cdot (x^2 + x) + x^3 + x^2 + x, & x^6 + x^3 + x^2 + x; \\
 x^5 &= (x^4 + x^3 + x^2 + 1) \cdot (x + 1) + x^2 + x + 1, & x^5 + x^2 + x + 1; \\
 x^4 &= (x^4 + x^3 + x^2 + 1) \cdot 1 + x^3 + x^2 + 1, & x^4 + x^3 + x^2 + 1.
 \end{aligned}$$

$$G' = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right), \quad H' = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Эти две систематические матрицы можно было бы получить путем сложения векторов-столбцов исходных ленточных матриц (напоминаем, счет столбцов для  $G$  матрицы начинается с нуля, а для  $H$  матрицы — с шести).

$$G': \quad 0' = 1 + 2, 1' = 1 + 5, 2' = 3, 3' = 0, 4' = 1, 5' = 4 + 1, 6' = 6;$$

$$H': \quad 0' = 5, 1' = 3, 2' = 4, 3' = 2, 4' = 6, 5' = 1, 6' = 0.$$

Теперь поясним, как составить проверочные соотношения и определить коды ошибок  $s_i$  по известной проверочной матрице. С этой целью выпишем три равенства, отвечающих строкам матрицы  $H'$ :

**Таблица 2.87**  $s_1 = h_6 + h_3 + h_2 + h_1 = 0, s_2 = h_5 + h_2 + h_1 + h_0 = 0,$

$$s_3 = h_4 + h_3 + h_2 + h_0 = 0.$$

$h_i$	$s_1 s_2 s_3$
$h_0$	011
$h_1$	110
$h_2$	111
$h_3$	101
$h_4$	001
$h_5$	010
$h_6$	100

При ошибке в символе  $h_0$  суммы  $s_2$  и  $s_3$  изменятся на 1, а при ошибке в  $h_1$  не будут равны нулю суммы  $s_1$  и  $s_2$ . Таким образом, можно составить все коды ошибок для всех символов (табл. 2.87). При одновременном появлении ошибок в двух символах, например в  $h_5$  и  $h_6$ , коды ошибок будут складываться; в данном случае он становится таким

же, как и при одиночной ошибке в символе  $h_1$ . Поэтому, характеризуя код с точки зрения помехозащищенности, мы должны сказать, что он обнаруживает и исправляет любые одиночные ошибки, а также обнаруживает, но не исправляет двойные ошибки.

### Кодовое расстояние и помехозащищенность

Помехозащищенность кода можно выяснить на основе известного кодового расстояния. Кодовое расстояние между словами  $a$  и  $b$  определяется как число несовпадающих символов в этих словах, например:  $a = 10110, b = 11011$ , здесь расстояние равно  $d(a, b) = 3$ . Корректирующий код способен исправлять любые комбинации из  $t$

и меньшего числа ошибок, если его минимальное кодовое расстояние удовлетворяет условию:  $d_{\min} \geq 2m + 1$ . Для иллюстрации этого неравенства приведем следующий пример.

Возьмем три рядом стоящих слова (термин «рядом стоящие» означает, что между этими словами других слов быть не может):

$$a = 0100, \quad b = 0110, \quad c = 0010.$$

Для получения соответствующих кодовых слов, их нужно умножить на порождающую матрицу, которую мы возьмем из предыдущего примера  $G'$ :

$$f_a = 1110100, \quad f_b = 0010110, \quad f_c = 1100010.$$

Кодовые расстояния между этими словами равны:

$$d(f_a, f_b) = 3, \quad d(f_b, f_c) = 4, \quad d(f_a, f_c) = 3.$$

Предположим, что при передачи информации в канале связи произошел сбой и второе кодовое слово изменилось на  $f'_b = 0110110$ . Тогда по минимальному кодовому расстоянию мы все же сможем определить, что из трех возможных слов передавалось скорее всего слово  $f_b$ , так как:

$$d(f_a, f'_b) = 2, \quad d(f_b, f'_b) = 1, \quad d(f_c, f'_b) = 3.$$

Если же были допущены две ошибки, например, в пятом и четвертом разрядах, то становится непонятным, какое из кодовых слов —  $f_b$  или  $f_c$  — на самом деле передавалось, так как  $f''_b = 0111110$ ,  $d(f_a, f''_b) = 3$ ,  $d(f_b, f''_b) = 2$ ,  $d(f_c, f''_b) = 2$ . Отсюда, чем больше минимальное кодовое расстояние между словами, тем лучше защищен код от помех. По вышеприведенному неравенству можно установить, что при  $d_{\min} = 3$  число обнаруженных и исправленных ошибок не может быть больше одной ( $m \leq 1$ ), поскольку  $m \leq (d_{\min} - 1)/2$ .

К сказанному добавим, что все коды ошибок, представленные в табл. 2.87, можно было бы установить и по проверочной матрице  $H'$ . С этой целью каждое кодовое слово необходимо было бы умножить на транспонированную матрицу  $H'$ :  $s = f(H')^*$ . Все рассуждения мы проводим на матрицах, записанных именно в систематической форме. Если брать ленточные матрицы, то информационные и проверочные символы в кодовых словах окажутся перемешанными, что вызывает определенные неудобства при декодировании. Для закрепления последнего материала исследуем помехозащищенность нетривиального кода с  $n = 15$  и  $g(x) = 1 + x^4 + x^6 + x^7$ . Делением  $x^{15} + 1$  на  $g(x)$  находим проверочный многочлен:

$$h(x) = x^8 + x^7 + x^6 + x^4 + 1.$$

Порождающая и проверочная матрицы в ленточной форме:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Методом остаточного многочлена находим эти же матрицы, но записанные уже в систематической форме:

$$G' = \left( \begin{array}{cccccccc|cccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right),$$

$$H' = \left( \begin{array}{cccccccc|cccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Комбинируя столбцы исходных ленточных матриц, мы можем лишний раз убедиться в правильности нахождения этих матриц.

$$G': \quad 0' = 0 + 8, 1' = 1 + 9, 2' = 2 + 10, 3' = 3 + 11, 4' = 5 + 6, 5' = 6 + 7, \\ 6' = 7, 7' = 0, 8' = 1, 9' = 2, 10' = 3, 11' = 0 + 4, 12' = 1 + 5, \\ 13' = 13 + 14, 14' = 14.$$

$$H': \quad 0' = 3 + 13, 1' = 0 + 6 + 12, 2' = 11 + 5, 3' = 3 + 6 + 14, 4' = 9 + 14, \\ 5' = 8 + 13 + 14, 6' = 0 + 1 + 12, 7' = 4 + 14, 8' = 14, 9' = 1 + 5, \\ 10' = 0 + 4, 11' = 3, 12' = 2, 13' = 1, 14' = 0.$$



Проверочные соотношения равны:

$$\begin{aligned}
 s_1 &= h_{14} + h_7 + h_6 + h_5 + h_3 = 1, & s_2 &= h_{13} + h_6 + h_5 + h_4 + h_2 = 1, \\
 s_3 &= h_{12} + h_5 + h_4 + h_3 + h_1 = 1, & s_4 &= h_{11} + h_4 + h_3 + h_2 + h_0 = 1, \\
 s_5 &= h_{10} + h_7 + h_6 + h_5 + h_2 + h_1 = 0, & s_7 &= h_8 + h_7 + h_6 + h_4 + h_0 = 1, \\
 s_6 &= h_9 + h_6 + h_5 + h_4 + h_1 + h_0 = 0.
 \end{aligned}$$

Все коды ошибок представлены в табл. 2.88.

**Таблица 2.88**

Помехозащищенность исследуем на трех кодовых словах:

$$a = 00110011, b = 10110011, c = 10010011,$$

которые дают следующие защищенные последовательности:

$$\begin{aligned}
 f_a &= 101000000110011, & f_b &= 001010110110011, \\
 f_c &= 110001110010011.
 \end{aligned}$$

Расстояния между словами:

$$d(f_a, f_b) = 4, d(f_b, f_c) = 6, d(f_a, f_c) = 6.$$

Так как  $m \leq (d_{\min} - 1)/2 = 3/2$ , данный код может обнаружить и исправить не более одной ошибки. Действительно, если в 10 и 14 разрядах одновременно произойдет сбой, т.е.

$$f''_b = 101000110110011,$$

появятся два одинаковых расстояния:  $d(f_a, f''_b) = 2, d(f_b, f''_b) = 2, d(f_c, f''_b) = 4$ , и мы не сможем определить истинное слово.

Для задания произвольного кода нужно указать полный список кодовых слов. Например, следующий список слов имеет довольно приличную (для своего значения  $n = 11$ ) степень защищенности:

11000011000	10100100001	00110011000	00000011110	00100101000
10001001100	10010001001	01010000110	00010110001	00100110010
10000010101	10010100100	00001100101	00001111000	01000100011
11001100000	00110000011	11110000000	01100001010	01000110100
01011000001	10101010000	10001000011	10010010010	10000101010
01000001101	00111100000	00011010100	00011001010	01010101000

**Примеры корректирующих кодов**

Для задания циклического кода достаточно указать всего лишь один порождающий многочлен  $g(x)$ , а для задания линейного кода  $C$

$h_i$	$s_1s_2s_3s_4s_5s_6s_7$
$h_0$	1110010
$h_1$	1101111
$h_2$	1010101
$h_3$	0100001
$h_4$	1000010
$h_5$	0001111
$h_6$	0011110
$h_7$	0111100
$h_8$	1111000
$h_9$	1111011
$h_{10}$	1111101
$h_{11}$	1110001
$h_{12}$	1101001
$h_{13}$	1011001
$h_{14}$	0111001

нужно задать список базисных кодовых векторов, в роли которых, как мы убедились, могут выступать кодовые многочлены  $f(x)$ . Линейный код  $C$  является циклическим только тогда, когда  $C$  — идеал в кольце многочленов  $P_n(x)$  (понятие идеала мы ввели в предыдущем подразделе). Во всяком идеале  $C$  существует порождающий многочлен  $g(x)$ , которому кратен всякий многочлен идеала  $C$ . Если  $C$  — идеал, то для всякого кодового многочлена  $f(x)$  можно получить циклические сдвиги  $xf(x), x^2f(x), x^3f(x), \dots \in C$ , т.е. сдвиги снова являются кодовыми многочленами. И наоборот, если  $C$  — циклический код, то для всякого кодового многочлена  $f(x)$  его сдвиги будут кодовыми многочленами. Рассмотренные кодовые слова суть векторы линейного пространства  $G$  над полем Галуа  $GF(q)$ . Если выразиться точнее, то  $G$  является лишь подпространством пространства  $E$ , поскольку у него имеется ортогональное дополнение  $H$ :

$$E = \left( \begin{array}{cc} E_{k \times k} & G_{m \times k} = H_{k \times m}^* \\ H_{k \times m} = G_{m \times k}^* & E_{m \times m} \end{array} \right),$$

здесь символ «звездочка» означает транспонирование.

Если  $f$  есть  $n$ -мерный кодовый вектор, полученный из информационного слова  $a$  с помощью порождающей матрицы  $G$ , то произведение  $fH^* = aGH^* = 0$ , т.е.  $H^*$  переводит любой вектор  $f$  из линейного пространства  $G$  в нулевой вектор; если же попадетсся такой вектор  $f'$ , который не будет принадлежать линейному пространству  $G$ , то матрица  $H^*$  уже не сможет перевести его в нулевой вектор, сигнализируя нам об этом соответствующим синдромом  $s$ . Примером классического линейного кода является код Хэмминга  $(n, k)$ , для которого выполняется условие:  $n = 2^m - 1$ . Согласно этому условию, в поле Галуа  $GF(2)$  будем иметь следующие коды Хэмминга:  $(7, 4)$ ,  $(15, 11)$ ,  $(31, 26)$ ,  $(63, 57)$ ,  $(127, 120), \dots$ ; в поле  $GF(2^2)$ :  $(5, 3)$ ,  $(21, 18)$ ,  $(85, 81)$ ,  $(341, 336), \dots$ ; в поле  $GF(2^3)$ :  $(9, 7)$ ,  $(73, 70)$ ,  $(585, 581), \dots$ ; в поле  $GF(2^4)$ :  $(17, 15)$ ,  $(273, 270), \dots$  Существует код Хэмминга  $(13, 10)$  над полем  $GF(3)$  с проверочной матрицей

$$H = \left( \begin{array}{cccccccc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right),$$

по которой нетрудно найти порождающую матрицу  $G$ . Существуют различные модификации кодов Хэмминга, в частности, из кода  $(n, k)$  можно получить код  $(n + 1, k)$ , который способен исправлять одинарную ошибку и обнаруживать двойную. Так, для модифици-

рованного кода Хэмминга (8, 4) проверочной матрицей служит

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда к трем вышеприведенным проверочным соотношениям добавится еще одно:  $s_4 = h_7 + h_6 + h_5 + h_4 + h_3 + h_2 + h_1 + h_0 = 0$ . Если оно не выполняется, это означает, что произошла одиночная ошибка, которую можно исправить с помощью первых трех соотношений. Если последнее равенство выполняется, но не выполняется по крайней мере одно из первых трех, то имеет место двойная ошибка, хотя исправить ее будет нельзя.

Код Хэмминга (7, 4) уже рассматривался; было показано, что он может быть преобразован в циклический код с ленточной матрицей  $G$ , образованной порождающим многочленом  $g(x) = 1 + x^2 + x^3$ . Для кодирования информации и исправления сразу нескольких ошибок Боуз, Чоудхури и Хиквингем (сокращенно БЧХ) предложили использовать сразу несколько порождающих многочленов  $g_i(x)$ . Порождающий многочлен БЧХ-кода можно представить в виде

$$g(x) = \text{НОК}[g_1(x), g_2(x), g_3(x), \dots, g_t(x)],$$

где  $g_i(x)$  — неприводимые многочлены,  $t$  — число исправленных ошибок. Так, для исправления двух ошибок ( $t = 2$ ) с длиной кодового слова  $n = 2^4 - 1 = 15$  получим следующий многочлен:

$$\begin{aligned} g(x) &= \text{НОК}[g_1(x), g_2(x), g_3(x), g_4(x)] = \\ &= \text{НОК}[x^4 + x + 1, x^4 + x + 1, x^4 + x^3 + x^2 + x + 1, x^4 + x + 1] = \\ &= (x^4 + x + 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = x^8 + x^7 + x^6 + x^4 + 1, \end{aligned}$$

здесь  $m = 8$ ,  $k = 7$ , т.е. мы получили корректирующий БЧХ-код (15, 7), одновременно исправляющий два любых сбоя в канале связи при передаче  $N = 2^k = 128$  сообщений. Неприводимые многочлены  $g_1(x)$ ,  $g_2(x)$ ,  $g_3(x)$  и  $g_4(x)$  предварительно были нами найдены и теперь только взяты из табл. 2.82.

Для исправления трех ошибок ( $t = 3$ ) имеем:

$$\begin{aligned} g(x) &= \text{НОК}[g_1(x), g_2(x), g_3(x), g_4(x), g_5(x), g_6(x)] = \\ &= (x^4 + x + 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)(x^2 + x + 1) = \\ &= x^{10} + x^8 + x^5 + x^4 + x^2 + x + 1, \end{aligned}$$

который дает (15, 5) БЧХ-код. При  $t = 4, 5, 6, 7$  будем иметь одинаковые порождающие многочлены  $g(x)$ , отличающиеся от  $x^{15} + 1$  на множитель  $x + 1$ , а от предыдущего случая на множитель  $x^4 + x^3 + 1$ :

$$x^{14} + x^{13} + x^{12} + x^{11} + x^{10} + x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1.$$

Этот БЧХ-код (15, 1) способен нести лишь один бит информации.

Таблица 2.89

$c^i$	$m \cdot c + n$	$g_i(x)$
$c^1$	$c$	$x^2 + x + 2$
$c^2$	$c + 2$	$x^2 + x + 3$
$c^3$	$3c + 2$	$x^2 + 3x + 1$
$c^4$	$c + 1$	$x^2 + x + 2$
$c^5$	2	$x + 2$
$c^6$	$2c$	$x^2 + 2x + 1$
$c^7$	$2c + 3$	$x^2 + 2x + 2$
$c^8$	$c + 3$	$x^2 + x + 3$
$c^9$	$2c + 2$	$x^2 + 2x + 1$
$c^{10}$	3	$x + 3$
$c^{11}$	$3c$	$x^2 + 3x + 3$
$c^{12}$	$3c + 1$	$x^2 + 3x + 1$
$c^{13}$	$2c + 1$	$x^2 + 2x + 2$
$c^{14}$	$3c + 3$	$x^2 + 3x + 3$
$c^{15}$	1	$x + 1$

Аналогичным образом мы можем найти порождающие многочлены для других БЧХ-кодов. Воспользовавшись полными таблицами неприводимых многочленов (табл. 2.83 – табл. 2.86), можно исправить до 32 одновременно произошедших ошибок (табл. 2.86).

Любопытно сравнить помехозащищенность БЧХ-кода над полем многочленов  $GF(2^4)$  (табл. 2.82) и  $GF(4^2)$  (табл. 2.89). Порождающий многочлен для исправления одиночной ошибки в поле  $GF(4^2)$ , кажется, принципиально ничем не отличается от порождающего многочлена в поле  $GF(2^4)$ :

$$g(x) = \text{НОК}[g_1(x), g_2(x)] = \\ = (x^2 + x + 2) \times (x^2 + x + 3) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 3,$$

который тоже дает код (15, 11). Порождающий многочлен для исправления двух ошибок для  $GF(2^4)$  был  $g(x) = x^8 + x^7 + x^6 + x^4 + 1$ , что давал код (15, 7); для  $GF(4^2)$  будем иметь уже код (15, 9):

$$g(x) = \text{НОК}[g_1(x), g_2(x), g_3(x), g_4(x)] = \\ = (x^2 + x + 2)(x^2 + x + 3)(x^2 + 3x + 1) = \\ = x^6 + 3x^5 + x^4 + x^3 + 2x^2 + 2x + 1.$$

Степень многочлена  $g(x)$  получилась на два порядка ниже, а это значит, что данный код при той же помехозащищенности имеет преимущество: из 15 символов, отведенных на каждое кодовое слово, у него, вместо 7, будет уже 9 информационных символов, причем каждый символ принимает значения не 0 и 1, а 0, 1, 2 и 3.

## 2.5. Пространственные группы и двойственность

### Группы Ли и Галуа

Рассказ о группах будет неполным, если ничего не сказать о *пространственных* преобразованиях, теория которых оформилась несколько позже *точечных групп*, с которыми мы до сих пор имеем дело. Наша ближайшая цель — показать действие *принципа двойственности* в сфере пространственных преобразований, который уже проявил себя в логике, но молчал в теории групп. Если при анализе точечных групп вращения треугольника, квадрата, куба и других симметричных тел мы о нем ничего не слышали, то в пространственных преобразованиях декартовых (ортогональных) и лоренцевых (гиперболических) координат он заявит о себе во весь голос. Однако прежде чем говорить о двойственности названных преобразований, нужно вспомнить, какие вообще бывают преобразования.

Основы групповых преобразований самих пространств, а не только находящихся в них симметричных геометрических тел, заложил норвежский математик *Софус Ли* (1842—1899). Группой преобразований Ли в самом общем ее виде называется система функциональных равенств, которая зависит от ряда пространственных координат  $x_1, x_2, \dots, x_n$  и совокупности параметров  $a_1, a_2, \dots, a_m$ :

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n; a_1, a_2, \dots, a_m) \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n; a_1, a_2, \dots, a_m) \\ \dots\dots\dots \\ y_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; a_1, a_2, \dots, a_m) \end{cases}$$

Система преобразований Ли отличается от рассмотренного ранее линейного преобразования (2.1) только *непрерывным* характером изменений всех координат и параметров, что потребует от нас несколько изменить математический язык для непрерывных групп. В *точечных группах* были активно задействованы матрицы и подстановки, которые помогают выразить дискретную природу движения объектов, их повороты и отражения. В *пространственных группах* используется язык функций, которые предъявляют к себе иные требования, в частности, функции должны быть дифференцируемы. Поворот координат на бесконечно малые углы привел к *инфинитезимальным преобразованиям* особого вида, которые используются

для получения различных законов сохранения. Группы Ли, собственно, и возникли в 70-х годах XIX в. в связи с задачей разрешимости дифференциальных уравнений в квадратурах. Успешное применение теории групп к решению алгебраических уравнений, выразившееся в победном шествии теории Галуа, привело к попытке построения своеобразного аналога теории Галуа для дифференциальных уравнений.

Теория групп, которая до сих пор рассматривалась нами, возникла благодаря усилиям французского математика *Эвариста Галуа* (1811—1832) при решении алгебраических уравнений высших степеней в радикалах. Решение уравнения второй степени было найдено в глубокой древности, уравнения третьей (формула Кардано) и четвертой степени (формула Феррари) были решены в XVI в. В общем виде уравнение пятой степени долго не могли решить, пока, наконец, норвежский математик *Нильс Хенрик Абель* (1802—1829) в 1824 г. не доказал, что оно и не может быть решено в радикалах. Сразу же возник вопрос, каковы должны быть коэффициенты алгебраического уравнения, чтобы его все-таки можно было решить в радикалах? Ответ на этот вопрос как раз и дал Галуа в работе, опубликованной в 1846 г. Жозефом Лиувиллем в выпускаемом им математическом журнале.

Основная идея Галуа сводилась к следующему. Он связал алгебраическое уравнение  $n$ -й степени  $f_n = 0$  с *группой автоморфизмов*, или *группой Галуа*  $\text{Gal}(f_n)$  поля корней  $c_1, c_2, \dots, c_n$ , которые бы оставляли без изменения поле коэффициентов уравнения  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . При этом группу Галуа можно найти, не решая самого уравнения. Так, если уравнение

$$f_4 = x^4 - x^2 + 1 = 0$$

имеет корень  $c = c_1$ , то его решениями будут также еще три корня:

$$c_2 = -c, \quad c_3 = 1/c, \quad c_4 = -1/c,$$

которые продиктованы симметрией коэффициентов уравнения. Группа Галуа, или группа автоморфизмов, в данном случае образована четырьмя подстановками, переставляющими индексы корней:

$$\text{Gal}(f_4) = \{a = (12)(34), \quad b = (13)(24), \quad c = (14)(23), \quad e = (1)\}.$$

Преобразование  $g$  поля  $G$  называется *автоморфизмом*, если преобразование суммы равно сумме преобразований и преобразование произведения равно произведению преобразований:

$$g(c_i + c_j) = gc_i + gc_j, \quad g(c_i \cdot c_j) = gc_i \cdot gc_j, \quad \text{где } c_i, c_j \in G.$$

Например, преобразование поля  $C$ , переводящее каждое комплексное число  $a + bi$  в комплексно-сопряженное число  $a - bi$  является автоморфизмом поля  $C$ . Подстановки  $\text{Gal}(f_4)$  действуют таким образом, что все соотношения Виета, связывающие корни и коэффициенты уравнения, остаются в силе.

Теория Галуа позволила решить многовековые проблемы, далеко выходящие за рамки решения алгебраических уравнений. Например, она ответила на вопрос, почему античные задачи о трисекции угла и удвоении куба невозможно решить с помощью линейки и циркуля. Гаусс построил с помощью этих инструментов правильный 17-угольник. Теория Галуа объяснила, почему это стало возможным, но невозможно построить правильный 7- или 13-угольники. Дело в том, что степень алгебраического уравнения

$$x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1 = 0$$

при простом  $p$  должна определяться выражением  $p = 2^{2^r} + 1$  — теорема Гаусса. Пять чисел 3, 5, 17, 257 и 65537 удовлетворяют этому условию. Алгебра предоставляет и другие критерии инструментального построения многоугольников: многоугольники с числом сторон 7, 9, 11, 13, 14, 18, 19, 21, 22, 23, 25, ... с помощью циркуля и линейки построить нельзя.

Как оказалось, что конструктивная геометрия стала зависеть от алгебры уравнений? Эта зависимость устанавливается аналитической геометрией: любая задача на построение сводится к определенному виду алгебраического уравнения. Так, упомянутые задачи о трисекции угла и удвоении куба сводятся к уравнениям третьей степени. Но с помощью циркуля и линейки можно решить геометрическую задачу, если соответствующее ей алгебраическое уравнение имеет корни, выраженные только через квадратные радикалы.

### Симметрия уравнений Максвелла

К важнейшей группе пространственных преобразований относятся преобразования Лоренца, оставляющие без изменения (инвариантными) электромагнитные уравнения Максвелла и волновое уравнение. В лоренцевых преобразованиях участвуют три координаты пространства  $(x_1, x_2, x_3)$ , одна координата времени  $(x_4 = ct)$  и два параметра: переменный параметр скорости  $(v)$  и одна постоянная скорость  $(c)$ . Уравнения Максвелла сводятся к волновому уравнению,

но прежде чем мы это сделаем, установим связь электромагнитных уравнений с алгеброй Клиффорда.

Примерами *внутреннего (скалярного)* и *внешнего (векторного)* произведений являются *дивергенция* и *ротор*:

$$\nabla \cdot U = \text{div} U = \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial U_2}{\partial x_2} + \frac{\partial U_3}{\partial x_3}, \quad \nabla \times U = \text{rot} U = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial & \partial & \partial \\ \partial x_1 & \partial x_2 & \partial x_3 \\ U_1 & U_2 & U_3 \end{vmatrix}$$

Определим *вектор* напряженности электрического поля ( $E$ ) как градиент скалярного потенциала  $\phi$  и *бивектор* напряженности магнитного поля ( $H$ ) как ротор векторного потенциала  $a$ :

$$E = -\text{grad } \phi = -i \frac{\partial \phi}{\partial x_1} - j \frac{\partial \phi}{\partial x_2} - k \frac{\partial \phi}{\partial x_3}, \quad H = \text{rot } a.$$

Тогда через *клиффордово произведение* можно дать все четыре уравнения Максвелла для статического электромагнитного поля:

$$\nabla(E + H) = \nabla \cdot E + \nabla \cdot H + \nabla \times E + \nabla \times H.$$

Распишем уравнение по составляющим, присвоив первому члену значение плотности заряда ( $\rho$ ), а последнему — величину тока ( $j$ ):

$$\nabla \cdot E = \text{div } E = \rho \text{ — скаляр}, \quad \nabla \cdot H = \text{div } H = 0 \text{ — вектор},$$

$$\nabla \times E = \text{rot } E = 0 \text{ — бивектор}, \quad \nabla \times H = \text{rot } H = j \text{ — псевдоскаляр},$$

Обратим внимание на то, что было бы странно в списке уравнений Максвелла иметь, скажем, пять уравнений. В этом случае было бы непонятно, какой математической модели подчиняются электромагнитные явления.

Для динамического случая изменение магнитного поля приводит к возникновению ротора электрического поля, а изменение электрического поля — ротора магнитного поля. Уравнения Максвелла примут вид:

$$\text{rot } H - \frac{\partial E}{\partial x_4} = j, \quad \text{rot } E + \frac{\partial H}{\partial x_4} = 0,$$

$$\text{div } E = \rho, \quad \text{div } H = 0.$$

Они же, расписанные по четырем составляющим:



$$\left\{ \begin{array}{l} 0 + \frac{\partial H_3}{\partial x_2} - \frac{\partial H_2}{\partial x_3} - \frac{\partial E_1}{\partial x_4} = j_1 \\ -\frac{\partial H_3}{\partial x_1} + 0 + \frac{\partial H_1}{\partial x_3} - \frac{\partial E_2}{\partial x_4} = j_2 \\ \frac{\partial H_2}{\partial x_1} - \frac{\partial H_1}{\partial x_2} + 0 - \frac{\partial E_3}{\partial x_4} = j_3 \\ \frac{\partial E_1}{\partial x_1} - \frac{\partial E_2}{\partial x_2} - \frac{\partial E_3}{\partial x_3} + 0 = \rho \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 + \frac{\partial E_3}{\partial x_2} - \frac{\partial E_2}{\partial x_3} + \frac{\partial H_1}{\partial x_4} = 0 \\ -\frac{\partial E_3}{\partial x_1} + 0 + \frac{\partial E_1}{\partial x_3} + \frac{\partial H_2}{\partial x_4} = 0 \\ \frac{\partial E_2}{\partial x_1} - \frac{\partial E_1}{\partial x_2} + 0 + \frac{\partial H_3}{\partial x_4} = 0 \\ -\frac{\partial H_1}{\partial x_1} - \frac{\partial H_2}{\partial x_2} - \frac{\partial H_3}{\partial x_3} + 0 = 0 \end{array} \right\}.$$

Они же, но уже в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} 0 & H_3 & -H_2 & -E_1 \\ -H_3 & 0 & H_1 & -E_2 \\ H_2 & -H_1 & 0 & -E_3 \\ E_1 & E_2 & E_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \\ \partial_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \\ j_4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & E_3 & -E_2 & H_1 \\ -E_3 & 0 & E_1 & H_2 \\ E_2 & -E_1 & 0 & H_3 \\ -H_1 & -H_2 & -H_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \\ \partial_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь принято, что  $\partial_i = \partial/\partial x_i$ ,  $ct = x_4$  и  $j = \rho v$  или подробно:

$$(j_1, j_2, j_3, j_4) = \rho(\partial x_1/\partial x_4, \partial x_2/\partial x_4, \partial x_3/\partial x_4, \partial x_4/\partial x_4)$$

Представленный вид уравнений Максвелла позволяет увидеть, что электрическая и магнитная составляющие не образуют целиком *самодвойственную систему*, так как математические выражения относительно этих величин не совсем симметричны. Физические же эксперименты, как показал Ленц, демонстрируют *полную дуальность* электромагнитных и магнитоэлектрических явлений. Чтобы достичь *идеальной двойственности*, необходимо в уравнения Максвелла ввести *мнимость*. Тогда две выписанные выше матрицы предстанут в ином виде:

$$\begin{pmatrix} 0 & H_3 & -H_2 & -iE_1 \\ -H_3 & 0 & H_1 & -iE_2 \\ H_2 & -H_1 & 0 & -iE_3 \\ iE_1 & iE_2 & iE_3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & E_3 & -E_2 & iH_1 \\ -E_3 & 0 & E_1 & iH_2 \\ E_2 & -E_1 & 0 & iH_3 \\ -iH_1 & -iH_2 & -iH_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Без мнимой единицы уравнения Максвелла неполны: они многое теряют в своей геометрической и физической интерпретации.

### Инвариантность волнового уравнения

Для вывода *волнового уравнения* по уравнениям Максвелла необходимо принять условие  $j = \rho = 0$ , поскольку электромагнитные

волны распространяются в пространстве в отсутствие токов и зарядов. Тогда, дифференцируя первое уравнение по времени и далее используя второе уравнение, получаем

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x_4^2} = \operatorname{rot} \frac{\partial H}{\partial x_4}, \quad \frac{\partial^2 E}{\partial x_4^2} = -\operatorname{rot} \operatorname{rot} H,$$

Так как  $\operatorname{rot} \operatorname{rot} E = \operatorname{grad} \operatorname{div} E - \Delta E$  и  $\operatorname{div} E = 0$ , окончательно имеем

$$\Delta E - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0.$$

Перед нами волновое уравнение, которому подчиняется вектор электрической напряженности ( $\Delta$  — оператор Лапласа). Аналогичный вывод можно осуществить в отношении вектора магнитной напряженности; волновому уравнению подчиняется также скалярный  $\phi$  и векторный  $a$  потенциалы. Введем некоторую величину  $w = w(x, y, z, t)$ , тогда волновое уравнение для нее будет выглядеть так:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0.$$

Преобразования Лоренца, оставляющие это уравнение без изменений, выглядят следующим образом:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

где  $\beta = v/c$ . Так как преобразуются только координаты  $x$  и  $t$ , то волновое уравнение можно переписать только для этих координат:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x'^2} - \frac{\partial^2 w}{c^2 \partial t'^2} = 0.$$

Чтобы убедиться, что последнее уравнение не изменит своего вида под действием преобразований Лоренца, найдем первые производные функции  $w$  по  $x$  и  $t$ :

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x'} \cdot \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial t'} \cdot \frac{\partial t'}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x'} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} + \frac{\partial w}{\partial t'} \cdot \frac{-v/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x'} \cdot \frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial t'} \cdot \frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x'} \cdot \frac{-v}{\sqrt{1 - \beta^2}} + \frac{\partial w}{\partial t'} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}};$$

затем отыщем вторые производные функции  $w$  по  $x$  и  $t$ :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x'^2} \cdot \frac{1}{1-\beta^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x' \partial t'} \cdot \frac{-v/c^2}{1-\beta^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial t'^2} \cdot \frac{v^2/c^4}{1-\beta^2},$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x'^2} \cdot \frac{v^2}{1-\beta^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x' \partial t'} \cdot \frac{-v}{1-\beta^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial t'^2} \cdot \frac{1}{1-\beta^2}.$$

Умножая последнее равенство на  $-1/c^2$  и складывая его с предыдущим, убеждаемся в инвариантности волнового уравнения:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{c^2 \partial t^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x'^2} - \frac{\partial^2 w}{c^2 \partial t'^2} = 0.$$

История науки знает *преобразования Фогта*, опубликованные автором задолго до преобразований Лоренца. Эти преобразования также оставляют неизменным волновое уравнение, но затрагивают уже все четыре его координаты:

$$x' = x - vt, \quad y' = y \sqrt{1 - v^2/c^2}, \quad z' = z \sqrt{1 - v^2/c^2}, \quad t' = t - vx/c^2.$$

Посредством той же процедуры, которой мы воспользовались выше, можно убедиться в их правомочности. Оба пространственных преобразования являются абсолютно равноправными и образуют пространственные группы.

В том, что существует тождественный элемент и каждому прямому повороту осей отвечает обратный, сомневаться не приходится. Проверим пространственную группу преобразований Лоренца на замкнутость, т.е. убедимся, что два последовательных вращения осей дают третье, которое тоже имеет вид преобразований Лоренца. С этой целью последовательно выполним два преобразования:

$$(t, x) \rightarrow (t', x') \text{ и } (t', x') \rightarrow (t'', x''),$$

а затем найдем результирующее  $(t, x) \rightarrow (t'', x'')$ . Итак, имеем:

$$x = \frac{x' + v_1 t'}{\sqrt{1 - \beta_1^2}}, \quad t = \frac{t' + v_1 x'/c^2}{\sqrt{1 - \beta_1^2}}; \quad x' = \frac{x'' + v_2 t''}{\sqrt{1 - \beta_2^2}}, \quad t' = \frac{t'' + v_2 x''/c^2}{\sqrt{1 - \beta_2^2}}.$$

В первое выражение для  $x$  подставим значения  $t'$  и  $x'$ , получим:

$$x = \left( \frac{x'' + v_2 t''}{\sqrt{1 - \beta_2^2}} + v_1 \frac{t'' + v_2 x''/c^2}{\sqrt{1 - \beta_2^2}} \right) / \sqrt{1 - \beta_1^2} = \frac{x'' + v_3 t''}{\sqrt{1 - \beta_3^2}},$$

$$\text{где } v_3 = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2 / c^2}, \text{ или } \beta_3 = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1 \beta_2}, \text{ или}$$

$$\text{th } \varphi_3 = \text{th}(\varphi_1 + \varphi_2) = \frac{\text{th } \varphi_1 + \text{th } \varphi_2}{1 + \text{th } \varphi_1 \text{th } \varphi_2}.$$

Таким образом, доказано, что последовательное действие двух преобразований Лоренца приводит к третьему, математическая форма которого совпадает с исходными. Аналогичным образом действуем в отношении переменной  $t$ . Эти выкладки показывают, что подвергшиеся испытанию пространственные преобразования действительно составляют группу.

Подчеркнем немаловажную деталь, о которой часто забывают: преобразования Лоренца оставляют в инвариантном виде именно волновое уравнение не зависимо от его природы — акустической или электромагнитной. Требование инвариантности другого дифференциального уравнения приведет и к другим преобразованиям, если таковые вообще обнаружатся. Например, преобразования Лоренца не оставят в неизменном виде *дифференциальное уравнение теплопроводности и диффузии*, которое несколько отличается от волнового уравнения; оно имеет вид:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{1}{c} \frac{\partial w}{\partial t},$$

где  $c$  — постоянная теплопроводности или диффузии. Таким образом, невозможно говорить о каких-то универсальных преобразованиях, которые бы оставляли инвариантными все без исключения дифференциальные уравнения. Само такое требование является математически некорректным, какие бы при этом соображения общего характера ни приводились.

### Преобразование комплексной плоскости

Кэли однажды сказал, что геометрия всецело определяется группой преобразований, которая действует в этом пространстве, а Клейн добавил: геометрия — это ее инварианты, т.е. некие величины, остающиеся неизменными при всех групповых преобразованиях. В евклидовом пространстве перенос и поворот отрезков линий, а также целых геометрических фигур и тел не сопряжен с изменением их линейных размеров; это — инварианты евклидова пространства. В

псевдоевклидовом пространстве это не так, и длина отрезков при гиперболическом повороте осей изменяет свою величину, хотя сохраняется неизменной некая квадратичная форма, построенная из координат. Прежде чем рассматривать инварианты псевдоевклидовой геометрии и исследовать вопрос изменения масштаба осей при их гиперболическом повороте, продемонстрируем на пространственных группах простой геометрии, какие величины могут оставаться неизменными, а какие — изменяться.

Для начала возьмем элементарную группу преобразований, переводящую все точки  $z$  комплексной плоскости в точки  $z'$  по формуле

$$z' = \frac{1}{z}.$$

Точки окружности единичного радиуса  $|z| = 1$ , которые определяются экспоненциальной зависимостью  $\exp(i\varphi)$ , перейдут в точки  $z' = \exp(-i\varphi)$  этой же окружности, но расположенные симметрично относительно оси абсцисс, т.е. когда точки  $1$  и  $-1$  оси  $x$  остаются на месте, а точки  $i$  и  $-i$  оси  $y$  меняются местами. Внутренние точки круга  $|z| < 1$  в результате данного преобразования перейдут во внешние, а внешние  $|z| > 1$  — во внутренние. В частности, точка  $z = 0$  перейдет в точку  $z' = \infty$ .

Одним из важнейших свойств данного преобразования является то, что оно перемешивает прямые и окружности плоскости между собой. В самом деле, общее уравнение окружности выглядит так:

$$a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0.$$

Перейдем к комплексным числам:

$$z = x + iy, z^* = x - iy, x = (z + z^*)/2, y = (z - z^*)/2i.$$

В этом представлении уравнение окружности приобретает вид:

$$\begin{aligned} & azz^* + b(z + z^*)/2 + c(z - z^*)/2i + d = \\ & = azz^* + z(b - ic)/2 + z^*(b + ic)/2 + d = azz^* + wz + w^*z^* + d = 0. \end{aligned}$$

Числа  $a$  и  $d$  — вещественные коэффициенты, а числа  $w$  и  $w^*$  — комплексно-сопряженные коэффициенты. Подвергнем переменную  $z$  преобразованию, тогда уравнение преобразуется к виду

$$a/z'z'^* + w/z' + w^*/z'^* + d = a + wz'^* + w^*z' + dz'z'^* = 0.$$

Пара уравнений

$$(A) \quad azz^* + wz + w^*z^* + d = 0 \quad \text{и} \quad (B) \quad a + wz'^* + w^*z' + dz'z'^* = 0$$

двойственны друг к другу. Это означает, что окружность в пространстве  $z$ , проходящая через начало координат ( $d = 0$ ), в пространстве  $z'$  преобразуется в прямую, а прямая, проходящая через начало координат ( $a = 0, d = 0$ ), преобразуется в прямую  $wz'^* + w^*z' = 0$ , тоже проходящую через начало координат. Прямая, не проходящая через начало координат ( $a = 0, d \neq 0$ ), преобразуется в окружность  $wz'^* + w^*z' + dz'z'^* = 0$ , проходящую через начало координат. Наконец, окружность ( $A$ ), не проходящая через начало координат, преобразуется в окружность ( $B$ ), также не проходящую через начало координат. Таким образом, можно констатировать, что *двойственные* друг к другу пространства  $z$  и  $z'$  все свои прямые и окружности сохраняют в неизменном виде. В этом смысле объекты этих пространств *неизменны*. Однако их отдельные подмножества переходят друг в друга так, что объект пространства  $z$  преобразуется в совершенно иной объект пространства  $z'$ , и наоборот. В этом смысле объекты пространства  $z$  и  $z'$  *не инвариантны*.

### Группа проективных преобразований и ее подгруппы

Мы не собираемся давать сколько-нибудь полный обзор по существующим пространственным группам преобразований, однако еще об одном пространственном преобразовании, которое называется *проективным*, есть смысл упомянуть, так как оно лежит в основе так называемой *проективной геометрии*. Она тоже подчиняется принципу двойственности, поскольку является обыкновенным расширением группы только что рассмотренного преобразования. Далее под  $x$  и  $x'$  можно по-прежнему понимать комплексные числа, однако в дальнейшем нам нужно подчеркнуть некоторые важные групповые свойства преобразований, не зависимо от того, к числам какого характера они относятся. Поэтому проще, если под  $x$  и  $x'$  мы будем понимать вещественные числа.

Итак, *проективным* называется преобразование вида:

$$x' = \frac{ax + b}{cx + d}, \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0.$$

Совокупность этих преобразований образует *пространственную группу*. Геометрия, основанная на проективных преобразованиях, называется *проективной*. Точке  $x = -d/c$  в штрихованном пространстве ставится в соответствие бесконечно удаленная точка  $x' = \infty$ ,

которой нет, например, в евклидовой геометрии, почему в ней и не действует принцип двойственности.

Исходя из двух преобразований:  $x \rightarrow x'$  и  $x' \rightarrow x''$ , найдем результирующее  $x \rightarrow x''$ :

$$\begin{aligned} x'' &= \frac{a'x' + b'}{c'x' + d'}, \quad x' = \frac{ax + b}{cx + d}, \quad x'' = \frac{a' \frac{ax + b}{cx + d} + b'}{c' \frac{ax + b}{cx + d} + d'} = \\ &= \frac{(a'a + b'c)x + (a'b + b'd)}{(c'a + d'c)x + (c'b + d'd)} = \frac{a''x + b''}{c''x + d''}. \end{aligned}$$

Из этого перемножения видно, что коэффициенты результирующего преобразования находятся по закону перемножения матриц:

$$\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'a + b'c & a'b + b'd \\ c'a + d'c & c'b + d'd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix}.$$

Если тождественное преобразование определить как

$$x' = \frac{1 \cdot x + 0}{0 \cdot x + 1} = x, \quad \text{то обратное к } x' = \frac{ax + b}{cx + d} \text{ будет } x = \frac{-dx' + b}{cx' - a};$$

что проверяется подстановкой. Инвариантом проективной группы является *двойное*, или *ангармоническое*, отношение *четырёх точек*:

$$\frac{x_1 - x_3}{x_1 - x_4} : \frac{x_2 - x_3}{x_2 - x_4}.$$

Перестановка точек  $x_i$  приводит еще к пяти другим выражениям.

Если проективные преобразования образуют группу, то каковы будут ее подгруппы? — Ими являются преобразования, которые получают обнулением одного, двух или трех коэффициентов. Вместе с тождественным имеем девять подгрупп:

$$\begin{aligned} x' = x, \quad x' = ax, \quad x' = ax + b, \quad x' = \frac{b}{cx}, \quad x' = \frac{b}{cx + d}, \\ x' = \frac{ax}{cx}, \quad x' = \frac{ax}{d}, \quad x' = \frac{ax}{cx + d}, \quad x' = \frac{ax + b}{cx}, \quad x' = \frac{ax + b}{d}. \end{aligned}$$

Некоторые из перечисленных подгрупп имеют в математике устоявшиеся названия:  $x' = ax$  — группа *растяжения*,  $x' = b/cx$  — группа *сжатия*,  $x' = ax + b$  — группа *аффинных преобразований прямой*, которая определяет *аффинную геометрию*; если  $a = 1$ , то получим группу *скольжения* —  $x' = x + b$ . В физике группа *поступательного движения*  $x' = x + vt$  получила название *преобразований Галилея*, а группу *преобразований Кэли – Клейна*, впервые рассмотренную Кэ-

ли в его шестом математическом мемуаре 1859 г., физики позднее назвали *преобразованиями Лоренца*.

Проективная группа имеет две подгруппы в зависимости от знака определителя, который можно нормировать на единицу:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc = \pm 1.$$

Какие бы числовые значения ни принимали четыре коэффициента, элементы подгруппы с положительным определителем при перемножении между собой никогда не дадут элемент с отрицательным определителем, и наоборот.

Основным свойством групп вообще и пространственных в частности является их замкнутость. Всякий математик сильно удивится, если кто-то, перемножая два элемента из группы тетраэдра, заявит, что он получил элемент из группы кватерниона. Точно так же невозможно путем изменения какого-либо параметра (путем его постепенного уменьшения до нуля или его увеличения до бесконечности) перейти из одной группы преобразований в другую.

Так, группа аффинных преобразований вида  $x' = (ax + b)/d$  может дать элементы, принадлежащие только этой же группе. Проверим справедливость данного утверждения на числах. Пусть даны два преобразования  $x \rightarrow x'$  и  $x' \rightarrow x''$ , найдем результирующее  $x \rightarrow x''$ :

$$x'' = \frac{-3x' + 1}{2}, \quad x' = \frac{2x - 4}{-5}, \quad x'' = \frac{-6x + 7}{-10};$$

результат имеет вид исходных преобразований. Поскольку в аффинную группу входит в качестве подгруппы преобразование растяжения ( $x' = ax$ ), то за счет предельного перехода параметров ( $b \rightarrow 0$ ,  $d \rightarrow 0$ ) можно получить из элементов аффинной группы элемент группы растяжения.

### Две симметрии: вращение и перемещение

Группа вращения Кэли — Клейна ни при каких условиях не даст подгруппу типа группы поступательного движения, так как преобразования Галилея  $x = x' + vt'$ ,  $x' = x - vt$ ,  $t' = t$  — это продольное перемещение штрихованной системы отсчета относительно нештрихованной, а преобразованиям Лоренца



$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, t = \frac{t' + vx'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \quad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

отвечает гиперболический поворот осей штрихованной системы. Не может получиться так, что при уменьшении тангенса угла наклона осей координат  $\text{th}\varphi = \beta = v/c \rightarrow 0$  ноль штрихованной системы вдруг оторвется от нуля нештрихованной и «поедет» в сторону положительных значений оси  $x$ . Неточность, которую здесь часто допускают, возникает оттого, что групповые преобразования Кэли — Клейна записывают в том виде, в котором мы только что их представили. В этом случае в числителях преобразований для пространственных координат  $x'$  и  $x$  отдельно стоит скорость  $v$  вместо отношения  $v/c$ . Когда делался предельный переход  $v/c \rightarrow 0$  и знаменатель преобразований начинал приближаться к единице, в числителе тем временем скорость  $v$  не менялась, что является, безусловно, ошибкой. Этой ошибки можно избежать, если предельный переход выполнить на корректно записанных преобразованиях, а именно:

$$x = \frac{x' + \beta ct'}{\sqrt{1 - \beta^2}}, ct = \frac{ct' + \beta x'}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad x' = \frac{x - \beta ct}{\sqrt{1 - \beta^2}}, ct' = \frac{ct - \beta x}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Тогда при условии  $\beta \rightarrow 0$  или  $\varphi \rightarrow 0$  гиперболические функции ведут себя следующим образом (табл. 2.90):

$$\text{ch } \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \rightarrow 1, \quad \text{sh } \varphi = \frac{\beta_n}{\sqrt{1 - \beta^2}} \rightarrow 0.$$

Таблица 2.90

$\beta$	0,99	0,80	0,60	0,40	0,30	0,20	0,10	0,05	0,01	0,00
ch $\varphi$	7,089	1,667	1,250	1,091	1,048	1,021	1,0050	1,0013	1,0001	1,0000
sh $\varphi$	7,018	1,333	0,750	0,436	0,315	0,204	0,1005	0,0501	0,0100	0,0000

Отсюда преобразования Лоренца в случае предельного перехода параметра  $\beta \rightarrow 0$  трансформируются в единственно возможные равенства:  $x = x'$ ,  $ct = ct'$ . Никаких других выражений здесь в принципе быть не может.

Хорошо известен способ вывода преобразований Лоренца из преобразований Галилея. Он связан с постулатом о неизменности скорости света в штрихованной и нештрихованной системах, т.е.

$$x/t = x'/t' = c = \text{const.}$$

Если это условие применить к преобразованиям Галилея:

$$x = (x' + vt')\alpha, \quad x' = (x - vt)\alpha, \quad c^2 = (c + v)(c - v)\alpha^2, \quad \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

то, учитывая, что  $x = ct$ ,  $x' = ct'$ ,  $t' = x'/c$ , несложно прийти к преобразованиям Лоренца. Однако данный математический вывод не является *предельным переходом*, т.е. непрерывным изменением параметра  $\beta$ . Нетрудно заметить, что условие постоянства константы  $c$  в штрихованной и нештрихованной системах не накладывает на нее никаких количественных ограничений, т.е. она может быть вполне сопоставима со скоростью  $v$ . Таким образом, последний вывод показывает, как можно из функции группы поступательного движения получить совершенно другую функцию, подчиняющуюся иной группе симметрии. Выкладка доказывает, что группа поступательного движения не является подгруппой вращательного движения.

### Двойственность и проецирование

Рассмотренная в п. 5 группа проективных преобразований касается уравнения *линии*. Группа преобразований *плоскости* имеет вид:

$$\begin{cases} x' = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_3x + b_3y + c_3} \\ y' = \frac{a_2x + b_2y + c_2}{a_3x + b_3y + c_3} \end{cases}, \text{ при этом } \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

Группа *всех трехмерных* проективных преобразований состоит из системы трех уравнений; ее подгруппой будет система трехмерных аффинных преобразований; выпишем их соответственно:

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{a_1x + a_2y + a_3z + a_4}{d_1x + d_2y + d_3z + d_4} \\ y' = \frac{b_1x + b_2y + b_3z + b_4}{d_1x + d_2y + d_3z + d_4} \\ z' = \frac{c_1x + c_2y + c_3z + c_4}{d_1x + d_2y + d_3z + d_4} \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} x' = a_1x + a_2y + a_3z + a_4 \\ y' = b_1x + b_2y + b_3z + b_4 \\ z' = c_1x + c_2y + c_3z + c_4 \end{array} \right\}, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

Во всех пространствах проективной геометрии действует *принцип двойственности*, но он отсутствует в аффинных пространствах или более узком их классе — евклидовых пространствах. Различие между аффинным и евклидовым пространствами состоит в следующем: если в аффинном пространстве вводится понятие о векторах и их сумме, то для евклидова пространства вводится также понятие скалярного произведения векторов как суммы произведений их соответствующих координат. При аффинных преобразованиях прямые всегда переходят в прямые, причем сохраняется их взаимное расположение: пересекающиеся переходят в пересекающиеся, скрещивающиеся — в скрещивающиеся, а параллельные — в параллельные. Для проективных пространств, как было сказано, справедлив *принцип двойственности*, действие которого было продемонстрировано на примере самого элементарного проективного преобразования —  $z' = 1/z$ .

Говорят, что точка и прямая *инцидентны*, если точка лежит на прямой (или прямая проходит через точку); аналогично говорят о точке и плоскости или прямой и плоскости. Пользуясь этим термином, *принцип двойственности* можно сформулировать следующим образом: если справедлива некоторая теорема  $T$ , в которой говорится что-либо об инцидентности точек, прямых и плоскостей трехмерного проективного пространства, то будет справедлива и двойственная теорема  $T'$ , которая получается из  $T$  заменой термина *точка* на термин *плоскость* и *плоскость* на *точку*, термин *прямая* остается без изменений. Для двумерной проективной геометрии на плоскости *точка* заменяется на *прямую*, а *прямая* — на *точку*. Две школьные аксиомы: *две прямые пересекаются в одной точке* и *через две точки можно провести единственную прямую* связаны принципом двойственности. Фактически текст теорем в результате действия принципа двойственности подвергается большему изменению, так как надо заменять слова *вписанная кривая* на *описанная*

кривая, расстояние между двумя точками на угол между прямыми и т.д. Но логическая канва двойственных теорем абсолютно идентична. Продемонстрируем действие принципа двойственности на проективной плоскости, для чего сформулируем две теоремы.

*Теорема Паскаля.* Каким бы ни был шестиугольник, вписанный в линию второго порядка (например, эллипс), точки пересечения его противоположных сторон лежат на одной прямой  $P$  (рис. 2.36а).

*Теорема Брианшона.* Каким бы ни был шестиугольник, описанный вокруг линии второго порядка, прямые, соединяющие его противоположные вершины, проходят через одну точку  $P$  (рис. 2.36б).

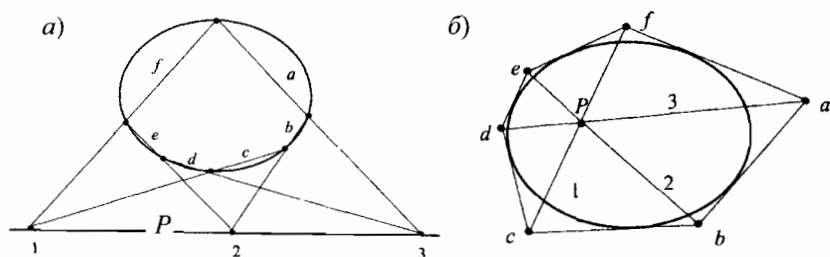


Рис. 2.36

Появились эти две теоремы с интервалом в сто лет. Между тем, они находятся в отношении двойственности и имеют абсолютно одинаковую логическую структуру. Стоит поменять ключевые термины (*вписанный* — *описанный*, *точка* — *прямая*) на двойственные, как тут же обнаружится их эквивалентность.

Принцип двойственности, действующий в проективных пространствах, правильнее назвать *самодвойственным* или *автодвойственным*, так как одно множество элементов проективного пространства проецируется на другое множество *этого же* проективного пространства. Типичный пример такой двойственности мы находим в электротехнике; при этом производят следующую замену слов: *источник тока* — *источник э.д.с.*, *сопротивление* — *проводимость*, *индуктивность* — *емкость*, *последовательное соединение элементов* — *параллельное соединение элементов*. На рис. 2.37а приведена исходная электрическая цепь, а на рис. 2.37б — двойственная ей, которая вычерчивается в соответствии с *двойственным графом*.

Элементы обеих цепей находятся в следующем отношении: сопротивлениям ( $r$ ) первой цепи отвечают проводимости ( $g$ ) второй,

индуктивности ( $L$ ) соответствуют емкостям ( $C'$ ), и наоборот, а напряжения ( $u$ ) – токам ( $i'$ ), так что можно написать следующие взаимно однозначные соответствия:

$$\begin{aligned} u_r &= ri_r, & u_L &= L \frac{di_L}{dt}, & u_C &= \frac{1}{C} \int i_C dt; \\ i'_r &= g'u'_r, & i'_C &= C' \frac{du'_C}{dt}, & i'_L &= \frac{1}{L'} \int u'_L dt. \end{aligned}$$

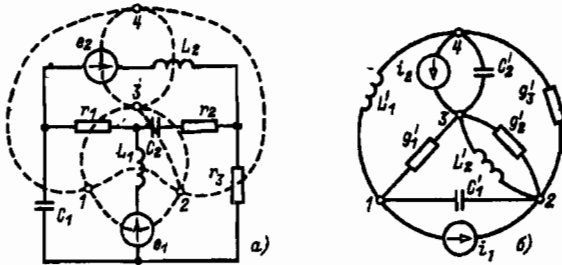


Рис. 2.37

Комплексное сопротивление ( $Z$ ) первой цепи соответствует комплексной проводимости ( $Y'$ ) второй цепи:

$$Z = r + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right), \quad Y' = g' - j\left(\frac{1}{\omega L'} - \omega C'\right), \quad k = \frac{Z}{Y'} = \frac{r}{g'} = \frac{L'}{C} = \frac{L}{C'},$$

где  $k$  — коэффициент пропорциональности.

Но электромагнитным величинам можно поставить в соответствие не магнитоэлектрические, а механические величины, имеющие совершенно иную природу; в этом случае говорят уже о *проецировании* одной системы физических величин на другую. Проецирование можно осуществить внутри классической механики, но так, чтобы не возникало *автоморфизма* или *автопроецирования*. В табл. 2.91 приведены такие соответствия между механическими и электромагнитными величинами, с одной стороны, и между механическими величинами поступательного движения и механическими величинами вращательного движения, с другой стороны.

Для электроцепи (рис. 2.38а), куда последовательно включены источник электродвижущей силы ( $e$ ), активное сопротивление ( $r$ ), катушка индуктивности ( $L$ ) и емкость ( $C$ ), будем иметь следующее уравнение для напряжений:

$$e = ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int idt .$$

Таблица 2.91

№	Электротехника	Механика перемещения	Механика вращения
1	Напряжение $u$ [В]	Сила $F$ [Н]	Момент $M$ [Н·м]
2	Заряд $q$ [Кл]	Линейное перемещ. $x$ [м]	Углов. поворот $\varphi$ [рад]
3	Ток $i$ [А]	Линейная скорость $v$ [м/с]	Углов. скорость $\omega$ [рад/с]
4	Индуктив. $L$ [Г]	Масса $m$ [кг]	Момент инерции $J$ [кг·м <sup>2</sup> ]
5	Емкость $C$ [Ф]	Податливость $K^{-1}$ [м/Н]	Податливость $G^{-1}$ [рад/(Н·м)]
6	Сопrotивление $r$ [Ом]	Кoэф. трения перемещ. $F$ [кг/с]	Кoэф. трения вращен. $k$ [кг·м <sup>2</sup> /с·рад]
7	Магнитн. энергия $Li^2/2$ [Дж]	Кинет. энерг. перемещ. $mv^2/2$ [Дж]	Кинетич. энергия враще. $J\omega^2/2$ [Дж]
8	Электрич. энергия $Cu^2/2$ [Дж]	Потен. энергия перемещ. $Kx^2/2$ [Дж]	Потенц. энергия вращ. $G\varphi^2/2$ [Дж]
9	Мгнов. мощность $ui$ [Вт]	Мощн. перемещ. $Fv$ [Вт]	Мощн. вращен. $M\omega$ [Вт]
10	Мощн. рассеяния $ri^2$ [Вт]	Трение от перемещ. $fv^2$ [Вт]	Трение от вращ. $k\omega^2$ [Вт]

Двойственная (*автоморфная*) цепь будет представлять собой контур с соответствующими элементами, включенными параллельно (рис. 2.38б). Уравнение для токов этой цепи выглядит так:

$$i' = g'u' + C' \frac{du'}{dt} + \frac{1}{L'} \int u' dt .$$

Но электрическим цепям можно поставить в соответствие *изоморфную* механическую конструкцию, состоящую из цилиндра, установленной внутри него пружины (с величиной упругости  $K$ ), к которой крепится поршень массой  $m$  (рис. 2.38в). Если на поршень действует сила  $F$ , разгоняющая его до скорости  $v$ , то с учетом коэффициента трения  $f$  получим динамическое уравнение классической механики, *изоморфное* к двум первым уравнениям:

$$F = fv + m \frac{dv}{dt} + K \int v dt .$$

Подобного рода проецирование можно рассматривать как расширение принципа двойственности, который выходит за пределы одного физического пространства и находит себе взаимно однозначные элементы совершенно в другом физическом пространстве. Таким образом, двойственность проявляется в способности того или иного преобразования создавать однозначно связанные пары или соответствия, которые рассматриваются как взаимные проекции элементов одного множества на элементы другого. Один из примеров такого соответствия, когда элементы, принадлежащие одному пространству, проецируются на элементы другого, рассмотрим подробно.

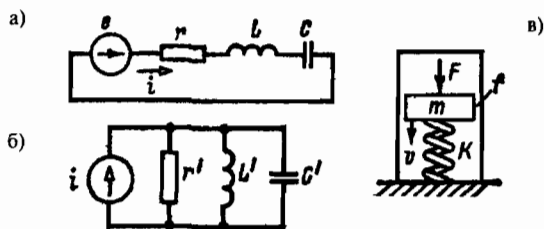


Рис. 2.38

### Ортогональные и гиперболические преобразования

Взгляните на табл. 2.92, где приведены полные системы *ортогональных* и *гиперболических* поворотов. Сами повороты координатных осей образуют две различные группы преобразований, действующие в *евклидовом* и *псевдоевклидовом* пространствах. Каждая из этих групп состоит из пары прямых и пары обратных преобразований на плоскости. Однако четыре ортогональных преобразования можно *спроецировать* на четыре гиперболических, а четыре гиперболических — на четыре ортогональных; для этого нужно только ввести мнимую единицу для оси ординат. Таким образом, вся система проецирования указанных преобразований построена на одном очень простом преобразовании оси  $y$ :

$$y \rightarrow iy.$$

Сейчас нас будет интересовать один вопрос — изменение масштабов длины для ортогональных и гиперболических преобразований. При ортогональном повороте декартовых координат масштабы

длины не изменяются, при гиперболическом повороте масштабы изменяются, но преобразование  $y \rightarrow iy$  и  $\beta \rightarrow -i\beta$  (так как  $-i\beta = x/iy$ ) превращает ортогональный поворот в гиперболический, а гиперболический — в ортогональный. Ставится задача найти пересчетную формулу для координат гиперболических преобразований, которые являются, как известно, преобразованиями Лоренца. Чтобы соблюсти устоявшуюся в физике форму представления гиперболических преобразований, мы везде обозначаем ось ординат не через  $y$ , а через  $ct$ . Сначала рассмотрим ортогональный поворот декартовых координат, затем — гиперболический.

Таблица 2.92

Ортогональные преобразования		Гиперболические преобразования	
Ортогональный поворот осей	Гиперболический поворот осей	Гиперболический поворот осей	Ортогональный поворот осей
$x = \frac{x' - \beta y'}{\sqrt{1 + \beta^2}}$	$x = \frac{x' + (i\beta)(iy')}{\sqrt{1 - (i\beta)^2}}$	$x = \frac{x' + \beta y'}{\sqrt{1 - \beta^2}}$	$x = \frac{x' - (i\beta)(iy')}{\sqrt{1 + (i\beta)^2}}$
$y = \frac{y' + \beta x'}{\sqrt{1 + \beta^2}}$	$iy = \frac{iy' + (i\beta)x'}{\sqrt{1 - (i\beta)^2}}$	$y = \frac{y' + \beta x'}{\sqrt{1 - \beta^2}}$	$iy = \frac{iy' + (i\beta)x'}{\sqrt{1 + (i\beta)^2}}$
$x' = \frac{x + \beta y}{\sqrt{1 + \beta^2}}$	$x' = \frac{x - (i\beta)(iy)}{\sqrt{1 - (i\beta)^2}}$	$x' = \frac{x - \beta y}{\sqrt{1 - \beta^2}}$	$x' = \frac{x + (i\beta)(iy)}{\sqrt{1 + (i\beta)^2}}$
$y' = \frac{y - \beta x}{\sqrt{1 + \beta^2}}$	$iy' = \frac{iy - (i\beta)x}{\sqrt{1 - (i\beta)^2}}$	$y' = \frac{y - \beta x}{\sqrt{1 - \beta^2}}$	$iy' = \frac{iy - (i\beta)x}{\sqrt{1 + (i\beta)^2}}$

Если точку  $A$  (рис. 2.39а) выбрать на окружности единичного радиуса, то формулам пересчета из одной декартовой системы в другую будут отвечать формулы синуса и косинуса суммы двух углов:

$$\cos(\varphi + \psi) = \cos\psi \cos\varphi - \sin\psi \sin\varphi,$$

$$\sin(\varphi + \psi) = \cos\psi \sin\varphi + \sin\psi \cos\varphi.$$

Непосредственно из чертежа видно, что

$$\cos\psi = x', \quad \sin\psi = ct', \quad \cos(\varphi + \psi) = x, \quad \sin(\varphi + \psi) = ct.$$

Следовательно,



$$x = x' \cos\varphi - ct' \sin\varphi, \quad ct = x' \sin\varphi + ct' \cos\varphi.$$

Так как

$$\operatorname{tg}\varphi = x_B/ct_B = v/c = \beta, \quad \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\beta^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}},$$

окончательно получаем первые две формулы ортогонального преобразования в форме ортогонального поворота, который соответствует первым двум формулам первого столбца табл. 2.92:

$$x = \frac{x' - \beta ct'}{\sqrt{1+\beta^2}}, \quad ct = \frac{ct' + \beta x'}{\sqrt{1+\beta^2}}.$$

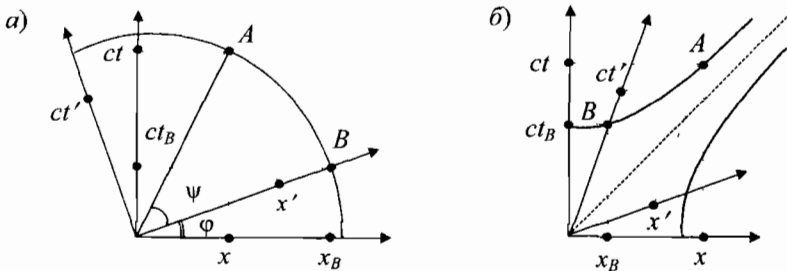


Рис. 2.39

Последние формулы могут быть переписаны в гиперболической форме, тогда масштабы осей абсциссы и ординаты изменятся, несмотря на присутствие мнимой единицы. Обычно измененные масштабы ищутся путем обнуления одной из координат. Например, чтобы найти изменившуюся длину  $\Delta x'$  штрихованной системы по известной длине  $\Delta x$  нештрихованной (ортогональной) системы, берут координаты двух точек на оси абсцисс и составляют из них разность:

$$x_1 = \frac{x'_1 + vt'_1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad x_2 = \frac{x'_2 + vt'_2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad x_2 - x_1 = \frac{(x'_2 - x'_1) + v(t'_2 - t'_1)}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

При условии одновременного измерения пространственных координат, т.е. выполнения условия  $t_1 = t_2$ , получается формула сокращения длины:

$$\Delta x' = \Delta x \sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

Аналогичная методика нахождения соотношения между масштабами штрихованной и нештрихованной систем координат должна срабатывать и для ортогональных преобразований декартовых координат:

$$x_1 = \frac{x'_1 - vt'_1}{\sqrt{1+v^2/c^2}}, \quad x_2 = \frac{x'_2 - vt'_2}{\sqrt{1+v^2/c^2}}, \quad x_2 - x_1 = \frac{(x'_2 - x'_1) - v(t'_2 - t'_1)}{\sqrt{1+v^2/c^2}}.$$

При условии  $t_1 = t_2$  получим формулу удлинения длины:

$$\Delta x' = \Delta x \sqrt{1+v^2/c^2}.$$

Но при повороте декартовых координат масштабы, как известно, не меняются. В действительности полученное соотношение

$$\frac{\Delta x}{\Delta x'} = \frac{1}{\sqrt{1+\beta^2}} = \cos\varphi$$

указывает лишь на косинус угла поворота осей. Каким же образом нужно поступать, чтобы рассчитать соотношение между масштабами штрихованной и нештрихованной систем координат при гиперболическом повороте, который показан на рис. 2.39б?

### Масштаб осей при гиперболическом повороте

При гиперболическом повороте обычные тригонометрические функции, с которых мы начали вывод формул для ортогонального поворота, заменятся на гиперболические:

$$\operatorname{ch}(\varphi + \psi) = \operatorname{ch}\psi \operatorname{ch}\varphi + \operatorname{sh}\psi \operatorname{sh}\varphi, \quad \operatorname{sh}(\varphi + \psi) = \operatorname{ch}\psi \operatorname{sh}\varphi + \operatorname{sh}\psi \operatorname{ch}\varphi;$$

Далее непосредственно по чертежу устанавливаем следующие отношения между отрезками:

$$\operatorname{th}\varphi = x_B/ct_B = v/c = \beta, \quad \operatorname{ch}\varphi = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \operatorname{sh}\varphi = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$\operatorname{ch}(\varphi + \psi) = \frac{1}{\sqrt{1-(x/ct)^2}}, \quad \operatorname{sh}(\varphi + \psi) = \frac{x/ct}{\sqrt{1-(x/ct)^2}},$$

$$\operatorname{ch}\psi = \frac{1}{\sqrt{1-(x'/ct')^2}} = \frac{ct'}{OB} = \frac{ct' \cos\varphi}{ct_B} = \frac{ct'/ct_B}{\sqrt{1+\beta^2}},$$

$$\operatorname{sh}\psi = \frac{x'/ct'}{\sqrt{1-(x'/ct')^2}} = \frac{Act'}{OB} = \frac{x' \cos\varphi}{ct_B} = \frac{x'/ct_B}{\sqrt{1+\beta^2}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-(x/ct)^2}} = \frac{ct'/ct_B}{\sqrt{1+\beta^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{x'/ct_B}{\sqrt{1+\beta^2}} \cdot \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-(x/ct)^2}} = \frac{1}{ct_B \sqrt{1-\beta^2}} \cdot \frac{ct' + \beta x'}{\sqrt{1+\beta^2}}.$$

Так как

$$\frac{\text{ch}(\varphi + \psi)}{\text{ch}\varphi} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\sqrt{1-(x/ct)^2}} = \frac{ct}{ct_B},$$

окончательно получим:

$$ct = \frac{ct' + \beta x'}{\sqrt{1+\beta^2}} = \frac{ct' + \beta x'}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\sqrt{1+\beta^2}} = \frac{ct'_n + \beta x'_n}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Аналогично,

$$x = \frac{x' + \beta ct'}{\sqrt{1+\beta^2}} = \frac{x' + \beta ct'}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\sqrt{1+\beta^2}} = \frac{x'_n + \beta ct'_n}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Таким образом, из чертежа (рис. 2.39б) мы вывели преобразования Лоренца, в которых, однако, уже учтены изменения масштабных единиц штрихованной системы. В этих формулах фигурируют величины:

$$x'_n = k_n x', \quad ct'_n = k_n ct' \quad \text{— нормированные координаты,}$$

$$k_n = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\sqrt{1+\beta^2}} \quad \text{— нормировочный, или масштабный, коэффициент.}$$

Масштабный коэффициент  $k_n$  можно вывести иначе, если воспользоваться диаграммой, изображенной на рис. 2.40. Из Чертежа найдем координаты:

$$ct' = ct'' \cos 2\varphi,$$

$$x' = x'' + ct'' \sin 2\varphi.$$

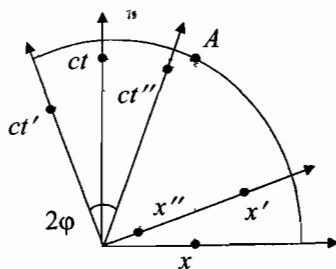


Рис. 2.40

Подставим найденные штрихованные значения в формулу преобразования декартовой пространственной координаты:

$$x = \frac{x'' + ct'' \sin 2\varphi - ct'' \text{tg}\varphi \cos 2\varphi}{\sqrt{1+\beta^2}}.$$

Так как

$$\sin 2\varphi - \operatorname{tg}\varphi \cos 2\varphi = \frac{2\operatorname{tg}\varphi}{1 + \operatorname{tg}^2\varphi} - \frac{\operatorname{tg}\varphi(1 - \operatorname{tg}^2\varphi)}{1 + \operatorname{tg}^2\varphi} = \operatorname{tg}\varphi = \beta,$$

окончательно находим масштабный коэффициент  $k_n$ :

$$x = \frac{x'' + \beta ct''}{\sqrt{1 + \beta^2}} = \frac{x'' + \beta ct''}{\sqrt{1 - \beta^2}} \cdot \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{\sqrt{1 + \beta^2}} = \frac{x'_n + \beta ct'_n}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

$$\text{где } x'_n = k_n x'', \quad ct'_n = k_n ct'', \quad k_n = \sqrt{\frac{1 - \beta^2}{1 + \beta^2}}.$$

Аналогичным образом можно выделить масштабный коэффициент  $k_n$  из второго ортогонального преобразования:

$$ct = \frac{ct'' \cos 2\varphi + x'' \operatorname{tg}\varphi + ct'' \sin 2\varphi \operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{1 + \beta^2}}.$$

Так как  $\cos 2\varphi + \operatorname{tg}\varphi \sin 2\varphi = 1$ , окончательно находим:

$$ct = \frac{ct'' + \beta x''}{\sqrt{1 + \beta^2}} = \frac{ct'' + \beta x''}{\sqrt{1 - \beta^2}} \cdot \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{\sqrt{1 + \beta^2}} = \frac{ct'_n + \beta x'_n}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Для проверки найденного масштабного коэффициента  $k_n$  можно вычертить реальный чертеж на бумаге с гиперболическим поворотом осей  $x'$  и  $ct'$ , отвечающий преобразованиям Лоренца, и произвести измерение всех координат непосредственно по чертежу. Кроме точки  $A$ , возьмем еще четыре точки —  $B_1, B_2, C_1, C_2$ , — с другими координатами. Все измеренные величины занесены в табл. 2.93.

**Таблица 2.93**

Точка	$x$	$ct$	$x'$	$ct'$	$\beta$	$k_n$	$\approx  s' $	$\approx  s $	$\approx  k_n^2 s' $
$A$	63	135	30	131	0,267	0,931	$16 \cdot 10^3$	$14 \cdot 10^3$	$14 \cdot 10^3$
$B_1$	105	177	55	166	0,324	0,901	$24,5 \cdot 10^3$	$20 \cdot 10^3$	$20 \cdot 10^3$
$B_2$	105	177	77	165	0,176	0,968	$21 \cdot 10^3$	$20 \cdot 10^3$	$20 \cdot 10^3$
$C_1$	155	211	103	187	0,324	0,901	$24,5 \cdot 10^3$	$20 \cdot 10^3$	$20 \cdot 10^3$
$C_2$	155	211	122	192	0,176	0,968	$21 \cdot 10^3$	$20 \cdot 10^3$	$20 \cdot 10^3$

По найденным координатам вычислим  $\beta$  и масштабные коэффициенты  $k_n$ , а также *квадратичные инварианты*  $s$  и  $s'$  по формуле:

$$s = (x)^2 - (ct)^2 = k_n^2 [(x')^2 - (ct')^2] = k_n^2 s'.$$

Из таблицы 2.93 видно, что без учета квадрата масштабного коэффициента  $k_n$  последнее, принципиальное для группы Кэли — Клейна инвариантное тождество не имело бы места. Это говорит о правильности нахождения масштабного коэффициента  $k_n$ .

### Моделирование волновых процессов

Задача этого подраздела состоит в том, чтобы на примере модели простого волнового процесса показать преимущества конструктивного подхода в физике. Всякий конструктивист в области физики так же, как и в области математики, будет создавать свои конструкции с заданными свойствами и сверять их с тем, что имеет место в действительности. Построение наглядной модели — лучше, если она будет пространственно-механической, — вот, в чем успех теоретических поисков. Только ясное образное представление физического процесса в самых тончайших деталях — это единственное, что может удовлетворить пытливого конструктивиста. Он не станет решать общие задачи абстрактного содержания, скорее всего, он займется решением конкретных проблем, например, следующего содержания.

В полете футбольный мяч испытывает сопротивление воздуха, которое можно перенести на массу мяча, приписав ей эффективное значение. Чем выше скорость движения мяча, тем больше его *эффективная масса*. Возникает вопрос, насколько близка эта формула зависимости эффективной массы от увеличения скорости движения к известной релятивистской формуле для массы, если принять константу  $c$  за скорость звука? Возьмем другую проблему. Заметив, что вихрь воздушной или водной массы занимает определенное и достаточно устойчивое положение в пространстве, как если бы он обладал некоторой *собственной инерцией* к внешним воздействиям, конструктивист может задаться вопросом: а будет ли *масса вращающегося объекта* (а значит, и его гравитационное поле) несколько больше массы этого же объекта, но уже не вращающегося? Если да, то какова зависимость изменения массы объекта от скорости его вращения?

Очевидно, что ответы на сформулированные вопросы связаны с отчетливыми представлениями о силах и динамических напряжениях, действующих в сплошной среде. Поступательное или вихревое движение объектов, находящихся в сплошной среде, явление довольно сложное, чтобы тут же приниматься за немедленное реше-

ние данной задачи. Сейчас мы рассмотрим куда более простую физическую задачу, связанную с динамикой волн.

На рис. 2.41 показаны волны, испущенные движущимся со скоростью  $v$  источником колебаний  $i$ . Вдоль пунктирной линии длина волны  $\lambda'$  будет несколько меньше собственной длины волны  $\lambda$ , испущенной неподвижным источником, а частота колебаний  $f'$ , соответственно, — выше собственной частоты  $f$ . Частота колебаний связана с периодом колебаний:  $\tau = 1/f$  и  $\tau' = 1/f'$ . Из геометрии чертежа несложно найти соотношения, связывающие штрихованные и нештрихованные величины:

$$\lambda' = \lambda \sqrt{1 - v^2/c^2}, \quad f' = \frac{f}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \tau' = \tau \sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

Выписанные формулы в релятивистской теории получили названия *поперечного доплер-эффекта*, с которым, согласно нынешним представлениям, связано так называемое *замедление времени* ( $\tau'$ ), наблюдающееся у быстро перемещающихся объектов. Предлагалось по измерению величин  $\lambda'$ ,  $f'$ ,  $\tau'$  судить о справедливости релятивистской физики. В классической же физике для движущегося источника и покоящегося наблюдателя имеются другие формулы:

$\lambda' = \lambda(1 + \cos\theta)$ ,

$$f' = f/(1 + \cos\theta),$$

$$\tau' = \tau(1 + \cos\theta),$$

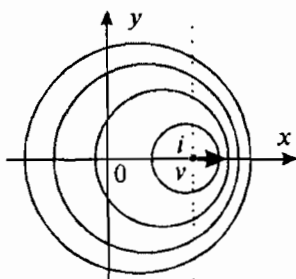


Рис. 2.41

которые при углах  $\theta = \pm \pi/2$  никакого поперечного доплер-эффекта не дают, так как при этом значении угла формулы переходят в равенства:  $\lambda' = \lambda$ ,  $f' = f$  и  $\tau' = \tau$ . Спрашивается, можно ли совместить данные результаты с модельными представлениями о распространении волн в среде, учитывая, что природа волн и скорость их распространения абсолютно не влияют на геометрию чертежа?

Чтобы ответить на этот вопрос, детально проследим за динамикой волн и на ее основе получим те формулы, которые диктует нам геометрическая модель. С этой целью обратимся к рис. 2.42, где изображен единственный волновой фронт на момент времени, когда он достиг точки  $A$ , и источник колебаний  $i$ , который вот-вот испус-

тит новый волновой фронт. Следовательно, истинной длиной волны будет не расстояние  $OA = \lambda$  (эта длина соответствует покоящемуся источнику), а расстояние  $AB = \lambda'$ , при этом пройденное источником расстояние будет равно:  $OB = \beta\lambda$ , где  $\beta = v/c$ ,  $v$  — скорость движения источника,  $c$  — скорость распространения волнового фронта. Далее нам нужно выразить длину волны  $\lambda$  через  $\lambda'$ , используя элементарное геометрическое соотношение:

$$\lambda' = \lambda \cos(\theta - \varphi) + \beta\lambda \cos(\pi - \theta).$$

Отсюда имеем:

$$\lambda' = \lambda [\cos(\theta - \varphi) - \beta \cos \theta].$$

В последней формуле фигурируют два угла; это неудобно, с точки зрения интерпретации формулы. Но мы можем воспользоваться теоремой синусов:

$$\frac{\sin(\theta - \varphi)}{\beta\lambda} = \frac{\sin(\pi - \theta)}{\lambda} = \frac{\sin \varphi}{\lambda'}$$

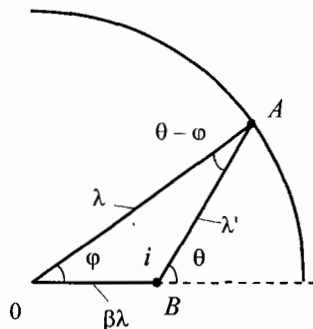


Рис. 2.42

или  $\sin(\theta - \varphi) = \beta \sin \theta$ .

Тогда формула для  $\lambda'$  приобретет вид:

$$\lambda' = \lambda (\sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \theta} - \beta \cos \theta).$$

Если воспользоваться теоремой косинусов:

$$\lambda'^2 = \lambda^2 - 2\beta\lambda^2 \cos \theta + \beta^2 \lambda^2,$$

то получим другую модификацию формулы эффекта Доплера:

$$\lambda' = \lambda \sqrt{1 - 2\beta \cos \theta + \beta^2}.$$

Угол  $\theta$  является углом наблюдения длины волны  $\lambda'$ , следовательно, нам удобно воспользоваться формулой

$$\lambda' = \lambda (\sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \theta} - \beta \cos \theta); \quad \text{при } \theta = \pm \pi/2 \text{ имеем } \lambda' = \lambda \sqrt{1 - v^2/c^2},$$

что и является сутью поперечного эффекта Доплера.

Для движущегося наблюдателя и покоящегося источника формула для измененной длины волны  $\lambda'$  будет выглядеть по-другому:

$$\lambda' = \lambda \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_1^2 \sin^2 \theta_1} - \beta_1 \cos \theta_1}.$$

Если источник и наблюдатель движутся одновременно, то имеем:

$$\lambda' = \lambda \frac{\sqrt{1 - \beta_2^2 \sin^2 \theta_2} - \beta_2 \cos \theta_2}{\sqrt{1 - \beta_1^2 \sin^2 \theta_1} - \beta_1 \cos \theta_1}.$$

Из разложения функций в ряды известны следующие приближенные равенства:

$$\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{1}{2}x, \quad \frac{1}{\sqrt{1-x}} \approx 1 + \frac{1}{2}x, \quad \frac{1}{1-x} \approx 1 + x.$$

Применяя их соответствующим образом к правым и левым частям ниже выписанных приближенных выражений, можно убедиться в их справедливости:

$$\begin{aligned} \sqrt{1-\beta_2^2 \sin^2 \theta_2} - \beta_2 \cos \theta_2 &\approx \frac{\sqrt{1-\beta_2^2}}{1+\beta_2 \cos \theta_2}, \\ \frac{1}{\sqrt{1-\beta_1^2 \sin^2 \theta_1} - \beta_1 \cos \theta_1} &\approx \frac{1+\beta_1 \cos \theta_1}{\sqrt{1-\beta_1^2}}. \end{aligned}$$

Таким образом, формулы, описывающие классический доплер-эффект, при углах, близких к величинам  $\theta_1 = \theta_2 = \pm \pi/2$ , достаточно точно совпадают с релятивистскими. Отсюда, если речь идет об эффекте Доплера, появляется возможность интерпретации релятивистских явлений через представления классической физики.

За специальной теорией относительности последовала общая теория относительности, которая привела к эффектам, связанным с так называемым *расширением Вселенной*. О расширении мирового пространства заговорили особенно оживленно, когда было обнаружено, что движущихся звезд и галактик со сдвигом линий спектра в красную область несколько больше, чем звезд и галактик со спектром, сдвинутым в фиолетовую область. Согласно эффекту Доплера, «покраснение» спектра на относительную величину  $\Delta\lambda/\lambda$  произойдет в том случае, когда излучающий объект удаляется от наблюдателя. Расширение Вселенной характеризуется *постоянной Хаббла (H)*, которая считается фундаментальной константой наряду со скоростью света ( $c$ ), входящей в выражение для  $H$ . Постоянная Хаббла устанавливает связь между скоростью удаления ( $\Delta R/\Delta t$ ) звезд и галактик, вызванного расширением Вселенной, и расстоянием до движущегося объекта ( $R$ ):

$$H = \frac{\Delta R}{\Delta t} \cdot \frac{1}{R} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \cdot \frac{c}{R}.$$

Факт покраснения спектра можно объяснить на основе модельных представлений. Основная идея такова. Звезды и галактики движутся во всех направлениях с различными скоростями относительно неподвижной среды. Если покоящийся относительно среды



наблюдатель сложит векторы скорости от всех космических объектов, то он получит нулевой вектор. Однако мы не находимся в какой-то одной неподвижной точке мировой среды: наше Солнце и наша галактика несутся с огромной скоростью ( $v_s = 200 \text{ км/с}$ ) в мировом пространстве. Следовательно, суммарный вектор скоростей от всех космических объектов для наблюдателя, движущегося со скоростью  $v_s$ , будет отличаться от нулевого значения, что и проявится как сдвиг спектральных линий преимущественно в красную область. Чтобы оценить величину и характер изменения длины волны, данную ситуацию смоделируем в акустическом диапазоне.

Предположим, вы мчитесь по дороге на автомобиле со скоростью  $v_1 = 200 \text{ км/час}$ , а четыре других автомобиля движутся попарно в противоположные стороны со скоростью  $v_2 = 100 \text{ км/час}$ . Рассчитаем, какое смещение акустической длины волны возникнет для вас от четырех автомобилей. Скорость звука равна:  $v = 1195 \text{ км/час}$ , следовательно, относительная скорость ( $\beta_1$ ) вашего автомобиля (*приемника*), и относительная скорость ( $\beta_2$ ) других автомобилей (*источников звука*) будут равны:

$$\beta_1 = v_1/v = 200/1195 = 0,1674, \quad \beta_2 = v_2/v = 100/1195 = 0,0837.$$

Имеются четыре варианта (соответствующие четырем введенным автомобилям), каждый из которых мы последовательно рассмотрим. Сначала пусть два чужих автомобиля двигаются *навстречу* друг другу, а ваш автомобиль находится где-то между ними. Тогда для автомобиля, идущего вам *навстречу*, на основании классической формулы для доплер-эффекта, будем иметь *сокращение* исходной длины волны, т.е. *повышение* звукового тона, что соответствует сдвигу в *фиолетовую* область:

$$\lambda \frac{1 - \beta_2}{1 + \beta_1} = \lambda \frac{0,9163}{1,1674} = 0,7849 \cdot \lambda, \quad \Delta\lambda_1 = -0,2151 \cdot \lambda.$$

Для автомобиля, идущего *в том же направлении*, что и ваш, получим *красное смещение*:

$$\lambda \frac{1 - \beta_2}{1 - \beta_1} = \lambda \frac{0,9163}{0,8326} = 1,100 \cdot \lambda, \quad \Delta\lambda_2 = +0,1 \cdot \lambda.$$

Далее имеем еще два варианта, когда два соседних автомобиля *удаляются* друг от друга. Случай, когда ваш автомобиль *движется в одном направлении* с другим автомобилем, соответствует *сокращению* длины волны; этому отвечает *фиолетовое смещение*:

$$\lambda \frac{1+\beta_2}{1+\beta_1} = \lambda \frac{1,0837}{1,1674} = 0,9283 \cdot \lambda, \quad \Delta\lambda_3 = -0,0715 \cdot \lambda.$$

Случай, когда ваш и чужой автомобиль *движется навстречу* друг другу соответствует *красное смещение*:

$$\lambda \frac{1+\beta_2}{1-\beta_1} = \lambda \frac{1,0837}{0,8326} = 1,302 \cdot \lambda, \quad \Delta\lambda_4 = +0,302 \cdot \lambda.$$

Теперь пусть скорость вашего автомобиля в два раза ниже скорости чужих автомобилей, т.е.  $\beta_1 = v_1/v = 50/1195 = 0,0418$ ; тогда расчет по тем же формулам даст:

$$\Delta\lambda'_1 = -0,1205 \cdot \lambda \text{ — фиолетовое смещение,}$$

$$\Delta\lambda'_3 = +0,0402 \cdot \lambda \text{ — красное смещение,}$$

$$\Delta\lambda'_2 = -0,04373 \cdot \lambda \text{ — фиолетовое смещение,}$$

$$\Delta\lambda'_4 = +0,131 \cdot \lambda \text{ — красное смещение.}$$

Среднее смещение в *фиолетовую* область для *первого* случая, когда скорость вашего автомобиля была больше скорости других автомобилей ( $v_1 > v_2$ ), равно:

$$\delta_{\text{фиол.}} = |\Delta\lambda_1 + \Delta\lambda_3|/2 = |-0,2151 - 0,0715| \cdot \lambda/2 = 0,1433 \cdot \lambda.$$

Среднее смещение в *красную* область для *первого* случая равно:

$$\delta_{\text{красн.}} = |\Delta\lambda_2 + \Delta\lambda_4|/2 = |0,1 + 0,302| \cdot \lambda/2 = 0,201 \cdot \lambda.$$

Среднее смещение в *фиолетовую* область для *второго* случая, когда скорость вашего автомобиля была меньше скорости других автомобилей ( $v_1 < v_2$ ), равно:

$$\delta'_{\text{фиол.}} = |\Delta\lambda'_1 + \Delta\lambda'_2|/2 = |-0,1205 - 0,04373| \cdot \lambda/2 = 0,0821 \cdot \lambda.$$

Среднее смещение в *красную* область для *второго* случая равно:

$$\delta'_{\text{красн.}} = |\Delta\lambda'_3 + \Delta\lambda'_4|/2 = |0,0402 + 0,131| \cdot \lambda/2 = 0,0856 \cdot \lambda.$$

Сделаем последний шаг в объяснении сдвига спектральных полос, для чего введем *коэффициент покраснения спектра* ( $k$ ) для движущегося наблюдателя, выражающийся отношением красного сдвига ( $\delta_{\text{красн.}}$ ) к фиолетовому ( $\delta_{\text{фиол.}}$ ):  $k = \delta_{\text{красн.}}/\delta_{\text{фиол.}}$ . В нашем конкретном *первом* случае, когда  $v_1 > v_2$  коэффициент  $k$  равен:

$$k = \delta_{\text{красн.}}/\delta_{\text{фиол.}} = 0,201/0,1433 = 1,4026;$$

во *втором* случае, когда  $v_1 \leq v_2$  этот коэффициент равен:

$$k' = \delta'_{\text{красн.}} / \delta'_{\text{фиол.}} = 0,0856 / 0,0821 = 1,0425.$$

*Вывод:* в любом случае, будет ли скорость вашего автомобиля больше ( $v_1 > v_2$ ) или меньше ( $v_1 < v_2$ ) по сравнению со скоростями других автомобилей, вы услышите несколько *пониженный* звуковой тон, издаваемый всеми движущимися автомобилями, так как величины  $k$  и  $k'$  больше единицы, что отвечает смещению спектра, условно говоря, в *красную* область. Ситуация с четырьмя автомобилями абсолютно *симметрична*, но ваше движение по дороге в любую сторону создаст *асимметрию* в сдвиге акустического спектра. Теперь можно принять, что каждый из введенных нами автомобилей в действительности имеет *усредненную скорость* всех тех автомобилей, которые движутся с различными скоростями по всем направлениям: *впереди от вас* и *на вас*, а также *позади от вас* и *на вас*. Данная ситуация вполне адекватно моделирует хаотичное движение огромного потока автомобилей на какой-нибудь оживленной магистрали. Чем выше скорость движения водителя по дороге ( $v_1 = 200$  км/час), тем больший сдвиг звукового спектра от гула моторов в область низких тонов он будет слышать ( $k = 1,4026$ ); и наоборот, чем меньше его скорость ( $v_1 = 50$  км/час), тем меньше отношение «красного» смещения к «фиолетовому» ( $k' = 1,0425$ ). Если скорость водителя  $v_1 = 300$  км/час, то значение *коэффициента красного смещения* возрастет еще больше и станет равным  $k'' = 1,67$ . Для пешехода, стоящего неподвижно у обочины дороги ( $v_1 = 0$  км/час), никакого различия между количеством автомобилей с *пониженным* и *повышенным* тоном наблюдаться не будет:  $k_0 = 1,000$ .

Далее можете считать, что ваш движущийся автомобиль — это Солнечная система, летящая в мировой среде; скорости других автомобилей — это усредненные векторы скоростей от всех перемещающихся космических объектов по какой-либо избранной линии, проходящей через Солнечную систему. Так как аналогичная картина будет наблюдаться по всем остальным направлениям, проходящим через точку наблюдения, то вывод, сделанный для одного направления, окажется верным для всех остальных.

Итак, для землян наблюдается асимметрия: спектры звезд и галактик, движущихся в космическом пространстве, в среднем заметно "покраснеют", что и создает иллюзию расширяющейся Вселенной. Но в действительности ничего подобного не происходит: эффект «убегания» звезд и галактик возникает потому, что мы сами вместе с Солнцем перемещаемся в мировой среде со скоростью  $v_1 = 200$

км/с. Постоянная Хаббла  $H$ , как мы сказали, устанавливает связь между скоростью удаления объекта ( $v_2$ ) и расстоянием до него ( $R$ ). Если смещение линий спектра ( $\Delta\lambda/\lambda$ ) обозначить через  $x$  и учесть, что при скоростях  $v_2 \ll c$  смещение  $x \approx \beta_2 = v_2/c$ , то величину смещения можно представить произведением:  $x \approx H \cdot R$ , т.е. чем дальше от нас находится объект, тем больше смещение спектральных полос или тем больше его скорость.

Этот факт объясняется Большим взрывом, произошедшим 18 млрд. лет назад, при котором начальные осколки правселенной лети с особенно большой скоростью. Далее сила взрыва ослабевала, и космические объекты уже не приобретали столь высокую скорость. Первые доли секунды, а точнее,  $10^{-43}$  с, получили наименование *эры Планка*; плотность вещества измерялась величинами  $10^{97}$  кг/м<sup>3</sup> а температура —  $10^{32}$  К. Потом шли эры: *Адронная* ( $10^{-35}$  с), *Лептонная* ( $10^{-6}$  с), *Плазменная* ( $10^3$  с); наша Солнечная система зародилась на момент  $10^{17}$  с. Слабость этой гипотезы состоит в том, что *сингулярная точка*, из которой начался Большой взрыв, по чудесному стечению обстоятельств оказалась рядом с нами, т.е. эпицентр взрыва находился чуть ли не на нашей Земле. Этот *космогонический геоцентризм* вытекает из того факта, что формула  $x \approx H \cdot R$  написана *относительно земного наблюдателя*, именно от Земли нужно отмерять расстояние  $R$ , чтобы определить скорость убегания от нас звезд и галактик. Поразительное совпадение релятивисты объясняют через *модель булочки с маком*.

Согласно этой модели, когда расширяется все пространство Вселенной подобно сдобе, находящейся в духовке, то создается иллюзия, будто вы находитесь в центре, из которого началось расширение. Вам кажется, что все маковые зерна удаляются от вас. Однако при расширении именно пространства объектный наблюдатель ничего не зафиксирует. Эффект Доплера для него также не проявится, так как при увеличении объема сферические волны будут иметь неизменный общий центр; для метанаблюдателя же изменятся радиусы этих волн. Между тем при доплер-эффекте происходит смещение центров сферических волн вдоль какого-то направления (рис. 2.41) при неизменном пространственном объеме. Следовательно, красное смещение вызвано именно движущимися объектами, а не расширением пространства. А если под действием взрыва двигалось вещество, то оно должно перемешаться в пространстве и времени,

которые в таком случае не зависят от него, что также противоречит релятивистской физике.

В приведенном числовом примере мы увеличивали скорость автомобиля ( $v_1$  или  $\beta_1$ ), водитель которого регистрировал увеличение коэффициента понижения звукового тона ( $k$ ), а скорости четырех других автомобилей ( $v_2$  или  $\beta_2$ ) оставляли без изменений. Характер изменения коэффициента  $k$  при изменении скорости приемника  $\beta_1$  и неизменной скорости источника  $\beta_2 = 0,1674$  показан в табл. 2.94.

Таблица 2.94

$\beta_1$	0,010	0,020	0,042	0,100	0,167	0,200	0,300	0,400	0,600	0,900
$k$	1,001	1,005	1,021	1,127	1,402	1,500	1,857	2,333	4,000	19,00

Если иметь в виду Солнечную систему, откуда ведется наблюдение, и хаотически движущиеся звезды и галактики, то зависимость коэффициента  $k$  от скорости движения источников света  $\beta_2$ , при неизменной скорости наблюдателя  $\beta_1 = 0,1674$ , будет иной, что демонстрирует табл. 2.95. Из нее видно, что коэффициент понижения тона  $k$  не зависит от изменения скорости источника до тех пор, пока скорости источника и приемника не сравниваются ( $\beta_2 = \beta_1 = 0,167$ ); затем происходит его спад. Важной особенностью обеих зависимостей является то, что *ни при каких условиях не будет наблюдаться фиолетовое смещение*, т.е. случай  $k < 1$  невозможен. Пока скорость космического объекта меньше скорости движения Солнца ( $v_1 = 200$  км/с), его спектральные линии имеют устойчивое красное смещение, соответствующее этой скорости.

Таблица 2.95

$\beta_2$	0,010	0,020	0,042	0,100	0,167	0,200	0,300	0,400	0,600	0,900
$k$	1,402	1,402	1,402	1,402	1,402	1,323	1,200	1,150	1,100	1,064

Расчет, произведенный по элементарной методике, изложенной выше, даст величину коэффициента красного смещения, равную  $k = 1,001334$ . Так, линия водорода  $\lambda = 466,8$  нм в спектрах звезд и галактик, движущихся с меньшей, чем у Солнца, скоростью  $v_2 < v_1$ , в среднем будет смещена в область  $\lambda = 467,4$  нм, что несложно заметить, так как разрешающая точность измерения составляет сегодня менее  $5 \cdot 10^{-4}$  нм; таким образом, величина смещения в красную область равна  $\Delta\lambda = 0,6$  нм. С увеличением скорости объекта  $v_2$  в области  $v_1 < v_2 < c$  происходит плавный спад коэффициента "покрасне-

ния" до единицы. Если изменится значение  $v_1$ , то изменится и величина  $k$ . Особо обращаем внимание на то, что при определении величины и характера смещения спектров была использована процедура *наглядного конструирования в рамках акустической модели*, которую легко воссоздать в лабораторных условиях.

### Практические задания по группам

1. *Типовой расчет.* Произвести полный морфологический анализ группы 32-го порядка (конкретный вид указывается преподавателем), найти все ее подгруппы и построить на них решетку.

2. В соответствии с вашим вариантом по таблице умножения элементов группы  $8 \times 8$  (табл. 2.96) построить группу регулярных подстановок, автоморфную ей группу, изоморфную группу подстановок меньшей размерности, а также привести примеры эндоморфизма и естественного гомоморфизма. Определить образующие элементы группы, их четность, декремент и число инверсий. Найти систему базисных транспозиций. Произвести разбиение на классы сопряженности и смежности по всем подгруппам, составить таблицу умножения классов. Отыскать все собственные подгруппы, установить их индекс и инвариантность. Наконец, указать центр заданной группы.

3. Найти НОД  $[a(x), b(x)]$ , НОК  $[a(x), b(x)]$  для произвольно выбранных многочленов  $a(x), b(x)$  в поле  $GF(p)$  не ниже пятой степени, например:  $a(x) = x^7 + x^5 + x^3 + 1$ ,  $b(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x$ .

4. Составить полную таблицу неприводимых многочленов для  $GF(p^n)$  с заданным порождающим многочленом  $g(x)$  (табл. 2.97).

5. Исследовать код ( $n = 15$ ), заданный порождающим (для  $g(x)$  код 1) или проверочным (для  $h(x)$  код 0) многочленом (табл. 2.98), на помехозащищенность. С этой целью: найти порождающую и проверочную матрицы циклического кода; построить соответствующие им систематические матрицы методом остаточного многочлена; свести циклические матрицы к систематическим путем линейной комбинации строк или столбцов; составить проверочное соотношение и определить коды ошибок; на трех информационных словах проанализировать помехозащищенность кода при одной ошибке и одновременном наложении двух (трех) ошибок.

Таблица 2.96

12345678 1 25476183 38527416 43658721 56781234 61832547 74163852 87214365	12345678 2 21854763 37468152 45612387 54721836 68137425 73286514 86573241	12345678 3 21754836 37568241 45612387 54821763 68237514 73486152 86173425	12345678 4 21786534 37168425 48617352 56871243 65432187 73254816 84523761	12345678 5 26458713 38621547 43762851 54176382 67543124 71834265 85217436
12345678 6 21573846 38462157 47618325 56781234 65137482 74826513 83254761	12345678 7 21563487 35182764 46827135 53271846 64718253 78634521 87456312	12345678 8 21854763 38167452 45612387 54721836 67438125 76583214 83276541	12343678 9 27461853 38724165 43576281 51837426 64158732 75682314 86213547	12345678 10 23418756 34126587 41237865 57683142 68571324 76852431 85764213
12345678 11 23418756 34126587 41237865 57683142 68571324 76852431 85764213	12345678 12 26473851 35182764 43216587 57861423 68754132 74628315 81537246	12345678 13 27536481 35728164 43217856 56871243 641P2735 78654312 81463527	12345678 14 21436567 34127856 43216765 56781234 65872143 78563412 87654321	12345678 15 24138756 31427865 43216587 57864132 68751423 76582341 85673214
12345678 16 21768435 37154826 46823157 58671342 64517283 73286514 85432761	12345678 17 27613845 36154287 41578326 53487162 68231754 74826513 85762431	12345678 18 21768435 37154826 46513287 58431762 64827153 73286514 85672341	12345678 19 21436587 34217865 43128756 56872134 65781243 78564321 87653412	12345678 20 25476183 38167452 43218765 56781234 61832547 74523816 87654321
12345678 21 21768435 37186524 46527183 58431762 64813257 73254816 85672341	12345678 22 21436587 34127856 43218765 66782143 65871234 78564321 87653412	12345678 23 21654387 36187254 45812763 54721836 63278145 78563412 87436521	12345678 24 24138567 31426785 43217856 56874312 67582431 78651243 85763124	12345678 25 23416785 34127856 41238567 86781234 67852341 78563412 85674123

Таблица 2.97

№	$p$	$n$	$g(x)$	№	$p$	$n$	$g(x)$
1	2	5	$x^5 + x^4 + x^2 + x + 1$	16	5	2	$x^2 + 4x + 1$
2	3	3	$x^3 + 2x + 1$	17	3	3	$x^3 + 2x^2 + x + 1$
3	4	2	$x^2 + x + 2$	18	4	2	$x^2 + 2x + 1$
4	5	2	$x^2 + 2x + 3$	19	5	2	$x^2 + 3x + 3$
5	5	2	$x^2 + 3x + 4$	20	3	3	$x^3 + x^2 + 2x + 1$
6	2	5	$x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1$	21	5	2	$x^2 + 4x + 2$
7	4	2	$x^2 + x + 3$	22	3	3	$x^3 + 2x^2 + 2x + 2$
8	5	2	$x^2 + x + 1$	23	4	2	$x^2 + 2x + 2$
9	3	3	$x^3 + x^2 + x + 2$	24	2	5	$x^5 + x^3 + 1$
10	2	5	$x^5 + x^4 + x^3 + x + 1$	25	5	2	$x^2 + 3$
11	5	2	$x^2 + 2x + 4$	26	3	3	$x^3 + 2x + 2$
12	4	2	$x^2 + 3x + 1$	27	5	2	$x^2 + 2$
13	3	3	$x^3 + x^2 + 2$	28	2	5	$x^5 + x^2 + 1$
14	5	2	$x^2 + x + 2$	29	3	3	$x^3 + 2x^2 + 1$
15	2	5	$x^5 + x^3 + x^2 + x + 1$	30	4	2	$x^2 + 3x + 3$

Таблица 2.98

№	$g, h$	Кэфф. мн. ( $a_0 a_1 a_2 \dots$ )	№	$g, h$	Кэфф. мн. ( $a_0 a_1 a_2 \dots$ )
1	1	1000101111000000	16	0	1001110111000000
2	1	1110011110000000	17	1	1101010000000000
3	0	1101110111000000	18	0	1110100010000000
4	1	1101000100000000	19	1	1100100000000000
5	0	1000010000100000	20	1	1110100010000000
6	0	1010011011110000	21	1	1001100000000000
7	1	1011101000000000	22	1	1010110000000000
8	0	1111001000000000	23	0	1111010111001000
9	1	1000101100000000	24	1	1111100000000000
10	0	1001110011000000	25	0	1100011000110000
11	0	1110110010100000	26	1	1010011011100000
12	1	1011001101000000	27	1	1000010000100000
13	1	1001111000000000	28	1	1001110011000000
14	0	1100111001000000	29	1	1110110010100000
15	0	1000010000000000	30	0	1001111000000000

6. В таблице 2.99 приведены искаженные и истинные кодовые слова. Необходимо для своего варианта искаженного слова найти наиболее подходящее истинное слово.



7. В таблице 2.100 приведены искаженные кодовые слова, записанные с помощью квадратной матрицы. Исправить в кодовом слове своего варианта ошибочный символ.

Таблица 2.99

№	Искаженное	Истинное	№	Искаженное	Истинное
1	11000000011	11000011000	16	11101000000	11001100000
2	11000001001	10100100001	17	10110100000	00110000011
3	00100110001	00110011000	18	00110100010	11110000000
4	00000101010	00000011110	19	00100101000	01100001010
5	00001001011	00100101000	20	00000011101	01000110100
6	01010010010	10001001100	21	11000000101	01011000001
7	10101001100	10010001001	22	01011000101	10101010000
8	00001011100	01010000110	23	01000010110	10001000011
9	10011000001	00010110001	24	01000001110	10010010010
10	10011100000	00100110010	25	01100110100	10000101010
11	01100011000	10000010101	26	10000100100	01000001101
12	00101000011	10010100100	27	00110001000	00111100000
13	10110100000	00001100101	28	01000101000	00011010100
14	00100110011	00001111000	29	10001100101	0001101010
15	00111010000	01000100011	30	01011000110	01010101000

Таблица 2.100

№	Искаженное слово	№	Искаженное слово
1	0100111101111100001001100	16	1101110100001111000111000
2	0111100011110000010111001	17	1010010010110101010001010
3	0110000011110000011010011	18	0110011011111010010001100
4	1111001000100011010010000	19	0110000011111010011010101
5	1011101011100010111100011	20	0110000011110000010110110
6	0001111111011111001000011	21	0100110100111010011100110
7	000101010000111010001000000	22	0101010101001101000101001
8	0010110010110111010010000	23	0010010010110001010011011
9	1000010111110001010001111	24	00101100101101111010111000
10	0100111101111010010001111	25	0001111101001101000101000
11	1100010100111010011000111	26	1001011101011111101111001
12	0110001010101010011011101	27	1011101010100110110000000
13	1011111010100010010101001	28	1011101010100001010011000
14	1011101010110110111001001	29	1011101010110100111101010
15	0001111101011111001100000	30	0101111101011111101101010

### 3. Графы

#### Вводные замечания

В «Лекциях о развитии математики в XIX столетии» немецкий математик *Феликс Клейн* (1849—1925) после формулировки четырех условий, определяющих алгебраическую группу, написал следующее: «Таким образом, какая-либо апелляция к воображению здесь отсутствует в принципе. Взамен этого тщательно препарируется логический скелет... Подобного рода абстрактные формулировки превосходны для шлифовки доказательств, но они совершенно не годятся для того, чтобы с их помощью отыскивать новые идеи и методы. Более того, как правило, они являются завершением определенного этапа предшествующего развития. Поэтому внешне они облегчают преподавание, поскольку на их основе можно просто и без каких-либо пробелов доказывать известные уже предложения. Однако они внутренне чрезвычайно затрудняют учащегося, так как он оказывается поставленным перед чем-то совершенно законченным, ничего не зная о том, как автор пришел к этим определениям; к тому же он не может себе абсолютно ничего представить. Этот метод не поощряет к тому, чтобы пользующийся им мыслил; требуется лишь внимательно следить, чтобы не погрешить против данных нам четырех заповедей».

Добавим к сказанному, что введение четырех аксиом группы недостаточно для конкретной работы с ними. Критика Клейна изложения групп остается справедливой и в отношении графов. Большая иллюзия состоит в том, будто какую-либо развитую теорию, включая теории групп и графов, можно целиком развернуть из нескольких предложений. Этот ход мысли был присущ формалистам XX в., пытающимся всеми доступными средствами свести самые разнообразные проблемы к общему знаменателю. Вредит делу обучения и познания неведомого объекта попытка выстроить теорию в строго логическом порядке, когда каждое последующее действие опирается на предыдущее. Такая жесткость иногда сильно сковывает действия исследователя и приводит к неизбежным натяжкам. Конструктивист, в противоположность формалисту, ищет не общее и универсальное, свойственное средневековым схоластам и релятивистам прошлого века, а особенное и конкретное, что всегда присутствует в конструктивных моделях.

На сегодняшний день существует масса учебной литературы по дискретной математике, в которой теория групп, как основа для современной абстрактной алгебры, занимает видное место. В поверхностные курсы «Дискретной математики» группы вошли отдельными главами чаще всего в слишком абстрактном, а значит, и плохо усваиваемом виде (на что в свое время сетовал Феликс Клейн). В этих книгах можно отыскать любую формулировку, относящуюся к той или иной характеристике групп, причем, возможно, самую правильную и идеально отточенную дефиницию. Но там нельзя найти одного — самих групп. Этот изъян можно преодолеть, если отказаться от *формально-логического подхода* и попытаться встать на *конструктивный* путь рассмотрения групп, детально изучая их свойства и морфологию. Математика обоснования отличается от математики поиска, причем человек, имеющий склонность к новаторскому творчеству, не слишком будет утруждать себя зубрежкой определений и теорем. Воспроизведение готовых доказательств не учит поиску решений трудных задач; эти два рода занятий различны и редко совместимы в одном человеке. То же самое касается теории графов. Литература по графам весьма разнообразна и неоднородна, так как к графическим схемам и диаграммам прибегают всякий раз, как только возникает желание отобразить скупую математическую символику в каких-то запоминающихся наглядных образах. Однако это визуальное качество помогло нам в одной главе под названием «Графы» объединить самую разноплановую тематику: от автоматов и электротехнических схем до теории оптимального кодирования и порождающих грамматик, поскольку ко всем этим задачам можно применить теорию графов.

Теория графов лучше всего передает дух конструктивной математики. История ее намного короче истории логики и даже теории групп — это детище середины XX в., хотя какие-то зачатки этой науки были сделаны еще Эйлером, который в 1736 г. решил шуточную задачу о семи кёнигсбергских мостах. В той задаче любителям головоломок предлагалось найти маршрут обхода всех мостов, проходя по каждому мосту по одному разу. Если участки суши рассматривать в качестве вершин графа, а мосты — в роли его ребер, то, согласно карте Кёнигсберга, получалось, что все вершины инцидентны нечетному числу ребер. Эйлер же доказал, что эту и подобные этой задачи можно решить, если каждая вершина графа инцидентна четному числу ребер. С тех пор такие полные обходы по ребрам графа стали называть *эйлеровыми маршрутами*.

С графами мы сталкиваемся повсюду, например, когда смотрим на карту Московского метрополитена, карту автомобильных или железных дорог, пытаясь визуально решить *проблему нахождения минимального пути* — одну из основных задач теории графов. Даже политическая карта послужила толчком к формулировке одной из самых трудных задач математики: о раскраске стран в четыре цвета. Эта задача стимулировала развитие не только теории графов, но и топологии, так как оказалось, что для раскраски политической карты, нанесенной, например, на тор, нужно уже семь цветов. Схемы графов рисовал Г. Кирхгоф (1847) для электротехнических цепей. Занимаясь химией, А. Кэли (1857) с помощью древовидной формы пытался изобразить пространственное расположение атомов в молекулах углеводородов. В. Гамильтон (1859) предлагал обойти вершины додекаэдра по одному разу (отсюда происходит термин *гамильтонов маршрут*). А. Пуанкаре (1899) в своих топологических исследованиях также опирался на все те же графы. Это эпизодическое использование отвлеченных графических схем закладывало фундамент будущей математической теории, рождение которой традиционно связывают с Д. Кёнигом и О. Вебленом, издавшими в 30-х годах XX в. серьезные монографии по графам. Авторы этих первых исследований сразу же увязали теорию графов с комбинаторикой и топологией, к которым впоследствии присоединилось множество научных направлений, так или иначе обслуживающих компьютерные технологии.

Уже в первой задаче по теории графов Эйлер использовал основные понятия, определяющие граф: *вершина, ребро, инцидентность*, никак не определяя их. Граф — это наглядный образ, достоинство которого как раз и состоит в том, что он требует минимум слов и символов, но дает максимум пространственных и структурных представлений. Он является, возможно, самым гибким математическим объектом, который способен легко приспособиться под любую конкретную модель. Логические и лингвистические позитивисты думали найти решение онтологических проблем в сфере языка и в формально-логических системах, замкнутых на конвенциональную аксиоматику. Они надеялись, что семантические договоренности помогут им «адаптироваться к принципиально непознаваемой» окружающей среде. Это, по их мнению, должно было положить конец бесконечным спорам между учеными. Такая консолидированная

позиция ухода от реальных проблем только усилила бесплодные споры о словах и помешала решать насущные проблемы науки. Разговоры вокруг определения графа красноречиво иллюстрируют это непродуктивное направление в науке.

Фрэнк Харари, известный теоретик в этой области, имея в виду граф в его самых бесхитростных формах, «предпочитает использовать слова *point* (точка) и *line* (линия), учитывая сложившуюся традицию употреблять их как неопределяемые понятия». Элементы графа — *vertex* (вершина) и *edge* (ребро) — позаимствованы из геометрии многогранников, которая тесно связана с графами. А как быть с *решеткой* — это граф или не граф? Путаницы здесь, видимо, не избежать. Харари отмечает, что среди самобытных ученых терминологического согласия достичь невозможно и различные определения графа все равно будут непрерывно подвергаться атакам. Он пишет: «Даже само слово *граф* не является священным. Некоторые авторы действительно определяют *граф*, как граф, другие же имеют в виду такие понятия, как мультиграф, псевдограф, ориентированный граф и сеть. Нам кажется, что единообразие в терминологии графов никогда не будет достигнуто, но оно и ни к чему».

Всякий исследователь, став на тропу научных дерзаний, споткнется о первый же словесный «пень», если вооружится школьной формулой: *то-то называется тем-то*. В качестве пропедевтики, т.е. вводной части науки, дефиниции еще оправданы, но в серьезной науке непримиримые бои за слова, как говорит Харари, и правда «ни к чему». Не так уж и важно, как назвать точки, соединенные линиями: *графом*, *орграфом*, *мультиграфом*, *псевдографом*. Информатику или другому специалисту не понять, почему граф с петлей уже не является полноценным графом, а только *псевдографом*. Графы, построенные на основе реальных структур, слишком разнообразны, чтобы их классифицировать по тем признакам, о которых говорили родоначальники этой дисциплины, находящиеся в плену у идеологов логического позитивизма, усиленно насаждавшие аксиоматическую форму подачи материала. Ищущему ответ на сложнейшие вопросы науки и техники не помогут знания определений слов. Различия в дефинициях терминов: *ребро* — *дуга*, *контур* — *цикл*, *путь* — *маршрут*, *центр* — *центроид* и т.д. скорее собьют его с верного пути.

Харари, прекрасно понимающий бесполезность науки о словах, тем не менее вынужден был считаться с антиконструктивным духом

XX столетия. Сегодня, к счастью, многие понимают, что любое определение имеет исключительно дидактическое значение. Оно не носит статус какого-то *категорического императива*, т.е. обязательного требования, поскольку любое понятие и представление науки приобретает смысл лишь в рамках конкретной теории и не имеет абсолютной ценности. Если термину оказана честь — быть использованным в той или иной концепции, — то автор этой концепции вправе нагружать его любой семантикой, вплоть до диаметрально противоположного смысла. В случае оказания сопротивления, когда выбранное слово проявляет своенравие, происходит неизбежное — его просто выбрасывают из лексикона, поскольку жизнь не стоит на месте. Передовой фронт теории графов почти не имеет дело с точками, соединенными линиями. Объектами науки о графах теперь становятся скрученные в тугий узел многомерные пространства, которые не поддаются отображению в простеньких кружевах, сотканных из узелков и ниточек.

Главу о графах мы начинаем с рассмотрения задачи о цепях — с самых элементарных конструкций, на которых, однако, строятся отнюдь не элементарные аддитивные группы преобразований цепей с весьма специфическими свойствами. Этот выбор продиктован предыдущей главой, в которой рассматривались точечные и пространственные группы, так что ближайший подраздел самым непосредственным образом примыкает к теории групп. Данная задача с точки зрения конструктивного подхода является образцовой, поскольку в ней в максимальной степени удается избежать формально-логического вывода. Задача решается прямым подсчетом количества элементов в различных множествах без привлечения каких-либо априорных понятий. На первых порах нам понадобится самый скромный терминологический арсенал, который будет «введен в бой» по мере погружения в материал по графическим структурам. Таким образом, этот подраздел демонстрирует генезис новых представлений, образующих свое содержание, не опираясь на пресловутые «математические основания», которые безуспешно искали формалисты прошлого века. Тем самым показывается, что математические представления не возникают из формализованной, априорной, кем-то заранее провозглашенной системы правил (в том числе, и аксиом традиционной теории множеств). Новые истинные знания не спекулятивного характера появляются только путем конструирования объектов исследования.

### 3.1. Группы цепей графа

#### Элементарная группа цепей и ее решетка

Множество *точек* (вершин, узлов) и множество *линий* (ребер, дуг), которые соединяют эти точки, будем называть *графом*  $G$ . Граф  $G_3$  (рис. 3.1а) и ему подобные конструкции из линий и точек называется *полным*, поскольку все его вершины связаны между собой линиями. Граф, изображенный на рис. 3.1б, полным уже не назовешь, однако линии такого частичного графа образуют *полную цепь*. Цепь называется *полной*, если она связывает все точки графа линиями без образования петель и контуров. Цепи, связывающие только часть точек (рис. 3.1в), мы рассматривать не будем и, следовательно, термин «полная» применительно к цепи можно будет опускать без риска быть непонятыми.

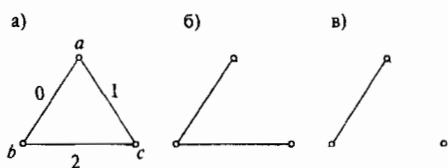


Рис. 3.1

Цепь имеет *голову* и *хвост*. Голова цепи привязывается к какой-либо точке, которую мы будем в этом случае называть *привязкой*. Для графа  $G_3$ , если в качестве привязки выступает точка  $a$ , имеем две цепи

$abc = 02$ ,  $acb = 12$ ; если привязкой является точка  $b$ , получим еще две цепи —  $bac = 01$ ,  $bca = 21$ ; наконец, если  $c$  — привязка, то  $cab = 10$ ,  $cba = 20$  — цепи. Вместо шести мы на самом деле имеем только три цепи  $A$ ,  $B$  и  $C$ , поскольку не столь уж важно, каким образом начинается запись цепи — с головы или с хвоста; отсюда получаем:  $A = 01 = 10$ ,  $B = 02 = 20$ ,  $C = 12 = 21$ .

Одной из тем этого подраздела является поиск *групп преобразования цепей*. Дело в том, что, скажем, цепь  $01$  переходит в цепь  $02$  путем замены линии 1 на линию 2, при этом линия 0 остается на месте. Этот переход можно записать как  $\underline{1}2$  или  $2\underline{1}$ . Обратный переход цепей друг в друга осуществляется при противоположной замене линий, т.е.  $\underline{1}2 = 2\underline{1}$ . Последовательная замена линий: сначала  $\underline{1}2$ , затем  $\underline{1}2$ , оставляет исходную цепь  $01$  тождественной самой себе. Но осуществление двух различных замен, например,  $\underline{1}2$  и  $\underline{0}1$  по отношению к исходной цепи  $01$ , приводит к преобразованию: из  $01$  в  $02$  и из  $02$  в  $12$ , что равносильно действию замены  $\underline{0}2$ .

Цепи образуют *субстанционное* множество, преобразования — *операционное*. При замене отдельных звеньев цепи удобно воспользоваться *аддитивной* записью. В частности, действие преобразования  $\underline{11}$  на цепь  $\underline{1m}$  выразится через суммы:

$$01 + \underline{12} = 02, \quad 01 + \underline{02} = 12, \quad 02 + \underline{01} = 12, \dots,$$

а переходы от одной цепи к другой запишутся через разности, например, преобразование  $A$  в  $B$  как  $A - B = 01 - 02 = \underline{12}$ , обратное преобразование как  $B - A = 02 - 01 = \underline{12}$ . Все остальные преобразования в  $G_3$  запишутся с помощью следующих простых выражений:

$$\begin{aligned} A - C &= 01 - 12 = \underline{02}, & B - C &= 02 - 12 = \underline{01}, \\ C - A &= 12 - 01 = \underline{02}, & C - B &= 12 - 02 = \underline{01}, \\ A - B - A &= A - A = \underline{12} + \underline{12} = \underline{e}, & B - A - B &= B - B = \underline{12} + \underline{12} = \underline{e}, \\ A - C - A &= A - A = \underline{02} + \underline{02} = \underline{e}, & C - A - C &= C - C = \underline{02} + \underline{02} = \underline{e}, \\ B - C - B &= B - B = \underline{01} + \underline{01} = \underline{e}, & C - B - C &= C - C = \underline{01} + \underline{01} = \underline{e}, \\ C - A - B &= C - B = \underline{02} + \underline{12} = \underline{01}, & B - A - C &= B - C = \underline{12} + \underline{02} = \underline{01}, \\ A - C - B &= A - B = \underline{02} + \underline{01} = \underline{12}, & B - C - A &= B - A = \underline{01} + \underline{02} = \underline{12}, \\ A - B - C &= A - C = \underline{12} + \underline{01} = \underline{02}, & C - B - A &= C - A = \underline{01} + \underline{12} = \underline{02}. \end{aligned}$$

Перед нами множество элементов, удовлетворяющих условиям *группы*: каждое преобразование имеет обратное; последовательное действие прямого и обратного преобразований дает тождественное; для любых трех преобразований справедливо условие ассоциативности; наконец, все множество преобразований замкнуто.

Однако в группах цепей имеются и важные отличия по сравнению с ранее рассмотренными группами, а именно: не всякое преобразование  $g_j$  может последовать за преобразованием  $g_i$ . В частности, преобразование  $\underline{12}$  не может последовать за преобразованием  $\underline{02}$ , поскольку первое отвечает переходу цепи  $A$  в цепь  $B$ , а второе — переходу цепи  $A$  в цепь  $C$ ; между тем разрешен переход от  $A$  к  $B$  и от  $B$  к  $C$ . Таким образом, в графах на операционное множество накладывается жесткое ограничение, продиктованное субстанционным множеством. Своенравная природа графа проявляется и в совершенно новом делении элементов группы на классы эквивалентности. Здесь уже нет классов сопряженных элементов и классов смежности, иначе находятся подгруппы, отсутствуют делители и т.д. Покажем на примере группы  $G_3$  от графа  $G_3$ , как производится групповой анализ графа.



Пусть вершина  $a$  треугольника, изображенного на рис. 3.1а, является привязкой. Следовательно, она находится в особом положении относительно двух других вершин треугольника —  $b$  и  $c$ . Так возникают два класса вершин —  $\{a\}$  и  $\{b, c\}$ . Стороны треугольника также разбиваются на два класса в зависимости от степени удаленности от привязки —  $\{0, 1\}$  и  $\{2\}$ . Это деление на классы пока никак не проявляется на строении группы  $G_3$ . Привязка  $a$  определяет две цепи —  $B$  и  $C$ , для которых возможны переходы  $\underline{01}$  и  $\underline{01}$ , принадлежащие одному классу. Вместе с тождественным преобразованием они дают элементарную подгруппу  $G_{3a} = \{e, \underline{01}, \underline{01}\}$ . Каждая привязка определяет свою подгруппу:  $G_{3b} = \{e, \underline{02}, \underline{02}\}$ ,  $G_{3c} = \{e, \underline{12}, \underline{12}\}$ . Все вместе элементы  $G_{3a}$ ,  $G_{3b}$  и  $G_{3c}$  образуют графовую группу преобразований цепей в треугольнике:

$$G_3 = \{e, \underline{01}, \underline{01}, \underline{12}, \underline{12}, \underline{02}, \underline{02}\}.$$

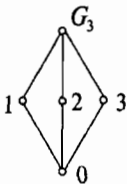


Рис. 3.2

В процессе формирования группы  $G_3$  была установлена и соответствующая иерархия элементарных подмножеств, которую, как мы знаем, удобно представлять в виде *решетки*  $\mathcal{S}(G_3)$ . Если наши подгруппы обозначить через числа 1, 2, 3, тождественный элемент через 0, то *отношение порядка* между подгруппами  $\mathcal{S}(G_3)$  будет выглядеть так, как это показано на рис. 3.2.

Прежде чем переходить к анализу следующей группы, обратим внимание на то, что наименьшей группой преобразования цепей является  $G_2 = \{e\}$ , которая оставляет свою единственную цепь, соединяющую две вершины, в покое. Группа  $G_3$  является первой нетривиальной графовой группой преобразования цепей с двумя *образующими*, неоднозначно определенными, например, такими:  $\mathbf{a} = \underline{01}$ ,  $\mathbf{b} = \underline{12}$ . Тогда все остальные элементы группы  $G_3$  выразятся следующим образом:

$$G_3 = \{e, \mathbf{a}, \underline{\mathbf{a}}, \mathbf{b}, \underline{\mathbf{b}}, \mathbf{ab}, \underline{\mathbf{ab}}\}, \quad \text{где}$$

$$e = \mathbf{a} + \underline{\mathbf{a}} = \mathbf{b} + \underline{\mathbf{b}}, \quad \mathbf{ab} = \mathbf{a} + \mathbf{b} = \underline{01} + \underline{12} = \underline{02}, \quad \underline{\mathbf{ab}} = \underline{\mathbf{a}} + \underline{\mathbf{b}} = \underline{01} + \underline{12} = \underline{02}.$$

Не забудем сказать и о том, что все группы цепей *коммутативны* и *нечетны*. Проявлением *аддитивной сущности* графовых групп является отсутствие степеней образующих. Для мультипликативных подстановок было справедливо условие:

$$\text{если } \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{c}, \text{ то } \mathbf{a} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{b}^{-1} \text{ и } \mathbf{b} = \mathbf{a}^{-1} \cdot \mathbf{c};$$

для аддитивных *реберных подстановок* истинным является аналогичный закон с учетом коммутативности:

$$\text{если } a + b = c, \text{ то } a = \underline{b} + c \text{ и } b = \underline{a} + c.$$

### Группа цепей тетраэдра

На рис. 3.3 изображен граф  $\Gamma_4$ , представляющий соответствующую группу цепей  $G_4$ , переводящую полные цепи тетраэдра друг в друга. Пусть для начала вершина  $a$  послужит нам привязкой. Тогда вершины и ребра тетраэдра разобьются на классы эквивалентности: вершины на  $\{a\}$  и  $\{b, c, d\}$ ; ребра на  $\{0, 1, 2\}$  и  $\{3, 4, 5\}$ . Относительно привязки  $a$  существует шесть цепей:

$$\begin{aligned} A &= abcd = 054, & D &= acbd = 253, \\ B &= abdc = 034, & E &= adbc = 135, \\ C &= acdb = 243, & F &= adcb = 145. \end{aligned}$$

Преобразования цепей разбиваются на несколько классов. Прежде всего выделяются два класса, в первом из которых участвуют ребра из класса  $\{0, 1, 2\}$ , во втором — ребра из класса  $\{3, 4, 5\}$ :

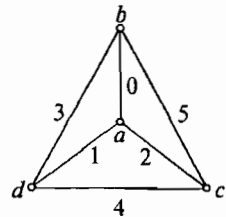


Рис. 3.3

$$\begin{aligned} C_{a1}: \quad A - F &= \underline{01}, & B - C &= \underline{02}, & C_{a2}: \quad A - B &= \underline{35}, & E - F &= \underline{34}, \\ F - A &= \underline{01}, & C - B &= \underline{02}, & B - A &= \underline{35}, & F - E &= 34, \\ D - E &= \underline{21}, & E - D &= \underline{21}, & C - D &= \underline{45}, & D - C &= \underline{45}, \end{aligned}$$

Третий класс  $C_{a3}$  определяется последовательным преобразованием, взятым из класса  $C_{a1}$  и  $C_{a2}$ , или сначала из  $C_{a2}$ , потом из  $C_{a1}$ , т.е. по формуле:

$$C_{a3} = \{C_{a1} - C_{a2}, C_{a2} - C_{a1}\}.$$

Конкретно — класс  $C_{a3}$ :

$$\begin{aligned} A - F - E &= A - E = \underline{10} \underline{34}, & E - F - A &= E - A = \underline{10} \underline{34}, \\ F - A - B &= F - B = \underline{10} \underline{53}, & B - A - F &= B - F = \underline{10} \underline{53}, \\ A - B - C &= A - C = \underline{20} \underline{35}, & C - B - A &= C - A = \underline{20} \underline{35}, \\ B - C - D &= B - D = \underline{20} \underline{54}, & D - C - B &= D - B = \underline{20} \underline{54}, \\ D - E - F &= D - F = \underline{21} \underline{34}, & F - E - D &= F - D = \underline{21} \underline{34}, \\ E - D - C &= E - C = \underline{21} \underline{45}, & C - D - E &= C - E = \underline{21} \underline{45}. \end{aligned}$$

Четвертый класс  $C_{a4}$  определяется формулой:

$$C_{a4} = \{C_{a1} - C_{a2} - C_{a1}, C_{a2} - C_{a1} - C_{a2}\}.$$

$$C_{a4}: \quad A - F - E - D = A - D = \underline{20} \underline{34}, \quad D - E - F - A = D - A = \underline{20} \underline{34},$$

$$B - C - D - E = B - E = \underline{10} \underline{54}, \quad E - D - C - B = E - B = \underline{10} \underline{54},$$

$$C - B - A - F = C - F = \underline{12} \underline{53}, \quad F - A - B - C = F - C = \underline{12} \underline{53}.$$

По рисунку графа  $\Gamma_4$  (рис. 3.3) можно установить, что в подстановках класса  $C_{a3}$  ребра  $\{0, 1, 2\}$  расположены относительно ребер  $\{3, 4, 5\}$  несколько иначе, чем они расположены в классе  $C_{a4}$ . Полезно обратить внимание и на другое. В цепи  $A$  ребра чередуются как  $0, 5, 4$ ; в цепи  $C$  — как  $2, 4, 3$ . При переходе от цепи  $A$  к цепи  $C$  происходит исчезновение ребер  $0, 5$  и появление ребер  $1, 3$ . Вместе с тем ребро  $4$ , расположенное в хвосте цепи  $A$ , оказывается в середине цепи  $C$ . При переходе от цепи  $A$  к цепи  $D$  сохраняющееся ребро  $5$  уже не меняет своего серединного положения. В индивидуальных реберных заменах  $A - C$  и  $A - D$  эти факты не получили никакого отражения; замены  $\underline{20} \underline{35}$  и  $\underline{20} \underline{34}$  ничем принципиальным не отличаются. Но они различимы коллективно при делении реберных подстановок на классы эквивалентности:  $A - C$  отнесена к классу  $C_{a3}$ ,  $A - D$  — к классу  $C_{a4}$ .

Помимо упомянутых классов, имеется еще один нулевой класс  $C_{a0}$  или класс тождественного элемента  $\{e\}$ , образованный всеми переходами

$$A - A = B - B = \dots = F - F = e.$$

Таким образом, в группе  $G_{4a}$  имеется 31 элемент преобразования цепей, которые разнесены по пяти классам эквивалентных преобразований.

Обратимся к поиску подгрупп группы  $G_{4a}$ . С этой целью будем последовательно удалять ребра из графа  $\Gamma_4$  и смотреть, какие из цепей остались, а вместе с ними и цепные преобразования. Сначала удалим ребро  $5$ . Получим неполный граф  $G_{41}$ , показанный на рис. 3.4а. В графе  $G_{41}$  можно провести две цепи  $B = 034$  и  $C = 243$ , в которых ребро  $1$  не участвует в образовании цепей, поэтому его также можно удалить вместе с ребром  $5$ . Цепи  $B$  и  $C$  определяют минимальную группу  $\{e, \underline{02}, \underline{02}\}$ . К аналогичному результату приводит удаление по отдельности ребер  $3$  и  $4$ : в первом случае от всей груп-

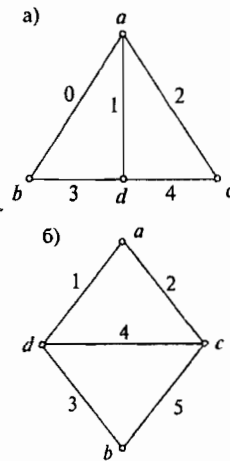


Рис. 3.4

пы  $G_{4a}$  остается группа  $\{e, \underline{01}, \underline{01}\}$ , во втором —  $\{e, \underline{12}, \underline{12}\}$ . Это означает, что класс ребер  $\{3, 4, 5\}$  играет важную роль в формировании цепей. Меньшее влияние оказывают ребра из класса  $\{0, 1, 2\}$ . Удалим ребро 0, получим граф  $G_{42}$  (рис. 3.4б).

### Классы эквивалентности группы цепей тетраэдра

В графе  $G_{42}$  вершины и ребра распадаются на три класса эквивалентности относительно привязки  $a$ : вершины —  $\{a\}$ ,  $\{d, c\}$ ,  $\{b\}$ ; ребра —  $\{1, 2\}$ ,  $\{4\}$ ,  $\{3, 5\}$ . На пяти ребрах можно составить четыре из шести ранее приведенных цепей:  $C$ ,  $D$ ,  $E$  и  $F$ . Классы переходов от одной цепи к другой здесь будут такими:

$$\begin{array}{ll}
 C_{a1}: & E - D = \underline{21}, & C_{a3}: & C - E = \underline{21} \underline{45}, \\
 & D - E = \underline{21}, & & E - C = \underline{21} \underline{45}, \\
 C_{a2}: & E - F = \underline{43}, & & D - F = \underline{21} \underline{34}, \\
 & F - E = \underline{43}, & & F - D = \underline{21} \underline{34}, \\
 & C - D = \underline{45}, & C_{a4}: & C - F = \underline{21} \underline{35}, \\
 & D - C = \underline{45}, & & F - C = \underline{21} \underline{35}.
 \end{array}$$

Таким образом, группа  $G_{42a}$  состоит из 13 элементов, включая тождественный. Удалив из графа  $G_{42}$  ребро 4, мы удаляем цепи  $C$  и  $F$ , а вместе с ними все переходы классов  $C_{a2}$ ,  $C_{a3}$  и  $C_{a4}$ . Останется группа  $\{e, \underline{12}, \underline{12}\}$ .

Отсутствие ребра 1 в графе  $G_4$  дает четыре цепи —  $A, B, C, D$ , для которых возможны следующие 13 переходов:  $\{B - C, C - B, A - B, B - A, D - C, C - D, C - A, A - C, D - B, B - D, A - D, D - A\}$ . Отсутствие ребра 2 оставляет цепи —  $A, B, E, F$  с переходами:  $\{A - F, F - A, A - B, B - A, E - F, F - E, E - A, A - E, F - B, B - F, E - B, B - E\}$ .

Группа  $G_{4a}$ , в которую входят три группы 13-го порядка и три группы третьего порядка, сама является подгруппой группы  $G_4$ , в которую входят также подгруппы  $G_{4b}$ ,  $G_{4c}$ ,  $G_{4d}$ . Структура последних трех подгрупп аналогична только что рассмотренной. Важным вопросом здесь является пересечение элементов этих подгрупп. Дело в том, что цепи  $A, B, C, D, E, F$  оканчиваются в трех точках —  $b, c, d$ . Следовательно, если в качестве привязки выбрать, скажем, вершину  $b$ , то цепи  $C$  и  $F$ , а вместе с ними и преобразования  $C - F$ ,  $F - C$  войдут в группу  $G_{4b}$ . Кроме того, может случиться так, что замена  $\underline{mn}$  или  $\underline{m\bar{n}}$  преобразует в группе  $G_{4a}$  одну пару цепей, а в группе  $G_{4b}$  совершенно другую. Эти обстоятельства нельзя не учи-

тывать при определении порядка групп и построении решетки.

Итак, выберем в качестве привязки вершину  $b$ . В этом случае имеем шесть цепей, две из которых нам уже известны:

$$G = badc = 014, C = bdca = 342, J = bcad = 521,$$

$$H = bacd = 024, I = bdac = 312, F = bcda = 541.$$

Ребра, входящие в эти цепи, разделены по двум классам  $\{0, 3, 5\}$  и  $\{1, 2, 4\}$ . Поэтому элементы преобразования группы  $G_{4b}$  разбиваются на четыре класса:

$$\begin{array}{lll} C_{b1}: & H - C = \underline{03}, & C_{b2}: H - G = \underline{12}, & C_{b4}: G - I = \underline{30} \underline{24}, \\ & C - H = \underline{03}, & G - H = \underline{12}, & I - G = \underline{30} \underline{24}, \\ & G - F = \underline{05}, & F - J = \underline{42}, & H - J = \underline{50} \underline{14}, \\ & F - G = \underline{05}, & J - F = \underline{42}, & J - H = \underline{50} \underline{14}, \\ & J - I = \underline{53}, & I - C = \underline{14}, & C - F = \underline{53} \underline{12}, \\ & I - J = \underline{53}; & C - I = \underline{14}; & F - C = \underline{53} \underline{12}; \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} C_{b3}: G - C = \underline{30} \underline{21}, & C - G = \underline{30} \underline{21}, & J - C = \underline{50} \underline{14}, \\ G - J = \underline{50} \underline{24}, & J - G = \underline{50} \underline{24}, & C - J = \underline{53} \underline{14} \\ I - F = \underline{53} \underline{42}, & F - I = \underline{53} \underline{42}, & F - H = \underline{50} \underline{12}, \\ H - I = \underline{30} \underline{14}, & I - H = \underline{30} \underline{14}, & H - F = \underline{50} \underline{12}. \end{array}$$

Сравнение классов  $C_b$  с классами  $C_a$  дает следующую картину: преобразование цепей  $C$  и  $F$ , находящихся в классе  $C_{b4}$ , ранее входили в класс  $C_{a4}$ ; преобразования цепей  $J$  и  $H$  происходит так же, как  $E$  и  $B$ , с заменами ребер 0, 1, 4, 5, а цепей  $I$  и  $G$ , как  $D$  и  $A$ , с заменами ребер 0, 2, 3, 4. Получилось, что  $C_{b4} = C_{a4}$ . Цепи  $I$  и  $J$  из класса  $C_{b1}$  преобразуются так же, как цепи  $A$  и  $B$  из класса  $C_{a2}$ , а цепи  $H$  и  $G$  из класса  $C_{b2}$ , как цепи  $D$  и  $E$  из класса  $C_{a1}$ . Получилось также, что замена ребер 1, 2 и 3, 5 преобразует разные цепи, а значит они входят и в разные классы. В третьих классах оказались одинаковыми четыре преобразования:  $A - E = H - I$ ,  $E - A = I - H$ ,  $J - G = D - B$ ,  $G - J = B - D$ . Таким образом, с появлением группы  $G_{4b}$  прибавилось не 30, а только 16 новых элементов реберных преобразований.

Если в качестве привязки выбрать вершину  $c$ , то она определит цепи  $I = 213$ ,  $K = 203$ ,  $B = 430$ ,  $G = 410$ ,  $L = 501$ ,  $E = 531$  преобразующихся по формулам:

$$\begin{array}{ll}
 C_{c1}: & K - B = \underline{24}, & C_{c2}: & K - I = \underline{10}, \\
 & B - K = \underline{24}, & & I - K = \underline{10}, \\
 & G - L = \underline{45}, & & G - B = \underline{13}, \\
 & L - G = \underline{45}, & & B - G = \underline{13}, \\
 & E - I = \underline{52}, & & E - L = \underline{30}, \\
 & I - E = \underline{52}, & & L - E = \underline{30}; \\
 C_{c3}: & B - I = \underline{24} \underline{10}, & & I - B = \underline{24} \underline{10}, \\
 & I - L = \underline{52} \underline{03}, & & L - I = \underline{52} \underline{03}, \\
 & G - E = \underline{54} \underline{30}, & & E - G = \underline{54} \underline{30}, \\
 & G - K = \underline{24} \underline{31}, & & K - G = \underline{24} \underline{31}, \\
 & K - E = \underline{52} \underline{10}, & & E - K = \underline{52} \underline{10}, \\
 & B - L = \underline{54} \underline{13}, & & L - B = \underline{54} \underline{13}; \\
 C_{c4}: & G - I = \underline{30} \underline{24}, & & I - G = \underline{30} \underline{24}, \\
 & B - E = \underline{54} \underline{10}, & & E - B = \underline{54} \underline{10}, \\
 & K - L = \underline{52} \underline{13}, & & L - K = \underline{52} \underline{13}.
 \end{array}$$

Наконец, если вершина  $d$  — привязка, то цепи  $J = 125$ ,  $L = 105$ ,  $A = 450$ ,  $H = 420$ ,  $K = 302$ ,  $D = 352$  преобразуются по формулам:

$$\begin{array}{ll}
 C_{d1}: & J - D = \underline{13}, & C_{d2}: & J - L = \underline{02}, \\
 & D - J = \underline{13}, & & L - J = \underline{02}, \\
 & K - H = \underline{34}, & & A - H = \underline{52}, \\
 & H - K = \underline{34}, & & H - A = \underline{52}, \\
 & A - L = \underline{41}, & & D - K = \underline{50}, \\
 & L - A = \underline{41}; & & K - D = \underline{50}; \\
 C_{d3}: & A - J = \underline{20} \underline{41}, & & J - A = \underline{20} \underline{41}, \\
 & K - J = \underline{50} \underline{31}, & & J - K = \underline{50} \underline{31}, \\
 & H - D = \underline{34} \underline{50}, & & D - H = \underline{34} \underline{50}, \\
 & H - L = \underline{52} \underline{14}, & & L - H = \underline{52} \underline{14}, \\
 & D - L = \underline{13} \underline{02}, & & L - D = \underline{13} \underline{02}, \\
 & K - A = \underline{43} \underline{52}, & & A - K = \underline{43} \underline{52}; \\
 C_{d4}: & D - A = \underline{43} \underline{02}, & & A - D = \underline{43} \underline{02}, \\
 & H - J = \underline{50} \underline{14}, & & J - H = \underline{50} \underline{14}, \\
 & K - L = \underline{13} \underline{52}, & & L - K = \underline{13} \underline{52}.
 \end{array}$$

### Решетка группы цепей тетраэдра

Мы целиком рассмотрели группу преобразования цепей тетраэдра  $G_4$ . Сейчас можно было бы назначить систему образующих и выразить через них все элементы  $G_4$ . Если принять, что

$$a = \underline{01}, b = \underline{12}, c = \underline{03}, d = \underline{35}, f = \underline{14},$$

то все элементы группы  $G_4$  предстанут как всевозможные суммы этих образующих, например:

$$\underline{ac} = \underline{13}, \underline{bf} = \underline{24}, \underline{ad} = \underline{0135}, \underline{bd} = \underline{1235}, \underline{abd} = \underline{0235},$$

$$\underline{acf} = \underline{34}, \underline{abcd} = \underline{25}, \underline{acdf} = \underline{45}, \underline{abcdf} = \underline{1245}, \dots$$

Однако число образующих на единицу меньше числа ребер. Поэтому есть смысл оставить элементы групп выраженными через ребра, которые несут прямой графический смысл.

В таблице 3.1 приведены элементы группы  $G_4$  без тождественного и обратных, которые преобразуют 12 цепей тетраэдра друг в друга. Цепи образуют субстанционное множество:  $A = 054, B = 034, C = 243, D = 253, E = 135, F = 145, G = 014, H = 024, I = 213, J = 125, K = 203, L = 105$ . Элементы же табл. 3.1 образуют операционное множество, причем каждый оператор связывает определенные пары субстанционных элементов, например:  $\underline{1234} = F - D = 145 - 253 = G - K = 410 - 203$ .

Таким образом, группа преобразования цепей тетраэдра  $G_4$  состоит из 73 элементов, куда входят: тождественный элемент; 24 элемента типа  $\underline{xy}$ , образующих классы  $C_1$  и  $C_2$ ; 24 элемента типа  $\underline{pqrs}$ , образующих класс  $C_3$  и 6 элементов такого же типа класса  $C_4$ . Кроме того, в таблице 3.1 не вошло еще 6 элементов класса  $C_5$ , которые связывают цепи, проведенные от четырех различных вершин:

$$\underline{1\bar{5}} = A - G = D - I, \quad \underline{2\bar{3}} = B - H = E - J, \quad \underline{0\bar{4}} = C - K = F - L;$$

и 12 элементов класса  $C_6$ , описывающие переходы между взаимно дополняющими цепями тетраэдра:

$$\underline{012345} = A - I, \quad \underline{01234\bar{5}} = C - L, \quad \underline{01234\bar{5}} = E - H,$$

$$\underline{01234\bar{5}} = B - J, \quad \underline{01234\bar{5}} = D - G, \quad \underline{01234\bar{5}} = F - K.$$

Вообще, число возможных переходов между  $m = 12$  цепями равно  $m \cdot (m - 1) + 1 = 133$ , но в группу  $G_4$  вошло только 73 элемента. Сокрытие на 60 элементов произошло за счет симметрии тетраэдра. Эти 73 элемента образуют: одну подгруппу первого порядка, состоящую из одного тождественного элемента и обозначаемую через

0; 12 подгрупп третьего порядка типа  $\{e, xy, xy^2\}$ , обозначенных в таблице 3.1 символами от 1 до C; 12 подгрупп 13-го порядка, обозначенных буквами от D до O, и 4 подгруппы 31-го порядка, обозначенных буквами P ( $G_{4a}$ ), Q ( $G_{4b}$ ), R ( $G_{4c}$ ), S ( $G_{4d}$ ). Восемнадцать элементов из двух последних классов  $C_5$  и  $C_6$  не входят ни в одну из собственных подгрупп, число которых равно 28.

Таблица 3.1

№	$C_1$	№	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	№
1	<u>01</u>	D	<u>12</u>	<u>34</u> <u>45</u>	<u>1245</u> <u>1234</u>	<u>1235</u>	P
2	<u>02</u>	E	<u>02</u>	<u>35</u> <u>45</u>	<u>0235</u> <u>0245</u>	<u>0234</u>	
3	<u>12</u>	F	<u>01</u>	<u>35</u> <u>34</u>	<u>0134</u> <u>0135</u>	<u>0145</u>	
4	<u>03</u>	G	<u>35</u>	<u>14</u> <u>24</u>	<u>1345</u> <u>2345</u>	<u>1235</u>	Q
5	<u>05</u>	H	<u>05</u>	<u>12</u> <u>24</u>	<u>0125</u> <u>0245</u>	<u>0145</u>	
6	<u>35</u>	I	<u>03</u>	<u>12</u> <u>14</u>	<u>0123</u> <u>0134</u>	<u>0234</u>	
7	<u>24</u>	J	<u>45</u>	<u>13</u> <u>03</u>	<u>0345</u> <u>1345</u>	<u>0145</u>	R
8	<u>25</u>	K	<u>25</u>	<u>01</u> <u>03</u>	<u>0125</u> <u>0235</u>	<u>1235</u>	
9	<u>45</u>	L	<u>24</u>	<u>01</u> <u>13</u>	<u>0124</u> <u>1234</u>	<u>0234</u>	
A	<u>13</u>	M	<u>34</u>	<u>05</u> <u>25</u>	<u>0345</u> <u>2345</u>	<u>0234</u>	S
B	<u>14</u>	N	<u>14</u>	<u>02</u> <u>25</u>	<u>0124</u> <u>1245</u>	<u>0145</u>	
C	<u>34</u>	O	<u>13</u>	<u>02</u> <u>05</u>	<u>0123</u> <u>0135</u>	<u>1235</u>	

Все названные подгруппы тетраэдра упорядочены в решетку  $S(G_4)$ , изображенную на рис. 3.5. Решетка  $S(G_4)$  правильная, имеет 36 четырехзвенных цепей, привязанных к полюсам  $S(G_4)$ .

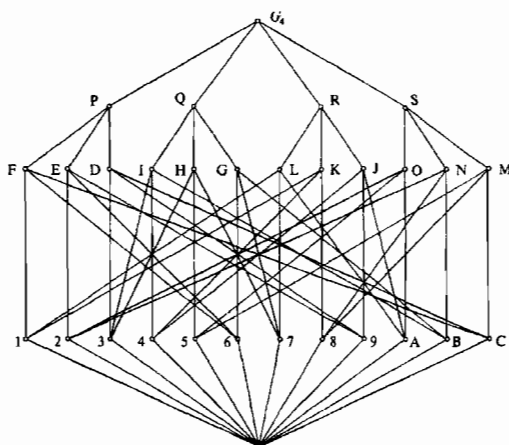


Рис. 3.5



## Группа цепей куба

Перейдем к рассмотрению группы преобразования цепей куба  $G_8$  (рис. 3.6). Если в качестве привязки принять вершину  $a$ , то в зависимости от ее удаленности получим *четыре класса вершин*: класс 0 —  $\{a\}$ , класс 1 —  $\{b, c, d\}$ , класс 2 —  $\{e, f, g\}$  и класс 3 —  $\{h\}$ ; и *три класса ребер*: класс 1 —  $\{1, 2, 3\}$ , класс 2 —  $\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ , класс 3 —  $\{A, B, C\}$ . Привязка  $a$  определяет 18 цепей. Частота появления ребер в цепях распределяется по трем классам следующим образом: для класса 1 она равна 6, для класса 2 — 13 и для класса 3 — 10.

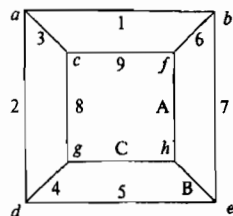


Рис. 3.6

Приведем список цепей, которые привязываются к вершине  $a$ :

цикл I: 1 =  $abfcgdeh = 169845B$ , цикл II: 10 =  $abedghfc = 1754CA9$ ,  
 2 =  $abfcghed = 1698CB5$ , 11 =  $abedgcfh = 175489A$ ,  
 3 =  $adehgcfb = 25BC896$ , 12 =  $abehfcgd = 17BA984$ ,  
 4 =  $adebfjgh = 257698C$ , 13 =  $adgcfheb = 2489AB7$ ,  
 5 =  $adebfhgc = 2576AC8$ , 14 =  $adgcfbeh = 248967B$ ,  
 6 =  $acghfbed = 38CA675$ , 15 =  $adghehfc = 24CB769$ ,  
 7 =  $acgdebh = 384576A$ , 16 =  $acfbehgd = 3967BC4$ ,  
 8 =  $acgdehfb = 3845BA6$ , 17 =  $acfbedgh = 396754C$ ,  
 9 =  $abshedgc = 16AB548$ ; 18 =  $acfghdeb = 39AC457$ .

Список разбит на два цикла: первый — с 1 по 9, второй — с 10 по 18. Внутри каждого цикла переход от одной цепи к другой осуществляется заменой одного ребра. Новое ребро появляется путем присоединения восьмой (хвостовой) вершины каждой цепи к первой (головной), третьей или пятой. Таким образом, происходит *инверсия* хвостовой части каждой из цепей, т.е. два, четыре или шесть хвостовых ребер присоединяются к вновь установленному ребру в обратном порядке. Так, переход от цепи 1 к цепи 2 осуществляется путем удаления ребра  $gd = 4$  и введением ребра  $gh = C$ , при этом чередование вершин хвостовой части цепи ( $deh$ ) меняется на противоположное ( $hed$ ). Переход от цепи 2 к цепи 3 осуществляется путем инверсии семи хвостовых вершин ( $bfcghed$ ) и т.д.; цепь 9 переходит в цепь 1 путем инверсии пяти вершин ( $hedgc$ ). Аналогичная картина наблюдается во втором цикле.

Чтобы получить цепи от семи других вершин куба (рис. 3.6), достаточно в имеющихся 18 цепях произвести замену ребер в соответствии с семью подстановками, которые вместе с тождественной образуют коммутативную группу типа  $C_2C_4$ :

$$b = (1752)(36B4)(89AC), \quad c = (19)(28)(5C)(7A), \quad d = (1257)(34B6)(8CA9), \\ e = (15)(27)(3B)(46)(8A)(9C), \quad g = (185A)(2C79)(34B6), \\ f = (1A58)(297C)(36B4), \quad h = (1C)(2A)(3B)(46)(59)(78).$$

В результате действия группы подстановок получим  $18 \times 8 = 144$  цепи. Однако в кубе можно провести только 72 цепи. Удвоение числа можно понять из анализа хвостовых вершин приведенных цепей. На восемнадцать головных вершин класса 0, т.е. вершин  $a$ , приходится по четыре хвостовых вершины класса 1, т.е. вершин  $b$ ,  $c$ ,  $d$ , и шесть вершин  $h$  класса 3 (вершины  $e$ ,  $f$ ,  $g$  класса 2 в хвостах отсутствуют). Следовательно, все восемнадцать цепей, привязанных к вершине  $a$ , повторятся в списке из 144 цепей, только головная вершина  $a$  окажется уже в хвосте. Аналогичное удвоение произойдет с цепями, привязанными к вершине  $b$ , и т.д.

Из 72 цепей куба можно составить один большой цикл, основанный на том же принципе, который заложен в малых циклах, образованных девятью цепями. В 72-цикле в отличие от 9-циклов инверсии подлежат не только хвостовые, но и головные части цепей.

1 = 169845B,	25 = 4239AB7,	49 = AC83175,
2 = 1698CB5,	26 = 423967B,	50 = AC83257,
3 = 25BC896,	27 = CB76932,	51 = 675238C,
4 = CB52396,	28 = 67BC832,	52 = 257698C,
5 = CB52169,	29 = 67BC423,	53 = 2576AC8,
6 = 896125B,	30 = 9324CB7,	54 = 38CA675,
7 = 89AB521,	31 = 9317BC4,	55 = 384576A,
8 = 98CB521,	32 = 3967BC4,	56 = 832576A,
9 = 6125BC8,	33 = 24CB769,	57 = CA67523,
10 = 5216AC8,	34 = BC42169,	58 = 76AC423,
11 = 521698C,	35 = BC42396,	59 = 76AC832,
12 = BC89612,	36 = 769324C,	60 = 5238CA6,
13 = 98CB712,	37 = 396754C,	61 = 8325BA6,
14 = 89AB712,	38 = 931754C,	62 = 3845BA6,
15 = 17BA984,	39 = 457139A,	63 = AB54831,

16 = 175489A,	40 = 45BA931,	64 = AB71384,
17 = 712489A,	41 = 54CA931,	65 = BA61384,
18 = 984217B,	42 = 39AC457,	66 = 8316AB5,
19 = 248967B,	43 = CA93257,	67 = 6138CB5,
20 = 2489AB7,	44 = CA93175,	68 = 613845B,
21 = BA98421,	45 = 7139AC4,	69 = 548316A,
22 = BA61248,	46 = 7124CA9,	70 = 54CA613,
23 = AB71248,	47 = 1754CA9,	71 = 45BA613,
24 = 4217BA9,	48 = AC45713,	72 = 16AB548.

### Гиперкуб, образованный из 72 цепей куба

Большой 72-цикл симметрично укладывается на грани и ребра гиперкуба  $\Gamma_{72}$ , развертка которого приведена на рис. 3.7, при этом каждая цепь связана с четырьмя другими отношением инверсии хвоста или головы. Два 9-цикла отвечают узлам, расположенным вблизи диаметрально противоположных вершин гиперкуба  $\Gamma_{72}$ , обозначенными через  $a$ :

$$\{1 - 2 - 3 - 52 - 53 - 54 - 55 - 62 - 72\},$$

$$\{47 - 16 - 15 - 20 - 19 - 33 - 32 - 37 - 42\}.$$

Привязке  $h$  куба  $\Gamma_8$  соответствуют те же самые вершины  $\Gamma_{72}$ , а узлы двух 9-циклов частично перекрываются с двумя предыдущими циклами:

$$\{16 - 17 - 18 - 19 - 26 - 36 - 37 - 38 - 39\},$$

$$\{1 - 6 - 11 - 52 - 51 - 56 - 55 - 69 - 68\}.$$

На рис. 3.7, помимо вершин  $a-h$ , помечены также вершины  $b-g$ ,  $c-e$  и  $d-f$ , вблизи которых располагаются еще двенадцать 9-циклов, дважды покрывающие все узлы гиперкуба  $\Gamma_{72}$ .

На гранях  $\Gamma_{72}$  можно выделить шесть 8-циклов:

$$\{2 - 3 - 8 - 9 - 5 - 6 - 11 - 12\},$$

$$\{14 - 15 - 20 - 21 - 17 - 18 - 23 - 24\},$$

$$\{26 - 27 - 32 - 33 - 29 - 30 - 35 - 36\},$$

$$\{44 - 45 - 41 - 42 - 47 - 48 - 38 - 39\},$$

$$\{53 - 54 - 59 - 60 - 50 - 51 - 56 - 57\},$$

$$\{65 - 66 - 71 - 72 - 62 - 63 - 68 - 69\}.$$

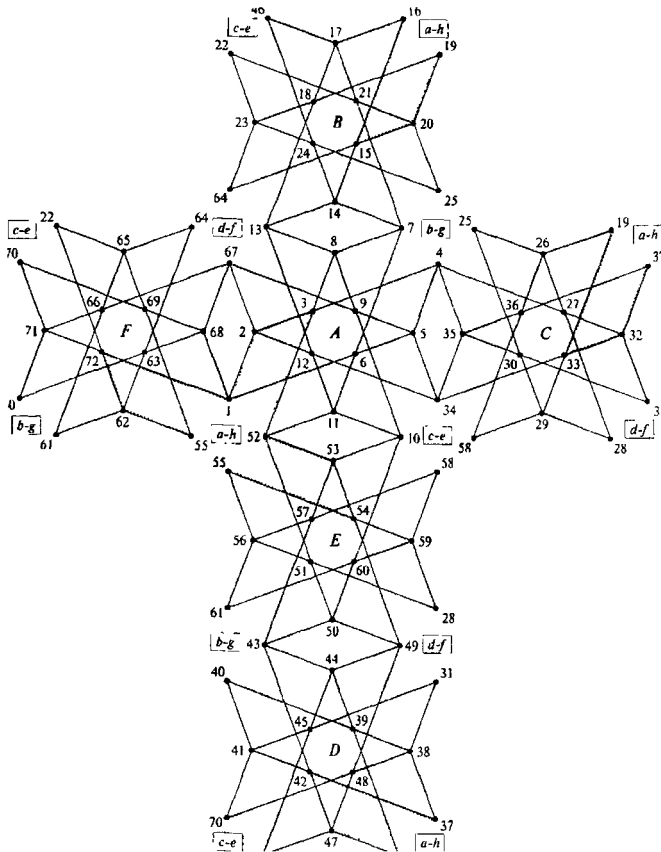


Рис. 3.7

Распишем первый из них конкретно через цепи:

$$\begin{aligned}
 & - 1698CB5 - 25BC896 - 98CB521 - 6125BC8 - \\
 & - CB52169 - 896125B - 521698C - BC89612 - .
 \end{aligned}$$

Как видим, 8-цикл связан отношением инверсии только шести головных или хвостовых ребер. Переходы  $2 - 5 = \underline{8}2$  и  $8 - 11 = \underline{B}6$  сопровождаются заменой одного-единственного ребра. Однореберные замены характерны и для всех остальных переходов между узлами грани  $A$  гиперкуба —  $\Gamma_{72}$ :

$$3 - 5 = \underline{8}1, \quad 12 - 5 = \underline{8}5, \quad 3 - 11 = \underline{B}1,$$

$$\begin{array}{lll}
 9 - 11 = \underline{B9}, & 9 - 2 = \underline{29}, & 6 - 2 = \underline{2C}, \\
 12 - 8 = \underline{65}, & 6 - 8 = \underline{6C}, & 3 - 6 = \underline{C1}, \\
 9 - 12 = \underline{59}, & 3 - 9 = \underline{91}, & 3 - 12 = \underline{51}, \\
 6 - 9 = \underline{9C}, & 6 - 12 = \underline{5C}, & 2 - 8 = \underline{62}, \\
 2 - 11 = \underline{B2}, & 5 - 8 = \underline{68}, & 5 - 11 = \underline{B8}.
 \end{array}$$

С учетом этого связи грани  $A$  могли бы выглядеть иначе (рис. 3.8). Та же самая картина наблюдается на других гранях гиперкуба  $\Gamma_{72}$ . Благодаря этому возможны пяти- и семизвенные циклы, например:  $\{2 - 3 - 9 - 6 - 12\}$  или  $\{2 - 3 - 8 - 9 - 6 - 12\}$ , что кажется странным, поскольку числа 5 и 7 не являются делителями числа 72. Однако последние выписанные нами переходы отходят от принципа инверсии двух, четырех и шести головных или хвостовых ребер.

Если оставаться в рамках провозглашенного принципа перехода от одной цепи к другой, то связи на гранях  $\Gamma_{72}$  следует оставить такими, как они показаны на рис. 3.7. Впрочем, 4-, 6-, 8-, 9-, 12-, 18-, 24-, 36-циклы, которые можно выделить в  $G_{72}$ , также не являются делителями 72-цикла, поскольку, например, 4-циклов всего 12 (вместо 18); они расположены на ребрах гиперкуба  $\Gamma_{72}$ :

$$\begin{array}{l}
 \{1 - 2 - 67 - 68\}, \{4 - 5 - 34 - 35\}, \\
 \{7 - 8 - 13 - 14\}, \{10 - 11 - 52 - 53\}, \\
 \{16 - 17 - 46 - 47\}, \{19 - 20 - 25 - 26\}, \\
 \{22 - 23 - 64 - 65\}, \{28 - 29 - 58 - 59\}, \\
 \{31 - 32 - 37 - 38\}, \{40 - 41 - 70 - 71\}, \\
 \{43 - 44 - 49 - 50\}, \{55 - 56 - 61 - 62\}.
 \end{array}$$

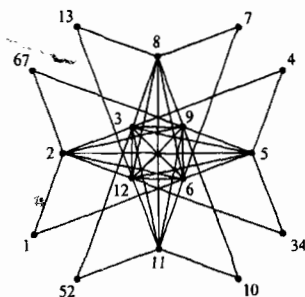


Рис. 3.8

В первом 4-цикле имеем следующие переходы:

$$- 169845B - 1698CB5 - 6138CB5 - 613845B -.$$

Аналогичные односторонние переходы характерны и для остальных 4-циклов.

Возьмем другой пример: 18-циклов можно провести только два (вместо 4), например:

$$\begin{array}{l}
 \{1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 - 7 - 14 - 24 - 46 - 17 - 21 - 22 - 65 - 69 - 55 - 62 - 72\} \\
 \{43 - 44 - 39 - 16 - 47 - 42 - 37 - 32 - 33 - 34 - 35 - 36 - 58 - 59 - 60 - 61 - 56 - 57\}.
 \end{array}$$

Всякий третий 18-цикл будет иметь пересечение с узлами уже выписанных циклов, в частности:

$$\{8 - 9 - 10 - 11 - 12 - 34 - 35 - 36 - 37 - 32 - 33 - 19 - 20 - 15 - 64 - 23 - 18 - 13\}.$$

### Классы эквивалентности группы цепей куба

Прежде чем рассматривать группу преобразований цепей куба, установим реберный состав цепей. Цепи, привязанные к вершине  $a$ , можно разбить на три класса. Так, цепь  $1 = 169845B$ , согласно реберной классификации, состоит из ребер следующих классов: 1222223; цепь  $72 = 16AB548$  имеет состав 1233222 и цепь  $62 = 3845BA6$  — 1222332. Две последние цепи имеют одинаковые последовательности реберных классов, только названы они сначала в прямом, потом в обратном порядке. Все три цепи принадлежат грани  $F$  гиперкуба  $\Gamma_{72}$ . Они могут служить представителями соответствующих классов цепей других пяти граней —

$$\text{класс } A: \{1, 55, 52, 37, 19, 16\} \text{ — } 1222223;$$

$$\text{класс } B: \{72, 54, 3, 42, 33, 15\} \text{ — } 1233222;$$

$$\text{класс } C: \{62, 53, 2, 47, 32, 20\} \text{ — } 1222332.$$

Цепи первых двух классов *симметричны*, третьего класса — *асимметричны*. Симметричность цепи является ее *абсолютной* характеристикой; она не зависит от привязки. Ее можно установить следующим образом: для каждой цепи, начиная от вершины  $a$ , согнем вдоль соответствующих ребер реального куба жесткую проволоку, сохраняющую свою форму. Для симметричных цепей «хвост» и «голова» соответствующей изогнутой проволоки могут меняться местами, т.е. не зависимо от того, каким концом прикреплять проволоку к вершине  $a$ : всегда можно добиться того, чтобы она прошла по нужным нам ребрам. Если изогнутую проволоку от асимметричной цепи прикрепить «хвостом» к вершине  $a$ , то в любом случае, как бы ее не поворачивать, она укажет новые ребра. Таким образом, за счет вращения куба  $\Gamma_8$  или проволоки вокруг оси, проходящей через вершину  $a$ , каждая симметричная цепь порождает только две новых цепи; асимметричная же цепь дает уже пять новых цепей.

Осуществив переход от цепей класса  $C$  к цепям класса  $B$ , мы получим *первый класс реберных подстановок*:

$$\underline{1}2 = 2 - 3 = 15 - 20, \underline{3}1 = 62 - 72 = 42 - 47, \underline{2}3 = 53 - 54 = 33 - 32.$$

*Второй класс* получается благодаря следующим преобразованиям:

$$\begin{array}{ll} \underline{9A} = 1 - 72 = 52 - 53, & \underline{6A} = 37 - 42 = 19 - 20, \\ \underline{7B} = 52 - 3 = 55 - 62, & \underline{5B} = 16 - 15 = 37 - 32, \\ \underline{4C} = 55 - 54 = 1 - 2, & \underline{8C} = 19 - 33 = 16 - 47. \end{array}$$

В этом классе можно было бы отдельно выделить два подкласса: первый описывал бы переходы между цепями классов *A* и *B*, другой — между цепями классов *A* и *C*. Тогда всевозможные переходы между этими двумя подклассами породили бы *третий класс*:

$$\begin{array}{ll} \underline{9A} \underline{4C} = 2 - 72, & \underline{6A} \underline{8C} = 33 - 20, \\ \underline{7B} \underline{9A} = 53 - 3, & \underline{5B} \underline{6A} = 42 - 32, \\ \underline{4C} \underline{7B} = 62 - 54; & \underline{8C} \underline{5B} = 15 - 47. \end{array}$$

Однако мы не будем различать подобные подклассы. Вместо этого введем классификацию подстановок в зависимости от реберной классификации. В частности, во втором классе подстановок при переходах от одной цепи к другой удаляется ребро, принадлежащее реберному *первому классу*, и вводится ребро, принадлежащее *второму классу*. Поэтому к *третьему классу* отнесем подстановки, где имеют место замены, аналогичные для этого класса:

$$\underline{9A} \underline{8C} = 37 - 55, \quad \underline{7B} \underline{6A} = 16 - 1, \quad \underline{4C} \underline{5B} = 19 - 52.$$

Из этих же соображений мы не станем делить на самостоятельные подклассы подстановки *четвертого класса*:

$$\begin{array}{ll} \underline{12} \underline{4C} = 1 - 3, & \underline{12} \underline{7B} = 2 - 52, \\ \underline{23} \underline{9A} = 52 - 54, & \underline{23} \underline{4C} = 53 - 55, \\ \underline{31} \underline{7B} = 55 - 72, & \underline{31} \underline{9A} = 62 - 1, \\ \underline{12} \underline{6A} = 15 - 19, & \underline{12} \underline{5B} = 16 - 20, \\ \underline{23} \underline{5B} = 33 - 37, & \underline{23} \underline{8C} = 19 - 32, \\ \underline{31} \underline{8C} = 42 - 16; & \underline{31} \underline{6A} = 37 - 47, \end{array}$$

хотя первый из столбцов получается в результате переходов цепей, принадлежащих классам *A* и *B*, а второй — между цепями класса *A* и *C*. Ниже дается классификация всех остальных переходов между цепями, привязанными к вершине *a*:

*Класс 5*

$$\begin{array}{ll} \underline{9A} \underline{84} = 37 - 54, & \underline{6A} \underline{57} = 1 - 15, \\ \underline{4C} \underline{57} = 19 - 3, & \underline{8C} \underline{69} = 55 - 42, \\ \underline{7B} \underline{69} = 16 - 72, & \underline{5B} \underline{84} = 52 - 33; \end{array}$$

*Класс 11*

$$\begin{aligned} 69 \underline{7B} \underline{8C} &= 42 - 62 = 47 - 72, & 84 \underline{6A} \underline{7B} &= 47 - 2, \\ 57 \underline{6A} \underline{4C} &= 15 - 2 = 20 - 3, & 69 \underline{5B} \underline{4C} &= 20 - 53, \\ 84 \underline{9A} \underline{5B} &= 33 - 53 = 32 - 54, & 57 \underline{9A} \underline{8C} &= 32 - 62; \end{aligned}$$

*Класс 12*

$$\begin{aligned} 6A \underline{7B} \underline{8C} &= 1 - 47, & 6A \underline{7B} \underline{4C} &= 16 - 2, \\ 6A \underline{5B} \underline{4C} &= 52 - 20, & 9A \underline{7B} \underline{8C} &= 37 - 62, \\ 9A \underline{5B} \underline{8C} &= 55 - 32, & 9A \underline{5B} \underline{4C} &= 19 - 53; \end{aligned}$$

*Класс 13*

$$\begin{aligned} 12 \underline{6A} \underline{4C} \underline{57} &= 15 - 3, & 21 \underline{6A} \underline{4C} \underline{57} &= 20 - 2, \\ 23 \underline{9A} \underline{5B} \underline{84} &= 33 - 54, & 32 \underline{9A} \underline{5B} \underline{84} &= 32 - 53, \\ 31 \underline{7B} \underline{8C} \underline{69} &= 42 - 72, & 13 \underline{7B} \underline{8C} \underline{69} &= 47 - 62, \\ 21 \underline{9A} \underline{8C} \underline{57} &= 33 - 72, & 12 \underline{6A} \underline{7B} \underline{84} &= 47 - 3, \\ 32 \underline{6A} \underline{7B} \underline{84} &= 42 - 3, & 23 \underline{5B} \underline{4C} \underline{69} &= 20 - 54, \\ 13 \underline{5B} \underline{4C} \underline{69} &= 15 - 54, & 31 \underline{9A} \underline{8C} \underline{57} &= 32 - 72, \\ 12 \underline{5B} \underline{4C} \underline{69} &= 15 - 53, & 23 \underline{9A} \underline{8C} \underline{57} &= 33 - 62, \\ & & 31 \underline{6A} \underline{7B} \underline{84} &= 42 - 2; \end{aligned}$$

*Класс 14*

$$\begin{aligned} 12 \underline{7B} \underline{4C} &= 1 - 52 = 72 - 53, & 12 \underline{5B} \underline{8C} &= 47 - 20, \\ 23 \underline{9A} \underline{4C} &= 52 - 55 = 3 - 62, & 23 \underline{6A} \underline{8C} &= 20 - 32, \\ 31 \underline{9A} \underline{7B} &= 55 - 1 = 54 - 2, & 31 \underline{6A} \underline{5B} &= 32 - 47, \\ 12 \underline{6A} \underline{5B} &= 16 - 19 = 47 - 33, & 12 \underline{9A} \underline{7B} &= 2 - 53, \\ 23 \underline{5B} \underline{8C} &= 19 - 37 = 20 - 42, & 23 \underline{7B} \underline{4C} &= 53 - 62, \\ 31 \underline{6A} \underline{8C} &= 37 - 16 = 32 - 15, & 31 \underline{9A} \underline{4C} &= 62 - 2, \\ 12 \underline{9A} \underline{4C} &= 72 - 3, & 12 \underline{6A} \underline{8C} &= 15 - 33, \\ 23 \underline{9A} \underline{7B} &= 3 - 54, & 23 \underline{6A} \underline{5B} &= 33 - 42, \\ 31 \underline{7B} \underline{4C} &= 54 - 72, & 31 \underline{5B} \underline{8C} &= 42 - 15, \\ 12 \underline{6A} \underline{4C} &= 16 - 52, & 23 \underline{9A} \underline{5B} &= 19 - 55, \\ & & 31 \underline{7B} \underline{8C} &= 37 - 1. \end{aligned}$$



*Класс 6*

$$\begin{aligned} \underline{12} \underline{57} &= 1 - 19, \\ \underline{23} \underline{84} &= 52 - 37, \\ \underline{31} \underline{69} &= 55 - 16; \end{aligned}$$

*Класс 7*

$$\begin{aligned} \underline{69} \underline{57} &= 15 - 72, \\ \underline{57} \underline{84} &= 33 - 3, \\ \underline{84} \underline{69} &= 42 - 54; \end{aligned}$$

*Класс 8*

$$\begin{aligned} \underline{21} \underline{57} \underline{84} &= 33 - 2, \\ \underline{32} \underline{84} \underline{69} &= 42 - 53, \\ \underline{13} \underline{69} \underline{57} &= 15 - 62, \\ \underline{31} \underline{57} \underline{84} &= 32 - 2, \\ \underline{23} \underline{69} \underline{57} &= 20 - 62; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{32} \underline{57} \underline{84} &= 32 - 3, \\ \underline{13} \underline{84} \underline{69} &= 47 - 54, \\ \underline{21} \underline{69} \underline{57} &= 20 - 72, \\ \underline{12} \underline{84} \underline{69} &= 47 - 53, \end{aligned}$$

*Класс 9*

$$\begin{aligned} \underline{12} \underline{6A} \underline{84} &= 47 - 52, \\ \underline{23} \underline{5B} \underline{69} &= 20 - 55, \\ \underline{31} \underline{8C} \underline{57} &= 32 - 1, \\ \underline{12} \underline{9A} \underline{57} &= 72 - 19, \\ \underline{23} \underline{7B} \underline{84} &= 3 - 37, \\ \underline{31} \underline{4C} \underline{69} &= 54 - 16, \\ \underline{12} \underline{4C} \underline{69} &= 16 - 53, \\ \underline{23} \underline{9A} \underline{57} &= 19 - 62, \\ \underline{31} \underline{7B} \underline{84} &= 37 - 2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{12} \underline{8C} \underline{57} &= 1 - 33, \\ \underline{23} \underline{6A} \underline{84} &= 52 - 42, \\ \underline{31} \underline{5B} \underline{69} &= 55 - 15, \\ \underline{12} \underline{6A} \underline{57} &= 1 - 20, \\ \underline{23} \underline{5B} \underline{84} &= 52 - 32, \\ \underline{31} \underline{8C} \underline{69} &= 55 - 47, \\ \underline{12} \underline{4C} \underline{57} &= 2 - 19, \\ \underline{23} \underline{9A} \underline{84} &= 53 - 37, \\ \underline{31} \underline{7B} \underline{69} &= 62 - 16; \end{aligned}$$

*Класс 10*

$$\begin{aligned} \underline{12} \underline{6A} \underline{5B} \underline{4C} &= 15 - 52, \\ \underline{23} \underline{9A} \underline{5B} \underline{8C} &= 33 - 55, \\ \underline{31} \underline{6A} \underline{7B} \underline{8C} &= 42 - 1, \\ \underline{21} \underline{6A} \underline{5B} \underline{8C} &= 33 - 16, \\ \underline{32} \underline{6A} \underline{5B} \underline{8C} &= 42 - 19, \\ \underline{13} \underline{6A} \underline{5B} \underline{8C} &= 15 - 37, \\ \underline{21} \underline{9A} \underline{7B} \underline{4C} &= 53 - 1, \\ \underline{32} \underline{9A} \underline{7B} \underline{4C} &= 62 - 52, \\ \underline{13} \underline{9A} \underline{7B} \underline{4C} &= 2 - 55, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{21} \underline{6A} \underline{7B} \underline{4C} &= 3 - 16, \\ \underline{32} \underline{9A} \underline{5B} \underline{4C} &= 54 - 19, \\ \underline{13} \underline{9A} \underline{7B} \underline{8C} &= 72 - 37, \\ \underline{12} \underline{9A} \underline{7B} \underline{4C} &= 72 - 52, \\ \underline{23} \underline{9A} \underline{7B} \underline{4C} &= 3 - 55, \\ \underline{31} \underline{9A} \underline{7B} \underline{4C} &= 54 - 1, \\ \underline{12} \underline{6A} \underline{5B} \underline{8C} &= 47 - 19, \\ \underline{23} \underline{6A} \underline{5B} \underline{8C} &= 20 - 37, \\ \underline{31} \underline{6A} \underline{5B} \underline{8C} &= 32 - 16; \end{aligned}$$

Как видим, через однореберные замены, которые фигурировали в двух первоначальных 9-циклах, выражаются все многореберные подстановки данной подгруппы. Табл. 3.2 представляет собой таблицу сложения наших укрупненных классов.

Таблица 3.2

+	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	—	4	14	2	9	—	8	7, 8	5, 9	10, 12	13	10	11, 13	3, 14
2	4	3	2, 5, 12	1, 4	3, 7, 11	9	5	9	6, 8, 13, 14	13, 14	5, 12	3, 11	9, 10	4, 9, 10
3	14	2, 5, 12	—	9, 10	2, 12	14	11	13	4, 9, 10	4, 9	7, 11	2, 5	8, 13	1, 6, 14
4	2	1, 14	9, 10	14	6, 8, 13	5, 9	9	5, 9, 13	3, 6, 7, 8, 11, 13, 14	3, 11	9, 10	13, 14	5, 8, 9, 10, 12	2, 4, 9, 10, 12
5	9	3, 7, 11	2, 12	6, 8, 13	—	4	2	4	1, 14	13, 14	2	3	4, 10	9, 10
6	—	9	14	5, 9	4	—	—	—	2, 4	10, 12	—	10	—	3, 14
7	8	5	11	9	2	—	—	1	4	10	3	—	14	13
8	7, 8	9	13	5, 9, 13	4	—	1	1	2, 4	10, 12	14	10	3, 4, 14	11, 13
9	5, 9	6, 8, 13, 14	4, 9, 10	3, 6, 7, 8, 11, 13, 14	1, 14	2, 4	4	2, 4	1, 3, 14	3, 11, 13, 14	4, 10	14	2, 4, 10	2, 4, 5, 9, 10, 12
10	10, 12	13, 14	4, 9	3, 11, 13, 14	13, 14	10, 12	10	10, 12	3, 11, 13, 14	1, 6, 7, 8	4, 9	1, 6, 8	2, 4, 5, 9	2, 4, 5, 9
11	13	5, 12	7, 11	9, 10	2	—	3	14	4, 10	4, 9	3	2	1, 14	8, 13
12	10	3, 11	2, 5	13, 14	3	10	—	10	14	1, 6, 8	2	—	4	4, 9
13	11, 13	9, 10	8, 13	5, 8, 9, 10, 12	4, 10	—	14	3, 4, 14	2, 4, 10	2, 4, 5, 9	1, 14	4	1, 3, 14	7, 8, 11, 13
14	3, 14	4, 9, 10	1, 6, 14	2, 4, 9, 10, 12	9, 10	3, 14	13	11, 13	2, 4, 5, 9, 10, 12	2, 4, 5, 9	8, 13	4, 9	7, 8, 11, 13	1, 3, 6, 14

Ранее мы уже говорили, что для аддитивных групп выполняются очевидные равенства: если  $a + b = c$ , то  $a + c = b$  и  $b + c = a$ . Если это условие справедливо для отдельных подстановок, то оно будет справедливым и для целых классов. В частности, если при сложении подстановок второго и пятого классов получаются подстановки третьего, седьмого и одиннадцатого классов, т.е. если в отношении классов имеет место равенство:  $2 + 5 = 3, 7, 11$ , то пятый класс обязательно окажется во второй строке на пересечениях 3-го, 7-го и 11-го столбцов; а поскольку табл. 3.2 симметричная, то второй класс нужно искать в пятой строке на пересечениях этих же трех столбцов. Таким образом, каждая клеточка таблицы несет двойную информацию: она указывает, во-первых, в какие классы попадают результирующие подстановки; во-вторых, где нужно искать подстановки исходных слагаемых. Поэтому, когда заполнена первая строка, мы имеем информацию не только о первом столбце, но можем про-

ставить первый класс по всей таблице сложения. При заполнении второй строки мы узнаем, в каких клетках нужно проставить 2 и т.д.

Мультипликативная группа октаэдра (рис. 3.9) та же, что и куба. Поэтому узлы  $\Gamma_2$  можно попытаться уложить на ребра и грани октаэдра, и наоборот, большой цикл из цепей октаэдра можно уложить на кубе.

Ребрами октаэдра определяются 120 пятизвенных цепей, что значительно больше числа семизвенных цепей куба. Это объясняется тем, что в вершинах куба соединяются три ребра, а в вершинах октаэдра — четыре: чем выше степень связи каждой вершины со всеми остальными вершинами, тем больше количество цепей.

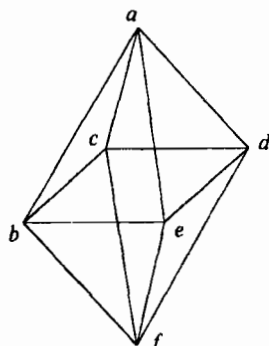


Рис. 3.9

Приведем полную мультипликативную группу вращения октаэдра (см. табл. 2.54, столбец  $O(6)$ ):

$(bcde), (af)(be)(cd), (aeb)(cdf), (aed)(bfc), (aefc),$   
 $(bedc), (af)(bc)(de), (abe)(cfd), (ade)(bcf), (ab)(ce)(df),$   
 $(abfd), (ae)(bd)(cf), (acd)(bfe), (af)(ce), (abc)(def)$   
 $(adfb), (ad)(bf)(ce), (adc)(bef), (af)(bd), e.$   
 $(acfe), (ac)(bd)(ef), (acb)(dfe), (bd)(ce),$

Действуя этой группой на 6-, 12- и два 8-цикла из цепей октаэдра —

6-цикл:  $\{defbca, edfbca, bfdaca, bfdeac, bfcaed, fbcaed\}$ ;

8-цикл:  $\{abcfed, abcfde, aedfcb, aedfbc, acbfde, acbfed, adefcb, adefcb\}$ ;

8-цикл:  $\{abfdec, abfced, aedcfb, aedcbf, aefbcd, aefdcb, abcdfe, abcdfe\}$ ;

12-цикл:  $\{adcbfe, adcbef, adfebc, acbefd, acbedf, acfdeb,$   
 $abedfc, abedcf, abfcde, aedcfb, aedcbf, aefbcd\}$ ,

мы получим достаточную информацию для составления большого 120-цикла, который затем можно попытаться уложить на ребра и грани куба или октаэдра.

### Классы и подгруппы группы цепей $\Gamma_5$

До сих пор мы рассматривали симметричные графы. Но любой несимметричный граф так или иначе является подграфом полного высокосимметричного графа. Единственным неудобством группового

анализа графов является быстро возрастающий с ростом числа вершин порядок группы. Так, субстанционным множеством для аддитивной группы  $G_5$  полного графа  $\Gamma_5$ , изображенного на рис. 3.10, служат 60 четырехзвенных цепей:

1 = 0123	11 = 4782	21 = 6819	31 = 0629	41 = 7956	51 = 5083
2 = 0193	12 = 4712	22 = 6879	32 = 0639	42 = 7365	52 = 5073
3 = 0839	13 = 5173	23 = 6297	33 = 0593	43 = 1043	53 = 5687
4 = 0829	14 = 5183	24 = 6217	34 = 0523	44 = 1063	54 = 5478
5 = 0792	15 = 5237	25 = 1264	35 = 8254	45 = 1746	55 = 2104
6 = 0732	16 = 5287	26 = 1946	36 = 8345	46 = 1864	56 = 2507
7 = 4321	17 = 5978	27 = 1563	37 = 8659	47 = 2607	57 = 6019
8 = 4381	18 = 5938	28 = 1543	38 = 8649	48 = 2804	58 = 6517
9 = 4918	19 = 6371	29 = 0432	39 = 7452	49 = 9408	59 = 8154
10 = 4928	20 = 6391	30 = 0492	40 = 7462	50 = 9706	60 = 8059.

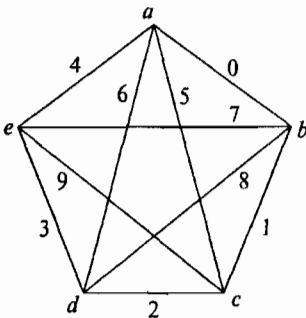


Рис. 3.10

Первые 24 цепи приходятся на привязку  $a$ . Относительно этой привязки существует два класса ребер  $\{0, 4, 5, 6\}$  и  $\{1, 3, 7, 8, 9\}$ . Следовательно, можно выделить 11 укрупненных классов, по которым раскладываются элементы подгруппы  $G_{5a}$ .

*Класс 1:*

$$\begin{aligned} \underline{40} &= 7 - 1 = 10 - 4, & \underline{50} &= 18 - 3 = 15 - 6, \\ \underline{60} &= 20 - 2 = 23 - 5, & \underline{54} &= 14 - 8 = 16 - 11, \\ \underline{64} &= 21 - 9 = 24 - 12, & \underline{65} &= 19 - 13 = 22 - 17; \end{aligned}$$

*Класс 2:*

$$\begin{aligned} \underline{21} &= 10 - 9 = 15 - 13, & \underline{23} &= 4 - 5 = 24 - 19, & \underline{71} &= 6 - 1 = 22 - 21, \\ \underline{81} &= 3 - 2 = 11 - 12, & \underline{91} &= 18 - 14 = 23 - 24, & \underline{73} &= 12 - 7 = 17 - 18, \\ \underline{82} &= 8 - 7 = 22 - 23, & \underline{92} &= 2 - 1 = 17 - 16, & \underline{83} &= 16 - 15 = 21 - 20, \\ \underline{78} &= 5 - 4 = 13 - 14, & \underline{93} &= 9 - 8 = 5 - 6, & \underline{79} &= 11 - 10 = 19 - 20; \end{aligned}$$

*Класс 3:*

$$\begin{aligned} \underline{40} \underline{17} &= 7 - 6, & \underline{54} \underline{39} &= 14 - 9, & \underline{40} \underline{29} &= 7 - 2, & \underline{54} \underline{82} &= 14 - 7, \\ \underline{40} \underline{73} &= 12 - 1, & \underline{54} \underline{91} &= 18 - 8, & \underline{40} \underline{82} &= 8 - 1, & \underline{54} \underline{78} &= 13 - 8, \\ \underline{40} \underline{87} &= 10 - 5, & \underline{54} \underline{79} &= 16 - 10, & \underline{40} \underline{23} &= 10 - 3, & \underline{54} \underline{81} &= 16 - 12, \\ \underline{40} \underline{79} &= 11 - 4, & \underline{54} \underline{92} &= 17 - 11, & \underline{40} \underline{12} &= 9 - 4, & \underline{54} \underline{38} &= 15 - 11, \\ \underline{50} \underline{81} &= 18 - 2, & \underline{64} \underline{93} &= 21 - 8, & \underline{50} \underline{32} &= 18 - 4, & \underline{64} \underline{71} &= 22 - 9, \\ \underline{50} \underline{71} &= 15 - 1, & \underline{64} \underline{38} &= 20 - 9, & \underline{50} \underline{39} &= 15 - 5, & \underline{64} \underline{18} &= 24 - 11, \\ \underline{50} \underline{19} &= 14 - 3, & \underline{64} \underline{73} &= 24 - 7, & \underline{50} \underline{73} &= 17 - 3, & \underline{64} \underline{91} &= 23 - 12, \end{aligned}$$

$$\begin{array}{llll} \underline{5012} = 13 - 6, & \underline{6432} = 19 - 12, & \underline{5083} = 16 - 6, & \underline{6412} = 21 - 10, \\ \underline{6018} = 20 - 3, & \underline{6512} = 19 - 15, & \underline{6092} = 20 - 1, & \underline{6578} = 19 - 14, \\ \underline{6083} = 21 - 2, & \underline{6523} = 24 - 13, & \underline{6079} = 19 - 2, & \underline{6597} = 20 - 13, \\ \underline{6078} = 23 - 4, & \underline{6592} = 22 - 16, & \underline{6093} = 23 - 6, & \underline{6518} = 22 - 18, \\ \underline{6082} = 22 - 5, & \underline{6528} = 23 - 17, & \underline{6019} = 24 - 5, & \underline{6517} = 21 - 17; \end{array}$$

*Класс 4:*

$$\begin{array}{llll} \underline{408173} = 11 - 1, & \underline{549237} = 18 - 11, & \underline{402819} = 7 - 3, & \underline{547183} = 16 - 7, \\ \underline{407918} = 12 - 4, & \underline{541932} = 14 - 10, & \underline{408321} = 10 - 2, & \underline{547821} = 15 - 8, \\ \underline{409387} = 10 - 6, & \underline{547391} = 17 - 8, & \underline{403912} = 8 - 4, & \underline{543287} = 14 - 12, \\ \underline{403917} = 7 - 5, & \underline{547129} = 16 - 9, & \underline{408293} = 9 - 1, & \underline{541832} = 13 - 11, \\ \underline{501287} = 14 - 6, & \underline{643297} = 20 - 12, & \underline{503879} = 15 - 4, & \underline{647819} = 24 - 10, \\ \underline{501879} = 13 - 3, & \underline{648392} = 21 - 7, & \underline{508237} = 18 - 5, & \underline{647128} = 23 - 9, \\ \underline{508192} = 18 - 1, & \underline{643879} = 19 - 9, & \underline{502973} = 16 - 3, & \underline{641297} = 21 - 11, \\ \underline{507921} = 15 - 2, & \underline{642873} = 24 - 8, & \underline{508392} = 17 - 6, & \underline{648291} = 22 - 12, \\ \underline{601289} = 21 - 5, & \underline{659123} = 23 - 13, & \underline{609371} = 23 - 1, & \underline{651978} = 19 - 18, \\ \underline{608371} = 22 - 2, & \underline{659283} = 22 - 15, & \underline{601297} = 20 - 6, & \underline{653817} = 20 - 17, \\ \underline{603218} = 20 - 4, & \underline{652819} = 24 - 17, & \underline{602379} = 24 - 2, & \underline{659371} = 22 - 14, \\ \underline{607328} = 23 - 3, & \underline{651238} = 19 - 16, & \underline{603912} = 19 - 5, & \underline{659783} = 21 - 13; \end{array}$$

*Класс 5:*

$$\begin{array}{llll} \underline{5471} = 15 - 7 = 17 - 9, & \underline{5432} = 18 - 10 = 13 - 12, & \underline{6492} = 20 - 7 = 22 - 11, & \underline{6478} = 23 - 10 = 19 - 8, \\ \underline{5082} = 14 - 1 = 17 - 5, & \underline{5079} = 16 - 4 = 13 - 2, & \underline{6073} = 24 - 1 = 22 - 3, & \underline{6012} = 21 - 4 = 19 - 6, \\ \underline{4019} = 8 - 3 = 12 - 5, & \underline{4083} = 11 - 6 = 9 - 2, & \underline{6518} = 20 - 18 = 24 - 16, & \underline{6593} = 23 - 15 = 21 - 14; \end{array}$$

*Класс 6:*

$$\begin{array}{llll} \underline{4013} = 9 - 3 = 12 - 6, & \underline{5472} = 13 - 7 = 17 - 10, & \underline{4089} = 8 - 2 = 11 - 5, & \underline{5431} = 18 - 9 = 15 - 12, \\ \underline{5072} = 13 - 1 = 17 - 4, & \underline{6498} = 23 - 11 = 20 - 8, & \underline{5089} = 14 - 2 = 16 - 5, & \underline{6472} = 22 - 10 = 19 - 7, \\ \underline{6013} = 21 - 3 = 24 - 6, & \underline{6513} = 24 - 15 = 21 - 18, & \underline{6072} = 22 - 4 = 19 - 1, & \underline{6598} = 23 - 16 = 20 - 14; \end{array}$$

*Класс 7:*

$$\begin{array}{ll} \underline{401782} = 9 - 5 = 8 - 6, & \underline{548192} = 17 - 12 = 18 - 7, \\ \underline{402973} = 12 - 2 = 11 - 3, & \underline{547938} = 13 - 9 = 15 - 10, \\ \underline{501932} = 13 - 5 = 14 - 4, & \underline{649371} = 22 - 8 = 23 - 7, \\ \underline{507183} = 16 - 1 = 17 - 2, & \underline{643812} = 19 - 11 = 20 - 10, \\ \underline{607819} = 19 - 3 = 24 - 4, & \underline{659712} = 20 - 15 = 21 - 16, \\ \underline{608392} = 22 - 6 = 21 - 1, & \underline{657328} = 23 - 18 = 24 - 14; \end{array}$$

*Класс 8:*

$$\begin{array}{llll} \underline{408193} = 10 - 1, & \underline{401839} = 7 - 4, & \underline{502978} = 15 - 3, & \underline{509287} = 18 - 6, \\ \underline{601237} = 20 - 5, & \underline{601237} = 23 - 2, & \underline{541237} = 14 - 11, & \underline{541237} = 16 - 8, \\ \underline{642978} = 24 - 9, & \underline{642978} = 21 - 12, & \underline{658193} = 22 - 13, & \underline{658193} = 19 - 17; \end{array}$$

*Класс 9:*

$$\underline{40217983} = 11 - 2, \quad \underline{54217983} = 15 - 9, \quad \underline{40217983} = 8 - 5, \quad \underline{54217983} = 13 - 10,$$

$40217983 = 9 - 6$ ,  $54217983 = 18 - 12$ ,  $40217983 = 12 - 3$ ,  $54217983 = 17 - 7$ ,  
 $50217983 = 16 - 2$ ,  $64217983 = 23 - 8$ ,  $50217983 = 14 - 5$ ,  $64217983 = 19 - 10$ ,  
 $50217983 = 13 - 4$ ,  $64217983 = 20 - 11$ ,  $50217983 = 17 - 1$ ,  $64217983 = 22 - 7$ ,  
 $60217983 = 22 - 1$ ,  $65217983 = 23 - 14$ ,  $60217983 = 24 - 3$ ,  $65217983 = 21 - 15$ ,  
 $60217983 = 19 - 4$ ,  $65217983 = 20 - 16$ ,  $60217983 = 21 - 6$ ,  $65217983 = 24 - 18$ ;

Класс 10:

$7129 = 6 - 2 = 11 - 9$ ,  $7328 = 12 - 8 = 5 - 3$ ,  $8123 = 4 - 2 = 16 - 13$ ,  
 $9371 = 5 - 1 = 17 - 14$ ,  $9281 = 3 - 1 = 24 - 22$ ,  $9783 = 21 - 19 = 4 - 6$ ,  
 $8293 = 9 - 7 = 17 - 15$ ,  $9187 = 18 - 13 = 10 - 12$ ,  $9321 = 10 - 8 = 23 - 19$ ,  
 $8371 = 22 - 20 = 11 - 7$ ,  $2178 = 15 - 14 = 23 - 21$ ,  $9237 = 18 - 16 = 20 - 24$ ;

Класс 11:

$9381 = 4 - 1 = 17 - 13 = 22 - 19 = 10 - 7$ ,  
 $7123 = 5 - 2 = 11 - 8 = 16 - 14 = 23 - 20$ ,  
 $7928 = 12 - 9 = 15 - 18 = 24 - 21 = 6 - 3$ .

Табл. 3.3 является таблицей сложения выписанных здесь укрупненных классов подгруппы  $G_{5a}$ .

Таблица 3.3

+	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	-	3	2, 5	7, 10	3	6	4	11	9	4	8
2	3	10	1, 4, 6, 7	3, 5, 8, 9	4, 6	3, 5	3, 9	4	4, 7	2, 11	10
3	2, 5	1, 4, 6, 7	4, 6, 7, 10	2, 3, 5, 9, 11	1, 4, 6, 10	2, 3, 5	2, 3, 8, 9	7, 10	4, 7, 10	3, 5, 8, 9	4
4	7, 10	3, 5, 8, 9	2, 3, 5, 9, 11	4, 6, 7, 10	2, 3, 8, 9	4, 7, 10	1, 4, 6, 10	2, 5	2, 3, 5	1, 4, 6, 7	3
5	3	4, 6	1, 4, 6, 10	2, 3, 8, 9	7	2, 3	5, 11	4	4, 10	3, 9	7
6	6	3, 5	2, 3, 5	4, 7, 10	2, 3	1	4, 10	9	8, 11	4, 7	9
7	4	3, 9	2, 3, 8, 9	1, 4, 6, 10	5, 11	4, 10	7	3	2, 3	4, 6	5
8	11	4	7, 10	2, 5	4	9	3	-	6	3	1
9	9	4, 7	4, 7, 10	2, 3, 5	4, 10	8, 11	2, 3	6	1	3, 5	6
10	4	2, 11	3, 5, 8, 9	1, 4, 6, 7	3, 9	4, 7	4, 6	3	3, 5	10	2
11	8	10	4	3	7	9	5	1	6	2	-

Удалим из нашего графа (рис 3.10) ребро 9; вслед за этим исчезнут цепи 2, 3, 4, 5, 9, 10, 17, 18, 20, 21, 22, 23 и от подгруппы  $G_{5a}$  останется подгруппа, определяемая цепями  $\{1, 6, 7, 8, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 19, 24\}$ . Выпишем все подгруппы группы  $G_{5a}$ :

$\{1, 2\}$ ,  $\{13, 14\}$ ,  $\{1, 7\}$ ,  $\{8, 14\}$ ,  $\{22, 23\}$ ,  $\{13, 15\}$ ,  $\{20, 21\}$ ,  $\{10, 11\}$ ,  
 $\{3, 4\}$ ,  $\{15, 16\}$ ,  $\{2, 20\}$ ,  $\{9, 21\}$ ,  $\{16, 17\}$ ,  $\{19, 24\}$ ,  $\{7, 12\}$ ,  $\{8, 9\}$ ,  
 $\{5, 6\}$ ,  $\{17, 18\}$ ,  $\{3, 18\}$ ,  $\{11, 16\}$ ,  $\{15, 23\}$ ,  $\{7, 20\}$ ,  $\{6, 11\}$ ,  $\{1, 14\}$ ,  
 $\{7, 8\}$ ,  $\{19, 20\}$ ,  $\{4, 10\}$ ,  $\{12, 24\}$ ,  $\{16, 24\}$ ,  $\{10, 18\}$ ,  $\{9, 17\}$ ,  $\{2, 13\}$ ,  
 $\{9, 10\}$ ,  $\{21, 22\}$ ,  $\{5, 23\}$ ,  $\{13, 19\}$ ,  $\{14, 18\}$ ,  $\{2, 3\}$ ,  $\{4, 5\}$ ,  $\{1, 6\}$ ,  
 $\{11, 12\}$ ,  $\{23, 24\}$ ,  $\{6, 15\}$ ,  $\{17, 22\}$ ,  $\{5, 12\}$ ,  $\{3, 22\}$ ,  $\{8, 19\}$ ,  $\{4, 21\}$ ;

{2, 19, 20}, {5, 23, 24}, {1, 2, 20}, {5, 6, 23}, {3, 17, 18}, {3, 4, 18},  
 {5, 6, 15}, {6, 15, 16}, {3, 4, 10}, {4, 9, 10}, {1, 2, 7}, {1, 7, 8},  
 {17, 18, 22}, {17, 21, 22}, {13, 19, 20}, {13, 14, 19}, {9, 21, 22}, {9, 10, 21},  
 {12, 23, 24}, {11, 12, 24}, {11, 15, 16}, {8, 13, 14}, {11, 12, 16}, {7, 8, 14};

{1, 6, 13, 15}, {3, 17, 18, 22}, {7, 12, 13, 15}, {13, 15, 19, 24},  
 {1, 6, 19, 24}, {3, 4, 10, 18}, {7, 8, 9, 10}, {13, 14, 15, 16},  
 {1, 6, 7, 12}, {3, 4, 5, 6}, {7, 8, 11, 12}, {13, 14, 17, 18},  
 {1, 7, 8, 14}, {4, 5, 16, 17}, {8, 9, 20, 21}, {14, 18, 20, 21},  
 {1, 2, 7, 20}, {4, 5, 22, 23}, {8, 9, 14, 18}, {15, 16, 17, 18},  
 {1, 2, 3, 4}, {4, 5, 10, 11}, {8, 13, 14, 19}, {16, 17, 22, 23},  
 {1, 2, 5, 6}, {4, 9, 10, 21}, {9, 17, 21, 22}, {19, 20, 23, 24},  
 {2, 3, 14, 18}, {5, 6, 15, 23}, {9, 10, 11, 12}, {19, 20, 21, 22},  
 {2, 3, 20, 21}, {5, 12, 23, 24}, {10, 11, 22, 23}, {21, 22, 23, 24};  
 {2, 3, 8, 9}, {6, 11, 15, 16}, {10, 11, 16, 17},  
 {2, 13, 19, 20}, {7, 12, 19, 24}, {11, 12, 16, 24},

{1, 2, 3, 4, 20, 21}, {2, 3, 13, 14, 17, 18}, {8, 9, 13, 14, 17, 18},  
 {1, 2, 5, 6, 7, 12}, {3, 4, 5, 6, 10, 11}, {8, 9, 14, 18, 20, 21},  
 {1, 2, 3, 4, 14, 18}, {3, 4, 5, 6, 22, 23}, {8, 9, 19, 20, 21, 22},  
 {1, 2, 3, 4, 5, 6}, {4, 5, 9, 10, 11, 12}, {9, 10, 11, 12, 16, 17},  
 {1, 2, 5, 6, 13, 15}, {4, 5, 10, 11, 22, 23}, {10, 11, 13, 14, 15, 16},  
 {1, 6, 7, 12, 19, 24}, {4, 5, 16, 17, 22, 23}, {10, 11, 16, 17, 22, 23},  
 {1, 6, 7, 12, 13, 15}, {4, 5, 21, 22, 23, 24}, {13, 14, 15, 16, 17, 18},  
 {1, 6, 7, 8, 11, 12}, {4, 5, 10, 11, 16, 17}, {13, 15, 19, 20, 23, 24},  
 {1, 6, 13, 14, 15, 16}, {7, 8, 9, 10, 20, 21}, {13, 14, 15, 16, 19, 24},  
 {1, 6, 13, 15, 19, 24}, {7, 8, 11, 12, 19, 24}, {15, 16, 17, 18, 22, 23},  
 {2, 3, 8, 9, 14, 18}, {7, 8, 9, 10, 14, 18}, {16, 17, 21, 22, 23, 24},  
 {2, 3, 8, 9, 20, 21}, {7, 8, 9, 10, 11, 12}, {19, 20, 21, 22, 23, 24};  
 {2, 3, 14, 18, 20, 21}, {7, 12, 13, 15, 19, 24},  
 {2, 3, 19, 20, 21, 22}, {7, 12, 19, 20, 23, 24},

{1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 10}, {3, 4, 5, 6, 10, 11, 22, 23},  
 {1, 2, 3, 4, 14, 18, 20, 21}, {4, 5, 9, 10, 11, 16, 17},  
 {1, 2, 5, 6, 7, 12, 13, 15}, {4, 5, 10, 11, 16, 17, 22, 23},  
 {1, 2, 5, 6, 19, 20, 23, 24}, {4, 5, 16, 17, 21, 22, 23, 24},  
 {1, 6, 7, 12, 13, 15, 19, 24}, {7, 8, 9, 10, 14, 18, 20, 21},  
 {1, 6, 7, 8, 11, 12, 19, 24}, {7, 8, 11, 12, 13, 14, 15, 16},  
 {1, 6, 13, 14, 15, 16, 19, 24}, {7, 12, 13, 15, 19, 20, 23, 24},  
 {2, 3, 8, 9, 13, 14, 17, 18}, {9, 10, 11, 12, 21, 22, 23, 24},  
 {2, 3, 8, 9, 14, 18, 20, 21}, {10, 11, 15, 16, 17, 18, 22, 23},  
 {2, 3, 8, 9, 19, 20, 21, 22}, {13, 14, 17, 18, 19, 20, 21, 22};  
 {3, 4, 5, 6, 15, 16, 17, 18},

{1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 10, 14, 18}, {3, 4, 5, 6, 10, 11, 15, 16, 17, 18},  
 {1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 10, 20, 21}, {3, 4, 5, 6, 15, 16, 17, 18, 22, 23},  
 {1, 2, 5, 6, 7, 12, 19, 20, 23, 24}, {4, 5, 9, 10, 11, 12, 21, 22, 23, 24},  
 {1, 2, 5, 6, 13, 15, 19, 20, 23, 24}, {7, 8, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 19, 24},  
 {1, 6, 7, 8, 11, 12, 13, 14, 15, 16}, {8, 9, 13, 14, 17, 18, 19, 20, 21, 22},  
 {2, 3, 13, 14, 17, 18, 19, 20, 21, 22}, {9, 10, 11, 12, 16, 17, 21, 22, 23, 24};

- |   |   |
|---|---|
| {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12},      | {2, 3, 8, 9, 13, 14, 17, 18, 19, 20, 21, 22},     |
| {1, 2, 3, 4, 5, 6, 13, 14, 15, 16, 17, 18},   | {3, 4, 5, 6, 10, 11, 15, 16, 17, 18, 22, 23},     |
| {1, 2, 3, 4, 5, 6, 19, 20, 21, 22, 23, 24},   | {4, 5, 9, 10, 11, 12, 16, 17, 21, 22, 23, 24},    |
| {1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 10, 14, 18, 20, 21},    | {7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18},    |
| {1, 2, 5, 6, 7, 12, 13, 15, 19, 20, 23, 24},  | {7, 8, 9, 10, 11, 12, 19, 20, 21, 22, 23, 24},    |
| {1, 6, 7, 8, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 19, 24}, | {13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24}; |
- {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18},  
 {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 19, 20, 21, 22, 23, 24},  
 {1, 2, 3, 4, 5, 6, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24},  
 {7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24}.

### Задача Гамильтона о цепях додекаэдра

В 1859 г. сэръ Вильям Гамильтон, знаменитый ирландский математик, давший миру теорию комплексного числа и кватерниона, предложил детскую головоломку, в которой предлагалось совершить «кругосветное путешествие» по 20 городам, расположенным в различных частях земного шара. Каждый город соединялся дорогами с тремя соседними так, что дорожная сеть образовывала 30 ребер додекаэдра, в вершинах которого находились города  $a, b, \dots, t$  (рис. 3.11). Обязательным условием было требование посетить каждый город, за исключением первого, лишь один раз.

Если путешествие начать из города  $a$ , то последними должны быть города  $b, e$  или  $h$ , иначе мы не сможем вернуться в первоначальный пункт  $a$ . *Непосредственное исчисление* показывает, что число таких замкнутых маршрутов равно 60.

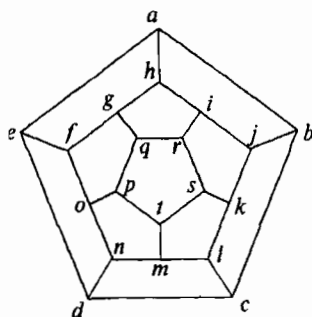


Рис. 3.11

Можно потребовать посещения всех городов строго по одному разу, включая и первый, т.е. допускается окончание путешествия в любом городе (например, предполагается, что в начальный пункт можно будет вернуться самолетом). Тогда общее число цепных маршрутов увеличится до 162. В табл. 3.4 перечислены все эти цепи, причем в специально организованной последовательности.

Принцип организации цепей для додекаэдра выбран тот же, что и ранее для куба, т.е. *принцип инверсии хвостовой последовательности вершин*. Однорреберная замена касается 1, 4, 7, 10, 13 или 16 ребра каждой цепи. Таким образом, получается 11 циклов по 15 цепей в каждом и 3 цикла по 14 цепей.



Таблица 3.4

№	Гамильтоновы цепи	S	$\Delta_i$	$\Sigma A$	$\Sigma B$	$\Sigma C$
Цикл 1						
1	<i>abclkjihgfednmsrqpo</i>	<i>s</i>	$-\Delta_{16}$	342	247	302
2	<i>abclkjihgfednopqrstm</i>	<i>a</i>	$-\Delta_{17}$	349	240	299
3	<i>abclmrsrqpondefghijk</i>	<i>s</i>	$-\Delta_7$	339	250	302
4	<i>abclmstskjihgfednopqr</i>	<i>s</i>	$-\Delta_{11}$	341	248	307
5	<i>abclmstskjirqpondefgh</i>	<i>a</i>	$\Delta_3$	321	268	318
6	<i>ahgfednopqrijkstmlcb</i>	<i>a</i>	$-\Delta_{12}$	320	269	313
7	<i>ahgfednopqrijbclmstsk</i>	<i>a</i>	$\Delta_{17}$	338	251	312
8	<i>ahgfednopqrijbclkstms</i>	<i>s</i>	$\Delta_{16}$	348	241	309
9	<i>ahgfednmtsklcbjirqpo</i>	<i>a</i>	$-\Delta_{10}$	341	248	312
10	<i>ahgfopqrijbclkstmnde</i>	<i>a</i>	$\Delta_3$	319	270	301
11	<i>aednmtsklcbjirqpofgh</i>	<i>a</i>	$\Delta_{11}$	318	271	302
12	<i>aednmtsklcbjihgfopqr</i>	<i>a</i>	$\Delta_7$	338	251	291
13	<i>aednmtsrsqpfghijbclsk</i>	<i>a</i>	$\Delta_{12}$	336	253	286
14	<i>aednmtsrsqpfghijklcb</i>	<i>a</i>	$\Delta_2$	318	271	287
15	<i>abclkjihgfopqrstmnde</i>	<i>a</i>	$\Delta_{10}$	320	269	291
Цикл 2						
16	<i>aednofghijbclmtpqrsk</i>	<i>s</i>	$\Delta_{17}$	331	258	300
17	<i>aednofghijbclksrqptm</i>	<i>a</i>	$\Delta_{16}$	341	248	297
18	<i>aednmpqrsklcbjihgfo</i>	<i>s</i>	$\Delta_8$	334	241	300
19	<i>aednmpofghijbclksrq</i>	<i>s</i>	$\Delta_{13}$	333	242	312
20	<i>aednmpofgqrsklcbjih</i>	<i>a</i>	$-\Delta_3$	309	266	323
21	<i>ahijbclksrqgfoptmnde</i>	<i>a</i>	$\Delta_{10}$	310	265	322
22	<i>ahijbclksrqgfednmpo</i>	<i>a</i>	$-\Delta_{16}$	332	243	333
23	<i>ahijbclksrqgfednoptm</i>	<i>s</i>	$-\Delta_{17}$	339	250	330
24	<i>ahijbclmtpondefgqrsk</i>	<i>a</i>	$\Delta_{12}$	329	260	333
25	<i>ahijksrqgfednoptmlcb</i>	<i>a</i>	$-\Delta_1$	311	278	334
26	<i>abclmtpondefgqrskjih</i>	<i>a</i>	$-\Delta_{13}$	312	277	339
27	<i>abclmtpondefghijksrq</i>	<i>a</i>	$-\Delta_8$	336	253	328
28	<i>abclmtpqrskjihgfedno</i>	<i>a</i>	$-\Delta_{10}$	337	252	316
29	<i>abclmtpqrskjihgfonde</i>	<i>a</i>	$-\Delta_2$	315	274	305
30	<i>aednofghijksrqptmlcb</i>	<i>a</i>	$-\Delta_{12}$	313	276	301
Цикл 3						
31	<i>ahgqrijbcdefoptsklmn</i>	<i>s</i>	$\Delta_{18}$	325	264	299
32	<i>ahgqrijbcdefonmlkstp</i>	<i>a</i>	$\Delta_{19}$	330	259	294

Продолжение табл. 3.4

№	Гамильтоновы цепи	S	$\Delta_i$	$\Sigma A$	$\Sigma B$	$\Sigma C$
33	<i>ahgqptsklmnofedcbjir</i>	<i>s</i>	$\Delta_7$	324	265	281
34	<i>ahgqptsrijbcdefonmlk</i>	<i>s</i>	$\Delta_{12}$	322	267	276
35	<i>ahgqptsrijklmnofedcb</i>	<i>a</i>	$-\Delta_1$	304	285	277
36	<i>abcdefonmlkjirstpqgh</i>	<i>a</i>	$\Delta_{11}$	305	284	282
37	<i>abcdefonmlkjihgqptsr</i>	<i>a</i>	$-\Delta_{19}$	325	264	271
38	<i>abcdefonmlkjihgqrstp</i>	<i>s</i>	$-\Delta_{18}$	331	258	284
39	<i>abcdefoptsrqghijklmn</i>	<i>a</i>	$\Delta_{14}$	326	263	289
40	<i>abcdnmlkjihgqrstpofo</i>	<i>a</i>	$-\Delta_2$	305	284	295
41	<i>aefoptsrqghijklmndcb</i>	<i>a</i>	$-\Delta_{12}$	303	286	291
42	<i>aefoptsrqghijbcdnmlk</i>	<i>a</i>	$-\Delta_7$	321	268	290
43	<i>aefoptsklmndcbjihgqr</i>	<i>a</i>	$-\Delta_{11}$	323	266	295
44	<i>aefoptsklmndcbjirqgh</i>	<i>a</i>	$-\Delta_3$	303	286	306
45	<i>ahgqrijbcdnmlkstpofo</i>	<i>a</i>	$-\Delta_{14}$	304	285	305
Цикл 4						
46	<i>ahirqgfedcbjkstponml</i>	<i>s</i>	$-\Delta_{20}$	323	266	326
47	<i>ahirqgfedcbjklmnopts</i>	<i>a</i>	$-\Delta_{21}$	330	259	320
48	<i>ahirstponmlkjbcdefgq</i>	<i>s</i>	$-\Delta_8$	320	269	316
49	<i>ahirstpqgfedcbjklmno</i>	<i>s</i>	$-\Delta_{10}$	321	268	304
50	<i>ahirstpqgfonmlkjbcde</i>	<i>a</i>	$\Delta_3$	299	290	293
51	<i>aedcbjklmnofgqptsrih</i>	<i>a</i>	$-\Delta_{13}$	298	291	294
52	<i>aedcbjklmnofghirstpq</i>	<i>a</i>	$\Delta_{21}$	322	267	283
53	<i>aedcbjklmnofghirqpts</i>	<i>s</i>	$\Delta_{20}$	332	257	287
54	<i>aedcbjkstpqrihgfonml</i>	<i>a</i>	$-\Delta_{15}$	325	264	293
55	<i>aedclmnofghirqptskj</i>	<i>a</i>	$\Delta_2$	304	285	281
56	<i>abjkstpqrihgfonmlcde</i>	<i>a</i>	$\Delta_{10}$	306	283	285
57	<i>abjkstpqrihgfedclmno</i>	<i>a</i>	$\Delta_8$	328	261	296
58	<i>abjkstponmlcdefghirq</i>	<i>a</i>	$\Delta_{13}$	327	262	308
59	<i>abjkstponmlcdefgqrih</i>	<i>a</i>	$\Delta_1$	303	286	319
60	<i>ahirqgfedclmnoptskj</i>	<i>a</i>	$\Delta_{15}$	302	287	314
Цикл 5						
61	<i>aefondcbjihgqptmlksr</i>	<i>s</i>	$-\Delta_{19}$	322	267	299
62	<i>aefondcbjihgqrsklmt</i>	<i>a</i>	$-\Delta_{18}$	328	261	312
63	<i>aefoptmlksrqghijbcdn</i>	<i>s</i>	$-\Delta_9$	323	266	317

Продолжение табл. 3.4

№	Гамильтоновы цепи	S	$\Delta_i$	$\Sigma A$	$\Sigma B$	$\Sigma C$
64	<i>aefoptmndcbjihgqrskl</i>	<i>s</i>	$-\Delta_{15}$	325	264	316
65	<i>aefoptmndclksrqghijb</i>	<i>a</i>	$\Delta_2$	304	285	304
66	<i>abjihgqrsklcdnmtpofoe</i>	<i>a</i>	$-\Delta_{14}$	306	283	308
67	<i>abjihgqrskldefoptmn</i>	<i>a</i>	$\Delta_{18}$	327	264	302
68	<i>abjihgqrskldefonmtp</i>	<i>s</i>	$\Delta_{19}$	332	257	297
69	<i>abjihgqptmnofedclksr</i>	<i>a</i>	$-\Delta_{11}$	326	263	284
70	<i>abjirskldefonmtpqgh</i>	<i>a</i>	$\Delta_1$	306	283	295
71	<i>ahgqptmnofedclksrijb</i>	<i>a</i>	$\Delta_{15}$	305	284	290
72	<i>ahgqptmnofedcbjirskl</i>	<i>a</i>	$\Delta_9$	326	263	302
73	<i>ahgqptmlksrijbdefon</i>	<i>a</i>	$\Delta_{14}$	324	265	303
74	<i>ahgqptmlksrijbednofe</i>	<i>a</i>	$\Delta_3$	303	286	309
75	<i>aefondcbjirsklmtpqgh</i>	<i>a</i>	$\Delta_{11}$	302	287	310
	Цикл 6					
76	<i>abjkledfghirstmnopq</i>	<i>s</i>	$\Delta_{21}$	331	258	298
77	<i>abjkledfghirqponmts</i>	<i>a</i>	$\Delta_{20}$	341	248	302
78	<i>abjkstmnopqrihgsfedcl</i>	<i>s</i>	$\Delta_9$	334	255	308
79	<i>abjkstmlcdefghirqpon</i>	<i>s</i>	$\Delta_{14}$	332	257	309
80	<i>abjkstmlcdnopqrihgfe</i>	<i>a</i>	$-\Delta_2$	311	278	315
81	<i>aefghirqpondclmtskjb</i>	<i>a</i>	$\Delta_{15}$	309	280	311
82	<i>aefghirqpondcbjkstml</i>	<i>a</i>	$-\Delta_{20}$	330	259	323
83	<i>aefghirqpondcbjklmts</i>	<i>s</i>	$-\Delta_{21}$	337	252	317
84	<i>aefghirstmlkjbednopq</i>	<i>a</i>	$\Delta_{13}$	327	262	313
85	<i>aefgqpondcbjklmtsrih</i>	<i>a</i>	$-\Delta_3$	303	286	324
86	<i>ahirstmlkjbednopqgfe</i>	<i>a</i>	$-\Delta_{14}$	304	285	323
87	<i>ahirstmlkjbedfgqpon</i>	<i>a</i>	$-\Delta_9$	325	264	317
88	<i>ahirstmnopqgfedcbjkl</i>	<i>a</i>	$-\Delta_{15}$	327	262	316
89	<i>ahirstmnopqgfedclkj</i>	<i>a</i>	$-\Delta_1$	306	283	304
90	<i>abjkledfghgqponmtsrih</i>	<i>a</i>	$-\Delta_{13}$	307	282	309

Продолжение табл. 3.4

№	Гамильтоновы цепи	S	$\Delta_i$	$\Sigma A$	$\Sigma B$	$\Sigma C$
	Цикл 7					
91	<i>ahgfedclkstmnopqrijb</i>	<i>a</i>	$\Delta_{15}$	335	254	304
92	<i>ahgfedcbjirqponmtskl</i>	<i>a</i>	$\Delta_{22}$	356	233	316
93	<i>ahgfedcbjirqponmlkst</i>	<i>s</i>	$-\Delta_{23}$	348	241	312
94	<i>ahgfedcbjirqptsklmno</i>	<i>a</i>	$-\Delta_{10}$	350	239	304
95	<i>ahgfonmlkstpqrijbcde</i>	<i>s</i>	$\Delta_3$	328	261	293
96	<i>aedcbjirqptsklmnofgh</i>	<i>a</i>	$\Delta_{11}$	327	262	294
97	<i>aedcbjihgfonmlkstpqr</i>	<i>a</i>	$\Delta_{26}$	347	242	283
98	<i>aedcbjihgfonmlksrqpt</i>	<i>s</i>	$-\Delta_{22}$	341	248	300
99	<i>aedcbjihgfonmtpqrskl</i>	<i>a</i>	$-\Delta_{15}$	349	240	304
100	<i>aedclksrqptmnofghijb</i>	<i>s</i>	$\Delta_2$	328	261	292
101	<i>abjihgfonmtpqrsklcde</i>	<i>a</i>	$\Delta_{10}$	330	259	296
102	<i>abjihgfedclksrqptmno</i>	<i>a</i>	$\Delta_{23}$	352	237	307
103	<i>abjihgfedclksrqponmt</i>	<i>s</i>	$-\Delta_{26}$	350	239	315
104	<i>abjihgfedclkstmnopqr</i>	<i>a</i>	$-\Delta_{11}$	356	233	298
105	<i>abjirqponmtskldefgh</i>	<i>s</i>	$\Delta_1$	336	253	309
	Цикл 8					
106	<i>ahijbcdnoptmlksrqgfe</i>	<i>a</i>	$-\Delta_{14}$	324	265	344
107	<i>ahijbcdefgqrsklmtpon</i>	<i>a</i>	$-\Delta_{25}$	345	244	338
108	<i>ahijbcdefgqrsklmnopt</i>	<i>s</i>	$\Delta_{27}$	339	250	333
109	<i>ahijbcdefgqrstponmlk</i>	<i>a</i>	$\Delta_{12}$	343	241	311
110	<i>ahijklmnoptsrqgfedcb</i>	<i>s</i>	$-\Delta_1$	325	264	312
111	<i>abcdefgqrstponmlkjih</i>	<i>a</i>	$-\Delta_{13}$	326	263	317
112	<i>abcdefgghijklmnoptsrq</i>	<i>a</i>	$-\Delta_{24}$	350	239	306
113	<i>abcdefgghijklmnopqrst</i>	<i>s</i>	$\Delta_{25}$	349	240	302
114	<i>abcdefgghijklmtrsqqpon</i>	<i>a</i>	$\Delta_{14}$	355	234	307
115	<i>abcdnopqrstmlkjihgfe</i>	<i>s</i>	$-\Delta_2$	334	255	313
116	<i>aefghijklmtrsqqpondcb</i>	<i>a</i>	$-\Delta_{12}$	332	257	309
117	<i>aefghijbcdnopqrstmlk</i>	<i>a</i>	$-\Delta_{27}$	350	239	308
118	<i>aefghijbcdnopqrsklmt</i>	<i>s</i>	$\Delta_{24}$	346	243	330
119	<i>aefghijbcdnoptmlksrq</i>	<i>a</i>	$\Delta_{13}$	347	242	334
120	<i>aefgqrsklmtrpondcbjih</i>	<i>s</i>	$-\Delta_3$	323	266	345
	Цикл 9					
121	<i>ahgqpfednmtsrijkleb</i>	<i>a</i>	$-\Delta_{12}$	295	294	285
122	<i>ahgqpfednmtsrijbelk</i>	<i>a</i>	$-\Delta_7$	313	276	284
123	<i>ahgqpfednmtsklcbjir</i>	<i>s</i>	$-\Delta_{19}$	315	274	289

Продолжение табл. 3.4

№	Гамильтоновы цепи	S	$\Delta_i$	$\Sigma A$	$\Sigma B$	$\Sigma C$
124	<i>ahgqrijbclkstmndefop</i>	<i>s</i>	$\Delta_4$	321	268	302
125	<i>ahgqrijbclkstpofednm</i>	<i>a</i>	$-\Delta_{17}$	319	270	291
126	<i>ahgqrijbclmndefoptsk</i>	<i>a</i>	$\Delta_{12}$	309	280	294
127	<i>ahgqrijkstpofednmlcb</i>	<i>s</i>	$-\Delta_1$	291	298	295
128	<i>abclmndefoptskjirqgh</i>	<i>a</i>	$\Delta_{11}$	292	297	300
129	<i>abclmndefoptskjihgqr</i>	<i>a</i>	$\Delta_7$	312	277	289
130	<i>abclmndefoptsrqghijk</i>	<i>s</i>	$\Delta_{17}$	310	279	284
131	<i>abclkjihgqrstpofednm</i>	<i>s</i>	$-\Delta_4$	320	269	281
132	<i>abclkjihgqrstmndefop</i>	<i>a</i>	$\Delta_{19}$	322	267	292
133	<i>abclkjihgqpofednmtsr</i>	<i>a</i>	$-\Delta_{11}$	316	273	279
134	<i>abclkjirstmndefopqgh</i>	<i>s</i>	$\Delta_1$	296	293	290
	Цикл 10					
135	<i>ahirskjbcmltpqgfonde</i>	<i>a</i>	$\Delta_{10}$	285	304	315
136	<i>ahirskjbcmltpqgfedno</i>	<i>a</i>	$\Delta_8$	307	282	326
137	<i>ahirskjbcmltpondefgq</i>	<i>s</i>	$\Delta_{21}$	306	283	338
138	<i>ahirqgfednoptmlcbjks</i>	<i>s</i>	$-\Delta_5$	316	273	342
139	<i>ahirqgfednoptskjbcml</i>	<i>a</i>	$\Delta_{16}$	315	274	319
140	<i>ahirqgfednmlcbjkstpo</i>	<i>a</i>	$-\Delta_{10}$	308	281	322
141	<i>ahirqgfoptskjbcmlnde</i>	<i>s</i>	$\Delta_3$	286	303	311
142	<i>aednmlcbjkstpofgqrih</i>	<i>a</i>	$-\Delta_{13}$	285	304	312
143	<i>aednmlcbjkstpofghirq</i>	<i>a</i>	$-\Delta_8$	309	280	301
144	<i>aednmlcbjkstpqrihgfo</i>	<i>s</i>	$-\Delta_{16}$	310	279	289
145	<i>aednofghirqptskjbcml</i>	<i>s</i>	$\Delta_5$	317	272	286
146	<i>aednofghirqptmlcbjks</i>	<i>a</i>	$-\Delta_{21}$	318	271	309
147	<i>aednofghirskjbcmltpq</i>	<i>a</i>	$\Delta_{13}$	308	281	305
148	<i>aednofgqptmlcbjksrih</i>	<i>s</i>	$-\Delta_3$	284	305	316
	Цикл 11					
149	<i>aefopqghirstmndclkb</i>	<i>a</i>	$\Delta_{15}$	284	305	283
150	<i>aefopqghirstmndcbjkl</i>	<i>a</i>	$\Delta_9$	305	284	295
151	<i>aefopqghirstmlkjbcnd</i>	<i>s</i>	$\Delta_{18}$	303	286	296
152	<i>aefondebjklmtrsrihgqp</i>	<i>s</i>	$-\Delta_6$	308	281	291
153	<i>aefondebjklmtpqghirs</i>	<i>a</i>	$\Delta_{20}$	307	282	303
154	<i>aefondcbjksrihgqptml</i>	<i>a</i>	$-\Delta_{15}$	300	289	309
155	<i>aefondclmtpqghirskjb</i>	<i>s</i>	$\Delta_2$	279	310	297
156	<i>abjksrihgqptmlcdnofe</i>	<i>a</i>	$-\Delta_{14}$	281	308	301

Продолжение табл. 3.4

№	Гамильтоновы цепи	S	$\Delta_i$	$\Sigma A$	$\Sigma B$	$\Sigma C$
157	<i>abjksrihgqptmlcdefon</i>	<i>a</i>	$-\Delta_9$	302	287	295
158	<i>abjksrihgqptmnofedcl</i>	<i>s</i>	$-\Delta_{20}$	304	285	294
159	<i>abjklcdefonmtpqghirs</i>	<i>s</i>	$\Delta_6$	311	278	288
160	<i>abjklcdefonmtrsrihgqp</i>	<i>a</i>	$-\Delta_{18}$	312	277	276
161	<i>abjklcdefopqghirstmn</i>	<i>a</i>	$\Delta_{14}$	307	282	281
162	<i>abjklcdnmtsrihgqpofoe</i>	<i>s</i>	$-\Delta_2$	286	303	287

Рассматривая табл. 3.4, можно заметить, что ни один из предложенных дорожных маршрутов не заканчивается в пунктах *c, d, f, g, i* и *j*. В пункте *t* заканчиваются только 6 маршрутов, в пунктах *m, p* и *s* — по 8 для каждого пункта, в *l, k, n, o, q, r* — по 12 и в *b, e, h* — по 20. Это происходит потому, что для додекаэдра существует пять классов вершин и семь классов ребер, которые в табл. 3.5 количественно разнесены по 11 циклам.

В столбце S табл. 3.4 указана симметрия цепи, которая для додекаэдра определяется так же, как и для куба. Общее число цепей додекаэдра равно произведению  $162 \times 10 = 1620$ . Подгруппа  $G_{20a}$  состоит из  $162 \times 161 + 1 = 26\,083$  переходов между цепями, привязанными к вершине *a*. В группе же  $G_{20}$  насчитывается почти в 100 раз больше переходов.

Гамильтонова задача о путешественнике нередко преобразуется в задачу о коммивояжере. Коммивояжер не празднующий турист, а деловой человек, ограниченный временными, денежными или какими-либо другими ресурсами. Пусть каждое из ребер снабжено числовой характеристикой: это может быть километраж, время на дорогу или стоимость билета. Таким образом, условные характеристики ребер дадут числовой ряд от 1 до 30, элементы которого могут быть распределены между ребрами додекаэдра как угодно, в частности, в табл. 3.5 дается три варианта распределения реберных характеристик — *A, B* и *C*.

Известны алгоритмы поиска маршрута с минимальной суммой реберных характеристик, которые, однако, не учитывают классификацию ребер, а значит и маршрутов, с *топологической* точки зрения; оптимизация ведется только по *метрическим* характеристикам ребер. Между тем, табл. 3.5 (столбец *N*) показывает, что чисто топологический вклад ребер в гамильтоновы маршруты различен. На-

пример, частота появления в гамильтоновой цепи ребра  $bc$  на 30 % превышает частоту появления, казалось бы, точно такого же ребра  $cl$ . Все ребра в додекаэдре равноправны, если не существует привязки. Но как только появляется привязка (начало путешествия или некий центр управления симметричной системой типа додекаэдра), тотчас появляется неравноправие между связями. Величина этого неравноправия, едва заметная для ребер классов  $C_3$ ,  $C_6$  и  $C_7$ , становится весьма ощутимой для ребер классов  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_4$  и  $C_5$ .

Таблица 3.5

$C_i$	$xy$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	N	A	B	C
$C_1$	$ab$	6	4	5	4	5	6	5	5	7	0	7	54	3	28	8
	$ae$	4	6	4	5	6	5	5	5	0	7	7	54	1	30	4
	$ah$	5	5	6	6	4	4	5	5	7	7	0	54	2	29	3
$C_2$	$bc$	15	15	15	9	8	7	8	15	14	14	5	125	30	1	18
	$bj$	7	9	8	15	15	15	15	8	5	14	14	125	25	6	13
	$ed$	15	15	9	15	7	8	15	8	14	14	5	125	29	2	11
	$ef$	9	7	15	8	15	15	8	15	14	5	14	125	27	4	12
	$hg$	15	8	15	7	15	9	15	8	14	5	14	125	28	3	9
	$hi$	8	15	7	15	9	15	8	15	5	14	14	125	27	5	10
$C_3$	$cd$	0	0	15	15	15	15	15	15	0	0	14	104	10	21	5
	$fg$	15	15	0	15	0	15	15	15	0	14	0	104	11	20	16
	$ij$	15	15	15	0	15	0	15	15	14	0	0	104	12	19	2
$C_4$	$cl$	15	15	0	6	7	8	7	0	14	14	9	95	9	22	6
	$dn$	15	15	6	0	8	7	0	7	14	14	9	95	8	23	17
	$gq$	0	7	15	8	15	6	0	7	14	9	14	95	4	27	20
	$fo$	6	8	15	7	15	0	7	0	14	9	14	95	5	26	1
	$jk$	8	6	7	15	0	15	0	7	9	14	14	95	7	24	14
	$ir$	7	0	8	15	6	15	7	0	9	14	14	95	6	25	21
$C_5$	$rq$	15	15	10	10	7	7	15	15	9	9	0	112	24	7	28
	$on$	7	10	7	15	10	15	15	15	0	9	9	112	22	9	22
	$lk$	10	7	15	7	15	10	15	15	9	0	9	112	23	8	23
$C_6$	$pq$	15	6	5	9	8	15	15	6	5	7	14	105	18	13	15
	$po$	15	9	8	6	5	15	6	15	14	7	5	105	17	14	27
	$sk$	9	15	6	8	15	5	15	6	7	14	5	105	16	15	29
	$sr$	6	15	9	5	15	8	6	15	7	5	14	105	14	17	24
	$ml$	5	8	15	15	6	9	6	15	5	14	7	105	13	18	26
	$mn$	8	5	15	15	9	6	15	6	14	5	7	105	15	16	25
$C_7$	$tm$	15	15	0	0	15	15	9	9	7	7	14	106	21	10	30
	$tp$	0	15	15	15	15	0	9	9	7	14	7	106	19	12	19
	$ts$	15	0	15	15	0	15	9	9	14	7	7	106	20	11	7
<b>Сумма:</b>		<b>285</b>	<b>285</b>	<b>285</b>	<b>285</b>	<b>285</b>	<b>285</b>	<b>285</b>	<b>285</b>	<b>266</b>	<b>266</b>	<b>266</b>	<b>3078</b>	<b>465</b>	<b>465</b>	<b>465</b>

Для привязки  $a$  существует 27 односторонних замен  $\Delta_i$ , распадающихся на 6 классов (табл. 3.6). Для  $\Delta_i$  выполняются равенства:

$$\sum_{C_1} \Delta_i = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 = 0, \quad \sum_{C_2} \Delta_i = \Delta_4 + \Delta_5 + \Delta_6 = 0,$$

$$\sum_{C_3} \Delta_i + \sum_{C_5} \Delta_i = 0, \quad \sum_{C_6} \Delta_i + \sum_{C_5} \Delta_i = 0, \quad \sum_{C_6} \Delta_i - \sum_{C_3} \Delta_i = 0.$$

Таблица 3.6

$C_i$	$\Delta_i$	$xy - xz$	$A$	$B$	$C$	$C_i$	$\Delta_i$	$xy - xz$	$A$	$B$	$C$
$C_1$	$\Delta_1$	$ah - ab$	-1	1	-5	$C_5$	$\Delta_{16}$	$nm - no$	-7	7	3
	$\Delta_2$	$ab - ae$	2	-2	4		$\Delta_{17}$	$lk - lm$	10	-10	-3
	$\Delta_3$	$ae - ah$	-1	1	1		$\Delta_{18}$	$on - op$	5	-5	-5
$C_2$	$\Delta_4$	$tp - tm$	-2	2	-11		$\Delta_{19}$	$qp - qr$	-6	6	-13
	$\Delta_5$	$tm - ts$	1	-1	23		$\Delta_{20}$	$ks - kl$	-7	7	6
	$\Delta_6$	$ts - tp$	1	-1	-12		$\Delta_{21}$	$rq - rs$	10	-10	4
$C_3$	$\Delta_7$	$sr - sk$	-2	2	-5	$C_6$	$\Delta_{22}$	$ml - mt$	-8	8	4
	$\Delta_8$	$po - pq$	-1	1	12		$\Delta_{23}$	$po - pt$	-2	2	8
	$\Delta_9$	$ml - mn$	-2	2	1		$\Delta_{24}$	$pt - pq$	1	-1	4
$C_4$	$\Delta_{10}$	$fe - fo$	22	-22	11		$\Delta_{25}$	$mt - mn$	6	-6	5
	$\Delta_{11}$	$ih - ir$	20	-20	-11		$\Delta_{26}$	$sr - st$	-6	6	17
	$\Delta_{12}$	$jk - jb$	-18	18	1		$\Delta_{27}$	$st - sk$	4	-4	-22
	$\Delta_{13}$	$gq - gh$	-24	24	11						
	$\Delta_{14}$	$dn - de$	-21	21	6						
	$\Delta_{15}$	$cb - cl$	21	-21	12						

Реберные разности  $\Delta_i$  позволяют существенно сократить число операций при нахождении длин, поскольку каждая последующая цепь в цикле отличается от предыдущей на какую-то одну из 27 величин  $\Delta_i$ . Следовательно, необходимо рассчитать 11 цепей для варианта  $\Sigma C$ , представляющих циклы, и столько же для  $\Sigma A$ ; для варианта  $\Sigma B$  длина может быть уже вычислена по формуле:

$$\Sigma B + \Sigma A = 589 = 31 \times 19 = \sum_{i=1}^{19} i + \sum_{i=12}^{30} i = 190 + 399,$$

где числа 190 и 399 отвечают самой короткой и самой длинной цепи, которые только возможны.

Суммы всех длин гамильтоновых цепей по максимальному ( $\Sigma \Sigma A$ ), минимальному ( $\Sigma \Sigma B$ ) и промежуточному ( $\Sigma \Sigma C$ ) вариантам распределения равны следующим величинам:

$$\Sigma \Sigma A = 51\,939, \quad \Sigma \Sigma B = 35\,747, \quad \Sigma \Sigma C = 46\,229,$$



что составляет весьма заметную разницу между вариантами распределения одних и тех же величин. Отметим также, что максимальная (минимальная) длина в 356 (233) условных единиц приходится на гамильтоновы цепи под номерами 92 и 104. Минимальное значение для промежуточного варианта распределения равно 271 (цепь 37), а максимальное — 345 (цепь 120).

### 3.2. Морфология графа

#### Матрицы смежности и инцидентности

На рис 3.12 изображено множество точек  $V$  и множество линий  $E$ , соединяющих эти точки, которые все вместе образуют *граф*  $G$ . Если линии имеют стрелки, то граф называется *ориентированным*, или *орграфом*  $G_0$  (рис. 3.13). Внутренних различий между  $G$  и  $G_0$  гораздо меньше, чем между графом, изображающим *правильную решетку* из подгрупп для какой-нибудь группы, например,  $S(D_6^1)$  (рис. 2.18), и графом, изображающим *сильно неправильную метарешетку*  $M_{16}$  (рис. 2.26).

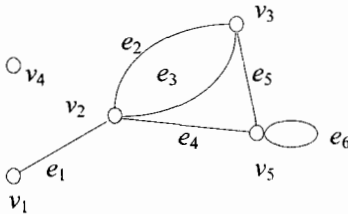


Рис. 3.12

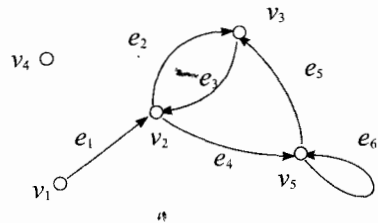


Рис. 3.13

Внешняя морфология графа (со стрелками или без них) играет подчиненную роль, математическая же сущность представленного графом объекта всегда остается где-то за рамками рисунка. Изображение графа в большинстве случаев является проекцией или тенью этой сущности и самостоятельного значения не имеет. Однако морфология расположения точек и линий, тем не менее, поддается определенной математической классификации и описанию. Этим мы намерены заняться в этом и последующем подразделах.

Линии в графе  $G$  здесь и далее будем называть *ребрами*, а ориентированные линии в орграфе  $G_0$  — *дугами*. О вершинах и ребрах (дугах) говорят, что они *инцидентны*, если вершина принадлежит

ребру (дуге); если вершина не инцидентна никакому ребру (дуге), то она называется *изолированной* ( $v_4$ ). Путь называется *простым*, если никакая дуга или ребро не встречается в нем дважды. Путь называется *элементарным*, если никакая вершина в нем не встречается дважды.

*Цикл* — это замкнутый путь в неориентированном графе. *Контур* — это ориентированный цикл в орграфе. Понятия простоты и элементарности распространяются на циклы и контуры. Контур или цикл, который содержит все ребра или дуги графа, называется *эйлеровым*. Можно показать, что *связанный* орграф (т.е. без изолированных фрагментов) содержит эйлеров контур тогда и только тогда, когда для каждой вершины число входящих дуг равно числу выходящих; связанный неориентированный граф содержит эйлеров цикл тогда и только тогда, когда степень каждой вершины четна. *Степенью* вершины называется число инцидентных ей ребер. Простой путь, который проходит через все вершины графа, называется *гамильтоновым*. Если в простом графе с  $n$  вершинами степень каждой вершины не меньше  $n/2$ , то такой граф обязательно будет гамильтоновым. Однако легко построить гамильтонов граф, у которого степень вершины меньше  $n/2$ .

Графы  $\Gamma$  и  $\Gamma_0$  можно представить в аналитической форме либо *матрицей смежности*  $A$ , либо *матрицей инцидентности*  $B$ . Для нашего конкретного неориентированного графа  $\Gamma$  матрицы  $A$  и  $B$  выглядят следующим образом:

$$A(\Gamma) = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{matrix}, \quad B(\Gamma) = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6 \end{matrix}.$$

Матрица смежности для неориентированного графа всегда симметрична. Фигурирующая в ней 2 может быть в некоторых случаях заменена на 1. В матрице инцидентности сумма единиц по столбцам указывает на степень вершины  $v_i$ . Нередко расположение вершин и ребер в этой матрице меняют местами (транспонируют). Так, для нашего конкретного орграфа  $\Gamma_0$  матрица  $A$  и  $B$  выглядят иначе. В общем случае матрица смежности для ориентированного графа уже не будет симметричной. В матрице инцидентности ставится 1, если

дуга исходит из вершины, и  $-1$ , если дуга заходит в нее.

$$A(\Gamma_0) = \begin{matrix} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & v_1 \\ & v_2 \\ & v_3 \\ & v_4 \\ & v_5 \end{matrix}, \quad B(\Gamma_0) = \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} & v_1 \\ & v_2 \\ & v_3 \\ & v_4 \\ & v_5 \end{matrix}.$$

Число дуг в пути минимальной длины от вершины  $v_i$  до  $v_j$  называется расстоянием  $r(v_i, v_j)$ . Если между вершинами не существует никакого пути, то расстояние равно бесконечности:

$$r(v_i, v_j) = \infty.$$

Для вершины  $v_i$  можно определить среднее отклонение от центра графа:

$$D(v_i) = \frac{1}{m} \sum_{v \in V} r(v_i, v),$$

где  $m$  — число дуг в графе  $\Gamma$ ,  $v$  — пробегает вершины  $V$  графа  $\Gamma$ . Вершина  $v_0$ , для которой эта сумма окажется минимальной, называется центром графа  $\Gamma$ . В роли центра могут выступать несколько вершин.

Для пересчета возможных путей длины  $r$ , рассмотрим различные степени матрицы смежности. Пусть дан орграф  $\Gamma_0$  (рис. 3.14).

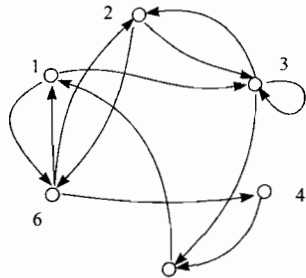


Рис. 3.14

$$A(\Gamma_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R = r(i, j) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 3 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Общее число дуг  $m = 12$ ; матрица  $R = r(i, j)$  отражает расстояние между вершинами; на ее основе рассчитываем всевозможные отклонения:  $D(1) = D(2) = D(6) = 2/3$  — центр графа  $\Gamma_0$ , который состоит из трех вершин 1, 2 и 6; остальные отклонения равны:

$$D(3) = 3/4, \quad D(4) = 13/12, \quad D(5) = 11/12.$$

### Пути и контуры в графе

Сама матрица смежности  $A(\Gamma_0)$  дает число путей, длина которых равна единице. Квадрат матрицы смежности  $A^2(\Gamma_0)$  дает число путей, длина которых равна двум дугам. Куб матрицы  $A^3(\Gamma_0)$  дает число путей в три дуги и т.д. В частности, на пересечении 2-го столбца

и 3-ей строки матрицы  $A^3(\Gamma_0)$  стоит 3. Это означает, что из вершины 3 в вершину 2 имеется три пути, а из вершины 2 в вершину 3 существует уже четыре пути в три дуги:

$$A^2(\Gamma_0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^3(\Gamma_0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^4(\Gamma_0) = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 & 3 & 4 & 2 \\ 5 & 7 & 6 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 9 & 2 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 9 & 0 & 4 & 7 \end{pmatrix}, \quad A^5(\Gamma_0) = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 18 & 2 & 9 & 12 \\ 6 & 8 & 18 & 2 & 9 & 12 \\ 10 & 14 & 19 & 5 & 11 & 10 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 6 & 3 & 4 & 2 \\ 11 & 16 & 13 & 7 & 9 & 4 \end{pmatrix}.$$

Введем понятие об *означенной* матрице смежности  $A(\Gamma_0)$ , в которой вместо единиц выставляются соответствующие вершины. *Вспомогательная* матрица  $A'(\Gamma_0)$ , получается из  $A(\Gamma_0)$  путем отбрасывания первого символа в означенных дугах. Матрица  $A'(\Gamma_0)$  нужна для получения соответствующей степени матрицы  $A(\Gamma_0)$ . Так,

$$A(\Gamma_0) \times A'(\Gamma_0) = A^2(\Gamma_0), \quad A^2(\Gamma_0) \times A'(\Gamma_0) = A^3(\Gamma_0) \dots$$

Означенная матрица  $A^n$ , по сравнению с матрицей  $A^n$ , помимо числа путей, указывает еще и вершины, через которые эти пути пролегают. На диагонали матрицы  $A^n$  будут указаны всевозможные контуры, длина которых равна 1, 2, 3 и т.д. дугам. Неповторяющиеся вершины для отдельных путей укажут на *элементарные* пути. Так как в нашем графе  $\Gamma_0$  имеется шесть вершин, то элементарных путей, длина которых равнялась бы шести дугам, вообще быть не может. Отсюда максимальная степень означенной матрицы для определения всех *гамильтоновых путей* должна быть равна пяти. В нашем графе  $\Gamma_0$ , как на то указывает матрица  $A^5(\Gamma_0)$ , только три гамильтоновых пути: 3, 2, 6, 4, 5, 1; 4, 5, 1, 6, 2, 3 и 2, 3, 5, 1, 6, 4. На диагонали матрицы  $A^6(\Gamma_0)$  стоит один и тот же *гамильтонов контур* 1, 3, 2, 6, 4, 5, 1, который всякий раз начинается с новой вершины.

$$A(\Gamma_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 13 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 23 & 0 & 0 & 26 \\ 0 & 32 & 33 & 0 & 35 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 45 & 0 \\ 51 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 61 & 62 & 0 & 64 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A'(\Gamma_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^2(\Gamma_0) = A(\Gamma_0) \times A'(\Gamma_0) = \begin{pmatrix} 161 & 132 & 133 & 164 & 135 & 0 \\ 261 & 232 & 233 & 264 & 235 & 0 \\ 351 & 332 & 323 & 333 & 0 & 335 & 326 \\ 451 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 513 & 0 & 0 & 516 \\ 0 & 0 & 613 & 0 & 645 & 616 \\ 0 & 0 & 623 & 0 & 645 & 626 \end{pmatrix},$$

$$A^3(\Gamma_0) = \begin{pmatrix} 1351 & 1332 & 1613 & 1323 & 1326 & 1326 & 1616 \\ & & 1623 & 0 & 1335 & 1326 & 1326 \\ & & 1333 & & 1645 & 1626 & 1626 \\ & & 2613 & & & & 2616 \\ 2351 & 2332 & 2323 & 0 & 2335 & 2326 & 2326 \\ & & 2623 & & 2645 & 2626 & 2626 \\ & & 2333 & & & & \\ 3351 & 3232 & 3513 & & & & 3516 \\ 3261 & 3332 & 3323 & 3264 & 3235 & 3326 & 3326 \\ & 3262 & 3233 & & 3335 & & \\ & & 3333 & & & & \\ 0 & 0 & 4513 & 0 & 0 & 4516 \\ 5161 & 5132 & 5133 & 5164 & 5135 & 0 \\ & 5162 & & & & \\ 6451 & 6132 & & & & \\ 6161 & 6232 & 6133 & 6164 & 6135 & 0 \\ 6261 & 6162 & 6233 & 6264 & 6235 & 0 \\ & 6262 & & & & \end{pmatrix}.$$

При получении следующих степеней означенных матриц оставим только гамильтоновы пути и контуры:

$$A^4(\Gamma_0) = \begin{pmatrix} 16451 & 0 & 0 & 13264 & 16235 & 0 \\ 13261 & & & & & \\ 26451 & 26132 & 0 & 0 & 26135 & 23516 \\ 0 & 35162 & 32613 & 35164 & 32645 & 0 \\ 0 & 45132 & 0 & 45164 & 0 & 0 \\ 0 & 45162 & & & & \\ 0 & 0 & 51623 & 0 & 51645 & 51326 \\ 62351 & 0 & 64513 & 0 & 0 & 64516 \\ & & & & 0 & 61326 \end{pmatrix},$$

$$A^5(\Gamma_0) = \begin{pmatrix} 162351 & 0 & 0 & 0 & 132645 & 0 \\ 0 & 235162 & 264513 & 235164 & 0 & 0 \\ 326451 & 0 & 351623 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 451623 & 0 & 0 & 0 & 451326 \\ 0 & 0 & 0 & 513264 & 516235 & 0 \\ 0 & 645132 & 0 & 0 & 0 & 62351 \end{pmatrix},$$

$$A^6(\Gamma_0) = \begin{pmatrix} 1326451 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2645132 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3264513 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4513264 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5132645 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6451326 \end{pmatrix}.$$

### Симметрия графа и его дополнения

Зададимся вопросом: какое число графов ( $N$ ) возможно на  $n$  вершинах и  $m$  ребрах? Так, для  $n = 4$  можно вычертить  $N = 11$  принци-

пально различающихся графов (рис. 3.15). Вычерченная система графов находится в отношении дополнения. Дополнением графа  $\Gamma$  является граф  $\Gamma'$ , который дополняет исходный граф до полного. Матрица смежности дополнительного графа находится по формуле:

$$A(\Gamma') = J - A(\Gamma),$$

где  $J$  — матрица смежности полного графа, состоящая полностью из единиц, за исключением элементов диагонали.

Два графа с  $m = 2$  находятся в отношении дополнения с двумя графами, имеющими  $m = 4$  и т.д. В табл. 3.7, где приведены количества графов с  $n$  вершинами и  $m$  ребрами, нетрудно заметить, что в пределах одного столбца возрастающая последовательность его чисел, достигая максимума, в точности повторяет его убывающую последовательность.

Аналогичная симметрия взаимного дополнения имеет место и для орграфов (табл. 3.8). На рис. 3.16 изображены всевозможные вариации орграфов на трех вершинах.

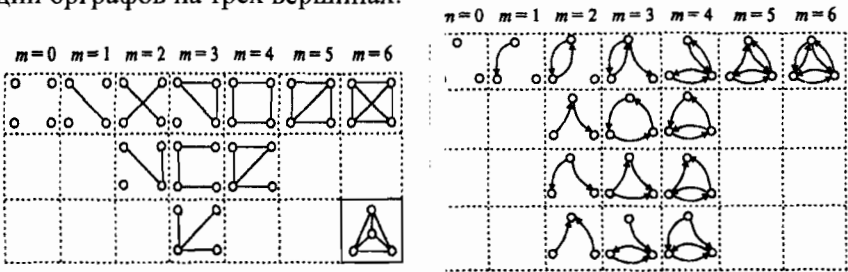


Рис. 3.15

Рис. 3.16

Любой граф обладает некоторыми свойствами симметрии. Граф и его дополнение всегда имеют одну и ту же группу симметрии. В частности, полный граф и его дополнение — пустой граф на  $n$  вершинах обладают симметрической группой  $S_n$ . Известно, что, например, в группе  $S_4$  содержится подгруппа  $S_3$ , т.е. группа симметрии треугольника. На рис. 3.15 для  $m = 6$  изображено два графа (треугольной формы взят в рамку) как раз для того, чтобы продемонстрировать это свойство полного графа на четырех вершинах.

Граф с меньшим числом ребер, чем у полного графа, имеет в качестве своей группы симметрии какую-нибудь подгруппу группы  $S_n$ . Например, группа приведенного на рис. 3.15 графа с числом ребер, равным  $m = 5$ , состоит из четырех элементов; если вершины графа пронумеровать соответствующим образом, то его группа вы-

разится подстановками:  $a = (02)$ ,  $b = (13)$ ,  $c = (02)(13)$  и  $e = (0)$ . Между тем, как нам известно, группа симметрии полного графа ( $m = 6$ )  $S_4$  состоит из 24-х элементов (подстановки см. в табл. 2.54).

Таблица 3.7

$m \setminus n$	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	-	1	1	1	1	1	1	1
2	-	-	1	2	2	2	2	2
3	-	-	1	3	4	5	5	5
4	-	-	-	2	6	9	10	11
5	-	-	-	1	6	15	21	24
6	-	-	-	1	6	21	41	56
7	-	-	-	-	4	24	65	115
8	-	-	-	-	2	24	97	221
9	-	-	-	-	1	21	131	402
10	-	-	-	-	1	15	148	663
11	-	-	-	-	-	9	148	980
12	-	-	-	-	-	5	131	1312
13	-	-	-	-	-	2	97	1557
14	-	-	-	-	-	1	65	1646
15	-	-	-	-	-	1	41	1557
$N$	1	2	4	11	34	156	1044	12344

Таблица 3.8

$m \setminus n$	1	2	3	4
0	1	1	1	1
1	-	1	1	1
2	-	1	4	5
3	-	-	4	13
4	-	-	4	27
5	-	-	1	38
6	-	-	1	48
7	-	-	1	38
8	-	-	-	27
9	-	-	-	13
10	-	-	-	5
11	-	-	-	1
12	-	-	-	1
$N$	1	3	16	218

Каждый граф имеет для себя тождественную подстановку. Поэтому его группа симметрии имеет, по крайней мере, один элемент симметрии. Для нахождения группы  $G$ , которая порождается симметричным графом  $\Gamma$ , используются подстановочные 0,1-матрицы. Если граф  $\Gamma$  определяется матрицей смежности  $A(\Gamma)$ , то его группа симметрии  $G$  определяется теми подстановочными 0,1-матрицами  $M(G)$ , которые коммутируют с матрицей смежности  $A(\Gamma)$ :

$$A(\Gamma) \times M(G) = M(G) \times A(\Gamma).$$

Так, для только что приведенного в качестве примера графа с  $n = 4$ ,  $m = 5$  (рис. 3.15) и подстановкой  $c = (02)(13)$  имеем:

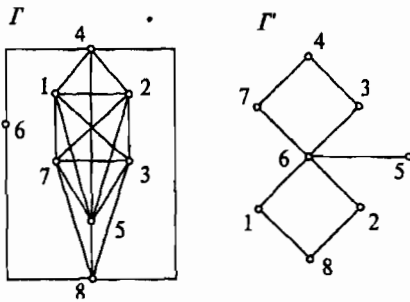
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Если уже найдено какое-то количество подстановок, то их принимают за образующие группы и пытаются найти остальные элементы симметрии. При этом учитывают тот факт, что симметрия исходного и дополнительного к нему графа одна и та же. Коммута-

ционное отношение обыкновенно выступает в роли проверочного.

Пусть дан довольно сложный исходный граф  $\Gamma$ ; по нему находим более простой дополнительный граф  $\Gamma'$  (рис. 3.17). Затем отыскиваем несколько очевидных транспозиций; перемножая их между собой, определяем полную группу симметрии исходного графа  $\Gamma$ . В конце по коммутационному соотношению проверяем справедливость одной из найденных подстановок.

$$\begin{aligned}
 A(\Gamma) M(d) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = M(d) A(\Gamma).
 \end{aligned}$$



- $a = (12), \quad b = (37),$
- $c = (12)(37), \quad d = (17)(23)(48),$
- $g = (1723)(48), \quad f = (13)(27)(48),$
- $h = (1327)(48), \quad e = (1).$

**Виды графов**

Если все вершины графа имеют одинаковую степень, то такой граф называется *регулярным*. Регулярный граф имеет более высокую степень симметрии, чем не-

Рис. 3.17

регулярный, но всегда меньшую, чем у полного, построенного на тех же вершинах. Для регулярного графа  $\Gamma$  матрицы смежности и инцидентности связаны формулой:

$$A(\Gamma) = B^*(\Gamma) \times B(\Gamma) - d(v)E,$$

- где  $E$  — единичная матрица,
- $d(v)$  — степень вершины  $v$  регулярного графа  $\Gamma$ ,
- $B^*(\Gamma)$  — транспонированная матрица инцидентности  $B(\Gamma)$ .

Схожую формулу имеет реберный граф. Граф  $\Gamma_p$  называется *реберным*, если в качестве вершин выбраны ребра исходного графа  $\Gamma$



с  $m$  ребрами и  $n$  вершинами, имеющего матрицу инцидентности  $B(\Gamma)$ . Матрица смежности реберного графа находится по формуле:

$$A(\Gamma_p) = B(\Gamma) \times B^*(\Gamma) - 2E.$$

Исходный граф  $\Gamma$  для построения реберного  $\Gamma_p$  необязательно должен быть регулярным. Но если  $\Gamma$  регулярный, то и реберный  $\Gamma_p$  тоже будет регулярным. В общем случае, если ребро  $e_i$  в графе  $\Gamma$  ограничено вершинами  $v_j$  и  $v_k$ , степень которых равна  $d(v_j)$  и  $d(v_k)$ , то степень вершины  $e_i$  в реберном графе  $\Gamma_p$  определится формулой:

$$d(e_i) = d(v_j) + d(v_k) - 2.$$

Число ребер в реберном графе  $\Gamma_p$  в общем, а не только регулярном случае, определяется следующим выражением:

$$m' = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n d^2(v_i) - m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m d(e_i).$$

Пусть дан регулярный граф  $\Gamma$  (рис. 3.18). Его матрица инцидентности —  $B(\Gamma)$ , которую мы примем в своем расчете за исходную. По формулам находим  $A(\Gamma)$  и  $A(\Gamma_p)$ , а также  $d(e_i) = 4$ ,  $m' = 18$ .

$$B(\Gamma) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 12 \\ 14 \\ 16 \\ 23 \\ 25 \\ 34 \\ 36 \\ 45 \\ 56 \\ 56 \end{matrix}, \quad A(\Gamma) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A(\Gamma_p) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

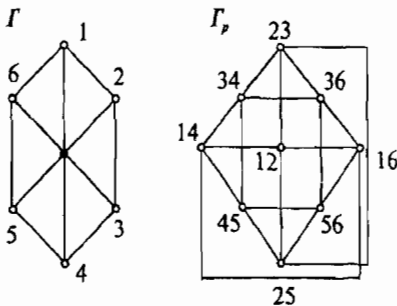


Рис. 3.18

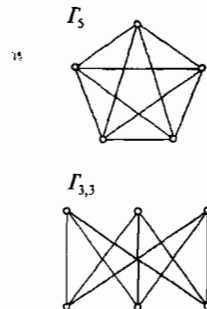


Рис. 3.19

Граф называется *плоским* (планарным), если его можно уложить на плоскости так, чтобы его ребра нигде не пересекались, кроме как в вершинах. Имеется два основных непланарных графа —  $\Gamma_5$  и  $\Gamma_{3,3}$ , изображение которых дано на рис. 3.19. Оба графа  $\Gamma_5$  и  $\Gamma_{3,3}$  являются регулярными, но последний относится еще и к так называемому

двудольному, который определяется здесь как многозначное отображение трех верхних вершин на три нижние вершины, или наоборот. В общем случае в двудольном графе  $\Gamma_0$  число вершин в обоих рядах может быть любым.

**Гиперграф** — это такое обобщение простого графа, когда ребра могут быть не только двухэлементные, но и любые подмножества вершин. Пусть заданы два множества:  $V = \{v_1, v_2 \dots v_9\}$  — множество вершин,  $E = \{e_1, e_2 \dots e_6\}$  — множество ребер. Тогда за гиперграф  $H(V, E)$  можно принять, например, следующее семейство подмножеств (рис. 3.15):  $H(V, E) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\} =$

$$= \{\{v_1, v_2, v_3\}, \{v_2, v_4, v_5, v_6\}, \{v_6, v_7, v_8\}, \{v_3, v_8\}, \{v_9\}, \{v_6\}\}.$$

Любому гиперграфу  $H(V, E)$  можно поставить в соответствие двудольный граф  $\Gamma_0(H)$  (рис. 3.20). В особый тип графов выделяются деревья. **Дерево** — это связанный граф, не имеющий циклов, так как любые две его вершины соединены простым путем. Число ребер в нем всегда на единицу меньше числа его вершин ( $m = n - 1$ ). На рис. 3.21 изображены все 6 деревьев, которые могут быть построены на шести вершинах.

$H(V, E)$

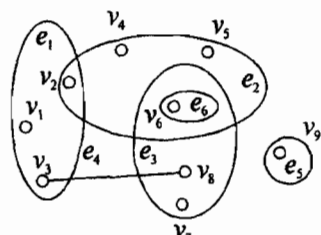


Рис. 3.20

$\Gamma_0(H)$

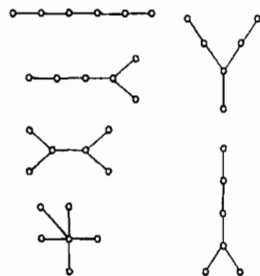


Рис. 3.21

Количество деревьев резко увеличится, если вершины как-нибудь пометить. Число помеченных деревьев и число других видов графов приведено в табл. 3.9. Чтобы произвести идентификацию деревьев различной конфигурации производят упорядочение вершин по корневому признаку. Суть этой процедуры состоит в следующем. Из дерева  $T$  удаляются все концевые вершины вместе с инцидентными им ребрами, т.е. вершины степени, равной единице. Так получается новое дерево  $T_1$ . Затем из  $T_1$  вновь удаляются все концевые вершины; получается дерево  $T_2$ . Эта процедура повторяется до тех пор, пока исходное дерево  $T$  не сократится до единственной вершины, которая и называется корнем дерева  $T$ . Если в результате удаления

концевых вершин осталось две вершины, соединенные ребром, то за корень дерева принимается любая из этих вершин. Каждой вершине приписывается вес, т.е. число, соответствующее общему количеству вершин поддеревьев. Вершины, смежные с корнем дерева  $T$ , рассматриваются как корни поддеревьев.

Таблица 3.9

Виды графов	$n$	1	2	3	4	5	6
Деревья		1	1	1	2	3	6
Помеченные деревья		1	1	3	16	125	1296
Простые графы		1	2	4	11	34	156
Связанные простые графы		1	1	2	6	21	112
Эйлеровы простые графы		1	0	1	1	4	8
Гамильтоновы простые графы		1	0	1	3	8	48
Простые планарные графы		1	1	2	6	20	105
Простые орграфы		1	3	16	218	9608	1540944
Связанные простые орграфы		1	2	13	199	9364	1439822

При таком представлении корневое дерево однозначно определяется упорядоченной последовательностью весов его вершин, в которой на первом месте стоит вес корня всего дерева, а затем следуют соответствующие последовательности для поддеревьев в

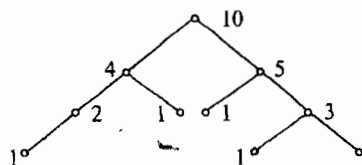


Рис. 3.22

порядке возрастания весовых характеристик их корней. На рис. 3.22 приведено дерево вместе с указанием его веса<sup>11</sup> вершин, которые удобно записать в следующем порядке:  $T(10, 4, 1, 2, 1, 5, 1, 3, 1, 1)$ .

### Разложение графа на базисные составляющие

Разложение графа на его базисные составляющие проведем на конкретном примере. Пусть будет задан простой связанный планарный граф  $G$ , в котором пронумерованы все его ребра (рис. 3.23). Сплошными линиями выделен остов графа. *Остовом* (или *покрывающим деревом*) называется любое дерево графа  $G$ , покрывающее все его вершины. Ребра, не вошедшие в остов, называются *хордами*. Символическим представлением остова является следующая последовательность весовых характеристик:  $T(9, 1, 2, 1, 5, 1, 3, 1, 1)$ .

Прежде всего, найдем ранг ( $k$ ) и цикломатическое число ( $l$ ) нашего графа  $G$ . Ранг определяется числом ребер покрывающего дерева,

а *цикломатическое число* — не вошедшими в дерево ребрами; следовательно:  $m = k + l = 8 + 7 = 15$  — общее число ребер в графе  $\Gamma$ .

Выделим в графе  $\Gamma$  базисные циклы и разрезы. Во всякий *базисный цикл* должна входить только одна хорда. Так, цикл  $c = (1, 3, 7)$  является базисным, а другой цикл  $c' = (1, 3, 5, 10, 9)$  уже не будет таковым. *Разрезом* (или *сечением*) графа  $\Gamma$  в общем случае называется

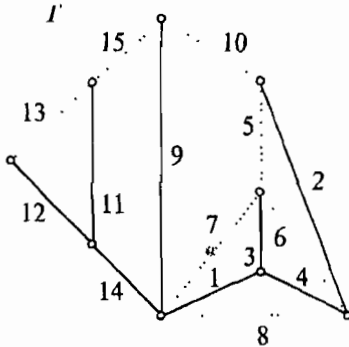


Рис. 3.23

является минимальное множество ребер, удаление которых делает граф несвязанным. Множество разрезов, отвечающих остову графа  $T(\Gamma)$ , называется *базисной системой разрезов*. Каждый *базисный разрез* содержит одно ребро остова  $T(\Gamma)$ ; остальные ребра будут хордами. Для нашего случая базисным является, например, разрез  $s = (2, 5, 10)$ , но не  $s' = (2, 4, 6, 8)$ . Базисные разрезы и циклы удобно представлять

матрицами. Число строк в *матрице разрезов* ( $S$ ) равно числу базисных разрезов ( $k$ ), а число столбцов — общему числу ребер ( $m$ ); если ребро участвует в разрезе, то в соответствующей позиции выставляется 1, в противном случае — 0.

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Размерность *матрицы циклов* ( $C$ ) равна  $l \times m$ ; нули и единицы в ней выставляются так же, как и в матрице  $S$ .

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Путем перегруппировки столбцов матрицы  $S$  и  $C$  можно привести к *систематическому виду*  $S' = (E_{k^2} \mid G_{lk})$ ,  $C' = (H_{lk} \mid E_{l^2})$ :

$$S' = \left( \begin{array}{cccccccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right),$$

$$C' = \left( \begin{array}{cccccccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

При перемножении матриц убеждаемся, что

$$S' \times C'^* = 0, \quad G_{lk} = H^*_{kl}, \quad H_{kl} = G^*_{lk},$$

здесь звездочка означает транспонирование, а умножение производится по mod (2). Матрицы разрезов ( $S'$ ) и циклов ( $C'$ ) взаимно ортогональны. Матрица инцидентности  $B(\Gamma)$  путем линейной комбинации только строк может быть сведена к матрице разрезов  $S$ , при этом высвобождается одна нулевая строка. Строки матрицы  $B(\Gamma)$  пронумерованы в соответствии с вершинами графа  $\Gamma$  (рис. 3.23). Справа от матрицы  $S$  показана линейная комбинация строк (суммирование производится по mod (2)).

$$B(\Gamma) = \left( \begin{array}{cccccccccccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$S = \left( \begin{array}{cccccccccccccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} 2 \\ 4 \\ 5 \\ 3 \\ 9 \\ 1+3+5+8+9 \\ 1+3+4+5+6+8+9 \\ 3+8+9 \\ 1+2+3+4+5+6+7+8+9 \end{array}$$

Графу  $\Gamma$  отвечает 15-компонентный вектор:

$$\gamma = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1).$$

Всякий вектор может быть представлен линейной комбинацией ба-

зисных векторов. Следовательно, и наш вектор  $\gamma$  может быть представлен базисными разрезами и циклами. Чтобы определить, через какие именно разрезы и циклы выражается наш вектор  $\gamma$ , необходимо вычислить некоторую совокупность *определителей Грама*. Сначала запишем *исходные* определители Грама для разрезов ( $g$ ) и циклов ( $h$ ) в общем виде:

$$g = \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1k} \\ s_{21} & s_{22} & \dots & s_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{k1} & s_{k2} & \dots & s_{kk} \end{vmatrix}, \quad h = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1l} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{l1} & c_{l2} & \dots & c_{ll} \end{vmatrix}.$$

Элементы определителей Грама  $g$  и  $h$  симметричны, т.е.  $s_{ij} = s_{ji}$ ,  $c_{ij} = c_{ji}$ , и представляют собой скалярные произведения по mod (2) базисных векторов соответствующих индексов. Базисные векторы разрезов берутся как строки матрицы  $S$ , а базисными векторами циклов являются строки матрицы  $C$ . Для нашего примера имеем:

$$g = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad h = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

где скалярные произведения принимают следующие значения:

$$s_{11} = s_1 s_1 = (010010000100000)(010010000100000) = 0+1+0+0+0+1+0+0+0+0+1+0+0+0+0+0 = 1,$$

$$s_{12} = s_1 s_2 = (010010000100000)(001011100000000) = 0+0+0+0+0+1+0+0+0+0+0+0+0+0+0+0 = 1, \dots$$

$$c_{45} = c_4 c_5 = (100100010000000)(110100001100000) = 1+0+0+1+0+0+0+0+0+0+0+0+0+0+0+0 = 0, \dots$$

Далее алгоритм вычислений строится следующим образом. Диагональ определителя  $g$  поочередно ставят на место первой его строки, получая таким образом *производный* определитель  $g_1$ , затем на место второй, получая  $g_2$ , и т.д. до тех пор, пока не получат  $g_8$ . Аналогично находят все семь производных определителей для циклов:

$$g_1 = 1, g_2 = 1, g_3 = 0, g_4 = 0, g_5 = 1, g_6 = 1, g_7 = 1, g_8 = 0; \\ h_1 = 0, h_2 = 1, h_3 = 1, h_4 = 1, h_5 = 0, h_6 = 0, h_7 = 1. \text{ В частности:}$$

$$g_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1, \quad g_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1,$$

$$h_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \dots, \quad h_7 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1.$$

Значения производных определителей играют роль коэффициентов разложения вектора  $\gamma$  по базисным векторам разрезов и циклов:

$$\gamma_s = g_1 s_1 + g_2 s_2 + \dots + g_8 s_8, \quad \gamma_c = h_1 c_1 + h_2 c_2 + \dots + h_7 c_7, \quad \gamma = \gamma_s + \gamma_c.$$

Базисные компоненты с отличным от нуля коэффициентом участвуют в образовании вектора  $\gamma$ .

$$\begin{aligned} s_1 &= 010010000100000 \\ s_2 &= 001011100000000 \\ s_5 &= 000000000001100 \\ s_6 &= 100000110100000 \\ s_7 &= 000111010100000 \\ c_2 &= 001101000000000 \\ c_3 &= 101000100000000 \\ c_4 &= 100100010000000 \\ c_7 &= \underline{000000001010011} \\ \gamma &= 111111111111111. \end{aligned}$$

Ниже приведены результаты разложения по базисным разрезам и циклам ( $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ ) графов ( $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ ), показанных на рис. 3.24.

$$\begin{aligned} s_1 &= 100000100010011 & s_1 &= 1010100000000110 \\ s_2 &= 010000001010010 & s_2 &= 011010010010010 \\ s_3 &= 001000011000000 & s_3 &= 000110000000000 \\ s_4 &= 000100010001000 & s_4 &= 000001000000000 \\ s_5 &= 000010100001001 & s_5 &= 000000110010100 \\ s_6 &= 000001100001001 & s_6 &= 000000001000000 \\ s_7 &= 000000000111010 & s_7 &= 000000000110010 \\ s_8 &= 000000000000111 & s_8 &= 000000000000001 \\ c_1 &= 001100010000000 & c_1 &= 111000000000000 \end{aligned}$$

$c_2 = 011000001000000$   
 $c_3 = 000111000101000$   
 $c_4 = 110000000100110$   
 $c_5 = \underline{100011000000101}$   
 $\gamma_1 = 1111111111111111$ ,

$c_2 = 010000110000000$   
 $c_3 = \underline{100000100001100}$   
 $\gamma_2 = 1111111111111111$

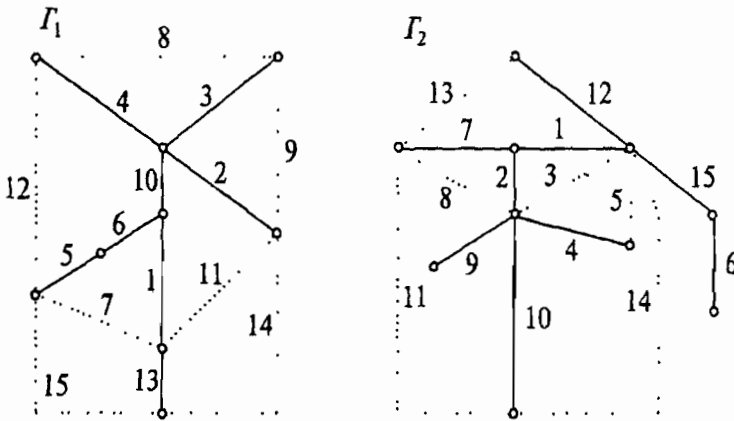


Рис. 3.24

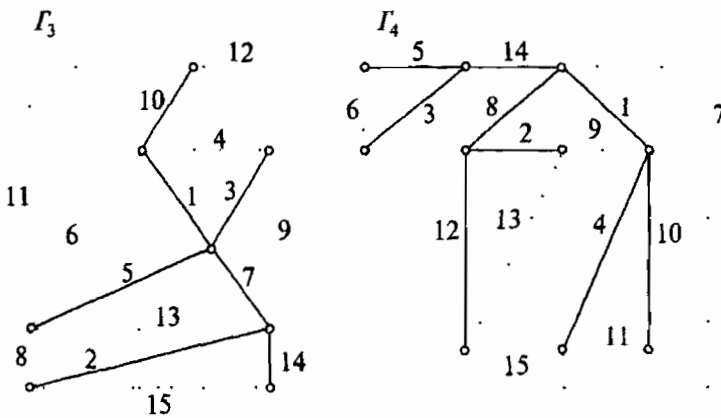


Рис. 3.25

На рис. 3.25 изображены еще два простых связанных планарных графа  $\Gamma_3$  и  $\Gamma_4$  на 15 ребрах, внешне ничем не отличающихся от своих предшественников, но которые, однако, уже не могут быть разложены в поле чисел по  $\text{mod } (2)$  по своим базисным разрезам и циклам. Все их определители Грама, вычисленные по изложенной



выше методике, оказываются равными нулю. С точки зрения традиционной линейной алгебры, это свидетельствует о наличии линейной зависимости между векторами.

Еще один вопрос, который здесь возникает: каково общее число возможных остовов? Количество деревьев рассчитывается с помощью определителя размерности  $(n - 1) \times (n - 1)$ , на диагонали которого выставляются степени  $n - 1$  вершин (отсутствовать может любая из  $n$  вершин), а недиагональные элементы  $ij$  могут быть вида: 0 (если вершины  $i$  и  $j$  между собой не связаны),  $-1$  (если  $i$  и  $j$  связаны одной связью),  $-2$  (если  $i$  и  $j$  связаны двумя связями) и т.д.

### Реберные и вершинные покрытия

Часто ребра снабжены какой-либо весовой характеристикой, и покрывающее дерево требуется выбрать из *оптимальных* соображений: минимального или максимального веса покрывающего дерева. Для нахождения, например, *остова минимального веса* поступают следующим образом. Из всех предложенных ребер выбирают ребро с наименьшим весом. Затем на каждом следующем шаге из оставшегося числа рассматривается наименьшее по весу ребро. Если оно не образует цикла с ранее выбранными ветвями графа, то вводится в остов. Построение прекращается после  $n - 1$  шага. Все остовы графов  $G, G_1, G_2, G_3, G_4$  выбраны как раз по этому алгоритму, при этом номер ребра принимался за его вес.

Покрывающее дерево графа  $G$  нужно отличать от его реберного покрытия. *Реберным покрытием* графа  $G(V, E)$  называется такое подмножество  $E'$  из  $E$ , которое инцидентно всему множеству вершин  $V$ . Наряду с реберным покрытием, вводят понятие независимого подмножества ребер: подмножество  $E''$  из  $E$  попарно несмежных ребер называется *независимым* (или *паросочетанием*). Аналогичная пара понятий существует для вершин. Подмножество вершин  $V'$  графа  $G(V, E)$  называется *независимым*, если никакие две вершины из этого множества не смежны. Если подмножество вершин  $V'$  из  $V$  независимо, то порожденный этими вершинами подграф  $G(V', 0)$  является *пустым*. Упомянем попутно, антиподом независимого множества является понятие клики. Подмножество вершин называется *кликой*, если любые две входящие в него вершины смежны, т.е. когда порождаемый этим подмножеством подграф будет *полным*. И последнее понятие в этом ряду: подмножество вершин  $V''$  называется *вершинным покрытием*, если  $V''$  покрывает все ребра графа  $G$ .

Оптимальные значения введенных характеристик обозначим следующим образом:

- $\alpha_0$  — максимальное число независимых вершин,
- $\beta_0$  — минимальное вершинное покрытие,
- $\alpha_1$  — максимальное число независимых ребер,
- $\beta_1$  — минимальное реберное покрытие.

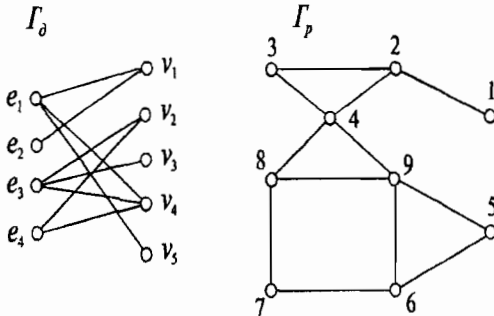


Рис. 3.26

Поэтому для  $G_d$  имеет место расширенное условие:

$$\alpha_0 + \beta_0 = \alpha_1 + \beta_1 = \alpha_0 + \alpha_1 = \beta_0 + \beta_1 = n.$$

Кроме того, независимое множество ребер графа  $G$  находится во взаимно однозначном соответствии с независимым множеством вершин реберного графа  $G_p$ , поэтому  $\alpha_1(G) = \alpha_0(G_p)$ .

Теперь рассмотрим конкретный двудольный граф  $G_d$ , изображенный на рис. 3.26. Рядом с ним построим соответствующий ему реберный граф  $G_p$ . Для построения  $G_d(V, E)$  сначала было найдено общее число ребер в  $G_p$ , а затем матрица смежности:

$$G_d(V, E) = \{e_1, e_2, e_3, e_4\} = \{\{v_1, v_4, v_5\}, \{v_1\}, \{v_2, v_3, v_4\}, \{v_2, v_4\}\},$$

$$m' = (1/2)(3^2 + 1^2 + 3^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 1^2 + 3^2 + 1^2) - 9 = 12,$$

$$A(G_p) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

В соответствии с определением составим пять максимальных паросочетаний с числом  $\alpha_1(G_d) = 4$ :

- 1)  $e_1 - v_4, \quad e_2 - v_1, \quad e_3 - v_3, \quad e_4 - v_2,$
- 2)  $e_1 - v_5, \quad e_2 - v_1, \quad e_3 - v_3, \quad e_4 - v_2,$
- 3)  $e_1 - v_5, \quad e_2 - v_1, \quad e_3 - v_3, \quad e_4 - v_4,$
- 4)  $e_1 - v_5, \quad e_2 - v_1, \quad e_3 - v_2, \quad e_4 - v_4,$
- 5)  $e_1 - v_5, \quad e_2 - v_1, \quad e_3 - v_4, \quad e_4 - v_2.$

Имеется четыре минимальных реберных покрытия с  $\beta_1(\Gamma_d) = 5$ :

- 1)  $e_1 - v_5, \quad e_2 - v_1, \quad e_3 - v_3, \quad e_3 - v_2, \quad e_4 - v_4,$
- 2)  $e_1 - v_5, \quad e_2 - v_1, \quad e_3 - v_3, \quad e_4 - v_2, \quad e_4 - v_4,$
- 3)  $e_1 - v_5, \quad e_2 - v_1, \quad e_3 - v_3, \quad e_3 - v_4, \quad e_4 - v_2,$
- 4)  $e_1 - v_5, \quad e_2 - v_1, \quad e_3 - v_3, \quad e_4 - v_4, \quad e_4 - v_2.$

Каждое из этих покрытий определяется минимальным числом единиц, которые покрывают все строки и столбцы матрицы инцидентности (эти покрывающие единицы заменены звездочками):

$$\begin{pmatrix} 1 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 1 \\ 0 & 0 & * & 0 \\ 1 & 0 & 1 & * \\ * & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & * & 0 \\ 1 & 0 & 1 & * \\ * & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & * & 0 \\ 1 & 0 & * & 1 \\ * & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & * & 0 \\ * & 0 & 1 & 1 \\ * & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Множество независимых вершин в графе  $\Gamma_p$  отвечает множеству независимых ребер в графе  $\Gamma_d$ , отсюда  $\alpha_1(\Gamma_d) = \alpha_0(\Gamma_p) = 4$ :

$$\{1, 3, 7, 9\}, \{1, 4, 5, 7\}, \{1, 3, 6, 8\}, \{1, 3, 5, 7\}, \{1, 3, 5, 8\}.$$

Для реберного графа  $\Gamma_p$  можно указать и три максимальных клики:  $\{2, 3, 4\}$ ,  $\{4, 8, 9\}$  и  $\{5, 6, 9\}$ . Наконец, выпишем минимальные множества вершинных покрытий для графа  $\Gamma_p$ , которые получаются как дополнения к максимальным множествам независимых вершин:

$$\{2, 4, 5, 6, 8\}, \{2, 3, 6, 8, 9\}, \{2, 4, 5, 7, 9\}, \{2, 4, 6, 8, 9\}, \{2, 4, 6, 7, 9\},$$

Для поиска подмножества независимых вершин и вершинных покрытий пользуются *методом булевых функций*. С этой целью запишем граф  $\Gamma_p$  в конъюнктивной нормальной форме (КНФ), при этом сам символ конъюнкции опустим:

$$f(\Gamma_p) = (2 \vee 1)(2 \vee 3)(2 \vee 4)(9 \vee 4)(9 \vee 5)(9 \vee 6) \times \\ \times (9 \vee 8)(7 \vee 8)(7 \vee 6)(5 \vee 6)(4 \vee 8)(4 \vee 3).$$

Пользуясь только законами поглощения —

$$a \vee (ab) = a, \quad a(a \vee b) = a,$$

переведем нашу булеву функцию  $f(\Gamma_p)$  в минимальную дизъюнктивную нормальную форму (ДНФ). На практике удобно использовать законы поглощения не после полного раскрытия скобок, а в процессе их последовательного перемножения:

$$\begin{aligned} f(\Gamma_p) &= (2 \vee 134)(9 \vee 4568)(7 \vee 68)(5 \vee 6)(4 \vee 38) = \\ &= (29 \vee 24568 \vee 1349 \vee 134568)(457 \vee 467 \vee 468 \vee 368 \vee 3578) = \\ &= \underline{24579} \vee \underline{24679} \vee \underline{24689} \vee \underline{23689} \vee \underline{24568} \vee 235789 \vee 134579 \vee \\ &\quad \vee 134679 \vee 134689 \vee 134568. \end{aligned}$$

Подчеркнутые конъюнкты образуют известные нам пять минимальных вершинных покрытий. Их дополнениями являются максимальные множества независимых вершин.

Чтобы проверить правильность нахождения всех вершинных покрытий, необходимо воспользоваться *принципом двойственности*, который действует в рамках логики Буля. Для этого результирующее выражение запишем в КНФ и с помощью того же закона поглощения приведем его к ДНФ:

$$\begin{aligned} f(\Gamma_p) &= (2 \vee 4 \vee 5 \vee 7 \vee 9)(2 \vee 4 \vee 6 \vee 7 \vee 9) \dots (1 \vee 3 \vee 4 \vee 5 \vee 6 \vee 8) = \\ &= 21 \vee 23 \vee 24 \vee 94 \vee 95 \vee 96 \vee 98 \vee 78 \vee 76 \vee 56 \vee 48 \vee 43. \end{aligned}$$

В конъюнктах этой дизъюнктивной формы узнаются ребра исходного графа  $\Gamma_p$ . Значит, минимальные покрытия найдены верно.

### Трансверсаль, матроид и двойственность графов

Снова вернемся к нашему исходному двудольному графу  $\Gamma_a(V, E)$  и введем в оборот новое важное понятие — трансверсаль. *Трансверсалью* (или *системой различных представителей*) называется подмножество  $T$  из  $V$ , состоящее из элементов  $v_i$  по одному из каждого подмножества  $e_j$ . В нашем конкретном случае

$$\Gamma_a(V, E) = \{e_1, e_2, e_3, e_4\} = \{\{v_1, v_4, v_5\}, \{v_1\}, \{v_2, v_3, v_4\}, \{v_2, v_4\}\}$$

можно выделить четыре трансверсали:

$$T_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \quad T_2 = \{v_1, v_2, v_3, v_5\},$$

$$T_3 = \{v_1, v_3, v_4, v_5\}, \quad T_4 = \{v_1, v_2, v_4, v_5\}.$$

В определенном смысле нам повезло с двудольным графом  $\Gamma_a$ . Ясно, что трансверсаль существует только в том случае, если для любых  $k$  элементов подмножеств  $e_j$  их объединение содержит, по меньшей мере,  $k$  элементов. Например, в семействе  $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ :

$$\{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\}, \{v_1, v_2, v_3\}, \{v_1, v_3, v_4, v_5\}\}$$

невозможно найти пять различных элементов  $v_i$  по одному из каждого  $e_j$ , поэтому данное семейство не имеет трансверсалей. Здесь объединение четырех множеств содержит только три элемента:

$$e_1 \cup e_2 \cup e_3 \cup e_4 = \{v_1, v_2, v_3\}.$$

Такие семейства, с точки зрения образования системы различных представителей, выпадают из анализа.

Трансверсали обладают одним замечательным свойством: если  $T$  и  $T'$  — любые две трансверсали семейства  $E$  и  $v$  — элемент из  $T$ , то существует элемент  $v'$  из  $T'$  такой, что  $(T - v) \cup v' = T''$  — тоже трансверсаль. Например, для нашего графа  $\Gamma_0(V, E)$ , возьмем в качестве  $T = T_2$ ,  $T' = T_4$  и  $v = v_3$ . Тогда в  $T_4$  найдется элемент  $v' = v_4$  такой, что  $(T_2 - v_3) \cup v_4 = T_3$ .

Оказывается, точно таким же свойством обладают *остовы* графов. Покрывающие деревья исполняют роль трансверсалей потому, если  $T$  и  $T'$  — любые два остова и  $e$  — некоторое ребро из остова  $T$ , то в остове  $T'$  можно найти такое ребро  $e'$ , которое даст новый остов:  $T'' = (T - e) \cup e'$ . Значит, можно говорить не только о *вершинных* трансверсалиях, но и о *реберных*, что уже предполагает наличие некоторой *двойственности*.

Нужно заметить, что понятие трансверсали достаточно основополагающее для всей дискретной математики. С ним мы встречались в логике, существует оно в комбинаторике и линейной алгебре. Что касается последней области знания, указанное свойство демонстрируется следующей формулировкой: если  $V$  и  $V'$  — два базиса одного и того же векторного пространства и  $v$  — вектор из  $V$ , то найдется базисный вектор  $v'$  из  $V'$ , что  $(V - v) \cup v' = V''$ , где  $V''$  — новая система базисных векторов.

Трансверсаль позволяет ввести новое понятие в теорию графов — матроид. *Матроидом*  $M(\mathbf{T}, \mathbf{C})$  графа называется система, состоящая из двух компонент: в первую компоненту входит вся совокупность *остовов*  $\mathbf{T}$ , т.е. совокупность подмножеств, в каждое из которых входит максимальное число, равное рангу  $k$ , *независимых элементов*; вторая совокупность  $\mathbf{C}$  составлена из  $l$  *ячеечных циклов*, представляющих собой минимальные подмножества *зависимых элементов*. Цикломатическое число  $l$  определяется либо количеством хорд, т.е. числом ребер, не вошедших в остов, либо числом внутренних областей (ячеек) планарного графа, которые так же, как и хорды, образуют базисную систему циклов.

Матроид  $M$  может иметь двойственный к себе матроид  $M^*$ , для которого ранг  $k^* = l$ , а цикломатическое число  $l^* = k$ . Двойственному матроиду  $M^*$  отвечает двойственный граф  $\Gamma^*$ , причем  $i^*$ -ребро графа  $\Gamma^*$  соответствует  $i$ -ребру графа  $\Gamma$ , поэтому количество ребер в обоих графах одинаковое  $m = m^*$ . Сказанное поясним на конкретном примере.

Пусть дан граф  $\Gamma$  на шести ребрах (рис. 3.27): граф  $\Gamma^*$  называется двойственным к графу  $\Gamma$ , если векторы базисных разрезов графа  $\Gamma^*$  служат векторами базисных циклов графа  $\Gamma$ , и наоборот. Методика построения двойственного графа показана на этом же рисунке черными кружками и пунктирными линиями. Таким образом, граф  $\Gamma^*$  имеет столько же ребер, сколько и граф  $\Gamma$ ; число вершин графа  $\Gamma^*$  равно числу областей, на которые делит плоскость своими ребрами граф  $\Gamma$ , причем имеется соответствие: цикл  $\{1, 2, 3\}$  графа  $\Gamma$  отвечает разрезу  $\{1^*, 2^*, 3^*\}$  графа  $\Gamma^*$ , цикл  $\{3, 4, 5\}$  отвечает разрезу  $\{3^*, 4^*, 5^*\}$ , разрез  $\{6\}$  отвечает циклу  $\{6^*\}$ , разрез  $\{1, 2\}$  отвечает циклу  $\{1^*, 2^*\}$ , разрез  $\{4, 5\}$  отвечает циклу  $\{4^*, 5^*\}$ , наконец, разрез  $\{2, 3, 5\}$  отвечает циклу  $\{2^*, 3^*, 5^*\}$ .

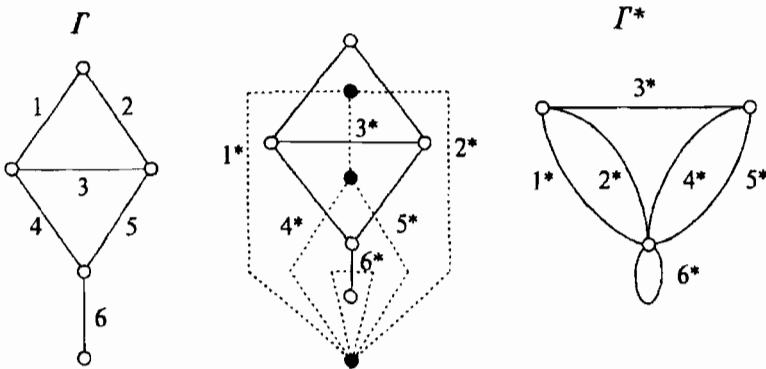


Рис. 3.27

Число покрывающих деревьев исходного графа  $\Gamma$  и двойственного  $\Gamma^*$  находится путем вычисления определителей:

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 8, \quad D^* = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 8.$$

Следовательно, в матроиде  $M$  графа  $\Gamma$  имеется 8 трансверсалей:

$$T_1 = \{1, 2, 4, 6\}, T_2 = \{1, 2, 5, 6\}, T_3 = \{1, 3, 4, 6\}, T_4 = \{1, 3, 5, 6\},$$

$$T_5 = \{1, 4, 5, 6\}, T_6 = \{2, 3, 4, 6\}, T_7 = \{2, 3, 5, 6\}, T_8 = \{2, 4, 5, 6\}.$$

В матроид  $M$  входят два ячеечных цикла минимальной длины:

$$C_1 = \{1, 2, 3\} \text{ и } C_2 = \{3, 4, 5\}.$$

Зависимость ребер в ячеечных циклах и независимость их в остовых связаны с линейной зависимостью или независимостью соответствующих столбцов матрицы инцидентности  $B(\Gamma)$ . В частности, столбцы  $\{1, 2, 4, 6\}$ ,  $\{1, 2, 5, 6\}$  и т.д. независимы, а столбцы  $\{1, 2, 3\}$  и  $\{3, 4, 5\}$  зависимы. Зависимость столбцов означает, что каждый из них может быть выражен через два других:

$$B(\Gamma) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Матроид  $M^*$  от двойственного графа  $\Gamma^*$  образован следующими трансверсалими:

$$\begin{aligned} T_1^* &= \{1, 3\}, & T_2^* &= \{1, 4\}, & T_3^* &= \{1, 5\}, & T_4^* &= \{2, 3\}, \\ T_5^* &= \{2, 4\}, & T_6^* &= \{2, 5\}, & T_7^* &= \{3, 4\}, & T_8^* &= \{3, 5\}. \end{aligned}$$

Имеется четыре ячеечных цикла, которые охватывают соответствующие элементарные области:

$$C_1^* = \{6\}, \quad C_2^* = \{1, 2\}, \quad C_3^* = \{4, 5\}, \quad C_4^* = \{1, 3, 4\}.$$

Кроме того,

$$k = l^* = 4, \quad l = k^* = 2, \quad k + l = k^* + l^* = 6.$$

Остановимся несколько подробнее на двойственности графов. При изучении групп мы узнали о пяти правильных многогранниках (первое число в круглых скобках означает количество граней, второе — число сторон каждой грани): тетраэдр (4, 3), куб (6, 4), октаэдр (8, 4), додекаэдр (12, 5), икосаэдр (20, 3). Между этими многогранниками существует *двойственность*: если у одного из этих многогранников соединить отрезками прямых центры граней, имеющих общее ребро, то получится другой многогранник. Двойственными друг к другу будут: куб — октаэдр, додекаэдр — икосаэдр, левый тетраэдр — правый тетраэдр (с точки зрения симметрии, вернее было бы говорить не о пяти, а о шести правильных геометрических телах). Если ребра этих многогранников спроецировать на плоскость, то геометрическая двойственность переходит в двойственность графов.

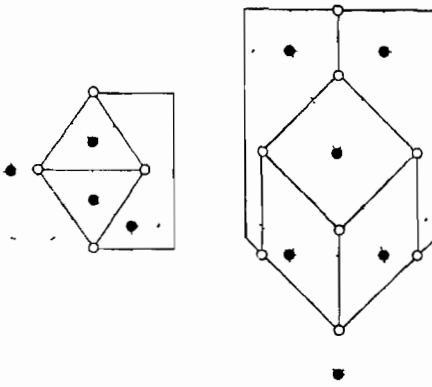


Рис. 3.28

На рис. 3.28 показана двойственность для тетраэдра, куба и октаэдра. Для произвольных многогранников (не обязательно правильных) с  $n$  вершинами, лежащими на сфере,  $m$  ребрами и  $f$  гранями выполняется равенство Эйлера:  $n - m + f = 2$ , например, для куба имеем:  $8 - 12 + 6 = 2$ . Между точками бесконечной плоскости и точками сферы конечного радиуса существует взаимно однозначное соответствие. Поэтому планарный граф проецируется на сферу в виде выпуклого многогранника. Число граней многогранника всегда на единицу больше цикломатического числа соответствующего графа, т.е.  $f = l + 1$ , так как помимо ячеечных циклов, очерчивающих все «видимые» грани, всегда присутствует окаймляющий цикл (сумма по mod (2) всех ячеечных циклов), который очерчивает «невидимую» нам грань многогранника, представленного графом. Ранг графа на единицу меньше числа вершин, т.е.  $k = n - 1$ . Наконец, напомним известное равенство:  $m = k + l$ . Из этих трех равенств вытекает доказательство истинности тождества Эйлера:

$$n - m + f = n - (n - 1 + l) + (l + 1) = 2.$$

Теперь главный вывод. Если в многограннике провести пространственную диагональ, то в графе на плоскости появится «непланарное» ребро, равенство Эйлера нарушится, а вместе с ним и все остальные равенства, в том числе базисное:  $m = k + l$ , выполнимое для любого матроида. Поэтому на непланарном графе нельзя построить матроид.

В отношении построения двойственных графах существует некоторая неоднозначность. На рис. 3.29 изображен один и тот же граф  $G$ , но с двумя различными укладками вершин и ребер  $G_1$  и  $G_2$ . В зависимости от укладки будут получаться и различные двойственные графы —  $G_1^*$  и  $G_2^*$ . В частности, в графе  $G_1^*$  имеются вершины



шестой и четвертой степени, а в графе  $\Gamma_2^*$  вместо них две вершины пятой степени. Данный факт нарушает главное свойство графов — их независимость от укладки вершин и ребер. Ранее говорилось, что граф однозначно характеризуется матрицами инцидентности, куда не заложена информация об укладке элементов графа на плоскости. Двойственный же граф, оказывается, зависит от этой несущественной детали: матрицы инцидентности для графов  $\Gamma_1^*$  и  $\Gamma_2^*$  различаются:

$$B(\Gamma_1^*) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B(\Gamma_2^*) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

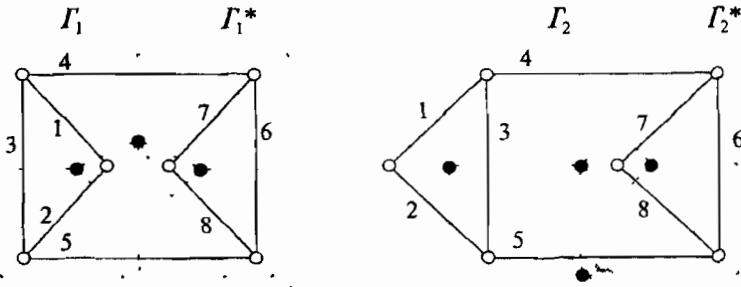


Рис. 3.29

Однако, если мы подсчитаем число покрывающих деревьев для обоих графов  $\Gamma_1^*$  и  $\Gamma_2^*$ , то оно окажется одинаковым

$$D(\Gamma_1) = D(\Gamma_2) = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 30,$$

$$D(\Gamma_1^*) = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 30, \quad D(\Gamma_2^*) = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 30$$

Одинаковыми будут, по сути, и матроиды, так как остовы у них полностью совпадают:

$$M(\Gamma_1) = M(\Gamma_2)$$

$$M(\Gamma_1^*) = M(\Gamma_2^*)$$

$$T_1 = \{1, 2, 5, 6, 7\},$$

$$T_1^* = \{1^*, 3^*, 6^*\},$$

$$T_2 = \{1, 2, 5, 6, 8\} \text{ и т д}$$

$$T_2^* = \{1^*, 4^*, 6^*\} \text{ и т д}$$

Внешнее различие наблюдается лишь в циклической части. Так, для  $M(\Gamma_1)$  средняя ячеечная область выражается циклом  $C = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$ , а для  $M(\Gamma_2)$  средняя область выражается уже циклом  $C' = \{3, 4, 5, 7, 8\}$ . Аналогичные различия могут возникнуть и в двойственных матроидах  $M(\Gamma_1^*)$  и  $M(\Gamma_2^*)$ . Однако, если  $C_1$  и  $C_2$  являются двумя смежным ячеечными циклами и цепь ребер  $e_i$  для них общая, то результирующий цикл  $C_3$ , получившийся как объединение  $(C_1 \cup C_2) - e_i = C_3$ , может участвовать в множестве  $S$  матроида  $M(T, S)$  вместо одного из ячеечных циклов. Путем подобных объединений мы можем заменить все ячеечные циклы на хордовые, получающиеся от хорд одного из покрывающих деревьев. Таким образом, для матроида циклическая часть  $S$  определена неоднозначно; что же касается множества остовов  $T$ , то оно строго неизменно, какова бы ни была укладка исходного графа  $\Gamma$ , и называется базой матроида  $M(T, S)$ .

Тем не менее удобная укладка графа может сыграть принципиально важную роль в разрешении прикладных задач. Предположим, нам задан сложный орграф  $\Gamma_0$  (рис. 3.30) с различными весовыми характеристиками дуг, например, их длиной, и требуется найти минимальный путь между двумя заранее заданными вершинами. Ясно, что без серьезного «анатомирования» здесь не обойтись. Однако отвлечемся пока от весовых характеристик дуг и займемся чисто морфологическим анализом орграфа  $\Gamma_0$ . Прежде, чем приступить к нему, введем в оборот новые понятия.

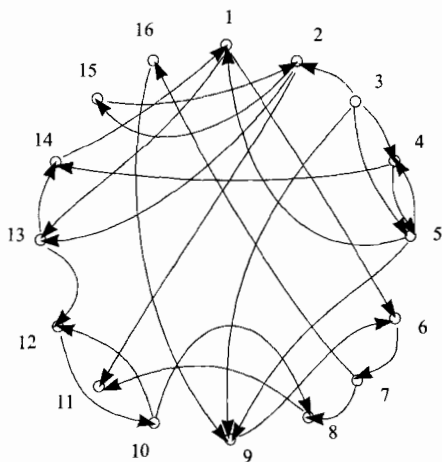


Рис. 3.30

Одна из основных задач, которые решаются по морфологическому анализу ориентированных графов, это разбиение вершин на непересекающиеся классы эквивалентности и порядка. С отношения-

### Отношения эквивалентности и порядка

Одна из основных задач, которые решаются по морфологическому анализу ориентированных графов, это разбиение вершин на непересекающиеся классы эквивалентности и порядка. С отношения-

ми эквивалентности и порядка мы сталкивались в теории групп. Оказывается, эти отношения встречаются и в теории графов. Сначала рассмотрим вопрос разбиения вершин  $\Gamma_0$  на классы эквивалентности или *сильно связанные подграфы*.

Введем оператор  $G$ , который указывает на связь вершины  $i$  с другими вершинами графа  $\Gamma_0$ . Будем различать две группы  $G$ -операторов: *прямого* действия  $G^+(i)$  и *обратного*  $G^-(i)$ . Оператор  $G^+(i)$  указывает на те вершины, в которые можно попасть непосредственно из вершины  $i$ ; обратный оператор  $G^-(i)$  указывает на совокупность вершин, из которых можно попасть в вершину  $i$ . Степени  $G$ -операторов определяются обычным образом:

$$G^0(i) = \{i\}, G^2(i) = \{G^+(G^+(i))\}, G^{-2}(i) = \{G^-(G^-(i))\}, \dots$$

Непосредственно по рис. 3.30 находим результат действия  $G$ -оператора на вершины 1 и 2:

$$G^0(1) = \{1\}; G^{-1}(1) = \{5, 14\}; G^1(1) = \{6, 13\};$$

$$G^{-2}(1) = \{3, 4, 13\}; G^2(1) = \{7, 12, 14\};$$

$$G^0(2) = \{2\}; G^3(1) = \{8, 16, 10, 1\}; G^1(2) = \{11, 13, 15\};$$

$$G^4(1) = \{6, 13, 11, 8, 12, 9\}; G^{-1}(2) = \{3, \tilde{15}\}; \text{ и т.д.}$$

Для всякой вершины  $i$  орграфа  $\Gamma_0$  можно определить *прямое*  $G^+(i)$  и *обратное*  $G^-(i)$  *транзитивные замыкания*. Они определяются через объединение всех степеней  $G$ -оператора, соответственно, положительных и отрицательных:

$$G^+(i) = G^0(i) \cup G^1(i) \cup G^2(i) \cup G^3(i) \cup \dots$$

$$G^-(i) = G^0(i) \cup G^{-1}(i) \cup G^{-2}(i) \cup G^{-3}(i) \cup \dots$$

Смысл прямого транзитивного замыкания  $G^+(i)$  состоит в том, что оно указывает множество вершин орграфа  $\Gamma_0$ , в которые можно попасть из вершины  $i$ . Обратное транзитивное замыкание  $G^-(i)$  указывает на те вершины  $\Gamma_0$ , из которых можно попасть в вершину  $i$ . В обоих случаях длина пути по числу дуг не ограничивается. Пересечение прямого и обратного замыканий определяет подграф *сильно связанных вершин* или *класс эквивалентности* вершины  $i$ :

$$C(i) = G^+(i) \cap G^-(i).$$

Смысл сильной связи заключен в *достижимости* любой вершины из любой вершины данного класса. Сама вершина  $i$  называется *представителем класса*  $C(i)$ . В качестве представителя класса эквивалентных вершин может выступать любая вершина этого класса.

Для нашего конкретного орграфа  $\Gamma_0$  имеем:

$$G^+(1) = \{1, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 16\}, G^-(1) = \{1, 2, 3, 4, 5, 13, 14, 15\}$$

Следовательно, первый класс сильно связанных вершин образован тремя вершинами:

$$C_1(1) = G^+(1) \cap G^-(1) = \{1, 13, 14\}$$

Вершина 2 попадает во второй класс эквивалентности, где помимо представителя присутствует еще одна вершина — 15-ая:

$$G^+(2) = \{2, 11, 15\}, G^-(2) = \{2, 3, 15\}, C_2(2) = \{2, 15\}$$

Всего подобная процедура позволяет найти восемь непересекающихся классов эквивалентности. Перечислим их без указания вершин-представителей.

$$\begin{aligned} C_1 &= \{1, 13, 14\}, \\ C_2 &= \{2, 15\}, \\ C_3 &= \{3\}, \\ C_4 &= \{4, 5\}, \\ C_5 &= \{6, 7, 9, 16\}, \\ C_6 &= \{10, 12\}, \\ C_7 &= \{8\}, \\ C_8 &= \{11\} \end{aligned}$$

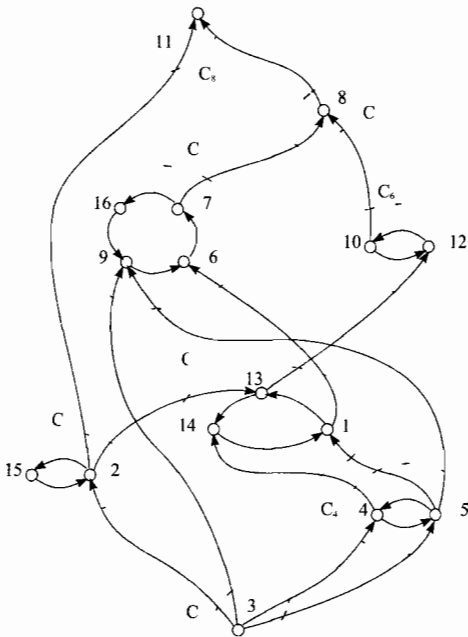


Рис. 3.31

Теперь орграф  $\Gamma_0$  распался на сильно связанные подграфы, которые подчинены *отношению порядка* (рис. 3.31). Но прежде, чем приступить к изучению *классов порядка*, опишем метод нахождения классов эквивалентности при помощи матрицы смежности. Она позволит описанный процесс алго-

ритмизировать так, чтобы поиск эквивалентных классов можно было осуществить на компьютере. Справа от матрицы  $A(\Gamma_0)$  размещен столбец прямого транзитивного замыкания, построенного для вершины 1, т.е.  $G^+(1)$ , а под ней строка  $G^-(1)$ .

$$A(\Gamma_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 0 \\ * \\ * \\ * \\ * \\ * \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ * \\ 3 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 0 & 3 & 2 & 2 & 1 & * & * & * & * & * & * & * & 2 & 1 & 4 & * \end{matrix}$$

Если  $i = 1$ , то в клетку столбца против этой вершины ставим нулевую степень. В клетку столбца  $G^+(1)$  напротив вершины 6 ставим первую степень, так как для первой вершины соответствующая ей строка содержит 1 на позиции 6. Из этих же соображений 1 ставим на 13 месте столбца  $G^+(1)$ . Поскольку строка 6 матрицы  $A(\Gamma_0)$  содержит 1 в позиции 7, то напротив вершины 7 ставим степень 2. Вместе со строкой 6 рассматривается строка 13; здесь уже две единицы: на позициях 12 и 14; следовательно, в столбце  $G^+(1)$  на этих местах тоже появляются 2. Это означает, что кратчайшее расстояние от вершины 1 к вершинам 7, 12 и 14 равно двум дугам. Строки 7, 12 и 14 содержат 1 на местах 8, 16, 10 и 1. Из этих четырех чисел последнее отбрасывается, поскольку из вершины 1 мы начали свое движение; соответствующая ей клеточка занята 0. Остальные три числа укажут места, куда выставляется степень 3. Далее, в строках 8, 10 и 16 единицы расположены на 8, 9, 11 и 12 месте; числа 8 и 12 игнорируем, а на 9 и 11 местах столбца  $G^+(1)$  выставляем 4. Наконец, в строках 9 и 11 мы не находим новых позиций, значит остальные вершины орграфа  $\Gamma_0$  из вершины 1 недостижимы. Прямое транзитивное замыкание  $G^+(1)$  образовано вершинами  $\{1, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 16\}$ , как и должно было получиться. В пустых клетках столбца  $G^+(1)$  выставляем символы « \* ».

Аналогичным образом действуем в отношении обратного транзитивного замыкания  $G^-(1)$ , только вместо строк будем рассматривать уже столбцы матрицы смежности  $A(\Gamma_0)$ . Получающиеся числа в строке под матрицей  $G^-(1)$  являются степенями  $G$ -оператора, которые указывают соответствующие длины путей до вершины 1. После проделанной процедуры у нас получается известный набор вершин:  $\{1, 2, 3, 4, 5, 13, 14, 15\}$  с различными степенями достижимости вершины 1. Удаляя из матрицы  $A(\Gamma_0)$  общие для  $G^+(1)$  и  $G^-(1)$  вершины, т.е. 1, 13, 14, переходим к матрице  $A'(\Gamma_0)$ . В ней выбираем произвольную вершину; пусть ею будет вершина 2. Затем целиком повторяем ту же процедуру, что и над матрицей  $A(\Gamma_0)$ . Так мы находим прямое и обратное транзитивные замыкания для вершины 2, которые были нами уже выписаны. В новой матрице смежности  $A''(\Gamma_0)$  по сравнению с  $A'(\Gamma_0)$  отсутствуют позиции 2 и 15. Общее число матриц смежности с последовательно удаленными строками и столбцами равно числу классов эквивалентности; в нашем случае оно равно 8.

$$A'(\Gamma_0) = \begin{pmatrix} & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 15 & 16 \\ \left( \begin{array}{l} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} 0 \\ * \\ * \\ * \\ * \\ * \\ * \\ * \\ * \\ * \\ * \\ * \\ * \\ * \\ * \\ * \end{array} \\ 0 & 1 & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & 1 & * \end{pmatrix}$$

$$A''(\Gamma_0) = \begin{pmatrix} & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 16 \\ \left( \begin{array}{l} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} * \\ * \\ * \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ * \\ * \\ 3 \\ * \\ * \\ 2 \end{array} \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 3 & * & 1 & * & * & * & * & 2 \end{pmatrix}$$

$$A'''(\Gamma_0) = \begin{array}{cccccccc} & 3 & 4 & 5 & 8 & 10 & 11 & 12 \\ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{l} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{l} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \\ * & * & * & * & * & * & * & * \\ 1 & 0 & 1 & * & * & * & * & * \end{array}$$

Разбиению на классы порядка поддаются только те орграфы, которые не содержат контуров и петель. Если таковые имеются, то прежде необходимо произвести разбивку на классы эквивалентности, а затем каждый из классов принять за вершину нового орграфа. В нашем случае этот новый орграф будет содержать восемь вершин, причем их упорядочение из рис. 3.31 вполне очевидно. Чтобы не играть с читателем в поддавки, возьмем в качестве исходного орграфа  $\Gamma_0$ , подлежащего упорядочению, более сложную структуру на 18 вершинах, изображенную на рис. 3.32; здесь уже иерархию вершин предугадать сложно.

Упорядочение по матрице смежности  $A(\Gamma_0)$  производится строго по столбцам. Если упорядочение производить по строкам, то полученная иерархия будет соответствовать противоположному направлению дуг. Мы приводим оба вида упорядочения, чтобы продемонстрировать их различие. Когда спрашивается, изменится ли разбиение вершин на классы порядка при одновременной смене направления всех дуг орграфа  $\Gamma_0$  (рис. 3.32), обычно «отвечают»: «нет, классы останутся прежними». Но это не так; упорядочение по противоположным направлениям дуг, т.е. по строкам матрицы смежности  $A(\Gamma_0)$ , создает другие классы порядка.

Итак, опишем прямое разложение орграфа на классы порядка по столбцам матрицы  $A(\Gamma_0)$ . Для нахождения первого класса порядка  $C_1$  подсчитаем число единиц в каждом столбце и выпишем результаты в первую строку под матрицей  $A(\Gamma_0)$ . В трех позициях, а именно: 5, 10 и 11, оказались нули, так как в соответствующих столбцах отсутствуют единицы. Это означает, что вершины 5, 10 и 11 образовали самый нижний уровень; им не предшествует ни одна дуга; они являются «истоками»; эти три вершины образовали класс  $C_1$ .

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{matrix} 2 & 2 & 2 & 0 & * & * & * \\ 2 & 2 & 2 & 0 & * & * & * \\ 1 & 1 & 0 & * & * & * & * \\ 2 & 2 & 0 & * & * & * & * \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 1 & 0 & * & * \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 0 & * & * \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & * \\ 3 & 3 & 3 & 2 & 1 & 0 & * \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 2 & 1 & 0 & * \\ 2 & 1 & 0 & * & * & * & * \\ 2 & 1 & 0 & * & * & * & * \\ 2 & 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * & * \end{matrix}$
$\begin{matrix} 1 & 3 & 2 & 2 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 4 & 3 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 & * & 1 & 2 & 0 & 0 & * & * & 0 & 4 & 3 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & * & 0 & 0 & * & * & * & * & 2 & 3 & 1 & 3 & 4 & 2 \\ * & 0 & 0 & 1 & * & * & * & * & * & * & * & 0 & 2 & 1 & 3 & 4 & 2 \\ * & * & * & 0 & * & * & * & * & * & * & * & * & 1 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & 0 & * & 0 & 2 & 2 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & 0 & 0 \end{matrix}$	

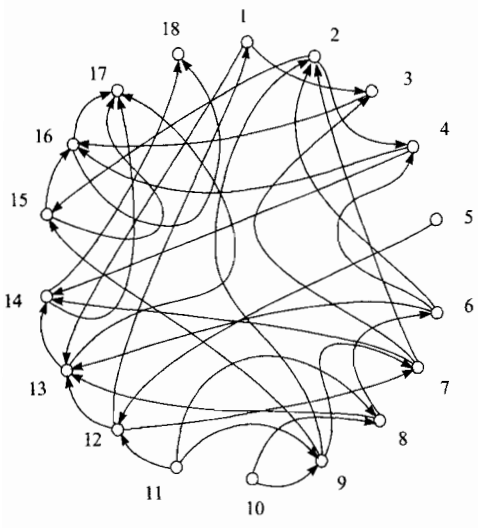


Рис. 3.32

Далее, мысленно (чтобы не выписывать новую матрицу смежности) вычеркнем из матрицы  $A(\Gamma_0)$  названные строки и вновь подсчитаем число единиц по столбцам, а результат запишем во вторую строку под матрицей; на местах же 5, 10 и 11 выставим символы « \* ». Во второй строке нули окажутся в 8, 9 и 12 позициях, значит, вершины под этими номерами образуют класс  $S_2$ . Снова вычеркиваем три строки, соответствующие уже этим вершинам. Начинаем искать вершины третьего класса  $S_3$

и т.д. В результате получим семь классов порядка. На рис. 3.33 изображен упорядоченный орграф  $\Gamma_0$ , разложенный на семь классов порядка  $S_i$ , которым отвечают семь уровней.



Обратное разложение орграфа на классы порядка по строкам матрицы  $A(\Gamma_0)$ , которое будет соответствовать противоположному направлению дуг, по количеству тоже дает семь классов, но по составу вершин три из них отличаются от прямого разложения. Выпишем для сравнения все классы порядка, причем классы разложения по противоположному направлению дуг поместим штрихом:

- $C_1 = C'_1 = \{5, 10, 11\}$ ,
- $C_2 = C'_2 = \{8, 9, 12\}$ ,
- $C_3 = \{1, 6, 7\}$ ,
- $C'_3 = \{6, 7\}$ ,
- $C_4 = \{2, 3, 13\}$ ,
- $C'_4 = \{1, 2\}$ ,
- $C_5 = \{4, 15\}$ ,
- $C'_5 = \{3, 4, 13, 15\}$ ,
- $C_6 = C'_6 = \{14, 16\}$ ,
- $C_7 = C'_7 = \{17, 18\}$ .

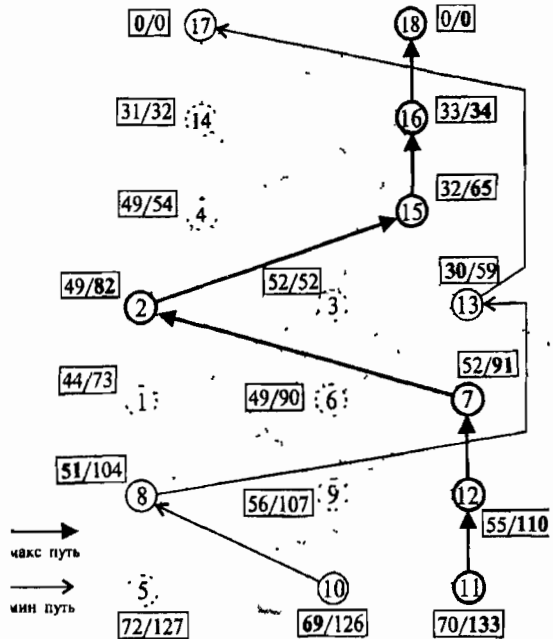


Рис. 3.33

Если бы на каком-то этапе появилась строка (для прямого разложения) или столбец (для обратного разложения) без нулей, то это означало бы, что исходный орграф  $\Gamma_0$  содержит контуры и требуется предварительная процедура разложения  $\Gamma_0$  на подграфы сильно связанных вершин. У нас такой ситуации не возникло.

**Оптимальный путь и максимальный поток**

Теперь поставим перед собой новую задачу. Пусть каждая дуга нашего упорядоченного орграфа  $\Gamma_0$  (рис. 3.33) снабжена весом, который складывается из суммы весов инцидентных ей вершин. За вес вершины примем ее порядковый номер. Так, у нас имеется дуга, идущая из вершины 2 в вершину 15, следовательно, вес этой дуги равен 17. Для наглядности будем считать, что она имеет длину 17 километров. Задача формулируется так: найти два пути, соответствующие минимальной и максимальной длине.

Поиск оптимального пути предполагает расстановку потенциалов для каждой вершины, т.е. образно говоря, некоего щита, на котором указывается километраж (мин./макс.). Расстановка потенциалов начинается сверху. Потенциал седьмого уровня принимается за 0; потенциалы других вершин получаются из общей длины пути, отсчитанной от вершин самого верхнего уровня до данной вершины, при этом подсчитывается длина всех путей, ведущих к этой вершине. Так, от вершины 2, принадлежащей 4 уровню, к вершинам 17 и 18, принадлежащих седьмому уровню, ведет семь путей; перечислим их по степени возрастания:

- 1)  $17 + 32 = 49$ ,    4)  $6 + 20 + 33 = 59$ ,    6)  $17 + 31 + 33 = 81$ ,  
 2)  $6 + 18 + 31 = 55$ ,    5)  $6 + 20 + 34 = 60$ ,    7)  $17 + 31 + 34 = 82$ .  
 3)  $6 + 18 + 32 = 56$ ,

Следовательно, минимальный потенциал равен 49, максимальный — 82 км. Если потенциалы вершин 4 и 15, принадлежащих пятому уровню, известны, вычислений понадобится гораздо меньше; ясно, что максимальный и минимальный путь для вершины 2 определится дугой в 17 км, которая ведет к вершине 15 с потенциалами 32/65. Поэтому расстановку потенциалов и рекомендуется начать с самых верхних вершин, двигаясь последовательно по уровням вниз.

Таким образом, получаем минимальный, равный 69 км, и максимальный, равный 133 км, потенциалы. Далее остается только провести отличительными линиями дуги, инцидентные вершинам с максимальным и минимальным потенциалами, взятыми уже по каждому уровню. Если расстановку потенциалов мы начинали сверху, то проводка оптимальных путей начинается снизу. Для обратного движения сверху вниз расстановка потенциалов начинается снизу, а проводка путей — сверху. Хотя разложение вершин на классы порядка для обратного движения отличаются от прямого, длина минимального и максимального путей не меняется, т.е. если мы ехали из пункта  $A$  в пункт  $B$  по дороге с минимальной длиной пути в 69 км, то обратная поездка из пункта  $B$  в пункт  $A$  должна составить тот же самый минимальный километраж и проходить по тем же самым промежуточным пунктам.

Вообще, следует заметить, задача поиска оптимального пути в принципе может быть решена без предварительного разбиения на классы порядка. Разбиение на классы в особо запутанных графах лишь существенно облегчает этот поиск.

Пусть оргграф  $\Gamma_0$  (рис. 3.34) представляет собой *транспортную сеть*, каждая дуга которой обладает заранее определенной *пропускной способностью*  $\mu$  (в качестве таковой примем числа, нумерующие дуги). Поставим задачу: найти максимальную пропускную способность сети между ее истоком и стоком. При нахождении *общего фактического потока*  $\lambda$  необходимо помнить об очевидных правилах: сумма потоков дуг, выходящих из истока транспортной сети, должна быть равна сумме потоков дуг, входящих в сток; алгебраическая сумма потоков при любой вершине, не принадлежащей стоку или истоку, должна быть равна нулю; максимальный поток на пути от вершины  $i$  к вершине  $j$  определяется дугой  $k$ , которая имеет минимальную пропускную способность из всех дуг, принадлежащих этому пути.

Если пропускная способность  $k$ -дуги  $\mu_k$  равна идущему через нее потоку  $\lambda_k$ , то такую дугу будем называть *насыщенной*, а любой путь, куда она включена, — *насыщенным путем*. У нас  $k$ -й номер дуги (число вне скобок) определяет величину пропускной способности  $\mu_k$ , а число в скобках говорит о фак-

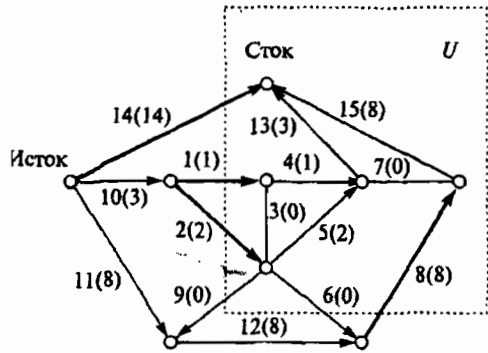


Рис. 3.34

тическом потоке  $\lambda_k$ , т.е. в наших обозначениях имеем  $\mu_k(\lambda_k)$ . Общий поток транспортной сети будет максимальным  $\lambda_{\max}$ , если любой путь, соединяющий исток со стоком, окажется насыщенным. В этом случае поток  $\lambda_{\max}$  станет равным минимальной пропускной способности  $\mu_{\min}$  разреза, отделяющего сток от истока.

В связи с последним замечанием дадим определение разреза применительно к транспортной сети. Пусть сток принадлежит некоторому множеству вершин  $U$  (они лежат внутри прямоугольника). Тогда разрезом  $S(U)$  называются все *входящие* в вершины  $U$  насыщенные дуги (в нашем случае это дуги 1, 2, 8 и 14); пропускная способность *выходящих* из вершин  $U$  дуг при этом не учитывается (выходящими дугами у нас являются 6 и 9). Поиск максимального

потока осуществляется путем перебора всех возможных насыщенных путей от истока к стоку, причем при расстановке потока в дугах ориентируются только на три сформулированных правила. В результате перебора получим величину максимального потока:

$$\lambda_{\max} = \mu_{\min} = 1 + 2 + 8 + 14 = 25.$$

Поскольку изображенный на рис. 3.34 оргграф достаточно простой, предварительной работы по разбиению его на сильно связанные классы вершин с последующим упорядочением их между уровнями истока и стока проводить необязательно.

Разбиение на классы порядка не требуется проводить еще в двух важных случаях. Во-первых, когда иерархия вершин возникла сама собой, по причине внутренней природы математического объекта, представленного графом. Лучшей иллюстрацией здесь являются *решетки, образованные подгруппами*. Какой бы сложной ни была решетка, ее вершины всегда заранее разбиты на классы порядка, при этом в самом низу оказывается вершина, представляющая тождественный элемент, а на самом верху вершина, представляющая всю группу целиком. Число элементов в подгруппе является естественным критерием упорядочения. Во-вторых, упорядочение излишне в *корневых деревьях*: чем дальше вершина расположена от корня, который можно принять за первый класс порядка, тем выше класс порядка рассматриваемой вершины. Количество ребер, соединяющих данную вершину с корневой, здесь также является естественным критерием упорядочения. С корневыми деревьями мы, например, встречались в разделе «Логика» при рассмотрении *метода резолюций* (рис. 1.19). Далее мы продолжим изучение структур древовидной формы, но уже в рамках теории кодирования и автоматов.

### 3.3. Кодирование, автоматы и группы на графах

#### Типы и назначение кодирования

Кодирование производится с целью:

- 1) сокращения символического текста при ограниченном количестве кодовых символов — *оптимальное кодирование*;
- 2) обнаружения и исправления ошибок при передаче и хранении информации — *корректирующее кодирование*;
- 3) защиты информации от несанкционированного доступа — *секретное кодирование*.

Редко когда все перечисленные задачи выступают отдельно; на

практике чаще бывает совмещение двух или даже трех целей. Однако для лучшего понимания предмета разберем каждый пункт в отдельности, начиная с оптимального кодирования.

Предположим, нужно передать четыре сообщения —  $a_1, a_2, a_3, a_4$ . Эти сообщения можно закодировать так, как показано в табл. 3.10.

При таком кодировании вероятность появления сообщений не учитывалась или предполагалась одинаковой для всех четырех сообщений ( $p = 0,25$ ). Между тем их появление в информационном тексте может происходить с различной частотой:

$$p_1 = 0,5, \quad p_2 = 0,25, \quad p_3 = 0,125, \quad p_4 = 0,125.$$

Фано, учитывая вероятность сообщений, предложил более оптимальное кодирование (табл. 3.11).

Таблица 3.10

Сообщения	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$
Коды	00	01	10	11

Таблица 3.11

Сообщения	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$
Коды	1	01	001	000

Показателем экономичности кода служит *средняя длина кодового слова*, которая определяется как  $l = \sum_{i=1}^n l_i p_i$ , где  $l_i$  — длина кодового слова  $a_i$ ,  $p_i$  — вероятность появления  $a_i$ ,  $n$  — число сообщений.

Для кодировки сообщений по табл. 3.10 средняя длина равна 2, а по табл. 3.11 — 1,75. Следовательно, закодированный по методике Фано информационный текст окажется короче.

Таблица 3.12

На первый взгляд, кодирование по методу Фано кажется избыточным, поскольку коды, представленные табл. 3.11, можно сократить, например так, как это показано в табл. 3.12.

Сообщения	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$
Коды	1	0	01	00

Теперь возьмем следующий закодированный текст: 00101000. Согласно табл. 3.12, данный текст не может быть однозначно дешифрован, так как непонятно, что, собственно, подразумевается: сообщения вида —  $a_2, a_3, a_3, a_4, a_2$ ; или —  $a_4, a_1, a_3, a_2, a_2, a_2$ ; или —  $a_2, a_2, a_1, a_2, a_1, a_2, a_4$  и т.д. Расшифровка же текста по табл. 3.11 производится однозначно —  $a_3, a_2, a_4$ . Из-за этого замечательного свойства код Фано называется *префиксным*. Никакое кодовое слово префиксного кода не является началом другого кодового слова. На-

ряду с методом Фано, существует префиксное кодирование по методу Хаффмана, экономичность которого выше первого.

Для защиты передаваемых текстов от помех используются *корректирующие коды*, которые основываются на *информационной избыточности*. Самый простой способ создания избыточности достигается многократным дублированием передаваемых символов, т.е. образование символьных блоков:  $0 \rightarrow 000$ ,  $1 \rightarrow 111$ . В случае сбоя, решение при дешифровке принимается по большинству оставшихся однотипных символов в блоке. Сами блоки могут включать большее (чем 3) число символов, тогда степень защищенности текста окажется выше. Если длину блока выбрать заранее достаточно большой, то практически любые ошибки можно исключить, правда, при этом скорость передачи информации упадет пропорционально количеству символов в блоке.

Существует очень простая, но эффективная защита информационного текста от *одиночного сбоя*, которая требует минимальной избыточности в один дополнительный символ. Это — *проверка на четность*. При шифровке к тексту добавляется 0 или 1 в зависимости от четности или нечетности суммы единиц в тексте. Если при дешифровке обнаружится нечетное число единиц, значит, текст был передан неверно; если четное — ошибки при передаче не было.

Корректирующий код можно построить с помощью квадратной матрицы, которая не только обнаруживает одиночную ошибку, но и определяет ее местонахождение. Пусть требуется передать девятиразрядное информационное слово  $a = a_{11} \dots a_{33}$ . Тогда к нему прибавляют семиразрядное корректирующее слово  $a' = a_{41} \dots a_{14}$ , символы которого удовлетворяют совокупности проверочных соотношений:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}, \begin{cases} a_{14} = a_{11} + a_{12} + a_{13}, & a_{41} = a_{11} + a_{21} + a_{31}, \\ a_{24} = a_{21} + a_{22} + a_{23}, & a_{42} = a_{12} + a_{22} + a_{32}, \\ a_{34} = a_{31} + a_{32} + a_{33}, & a_{43} = a_{13} + a_{23} + a_{33}, \\ a_{44} = a_{41} + a_{42} + a_{43}, & a_{44} = a_{14} + a_{24} + a_{34}. \end{cases}$$

(суммирование осуществляется по mod (2)).

Предположим, получено следующее закодированное сообщение:

$$A = a a' = 011001011 1010000.$$

Размещаем его в матрице  $4 \times 4$  и составляем проверочные равенства:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{array}{l} 0=0+1+1, \quad 1=0+0+0, \\ 0=0+0+1, \quad 0=1+0+1, \\ 0=0+1+1, \quad 1=1+1+1, \\ 0=1+0+1, \quad 0=0+0+0. \end{array}$$

Проверочные соотношения для  $a_{24}$ , и  $a_{41}$  ошибочны; следовательно, вместо  $a_{21} = 0$ , нужно брать  $a_{21} = 1$ ; исходная последовательность должна была выглядеть как 011101011 1010000.

Для засекречивания информации исходные сообщения могут кодироваться с помощью *адресной матрицы*. Дело в том, что любое сообщение хранится на информационном носителе по определенному адресу и считывается по определенному коммуникационному каналу. Пусть сообщение  $a$  хранится по адресу  $A$ , который выражается трехзначным числом —  $A_0A_1A_2$ . Коммуникационные каналы обозначим как  $c_1, c_2, c_3$  и  $c_4$ . Адресная матрица программируется так, чтобы на ней происходило смешивание адресов и коммуникационных каналов, например, в следующем конкретном виде:

$$c_1' = c_1A_0A_1A_2 + c_4A_0A_1A_2 + c_3A_0A_1A_2 + c_2A_0A_1A_2,$$

$$c_2' = c_4A_0A_1A_2 + c_2A_0A_1A_2 + c_1A_0A_1A_2 + c_3A_0A_1A_2,$$

$$c_3' = c_3A_0A_1A_2 + c_1A_0A_1A_2 + c_2A_0A_1A_2 + c_4A_0A_1A_2,$$

$$c_4' = c_2A_0A_1A_2 + c_3A_0A_1A_2 + c_4A_0A_1A_2 + c_1A_0A_1A_2.$$

Если информационное сообщение имеет адрес 100 ( $A_0A_1A_2$ ), то коммуникационный канал  $c_1'$  подключается к каналу  $c_1$ , канал  $c_2'$  — к инверсному каналу  $c_4$ ,  $c_3'$  — к инверсному  $c_3$  и, наконец,  $c_4'$  — к  $c_2$ ; если идет сообщение с адресом 101 ( $A_0A_1A_2$ ), то осуществляется подключение канала  $c_1'$  к инверсному  $c_4$  и т.д. В результате перемешивания каналов информационные сообщения попадают на чужие адресные места, так что несанкционированное считывание становится невозможным.

### Оптимальные деревья кодирования

Мы рассмотрели «азы» *теории кодирования*. К секретному кодированию мы больше не вернемся; корректирующее кодирование было детально рассмотрено в последнем подразделе главы «Группы»; остается рассмотреть методы оптимального кодирования, в частности, Фано и Хаффмана.

Фано предложил следующий принцип кодирования сообщений, имеющих вероятностную характеристику. Все сообщения выписываются в таблицу по степени убывания вероятности и разбиваются

на две группы равной (на сколько это возможно) вероятности. Первой группе присваивается символ 0, второй — 1. Затем каждая группа вновь делится на две подгруппы равной вероятности, которым также присваиваются символы 0 и 1. В результате многократного повторения этой процедуры получается таблица кодовых слов. Продemonстрируем эту методику на конкретном примере.

Предположим необходимо закодировать 13 сообщений, причем вероятность одного из них равна 0,653, вероятность трех других сообщений равна 0,023, еще четырех — 0,027, и, наконец, пяти оставшихся — 0,034. Сумма вероятностей всех сообщений равна 1. Эти вероятности внесены во второй столбец табл. 3.13 в порядке убывания; первый столбец нумерует сообщения, а в третьем записаны окончательные коды Фано.

Таблица 3.13

Средняя длина кодового слова равна:

$$l = 2,263.$$

Процедура кодирования с помощью двух символов может быть представлена *бинарным деревом* (рис. 3.35). Длина ветвей, равная длине каждого кодового слова, определяет естественные порядковые уровни. В нашем дереве символу 0 отвечает ребро, отклоняющееся влево, а символу 1 — ребро, отклоняющееся вправо. Например, пятое сообщение имеет код 10101; соответствующая ему ветвь выделена жирной линией.

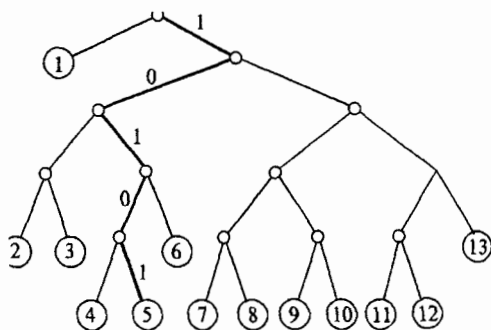


Рис. 3.35

(табл. 3.14) начинается со столбца  $P_1$ ; столбец  $P$  берем за

$n$	$p_n$	Коды
1	0,653	0
2	0,034	1 0 0 0
3	0,034	1 0 0 1
4	0,034	1 0 1 0 0
5	0,034	1 0 1 0 1
6	0,034	1 0 1 1
7	0,027	1 1 0 0 0
8	0,027	1 1 0 0 1
9	0,027	1 1 0 1 0
10	0,027	1 1 0 1 1
11	0,023	1 1 1 0 0
12	0,023	1 1 1 0 1
13	0,023	1 1 1 1

Коды Фано по оптимальности несколько уступают кодам Хаффмана, который показал, что его методика дает предельное сжатие информационного текста. Пусть требуется закодировать все ту же последовательность сообщений. Кодовая таблица Хаффмана



исходный, а столбцы  $K, K_1, K_2$  и т.д. пока оставляем без внимания. В столбце  $P_1$  подчеркнутая вероятность получается путем сложения двух наименьших вероятностей, остальные вероятности записываются без изменений.

Таблица 3.14

$n$	$P$	$K$	$P_1$	$K_1$	$P_2$	$K_2$	$P_3$	$K_3$	$P_4$	$K_4$	$P_5$	$K_5$	$P_6$	$K_6$	$P_7$	$K_7$
1	0,653	0	0,653	0	0,653	0	0,653	0	0,653	0	0,653	0	0,653	0	0,653	0
2	0,034	1100	<u>0,046</u>	1011	<u>0,050</u>	1010	<u>0,054</u>	1001	<u>0,061</u>	1000	<u>0,068</u>	111	<u>0,068</u>	110	<u>0,096</u>	101
3	0,034	1101	0,034	1100	0,046	1011	0,050	1010	0,054	1001	0,061	1000	0,068	111	0,068	110
4	0,034	1110	0,034	1101	0,034	1100	0,046	1011	0,050	1010	0,054	1001	0,061	1000	0,068	111
5	0,034	1111	0,034	1110	0,034	1101	0,034	1100	0,046	1011	0,050	1010	0,054	1001	0,061	1000
6	0,034	10000	0,034	1111	0,034	1110	0,034	1101	0,034	1100	0,046	1011	0,050	1010	0,054	1001
7	0,027	10001	0,034	10000	0,034	1111	0,034	1110	0,034	1101	0,034	1100	0,046	1011		
8	0,027	10010	0,027	10001	0,034	10000	0,034	1111	0,034	1110	0,034	1101				
9	0,027	10011	0,027	10010	0,027	10001	0,034	10000	0,034	1111						
10	0,027	10100	0,027	100011	0,027	10010	0,027	10001								
11	0,023	10101	0,027	10100	0,027	10011										
12	0,023	10110	0,023	10101												
13	0,023	10111														

$P_6$	$K_6$	$P_7$	$K_7$	$P_8$	$K_8$	$P_9$	$K_9$	$P_{10}$	$K_{10}$	$P_{11}$	$K_{11}$
0,653	0	0,653	0	0,653	0	0,653	0	0,653	0	0,653	0
<u>0,068</u>	110	<u>0,096</u>	101	<u>0,115</u>	100	<u>0,136</u>	11	<u>0,211</u>	10	<u>0,347</u>	1
0,068	111	0,068	110	0,096	101	0,150	100	0,136	11		
0,061	1000	0,068	111	0,068	110	0,096	101				
0,054	1001	0,061	1000	0,068	111						
0,050	1010	0,054	1001								
0,046	1011										

Аналогично заполняются все последующие столбцы  $P_2, P_3$ , и т.д. Далее Хаффман рассуждал следующим образом. Два сообщения с наименьшими вероятностями должны иметь одинаковые длины слов и различаться последними символами. Поэтому в последнем столбце  $K_{11}$  против двух вероятностей выставляются символы 0 и 1. Затем идут по табл. 3.8 в обратном направлении, заполняя столбцы  $K_{10}, K_9 \dots K_1, K$ . При этом символы 0 и 1 ставятся против тех вероятностей, которые в сумме давали подчеркнутую вероятность. В частности, сначала в столбце  $K_{10}$  против вероятности 0,653 записываем 0, а против чисел 0,211 и 0,136 — 1. Затем к этим единицам приписываем новую пару символов 0 и 1, получая коды 10 и 11.

Затем обращаем внимание на подчеркнутое число 0,211 столбца  $P_{10}$ ; оно получилось при суммировании чисел 0,15 и 0,096 столбца  $P_9$ , следовательно, этим вероятностям сообщаем одинаковый код 10 и приписываем по третьему символу, так что в столбце  $K_9$  возникают коды 100 и 101. Два других кода — 0 и 11 — переписываются в  $K_9$  из  $K_{10}$  без изменений. Продолжая эту процедуру, мы заполняем последний кодовый столбец  $K$ , который образует окончательную систему кодовых слов. По ней вычерчиваем бинарное дерево (рис. 3.36) по тому же принципу, что и предыдущее дерево, т.е. отклонение ребра влево означает ноль, вправо — 1.

Средняя длина слова, закодированного по Хаффману, равна 2,252, что несколько меньше, чем закодированного по Фано. Большой оптимизации достичь невозможно, за исключением случая, когда вместо двух символов (0 и 1) используется три символа — 0, 1 и 2. *Тринарное дерево* Хаффмана изображено на рис. 3.37. По нему легко установить коды сообщений, если помнить, что для каждого ребра левое ребро означает 0, правое — 2, а серединное — 1. Методика, по которой рассчитываются коды, та же, что и в предыдущем случае, только суммируются не две наименьшие вероятности, а три. Длина кодового слова при тринарной кодировке равна 1,592, что в полтора раза выше, чем при бинарном кодировании.

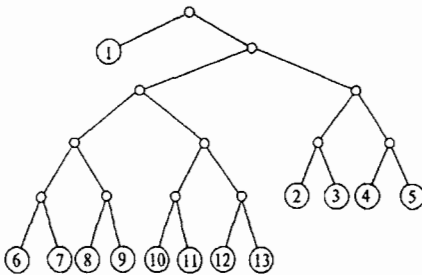


Рис. 3.36

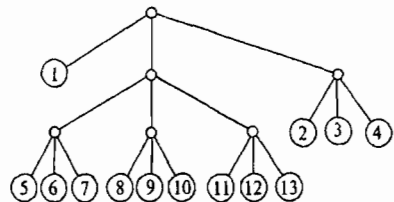


Рис. 3.37

Кодовые деревья Фано и Хаффмана можно рассматривать как графическое задание алгоритмов поиска. При таком понимании средняя длина кодового слова пропорциональна стоимости поиска: чем выше частота обращения к концевой (внешней) вершине, тем меньше должна быть длина пути к ней. С этой точки зрения, рассмотренные деревья являются оптимальными только в отношении обращения к конечным вершинам. А как нужно было бы изменить алгоритм построения оптимального дерева, если бы наряду с веро-

ятностями обращения к внешним вершинам были бы заданы вероятности обращения и к внутренним вершинам?

Пусть задан тот же ряд вероятностей, который, однако, мы разделим на две части; первая часть будет связана с вероятностью обращения к *внешним* вершинам  $a_i$  (табл. 3.15), вторая — с вероятностью обращения к *внутренним* вершинам  $b_i$  (табл. 3.16).

Таблица 3.15

Вершина	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$A_5$	$a_6$
Вероятность	0,653	0,034	0,034	0,027	0,027	0,023	0,023

Таблица 3.16

Вершина	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$	$b_5$	$b_6$
Вероятность	0,034	0,034	0,034	0,027	0,027	0,023

Нахождение бинарного дерева по оптимальному достижению внешних и внутренних вершин начнем с допущения. Предположим, что дерево  $t_{i,j}$  является оптимальным, а внутренняя вершина  $b_k$  — его корень. Тогда это дерево можно разбить на два поддерева:  $t_{i,k-1}$ , являющимся оптимальным на вершинах  $\{a_i, b_{i+1}, a_{i+1} \dots b_{k-1}, a_{k-1}\}$ , и  $t_{k,j}$  — оптимальное на вершинах  $\{a_k, b_{k+1}, a_{k+1} \dots b_j, a_j\}$ . В отношении индексов должно выполняться условие:  $i \leq k \leq j$ . Суммарная частота обращения к вершинам дерева  $t_{i,j}$  рассчитывается по формуле:

$$r_{i,j} = q_{i,j} + \min(r_{i,k-1} + r_{k,j}), \quad q_{i,j} = q_{i,j-1} + p(a_j) + p(b_j),$$

где  $p(a_j)$  и  $p(b_j)$  — вероятности обращения к вершинам  $a_j$  и  $b_j$ , а индекс  $k$  под знаком  $\min$  пробегает значения от  $i$  до  $j$ . Результаты расчета оформим таблицей, в которой по горизонтали меняется значение индекса  $i$ , а по вертикали —  $h$ ; при этом  $j = i + h$ . В каждую клетку таблицы будем заносить значения  $r_{i,j}$  и  $q_{i,j}$ .

Понятно, что  $t_{i,i}$  являются «пустыми» деревьями с корнем во внешней вершине  $a_i$  ( $r_{i,i} = 0$ ,  $q_{i,i} = p_i$ ). Таким образом, первая строка табл. 3.17 заполняется без предварительного расчета. Вторая строка этой таблицы также не требует больших вычислений, поскольку для деревьев типа  $t_{i,i+1}$ , состоящих из двух вершин и одного инцидентного им ребра, выполняется условие:  $r_{i,i+1} = q_{i,i+1}$ , или конкретно:

$$q_{0,1} = q_{0,0} + p(a_1) + p(b_1) = 0,653 + 0,034 + 0,034 = 0,721,$$

$$q_{1,2} = q_{1,1} + p(a_2) + p(b_2) = 0,034 + 0,034 + 0,034 = 0,102,$$

$$q_{2,3} = 0,095, \quad q_{3,4} = 0,081, \quad q_{4,5} = 0,077, \quad q_{5,6} = 0,065.$$

Третью строку табл. 3.17 вычисляем с учетом минимальной вероятности поддеревьев:

$$q_{0,2} = q_{0,1} + p(a_2) + p(b_2) = 0,721 + 0,034 + 0,034 = 0,789,$$

$$r_{0,2} = q_{0,2} + \min_{0 \leq k \leq 2} \begin{pmatrix} r_{0,0} + r_{1,2} \\ r_{0,1} + r_{2,2} \end{pmatrix} = 0,789 + 0,102 = 0,891;$$

$$q_{1,3} = q_{1,2} + p(a_3) + p(b_3) = 0,102 + 0,034 + 0,027 = 0,163,$$

$$r_{1,3} = q_{1,3} + \min_{1 \leq k \leq 3} \begin{pmatrix} r_{1,1} + r_{2,3} \\ r_{1,2} + r_{3,3} \end{pmatrix} = 0,163 + 0,095 = 0,258; \quad \text{и т.д.}$$

Покажем, как выглядят конкретные формулы для вычисления вероятности  $r_{1,6}$ :

$$q_{1,6} = q_{1,5} + p(a_6) + p(b_6) = 0,267 + 0,023 + 0,023 = 0,313,$$

$$r_{1,6} = q_{1,6} + \min_{1 \leq k \leq 6} \begin{pmatrix} r_{1,1} + r_{2,6} \\ r_{1,2} + r_{3,6} \\ r_{1,3} + r_{4,6} \\ r_{1,4} + r_{5,6} \\ r_{1,5} + r_{6,6} \end{pmatrix} = 0,313 + (0,102 + 0,327) = 0,742.$$

Таблица 3.17

$q_{0,0} = 0,653$ $r_{0,0} = 0,000$	$q_{1,1} = 0,034$ $r_{1,1} = 0,000$	$q_{2,2} = 0,034$ $r_{2,2} = 0,000$	$q_{3,3} = 0,027$ $r_{3,3} = 0,000$	$q_{4,4} = 0,027$ $r_{4,4} = 0,000$	$q_{5,5} = 0,023$ $r_{5,5} = 0,000$	$q_{6,6} = 0,023$ $r_{6,6} = 0,000$
$q_{0,1} = 0,721$ $r_{0,1} = 0,721$	$q_{1,2} = 0,102$ $r_{1,2} = 0,102$	$q_{2,3} = 0,095$ $r_{2,3} = 0,095$	$q_{3,4} = 0,081$ $r_{3,4} = 0,081$	$q_{4,5} = 0,077$ $r_{4,5} = 0,077$	$q_{5,6} = 0,069$ $r_{5,6} = 0,069$	
$q_{0,2} = 0,781$ $r_{0,2} = 0,891$	$q_{1,3} = 0,163$ $r_{1,3} = 0,258$	$q_{2,4} = 0,149$ $r_{2,4} = 0,230$	$q_{3,5} = 0,131$ $r_{3,5} = 0,208$	$q_{4,6} = 0,123$ $r_{4,6} = 0,192$		
$q_{0,3} = 0,850$ $r_{0,3} = 1,108$	$q_{1,4} = 0,217$ $r_{1,4} = 0,400$	$q_{2,5} = 0,199$ $r_{2,5} = 0,371$	$q_{3,6} = 0,177$ $r_{3,6} = 0,327$			
$q_{0,4} = 0,904$ $r_{0,4} = 1,304$	$q_{1,5} = 0,267$ $r_{1,5} = 0,577$	$q_{2,6} = 0,245$ $r_{2,6} = 0,532$				
$q_{0,5} = 0,954$ $r_{0,5} = 1,531$	$q_{1,6} = 0,313$ $r_{1,6} = 0,742$					
$q_{0,6} = 1,000$ $r_{0,6} = 1,742$						

Здесь минимальная вероятность получается во второй строке ( $r_{1,2} + r_{3,6}$ ) при значении  $k = 3$ , следовательно, корневой вершиной дерева  $t_{1,6}$  с поддеревьями  $t_{1,2}$  и  $t_{3,6}$  будет  $b_3$ . Итак, все внутренние вершины являются корнями своих поддеревьев; выпишем их:

$$b_1: t_{0,6} = t_{0,0} + t_{1,6}, \quad b_4: t_{3,6} = t_{3,3} + t_{4,4},$$

$$b_2: t_{1,2} = t_{1,1} + t_{2,2}, \quad b_5: t_{3,6} = t_{3,4} + t_{5,6},$$

$$b_3: t_{1,6} = t_{1,2} + t_{3,6}, \quad b_6: t_{5,6} = t_{5,5} + t_{6,6}.$$

После этого можно приступить к вычерчиванию бинарного дерева оптимального поиска (рис. 3.38).

Вершины построенного нами дерева можно было бы закодировать. Однако, с точки зрения теории кодирования, получающийся при этом код не был бы префиксным. Тем не менее, среднюю длину слова здесь рассчитать можно:

$$l = \sum_{i=0}^n l_i p(a_i) + \sum_{j=1}^n (l_j + 1) p(b_j),$$

где  $l_i$  — длина пути до внешней вершины  $a_i$ ,  $l_j$  — длина пути до внутренней вершины  $b_j$ . Если все вычисления проделаны верно, то средняя длина кодового

слова  $l$  должна в точности совпасть со стоимостью поиска по дереву  $t_{0,6}$ :  $l = r_{0,6}$ , что в нашем случае имеет место. Данное равенство играет роль проверочного соотношения.

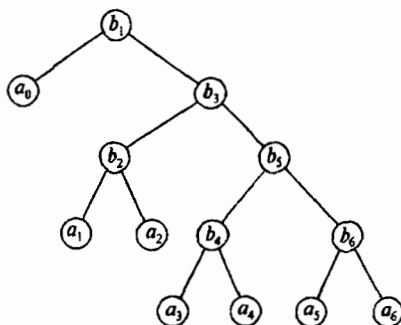


Рис. 3.38

### Автоматы задержки и распознавания символов

Рассмотрим рис. 3.39, где изображено бесконечное бинарное дерево, переводящее входную последовательность из нулей и единиц в выходную. Дерево имеет два типа вершин — 0 и 1, а каждое ребро снабжено дробью: числитель означает входной символ, знаменатель — выходной; концевые ребра оканчиваются стрелками, указывающими на возможное продолжение ветвей. Жирной линией выделена входная последовательность  $x = 1010$ , которая преобразуется в выходную  $y = 1100$ .

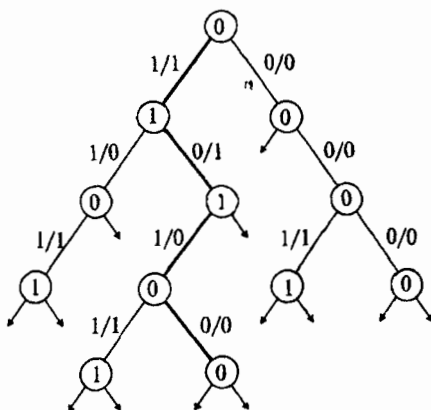


Рис. 3.39

Бесконечным бинарным деревом задается *автомат*  $A$ , который в зависимости от входного символа может оказаться в одном из двух состояний. Начальным состоянием является  $q = 0$ . Если на входе автомата окажется  $x = 0$ , он не меняет своего первоначального состояния  $q = 0$ , а на выходе появляется  $y = 0$ . Если на входе  $x = 1$ , автомат переходит в состояние  $q = 1$ , а на выходе будет  $y = 1$ . Оказавшись в состоянии  $q = 1$ , автомат ведет себя следующим образом: если  $x = 0$ , то  $y = 1$  и  $q = 1$ ; если  $x = 1$ , то  $y = 0$  и  $q = 0$ .

В общем случае автомат  $A$  можно задать четырьмя способами:

1) Один из способов как раз изображен на рис. 3.39, т.е. с помощью достаточного фрагмента бесконечного дерева, вершинами которого являются состояния автомата, а на ребрах указываются входные и выходные символы. Это наиболее громоздкое представление автомата.

2) Бесконечному дереву отвечает более компактный сильно связанный орграф (рис. 3.40).

3) Аналитическая форма задания автомата осуществляется двумя функциями:

*функцией переходов*  $q' = \varphi(x, q)$ ;

*функцией выходов*  $y = \psi(x, q)$ .

Конкретный вид этих функций в нашем случае прост — сложение аргументов по mod (2):

$$q' = x + q, \quad y = x + q.$$

4) Функции можно задать с помощью таблицы, где в заголовке указываются: по горизонтали — входные символы  $x$ , по вертикали — исходные состояния автоматов  $q$ ; в клетках таблицы на первом месте — новое состояние  $q'$ , на втором месте после запятой — выходной символ  $y$ . Для нашего примера будем иметь табл. 3.18.

Наш конкретный автомат  $A$  обладает одним замечательным свойством: он реагирует на четность числа единиц, поданных на его вход. Пусть в качестве начального состояния будет  $q = 0$ , а на вход подается бесконечная последовательность  $x$  из 0 и 1 (табл. 3.19). Тогда нечетное количество единиц на входе автомата  $A$  будет отмечаться единицами на выходе ( $y_0$ ). Если же в качестве начального состояния выбрать  $q = 1$ , то нечетное число единиц на входе будет отмечаться уже нулями на выходе ( $y_1$ ).

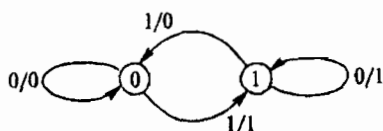


Рис. 3.40

Рассмотрим еще один пример автомата, когда функция переходов принимает значение входного символа ( $q' = x$ ), а функция выходов — значение состояния ( $y = q$ ). Таблица функций такого автомата представлена табл. 3.20, а реакция на входную последовательность для различных начальных его состояниях — табл. 3.21.

Таблица 3.18

$q/x$	0	1
0	0, 0	1, 1
1	1, 1	0, 0

Таблица 3.19

$x$	0 0 1 1 0 1 0 0 0 1 0 1 1 ...
$y_0$	0 0 1 0 0 1 1 1 1 0 0 1 0 ...
$y_1$	1 1 0 1 1 0 0 0 0 1 1 0 1 ...

Таблица 3.20

$q/x$	0	1
0	0, 0	1, 1
1	1, 1	0, 0

Таблица 3.21

$x$	0 0 1 1 0 1 0 0 0 1 0 1 1 ...
$y_0$	0 0 0 1 1 0 1 0 0 0 1 0 1 ...
$y_1$	1 0 0 1 1 0 1 0 0 0 1 0 1 ...

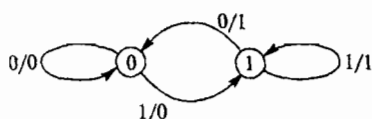


Рис. 3.41

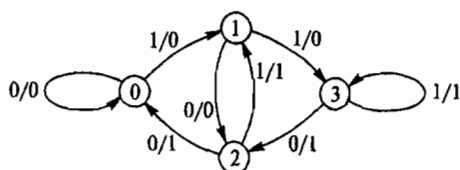


Рис. 3.42

Из табл. 3.21 видно, что автомат на выходе независимо от начального состояния просто сдвигает все входные символы на одну позицию вправо. Его называют *автоматом задержки* на один такт. Сильно связанный орграф такого автомата показан на рис. 3.41.

Как видно из рисунка, орграф автомата задержки обладает элементарной группой симметрии относительно перестановки состояний, а также входных и выходных символов 0 и 1. Любопытно построить автомат задержки на два такта: будет ли его орграф обладать симметричными свойствами? Ответ окажется утвердительным (рис. 3.42), хотя число его состояний возрастает до 4, а число дуг — до 8 (табл. 3.22).

Таблица 3.22

$q/x$	0	1
0	0, 0	1, 0
1	2, 0	3, 0
2	0, 1	1, 1
3	2, 1	3, 1

Автомат задержки на три такта также обладает элементарной симметрией и состоит уже из 8 состояний и 16 дуг (рис. 3.43). Сим-

метрия означает неизменность рисунка при действии на состояния элементарной подстановкой (07)(16)(25)(34) и при одновременной смене входных и выходных символов на противоположные. При этом направление дуг остается прежним, т.е. дуга, идущая из вершины 3 в вершину 7, сохраняет свое направление и после перестановки состояний, но ей присваивается характеристика вход/выход 0/1 вместо 1/0 и т.д.

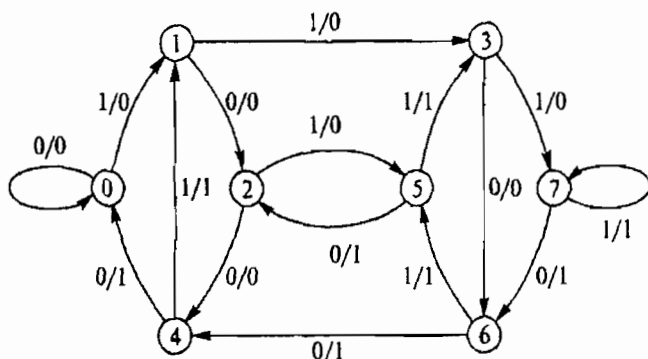


Рис. 3.43

#### Контуры Эйлера:

0000101001101111	0000111100101101
000010111010011111	0000111101001011
0000101100111101	0000111101011001
0000100110101111	0000111101100101
0000110111100101	0000100111101011
0000110101111001	0000101111001101
0000110100101111	0000101111010011
0000110010111101	0000101001111011

Три последних орграфа являются эйлеровыми, так как для них существуют *полные контуры*, включающие все дуги по одному разу. Причина в том, что для каждой вершины число выходящих и входящих дуг четно. Этого факта достаточно, чтобы орграф был эйлеровым. Обход орграфа, изображенного на рис. 3.41, по эйлерову контуру сопровождается выходной последовательностью 0011, если обход начать с петли, или 0110, если сначала идти к вершине 1. Однако это две одинаковых последовательности, сдвинутые на позицию относительно друг друга. Поэтому их принимают за одну и считают, что в этом графе существует только один эйлеров контур. Для орграфа, изображенного на рис. 3.42, существует два эйлеровых контура с выходными последовательностями 00010111 и 00011101. Орграф, изображенный на рис. 3.43, имеет уже 16 таких обходов.



Если величину задержку обозначить как  $t$ , то получим следующие комбинаторные формулы: число вершин в орграфе автомата задержки равно  $n = 2^t$ ; число ребер —  $m = 2^{t+1}$ ; число эйлеровых контуров —  $N = 2^n / m$ . Три последних орграфа соответствуют значениям  $t = 1, 2, 3$ . При отсутствии задержки, т.е. при  $t = 0$ , орграф представлен одной вершиной с двумя петлями —  $0/0$  и  $1/1$ . Для этого орграфа выполняется одно из важнейших свойств всего ряда автоматов задержки, а именно: для каждой вершины (а здесь она одна) имеются две входящие и две выходящие дуги. Если орграф без задержки ( $t = 0$ ) обозначим как  $\Gamma_0$ , а с задержками ( $t = 1, 2, 3 \dots$ ) как  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  и т.д., то в этих обозначениях каждый последующий орграф  $\Gamma_{t+1}$  является *реберным* по отношению к предыдущему  $\Gamma_t$ . Условимся орграф  $\Gamma_{t+1}$  называть *реберным*, если каждой дуге  $e_j$  орграфа  $\Gamma_t$  соответствует вершина  $q_j$  в  $\Gamma_{t+1}$ . Кроме того, если  $e_1$  — дуга орграфа  $\Gamma_t$ , начало которой есть конец дуги  $e_0$ , то в  $\Gamma_{t+1}$  имеется дуга  $q_{01}$  с началом в вершине  $q_0$  и концом в вершине  $q_1$ . Именно при этих условиях из орграфа  $\Gamma_0$  путем удвоения числа вершин и дуг получается орграф  $\Gamma_1$ ; из  $\Gamma_1$  строится  $\Gamma_2$  и т.д.

Теперь перейдем от автоматов задержки к автоматам другого типа. До сих пор рассмотренные нами автоматы имели *сильно связанные орграфы*, т.е. эти автоматы могли из любого своего состояния перейти в любое другое, минуя промежуточные. А возможно ли создать автомат, когда какое-либо состояние становится недостижимым, например, из начального? Да, возможно. Таков, в частности, автомат со следующими функциями переходов и выходов:

$$q' = x \wedge q, \quad y = x \vee q.$$

Данный автомат описывается просто *связанным* орграфом, для которого вершина 1 является недостижимой из вершины 0 (рис. 3.44).

### Автоматы-преобразователи

Существует большая группа автоматов, в частности, *распознавательных*, которые после первого входного символа уже не возвращаются в свое начальное состояние. Элементарным *распознавателем* будет автомат задержки, изображенный на рис. 3.41, если к нему добавить еще одну вершину без входящих в нее дуг (рис. 3.45). Этот автомат распознает четыре типа векторов: 00, 11, 10 и 01. Когда на входе автомата появляется последний символ вектора, на выходе формируется 1 или 0:  $00 \rightarrow 0$ ,  $11 \rightarrow 1$ ,  $10 \rightarrow 1$ ,  $01 \rightarrow 0$ .

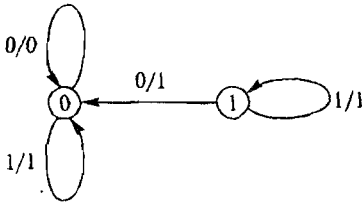


Рис. 3.44

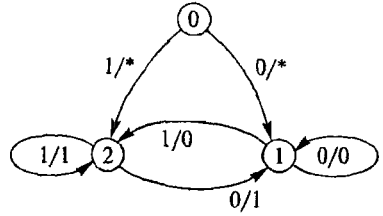


Рис. 3.45

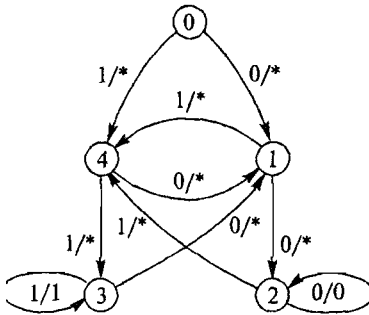


Рис. 3.46

Данный автомат можно переделать так, чтобы он распознавал только две последовательности — 11 и 00. Для этого нужно изменить характеристики дуг «вход/выход» 1/0 и 0/1 на 1/\* и 0/\*. Тогда на выходе получим следующую реакцию на входные векторы:

00 → 0, 11 → 1, 10 → \*, 01 → \*, что показано в табл. 3.23.

Таблица 3.23

x	0011010001011100100...
y	*0*1***00***11*0**0...

Распознаватель трех единиц (отмечается 1) и трех нулей (отмечается 0) задан табл. 3.24, а графически — с

помощью рис. 3.46; на все другие входные последовательности этот автомат реагирует символом «\*». Орграф для распознавания четырех единиц и нулей будет состоять уже из семи вершин, но по-прежнему он будет подчиняться симметрии относительно вертикали и в свое начальное состояние  $q = 0$  не возвратится.

Табл. 3.25 задает распознаватель следующей системы векторов: 000 → 0, 111 → 1, 001 → 1, 110 → 0, на все остальные последовательности из 0 и 1 автомат реагирует «\*». Табл. 3.26 определяет автомат для распознавания таких последовательностей: 000 → 0, 111 → 1, 001 → 1, 1100 → 0, 1101 → 1. Имея определенный опыт в проектировании распознавателей, можно создать автомат для регистрации любой последовательности.

Обратимся к синтезу нового класса автоматов — преобразователям. Покажем, как можно построить автомат  $A$ , который способен

преобразовывать одну систему последовательностей в другую:  $y_i = A(x_i)$ . С этой целью зададимся конкретным списком кодовых векторов — входных  $x_i$  и выходных  $y_i$ :

$$\begin{aligned} y_1 = A(10) &= 01, & y_4 = A(001) &= 101, & y_7 = A(01001) &= 11110, \\ y_2 = A(000) &= 101, & y_5 = A(011) &= 110, & y_8 = A(11010) &= 01010, \\ y_3 = A(111) &= 011, & y_6 = A(1100) &= 0101, & y_9 = A(110110) &= 010111. \end{aligned}$$

Таблица 3.24

$q/x$	0	1
0	1, *	4, *
1	2, *	4, *
2	2, 0	4, *
3	1, *	3, 1
4	1, *	3, *

Таблица 3.25

$q/x$	0	1
0	1, *	4, *
1	2, *	4, *
2	2, 0	4, 1
3	1, 0	3, 1
4	1, *	3, *

Таблица 3.26

$q/x$	0	1
0	1, *	4, *
1	2, *	4, *
2	2, 0	4, 1
3	2, *	3, 1
4	1, *	3, *

Построение автомата  $A$  начнем с вычерчивания бинарного дерева, отвечающего указанным входным и выходным символам (рис. 3.47).

В этом дереве неизвестные пока состояния автомата  $A$  обозначены числами, начиная с 0 и кончая 19. Далее руководствуемся следующим правилом: если корень  $q$  дерева  $T_q$  поместить в вершину  $q'$  и при этом реберные характеристики «вход/выход» поддерева  $T_q$  целиком совпадут с реберными характеристиками исходного дерева  $T_q$  (факт эквивалентности характеристик дуг двух деревьев обозначим как  $T_q \approx T_{q'}$ ), то будем считать состояния  $q$  и  $q'$  эквивалентными ( $q \approx q'$ ). Процедуру установления эквивалентных состояний начнем с корня 0 и продолжим согласно нумерации вершин.

Состояния 0, 1 и 2, судя по характеристикам дуг, явно неэквивалентны. Если в вершину 3 поместить корневую вершину 2, то совмещенные дуги рассматриваемых деревьев  $T_3$  и  $T_2$  будут иметь

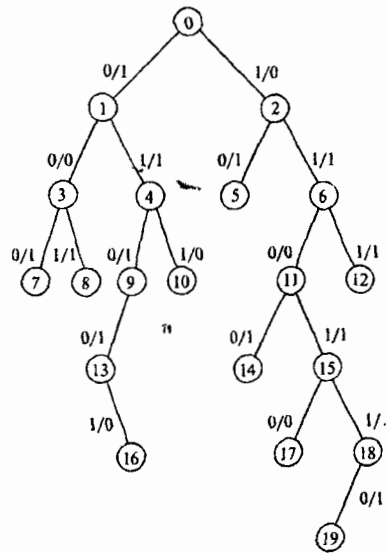


Рис. 3.47

одинаковые характеристики «вход/выход», т.е.  $T_3 \approx T_2$ , следовательно, состояние  $3 \approx 2$ . Это обстоятельство автоматически влечет за собой эквивалентность еще двух концевых вершин —  $7 \approx 5$ ,  $8 \approx 6$ .

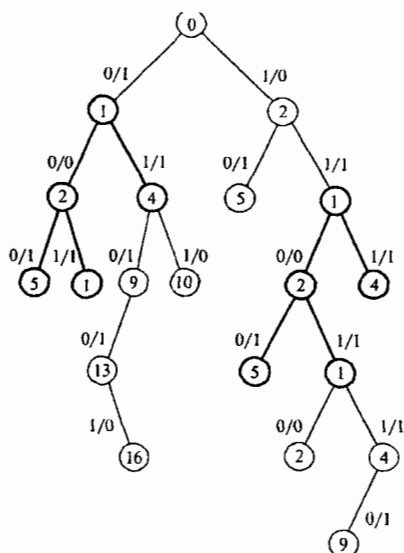


Рис. 3.48

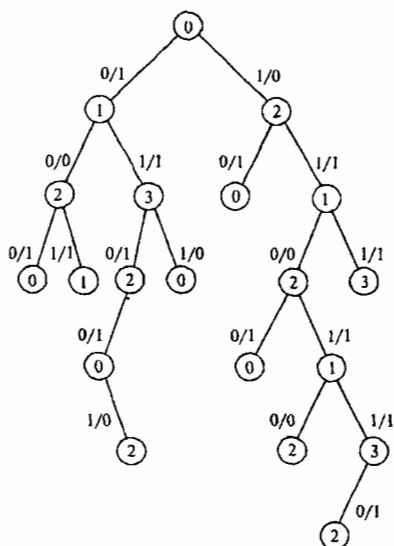


Рис. 3.49

Рассмотрим вершину 4. На первый взгляд, она эквивалентна вершине 0, так как отходящие от нее две дуги имеют те же характеристики, что и корень, т.е. 0/1 и 1/0. Но следующие характеристики дуг, а именно: 0/1 (дуга, выходящая из вершины 9) и 1/0 (дуга, выходящая из вершины 13) не совпадают с характеристиками дуг: 0/0 (дуга, выходящая из вершины 1) и 1/1 (дуга, выходящая из вершины 3). Значит, состояния 4 и 0 неэквивалентны и все вершины поддерева  $T_4$  (9, 10, 13, 16) оставляем пока под прежними номерами.

Пропустим вершину 5 и перейдем к вершине 6. Устанавливаем, что  $T_6 \approx T_1$  (рис. 3.48), следовательно,  $11 \approx 3 \approx 2$ ,  $12 \approx 4$ ,  $14 \approx 7 \approx 5$ ,  $15 \approx 6 \approx 1$ . Поскольку  $T_{15} \approx T_1$ , имеем:  $17 \approx 3 \approx 2$ ,  $18 \approx 4$ ,  $19 \approx 9$ . Эта промежуточная фаза анализа эквивалентности состояний автомата-преобразователя  $A$  отображена на рис. 3.48.

Концевые вершины 5 и 10 всегда совместимы с корнем 0, поэтому  $10 \approx 5 \approx 0$ . Впрочем, состояние 10 можно было бы идентифицировать как состояние 1, 2 или 3, работа автомата  $A$ , как можно будет впоследствии проверить, от этого не меняется.

Таблица 3.27

$q/x$	0	1
0	1, 1	2, 0
1	2, 0	3, 1
2	0, 1	1, 1
3	2, 1	0, 0

На последнем этапе устанавливаем эквивалентность:  $T_9 \approx T_2$ ; тогда  $9 \approx 2$ ,  $13 \approx 0$  и  $16 \approx 2$ .

В заключение нашего анализа вершину 4 пометим как 3, чтобы не нарушать числовой последовательности в обозначениях. Окончательно, состояния бинарного дерева получают те номера, которые изображены на рис. 3.49. По этому дереву уже можно строить орграф преобразователя  $A$  (рис. 3.50) и таблицу переходов и выходов (табл. 3.27).

Результат построения преобразователя  $A$  нелишне проверить на конкретных преобразованиях кодовых векторов  $x$  в  $y$  (табл. 3.28).

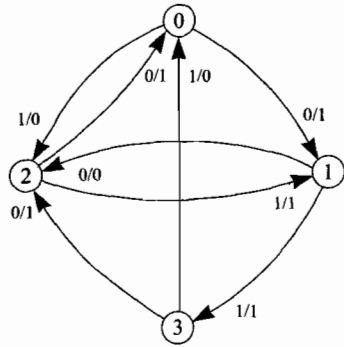


Рис. 3.50

Таблица 3.28

В отличие от автоматов-распознавателей, работающих с бесконечной последовательностью, автоматы-преобразователи трансформируют конечные кодовые векторы, причем первый символ входного вектора должен поступать тогда, когда автомат находится в начальном состоянии.

$x$	10	000	111	...	01001	11010	110110
$y$	01	101	011	...	11110	01010	010111
$q$	20	123	213	...	13202	21212	212132

**Ликвидация эквивалентных состояний**

Изучим *проблему эквивалентности состояний* автоматов под несколько иным углом зрения. На рис. 3.51а изображен автомат  $A$ , внешне сильно отличающийся от автомата  $A'$ , изображенного на рис. 3.51б. Между тем их реакция ( $y$ ) на входные последовательности из 0, 1 и 2 ( $x$ ) абсолютно одинакова (табл. 3.29).

Таблица 3.29

Установить причину такого поведения автоматов помогут таблицы переходов и выходов для  $A$  (табл. 3.30) и для  $A'$  (табл. 3.31). Из табл. 3.30 видно, что состояния 1 и 3 для

$x$	0122011121201...
$y$	0100101000011...
$q$	0432204120304...
$q'$	0312203120103...

автомата  $A$  одинаковы. Поэтому строку, отвечающую состоянию 3, из этой таблицы можно просто вычеркнуть, а цифры 3 и 4 заменить на 1 и 3, соответственно. Тогда табл. 3.30 переходит в табл. 3.31, которая представляет переходы и выходы как будто бы совершенно другого автомата  $A'$ .

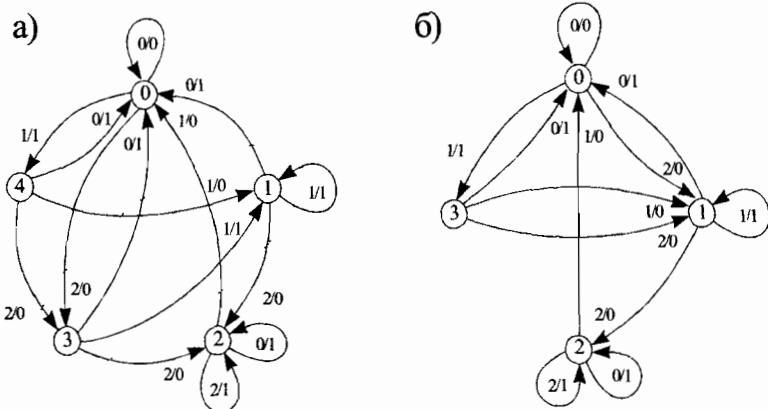


Рис. 3.51

Таблица 3.30

$q/x$	0	1	2
0	0, 0	4, 1	3, 0
1	0, 1	1, 1	2, 0
2	2, 1	0, 0	2, 1
3	0, 1	1, 1	2, 0
4	0, 1	1, 0	3, 0

Таблица 3.31

$q/x$	0	1	2
0	0, 0	3, 1	1, 0
1	0, 1	1, 1	2, 0
2	2, 1	0, 0	2, 1
3	0, 1	1, 0	1, 0

Рассмотрим более сложную ситуацию. Табл. 3.32 задает функции переходов и выходов автомата, принимающего десять различных состояний. Все строки таблицы различны, однако может случиться так, что некоторые из состояний окажутся эквивалентными. Тогда при одинаковом обозначении эквивалентных состояний в таблице появятся и одинаковые строки. Остается только выяснить, какие именно состояния эквивалентны. Разобьем все состояния на *предварительные* классы эквивалентности ( $C_i$ ), исходя из одинаковости выходных символов (классы  $C_i$  проставлены в последнем столбце табл. 3.32). Теперь по отдельности рассмотрим каждый из классов. Для этого пять строк класса  $C_0$  оформим табл. 3.33, в которой вместо выходного символа указан класс эквивалентности состояния.

Таблица 3.32

$q/x$	0	1	2	$C_i$
0	1, 1	0, 1	1, 0	$C_0$
1	5, 0	3, 1	8, 1	$C_1$
2	1, 0	6, 0	9, 1	$C_2$
3	9, 1	6, 1	4, 0	$C_0$
4	7, 0	3, 0	9, 1	$C_2$
5	7, 0	8, 0	3, 1	$C_2$
6	3, 1	9, 1	2, 0	$C_0$
7	5, 0	6, 1	8, 1	$C_1$
8	8, 1	0, 1	2, 0	$C_0$
9	6, 1	3, 1	4, 0	$C_0$

Таблица 3.33

$q/x$	0	1	2	$C_i$
0	1, $C_1$	0, $C_0$	1, $C_1$	$C_0$
3	9, $C_0$	6, $C_0$	4, $C_2$	$C_3$
6	3, $C_0$	3, $C_0$	2, $C_2$	$C_3$
8	8, $C_0$	0, $C_0$	2, $C_2$	$C_3$
9	6, $C_0$	3, $C_0$	4, $C_2$	$C_3$

Первая строка табл. 3.33 по принадлежности состояний классам эквивалентности отличается от всех остальных строк. Значит, состояние 0 образует свой собственный класс эквивалентности, за которым мы оставим обозначение  $C_0$ ; состояния же 3, 6, 8 и 9 будут принадлежать другому классу —  $C_3$  (см. последний столбец табл. 3.33).

Таблица 3.34

$q/x$	0	1	2	$C_i$
3	9, $C_3$	6, $C_3$	4, $C_2$	$C_3$
6	3, $C_3$	3, $C_3$	2, $C_2$	$C_3$
8	8, $C_3$	0, $C_0$	2, $C_2$	$C_4$
9	6, $C_3$	3, $C_3$	4, $C_2$	$C_3$

Таблица 3.35

$q/x$	0	1	2	$C_i$
3	9, $C_3$	6, $C_3$	4, $C_2$	$C_3$
6	3, $C_3$	3, $C_3$	2, $C_2$	$C_3$
9	6, $C_3$	3, $C_3$	4, $C_2$	$C_3$

Согласно новому делению на классы, четыре состояния класса  $C_3$  вновь оформим табл. 3.34, где после каждого переходного состояния укажем его класс. В результате получим отличную от других строку для состояния 8, которое мы отнесем к классу  $C_4$ . Наконец, табл. 3.35 говорит нам о том, что состояния 3, 6 и 9 действительно эквивалентны, поскольку все состояния, стоящие по строкам, принадлежат одним и тем же классам.

Переходим к анализу класса  $C_1$  (табл. 3.36). Здесь все строки таблицы по принадлежности переходных состояний классам эквивалентности одинаковые, значит, исходные состояния 1 и 7 принадлежат одному классу эквивалентности. При рассмотрении табл. 3.37, где выписаны состояния 2, 4 и 5 класса  $C_2$ , обнаруживается неэквивалентное состояние 5, которое образует свой класс  $C_5$ .

Таблица 3.36

$q/x$	0	1	2	$C_i$
1	5, $C_2$	3, $C_3$	8, $C_4$	$C_1$
7	5, $C_2$	6, $C_3$	8, $C_4$	$C_1$

Таблица 3.38

$q/x$	0	1	2	$C_i$
0	1, 1	0, 1	1, 0	$C_0$
1	5, 0	3, 1	4, 1	$C_1$
2	1, 0	3, 0	3, 1	$C_2$
3	1, 0	4, 0	3, 1	$C_3$
4	4, 1	0, 1	2, 0	$C_4$
5	1, 0	4, 0	3, 1	$C_5$

Таблица 3.37

$q/x$	0	1	2	$C_i$
2	1, $C_1$	6, $C_3$	9, $C_3$	$C_2$
4	7, $C_1$	3, $C_3$	9, $C_3$	$C_2$
5	7, $C_1$	8, $C_4$	3, $C_3$	$C_5$

Таким образом, окончательно десять исходных состояний распались на шесть классов эквивалентности:

$$C_0 = \{0\}, C_1 = \{1, 7\}, C_2 = \{2, 4\}, C_3 = \{3, 6, 9\}, C_4 = \{8\}, C_5 = \{5\}.$$

Следовательно, исходная таблица переходов и выходов (табл. 3.32), куда входило десять состояний, может быть сокращена до шести состояний (табл. 3.38), при этом функция автомата по преобразованию входных последовательностей в выходные не меняется. Шесть новых состояний получили свои обозначения от индексов своих классов эквивалентности.

### Графы кватерниона и тетраэдра

При проектировании автоматов могут появиться эквивалентные (лишние) состояния, которые на практике приводят к перерасходу материальных средств. Но зададимся вопросом: какую функциональную нагрузку несет на себе понятие *состояние*? Ведь автомат-преобразователь, который можно назвать автоматом типа «вход — выход — состояние», просто трансформирует входные сообщения ( $x_i$ ) в выходные ( $y_i$ ); участие третьей компоненты — состояние ( $q$ ) — здесь ненужно.

Оказывается, понятие состояния возникло в связи с реализацией автоматов на конкретных устройствах — *триггерах*, которые могут находиться в одном из двух состояний — 0 или 1. Автомат с большим числом состояний имеет множество триггеров и их состояния тесным образом увязаны с поступающими на вход и снимаемыми с выхода сигналами. Но вне проблем реализации это понятие излишне. Автомат  $A$  считается аналитически заданным, если задан список сообщений:  $y_i = A(x_i)$ . При графическом же отображении автомата



типа «вход — выход» должны фигурировать только входные и выходные символы. Договоримся, у дуг писать входные символы, в узлах — выходные, начальное «состояние» оставим пустым. Тогда списку из девяти слов будет отвечать бинарное дерево (рис. 3.52), напоминающее бинарные деревья, которые мы строили для кодов Фано (3.35) и Хаффмана (3.36). Деревья же Фано и Хаффмана по сути являются автоматами типа «вход».

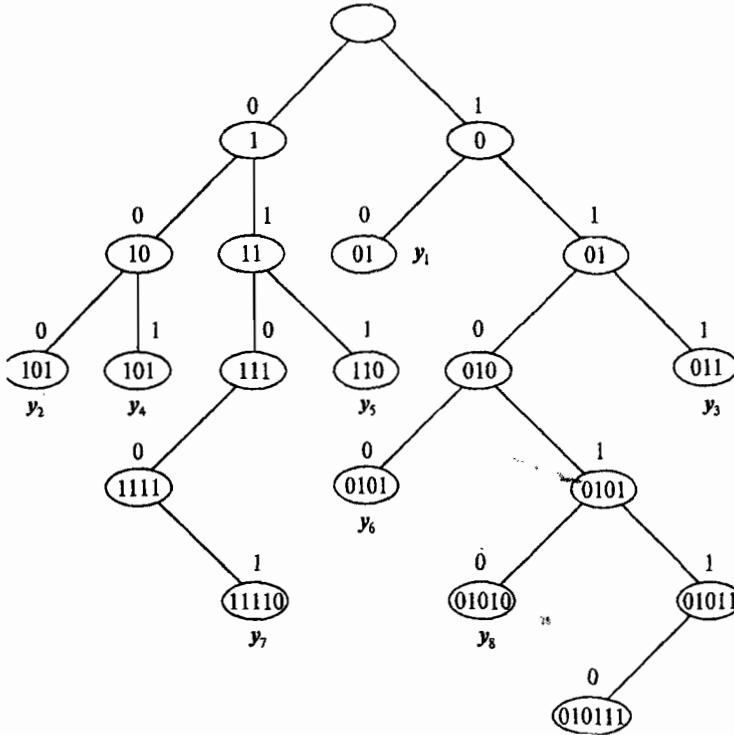


Рис. 3.52

Основным свойством *группы*, как известно, является замкнутость. Автомат «вход — выход», представляющий группу, является сильно связанным орграфом. Табл. 3.39, как часть таблицы перемножения элементов кватерниона (табл. 2.23), является таблицей автомата «вход — выход». В качестве входных сообщений здесь выбраны образующие  $a$  и  $b$ , а в роли выходов выступают все восемь элементов кватерниона, включая образующие.

Таблица 3.39

$q/x$	$a$	$b$
$e$	$a$	$b$
$a$	$a^2$	$ab$
$a^2$	$a^3$	$b^3$
$a^3$	$e$	$ba$
$b$	$ba$	$a^2$
$b^3$	$ab$	$e$
$ab$	$b$	$a^3$
$ba$	$b^3$	$a$

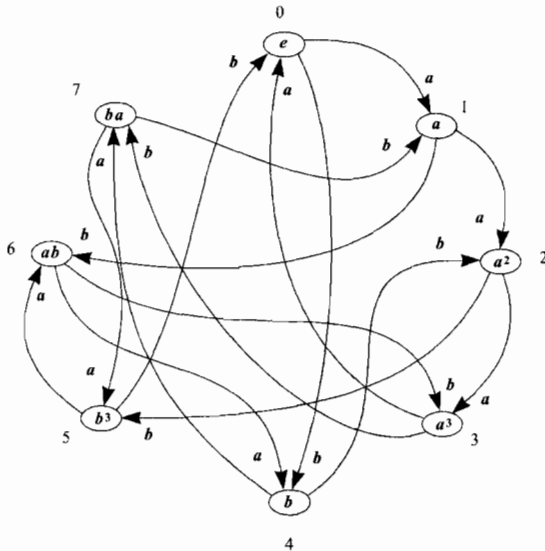


Рис. 3.53

Табл. 3.39 определяет симметричную структуру сильно связанного орграфа (рис. 3.53). Поставим

на место элемента  $e$  элемент  $b$ . Тогда дуги орграфа сами укажут новый порядок расстановки остальных элементов (рис. 3.54). Чтобы убедиться в том, что вершины данного орграфа подчиняются группе кватерниона, нужно вместо тождественного элемента  $e$  последовательно подставлять все другие элементы группы, не меняя расположения и характеристик дуг. Для удобства написания подстановок все вершины орграфа пронумеруем. После расстановки «выходных сообщений» (рис. 3.54) легко записать соответствующую элементу  $b$  подстановку. Если вместо  $e$  подставить элемент  $a$ , получим подстановку еще одной образующей:

$$a = (0123)(4657),$$

$$b = (0425)(1736).$$

Для каждой группы подстановок можно вычертить свой сильно связанный орграф, который одновременно представляет собой автомат-преобразователь типа «вход — выход». Трудно придумать более наглядную форму графического изображения группы, демонстрирующую ее природу замкнутости. Действительно, разве есть что-нибудь общего между орграфом, изображенным на рис. 3.55, и изображением тетраэдра или решетки его подгруппы?

Та легкость, с которой получаются регулярные подстановки группы тетраэдра  $T$ , записанные с помощью орграфа (рис. 3.55), ставят автоматное представление группы  $T$  вне конкуренции с ее

геометрическим и решетчатым представлениями. Выпишем регулярные подстановки трех образующих группы тетраэдра  $T$ :

$$a = (014)(2A6)(3B7)(589), b = (025)(193)(47A)(6B8), c = (036)(1A8)(279)(45B).$$

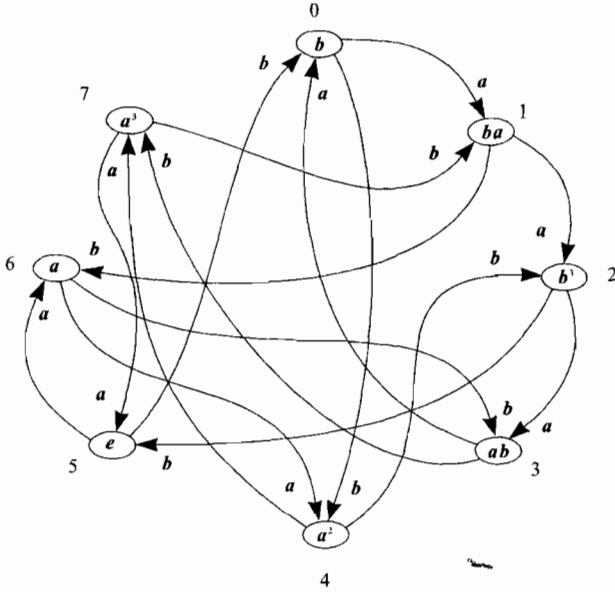


Рис. 3.54

Табл. 3.40 является таблицей «вход — выход» для автомата, представляющего группу тетраэдра с тремя «входными сообщениями».

Однако мы хорошо помним, что группу  $T$  можно получить и с помощью двух образующих —  $a, b$ . Следовательно, существует иная таблица «вход — выход» (табл. 3.41), которой будет отвечать и несколько другой орграф. В последнем случае из каждой вершины будут выходить (и соответственно, входить) не по три, а только по две дуги. Такой орграф можно получить из того, что изображено на рис. 3.55 путем удаления всех дуг с входной характеристикой  $c$ .

Мы также знаем, что для любой группы по числу образующих имеется нижняя граница, но нет верхней, т.е. количество образующих для кватерниона может быть равно восьми, а для тетраэдра — двенадцати. Отсюда автоматные представления кватерниона (рис. 3.53) и тетраэдра (рис. 3.55) далеко не единственны. Вместо *регулярного* орграфа группу может представлять *полный* орграф.

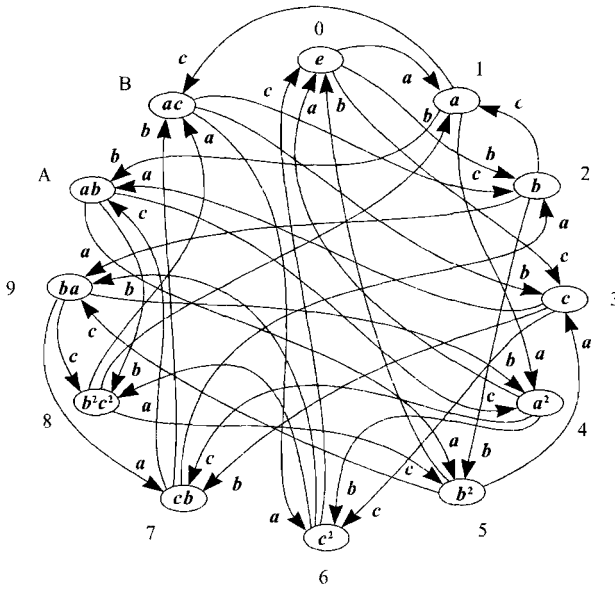


Рис. 3.55

Таблица 3.40

№	( <i>ij..</i> )	<i>q/x</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
0	(0)	<i>e</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
1	(012)	<i>a</i>	<i>a<sup>2</sup></i>	<i>ab</i>	<i>ac</i>
2	(123)	<i>b</i>	<i>ba</i>	<i>b<sup>2</sup></i>	<i>a</i>
3	(013)	<i>c</i>	<i>ab</i>	<i>cb</i>	<i>c<sup>2</sup></i>
4	(021)	<i>a<sup>2</sup></i>	<i>e</i>	<i>c<sup>2</sup></i>	<i>cb</i>
5	(132)	<i>b<sup>2</sup></i>	<i>c</i>	<i>e</i>	<i>ba</i>
6	(031)	<i>c<sup>2</sup></i>	<i>b<sup>2</sup>c<sup>2</sup></i>	<i>ba</i>	<i>e</i>
7	(023)	<i>cb</i>	<i>b</i>	<i>ac</i>	<i>ab</i>
8	(032)	<i>b<sup>2</sup>c<sup>2</sup></i>	<i>ac</i>	<i>a</i>	<i>b<sup>2</sup></i>
9	(01)(23)	<i>ba</i>	<i>cb</i>	<i>a<sup>2</sup></i>	<i>b<sup>2</sup>c<sup>2</sup></i>
A	(02)(13)	<i>ab</i>	<i>b<sup>2</sup></i>	<i>b<sup>2</sup>c<sup>2</sup></i>	<i>a<sup>2</sup></i>
B	(03)(12)	<i>ac</i>	<i>c<sup>2</sup></i>	<i>c</i>	<i>b</i>

Таблица 3.41

<sup>1</sup>	( <i>y</i> )	<i>q/x</i>	<i>a</i>	<i>b</i>
0	(0)	<i>e</i>	<i>a</i>	<i>b</i>
1	(012)	<i>a</i>	<i>a<sup>2</sup></i>	<i>ab</i>
2	(123)	<i>b</i>	<i>ba</i>	<i>b<sup>2</sup></i>
3	(013)	<i>b<sup>2</sup>a</i>	<i>ab</i>	<i>ba<sup>2</sup></i>
4	(021)	<i>a<sup>2</sup></i>	<i>e</i>	<i>a<sup>2</sup>b</i>
5	(132)	<i>b<sup>2</sup></i>	<i>b<sup>2</sup>a</i>	<i>e</i>
6	(031)	<i>a<sup>2</sup>b</i>	<i>ab<sup>2</sup></i>	<i>ba</i>
7	(023)	<i>ba<sup>2</sup></i>	<i>b</i>	<i>ab<sup>2</sup>a</i>
8	(032)	<i>ab<sup>2</sup></i>	<i>ab<sup>2</sup>a</i>	<i>a</i>
9	(01)(23)	<i>ba</i>	<i>ba<sup>2</sup></i>	<i>a<sup>2</sup></i>
A	(02)(13)	<i>ab</i>	<i>b<sup>2</sup></i>	<i>ab<sup>2</sup></i>
B	(03)(12)	<i>ab<sup>2</sup>a</i>	<i>a<sup>2</sup>b</i>	<i>b<sup>2</sup>a</i>

## 3.4. Лингвистические и поисковые графы

**Порождающая грамматика**

Казалось бы, трудно найти более благодатную почву для применения теории графов на практике, чем лингвистика. Генерация предложений из слов и генерация слов из букв — процесс в меру случайный и закономерный. Трансляция текстов с одного языка на другой — вещь крайне необходимая. Сегодня существует масса компьютерных переводчиков, которые работают по алгоритму, а значит, в основе их лежит некая логическая схема, имеющая непременно графическое представление древовидной формы. Чем не задача по кодированию? Однако разработчики этих трансляторов сталкиваются с непреодолимыми препятствиями. Чтобы их понять, нужно вникнуть в существо языковых проблем.

Возьмем простое предложение:

*Маленький мальчик играет в мяч.*

Если воспользоваться компьютерным переводчиком Stylus v. 2.5, то получим следующий английский эквивалент:

*The small boy plays in a ball.*

Но обратный перевод с использованием Stylus по смыслу даст несколько другую фразу:

*Маленький мальчик играет в шаре.*

Обратимся к формальной стороне дела. Исходную фразу можно представить *порождающим деревом* (рис. 3.56). Ситуация напоминает ту, с которой мы имели дело в разделе «Логика» (п. 2.10), где составляли ПРОЛОГ-программы. В нашем случае можно обойтись без предикатов, а также вместо записи  $y \leftarrow x$  использовать  $x \Rightarrow y$ , которая читается более естественно: « $x$  заменить на  $y$ ». Программа, отвечающая этому порождающему дереву, будет выглядеть следующим образом:

- 1) предложение  $\Rightarrow$  группа подлежащего, группа сказуемого.
- 2) группа подлежащего  $\Rightarrow$  определение, подлежащее.
- 3) группа сказуемого  $\Rightarrow$  сказуемое, дополнение.
- 4) дополнение  $\Rightarrow$  в мяч.
- 5) дополнение  $\Rightarrow$  в шаре.
- 6) сказуемое  $\Rightarrow$  играет.

- 7) подлежащее  $\Rightarrow$  мальчик.  
 8) подлежащее  $\Rightarrow$  мальчишка.  
 9) определение  $\Rightarrow$  маленький.  
 10) определение  $\Rightarrow$  крохотный.  
 11) определение  $\Rightarrow$  низкий.

Система приоритетов Stylus устроена так, что из предложенного набора синонимов были выбраны слова под номерами 5, 7 и 9, вместо 4, 7 и 9; существовали и другие варианты.

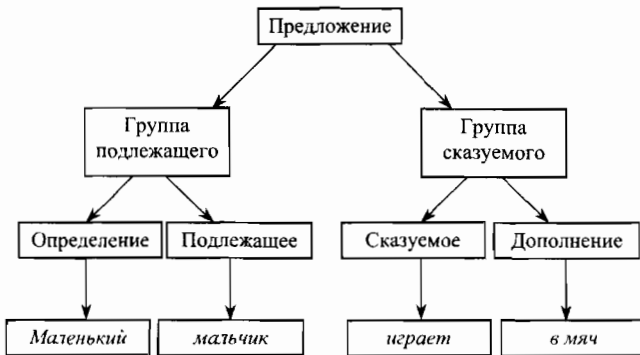


Рис. 3. 56

Теперь, обобщив приведенный пример, дадим формальное определение языка и порождающей грамматики. Языком  $L(G)$ , сформированным под воздействием порождающей грамматики  $G$ , называется множество предметных слов  $V$ , выведенных из корня  $S$  с использованием правил  $P$ . Порождающей грамматикой  $G$  называется семейство четырех множеств:

$$G = \{V, W, S, P\},$$

где  $V$  — основной или предметный словарь;

$W$  — вспомогательный или синтаксический словарь;

$S$  — начальное или корневое слово, причем  $S$  берется из  $W$ ;

$P$  — список логических правил вывода или подстановок.

В предыдущем примере имели:  $V = \{\text{крохотный, маленький, низкий, мальчик, мальчишка, играет, в шаре, в мяч}\}$ ;  $W = \{\text{предложение, группа подлежащего, группа сказуемого, подлежащее, сказуемое, определение, дополнение}\}$ ;  $S = \text{предложение}$ ;  $P = \{1) \text{ предложение} \Rightarrow \text{группа подлежащего, группа сказуемого. ... 11) определение} \Rightarrow \text{низкий}\}$ .

Если убрать запятые между синтаксическими словами и ввести их в качестве разделителя между правилами, то вышеприведенная программа будет иметь вид:

- 1)  $S \Rightarrow AB$ , 2)  $A \Rightarrow CD$ , 3)  $B \Rightarrow EF$ , 4)  $F \Rightarrow a$ , 5)  $F \Rightarrow b$ , 6)  $E \Rightarrow c$ ,  
7)  $D \Rightarrow d$ , 8)  $D \Rightarrow e$ , 9)  $C \Rightarrow f$ , 10)  $C \Rightarrow g$ , 11)  $C \Rightarrow h$ .

При этом были введены для синтаксических слов большие латинские буквы, а для предметных — малые. Язык примера ограничен двенадцатью предложениями, которые породжены *порождающим автоматом* типа «правило — выход». Граф этого автомата представляет собой дерево. Не станем вычерчивать его целиком, а приведем лишь две ветви, одна из которых отвечает возможному ходу вывода предложения «Маленький мальчик играет в мяч» (рис. 3.57а), другая — «Маленький мальчик играет в шаре» (рис. 3.57б).

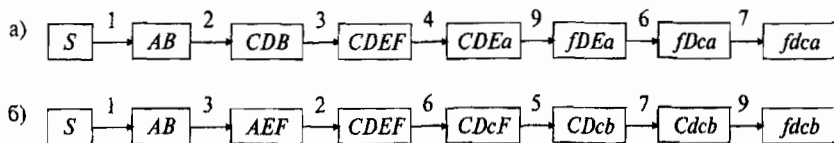


Рис. 3.57

Никаких *входных слов* здесь нет, но есть *выходные предложения и правила их вывода*. Дуги автомата снабжены номерами, отвечающими порождающим правилам. Каждая дуга играет роль имплицитной логической связки « $\Rightarrow$ », с помощью которой осуществляется вставка нужного слова. Дерево порождающего автомата — это наиболее приемлемая форма представления процесса формирования грамматических предложений.

С помощью автомата «правило — выход» можно генерировать кодовые слова. Грейбах предложил восемь правил для вывода всевозможных кодовых слов с одинаковым числом символов 0 и 1:

- 1)  $S \Rightarrow 0B$ , 3)  $A \Rightarrow 0$ , 5)  $A \Rightarrow 1AA$ , 7)  $A \Rightarrow 0S$ ,  
2)  $S \Rightarrow 1A$ , 4)  $B \Rightarrow 1$ , 6)  $B \Rightarrow 0BB$ , 8)  $B \Rightarrow 1S$ .

Здесь по-прежнему большие латинские буквы обозначают вспомогательные переменные, а числа 0 и 1 являются предметными символами. На рис. 3.58 показан вывод двух слов — 011100 и 1001. Эти примеры еще раз говорят в пользу того, что граф, подобно тени, следует за объективным процессом, который он представляет. Стоит процедуре словообразования измениться, и прежние графические

формы, столь хорошо иллюстрирующие взаимосвязь отдельных фаз, отказываются работать.

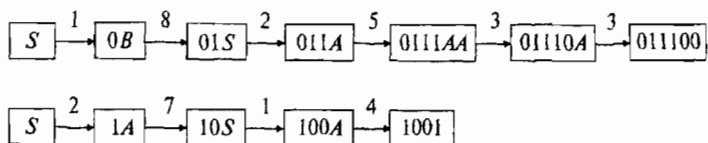


Рис. 3.58.

Всякий граф есть автомат для получения каких-то выходных сообщений по заданным параметрам. В зависимости от этих исходных параметров нужно выбирать и тип автомата. Если параметрами для выходных сообщений служат только входные символы (например, кодирование по Фано и Хаффману), удобно использовать граф-автомат, типа «вход». Если каждый входной символ преобразуется в определенную выходной, можно использовать граф-автомат типа «вход — выход» или «вход — выход — состояние». Наконец, если в роли входного слова (символа) выступает одно корневое, из которого затем по заданным правилам порождаются выходные предложения (слова), тогда эффективнее всего использовать граф-автомат типа «правило — выход».

Мы убедились, что генератор кодовых слов Грейбаха действует точно и однозначно. К сожалению для разработчиков компьютерных программ и к счастью для литераторов, в естественных языках господствует полная свобода выбора, если не сказать, произвол со стороны лингвистического субъекта. Словообразование обыденного разговорного языка нельзя подчинить каким-то строгим логико-математическим законам и не потому, что мы их не знаем, а потому, что их там просто нет. Составление предложений и отдельных слов — процессы творческие, включающие многие культурно-исторические и эстетические моменты. Задача перевода не является обычной кодировкой; здесь не применимы известные нам критерии оптимальности и помехозащищенности кодового слова от случайного сбоя его в канале связи. Хотя в лингвистике задачу порождения правильных предложений путем присоединения к подлежащему и сказуемому разъясняющих и дополняющих слов или задачу порождения правильных слов путем присоединения к корню слева и справа устойчивых буквенных сочетаний можно и нужно трактовать как деревообразующий процесс.



Разработка программ, производящих минимальный алгоритм поиска наилучшей словесной реализации на лингвистическом дереве, считается одной из приоритетных задач функционального и структурного программирования. Выбор оценочного критерия, который бы «отрубал» ненужные ветви поиска и обеспечивал решение на заданном, не слишком глубоко залегающем лингвистическом уровне, является задачей номер один в программировании. Чтобы отсечь на этом дереве ненужную группу слов или словообразующих элементов, необходимо хорошо представлять природу лингвистических составляющих, понимать, с чем собственно вы имеете дело, когда подбираете слова для выражения той или иной мысли и нужную словоформу для данного грамматического предложения.

### Граф словообразования

Нет почти никаких сомнений, что в основе слов *река* и *речь* лежит один образ, и это объяснимо (в греческом языке глагол *течь* прямо передается сходным словом  $\rho\epsilon\omega$ ). Образ *реки* и *речи* является комплексным: звуковым (сходно *журчат*) и визуально-смысловым (сходно *текут*). Но возьмите такое русское слово, как *халатность*. Разве могло прийти кому-нибудь в голову, при условии тщательного обдумывания, для передачи абстрактных понятий *беспечности поступка* и *небрежности действия* использовать слово *халат*? Ясно, что здесь мы имеем дело с каким-то спонтанным визуальным образом. Подобная стихийная семантическая реминисценция играет в живом и часто ироничном языке общения людей исключительно важную роль; она часто не укладывается ни в какие логические рамки.

Русское слово *нож* произошло именно от вторичного, казалось бы, не самого главного действия, а именно, *обнажить*, т.е. нечто *оголеть*. Но является ли для человека это «вторичное» действие таким уж неважным? Ведь любой человек, увидев оголенное лезвие ножа, его блеск на солнце, испытает сильное волнение. Подобно тому, как блеск молнии порождал самых грозных богов у древних народов, точно так же блеск лезвия ножа сильно воздействовал на воображение человека. Реминисценция слова *нож* со словом *голь* является, возможно, самой сильной. Образ мог быть весьма обыденным, но ярким и запоминающимся, как тот, что зафиксирован в слове *халатность* или в выражении *наломал дров*, т.е. сделал работу так же небрежно, как ломают хворост через колено.

Имеется довольно прямая лингвистическая связь между словами *нож* и *нога*. Дело в том, что раньше женщины носили очень консервативную одежду, закрывающую все части тела, в частности, длинные юбки до пят, полностью скрывающие ноги. Если мужчина видел ноги женщины во время работы в поле или при стирке на реке, он говорил о ее *нагоде*. Оголенная женская *нога* словно *нож* поражала его воображение. Как известно, язык передается по мужской линии, именно из мужчин выходили писцы и грамотеи. Поэтому нет ничего странного в том, что *нож* в бою и *нога* в быту, как наиболее волнующие моменты в жизни мужчины, вызванные одним и тем же неожиданным действием, а именно, *оголением* ранее скрытого, закрепились в близких по звучанию словах.

*Нагота*, как и *нога*, слова женского рода в грамматическом и семантическом смысле, т.е. они относятся прежде всего к женщине. Они стоят в прямой зависимости еще от одного женского слова — *нежность*. Видя *наготу*, мужчину охватывают *нежные* чувства; он испытывает *негу*. Белизна и мягкость женской кожи ассоциируется со *снегом*, и наоборот, *снег* бел и *нежен*, как женская кожа. Теперь уже *нагота*, *нож*, *нога*, *нега*, *снег* образуют общий визуально-семантический ряд, который, однако, на этом не обрывается. *Ноги* является опорой корпуса, поэтому *ножки* есть не только у насекомых и животных, но и у стула, стола, шкафа. *Ноги* находятся *внизу*, следовательно, целая вереница слов *низ*, *ниже*, *низина*, *низкий*, *низменный*, *униженный*, *нищий*, за счет чередования гласных *о/и* и согласных *г/ж/з/ц* семантически и фонетически «произошли» из слов *нога* и *ножки*. Аналогичным образом от слова *нож* «произошли» не только такие слова, как *ножны*, *ножницы* и *ножовка*, но также за счет выпадения гласной *о* и появления *и* возникла череда глаголов: *пронзать*, *вонзить*, *низать*; исключение составляет слово *занозить*, где звук *о* присутствует.

Слово «произошли» мы взяли в кавычки, подчеркнув тем самым, что на самом-то деле никакой направленности при этих ассоциациях не возникает, поскольку здесь отсутствует направление генезиса слов. Трудно сказать, какое слово явилось причиной, а какое следствием в цепи *заноза* — *занозить* — *низать* — *нить*. Слово *низ* с таким же успехом воздействовало на слово *нож*, как второе на первое. Следует помнить, что звуковая реверберация и образная реминисценция не имеют определенного вектора распространения; они существуют в форме резонанса, некоего общего возбуждения целой группы схожих явлений или действий.

Французы называют Голландию *Pays bas*, что переводится как *нижняя страна* или *низинная земля*; англичане ее называют *Netherlands*, а сами голландцы — *Nederland*, что уже близко к русскому названию — *Нидерланды*. Английское слово *nether* — *низ, нижний* является устаревшим; сейчас его успешно заменяют другие слова — *base, bottom, below, less, under, lower*. Однако любой англичанин поймет выражение *the nether man*, означающее *ноги*. Подобные иноязычные существительные существуют и в русском языке: если сказать *нижние конечности*, всякий поймет, что речь идет о ногах; выражение «он валялся у него в *ногах*» равносильно выражению «он унился перед ним». Таким образом, в английском слове *nether*, как и в греческом  $\beta\alpha\sigma\iota\varsigma$ , объединились оба содержания, порознь заключенные в русских словах *низ* и *ноги*. Однако в английском языке существует удивительное слово *nog* — *гвоздь, клин, опора*, сделанные из дерева. В этом слове *nog* одновременно заключен двойной смысл — колющего предмета и опоры. Одному английскому слову *nog* в русском языке соответствует два близких по звучанию, но далеких по смыслу слова *нож* и *нога*. Вопрос только в том, так ли уж далеких? Этимология учит обратному: слова близки и по смыслу. Возьмите ряд английских, немецких и русских слов, связанных фонетически:

<i>nether</i> — <i>niedrig</i> — <i>нижний</i> ,	<i>nail</i> — <i>Nagel</i> — <i>ноготь</i> ,
<i>neither</i> — <i>nichtig</i> — <i>ни...</i> ,	<i>needl</i> — <i>Nadel</i> — <i>иглолка</i> ,
<i>naked</i> — <i>nackt</i> — <i>нагой</i> ,	<i>needl</i> — <i>nähen</i> — <i>шить</i> ,
<i>night</i> — <i>Nacht</i> — <i>ночь</i> ,	<i>need</i> — <i>Not</i> — <i>нужда</i> .

Общая фонетика выражена прежде всего в примерно одинаковой структуре всех слов с устойчивым первым носовым звуком *n*. Английские, немецкие и русские слова испытывают взаимную реверберацию. Далее мы вправе ожидать от фонетической аналогии некую семантическую корреляцию, выраженную в сходстве действия или одинаковости образа.

В русском языке слова *нагой* и *ночь* существенно отделились друг от друга, но в немецком они почти полностью совпали, а это дает ключ к пониманию взаимосвязи и русских слов. Другой пример: в древнеирландском языке слово *нагота* — *nocht* — почти целиком совпало с русским словом *ночь*. Раздеваются не только тогда, когда ночью ложатся спать, но и во время купания или плавания, поэтому во многих европейских языках слово *плыть* имеет корень

*nag*. В английском же языке слово в таком написании переводится, как *приставать, изводить*, отсюда и русские слова *наглец* и *нахал*. Наглость связана с *пренебрежением, игнорированием*. Эти понятия передаются в английском и немецком языках уже другими словами, но созвучными русским — *neglect* и *nachlässig*. Подобных примеров можно привести множество, в частности, к выписанным словам можно было бы добавить такие немецкие слова, как *neigen* — *снижать, nieder* — *клепать* и т.д.

Из слова *низ* «прорастает» целая ветвь сложных глаголов: *низводить, низвергать, низлагать, ниспадать, нисходить*, а также слова *нищ, ничком, никнуть, ника, ничто, ничей, ничье, ничего, ничтожный*. Слова *обнажаться, унижаться* тесно коррелируют с такими словами, как *нищать, нищий, нить*, а это, в свою очередь, вызывает другую группу слов с гласной *у*, внутренне сильно реверберирующих: *нужда, нужно, нуждаться, нужник, нудить, нудный*. От слова *ночь* пошло направленное словообразование в виде *ночлежка, ночник, ночевка*. Слово *нога* имеет совершенно иное отношение к таким словам, как *ноготь* и *коготь*; их связь, возможно, произошла посредством слов чужого языка. Между тем слово *голый*, непосредственно резонируя с русскими словами *нагой, наголо, наглый, наглец, нахал*, дало начало существованию огромного числа слов, в которых характерный носовой звук *н* уже отсутствует, а на первом месте стоит гортанный звук *г* в сопровождении языкового *л*: *голь, голыш, головешка, головня, голытьба, голень, голенище, голяшка, голян, голова, глава, главный, главенствующий, главарь, галька, галка, гладко, галить, глазеть, глаз, глас, голос, голосить, глотка, глотать* и т.д.

Интересное содержание вобрало в себя слово *галка*. По Далю, *галка* — это «горячая головня, носимая ветром при пожаре». Этот образ ассоциируется с *галкой* — птицей. *Гладкость*, характерная для *голых, округлых форм (галька)*, вызвало к жизни совершенно новое содержание слова *галка*, передаваемое современными словами *шар, мяч*. Отсюда слово *галить* — «подавать мяч или шар в игре». Но *галиться* все равно, что *изгаляться, шутить, смеяться*. «Парни над девками *изгаляются*», т.е. *нагло* издеваются. Другие реминисценции и реверберации: *галки галдят, малыш-голыш, «галить младенца, дать полежать несвитому; он галится, тянется и подает голос»; из французского языка: галиматья — бессмысленная речь*. Это порождает длинный ряд слов: *голосить, голос, глас, глос-*

*сарий, глагол, глаголить*. Английское слово *leg* переводится как *нога*. Таким образом, *лягать, лягушка, ляжка* реверберирует уже с иноязычным словом, которое в русском слове *легавый* является корнем.

На рис. 3.59 приведен лингвистический граф с корнем *нож*, где приведены ассоциативные ветви, так или иначе связанные с этим словом. Однако необходимо отчетливо понимать, что все лингвистические графы никакого корня, т.е. начала произрастания всего дерева, не имеют. Слово *нож* — это только условный корень, выбранный нами из ряда столь же равноправных слов. С него мы начали свое движение в мир слов, но мы с такой же легкостью могли бы обвести в овал слово *нога, низ, нагота, голова*, а слово *нож* поместить в прямоугольную рамку. Природа языка такова, что в нем невозможно отыскать какое-то ключевое слово. Лингвистические графы часто изображаются в виде деревьев, но реально они содержат бесконечное число циклов. Фонетические и образно-семантические линии слов то сходятся, то вновь расходятся. В этом состоит своеобразие всех лингвистических графов, которые напоминают бесконечную узорчатую вязь без каких-либо признаков симметрии и регулярности. Стрелки ребер графа, быть может, где-то и возникают, когда какое-то слово (*ваучер, брокер, дилер*) заносится в чужую для него среду (в данном случае русскую). Но эти одноактные события сглаживаются, нивелируются в течение многих столетий, — а говорится именно о таких временных отрезках и даже еще более длительных.

Лингвистический граф всегда подвижен, бесконечен и охватывает все без исключения слова не только данного языка, но и множества других языков, функционирующих на огромных территориях, где проживают десятки контактирующих друг с другом народов и сотни отдельных групп населения, языковая культура которых имеет свои особенности. Составление таких графов, отображающих итог многовековой эволюции речевых форм, занятие весьма непростое и, тем не менее, крайне необходимое. Работа по собиранию разрозненных слов в замкнутые циклы, выявление важных точек ветвления является основной для лингвистики. Она играет такую же важную роль, как в биологии естественная классификация животных и растений. Без этой предварительной таксономии вряд ли возможен комплексный подход к языку. На примере слов *нож, нога, нагой, наголо, нега, голо, голова, голень, голяшка, ляжка, лягушка,*



ские реформы, Октябрьская революция, Перестройка Горбачева — все они действовали с преобладанием интегральных механизмов реминисценции и реверберации. Реминисценция дает новый образ, с этим образом связано новое содержание, это содержание вызывает реверберацию с множеством сходно звучащих слов; далее происходит абсорбция слова, его фонетическая адаптация.

Если говорить о долгой жизни языка в окружении других языков, то в очень немногих случаях мы можем говорить о точках роста, которые послужили закваской для возникновения других лингвистических ареалов. В массе своей язык подобен биологической жизни, сформировавшейся хотя и очень медленно, но сразу повсюду, по всем бескрайним бассейнам океанического шельфа. Позже возникшие биологические субстанции, не способные еще к самостоятельной жизнедеятельности, поглощались живым океаном, не давая отдельной особи-слову проявить себя в какой-то специфической форме. Жизнь на Земле возникла однажды и более ни на секунду не прерывалась. То же самое нужно сказать и о языке: существует множество его видов, типов, отрядов, семейств, но отдельная особь-слово никогда не определяла климат на нашей планете. Экстравагантные и специфические экземпляры, выделяющиеся своей индивидуальностью, гибли в первую очередь. Выживали простейшие, мало выделяющиеся на общем фоне словоформы, сросшиеся с тысячелетней аморфной мантией языка.

То, что язык функционирует как единый организм, говорили многие лингвисты XIX в.; но многие из них утверждали, что он развивается по схеме дерева из одного, двух, пяти или двадцати слов, играющих роль основных подлежащих, сказуемых, местоимений, числительных, мер длины, времени и пр. Вот это — вряд ли. Подобные теории, по существу, утверждают, что у человеческого организма сначала появилась голова (младенчество), потом выросло туловище (отрочество), от него отрасли руки и ноги (юношество), далее на руках и ногах появились пальцы (зрелость) и, наконец, отрасли ногти и волосы (старость). Реально рост организма происходит иначе: уже в младенческом возрасте человек имеет все необходимые члены: голову, туловище, конечности, пальцы, ногти и волосы, только с возрастом все это изменяется. Очаговая теория так же сомнительна, как и теория, утверждающая, будто языковая множественность сегодняшнего дня возникла из одного праязыка. Ныне обнаруженное ядро древней языковой формы есть на самом деле

уцелевшая часть от еще более разнородной лингвистической массы. Однако мы не станем далее углубляться в теоретические проблемы.

### Граф словоизменения

Итак, до сих пор мы рассматривали медленные исторические процессы формирования лексикона. Однако чаще и быстрее всего словоизменение (не историческое, а практическое, повседневное) происходит в результате префиксации и суффиксации. В этой связи приведем ветви словообразовательного дерева с корнем *смотр* (рис. 3.60). На примере этого порождающего лингвистического графа разберем типичные трудности, встречающиеся при упорядочении словоформ в лингвистике.

Первое, о чем следует сказать, глядя на нашу схему: любое дерево будет неполным, ибо живой язык невозможно втиснуть в какие-то заранее определенные рамки. Но дело даже не в постоянной изменчивости языка. В нашем дереве отсутствуют, например, такие обычные глаголы настоящего времени, как *смотришь*, *смотрит*, *смотрим*, вместе с многочисленными префиксами *о*, *у*, *под*. То же самое нужно сказать и в отношении прошедшего времени (*смотрел*, *смотрела*, *смотрели*), некоторых деепричастий (*смотрев*, *смотревши*), повелительного наклонения глаголов (*смотри*, *смотрите*) и т.д. Все эти распространенные и очень понятные слова, отвечающие различным склонениям и спряжениям, не внесены в дерево потому, что они касаются поверхностных изменений, которые нас сейчас интересуют мало, но при этом значительно увеличивают крону порождающего дерева. Нам же любопытно проследить более глубинные грамматические метаморфозы, так как в общем случае действует принцип: чем глубже и дольше перемены, в частности, затрагивающие корень слова, тем меньше в них регулярности, и наоборот, чем мельче изменения, в частности, относящиеся только к периферийным частям слова, тем выше регулярность, которую несложно свести к компьютерной обработке. Согласованное написание флексий, т.е. изменяющейся части слова, зависящей от лица, рода, числа, склонения, спряжения, обеспечить довольно легко. Современные компьютерные переводчики типа PROMT в основном справляются с этой функцией. Когда речь заходит о выборе нужного синонима или антонима, т.е. там, где затрагиваются проблемы смысла слов, то уже возникает задача совершенного иного рода, более трудная, чтобы не сказать, неразрешимая.



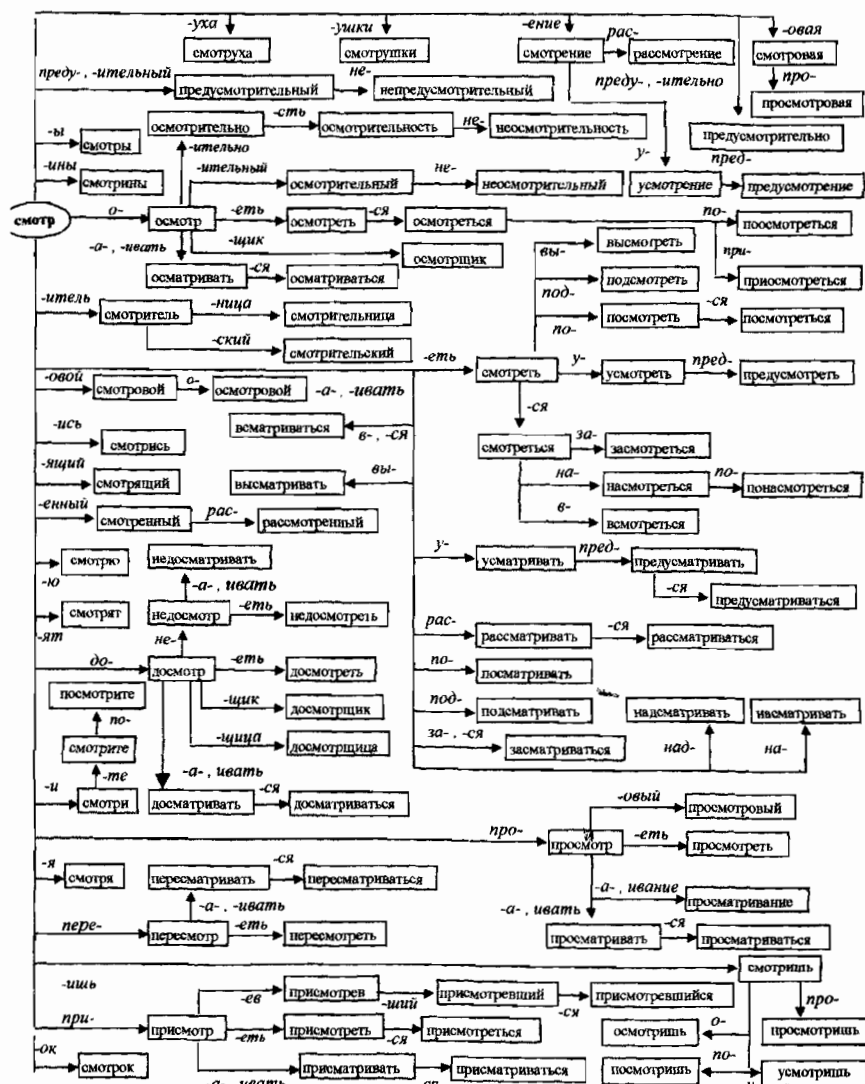


Рис. 3.60

При внимательном анализе представленного графа можно во многих местах обнаружить нарушение внутренней логики построения древовидной структуры. Достаточно сказать, что в словах *досмотреть* и *досматривать* происходит не просто присоединение входного полуслова, а еще и чередование букв *о* и *а*. Можно при-

держиваться какого-то определенного правила синтеза новых слов, однако они по большей части будут искусственными. При наличии в схеме некоторых отклонений от правил составления слов, данное дерево, тем не менее, можно запрограммировать на компьютерную обработку по присоединению суффиксов и префиксов. В любом случае словообразовательное гнездо «смотреть» нельзя сравнивать, например, с деревом жизни и эволюции растительного и животного мира, в котором каждому виду отводится постоянное место, соответствующее природным условиям. Биология давно распрощалась с искусственными классификациями, тогда как лингвистика пока что опирается на них. Все лингвистические базы данных — это плод искусственной группировки составных частей по довольно спорным критериям отбора слов-особей. В естественных условиях буквенное наращивание слов происходит самым неожиданным образом. Регулярность, конечно, существует, но она далека от тотальной; язык изобилует словами-мутантами, выпадающими из установленных учебником грамматики лингвистических норм.

Причин, которые вызывают неоднозначность естественных языков и невозможность их алгоритмизации, много. Одна из основных причин заключена в том, что в живом языке не определена очередность присоединения самых распространенных префиксов, суффиксов и окончаний. Всякая установленная программистом очередность будет искусственной. В частности, есть ветвь, изображенная на рис. 3.61а отдельно, у которой порядок образования слов может быть изменен на другой (рис. 3.61б). В цепочке слов, показанной на рис. 3.61б, фигурирует слово *смотреться*, взятое с другой ветви порождающего дерева (рис. 3.60). Вместе с тем в нее не попало слово *осмотреть*. Таким образом, имеются варианты, которые нужно отбирать в зависимости от конкретно решаемой лингвистической задачи. В обоих указанных случаях фигурируют одинаковые наборы входных полуслов, но выходные слова получились разными. Это происходит потому, что используются различные матрицы формирования (эти матрицы изображены на рис. 3.62а и 3.62б).

Генерация очередного словообразования, быть может, и допустима при наличии соответствующего конструкторского набора из морфологических запчастей, но ограничение накладывается содержанием, которое невозможно запрограммировать. Ведь понятно, что присоединение к корню слева или справа дополнительных букв изменяет смысл исходного слова. Вопрос влияния частей слова на

их содержание является, как было сказано, одним из главных в языкознании.

Когда формально-логический критерий оптимального обхода дерева выработан, задача алгоритмиста или программиста сводится к обыкновенной инженерно-технической проблеме, которую он обязан решить как специалист своего дела. Вся сложность решения задачи заключена именно в предмете лингвистики, т.е. за пределами программирования и до появления какой-либо формализованной логико-математической модели. И так повсюду, чего бы мы ни касались: для выработки удовлетворительной формы нужно проникнуться содержанием. Давайте и мы попытаемся понять, с чем сталкивается разработчик компьютерных программ с самого начала решения лингвистической задачи, какой путь он должен преодолеть перед тем, как создаст готовый программный продукт.

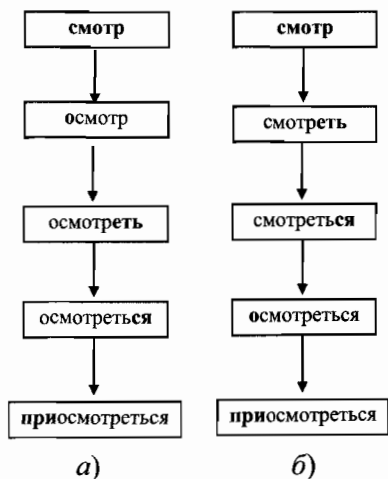


Рис. 3.61

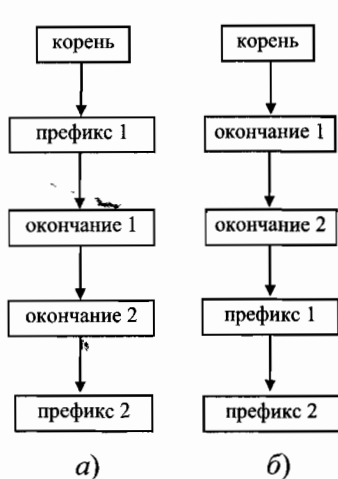


Рис. 3.62

Любая семантика отдельной словесной частицы вытекает из общего смысла, который имеется у некоторой совокупности слов с этой частицей. Еще в младших классах средней школы нам рассказывают о назначении приставок *пре-, при-, про-, по-, в-, на-, об-, раз-, рас-, у-, с-, со-* через совокупности слов типа: *превзойти, превыше, прелестный, прекрасно, превратить — перевернуть, преградить — перегородить, предать — передать, пресечь — пересечь, пергнуть — пригнуть, передвинуть — придвинуть, претворить —*

*притворить, приблизить, приоткрыть, просветить, продвинуть, проткнуть, просверлить, предбанник, предвзятый, предводитель, предгорье, предместье, поест, постучать, поудить, вставить, ввинтить, вкрутить, взломать, взлететь, вскрикнуть, накрыть, налить, насыпать, обмять, обтесать, обработать, разнести, расплести, расставить, установить, укрепить, убавить, удалено, увеличено, уменьшено, скосить, смять, сломать, сокрушить, совладать, сомкнуть.*

Там же в школе нам говорят о назначении суффиксов. Их нужно классифицировать, потому что впоследствии на основе этой классификации создаются специализированные базы данных. Хотя и безо всякой предварительно разработанной таксономии мы легко догадываемся, что суффикс *-ик* является уменьшительным: *носик, домик*, а суффикс *-чка* — ласкательным: *душечка, ласточка, весточка*. При использовании языка мы не анализируем, подобно компьютеру, состав слов; суффиксы, сливаясь с контекстом всей фразы, непосредственно воздействуют на те отделы головного мозга, которые ответственны за эмоции. Так, в речи встречаются небольшие группы слов с определенными концовками, передающими отношение говорящего к субъекту или объекту высказывания: добродушное (*гулена, сладена*), недоброжелательное (*меняла, подгоняла*), незлобивое (*верзила, громила, чудила, заводила, кутила, страшила*). Компьютерная обработка эмоционально окрашенных слов всегда будет сопряжена с большими трудностями.

Продемонстрируем один из механизмов образования серии новых слов, которая, однако, имеет больше исключений, чем слов, составленных по правилам. Предположим, имеется масса чего-либо; из этого множества выделяется *единица*, в итоге получаем: *град + одна* (устар. *едина*) = *градина, дробь — дробина, жемчуг — жемчужина, изюм — изюмина, морковь — морковина, рыба — рыбина, солома — соломина, сугроб — сугробина, ухаб — ухабина*. Существуют исключения: *усы — усища*. В единственном числе это слово не употребляется (*усина*), но употребляется во множественном числе (*усищи*); аналогично: *деньги — деньжищи* (в ед. числе *деньжина* или *деньжища* уже не говорят). Но вот мы находим слово той же структуры — *гадина*, которое выражает не просто единицу некой массы (*гады*), например, змей-гадюк, а еще и резко отрицательную характеристику. Существуют аналогичные негативные слова: *жадина, уродина* или *образина*. Здесь характеристика единичности

уходит на второй план, а на первый выходит неприятное качество лингвистического объекта. Если бы свойство не было столь отрицательным, то последние слова можно было бы поставить рядом с качественными существительными, вызывающими у говорящего легкое удивление: *громадина*, *холодина*. Однако, поставив рядом такие слова, как *виноградина* и *година*, *картофелина* и *середина*, *чепуховина* и *низина*, *глубина* и *дружина*, *мякина* и *проталина*, *оскомина* и *скважина*, *родина* и *говядина*, понимаешь, что одна и та же концовка (*-ина*) отнюдь не гарантирует содержательную однотипность слов. Звуковая гамма негативных слов *гадина*, *жадина*, *уродина*, *образина* ничем особенным не отличается от звуковой гаммы таких нейтральных слов, как *зарубина*, *долина*, *ложбина*, *брюквина*. Но зададимся вопросом, различаются ли в принципе по структуре и фонетическому составу «хорошие» и «плохие» слова или, более широко, высокий и низкий стили. Ответ будет таким: да, различаются, но не настолько, чтобы это различие можно было использовать для компьютерной обработки.

Большинство распространенных однослоговых слов нейтральны. Это слова, характеризующие: время (*час*, *день*, *ночь*, *год*, *век*), родственные отношения (*сын*, *мать*, *дочь*, *брат*, *тесть*, *зять*, *сват*), метеорологические явления (*снег*, *дождь*, *шторм*, *гром*, *град*), части лица (*лоб*, *нос*, *рот*), элементы ландшафта (*луг*, *лес*, *степь*) и т.п. Кроме того, существует большая нейтральная группа однослоговых глаголов (*знать*, *брать*, *дать*, *бить*, *вить*). Однако в русском языке имеется следующая тенденция: чем короче слово, тем меньше в нем возвышенного и благозвучного, оно несет больше негативной энергии. Существует немало коротких слов-ругательств, при использовании которых можно заметно снизить художественные достоинства текста; вслушайтесь: *тварь*, *рвань*, *брань*, *дрянь*, *дурь*, *врун*, *лгуи*, *вонь*, *хряк*, *бзик*, *шши*. Добавление суффиксов и префиксов, а также использование сложных слов, как правило, облагораживает стиль изложения. Возьмем слова с приставкой *без-*, *бес-*, передающие нехватку чего-либо. Если отбросить слова, означающие прямую ущербность: *безглазый*, *безголовый*, *бездомный*, *безмозглый*, *безногий*, *безрукий*, *безусый*, а также сравнительно молодые словообразования: *беспроволочный телеграф*, *бесплатный проезд*, то многие эпитеты с этими приставками звучат вполне поэтично: *безвременный*, *безмолвный*, *безмятежный*, *безраздельный*, *бескорыстный*, *бесподобный*, *беспредельный*, *бессмертный*, *бесстрастный*.

Приставка *от-*, выполняющая самые различные функции, тоже редко снижает уровень стиля, особенно когда она встречается в старых словах. Современное слово советского периода *отщепенец*, образованное от нейтрального *щепя*, передает удручающее содержание. Среди старых церковно-славянских слов, писавшихся через специальную букву *от*, таких слов, пожалуй, не найти: *отблагодарить*, *отважный*, *отверженный*, *отвращение*, *отдохновение*, *отживший*, *откланяться*, *открещиваться*, *откровение*, *отлаженный*, *отличиться*, *отмежеваться*, *отмиение*, *отобрание*, *отпевание*, *отписать*, *отплатить*, *отпраздновать*, *отрада*, *отстроенный*, *отчаяние*, *отчужденный*, *отшатнуться*.

Хорошо известна возвышающая роль приставки *воз-*, *вос-*: *возвысить*, *возглавить*, *воздвигнуть*, *возместить*, *вознести*, *воспеть*, *воспрянуть*, *воссиять*, *восславить*, *воссоздать*, *восхвалять*, *восхищать*. Обе указанные приставки в некоторых случаях могут быть заменены на приставки *из-*, *ис-* с заметным увеличением элементов обыденности: *возвести* — *известить*, *возвещать* — *извещать*, *возводить* — *изводить*, *возвращать* — *извращать*, *воздать* — *издать*, *воздыхать* — *издыхать*, *восполнять* — *исполнять*, *восторгать* — *исторгать*. То же самое может произойти при замене *воз-* на *вы-*: *нация возрождается* — *нация вырождается*, *вознести до небес* — *вынести мусор*. Однако глаголы с приставками *из-*, *ис-*, как правило, относятся к более высокому стилю, чем с приставкой *вы-*. Большую роль играет, конечно, ближайшее словесное обрамление:

*испить чашу долготерпения* — *выпить рюмку водки*,  
*испустить дух* — *выпустить пар*,  
*испросить разрешения* — *выпросить подачку*,  
*исполнить долг* — *выполнить работу*,  
*иссушить сердце* — *высушить белье*,  
*искупить вину* — *выкупить лошадь*,  
*изучить философию* — *выучить урок*,  
*изукрасить узорами* — *выкрасить забор*,  
*изложить требования* — *выложить товар*,  
*издавать книги* — *выдавать деньги*,  
*изгонять врагов* — *выгонять скотину*,  
*известить себя* — *вывести пятно*.

От глаголов могут быть образованы другие части речи, например: *изломанная судьба* — *выломанная дверь*; или, без противопоставления: *иско-*

речение, избранник, выкормыш, выкидыш, выгон. Словам *излучать, изнывать, избличать, изображать, изобретать, изрекать* нельзя противопоставить слова с приставкой *вы-*; то же самое, но уже с приставкой *ис-*: *вывесить, выскочить, выстричь, высыпать, выправить*. Существуют глаголы с приставкой *из-* и *ис-* довольно низкого уровня: *изгадить, испоганить, испохабить*, которые, однако, используются культурными людьми с высоким чутьем на языковую ситуацию, поэтому они не звучат грубо. Есть масса слов, не различимых по стилю: *избирать — выбирать, изгибать — выгибать, исписать — выписать, исколоть — выколоть, исколотить — выколотить*. Для корней этих слов компьютерный переводчик может с одинаковым успехом присоединять префикс *вы-*, *из-* или *ис-*. Тем не менее, слова с приставкой *вы-*, которых насчитывается около 2500, выглядят менее привлекательно, чем слова с приставкой *из-*, *ис-*, которых примерно в полтора раза меньше. Должен ли разработчик компьютерных программ ориентироваться на этот факт? Да, должен, когда определяет шкалу ранжирования слов. Например, при переводе текста компьютер может отдать предпочтение словосочетанию *выбирать депутата* перед *избирать депутата*, если по соседству, в переведенном абзаце уже использовались слова *выбирать, выборы* или близкие по звучанию; из фонетических соображений здесь лучше остановиться на словосочетании *избирать депутата*.

Наряду с префиксами в словообразовании широко используются слова-приставки: *велико-*, *все-*, *добро-*, *досто-*, *живо-*; они дают, например, такие благозвучия: *великодушный, великомученический, всеблагий, всеведущий, всевышний, добродетельный, достопочтенный, добросердечный, достославный, живописный, животворный, жизнестойкий, жизнеутверждающий*. К подобным же превосходным словоформам относятся: *красноречивый, лучезарный, миролюбивый, общепризнанный, первозданный, первопрестольный, светозарный, священнодейственный, сердобольный*. Подобные слова, передающие высокое содержание, возникали, видимо, в церковно-приходской среде, путем составления сложных слов. Рассмотрим пример из ряда слов, первой частью которых служит звучное слово *благо*: *благоверный, благоволить, благоговейный, благодарственное, благодетель, благополучие, благоразумие, благородство, благоденственный, благотворный, благоуханный, благочестие*.

*Благо* — южнославянское редуцированное слово; северославянское слово с полнозвучным *-оло-* сохранилось только в географическом названии *Бологое*. Красивые слова, например, со словом *болото*, конечно, составить невозможно. Но если берутся такие, как *злато* и *золото*, то на первом слове построены прекрасные эпитеты:

*златовласый* и *златоглавая*. На втором слове тоже можно построить аналогичные словоформы: *золотоволосый* и *золотоголовый*, но при этом потерять поэзию звука. Здесь *золото* уже не поэтический образ, а скорее технический термин, пригодный разве что для образования более чем прозаических выражений типа *золотовалютный коридор*, *золотодобытчик*, *золотоносная жила*, *золотопромышленность*, *золотосодержащая руда*.

Обратите внимание: слова *здравый* и *здравомыслящий* обозначают крепость ума, а слова *здоровый*, *здоровенный*, *здоровёхонький*, *здоровёшенький* всегда относятся к более приземленному — телу. Издревле на Руси использовали *сладкие* корешки травы под названием *солодка*, однако же существует превосходное поэтическое слово *сладострастный*, но не *солодострасный*; есть *сладкогласие*, но нет *солодкогласие*. Сравните два выражения: *драгоценный дар* и *дорогостоящие огурцы*, и вы поймете роль южнославянского говора в формировании русского языка; первое словосочетание украсит хорошее лирическое стихотворение, второе годно лишь для торгово-хозяйственного отчета.

Замечено, что две конкурирующие в окончаниях шипящие *щ* и *ч* распределены неравномерно как по территориальному срезу, так и по временному. Исторически сложилось так, что первая буква чаще использовалась южными славянами, вторая — северными: южане говорили *нощь* вместо *ночь* и *свеща* вместо *свеча*. Грамота пошла с юга России, поэтому, например, слов, оканчивающихся на *-чина*, получилось несколько меньше, чем на *-щина*, причем на *-чина* оканчиваются только те слова, основа которых заканчивалась на *-к*, т.е. мы имеем дело с вынужденным чередованием букв *к/ч*: *бок* — *обочина*, *бык* — *бычина*, *лик* — *личина*, *мужик* — *мужичина*, *поперёк* — *поперечина*, *щека* — *пощёчина*, *дурак* — *дурачина*. Основная же масса (свыше сотни) подобных слов приходится на окончание *-щина*; вот некоторые из них: *барщина*, *безотцовщина*, *бесовщина*, *боярщина*, *годовщина*, *дармовщина*, *деревенщина*, *женщина*, *морщина*, *община*, *трещина*. Есть в этом списке множество слов, передающих резко отрицательное содержание. Однако негативный элемент в эти слова привносится не шипящей фонемой *-щ-*, как в словах *чертовщина* и *матерщина*, а концевкой *-ина*; сравните: *блеватина*, *гадина*, *детина*, *дубина*, *жадина*, *идиотина*, *орясина*, *пошлятина*, *скотина*, *тухлятина*. Звук *щ*, контрастирующий на фоне нешипящих фонем, выполняет функцию соединительного звена. Ко-



гда основа заканчивается на *к*, соединительное звено в виде буквы *ч* появляется самопроизвольно; вставка буквы *щ* здесь уже не требуется.

Существует большая группа прилагательных с концовкой *-чный, -чий*, в которых *ч* также появилась из-за присутствия букв *к* или *ц*: *вечный, двоичный, догматичный, заячий, личный, логичный, млечный, облачный, птичий, табачный, частичный*. Встречаются и парные прилагательные, создающие проблему выбора для переводчика: *бродячий* и *бродящий*, *вечный* и *вещный*, *висячий* и *висящий*, *горячий* и *горящий*, *живучий* и *живущий*, *колючий* и *колющий*, *лежащий* и *лежащий*, *могучий* и *могущий*, *ползучий* и *ползущий*, *трясучий* и *трясущий*. Звуки *щ* и *ч* с эстетической точки зрения, конечно, неразличимы, хотя через букву *ч* нередко проскальзывает просторечие: *висящий крест* и *висячий хвост*, *горящий огонь* и *горячий пирог*, *ныне живущие* и *живучая кошка*, *стоящий храм* и *стоячее болото*, *сущая истина* и *сучий сын*. Перевести *могучий Бог* будет неправильно, нужно выбрать *всемогущий Бог*. Однако утверждать, что выражение *гудящий колокол* имеет высокий стиль, а *поросячий визг* — низкий только из-за того, что в первом выражении фигурирует буква *щ*, а во втором — *ч*, было бы, видимо, преувеличением.

Ясно, что подобные вопросы нельзя решать единичным примером, здесь требуется провести серьезный статистический анализ, прежде чем создавать базу данных для компьютерных переводчиков. Разработчик программ должен знать, что зарождение письменности в Болгарии и Македонии сказалось на формировании русского языка таким образом, что юго-западная буква *щ* в современном языке принимает более активное участие в процессе словообразования, чем северо-западная *ч*. В частности, слов, оканчивающихся на *-щий* (свыше 400), примерно в два раза больше, чем на *-чий*, причем слова на *-щий*, передают более возвышенное содержание, их произносят на торжествах или при других случаях, внушающих слушателям уважение. Напротив, слова, оканчивающиеся на *-чий*, относятся к предметам обыденным и ничтожным. Этот историко-лингвистический факт нужно учесть при ранжировании базы данных переводчика на русский язык. Нужно помнить, что правильно проведенное ранжирование есть залог успеха для любого компьютерного переводчика. Если говорить коротко, именно ранжирование слов по приоритетному их использованию является центральной проблемой трансляции текста с одного языка на другой.

Мы уже говорили о сложных словах, когда один из их компонентов ассоциируется с чем-то торжественным или священным для людей, говорящих на данном языке. Но эмоциональную окраску слова может изменить самое незатейливое и короткое окончание, которое даже трудно различить на слух. Однако неумолимая статистика использования слов свидетельствует, что, например, едва заметная разница во флексии *-ие* и *-ье*, делает слова либо более, либо менее сладкозвучными, а именно, окончание *-ие* несколько более одухотворенно, чем *-ье*. Наиболее грубые слова имеют окончание даже не *-ье*, а *-ьё*. Их немного: *бабьё, вороньё, ворьё, враньё, вытьё, гнильё, дурачьё, жильё, житьё-бытьё, жраньё, жульё, зверьё, комарьё, мужичьё, нутьё, офицерьё, рваньё, старьё, тряпьё, хамьё, хулиганьё, шитьё*. Многие слова, оканчивающиеся на *-ье*, можно закончить и на *-ие*, например, слова *чиханье* и *купанье* безболезненно заменяются на *чихание* и *купание*, однако уже труднее написать *бабье хихиканье, сучье тьяканье* через *-ие*. Общая статистика русских слов говорит о том, что слова с *-ье* на конце более грубы, вульгарны и примитивны (их насчитывается до 300). Слов, оканчивающихся на *-ие*, гораздо больше, чем на *-ье* (их около 4000); отличаются они возвышенностью и глубокой содержательностью: *безбрежие, бескорыстие, благолепие, бытие, всеилие, деяние, доверие, Евангелие, единобожие, милосердие, обаяние, отягощение, очищение, пение, переживание, покаяние, смущение, увещевание, ухаживание, целомудрие*. Зная эту закономерность, из двух выражений *Божие царствие* и *Божье царство*, вы всегда выберете первое, если не хотите оскорбить слух верующего.

Таким образом, учитывая законы функционирования слов, статистику их использования и некоторые историко-лингвистические факты, можно разработать вполне работоспособную программу для перевода текстов. Такие программы уже существуют, хотя реклама их часто осуществляется на демонстрационных примерах специально подобранных текстов, не представляющих серьезной проблемы для языкового перевода. Вышерассмотренные лингвистические трудности сильно ограничивают использование компьютеров при переводе высокохудожественных текстов на другие языки мира. Утрата эмоциональной окраски слов практически неизбежна; на полноценный художественный перевод машина вряд ли способна. Слишком затруднена алгоритмическая генерация слов и автоматический поиск различных словоформ по свободным матрицам, опре-

деляющим состав предложений. Порядок слов в русском языке, по сравнению с английским, особенно слабо детерминирован.

В связи с этим разработчики программных продуктов пошли по пути специализации переводчиков. Прежде чем перевести текст, пользователь компьютерного переводчика должен отнести его к одной из категорий: медицинской, математической т.д. Но узкие специалисты, как показывает практика использования переводчиков, профессионалы в избранной области редко прибегают к помощи компьютера, так как они легко научаются самостоятельно читать специализированные тексты, написанные на иностранном языке. Компьютерными переводчиками обычно пользуются посетители культурно-развлекательных, общеобразовательных, спортивных и политических сайтов общедоступного назначения, принадлежащих серверам Всемирной паутины, которые размещены на территориях Америки и Европы. А раз так, нужны компьютерные переводчики и общего назначения, рассчитанные на неподготовленного пользователя. Это, в свою очередь, возвращает нас ко всем тем языковым проблемам, о которых было сказано выше.

### **Задача о ханойской башне**

Граф аккумулирует в пространственной форме многосложный процесс поиска решений самых разнообразных задач. Поэтому часто узлы и связи между ними снабжены какими-либо характеристиками, так что граф выступает в качестве иллюстрации пошаговой процедуры, имеющей самую непредсказуемую природу. Что мешает использовать графы, т.е. некие совокупности точек и линий, в лингвистике для генерации слов и предложений? Как было показано в предыдущем подразделе, лингвистическая природа естественно высказанных слов и предложений такова, что вычерчивание схем, наподобие тех, что изображены на рис. 3.59 и 3.60, имеет весьма низкую эвристическую ценность. Следовательно, не точки и линии сами по себе определяют граф, а внутренняя природа объекта, к которому пытаются применить теорию графов. Закрепим эту важную мысль задачей о ханойской башне.

Имеется башня из  $n$  дисков различного диаметра, нанизанных на один из трех стержней. Требуется построить аналогичную башню на другом стержне с использованием третьего, причем так, чтобы не нарушить два условия: во-первых, перемещать можно только один диск; во-вторых, ни один из дисков большего диаметра не может

быть размещен на диске меньшего диаметра. На рис. 3.63 изображены восемь состояний для трех дисков —  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Каждому из восьми состояний отвечает кодовое слово, составленное из трех больших букв. Например, первый переход малого диска  $c$  со стержня  $A$  на стержень  $C$  можно обозначить как  $AAA \rightarrow AAC$ .

Эта цепочка отвечает правильной реализации решения в огромном пространстве разрешенных и неразрешенных состояний. Но если задача будет решена для трех дисков, алгоритм ее решения несложно будет распространить на любое конечное число дисков. Оптимальное решение задачи с  $n$  дисками требует  $N = 2^n - 1$  перемещений. Задача о трех дисках должна иметь семь перемещений, задача о перемещении двух дисков — три перемещения. Таким образом, задача о перемещении трех дисков разбивается на две задачи о перемещении двух дисков или на семь задач о перемещении одного диска. Подобное разбиение сложной задачи на совокупность простых используется всякий раз, когда составляется оптимальный алгоритм поиска решений. На рис. 3.64 приведено дерево поиска нужного решения для двух дисков с указанием всех разрешенных состояний, ребра — переходы дисков с одного стержня на другой. Путь к верному решению пронумерован и обозначен полужирными стрелками.

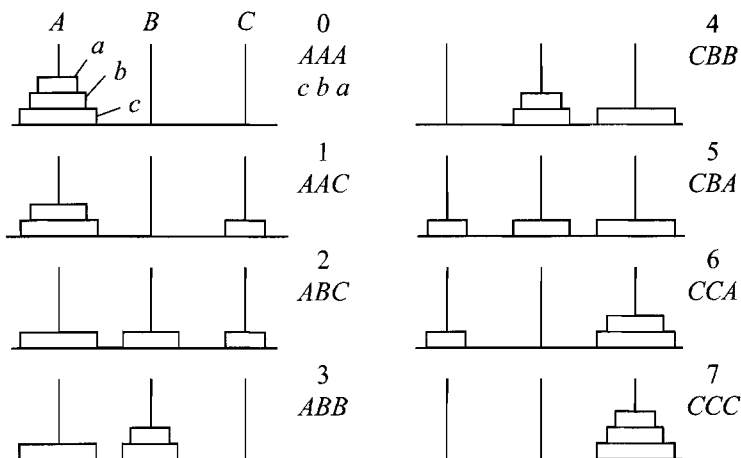


Рис. 3.63

Теперь построим дерево для перемещения трех дисков, но в качестве вершин графа возьмем не сами состояния дисков, которые изображены на рис. 3.63, а коды переходов того или иного диска с одного стержня на другой в соответствии с введенными обозначениями. *Дерево переходов*, показанное на рис. 3.65, вполне наглядно демонстрирует поиск нужного решения и адекватно заменяет *дерево состояний*, которое для трех дисков будет иметь восемь уровней.

Первоначально задача поиска в пространстве состояний представлена совокупностью трех составляющих: множеством начальных состояний, множеством конечных состояний и множеством переходов. В процессе реализации сплошного поиска происходит выявление промежуточных состояний. Однако процедура сплошного перебора всех возможных переходов очень нерациональна, выделить же один обязательный переход вполне возможно. Так, перенос диска  $c$  со стержня  $A$  на стержень  $C$  является обязательной процедурой. Отсюда возникает *редукционный алгоритм*, который предусматривает разбиение исходной задачи на две менее сложные задачи. При этом начальный, конечный и промежуточный стержни постоянно меняются.

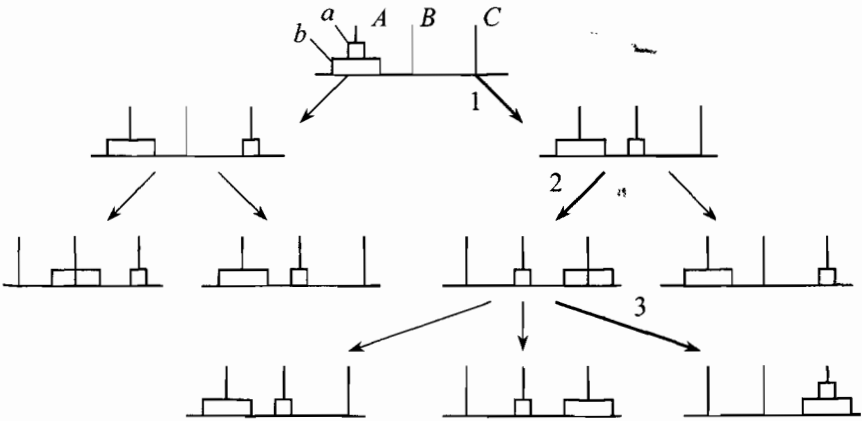


Рис. 3.64

Действительно, для того чтобы диск  $c$  перенести с  $A$  на  $C$  ( $B$  — серединный), нужно сначала перенести диски  $a$  и  $b$  на стержень  $B$  ( $C$  — серединный). Когда диски  $a$  и  $b$  переносятся на стержень  $C$ , стержень  $A$  берет на себя функции серединного. За семь шагов се-

рединным стержнем становятся поочередно стержни  $B, C, A, B, C, A, B$ . Далее две менее сложные задачи снова разбиваются на две еще менее сложные. Эта редуцирующая процедура продолжается до тех пор, пока не будет достигнуто окончательное решение в форме элементарной задачи по переносу одного-единственного диска согласно условию задачи. Стратегию поиска можно выбрать иную, вместе с ней изменится и граф поиска нужного решения.

Задача о ханойской башне попадает в обширный класс задач аналогичного свойства о перемещении конечного числа объектов с одного места на другое с какими-либо ограничениями. Вот одна из таких задач: паромщику нужно перевести через реку волка, козу и капусту. Паром небольшой, так что на нем могут уместиться сам паромщик и что-то одно — либо волк, либо коза, либо капуста. Имеется и еще одно ограничивающее условие: если на берегу оставить волка наедине с козой, он съест козу, а если оставить козу с капустой, она съест капусту. Вопрос: как перевезти на пароме три названных объекта?

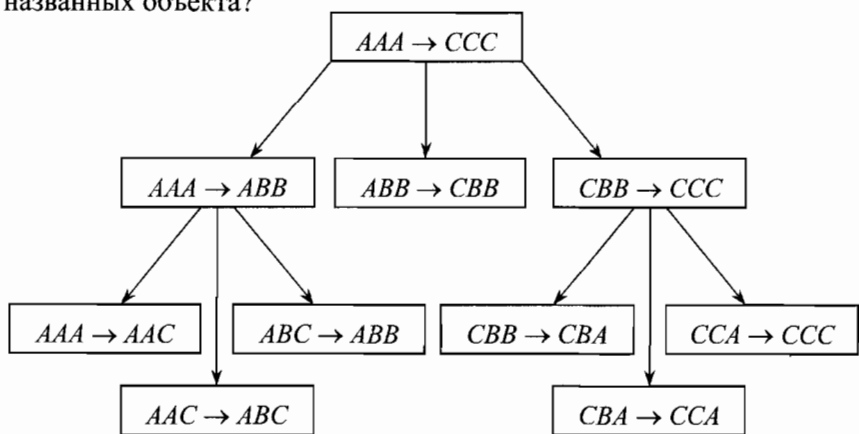


Рис. 3.65

### Другие поисковые задачи

Приведем еще одну такую же задачу и разберем ее решение детально. Три миссионера и три туземца-каннибала находятся на берегу реки. Им всем нужно переправиться на противоположный берег на плоту, который может выдержать только двух человек. Второе ограничительное условие формулируется так: если на левом или правом берегу число каннибалов превысит число миссионеров, то

каннибалы разожгут костер, зажарят и съедят одного или двух миссионеров. Проблема та же, что и в предыдущей задаче: как переправиться через реку всем участникам этой легенды, чтобы миссионеры остались живы?

Не станем спешить с вычерчиванием громоздких графов. Вместо этого сразу же введем коды. Отдельным состояниям и переходам между состояниями поставим в соответствие две тройки переменных. Пусть тройка  $UVW$  характеризует переходы, а тройка  $XYZ$  — состояния. Переменные принимают следующие значения:  $U$  — число миссионеров на плоту,  $V$  — число туземцев-каннибалов на плоту,  $W$  — переменная, принимающая значение в зависимости от направления движения: либо к левому берегу (0), либо к правому берегу (1),  $X$  — число миссионеров на левом берегу,  $Y$  — число туземцев-каннибалов на левом берегу,  $Z$  — переменная, тоже принимающая значение левого (0) или правого (1) берега. Этих условных обозначений будет достаточно, чтобы, не вычерчивая полный граф разрешенных и неразрешенных состояний, указать правильные решения. В *пространстве переходов* цепь, приводящая к нужному решению, в соответствии с введенными кодами  $UVW$ , будет выглядеть следующим образом:

$$111 - 100 - 021 - 010 - 201 - 110 - 201 - 010 - 021 - 010 - 021.$$

Мы могли бы начать не с переходов  $111 - 100 - 021$ , а с перехода  $121 - 010 - 021$ , который образует короткую параллельную ветвь, также ведущую к единственному верному решению. И концовку выписанной цепи можно было бы представить иначе: вместо кодов  $010 - 021 - 010 - 021$  написать  $010 - 100 - 110 - 021$ . Это еще один параллельный отрезок для решения задачи. Теперь через *коды состояний*  $XYZ$  выпишем цепь, ведущую к правильному решению:

$$330 - 221 - 320 - 301 - 310 - 111 - 220 - 021 - 030 - 011 - 020 - 001.$$

Существование двух небольших параллельных цепей дает возможность замены состояний 221 и 020 на 311 и 110 соответственно. Отметим также, что общее число всех состояний для данной задачи равно 43; из них 27 являются запрещенными и 16 разрешенными. Путь к правильному решению, включая начальное и конечное, состоит из 12 состояний.

Большим недостатком выписанных цепочек переходов и состояний является полное отсутствие наглядности. В этом отношении

они не идут ни в какое сравнение с наглядными графами, изображенными на рис. 3.62 — 3.64. При нахождении решения вручную, т.е. в момент начала работы над задачей, наглядность поиска решения играет первостепенную роль. Творческий процесс протекает намного свободнее и проще, когда мы видим, отчетливо представляем объект в пространстве. Поэтому вычерчивание громоздких графов, возможно, и создаст временные неудобства для тех, кто берется решать подобного рода задачи, но скоро окупается быстрым нахождением решения.

Программист, работающий на языке ПРОЛОГ, в соответствии с нашими кодами переходов  $UVW$  и состояний  $XYZ$  мог бы ввести две трехместные предикатные функции: *переход* ( $u,v,w$ ), *состояние* ( $x,y,z$ ) и на базе этих предикатов составить ПРОЛОГ-программу. Перебор состояний по невычерченному нами графу поиска в ПРОЛОГЕ можно осуществить по нескольким стратегиям, начиная либо с исходного состояния, либо с целевого, либо идти с обоих концов одновременно. Часто говорят о *вертикальной* и *горизонтальной прогонке*; естественно, существует и смешанная стратегия, когда ПРОЛОГ-система спускается по вертикали вглубь до какого-то уровня, а дальше двигается по горизонтали вширь тоже до каких-то разумных пределов. Такая смешанная стратегия поиска хороша в том случае, если характер поискового графа неизвестен, но заранее известно, что он насчитывает многие тысячи и миллионы разрешенных состояний. К тем простым задачам, которые мы здесь разобрали, подобные алгоритмические ухищрения применять не нужно, так как 43 узла компьютер обойдет в доли секунды.

Задачи для искусственного интеллекта, которые были рассмотрены только что, явно или неявно опирались на различные графы, имеющие, однако, достаточно схожую природу. Различия касались тех небольших изменений, которые вносились в одну и ту же задачу в связи с различным углом зрения на нее. Смена позиции субъекта теории приводила и к графическому изменению объекта теории, при этом сам предмет исследования не менялся. Однако радикальная смена задачи приведет и к принципиально новым графическим отображениям. Например, две фазы одного и того же *регулярного* графа, изображенного на рис. 3.66 и описывающего группу симметрии диэдра восьмого порядка, ничего общего не имеют с введенными выше *аморфными* графами состояний и переходов. Эти две последние модификации различаются только характеристиками узлов;



именно новое обозначение вершин, при сохранении общих очертаний и всех характеристик дуг графа, позволяет точно и полно описать указанный алгебраический объект.

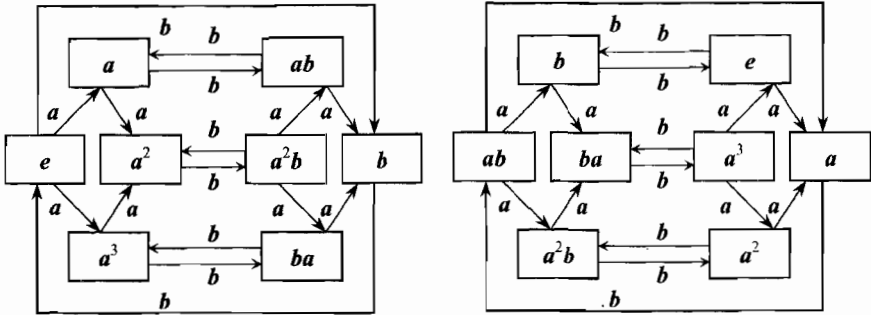


Рис. 3.66

На этих отличительных особенностях графических отображений, которые могут прекрасно представлять сущность объектов, оставаясь при этом как бы в тени, мы хотели бы заострить внимание читателей. Дело в том, что часто пытаются разнести все графы по каким-то классам, однако классификацию графов лучше проводить в соответствии с классификацией рассматриваемых объектов. Если существует что-то общее между объектами, значит, этот общий признак проявится и в графах. Говорить же о классификации графов вне рассматриваемых объектов, опираясь лишь на их внешнюю графическую схожесть, большого смысла не имеет. Здесь можно легко впасть в заблуждение. Подобно тому, как в случайных трещинах на штукатурке мы иногда различаем очертания человеческого лица, точно так же случайные графические признаки мы можем ошибочно принять за то, что реально отсутствует в объекте. Ранее введенное деление графов, например на графы *ориентированные* и *неориентированные*, негласно предполагает и соответствующее деление объектов, в которых имеются ориентированные и неориентированные отношения. То же самое можно сказать о делении графов на *планарные* и *непланарные*; в этом случае мы тоже имеем дело прежде всего с планарными и непланарными *объектами* и только во вторую очередь — с планарными и непланарными графами, которые выступают тенью реальных объектов.

Можно пойти дальше и сказать, что нет «теории графов», как таковой, есть теория того или иного объекта; любые графические

формы служат наглядным *языком* отображения объектов. Подобно естественному языку, на котором мы вводим *понятия* и даем *определения*, графический язык позволяет выразить наши пространственно-механические *представления* о реальных объектах. Под «теорией графов» нужно понимать совокупность наглядных моделей, с помощью которых удалось успешно решить некоторые важные практические задачи, имеющие более или менее жесткую структурную организацию. Если исследователь сумел разложить сложную задачу на множество простых и последовательно решить элементарные задачи, то он сможет, скорее всего, этим своим действиям поставить в соответствие и некий графический образ. В этом случае граф будет в определенном смысле замещать *субъект теории*, т.е. он будет отображать план поиска решения, предоставляя нам готовое решение. Но, как было сказано, граф может выступать не только в роли «искусственного интеллекта», но и в качестве отображающего средства для структурного объекта. Две фазы графического представления группы диэдра, показанные на рис. 3.65, как раз выступают в этом качестве. Конструктивный потенциал, заложенный в данном или любом другом графе, заключается в том, что по минимальному графическому изображению можно полностью воссоздать описываемый объект, изучить его свойства и сохранить знания о нем в достаточно наглядной и компактной форме.

Сейчас мы перейдем к рассмотрению одной известной топологической задачи, которая решалась графическими средствами, но для которой эти самые графические средства служат структурными элементами объекта. Разумеется, топология или геометрия изучает объекты, существующие помимо нас, но эти же науки предоставляют нам алгоритмы поиска решений. Пространственные объекты при проникновении в них логики и других формальных приемов становятся образцами для поиска решения многих задач, выходящих далеко за пределы топологии или геометрии. Однако в задаче, ниже рассмотренной, нас будет интересовать преимущественно структурный момент, для чего мы нарочно отвлекаемся от использования какой-либо символики. Методика отыскания нужного решения там тоже проступает, но в предельно конструктивной, т.е. максимально образной форме. Вообще, нужно заметить, что граф — это наиболее конструктивный инструмент для описания дискретных объектов. Это, пожалуй, одна из главных мыслей не только данного подраздела, но и всей главы в целом.

### 3.5. Раскраска графов и вопросы топологии

#### Задача о раскраске карты

Удивительный факт: любую политическую карту можно раскрасить всего четырьмя красками, причем так, что соседние страны на ней не будут окрашены в один цвет. Пронумеруем краски: 1 — красная, 2 — зеленая, 3 — синяя и 4 — желтая. Пусть рис. 3.67 изображает гипотетический континент, омываемый со всех сторон океаном и разделенный прямолинейными границами на суверенные государства. Единственное условие этой карты такое: все страны должны иметь друг с другом *протяженные* границы, т.е. они не могут соприкасаться в единственной точке, что представляется вполне разумным. Действительно, так не бывает, чтобы реальные страны соприкасались в одной-единственной идеально геометрической точке. Ведь нужно же куда-то вкопать пограничный столб, поставить шлагбаум, определить местоположение будки для пограничника. Значит, должна быть минимальная протяженность границы между странами, иначе теряет смысл само слово *граница*. Если это реалистическое требование выполняется, то во всех узловых точках соприкасаются по три страны, т.е. *регулярный граф*, образованный линиями границ, имеет вершины *третьей* и только *третьей* степени.

Нашу гипотетическую карту начнем раскрашивать следующим образом. Океан можно принять за некую «страну рыб и водорослей», которую закрасим в синий цвет (3). Поэтому все прибрежные страны уже нельзя будет закрасивать этой краской, в противном случае нарушится принцип запрета на соседство двух одинаковых красок. Далее выберем любую, первую попавшуюся страну и назовем ей цвет 1 (на рис. 3.67 эта страна обозначена серым цветом). Две ее соседки с выходом к морю окрасим в зеленый цвет 2. Далее идем по часовой стрелке и окрашиваем подряд все прибрежные страны так, что у нас получится цепочка: 1 – 2 – 1 – 2 – 4 – 1 – 2 – 1 – 2. Желтый (4) цвет здесь появился потому, что красным цветом (1) мы не имели права пользоваться в силу ограничивающего условия. Затем начинаем раскрашивать четыре внутриконтинентальные страны, которые имеют огромные города-столицы (они обозначены белыми кружками) с отходящими от них во все страны-соседки шоссейными магистралями (они обозначены пунктирными прямы-

ми). Пусть цвет страны совпадает с названием страны и названием столицы, т.е. в центральной части континента располагаются Красная (1), Зеленая (2), Синяя (3) и Желтая страны и, соответственно, столицы.

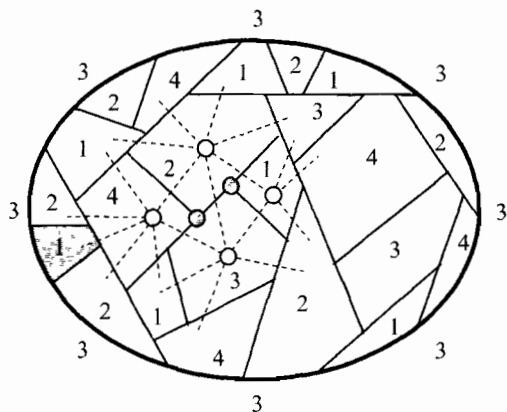


Рис. 3.67.

Дальнейшая закраска карты не вызовет проблем до тех пор, пока мы не дойдем до самой последней страны. Чаще всего получается так, что для нее выбор из четырех красок оказывается недостаточным, так как все ее соседки уже раскрашены в четыре цвета. Чтобы не нарушать исходного условия, нам придется взяться за перекраску однажды уже окрашенных стран; *в этом как раз и состоит проблема четырех красок*. Дело в том, что процедура перекраски может затянуться и мы вынуждены будем перекрашивать еще одну страну, потом еще и т.д. Однако геометрам всегда удавалось за конечное число перекрасок прийти в полное согласие с условием. Им не подалось такой карты, сколько бы в ней ни было стран, чтобы ее нельзя было покрасить четырьмя красками. Это выглядит несколько странно, что привело к формулировке задачи, которая, наподобие Великой теоремы Ферма, не была решена на протяжении столетия.

Задача формулируется так: *действительно ли четырех красок достаточно для раскраски произвольно взятой политической карты с протяженными границами, чтобы две любые соседние страны были окрашены в различные цвета?* Иногда в математической литературе эту задачу формулируют несколько иначе. Пусть регулярный граф границ имеет в местах соединения трех границ особые

пункты (два таких пограничных пункта внутри двух дорожных треугольников помечены темными кружками). Как можно заметить по нашему рис. 3.67, *граф дорог* и *граф границ* образуют взаимно двойственные графы. Отсюда появляется возможность новой формулировки проблемы: *возможно ли с помощью четырех красок раскрасить вершины двойственного графа, построенного на карте с протяженными границами таким образом, чтобы любые две его соседние вершины имели различные цвета?*

Этой проблемой был озабочен немецкий математик *Август Фердинанд Мёбиус* (1790—1868) — родоначальник науки топологии, которая в дальнейшем нас будет особенно интересовать. Его имя прославилась так называемая *петля Мёбиуса* — узкая полоска бумаги, закрученная и склеенная так, как показано на рис. 3.68.

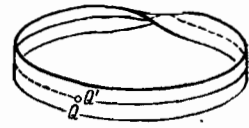


Рис. 3.68

Она имеет *неориентированную поверхность*. Дело в том, что если вы начнете по ней путешествовать от точки  $Q$  и сделаете полный оборот в 360 градусов, то вы не придете в *то же самое место*, а окажитесь с другой стороны ленты, в точке  $Q'$ , хотя ваша дорога нигде не прерывалась. Изучением столь странных свойств поверхностей как раз и занялась наука *топология* (топоζ — место), целью которой является исследование свойств *непрерывности* различных поверхностей. Мёбиус был разносторонним ученым; долгое время он работал в Лейпцигской астрономической обсерватории и немало времени посвятил разработке координатных сеток для карт звездного неба. Известно, что около 1840 г. он размышлял над задачей о четырех красках, о которой он говорил как об известном любопытном факте.

Дальнейшая судьба этой задачи такова. В первом томе Трудов Лондонского географического общества 1879 г. известный британский алгебраист *Артур Кэли* (1821—1895) поместил статью, где отчетливо сформулировал задачу о четырех красках, которая до этого была известна как занятная головоломка. В то время он занимался метрической геометрией и теорией инвариантов непрерывных точечных преобразований, которые входили тогда в качестве раздела в молодую науку топологию. Уже через год ее решение представил А. Кемпе, но, как потом оказалось, он поспешил. Его доказательство раскритиковал Р. Хивуд, который в 1890 г. в работе «Теоремы о раскраске карты» показал, что задачу можно решить точно, если

иметь в своем распоряжении не четыре, а пять красок. После этих попыток задачу надолго отложили и только в 1969 г. к ней вернулся математик Х. Хееш, показавший, что она сводится к проблеме *неприводимых конфигураций*.

Под конфигурацией понимается подграф графа-дорог, который в некоторых случаях можно упростить путем соединения двух несмежных вершин. Так, на рис. 3.67 нанесены четыре вершины, степень которых равняется 5, 6, 6 и 7. Две вершины (1 и 4) не соединены прямой дорогой, следовательно, их можно выкрасить в один красный цвет и принять за одну вершину *редуцированной*, таким образом, конфигурации. Хееш как раз и показал, что всякий двойственный к карте граф можно свести примерно к двум тысячам конфигураций, которые уже нельзя более упростить. К этому времени появились компьютеры. К. Аппель и В. Хейкен в 1976 г., заинтересовавшись решением Хееша, составили компьютерную программу для перебора всевозможных раскрасок неприводимых конфигураций, фактически осуществили их раскраску и, таким образом, доказали разрешимость вековой проблемы.

### **Аналогия с Великой теоремой Ферма**

История с задачей о четырех красках и поиск ее решения, как мы сказали, чем-то напоминает историю с Великой теоремой Ферма. Подобно тому, как теорема Ферма стимулировала прогресс не только в теории чисел, но и в алгебре в целом, точно так же задача о красках дала толчок к развитию не только теории графов, но и топологии и всех наук, связанных с пространственными представлениями. Дело в том, что число четыре однозначно продиктовано топологическими свойствами плоской или сферической поверхности, на которой наносятся карты. Геометры задумались: что будет, если эту задачу перенести на поверхность тора? Затем они модифицировали задачу, задавшись вопросом о раскраске ребер графа, ввели множество полезных понятий, в частности, понятие о *хроматическом числе*. Его определение звучит так: если никакие две смежные вершины в графе не получают одну и ту же метку, в роли которой — так уж исторически сложилось — выступает краска определенного цвета, то число различных меток для данного графа называется *хроматическим*.

Теорема *Пьера Ферма* (1601—1665) убеждает нас, какие порой колоссальные усилия уходят на доказательства индуктивно откры-

тых математических истин. На полях трактата древнегреческого математика Диофанта «Арифметика» Ферма написал формулу  $z^n = x^n + y^n$  и заметил: «Невозможно разложить куб на два куба, или биквадрат на два биквадрата, или вообще степень, большую двух, на две степени с тем же самым показателем». Это-то утверждение математики и окрестили *Последней, Великой* или *Большой* теоремой Ферма. После формулировки теоремы Ферма добавил: «Я нашел чудесное доказательство этой теоремы, но для его записи здесь слишком мало места».

Математик умер, унеся в могилу тайну своей записи на полях книги. С тех пор ученые мира пытались доказать, что уравнение

$$z^n = x^n + y^n, \quad \text{при } xyz \neq 0 \text{ и } n > 2$$

не имеет целочисленного решения. Наконец, 23 июня 1993 г. на математической конференции в Кембридже (Великобритания) математик из Принстона Эндрю Уайльс анонсировал доказательство так называемой гипотезы Таниямы. Посвященные знают, что доказательство неподдающейся теоремы Ферма сводится к другой задаче, которую уже можно решить. Аналогичная ситуация была, как мы знаем, и с задачей о красках, которую не удалось взять приступом в лобовой атаке. Японский математик Танияма в 1955 г. предложил обходной путь для доказательства теоремы Ферма. Он звучит примерно так: «Всякая эллиптическая кривая с рациональными коэффициентами является модулярной».

Не станем вдаваться в детали этой гипотезы и аналитическое доказательство теоремы; заинтересованного читателя мы отсылаем к книге М. А. Еремина «Последняя теорема Ферма», где он может ознакомиться с громоздкими математическими выкладками. Лучше обратим внимание читателей на обыкновенный математический факт. Никто, пожалуй, из наших читателей не скажет, какая цифра стоит на сотом месте после запятой у числа  $\pi$ . Однако не составит большого труда ее найти, поскольку существует компьютерная программа для вычисления этого трансцендентного числа с огромной, заранее заданной точностью. То же самое относится и к теореме Ферма. Всякий студент способен составить несложную компьютерную программу поиска решения вышеозначенного уравнения. Мощный «Пентиум» можно заставить работать круглосуточно в течение месяца, и тогда значения чисел  $x$ ,  $y$ ,  $z$  превысят все разумные пределы. Если на экране монитора не появилось чисел, удовле-

творящих кубическому уравнению, о котором говорил Ферма, значит, его утверждение справедливо.

Между тем, перепрограммировав задачу на теорему Пифагора:

$$x^2 + y^2 = z^2,$$

компьютер с первых же мгновений своей работы начнет выдавать бесконечный ряд числовых значений:

$x =$	3	8	12	16	20	24	28	32	36	40	...
$y =$	4	15	35	63	99	143	195	255	323	399	...
$z =$	5	17	37	65	101	145	197	257	325	401	...

Умело составленная программа нашла бы, что для больших  $z$  имеется несколько значений  $x$  и  $y$ , например:

$$100^2 = 28^2 + 96^2 = 60^2 + 80^2,$$

$$1000^2 = 600^2 + 800^2 = 280^2 + 960^2 = 352^2 + 936^2;$$

$$50000000^2 = 30000000^2 + 40000000^2 = 48923520^2 + 10319360^2 =$$

$$= 37609600^2 + 32947200^2 = 42160000^2 + 26880000^2 = 46800000^2 + 17600000^2$$

Теорема Пифагора не распространяется на кубы, но для уравнения вида  $x^3 + y^3 = z^3 - 1$  найдется множество решений:

$x =$	8	71	242	575	1124	1943	3086	4607	6560	8999	...
$y =$	6	138	720	2292	5610	11646	21588	36840	59022	89970	...
$z =$	9	144	729	2304	5625	11664	21609	36864	59049	90000	...

И для других аналогичных выражений компьютер быстро найдет решения, начиная с самых первых чисел, в частности:

$$x^3 + y^3 = z^3 - 2^3:$$

$x =$	16	142	484	1150	2248	3886	6172	9214	17998	23956	...
$y =$	12	276	1440	4584	11220	23292	43176	73680	179940	263472	...
$z =$	18	288	1458	4608	11250	23328	43218	73728	180000	263538	...

$$x^3 + y^3 = z^3 - 3^3:$$

$x =$	24	213	726	1725	3372	5829	9258	13821	...	
$y =$	18	414	2160	6876	16830	34938	64764	110520	...	и т.д.
$z =$	27	432	2187	6912	16875	34992	64827	110592	...	

Почему нужно ожидать нарушений теоремы Ферма на астрономически больших числах, если она не была опровергнута в пределах сотни или тысячи? Если равенство  $x^3 + y^3 = z^3 - 1$  выполняется уже на числах 6, 8, 9, то почему равенство  $x^3 + y^3 = z^3$ , отличающееся от первого на единицу, должно выполняться на числах, недоступных



компьютеру? Мы не выступаем против формально-логических доказательств — они, конечно, нужны, — но нельзя же пренебрегать очевидной математической реальностью. Если практика показывает справедливость какого-то математического выражения, то почему им не пользоваться, по крайней мере, до той поры, пока оно не будет опровергнуто формально-логическим способом. Позиция конструктивно настроенного математика должна состоять в «презумпции невиновности» математического выражения, если в практической жизни оно не было изобличено в обратном. Строгость, которой кичатся отдельные формалисты, часто оборачивается какой-то особой интеллектуальной формой мазохизма, или, во всяком случае, самой нездоровой психической аномалией. Всевластие формализма порой сдерживает нормальное развитие науки, мешает движению вперед по пути прогресса. Между тем многие так называемые формально-логические доказательства опираются на конкретные вычислительные процедуры, на которых и держится конструктивный подход.

В самом деле, разве Аппель и Хейкен при решении задачи о четырех красках не пользовались той же вычислительной методикой, что и наш гипотетический студент при проверке уравнения Ферма? Разница заключается только в том, что первым повезло больше, так как множество неприводимых конфигураций оказалось конечным, тогда как студент перебирал бесконечный ряд чисел. Но доказательство Уайльса свелось к тому же, что и доказательство Аппеля и Хейкена — к разбиению бесконечного натурального ряда на конечное число классов и к демонстрации справедливости теоремы Ферма для каждого из классов. Таким образом, под логическими доказательствами часто маскируются обыкновенные вычислительные процедуры или операционные действия, продиктованные элементарным здравым смыслом.

Под последним имеется в виду следующее. Почему никто не берется доказывать, что отрезок имеет два и только два конца, а не один или три? Почему число вершин в остове любого графа на единицу больше числа его ребер? Почему в той же задаче о раскраске карты четырьмя цветами бездоказательно утверждается, что соседними могут стать только три страны, т.е. почему степень узловых точек графа границ равна трем? На все эти вопросы можно сказать: такова геометрическая данность, которую нет нужды доказывать логическими средствами. Между тем сущность поставленных во-

просов та же, что и в проблеме с четырьмя красками; в последней несколько не больше математической тайны, чем в трех предыдущих. Политическая карта насчитывает много стран, которые трудно охватить единым взором. Но для 4, 5 или 6 государств проблема становится столь же очевидной, как и подсчет числа концов у отрезка. Чем больше элементов затрагивается в данной конкретной ситуации, тем сложнее ее представить. Но продолжением воображения является действие, а оно доказывает, что четырех красок для раскраски вполне достаточно, сколько бы ни было стран на карте.

В любом случае дедуктивные рассуждения всегда идут позади воображения и действия, которые добывают истину, логика же последовательно разъясняет то, что возникло у нас в голове в результате интуитивного представления. Вот еще пример, подтверждающий эту простую мысль. Число ребер в графе, как нам известно, определяется полусуммой всех степеней его вершин. Какое здесь нужно доказательство? Практически никакого, так как каждый усматривает у ребра две вершины, не больше и не меньше, стало быть, на каждое ребро приходится по две степени. Из представления и только из него проистекает простая формула сложения всех степеней и деления этой суммы пополам.

После такой гимнастики ума нам будет несложно вообразить себе, что для покраски вершин произвольно взятого графа, степень которых не превосходит числа  $n$ , требуется  $n + 1$  цветов. Рассуждаем следующим образом: каждая вершина графа может через ребро контактировать не более чем с  $n$  вершинами, которые в самом неблагоприятном для нас случае раскрашены в  $n$  цветов; отсюда возникает число  $n + 1$ , поскольку для нашей конкретно выбранной вершины потребуется еще один цвет. Регулярный граф-границ имеет вершины степени три, значит, для покраски его вершин потребуется не более четырех красок. Если эти представления облечь в символические одежды, получится формально-логическое доказательство важного положения теории графов. Но без пространственного образа это доказательство будет походить на эзотерические арканы древнеегипетских жрецов.

### Планарные графы на торе

Если мы соединим все четыре столицы государств 1, 2, 3 и 4 (рис. 3.67) сплошными линиями, то получим проекцию тетраэдра на плоскости. Добавление еще одной вершины графа дорог превраща-

ет *планарный* граф тетраэдра в непланарный граф с пятью вершинами, ребра которого уже нельзя уложить на плоскости без пересечений. Оказывается, максимальное число вершин планарного графа, который может быть вычерчен на некоторой поверхности, однозначно характеризует топологические свойства последней. Топологические свойства плоскости и топологические свойства сферы одинаковы, так как все точки сферы  $S$  (рис. 3.69) можно спроецировать из полярной точки  $N$  на все точки плоскости  $P$  путем последовательного винтового скольжения проекционной прямой. Последовательность точек получающейся при этом скольжении спирали на сфере и спирали на плоскости нигде не будет нарушена. Значит, тетраэдр будет однозначно характеризовать и топологию сферической поверхности.

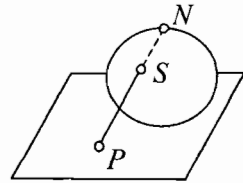


Рис. 3.69

Топологические свойства рамы, образованной трехгранными призмами (рис. 3.70), эквивалентны топологическим свойствам тора. Если в качестве образующих рамы взять 4-гранные, 5-гранные, ...,  $n$ -гранные призмы, то все они будут обладать топологическими свойствами тора. Представьте себе, что эти *полые* тела начали накачивать воздухом, подобно тому, как накачивают велосипедную камеру. Тогда все грани и вершины рам разгладятся, и в результате получится *бублик*, имеющий одну-единственную поверхность.

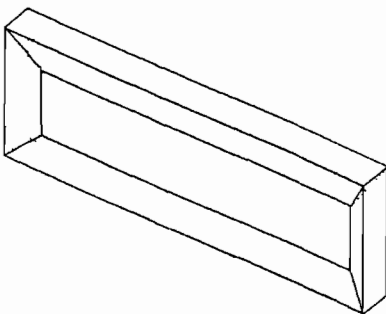


Рис. 3.70

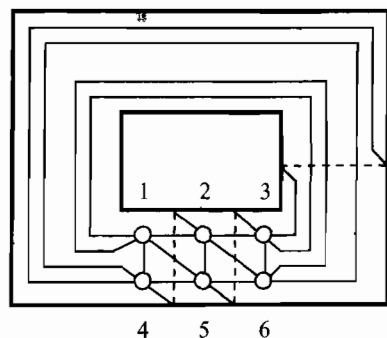


Рис. 3.71

Зададимся вопросом, каков порядок вершин полного графа, который можно было бы вычертить на поверхности тора так, чтобы его

ребра нигде не пересекались? На гранях фигуры, изображенной на рис. 3.70, графы вычерчивать неудобно. Возьмем в качестве тора прямоугольную рамку, причем плоскую, только будем различать у нее внешнюю и оборотную плоскости. В поисках ответа на поставленный вопрос мы без труда вычертим на нашей рамке-торе граф-тетраэдр. После некоторых усилий нам удастся уложить без пересечения ребер и граф с пятью вершинами. Затратив немалые старания, мы, наконец, сумеем вычертить на прямоугольной раме планарный граф для тора с шестью вершинами; он изображен на рис. 3.71. Являются ли шесть вершин пределом для тора? Долгое время считалось, что полный граф с шестью вершинами является максимально возможным. Однако после разреза тора и вычерчивания его развертки в виде прямоугольника (рис. 3.72а), стало ясно, что шесть точек — это не предел. На рис. 3.72б удалось вычертить семь вершин полного графа, который сохраняет свойства планарности на всех тороидальных поверхностях, включая поверхности призматических рам, наподобие той, что вычерчена на рис. 3.70.

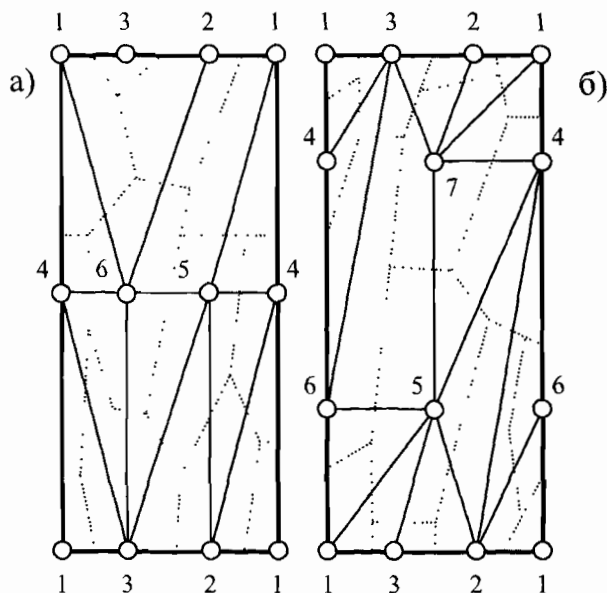


Рис. 3.72

Обратите внимание, что графы-карты, показанные на рис. 3.72 пунктирными линиями, получились регулярными: степень их вер-

шин равна трем. Сколькими красками можно обойтись при раскраске политической карты с протяженными границами?

Ответ будет таким: семь цветов. Максимально планарный граф для данной топологической поверхности определяет и его хроматическое число. А как определить, какой граф для данной поверхности будет максимально планарным? Может быть, мы плохо искали, и на развертке тора поместятся не шесть или семь точек, как это показано на рис. 3.72, а восемь или девять? Где гарантия того, что наши эмпирические поиски вышли на действительно максимальное число вершин? Чтобы ответить на эти вопросы, мы должны еще раз вернуться к формуле Эйлера и ввести важное для топологии понятие *связанности поверхности*.

### Многогранники

С античных времен были известны пять *правильных тел* Платона — тетраэдр, гексаэдр (куб), октаэдр, икосаэдр, додекаэдр (рис. 3.73, позиции 1 – 5). Архимед отсек у них углы и получил еще пять *полуправильных многогранников*. Усеченный тетраэдр состоит из четырех шестиугольных граней и такого же числа треугольных граней. Все грани усеченного тетраэдра правильные, причем сторона шестиугольника равна стороне треугольника. Усеченный гексаэдр состоит из шести восьмиугольных граней и восьми треугольных, а усеченный октаэдр — из шести квадратов и восьми шестиугольников, причем две последние усеченные фигуры имеют равное число вершин, ребер и граней. В табл. 3.42 занесены все 13 полуправильных многогранников Архимеда, которые на рис. 3.73 заняли позиции с 10 по 14. Позиции 12 и 13 занимают ромбокубоктаэдры в двух модификациях, отличающихся поворотом верхней части многогранника относительно его нижней на угол  $90^\circ$ .

В Новое время Кеплер ввел звездчатый октаэдр (*stella octangula*), который получался в результате взаимного проникновения двух тетраэдров, построенных внутри куба. У него получилось, что из каждой грани одного тетраэдра торчит вершина другого тетраэдра в форме трехгранной пирамиды. Эта фигура уже не относится к выпуклым многогранникам, так как ее невозможно поставить, скажем, на стол одной какой-то гранью. *Выпуклым* называется такой многогранник, который остается по одну сторону от плоскости любой своей грани. В многограннике Кеплера оказалось 14 вершин, 24 грани и 36 ребер.

Таблица 3.42

Многогранники правильные и полуправильные	Позиция на рис. 3.73	$f$ грани	$n$ вершины	$m$ ребра
Тетраэдр	1	4	4	6
Гексаэдр (Куб)	2	6	8	12
Октаэдр	3	8	6	12
Додекаэдр	4	12	20	30
Икосаэдр	5	20	12	30
Усеченный тетраэдр	10	8	12	18
Усеченный гексаэдр (куб)	11	14	24	36
Ромбокубооктаэдр	12, 13	26	24	48
Плосконосый куб	14	38	24	60
Усеченный кубооктаэдр	15	26	48	72
Кубооктаэдр	16	14	12	24
Усеченный октаэдр	17	14	24	36
Усеченный додекаэдр	18	32	60	90
Ромбоикосододекаэдр	19	62	60	120
Усеченный икосододекаэдр	20	62	120	180
Икосододекаэдр	21	32	30	60
Усеченный икосаэдр	22	32	60	90
Плосконосый додекаэдр	23	92	60	150
Правильная призма	24	$k + 2$	$2k$	$3k$
Антипризма	25	$2k + 2$	$2k$	$4k$

К звездчатым относятся и тела Пуансо (на рис. 3.73, позиции 6 – 9), у которых имеются самопересекающиеся грани. Они, как и звезда Кеплера, не противоречат определению многогранника, а это определение требует, чтобы *каждое ребро многогранника разделяло две и только две грани*. Если, двигаясь по граням и пересекая ребро за ребром, мы можем обойти весь многогранник по внешним, всегда видимым сторонам, не рискуя оказаться с внутренней стороны какой-нибудь из граней, то такой многогранник называется *ориентированным*, в противном случае — *неориентированным*. Звездчатые и все прочие многогранники, изображенные на рис. 3.73, являются ориентированными. Но ниже мы познакомимся с *неориентированным гептаэдром*, у которого есть пересечения граней, не образующих ребра. Для таких тел, как гептаэдр, невозможно в принципе найти площадь поверхности и объем тела, хотя поиск этих геометрических величин у ориентированных многогранников тоже представляет немалую трудность. В частности, нахождение объема

звездчатых тел Пуансо является сложной задачей, с которой, однако, автор этих тел благополучно справился.

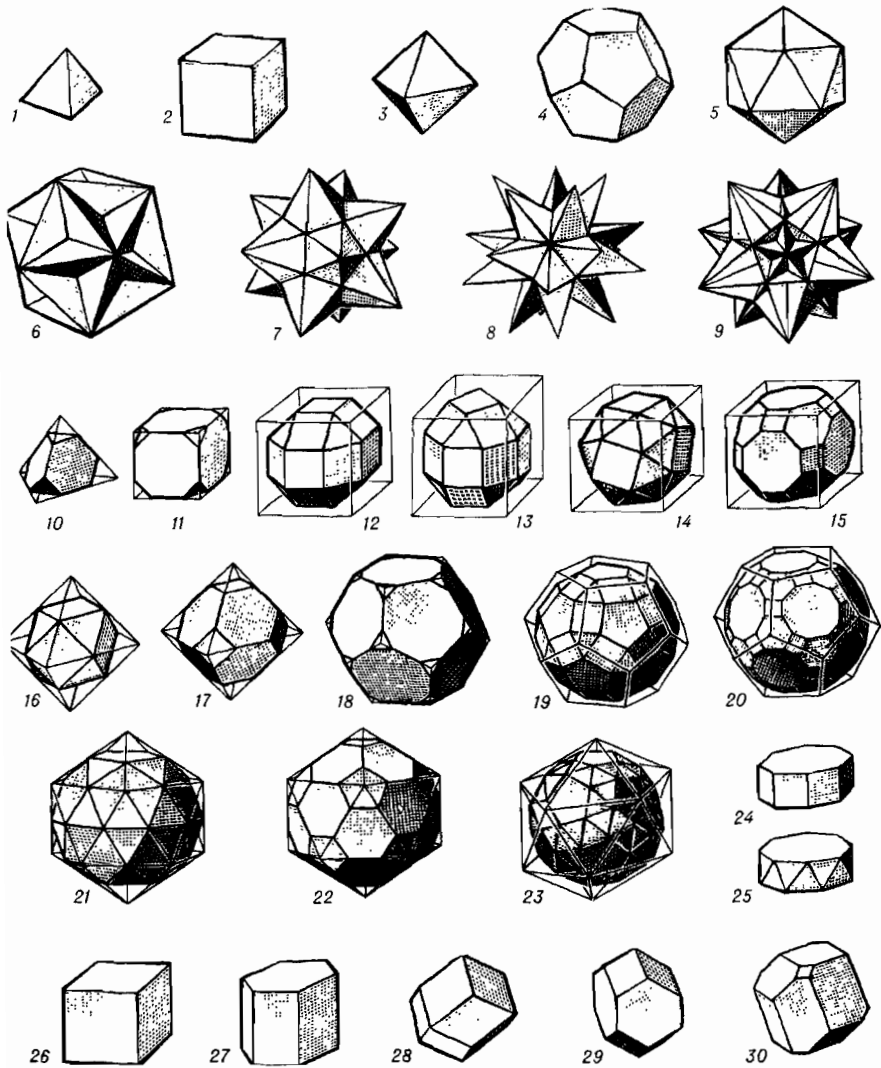


Рис. 3.73

Звездчатые формы вместе с правильными и полуправильными телами образуют 66 тел. Это число почти удвоится, если к ним добавить невыпуклые однородные многогранники, у которых часть граней, состоящая из правильных многоугольников, является вы-

пуклой, а часть оказывается вдавленной внутрь объема. Это свойство тел, с одной стороны, роднит их с правильными и полуправильными телами, а с другой — объединяет и со звездчатыми телами, которые могут покоиться на плоскости, только опираясь на несколько вершин или ребер. Особый класс образуют *параллелоэдры*, которыми можно заполнить все бесконечное пространство, не оставляя пустоты и без того, чтобы их внутренние объемы пересекались (рис. 3.73, позиции 26 – 30).

### Формула Эйлера и связанность поверхности

Тела, изображенные на рис. 3.73, удовлетворяют формуле Эйлера:

$$n - m + f = 2,$$

где  $n$  — вершины,  $m$  — ребра,  $f$  — грани любого правильного, полуправильного или звездчатого многогранника. Почему верна для них эта формула, понять несложно, если принять во внимание элементарный геометрический факт. Все упомянутые тела образуют из своих вершин и ребер вершины и ребра планарных графов, спроецированные на поверхность сферы, по которой эти вершины и ребра могут свободно скользить. Грани выпуклых и звездчатых тел образуют ячейки, которые всегда можно разбить на треугольные области. Один или множество треугольников, образующих планарный граф, удовлетворяют простому равенству:  $n - m + f = 1$ . Если учесть еще и внешнюю область планарного графа, то мы как раз и получим формулу Эйлера.

Аналогичные простые рассуждения дают ответ на вопрос: не пропустил ли Платон, а вслед за ним Архимед и другие геометры какое-нибудь правильное тело? Нет, не пропустили: формула Эйлера и наглядные рассуждения доказывают, что существует только пять правильных тел. В самом деле, пускай в вершине правильного многогранника сходятся  $k$  ребер или  $k$  граней (это все равно). Если число вершин равно  $n$ , то общее число ребер составляет  $m = kn/2$ . Допустим, что каждая грань представляет собой  $l$ -многоугольник с  $l$  сторонами. Тогда число ребер можно найти по другой формуле:  $m = lf/2$ . Найдем из двух последних выражений число вершин  $n$  и число граней  $f$  и, подставив их в формулу Эйлера, получим:

$$2m/k - m + 2m/l = 2 \quad \text{или} \quad 1/k - 1/m + 1/l = 1/2.$$

Судя по последнему выражению, грани и вершины находятся в одинаковом положении, а ребра — нет. Это свойство как раз и про-



является при построении *двойственных* геометрических тел и графов. Согласно последнему выражению при  $k = 3$ ,  $l$  может принимать три и только три значения — 3, 4 и 5. Аналогично, при  $l = 3$  имеем  $k = 3, 4, 5$ . Из симметрии вершин и граней находим одно и то же число ребер:

$$m = 6k/(6 - k) = 6l/(6 - l) = \{6, 12, 30\}.$$

Таким образом, целочисленные значения  $k$  и  $l$  не могут принимать значения меньше 3 и больше 5, иначе, число ребер будет равно либо бесконечности, либо отрицательному числу, что невозможно с точки зрения рациональной геометрии. Число правильных тел равно 6, так как тетраэдр повторяется дважды. Все правильные тела распадаются на взаимно двойственные пары: додекаэдр — икосаэдр, гексаэдр — октаэдр, правый тетраэдр — левый тетраэдр (если один из вписанных в куб тетраэдров назвать правым, то двойственный к нему тетраэдр будет левым).

Абсолютное пространство классической физики характеризует призматическая рама с квадратом в сечении (рис. 3.74а). *Невозможная рама*, изображенная рис. 3.74б, ассоциируется с образом релятивистской физики, когда невозможно подсчитать числа  $n$ ,  $m$  и  $f$ . Образ классической физики встает в голове метанаблюдателя, выстраивающего свои пространственные модели в абсолютном пространстве; образ же релятивистской физики продиктован двумя объективными наблюдателями, для которых две внутренние стенки рамы оказываются вывернутыми в сторону зрителя, что и приводит к парадоксальной топологии. Подсчет основных элементов многогранника, иллюстрирующий образ классической физики, дает:  $n = 16$ ,  $f = 10$  и  $m = 24$ ; эти значения удовлетворяют формуле Эйлера. Теперь обратимся к нашей раме с образующими в виде трехгранных призм (рис. 3.70). Топологические отличия рамы с трехгранными и четырехгранными призмами отсутствуют, обе рамы при их накачке воздухом переходят в тор. Однако, подсчитав основные элементы:  $n = 12$ ,  $f = 12$ ,  $m = 24$  и подставив их в формулу Эйлера, мы убеждаемся, что она не выполняется. Таким образом, у нас появилась проблема.

Чтобы разобраться, в чем тут дело, почему топологически эквивалентные тела дали столь различные результаты, нам надо обратиться к понятию *связанности*, которую обозначим как  $\sigma$ . Многогранное тело называется  $\sigma$ -связанным, если на нем можно отыскать

$\sigma - 1$  ломаных, составленных из его ребер, причем первая из ломаных должна быть замкнутой, а все последующие — разомкнутыми и соединяющими точки предыдущих ломаных. На раме с трехгранными призмами одну ломаную можно провести по периметру треугольника, образованного двумя внешними и одной внутренней вершинами. Другую ломаную проводим по периметру прямоугольника, лежащего на четырех внутренних вершинах. Таким образом, мы распластали нашу раму, вскрыв все замкнутые объемы и не нарушив связности ее поверхности. Если провести третью ломаную, то связанная поверхность распадется на две несвязанные. Поэтому связность рамы (рис. 3.70) с образующими в виде трехгранных призм имеет значение  $\sigma = 3$ .

Рама, изображенная на рис. 3.74б, соответствующая релятивистской физике, логически противоречива и не может быть идентифицирована с какой-либо определенной топологической формой. Но рама, отвечающая классической физике (рис. 3.74а), может быть идентифицирована с тором, если каждую ее внешнюю вершину соединить ребром с ближайшей внутренней вершиной. Тогда по вновь проведенным ребрам можно будет провести замкнутую ломаную, которая разрежет раму, превратив ее в отрезок четырехгранной трубы. Второй разрез, сделанный по четырем ребрам вдоль трубы, разомкнет все внутренние объемы, сохраняя связность всех ее граней. Это указывает на то, что связность рамы с образующими в виде квадратных призм тоже равна трем. Но число ребер и граней увеличится:  $f = 16$ ,  $m = 32$ . Проводя аналогичный подсчет вершин, граней и ребер в рамках с 5-гранными, 6-гранными и т.д. образующими, обнаруживается, что все они удовлетворяют формуле Эйлера, если в ней учесть величину связности:

$$n - m + f + \sigma = 3.$$

Все многогранники (рис. 3.73), вершины и ребра которых в виде планарного графа можно разместить на сфере, имеют  $\sigma = 1$ , поскольку любая замкнутая ломаная, проведенная по ребрам планарного графа, разбивает единую связанную область на две несвязанные части. Все рамы путем плотной накачки воздухом можно свести к тору, связность которого составляет  $\sigma = 3$ . Так, для рамы с трехгранными призмами (рис. 3.70) в соответствии с модернизированной формулой Эйлера будем иметь:

$$n - m + f + \sigma = 12 - 24 + 12 + 3 = 3;$$

для рамы с четырехгранными призмами (рис. 3.74а):

$$n - m + f + \sigma = 16 - 32 + 16 + 3 = 3;$$

для рамы с пятигранными призмами получим:

$$n - m + f + \sigma = 20 - 40 + 20 + 3 = 3.$$

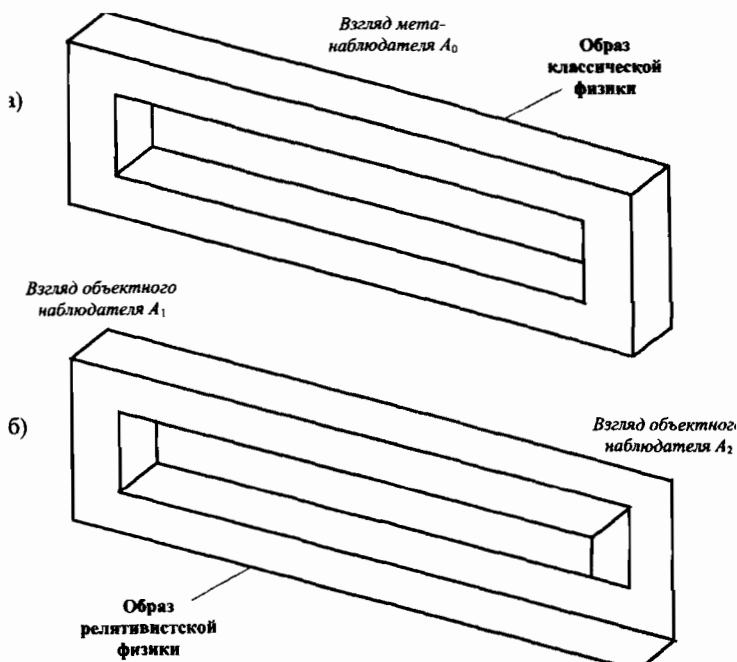


Рис. 3.74

Формула выполняется и в том случае, если рама отличается от прямоугольной формы (например, представляет собой треугольник, пятиугольник и т.д.). Так, для треугольной рамы с трехгранными образующими призмами имеем:

$$n - m + f + \sigma = 9 - 18 + 9 + 3 = 3.$$

Во всех случаях  $n = f = m/2$ , вряд ли здесь можно наткнуться на неожиданность, хотя от формалиста нужно требовать доказательств.

### «Кренделя» и странные свойства гептаэдра

На рис. 3.75, наряду с шаром (а) и тором (б), показаны «кренделя» с двумя (в) и тремя (г) отверстиями. На изображенных телах проведено минимальное число разрезов, сохраняющих целостность

поверхности. На шаре никаких замкнутых линий нет, на торе их число равно двум, на кренделе с двумя отверстиями их четыре, на кренделе с тремя отверстиями их пять и т.д. Следовательно, для шара  $\sigma = 1$ , для тора  $\sigma = 3$ , для кренделя с двумя отверстиями  $\sigma = 5$ , для кренделя с тремя отверстиями  $\sigma = 7$  и т.д. Связанность данных топологических поверхностей равняется нечетному числу. А как получить четные значения связанности? Может быть, попробовать просверлить дырки в поверхностях, как это показано на рис. 3.76?



Рис. 3.75



Рис. 3.76

Действительно, в этом случае связанность поверхностей можно изменить; для изображенных тел с дырками величина связанности будет равна следующим значениям: *a*)  $\sigma = 2$ , *б*)  $\sigma = 3$ , *в*)  $\sigma = 7$ , *г*)  $\sigma = 8$ . В связи с наличием у поверхности одной или нескольких дырок, определение первой разрезающей линии должно измениться. Теперь и она не может быть замкнутой; первая разрезающая линия должна начинаться и заканчиваться на границах дырки. Проведя на поверхности сферы разрез от одной дырки к другой, мы тем самым не нарушим целостности его поверхности, значит, величина связанности геометрической формы (*a*) равна двум. Единственная дырка, проделанная на поверхности тора (*б*), не меняет его связанности. Две дырки, просверленные на кренделе с тремя отверстиями (*г*), увеличили связанность на единицу, а добавление трех дырок к кренделю с двумя отверстиями (*в*) добавило две единицы связанности. Таким образом, чтобы рассчитать связанность поверхности ( $\sigma'$ ) с  $h$  дырками, нужно определить связанность ее без дырок ( $\sigma$ ), а затем добавить к найденной величине число  $h - 1$ , т.е.

$$\sigma' = \sigma + h - 1.$$

Поверхность с  $\sigma = 2$  можно сконструировать и по-другому. Если взять октаэдр (рис. 3.77), провести внутри него три плоскости по ребрам: *acfe*, *abfd*, *bcde*, удалить четыре грани: *abc*, *ade*, *bef*, *cdf*, то в

итоге получим тело, которое называется *гептаэдром*, т.е. многогранник с семью гранями. Он имеет следующие параметры:  $n = 6$ ,  $m = 12$ ,  $f = 7$ . Из формулы Эйлера для гептаэдра находим:

$$\sigma = m - n - f + 3 = 12 - 6 - 7 + 3 = 2.$$

Здесь требует пояснений число ребер. Дело в том, что диагонали октаэдра для гептаэдра не образуют ребер. Если бы пересечение плоскостей  $acfe$ ,  $abfd$ ,  $bcde$  давало дополнительные элементы:  $n = 7$ ,  $m = 18$ ,  $f = 16$ , то это противоречило бы определению многогранника, а по формуле Эйлера получили бы  $\sigma = -2$ , что не имеет никакого топологического смысла. Теперь более внимательно присмотримся к свойствам гептаэдра.

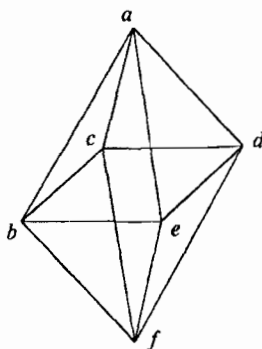


Рис. 3.77

Предположим, что на *внешней* стороне грани  $abc$ , в самом ее центре сидит жук. Он начинает ползти к середине ребра  $ac$ , движется по квадратной грани  $acfe$ , доползает до середины ребра  $fe$ , движется по внешней, т.е. развернутой к нам, стороне грани  $bfe$ , пересекает середину ребра  $bf$ , ползет по квадрату  $abfd$ , достигает середины ребра  $ab$  и, наконец, преодолевая финишную прямую, перемещается к центру грани  $abc$ , но, как оказалось, уже с *внутренней* стороны. Таким образом, гептаэдр обладает всеми свойствами петли Мёбиуса, которая изображена на рис. 3.68. Как мы помним, эта скрученная на 180 градусов лента имеет одну *неориентированную поверхность*, которую нужно разрезать дважды, чтобы она распалась на две несвязанные области. Первый разрез должен быть замкнутым; его необходимо сделать от точки  $Q$  до точки  $Q'$  по указанному на рисунке пути. В результате получим петлю в два раза большего диаметра и перекрученную уже не на 180 градусов, а на все 360. Вторым разрезом тоже не нарушает связности и только третий разрез, сделанный от края до края, разделит ленту на две части. Следовательно, петля Мёбиуса имеет  $\sigma = 2$ . Сфера с двумя дырками (рис. 3.76а), имеющая величину связности, равную двум, тем не менее не обладает свойствами петли Мёбиуса, так как ее поверхность имеет две стороны, которые можно выкрасить в два различных цвета. Неориентированные поверхности, которые имеет петля Мёбиуса и гептаэдр,

выкрашиваются только в один цвет, как если бы они имели у поверхности одну-единственную сторону. Кажется, что гептаэдр имеет внутренние пустоты, отделенные гранями от внешнего пространства. Но это обманчивое впечатление: неориентированные или односторонние поверхности не способны делить общее пространство на внутреннюю и внешнюю области.

### Формула для минимального числа цветов

Приведем формулу, позволяющую определить максимальное число вершин планарного графа, который можно было бы вычертить на топологической поверхности с наперед заданной величиной связности, или, другими словами, минимальное число цветов, которое потребуется для раскраски любой политической карты, нанесенной на этой топологической поверхности. Задача минимаксима решается через отношение равенства; если задача формулируется как максимум, то пользуются отношением меньше, если задача формулируется как минимум — отношением больше. Мы будем пользоваться равенством. Искомое число обозначим через  $x$ , напомним также, что под  $n$  понимается число вершин,  $m$  — число ребер,  $f$  — число граней и  $\sigma$  — значение связности, которое удовлетворяет модернизированной формуле Эйлера. Значение  $x$  будем находить при помощи формулы Эйлера и условия Хивуда, выдвинутого им еще в 1890 г. Сейчас оно имеет несколько различных представлений; нам удобно представить его в виде

$$\frac{x-1}{6} = \frac{m-n-f}{x} + 1.$$

Если в последнее равенство подставить формулу Эйлера, получим

$$x^2 - 7x = 6(\sigma - 3).$$

Решим квадратное уравнение и отбросим один из корней, который дает с точки зрения топологии неинтерпретируемые значения:

$$x = \frac{7 + \sqrt{24\sigma - 23}}{2}.$$

Данная формула и является решением поставленной задачи минимаксима. Целые значения  $x$ , обозначаемые как  $[x]$ , позволяют найти минимальное число красок для раскраски вершин планарного графа, вычерченного на  $\sigma$ -связанной топологической поверхности, или максимальное число вершин для полного графа, который мож-

но вычертить на  $\sigma$ -связанной поверхности так, чтобы его ребра не пересекались. В табл. 3.43 приведены значения  $x$  и  $[x]$ , найденные по расчетной формуле, в зависимости от связанности  $\sigma$ .

Таблица 3.43

$\sigma$	$x$	$[x]$	$\sigma$	$x$	$[x]$	$\sigma$	$x$	$[x]$
1	4,000	4	6	9,000	9	11	11,264	11
2	6,000	6	7	9,522	9	12	11,640	11
3	7,000	7	8	10,000	10	13	12,000	12
4	7,775	7	9	10,447	10	14	12,346	12
5	8,425	8	10	10,866	10	15	12,679	12

Следует обратить внимание на то, что при значениях связанности меньше 10 и 11 имеет место неравенство:  $\sigma < [x]$ ; после указанных значений ситуация меняется на противоположную:  $\sigma > [x]$ . Расчетная формула для  $x$ , зависящая от связанности  $\sigma$ , пригодна для всех топологических поверхностей, какие бы формы они ни принимали. Еще в XIX в. было доказано, что все они приводимы к одному из неприводимых поверхностей типа шара, тора и ряда кренделей с нарастающим числом отверстий и дырок (рис. 3.75 и рис. 3.76). Часто вместо *связанности*  $\sigma$  говорят о *роде поверхности*  $\rho$ , который на единицу меньше связанности, в результате чего расчетная формула изменится:

$$x = \frac{7 + \sqrt{24\rho + 1}}{2}.$$

Как видно из табл. 3.43, формула для  $x$  прекрасно работает для всех значений связанности. Однако при получении условия Хивуда, из которого выведена окончательная расчетная формула, топологи наложили ограничение на первые два значения связанности, т.е.  $\sigma$  не может принимать значения, равные 1 и 2, что и повлекло за собой проблемы с доказательством равенства  $x = 4$  для  $\sigma = 1$ , осуществленное Аппелем и Хейкеном с помощью компьютерного перебора около двух тысяч неприводимых конфигураций. В мире существует немало авторитетных математиков, которые не признают компьютерные «подгонки» в духе Аппеля и Хейкена в качестве полноценного математического доказательства. Но сторонники конструктивного подхода вряд ли с ними согласятся. Если традиционный формально-логический аппарат не был задействован, это еще не значит, что альтернативный подход ошибочен.

### Бутылка Клейна и вывернутые поверхности

Шесть вершин гексаэдра представляют собой особые точки, которых нет на петле Мёбиуса. Но скрученная и склеенная лента — это даже не поверхность, а только половинка ее и полное отсутствие какой-либо объемности. Спрашивается, существует ли нечто наподобие петли Мёбиуса, но более объемной конструкции? Да, ответил Феликс Клейн и предложил вниманию математиков топологическое тело в виде бутылки, которая сейчас носит его имя (рис. 3.78). Нетрудно догадаться, что связанность этой поверхности совпадает со связанностью тора, так как, разрезав бутылку Клейна по любой окружности малого диаметра, мы получим цилиндр переменного радиуса; далее можно делать разрез вдоль продольных линий цилиндра; отсюда и берется величина  $\sigma = 3$ . Но если тор имеет внутреннюю область, отделенную от внешней стенками тора, т.е. ориентированную поверхность, то бутылка Клейна этим свойством не обладает.

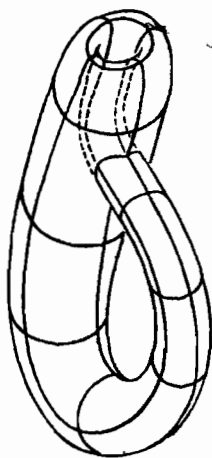


Рис. 3.78

Бутылка Клейна, петля Мёбиуса и гексаэдр — это готовые статические конструкции с вывернутыми поверхностями. В XX в. топологи начали ставить задачи динамического характера и одной из первых была задача по выворачиванию сферы наизнанку. Сфера, в отличие от названных фигур, имеет ориентированную поверхность, внутреннюю сторону которой можно выкрасить в синий, а внешнюю — в красный цвета. Если после такой покраски северный и южный полюса сферы поменять местами, двигая их вдоль оси, соединяющей эти полюса, то сфера окажется вывернутой наизнанку таким образом, что внешняя ее сторона станет синей, а внутренняя — красной.

При этом по всей окружности экватора образуется складка. Когда полюса пройдут большую часть своего пути вдоль оси и внешний цвет сферы изменится с красного на синий, по всей длине экватора возникнет тороидальная поверхность, выкрашенная с внешней стороны еще в красный цвет (рис. 3.79a). Таким образом, наполовину вывернутая сфера демонстрирует нам еще



один интересный топологический эффект, когда внешнее и внутреннее пространства как бы переплетаются, поскольку снаружи оказываются одновременно и красная, и синяя стороны поверхности. Отсюда также видно, какую важную роль играет для топологии раскраска поверхностей.

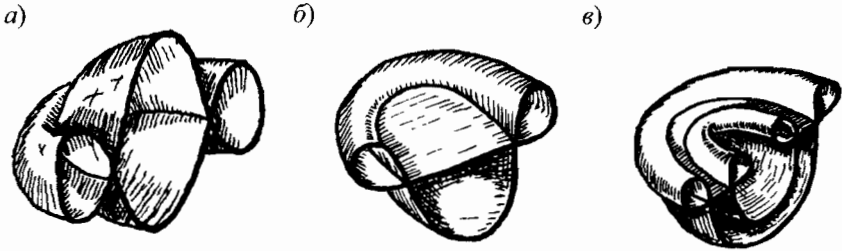


Рис. 3.79

По мере того, как операция по выворачиванию сферы будет подходить к концу, малый радиус окружности экваториального тора устремится к нулю, пока тор совсем не исчезнет. Однако исчезновение складки означает, что вблизи экватора поверхность сферы испытала высочайшее напряжение, которое в предельном случае приведет к ее разрыву. Ситуацию разрыва поверхности можно смоделировать на проволоке. Если петлю на проволоке максимально натянуть, проволока не выдержит и порвется. Аналогичное явление произойдет вдоль всей линии экватора. Топологами был поставлен вопрос: можно ли сферу путем непрерывных преобразований ее поверхности вывернуть так, чтобы избежать разрыва? Оказалось, что можно; ряд теорем, доказанных Стивенем Смейлом (1959), Арнольдом Шапиро (1979) и Тэруо Нагасэ (1984) доказали это. Идея состоит в том, чтобы, не доводя дело до разрыва, создать на поверхности несколько складок, которые можно было бы перекачивать по поверхности, деформируя ее различными способами. Образование таких складок в виде шляпы и шляпы с подкладкой показаны на рис. 3.79 б и в. Задача имеет несколько решений, которые зависят от характера складок. На рисунке 3.80 а показаны складки, захватывающие и переворачивающие часть поверхности сферы или другого тела. Разумеется, подвергать процедуре выворачивания можно не только сферу, но и тор, кренделя и прочие ориентированные и неориентированные поверхности. На рис. 3.80 б показан разрез тора, который содержит внутри себя несколько тороидальных областей, о

пространстве которых невозможно сказать, являются ли они продолжением внешнего пространства или образуют свое самостоятельное.

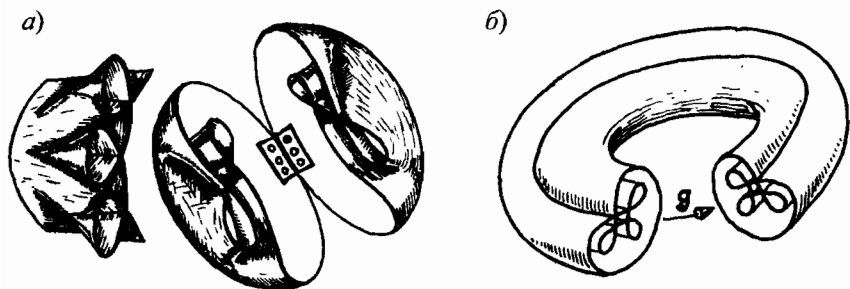


Рис. 3.80

Граф — это во многом объект топологии; проблема раскраски графа продемонстрировала нам взаимозависимость теории графов и топологии. Но существует третья абстрактная теория, которая примыкает к обеим упомянутым — это *теория узлов и зацеплений*.

### Зацепления, узлы и топология

Чтобы представить себе в деталях шар, цилиндр, конус, тор или тела Платона, нам не требуется никакой непосредственной визуальной опоры, поскольку их геометрические образы надежно хранятся у нас в мозгу с самого детства, и мы легко извлекаем их из памяти. Но для того, чтобы отчетливо представить себе, что произойдет с лентой Мёбиуса, если ее многократно разрезать вдоль окружности, нашего воображения порой не хватает и приходится прибегать к действиям. Подлинное пространственное понимание приходит только в процессе изготовления моделей. Реализацию вещественной модели можно осуществить при помощи ножниц, клея, ниток и, конечно же, каких-то подручных материалов: бумаги, картона, дерева, глины, жести, пластмассы и прочего сырья, особенно, если речь заходит о моделировании более сложных топологических объектов, чем петля Мёбиуса. Живое и наглядное представление дает также компьютерная графика и изготовление клипов.

В самом деле, чисто умозрительно трудно представить себе, что лента Мёбиуса имеет одну-единственную кромку. Эта уверенность приходит к вам только тогда, когда вы держите в своих руках реальную петлю и ведете пальцем по ее кромке. Теперь разрежьте

петлю вдоль всей окружности. Могли бы вы заранее предвидеть, что произойдет с лентой? Прodelайте эту процедуру, подсчитайте число кромок, угол скрутки ленты и тогда вы по-настоящему почувствуете, с чем имеет дело топология. Далее произведите следующий разрез и убедитесь, что лента, наконец, распалась на два кольца, образовав непростое *зацепление*. Попробуйте хотя бы словами, не прибегая ни к каким математическим символам, описать характер зацепления и угол скрутки ленты. Наконец, каждую из лент вновь разрежьте вдоль и убедитесь, что возникло новое причудливое зацепление. Четыре простых зацепления показаны на рис. 3.81. Два правых называются *изотопными*, поскольку в конфигурации последнего зацепления имеется узел *восьмерка*.

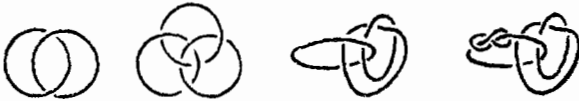


Рис. 3.81

С доисторических времен люди завязывали узлы на веревках, знакомясь с их топологией на практике. Хорошо известны так называемые *морские узлы*, которые используются для соединения двух концов веревок или для крепления снастей. Морские узлы: *беседочный*, *шкотовый*, *кошачьи лапки* или *удавка* изучают и топологи. Первым, кто обратил внимание на узел как на математический объект, был Гаусс. Его ученик Листинг посвятил узлам немало места в своем творчестве. К концу XIX в. была начата классификация узлов по их топологическим характеристикам. Это оказалось непростой задачей, поскольку не всегда можно понять, имеем ли мы дело с двумя различными узлами или с одним и тем же. В начале XX в. был выработан критерий идентификации узлов, опирающийся на так называемый *многочлен Алесандера*.

На рис. 3.82 приведены 88 схем *простых узлов*, взятые из книги Р. Кроуэлла и Р. Фокса «Введение в теорию узлов», которые на плоскости образуют от 3 до 9 пересечений. Узлы с тремя и четырьмя пересечениями имеют по одной *неприводимой форме*, 5 пересечений дают уже 2 неприводимые формы, 6 пересечений — 3 формы, 7 пересечений — 7 форм, 8 пересечений — 21 форму, а у 9 пересечений имеется 49 неприводимых форм. *Неальтернирующие узлы* помечены звездочкой. *Альтернирующие узлы* имеют строгое чередование единиц и нулей, если под единицей понимать верхнее

положение нити в пересечении (*переход*), а под нулем — нижнее (*проход*).

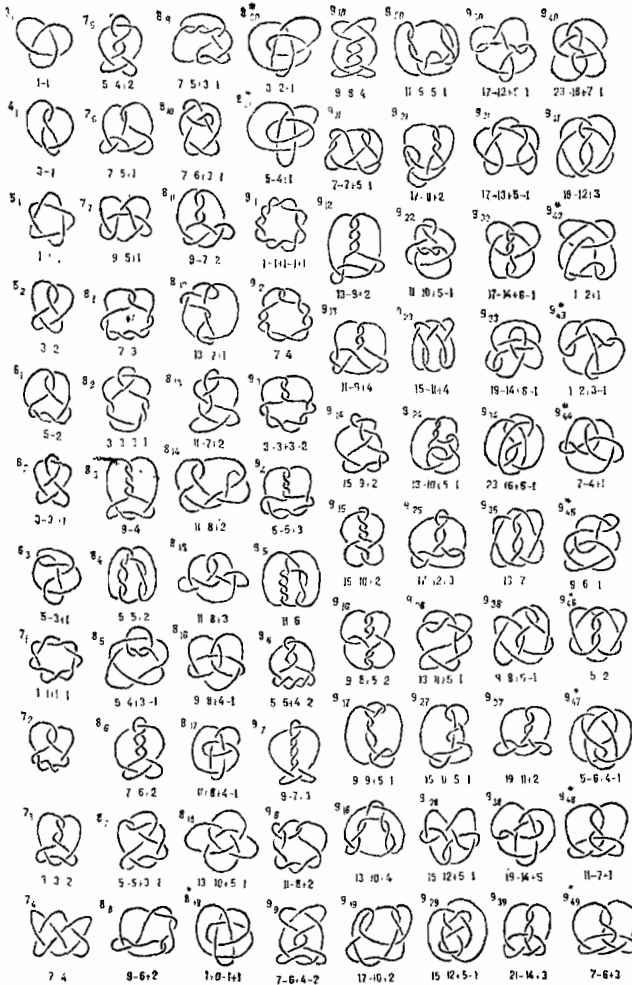


Рис. 3.82

Например, узлы  $8_8$  и  $9_{41}$  альтернирующие, так как:

$$8_8 = 0101010101010101, \quad 9_{41} = 101010101010101010;$$

у неальтернирующих узлов такой регулярности не наблюдается:

$$8_{19} = 1010010110011001, \quad 9_{42} = 100110101010110010$$

(для всех узлов движение по нити начинается с самого верхнего пересечения).

Под каждым узлом указаны коэффициенты *многочлена Александра*, однозначно характеризующие каждый узел и имеющие следующий вид:

$$A(t) = a_{2n}t^{2n} + \dots + a_n t^n + \dots + a_0.$$

Так как этот многочлен обладает симметрией, т.е. все коэффициенты связаны равенством ( $a_i = a_{2n-i}$ ), достаточно указать правую половину коэффициентов. Например, под 26-й формой узла с 9 пересечениями ( $9_{26}$ ) стоит набор чисел:  $13 - 11 + 5 - 1$ ; следовательно, для этой формы многочлен Александра выглядит так:

$$A(t) = -t^6 + 5t^5 - 11t^4 + 13t^3 - 11t^2 + 5t - 1.$$

Процедура вычисления самих коэффициентов не простая и сейчас рассматриваться не будет. Нам важнее подчеркнуть роль наглядного образа для всякой науки и особенно такой, как топология.

Морской узел *восьмерка* (рис. 3.83, позиция 1) превратится в сплетенную окружность, названную *узлом Листинга* (позиция 2), если замкнуть его свободные концы. Чтобы убедиться, что трилистник  $3_1$  не сводим к узлу Листинга ( $4_1$ ) или к элементарной звезде ( $5_1$ ), нужно сперва попытаться процедуру сведения проделать самому на веревочных узлах. Для начала выполните следующее упражнение на воображение: идентифицируйте узлы с 1 по 8 (рис. 3.83) с классификацией узлов, приведенной на рис. 3.82. Можно быть уверенным, что с этой задачей вы не справитесь без реальной бельевой веревки или чего-то, что ее заменит. Из книги Джорджа Франсиса взяты 28 художественно выполненных рисунков (рис. 3.83), которые прекрасно демонстрируют, во что выливается теория графов, если она идет по пути абстрактного развития.

Рассказывать что-то более подробно о теории узлов и зацеплений не входит в наши планы, но несколько иллюстраций, сделанных профессиональным художником Франсисом, который иллюстрирует книги по топологии, здесь будет полезно. Его рисунки убеждают нас, что завязывать узлом можно не только линию, но и поверхность. Небольшая подкрутка петель (позиции 5 и 6) может принципиально изменить характер узла. Еще большие изменения произойдут, если один узел завязать в другой узел (позиции 8 и 9).

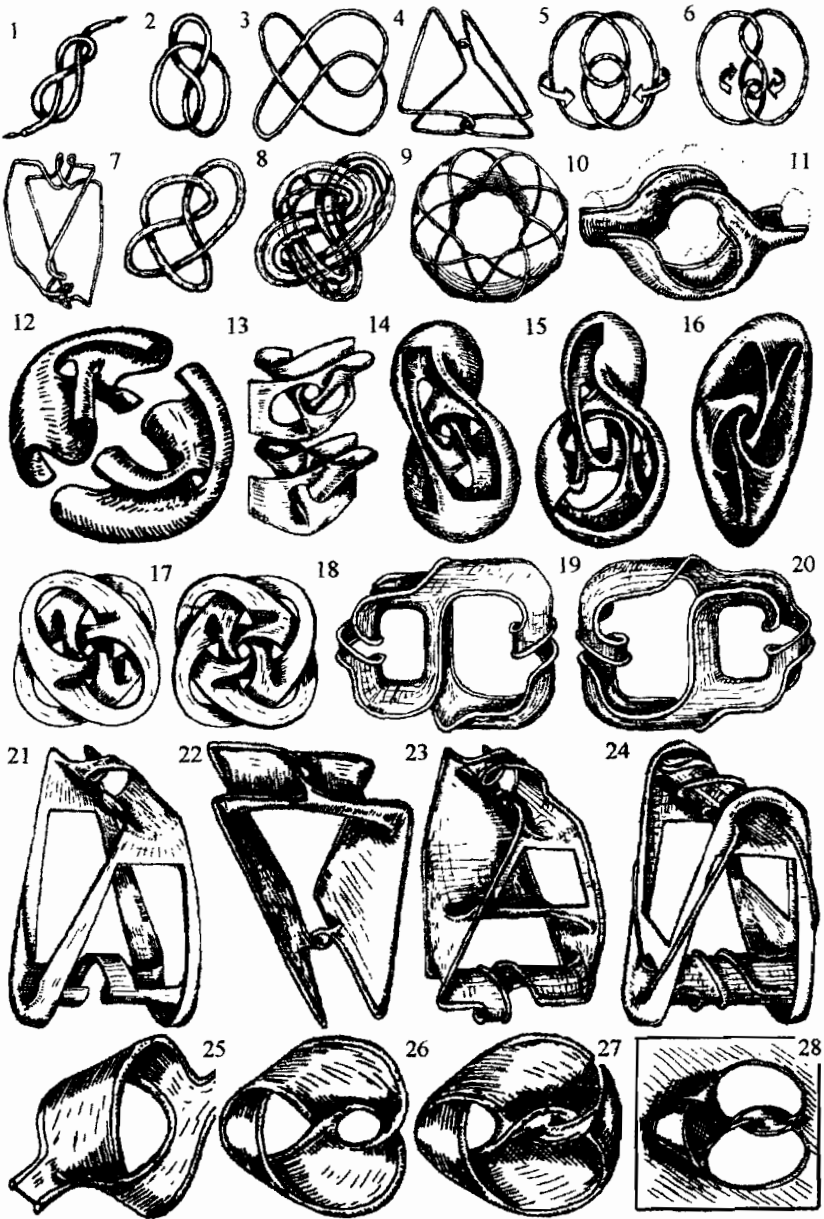


Рис. 3.83

В теории узлов рассматриваются случаи, когда веревка опутывает какую-либо топологическую поверхность, например шар или тор (позиция 10). Сделанные в нужном месте разрезы поверхностей способствуют пониманию характера топологической структуры (позиции 11 — 13). Классификация завязанных в узел поверхностей представляет еще большую проблему, чем это было для линейных узлов; сравните пары форм, находящиеся на позициях 4 и 7, 14 и 15, 17 и 18, 19 и 20, 21 и 22, 23 и 24, 26 и 27. Теперь представьте себе трудность задачи по описанию узлов, выполненных из пространств трех или даже четырех измерений. Добавьте к этому самопересекающиеся поверхности, которые имеет бутылка Клейна и гептаэдр, но которых нет у топологических объектов, изображенных на рис. 3.83. Тогда, быть может, вы получите некоторое представление, с чем в действительности приходится иметь дело современным топологам.

### Задания на практическую работу по разделу «Графы»

1. В табл. 3.44 даны вероятности сообщений по вариантам, например:  $3 \times 0,01 + 0,02 + 0,05 + 3 \times 0,1 + 3 \times 0,2$ . Такая запись означает, что имеются три сообщения с вероятностью 0,01, три с вероятностью 0,1 и три с вероятностью 0,2, а также два сообщения с вероятностями 0,02 и 0,05; в сумме все вероятности равны 1,0. Требуется построить таблицы и кодовые деревья Фано и Хаффмана. Вычислить и сравнить средние длины кодовых слов. Далее, приняв для своего ряда событий вероятности обращения к внешним и внутренним вершинам в следующем порядке:  $p_0, q_1, p_1, q_2, p_2, q_3, \dots$ , построить оптимальное дерево бинарного поиска, используя при этом рекуррентную формулу. Проверить правильность нахождения стоимости поиска по формуле для средней длины кодового слова.

2. В табл. 3.45 для 30 вариантов приведены дуги ориентированного графа, вершины которого пронумерованы от 01 до 16, причем первое число указывает начало, второе — конец дуги. На основе аналитических выражений для прямого и обратного транзитивных замыканий найти все классы эквивалентности для графа вашего варианта. Результаты вычислений проверить путем непосредственных преобразований матрицы смежности. В отчете о проделанной практической работе привести два рисунка: графическое изображение исходного графа, когда его вершины в порядке возрастания номе-

ров расположены по окружности, наподобие циферблата, и этого же графа, но разложенного уже на сильно связанные подграфы.

Таблица 3.44

№	Вероятности сообщений
1	$3 \times 0,01 + 0,02 + 0,05 + 3 \times 0,1 + 3 \times 0,2$
2	$3 \times 0,033 + 5 \times 0,045 + 0,054 + 2 \times 0,311$
3	$2 \times 0,009 + 2 \times 0,018 + 4 \times 0,024 + 2 \times 0,15 + 0,55$
4	$5 \times 0,1 + 5 \times 0,08 + 2 \times 0,04 + 0,02$
5	$2 \times 0,025 + 3 \times 0,05 + 3 \times 0,07 + 0,09 + 3 \times 0,1 + 0,2$
6	$4 \times 0,1 + 3 \times 0,095 + 3 \times 0,075 + 0,05 + 0,025 + 0,015$
7	$2 \times 0,01 + 3 \times 0,02 + 2 \times 0,098 + 3 \times 0,12 + 0,364$
8	$2 \times 0,01 + 3 \times 0,02 + 4 \times 0,03 + 4 \times 0,2$
9	$5 \times 0,07 + 5 \times 0,09 + 0,2$
10	$4 \times 0,125 + 2 \times 0,1 + 4 \times 0,0625 + 0,05$
11	$3 \times 0,023 + 4 \times 0,027 + 5 \times 0,034 + 0,653$
12	$4 \times 0,005 + 0,01 + 0,02 + 0,05 + 3 \times 0,1 + 3 \times 0,2$
13	$2 \times 0,01 + 2 \times 0,02 + 0,04 + 5 \times 0,08 + 5 \times 0,1$
14	$3 \times 0,07 + 5 \times 0,09 + 2 \times 0,1 + 0,14$
15	$4 \times 0,01 + 2 \times 0,02 + 4 \times 0,03 + 2 \times 0,2 + 0,4$
16	$3 \times 0,017 + 3 \times 0,024 + 2 \times 0,031 + 0,034 + 0,035 + 0,431$
17	$2 \times 0,022 + 4 \times 0,028 + 4 \times 0,035 + 2 \times 0,052 + 0,6$
18	$5 \times 0,017 + 3 \times 0,024 + 2 \times 0,031 + 0,081 + 2 \times 0,35$
19	$3 \times 0,01 + 0,02 + 5 \times 0,03 + 4 \times 0,2$
20	$3 \times 0,25 + 5 \times 0,035 + 5 \times 0,015$
21	$2 \times 0,205 + 0,105 + 0,1 + 7 \times 0,045 + 2 \times 0,035$
22	$6 \times 0,01 + 2 \times 0,02 + 3 \times 0,1 + 0,2 + 0,4$
23	$2 \times 0,25 + 0,2 + 2 \times 0,1 + 2 \times 0,017 + 6 \times 0,011$
24	$3 \times 0,005 + 3 \times 0,05 + 0,115 + 4 \times 0,18$
25	$2 \times 0,073 + 3 \times 0,13 + 0,145 + 0,29 + 0,01 + 0,019$
26	$2 \times 0,019 + 3 \times 0,023 + 4 \times 0,035 + 2 \times 0,153 + 0,156$
27	$7 \times 0,017 + 3 \times 0,213 + 0,242$
28	$3 \times 0,015 + 4 \times 0,025 + 5 \times 0,105 + 0,33$
29	$2 \times 0,005 + 2 \times 0,05 + 2 \times 0,08 + 0,09 + 4 \times 0,16$
30	$3 \times 0,007 + 4 \times 0,012 + 0,021 + 4 \times 0,0275 + 0,8$



Таблица 3.45

№	Дуги ориентированного графа
1	01 – 07, 01 – 15, 02 – 10, 02 – 13, 02 – 07, 03 – 03, 03 – 02, 04 – 03, 04 – 10, 05 – 13, 06 – 05, 06 – 15, 07 – 05, 07 – 14, 08 – 11, 09 – 12, 09 – 15, 10 – 02, 10 – 01, 11 – 08, 12 – 16, 13 – 09, 13 – 16, 14 – 06, 15 – 05, 16 – 11, 16 – 16.
2	01 – 11, 01 – 18, 02 – 03, 02 – 15, 04 – 01, 04 – 13, 05 – 03, 05 – 11, 05 – 16, 06 – 14, 06 – 16, 07 – 01, 07 – 04, 08 – 07, 08 – 12, 08 – 10, 08 – 06, 09 – 05, 10 – 09, 11 – 01, 11 – 02, 12 – 02, 13 – 07, 14 – 08, 15 – 12, 16 – 10, 09 – 09.
3	01 – 12, 02 – 11, 02 – 06, 03 – 02, 03 – 13, 04 – 05, 04 – 12, 05 – 04, 05 – 01, 05 – 11, 06 – 03, 06 – 05, 07 – 06, 07 – 08, 08 – 07, 09 – 14, 09 – 07, 10 – 01, 10 – 16, 11 – 15, 13 – 10, 14 – 09, 16 – 13, 15 – 01, 15 – 11, 02 – 01, 08 – 08.
4	04 – 14, 01 – 13, 02 – 01, 02 – 15, 03 – 02, 04 – 05, 05 – 06, 05 – 01, 05 – 03, 06 – 07, 06 – 04, 07 – 16, 07 – 01, 08 – 09, 08 – 10, 09 – 12, 09 – 11, 10 – 11, 11 – 10, 12 – 09, 13 – 08, 14 – 01, 15 – 03, 15 – 13, 16 – 07, 16 – 13, 03 – 03.
5	01 – 06, 01 – 13, 02 – 15, 02 – 11, 02 – 13, 03 – 02, 03 – 04, 03 – 05, 03 – 09, 04 – 05, 04 – 14, 05 – 04, 05 – 01, 05 – 09, 06 – 07, 07 – 08, 07 – 16, 08 – 11, 09 – 06, 10 – 08, 10 – 12, 12 – 10, 13 – 12, 13 – 14, 14 – 01, 15 – 02, 16 – 09.
6	01 – 13, 01 – 08, 02 – 14, 02 – 01, 03 – 02, 04 – 13, 04 – 02, 05 – 04, 05 – 03, 05 – 12, 06 – 07, 06 – 09, 07 – 06, 07 – 10, 08 – 15, 08 – 10, 09 – 08, 11 – 10, 12 – 16, 12 – 01, 13 – 01, 14 – 12, 14 – 07, 15 – 09, 15 – 11, 16 – 02, 16 – 06.
7	01 – 01, 01 – 12, 02 – 09, 03 – 08, 04 – 14, 04 – 03, 05 – 04, 05 – 06, 06 – 05, 06 – 07, 07 – 04, 08 – 02, 08 – 01, 09 – 16, 09 – 15, 10 – 12, 11 – 12, 12 – 11, 13 – 02, 13 – 01, 14 – 07, 15 – 13, 15 – 10, 16 – 02, 15 – 12, 16 – 15, 16 – 12.
8	01 – 16, 01 – 14, 02 – 03, 02 – 11, 03 – 08, 03 – 09, 04 – 06, 04 – 03, 05 – 04, 05 – 08, 06 – 05, 07 – 09, 07 – 10, 08 – 03, 09 – 07, 10 – 15, 11 – 16, 12 – 04, 12 – 01, 13 – 15, 15 – 13, 14 – 12, 16 – 02, 16 – 10, 08 – 07, 08 – 09, 08 – 08.
9	09 – 14, 01 – 09, 02 – 08, 03 – 01, 03 – 02, 03 – 08, 04 – 03, 05 – 04, 05 – 09, 05 – 16, 06 – 05, 07 – 06, 08 – 01, 08 – 02, 09 – 12, 10 – 13, 11 – 13, 13 – 15, 14 – 10, 14 – 01, 15 – 11, 15 – 12, 16 – 07, 16 – 12, 16 – 03, 06 – 10, 06 – 06.
10	01 – 08, 01 – 13, 01 – 12, 02 – 03, 02 – 10, 03 – 16, 04 – 10, 04 – 14, 05 – 04, 05 – 01, 05 – 02, 05 – 03, 06 – 09, 06 – 08, 07 – 06, 07 – 09, 09 – 07, 10 – 13, 10 – 07, 11 – 15, 12 – 11, 13 – 10, 14 – 05, 15 – 01, 16 – 02, 13 – 06, 04 – 05.
11	01 – 09, 01 – 08, 02 – 01, 03 – 10, 03 – 12, 04 – 14, 04 – 15, 05 – 08, 06 – 13, 07 – 13, 07 – 16, 08 – 05, 08 – 06, 09 – 02, 09 – 05, 09 – 07, 09 – 15, 10 – 03, 10 – 09, 10 – 11, 11 – 12, 12 – 04, 13 – 07, 14 – 11, 15 – 16, 16 – 15, 16 – 16.
12	01 – 10, 02 – 14, 01 – 15, 02 – 15, 02 – 16, 03 – 04, 03 – 12, 03 – 03, 04 – 03, 04 – 08, 05 – 11, 06 – 07, 07 – 12, 07 – 08, 07 – 14, 08 – 14, 09 – 04, 09 – 15, 10 – 09, 11 – 11, 11 – 13, 12 – 06, 13 – 03, 13 – 05, 15 – 01, 16 – 02, 16 – 05.
13	01 – 01, 01 – 13, 02 – 07, 03 – 08, 04 – 04, 04 – 05, 05 – 01, 05 – 02, 05 – 04, 06 – 12, 07 – 02, 07 – 11, 08 – 03, 08 – 07, 09 – 03, 09 – 16, 10 – 01, 11 – 06, 11 – 10, 12 – 14, 13 – 15, 14 – 11, 15 – 10, 16 – 04, 16 – 13, 02 – 02, 16 – 16.
14	01 – 04, 01 – 11, 02 – 03, 02 – 08, 02 – 10, 03 – 09, 04 – 04, 04 – 05, 04 – 09, 05 – 05, 05 – 14, 06 – 15, 07 – 06, 09 – 12, 09 – 13, 10 – 01, 11 – 02, 12 – 03, 12 – 07, 13 – 06, 13 – 12, 13 – 14, 14 – 16, 14 – 08, 15 – 07, 15 – 08, 16 – 05.

## Продолжение таблицы 3.45

№	Дуги ориентированного графа
15	01 - 09, 03 - 04, 06 - 15, 10 - 11, 16 - 03, 01 - 10, 03 - 12, 07 - 06, 10 - 12, 16 - 05, 02 - 04, 04 - 14, 07 - 16, 12 - 13, 02 - 08, 05 - 06, 08 - 13, 13 - 07, 02 - 12, 05 - 14, 09 - 07, 14 - 04, 09 - 08, 15 - 05, 16 - 12, 11 - 02, 05 - 05.
16	01 - 16, 01 - 13, 01 - 02, 02 - 11, 03 - 04, 03 - 05, 04 - 03, 05 - 11, 05 - 07, 06 - 07, 07 - 06, 08 - 12, 08 - 05, 08 - 07, 09 - 08, 09 - 13, 10 - 14, 11 - 05, 12 - 10, 12 - 08, 13 - 15, 13 - 02, 14 - 08, 14 - 05, 18 - 09, 16 - 01, 01 - 03.
17	03 - 02, 01 - 03, 01 - 09, 01 - 08, 02 - 03, 02 - 06, 03 - 04, 03 - 05, 04 - 05, 05 - 06, 04 - 13, 07 - 15, 07 - 06, 08 - 01, 08 - 04, 09 - 06, 09 - 07, 10 - 01, 10 - 12, 11 - 16, 11 - 12, 12 - 10, 13 - 04, 14 - 07, 15 - 14, 16 - 11, 16 - 02.
18	01 - 13, 01 - 12, 01 - 05, 02 - 01, 02 - 03, 02 - 04, 03 - 04, 03 - 05, 04 - 03, 04 - 07, 04 - 10, 05 - 07, 05 - 06, 06 - 05, 08 - 09, 09 - 08, 07 - 10, 10 - 15, 11 - 12, 11 - 07, 12 - 14, 13 - 02, 14 - 06, 16 - 15, 15 - 16, 16 - 08, 03 - 09.
19	01 - 14, 01 - 15, 01 - 16, 03 - 10, 04 - 01, 04 - 05, 05 - 04, 05 - 01, 06 - 05, 06 - 07, 06 - 03, 06 - 01, 07 - 08, 07 - 01, 08 - 07, 08 - 01, 09 - 13, 09 - 02, 10 - 03, 03 - 11, 11 - 02, 12 - 09, 13 - 14, 14 - 12, 15 - 16, 16 - 01, 16 - 03.
20	01 - 11, 02 - 03, 03 - 13, 04 - 02, 04 - 05, 05 - 06, 05 - 14, 06 - 16, 07 - 06, 07 - 15, 08 - 06, 08 - 09, 09 - 10, 11 - 13, 13 - 04, 13 - 07, 14 - 05, 15 - 07, 16 - 08, 16 - 10, 02 - 09, 01 - 16, 06 - 06, 05 - 09, 02 - 07, 12 - 03, 03 - 03.
21	01 - 02, 01 - 06, 02 - 09, 03 - 08, 03 - 15, 04 - 06, 04 - 08, 05 - 03, 05 - 10, 05 - 14, 06 - 01, 06 - 05, 07 - 02, 07 - 10, 07 - 13, 08 - 05, 09 - 07, 09 - 12, 10 - 02, 12 - 11, 12 - 13, 13 - 16, 14 - 13, 14 - 15, 15 - 14, 15 - 16, 16 - 11.
22	01 - 02, 02 - 10, 03 - 04, 03 - 08, 04 - 08, 04 - 12, 05 - 06, 06 - 05, 06 - 14, 07 - 09, 08 - 02, 09 - 03, 09 - 07, 10 - 04, 10 - 05, 10 - 08, 11 - 01, 11 - 09, 12 - 13, 13 - 14, 13 - 15, 14 - 16, 15 - 16, 15 - 12, 16 - 14, 01 - 14, 10 - 16.
23	07 - 01, 07 - 10, 01 - 07, 02 - 01, 02 - 06, 03 - 02, 03 - 15, 04 - 03, 04 - 09, 05 - 04, 06 - 03, 06 - 15, 08 - 04, 08 - 05, 09 - 04, 09 - 02, 10 - 01, 10 - 12, 11 - 12, 11 - 14, 12 - 11, 12 - 13, 13 - 14, 14 - 13, 14 - 16, 08 - 08, 09 - 09.
24	01 - 04, 02 - 01, 02 - 08, 02 - 15, 03 - 12, 03 - 16, 04 - 03, 05 - 04, 05 - 09, 06 - 10, 07 - 01, 07 - 06, 08 - 03, 03 - 02, 09 - 05, 09 - 11, 10 - 05, 10 - 07, 11 - 12, 12 - 14, 13 - 10, 13 - 14, 15 - 16, 16 - 14, 16 - 15, 07 - 07, 01 - 01.
25	01 - 09, 01 - 05, 02 - 04, 02 - 05, 03 - 07, 03 - 16, 04 - 08, 05 - 01, 06 - 05, 06 - 10, 06 - 14, 07 - 03, 08 - 02, 08 - 03, 09 - 06, 10 - 12, 12 - 11, 12 - 15, 13 - 11, 13 - 12, 14 - 12, 14 - 16, 15 - 13, 16 - 14, 08 - 08, 05 - 05, 15 - 15.
26	01 - 07, 01 - 13, 02 - 01, 02 - 08, 03 - 09, 03 - 11, 04 - 05, 04 - 10, 05 - 16, 06 - 14, 07 - 03, 07 - 13, 08 - 02, 08 - 01, 09 - 03, 09 - 04, 10 - 11, 11 - 06, 12 - 15, 13 - 07, 13 - 09, 13 - 04, 14 - 04, 14 - 05, 15 - 16, 16 - 12, 05 - 05.
27	01 - 15, 01 - 14, 02 - 03, 02 - 14, 03 - 04, 04 - 05, 04 - 13, 05 - 07, 05 - 11, 06 - 07, 06 - 08, 06 - 09, 07 - 06, 07 - 08, 07 - 09, 08 - 09, 10 - 05, 10 - 06, 11 - 10, 12 - 10, 13 - 04, 14 - 02, 14 - 12, 15 - 01, 15 - 02, 16 - 01, 07 - 07.
28	01 - 11, 01 - 12, 02 - 03, 02 - 04, 03 - 02, 03 - 04, 04 - 08, 05 - 10, 05 - 14, 06 - 15, 07 - 09, 08 - 05, 08 - 10, 09 - 15, 10 - 09, 11 - 01, 11 - 03, 11 - 16, 12 - 13, 13 - 08, 13 - 16, 15 - 07, 16 - 12, 07 - 07, 02 - 02, 12 - 12, 09 - 09.

Продолжение таблицы 3.45

№	Дуги ориентированного графа
29	01 – 03, 01 – 14, 02 – 11, 02 – 16, 03 – 04, 03 – 06, 04 – 01, 05 – 01, 05 – 07, 05 – 10, 06 – 11, 07 – 02, 07 – 08, 08 – 07, 08 – 16, 09 – 05, 09 – 08, 10 – 04, 10 – 05, 11 – 06, 11 – 15, 12 – 02, 12 – 15, 13 – 09, 13 – 10, 14 – 02, 14 – 03.
30	01 – 02, 01 – 16, 02 – 03, 02 – 04, 02 – 05, 03 – 02, 03 – 12, 04 – 16, 04 – 08, 05 – 06, 05 – 09, 06 – 08, 06 – 09, 07 – 10, 08 – 07, 08 – 14, 09 – 12, 09 – 13, 10 – 08, 10 – 15, 11 – 13, 11 – 01, 12 – 05, 13 – 14, 14 – 13, 14 – 15, 16 – 04, 16 – 07, 16 – 10, 16 – 15, 12 – 12, 07 – 07, 08 – 08, 13 – 13, 03 – 03, 05 – 05.

3. В табл. 3.46 для 30 вариантов приведены дуги ориентированного графа с 18 вершинами, который не содержит контуров (первое число указывает начало, второе — конец дуги). Каждая дуга имеет вес, который численно равен сумме номеров вершин, инцидентных началу и концу дуги. Необходимо произвести разбивку графа на классы порядка. Затем найти два оптимальных пути, отвечающих минимальному и максимальному общему весу. Пути начинаются с вершины нижнего уровня, а заканчиваются на вершине верхнего уровня.

Таблица 3.46

№	Дуги ориентированного графа
1	01 – 08, 01 – 09, 01 – 18, 01 – 13, 02 – 03, 02 – 10, 04 – 07, 04 – 06, 04 – 17, 04 – 12, 05 – 02, 05 – 09, 05 – 10, 05 – 14, 05 – 16, 06 – 16, 06 – 18, 06 – 01, 07 – 01, 07 – 08, 07 – 05, 07 – 09, 08 – 13, 08 – 18, 08 – 05, 09 – 10, 09 – 03, 11 – 01, 11 – 06, 11 – 07, 12 – 01, 12 – 05, 12 – 08, 13 – 02, 13 – 09, 14 – 02, 14 – 16, 15 – 03, 15 – 10, 16 – 03, 16 – 10, 17 – 01, 17 – 18, 18 – 16, 18 – 15.
2	01 – 04, 02 – 17, 02 – 03, 02 – 13, 04 – 11, 04 – 12, 06 – 05, 05 – 04, 06 – 15, 08 – 10, 09 – 01, 09 – 08, 10 – 11, 10 – 16, 11 – 02, 12 – 18, 12 – 07, 14 – 01, 14 – 08, 15 – 10, 15 – 04, 16 – 18, 16 – 07, 16 – 17, 17 – 03, 17 – 07, 17 – 13, 17 – 18, 10 – 12, 15 – 11, 05 – 11, 14 – 15, 08 – 16, 05 – 10, 06 – 08.
3	01 – 02, 01 – 10, 01 – 11, 01 – 18, 02 – 05, 02 – 04, 03 – 14, 04 – 13, 04 – 15, 04 – 16, 05 – 03, 05 – 17, 05 – 16, 06 – 18, 06 – 10, 07 – 01, 07 – 06, 07 – 12, 08 – 06, 08 – 07, 09 – 07, 09 – 12, 10 – 04, 10 – 05, 11 – 03, 11 – 04, 11 – 05, 12 – 02, 12 – 10, 12 – 11, 13 – 14, 15 – 14, 16 – 14, 17 – 14, 18 – 05, 18 – 03.
4	01 – 02, 02 – 03, 02 – 18, 03 – 11, 03 – 12, 04 – 03, 04 – 12, 05 – 02, 05 – 04, 06 – 01, 06 – 05, 07 – 08, 07 – 09, 10 – 08, 10 – 09, 11 – 10, 11 – 07, 12 – 10, 12 – 07, 13 – 04, 13 – 02, 14 – 04, 15 – 13, 15 – 04, 16 – 10, 16 – 07, 17 – 05, 17 – 14, 18 – 07, 18 – 10, 16 – 08, 05 – 18, 17 – 03, 13 – 11, 06 – 18, 13 – 10.
5	01 – 02, 01 – 06, 02 – 03, 02 – 13, 02 – 18, 03 – 04, 03 – 12, 03 – 11, 04 – 11, 04 – 17, 05 – 04, 05 – 11, 05 – 12, 06 – 03, 06 – 05, 06 – 10, 06 – 13, 07 – 02, 07 – 06, 08 – 01, 08 – 07, 08 – 14, 09 – 07, 09 – 08, 09 – 15, 10 – 12, 10 – 04, 12 – 11, 12 – 17, 13 – 04, 13 – 12, 14 – 02, 14 – 03, 15 – 01, 16 – 14, 18 – 04.

## Продолжение таблицы 3.46

№	Дуги ориентированного графа
6	01 - 09, 01 - 16, 02 - 11, 03 - 02, 04 - 05, 04 - 06, 05 - 06, 05 - 08, 09 - 07, 10 - 04, 10 - 16, 11 - 01, 11 - 10, 07 - 08, 12 - 10, 12 - 11, 12 - 15, 13 - 12, 14 - 02, 15 - 16, 16 - 05, 16 - 07, 18 - 02, 18 - 12, 04 - 08, 01 - 07, 14 - 11, 11 - 09, 13 - 15, 03 - 11, 05 - 17, 09 - 06, 16 - 08, 13 - 10, 15 - 07, 09 - 17.
7	01 - 02, 01 - 08, 01 - 09, 01 - 16, 02 - 04, 02 - 15, 02 - 03, 03 - 05, 03 - 06, 04 - 05, 04 - 06, 04 - 07, 05 - 06, 05 - 07, 09 - 04, 06 - 14, 06 - 18, 07 - 14, 07 - 18, 08 - 03, 08 - 15, 09 - 07, 10 - 02, 10 - 09, 10 - 16, 11 - 10, 11 - 12, 12 - 01, 12 - 10, 13 - 01, 13 - 12, 15 - 05, 16 - 03, 17 - 12, 17 - 10, 15 - 18.
8	01 - 09, 01 - 13, 02 - 04, 02 - 14, 03 - 06, 03 - 14, 04 - 05, 04 - 15, 06 - 05, 06 - 15, 07 - 01, 07 - 03, 08 - 09, 08 - 11, 08 - 13, 09 - 12, 09 - 02, 10 - 01, 10 - 07, 11 - 03, 11 - 12, 11 - 18, 12 - 04, 12 - 06, 12 - 14, 13 - 02, 13 - 12, 13 - 16, 14 - 05, 14 - 15, 16 - 15, 17 - 07, 17 - 08, 18 - 06, 18 - 04, 18 - 14.
9	01 - 18, 02 - 10, 03 - 02, 03 - 07, 04 - 03, 04 - 08, 05 - 18, 07 - 06, 07 - 18, 08 - 01, 08 - 07, 09 - 08, 09 - 15, 09 - 03, 10 - 11, 10 - 16, 12 - 03, 12 - 15, 12 - 17, 14 - 05, 14 - 08, 15 - 07, 17 - 16, 18 - 13, 15 - 05, 15 - 10, 17 - 06, 08 - 18, 04 - 18, 03 - 10, 10 - 13, 05 - 11, 12 - 02, 04 - 17, 01 - 10, 01 - 16.
10	01 - 02, 01 - 15, 02 - 10, 04 - 14, 05 - 14, 05 - 01, 06 - 07, 06 - 15, 06 - 12, 07 - 12, 08 - 11, 08 - 03, 12 - 11, 12 - 09, 10 - 09, 10 - 03, 13 - 05, 13 - 02, 14 - 01, 14 - 06, 14 - 07, 15 - 08, 15 - 09, 15 - 10, 16 - 04, 16 - 05, 16 - 13, 17 - 10, 17 - 14, 18 - 04, 18 - 13, 18 - 17, 05 - 02, 01 - 12, 07 - 11.
11	01 - 11, 02 - 04, 04 - 05, 04 - 09, 05 - 06, 05 - 10, 06 - 16, 06 - 10, 07 - 01, 07 - 02, 08 - 12, 08 - 11, 09 - 16, 09 - 06, 11 - 03, 11 - 05, 12 - 02, 12 - 04, 13 - 01, 13 - 12, 14 - 01, 14 - 03, 14 - 15, 15 - 02, 15 - 03, 17 - 10, 17 - 16, 18 - 15, 18 - 17, 03 - 06, 03 - 09, 03 - 17, 17 - 06, 01 - 17, 02 - 09.
12	01 - 17, 02 - 15, 04 - 16, 05 - 14, 06 - 05, 06 - 11, 07 - 13, 07 - 18, 07 - 10, 08 - 10, 08 - 01, 09 - 07, 09 - 08, 10 - 05, 10 - 15, 11 - 12, 13 - 06, 15 - 16, 15 - 14, 16 - 03, 16 - 12, 17 - 03, 17 - 14, 18 - 10, 18 - 06, 18 - 02, 10 - 01, 06 - 16, 08 - 06, 09 - 10, 06 - 15.
13	01 - 13, 01 - 12, 02 - 01, 02 - 13, 03 - 04, 03 - 12, 04 - 06, 04 - 05, 05 - 09, 05 - 08, 06 - 09, 06 - 17, 07 - 08, 07 - 16, 09 - 08, 09 - 17, 12 - 07, 12 - 09, 12 - 10, 13 - 08, 13 - 09, 13 - 11, 09 - 11, 14 - 02, 14 - 12, 15 - 03, 15 - 06, 18 - 02, 18 - 03, 18 - 05, 13 - 16, 04 - 16, 15 - 04, 02 - 08, 01 - 07, 06 - 11.
14	01 - 15, 01 - 16, 02 - 14, 02 - 18, 03 - 12, 03 - 17, 04 - 11, 04 - 13, 05 - 06, 05 - 07, 06 - 09, 06 - 10, 07 - 04, 07 - 09, 07 - 17, 08 - 04, 08 - 06, 08 - 07, 09 - 02, 09 - 14, 10 - 03, 10 - 01, 10 - 11, 11 - 12, 12 - 14, 14 - 15, 16 - 15, 17 - 01, 17 - 02, 17 - 14, 18 - 15, 05 - 03, 11 - 14.
15	01 - 03, 01 - 13, 02 - 15, 02 - 04, 03 - 16, 04 - 14, 05 - 12, 06 - 02, 06 - 13, 06 - 04, 07 - 02, 07 - 03, 08 - 06, 08 - 13, 09 - 02, 09 - 07, 09 - 15, 10 - 08, 10 - 09, 11 - 08, 11 - 12, 11 - 09, 12 - 01, 12 - 07, 13 - 14, 13 - 17, 14 - 17, 14 - 18, 15 - 16, 15 - 17, 16 - 17, 16 - 18, 04 - 16, 07 - 14, 12 - 13.

Продолжение таблицы 3.46

№	Дуги ориентированного графа
16	01 - 12, 01 - 17, 02 - 13, 02 - 17, 03 - 01, 03 - 10, 04 - 11, 04 - 13, 05 - 03, 05 - 10, 06 - 05, 06 - 15, 07 - 08, 07 - 16, 08 - 09, 08 - 15, 09 - 02, 09 - 04, 09 - 11, 10 - 12, 10 - 17, 11 - 13, 11 - 17, 14 - 02, 14 - 03, 14 - 04, 15 - 04, 15 - 05, 15 - 14, 16 - 06, 16 - 08, 18 - 06, 18 - 16, 16 - 14, 15 - 10.
17	01 - 12, 01 - 13, 02 - 10, 03 - 02, 03 - 10, 04 - 03, 05 - 09, 06 - 14, 06 - 01, 07 - 08, 07 - 17, 08 - 17, 08 - 05, 09 - 10, 11 - 02, 11 - 03, 12 - 04, 12 - 11, 13 - 04, 13 - 12, 14 - 01, 14 - 07, 14 - 15, 15 - 08, 15 - 13, 16 - 14, 16 - 15, 16 - 07, 17 - 05, 17 - 11, 17 - 04, 18 - 14, 18 - 07, 08 - 11, 05 - 03, 06 - 13.
18	01 - 04, 01 - 08, 01 - 14, 02 - 08, 02 - 13, 03 - 01, 03 - 10, 03 - 02, 03 - 06, 04 - 11, 04 - 13, 05 - 11, 06 - 08, 06 - 16, 07 - 03, 07 - 05, 08 - 11, 08 - 13, 08 - 16, 09 - 03, 08 - 12, 09 - 06, 09 - 02, 10 - 14, 10 - 04, 11 - 12, 11 - 14, 12 - 15, 12 - 18, 12 - 17, 13 - 12, 13 - 15, 14 - 15, 15 - 17, 16 - 15, 16 - 17.
19	01 - 05, 01 - 08, 02 - 17, 04 - 15, 04 - 03, 05 - 08, 05 - 10, 06 - 07, 06 - 10, 07 - 09, 07 - 10, 08 - 10, 08 - 13, 09 - 04, 09 - 17, 09 - 12, 09 - 18, 10 - 13, 10 - 12, 11 - 15, 12 - 17, 12 - 15, 13 - 03, 13 - 02, 13 - 11, 13 - 15, 14 - 05, 14 - 06, 14 - 08, 16 - 06, 16 - 07, 18 - 03, 18 - 15, 10 - 17, 16 - 10, 01 - 07.
20	01 - 02, 01 - 04, 02 - 03, 02 - 08, 02 - 10, 02 - 17, 03 - 09, 04 - 09, 05 - 06, 05 - 08, 03 - 08, 06 - 14, 06 - 08, 08 - 07, 09 - 07, 09 - 08, 10 - 14, 10 - 09, 11 - 02, 11 - 05, 11 - 17, 12 - 01, 12 - 08, 13 - 01, 13 - 12, 15 - 11, 15 - 18, 16 - 15, 16 - 12, 17 - 06, 17 - 14, 18 - 02, 18 - 04, 18 - 09, 02 - 06, 13 - 04.
21	01 - 11, 01 - 05, 02 - 01, 02 - 03, 02 - 04, 03 - 05, 03 - 12, 04 - 05, 04 - 11, 05 - 08, 05 - 11, 06 - 12, 06 - 16, 07 - 03, 07 - 06, 07 - 13, 08 - 17, 09 - 17, 11 - 08, 11 - 10, 12 - 16, 12 - 18, 13 - 12, 13 - 11, 14 - 13, 14 - 15, 15 - 05, 16 - 08, 16 - 10, 16 - 09, 18 - 10, 16 - 17, 07 - 12, 14 - 05, 02 - 12.
22	01 - 03, 01 - 10, 02 - 05, 02 - 09, 03 - 09, 03 - 13, 04 - 07, 04 - 08, 05 - 06, 05 - 07, 05 - 17, 06 - 14, 06 - 17, 07 - 17, 07 - 12, 09 - 06, 09 - 17, 10 - 02, 10 - 03, 10 - 09, 11 - 01, 11 - 10, 13 - 06, 13 - 14, 15 - 02, 15 - 18, 16 - 10, 16 - 15, 16 - 18, 17 - 08, 17 - 12, 17 - 14, 18 - 04, 18 - 05, 15 - 05, 18 - 07.
23	01 - 05, 01 - 07, 02 - 07, 02 - 10, 03 - 06, 03 - 12, 04 - 03, 04 - 06, 04 - 09, 05 - 16, 05 - 10, 06 - 02, 06 - 12, 06 - 11, 07 - 15, 07 - 17, 08 - 06, 08 - 13, 09 - 06, 09 - 13, 10 - 17, 11 - 10, 11 - 16, 12 - 07, 12 - 18, 13 - 07, 13 - 05, 14 - 09, 14 - 08, 14 - 01, 15 - 16, 15 - 18, 11 - 16, 01 - 11, 09 - 11, 07 - 10.
24	01 - 02, 01 - 14, 04 - 03, 11 - 03, 11 - 12, 08 - 12, 12 - 16, 14 - 13, 03 - 02, 03 - 17, 03 - 18, 03 - 12, 02 - 14, 17 - 16, 18 - 16, 14 - 15, 05 - 06, 07 - 06, 07 - 10, 09 - 10, 15 - 05, 15 - 07, 13 - 09, 16 - 13, 16 - 15, 12 - 15, 14 - 09, 17 - 13, 08 - 18, 01 - 17.
25	01 - 07, 05 - 07, 12 - 16, 18 - 10, 14 - 09, 06 - 07, 12 - 18, 13 - 14, 10 - 04, 11 - 07, 16 - 13, 18 - 08, 08 - 04, 11 - 12, 16 - 18, 15 - 14, 14 - 04, 02 - 12, 17 - 18, 15 - 08, 14 - 03, 08 - 09, 10 - 03, 10 - 09, 17 - 15, 13 - 03, 13 - 10, 07 - 18, 07 - 15, 07 - 17.

Продолжение таблицы 3.46

№	Дуги ориентированного графа
26	10 – 11, 06 – 02, 12 – 07, 01 – 08, 10 – 08, 06 – 14, 12 – 09, 01 – 07, 10 – 01, 06 – 05, 11 – 08, 09 – 07, 06 – 03, 11 – 07, 02 – 15, 14 – 04, 05 – 15, 05 – 13, 17 – 12, 13 – 12, 13 – 10, 10 – 09, 18 – 07, 18 – 11, 04 – 16, 04 – 18, 16 – 10, 03 – 15, 13 – 17, 13 – 18, 15 – 16.
27	01 – 14, 14 – 15, 09 – 08, 01 – 03, 14 – 17, 16 – 12, 01 – 02, 18 – 15, 11 – 12, 06 – 03, 13 – 17, 11 – 04, 06 – 02, 15 – 09, 03 – 14, 15 – 16, 03 – 18, 15 – 11, 03 – 13, 17 – 09, 02 – 07, 17 – 16, 02 – 14, 17 – 11, 07 – 10, 17 – 04, 07 – 09, 09 – 05, 07 – 15, 09 – 10.
28	05 – 09, 10 – 09, 10 – 07, 10 – 16, 08 – 09, 08 – 16, 12 – 16, 12 – 11, 04 – 11, 04 – 17, 09 – 07, 09 – 15, 09 – 17, 16 – 17, 16 – 15, 11 – 15, 11 – 17, 15 – 07, 17 – 14, 17 – 13, 14 – 02, 02 – 06, 15 – 14, 15 – 18, 17 – 18, 07 – 02, 14 – 03, 18 – 03, 13 – 03, 03 – 01, 03 – 06, 02 – 01.
29	07 – 12, 09 – 17, 16 – 04, 17 – 15, 08 – 11, 07 – 09, 10 – 16, 16 – 15, 17 – 13, 08 – 10, 11 – 10, 10 – 18, 18 – 04, 04 – 14, 08 – 01, 01 – 10, 12 – 18, 18 – 13, 15 – 02, 07 – 11, 09 – 18, 12 – 17, 17 – 04, 15 – 05, 07 – 01, 15 – 03, 02 – 06, 05 – 06, 13 – 06, 13 – 04, 14 – 06, 03 – 06, 18 – 02.
30	10 – 09, 13 – 14, 12 – 08, 10 – 07, 13 – 17, 03 – 04, 06 – 07, 13 – 16, 03 – 11, 06 – 05, 15 – 14, 09 – 14, 15 – 16, 09 – 13, 15 – 12, 07 – 15, 14 – 01, 05 – 15, 14 – 02, 16 – 17, 16 – 12, 16 – 18, 02 – 01, 02 – 03, 17 – 01, 18 – 03, 17 – 03, 18 – 08, 12 – 11.

4. В табл. 3.47 для 30 вариантов перечислены дуги ориентированного графа (первое число указывает начало, второе — конец дуги). Определить центр графа и отклонение от центра для каждой вершины. Используя матрицу смежности, рассчитать общее число путей в 1, 2, 3, 4, 5 и 6 дуг, а также с помощью поименованной матрицы смежности получить все элементарные пути указанной длины. (В каждой последующей поименованной матрице все неэлементарные пути следует опускать.)

5. В табл. 3.48 для 30 вариантов перечислены ребра симметричного графа. Для графа своего варианта построить дополнительный граф и определить полную группу подстановок, оставляющую графы без изменения. Коммутационное соотношение привести только для двух подстановок, используя матрицы смежности исходного и дополнительного графа. Относительно обоих графов построить соответствующие им двойственные графы, затем для каждого из четырех графов найти элементы матроида, т.е. перечислить все базы и циклы, найти ранг и цикломатическое число, подсчитать количество возможных остовов.

Таблица 3.47

№	Дуги ориентированного графа	№	Дуги ориентированного графа
1	11 13 16 24 31 34 43 44 51 53 56 65	16	11 15 16 21 23 32 36 41 43 54 56 62
2	12 16 22 24 25 32 31 35 43 51 53 65	17	12 14 16 21 23 32 33 35 45 56 61 63
3	12 16 22 23 32 34 45 52 53 55 61 65	18	12 13 15 21 22 23 32 36 41 45 51 64
4	12 24 32 33 41 42 45 46 51 61 26 63	19	12 15 23 26 31 32 33 43 46 51 54 61
5	11 13 14 21 25 31 33 35 36 43 52 62	20	12 23 24 26 34 35 41 44 46 56 62 63
6	13 16 23 26 32 33 35 45 51 61 62 64	21	12 16 21 23 33 34 43 45 56 63 64 66
7	13 21 22 23 32 33 35 36 42 45 54 65	22	11 13 23 34 36 42 43 45 46 52 61 62
8	15 16 21 23 32 33 42 44 56 63 65	23	14 25 26 32 34 43 44 51 63 65 66
9	15 23 24 31 32 33 36 45 46 52 61	24	15 24 34 36 43 44 51 52 56 61 63
10	12 15 26 32 33 34 41 45 53 54 61	25	15 16 24 31 34 43 44 52 63 65 66
11	16 14 22 24 26 32 33 42 45 51 63	26	12 13 25 26 31 33 41 44 56 64 65
12	12 14 21 22 23 41 45 46 52 65 66	27	13 14 25 31 32 33 36 45 46 51 62
13	15 23 26 34 42 43 44 54 56 61 64	28	13 14 26 32 33 34 41 45 51 52 65
14	11 15 23 32 34 45 51 53 54 56 62	29	11 12 22 24 26 34 36 42 45 53 61
15	11 12 21 23 32 34 45 56 61 64 66	30	12 13 21 22 31 34 43 45 56 62 64

Таблица 3.48

№	Ребра симметричного графа	№	Ребра симметричного графа
1	18 15 25 28 26 34 37 46 67	16	18 24 26 27 35 37 45 48 78 82
2	14 16 17 26 27 28 34 38 53 54 58 76	17	14 15 18 23 24 26 34 38 56 57 76 78
3	12 16 23 28 43 53 57 62 67 68 73 74	18	12 13 14 24 36 52 53 56
4	13 14 16 23 24 26 45 53 65	19	12 17 18 23 24 26 27 34 53
5	12 13 15 24 45 58 67 74 78	20	13 23 28 34 37 53 56 63 83
6	12 13 23 34 35 48 57 63 73 83	21	12 25 31 41 42 51 53 56 62
7	12 15 18 24 24 28 56 63 64 73 78	22	16 18 26 28 34 36 56 74 76
8	12 13 15 23 25 34 56 64	23	12 14 23 25 43 56 63
9	12 13 16 23 24 26 34 35 45	24	12 15 25 26 35 37 41 71 78 81 86
10	14 15 18 25 26 27 36 37 38 45 48 76	25	14 17 23 26 34 38 54 63 67 68 74 75
11	13 14 16 23 24 25 35 46	26	12 15 17 25 28 34 36 46 47 58 67
12	12 14 24 25 31 32 35 61 63	27	12 15 18 27 34 35 36 47 56 71 73 85
13	14 15 23 26 34 36 42 45 46	28	18 23 26 37 38 48 58 67 68
14	12 16 27 34 35 46 56 73 78 81	29	14 18 23 24 28 34 38 45 56 67 78
15	12 13 14 23 24 25 26 43 51 56 61	30	13 18 23 24 25 46 47 57 87

6. В табл. 3.49 для 30 вариантов приведены семейства вершин для двудольного графа и гиперграфа.

(а) По данным вашего варианта построить двудольный граф и реберный ему граф. Для двудольного графа выписать максимальные паросочетания и минимальные реберные покрытия. Для реберного

графа определить все максимальные вершинные независимые множества и все минимальные вершинные покрытия. С этой целью использовать булеву функцию реберного графа, записав ее в КНФ; далее, воспользовавшись законами поглощения, найти булеву функцию в ДНФ; и, наконец, произвести проверку найденных выражений с помощью принципа двойственности.

(б) По данным вашего варианта построить гиперграф и, воспользовавшись матрицей инцидентности, — двойственный ему граф. Для обоих графов указать наибольшие паросочетания и наименьшие реберные покрытия. Используя булевы функции, найти минимальные трансверсальные покрытия и максимальные множества независимых вершин. Проверить правильность нахождения этих множеств, исходя из принципа двойственности булевых функций.

Таблица 3.49

№	Семейства вершин	№	Семейства вершин
1	1356, 245, 34, 26, 12	16	236, 136, 1245
2	16, 25, 45, 36, 234	17	125, 136, 146, 26 45
3	123, 34, 35, 154	18	15, 12, 1346, 2356
4	36, 56, 34, 15, 12	19	345, 234, 156, 123
5	46, 35, 13, 16, 256	20	46, 32, 145, 1356
6	23, 46, 156, 126	21	3456, 246, 135
7	13, 24, 35, 46, 126	22	123, 125, 36, 456
8	1456, 2346, 13, 12	23	346, 26, 56, 134, 125
9	345, 156, 14, 12, 25	24	456, 23, 14, 13, 1256
10	12, 13, 3456, 156	25	56, 235, 134, 124, 16
11	14, 23, 15, 3456, 26	26	16, 234, 25, 3456
12	134, 235, 236, 24	27	125, 146, 256, 34
13	13, 1246, 2356	28	35, 245, 1456, 12, 13
14	456, 346, 156, 123	29	1235, 136, 246, 56
15	46, 25, 15, 1236, 35	30	123, 234, 25, 46, 26

7. На рис. 3.73 приведены 30 многогранников. Для многогранника своего варианта вычертите соответствующий граф, постройте двойственный ему, найдите для обоих графов их матрицы смежности и определите группу симметрии. Две подстановки проверьте на выполнение коммутационного соотношения.



## 4. Фракталы

### 4.1. Что такое фрактал

Термин «фрактал» был введен в 1975 г. Бенуа Мандельбротом в связи с *фрактальной*, т.е. *дробной* (сравните: *фракция*), размерностью, которую в 1919 г. ввел математик Феликс Хаусдорф. *Фрактал*, по определению Мандельброта, есть некая цельная структура любой природы, состоящая из частей (субструктур), которые в том или ином смысле подобны целому. Небольшая часть фрактала содержит информацию обо всем фрактале; фрактал может включать в себя повторяющиеся субструктуры бесконечное число раз. *Самоподобие* является, пожалуй, одним из основных признаков фракталов, хотя и не единственным. В соответствии с этим определением эффективным инструментом для описания фрактальных процессов и структур является *рекурсивная* функция, имеющая своим аргументом саму себя:

$$f(x), f(f(x)), f(f(f(x))), \dots$$

Рекурсию можно осуществить несколькими математическими средствами, в том числе и через *прямое произведение матриц*. В этом произведении, называемом также *кронекеровским*, каждый элемент результирующей матрицы содержит исходную матрицу. С помощью матриц, как мы знаем, фиксируется определенная, чаще всего, пространственная организация. Следовательно, многократно произведенное прямое умножение позволяет мультиплицировать исходную структуру. При этом матрица выступает в качестве *паттерна*, который способен генерировать *иерархическую систему*, каждый уровень которой воспроизводит предыдущий в больших или меньших масштабах. Рекурсивный геометрический образ в виде древовидного графа также лежит в основе большинства фрактальных структур. Существуют *итерационные* алгоритмы, которые по своей сути схожи с матричным, графическим или функциональным способом задания рекурсии.

По-видимому, природа воспользовалась оптимальным алгоритмом организационного развития, когда взяла за основу фрактальный принцип подобия. Обламывая сначала маленькие ветки, затем все большие и большие, мы обнаруживаем некоторую неизменную форму дерева. Отношение числа отсеченных ветвей к числу оставшихся всегда остается примерно постоянным, хотя на первом этапе обламываются крохотные побеги длиной в несколько сантиметров,

а на последнем — многометровые ветви. Еще Леонардо да Винчи предположил, что сумма площадей сечения всех ветвей дерева на определенном уровне дает площадь сечения его ствола. А ведь по древовидному принципу устроена нервная, дыхательная и кровеносная системы животных. Трахея разветвляется на два бронха, задавая, таким образом, образец для более мелких геометрических форм и т.д.

Биогенетический закон Мюллера и Геккеля тоже относится к фрактальным механизмам регулирования живой природы, поскольку он касается масштабной симметрии, проходящей через все уровни эволюционного развития организма. Этот биологический закон гласит: *онтогенез повторяет филогенез*. Согласно этой формуле организмы в процессе своего индивидуального развития обнаруживают тенденцию вновь проходить те же самые стадии развития, которые они прошли в ходе своей эволюции. Такая повторяемость процессов начального созревания организма сильно сокращена во времени, многие этапы развития филогенеза просто выпадают из последовательности онтогенетического развития, тем не менее это единственный биологический закон, который хоть как-то объясняет, почему у зародышей высших млекопитающих появляются жаберные щели и прочие атавистические признаки.

Однако многие авторы научно-популярных статей заходят слишком далеко, когда начинают фантазировать, будто в крохотной микрочастице (электроне, протоне или каком-нибудь экзотическом «фридмоне») может содержаться целая Вселенная. Подобные апологеты фрактального устройства всего и вся уверяют, будто электроны и протоны несут некий «генетический код» Вселенной, который содержит всю информацию о мире, и нужно уметь только расшифровать ее, чтобы начать «выводить» новые разновидности миров. Такое применение теории фракталов для конструирования новых вселенных не может быть воспринято серьезно, поскольку для столь глобальных и смелых предположений пока нет никаких эмпирических данных.

Теория фракталов, несмотря на свою широту, тем не менее эффективно обслуживает довольно узкую прикладную область, тесно связанную с компьютерами. Эта область касается фрактального или рекурсивного сжатия или расширения изображения. Первым примером здесь, конечно, служит известная задача графического моделирования изрезанной береговой линии. Проблема состоит в том,

что когда повторяют береговую линию в бесчисленных ее деталях, вплоть до размеров прибрежной гальки, то ее длина оказывается больше земного экватора. Таким образом, возникает задача следующего содержания: где тот разумный предел детализации при воспроизведении контуров береговой линии, горного ландшафта или любого другого географического объекта, чтобы решение не выглядело абсурдным и не было слишком неудобным с точки зрения его использования на практике. Следовательно, нужна математически обоснованная процедура сглаживания, которая будет зависеть от масштаба изображения. Кроме того, необходимо учитывать запросы потребителя. Очевидно, на небольшой карте, взятой из учебника географии, можно пренебречь некоторыми крохотными островами и бухтами Скандинавского полуострова. Другое дело — мореходная карта лоцмана, цель которого — уметь находить безопасные пути причаливания к берегам Норвегии.

Так возникает проблема соотношения локальной и глобальной геометрии. Раньше для решения подобной задачи использовали только измерительный циркуль, который перемещали вдоль некоторой ломаной кривой. С помощью этого нехитрого инструмента производили спрямление узких морщин береговой линии. В зависимости от масштаба ножки циркуля растворялись на определенный угол, этот угол фиксировался зажимом и далее при обходе береговой линии по карте малого масштаба эта линия спрямлялась так, что на новой карте большего масштаба контуры берега имели примерно ту же степень изрезанности, что и на исходной карте. Сегодня эту задачу с молниеносной скоростью, в режиме реального времени должен выполнять бортовой компьютер, установленный на каком-нибудь «Томагавке». На этой ракете существует эффективная система самонаведения на цель, которая может находиться за тысячу километров от пусковой установки. Подобие в различных масштабах — это, как уже было сказано, основная особенность фракталов. Изменение масштаба нередко служит единственным методом при нахождении правильного решения. Если у вас прогресс отсутствует в каких-то графических исследованиях, подумайте, не следует ли вам изменить масштаб изучаемого объекта.

Сегодня фрактальная методика широко применяется в компьютерной графике и дизайне. Именно компьютерные манипуляции с графическим образом положили начало серьезному математическому исследованию того, что раньше считалось баловством или, в

лучшем случае, относилось к искусству. Фракталы определяются как геометрические процедуры, обладающие свойством воспроизводить исходный объект при его масштабном увеличении или уменьшении. Эта «бестолковая» процедура, порождающая множество симпатичных узоров в виде ковриков и деревьев, была и во многом остается скорее художественным приемом, чем источником истинного знания о реальном мире. Однако, помимо масштабной симметрии, существует еще одно важное понятие, которое тесно связывает теорию фракталов с действительностью. Этим понятием является *аттрактор*, который тесным образом связан со строго упорядоченными структурами. Можно сказать, что аттрактор и хаос находятся в *отношении двойственности*.

Шум шуму — рознь. Например, фоновый, или белый, шум, возникающий в канале телефонной связи, не совсем белый. «Случайные» флуктуации токов являются некоторым искажением речи; шум следует за первоначальным образцом, в чем-то повторяя его, а в чем-то отличаясь от него. В шумовом сигнале узнается какая-то закономерность, которую прежде следовало разгадать, чтобы потом можно было техническими средствами исключить. На любом уровне сглаживания случайных пиков обнаруживалась составляющая, которая присутствовала и в полезном сигнале, породившем этот шум. Эти первоначально полезные компоненты становились вредными благодаря многократному копированию на более низких амплитудах в виде частотной «ряби» или амплитудных «хвостов», которые цеплялись на основные гармоники полезного сигнала. Шумовая составляющая была явно вызвана к жизни полезным компонентом сигнала, но потом вышла из повиновения и стала развиваться по своим собственным внутренним законам. Шумовые флуктуации были вполне детерминированы, хотя они и относились к автономным, саморазвивающимся процессам, чувствительным к начальным условиям. Однако шумы компьютера, возникающие при вычислении амплитуды мод фракталов, которые мы рассмотрим здесь детально, имеют мало общего с только что описанными шумами в телефонной сети.

Переход от порядка к хаосу происходит *скачкообразно*; это последнее слово часто заменяют словами *взрыв*, *буря*, *революция*, *ломка* и т.д. Линейная и непрерывная математика здесь отказывается работать, и ей на смену приходит существенно нелинейная и дискретная математика. Быстрый переход от прежних законов функ-

ционирования системы к новым совершается в результате длительного, кумулятивного, скрытого, монотонного, количественного накопления, которое затем неожиданно сменяется на качественное изменение, со всеми своими противоположными эпитетами, приводящее нередко к разрушению самой системы. Здесь можно привести множество примеров из самых различных областей науки и техники.

Мир фракталов огромен и разнообразен. Фракталы находят в механике и акустике, в химии и биологии. Новые методы вычислений позволяют предупредить и избежать многих социальных катаклизмов. Для описания огромного числа объектов природы и общества, начиная от химических колебаний Белоусова и Жаботинского до развязывания локальных конфликтов, больше подходят приемы дискретной математики. Специалисты в области синергетики убедились, что не дифференцируемые и не гладкие кривые и поверхности, которые изучаются в курсе классического математического анализа, служат инструментом описания физических, биологических и социальных явлений, а ломаные, слоистые, дробленные, иначе говоря, фрактальные структуры. За последние два десятка лет произошла подлинная революция в компьютерных технологиях. Ситуация радикально изменилась, делая нелинейную математику доступной для обработки на компьютерах в масштабе реального времени. Фракталы стали и новым направлением в изобразительном искусстве, демонстрируя собой картины необычайной красоты и привлекательности. Однако нас они будут интересовать только с точки зрения математических закономерностей.

## 4.2. Прямое произведение и фракталы

На рис. 4.1 изображены: деление единичного отрезка на 3 части (а), единичной квадратной площадки на 9 частей (б), единичного куба на 27 частей (в) и на 64 части (г). Если число частей обозначить через  $n$ , коэффициент масштабирования или подобия — через  $k$ , а размерность пространства — через  $d$ , то в соответствии с приведенными рисунками имеем следующие соотношения:

$$n = k^d, \quad d = \frac{\ln(n)}{\ln(k)},$$

если  $n = 3$ ,  $k = 3$ , то  $d = 1$ ; если  $n = 9$ ,  $k = 3$ , то  $d = 2$ ; если  $n = 27$ ,  $k = 3$ , то  $d = 3$ .

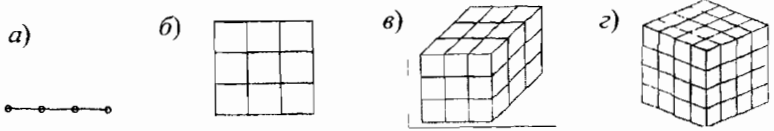


Рис. 4.1

При уменьшении линейных размеров в 4 раза согласно приведенному соотношению, имеем: если  $n = 4$ ,  $k = 4$ , то  $d = 1$ ; если  $n = 16$ ,  $k = 4$ , то  $d = 2$ ; если  $n = 64$ ,  $k = 4$ , то  $d = 3$ . Во всех случаях размерность пространства выражается *целыми числами*:  $d = 1, 2, 3$ ; в самом деле, для  $n = 64$  (рис. 4.1з), величина  $d$  равна

$$d = \frac{\ln(n)}{\ln(k)} = \frac{\ln(64)}{\ln(4)} = \frac{4,1589}{1,3863} = 3.$$

На рис. 4.2 показано пять шагов построения *ломаной Коха*: первоначально берется отрезок единичной длины (а), делится на три части ( $k = 3$ ) и из четырех частей ( $n = 4$ ) составляется ломаная (б); затем каждый прямой отрезок вновь делится на три части ( $k^2 = 9$ ) и из 16 частей ( $n^2 = 16$ ) составляется ломаная (в); процедура повторяется для  $k^3 = 27$  и  $n^3 = 64$ , в результате получается ломаная (г); наконец, при  $k^5 = 243$  и  $n^5 = 1024$  получаем ломаную (д).

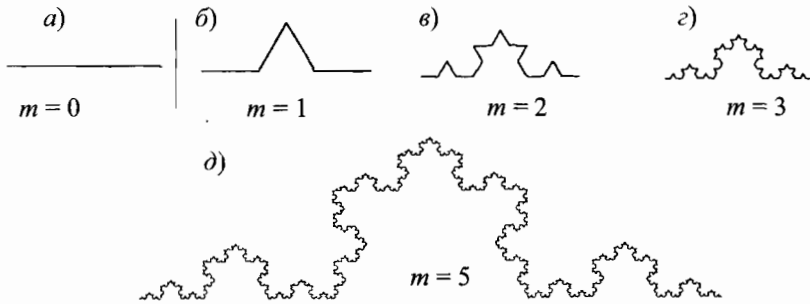


Рис. 4.2

Если следовать вышеприведенному соотношению для размерности пространства, то получим следующий ряд отношений:

$$d = \frac{\ln(4)}{\ln(3)} = \frac{\ln(16)}{\ln(9)} = \frac{\ln(64)}{\ln(27)} = \dots = 1,26187.$$

Таким образом, здесь мы можем говорить о *дробной*, или *фрак-*

тальной размерности, пространства, которая на всех шагах оставалась одной и той же, как если бы мы разделили квадрат на 9 частей, затем каждый маленький квадрат снова разделили на 9 частей, получив общее число квадратиков, равным 81, и т.д. Такая процедура не влияет на размерность пространства. Число пройденных шагов или показатели степени, в которые возводятся числа  $k$  и  $n$ , обозначим через  $m$  (у нас показано  $m = 0, 1, 2, 3$  и 5).

Ломаная Коха, предложенная Гельгом фон Кохом в 1904 г., выступает сейчас в роли *фрактала*, который прекрасно подходит для моделирования изрезанности *береговой линии*. Мандельброт в алгоритм построения береговой линии внес элемент случайности, который, однако, не повлиял на основной вывод в отношении длины береговой линии. Поскольку предел

$$\lim_{m \rightarrow 0} \left( \frac{4}{3} \right)^m = \infty,$$

длина береговой линии за счет бесконечной изрезанности берега стремится к бесконечности. Процедура *сглаживания береговой линии* при переходе от более детального масштаба к менее детальному, т.е. согласно рис.4.2 переходы от (д) к (з), от (з) к (в), от (в) к (б), дает одну и ту же величину: на три части длины — одну «бухту», а длина стремится к единичному значению.

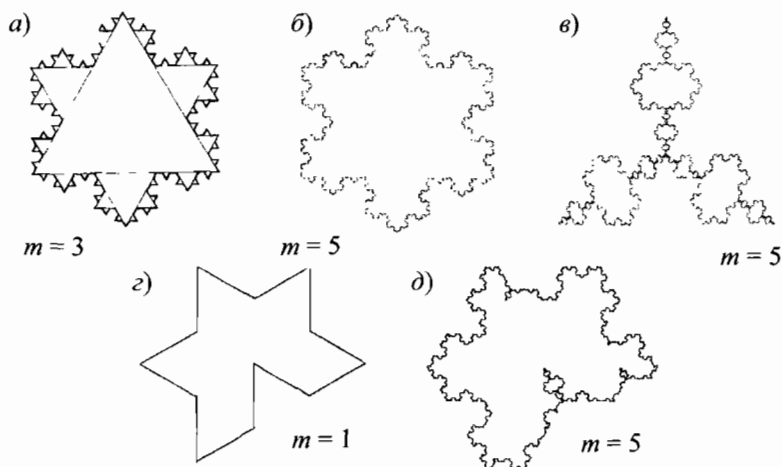


Рис. 4.3

В качестве основы можно взять не отрезок единичной длины, а

равносторонний треугольник, на каждую сторону которого распространить процедуру умножения изрезанности. В этом случае получим *снежинку Коха* (рис. 4.3), причем трех видов: вновь образующиеся треугольники направлены только наружу от предыдущего треугольника (*a*) и (*b*); только внутрь (*в*); случайным образом либо наружу, либо внутрь (*г*) и (*д*). Сейчас наша ближайшая задача состоит в том, чтобы научиться задавать процедуру построения фрактала Коха.

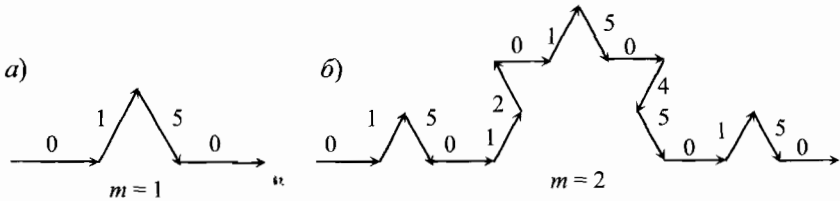


Рис. 4.4

На рис. 4.4 показаны две векторные диаграммы; числа, стоящие над стрелками, видимо, вызовут вопрос: что бы они значили? Вектор 0 совпадает с положительным направлением оси абсцисс, так как его фазовый множитель  $\exp(i2\pi l/6)$  при  $l = 0$  сохраняет его направление. Вектор 1 повернут относительно вектора 0 на угол  $2\pi/6$ , когда  $l = 1$ . Вектор 5 имеет фазовый множитель  $\exp(i2\pi 5/6)$ ,  $l = 5$ . Последний вектор имеет тот же фазовый множитель, что и первый ( $l = 0$ ). Таким образом, целые числа  $l$  характеризуют угол фазового множителя единичного вектора.

Итак, мы рассмотрели первый шаг (рис. 4.4а), который задает рекурсивную процедуру для всех последующих шагов и, в частности, для второго шага (рис. 4.4б). Ставится вопрос, как перейти от набора чисел  $\varphi_1 = \{0\ 1\ 5\ 0\}$  к  $\varphi_2 = \{0\ 1\ 5\ 0\ 1\ 2\ 0\ 1\ 5\ 0\ 4\ 5\ 0\ 1\ 5\ 0\}$ ? Ответ: через прямое перемножение матриц, когда каждый элемент одной матрицы умножается на исходную матрицу. Поскольку в данном случае мы имеем дело с одномерным массивом, т.е. матрицы представляют собой векторы, то здесь производится умножение каждого элемента одной матрицы-вектора на все элементы другой матрицы-вектора. Кроме того, элементы матрицы-вектора  $\varphi_1$  состоят из показательных функций  $\exp(i2\pi l/6)$ , следовательно, при перемножении числа  $h$  нужно будет складывать по  $\text{mod}(6)$ , а не умножать. После этих разъяснений становится понятна следующая запись:



$$\begin{aligned}\varphi_2 &= \varphi_1 \times \varphi_1 = \{0\ 1\ 5\ 0\} \times \{0\ 1\ 5\ 0\} = \\ &= \{[(0\ 1\ 5\ 0) + 0] [(0\ 1\ 5\ 0) + 1] [(0\ 1\ 5\ 0) + 5] [(0\ 1\ 5\ 0) + 0]\} = \\ &= \{[0\ 1\ 5\ 0] [1\ 2\ 0\ 1] [5\ 0\ 4\ 5] [0\ 1\ 5\ 0]\} = \{0\ 1\ 5\ 0\ 1\ 2\ 0\ 1\ 5\ 0\ 4\ 5\ 0\ 1\ 5\ 0\};\end{aligned}$$

$$\varphi_3 = \varphi_2 \times \varphi_1; \dots \varphi_m = \varphi_{m-1} \times \varphi_1.$$

Итак, для задания фрактала Коха нам требуется три числа и один вектор, а именно:  $k = 3$  — коэффициент подобия;  $n = 4$  — число частей, образующих *паттерн*;  $h = 6$  — число, определяющее фазовый множитель  $\exp(i2\pi l/h)$  и фигурирующее в основании  $\text{mod}(h)$ , по которому производится сложение показателей экспоненты, и базовый вектор или, собственно, сам паттерн  $\varphi_1 = \{0\ 1\ 5\ 0\}$ . Заметим, слово *паттерн* часто заменяют словосочетанием *затравочная схема, структура, матрица* или *генератор фрактала* и т.п. Однако вряд ли есть смысл искать другие русские эквиваленты этому английскому слову, уже прочно вошедшему в русский лексикон. Если факт заимствования термина налицо, то и нужно его принимать со всеми теми семантическими оттенками, которые существуют в английском языке. Прямой перевод слова *pattern* означает *пример для подражания, образец, образцовая модель, система, стиль, выкройка, орнамент, узор, рисунок*. Невозможно подыскать такой же емкий и точный термин в русском языке, передающий этот же самый смысл.

Приведем еще четыре фрактала и их краткое описание через векторную диаграмму. Читателю не составит большого труда самому придумать сотни аналогичных фракталов. Затем можно заставить компьютер производить прямое перемножение векторов, а результат отображать на экране дисплея, как на рис. 4.5.

а)  $k = 3, n = 8, h = 5, \varphi = \{0\ 0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 0\ 0\}$ ;

б)  $k = 3, n = 8, h = 5, \varphi = \{0\ 0\ 2\ 4\ 1\ 3\ 0\ 0\}$ ;

в)  $k = 3, n = 5, h = 4, \varphi = \{0\ 1\ 0\ 3\ 0\}$ ;

г)  $k = 3, n = 7, h = 6, \varphi = \{0\ 1\ 5\ 3\ 5\ 1\ 0\}$ .

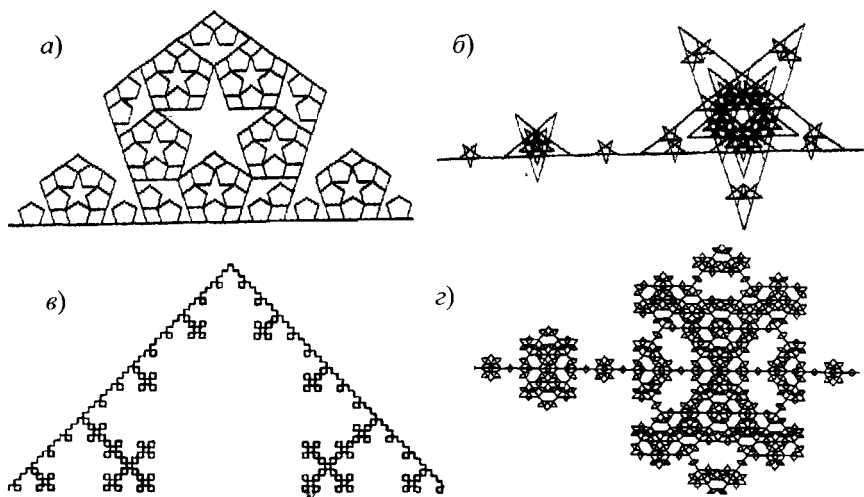


Рис. 4.5

Эта необыкновенная легкость, с которой можно получить красивые узоры с помощью самой незатейливой математики и элементарного программирования, привлекла к теме фракталов огромное число любителей. Однако все приведенные фракталы одномерные, т.е. их графические изображения представляют собой линии, а в прямом умножении участвуют векторы. А нет ли таких фракталов, когда бы в прямом произведении участвовали полноценные матрицы? Да, есть; на рис. 4.6 в трехмерном пространстве изображена губка Менгера (а), ее внутренний объем (б) и двумерный эквивалент (в). Она также является фракталом, для которого процедуру рекурсии можно отразить с помощью матриц. Для трехмерной губки пришлось бы иметь дело с трехмерными матрицами — такие существуют, действия с ними хорошо известны, но они слишком громоздки, чтобы использовать их сейчас для анализа. Пусть ими занимаются компьютеры, мы же обратимся к двумерному случаю. Поставим в соответствие темным участкам квадрата 1, а светлым — 0 (рис. 4.6в). В таком случае паттерн плоской губки  $\phi_1$  с единственной дыркой внутри выглядит в виде матрицы  $3 \times 3$ . Перемножая ее прямым образом саму на себя или возводя ее последовательно в степень 2, 3 и т.д., мы получим фракталы  $\phi_2$ ,  $\phi_3$  и т.д.

$$\varphi_2 = \varphi_1 \times \varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 1 & 1 & | & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & | & 1 & 1 & 1 & | & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & | & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & | & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & | & 1 & 1 & 1 & | & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & | & 1 & 1 & 1 & | & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\varphi_3 = \varphi_2 \times \varphi_1 \dots$$

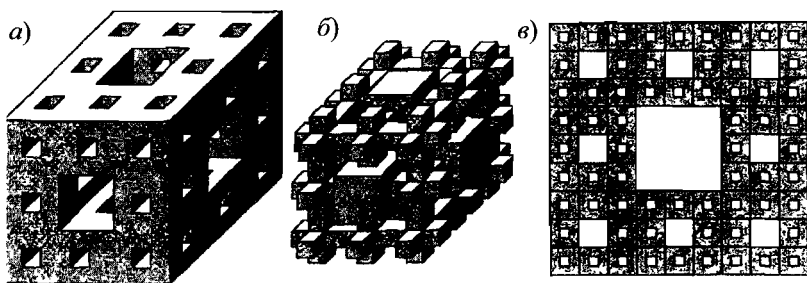


Рис. 4.6

Фрактальной структуре подчинены коэффициенты бинома:

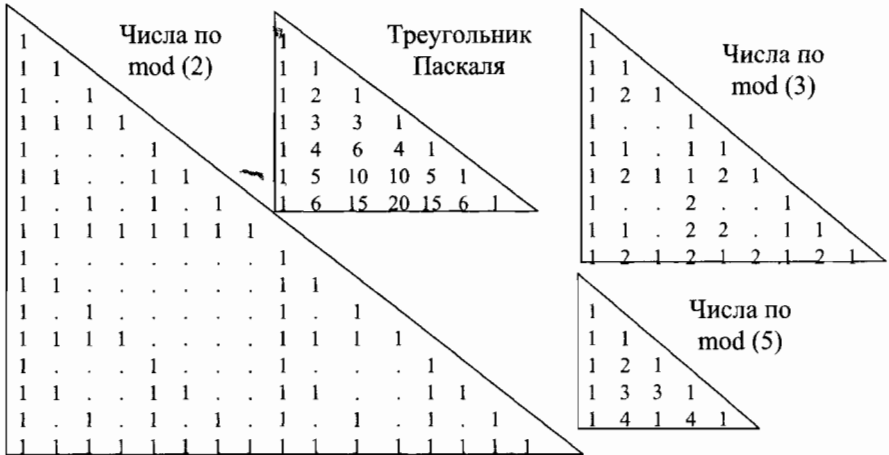
$$(1+x)^n = 1 + nx + n(n-1)x^2/2! + n(n-1)(n-2)x^3/3! + \dots + n!x^k/(n-k)!k! + \dots$$

Если коэффициенты бинома выстроить рядами, как это показано в табл. 4.1 (в центре), то получим так называемый *треугольник Паскаля*. Беря все числа в треугольнике Паскаля последовательно по  $\text{mod } (2)$ ,  $\text{mod } (3)$ ,  $\text{mod } (4)$ ,  $\text{mod } (5)$  и т.д., мы будем получать треугольные матрицы, верхняя часть которых состоит из нулей. Эти треугольные матрицы можно уже перемножать прямым образом. Например, прямое перемножение двух треугольных матриц  $3 \times 3$  по  $\text{mod } (3)$  дает в результате треугольную матрицу  $9 \times 9$ , которая в точности совпадает с треугольником Паскаля, записанным по  $\text{mod } (3)$  этого же размера:

$$\varphi_2 = \varphi_1 \times \varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & | & 1 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 1 & | & 1 & 2 & 1 & | & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & | & 2 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & | & 2 & 2 & 0 & | & 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 1 & | & 2 & 1 & 2 & | & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\varphi_3 = \varphi_2 \times \varphi_1 \dots$$

Таблица 4.1



Такие умножения справедливы для случая mod (4), mod (5) и т.д. В случае же, когда треугольник Паскаля составляется по mod (2), его внешний вид напоминает губку Менгера, но только треугольной формы (рис. 4.7).

Вообще, губки Менгера треугольной, квадратной, кубической, пирамидальной, любой другой формы приковали к себе внимание ученых потому, что они обладают одним замечательным свойством: чем шире ее габаритные границы (рис. 4.6), тем больший внутренний объем в них образуется (рис. 4.6б). Иначе говоря, при разрастании губки отношение их внешнего объема к внутреннему стремится к единице. Это

свойство является самым важным для губок, живых и искусственных, например, тех, которыми мы моемся. За счет множественных внутренних пустот, губка способна удерживать большое количество влаги, т.е. она работает в качестве своеобразного сосуда, который состоит не из одной открытой камеры, а огромного числа соединенных друг с другом полостей. Губку можно рассматривать как древовидную структуру. В природе встречаются такие виды растений и животных, особенно обитающих в морских глубинах, когда густая сеть ветвей, расположенных ближе к корневому телу, срastaются так, что образуют одну губчатую поверхность, хотя внешние ветви могут сильно вытягиваться в виде усов, щупальцев или палпусов для захвата пищи. Более того, если на биологическое вещество смотреть с точки зрения его структурно-

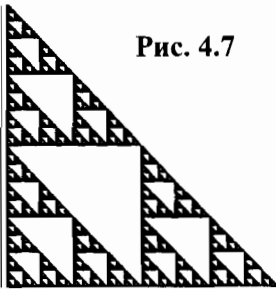


Рис. 4.7

пространственной организации, то окажется, что оно сплошь выстроено по губчатому принципу. Это касается в большей мере, скажем, дыхательной системы, но аналогично устроены и системы кровообращения, пищеварения и прочие системы жизнеобеспечения.

### 4.3. К вопросу о размерности

Фрактальное строение живой и неживой природы — всё это, конечно, очень любопытно, но нас сейчас интересуют математические аспекты. В частности, у читателя наверняка созрел вопрос относительно пространственной размерности. В каком смысле говорилось о дробной размерности в начале этого подраздела и в каком смысле эта дробная размерность касается трехмерных и двухмерных губок, изображенных на рис. 4.6 и рис. 4.7? Чтобы не вводить читателя в заблуждение, ему с самого начала необходимо объяснить, что фрактальная размерность — понятие достаточно искусственное, которое ничего общего не имеет с реальной размерностью физического мира. Не нужно путать также размерность пространства с его связанностью. Топологическая связанность, как мы знаем (п. 3.6), выра-

жается целыми числами, причем связанность плоскости и шара одна и та же, хотя шар — математический объект трехмерного пространства, а плоскость — двухмерного. Тор и «кренделя» существуют в трехмерном мире, их высокая целочисленная величина связанности позволяет планарным образом уложить на их поверхности непланарные на шаре графы. Размерность пространства, как и связанность, может быть только целочисленной величиной. Фрактальная размерность тоже может оказаться целочисленной, однако некоторые авторы, следуя традиции, целочисленную размерность за фракталами не признают. Этот факт делает прекрасную *ломаную Пеано*, удовлетворяющую свойствам фрактала, нефрактальной. Познакомимся с ней поближе.

В 1890 г. итальянский математик Джузеппе Пеано (1858 — 1932), исследуя вопросы теории континуальных множеств, решил построить линию, которая отвечала бы точкам плоскости. Если взять единичный квадрат, разделить его на девять частей и затем обойти все эти части по маршруту, указанному на рис. 4.8а, то будем иметь настоящий паттерн с размерностью  $d = 2$ , т.е. той же, что и у плоскости. В том, что это действительно паттерн, убеждают два рисунка (рис. 4.8б и 4.8в), на которых показана диаграмма, отвечающая следующему набору величин:

$$k = 3, \quad n = 9, \quad h = 4 \quad \text{и} \quad \varphi = \{0 \ 1 \ 0 \ 3 \ 2 \ 3 \ 0 \ 1 \ 0\}.$$

Для удобства записи векторов единичная площадка, изображенная на рис. 4.8а, на двух следующих рисунках (рис. 4.8б и 4.8в) повернута так, чтобы направление начала обхода совпало с горизонтальным направлением оси абсцисс.

Исходный квадрат можно разбивать не на 9 квадратиков, а на 4. В этом случае размерность не изменится ( $d = 2$ ), но обход квадратиков и, следовательно, правила рекурсии поменяются в соответствии с новой конфигурацией, развитие которой можно проследить на рис. 4.9 (а, б, в и д). Вся плоскость может быть разделена не на квадраты, а на треугольники, как это показано на рис. 4.9г. Тогда внешний вид фрактала заметно изменится (рис. 4.9е). Обход разбитой на части плоскости можно организовать совершенно иначе (рис. 4.9ж), но размерность фрактала не изменится. Если существует фрактал с целочисленной размерностью  $d = 2$ , то аналогичным путем можно получить объемный фрактал с целочисленной размерностью  $d = 3$ . Отказываться зачислять кривые, наподобие ломаной Пеано, в раз-

ряд фракталов только потому, что у них целочисленная размерность, было бы не совсем разумно. Поэтому вполне понятно, что ломаная Пеано так или иначе рассматривается практически всеми авторами, пишущими о фракталах.

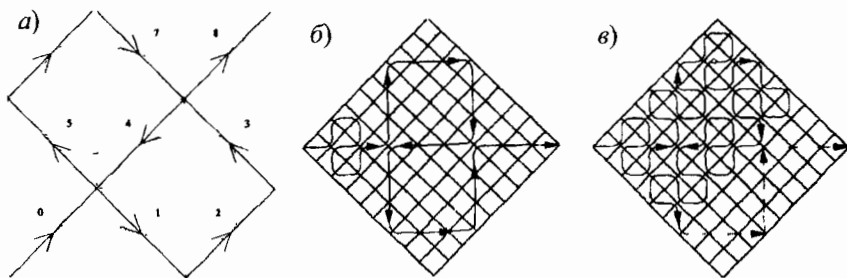


Рис. 4.8

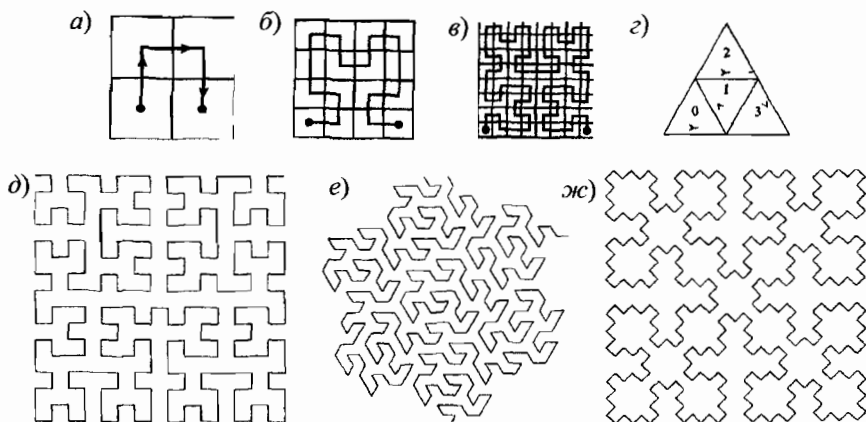


Рис. 4.9

На рис. 4.10а показан линейный фрактал, заданный параметрами:

$$k = 2, \quad n = 5, \quad h = 3 \quad \text{и} \quad \varphi = \{0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 0\}.$$

Размерность этого фрактала равна

$$d = \frac{\ln(n)}{\ln(k)} = \frac{\ln(5)}{\ln(2)} = \frac{1,6094}{0,6931} = 2,32193;$$

второй вектор равен

$$\varphi_2 = \{0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 0\} \times \{0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 0\} = \{00120 \ 00120 \ 11201 \ 22012 \ 00120\}.$$

В соответствии с  $\varphi_2$  можно построить первые две пирамиды, причем некоторые отрезки ломаной придется проходить по два раза. Вся целиком ломаная, изображенная на рис. 4.10а, соответствует пятому шагу ( $m = 5$ ), т.е. вектору  $\varphi_5$ .

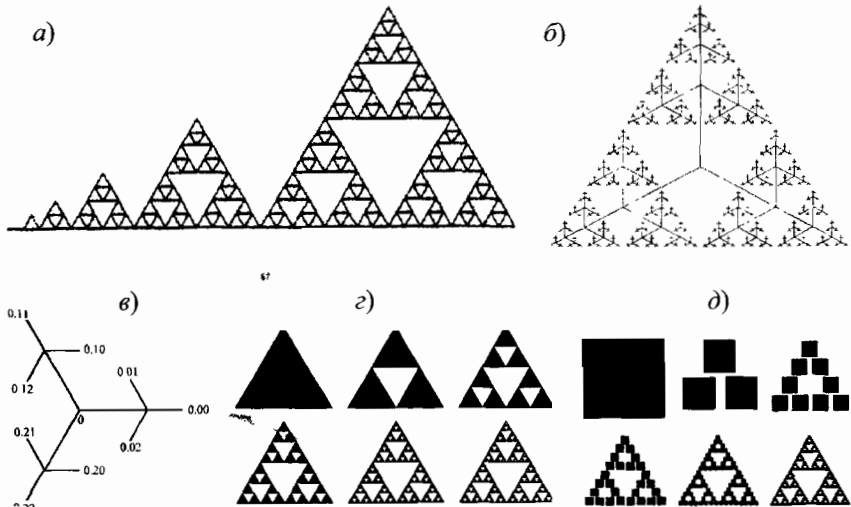


Рис. 4.10

Однако похожую структуру, изображенную на рис. 4.10а, дают многие фракталы, в основе которых лежат самые различные паттерны. На рис. 4.10б изображено троичное дерево при  $m = 5$ ; его граф-паттерн легко вычленил из дерева с  $m = 2$ , показанного на рис. 4.10в. Несложно с помощью компьютерной программы этот граф-паттерн заставить расти подобно живому папоротнику или ледяному узору на оконном стекле в морозную погоду — именно такие ассоциации приходят в голову, когда смотришь на рис. 4.10б. С каждым шагом сторона равностороннего треугольника или его высота удваиваются, т.е.  $k = 2$ , но число элементов, из которого состоит данный паттерн, равно трем ( $n = 3$ ). На последних двух рис. 4.10 показаны схемы выстраивания аналогичных пирамид из равносторонних треугольников (г) и квадратов (д), для которых масштабный коэффициент и число элементов паттерна определяется теми же числами —  $k = 2$ ,  $n = 3$ . Треугольники, изображенные на рис. 4.10г, мало чем отличаются от треугольника, показанного на рис. 4.7. Мы знаем, что любой плоский треугольник с точки зрения геометрии имеет пространственную размерность, равную двум; ломаная кри-



вая, какая бы она ни была, имеет геометрическую размерность, равную единице; а объемные фигуры, вроде губки Менгера, изображенной на рис. 4.6а, имеют размерность, равную трем. Но что у нас получается, когда мы начинаем подсчитывать размерность по формуле Хаусдорфа? Для явно плоских объектов, какими являются фигуры, изображенные на рис. 4.7 или 4.10 (z) и (d), формула дает следующее дробное число:

$$d = \frac{\ln(n)}{\ln(k)} = \frac{\ln(3)}{\ln(2)} = \frac{1,0986}{0,6831} = 1,58496.$$

Числа  $d = 2,32193$  (подсчитанное в общем-то для одномерной геометрической фигуры, показанной на рис. 4.10а) и  $d = 1,58496$  различаются заметно. Чтобы не создавать путаницы в размерности, нужно разделить геометрическую и фрактальную размерность. Пирамида, выстроенная наподобие карточного домика, была предложена польским математиком Вацлавом Серпинским (1882 — 1969) в 1915 г. в связи с его исследованиями в области теории множеств. Сейчас эту конструкцию часто называют *ковром* или *салфеткой Серпинского*. В дальнейшем при построении ковра Серпинского мы применим преобразование подобия или аффинное преобразование, размерность которого определяется числом переменных. Это преобразование может увеличивать или уменьшать площадь геометрического объекта, поворачивать или переносить его с места на место, но оно никак не влияет на пространственную размерность этого объекта.

Главным идеологом теории множеств был *Георг Кантор* (1845—1918). Он в 1883 г. предложил алгоритм построения бесконечного множества отрезков, которые до этого, в 1875 г. рисовал еще Генри Смит. Сейчас это множество называется *пылью Кантора*; алгоритм получения канторовской пыли показан на рис. 4.11а. Нам ничего не стоит слегка изменить этот алгоритм, а именно, делить каждый отрезок не на три части, а на пять, и выбрасывать не одну долю, а две, как это показано на рис. 4.11б. Для канторовской пыли имеем  $k = 3$ ,  $n = 2$ , для вновь полученной —  $k = 5$ ,  $n = 3$ ; значит, существуют и две различные размерности:

$$d = \frac{\ln(2)}{\ln(3)} = \frac{0,6831}{1,0986} = 0,62179, \quad d' = \frac{\ln(3)}{\ln(5)} = \frac{1,0986}{1,6094} = 0,68261.$$

И вновь зададимся тем же самым вопросом, какая принципиаль-

ная разница заключена в этих двух рисунках? Очевидно, никакой, значит, ее нет и для порождающих векторов и для фракталов, изображенных на рис. 4.11а —

$$\varphi_1 = \{101\}, \varphi_2 = \{101\ 000\ 101\}, \varphi_3 = \{101\ 000\ 101\ 000\ 000\ 000\ 101\ 101\ 101\} \dots$$

и на рис. 4.11б —

$$\varphi'_1 = \{10101\}, \varphi'_2 = \{10101\ 00000\ 10101\ 00000\ 10101\}, \dots$$



“ Рис. 4.11

Итак, мы в состоянии изменить размерность, если слегка изменим правила порождения паттерна. Размерность изменяется вместе с правилами, но сама по себе она ровным счетом ни о чем не говорит.

Чтобы убедиться в этом, вернемся к фракталу, который изображен на рис. 4.10а. Ломаная кривая в соответствии с вектором  $\varphi_1 = \{0\ 0\ 1\ 2\ 0\}$  дважды проходит основание треугольника. Теперь заставим ее совершить еще один полный оборот по периметру треугольника, т.е. пусть она обовьет все стороны треугольника дважды, а его основание — трижды. Такая процедура описывается следующим набором:

$$k = 2, \quad n = 8, \quad h = 3 \quad \text{и} \quad \varphi = \{0\ 0\ 1\ 2\ 0\ 1\ 2\ 0\}.$$

Несложно проверить, что при этих условиях фрактал не изменит своего внешнего облика, ломаная кривая будет проходить по тем же узловым точкам, что и в первом случае. Несмотря на то, что в новой ситуации рис. 4.10а несколько не изменится, его прежняя размерность  $d = 2,32193$  поменяется на новую, причем целочисленную —  $d = 3$ . В самом деле,

$$d = \frac{\ln(n)}{\ln(k)} = \frac{\ln(8)}{\ln(2)} = \frac{2,0794}{0,6931} = 3.$$

И что же, теперь наша ломаная перестала быть фракталом? Конечно же, нет. Поэтому не следует придерживаться того формального признака, будто фракталы имеют только исключительно дробную размерность. Очевидно, можно смоделировать и обратную ситуацию, когда два разных фрактала будут иметь абсолютно одинаковые размерности.

Таким образом, не столь уж и важно, какими первоначальными идеями руководствовались Кантор, Серпинский или Пеано, когда изобретали алгоритмы получения своих математических объектов. Точно так же не имеет большого значения, о чем думал Хаусдорф, когда говорил о дробной размерности, или какую первоначальную задачу ставил перед собой Мандельброт, когда воспользовался его дробной размерностью при изложении своей книги. Сегодня актуальным является совершенно другое, а именно: реализация рекурсивного механизма роста фрактала на компьютере. Пусть термин «фрактал», изобретенный Мандельбротом, происходит от понятия дробной размерности, пусть эта идея привела в действие мощное интеллектуальное движение, однако при нынешнем состоянии дел понятие дробной размерности нельзя более считать чем-то основополагающим для вычерчивания тех симпатичных картинок, эстетика которых заставляет нас задуматься над их компьютерной реализацией. Ниже, при изучении динамических фракталов от функций  $ax \cdot (1 - x)$ ,  $ax \cdot \cos(x)$  и  $ax \cdot \exp(x)$ , мы убедимся, что фрактал может состоять из бесконечного количества частей, испытавших на себе самые различные масштабные изменения.

Для понимания природы размерности фракталов типа губки Менгера или ее плоского аналога ковра Серпинского более продуктивным понятием, чем размерность, является *мера внутренней емкости губки*, которую условно обозначим через  $\mu$ . Если речь идет о плоском варианте, который изображен на рис. 4.7, то площадь самого тела губки (темные области) можно было бы измерять числом единиц  $m_1$ , а площадь ее пустого пространства (светлые треугольники) — числом нулей  $m_0$ . Если очередной шаг итерации обозначить через  $m$ , а общее число символов в треугольнике со стороной катета в  $n$  единиц — через  $N$ , то справедливы следующие простые выражения:

$$N = n(n + 1)/2, n = 2^{m+1}, N = m_0 + m_1, m_1(m) = 3m_1(m - 1), \mu_\Delta = m_0/m_1.$$

По табл. 4.2 можно проследить, как увеличивается внутренний объем плоско-треугольной губки с увеличением числа итераций: через семь шагов относительный объем пустого пространства внутри губки, вначале составлявший 11%, достиг 400%, т. е. объем пустого пространства внутри губки стал в 4 раза больше объема самого тела губки.

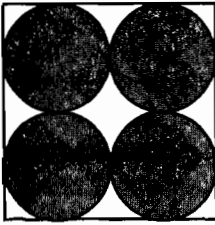


Рис. 4.85

Таблица 4.2

$m$	$n$	$N$	$m_0$	$m_1$	$\mu_\Delta$
1	4	10	1	9	0,1111
2	8	35	9	27	0,3333
3	16	136	55	81	0,6790
4	32	528	285	243	1,1728
5	64	2 078	1 350	729	1,8518
6	128	8 256	6 069	2 187	2,7750
7	256	32 896	26 335	6 561	4,0139
...	...	...	...	...	...

Еще проще подсчитать число  $\mu$  для трехмерной губки Менгера кубической формы. Первый куб объемом 27 единиц содержит 7 единиц пустоты. Следовательно, для него  $\mu_M = 7/20 = 0,35$ . Для второй губки, которая изображена на рис. 4.6 (а) и (б), общий объем равен  $9^3 = 729$ , из них 329 единиц составляет пустоту, откуда  $\mu_M = 329/400 = 0,8225$ . Эта тенденция сохраняется и в последующем: чтобы найти знаменатель  $m_1$ , нужно предыдущее число умножить на 20, т.е.

$$m_1(m) = 20 \cdot m_1(m-1), N = n^3, m_0 = N - m_1, \mu_M = m_0/m_1 = (N - m_1)/m_1.$$

Результат расчета по этим формулам  $\mu_M$  занесен в табл. 4.3, из которой видно, что темп роста внутренних полостей губки Менгера несколько выше, чем у плоско-треугольной губки Серпинского, рассмотренной перед этим.

Теперь смоделируем губку, плоский вариант которой изображен на рис. 4.12. В квадрат площадью  $a^2 = 1$  вписаны 4 круга общей площадью  $\pi/4$ ; темные круги — тело губки, т.е. величина  $m_1$ , а разность между площадью квадрата и площадью четырех кругов образует внутреннюю полость губки, т.е. величину  $m_0$ . Отсюда относительный объем пустого пространства для этой двухмерной губки равен

$$\mu^\circ = m_0/m_1 = (1 - \pi/4)/(\pi/4) = 0,2732.$$

В трехмерном пространстве эта губка будет состоять из 8 шаров, плотно упакованных в куб объемом  $a^3 = 1$ . Используя формулу для объема шара, подсчитаем величину  $\mu^\circ$  для этого случая:

$$m_1 = 8 \cdot \frac{4\pi}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{\pi}{6} = 0,5236; \quad \mu^\circ = (1 - m_1)/m_1 = 0,9098.$$

В четырехмерном пространстве губка содержит уже 16 шаров, плотно упакованных в куб объемом  $a^4 = 1$ . Общая формула для расчета объема шара, находящегося в многомерном пространстве, выглядит следующим образом:

$$V_n = k_n r^n, \quad k_n = \frac{\Gamma^n(1/2)}{\Gamma(1+n/2)}, \quad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(1+n) = n!,$$

$$\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1) = (x-1)(x-2)\Gamma(x-2) = \dots,$$

где  $r$  — радиус шара (у нас он равен  $1/4$ ),  $\Gamma(x)$  — гамма-функция, для которой здесь же мы привели основные соотношения. Для  $n = 2$  коэффициент  $k_2 = \pi$ , так как  $\Gamma^2(1/2) = \pi$ ,  $\Gamma(2) = 1$ . Для  $n = 3$  коэффициент  $k_3 = 4,1889 = 4\pi/3$ , так как

$$\Gamma^3(1/2) = 5,5683; \quad \Gamma(1+3/2) = 1,5 \cdot \Gamma(3/2) = 1,3293; \quad k_3 = 5,5683/1,3293.$$

Теперь найдем  $k_4$ ,  $m_1$  и  $\mu$  для губки, находящейся в четырехмерном пространстве:

$$\Gamma^4(1/2) = 9,8696; \quad \Gamma(1+2) = 2; \quad k_4 = 4,9348;$$

$$m_1 = 16 \cdot V_4 = k_4/16 = 0,3084; \quad \mu^\circ = 2,2425.$$

Аналогичным образом рассчитывается относительная емкость губки в пространстве пяти, шести и любого другого числа измерений. Результаты расчета  $k_n$ ,  $m_1$ ,  $m_0$ ,  $\mu^\circ$ , а также сравнения величин  $\mu_\Delta$  и  $\mu_M$  занесены в табл. 4.3. В этой таблице  $n$  означает размерность пространства, в котором находится губка,  $N$  — число шаров, плотно упакованных в кубе, сторона которого в четыре раза превышает радиус шара.

Таблица 4.3

$n$	$N$	$k_n$	$m_1$	$m_0$	$\mu^\circ$	$\mu_M$	$\mu_\Delta$
2	4	3,1416	0,7854	0,2146	0,2732	0,3500	0,1111
3	8	4,1889	0,5236	0,4764	0,9098	0,8225	0,3333
4	16	4,9348	0,3084	0,6916	2,2425	1,4604	0,6790
5	32	5,2639	0,1645	0,8355	5,0790	2,3215	1,1728
6	64	5,1677	0,0807	0,9193	11,3916	3,4840	1,8518
7	128	4,7249	0,0369	0,9631	26,1003	5,0534	2,7750
8	256	4,0587	0,0159	0,9841	61,8931	7,1721	4,0139
...	...	...	...	...	...	...	...

Количественный анализ показывает, что в двумерном случае, который изображен на рис. 4.12, четыре круга закрывают свыше 78%

площади квадрата; в трехмерном пространстве объем четырех шаров и объем свободного пространства куба почти сравнялись; а в четырехмерном мире 16 шаров занимают уже в два раза меньше пространства, чем остается пустого пространства в кубе. Таким образом, эффективность шаровой губки намного выше, чем двумерных или трехмерных ее аналогов. Однако размещение шаровой губки в пространствах с различным числом измерений ничем особенным не отличается от ряда губок, полученных путем прямого перемножения матриц плоской губки Серпинского или объемной губки Менгера. Во всех случаях получается, что с каждым следующим расширением исходного паттерна происходит перенос губки в новое пространство. Увеличение размерности результирующей матрицы при прямом перемножении как раз и свидетельствует об увеличении размерности пространства, в котором существует губка.

Итак, при росте губок фрактальная размерность плоской губки Серпинского (рис. 4.7 или 4.10г и д), обозначим ее как  $d_\Delta$ , или объемной губки Менгера (рис. 4.6а), обозначим ее как  $d_M$ , остается величиной неизменной:

$$d_\Delta = \frac{\ln(3)}{\ln(2)} = 1,5850; \quad d_M = \frac{\ln(20)}{\ln(3)} = 2,7268.$$

Но их геометрическая размерность увеличивается на единицу с каждым следующим расширением матрицы. Именно за счет расширения размерности пространства происходит добавление новых элементов фрактала. Но давайте подумаем вот над чем.

На рис. 4.13 показана рекурсия куба в пространстве двух (а), трех (б), четырех (в) и пяти (г) измерений. Многомерные кубы образуют полноценный фрактал, хотя его рекурсия описывается не через прямое произведение матриц, а весьма простой геометрической процедурой проецирования. Шаровая губка, двумерный вариант которой изображен на рис. 4.12, является элементарным дополнением к фракталу, четыре шага которого изображены на рис. 4.13. В каждом из пространств число элементов куба — ребер, вершин и грани — будет увеличиваться, но *различным* образом. Число шаров или число вершин куба с увеличением размерности пространства на единицу удваивается, т.е. фрактальная размерность здесь, кажется, равна  $d = 2$ , и эта величина не изменяется. Но исходный паттерн (а) можно определить не через 4 вершины, а через 4 одинаковых и взаимно перпендикулярных ребра. Тогда переход к трехмерному пространству (б) дает не 8, а 12 ребер, т.е.  $d = 3$ . На следующем шаге их

количество возрастет только до 32, а не 36 (в), как можно было бы ожидать, т.е.  $d = 32/12 = 2,667$ . Далее «фрактальная размерность» будет уменьшаться; так, для пятимерного пространства (з) число ребер становится равным 80, а  $d = 80/32 = 2,5$ .

Таким образом, возникает неоднозначность: почему за исходный паттерн нужно брать четыре вершины квадрата или четыре вписанных в него окружностей, а, скажем, не четыре ребра или одну его грань? Этим вопросом мы хотим подчеркнуть, что определение «фрактальной размерности», как она дается в элементарных случаях, для объектов, геометрически устроенных более сложно, чем ломаная Коха, губка Серпинского или губка Менгера, вызывает неопределенность. В процессе рекурсии разные элементы сложно организованного паттерна не обязательно должны увеличиваться на одно и то же число, называемое «фрактальной размерностью».

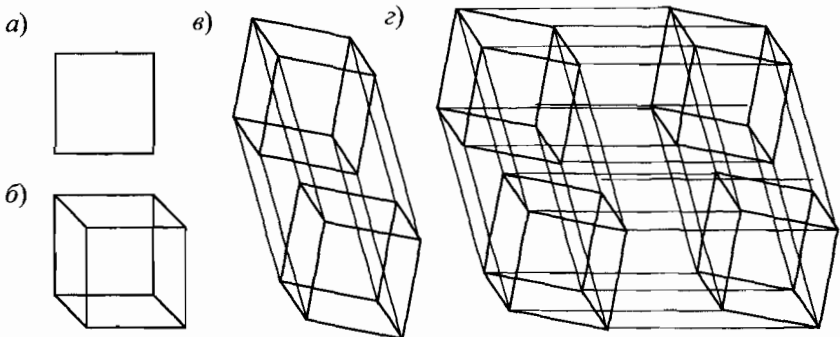


Рис. 4.13

И еще, если фрактал разворачивается по многомерным пространствам, означает ли это, что данным математическим структурам отвечает некая физическая реальность? Существуют ли на самом деле пространства четырех, пяти и большего числа измерений, где протекают фрактальные процессы? Ни в коем случае; будет большой ошибкой думать, что для тех или иных математических представлений в реальном мире обязательно найдется подходящий объект. Мы можем вообще отвлечься от понятия размерности пространства и прямого произведения матриц, и тогда вместе с ними исчезнет понятие о многомерном пространстве. Только догматически мыслящие люди могут настаивать, например, на том, что реально существует лишь псевдоевклидова геометрия, что кроме вероятностной

интерпретации волновой функции других вариантов и быть не может, что модель сильной химической связи является единственно правильной. Это выглядит так же абсурдно, как если бы кто-то считал десятичную систему счисления единственно верной, а двоичную — ложной. Те же самые фракталы с еще большим успехом можно описать на языке порождающих грамматик или аффинных преобразований, где совсем иные представления о том, что может и что не может существовать в действительности. Конструктивный подход не исключает, а наоборот, поощряет разномыслие в науке. Если кто-то думает иначе, пусть объявит аппарат порождающих грамматик лженаукой; ведь в его рамках не возникает понятий о дробной или целочисленной размерности.

#### 4.4. Грамматика на службе у фракталов

В рамках теории порождающих грамматик удобно организовать рекурсию, следовательно, аппарат формализованных языков можно использовать для разворачивания фракталов. В этом подразделе мы расскажем, как это лучше всего организовать, для чего вернемся к рис. 4.4, где изображена векторная диаграмма фрактала Коха. Припишем векторам другие символы, как показано на рис. 4.14. Данные символы образуют *алфавит* одного из вариантов формализованного языка Хомского, который позволяет по *начальному слову* с использованием некоторой совокупности *правил подстановок*, являющиеся обязательными атрибутами *порождающей грамматики*, генерировать все новые и новые слова, длина которых с каждым шагом будет возрастать. Диаграмму, вычерченную на рис. 4.14, называют *татл-диаграммой*. Английское слово *turtle* переводится как *черепаха*, а под черепахой понимается некий *автомат* для графической реализации так называемой *L-системы*. В 1968 г. ее ввел в обиход программистов Аристид Линденмайер, так что буква *L* одновременно является началом английского слова «язык» и началом фамилии разработчика.

При изложении формального языка Линденмайера мы будем следовать Кронверу, который, как он сам утверждает, заимствовал весь формализм *L-системы* из работы Прузинкевича и Ханана «Линденмайерские системы, фракталы и графики. Записи лекций по биоматематике» (1989). Прузинкевич и Ханан разработали изящные языковые правила для построения фрактальных диаграмм, которые напоминают в основном различные растения, хотя там есть рисунок



снежинки и другие узоры. Мы полностью сохраняем введенные названными авторами обозначения. Три буквы, фигурирующие в *татл-диаграмме* фрактала Коха, означают следующее:  $F$  — продвижение черепашки по ломаной Коха вперед на единицу длины, «+» — поворот черепашки на  $60^\circ$  по часовой стрелке и «-» — поворот черепашки на  $60^\circ$  против часовой стрелки.

Первая диаграмма (рис. 4.14а) задает единственное *правило порождения новых слов*, которое выглядит следующим образом:  $newf = F - F + + F - F$ . Всякая *порождающая грамматика* помимо алфавита и правил должна содержать *начальное слово*. В данном случае оно выглядит как  $axiom = F$ . Действуя на начальное слово  $axiom$  правилом подстановки  $newf$ , получаем первое слово  $S_1$ , которое повторяет правило:  $S_1 = F - F + + F - F$ . На втором шаге каждая буква  $F$  заменяется скобкой  $(F - F + + F - F)$ . Так получается второе слово  $S_2$ , которое и отражается диаграммой, показанной на рис. 4.14б:

$$S_2 = (F - F + + F - F) - (F - F + + F - F) + + (F - F + + F - F) - (F - F + + F - F) = \\ = F - F + + F - F - F - F + + F - F + + F - F + + F - F - F - F + + F - F.$$

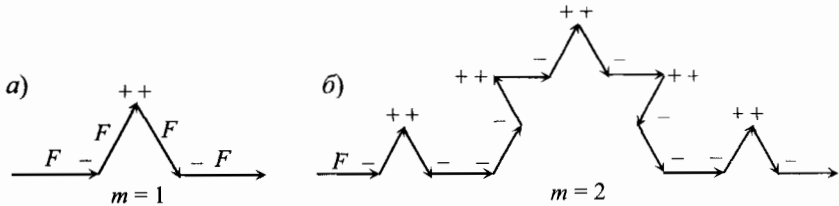


Рис. 4.14

Грамматическое правило обеспечивает рекурсивную функцию, когда в качестве аргумента для нахождения очередного значения функции подставляется ее предыдущее значение, что обеспечивается простой подстановкой  $F = newf$ . Так, с помощью  $L$ -системы порождающей грамматики Линденмайера мы получаем фракталы.

Чтобы задать *снежинку Коха* вида, который показан на рис. 4.3 (а) и (б), нужно ввести соответствующее начальное слово:

$$axiom = F + + F + + F.$$

В этом случае первым словом будет следующее:

$$S_1 = (F - F + + F - F) + + (F - F + + F - F) + + (F - F + + F - F) = \\ = F - F + + F - F + + F - F + + F - F + + F - F + + F - F.$$

Если каждую букву  $F$  слова  $S_1$  заменить скобкой ( $F - F + + F - F$ ), мы получим второе слово  $S_2$ . Продолжая эту рекурсию, можно получить снежинку Коха  $S_m$  для любого числа шагов  $m$ . Начальное слово и правила для *ломаной Пеано* такие:

$$axiom = F, newf = F - F + F + F + F - F - F - F + F,$$

где прибавляется и отнимается угол  $90^\circ$ . Весьма несложно составить самим грамматические правила для всех кривых, изображенных на рис. 4.5.

Для вычерчивания более сложных фракталов нам нужно расширить алфавит языка Линденмайера. Введем следующие новые буквы:  $b$  — переместиться на шаг вперед без прорисовки следа;  $[$  — открыть ветвь;  $]$  — закрыть ветвь. Алгоритм  $L$ -системы можно коротко описать следующим образом.

Вход:

$axiom$  — начальное слово

$newf$  — первое правило

$newb$  — второе правило

$l$  — число шагов

$n$  — длина слова

$T$  — массив

Выход:

$word$  — слово-результат

Инициализация:

$W = axiom$

$T = \{ \}$  — пустая строка

Шаги:

while  $l > 0$

for  $j = 1$  to  $n$

if  $W(j) = +$ ,  $T = \{T+\}$ , end if

if  $W(j) = -$ ,  $T = \{T-\}$ , end if

if  $W(j) = [$ ,  $T = \{T[ \}$ , end if

if  $W(j) = ]$ ,  $T = \{T] \}$ , end if

if  $W(j) = F$ ,  $T = \{Tnewf \}$ , end if

if  $W(j) = b$ ,  $T = \{Tnewb \}$ , end if,

end for

```

 $W = T, l = l - 1$ 
end while
 $word = W$ 

```

В данном алгоритме переменная  $W(j)$  означает  $j$ -ую букву в слове  $word$ ,  $\{T+\}$  — строка  $T$ , к которой добавлен знак  $+$ . При вычерчивании татл-диаграммы  $L$ -система действует по следующему алгоритму.

Вход:

$word$  — результат работы предыдущего алгоритма  
 $\alpha$  — начальное направление  
 $\theta$  — приращение по углу

Выход:

Графическое представление  $word$

Инициализация:

```

 $W = word$ 
 $x_0 = 0, y_0 = 0, n = \text{length}(word)$ 
 $stack = \{ \}$  — пустой стек

```

Шаги:

```

for  $j = 1$  to  $n$ 
  if  $W(j) = +, \alpha = \alpha + \theta$ , end if
  if  $W(j) = -, \alpha = \alpha - \theta$ , end if
  if  $W(j) = -F, x = x_0 + \cos \alpha, y = y_0 + \sin \alpha$ 
    paint  $(x_0, y_0; x, y)$  — провести линию из точки  $(x_0, y_0)$ 
    в точку  $(x, y)$ 
     $x_0 = x, y_0 = y$ , end if
  if  $W(j) = b, x = x_0 + \cos \alpha, y = y_0 + \sin \alpha$ , end if
  if  $W(j) = [, l = \text{length}(stack),$ 
     $stack(l+1, 1) = x_0, stack(l+1, 2) = y_0, stack(l+1, 3) =$ 
     $\alpha$ , end if
  if  $W(j) = ], l = \text{length}(stack),$ 
     $stack(l, 1) = x_0, stack(l, 2) = y_0, stack(l, 3) = \alpha$ 
    del  $(l)$  — удалить  $l$ -ую запись из стека, end if
end for

```

В данном алгоритме при открытии ветви сохраняется значение координат и угла ( $x$ ,  $y$ ,  $\alpha$ ) в стеке, а затем система возвращается к этим значениям при закрытии ветви, при этом запись ( $x$ ,  $y$ ,  $\alpha$ ) из стека удаляется. Данные алгоритмы позволяют написать компьютерную программу на одном из языков программирования, которая способна будет вычерчивать диаграммы-узоры, приведенные на рис. 4.15.

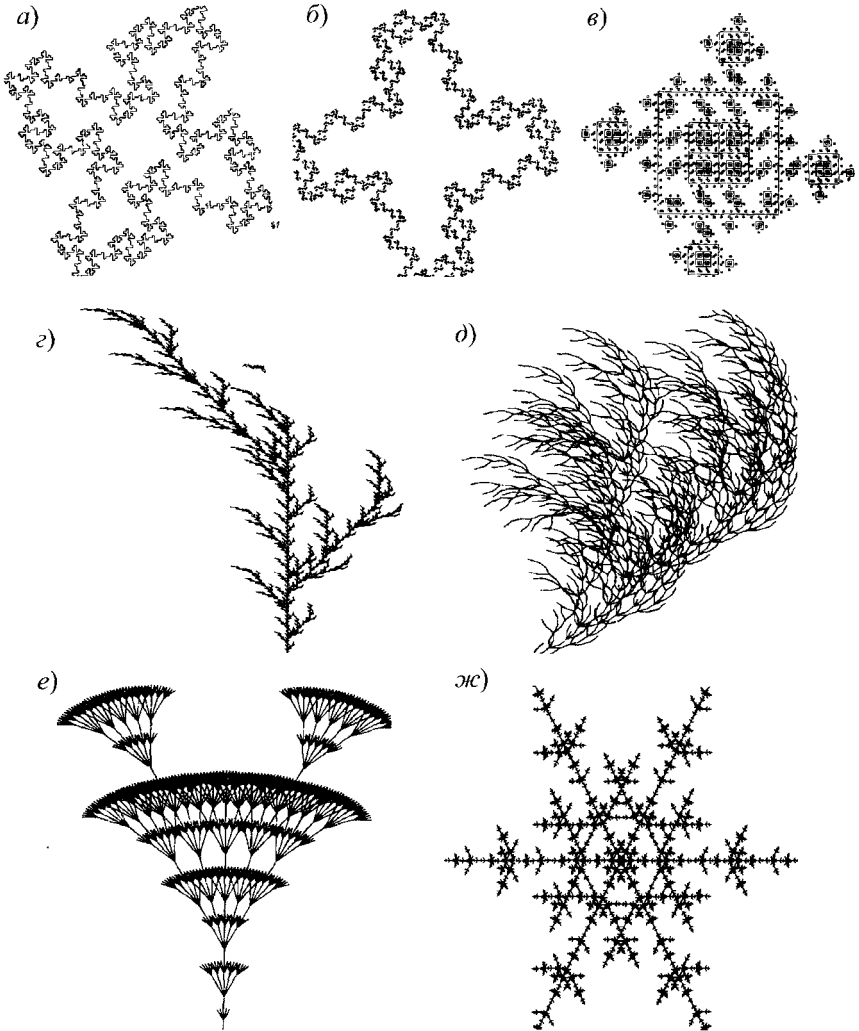


Рис. 4.15

Начальное слово и правила для рис. 4.15 будут такими:

а) Остров после двух итераций ( $\theta = \pi/2$ )

$$axiom = F + F + F + F,$$

$$newf = F + F - F - FFF + F + F - F;$$

б) Цепочка Ян-Си Ло после трех итераций ( $\theta = \pi/2$ )

$$axiom = F + F + F + F,$$

$$newf = F + b - F - FFF + F + b - F,$$

$$newb = bbb;$$

в) Мозаика Патрика Хагерти после трех итераций ( $\theta = \pi/2$ )

$$axiom = F - F - F - F,$$

$$newf = F - b + FF - F - FF - Fb - FF + b - FF + F + FF + Fb + FFF,$$

$$newb = bbbbbb;$$

г) Сорняк после четырех итераций ( $\theta = \pi/7$ )

$$axiom = F,$$

$$newf = F [+ F] F [- F] F;$$

д) Куст после четырех итераций ( $\theta = \pi/8$ )

$$axiom = F,$$

$$newf = -F + F + [+ F - F -] - [- F + F + F];$$

е) Цветок Брандона Нельсона после трех итераций ( $\theta = \pi/16$ ,  $\alpha = \pi/2$ .)

$$axiom = F [+ F + F] [- F - F] [+ + F] [- - F] F,$$

$$newf = F F [+ + F] [+ F] [ F ] [- F] [- - F];$$

ж) Снежинка Джона Ву Кима после трех итераций ( $\theta = \pi/3$ )

$$axiom = [ F ] + [ F ] + [ F ] + [ F ] + [ F ] + [ F ],$$

$$newf = F [+ + F] [- F F] F F [+ F] [- F] F F.$$

#### 4.5. Аффинные преобразования

В п. 2.5 упоминались аффинные преобразования, которые образуют пространственные группы и в которых, в отличие от проективных преобразований, не действует принцип двойственности (он нам сейчас и не понадобится). Напомним, что *аффинным* называется такое *линейное* преобразование, которое помимо *поворота*, *отражения*, *сжатия* и *растяжения* (все это подгруппы аффинных преобразований) геометрических объектов осуществляет еще *сдвиг* их в пространстве (иногда говорят, *трансляцию*). Таким образом, аффинное преобразование в состоянии выполнять все то, что не всегда доступно или удобно исполнять процедурами порождающей грамматики или прямого произведения Кронекера. Как именно с

помощью аффинных преобразований достичь нужного результата, мы сейчас попытаемся разъяснить. При этом нас будет интересовать двумерный случай, поскольку фракталы чаще всего вычерчиваются в виде плоского изображения на экране монитора. В этом случае точка  $x = (x_1, x_2)$ , испытавшая на себе аффинное преобразование, получит пространственную локализацию  $x' = (x'_1, x'_2)$ , что в аналитической форме выражается как

$$x' = Ax + b,$$

где  $A$  — линейный оператор,  $b$  — оператор, осуществляющий сдвиг на плоскости.

Говорим «оператор», так как аффинное преобразование имеет, по крайней мере, две реализации: с помощью матриц —

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

и с помощью комплексных чисел. Впрочем, здесь имеется тесная взаимосвязь, так как комплексное число, как мы знаем (п. 2. 1), можно представить матрицей. Аффинное преобразование в комплексной плоскости удобно записать в виде

$$x' = ax + bx^* + c.$$

где  $a, b, c$  — комплексные постоянные аффинного преобразования, переносящие точку  $x$  в точку  $x'$  комплексной плоскости.

В качестве показательного примера возьмем ковер Серпинского, составленный из треугольников (рис. 4.10 $\varepsilon$ ). На рис. 4.16 показан первый шаг, когда один большой треугольник распадается на три маленьких:  $\triangle ABC \Rightarrow \triangle AED, \triangle EBF, \triangle DFC$  (все треугольники помещены в систему декартовых координат с указанием своих координат). Наша задача состоит в том, чтобы найти такие преобразования, которые бы перевели все точки большого треугольника в точки трех маленьких треугольников и расставили бы три маленьких треугольника в пространстве большого треугольника нужным образом. Вот эти три аффинных преобразования —

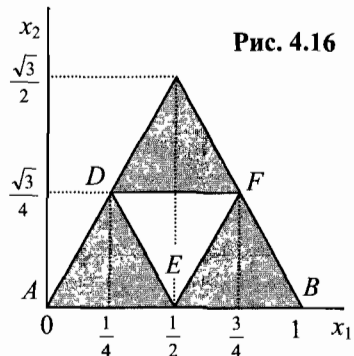


Рис. 4.16

$$\Delta ABC \Rightarrow \Delta AED: \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$C \Rightarrow D: \begin{pmatrix} 1/4 \\ \sqrt{3}/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Аналогично проверяются остальные точки треугольника. Далее,

$$\Delta ABC \Rightarrow \Delta EBF: \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$C \Rightarrow F: \begin{pmatrix} 3/4 \\ \sqrt{3}/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots$$

Наконец,

$$\Delta ABC \Rightarrow \Delta DFC: \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/4 \\ \sqrt{3}/4 \end{pmatrix},$$

$$C \Rightarrow C: \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/4 \\ \sqrt{3}/4 \end{pmatrix}, \dots$$

Эти же аффинные преобразования в комплексной форме выглядят так:

$$\Delta ABC \Rightarrow \Delta AED: x' = \frac{1}{2}x, \quad \Delta ABC \Rightarrow \Delta EBF: x' = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2},$$

$$\Delta ABC \Rightarrow \Delta DFC: x' = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

При работе с аффинным преобразованием полезно иметь в виду следующие его свойства. Площадь большого треугольника относительно маленького уменьшилась в 4 раза. Это связано с тем, что  $D = \det(A) = 1/4$ . В общем случае площадь преобразованных фигур будет уменьшаться или увеличиваться в  $D$  раз. Поворот изображения на произвольный угол  $\theta$ , отражение его относительно оси  $Ox$  и оси  $Oy$ , а также инверсия относительно начала координат, осуществляется четырьмя матрицами:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Зная, как математически корректно реализовать уменьшение масштабов геометрического образа и перенос его в другое место плоского пространства, несложно на одном из языков программи-

рования организовать рекурсию, которая бы позволила превратить этот единичный акт в непрерывный процесс. Очевидно, программу необходимо составить так, чтобы после выполнения одного или нескольких матричных умножений система вернулась в исходное состояние, но уже относительно результирующего геометрического образа. Лучше всего эту процедуру реализовать на одном из пакетов математических программ, снабженных удобными функциями вывода графического изображения, например, на популярном пакете MATLAB.

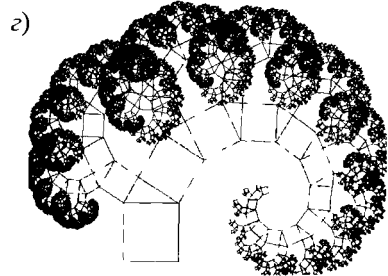
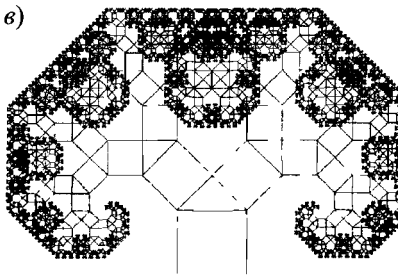
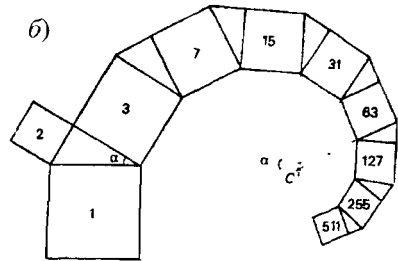
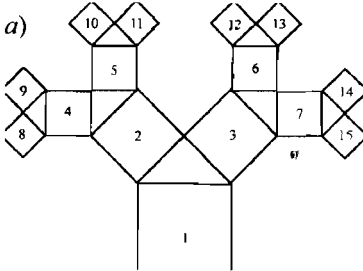
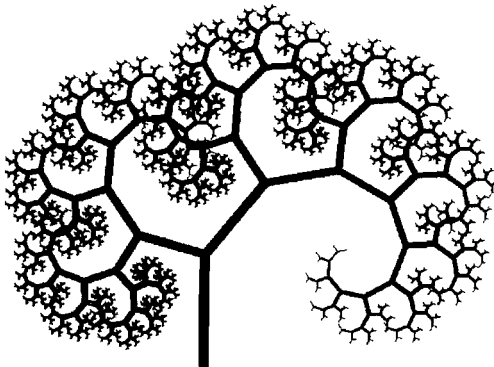


Рис. 4.17

Рис. 4.18



После того, как вы отладите программу по вычерчиванию ковра Серпинского, можно сразу же переходить к художественному творчеству. На рис. 4.17 показан принцип построения деревьев Пифагора, в основе которых лежат «пифагоровы шта-



ны» с одинаковыми (*a*) и различными (*b*) штаннами. На следующих двух рисунках (*в*) и (*г*) показаны фракталы после того, как машина выполнила свыше десяти итераций. На рис. 4.18 приведен подлинный шедевр математического искусства. Дерево выглядит настолько реалистично, что начинаешь понимать, какие удивительно простые законы лежат в основе растительного мира. В самом деле, внимательнее присмотревшись к рисунку, вы заметите, что в основе его лежит одна-единственная «косорукая» буква «Y». Ее нужно только с помощью аффинных преобразований слегка уменьшить и развернуть в пространстве так, чтобы к «рукам» исходной буквы «Y» приставлялись «ноги» следующих двух букв.

Параметры аффинного преобразования ковра Серпинского занесены в табл. 4.4, где приведены параметры еще нескольких фракталов (взяты из книг [31] и [43]).



Рис. 4.19

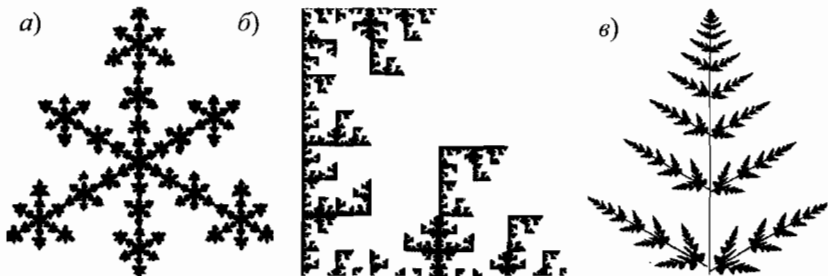


Рис. 4.20

Таблица 4.4

Рис.	$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{21}$	$a_{22}$	$b_1$	$b_2$
4.16	0,5000	0,0000	0,0000	0,5000	0,0000	0,0000
	0,5000	0,0000	0,0000	0,5000	0,5000	0,0000
	0,5000	0,0000	0,0000	0,5000	0,2500	0,4330
4.19а	0,4000	-0,3733	0,0600	0,6000	0,3533	0,0000
	-0,8000	-0,1867	0,1371	0,8000	1,1000	0,1000
4.19б	0,1950	-0,4880	0,3440	0,4430	0,4431	0,2452
	0,4620	0,4140	-0,2520	0,3610	0,2511	0,5692
	-0,0580	-0,0700	0,4530	-0,1110	0,5976	0,0969
	-0,0350	0,0700	-0,4690	0,0220	0,4884	0,5069
	-0,6370	0,0000	0,0000	0,5010	0,8562	0,2513
4.19в	0,5000	0,0000	0,0000	-0,5000	0,5000	0,5000
	0,0000	-0,5000	-0,5000	0,0000	0,5000	0,5000
	-0,5000	0,0000	0,0000	-0,5000	0,5000	1,0000
4.20а	0,2550	0,0000	0,0000	0,2550	0,3726	0,6714
	0,2550	0,0000	0,0000	0,2550	0,1146	0,2232
	0,2550	0,0000	0,0000	0,2550	0,6306	0,2232
	0,3700	-0,6420	0,6420	0,3700	0,6356	-0,0061
4.20б	0,5000	0,0000	0,0000	-0,5000	0,0000	1,0000
	0,0000	0,5000	0,5000	0,0000	0,0000	0,0000
	0,5000	0,0000	0,0000	0,5000	0,5000	0,0000
4.20в	0,7000	0,0000	0,0000	0,7000	0,1496	0,2962
	0,1000	-0,4330	0,1732	0,2500	0,4478	0,0014
	0,1000	0,4330	-0,1732	0,2500	0,4445	0,1559
	0,0000	0,0000	0,0000	0,3000	0,4987	0,0070
4.21а	0,5000	0,2887	0,2887	-0,5000	0,0000	0,0000
	0,5000	-0,2887	0,2887	-0,5000	0,5000	0,2887
4.21б	0,4641	0,4641	0,4641	-0,4641	0,0000	0,0000
	0,4641	0,4641	0,4641	-0,4641	0,6222	-0,1965
4.21в	0,5000	0,5000	0,5000	-0,5000	0,0000	0,0000
	0,6000	-0,2000	-0,2000	-0,6000	0,4000	0,2000
4.22а	0,0000	-0,7000	0,7000	0,0000	0,0000	0,0000
	0,7000	0,0000	0,0000	0,7000	0,3000	0,0000
4.22б	0,6000	-0,6000	0,6000	0,6000	0,0000	0,0000
	0,5300	0,0000	0,0000	0,5300	-0,5300	0,0000
4.22в	0,0000	-0,7070	0,7070	0,0000	0,0000	0,0000
	0,5000	0,5000	-0,5000	0,5000	-0,5000	0,5000

Программ по вычерчиванию фракталов сейчас существует видимо-невидимо. Однако мы не будем рассматривать не только какие-

либо конкретные программы, но даже более или менее подробные алгоритмы. Дело в том, что разнообразные машинные программы вариационной подгонки параметров по симплексной процедуре, поиска оптимального пути в графе, определения максимального потока в транспортной сети, нахождения классов сопряженности у заданной на подстановках группе и многое-многое другое резко увеличило бы объем этой и без того объемной книги. Проблема заключается еще и в том, что подобного рода материал очень быстро устаревает. Дело в конце концов не в самих картинках, а в том конструктивном подходе, который используется для их вычерчивания.

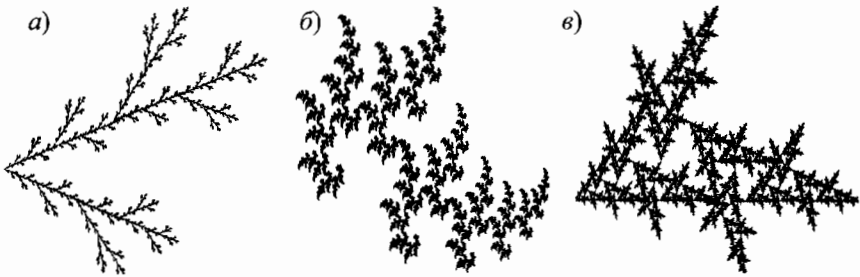


Рис. 4.21

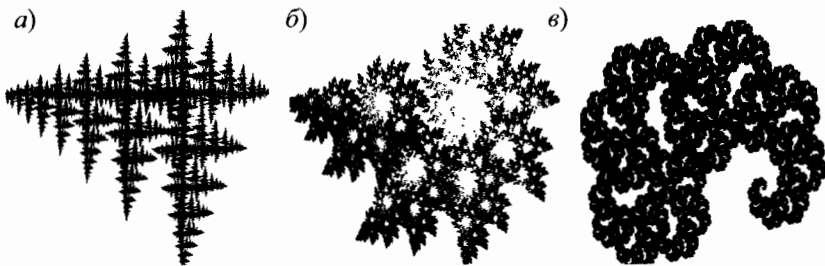


Рис. 4.22

#### 4.6. Динамические фракталы

Как было сказано, первым признаком фрактала является не его дробная размерность, а рекурсия, многократно воспроизводящая исходный паттерн, слегка изменяя его форму и размеры. Чем больше искажается паттерн в рекурсивной процедуре, тем с меньшим правом мы можем говорить о фрактале. Рекурсию можно организовать так, что вопрос о размерности фрактала вообще будет неуме-

стен, так как ее значение от итерации к итерации будет меняться. Три конструктивных способа получения рекурсии мы знаем, сейчас расскажем о четвертом, *динамическом*, самом простом и самом интригующем. Достаточно сказать, что весь ажиотаж, поднятый вокруг фракталов, возник именно в связи с процедурой, о которой сейчас пойдет речь.

Возьмем комплексную переменную  $z = x + iy$  и некоторую комплексную постоянную  $c = a + ib$ . Составим из них квадратичную зависимость рекурсивного типа:

$$z_{n+1} = z_n^2 + c, \quad x_{n+1} = x_n^2 - y_n^2 + a, \quad y_{n+1} = 2x_n y_n + b.$$

Конструктивный подход всегда предполагает конкретность; пускай

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 0, \quad a = -0,1194, \quad b = 0,6289.$$

Теперь с помощью компьютера нужно организовать цикл, обеспечивающий рекурсию, а результаты расчета — вывести на экран дисплея. В системе координат  $(x, y)$  после 1000 рекурсивных циклов мы увидим картинку, которая изображена на рис. 4.23а, а числовые значения первых шагов представлены в табл. 4.5.

Таблица 4.5

Рис. 4.23		1 (a, b)	2	3	4	5	6	7
а	$x_n$	-0,1194	-0,5007	-0,0979	-0,1322	-0,4615	-0,1277	-0,1410
	$y_n$	0,6289	0,4787	0,1496	0,5996	0,4704	0,1948	0,5792
б	$x_n$	-0,1244	-0,6805	0,0161	-0,1244	-0,6796	0,0149	-0,1244
	$y_n$	0,7560	0,5679	-0,0169	0,7555	0,5680	-0,0161	0,7555
в	$x_n$	-0,2370	-0,7433	0,1599	-0,2382	-0,8240	0,3066	-0,1637
	$y_n$	0,7500	0,3945	0,1635	0,8023	0,3678	0,1438	0,8382
г	$x_n$	0,2500	0,0724	-0,2850	-0,0245	0,2281	0,0691	-0,2496
	$y_n$	0,4900	0,7350	0,5964	0,1501	0,4826	0,7102	0,5881
д	$x_n$	0,2500	0,1100	-0,1935	-0,0708	0,2073	0,1173	-0,1253
	$y_n$	0,4500	0,6750	0,5985	0,2184	0,4191	0,6238	0,5964
е	$x_n$	-0,7000	-0,2164	-0,6542	-0,2808	-0,6230	-0,3227	-0,5983
	$y_n$	0,0800	-0,0320	0,0938	-0,0428	0,1040	-0,0496	0,1120
ж	$x_n$	0,3700	0,4454	0,3822	0,1161	-0,1514	0,2183	0,4029
	$y_n$	-0,2480	-0,4315	-0,6324	-0,7314	-0,4179	-0,1215	-0,3010
з	$x_n$	-0,4161	-0,6536	-0,1455	-0,9577	0,8342	0,3919	-0,6929
	$y_n$	0,9093	-0,7568	0,9894	-0,2879	0,5514	0,9200	0,7210

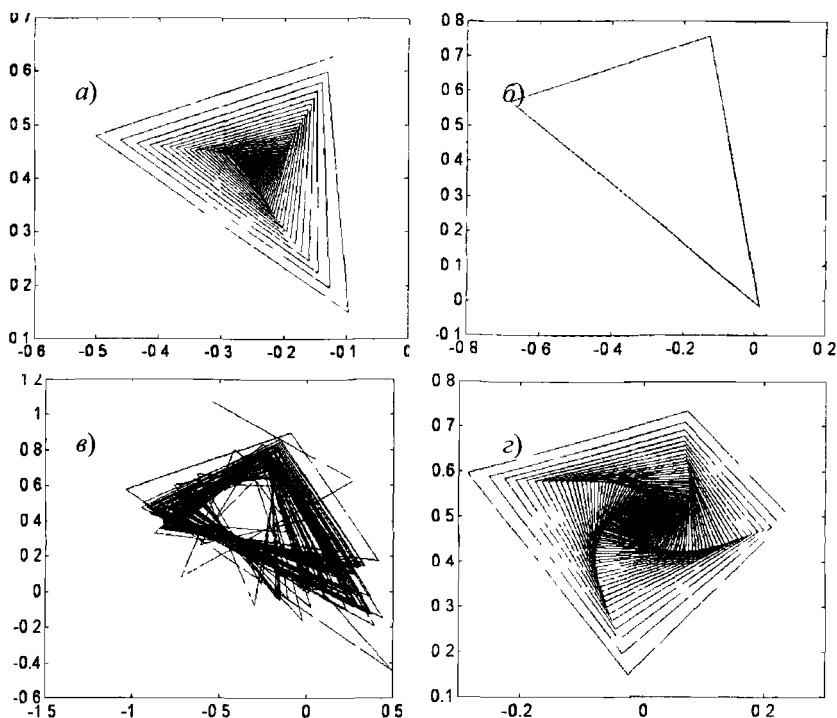


Рис. 4.23 а – г

Это — динамический фрактал, организованный на рекурсивной функции с комплексной переменной, весьма простого вида. Ломаная кривая называется *орбитой* фрактала. Стартовал он из точки с координатами  $(a, b)$  и пришел к *точке притяжения* с координатами  $x^* = -0,2381$ ,  $y^* = 0,4242$ . Фигуру, изображенную на рис. 4.23б, фракталом уже не назовешь, хотя стартовые условия для нее ненамного отличаются от первого случая. Данная орбита строго периодическая, и период ее равен трем. На следующем рис. 4.23в ломаная орбита уходит в бесконечность. На 341 цикле ордината принимает значение, равное 1,087, а  $y_{345} = -19$ . Эти три конкретные орбиты представляют собой три класса орбит: *фрактальные*, стягивающиеся к центру притяжения (они показаны на рис. 4.23г – ж), *строго периодические* и *хаотические*, уходящие в бесконечность. Наибольший интерес вызывают, конечно, фрактальные орбиты.

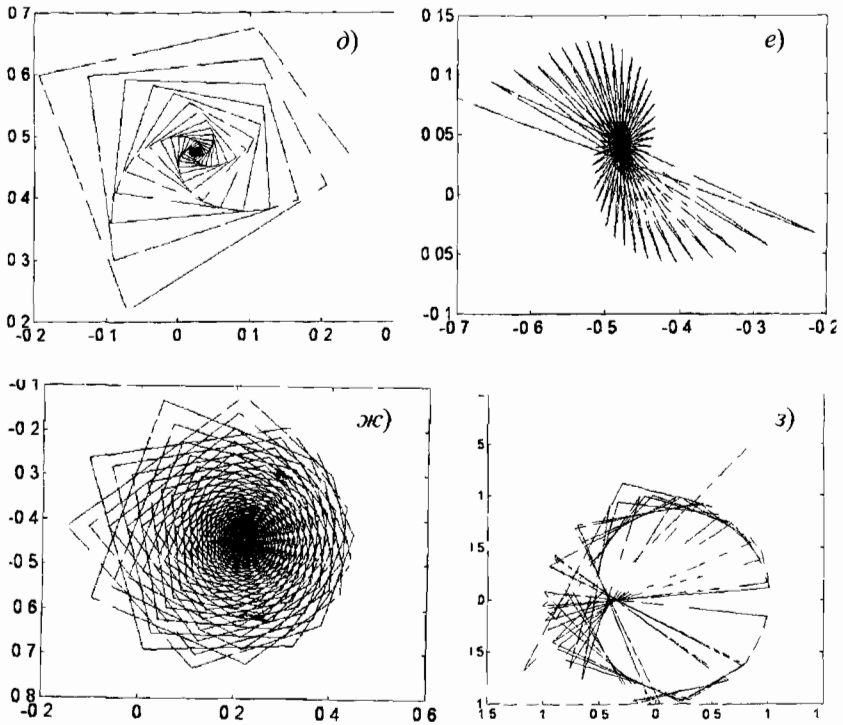


Рис. 4.23 д – з

Функция гарантированно уйдет на бесконечность, если на каком-то шаге  $|z|$  превысит единицу. Естественно, существует еще пограничная область, которая возникает при  $c = 0$ ,  $|z| = 1$ , например, когда  $x_0 = \cos(1,0)$ ,  $y_0 = \sin(1,0)$ . Точки сначала ложатся на окружность единичного радиуса (табл. 4.5), хотя и хаотическим образом, но затем, после 50-го цикла, они все больше отклоняются от окружности, что можно проследить как по числовым значениям —

$$z_{52} = (-0,3008, 1,1229), \quad z_{53} = (-1,1704, -0,6755), \quad z_{54} = (0,9135, 1,5812), \dots,$$

так и по рис. 4.23e, где хорошо виден уход орбиты от линии окружности. Считается, что на границе единичного радиуса рекурсивные функции могут проявить себя по-разному: либо уйти на бесконечность, либо притянуться какой-нибудь внутренней точкой; предсказать что-либо определенное здесь невозможно.

Но вернемся назад, к первым трем рисункам (рис. 4.23 a, б и в). Давайте повнимательней присмотримся к ним: что скрывается за этими тремя видами орбит, откуда взялся центр притяжения и по-

чему окружность единичного радиуса поделила все орбиты на два класса и как понимать периодичность? С этой целью на время перейдем от комплексных чисел  $z$  к вещественным  $x$  и исследуем ту же самую квадратичную зависимость на простейших числовых примерах —

$$f(x): x_{n+1} = x_n^2 + a, \text{ где } a — \text{const.}$$

Пусть сначала  $a = 0$ , тогда возможны два варианта, показанные на рис. 4.24а. Если начальная точка взята в интервале  $|x_0| < 1$ , то через несколько шагов рекурсивная функция  $f(x)$  достигает нуля, т.е. ноль является для нее неподвижной и притягивающей точкой, а единица — неподвижной и отталкивающей. Если  $|x_0| > 1$ , то орбита функции  $f(x)$  уходит на бесконечность. Для  $|x_0| = 1$  (штрих-пунктирная линия) имеем неустойчивую ситуацию, когда малейшая флуктуация при вычислениях, приводит либо к уходу функции  $f(x)$  на бесконечность, либо она устремляется к нулю. Эти три варианта соответствуют случаям, которые и показаны на рис. 4.23 (а), (б) и (в). Теперь пускай  $a = 1$ , а процесс рекурсии стартует из точки  $0 < x_0 < 1$ . После некоторого числа итераций  $f(x)$  выйдет на два состояния и начнет бесконечно долго колебаться, принимая значение, равное то 1, то 0. Для  $f(x)$  эти точки уже не будут неподвижными (они будут неподвижны лишь для второй моды  $f^{(2)}(x)$ ). Этот вариант соответствует ситуации, которая показана на рис. 4.24б.

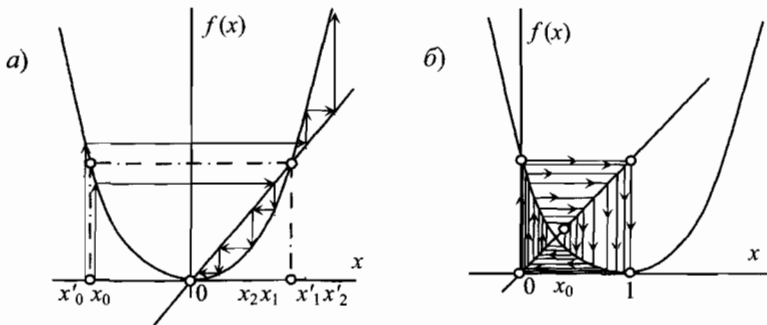


Рис. 4.24

Теперь снова перейдем к комплексным числам. На рис. 4.25а показан тот же динамический фрактал, что и на рис. 4.23а, но только на фоне параболических кривых (обозначены пунктиром)  $w_{n+1} = w_n^2 + c$ , где  $w = u + iv$ , при меняющихся значениях переменных  $0,1 < u < 0,5$  и  $-0,7 < v < 0,2$ . Орбита треугольной спирали начинается из

точки  $c$  и целиком уместается на нижних ветвях семейства парабол. Орбита четырехугольной спирали, изображенная на рис. 4.25б, опирается уже на обе ветви семейства парабол, занимающих область  $0,1 < u < 0,29$  и  $-0,7 < v < 0,7$ . На рис. 4.25в закон рекурсии с простого квадратичного изменен на более сложный, дробно-квадратичный:

$$z_{n+1} = \frac{z_n^2}{z_n^2 + 1} + c, \quad \text{где } c = -0,11 + 0,52i.$$

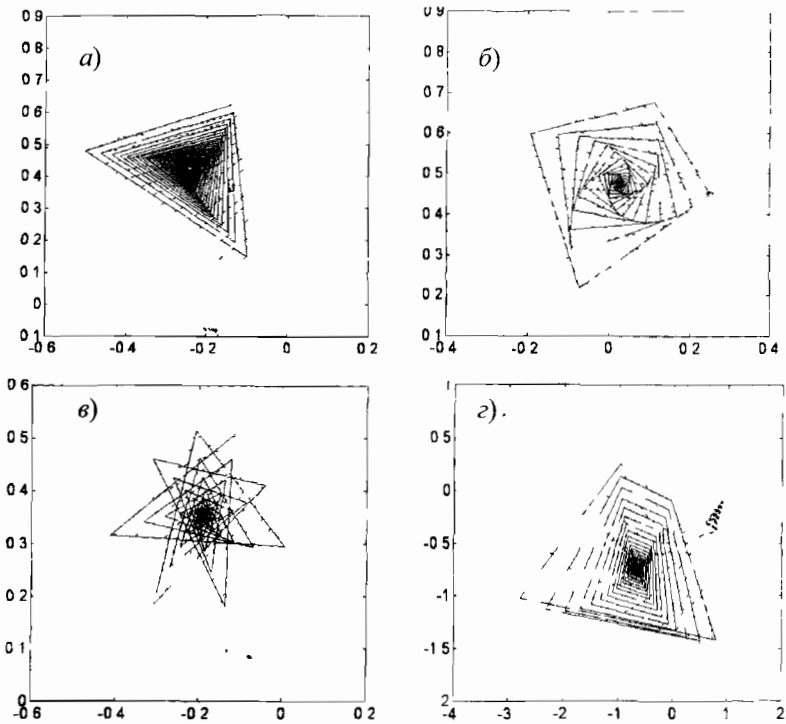


Рис. 4.25

А на рис. 4.25г орбита строится в соответствии с дробно-линейным законом, где используются две комплексные константы:

$$z_{n+1} = \frac{z_n + c}{z_n + d}, \quad \text{где } c = -1,13 + 1,33i, \quad d = 1,44 - 1,0i.$$

В этом случае область функции  $w$  (пунктирные кривые) простирается в пределах  $0,9 < u < -3,1$  и  $-10 < v < 0,4$ ; левую границу по  $v$  можно брать и  $-100$ ; это зависит от того, насколько близко вы хотите подойти к точке  $(0,1)$  комплексной плоскости.



Эти симпатичные кривые очень заинтересовали математиков. Чтобы исследовать влияние константы  $c = a + ib$  на поведение функции  $z_{n+1} = z_n^2 + c$ , поступают следующим образом. Для фиксированного  $c$  определяют множество точек  $z$ , модуль которых превысил единицу. Поскольку сама единица, как было сказано, еще ничего не гарантирует, то ориентируются на числа больше единицы. Если, скажем,  $|z| > 2$ , то далее орбита функции наверняка устремится к бесконечности. Множество значений  $z$ , для которых  $|z| < 2$ , называется *заполняющим множеством Жюлиа*.

*Гастон Жюлиа* (1893—1978) вместе с *Пьером Фату* (1878 — 1929) вскоре после Первой мировой войны исследовали проблемы, связанные с рекурсивной функцией от комплексной переменной. Известный математик *Джон Милнор* эти две фамилии, наверное, поставил бы в обратном порядке, поскольку считал Фату первопроходчиком и человеком, который внес, как он написал, «наиболее весомый и внушительный вклад» в развитие теории. Разъясняя, почему в 1918 г. «Гран-При математических наук» Парижской Академии наук получил все же 25-летний Жюлиа, а не кто-то другой, Милнор в своей книге «Голоморфная динамика» язвительно заметил, что молодой человек «имел некоторые преимущества, связанные с его статусом раненого героя войны». Он также не преминул сообщить о промахе Жюлиа в решении задачи локальной линеаризации: «В 1919 году Жюлиа объявил о полном разрешении этого вопроса для рациональных отображений степени два и выше, показав, что такая линеаризация *никогда* невозможна, однако его доказательство было ошибочным».

Вместо словосочетания «рекурсивная динамическая функция» Милнор пользуется словосочетанием «итерационное голоморфное отображение». Понятия *итерация* и *рекурсия*, *отображение* и *функция* можно считать синонимичными. Видимо, не будет большой ошибкой соотнести его понятие *голоморфной* функции с понятием *гладкой* или *дифференцируемой* функции. Милнор пишет: «Если  $V \subset \mathbb{C}$  — открытое множество в комплексной плоскости, то функция  $f: V \rightarrow \mathbb{C}$  называется *голоморфной*, или *комплексно аналитической*, если ее первая производная

$$z \rightarrow f'(z) = \lim_{\zeta \rightarrow z} \frac{f(\zeta + h) - f(\zeta)}{h}$$

определена и непрерывна, как функция из  $V$  в  $\mathbb{C}$ , или, что эквивалентно, если в окрестности любой точки  $z \in V$  функция  $f$  разлагается

ся в ряд по степеням  $z - z_0$ , который сходится к  $f(z)$  в некоторой окрестности  $z_0$ ». Это определение понадобилось нам для того, что бы иметь представление, с какого рода функциями (неважно, как их называть и записывать) мы будем иметь дело в дальнейшем.

Сейчас мы вновь воспользуемся книгой Кроновера, чтобы привести из нее простой алгоритм для построения множества Жюлиа. Правда, в связи с этим Милнор предупреждает о некоторых трудностях, которые могут подкарауливать слишком самонадеянного программиста.

Вход:

$c = a + ib$  — фиксированная точка

$u, v$  — центр окна

$s$  — сторона окна

$p$  — число пикселей, умещающихся на стороне  $s$

Выход:

Графическое изображение множества Жюлиа

Инициализация:

$(u - s/2, u + s/2) \times (v - s/2, v + s/2)$  — графический эк-

ран

Шаги:

for  $m = 1$  to  $p$

$x_0 = u - s/2 + ms/p$

for  $n = 1$  to  $p$

$y_0 = v - s/2 + ns/p$

$x = x_0, y = y_0, z = 0, iter = 1$

while  $iter < 20$

$iter = iter + 1$

$x_1 = x^2 - y^2 + a, y_1 = 2xy + b,$

$x = x_1, y = y_1, z = x^2 + y^2$

if  $z > 4$ , выход из цикла, end if

end while

if  $z < 4$ , построить точку  $(x_0, y_0)$ , end if

end for

end for

Кроновер представил и результаты расчета по этому алгоритму — рис. 4.26.

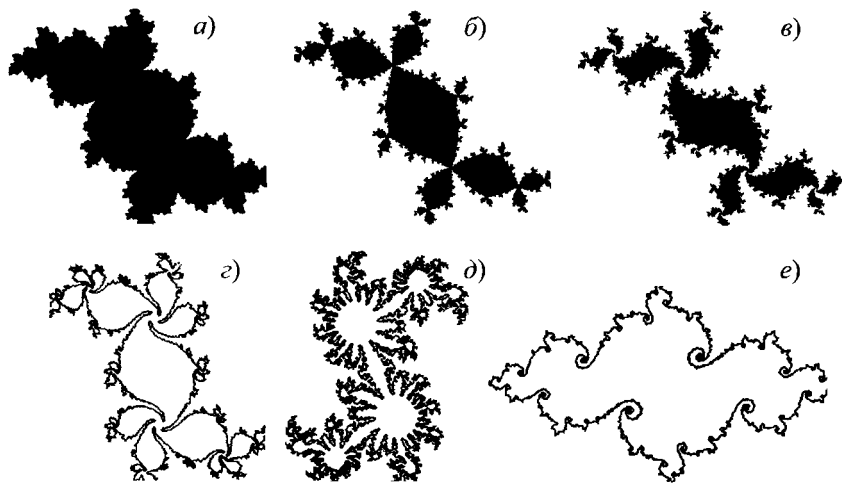


Рис. 4.26

Множества Жюлиа симметричны относительно оси абсцисс и имеют фрактальную структуру, поскольку содержат элементы самоподобия. Рис. 4.26а соответствует рис. 4.23а для динамического фрактала с параметрами  $a = -0,1194$  и  $b = 0,6289$ ; рис. 4.26б тоже соответствует рис. 4.23б; а вот рис. 4.26в уже не отвечает рис. 4.23в, так как при таких значениях  $a$  и  $b$  орбита уходит на бесконечность и никакого множества Жюлиа получиться не может; фрактал, изображенный на рис. 4.26в, рассчитан для  $a = -0,20$  и  $b = 0,75$ . Часто говорят не о множестве Жюлиа, а о границе Жюлиа; именно граница множества Жюлиа представляет интерес, так как она определяет *связанность* множества Жюлиа. Следующие три фрактала показаны только своими границами: для рис. 4.26г  $a = 0,25$  и  $b = 0,52$ ; для рис. 4.26д  $a = 0,377$  и  $b = -0,248$ , что близко к параметрам фрактала, показанного на рис. 4.23ж, и для рис. 4.26е имеем  $a = -0,7382$  и  $b = 0,0827$ , что близко к параметрам фрактала, показанного на рис. 4.23е. Каждая из трех границ представляет собой один замкнутый контур, т.е. для последних трех фракталов множества Жюлиа будут *односвязанными*.

Немало превосходных рисунков приведено и в упомянутой книге Милнора. Автор детально обсуждает не только особенности множеств Жюлиа для квадратичной зависимости, но поясняет структуру более сложных голоморфных отображений. Этому посвящен бóльший объем его «Голоморфной динамики». Мы же ограничимся

тем, что воспроизведем несколько характерных структур (рис. 4.27 – 4.29) и укажем функциональную зависимость, по которой они были построены (табл. 4.6).

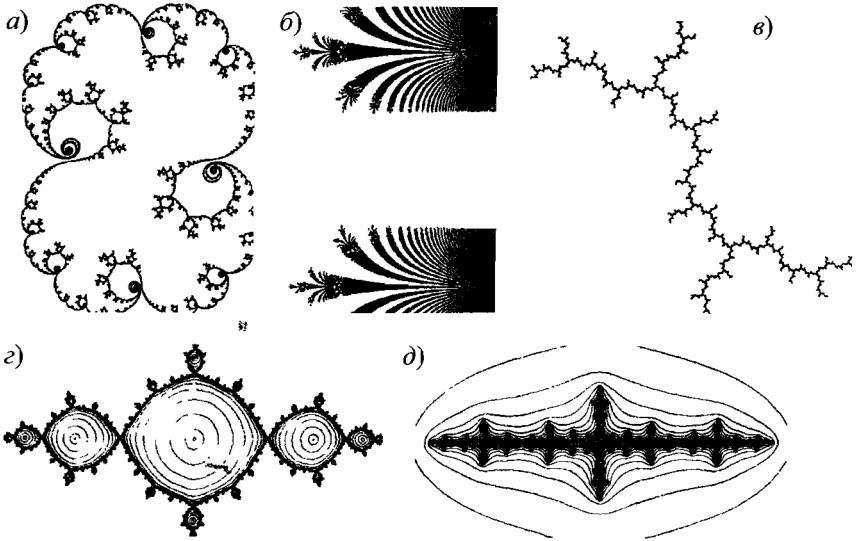


Рис. 4.27

Таблица 4.6

Рис.	$f(z)$	Рис.	$f(z)$
4.27а	$z^2 + (0,99 + 0,14i) \cdot z$	4.27б	$z + \exp(z) - 1$
4.27в	$z^2 + i$	4.27г	$z^2 - 1$
4.27д	$z^2 - 3/2$	4.28а	$z^2 - 0,00001/z^3$
4.28б	$-0,138 \cdot (z + 1/z) - 0,303$	4.28в	$(2 \cdot z / (1 + z^2))^2$
4.28г	$z^3 - 0,48 \cdot z + 0,7063 + 0,5029i$	4.28д	$z^2 - 0,7443 + 0,1212i$
4.29а	$z^2 - 0,4245 + 0,2075i$	4.29б	$\sin(z)$
4.29в	$z^5 + (0,8 + 0,8i) \cdot z^4 + z$	4.29г	$z^2 + z \cdot \exp(6\pi i/7)$
4.29д	$z^2 + z \cdot \exp(1,26\pi i)$	4.29е	$z^2 \cdot \exp(1,23\pi i)(z - 4)/(1 - 4z)$
4.29ж	$z^2 - 0,765 - 0,12i$	—	—

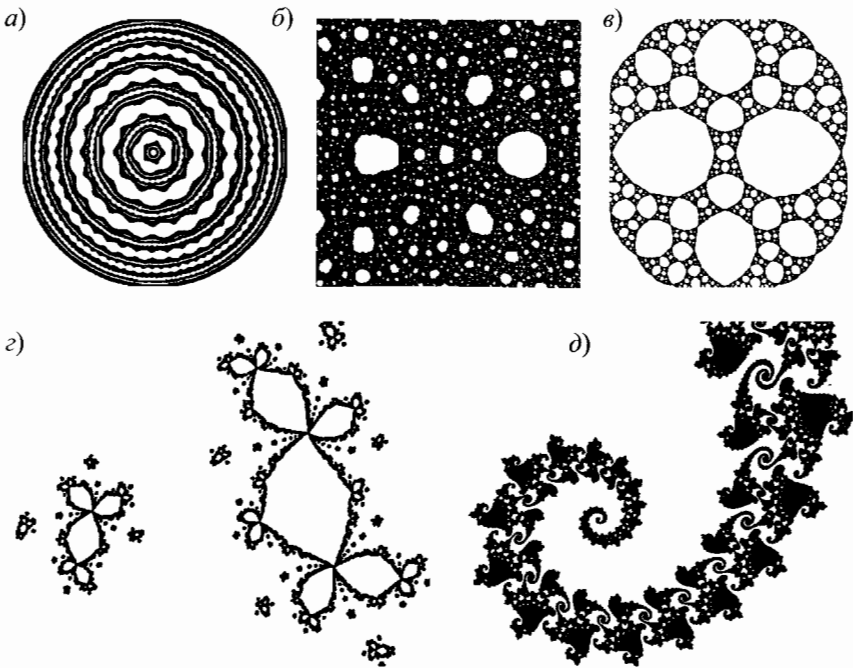


Рис. 4.28

Если вернуться к первым трем рисункам, где множества Жюлиа затушеваны в черный цвет, то можно заметить следующее: первый фрактал (рис. 4.26а) явно *односвязанный*, второй (4.26б) находится на границе связности, когда отдельные «листья кактуса» едва соединяются друг с другом, а третий фрактал (рис. 4.26в) распался на отдельные области, т.е. множество Жюлиа распределилось по огромному числу не связанных друг с другом областей. Этот несвязанный фрактал особенно интересен, так как он построен для пограничных параметров  $a$  и  $b$ , когда небольшое их изменение приводит к уходу орбиты на бесконечность (рис. 4.23в). Таким образом, вся совокупность несвязанных фракталов-кактусов образует новую границу, за пределами которой никакие множества Жюлиа существовать не могут. Эта граница называется *границей Мандельброта*. Внутри этой границы находится *множество Мандельброта*, каждый элемент которого является связанным множеством Жюлиа.

Для графического построения границы Мандельброта сходится алгоритм для построения границы Жюлиа. Единственное отличие

состоит в том, что теперь параметр  $c = a + ib$  становится варьируемой величиной, т.е. область нахождения множества Мандельброта лежит в координатной сетке  $(a, b)$ , а не  $(x, y)$ . Это приводит к замене равенств

$$x_0 = u - s/2 + ms/p, y_0 = v - s/2 + ns/p, x = x_0, y = y_0,$$

на равенства

$$a = u - s/2 + ms/p, b = v - s/2 + ns/p, x = 0, y = 0.$$

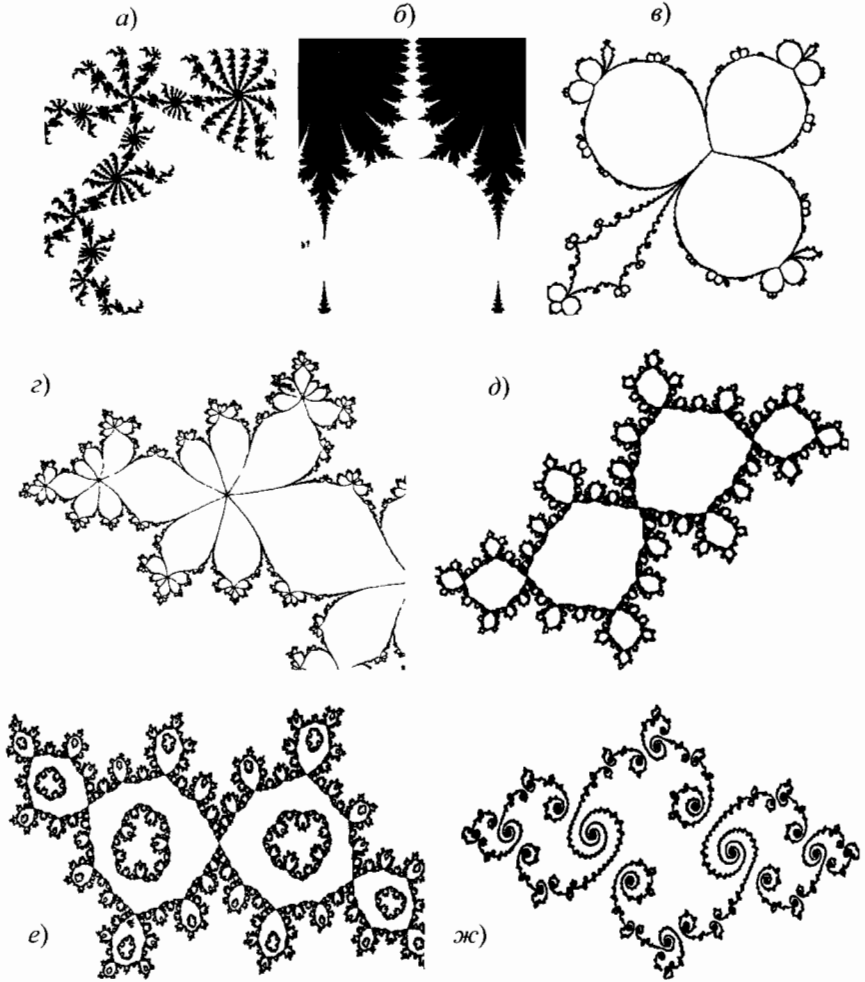


Рис. 4.29

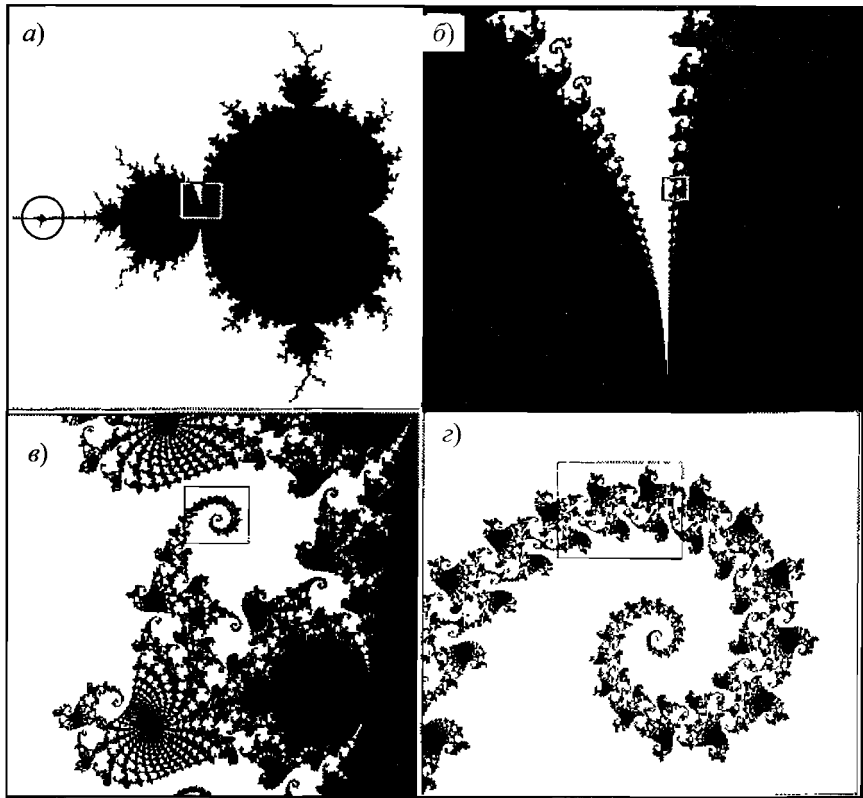


Рис. 4.30

Результат работы такого модернизированного алгоритма представлен на рис. 4.30. На рисунке (а) дана укрупненная картина, на которой видно, что множество Мандельброта, как и множества Жюлиа, симметрично относительно оси абсцисс. На укрупненном рисунке в кружок обведена крохотная точка; если ее увеличить в соответствующем масштабе, то мы получим вторую «кляксу» аналогичной формы, что и первая. Это говорит о том, что множество Мандельброта имеет фрактальную структуру. Здесь же, на рисунке (а) имеется еще одна прямоугольная вырезка, которая на рисунке (б) изображена уже в увеличенном виде. Но и на этой увеличенной картинке имеется своя вырезка, развернутая на рисунке (в). Наконец, на рисунке (г) показана еще одна увеличенная вырезка предыдущего рисунка. На всех картинках видна фрактальная структура; самоподобие затрагивает не только общую конфигурацию, но и ее

отдельные части. Сколько бы мы ни детализировали границу Мандельброта, мы всякий раз находили бы те или иные элементы подобия. По масштабной шкале можно углубляться до бесконечности, здесь все зависит от разрядности процессора вашего компьютера.

На рис. 4.31а показана граница Мандельброта, размещенная в координатной системе  $(a, b)$ , на которой видно, что самая большая часть множества Мандельброта (1) расположена в пределах  $-\frac{3}{4} < a < \frac{1}{4}$  и имеет форму известной кривой *кардиоиды*. Вторая по величине область (2) имеет форму круга, который занимает на оси абсцисс область  $-0,75 < a < -1,25$ . Слева от нее расположен крохотный кружок с числом 4, занимающий область  $-1,25 < a < -1,368$ . Еще левее видна едва заметная область с числом 8. Таким образом, появляется последовательность, которая имеет предел:

$$a_0 = 0,25, \quad a_1 = -0,75, \quad a_2 = -1,25, \quad a_3 = -1,368, \\ a_4 = -1,394, \quad \dots \quad a_n = -1,401155\dots$$

Если из членов ряда составить отношение и также найти его собственный предел, то получим константу, называемую *постоянной Фейгенбаума*:

$$F = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n+1} - a_n} = 4,6692016091029909\dots$$

Откуда взялся ряд чисел: 2, 4, 8, ...? Его объяснение вытекает из рис. 4.31б, на котором изображены три моды квадратичной функции при  $c = -2$ :

$$f(z) = z^2 + c, \quad f^{(2)}(z) = f(f(z)) = (z^2 + c)^2 + c, \\ f^{(4)}(z) = f^{(2)}(f^{(2)}(z)) = f(f(f(f(z)))).$$

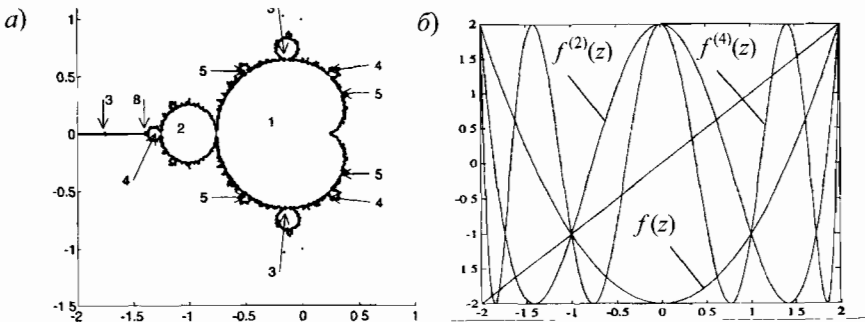


Рис. 4.31

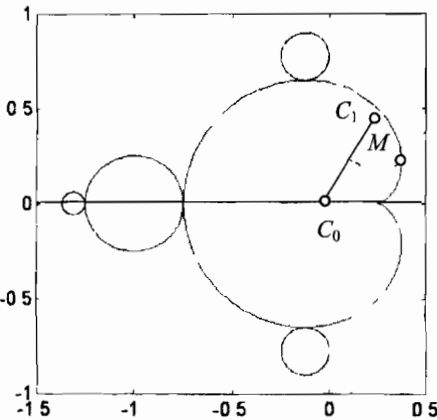


Наклонная прямая пересекает  $f^{(n)}(z)$   $2^n$  раз. Таким образом, точки  $a_n$  отвечают высшим модам функции  $f^{(n)}(z)$ , когда орбита периода  $2^n$  изменяется на орбиту периода  $2^{2^n}$  (ниже об этом говорится более подробно). Первый нечетный период 3 возникает при  $a = -1,7549$ , где находится еще одна клякса в миниатюре; затем появляются следующие нечетные периоды 5, 7, 9 и т.д. Кроновер сообщает, что А.Н. Шарковский еще в 1964 г. доказал теорему: если функция  $f(z)$  имеет точки периода 3, 5, 7, ..., то будут существовать точки с периодом  $3 \cdot 2$ ,  $3 \cdot 2^2$ ,  $3 \cdot 2^3$ , ...,  $5 \cdot 2$ ,  $5 \cdot 2^2$ ,  $5 \cdot 2^3$ , ...,  $7 \cdot 2$ ,  $7 \cdot 2^2$ ,  $7 \cdot 2^3$ , ... В силу фрактальной природы динамического процесса области с четными и нечетными периодами, в частности 3, 4 и 5, появляются вблизи определенных точек кардиоиды, т.е. вокруг области с единственной точкой притяжения.

Теперь разберемся, откуда здесь появилась кардиоида? Напомним, что кардиоида была впервые описана еще в конце XVII в. голландским математиком Коерсма, а в 1741 г. итальянский ученый Кастильон из-за сходства с сердцем окрестил ее принятым сейчас названием (буквально «сердцевидная»). Кардиоида, являясь частным случаем улитки Паскаля, относится к кривым четвертого порядка и имеет уравнение

$$(x^2 + y^2 - px)^2 = q^2(x^2 + y^2) \text{ при } p = q.$$

Рис. 4.32



Кардиоида очерчивается точкой  $M$  окружности  $C$  радиуса  $\frac{1}{4}$ , катящейся по окружности  $C_0$  с таким же радиусом, центр которой находится в начале координат. Слева от кардиоиды как раз находится такая окружность (рис. 4.32). Площадь кардиоиды в точности равна площади шести кругов, а длина кривой — 16 радиусам, т.е. четырем.

Чтобы понять, как получается кардиоида, нужно помнить, как строится функция  $z_{n+1} = z_n^2 + c$ . Она получается в результате рекурсии или итерационной процедуры, которая опирается на диагональ

квадрата  $z_{n+1} = z_n$  (рис. 4.24). Аналогичная итерационная процедура строится и для высших мод рекурсивной функции; прямая  $z = z_{n+1} = z_n$ , пересекающая моды под углом  $45^\circ$  (рис. 4.31б), является здесь основополагающим элементом динамической модели. Отсюда для первой моды получаем условие  $z^2 + c = z$ . Чтобы определить, является ли та или иная точка притягивающей или отталкивающей, необходимо найти производную от функции и определиться: если  $|f'(z)| < 1$ , то  $z$  — притягивающая точка; если  $|f'(z)| > 1$ , то  $z$  — отталкивающая. Найдем производную функции и приравняем ее единице:

$$|f'(z)| = |2z| = 1; \text{ так как } z = \exp(i\varphi), \text{ то } z = [\exp(i\varphi)]/2.$$

Подстановка этого значения  $z$  в условие  $z^2 + c = z$  дает уравнение кардиоиды, сдвинутой по оси  $x$  на величину  $1/4$ :

$$c = \frac{1}{2} \exp(i\varphi) - \frac{1}{4} \exp(2i\varphi) \text{ или}$$

$$a = \frac{1}{2} \cos \varphi (1 - \cos \varphi) + \frac{1}{4} \text{ и } b = \frac{1}{2} \sin \varphi (1 - \cos \varphi).$$

Точки, лежащие внутри кардиоиды, являются центрами притяжения для всех орбит, так как для них выполняется условие  $|f'(z)| < 1$ . Внешние же точки являются отталкивающими центрами, так как для них  $|f'(z)| > 1$ , и все орбиты с этими точками уходят на бесконечность.

Для второй моды  $f^{(2)}(z)$  производная равна  $4z(z^2 + c)$ , а решение определяется равенством  $(z^2 + c)^2 + c = z$ , которое удобно представить в виде двух скобок:

$$(z^2 + c)^2 + c - z = (z^2 + c - z)(z^2 + z + c + 1) = 0.$$

Первая скобка, отвечающая уравнению  $z^2 + c - z = 0$ , дает две неподвижные точки  $z_1$  и  $z_2$ , которые являются решениями уравнения  $z^2 + z + c + 1 = 0$ . По теореме Виета произведение корней равно свободному члену  $z_1 z_2 = c + 1$ , кроме того,

$$z_1^2 + c - z_1, \quad z_2^2 + c - z_2, \quad z_1^2 + c - z_2, \quad z_2^2 + c - z_1.$$

Граница притяжения определяется равенством  $|4z(z^2 + c)| = |4z_1 z_2| = |4(c + 1)| = 1$ , следовательно, круг с центрами притяжения периода 2 по оси абсцисс расположен в пределах  $-0,75 < a < -1,25$ . Как было сказано, этот круг является образующим для кардиоиды. Круг периода 4 на оси абсцисс занимает отрезок  $-1,25 < a < -1,368$ . Круг же периода 8 на оси абсцисс будет еще меньше, так как его диаметр

определяется областью  $-1,368 < a < -1,394$ . Области периода 3 находятся из условия:

$$c^3 + 2c^2 + (1+z)c + (1+z)^2 = 0.$$

Оно дает два круга радиусом  $1/8$ , расположенных в точках  $(-0,125, \pm 0,775)$ , и еще одну крохотную кардиоиду, расположенную по оси абсцисс в точке  $-1,755$ . Указанные моды (за исключением последней), изображенные на рис. 4.32, определяют общий вид «береговой линии» множества Мандельброта.

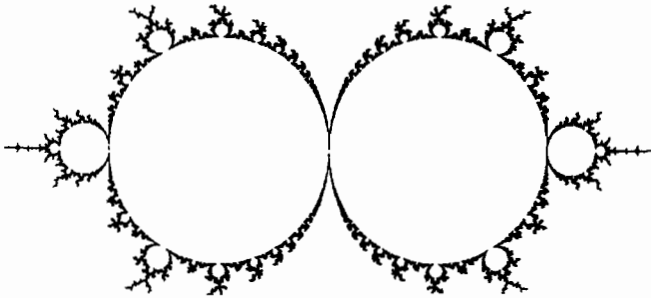


Рис. 4.33

Милнор привел границы множества Мандельброта для функции  $f(z) = z^2 + \lambda z$  (рис. 4.33); центр левого большого круга расположен в начале координат, центр правого большого круга — по оси абсцисс на расстоянии  $+2$ .

#### 4.7. Динамика популяций

Сейчас мы подойдем к вопросам, рассмотренным в предыдущем параграфе, с другой стороны. С этой целью обратимся к истории. *Томас Мальтус* (1766—1834) в 1798 г. опубликовал труд «Опыт о законе народонаселения», где утверждал, что население земли размножается в геометрической прогрессии, а средства его существования растут в арифметической прогрессии. Следовательно, говорил он, перенаселение земли будет неизбежным, что вызовет, в свою очередь, распространение нищеты, голода, болезней и ожесточенных войн. Выживут только те, кто пройдет этот «естественный отбор». Учение *Чарльза Дарвина* (1809 — 1882) о борьбе за существование есть прямая экстраполяция теории Мальтуса на весь органический мир. В начале октября 1836 г. Дарвин вернулся из кругосветного путешествия на корабле «Бигль», откуда привез богатейшую коллекцию растений и животных, а также бесценный

«Дневник изысканий». Ровно через два года он прочел книгу Мальтуса о народонаселении. В течение 20 лет Дарвин упорядочивал и согласовывал добытый им материал с идеями Мальтуса. Наконец, 24 ноября 1859 г. вышел его знаменитый труд «Происхождение видов путем естественного отбора», где в третьей главе «Борьба за существование», в параграфе «Геометрическая прогрессия возрастания численности» он писал:

«Борьба за существование неизбежно вытекает из большой скорости, с которой все органические существа имеют тенденцию увеличивать свою численность. Каждое существо, в течение своей жизни производящее несколько яиц или семян, должно подвергаться уничтожению в каком-нибудь возрасте своей жизни, в какое-нибудь время года или, наконец, в определенные годы, иначе, в силу принципа возрастания в геометрической прогрессии, численность его быстро достигла бы таких огромных размеров, что ни одна страна не могла бы вместить его потомство. Поэтому, так как производится больше особей, чем может выжить, в каждом случае должна вестись борьба за существование либо между особями того же вида, либо между особями различных видов, либо с физическими условиями жизни. Это — учение Мальтуса, с еще большей силой примененное ко всему животному и растительному миру, так как здесь невозможно ни искусственное увеличение пищи, ни благоразумное воздержание от брака. Хотя в настоящее время численность некоторых видов и может увеличиваться более или менее быстро, но для всех видов это невозможно, так как земля не вместила бы их».

Столкновение интересов и конкуренция за материальные, финансовые, людские ресурсы и рынки сбыта — это борьба за существование в сфере экономики. Следовательно, динамические законы, выведенные на примере роста какого-нибудь пенициллинового грибка, затем можно будет распространить на широкий круг биологических, социальных и экономических явлений. Пусть  $x(t)$  — число особей грибковой популяции на момент времени  $t$ . Прирост особей за период  $\Delta t$  равен  $\Delta x = \alpha x \Delta t$ , где  $\alpha$  — коэффициент, характеризующий превышение рождаемости над смертностью (его еще называют *удельной скоростью роста биологической массы*). Отсюда вытекает экспоненциальный закон роста численности грибковой популяции, так как

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \alpha x, \quad \frac{dx}{dt} = \alpha x, \quad \frac{dx}{x} = \alpha dt, \quad \ln |x| = \alpha t + C,$$

$$C = \ln |x_0| = \alpha t_0, \quad x(t) = x_0 \exp [\alpha(t - t_0)].$$

Этот закон распространяется на любой биологический вид  $x$ , где отсутствует конкуренция. В случае, когда сосуществуют два вида  $x$  и  $y$ , возникает насильственная убыль особей  $x$  за счет уничтожения их особями  $y$  на величину  $\beta xy \Delta t$ , где  $\beta$  — коэффициент межвидовой конкуренции. В самом деле, с одной стороны, чем больше особей  $x$ , тем чаще жертва ( $x$ ) будет попадаться хищнику ( $y$ ); с другой стороны, чем больше хищников  $y$ , тем интенсивнее истребление жертв  $x$ . Но если имеет место конкуренция среди особей одного вида, то убыль определяется квадратичной зависимостью  $\beta x^2 \Delta t$ . Поэтому исходное уравнение изменится на уравнение, которое впервые было получено немецким биологом Ферхюльстом в 1845 году:

$$\Delta x = \alpha x \Delta t - \beta x^2 \Delta t, \quad \frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta x^2,$$

$$x(t) = \frac{x_0(\alpha/\beta)}{x_0 + ((\alpha/\beta) - x_0) \exp[-\alpha(t - t_0)]}.$$

При  $t \rightarrow \infty$ ,  $x \rightarrow \alpha/\beta$ , т.е. численность любой популяции стремится к постоянному значению. Если  $t$  не намного отличается от  $t_0$ , т.е. когда популяция еще молода и конкуренция отсутствует, то имеет место первая формула для  $x(t)$  (ее можно получить, умножив числитель и знаменатель на  $\exp[\alpha(t - t_0)]$ ).

В случае, когда жертва  $x$  и хищник  $y$  являются двумя различными видами, имеет место система двух уравнений:

$$\begin{cases} \Delta x = \alpha x \Delta t - \beta xy \Delta t, \\ \Delta y = \gamma xy \Delta t - \delta y \Delta t; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy, \\ \frac{dy}{dt} = \gamma xy - \delta y. \end{cases}$$

Здесь предполагается, что популяция-жертва  $x(t)$  является единственной пищей для популяции-хищника  $y(t)$ . Прирост  $\Delta y$  за время  $\Delta t$  складывается из прибыли, обусловленной рождаемостью  $\gamma xy \Delta t$ , и убыли из-за естественной смертности  $\delta y \Delta t$ , при этом  $\gamma$  — коэффициент рождаемости хищника,  $\delta$  — коэффициент его смертности. Модель из двух функций  $x(t)$  и  $y(t)$ , удовлетворяющих системе уравнений жертва–хищник, впервые была исследована в работе

Вольтерра 1931 года. Он выяснил, что с какой бы численности жертвы и хищники ни стартовали —  $M(x_0, y_0)$  или  $M'(x'_0, y'_0)$ , эта динамическая система всякий раз будет возвращаться к этим же начальным условиям, пройдя определенный замкнутый цикл, который показан на рис. 4.34а.

Классическим примером циклических изменений численности популяции являются колебания численности рысей и зайцев, приходящейся на определенную площадь соснового леса Канады. На рис. 4.34б показан график, на котором видно, что число особей популяции рысей достигает максимальной плотности примерно каждые 9,6 лет. Сходные колебания испытывает популяция зайцев, причем максимальные значения ее плотности наступают в среднем на год раньше, чем у популяции рысей. Корреляция между численностью популяций подтверждает правильность модели *жертва-хищник*. Проследим циклическую динамику детально.

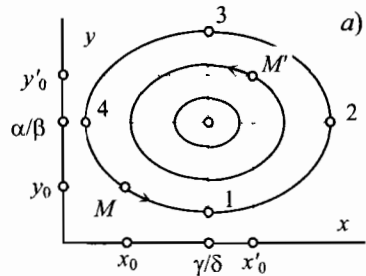
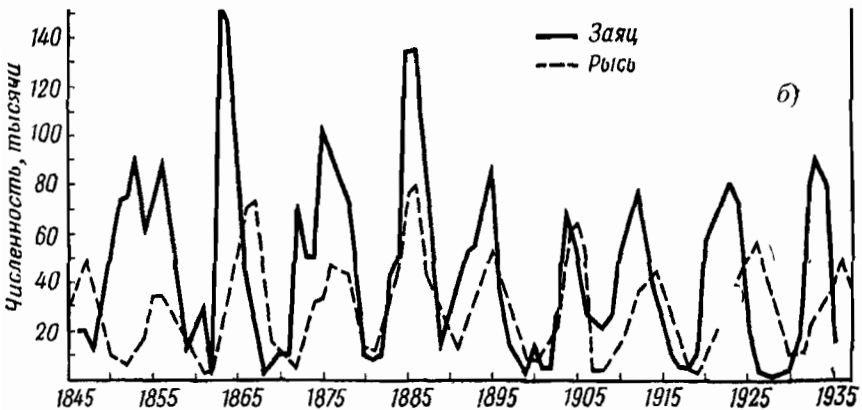
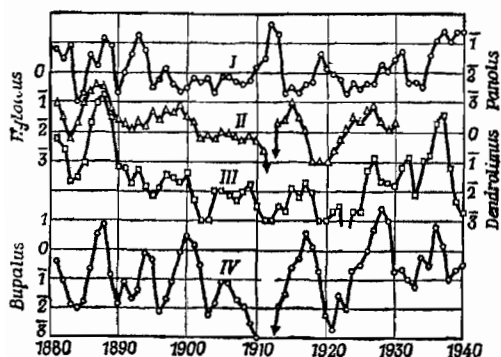


Рис. 4.34



Если система жертва-хищник стартовала из точки  $M(x_0, y_0)$ , то численность обоих видов начнет сокращаться до нижней точки 1 (рис. 4.34а), где хищников становится так мало, что зайцы начинают размножаться по законам, определяемым их собственными параметрами  $\alpha$  и  $\beta$ . Увеличение численности зайцев приводит к уве-

личению численности рысей. Эта тенденция сохраняется до точки 2, после чего численность рысей продолжает увеличиваться, а численность зайцев начинает уменьшаться. В точке 3 наступает новая ситуация: хищников становится так много, что они поедают жертву еще до того, как она оставила потомство. Число зайцев стремительно убывает; возникает ситуация, когда рысь, не найдя добычи, погибает. На участке 3 – 4 наблюдается спад численности и хищника, и жертвы. На участке 4 – 1 спад численности рысей по инерции продолжается, но численность зайцев постепенно восстанавливается до величины, с которой начался цикл.



а)

На участке 3 – 4 наблюдается спад численности и хищника, и жертвы. На участке 4 – 1 спад численности рысей по инерции продолжается, но численность зайцев постепенно восстанавливается до величины, с которой начался цикл.

Рис. 4.35



б)

Многие авторы колебания численности популяций ставят в прямую зависимость от циклической активности Солнца. Здесь возникает множество спорных моментов. Уильямсон, приведя графики (рис. 4.35а) числа шкур рысей, заготовленных компанией Гудзонова залива в бассейне реки Маккензи в течение 100 лет (верхняя кривая), и числа солнечных пятен (нижняя кривая), заявил, что между этими циклами никакой связи нет, поскольку в начале XIX века пики совпадали по фазе, затем они шли в противофазе, потом снова синфазно. Действительно, на 11 пиков в численности рысей (точнее,

числа шкур убитых рысей) приходится 10 пиков солнечной активности. Однако нельзя полностью исключить влияние Солнца на колебание численности популяций. Радиация заметно влияет на состояние живых организмов — это известный биологический факт, поэтому отсутствие частотного резонанса на всем рассматриваемом отрезке времени еще не означает отсутствие влияния солнечной активности на динамику популяций в более короткие периоды.

Биоритмы бывают *экзогенными*, вызванными действием внешней среды (в первую очередь, суточной и сезонной периодичностью), и *эндогенными*, вызванными строением клеток, тканей, организма в целом, а также коллективным поведением особей популяции. Очень многие процессы в живой и неживой природе развиваются циклически, однако строгую математическую зависимость между этими колебаниями установить зачастую очень сложно. Не удастся даже точно предсказать пики морских приливов и отливов, хотя эта механическая задача несравнимо проще любой биологической. Дальнейший анализ этого вопроса показывает, что циклический закон Вольтерры не всегда доминирует в динамике популяций. Статистические данные по рысям и зайцам — это, пожалуй, единственный пример, где прослеживается долговременная периодичность численности особей. Чаще всего колебания носят кратковременный периодический характер, затем следует сбой, флуктуация колебаний или хаотические количественные всплески, поскольку на численности потомства сказываются и холодная зима, и засушливое лето, и сотни других факторов, среди которых солнечная активность будет не на последнем месте. На рис. 4.35б показаны колебания численности популяций куколок *Panolis* (I), куколок *Hyloicus* (II), зимующих личинок *Dendrolimus* (III) и куколок *Vupalus* в Лецлингере (IV), в штуках на 1 м<sup>2</sup> (в логарифмическом масштабе). Такой вид кривых плотности заселения имеет большинство популяций. Тем не менее модель Вольтерры является образцом конструктивного подхода в сфере сложных динамических систем, в которых наблюдаются автоколебания.

#### 4.8. Бифуркационная диаграмма

Чтобы двигаться дальше, нам придется перейти с языка непрерывных функций и дифференциальных уравнений на язык дискретных функций и рекурсивных уравнений. *Дискретизация* времени обычно определяется практическими соображениями. Для наших



уравнений дискретизация времени означает непринятие предельного перехода  $\Delta t \rightarrow dt$ . Так, исходное выражение для экспоненциального закона  $\Delta x = \alpha x \Delta t$  можно записать как закон геометрической прогрессии, о котором говорили Мальтус и Дарвин:

$$X_{n+1} = \alpha X_n,$$

т.е. число особей в новом поколении будет в  $\alpha$  раз больше, чем в предыдущем. Закон Ферхюльста  $\Delta x = \alpha x \Delta t - \beta x^2 \Delta t$  также можно записать в форме:

$$X_{n+1} = \alpha X_n - \beta X_n^2,$$

т.е. число особей в новом поколении равно числу народившихся за вычетом числа погибших в результате внутривидовой борьбы. Если здесь в качестве переменной взять величину  $x = \alpha X/\beta$ , то закон Ферхюльста примет свой канонический вид:

$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n).$$

Рассмотрение роста и убыли численности популяции, отображаемых законом Ферхюльста, ничем особенным не отличается от анализа квадратичной функции, проведенного в предыдущем параграфе. Теперь мы воспользуемся кривой Ферхюльста, чтобы более детально прописать те моменты теории динамических систем, которые раньше были только коротко обозначены и проиллюстрированы рис. 4.24 и 4.31б.

На рис. 4.36а сплошной линией показана вершина параболы, получающаяся при подстановке  $x$  в функцию Ферхюльста канонического вида  $f(x) = ax(1 - x)$ , когда величина параметра  $a < 3$ . В этом случае итерационный процесс, стартовавший из точки  $0 < x_0 < 1$ , сходится в точке притяжения  $x^*$ , так как абсолютная величина тангенса угла наклона проведенной к этой точке касательной удовлетворяет условию сходимости итерационного процесса, сформулированному в предыдущем параграфе:  $|f'(x^*)| < 1$ . Как только  $a > 3$  (пунктирная кривая), тут же нарушится критерий сходимости:  $|f'(x^*)| > 1$ . Следовательно, ранее устойчивая точка  $x^*$  перестает быть таковой; вместо нее появятся две точки  $x_1^*$  и  $x_2^*$ , которые уже не являются устойчивыми для функции  $f(x)$ , но они будут устойчивыми для второй моды  $f^{(2)}(x)$  (рис. 4.36б). Для функции  $f(x)$  точки  $x_1^*$  и  $x_2^*$  образуют цикл периода 2:

$$x_1^* = f(x_2^*) = f^{(2)}(x_1^*), \quad x_2^* = f(x_1^*) = f^{(2)}(x_2^*), \quad \text{где } f^{(2)}(x) = f(f(x)).$$

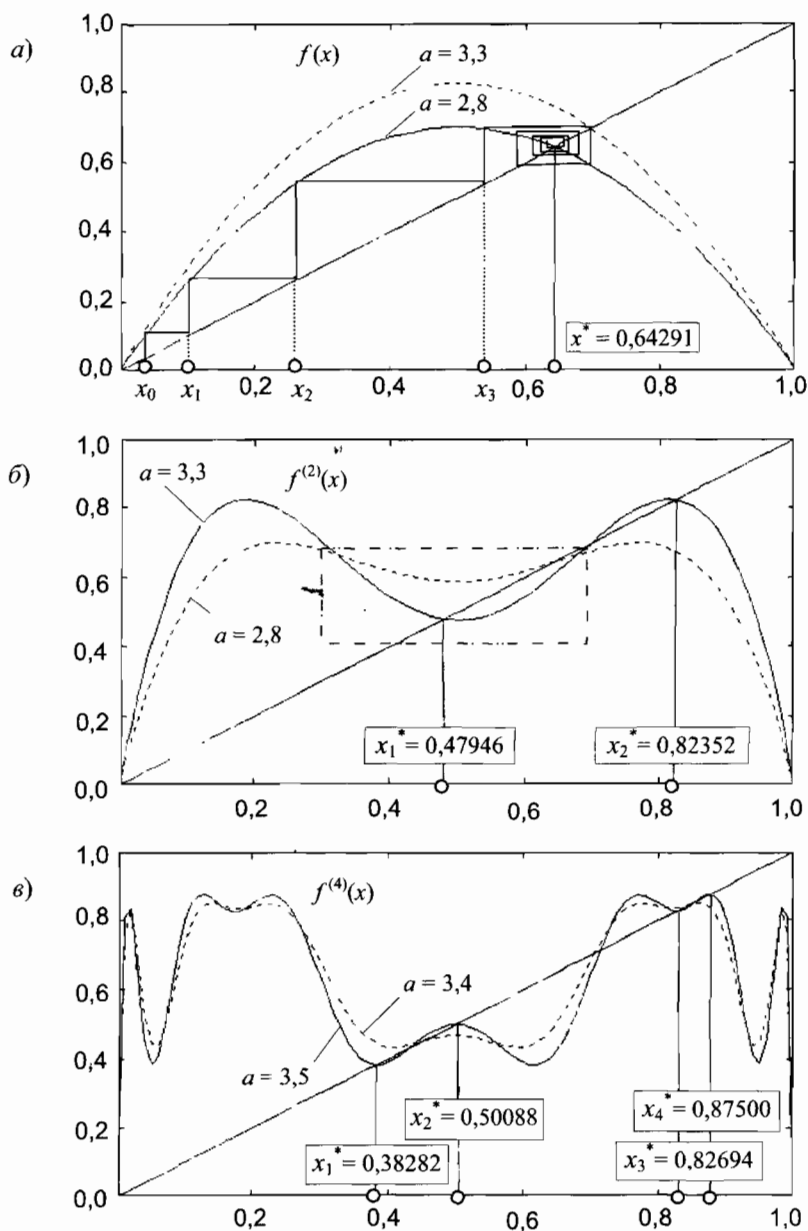


Рис. 4.36

Диагональ  $x_{n+1} = x_n$ , которая обеспечивает итерационную процедуру, пересекает функцию  $f^{(2)}(x)$  в четырех местах (рис. 4.36б), но только точки  $x_1^*$  и  $x_2^*$  удовлетворяют условию сходимости:

$$|[f^{(2)}(x_1^*)]'| < 1, \quad |[f^{(2)}(x_2^*)]'| < 1.$$

Такая ситуация сохраняется до тех пор, пока коэффициент  $a$  закона Ферхюльста находится в определенных пределах. Если  $a$  выходит из этих пределов, точки притяжения  $x_1^*$  и  $x_2^*$  исчезают, так как для них не будет выполняться условие притяжения:

$$|[f^{(2)}(x_1^*)]'| > 1, \quad |[f^{(2)}(x_2^*)]'| > 1,$$

но на моде  $f^{(4)}(x)$  (рис. 4.36в) появятся уже четыре точки  $x_1^*$ ,  $x_2^*$ ,  $x_3^*$  и  $x_4^*$ , для которых условие сходимости будет выполняться:

$$|[f^{(4)}(x_1^*)]'| < 1, \quad |[f^{(4)}(x_2^*)]'| < 1, \quad |[f^{(4)}(x_3^*)]'| < 1, \quad |[f^{(4)}(x_4^*)]'| < 1,$$

хотя диагональ пересекает четвертую моду в 6 местах. Для функции  $f^{(2)}(x)$  точки  $x_1^*$ ,  $x_2^*$ ,  $x_3^*$  и  $x_4^*$  образуют 4-период. Такая геометрическая конфигурация сохранится в области коэффициентов  $a$ , гораздо уже предыдущей. Если  $a$  превысит границу второй области, прежние притягивающие точки ( $x_1^*$ ,  $x_2^*$ ,  $x_3^*$ ,  $x_4^*$ ) исчезнут и вместо них появятся восемь новых, для которых условие сходимости итерационной процедуры будет выполняться уже для  $f^{(8)}(x)$ . Каскад удвоения притягивающих точек можно продолжать до бесконечности, при этом коэффициент  $a$  устремится к некоторому пределу, который явится правой границей бесконечной последовательности чисел.

Для иллюстрации этого каскада удвоений вычерчивают так называемую *бифуркационную диаграмму*  $x^* = B(a)$ , которая показывает число и значение притягивающих точек  $x^*$  в зависимости от величины коэффициента  $a$  (слово *бифуркация* означает *удвоение*). На рис. 4.37а нанесены найденные значения притягивающих точек:

$$x^* = 0,64 \quad (\text{при } a = 2,8); \quad x_1^* = 0,48, \quad x_2^* = 0,82 \quad (\text{при } a = 3,3);$$

$$x_1^* = 0,38, \quad x_2^* = 0,50, \quad x_3^* = 0,83, \quad x_4^* = 0,88 \quad (\text{при } a = 3,5).$$

Первое удвоение наступает при  $a_1 = 3$ , второе — при  $a_2 = 3,4495$ , третье — при  $a_3 = 3,5441$ ; далее точки  $a_i$  настолько плотно ложатся на оси  $a$ , что они становятся неразличимы. В соответствии с ними происходит и бифуркация. За счет большого масштабного коэффициента  $k$  область действия каждой точки притяжения стремительно

уменьшается с одновременным ростом их количества. Это приводит к слиянию ветвей бинарного дерева, отчего бифуркационная диаграмма представляется одной затемненной областью, которая и видна на рис. 4.37б.

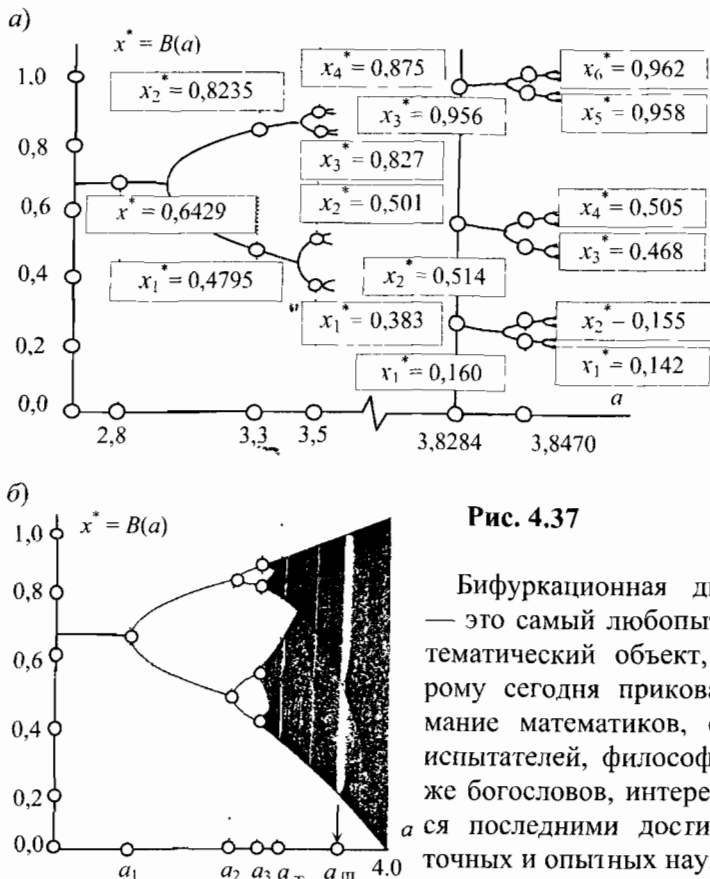


Рис. 4.37

Бифуркационная диаграмма — это самый любопытный математический объект, к которому сегодня приковано внимание математиков, естествоиспытателей, философов и даже богословов, интересующихся последними достижениями точных и опытных наук.

Диаграмма заставила крепко задуматься над нашими представлениями о непрерывном и дискретном, случайных и детерминированных процессах или хаотических и регулярных явлениях. Начиная с 1978 г., когда американский математик М. Фейгенбаум построил бифуркационную диаграмму, люди, не равнодушные к проблемам науки, неустанно спорят, откуда берется хаос в строго детерминированных процессах. Ведь функция  $f(x)$  гладкая, т.е. в каждой точке дифференцируема, или, как говорил Дж. Милнор, голоморфна; гладкими будут и ее моды. Но на бифуркационной диаграмме ясно

видны узкие и широкие щели, говорящие о наличии дискретности. Дискретная сущность голоморфных отображений отчетливо видна по так называемому *странному аттрактору Лоренца*, когда в строго детерминированном процессе неожиданно созревают условия для спонтанного перепрыгивания его с одной орбиты на другую. Кто указывает этому, казалось бы, чисто математическому явлению, по какому пути развиваться? Тут и приходят на помощь теологи, утверждающие, будто динамикой развития подобных процессов руководят божественные силы. К счастью, многие дискретные и хаотические явления, не прибегая к сверхъестественным сущностям, вполне удастся разъяснить на других, более прозрачных математических моделях, чем система

Итак, самая первая притягивающая точка  $x^*$  держится при значениях коэффициента  $a_0 < a < a_1$ ; притягивающие точки  $x_1^*$  и  $x_2^*$  существуют в диапазоне  $a_1 < a < a_2$ ; четыре притягивающие точки  $x_1^*$ ,  $x_2^*$ ,  $x_3^*$ ,  $x_4^*$  «живут» на отрезке  $a_2 < a < a_3$ . Но выяснилось, что другие четыре притягивающие точки находятся совершенно в другой области коэффициента  $a$ , а именно, в диапазоне  $3,9601 < a < 3,9608$ . Циклы периода 5, 6 и прочие также многозначны и имеют по оси коэффициента  $a$  начало и конец существования. За величиной параметра  $a_{\infty} = 3,57$  начинается область  $a_{\infty} < a < 4$ , где происходит не только удвоение, но и утроение периодов; имеются также другие нечетные периоды: 5, 7, 9, ... Эти нечетные периоды умножаются на периоды  $2^n$ , причем нарастание периодичности идет в обратном порядке, т.е. с увеличением коэффициента  $a$  вначале идут нечетные моды высшего порядка, а затем низшего, так что первый цикл нечетного периода бесконечно большого порядка появляется при  $a = 3,6786$ , а цикл периода 3 — при  $a_{III} = 3,8284$ . Это положение периодов на оси  $a$  разъясняется на рис. 4.37а, где справа в увеличенном масштабе ( $3,82 < a_{III} < 3,84$ ) изображены три корня, из которых потом вырастают бесконечные бинарные деревья. Значениям параметров на рис. 4.37б отвечает самая широкая светлая полоса, которая занимает диапазон  $3,8284 < a_{III} < 3,8496$ . Цикл периода  $3 \cdot 2 = 6$  возникает при значении параметра  $a_{VI} = 3,6265$ , но он существует также при  $a_{VI} = \{3,8415; 3,937516; 3,977760; 3,997583\}$ . Цикл периода 5 начинается левее точки  $a_{III}$ , но затем он повторяется и правее ее, при  $a_V = \{3,7382; 3,9056; 3,99026\}$ .

В левом верхнем окошке рис. 4.38 показана кривая при коэффициенте  $a = 3,78$ , которая немного «не дотягивает» до цикла периода 3. В правом верхнем окошке этого же рисунка показана та же самая мода при  $a = 3,8284$ , когда возникают три притягивающие точки:  $x_1^* = 0,1599$ ;  $x_2^* = 0,5143$ ;  $x_3^* = 0,9563$ . Примечательным фактом здесь является то, что экстремумы моды любого порядка (в данном случае третьего) при определенном значении коэффициента  $a$  касаются диагонали одновременно, независимо от того, где они до этого находились, т.е. движение экстремальных точек вдоль оси ординат происходит крайне неравномерно. Наиболее чувствительным к изменениям коэффициента  $a$  является центральный пик, минимум или максимум которого всегда находится в точке  $x = 0,5$ . Поэтому при разыскании точек притяжения удобно ориентироваться именно на него. Сказанное относится и к модам пятого порядка, изображенным на двух нижних графиках. При двух значениях  $a$  они дают, соответственно, две системы притягивающих точек с периодом 5:

$$a = 3,73818: \quad x_1^* = 0,229; \quad x_2^* = 0,507; \quad x_3^* = 0,661; \quad x_4^* = 0,838; \quad x_5^* = 0,934;$$

$$a = 3,90557: \quad x_1^* = 0,090; \quad x_2^* = 0,320; \quad x_3^* = 0,497; \quad x_4^* = 0,850; \quad x_5^* = 0,976.$$

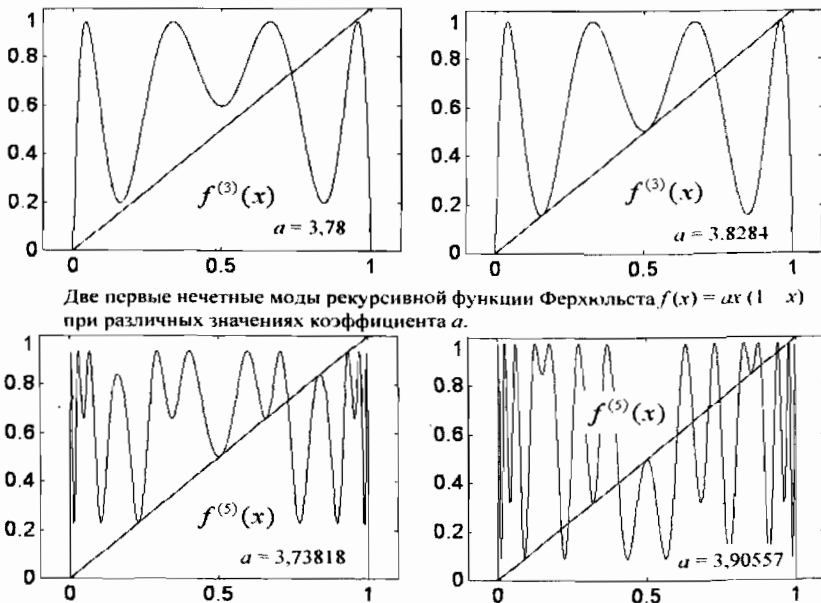


Рис. 4.38

На рис. 4.39, состоящем также из четырех окон, изображены графики четных мод (6-го и 10-го порядков) от функции Ферхюльста. Эти четыре моды порождают следующие системы притягивающих точек; для мод шестого порядка имеем:

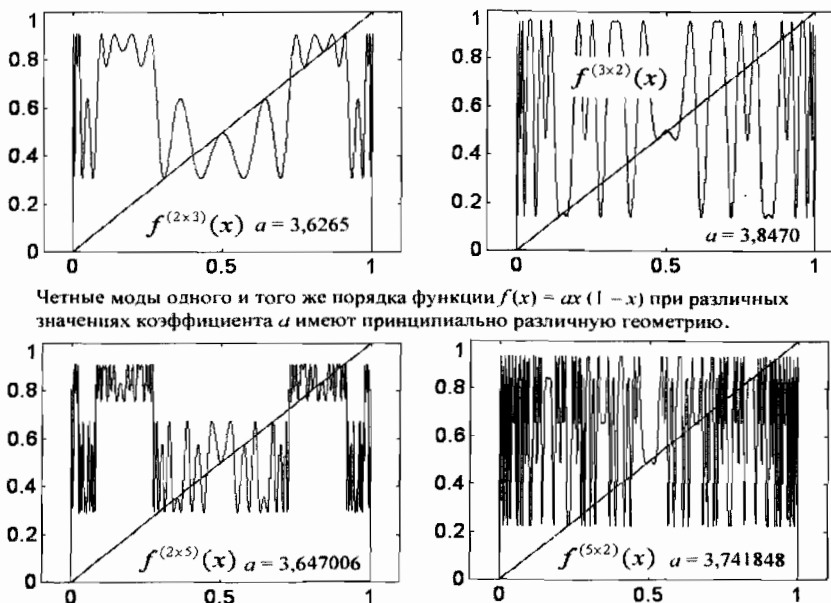
$$a = 3,6265: \quad x_1^* = 0,307; \quad x_2^* = 0,493; \quad x_3^* = 0,638; \quad x_4^* = 0,772; \quad x_5^* = 0,838; \quad x_6^* = 0,906;$$

$$a = 3,8470: \quad x_1^* = 0,142; \quad x_2^* = 0,155; \quad x_3^* = 0,468; \quad x_4^* = 0,505; \quad x_5^* = 0,958; \quad x_6^* = 0,962.$$

Координаты притягивающих точек для десятой моды при  $a = 3,647006$ :

$$x_1^* = 0,293; \quad x_2^* = 0,355; \quad x_3^* = 0,502; \quad x_4^* = 0,576; \quad x_5^* = 0,672;$$

$$x_6^* = 0,755; \quad x_7^* = 0,803; \quad x_8^* = 0,835; \quad x_9^* = 0,890; \quad x_{10}^* = 0,912.$$



Четные моды одного и того же порядка функции  $f(x) = ax(1-x)$  при различных значениях коэффициента  $a$  имеют принципиально различную геометрию.

Рис. 4.39

На двух левых графиках рис. 4.39 отчетливо видны два различных уровня, по которым распределяются точки касания мод  $f^{(6)}(x)$  и  $f^{(10)}(x)$ . Это наводит на мысль, что порядки мод нужно представлять в виде двух простых множителей, как моды  $f^{(2 \times 3)}(x)$  и  $f^{(2 \times 5)}(x)$ . Шесть точек касания от моды  $f^{(6)}(x)$ , показанной справа сверху, распределены парами по трем уровням, т.е. данную моду нужно представлять уже как  $f^{(3 \times 2)}(x)$ . Аналогичная картина наблюдается в

отношении десятой моды, изображенной в нижнем правом углу: пары близко расположенных точек распределены по пяти уровням, следовательно, мы имеем дело с модой  $f^{(5 \times 2)}(x)$ .

Теперь давайте посмотрим, что произойдет с модами высших порядков при таких  $a$ , когда моды низших порядков касаются диагонали. Представлены четыре графика четных и нечетных мод (рис. 4.38 и 4.38) при восьми различных значениях коэффициента  $a$ . Выберем из них четыре моды, а именно:

$$\begin{aligned} f^{(3)}(x) \text{ при } a = 3,832, & & f^{(5)}(x) \text{ при } a = 3,73818, \\ f^{(2 \times 3)}(x) \text{ при } a = 3,5276, & & f^{(2 \times 5)}(x) \text{ при } a = 3,647006; \end{aligned}$$

и при заданных четырех коэффициентах построим в одной системе координат графики мод, например, с 500-го по 510-й порядок. Результат такого построения показан на рис. 4.40.

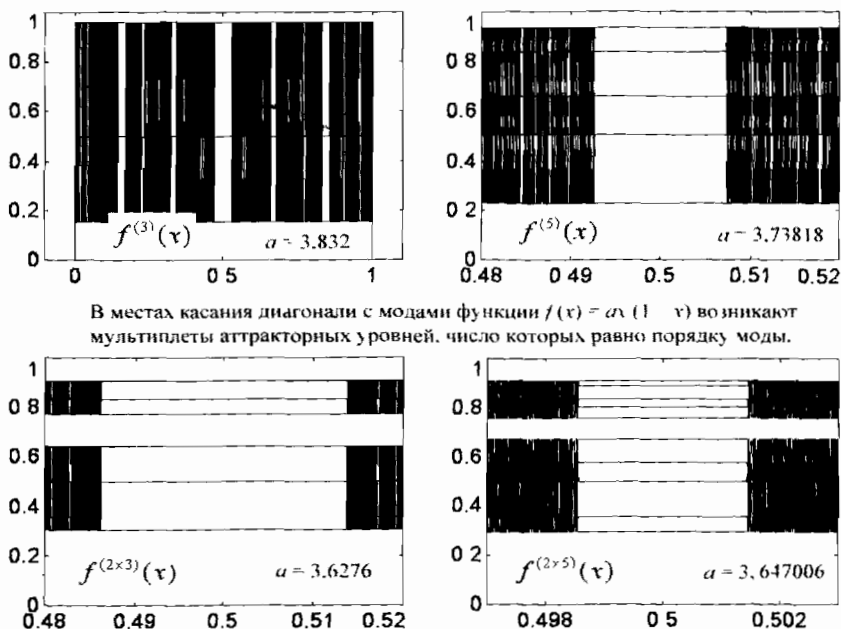


Рис. 4.40

При коэффициенте  $a = 3,832$  все десять мод дали график, вычерченный в левом верхнем углу этого рисунка. Мы видим систему просветов, где имеются три уровня. По оси ординат уровни примерно (здесь многое зависит от коэффициента  $a$ ) соответствуют точкам притяжения  $x_1^*$ ,  $x_2^*$  и  $x_3^*$ . В этих трех точках по оси абсцисс нахо-



дятся самые широкие просветы. Но помимо них существует бесчисленное множество более узких просветов, которые располагаются фрактальным образом. Последнее означает, что если за основу взять любую из светлых полос, то все более узкие полосы будут расположены относительно исходной точно так же, как центральная, самая широкая полоса располагается относительно всех прочих полос. Другими словами, здесь любая часть воспроизводит целое, а это свойство геометрической структуры доказывает ее фрактальную сущность. Бифуркационная диаграмма абсолютно не способна разъяснить нам данный математический факт.

Кроме того, бифуркационная диаграмма оперирует *точками* притяжения, между тем мы видим *линии* притяжения. На тех участках оси абсцисс, где находятся просветы, все моды стремятся занять один из трех уровней, причем чем выше порядок моды, тем больше значение ординаты приближается к некоторой идеальной величине. Именно таким свойством обладают протяженные *аттракторы*. Ранее рассмотренные «точки притяжения» тоже иногда именуется «аттракторами», поскольку *аттрактором* называют *и* точки, *и* линии, к которым притягиваются орбиты, т.е. восходящая последовательность мод. Однако следует иметь в виду, что линии притяжения состоят из точек притяжения; поэтому получается, что один протяженный аттрактор состоит из бесконечного числа точечных аттракторов. В нашем случае линия аттрактора является качественно новым образованием и существенно отличается от одинарной точки притяжения. Это дает право на смысловое разграничение *точек притяжения* от *линий притяжения*. Последнее словосочетание мы заменяем на термин *аттрактор* и говорим: *всякий аттрактор состоит из точек притяжения*. И еще одна маленькая деталь. Слово *аттрактор* перекликается с замечательным французским словом *аттракцион*, который не просто «притягивает» людей, он еще и забавляет их. Трудно найти в математике более удивительную и забавную вещь, чем аттрактор рекурсивной функции.

Три других графика на рис. 4.40 демонстрируют те же аттракторные свойства мод рекурсивной функции  $ax(1-x)$ , что и первый. Как и в предыдущем случае, бифуркационная диаграмма не отвечает на вопрос, от чего зависит ширина аттракторных просветов (для функций  $f^{(5)}(x)$ ,  $f^{(2 \times 3)}(x)$  и  $f^{(2 \times 5)}(x)$  она слишком мала; поэтому пришлось изменить масштаб, чтобы можно было видеть аттракторные уровни). Она не дает понимания того, каким образом аттракторные

уровни распадаются на дуплеты, триплеты и прочие мультиплеты, т.е. она не разъясняет нам наблюдаемую группировку отдельных аттракторных уровней. Почему, в частности, на двух нижних графиках нечетные моды занимают верхний блок аттракторных уровней, а четные — нижний?

Ясно, что бифуркационная диаграмма является вторичным продуктом рекурсивной процедуры, которая возникает в результате нахождения точек касания. Получается, что через диаграмму изучаются не сами рекурсивные моды  $f^{(n)}(x)$ , а их «тени» в виде точек  $x^*$ , причем делается акцент именно на касании мод с прямой диагональю, а не на касании мод друг с другом. Между тем моды интересны сами по себе. Геометрическая конфигурация мод заслуживает того, чтобы их изучать отдельно, вне бифуркационной диаграммы, которая больше запутывает нас, чем что-либо разъясняет, поскольку она сваливает все моды в одну кучу, не делая различий между ними. В самом деле, непрерывно увеличивая коэффициент  $a$  рекурсивной функции Ферхюльста  $ax(1-x)$ , мы наблюдаем «странную» картину, напоминающую «странного» аттрактора Лоренца. Странно то, почему число притягивающих точек  $x^*$  то увеличивается до бесконечности, то неожиданно уменьшается. Непонятна также закономерность появления просветов в диаграмме и неясно, чем обусловлена их ширина. Очевидно, что данная математическая модель, получившая широкое хождение и вызвала бесконечные споры о соотношении хаотического и регулярного, дискретного и непрерывного, нивелирует естественную природу рекурсивного процесса и сама нуждается в репрезентативной модели, которая бы позволила изучать в более отчетливых формах все названные проблемы. Самое главное, что дискуссия вокруг бифуркационной диаграммы заслонила собой важную проблему аттракторов. Складывается впечатление, будто авторы их просто не замечают. Аттракторы возникают на модах высшего порядка, прежде всего в местах касания диагонали с модами низшего порядка, но не только. Эти фрактальные образования в рекурсивных функциях носят дискретную природу и должны стать объектом самого детального исследования.

#### 4.9. Аттрактор «Крепостная стена»

Материал данного и следующих подразделов может быть легко приспособлен для проведения лабораторно-практических занятий в компьютерном классе. Бифуркационную диаграмму не построить за

полтора или три часа, обычно отводимые на занятия, но отыскать аттрактор и замерить его параметры за это время можно. Причем материал такого рода вызывает, как правило, неподдельный интерес, так как картинка, появляющаяся на экране дисплея, весьма любопытна и зрелищна. Как и в предыдущих случаях, мы не приводим конкретных программ, поскольку любой программный продукт быстро устаревает. Достаточно сказать, что все графики в этом подразделе были получены с помощью системы MATLAB v. 4.0, а сегодня вышла уже шестая версия этого пакета, предоставившая новые возможности для реализации рекурсивных процедур. Преподаватель, быть может, предпочтет совершенно иную систему, например MathCad или что-то еще. Не станем навязывать ему вычислительную систему и стеснять его в проведении практических занятий. Свою цель мы видим лишь в том, чтобы указать, какой теоретический материал удобен для демонстрации наиважнейших на сегодняшний день вопросов дискретной математики, каковыми являются аттракторы.

Ниже приводятся картинки, отобранные из нескольких сотен и считающиеся наиболее удачными, но они, тем не менее, весьма поверхностно передают те фантастические метаморфозы, которые можно наблюдать непосредственно на экране дисплея при грамотно составленной и хорошо отлаженной компьютерной программе. С помощью отдельных графиков практически невозможно продемонстрировать все характерные фазы перестройки тонкой структуры. Нужно все видеть в динамике, в форме живых и красочных клипов, когда каждая мода окрашена в свой цвет. Нам же придется ограничиться несколькими характерными моментами, которые в основном связаны с формированием аттракторов и субаттракторов, т.е. более мелких аттракторных подуровней, образуемых высшими модами в пределах основных уровней. Микроуровни субаттракторов имеют строго определенную протяженность, которая проявляется в виде просветов в макроуровнях. Понятия субаттрактора и микроуровня являются относительными, поскольку иерархия аттракторов может состоять не только из двух, но и из любого числа звеньев, т.е. микроуровни субаттрактора могут расщепиться на микроуровни субсубаттрактора. В этих случаях говорят, например, об  $2 \cdot 5 \cdot 3$ -аттракторе, когда уровни аттрактора второго рода содержат подуровни аттрактора пятого рода, а те, в свою очередь, — подуровни аттрактора третьего рода. В результате такой иерархии образуется

аттрактор 30-го рода, который имеет в своем составе мультиплет из 30 микроуровней.

Для воспроизведения нужного результата требуется указать четыре атрибута: рекурсивную функцию, порядок ее моды, величину коэффициента  $a$  и значение переменной  $x$ , что мы и делаем во всех случаях, когда приводим тот или иной график. Как обеспечить быстрое переключение с одного масштаба  $x$  на другой, каким образом можно точно найти максимум или минимум функции и прочие «технические» детали нас интересовать не будут. Здесь многое зависит от наличия того или иного программного обеспечения и опытности преподавателя. Хочется заранее предупредить читателя: для первого знакомства, по-видимому, достаточно просмотреть картинки, которые приведены в этом учебнике, но для более углубленного изучения материала (если он не включен в учебный процесс) необходимо сесть за компьютер и самим воспроизвести все увиденные графики на экране дисплея своего компьютера. Именно в этом заключается *конструктивный метод обучения*. Без самостоятельной проработки на компьютере вы не сможете усвоить материал и на одну десятую его объема. Компьютер же позволит вам увидеть намного больше, чем сказал автор. После этих предварительных замечаний перейдем к основной теме, объявленной в заголовке подраздела.

Первая проблема, возникающая в связи с аттракторами, заключается в том, в каком диапазоне значений коэффициентов  $a$  функции  $ax(1-x)$  они существуют. Поскольку аттракторы ранее не попадали в поле зрения исследователей, исторически сложилось так, что авторы публикаций по динамическим процессам приводили данные по коэффициенту  $a$  на момент касания моды того или иного порядка с диагональной прямой. Однако несложно проследить, что при этом значении коэффициента  $a$  никакого аттракторного уровня для высших мод еще не возникает. Аттрактор появляется при несколько большем значении этого коэффициента. Существует также такое значение коэффициента  $a$ , при котором аттракторные просветы для всех, даже самых высших мод полностью исчезают. Важно понять, что зарождение и исчезновение аттрактора является сложным динамическим процессом, который начинается с выхода моды на основной аттракторный уровень и его расщепления на множество субаттракторных мультиплетов, далее происходит последователь-

ное разрушение аттракторной конструкции, а заканчивается данный динамический процесс полным исчезновением основного аттракторного уровня. И все это протекает при непрерывно меняющемся коэффициенте  $a$ . Какой из этих моментов лучше всего подходит для регистрации коэффициента  $a$ ?

Проведенные исследования показывают, что предпочтительным моментом для регистрации коэффициента  $a$ , который бы наилучшим образом соответствовал состоянию данного аттрактора, является выход экстремальных точек всех характеристических пиков моды на линию диагонали. Тогда значения коэффициента  $a$  будут всегда выше тех значений, когда моды только касаются диагонали. К моменту прохождения диагонали через характеристический максимум (минимум) моды основной уровень аттрактора успевает сформироваться для всех высших мод и он подвержен наименьшим колебаниям при смене мод. В то же время к данному моменту основной уровень еще не успевает расщепиться на первый дуплет. При этом, что особенно важно, для всех мод рекурсивной функции Ферхюльста центральный, наиболее чувствительный пик достигает уровня 0,5. Поэтому при нахождении показательных коэффициентов удобно ориентироваться именно на указанный уровень. Если центральный пик достиг величины 0,5, можно быть уверенным, что все экстремальные точки характеристических пиков лежат в точности на диагонали.

В табл. 4.7 приведена система бифуркационных коэффициентов, когда экстремальные точки мод  $f_1, f_2, f_4, f_8, \dots, f_{512}$  достигают диагонали. Необходимо сказать, что с этого момента и далее мы перешли на новую систему обозначения мод без указания их аргумента, но с указанием их порядка базовым шрифтом, поскольку мелкие верхние индексы не всегда хорошо видны на рисунках. Новое обозначение обуславливается еще и тем, что здесь и далее моды предстают в новом свете. Сейчас мы не станем говорить о точках притяжения с циклами периода 2, 3, 4 и т.д., нас будут интересовать более зримые вещи — аттракторные мультиплеты с двумя, тремя, четырьмя и т.д. устойчивыми уровнями.

То, что наблюдается при первых четырех бифуркационных коэффициентах, приведенных в табл. 4.7, изображено на рис. 4.41. При  $a_0 = 2$  все моды выходят на уровень 0,5. При этом первая мода  $f_1$ , т.е. сама рекурсивная функция  $ax(1-x)$ , имеет единственную

точку на этом уровне, в которой она пересекается с диагональю  $f_0$ . Следующие моды отвоевывают все большее и большее аттракторное пространство. При  $a_1 = 3,236\dots$  происходит расщепление основного аттракторного уровня на два подуровня, т.е. появляется первый дуплет, причем один из подуровней сохраняет свое основное значение, равнос 0,5. Теперь уже диагональ  $f_0$  настраивается на максимум моды  $f_2$  или на ее минимум, расположенный в точке  $x = 0,5$ . Таким образом, основной уровень никуда не исчезает и остается на своем месте для всех последующих бифуркаций. На графике, приведенном в правом верхнем углу рис. 4.41, изображены только четные моды; нечетные моды выйдут на те же самые уровни, но окажутся в противофазе к четным. При  $a_2 = 3,49856\dots$  произошла вторая бифуркация уровней или их удвоение; диагональ  $f_0$  пересекает моды, кратные числу 4, в четырех местах. Следующая бифуркация произошла при коэффициенте  $a_3 = 3,55464\dots$ , результатом чего явились четыре дуплетных уровня. В этом случае настройка производится на экстремальные точки моды  $f_8$ . Цепь бифуркаций приводит к расщеплению исходного уровня на 2, 4, 8, ... подуровней, которые образуют фрактал «Крепостная стена».

Таблица 4.7

Моды	Коэффициенты бифуркации	Ряд $F_i$	$\Delta = F - F_i$
$f_1$	$a_0 = 2,0000000000000000$	—	—
$f_2$	$a_1 = 3,236067977499789$	$F_1 = 4,70894301$	$-0,039741$
$f_4$	$a_2 = 3,498561699327702$	$F_2 = 4,68077100$	$-0,011569$
$f_8$	$a_3 = 3,554640862768825$	$F_3 = 4,66295961$	$0,006242$
$f_{16}$	$a_4 = 3,566667379856267$	$F_4 = 4,66840393$	$0,000798$
$f_{32}$	$a_5 = 3,569243531637112$	$F_5 = 4,66895374$	$0,000248$
$f_{64}$	$a_6 = 3,569795293749944$	$F_6 = 4,66915718$	$0,000044$
$f_{128}$	$a_7 = 3,569913465422345$	$F_7 = 4,66919100$	$0,000011$
$f_{256}$	$a_8 = 3,569938774233296$	$F_8 = 4,66919946$	$0,000002$
$f_{512}$	$a_9 = 3,569944194608065$	—	—

Динамический фрактал «Крепостная стена» ничем принципиально не отличается от ранее рассмотренных статических фракталов, типа ломаной линии Коха или береговой линии побережья Великобритании, которую изучал Мандельброт. Если возникает «Крепостная стена», значит, имел место бифуркационный процесс, и на-

оборот. По коэффициентам бифуркаций  $a_i$  можно найти постоянную Фейгенбаума с той степенью точности, которая определяется тремя последними членами ряда  $a_i$ . В нашем случае эта константа вычисляется с точностью  $\Delta = 0,000002$ :

$$F_8 = \frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n+1} - a_n} = \frac{a_8 - a_7}{a_9 - a_8} = 4,66919946$$

(постоянная Фейгенбаума равна  $F = 4,6692016091029909\dots$ ). Универсальность постоянной Фейгенбаума как раз и объясняется тем, что после возникновения основного аттракторного уровня происходит его расщепление по однотипной схеме, не зависящей как от вида рекурсивной функции  $f(x)$ , так и от места возникновения аттрактора на оси абсцисс.

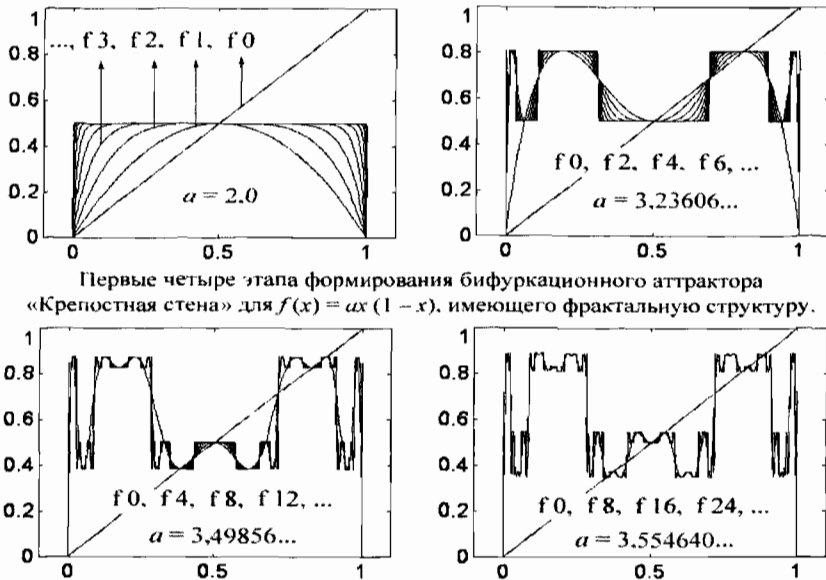


Рис. 4.41

В самом деле, рекурсивная функция Ферхюльста  $f(x) = ax(1 - x)$  является простейшей квадратичной зависимостью, впервые появившейся в 1845 г. при математическом описании роста численности биологической популяции в условиях конкуренции. Однако идентичность бифуркационных диаграмм заставляет задуматься о единой природе огромного класса рекурсивных функций, которые

могут быть выражены формулой  $f(x) = ax P(x)$ , где  $P(x)$  — некий полином с конечным или бесконечным числом членов. На рис. 4.42 дается сравнение «Крепостной стены» от функции Ферхюльста с произвольно выбранной функцией вида

$$f(x) = ax \left( 1 - x + \frac{x^2}{5} - \frac{x^3}{93} \right).$$

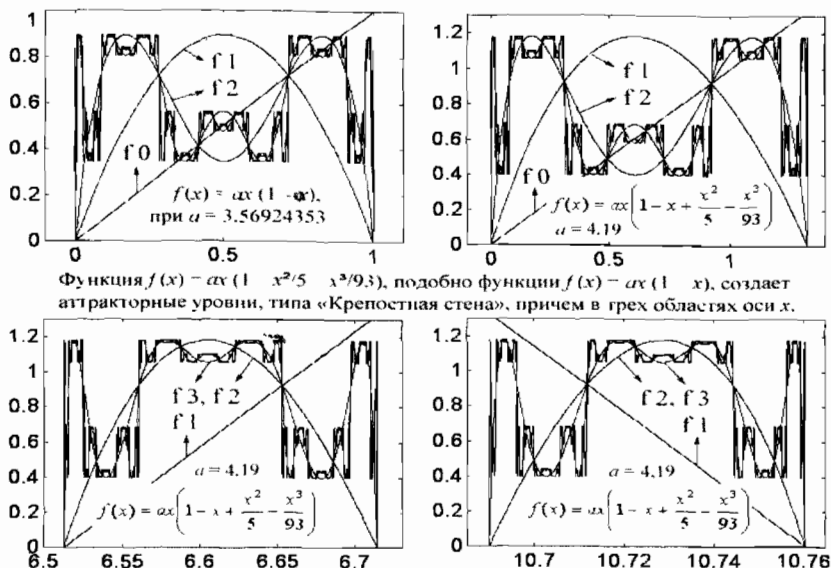


Рис. 4.42

В левом верхнем углу изображен аттрактор от первых 32 мод при  $a_5 = 3,56924\dots$  Основной его особенностью является строгая симметрия относительно серединной вертикали  $x = 0,5$  и локализация границ в пределах единичного квадрата декартовой системы координат. Для новой рекурсивной функции более высокого порядка мы видим иную картину. Во-первых, вместо одной «Крепостной стены» появляются три: первая — в районе начала координат, причем границы этой «стены» выходят за единичные пределы; две другие «стены» — в областях  $x = 6,6$  и  $x = 10,73$ . Во-вторых, все три «стены» заметно несимметричны. В-третьих, и самое главное, две дополнительные «стены», расположенные в областях  $x = 6,6$  и  $x = 10,73$ , «возведены» в отсутствие диагонали  $f_0$ . Ее функцию взяла на себя мода  $f_1$ , т.е. сама рекурсивная функция. В свою очередь, мода



$f_2$  взяла на себя роль моды  $f_1$ , мода  $f_3$  — роль моды  $f_2$  и т.д. Такое необычное расположение мод заставляет переосмыслить весь итерационный процесс.

Ведь раньше, проводя диагональ  $f_0$ , считали, что тем самым обеспечивается переход от  $x_n$  к  $x_{n+1}$ , т.е. переход от родителей к потомству, если говорить на языке биологических популяций. Таким образом, диагональ выступала искусственной подпоркой для обеспечения рекурсии в виде череды «поколений»:  $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots$ ; она вводилась в графические изображения (см. рис. 4.24 и 4.36a) субъективной волей исследователя. Теперь же, когда ее роль «самостийно» взяла на себя первая мода  $f_1$ , становится понятно, что аттракторы образуются не по причине касания диагонали с «макушкой» той или иной моды, а в результате «взаимодействия» всех мод между собой. Именно это создает фрактальные условия для «Крепостной стены» и всех прочих аттракторов. Отсюда, в частности, вместо трех возникло бесконечное множество аттракторных просветов, которые мы видели на левом верхнем графике рис. 4.40. Важно усвоить, что роль диагонали может выполнять не только сама рекурсивная функция  $f_1$ , но и любая ее мода —  $f_2, f_3, f_4$  и т.д. На диагональ  $f_0$  удобно ориентироваться при вычерчивании аттракторов, и мы будем это делать постоянно, но при этом не стоит забывать, что сама рекурсивная функция и ее моды ничего «не знают» о ней. К этому вопросу мы еще вернемся не единожды, а пока сосредоточимся на рекурсивной функции экспоненциального вида.

Поскольку экспонента может быть разложена в степенной ряд, то рекурсивная функция вида  $f(x) = ax \exp(1-x)$  также относится к классу функций  $f(x) = ax P(x)$ , который открывается законом Ферхюльста  $f(x) = ax(1-x)$ . На рис. 4.43 вычерчены два звена из 512 звеньев моды  $f_{512}$  экспоненциальной функции. Как видно из графика «Крепостной стены», бифуркационный аттрактор для этой функции тоже несимметричен, но вертикальная и горизонтальные линии, проведенные на уровне числа  $e = 2,71828\dots$ , играют важную роль. Эти линии являются предельными, т.е. они делят «Крепостную стену» на две подобные части только в том случае, когда мода имеет бесконечно большой порядок. Поэтому главная вертикаль «стены» моды  $f_{512}$  слегка отклонена от трансцендентного числа  $e$ . Ту роль, которая была отведена в законе Ферхюльста аттракторному уровню 0,5 и координате  $x = 0,5$ , в экспоненциальном законе берет на себя единичный уровень и точка  $x = 1,0$ . Двумя другими важными особенностями экспоненциальной функции является, во-

ными особенностями экспоненциальной функции является, во-первых, то, что число звеньев «Крепостной стены» равно порядку моды, а во-вторых, максимальный аттракторный уровень в точности равен величине коэффициента  $a$ . Так, например, в правом нижнем углу рис. 4.43 приведен график моды  $f$  512 при коэффициенте  $a_1 = 3,51 \dots$ ; при этом бифуркационном значении коэффициента существует аттракторный дуплет в виде двух уровней — 1,0 и 3,51..., а сама мода  $f$  512 состоит из 512 прямоугольных импульсов, которые резко обрываются в районе  $x = 746$ . Бифуркационные коэффициенты  $a_i$  и числовой ряд  $F_i$ , сходящийся к постоянной Фейгенбаума, приведены непосредственно на рис. 4.43.

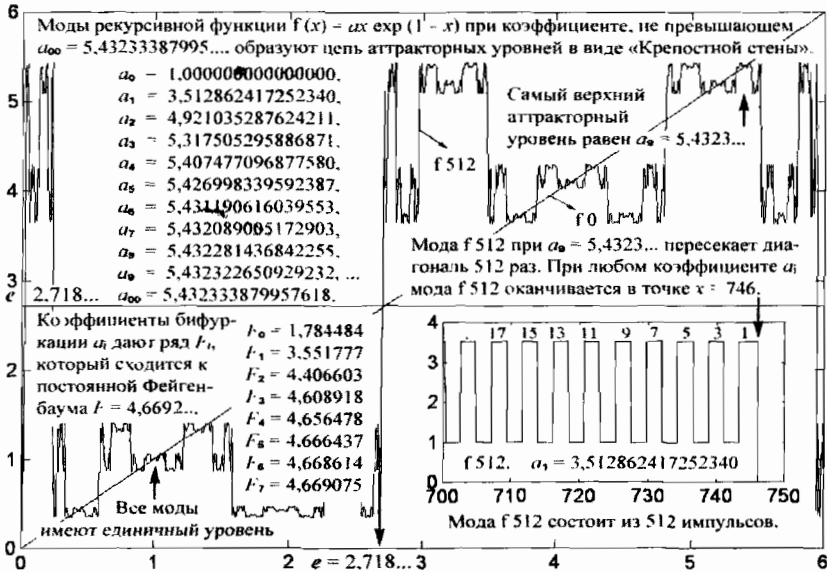


Рис. 4.43

На рис. 4.44 приведена «Крепостная стена» от экспоненциальной функции, возникшая при коэффициенте  $a_7 = 10,68\dots$  на одном из самых верхних уровней 5-аттрактора и воспроизведенная модами, порядок которых определяется числами: 5·1, 5·2, 5·4, 5·8, 5·16, 5·32 и 5·64. Пять основных уровней этого аттрактора на модах с  $f$  571 по  $f$  575 приведены в правом нижнем углу данного рисунка. Следует иметь в виду, что во всех случаях, когда возникли  $n$  основных уровней от  $n$ -аттрактора, при увеличении коэффициента  $a$  на каждом из основных уровней начинается бифуркационный процесс, т.е. строи-

тельство «Крепостной стены», являющейся субаттрактором по отношению к основному  $n$ -аттрактору. Обратите также внимание на то, что максимальная высота «стены» и в нашем конкретном случае в точности совпадает со значением коэффициентом  $a_7$ . Семь значений бифуркационных коэффициентов  $a_i$  и пять чисел  $F_i$  приведены на рис. 4.44.

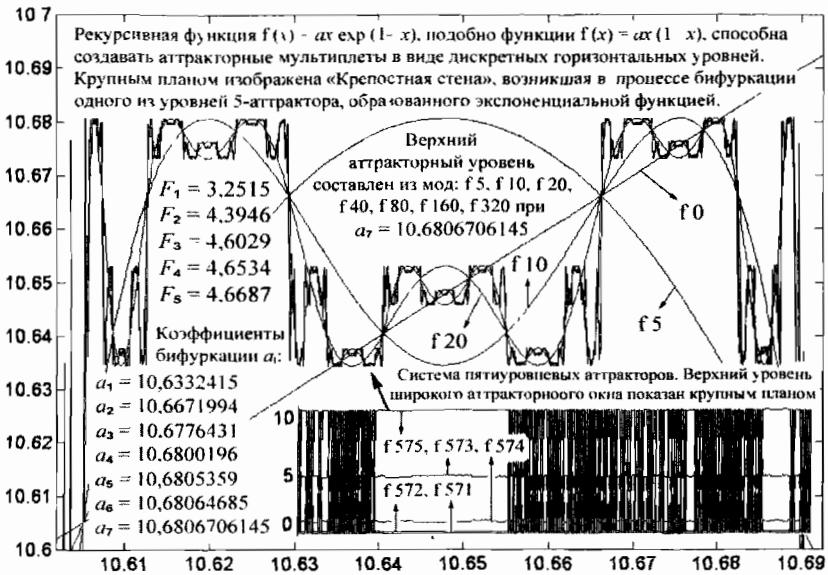


Рис. 4.44

Так как тригонометрические функции также раскладываются в степенные ряды, выражение  $f(x) = ax \cos(x)$  относится к классу рекурсивных функций, обозначенному законом Ферхюльста. Тригонометрическая функция в определенном смысле интереснее, чем квадратичный и экспоненциальный законы, поэтому мы уделили ей особое внимание. Она позволит раскрыть общие условия возникновения аттракторов и понять природу хаотических процессов. В следующих подразделах, приводя графики мод  $f 1, f 2, \dots$ , мы будем иметь в виду эту тригонометрическую функцию вида  $ax \cos(x)$ , не указывая ее явным образом. Косинус выбран нами для большей определенности; на его месте мог бы оказаться синус. Однако опыт детального исследования этой тригонометрической функции поможет читателю при самостоятельном изучении любых других, быть может, намного более сложных рекурсивных функций.

### 4.10. Тригонометрическая функция

Функция  $ax \cos(x)$  представляет собой простую косинусоиду, амплитуда которой монотонно увеличивается с ростом аргумента  $x$ . Однако высшие моды от этой рекурсивной функции представляют собой сложный математический объект. В предпринятом далее анализе фрактальная природа мод этой тригонометрической функции выдвигается на первый план.

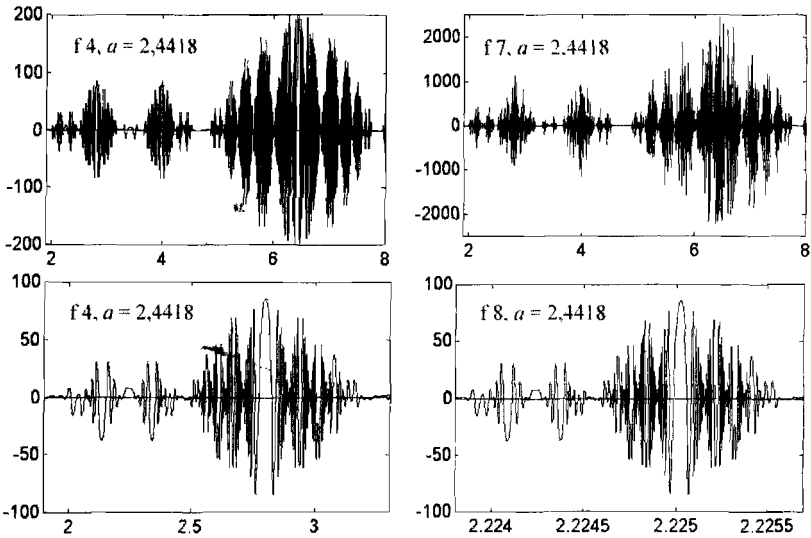


Рис. 4.45

Рассмотрите внимательно рис. 4.45, состоящий из четырех окон, где прекрасно виден фрактальный характер приведенных там мод. На двух верхних графиках даны моды  $f_4$  и  $f_7$  при одном и том же значении  $a = 2,4418$  и на одном и том же отрезке оси абсцисс, только значения ординат для  $f_7$  почти в 10 раз больше, чем для  $f_4$ . Два нижних графика иллюстрируют абсолютное равенство амплитуд двух мод  $f_4$  и  $f_8$ , но обратите внимание на ось абсцисс: мода  $f_8$  сжата по оси  $x$  почти на три порядка по сравнению с модой  $f_4$ .

Рис. 4.46 демонстрирует модуляционные свойства мод: там, где первая производная предыдущей моды меняет знак на противоположный, происходит смена фазы колебаний и последующей моды, так что локальные максимумы мод  $f_{10}$  и  $f_{11}$  совпадают. Именно на экстремумах, как мы убедимся ниже, быстрее всего развиваются

шумовые процессы, но там же возникают и аттракторы, которые противодействуют хаосу. Два верхних графика показывают чувствительность мод к величине коэффициента  $a$ : изменение его значения на одну сотысячную радикально меняет внешний вид моды. Поэтому в определенных случаях, чтобы показать некоторые тонкие эффекты, например прокол аттрактора, величину коэффициента  $a$  приходится указывать с точностью до 15 знака после запятой.

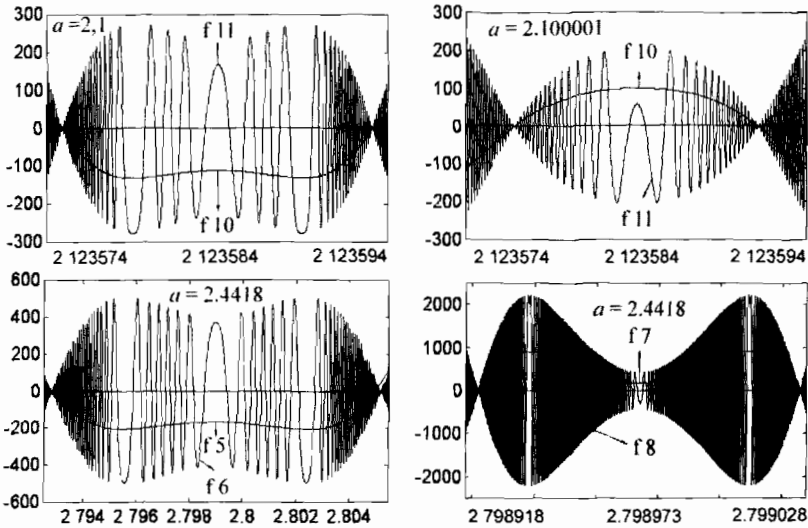


Рис. 4.46

На модах  $f_5$  и  $f_6$  можно получить подобные фигуры, что и на модах  $f_{10}$  и  $f_{11}$ , но с амплитудой в два раза большей. Об этом говорит нижний график слева, а нижний график справа призван показать, сколь быстрыми могут быть колебания амплитуды, так что все линии сливаются в одну сплошную затемненную область. Однако в наших силах «растянуть» моду  $f_8$  по оси абсцисс так, чтобы каждый период был различим, как у моды  $f_7$ . Понятие «быстрые колебания» является относительным: мода  $f_{1000}$  может выглядеть как мода  $f_2$  — все зависит от выбранного масштаба по оси  $x$ . «Гантели», приведенные на рис. 4.46, — типичные фигуры, образующиеся в бесконечных «ожерельях» тригонометрической функции, внешний вид которых часто зависит только от выбранного масштаба. То, что кажется другим, в сущности бывает одним и тем же; будьте внимательны к масштабированию: правильно выбранный масштаб

есть ключ к пониманию фрактальной природы «биений» мод от тригонометрической функции.

**Таблица 4.8**

$a$	$x$
1,412510	17,805
1,587420	20,011
1,649850	20,798
1,891660	23,846
2,100130	26,474
2,135920	26,925
2,353097	29,663
2,381651	30,022
2,604993	32,838
2,875625	36,250

Аттрактор возникает прежде всего в месте касания положительной или отрицательной диагонали, которую мы договорились обозначать через  $f_0 = \pm x$ , с той или иной модой. В частности, на рис. 4.47 показаны три различные фазы касания  $f_2$  с модой  $f_0$ , которым отвечают и различные значения коэффициента  $a$ . Поскольку данный аттрактор находится в области  $x_1 = 12,65$ , то один из двух аттракторных уровней, соответствующий четным модам, равен 12,65; другой аттракторный уровень для нечетных мод будет меняться в зависимости от коэффициента  $a$ . В табл. 4.8 приведены де-

сять значений коэффициента  $a$  и соответствующие им значения второго аттракторного уровня. Если этот аттракторный уровень принять за координату  $x$ , то в данной точке  $x$  при том же коэффициенте  $a$  обнаружится аттрактор, одним из значений которого будет 12,65. Таким образом, уровни аттрактора указывают на области оси абсцисс, где происходит касание характеристических экстремумов моды  $f_2$  с прямыми  $f_0$ .

В нижнем правом окне рис. 4.47 указанные аттракторы имеют вид двух прямых, отвечающих четным и нечетным модам, в частности,  $f_{19}$  и  $f_{20}$ , полученным при  $a = 1,4125$ . Коэффициент  $a$  может меняться в узких или широких пределах. В табл. 4.8 приведены значения коэффициентов, когда аттракторы существуют для всех высших мод. На самом же рис. 4.47 приведены значения коэффициента, когда появляются первые признаки разрушения аттрактора (в этом случае говорят о его *проколе*). Добавим также, что в табл. 4.8 значения координаты  $x$ , где расположен второй аттрактор, даны приблизительно и вот почему. Эти значения иногда очень точны; например, при  $a = 1,58742$  для всех высших мод, для которых все переходные процессы уже улеглись, значение второго уровня равно 20,01089998094886 при  $x_1 = 12,65$ . Аналогичная картина наблюдается при коэффициенте  $a = 2,10013$ , когда второе значение равно неизменному значению 26,47409436146688. Но иногда значение

второго уровня заметно «гуляет», как, например, при коэффициентах  $a = 1,41251$  и  $a = 2,381651$ . Нередко вместо двух значений появляется четыре: два уровня с положительными знаками и два примерно таких же значения, но уже с отрицательными знаками. Подобная картина наблюдается, в частности, при коэффициентах  $a = 1,64985$ ,  $a = 2,13592$  и  $a = 2,3530977$ .

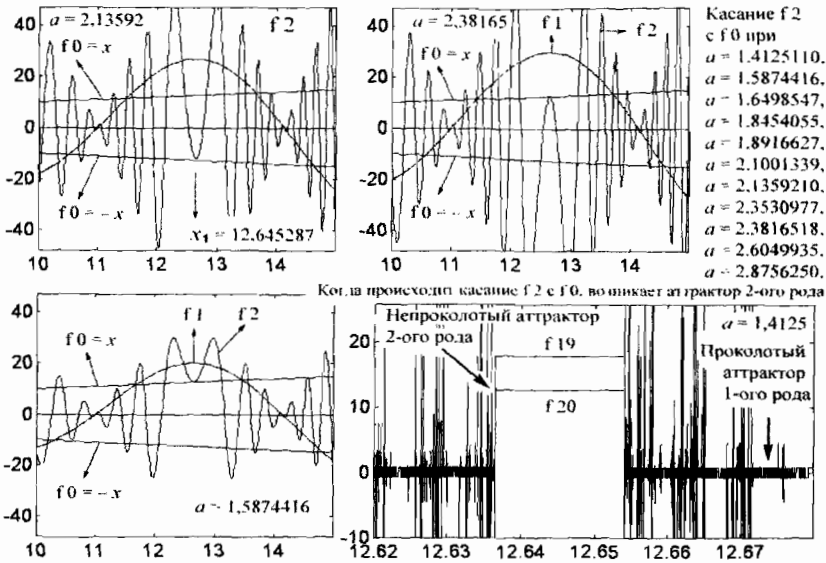


Рис. 4.47

Ниже все эти отклонения получают надлежащее объяснение, а пока нам надо хорошо усвоить, что аттракторный уровень указывает на значение оси абсцисс, где нужно искать аттрактор, отвечающий этому же значению. Если аттрактор состоит из четырех уровней, значит, в четырех указанных точках оси абсцисс находятся аттракторы с такими же уровнями. Два уровня для четных и нечетных мод возникают потому, что рассмотренный нами аттрактор в области  $x_1 = 12,65$  принадлежит *второму роду*. Род аттрактора определяется порядком моды и ее касательной. Все аттракторы второго рода образуются при сечении вершины моды  $f(n+2)$  модой  $f_n$ . Уже говорилось, что аттракторы могут появиться и в тех местах оси  $x$ , на которые уровни непосредственно и не указывают. Например, аттрактор второго рода может появиться в том месте оси абсцисс, где мода  $f_1$  слегка отсекает вершину моды  $f_3$ .

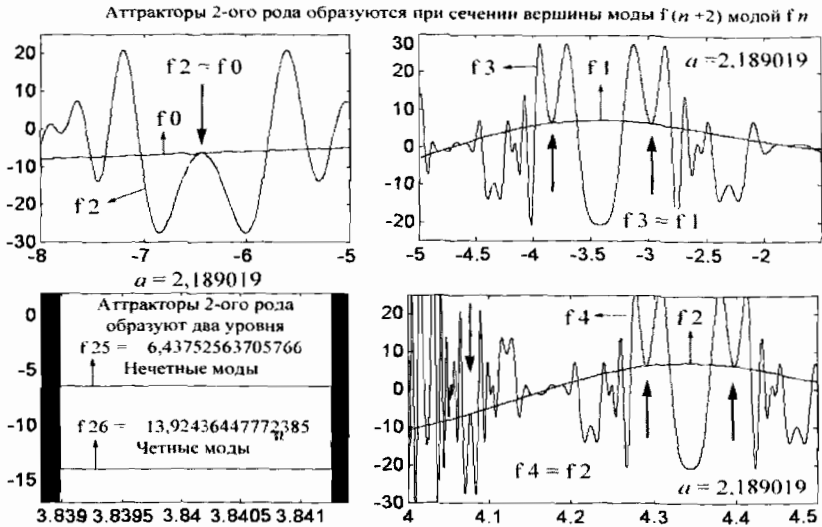


Рис. 4.48

Такую ситуацию можно наблюдать на рис. 4.48, где запечатлены моменты соприкосновения мод  $f_3$  с  $f_1$ , а также  $f_2$  с  $f_0$  и  $f_4$  с  $f_2$  (точки нахождения аттракторов второго рода указаны большими стрелками). Во всех случаях разность порядков дает число 2, что и определяет род аттрактора. Сам аттрактор второго рода показан в левом нижнем углу рис. 4.48 при коэффициенте  $a = 2,189019$  в области  $x = 3,84$ , хотя два аттракторных уровня равны совершенно другим значениям, а именно:  $f_{25} = -6,4$  и  $f_{26} = -13,9$ . По графикам  $f_3$  и  $f_4$  легко обнаруживается фрактальная природа данных мод, которые различаются лишь степенью сжатости по оси абсцисс. Тот факт, что не только прямая  $f_0$ , но и любая высшая мода  $f_n$  может выполнять роль касательной и секущей для  $f(n+2)$ , а также создавать точки притяжения и обеспечивать устойчивость аттрактора, является главным смыслом этого рисунка.

У читателя может сложиться ложное представление, будто аттракторы второго и высших родов мы строим сами. Всё выглядит ровно наоборот: рассматривая бесконечные «гирлянды» мод в общем-то однотипного строения, вы вдруг натываетесь на абсолютно инородное образование в виде очень узкого или, напротив, достаточно широкого «плато», где все моды принимают одно, два или несколько дискретных значений относительно небольшой величины. Чтобы понять, откуда оно там взялось, почему оно имеет такие,



а не иные количественные характеристики, вы и начинаете интересоваться его предысторией, пристально всматриваетесь в сплетение низших мод и пытаетесь установить соответствие между величиной отсечения низшими модами «макушки» у высших мод, с одной стороны, и шириной плато, с другой. Таким образом, ваш творческий труд похож на исследовательскую работу геолога-разведчика, который месяцами кружит по унылому горному ландшафту и вдруг среди бесформенных валунов пустой породы находит драгоценный кристалл удивительно правильной формы и необычайной красоты. Геолог, естественно, попытается установить его строение и происхождение, для чего составит подробное описание находки и той местности, где она была обнаружена. Настойчивость, внимательность, аккуратность сделают свое дело и вы всегда добьетесь успеха в изучении никому неизвестных объектов, которые повсюду окружают нас.

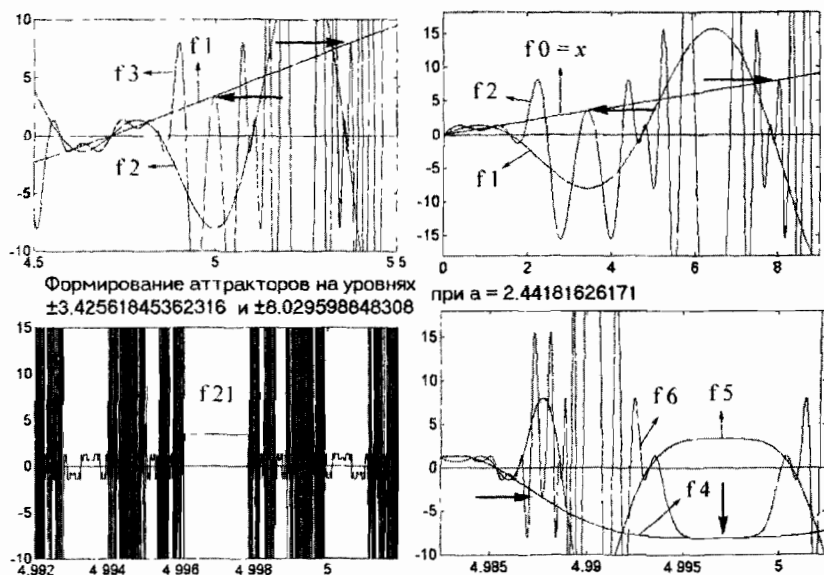


Рис. 4.49

Рис. 4.49 был включен в книгу потому, что он дает ясное представление о схожести графического «ландшафта», на котором появляются аттракторы. По сравнению с предыдущими рисунками, здесь приведены три моды: две смежные моды образуют аттракторы первого рода, уровни которых не достигают и полуторной вели-

чины от единицы, а моды, образующие аттрактор второго рода, дают неизменную и легко узнаваемую конфигурацию, которая повторяется при любых масштабах. Обратите внимание на расположение пиков в трех из четырех окон, где отображены триады:  $f_0, f_1, f_2$ ;  $f_1, f_2, f_3$ ;  $f_4, f_5, f_6$ . Правый верхний рисунок в точности повторяет левый верхний, что обеспечивает идентичность аттракторов на уровнях  $+3$  и  $+8$  (местонахождение их указано большими стрелками). На правом верхнем рисунке нет и намека на присутствие аттрактора в районе  $x = 5$ . Этот математический факт открывается лишь на левом верхнем рисунке, где видно, как третья мода соприкасается с первой, но и там аттрактора второго рода, как такового, еще не существует. Он появляется лишь на правом нижнем рисунке вместе с четвертой модой, которая и «просела» под аттрактором на уровне  $-8$ . Мода  $f_6$  очертила границы аттрактора для четных мод, а мода  $f_5$  — для нечетных. Правый нижний рисунок сильно искажен под действием сил притяжения аттрактора второго рода, однако и в нем прекрасно сохранилась общая композиция расположения пиков. Левый нижний рисунок с модой  $f_{21}$  демонстрирует уже вполне сформировавшиеся аттракторы первого рода в форме «Крепостной стены» и второго рода в виде двух дискретных уровней, куда притягиваются все высшие моды, но о которых ничего еще «не знали» низшие моды.

Теперь нужно хорошо запомнить следующее: то, что говорится и показывается на модах в пределах, скажем, первого десятка или даже первой сотни номеров, будет наблюдаться и тогда, когда порядок мод перевалит через сотню или миллиард. Всё упирается в микроскопичность пространств, которых «боится» человек и машина, но которых «не страшится» бестелесная математика. С ростом порядка моды число аттракторов первого, второго и прочих родов увеличивается, так что на них натыкаешься чуть ли не в каждой точке оси абсцисс, хотя их протяженность быстро укорачивается. Однако не следует удивляться тому, что беря, к примеру, моду  $f_{1000}$  и желая измерить ее амплитуду в произвольно выбранной точке  $x$ , вы обнаруживаете, что она принимает одно из значений дискретного уровня аттрактора первого рода (он встречается чаще других).

Рассмотрите внимательно рис. 4.50, где хорошо видны «завязи» крупных аттракторов первого и второго рода (на них указывают

большие стрелки). Аналогичная картина будет появляться на высших модах при малой длине волны. Мы выбрали для определенности коэффициент  $a = 2,44181626171$  и на следующем рисунке (рис. 4.51) проследили поведение моды  $f_{64}$ . Как видно из четырех графиков, ее ход во многом предопределен первыми тремя модами. Постройте свои собственные графики при других коэффициентах  $a$ , которые бы давали несколько отличную картину распределения аттракторов первого и второго рода, попробуйте установить общие закономерности и элементы симметрии. Так называемый *Большой аттрактор*, простирающийся от  $-2$  до  $+2$ , и несколько самых широких просветов задаются «соединением» и «оппозицией» мод  $f_1$ ,  $f_2$  и  $f_3$ . Аттракторы от высших мод, в том числе и от моды  $f_{64}$ , при таких масштабах просто не будут видны.

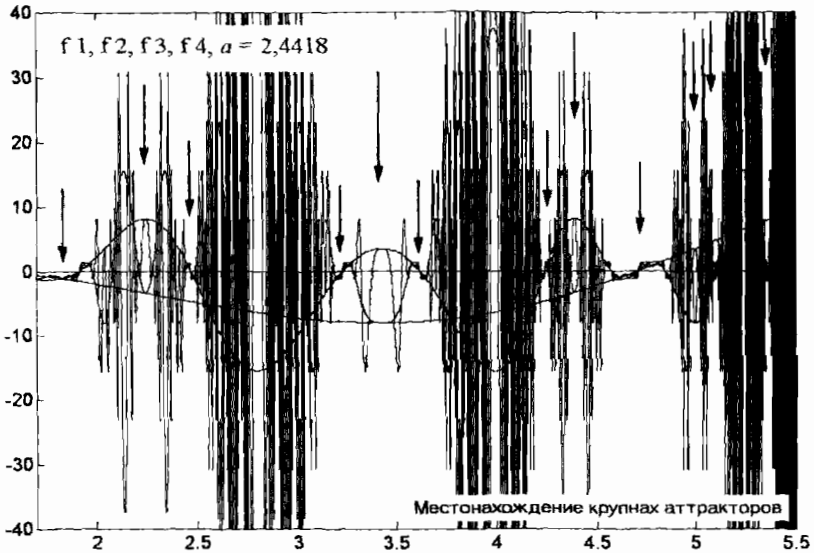


Рис. 4.50

Изучая тонкую структуру аттракторов, удобно наряду с высшими модами в качестве ориентира приводить и моды первых порядков. Когда на экран дисплея выводится картинка одной какой-нибудь высшей моды, всегда приходишь в изумление: откуда ей «знать», где нужно оставить просвет и тянуться горизонтальной линией в виде аттрактора, а где быстро колебаться с амплитудой, уходящей вниз и вверх от нулевого уровня на сотни миллиардов еди-

ниц? Но если наряду с высшей модой показаны кривые низших мод, то к вам приходит понимание того, что высшие моды «помнят» о низших и «руководствуются» информацией, полученной от своих предшественниц.

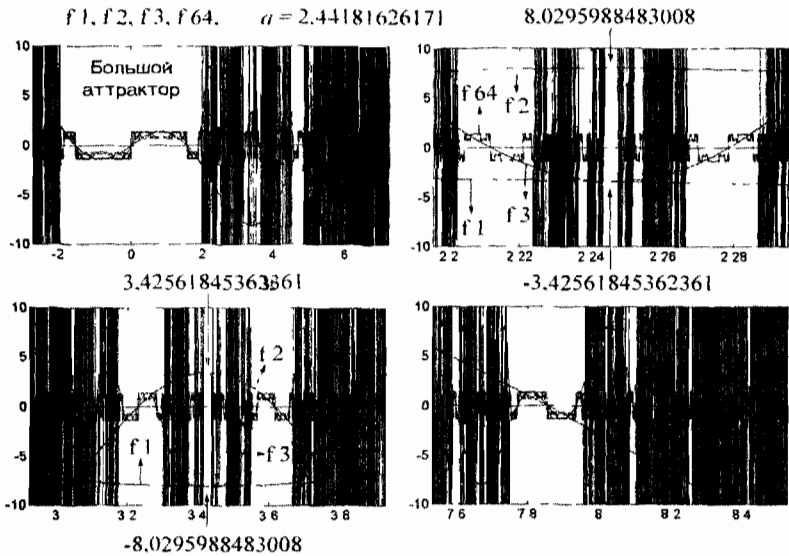


Рис. 4.51

Рис. 4.52 знакомит читателя с аттракторами пятого и восьмого рода функции  $ax \cos(x)$ . Как и в случае с аттракторами второго рода, их параметры всецело определяются сечением «макушек», соответственно, мод  $f_5$  и  $f_8$  диагональю  $f_0$ . Чтобы в этом убедиться самим, нужно подставить указанный коэффициент  $a$  и координату  $x$  в соответствующий рекурсивный цикл. На этом и последующих рисунках координаты области изображения, например моды  $f_5$ , указываются следующим образом:

$$x = 2,329 \pm 0,0000001.$$

Эту запись следует понимать так: середина экрана дисплея или отдельного рабочего окна отвечает точке  $x = 2,329$ ; левая и правая границы экрана, или окна, отличаются от указанного значения на величину  $0,0000001$  (или, при другой записи,  $0.1e - 6$ ) в меньшую и большую стороны, соответственно. Если был бы указан только плюс:

$$x = 2,329 + 0,0000001,$$

то число 2,329 определило бы левую границу, а число 2,3290001 — правую границу экрана или отдельно взятого окна. Аналогичная система обозначений действует и в отношении ординаты, только левая и правая границы заменяются на нижнюю и верхнюю. Это технические детали, но без них не воспроизвести графики.

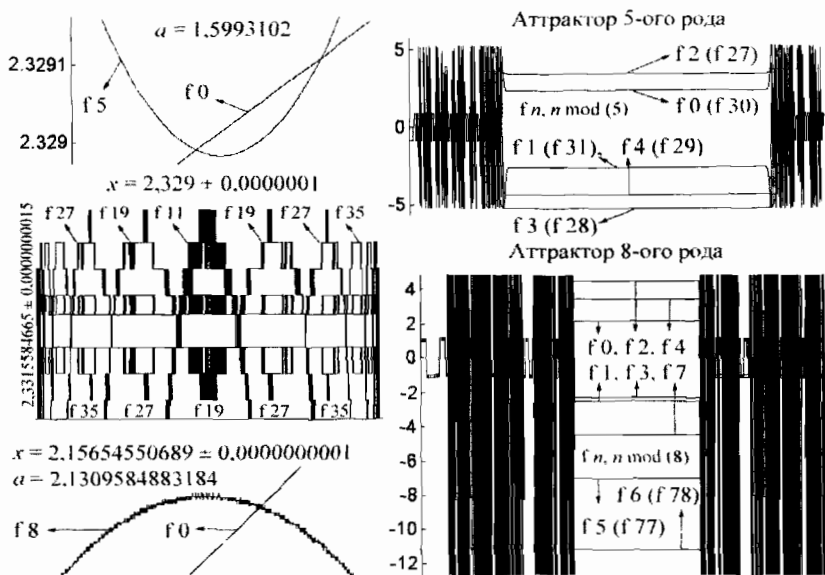


Рис. 4.52

На восьмой моде видны следы шума, который проявил себя и на уровнях тонкой структуры аттрактора. В центральной части аттрактора на уровне  $-2,33$ , занятой модами  $f_{11}$  и  $f_{19}$ , заметны характерные шумовые уширения импульсных фронтов. Однако вопросы шума и тонкого строения аттрактора мы оставим на будущее, а пока сосредоточимся на общем строении аттракторов.

Каждый уровень аттрактора пятого рода образует класс мод, порядок которых дает один и тот же остаток их деления на число 5. Так, наш аттрактор пятого рода построен на пяти модах с  $f_{27}$  по  $f_{31}$ , которые и дали пять уровней (напомним, род аттрактора совпадает с числом уровней). Следующая мода  $f_{32}$  в области действия аттрактора совпадет с модой  $f_{27}$ , образующей первый верхний уровень; мода  $f_{33}$  займет самый нижний уровень, прочерченный модой  $f_{28}$ , и т.д. Таким образом, каждый уровень отбирает класс мод с номером  $f_n$ , где  $n = \{0, 1, 2, 3, 4\}$  по  $\text{mod}(5)$ . То же самое происхо-

дит и в отношении восьми уровней аттрактора восьмого рода. Здесь номера мод даются в остатках от деления порядка моды на число 8. Например, под модой  $f_5$  могут оказаться следующие моды:  $f_{77}$ ,  $f_{85}$ ,  $f_{93}$  и т.д.;

$$f_6 = \{ \dots, f_{54}, f_{62}, f_{70}, f_{78}, f_{86}, f_{94}, \dots \}.$$

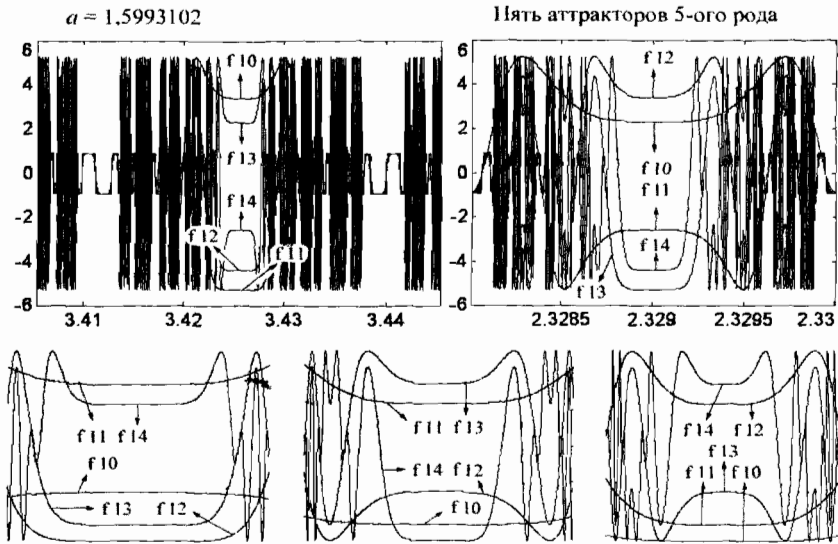


Рис. 4.53

На рис. 4.52 показаны аттракторы вполне сформировавшиеся; однако любопытно посмотреть, как они появляются, для чего необходимо обратиться к модам низшего порядка. На рис. 4.53 и 4.54, где показаны два полных комплекта аттракторов пятого и восьмого рода, такая возможность предоставлена. В левом верхнем окне рис. 4.53 показан аттрактор в районе  $x = 3,425$ , который отвечает первому верхнему уровню, впервые прочерченному модой  $f_{10}$  (пик моды  $f_5$ , отсекаемый диагональю  $f_0$ , еще не образует аттрактора). В правом верхнем окне этого же рисунка показан аттрактор в районе  $x = 2,329$ , отвечающий второму верхнему уровню, который также впервые был прочерчен модой  $f_{10}$ . По меткам оси абсцисс можно сказать, что ширина этого аттрактора примерно в 10 раз меньше ширины предыдущего. Три нижних аттрактора, показанные уже вне рамок координатной системы, отвечают трем оставшимся уровням, расположенным в отрицательной области. Десятая мода последовательно занимает положение от самого верхнего до самого нижнего

уровня. Как и в случае с аттракторами второго рода, отыскать комплект аттракторов пятого рода не составит большого труда, если найден один из них. Для этого нужно только величину аттракторных уровней подставлять в значения координаты  $x$ . В силу симметрии функции косинуса, точно такие же аттракторы будут находиться в зонах  $-x$ . Новые комплекты аттракторов пятого рода при этом же коэффициенте ( $a \approx 1,6$ ) появятся в местах отсечения макушек мод  $f_6$  модами  $f_1$  (обозначим эти зоны как  $f_1/f_6$ ), затем в местах  $f_2/f_7$ ,  $f_3/f_8$  и т.д. до фрактальной бесконечности.

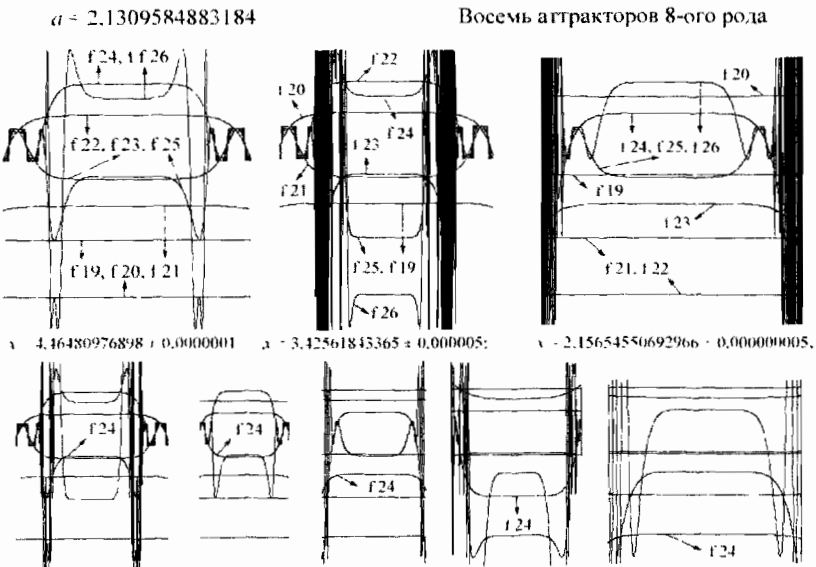


Рис. 4.54

Все сказанное в отношении аттрактора пятого рода распространяется и на аттрактор восьмого рода. Здесь роль моды  $f_{10}$  взяла на себя мода  $f_{24}$  (вторая после  $f_{16}$ , если брать номер моды по  $\text{mod}(8)$ ), которая прочертила данный уровень для всех последующих высших мод порядка  $f_0$ . На аттракторах первого и второго рода можно наблюдать взаимодействие уровней: их удержание на определенной высоте происходит за счет «взаимодействия» четных или нечетных мод. Для аттракторов 3-, 4-, 5-го и высших родов взаимодействие между уровнями усложняется: моды делятся не только на четные и нечетные, но группируются по  $\text{mod}(3)$ ,  $\text{mod}(4)$ ,  $\text{mod}(5)$  и т.д. При рассмотрении тонкой организации аттракторных уровней

мы остановимся на этом вопросе более подробно, но уже сейчас хочется обратить внимание читателей на сплетение мод  $f_{22}$ ,  $f_{23}$  и  $f_{24}$  (см. верхний левый рис. 4.54), образующие по бокам аттрактора восьмого рода два симметрично расположенных аттрактора первого рода. Трехуровневое взаимодействие от мод  $f_{22}$ ,  $f_{23}$  и  $f_{24}$  аттрактора, расположенного в районе  $x = 4,46$ , передалось модам  $f_{20}$ ,  $f_{21}$  и  $f_{22}$  аттрактора, находящегося в зоне  $x = 3,42$ ; в области  $x = 2,15$  эту эстафету приняли на себя моды  $f_{24}$ ,  $f_{25}$  и  $f_{26}$ . Излишне, наверно, говорить, что подобные механизмы «завязи» аттракторов действуют не только в отношении тригонометрических функций, но также и других рекурсивных функций, включая закон Ферхюльста и экспоненциальный закон.

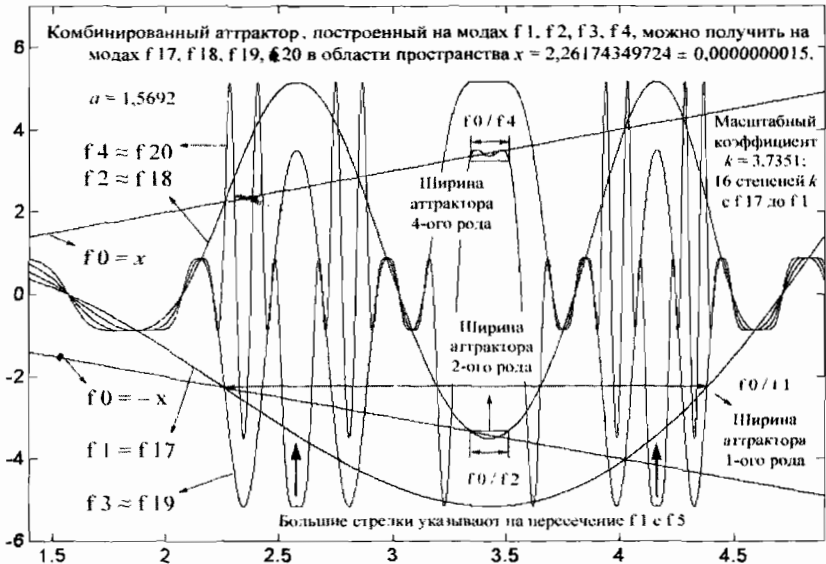


Рис. 4.55

Обратите внимание, что рассмотренный выше аттрактор пятого рода является, собственно, подсистемой более широкого аттрактора, который существует при этом же коэффициенте ( $a \approx 1,6$ ) и который «подстриг» все видимые в двух верхних окнах рис. 4.53 амплитуды мод таким образом, что они не выходят за пределы  $\pm 6$ . Большой комбинированный аттрактор, определенный двумя диагоналями  $f_0$  и первыми четырьмя модами, изображен на рис. 4.55. Здесь мы видим, что аттрактор первого рода, простирающийся примерно от 2,2 до 4,4, поглотил множество перекрывающихся аттракторов



второго ( $f 0/f 2$ ) и четвертого рода ( $f 0/f 4$ ) в районе  $x = 3,42$ . Очевидно, что в широкий аттрактор первого рода попадут также два боковых аттрактора четвертого рода типа  $f 1/f 5$ , на которые указывают две большие стрелки. Далее эта ситуация будет повторяться нескончаемое число раз на высших модах.

Читатель может полюбоваться точно такой же картинкой, какая была получена на модах  $f 1 — f 4$ , но уже воссозданной при участии мод  $f 17 — f 20$ , если уменьшит масштаб изображения в  $k^{16}$  раз, где  $k = 3,7351$ , т.е. около 1,5 млрд. раз. Фрактальная природа рекурсивной функции  $ax \cos(x)$  здесь проявляет себя в полной мере. Однако не потому, что размерность выражается дробным числом, а потому, что имеет место *масштабная инвариантность изображения*. (Вообще говоря,  $k$  — не число, т.е. величина не постоянная; она заметно колеблется от моды к моде; дается же среднее значение  $k$ .) Данная аттракторная композиция способна репродуцировать себя в сколь угодно малых масштабах. Приобретя на больших модах прямоугольные черты, каждый дискретный импульс, т.е. крохотная частица этого сложного строения, содержит в сжатом виде всю конструкцию в целом. Вещь поразительная и достойная вашего самого пристального внимания. Масштабную инвариантность как таковую, проявляющуюся в *изоморфизме мод*, которую мы обозначили символом подобия ( $\approx$ ), можно наблюдать повсеместно (на это уже обращалось внимание); здесь же удивляет композиционная сложность сохраняемых форм аттрактора.

#### 4.11. Прокол аттрактора

Из предыдущих подразделов мы усвоили, что движение от моды  $f 1$  к моде  $f 2$ , от  $f 2$  к  $f 3$  и т.д. — это движение во времени. Поэтому аттрактор сохраняет амплитуду рекурсивной функции (в данном случае, функции  $f 1 = ax \cos(x)$ ) неизменной во времени. Однако длина волны или период колебаний — понятия условные; их восприятие различается в сознании человека, живущего в пространстве и времени. Для идеальной математики, имеющей дело с графическими изображениями и символами, эти понятия взаимозаменяемы. Человеку, конечно, лучше надолго забыть о времени и иметь дело с пространственными формами, которые можно представить. Тем не менее однонаправленность времени, как бы мы от него ни абстрагировались, настойчиво дает о себе знать в одном: мода  $f 2$  «знает» все о моде  $f 1$ , а мода  $f 1$  абсолютно «не догадывается» о существовании

моды  $f_2$ . Именно эта черта нерушимой иерархии мод ассоциируется у нас в мозгу с их временной последовательностью подобно тому, как следствие наступает *после* причины, поэтому там, где есть каузальные отношения, моментально возникает ощущение времени.

Аттракторы не возводятся по прихоти человека и они не формируются под действием приливных сил Луны; они возникают сами по себе, в недрах самой рекурсивной функцией  $a x \cos(x)$ . Сама функция, т.е. мода  $f_1$ , о них ничего «не знает»; она свободно колеблется, равномерно увеличивая свою амплитуду. Амплитуда моды  $f_2$  промодулирована модой  $f_1$ ; на оси  $x$  появляются узлы — эмбрионы аттракторов первого рода. Слово «узел» является, пожалуй, ключевым в разгадке тайны любого аттрактора. Вышние моды как бы спотыкаются на узлах низших мод и накручиваются на них, все плотнее и плотнее их сжимая. Задача любознательного исследователя — постараться распутать аттракторный узел, завязанный тем крепче, чем выше мода. Чтобы разобраться в сплетении высших мод, нужно сперва внимательно рассмотреть узел из низших мод, а дальше картина фрактально мультиплицируется: мода  $f_3$  сплетается с модой  $f_2$  примерно так же, как мода  $f_2$  сплетена с модой  $f_1$ . Тонкая структура аттрактора второго рода во многом повторяет тонкую структуру аттрактора первого рода, а микроскопическая организация аттракторов третьего рода копирует микростроение аттрактора второго рода.

Все было бы так просто, как говорится в двух последних предложениях, если бы моды были гармоническими синусоидами. К огорчению ленивых и к удовольствию пытливых, дело обстоит намного сложнее: полного тождества мод не существует, но есть лишь их подобие. Левый импульс хоть на микрон отличается от правого; последующая мода искажена чуть больше предыдущей. Эти отличия, незаметные на первый взгляд, громко заявляют о себе впоследствии. Сначала моды ведут себя наподобие фигур Лиссажу, т.е. гармонически, но потом под действием нелинейных эффектов картина радикально меняется. Гладкие, обтекаемые формы сменяются на угловатые, на уровнях аттрактора появляются подуровни субаттрактора. Потом, при едва заметном изменении коэффициента  $a$ , появляется новое видение: подуровни исчезают, появляются «лестницы» или другие прямоугольные орнаменты. Гармонический ана-

лиз не знает «трагедии», когда одна гармоника в результате суперпозиции других гармоник «проколола» бы своих сородичей. Между тем прокол аттрактора — это, пожалуй, самый драматичный, если можно так выразиться, во всяком случае, весьма зрелищный момент в жизни аттрактора.

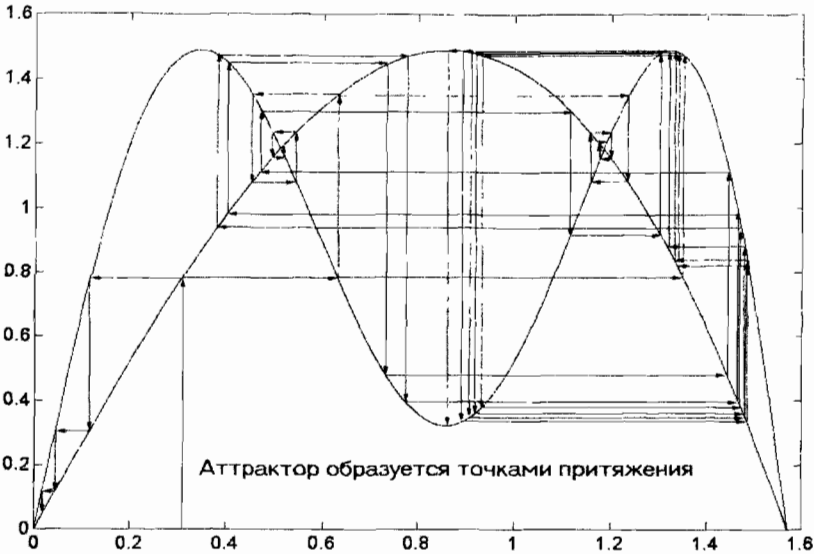


Рис. 4.56

Вначале, когда программа по наблюдению за «жизнедеятельностью» аттракторов была примитивной, тонкая структура уровней была практически недоступной для изучения, а значит, и понимания. Постепенно, по мере усовершенствования программы, стало возможно путешествовать не только в пространстве вдоль координатных осей с дискретным или непрерывным изменением масштаба, но и во времени. Картинки ожили после того, как в программу была введена подпрограмма плавного изменения коэффициента  $a$ . Запас прочности аттрактора как раз и измеряется тем, какие перепады коэффициента  $a$  он в состоянии выдержать (здесь не надо забывать о высокой чувствительности формы мод в зависимости от изменения величины коэффициента  $a$ ). Может быть, кто-то из наших читателей наблюдал в микроскоп за делением клетки на две новые или следил в телескоп за динамикой солнечных пятен и протуберанцев. Так вот, слежение по монитору компьютера за всеми перестройками тонкого строения аттракторных уровней — не менее за-

захватывающее зрелище. В любом случае от этого наблюдения вы получите гораздо больше удовольствия, чем от любой, самой убойной компьютерной игры. К сожалению, завораживающая феноменология хранит полное молчание относительно сущности данного явления. Можно часами следить за метаморфозами тонкой структуры, разбить весь динамический процесс на крохотные отрезки, но так и не уловить момент, когда «куколка оборачивается бабочкой». При увлекательном наблюдении за динамическими процессами время бежит незаметно. Сколько мимолетных часов было проведено за экраном дисплея, но многие вопросы так и остались тайной за семью печатями.

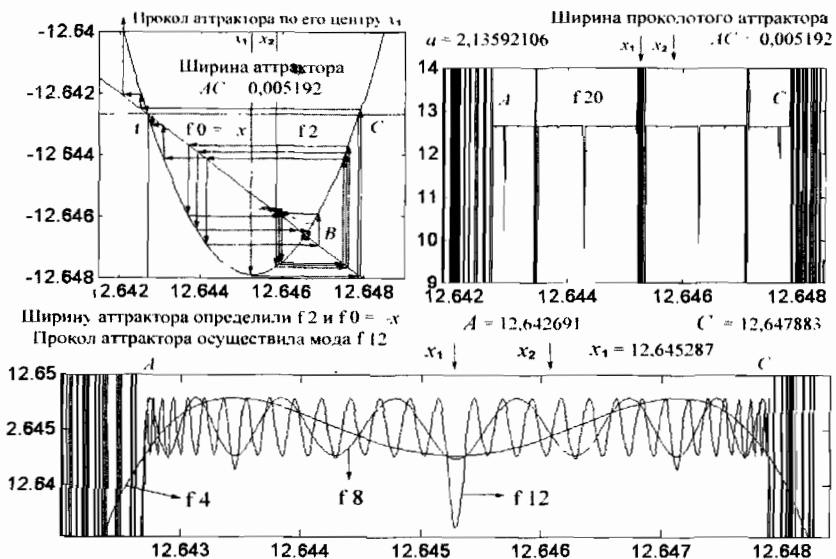


Рис. 4.57

Начнем с того, что не совсем ясен механизм зарождения аттрактора, а потому остается темным и момент его разрушения. Аттрактор, как было сказано, суть линия, в нашем случае, прямая или ломаная, которая удерживает амплитуды всех мод на определенном уровне, что выглядит как их «притяжение» к данному уровню. Эта линия образована «точками притяжения», с которыми мы хорошо знакомы по предыдущим подразделам. Единственное дополнение, о котором здесь нужно обязательно упомянуть, состоит в том, что притягивающие точки образованы не только пересечением вершины моды с прямой диагональю  $f_0$ , но и пересечением одной моды с

другой. На рис. 4.56 показано такое пересечение мод; кривые изображают моды  $f_1$  и  $f_2$ , но из-за фрактальной природы всех мод на их месте могут оказаться моды  $f_{101}$  и  $f_{102}$  или  $f_{357}$  и  $f_{358}$ . На нашем рисунке итерационный процесс начался с  $x = 0,3$ ; далее можно идти либо влево, либо вправо, что все равно — любой путь, а их здесь бесчисленное множество, приведет к одной из четырех точек притяжения (две точки находятся внизу: в начале координат и в районе  $x = 1,6$ ; и две точки расположены вверху, приблизительно на уровне 1,2). Главное в итерационном процессе, чтобы на его пути стрелки шли последовательно от  $f_1$  к  $f_2$ , от  $f_2$  к  $f_1$ , от  $f_1$  снова к  $f_2$  и т.д., а на какую ветвь  $f_1$  и  $f_2$  указала стрелка — не столь уж важно. Далее нужно отчетливо понимать, что сам итерационный процесс «не есть дело рук человеческих». Прочерченные стрелки призваны убедить лишь нас самих в том, что указанные четыре точки действительно обладают свойствами притяжения, но они останутся таковыми и без нашего вычерчивания стрелок.

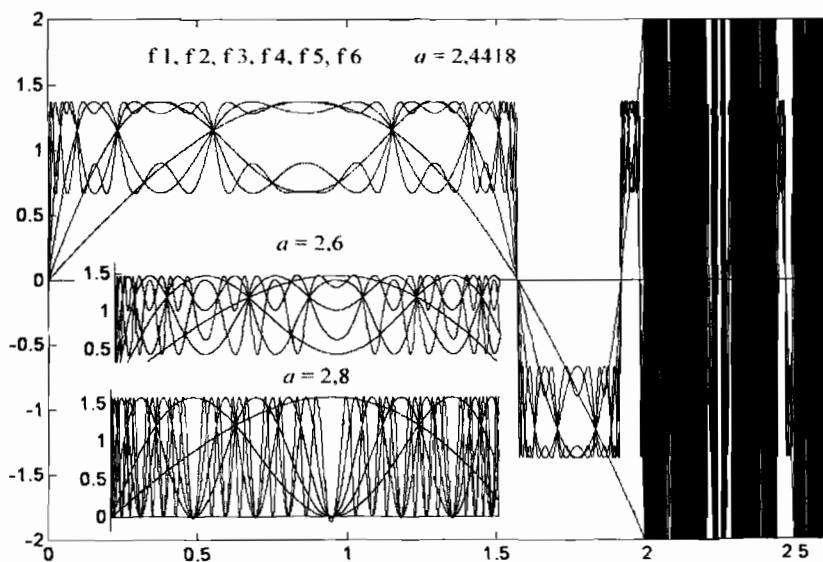


Рис. 4.58

Часто говорится и пишется, что аттрактор не имеет толщины, будто это божественный нимб, к которому устремляется все бренное. К такому идеальному представлению об аттракторе нужно подходить осторожно, иначе будет непонятен механизм захвата амплитуд. Да, аттрактор состоит из точек притяжения, но точки раз-

бросаны по некоторой области и не образуют какой-то непрерывной линии. Исключение составляет, быть может, так называемый ноль-аттрактор, когда все точки притяжения выстраиваются вдоль оси абсцисс. В общем случае аттракторный уровень имеет зримую толщину и обладает тонкой структурой, которую «издали» не разглядишь. Однако именно там, в этой хитроумно организованной области, зарождаются силы притяжения аттрактора и образуются микроуровни субаттракторов. Прокол аттрактора — это почти мгновенное исчезновение его способности удерживать амплитуды мод на строго определенном и достаточно низком уровне; они устремляются от него в противоположные стороны, иногда на астрономически большие расстояния.

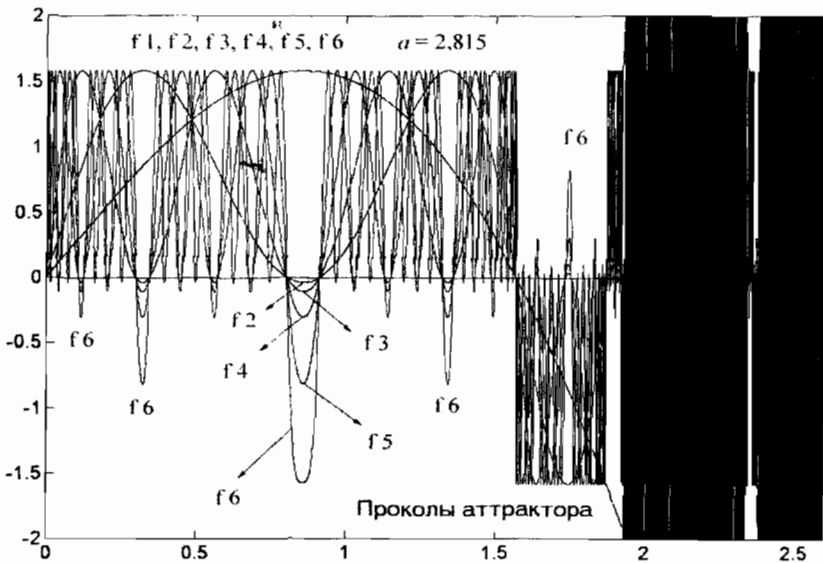


Рис. 4.59

Типичный прокол аттрактора показан на рис. 4.57. Ширина аттрактора определяется отрезком  $AC = 0,005192$ ; середина его расположена в точке  $x_1 = 12,645287$ . Если итерационный процесс стартует из этой центральной точки, то стрелки выведут его сначала правее точки  $C$ , а затем выше точки  $A$ , что означает прокол аттрактора в точке  $x_1$ . Но если стартовать из точки  $x_2$ , то стрелки, — каким бы путем ни идти, — непременно выведут к одной из трех точек притяжения —  $A$ ,  $B$  или  $C$ . В правом верхнем окне данного рисунка показан аттрактор от моды  $f_{20}$ , который при коэффициенте  $a =$

2,13592106 оказался проколотым в нескольких симметрично расположенных местах. Заметный прокол аттрактора осуществила, собственно, уже мода  $f_{12}$ , что видно по нижнему фрагменту рис. 4.57. Говоря о завораживающей природе прокола, мы имеем в виду волнующий вопрос: какая сила заставила выдвинуться моду  $f_{12}$ , ведь этому движению предшествовали многочисленные перестройки всей тонкой структуры аттрактора, не приводившие к проколу? Почему бы этой живой структуре еще раз не перестроиться так, чтобы ни одна из высших мод не вышла за пределы, очерченные низшими модами?

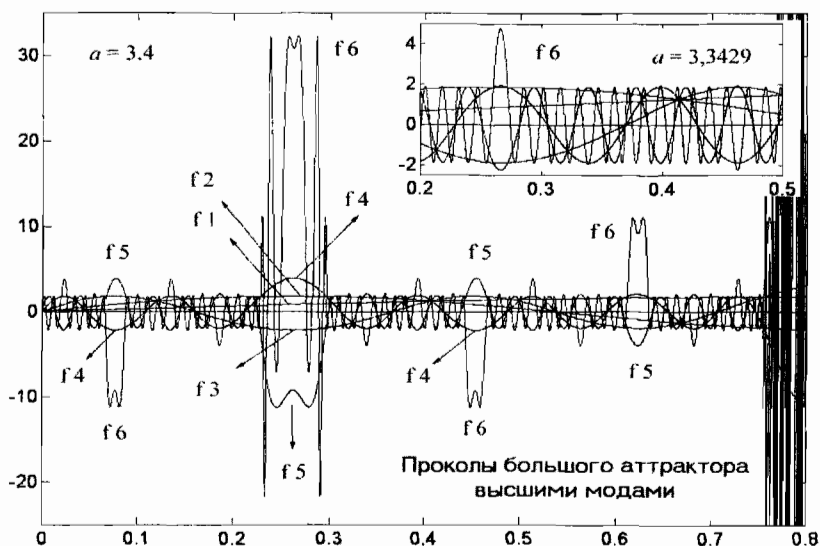


Рис. 4.60

За перестройкой тонкой структуры мод лучше всего пронаблюдать по Большому аттрактору, где по оси ординат один-единственный нулевой уровень имеет огромную толщину: от  $-1,5$  до  $+1,5$ . В широком диапазоне изменения коэффициента  $a$  этот аттрактор первого рода, в силу природы функции  $\cos(x)$ , существует в виде двух симметричных податтракторов, которые мы будем называть аттрактором-плюс и аттрактором-минус. Рис. 4.58 зафиксировал тонкую структуру мод  $f_1 - f_6$  при  $a = 2,4418$  и  $a = 2,6$ , а также при  $a = 2,8$ , когда появились первые признаки прокола. Дальнейшее увеличение коэффициента даже на малую величину (0,015) приводит к росту амплитуды, согласно старшинству мод (рис. 4.59). Однако ни одна

из мод  $f_1 - f_6$  при этих значениях  $a$  не вырывается за общие границы Большого аттрактора; происходят лишь проколы аттрактора-плюс и аттрактора-минус и выход старших мод за их пределы. Прокол всего Большого аттрактора наступит при гораздо большем коэффициенте, а именно, при  $a = 3,3429$ , когда произойдет полное слияние аттрактора-плюс с аттрактором-минус и образуется общая и единообразная тонкая структура Большого аттрактора (рис. 4.60) как раз отображает два таких момента.

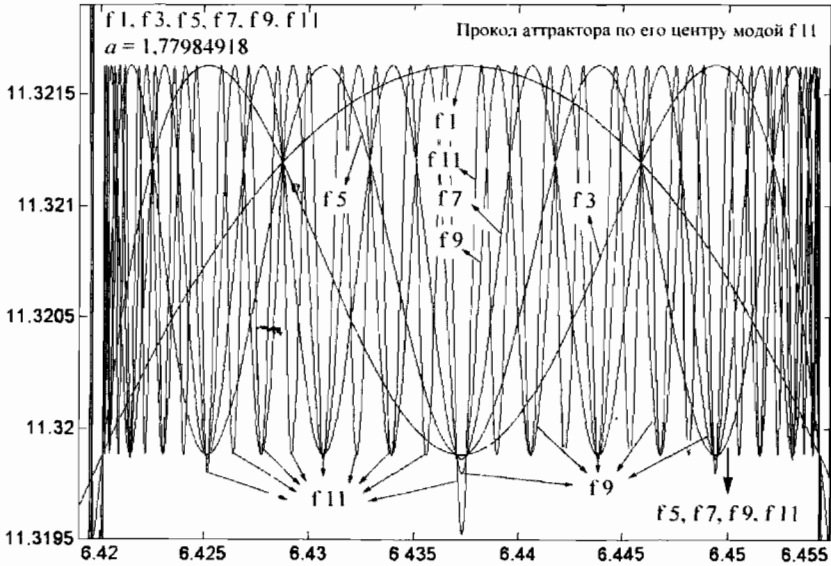


Рис. 4.61

Прокол протекает по одному и тому же сценарию, независимо от рода аттрактора. На рис. 4.61, где изображен аттрактор второго рода для нечетных мод, хорошо видно, как после многочисленных перестроек тонкой структуры моды выстраиваются так, что все их максимумы складываются для нанесения удара. В центре аттрактора произошло сложение пяти мод:  $f_3, f_5, f_7, f_9$  и  $f_{11}$ , т.е. наибольшего числа мод; на этом участке и произошел максимальный прокол. В двух симметрично расположенных точках складываются моды:  $f_5, f_7, f_9, f_{11}$ ; они дают второй по величине прокол. Следующий прокол произойдет без участия моды  $f_5$  и т.д.

Таким образом, высшая мода (в данном случае мода  $f_{11}$ ) участвует во всех, больших и малых, проколах; следующая мода ( $f_9$ )



принимает участие через один максимум, следующая мода ( $f_7$ ) — через два максимума и т.д. Такая последовательность мод как раз и объясняет характерную конфигурацию разрушения аттрактора. На рис. 4.62 прокол аттрактора второго рода модой  $f_{19}$  на уровне 17,41 показан с «далекого расстояния». При  $a = 2,73766489$  прокол произошел по середине аттрактора, где амплитуда моды вырвалась на величину примерно  $\pm 500$  единиц, и еще в двух боковых местах на величину примерно  $\pm 100$  единиц. Изменение коэффициента на величину  $0,00000021$  сделало заметным прокол еще в четырех симметрично расположенных точках. С дальнейшим увеличением коэффициента  $a$  число проколов увеличивается, расширяется и длина каждого разрушенного участка.

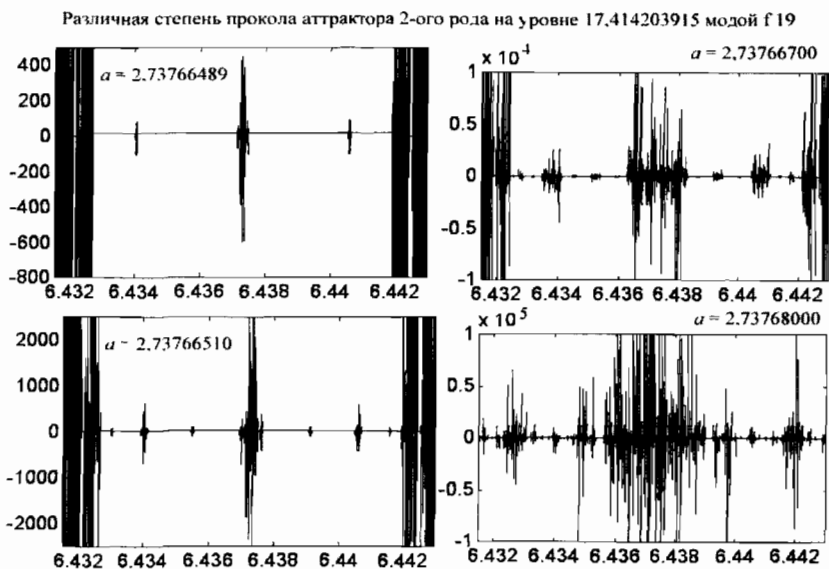


Рис. 4.62

Наблюдение за разрушением аттрактора с «близкого расстояния» показывает, что в образовавшихся щелях аттрактора второго рода возникают непрочные аттракторы первого рода, о чем свидетельствуют рис. 4.63 и 4.64. «Непрочность» аттрактора в данном случае означает их небольшой запас устойчивости для высших мод. Так, при коэффициенте  $a = 1,77986$  аттракторы первого рода существуют для мод  $f_{16}$  и  $f_{17}$ , но они исчезнут для более старших мод. Их непрочность проявляется также в том, что эти аттракторы существуют в узких диапазонах изменения коэффициента  $a$ . Детальное

изучение возникших аттракторов первого рода также показывает, что с незначительным изменением коэффициента  $a$  их тонкая структура претерпевает радикальные изменения. Эти аттракторы не прокалываются, а, скорее, перестраиваются в новые, более узкие аттракторы второго рода, образующие те же самые уровни. Сравните рис. 4.64 и 4.65; на последнем из них в центральной части при коэффициенте  $a = 2,44216$  мы видим два аттрактора второго рода с уровнями  $-3$  и  $+8$ , только что сформировавшиеся из мод  $f_{15}$ ,  $f_{16}$  и  $f_{17}$ , хотя на первом из этих рисунков при коэффициенте  $a = 2,44215$  об их существовании ничто не напоминало. В затемненных, сильно «спрессованных» областях «спрытались» вновь образовавшиеся аттракторы второго рода. В нижнем правом окне рис. 4.64 показаны четыре аттрактора 2-го рода, образующие  $\pm 3$  и  $\pm 8$  уровни.

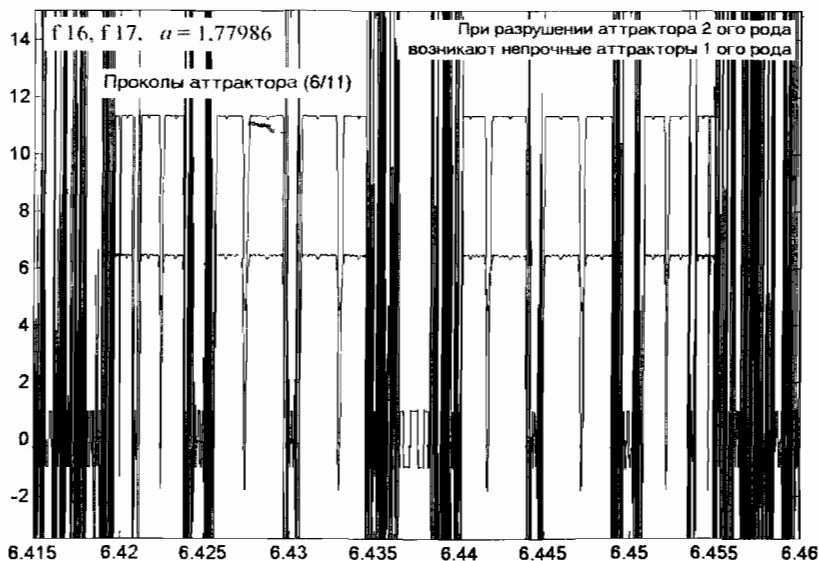


Рис. 4.63

Аттракторы более высших родов испытывают примерно те же самые трансформации, когда коэффициент  $a$  достигает критических для них величин. На рис. 4.66 показаны девять фаз прокола аттрактора пятого рода, который в устойчивом, т.е. в непроколотом состоянии, находится в пределах  $a = 1,5993101 \div 1,5993105$ .

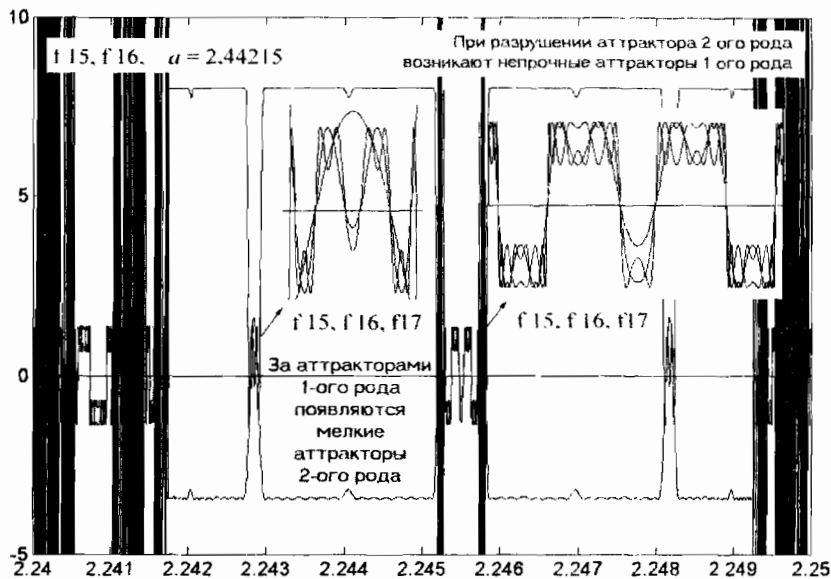


Рис. 4.64

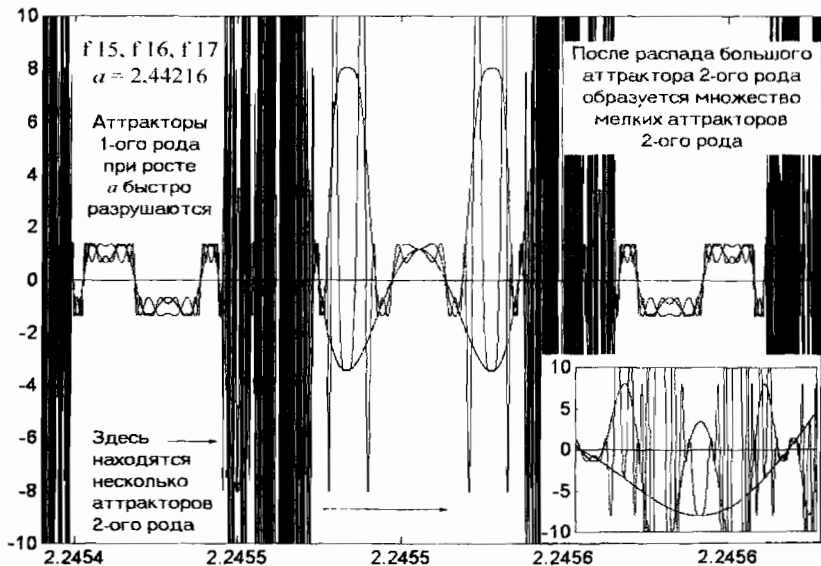


Рис. 4.65

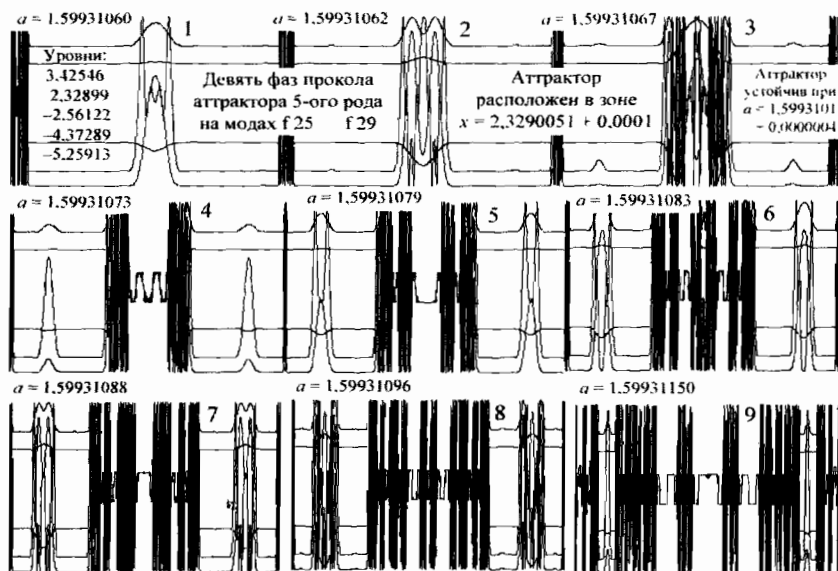


Рис. 4.66

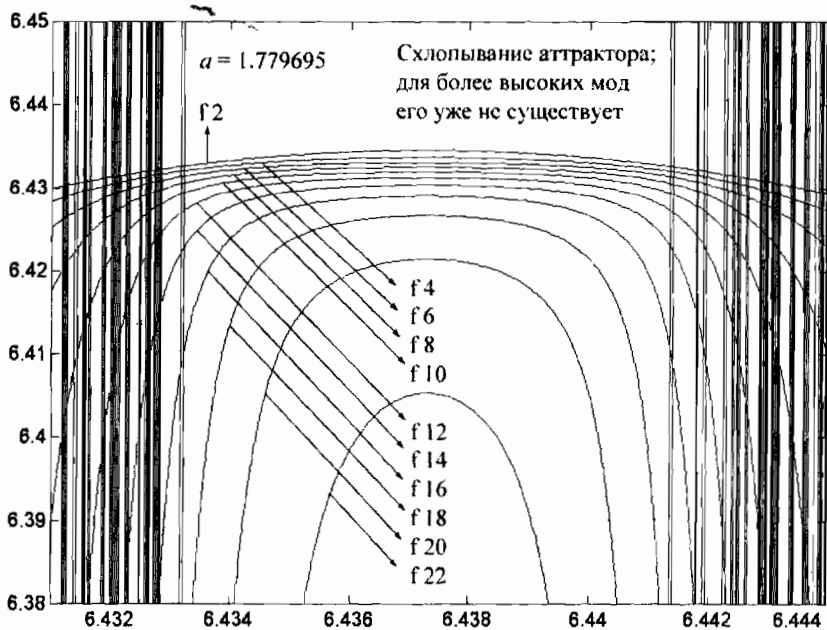


Рис. 4.67

При разрушении аттрактора пятого рода, как и аттракторов второго рода, наблюдается появление непрочных промежуточных аттракторов первого рода на уровне вблизи нуля, а затем рождение новых, но уже более узких аттракторов пятого рода. Весьма любопытно наблюдать не только за перестройкой пяти уровней, но и за перестройкой аттракторов первого рода, которую, однако, совершенно не видно на представленном рисунке. Понимания динамики разрушения аттракторов можно, конечно, достичь только при кинематографическом представлении, когда коэффициент  $a$  непрерывно изменяется в заданном диапазоне. В этом случае при равномерном изменении коэффициента  $a$  хорошо видна и различная скорость протекания процессов.

Прокол аттрактора всегда происходит при увеличении коэффициента  $a$ . А что будет наблюдаться, когда коэффициент уменьшается? В этом случае линия отсечения «макушки» от высшей моды нижней уменьшится, следовательно, ширина аттрактора тоже сузится и, при каком-то определенном коэффициенте  $a$  аттрактор совершенно исчезнет. В этом случае можно говорить о *схлопывании* аттрактора, причем схлопывание, как и прокол, начинается с высших мод. Сначала от аттракторного уровня отходят высшие моды, потом — низшие; моды первых порядков, обладающие наименьшей чувствительностью к изменению коэффициента  $a$ , еще долго остаются на аттракторном уровне, который давным-давно прекратил свое существование для высших мод. Схлопывание аттрактора второго рода показано на рис. 4.67. Можно, однако, говорить не о «схлопывании» аттрактора, а о его «зарождении». Тогда динамический процесс представляется следующим образом. Некая уже вполне «зрелая» мода достигает аттракторного уровня, едва касаясь его в одной или нескольких точках. Затем она все больше и больше отвоевывает для себя пространство одного или нескольких аттракторных уровней. При кинематографическом наблюдении за этим процессом с *равномерным* ростом коэффициента  $a$  аттрактор *неравномерно* раздвигает свои границы. Наконец, после многочисленных перестроек ширина его достигает критических размеров, и он прокальвается в нескольких местах по вышеуказанной схеме.

#### 4.12. Ноль-аттрактор, $\lambda$ -аттракторы и квазиаттракторы

До сих пор мы рассматривали состояния мод, когда коэффициент  $a$  был больше единицы. А что происходит с модами, если  $a < 1$ ? В

этом случае мы имеем дело с так называемым *ноль-аттрактором*, который прижимает амплитуды всех высших мод к оси абсцисс. Эта ситуация представлена на рис. 4.68, где изображены моды с  $f 1$  по  $f 15$  при коэффициенте  $a$ , близком к единице. Но даже при этом сравнительно большом коэффициенте старшие моды, начиная с  $f 7$ , по всей длине оси абсцисс не превосходят величины  $\pm 0,5$ , как это видно в отдельном окошке, помещенном на данном рисунке. Условия для возникновения *ноль-аттрактора* могут сложиться и при коэффициенте  $a > 1$ , если речь идет об аттракторе высших родов. Так, на рис. 4.69 изображен знакомый нам по предыдущим рисункам аттрактор второго рода при коэффициенте  $a = 1,779765$ , когда все высшие четные моды прижаты к его основному четному уровню. Все четные моды распались на два класса; в один из них попали моды  $f 2, f 6, f 10, f 14, f 18, \dots$ , в другой —  $f 4, f 8, f 12, f 16, f 20, \dots$ , что, однако, не говорит о наличии субаттрактора 4-го рода, так как для этого нет четырех уровней.

С дальнейшим приближением коэффициента  $a$  к единице происходит формирование  $\pi$ -аттракторов, которые получили свое название ввиду соответствующих количественных характеристик, но которые по своей сути принадлежат к обычным аттракторам второго рода. Однако все же данные аттракторы отличаются от аттракторов второго рода способом формирования.

Взгляните на рис. 4.70, где показана фаза формирования  $\pi$ -аттракторов. На основном рисунке при коэффициенте  $a = 0,995$  успели вполне расправить свои амплитуды только первые 15 мод. На фрагменте, помещенном в левом верхнем углу рисунка, хорошо видно, что высшие моды, начиная с двадцатой, все еще плотно прижаты к оси абсцисс, где действуют мощные силы притяжения от *ноль-аттрактора*. Между тем коэффициент  $a$  отличается от полной единицы всего на каких-нибудь пять тысячных.

Но вот коэффициент  $a$  достиг единицы, и  $\pi$ -аттракторы на рис. 4.71 предстали перед нашим взором во всей своей красе. Высота  $\pi$ -аттрактора равна  $\pi$  и его передний фронт находится в точке  $x = \pi$ ; высота  $2\pi$ -аттрактора равна  $2\pi$  и его передний фронт находится в точке  $x = 2\pi$ ;  $3\pi$ -аттрактор, а равно  $4\pi$ -,  $5\pi$ -аттракторы и т.д., возникают в соответствующем месте.  $2\pi$ -аттрактор слева и справа окружен бесконечным множеством  $\pi$ -аттракторов. Прямая  $f 0$  касается левого угла  $\pi$ - и  $2\pi$ -аттракторов (при  $a = 1$  там сформировался пря-

мой угол). В точке с координатами  $\pi$  по оси абсцисс и  $\pi$  по оси ординат произошло соприкосновение всех мод, которые проходят через эту точку. Поэтому  $\pi$ -аттрактор существует не только по причине касания мод  $f/2f$ ,  $4/f$ ,  $6/f$ , ... но также в силу всевозможных комбинаций из этих мод, в частности, от касания  $f/0f$  и т.д. То же самое относится к отрицательным и боковым  $\pi$ -аттракторам, а также к  $2\pi$ -аттрактору. Для аттракторов второго рода общего вида такого размещения их вдоль оси абсцисс наблюдаться не будет. Ширина основного  $\pi$ -аттрактора равна  $\Delta x = 0,555$ ; середина его расположена в точке  $x = 3,419$ . Скорость притяжения амплитуд к аттракторному уровню с ростом порядка мод показана в окошке, где представлен график убывания абсолютной величины разности:

$$|f_n - \pi| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

В принципе  $\pi$ -аттракторы притягивают моды точно так же, как это делает их предшественник ноль-аттрактор, т.е. синфазно по всем четным и нечетным модам.

Бифуркация основных уровней  $\pi$ -аттракторов происходит по тому же сценарию, что и для Большого аттрактора и всех прочих аттракторов. Если  $m > n$ , то сначала расщепляются основные уровни  $m\pi$ -аттрактора, затем уровни  $n\pi$ -аттрактора. На рис. 4.72 видны дискретные микроуровни субаттракторов 4-го рода, который проявил себя при коэффициенте  $a = 1,069$ . В отдельном окошке показаны аналогичные микроуровни в увеличенном виде, но взятые уже с вершины «башни», расположенной в районе  $x = 10$ . Тем самым показано, что идентичными метаморфозами охвачены все  $2\pi$ -аттракторы, разбросанные вдоль оси абсцисс, а не только тот, что расположен в точке  $x = 2\pi$ . С ростом величины коэффициента ( $a = 1,083$ ) происходит сложная перестройка мод, о которой в деталях мы поговорим позже.

На следующем рисунке показаны метаморфозы, которые претерпевают основные уровни  $\pi$ -аттрактора, когда коэффициент  $a$  перешел отметку в 1,25. Если коэффициент  $a = 1,256$ , то наблюдается появление микроуровней от субаттрактора третьего рода, т.е.  $\pi$ -аттрактор фактически превращается в  $23\pi$ -аттрактор. При коэффициенте  $a = 1,259$   $\pi$ -аттрактор трансформируется в  $232\pi$ -аттрактор. Две эти фазы зафиксированы в двух окошках рис. 4.73, на котором видны основные уровни аттрактора первого рода, покрывающего ось абсцисс в точках, где отсутствует аттрактор второго рода.

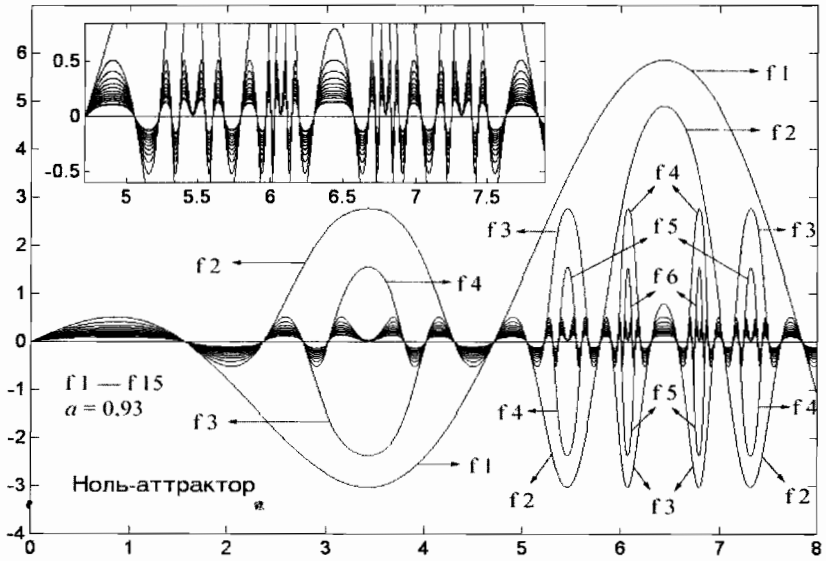


Рис. 4.68

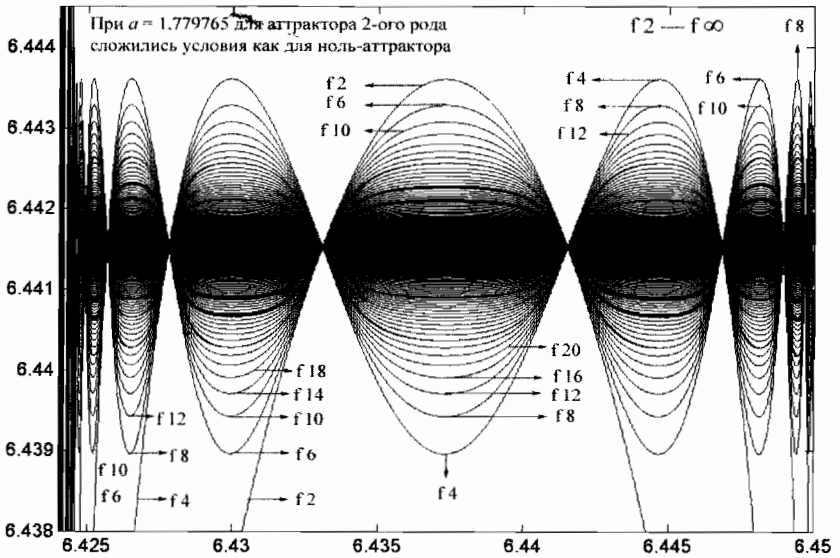


Рис. 4.69



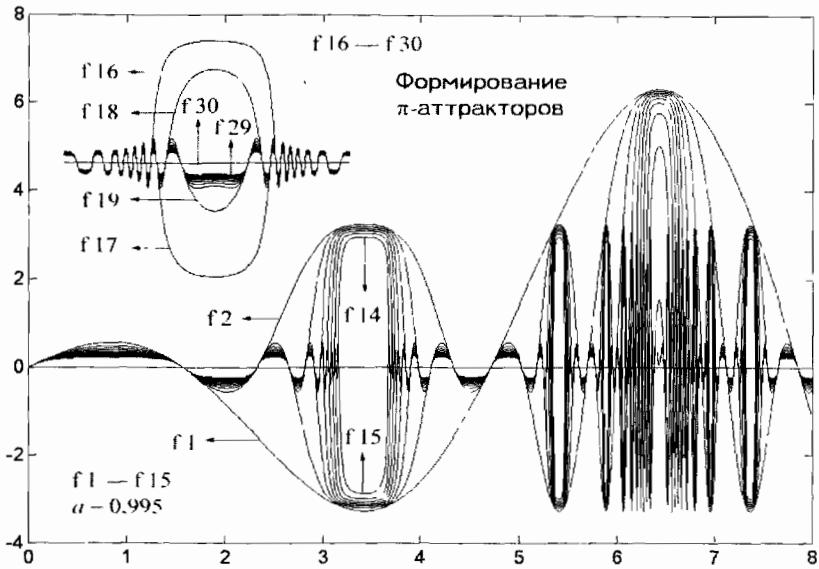


Рис. 4.70

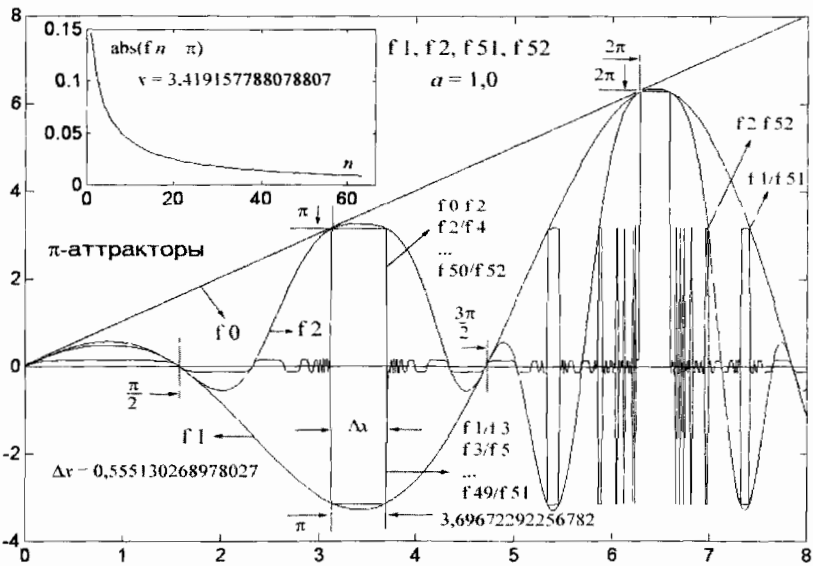


Рис. 4.71

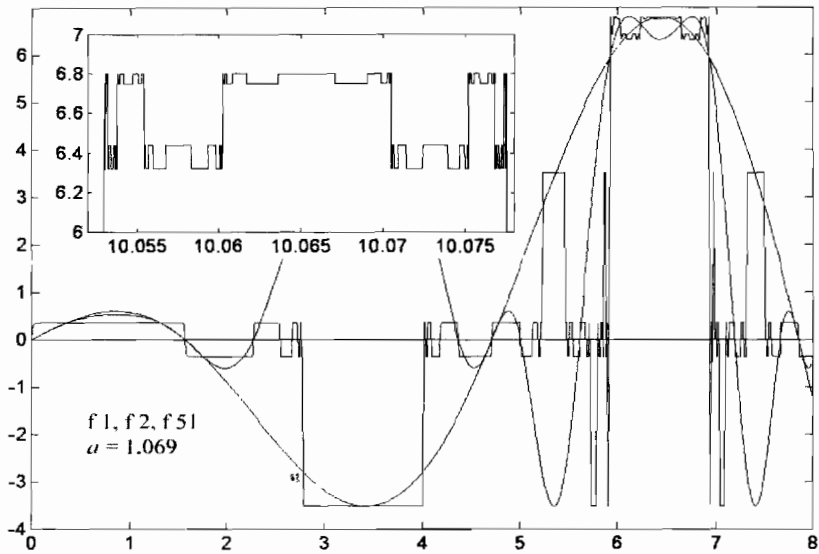


Рис. 4.72

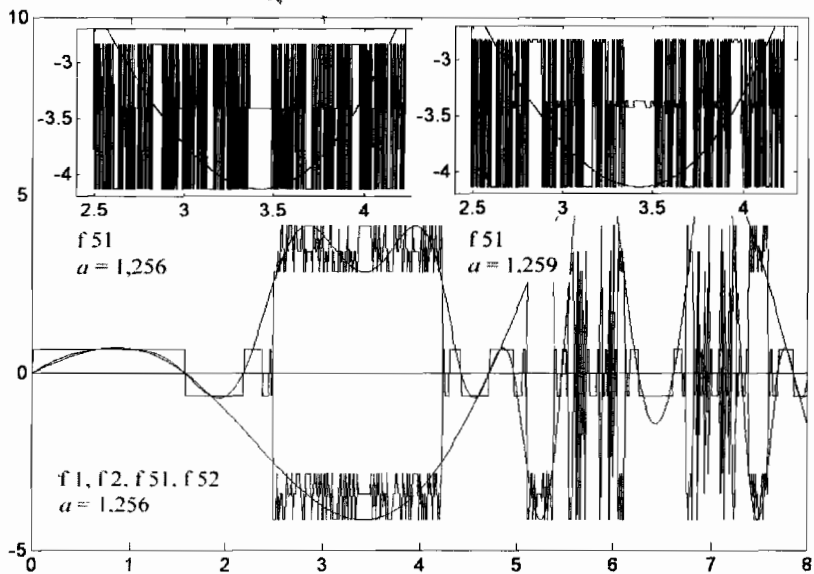


Рис. 4.73

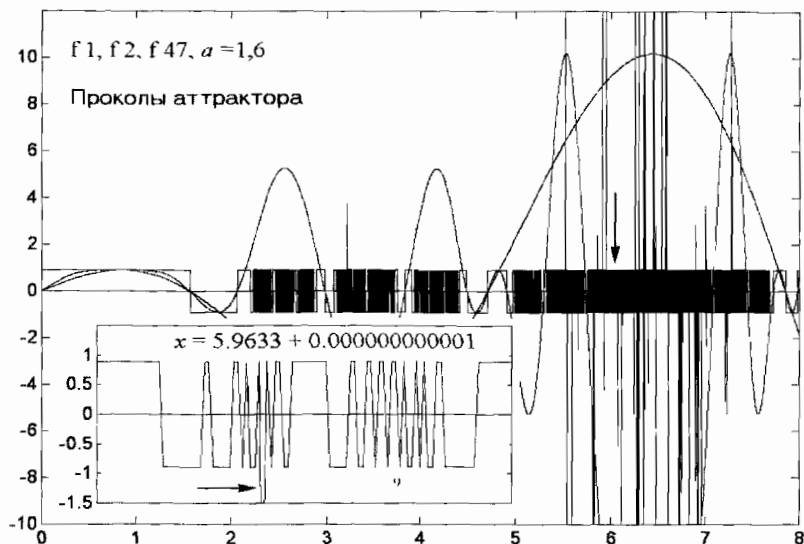


Рис. 4.74

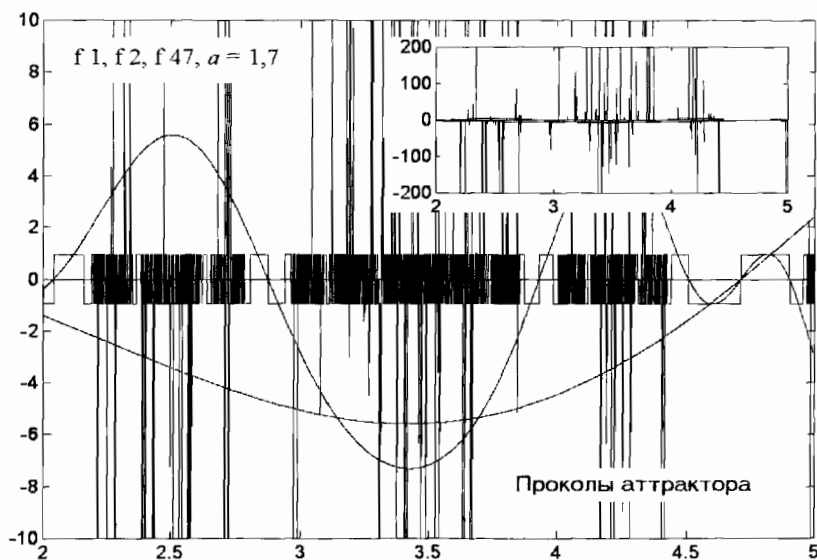


Рис. 4.75

Опуская множество фаз, связанных с проколом  $\pi$ -аттрактора по сценарию прокола аттрактора второго рода, мы приводим картинку, где в основном господствуют силы гашения амплитуд широким уровнем аттрактора первого рода. На рис. 4.74 при коэффициенте  $a = 1,6$  этот уровень по всей длине оси абсцисс, за исключением ее начала и мест пересечения оси модами  $f_1$  и  $f_2$ , выглядит темным. В районе ранее существовавшего  $\pi$ -аттрактора проколов аттрактора первого рода почти не наблюдается, но в зоне исчезнувшего  $2\pi$ -аттрактора имеются множественные проколы, произведенные модой  $f_{47}$ . Большая вертикальная стрелка указывает на прокол аттрактора первого рода в зоне  $x = 6$ . Это место в увеличенном масштабе показано в отдельном окне данного рисунка. Видно, что аттрактор первого рода в некоторых местах сильно изрезан и представляет собой густую гребенку с тонкими зубцами. Там, где зубцы особенно тонки, происходит прокол аттрактора. Один из таких проколов модой  $f_{47}$ , амплитуда которой уходит вертикально вниз, обозначен в окне горизонтальной стрелкой. Может возникнуть вопрос, почему отсутствует прокол в соседней области справа, где зубцы аттрактора первого рода тоже очень тонки? Ответ прост: при выборе чуть меньшего шага построения графиков в месте, где стоит знак вопроса, появится прокол. При крупном шаге многие выходы амплитуды моды за пределы аттрактора оказались просто скрытыми от наших глаз. При коэффициенте  $a = 1,7$  наблюдаются многочисленные проколы и в том месте, где раньше находился  $\pi$ -аттрактор. Рис. 4.75, на котором запечатлен этот момент, имеет окошко, в котором видно, что амплитуда моды  $f_{47}$  в местах разрушенного аттрактора первого рода выходит далеко за пределы  $\pm 200$ . Общая картина поведения мод, когда коэффициент меняется в пределах  $1 < a < 2$ , будет описана ниже.

Сейчас нас будет интересовать структура мод, складывающаяся при  $a = 2$ . При этом значении коэффициента по всей оси абсцисс возникают любопытные сооружения, напоминающие аттракторы, но ими не являющиеся. Они удерживают амплитуду конкретной моды на некотором дискретном уровне, когда переменная  $x$  проходит определенный участок по оси абсцисс. Но следующая мода на этом участке принимает новое, более высокое дискретное значение, так что настоящих аттракторов, притягивающих все без исключения моды к одному, двум и т.д. значениям, здесь не возникает.

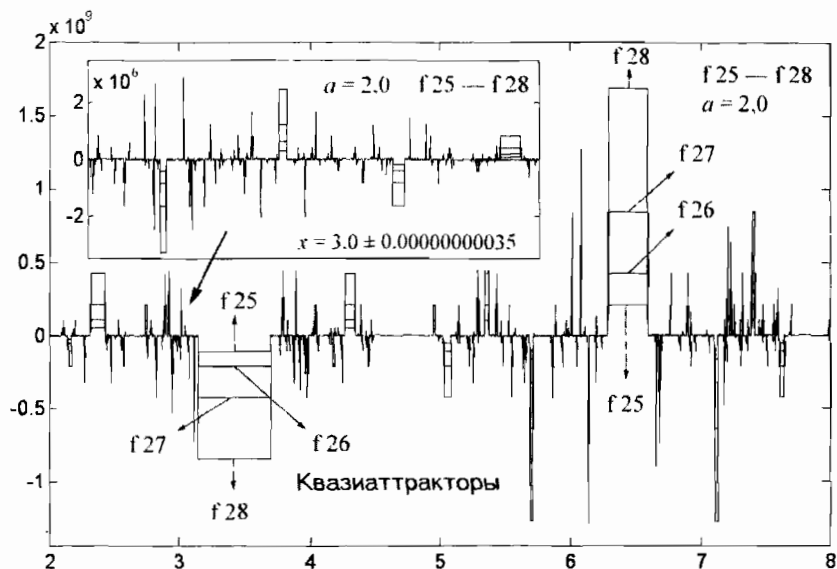


Рис. 4.76

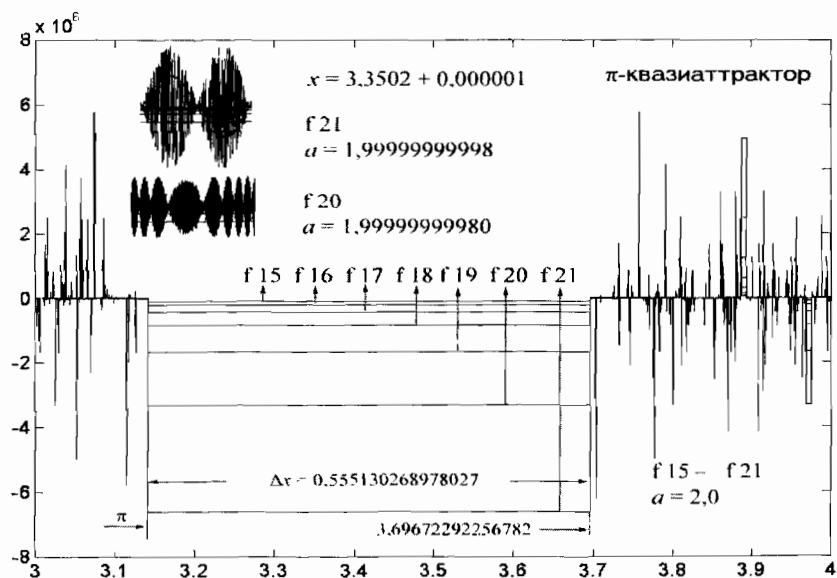


Рис. 4.77

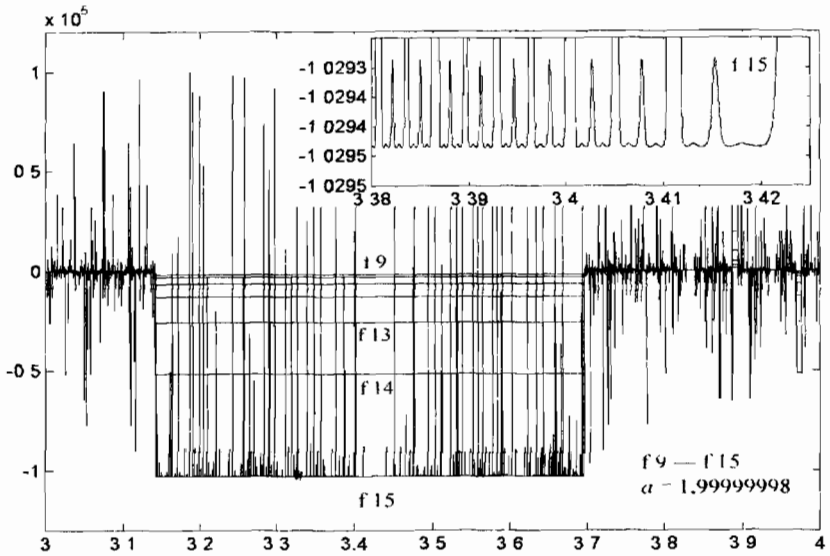


Рис. 4.78

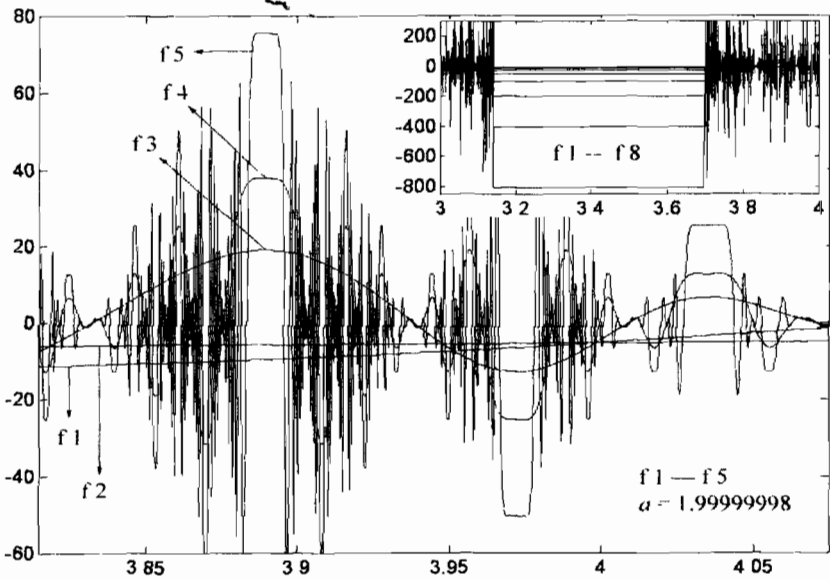


Рис. 4.79

Эти странные образования, которые только маскируются под аттракторы, получили название *квазиаттракторов*. Четырехступенчатые «этажерки» таких квазиаттракторов, созданные четырьмя модами  $f 25$  —  $f 28$  показаны на рис. 4.76. Обратите внимание на вертикальные размеры этажерок: аттракторных уровней с высотой или глубиной в 1 или 2 миллиарда единиц не существует. Законы формирования квазиаттракторов весьма любопытны. Этажерки возникают, разумеется, не только при миллиардных уровнях амплитуды, когда имеешь дело с высшими модами, но и при миллионных, сотысячных и меньших значениях, когда строишь низшие моды. По оси абсцисс широкие, узкие и очень узкие этажерки разбросаны почти беспорядочно, но есть места, где они полностью отсутствуют, нет даже самых узких квазиаттракторов. В окошке рис. 4.76 показан участок оси в области  $x = 3,0$ , где видны те же самые четыре моды, для которых, однако, амплитуды оказалась почти в 1000 раз меньше, чем это видно на основном рисунке.

Несмотря на кажущуюся хаотичность, некоторая закономерность в расположении квазиаттракторов вдоль оси абсцисс просматривается. Так, например, широкий квазиаттрактор, который на рис. 4.77 представлен модами  $f 15$  —  $f 21$ , находится в точности на месте  $\pi$ -аттрактора; его ширина  $\Delta x = 0,555$  тоже отвечает ширине  $\pi$ -аттрактора; поэтому он назван  $\pi$ -квазиаттрактором. Уровни  $\pi$ -квазиаттрактора отличаются в  $a = 2$  раз. При крохотном отходе от этого значения, при коэффициенте  $a = 1,9999999998$ , уровень моды  $f 21$  исчезает и ее амплитуда начинает колебаться обычным образом, образуя характерные биения относительно нулевого уровня. Максимальная амплитуда этих колебаний легко достигает значений прежнего уровня  $\pi$ -квазиаттрактора, залегающего на глубине почти семи миллионов единиц. При коэффициенте  $a = 1,99999999980$  исчезает уровень моды  $f 20$ , и уже она образует гирлянду, которую можно видеть на рис. 4.77. В правой части этого рисунка видны также узкие этажерки из мод  $f 15$  —  $f 21$ .

Прокол  $\pi$ -квазиаттрактора показан на рис. 4.78, где имеется окошко, в котором виден в увеличенном масштабе проколотый уровень от моды  $f 15$  при  $a = 1,99999998000$ , залегающий на стотысячной глубине. На следующем рисунке (рис. 4.79) представлен генезис квазиаттракторов. Обратите внимание, что мода  $f 5$  формирует плоскую вершину локальных максимумов; уровни от моды  $f 4$  про-

ходят примерно через середины импульсов от моды  $f_5$ , а амплитуды от моды  $f_3$  достигают середины максимумов амплитуды от моды  $f_4$ . За исключением аттракторов первого рода, аттракторов более старших родов здесь, по-видимому, не возникает.

Почему максимальная мода, показанная на рис.4.76, имеет 28-й порядок? Что произойдет с модами  $f_{29}$ ,  $f_{30}$ , ..., они по-прежнему будут давать возрастающие уровни, когда каждый последующий становится в два раза выше предыдущего? На эти вопросы мы ответим позже, а сейчас займемся тонкой структурой аттракторов.

### 4.13. Субаттракторы

В этом подразделе мы уделим чуть большее внимание сложной иерархии аттракторов, образующих фрактальные структуры, уходящие в бесконечно малые пространства. Предыдущий анализ касался диапазона коэффициентов  $0 < a < 3$  тригонометрической рекурсивной функции  $ax \cos(x)$ . Теперь рассмотрим, как в аттракторах появляются субаттракторы при коэффициенте  $a = 3$  и выше. Рис. 4.80 демонстрирует, что при  $a = 3$  ничего особенного не происходит, т.е. нет каких-то признаков, которые бы свидетельствовали о существовании особых состояний мод вроде  $\pi$ -аттракторов при коэффициенте  $a = 1$  или квазиаттракторов при  $a = 2$ . Большой аттрактор при этом значении коэффициента не разделен на аттрактор-плюс и аттрактор-минус, но в нем просматриваются широкие окна, сигнализирующие о том, что мы находимся в зоне формирования какого-то большого субаттрактора. Грубо изменяя значение коэффициента, мы убеждаемся, что при  $a = 3,12$  для мод  $f_1$  —  $f_6$  существует субаттрактор четвертого рода, четыре уровня которого, однако, легко прокалываются уже десятой модой. Отсюда мы делаем вывод, что аттрактор 4-го рода на базе Большого аттрактора возникает где-то в пределах коэффициента  $3 < a < 3,12$ . При поиске новых аттракторов всегда удобно сначала ориентироваться на младшие моды и грубые значения коэффициента  $a$ , потом переходить к старшим модам и более прецизионным значениям  $a$ .

Действительно, при  $a = 3,1$  существует комбинированный аттрактор четвертого рода, который во многом напоминает комбинированный аттрактор четвертого рода, показанный на рис. 4.55. Оба аттрактора имеют идентичную фрактальную структуру, которая бесконечно воспроизводится в малых масштабах. На рис. 4.81 пока-



заны пять первых мод, образующих четыре уровня комбинированного аттрактора. Ширина Большого аттрактора определяется крайними узлами сечения  $f$  0/ $f$  1. Нижний и верхний уровни сформированы сечениями  $f$  1/ $f$  5 и  $f$  3/ $f$  7 (мода  $f$  7 не показана), а два средних уровня — сечениями  $f$  0/ $f$  2 и  $f$  0/ $f$  4. В левом нижнем углу этого же рисунка имеется окошко, где приведен график четырех мод  $f$  501 —  $f$  504 в миллиард раз увеличенном масштабе. Здесь мы можем видеть широкие и узкие просветы прямоугольной формы с теми же аттракторными уровнями. Для комбинированного аттрактора, изображенного на рис. 4.55, масштабный коэффициент был равен  $k = 3,7351$ . Но поскольку комбинированный аттрактор, изображенный на рис. 4.81, расположен симметрично относительно начала координат, выполняется равенство:  $k = a$ . Это означает, что состояние мод  $f$  17 —  $f$  21 ничем не будет отличаться от состояния мод  $f$  1 —  $f$  5, если масштаб изображения по оси абсцисс увеличить в  $a^{16} = (3,1)^{16}$ , т.е. примерно в 73 млн. раз.

В окошке рис. 4.81 можно видеть, что аттракторные уровни имеют ступенчатую форму. Для средних уровней эти ступеньки видны, что называется, невооруженным глазом. Чтобы рассмотреть эти ступеньки для нижнего и верхнего уровней, нужно произвести увеличение изображения в несколько сотен раз. Наличие ступенек свидетельствует о том, что при  $a = 3,1$  произошла бифуркация одиночных уровней, которые видны в просветах, в результате чего возникла система дуплетов. Расщепление одиночного уровня на два подуровня произошло при коэффициенте  $a_1 = 3,08744$ . Следующая бифуркация, т.е. расщепление каждого из двух подуровней еще на два подуровня, произойдет при  $a_2 = 3,102308$  (индекс при букве  $a$  совпадает с показателем степени бифуркации, т.е. степени числа 2), в результате чего появится мультиплет из четырех подуровней. Список коэффициентов бифуркации  $a_i$  и последовательность  $F_i$  приведены на рис. 4.82. Тема нахождения коэффициентов бифуркации и постоянной Фейгенбаума важна, поэтому ей желательно посвятить специальное практическое занятие. Числовое значение этой константы можно искать в любой области оси абсцисс, где построен аттрактор и для любого диапазона коэффициента  $a$ , если  $a > 1$ .

Последовательная цепь бифуркаций приводит к расщеплению первоначально одиночного уровня нашего комбинированного аттрактора четвертого рода на 512 подуровней. Таким образом, в про-

светах исходного аттрактора возникает «Крепостная стена» (фрагмент этой «стены» показан на рис. 4.82). Для всякой «Крепостной стены» можно вводить величину дробной размерности, которая, однако, не выражается каким-то одним дробным числом. Если измерять ширину оснований «башенок», которые вырастают на «Крепостной стене» в процессе бифуркации аттракторов, то окажется, что отношения оснований заметно отличаются друг от друга для различных «башенок». Таким образом, дробная размерность «Крепостной стены» колеблется в довольно широких пределах, по крайней мере, от 3 до 2. Выше уже говорилось о недостатках понятия фрактальной размерности, поэтому далее мы не станем касаться этой проблемы.

При плавном изменении коэффициента  $a$  очередной коэффициент бифуркации  $a_i$  фиксируется при пересечении модой  $f_0$  максимума  $f_2, f_4, \dots, f_{512}$ . На рис. 4.82 показан момент прохождения диагонали  $f_0$  на максимум моды  $f_{512}$ . Точность нахождения коэффициента  $a_i$  ничем не ограничена, разве что шумовой составляющей, которая в области аттрактора имеет самое низкое значение и дает о себе знать на пределе вычислительных возможностей компьютера. Для 16-разрядного процессора ее влияние сказывается примерно на 14 знаке после запятой (о шуме и хаосе поговорим подробно чуть позже). Аттракторы могут находиться на любом участке оси абсцисс, в том числе, и вдали от диагонали  $f_0$ . Между тем, как было сказано, «Крепостная стена» возникает на любом аттракторе и для каждого из них будет иметь место индивидуальный ряд коэффициентов бифуркации. Как быть в этом случае?

Очень просто: вести настройку моды  $f_1$  на максимумы мод  $f_3, f_5, \dots, f_{513}$ . Если под рукой не оказалось моды  $f_1$ , берите моду  $f_2$  и ориентируйтесь на максимумы мод  $f_4, f_6, \dots, f_{514}$  и т.д. Главное, чтобы разность между секущей и пересекающейся модами давало ряд чисел: 2, 4, ..., 512. На рис. 4.83 можно видеть, что моменты пересечения максимумов мод  $f_4, f_5$  и  $f_7$ , соответственно, с секущими модами  $f_0, f_1$  и  $f_3$  в точности совпадают, т.е. происходят при одном и том же коэффициенте бифуркации  $a_2 = 2,41881016$ . Этой согласованностью мод и нужно воспользоваться, когда через аттракторный уровень не проходит прямая  $f_0$ .

Обратившись к рис. 4.83, мы отошли от комбинированного аттрактора 4-го рода, возникшего при  $a > 3$ , и стали рассматривать

бифуркации Большого аттрактора, что весьма кстати. Дело в том, что это не только самый заметный аттрактор из всех существующих для тригонометрической функции, он еще дает и наиболее точное значение для постоянной Фейгенбаума. Ранее выстроенная «Крепостная стена» находилась на одном из четырех уровней аттрактора четвертого рода. Мы начинали с коэффициента  $a_1 = 3,08744$ , сразу ориентируясь на максимум моды  $f_2$  и не принимая во внимание появление единичной линии, которая возникает от сечения мод  $f_0/f_1$ . Таким образом, забравшись в диапазон коэффициентов  $a > 3$ , мы миновали основную область коэффициентов, которую имеют в виду, когда строят традиционную бифуркационную диаграмму. Сейчас мы заполнили этот пробел соответствующим списком бифуркационных коэффициентов, который приведен на рис. 4.83.

На рис. 4.84 даны три фрагмента Большого аттрактора, когда на нем возвышается «Крепостная стена», выстроенная десятью модами с  $f_1$  по  $f_{512}$ . Самым крупным планом дается детальное изображение мод  $f_{87}$ ,  $f_{343}$  и  $f_{599}$ . Оно позволяет понять, почему «Крепостная стена» сплошь представлена аттракторными уровнями, т.е. некой ломаной линией, которая нигде не прерывается на свободное колебание мод, которое существует вне аттракторов. Дело в том, что аттрактор, как известно, определяется точками притяжения, в качестве которых здесь выступают узлы сплетения указанных мод. Если мысленно провести все линии между этими узлами, то мы как раз и получим ту самую ломаную, которая образует контуры «Крепостной стены». В этом смысле дуплетные уровни качественно отличаются от триплетных и других мультиплетных уровней. Триплеты и мультиплеты появляются в отдельных окнах на фоне свободного колебания мод, где могут интенсивно развиваться шумовые процессы; дуплеты же целиком покрывают пространство оси абсцисс аттракторными уровнями, не давая развиваться шумам.

Почему выбрана мода  $f_{87}$ ? Только потому, чтобы показать, что для определения бифуркационных коэффициентов и строительства стены, годятся любые моды. Последующий отбор мод —  $f_{343}$  и  $f_{599}$  — продиктован 256 и 512 порядками, которыми те отличаются от моды  $f_{87}$ . Мода  $f_{87}$  не проходит через экстремумы моды  $f_{599}$ , а это значит, что состояние мод, изображенное на рис. 4.84, не отвечает моменту девятой бифуркации. Действительно, коэффициент  $a = 2,4650309$ , при котором изображен график, несколько выше ко-

эффициента бифуркации  $a_0 = 2,4650303137$ . Стоит коэффициенту измениться еще на одну миллионную долю, как начинается процесс разрушения «Крепостной стены». При  $a = 2,4650318$  и выше происходят проколы микроуровней самых высоких мультиплетов, т.е. указанное значение коэффициента является предельно допустимым для процесса бифуркации (его мы ранее обозначали символом  $a_\infty$ ). На проколотых бифуркационных уровнях возникают микроуровни нечетных субаттракторов, о чем мы подробно поговорим ниже. Но уже сейчас нужно отчетливо понимать, что шумовые процессы не начнутся до тех пор, пока не исчезнет фундамент «Крепостной стены», т.е. основной уровень Большого аттрактора.

Процесс прокола бифуркационного уровня происходит обычным образом по известной нам схеме. Выход высших мод за границы, очерченные низшими модами, показан на рис. 4.85, только в качестве базового здесь выбран уже не Большой аттрактор, а  $2\pi$ -аттрактор, где, разумеется, ~~имеют~~ место те же самые бифуркационные процессы, что и на Большом аттракторе. Рис. 4.86, как и предыдущий рисунок, иллюстрирует прокол субаттрактора 32-го рода, который возник в центральной части аттрактора, изображенного на рис. 4.55. Через вершину «башни» комбинированного аттрактора, возвышающейся над «Крепостной стеной», проходит положительная диагональ  $f_0$ , которая пронизывает и все высшие моды субаттрактора 32-го рода. Прокол осуществлен модами  $f_{64}$ ,  $f_{96}$ ,  $f_{128}$ ,  $f_{160}$  и  $f_{192}$ , которые образовали точно такую же конфигурацию, как моды  $f_2$ ,  $f_3$ ,  $f_4$ ,  $f_5$  и  $f_6$  в момент прокола Большого аттрактора первого рода (рис. 4.59), или как моды  $f_3$ ,  $f_5$ ,  $f_7$ ,  $f_9$  и  $f_{11}$  в момент прокола аттрактора второго рода (рис. 4.61). Моды, участвующие в проколе аттракторного уровня или субаттракторного микроуровня, всегда принадлежат к одному классу; по ним можно легко определить и род аттрактора или субаттрактора.

С  $a = 3,0$  по  $a = 2,54$  происходит непрерывная и однотипная перестройка всех мод Большого аттрактора, однако в определенный момент, а именно, при  $a = 2,65$ , почти мгновенно, с точки зрения равномерного хода изменения коэффициента  $a$ , образуется множество окон и начинают формироваться три микроуровня субаттрактора 3-го рода. Данная фаза изменения Большого аттрактора является важной; о ней постоянно пишется в книгах по динамическим про-

цессам. Об этой фазе говорили и мы, когда рассказывали о бифуркационной диаграмме. Для функции  $f(z) = z^2 + c$ , где  $c = a + ib$ , трехуровневая система появляется при  $a = -1,7549$ . Для функции  $ax(1-x)$  три уровня появляются при  $a = 3,8264$ . Трехуровневый субаттрактор для тригонометрической функции  $ax \cos(x)$  держится в широком диапазоне изменения коэффициента  $a$  ( $2,64 \div 2,66$ ), если его сопоставлять с приведенными выше значениями, хотя с точки зрения общего изменения коэффициента  $a$  ( $3,0 \div 2,0$ ) эту фазу можно легко упустить из виду.

На рис. 4.87 приведены пять графиков, соответствующих пяти иерархическим ступеням сложного субаттрактора 486-го рода. В левом верхнем углу изображен Большой аттрактор во всю ширину в фазе 3-аттрактора. Центральный уровень этого 3-аттрактора, на который указывает большая стрелка, справа вверху представлен в увеличенном виде. Второй график, как и первый, образован модой  $f$  489, но на нем видна парабола от моды  $f$  3. Левая ветвь этой параболы пересекает средний аттракторный уровень, который на третьем графике дан в увеличенном масштабе. У этого 3-аттрактора уровни представлены дуплетом, причем каждая его пара уровней расщеплена еще на три подуровня, которые можно видеть на четвертом графике. Наконец, последнее сечение  $f$  3/ $f$  489, которое дает еще три уровня, показано на пятом фрагменте. В итоге возник сложный шестизвенный мультиплет, в состав которого включены пять триплетов и один дуплет.

Мультиплет, изображенный на рис. 4.88, состоит из четырех дуплетов и одного триплета. Как и в предыдущем случае, здесь важна последовательность образования аттракторных уровней. Данный мультиплет, возникший при  $a = 2,44204426$ , образован на базе аттрактора второго рода, который дал первый дуплет. В конце иерархии находится триплет, уровни которого кратны 16. Если иметь в виду самое широкое окно центральной части аттрактора второго рода, расположенное на уровне 8,0296 при  $x = 2,24552$ , то самый нижний микроуровень этого окна сформирован модами  $f$  16,  $f$  64,  $f$  112 и  $f$  160; средний уровень — модами  $f$  48,  $f$  96 и  $f$  144, а верхний — модами  $f$  32,  $f$  80 и  $f$  128 (разобраться в раскладе мод поможет фрагмент, составленный из мод  $f$  16,  $f$  32,  $f$  48 и  $f$  64, расположенный выше обсуждаемой области с просветами).

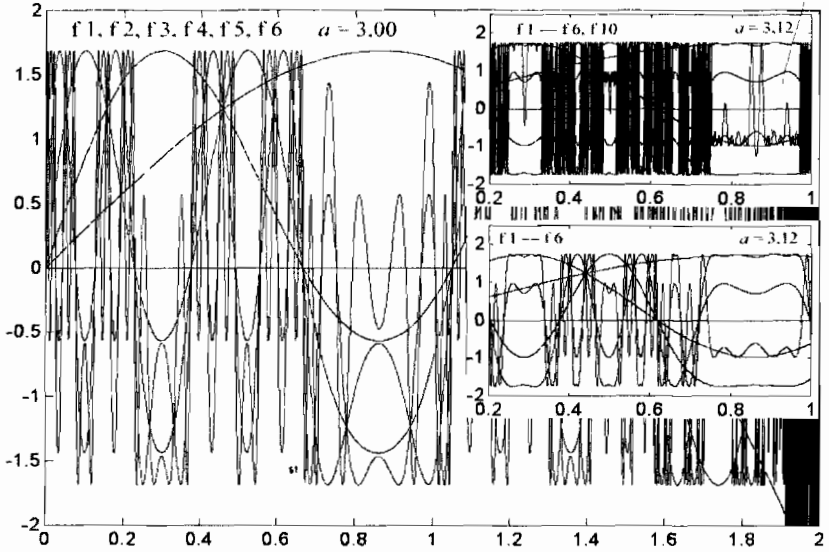


Рис. 4.80

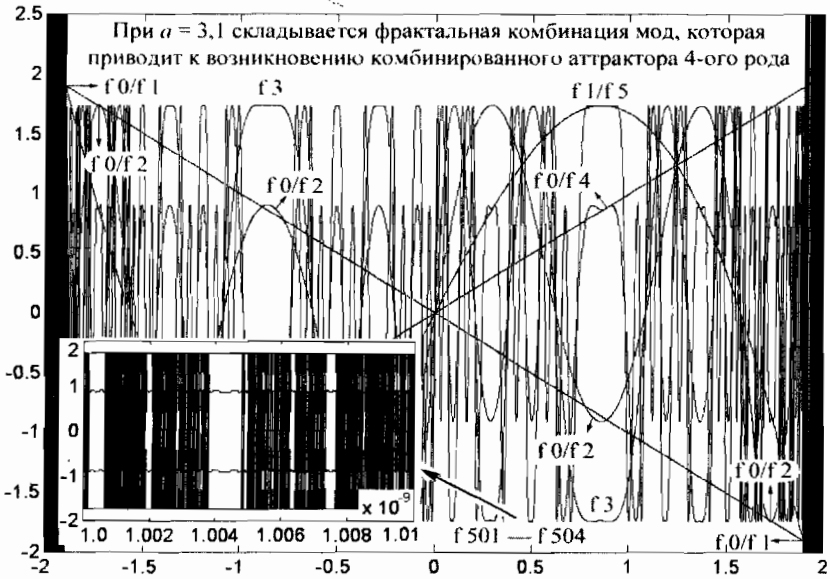


Рис. 4.81

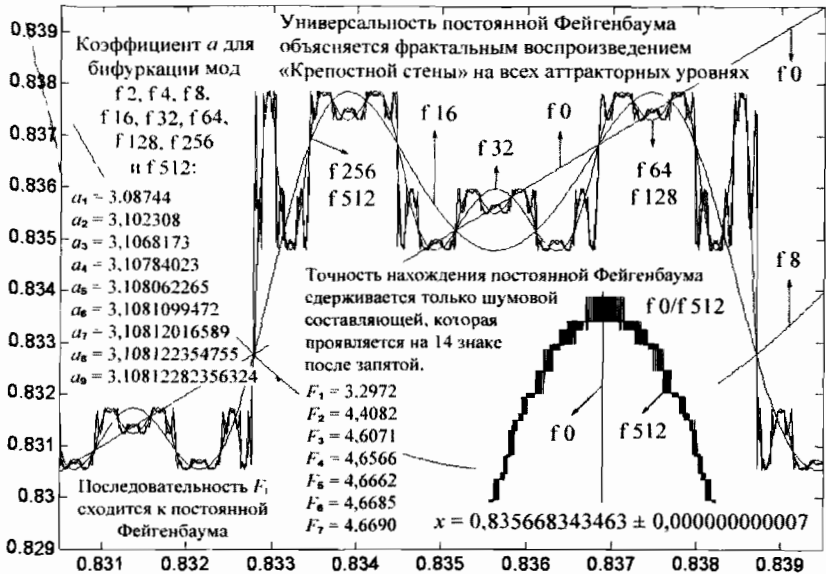


Рис. 4.82

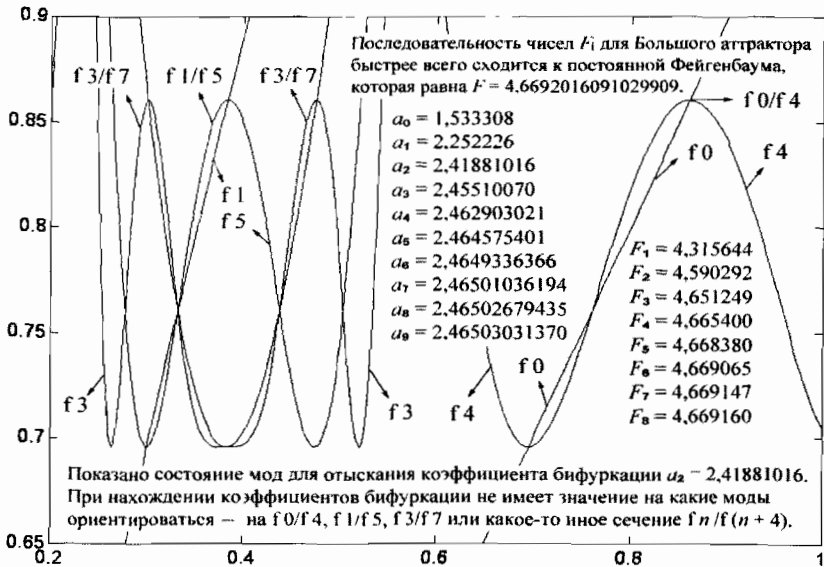


Рис. 4.83

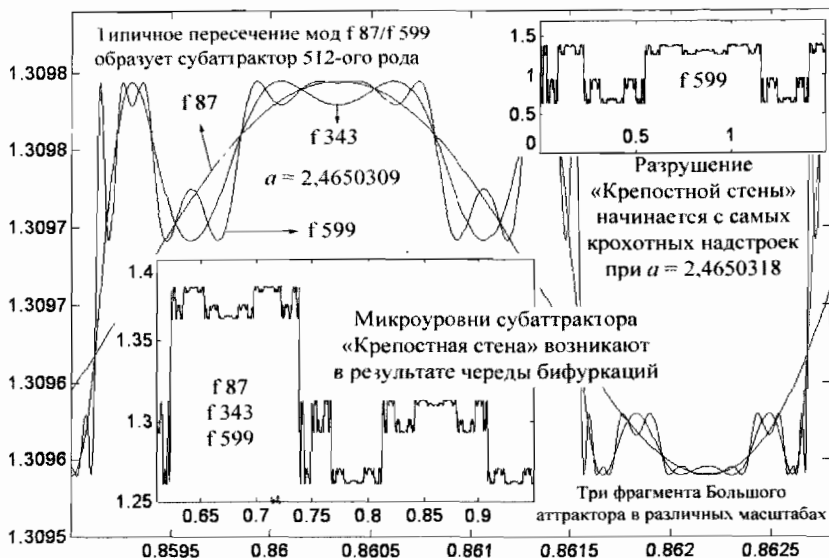


Рис. 4.84

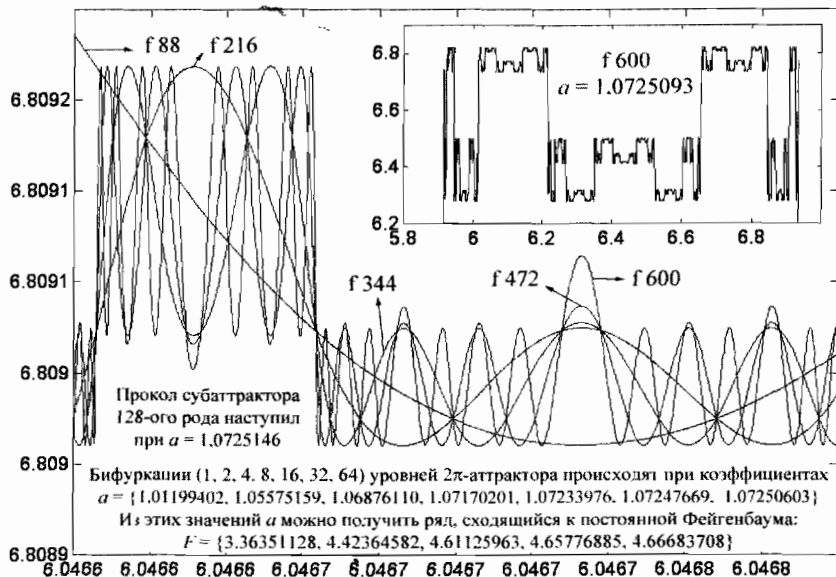


Рис. 4.85



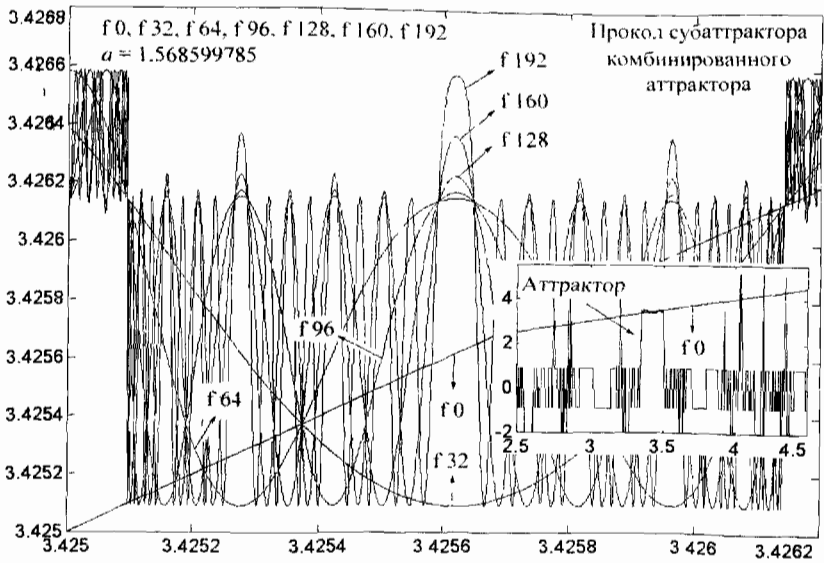


Рис. 4.86

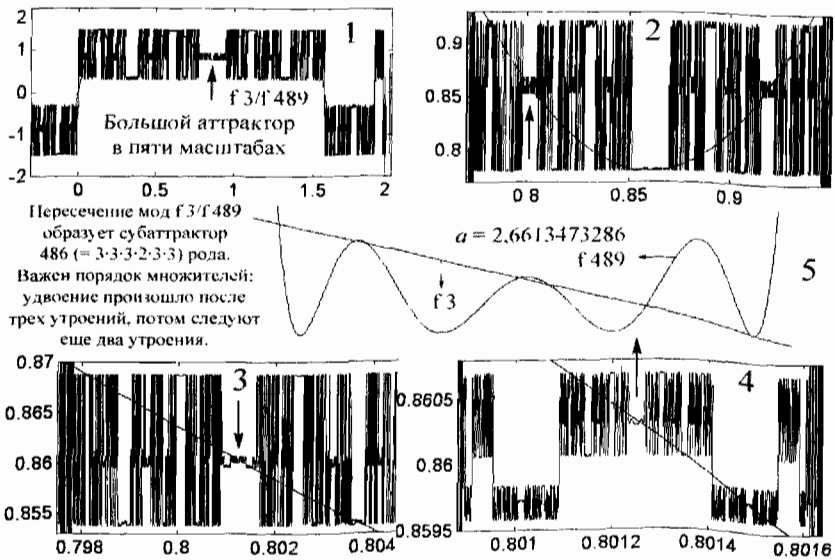


Рис. 4.87

Пересечение мод  $f_3/f_{489}$   
 образует субаттрактор  
 486 ( $= 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$ ) рода.  
 Важен порядок множителей:  
 удвоение произошло после  
 трех утроений, потом следуют  
 еще два утроения.

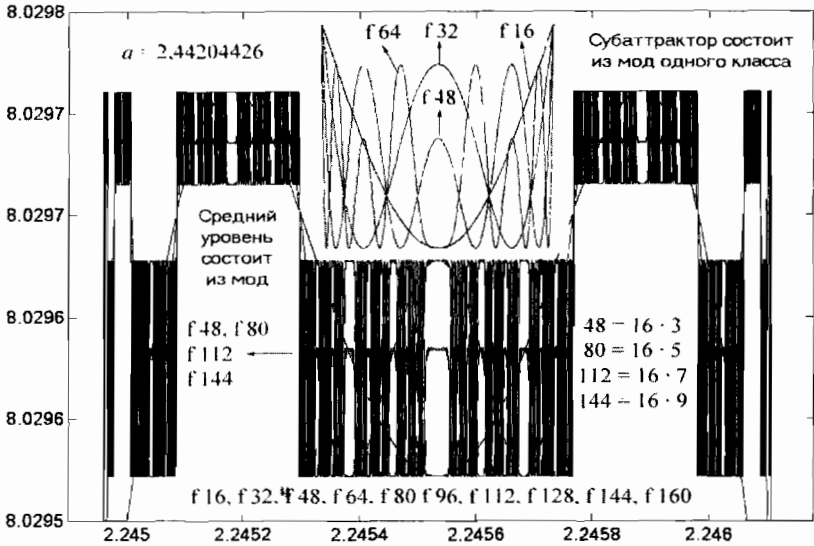


Рис. 4.88

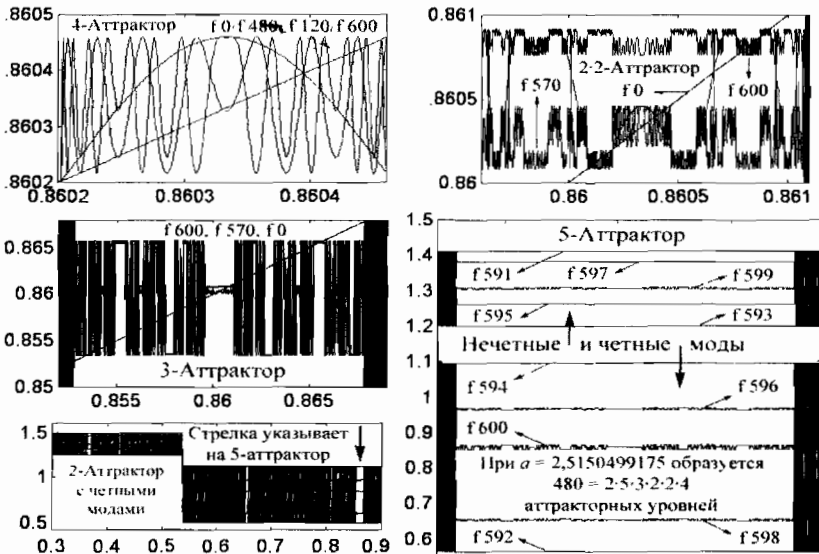


Рис. 4.89

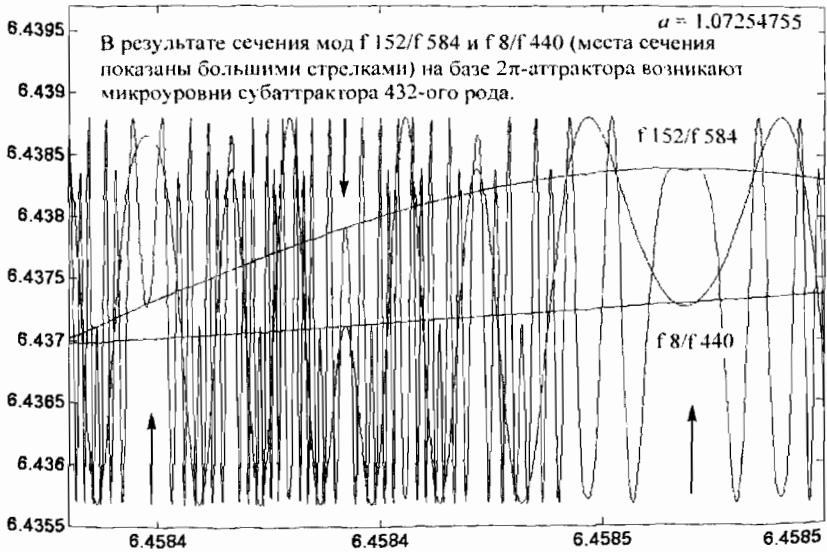


Рис. 4.90

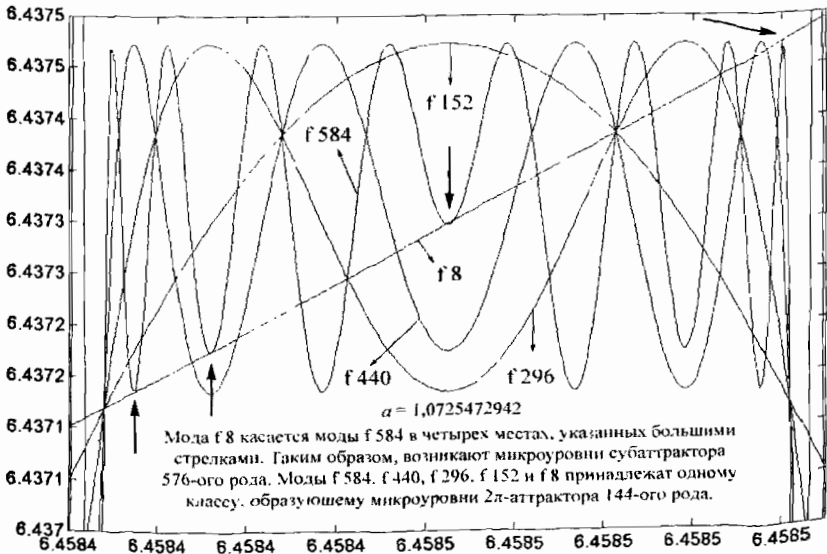


Рис. 4.91

Таким образом, участвующие в формировании этих микроуровневой моды, кратные числу 16, чередуются через две на третью, т.е. данные микроуровни принадлежат субаттрактору 48-го рода. Хотя в средних микроуровнях по всей длине аттрактора второго рода участвуют четные моды порядка:

$$16 = 16 \cdot 1, 48 = 16 \cdot 3, 80 = 16 \cdot 5, 112 = 16 \cdot 7, 144 = 16 \cdot 9,$$

они являются нечетными модами относительно числа 16.

Одним из основных заданий лабораторно-практического занятия по теме «Аттракторы» должно стать построение аттрактора по величине его рода при заданной определенной цепочке множителей. Например, требуется построить аттрактор 480-го рода, когда чередование его субаттракторов удовлетворяет следующей цепочке множителей:  $2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4$ . При этом выбор мод может быть конкретизирован преподавателем или самим студентом. Отчет представляется в форме серии графиков, отображающих отдельные субаттракторы, как это показано на рис. 4.89. Очевидно, что другой последовательности множителей (не обязательно простых) будет отвечать совершенно иная аттракторная система уровней и соответствующий ей коэффициент  $a$ . Так, два ряда множителей:  $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2$  и  $5 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$ , дают совершенно новые коэффициенты и аттракторные уровни, отличающиеся как друг от друга, так и от предыдущего случая.

Можно сформулировать лабораторно-практическое задание проще. Например, получить изображения мод, принадлежащих одному классу —  $f 8, f 152, f 296, f 440, f 584$ , с тем чтобы в зоне 2л-аттрактора построить сечения для уровней 432-го (рис. 4.90) или 576-го рода (рис. 4.91). В общем, здесь имеется обширное поле деятельности для составления самых разнообразных лабораторно-практических упражнений для тех, кто изучает аттракторы от рекурсивных функций типа  $ax \cos(x)$ ,  $ax \exp(1 - x)$ ,  $ax(1 - x)$  и т.д.

Нам остается ответить на последний вопрос: сколько видов аттракторов рода 3, 4, 5, 6 и т.д. существует и есть ли здесь какая-нибудь закономерность?

Ранее мы выяснили, что при каком-то значении коэффициента  $a$  аттрактор возникает в виде основного аттракторного уровня. При увеличении коэффициента  $a$  начинается процесс бифуркации этого уровня и строительство «Крепостной стены». По достижении коэф-

фициентом  $a$  значения  $a_c$  «стена» начинает разрушаться, причем с самых верхних этажей. Здесь появляются субаттракторные микроуровни 3, 4, 5, 6-го и т.д. родов. При появлении 3-аттрактора три его уровня могут испытать всю бесконечную цепь бифуркаций, затем цепь проколов и образование новых субаттракторов 3, 4, 5, 6-го и т.д. родов. При появлении 4-аттрактора четыре его уровня также могут испытать бифуркацию, проколы и образование совершенно других субаттракторов 3, 4, 5, 6 и т.д. родов. В этом проявляется фрактальная природа аттракторов.

На рис. 4.92 изображен фрагмент «Крепостной стены», выстроенной на комбинированном аттракторе 4-го рода, когда аттрактор имеет 64 устойчивых уровня, верхний уровень «стены», однако, почти разрушен, т.е. мода  $f$  128 уже не образует соответствующих ей уровней. Это состояние отвечает коэффициенту  $a = 3,1081236$ . При небольшом росте данного коэффициента ( $a = 3,108123905$ ) мода  $f$  576 образует 9-аттрактор. Дальнейшее увеличение коэффициента приводит к появлению аттракторов 7, 5 и 3-го родов. Аналогичная картина наблюдается на всех этажах «Крепостной стены».

Например, рис. 4.93 демонстрирует нечетные аттракторы, появляющиеся на основном уровне аттрактора 4-го рода. 3-аттрактор всегда имеет одну модификацию (поз. 1); 5-аттрактор — три модификации (поз. 2 — 4 и поз. 5 — 7); 7-аттрактор — девять модификаций, которые возникают при следующих коэффициентах:

$$a = 3,10823168; \quad a = 3,10829620; \quad a = 3,10840625;$$

$$a = 3,10844324; \quad a = 3,10847252; \quad a = 3,08496740;$$

$$a = 3,10851634; \quad a = 3,10853209; \quad a = 3,10854178;$$

(одна из этих модификаций представлена поз. 8). Число модификаций 9-аттрактора равно 27 и еще одна модификация, образованная 3-аттрактором, когда в нем появляется триплет от 3-субаттрактора, т.е. когда появляется 3·3-аттрактор. Если не учитывать эти комбинированные модификации, то количество видов нечетных аттракторов подчиняется элементарной закономерности:  $3^0, 3^1, 3^2, 3^3, \dots$ . В частности, можно ожидать, что число модификаций аттракторов 15-го рода равно 735, так как  $3^6 = 729$  и еще шесть комбинаций дают аттракторы рода  $3 \cdot 5$  и  $5 \cdot 3$ . На рис. 4.93 поз. 9 — 12 показано по одному нечетному аттрактору 9, 11, 13 и 15-го родов. Таким обра-

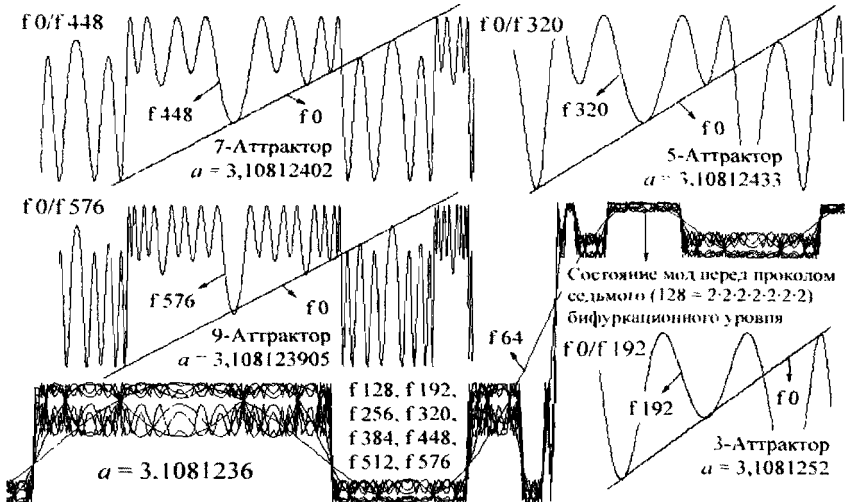
зом, число модификаций аттракторов нечетного рода поддается простому подсчету, особенно тогда, когда его род выражается простым числом. Например, число 101 — простое, следовательно, количество модификаций 101-аттрактора равно только 49 степени числа 3.

Аналогичная картина наблюдается для рекурсивных функций, отличных от тригонометрической  $ax \cos(x)$ . В частности, для экспоненциального закона  $ax \exp(1 - x)$  нечетные аттракторы возникают при следующих коэффициентах:

3-аттрактор при $a = 8,3037$ ,	5-аттрактор при $a = 6,80475$ ;
7-аттрактор при $a = 6,4232124$ ;	9-аттрактор при $a = 6,3057135$ ;
11-аттрактор при $a = 6,269366565$ ;	13-аттрактор при $a = 6,258325033$ .

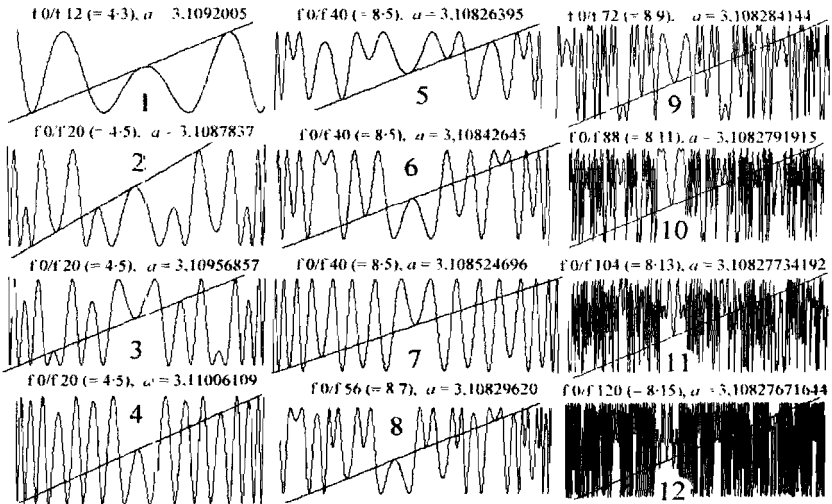
Последний из этого ряда аттракторов представлен на рис. 4.94. Количество модификаций нечетных аттракторов подчиняется той же последовательности степеней числа 3. Так, например, два других 5-аттрактора возникают приблизительно при коэффициентах  $a = 10,6$  и  $a = 18,7$ . Оставшиеся восемь 7-аттракторов существуют при коэффициентах  $a = \{7,3; 9,9; 11,2; 12,3; 14,9; 16,9; 21,5; 29,6\}$  и т.д.

Указанная закономерность распространяется на классический закон Ферхюльста  $ax(1 - x)$ , который является наиболее простым. В табл. 4.9 приведены коэффициенты  $a$  для всех нечетных аттракторов этой квадратичной зависимости. К указанной таблице нужно сделать примечание: значение коэффициента  $a$ , который помечен значком 1, принадлежит  $3 \cdot 3$ -аттрактору; нечетные аттракторы выше 9-го рода представлены самым первым коэффициентом с указанием общего числа модификаций. Поиск коэффициентов велся по известной методике, т.е. по самому чувствительному максимуму, расположенному в точке  $x = 0,5$ . Коэффициент фиксировался на момент совпадения экстремума 0,5 с диагональю  $f = 0$ . Для функции  $ax \exp(1 - x)$  такой точкой является  $x = 1,0$ ; для тригонометрической функции  $ax \cos(x)$  ей соответствует точка  $x = 0,86033359$ . В количествах модификаций четных аттракторов не удается обнаружить какой-либо закономерности. Полный список коэффициентов  $a$  аттракторов 2, 4, 6, 8 и 10-го родов, расписанных по всем видам (номер вида указан нижним индексом), включая бифуркационные коэффициенты, для закона  $ax(1 - x)$  приведен в табл. 4.10.



При касании модами  $f 576 (= 9 \cdot 64)$ ,  $f 448 (= 7 \cdot 64)$ ,  $f 320 (= 5 \cdot 64)$ ,  $f 192 (= 3 \cdot 64)$  диагонали  $f 0$  образуются соответственно 9-, 7-, 5-, 3-аттракторы

Рис. 4.92



Коэффициенты  $a$ , отвечающие нечетным аттракторам, образуют убывающие и возрастающие ряды, но новых предельных констант, наподобие постоянной Фейгенбаума, пока не обнаружено.

Рис. 4.93

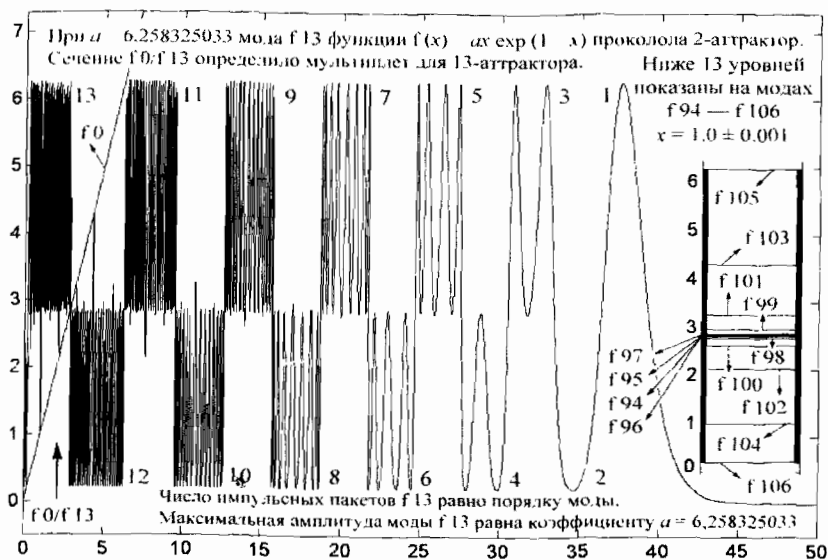


Рис. 4.94

Таблица 4.9

3-аттрактор	9-аттрактор	3,975920	13-аттрактор
3,831874055283316	3,687221	3,979542	3,679704; ...
5-аттрактор	3,717118	3,983141	Колич.: 243
3,738914912970685	3,761262	3,986275	15-аттрактор
3,905706469831291	3,785779	3,989188	3,678977; ...
3,990267046973701	3,853727 <sup>1</sup>	3,991325	Колич.: 735
7-аттрактор	3,879418	3,993579	17-аттрактор
3,701769153537955	3,892266	3,995418	3,678718; ...
3,774214188900913	3,917796	3,996945	Колич.: 2187
3,886045878187822	3,926282	3,998148	19-аттрактор
3,922193403309700	3,934704	3,999058	3,678624; ...
3,951032164761305	3,940372	3,999661	Колич.: 6561
3,968976856955538	3,947738	3,999963	...
3,984747618815538	3,954486	11-аттрактор	101-аттрактор
3,994537809111197	3,966194	3,681711; ...	3,678574; ...
3,999397060962097	3,971415	Колич.: 81	Колич.: 3 <sup>49</sup>



Таблица 4.10

Род Вид	<i>a</i>	Род Вид	<i>a</i>	Род Вид	<i>a</i>
2	3,236068	2 · 5 <sub>2</sub>	3,647049	10 <sub>22</sub>	3,974813
2 · 2	3,498562	2 · 5 <sub>3</sub>	3,673008	10 <sub>23</sub>	3,977128
4	3,960269	5 · 2 <sub>1</sub>	3,741848	10 <sub>24</sub>	3,978418
2 · 3	3,627558	10 <sub>1</sub>	3,794066	10 <sub>25</sub>	3,980509
3 · 2	3,844568	10 <sub>2</sub>	3,808498	10 <sub>26</sub>	3,982279
6 <sub>1</sub>	3,937536	10 <sub>3</sub>	3,865265	10 <sub>27</sub>	3,983985
6 <sub>2</sub>	3,977766	10 <sub>4</sub>	3,874923	10 <sub>28</sub>	3,985494
6 <sub>3</sub>	3,997583	10 <sub>5</sub>	3,884101	10 <sub>29</sub>	3,987023
2 · 2 · 2	3,554641	10 <sub>6</sub>	3,888016	10 <sub>30</sub>	3,988457
2 · 4	3,662194	10 <sub>7</sub>	3,895947	5 · 2 <sub>3</sub>	3,990306
8 <sub>1</sub>	3,800771	5 · 2 <sub>2</sub>	3,906241	10 <sub>31</sub>	3,991950
8 <sub>2</sub>	3,870541	10 <sub>8</sub>	3,915006	10 <sub>32</sub>	3,993059
8 <sub>3</sub>	3,899469	10 <sub>9</sub>	3,920553	10 <sub>33</sub>	3,994075
8 <sub>4</sub>	3,912046	10 <sub>10</sub>	3,923814	10 <sub>34</sub>	3,994982
8 <sub>5</sub>	3,930473	10 <sub>11</sub>	3,928482	10 <sub>35</sub>	3,995829
8 <sub>6</sub>	3,944214	10 <sub>12</sub>	3,932461	10 <sub>36</sub>	3,996591
4 · 2	3,960934	10 <sub>13</sub>	3,942435	10 <sub>37</sub>	3,997282
8 <sub>7</sub>	3,973724	10 <sub>14</sub>	3,945937	10 <sub>38</sub>	3,997869
8 <sub>8</sub>	3,981409	10 <sub>15</sub>	3,949599	10 <sub>39</sub>	3,998405
8 <sub>9</sub>	3,987746	10 <sub>16</sub>	3,952504	10 <sub>40</sub>	3,998859
8 <sub>10</sub>	3,992519	10 <sub>17</sub>	3,956613	10 <sub>41</sub>	3,999237
8 <sub>11</sub>	3,996220	10 <sub>18</sub>	3,964371	10 <sub>42</sub>	3,999538
8 <sub>12</sub>	3,998642	10 <sub>19</sub>	3,967760	10 <sub>43</sub>	3,999765
8 <sub>13</sub>	3,999850	10 <sub>20</sub>	3,970134	10 <sub>44</sub>	3,999915
2 · 5 <sub>1</sub>	3,605386	10 <sub>21</sub>	3,972607	10 <sub>45</sub>	3,999990

## 4.14. Хаос

Ранее постоянно подчеркивалась фрактальная природа высших мод относительно низших: высшие моды могут быть сильно сжаты по оси абсцисс, но во всем остальном они остаются подобными низшим. В левом верхнем углу рис. 4.95 изображена мода  $f$  64 функции  $ax \cos(x)$  вблизи границы Большого аттрактора, которой соответствует значению  $x = 1,99273648664511$ . Вычислительная система MATLAB v. 4.0, работающая с 16-разрядным процессором, не позволяет подойти ближе к указанной границе, хотя сама мода  $f$  64 имеет аналогичную конфигурацию при гораздо меньших масштабах по оси абсцисс. Для сравнения в правом верхнем углу рис. 4.95 показан график моды  $f$  20, которая принадлежит тому же классу и развернута в тех же пределах, что и мода  $f$  64. Мода меньшего порядка, но того же класса уже «перешагнет» указанную всего до 14-го знака после запятой границу Большого аттрактора. Кстати сказать, чтобы различать конфигурации микроуровней отдельных классов, можно ввести наборы из нулей и единиц. Например, мода  $f$  54 будет принадлежать классу 011, потому что указанными тремя символами можно закодировать микроуровни субаттрактора 8-го рода в точке  $x = 0,2$  (указано стрелками на левом нижнем рисунке). Мода  $f$  61 принадлежит классу 100 субаттрактора 8-го рода, а у моды  $f$  5 можно различать микроуровни только для субаттрактора 4-го рода; более мелких уровней «Крепостной стены» у нее просто не существует.

Далее поставим вопрос: что произойдет с амплитудой мод вблизи границы Большого аттрактора, если зафиксировать величину коэффициента (пусть он будет равен  $a = 2,44161826171$ ) и значение переменной  $x$ ? Ответ на этот вопрос во многом зависит от того, насколько точно удалось определиться с координатой  $x$ ; вблизи границы аттрактора амплитуда мод может принимать диаметрально противоположные значения. Рис. 4.96 демонстрирует выход амплитуды высших мод на аттрактор-плюс и аттрактор-минус, когда значение переменной  $x$  отличается на  $0,00000000000001$  (по оси  $x$  всех четырех графиков этого рисунка откладывается порядок моды). Как было указано выше, граница Большого аттрактора проходит в точке  $x = 1,99273648664511$ ; при  $x = 1,99273648664510$  мода  $f$  20 и все последующие выходят на микроуровни аттрактора-минус, а уже при  $x = 1,99273648664509$  эти моды попадают на микроуровни аттрактора-плюс. Однако величина  $1,0e-14$  не является пределом точности

для высших мод. На самом деле конфигурации с положительными и отрицательными микроуровнями, показанные на рис. 4.95, спрессованы еще более плотно, так что, выбирая значение переменной непосредственно около границы аттрактора, амплитуда моды практически *случайно* принимает значения либо положительные, либо отрицательные. Обе указанные точки находятся левее границы Большого аттрактора, которая в действительности указана достаточно приблизительно. Если взять  $x = 1,99273648664512$ , то все моды после  $f = 20$  быстро уходят на бесконечно большие значения (левый нижний график), так как силы притяжения аттрактора «Крепостная стена» в этой точке прекращают свое действие. Но стоит нам отступить по оси  $x$  чуть правее, как показано на правом нижнем графике рис. 4.96, и амплитуда высших мод неожиданно попадает на отрицательные микроуровни нового аттрактора, который сформировался вблизи Большого аттрактора и о существовании которого мы не подозревали.

Так возникает иллюзия «хаотического» перепрыгивания мод с отрицательных значений на положительные, и наоборот, при ничтожном изменении переменной  $x$  в ту или иную сторону. То, что вполне понятно при больших масштабах, становится *непредсказуемым*, когда мы попадаем в пространство очень малых измерений (малых, по крайней мере, для данной вычислительной системы и разрядности процессора). В табл. 4.11 приведены координаты границы перехода с уровней аттрактора-плюс на уровни аттрактора-минус (+/-), и наоборот (-/+), при коэффициенте  $a = 2,44181626171$ , соответствующему рис. 4.95 и рис. 4.96. Чем ближе к правой границе Большого аттрактора, которому отвечает предельная координата  $x_\infty = 1,99273648664511$ , где существует полная неопределенность в отношении знака аттракторных уровней, тем чаще происходит смена границ между аттрактором-плюс и аттрактором-минус. Если из этих значений координат  $x_i$  составить разности и найти отношения, то получится ряд  $F_i$ , сходящийся к некоторой константе  $F_\infty$ , близкой к числу 5,43914. На самой же границе Большого аттрактора  $x_\infty$  для нас, работающих с модами выше 20-го порядка, будет господствовать полный «хаос», хотя все поддается измерению, если моды имеют порядок, меньше 20-го.

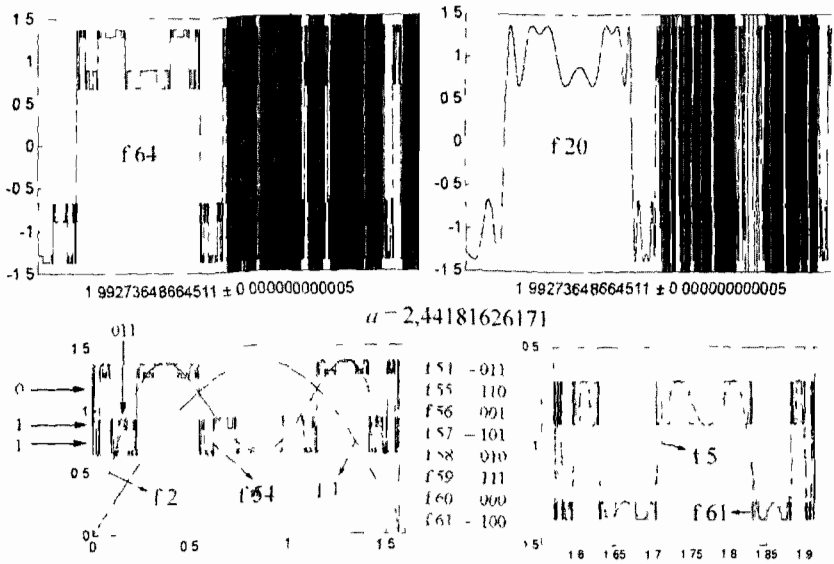


Рис. 4.95

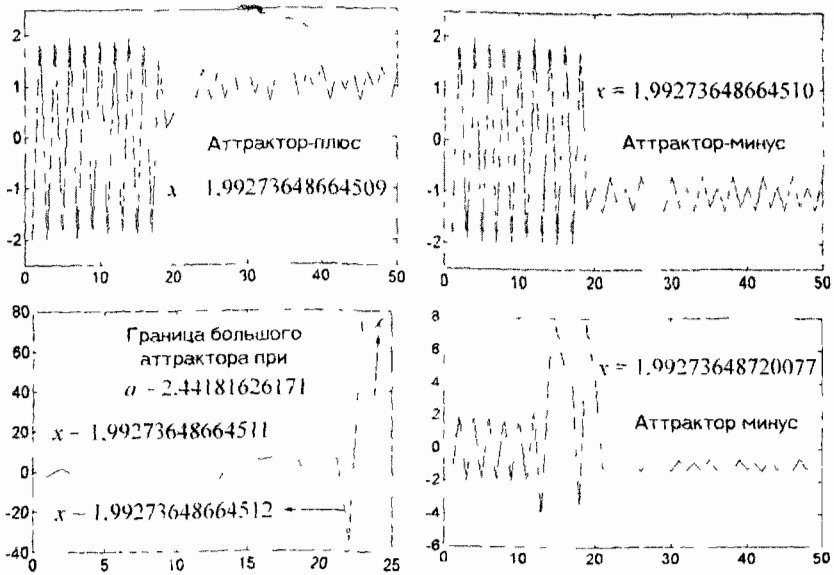


Рис. 4.96

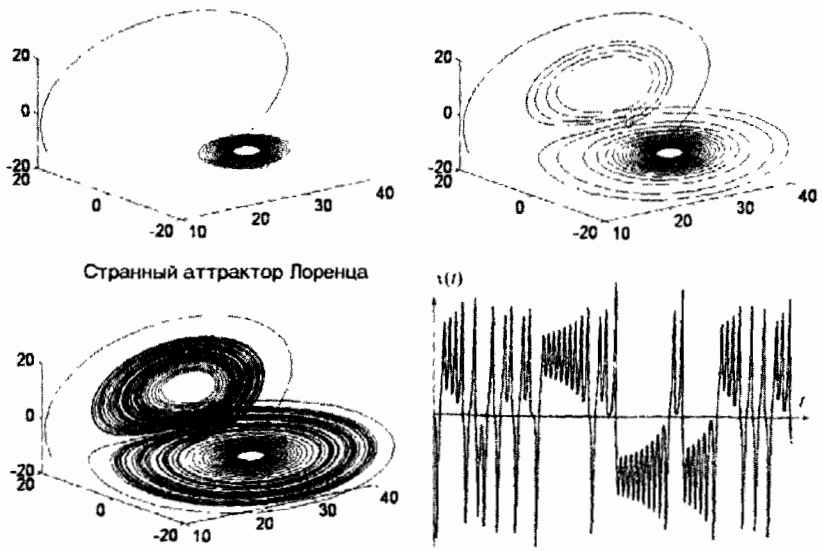


Рис. 4.97

Таблица 4.11

Переход	Координаты граници	$F_n = (x_{n+1} - x_n)/(x_n - x_{n-1})$
+/-	$x_0 = 1,57079632679490$	$F_0 = 4,58174278990027$
-/+	$x_1 = 1,91363449969659$	$F_1 = 5,314449907796902$
+/-	$x_2 = 1,97814446909764$	$F_2 = 5,41754555847309$
-/+	$x_3 = 1,99005206981918$	$F_3 = 5,43521435225594$
+/-	$x_4 = 1,99224289431106$	$F_4 = 5,43841841617014$
-/+	$x_5 = 1,99264573652073$	$F_5 = 5,43900598258604$
+/-	$x_6 = 1,99271980193102$	$F_6 = 5,43911396220626$
-/+	$x_7 = 1,99273341911404$	$F_7 = 5,43913379924745$
+/-	$x_8 = 1,99273592267132$	$F_8 = 5,43913753046993$
-/+	$x_9 = 1,99273638295703$	$F_9 = 5,43913755265008$
+/-	$x_{10} = 1,99273646758179$	$F_{10} = 5,43913832227238$
	...	...
$\pm/0$	$x_\infty = 1,99273648664511$	$F_\infty \approx 5,43914$

Такое же «беспорядочное» перепрыгивание рекурсивной функции с одной орбиты на другую наблюдается на *аттракторе Лоренца*, изображенном на рис. 4.97. Здесь «хаотичность» усугубляется еще и тем, что конфигурация границ аттрактора Лоренца, его, так сказать, тонкая структура скрыта от наших глаз, поэтому все выглядит по меньшей мере «странно». Сначала вращение переднего фронта графического изображения функции происходит в одной плоскости, потом орбита этой пространственной функции неожиданно перепрыгивает в другую плоскость, сделав несколько оборотов, траектория снова переходит на первоначальную плоскость, и эти непрекращающиеся скачки воспринимаются как абсолютно случайные, но, конечно, они по своей сути таковыми не являются.

«Странный» аттрактор изучается с 1963 г., когда он был открыт Лоренцем при моделировании неравномерно прогреваемого атмосферного воздуха. Разогрев воздуха со стороны Земли и охлаждение его с противоположной приводит к конвекционным потокам, которые приближенно описываются системой трех дифференциальных уравнений, не имеющих точного аналитического решения:  $dx/dt = \sigma(y - x)$ ,  $dy/dt = x(r - z) - y$ ,  $dz/dt = xy - bz$ , где  $\sigma = 10$ ,  $r = 28$ ,  $b = 8/3$ . При вычислении на компьютере функция  $x(t)$ , изображенная на правом нижнем графике рис. 4.97, ведет себя точно так же, как орбиты мод, показанные на рис. 4.96. Если изменить начальные значения  $x(t_0)$  на несколько ничтожных долей, то через некоторое время  $t - t_0$  функция  $x(t)$  уже не выйдет на прежние значения амплитуд, так как она попадет на совершенно иную систему аттракторных уровней и ее новые переходы будут совсем не похожи на предыдущие. Поскольку тонкая структура данного аттрактора сложна и имеет огромное количество микроуровней, то заранее предсказать значения функции  $x(t)$  в каждой точке горизонтальной оси практически невозможно. Странный аттрактор Лоренца, которым заинтересовались не только метеорологи, пытающиеся составлять долгосрочные прогнозы погоды, но и математики, занимающиеся динамическими процессами, подсказал основное условие для возникновения хаоса: *хаос возникает там, где имеется существенная зависимость от начальных условий*. Вот, как об этом написал Ричард Кроновер в известном учебнике «Фракталы и хаос»:

«Согласно описанию эксперимента, принадлежащему самому Лоренцу, он вычислял значения решения в течение длительного

времени, а затем остановил счет. Его заинтересовала некоторая особенность решения, которая возникала где-то в середине интервала счета, и поэтому он повторил вычисления с этого момента. Результаты повторного счета, очевидно, совпали бы с результатами первоначального счета, если бы начальные значения для повторного счета в точности были равны полученным ранее значениям для этого момента времени. Лоренц слегка изменил эти значения, уменьшив число верных десятичных знаков. Ошибки, введенные таким образом, были крайне невелики. Но самое неожиданное было впереди. Вновь сосчитанное решение некоторое время хорошо согласовывалось со старым. Однако, по мере счета расхождение возрастало, и постепенно стало ясно, что новое решение вовсе не напоминает старое. Лоренц вновь повторял и проверял вычисления (вероятно, не доверяя компьютеру), прежде чем осознал важность эксперимента. То, что он наблюдал, теперь называется *существенной зависимостью от начальных условий* — основной чертой, присущей хаотической динамике. Существенную зависимость иногда называют *эффектом бабочки*. Такое название относится к невозможности делать долгосрочные прогнозы погоды. Сам Лоренц разъяснил это понятие в статье "Предсказуемость: может ли взмах крылышек бабочки в Бразилии привести к образованию торнадо в Техасе? ", опубликованной в 1979 году».

Будет, по-видимому, уместно привести слова из книги «Порядок в хаосе», авторы которой также касаются характеристики странных аттракторов. «Термин *странный аттрактор*, — пишут Берже, По-мо и Видаль, — указывает на необычные свойства таких аттракторов, из которых наиболее важным является *чувствительная зависимость от начальных условий* (ЧЗНУ). Вследствие ЧЗНУ любые две первоначально близкие траектории на аттракторе в конце концов расходятся. Более того, расхождение траекторий (усредненное по коротким интервалам времени) возрастает со временем экспоненциально. ... Обращение в нуль автокорреляционной функции, широкополосный спектр Фурье и внутренняя непредсказуемость системы — все это следствия ЧЗНУ. В частности, понятно, что малейшая ошибка или неточность в задании начального условия не позволяет нам решить, по какой траектории пойдет эволюция системы, и вынуждает ограничиться статистическим предсказанием долговременного будущего системы. Таким образом, мы приходим к результату, в высшей степени нетривиальному: выводу о непредсказуемости

поведения некоторых детерминированных потоков всего лишь с тремя степенями свободы!..

Но само по себе понятие странного аттрактора не решает проблемы, поскольку немедленно возникает другой вопрос: как возникает странный аттрактор или, если угодно, как устанавливается хаотический режим? Какими маршрутами переходит динамическая система от регулярного режима к хаотическому? Чтобы ответить на этот вопрос, нам необходимо перечислить различные возможные переходы между аттракторами — задача столь же необходимая, как и идентификация аттракторов».

К последнему абзацу примыкают и слова Видаля, одного из авторов цитируемой книги, сказанные им в «Заключительной дискуссии»: «Прежде всего мне хотелось бы затронуть один принципиально важный аспект, не получивший должного развития в книге: область, в пределах которой теория динамических систем верна и применима, до сих пор остается неопределенной. Мы располагаем описаниями отдельных событий и последовательностей событий, приводящих к хаотическим ситуациям: из таких описаний состоит вторая часть книги. Это означает, что при определенных условиях мы в состоянии предсказать, каким образом возникнет аperiodический режим, т.е. произойдет переход. Но теория ничего не говорит о том, сочетание каких условий гарантирует, что данная последовательность событий завершится установлением хаотического режима. Теория не определяет (по крайней мере в существующем ныне виде) *предпосылки* хаотического режима, и это, несомненно, следует отнести к числу ее недостатков».

Достоинство рекурсивной функции  $ax \cos(x)$  состоит в том, что она проливает яркий свет на некоторые темные места, о которых говорится в данных отрывках. В частности, она позволяет ясно понять, почему рекурсивные функции оказываются чувствительными к начальным, а в нашем случае лучше говорить — к граничным условиям. Рекурсивные функции ведут себя вполне предсказуемо, если не удаляться в области, труднодоступные для наших вычислительных средств, где компьютер работает на пределе своих возможностей. Поскольку рассмотренные рекурсивные функции изначально детерминированы, «хаосу» просто неоткуда взяться и, следовательно, эффекты, приводящие к непредсказуемым результатам, происходят не от самих математических выражений, а только от



нас: какие начальные или граничные условия мы выбираем и какими вычислительными системами и компьютерными процессорами мы пользуемся. Когда мы изучаем динамические процессы, эту простую и понятную мысль нужно постоянно помнить, чтобы не скатиться на теологические позиции.

Кроме того, если иметь в виду нашу тригонометрическую функцию, необходимо будет сделать уточнение в отношении ее чувствительности к начальным условиям. Дело в том, что в местах возникновения аттракторов рекурсивная функция как раз нечувствительна к начальным условиям, под которыми следует понимать значения переменной  $x$  и коэффициента  $a$ . Орбиты рекурсивных функций, т.е. последовательности мод  $f_1, f_2, \dots, f_n$ , в определенных пределах изменения  $x$  и  $a$  более чем предсказуемы, поскольку заранее известны вид, род и класс аттрактора. Кажущееся случайным соскальзывание орбит на аттрактор-плюс или аттрактор-минус в действительности не является таким уж принципиально «непредсказуемым», и, следовательно, «хаотическим». Более мощные, чем у нас, вычислительные системы и 32-разрядный процессор отодвинул границы «непредсказуемости», возникшие в системе MATLAB v. 4.0 с 16-разрядным процессором, которым мы пользовались. Другое дело, когда рекурсивная функция при данных значениях переменной  $x$  и коэффициента  $a$  не образует аттрактора. В этом случае возникает быстрая потеря верных знаков в амплитуде моды, и орбита рекурсивной функции по-настоящему становится хаотичной. Эта потеря верных знаков возникает не потому, что мы или кто-то другой, подобно Лоренцу, субъективно решили «слегка изменить значения, уменьшив число верных десятичных знаков», а в силу математической природы рекурсивной функции, т.е. абсолютно объективно. Таким образом, сожаления, прозвучавшие в «Заключительной дискуссии», нам не совсем понятны. Во всяком случае, в отношении рекурсивной функции  $ax \cos(x)$  всегда можно более или менее точно предсказать (опять-таки здесь все зависит от используемых вычислительных средств), в каком месте оси абсцисс, при каком коэффициенте  $a$  и на какой моде орбита примет хаотический вид.

Далее остается нерешенным весьма трудный вопрос: является ли *физический* хаос, скажем, турбулентное движение жидкости, возникшее за винтом судна, или сложное движение языков пламени, вырывающихся из сопла ракетного двигателя, тем же самым, что и

*математический хаос*, внесенный людьми или машинами в процессе вычисления рекурсивной функции? Сложная траектория движения снежинок при порыве ветра или песчинок при обвале песчаного берега, подмытого половодьем, это еще не повод, чтобы их динамику считать *принципиально* непредсказуемой. Словом «хаос», как и словом «бифуркация», обозначают широкий круг физических и математических явлений, мало заботясь об их различии. Напротив, наблюдается тенденция к объединению самых разнообразных процессов и явлений в рамках некой единой и универсальной теории «хаоса и порядка», которой в действительности не существует. Разумеется, динамика реальных конвекционных потоков описывается дифференциальными уравнениями, но какое отношение имеет видимая хаотичность протекания динамического процесса к отбрасыванию верных десятичных знаков при подсчете амплитуды колебаний, непонятно. В цитируемых книгах отсутствует внятный текст, который бы убедительно рассказал всем о тесной взаимосвязи между математическими манипуляциями и объективно наблюдаемыми в природе физическими явлениями.

Что же касается этого учебника, то мы не ставили перед собой задачу выяснить связь между математикой и физикой. Более того, мы целиком отвлекаемся от физической стороны проблемы и пытаемся решить задачу исключительно в математической плоскости. Нас не будут интересовать физические явления, которые чаще всего обозначаются словом «турбулентность». Если эти явления и называть «хаотичными», то мы имеем в виду совершенно другую «хаотичность», а именно ту, что возникает в процессе вычисления конкретной рекурсивной функции, и не более того.

До конца неясна связь фракталов с хаосом. Во Введении к первой главе Кроновер пишет: «Термин *фрактал* относится к некоторой статичной геометрической конфигурации, такой, как мгновенный снимок водопада. *Хаос* — термин динамики, используемый для описания явлений, подобных турбулентному поведению погоды». Вот другая выдержка: «Интуитивно понятно, что динамической противоположностью фрактала является хаос. Это означает, что хаос описывает состояние крайней непредсказуемости, возникающей в динамической системе, в то время как фрактальность описывает крайнюю иррегулярность или изрезанность, присущую геометрической конфигурации». Такое представление о фрактале и его связи с

хаосом, быть может, и имеет право на существование, только ведь оно заметно расходится с тем, что об этом говорилось в других частях цитируемого учебника. Пусть фрактал — это нечто, относящееся к статическому, а хаос — к динамическому, но раньше подчеркивалась либо дробная размерность фрактала, либо подобие его частей целому. Каким образом эти качества можно сочетать с непредсказуемостью хаотических процессов и чувствительностью их к начальным условиям?

В связи с такой терминологической двусмысленностью не лишним будет еще раз определиться в отношении этих двух терминов. Коль скоро наша рекурсивная функция настойчиво демонстрирует фрактальную природу в виде подобия отдельных мод и аттракторных комплексов, мы оставляем за термином «фрактальность» свойство статической структуры или динамического процесса быть подобными самим себе в частях и целом. Нет принципиального различия между статической и динамической структурами; в этом убеждают нас многочисленные графики аттракторов и, в частности, аттрактор «Крепостная стена». Если и проводить противопоставление, то хаосу нужно ставить в оппозицию не фрактал, а аттрактор. Мы знаем, что аттракторы возникают в местах отсечения низшими модами максимумов или минимумов у высших мод. Если в местах экстремумов высших мод не оказывается подходящей низшей моды, то там в качестве альтернативы стремительно развиваются хаотические процессы в виде потери верных знаков в величине амплитуды высших мод. «Хаотическая» или «шумовая» составляющая моды тем выше, чем меньше верных знаков в ее амплитуде. В местах аттрактора амплитуда мод содержит наименьшее число неверных знаков; но в эпицентре хаоса амплитуда мод может не иметь ни одного верного знака. Такое понимание хаоса вытекает из свойств именно тригонометрической функции  $ax \cos(x)$ , которую мы сейчас подробно анализируем, т.е. оно не претендует на общее и универсальное положение. Но оно вполне согласуется с пропагандируемым нами *конструктивным подходом* в изучении предмета, когда во главу угла ставятся конкретные свойства объекта, а не его абстрактное осмысление или, что еще хуже, какие-то туманные философские реминисценции.

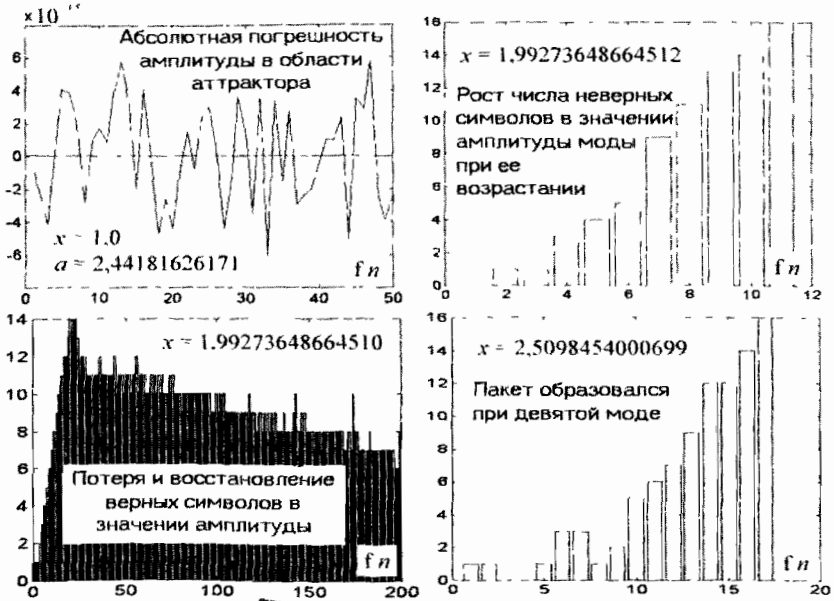


Рис. 4.98

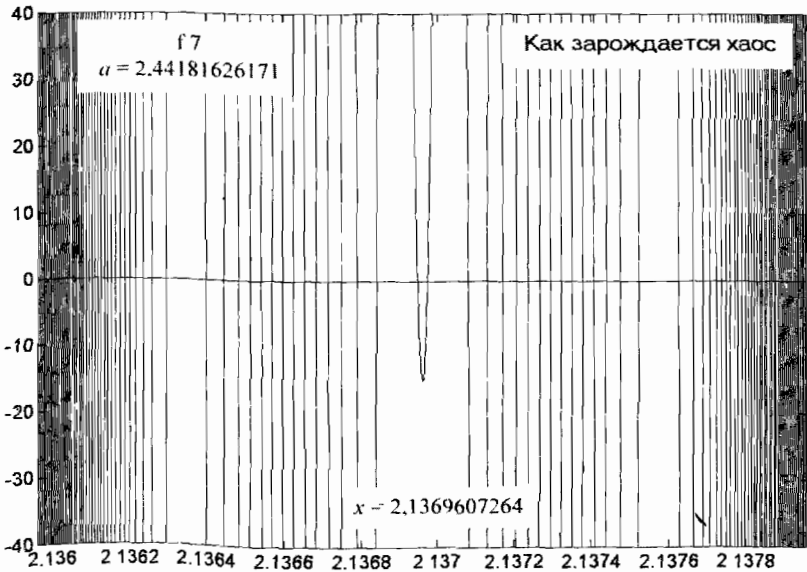


Рис. 4.99

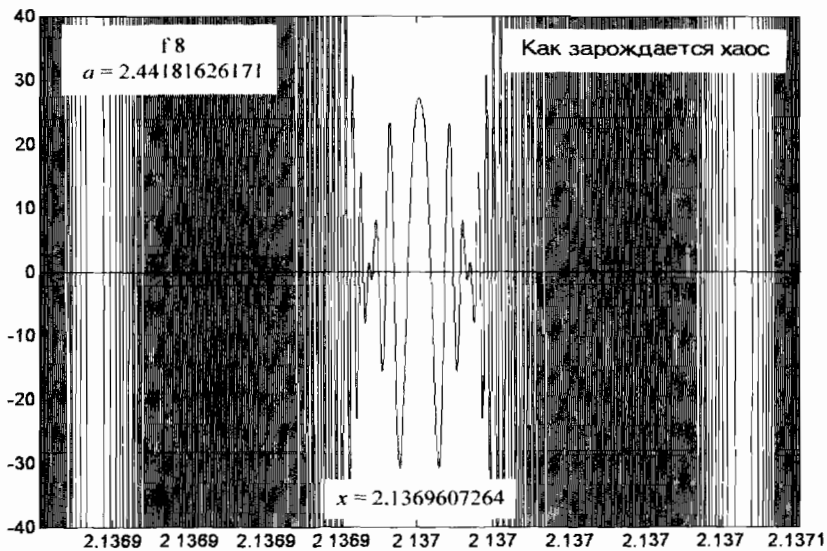


Рис. 4.100

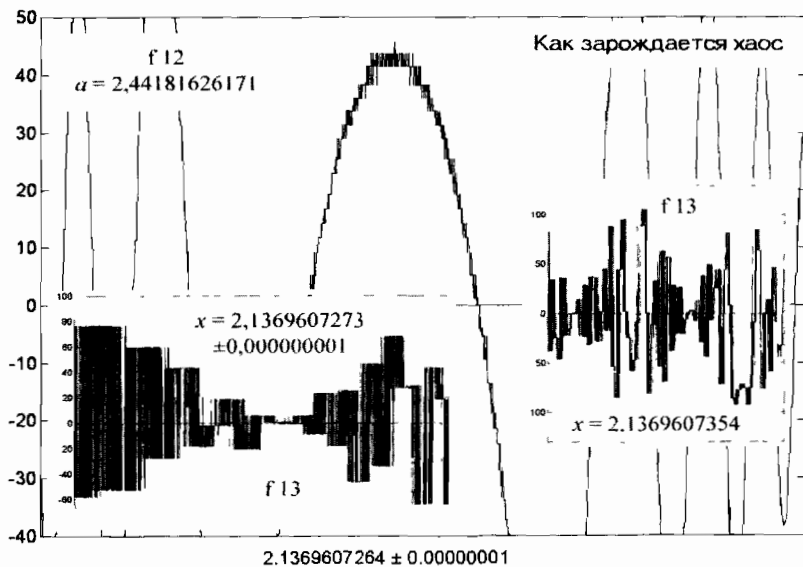


Рис. 4.101

Посмотрим на рис. 4.98. В левом верхнем углу приведен график абсолютной погрешности амплитуды моды в области действия Большого аттрактора. Абсолютная погрешность амплитуды вычислялась как разность величин, подсчитанных на 16-разрядном и 32-разрядном процессорах. График показывает, что с ростом порядка моды эта разность не выходит за пределы  $\pm 6 \cdot 10^{-15}$ , т.е. ошибка возникает в самом последнем знаке числа, характеризующего амплитуду, и не растет с увеличением порядка моды. В правом верхнем углу данного рисунка размещена диаграмма, на которой виден рост числа неверных знаков в значении амплитуды моды при росте ее порядка в точке  $x = 1,99273648664512$ , т.е. в той самой точке вблизи границы Большого аттрактора, где орбита рекурсивной функции удаляется на бесконечно большие расстояния (эта орбита показана на левом нижнем графике рис. 4.96). Число неверных знаков в величине амплитуды, подсчитанной 16-разрядным процессором, как в предыдущем, так и в последующем случаях, определялось вторичным подсчетом этой же самой амплитуды 32-разрядным процессором. Диаграмма показывает, что все 16 значащих символов в амплитуде моды  $f$  12 становятся неверными. Чтобы подтвердить, что рост числа неверных знаков будет наблюдаться и в других частях оси абсцисс, которые не попали под действие аттрактора, аналогичная диаграмма рассчитывалась для точки с координатой  $x = 2,50984540006999$ . В этой области амплитуда мод слегка колеблется, но вплоть до моды  $f$  8 там не возникает характерного модуляционного пакета биений с резко выделяющимися максимумами и минимумами; такой пакет появляется только при моде  $f$  9. После этого начинает неуклонно расти число неверных знаков в величине амплитуды, так что амплитуда моды  $f$  17 оказывается полностью ошибочной.

Самым удивительным из всех приведенных графиков является тот, что расположен в левом нижнем углу рис. 4.98, где показана быстрая потеря и затем медленное восстановление верных знаков в величине амплитуды после попадания орбиты на аттракторные уровни. В точке  $x = 1,99273648664510$ , т.е. чуть-чуть левее границы Большого аттрактора, где орбита захватывается аттрактором-минус (см. левый верхний рис. 4.95), сначала наблюдается стремительный рост неверных знаков. В значении амплитуды моды  $f$  12 четырнадцать символов оказываются ошибочными. Казалось бы, подстановка ошибочного значения, полученного в предыдущей моде, в

качестве аргумента для последующей моды даст еще более ошибочный результат. Но происходит, на первый взгляд, странное: ошибочная переменная при подстановке ее в функцию ведет, пусть к очень медленному, но все же исправлению ошибки, которая накопилась на первых этапах рекурсии. Из диаграммы видно, что из 14 неверных знаков по достижению моды  $f$  200 амплитуда стала содержать всего 6 ошибочных символов, 8 символов аттрактору удалось каким-то образом исправить. Если перечислять самые примечательные качества аттрактора, то его способность восстанавливать утраченную числовую информацию нужно поставить на первое место. Рано или поздно амплитуда мод асимптотически стремится на аттракторные уровни; в этом свойстве тоже проявляется притягательное действие аттрактора.

Нужно особо отметить, что вычисления, произведенные с помощью 16-разрядного процессора, принципиально не отличаются от вычислений, произведенных 32-разрядным процессором. Чтобы в этом убедиться, вернемся к квазиаттракторам, которые рассматривались в подразделе 12. В конце этого подраздела был задан вопрос, почему максимальная мода, которую мы рассматривали, имеет 28-й порядок? Оказывается, начиная с моды  $f$  29 16-разрядный процессор отказывается нормально работать. Все дело в вычислении косинуса рекурсивной функции  $ax \cos(x)$ . Для нахождения косинуса вычислительная система раскладывает его в степенной ряд и подсчитывает величину тригонометрической функции по определенному количеству членов этого ряда. Вначале, когда величина аргумента тригонометрической функции мала, значение косинуса подсчитывается с удовлетворительной точностью. Но потом, когда аргумент приближается к одному миллиарду, точность подсчета косинуса неожиданно быстро падает.

Взгляните на табл. 4.12, где приведены числовые значения моды  $f$   $n$ , подсчитанные при коэффициенте  $a = 2,0$  и переменной  $x = 3,419157788078807$ , а также погрешность вычисления  $\delta$ , точнее, абсолютное значение разности мод  $f$   $n$ , подсчитанных 16-разрядным и 32-разрядным процессорами. В последней графе табл. 4.12 приведены значения косинуса моды, подсчитанные 16-разрядным процессором. Из этой таблицы видно, что косинус постепенно приближается к единице и держится на единичном значении до моды  $f$  28. Потом происходит срыв, при котором значение косинуса резко от-





Таблица 4.12

Мода $f_n$	Числовое значение $f_n$	Погрешность $ \delta $	$\cos(f_n)$
f 1	- 6,576582313750390	$3,9649 \times 10^{-15}$	0,95726696689742
f 2	- 12,59109000807007	$5,6182 \times 10^{-15}$	0,99969449134447
f 3	- 25,17448664218018	$7,9871 \times 10^{-15}$	0,99912878675893
f 4	- 50,30510859216090	$4,4447 \times 10^{-15}$	0,99921498745237
f 5	- 100,5312369014119	$5,3262 \times 10^{-14}$	0,9999996301166
f 6	- 201,0624663658569	$1,1914 \times 10^{-14}$	0,9999985606450
f 7	- 402,1248748516625	$8,0557 \times 10^{-14}$	0,9999948469247
f 8	- 804,2493352673764	$6,5785 \times 10^{-14}$	0,9999869435569
f 9	- 1608,496570407609	$2,0336 \times 10^{-14}$	0,9999935954882
f 10	- 3216,991080488150	$6,0704 \times 10^{-13}$	0,9999997935240
f 11	- 6433,982028130014	$5,8623 \times 10^{-13}$	0,9999996257751
f 12	- 12867,96357470874	$5,1522 \times 10^{-12}$	0,9999999784800
f 13	- 25735,92709403365	$3,3579 \times 10^{-12}$	0,9999999712520
f 14	- 51471,85404009622	$7,2160 \times 10^{-12}$	0,999999999323
f 15	- 102943,7080794950	$2,3468 \times 10^{-12}$	0,999999997779
f 16	- 205887,4161544175	$1,3901 \times 10^{-11}$	0,9999999996166
f 17	- 411774,8322930472	$1,9674 \times 10^{-11}$	0,999999999851
f 18	- 823549,6645848679	$5,7791 \times 10^{-11}$	0,999999999752
f 19	- 1647099,329165658	$1,0038 \times 10^{-10}$	0,999999999993
f 20	- 3294198,658331088	$4,4640 \times 10^{-10}$	0,999999999987
f 21	- 6588397,316661297	$7,5752 \times 10^{-10}$	0,999999999999
f 22	- 13176794,63332244	$4,1164 \times 10^{-9}$	0,999999999999
f 23	- 26353589,26664457	$1,6462 \times 10^{-9}$	1,000000000000
f 24	- 52707178,53328914	$3,2925 \times 10^{-9}$	1,000000000000
f 25	- 105414357,0665783	$2,6586 \times 10^{-8}$	1,000000000000
f 26	- 210828714,1331566	$5,3182 \times 10^{-8}$	1,000000000000
f 27	- 421657428,2663131	$6,4372 \times 10^{-8}$	1,000000000000
f 28	- 843314856,5326260	$1,8661 \times 10^{-7}$	1,000000000000
f 29	- 1686629713,065233	$1,9371 \times 10^{-5}$	0,999999999999
f 30	- 3373259425,465595	0,6649	0,9999999980290
f 31	- 5309321708,940010	$1,4372 \times 10^{-9}$	0,78697204087812
f 32	+ 9942824875,132380	$3,5502 \times 10^{-9}$	- 0.93635547252583

Большее число знаков в их амплитуде уже ошибочно, но визу- ально это определить пока трудно. Вблизи точки  $x = 2,137$  никакого аттрактора не возникает, следовательно, в этой зоне будут нарастать хаотические процессы с несколько большей скоростью, чем в при- легающих областях. При коэффициенте  $a = 2,44181626171$  моды принимают небольшие значения —  $f_7 = -15$ ,  $f_8 = 27$ . На рис. 4.101 отчетливо видны следы шума: теперь амплитуда моды  $f_{12}$  изменя- ется не непрерывно, а дискретно; скачки амплитуды составляют несколько единиц. В моде  $f_{13}$  вообще трудно узнать тригономет- рическую функцию косинуса, особенно в эпицентре хаоса, т.е. воз- ле точки  $x = 2,1369607273$ , где скачки амплитуды составляют уже несколько десятков единиц. Вдали от этого эпицентра, около точки  $x = 2,1369607354$ , еще можно узнать характерные биения.

Таблица 4.13

$P_i$	0,18	0,74	0,08
$x$	2,7989645192	2,7989645194	2,7989645195
$f_1$	-6,43729817307363	-6,43729817306903	-6,43729817306673
$f_2$	<b>-15,53240287329676</b>	<b>-15,53240287329676</b>	<b>-15,53240287329676</b>
$f_3$	37,34428677616851	37,34428677616849	37,34428677616847
$f_4$	85,50754519349842	85,50754519349769	85,50754519349697
$f_5$	-161,7541091132794	-161,7541091133737	-161,7541091134680
$f_6$	14,97087610069801	14,97087606348619	14,97087602626316
$f_7$	-27,06723651058457	-27,06723552898865	-27,06723454709679
$f_8$	23,511 <b>58215456263</b>	23,511 <b>52066883408</b>	23,511 <b>45916455040</b>
$f_9$	-2,89015172956695	-2,89366963594595	-2,89718857456540
$f_{10}$	6,83530470055992	6,84976668762797	6,86416294800448
$f_{11}$	14,21058872054075	14,11230117081779	14,01098438136545
$f_{12}$	<b>-2,54542140192324</b>	<b>0,85677735725714</b>	<b>4,30554245724057</b>
$f_{13}$	5,14323276972669	1,37006211352120	-4,16029019182808
$f_{14}$	5,24503974672874	0,66704344101581	5,32796893537363
$f_{15}$	6,50384859268244	1,27967164489049	7,51234633459589
$f_{16}$	15,49612356096316	0,89688851314587	6,14568247309669
$f_{17}$	-36,99283122556097	1,36668000648767	14,86498540975506
$f_{18}$	-68,72112107634469	0,67645303757940	-24,14667901296889
$f_{19}$	-154,9526610980709	1,28805029449219	-32,54557236513742
$f_{20}$	199,7551834169275	0,87748598322535	-33,93223979457752

Аналогичная картина наблюдается и в других экстремальных точках, где отсутствуют аттракторы. Проведем числовой анализ значений «шумящих» амплитуд вблизи точки  $x = 2,798964517$ . На рис. 4.102 при различных масштабах показана мода  $f_8$ , которая в указанной точке имеет пик высотой 23,511. Если смотреть на эту моду «издали» (два левых графика), то можно ничего и не заметить. Но при большом увеличении изображения видно, что амплитуда вершины пика изменяется дискретным образом. В правом нижнем углу рис. 4.102 показана самая «макушка» пика, имеющая вид гребенки, состоящей из отдельных импульсов, которые очерчивают три уровня. Первый уровень соответствует значению 23,51158, второй — 23,51152 и третий — 23,51146. Импульсы отстоят друг от друга на крохотные расстояния; одни импульсы встречаются чаще других. Если в центральной части взять сто значений амплитуды, то 18 из них будут иметь значение первого уровня, 74 — второго и 8 — третьего уровня. Впрочем, все зависит от того, как считать. Вероятность попадания того или иного значения непрерывно меняется в зависимости от переменной  $x$ . Основной вопрос звучит так: почему не встречаются значения амплитуды, равные, скажем, 23,51157 или 23,51141? Чтобы ответить на этот вопрос, мы привели табл. 4.13, в которой даны значения мод в трех рядом стоящих точках, где амплитуда принимает три различных значения. Эти три значения на данном участке оси  $x$  встречаются с вероятностью  $P_1 = 0,18$ ,  $P_2 = 0,74$  и  $P_3 = 0,08$ .

Из табл. 4.13 видно, что мода  $f_8$  принимает три значения потому, что мода  $f_3$ , в свою очередь, на этом участке оси  $x$  могла принять только три значения, которые при подсчете 16-разрядным процессором на конце давали три комбинации цифр: 51, 49 и 47. Эти цифры в зависимости от значения  $x$  выпадали почти случайно. Например, предыдущая мода  $f_2$  на продолжительном участке оси абсцисс принимает одно и то же значение, равное  $-15,53240287329676$  (в табл. 4.13 оно выделено особо). Таким образом, случайные значения моды  $f_3$ , вызванные тепловыми процессами, протекающими внутри микросхем компьютера, определили дальнейшую эволюцию мод, которая носила уже действительно хаотический характер. Когда орбита достигла моды  $f_8$ , за счет экспансии хаоса, верных цифр в значении этой моды осталось только пять, а именно: 23,511, все высшие порядки (в табл. 4.13 они подчеркнуты) оказались ошибочными. По достижении орбиты моды  $f_{12}$  *не осталось ни одной верной цифры в числе*; все значения мод с  $f_{12}$  по  $f_{20}$  ошибочны.

Когда при  $x = 2,7989645194$  и  $a = 2,44181626171$  орбита вышла на аттракторные уровни, удобно произвести классификацию всех мод по четырем группам, чтобы можно было видеть, с какой скоростью и по какой траектории амплитуды мод притягиваются к своим четырем уровням. На рис. 4.103 приведены четыре орбиты и соответствующие разности значений между первыми двумя значениями мод, вышедшими на положительные аттракторные уровни, а также приведены разности значений мод, которые старше исходных на три сотни порядков. Так, для орбиты, устремленной к уровню 0,887 (левый верхний график), имеем две разности:

$$\Delta = |f_{16} - f_{20}| = 0,0194025; \delta = |f_{316} - f_{320}| = 9,242e-11.$$

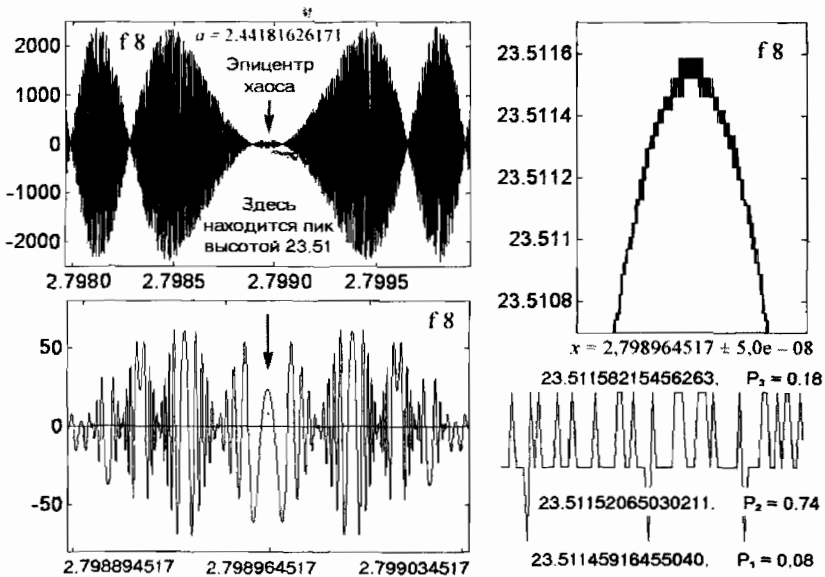


Рис. 4.102

В табл. 4.14 приведены значения мод в двух точках оси  $x$ , подсчитанные 32-разрядным процессором. При  $x = 2,7989645195$  орбита выходит на микроуровни аттрактора-плюс, а при  $x = 2,79896451701$  — на аттрактор-минус. Из табл. 4.13 видно, что на аттрактор-плюс орбита вышла при  $x = 2,7989645194$ , а при  $x = 2,7989645195$  она удалится на бесконечно большие значения. Если

считать 32-разрядным процессором, то на бесконечность орбита выйдет при  $x = 2,7989645194$  и  $x = 2,7989645171$ . На аттрактор-плюс попадаешь еще при  $x = 2,79896451700$  и т.д., т.е. на аттракторы первого рода в этой области, как, впрочем, и других, натыкаешься достаточно часто.

Таблица 4.14

$x$	2,7989645195	2,79896451701
f 1	-6,43729818900353132042550115618529	-6,43729817755937139147562022470369
f 2	-15,5324028732967624908415416624452	-15,5324028732967632565838494405688
f 3	37,3442867761685096684298286797323	37,3442867761685165820554378053863
f 4	85,5075451934984363712789147196992	85,5075451934986712325481676782559
f 5	-161,754109113276728553614560496586	-161,754109113246165437881966282704
f 6	14,970876101745756921449632404858	14,9708761138058839865047393626794
f 7	-27,0672365382228100022514548566509	-27,0672368563522026835103564399088
f 8	23,5115838857813134606640869005617	23,5116038129357102414945432062546
f 9	-2,89005267745272078491469478186433	-2,88891253860830245717157598290967
f 10	6,83489649228403546691947336995501	6,83019384555230139614543229444763
f 11	14,2133121462172460334586605451252	14,2444849840412889823588221222457
f 12	-2,64016503464145433890536926396538	-3,72561966402650197038867162557821
f 13	5,65317923961842800750081570058658	7,58939541816279630566912820089063
f 14	11,1539825784743061633059091598856	4,84627781430524352866065730785301
f 15	4,29638334886135865236046539847677	1,57967348358334344449059629142946
f 16	-4,23950937359064438092058556090353	-0,0342411621470919324381567971066428
f 17	4,71488360517233750900129781745356	-0,0835616163994955481893893204414759
f 18	0,0287202846875940062004182645048334	-0,203330161701791586560386759170322
f 19	0,0701007367882597810725201600769185	-0,486266873902493495421383720317056
f 20	0,17075270920122834690674473378539	-1,04973821333291680950351981634747
f 21	0,410883145049125934379184278746214	-1,27598988783232928208778077387219
f 22	0,91979482111563251071392740167651	-0,905290654634657497920993052594477
f 23	1,36102047287495594470345084970718	-1,36492164302330327014685939264458
f 24	0,692059122893920876412156570675595	-0,681320437861449238156249441558443
f 25	1,30109645424402625483511276957547	-1,29223367017999177052452424005569
...	<i>Выход на уровни аттрактора-плюс</i>	<i>Выход на уровни аттрактора-минус</i>

Таблица 4.15

f 3	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
51	31	32	26	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
49	68	67	72	67	34	5	0	0	0	0	0	0	0	0
47	1	1	2	23	64	56	6	0	0	0	0	0	0	0
45	0	0	0	0	2	39	64	11	0	0	0	0	0	0
44	0	0	0	0	0	0	30	54	5	0	0	0	0	0
43	0	0	0	0	0	0	0	35	42	0	0	0	0	0
41	0	0	0	0	0	0	0	0	45	18	0	0	0	0
39	0	0	0	0	0	0	0	0	8	58	2	0	0	0
38	0	0	0	0	0	0	0	0	0	24	38	0	0	0
36	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	42	3	0	0
35	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	18	36	0	0
33	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	48	7	0
31	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	13	34	0
30	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	45	3
28	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	14	31
27	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	37
25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	28
23	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

В табл. 4.15 приведены изменения вероятности моды  $f_3$  в зависимости от координаты  $x$ . Ранее говорилось, что значение амплитуды  $f_3 = 37, \dots, \underline{51}$  можно обнаружить на участке от  $x = 2,7 \dots 145$  до  $x = 2,7 \dots 195$  с вероятностью  $P_1 = 0,18$ ;  $f_3 = 37, \dots, \underline{49}$  — с вероятностью  $P_2 = 0,74$  и  $f_3 = 37, \dots, \underline{47}$  — с вероятностью  $P_3 = 0,08$ . Теперь ось  $x$  в зоне с точкой  $x = 2,798964517$  по середине была поделена на отрезки в пять раз меньшие и на каждом таком отрезке бралось 100 значений  $f_3$ . Значение  $f_3 = 37, \dots, \underline{51}$  на участке с координатой левой границы, равной  $x = 2,798964516$ , встречается 31 раз, что соответствует вероятности  $P = 0,31$ . В табл. 4.15 указываются последние две цифры; так, число 31 стоит на пересечении строки 51 и столбца 16. Далее, к примеру, значение амплитуды моды  $f_3 = 37, \dots, \underline{43}$  на участке с координатой левой границы, равной  $x = 2,798964524$ , встречается 42 раза, что соответствует вероятности  $P = 0,42$  (число 42 стоит на пересечении строки — 43 и столбца — 24) и т.д. Аналогичные таблицы могут быть составлены для мод  $f_4, f_5, \dots, f_{12}, \dots$  и на всех участках вероятности соответствующих импульсов будут неизменными.

Обратите внимание, импульсов со значениями амплитуды моды  $f_3$ , оканчивающихся на цифры 50, 48, 46, 42, 40, 37 и т.д., просто не

существует. Поэтому, например, моду  $f_{12} = -2,5$  на участке от  $x = 2, \dots, 45$  до  $x = 2, \dots, 95$  можно обнаружить с вероятностью  $P_1 = 0,18$ ;  $f_{12} = 0,8578$  (один из аттракторных уровней) можно обнаружить с вероятностью  $P_2 = 0,74$  и  $f_{12} = 4,3$  — с вероятностью  $P_1 = 0,08$ . Каких-то промежуточных значений амплитуды для моды  $f_{12}$ , как это видно по рис. 4.104, здесь быть не может. На данном рисунке мы также видим, что импульс в области с координатой  $x = 2,798964517$  посередине опустился ниже оси абсцисс, если можно так сказать, лишь на 18 %. Использование понятия вероятности в данном случае не совсем правомерно, так как хаотический процесс принял вполне детерминированный характер. Единственное, о чем здесь нужно не забывать, так это об *истинном* значении моды (т.е. об истинных первых 16 знаках от значения, приведенного в табл. 4.14), посчитанном 32-разрядным процессором для точки  $x = 2,79896451701$ , равно  $f_{12} = -3,7$ , а для точки  $x = 2,7989645195$  имеем  $f_{12} = -2,6$ .

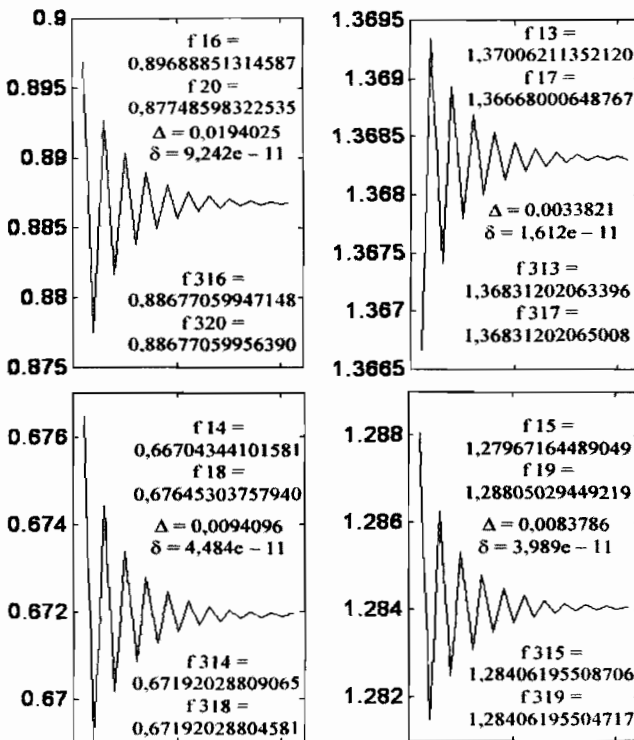


Рис. 4.103

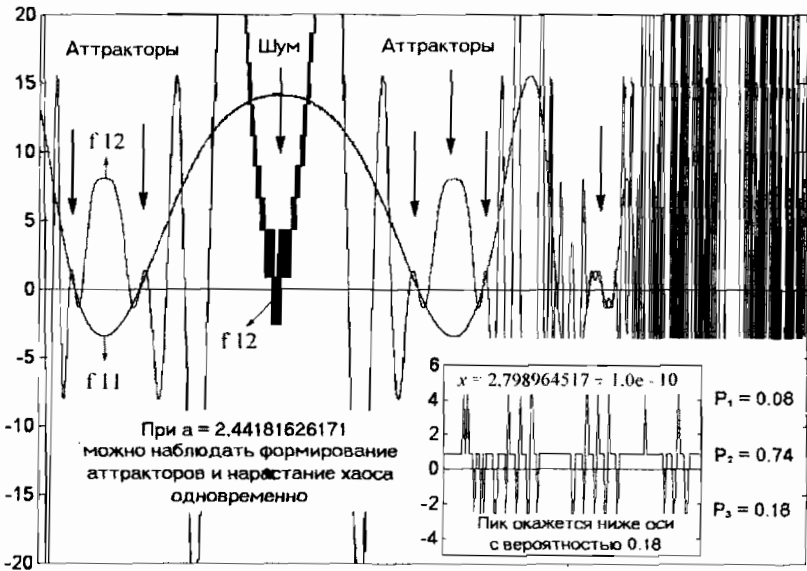


Рис. 4.104

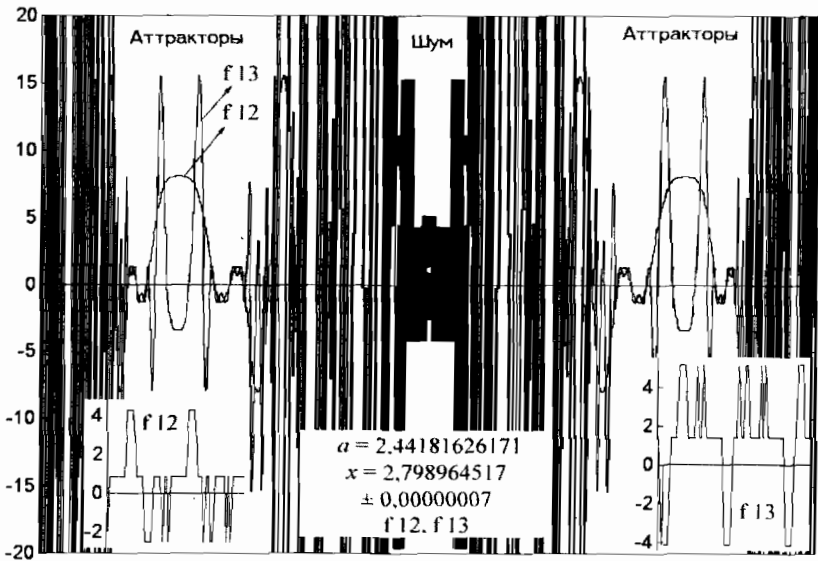


Рис. 4.105



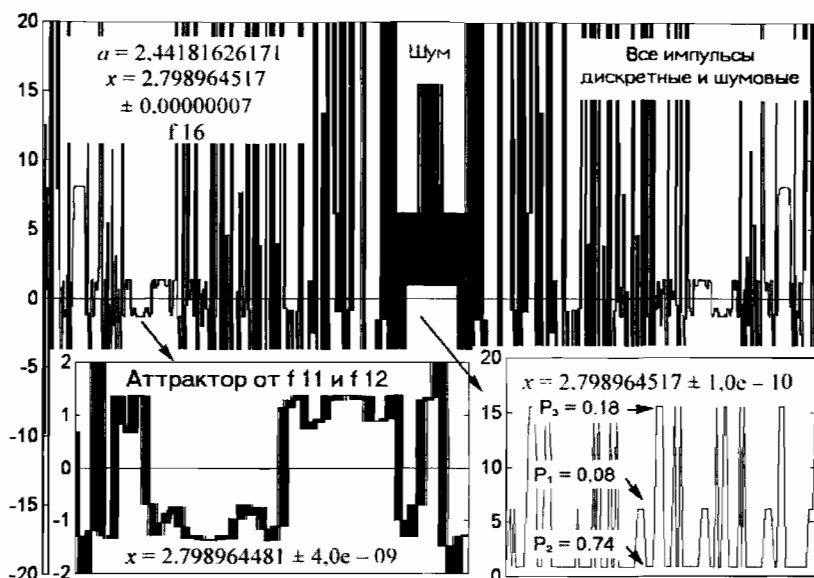


Рис. 4.106

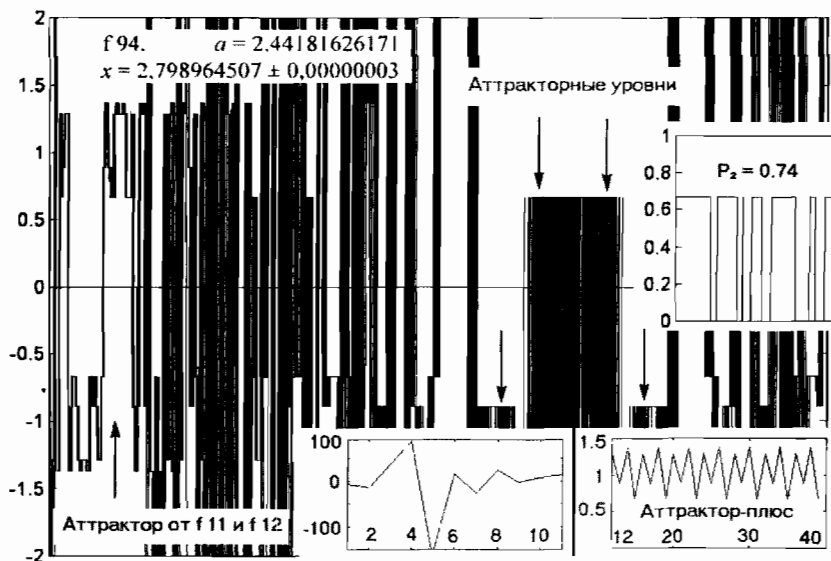


Рис. 4.107

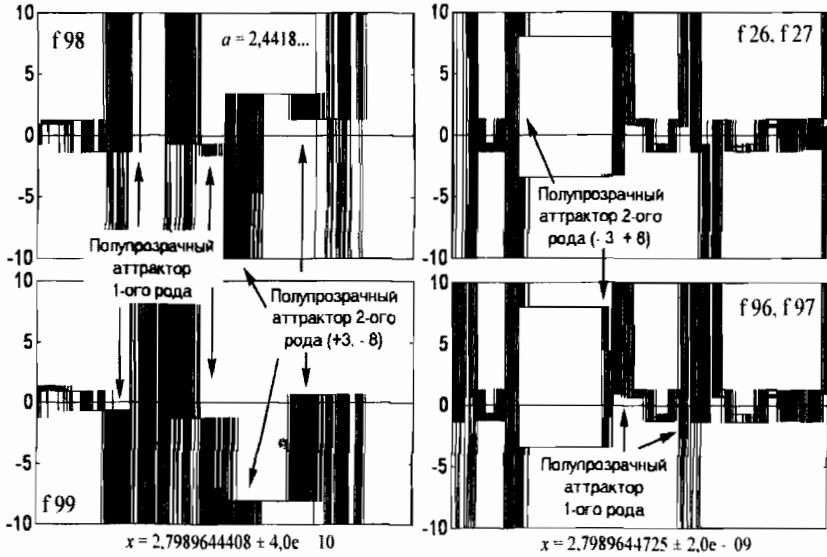


Рис. 4.108

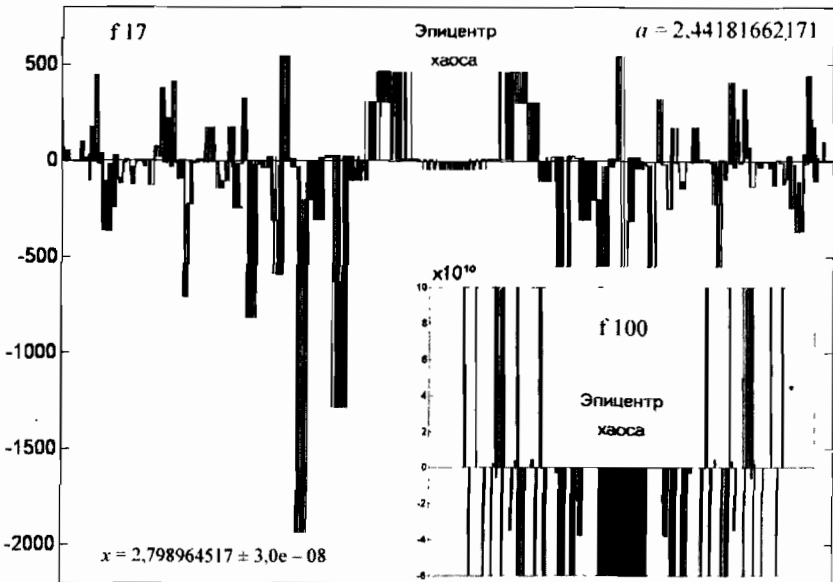


Рис. 4.109

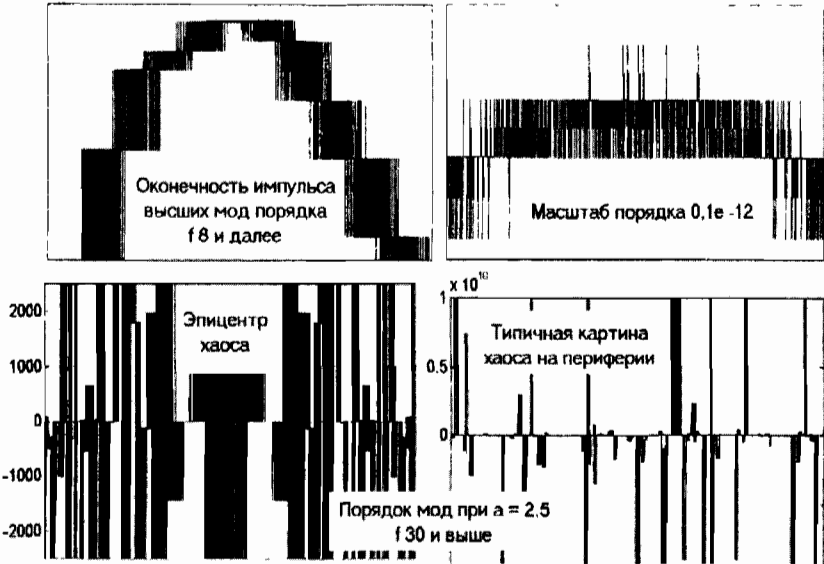


Рис. 4.110

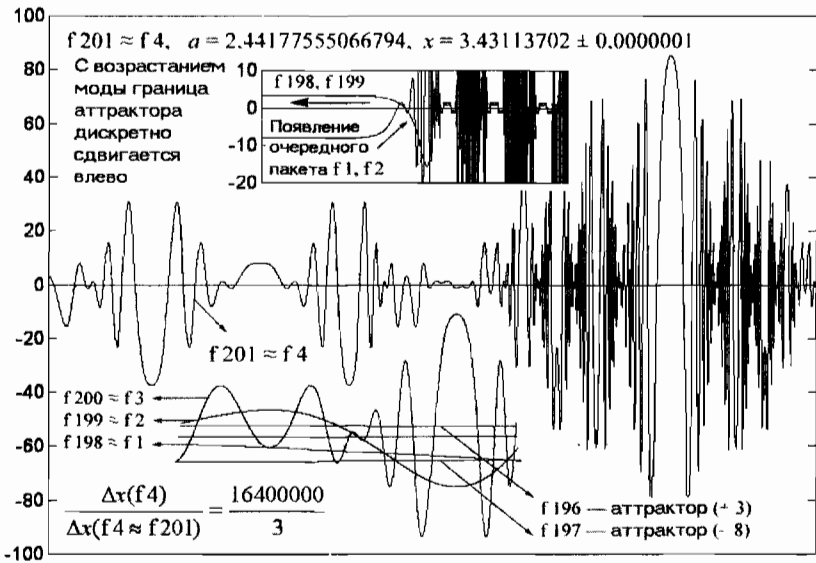


Рис. 4.111

При коэффициенте  $a = 2,44181626171$  можно наблюдать формирование аттракторов второго рода и нарастание хаоса одновременно. На рис. 4.105, где показаны моды  $f_{12}$  и  $f_{13}$ , шумовая составляющая еще больше увеличилась, однако распределение вероятностей для соответствующих импульсов нисколько не изменилось. В частности, «пойманная» аттрактором-плюс вероятность равна по-прежнему  $P_2 = 0,74$ .

На рис. 4.106 приведен график моды  $f_{16}$ ; все ее линии расплылись и приняли дискретный характер. Это особенно хорошо видно в левом нижнем окне, где показан аттрактор первого рода, сформировавшийся в условиях шума и потому расплывшийся. В правом нижнем окне показана гребенка импульсов с неизменной вероятностью их появления. Уровень с вероятностью  $P_2 = 0,74$  остается аттракторным. На рис. 4.107 можно увидеть аттракторные уровни у моды  $f_{94}$ . Чуть левее и правее эпицентра хаоса, т.е. зоны с точкой  $x = 2,798964517$ , произошел захват орбиты аттрактором-минус, и мода  $f_{94}$  здесь принимает значение, равное примерно  $0,88$ . Несколько дальше от эпицентра хаоса можно увидеть еще несколько мест, где амплитуда принимает аттракторные значения. Для сравнения слева на этом рисунке оставлен аттрактор первого рода. В двух нижних окнах рис. 4.107 изображена орбита захвата амплитуды мод с вероятностью  $0,74$  аттрактором-плюс. В третьем окошке сбоку показан аттракторный уровень с этой вероятностью высотой  $0,67$ .

Захват аттрактором одного или двух уровней из трех говорит о том, что шумовой аттрактор в действительности является *полупрозрачным*, поскольку он держит амплитуды мод на аттракторном уровне не на все 100 %. На рис. 4.108 продемонстрировано четыре эпизода с полупрозрачными аттракторами. Два левых окошка, где изображены моды  $f_{98}$  и  $f_{99}$ , отвечают одним и тем же границам по оси  $x$ :  $x = 2,7989644408 \pm 4,0e - 10$ . В этой области при коэффициенте  $a = 2,44181626171$  наряду с полупрозрачными аттракторами первого рода существует полупрозрачный аттрактор второго рода с уровнями  $+3,4$  и  $-8,0$ . В центре этого аттрактора амплитуды мод удерживаются на аттракторных уровнях на все 100 %, но по бокам этого нет. В области  $x = 2,7989644725 \pm 2,0e - 9$ , которая показана в двух правых окошках, расположен полупрозрачный аттрактор второго рода с уровнями  $-3,4$  и  $+8,0$ . Он шире, возник раньше предыдущего, следовательно, зона, где амплитуда мод захватывается ат-

трактором на все 100 %, тоже будет шире. Мы сравнили две пары мод:  $f_{26}$ ,  $f_{27}$  и  $f_{96}$ ,  $f_{97}$ . Как видим, графики различаются немногим, во всяком случае, вблизи оси абсцисс. Это говорит о том, что хаотические процессы к тридцатой моде вполне сложились и дальнейший рост порядка моды уже не может существенно повлиять на общую картину хаоса.

Если посмотреть на эпицентр хаоса «издали», он будет выглядеть так, как это показано на рис. 4.109, где изображен график моды  $f_{17}$ . Здесь все прямоугольные импульсы, и положительные и отрицательные, как бы прикреплены к оси абсцисс. Такое впечатление возникает потому, что вдоль всей оси  $x$  действует полупрозрачный аттрактор первого рода. С ростом порядка мод амплитуда некоторых пиков достигает астрономических величин, так что компьютер не в состоянии отобразить их на экране дисплея. В окне рис. 4.109 показана мода  $f_{100}$ ; многие шумовые импульсы здесь не видны не потому, что они слишком малы относительно выбранного масштаба (единицы, стоящие по оси ординат, нужно умножать на  $10^{10}$ ), а потому, что они слишком огромны (больше  $10^{20}$ ).

Типичная картина хаоса независимо от того, в какой области оси абсцисс мы находимся, показана на рис. 4.110. В эпицентре хаоса отдельные импульсы, если на них смотреть в «микроскоп», выглядят как импульс, показанный в левом верхнем окне. При еще большем «увеличении», порядка  $0,1e-12$ , которому отвечает правое верхнее окно, становятся различимы отдельные импульсы, из которых состоят прямоугольники, показанные в предыдущем окне. Большая или меньшая густота гребенки импульсов зависит от шага, с которым мы проходим данный участок оси абсцисс. Но в любом случае, частота импульсов будет оставаться пропорциональной вероятности появления этих импульсов. В двух нижних окнах рис. 4.110 показан эпицентр хаоса и его периферия, когда коэффициент  $a$  приближается к 2,5, а мода достигает примерно 30-го порядка. Графики мод рекурсивной функции  $ax \cos(x)$  на всем протяжении оси абсцисс состоят из бесконечного числа прямоугольных импульсов либо хаотической, либо аттракторной природы, либо смешанной, когда аттракторные уровни часть хаотических амплитуд притягивают на себя, а часть отпускают от себя, и они устремляются на бесконечные расстояния от нулевого уровня.

Что же получается: если мода достигла, скажем, сотого порядка, то на оси абсцисс вне аттракторов безнадежно искать участки с гладкими, непрерывно меняющимися линиями; везде господствует дискретность? Нет, это не так, и последний рисунок из нашей серии, а именно, рис. 4.111, тому подтверждение. Этот рисунок запечатлел моду  $f_{201}$ , которая *изоморфна* ( $\approx$ ) начальному участку моды  $f_4$ . В самом деле, сравните моду  $f_{201}$  с модой, изображенной в левом нижнем окне рис. 4.45. Они различаются только масштабом, который можно выразить следующей пропорцией:

$$\frac{\Delta x(f_4)}{\Delta x(f_{201} \approx f_4)} = \frac{16400000}{3}.$$

Откуда было взяться моде  $f_{201} \approx f_4$ , которую шумовые процессы даже не коснулись? Всмотритесь, все изгибы кривой  $f_{201} \approx f_4$  меняются *непрерывно*, элементы дискретности практически отсутствуют. Как это могло получиться?

Дело в том, что на участке в районе точки  $x = 3,43113702$  при коэффициенте  $a = 2,44177555066794$  существует аттрактор 2-го рода с уровнями  $+3,4$  и  $-8,0$ , границы которого с ростом порядка мод постоянно сужаются. Окно в центре рис. 4.111 показывает правую границу этого аттрактора, которая при переходе мод от  $f_{198}$  к  $f_{199}$  отступила влево на дискретную величину, породив пакет мод из  $f_1$  и  $f_2$ . Ниже кривой  $f_{201} \approx f_4$  фрагментарно показаны графики еще пяти мод ( $f_{196} - f_{200}$ ), которые поясняют, как *дискретные* уровни аттрактора 2-го рода, представленные модами  $f_{196}$  и  $f_{197}$ , становятся *непрерывными* функциями, представленными модами  $f_{199} \approx f_2$  и  $f_{200} \approx f_3$ . Поскольку аттракторные уровни не подвержены шумовым процессам, то все моды, возникшие на месте аттракторных уровней, выглядят как «новенькие». Какой бы большой порядок мода ни имела, у нее всегда можно найти вблизи границ аттракторов гладкие участки кривой. Впоследствии эти участки будут подвержены коррозии хаоса и на их месте окажутся шумовые импульсы прямоугольной формы. Но до этого гладкие моды высоких порядков успеют породить новые системы аттракторов, которым шум нестрашен. Этот процесс бесконечен: с ростом порядка мод на микроскопических пространствах постоянно воспроизводится все то, что нами было рассмотрено на больших пространствах. В этой бесконечной череде подобных форм проявляется фрактальная природа тригонометрической функции  $ax \cos(x)$ .

## Библиография

1. Айгнер М. Комбинаторная теория. — М.: Мир, 1982.
2. Александров П.А. Введение в теорию групп. — М.: Наука, 1980.
3. Апанасов Б.Н. Геометрия дискретных групп и многообразий. — М, 1991.
4. Арно А., Николь П. Логика, или Искусство мыслить. — М.: Наука, 1991.
5. Басакер Р., Саати Т. Конечные графы и сети. — М.: Наука, 1974.
6. Беллман Р. Введение в теорию матриц. — М.: Наука, 1969.
7. Белов В.В., Воробьев Е.М., Шаталов В.Е. Теория графов. — М, 1976.
8. Берж К. Теория графов и ее применения. — М.: ИЛ, 1962.
9. Берже П., Помо И., Видаль К. Порядок в хаосе. О детерминистском подходе к турбулентности. — Череповец: Меркурий-ПРЕСС, 2000.
10. Биркгоф Г. Барти Т. Современная прикладная алгебра. — М., 1976
11. Блейхут Р. Теория и практика кодов, контролирующих ошибки. — М.: Мир, 1986.
12. Болтянский В.Г., Ефремович В.А. Наглядная топология. — М., 1983.
13. Братко И. Программирование на языке ПРОЛОГ для искусственного интеллекта. — М.: Мир, 1990.
14. Варшамов Р.Р. Введение в новую нетрадиционную математику. — М.: НПО СИНТЕГ, 1999.
15. Венниджер М. Модели многогранников. — М.: Мир, 1974.
16. Виленкин Н.Я. Специальные функции и теория представлений групп. — М.: Наука, 1965.
17. Газале М. Гномон. От фараонов до фракталов. — Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002.
18. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. — М.: Наука, 1966.
19. Гильберт Д., Кон-Фоссен С. Наглядная геометрия. — М.: Наука, 1981.
20. Глушков В.М. Синтез цифровых автоматов. — М.: Наука, 1962.
21. Гретцер Г. Общая теория решеток. — М.: Мир, 1982.
22. Ерёмин М.А. Последняя теорема Ферма. — Арзамас, 1999.
23. Ершов Ю.Л., Палютин Е.А. Математическая логика. — М., 1979.
24. Зыков А.А. Основы теории графов. — М.: Наука, 1987.
25. Кантор И.Л. Солодовников А.С. Гиперкомплексные числа. — М., 1973.
26. Карри Х. Основания математической логики. — М.: Мир, 1969.
27. Карган Э. Теория спиноров. — М.: ИЛ, 1947.
28. Клейн Ф. Икосаэдр. — М.: Наука, 1975.
29. Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии. — М., 1989.
30. Клини С. Математическая логика. — М.: Мир, 1973.
31. Кроновер Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. — М.: Постмаркет, 2000.
32. Кроуэлл Р., Фокс Р. Введение в теорию узлов. — М., 1971.

33. Кузнецов О.П., Адельсон-Вельский Г.М. Дискретная математика для инженеров. — М.: Энергоатомиздат, 1988.
34. Курош А.Г. Лекции по общей алгебре. — М.: Наука, 1973.
35. Курош А.Г. Теория групп. — М.: Наука, 1967.
36. Ланкастер П. Теория матриц. — М.: Мир, 1982.
37. Лекции по теории графов / Емеличев В.А. и др. — М.: Наука, 1990.
38. Лорьер Ж.-Л. Системы искусственного интеллекта. — М.: Мир, 1991.
39. Любарский Г.Я. Теория групп и ее применение к физике. — М., 1968.
40. Мандельброт Б.Б. Фрактальная геометрия природы. — Ижевск, 2002.
41. Мендельсон Э. Введение в математическую логику. — М.: Наука, 1976.
42. Милнор Дж. Голоморфная динамика. — Ижевск: НИЦ РХД, 2000.
43. Морозов А.Д. Введение в теорию фракталов. — М. — Ижевск, 2002.
44. Мурнаган Ф. Теория представлений групп. — М.: ИЛ, 1950.
45. Наймарк М.А. Линейные представления группы Лоренца. — М., 1958.
46. Наймарк М.А. Теория представлений групп. — М.: Наука, 1976.
47. Оре О. Теория графов. — М.: Наука, 1980.
48. Пойа Дж. Математика и правдоподобные рассуждения. — М., 1975.
49. Пойа Дж. Математическое открытие. — М.: Наука, 1970.
50. Рашевский П.К. Теория спиноров / УМН, Т. X, вып. 2., 1955.
51. Свами М., Тхуласираман К. Графы, сети и алгоритмы. — М., 1984.
52. Стинрод Н., Чинн У. Первые понятия топологии. — М.: Мир, 1967.
53. Супруненко Д.А. Группы матриц. — М.: Наука, 1972.
54. Татт У. Теория графов. — М.: Мир, 1988.
55. Трахтенброт Б.А., Барздинь Я.М. Конечные автоматы. — М., 1970.
56. Уилсон Р. Введение в теорию графов. — М.: Мир, 1977.
57. Федер Е. Фракталы. Пер. с англ. — М.: Мир, 1991.
58. Федоров Ф.И. Группа Лоренца. — М.: Наука, 1979.
59. Франсис Дж. Книжка с картинками по топологии. — М.: Мир, 1991.
60. Фрид З. Элементарное введение в абстрактную алгебру. — М., 1979.
61. Хамермеш М. Теория групп и ее применение к физическим проблемам. — М.: Мир, 1966.
62. Харари Ф. Теория графов. — М.: Мир, 1973.
63. Холл М. Теория групп. — М.: ИЛ, 1962.
64. Шенфилд Дж. Математическая логика. — М.: Наука, 1975.
65. Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986.
66. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. — М., 1979.



## Оглавление

Предисловие — 3

### 1. Логика — 5

1. 1. Операции логики Буля — 5

- Диаграммы Эйлера — Венна — 5
- Объединение. Таблицы истинности — 6
- Пересечение, двойственность и дополнение — 7
- Стрелка Пирса, штрих Шеффера и разность — 9
- Симметрическая разность и эквивалентность — 11

1.2. Формы представления булевых функций — 12

- Совершенные формы представления — 12
- Минимизация булевых функций по Куайну — 15
- Минимизация по методу сочетания индексов — 17
- Минимизация по картам Карно — 18
- Базовые наборы булевых функций — 19

1.3. Методы доказательства в логике Буля — 22

- Основные законы логики Буля — 22
- Аксиоматический и конструктивный способы обоснования — 23
- Примеры доказательств булевых тождеств — 27
- Практические задания по логике Буля — 31

1. 4. Введение в логику высказываний — 42

- Высказывания и операции над ними — 42
- Парадоксальные высказывания — 45
- Построение доказательств в логике высказываний — 48
- Аксиома порядка и ее применение — 50
- Табличный способ доказательства — 54
- Метод резолюций — 58
- Метод Вонга — 61
- Метод натурального исчисления (метод Генцена) — 62

- Практические задания по логике высказываний — 65
- Примеры решения задач — 73
- 1.5. Операции над предикатами и кванторами — 81
  - О предикатах, кванторах и многоместных функциях — 81
  - Конкретизация предикатов — 84
  - Решетки вообще и булеан в частности — 90
  - Построение доказательств в логике предикатов — 95
  - Практические задания по логике предикатов — 105
  - Разбор решений задач по логике предикатов — 112
- 2. Группы — 119**
- 2.1. Группа и связанные с ней понятия — 119
  - Линейное преобразование — 119
  - Определение группы и примеры групп — 124
  - Действия с  $0,1$ -матрицами — 130
  - Обобщенное комплексное число — 131
  - Гиперкомплексные числа — 134
  - Матричные конструкции — 137
  - Подстановки — 144
  - Циклическая форма подстановок — 146
  - Комбинаторные свойства подстановок — 150
- 2.2. Группы на матрицах и подстановках — 152
  - Представления групп до 11-й порядка — 152
  - Группа 12-го порядка и групповые закономерности — 157
  - Отношение эквивалентности — 163
  - Факторгруппа, инвариант и внутренний автоморфизм — 168
  - Голоморфы диэдра и кватерниона — 171
  - Геометрическая интерпретация групповых преобразований - 176
  - Прямая сумма и прямое произведение — 183
  - Размерность представления и диаграммы Юнга — 191
  - Представления группы квадрата — 194
  - Представления группы кватерниона — 196
  - Октава и алгебра Клиффорда — 199

- Представления диэдров 5-го и 6-го порядков — 200
- Представления групп тетраэдра, куба и икосаэдра — 203
- 2.3. Групповые решетки из подгрупп — 212
  - Отношение порядка — 212
  - Решетки групп с 1-го по 12-й порядок — 215
  - Решетки групп 16-го порядка — 221
  - Группа вращения декартовых координат и ее подгруппы — 232
  - Решетки групп 18-го и 20-го порядков — 237
  - Решетки групп 24-го порядка — 239
  - Решетки групп 27-го порядка — 246
- 2.4. Алгебраические системы на базе групп — 250
  - Какие бывают алгебраические системы — 250
  - Числовые поля — 255
  - Сведения из теории чисел — 260
  - Поля многочленов — 263
  - Разложение многочлена на неприводимые множители — 270
  - Примеры разложения многочленов — 272
  - Корректирующие коды — 276
  - Порождающая и проверочная матрицы — 278
  - Кодовое расстояние и помехозащищенность — 280
  - Примеры корректирующих кодов — 283
- 2.5. Пространственные группы и двойственность — 287
  - Группы Ли и Галуа — 287
  - Симметрия уравнений Максвелла — 289
  - Инвариантность волнового уравнения — 291
  - Преобразование комплексной плоскости — 294
  - Группа проективных преобразований и ее подгруппы — 296
  - Две симметрии: вращение и перемещение — 298
  - Двойственность и проецирование — 300
  - Ортогональные и гиперболические преобразования — 305
  - Масштаб осей при гиперболическом повороте — 308
  - Моделирование волновых процессов — 311
  - Практические задания по группам — 320

### 3. Графы — 324

Вводные замечания — 324

#### 3.1. Группы цепей графа — 329

- Элементарная группа цепей и ее решетка — 329
- Группа цепей тетраэдра — 332
- Классы эквивалентности группы цепей тетраэдра — 334
- Решетка группы цепей тетраэдра — 337
- Группа цепей куба — 339
- Гиперкуб, образованный из 72-х цепей куба — 341
- Классы эквивалентности группы цепей куба — 344
- Классы и подгруппы группы цепей  $G_5$  — 349
- Задача Гамильтона о цепях додекаэдра — 354

#### 3.2. Морфология графа — 363

- Матрицы смежности и инцидентности — 363
- Пути и контуры в графе — 365
- Симметрия графа и его дополнения — 367
- Виды графов — 370
- Разложение графа на базисные составляющие — 373
- Реберные и вершинные покрытия — 379
- Трансверсаль, матроид и двойственность графов — 382
- Отношения эквивалентности и порядка — 388
- Оптимальный путь и максимальный поток — 395

#### 3.3. Кодирование, автоматы и группы на графах — 398

- Типы и назначение кодирования — 398
- Оптимальные деревья кодирования — 401
- Автоматы задержки и распознавания символов — 407
- Автоматы-преобразователи — 411
- Ликвидация эквивалентных состояний — 415
- Графы кватерниона и тетраэдра — 418

#### 3.4. Лингвистические и поисковые графы — 423

- Порождающая грамматика — 423
- Граф словообразования — 427
- Граф словоизменения — 434

- Задача о ханойской башне — 445
- Другие поисковые задачи — 449
- 3.5. Раскраска графов и вопросы топологии — 453
  - Задача о раскраске карты — 453
  - Аналогия с Великой теоремой Ферма — 456
  - Планарные графы на торе — 460
  - Многогранники — 463
  - Формула Эйлера и связанность поверхности — 466
  - «Кренделя» и странные свойства гептаэдра — 469
  - Формула для минимального числа цветов — 472
  - Бутылка Клейна и вывернутые поверхности — 474
  - Зацепления, узлы и топология — 476
  - Практические задания по графам — 481
- 4. Фракталы — 491**
  - 4.1. Что такое фрактал — 491
  - 4.2. Прямое произведение и фракталы — 495
  - 4.3. К вопросу о размерности — 503
  - 4.4. Грамматика на службе у фракталов — 514
  - 4.5. Аффинные преобразования — 519
  - 4.6. Динамические фракталы — 525
  - 4.7. Динамика популяций — 541
  - 4.8. Бифуркационная диаграмма — 546
  - 4.9. Аттрактор «Крепостная стена» — 556
  - 4.10. Тригонометрическая функция — 566
  - 4.11. Прокол аттрактора — 579
  - 4.12. Ноль-аттрактор,  $\pi$ -аттракторы и квазиаттракторы — 591
  - 4.13. Субаттракторы — 602
  - 4.14. Хаос — 620
  - Библиография — 649

Учебное издание

**Олег Евгеньевич Акимов**

**Дискретная математика:  
логика, группы, графы, фракталы**

Художник: *Н.П. Сивоглазов*  
Корректор: *В.И. Петрова*  
Компьютерная верстка: *А.А. Кандыба*

Подписано в печать 2.10.2004.  
Формат 60 x 90<sub>1/16</sub>. Гарнитура Newton.  
Бумага офсетная. Печать офсетная.  
Усл. печ. л. 41. Тираж 3 000 экз. Заказ 5631

---

Издатель АКИМОВА  
E-mail: akimov\_ol@mail.ru.

Отпечатано с CD во ФГУП ИПК «Ульяновский Дом печати»  
432980, г. Ульяновск, ул. Гончарова, 14

Успех к книге приходит тогда, когда появляются ее «спиритские» копии. Именно этой почетной участи удостоился данный курс «Дискретной математики». Московское издательство «Лаборатория Базовых Знаний» неожиданно для автора летом 2003 г. выбросило на книжный рынок 10 тысяч экземпляров этого курса. Можно было бы поблагодарить руководителя издательства, Бородину Михаила Николаевича, за популяризацию учебника, если бы он помнил о нелегком труде автора. Однако обращаем внимание читателей на следующие обстоятельства. Во-первых, «Лаборатория Базовых Знаний» выпустили новый тираж со старыми ошибками, обнаруженными в предыдущем издании. Во-вторых, книга, которую вы держите в руках, дополнена совершенно новой главой — «Фрактали». Без этой актуальной темы курс «Дискретной математики» сейчас не может считаться современным. В-третьих, автор расширил старые главы новым теоретическим и практическим материалом, что также способствовало их привлекательности с дидактической точки зрения. Одновременно, чтобы не делать учебник слишком объемным, убрана последняя методологическая глава — «Конструктивизм». В скором будущем планируется выход отдельной книги под названием «Конструктивный подход к науке: история и современность», где будет рассмотрен широкий круг вопросов, связанный с методологией математики и естествознания. Эпистемологическая проблематика рассматривается также в серии книг этого же автора под названием «Психология познания». Во всем остальном книга осталась прежней. Она закладывает прочный фундамент для изучения практически всех специализированных курсов технических университетов. Ее непосредственная цель — дать математическое обеспечение современным компьютерным и информационным технологиям, заложить алгебраические основы для изучения материалов микроэлектроники и электронной техники, а также ознакомить будущих программистов с формально-логической методикой.