

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе

С.В. Алексеенко
П.А. Куйбин, В.Л. Окулов

**ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ
КОНЦЕНТРИРОВАННЫХ
ВИХРЕЙ**

Новосибирск, 2003

Алексеенко С.В., Куйбин П.А., Окулов В.Л.

Введение в теорию концентрированных вихрей. – Новосибирск: Институт теплофизики СО РАН, 2003.– 504 с.

В монографии систематизированы и обобщены сведения о концентрированных вихрях, наблюдаемых в природе и технике. Рассмотрены основные методы исследования их кинематики и динамики. Особое внимание уделено течениям с винтовой симметрией. Описаны модели вихревых структур, применяемые при интерпретации экспериментальных данных и служащие базисом для развития теоретических и численных подходов к изучению вихрей. Представлены достижения в области анализа устойчивости, волн на вихрях и явление распада вихря.

Для научных работников и инженеров, интересующихся вихревыми течениями, а также преподавателей, аспирантов и студентов соответствующих вузов.

Табл. 12. Ил. 234. Библиогр.: 348 назв.

ISBN 5-89017-027-9

Alekseenko S.V., Kuibin P.A., Okulov V.L.

Introduction to theory of concentrated vortices. – Institute of Thermophysics, Novosibirsk, 2003.– 504 p.

Knowledge about concentrated vortices observed in nature and technique is systematized and generalized in the book. The methods for research of their kinematics and dynamics are considered. Special attention is paid to the flows with helical symmetry. Models of vortex structures used for interpretation of experimental data are described. These models serve as a ground for development of theoretical and numerical approaches to vortex investigation. Achievements in the fields of stability analysis, waves on vortices and vortex breakdown are presented.

For researchers and engineers concerned with vortex flows as well as for teachers, postgraduates and students of corresponding universities.

Tab. 12, Ill. 234. Ref.: 348

ISBN 5-89017-027-9

Рецензенты: академик РАН В.В. Козлов

член-корреспондент РАН В.В. Пухначев

профессор П.И. Гешев

Утверждено к печати Ученым советом Института теплофизики СО РАН.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	13
Введение	16
Глава 1. Уравнения и законы вихревого движения	
1.1. Завихренность. Циркуляция	24
1.2. Динамика завихренной жидкости	28
1.2.1. Уравнения движения идеальной жидкости	28
1.2.2. Теоремы динамики идеальной завихренной жидкости	30
1.2.3. Теорема Бернулли	33
1.2.4. Уравнения движения вязкой жидкости	35
1.3. Уравнения движения в ортогональных координатах	36
1.3.1. Произвольная ортогональная система криволинейных координат	36
1.3.2. Декартова система координат	39
1.3.3. Цилиндрическая система координат	40
1.3.4. Сферическая система координат	41
1.4. Частные случаи движения завихренной жидкости	43
1.4.1. Винтовые потоки (течения Бельтрами)	43
1.4.2. Двумерные течения	46
1.4.3. Одномерные течения	53
1.5. Течения с винтовой симметрией	54
1.5.1. Вывод уравнений	54
1.5.2. Течения с винтовой завихренностью	56
1.5.3. Винтовые потоки с винтовой симметрией поля течения	59
1.6. Определение поля скоростей по источникам и вихрям	60
1.7. Вихревые силы и инварианты вихревого движения	64
1.7.1. Вихревые силы	64
1.7.2. Вихревой импульс и вихревой момент импульса	71
1.7.3. Кинетическая энергия	76
1.7.4. Спиральность	77
1.7.5. Инварианты двумерных течений	79
Глава 2. Вихревые нити	
2.1. Геометрия вихревых нитей	84
2.2. Закон Био – Савара	88
2.3. Прямолинейная бесконечно тонкая вихревая нить	91
2.3.1. Вихревая нить в идеальной жидкости	91
2.3.2. Диффузия вихревой нити	95
2.4. Самоиндукционное движение вихревой нити	97

2.5. Бесконечно тонкое вихревое кольцо	101
2.6. Бесконечно тонкая винтовая вихревая нить	106
2.6.1. Винтовая нить в безграничном пространстве	106
2.6.2. Винтовая нить в цилиндрической трубе	112

Глава 3. Модели вихревых структур

3.1. Вихревая пелена	125
3.2. Пространственно локализованные вихри	130
3.2.1. Вихревое кольцо	130
3.2.2. Сферический вихрь Хилла	138
3.2.3. Сферический вихрь Хикса	141
3.3. Колоннообразные вихри в идеальной жидкости	147
3.3.1. Вихрь Рэнкина	147
3.3.2. Вихрь Гаусса	149
3.3.3. Одномерный винтовой поток	150
3.3.4. Одномерные (колоннообразные) винтовые вихри	151
3.3.5. Q -вихрь	158
3.3.6. Винтовой вихрь с ядром конечного размера	159
3.4. Вязкие модели вихрей	163
3.4.1. Вихрь Бюргерса	163
3.4.2. Вихрь Салливана	166

Глава 4. Устойчивость и волны на колоннообразных вихрях

4.1. Типы возмущений	167
4.2. Неустойчивость вихревой пелены	169
4.3. Волны в жидкости с твердотельным вращением	172
4.3.1. Плоские волны	172
4.3.2. Осесимметричные волны	177
4.3.3. Столб Тейлора	180
4.4. Линейная неустойчивость вихря Рэнкина с аксиальным течением	182
4.4.1. Дисперсионные соотношения	182
4.4.2. Линейный анализ временной неустойчивости	188
4.4.3. Линейный анализ пространственной неустойчивости	197
4.5. Волны Кельвина	199
4.5.1. Дисперсионные уравнения	199
4.5.2. Осесимметричная мода, $m = 0$	200
4.5.3. Изгибная мода, $m = 1$	202
4.5.4. Эволюция начальных локализованных возмущений. Механизмы распространения волн	205
4.6. Неустойчивость Q -вихря. Критерии неустойчивости	213
4.6.1. Критерии неустойчивости	213
4.6.2. Неустойчивость Q -вихря. Невязкий анализ	215
4.6.3. Неустойчивость Q -вихря. Вязкий анализ	221

Оглавление

4.7. Линейные и нелинейные волны на колоннообразных вихрях типа Q-вихря	2
4.7.1. Осесимметричные нелинейные стоячие волны	2
4.7.2. Осесимметричные слабонелинейные бегущие волны	2
4.7.3. Изгибные волны	2

Глава 5. Динамика вихревых нитей

5.1. Метод усечения	2
5.2. Самоиндуцированное движение винтовой вихревой нити произвольного шага	2
5.3. Солитон Хасимото	2
5.4. Применение баланса импульса к описанию динамики вихревых нитей.....	2
5.4.1. Силы, действующие на вихревую нить	2
5.4.2. Вывод уравнений баланса сил	2
5.4.3. Полый вихрь	2
5.4.4. Вихревая нить с внутренней структурой	2
5.4.5. Учет внутренней структуры ядра	2
5.4.6. Модифицированные уравнения движения вихревой нити	3
5.5. Метод срашиваемых асимптотических разложений	3
5.5.1. Вывод уравнения движения вихревых нитей	3
5.5.2. Локальное индукционное приближение	3
5.5.3. N-солитонное решение	3
5.5.4. Комментарии	3

Глава 6. Динамика двумерных вихревых структур

6.1. Метод дискретных вихревых частиц	3
6.1.1. Уравнения движения вихревых частиц в безграничной жидкости	3
6.1.2. Уравнения движения вихревых частиц в ограниченных односвязных областях	3
6.1.3. Уравнения движения системы соосных вихревых колец	3
6.2. Движение системы прямолинейных вихрей	3
6.2.1. Взаимодействие двух одинаковых вихрей при разных начальных расстояниях	3
6.2.2. Взаимодействие двух вихрей одного размера, но с разными циркуляциями	3
6.2.3. Взаимодействие двух вихрей с одинаковой циркуляцией, но с разными размерами	3
6.2.4. Взаимодействие трех вихрей с циркуляциями одного знака	3
6.2.5. Взаимодействие двух вихрей с циркуляциями разных знаков	3
6.2.6. Взаимодействие трех вихрей с циркуляциями разных знаков. Коллапс вихрей	3
6.3. Моделирование динамики сдвиговых течений	3
6.3.1. Механизмы образования крупных вихрей в сдвиговом слое	3
6.3.2. Неустойчивость разгонного вихря	3

6.3.3. Неустойчивость следа за тонкой пластиной	367
6.4. Движение вихрей в цилиндрических трубах	376
6.4.1. Уравнения движения вихревых частиц в круговой области	377
6.4.2. Прецессия прямолинейного вихря в трубе	378
6.4.3. Движение винтового вихря в трубе	384
Глава 7. Экспериментальное наблюдение концентрированных вихрей в вихревых аппаратах	
7.1. Экспериментальные методы	389
7.1.1. Экспериментальное оборудование	389
7.1.2. Параметры закрученного потока	394
7.2. Винтовая симметрия вихревых течений	396
7.3. Концентрированный вихрь с прямолинейной осью	401
7.3.1. Генерация концентрированных вихрей	401
7.3.2. Композиция вихрей	414
7.4. Прецессия вихревого ядра	420
7.5. Стационарные винтовые вихревые нити	428
7.5.1. Одиночные винтовые вихри	429
7.5.2. Двойная спираль	433
7.6. Возмущения вихревого ядра	437
7.6.1. Волны на концентрированных вихрях	437
7.6.2. Распад вихря в канале	442
7.6.3. Распад вихря в сосуде с врачающейся крышкой	456
Список литературы	479
Список основных обозначений	498
Предметный указатель	500

CONTENTS

Preface	1
Introduction	10

Chapter 1. Equations and laws of vortex motion

1.1. Vorticity. Circulation	24
1.2. Vortex dynamics	28
1.2.1. Equations of ideal fluid motion	28
1.2.2. Theorems of vortex motion of an ideal fluid	30
1.2.3. Bernoulli's theorem	31
1.2.4. Equations of viscous fluid motion	31
1.3. Motion equations in orthogonal coordinates	30
1.3.1. Arbitrary orthogonal system of curvilinear coordinates	30
1.3.2. Cartesian coordinate system	30
1.3.3. Cylindrical coordinate system	40
1.3.4. Spherical coordinate system	4
1.4. Particular cases of vortex motion	40
1.4.1. Helical flows (Beltrami flows)	40
1.4.2. Two-dimensional flows	40
1.4.3. One-dimensional flows	50
1.5. Flows with helical symmetry	54
1.5.1. Derivation of equations	54
1.5.2. Flows with helical vorticity	50
1.5.3. Helical flows with helical symmetry of the flow field	59
1.6. Determination of the velocity field by sources and vortices	60
1.7. Vortex forces and invariants of vortex motion	64
1.7.1. Vortex forces	64
1.7.2. Vortex momentum and vortex angular momentum	7
1.7.3. Kinetic energy	70
1.7.4. Helicity	7
1.7.5. Invariants of two-dimensional flows	70

Chapter 2. Vortex filaments

2.1. Geometry of vortex filaments	84
2.2. Biot – Savart law	88
2.3. Rectilinear infinitely thin vortex filament	9
2.3.1. Vortex filament in ideal fluid	9
2.3.2. Diffusion of vortex filament	9

2.4. Self-induced motion of vortex filament	97
2.5. Infinitely thin vortex ring	101
2.6. Infinitely thin helical vortex filament	106
2.6.1. Helical vortex filament in infinite space	106
2.6.2. Helical vortex filament in a cylindrical tube	112

Chapter 3. Models of vortex structures

3.1. Vortex sheet	125
3.2. Spatial localized vortices	130
3.2.1. Vortex ring	130
3.2.2. Hill's spherical vortex	138
3.2.3. Hicks spherical vortex	141
3.3. Columnar vortices in ideal fluid	147
3.3.1. Rankine vortex	147
3.3.2. Gauss vortex	149
3.3.3. One-dimensional helical flow	150
3.3.4. One-dimensional (columnar) helical vortices	151
3.3.5. Q -vortex	158
3.3.6. Helical vortex with a finite-size core	159
3.4. Viscous models of vortices	163
3.4.1. Burgers vortex	163
3.4.2. Sullivan vortex	166

Chapter 4. Stability and waves in columnar vortices

4.1. Types of perturbations	167
4.2. Instability of a vortex sheet	169
4.3. Waves in liquids with solid-body rotation	172
4.3.1. Plane waves	172
4.3.2. Axisymmetrical waves	177
4.3.3. Taylor column	180
4.4. Linear instability of Rankine vortex with an axial flow	182
4.4.1. Dispersion relations	182
4.4.2. Linear analysis of temporal instability	188
4.4.3. Linear analysis of spatial instability	197
4.5. Kelvin waves	199
4.5.1. Dispersion equations	199
4.5.2. Axisymmetrical mode, $m = 0$	200
4.5.3. Bending mode, $m = 1$	202
4.5.4. Evolution of initial localized perturbations Mechanisms of wave propagation	205
4.6. Instability of Q -vortex. Instability criteria	213
4.6.1. Instability criteria	213
4.6.2. Instability of Q -vortex. Inviscid analysis	215
4.6.3. Instability of Q -vortex. Viscous analysis	221

4.7. Linear and non-linear waves in columnar vortices of the Q -type	225
4.7.1. Axisymmetrical non-linear standing waves	225
4.7.2. Axisymmetrical weakly-nonlinear travelling waves	230
4.7.3. Bending waves	236

Chapter 5. Dynamics of vortex filaments

5.1. Cut-off method	246
5.2. Self-induced motion of helical vortex filament with an arbitrary pitch	254
5.3. Hasimoto soliton	268
5.4. Application of momentum balance to description of dynamics of vortex filaments	279
5.4.1. Forces acting on vortex filament	279
5.4.2. Derivation of force-balance equations	281
5.4.3. Hollow vortex	291
5.4.4. Vortex filament with an inner structure	293
5.4.5. Consideration of the inner core structure	298
5.4.6. Modified equations of vortex filament motion	302
5.5. The method of matched asymptotic expansions	302
5.5.1. Derivation of equation for vortex filament motion	303
5.5.2. Local induction approximation	309
5.5.3. N -soliton solution	312
5.5.4. Comments	317

Chapter 6. Dynamics of two-dimensional vortex structures

6.1. The method of discrete vortex particles	320
6.1.1. Motion equations of vortex particles in infinite liquid	320
6.1.2. Motion equations of vortex particles in limited simply connected domains	326
6.1.3. Motion equations of the system of coaxial vortex rings	334
6.2. Motion of the system of rectilinear vortices	338
6.2.1. Interaction of two identical vortices at various initial distances	339
6.2.2. Interaction of two vortices of the same size but with different circulations	342
6.2.3. Interaction of two vortices of the same circulations but with different sizes	342
6.2.4. Interaction of three vortices with circulations of the same sign	343
6.2.5. Interaction of two vortices with circulations of contrary signs	345
6.2.6. Interaction of three vortices with circulations of contrary signs Vortex collapse	348
6.3. Modeling of dynamics of shear flows	351
6.3.1. Mechanisms of large vortex formation in a shear layer	351
6.3.2. Instability of a starting vortex	357
6.3.3. Wake instability behind a thin plate	367
6.4. Vortex motion in cylindrical tubes	376
6.4.1. Motion equations for vortex particles in circular domain	377

6.4.2. Precession of a rectilinear vortex in a tube	378
6.4.3. Motion of a helical vortex in a tube	384
Chapter 7. Experimental observation of concentrated vortices in vortex apparatuses	
7.1. Experimental methods	389
7.1.1. Experimental equipment	389
7.1.2. Parameters of a swirling flow	394
7.2. Helical symmetry of vortex flows	396
7.3. Concentrated vortex with a rectilinear axis	401
7.3.1. Generation of concentrated vortices	401
7.3.2. Vortex composition	414
7.4. Precession of a vortex core	420
7.5. Stationary helical vortices	428
7.5.1. Single helical vortices	429
7.5.2. Double helix	433
7.6. Perturbations of a vortex core	437
7.6.1. Waves on concentrated vortices	437
7.6.2. Vortex breakdown in a channel	442
7.6.3. Vortex breakdown in a container with rotating lid	456
References	479
Main symbols.....	498
Subject index	500

ПРЕДИСЛОВИЕ

Вихревое движение – одно из основных состояний движущейся сплошной среды. Примечательно, что во многих случаях завихренность локализуется в пространстве, вследствие чего формируются концентрированные вихри. К числу наиболее ярких примесей таких вихрей следует отнести вихревые нити, динамика которых характеризуется чрезвычайным разнообразием. Отметим, в частности, такие явления, как самоиндукционное движение, различные неустойчивости, волнобразование, распад вихря. Типичным проявлением указанных эффектов является спиральная, или винтовая, форма оси вихря.

Хотя в литературе по гидродинамике вихревому движению и вихревым эффектам уделяется повышенное внимание, тем не менее не так много книг посвящено непосредственно вихрям и тем более – концентрированным. В предлагаемой монографии делается попытка осветить основные вопросы, связанные с их образованием и поведением. Поводом для написания книги послужили, в первую очередь, экспериментальные наблюдения авторов, связанные с впечатляющими картинами визуализации концентрированных вихрей, включая винтовые и двухспиральные, а также распад вихря. Впоследствии авторами был развит подход, основанный на идеи винтовой симметрии закрученных потоков, который позволяет строить упрощенные математические модели и описывать многие вихревые явления. Основная часть книги посвящена теоретическому описанию динамики вихрей. Однако в последней главе приводятся детальные результаты экспериментальных наблюдений концентрированных вихрей, что дает пищу для размышлений и побуждает к дальнейшему развитию теории вихрей.

Огромная сложность в математическом описании динамики концентрированных вихрей состоит в необходимости учета трехмерных и нелинейных эффектов, сингулярности, разнообразных неустойчивостей. Для каждой конкретной задачи пришлось использовать самые различные системы координат и уравнений, поэтому авторы сочли необходимым начать изложение книги с описания основных законов вихревого движения и выписать подробно уравнения движения несжимаемой жидкости* в различных системах координат (глава 1), хотя эти сведения можно найти и в других книгах по гидродинамике.

* Подробное описание специальных моделей движения сжимаемых жидкостей см., например, в книге Л.В. Овсянникова [1981].

Особое внимание уделяется течениям с винтовой симметрией*, поскольку условие винтовой симметрии позволяет существенно упростить постановку задач и их решение и в то же время, как показано в главе 7, достаточно хорошо отражает свойства реальных течений. По возможности все математические выкладки и аналитические расчеты как в первой, так и в последующих главах приводятся полностью, чтобы читатель мог воспользоваться ими в полной мере.

Глава 2 занимает центральное место, так как в ней описывается фундаментальный объект теории завихренной жидкости – бесконечно тонкая вихревая нить. Здесь же представлен закон Био – Савара, который является основополагающим для динамики вихревых нитей, и описан механизм самоиндуцированного движения нити.

В главе 3 приведены основные модели вихревых структур, которые представляют самостоятельный интерес и служат базисом для рассмотрения более сложных задач в последующих главах.

Глава 4 посвящена анализу устойчивости и волн на колоннообразных вихрях. Анализ проведен главным образом в линейном приближении, что позволило получить точные решения для различных типов базовых вихрей и различных мод – прежде всего осесимметричной и изгибной.

В главе 5, именованной “Динамика вихревых нитей”, представлены приближенные методы описания, поскольку рассматриваются сильно нелинейные возмущения вихревой нити. Основными приближенными подходами являются методы усечения и баланса сил. Приведен ряд примеров, включая солитон Хасимото.

В 6-й главе дано представление о вихревых методах расчета течений. Изложены механизмы взаимодействия вихрей. Продемонстрированы возможности вихревых методов при моделировании пелинсийной стадии развития неустойчивости в сдвиговых течениях – в классическом слое сдвига, в разгонном вихре и в следе за пластиной. Предложена модель возникновения прцессии вихря в цилиндрической трубе.

В главе 7, основанной преимущественно на работах авторов книги и их коллег, представлены экспериментальные результаты наблюдения концентрированных вихрей в лабораторных условиях. Главная цель этого раздела – продемонстрировать наличие винтовой симметрии у реальных закрученных потоков и проиллюстрировать теоретические положения экспериментальными примерами протяженных концентрированных вихрей.

* Дополнительную информацию можно найти у О.Ф. Васильева [1958].

Авторы надеются, что книга действительно послужит введением в теорию концентрированных вихрей и будет полезна для всех, кто интересуется вихревой динамикой.

В книгу вошли результаты, полученные при поддержке грантов РФФИ 94-02-05812, 96-01-01667, 97-05-65254, 00-05-65463, 01-01-00899, гранта Президента РФ поддержки молодых докторов 96-15-96815, грантов РФФИ–ИНТАС 95-1149 и ИНТАС 00-00232, гранта Совета по поддержке ведущих научных школ 00-15-96810.

Авторы благодарны Е.В. Трифоновой и В.С. Быковской, взявшим на себя нелегкий труд по оформлению рукописи.

ВВЕДЕНИЕ

В огромном многообразии вихревых движений отчетливо выделяются *концентрированные вихри*, которые привлекают повышенный интерес с точки зрения как фундаментальных исследований, так и практики. В литературе не дается строгого определения концентрированных вихрей, как, впрочем, и вообще понятия вихря. Достаточно четкое определение концентрированного вихря можно дать для случая идеальной жидкости: это локализованная в пространстве область с ненулевой завихренностью, окруженная потенциальным течением. По таким определением, конечно, не исчерпывается наблюдаемое множество вихревых явлений. Мы будем пользоваться скорее интуитивным представлением, подразумевая под концентрированными вихрями такие вихревые движения, когда завихренность сосредоточена в пространственно локализованных областях с локализацией, по крайней мере, в одном измерении. Наиболее яркими классическими примерами концентрированных вихрей служат следующие идеализированные объекты: вихревая пелена (локализация в одном измерении), бесконечно тонкая вихревая нить и ее двумерный аналог – точечный вихрь (локализация в двух измерениях), бесконечно тонкое вихревое кольцо конечного диаметра – замкнутая вихревая нить, вортон (локализация в трех измерениях). Более сложные объекты – колоннообразный вихрь типа вихря Рэнкина (постоянная завихренность в ядре конечного радиуса), телесное вихревое кольцо, вихрь Хилла, вихрь Хикса – имеют ненулевой объем области, где завихренность отлична от нуля.

Еще более сложны случаи, когда завихренность отлична от нуля во всем пространстве. Но при этом выделяется ядро вихря, где завихренность существенно больше, чем в окружающей среде. Это характерно для вязких течений, когда происходит диффузия завихренности. Типичный пример – вихрь Бюргерса.

В природе и технике реализуется множество вихревых движений, которые можно интерпретировать как концентрированные вихри с той или иной степенью приближенности к указанным выше идеализированным объектам. Несомненно, один из наиболее наблюдавшихся типов концентрированных вихрей – колоннообразный вихрь, или вихрь типа вихревой нити. Для подтверждения в табл. В.1 приведен краткий перечень подобных явлений, некоторые из них проиллюстрированы (рис. В.1–В.4, цв. рис. В.1^{*}). Преимущественно

такого рода вихревым движениям посвящена данная книга. Иначе подобные вихри будем называть еще *протяженными концентрированными вихрями*. Кроме того, рассматриваются вихревые кольца (рис. В.5), которые близки по многим свойствам к протяженным вихрям, а также точечные вихри, анализ динамики которых позволяет объяснить ряд свойств протяженных вихрей, особенно при взаимодействии их друг с другом и твердыми поверхностями.

В литературе отсутствуют монографии, специально посвященные протяженным концентрированным вихрям. Наиболее полно подобные вопросы освещены в монографии Saffman [1992] “Vortex Dynamics” (имеется русский перевод [Сэффмэн, 2000]).

Таблица В.1. Примеры концентрированных вихрей

Номер явления	Схема на рис. В.1	Описание явления	Автор, источник
1	<i>a</i>	Воронка в жидкости, истекающей из сосуда через донное отверстие	М. Ван Дайк [1986]
2	<i>b</i>	Смерч	Д. Сноу [1984]
3	<i>c</i>	Обтекание дельтовидного крыла под большим углом атаки	Ф.М. Пейн и др. [1988]
4	—	Продольные вихри в турбулентном пограничном слое	Kim et al. [1971]
5	<i>g</i>	Продольные вихри в пограничном слое в следе за обтекаемым телом на пластине	Tani et al. [1962]
6	<i>d</i>	Система вихревых шнурков, образующихся за несимметричной струей, вдуваемой в сносящий поток	Д.М. Ву и др. [1989]
7	<i>e</i>	Система вихревых шнурков во вращающемся слое жидкости, подогреваемой снизу	Boubnov, Golitsyn [1986]
8	<i>ж</i>	Вихревые шнуры в восходящем над закрученной жидкостью паре	В.А. Владимиров [1977б]
9	—	Вихревые нити в модели турбулентности для сверхтекущего гелия	Р.Д. Доннелли [1989]
10	—	Вихревые нити – перемычки между вихревыми жгутами в следе за косообтекаемым многолопастным винтом	А.В. Ларин, В.И. Маврицкий [1971]
11	—	Вихревые кольца – замкнутые вихревые нити	Ш. Уиднелл [1979]
12	<i>з</i>	Вихревые нити при обтекании лункообразной каверны	Г.И. Кикнадзе и др. [1986]

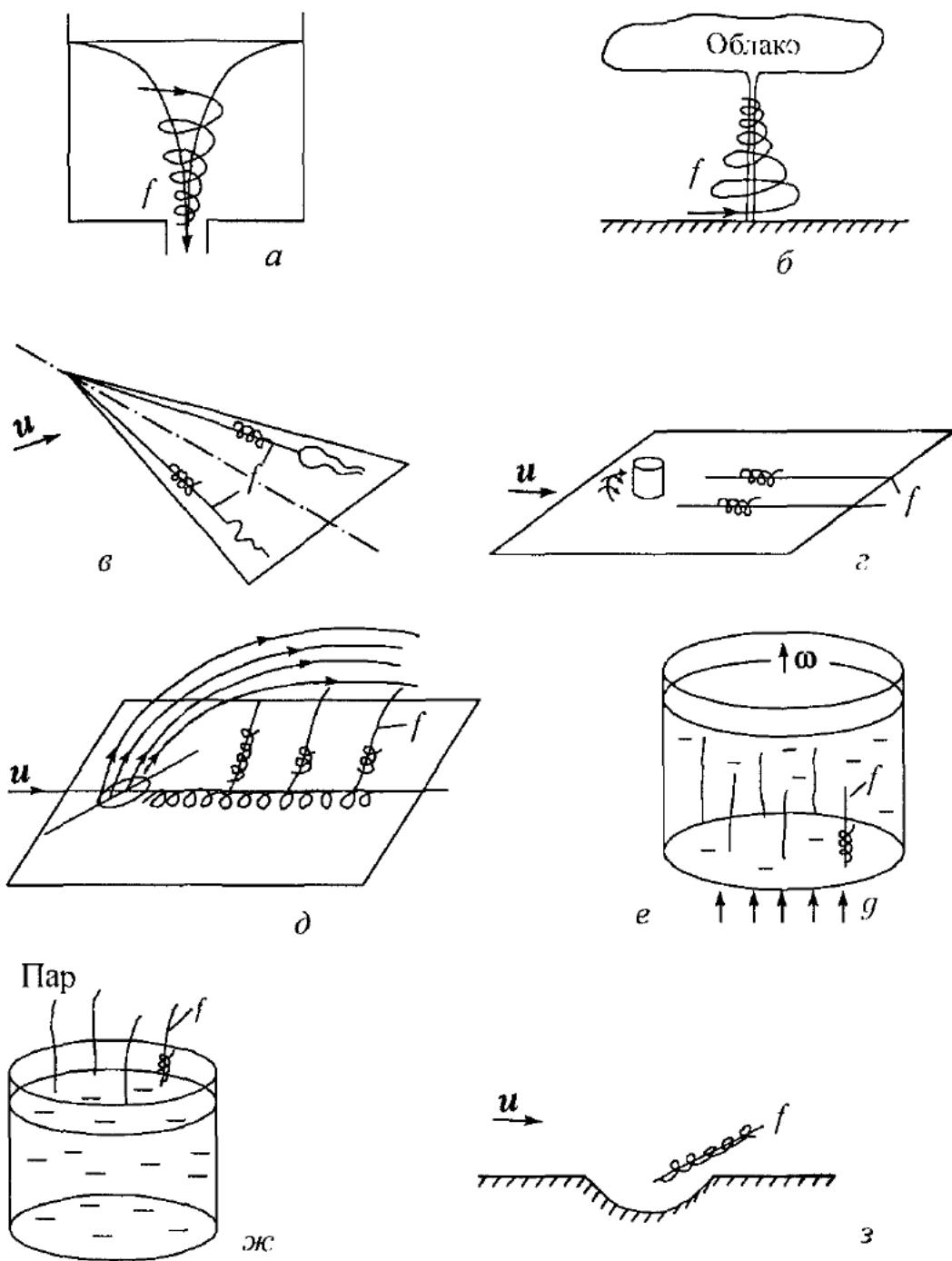


Рис. B.1. Примеры образования концентрированных вихрей (пояснения см. в табл. В.1).
f – ядра вихрей

Следует отметить также работы Г. Вилля [1936], Н.Е. Жуковского [1937а, б], Г. Ламба [1947], Н.Е. Коцина, И.А. Кибеля, Н.В. Розе [1963], Л.М. Милн-Томсона [1964], Л.И. Седова [1970], Дж. Бэтчелора [1973], М.А. Лаврентьева, Б.В. Шабата [1973], Л.Г. Лойцянского [1973], М.А. Гольдштика [1981], Lugt [1983], А. Гупты, Д. Лилли, Н. Сайреда [1987], Ting, Klein [1991], В.В. Мелешко, М.Ю. Константинова [1993], Lugt [1996], В.В. Козлова [1998] и обзоры Hall [1966], Ш. Уиднелл [1979], Saffman, Baker [1979], С. Лейбовича [1985], Spalart [1998], Andersson, Alekseenko [2002].

Необходимость описания концентрированных вихрей в одной книге обусловлена не только и не столько отсутствием подобных изданий, сколько важностью рассматриваемого вопроса с различных точек зрения. Понятие вихревой нити относится к фундаментальным понятиям гидродинамики. Вихревая нить (точечный вихрь) представляет собой не только простую и удобную модель реальных вихрей, но и основу для построения математических моделей более сложных вихревых течений (например, метод точечных вихрей [Белоцерковский, Нинт, 1978], модели потоков с винтовой симметрией [Alekseenko *et al.*, 1999]).

На опыте концентрированных вихри типа вихревых пилей весьма редко имеют прямолинейную ось вследствие развития различных неустойчивостей и способности вихревых ядер играть роль волноводов, т. с. передавать возмущения. Возмущенные состояния характеризуются широким спектром разнообразных мод – осесимметричных, изгибных и т. д. Несомненно, наиболее характерными являются возмущения винтовой, или спиральной, формы (рис. В.2б). Основной механизм, ответственный за распространение таких возмущений, – *самоиндукционное движение*. Он также отвечает за движение вихревых колец и за распространение нелинейного волнового пакета, так называемого вихревого солитона (или солитона Хасимото), описываемого в первом приближении кубическим уравнением Шредингера. На поведение концентрированного вихря сильное воздействие оказывают другие вихри, вид базового поля течения, наличие твердых поверхностей.

Но, пожалуй, самым интригующим явлением следует считать *распад вихря* (vortex breakdown). Данный феномен проявляется во внезапном отклонении оси концентрированного вихря от первоначального направления или в резком утолщении ядра вихря с образованием зон возвратного движения. Классические примеры распада вихря приведены на рис. В.4 для случая обтекания дельтовидного крыла и на рис. В.6 для закрученного потока в слабо-расширяющемся канале. Наблюдаются множество типов распада, но преобладают пузырьковый (рис. В.6 a , В.2 g) и спиральный (рис. В.6 b , В.2 c). Распад вихря приводит к кардинальной перестройке структуры течения, существенно влияет на процессы переноса и эффективность промышленных тепломассообменных аппаратов вихревого типа [Алексеенко, Окулов, 1996].

Проблема описания распада вихря послужила одним из основных мотивов для исследования устойчивости концентрированных вихрей. В представленной книге теория распада вихря не рассматривается ввиду ее незавершенности; основное внимание сосредоточено только на систематизированном описании опытных данных в гл. 7.6. Для углубленного изучения данного вопроса читатель может обратиться к обзорам: Hall [1972], С. Лейбович [1979, 1985], Escudier [1988], Althaus, Weimer [1997].

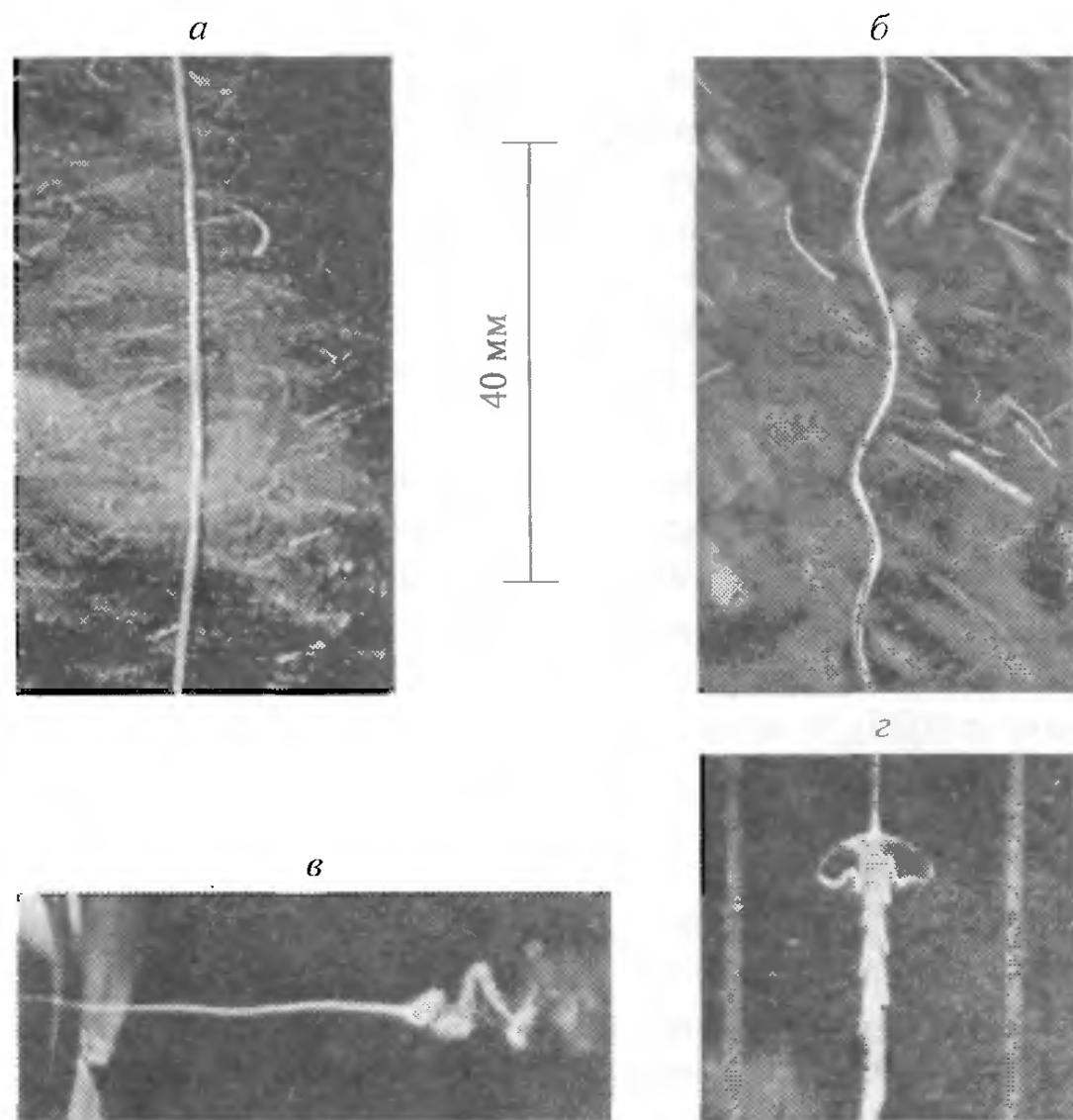


Рис. B.2. Невозмущенная (а) и возмущенные (б–г) вихревые нити. а, б – тангенциальная гидравлическая камера [Alekseenko, Shtork, 1992]; в – закрученная воздушная струя, $Re = 1,4 \cdot 10^4$, диаметр сопла 152 мм [Panda, McLaughlin, 1994]; г – камера с вращающимся дном $\varnothing 91,3$ мм [Spohn et al., 1998]

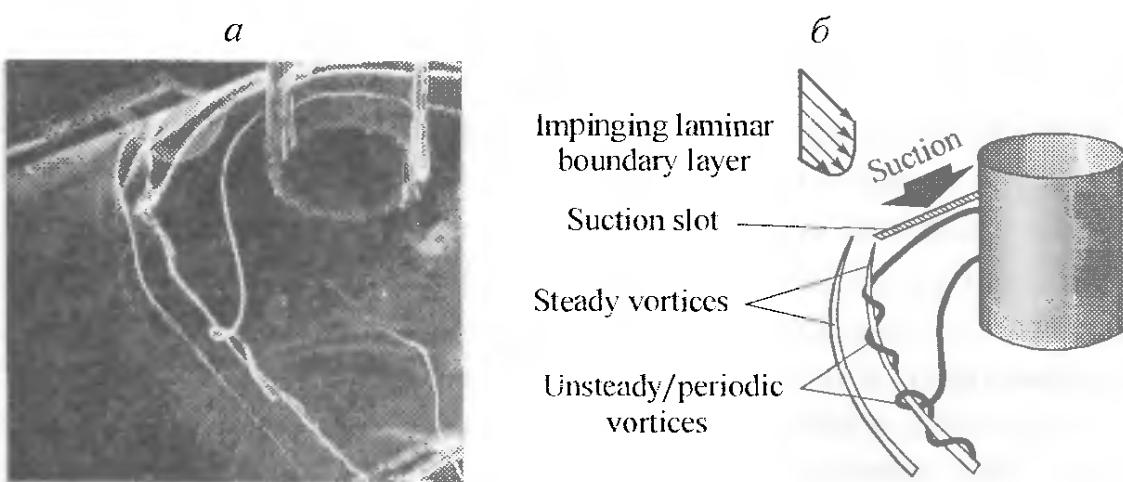


Рис. B.3. Формирование вихревых нитей в пограничном слое перед препятствием (цилиндром) при наличии щелевого отсоса [Seal, Smith, 1997]: а – визуализация водородными пузырьками; б – схема, щель размером 64×2 мм расположена на расстоянии 88,5 мм от цилиндра $\varnothing 89$ мм

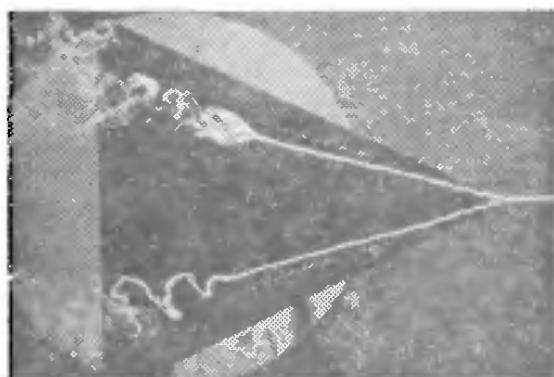


Рис. В.4. Пузырьковый (сверху) и спиральный (снизу) типы распада вихря при обтекании треугольного крыла. Визуализация краской в водяном канале [Lambourne, Bryer, 1961]. Скорость потока 5,1 см/с

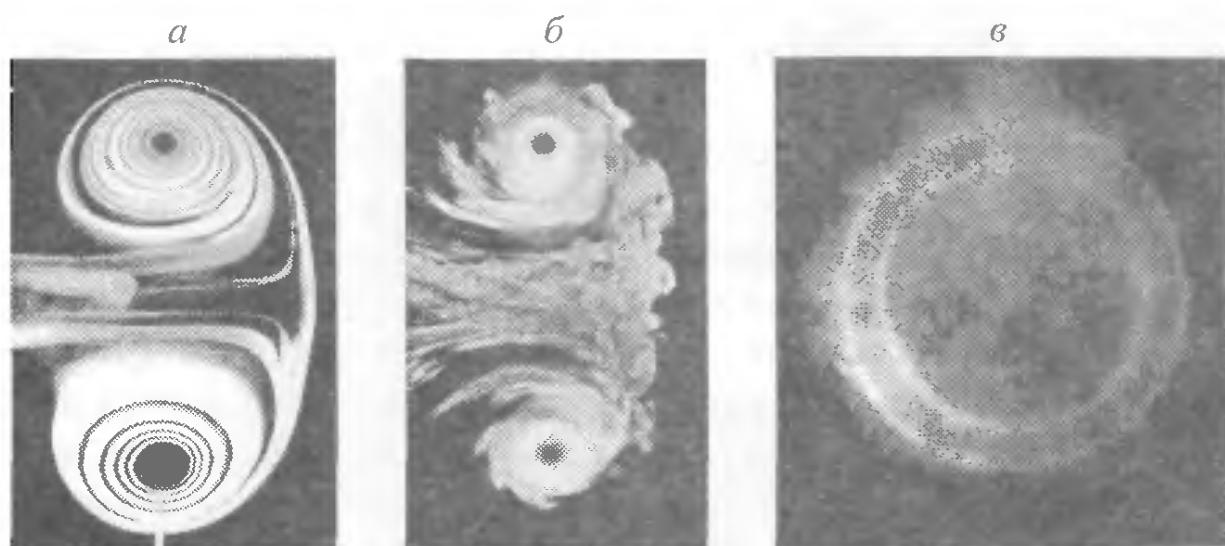


Рис. В.5. Ламинарные (а) и турбулентные (б, в) вихревые колыца. Визуализация дымом [Ахметов, 2001]

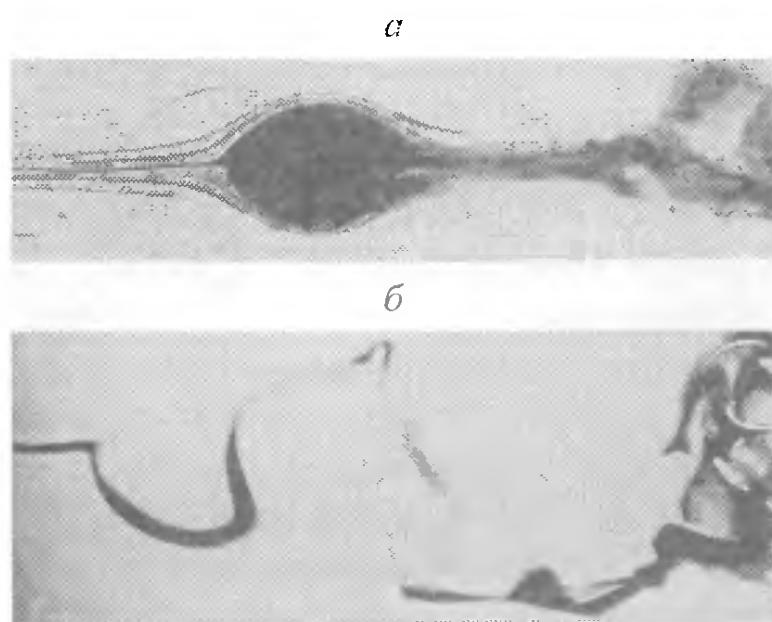


Рис. В.6. Пузырьковый (а) и спиральный (б) типы распада вихря. Визуализация закрученного течения краской в слаборасширяющейся трубе [Sarpkaya, 1971]

Концентрированные вихри имеют прямое отношение к когерентным структурам, которые часто вполне можно отождествлять с вихрями и которые играют принципиальную роль и в процессах ламинарно-турбулентного перехода, и в развитом турбулентном движении [Бойко и др., 1999; Каchanov, 1994]. В первую очередь они представлены продольными вихрями в турбулентном пограничном слое [Kim *et al.*, 1971], а также подковообразными вихревыми структурами (см. обзор Кантуолла [1984]). Когерентные структуры в виде вихревых колец отчетливо наблюдаются в осесимметричных свободных сдвиговых потоках. Такой пример для импактной струи приведен на цв. рис. В.2, где экспериментальные данные Alekseenko *et al.* [2002] изображены в виде как векторного поля скоростей, так и поля завихренности. Особенно плодотворной концепция вихревых нитей – квантовых вихрей – оказалась при разработке теории турбулентности сверхтекущего гелия [Доннелли, 1989, Nemirovskii, Tsubota, 2000].

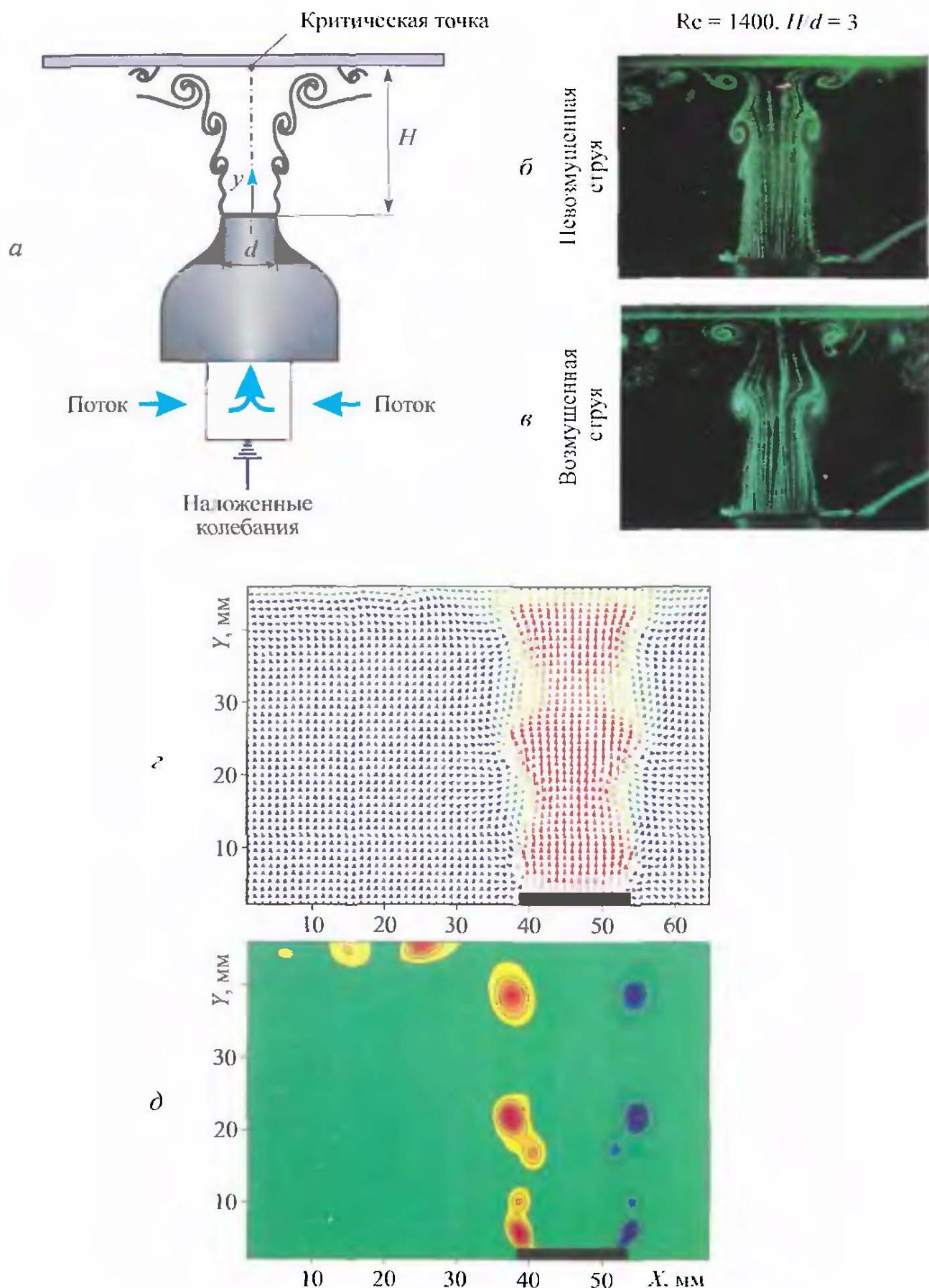
Важную и даже определяющую роль концентрированные вихри играют и в технике. Так, в вихревом расходомере именно по частоте прецессии концентрированного вихря в закрученном потоке определяют расход жидкости. Возникновение прецессирующего вихревого жгута за рабочим колесом гидротурбины вызывает интенсивные пульсации давления, что может привести к катастрофическим последствиям. Сложные вихревые структуры обнаружены в вихревой трубке Ранка – Хилша (см. рис. В.7) [Арбузов и др., 1997; Пиратишвили и др., 2000]. Вихревые нестационарные структуры оказывают воздействие на процессы горения в вихревых топочных камерах и вихревых горелках [Гупта и др., 1987; Алексеенко, Окулов, 1996]. При обтекании треугольного крыла формирование вихревых жгутов и их распад влияют на подъемную силу и управляемость крыла. Главным механизмом интенсификации теплообмена на поверхности с лункообразными кавернами опять же является образование протяженных концентрированных вихрей или, как говорят, смерчеобразных структур.

Среди природных явлений, имеющих отношение к концентрированным вихрям, несомненно, следует назвать смерчи (или торнадо, см. цв. рис. В.1) [Наливкин, 1969], а также их мелкомасштабные аналоги – водяную воронку и пыльный “дьявол”. Такие макромасштабные явления, как океанические вихри или атмосферные циклоны (антициклоны), тоже относятся к концентрированным вихрям. Но их масштабы сопоставимы (и большие) с толщиной слоя атмосферы (океана), вследствие чего их описание имеет свою специфику.

Концентрированные вихри проявляются и на астрофизическом уровне. Так, гидродинамический механизм формирования спиральной структуры галактик связан с генерацией нелинейных локализованных возмущений типа вихрей Россби, которые и являются источником возбуждения спиральных волн в галактическом диске [Незлин, Снежкин, 1990; Alekseenko, Cherep, 1994].



Кв. рис. В1. Наблюдаемые формы торнадо. а – д – публикация Национальной администрации по океану и атмосфере (NOAA), <http://www.photolib.noaa.gov/dssl/>; е, ж – фотографии с Интернет-страницы <http://www.tornadochaser.net/may72002a.html>



Цв. рис. B2. Коherentные структуры в затонленной импактной струе [Alekseenko et al., 2002]:
 а – схема течения; б, в – визуализация водородными пузырьками невозмущенной струи и струи, возбуждаемой внешними колебаниями с числом Струхала $Sh = 0,5$; г – векторное поле скоростей и д – поле завихренности, измеренные методом Particle Image Velocimetry, число Рейнольдса $Re = 7600$, цвет отображает величину скорости и завихренности соответственно

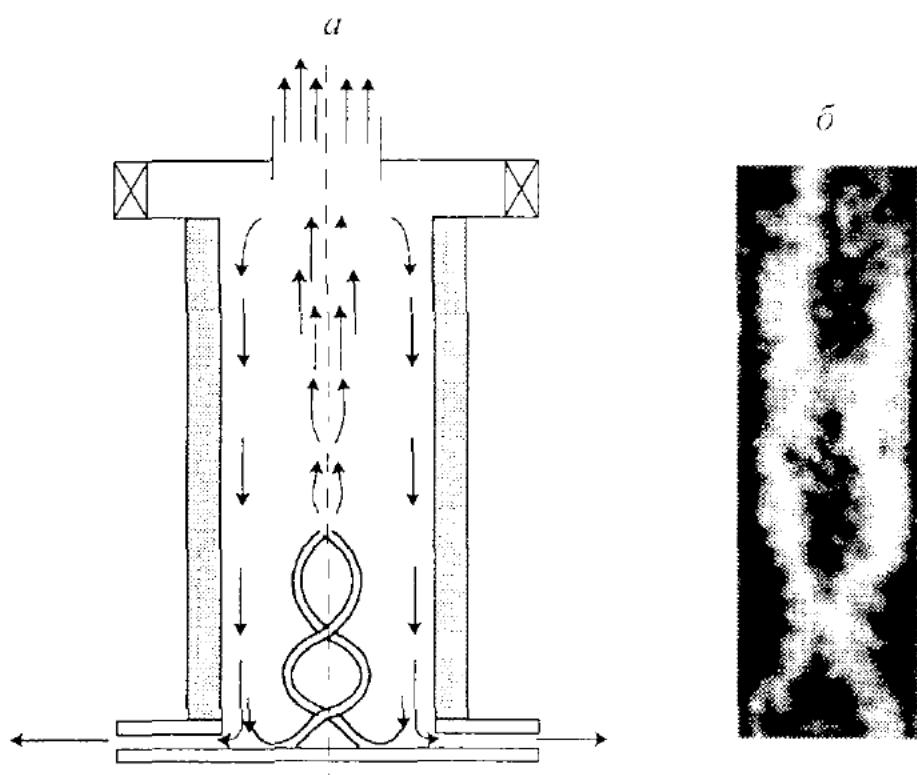


Рис. B.7. Двойной спиральный вихрь в вихревой трубке Ранка – Хилла [Арбузов и др., 1997]: а – схема течения; б – Гильберт-визуализация течения с экспозицией $2,5 \cdot 10^{-3}$ с (визуализация пространственного градиента оптической плотности), камера квадратного сечения 34×34 мм

Перечисленные характерные свойства реальных концентрированных вихрей демонстрируют сложность и многообразие их поведения, что влечет за собой большие трудности как при математическом описании, так и экспериментальном исследовании. В связи с этим теории концентрированных вихрей базируются преимущественно на приближенных математических моделях. Наиболее распространенный подход к описанию динамики деформированного протяженного вихря заключается в применении закона Био – Савара с использованием приближения тонкой вихревой нити, хотя слабовозмущенные состояния колоннообразного вихря можно рассчитать относительно просто аналитическими или численными методами на основе точных уравнений Эйлера или Навье – Стокса. Что касается эксперимента, то существует ограниченное количество работ, где получены результаты по устойчивости и динамике концентрированных вихрей, приемлемые для детальной проверки теоретических моделей.

Указанные трудности стали причиной того, что к настоящему времени еще не сложилась целостная картина динамики концентрированных вихрей. В предлагаемой книге сделана попытка собрать и систематизировать сведения, позволяющие понять основные свойства концентрированных вихрей. При этом не рассматриваются многочисленные примеры и приложения, которые могут быть предметом для написания отдельной книги (или книг).

Г л а в а 1

УРАВНЕНИЯ И ЗАКОНЫ ВИХРЕВОГО ДВИЖЕНИЯ

1.1. ЗАВИХРЕННОСТЬ. ЦИРКУЛЯЦИЯ

Важнейшим понятием в динамике жидкости является *завихренность* (или *вектор вихря*), которая представляет собой векторную величину и в декартовой системе координат (x, y, z) определяется через проекции (u, v, w) вектора скорости \mathbf{u} как

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}, t) \equiv \nabla \times \mathbf{u} = \epsilon_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (1.1)$$

где ϵ_{ijk} – единичный тензор 3-го ранга Леви – Чивита [Седов, 1970]. Движение сплошной среды с нулевой завихренностью ($\nabla \times \mathbf{u} = 0$) называется *безвихревым*. Из определения (1.1) и формул векторного анализа следует, что

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) = 0, \quad (1.2)$$

т. е. вектор вихря является *соленоидальным*.

Чтобы понять физический смысл завихренности, проанализируем относительное движение среды в окрестности некоторой точки $M(\mathbf{r})$ в данный момент времени. Пусть в этой точке скорость жидкости равна $\mathbf{u}(\mathbf{r})$. Тогда в некоторой близлежащей точке $M'(\mathbf{r} + \delta\mathbf{r})$ изменение скорости можно определить путем разложения в ряд до величин первого порядка малости

$$\delta u_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \delta x_j.$$

Производная $\partial u_i / \partial x_j$ есть тензор 2-го ранга, который можно представить в виде суммы симметричного и антисимметричного тензоров

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}^{(s)} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}^{(a)}.$$

Здесь симметричная часть расписывается как

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j}^{(s)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \equiv e_{ij}. \quad (1.3)$$

Величина e_{ij} называется *тензором скоростей деформации*, а соответствующая часть скорости ($e_{ij} \delta x_j$) описывает *чисто деформационное движение*.

Антисимметричный тензор имеет вид

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j}^{(a)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right),$$

и его можно выразить через компоненты завихренности (1.1)

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j}^{(a)} = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \omega_k.$$

Соответствующая часть скорости $\delta \mathbf{u}$ записывается как

$$-\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \omega_k \delta x_j \quad \text{или} \quad \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \omega_j \delta x_k, \quad \text{или} \quad \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \times \delta \mathbf{r},$$

и она описывает *вращательное движение* малого элемента как твердого тела с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}/2$. Действительно, в случае твердотельного вращения с угловой скоростью $\boldsymbol{\Omega}$

$$\delta \mathbf{u} = \boldsymbol{\Omega} \times \delta \mathbf{r}.$$

Следовательно,

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}. \quad (1.4)$$

Таким образом, любое движение сплошной среды можно разложить на чисто деформационное, вращательное и, естественно, поступательное движение. А физический смысл завихренности состоит в том, что она численно равна удвоенной локальной угловой скорости среды. Соответственно выражение для скорости в точке $M'(\mathbf{r} + \delta \mathbf{r})$ примет вид

$$u_i(\mathbf{r} + \delta \mathbf{r}) = u_i(\mathbf{r}) + e_{ij} \delta x_j + \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \omega_j \delta x_k, \quad (1.5)$$

где производные в e_{ij} и ω_j берутся в точке $M(\mathbf{r})$. Формула (1.5) отражает содержание I теоремы Гельмгольца.

Помимо вектора вихря $\boldsymbol{\omega}$ другим важным понятием динамики завихренной жидкости является *циркуляция* Γ . Эта величина представляет собой скаляр и определяется как криволинейный интеграл от скорости жидкости \mathbf{u} по замкнутому контуру s

$$\Gamma = \oint_s \mathbf{u} ds. \quad (1.6)$$

Если кривая стягиваемая (т. е. стягивается в точку внутри сплошной среды), то можно применить *теорему Стокса* и преобразовать линейный интеграл в поверхностный (рис. 1.1)

$$\Gamma = \oint_S \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s} = \int_S \operatorname{rot} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = \int_S \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (1.7)$$

Здесь S – произвольная поверхность, ограниченная контуром s ; \mathbf{n} – единичный вектор нормали. Кроме того, учтена связь (1.1) между ротором скорости и завихренностью. Правило обхода контура показано на рисунке. Соотношение (1.7) означает, что поток вихря через произвольную открытую поверхность равен циркуляции скорости вдоль замкнутой кривой. Но это утверждение справедливо для односвязных областей течения, где любой замкнутый контур является стягиваемым.

Кинематику завихренных течений удобно описывать с использованием понятий вихревых линий и вихревых трубок. Они вводятся аналогично понятиям *линии тока* (линии, в любой точке которой касательная совпадает с направлением вектора скорости) и *трубки тока* (части жидкости, ограниченной поверхностью, состоящей из линий тока). В соответствии с этим *вихревая линия* – это линия в жидкости, касательная к которой в каждой точке параллельна локальному вектору завихренности, а *вихревая трубка* представляет собой множество вихревых линий, проходящих через каждую точку некоторой замкнутой поверхности в жидкости. Вихревые линии, проходящие через ее границу, образуют боковую поверхность вихревой трубки. Из определения вихревой трубки следует, что вектор вихря параллелен боковой поверхности вихревой трубки, т. е. $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} = 0$.

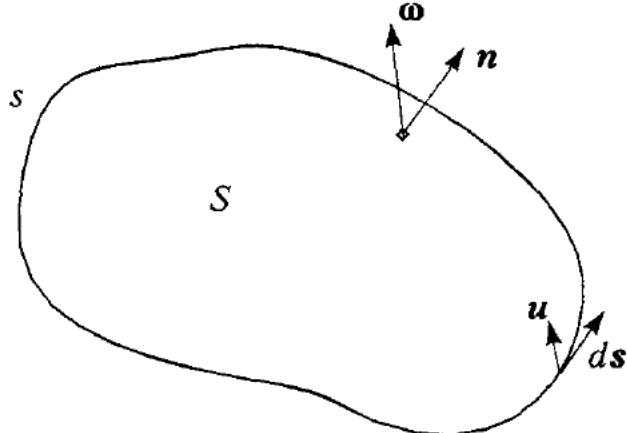


Рис. 1.1. К выводу интегрального соотношения (1.7) между циркуляцией и завихренностью

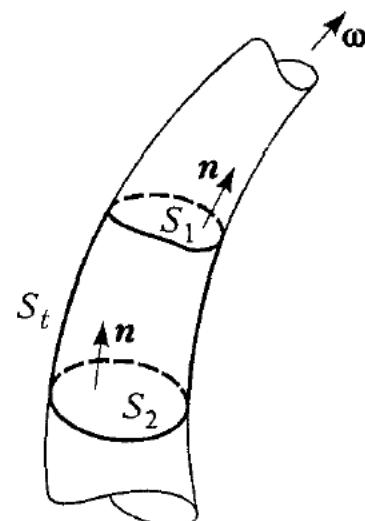


Рис. 1.2. К выводу II теоремы Гельмгольца

Рассмотрим часть вихревой трубы, ограниченную двумя произвольными открытыми поверхностями S_1 , S_2 и боковой поверхностью S_t (рис. 1.2). Тогда интеграл по поверхности от потока вихря можно преобразовать с помощью формулы Гаусса – Остроградского в объемный интеграл следующим образом:

$$\oint_S \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \nabla \boldsymbol{\omega} dV = 0. \quad (1.8)$$

Здесь правая часть тождественно обращается в нуль в силу соленоидальности поля завихренности (1.2). Расписывая левую часть (1.8), получим

$$\oint_S \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dS = \oint_{S_1} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dS - \oint_{S_2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{S_t} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dS = 0.$$

Так как поток вихря через боковую поверхность вихревой трубы равен нулю, то последнее соотношение означает, что *поток вихря через любое поперечное сечение вихревой трубы остается неизменным* в данный момент времени. Последнее утверждение составляет содержание II теоремы Гельмгольца. Из этой теоремы следует, что поток завихренности можно считать характеристикой вихревой трубы, которая называется *силой* или *интенсивностью вихревой трубы*. С другой стороны, если к вихревой трубке применить соотношение (1.7), то можно заключить, что *интенсивность вихревой трубы равна циркуляции* скорости по замкнутому контуру, лежащему на поверхности трубы и один раз ее охватывающему (*теорема Стокса*).

Еще одно следствие II теоремы Гельмгольца состоит в том, что *вихревые трубы не могут заканчиваться в сплошной среде*. Действительно, если сечение вихревой трубы становится равным нулю, то в соответствии с условием теоремы угловая скорость частиц жидкости возросла бы до бесконечности. Очевидно, чтобы не противоречить данному следствию, вихревые трубы могут быть либо замкнутыми, либо уходящими на бесконечность, либо заканчивающимися на твердых или свободных поверхностях.

Выведем дополнительное важное соотношение между циркуляциями скорости и ускорения по замкнутому жидкому контуру. С этой целью вначале распишем субстанциональную производную от циркуляции скорости по жидкому незамкнутому контуру $M P$

$$\frac{d}{dt} \int_M^P \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} = \int_M^P \frac{d\mathbf{u}}{dt} \cdot d\mathbf{r} + \int_M^P \mathbf{u} \cdot \frac{d}{dt} (\delta \mathbf{r}).$$

Учитывая, что $\frac{d}{dt} (\delta \mathbf{r}) = \delta \mathbf{u}$, имеем

$$\int\limits_M^P \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{u} = \int\limits_M^P \delta \left(\frac{\mathbf{u}^2}{2} \right) = \frac{1}{2} (u_P^2 - u_M^2).$$

Тогда, стягивая точки M и P в одну точку и получая таким образом замкнутый контур s , приходим к выражению

$$\frac{d}{dt} \Gamma(\mathbf{u}) = \Gamma(\dot{\mathbf{u}}), \quad (1.9)$$

где $\dot{\mathbf{u}} = d\mathbf{u}/dt$, т. е. субстанциональная производная от циркуляции скорости по замкнутому жидкому контуру равна циркуляции ускорения по тому же контуру. Это есть *теорема Кельвина* о циркуляции.

Описанные выше свойства движения завихренной жидкости представляют собой чисто кинематические теоремы, не связанные со специфическими свойствами жидкостей или особенностями моделей их движения. Доказательства теорем основывались лишь на общем свойстве сплошности (непрерывности) среды. Вот почему сформулированные в этом параграфе выводы хорошо отражают действительность. Другие вопросы движения завихренной жидкости относятся к динамике и будут существенно зависеть от выбираемой модели течений.

1.2. ДИНАМИКА ЗАВИХРЕННОЙ ЖИДКОСТИ

1.2.1. Уравнения движения идеальной жидкости

Здесь и далее, если специально не оговаривается, будет рассматриваться *идеальная* жидкость. Теория вихрей в идеальной жидкости, благодаря своей относительной простоте, позволяет решить значительное количество конкретных задач, имеющих практическую ценность. Прежде всего это замечание относится к решению важного вопроса о том, какие движения в идеальной жидкости вызываются наличием в ней областей, завихренность которых отлична от нуля. Движение идеальной жидкости описывается *уравнениями Эйлера*

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} \equiv \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \mathbf{g} \quad (1.10)$$

и *уравнением сохранения массы*

$$\frac{d\rho}{dt} \equiv \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla \rho = -\rho \nabla \cdot \mathbf{u} \quad \text{или} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (1.11)$$

Уравнения записаны для общего случая сжимаемой среды. Здесь \mathbf{g} – внешняя сила на единицу массы; p – давление; ρ – плотность. Преобразуем (1.10), учитывая векторное тождество $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \nabla(u^2/2) + \text{rot } \mathbf{u} \times \mathbf{u}$. В результате получаем *уравнение Громеки – Ламба*

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{u^2}{2} \right) + \text{rot } \mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{g} - \frac{\nabla p}{\rho}. \quad (1.12)$$

Рассмотрим важный для практики случай, когда движение баротропное, а силы потенциальные, т. е. $\mathbf{g} = -\nabla \Pi$, где Π – потенциал массовой силы, а $\rho = \rho(p)$ и соответственно существует функция

$$\mathcal{P}(p) = \int \frac{dp}{\rho(p)}.$$

Тогда уравнение Громеки – Ламба примет вид

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla H + \text{rot } \mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad (1.13)$$

где $H \equiv u^2/2 + \mathcal{P} + \Pi$. Наконец, применяя к (1.13) операцию *rot* и вводя вихренность, получаем *уравнение Гельмгольца*

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{u}, \quad (1.14)$$

которое в частном случае несжимаемой среды запишется как

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} \quad \text{или} \quad \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \text{rot}(\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}). \quad (1.15)$$

Главным преимуществом уравнения Гельмгольца по сравнению с уравнением Эйлера (1.10) является отсутствие в (1.14) давления.

Полезно записать *уравнения движения в неинерциальной системе координат*. Наряду с неподвижной системой координат (x, y, z) введем в рассмотрение подвижную систему координат (x', y', z') со скоростью начала координат \mathbf{v}_0 и угловой скоростью ее вращения $\boldsymbol{\Omega}_0$. Обозначим через \mathbf{v} вектор относительной скорости частицы жидкости. Учитывая значение переносной скорости $\mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\Omega}_0 \times \mathbf{r}$, вектор абсолютной скорости запишется в виде $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\Omega}_0 \times \mathbf{r}$. На основании теоремы Кориолиса [Кочин, Кибель, Розе, 1963],

абсолютное ускорение частицы жидкости будет складываться из относительного $d\mathbf{v}/dt$ и переносного $d\mathbf{v}_0/dt + d\Omega_0/dt \times \mathbf{r} + \Omega_0 \times (\Omega_0 \times \mathbf{r})$ ускорений, а также из ускорения Кориолиса $2(\Omega_0 \times \mathbf{v})$. Учитывая, что в (1.12) входит абсолютное ускорение, уравнение Громеки – Ламба для относительного движения принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial' \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \frac{\mathbf{v}^2}{2} - \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v} + 2(\Omega_0 \times \mathbf{v}) = \\ = -\frac{\nabla p}{\rho} + \mathbf{g} - \frac{d\mathbf{v}_0}{dt} - \frac{d\Omega_0}{dt} \times \mathbf{r} - \Omega_0 \times (\Omega_0 \times \mathbf{r}), \end{aligned}$$

где штрих у производной по времени означает дифференцирование в подвижной системе координат.

В некоторых случаях удобно, пользуясь подвижной системой координат, рассматривать абсолютное движение жидкости

$$\frac{\partial' \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{\mathbf{u}^2}{2} - \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v}_0 + \Omega_0 \times \mathbf{r}) \right) - (\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v}_0 + \Omega_0 \times \mathbf{r})) \times \text{rot } \mathbf{u} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \mathbf{g}.$$

1.2.2. Теоремы динамики идеальной завихренной жидкости

Используя разные формы уравнений движения и рассматривая случай баротропного движения в поле потенциальных сил, можно получить ряд следствий, имеющих принципиальное значение для динамики завихренной жидкости. Впервые они были сформулированы Гельмгольцем [Helmholtz, 1858].

Вначале обратимся к теореме Кельвина (1.9) и распишем правую часть с учетом (1.10):

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \oint \frac{d\mathbf{u}}{dt} d\mathbf{s} = \oint \left(-\frac{\nabla p}{\rho} + \mathbf{g} \right) d\mathbf{s} = -\oint \nabla(\mathcal{P} + \Pi) d\mathbf{s} \equiv 0.$$

Здесь интеграл от $\nabla(\mathcal{P} + \Pi)$ по замкнутому контуру равен нулю при условии однозначности функций \mathcal{P} и Π . Для $\mathcal{P} = \mathcal{P}(p)$ это очевидно. Следовательно, для баротропного движения в поле консервативных сил с однозначным потенциалом циркуляция по любому замкнутому жидкому контуру постоянна

$$\frac{d\Gamma}{dt} = 0. \quad (1.16)$$

Применяя теорему Стокса (1.7), можно заключить, что неизменным остается и поток завихренности через жидкую поверхность S , охваченную жидкой замкнутой кривой

$$\frac{d}{dt} \int_S \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dS = 0. \quad (1.17)$$

Из (1.16), (1.17) следует, что *вихревые линии и трубы движутся вместе с жидкостью, причем интенсивность вихревой трубы не меняется со временем*. Покажем это, используя рассуждения Бэтчелора [1973]. Рассмотрим жидкую трубку (рис. 1.3), тождественно совпадающую с произвольной вихревой трубкой в некоторый момент времени t_0 . Выделим произвольный замкнутый жидкий контур s_c на поверхности вихревой трубы, один раз опоясывающий трубку. В соответствии с уравнением (1.16) циркуляция по такому жидкому контуру будет оставаться неизменной во время движения. Теперь выделим опять произвольный замкнутый жидкий контур небольших размеров s_s , лежащий на поверхности вихревой трубы, но не охватывающий ее. Поток завихренности через поверхность, ограниченную таким контуром, очевидно, равен нулю и остается нулевым, согласно (1.17), во все последующие моменты времени. Подобная ситуация возможна, если эти жидкие контуры остаются на поверхности вихревой трубы, не охватывая ее. С другой стороны, интенсивность вихревой трубы будет сохраняться во времени в силу инвариантности циркуляции по замкнутым жидким контурам, охватывающим трубку. Эти рассуждения и доказывают вышеприведенное утверждение для случая вихревой трубы. Аналогичные выводы для вихревой линии получаются, если поперечное сечение вихревой трубы стянуть в точку и таким образом в пределе перейти к вихревой линии.

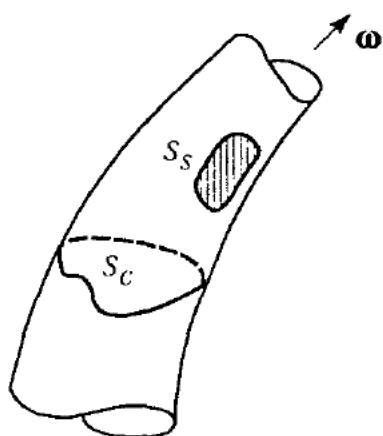


Рис. 1.3. Схема произвольной вихревой трубы

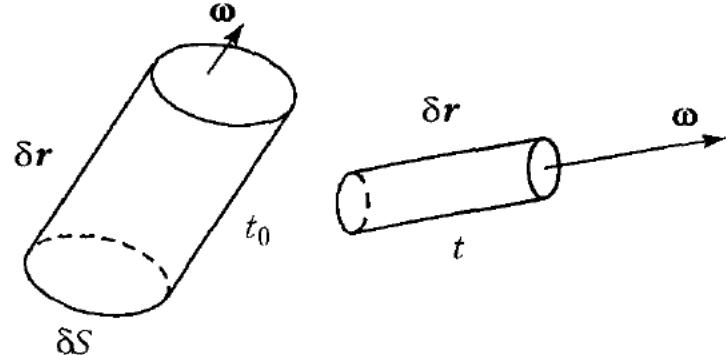


Рис. 1.4. К понятию растяжения вихревых линий

Из закона сохранения интенсивности вихревой трубы следует важное соотношение между завихренностью и длиной жидкого элемента. Пусть в момент времени t_0 длина малого жидкого элемента (элемента вихревой трубы) есть $\delta r(t_0)$, а площадь поперечного сечения – $\delta S(t_0)$ (рис. 1.4). В силу малости элемента направления векторов δr и ω совпадают. Пусть в последующий момент времени t трубка изменит свои размеры и положение, как это показано на рисунке. Тогда из закона сохранения потока завихренности (1.17) имеем

$$|\omega(t)|\delta S(t) = |\omega(t_0)|\delta S(t_0),$$

а из закона сохранения массы

$$\rho \cdot \delta S \cdot \delta s|_t = \rho \cdot \delta S \cdot \delta s|_{t_0}.$$

С учетом направления векторов получаем следующее результирующее соотношение:

$$\frac{(\omega/\rho)_t}{|\omega/\rho|_{t_0}} = \frac{\delta s(t)}{|\delta s(t_0)|} \quad (1.18)$$

или для несжимаемой жидкости

$$\frac{\omega(t)}{|\omega(t_0)|} = \frac{\delta s(t)}{|\delta s(t_0)|}. \quad (1.19)$$

Выражение (1.19) имеет прозрачный физический смысл. При изменении размеров малого жидкого элемента вектор локальной завихренности меняется так же, как и длина малого элемента. Вводя понятие *растяжения вихревых линий* как растяжения малого жидкого элемента вдоль вихревой линии, можно утверждать, что растяжение вихревых линий приводит к *интенсификации завихренности*. Этот эффект крайне важен для объяснения многих явлений, связанных с закрученными потоками, а также для анализа турбулентности. Однако в последнем случае в силу геометрически сложной деформации жидкого элемента для оценки поведения завихренности вводят интегральную величину $\int 1/2 \omega^2 dV$.

В случае бывшихревого движения справедлива *теорема Лагранжа*: если некоторый объем жидкости находится в безвихревом движении, то он остается безвихревым и в последующие моменты времени. При этом по-прежнему полагается, что жидкость идеальная, движение баротропное, а объемные силы консервативны. Доказательство следует из уравнения Гельмгольца (1.14) и ус-

ловия аналитичности функции $\omega(t)$ при использовании лагранжевых координат. Пусть в момент времени t_0 $\omega(t_0) = 0$. Согласно (1.14), тогда субстанциональная производная $d\omega/dt$ при $t = t_0$ также равна нулю. Проводя повторные дифференцирования (1.14), можно показать, что все последующие производные по времени также обращаются в нуль при $t = t_0$. Это означает, что при условии аналитичности $\omega(t)$ завихренность остается нулевой в любой момент времени $t > t_0$.

Если потребовать, чтобы потенциал объемных сил был однозначным, тогда теорема Лагранжа легко доказывается на основе уравнения (1.17) без привлечения условия аналитичности $\omega(t)$. Действительно, из (1.17) получаем, что поток завихренности через любую незамкнутую поверхность S постоянен во времени

$$\int_S \omega \cdot \mathbf{n} dS = \text{const.}$$

Если в некоторый момент времени завихренность всюду в контрольном объеме равна нулю, то $\text{const} = 0$. В силу произвольности выбора поверхности S и направления \mathbf{n} завихренность ω будет нулевой всюду и в любой момент времени, что и доказывает теорему Лагранжа.

1.2.3. Теорема Бернулли

Одним из наиболее важных законов сохранения в динамике жидкости является *теорема Бернулли* [Лойцянский, 1973], которая гласит: *при стационарном баротропном движении идеальной жидкости в поле потенциальных объемных сил величина H (трехчлен Бернулли, см. (1.13)) сохраняет постоянное значение вдоль линии тока*

$$H = u^2/2 + \mathcal{P} + \Pi = \text{const} \quad (\text{вдоль линии тока}).$$

Данный закон легко выводится из уравнения Громеки – Ламба (1.13). Действительно, из условия стационарности первый член в (1.13) обращается в нуль. Далее, умножим (1.13) скалярно на \mathbf{u} . Очевидно, $\mathbf{u} \cdot (\text{rot } \mathbf{u} \times \mathbf{u}) = 0$. Тогда $\mathbf{u} \cdot \nabla H = 0$ или $u(u/u \cdot \nabla H) = 0$, откуда, с учетом определения производной по направлению, следует: $dH/ds = 0$, что и доказывает теорему Бернулли. Здесь d/ds означает производную, взятую вдоль линии тока или траектории жидкости, что эквивалентно в случае стационарного движения.

Если же уравнение Громеки – Ламба умножить скалярно на вектор завихренности ω , то аналогично получим: $\omega/\omega \cdot \nabla H = dH/ds = 0$. Теперь d/ds означает производную вдоль вихревой линии. Таким образом, теорема Бернулли оказывается справедливой и для *вихревой линии*.

$$H = u^2/2 + \mathcal{P} + \Pi = \text{const} \quad (\text{вдоль вихревой линии}). \quad (1.20)$$

В общем случае константа Бернулли H имеет разные значения для разных линий тока и вихревых линий. Однако, если везде в пространстве

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} = 0, \quad (1.21)$$

то из (1.13) следует, что во всем пространстве, занятом сплошной средой, константа Бернулли сохраняет постоянное значение. Условие (1.21) выполняется в двух случаях: 1) $\boldsymbol{\omega} = 0$ – безвихревое движение; 2) $\boldsymbol{\omega} \parallel \mathbf{u}$ – так называемое *винтовое движение или винтовой поток* [Васильев, 1958], а по другим источникам [Dritschel, 1991] – *течение Бельтрами*. В последнем случае вихревые линии совпадают с линиями тока. Многочисленные примеры таких течений можно найти, например, у Васильева [1958].

В простейшем случае несжимаемой жидкости в поле гравитационных сил константа Бернулли имеет вид

$$H = u^2/2 + P/\rho + gz = \text{const}, \quad (1.22)$$

где координата z отсчитывается вдоль вертикальной оси, направленной вверх.

Уравнение Бернулли можно записать и для нестационарного движения, если оно безвихревое, т. е.

$$\nabla \times \mathbf{u} = 0.$$

Тогда существует скалярная функция $\phi(\mathbf{r}, t)$, называемая *потенциалом скорости* и определяемая из уравнения

$$\mathbf{u} = \nabla \phi. \quad (1.23)$$

Потенциал скорости определяется однозначно только для односвязной области. Подставляя (1.23) в первый член уравнения Громеки – Ламба (1.13), получаем

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + \mathcal{P} + \Pi = F(t). \quad (1.24)$$

Здесь $F(t)$ – произвольная функция времени, которая одинакова для всего поля течения и находится из граничных условий. Выражение (1.24) называют также *интегралом Коши – Лагранжа*.

1.2.4. Уравнения движения вязкой жидкости

Как отмечено выше, при анализе вихревого движения в основном применяется модель несжимаемой, однородной по плотности идеальной жидкости. Однако в некоторых задачах невозможно обойтись без учета эффектов вязкости. Вязкие жидкости описываются уравнениями Навье – Стокса

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \mathbf{g} - \frac{\nabla p}{\rho} + v \Delta \mathbf{u}, \quad (1.25)$$

где v – коэффициент кинематической вязкости. Уравнение неразрывности (1.11) при $\rho = \text{const}$ принимает простой вид

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \quad (1.26)$$

Получим обобщение уравнений Громеки – Ламба на случай вязких жидкостей. Из уравнения (1.26), тождества

$$\Delta \mathbf{u} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} \quad (1.27)$$

и определения завихренности (1.1) следует: $\Delta \mathbf{u} = -\operatorname{rot} \boldsymbol{\omega}$. Тогда для описания движения вязкой несжимаемой жидкости в потенциальном поле массовых сил векторное уравнение Громеки – Ламба запишется как

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla H + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} = -v \operatorname{rot} \boldsymbol{\omega}, \quad (1.28)$$

а в уравнении Гельмгольца (1.15) справа появится дополнительное слагаемое $v \Delta \boldsymbol{\omega}$ за счет применения операции rot к $v \Delta \mathbf{u}$ в уравнении Навье – Стокса (1.25). В результате имеем

$$\frac{d \boldsymbol{\omega}}{dt} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} + v \Delta \boldsymbol{\omega} \quad \text{или} \quad \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} + v \Delta \boldsymbol{\omega}. \quad (1.29)$$

Из последнего уравнения следует, что в данной точке потока вязкой несжимаемой жидкости завихренность меняется вследствие конвекции (второе слагаемое слева), деформации и вращения жидкого элемента (первое слагаемое справа) и диффузии за счет вязкости (второе слагаемое справа).

1.3. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ В ОРТОГОНАЛЬНЫХ КООРДИНАТАХ

Для удобства дальнейшего использования приведем записи уравнения неразрывности (1.26), уравнений движения (1.10) или (1.25), уравнений Громеки – Ламба (1.12) или (1.28) и уравнений Гельмгольца (1.14) или (1.29) в произвольной ортогональной системе криволинейных координат, а также в наиболее часто используемых случаях: в декартовых, цилиндрических и сферических координатах. Отметим, что переход к уравнениям движения идеальной жидкости для любой формы записи уравнений формально получается, если положить $\nu = 0$.

1.3.1. Произвольная ортогональная система криволинейных координат

Рассмотрим произвольную *ортогональную систему криволинейных координат* q_1, q_2, q_3 , связанных с декартовыми координатами соотношениями

$$q_k = q_k(x, y, z), \quad k = 1, 2, 3.$$

Уравнения

$$q_k(x, y, z) = \text{const}, \quad k = 1, 2, 3$$

определяют семейство координатных поверхностей, а три *семейства кривых*, представленных уравнениями

$$\begin{cases} q_k(x, y, z) = \text{const} \\ q_n(x, y, z) = \text{const} \end{cases}, \quad k, n = 1, 2, 3; \quad k \neq n,$$

называются *координатными линиями*. Если единичные векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, направленные вдоль координатных линий, ортогональны во всех точках пространства, то криволинейные координаты называются *ортогональными*. В случае отличия от нуля якобиана преобразования координат его можно разрешить относительно декартовых координат и определить радиус-вектор произвольной точки в форме

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_1, q_2, q_3).$$

Бесконечно малое перемещение вдоль координатных линий будет определяться соответственно приращениями

$$d\mathbf{r}_k = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k} dq_k, \quad k = 1, 2, 3.$$

Учитывая ортогональность криволинейной системы координат, квадрат длины линейного элемента запишем в виде

$$ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k} \right)^2 dq_k = \sum_{k=1}^3 L_k^2 dq_k,$$

где $L_k(q_1, q_2, q_3) = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_k} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_k} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_k} \right)^2}$ – коэффициенты Ламе.

Приведем основные операции векторного исчисления в криволинейных ортогональных координатах. Пусть φ – скалярная функция, \mathbf{b} – векторная функция, тогда

$$\operatorname{grad} \varphi = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \varphi}{L_k \partial q_k} \mathbf{e}_k,$$

$$\operatorname{div} \mathbf{b} = \frac{1}{L_1 L_2 L_3} \left[\frac{\partial (L_2 L_3 b_1)}{\partial q_1} + \frac{\partial (L_1 L_3 b_2)}{\partial q_2} + \frac{\partial (L_1 L_2 b_3)}{\partial q_3} \right],$$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{b} &= \frac{1}{L_2 L_3} \left[\frac{\partial (L_3 b_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial (L_2 b_2)}{\partial q_3} \right] \mathbf{e}_1 + \\ &+ \frac{1}{L_3 L_1} \left[\frac{\partial L_1 b_1}{\partial q_3} - \frac{\partial L_3 b_3}{\partial q_1} \right] \mathbf{e}_2 + \frac{1}{L_1 L_2} \left[\frac{\partial (L_2 b_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial (L_1 b_1)}{\partial q_2} \right] \mathbf{e}_3, \end{aligned}$$

$$\Delta \varphi = \frac{1}{L_1 L_2 L_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{L_2 L_3}{L_1} \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{L_1 L_3}{L_2} \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{L_1 L_2}{L_3} \frac{\partial \varphi}{\partial q_3} \right) \right].$$

В результате применения второй формулы к (1.26) *уравнение неразрывности* запишется в виде

$$\frac{\partial (L_2 L_3 u_1)}{\partial q_1} + \frac{\partial (L_1 L_3 u_2)}{\partial q_2} + \frac{\partial (L_1 L_2 u_3)}{\partial q_3} = 0. \quad (1.30)$$

Для записи уравнений Эйлера в произвольной ортогональной системе координат необходимо добавить представление для градиента по направлению от вектора $\mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{b}$, а для уравнений Навье – Стокса – еще и представление для оператора Лапласа, действующего на векторную функцию. Компоненты лапласиана могут быть вычислены путем замены скалярной функции в приве-

денном представлении оператора Лапласа на вектор $\mathbf{b} = b_1 \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2 + b_3 \mathbf{e}_3$ и вычисления соответствующих производных, в том числе и от $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Однако получающийся результат слишком сложен, и обычно для получения компонент $\Delta \mathbf{u}$ используют тождество (1.27) и приведенные выше формулы векторного анализа. Запишем уравнения движения идеальной жидкости в форме Громеки – Ламба в проекциях на направления $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ ортогональной криволинейной системы координат

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{1}{L_1} \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}{2} \right) - (u_2 \omega_3 - u_3 \omega_2) = \\ = g_1 - \frac{1}{\rho L_1} \frac{\partial p}{\partial q_1} - \frac{\nu}{L_2 L_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_2} (L_3 \omega_3) - \frac{\partial}{\partial q_3} (L_2 \omega_2) \right],$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{1}{L_2} \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}{2} \right) - (u_3 \omega_1 - u_1 \omega_3) = \\ = g_2 - \frac{1}{\rho L_2} \frac{\partial p}{\partial q_2} - \frac{\nu}{L_3 L_1} \left[\frac{\partial}{\partial q_3} (L_1 \omega_1) - \frac{\partial}{\partial q_1} (L_3 \omega_3) \right],$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial t} + \frac{1}{L_3} \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}{2} \right) - (u_1 \omega_2 - u_2 \omega_1) = \\ = g_3 - \frac{1}{\rho L_3} \frac{\partial p}{\partial q_3} - \frac{\nu}{L_1 L_2} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (L_2 \omega_2) - \frac{\partial}{\partial q_2} (L_1 \omega_1) \right].$$

Подставляя в них составляющие вектора завихренности $\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{u}$ и произведя в соответствии с приведенными выше формулами векторного анализа необходимые преобразования, получим запись *уравнений движения жидкости в произвольной ортогональной системе координат*

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} + \frac{1}{L_n} \sum_{k=1}^3 \frac{u_k}{L_k} \left[\frac{\partial}{\partial q_k} (L_n u_n) - u_k \frac{\partial L_k}{\partial q_n} \right] = g_k - \frac{1}{\rho L_k} \frac{\partial p}{\partial q_k} + \\ + \nu \frac{L_n}{L_1 L_2 L_3} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial q_k} \left\{ \frac{L_1 L_2 L_3}{L_n^2 L_k^2} \left[\frac{\partial}{\partial q_k} (L_n u_n) - \frac{\partial}{\partial q_n} (L_k u_k) \right] \right\}, \quad n = 1, 2, 3. \quad (1.31)$$

1.3.2. Декартова система координат

Наиболее простой вид уравнения движения несжимаемой жидкости (1.30), (1.31) приобретают в отсутствие массовых сил ($\mathbf{g} = 0$) в декартовой системе координат (x, y, z) , где коэффициенты Ламе $L_1 = L_2 = L_3 = 1$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + v \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + v \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0.\end{aligned}\tag{1.32}$$

Первые три уравнения (1.32) запишем в форме Громеки – Ламба

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) &= v \omega_z - w \omega_y - v \left(\frac{\partial \omega_z}{\partial y} - \frac{\partial \omega_y}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) &= w \omega_x - u \omega_z - v \left(\frac{\partial \omega_x}{\partial z} - \frac{\partial \omega_z}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) &= u \omega_y - v \omega_x - v \left(\frac{\partial \omega_y}{\partial x} - \frac{\partial \omega_x}{\partial y} \right).\end{aligned}\tag{1.33}$$

Запись обобщенного уравнения Гельмгольца (1.29) для течений вязкой жидкости в декартовых координатах имеет вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial \omega_x}{\partial t} + u \frac{\partial \omega_x}{\partial x} + v \frac{\partial \omega_x}{\partial y} + w \frac{\partial \omega_x}{\partial z} &= \omega_x \frac{\partial u}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial u}{\partial y} + \omega_z \frac{\partial u}{\partial z} + v \Delta \omega_x, \\ \frac{\partial \omega_y}{\partial t} + u \frac{\partial \omega_y}{\partial x} + v \frac{\partial \omega_y}{\partial y} + w \frac{\partial \omega_y}{\partial z} &= \omega_x \frac{\partial v}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial v}{\partial y} + \omega_z \frac{\partial v}{\partial z} + v \Delta \omega_y, \\ \frac{\partial \omega_z}{\partial t} + u \frac{\partial \omega_z}{\partial x} + v \frac{\partial \omega_z}{\partial y} + w \frac{\partial \omega_z}{\partial z} &= \omega_x \frac{\partial w}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial w}{\partial y} + \omega_z \frac{\partial w}{\partial z} + v \Delta \omega_z,\end{aligned}\tag{1.34}$$

где компоненты вектора завихренности определены по (1.1), а $\Delta = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2 + \partial^2 / \partial z^2$.

1.3.3. Цилиндрическая система координат

В цилиндрической системе координат (r, θ, z) коэффициенты Ламе имеют вид: $L_1 = 1, L_2 = r, L_3 = 1$. После их подстановки в (1.30) и (1.31) для несжимаемой жидкости получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + u_0 \frac{\partial u_r}{r \partial \theta} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{u_\theta^2}{r} &= g_r - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + v \left(\Delta u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right), \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + u_\theta \frac{\partial u_\theta}{r \partial \theta} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{u_r u_\theta}{r} &= g_\theta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{r \partial \theta} + v \left(\Delta u_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r^2} \right), \\ \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + u_\theta \frac{\partial u_z}{r \partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} &= g_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + v \Delta u_z, \\ \frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial(ru_z)}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \quad (1.35)$$

где u_r, u_θ, u_z – радиальная, окружная и осевая компоненты вектора скорости соответственно, а оператор

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

определен одинаково для всех уравнений в этом пункте.

В цилиндрических координатах уравнения в форме Громеки – Ламба (1.28) запишем только для случая движения жидкости в потенциальном поле массовых сил

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_r}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_r^2 + u_\theta^2 + u_z^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \Pi \right) &= u_\theta \omega_z - u_z \omega_r - v \left(\frac{\partial \omega_r}{r \partial \theta} - \frac{\partial \omega_\theta}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + \frac{\partial}{r \partial \theta} \left(\frac{u_r^2 + u_\theta^2 + u_z^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \Pi \right) &= u_z \omega_r - u_r \omega_z - v \left(\frac{\partial \omega_r}{\partial z} - \frac{\partial \omega_z}{\partial r} \right), \\ \frac{\partial u_z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{u_r^2 + u_\theta^2 + u_z^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \Pi \right) &= u_r \omega_\theta - u_\theta \omega_r + v \left(\frac{\partial(r\omega_0)}{r \partial r} - \frac{\partial \omega_r}{r \partial \theta} \right). \end{aligned} \quad (1.36)$$

Запись обобщенного уравнения Гельмгольца (1.29) соответственно примет вид

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \omega_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial \omega_r}{\partial r} + u_0 \frac{\partial \omega_r}{r \partial \theta} + u_z \frac{\partial \omega_r}{\partial z} = \\
 & = \omega_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \omega_0 \frac{\partial u_r}{r \partial \theta} + \omega_z \frac{\partial u_r}{\partial z} + v \left(\Delta \omega_r - \frac{\omega_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \omega_\theta}{\partial \theta} \right), \\
 & \frac{\partial \omega_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial \omega_\theta}{\partial r} + u_0 \frac{\partial \omega_\theta}{r \partial \theta} + u_z \frac{\partial \omega_\theta}{\partial z} - \frac{u_r \omega_0}{r} = \\
 & = \omega_r \frac{\partial u_0}{\partial r} + \omega_\theta \frac{\partial u_0}{r \partial \theta} + \omega_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} - \frac{u_0 \omega_r}{r} + v \left(\Delta \omega_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \omega_r}{\partial \theta} - \frac{\omega_\theta}{r^2} \right), \\
 & \frac{\partial \omega_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial \omega_z}{\partial r} + u_0 \frac{\partial \omega_z}{r \partial \theta} + u_z \frac{\partial \omega_z}{\partial z} = \\
 & = \omega_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \omega_0 \frac{\partial u_z}{r \partial \theta} + \omega_z \frac{\partial u_z}{\partial z} + v \Delta \omega_z,
 \end{aligned} \tag{1.37}$$

где компоненты вектора завихренности определяются по формулам

$$\omega_r = \frac{\partial u_z}{r \partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z}, \quad \omega_0 = \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r}, \quad \omega_z = \frac{\partial(r u_0)}{r \partial r} - \frac{\partial u_r}{r \partial \theta}. \tag{1.38}$$

1.3.4. Сферическая система координат

Приведем еще одну распространенную форму записи уравнений движения вязкой жидкости для сферической системы координат (r , θ – широта, ϕ – долгота), в которой коэффициенты Ламе имеют вид

$$L_1 = 1; \quad L_2 = r; \quad L_3 = r \sin \theta.$$

После их подстановки в (1.30) и (1.31) для сферических компонент вектора скорости – u_r , u_θ и u_ϕ – получим систему уравнений

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + u_\theta \frac{\partial u_r}{r \partial \theta} + \frac{u_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} - \frac{u_0^2 + u_\phi^2}{r} = \\
 & = g_r - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + v \left(\Delta u_r - \frac{2u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial(u_0 \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial u_0}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_0}{\partial r} + u_\theta \frac{\partial u_0}{r \partial \theta} + \frac{u_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial u_0}{\partial \phi} + \frac{u_r u_\theta}{r} - \frac{u_\phi^2 \cos \theta}{r \sin \theta} = \\
& = g_0 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{r \partial \theta} + v \left(\Delta u_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_0}{r^2 \sin^2 \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \right), \quad (1.39) \\
& \frac{\partial u_\phi}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\phi}{\partial r} + u_\theta \frac{\partial u_\phi}{r \partial \theta} + \frac{u_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_r u_\phi}{r} + \frac{u_\theta u_\phi \cos \theta}{r \sin \theta} = \\
& = g_\phi - \frac{1}{\rho} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \phi} + v \left(\Delta u_\phi + \frac{2}{r^2 \sin \theta} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} - \frac{u_\phi}{r^2 \sin^2 \theta} \right), \\
& \frac{\partial(r^2 \sin \theta u_r)}{\partial r} + \frac{\partial(r \sin \theta u_0)}{\partial \theta} + \frac{\partial r u_\phi}{\partial \phi} = 0,
\end{aligned}$$

где $\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$. В сферической системе координат уравнения в форме Громеки – Ламба (1.28) для движения жидкости в потенциальном поле массовых сил имеют вид

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial u_r}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_r^2 + u_0^2 + u_\phi^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \Pi \right) = u_\theta \omega_\phi - u_\phi \omega_0 - \frac{v}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial(\omega_\phi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial \omega_0}{\partial \phi} \right), \\
& \frac{\partial u_0}{\partial t} + \frac{\partial}{r \partial \theta} \left(\frac{u_r^2 + u_0^2 + u_\phi^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \Pi \right) = u_\phi \omega_r - u_r \omega_\phi - \frac{v}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial \omega_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(r \omega_\phi \sin \theta)}{\partial r} \right), \quad (1.40) \\
& \frac{\partial u_\phi}{\partial t} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{u_r^2 + u_0^2 + u_\phi^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \Pi \right) = u_r \omega_0 - u_0 \omega_r - \frac{v}{r} \left(\frac{\partial(r \omega_0)}{\partial r} - \frac{\partial \omega_r}{\partial \theta} \right),
\end{aligned}$$

а обобщенное уравнение Гельмгольца (1.29) примет вид

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \omega_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial \omega_r}{\partial r} + u_0 \frac{\partial \omega_r}{r \partial \theta} + \frac{u_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial \omega_r}{\partial \phi} = \omega_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \omega_0 \frac{\partial u_r}{r \partial \theta} + \\
& + \frac{\omega_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} + v \left[\Delta \omega_r - \frac{2 \omega_r}{r^2} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \left(\frac{\partial(\omega_0 \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial \omega_\phi}{\partial \phi} \right) \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \omega_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial \omega_\theta}{\partial r} + u_0 \frac{\partial \omega_\theta}{r \partial \theta} + \frac{u_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial \omega_\theta}{\partial \phi} - \frac{u_r \omega_0 - \omega_r u_\theta}{r} = \omega_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \\
 & + \omega_\theta \frac{\partial u_0}{r \partial \theta} + \frac{\omega_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial u_0}{\partial \phi} + v \left(\Delta \omega_0 + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \omega_r}{\partial \theta} - \frac{\omega_0}{r^2 \sin \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial \omega_\phi}{\partial \phi} \right), \quad (1.41) \\
 & \frac{\partial \omega_\phi}{\partial t} + u_r \frac{\partial \omega_\phi}{\partial r} + u_0 \frac{\partial \omega_\phi}{r \partial \theta} + \frac{u_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial \omega_\phi}{\partial \phi} - \frac{u_r \omega_\phi}{r} - \frac{u_0 \omega_\phi \cos \theta}{r \sin \theta} = \\
 & = \omega_r \frac{\partial u_\phi}{\partial r} + \omega_0 \frac{\partial u_\phi}{r \partial \theta} + \frac{\omega_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} - \frac{\omega_r u_\phi}{r} - \frac{\omega_\theta u_\phi \cos \theta}{r \sin \theta} + \\
 & + v \left(\Delta \omega_\phi + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \omega_r}{\partial \phi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial \omega_\theta}{\partial \phi} - \frac{\omega_\phi}{r^2 \sin^2 \theta} \right),
 \end{aligned}$$

где завихренность определяется соотношениями

$$\begin{aligned}
 \omega_r &= \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial (\sin \theta u_\phi)}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} \right), \\
 \omega_\theta &= \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \phi} - \frac{\partial (r \sin \theta u_\phi)}{\partial r} \right), \quad (1.42) \\
 \omega_\phi &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r u_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right).
 \end{aligned}$$

1.4. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ДВИЖЕНИЯ ЗАВИХРЕННОЙ ЖИДКОСТИ

1.4.1. Винтовые потоки (течения Бельтрами)

Основы теории винтовых потоков были заложены в 1881 г. И.С. Громеркой в его малоизвестной диссертации “Некоторые случаи движения несжимаемой жидкости” и независимо в 1889 г. в более известной работе итальянского математика Бельтрами (по этой причине винтовые потоки известны еще как *течения Бельтрами*). Наиболее подробное описание этого класса течений можно найти в книге О.Ф. Васильева [1958], которая легла в основу изложения данного пункта.

Как уже отмечалось в п. 1.2.3, винтовое движение является важным частным случаем завихренного установившегося движения идеальной жидкости.

сти, когда вихревые линии совпадают с линиями тока (кинематическое условие). Эквивалентное энергетическое условие заключается в том, что механическая энергия постоянна во всей массе движущейся жидкости, т.е. теорема Бернулли справедлива для всего потока в целом. В общем случае стационарного вихревого движения невязкой жидкости частицы, движущиеся по разным линиям тока, обладают неодинаковым количеством энергии, т.е. постоянная Бернулли имеет различные значения на разных линиях тока. Вместе с тем вдоль каждой линии тока количество энергии остается одинаковым, т.е. константа Бернулли сохраняется. Если все линии тока будут начинаться в области, где жидкость покойится или движется поступательно с одинаковыми скоростями, то и во всем остальном пространстве вследствие сохранения константы Бернулли вдоль линий тока количество энергии всех частиц будет одинаковым, т.е. поток будет либо потенциальным, либо винтовым. Важными примерами таких движений может стать образование закрученного течения при истечении струи из сосуда с покоящейся жидкостью или возникновение за изгибами русел и после поворотов в трубах циркуляционного движения в изначально равномерном потоке. Однако при применении модели винтовых течений даже в таких очевидных примерах следует помнить о том, что эти рассуждения справедливы только в рамках установившихся движений идеальной жидкости и остаются в силе только при таких режимах течений, где вязкость жидкости и нестационарность движения играют незначительную роль.

Кинематическое условие винтового движения может быть выражено следующим образом:

$$\mathbf{u} \times \operatorname{rot} \mathbf{u} = 0 \quad \text{или} \quad \operatorname{rot} \mathbf{u} = \lambda \mathbf{u}, \quad (1.43)$$

причем в общем случае λ может быть произвольной функцией координат

$$\lambda = \lambda(q_1, q_2, q_3).$$

Если $\lambda = \text{const}$, то винтовой поток называют *однородным*, в противном случае – *неоднородным*. Умножив обе части уравнения (1.43) скалярно на \mathbf{u} и воспользовавшись соотношениями

$$\operatorname{rot} \frac{\mathbf{u}}{u} = \frac{1}{u} \operatorname{rot} \mathbf{u} + \operatorname{grad} \frac{1}{u} \times \mathbf{u} \quad \text{и} \quad \mathbf{u} \cdot \left(\operatorname{grad} \frac{1}{u} \times \mathbf{u} \right) = 0,$$

найдем $\lambda = \mathbf{e} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{e}$, где $\mathbf{e} = \mathbf{u}/u$ – единичный вектор, коллинеарный вектору скорости.

Одно интересное свойство винтового потока сжимаемой невязкой жидкости следует из уравнения (1.43), если к его обеим частям применить операцию div . Тогда получим

$$\lambda \operatorname{div} \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \operatorname{grad} \lambda = 0, \quad \text{так как } \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{u} = 0.$$

Подставив сюда выражение для $\operatorname{div} \mathbf{u}$ из уравнения неразрывности (1.11), найдем

$$\mathbf{u} \cdot \operatorname{grad} \frac{\lambda}{\rho} = 0.$$

Это означает, что вдоль линий тока отношение $\lambda/\rho = \text{const}$. Для несжимаемой жидкости отсюда как частный случай вытекает результат: линии тока располагаются на поверхностях $\lambda = \text{const}$.

Для однородного винтового потока с соленоидальным полем скорости ($\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$) И.С. Громека получил, что вектор скорости \mathbf{u} должен удовлетворять векторному уравнению

$$\Delta \mathbf{u} + \lambda^2 \mathbf{u} = 0.$$

В самом деле, это соотношение следует из (1.43) после применения операции ротора к правой и левой частям. Причем из того, что в этом случае $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$, не следует, что однородный винтовой поток возможен только для несжимаемой жидкости. Из уравнения неразрывности (1.11) следует, что для сжимаемого газа установившийся однородный винтовой поток возможен, если $\mathbf{u} \cdot \operatorname{grad} \rho = 0$, т.е. вектор скорости ортогонален градиенту плотности – линии тока располагаются на поверхностях равной плотности.

Уравнения неоднородного винтового потока (1.43) в криволинейных ортогональных координатах (см. представление для ротора в п. 1.3.1) записутся так:

$$\begin{aligned} \frac{1}{L_2 L_3} \left(\frac{\partial L_3 u_3}{\partial q_2} - \frac{\partial L_2 u_2}{\partial q_3} \right) &= \lambda u_1, \\ \frac{1}{L_3 L_1} \left(\frac{\partial L_1 u_1}{\partial q_3} - \frac{\partial L_3 u_3}{\partial q_1} \right) &= \lambda u_2, \\ \frac{1}{L_1 L_2} \left(\frac{\partial L_2 u_2}{\partial q_1} - \frac{\partial L_1 u_1}{\partial q_2} \right) &= \lambda u_3. \end{aligned} \quad (1.44)$$

Уравнения (1.44) совместно с уравнением неразрывности (1.30) для случая установившегося винтового движения сжимаемой жидкости дают нам систему четырех уравнений для определения четырех неизвестных u_1, u_2, u_3 и λ .

Таким образом, поле скорости для винтовых движений по аналогии с потенциальными течениями полностью определяется из кинематических уравнений, а законы динамики в виде интеграла Бернулли (1.20) применяются для восстановления поля давления.

1.4.2. Двумерные течения

В общем случае в каждый момент времени поле скоростей потока жидкости определяется тремя функциями – u_1, u_2, u_3 – компонентами вектора скорости в некоторой криволинейной системе координат q_1, q_2, q_3

$$u_1 = f_1(q_1, q_2, q_3); \quad u_2 = f_2(q_1, q_2, q_3); \quad u_3 = f_3(q_1, q_2, q_3).$$

Поток, который может быть отнесен к такой координатной системе, чтобы все три компоненты скорости – u_1, u_2, u_3 – в каждый момент времени являлись функциями только двух координат – q_1 , и q_2 – и не зависели от третьей – q_3 , т. е.

$$u_1 = f_1(q_1, q_2), \quad u_2 = f_2(q_1, q_2), \quad u_3 = f_3(q_1, q_2)$$

будем называть *двумерным*^{*}. Геометрически это означает, что на всех координатных поверхностях $q_3 = \text{const}$ поле скоростей строится одинаковым образом. Иначе говоря,

$$\frac{\partial u_1}{\partial q_3} = \frac{\partial u_2}{\partial q_3} = \frac{\partial u_3}{\partial q_3} = 0.$$

Отсюда вытекает, что якобиан от составляющих скорости по координатам тождественно равен нулю

$$\frac{\partial(u_1, u_2, u_3)}{\partial(q_1, q_2, q_3)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial q_1} & \frac{\partial u_1}{\partial q_2} & \frac{\partial u_1}{\partial q_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial q_1} & \frac{\partial u_2}{\partial q_2} & \frac{\partial u_2}{\partial q_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial q_1} & \frac{\partial u_3}{\partial q_2} & \frac{\partial u_3}{\partial q_3} \end{vmatrix} = 0.$$

* В литературе иногда такие потоки называют двупараметрическими. Например, О.Ф. Васильев [1958] приводит классификацию течений как по количеству параметров, требуемых для описания поля скорости, так и по количеству ненулевых компонент скорости. В отличие от двупараметрических, двумерными автор называет течения, в которых одна из компонент скорости в некоторой криволинейной системе координат тождественно равна нулю. Нетрудно представить трехпараметрическое двумерное течение: частицы движутся параллельно некоторой плоскости, но их скорости на перпендикуляре к этой плоскости неодинаковы. Тем не менее указанная классификация не является общепринятой и мы будем пользоваться более традиционным понятием двумерных течений.

Следовательно, между функциями u_1, u_2, u_3 должно существовать соотношение, не зависящее от координат q_1, q_2, q_3 , т.е. при двумерном движении имеет место функциональная зависимость

$$F(u_1, u_2, u_3) = 0, \quad (1.45)$$

которая позволяет одновременно с уменьшением числа переменных в уравнениях движения сократить число уравнений в системе.

Плоскопараллельное движение

Простейшим примером двумерного движения является *плоское, или плоскопараллельное, движение жидкости*, при котором в некоторой инерциальной системе отсчета все частицы, лежащие на одном и том же перпендикуляре к некоторой неподвижной плоскости (например, xy), имеют одинаковые значения давления и плотности и одинаково движутся параллельно этой плоскости (рис 1.5), т.е. зависимость (1.45) имеет вид $w \equiv u_3 = 0$.

В этом случае в уравнениях системы (1.32) пропадают все слагаемые с производными по z , третье уравнение превращается в тождество, а четвертое – уравнение неразрывности – приобретает вид

$$\operatorname{div} \mathbf{u} \equiv \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (1.46)$$

где u и v будут функциями координат x, y и времени t , которое далее рассматривается как параметр. Введем связанную с проекциями скоростей функцию $\psi(x, y)$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (1.47)$$

которая тождественно удовлетворяет уравнению (1.46). Функция $\psi(x, y)$ имеет простой гидродинамический смысл. В самом деле, запишем уравнение линии тока

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} \quad \text{или} \quad u dy - v dx \equiv \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = d\psi = 0.$$

Из последнего равенства следует, что функция ψ сохраняет постоянные значения вдоль линий тока; иными словами, семейство линий уровня $\psi(x, y) = \text{const}$ представляет собой совокупность линий тока. В связи с этим функция $\psi(x, y)$ называется *функцией тока*.

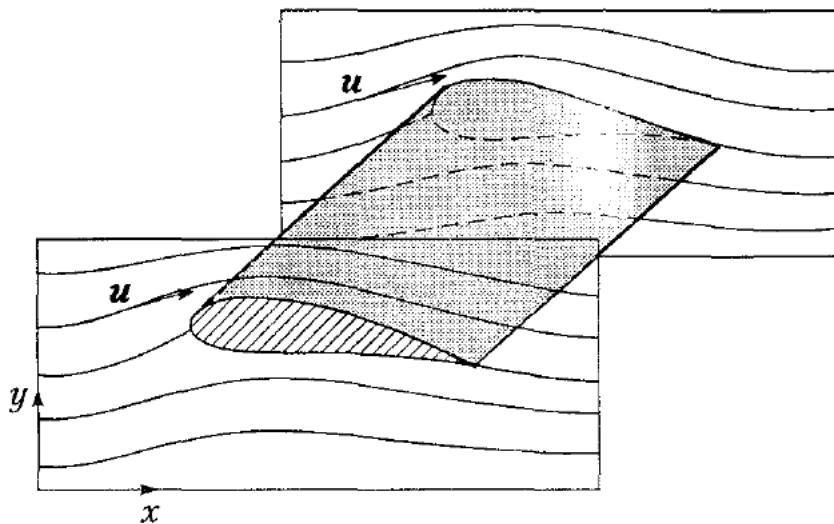


Рис. 1.5. Пример плоскопараллельного движения

Если между двумя точками M и N в плоскости xy провести кривую, то расход жидкости Q через эту кривую определится разностью значений функции тока в точках M и N . Действительно, если u_n – проекция скорости на нормаль к кривой, то

$$Q = \rho \int_M^N u_n \cdot ds = \rho \int_M^N (-v dx + u dy) = \rho \int_M^N d\psi = \rho(\psi_N - \psi_M).$$

Найдем вектор завихренности при плоском движении жидкости. Так как в этом случае $w = 0$, а u и v зависят только от x, y и времени t , вектор завихренности будет определяться только своей проекцией на ось z , т.е.

$$\omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\Delta \psi, \quad (1.48)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – оператор Лапласа.

В случае установившегося движения, используя (1.46), можно записать уравнение Громеки – Ламба (1.13) в виде двух скалярных равенств

$$-\omega_z \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial H}{\partial x}, \quad -\omega_z \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial H}{\partial y}.$$

Если приравнять смешанные производные функции H , то получится тождество

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \omega_z}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad \text{или якобиан} \quad \frac{\partial (\omega_z, \psi)}{\partial (x, y)} = 0,$$

т.е. ω_z должна зависеть только от ψ . В приложениях вид этой зависимости обычно считается заданным, причем функция $\omega_z(x, y) = \omega_z \{ \psi(x, y) \}$ должна

удовлетворять уравнению Гельмгольца (1.34), которое для плоского случая примет вид

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} + u \frac{\partial \omega_z}{\partial x} + v \frac{\partial \omega_z}{\partial y} = v \Delta \omega_z. \quad (1.49)$$

Если зависимость $\omega_z = \omega_z(\psi)$ известна, то исследование сводится к решению краевой задачи для ψ , удовлетворяющей уравнению (1.48). Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшиц [1988] с помощью подстановки (1.48) в (1.49) выписали для идеальной жидкости полное уравнение, которому должна удовлетворять функция тока плоского движения

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} = 0.$$

Незакрученное (продольное) осесимметричное движение

Другим простейшим примером двумерного течения жидкости может служить *незакрученный (продольный) осесимметричный поток*, при котором все частицы движутся одинаково вдоль каждой из пересекающихся по заданной прямой (оси) плоскостей и имеют одинаковые значения давления и плотности (рис 1.6). Например, в цилиндрической системе координат это плоскости rz , ось – Oz , а зависимость (1.45) принимает вид $u_\theta \equiv u_2 = 0$.

В этом случае в уравнениях системы (1.35) пропадают все слагаемые с производными по θ , второе уравнение превращается в тождество, а четвертое – уравнение неразрывности – приобретает вид

$$\frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{\partial(ru_z)}{\partial z} = 0. \quad (1.50)$$

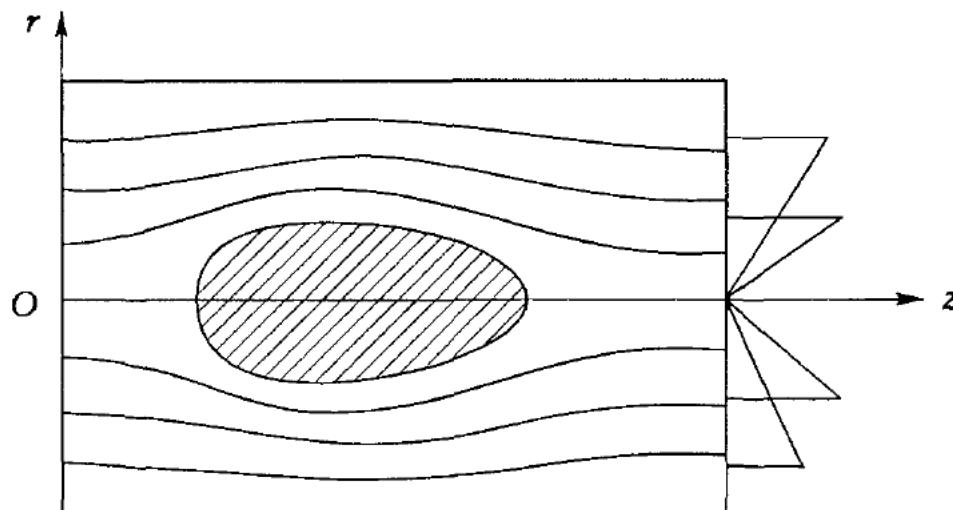


Рис. 1.6. Пример осесимметричного потока

Дифференциальное уравнение линий тока для осесимметричного течения, очевидно, будет

$$\frac{dr}{u_r} = \frac{dz}{u_z} \quad \text{или} \quad u_r dz - u_z dr = 0. \quad (1.51)$$

Соотношение (1.50) показывает, что r служит интегрирующим множителем уравнения (1.51), левая часть которого после умножения на r будет полным дифференциалом некоторой функции ψ

$$d\psi = ru_r dz - ru_z dr, \quad \text{так что} \quad u_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}; \quad u_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}. \quad (1.52)$$

Функция ψ называется *функцией тока Стокса*. На каждой линии тока эта функция сохраняет постоянные значения и, следовательно, будет оставаться постоянной на поверхности (трубке тока), получаемой вращением данной линии тока вокруг оси симметрии. Если между двумя концентрическими окружностями, лежащими на проходящих через точки M и N разных трубках тока, провести произвольную поверхность, то расход жидкости Q , протекающей через эту поверхность, будет равен умноженной на $2\pi r$ разности значений функции тока на трубках тока. В самом деле,

$$\begin{aligned} Q &= \rho \int_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = \rho \int_S (u_r n_r + u_z n_z) dS = \rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_M^N (u_r r dz - u_z r dr) = \\ &= 2\pi \rho \int_M^N d\psi = 2\pi \rho (\psi_N - \psi_M). \end{aligned}$$

Вычислим составляющие завихренности в рассматриваемом осесимметричном течении через функцию тока. Учитывая, что компоненты скорости не зависят от z и $u_0 = 0$, и подставляя в (1.38) их представление через функцию тока (1.52), получим осевую и радиальную компоненты завихренности равными нулю. Тогда уравнение для определения функции тока по заданному распределению окружной компоненты завихренности ω_0 примет вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = -\omega_0, \quad (1.53)$$

где ω_0 как функция координат и времени должна удовлетворять уравнению Гельмгольца (1.37)

$$\frac{\partial \omega_0}{\partial t} + u_r \frac{\partial \omega_0}{\partial r} + u_z \frac{\partial \omega_0}{\partial z} - \frac{u_r \omega_0}{r} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\omega_0}{r} \right) = 0,$$

из которого следует, что в стационарном случае величина ω_0/r является произвольной функцией от функции тока ψ .

Закрученное осесимметричное движение

Еще одним важным примером двумерных течений является *осесимметричное течение идеальной жидкости с закруткой* [Бэтчелор, 1973]. Оно под разными названиями рассматривалось во многих исследованиях. Например, как циркуляционное и вихревое описано в книгах О.Ф. Васильева [1958] и М.А. Гольдштика [1981]. Существенным отличием такого течения от рассмотренного выше незакрученного осесимметричного движения является наличие вращения в потоке, т. е. все компоненты скорости могут принимать ненулевые значения, в том числе и $u_0 \equiv u_z$. Хотя в данном случае остается в силе предположение об осевой симметрии течения (все характеристики потока зависят только от двух цилиндрических координат — r, z — и не зависят от θ ; трубы тока представляют собой поверхности вращения), однако траектории частиц — уже не плоские, а пространственные кривые (рис. 1.7).

Для закрученных осесимметричных потоков уравнение неразрывности сохраняет вид (1.50). Это позволяет по формулам (1.52) ввести аналог функции тока ψ , иначе — *функцию тока меридионального сечения* [Гольдштик, 1981], которая обращает уравнение неразрывности в тождество. Для случая стационарного движения, скалярно умножая уравнение (1.13) на вектор скорости и учитывая, что $\mathbf{u} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}) = 0$, а характеристики течения не зависят от θ , получим

$$u_r \frac{\partial H}{\partial r} + u_z \frac{\partial H}{\partial z} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial H}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial H}{\partial z} = 0. \quad (1.54)$$

Уравнение (1.54) означает, что между функциями H и ψ существует соотношение, не зависящее от координат r и z , т. е.

$$H = \frac{u_r^2 + u_0^2 + u_z^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \Pi = H(\psi). \quad (1.55)$$

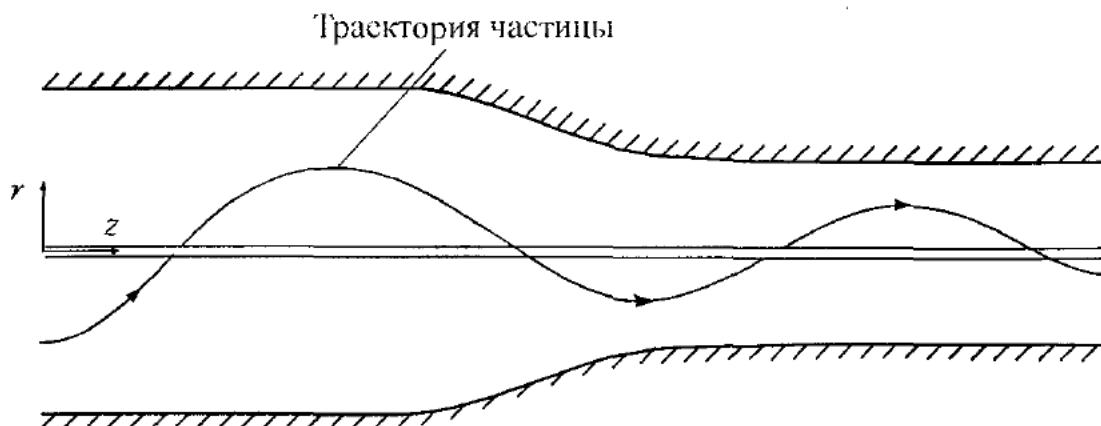


Рис. 1.7. Схема осесимметричного закрученного течения в канале

Для вывода уравнения, описывающего стационарное осесимметричное движение идеальной жидкости в потенциальном поле массовых сил, введем функцию $\Gamma = ru_0$. В этом случае второе уравнение системы (1.35) может быть переписано в виде

$$u_r \frac{\partial(ru_0)}{\partial r} + u_z \frac{\partial(ru_0)}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \Gamma}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \Gamma}{\partial z} = 0. \quad (1.56)$$

Из полученного соотношения также следует, что функция Γ является функцией только ψ , т. е. $\Gamma = \Gamma(\psi)$. Далее рассмотрим первое уравнение системы (1.36). С учетом всех предположений о течении и после подстановки компонент вектора завихренности (1.38) оно примет вид

$$\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{u_0}{r} \frac{\partial(ru_0)}{\partial r} - u_z \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} \right)$$

или с учетом (1.52)

$$\frac{dH}{d\psi} \frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{\Gamma}{r^2} \left(\frac{d\Gamma}{d\psi} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \right).$$

Отсюда находим

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = r^2 \frac{dH}{d\psi} - \Gamma \frac{d\Gamma}{d\psi} = -r\omega_0. \quad (1.57)$$

Функции H и Γ , входящие в уравнение (1.57), должны быть заданы. Иногда их удается определить, исходя из граничных условий (см., например, [Гольдштик, 1981]). Таким образом, задача описания вихревых осесимметричных течений сведена к исследованию уравнения для меридиональной функции тока, правая часть которого должна быть доопределена из дополнительных соображений, по аналогии с уравнениями для определения функции тока в плоском (1.48) и продольном осесимметричном (1.53) течениях.

Отметим, что уравнения Гельмгольца (1.37) для компонент ω_r и ω_z в рассматриваемом случае выполняются тождественно. Для ω_0 имеем уравнение

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\omega_0}{r} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial z} u_\theta^2.$$

Последнее уравнение можно проинтегрировать (см. Ф.Дж. Сэффмэн [2000]) и получить (1.57). Компоненты ω_r и ω_z связаны с соответствующими компонентами скорости простыми соотношениями

$$\omega_r = u_r d\Gamma/d\psi, \quad \omega_z = u_z d\Gamma/d\psi.$$

Отсюда видно, что проекции векторов скорости и завихренности на меридиональную плоскость параллельны (антипараллельны) друг другу.

1.4.3. Одномерные течения

По аналогии с двумерными течениями *одномерными потоками* назовем течения, которые могут быть отнесены к такой координатной системе, в которой компоненты скорости будут функциями одной координаты q_1

$$u_1 = f_1(q_1); \quad u_2 = f_2(q_1); \quad u_3 = f_3(q_1). \quad (1.58)$$

Очевидно, что все рассмотренные примеры двумерных течений в предположении (1.58) могут быть существенно упрощены. Из всего множества возможных случаев перехода от двумерных потоков к одномерным ограничимся рассмотрением двух важных примеров с постоянным распределением завихренности.

1. Пусть скорость плоскопараллельного установившегося течения в инерциальной системе координат имеет только одну составляющую u вдоль оси x ($v = 0$) и она будет функцией только одной координаты y . Тогда, обращаясь к соотношению (1.48), имеем

$$-\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \omega_z \equiv \omega = \text{const}.$$

Отсюда $u = -\omega y + u_0$, где u_0 – скорость на оси x . Следовательно, рассматриваемое течение обладает скоростью, которая по линейному закону меняется вдоль оси y . Функция тока такого течения имеет вид

$$\psi = -\frac{\omega}{2} y^2 + u_0 y + \psi_0.$$

Это течение изображено на рис. 1.8 и называется *сдвиговым течением*. В частном случае ($\omega = 0$) все частицы жидкости движутся с одинаковыми постоянными скоростями u_0 . Такое движение называется *однородным*.

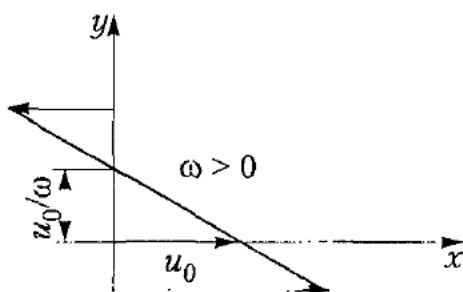


Рис. 1.8. Схема сдвигового течения

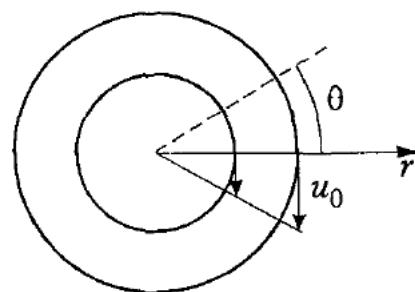


Рис. 1.9. Схема квазитвердого вращения жидкости

2. Пусть имеется установившееся течение с постоянной величиной завихренности, которое в цилиндрической системе координат имеет только одну окружную составляющую u_0 , зависящую от радиальной координаты r . Записав (1.48) в цилиндрической системе координат, с учетом сделанных предположений получим

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial(ru_0)}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = -\omega_z \equiv -\omega = \text{const.}$$

После интегрирования находим

$$ru_0 = \frac{\omega}{2} r^2 + C; \quad \psi = -\frac{\omega}{4} r^2 - C \ln r + \psi_0.$$

Для течений с ограниченными скоростями константу C следует положить равной нулю. Линиями тока такого течения являются концентрические окружности (рис. 1.9), а окружная скорость меняется по линейному закону вдоль радиуса. Такое течение обычно называют *квазивердым вращением*.

1.5. ТЕЧЕНИЯ С ВИНТОВОЙ СИММЕТРИЕЙ

1.5.1. Вывод уравнений

Рассмотрим течение идеальной несжимаемой жидкости в цилиндрической системе координат (r, θ, z) с осью Oz , направленной по оси течения. Предположим, что поток обладает *винтовой симметрией*. Это будет означать, что в плоскостях, перпендикулярных оси z , картина течения остается одинаковой при их поступательном перемещении вдоль оси z с одновременным поворотом на некоторый угол θ . На рис. 1.10 представлена возможная схема такого течения. Иначе говоря, характеристики потока будут сохранять свои значения вдоль винтовых линий, описываемых уравнениями

$$r = \text{const} \quad \text{и} \quad z - \theta \cdot l = \text{const.} \quad (1.59)$$

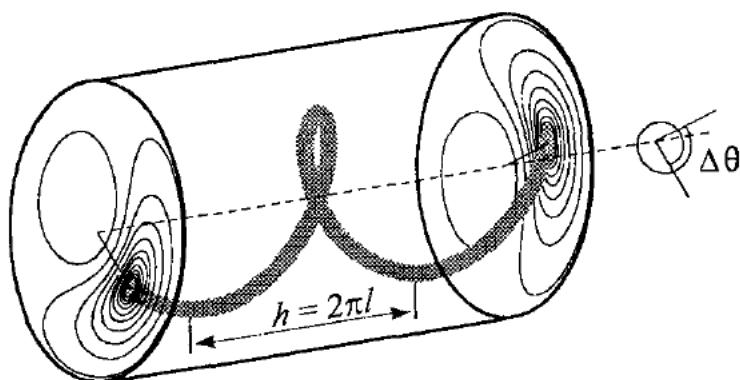


Рис. 1.10. Схема течения с винтовой симметрией

Значение $h = 2\pi l$ соответствует шагу винтовой симметрии, причем величина l принимает положительные значения в случае правой винтовой симметрии, а отрицательные – в случае левой. Касательным к винтовым линиям (1.59) будет вектор

$$\mathbf{B} = B^2 \left[\mathbf{e}_z + (r/l) \mathbf{e}_0 \right], \quad \text{где} \quad B^2 = (1 + r^2 / l^2)^{-1}. \quad (1.60)$$

В такой нормировке его называют *вектором Бельтрами* [Dritschel, 1991]. С помощью вектора \mathbf{B} условие винтовой симметрии можно представить в виде

$$\mathbf{B} \cdot \nabla f = 0, \quad (1.61)$$

где f – любая скалярная функция, характеризующая течение (компоненты скорости, плотность, давление).

Вектор \mathbf{B} ортогонален единичному радиальному вектору \mathbf{e}_r цилиндрической системы координат. Их векторное произведение определит третий ортогональный вектор

$$\chi = \mathbf{B} \times \mathbf{e}_r = B^2 \left[\mathbf{e}_\theta - (r/l) \mathbf{e}_z \right]. \quad (1.62)$$

Введем величины, связанные с проекциями скорости на ортогональные направления $\mathbf{e}_r, \mathbf{B}, \chi$,

$$u_r, \quad u_B = \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{u}}{B^2} = u_z + \frac{r}{l} u_\theta, \quad u_\chi = \frac{\chi \cdot \mathbf{u}}{B^2} = u_\theta - \frac{r}{l} u_z. \quad (1.63)$$

Далее, следуя работе Alekseenko *et al.* [1999], для течений с винтовой симметрией, удовлетворяющих (1.61), перепишем уравнения неразрывности и Эйлера в новых переменных ($r, \chi = \theta - z/l$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{\partial u_\chi}{\partial \chi} &= 0, \\ \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + u_\chi \frac{\partial u_r}{\partial \chi} - \frac{B^4}{r} \left(u_\chi + \frac{r}{l} u_B \right)^2 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}, \\ \frac{\partial u_\chi}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\chi}{\partial r} + u_\chi \frac{\partial u_\chi}{\partial \chi} - \frac{B^2}{r} u_r \left(2 \frac{r}{l} u_B + (2 - B^{-2}) u_\chi \right) &= -\frac{B^{-2}}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \chi}, \\ \frac{\partial u_B}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_B}{\partial r} + u_\chi \frac{\partial u_B}{\partial \chi} &= 0. \end{aligned} \quad (1.64)$$

Рассмотрим два важных частных случая завихренных течений, описываемых уравнениями (1.64).

1.5.2. Течения с винтовой завихренностью

Пусть движение идеальной несжимаемой жидкости обладает винтовой симметрией, т. е. все характеристики течения зависят только от двух пространственных переменных — r, χ — и удовлетворяют системе уравнений (1.64). Предположим, что во всей области течения проекции скорости на касательное направление к линиям (1.59) пропорциональны косинусу угла наклона винтовых линий относительно оси Oz . Функциональная зависимость (1.45) в этом случае принимает простой вид

$$u_B = \text{const},$$

что приводит к тождественному выполнению последнего уравнения системы (1.64). Кроме того для рассматриваемого класса течений в соответствии с первым уравнением (1.64) можно ввести аналог функции тока ψ , которая определяется через соотношения

$$u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \chi}, \quad u_\chi = -\frac{\partial \psi}{\partial r}. \quad (1.65)$$

По аналогии с описанным в предыдущем пункте однородным течением, сохраняющим постоянные значения скорости во всем пространстве, данный класс течений можно условно назвать течениями с винтовой симметрией, которые характеризуются “однородным” движением вдоль винтовых линий. В соответствии с (1.63) для окружной и осевой компонент скорости в цилиндрической системе координат условие постоянства u_B примет вид

$$u_B = u_z + \frac{r}{l} u_0 = u_0 \equiv \text{const}, \text{ или } u_z = u_0 - \frac{r}{l} u_0, \text{ или } \frac{u_z - u_0}{u_0} = -\frac{r}{l}, \quad (1.66)$$

где постоянная u_0 определяет значение осевой компоненты скорости на оси течения. Разрешая (1.63) относительно u_0 и u_z , получим с учетом (1.65) и (1.66)

$$u_\theta = \frac{l^2}{r^2 + l^2} \left(\frac{r}{l} u_B + u_\chi \right) = B^2 \left(\frac{r}{l} u_0 - \frac{\partial \psi}{\partial r} \right), \quad (1.67)$$

$$u_z = \frac{l^2}{r^2 + l^2} \left(u_B - \frac{r}{l} u_\chi \right) = B^2 \left(u_0 + \frac{r}{l} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right).$$

Анализируя (1.66) и (1.67), можно заключить, что рассматриваемый класс течений только условно можно считать однородным. Действительно, компоненты скорости течения u_r, u_0, u_z могут принимать произвольные значения в пространстве при условии выполнения соотношения (1.66), связывающего всего лишь значения осевой и окружной компонент скорости. И только в пре-

дельном случае, когда $l \rightarrow \infty$, а винтовые линии (1.59) становятся прямыми, осевая компонента скорости будет постоянной во всей области течения, т. е. $u_z = u_0$ и течение действительно станет однородным в направлении оси z . Впервые класс течений, удовлетворяющих условию (1.66), был введен в работах Окулова [1993], Okulov [1995]. Одно частное решенис из этого класса было применено для анализа горения [Borissov, Kuibin, Okulov, 1993] и энергетического разделения [Borissov, Kuibin, Okulov, 1994] в закрученных потоках в трубах. Наиболее полный анализ эффективности применения данного класса течений для описания реальных закрученных потоков дан в работе Alekseenko *et al.* [1999].

Рассмотрим особенности распределения завихренности в таких течениях. С этой целью запишем компоненты вектора завихренности в цилиндрических координатах

$$\begin{aligned}\omega_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_B}{\partial \chi} \equiv 0, \\ \omega_\theta &= -\frac{1}{l} \frac{\partial u_r}{\partial \chi} - \frac{\partial z}{\partial r} = -\frac{r}{l} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \chi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r B^2 \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) - 2u_0 \frac{B^4}{l} \right], \\ \omega_z &= -\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \chi} + \frac{1}{r} \frac{\partial (ru_0)}{\partial r} = -\left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \chi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r B^2 \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) - 2u_0 \frac{B^4}{l} \right].\end{aligned}\quad (1.68)$$

Здесь учтено, что $\partial B^2 / \partial r = -2rB^4 / l^2$.

Из (1.68) следует равенство нулю радиальной компоненты поля завихренности и связь между осевой и окружной компонентами вектора завихренности

$$\omega_r = 0; \quad \omega_0 / \omega_z = r / l \quad \text{или} \quad \omega_0 = r \omega_z / l. \quad (1.69)$$

Условие (1.69) означает, что для данного класса течений вектор завихренности всегда направлен по касательной к винтовым линиям. Оказывается верным и обратное утверждение [Окулов, 1993, Okulov, 1995]: если поле завихренности коллинеарно винтовым линиям, то будет выполняться условие (1.66). Действительно, если в течениях с винтовой симметрией на поле завихренности наложить условия (1.69), то после интегрирования первого уравнения из (1.69) с учетом определения ω_r , получим $u_B = f(r)$. В соответствии со вторым условием (1.69) составим разность $\omega_0 - r \omega_z / l = 0$ и учтем (1.67) и (1.68). В результате получим $f'(r) = 0$, т. е. $u_B = \text{const}$. Таким образом, для данного класса выполнение условия (1.66), накладываемого на поле скорости, эквивалентно требованию коллинеарности поля завихренности с касатель-

ными к винтовым линиям (1.69). В таком случае рассматриваемый класс течений может быть еще назван *течениями с полем завихренности, вектор которой направлен вдоль винтовых линий*, или просто *течениями с винтовой завихренностью*.

Третье уравнение в (1.68) можно представить как уравнение для определения функции тока ψ по заданному распределению осевой компоненты завихренности ω_z

$$\tilde{\Delta}\psi = 2u_0 \frac{B^2}{l} - \frac{\omega_z}{B^2}, \quad (1.70)$$

$$\text{где } \tilde{\Delta} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \left(1 - \frac{2r^2}{r^2 + l^2}\right) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{l^2 + r^2}{r^2 l^2} \frac{\partial^2}{\partial \chi^2}.$$

Для данного класса течений в соответствии с соотношениями (1.68) и (1.69) вектор завихренности может быть направлен только по касательной к винтовым линиям (1.59) и его можно полностью определить заданием только одной компоненты, например ω_z . Причем, как функция координат и времени, величина ω_z должна удовлетворять уравнению Гельмгольца (1.37), которое в винтовых переменных r и χ сводится к одному скалярному уравнению

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial \omega_z}{\partial r} + u_\chi \frac{\partial \omega_z}{r \partial \chi} = \omega_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \left(\omega_0 - \frac{r}{l} \omega_z\right) \frac{\partial u_z}{r \partial \chi}. \quad (1.71)$$

Исходя из (1.69), получим, что правая часть уравнения (1.71) равна нулю. Это означает, что осевая компонента завихренности не изменяется вдоль траектории жидкой частицы, а в стационарном случае ω_z является произвольной функцией только от функции тока ψ и явно не зависит от пространственных координат. Причем из-за существования соотношения (1.69) последнее утверждение справедливо для окружной компоненты завихренности ω_θ .

Следует отметить еще одно интересное свойство рассматриваемого класса течений с винтовой симметрией при “однородном” движении вдоль винтовых линий (1.66), которое можно получить, если рассмотреть движение в равномерно движущейся со скоростью u_0 вдоль оси z системе координат. В этом случае на основании (1.66)–(1.68) поля скорости и завихренности примут соответственно вид

$$\mathbf{u} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \chi}, -B^2 \frac{\partial \psi}{\partial r}, B^2 \frac{r}{l} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \text{ и } \boldsymbol{\omega} = \left(0, -B^2 \frac{r}{l} \tilde{\Delta} \psi, B^2 \tilde{\Delta} \psi \right). \quad (1.72)$$

Нетрудно проверить, что их скалярное произведение равно нулю, т. е. в некоторой инерциальной системе отсчета поля скорости и завихренности ортогональны в отличие от рассматриваемого ниже случая винтовых потоков.

1.5.3. Винтовые потоки с винтовой симметрией поля течения

В рамках модели течений идеальной несжимаемой жидкости с винтовой симметрией рассмотрим винтовое движение, в котором поля скорости и завихренности коллинеарны. Поля скорости и завихренности таких течений в силу их соленоидальности можно с помощью вектора Бельтрами \mathbf{B} представить в виде разложений [Landman, 1990; Dritschel, 1991]

$$\mathbf{u} = \phi \mathbf{B} + \nabla \psi \times \mathbf{B}, \quad \boldsymbol{\omega} = \zeta \mathbf{B} + \nabla \xi \times \mathbf{B}, \quad (1.73)$$

где ϕ, ψ, ζ и ξ – некоторые скалярные функции от r и χ . Действительно, если учесть соотношения $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ и $\operatorname{rot} \mathbf{B} = -2B^2 \mathbf{B}/l$, то легко проверить, что с помощью разложений (1.73) уравнение неразрывности $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ и уравнение $\operatorname{div} \boldsymbol{\omega} = 0$ удовлетворяются автоматически. Используя определения завихренности $\boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot} \mathbf{u}$ и градиента в переменных r и χ

$$\nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\chi \frac{1}{rB} \frac{\partial}{\partial \chi}, \quad (1.74)$$

из разложений (1.73) находим $\xi = -\phi$ и

$$\Delta^* \psi = 2 \frac{B^4}{l} \phi - B^2 \xi, \quad (1.75)$$

где

$$\Delta^* \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r B^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \chi^2}.$$

После приравнивания разложений (1.73), в соответствии с кинематическим определением однородных винтовых течений (1.43), получим

$$\phi = \lambda \psi, \quad \zeta = -\lambda \phi = -\lambda^2 \psi. \quad (1.76)$$

Следовательно, однородные винтовые потоки с винтовой симметрией поля течения полностью определяются с помощью только одной скалярной функции ψ , которая удовлетворяет однородному уравнению

$$\Delta^* \psi - \left(\lambda^2 B^2 + 2\lambda \frac{B^4}{l} \right) \psi = 0. \quad (1.77)$$

На основании первого разложения из (1.73) и (1.76) значения компонент скорости в цилиндрической системе координат через функцию ψ могут быть определены посредством формул

$$u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \chi}, \quad u_\theta = B^2 \left(\frac{r}{l} \lambda \psi - \frac{\partial \psi}{\partial r} \right), \quad u_z = B^2 \left(\lambda \psi + \frac{r}{l} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right). \quad (1.78)$$

Таким образом, для однородных винтовых течений с винтовой симметрией задача отыскания поля скорости может быть полностью сведена к решению соответствующей краевой задачи для одного скалярного однородного линейного уравнения (1.77). Затем по известному полю скорости давление может быть восстановлено с помощью интеграла Бернулли.

1.6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛЯ СКОРОСТЕЙ ПО ИСТОЧНИКАМ И ВИХРЯМ

Если известно поле завихренности $\boldsymbol{\omega}$, например из решения уравнений Гельмгольца, то возникает обратная задача, связанная с восстановлением поля скорости \mathbf{u} . При этом дополнительным условием, накладываемым на \mathbf{u} , является уравнение сохранения массы (1.11). В (1.11) входит, однако, еще одна функция – плотность ρ . Чтобы ее исключить, будем рассматривать *несжимаемую* жидкость, для которой $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$. Здесь с целью демонстрации общности математических операций для двух исходных уравнений введем плотность *объемных источников* $\varepsilon(\mathbf{r}, t)$, которая войдет в правую часть уравнения неразрывности для несжимаемой жидкости. Тогда имеем

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \varepsilon, \quad \nabla \times \mathbf{u} = \boldsymbol{\omega}, \quad (1.79)$$

где ε и $\boldsymbol{\omega}$ – известные функции координат и времени. Таким образом, математическая задача заключается в определении векторного поля по заданным распределениям дивергенции и ротора от искомого вектора. Данная задача разрешима, а решение единствено только при определенных условиях.

Рассмотрим вначале случай *безграничного пространства*, а затем покажем способы учета твердых границ, следуя Седову [1970] и Бэтчслору [1973]. Пусть $\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{r})$ и $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r})$ заданы во всем безграничном пространстве и пусть на бесконечности ($|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$) $\varepsilon \rightarrow 0$, $\boldsymbol{\omega} \rightarrow 0$, $\mathbf{u} \rightarrow 0$. Тогда можно доказать, что поставленная задача имеет единственное решение, которое можно представить в виде

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}_I(\mathbf{r}, t) + \mathbf{u}_V(\mathbf{r}, t). \quad (1.80)$$

Здесь \mathbf{u}_I есть решение задачи (1.79) для случая $\varepsilon \neq 0$, $\boldsymbol{\omega} = 0$ (безвихревое или потенциальное течение), а \mathbf{u}_V – решение при $\varepsilon = 0$, $\boldsymbol{\omega} \neq 0$, т. е. исходная задача разбивается на две новые задачи.

Начнем с первой задачи, когда известна плотность источников ε , а течение безвихревое

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \varepsilon, \quad \nabla \times \mathbf{u} = 0. \quad (1.81)$$

В силу существования второго условия можно положить $\mathbf{u} = \nabla\phi$. Соответственно из первого условия получаем *уравнение Пуассона*

$$\nabla^2\phi = \varepsilon. \quad (1.82)$$

Здесь потенциал ϕ есть скалярная функция координат. Решение уравнения Пуассона хорошо известно и имеет вид

$$\phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\varepsilon(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV(\mathbf{r}'). \quad (1.83)$$

Интеграл берется по всему объему, занятому жидкостью. Чтобы интеграл существовал, на ε накладываются некоторые ограничения.

Соответствующее выражение для скорости \mathbf{u}_l принимает вид

$$\mathbf{u}_l(\mathbf{r}) = \nabla\phi = \frac{1}{4\pi} \int \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \varepsilon(\mathbf{r}') dV(\mathbf{r}'). \quad (1.84)$$

Теперь перейдем ко второй задаче, когда задано поле завихренности, а источники отсутствуют

$$\nabla\mathbf{u} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{u} = \boldsymbol{\omega}. \quad (1.85)$$

Исходя из первого уравнения, можно положить

$$\mathbf{u} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (1.86)$$

где \mathbf{A} – векторный потенциал. Очевидно, поле скоростей не изменится, если сделать замену $\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{A} + \nabla f$, где f – произвольная скалярная функция, т. е. потенциал \mathbf{A} определяется неоднозначно. Выберем f таким образом, чтобы $\nabla\mathbf{A} = 0$. Тогда из (1.86) и второго выражения в (1.85) имеем

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \boldsymbol{\omega},$$

откуда для \mathbf{A} получаем *векторное уравнение Пуассона*

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\boldsymbol{\omega}. \quad (1.87)$$

По аналогии с первой задачей можем сразу выписать выражения для векторного потенциала и соответствующей скорости \mathbf{u}_V

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV(\mathbf{r}'), \quad \mathbf{u}_V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV(\mathbf{r}'). \quad (1.88)$$

Так же, как и в первой задаче для ε , определенные ограничения накладываются на распределение завихренности $\boldsymbol{\omega}$. В частности, допускается наличие

поверхностей разрыва вектора $\boldsymbol{\omega}$, но нормальные составляющие ω_n должны быть непрерывны на этих поверхностях. Другое требование связано с тем, что завихренность должна быть отлична от нуля только в конечной части пространства, ограниченной поверхностью S , на которой $\omega_n = 0$.

Результирующее выражение для вектора скорости в безграничном пространстве, содержащем источники и вихри, принимает вид

$$\mathbf{u} = \nabla\phi + \nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \Delta \mathbf{r}}{|\Delta \mathbf{r}|^3} dV + \frac{1}{4\pi} \int \frac{\boldsymbol{\omega} \times \Delta \mathbf{r}}{|\Delta \mathbf{r}|^3} dV, \quad (1.89)$$

где $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$.

Пусть теперь пространство, заполненное жидкостью, содержит *твёрдые границы* Σ . Тогда для решения задачи (1.79) необходимо задать краевые условия на Σ . В силу линейности уравнений это означает, что искомое решение (1.80) следует переписать в виде

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_I + \mathbf{u}_{V'} + \mathbf{u}_0, \quad (1.90)$$

где добавочное поле скорости \mathbf{u}_0 удовлетворяет уравнениям (1.79) с нулевой правой частью

$$\nabla \mathbf{u}_0 = 0, \quad \nabla \times \mathbf{u}_0 = 0. \quad (1.91)$$

Здесь \mathbf{u}_I , $\mathbf{u}_{V'}$ по-прежнему определяются формулами (1.84), (1.88), учитывающими распределения $\boldsymbol{\varepsilon}$ и $\boldsymbol{\omega}$ в объеме жидкости, а граничные условия на твердой границе Σ входят через решение \mathbf{u}_0 . Как видно из (1.91), векторное поле \mathbf{u}_0 является соленоидальным и безвихревым.

Из условия $\boldsymbol{\omega} = 0$ следует существование потенциала скорости ϕ , так что $\mathbf{u}_0 = \nabla\phi$. Как уже отмечалось, потенциал скорости определяется однозначно только для односвязной области. Подставляя выражение для скорости в первое уравнение (1.91), получаем уравнение Ланласа для скалярной функции ϕ

$$\nabla^2\phi = 0. \quad (1.92)$$

Таким образом, необходимо дополнительно решить краевую задачу для определения гармонической функции $\phi(\mathbf{r})$.

Краевые условия на границе Σ могут быть самыми различными. Но обычно задается нормальная компонента скорости u_n .

Наконец, чтобы использовать формулы (1.84), (1.88), необходимо функции $\boldsymbol{\varepsilon}$ и $\boldsymbol{\omega}$, заданные в заполненном жидкостью пространстве, продолжить через границу Σ во все пространство. Опять-таки, возможны различные способы такого продолжения, что связано со спецификой конкретных задач и определенным произволом (см. Дж. Бэтчелор [1973], Л.И. Седов [1970], Ф.Дж. Сэф-

фмэн [2000]). Однако нужно учесть, что нормальная компонента завихренности ω_n должна быть непрерывной на Σ^* .

В заключение заметим, что если пространство *безгранично, а источники отсутствуют*, то уравнение Пуассона (1.82) превращается в уравнение Лапласа, решение которого для бесконечного пространства есть $\phi = 0$. Тогда результирующая формула (1.89) принимает вид

$$\mathbf{u} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\boldsymbol{\omega} \times \Delta \mathbf{r}}{|\Delta \mathbf{r}|^3} dV. \quad (1.93)$$

Исходя из аналогии с формулами теории электромагнитного поля, считают, что завихренность *индуцирует* поле скоростей.

В частном случае *плоскопараллельного течения* векторный потенциал $\mathbf{A} = (0, 0, \psi)$ и вектор завихренности $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}') = (0, 0, \omega)$. Функцию тока можно представить в виде решения уравнения Пуассона (1.87)

$$\psi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2\pi} \int \omega(\mathbf{r}') \ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| dS'. \quad (1.94)$$

После дифференцирования (1.94) получаем поле скорости

$$u = -\frac{1}{2\pi} \int \omega(\mathbf{r}') \frac{y - y'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} dS' \quad \text{и} \quad v = \frac{1}{2\pi} \int \omega(\mathbf{r}') \frac{x - x'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} dS'. \quad (1.95)$$

Для *незакрученного осесимметричного течения* в цилиндрических переменных (r, θ, z) векторный потенциал $\mathbf{A} = (0, \psi/r, 0)$, а вектор завихренности $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}') = (0, \omega, 0)$. Введя $s = \left[(z - z')^2 + r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\theta - \theta') \right]^{1/2}$ и $dV(\mathbf{r}') = r'dz'dr'd\theta$, из (1.88) находим

$$\psi = \frac{r}{4\pi} \iint r' \omega(r', z') dr' dz' \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta}{s} d\theta.$$

Интеграл по θ можно переписать в виде [Бэтчелор, 1973]

* Последнее условие можно снять, так как всегда возможно построить за пределами границы Σ поверхность Σ' , на которой $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} = 0$. (По вопросу продолжения $\boldsymbol{\omega}$ см. также п. 1.7.1.)

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta d\theta}{s} = \frac{1}{(rr')^{1/2}} \int_0^{\pi} \left[\left(\frac{2}{k} - k \right) \left(1 - k^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right)^{-1/2} - \frac{2}{k} \left(1 - k^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right)^{1/2} \right] d\theta = \\ = \frac{2}{(rr')^{1/2}} \left[\left(\frac{2}{k} - k \right) K(k) - \frac{2}{k} E(k) \right],$$

где $k^2 = 4rr' / \left[(z-z')^2 + (r+r')^2 \right]^{1/2}$, а $K(k) = \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \cos^2 \theta)^{-1/2} d\theta$ и

$E(k) = \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \cos^2 \theta)^{1/2} d\theta$ – полные эллиптические интегралы первого и

второго рода. Обозначив $f(k) = \left[\left(\frac{2}{k} - k \right) K(k) - \frac{2}{k} E(k) \right]$, запишем

$$\psi = \frac{1}{2\pi} \iint f(k) (rr')^{1/2} \omega(r', z') dr' dz'. \quad (1.96)$$

Соответственно компоненты скорости имеют вид

$$u_r = -\frac{1}{2\pi r} \iint f'(k) \frac{\partial k}{\partial z} (rr')^{1/2} \omega(r', z') dr' dz', \quad (1.97)$$

$$u_z = \frac{1}{2\pi r} \iint \left[\frac{f(k)}{2r} + f'(k) \frac{\partial k}{\partial r} \right] (rr')^{1/2} \omega(r', z') dr' dz'.$$

1.7. ВИХРЕВЫЕ СИЛЫ И ИНВАРИАНТЫ ВИХРЕВОГО ДВИЖЕНИЯ

1.7.1. Вихревые силы

Важнейшим подходом к описанию динамики вихревых структур является метод баланса сил. Чтобы понять и правильно интерпретировать силы в идеальной жидкости, содержащей вихри, рассмотрим вначале силы, которые действуют на твердое тело при его равномерном движении в идеальной жидкости со скоростью \mathbf{U} . Выберем систему координат, движущуюся вместе с телом, и пусть начало координат находится внутри тела (см. рис. 1.11). В этой системе тело обтекается потоком со скоростью на бесконечности $\mathbf{U}_{\infty} = -\mathbf{U}$.

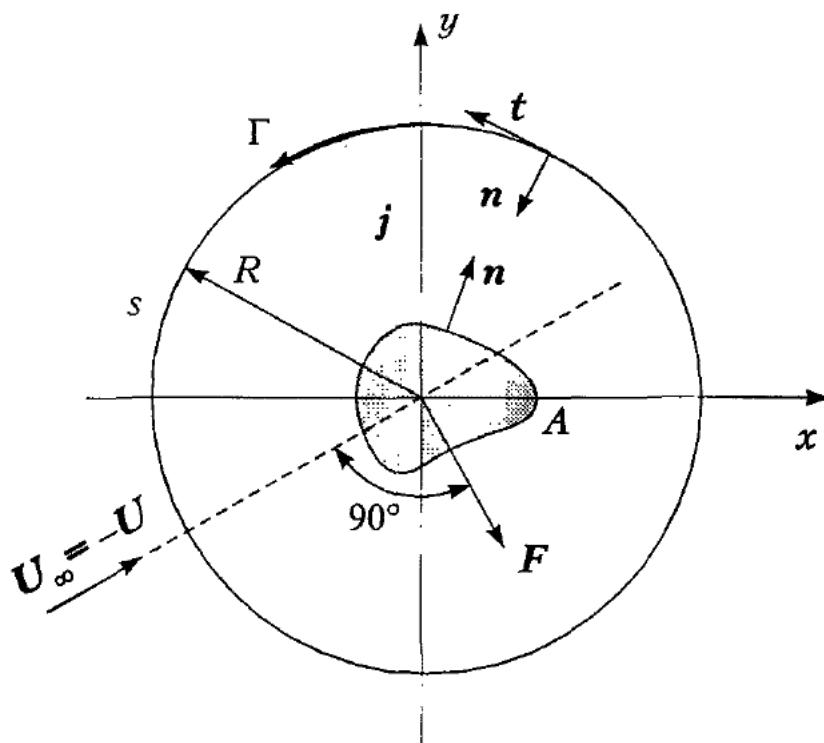


Рис. 1.11. К определению сил в идеальной жидкости

Применим теорему о количестве движения к объему жидкости, заключенному между границей тела A и окружностью s большого радиуса R (в двумерной постановке). Пусть векторы нормали \mathbf{n} направлены наружу от поверхности тела A и внутрь окружности s . Введем вектор скорости \mathbf{V} в движущейся системе координат

$$\mathbf{V} = \mathbf{u} - \mathbf{U}, \quad (1.98)$$

где \mathbf{u} – скорость жидкости в абсолютной системе координат. Собственно \mathbf{u} – это возмущение скорости жидкости за счет наличия твердого тела.

Заметим в связи с этим, что на больших расстояниях от тела R при его циркуляционном обтекании возмущение скорости для двумерной задачи убывает как $1/R$, т. е. $|\mathbf{u}| = O(1/R)$ при $R \rightarrow \infty$. Действительно, воспользуемся для примера решением задачи о циркуляционном обтекании цилиндра (круга) радиуса a (см. Лойцянский [1973]):

$$|\mathbf{u}| = \left| \frac{\Gamma}{2\pi iz} - \frac{|U_\infty| a^2}{z^2} \right| \rightarrow \frac{|\Gamma|}{2\pi R} \quad \text{при } R \rightarrow \infty,$$

где $z = x + iy$. Как видно, на больших расстояниях радиус цилиндра не входит в решение, и можно полагать, что асимптотическое решение не зависит от формы тела и определяется только величиной циркуляции.

Учитывая отсутствие касательных напряжений в идеальной жидкости, баланс импульса запишется как

$$\int_A p \mathbf{n} ds + \int_s p \mathbf{n} ds + \int_s \rho \mathbf{V} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) ds = 0.$$

Здесь первый интеграл – сила давления со стороны тела **на жидкость**. Соответственно тело со стороны жидкости испытывает силу

$$\mathbf{F} = - \int_A p \mathbf{n} ds.$$

Второй интеграл – сила давления со стороны окружающей жидкости на контрольный объем, а третий интеграл – поток импульса через поверхность s . Таким образом, из баланса импульса следует, что сила воздействия жидкости на твердое тело полностью определяется распределениями давления и скорости на удаленной от тела цилиндрической поверхности s

$$\mathbf{F} = \rho \int_s \mathbf{V} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) ds + \int_s p \mathbf{n} ds.$$

Напомним, что здесь ds – элемент длины, поэтому сила определяется на единицу длины образующей цилиндра. По уравнению Бернулли

$$p = \text{const} - \rho V^2 / 2,$$

где const является одинаковой для всего пространства, так как течение безвихревое. Тогда, учитывая (1.98) и пренебрегая квадратичными по \mathbf{u} членами в силу их малости, имеем

$$\mathbf{F} = -\rho \mathbf{U} \int_s (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) ds - \int_s \mathbf{u} (\mathbf{U} \cdot \mathbf{n}) ds + \left(\text{const} - \rho \frac{\mathbf{U}^2}{2} \right) \int_s \mathbf{n} ds + \rho \int_s (\mathbf{u} \cdot \mathbf{U}) \mathbf{n} ds.$$

Здесь первый член справа равен нулю, так как $\int (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) ds$ – это расход жидкости через контрольную поверхность s , который является нулевым при отсутствии источников и стоков. Третий член также исчезает, поскольку тождественно для окружности s :

$$\int_s \mathbf{n} ds = 0.$$

Два оставшихся члена можно объединить и выразить через двойное векторное произведение

$$\int [\mathbf{u} (\mathbf{U} \cdot \mathbf{n}) - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{U}) \mathbf{n}] ds = \int \mathbf{U} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{n}) ds.$$

В последнем интеграле можно сделать замену $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{u} - \mathbf{U} = \mathbf{V}$ и, поскольку добавочный интеграл тождественно равен нулю

$$\int\limits_s \mathbf{U} \times (\mathbf{U} \times \mathbf{n}) ds = \mathbf{U} \times (\mathbf{U} \times \int\limits_s \mathbf{n} ds) = 0,$$

получаем

$$\mathbf{F} = -\rho \mathbf{U} \times \int\limits_s \mathbf{V} \times \mathbf{n} ds. \quad (1.99)$$

Величина \mathbf{U} выносится за знак интеграла, так как это константа.

Далее введем единичный вектор \mathbf{t} , касательный к окружности s , и единичный вектор \mathbf{b} , ортогональный к \mathbf{n} и \mathbf{t} и направленный перпендикулярно плоскости чертежа к читателю, как и ось z (см. рис. 1.11). Тогда $\mathbf{n} = \mathbf{b} \times \mathbf{t}$. Используя это выражение, распишем интеграл в (1.99), опять применив формулы векторной алгебры

$$\int \mathbf{V} \times \mathbf{n} ds = \int \mathbf{V} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{t}) ds = \int (\mathbf{V} \cdot \mathbf{t}) \mathbf{b} ds - \mathbf{t} \int (\mathbf{V} \cdot \mathbf{b}) ds = \mathbf{b} \Gamma.$$

Здесь учтено, что $\mathbf{V} \cdot \mathbf{b} = 0$ для плоского течения, а $\int \mathbf{V} \cdot \mathbf{t} ds = \Gamma$ есть по определению циркуляция. Иногда вводят вектор циркуляции Γ

$$\Gamma = \Gamma \mathbf{b}. \quad (1.100)$$

Окончательно имеем следующую формулу для силы \mathbf{F} , действующей на твердое тело при его поступательном движении со скоростью \mathbf{U} в идеальной жидкости:

$$\mathbf{F} = -\rho \mathbf{U} \times \mathbf{b} \Gamma. \quad (1.101)$$

В случае неподвижного тела, обтекаемого равномерным потоком со скоростью на бесконечности $\mathbf{U}_\infty = -\mathbf{U}$, получаем

$$\mathbf{F} = \rho \mathbf{U}_\infty \times \mathbf{b} \Gamma. \quad (1.102)$$

Выведеные соотношения представляют собой *формулу Кутта – Жуковского*.

Как следует из формул (1.101), (1.102), сила \mathbf{F} не зависит от формы тела, ориентирована перпендикулярно направлению движения тела или потока, как это показано на рис. 1.11, и определяется только циркуляцией вокруг тела. Модуль силы соответственно равен

$$F = \rho U_\infty |\Gamma|.$$

Чтобы определить направление действия равнодействующей силы, можно пользоваться следующим правилом: *направление результирующей силы, действующей на тело, получается путем поворота вектора скорости тела относительно жидкости на угол 90° в направлении циркуляции скорости*.

Поскольку компонента силы в направлении движения тела равна нулю, то формула (1.101) отражает также известный парадокс Даламбера, который заключается в отсутствии сопротивления при движении тела в идеальной жидкости.

Рассмотрим теперь вопрос о балансе сил в течении с областями концентрированной завихренности. Перепишем уравнение Громеки – Ламба (1.12), перенеся конвективные члены в правую часть

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \rho \mathbf{g} - \nabla p - \rho \nabla \left(\frac{u^2}{2} \right) + \rho \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}. \quad (1.103)$$

Величина $\rho \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}$ называется *вихревой силой* [Prandtl, 1919; Сэффмэн, 2000]. Интегрируя уравнение (1.103) при $\rho = \text{const}$ по фиксированному объему V , имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho \mathbf{u} dV = - \int p_T \mathbf{n} dS + \int (\rho \mathbf{g} + \rho \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) dV. \quad (1.104)$$

Здесь $p_T = p + \frac{1}{2} \rho u^2$ – полное давление.

Левая часть представляет собой скорость изменения импульса жидкости внутри объема V . При установившемся движении эта величина равна нулю. В этом случае уравнение (1.104) дает условие баланса сил давления, действующих на поверхность, окружающую объем V , с внешними силами и вихревой силой. Заметим, что если вне V не действуют внешние силы и константа Бернулли постоянна на поверхности объема (это реализуется, когда поверхность является поверхностью тока), первый интеграл в правой части (1.104) принимает нулевое значение, а значит внешняя сила уравновешивается вихревой силой. Иначе говоря, величина $\rho \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}$ в установившемся течении не может быть представлена градиентом некоторой функции и, следовательно, не может быть скомпенсирована силами давления, т. е. к жидкости должна быть приложена внешняя неконсервативная массовая сила для поддержания равновесия. С понятием вихревой силы непосредственно связана идея кинематической замены тела, движущегося относительно жидкости, распределением завихренности, обеспечивающим требуемые условия обтекания на поверхности тел. Н.Е. Жуковский называл такие системы *присоединенными вихрями*. Такое воображаемое распределение завихренности можно рассматривать как продолжение поля свободной завихренности внутрь тела. При этом возникает и соответствующее мнимое поле скорости внутри тела. Следует заметить, что поле присоединенной завихренности не удовлетворяет уравнению Гельмгольца. Существует бесчисленное множество распределений присоединенной завихренности, тем не менее, поле скорости, индуциро-

ванное этой завихренностью вне тела, должно быть одним и тем же. Отметим также, что распределение присоединенной завихренности зависит от наличия других тел и свободной завихренности.

Среди множества методов продолжения поля завихренности внутрь тела упомянем следующие: а) полагают, что в области продолжения $\text{rot } \boldsymbol{\omega} = 0$ [Бэтчелор, 1973]; в этом случае $\boldsymbol{\omega} = \text{grad } f$, $\Delta f = 0$; б) используют свойства симметрии (для области, ограниченной плоскостью, сферой или цилиндрической поверхностью); в) в плоских задачах применяют технику конформных отображений области течения на область, обладающую свойством симметрии (см. главу 6); г) если на поверхности $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} = 0$, то внутри тела полагают $\boldsymbol{\omega} = 0$; тем самым поверхность заменяют вихревой пеленой [Сэффмэн, 2000].

Если распределение присоединенной завихренности $\boldsymbol{\omega}$ найдено и полное давление на поверхности тела постоянно, то сила \mathbf{F}_B , действующая на тело, есть

$$\mathbf{F}_B = \rho \int_{V_B} \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} dV. \quad (1.105)$$

Используя векторное тождество и преобразуя объемный интеграл в поверхностный, получим для несжимаемой жидкости

$$\int_{V_B} \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} dV = \int_{V_B} \left[\nabla \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 - (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} \right] dV = \int_{S_B} \left(\frac{1}{2} \mathbf{u}^2 \cdot \mathbf{n} - \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \right) dS. \quad (1.106)$$

Правая часть уравнения (1.106) определяется скоростью на границе тела и не зависит от метода нахождения мнимой системы. Следовательно, полная сила не зависит от частного распределения присоединенной завихренности.

В качестве примера снова рассмотрим безвихревое течение около кругового цилиндра радиуса a с циркуляцией $\Gamma > 0$. Ось цилиндра направлена по оси z , а движение – двумерное и происходит в плоскости xy (рис. 1.12). Потенциал течения в полярных координатах r, θ имеет вид (см., например, Лойцянский [1973])

$$\varphi = -|U_\infty|(r + a^2/r) \cos \theta + \Gamma \theta / 2\pi.$$

Теперь удалим цилиндр и заменим его распределением присоединенной завихренности. Вихревые линии параллельны оси z , т. е. $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega)$. Одно из бесконечного числа возможных распределений завихренности выглядит следующим образом:

$$\omega = \frac{\Gamma}{\pi a^2} + \frac{8|U_\infty|}{a^2} r \sin \theta, \quad r < a. \quad (1.107)$$

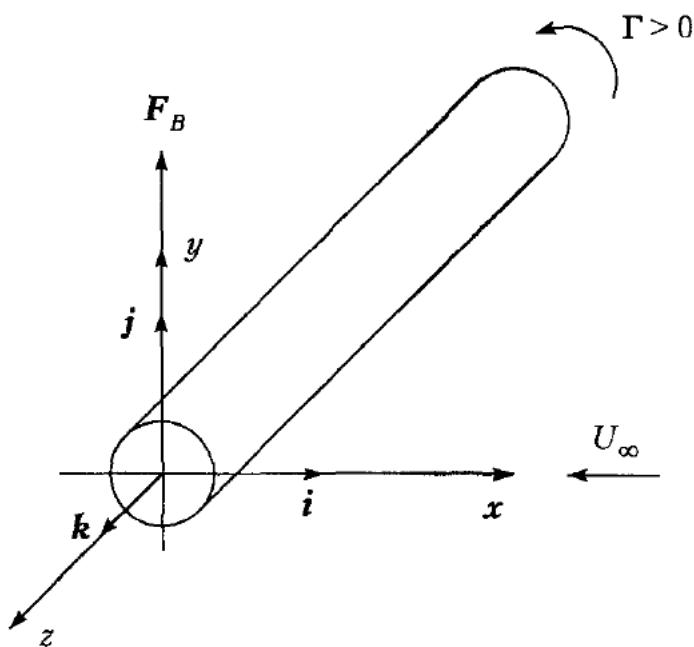


Рис. 1.12. К описанию безвихревого течения идеальной жидкости около кругового цилиндра с циркуляцией Γ

Этому соответствует соленоидальное поле скорости внутри цилиндра

$$u = -|U_\infty|(1 + 2\sin^2 \theta)r^2/a^2 + |U_\infty| - \frac{\Gamma}{2\pi a^2}r \sin \theta, \quad (1.108)$$

$$v = 2|U_\infty|\sin \theta \cos \theta r^2/a^2 + \frac{\Gamma}{2\pi a^2}r \cos \theta. \quad (1.109)$$

Расписывая (1.105)

$$\mathbf{F}_B = \rho \int_{r \leq R} \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} dV = \rho \left[-j \int u \omega dV + i \int v \omega dV \right]$$

и подставляя формулы (1.107)–(1.109), находим

$$\mathbf{F}_B = \rho |U_\infty| \Gamma \mathbf{j} = \rho \mathbf{U}_\infty \times \mathbf{k} \Gamma.$$

Тем самым снова приходим к формуле Кутта – Жуковского (1.102), где $\mathbf{b} \equiv \mathbf{k}$.

Понятие вихревой силы может быть также использовано для определения скорости прямолинейной вихревой нити, подверженной воздействию внешней силы \mathbf{F} . В самом деле, в системе координат, движущейся с вихрем, вихревая сила равна $\rho(\mathbf{u} - \mathbf{u}_V) \times \Gamma$, где \mathbf{u} – скорость потока, \mathbf{u}_V – скорость вихря. Условие равновесия требует, чтобы $\mathbf{F} + (\mathbf{u} - \mathbf{u}_V) \times \Gamma = 0$. Если вихревая нить ориентирована вдоль орта \mathbf{k} , то отсюда получаем

$$\mathbf{u}_V = \mathbf{u} + \mathbf{k} \times \mathbf{F}/\Gamma.$$

1.7.2. Вихревой импульс и вихревой момент импульса

Одно из преимуществ описания движения жидкости через распределения завихренности заключается в существовании инвариантов вихревого движения, которые определяются по начальному распределению завихренности и не меняются со временем. Тем самым ряд свойств течения можно предсказать, не изучая детали течения. К числу первых двух инвариантов относятся так называемые вихревой импульс и вихревой момент импульса.

Рассмотрим течение неограниченной жидкости, покоящейся на бесконечности при отсутствии внутренних границ и при наличии ограниченной области завихренной жидкости*. Плотность жидкости будем считать постоянной.

Реальный импульс жидкости $\rho \int u dV$ определен лишь условно, так как величина интеграла может зависеть от формы поверхности, по которой объем интегрирования устремляется к бесконечности. Поэтому поступим иначе, а именно вычислим результирующий импульс, который должен быть приложен к ограниченной области жидкости, чтобы вызвать заданное движение из состояния покоя. Такая величина называется *импульсом жидкости* поля течения [Бэтчелор, 1973, с. 636].

Для последующего анализа введем одно необходимое интегральное тождество. Основываясь на векторном тождестве

$$\nabla(\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}) = \mathbf{a} \times \text{rot } \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \text{rot } \mathbf{a} + (\mathbf{a} \nabla) \mathbf{b} + (\mathbf{b} \nabla) \mathbf{a}$$

и полагая $\mathbf{b} \equiv \mathbf{r}$, получаем

$$\mathbf{r} \times \text{rot } \mathbf{a} = -\mathbf{a} + \nabla(\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}) - (\mathbf{r} \nabla) \mathbf{a}.$$

Распишем последний член справа для каждой из компонент вектора \mathbf{a}

$$(\mathbf{r} \nabla) a_i = \nabla(r a_i) - a_i \nabla \mathbf{r} = \nabla(r a_i) - 3a_i.$$

Далее проинтегрируем по объему векторное тождество, учитывая последнее соотношение, и преобразуем два объемных интеграла, содержащие градиенты, в поверхностные. Наконец, применяя формулу двойного векторного произведения, окончательно получим интегральное тождество

$$\int \mathbf{r} \times \text{rot } \mathbf{a} dV = 2 \int \mathbf{a} dV + \int \mathbf{r} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{a}) dS. \quad (1.110)$$

Это тождество справедливо только для трехмерного пространства, так как при преобразованиях учтено, что $\nabla \mathbf{r} = 3$. В плоском случае эта величина равна 2 и соответственно в (1.110) вместо коэффициента 2 в правой части будет 1.

* Результаты не изменятся, если завихренность экспоненциально убывает на бесконечности.

Применяя тождество (1.110) к вектору скорости, имеем

$$\rho \int \mathbf{u} dV = \frac{1}{2} \rho \int \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega} dV - \frac{1}{2} \rho \int \mathbf{r} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{u}) dS. \quad (1.111)$$

Часть импульса, а именно величину

$$\mathbf{I} = \frac{1}{2} \rho \int \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega} dV, \quad (1.112)$$

введенную Ламбом [1947], называют *вихревым импульсом*. Второе слагаемое оказывается конечным при устремлении поверхности S к бесконечности, тем не менее значение интеграла зависит от формы поверхности. Чтобы убедиться в этом, учтем, что на бесконечности поле течения потенциально и в отсутствие источников и стоков главный член асимптотического разложения потенциала является диполем

$$\phi = -\mathbf{D} \cdot \mathbf{r} / r^3,$$

интенсивность диполя оказывается пропорциональной вихревому импульсу $\mathbf{D} = \mathbf{I}/4\pi$ [Сэффмэн, 2000]. Найдем теперь асимптотику скорости на бесконечности

$$\mathbf{u} \equiv \nabla \phi \sim \frac{1}{4\pi^3 r^3} \left[\frac{3}{r^2} (\mathbf{I} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r} - \mathbf{I} \right].$$

Подставляя полученный результат в поверхностный интеграл в (1.111), находим, что при сферической геометрии интеграл равен $-\mathbf{I}/3$, т. е. если поверхность – сфера, то “истинный” импульс

$$\rho \int_V \mathbf{u} dV = (2/3) \mathbf{I}.$$

Такой же результат получим, если V является кубом. Если же объем обладает анизотропией, результат будет иным. Например, для случая тела, представляющего собой цилиндр с высотой, равной диаметру, и осью, направленной вдоль оси Ox , интеграл равен

$$\left(-\frac{4-2\sqrt{2}}{4} I_x, -\frac{\sqrt{2}}{4} I_y, -\frac{\sqrt{2}}{4} I_z \right).$$

Покажем, что величина вихревого импульса, который требуется для создания движения жидкости из состояния покоя, не зависит от времени, даже если течение неуставновившееся. В самом деле, из (1.112) с учетом уравнения Гельмгольца (1.15) имеем

$$\frac{d\mathbf{I}}{dt} = \frac{1}{2}\rho \int \left(\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{r} \times \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \right) dV = \frac{1}{2}\rho \int (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \nabla) \mathbf{u}) dV.$$

Воспользуемся одним из следствий теоремы Гаусса – Остроградского

$$\int [\mathbf{b}(\nabla \mathbf{a}) + (\mathbf{a} \nabla) \mathbf{b}] dV = \int \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}) dS, \quad (1.113)$$

которое при замене \mathbf{b} на $\mathbf{r} \times \mathbf{b}$ принимает вид

$$\int [\mathbf{r} \times (\mathbf{a} \nabla) \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{b} + (\mathbf{r} \times \mathbf{b}) \nabla \mathbf{a}] dV = \int (\mathbf{r} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}) dS. \quad (1.114)$$

Полагая $\mathbf{a} = \boldsymbol{\omega}$, $\mathbf{b} = \mathbf{u}$, для производной от импульса получаем

$$\frac{d\mathbf{I}}{dt} = \rho \int \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} dV + \frac{1}{2}\rho \int (\mathbf{r} \times \mathbf{u}) \cdot (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n}) dS.$$

Поверхностный интеграл обращается в нуль, поскольку $\boldsymbol{\omega}$ исчезает на бесконечности. Первое слагаемое представляет собой интеграл от силы и сводится к поверхностному интегралу от скорости (см. (1.106)). Ввиду того что скорость на бесконечности убывает как r^{-3} , находим, что и этот интеграл обращается в нуль. Таким образом, $d\mathbf{I}/dt = 0$, что и требовалось доказать.

Другая величина, необходимая для описания вращательного движения жидкости, вызванного из состояния покоя, – результирующий момент импульса. Ламб [1947, п. 152] определил момент импульса, связанный с завихренностью (или *вихревой момент импульса*), следующим образом:

$$\mathbf{M} = -\frac{1}{2}\rho \int r^2 \boldsymbol{\omega} dV. \quad (1.115)$$

Сопоставим величину \mathbf{M} с “истинным” моментом импульса жидкости $\rho \int \mathbf{r} \times \mathbf{u} dV$. Из теоремы о роторе [Г. Корн, Т. Корн, 1984] получаем, что

$$\rho \int \mathbf{r} \times \mathbf{u} dV = -\frac{1}{2}\rho \int r^2 \boldsymbol{\omega} dV - \frac{1}{2}\rho \int r^2 (\mathbf{u} \times \mathbf{n}) dS.$$

Поверхностный интеграл в общем случае расходится, тем не менее, если S – сфера, содержащая всю завихренность, то $r^2 = \text{const}$ и если $(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n}) = 0$ на поверхности, то интеграл обращается в нуль, как следует из цепочки преобразований

$$\int \mathbf{n} \times \mathbf{u} dS = \int \boldsymbol{\omega} dV = \int [\mathbf{r} \nabla \boldsymbol{\omega} + (\boldsymbol{\omega} \nabla) \mathbf{r}] dV = \int \mathbf{r} (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n}) dS = 0.$$

Здесь учтено, что $\nabla \boldsymbol{\omega} = 0$.

Несколько иное определение момента импульса дает Бэтчслор [1973]

$$\mathbf{M} = \frac{1}{3} \rho \int \mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}) dV. \quad (1.116)$$

Из тождества (1.113), полагая $\mathbf{a} = \boldsymbol{\omega}$, $\mathbf{b} = r^2 \cdot \mathbf{r}$, находим

$$\frac{1}{3} \int \mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}) dV + \frac{1}{2} \int r^2 \boldsymbol{\omega} dV = \frac{1}{6} \int r^2 \mathbf{r} (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n}) dS.$$

Отсюда следует, что определения (1.115) и (1.116) эквивалентны, если $(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n}) = 0$ на границе. Это справедливо и для бесконечной жидкости, так как $\boldsymbol{\omega}$ исчезает на бесконечности.

Покажем, что момент импульса \mathbf{M} является инвариантом. Запишем производную по времени от выражения (1.115) с учетом (1.15)

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = -\rho \int \left[(\mathbf{r} \cdot \mathbf{u}) \boldsymbol{\omega} + \frac{r^2}{2} \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \right] dV = -\rho \int \left[(\mathbf{r} \cdot \mathbf{u}) \boldsymbol{\omega} + \frac{r^2}{2} (\boldsymbol{\omega} \nabla) \mathbf{u} \right] dV.$$

Применяя формулу (1.113) при $\mathbf{a} = \boldsymbol{\omega}$, $\mathbf{b} = r^2 \mathbf{u}$, находим

$$\int \left[r^2 (\boldsymbol{\omega} \nabla) \mathbf{u} + 2\mathbf{u} (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega}) \right] dV = \int r^2 \mathbf{u} (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n}) dS.$$

В результате для производной от \mathbf{M} получаем

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \rho \int \mathbf{r} \times (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) dV - \frac{1}{2} \rho \int r^2 \mathbf{u} (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n}) dS.$$

Как видим, первое слагаемое здесь – интеграл от момента вихревой силы; поверхностный интеграл стремится к нулю ввиду исчезновения $\boldsymbol{\omega}$ на бесконечности. Используя соотношения $\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} = \nabla(\mathbf{u}^2/2) - (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u}$, $\nabla \times (\mathbf{u}^2 \mathbf{r}) = \nabla \mathbf{u}^2 \times \mathbf{r}$ и формулу (1.114) при $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{u}$, получаем

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = -\rho \int \left[\nabla \times \left(\mathbf{r} \cdot \frac{\mathbf{u}^2}{2} \right) + \mathbf{r} \times (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} \right] dV = \rho \int \mathbf{r} \times \left[\mathbf{n} \cdot \frac{\mathbf{u}^2}{2} - \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \right] dS.$$

Подынтегральное выражение имеет асимптотику $O(r^{-5})$ на бесконечности, что приводит к нулевому значению поверхностного интеграла, т. е. $d\mathbf{M}/dt = 0$.

Рассматривая импульс вихревого движения жидкости в ограниченной области, Владимиров [1977а] интерпретирует поверхностный интеграл в соотношении (1.111) как присоединенный импульс, вызванный распределением

завихренности на ограничивающей поверхности с плотностью $\mathbf{u} \times \mathbf{n}$, т. е. вихревой импульс есть сумма собственного импульса данного объема жидкости и присоединенного импульса. Точно так же трактуется присоединенный момент импульса. Поверхностный интеграл в выражении для момента импульса вихревого движения жидкости в ограниченной области

$$\mathbf{M} = \frac{1}{3}\rho \left\{ \int \mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}) dV + \int \mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times [\mathbf{n} \times \mathbf{u}]) dS \right\}.$$

В этой же работе дается обобщение определения вихревого импульса на случай течения неоднородной по плотности несжимаемой жидкости

$$\mathbf{I} = \frac{1}{2} \int \mathbf{r} \times \text{rot}(\rho \mathbf{u}) dV.$$

Проблему отсутствия абсолютной сходимости интеграла $\int \rho \mathbf{u} dV$ удается снять, если рассмотреть движение слабо сжимаемой среды [Сэффмэн, 2000]. В качестве примера было рассмотрено движение, генерируемое концентрированной импульсной силой. Показано, что импульс жидкости, заключенной в сфере радиуса ct , расширяющейся со скоростью звука c , равен $2\mathbf{I}_0/3$, где индекс 0 означает, что в качестве ρ взята плотность невозмущенного потока. Остальная часть, $\mathbf{I}_0/3$, сконцентрирована на самом сферическом фронте.

Интересно отметить, что инварианты \mathbf{I} и \mathbf{M} остаются действительными и для вязкой неограниченной жидкости. В самом деле, действие вязкости эквивалентно дополнительной массовой силе $\nu \nabla^2 \mathbf{u}$, добавляемой в правую часть уравнения (1.103). Соответственно в баланс полных сил добавляется интеграл

$$\nu \int \nabla^2 \mathbf{u} dV = -\nu \int \nabla \times \boldsymbol{\omega} dV = -\nu \int \mathbf{n} \times \boldsymbol{\omega} dS,$$

а в баланс моментов сил – интеграл

$$\nu \int \mathbf{r} \times \nabla^2 \mathbf{u} dV = -\nu \int \mathbf{r} \times (\nabla \times \boldsymbol{\omega}) dV = -\nu \int \mathbf{r} \times (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\omega}) dS - 2\nu \int \mathbf{n} \times \mathbf{u} dS.$$

Для сведения последнего интеграла к поверхностному применено тождество $\mathbf{r} \times (\nabla \times \boldsymbol{\omega}) = \nabla(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega}) - (\mathbf{r} \nabla) \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}$ и формула (1.113) при $\mathbf{a} = \mathbf{r}$, $\mathbf{b} = \boldsymbol{\omega}$. Поверхностные интегралы обращаются в нуль, поскольку $\mathbf{u} = O(r^{-3})$, а $\boldsymbol{\omega}$ исчезает на бесконечности. Следовательно, вязкие силы не влияют на скорость изменения импульса и момента импульса.

В книге Ф.Дж. Сэффмэна [2000] приводятся также законы изменения импульса

$$\mathbf{I}_V = \frac{1}{2} \int \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega} dV_V \quad (1.117)$$

и момента импульса

$$\mathbf{M}_V = -\frac{1}{2} \int r^2 \boldsymbol{\omega} dV_V \quad (1.118)$$

изолированных вихрей в присутствии внешних сил \mathbf{g} и при наличии внешней скорости \mathbf{u}_e , которая может быть индуцирована другими вихрями или мнимой завихренностью. Они имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{I}_V}{dt} &= \int \mathbf{g} dV_V + \int \mathbf{u}_e \times \boldsymbol{\omega} dV_V, \\ \frac{d\mathbf{M}_V}{dt} &= \int \mathbf{r} \times \mathbf{g} dV_V + \int \mathbf{r} \times (\mathbf{u}_e \times \boldsymbol{\omega}) dV_V, \end{aligned}$$

где интегрирование ведется по объему V_V , занятому вихрем.

Однако и в ограниченных течениях могут частично выполняться законы сохранения импульса и момента импульса. Так, при вихревом течении в области, ограниченной плоской стенкой или двумя параллельными стенками, в отсутствие массовых сил компонента импульса, параллельная стенке, является инвариантом [Betz, 1932]. Нетрудно видеть, что течение в сфере с условиями $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$, $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} = 0$ на поверхности обладает инвариантом \mathbf{M} .

Рассмотренные инварианты \mathbf{I} и \mathbf{M} соответствуют инвариантности уравнений Эйлера относительно пространственных сдвигов и поворота. Со свойствами инвариантности уравнений Эйлера относительно времени и инвариантности зеркального отражения связаны два дополнительных инварианта – кинетическая энергия и спиральность.

1.7.3. Кинетическая энергия

Кинетическая энергия жидкости, заключенной в объеме V , есть

$$T = \int \frac{1}{2} \rho \mathbf{u}^2 dV.$$

Вводя вектор-потенциал \mathbf{A} , при постоянной плотности жидкости имеем

$$T = \frac{1}{2} \rho \int \mathbf{u} (\nabla \times \mathbf{A}) dV = \frac{1}{2} \rho \int \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\omega} dV + \frac{1}{2} \rho \int \mathbf{n} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{u}) dS.$$

В безграничной жидкости поверхностный интеграл исчезает, и с учетом (1.88) имеем

$$T = \frac{1}{2} \rho \int \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\omega} dV = \frac{1}{8\pi} \rho \iint \frac{\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}) \cdot \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV dV'. \quad (1.119)$$

Другая запись для кинетической энергии дана в книге Ламба [1947]

$$T = \rho \int \mathbf{u}(\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}) dV.$$

Эквивалентность определений можно проверить, проинтегрировав тождество

$$\frac{1}{2} \mathbf{u}^2 - \mathbf{u} \cdot (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}) = \operatorname{div} \left[\frac{1}{2} \mathbf{u}^2 \mathbf{r} - \mathbf{u} \cdot (\mathbf{r} \cdot \mathbf{u}) \right].$$

Интеграл от правой части сводится к поверхностному интегралу с асимптотикой подынтегральной функции $O(r^{-5})$ и обращается в нуль.

Кинетическая энергия является инвариантом, если несжимаемая жидкость не ограничена или ограничена покоящимися стенками, внешние силы консервативны с однозначным потенциалом Π и вязкость равна нулю. Действительно, из уравнений Эйлера (1.10) следует

$$\frac{d}{dt} \rho \int \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 dV = \rho \int \mathbf{u} \frac{du}{dt} dV = \int [-\mathbf{u} \nabla p + \mathbf{u} \cdot \mathbf{g}] dV = - \int (\Pi + p)(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS.$$

Поверхностный интеграл обращается в нуль, если на поверхности $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ либо если поверхность устремляется в бесконечность.

1.7.4. Спиральность

Четвертый инвариант – *спиральность* (helicity) – введен Моффаттом [Moffatt, 1969]

$$\mathcal{H} = \int \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} dV. \quad (1.120)$$

Спиральность характеризует степень связности вихревых линий в потоке. В качестве простейшего примера рассмотрим две зацепленных вихревых нити C_1 и C_2 (рис. 1.13) с интенсивностями Γ_1 и Γ_2 . Допустим, что обе нити не имеют узлов, т. е. непрерывно стягиваются в точку. Согласно теореме Стокса, циркуляция по первому контуру

$$K_1 = \oint_{C_1} \mathbf{u} ds = \int_{S_1} \boldsymbol{\omega} dS.$$

Поскольку поток завихренности через S_1 индуцируется просто второй нитью C_2 , то

$$K_1 = \begin{cases} 0, & \text{если нити не зацеплены} \\ \pm \Gamma_2, & \text{если нити однократно зацеплены.} \end{cases}$$

Знак “+” здесь соответствует “правому” зацеплению, т. е. когда направление циркуляции индуцированной скорости по контуру C_1 совпадает с направлением вектора завихренности на нити C_1 ; знак “−” соответствует “левому” зацеплению. В более общем случае нить C_2 может обвивать C_1 целое число раз. В этом случае

$$K_1 = \alpha_{12} \cdot \Gamma_2,$$

где α_{12} ($= \alpha_{21}$) – целое число, которое может быть как положительным, так и отрицательным (“параметр взаимной завивки кривых” C_1 и C_2).

Рассмотрим теперь величину $\Gamma_1 K_1$, которую запишем в форме интеграла по объему V_1 , занимаемому вихревой нитью C_1 . Так как $d\mathbf{s}$ параллелен вектору $\boldsymbol{\omega}$ на нити, $\Gamma_1 d\mathbf{s}$ можно заменить на $\boldsymbol{\omega} dV$, т. е.

$$\Gamma_1 K_1 = \oint_{C_2} \Gamma_1 \mathbf{u} d\mathbf{s} = \int_{V_1} \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} dV.$$

Суммируя, находим

$$\mathcal{H} = \sum_{i,j} \alpha_{ij} \Gamma_i \Gamma_j = 2\alpha_{12} \Gamma_1 \Gamma_2 = \int_V \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} dV,$$

где V – объем, занимаемый обеими нитями, или эквивалентно (поскольку завихренность сосредоточена лишь на нитях) весь объем, занимаемый жидкостью. Величина $\mathcal{H} = \pm 2n \Gamma_1 \Gamma_2$, где n – число витков одной нити вокруг другой, а знак показывает – правое зацепление или левое. Плотность спиральности $\lambda = \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega}$ наиболее просто записывается для течений с винтовой симметрией (см. п. 1.5.1). В этом случае $\lambda = u_0 \omega_z$. В реальных закрученных потоках величина ω_z меняется слабо, в то время как u_0 меняется в большом диапазоне и может менять знак, т. е. в таких течениях плотность спиральности определяется скоростью на оси потока.

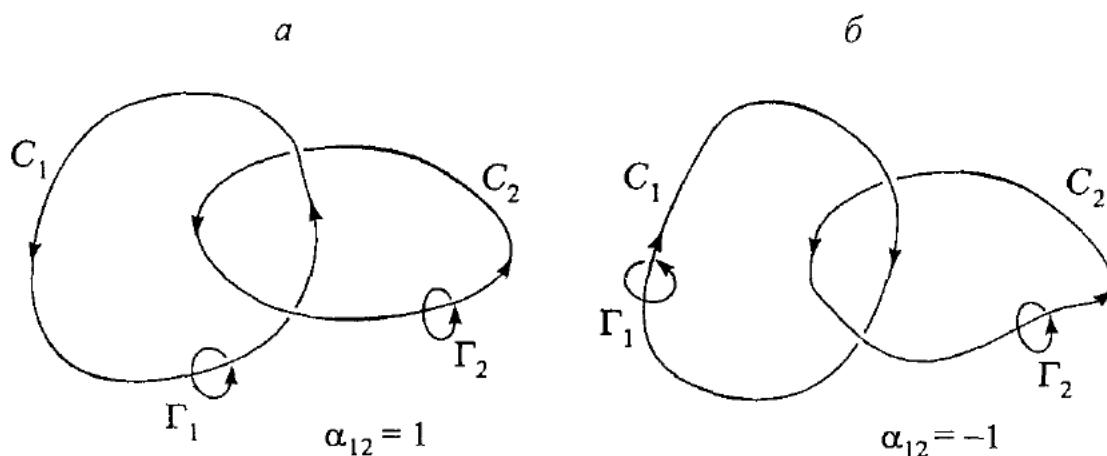


Рис. I.13 Правое (a) и левое (б) однократное зацепление вихревых нитей

Сpirальность не меняется во времени при движении невязкой несжимаемой жидкости под действием консервативной силы. Скорость изменения спиральности

$$\begin{aligned}\frac{d\mathcal{W}}{dt} &= \int \left(\frac{du}{dt} \omega + u \frac{d\omega}{dt} \right) dV = \int \left[\frac{1}{\rho} (-\nabla p - \nabla \Pi) \omega + u (\omega \nabla) u \right] dV = \\ &= \int \left(\frac{-p - \Pi}{\rho} + \frac{u^2}{2} \right) (\omega \cdot n) dS.\end{aligned}$$

Отсюда видно, что в безграничной жидкости с ограниченной областью захваченной жидкости $d\mathcal{W}/dt = 0$. В ограниченной области спиральность является инвариантом, если на границе области выполняется условие $\omega \cdot n = 0$. Сохранение спиральности означает, что сохраняется структура "узловатости" (*knottedness* – [Moffatt, 1969]) вихревого поля.

Инвариант спиральности связан с более общей топологической характеристикой – инвариантом Хопфа (см. Moffatt [1984]). В магнитной гидродинамике, в частности в теории динамо, спиральность играет одну из главных ролей [Moffatt, Tsinober, 1992].

1.7.5. Инварианты двумерных течений

При изучении инвариантов плоского течения жидкости необходимо учитывать ряд важных отличий. Во-первых, скорость на бесконечности может иметь порядок r^{-1} . Во-вторых, завихренность оказывается сохраняемой скалярной величиной $\omega = (0, 0, \omega)$ (отсутствует эффект усиления завихренности за счет растяжения вихревых трубок). Наконец, поле скорости u, v в переменных x, y определяется одной скалярной функцией – функцией тока (третью компоненту скорости в направлении оси z обычно не рассматривают, так как она не оказывает влияния ни на компоненты скорости в плоскости течения, ни на распределение давления).

Вследствие медленного убывания скорости на бесконечности непосредственное использование полного импульса, момента импульса и кинетической энергии жидкости оказывается невозможным*. Однако существуют связанные с ними величины, которые обладают свойством инвариантности. Более того, возникает дополнительный инвариант

$$\Gamma = \int \omega dS,$$

* Четвертый инвариант – спиральность для плоских течений и для осесимметричных течений без закрутки не имеет смысла, так как $\omega \cdot u = 0$.

равный циркуляции скорости по замкнутому контуру, охватывающему всю область завихренной жидкости. Очевидность инвариантности Γ вытекает из сохранения завихренности и площади жидкого элемента (см. также п. 1.2).

Для дальнейшего анализа нам потребуется асимптотика функции тока на бесконечности. Подставляя разложение

$$\ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \ln r - \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'/r^2 + O(1/r^2)$$

в (1.94), найдем

$$\psi \sim -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r + \frac{1}{2\pi} \left[\left(\int \omega \mathbf{r} \times \mathbf{k} dS \right) \times \mathbf{r} \right] \cdot \mathbf{k} / r^2 + O(1/r^2). \quad (1.121)$$

Здесь \mathbf{k} – единичный вектор, нормальный к плоскости течения. Заметим, что второе слагаемое имеет порядок $O(1/r)$.

Чтобы снять проблемы расходности интегралов, Бэтчелор [1973] предлагает рассматривать характеристики вспомогательного течения с функцией тока

$$\psi' = \psi + \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r.$$

Такое течение представляет разность заданного движения и установившегося течения с той же полной завихренностью, сконцентрированной в начале координат. С другой стороны, данное преобразование можно назвать приведением к нулевой полной завихренности. Скорость вспомогательного течения убывает как r^{-2} при $r \rightarrow \infty$. Тем не менее интегралы в определении полных количества и момента количества движения жидкости все еще не будут абсолютно сходящимися. Значения же соответствующих величин вихревого импульса и вихревого момента импульса в течении с ограниченной областью завихренной жидкости определяются вполне корректно (величины отнесены на единицу длины в z -направлении)

$$\mathbf{I} = \rho \int \omega \mathbf{r} \times \mathbf{k} dS = \left(\rho \int y \omega dS, -\rho \int x \omega dS, 0 \right), \quad (1.122)$$

$$\mathbf{M} = -\frac{1}{2} \rho \int r^2 \omega \mathbf{k} dS = \left(0, 0, -\frac{1}{2} \rho \int (x^2 + y^2) \omega dS \right). \quad (1.123)$$

Отсутствие множителя $1/2$ в определении импульса связано с тем, что вихревые линии не являются замкнутыми. Если замкнуть вихревые линии через торцевые плоскости слоя единичной толщины и учесть эту завихренность, то выражение совпадет с (1.112) [Сэффмэн, 2000].

Чтобы установить связь \mathbf{I} с “истинным” импульсом, воспользуемся плоским аналогом тождества (1.110)

$$\int \mathbf{r} \times \operatorname{rot} \mathbf{a} dS = \int \mathbf{a} dS - \oint \mathbf{r} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{a}) ds,$$

откуда при $\mathbf{a} = \mathbf{u}$ получаем

$$\int \mathbf{u} dS = \int \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega} dS + \oint \mathbf{r} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{u}) ds.$$

Оценим контурный интеграл для случая круга большого радиуса R . Асимптотику поля скорости вспомогательного течения (или течения при $\Gamma = 0$) найдем по функции тока (1.121) с учетом определения (1.122)

$$\mathbf{u} \sim \frac{1}{2\pi\rho r^4} \left[-\mathbf{I}r^2 + 2(\mathbf{I} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} \right].$$

Подстановка в контурный интеграл в пределе дает

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \rho \int_{r < R} \mathbf{u} dS = \frac{1}{2} \mathbf{I}.$$

Таким образом, в плоском течении половина приложенного импульса переходит в количество движения безграничной жидкости, а вторая половина “уходит” на бесконечность.

Вихревой момент импульса вспомогательного течения (или течения при $\Gamma = 0$) совпадает с истинным моментом импульса. В самом деле,

$$\mathbf{M} = -\frac{1}{2} \rho \int r^2 \nabla \times \mathbf{u} dS = \rho \int \mathbf{r} \times \mathbf{u} dS - \frac{1}{2} \rho \int \nabla \times (r^2 \mathbf{u}) dS.$$

Первый интеграл в правой части является истинным моментом импульса, а второй интеграл сводится к контурному, который при интегрировании по кругу большого радиуса R дает $1/2 \rho R^2 \Gamma = 0$.

Рассмотрим теперь кинетическую энергию плоского движения жидкости. Следуя Дж. Бэтчелору [1973], запишем

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \rho \int (u^2 + v^2) dS = \frac{1}{2} \rho \int \left(u \frac{\partial \psi}{\partial y} - v \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) dS = \\ &= \frac{1}{2} \rho \int \left[\psi \omega + \frac{\partial(u\psi)}{\partial y} - \frac{\partial(v\psi)}{\partial x} \right] dS = \frac{1}{2} \rho \int \psi \omega dS - \frac{1}{2} \rho \oint \psi \mathbf{u} ds. \end{aligned}$$

Первый из двух последних интегралов сходится при устремлении S к бесконечности. Поведение второго интеграла при больших значениях r оценим с помощью асимптотики функции тока (1.121). Выбирая в качестве границы области интегрирования окружность радиуса R , находим

$$\oint \psi \mathbf{u} d\mathbf{s} \sim -\frac{1}{2\pi} \ln R \left(\int \omega dS \right)^2 = -\frac{\Gamma^2}{2\pi} \ln R,$$

т. е. при $R \rightarrow \infty$

$$T - \frac{1}{2} \rho \int \psi \omega dS - \frac{\Gamma^2}{4\pi} \rho \ln R \rightarrow 0.$$

Величина

$$T_0 = \frac{1}{2} \rho \int \psi \omega dS = -\frac{\rho}{8\pi} \rho \iint \omega(\mathbf{r}) \omega(\mathbf{r}') \ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| dS dS' \quad (1.124)$$

равна части кинетической энергии жидкости, которая зависит от того, каким образом распределена полная завихренность жидкости. Для записи двойного интеграла использовали представление для функции тока (1.94). Так как ψ является компонентой векторного потенциала, казалось бы естественным сразу воспользоваться определением (1.119). Действительно, при $\Gamma = 0$ определение (1.124) получается из (1.119). Для конечного же значения полной циркуляции в безграничной жидкости кинетическая энергия бесконечна и вместо T следует использовать величину T_0 .

Чтобы убедиться, что T_0 является инвариантом, рассмотрим скорость изменения функции тока, используя запись (1.94). Поскольку в плоском течении $d\omega/dt = 0$, то

$$\frac{d\psi}{dt} = -\frac{1}{4\pi} \int \omega(x', y') \left[u \frac{2(x - x')}{(x - x')^2 + (y - y')^2} + v \frac{2(y - y')}{(x - x')^2 + (y - y')^2} \right] dS$$

и с учетом формулы определения скоростей (1.95) получаем $d\psi/dt = 0$, а следовательно, и $dT_0/dt = 0$.

Итак, в плоском течении завихренной жидкости величины Γ , I_x , I_y , M и T_0 постоянны. Когда $\Gamma \neq 0$, можно ввести другие инварианты, связанные с \mathbf{I} и \mathbf{M} , а именно координаты центра завихренности

$$X_c = \frac{\int x \omega dS}{\int \omega dS}, \quad Y_c = \frac{\int y \omega dS}{\int \omega dS}$$

и дисперсию распределения завихренности относительно центра завихренности

$$D^2 = \frac{\int [(x - X_c) + (y - Y_c)] \omega dS}{\int \omega dS} = \frac{\int (x^2 + y^2) dS}{\int \omega dS} - X_c^2 - Y_c^2, \quad (1.125)$$

т. е. $\mathbf{I} = \rho \Gamma (Y_c, -X_c, 0) = \rho \Gamma \mathbf{R}_c \times \mathbf{k}$, $\mathbf{M} = -\frac{1}{2} \rho \Gamma (D^2 + X_c^2 + Y_c^2) \mathbf{k}$.

Для осесимметричного течения с круговыми вихревыми линиями в цилиндрических координатах (r, θ, z) $\boldsymbol{\omega} = (0, \omega, 0)$, $\mathbf{A} = (0, \psi/r, 0)$. В этом случае вихревой импульс

$$I = \pi \rho \iint \omega r^2 dr dz \quad (1.126)$$

направлен по оси симметрии; кинетическая энергия запишется как

$$T = \pi \rho \iint \psi \omega dr dz. \quad (1.127)$$

В п. 3.2.1 будет показано, что, зная величины I и T для вихревого кольца, можно определить скорость его движения. Спиральность и момент импульса в рассматриваемом течении тождественно равны нулю.

В качестве примера вихря с ненулевой спиральностью можно привести сферический вихрь Хикса (см. п. 3.2). Течение в вихре Хикса – осесимметричное с закруткой и описывается функцией тока, удовлетворяющей уравнению (1.57). Линии тока и вихревые линии лежат на поверхностях тока, образующих семейство вложенных торов. Течение обладает отличными от нуля и сохраняющимися со временем спиральностью, импульсом, моментом импульса и кинетической энергией.

Г л а в а 2

ВИХРЕВЫЕ НИТИ

2.1. ГЕОМЕТРИЯ ВИХРЕВЫХ НИТЕЙ

Ключевым объектом в теории завихренной жидкости является *вихревая нить*, которая в наиболее общем виде определяется как вихревая трубка, окруженная жидкостью с нулевой завихренностью. Ясно, что в строгом смысле это определение справедливо только для идеальной жидкости. В реальной жидкости происходит диффузия завихренности, тем не менее для маловязких сред понятие вихревой нити остается весьма полезным и содержательным.

Если устремить сечение вихревой нити к шару, сохраняя при этом постоянное значение циркуляции Γ , то получим распределение завихренности, отличное от нуля только вдоль некоторой пространственной кривой. Такое распределение завихренности будем называть *бесконечно тонкой вихревой нитью*, или *линейным вихрем* (не путать с вихревой линией). В некоторых источниках под вихревой нитью подразумевается только бесконечно тонкая вихревая нить.

Термин “вихревая нить” будет использоваться нами также при интерпретации экспериментальных результатов по изучению закрученных потоков, в которых вихревые структуры имеют протяженную пространственную форму с концентрацией завихренности вдоль оси. В качестве примеров можно привести торнадо, воронку при водосливе, вихрь за рабочим колесом турбины и другие. Особенностью перечисленных структур является тот факт, что они имеют трехмерную форму. Поэтому необходимо рассмотреть основные способы задания и основные (канонические) типы пространственных кривых, из которых особое значение имеет винтовая линия.

В общем случае кривую в пространстве наиболее удобно задавать в параметрическом виде [Бронштейн, Семеняев, 1986]

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\alpha) \quad \text{или} \quad x = x(\alpha), \quad y = y(\alpha), \quad z = z(\alpha). \quad (2.1)$$

Здесь α – вещественный параметр. Положительное направление на кривой соответствует увеличению α .

Длина дуги s вдоль кривой между точками M_0 и M , которые задаются значениями параметра α_0 и α , определяется формулами

$$s = \int_{\alpha_0}^{\alpha} ds, \quad ds = \sqrt{\left(\frac{d\mathbf{r}}{d\alpha}\right)^2} d\alpha = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} d\alpha,$$

где точка означает производную по α . Если зафиксировать точку M_0 , то длину s вдоль кривой можно считать новым параметром, т. е.

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s) \quad \text{или} \quad x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s). \quad (2.2)$$

Кроме представлений (2.1) и (2.2) существуют и другие способы задания пространственной кривой, а именно: 1 – путем введения правой тройки ортогональных единичных векторов $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$, которые называются *сопровождающим трехгранником* в точке M пространственной кривой и которые представляют собой соответственно *векторы касательной, главной нормали и бинормали*; 2 – путем задания двух формпараметров – *кривизны и кручения* – пространственной кривой в каждой ее точке. Рассмотрим более подробно эти величины.

Единичный вектор *касательной* есть $\mathbf{t} = d\mathbf{r}(s)/ds$. Он совпадает с касательной в точке M и направлен в ту же сторону, что и кривая (рис. 2.1).

Единичный вектор \mathbf{n} , соправленный вектору $d^2\mathbf{r}(s)/ds^2$ называется вектором *главной нормали* в точке M (в дальнейшем – просто нормали). Вектор *бинормали* \mathbf{b} определяется из соотношения $\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$. Можно показать, что с точностью до членов второго порядка малости элемент пространственной кривой лежит в плоскости, которая натянута на векторы \mathbf{t} , \mathbf{n} и называется *соприкасающейся* плоскостью. Заметим также, что вектор \mathbf{n} направлен внутрь дуги кривой на этой плоскости.

Кривизна κ к кривой в точке M определяется выражениями

$$\kappa \mathbf{n} = \frac{d^2\mathbf{r}(s)}{ds^2} \quad \text{или} \quad \kappa = [x''^2 + y''^2 + z''^2]^{1/2} \geq 0,$$

где штрих означает производную по длине s вдоль кривой. Обратная величина есть *радиус кривизны* $R = 1/\kappa$. Отметим, что в плоском случае кривизна является знакопеременной величиной.

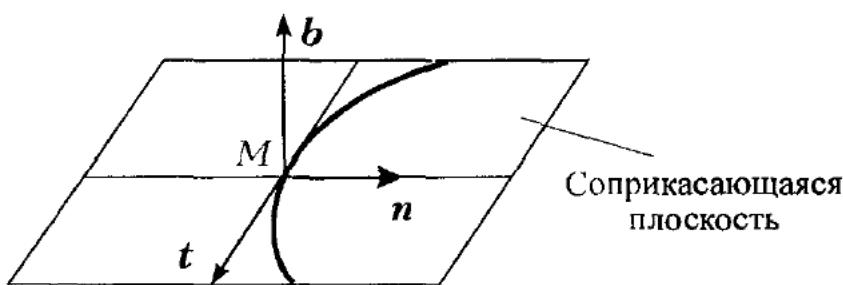


Рис. 2.1. Правая тройка ортогональных единичных векторов $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$, используемых для задания пространственной кривой

Кручение τ пространственной кривой вводится формулой

$$\tau = \frac{(\mathbf{t} \times \mathbf{t}') \cdot \mathbf{t}''}{|\mathbf{t}'|^2} = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix} \Bigg/ (x''^2 + y''^2 + z''^2). \quad (2.3)$$

Значение $\tau = 0$ означает, что кривая – плоская. В отличие от кривизны, кручение имеет знак, который определяет направление закручивания кривой. Если $\tau > 0$, то кривая на рис. 2.1 в направлении \mathbf{b} будет закручиваться против часовой стрелки (правый винт), а $\tau < 0$ соответствует левому винту.

Если кривая задана в виде (2.1), то

$$\kappa^2 = \frac{1}{R^2} = \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)(\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2) - (\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z})^2}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^3}, \quad (2.4)$$

$$\tau = R^2 \begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \\ \ddot{\dot{x}} & \ddot{\dot{y}} & \ddot{\dot{z}} \end{vmatrix} \Bigg/ (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^3. \quad (2.5)$$

Кривизна и кручение связаны с тройкой единичных векторов (\mathbf{t} , \mathbf{n} , \mathbf{b}) уравнениями Серре – Френе

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \kappa \mathbf{n}, \quad \frac{d\mathbf{n}}{ds} = \tau \mathbf{b} - \kappa \mathbf{t}, \quad \frac{d\mathbf{b}}{ds} = -\tau \mathbf{n}. \quad (2.6)$$

Из последней формулы, в частности, видно, что кручение кривой можно интерпретировать как угловую скорость вращения бинормали вокруг мгновенного положения касательной.

В качестве примера рассмотрим *винтовую линию*, задаваемую параметрически как

$$x = a \cos \alpha, \quad y = a \sin \alpha, \quad z = l\alpha, \quad a > 0. \quad (2.7)$$

Здесь a – радиус цилиндра, на который навита винтовая линия, параметр α имеет смысл угла, отсчитываемого от некоторой точки M_0 (рис. 2.2). Величина $2\pi l$ есть шаг винта, причем $l > 0$ соответствует правому винту, который и изображен на рисунке, а $l < 0$ – левому.

Исходя из выражения для длины дуги s , имеем

$$s = \int_0^\alpha (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^{1/2} d\alpha = \alpha \sqrt{a^2 + l^2}. \quad (2.8)$$

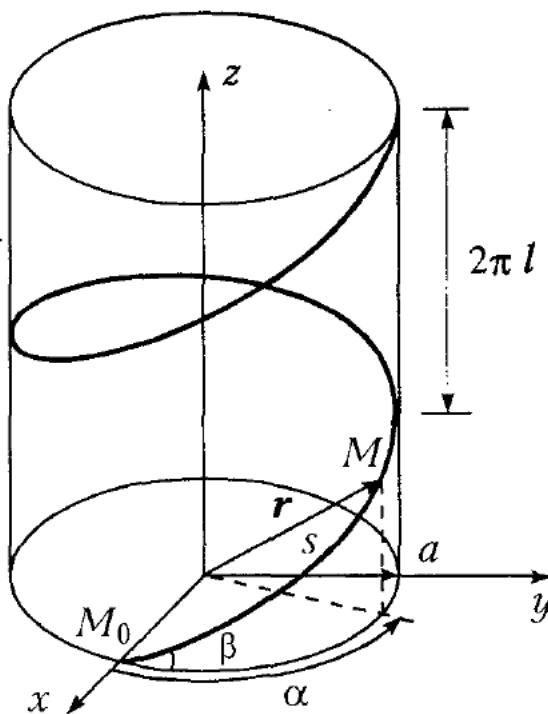


Рис. 2.2. Винтовая линия

Соответственно

$$x = a \cos\left(s / \sqrt{a^2 + l^2}\right), \quad y = a \sin\left(s / \sqrt{a^2 + l^2}\right), \quad z = ls / \sqrt{a^2 + l^2}.$$

Тогда кривизна и кручение есть

$$\kappa = 1/R = \sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2} = a/(a^2 + l^2) = \text{const}, \quad (2.9)$$

$$\tau = R^2 \begin{vmatrix} -a \sin \alpha & a \cos \alpha & l \\ -a \cos \alpha & -a \sin \alpha & 0 \\ a \sin \alpha & -a \cos \alpha & 0 \end{vmatrix} / \left[(-a \sin \alpha)^2 + (a \cos \alpha)^2 + l^2 \right]^3 = \frac{l}{a^2 + l^2} = \text{const}. \quad (2.10)$$

Так же легко вычисляется тройка единичных векторов

$$\mathbf{t} = \mathbf{r}' = \frac{a}{\sqrt{a^2 + l^2}} \left[-\sin \alpha, \cos \alpha, \frac{l}{a} \right],$$

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}''}{|\mathbf{r}''|} = [-\cos \alpha, -\sin \alpha, 0], \quad (2.11)$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n} = \frac{l}{\sqrt{a^2 + l^2}} \left[\sin \alpha, -\cos \alpha, \frac{a}{l} \right]$$

Наконец, для угла наклона винта β получаем

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{l}{a} = \frac{\tau}{\kappa}. \quad (2.12)$$

Отметим, что *окружность* представляет собой пример кривой с нулевым кручением ($\tau = 0$) и кривизной, обратно пропорциональной радиусу окружности a

$$\kappa = 1/a, \quad (2.13)$$

а прямая линия является примером кривой с нулевым кручением и нулевой кривизной.

2.2. ЗАКОН БИО – САВАРА

Получим распределение скорости, индуцированной бесконечно тонкой замкнутой вихревой нитью интенсивностью Γ в безграничном пространстве с нулевой завихренностью. С этой целью рассмотрим произвольную замкнутую вихревую нить с достаточно малым, но конечным сечением δS (рис. 2.3). Тогда вектор ω будет параллелен элементу ds нити. Будем использовать формулу (1.93), которую преобразуем следующим образом, полагая $dV = \delta S ds$:

$$\mathbf{u} = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\boldsymbol{\omega} \times \Delta \mathbf{r}}{|\Delta \mathbf{r}|^3} \delta S ds = \lim_{\delta S \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi} \oint_s \frac{\boldsymbol{\omega} \times \Delta \mathbf{r}}{|\Delta \mathbf{r}|^3} \delta S ds.$$

Здесь V – объем вихревой нити. Но по теореме Стокса $\boldsymbol{\omega} \cdot \delta S = \Gamma$. Переходя к пределу $\delta S \rightarrow 0$, $\omega \rightarrow \infty$ при условии $\Gamma = \text{const}$, получаем выражение

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = -\frac{\Gamma}{4\pi} \oint_s \frac{\Delta \mathbf{r} \times ds(\mathbf{r}')}{|\Delta \mathbf{r}|^3}. \quad (2.14)$$

Эта формула для скорости, индуцированной бесконечно тонкой вихревой нитью, называется *законом Био – Савара*, поскольку по форме совпадает с выражением для магнитного поля, создаваемого замкнутым проводником с постоянным током. Формулу (2.14) можно переписать в дифференциальном виде

$$d\mathbf{u} = -\frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\Delta \mathbf{r} \times ds}{|\Delta \mathbf{r}|^3}. \quad (2.15)$$

Тогда $d\mathbf{u}$ – это бесконечно малая скорость, индуцируемая элементом ds вихревой нити в точке $M(\mathbf{r})$.

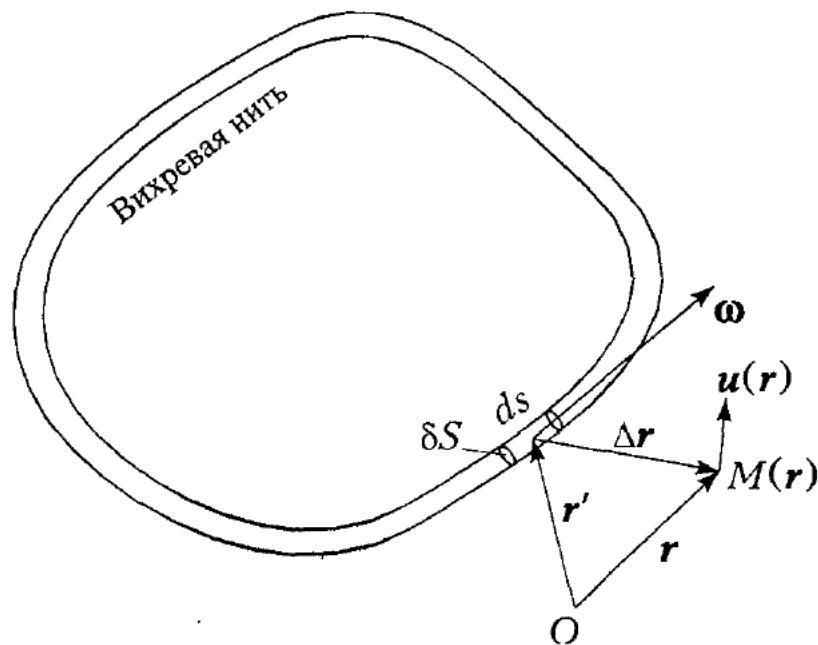


Рис. 2.3. К выводу закона Био – Савара

Возможен и другой, более простой, способ вывода формулы Био – Савара (2.14). Рассмотрим с этой целью сразу бесконечно тонкую вихревую нить (тоже замкнутую). Пусть \mathbf{n} , \mathbf{b} , \mathbf{t} – единичные векторы нормали и бинормали и единичный тангенциальный вектор соответственно, а x_n , x_b , x_t – координаты вдоль соответствующих направлений. Очевидно, что в таком случае завихренность можно представить в виде

$$\boldsymbol{\omega} = \Gamma \delta(x_n) \delta(x_b) \mathbf{t}, \quad (2.16)$$

где δ – дельта-функция Дирака. Подставляя (2.16) в (1.93) и интегрируя по x_n , x_b , получаем искомое выражение

$$\mathbf{u} = \frac{\Gamma}{4\pi} \oint \delta(x_n) \delta(x_b) \frac{\mathbf{t} \times \Delta \mathbf{r}}{|\Delta \mathbf{r}|^3} dx_n dx_b dx_t = -\frac{\Gamma}{4\pi} \oint \frac{\Delta \mathbf{r} \times d\mathbf{s}}{|\Delta \mathbf{r}|^3}.$$

Здесь учтено, что $dV = dx_n dx_b dx_t$ и $\mathbf{t} dx_t \equiv d\mathbf{s}$.

Представление завихренности (2.16) записано в системе координат, связанной с кривой. В абсолютной системе координат удобнее использовать следующее определение [Leonard, 1985]:

$$\boldsymbol{\omega} = \Gamma \oint \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}(s')] \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s'} ds'.$$

Формуле Био – Савара можно придать иной вид, если преобразовать контурный интеграл в (2.14) в интеграл по произвольной поверхности S , натянутой на контур s (замкнутую бесконечно тонкую вихревую нить). Применяя одно из следствий теоремы Стокса [Г. Корн, Т. Корн, 1984, с.176] к вектору

$$\mathbf{B} = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3},$$

можно записать

$$\int_S (d\mathbf{S} \times \nabla) \times \mathbf{B} = \oint d\mathbf{s} \times \mathbf{B} \equiv \mathbf{u}. \quad (2.17)$$

Здесь $d\mathbf{S} = \mathbf{n}dS$, dS – элемент поверхности, \mathbf{n} – единичный вектор нормали к этому элементу. В соответствии с законом Био – Савара, справа имеем выражение для индуцированной скорости, которое эквивалентно определяется через поверхностный интеграл. Перепишем двойное векторное произведение, используя следующее векторное тождество:

$$(d\mathbf{S} \times \nabla) \times \mathbf{B} = \nabla(\mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}) - (\nabla \mathbf{B})d\mathbf{S}. \quad (2.18)$$

Дальнейшие преобразования для удобства выполним в координатной форме.

Распишем $\nabla \mathbf{B}$, введя обозначение $a \equiv |\Delta \mathbf{r}| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$,

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{B} &\equiv \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'} \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{a^3} \right) = \frac{\partial}{\partial x'} \left(\frac{x - x'}{a^3} \right) + \frac{\partial}{\partial y'} \left(\frac{y - y'}{a^3} \right) + \frac{\partial}{\partial z'} \left(\frac{z - z'}{a^3} \right) = \\ &= \frac{-a^3 + 3(x - x')^2}{a^5} + \frac{-a^3 + 3(y - y')^2}{a^5} + \frac{-a^3 + 3(z - z')^2}{a^5} = 0, \end{aligned}$$

т. е. второй член справа в (2.18) исчезает. Очевидно, что $\partial/\partial \mathbf{r}'(\mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}) = -\partial/\partial \mathbf{r}(\mathbf{B} \cdot d\mathbf{S})$, так как $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$, причем оператор $\partial/\partial \mathbf{r}$ можно вынести за знак интеграла в (2.17), сохранив обозначение ∇ . Тогда окончательно получим из (2.17)

$$\mathbf{u} = -\frac{\Gamma}{4\pi} \nabla \Omega, \quad (2.19)$$

где введено обозначение

$$\Omega(\mathbf{r}) = \int \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\mathbf{S}. \quad (2.20)$$

Поскольку вне вихревой нити течение потенциально, то из определения $\mathbf{u} = \nabla \phi$ следует, что потенциал ϕ есть

$$\phi = -\frac{\Gamma}{4\pi} \Omega. \quad (2.21)$$

Заметим, что потенциал скорости определен неоднозначно, так как область вне вихревой нити не является односвязной.

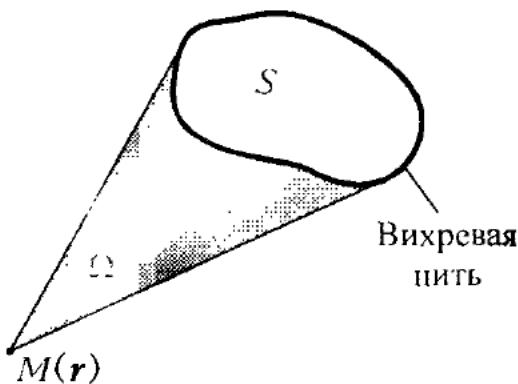


Рис. 2.4. К интерпретации формулы Био – Савара

Величина Ω представляет собой телесный угол, под которым из точки $M(\mathbf{r})$ видна поверхность S , натянутая на замкнутую вихревую нить (рис. 2.4). Действительно из (2.20) имеем $d\Omega = dS_a/a^2$, где $a = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ – расстояние от точки M до элемента $d\mathbf{S}$, а dS_a – проекция элемента поверхности на плоскость, перпендикулярную вектору $(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$. Полученное соотношение есть определение элементарного телесного угла.

Наконец, индуцированную вихревой нитью скорость можно определить через векторный потенциал: $\mathbf{u} = \text{rot } \mathbf{A}$. Векторный потенциал, соответствующий вихревой нити, найдем из формулы (1.88) после подстановки в нее выражения (2.16) для завихренности

$$\mathbf{A} = -\frac{\Gamma}{4\pi} \oint \frac{d\mathbf{s}}{|\Delta\mathbf{r}|}. \quad (2.22)$$

2.3. ПРЯМОЛИНЕЙНАЯ БЕСКОНЕЧНО ТОНКАЯ ВИХРЕВАЯ НИТЬ

2.3.1. Вихревая нить в идеальной жидкости

Простейшим объектом, который легко описывается с помощью закона Био – Савара, является *прямолинейная бесконечно тонкая вихревая нить*. Ее можно интерпретировать как окружность с бесконечно большим радиусом кривизны. Пусть ось z в цилиндрической системе координат направлена вдоль вихревой нити, как показано на рис. 2.5. Ясно, что имеется только тангенциальная компонента индуцированной скорости $u = u(r)$, выражение для которой следует из (2.14)

$$u = |\mathbf{u}| = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \alpha}{r^2 + z^2} dz = \frac{\Gamma}{4\pi r} \int_0^{\pi} \sin \alpha d\alpha = \frac{\Gamma}{2\pi r}. \quad (2.23)$$

Отсюда видно, что циркуляция по любой окружности радиуса r есть Γ . При $r \rightarrow 0$ скорость $u \rightarrow \infty$, что является следствием подхода идеальной жидкости.

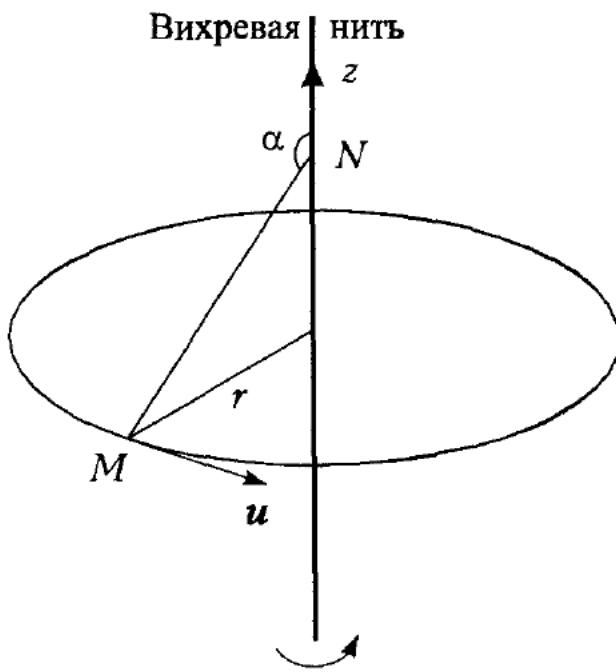


Рис. 2.5. Прямолинейная вихревая нить

Выпишем также выражения для функции тока ψ и потенциала ϕ , которые, напомним, определяются с точностью до константы. В полярных координатах (r, θ) по определению имеем

$$u_\theta \equiv u = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta},$$

откуда с учетом (2.23)

$$\phi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta + \text{const}, \quad \psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r + \text{const}. \quad (2.24)$$

Так как полученные соотношения не зависят от координаты z , то достаточно рассматривать движение в двумерной плоскости. Поэтому вместо вихревой нити можно говорить о *точечном вихре*. Соответственно можно ввести комплексный потенциал $\mathbf{W}(z)$

$$\mathbf{W}(z) = \phi + i\psi = \frac{\Gamma}{2\pi i} (\ln r + i\theta) + \text{const} = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z + \text{const}.$$

Здесь комплексная координата $z = x + iy = re^{i\theta}$, x , y – декартовы координаты. Если вихревая нить не совпадает с осью z , а проходит параллельно ей через точку на плоскости xy с комплексной координатой $z_0 = x_0 + iy_0$, то тогда комплексный потенциал записывается как

$$\mathbf{W} = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z - z_0) + \text{const}.$$

Преимущество использования комплексного потенциала состоит в том, что в силу его аддитивности легко находить потенциал системы изолированных или непрерывно распределенных вихревых нитей, а затем так же просто восстановить поле скоростей по формуле

$$u_x - iu_y = \frac{d\mathbf{W}}{dz}.$$

Здесь u_x, u_y – компоненты скорости в декартовой системе координат.

Рассмотрим для примера случай N прямолинейных вихревых нитей, расположенных параллельно оси z с комплексными координатами \mathbf{z}_{0k} на плоскости xy . Тогда

$$\mathbf{W} = \sum_{k=1}^N \left[\frac{\Gamma_k}{2\pi i} \ln(z - z_{0k}) + \mathbf{C}_k \right], \quad u_x - iu_y = \frac{d\mathbf{W}}{dz} = \sum_{k=1}^N \frac{\Gamma_k}{2\pi i(z - z_{0k})}, \quad (2.25)$$

где \mathbf{C}_k – произвольные константы, которые можно подбирать, чтобы обеспечить сходимость при $N \rightarrow \infty$. Скорость жидкости в точке, совпадающей с положением вихря \mathbf{z}_{0p} , определяется по следующему правилу: в сумме (2.25) исключается член, содержащий \mathbf{z}_{0p} и приводящий вследствие этого к особенности.

Рассмотрим также частный случай последней задачи, когда имеются два одинаковых линейных вихря противоположного знака и расстояние между ними стремится к нулю. Тогда, обозначая координаты вихрей как $\mathbf{z}_0 + \delta z/2$ и $\mathbf{z}_0 - \delta z/2$ соответственно для положительного и отрицательного вихрей, получаем

$$\mathbf{W} = \frac{\Gamma}{2\pi i |\delta z|} \lim_{|\delta z| \rightarrow 0} \left[\ln \left(\mathbf{z} - \mathbf{z}_0 - \frac{\delta z}{2} \right) - \ln \left(\mathbf{z} - \mathbf{z}_0 + \frac{\delta z}{2} \right) \right] = \lim_{|\delta z| \rightarrow 0} \frac{\Gamma}{2\pi i} \left(-\frac{\delta z}{\mathbf{z} - \mathbf{z}_0} \right).$$

Полагая, что есть конечный предел $\lim_{|\delta z| \rightarrow 0} \Gamma |\delta z| = m$, имеем

$$\mathbf{W} = \frac{i\mathbf{M}}{2\pi(\mathbf{z} - \mathbf{z}_0)}.$$

Здесь $\mathbf{M} = m e^{i\theta_m}$, где θ_m определяется из исходной ориентации вектора $\delta z = |\delta z_0| e^{i\theta_m}$. С целью упрощения анализа пусть $\mathbf{z}_0 = 0$, $\theta_m = 0$, т. е. вихри проходят через ось x на плоскости xy по обе стороны от начала координат. Тогда

$$\mathbf{W} = \frac{im}{2\pi z}. \quad (2.26)$$

Эта формула описывает так называемый *линейный вихревой диполь*, или просто *вихревой диполь*, с моментом m . Легко показать, что линии тока и эквипотенциали представляют собой окружности, касающиеся начала координат. Причем центры окружностей для линий тока и эквипотенциалей лежат соответственно на осях x и y . Напомним, что для обычного диполя, состоящего из источника и стока, комплексный потенциал имеет вид: $\mathbf{W} = m/2\pi z$. Из сравнения с (2.26) следует, что различие между вихревым и обычным диполями заключается в том, что линии тока и эквипотенциали меняются местами.

Выше была описана прямолинейная вихревая нить в безграничном пространстве (или точечный вихрь на неограниченной плоскости). При наличии твердых границ в ряде частных случаев можно найти аналитическое решение с помощью *метода отражений*. В частности, для точечного вихря в области, ограниченной вещественной осью, отраженный вихрь имеет равную по величине и противоположную по знаку циркуляцию (рис. 2.6). Комплексный потенциал системы и индуцированное поле скоростей имеют соответственно вид

$$\mathbf{W} = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \frac{\mathbf{z} - \mathbf{z}_0}{\mathbf{z} - \bar{\mathbf{z}}_0}, \quad u_x - iu_y = \frac{\Gamma}{2\pi i} \left(\frac{1}{\mathbf{z} - \mathbf{z}_0} - \frac{1}{\mathbf{z} - \bar{\mathbf{z}}_0} \right), \quad (2.27)$$

где \mathbf{z}_0 – комплексная координата вихря, а черта означает комплексное сопряжение. Вихрь при этом движется параллельно стенке со скоростью, равной скорости, индуцированной отраженным вихрем в точке \mathbf{z}_0 , $U = \Gamma/4\pi y_0$. Здесь y_0 – расстояние от вихря до стенки.

Другой пример – движение точечного вихря внутри или спаружи круговой области радиуса a (рис. 2.7). В этом случае также отраженный вихрь имеет равную по величине и противоположную по знаку циркуляцию. Располагается отраженный вихрь на радиальном луче, проходящем через основной вихрь, на расстоянии a^2/r_0 . Комплексный потенциал и скорость в такой системе записываются следующим образом:

$$\mathbf{W} = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \frac{\mathbf{z} - \mathbf{z}_0}{\mathbf{z} - a^2/\bar{\mathbf{z}}_0}, \quad u_x - iu_y = \frac{\Gamma}{2\pi i} \left(\frac{1}{\mathbf{z} - \mathbf{z}_0} - \frac{1}{\mathbf{z} - a^2/\bar{\mathbf{z}}_0} \right). \quad (2.28)$$

Вихрь движется по круговой траектории, концентричной с границей области, со скоростью

$$U = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{r_0}{a^2 - r_0^2}, \quad (2.29)$$

т. е. вращается с частотой

$$f = \frac{\Gamma}{4\pi^2} \frac{1}{a^2 - r_0^2}.$$

Здесь $r_0 = |\mathbf{z}_0|$ – расстояние от центра окружности до вихря.

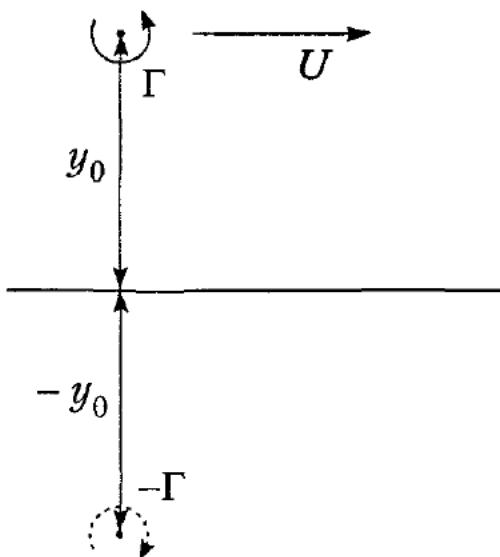


Рис. 2.6. Точечный вихрь вблизи плоской твердой границы

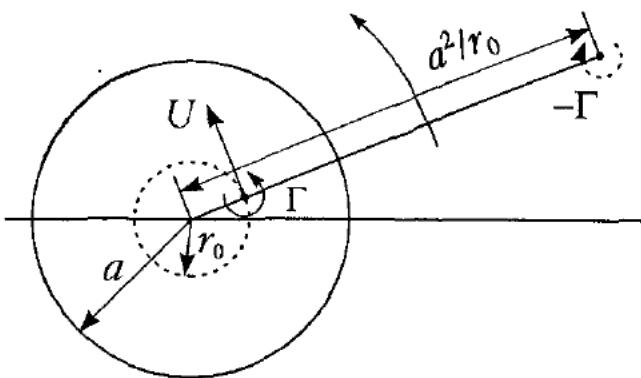


Рис. 2.7. Точечный вихрь внутри круговой области

Аналитическое решение задачи о вихре в ограниченной области можно записать и в более общем случае, когда известно конформное отображение области течения на круг (его внешность) или на полуплоскость. Вводя комплексную переменную в области течения ζ и задавая отображение $z(\zeta)$ на полуплоскость $\text{Im}(z) > 0$, имеем

$$\mathbf{W} = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \frac{z(\zeta) - z(\zeta_0)}{z(\zeta) - \bar{z}(\zeta_0)}$$

Необходимо отметить, что на течение, индуцированное вихрем и его отражением, может накладываться любое внешнее потенциальное течение.

2.3.2. Диффузия вихревой нити

Теперь проанализируем, к чему приводит учет вязкости. Одно из следствий влияния вязкости заключается в том, что теперь вихревые линии уже не движутся вместе с жидкими частицами. Это ясно из анализа условий, при которых выведены соотношения (1.16), (1.17). Проанализируем более подробно эффект вязкости на примере *диффузии прямолинейной вихревой нити*.

Пусть в момент времени $t = 0$ имеется бесконечная тонкая вихревая нить, совпадающая с осью z и имеющая циркуляцию Γ . Очевидно, что со временем решение будет оставаться осесимметричным, поэтому от системы уравнений (1.37) останется одно уравнение, которое примет вид

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} \right),$$

где $\omega \equiv \omega_z$ – осевая компонента завихренности. Как видно, это уравнение совпадает с уравнением теплопроводности для задачи о распространении тепла от линейного источника, расположенного в однородной среде. Его решение хорошо известно

$$\omega = \frac{c}{4\pi v t} e^{-r^2/4vt}. \quad (2.30)$$

Константа c определяется из начального условия, которое мы зададим с помощью теоремы Стокса

$$\Gamma = \Gamma(r, t) \Big|_{t=0} = 2\pi \int_0^r \omega r dr \Big|_{t=0}.$$

Подставляя сюда (2.30), имеем

$$\Gamma = c \frac{2\pi}{4\pi v t} \int_0^r e^{-r^2/4vt} r dr \Big|_{t=0} = c \int_0^\xi e^{-\xi^2} d\xi \Big|_{t=0} = c \left(1 - e^{-r^2/4vt}\right) \Big|_{t=0} = c.$$

Таким образом

$$\omega(r, t) = \frac{\Gamma}{4\pi v t} e^{-r^2/4vt}. \quad (2.31)$$

Соответственно тангенциальная скорость u есть

$$u(r, t) = \frac{1}{r} \int_0^r \omega r dr = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left(1 - e^{-r^2/4vt}\right). \quad (2.32)$$

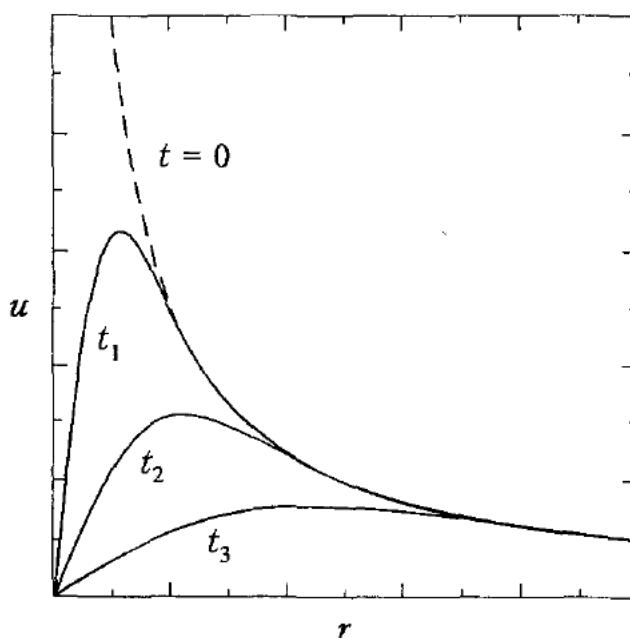


Рис. 2.8. Радиальные распределения тангенциальной скорости в разные моменты времени в вихре Ламба – Озепа

Распределения скорости u приведены на рис. 2.8 для разных моментов времени. При $t = 0$ имеем распределение скорости, индуцированное бесконечно тонкой вихревой нитью: $u = \Gamma/2\pi r$. При $t > 0$ на профилях проявляется локальный максимум, который смещается со временем на бесконечность с одновременным уменьшением значения максимума. При $r \ll \sqrt{4vt}$ скорость $u = \Gamma r/8\pi vt$, т. е. жидкость в ядре вихря вращается как твердое тело с угловой скоростью $\Gamma/8\pi vt$. Таким образом, со временем за счет диффузии завихренность распространяется во все пространство, занятое жидкостью. Рассмотренный пример называется *вихрем Ламба – Озенна* [Lamb, 1932].

Проведенный анализ свидетельствует, что учет вязкости в объеме жидкости приводит только к диффузии завихренности, но никак не к ее генерации.

2.4. САМОИНДУЦИРОВАННОЕ ДВИЖЕНИЕ ВИХРЕВОЙ НИТИ

Всякое искривление вихревой нити приводит к тому, что данный участок нити оказывается в поле скорости, индуцированной другими участками нити. Результирующее движение называется *самоиндуцированным движением вихревой нити*. Следуя Бэтчелору [1973], оценим поведение искривленной бесконечно тонкой вихревой нити, используя закон Био – Савара (2.14)

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = -\frac{\Gamma}{4\pi} \oint \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \times d\mathbf{s}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}.$$

Очевидно, что интеграл расходится при $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}'$, т. е. в точках вихревой нити. Поэтому будем оценивать индуцированную скорость в непосредственной окрестности данной точки вихревой нити, в которую поместим начало координат, а малый участок нити будем аппроксимировать дугой окружности радиуса $R = 1/\kappa$, где κ – кривизна (рис. 2.9). Введем триаду ортогональных единичных векторов $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$, так что $\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$. Здесь \mathbf{n} и \mathbf{b} – единичные векторы нормали и бинормали, а \mathbf{t} – единичный касательный вектор. Вектор \mathbf{r}' определяет точку на нити, а \mathbf{r} – точку, в которой рассчитывается индуцированная скорость. Будем полагать, что расчетная область ограничена условиями

$$|\mathbf{r}| = r \ll R \quad \text{и} \quad s \ll R \quad (\text{или } \theta \ll 1), \quad (2.33)$$

где s – расстояние вдоль вихревой нити от точки O . Масштабом длины является радиус кривизны R . Тогда имеем последовательно

$$\mathbf{r} = y\mathbf{n} + z\mathbf{b}, \quad s = R\theta,$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= x'\mathbf{t} + y'\mathbf{n} = \mathbf{t}R\sin\theta + \mathbf{n}R(1 - \cos\theta) \approx \mathbf{t}R\theta + \mathbf{n}(R\theta^2/2) = st + (s^2\kappa/2)\mathbf{n}, \\ d\mathbf{r}' &\approx (\mathbf{t} + s\kappa\mathbf{n})ds. \end{aligned}$$

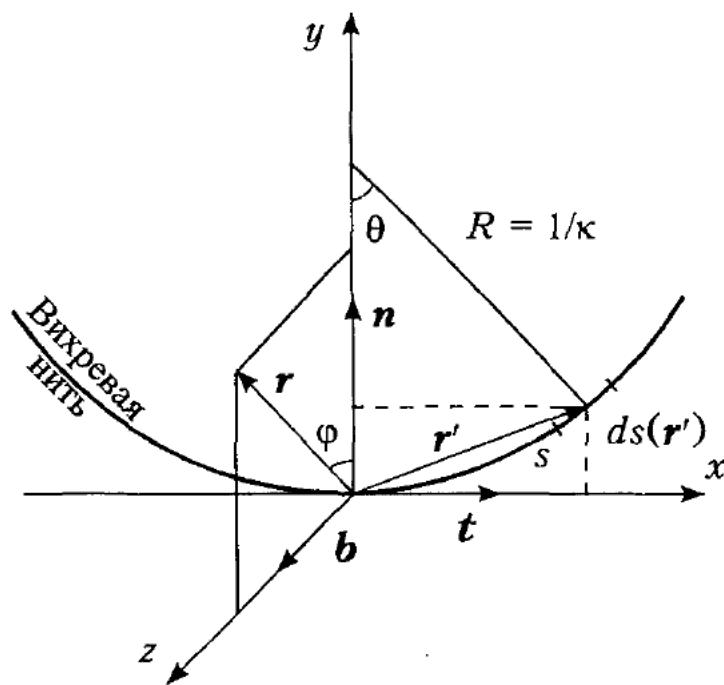


Рис. 2.9. К расчету самоиндуцированного движения вихревой нити

Далее распишем числитель и знаменатель в интеграле Био – Савара

$$\begin{aligned} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \times \delta s &\approx \left(y\mathbf{n} + z\mathbf{b} - st - (s^2\kappa/2)\mathbf{n} \right) \times (t + sk\mathbf{n}) ds = \\ &= \left[z\mathbf{n} - zsk\mathbf{t} + (y + s^2\kappa/2)\mathbf{b} \right] ds, \end{aligned}$$

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 = \left| y\mathbf{n} + z\mathbf{b} - st - (s^2\kappa/2)\mathbf{n} \right|^2 = r^2 + s^2(1 - y\kappa) + \kappa^2 s^4 / 4.$$

Теперь разобьем интеграл Био – Савара на два интеграла. Подставим полученные выражения в первую часть интеграла Био – Савара, которую проинтегрируем в пределах $-L \leq s \leq L$, где L удовлетворяет условию (2.33). В результате получим

$$-\frac{\Gamma}{4\pi} \oint \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \times d\mathbf{s}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = -\frac{\Gamma}{4\pi} \int_{-L}^L \frac{-zsk\mathbf{t} + z\mathbf{n} - (y + \kappa s^2/2)\mathbf{b}}{\left[r^2 + s^2(1 - y\kappa) + \kappa^2 s^4 / 4 \right]^{3/2}} ds + I_n, \quad (2.34)$$

где I_n – оставшаяся часть интеграла Био – Савара. Пока мы использовали только условие: $s, L \ll R$.

Вычислим теперь асимптотическое выражение интеграла в пределе

$$r \rightarrow 0, L \rightarrow 0, L/r \rightarrow \infty.$$

С этой целью перейдем к новой переменной $m = s/r$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\Gamma}{4\pi} \int_{-M}^M \frac{-\frac{z}{r} m \kappa t + \frac{z}{r^2} \mathbf{n} - \left(\frac{y}{r^2} + \frac{\kappa m^2}{2} \right) \mathbf{b}}{\left[1 + m^2 (1 - y \kappa + \kappa^2 s^4 / 4) \right]^{3/2}} dm \approx \\
& \underset{r \rightarrow 0}{\approx} \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{-M}^M \frac{(\mathbf{b}y - \mathbf{n}z)(1 + 1.5m^2 y \kappa / (1 + m^2)) / r^2 + b \kappa m^2 / 2}{(1 + m^2)^{3/2}} dm = \\
& = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{(\mathbf{b}y - \mathbf{n}z)}{r^2} \left(\int_{-M}^M \frac{dm}{(1 + m^2)^{3/2}} + \frac{3\kappa y}{2} \int_{-M}^M \frac{m^2}{(1 + m^2)^{5/2}} dm \right) + \\
& + \frac{\kappa \Gamma}{8\pi} \mathbf{b} \int_{-M}^M \frac{m^2 dm}{(1 + m^2)^{3/2}},
\end{aligned}$$

где $M = L/r$. Здесь в исходном интеграле в числителе пренебрегли первым членом, а в знаменателе – добавочными членами в круглых скобках, кроме $y \kappa$, который учтен как поправка в числителе. Далее имеем

$$\begin{aligned}
\int_{-M}^M \frac{dm}{(1 + m^2)^{3/2}} &= \frac{m}{\sqrt{1 + m^2}} \Big|_{-M}^M \approx 2, \\
\int_{-M}^M \frac{m^2 dm}{(1 + m^2)^{3/2}} &= \left[-\frac{m}{\sqrt{1 + m^2}} + \ln \left(m + \sqrt{1 + m^2} \right) \right]_{-M}^M \approx -2 + 2 \ln \frac{2L}{r}, \\
\int_{-M}^M \frac{m^2 dm}{(1 + m^2)^{5/2}} &= \int_{-M}^M \left[\frac{1}{(1 + m^2)^{3/2}} - \frac{1}{(1 + m^2)^{5/2}} \right] dm \approx 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

В результате получаем асимптотическое выражение для индуцированной скорости в окрестности искривленной вихревой нити

$$\mathbf{u} \approx \frac{\Gamma}{2\pi r^2} (\mathbf{y}\mathbf{b} - \mathbf{z}\mathbf{n}) + \frac{\Gamma y}{4\pi r^2} (\mathbf{y}\mathbf{b} - \mathbf{z}\mathbf{n}) \kappa + \frac{\Gamma \kappa \mathbf{b}}{4\pi} \left(\ln \frac{2L}{r} - 1 \right) + I_n^0, \quad (2.35)$$

где

$$I_n^0 = I_n \Big|_{r \rightarrow 0} = \lim_{L \rightarrow 0} \frac{\Gamma}{4\pi} \oint_{|s|>L} \frac{\mathbf{r}' \times d\mathbf{s}(\mathbf{r}')}{|r'|^3}.$$

Здесь первый член представляет циркуляционное движение вокруг рассматриваемого элемента нити и не вызывает ее смещения. Модуль этого члена равен $\Gamma/2\pi r$ и совпадает с выражением (2.23) для скорости, индуцированной

прямолинейной вихревой нитью. Второй член есть поправка к циркуляционному движению за счет кривизны нити. Третий член дает движение по бинормали и обращается в бесконечность на вихревой нити. Это означает, что искривленная нить должна смещаться по бинормали с бесконечной скоростью и в общем случае деформироваться. Интеграл I_n^0 , взятый по оставшейся части вихревой нити, отражает нелокальный вклад в самоиндуцированное движение нити. При конечных значениях L этот интеграл ограничен. При $L \rightarrow 0$ вклад части интеграла I_n^0 вблизи начала координат есть

$$-2 \left[\frac{\Gamma}{4\pi} \int \frac{(st + \mathbf{n}s^2\kappa/2) \times d\mathbf{s}}{|s|^3} \right]_{s=L} = -\frac{\Gamma}{4\pi} \left[\int \frac{ds}{|s|} \right]_{s=L} = -b \frac{\Gamma \kappa}{4\pi} \ln L.$$

Здесь коэффициент 2 возникает вследствие того, что вклады от окрестностей точек $s = \pm L$ одинаковы, а знак минус обусловлен тем, что $(+L)$ и $(-L)$ являются нижним и верхним пределами интегрирования соответственно. Возвращаясь к (2.35), видим, что интеграл I_n^0 ликвидирует во втором члене логарифмическую особенность при $L \rightarrow 0$. Таким образом, в асимптотическом выражении для индуцированной скорости (2.35) только $\ln r$ приводит к расходимости, когда $r \rightarrow 0$, т. е. в рассматриваемой точке вихревой нити. В целом это означает, что в асимптотическом пределе самоиндуцированное движение искривленной вихревой нити обусловлено целиком локальным эффектом, а именно – локальной кривизной оси нити κ . Расходимость связана с идеализированным представлением о вихревой нити как объекте с бесконечно тонким ядром. Тем не менее выведенные формулы могут быть использованы для определения устойчивых форм искривленной вихревой нити, что будет продемонстрировано ниже, а при использовании дополнительных допущений о ядре вихря позволяют описать и динамику вихревых нитей.

Перепишем (2.35), оставив лишь член, дающий локальный вклад в самоиндуцированное движение,

$$\mathbf{u} = \frac{\Gamma}{4\pi} \kappa b \left(\ln \frac{2L}{r} - 1 \right). \quad (2.36)$$

Заметим, что в этой приближенной формуле неопределенной величиной остался предел интегрирования L . Способы его учета будут также обсуждаться в последующих разделах. А сейчас на основе формулы (2.36) выведем уравнения самоиндуцированного движения вихревой нити. Чтобы избежать расходимости в (2.36), будем полагать, что вихревая нить тонкая, но имеет конечный радиус ε (или некоторое его эффективное значение в случае сложной структуры ядра) и что самоиндуцированная скорость определяется формулой (2.36) при $r = \varepsilon$. Обозначим радиус-вектор точки, лежащей на вихревой нити,

как $\mathbf{X}(s, t)$, где по-прежнему s – расстояние вдоль нити. Тогда скорость этой точки нити по определению есть

$$\mathbf{u} = \partial \mathbf{X} / \partial t. \quad (2.37)$$

Перейдем к новой временной координате

$$t \frac{\Gamma}{4\pi} \left(\ln \frac{2L}{\varepsilon} - 1 \right) \rightarrow t, \quad (2.38)$$

полагая $L/\varepsilon = \text{const}$. Тогда, приравнивая (2.37) и (2.36) при $r = \varepsilon$ и учитывая (2.38), получаем уравнение движения нити

$$\frac{\partial \mathbf{X}(t, s)}{\partial t} = \kappa \mathbf{b}. \quad (2.39)$$

Указанный подход называется *локальным индукционным приближением* (“local induction approximation”) и обычно приписывается Hama [1962] и Arms, Hama [1965], хотя еще раньше использовался в работе Da Rios [1906], на что указано в статье Ricca [1996].

Преобразуем уравнение (2.39), учитывая следующие соотношения:

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}, \quad \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial s} \equiv \mathbf{X}' = \mathbf{t}, \quad \mathbf{X}'' = \kappa \mathbf{n}.$$

Откуда $\kappa \mathbf{b} = \kappa (\mathbf{t} \times \mathbf{n}) = \mathbf{X}' \times \mathbf{X}''$. В результате получаем так называемое *локальное индукционное уравнение* (“local induction equation” или LIE)

$$\frac{\partial \mathbf{X}(t, s)}{\partial t} = \mathbf{X}' \times \mathbf{X}''. \quad (2.40)$$

Локальная индукционная аппроксимация – один из основных упрощенных подходов в динамике вихревых нитей. Подчеркнем еще раз, что в данном приближении индуцированная скорость направлена по бинормали к нити, при этом не учитываются эффекты растяжения (stretching) или сжатия (contracting), которые могут существенно влиять на динамику вихревой нити [Klein, Majda, 1991]. Ряд важных выводов и решений LIE, а также другие подходы будут описаны и обсуждены в последующих главах.

2.5. БЕСКОНЕЧНО ТОНКОЕ ВИХРЕВОЕ КОЛЬЦО

Рассматривая вихревую нить, имеющую форму окружности (рис. 2.10), компоненту завихренности, ортогональную плоскости (r, z) , можно определить через дельта-функцию Дирака (см. (2.16))

$$\omega = \Gamma \delta(r - r_0^*) \delta(z - z_0^*). \quad (2.41)$$

Здесь (r_0, z_0) – точка пересечения плоскости (r, z) нитью, Γ – циркуляция. Подставляя ω в (1.96), сразу находим функцию тока

$$\psi = \frac{\Gamma}{2\pi} (rr_0)^{1/2} \left[\left(\frac{2}{k} - k \right) K(k) - \frac{2}{k} E(k) \right], \quad (2.42)$$

где $k^2 = 4rr_0/[(z - z_0)^2 + (r + r_0)^2]$, K и E – полные эллиптические интегралы первого и второго рода.

Несколько иную запись для функции тока можно найти у Ламба [1947, п. 161], где введены минимальное и максимальное расстояния от точки (r, z) до кольца $s_1^2 = (z - z_0)^2 + (r - r_0)^2$; $s_2^2 = (z - z_0)^2 + (r + r_0)^2$ и новая переменная $\lambda = (s_2 - s_1)/(s_2 + s_1)$. В результате

$$\psi = \frac{\Gamma}{2\pi} (s_1 + s_2) [K(\lambda) - E(\lambda)]. \quad (2.43)$$

Последнее выражение выводится с помощью преобразования Ландена [Г. Корн, Т. Корн, 1984].

Учитывая, что круговая нить циркуляции Γ эквивалентна распределению диполей по площади круга с равномерной интенсивностью Γ , можно найти соответствующие потенциал и функцию тока как интеграл от функций Бесселя [Ламб, 1947, п. 161].

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{\Gamma}{2} r_0 \int_0^\infty e^{-\lambda(z-z_0)} J_0(\lambda r) J_1(\lambda r_0) d\lambda \\ &\qquad\qquad\qquad z - z_0 > 0. \quad (2.44) \\ \psi &= \frac{\Gamma}{2} rr_0 \int_0^\infty e^{-\lambda(z-z_0)} J_1(\lambda r) J_1(\lambda r_0) d\lambda \end{aligned}$$

Последняя запись для функции тока не обладает какими-либо преимуществами по сравнению с (2.42) и (2.43).

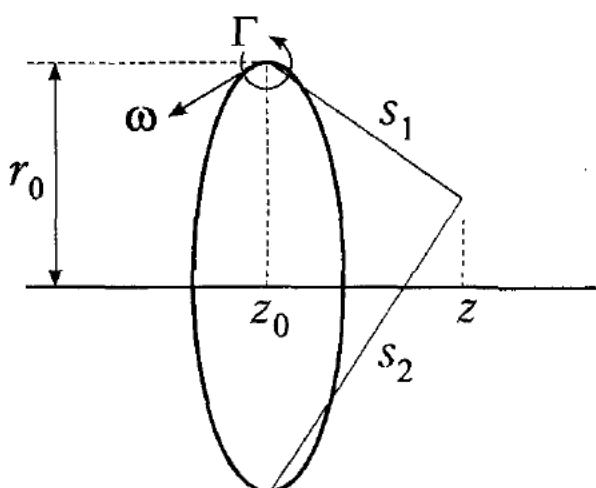


Рис. 2.10. Бесконечно тонкое вихревое кольцо

Круговая вихревая нить является простейшим объектом с ненулевой кривизной. Как уже отмечалось, такая нить должна смещаться по бинормали, т. е. в направлении оси z , с бесконечной скоростью. За счет симметрии круговая нить не подвержена деформации. Кинетическая энергия движения жидкости, индуцированного бесконечно тонкой замкнутой вихревой нитью, равна бесконечности. Интересно отметить, что вихревой импульс, несмотря на наличие особенности в поле скорости, является конечной величиной. В самом деле, подставляя $\mathbf{r} = (x - r_0 \cos \varphi, y - r_0 \sin \varphi, z - z_0)$, $\boldsymbol{\omega} = \omega \cdot \mathbf{i}_0 = \omega(-\sin \varphi, \cos \varphi, 0)$, $dV = dS r_0 d\varphi$ в (1.112), с учетом (2.41) находим непулевую компоненту импульса

$$I_z = \pi \rho \Gamma r_0^2 = \text{const.} \quad (2.45)$$

В п. 2.4 рассмотрена асимптотика поля скорости вблизи вихревой нити произвольной геометрии. В конкретном случае круговой вихревой нити асимптотику функции тока и скорости можно найти, используя асимптотические свойства эллиптических интегралов [Абрамович, Стиган, 1979]. Полагая $s = s_1 \ll r_0$, из (2.42) находим

$$\psi = \frac{\Gamma r_0}{2\pi} \left\{ \ln \frac{8r_0}{s} - 2 + \frac{s \cos 0}{2r_0} \left(\ln \frac{8r_0}{s} - 1 \right) + O\left(\frac{s^2}{r_0^2} \ln \frac{s}{r_0}\right) \right\}, \quad (2.46)$$

$$u_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = -\frac{\Gamma}{2\pi s} \cos \theta + \frac{\Gamma}{4\pi r_0} \left(\ln \frac{8r_0}{s} - \sin^2 0 \right) + O\left(\frac{\Gamma s}{r_0^2} \ln \frac{s}{r_0}\right), \quad (2.47)$$

$$u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{\Gamma}{2\pi s} \sin \theta - \frac{\Gamma}{4\pi r_0} \sin \theta \cos \theta + O\left(\frac{\Gamma s}{r_0^2} \ln \frac{s}{r_0}\right). \quad (2.48)$$

Здесь $s \cos \theta = r - r_0$, $s \sin \theta = z - z_0$ (рис. 2.11). Как и в общем случае (см. (2.35)), первые члены в выражениях для скоростей соответствуют циркуляционному течению вокруг нити. В формуле для осевой скорости (2.47) второе слагаемое содержит логарифмическую особенность, отвечающую за поступательное движение вихревого кольца. Сопоставляя формулы (2.47), (2.48) с (2.35), для величины L имеем

$$L = 4r_0 \exp\left(1 - \frac{4\pi r_0}{\Gamma} I_n^0\right).$$

При учете вязкости диффузия кольцевой вихревой нити при малых временах описывается выражением (2.31) [Tung, Ting, 1967]. С ростом эффективного размера $(4vt)^{1/2}$ необходимо учитывать влияние кривизны. Полагая

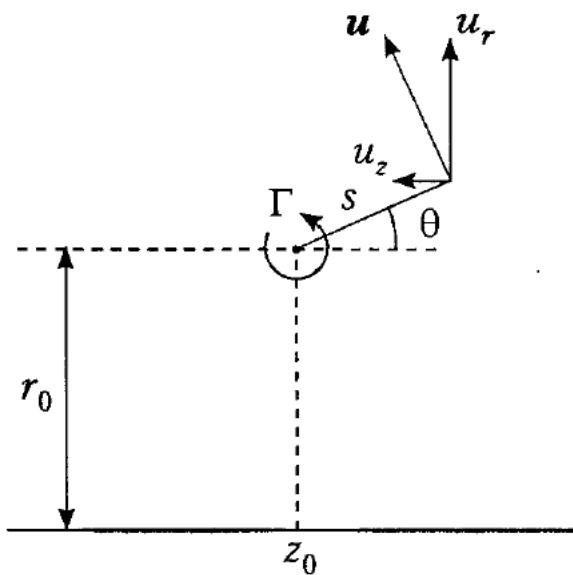


Рис. 2.11. К определению скоростей в окрестности круговой вихревой нити

что конвекция жидкости относительно движущегося вихря не оказывает заметного влияния на распределение завихренности, А. Калтаев [1982] вывел приближенное уравнение Гельмгольца

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{dz_0}{dt} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial r} = v \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{\partial \omega}{\partial r} \frac{1}{r} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} \right)$$

и нашел его точное решение

$$\omega = 2\pi^{-1/2} \left(\frac{4vt}{r_0^2} \right)^{-3/2} I_1 \left(\frac{rr_0}{2vt} \right) \exp \left(-\frac{r^2 + r_0^2 + (z - z_0)^2}{4vt} \right). \quad (2.49)$$

Здесь $z_0(t)$ – закон движения вихревого кольца.

Аналогичное решение найдено в работе А.А. Березовского и Ф.Б. Капланского [1987], где задача решалась в “квазиавтомодельной” постановке в пределе малых чисел Рейнольдса. Для больших чисел Re с помощью метода разных масштабов [Ван-Дайк, 1967] те же авторы [Березовский, Капланский, 1992] получили решение в первом приближении при разложении по параметру $\epsilon = (2vt)^{1/2}/r_0 \ll 1$. В этом случае

$$\omega \cong \omega_0(t) \exp \left(-\frac{\rho^2 + 2vt_0}{4vt} \right) I_0 \left(\frac{\rho}{(2vt_0)^{1/2}} \frac{t_0}{t} \right), \quad (2.50)$$

где $\rho^2 = (r - r_0)^2 + (z - z_0)^2$, t_0 – некоторый фиксированный момент времени, для масштаба завихренности принят степенной закон $\omega_0(t) \sim t^k$. Степенная

зависимость принятая и для масштаба длины – радиуса вихря $r_0(t) \sim t^p$. Значения показателей можно определить из условия существования автомодельного решения

$$\frac{t}{r_0(t)} \frac{d}{dt} r_0(t) + k + 1 = 0$$

и закона сохранения импульса (2.45). Циркуляцию найдем прямым интегрированием завихренности (2.50)

$$\Gamma = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \omega dr dz = \pi \omega_0 r_0^2. \quad (2.51)$$

Для p и k получаем систему уравнений

$$p + k + 1 = 0, \quad k + 4p = 0,$$

откуда $p = 1/3$, $k = -4/3$. Таким образом, радиус вихря растет по закону $r_0(t) = R_0(t/t_0)^{1/3}$, где R_0 – радиус вихря при $t = t_0$. Закон изменения масштаба завихренности находим из уравнения (2.51)

$$\omega_0 = \frac{p}{\pi^2 r_0^4} = \frac{p}{\pi^2 R_0^4} \left(\frac{t_0}{t} \right)^{4/3}.$$

Наконец, для циркуляции получаем $\Gamma = \frac{p}{\pi R_0^2} \left(\frac{t_0}{t} \right)^{2/3}$.

Похожая модель построена в работе Б.А. Луговцова [1970] для турбулентной диффузии завихренности. При этом в отличие от ламинарного режима, где вязкий масштаб длины $L_L \sim t^{1/2}$, найден $L_T \sim t^{1/4}$, соответственно завихренность имеет масштаб $\omega_T \sim t^{-3/4}$.

В заключение этого параграфа приведем частные случаи ограниченных течений, для которых можно найти аналитическое представление для функции тока круговой вихревой нити.

Пусть круговая нить расположена параллельно плоскости. Очевидно, что условие непротекания на плоскости будет выполнено, если ввести зеркально отраженную относительно плоскости вихревую нить. Обозначая выражение в квадратных скобках в (2.42) через $f(k)$, имеем

$$\psi = \frac{\Gamma(r r_0)^{1/2}}{2\pi} \cdot (f(k) - f(k_l)), \quad (2.52)$$

где $k_l^2 = 4rr_0 / [(z + z_0)^2 + (r + r_0)^2]$.

Если ось круговой вихревой нити проходит через центр сферы радиуса a , являющийся началом координат, то “отраженная” нить имеет циркуляцию $-\Gamma \cdot (r_0^2 + z_0^2)^{1/2} / a$, радиус $r_1 = r_0 a^2 / (r_0^2 + z_0^2)$ и осевую координату $z_1 = z_0 a^2 / (r_0^2 + z_0^2)$. Таким образом для функции тока получаем снова выражение вида (2.52) с модулем k_1 , таким, что

$$k_1^2 = 4rr_1 / \left[(z - z_1)^2 + (r + r_1)^2 \right].$$

Наконец, для круговой вихревой нити, соосной с цилиндром радиуса a , в работе [Brasseur, 1986] найдена дополнительная функция тока

$$\psi_1 = -\frac{\Gamma}{\pi} rr_0 \int_0^\infty \frac{K_1(\lambda a)}{I_1(\lambda a)} \cdot I_1(\lambda r_0) \cdot I_1(\lambda r) \cos \lambda(z - z_0) d\lambda.$$

Чтобы получить полную функцию тока, необходимо добавить одну из записей функции тока (2.42)–(2.44).

2.6. БЕСКОНЕЧНО ТОНКАЯ ВИНТОВАЯ ВИХРЕВАЯ НИТЬ

2.6.1. Винтовая нить в безграничном пространстве

Рассмотрим в неограниченном пространстве течение идеальной несжимаемой жидкости, индуцированное бесконечно тонкой винтовой вихревой нитью, соответственно имеющей шаг $2\pi l$, несущий цилиндр радиуса a и циркуляцию Γ (рис. 2.2). Эта элементарная вихревая структура является фундаментальным объектом в теории завихренных течений подобно описанным выше прямолинейной нити и вихревому кольцу.

Для описания скорости, индуцированной винтовой нитью, воспользуемся представлением закона Био – Савара через векторный потенциал (2.22). Следуя Хардину [Hardin, 1982] и учитывая геометрию винтовой нити, задаваемую соотношениями $x' = a \cos \theta$, $y' = a \sin \theta$, $z' = l\theta$, запишем интеграл

$$I(\alpha, \mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(i\alpha\theta) d\theta}{|\mathbf{r}|}. \quad (2.53)$$

Здесь $\mathbf{r} = (x - x', y - y', z - z')$. Тогда векторный потенциал может быть представлен в виде

$$\mathbf{A} = \frac{\Gamma}{4\pi} \left\{ -a \operatorname{Im}[I(l, \mathbf{r})], a \operatorname{Re}[I(l, \mathbf{r})], I(0, \mathbf{r}) \right\}, \quad (2.54)$$

а компоненты вектора скорости, индуцированной вихревой нитью, записываются в соответствии с соотношением (1.86) как

$$u = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \quad v = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \quad w = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}.$$

Перепишем интеграл (2.53) в цилиндрической системе координат ($x = r \cos \phi$, $y = r \sin \phi$)

$$I(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(i\alpha\theta) d\theta}{\left(r_0^2 + (z - l\theta)^2\right)^{1/2}}, \quad (2.55)$$

где $r_0^2 = r^2 + a^2 - 2ar \cos(\phi - \theta)$. На основании известных из теории цилиндрических функций [Ватсон, 1949] соотношений

$$\frac{1}{R} = \int_0^{\infty} \exp(-|s|\sigma) J_0(\sigma r) d\sigma,$$

где $R^2 = r^2 + s^2$, а $J_0(\cdot)$ – функция Бесселя первого рода и нулевого порядка, которая может быть представлена в виде разложения

$$J_0(\sigma r_0) = \sum \delta_m J_m(\sigma r) J_m(\sigma a) \cos m(\phi - \theta), \quad \text{где } \delta_m = \begin{cases} 1, & m = 0 \\ 2, & m \neq 0 \end{cases},$$

перепишем интеграл (2.55) в виде

$$I(\alpha) = \sum_0^{\infty} \delta_m \int_0^{\infty} d\sigma J_m(\sigma r) J_m(\sigma a) \int_{-\infty}^{\infty} d\theta \exp(i\alpha\theta - |z - l\theta|\sigma) \cos m(\phi - \theta).$$

Прямым интегрированием внутреннего интеграла по θ определим

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} d\theta \exp(i\alpha\theta - |z - l\theta|\sigma) \cos m(\phi - \theta) = \\ & = \frac{\sigma \exp(i\alpha z/l)}{l} \left(\frac{\exp[im(\phi - z/l)]}{\sigma^2 + [(m - \alpha)/l]^2} + \frac{\exp[-im(\phi - z/l)]}{\sigma^2 + [(m + \alpha)/l]^2} \right). \end{aligned}$$

Кроме того, у Ватсона [1949] найдены значения интегралов: для $m \pm \alpha \neq 0$

$$\int_0^{\infty} d\sigma \frac{\sigma J_m(\sigma r) J_m(\sigma a)}{\sigma^2 + [(m \pm \alpha)/l]^2} = \begin{cases} I_m\left(\left|\frac{m \pm \alpha}{l}\right| a\right) K_m\left(\left|\frac{m \pm \alpha}{l}\right| r\right), & a < r \\ I_m\left(\left|\frac{m \pm \alpha}{l}\right| r\right) K_m\left(\left|\frac{m \pm \alpha}{l}\right| a\right), & r < a \end{cases},$$

и для $m \pm \alpha = 0$

$$\int_0^\infty d\sigma \frac{J_1(\sigma r) J_1(\sigma a)}{\sigma} = \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{a}{r}, & a < r \\ \frac{1}{2} \frac{r}{a}, & r < a \end{cases},$$

где $I_m(\cdot)$ и $K_m(\cdot)$ – модифицированные функции Бесселя порядка m . Таким образом, окончательно интеграл (2.55) для $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$ может быть записан в виде

$$\begin{aligned} I(0) &= \frac{2}{l} \int_0^\infty d\sigma \frac{J_0(\sigma a) J_0(\sigma r)}{\sigma} + \frac{4}{l} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} I_m(mr/l) K_m(ma/l) \\ I_m(ma/l) K_m(mr/l) \end{array} \right\} \cos m \left(\phi - \frac{z}{l} \right); \\ I(1) &= \frac{2}{l} \sum_{m=1}^{\infty} \exp \left(-i \left[(m-1)\phi - \frac{mz}{l} \right] \right) \left\{ \begin{array}{l} I_{m-1}(mr/l) K_{m-1}(ma/l) \\ I_{m-1}(ma/l) K_{m-1}(mr/l) \end{array} \right\} + \\ &+ \frac{2}{l} \sum_{m=1}^{\infty} \exp \left(i \left[(m+1)\phi - \frac{mz}{l} \right] \right) \left\{ \begin{array}{l} I_{m+1}(mr/l) K_{m+1}(ma/l) \\ I_{m+1}(ma/l) K_{m+1}(mr/l) \end{array} \right\} + \frac{1}{l} \exp(i\phi) \left\{ \begin{array}{l} r/a \\ a/r \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

В фигурных скобках здесь и далее верхняя строка соответствует случаю $r < a$, а нижняя – $r > a$.

Подставляя значения $I(0)$ и $I(1)$ в определение векторного потенциала (2.54) и проведя некоторые алгебраические преобразования с учетом рекуррентных соотношений между цилиндрическими функциями порядков m , $m-1$, $m+1$, а также замечая, что

$$\frac{\partial}{\partial r} \int_0^\infty \frac{J_0(\sigma a) J_0(\sigma r)}{\sigma} d\sigma = - \int_0^\infty J_0(\sigma a) J_1(\sigma r) d\sigma = \begin{cases} \frac{1}{r}, & a < r \\ 0, & r < a \end{cases},$$

окончательно в цилиндрических координатах компоненты скорости, индуцированной винтовой нитью, запишем в виде

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{\Gamma a}{\pi l^2} \sum_{m=1}^{\infty} m \left\{ \begin{array}{l} I'_m(mr/l) K'_m(ma/l) \\ I'_m(ma/l) K'_m(mr/l) \end{array} \right\} \sin m \left(\theta - \frac{z}{l} \right); \\ u_\theta &= \frac{\Gamma}{2\pi r} \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 1 \end{array} \right\} + \frac{\Gamma a}{\pi r l} \sum_{m=1}^{\infty} m \left\{ \begin{array}{l} I_m(mr/l) K'_m(ma/l) \\ I'_m(ma/l) K_m(mr/l) \end{array} \right\} \cos m \left(\theta - \frac{z}{l} \right); \\ u_z &= \frac{\Gamma}{2\pi l} \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 0 \end{array} \right\} - \frac{\Gamma a}{\pi l^2} \sum_{m=1}^{\infty} m \left\{ \begin{array}{l} I_m(mr/l) K'_m(ma/l) \\ I'_m(ma/l) K_m(mr/l) \end{array} \right\} \cos m \left(0 - \frac{z}{l} \right). \end{aligned} \quad (2.56)$$

Если ввести обозначение

$$S(a, b) = \sum_{m=1}^{\infty} I_m(mb) K_m(ma),$$

то $\partial S(a, b)/\partial b$ являются рядами Каптейна (Kapteyn series), которые хорошо изучены [Ватсон, 1949] и сходятся при всех значениях $a > b \geq 0$. Ряды в представлении поля скорости (2.56) близки к ним, причем для $r < a$ и $0 - z/l = 0$ ряды в определении u_0 и u_z совпадают с рядами Каптейна, откуда следует, что они сходятся для всех значений $\chi = \theta - z/l$ и $r < a$. Последние данные об аналитическом исследовании рядов Каптейна можно найти в работе [Boersma, Yakubovich, 1998] и по ссылкам в ней, кроме того Hardin [1982] численно установил сходимость рядов, входящих в определение u_r , а также u_0 и u_z для $r > a$. Отметим, что если $a \rightarrow 0$, т. е. винтовая нить стремится к прямолинейной, то предельные значения решения (2.56) $u_r = u_z = 0$; $u_0 = \Gamma/2\pi r$ полностью согласуются с решением для прямолинейной нити (2.23).

Формулы (2.56) описывают поле скорости, индуцированное правовинтовой вихревой нитью. Для перехода к левовинтовой нити необходимо заменить аргумент тригонометрических функций на $\theta + z/l$ и сменить знаки обоих слагаемых в формуле для u_z .

Заметим, что решение (2.56) зависит только от двух винтовых переменных r и $\chi = \theta - z/l$. Это означает, что оно принадлежит классу течений с винтовой симметрией, описанных в 1.5.1, причем непосредственной проверкой можно установить, что $u_B \equiv u_z + ru_0/l = 1/2\pi l \equiv \text{const}$. Для ортогональной к ней и к u_r компоненты скорости $u_\chi = u_0 - ru_z/l$ получим

$$u_\chi = \frac{\Gamma}{2\pi} \begin{Bmatrix} -r/l^2 \\ 1/r \end{Bmatrix} + \frac{\Gamma a}{\pi l^2} \left(\frac{l}{r} + \frac{r}{l} \right) \sum_{m=1}^{\infty} m \begin{Bmatrix} I_m\left(\frac{mr}{l}\right) K'_m\left(\frac{ma}{l}\right) \\ I'_m\left(\frac{ma}{l}\right) K_m\left(\frac{mr}{l}\right) \end{Bmatrix} \cos m\chi.$$

Для компонент скорости u_r и u_χ уравнение неразрывности принимает вид первого уравнения в (1.64), что позволяет ввести функцию тока (1.65), т. е. $u_\chi = -\partial\psi/\partial r$ и

$$u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial\chi} = \frac{\Gamma a}{\pi l^2} \sum_{m=1}^{\infty} m \begin{Bmatrix} I'_m\left(\frac{mr}{l}\right) K'_m\left(\frac{ma}{l}\right) \\ I'_m\left(\frac{ma}{l}\right) K'_m\left(\frac{mr}{l}\right) \end{Bmatrix} \sin m\chi.$$

После интегрирования получим

$$\psi = -\frac{\Gamma ar}{\pi l^2} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} I'_m \left(\frac{mr}{l} \right) K'_m \left(\frac{ma}{l} \right) \\ I'_m \left(\frac{ma}{l} \right) K'_m \left(\frac{mr}{l} \right) \end{array} \right\} \cos m\chi + \begin{Bmatrix} f_1(r) \\ f_2(r) \end{Bmatrix},$$

где $f_1(r)$ и $f_2(r)$ – произвольные функции от r , определенные соответственно в областях $r < a$ и $r > a$. Для определения $f_1(r)$ и $f_2(r)$ продифференцируем ψ по r . Применив рекуррентные соотношения для производных от модифицированных функций Бесселя m -го порядка, после сравнения с u_χ получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial r} &= \frac{\Gamma a}{\pi l^2} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} \left[I'_m \left(\frac{mr}{l} \right) + \frac{mr}{l} I''_m \left(\frac{mr}{l} \right) \right] K'_m \left(\frac{ma}{l} \right) \\ I'_m \left(\frac{ma}{l} \right) \left[K'_m \left(\frac{mr}{l} \right) + \frac{mr}{l} K''_m \left(\frac{mr}{l} \right) \right] \end{array} \right\} \cos m\chi + \begin{Bmatrix} f'_1(r) \\ f'_2(r) \end{Bmatrix} = \\ &= -u_\chi + \frac{\Gamma}{2\pi} \begin{Bmatrix} -r/l^2 \\ 1/r \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f'_1(r) \\ f'_2(r) \end{Bmatrix} \equiv -u_\chi. \end{aligned}$$

Определив интегрированием $f_1(r)$ и $f_2(r)$, окончательно функцию тока можно записать в виде

$$\psi = \frac{\Gamma}{2\pi} \begin{Bmatrix} (r^2 - a^2)/l^2 \\ -\ln(r^2/a^2) \end{Bmatrix} - \frac{\Gamma ar}{\pi l^2} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} I'_m \left(\frac{mr}{l} \right) K'_m \left(\frac{ma}{l} \right) \\ I'_m \left(\frac{ma}{l} \right) K'_m \left(\frac{mr}{l} \right) \end{array} \right\} \cos m\chi, \quad (2.57)$$

которая определена с точностью до произвольной константы. Для функции тока также отметим, что если $a \rightarrow 0$, то предельное значение решения (2.57) сводится к выражению $\psi = -\Gamma \ln r / 2\pi$ и полностью совпадает с решением для прямолинейной нити (2.24).

Изолинии функции тока (2.57) при различных значениях относительного шага винтовой линии $\bar{h} = 2\pi l/a$ показаны на рис. 2.12. При большом значении шага (рис. 2.12a) изолинии ψ в горизонтальном сечении $z = \text{const}$ близки к концентрическим окружностям, соответствующим течению, индуцированному прямолинейной вихревой нитью (см. п. 2.3.1). В то же время изолинии, построенные в вертикальной плоскости $\Theta = \text{const}$, свидетельствуют о пространственности течения. Часть изолиний в окрестности точки пересечения вихревой нити с плоскостью оказываются замкнутыми. При уменьшении шага структура течения перестраивается. Так, при $\bar{h} = 4$ (рис. 2.12c) в горизонтальной плоскости образуется второе семейство замкнутых линий,

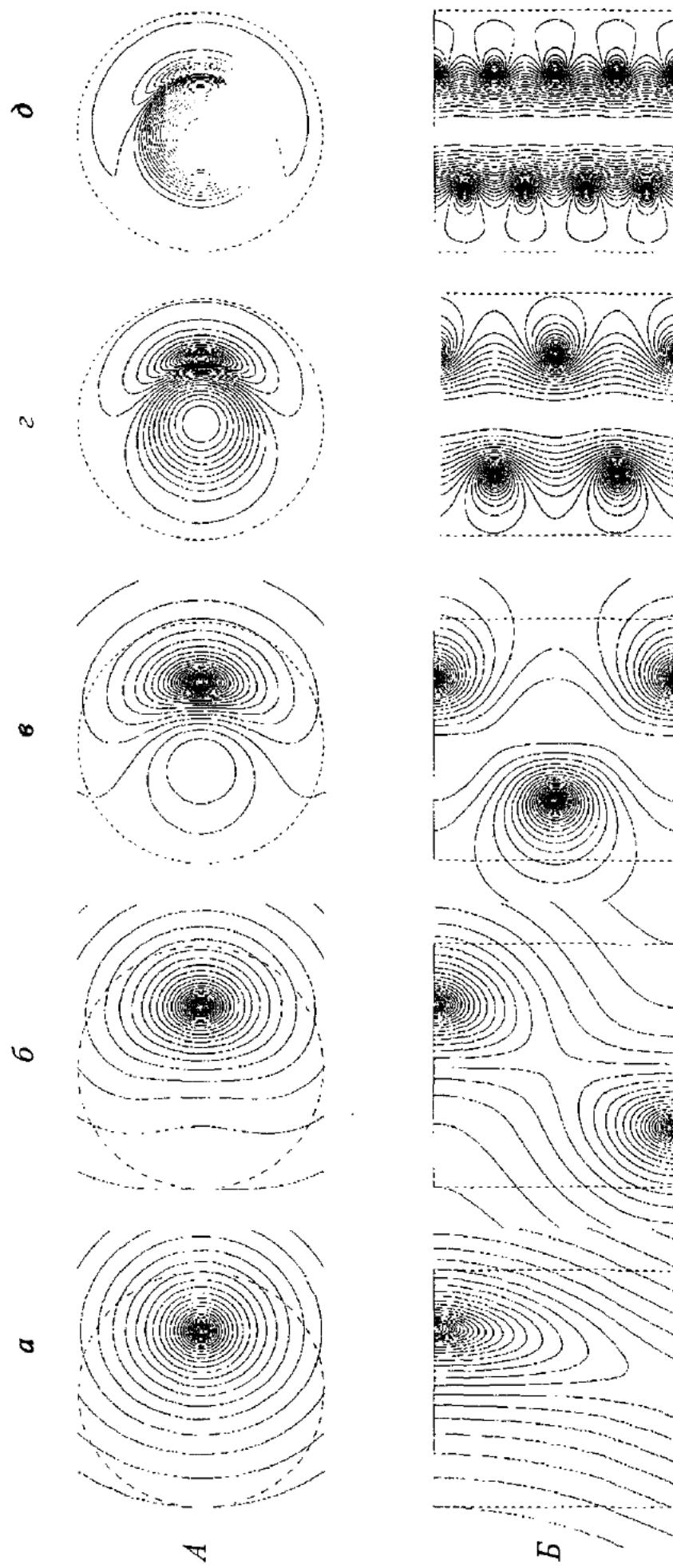


Рис. 2.12. Изолинии функции тока течения, индуцированного винтовой вихревой нитью, в горизонтальном (A , $z = \text{const}$) и меридиональном (B , $0 = 0, \pi$) сечениях при различном значении относительного шага $\bar{h} = 2\pi l/a$. $a - 16$; $\delta - 8$; $6 - 4$; $2 - 2$; $\delta - 1$

соответствующее возникновению “сквозного” канала внутри винтовой спирали. При более плотной спирали (рис. 2.12г) получаем течение, покоящееся снаружи винтовой спирали с практически однородным осевым потоком в центре (штриховыми линиями на рис. 2.12 помечена цилиндрическая поверхность радиуса $2a$). Наконец, в пределе $\bar{h} \rightarrow 0$ витки вихревой нити смыкаются, образуя цилиндрическую вихревую пелену (см. п. 3.1).

Решение (2.56), (2.57) для винтовой нити в безграничном пространстве было получено Хардиным [Hardin, 1982]. Как показал предшествующий анализ, хотя решение и было получено без дополнительных предположений путем непосредственного преобразования интеграла Био – Савара, оно относится к классу течений с винтовой симметрией при “однородном” движении вдоль винтовых линий, описанных в п. 1.5.1. Последний вывод следует также из задания распределения завихренности вдоль винтовой линии. Отметим, что в случае винтовой нити не удается получить решение в ограниченном трубой пространстве простым отражением (см. п. 2.3.1), так как для винтовых вихревых нитей в отличие от прямолинейных принцип отражения не выполняется. По этой причине в следующем пункте будет предложен другой подход для определения поля скорости, индуцированного винтовой вихревой нитью в трубе.

2.6.2. Винтовая нить в цилиндрической трубе

В данном пункте, следуя работам Окулова [1993; Okulov, 1995], в рамках модели идеальной жидкости найдем поле скорости, индуцированное рассмотренной выше винтовой вихревой нитью в бесконечной цилиндрической трубе радиуса R , ось которой совпадает с осью несущего нить цилиндра (рис. 2.13). Учитывая, что завихренность сконцентрирована на винтовой нити, описываемой формулами (2.7), и вектор завихренности направлен вдоль нити, решение задачи может быть представлено в рамках рассмотренного в п. 1.5.1 класса течений с винтовой симметрией при “однородном” движении вдоль винтовых линий или с винтовым распределением завихренности. В этом случае внутри трубы функция тока (1.65) должна удовлетворять уравнению (1.70), а на стенах трубы должны выполняться условия непротекания

$$u_r \Big|_{r=R} = r^{-1} \partial \psi / \partial \chi \Big|_{r=R} = 0. \quad (2.58)$$

Конкретизируем правую часть в уравнении (1.70), т. е. определим ω_z . В данном случае завихренность сконцентрирована вдоль линии L , которая представляет собой ось винтовой вихревой нити с шагом $2\pi l$, навитой на цилиндр радиуса a .

* Соответствие здесь нестрогое, так как линии $\psi = \text{const}$ не являются линиями тока.

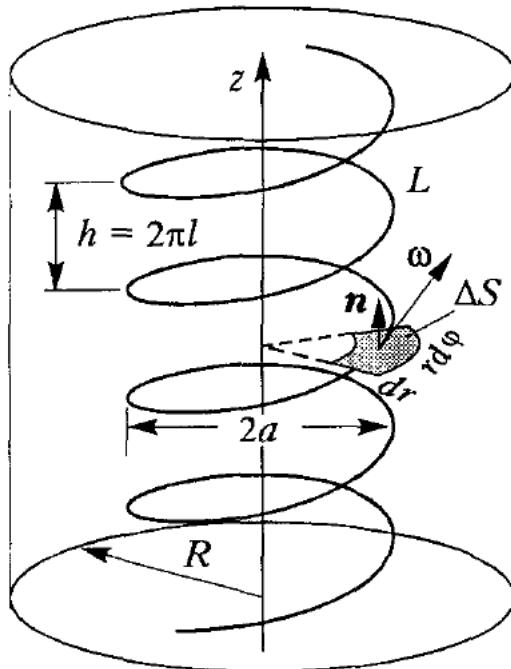


Рис. 2.13. Винтовая вихревая нить в цилиндрической трубе

Мерой интенсивности бесконечно тонкой вихревой нити является циркуляция Γ , которая в данном случае постоянна и связана с завихренностью формулой Стокса

$$\int_{\Delta S} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dS = \Gamma = \text{const.} \quad (2.59)$$

Здесь ΔS – элемент поверхности, через который проходит вихревая нить, \mathbf{n} – единичный вектор нормали к этой поверхности. Поскольку в (1.70) входит только z -компоненты завихренности, то в качестве ΔS выберем элемент поверхности, нормаль к которому совпадает с осью z (рис. 2.13). Тогда имеем

$$\int_{\Delta S} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\Delta S} \omega_z dF = \int_{\Delta S} \omega_z r d\varphi dr.$$

Переходя к переменным (r, χ) , получаем уравнение

$$\int_{\Delta S} \omega_z r \cdot dr d\chi = \Gamma. \quad (2.60)$$

Так как завихренность отлична от нуля только на оси бесконечно тонкой вихревой нити с координатами $(r = a, \chi = \chi_0)$, то подынтегральная функция очевидно выражается через дельта-функции Дирака

$$\omega_z = \Gamma \delta(r - a) \delta(\chi - \chi_0) / r, \quad (2.61)$$

соответственно уравнение (1.70) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{l^2 - r^2}{l^2 + r^2} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{l^2 + r^2}{l^2 r^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial \chi^2} = \\ = \frac{2lu_0}{r^2 + l^2} - \Gamma \delta(r - a) \delta(\chi - \chi_0) (l^2 + r^2) / l^2 r. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Для упрощения выкладок, будем искать комплекснозначную функцию $\Phi(\psi = \Re \Phi)$, удовлетворяющую уравнению (2.62) и граничным условиям (2.58). Учитывая периодичность по χ , представим Φ в виде

$$\Phi(r, \chi) = r \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp[i m(\chi - \chi_0)] p_m(r, a). \quad (2.63)$$

Подставив представление (2.63) в (2.62), умножим обе части на $\exp(-in\chi)$, ($n = 0, \pm 1, \dots$) и проинтегрируем по χ от 0 до 2π . Учитывая ортогональность системы функций $\{\exp(im\chi)\}$, получим

при $m \neq 0$

$$\begin{aligned} p''_m + \left(1 + \frac{2l^2}{l^2 + r^2}\right) \frac{1}{r} p'_m + \left(\frac{l^2 - r^2}{(l^2 + r^2)r^2} - \frac{m^2(l^2 + r^2)}{l^2 r^2}\right) p_m = \\ = \frac{\Gamma}{2\pi} \delta(r - a) \frac{l^2 + r^2}{l^2 r^2}, \end{aligned} \quad (2.64)$$

при $m = 0$

$$p''_0 + \left(1 + \frac{2l^2}{l^2 + r^2}\right) \frac{1}{r} p'_0 + \frac{l^2 - r^2}{(l^2 + r^2)r^2} p_0 = -\frac{2lu_0}{(l^2 + r^2)r} + \frac{\Gamma}{2\pi} \delta(r - a) \frac{l^2 + r^2}{r^2}. \quad (2.65)$$

Найдем сначала решение уравнения (2.65)

$$p_0(r, a) = \frac{c_1}{r} + \frac{c_2 r}{2} + \frac{(c_2 l^2 + lu_0)}{r} \ln r - \frac{\Gamma}{4\pi r} \begin{cases} a^2 / l^2 + \ln a^2 \\ r^2 / l^2 + \ln r^2 \end{cases},$$

где c_1, c_2 – константы интегрирования. Решение уравнения (2.64) представляется в виде

$$p_m = p_m^{(1)} \int_0^r \frac{H p_m^{(2)} dr}{W(p_m^{(1)}, p_m^{(2)})} + p_m^{(2)} \int_r^R \frac{H p_m^{(1)} d\sigma}{W(p_m^{(1)}, p_m^{(2)})}, \quad (2.66)$$

где $p_m^{(1)}$, $p_m^{(2)}$ – линейно независимые решения соответствующего (2.64) однородного уравнения; H – правая часть (2.64); а W – определитель Вронского. Для определения решений однородного уравнения, соответствующего уравнению (2.64), рассмотрим уравнение Бесселя

$$\frac{l^2 r^2}{l^2 + r^2} q_m'' + \frac{l^2 r^2}{l^2 + r^2} \frac{1}{r} q_m' - m^2 q_m = 0,$$

линейно независимыми решениями которого являются модифицированные функции Бесселя $I_m(mr/l)$ и $K_m(mr/l)$. Продифференцируем записанное уравнение Бесселя и разделим результат на $l^2 r^2 / (l^2 + r^2)$. В итоге получим рассматриваемое однородное уравнение относительно производной от функции q . Это означает, что решениями уравнения (2.64) будут производные от модифицированных функций Бесселя или их линейные комбинации. Чтобы удовлетворить граничным условиям (2.58), а также регулярности решения при $r = 0$, в качестве решений однородных уравнений возьмем функции

$$p_m^{(1)} = I_m'(mr/l), \quad p_m^{(2)} = K_m'(mr/l) - \alpha_m I_m'(mr/l).$$

После вычисления по формуле (2.66) определим

$$p_m = -\frac{\Gamma}{2\pi l^2} \begin{cases} I_m'(mr/l) (K_m'(ma/l) - \alpha_m I_m'(ma/l)), & r \leq a \\ I_m'(ma/l) (K_m'(mr/l) - \alpha_m I_m'(mr/l)), & r > a \end{cases}.$$

Подставив p_m в (2.63) и взяв от полученного результата реальную часть, учитывая, что для цилиндрических функций справедливо соотношение $Z_{-m} = -Z_m$, получим выражение для функции тока

$$\begin{aligned} \psi = c_1 - \frac{c_2 r^2}{2} + (l^2 c_2 + l u_0) \ln r - \frac{\Gamma}{4\pi l^2} \left\{ \frac{a^2 + l^2 \ln a^2}{r^2 + l^2 \ln r^2} \right\} - \\ - \frac{\Gamma a r}{\pi l^2} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} I_m'(mr/l) (K_m'(ma/l) - \alpha_m I_m'(ma/l)) \\ I_m'(ma/l) (K_m'(mr/l) - \alpha_m I_m'(mr/l)) \end{array} \right\} \cos [m(\chi - \chi_0)]. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Здесь и далее – верхняя строка в фигурных скобках соответствует случаю $r < a$, а нижняя – $r \geq a$.

В полученном решении (2.67) конкретизируем константы интегрирования. Требуя регулярности от решения при $r \rightarrow 0$ ($a \neq 0$), установим связь между константами u_0 и c_2 : $lc_2 + u_0 = 0$. Постоянную c_1 приравняем нулю, так как функция тока определяется с точностью до константы. В результате решение перепишется в виде

$$\psi = \frac{u_0 r^2}{2l} - \frac{\Gamma}{4\pi} \left\{ \frac{a^2/l^2 + \ln a^2}{r^2/l^2 + \ln r^2} \right\} - \\ - \frac{\Gamma a r}{\pi l^2} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} I'_m \left(\frac{mr}{l} \right) Z'_m \left(\frac{ma}{l} \right) \\ I'_m \left(\frac{ma}{l} \right) Z'_m \left(\frac{mr}{l} \right) \end{array} \right\} \cos m(\chi - \chi_0), \quad (2.68)$$

где $Z_m(x) = K_m(x) - \alpha_m I_m(x)$; $\alpha_m = K'_m(mR/l)/I'_m(mR/l)$ выбраны так, чтобы удовлетворить условиям непротекания (2.58).

Подставляя (2.68) в (1.65) и используя (1.67), запишем компоненты вектора скорости

$$u_r = \frac{\Gamma a}{\pi l^2} \sum_{m=1}^{\infty} m \left\{ \begin{array}{l} I'_m \left(\frac{mr}{l} \right) Z'_m \left(\frac{ma}{l} \right) \\ I'_m \left(\frac{ma}{l} \right) Z'_m \left(\frac{mr}{l} \right) \end{array} \right\} \sin m(\chi - \chi_0), \\ u_{\varphi} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} + \frac{\Gamma a}{\pi r l} \sum_{m=1}^{\infty} m \left\{ \begin{array}{l} I_m \left(\frac{mr}{l} \right) Z'_m \left(\frac{ma}{l} \right) \\ I'_m \left(\frac{ma}{l} \right) Z_m \left(\frac{mr}{l} \right) \end{array} \right\} \cos m(\chi - \chi_0), \quad (2.69) \\ u_z = u_0 - \frac{\Gamma}{2\pi l} \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} - \frac{\Gamma a}{\pi l^2} \sum_{m=1}^{\infty} m \left\{ \begin{array}{l} I_m \left(\frac{mr}{l} \right) Z'_m \left(\frac{ma}{l} \right) \\ I'_m \left(\frac{ma}{l} \right) Z_m \left(\frac{mr}{l} \right) \end{array} \right\} \cos m(\chi - \chi_0).$$

Заметим, что при $R \rightarrow \infty$ мы имеем дело со случаем винтовой нити в безграничном пространстве. Тогда $\alpha_m \rightarrow 0$ и решение (2.69) для компонент скорости u_r и u_{φ} полностью совпадает с результатом Hardin [1982]. Значение u_z отличается от него только на константу u_0 , которая соответствует однородному потоку вдоль оси z .

Как решение Хардина (2.56), (2.57), так и выражения (2.68), (2.69) имеют достаточно сложный, малоинформационный вид. Кроме того, входящие в них ряды расходятся в точках вихревой нити. Поэтому для корректного расчета поля скорости и функции тока целесообразно выделить особенности в полученном решении явно. Следуя работам Окулова [1993; Okulov, 1995] и Kuibin, Okulov [1998], воспользуемся с этой целью равномерными разложениями мо-

дифицированных функций Бесселя при больших значениях аргумента [Абрамович, Стиган, 1979]

$$\begin{aligned} I_m(mx) &= \sqrt{\frac{t}{2\pi m}} \cdot e^{m\eta} \left[1 + \frac{\xi_1}{m} + \frac{\xi_2}{m^2} + \dots \right], \\ K_m(mx) &= \sqrt{\frac{\pi t}{2m}} e^{-m\eta} \left[1 - \frac{\xi_1}{m} + \frac{\xi_2}{m^2} - \dots \right], \\ I'_m(mx) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi mt}} \frac{e^{m\eta}}{x} \left[1 + \frac{\zeta_1}{m} + \frac{\zeta_2}{m^2} + \dots \right], \\ K'_m(mx) &= -\sqrt{\frac{\pi}{2mt}} \cdot \frac{e^{-m\eta}}{x} \left[1 - \frac{\zeta_1}{m} + \frac{\zeta_2}{m^2} - \dots \right], \end{aligned} \quad (2.70)$$

$$\eta = \frac{1}{t} + \frac{1}{2} \ln \frac{1-t}{1+t}, \quad t = (1+x^2)^{-1/2},$$

$$\begin{aligned} \xi_1 &= (3t - 5t^3)/24, \quad \xi_2 = (81t^2 - 462t^4 + 385t^6)/1152, \\ \zeta_1 &= (-9t + 7t^3)/24, \quad \zeta_2 = (-135t^2 + 594t^4 - 455t^6)/1152. \end{aligned}$$

Заменяя в выражении для функции тока (2.68) Бесселевы функции на их асимптотики (2.70), найдем, что вклад в сингулярность (логарифмического типа) дают лишь первые члены разложений. В самом деле, замена

$$I'_m\left(\frac{mx}{l}\right) \cdot Z'_m\left(\frac{my}{l}\right) \rightarrow -\frac{C_{ar}l^2}{2mra} \left[\left(\frac{\tilde{x}}{\tilde{y}}\right)^m - \left(\frac{\tilde{x}\tilde{y}}{\tilde{R}^2}\right)^m \right]$$

позволяет просуммировать ряд, образующийся из (2.68), и представить функцию тока в виде суммы сингулярной и регулярной составляющих

$$\Psi = \frac{\Gamma}{4\pi} (S_\Psi + R_\Psi), \quad (2.71)$$

$$S_\Psi = -C_{ar} \ln \frac{\tilde{a}^2 + \tilde{r}^2 - 2\tilde{r}\tilde{a} \cos(\chi - \chi_0)}{\tilde{a}^{*2} + \tilde{r}^2 - 2\tilde{r}\tilde{a}^* \cos(\chi - \chi_0)}, \quad (2.72)$$

$$\begin{aligned} R_\Psi &= \beta \frac{r^2}{l^2} - \left\{ \frac{a^2/l^2 + \ln a^2 - C_{ar} \ln \tilde{a}^2/\tilde{a}^{*2}}{r^2/l^2 + \ln r^2 - C_{ar} \ln \tilde{r}^2/\tilde{a}^{*2}} \right\} - \\ &\quad - \frac{4ra}{l^2} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{B_m(r, a)}{B_m(a, r)} \right\} \cos m(\chi - \chi_0), \end{aligned} \quad (2.73)$$

$$B_m(x, y) = I'_m\left(\frac{mx}{l}\right) \cdot Z'_m\left(\frac{my}{l}\right) + \frac{C_{ar}l^2}{2mra} \left[\left(\frac{\tilde{x}}{\tilde{y}}\right)^m - \left(\frac{\tilde{x}\tilde{y}}{\tilde{R}^2}\right)^m \right], \quad \beta = 2\pi lu_0/\Gamma.$$

Здесь знак тильды означает преобразование

$$\tilde{x} = x \exp[C_x - 1]/(C_x + 1), \quad C_x = \sqrt{1 + x^2/l^2}$$

(при $l \rightarrow \infty$ $\tilde{x} \rightarrow x$; символом x обозначены a, r или R). Множитель $C_{ar} = \sqrt{C_a C_r}$.

Звездочкой помечен “радиус” “отраженного вихря” $\tilde{a}^* = \tilde{R}^2/\tilde{a}$.

Сингулярное слагаемое S_ψ содержит основную информацию о характере течения в зависимости от параметров вихря и позволяет проводить качественный анализ течений. Тем не менее наличие особенности в исходном представлении функции тока через ряды (2.68) не позволяет применить операции дифференцирования к формуле (2.71) для получения выражений, описывающих поле скорости. Поэтому выделение особенностей поля скорости произведем непосредственно в рядах (2.69). В отличие от функции тока теперь необходимо учитывать и вторые члены в разложениях (2.70) модифицированных функций Бесселя. Поскольку в формулы будут входить только функции, $\xi_1(x)$ и $\zeta_1(x)$ индекс “1” будем опускать, но приписывать индексы a, r или R при замене в формулах (2.70) x на $a/l, r/l$ или R/l соответственно. В результате выражения для скоростей (2.69) перепишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{\Gamma a}{\pi l^2} (S_r + R_r), \quad u_\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi r} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} + \frac{\Gamma a}{\pi r l} (S_\chi + R_\chi), \\ u_z &= u_0 - \frac{\Gamma}{2\pi l} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} - \frac{\Gamma a}{\pi l^2} (S_\chi + R_\chi). \end{aligned} \quad (2.74)$$

Здесь величины S_r и S_χ также записываются через элементарные функции от искаженных радиальных расстояний

$$\begin{aligned} S_r &= -\frac{C_{ar} l^2}{2ar} \left[\frac{\tilde{a}\tilde{r}\sin(\chi - \chi_0)}{\tilde{a}^2 + \tilde{r}^2 - 2\tilde{a}\tilde{r}\cos(\chi - \chi_0)} - \frac{\tilde{a}^*\tilde{r}\sin(\chi - \chi_0)}{\tilde{a}^{*2} + \tilde{r}^2 - 2\tilde{a}^*\tilde{r}\cos(\chi - \chi_0)} + \right. \\ &\quad + \left. \begin{Bmatrix} (\zeta_r - \zeta_a) \operatorname{arctg}(\tilde{r}\sin(\chi - \chi_0)/(\tilde{a} - \tilde{r}\cos(\chi - \chi_0))) \\ (\zeta_a - \zeta_r) \operatorname{arctg}(\tilde{a}\sin(\chi - \chi_0)/(\tilde{r} - \tilde{a}\cos(\chi - \chi_0))) \end{Bmatrix} \right] - \\ &\quad - (\zeta_r + \zeta_a - 2\zeta_R) \operatorname{arctg} \left(\frac{\tilde{r}\sin(\chi - \chi_0)}{\tilde{a}^* - \tilde{r}\cos(\chi - \chi_0)} \right), \end{aligned} \quad (2.75)$$

$$S_\chi = \frac{C_{a/r} l}{2a} \left[\begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \end{Bmatrix} + \frac{\tilde{r}^2 - \tilde{a}\tilde{r}\cos(\chi - \chi_0)}{\tilde{a}^2 + \tilde{r}^2 - 2\tilde{a}\tilde{r}\cos(\chi - \chi_0)} - \frac{\tilde{r}^2 - \tilde{a}^*\tilde{r}\cos(\chi - \chi_0)}{\tilde{a}^{*2} + \tilde{r}^2 - 2\tilde{a}^*\tilde{r}\cos(\chi - \chi_0)} + \right.$$

$$+\frac{1}{2}(\xi_r - \zeta_a) \left(\ln \left(\tilde{a}^2 + \tilde{r}^2 - 2\tilde{a}\tilde{r} \cos(\chi - \chi_0) \right) - \begin{Bmatrix} \ln \tilde{a}^2 \\ \ln \tilde{r}^2 \end{Bmatrix} \right) - \\ - \frac{1}{2}(\xi_r + \zeta_a - 2\zeta_R) \ln \frac{\tilde{a}^{*2} + \tilde{r}^2 - 2\tilde{a}^*\tilde{r} \cos(\chi - \chi_0)}{\tilde{a}^{*2}}.$$

Здесь $C_{a/r} = \sqrt{C_a/C_r}$, а остатки рядов принимают вид

$$R_r = \sum_{m=1}^{\infty} m \begin{Bmatrix} B_m^r(r, a) \\ B_m^r(a, r) \end{Bmatrix} \sin m(\chi - \chi_0), R_\chi = \sum_{m=1}^{\infty} m \begin{Bmatrix} B_m^I \\ B_m^Z \end{Bmatrix} \cos m(\chi - \chi_0), \quad (2.76)$$

где

$$\begin{aligned} B_m^r(x, y) &= I'_m\left(\frac{mx}{l}\right) \cdot Z'_m\left(\frac{my}{l}\right) + \\ &+ \frac{C_{ar} l^2}{2mra} \left[\left(\frac{\tilde{x}}{\tilde{y}} \right)^m \left(1 + \frac{\zeta_x - \zeta_y}{m} \right) - \left(\frac{\tilde{x}\tilde{y}}{\tilde{R}^2} \right)^m \left(1 + \frac{\zeta_x + \zeta_y - 2\zeta_R}{m} \right) \right], \\ B_m^I &= I_m\left(\frac{mr}{l}\right) \cdot Z'_m\left(\frac{ma}{l}\right) + \\ &+ \frac{C_{a/r} l}{2ma} \left[\left(\frac{\tilde{r}}{\tilde{a}} \right)^m \left(\frac{\xi_r - \zeta_a}{m} + 1 \right) - \left(\frac{\tilde{r}\tilde{a}}{\tilde{R}^2} \right)^m \left(1 + \frac{\xi_r + \zeta_a - 2\zeta_R}{m} \right) \right], \\ B_m^Z &= I'_m\left(\frac{ma}{l}\right) \cdot Z_m\left(\frac{mr}{l}\right) + \\ &+ \frac{C_{a/r} l}{2ma} \left[\left(\frac{\tilde{a}}{\tilde{r}} \right)^m \left(\frac{\xi_r - \zeta_a}{m} - 1 \right) - \left(\frac{\tilde{r}\tilde{a}}{\tilde{R}^2} \right)^m \left(1 + \frac{\xi_r + \zeta_a - 2\zeta_R}{m} \right) \right]. \end{aligned}$$

Анализ представлений (2.71)–(2.76) показывает, что при $l \rightarrow \infty$ полученные решения совпадают с решением (2.28) для прямолинейного вихря в цилиндре (или для точечного вихря в круге).

Численно было установлено, что в широком диапазоне изменения геометрических параметров вихревой нити остатки рядов (2.73) и (2.76) относительно малы по сравнению с главными сингулярными частями (2.72) и (2.75) представления функции тока (2.71) и поля скорости (2.74). Поэтому при их расчете первыми можно пренебречь. Так как главные части (2.72) и (2.75) выражены в простой форме – через элементарные функции, то нам удалось проиллюстрировать рассматриваемое течение для широкого диапазона параметров вихревой нити.

Построение линий уровня функции тока позволяет понять некоторые черты течения. В частности, как и для плоских течений, большая густота линий соответствует большей скорости (см. (1.47)). Тем не менее направление вектора скорости не совпадает с касательной к изолиниям $\psi = \text{const}$. Поэтому для полноты картины в поперечном ($z = \text{const}$) и продольном ($[\theta = 0] + [\theta = \pi]$) сечениях трубы строились “линии тока”, т. е. в плоскости $z = \text{const}$ интегрировалось уравнение $dr/u_r = rd\theta/u_0$, а в плоскости $\theta = \text{const}$ $dr/u_r = dz/u_z$. Таким образом, проекция вектора скорости на указанные плоскости направлена по касательным к построенным “линиям тока”. Фактически эти линии являются сечениями трубок тока.

Ниже, при анализе течений, все величины обезразмерены на радиус цилиндра R . В качестве варьируемых величин возьмем шаг вихря $h = 2\pi l$, радиус винтовой нити a и безразмерную скорость на оси $\tilde{u}_0 = 2\pi l u_0 / \Gamma$ (далее безразмерная скорость обозначена без тильды).

В первую очередь рассмотрим влияние на течение стенок цилиндра. При малом значении шага $h = 1$ и умеренном радиусе $a = 0,5$ (рис. 2.14 a) изолинии функции тока течения в трубе практически совпадают с изолиниями в безграничном течении. Это связано с тем, что введенное преобразование координат уменьшает относительный радиус вихря. В самом деле, при $h = 1$, $a = 0,5$, $R = 1$ имеем $\tilde{a} = 2,314$, $\tilde{R} = 57,92$ т. е. $\tilde{a}/\tilde{R} = 0,04$. При этом влияние стенок, очевидно, мало. При большем шаге вихря $h = 8$ (рис. 2.14 b), картина течения существенно различается в канале и в безграничном пространстве. В этом случае $\tilde{a} = 0,519$, $\tilde{R} = 1,155$, $\tilde{a}/\tilde{R} = 0,45$. Конечно же, с ростом радиуса вихря влияние стенок усиливается (рис. 2.14, $h = 2$, $a = 0,9$), хотя преобразование и здесь оказывает свое действие: $\tilde{a}/\tilde{R} = 0,718$. Очевидно, что при уменьшении шага винта влияние стенок будет ослабевать. Если при $a = 0,9$ принять $h = 0,195$, то снова получим $\tilde{a}/\tilde{R} = 0,04$.

Закономерности изменения структуры течения при варьировании параметров вихря лучше видны при рассмотрении “линий тока”. Заметим, что величина u_0 не влияет на картину течения в поперечном сечении трубы. Как видно из формул (2.69) для u_z , вклад u_0 можно интерпретировать как переход в систему координат, движущуюся со скоростью $-u_0$ вдоль оси z . Ясно, что величина u_0 связана с расходом жидкости через трубу и очень важна при описании режимов закрученных течений в ограниченных областях. К примеру, при $u_0 = 0$, $h = 1$ (рис. 2.15) осевое движение в окрестности оси трубы очень слабое, так как в осевом направлении вся жидкость движется на периферии – у стенок канала. При $u_0 = 1$, $h = 1$, наоборот, поток практически отсутствует у стенок трубы и жидкость движется в центральной части канала. В промежуточном варианте (рис. 2.15, $u_0 = 0,5$, $h = 1$) жидкость внутри и снаружи винтовой нити движется в противоположных направлениях.

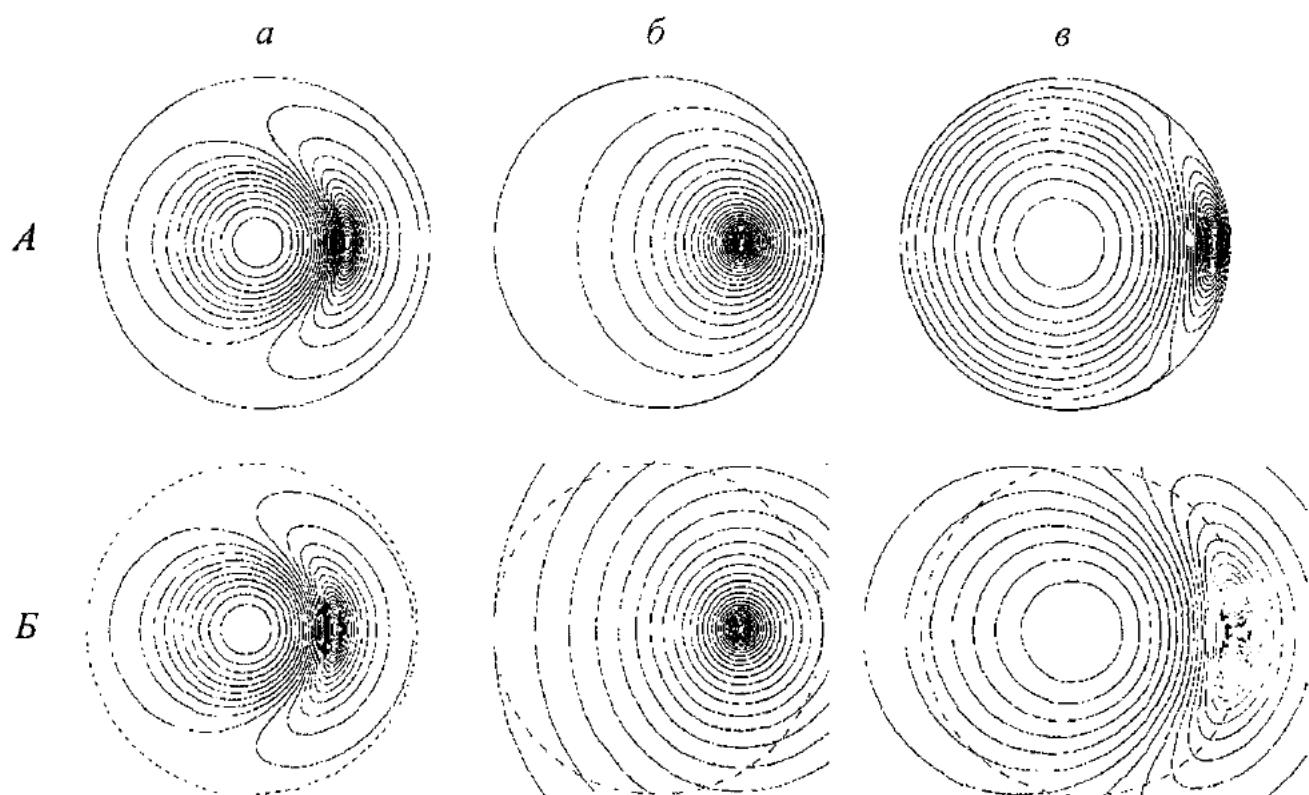


Рис. 2.14. Изолинии функции тока в горизонтальном сечении $z = \text{const}$ для винтовой вихревой нити в цилиндрической трубе (*A*) и в бесграничном пространстве (*B*): *a* – $h = 1$, $a = 0,5$; *b* – $h = 8$, $a = 0,5$; *c* – $h = 2$, $a = 0,9$

На этом же рисунке продемонстрировано влияние шага вихря на структуру потока. В случае плотного вихря (рис. 2.15, $h = 1$) приосевой поток фактически отделен от пристенного. Сама же винтовая вихревая нить и ее ближайшая окрестность играют роль цилиндрического сдвигового слоя. С увеличением шага ($h = 2$) вихрь становится менее плотным и часть жидкости при винтовом движении протекает с периферии в центральную часть и, наоборот, происходит отток из центра на периферию. Чем больше шаг вихря, тем больший объем жидкости омывает обе части потока – периферийную и приосевую.

Картина течения при различном радиусе винтовой нити, но при фиксированном шаге вихря ($h = 2$) представлена на рис. 2.16. Когда скорость на оси равна нулю ($u_0 = 0$) и радиус винта мал ($a = 0,1$), течение близко к случаю прямолинейной вихревой нити и практически однородный осевой поток занимает большую часть сечения трубы. С увеличением радиуса ($a = 0,5$) некоторая часть осевого потока жидкости сосредоточивается в окрестности вихревой нити. Наконец, когда вихрь близок стенке, а скорость на оси – нулевая ($a = 0,9$, $u_0 = 0$), практически все движение сосредоточено в тонкой винтовой трубке тока в непосредственной близости от вихревой нити. Когда скорость на оси отлична от нулевой ($u_0 = 0,5$), картина течения меняется: при умеренных радиусах ($a = 0,5; 0,7$) значительная часть потока заключена в винтовой трубке тока большого сечения, а при большом радиусе ($a = 0,9$) жидкость

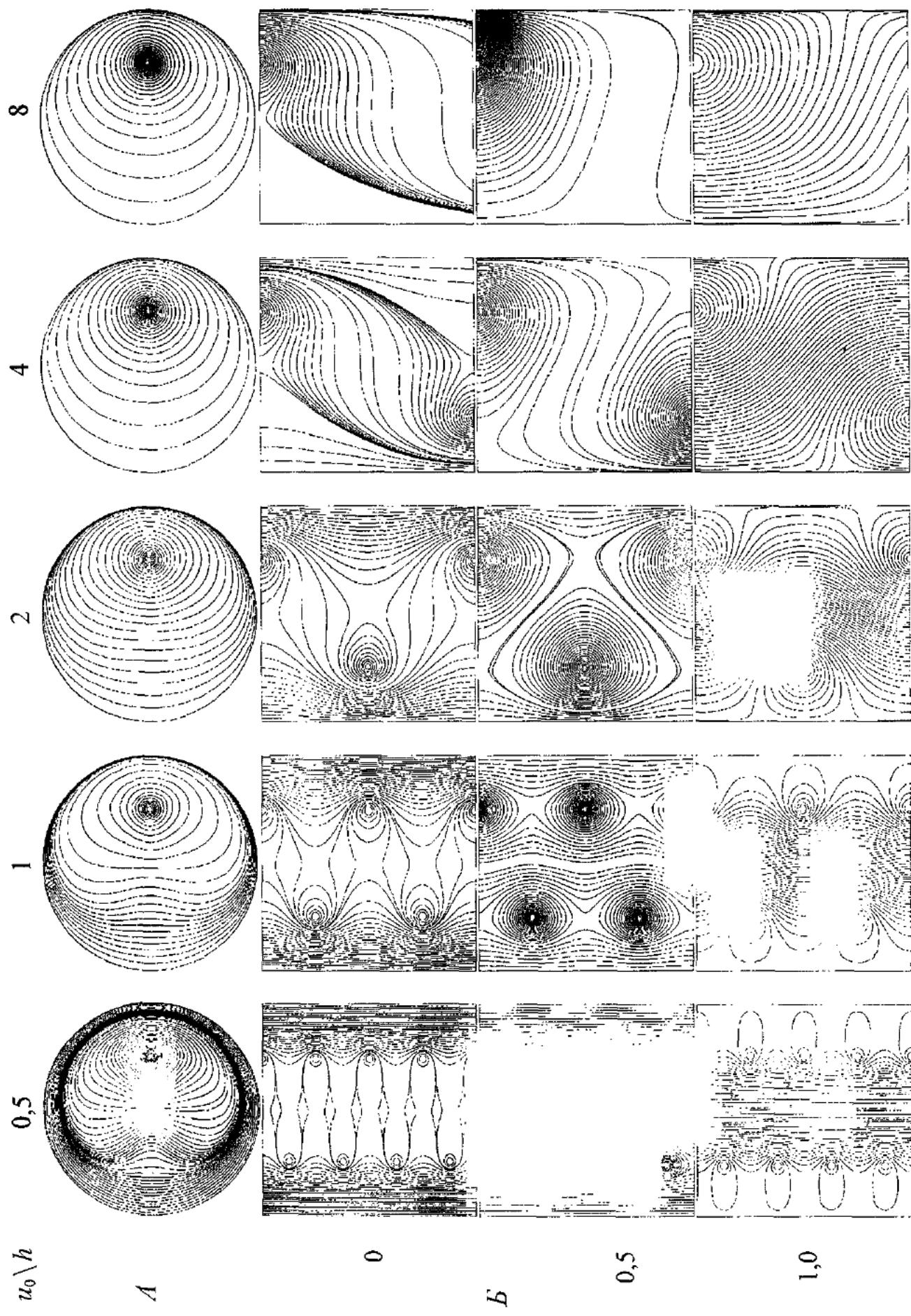


Рис. 2.15. Зависимость структуры течения, инициированного вихревой нитью в цилиндрической трубе, от шага винта в горизонтальном (A) и вертикальном (B) сечениях при различном значении параметра u_0 и фиксированном радиусе винтовой нити $a = 0,5$

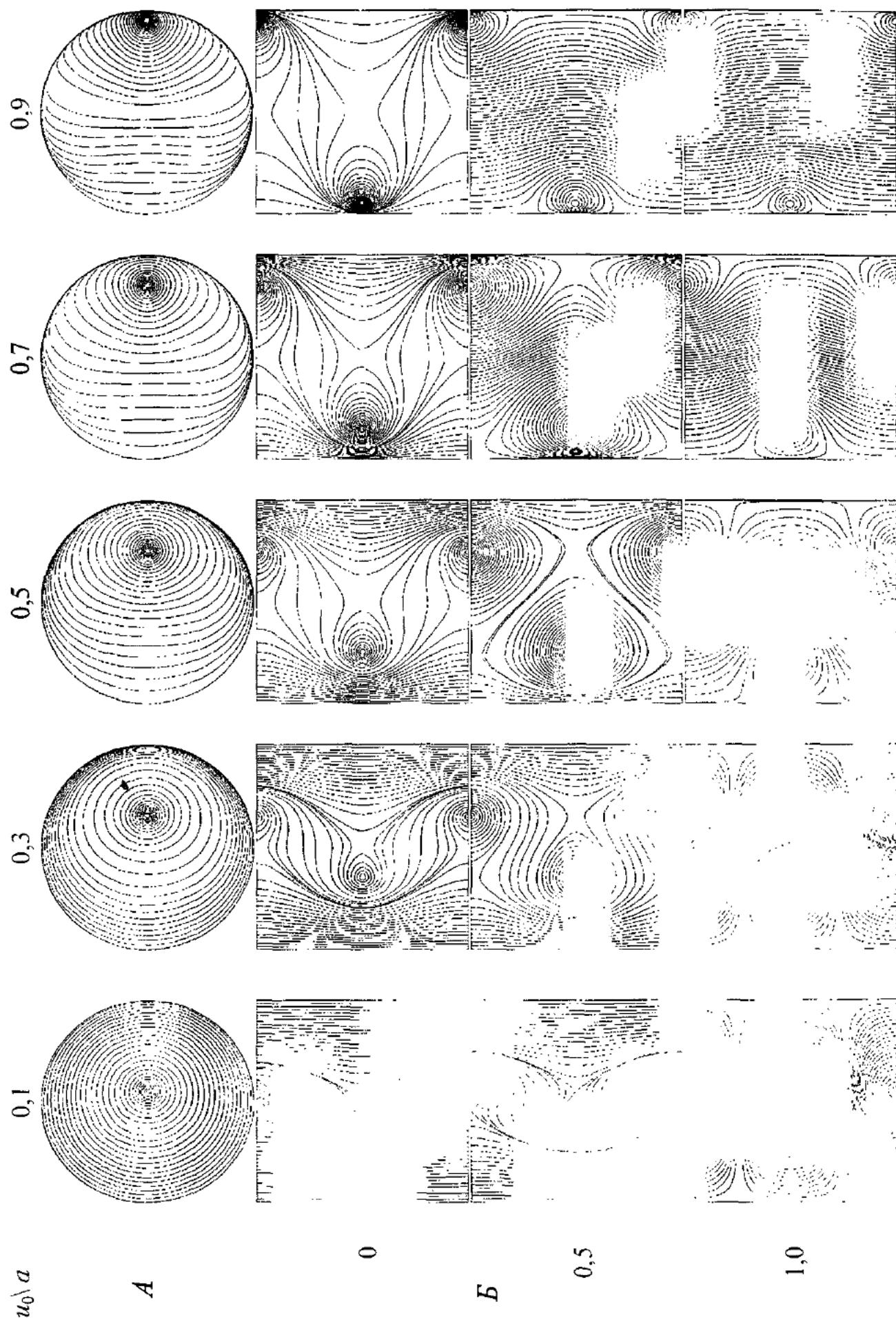


Рис. 2.1.6. Зависимость структуры течения, инициированного вихревой нитью в цилиндрической трубе, от радиуса вихревой нити в горизонтальном (*А*) и вертикальном (*Б*) сечениях при различном значении параметра u_0 и фиксированном шаге вихря $h = 2$

движется в осевом направлении в центре трубы, за исключением периферийной области, где реализуется течение в винтовой трубке тока небольшого сечения. Качественная перестройка течения при малом радиусе винта происходит, если скорость на оси соответствует случаю покоящегося вдали от вихря безграничного потока. Как видно из рис. 2.16 ($u_0 = 1$), даже для наименьшего из рассмотренных значений радиуса ($a = 0,1$) возникает винтовая трубка тока, сечение которой простирается от стенки на значительную часть сечения трубы, перекрывая ее центр. При $a = 0,3$ эффективный диаметр трубки тока составляет примерно половину диаметра трубы и быстро убывает с ростом a .

Более полную информацию о структуре течения можно получить, построив непосредственно линии тока. Для этого следует проинтегрировать систему уравнений $dr/u_r = r d\theta/u_\theta = dz/u_z$. Примеры линий тока приведены на цв. рис. 1. При искривлении вихря и нулевой скорости на оси (цв. рис. 1a) линии тока, проходящие вблизи вихревой нити, представляют собой деформированные спирали. На периферии при этом линии тока завиты слабо, т. е. осевая компонента скорости существенно превосходит окружную и радиальную. В случае $u_0 = 1$ и малом радиусе вихревой нити (цв. рис. 1b, в) линии тока – плотные спирали и вблизи нити, и вдали от нее, при этом на периферии осевая скорость оказывается намного меньше окружной. В вихре большого радиуса ($a = 0,7$) с нулевой скоростью на оси (цв. рис. 1e) линии тока, за исключением ближайших к вихревой нити, имеют сложную структуру. Наоборот, при $u_0 = 1$ (цв. рис. 1g) в центре трубы линии тока слабо искривлены. Более четко отличия в структуре течения видны при малом шаге винта ($h = 0,5$). Так, при $a = 0,5$ и $u_0 = 0$ (цв. рис. 1d) поток вблизи стенок направлен вниз и слабо закручен. Во внутренней области винтовой спирали движение слабое. Обращает на себя внимание линия тока, проходящая вблизи оси трубы, которая направлена по диаметру, обвивает вихревую нить и снова проходит по диаметру, смешенному на полпериода. В противоположном случае, при $u_0 = 1$, в центре трубы реализуется вертикальный восходящий поток, а на периферии – спиральное движение (цв. рис. 1e).

Г л а в а 3

МОДЕЛИ ВИХРЕВЫХ СТРУКТУР

3.1. ВИХРЕВАЯ ПЕЛЕНА

Бесконечно тонкая вихревая нить, описанная в пп. 2.3–2.6, отражает простейшее предельное распределение завихренности, когда вся она сосредоточена вдоль некоторой пространственной кривой, совпадающей с вихревой линией. В другом важном предельном случае завихренность сконцентрирована в бесконечно тонком слое вдоль некоторой трехмерной поверхности, которую называют *вихревой пеленой*. Вихревую пелену можно представить как такой тонкий слой толщиной ε с завихренностью ω , для которого при $\varepsilon \rightarrow 0, \omega \rightarrow \infty$ имеется конечный предел $\chi = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \omega \rightarrow \infty}} \varepsilon \omega$. По теореме Стокса, циркуляция Γ по прямоугольному малому контуру толщиной ε и длиной s есть

$$\Gamma = \omega \varepsilon s.$$

Здесь ориентация контура выбрана так, что вектор ω перпендикулярен плоскости контура. В пределе

$$\Gamma = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \omega \rightarrow \infty}} \omega \varepsilon s = \chi s, \quad (3.1)$$

т. е. величина χ есть циркуляция на единицу длины вихревой пелены, и ее можно рассматривать как меру интенсивности пелены. Поскольку имеется выделенное направление, связанное с вектором завихренности, то вводится также вектор χ

$$\chi = \chi \mathbf{t},$$

где \mathbf{t} – единичный вектор, касательный к вихревой линии.

Изобразим элемент вихревой пелены, как это показано на рис. 3.1. Здесь вектор завихренности ω (и соответственно \mathbf{t}, χ) перпендикулярен плоскости чертежа и направлен к читателю, а \mathbf{n} – единичный вектор нормали к элементу пелены. Тогда, если вне вихревой пелены движение безвихревое, то формально завихренность выражается через дельта-функцию как

$$\omega = \chi \delta(x_n), \quad (3.2)$$

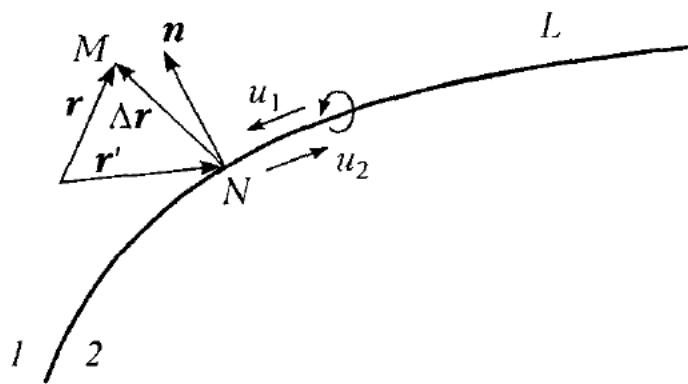


Рис. 3.1. Элемент вихревой пелены

где x_n – координата вдоль нормали \mathbf{n} . Чтобы определить скорость, индуцированную вихревой пеленой, подставим выражение (3.2) в формулу (1.93)

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{r}) = & -\frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\Delta \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}}{|\Delta \mathbf{r}|^3} dV = -\frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\Delta \mathbf{r} \times \chi \delta(x_n)}{|\Delta \mathbf{r}|^3} dS dx_n = \\ & = -\frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\Delta \mathbf{r} \times \chi}{|\Delta \mathbf{r}|^3} dS(\mathbf{r}') . \end{aligned} \quad (3.3)$$

Здесь dS – элемент вихревой поверхности, \mathbf{r}' – координата точки на вихревой пелене (рис. 3.1; в общем случае векторы \mathbf{r} , \mathbf{r}' , $\Delta \mathbf{r}$ не лежат в плоскости рисунка).

В частном случае *одиночной плоской вихревой пелены* с постоянной интенсивностью χ интеграл в (3.3) легко вычисляется. Прежде всего, разложим вектор $\Delta \mathbf{r}$ по ортам (\mathbf{t} , \mathbf{n} , \mathbf{b})

$$\Delta \mathbf{r} = (\Delta \mathbf{r} \cdot \mathbf{t}) \mathbf{t} + (\Delta \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} + (\Delta \mathbf{r} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{b}.$$

Тогда первый член справа дает нулевой вклад в (3.3), так как $\mathbf{t} \parallel \chi$. То же касается второго члена, поскольку $\Delta \mathbf{r} \cdot \mathbf{b}$ – нечетная функция. В результате имеем

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \frac{\chi}{4\pi} \times \int \frac{(\Delta \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}}{|\Delta \mathbf{r}|^3} dS = \frac{\chi \times \mathbf{n}}{4\pi} \int \frac{dS_{\perp}}{|\Delta \mathbf{r}|^2} = \frac{\chi \times \mathbf{n}}{2}. \quad (3.4)$$

Здесь dS_{\perp} – проекция элементарной площадки на плоскость, перпендикулярную $\Delta \mathbf{r}$. Поэтому последний интеграл – это телесный угол, под которым из точки $M(\mathbf{r})$ видна плоскость и который равен 2π . Из (3.4) следует, что вектор скорости в области 1 направлен параллельно плоскости пелены и перпендикулярно вектору χ (рис. 3.1) и имеет везде одинаковое значение

$$u_1 = \chi / 2.$$

В области 2 скорость направлена в противоположную сторону и равна по модулю u_1

$$u_2 = -\chi / 2.$$

Следовательно, на вихревой пелене интенсивностью χ тангенциальная компонента скорости претерпевает разрыв, равный

$$[\mathbf{u}] = \chi \times \mathbf{n}. \quad (3.5)$$

И, наоборот, наличие тангенциального разрыва означает существование вихревой пелены, интенсивность которой находится из соотношения

$$\chi = \mathbf{n} \times [\mathbf{u}]. \quad (3.6)$$

Выражения (3.5), (3.6) справедливы для любой вихревой пелены, если их рассматривать в локальном смысле.

Другим важным частным случаем является *цилиндрическая пелена*, когда вектор χ *перпендикулярен* образующей цилиндра. Пусть цилиндр имеет круговое сечение (рис. 3.2а, б). Учитывая, что в векторном виде элемент длины вдоль вихревой линии $d\mathbf{s} = tds$, $\chi = t\chi$ и $dz(\mathbf{r}')$ – элемент длины образующей, получаем из (3.3)

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\Delta \mathbf{r} \times \chi}{|\Delta \mathbf{r}|^3} dS = -\frac{\chi}{4\pi} \oint_{-\infty}^{\infty} \oint \frac{\Delta \mathbf{r} \times d\mathbf{s}(\mathbf{r}')}{|\Delta \mathbf{r}|^3} dz(\mathbf{r}') = -\frac{\chi}{4\pi} \oint_{-\infty}^{\infty} \oint \frac{\mathbf{R} \times d\mathbf{s}(\mathbf{r}')}{(R^2 + z^2)^{3/2}} dz = \\ &= -\frac{\chi}{4\pi} \oint \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \right] \mathbf{R} \times d\mathbf{s}(\mathbf{r}') = -\frac{\chi}{2\pi} \oint \frac{\mathbf{R} \times d\mathbf{s}(\mathbf{r}')}{R^2}. \end{aligned}$$

Здесь принято во внимание, что $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{z} + \mathbf{R}$, где \mathbf{R} и \mathbf{z} – проекции вектора $\Delta \mathbf{r}$ на плоскости поперечного сечения и образующую цилиндра соответственно, и что компонента \mathbf{z} в силу нечетности не дает вклада в интеграл. Интеграл в скобках равен $2/R^2$.

Пусть \mathbf{b} – единичный вектор, параллельный образующей цилиндра и удовлетворяющий условию $\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$ (рис. 3.2а, б). Тогда, переписывая подынтегральное выражение через углы α и ϕ , получаем для точки внутри цилиндра

$$\mathbf{u} = \frac{\chi \mathbf{b}}{2\pi} \oint \frac{dss \sin \alpha}{R} = \frac{\chi \mathbf{b}}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi = \chi \mathbf{b} = \chi \times \mathbf{n}.$$

Для точки вне цилиндра интеграл, очевидно, равен нулю, т. е.

$$\mathbf{u} = 0.$$

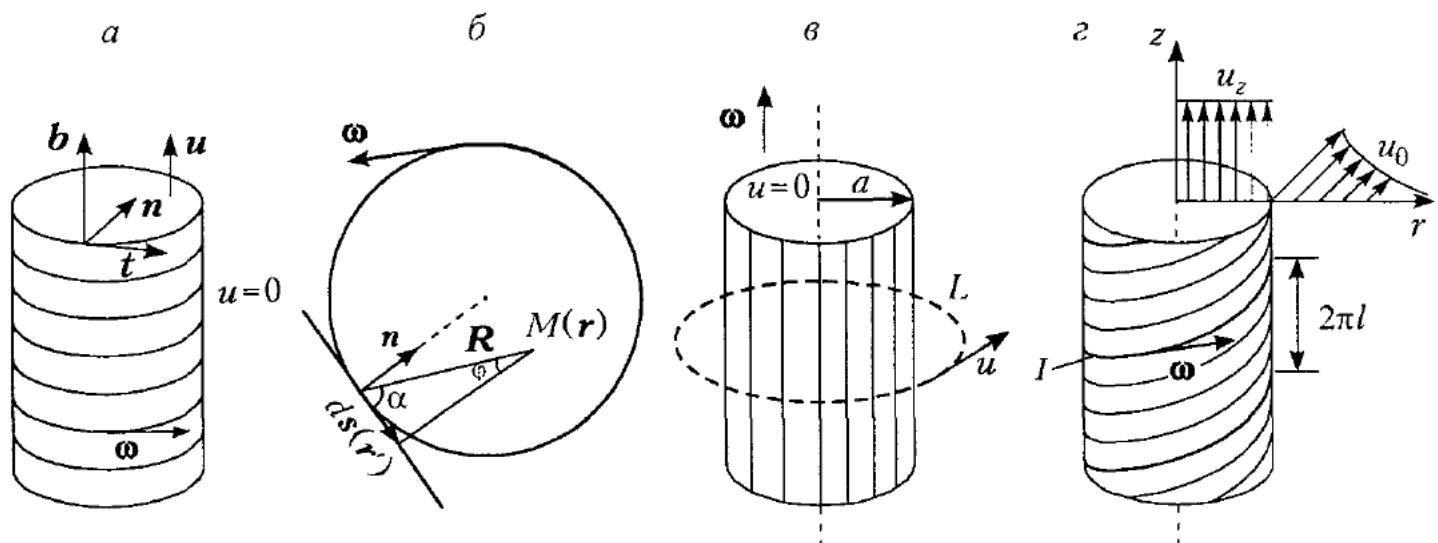


Рис. 3.2. Цилиндрическая вихревая пелена кругового сечения. Вихревые линии:
а, б – направлены по окружности, в – направлены вдоль образующей, г – винтовые.
I – выделенная вихревая линия

Таким образом, они получили то же самое выражение для скачка скорости, как и в (3.5) для плоской пелены, но теперь уже с разными значениями абсолютной скорости по обе стороны вихревой пелены. Этот результат имеет полную аналогию с магнитным полем внутри бесконечно длинного соленоида с постоянным током. Заметим, что подобные выводы справедливы для цилиндрической вихревой пелены с произвольной формой поперечного сечения.

Рассмотрим вновь *цилиндрическую пелену* кругового сечения с радиусом a и интенсивностью χ , но теперь вихревые линии направлены *вдоль образующей* (рис. 3.2в). Для этой задачи поле скоростей можно получить более простым способом, используя цилиндрическую симметрию. Последнее означает, что индуцированная скорость должна иметь только тангенциальную компоненту u , которая постоянна на окружности радиуса r . Тогда, согласно теореме Стокса, циркуляция скорости по окружности L вне цилиндрической пелены, определяемая как $\Gamma = 2\pi r u$, равна потоку завихренности, который в соответствии с (3.1) есть $\chi \cdot 2\pi a$, откуда

$$u = \frac{\chi a}{r} \quad \text{или} \quad u = \frac{\Gamma}{2\pi r}. \quad (3.7)$$

Как видно, последнее выражение в точности совпадает с распределением скорости (2.23) для бесконечно тонкой вихревой нити интенсивностью Γ . Внутри цилиндрической пелены циркуляция по любой концентрической окружности в поперечном сечении цилиндра, очевидно, равна нулю. Следовательно, во *внутренней* области $u = 0$.

Заметим, что рассматриваемую вихревую пелену можно получить при бесконечном сгущении винтовой вихревой нити. В самом деле, переходя

к пределу $l \rightarrow \infty$ в формулах (2.56), находим, что $u_r = u_z = 0$, а u_θ совпадает с (3.7) во внешней области и равна нулю во внутренней.

В третьем случае *цилиндрической пелены* (рис. 3.2г), когда вихревые линии – винтовые, индуцируются две компоненты скорости – осевая и окружная. Такую пелену кругового сечения с радиусом a , интенсивностью χ и с шагом винтовых вихревых линий $2\pi l$ можно представить как суперпозицию рассмотренных выше вихревых пелен: одной, образованной прямолинейными вихревыми линиями с интенсивностью $\chi \cdot l / \sqrt{a^2 + l^2}$, и другой, образованной вихревыми линиями в виде окружностей с интенсивностью $\chi \cdot a / \sqrt{a^2 + l^2}$. Таким образом,

$$\begin{cases} u_0 = \frac{\chi al}{r\sqrt{a^2 + l^2}} = \frac{\Gamma}{2\pi r}, & u_z = 0; \quad r > a, \\ u_0 = 0, \quad u_z = \frac{\chi a}{\sqrt{a^2 + l^2}} = \frac{\Gamma}{2\pi l}; & r < a. \end{cases} \quad (3.8)$$

Здесь $\Gamma = 2\pi \chi \cdot l / \sqrt{a^2 + l^2}$. Нетрудно видеть, что поле скорости (3.8) подчиняется общему закону течений с винтовой симметрией (см. п. 1.5) $u_z = u_0 - r/l u_0$, если в качестве u_0 выбрать скорость внутри цилиндра $\Gamma/2\pi l$.

В заключение данного раздела вернемся к одиночной *плоской вихревой пелене* и найдем поле скоростей, исходя из представления о пелене как непрерывном распределении прямолинейных вихревых нитей. При этом удобно использовать комплексные переменные. Пусть N нитей (или точечных вихрей) одинаковой интенсивности Γ_n расположены равномерно вдоль оси x (рис. 3.3). Переходя к непрерывному распределению, перепишем формулу (2.25) в интегральном виде

$$u_x - iu_y = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial z} = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{d\Gamma}{z - z_0} = \frac{\chi}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz_0}{z - z_0} = -\frac{\chi}{2\pi i} \ln(z_0 - z) \Big|_{-\infty}^{\infty}.$$

Здесь $d\Gamma = \chi dz_0$, $z_0 \equiv x$, $z = x + iy$. Представим аргумент логарифма в полярных координатах: $z_0 - z = re^{i\phi}$. Если $z_0 \rightarrow \pm\infty$, имеем $\phi = 0, -\pi$ при $y > 0$ и $\phi = 0, +\pi$ при $y < 0$. Следовательно, $u_x - iu_y = u_x = \mp\chi/2$ при $y > 0$, что совпадает с полученным выше результатом (см. (3.5)).

Формирование вихревой пелены происходит во многих практических важных случаях – при обтекании несущих поверхностей, треугольных крыльев, плохообтекаемых тел. Вследствие самоиндукции воздействия,

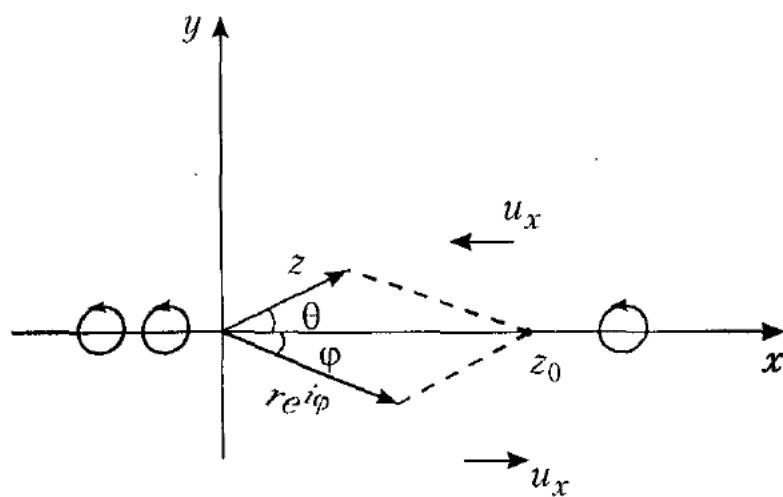


Рис. 3.3. Моделирование вихревой пелены в виде непрерывного распределения вихревых нитей

вихревая пелена обычно неустойчива и сворачивается в спираль. Таким способом образуются крупномасштабные вихри – например, два концевых вихря за самолетом или дорожка Кармана за цилиндром. Важность представления вихревой пелены как распределения вихревых нитей состоит в том, что, используя конечный набор дискретных вихрей, можно вполне адекватно моделировать разнообразные течения, в том числе и процесс сворачивания вихревой пелены (см. гл. 6).

3.2. ПРОСТРАНСТВЕННО ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ ВИХРИ

3.2.1. Вихревое кольцо

Вихревые кольца – один из немногих объектов вихревой природы, которые легко наблюдать в обыденной жизни (см. рис. В.5). Вихревое кольцо можно образовать, если резко вытолкнуть изо рта клуб дыма, скруглив при этом губы. Зачастую можно увидеть вихревые кольца, выскаивающие из выхлопной трубы автомобиля или трактора. Другой пример образования вихревых колец реализуется при падении капель одной жидкости (подкрашенной) в другую.

Первые попытки математического описания вихревых колец были предприняты в конце XIX века. Поскольку поле скорости, индуцированное тонким вихрем, практически совпадает с полем скорости бесконечно тонкого вихря, то основная задача состояла в определении скорости самоиндуцированного движения вихревого кольца. Для кольца с циркуляцией Γ радиусом r_0 и радиусом ядра $\varepsilon \ll r_0$ (с равномерным распределением завихренности) Kelvin [1867] предложил формулу скорости поступательного движения

$$U = \frac{\Gamma}{4\pi r_0} \left(\ln \frac{8r_0}{\epsilon} - \frac{1}{4} \right). \quad (3.9)$$

Хикс [Hicks, 1885] нашел скорость движения полого (или заполненного неподвижной жидкостью) вихревого кольца

$$U = \frac{\Gamma}{4\pi r_0} \left(\ln \frac{8r_0}{\epsilon} - \frac{1}{2} \right). \quad (3.10)$$

Доказательство справедливости формулы (3.9) для случая круглого поперечного сечения малой пощади можно найти у Ламба [1947, п. 161–163]. Saffman [1970], основываясь на идеях Ламба, развел подход, позволяющий учитывать влияние вязкости, наличие закрутки, нестационарность и сжимаемость. Следуя работе Saffman, рассмотрим тонкое вихревое кольцо, движущееся в покоящейся жидкости. Поле скорости представим в виде суммы

$$\mathbf{u} = \mathbf{U} + \tilde{\mathbf{u}}, \quad (3.11)$$

где \mathbf{U} – скорость вихревого кольца, которую требуется определить. Подставляя выражение (3.11) в формулу для кинетической энергии T по определению Ламба (см. п. 1.7.3) и учитывая определение импульса I (1.112), получим

$$T = 2\mathbf{U} \cdot \mathbf{I} + \int \tilde{\mathbf{u}} \cdot (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}) dV. \quad (3.12)$$

Воспользуемся локальными полярными координатами (s, θ) с началом в центре поперечного сечения (рис. 3.4), которое в первом приближении можно рассматривать круговым. Fraenkel [1970] доказал, что завихренность в этом случае представима в виде

$$\boldsymbol{\omega}(r, z) = \omega_0(s) [1 + O(\epsilon/r_0)]. \quad (3.13)$$

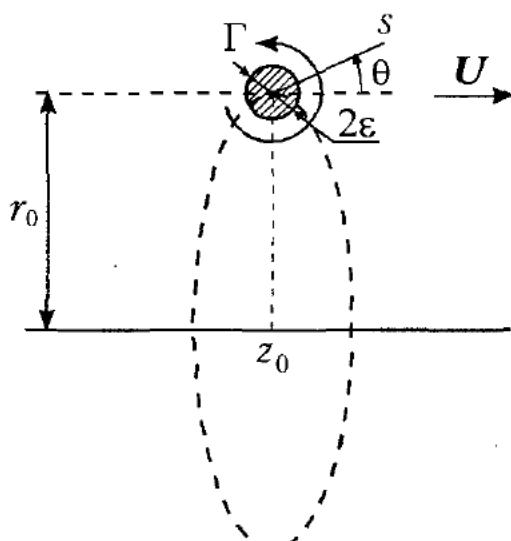


Рис. 3.4. Система координат для вихревого кольца

Импульс вихревого кольца вычислим непосредственно из формулы (1.126). Он направлен параллельно оси кольца и достигает (при единичной плотности)

$$I = \pi \iint \omega(r, z) r^2 dr dz = \pi r_0^2 \Gamma [1 + O(\varepsilon/r_0)], \quad (3.14)$$

где $\Gamma = \iint \omega(r, z) dr dz = 2\pi \int_0^\varepsilon s \omega_0(s) ds$. Чтобы найти кинетическую энергию

вихревого кольца с помощью формулы (1.127), требуется выражение для функции тока, которое получим путем интегрирования функции Грина G по вихревому ядру

$$\Psi = \iint \omega(r, z) G dr dz. \quad (3.15)$$

Функция G совпадает с функцией тока бесконечно тонкого вихревого кольца (2.42) с единичной циркуляцией. Отбрасывая в разложении (2.46) малые величины и подставляя его в (3.15) вместе с (3.13), находим

$$\Psi = \frac{r_0}{2\pi} \int_0^\varepsilon \int_0^{2\pi} s' \omega_0(s') \left[\ln(8r_0) - 2 - \frac{1}{2} \ln(s^2 + s'^2 - 2ss' \cos(\theta - \theta')) \right] ds' d\theta'.$$

Для интегрирования по θ' применим формулу [Градштейн, Рыжик, 1971]

$$\int_0^{2\pi} \ln[s^2 + s'^2 - 2ss' \cos \theta] d\theta = \begin{cases} 4\pi \ln s', & s' > s, \\ 4\pi \ln s, & s > s'. \end{cases}$$

Отсюда для точек внутри поперечного сечения вихря имеем

$$\Psi = r_0 (\ln 8r_0 - 2) \int_0^\varepsilon \omega_0(s') s' ds' - r_0 \ln s \int_0^s \omega_0(s') s' ds' - r_0 \int_s^\varepsilon \omega_0(s') \ln s' s' ds'.$$

Вводя функцию

$$\Gamma_0(s) = 2\pi \int_0^s \omega_0(s') s' ds' \quad (3.16)$$

(при этом $\Gamma = \Gamma_0(\varepsilon)$) и производя интегрирование по частям, выражение для функции тока сводим к следующему:

$$\Psi = \frac{r_0 \Gamma}{2\pi} \left(\ln \frac{8r_0}{\varepsilon} - 2 \right) + \frac{r_0}{2\pi} \int_s^\varepsilon \frac{\Gamma_0(s')}{s'} ds'.$$

Подставляя теперь Ψ в формулу (1.127), получаем главные члены разложения кинетической энергии по малому параметру ε/r_0

$$T = \pi \iint \omega_\phi \Psi dr dz \approx \frac{r_0 \Gamma^2}{2} \left(\ln \frac{8r_0}{\varepsilon} - 2 \right) + \frac{r_0}{2} \int_0^\varepsilon \frac{\Gamma_0^2(s)}{s} ds. \quad (3.17)$$

В случае вихревого кольца с закруткой, т. е. с наличием ненулевой компоненты скорости u_ϕ , в кинетическую энергию добавится член

$$\pi \iint r u_\phi^2 dr dz,$$

а последнее слагаемое в уравнении (3.12) приобретает вид

$$\begin{aligned} \int \tilde{\mathbf{u}} \cdot (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}) dV &= 2\pi \iint r \omega_\phi (r \tilde{u}_z - z \tilde{u}_r) dr dz + \\ &+ 2\pi \iint r u_\phi (z \omega_r - r \omega_z) dr dz. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Учитывая, что

$$\omega_r = -\partial u_\phi / \partial z, \quad \omega_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_\phi),$$

найдем второй член справа в (3.18)

$$\begin{aligned} 2\pi \iint r u_\phi (z \omega_r - r \omega_z) dr dz &= \pi \iint r u_\phi^2 dr dz - \\ &- \pi \iint \left\{ \frac{\partial}{\partial z} (r z u_\phi^2) + \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_\phi^2) \right\} dr dz. \end{aligned}$$

Последний интеграл здесь исчезает, если u_ϕ обращается в нуль на бесконечности. В результате уравнение (3.12) записывается одинаковым образом как для вихря с закруткой, так и без нее

$$\pi \iint \omega_\phi \Psi dr dz = 2U I + 2\pi \iint r \omega_\phi (r \tilde{u}_z - z \tilde{u}_r) dr dz. \quad (3.19)$$

Левая часть выражения (3.19) и импульс определены своими главными членами с точностью $O(\varepsilon/r_0)$ формулами (3.14) и (3.17) и зависят от $\omega_0(s)$, радиуса вихря r_0 и интенсивности Γ . Заметим, что эти два члена имеют порядок $O(r_0 \Gamma^2)$. Проблема заключается в последнем члене. Поскольку $\omega_\phi \sim \Gamma/\varepsilon^2$, $\tilde{u}_z \sim \Gamma/\varepsilon$, $r \sim r_0$, $dr dz \sim \varepsilon^2$, то сам член имеет порядок $r_0^2 \Gamma^2 / \varepsilon$, тем самым при оценке U исключается из рассмотрения левая часть в (3.19). Однако более аккуратная оценка величин ω_ϕ и \tilde{u}_z показывает, что это неверно.

Чтобы убедиться в этом, воспользуемся преобразованием Ламба [1947, п. 162]. Предположим, что движение – установившееся. Компоненты скорости

\tilde{u}_z , \tilde{u}_r и завихренности ω_φ удовлетворяют стационарным уравнениям движения в системе координат, движущейся с вихрем

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tilde{u}_r) + \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial z} = 0, \quad \tilde{u}_r \frac{\partial \omega_\varphi}{\partial r} + \tilde{u}_z \frac{\partial \omega_\varphi}{\partial z} = \frac{\tilde{u}_r \omega_\varphi}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi^2}{\partial z}.$$

Отсюда следует, что

$$r^2 \tilde{u}_z \omega_\varphi - rz \tilde{u}_r \omega_\varphi = ru_\varphi^2 - 3rz \tilde{u}_r \omega_\varphi - \frac{\partial}{\partial z} (u_\varphi^2 rz - r^2 z \tilde{u}_z \omega_\varphi) + \frac{\partial}{\partial r} (r^2 z \tilde{u}_r \omega_\varphi).$$

Интегрируя полученное соотношение по сечению вихря, находим

$$2\pi \iint r \omega_\varphi (r \tilde{u}_z - z \tilde{u}_r) dr dz = -6\pi \iint rz \tilde{u}_r \omega_\varphi dr dz + 2\pi \iint ru_\varphi^2 dr dz.$$

Эта формула точна для установившегося течения. Теперь члены в правой части имеют порядок $O(r_0 \Gamma^2)$ и могут быть оценены с привлечением аппроксимации (3.13), т. е. $\omega_\varphi = \omega_0(s)$, $\tilde{u}_r = \Gamma_0(s) \cdot \cos \theta / 2\pi s$, $u_\varphi = u_{\varphi 0}(s)$, $dr dz = s ds d\theta$. Это дает

$$2\pi \iint r \omega_\varphi (r \tilde{u}_z - z \tilde{u}_r) dr dz \approx -\frac{3}{4} r_0 \Gamma^2 + 4\pi^2 r_0 \int_0^\varepsilon s u_{\varphi 0}^2 ds.$$

Подставляя вычисленный интеграл в (3.19), получаем

$$\frac{1}{2} \Gamma^2 r_0 \left(\ln \frac{8r_0}{\varepsilon} - 2 \right) + \frac{r_0}{2} \int_0^\varepsilon \frac{\Gamma_0^2(s)}{s} ds = 2U\pi r_0^2 \Gamma - \frac{3}{4} r_0 \Gamma^2 + 4\pi^2 r_0 \int_0^\varepsilon s u_{\varphi 0}^2 ds.$$

Окончательный результат для скорости перемещения вихревого кольца можно записать в следующем виде:

$$U = \frac{\Gamma}{4\pi r_0} \left(\ln \frac{8r_0}{\varepsilon} - \frac{1}{2} + 2 \frac{\pi^2 \varepsilon^2 \overline{u_0^2}}{\Gamma^2} - 4 \frac{\pi^2 \varepsilon^2 \overline{u_{\varphi 0}^2}}{\Gamma^2} \right). \quad (3.20)$$

Здесь $u_0 = \Gamma_0(s)/2\pi s$, а черта над величинами означает осреднение по сечению вихря. Оценка кинетической энергии с тем же порядком точности дает

$$T = \frac{1}{2} r_0 \Gamma^2 \left(\ln \frac{8r_0}{\varepsilon} - 2 + 2 \frac{\pi^2 \varepsilon^2 \overline{u_0^2}}{\Gamma^2} + 2 \frac{\pi^2 \varepsilon^2 \overline{u_{\varphi 0}^2}}{\Gamma^2} \right). \quad (3.21)$$

Влияние закрутки, т. е. движения вдоль оси вихря, на скорость вихревого кольца исследовано также в работе Widnall *et al.* [1971] с помощью метода срашиваемых асимптотических разложений. Отметим, что наличие закрутки приводит к уменьшению скорости вихря, вплоть до остановки вихря и даже движения в обратную сторону.

Заметим, что когда нет закрутки, формула (3.12) может быть переписана через интегральные характеристики

$$T = 2UI - \frac{3}{4} \frac{I^2}{\pi^2 r_0^3},$$

т. е. скорость движения вихревого кольца выражается через энергию, импульс и характерный размер

$$U = \frac{T}{2I} + \frac{3}{8} \frac{I}{\pi^2 r_0^3}.$$

В отсутствие закрутки формулы, аналогичные (3.20) и (3.21), были выведены в работе Fraenkel [1970] путем разложения по малому параметру $\varepsilon/r_0 \ll 1$ решения интегрального уравнения на функцию тока

$$\Psi(r, z) = -\frac{1}{2} Ur^2 + \iint r' F(\Psi(r', z')) G(r, r', z - z') dr' dz'. \quad (3.22)$$

Здесь $rF(\Psi) = \omega_\varphi$; G – функция Грина оператора Лапласа для бесконечно пространства при условии осевой симметрии; она совпадает с функцией тока (2.42) при $\Gamma = 1$. Используя разложение вида (2.46), Fraenkel доказал существование решения уравнения (3.22) и нашел скорость движения тонкого вихревого кольца

$$U = \frac{\Gamma}{4\pi r_0} \left[\ln \frac{8r_0}{\varepsilon} - \frac{1}{2} + 4 \int_0^1 V^2(s) s ds \right] \left\{ 1 + O\left(\frac{\varepsilon^2}{r_0^2} \ln^2 \frac{\varepsilon}{r_0}\right) \right\},$$

где

$$V(s) = -\frac{1}{s} \int_0^s \Omega(s') s' ds', \quad \Omega(s) = \frac{\pi \varepsilon^2 \omega_0(s)}{\Gamma}.$$

Нетрудно видеть, что данный результат совпадает с формулой (3.20). В частном случае вихря без закрутки с однородным распределением завихренности из (3.16) имеем $\Gamma(s) = \Gamma \cdot s^2/\varepsilon^2$, соответственно $u_\theta = \Gamma \cdot s/2\pi\varepsilon^2$ и $\overline{u_\theta^2} = \Gamma^2/8\pi^2\varepsilon^2$, откуда получаем соотношение (3.9). Для полого вихря внутреннего движения в ядре нет, следовательно, $\overline{u_\theta^2} = 0$, $\overline{u_{\varphi 0}^2} = 0$ и (3.20) дает формулу Хикса (3.10).

Если завихренность в ядре не имеет четкой границы при $s = \varepsilon$, то формулы (3.20) и (3.21) становятся недостаточно определенными. Для случая гладкого распределения завихренности, достаточно быстро убывающего с расстоянием от оси, Сэффмэн [2000] предлагает комбинировать слагаемые

$$-\ln \varepsilon + \frac{1}{\Gamma^2} \int_0^\varepsilon \frac{\Gamma_0^2(s)}{s} ds.$$

Эта сумма не зависит от ε , если ε достаточно велико, так что $\Gamma_0(\varepsilon) = \Gamma$. В частности, для вязкого вихревого кольца при малых временах $t \ll r_0^2/4\nu t$ структуру ядра можно считать локально двумерной, тогда из (2.31) имеем

$$\Gamma_0(s) = \Gamma \left(1 - e^{-s^2/4\nu t} \right).$$

В результате

$$U = \frac{\Gamma}{4\pi r_0} \left\{ \ln \frac{8r_0}{\sqrt{4\nu t}} - \frac{1}{2}(1 - \gamma + \ln 2) \right\}. \quad (3.23)$$

Движение вязкого вихря изучалось в работе Tung, Ting [1967] методом сращиваемых асимптотических разложений, но в результате арифметической ошибки константа составляет 0,688, вместо $(1 - \gamma + \ln 2)/2 \approx 0,588$.

Строго говоря, при наличии вязкости движение не является установившимся. Тем не менее, как показал Saffman [1970], если скоростью движения вихревого кольца считать скорость перемещения центроида завихренности

$$\mathbf{X} = \frac{1}{2} \int \frac{(\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}) \cdot \mathbf{I}}{I^2} \cdot \mathbf{r} dV, \quad \mathbf{U} = \frac{d\mathbf{X}}{dt},$$

то преобразование Ламба остается справедливым и формула (3.23) дает скорость движения вихревого центроида.

Применяя решение о диффузии завихренности в вихревом кольце вида (2.49), справедливое в более широком временном диапазоне, Kaplanski, Rudi [1999] вывели формулу для скорости движения вихревого кольца в виде интеграла

$$U = \frac{\Gamma_0}{4\pi\sqrt{2\nu t}} \int_0^\infty \left\{ \pi [1 - \operatorname{erf}(\mu)](1 - 6\mu^2) + 6\sqrt{\pi} \mu \exp(-\mu^2) \right\} J_1^2 \left(\frac{\mu r_0}{\sqrt{2\nu t}} \right) d\mu,$$

совпадающую с (3.23) при малых значениях t и дающую верную асимптоту для затухающего вихревого кольца [Rott, Cantwell, 1993а, б]

$$U_{AS} = \frac{7}{15} \cdot \frac{\pi r_0^2 \Gamma_0}{(8\pi v t)^{3/2}}.$$

Основываясь на подходе Saffman [1970], Moore [1985] изучил движение однородного вихревого кольца в сжимаемой среде и нашел поправку в формулу для скорости

$$U = \frac{\Gamma}{4\pi r_0} \left(\ln \frac{8r_0}{\epsilon} - \frac{1}{4} - \frac{5M^2}{12} \right).$$

Здесь $M = \Gamma / 2\pi a c_\infty$ – число Маха, c_∞ – скорость звука на бесконечности. В формуле учтена лишь низшая степень в разложении по M .

В случае “толстых” вихревых колец их геометрию и скорость перемещения можно найти лишь путем численных расчетов. Norbury [1973], решая численно уравнение (3.22) с функцией $F(\Psi) = \text{const}$, получил однопараметрическое семейство стационарных вихревых колец. В качестве параметра выбран безразмерный средний радиус ядра $\alpha = \sqrt{S/\pi r_0^2}$, где S – площадь поперечного сечения вихря, $r_0 = (r_{\min} + r_{\max})/2$. Исследован диапазон значений параметра α от $\alpha \ll 1$, соответствующего тонкому вихревому кольцу, до $\alpha = \sqrt{2}$, соответствующего сферическому вихрю Хилла, для которого известно точное аналитическое решение. Форма сечения вихревых колец для различных значений α приведена на рис. 3.5. С ростом α скорость движения и кинетическая энергия вихря падают (рис. 3.6), а импульс увеличивается.

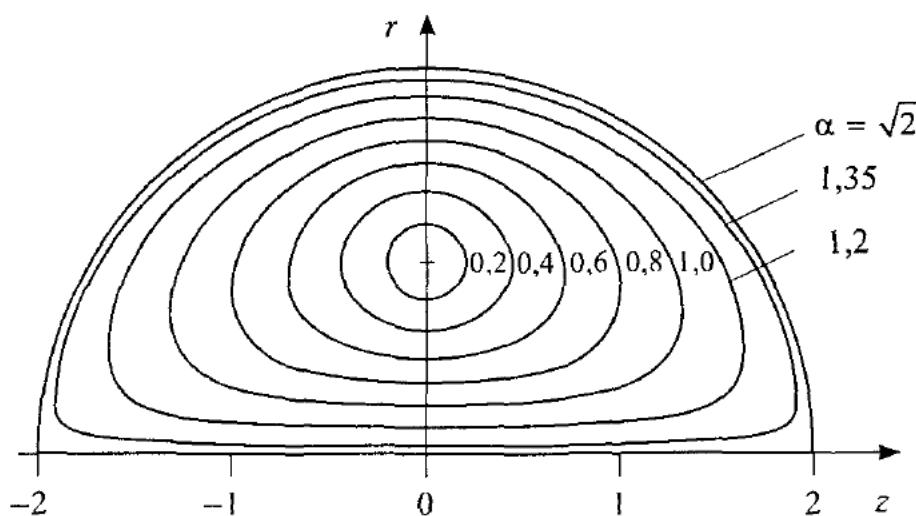


Рис. 3.5. Зависимость формы сечения вихревых колец от безразмерного среднего радиуса ядра α

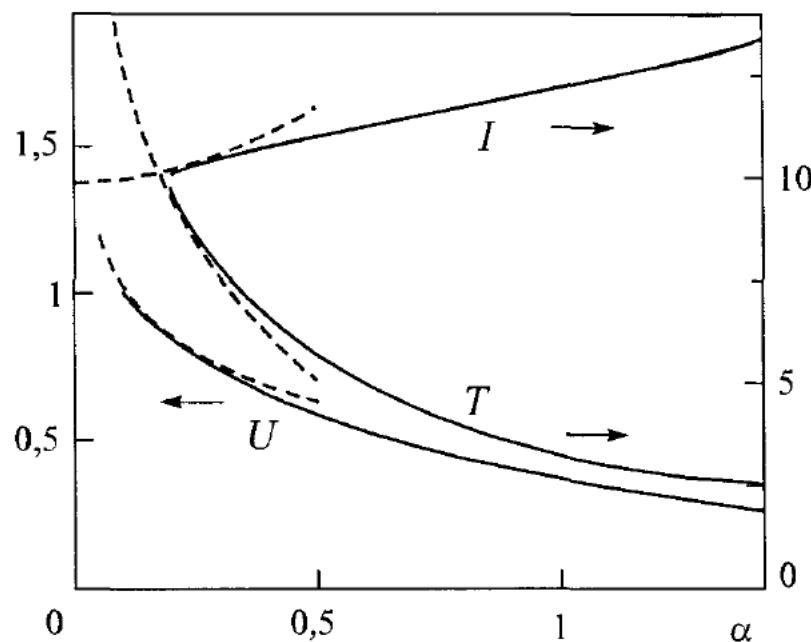


Рис. 3.6. Зависимость скорости U , кинетической энергии T и импульса I вихревого кольца от безразмерного радиуса ядра α . Штриховые линии – “тонкое” вихревое кольцо

Для сравнения штриховыми линиями на рис. 3.6 приведены зависимости для тонкого вихревого кольца, получающиеся из (3.18), (3.19) и (3.14) путем обезразмеривания с теми же масштабами длины и скорости, что и у Norbury [1973]

$$U = \frac{1}{4} \left(\ln \frac{8}{\alpha} - \frac{1}{4} \right), \quad T = \frac{\pi^2}{2} \left(\ln \frac{8}{\alpha} - \frac{7}{4} \right), \quad I = \pi^2.$$

Разложения U , T и I с учетом малых величин второго порядка по α приведены в работе Fraenkel [1972].

3.2.2. Сферический вихрь Хилла

Рассмотрим здесь предельный случай $\alpha = \sqrt{2}$ [Hill, 1894]. Пусть область завихренной жидкости заключена внутри сферы радиуса a , движущейся с постоянной поступательной скоростью U . Вихревые линии являются концентрическими окружностями с общей осью, проходящей через центр сферы, а линии тока лежат в меридиональных плоскостях. Вне сферы движение потенциально. В цилиндрических переменных (r, ϕ, z) с началом координат в центре сферы рассматриваем распределение завихренности $\omega = (0, \omega_\phi, 0)$

$$\omega_\phi = \begin{cases} Ar, & r^2 + z^2 < a^2, \\ 0, & r^2 + z^2 > a^2, \end{cases} \quad (3.24)$$

удовлетворяющее уравнению Гельмгольца (1.15).

Поле скорости относительно движущегося вихря удовлетворяет уравнению неразрывности, что позволяет ввести функцию тока

$$\tilde{u}_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial z}, \quad \tilde{u}_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial r}.$$

Заметим, что вектор-потенциал $\mathbf{A} = (0, \tilde{\Psi}/r, 0)$.

Уравнение на функцию тока получаем из кинематического соотношения $\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \tilde{\mathbf{u}}$

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}}{\partial z^2} = -r \omega_\theta. \quad (3.25)$$

Границные условия на сфере следуют из непрерывности скорости. С другой стороны, $\omega_\phi/r = F(\tilde{\Psi})$, откуда следует, что $\tilde{\Psi} = \text{const}$ на поверхности сферы, ограничивающей область ненулевой завихренности. Вдали от сферы скорость u_z относительно сферы имеет величину $-U$.

Решать уравнение (3.25) лучше в сферических переменных (ρ, ϕ, χ) $[\rho \sin \chi = r, \rho \cos \chi = z]$

$$\frac{\partial^2 \tilde{\Psi}}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial^2 \tilde{\Psi}}{\partial \chi^2} - \frac{\cos \chi}{\sin \chi} \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \chi} \right) = \begin{cases} -A \rho^2 \sin^2 \chi, & \rho < a, \\ 0, & \rho > a \end{cases} \quad (3.26)$$

методом разделения переменных. Общее решение однородного уравнения имеет вид

$$\tilde{\Psi}_c = \left(c \rho^2 + \frac{d}{\rho} \right) \sin^2 \chi.$$

Очевидно, что внутри сферы коэффициент $d = 0$, а снаружи, наоборот, $c = 0$.

Частное решение неоднородного уравнения

$$\tilde{\Psi}_p = -\frac{A}{10} \rho^4 \sin^2 \chi.$$

Выполняя условия на сфере, находим

$$\tilde{\Psi} = \begin{cases} \frac{1}{10} A \rho^2 \sin^2 \chi (a^2 - \rho^2), & \rho < a, \\ -\frac{1}{15} A a^2 \rho^2 \sin^2 \chi (1 - a^3 / \rho^3), & \rho > a \end{cases} \quad (3.27)$$

или, возвращаясь к цилиндрическим переменным,

$$\tilde{\Psi} = \begin{cases} \frac{1}{10} Ar^2(a^2 - r^2 - z^2), & r^2 + z^2 < a^2 \\ -\frac{1}{15} Aa^2r^2 \left[1 - a^3/(r^2 + z^2)^{3/2} \right], & r^2 + z^2 > a^2. \end{cases} \quad (3.28)$$

Постоянную A получаем из условия однородности потока вдали от сферы

$$-\frac{2}{15}a^2A = -U.$$

Картина линий тока в вихре Хилла приведена на рис. 3.7. Дифференцирование функции тока (3.28) дает компоненты скорости

$$\tilde{u}_r = \frac{3}{2}U \frac{rz}{a^2}, \quad \tilde{u}_z = \frac{3}{2}U \left(1 - \frac{2r^2 + z^2}{a^2} \right), \quad r^2 + z^2 < a^2, \quad (3.29)$$

$$\tilde{u}_r = \frac{3}{2}U \frac{rz}{a^2} \left(\frac{a^2}{r^2 + z^2} \right)^{5/2},$$

$$\tilde{u}_z = U \left[\left(\frac{a^2}{r^2 + z^2} \right)^{5/2} \frac{2z^2 - r^2}{2a^2} - 1 \right], \quad r^2 + z^2 > a^2. \quad (3.30)$$

В системе координат, связанной с вихрем, движение стационарно, что позволяет легко найти распределение давления. В самом деле, из (1.57) и (3.24) находим, что внутри сферы постоянная Бернулли $H = -A\Psi$, а из уравнения Бернулли в отсутствие массовых сил и при единичной плотности находим

$$P = P_\infty - A\tilde{\Psi} - (\tilde{u}_r^2 + \tilde{u}_z^2)/2$$

с компонентами скорости (3.29).

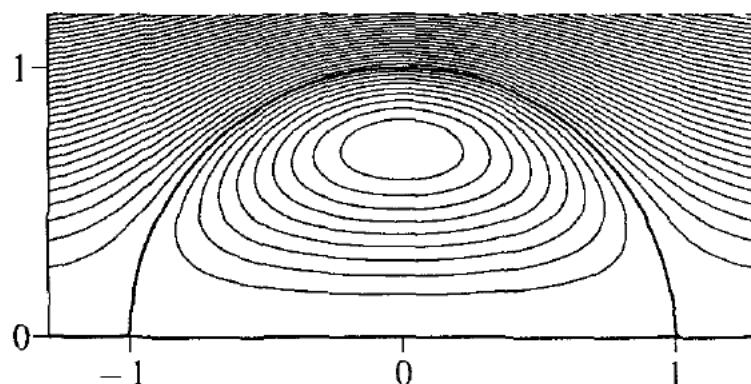


Рис. 3.7. Линии тока в вихре Хилла

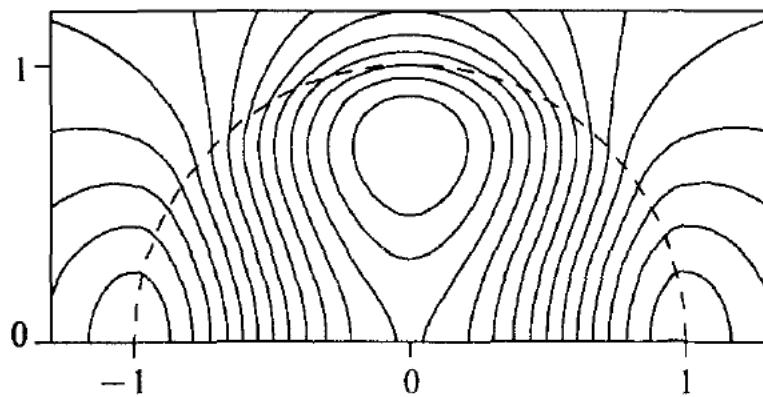


Рис. 3.8. Изолинии давления в вихре Хилла

Вне сферы постоянная Бернулли является глобальной константой и соответственно

$$P = P_\infty - (\tilde{u}_r^2 + \tilde{u}_z^2)/2$$

с величинами u_r и u_z , определенными функциями (3.31). Распределение давления в вихре показано на рис. 3.8. Для сферического вихря Хилла легко вычисляются инварианты: циркуляция $\Gamma = 5aU$, импульс $I = I_z = 2\pi a^3 U$, момент импульса $M = M_\phi = -5\pi/16a^4 U$, кинетическая энергия $T = 10/7 \pi a^3 U^2$. Заметим, что при вычислении инвариантов необходимо переходить в абсолютную систему координат

$$u_r = \tilde{u}_r, \quad u_z = \tilde{u}_z + U, \quad \Psi = \tilde{\Psi} + \frac{1}{2} Ur^2. \quad (3.31)$$

3.2.3. Сферический вихрь Хикса

Сферический вихрь Хикса [Hicks, 1899] представляет собой более сложную пространственную вихревую структуру с ненулевыми тремя компонентами скорости и завихренности.

В общем случае осесимметричного закрученного течения поля скорости и завихренности в цилиндрических координатах (r, φ, z) определяются двумя функциями (см. п. 1.4.2)

$$\mathbf{u} = \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial z}, u_\varphi, \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right), \quad (3.32)$$

$$\boldsymbol{\omega} = \left(-\frac{\partial u_\varphi}{\partial z}, -\frac{1}{r} D^2 \Psi, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r u_\varphi \right), \quad (3.33)$$

где $D^2 \Psi = r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}$.

Предположим, что область завихренной жидкости распространяется без изменения формы, т. е. в некоторой движущейся системе отсчета, в которой $\partial\Psi/\partial t \equiv 0$, движение стационарно. Тогда в соответствии с (1.57)

$$\frac{\omega_\varphi}{r} = -\frac{dH(\tilde{\Psi})}{d\tilde{\Psi}} + \frac{\Gamma}{r^2} \frac{d\Gamma(\tilde{\Psi})}{d\tilde{\Psi}}. \quad (3.34)$$

Здесь $\Gamma = ru_\varphi$ и $H = 1/2 (u_r^2 + u_\varphi^2 + u_z^2) + P/\rho + \Pi$ (функция Бернулли) – произвольные функции $\tilde{\Psi}$. Мы вновь переходим к переменным с тильдой, т. е. к значениям скорости и функции тока в системе координат, движущейся поступательно с некоторой постоянной скоростью U вдоль оси Oz . При этом справедливы соотношения (3.31) и $u_\varphi = \tilde{u}_\varphi$. Над u_r, u_φ тильду будем опускать.

Итак, для функции тока имеем дифференциальное уравнение

$$D^2\tilde{\Psi} = r^2 \frac{dH}{d\tilde{\Psi}} - \Gamma \frac{d\Gamma}{d\tilde{\Psi}}. \quad (3.35)$$

Рассмотренному выше сферическому вихрю Хилла соответствует $H = A\tilde{\Psi}$, $\Gamma = 0$ внутри сферы, $H = \text{const}$, $\Gamma = 0$ вне сферы.

Moffatt [1969] (см. также Hicks [1899]) показал, что уравнение (3.35) может быть решено, если положить

$$\begin{cases} H = H_0 - A\tilde{\Psi}, \Gamma = \alpha\tilde{\Psi}, & r^2 + z^2 < a^2, \\ H = H_0, \Gamma = 0, & r^2 + z^2 > a^2. \end{cases} \quad (3.36)$$

Здесь H_0 , A , α – константы. При этом уравнение (3.35) становится линейным

$$D^2\tilde{\Psi} = \begin{cases} -Ar^2 - \alpha^2\tilde{\Psi}, & r^2 + z^2 < a^2, \\ 0, & r^2 + z^2 > a^2, \end{cases} \quad (3.37)$$

и реализуется простое соотношение между полями скорости и завихренности

$$\omega_r = \alpha u_r, \quad \omega_\varphi = \alpha u_\varphi + Ar, \quad \omega_z = \alpha u_z. \quad (3.38)$$

Границные условия на $\tilde{\Psi}$ совпадают с условиями в задаче о вихре Хилла. Внешнее решение при $r^2 + z^2 > a^2$ будет совпадать с описанным выше. Введением величины

$$\Psi_1 = \tilde{\Psi} + Ar^2/\alpha^2 \quad (3.39)$$

сводим уравнение (3.37) к однородному

$$D^2\Psi_1 = -\alpha^2\Psi_1.$$

Как и в случае с нахождением решения для вихря Хилла, целесообразно перейти к сферическим переменным (ρ, ϕ, χ) [$\rho \sin \chi = r, \rho \cos \chi = z$] и решать задачу методом разделения переменных

$$\frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial \chi^2} - \frac{\cos \chi}{\sin \chi} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \chi} \right) + \alpha^2 \Psi_1 = 0.$$

Для обеспечения сшивки с внешним течением зависимость от χ следует выбрать следующую: $\Psi_1 \sim \sin^2 \chi$, т. е. $\Psi_1 = R(\rho) \sin^2 \chi$. Для $R(\rho)$ имеем уравнение

$$R'' + \left(\alpha^2 - \frac{2}{\rho^2} \right) R = 0,$$

решение которого выражается через сферическую функцию Бесселя первого порядка* [Абрамовиц, Стиган, 1979]

$$R = b \alpha \rho j_1(\alpha \rho), \quad j_1(x) = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}, \quad b = \text{const.}$$

Таким образом, имея в виду соотношение (3.39), получаем

$$\tilde{\Psi} = \left[b \alpha \rho j_1(\alpha \rho) - A \rho^2 / \alpha^2 \right] \sin^2 \chi, \quad \rho < a. \quad (3.40)$$

Константы b и A определены из условия сшивки функции тока (3.40) с функцией (см. (3.27), (3.28))

$$\tilde{\Psi} = -\frac{U}{2} \rho^2 \sin^2 \chi \left(1 - \frac{a^3}{\rho^3} \right), \quad \rho > a,$$

а также их производных по ρ при $\rho = a$. В результате

$$A = \frac{\alpha^3 j_1(\alpha a)}{a} \cdot b, \quad U = \frac{2}{3} \alpha^2 j_2(\alpha a) \cdot b. \quad (3.41)$$

Считая параметры α и b заданными и варьируя их, находим семейство вихрей. Скорость движения вихрей определяется формулами (3.41). Особо следует отметить два подсемейства найденных решений. Первое из них задается значениями α , при которых $j_1(\alpha a) = 0$. В этом случае $A = 0$ и, в соответ-

* В работе Moffatt [1969] вместо j_1 используется функция Бесселя дробного порядка $J_{3/2}(x) = \sqrt{2x/\pi} j_1(x)$.

ствии с (3.38), $\omega = \alpha u$, т. е. реализуется течение Бельтрами. Первый корень функции $j_1(x)$ дает значение $\alpha = 4,493/a$. Другое выделенное подсемейство возникает при $j_2(\alpha a) = 0$, что соответствует значению $U = 0$, т. е. неподвижным вихрям. Наименьшее значение параметра α для таких вихрей равно $5,763/a$. Наконец, при предельном переходе $\alpha \rightarrow 0$ из формул (3.40), (3.41) получаем функцию тока вихря Хилла (3.27).

Зная функцию тока (3.40), дифференцированием находим компоненты скорости u_r, \tilde{u}_z

$$u_r = b\alpha^2 \sin \chi \cos \chi j_2(\alpha\rho), \quad (3.42)$$

$$\tilde{u}_z = 2b\alpha [j_1(\alpha\rho)/\rho - j_1(\alpha a)/a] - b\alpha^2 \alpha_2(\alpha\rho) \sin^2 \chi. \quad (3.43)$$

Компоненту скорости u_φ внутри вихря получаем из определения Γ ($\Gamma = r u_\varphi$) и соотношения (3.36)

$$u_\varphi = b\alpha^2 \rho [j_1(\alpha\rho)/\rho - j_1(\alpha a)/a] \sin \chi. \quad (3.44)$$

Простая связь ротора скорости с самой скоростью (3.38) позволяет легко определить вектор-потенциал течения. В самом деле, поскольку $\text{rot } \mathbf{u} = \alpha \mathbf{u} + Ar \cdot \mathbf{i}_\varphi$, то вектор-потенциал естественно искать в виде

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\alpha} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{F},$$

а для определения вектора \mathbf{F} получаем уравнение

$$\text{rot } \mathbf{F} = -\frac{Ar}{\alpha} \cdot \mathbf{i}_\varphi. \quad (3.45)$$

Второе уравнение возникает из условия соленоидальности вектора \mathbf{A}

$$\text{div } \mathbf{F} = 0. \quad (3.46)$$

Очевидно, что задача (3.45), (3.46) аналогична задаче о внутреннем течении в сферическом вихре Хилла (3.26), что в соответствии с (3.29) дает

$$\begin{aligned} A_r &= \frac{1}{\alpha} \cdot u_r - \frac{A}{5\alpha} \cdot \rho^2 \sin \chi \cos \chi, \\ A_z &= \frac{1}{\alpha} \cdot u_z + \frac{A}{5\alpha} \cdot \rho^2 (1 + \sin^2 \chi). \end{aligned}$$

Наконец, компонента A_φ просто пропорциональна u_φ :

$$A_\varphi = \frac{1}{\alpha} \cdot u_\varphi$$

Вне сферы $\rho = a$ вектор-потенциал имеет единственную ненулевую компоненту $A_\varphi = \bar{\Psi}/r$.

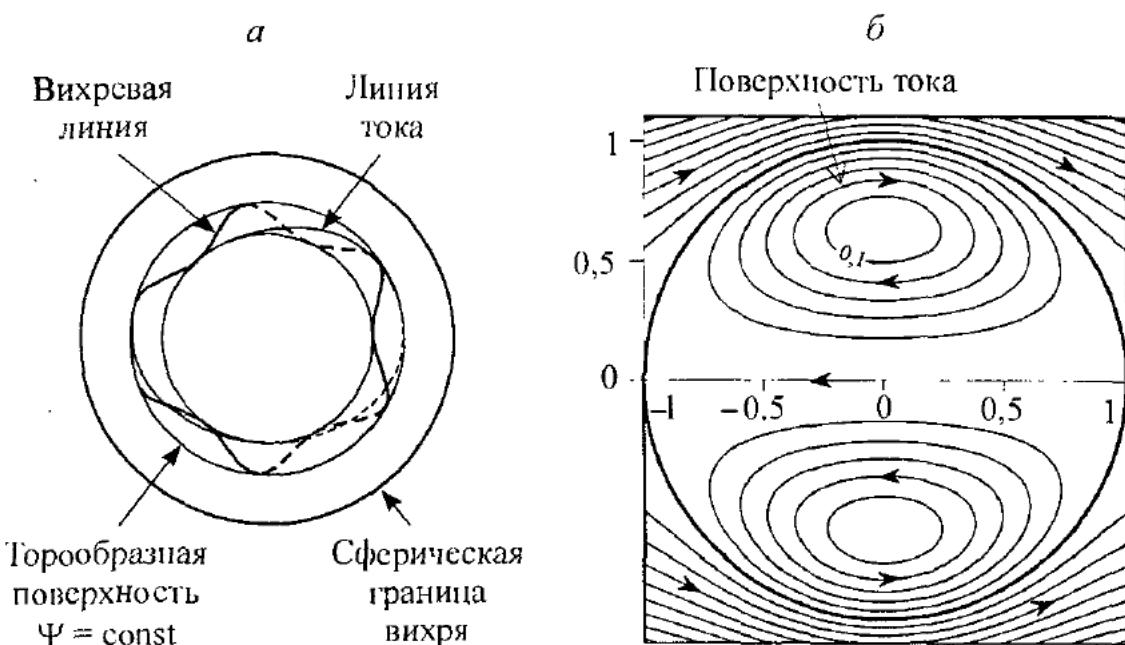


Рис. 3.9. Вихрь Хикса. а – поведение вихревой линии и линий тока; б – поверхности тока ($\alpha a = 3$)

Рассмотрим теперь структуру вихревого поля внутри сферы. Из формул (3.38) видно, что вихревые линии, так же как и линии тока, лежат на поверхностях $\tilde{\Psi} = \text{const}$ (рис. 3.9а). Последние, в свою очередь, представляют собой вложенные друг в друга торообразные поверхности (рис. 3.9б). При $\alpha a < 5,763$ функция тока имеет один экстремум в точке с координатами $\chi = \pi/2$, $\rho = \rho_0$, удовлетворяющими условию $\tilde{u}_z = 0$. При $\alpha a > 5,763$ появляется второй экстремум в точке $\chi = \pi/2$, $\rho = \rho_1$. Картина изолиний $\tilde{\Psi} = \text{const}$ становится двухъячеистой (рис. 3.10). Увеличение числа ячеек происходит после перехода величины αa через очередной корень функции $j_2(x)$. Зависимости $\rho_0(\alpha)$ и $\rho_1(\alpha)$ представлены на рис. 3.11. При $\alpha \rightarrow 0$ $\rho_0 \rightarrow a/\sqrt{2}$, что соответствует экстремуму функции тока в вихре Хилла. В другом предельном случае $\alpha \rightarrow \infty$ $\rho_0 \rightarrow s_0/\alpha$, где $s_0 = 2,744$ – первый корень уравнения

$$(s^2 - 1) \sin s + s \cos s = 0. \quad (3.47)$$

Соответственно, $\rho_1 \rightarrow s_1/\alpha$ и т. д.

Согласно Moffatt [1969], период вихревой линии возрастает от нуля при $\tilde{\Psi} = 0$ (на границе сферы $\rho = a$) до бесконечности при $\tilde{\Psi} = \tilde{\Psi}_{\max}$ на “оси” вихря ($\chi = \pi/2$, $\rho = \rho_0$). Однако подробный анализ [Kuibin, 2003] показал, что период вихревой линии растет логарифмически при $\tilde{\Psi} \rightarrow 0$, а при $\tilde{\Psi} \rightarrow \tilde{\Psi}_{\max}$ период оказывается конечным и равным

$$\frac{2\pi\alpha r_0}{\sqrt{2\left(\alpha^2r_0^2 - 2 + Ar_0^4/\tilde{\Psi}_{\max}\right)}} \left(1 + \frac{A}{\tilde{\Psi}_{\max}} \cdot \frac{r_0^2}{\alpha^2}\right).$$

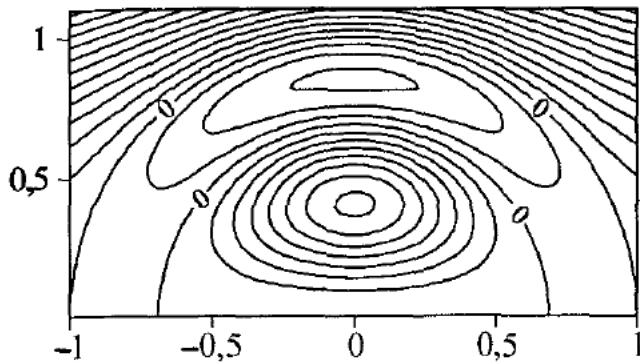


Рис. 3.10. Двухъячеистая структура поверхностей тока в вихре Хикса при $\alpha a = 7$

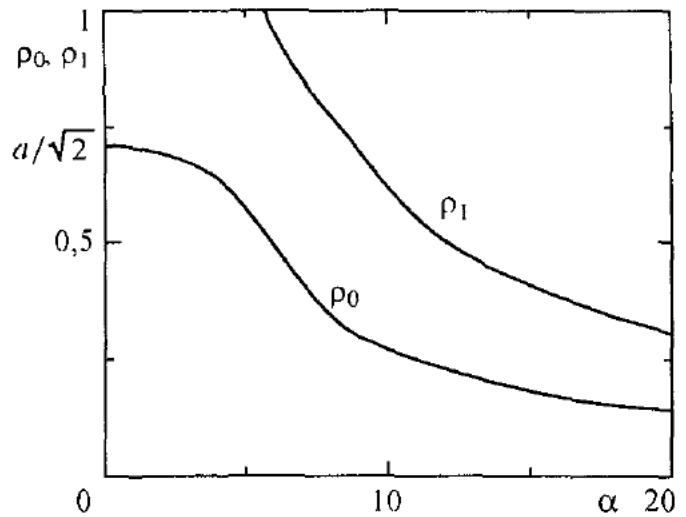


Рис. 3.11. Зависимость радиальных положений ρ_0 и ρ_1 экстремумов функции тока в вихре Хикса от параметра α

Ввиду простых зависимостей компонент скорости от координат удается выразить через элементарные функции все инварианты. Импульс (см. (1.126)) вихря Хикса направлен вдоль оси z , и равен

$$I_z = \pi \iint r^2 \omega_\phi dr dz = 2\pi a^3 U = \frac{4\pi}{3} ab f_0(\alpha a), \quad f_0(x) = x^2 j_2(x),$$

и совпадает с импульсом вихря Хилла при одинаковой скорости U . Момент импульса (см. (1.115)) имеет две ненулевые компоненты

$$\begin{aligned} M_\phi &= -\pi \iint r(r^2 + z^2) \omega_\phi dr dz = -2\pi^2 b a^2 f_1(\alpha a), \\ f_1(x) &= \left[(8 + 4x^2 - x^4) j_0(x) - (8x - 4x^3) j_1(x) - 8 \right] / x^2, \\ M_z &= -\pi \iint r(r^2 + z^2) \omega_z dr dz = -\frac{8\pi}{15} b a^2 f_2(\alpha a), \\ f_2(x) &= x^2 j_1(x) - 5x j_2(x). \end{aligned}$$

Кинетическая энергия может быть вычислена по формуле (1.119)

$$T = 16\pi \frac{b^2}{a} f_3(\alpha a), \quad f_3(x) = x^4 \left[\frac{j_2^2(x)}{9} - \frac{j_1(x)j_2(x)}{2x} + \frac{j_1^2(x)}{10} \right].$$

Последний инвариант вихря Хикса – спиральность

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= 2\pi \iint r \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} dr dz = \frac{8\pi}{3} \frac{b^2}{a^2} f_4(\alpha a), \\ f_4(x) &= x^4 \left[x j_1^2(x) - x j_0(x) j_2(x) - 2 j_1(x) j_2(x) \right]. \end{aligned}$$

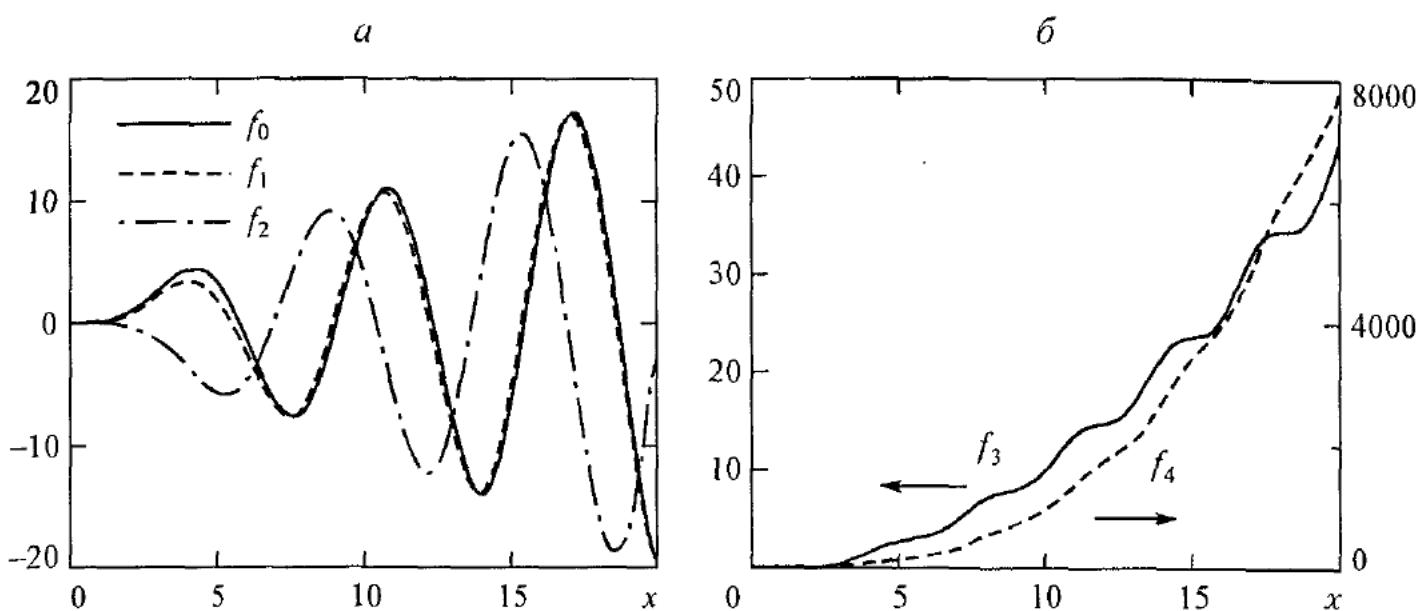


Рис. 3.12. Графики функций $f_0(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$ (а) и $f_3(x)$, $f_4(x)$ (б), входящих в выражения для инвариантов вихря Хикса

Графики функций f_0 , f_1 , f_2 приведены на рис. 3.12а, f_3 , f_4 – на рис. 3.12б.

Зная два инварианта, например импульс и энергию, можно определить (при заданном радиусе a) скорость движения вихря и значение параметра α . Привлекая третий инвариант, скажем M_2 или спиральность \mathcal{H} , можно определить все три величины, задающие параметры вихря: a , b , α (скорость U связана с параметром b соотношениями (3.41)).

3.3. КОЛОННООБРАЗНЫЕ ВИХРИ В ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

3.3.1. Вихрь Рэнкина

В отличие от бесконечно тонкой вихревой нити более приближенной к реальности является модель цилиндрического вихря с конечным ядром круглого сечения радиуса a , в котором завихренность ω постоянна (рис. 3.13). Вне ядра течение полагается безвихревым. Аналогично случаю вихревой пелены такой вихрь можно аппроксимировать непрерывным распределением прямолинейных вихревых нитей в ядре. Тогда элемент сечения ядра dS дает вклад в циркуляцию $d\Gamma$, равную, согласно теореме Стокса,

$$d\Gamma = \omega dS.$$

Циркуляция по любому контуру, один раз охватывающему все ядро вихря, есть

$$\Gamma = \omega \pi a^2 = \text{const.} \quad (3.48)$$

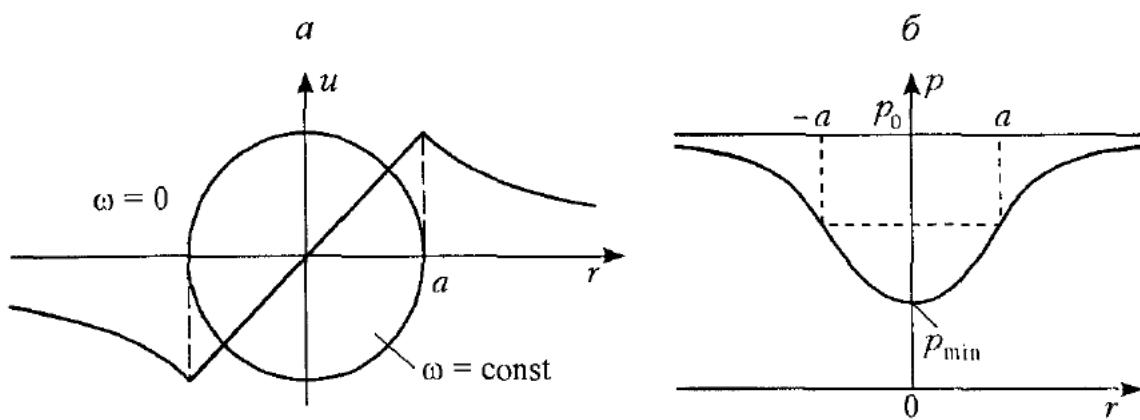


Рис. 3.13. Профили скорости (а) и давления (б) в вихре Рэнкина

Используя формулу (2.25) для поля скоростей, индуцируемого N вихрями, и переходя к непрерывному распределению, имеем

$$u_x - iu_y = \int \frac{d\Gamma}{2\pi i(z - z_0)} = \frac{\omega}{2\pi i} \int_S \frac{dS(z_0)}{z - z_0}.$$

Этот интеграл достаточно легко вычисляется, но намного проще получить результат, если учесть аксиальную симметрию задачи, т. е. наличие только окружной компоненты скорости $u = u(r)$. Тогда из теоремы Стокса для круга радиуса $r > 0$ имеем $2\pi r u = \pi a^2 \omega$, откуда с учетом (3.48) находим выражение для скорости в области безвихревого (потенциального) течения

$$u = \frac{a^2 \omega}{2r} = \frac{\Gamma}{2\pi r}, \quad r > a. \quad (3.49)$$

Как и в случае цилиндрической пелены, это распределение совпадает с полем скорости, индуцированной бесконечно тонкой вихревой нитью интенсивностью Γ на расстоянии $r > a$.

Внутри ядра аналогично получаем

$$2\pi r u = \pi r^2 \omega$$

или

$$u = \frac{\Gamma r}{2\pi a^2}, \quad r < a. \quad (3.50)$$

Линейность профиля означает наличие твердотельного вращения жидкости в ядре вихря с угловой скоростью Ω равной

$$\Omega = \Gamma / 2\pi a^2. \quad (3.51)$$

Результатирующее распределение скорости изображено на рис. 3.13а. Как видно, имеется точка излома профиля скорости на границе ядра $r = a$, обусловленная скачком завихренности. Тем не менее эта модель, именуемая *вихрем*

Рэнкина, – одна из наиболее популярных и вполне отражает основные особенности концентрированных вихрей.

Радиальное распределение статического давления характеризуется резким его понижением в ядре вихря. Чтобы вычислить профиль давления, применим уравнение Эйлера, которое в полярных координатах с учетом осевой симметрии примет вид

$$\rho \frac{u^2}{r} = \frac{dp}{dr}, \quad (3.52)$$

откуда

$$p = p_\infty + \rho \int_{\infty}^r \frac{u^2}{r} dr, \quad (3.53)$$

где ρ – плотность жидкости, p_∞ – давление на бесконечности. Подставляя профили скорости (3.49), (3.50) в (3.53), находим распределение давления

$$p = p_\infty - \rho \frac{\omega^2 a^4}{8r^2}, \quad r > a, \quad (3.54)$$

$$p = p_\infty - \rho \frac{\omega^2 a^2}{4} + \rho \frac{\omega^2}{8} r^2, \quad r < a, \quad (3.55)$$

которое представлено графически на рис. 3.13б. Минимальное давление достигается на оси вихря

$$p_{\min} = p_\infty - \rho \omega^2 a^2 / 4 = p_\infty - \rho \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 a^2}. \quad (3.56)$$

На границе ядра $p - p_\infty = (p_{\min} - p_\infty) / 2$. Для бесконечно тонкой вихревой нити интенсивности Γ давление на оси стремится к $(-\infty)$, как это видно из (3.56) при $a \rightarrow 0$. Столь резким понижением давления и объясняется образование воронок на свободной поверхности жидкости при интенсивном вращательном движении, а также втягивание предметов в приосевую зону смерчей.

3.3.2. Вихрь Гаусса

Сглаженные профили завихренности и азимутальной скорости получены Hopfinger, van Heijst [1993] при численном исследовании неустойчивости монополярных вихрей. В безразмерном виде они записываются как

$$\bar{\omega} \equiv \frac{\omega R}{U} = \left[1 - \frac{1}{2} q \left(\frac{r}{R} \right)^q \right] \exp \left[- \left(\frac{r}{R} \right)^q \right], \quad \bar{u} \equiv \frac{u}{U} = \frac{1}{2} \frac{r}{R} \exp \left[- \left(\frac{r}{R} \right)^q \right].$$

Здесь R , U – масштабы длины и скорости, q – формпараметр. Полагая, в частном случае, $q = 2$ и вводя безразмерную координату $\bar{r} = \sqrt{2}r/R$, получаем

$$\omega = \left(1 - \frac{1}{2}\bar{r}^2\right) \exp\left(-\frac{\bar{r}^2}{2}\right). \quad (3.57)$$

Такой вихрь называется *Гауссовым*, поскольку безразмерная функция тока $\bar{\Psi}$ описывается распределением Гаусса

$$\bar{\Psi} = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{\bar{r}^2}{2}\right). \quad (3.58)$$

В силу своей простоты, формулы (3.57), (3.58) часто используются для обобщения экспериментальных данных.

3.3.3. Одномерный винтовой поток

Пример стационарного одномерного винтового потока, когда линии тока совпадают с вихревыми линиями (п. 1.4.1), рассмотрим в рамках модели зачерченного осесимметричного течения. С этой целью запишем (1.44) в цилиндрических координатах. Предположим, что компоненты скорости зависят только от радиальной координаты и $\lambda \equiv \text{const} \neq 0$. Тогда из первого уравнения (1.44) следует, что $u_r \equiv 0$, т. е. получаем течение с линиями тока, расположеннымми на соосных цилиндрах. Комбинируя второе и третье уравнения (1.44), получим

$$\frac{u_0}{r} \frac{\partial(r u_0)}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial r} = 0, \quad \text{причем } \frac{1}{u_0} \frac{\partial u_z}{\partial r} = \lambda. \quad (3.59)$$

Заметим, что первое уравнение в (3.59) можно получить также из (1.36) после подстановки в него (1.38) с учетом сделанных выше предположений и если использовать факт, что для стационарных винтовых потоков константа Бернулли постоянна во всей области течения.

Уравнения (3.59) определяют не что иное, как незатухающий винтовой поток невязкой жидкости в прямой круглой трубе при равномерном распределении энергии. Интегрирование уравнений (3.59) может быть выполнено при самых различных исходных предположениях. Однако, следяя работе О.Ф. Васильева [1958], ограничимся случаем простого распределения окружной компоненты скорости

$$u_\theta = \alpha r, \quad \alpha = \text{const},$$

которое эквивалентно распределению скорости в ядре вихря Рэнкина (3.50).

Тогда после интегрирования (3.59) для осевой компоненты скорости получим

$$u_z = \sqrt{u_0^2 - 2\alpha r^2},$$

где u_0 – скорость на оси течения. Таким образом, в отличие от вихря Рэнкина, где осевая скорость может быть только постоянной, этот класс течений допускает неоднородное радиальное распределение осевой компоненты скорости.

3.3.4. Одномерные (колоннообразные) винтовые вихри

Ранее были описаны элементарные винтовые вихревые структуры – бесконечно тонкая винтовая нить и вихревая пелена, состоящая из винтовых вихревых нитей. Однако реальные вихри имеют конечный размер ядра. Начнем рассмотрение этого класса винтовых вихрей с простейшего частного случая осесимметричных, или колоннообразных, вихрей. В отличие от вихря Рэнкина, который состоит из равномерного распределения прямолинейных вихревых нитей (или точечных вихрей в круге), рассмотрим осесимметричный винтовой вихрь, представляющий суперпозицию винтовых вихревых нитей (рис. 3.14) [Куйбин, Окулов, 1996]. Если известно распределение интенсивностей нитей в цилиндрической области, то задача об отыскании поля скорости сводится к интегрированию представления (2.56) или (2.69). Однако эту задачу можно решить, не привлекая результатов п. 2.6.

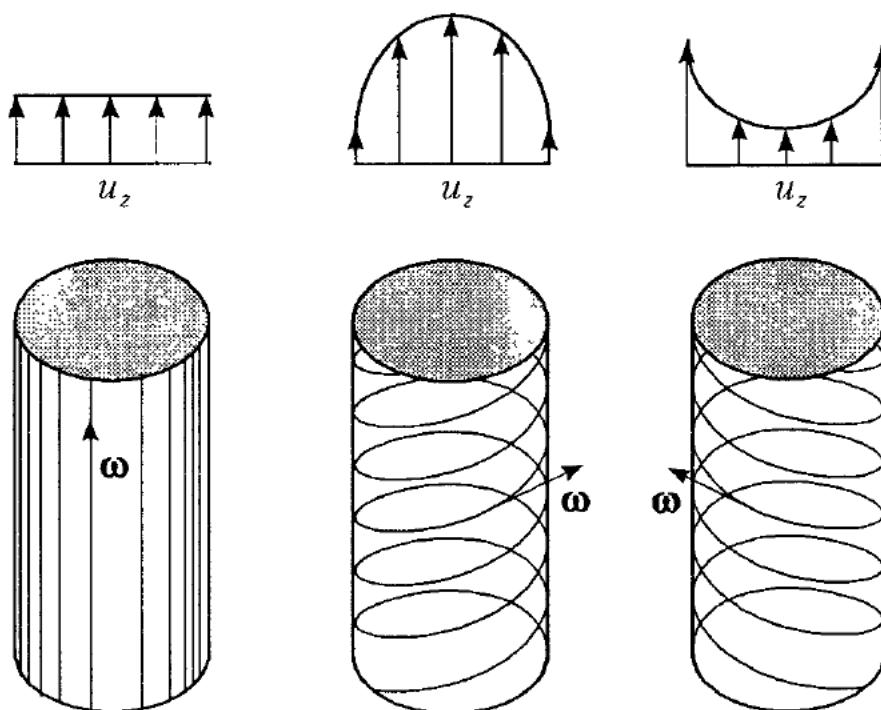


Рис. 3.14. Схемы осесимметричного винтового вихря

Анализ определяющих течение уравнений (п. 1.5) показывает, что условие осевой симметрии позволяет построить строго общую модель осесимметричных винтовых вихрей, так как при этом $\partial/\partial\chi \equiv 0$, $u_r \equiv 0$. Следовательно, уравнение Гельмгольца (1.71) выполняется для любого распределения вертикальной компоненты завихренности по r . Из (1.68) найдем

$$\frac{\partial}{\partial r}(ru_\theta) = r\omega_z. \quad (3.60)$$

Интегрируя (3.60) по r , получим

$$u_\theta = \frac{1}{r} \int_0^r \omega_z(r') r' dr'. \quad (3.61)$$

Так как осевая компонента скорости остается связанный с u_θ соотношением (1.66), соответственно имеем

$$u_z = u_0 - \frac{1}{l} \int_0^r \omega_z(r') r' dr'. \quad (3.62)$$

Условие осевой симметрии существенно упрощает задачу определения давления из уравнений Эйлера. Действительно, одно из двух уравнений системы (1.64), содержащих давление, удовлетворяется тождественно, а второе сводится к уравнению

$$\frac{1}{r} u_0^2 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r},$$

откуда

$$p = p_0 + \rho \int_0^r u_0^2 \frac{dr'}{r'}, \quad (3.63)$$

где p_0 – давление на оси трубы. Из (3.63) видно, что осевая компонента скорости не влияет на давление в закрученном осесимметричном потоке, индуцированном распределением винтовых вихревых нитей. В дальнейшем это важное свойство будет использовано для оценки параметров вихря по распределению донного давления (см. гл. 7).

Для удобства дальнейшего описания введем безразмерную функцию

$$\Phi(r) = \frac{2\pi}{\Gamma} \int_0^r \omega_z(r') r' dr'. \quad (3.64)$$

При этом компоненты скорости в соответствии с (3.61), (3.62) выражаются через функцию $\Phi(r)$

$$u_0 = \frac{\Gamma}{2\pi r} \Phi(r), \quad u_z = u_0 - \frac{\Gamma}{2\pi l} \Phi(r). \quad (3.65)$$

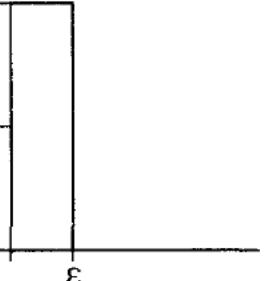
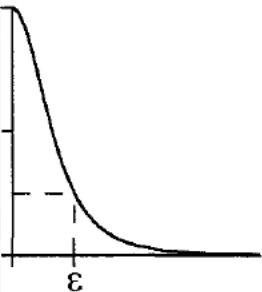
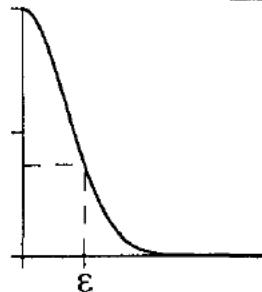
Введем также безразмерные завихренность и перепад давления

$$\tilde{\omega}_z = \frac{\pi \varepsilon^2}{\Gamma} \omega_z, \quad \Delta \tilde{p} = \frac{8\pi^2 \varepsilon^2}{\Gamma^2} \frac{p - p_0}{\rho}, \quad (3.66)$$

где ε – характерный размер вихря.

Рассмотрим три важных примера простейших распределений завихренности (табл. 3.1): равномерное распределение в ядре радиуса ε (модель I); дробно-степенное распределение (модель II) и гауссово распределение (модель III). Профили окружной скорости, так же как и распределения давления в приведенных примерах, совпадают с таковыми для вихрей Рэнкина (модель I), Scully [1975] (модель II) и Ламба (см. [Hopfinger, van Heijst, 1993], модель III) соответственно. В то же время вектор завихренности имеет ненулевую окружную компоненту, в результате чего получаем неоднородный по радиусу профиль осевой скорости. Заметим, что разность $u_z - u_0$ обратно пропорциональна шагу винтовой симметрии.

Таблица 3.1

Модель	I	II	III
$\tilde{\omega}_z$	 $\begin{cases} 1, & r < \varepsilon \\ 0, & r \geq \varepsilon \end{cases}$	 $\left(1 + \frac{r^2}{\varepsilon^2}\right)^{-2}$	 $\exp\left(-\frac{r^2}{\varepsilon^2}\right)$
$\Phi(r)$	$\begin{cases} r^2/\varepsilon^2, & r < \varepsilon \\ 1, & r \geq \varepsilon \end{cases}$	$\frac{r^2}{r^2 + \varepsilon^2}$	$1 - \exp\left(-\frac{r^2}{\varepsilon^2}\right)$
$\Delta \tilde{p}$	$\begin{cases} r^2/\varepsilon^2, & r < \varepsilon \\ 2 - \varepsilon^2/r^2, & r \geq \varepsilon \end{cases}$	$\frac{r^2}{r^2 + \varepsilon^2}$	$2 \ln 2 - \frac{\varepsilon^2}{r^2} \left[1 - \exp\left(-\frac{r^2}{\varepsilon^2}\right) \right]^2 + \\ + 2 \operatorname{Ei}\left(-\frac{r^2}{\varepsilon^2}\right) - 2 \operatorname{Ei}\left(-2 \frac{r^2}{\varepsilon^2}\right)$

В качестве обобщения модели I рассмотрим однородное распределение завихренности по кольцевому сечению $b_1 \leq r \leq b_2$

$$\omega_z = \frac{\Gamma}{\pi(b_2^2 - b_1^2)} \begin{cases} 0, & r < b_1, r > b_2 \\ 1, & b_1 \leq r \leq b_2 \end{cases}, \quad \Phi(r) = \begin{cases} 0, & r < b, \\ \frac{r^2 - b_1^2}{b_2^2 - b_1^2}, & b_1 \leq r \leq b_2, \\ 1, & r > b_2. \end{cases} \quad (3.67)$$

Такие “полые” вихри могут возникать при пристенной закрутке потока и будут использованы в дальнейшем для построения более сложных моделей вихрей (см. п. 7.3.2). Поле давления для винтового вихря с кольцевым распределением завихренности приобретает вид

$$p = p_0 - \frac{\rho l^2}{8\pi^2} \begin{cases} 0, & r < b_1, \\ \frac{1}{(b_2^2 - b_1^2)} \left(\frac{r^4 - b_1^4}{r^2} - 4b_1^2 \ln \frac{r}{b_1} \right), & b_1 \leq r \leq b_2, \\ -\frac{1}{r^2} + \frac{2}{b_2^2 - b_1^2} - \frac{4b_1^2}{(b_2^2 - b_1^2)^2} \ln \frac{b_2}{b_1}, & r > b_2. \end{cases} \quad (3.68)$$

При $b_1 = 0$ и $b_2 \equiv \varepsilon$ модель, описываемая формулами (3.67), (3.68), совпадает с моделью I.

Семейства профилей тангенциальной и осевой компонент скорости, рассчитанные по формуле (3.65) с функцией $\Phi(r)$ из (3.67), показаны на рис. 3.15. В отличие от вихря Рэнкина данная модель допускает большое многообразие распределений осевой скорости в зависимости от значений и знака шага винта l и скорости на оси u_0 . В предельном случае $l \rightarrow 0$, $\Gamma \rightarrow 0$, $\Gamma/l = \text{const}$, $(b_2 - b_1) \rightarrow 0$ кольцевой вихрь вырождается в вихревую пелену, локализованную на цилиндрической поверхности $r = b_2 = b_1$, внутри которой реализуется однородный осевой поток (см. п. 3.1).

В реальных потоках распределения завихренности и скоростей в отличие от модели (3.67), (3.68) и модели I носят сглаженный характер. Профиль тангенциальной скорости в модели II соответствует частному случаю обобщенного эмпирического профиля, использованного Штыром [1985] для вихревых камер. Давление в этой модели не зависит от l и оказывается линейно связанным с осевой скоростью

$$p = p_0 + \rho \frac{\Gamma}{4\pi\varepsilon^2} (u_0 - u_z).$$

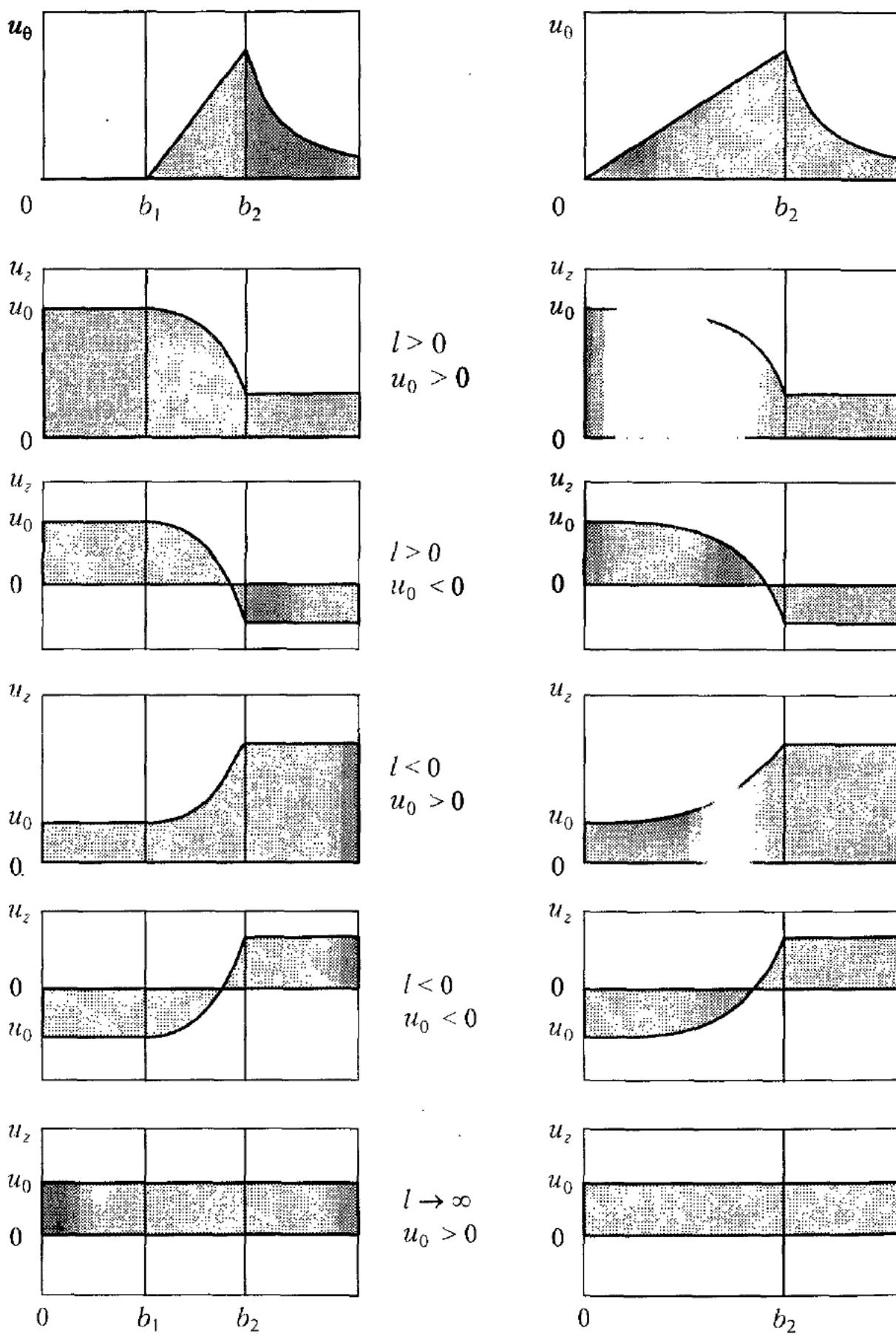


Рис. 3.15. Зависимость семейства профилей тангенциальной u_0 и осевой u_z компонент скорости колоннообразного вихря от шага винта l и скорость на оси u_0

Модель II, по-видимому, больше подходит для описания турбулентных вихрей [Мурахтина, Окулов, 2000]. В то же время для ламинарных вихрей более естественно предположить гауссовское распределение завихренности. Известно, что в вязкой жидкости завихренность, сосредоточенная в прямолинейной вихревой нити (см. п. 2.3.2), со временем диффундирует по закону

$$\omega(r,t) = \frac{\Gamma}{4\pi v t} \exp\left(-\frac{r^2}{4vt}\right). \quad (3.69)$$

В случае установившегося осесимметричного закрученного течения в цилиндрическом канале размер вихря будет увеличиваться вниз по потоку, и на некотором участке канала можно полагать, что вихрь имеет ядро постоянного размера ε (см. табл. 3.1, модель III). Поле скорости, соответствующее этой модели, записывается как

$$u_0 = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left[1 - \exp\left(-r^2/\varepsilon^2\right) \right], \quad u_z = u_0 - \frac{\Gamma}{2\pi l} \left[1 - \exp\left(-r^2/\varepsilon^2\right) \right] \quad (3.70)$$

или как

$$u_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left[1 - \exp\left(-1,256r^2/r_m^2\right) \right], \quad u_z = u_0 - \frac{\Gamma}{2\pi l} \left[1 - \exp\left(-1,256r^2/r_m^2\right) \right].$$

Здесь вместо масштаба ε введен радиус точки максимума тангенциальной скорости $r_m = \sqrt{1,256} \cdot \varepsilon$.

Распределение давления в модели III выражено через интегральную экспоненту

$$\text{Ei}(-x) = \int_{-\infty}^{-x} \exp(-x)/x dx.$$

При большом аргументе (малое ε) функция $\text{Ei}(-x)$ убывает как $\exp(-x)/x$. В результате выражение для давления на расстоянии $r > \varepsilon$ существенно упрощается. Формула для давления в несколько ином виде (Ei разложена в ряд) была получена в работе Bühler [1988].

На рис. 3.16 приведено сопоставление моделей I, II и III двумя различными способами. Во всех случаях приняты значения параметров $u_0 = 0$ и $l = -1$. Значения ε выбирались из требования совпадения радиусов r_m – максимумов профиля тангенциальной скорости ($\varepsilon = 1$ – для моделей I, II и $\varepsilon = 1/1,12$ – для модели III). Первое сопоставление на рис. 3.16а проведено для вихрей с одинаковой циркуляцией $\Gamma = 2\pi$. В результате можно сделать вывод, что наиболее близки между собой решения, соответствующие моделям I и III.

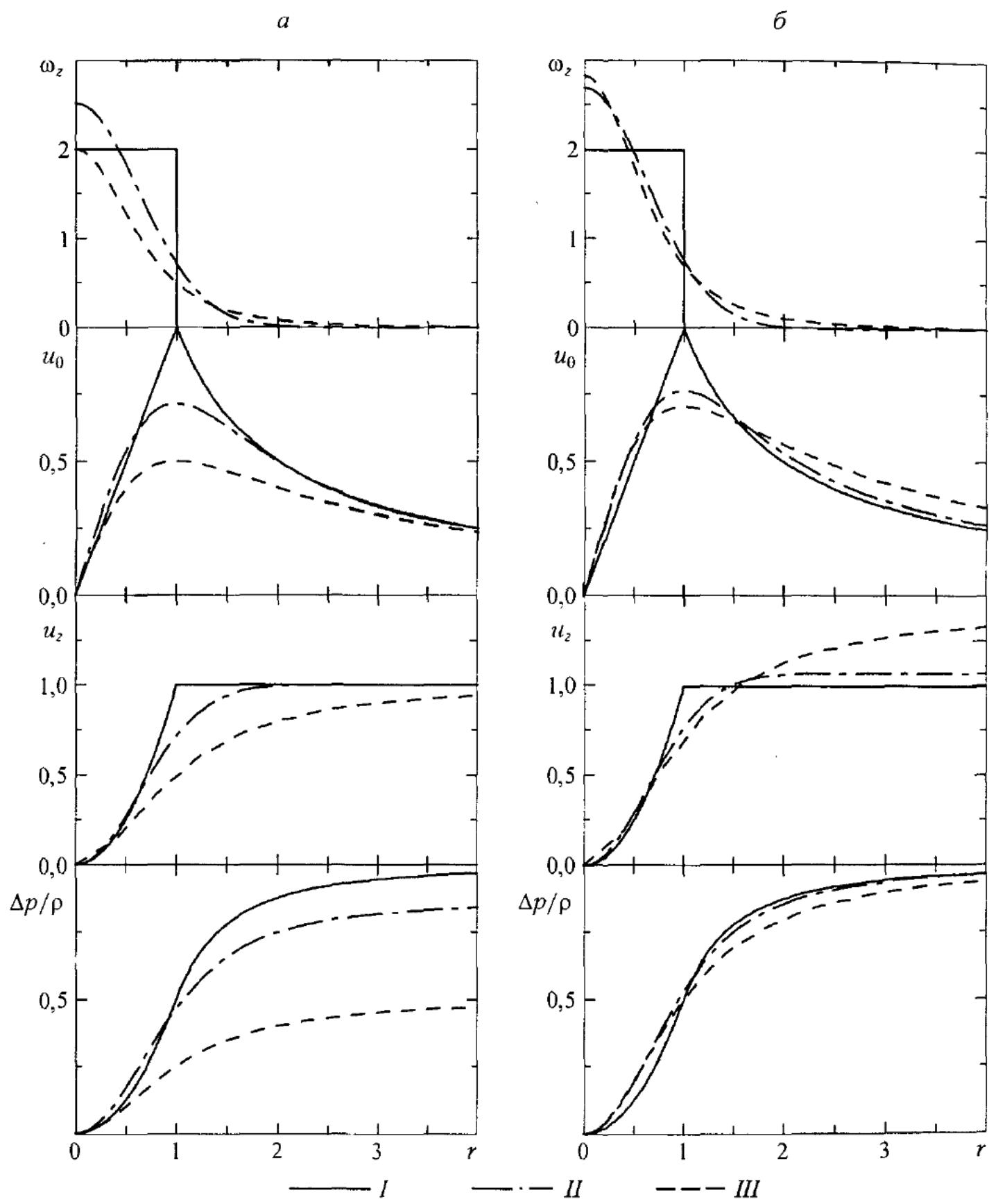


Рис. 3.16. Сопоставление радиальных распределений аксиальной компоненты завихренности ω_z , тангенциальной u_θ и аксиальной u_z компонент скорости и давления $\Delta p/\rho$ для различных моделей (I – III) колоннообразного вихря (см. табл. 3.1). Условия сопоставления: *а* – циркуляция Γ одинакова; *б* – разность значений статического давления в центре вихря и на периферии одинакова

Однако модель I имеет более простой и наглядный вид, так как по точке излома профилей скорости можно сразу определить размер ядра вихря. Поэтому при проведении дальнейшего анализа будем отдавать предпочтение модели I. Существенное отличие (особенно для давлений) моделей I и III от модели II объясняется тем, что завихренность в этом вихре менее концентрирована.

Более корректное сопоставление, с нашей точки зрения, можно провести, если потребовать для всех вихрей одинаковых значений для разности давлений Δp на оси вихря и периферии ($r \rightarrow \infty$). Но тогда циркуляции вихрей будут разными:

$$\Gamma_1 = 2\pi, \quad \Gamma_2 = 2\pi\sqrt{2}, \quad \Gamma_3 = 2\pi/\sqrt{1,256 \ln 2}.$$

В этом случае профили для завихреностей и скоростей во всех трех решениях стали лучше соответствовать друг другу, особенно это относится к профилям давления (рис. 3.16б). Важный факт дает сравнение всех рассчитанных профилей давления в точке максимума тангенциальной скорости r_m . Она совпадает для вихрей I и II с точкой $r_{0,5}$, в которой давление равно половине полной разницы между давлением на оси вихря и периферии (половине полного перепада). Данный факт следует и непосредственно из анализа соответствующих формул для давления. Анализируя распределение давления для вихря III, отметим, что и здесь точки r_m и $r_{0,5}$ практически совпадают. Это означает, что радиус вихря можно определять по точке, в которой давление равно половине полного перепада давления.

3.3.5. Q -вихрь

Для описания течения до и после распада вихря обычно используются эмпирические формулы [Лейбович, 1979, 1985]

$$u_0 = \frac{K}{r} \left(1 - \exp(-\alpha r^2) \right),$$

$$u_z = W_1 + W_2 \exp(-\alpha r^2) = W_1 + W_2 - W_2 \left(1 - \exp(-\alpha r^2) \right), \quad (3.71)$$

где K , W_1 , W_2 , α – эмпирически определяемые константы. Распределение тангенциальной скорости в (3.71) в точности соответствует вихрю Бюргерса [Burgers, 1940], поле скорости которого удовлетворяет уравнениям Навье – Стокса (см. п. 3.4.1). Однако для осевой компоненты скорости в (3.71) и соответственно в эксперименте имеются значительные различия с решением Бюргерса. В вихре Бюргерса осевая скорость есть функция только координаты z , в то время как в (3.71) u_z не зависит от z , но существенно меняется по радиальной координате. Впервые поле скорости в виде (3.71) исследовалось

на неустойчивость в работе Lessen *et al.* [1974] и было получено из автомодельного решения Бэтчелора [Batchelor, 1964] для закрученного следа после отбрасывания некоторых малых по величине слагаемых. Отметим, что профили (3.71) с высокой точностью описывают эксперимент и их интенсивно применяют для обработки данных по закрученным потокам [Faler, Leibovich, 1977; Escudier, 1988; Alekseenko, Shtork, 1992]. Учитывая данный факт, приведенные выше формулы стали интенсивно использовать при теоретическом анализе устойчивости закрученных потоков. Правда, для этих целей применяют более простую – однопараметрическую модель

$$u_0 = \frac{q}{r} \left(1 - \exp(-r^2) \right); \quad u_z = \exp(-r^2), \quad (3.72)$$

которая называется *Q-вихрем*.

Однако следует заметить, что по своей структуре полученное ранее решение (3.70) в точности совпадает с эмпирическими формулами (3.71). В самом деле, непосредственное сопоставление точного решения (3.70) и эмпирических формул (3.71) дает

$$\Gamma = 2\pi K; \quad l = K/W_2; \quad u_0 = W_1 + W_2 \quad \text{и} \quad \varepsilon = 1/\sqrt{\alpha},$$

что не только позволяет уточнить физический смысл эмпирических констант, но и идентифицирует широкий класс закрученных течений, описанных формулами (3.71), как течения, индуцированные колоннообразными винтовыми вихрями с гауссовым распределением завихренности в ядре. Соответственно для *Q-вихря*

$$\Gamma = 2\pi q; \quad l = q; \quad u_0 = 1,$$

что существенно сужает рассматриваемый класс течений.

Таким образом, профили (3.71), (3.72) являются решением уравнений движения идеальной жидкости, которые хорошо описывают экспериментальные данные.

3.3.6. Винтовой вихрь с ядром конечного размера

Для теоретического описания врачающихся винтовых вихрей построенное в п. 2.6 решение мало пригодно, так как самоиндуцированная скорость бесконечно тонкой нити равна бесконечности. В реальной жидкости ядро вихря всегда имеет конечный размер. В соответствии с этим построим модель вихря с ядром в форме винтового шнуря с круглым сечением радиуса ε в плоскости, перпендикулярной оси вихря (рис. 3.17). Рассмотрим простейшее распределение завихренности, удовлетворяющее уравнению Гельмгольца (1.71) – $\omega_z = \text{const}$ – внутри ядра. Поле скорости, индуцированное таким вихрем,

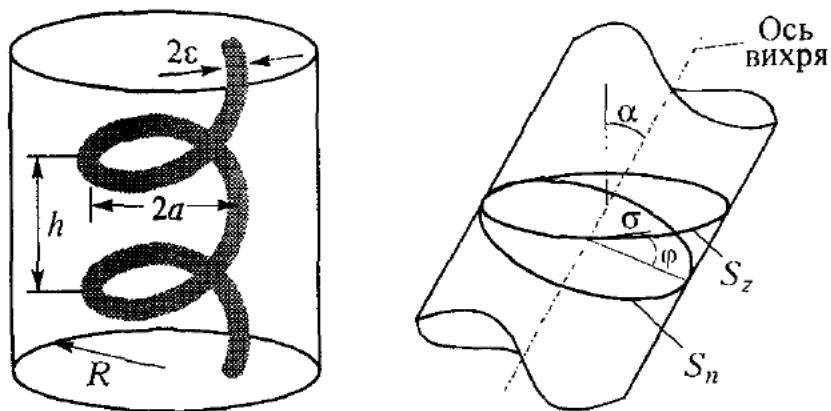


Рис. 3.17. Модель винтового вихря с ядром конечного размера. Справа показана локальная система координат (σ, ϕ)

можно легко представить через решение (2.56) или (2.69), если считать вихрь суперпозицией бесконечно тонких вихревых нитей, равномерно распределенных по ядру. При этом модуль завихренности ω уже не является константой, поскольку вихревые нити в таком вихре переплетены, и угол наклона вектора завихренности меняется по сечению вихря. Действительно, из геометрических построений

$$\omega_z = \omega \cos \alpha = \omega l / \sqrt{l^2 + r'^2}.$$

Здесь r' – радиальная координата вихревой нити; α – угол между ω и осью z (рис. 3.17). Видно, что при $\omega_z = \text{const}$ и $l = \text{const}$ значение ω растет с расстоянием r' .

Представим решение (2.69) для бесконечно тонкой винтовой вихревой нити с циркуляцией Γ в виде $\mathbf{u} = \Gamma \mathbf{F}$, где \mathbf{F} – функция только геометрии нити. Переходя к непрерывному распределению вихревых нитей, можем записать для тонкой вихревой трубки дифференциальное соотношение

$$d\mathbf{u}_\varepsilon = \mathbf{F} d\Gamma,$$

где \mathbf{F} – та же функция, что и для бесконечно тонкой вихревой нити, $d\Gamma$ – циркуляция выделенной вихревой трубки с поперечным сечением dS_n , индекс ε означает решение для вихря с ядром радиуса ε . Удобнее искать решение через горизонтальное сечение ($z = 0$) вихревой трубки с площадью S_z . Из теоремы Стокса имеем

$$d\Gamma = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dS = \omega_z dS_z.$$

Отсюда следует: $\Gamma = \omega_z \cdot S_z$. Подчеркнем, что здесь Γ – это циркуляция в винтовом вихре с ядром конечного размера. С другой стороны, $\omega_z dS_z = \omega dS_n$, откуда с учетом связи между ω_z и ω получаем

$$dS_z = dS_n \sqrt{l^2 + r'^2} / l$$

или

$$S_z = \int_{S_n} \frac{\sqrt{l^2 + r'^2}}{l} dS_n.$$

По последней формуле можно найти площадь сечения винтового вихря в плоскости $z = 0$.

С учетом всех этих соотношений получаем уравнение для определения скорости, индуцируемой винтовым вихрем с ядром конечного радиуса

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_e(r, \theta, z) &= \int \mathbf{F} d\Gamma = \int \omega_z \mathbf{F} dS_z = \frac{\Gamma}{S_z} \int \mathbf{F} dS_z = \\ &= \frac{1}{l S_z} \int_0^{2\pi} \int_0^\varepsilon \sqrt{l^2 + r'^2} \mathbf{F}(r, \theta, z; r', \theta', z') \sigma d\sigma d\phi. \end{aligned} \quad (3.73)$$

Здесь учтено также, что $dS_n = \sigma d\sigma d\phi$. Интегрирование производится по кружку радиуса ε с центром в точке $r' = a$, $\theta' = 0_0$, $z' = 0$. Локальные полярные координаты σ, ϕ с центром в точке $(a, \theta_0, 0)$ связаны с координатами базовой цилиндрической системы r', θ', z' соотношениями

$$\begin{cases} r' \cos(\theta' - \theta_0) = a + \sigma \cos \phi, \\ r' \sin(\theta' - \theta_0) = \sigma \sin \phi \cos \alpha, \\ z' = -\sigma \sin \phi \cdot \sin \alpha, \end{cases}$$

α – угол между осью вихря и осью Oz ($\operatorname{tg} \alpha = a/l$). Приведенная модель отличается от традиционной модели, описанной в литературе, посвященной теоретическому описанию винтовых вихрей, в которой предполагается однородное распределение модуля вектора завихренности по сечению ядра [Widnall *et al.*, 1971; Moore, Saffman, 1972]. Однако такое распределение завихренности не удовлетворяет уравнению Гельмгольца. Действительно, подставляя в левую часть уравнения (1.71)

$$\omega_z = \omega l / \sqrt{r^2 + l^2},$$

где $\omega = \text{const}$, получим

$$\frac{d\omega_z}{dt} = \frac{l}{\sqrt{r^2 + l^2}} \frac{\partial \omega}{\partial t} + u_r \omega \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{l}{\sqrt{r^2 + l^2}} \right), \quad |r - a| \leq \varepsilon. \quad (3.74)$$

В общем случае правая часть (3.74) не равна нулю. Точно уравнение Гельмгольца выполняется только в некоторых частных случаях, например для рассмотренного осесимметричного винтового вихря, когда $u_r = 0$ и ω не зависит от времени.

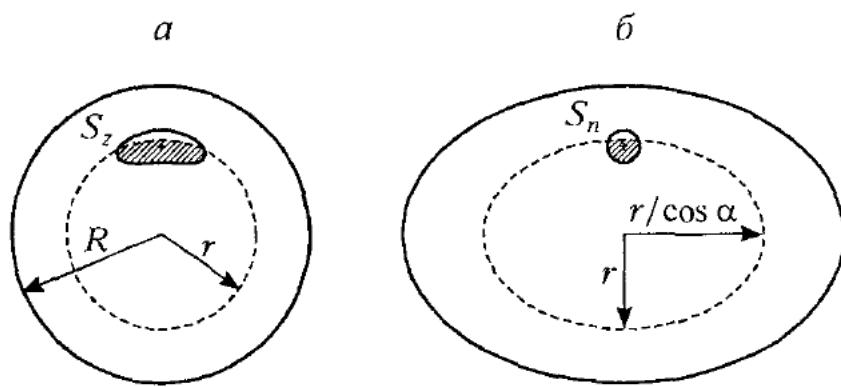


Рис. 3.18. К определению функции $F(r)$ в (3.76). Сечение трубы и ядра вихря горизонтальной плоскостью (а) и плоскостью, перпендикулярной оси вихря (б)

Для произвольного винтового вихря модель (3.73) – приближенная. Необходимым условием для ее применения является малость правой части (3.74). В частности, такое возможно для слабо искривленных вихрей ($a \ll l$). В приближении тонких вихревых нитей компонента ω_z незначительно меняется по сечению ядра и ее можно считать приблизительно постоянной, тогда правая часть (3.74) также мала.

Более простой вид приближенной модели (3.73) получается для осредненных по угловой координате Θ характеристик

$$\langle \mathbf{u}_\varepsilon \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{u}_\varepsilon d\theta. \quad (3.75)$$

Подставим (3.75) в (3.73) и изменим порядок интегрирования. Принимая в расчет равенство нулю интегралов от рядов, входящих в решение (2.69) для \mathbf{u} , сведем задачу нахождения осредненных скоростей к вычислению интеграла $F(r)$

$$\begin{aligned} \langle u_{r\varepsilon} \rangle &\equiv 0, \quad \langle u_{\varphi\varepsilon} \rangle = \frac{\Gamma}{2\pi r} F(r), \quad \langle u_{z\varepsilon} \rangle = u_0 - \frac{\Gamma}{2\pi l} F(r), \\ F(r) &= \frac{1}{S_z} \int_{S_z} \left\{ \begin{array}{ll} 0, & r < r' \\ 1, & r \geq r' \end{array} \right\} \cdot dS. \end{aligned} \quad (3.76)$$

Интеграл в (3.76) равен площади пересечения круга радиуса r с сечением S_z . Отношение площадей в (3.76) не изменится, если спроектировать обе фигуры на плоскость, перпендикулярную винтовой оси вихря (рис. 3.18). Таким образом, находим, что $F(r) = S^{(0)} / \pi \varepsilon^2$, где $S^{(0)}$ – площадь пересечения окружности $\sigma = \varepsilon$ с эллипсом, заданным формулой

$$(a + \sigma \cos \theta)^2 / l^2 + (\sigma \sin \theta)^2 / (a^2 + l^2) = r^2 / l^2.$$

3.4. ВЯЗКИЕ МОДЕЛИ ВИХРЕЙ

3.4.1. Вихрь Бюргерса

Учет вязкости позволяет сгладить особенности, возникающие в окрестности ядра вихря в моделях бесконечно тонкой вихревой нити и вихря Рэнкина. Одно такое решение (нестационарное) уже было рассмотрено в п. 2.3.2 на примере вязкой диффузии завихренности. Чтобы сравнить с экспериментом зависящие от времени профили завихренности (2.31) и скорости (2.32), необходимо ввести масштаб $a = 2\sqrt{vt}$, который есть линейная мера ядра вихря в момент времени t . Тогда приходим к выражениям

$$\omega = \frac{\Gamma}{\pi a^2} \exp(-r^2/a^2), \quad (3.77)$$

$$v = \frac{\Gamma}{2\pi r} [1 - \exp(-r^2/a^2)], \quad (3.78)$$

которые описывают так называемый *вихрь Ламба* (см. [Saffman, Baker, 1979; Hopfinger, van Heijst, 1993]). По своей структуре (3.77), (3.78) совпадают с распределениями завихренности и азимутальной скорости для трехмерного стационарного вихря *Бюргерса*, который впервые предложен в работах Burgers [1940, 1948], Rott [1958] для описания турбулентных закрученных течений.

Вихрь Бюргерса принадлежит к классу осесимметричных точных решений уравнений Навье – Стокса вида

$$u_r = u(r), \quad u_0 = v(r), \quad u_z = w(r) = zf(r), \quad (3.79)$$

где u , v , w – радиальная, азимутальная и аксиальная компоненты скорости соответственно. Семейство решений типа (3.79) описано Donaldson, Sullivan [1960]. При этом полагалось, что течение реализуется в бесконечно длинной вращающейся пористой трубе с соответствующими граничными условиями на стенке. Sullivan [1959] также искал решение уравнений Навье – Стокса в виде (3.79), но в безграничном пространстве, задавая на бесконечности циркуляцию скорости и еще одну дополнительную константу. Он получил решение в форме двухъячеистого вихря (см. п. 3.4.2), из которого, в частности, следует вихрь Бюргерса.

Чтобы найти решение для вихря Бюргерса, рассмотрим частный случай (3.79)

$$u = u(r), \quad v = v(r), \quad w = \alpha z, \quad \alpha = \text{const}, \quad (3.80)$$

а уравнения Навье – Стокса и неразрывности (1.35) запишем в цилиндрических координатах с учетом (3.80)

$$u \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{v^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + v \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) \right), \quad (3.81)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial r} = v \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv) \right) - \frac{uv}{r}, \quad (3.82)$$

$$w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}, \quad (3.83)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (3.84)$$

Из уравнения непрерывности (3.84) сразу получаем выражение для радиальной скорости

$$u = -\alpha r / 2. \quad (3.85)$$

Тогда из (3.82) имеем уравнение для азимутальной компоненты

$$-\frac{\alpha}{2} (vr)' = v \left[\frac{1}{r} (rv)' \right]',$$

где штрих означает производную по r . Интегрирование с граничным условием $v = 0$ при $r \rightarrow \infty$ дает $v = c_1 [1 - \exp(-\alpha r^2 / 4v)] / r$. Константу интегрирования c_1 найдем из условия, что на бесконечности задана циркуляция Γ :

$$\Gamma = 2\pi r v \Big|_{r \rightarrow \infty} = c_1 2\pi.$$

В результате приходим к следующему выражению для v :

$$v = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left[1 - \exp(-\alpha r^2 / 4v) \right], \quad \Gamma = \Gamma \Big|_{r \rightarrow \infty}. \quad (3.86)$$

Профиль скорости имеет один локальный максимум v_m , который определяется из условия $v' = 0$ или

$$1 + 2\phi = e^\phi, \quad \text{где } \phi = \alpha r^2 / 4v.$$

Решение этого трансцендентного уравнения есть $\phi = 1,2565\dots$, откуда

$$r_m = 2,242 \sqrt{v/\alpha}, \quad (3.87)$$

$$v_m = 0,16 \frac{\Gamma}{\pi} \sqrt{\frac{\alpha}{v}} = \frac{0,36 \Gamma}{\pi r_m}. \quad (3.88)$$

Величину r_m обычно интерпретируют как эффективный радиус вихря.



Рис. 3.19. Профили азимутальной скорости в моделях вихрей Рэнкина и Бюргерса

Используя экстремальные значения, профиль азимутальной скорости удобно представить в безразмерной форме

$$\frac{v}{v_m} = \frac{1,39}{(r/r_m)} \left[1 - \exp\left(-1,26 \frac{r^2}{r_m^2}\right) \right]. \quad (3.89)$$

Рассмотрим асимптотические выражения (3.86). При $r \rightarrow 0$

$$v = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left(1 - 1 + \frac{\alpha r^2}{4\nu} + \dots \right) \approx \frac{\Gamma \alpha}{8\pi \nu} r = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{r \cdot 1,26}{r_m^2},$$

т. е. в приосевой зоне реализуется твердотельное вращение. При этом профиль скорости совпадает с распределением (3.50) для вихря Рэнкина, если положить $\alpha^2 = r_m^2 / 1,26$. При $r \rightarrow \infty$ имеем асимптоту $v = \Gamma / 2\pi r$, которая соответствует как вихрю Рэнкина, так и сингулярному вихрю той же интенсивности Γ . Сравнение профилей азимутальной скорости для моделей Бюргерса и Рэнкина при условии $\Gamma = \Gamma|_{r=\infty} = idem$ и $a = r_m$ приведено на рис. 3.19.

Теперь определим давление из двух оставшихся уравнений. Уравнение (3.83) принимает вид $\alpha^2 z = -(1/\rho) \partial p / \partial z$, откуда $p = -\rho \alpha^2 z^2 / 2 + \rho c(r)$. Подставим это выражение в (3.81) и получим уравнение для $c(r)$: $c'(r) = -\alpha^2 r / 4 + v^2 / r$. Интегрируя и подставляя $c(r)$ в выражение для p , имеем расчетную формулу

$$p = p_0 - \frac{1}{2} \rho \alpha^2 \left(z^2 + \frac{r^2}{4} \right) + \rho \int_0^r \frac{v^2}{r} dr, \quad (3.90)$$

в которой интеграл вычисляется численными методами.

Существование стационарного решения при наличии вязкости объясняется тем, что вязкая диффузия завихренности компенсируется радиальным переносом завихренности благодаря аксиальному растяжению вихря (так как $\omega = \alpha z$).

3.4.2. Вихрь Салливана

Sullivan [1959] построил точное решение уравнений Навье – Стокса в форме стационарного двухъячеистого вихря. Решение ищется в виде (3.79) и записывается как

$$\begin{aligned} u &= -\frac{\alpha r}{2} + \frac{6v}{r} \left[1 - \exp\left(-\frac{\alpha r^2}{4v}\right) \right], \\ v &= \frac{\Gamma}{2\pi r} \left[H\left(\frac{\alpha r^2}{4v}\right) / H(\infty) \right], \\ w &= \alpha z \left[1 - 3 \exp\left(-\frac{\alpha r^2}{4v}\right) \right], \\ p &= p_0 - \frac{1}{2} \rho \left\{ \alpha^2 z^2 + \frac{\alpha^2 r^2}{4} + 36 \frac{v^2}{r^2} \left[1 - \exp\left(-\frac{\alpha r^2}{4v}\right) \right]^2 \right\} + \rho \int_0^r \frac{v^2}{r} dr, \\ H(x) &= \int_0^x \exp\left\{ -t + 3 \int_0^t [1 - \exp(-s)] s^{-1} ds \right\} dt. \end{aligned} \quad (3.91)$$

Здесь Γ – циркуляция на бесконечности; α – константа задачи; p_0 – давление в точке $r = 0$; $z = 0$; v – кинематическая вязкость. Примеры профилей скорости показаны на рис. 3.20. При $r \rightarrow \infty$ вихрь Салливана в точности соответствует вихрю Бюргерса.

Bellamy-Knights [1970] обобщил решение Салливана на нестационарный случай. В результате получено решение, описывающее затухание во времени двухъячеистого вихря. Ранее нестационарное одноячеистое решение было изучено в работе Rott [1958].

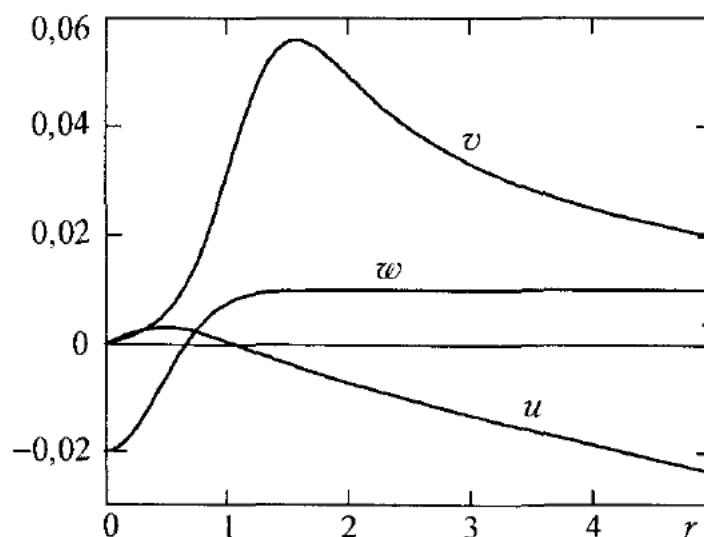


Рис. 3.20. Распределение скоростей в вихре Салливана. $\alpha = 0,001$, $v = 0,01$, $z = 1$

Г л а в а 4

УСТОЙЧИВОСТЬ И ВОЛНЫ НА КОЛОННООБРАЗНЫХ ВИХРЯХ

4.1. ТИПЫ ВОЗМУЩЕНИЙ

Наблюдения показывают, что закрученные потоки (как ограниченные, так и свободные) во многих случаях – неустойчивы. Неустойчивость приводит к формированию вторичных вихревых движений, линейных и нелинейных волн, а также может быть причиной распада вихря. Однако и в устойчивых потоках могут наблюдаться различного типа возмущения, например нейтральные (инерционные) волны. В данной главе будут рассмотрены только колоннообразные вихри. Основная задача заключается в определении критериев неустойчивости вихрей и описании волн на вихрях.

Отличительной особенностью возмущений является их трехмерная структура, имеющая преимущественно винтовой или спиральный характер (рис. 4.1). Прежде чем перейти к теоретическому анализу устойчивости, рассмотрим основные типы осесимметричных и неосесимметричных возмущений колоннообразного вихря (другие типы возмущений, в частности на вихревых кольцах, см. в обзоре В.Ф. Копьева, С.А. Чернышева [2000]). Пусть для наглядности вихрь имеет выделенное ядро радиуса $r = R$, на границе которого профиль скорости (или производной) имеет разрыв. Тогда в наиболее общем виде граница ядра при наличии линейного монохроматического возмущения запишется как

$$r = R + a \Re e e^{i(kz + m\phi - \omega t)}, \quad (4.1)$$

где амплитуда $a \ll R$; $\Re e$ – реальная часть; k – аксиальное волновое число; m – целое число (азимутальное волновое число); ϕ – азимутальный угол (рис. 4.2); ω – частота. Для анализа формы возмущенной границы ядра достаточно рассмотреть случай, когда k является реальным, а $t = 0$. Тогда имеем

$$r = R + a \cos(kz + m\phi). \quad (4.2)$$

Основные типы возмущений, задаваемые выражением (4.2), показаны на рис. 4.2.

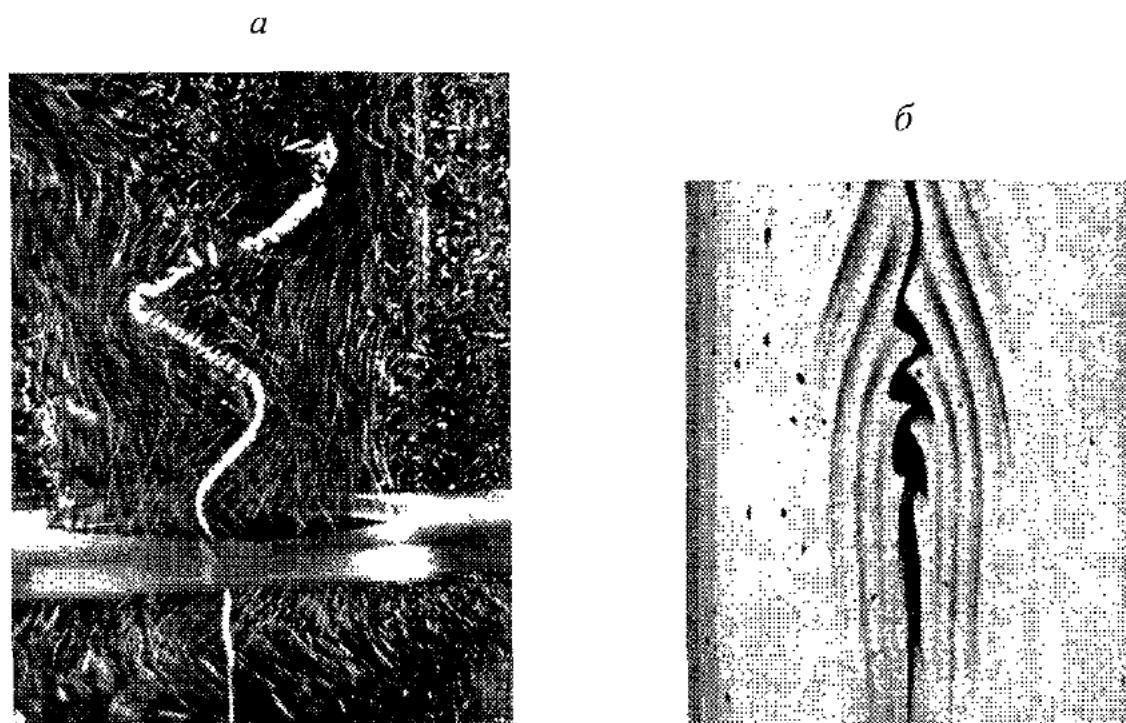


Рис. 4.1. Спиральные возмущения в закрученном потоке: *а* – спиральный распад вихря за диафрагмой в вихревой камере [Alekseenko, Shtork, 1992]; *б* – спиральное возмущение оси потока в контейнере с вращающимся дном [Hourigan *et al.*, 1995]

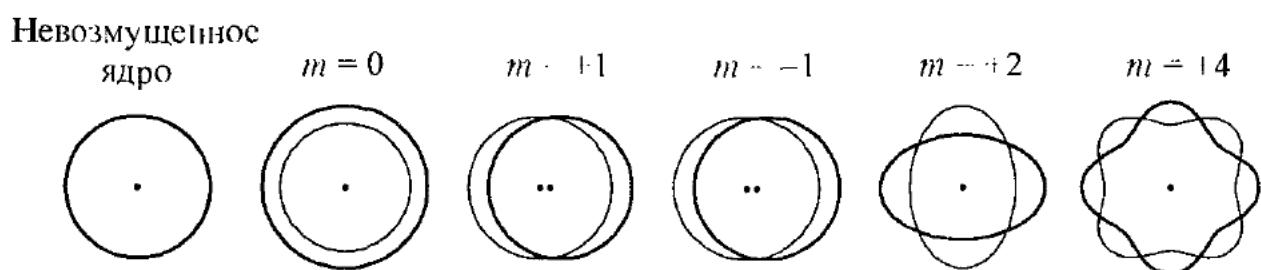
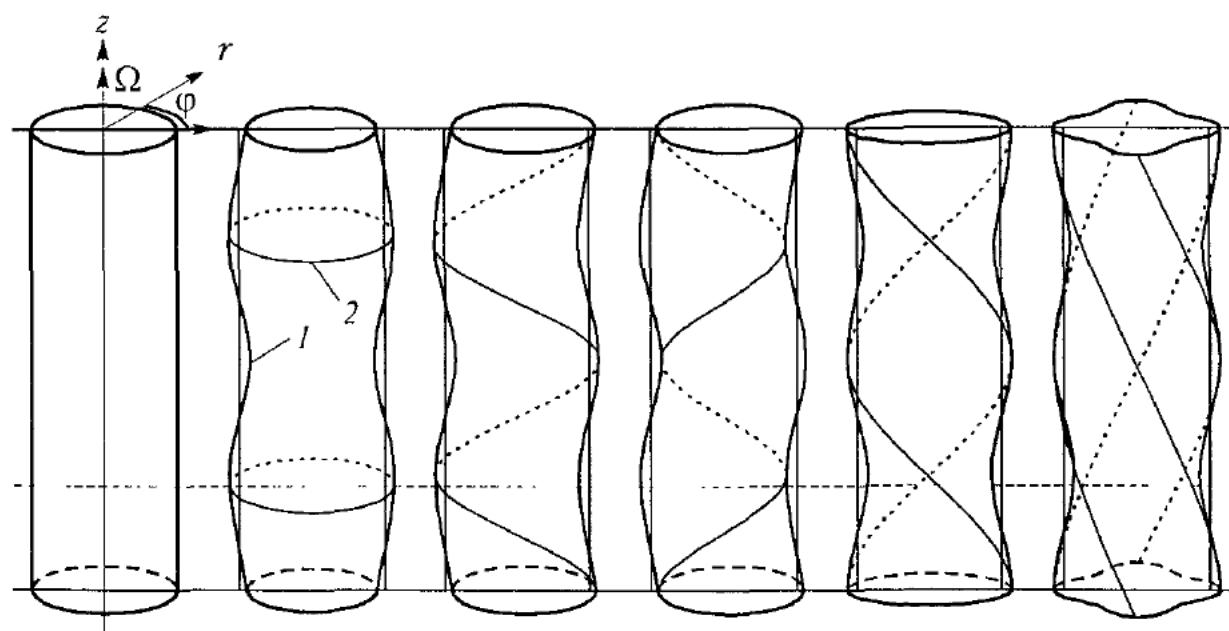


Рис. 4.2. Типы возмущений ядра в колоннообразном вихре: 1 – граница ядра; 2 – линии фиксированной фазы $kz + m\varphi = \text{const}$

Случай $m = 0$ соответствует осесимметричной моде. Длина волны равна $2\pi/k$. Сечения $z = \text{const}$ представляют собой концентрические круги с радиусом от $(R - a)$ до $(R + a)$.

При $m \neq 0$ реализуются неосесимметричные моды. Моды с $m = \pm 1$ называют обычно изгибными (bending) модами. Сечение ядра $z = \text{const}$ является кругом радиуса R , смещенным на расстояние a вдоль радиуса r под углом $\phi = -kz/m$. Мода $m = +1$ имеет вид левого винта, а при $m = -1$ – правого. Шаг винта равен $2\pi/k$, как и длина волны для осесимметричного возмущения с $m = 0$. На рис. 4.2 приведены также изолинии $\{r = \text{const}, kz + m\phi = \text{const}\}$, которые представляют собой винтовые линии с шагом $2\pi/k|m|$. Кроме того, показаны линии постоянной скорости – изотахи, имеющие более сложную форму.

При $|m| = 2$ круговое сечение ядра трансформируется в эллипс. Во всех случаях, когда $|m| \geq 2$, ось вихря в силу симметрии возмущений остается невозмущенной.

Если возмущение не является малым, то его нельзя представить в простой канонической форме. Но в предельном случае бесконечно тонкой вихревой нити возмущенное состояние опять можно описать одной из канонических кривых – винтовой линией

$$r = \text{const}, \quad kz + \phi = \text{const},$$

которая подробно рассмотрена в п. 2.1.

4.2. НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ВИХРЕВОЙ ПЕЛЕНЫ

Из соотношения (3.6) следует, что тангенциальный разрыв приводит к формированию вихревой пелены. Ряд базовых моделей вихрей содержат тангенциальный разрыв. Поэтому прежде чем перейти к изучению устойчивости колоннообразных вихрей, проанализируем вихревую пелену, устойчивость которой представляет самостоятельный интерес [Бэтчелор, 1973; Сэффмэн, 2000]. Впервые неустойчивость вихревой пелены к малым возмущениям продемонстрировал Гельмгольц [Helmholtz, 1868].

Рассмотрим простейший случай плоского вихревого слоя, образованного двумя однородными потоками жидкости одинаковой плотности, движущимися в противоположных направлениях со скоростью $0,5U$ (рис. 4.3). В общем случае трехмерных возмущений представим отклонение вихревого слоя от невозмущенного состояния как

$$y = \eta(x, z, t).$$

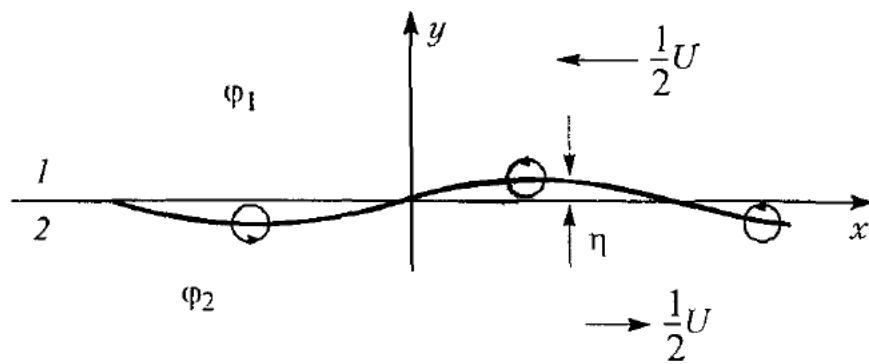


Рис. 4.3. Схема возмущения вихревой пелены. Вектор завихренности направлен перпендикулярно рисунку к читателю

Так как завихренность сосредоточена только в вихревой пелене, то течение в остальном пространстве является потенциальным и описывается уравнением Лапласа с потенциалами

$$-\frac{1}{2}Ux + \phi_1, \quad y > 0,$$

$$\frac{1}{2}Ux + \phi_2, \quad y < 0,$$

где ϕ_1, ϕ_2 – возмущения потенциала.

На вихревом слое, который является границей раздела двух жидкостей и движется вместе с ними, должны выполняться кинематические условия и равенство давлений (в отсутствие поверхностного натяжения). Кинематическое условие со стороны области I запишется как

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \right|_{y=\eta} &= \frac{d\eta}{dt} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \\ &= \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \left(-\frac{1}{2}U + \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right) + \frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{\partial \phi_1}{\partial z}. \end{aligned}$$

Полагая возмущения малыми, получим в первом приближении

$$\left. \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \right|_{y=0} = \frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{1}{2}U \frac{\partial \eta}{\partial x}. \quad (4.3)$$

Аналогично для области 2

$$\left. \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \right|_{y=0} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{1}{2}U \frac{\partial \eta}{\partial x}. \quad (4.4)$$

Динамическим условием является равенство давлений

$$p_1 \Big|_{y=\eta} = p_2 \Big|_{y=\eta}. \quad (4.5)$$

Выражения для давления находятся из интеграла Коши – Лагранжа (1.24)

$$p + \rho \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} u^2 \right) = \text{const},$$

где u – модуль скорости. Подставляя это соотношение в (4.5) и оставляя члены первого порядка малости, имеем

$$\left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial t} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} \right)_{y=0} + \frac{1}{2} U \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \right)_{y=0} = \text{const}. \quad (4.6)$$

Чтобы определить устойчивость вихревой пелены, представим величины η , Φ_1 , Φ_2 в виде

$$\begin{bmatrix} \eta \\ \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ \Psi_1(y) \\ \Psi_2(y) \end{bmatrix} e^{i(k_x x + k_z z - \omega t)}, \quad (4.7)$$

где k_x, k_z – компоненты волнового вектора; $k = \sqrt{k_x^2 + k_z^2}$ – модуль волнового вектора; ω – комплексная частота; a – константа. Подставляя эти выражения в уравнение Лапласа для потенциала, получим

$$\Psi_1'' - k^2 = 0, \quad \Psi_2'' - k^2 = 0,$$

откуда следует с учетом ограниченности решения на бесконечности

$$\Psi_1 = b_1 e^{-ky}, \quad \Psi_2 = b_2 e^{ky}, \quad b_1, b_2 = \text{const}. \quad (4.8)$$

Подстановка (4.7), (4.8) в условия сопряженности (4.3), (4.4), (4.6) дает дисперсионные уравнения

$$-b_1 k = -a \omega i - \frac{1}{2} U i a k_x,$$

$$b_2 k = -a \omega i + \frac{1}{2} U i a k_x,$$

$$-i b_2 \omega + i b_1 \omega + \frac{1}{2} U (b_2 i k_x + b_1 i k_x) = \text{const} = 0.$$

Решение этих уравнений есть дисперсионное соотношение

$$\omega = \pm i \frac{1}{2} U k_x = i\beta$$

или

$$\beta = \pm \frac{1}{2} U k_x, \quad (4.9)$$

где β – инкремент. Как видно, реальная часть ω , т. е. действительная частота, равна нулю. Это означает, что возмущение не является бегущей волной. Наличие положительного корня у инкремента свидетельствует о неустойчивости вихревой пелены к любому периодическому возмущению с $k_x \neq 0$. Причем, чем меньше длина волны, тем большее скорость роста возмущений. В работе Сэффмэна [2000] аналогичные результаты получены на основе уравнения Birkhoff–Rott.

Рассмотренный тип неустойчивости относится к *неустойчивости Кельвина – Гельмгольца*.

4.3. ВОЛНЫ В ЖИДКОСТИ С ТВЕРДОТЕЛЬНЫМ ВРАЩЕНИЕМ

Как продемонстрировано в предыдущих главах, вблизи оси колоннообразного вихря существует область твердотельного вращения. Поэтому полезно отдельно рассмотреть такой случай, тем более что он хорошо отражает другой случай, связанный с движением и устойчивостью жидкости во вращающихся сосудах [Гринспен, 1975]. Вначале проанализируем распространение плоских волн, затем – осесимметричных, а также опишем явление так называемого столба Тейлора.

Впервые анализ волнового движения в жидкости с твердотельным вращением дан Kelvin [1880]. При этом рассматривалась область между двумя возмущенными цилиндрическими поверхностями. Далее в этом параграфе, за исключением одного частного случая, будет рассмотрено безграничное пространство.

4.3.1. Плоские волны

Распространение плоских волн впервые изучалось в работах Long [1951], Fultz [1959], Chandrasekhar [1961], S. Nigam, P. Nigam [1962]. Рассмотрим следующую постановку задачи. Пусть несжимаемая жидкость вращается с угловой скоростью Ω вокруг оси z . Кроме того, жидкость движется поступательно вдоль оси z с постоянной скоростью W [Уизем, 1977]. Учет W важен, поскольку наличие осевого протока типично для колоннообразных вихрей.

Перейдем в систему координат, вращающуюся вместе с жидкостью. Тогда появляются дополнительные силы – центробежная и кориолисова. Центробежная сила $1/2\nabla[\Omega \times r]^2$ приводит к радиальному изменению статического давления, и в уравнении Эйлера ее можно объединить с градиентом давления, введя эффективное давление

$$p - \frac{\rho}{2} [\Omega \times r]^2 - p_0 \rightarrow p,$$

которое обозначим тем же символом. Кроме того, вычтем гидростатическое давление p_0 , тогда величина p будет представлять собой возмущение давления. Сила Кориолиса равна $2[u \times \Omega]$, и именно она ответственна за распространение волн в твердоцельно вращающейся жидкости. Таким образом, уравнение Эйлера (1.10) принимает следующий вид во вращающейся системе координат:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \nabla) u + 2[\Omega \times u] = -\frac{1}{\rho} \nabla p. \quad (4.10)$$

Уравнение сохранения массы остается неизменным

$$\nabla \cdot u = 0. \quad (4.11)$$

В случае малых возмущений линеаризованное уравнение Эйлера запишется как

$$\frac{du}{dt} + 2[\Omega \times u] = -\frac{1}{\rho} \nabla p, \quad (4.12)$$

где

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + W \frac{\partial}{\partial z},$$

а для возмущений скорости u сохранены те же обозначения. Чтобы получить дисперсионные соотношения, вначале выведем уравнение для возмущения давления. С этой целью перепишем уравнение (4.12) через компоненты скорости

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dt} - 2\Omega v &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{dv}{dt} + 2\Omega u &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{dw}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (4.13)$$

Продифференцировав эти уравнения соответственно по x, y, z и сложив их с учетом (4.11), получим

$$\frac{1}{\rho} \nabla^2 p = 2\Omega \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

Взяв полную производную по времени и учитя (4.13), имеем

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{dt} \nabla^2 p = 4\Omega^2 \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Еще раз дифференцируя это уравнение по t , приходим к окончательному уравнению для p

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + W \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 \nabla^2 p + 4\Omega^2 \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0. \quad (4.14)$$

В частном случае $W = 0$ уравнение (4.14) для периодических возмущений $p = \Phi e^{-i\omega t}$ принимает вид

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \left(1 - \frac{4\Omega^2}{\omega^2} \right) \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0. \quad (4.15)$$

При $\omega > 2\Omega$ коэффициент при $\partial^2 p / \partial z^2$ положителен. Это означает, что уравнение является эллиптическим и может быть сведено к уравнению Лапласа. В этом случае влияние точечного источника возмущения распространяется на весь объем жидкости. Если же $\omega < 2\Omega$, то уравнение становится гиперболическим и возмущения распространяются в ограниченном пространстве – характеристическом конусе, ось которого совпадает с осью z , а угол полураспространения равен $\arcsin(\omega/2\Omega)$.

Теперь вернемся к уравнению (4.14) и, положив $p \sim e^{i(kr - \omega t)}$, получаем дисперсионное соотношение

$$(\omega - W k_z)^2 k^2 - 4\Omega^2 k_z^2 = 0. \quad (4.16)$$

Здесь ω и k – действительные частота и волновое число; k_z – z -компоненты волнового вектора. Так как $k^2 \equiv k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 > k_z^2$, то из (4.16) следует, что волны существуют при условии $(\omega - W k_z)^2 < 4\Omega^2$. При $W = 0$ это согласуется с условием гиперболичности уравнения (4.15).

Решение дисперсионного уравнения имеет два корня

$$\omega = W k_z \pm \frac{2\Omega k_z}{k}, \quad (4.17)$$

которые соответствуют двум волновым модам. Наличие только действительных корней означает, что мнимая часть частоты (инкремент) равна нулю, т. е. волны в твердотельно вращающейся жидкости являются *нейтрально устойчивыми*. Их называют также *инерционными*.

Фазовая скорость волн равна

$$c \equiv \frac{\omega}{k} = \frac{k_z}{k} \left(W \pm \frac{2\Omega}{k} \right) = \cos \theta \left(W \pm \frac{2\Omega}{k} \right),$$

где θ – угол между вектором \mathbf{k} и осью z . Как видно, при $W \neq 0$ дисперсия имеет место даже для фиксированного значения волнового числа k .

Вектор групповой скорости определяется как $\mathbf{c}_g = \partial \omega / \partial \mathbf{k}$, и его компоненты имеют вид

$$\begin{aligned} c_{gx} &= \mp \frac{2\Omega k_x k_z}{k^3}, \\ c_{gy} &= \mp \frac{2\Omega k_y k_z}{k^3}, \\ c_{gz} &= W \pm 2\Omega \frac{k_x^2 + k_y^2}{k^3}. \end{aligned}$$

Соответственно модуль групповой скорости равен

$$c_g = \frac{2\Omega}{k} \sqrt{\sin^2 \theta \left(1 \pm \frac{Wk}{\Omega} \right) + \frac{W^2 k^2}{4\Omega^2}}.$$

Если $W = 0$, то $c = 2\Omega \cos \theta / k$, $c_g = 2\Omega \sin \theta / k$, $\mathbf{c}_g \cdot \mathbf{k} = 0$. Последнее соотношение означает, что волновой вектор и вектор групповой скорости взаимно перпендикулярны (рис. 4.4).

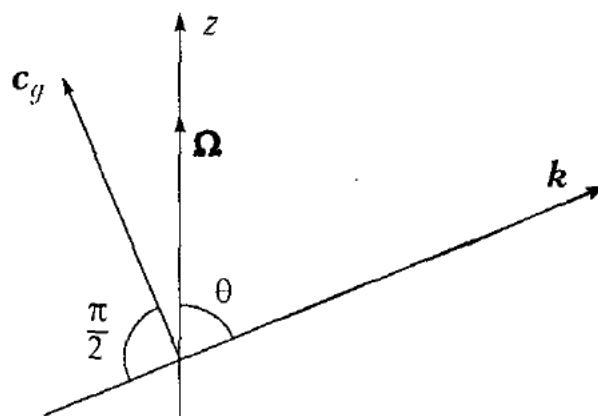


Рис. 4.4. Схема распространения плоских инерционных волн в твердотельно вращающейся жидкости при $W = 0$

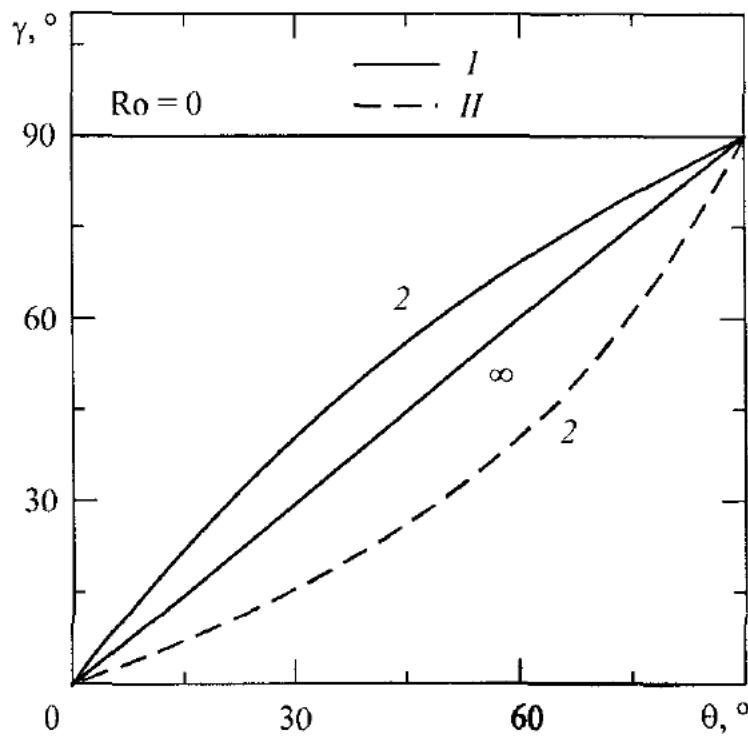


Рис. 4.5. Зависимость угла γ между волновым вектором и вектором групповой скорости от направления распространения волн и параметра $Ro = Wk/2\Omega$: I, II – первая и вторая моды

При наличии поступательного движения ($W \neq 0$) угол γ между волновым вектором и вектором групповой скорости не равен 90° и зависит от направления распространения волны θ и параметра $Ro = Wk/2\Omega$, который можно интерпретировать как *волновое число Россби*. Как обычно, при $Ro \ll 1$ доминируют силы Кориолиса, а при $Ro \gg 1$ – инерционные силы. Зависимости γ от θ для разных значений Ro показаны на рис. 4.5, а схемы распространения волн – на рис. 4.6. При $Ro = 0$ $\mathbf{c}_g \perp \mathbf{k}$ (см. рис. 4.4), а при $Ro \rightarrow \infty$ первая и вторая моды совпадают друг с другом и \mathbf{c}_g параллелен оси z , причем $|\mathbf{c}_g| = W$, что означает просто снос возмущения поступательным движением жидкости.

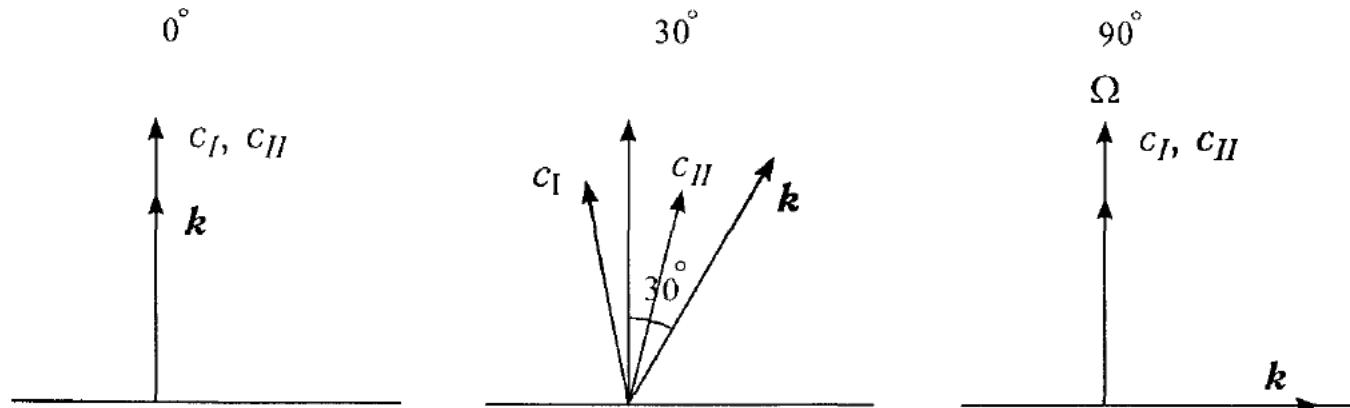


Рис. 4.6. Схема распространения волн в зависимости от угла θ при $Ro = 2$

Проанализируем теперь поле скоростей. С этой целью исключим давление из уравнения (4.12), применив к нему операцию rot . В результате получим

$$\frac{d}{dt}(\nabla \times \mathbf{u}) = 2\Omega \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z}. \quad (4.18)$$

Представим возмущение скорости в виде плоской волны

$$\mathbf{u} = \mathbf{N} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}. \quad (4.19)$$

Тогда из (4.18) имеем уравнение

$$(\omega - W k_z) [\mathbf{k} \times \mathbf{u}] = 2i\Omega k_z \mathbf{u}, \quad (4.20)$$

а из уравнения сплошности (4.11) получаем условие поперечности

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{N} = 0 \quad \text{или} \quad \mathbf{k} \perp \mathbf{u}.$$

С учетом дисперсионного соотношения (4.17) уравнение (4.20) принимает вид

$$[\mathbf{e} \times \mathbf{u}] = \pm i\mathbf{u},$$

где единичный вектор $\mathbf{e} = \mathbf{k}/k$. Комплексная амплитуда волны в общем виде представляется как $\mathbf{N} = \mathbf{A} + i\mathbf{B}$. Тогда из последнего равенства следует, что $[\mathbf{e} \times \mathbf{B}] = \pm \mathbf{A}$, т. е. векторы \mathbf{A} и \mathbf{B} взаимно перпендикулярны, одинаковы по модулю и лежат в плоскости, перпендикулярной вектору \mathbf{k} .

Введем локальную систему координат $\{X, Y, Z\}$, в которой ось Z совпадает с вектором \mathbf{k} , а векторы \mathbf{A} и \mathbf{B} лежат на осях X и Y . Тогда, выделяя вещественную часть в (4.19), имеем компоненты скорости

$$u_x = A \cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}), \quad u_y = A \sin(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}).$$

Отсюда видно, что в каждой фиксированной точке пространства вектор возмущенной скорости \mathbf{u} вращается со временем при неизменной амплитуде, т. е. волна обладает *круговой поляризацией*.

4.3.2. Осесимметричные волны

Для анализа осесимметричных волн в твердотельно вращающейся жидкости введем цилиндрическую систему координат $\{r, \theta, z\}$ с осью z вдоль вектора Ω и соответствующим вектором скорости $\{u, v, w\}$. Полагая

$$u = f(r) e^{i(kz - \omega t)} \quad \text{и т. д.} \quad (4.21)$$

и переходя к цилиндрическим координатам, получим из уравнений (4.11), (4.12) с учетом осевой симметрии

$$\left. \begin{array}{l} -i\omega u - 2\Omega v = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}, \\ -i\omega v + 2\Omega u = 0, \\ -i\omega w = -\frac{ik}{\rho} p, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) + ikw = 0. \end{array} \right\} \quad (4.22)$$

Уравнение сохранения массы позволяет ввести функцию тока Ψ по соотношениям

$$u = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad w = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r}. \quad (4.23)$$

Исключая v, w, p из (4.22), легко получить уравнение для u , которое с учетом выражения (4.21) принимает вид

$$r^2 \frac{d^2 f}{dr^2} + r \frac{df}{dr} + \left[r^2 k^2 \left(\frac{4\Omega^2}{\omega^2} - 1 \right) - 1 \right] f = 0.$$

Решение этого уравнения, обращающееся в нуль на оси вращения потока ($r = 0$), есть

$$f = f_0 \cdot J_1 \left(kr \sqrt{\frac{4\Omega^2}{\omega^2} - 1} \right),$$

где J_1 – функция Бесселя первого рода первого порядка; f_0 – константа. Заметим, что решение существует только при условии $\omega < 2\Omega$.

В силу того, что функция Бесселя $J_1(x)$ имеет бесконечную последовательность нулей x_1, x_2, \dots , то течение разбивается на изолированные области, ограниченные коаксиальными цилиндрами радиуса r_i в соответствии с равенством

$$kr_i \sqrt{\frac{4\Omega^2}{\omega^2} - 1} = x_i. \quad (4.24)$$

Чтобы определить картину течения, найдем выражение для функции тока, используя (4.21) и (4.23),

$$\Psi = -\frac{f_0}{k} r J_1 \left(kr \sqrt{\frac{4\Omega^2}{\omega^2} - 1} \right) \sin(kz - \omega t). \quad (4.25)$$

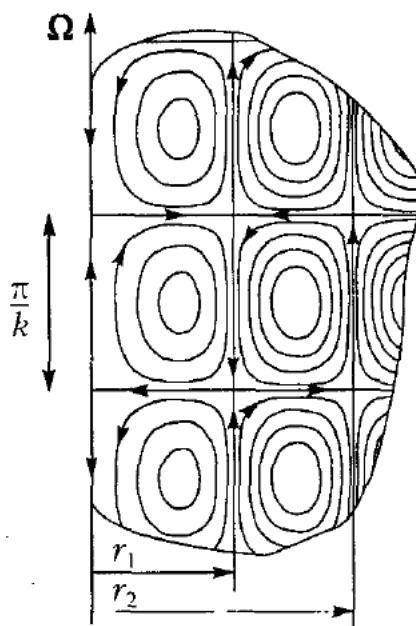


Рис. 4.7. Мгновенная картина линий тока при распространении осесимметричных волн в твердотельно врачающейся жидкости (расчет по (4.25) для $f_0/k = 1,06$)

Пример расчета мгновенных линий тока на основе (4.25) показан на рис. 4.7. Как видно, течение разбивается на отдельные ячейки, размер которых вдоль оси z равен π/k , а в перпендикулярной плоскости определяется соотношением (4.24). Такая картина соответствует гармонической волне, бегущей вдоль оси z с фазовой скоростью $c = \omega/k$. Соответственно в системе координат, движущейся вдоль z со скоростью c , имеем стоячую волну.

В отличие от плоских волн особенность данного решения состоит в том, что частота волн ω не зависит от волнового числа k , т. е. осесимметричные волны в твердотельно врачающейся безграничной жидкости являются *бездисперсионными*. Однако дисперсия немедленно возникает при наличии ограничивающих стенок. Пусть движение происходит в цилиндрической трубе радиуса R . Тогда необходимо, чтобы на радиусе R укладывалось целое число ячеек, т. е. накладывается условие $R = x_i$, где x_i – i -й нуль функции $J_1(x)$. В результате из (4.24) имеем

$$kR \sqrt{\frac{4\Omega^2}{\omega^2} - 1} = x_i, \quad (4.26)$$

откуда и появляется связь между ω и k при заданных значениях R , Ω и x_i . Соответственно можно определить выражение для групповой скорости

$$c_g \equiv \frac{d\omega}{dk} = \frac{\omega}{k} \frac{x_i^2}{x_i^2 + k^2 R^2},$$

которая оказывается меньше фазовой скорости $c = \omega/k$.

Если кроме цилиндрической стенки течение ограничено плоскими границами, перпендикулярными оси вращения, то бегущая волна существовать не может. В этом случае решение должно иметь вид стоячей волны с условием $L = n\pi/k$, где L – длина цилиндра; n – целое число. Подставляя k из этого условия в (4.26), получаем выражение для собственных частот малых колебаний вращающейся жидкости в цилиндрическом сосуде радиуса R и длины L

$$\omega = 2\Omega \left(1 + \frac{x_i^2 L^2}{n^2 \pi^2 R^2} \right)^{-1/2}.$$

4.3.3. Столб Тейлора

В известном эксперименте Taylor [1923] было обнаружено, что если в твердотельно вращающейся жидкости достаточно медленно перемещать вдоль оси вращения шарик, то вместе с ним движется весь столб жидкости, в который вписан этот шарик (см. фото на рис. 4.8). Данное явление можно интерпретировать на языке волн. Но сначала проанализируем, что следует из уравнений движения во вращающейся системе координат при *медленных стационарных* движениях. Медленность означает малость инерционных эффектов, т. е. число Россби $Ro = W/a\Omega \ll 1$. Здесь W – характерная скорость; a – характерный линейный масштаб. Тогда из уравнения (4.10) имеем

$$2\Omega v = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad 2\Omega u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0. \quad (4.27)$$

Здесь использована декартова система координат с осью z , направленной вдоль оси вращения.

Видно, что давление p и компоненты скорости u , v не зависят от координаты z . Исключая давление, получаем

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (4.28)$$

Уравнение сохранения массы (4.11) с учетом этого равенства дает

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (4.29)$$

Из уравнений (4.28) и (4.29) следует, что всякое медленное движение в быстро вращающейся как целое жидкости представляет собой наложение двух независимых движений – двумерного течения в плоскости, перпендикулярной оси z , и осевого течения, не зависящего от координаты z . Это утверждение составляет содержание *теоремы Праудмена* [Proudman, 1916].



Рис. 4.8. Визуализация столба Тейлора при всплытии капли силикона (радиусом 2 см) в контейнере большого диаметра, вращающимся со скоростью 56 об/мин [Bush *et al.*, 1995]

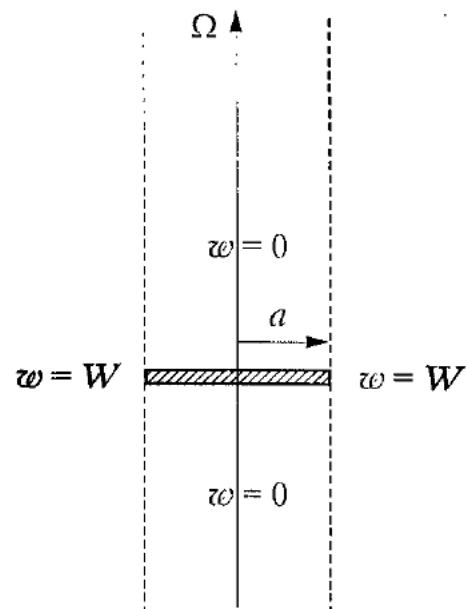


Рис. 4.9. Схема обтекания диска аксиальным потоком в твердотельно вращающейся жидкости (столб Тейлора)

Уравнение (4.29) дает другой удивительный результат. Пусть во вращающейся жидкости перпендикулярно оси вращения расположен диск радиуса a , который обтекается однородным потоком с аксиальной скоростью W . Так как на поверхности диска нормальная скорость $w = 0$, то в соответствии с (4.29) она остается нулевой везде внутри цилиндра радиуса a (рис. 4.9). Вне этого цилиндра $w = W$. Описанная картина течения, собственно, и дает объяснение “столбу Тейлора”. Хотя, конечно, вблизи поверхности разрыва аксиальной скорости приближенные уравнения (4.27) будут неприменимы.

С точки зрения волновой теории существование столба Тейлора можно объяснить тем, что возмущения от твердого тела распространяются только вдоль оси z , т. е. групповая скорость имеет только z -компоненту (c_{gz}). Тогда из формул п. 4.1 для групповой скорости имеем

$$c_{gx} = c_{gy} = 0, \quad k_z = 0, \quad c_{gz} = W \pm 2\Omega/k.$$

Кроме того, один из корней для групповой скорости должен быть меньше нуля, чтобы возмущение распространялось еще и вверх по потоку, а именно

$$c_{gz} = W - 2\Omega/k < 0.$$

Если предположить, что основной вклад вносят волны длиной $\lambda \equiv 2\pi/k \sim a$, где a – характерный размер тела (в случае шара – радиус), тогда окончатель-

но имеем следующее условие существования столба Тейлора, которое запишем через число Россби:

$$\text{Ro} \equiv \frac{W}{a\Omega} < \frac{1}{\pi} \approx 0,3.$$

Этот критерий, во-первых, приближенно согласуется с условием медленности движения ($\text{Ro} \ll 1$), а во-вторых, почти точно соответствует экспериментальным наблюдениям Taylor [1923] начала появления столба.

4.4. ЛИНЕЙНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ВИХРЯ РЭНКИНА С АКСИАЛЬНЫМ ТЕЧЕНИЕМ

4.4.1. Дисперсионные соотношения

Как показано в предыдущем параграфе, колоннообразный вихрь с линейным распределением азимутальной скорости устойчив к любым малым возмущениям и в нем могут распространяться лишь нейтральные (инерционные) волны. Модель вихря Рэнкина, представляющая собой комбинацию твердотельного вращения и потенциального течения вне ядра, для многих задач является хорошим приближением при описании реальных колоннообразных вихрей и вихревых нитей. Однако еще Kelvin [1880] продемонстрировал, что вихрь Рэнкина тоже устойчив к малым возмущениям как осесимметричной, так и спиральных мод. Неустойчивость появляется при наложении на вихрь Рэнкина аксиального течения в ядре [Chandrasekhar, 1961; Krishnamoorthy, 1966]. При анализе устойчивости обычно полагают прямоугольное распределение осевой скорости, т. е. константа в ядре и нуль вне ядра. Иначе говоря, это закрученная струя, окруженнная потенциальным течением. Как и в работах указанных выше авторов, в последующем были проведены детальные исследования временной неустойчивости [Moore, Saffman, 1972; Uberoi *et al.*, 1972; Lessen *et al.*, 1973; Drazin, Reid, 1981; Сэффмэн, 2000]. Пространственная неустойчивость изучалась Wu *et al.* [1992], а пространственно-временная неустойчивость с попыткой применения к анализу распада вихря – в работе Loiseleur *et al.* [1998]. Именно этим двум последним публикациям мы будем следовать, проводя линейный анализ устойчивости вихря Рэнкина с аксиальным течением.

Будем рассматривать течение невязкой несжимаемой жидкости плотности ρ , которое описывается уравнениями Эйлера (см. (1.35) при $v = 0$) в цилиндрической системе координат $\{r, \theta, z\}$ с соответствующими компонентами скорости $\{u, v, w\}$. Невозмущенные профили скорости запишем как

$$\begin{aligned} U = 0, \quad V(r) = \Omega r, \quad W(r) = W_\infty + \Delta W, \quad r < R, \\ U = 0, \quad V(r) = \Omega R^2 / r, \quad W(r) = W_\infty, \quad r > R, \end{aligned} \tag{4.30}$$

где R – радиус ядра; Ω – угловая скорость вращения в ядре; W_∞ – внешняя осевая скорость; ΔW – скачок осевой скорости на поверхности $r = R$, представляющей собой вихревую пелену. Учет внешней осевой скорости важен при анализе пространственной неустойчивости, а также при определении перехода между абсолютной и конвективной неустойчивостями, что Loiseleux *et al.* [1998] связывают с возникновением распада вихря. Используя формулу (3.56), легко получить распределение давления

$$p = p_\infty - \rho \Omega^2 \left(R^2 - r^2 / 2 \right), \quad r < R,$$

$$p = p_\infty - \rho \Omega^2 R^4 r^{-2} / 2, \quad r > R,$$

где p_∞ – давление при $r \rightarrow \infty$.

При такой постановке можно ввести два безразмерных параметра: безразмерную внешнюю скорость a и параметр крутки S

$$a = \frac{W_\infty}{\Delta W}, \quad S = \frac{\Omega R}{\Delta W}.$$

Заметим, что параметр крутки связан с числом Россби Ro простым соотношением: $S = 1/Ro$. Характерные профили осевой скорости в зависимости от a , а также профиль тангенциальной скорости показаны на рис. 4.10. Меняя значение a , можно получать различные комбинации в виде струи или следа в ядре с внешним потоком.

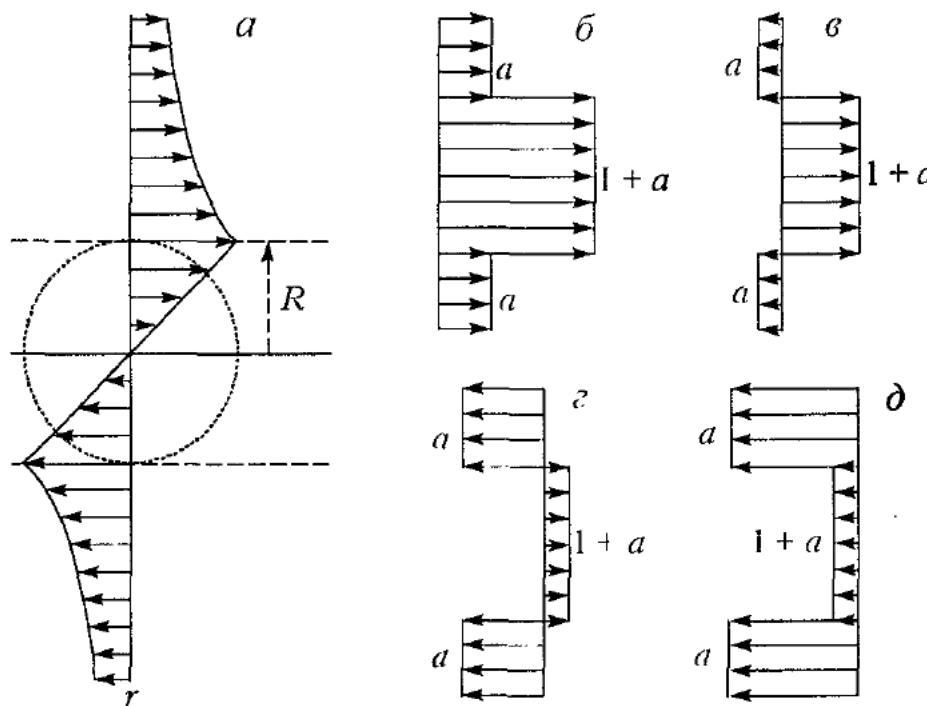


Рис. 4.10. Зависимость профилей тангенциальной (*а*) и осевой (*б–д*) компонент скорости от параметра a : *б* – $a \geq 0$, струя со спутным потоком; *в* – $-0,5 \leq a \leq 0$, струя с противотоком; *г* – $-1 \leq a \geq -0,5$, след с противотоком; *д* – $a \leq -1$, след со спутным потоком

Обозначая возмущения скорости и давления как u, v, w, p и линеаризуя уравнения Эйлера и сохранения массы, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{V}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + W \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{2Vv}{r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{V}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + W \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{uV}{r} &= -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta}, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{V}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + W \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}, \\ u + r \frac{\partial u}{\partial r} + r \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial \theta} &= 0. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Чтобы вывести дисперсионные соотношения, представим возмущения в виде

$$\{u, v, w, p\} = \{\hat{u}(r), \hat{v}(r), \hat{w}(r), \hat{p}(r)\} e^{i(kz+m\theta-\omega t)}, \quad (4.32)$$

где волновое число k и частота ω могут быть комплексными или действительными в зависимости от постановки задачи; m – целочисленное азимутальное волновое число. В силу разных распределений скорости будем раздельно рассматривать области $r < R$ и $r > R$, а затем выпишем условия сопряжения на поверхности разрыва осевой скорости, которые и приведут к дисперсионному уравнению.

Ядро вихря, $r < R$. Имеем из (4.31) с учетом (4.30) и (4.32)

$$\begin{aligned} i\hat{u}g + 2\Omega\hat{v} &= \frac{\hat{p}'}{\rho}, \\ i\hat{v}g - 2\hat{u}\Omega &= \frac{im}{\rho r} \hat{p}, \\ \hat{w}g &= \frac{k\hat{p}}{\rho}, \\ \hat{u}' + \frac{\hat{u}}{r} + ik\hat{w} + \frac{im\hat{v}}{r} &= 0. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Здесь

$$g = \omega - m\Omega - (W_\infty + \Delta W)k, \quad (4.34)$$

а штрих означает производную по r . Физический смысл (4.34) состоит в том, что это есть частота с поправкой на сдвиг Доплера в системе координат, движущейся со скоростью невозмущенного потока. Исключая из (4.33) $\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}$, приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению для собственной функции

$$r^2 \hat{p}'' + r\hat{p}' + (\beta^2 r^2 - m^2) \hat{p} = 0,$$

где

$$\beta^2 = k^2 \left(\frac{4\Omega^2}{g^2} - 1 \right).$$

Общее решение этого уравнения представляет собой линейную комбинацию функций Бесселя первого $J_m(\beta r)$ и второго рода $Y_m(\beta r)$ порядка $|m|$. В силу ограниченности решения при $r = 0$ оставляем только первое слагаемое, т. е.

$$\hat{p}(r) = AJ_m(\beta r), \quad A = \text{const}. \quad (4.35)$$

Далее понадобится еще выражение для \hat{u} , которое следует из (4.33) и (4.35)

$$\hat{u}(r) = \frac{iAk^2}{\beta^2 \rho g} \left[\beta J'_m(\beta r) - \frac{2\Omega m J_m(\beta r)}{rg} \right], \quad (4.36)$$

где штрих – производная по аргументу. Учет знака моды m производится с помощью соотношения $J_{-m} = (-1)^m J_m$.

Внешняя область, $r > R$. Так как здесь течение потенциальное, то удобно использовать потенциал ϕ , определяемый из условия $\mathbf{u} = \nabla \phi$. Полагая

$$\phi = \hat{\phi}(r) e^{i(kz+m\theta-\omega t)}$$

и подставляя это выражение в уравнение Лапласа $\Delta \phi = 0$, получаем уравнение для $\hat{\phi}(r)$

$$r^2 \hat{\phi}'' + r\hat{\phi}' - (m^2 + k^2 r^2) \hat{\phi} = 0.$$

Для этого уравнения общее решение выражается через модифицированные функции Бесселя первого $I_m(ekr)$ и второго $K_m(ekr)$ рода порядка $|m|$, где $e = \text{sign}(k_r)$. И опять из требования ограниченности решения остается только одно слагаемое

$$\hat{\phi}(r) = BK_m(ekr), \quad B = \text{const},$$

причем волновое число входит в аргумент со знаком e , чтобы также ограничить решение на бесконечности. Соответственно для \hat{u} и \hat{p} имеем

$$\begin{aligned} \hat{u}(r) &= BekK'_m(ekr), \\ \hat{p}(r) &= -i\rho BK_m(ekr) \left[-\omega + \frac{\Omega R^2 m}{r^2} + W_\infty k \right]. \end{aligned} \quad (4.37)$$

В силу свойства $K_m = K_{-m}$ уравнения (4.37) остаются неизменными как для положительной, так и отрицательной мод m .

Вихревая пелена, $r = R$. На этой поверхности должны задаваться кинематическое и динамическое условия. Кинематическое условие означает, что нормальная компонента скорости u на возмущенной границе

$$\eta = R + \alpha e^{i(kz+m\theta-\omega t)}$$

есть

$$u \equiv \frac{d\eta}{dt} = \frac{\partial\eta}{\partial t} + w \frac{\partial\eta}{\partial z} + \frac{v}{r} \frac{\partial\eta}{\partial\theta}.$$

Подставляя сюда выражения для v и w , которые следуют из предыдущего анализа, находим

$$\hat{u}_- = -i\alpha g, \quad \hat{u}_+ = -i\alpha(g + \Delta W \cdot k),$$

где индексы снизу “-” и “+” относятся к значениям $\hat{u}(R)$ соответственно слева и справа от $r = R$. Исключая амплитуду α , получаем искомое кинематическое условие

$$\frac{\hat{u}_-}{g} = \frac{\hat{u}_+}{g + \Delta W \cdot k}.$$

Динамическое условие означает равенство нормальных напряжений, или

$$\hat{p}_- = \hat{p}_+.$$

Подставив в эти равенства выражения (4.35)–(4.37), придем к системе двух алгебраических уравнений

$$A \frac{ik^2}{\beta^2 \rho g^2} \left[\beta J'_m - \frac{2\Omega m J_m}{Rg} \right] = B \frac{ek K'_m}{g + \Delta W k},$$

$$AJ_m = Bi\rho K_m (\omega - \Omega m - W_\infty k).$$

Условие разрешимости этой системы относительно A, B есть равенство нулю детерминанта, откуда и следует дисперсионное соотношение

$$(g + \Delta W \cdot k)^2 \left[\frac{\beta R J'_m(\beta R)}{J_m(\beta R)} - \frac{2\Omega m}{g} \right] = -\frac{g^2 \beta^2 R^2 K'_m(ekR)}{ek R K_m(ekR)}. \quad (4.38)$$

Для дальнейшего анализа его удобно переписать в безразмерной форме, используя в качестве масштабов R и ΔW ,

$$(g + k)^2 \left[\beta \frac{J'_m(\beta)}{J_m(\beta)} - \frac{2Sm}{g} \right] + \frac{g^2 \beta^2}{ek} \frac{K'_m(ek)}{K_m(ek)} = 0, \quad (4.39)$$

где

$$g = \omega - mS - (1 + a)k, \quad (4.40)$$

$$\beta = k\sqrt{4S^2/g^2 - 1}. \quad (4.41)$$

Обратим внимание, что в общем случае аргументы у функций Бесселя являются комплексными.

Полый вихрь. В ряде работ (см., например, Uberoi *et al.* [1972]) рассмотрен более общий случай, когда плотности среды внутри ядра и во внешней области различны. Для нас наибольший интерес представляет так называемый “полый вихрь”, в ядре которого плотность равна нулю, а во внешней области жидкость плотностью ρ вращается по закону потенциального вихря с нулевой аксиальной скоростью. Такое течение может иметь место при образовании кавитационной полости. Впервые волны на полом вихре были изучены теоретически Kelvin [1880], а затем Pocklington [1895] (полое вихревое кольцо малого сечения). Результаты последней работы были впоследствии использованы в работе Maxworthy *et al.* [1985] для анализа экспериментальных данных.

Чтобы получить дисперсионное уравнение для полого вихря, необходимо иметь решения для собственных функций $\hat{u}(r)$ и $\hat{p}(r)$ в области потенциального течения ($r > R$) и условия на границе раздела ($r = R$). Пусть $W_\infty = 0$. Выражения (4.37) остаются по-прежнему справедливыми в области $r > R$.

На возмущенной границе раздела

$$r = \eta = R + \alpha e^{(kz+m\theta-\omega t)}$$

остается неизменным кинематическое условие для \hat{u}_+

$$\hat{u}_+ = -i\alpha(g + \Delta W k) = -i\alpha(\omega - m\Omega). \quad (4.42)$$

Однако динамическое условие принимает несколько иной вид, так как исходим из равенства полных нормальных напряжений (а не возмущений)

$$p_0 = p_\infty - \rho \frac{\Omega^2 R^4}{2r^2} + \hat{p} e^{i(kz+m\theta-\omega t)}, \quad r = \eta.$$

Здесь $p_0 = \text{const}$ – давление в полом ядре; p_∞ – давление в жидкости при $r \rightarrow \infty$; второй член справа обусловлен центробежными силами, а третий член – это возмущение давления. В невозмущенном состоянии $p_0 = p_\infty - \rho\Omega^2 R^2/2$. Линеаризуя условие, приходим к равенству

$$\hat{p}_+ = -\rho\Omega^2 R \alpha. \quad (4.43)$$

Подставляя в (4.42), (4.43) выражения (4.37) при $r = \eta \approx R$ и исключая амплитуды α , B , получаем дисперсионное соотношение для полого вихря

$$\frac{\omega}{\Omega} = m \pm \left[-ekR \frac{K'_m(ekR)}{K_m(ekR)} \right]^{1/2}. \quad (4.44)$$

При анализе временной неустойчивости полагаем волновое число k действительным. Так как подкоренное выражение справа всегда неотрицательно, то корни для ω всегда действительны. Следовательно, течение в полом вихре устойчиво к малым возмущениям как осесимметричных, так и спиральных мод.

В предельных случаях малых и больших волновых чисел имеем из (4.44) следующие формулы:

$$\begin{aligned} |k|R \rightarrow 0: \quad & \omega = \pm \Omega (-\ln |k|R)^{-1/2} \rightarrow 0, \quad m=0, \\ & \omega = \Omega \left[m \pm \sqrt{|m|} \right], \quad m \neq 0, \\ & \omega_{1,2} = 2; \quad 0, \quad m=1, \\ & \omega_{1,2} = 0; \quad -2, \quad m=-1, \\ |k|R \gg 1: \quad & \omega = \Omega \left[m \pm \sqrt{|k|R} \right], \\ & \omega = \pm \Omega \sqrt{|k|R}, \quad m=0. \end{aligned}$$

Отрицательный знак у частоты означает изменение знака перед временем t в экспоненте $\exp[i(kz + m\theta - \omega t)]$.

4.4.2. Линейный анализ временной неустойчивости

При анализе временной неустойчивости полагаем $k = k_r$, $\omega = \omega_r + i\omega_i$. Далее будем также полагать без умаления общности скорость внешнего аксиального течения равной нулю: $a \equiv W_\infty / \Delta W = 0$. Действительно, a входит только в параметр g (см. (4.40)). И для реального волнового числа пересчет на случай $a \neq 0$ легко сделать путем замены: $\omega_r \rightarrow \omega_r - ak$.

Дисперсионное уравнение (4.39) можно решить только численными методами, поэтому получим вначале асимптотические результаты в пределе малых и больших (по модулю) значений аргументов функций Бесселя.

Короткие волны, $k \gg 1; |\beta| \gg 1$. Допустим также, что $|\omega| \gg 1$. Тогда $|g| \approx |\omega - k| \gg 1$, $\beta \approx ik$, $J'_m(ik)/J_m(ik) \approx i$, $K'_m(k)/K_m(k) \approx -1$. Учитывая эти соотношения, получаем из (4.39) дисперсионное соотношение

$$\omega = k/2 \pm i \cdot k/2 \quad (4.45)$$

или в размерном виде

$$\omega = k\Delta W/2 \pm i \cdot k\Delta W/2.$$

Наличие положительного мнимого корня у комплексной частоты означает неустойчивость течения. Заметим, что мнимая часть в точности совпадает с выражением (4.9) для инкремента в задаче о вихревой пелене, т. е. это в чистом виде *неустойчивость Кельвина – Гельмгольца*, обусловленная тангенциальным разрывом аксиальной скорости ΔW . Причем влияние степени закрутки S полностью отсутствует. Из (4.45) следует также справедливость допущения $|\omega| \gg 1$.

Короткие волны, $k \gg 1; |\beta| \ll k$. В этом случае упрощенная связь между ω и k следует непосредственно из определения β . Указанные условия выполняются, если выражение под радикалом в (4.41) стремится к нулю. Тогда с учетом (4.40) находим искомую связь

$$\omega = (m \pm 2)S + k \quad (4.46)$$

или в размерном виде

$$\omega = \Delta W k + (m \pm 2)\Omega.$$

Как видно, эти волны *нейтрально устойчивы*. При $m = 0$ последняя формула тождественно совпадает с выражением (4.17), которое описывает инерционные волны в неограниченной твердотельно вращающейся жидкости.

Длинные волны, $k \ll 1$. Здесь необходимо выделить три случая: $|\beta| \ll 1$, $|\beta| \approx 1$, $|\beta| \gg 1$. Асимптотические формулы, выведенные в работе Loiseleur *et al.* [1998], приведены в табл. 4.1.

Таблица 4.1. Асимптотические формулы для длинных волн ($k \ll 1$)

β	$m = 0$	$m \neq 0$
$ \beta \ll 1$	$\omega_0^\pm = k \pm 2S$	$\omega_m = k + (m + 2\mu)S$ $\hat{\omega}_m = (m - \mu), m \neq 1$ $\hat{\omega}_m = \mu \frac{k^2}{2} \left(\frac{1}{S} - NS \right), m = 1$
$ \beta \approx 1$	$\omega_{0,n} = \left(1 + \frac{2S}{\beta_{0,n}} \right) k +$ $+ \frac{2Sk}{\beta_{0,n}} \left(\frac{1}{\beta_{0,n}} + \frac{1}{2S} \right)^2 k^3 \ln k $	$\omega_{m,n} = \left(1 \pm \frac{2S}{\beta_{m,n}} \right) k + mS$
$ \beta \gg 1$	$\omega = k \pm i \frac{k^2 \ln k }{2S}$	$\omega = k + mS - \mu \frac{k^2}{2S} \pm i \frac{k^3}{2S m }$

Здесь $\mu = m/|m|$; $N = \ln(2/|\beta|) - C_e + 1/4$, $C_e = 0,5772$ – константа Эйлера; $\beta_{m,n}$ – n -й нуль функции Бесселя $J_m(\beta)$. Частоты нейтральных волн помечены индексами, понятными из записи уравнений. Знак “ \wedge ” означает второй корень для случая $|\beta| \ll 1$, $m \neq 0$. При $|\beta| \ll 1$ и $m \neq 0$ второй корень дисперсионного уравнения обращается в нуль при $m = \pm 1$, поэтому для случая $|m|=1$ приведена уточненная формула.

Основной вывод из полученных асимптотических результатов заключается в том, что для каждого азимутального числа m существует *единственная неустойчивая волна* (нижняя строка в таблице) и *бесконечное множество нейтральных инерционных волн*. Если записать мнимую часть комплексной частоты в размерном виде

$$\omega_i = \pm \frac{(\Delta W)^2 R^2}{2\Omega|m|} \quad \text{для } |\beta| \gg 1, \quad m \neq 0,$$

то видно, что она определяется скачком аксиальной скорости ΔW , т. е. это – по-прежнему *неустойчивость Кельвина – Гельмгольца*.

Теперь проанализируем результаты численного расчета дисперсионного уравнения (4.39), выполненного Loiselcux *et al.* [1998].

Оссимметричная мода, $m = 0$. Дисперсионные кривые для неустойчивой моды приведены на рис. 4.11 в зависимости от параметра крутки S . Здесь ω_r и ω_i – соответственно реальная и мнимая части комплексной частоты. Из графика следует, что закрутка потока имеет стабилизирующий эффект, но в любом случае течение остается неустойчивым.

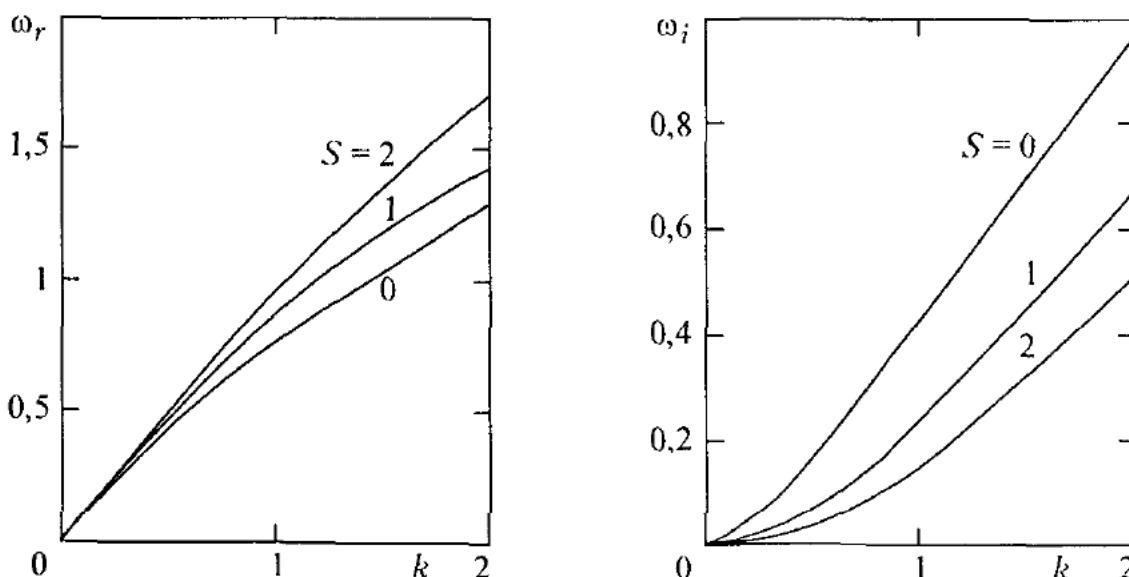


Рис. 4.11. Дисперсионные кривые для неустойчивой моды при $m = 0$

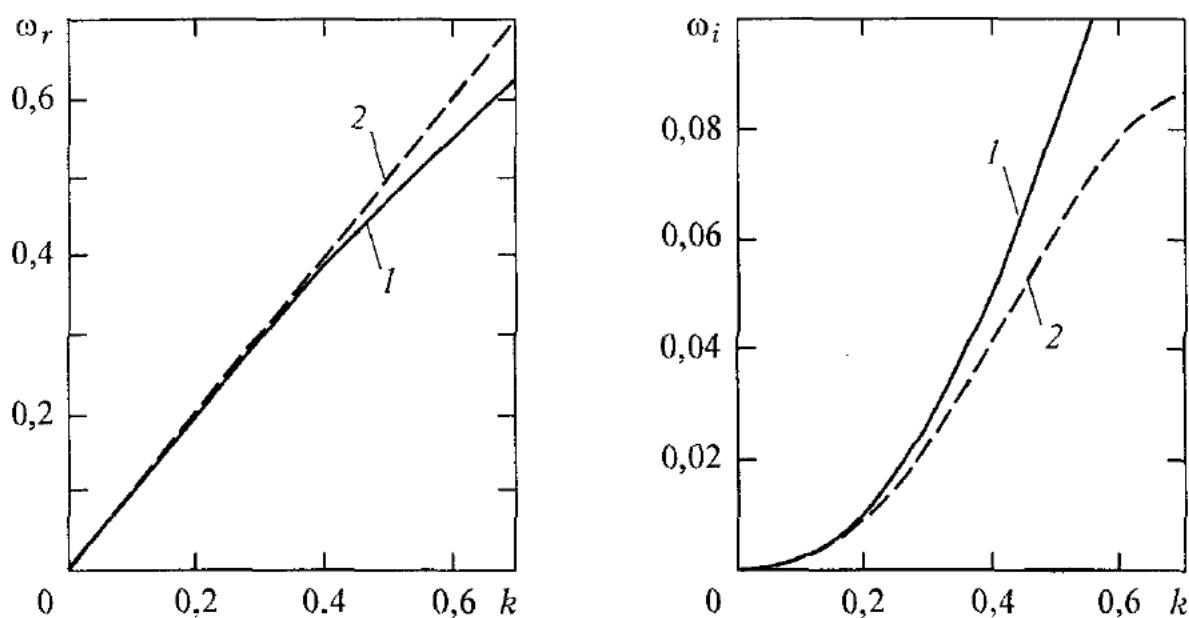


Рис. 4.12. Дисперсионные кривые для неустойчивой моды при $m = 0, S = 0,7$:
1 – численный расчет; 2 – асимптотическая формула

На рис. 4.12 проведено сопоставление точного и приближенного решений для неустойчивой моды. При малых k согласие весьма хорошее.

Дисперсионные кривые для нейтральных инерционных волн показаны на рис. 4.13. Отметим, что для моды ω_0^+ численное и приближенное решения совпадают точно.

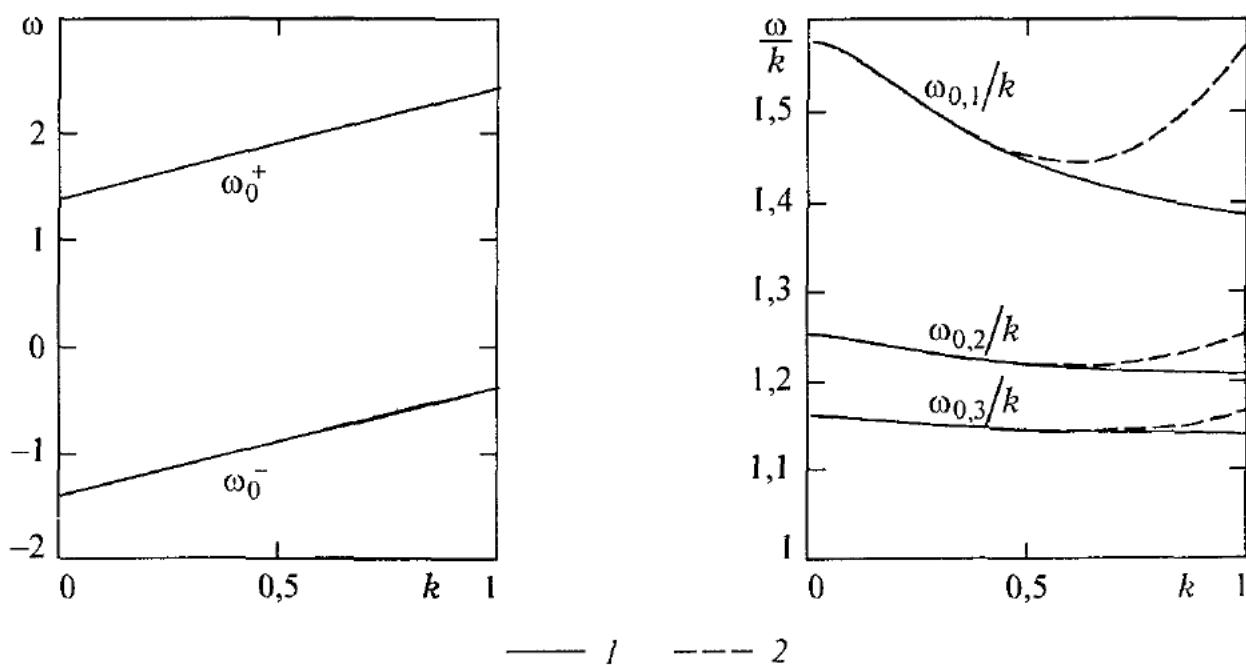


Рис. 4.13. Дисперсионные кривые для нейтрально устойчивых инерционных мод при $m = 0, S = 0,7$: 1 – численный расчет; 2 – асимптотические формулы

Сpirальные моды, $m \neq 0$. Типичные примеры дисперсионных кривых для двух неустойчивых мод $m = \pm 1$ показаны на рис. 4.14 при двух положительных значениях параметра крутки S . Подчеркнем, что для спиральных мод важно не только абсолютное значение параметра крутки, но и его знак. Отметим следующие особенности дисперсионных кривых. Во-первых, при $S \neq 0$ нарушается симметрия между положительной и отрицательной спиральными модами. Во-вторых, при $S > 0$ инкремент у отрицательной моды всегда выше, т. е. она более неустойчива. По этой причине далее мы займемся анализом отрицательной спиральной моды $m = -1$. Следует, однако, иметь в виду, что инкремент зависит не только от знака m , но и от ее абсолютного значения. Причем при малых волновых числах $k \ll 1$ наиболее неустойчивой модой является $m = 0$, а в случае $k \gg 1$ наиболее неустойчива мода с $m \rightarrow -\infty$.

Третья особенность дисперсионных кривых состоит в том, что их форма меняется при переходе параметра крутки через некоторое критическое значение $S = S_{cr}$.

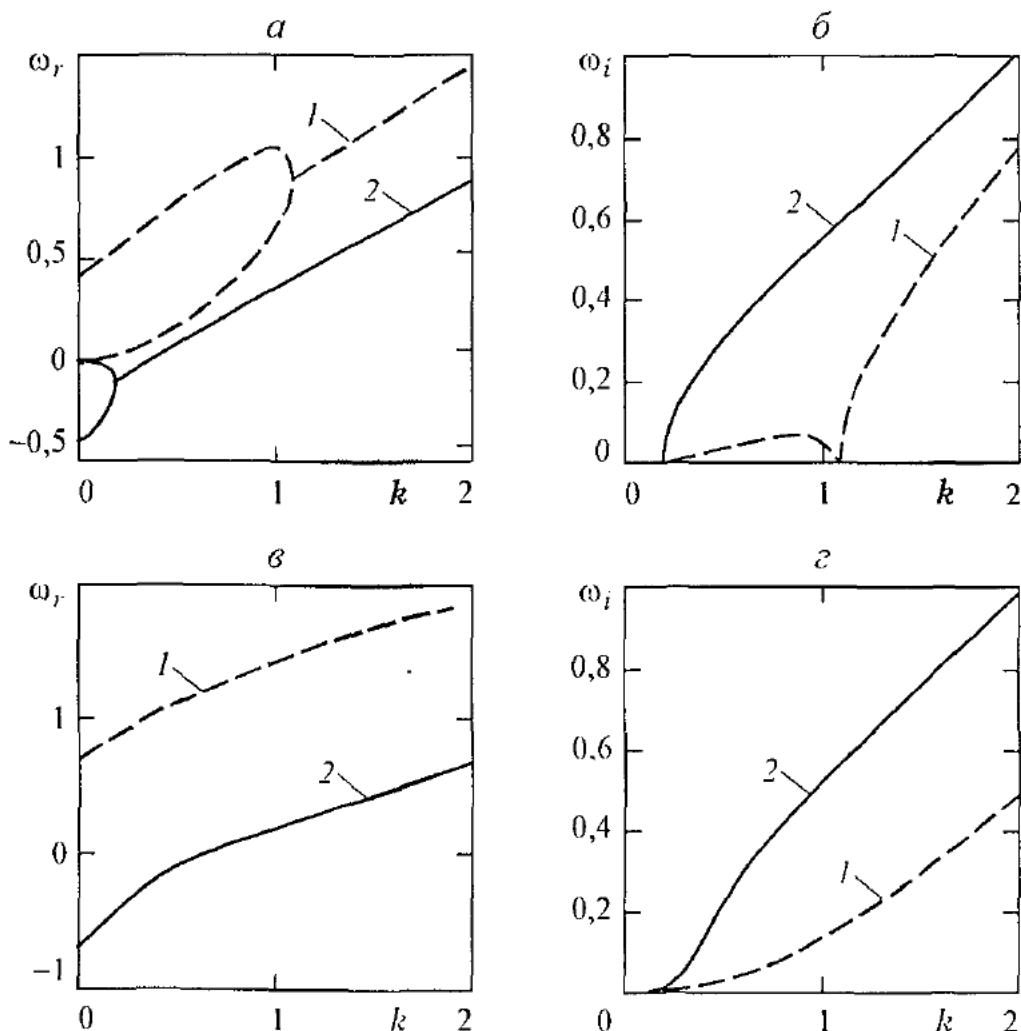


Рис. 4.14. Зависимость дисперсионных кривых для неустойчивых спиральных мод с $m = +1$ (1) и $m = -1$ (2) от параметра крутки S : *a*, *b* – $S = 0.4$; *c*, *d* – $S = 0.7$

Более подробно влияние S на дисперсионные зависимости продемонстрировано на рис. 4.15 для случая $m = -1$. Из графиков следует, что влияние крутки на устойчивость различно в разных диапазонах S . Если $S > S_{cr} = 0,46$, то увеличение крутки приводит к стабилизации течения (см. рис. 4.15 γ).

Если $S < S_{cr}$, то при достаточно высоких $k > k_s$ рост крутки destabilизирует течение (см. рис. 4.15 δ). Однако в диапазоне малых волновых чисел, меньших некоторого критического значения $k_s = k_s(S)$, наблюдается сложное поведение дисперсионных зависимостей, более детально представленное на рис. 4.16.

Линия II на рис. 4.16 α относится к случаю $S = 0$. Появление сколь угодно малой крутки приводит к образованию последовательности зон неустойчивости, разделенных малыми полосами нейтральной устойчивости. При $k > k_s$ все волновые числа – неустойчивы. Если $S \rightarrow S_{cr}$, то зоны неустойчивости расширяются и сливаются друг с другом при $S = S_{cr}$. При дальнейшем увеличении крутки зависимость $\omega_i(k)$ становится все более гладкой (см. рис. 4.17 α) и, как видно, довольно хорошо описывается длинноволновым приближением в области малых k .

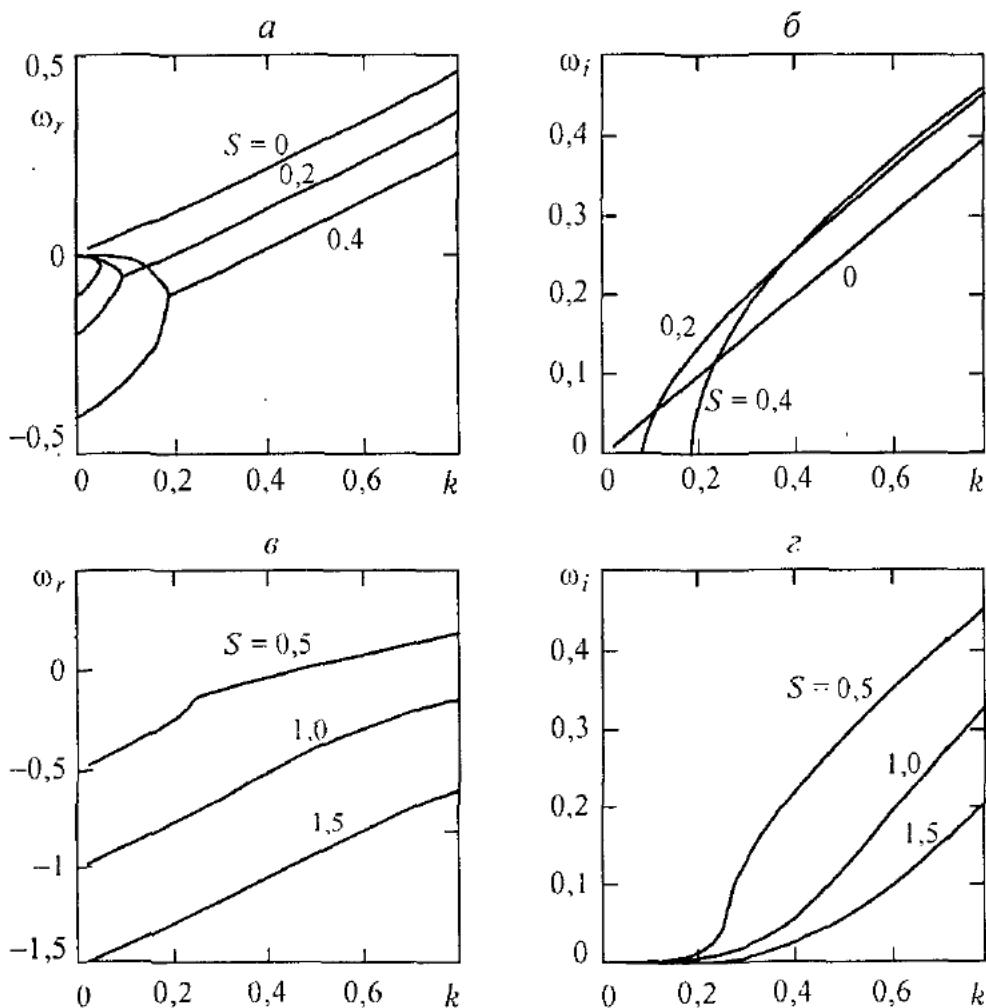


Рис. 4.15. Влияние степени закрутки S на дисперсионные кривые при $m = -1$: a, c – частота; b, d – инкремент

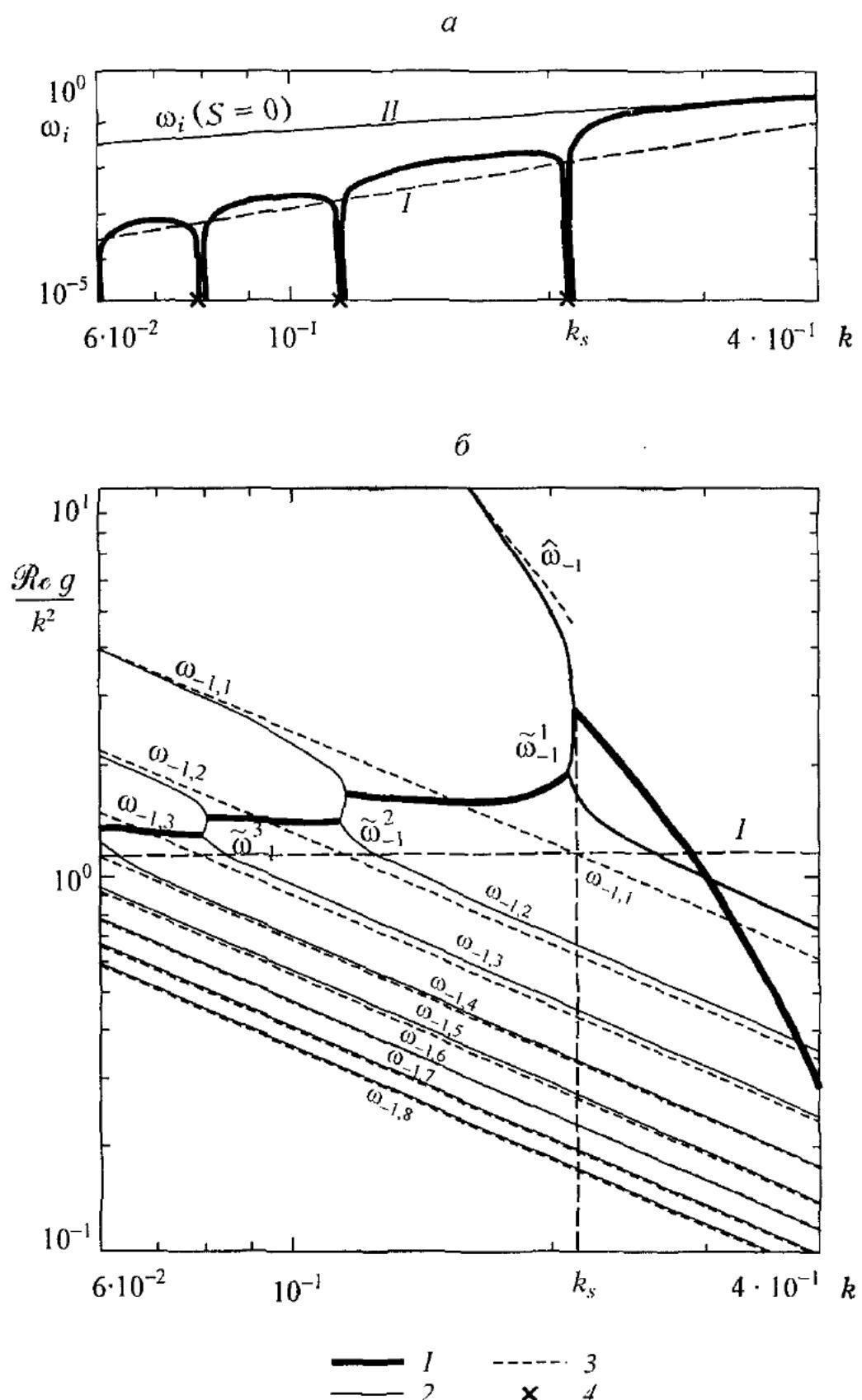


Рис. 4.16. Дисперсионные кривые при малых волновых числах; $S = 0.35 < S_{cr}$, $a = 0$, $m = -1$:
 1 – неустойчивая мода Кельвина – Гельмгольца; 2 – нейтральные моды; 3 – длинноволновая аппроксимация для $\hat{\omega}_{-1}(k)$ и $\omega_{-1,n}(k)$, 4 – резонансные волновые числа. I – длинноволновая аппроксимация для неустойчивой моды, II – случай $S = 0$

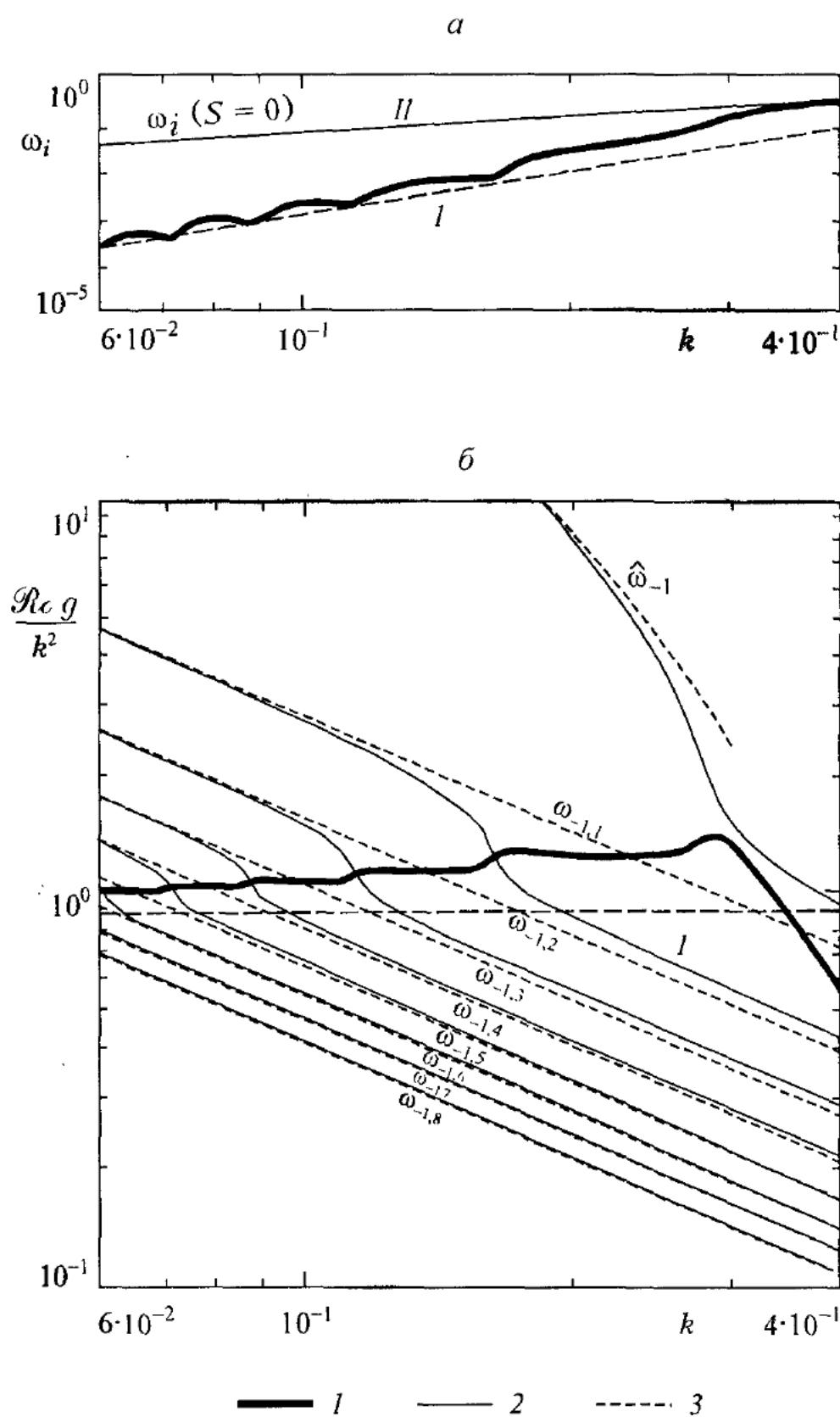


Рис. 4.17. Дисперсионные кривые при малых волновых числах, $S = 0,55 > S_{cr}$, $\alpha = 0$, $m = -1$.
Усл. обозначения см. на рис. 4.16

Чтобы понять механизмы образования отдельных зон неустойчивости, рассмотрим дисперсионные зависимости для действительной частоты ω_r . Удобнее это сделать для величины $\Re g/k^2$, т. е. для частоты, сдвинутой за счет Доплер-эффекта (см. рис. 4.16б, 4.17б). На рисунках показана неустойчивая мода (*1*), ее длинноволновая аппроксимация (*1*), нейтральные моды $\omega_{-1,n}$, $\hat{\omega}_{-1}$, $\tilde{\omega}_{-1}^n$ (*2*), нейтральные моды $\omega_{-1,n}$, $\hat{\omega}_{-1}$ в длинноволновом приближении (*3*). В дополнение к известным модам из табл. 4.1 появилась еще одна нейтрально устойчивая волна с частотой $\tilde{\omega}_{-1}^n$.

Характер дисперсионных кривых свидетельствует о наличии резонансных взаимодействий между неустойчивой модой и нейтрально устойчивыми волнами, что и является причиной образования выделенных зон неустойчивости [Loiseleur *et al.*, 1998]. Схематично такой механизм продемонстрирован на рис. 4.18. Здесь q – номер зоны неустойчивости; $q = 1$ – первая зона слева от $k = k_s$; $k_{q,1}$ и $k_{q,2}$ – волновые числа для левой и правой границ q -й зоны. В точке $k = k_{q,1}$ слияние двух нейтральных мод $\omega_{-1,q}$ и $\tilde{\omega}_{-1}^{q+1}$ приводит к генерации неустойчивой моды Кельвина – Гельмгольца. А при $k = k_{q,2}$ резонансное взаимодействие неустойчивой моды с нейтральной волной $\omega_{-1,q}$ приводит к расщеплению неустойчивой моды на нейтральные волны $\omega_{-1,q}$ и $\tilde{\omega}_{-1}^q$.

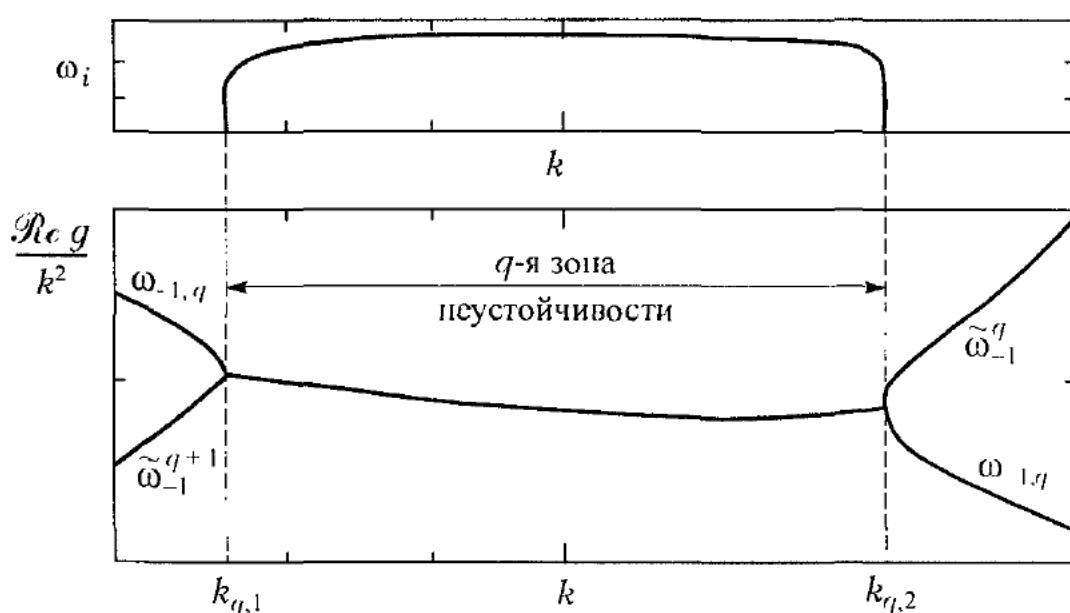


Рис. 4.18. Схема резонансных взаимодействий, приводящих к образованию q -й зоны неустойчивости

Условие резонанса предполагает, что $\omega_{m,n}(k) = \omega_r(k)$, где справа – реальная частота неустойчивой моды. Подставляя в это равенство приближенные формулы из табл. 4.1, получаем дискретный набор резонансных волновых чисел

$$k_{m,n} \approx 4S^2 / \beta_{m,n}, \quad (4.47)$$

где $\beta_{m,n}$ – нули функции Бесселя $J_m(\beta)$. На рис. 4.16 a эти значения волновых чисел отмечены крестиками и, как видно, очень хорошо совпадают с правыми границами зон неустойчивости. Таким образом, дискретность зон неустойчивости в диапазоне малых волновых чисел обусловлена дискретным набором нулей функции Бесселя в дисперсионных соотношениях.

4.4.3. Линейный анализ пространственной неустойчивости

При анализе пространственной неустойчивости полагаем

$$k = k_r + ik_i, \quad \omega = \omega_r.$$

Течение неустойчиво, если $k_i < 0$. Подставляя эти выражения в дисперсионное уравнение (4.39), получаем дисперсионные зависимости: $k_r = k_r(\omega; S, m, a)$, $k_i = k_i(\omega; S, m, a)$. Рассмотрим пока случай, когда внешнее аксиальное течение отсутствует ($a = 0$). Примеры численных расчетов, выполненных Wu *et al.* [1992], представлены на рис. 4.19 и 4.20.

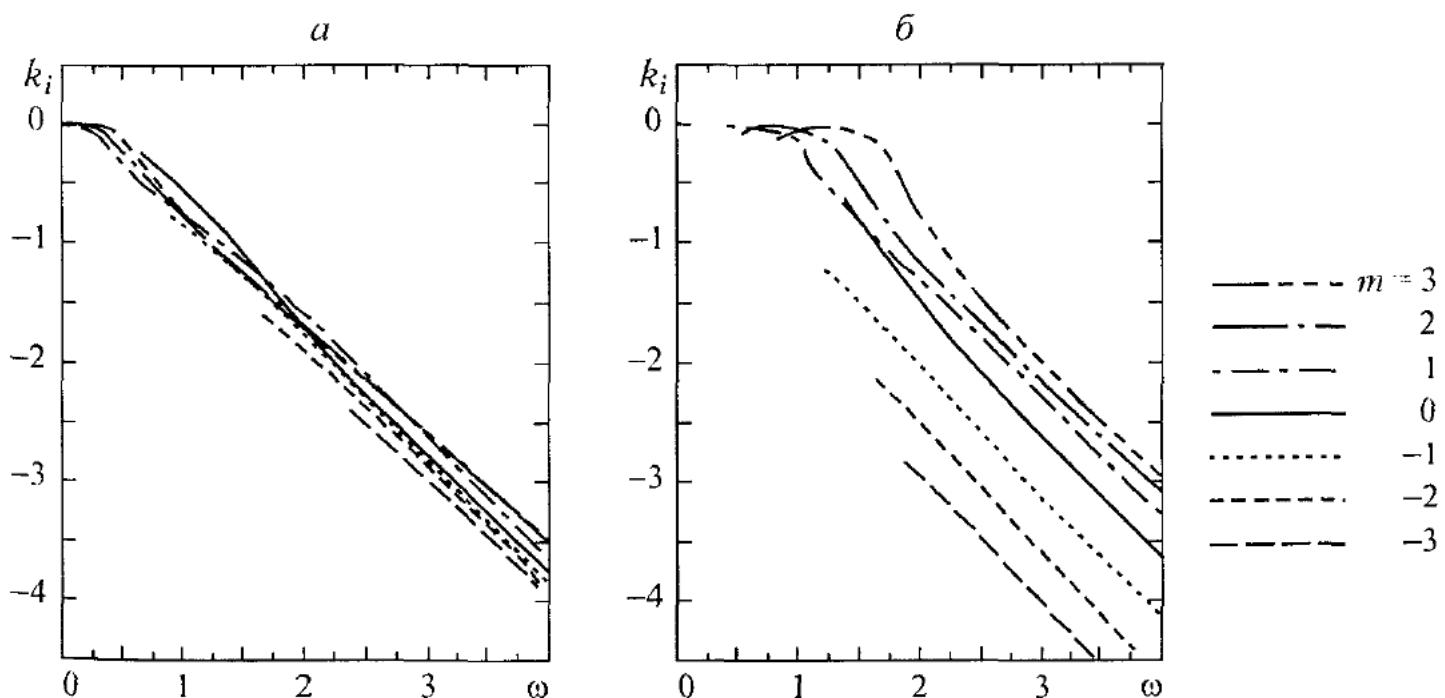


Рис. 4.19. Зависимости пространственного инкремента k_i от частоты ω для разных азимутальных мод: $S = 0,1$ (а), $0,4$ (б)

На рис. 4.19 показано влияние азимутального волнового числа m на зависимости $k_i(\omega)$. Прежде всего отметим, что и в пространственной постановке вихрь Рэнкина с аксиальным протоком всегда неустойчив к малым возмущениям как осесимметричной, так и спиральных мод. Причем с ростом частоты неустойчивость увеличивается, т. е. $(-k_i)$ растет. Аналогичный вывод был сделан относительно зависимостей $\omega_i(k)$ при анализе временной неустойчивости (см. рис. 4.11 и 4.15).

При малых значениях параметра крутки S дисперсионные кривые для разных m почти совпадают (рис. 4.19 a). Однако с ростом S различие в инкрементах разных мод существенно возрастает (рис. 4.19 b). Наиболее неустойчивой из исследованных семи мод оказалась мода с $m = -3$. Следует ожидать, что более “отрицательные моды” будут более неустойчивы. В области малых частот поведение кривых более сложное, и здесь необходим дополнительный анализ.

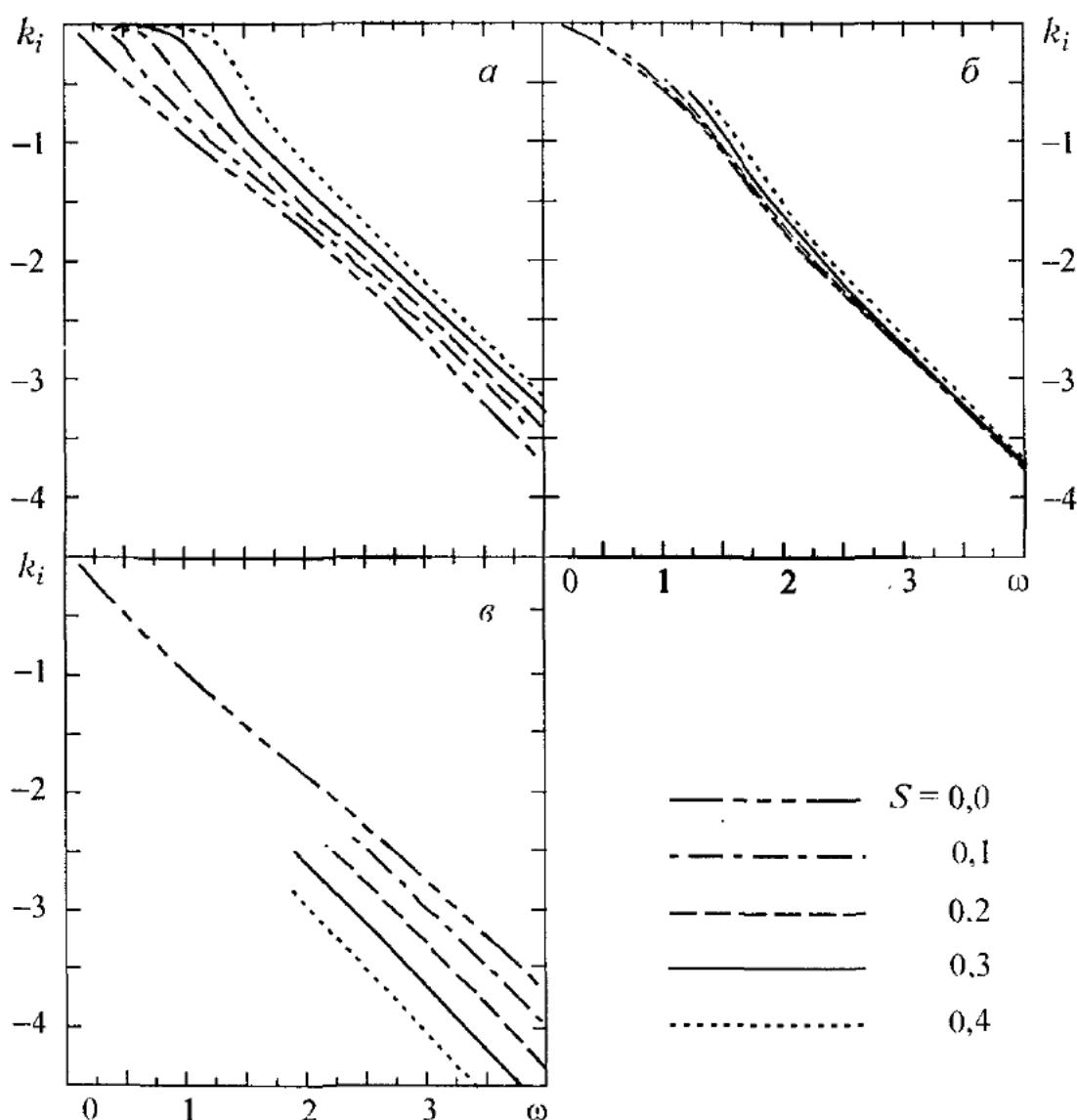


Рис. 4.20. Зависимости пространственного инкремента k_i от частоты ω для разных значений параметра крутки S : $m = 2$ (а), 0 (б), 3 (в)

На рис. 4.20 показано влияние степени закрутки S на дисперсионные зависимости. В случае положительных мод ($m = 2$, см. рис. 4.20a) рост крутки повышает устойчивость течения, а для отрицательных мод (см. рис. 4.20c), наоборот, снижает. В случае осесимметричной моды ($m = 0$) эффект крутки практически отсутствует (см. рис. 4.20b).

4.5. ВОЛНЫ КЕЛЬВИНА

В классической работе Kelvin [1880] “Vibrations of a columnar vortex” дан анализ волновых движений колоннообразного вихря для трех основных случаев: а) – твердотельно вращающегося вихря, б) – полого вихря, в) – вихря Рэнкина без осевого протока. Под *волнами Кельвина* обычно подразумеваются возмущения ядра вихря Рэнкина. Именно такие волновые движения будут рассмотрены в данном разделе. Напомним, что случаи а) и б) были рассмотрены в разделах 4.3 и 4.4.1 соответственно.

Kelvin [1880] вывел точные дисперсионные уравнения для произвольных бесконечно малых гармонических возмущений ядра вихря Рэнкина, показал, что эти возмущения являются нейтральными, и привел количественные результаты для осесимметричной и изгибной мод в длинноволновом приближении. Сэффмэн [2000] проанализировал дополнительно случай, когда длина волны сравнима или меньше размера ядра вихря. В работе Arendt *et al.* [1997] продемонстрировано путем численного моделирования как начальные локализованные возмущения на вихревой трубке с постоянной завихренностью эволюционируют в пакеты волн Кельвина.

4.5.1. Дисперсионные уравнения

Постановка задачи в точности такая же, как в разд. 4.4.1, за исключением того, что в невозмущенном профиле скорости (4.30) полагаем отсутствие аксиального протока, $W_\infty \equiv \Lambda W \equiv 0$, т. е. имеем обычный вихрь Рэнкина. Тогда, не повторяя вывода и сохраняя прежние обозначения, сразу получаем из (4.38) дисперсионное уравнение

$$\frac{J'_m(\beta R)}{\beta R J_m(\beta R)} - \frac{2\Omega m}{g\beta^2 R^2} = - \frac{K'_m(kR)}{kR K_m(kR)}. \quad (4.48)$$

Здесь

$$g = \omega - m\Omega, \quad (4.49)$$

$$\beta^2 = k^2 [4\Omega^2/g^2 - 1]. \quad (4.50)$$

Решения ищем в виде бегущих нейтральных волн, т. е. в экспоненте $\exp[i(kz + m\theta - \omega t)]$ частота ω и волновое число k – действительные величины. В силу симметрии можно полагать без потери общности: $k > 0$, $m > 0$, тогда $e = \text{sign}(k_z) \equiv 1$ (см. (4.38)).

4.5.2. Осесимметричные моды, $m = 0$

При $m = 0$ из (4.49) имеем $g = \omega$ и, вводя обозначение $q \equiv \beta R$, перепишем уравнения (4.48), (4.50) в виде

$$\frac{J'_0(q)}{q - J_0(q)} = -\frac{K'_0(kR)}{kR - K_0(kR)}, \quad (4.51)$$

$$\omega = \pm \frac{2\Omega kR}{\sqrt{k^2 R^2 + q^2}}. \quad (4.52)$$

Разрешая уравнение (4.51) относительно q , из (4.52) находим искомое дисперсионное соотношение $\omega = \omega(k)$.

Рассмотрим вначале *длинные волны*, $kR \ll 1$. Разлагая функцию Бесселя K_0 и ее производную в ряд по малому аргументу, получаем для правой части уравнения (4.51)

$$-\frac{K'_0(kR)}{kR - K_0(kR)} \approx \frac{1/kR}{kR(\ln 2 - \gamma - \ln kR)} \xrightarrow[kR \rightarrow 0]{} -\infty,$$

где $\gamma = 0,5772$ – константа Эйлера.

Это условие означает, что решение уравнения (4.51) сводится к нахождению корней функции Бесселя $J_0(q)$

$$J_0(q) = 0. \quad (4.53)$$

График этой функции изображен на рис. 4.21. Как видно, $q_{01} < q_{02} < q_{03} \dots$, а значение наименьшего корня равно $q_{01} = 2,4049 \approx 2,4$. Для частоты ω в длинноволновом приближении имеем из (4.52) (положительный корень)

$$\omega = 2\Omega kR/q_0, \quad (4.54)$$

где q_0 – корень уравнения (4.53). Соответственно фазовая скорость есть

$$c = \omega/k = 2\Omega R/q_0. \quad (4.55)$$

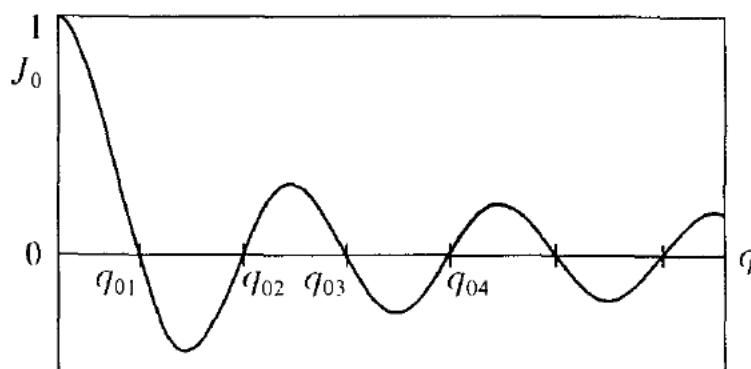


Рис. 4.21. График функции Бесселя $J_0(q)$

Для наименьшего корня $q_0 = q_{01}$ получаем максимальную фазовую скорость $c = 2\Omega/1,2$, которая почти совпадает со значением окружной скорости на границе ядра вихря. Видно также, что в длинноволновом пределе осесимметричные волны являются бездисперсионными.

Если длина волны сравнима или меньше размера ядра вихря, т. е. $kR \gtrsim 1$, то решение уравнений (4.51), (4.52) можно получить только численными методами. Заметим, что при фиксированном значении волнового числа k уравнение (4.51) имеет бесконечное число корней $q_n(k)$. Каждому корню (*радиальной моде*) под номером n соответствует своя дисперсионная кривая. Примеры численных расчетов частоты ω , фазовой c и групповой c_g скоростей по уравнениям (4.51), (4.52) приведены на рис. 4.22 в безразмерной форме. Здесь номер кривой совпадает с порядковым номером корня. Предельным значением частоты для всех корней есть величина $\omega = 2\Omega$, которая следует из (4.52) при $kR \rightarrow \infty$ и $q = \text{const}$. Поведение ω при малых k описывается формулой (4.54). Для фазовой скорости $c = \omega/k$ в длинноволновом пределе справедлива формула (4.55), а в случае коротких волн все кривые выходят на одну асимптотическую зависимость: $c = 2\Omega R/k$. Наконец, групповая скорость для длинных волн совпадает с фазовой скоростью (бездисперсионные волны), а в коротковолновой области стремится к нулю. Из расчетов следует, что для данного корня групповая скорость меньше (или равна) фазовой скорости.

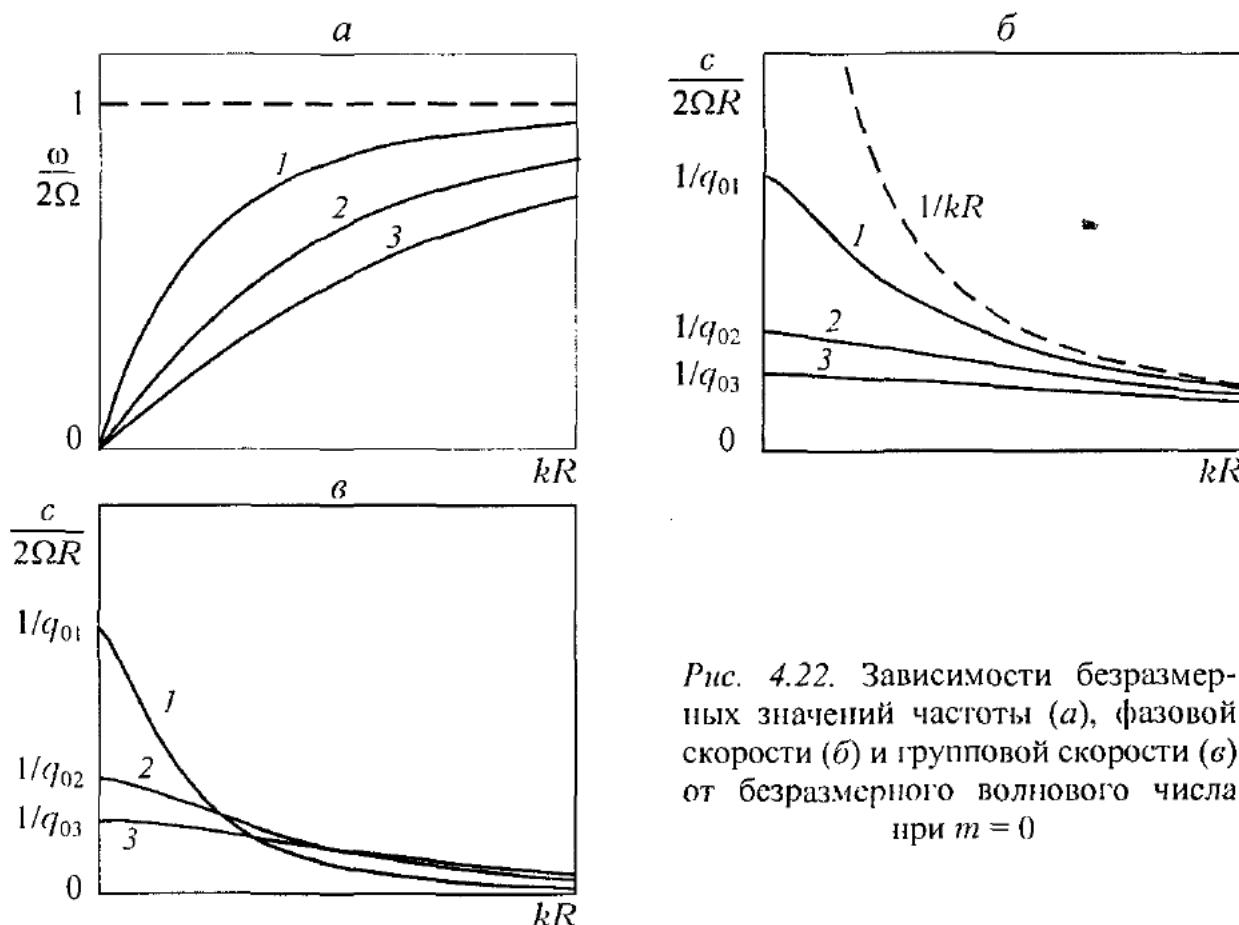


Рис. 4.22. Зависимости безразмерных значений частоты (а), фазовой скорости (б) и групповой скорости (в) от безразмерного волнового числа при $m = 0$

4.5.3. Изгибная мода, $m = 1$

Длинные волны, $kR \ll 1$. При $m = 1$ уравнения (4.48)–(4.50) принимают вид

$$g = \omega - \Omega,$$

$$\beta^2 = k^2 [4/(\omega/\Omega - 1)^2 - 1], \quad (4.56)$$

$$\frac{J'_1(q)}{q/J_1(q)} - \frac{2}{q^2(\omega/\Omega - 1)} = -\frac{K'_1(kR)}{kR/K_1(kR)}, \quad (4.57)$$

где $q = \beta R$. В длинноволновом приближении ($kR \ll 1$) правую часть в (4.57) можно упростить, используя асимптотические формулы для функций Бесселя

$$\begin{aligned} -\frac{K'_1(kR)}{kR/K_1(kR)} &\approx \frac{1}{k^2 R^2} \cdot \frac{1 - k^2 R^2 (\ln kR)/2 - k^2 R^2 (2\gamma + 1 - \ln 4)/4}{1 + k^2 R^2 (\ln kR)/2 + k^2 R^2 (2\gamma - 1 - \ln 4)/4} \approx \\ &\approx \frac{1}{k^2 R^2} \left[1 + k^2 R^2 (\ln 2 - \gamma - \ln kR) \right]. \end{aligned}$$

Чтобы получить аналитическое решение (4.57), примем дополнительное условие: $\omega \ll \Omega$. Тогда из (4.56) следует, что $\beta \approx k$ и $q \equiv \beta R \ll 1$, т. е. рассматриваются наименьшие корни уравнения (4.57). При таких допущениях можно разложить по малым параметрам и оба члена в левой части (4.57)

$$\begin{aligned} \frac{J'_1(q)}{q/J_1(q)} &\approx \frac{1}{q^2} \cdot \frac{1 - 3q^2/8}{1 - q^2/4} \approx \frac{1}{q^2} - \frac{1}{4} \approx \\ &\approx \frac{1}{k^2 R^2 \left[4/(\omega/\Omega - 1)^2 - 1 \right]} - \frac{1}{4} \approx \frac{1}{3k^2 R^2} \left(1 - \frac{8}{3} \frac{\omega}{\Omega} \right) - \frac{1}{4}, \\ \frac{2}{q^2(1 - \omega/\Omega)} &= \frac{1}{k^2 R^2 \left[4/(\omega/\Omega - 1)^2 - 1 \right] (1 - \omega/\Omega)} \approx \frac{2}{3k^2 R^2} \left(1 - \frac{5}{3} \frac{\omega}{\Omega} \right). \end{aligned}$$

Здесь учли формулу (4.56) и соотношение $q = \beta R$. В результате получаем приближенное уравнение

$$\frac{1}{3k^2 R^2} \left(1 - \frac{8}{3} \frac{\omega}{\Omega} \right) - \frac{1}{4} + \frac{2}{3k^2 R^2} \left(1 - \frac{5}{3} \frac{\omega}{\Omega} \right) = \frac{1}{k^2 R^2} \left[1 + k^2 R^2 \left(\ln \frac{2}{kR} - \gamma \right) \right],$$

откуда имеем окончательно дисперсионное соотношение [Kelvin, 1880]

$$\frac{\omega}{\Omega} = -\frac{1}{2} k^2 R^2 \left(\ln \frac{1}{kR} + \frac{1}{4} + 0,1159 \right). \quad (4.58)$$

Для предельно длинных волн эта формула еще более упрощается:

$$\omega/\Omega = -0,433 k^2 R^2.$$

Данная мода вызывает смещение оси вихря, вследствие чего ось принимает вид *левого винта* (с большим шагом и малой амплитудой из-за принятых допущений). Знак минус у частоты означает, что возмущение движется вокруг цилиндрической поверхности против вращения среды. Поэтому такая мода называется *встречной* (*retrograde mode*).

Если $m = -1$, то ось возмущенного вихря становится *правовинтовой*. Но выводы остаются прежними. Действительно, правая часть в (4.57) не меняется, так как $K_{-m} = K_m$. Первый член слева также не меняется, поскольку функция Бесселя J_m меняет знак и в числителе, и в знаменателе. В остальные члены m входит как комплекс $m\Omega$. Изменение m от (+1) до (-1) эквивалентно изменению направления вращения жидкости. Таким образом, возмущение опять движется против направления вращения жидкости. Схематично оба случая изображены на рис. 4.23.

Произвольное значение kR . В этом случае имеем систему уравнений (4.56), (4.57), которая может быть решена численными методами. Для каждого фиксированного значения kR уравнение (4.57) имеет бесконечное количество корней. Каждому корню соответствует своя дисперсионная кривая, состоящая

$$m = +1; \Omega > 0; \omega < 0 \quad m = -1; \Omega < 0; \omega > 0$$

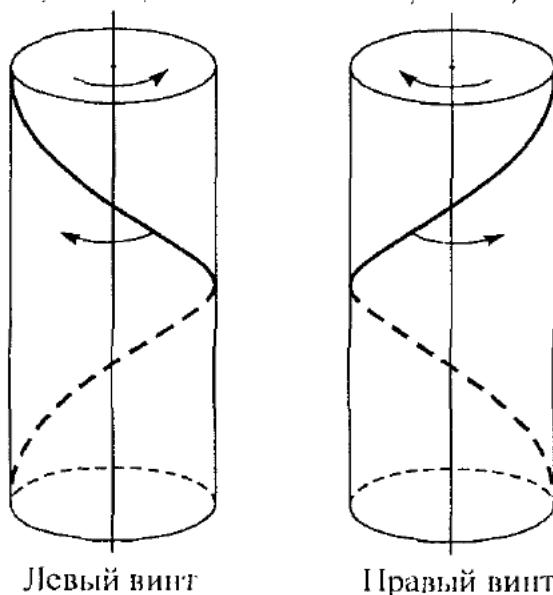


Рис. 4.23. Схематичное изображение оси вихря при возмущении в виде изгибных мод $m = \pm 1$

из одной или двух ветвей. Примеры численного расчета дисперсионных кривых для первых четырех корней приведены на рис. 4.24. Здесь номер кривой соответствует номеру корня (или номеру радиальной моды). Моды, лежащие в области $\omega < \Omega$, являются *встречными* (*retrograde mode*). Моды с $\omega > \Omega$ есть *спутные моды* (*co-grade modes*), поскольку такие возмущения движутся в направлении вращения жидкости. Как следует из графиков, корни 1, 2, 3 и далее состоят из двух ветвей, соответствующих “retrograde” и “co-grade” модам. Корень “0” представляет только встречную моду, и лишь она имеет асимптоту $\omega \rightarrow 0$ при $kR \rightarrow 0$. В коротковолновой области ($kR \rightarrow \infty$) частота всех встречных мод стремится к общему пределу $\omega = -\Omega$, а спутных мод — к значениюю $\omega = 3\Omega$.

Интересной особенностью встречных мод является возможность обращения в нуль частоты ω (и фазовой скорости c тоже) при некоторых значениях kR . Из (4.56) следует, что при $\omega = 0$ $\beta R = \sqrt{3}kR$. Следовательно, нулевая частота реализуется для значений kR , являющихся корнями уравнения

$$\frac{1}{\sqrt{3}kR} \cdot \frac{J_1'(\sqrt{3}kR)}{J_1(\sqrt{3}kR)} + \frac{2}{3k^2 R^2} = -\frac{K_1'(kR)}{kR K_1(kR)}.$$

Первые три корня есть: $(kR)_0 = 2,5; 4,4; 6,2$.

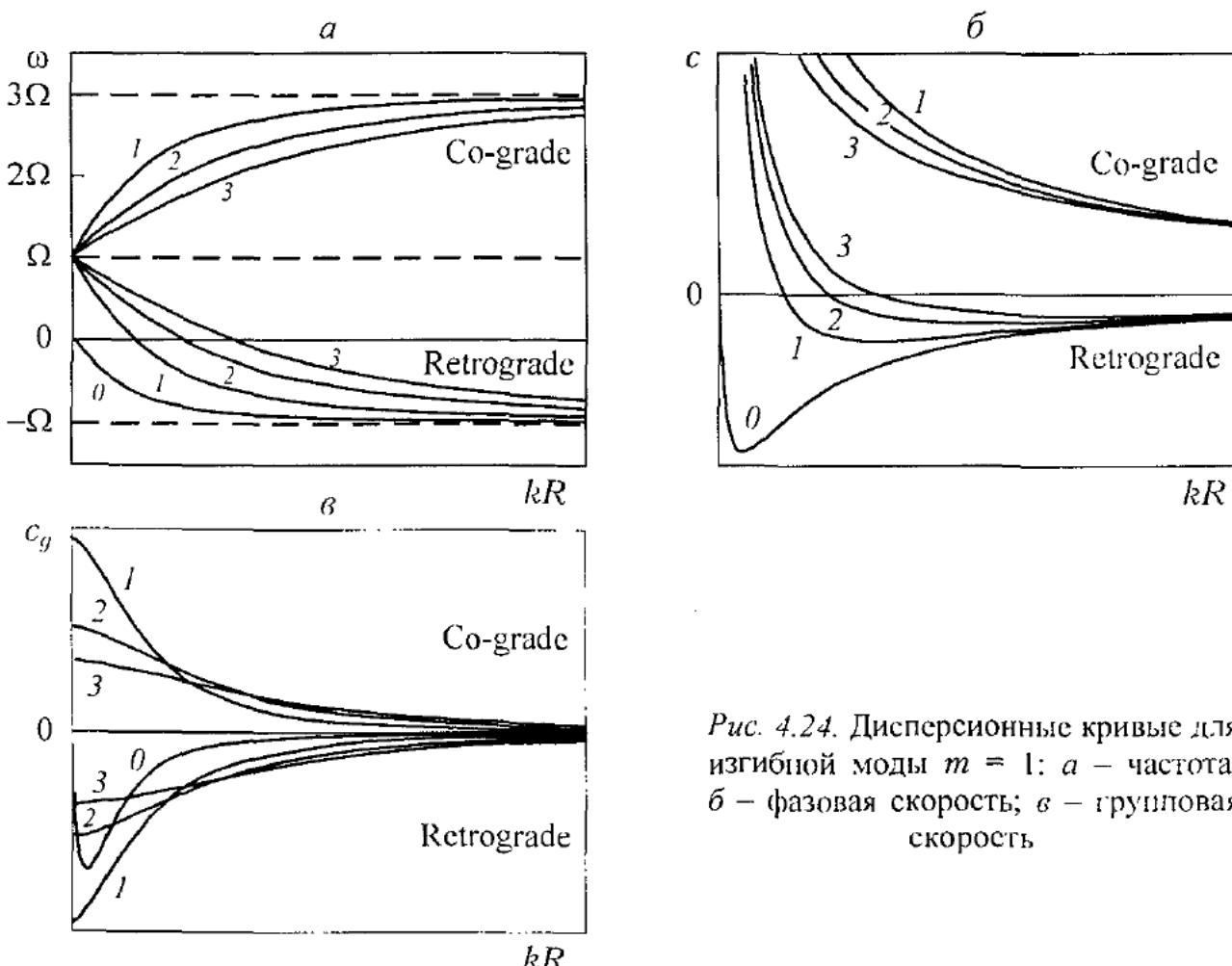


Рис. 4.24. Дисперсионные кривые для изгибной моды $m = 1$: а – частота; б – фазовая скорость; в – групповая скорость

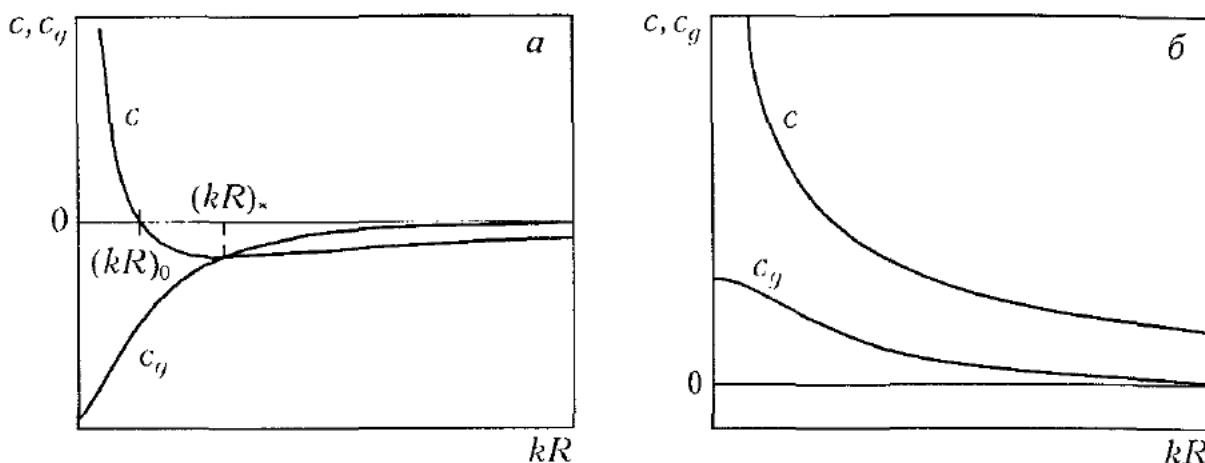


Рис. 4.25. Сравнение фазовых c и групповых c_g скоростей для встречных (а) и спутниковых (б) мод. Корень номер 1

Другая особенность встречных мод состоит в наличии локального экстремума фазовой скорости c при некотором значении безразмерного волнового числа $kR = (kR)_*$ (см. рис. 4.24б). Из условия существования экстремума

$$dc/dk = d(\omega/k)dk = (c_g - c)/k = 0$$

следует, что он реализуется в точке равенства групповой и фазовой скоростей. Сравнивая фазовую и групповую скорости, следует выделить три характерные области волновых чисел (рис. 4.25а) для корней с номерами 1 и выше. При $kR < (kR)_0$ фазовая и групповая скорости имеют разные знаки, при $(kR)_0 < kR < (kR)_*$ $|c_g| > c$, а при $kR > (kR)_*$ $|c_g| < c$. Для “co-grade” моды фазовая скорость всегда превышает групповую (рис. 4.25б) и обе они являются положительными.

Напомним, что здесь фазовая и групповая скорости определены по аксиальному волновому числу и поэтому означают скорости распространения фазы и энергии возмущений вдоль оси вихря.

4.5.4. Эволюция начальных локализованных возмущений. Механизмы распространения воли

В данном разделе рассмотрим эволюцию начальных локализованных возмущений разного вида на вихре Рэнкина. Такая задача рассмотрена в работе Arendt *et al.* [1997]. Показано, что всякое начальное возмущение эволюционирует в пакеты волн Кельвина. Для нас эта проблема важна по двум причинам. Во-первых, прослеживается связь с экспериментом, где возможна генерация подобных возмущений; во-вторых, здесь объясняются механизмы распространения волн Кельвина, что имеет весьма общее значение даже для вихрей иной структуры, нежели вихрь Рэнкина. Ввиду громоздких выкладок, мы не приводим метод решения, отсылая читателя к первоисточнику, а проанализируем сразу результаты расчетов. Отметим только, что в упомянутой работе применено

преобразование Лапласа и решения получены в аналитической форме, а также то, что некоторые обозначения здесь и в первоисточнике могут не совпадать.

По-прежнему элементарное гармоническое возмущение представляем через экспоненту $\exp[i(kz + m_0 - \omega_n t)]$, и по-прежнему справедливо дисперсионное уравнение (4.48). Однако поскольку здесь используется обозначение ω для завихренности, то круговую частоту обозначим как ω_n , где индекс n имеет смысл радиального числа (или номера корня уравнения (4.48) при фиксированном m).

Задача об эволюции начальных возмущений решается Arendt *et al.* [1997] на основе линеаризованных уравнений Эйлера и условий сопряжения на вихревой пелене (типа выписанных в п. 4.4.1) с применением преобразования Лапласа. Рассмотрим случаи $m = 0, -1, -2$ с соответствующими начальными условиями.

Случай $m = 0$. Начальное возмущение задается в виде локального увеличения осевой компоненты завихренности ω_z в ядре вихря на длине порядка радиуса ядра R

$$\omega_z(0) = \frac{2\Omega\varepsilon}{R\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2R^2}.$$

Такая запись соответствует Гауссову распределению возмущения завихренности вдоль оси z . Здесь 2Ω – невозмущенное значение завихренности; отношение $\varepsilon/R \ll 1$, что означает малость возмущения завихренности по сравнению с 2Ω . Размер R возмущенной зоны по z выбран на основе опытных наблюдений. Кроме того, полагаем при $t = 0$ отсутствие азимутальной составляющей завихренности

$$\omega_0(0) = 0.$$

Из исходных уравнений можно показать, что начальное возмущение радиуса трубы δR описывается законом

$$\left. \frac{\delta R}{R} \right|_{t=0} = -\frac{\varepsilon}{2R\sqrt{2\pi}} e^{z^2/2R^2},$$

т. е. локальное увеличение завихренности приводит к локальному утоньшению вихревой трубы.

Далее на рис. 4.26–4.28 приводятся результаты расчетов эволюции распределений ω_z , ω_0 , $d\omega_z/dt$ и $\delta R/R$. Величина $d\omega_z/dt$ имеет крайне важное значение, поскольку представляет собой изменение аксиальной завихренности, обусловленное растяжением/сжатием вихревых линий (*stretching/scunching*, см. также п. 2.2). Рис. 4.26, 4.27 представлены в виде контуров уровней соответствующих величин, причем области с положительными значениями затенены. Время t нормировано на $2\pi/\Omega$.

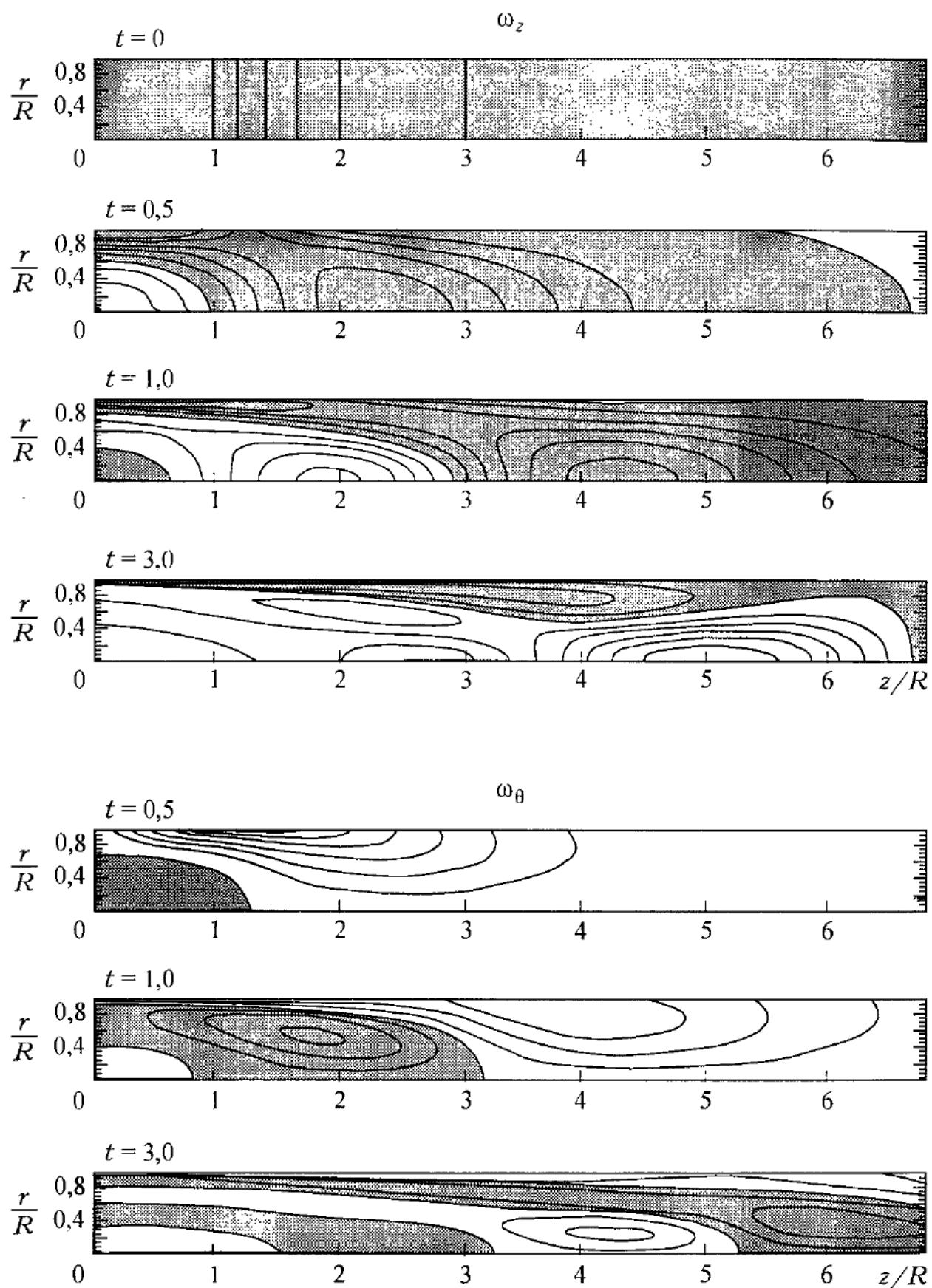


Рис. 4.26. Распределения компонент завихренности для волнового пакета с $m = 0$: линии уровней приведены на интервалах 0,1

Для наименьшего корня $q_0 = q_{01}$ получаем максимальную фазовую скорость $c = 2\Omega/1,2$, которая почти совпадает со значением окружной скорости на границе ядра вихря. Видно также, что в длинноволновом пределе осесимметричные волны являются бездисперсионными.

Если длина волны сравнима или меньше размера ядра вихря, т. е. $kR \gtrsim 1$, то решение уравнений (4.51), (4.52) можно получить только численными методами. Заметим, что при фиксированном значении волнового числа k уравнение (4.51) имеет бесконечное число корней $q_n(k)$. Каждому корню (*радиальной моде*) под номером n соответствует своя дисперсионная кривая. Примеры численных расчетов частоты ω , фазовой c и групповой c_g скоростей по уравнениям (4.51), (4.52) приведены на рис. 4.22 в безразмерной форме. Здесь номер кривой совпадает с порядковым номером корня. Предельным значением частоты для всех корней есть величина $\omega = 2\Omega$, которая следует из (4.52) при $kR \rightarrow \infty$ и $q = \text{const}$. Поведение ω при малых k описывается формулой (4.54). Для фазовой скорости $c = \omega/k$ в длинноволновом пределе справедлива формула (4.55), а в случае коротких волн все кривые выходят на одну асимптотическую зависимость: $c = 2\Omega R/k$. Наконец, групповая скорость для длинных волн совпадает с фазовой скоростью (бездисперсионные волны), а в коротковолновой области стремится к нулю. Из расчетов следует, что для данного корня групповая скорость меньше (или равна) фазовой скорости.

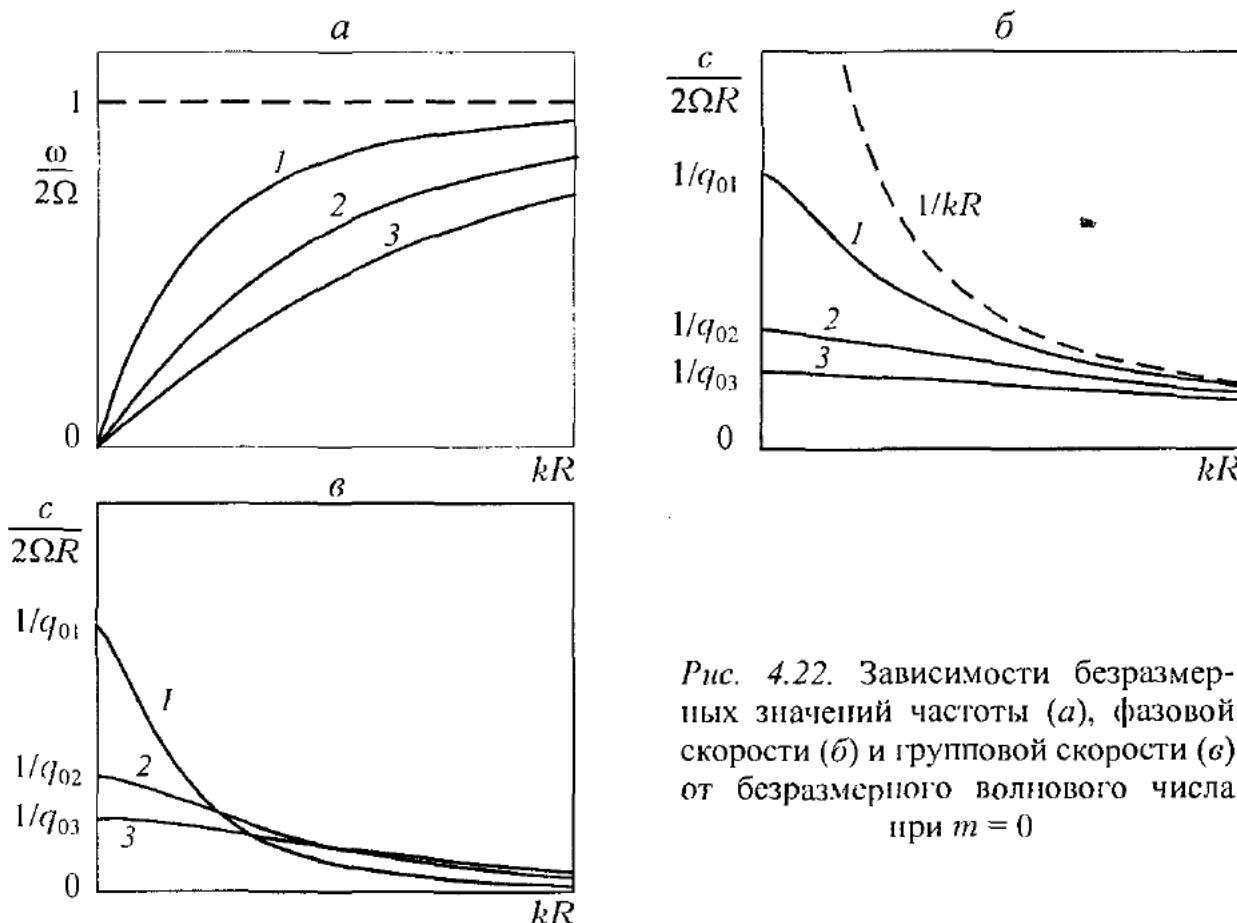


Рис. 4.22. Зависимости безразмерных значений частоты (а), фазовой скорости (б) и групповой скорости (в) от безразмерного волнового числа при $m = 0$

4.5.3. Изгибная мода, $m = 1$

Длинные волны, $kR \ll 1$. При $m = 1$ уравнения (4.48)–(4.50) принимают вид

$$\vartheta = \omega - \Omega,$$

$$\beta^2 = k^2 [4/(\omega/\Omega - 1)^2 - 1], \quad (4.56)$$

$$\frac{J'_1(q)}{q/J_1(q)} - \frac{2}{q^2(\omega/\Omega - 1)} = -\frac{K'_1(kR)}{kR/K_1(kR)}, \quad (4.57)$$

где $q = \beta R$. В длинноволновом приближении ($kR \ll 1$) правую часть в (4.57) можно упростить, используя асимптотические формулы для функций Бесселя

$$\begin{aligned} -\frac{K'_1(kR)}{kR/K_1(kR)} &\approx \frac{1}{k^2 R^2} \cdot \frac{1 - k^2 R^2 (\ln kR)/2 - k^2 R^2 (2\gamma + 1 - \ln 4)/4}{1 + k^2 R^2 (\ln kR)/2 + k^2 R^2 (2\gamma - 1 - \ln 4)/4} \approx \\ &\approx \frac{1}{k^2 R^2} \left[1 + k^2 R^2 (\ln 2 - \gamma - \ln kR) \right]. \end{aligned}$$

Чтобы получить аналитическое решение (4.57), примем дополнительное условие: $\omega \ll \Omega$. Тогда из (4.56) следует, что $\beta \approx k$ и $q \equiv \beta R \ll 1$, т. е. рассматриваются наименьшие корни уравнения (4.57). При таких допущениях можно разложить по малым параметрам и оба члена в левой части (4.57)

$$\begin{aligned} \frac{J'_1(q)}{q/J_1(q)} &\approx \frac{1}{q^2} \cdot \frac{1 - 3q^2/8}{1 - q^2/4} \approx \frac{1}{q^2} - \frac{1}{4} \approx \\ &\approx \frac{1}{k^2 R^2 \left[4/(\omega/\Omega - 1)^2 - 1 \right]} - \frac{1}{4} \approx \frac{1}{3k^2 R^2} \left(1 - \frac{8}{3} \frac{\omega}{\Omega} \right) - \frac{1}{4}, \\ \frac{2}{q^2(1 - \omega/\Omega)} &= \frac{1}{k^2 R^2 \left[4/(\omega/\Omega - 1)^2 - 1 \right] (1 - \omega/\Omega)} \approx \frac{2}{3k^2 R^2} \left(1 - \frac{5}{3} \frac{\omega}{\Omega} \right). \end{aligned}$$

Здесь учли формулу (4.56) и соотношение $q = \beta R$. В результате получаем приближенное уравнение

$$\frac{1}{3k^2 R^2} \left(1 - \frac{8}{3} \frac{\omega}{\Omega} \right) - \frac{1}{4} + \frac{2}{3k^2 R^2} \left(1 - \frac{5}{3} \frac{\omega}{\Omega} \right) = \frac{1}{k^2 R^2} \left[1 + k^2 R^2 \left(\ln \frac{2}{kR} - \gamma \right) \right],$$

откуда имеем окончательно дисперсионное соотношение [Kelvin, 1880]

$$\frac{\omega}{\Omega} = -\frac{1}{2} k^2 R^2 \left(\ln \frac{1}{kR} + \frac{1}{4} + 0,1159 \right). \quad (4.58)$$

Для предельно длинных волн эта формула еще более упрощается:

$$\omega/\Omega = -0,433 k^2 R^2.$$

Данная мода вызывает смещение оси вихря, вследствие чего ось принимает вид *левого винта* (с большим шагом и малой амплитудой из-за принятых допущений). Знак минус у частоты означает, что возмущение движется вокруг цилиндрической поверхности против вращения среды. Поэтому такая мода называется *встречной* (*retrograde mode*).

Если $m = -1$, то ось возмущенного вихря становится *правовинтовой*. Но выводы остаются прежними. Действительно, правая часть в (4.57) не меняется, так как $K_{-m} = K_m$. Первый член слева также не меняется, поскольку функция Бесселя J_m меняет знак и в числителе, и в знаменателе. В остальные члены m входит как комплекс $m\Omega$. Изменение m от (+1) до (-1) эквивалентно изменению направления вращения жидкости. Таким образом, возмущение опять движется против направления вращения жидкости. Схематично оба случая изображены на рис. 4.23.

Произвольное значение kR . В этом случае имеем систему уравнений (4.56), (4.57), которая может быть решена численными методами. Для каждого фиксированного значения kR уравнение (4.57) имеет бесконечное количество корней. Каждому корню соответствует своя дисперсионная кривая, состоящая

$$m = +1; \Omega > 0; \omega < 0 \quad m = -1; \Omega < 0; \omega > 0$$

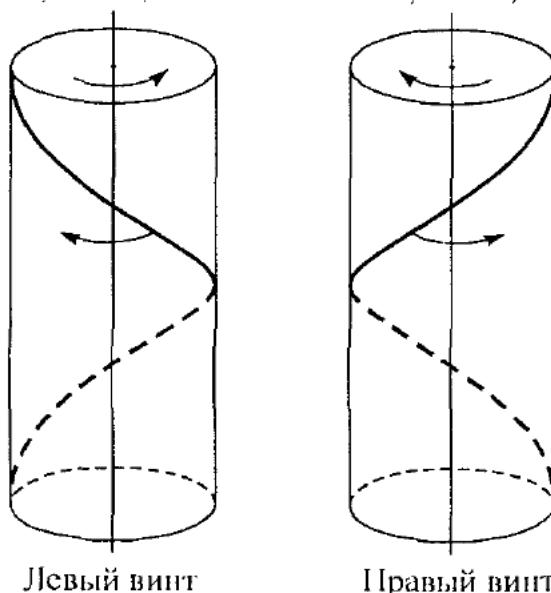


Рис. 4.23. Схематичное изображение оси вихря при возмущении в виде изгибных мод $m = \pm 1$

из одной или двух ветвей. Примеры численного расчета дисперсионных кривых для первых четырех корней приведены на рис. 4.24. Здесь номер кривой соответствует номеру корня (или номеру радиальной моды). Моды, лежащие в области $\omega < \Omega$, являются *встречными* (*retrograde mode*). Моды с $\omega > \Omega$ есть *спутные моды* (*co-grade modes*), поскольку такие возмущения движутся в направлении вращения жидкости. Как следует из графиков, корни 1, 2, 3 и далее состоят из двух ветвей, соответствующих “retrograde” и “co-grade” модам. Корень “0” представляет только встречную моду, и лишь она имеет асимптоту $\omega \rightarrow 0$ при $kR \rightarrow 0$. В коротковолновой области ($kR \rightarrow \infty$) частота всех встречных мод стремится к общему пределу $\omega = -\Omega$, а спутных мод – к значениюю $\omega = 3\Omega$.

Интересной особенностью встречных мод является возможность обращения в нуль частоты ω (и фазовой скорости c тоже) при некоторых значениях kR . Из (4.56) следует, что при $\omega = 0$ $\beta R = \sqrt{3}kR$. Следовательно, нулевая частота реализуется для значений kR , являющихся корнями уравнения

$$\frac{1}{\sqrt{3}kR} \cdot \frac{J_1'(\sqrt{3}kR)}{J_1(\sqrt{3}kR)} + \frac{2}{3k^2 R^2} = -\frac{K_1'(kR)}{kR K_1(kR)}.$$

Первые три корня есть: $(kR)_0 = 2,5; 4,4; 6,2$.

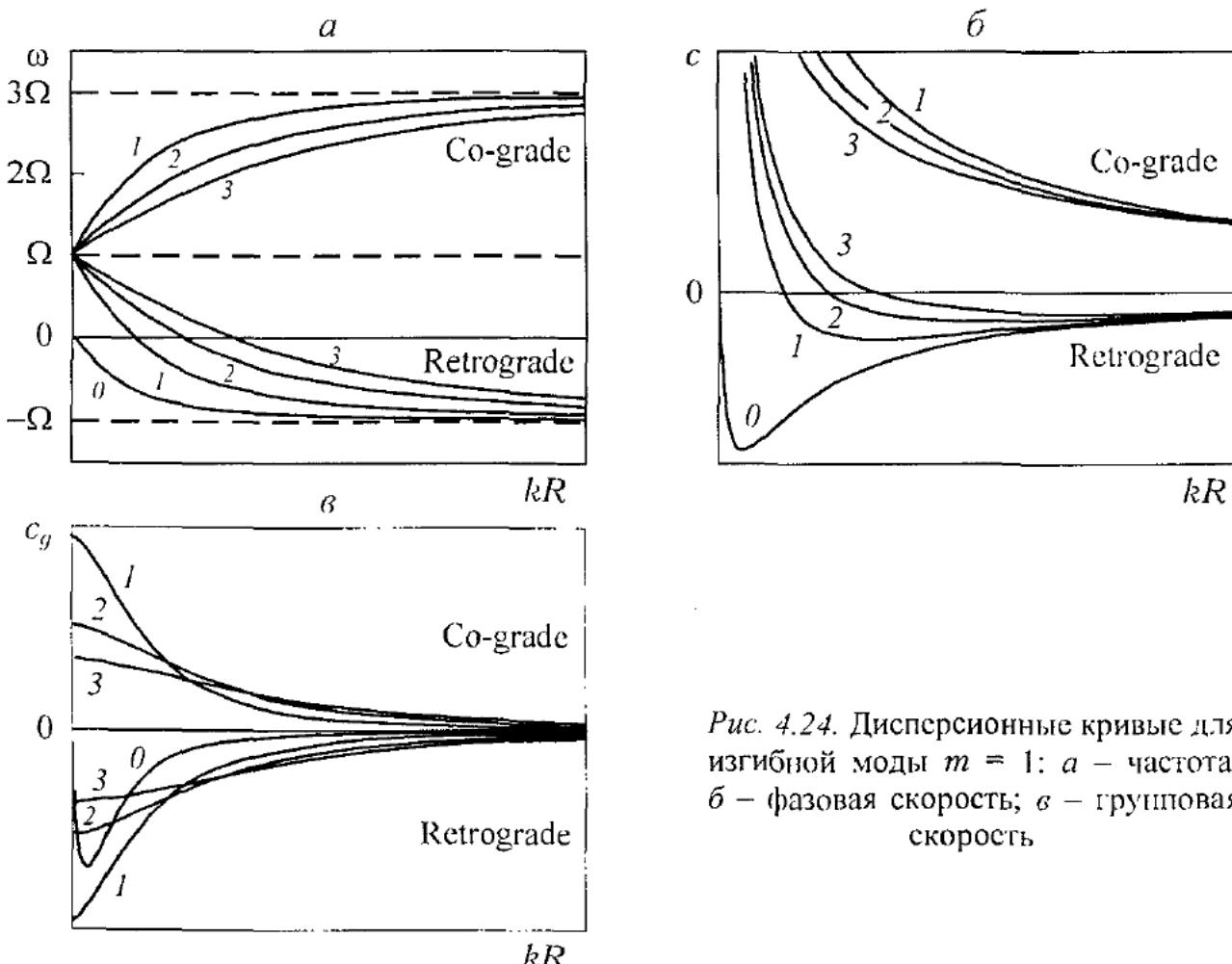


Рис. 4.24. Дисперсионные кривые для изгибной моды $m = 1$: *a* – частота; *b* – фазовая скорость; *c* – групповая скорость

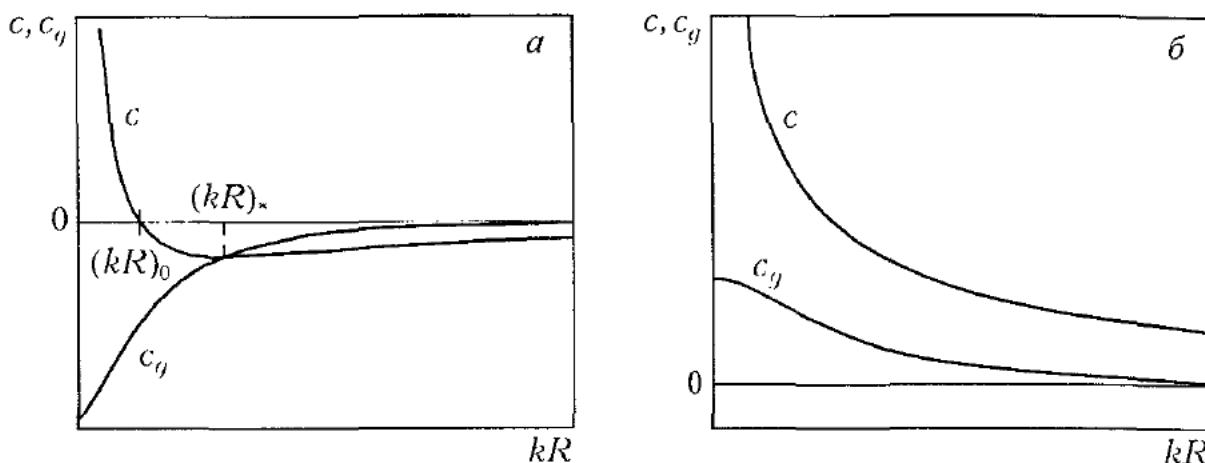


Рис. 4.25. Сравнение фазовых c и групповых c_g скоростей для встречных (а) и спутных (б) мод. Корень номер 1

Другая особенность встречных мод состоит в наличии локального экстремума фазовой скорости c при некотором значении безразмерного волнового числа $kR = (kR)_*$ (см. рис. 4.24б). Из условия существования экстремума

$$dc/dk = d(\omega/k)dk = (c_g - c)/k = 0$$

следует, что он реализуется в точке равенства групповой и фазовой скоростей. Сравнивая фазовую и групповую скорости, следует выделить три характерные области волновых чисел (рис. 4.25а) для корней с номерами 1 и выше. При $kR < (kR)_0$ фазовая и групповая скорости имеют разные знаки, при $(kR)_0 < kR < (kR)_*$ $|c_g| > c$, а при $kR > (kR)_*$ $|c_g| < c$. Для “co-grade” моды фазовая скорость всегда превышает групповую (рис. 4.25б) и обе они являются положительными.

Напомним, что здесь фазовая и групповая скорости определены по аксиальному волновому числу и поэтому означают скорости распространения фазы и энергии возмущений вдоль оси вихря.

4.5.4. Эволюция начальных локализованных возмущений. Механизмы распространения воли

В данном разделе рассмотрим эволюцию начальных локализованных возмущений разного вида на вихре Рэнкина. Такая задача рассмотрена в работе Arendt *et al.* [1997]. Показано, что всякое начальное возмущение эволюционирует в пакеты волн Кельвина. Для нас эта проблема важна по двум причинам. Во-первых, прослеживается связь с экспериментом, где возможна генерация подобных возмущений; во-вторых, здесь объясняются механизмы распространения волн Кельвина, что имеет весьма общее значение даже для вихрей иной структуры, нежели вихрь Рэнкина. Ввиду громоздких выкладок, мы не приводим метод решения, отсылая читателя к первоисточнику, а проанализируем сразу результаты расчетов. Отметим только, что в упомянутой работе применено

преобразование Лапласа и решения получены в аналитической форме, а также то, что некоторые обозначения здесь и в первоисточнике могут не совпадать.

По-прежнему элементарное гармоническое возмущение представляем через экспоненту $\exp[i(kz + m\theta - \omega_n t)]$, и по-прежнему справедливо дисперсионное уравнение (4.48). Однако поскольку здесь используется обозначение ω для завихренности, то круговую частоту обозначим как ω_n , где индекс n имеет смысл *радиального* числа (или номера корня уравнения (4.48) при фиксированном m).

Задача об эволюции начальных возмущений решается Arendt *et al.* [1997] на основе линеаризованных уравнений Эйлера и условий сопряжения на вихревой пелене (типа выписанных в п. 4.4.1) с применением преобразования Лапласа. Рассмотрим случаи $m = 0, -1, -2$ с соответствующими начальными условиями.

Случай $m = 0$. Начальное возмущение задается в виде локального увеличения осевой компоненты завихренности ω_z в ядре вихря на длине порядка радиуса ядра R

$$\omega_z(0) = \frac{2\Omega\varepsilon}{R\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2R^2}.$$

Такая запись соответствует Гауссову распределению возмущения завихренности вдоль оси z . Здесь 2Ω – невозмущенное значение завихренности; отношение $\varepsilon/R \ll 1$, что означает малость возмущения завихренности по сравнению с 2Ω . Размер R возмущенной зоны по z выбран на основе опытных наблюдений. Кроме того, полагаем при $t = 0$ отсутствие азимутальной составляющей завихренности

$$\omega_0(0) = 0.$$

Из исходных уравнений можно показать, что начальное возмущение радиуса трубы δR описывается законом

$$\left. \frac{\delta R}{R} \right|_{t=0} = -\frac{\varepsilon}{2R\sqrt{2\pi}} e^{z^2/2R^2},$$

т. е. локальное *увеличение* завихренности приводит к локальному *утоньшению* вихревой трубы.

Далее на рис. 4.26–4.28 приводятся результаты расчетов эволюции распределений ω_z , ω_0 , $d\omega_z/dt$ и $\delta R/R$. Величина $d\omega_z/dt$ имеет крайне важное значение, поскольку представляет собой изменение аксиальной завихренности, обусловленное *растяжением/сжатием вихревых линий* (*stretching/scunching*, см. также п. 2.2). Рис. 4.26, 4.27 представлены в виде контуров уровней соответствующих величин, причем области с положительными значениями затенены. Время t нормировано на $2\pi/\Omega$.

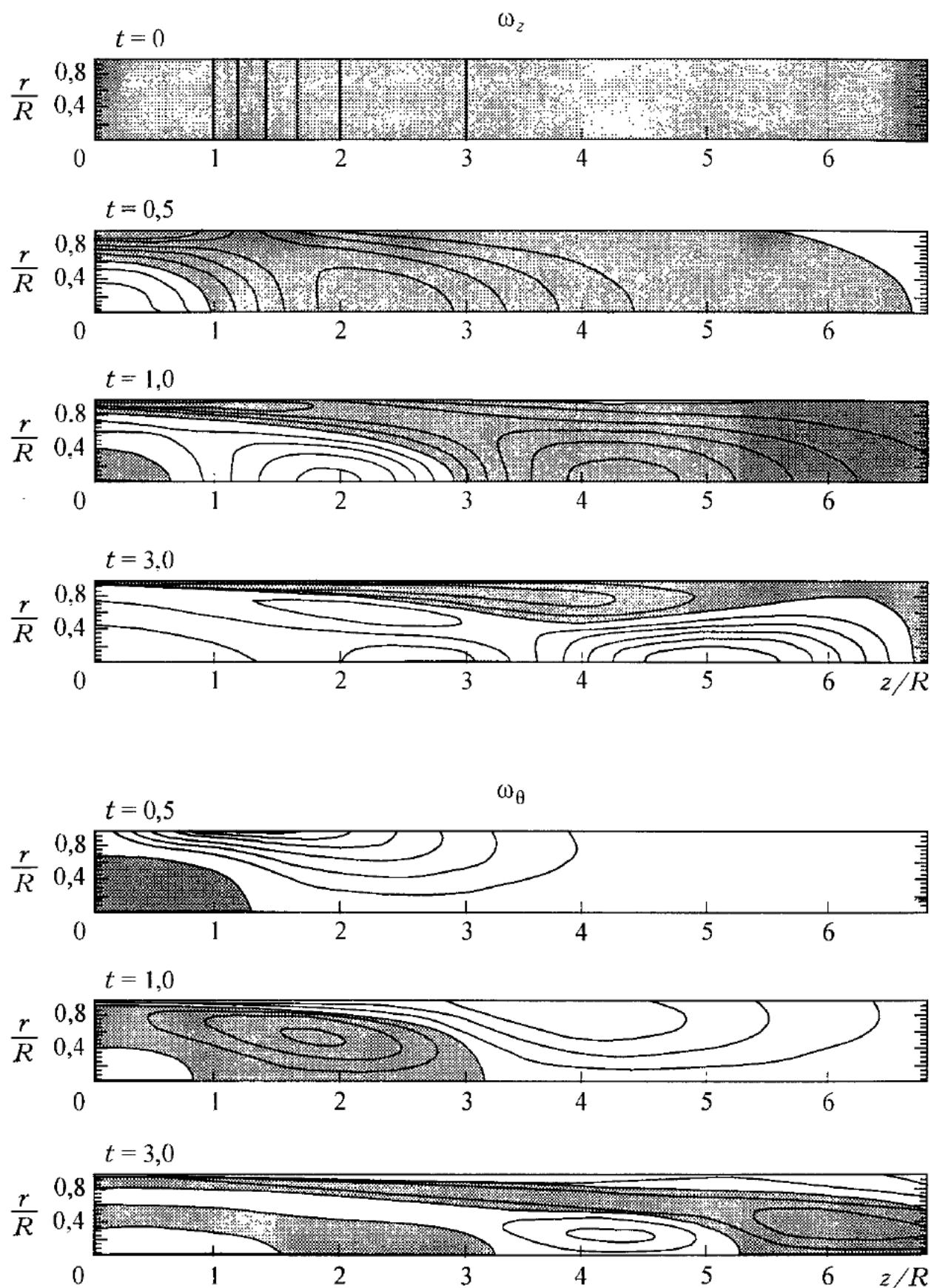


Рис. 4.26. Распределения компонент завихренности для волнового пакета с $m = 0$: линии уровней приведены на интервалах 0,1

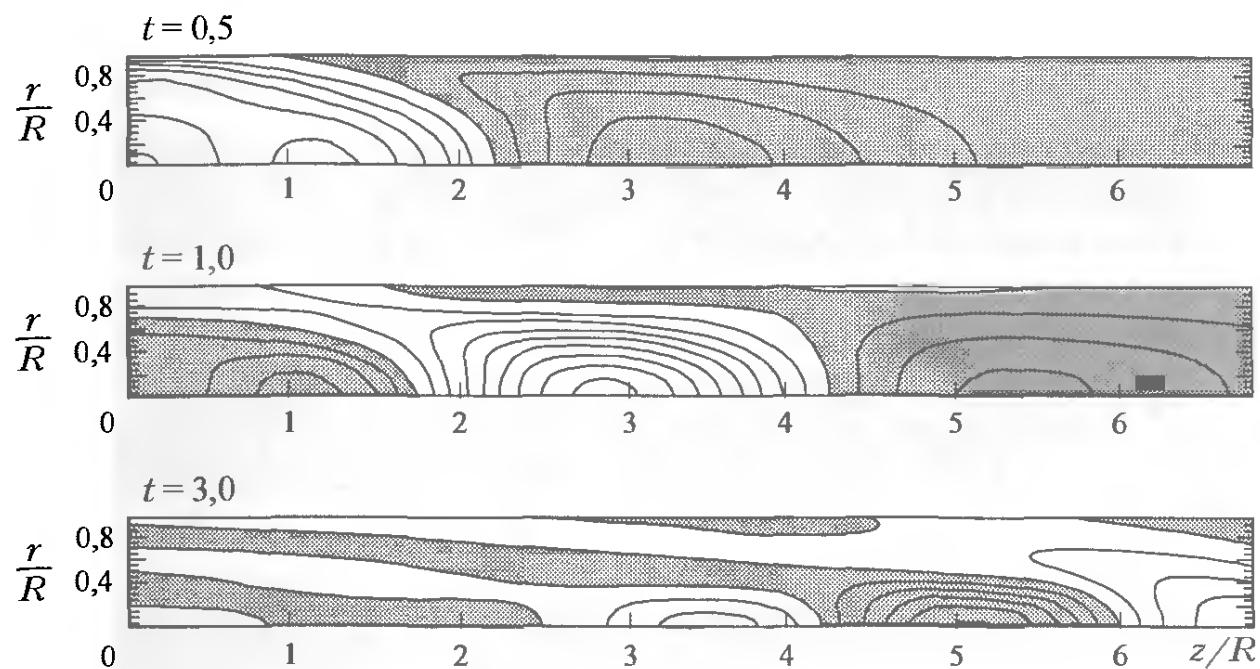


Рис. 4.27. Распределения $\partial\omega_z/\partial t$ для волнового пакета с $m = 0$: линии уровней приведены на интервалах 0,05

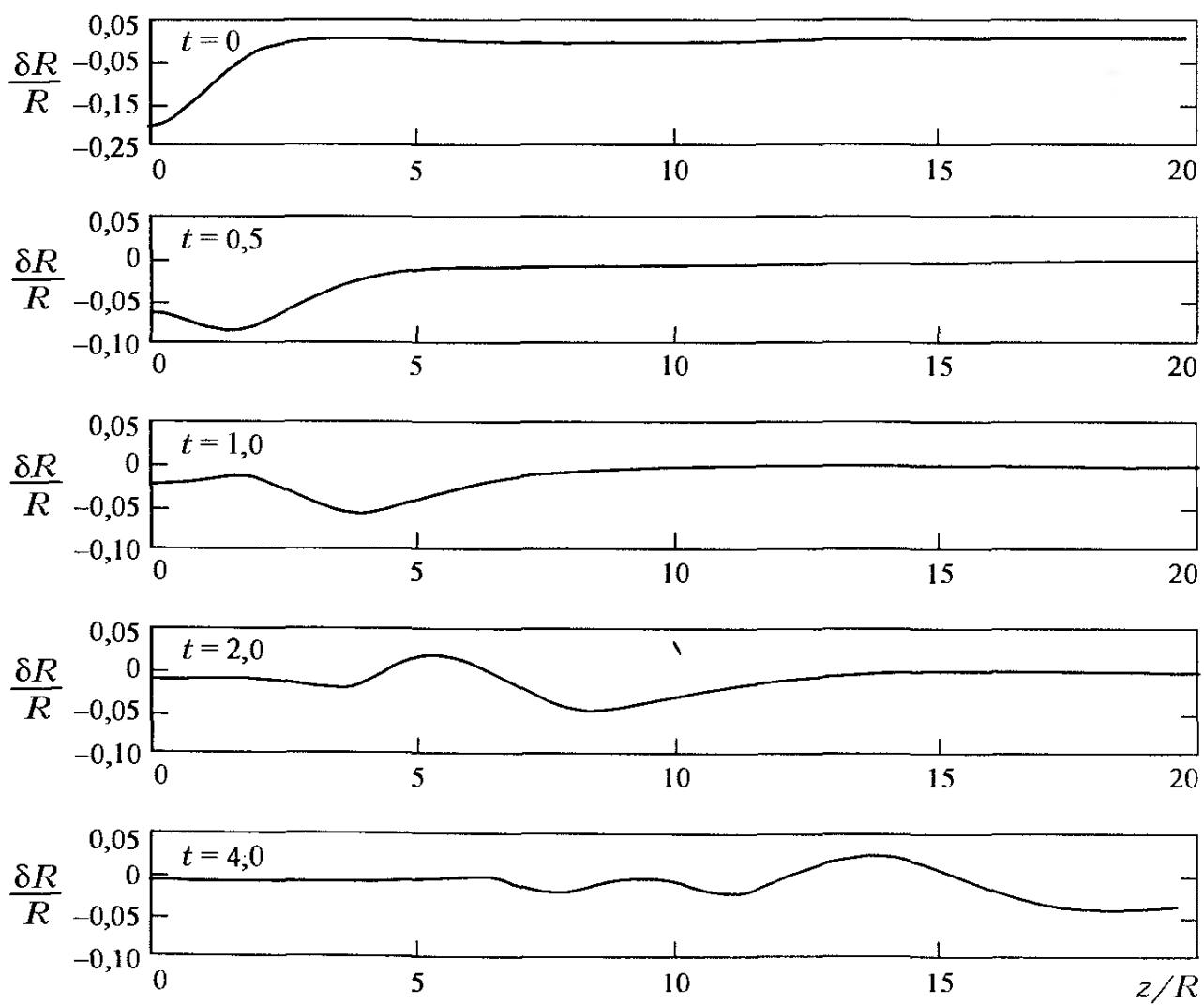


Рис. 4.28. Возмущение радиуса вихревой трубы для волнового пакета с $m = 0$

Основные выводы заключаются в следующем. Прежде всего обратим внимание на то, что $\omega_z = \partial u_\theta / \partial r$. Тогда, если ω_z меняется вдоль оси z при $r = \text{const}$, то это соотношение означает наличие дифференциального вращения, вследствие чего вихревые линии начинают закручиваться по спирали. Это отчетливо видно на рис. 4.26 для азимутальной компоненты завихренности ω_θ . При $t = 0,5$ появляются области с отрицательным значением ω_θ , а при больших временах положительные и отрицательные области чередуются и распространяются по обе стороны от начального положения возмущения. В свою очередь, ω_θ индуцирует течение в плоскости (z, r) , так как $\omega_\theta = \partial u_r / \partial z - \partial u_z / \partial r$. Для нас важно появление аксиального течения, неоднородного по z . Такое течение приводит к растяжению/сжатию вихревых линий, как это видно из рис. 4.26 ($\partial \omega_z / \partial t \neq 0$), т. е. к изменению ω_z . Соответствующее поведение радиуса вихревой трубки показано на рис. 4.28.

Описанный процесс позволяет рассматривать распространение осесимметричных возмущений на вихревой трубке как процесс скручивания и раскручивания вихревых линий, что хорошо видно и для волн Кельвина. Рис. 4.29 демонстрирует мгновенные картины распределения ω_θ , $\partial \omega_z / \partial t$ и ω_z для волны Кельвина с $m = 0$, $n = 0$ и $k = 1/R$ (в работе Arendt *et al.* [1997] $n = 1$).

Взаимосвязь эволюции начального возмущения с волнами Кельвина дает возможность объяснить сложную структуру течения на рис. 4.26–4.28. Причина состоит в том, что для $m = 0$ имеется множество мод с разным радиальным числом n (номером корня уравнения (4.51)), которые имеют различную радиальную структуру (чем выше n , тем более сложную) и различные частоты. С другой стороны, волны Кельвина обладают дисперсией (см. рис. 4.22).

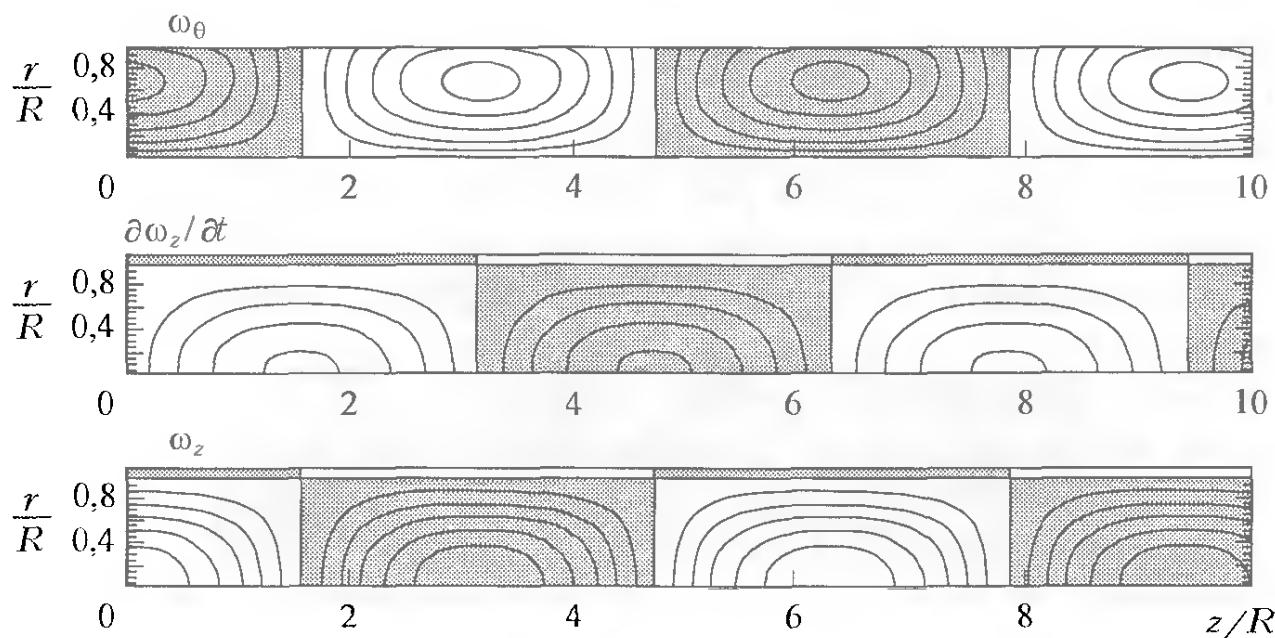


Рис. 4.29. Распределения ω_z , ω_θ , $\partial \omega_z / \partial t$ для волны Кельвина с $m = 0$, $n = 0$, $k = 1/R$: линии уровней приведены на интервалах 0,33

Впервые это уравнение было выведено Howard, Gupta [1962]. Границные условия записываются как (см. Batchelor, Gill [1962])

$$\begin{aligned}\hat{u}(0) &= 0, \quad |m| \neq 1, \\ \hat{u}'(0) &= 0, \quad |m| = 1, \\ \hat{u} &\rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty.\end{aligned}$$

Обратим внимание, что уравнение (4.63) инвариантно относительно преобразования: $q \rightarrow -q$, $m \rightarrow -m$, т. е. если изменить знак азимутальной моды, то результат останется прежним при одновременном изменении направления закрутки потока. Это утверждение очевидно при отсутствии осевого движения, но нетривиально при $W \neq 0$.

В случае осесимметричных возмущений ($m = 0$) после замены $\hat{u} = gF(r)$ уравнение (4.63) существенно упрощается

$$\left[(c - W)^2 F^* \right]' - k^2 (c - W)^2 F + \Phi F = 0, \quad (4.64)$$

где $c = \omega/k$ – фазовая скорость возмущений, а функция Φ определена в (4.59). Именно это уравнение было использовано Howard, Gupta [1962] для вывода критерия устойчивости (4.50).

В общем случае трехмерных возмущений уравнение (4.63) необходимо решать численными методами. Основные результаты были получены в работах Lessen *et al.* [1974], Duck, Foster [1980], Leibovich, Stewartson [1983], Mayer, Powell [1992], Olendraru *et al.* [1996]. Lessen *et al.* путем преобразования $F = g\hat{u}/r$ свели уравнение (4.63) к каноническому виду

$$f_2(r)F'' + f_1(r)F' + f_0(r)F = 0$$

с граничным условием: $F(0) = F(\infty) = 0$. Задача на собственные значения решалась численно методом Рунге – Кутта во временной постановке, т. е. определялась комплексная фазовая скорость c как собственное значение при заданных k , m , q . При этом величина α в (4.62) полагалась равной нулю, что означает отсутствие аксиального течения вдали от ядра вихря. Расчеты проведены для первых шести неосесимметричных отрицательных мод и первой положительной моды. Упор сделан на отрицательные моды, более неустойчивые, чем положительные. Осесимметричные возмущения не рассматривались, так как на основе общего анализа Howard, Gupta [1962] предполагалась их устойчивость. Впоследствии Mayer, Powell [1992] прямыми численными расчетами продемонстрировали устойчивость Q -вихря относительно моды с $m = 0$.

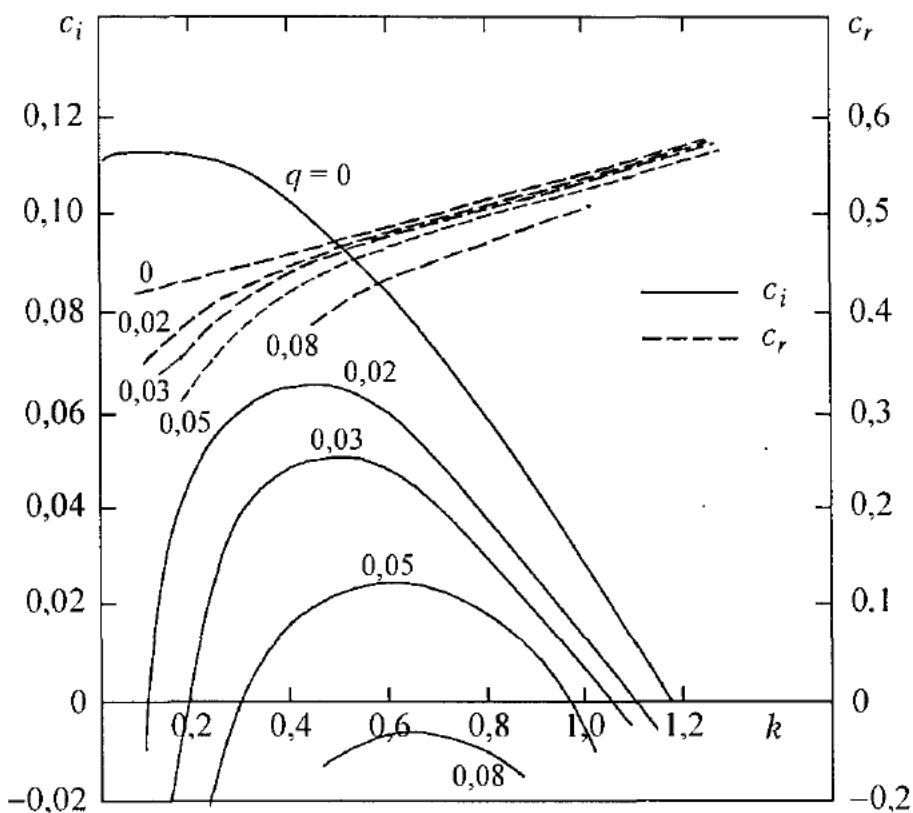


Рис. 4.33. Зависимость дисперсионных кривых для Q -вихря от параметра крутки q при $m = +1$ [Lessen *et al.*, 1974]

Типичные примеры расчетов приведены на рис. 4.33–4.35. В случае положительной азимутальной моды ($m = +1$, рис. 4.33) фазовая скорость c_r монотонно растет с увеличением волнового числа, в то время как зависимость $c_i(k)$ при фиксированном q имеет локальный максимум. Видно, что крутка стабилизирует течение (относительно возмущений с $m = +1$). Полная стабилизация наступает при некотором критическом значении q , равном 0,0739 (по уточненным расчетам Mayer, Powell [1992]).

Инкремент амплитуды ω_i для отрицательных спиральных мод намного больше, чем для положительных мод с тем же значением $|m|$, и также имеет локальный максимум $\omega_{i\max}$ (см. рис. 4.34). При фиксированном значении q величина $\omega_{i\max}$ растет с ростом $|m|$. Влияние крутки на устойчивость немонотонное (см. рис. 4.35б), и для каждой азимутальной моды предельное значение величины $\omega_{i\max}$ достигается при определенных значениях параметра q . На основе асимптотической теории Leibovich, Stewartson [1983] показано, что $\omega_{i\max}$ монотонно стремится к предельному значению 0,459 при $m \rightarrow -\infty$. Впоследствии эти выводы были подтверждены численными расчетами Mayer, Powell [1992] (см. табл. 4.2). Другим важным выводом упомянутых работ является то, что Q -вихрь устойчив относительно любых линейных возмущений при достаточно сильной закрутке, превышающей значение $q \approx 1,5$.

Тем самым Q -вихрь существенно отличается от вихря Рэнкина с аксиальным протоком, неустойчивым при любых значениях крутки (см. рис. 4.15б,г). Фазовая скорость отрицательных мод растет с увеличением k (рис. 4.35а), как и в случае положительных m .

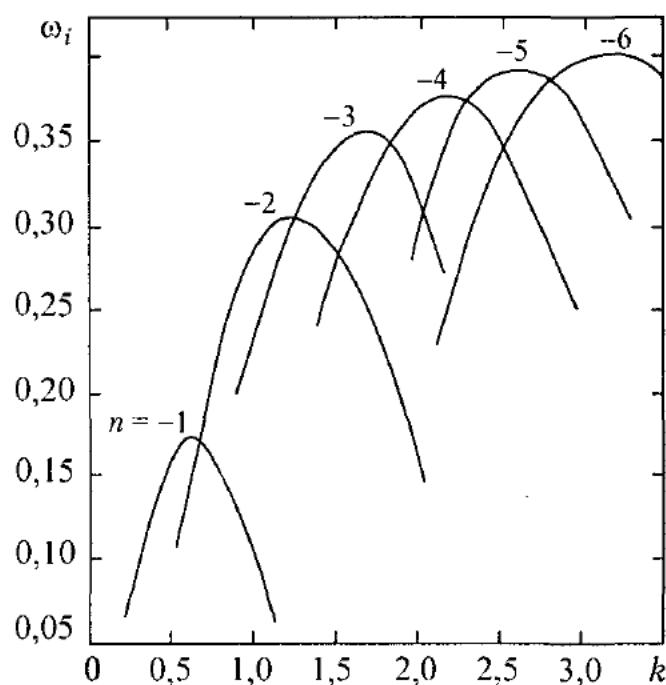


Рис. 4.34. Зависимость инкремента ω_i от волнового числа k для отрицательных спиральных мод при $q = 0,8$ [Lessen *et al.*, 1974]

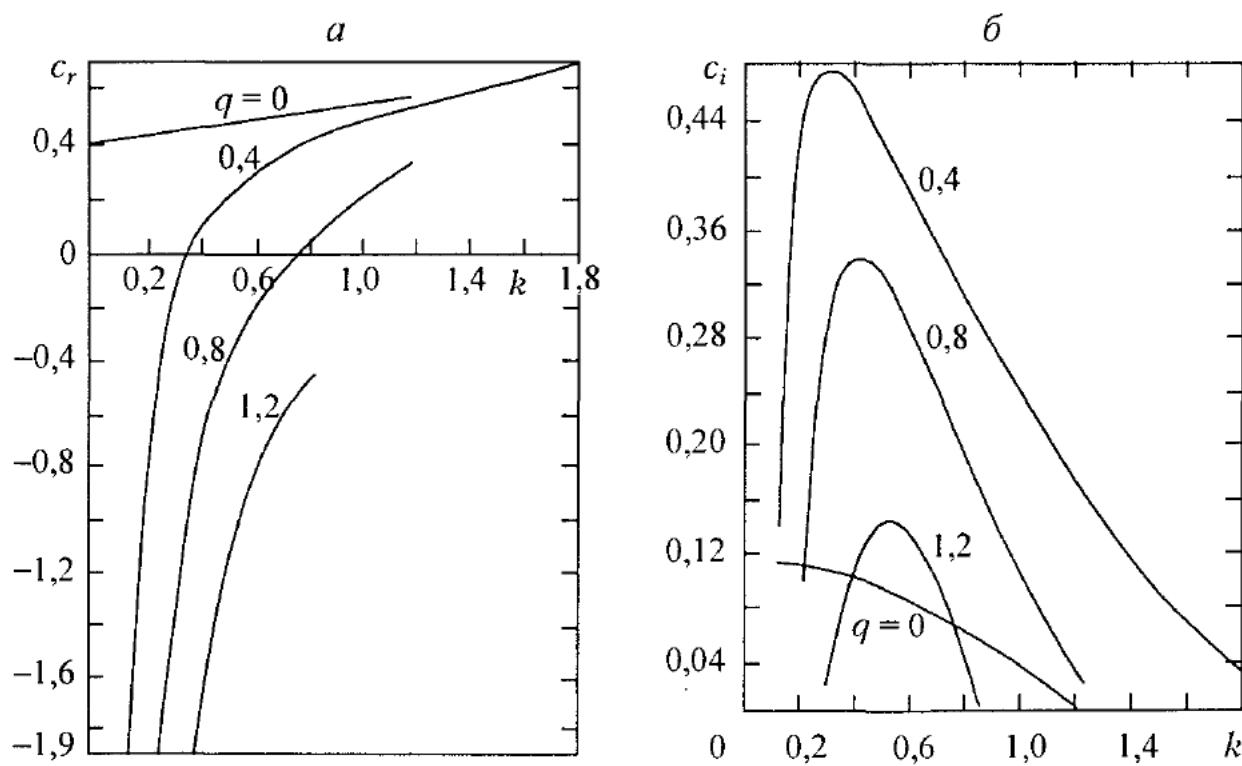


Рис. 4.35. Зависимость действительной (а) и минимум (б) частей комплексной фазовой скорости от волнового числа для разных значений параметра q при $m = -1$ [Lessen *et al.*, 1974]

Таблица 4.2. Положение и инкремент возмущений максимального роста для разных значений азимутального волнового числа m (численный расчет Mayer, Powell [1992]).

m	q	$k/ m $	$\omega_{i\max}$
-1	0,458	0,811	0,24244
-2	0,693	0,591	0,31382
-5	0,833	0,539	0,39217
-10	0,861	0,531	0,42152
-100	0,872	0,530	0,45006
$-\infty$	0,871	0,531	0,45876
$-\infty^*$	0,870	0,532	0,45900

* Асимптотическая теория Leibovich, Stewartson [1983].

Наиболее полный анализ невязкой неустойчивости Q -вихря во всем диапазоне m выполнен Mayer, Powell [1992]. Использован более точный метод численного анализа на основе спектрального коллокационного метода с базисными функциями Чебышева. При этом применялось не уравнение (4.63) Howard, Gupta для \hat{u} , а система двух уравнений для \hat{u} и \hat{v} , куда собственное значение g входит линейно. В результате проведено количественное уточнение данных предыдущих исследований, построены режимные карты в координатах $\{k, q\}$.

Пример режимной карты для $m = -1$ показан на рис. 4.36. Здесь изображены изолинии $\omega_i = \text{const} > 0$ с интервалом 0,01. Внешний контур является нейтральной кривой, вне которой течение устойчиво относительно данной моды. Обнаружено, что область неустойчивости наиболее обширна для азимутального волнового числа $m = -1$. Причем, только для $m = -1$ область неустойчивости захватывает диапазон отрицательных значений параметра крутки $q < 0$. Если вспомнить наличие инвариантности относительно преобразования $q \rightarrow -q$, $m = -m$, то существование зоны неустойчивости при $q < 0$ для $m = -1$ означает, что будет неустойчива также и положительная мода $m = +1$ при $q > 0$. Это согласуется с ранними расчетами Lessen *et al.* [1974] (см. рис. 4.33). Предельное отрицательное значение q равно -0,0739 и достигается при $k = 0,63$. С другой стороны, предельное положительное значение q для зоны неустойчивости есть $q \approx 1,5$ (при $k \approx 0,54$). В отсутствие крутки ($q = 0$) неустойчивые волновые числа находятся в диапазоне $0 < k < 1,18$. Верхняя граница неустойчивости расположена в точке $\alpha \approx 2$, $q \approx 0,42$.

Максимальное значение инкремента возмущений равно $\omega_{i\max} = 0,2424$ и достигается в точке $q = 0,458$, $k = 0,811$. Эти данные отличаются от соответствующего результата Lessen *et al.* [1974] ($\omega_{i\max} = 0,147$, $q = 0,32$, $k = 0,3$), что объясняется погрешностью расчетов последних авторов. Из особенностей режимной карты на рис. 4.36 следует отметить двухзонную структуру области неустойчивости с резким изменением параметров течения при $q \approx 0,7$.

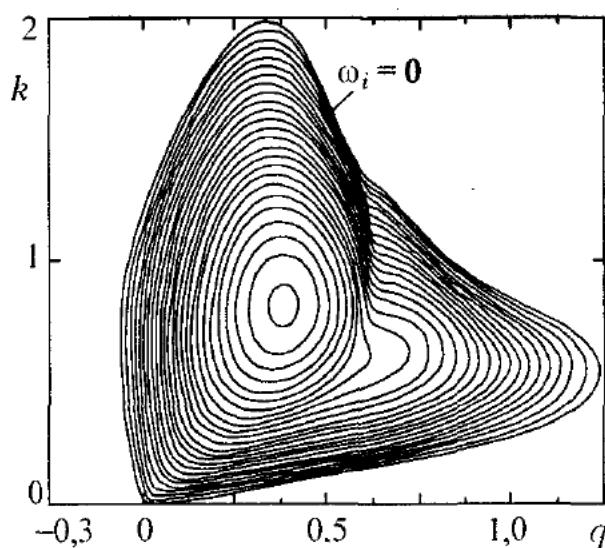


Рис. 4.36. Изолинии $\omega_i = \text{const} > 0$ с интервалом 0,01 для наиболее неустойчивой моды при $m = -1$. Область неустойчивости находится внутри контура $\omega_i = 0$

Mayer, Powell обнаружили также, что для каждого азимутального волнового числа существует несколько неустойчивых мод, в частности 10 для $m = -1$. На рис. 4.36 представлены данные для наиболее неустойчивой первой моды. Каждая последующая мода имеет более узкую зону неустойчивости и меньшие значения инкремента.

С ростом $|m|$ область неустойчивости в координатах $\{q, k/|m|\}$ сужается по сравнению со случаем наиболее неустойчивой моды при $m = -1$, однако максимальные значения инкремента возрастают до предельной величины при $m = -\infty$. Некоторые данные по максимальным значениям инкремента представлены в табл. 4.2. Здесь волновое число дано в приведенном виде $(k/|m|)$, поскольку в такой форме оно стремится к конечному пределу при $m \rightarrow -\infty$.

4.6.3. Неустойчивость Q -вихря. Вязкий анализ

Очевидно, что для реальных вязких течений результаты предыдущего раздела, демонстрирующие рост неустойчивости с увеличением азимутального и аксиального волновых чисел, будут неверными. Поэтому анализ устойчивости Q -вихря без учета эффекта вязкости не может быть полным. Впервые влияние вязкости на невязкие моды изучено Lessen, Pailllet [1974]. Было отмечено, что вязкость играет стабилизирующую роль и что существует критическое число Рейнольдса, ниже которого течение устойчиво. В.К. Ахметов, В.Я. Шкадов [1987] и Khorrami [1991] впервые обнаружили существование чисто вязких неустойчивых мод. Mayer, Powell [1992], Delbende *et al.* [1998], В.К. Ахметов, В.Я. Шкадов [1999] и Olendraru, Seller [2002] провели исследования в более широком диапазоне параметров и уточнили результаты предыдущих работ.

Исходные линеаризованные уравнения для амплитуд возмущений скорости и давления, которые следуют из уравнений Навье – Стокса и сплошности, имеют вид (Mayer, Powell [1992])

$$\begin{aligned} \frac{\hat{u}'^*}{\text{Re}} + \left[ig - \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{m^2 + 1}{r^2} + k^2 \right) \right] \hat{u} + \frac{2}{r} \left(V - \frac{im}{r \text{Re}} \right) \hat{v} &= \hat{p}', \\ \frac{\hat{v}'^*}{\text{Re}} + \left[ig - \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{m^2 + 1}{r^2} + k^2 \right) \right] \hat{v} + \left(V^* - \frac{2mi}{r^2 \text{Re}} \right) \hat{u} &= \frac{im\hat{p}}{r}, \\ \frac{\hat{w}'^*}{\text{Re}} + \left[ig - \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{m^2}{r^2} + k^2 \right) \right] \hat{w} - W' \hat{u} &= ik\hat{p}, \\ i\hat{u}'^* - k\hat{w} - \frac{m\hat{v}}{r} &= 0. \end{aligned}$$

Здесь Re определено по максимальному перепаду аксиальной скорости и радиусу ядра вихря, остальные обозначения те же, что и в п. 4.6.2.

Примеры численного расчета Delbende *et al.* [1998] для невязких мод с учетом вязкости приведены на рис. 4.37. Как видно, вязкость приводит к уменьшению инкремента – тем значительней, чем выше $|m|$. При $\text{Re} = 667$ и $q = 0,8$ все моды с $|m| > 12$ – устойчивы. Другим важным выводом является существование критического числа Рейнольдса Re_c , ниже которого все невязкие моды затухают. Некоторые результаты Mayer, Powell [1992] приведены в табл. 4.3. Минимальное критическое число Рейнольдса, начиная с которого течение неустойчиво, равно всего лишь 13,905 и соответствует моде с $m = -1$. С увеличением $|m|$ число Re_c резко возрастает, но отношение Re_c/m^2 стремится к конечному пределу.

Таблица 4.3. Критические параметры для возникновения неустойчивых невязких мод при учете вязкости [Mayer, Powell, 1992]

m	q	$k/ m $	Re_c	Re_c/m^2
-1	0,337	0,415	13,905	13,905
-2	0,466	0,475	26,26	6,5650
-3	0,515	0,479	46,91	5,2122
-5	0,545	0,473	105,29	4,2116
-10	0,557	0,464	356,32	3,5632
-100	0,550	0,456	$2,9922 \cdot 10^4$	2,9922
-10000	0,542	0,456	$2,8376 \cdot 10^8$	2,8376

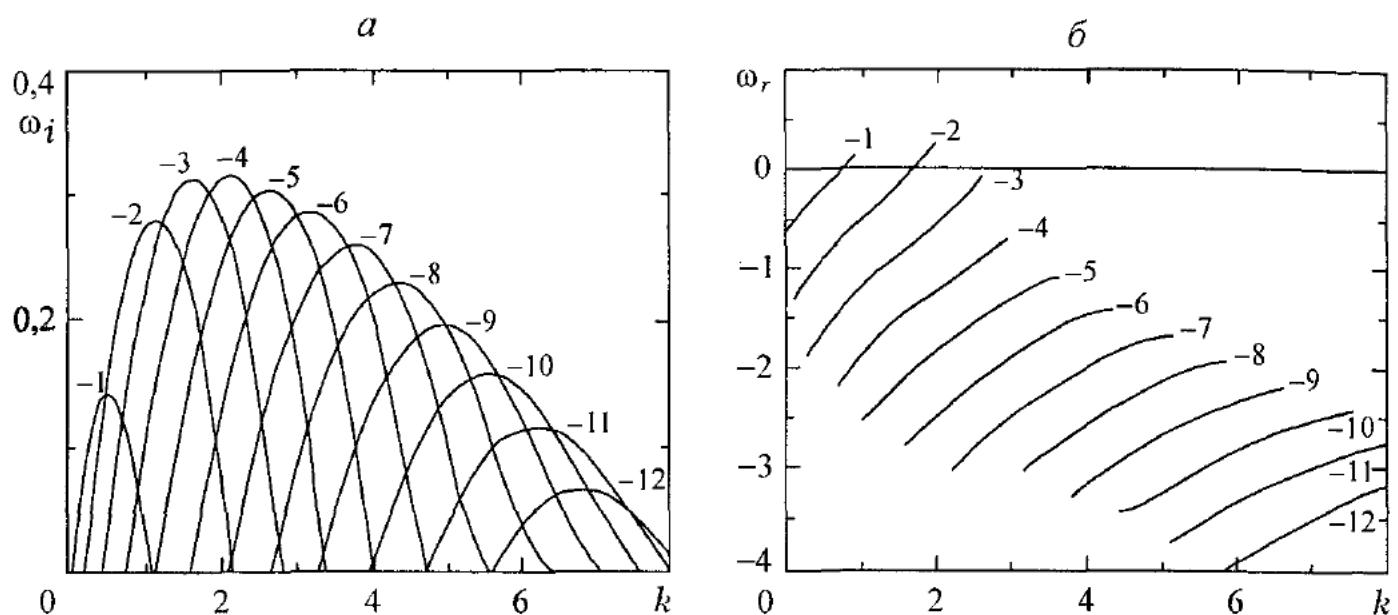


Рис. 4.37. Влияние вязкости на невязкие неустойчивые моды [Delbende *et al.*, 1998]:
 $q = 0,8$; $Re = 667$

Чисто вязкая неустойчивость обнаружена как для осесимметричной, так и спиральных мод [Khorrami, 1991]. Основные результаты расчетов для неустойчивой вязкой осесимметричной моды приведены в табл. 4.4 и рис. 4.38. Критическое число Рейнольдса равно 322,42. С увеличением Re область неустойчивости быстро расширяется. Из таблицы следует, что значения $\omega_{i\max}$ на порядки меньше, чем для невязких мод (см. табл. 4.2). Однако в силу симметрии неустойчивость будет иметь место и для $q < 0$, т. е. там, где невязкие моды затухают. В этом заключается важность учета вязких мод.

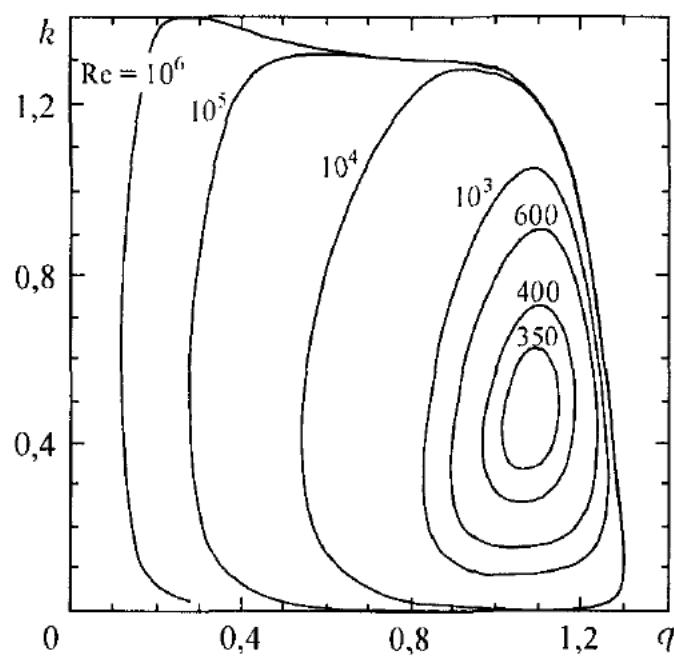


Рис. 4.38. Зависимость нейтральных кривых для осесимметричной моды от числа Re [Mayer, Powell, 1992]

Таблица 4.4. Зависимость положения и величины максимального инкремента, а также диапазонов неустойчивых q и k от Re для осесимметричной вязкой моды [Mayer, Powell, 1992]

Re	q	k	$q\omega_{i \max}$	$q_{\text{неуст}}$	$k_{\text{неуст}}$
322,45	1,08	0,468	$2,55 \cdot 10^{-7}$	—	—
350	1,08	0,471	$1,82 \cdot 10^{-4}$	1,01...1,15	0,33...0,63
10^3	1,05	0,444	$9,03 \cdot 10^{-4}$	0,83...1,26	0,08...1,06
10^4	0,929	0,280	$2,23 \cdot 10^{-4}$	0,54...1,29	0...1,29
10^6	0,40	0,180	$3,07 \cdot 10^{-6}$	0,12...1,30	0...1,41

Таблица 4.5. Зависимость положения и величины максимального инкремента, а также диапазонов неустойчивых q и k от Re для спиральной вязкой моды $m = -1$ [Mayer, Powell, 1992]

Re	q	k	$\omega_{i \max}$	$q_{\text{неуст}}$	$k_{\text{неуст}}$
17,6	-0,477	0,338	$8,17 \cdot 10^{-5}$	—	—
20	-0,510	0,369	$2,55 \cdot 10^{-3}$	0,26...0,7	0,14...0,55
100	-0,475	0,418	$9,61 \cdot 10^{-3}$	0...1,08	0...1,13
1000	-0,240	0,210	$1,66 \cdot 10^{-3}$	0...1,08	0...1,14

Данные для неустойчивой спиральной вязкой моды с $m = -1$ приведены в табл. 4.5 и рис. 4.39. По сравнению с осесимметричной вязкой модой максимальные инкременты существенно больше, а критическое число Рейнольдса существенно ниже ($Re_c = 17,527$) и близко к Re_c для невязкой моды ($Re_c = 13,905$, см. табл. 4.3). Принципиально, что область неустойчивости лежит в зоне отрицательных q , где невязкие спиральные моды устойчивы.

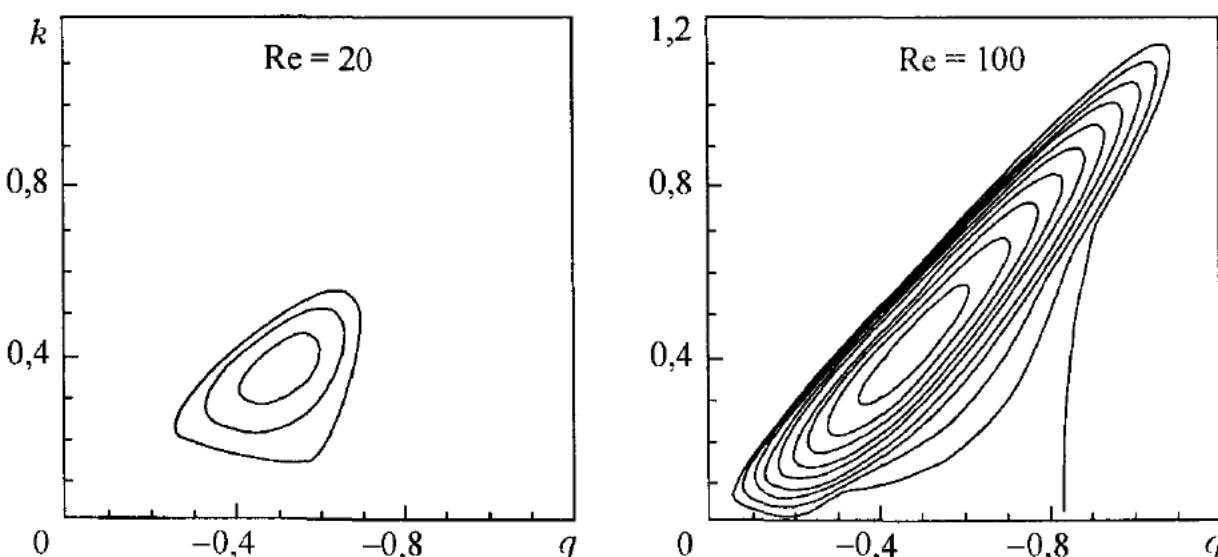


Рис. 4.39. Изолинии $\omega_i = \text{const}$ для спиральной вязкой моды $m = -1$ [Mayer, Powell, 1992]

4.7. ЛИНЕЙНЫЕ И НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ НА КОЛОННООБРАЗНЫХ ВИХРЯХ ТИПА Q -ВИХРЯ

Q -вихрь, устойчивость которого проанализирована в предыдущем параграфе, является весьма удобной моделью реальных колоннообразных вихрей со сглаженными профилями скорости. Тем не менее это – достаточно частный случай. В более общем виде поле скорости колоннообразного вихря можно представить как 5-параметрическое семейство

$$\left. \begin{aligned} U &= 0, \\ V(r) &= \frac{\Gamma}{2\pi r} \left[1 - \exp(-\alpha r^2) \right], \\ W(r) &= W_\infty + W_0 \exp(-\beta r^2), \end{aligned} \right\} \quad (4.65)$$

где $\Gamma, \alpha, W_\infty, W_0, \beta$ – константы. В соответствующем безразмерном виде при $\Gamma/2\pi = q, \alpha = \beta = 1$ имеем Q -вихрь (см. (4.62)).

В данном разделе рассматриваются волны на колоннообразных вихрях с полями скорости вида (4.65). При этом значения параметров могут быть различными, в частности, подбираться на основе опытных данных. Основная цель заключается в анализе установившихся нелинейных волн в отличие от п. 4.6, где изучается линейная устойчивость Q -вихря. Линейные волны анализируются лишь как результат линеаризации исходных нелинейных уравнений. Для полного анализа линейных возмущений на колоннообразном вихре с произвольным профилем скорости можно использовать уравнение Howard, Gupta (4.63). Так как уравнения и подходы к описанию осесимметричных и изгибных волн конечной амплитуды существенно различаются, то они будут рассмотрены раздельно. Заметим также, что в литературе волновые явления на вихрях исследуются исключительно в связи с попыткой описания распада вихря. Здесь этот вопрос не рассматривается.

4.7.1. Осесимметричные нелинейные стоячие волны

Основной мотив изучения стоячих волн в закрученном потоке связан с волновой моделью распада вихря [Benjamin, 1962; Лейбович, 1985]. С другой стороны, случай осесимметричных стоячих волн примечателен тем, что уравнения Эйлера сводятся к одному эллиптическому уравнению в частных производных для функции тока ψ , связанной с радиальной u и аксиальной w компонентами скорости соотношениями

$$u = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}. \quad (4.66)$$

Течение предполагается установившимся и несжимаемым, тогда уравнение сохранения массы тождественно удовлетворяет соотношениям (4.66). Компоненты завихренности ($\omega_r, \omega_\theta, \omega_z$) в цилиндрических координатах (r, θ, z) с учетом осевой симметрии имеют вид

$$\omega_r = -\frac{\partial v}{\partial z}, \quad \omega_\theta = -\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r}, \quad \omega_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rv). \quad (4.67)$$

Используя (4.66), азимутальную компоненту скорости можно выразить через функцию тока

$$\omega_0 = -\frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right). \quad (4.68)$$

Далее вместо уравнений Эйлера удобней воспользоваться уравнениями Громеки – Ламба (1.13), которые для установившегося осесимметричного течения несжимаемой жидкости в отсутствие массовых сил запишутся как (см. п. 1.3.3)

$$\begin{aligned} v\omega_z - w\omega_\theta &= \frac{\partial H}{\partial r}, \\ w\omega_r - u\omega_z &= 0, \\ u\omega_\theta - v\omega_r &= \frac{\partial H}{\partial z}. \end{aligned} \quad (4.69)$$

Здесь константа Бернуlli

$$H(r, z) = \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 + \frac{p}{\rho}.$$

Учитывая определения компонент завихренности (4.67), второе из этих уравнений перепишем в виде

$$u \frac{\partial}{\partial r}(rv) + w \frac{\partial}{\partial z}(rv) = 0 \text{ или } \left(\mathbf{u} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \right)(rv) = 0,$$

или в наиболее общем виде

$$\frac{d}{dt}(rv) = 0, \quad (4.70)$$

где d/dt – субстанциональная производная. Такая запись означает постоянство циркуляции по жидкому контуру в форме окружности радиуса r в плоскости, перпендикулярной оси симметрии.

Введем обозначение

$$rv = F(\psi). \quad (4.71)$$

Как видно, это есть циркуляция вокруг оси вращения без коэффициента 2π . Так как для установившегося течения траектории жидких частиц совпадают с линиями тока, то из условия (4.70) следует, что величина F определяется значением функции тока ψ . То же самое касается константы Бернулли H , т. е.

$$\frac{1}{2} \left(u^2 + v^2 + w^2 \right) + \frac{p}{\rho} = H(\psi).$$

Используя определения (4.66) и (4.71), компоненты завихренности в осевой плоскости можно записать как

$$\omega_r = u \frac{dF}{d\psi}, \quad \omega_z = w \frac{dF}{d\psi}.$$

Поскольку $\omega_r/\omega_z = u/w$, то компоненты векторов скорости и завихренности параллельны в осевой плоскости. Из первого (или третьего) уравнения системы (4.69) находим выражение для ω_0 в зависимости от H и F

$$\omega_0 = \frac{1}{u} \frac{\partial H}{\partial z} + \frac{v}{u} \omega_r = -r \frac{dH}{d\psi} + \frac{F}{r} \frac{dF}{d\psi}.$$

Сравнивая это выражение с (4.68), получаем уравнение для функции тока ψ (см. также (1.57))

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = r^2 \frac{dH}{d\psi} - F \frac{dF}{d\psi}. \quad (4.72)$$

Вводя новую независимую переменную $y = r^2$, получаем более удобную форму записи уравнения

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + 4y \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = y \frac{dH}{d\psi} - F \frac{dF}{d\psi}.$$

Уравнение вида (4.72) для анализа вихревых течений использовалось во многих работах (см., например, Long [1953], Fraenkel [1956], Squire [1956], Benjamin [1962], Pritchard [1970], Бэтчелор [1973], Leibovich [1986], Leibovich, Kribus [1990]). Как отмечено в последней работе, уравнение (4.72) впервые выведено, по-видимому, Bragg, Hawthorne [1950]. Поэтому предложено называть его уравнением Bragg, Hawthorne (или ВНЕ).

Чтобы решить уравнение (4.72), необходимо предварительно определить функции $H(\psi)$ и $F(\psi)$. Такая процедура легко осуществима в простейшем случае, когда при некотором значении $z = z_0$ радиальная компонента скорости отсутствует и известны радиальные распределения остальных двух компонент скорости [Benjamin, 1962], т. е.

$$u(r, z_0) = 0, \quad v(r, z_0) = V(r), \quad w(r, z_0) = W(r) \neq 0. \quad (4.73)$$

Пусть заданы условия (4.73). Тогда при $z = z_0$ из уравнений Эйлера имеем

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{V^2(r)}{r}. \quad (4.74)$$

Далее из (4.66) находим функцию тока при $z = z_0$

$$\psi(r, z_0) = \int_0^r r W(r) dr \equiv \Psi(r),$$

откуда определяем обратную зависимость

$$r = R(\psi).$$

При $z = z_0$ W есть функция ψ , поэтому

$$W(\psi) = \frac{1}{r} \frac{d\psi}{dr}(r, z_0) = \frac{1}{R(\psi)} \frac{d\Psi}{dR}(R(\psi)).$$

Из (4.74) и определений H и F получаем искомые выражения

$$\frac{p(\psi)}{\rho} = \frac{1}{\rho} p(0, z_0) + \int_0^{R(\psi)} \frac{V^2(r)}{r} dr,$$

$$F(\psi) \equiv R(\psi)V(R(\psi)),$$

$$H(\psi) = \frac{1}{2}(V^2 + W^2) + \frac{p}{\rho},$$

$$\frac{dH}{d\psi} = \frac{dH}{dR} \frac{dR}{d\psi} = \frac{1}{R} \frac{dW}{dR} + \frac{F}{R^2} \frac{dF}{d\psi}.$$

Описанная выше постановка задачи была, в частности, использована Leibovich, Kribus [1990] при поиске решений (4.72) в виде нелинейных стоячих периодических и одиночных волн. Приведем только основные выводы указанной работы. Для удобства анализа предполагается, что функциональная форма азимутальной скорости $V(r)$ при $z = z_0$ фиксирована, но уровень меняется, т. е. в безразмерном виде представим F как

$$F(\psi) = \lambda f(\psi),$$

где $f(\psi)$ – безразмерная фиксированная функция, а λ – регулировочная константа. При соответствующем обезразмеривании имеем

$$\lambda = V_0/W_0. \quad (4.75)$$

Здесь V_0 и W_0 – характерные значения азимутальной и аксиальной компонент скорости соответственно. Следовательно, величина λ отражает уровень крутки потока. Рассматривается течение в круглой трубе. Исходное течение, являющееся решением ВНЕ, полагается колоннообразным

$$\psi(r, z) \equiv \Psi(r).$$

Требуется найти другие решения, периодические по z , с длиной волны L . Для их поиска применен *статический бифуркационный анализ*. Поскольку расчеты велись численными методами, то необходимо было детализировать исходное течение. Был выбран частный случай семейства (4.65)

$$W(r) = 1, \quad V(r) = \lambda \left\{ 1 - \exp(-\alpha r^2) \right\}, \quad (4.76)$$

известный под названием *вихря Бюргерса – Ротта* (Burgers–Rott vortex). Формулы записаны в безразмерном виде, и параметр λ соответствует определению (4.75).

Однако еще до спецификации исходного поля течения можно сделать некоторые общие заключения. Так, показано, что при $L \rightarrow \infty$ возмущение функции тока $\Phi \equiv \psi - \Psi$ (с определенной точностью) представляется как $\Phi = A(Z)\phi_0(r)$, где $\phi_0(r)$ есть собственная функция линеаризованной задачи для минимального собственного значения, а $A(Z)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 A}{dZ^2} + \alpha A^2 + BA = 0. \quad (4.77)$$

Здесь Z – “медленная” аксиальная переменная; α, β – некоторые параметры. Данное уравнение было выведено впервые Benjamin [1967]. Оно допускает решение в виде одиночной волны

$$A = a \operatorname{sech}^2 \left[\left(\frac{1}{6} a \alpha \right)^{1/2} Z \right] \quad (4.78)$$

при условии $a\alpha > 0$. Константа a связана с параметрами уравнения (4.77). Важно отметить, что решение (4.78) согласуется с решением уравнения Кортевега–де Вриза, выведенного Leibovich [1970] для слабонелинейных волн в закрученном потоке в трубе (см. также п. 4.7.2).

Для случая же конкретного поля скорости (4.76) численные расчеты Leibovich, Kribus [1990] позволили сделать следующие выводы. На основе исходного колоннообразного вихря (4.76) методом бифуркаций могут быть построены четыре типа новых решений. К I типу относится множество опять

колоннообразных течений, из которых одно представляет особый интерес. Оно названо “фундаментальным сопряженным” (“principal conjugate”) и отвествляется от исходного течения при некотором критическом уровне крутки. Показано, что такое течение является сверхкритическим, если исходное течение докритическое, и наоборот. Понятия сопряженных течений, а также сверхкритических и докритических состояний для закрученных потоков введены Benjamin [1962] в его теории распада вихря. Напомним, что в докритическом (subcritical) состоянии бесконечно малые возмущения могут распространяться как вверх, так и вниз по потоку, а в сверхкритическом (supercritical) – только вниз по потоку.

Решения II типа представляют собой одиночные стоячие волны, которые существуют только при сверхкритических значениях параметров, причем на больших расстояниях вниз и вверх по потоку течение совпадает с исходным. Данные решения являются сильнонелинейными и допускают наличие точки застоя и соответственно возвратных течений, как при распаде вихря. В то же время интересно, что слабонелинейные решения (см. (4.77), (4.78), а также работа Leibovich [1970]) остаются хорошей аппроксимацией для этого типа решений.

К III типу относятся периодические стоячие волны, возможные при докритических значениях параметров. Если, например, при постоянном уровне крутки увеличивать длину волны, то впадины принимают вид одиночных волн, а вершины выполаживаются и становятся эквивалентными участкам колоннообразного течения, совпадающего с “фундаментальным сопряженным” из I типа решений. В пределе имеем IV тип решений – одиночную волну, которая поддерживается не исходным течением, как во II типе решений, а “фундаментальным сопряженным” течением.

Следует заметить, что описанный выше анализ установившихся конечно-амплитудных волн нельзя считать полным, поскольку возникает вопрос об устойчивости нелинейных волновых режимов к трехмерным возмущениям. Близкие по сути исследования были проведены Kribus, Leibovich [1994], причем с учетом вязких эффектов. Основной вывод состоит в том, что конечно-амплитудные периодические и одиночные волны на колоннообразном вихре устойчивы к осесимметричным возмущениям, но неустойчивы к изгибным модам при условии, если амплитуда волн превышает критическое значение.

4.7.2. Осесимметричные слабонелинейные бегущие волны

Рассмотрим теперь общий случай осесимметричных волн на колоннообразном вихре, ограниченном цилиндрической поверхностью (закрученное течение в трубе). Как и в предыдущем пункте 4.7.1, по-прежнему справедливы выражения для функции тока (4.66) и компонент завихренности (4.67),

(4.68) в цилиндрических координатах. Также сохраняем обозначение для циркуляции F

$$F(r, z, t) = rv(r, z, t), \quad (4.79)$$

которая, однако, является уже функцией двух координат и времени. Для вывода исходных уравнений опять используем уравнения движения идеальной жидкости в форме Громеки – Ламба, но нестационарные (см. 1.36).

Из второго уравнения системы (1.36), учитывая определения (4.66), (4.67), условие $\partial H / \partial \theta = 0$ и вводя новую переменную, $y = r^2$, получаем

$$\frac{\partial F}{\partial t} - 2 \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial F}{\partial y} + 2 \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial z} = 0. \quad (4.80)$$

Далее исключим из первого и третьего уравнений системы (1.36) функцию Бернулли H путем перекрестного дифференцирования

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r} \right) = \frac{\partial}{\partial z} (v \omega_z - w \omega_0) - \frac{\partial}{\partial r} (u \omega_0 - v \omega_r).$$

Заменяя компоненты завихренности и скорости через выражения (4.66)–(4.68), (4.79) и вновь используя переменную y , получаем второе исходное уравнение

$$D^2 \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{2}{y} F \frac{\partial F}{\partial z} + 2 \frac{\partial \psi}{\partial y} D^2 \frac{\partial \psi}{\partial z} - 2y \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{y} D^2 \psi \right] = 0. \quad (4.81)$$

Здесь оператор D^2 есть

$$D^2 \equiv 4y \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Таким образом, выведена система точных нелинейных уравнений (4.80), (4.81) для функции тока ψ и циркуляции F .

Объектом изучения в данном разделе являются слабонелинейные длинные волны, которые описываются приближенными уравнениями, поэтому для дальнейшего анализа необходимо перейти к безразмерным величинам. С этой целью, следуя Bennet [1966], Leibovich [1970], введем два масштаба длины – поперечный b и продольный L (например, радиус трубы и длину волны соответственно). В качестве масштаба скорости выберем характерное (например, максимальное) значение азимутальной скорости V_0 . Тогда переход к безразмерным величинам осуществим следующим образом:

$$y = b^2 \tilde{y}, \quad z = L\tilde{z}, \quad t = (L/V_0)\tilde{t},$$

$$\psi = b^2 V_0 \tilde{\psi}, \quad F = b V_0 \tilde{F},$$

$$D^2 = b^2 \tilde{D}^2 = 4\tilde{y} \frac{\partial^2}{\partial \tilde{y}^2} + k^2 \frac{\partial^2}{\partial \tilde{z}^2}.$$

Сохраняя прежние обозначения, будем полагать в данном разделе уравнения (4.80), (4.81) безразмерными. Как видно, единственным параметром задачи является величина $k = b/L$, которая входит в определение оператора D^2 и по смыслу означает безразмерное волновое число. В длинноволновом приближении $k \ll 1$.

Невозмущенные решения уравнений (4.80), (4.81) есть

$$F = \mathcal{F}(y), \quad \psi = \frac{1}{2} \int_0^y W(y) dy,$$

где $\mathcal{F}(y)$ и $W(y)$ – произвольные функции, соответствующие невозмущенному колоннообразному вихрю. Дальнейшая цель заключается в поиске решений в виде осесимметричных длинных волн малой амплитуды. Поэтому положим

$$\psi = \frac{1}{2} \int_0^y W(y) dy + \varepsilon \phi(y, z, t),$$

$$F = \mathcal{F}(y) + \varepsilon f(y, z, t),$$

где $\varepsilon \ll 1$. Следуя Benney [1966], Leibovich [1970], произведем разложения ϕ и f до первого порядка по ε и k^2 в виде

$$\phi = \phi_0(y) A(z, t) + \varepsilon \phi_1(y) \frac{1}{2} A^2 + k^2 \phi_2(y) A_{zz} + \dots,$$

$$f = \gamma_0(y) A(z, t) + \varepsilon \gamma_1(y) \frac{1}{2} A^2 + k^2 \gamma_2(y) A_{zz} + \dots.$$

Подставляя ψ и F в (4.80) и (4.81), получаем в первом приближении по ε и k^2 соответственно

$$f_t - 2\mathcal{F}' \phi_z + W f_z + 2\varepsilon (\phi_y f_z - \phi_z f_y) = 0,$$

$$\begin{aligned}\Phi_{t y y} + \frac{\mathcal{F}}{2y^2} f_z + W \Phi_{z y y} - W'' \Phi_z + \frac{k^2}{4y} \Phi_{t z z} + \frac{k^2}{4y} W \Phi_{z z z} + \\ + \frac{\epsilon}{2y^2} f f_z + 2\epsilon \Phi_y \Phi_{z y y} - 2\epsilon \Phi_z \Phi_{y y y} = 0.\end{aligned}$$

Здесь индексы снизу означают соответствующие частные производные, а штрих сверху – производную по y . Подставляя теперь разложения для ϕ и f в эти уравнения, приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned}\gamma_0 A_t + \epsilon \gamma_1 A A_t + k^2 \gamma_2 A_{t z z} - 2\mathcal{F}' [\phi_0 A_z + \epsilon \phi_1 A A_z + k^2 \phi_2 A_{z z z}] + \\ + W [\gamma_0 A_z + \epsilon \gamma_1 A A_z + k^2 \gamma_2 A_{z z z}] + 2\epsilon [\phi'_0 \gamma_0 - \phi_0 \gamma'_0] A A_z = 0, \\ \phi_0'' A_t + \epsilon \phi_1'' A A_t + k^2 \phi_2'' A_{t z z} + \frac{\mathcal{F}}{2y^2} [\gamma_0 A_z + \epsilon \gamma_1 A A_z + k^2 \gamma_2 A_{z z z}] + \\ + W [\phi_0'' A_z + \epsilon \phi_1'' A A_z + k^2 \phi_2'' A_{z z z}] - W'' [\phi_0 A_z + \epsilon \phi_1 A A_z + k^2 \phi_2 A_{z z z}] + \\ + \frac{k^2 \phi_0}{4y} A_{t z z} + \frac{k^2 W \phi_0}{4y} A_{z z z} + \frac{\epsilon \gamma_0^2}{4y^2} A A_z + 2\epsilon (\phi'_0 \phi_0'' - \phi_0 \phi_0''') A A_z.\end{aligned}$$

Данная система уравнений разрешима относительно функций ϕ_i, γ_i ($i = 0, 1, 2$) в указанном приближении, если A удовлетворяет уравнению

$$A_t = -c_0 A_z + \epsilon c_1 A A_z + k^2 c_2 A_{z z z}, \quad (4.82)$$

где коэффициенты c_0, c_1, c_2 подлежат определению.

Подставим сначала A_t в первое уравнение. Тогда в первом приближении, приравнивая нулю выражения при ϵ и k^2 , а также члены нулевого порядка малости, находим γ_i как функции ϕ_i

$$\begin{aligned}\gamma_0 &= \frac{2\mathcal{F}'}{W - c_0} \phi_0, \\ \gamma_1 &= \frac{2}{W - c_0} \left\{ \phi_1 \mathcal{F}' - \frac{c_1 \phi_0 \mathcal{F}'}{W - c_0} + 2\phi_0^2 \left[\frac{\mathcal{F}'}{W - c_0} \right]' \right\}, \\ \gamma_2 &= \frac{2\mathcal{F}'}{W - c_0} \left[\phi_2 - \frac{c_2}{W - c_0} \phi_0 \right].\end{aligned}$$

Заменяя во втором уравнении γ_i и A_t и проводя аналогичную процедуру, выводим обыкновенные дифференциальные уравнения для функций ϕ_i :

$$\left. \begin{array}{l} L\phi_0 = 0, \\ L\phi_1 = 2 \left[c_1 \phi_0 S - \phi_0^2 Q \right], \\ L\phi_2 = 2c_2 \phi_0 S - \frac{\phi_0}{4y}. \end{array} \right\} \quad (4.83 \text{ а, б, в})$$

Здесь оператор L есть

$$L = \frac{d^2}{dy^2} + q(y),$$

где

$$q(y) = \frac{\mathcal{F}\mathcal{F}'}{y^2(W - c_0)^2} - \frac{W''}{W - c_0}.$$

Соответственно

$$\begin{aligned} S &= \frac{q}{W - c_0} + \frac{1}{2} \frac{W''}{(W - c_0)^2}, \\ Q &= \frac{2}{(W - c_0)^{3/2}} \frac{d}{dy} \left[y \sqrt{W - c_0} q \right] + \frac{(y W')''}{(W - c_0)^2}. \end{aligned}$$

Используя кинематические условия $u(0) = u(1) = 0$, получаем граничные условия

$$\phi_i(0) = \phi_i(1) = 0 \quad (i = 0, 1, 2). \quad (4.84)$$

Теперь определим коэффициенты c_0, c_1, c_2 . При заданных $W(y), \mathcal{F}(y)$ c_0 является собственным значением задачи (4.83а), (4.84). Значения c_1 и c_2 выбираются так, чтобы правые части уравнений (4.83б,в) были ортогональны функции ϕ_0 . Иначе неоднородные задачи (4.83б), (4.83в) и (4.84) не имеют решений. Тогда получаем

$$\left. \begin{array}{l} c_1 = \int_0^1 \phi_0^3 Q dy / \Delta, \\ c_2 = \frac{1}{8} \int_0^1 y^{-1} \phi_0^2 dy / \Delta, \end{array} \right\} \quad (4.85)$$

где

$$\Delta = \int_0^1 \phi_0^2 S dy.$$

Так как выражения для Q и S содержат в знаменателях ($W - c_0$), то при $W = c_0$ интегралы могут расходиться. Однако теорема Чандrasekara [Chandrasekhar, 1961] утверждает, что существуют, по крайней мере, два значения c_0 , одно из которых меньше $\min W(y)$, а другое больше $\max W(y)$ в интервале $(0,1)$, поэтому расходимости интегралов можно избежать.

Возможен другой путь решения задачи, который применил Leibovich [1970]. Фиксируются c_0 и $\mathcal{F}(y)$. Тогда, если записать $W(y) = \mu m(y)$, где $m(y)$ – фиксированная функция, то μ можно рассматривать как собственное значение (см. также Chandrasekhar [1961]).

Зная коэффициенты c_i , легко выписать солитонное решение уравнения Кортевега – де Вриза (4.82). Удобнее это сделать в координатах $x \equiv z - c_0 t$, $\tau \equiv \varepsilon t$ (медленное время). Тогда уравнение (4.82) примет вид

$$A_\tau = c_1 A A_x + \frac{k^2}{\varepsilon} c_2 A_{xxx}. \quad (4.86)$$

Учитывая, что $\varepsilon = O(k^2)$, и полагая без потери общности $\varepsilon = k^2$, сразу выпишем солитонное решение в известной форме

$$A = a \operatorname{sech} h^2 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{c_1 a}{3c_2} \right)^{1/2} \left(x + \frac{1}{3} a c_1 \tau \right) \right],$$

где $a = \text{const}$.

В случае радиально неограниченного пространства описанная выше процедура становится несправедливой в силу появления сингулярностей. Поэтому используется другой подход [Leibovich, 1970]. Предполагается, что вихреподобность сосредоточена в ядре вихря, а вдали от ядра течение потенциальное. Возмущения полагаются осесимметричными и длинными. Ищутся решения отдельно для внутренней и внешней областей с применением метода асимптотического сращивания и с соответствующими граничными условиями. В результате выведено интегро-дифференциальное уравнение

$$A_\tau = c_1 A A_x + \frac{c_3}{2 \ln(1/k)} \frac{\partial^3}{\partial x^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A(\xi, \tau) d\xi}{[(x - \xi)^2 + k^2]^{1/2}}, \quad (4.87)$$

которое описывает распространение слабонелинейных длинных осесимметричных волн вдоль ядра колоннообразного вихря в неограниченном пространстве. Здесь величины A, x, τ имеют тот же смысл, что и в уравнении (4.86). В параметре $k = b/L$ продольный масштаб L по-прежнему отождествляется с длиной волны, а в качестве поперечного масштаба b вместо размера

трубы принимается характерный размер ядра вихря. Коэффициенты c_1 и c_3 записываются как (ср. с (4.85))

$$c_1 = \int_0^\infty \phi_0^3 Q dy / \Delta_\infty,$$

$$c_3 = \frac{1}{4} \phi_\infty^2 / \Delta_\infty,$$

где $\Delta_\infty = \int_{-\infty}^\infty \phi_0^2 S dy$, а $\phi_0 \rightarrow \phi_\infty$ при $y \rightarrow \infty$.

С точностью до погрешностей вывода уравнение (4.87) можно переписать в виде [Leibovich, Randall, 1972]

$$A_t = c_1 A A_x + c_3 \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left\{ A + \left(2 \ln \frac{1}{k} \right)^{-1} \int_{-\infty}^\infty \ln(2|x - \xi|) \operatorname{sgn}(x - \xi) \frac{\partial A}{\partial \xi} d\xi \right\}.$$

Такая форма записи удобна тем, что в пределе бесконечно длинных волн ($k \rightarrow 0$) второе слагаемое в фигурных скобках обращается в нуль, вследствие чего опять приходим к уравнению Кортевега – де Вриза (4.86).

4.7.3. Изгибные волны

Изгибные (bending) волны характеризуются тем, что вызывают смещение оси вихря относительно невозмущенного положения. Изгибным модам соответствует азимутальное волновое число $m = \pm 1$ (см. п. 4.1). Линейные изгибные волны были рассмотрены выше в частных случаях при анализе устойчивости вихря Рэнкина и Q -вихря. В данном разделе рассматриваются *линейные нейтрально устойчивые и слабонелинейные изгибные волны* на колонообразных вихрях типа Q -вихря. Линейный анализ, как и для Q -вихря, проводится на основе Howard – Gupta equation (HGE). Но в отличие от случая Q -вихря представлены новые решения для нейтральных возмущений, соответствующие так называемым медленным (“slow”) и быстрым (“fast”) волнам. Слабонелинейные изгибные волны описываются нелинейным уравнением Шредингера, а в пределе бесконечно малых волновых чисел – нелинейным интегро-дифференциальным уравнением. Показано, что солитонные решения уравнения Шредингера существуют только в определенных диапазонах несущих волновых чисел. Приведенные результаты базируются на работах Leibovich, Ma [1983], Leibovich [1986], Leibovich *et al.* [1986] и излагаются здесь без подробных выкладок в силу их громоздкости.

Будем полагать, что невозмущенное поле скоростей колоннообразного вихря $\mathbf{U} = (0, V(r), W(r))$ задается семейством (4.65). В конкретных примерах параметры течения принимают следующие значения: $\Gamma = 2\pi$, $\alpha = 1$, $W_\infty = W_0 = 0$ (течение A); $\Gamma = 1,39 \cdot 2\pi$, $\alpha = 1,28$, $\beta = 0,54$, $W_\infty = 0$, $W_0 = 0,4$ (течение B). В последнем примере использован эмпирический профиль скорости из работы Maxworthy *et al.* [1985]. Здесь и далее в (4.7.3) все величины приведены к безразмерному виду через характерный масштаб тангенциальной скорости V_0 и характерный радиальный масштаб a_0 .

В общем виде поле скоростей в цилиндрических координатах запишем как

$$\mathbf{v} = \mathbf{U}(r) + \varepsilon \mathbf{u}(r, \theta, t; \varepsilon), \quad (4.88)$$

где ε – малый амплитудный параметр. Возмущение для вектора скорости раскладывается в ряд по ε

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \varepsilon \mathbf{u}_2 + \varepsilon^2 \mathbf{u}_3 + \dots \quad (4.89)$$

Аналогичные разложения применяются к давлению.

Линейные нейтрально устойчивые изгибные волны. Для линейного анализа используем только представление (4.88). Решение ищем в форме бегущей волны

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u} &= A \hat{\mathbf{u}}_0(r) \exp[i(kz + m\theta - \omega t)] + \text{с.с.,} \\ P &= A \hat{P}_0(r) \exp[i(kz + m\theta - \omega t)] + \text{с.с.,} \end{aligned} \right\} \quad (4.90)$$

где с.с. – комплексно сопряженная величина, $m = \pm 1$; k – реальное волновое число; ω – реальная частота. Для фиксированных k и m при соответствующих граничных условиях линейная задача представляет собой задачу на собственные значения $\omega = \omega(k, m)$. Подставляя (4.88) – (4.90) в уравнения Эйлера и сохранения массы и линеаризуя их, получим уже выведенное выше уравнение Howard – Gupta (4.63). Можно показать, что для нейтрально устойчивых изгибных мод выполняется условие симметрии $\omega(-k, -m) = -\omega(k, m)$.

Уравнение Howard – Gupta справедливо для произвольных длин волн и в общем случае требует численных методов решения. Численные расчеты Leibovich *et al.* [1986], проведенные для частных базовых профилей скорости, выявили существование нескольких ветвей дисперсионного соотношения для нейтральных возмущений. Первая ветвь имеет асимптоту: частота $\omega \rightarrow 0$, фазовая скорость $c \rightarrow 0$ и групповая скорость $c_g = d\omega/dk \rightarrow 0$ при $k \rightarrow 0$. Волны, относящиеся к этой ветви, были названы “медленными” волнами (“slow” waves). Асимптота остальных ветвей есть: $\omega \rightarrow m\Omega(0)$, $c \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow 0$, где $\Omega(0) = V(r)/r$ при $r = 0$. Соответствующие волны получили название “быстрых” волн (“fast” waves).

Проанализируем различные типы волн по отдельности. Вначале обратимся к *медленным* волнам. Из опыта следует, что наибольший интерес представляют *длинные* волны. Поэтому полезно иметь асимптотическое выражение для ω при $k \ll 1$, которое приводим из упомянутых работ без вывода

$$\omega = -\frac{m\Gamma}{4\pi} k^2 \left[\ln \frac{2}{|k|} + K - \gamma \right]. \quad (4.91)$$

Здесь константа Эйлера $\gamma = 0,5772\dots$, а константа K для **семейства профилей** (4.65) при $W_\infty = 0$ есть

$$K = \frac{1}{2} \left[\ln \left(\frac{1}{2} \alpha \right) + \gamma - \frac{4\pi^2 W_0^2}{\beta \Gamma^2} \right].$$

Заметим, что ранее дисперсионное соотношение в форме (4.91) было приближенно выведено Moore, Saffman [1972] на основе закона Био – Савара и метода усечения применительно к винтовой вихревой нити (см. пп. 5.1, 5.2).

Дисперсионные кривые, рассчитанные численно Leibovich *et al.* [1986] для моды $m = -1$, приведены на рис. 4.40 a, b соответственно для базовых профилей скорости A и B . Асимптотическая формула (4.91) удовлетворительно согласуется с численным расчетом в диапазоне $|k| < 0,2$. Для вихря B дисперсионные кривые уже не являются симметричными относительно оси $k = 0$. Пересчет на случай $m = 1$ можно произвести, исходя из условия $\omega(-k, -m) = -\omega(k, m)$. Из сравнения графиков a и b следует, что профиль скорости базового течения существенно влияет на волновые характеристики.

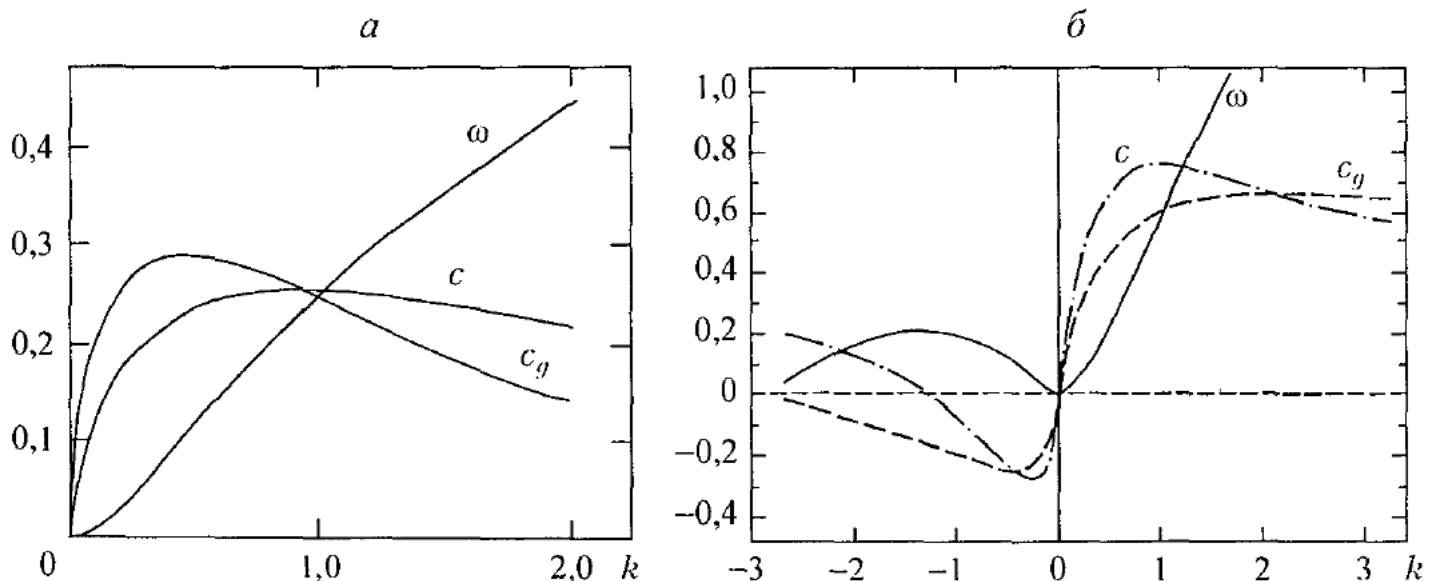


Рис. 4.40. Зависимость частоты ω , фазовой c и групповой c_g скорости от волнового числа k для “медленных” волн при $m = -1$. Численный расчет Leibovich *et al.* [1986]

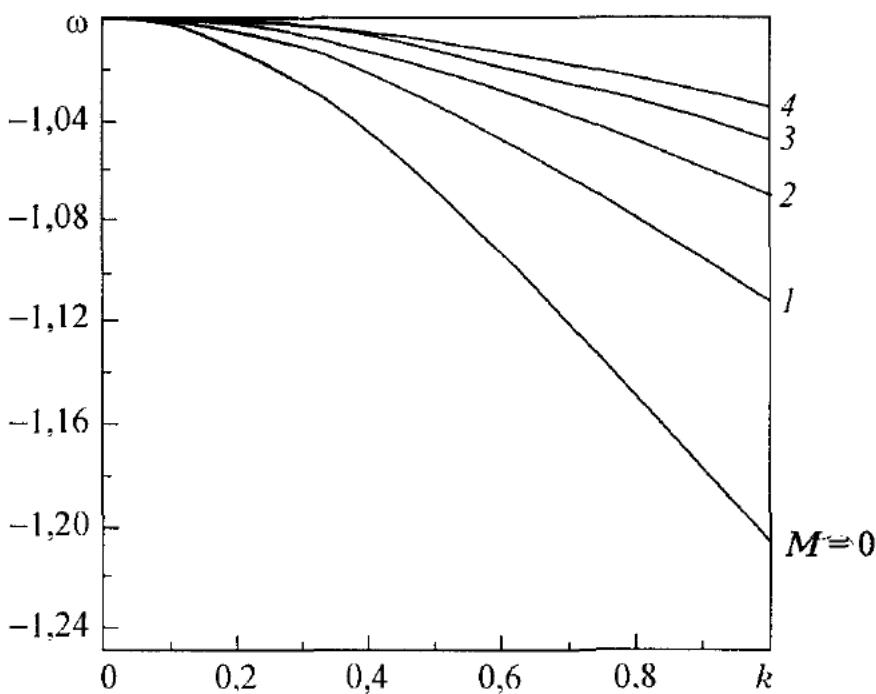


Рис. 4.41 Первые пять “быстрых” мод для вихря A при $m = -1$. Численный расчет Leibovich *et al.* [1986]

Для быстрых волн обнаружено бесконечное количество мод, которые характеризуются числом M , принимающим целочисленные значения $M = 0, 1, 2, 3, \dots$. Первые пять мод показаны на рис. 4.41. Особенность “быстрых” мод заключается в том, что их собственные функции очень быстро затухают с удалением от оси вихря. Можно полагать, что они отличны от нуля в области радиальных расстояний, много меньших размера ядра вихря. Учитывая это условие, Leibovich *et al.* [1986] вывели асимптотическую формулу для дисперсионного соотношения в случае длинных волн ($k \ll 1$), причем с произвольным значением m

$$\omega = m\Omega_0 + kW_0 + k\Omega_0(mW_2 - 2k\Omega_0)/(m\Omega_2\bar{M}). \quad (4.92)$$

Эта формула справедлива при $k\Omega_0(2k\Omega_0 - mW_2) > 0$. Здесь

$$\Omega_0 = \Omega(0), \quad \Omega_2 = \Omega''(0), \quad W_0 = W(0), \quad W_2 = W''(0),$$

$$\bar{M} = \left[\frac{1}{2}|m| + \frac{1}{2}(m^2 + 8)^{1/2} + M \right] \left[\frac{1}{2}|m| + \frac{1}{2}(m^2 + 8)^{1/2} + M + 1 \right],$$

$M = 0, 1, 2, 3, \dots$, штрих означает производную по r . Значения параметров $\Omega_0, \Omega_2, W_0, W_2$ приведены в табл. 4.6 для вихрей типа A и B , а также для Q -вихря при двух значениях параметра q .

Таблица 4.6. Значения параметров, входящих в (4.92), для вихрей типа A , B , а также Q -вихря

Параметр	A	B	Q -вихрь	
			$q = 1,0$	$q = 0,4$
Ω_0	1	1,78	1	0,4
Ω_2	-1	-2,28	-1	-0,4
W_0	0	0,4	1	1
W_2	0	-0,432	-2	-2

Для изгибной моды $m = -1$ и основной ветви $M = 0$ формула (4.92) принимает вид

$$\omega = -\Omega_0 + \left(W_0 + \frac{\Omega_0 W_2}{6\Omega_2} \right) k + \frac{\Omega_0^2}{3\Omega_2} k^2, \quad k\Omega_0(2K\Omega_0 + W_2) > 0. \quad (4.93)$$

Из нее следуют выражения для фазовой и групповой скоростей

$$c = \frac{\omega}{k} = -\frac{\Omega_0}{k} + \left(W_0 + \frac{\Omega_0 W_2}{6\Omega_2} \right) + \frac{\Omega_0^2}{3\Omega_2} k^2, \quad (4.94)$$

$$c_g = \frac{d\omega}{dk} = W_0 + \frac{\Omega_0 W_2}{6\Omega_2} + \frac{2}{3} \frac{\Omega_0^2}{\Omega_2} k. \quad (4.95)$$

Сравнение с численным расчетом показывает, что асимптотические формулы приемлемы в довольно широком диапазоне волновых чисел. Поэтому на рис. 4.42 волновые характеристики “быстрых” волн, вычисленные по (4.93)–(4.95), приведены в диапазоне не очень малых $k = 0 \div 0,5$. Как видно, при $k \rightarrow 0$ фазовая скорость действительно стремится к бесконечности. В целом поведение дисперсионных кривых существенно отличается от случая “медленных” волн (см. рис. 4.40) как по форме, так и по численным значениям. В частности, при малых k $|c_g| \ll |c|$, а частота практически не зависит от k .

Асимптотические формулы применимы и к Q -вихрю. Если сравнить расчет Lessen *et al.* [1974] на рис 4.35а для фазовой скорости неустойчивых возмущений на Q -вихре с формулой (4.94), нетрудно убедиться в идентичности результатов. Отсюда следует вывод, что описанные Lessen *et al.* возмущения относятся к “быстрым” волнам (основная мода) по классификации Leibovich *et al.* [1986]. Однако остается неясным вопрос о мнимой части, так как в первой работе рассматриваются неустойчивые возмущения ($c_i \neq 0$), а во второй – нейтральные ($c_i = 0$).

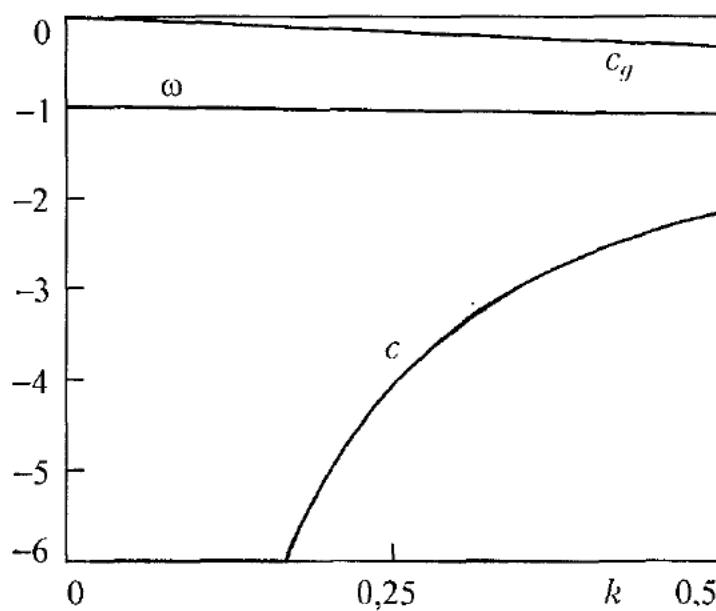


Рис. 4.42. Зависимость частоты ω , фазовой c и групповой c_g скорости от волнового числа k для “быстрых” волн при $m = -1$, $M = 0$ на вихре типа A . Расчет по асимптотическим формулам (4.93) – (4.95)

Как отмечено выше, длинные волны представляют особый интерес, поскольку именно они наблюдаются на опыте. В связи с этим асимптотические формулы (4.91), (4.92), имеющие аналитический вид, весьма удобно использовать для анализа кинематики и геометрии изгибных волн на вихре. Выпишем условие постоянства фазы

$$kz + m\theta - \omega t = \text{const}, \quad |m| = 1,$$

которое описывает в пространстве и времени поведение винтовой структуры фиксированного радиуса r . В случае “медленной” волны, учитывая (4.91), имеем

$$kz + m\theta + m \frac{\Gamma}{4\pi} k^2 \left[\ln \left(\frac{2}{|k|} \right) + K - \gamma \right] t = \text{const}, \quad |m| = 1.$$

Отсюда следует, что при фиксированном z и любых r винтовая структура (поверхность постоянной фазы) вращается с угловой скоростью

$$\frac{d\theta}{dt} = - \frac{\Gamma}{4\pi} k^2 \left[\ln \left(\frac{2}{|k|} \right) + K - \gamma \right],$$

причем независимо от знака m .

Для определенности полагаем, что направление аксиальной компоненты завихренности базового течения совпадает с направлением оси z . Тогда

$\Omega_0 > 0, \Gamma > 0$. Следовательно, винт вращается в направлении, *противоположном* вращению жидкости в базовом вихре. Далее получаем

$$\frac{d\theta}{dz} = -\frac{k}{m},$$

$$\left. \frac{dz}{dt} \right|_{0=\text{const}} = c(k) = -mk \frac{\Gamma}{4\pi} \left[\ln \left(\frac{2}{|k|} \right) + K - \gamma \right].$$

Из этих соотношений следует, что если $mk < 0$, то волна распространяется в направлении оси z , а $d\theta/dz > 0$. Последнее условие означает, что винт – правый. Иначе говоря, правовинтовая структура распространяется в направлении аксиальной завихренности базового вихря, и наоборот, левовинтовая структура движется в противоположную сторону. Схематично данное правило изображено на рис. 4.43а.

Для “быстрых” волн, используя (4.92) при $k < 0$, условие постоянства фазы запишем как

$$kz + m\theta - m\Omega_0 t = \text{const.}$$

Отсюда угловая скорость вращения винта равна

$$\frac{d\theta}{dt} = \Omega_0,$$

т. е. при $z = \text{const}$ винт вращается как и жидкие частицы у оси базового вихря.

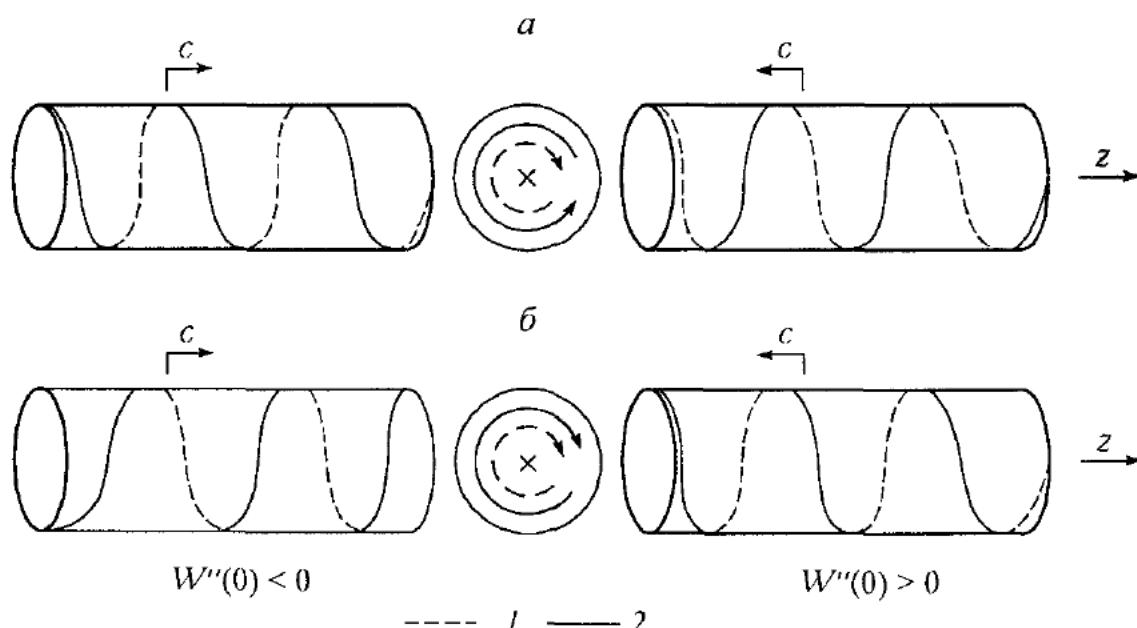


Рис. 4.43. Схема движения изгиблых волн на колоннообразном вихре: а – “медленная” мода, б – “быстрая” мода (движение зависит от знака $W''(0)$). В поперечном сечении вихря: 1 – направление вращения жидких частиц; 2 – фазового фронта

Соответственно

$$\frac{d\theta}{dz} = -\frac{k}{m}, \quad \left. \frac{dz}{dt} \right|_{\theta=\text{const}} = \frac{m}{k} \Omega_0,$$

а также должно выполняться условие из (4.92): $-km\Omega_0 W_2 > 0$. Если $W_2 = 0$, то левый винт распространяется в направлении оси z , а правый – в противоположную сторону.

Если $W_2 \neq 0$, то необходимо рассмотреть два случая: I – $W_2 < 0$, II – $W_2 > 0$. При $W_0 > 0$ (I) соответствует струйному профилю скорости, а II – профилю типа следа. При $W_0 < 0$ ситуация обратная. В случае I указанное выше ограничение допускает волны только с $km > 0$, т. е. имеем левовинтовую структуру, движущуюся в направлении оси z . В случае II допускаются волны с $km > 0$, что означает правый винт, распространяющийся в отрицательном направлении оси z . Описанные выводы также схематично отображены для $W_2 \neq 0$ на рис. 4.43б.

Сланонелинейные изгибающие волны. Солитоны. Модельные уравнения для нелинейных волн выводятся следующим образом [Leibovich *et al.*, 1986]. В разложении (4.89) для возмущения вектора скорости полагаем \mathbf{u}_1 тождественно совпадающим с решением (4.90) для линеаризованной задачи при фиксированных значениях $k = k_0$ и $m = m_0$. Далее подставляем разложения для скорости (4.89) и давления в уравнения Эйлера и сохранения массы, после чего ищем члены более высокого порядка малости \mathbf{u}_1 и \mathbf{u}_2 . Однако разложение (4.89) не является хорошо определенным при $\varepsilon t = 0(1)$, пока секулярные члены не подавлены. Это можно осуществить, полагая амплитуду A в (4.90) медленно меняющейся в пространстве и времени функцией. Такое представление означает модуляцию исходного сигнала с волновым числом k_0 и сопровождается введением “медленных” переменных

$$Z = \varepsilon(z - c_g t),$$

$$\tau = \varepsilon^2 t.$$

Частные решения неоднородных дифференциальных уравнений для \mathbf{u}_2 и \mathbf{u}_3 существуют, если правые части ортогональны сопряженной линейной задаче. Из этого требования находится выражение для групповой скорости c_g и выводится уравнение для A , которое представляет собой *нелинейное кубическое уравнение Шредингера*.

$$i \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \tau} + \hat{\mu} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial Z^2} + \hat{v} \mathbf{A} |\mathbf{A}|^2 = 0. \quad (4.96)$$

Здесь коэффициенты $\hat{\mu}$ и \hat{v} определяются через интегральные выражения. Групповая скорость c_g и коэффициент $\hat{\mu}$ могут быть альтернативно определены из линейных дисперсионных соотношений $c_g = \omega'(k_0)$, $\hat{\mu} = 1/2\omega''(k_0)$.

Уравнение Шредингера (4.96), как известно, допускает *солитонные* решения при условии $\hat{\mu}\hat{v} > 0$. В противном случае начальное возмущение, имеющее форму огибающей исходного периодического сигнала с несущим волновым числом k_0 , расплывается со временем вследствие эффекта дисперсии. Односолитонное решение (4.96) записывается как

$$\mathbf{A}(Z, \tau) = A_0 \varepsilon^{i\Phi} \operatorname{sech} \left\{ A_0 \left(\frac{\hat{v}}{2\hat{\mu}} \right)^{1/2} (Z - C\tau) + \Delta \right\},$$

где

$$\Phi = \frac{C}{2\hat{\mu}} Z + \left(\frac{A_0^2 \hat{v}}{2} - \frac{C^2}{4\hat{\mu}} \right) \tau + \Phi_0.$$

Здесь параметры A_0 , C , Δ и Φ_0 определяются начальными условиями. Выпишем соответствующее решение для \mathbf{u} в исходных физических переменных

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(r, 0, t) = & \mathbf{U}(r) + A_0 \varepsilon \hat{\mathbf{u}}_0(r) \exp[i(\bar{k}z + m\theta - \bar{\omega}t)] \times \\ & \times \operatorname{sech}[\varepsilon A_0 (\hat{v}/2\hat{\mu})^{1/2} (z - \bar{C}t)] + \text{с.с.}, \end{aligned} \quad (4.97)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \bar{C} &= c_g + \varepsilon C, \\ \bar{k} &= k_0 + \frac{\varepsilon C}{2\hat{\mu}}, \\ \bar{\omega} &= \omega_0 + \frac{\varepsilon C c_g}{2\hat{\mu}} + \varepsilon^2 \left[\frac{c^2}{4\hat{\mu}} - \frac{A_0^2 \hat{v}}{2} \right] \end{aligned} \right\}$$

Здесь положили $\Delta = \phi_0 = 0$, а $\hat{\mathbf{u}}_0(r)$ – решение линейной задачи (4.90). Как видно, нелинейность приводит к поправкам для групповой скорости, волнового числа и частоты несущих волн.

Особенность солитонного решения (4.97) состоит в том, что в силу ограничения $\hat{\mu}\hat{v} > 0$ оно существует только в определенных диапазонах несущих волновых чисел, зависящих еще и от базового профиля скорости. Так, Leibovich, Ma [1983] показали, что солитонные решения на *основной “быстрой” ветви* при $|m|=1$ и для вихря типа A существуют в “окне” волновых чисел

$$0,68 \lesssim k \lesssim 1.$$

Leibovich *et al.* [1986] определили солитонные “окна” для “медленной” ветви, полагая, что она более соответствует опыту, чем “быстрой” ветвь. Их результаты суммируются следующим образом – диапазоны волновых чисел, для которых реализуются солитонные решения на “медленной” ветви при $m = -1$, есть

$$\begin{aligned} |k| < 0,45; \quad |k| > 0,96 & \text{ для течения } A, \\ -0,3 < k < 0,8; \quad k > 1,2; \quad k < -1 & \text{ для течения } B. \end{aligned}$$

В заключение данного раздела заметим, что в пределе бесконечно длинных “медленных” волн дисперсионное соотношение (4.91) теряет аналитичность. Соответственно становится несправедливым уравнение Шредингера (4.96). Аналогичная проблема возникала при рассмотрении осесимметричных волн на вихре в радиально неограниченном пространстве (см. п. 4.7.2). Используя специальную процедуру, Leibovich [1970] вывел интегро-дифференциальное уравнение (4.87). Leibovich *et al.* [1986], опираясь на аналогичный подход, также вывели интегро-дифференциальное уравнение, которое справедливо для бесконечно длинных слабонелинейных изгибных волн на “медленной” ветви.

Г л а в а 5

ДИНАМИКА ВИХРЕВЫХ НИТЕЙ

В предыдущей главе дан анализ устойчивости и волн на колоннообразных вихрях разной структуры. Основным условием была малость амплитуды возмущений по сравнению с размером ядра вихря. При заданном невозмущенном поле скоростей задачи о линейной устойчивости или линейных волнах допускали точные решения – аналитические или численные. В качестве исходных уравнений использовались уравнения Эйлера или Навье – Стокса.

Однако в случае концентрированных вихрей (вихревых нитей), наоборот, размер ядра обычно много меньше любых других линейных масштабов – радиуса кривизны нити при ее деформации, длины волны и амплитуды возмущений, размеров внешних тел и каналов. Вследствие сильной нелинейности прямой расчет динамики деформированных вихревых нитей выглядит довольно безнадежной задачей. В такой постановке приходится применять приближенные методы, справедливые для тонких вихревых нитей. Среди них наиболее важны – метод усечения [Бэтчелор, 1973; Rosenhead, 1930; Crow, 1970], связанный с использованием закона Био – Савара, а также метод, основанный на балансе сил [Widnall *et al.*, 1971; Widnall, Bliss, 1971; Moore, Saffman, 1972].

В настоящей главе описаны указанные выше приближенные методы и их модификация, рассмотрено самоиндукционное движение вихревых нитей различной пространственной формы, дан анализ устойчивости вихревых нитей для ряда конкретных случаев.

5.1. МЕТОД УСЕЧЕНИЯ

В гл. 2 для описания поля скоростей, индуцированного бесконечно тонкой вихревой нитью, был применен закон Био – Савара (2.14). Показано, что при наличии искривления оси вихря возникает самоиндукционное движение нити, целиком обусловленное локальным эффектом, а именно локальной кривизной нити. Выведена асимптотическая формула (2.36) для поля скоростей, которая справедлива для бесконечно тонкой вихревой нити на расстояниях r от оси, много меньших радиуса кривизны ρ в данной точке. Однако прямое применение асимптотической формулы (2.36) к вычислению самоин-

дуцированной скорости нити невозможно в силу логарифмической расходимости при $r \rightarrow 0$, т. е. на оси вихря. Один из способов избежать расходимость состоит в том, чтобы положить $r \equiv a$, где a – некоторый эффективный радиус вихревой нити, в действительности не равный нулю. Тогда имеем для скорости самоиндуцированного движения \mathbf{u}

$$\mathbf{u} = \frac{\Gamma}{4\pi} \kappa \mathbf{b} \left(\ln \frac{2L}{a} - 1 \right). \quad (5.1)$$

В пределе бесконечно тонкой нити $a \rightarrow 0$, оставляя главный член, получаем

$$\mathbf{u} \sim -\frac{\Gamma}{4\pi} \kappa \mathbf{b} \ln a. \quad (5.2)$$

Переходя к новой временной координате путем преобразования (2.38) или

$$t \frac{\Gamma}{4\pi} (-\ln a) \rightarrow t,$$

приходим к локальному индукционному уравнению (2.39) или (2.40).

Однако для количественных оценок скорости формула (5.1) (и тем более (5.2), где под знаком логарифма стоит размерная величина) не годится. Причина этого лежит в неопределенности задания предела интегрирования L , а также эффективного радиуса вихря a . В рамках локального индукционного приближения указанная проблема разрешается на основе так называемого *метода усечения* (“*cut-off method*”). Суть его заключается в том, что в формуле Био – Савара при интегрировании по контуру нити исключается участок нити длиной \mathcal{L} по обе стороны от рассматриваемой точки

$$|s| < \mathcal{L},$$

а длина усечения \mathcal{L} полагается пропорциональной радиусу вихря a

$$\mathcal{L} = \delta a. \quad (5.3)$$

Причем, коэффициент пропорциональности $\delta = O(1)$. Тогда *интеграл Био – Савара* принимает вид

$$\mathbf{u}(\mathbf{R}) = -\frac{\Gamma}{4\pi} \int_{[\delta]} \frac{(\mathbf{R} - \mathbf{R}') \times d\mathbf{s}(\mathbf{R}')}{|\mathbf{R} - \mathbf{R}'|^3}, \quad (5.4)$$

где $\mathbf{r} \equiv \mathbf{R}$ – координата рассматриваемой точки нити; \mathbf{R}' – координата произвольной точки на нити; $[\delta]$ означает, что исключен интервал $2\delta a$.

В соответствии с методом усечения, неизвестные величины δ и a находятся путем сопоставления расчета по (5.4) с известными решениями, полученными иными способами. Форма записи (5.4) была использована еще в работе Thomson [1883], однако количественно длина усечения впервые была определена Crow [1970] (см. также Кроу [1970]) для простейшего случая постоянной завихренности в ядре.

Прежде чем найти выражения параметров δ и a , выполним асимптотическую оценку формулы (5.4). Это легко сделать с учетом результатов п. 2.4. Так как основной вклад в интеграл вносит окрестность данной точки нити, то (5.4) запишем в виде

$$\mathbf{u} \approx 2 \left(-\frac{\Gamma \mathbf{b}}{4\pi} \int_{\delta a}^L \frac{(-\kappa s^2/2) ds}{(s^2)^{3/2}} \right) = \frac{\Gamma}{4\pi} \kappa \mathbf{b} \ln \frac{L}{\delta a}. \quad (5.5)$$

Здесь верхний предел интегрирования имеет тот же смысл, что в п. 2.4 (см. (2.34)); нижний предел $\delta a \equiv \mathcal{L}$ – длина усечения; коэффициент 2 появился из-за перехода от двух областей интегрирования к одной с учетом симметрии подынтегрального выражения, а само подынтегральное выражение было выведено в (2.34) и здесь переписано для случая $r = y = z = 0$, т. е. для оси вихря. В пределе $a \rightarrow 0$ получаем из (5.5), оставляя главный член, $\mathbf{u} \sim -(\Gamma/4\pi)\kappa \mathbf{b} \ln a$, что в точности соответствует (5.2). Видно также, что формула (5.5), хотя и выведена с исключением длины усечения из пределов интегрирования, совпадает с (5.1) с точностью до численного коэффициента. В ряде задач авторы непосредственно используют асимптотические формулы как в формах записи (5.1), (5.2), (5.5), так и в несколько отличающемся виде. При этом параметры L , δ , a могут оставаться либо неопределенными, как в случае использования LIE, либо вычисляться, например из эксперимента (см. Maxworthy *et al.* [1985]).

Нас, однако, интересует более точный расчет по (5.4), который будет сопоставлен с известными решениями, откуда и находятся параметры δ и a . Кроме выражения (5.4) выпишем еще одну форму записи метода усечения, предложенную Rosenhead [1930],

$$\mathbf{u} = -\frac{\Gamma}{4\pi} \oint \frac{(\mathbf{R} - \mathbf{R}') \times d\mathbf{s}(\mathbf{R}')}{[(\mathbf{R} - \mathbf{R}')^2 + \mu^2 a^2]^{3/2}}. \quad (5.6)$$

Здесь μ – численный коэффициент; a – радиус ядра. Показано [Moore, 1972; Сэффмэн, 2000], что эта формула предпочтительней при численном интегрировании и что она эквивалентна (5.4) при определенных соотношениях между μ и δ .

Выражение для длины усечения впервые было получено Crow [1970] для простейшего случая, когда завихренность постоянна и сосредоточена в ядре радиуса a . При этом расчет по методу усечения сравнивался с известными решениями Lamb [1932] для скорости тонкого вихревого кольца и Kelvin [1880] для частоты длинных спиральных волн на колоннообразном вихре.

Рассмотрим вначале *вихревое кольцо*. Скорость его распространения согласно Ламбу есть (см. п. 3.2.1)

$$U = \frac{\Gamma}{4\pi\rho} \left[\ln \frac{8\rho}{a} - \frac{1}{4} \right], \quad a/\rho \ll 1, \quad (5.7)$$

где ρ – радиус вихревого кольца. Теперь вычислим самоиндуцированную скорость кольца по формуле усечения (5.4), используя схему на рис. 5.1,

$$\begin{aligned} U \equiv u &= \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{\delta a/\rho}^{2\pi - \delta a/\rho} \frac{\rho \sin(\theta/2)}{4\rho^2 \sin^2(\theta/2)} d\theta = \frac{\Gamma}{8\pi\rho} \ln \left[\frac{1 - \cos\left(\frac{\delta a}{2\rho}\right)}{1 + \cos\left(\frac{\delta a}{2\rho}\right)} \right] \underset{a/\rho \rightarrow 0}{\approx} \\ &\approx \frac{\Gamma}{4\pi\rho} \ln \frac{4\rho}{\delta a}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Здесь $\rho = |\mathbf{R}| = |\mathbf{R}'|$. Приравнивая формулы (5.7) и (5.8), находим коэффициент δ и длину усечения \mathcal{L}

$$\ln 2\delta = 1/4, \quad \delta = 0,642, \quad \mathcal{L} \equiv a\delta = 0,642a. \quad (5.9)$$

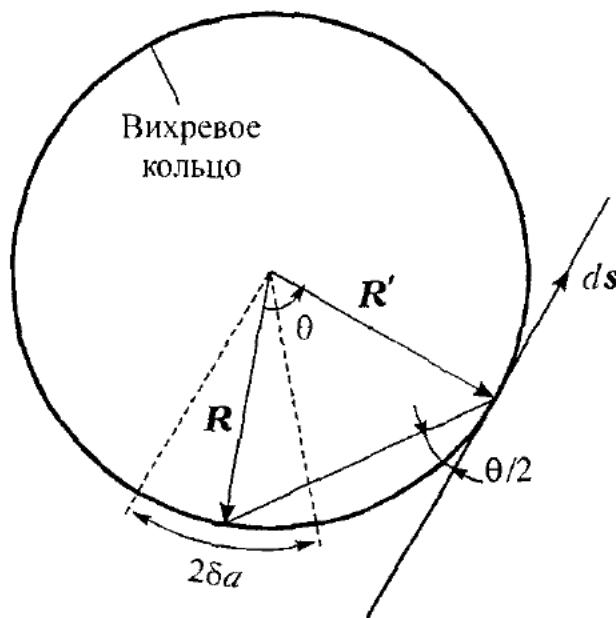


Рис. 5.1. Схема расчета самоиндуцированного движения вихревого кольца методом усечения

Теперь применим метод усечения к *винтовой вихревой нити*, завитой (с целью последующего сопоставления) влево (см. также Сэффмэн [2000]). Воспользуемся формулами п. 2.1 для винтовой линии, переписав их в обозначениях данного параграфа с учетом левой винтовой симметрии. Тогда из (2.7) имеем для радиуса-вектора точки движущегося винта (рис. 5.2)

$$\mathbf{R} = R \left[\mathbf{i} \cos \theta + \mathbf{j} \sin \theta - \frac{\mathbf{k}}{\gamma} (\theta - \omega t) \right]. \quad (5.10)$$

Здесь θ – параметр, имеющий смысл полярного угла; ω – частота; $1/\gamma = h/2\pi R$ – безразмерный шаг винта; $h = 2\pi l$ – шаг винта; R – радиус винта. Направим единичный тангенциальный вектор \mathbf{t} , как показано на рисунке, и пусть вектор завихренности также направлен вдоль \mathbf{t} .

Тогда из формул (2.8), (2.9), (2.11) получаем для элемента длины дуги ds , радиуса кривизны ρ и вектора \mathbf{t} :

$$\left. \begin{aligned} ds &= -R\sqrt{1+1/\gamma^2} d\theta, \\ d\mathbf{s} &= \mathbf{t} ds, \\ \rho &= R(1+\gamma^2)/\gamma^2, \\ \mathbf{t} &= \frac{1}{\sqrt{1+1/\gamma^2}} [\sin \theta, -\cos \theta, 1/\gamma]. \end{aligned} \right\} \quad (5.11)$$

Знак “–” в выражении для ds выбран с тем, чтобы длина дуги s возрастила в направлении оси z .

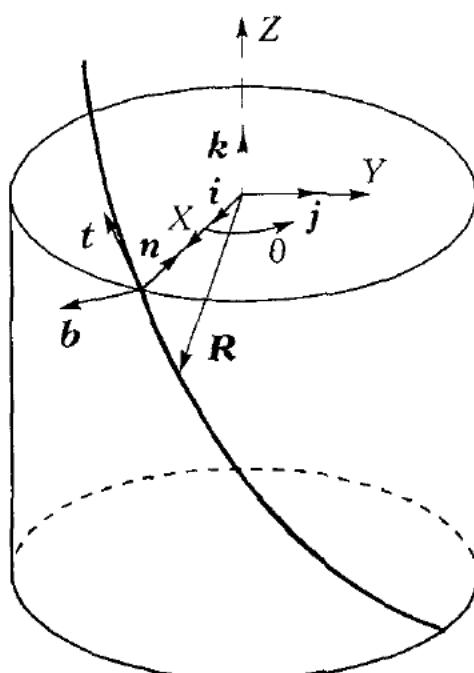


Рис. 5.2. Схема левовинтовой вихревой нити

Условие применимости метода усечения есть $a \ll \rho$. Далее будем рассматривать случай

$$\gamma \ll 1,$$

чтобы затем сравнить с решением Кельвина для длинных волн на колоннообразном вихре. Тогда условие $a \ll \rho$ с учетом (5.11) примет вид

$$a \ll R/\gamma^2. \quad (5.12)$$

Волны Кельвина рассмотрены в линейном приближении, т. е. при $R \ll a$, но это условие не противоречит (5.12), так как в случае очень длинных волн $\gamma \rightarrow 0$.

Не умаляя общности, вычислим самоиндуцированную скорость \mathbf{u} при $t = 0$ и $\theta = 0$. Тогда $\mathbf{R} = R \cdot \mathbf{i}$, $\mathbf{R} - \mathbf{R}' = R[\mathbf{i}(1 - \cos\theta) - \mathbf{j}\sin\theta + \mathbf{k}\theta/\gamma]$ и (5.4) запишется как

$$\mathbf{u} = -\frac{\Gamma\gamma^2}{4\pi R} \int_{[\delta]}^{\infty} \frac{\mathbf{j}(0\sin\theta - 1 + \cos\theta) - \mathbf{k}\gamma(\cos\theta - 1)}{\left[0^2 + 2\gamma^2(1 - \cos\theta)\right]^{3/2}} d\theta.$$

Интегрирование ведется в бесконечных пределах по θ , за исключением диапазона

$$|\theta| < \theta_c = \frac{\delta a}{R\sqrt{1 + 1/\gamma^2}} \underset{\gamma \rightarrow 0}{\approx} \frac{\delta a\gamma}{R}.$$

При $\gamma \ll 1$ подынтегральное выражение упрощается, и интеграл, с учетом симметрии, принимает вид

$$\mathbf{u} = -\frac{\Gamma\gamma^2}{2\pi R} \left\{ \mathbf{j} \int_{\frac{a\delta\gamma}{R}}^{\infty} \frac{(0\sin\theta - 1 + \cos\theta)}{\theta^3} d\theta + \mathbf{k}\gamma \int_{\frac{a\delta\gamma}{R}}^{\infty} \frac{(1 - \cos\theta)}{\theta^3} d\theta \right\}. \quad (5.13)$$

Интегралы в скобках могут быть выражены через интегральный косинус $Ci(\theta_c)$, который для малого аргумента $\theta_c = a\delta\gamma/R \ll 1$ запишется как

$$Ci(\theta_c) = - \int_{0_c}^{\infty} \frac{\cos\theta}{\theta} d\theta \approx E + \ln\theta_c,$$

где $E = 0,5772$ – константа Эйлера. Тогда окончательно

$$\mathbf{u} = -\frac{\Gamma \gamma^2}{4\pi R} \left\{ \mathbf{j} \left(\frac{1}{2} - E - \ln \theta_c \right) + \mathbf{k} \gamma \left(\frac{3}{2} - E - \ln \theta_c \right) \right\}. \quad (5.14)$$

Очевидно, что частота вращения винта ω определяется самоиндуцированной скоростью \mathbf{u} . Чтобы найти ω , возьмем частную производную по времени от (5.10): $\partial \mathbf{R}/\partial t = R\omega \mathbf{k}/\gamma$ и учтем, что вектор $[\partial \mathbf{R}/\partial t - \mathbf{u}]$ параллелен вектору \mathbf{t} . Последний факт следует из рис. 5.3, где показано смещение элемента нити за время δt . Заметим, что вектор \mathbf{u} непропендикулярен нити. Это следует из анализа (5.14) и выражения для \mathbf{t} в (5.11) при $\theta=0$. А вектор $\partial \mathbf{R}/\partial t$ направлен вдоль оси z по определению. Так как вектор $(-\mathbf{j} + \mathbf{k}/\gamma)$ при $\theta=0$ параллелен \mathbf{t} , то можно положить

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} - \mathbf{u} = A(-\mathbf{j} + \mathbf{k}/\gamma),$$

где A – некоторый коэффициент. Исключая A путем скалярного умножения равенства на \mathbf{j} и \mathbf{k} , получаем расчетную формулу для частоты

$$\omega R = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{k})\gamma + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{j}).$$

Подставляя \mathbf{u} из (5.14) и пренебрегая членами второго порядка малости по γ , находим частоту вращения винта

$$\omega = \frac{\Gamma k^2}{4\pi} \left[-\frac{1}{2} + E + \ln(ak) + \ln \delta \right], \quad (5.15)$$

где $k \equiv \gamma/R = 2\pi/h$ – волновое число. Заметим, что вследствие большого шага ($\gamma \ll 1$) ось вихря почти параллельна оси z . Видно, что $\omega < 0$ при $ak \ll 1$. Это означает (см. (5.10)), что винт вращается влево.

Формула Кельвина (4.58) для длинных винтовых волн на колоннообразном вихре с равномерным распределением завихренности внутри ядра имеет вид (при $R \equiv a$, $\Gamma = 2\pi\Omega R^2$)

$$|\omega| = \frac{\Gamma k^2}{4\pi} \left[-\ln(ak) + 0,366 \right].$$

Сравнивая с (5.15), получаем

$$\delta = 0,642 \quad \text{или} \quad \ln 2\delta = 1/4,$$

что в точности совпадает с расчетом (5.9), основанным на рассмотрении движения вихревого кольца.

Рассмотрим еще один частный случай – *синусоидальную вихревую нить*, вращающуюся как целое с угловой скоростью ω вокруг оси z (рис. 5.4).

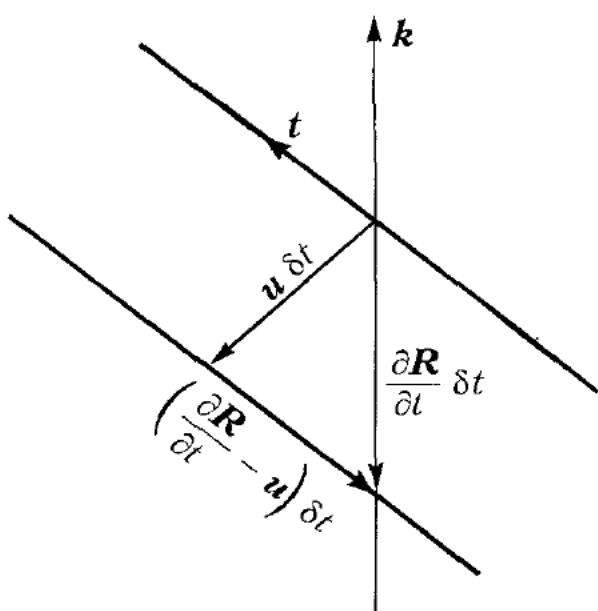


Рис. 5.3. Схема сменения вихревой нити за время δt

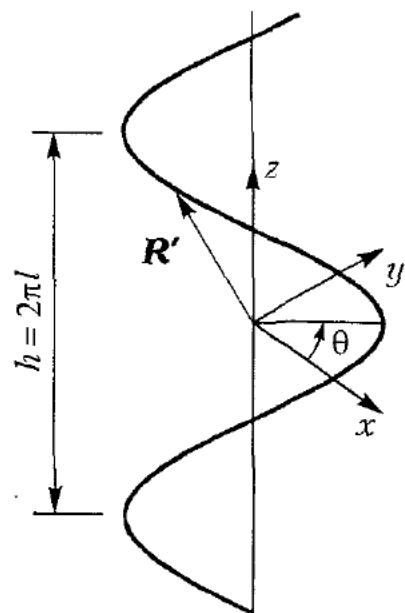


Рис. 5.4. Схема плоской синусоидальной вихревой нити, вращающейся как целое вокруг оси z

Движение вдоль оси z отсутствует. Синусоидальная линия является суперпозицией двух винтовых линий разной винтовой симметрии (см. Сэффмэн [2000], с. 289) и описывается, очевидно, в параметрическом виде формулами

$$x = R \cos \varphi \cos(\theta - \omega t),$$

$$y = R \cos \varphi \sin(\theta - \omega t),$$

$$z = \frac{R}{\gamma} \varphi.$$

Здесь R – амплитуда синусоиды, φ – фазовый угол синусоиды, $\gamma = 2\pi R/h$ – безразмерное волновое число. Повторим расчет самоиндукционного движения методом усечения, который выполняется несколько проще, чем для винтовой нити. По-прежнему полагаем большой шаг, т. е. $\gamma \ll 1$.

Без умаления общности рассчитаем скорость самоиндукционного движения для точки нити с $\theta = 0$, $\varphi = 0$ при $t = 0$. Тогда имеем $\mathbf{R} = R \cdot \mathbf{i}$, $\mathbf{R}' = R(\mathbf{i} \cos \varphi + \mathbf{k} \varphi / \gamma)$. Используя формулы п. 2.1, получим

$$ds = R \sqrt{\sin^2 \varphi + 1/\gamma^2} d\varphi \approx R d\varphi / \gamma,$$

$$\rho = R / \gamma^2 \cos \varphi,$$

$$\mathbf{t} = -\mathbf{i} \gamma \sin \varphi + \mathbf{k}.$$

Подставляя соответствующие выражения в (5.4) и учитывая $\gamma \ll 1$, приходим к интегралу

$$\mathbf{u} = -\frac{\Gamma\gamma^2}{4\pi R} \mathbf{j} \int_{[\delta]} \frac{(\phi \sin \phi - 1 + \cos \phi) d\phi}{\left[\phi^2 + \gamma^2 (1 - \cos \phi)^2 \right]^{3/2}} \approx -\frac{\Gamma\gamma^2}{2\pi R} \mathbf{j} \int_{\frac{a\delta\gamma}{R}}^{\infty} \frac{(\phi \sin \phi - 1 + \cos \phi) d\phi}{\phi^3}.$$

Здесь, как и в (5.13), интегрирование проводится в бесконечных пределах, за исключением длины усечения $2\mathcal{L}$. Сравнивая с (5.13), видим, что этот интеграл в точности совпадает с первым интегралом в (5.13). Учитывая, что второе слагаемое в (5.13) выпадает при расчете ω в длинноволновом приближении, приходим к выводу – частоты вращения *сипусоидальной* и *винтовой* вихревых нитей *большого* шага совпадают в первом приближении.

В заключение этого параграфа приведем формулу для δ в случае, когда в ядре имеется аксиальная компонента скорости, а распределение завихренности неравномерно. Эта формула легко получается путем сравнения (5.8) с соответствующим аналитическим решением для вихревого кольца (3.20)

$$\ln 2\delta = \frac{1}{2} - \frac{4\pi^2}{\Gamma^2} \int_0^a v^2 r dr + \frac{8\pi^2}{\Gamma^2} \int_0^a w^2 r dr, \quad (5.16)$$

где v и w – соответственно тангенциальная и осевая компоненты скорости в ядре вихря. В отсутствие аксиального течения и при постоянной завихренности в ядре из (5.16) получаем: $\ln 2\delta = 1/4$, что совпадает с (5.9). Анализ Moore, Saffman [1972] показывает, что метод усечения с параметром усечения по (5.16) справедлив с точностью до $O(a/\rho)$.

5.2. САМОИНДУЦИРОВАННОЕ ДВИЖЕНИЕ ВИНТОВОЙ ВИХРЕВОЙ НИТИ ПРОИЗВОЛЬНОГО ШАГА

Будем рассматривать тонкую вихревую нить винтовой формы в безграничном пространстве, полагая $\epsilon \ll \rho$, но без ограничений на шаг винта (рис. 5.5). Завихренность предполагается постоянной и сосредоточенной в ядре круглого сечения радиуса ϵ . Аксиальность течения в ядре отсутствует. Завихренность имеет только аксиальную компоненту. Расчет будем вести с помощью уравнения Био – Савара (2.14), а десингуляризацию интеграла Био – Савара выполним по методу Moore, Saffman [1972], который наиболее полно описан в работе Ricca [1994]. Суть метода состоит в специфической форме записи самоиндуцированной скорости \mathbf{u} (см. также поясняющую схему на рис. 5.6)

$$\mathbf{u}(\mathbf{R}) = \frac{\Gamma}{4\pi} \int \left[\mathbf{t} \times \frac{(\mathbf{R} - \mathbf{R}')}{|\mathbf{R} - \mathbf{R}'|^3} ds - \mathbf{t}_\odot \times \frac{(\mathbf{R} - \mathbf{R}'_\odot)}{|\mathbf{R} - \mathbf{R}'_\odot|^3} ds_\odot \right] + \mathbf{u}_\odot(\mathbf{R}). \quad (5.17)$$

Здесь \mathbf{R} – точка на нити, где вычисляется самоиндуцированная скорость; индекс \odot относится к некоторому вспомогательному вихревому кольцу. Первый интеграл есть интеграл Био – Савара для винтовой нити; второй интеграл – то же для вихревого кольца, соприкасающегося с нитью в точке \mathbf{R} и имеющего тот же радиус кривизны, что и нить в точке \mathbf{R} , но направление завихренности – противоположное. Ясно, что разность двух таких интегралов должна исключить сингулярность. Наконец, последний член представляет собой известную скорость того же самого вихревого кольца, но с другим знаком завихренности. Таким образом, вычитание и добавление вихревого кольца в (5.17) не меняет результата для винтовой нити, но позволяет исключить сингулярность, что строго будет показано ниже. Условие применимости этого подхода по-прежнему есть $\epsilon \ll \rho$, где ρ – радиус кривизны нити [Moore, Saffman, 1972].

Подобную процедуру можно считать разновидностью метода усечения, поскольку тем самым мы заменяем часть нити частью вихревого кольца. Именно так аналогичный подход применен в работе Widnall *et al.* [1971].

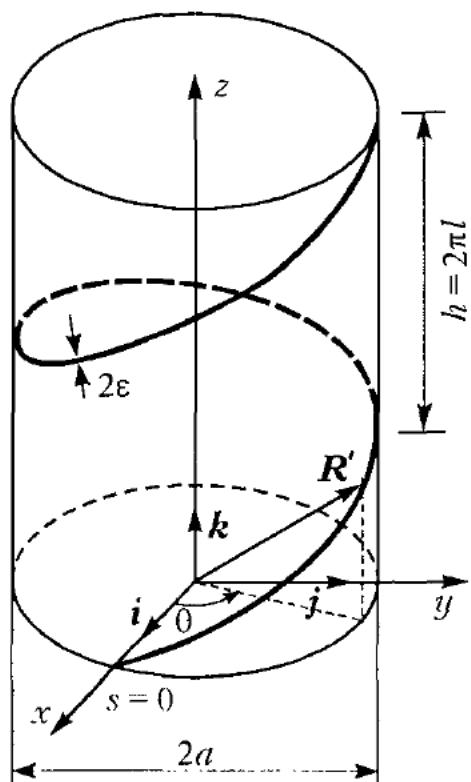


Рис. 5.5. Схема винтовой вихревой нити

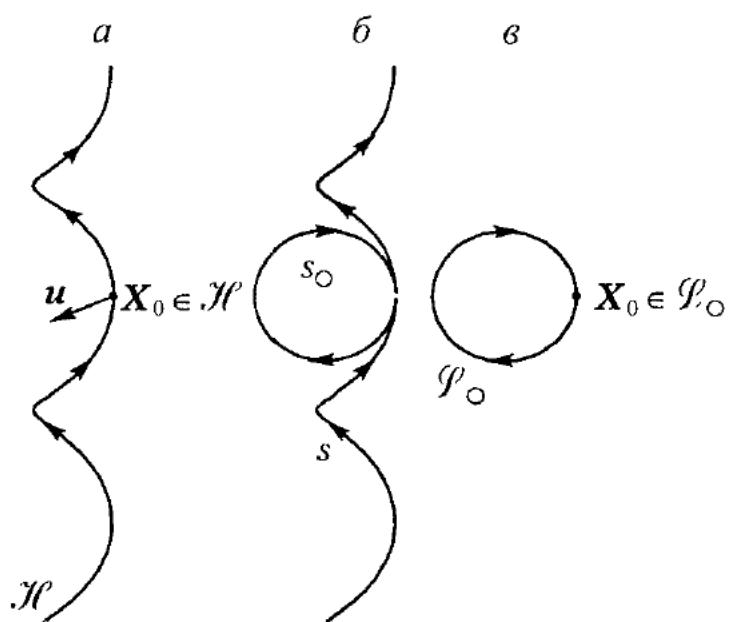


Рис. 5.6 Геометрическая интерпретация метода Moore, Saffman [1972] самоиндуцированная скорость винтового вихря. \mathcal{H} (a) разбивается на две составляющих путем вычитания (b) и добавления (c) соприкасающегося вихревого кольца \mathcal{P}_\odot , эквивалентной кривизны

Для определенности будем рассматривать *правый винт*. Выпишем основные соотношения и определения на основе формул п. 2.1 применительно к данным обозначениям:

$\tau = h/2\pi a = l/a$ – безразмерный шаг винта (совпадает с отношением кручения к кривизне винта);

$\rho = (a^2 + l^2)/a = a(1 + \tau^2)$ – радиус кривизны;

$ds = \sqrt{a^2 + l^2} d\theta = a\sqrt{1 + \tau^2} d\theta$ – элемент длины дуги;

$\mathbf{t} = (1 + \tau^2)^{-1/2} [-\mathbf{i} \sin \theta + \mathbf{j} \cos \theta + \tau \mathbf{k}]$;

$\mathbf{n} = [-\mathbf{i} \cos \theta - \mathbf{j} \sin \theta]$;

$\mathbf{b} = \tau(1 + \tau^2)^{-1/2} [\mathbf{i} \sin \theta - \mathbf{j} \cos \theta + \mathbf{k}/\tau]$;

$\mathbf{R}' = a[\mathbf{i} \cos \theta + \mathbf{j} \sin \theta + \mathbf{k} \tau \theta]$;

$\mathbf{R} = a[\mathbf{i}]$;

$\mathbf{R} - \mathbf{R}' = a[\mathbf{i}(1 - \cos \theta) - \mathbf{j} \sin \theta - \mathbf{k} \tau \theta]$.

Далее нас интересует только бинормальная компонента индуцированной скорости, т. е. $\mathbf{u}(\mathbf{R}) \cdot \mathbf{b}(\mathbf{R})$, где

$$\mathbf{b}(\mathbf{R}) = \mathbf{b}|_{\theta=0} = \tau(1 + \tau^2)^{-1/2} [-\mathbf{j} + \mathbf{k}/\tau].$$

С учетом выписанных выше соотношений бинормальная компонента подынтегрального выражения первого интеграла в (5.17) принимает вид

$$\mathbf{b}(\mathbf{R}) \cdot \left[\mathbf{t} \times \frac{(\mathbf{R} - \mathbf{R}')}{|\mathbf{R} - \mathbf{R}'|^3} \right] ds = \frac{\sqrt{1 + \tau^2}}{\rho} \cdot \frac{[\theta \sin \theta + (\tau^{-2} - 1)(1 - \cos \theta)]}{[2\tau^{-2}(1 - \cos \theta) + \theta^2]^{3/2}} d\theta. \quad (5.18)$$

При $\theta \rightarrow 0$ подынтегральное выражение записывается как

$$\frac{1}{2\rho} \cdot \frac{d\theta}{\theta} \quad (5.19)$$

и действительно отражает наличие логарифмической особенности в точке $\theta = 0$.

Теперь распишем подынтегральное выражение для второго интеграла в (5.17), т. е. для вихревого кольца. Но мы уже проделали это в п. 5.1 (см. (5.8)). Так как для кольца индуцированная скорость направлена по бинормали, то из (5.8) имеем в новых обозначениях

$$\mathbf{b}(\mathbf{R}) \cdot \left[\mathbf{t}_\odot \times \frac{(\mathbf{R} - \mathbf{R}_\odot)}{|\mathbf{R} - \mathbf{R}_\odot|^3} \right] ds_\odot = \frac{d\theta_\odot}{4\rho \sin(\theta_\odot/2)} = \frac{d\theta_\odot}{2^{3/2} \rho \sqrt{1 - \cos \theta_\odot}}. \quad (5.20)$$

Чтобы сравнить с первым интегралом в (5.17), надо иметь связь между θ и θ_\odot . Такую связь можно найти из условия равенства длин дуг $s \equiv s_\odot$ в пределах интервала $[-\pi\rho, \pi\rho]$

$$\theta_\odot = \theta / \sqrt{1 + \tau^2}. \quad (5.21)$$

При $\theta_\odot \rightarrow 0$ получаем в пределе $d\theta_\odot / 2\rho\theta_\odot = d\theta / 2\rho\theta$, что в точности совпадает с (5.19). Таким образом, в точке $\mathbf{R}' = \mathbf{R}$ логарифмические особенности от двух интегралов взаимно исключаются.

Для удобства дальнейших вычислений перепишем бинормальную компоненту скорости u_b из (5.17) в виде

$$u_b = \mathbf{u}(\mathbf{R}) \cdot \mathbf{b}(\mathbf{R}) = \frac{\Gamma}{4\pi\rho} (I_1 + I_2) + u_\odot, \quad (5.22)$$

где скорость вихревого кольца согласно (5.7) есть

$$u_\odot = \mathbf{u}_\odot \cdot \mathbf{b} = \frac{\Gamma}{4\pi\rho} \left[\ln \frac{8\rho}{\varepsilon} - \frac{1}{4} \right],$$

а интегралы I_1 и I_2 с учетом (5.18), (5.20), (5.21) можно представить в следующей эквивалентной форме:

$$\begin{aligned} I_1 &= 2\rho \int_0^{\pi\rho} \mathbf{b}(\mathbf{R}) \cdot \left[\mathbf{t} \times \frac{(\mathbf{R} - \mathbf{R}')}{|\mathbf{R} - \mathbf{R}'|^3} \right] ds - 2\rho \int_0^{\pi\rho} \mathbf{b} \cdot \left[\mathbf{t}_\odot \times \frac{(\mathbf{R} - \mathbf{R}_\odot)}{|\mathbf{R} - \mathbf{R}_\odot|^3} \right] ds_\odot = \\ &= 2 \int_0^{\pi\sqrt{1+\tau^2}} \left\{ (1 + \tau^{-2})^{1/2} \frac{\left[\theta \sin \theta + (\tau^{-2} - 1)(1 - \cos \theta) \right]}{\left[2\tau^{-2}(1 - \cos \theta) + \theta^2 \right]^{3/2}} - \right. \\ &\quad \left. - (1 + \tau^2)^{-1/2} 2^{-3/2} \left[1 - \cos \left(\frac{\theta}{\sqrt{1 + \tau^2}} \right) \right]^{-1/2} \right\} d\theta, \end{aligned} \quad (5.23)$$

$$\begin{aligned}
 I_2 &= 2\rho \int_{\pi\rho}^{\infty} \mathbf{b}(\mathbf{R}) \cdot \left[\mathbf{t} \times \frac{(\mathbf{R} - \mathbf{R}')}{|\mathbf{R} - \mathbf{R}'|^3} \right] ds = \\
 &= 2 \int_{\pi\sqrt{1+\tau^2}}^{\infty} (1 + \tau^{-2})^{1/2} \frac{\left[\theta \sin \theta + (\tau^{-2} - 1)(1 - \cos \theta) \right]}{\left[2\tau^{-2}(1 - \cos \theta) + \theta^2 \right]^{3/2}} d\theta. \quad (5.24)
 \end{aligned}$$

При такой форме записи оба интеграла являются ограниченными. Единственным безразмерным параметром является безразмерный шаг винта τ , который в точности равен безразмерному кручению

$$\tau = \hat{\tau}\rho = \frac{l}{a^2 + l^2}\rho$$

и который был использован в аналогичном анализе в работе Ricca [1994]. Результаты численного расчета Ricca [1994] приведены на рис. 5.7. Обратим внимание, что для достаточно больших значений безразмерного шага винта $\tau > 0,5$ $I_2 = 0$ и его можно не учитывать в расчете u_b . С целью дальнейших сопоставлений представим решение (5.22) в безразмерном виде, используя в качестве масштаба скорости величину ($\Gamma/4\pi\rho$)

$$\hat{u}_b = I_1 + I_2 + \hat{u}_{\odot} = \ln(\rho/\varepsilon) + C_{MS}, \quad (5.25)$$

где

$$C_{MS} = C(\gamma) = I_1 + I_2 + \ln 8 - 1/4. \quad (5.26)$$

Индекс MS указывает на подход Moore, Saffman [1972].

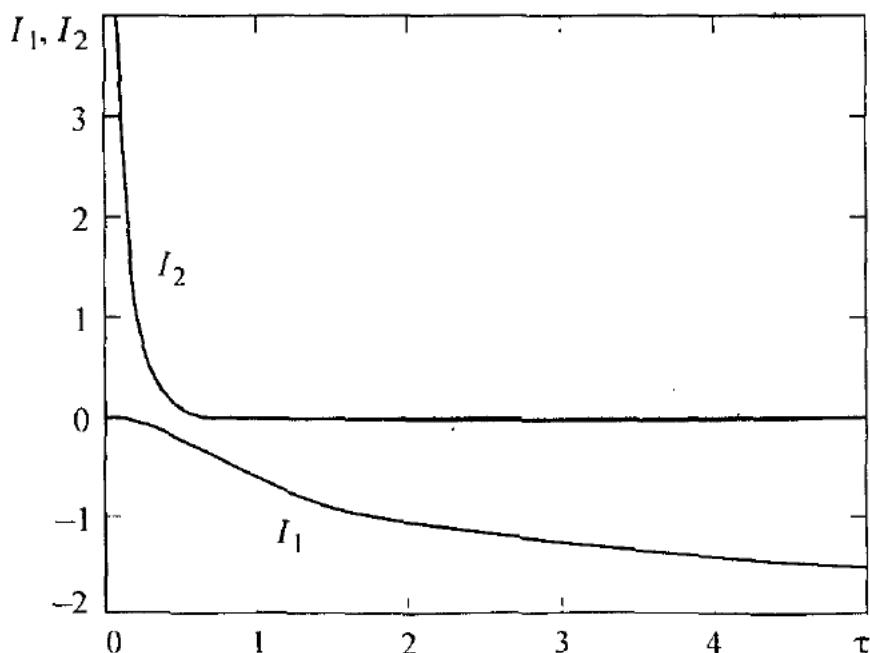


Рис. 5.7. Зависимость интегралов I_1 (5.23) и I_2 (5.24) от безразмерного кручения τ

Рассмотрим случай *большого шага* винта, когда $\tau \gg 1$. Тогда

$$I_2 \approx 2 \int_{\pi\tau}^{\infty} \frac{\theta \sin \theta - 1 + \cos \theta}{\theta^3} d\theta \approx \int_{\pi\tau}^{\infty} \frac{d\theta}{\theta^2} = \frac{1}{\pi\tau} \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} 0. \quad (5.27)$$

Первый интеграл перепишем в виде

$$I_1 = I_{11} + I_{12},$$

$$I_{11} \approx 2 \int_0^{\theta_0} \left[\frac{\theta \sin \theta - 1 + \cos \theta}{\theta^3} - \frac{1}{2^{3/2} \tau (1 - \cos(\theta/\tau))^{1/2}} \right] d\theta,$$

$$I_{12} \approx 2 \int_{\theta_0}^{\pi\tau} \left[\frac{\theta \sin \theta - 1 + \cos \theta}{\theta^3} \right] d\theta - \int_{\theta_0}^{\pi\tau} \frac{2\gamma}{2^{3/2} (1 - \cos(\theta/\tau))^{1/2}} d\theta = I_{12}^{(1)} - I_{12}^{(2)}.$$

При $\theta_0 \rightarrow 0$

$$I_{11} = 2 \int_0^{\theta_0} \left(\frac{1}{2\theta} - \frac{1}{2\theta} \right) d\theta = 0.$$

С учетом (5.27) в $I_{12}^{(1)}$ верхний предел можно положить равным ∞ . Тогда интеграл выражается через интегральный косинус $\text{Ci}(\theta_0)$, уже рассмотренный в п. 5.1:

$$I_{12}^{(1)} = 2 \int_{\theta_0}^{\infty} \frac{\theta \sin \theta - 1 + \cos \theta}{\theta^3} d\theta \approx \frac{1}{2} - E - \ln \theta_0.$$

Интеграл $I_{12}^{(2)}$ вычисляется довольно просто заменой переменных

$$I_{12}^{(2)} = \int_{\theta_0}^{\pi\tau} \frac{2d\theta}{2^{3/2} \tau (1 - \cos(\theta/\tau))^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\theta_0/\tau}^{\pi} \frac{d\alpha}{(1 - \cos \alpha)^{1/2}} =$$

$$= \int_{\theta_0/2\tau}^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sin \phi} = \ln 4 + \ln \tau - \ln \theta_0.$$

Подставляя все в (5.25), (5.26), получаем

$$\hat{u}_b = \ln \rho / \varepsilon - \ln \tau - E + \ln 2 + 1/4; \quad (5.28)$$

$$C_{MS} = -\ln \tau - E + \ln 2 + 1/4.$$

В соответствии с предыдущим параграфом угловая частота ω в длинноволновом приближении (большой шаг винта) есть индуцированная скорость, деленная на радиус винта a :

$$\begin{aligned}\omega = \frac{u_b}{a} &= \frac{\Gamma}{4\pi\rho a} \hat{u}_b = \frac{\Gamma}{4\pi a^2 \tau^2} \left[\ln \frac{\rho}{\varepsilon} - \ln \tau - E + \ln 2 + \frac{1}{4} \right] = \\ &= \frac{\Gamma k^2}{4\pi} [-\ln k\varepsilon - E + \ln 2 + 1/4].\end{aligned}\quad (5.29)$$

Здесь учтено, что волновое число $k = 1/a\tau$, а $\rho = a\tau^2$ при $\tau \gg 1$. Данное выражение в точности совпадает с формулой Кельвина (4.58) для длинных винтовых волн на колоннообразном вихре с равномерным распределением завихренности в ядре радиуса ε . Напомним, что в предыдущем параграфе аналогичная формула была получена методом усечения, а параметр усечения был определен именно путем сравнения с формулой Кельвина (4.58).

При умеренных и малых значениях шага вычисление бинормальной компоненты скорости по формулам (5.23)–(5.26) осложняется. Это вызвано, в частности, наличием быстроосциллирующего подынтегрального выражения в формуле (5.24). В связи с этим Ricca [1994] предпринял попытку оценки самоиндукционной скорости винтовой вихревой нити через скорость, индуцированную в ее окрестности, используя представление скорости через ряды Каптейна [Hardin, 1982], описанное выше в п. 2.6.1. В самом деле, разложение бинормальной компоненты в окрестности криволинейной вихревой нити (2.35) можно записать в виде, подобном (5.25)

$$\hat{u}_b^{(a)} = -2 \cos \chi \frac{\rho}{\sigma} + \ln \frac{\rho}{\sigma} + C_H, \quad (5.30)$$

где (σ, χ) являются локальными полярными координатами в окрестности нити, а индекс H указывает на подход Hardin. Обозначая $\delta = \sigma/\rho$, рассматривая скорость в точке $\{r_{ext} = a[1 + \delta(1 + \tau^2)], \theta = 0\}$ и учитывая, что

$$\hat{u}_b = (\hat{u}_z - \tau \hat{u}_\theta) / (1 + \tau^2)^{1/2}, \quad (5.31)$$

для внешности винта имеем

$$C_{ext} = -\frac{2\tau(1 + \tau^2)^{1/2}}{1 + \delta(1 + \tau^2)} - \frac{4(1 + \delta)(1 + \tau^2)^{3/2}}{\tau^2 [1 + \delta(1 + \tau^2)]} S(r_{ext}, 0) + \frac{2}{\delta} + \ln \delta, \quad (5.32)$$

где через S обозначен ряд Каптейна, входящий в представления скоростей u_0 и u_z (2.56).

Аналогично, для внутренней области винта $\{r_{\text{int}} = a[1 - \delta(1 + \tau^2)], \theta = 0\}$ получаем

$$C_{\text{int}} = -\frac{2(1 + \tau^2)^{1/2}}{\tau} - \frac{4(1 - \delta)(1 + \tau^2)^{3/2}}{\tau^2 [1 - \delta(1 + \tau^2)]} S(r_{\text{int}}, 0) - \frac{2}{\delta} + \ln \delta. \quad (5.33)$$

Ricca [1994] провел расчеты величины

$$C_H = \frac{1}{2}(C_{\text{ext}} + C_{\text{int}}) \quad (5.34)$$

в зависимости от безразмерного шага и сопоставил их с расчетами по формуле (5.26). Поскольку ряды Каптейна содержат сильную особенность типа полюса, значения скорости определялись на конечном расстоянии от нити. Чем меньше шаг винта, тем большее расстояние требуется. Так, при наименьшем значении $\tau = 0,5$ расстояние от нити составляло $\sigma = 0,125a$, что вносило, конечно же, значительную ошибку в определение C_H . В расчетах Ricca [1994] показал, что величины C_H и C_{MS} отличаются примерно на 0,25 в рассмотренном диапазоне изменения τ .

Асимптотический анализ взаимного соответствия величин C_H и C_{MS} при малых и больших τ проведен в работе Kuibin, Okulov [1998]. Для устранения проблем, связанных с наличием сингулярностей в решении, авторы использовали технику прямого выделения особенностей из рядов типа Каптейна, описанную в п. 2.6.2. Следуя указанной работе, запишем бинормальную компоненту скорости в соответствии с (5.31) и (2.74)

$$\hat{u}_b = 2 \frac{(1 + \tau^2)^{1/2}}{\tau} \left[1 - \left(1 + \tau^2 \frac{a}{r} \right) \left(\begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} + \frac{2}{\tau} \{S_\chi + R_\chi\} \right) \right]. \quad (5.35)$$

Приравнивая правые части уравнений (5.30) и (5.35), полагая $\chi = 0$ и переходя к пределу $\sigma \rightarrow 0$ с учетом явного выражения для S_χ (2.75)^{*}, получаем

$$C_{KO} = \frac{2(1 + \tau^2)^{1/2}}{\tau} - \frac{(1 + \tau^2)^{3/2}}{\tau} + 1 + \tau^2 - \ln \frac{(1 + \tau^2)^{3/2}}{\tau} - H, \quad (5.36)$$

* При выводе уравнений (5.35) и (5.36) рассматривается безграничное пространство, т. е. $u_0 = \Gamma / 2\pi l$ и в (2.75), (2.76) не учитывается влияние стенок цилиндра.

$$H = \frac{4(1+\tau^2)^{3/2}}{\tau^2} R_\chi \Big|_{\begin{array}{l} r=a \\ \chi=0 \end{array}}.$$

Индекс КО указывает на подход Kuibin, Okulov [1998]. По сути $C_{\text{КО}}$ – предел $\lim_{\delta \rightarrow 0} C_H$. Величина H зависит только от одного параметра τ и с учетом выражения (2.76) записывается в виде ряда

$$H = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{2(1+\tau^2)^{3/2}}{\tau} \left[\frac{2m}{\tau} K'_m \left(\frac{m}{\tau} \right) I_m \left(\frac{m}{\tau} \right) + 1 \right] + \frac{1}{m} \right\}. \quad (5.37)$$

Отметим, что ряд (5.37) достаточно быстро сходится. Тем не менее его сходимость можно значительно ускорить. В самом деле, применяя равномерные разложения (2.70), запишем

$$\begin{aligned} \frac{2m}{\tau} K'_m \left(\frac{m}{\tau} \right) I_m \left(\frac{m}{\tau} \right) + 1 &\sim -\frac{\xi_1 + \zeta_1}{m} - \frac{\xi_2 + \zeta_2 - \xi_1 \zeta_1}{m^2} - \frac{\xi_3 - \zeta_3 + \xi_1 \zeta_2 - \xi_2 \zeta_1}{m^3} = \\ &= -\frac{\tau}{2(1+\tau^2)^{3/2}} \left(\frac{1}{m} + \frac{a_3}{m^3} \right), \end{aligned}$$

$$a_3 = \frac{1}{8} \left[\frac{3\tau^2}{1+\tau^2} - \frac{30\tau^4}{(1+\tau^2)^2} + \frac{35\tau^6}{(1+\tau^2)^3} \right].$$

Отсюда видно, что члены ряда (5.37) при больших m убывают как m^{-3} . Обозначив члены ряда через H_m , перепишем H следующим образом:

$$H = \sum_{m=1}^{\infty} \left(H_m + \frac{a_3}{m^3} \right) - a_3 \zeta(3), \quad (5.38)$$

где ζ – дзета-функция Римана [Абрамовиц, Стиган, 1979]; $\zeta(3) = 1,20205\dots$

Расчет H по формуле (5.37) при $\tau = 5$ с точностью $7 \cdot 10^{-5}$ достигается при учете 74 членов ряда, а по формуле (5.38) достаточно двух членов ряда. Члены ряда (5.38) имеют порядок m^{-5} , и процесс ускорения сходимости может быть продолжен.

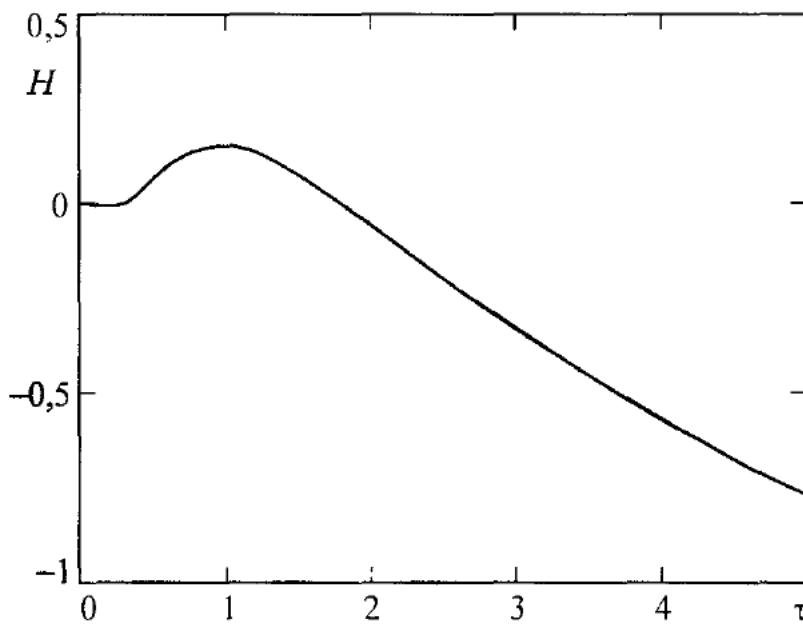


Рис. 5.8. Зависимость функции H (5.37) от безразмерного кручения τ

Характер зависимости $H(\tau)$ представлен на рис. 5.8. Рассмотрим асимптотическое поведение H при больших τ . Воспользуемся для этого разложениями модифицированных функций Бесселя при малом значении аргумента [Абрамовиц, Стиган, 1979]

$$H_1|_{\tau \gg 1} = -\ln 2\tau + \frac{5}{4} + E + O(\tau^{-2}), \quad H_m|_{\tau \gg 1} = \frac{-1}{m(m^2 - 1)} + O(\tau^{-2}), \quad m = 2, 3, \dots$$

Суммируя ряд (5.37) и подставляя в (5.36), находим

$$C_{KO}|_{\tau \gg 1} = \ln \frac{2}{\tau} + \frac{1}{2} - E + O(\tau^{-2}). \quad (5.39)$$

Сравнивая с (5.28), видим, что при $\tau \rightarrow \infty$ $C_{KO} = C_{MS} + 1/4$.

На рис. 5.9 асимптотика (5.39) сопоставлена с зависимостью, рассчитанной по формуле (5.36) с учетом 5 членов ряда (5.38), и с расчетами из Ricca [1994] в диапазонах $5 \leq \tau \leq 12$ и $29 \leq \tau \leq 37$.

Покажем, что и в другом пределе $\tau \ll 1$ константы отличаются на $1/4$. Действительно, при большом аргументе [Абрамовиц, Стиган, 1979]

$$I_m\left(\frac{m}{\tau}\right) = \left(\frac{\tau}{2\pi m}\right)^{1/2} \cdot e^{m/\tau} \cdot \left[1 - \frac{4m^2 - 1}{8} \cdot \frac{\tau}{m} + \dots\right],$$

$$K'_m\left(\frac{m}{\tau}\right) = \left(\frac{\pi\tau}{2m}\right)^{1/2} \cdot e^{-m/\tau} \left[1 + \frac{4m^2 + 3}{8} \cdot \frac{\tau}{m} + \dots\right].$$

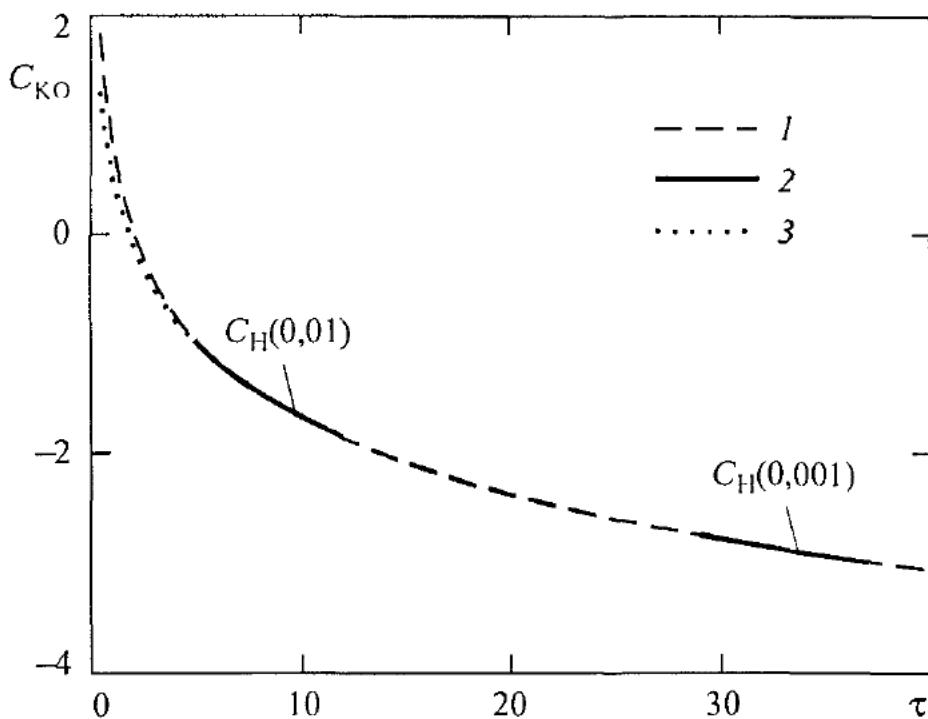


Рис. 5.9. Зависимость величины C_{KO} (5.36) от безразмерного кручения τ (1) и сопоставление с расчетами Ricca [1994] (2) и асимптотой (5.39) для больших τ (3). Цифрами в скобках указано относительное расстояние до нити σ/ρ

В результате члены ряда (5.37) имеют асимптотику

$$H_m|_{\tau \ll 1} = -\frac{3}{8} \frac{\tau^2}{m^3} + O(\tau^4).$$

После суммирования ряда и подстановки в (5.36) получаем

$$C_{\text{KO}}|_{\tau \ll 1} = \frac{1}{\tau} + \ln \tau + 1 - \frac{\tau}{2} + \frac{3\zeta(3) - 4}{8} \tau^2 + O(\tau^3). \quad (5.40)$$

На рис. 5.10 кривая, рассчитанная по формулам (5.36), (5.37), сопоставлена с асимптотикой (5.40) и с данными Ricca [1994]. Расчет с учетом всего лишь двух членов ряда (5.38) полностью совпадает с кривой $C_H(0,1)$, рассчитанной Ricca в диапазоне $0,5 \leq \tau \leq 1,4$ с помощью рядов Каптейна [Hardin, 1982].

Теперь найдем асимптотику интегралов (5.23), (5.24) при малом τ . Величина I_1 , как было показано в работе Ricca [1994], стремится к нулю при $\tau \rightarrow 0$ (см. рис. 5.7). Величина I_2 при малых τ определяется интегралом

$$I_2^1 = 2 \int_0^\infty \frac{1 - \cos \theta}{\pi \left[2(1 - \cos \theta) + \tau^2 \theta^2 \right]^{3/2}} d\theta.$$

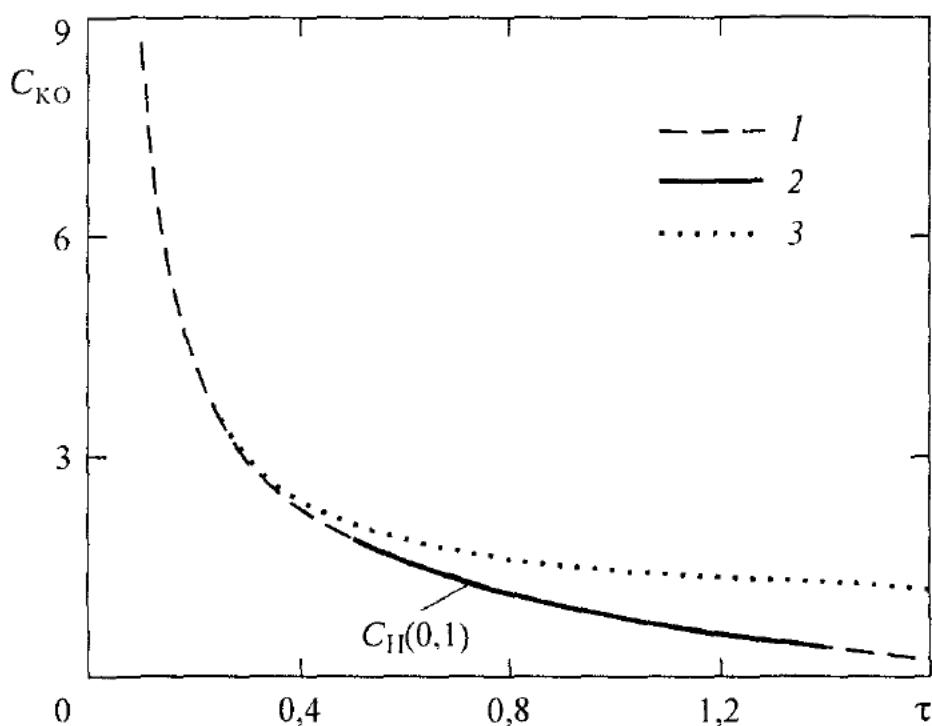


Рис. 5.10. Зависимость величины $C_{\text{ко}}$ (5.36) от τ (1) и сопоставление с расчетом Ricca [1994] (2) и асимптотой для малых τ (3)

Зависимость остатка $I_2^0 = I_2 - I_2^1$ от τ приведена на рис. 5.11. Последний интеграл I_2^1 преобразуем следующим образом:

$$I_2^1 = I_2^2 + \left(\frac{1}{\tau} + \ln \frac{\tau}{8} + 1 \right), \quad (5.41)$$

$$I_2^2 = 2 \int_{\pi}^{\infty} \left\{ \frac{1 - \cos \theta}{\left[2(1 - \cos \theta) + \tau^2 \theta^2 \right]^{3/2}} + \frac{2^{1/2} - \theta + P \tau^2 \theta^2}{\theta \left[2 + \tau^2 \theta^2 \right]^{3/2}} \right\} d\theta, \quad P = \frac{\ln(8\pi^2)}{8^{1/2}} - \frac{\pi}{2^{1/2}}.$$

Поведение I_2^2 при малых τ также показано на рис. 5.11. Итак, $I_2^0 \rightarrow 0$ и $I_2^2 \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow 0$. Следовательно, величина I_2 при $\tau \ll 1$ определяется выражением, заключенным в скобки в (5.41). Подставляя интегралы в (5.26), находим

$$C_{\text{MS}}|_{\tau \ll 1} = \frac{1}{\tau} + \ln \tau + \frac{3}{4}.$$

Сравнивая с (5.40), видим, что и при малом шаге $C_{\text{ко}} \approx C_{\text{MS}} + 1/4$.

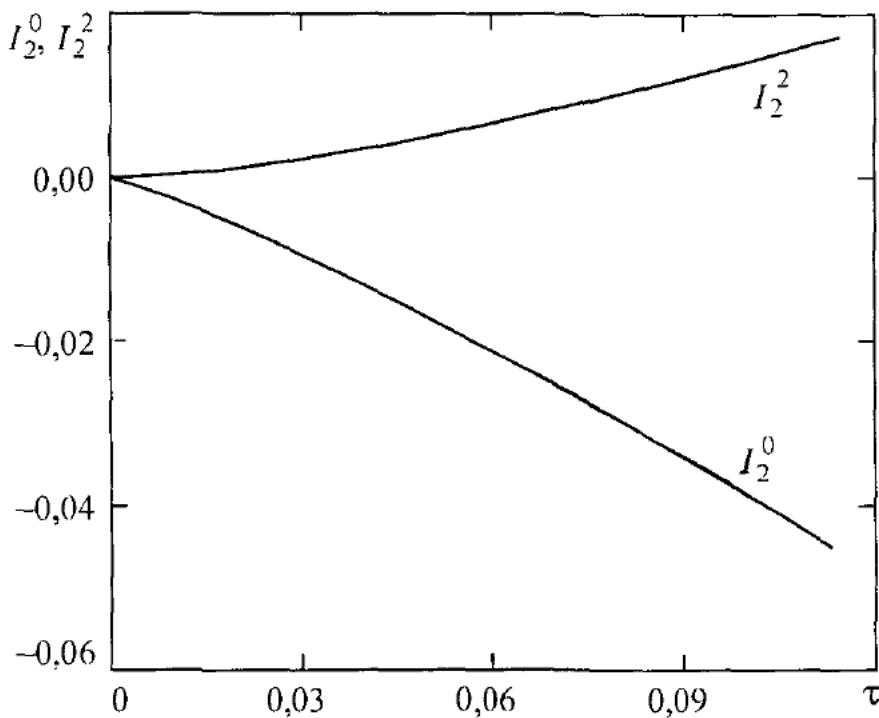


Рис. 5.11. Зависимость величин I_2^0 , I_2^2 от τ

Более полный анализ соотношения между величиной C_{MS} и предельным значением C_H (при $\delta \rightarrow 0$), т. е. C_{KO} , проведен в работе Boersma, Wood [1999]. Сделав ряд преобразований над интегралами I_1 и I_2 , авторы представили величину C_{MS} в следующем виде:

$$C_{MS} = -\frac{1}{4} + \ln 2 + 2\tau^2 - 2\tau(1+\tau^2)^{1/2} - \frac{1}{2} \ln(1+\tau^2) + (1+\tau^2)^{3/2} W(\tau), \quad (5.42)$$

$$W(\tau) = \int_0^\infty \left\{ \frac{2(1-\cos\theta)}{\left[2(1-\cos\theta) + \tau^2\theta^2\right]^{3/2}} - \frac{1}{\left[1+\tau^2\right]^{3/2}} \frac{\chi(1-\theta)}{\theta} \right\} d\theta, \quad (5.43)$$

где $\chi(x)$ – ступенчатая функция Хевисайда ($\chi(x)=0$, $x < 0$; $\chi(x)=1$, $x \geq 0$). С другой стороны, применив интегральное представление ряда Каптейна [Boersma, Yakubovich, 1998]

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\infty} K_m(ma) I_m(mb) = \\ & = \int_0^{\infty} \left[(t^2 + a^2 + b^2 - 2ab \cos t)^{-1/2} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (s^2 + a^2 + b^2 - 2ab \cos s)^{-1/2} ds \right] dt, \end{aligned}$$

авторы показали, что ряд $S(r_{\text{ext}}, 0)$ (см. (5.32)) в окрестности вихревой нити имеет асимптотику

$$\begin{aligned} S(r_{\text{ext}}, 0) = & \frac{\tau^2}{2(1+\tau^2)^{3/2}} \frac{1}{\delta} + \frac{\tau^2}{4(1+\tau^2)^{3/2}} \ln \delta + \\ & + \frac{\tau^2}{2(1+\tau^2)^{3/2}} \ln \frac{(1+\tau^2)^{1/2}}{2} - \frac{\tau^2}{4} W(\tau) + o(1), \end{aligned}$$

где $o(1)$ означает величину, стремящуюся к нулю при $\delta \rightarrow 0$. В результате

$$C_{\text{KO}} = \ln 2 + 2\tau^2 - 2\tau(1+\tau^2)^{1/2} - \frac{1}{2} \ln(1+\tau^2) + (1+\tau^2)^{3/2} W(\tau).$$

Сравнивая с (5.42), видим, что при любом значении шага $C_{\text{KO}} = C_{\text{MS}} + 1/4$.

В упомянутой статье Boersma, Wood [1999] дан полный анализ и таблица значений функции $W(\tau)$. В частности, при малом τ

$$\begin{aligned} W(\tau)|_{\tau \ll 1} = & \frac{1}{\tau} + (1+\tau^2)^{-3/2} \ln \frac{\tau}{2} + 1 + \\ & + \left[\frac{3}{8} \zeta(3) - \frac{7}{2} \right] \tau^2 + \left[\frac{135}{128} \zeta(5) - \frac{75}{16} \zeta(3) + \frac{43}{8} \right] \tau^4 + \\ & + \left[\frac{7875}{1024} \zeta(7) - \frac{9065}{256} \zeta(5) + \frac{1225}{64} \zeta(3) - \frac{337}{48} \right] \tau^6 + O(\tau^8). \end{aligned}$$

В другом пределе – при больших τ

$$W(\tau)|_{\tau \gg 1} = \left(\frac{3}{2} - E \right) \tau^{-3} - \frac{3}{2} \left(\frac{25}{12} - \frac{4}{3} \ln 2 - E \right) \tau^{-5} + O(\tau^{-7}).$$

Таким образом, для вычисления самоиндукционной скорости можно пользоваться как соотношениями (5.42), (5.43) с функцией $W(\tau)$, представленной интегралом, так и соотношениями (5.36), (5.37) с функцией $H(\tau)$, представленной бесконечным рядом от модифицированных функций Бесселя.

Для выполнения быстрых расчетов, не требующих высокой точности, Kuibin, Okulov [1998] предложили аппроксимацию функции $C_{\text{KO}}(\tau)$ простой зависимостью

$$C_{\text{KO}}^{\text{app}} = \ln \frac{\tau}{1+\tau^2} + \frac{1+1,455\tau+1,723\tau^2+0,711\tau^3+0,616\tau^4}{\tau+0,486\tau^2+1,176\tau^3+\tau^4}, \quad (5.44)$$

имеющую те же асимптоты (5.39) и (5.40), что и функция (5.36). Максимальное отклонение от точной зависимости составляет 0,007 для $\tau \in (0, \infty)$.

Поскольку установлена точная взаимосвязь величин C_{KO} и C_{MS} , выражения (5.36), (5.37), (5.42), (5.43) или (5.44) в соответствии с (5.25) могут быть использованы для определения самоиндуцированной скорости винтового вихря с равномерным распределением завихренности в ядре.

Для обобщения результата на вихри с внутренней структурой, по аналогии с вихревым кольцом (см. (3.20)), запишем

$$\hat{u}_b = \ln \frac{\rho}{\varepsilon} + C_{KO} - \left[\frac{1}{2} - 2 \frac{\pi^2 \varepsilon^2 \bar{u}^2}{\Gamma^2} + 4 \frac{\pi^2 \varepsilon^2 \bar{w}^2}{\Gamma^2} \right], \quad (5.45)$$

где u и w – соответственно тангенциальная и осевая компоненты скорости в ядре, а черта означает осреднение по сечению вихря.

5.3. СОЛИТОН ХАСИМОТО

В (2.4) на основе локального индукционного приближения выведено уравнение

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} = \kappa \mathbf{b} \quad (5.46)$$

в относительных (но не безразмерных) координатах. Так, время t нормировано в соответствии с (2.38) и его размерность есть [m^2]. В работе Hasimoto [1972] показано, что (5.46) сводится к *нелинейному уравнению Шредингера* (НУШ), одним из решений которого является спиральный солитон, названный впоследствии *солитоном Хасимото*. В этом разделе мы выведем НУШ и проанализируем односолитонное решение, опираясь на работы Hasimoto [1972] и Дж. Лэма [1983].

Прежде всего перепишем два последних уравнения Серре – Френе (2.6) в комплексном виде

$$(\mathbf{n} + i\mathbf{b})' + i\tau(\mathbf{n} + i\mathbf{b}) = -\kappa t, \quad (5.47)$$

где по-прежнему штрих означает производную по длине дуги s . Введем две новые комплексные функции

$$\mathbf{N} = (\mathbf{n} + i\mathbf{b}) \exp \left(i \int_0^s \tau ds \right), \quad (5.48)$$

$$\Psi = \kappa \exp \left(i \int_0^s \tau ds \right). \quad (5.49)$$

Очевидно $|\Psi|^2 = \Psi \Psi^* = \kappa^2$, где звездочка означает комплексно сопряженную величину. Далее, используя (2.6) и (5.47), получаем для производных по s от \mathbf{N} и \mathbf{t}

$$\mathbf{N}' = -\Psi \mathbf{t}, \quad (5.50)$$

$$\mathbf{t}' = \frac{1}{2} (\Psi^* \mathbf{N} + \Psi \mathbf{N}^*).$$

Для производной по времени от вектора \mathbf{t} , учитывая его определение и уравнение (5.46), получаем

$$\mathbf{t}_t = (\mathbf{X})_t = (\mathbf{X}_t)' = (\kappa \mathbf{b})' = \kappa' \mathbf{b} - \tau n \kappa = \frac{i}{2} (\Psi' \mathbf{N}^* - \Psi^{*\prime} \mathbf{N}). \quad (5.51)$$

Сложнее найти \mathbf{N}_t . В общем случае всякий вектор можно выразить как линейную комбинацию единичных векторов ($\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$) или другой тройки независимых векторов ($\mathbf{t}, \mathbf{N}, \mathbf{N}^*$), являющихся линейными комбинациями единичных векторов, как это предложено Hasimoto [1972]

$$\mathbf{N}_t = \alpha \mathbf{N} + \beta \mathbf{N}^* + \gamma \mathbf{t}, \quad (5.52)$$

где коэффициенты α, β, γ подлежат определению. Для этого учтем следующие соотношения:

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{N} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{t} = 0, \quad \mathbf{N} \cdot \mathbf{N}^* = 2.$$

Далее, умножая (5.52) сначала на \mathbf{N} , затем на \mathbf{N}^* , получаем

$$2\beta = \mathbf{N} \mathbf{N}_t = \frac{1}{2} (\mathbf{N} \mathbf{N})_t = 0, \quad 2\alpha = \mathbf{N}^* \mathbf{N}_t, \quad 2(\alpha + \alpha^*) = (\mathbf{N} \mathbf{N}^*)_t = 0.$$

Таким образом $\beta = 0$, а коэффициент α – мнимый, поэтому положим $\alpha = iF$, где F – действительная функция.

Из условия $(\mathbf{N} \mathbf{t})_t = 0$ имеем

$$\mathbf{\Psi} = \mathbf{t} \mathbf{N}_t = -\mathbf{N} \mathbf{t}_t = -\frac{i}{2} \mathbf{N} (\Psi' \mathbf{N}^* - \Psi^{*\prime} \mathbf{N}) = -i \Psi'.$$

Тогда (5.52) принимает вид

$$\mathbf{N}_t = iF \mathbf{N} - i\Psi' \mathbf{t}. \quad (5.53)$$

Чтобы найти неизвестную функцию F , возьмем производную по s от (5.53) и производную по t от (5.50). Приравнивая правые части получившихся уравнений (отдельно при \mathbf{t} и \mathbf{N} ; члены с \mathbf{N}^* исчезают), получаем два уравнения

$$\Psi_t - i\Psi'' - iF\Psi = 0,$$

$$F' = \frac{1}{2}(\Psi^*\Psi' + \Psi\Psi'^*) \text{ или } F = \frac{1}{2}[|\Psi|^2 + A(t)],$$

где $A(t)$ – константа интегрирования. Подставляя F в первое уравнение, приходим к одному уравнению для Ψ

$$i\Psi_t + \Psi'' + \frac{1}{2}[|\Psi|^2 + A(t)]\Psi = 0. \quad (5.54)$$

Наконец, вводя еще одно преобразование

$$\Psi = \frac{1}{2}\Psi \exp\left[-\frac{i}{2}\int_0^t A(t)dt\right],$$

получаем окончательно *кубическое уравнение Шредингера* (НУIII)

$$i\Psi_t + \Psi'' + 2|\Psi|^2\Psi = 0. \quad (5.55)$$

Это уравнение хорошо изучено в литературе (см., например, Лэм [1983]). Показано, в частности, что оно обладает многосолитонными решениями. Мы рассмотрим наиболее важный для нас случай *односолитонного* решения. Будем полагать, что существует единственная волна, распространяющаяся с постоянной скоростью c_g в положительном направлении. Тогда можно ввести бегущую координату $\xi = s - c_g t$, а решение искать в виде

$$\Psi = \kappa(\xi) \exp\left[i \int_0^s \tau(\xi) ds\right]$$

с условием $\kappa = 0$ при $s \rightarrow \infty$. Подставим это выражение в уравнение (5.54) и, разделяя действительную и мнимую части, получим два обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнения для кручения τ и кривизны κ

$$-c_g \kappa \left[\tau(\xi) - \tau(-c_g t) \right] = \kappa'' - \kappa \tau^2 + \frac{1}{2}(\kappa^2 + \Lambda)\kappa,$$

$$-c_g \kappa' + 2\kappa'\tau + \kappa\tau' = 0.$$

Отметим, что нестационарные уравнения для кривизны и кручения (*intrinsic equations*) были выведены Da Rios [1906] и Betchov [1965] непосредственно из LIE.

Из второго уравнения следует, что $(c_g - 2\tau)\kappa^2 = B$. Условие $\kappa|_{s \rightarrow \infty} = 0$ дает константу интегрирования $B = 0$. Поэтому

$$\tau = \frac{1}{2}c_g = \text{const.} \quad (5.56)$$

Тогда первое уравнение принимает вид

$$\kappa'' - \kappa\tau^2 + \frac{1}{2}(\kappa^2 + A)\kappa = 0. \quad (5.57)$$

Так как это дифференциальное уравнение второго порядка, то необходимо кроме условия $\kappa|_{s \rightarrow \infty} = 0$ задать еще одно условие, например максимальное значение кривизны κ_{\max} . Тогда это уравнение разрешается при значении константы $A = 2(\tau^2 - v^2)$, где $v = \kappa_{\max}/2$, и его решение выражается через гиперболический секанс

$$\kappa = 2v \operatorname{sech} v\xi. \quad (5.58)$$

Итак, решение задачи о распространении уединенной волны вдоль вихревой нити получено в переменных кручение – кривизна. Восстановление пространственной формы кривой по заданным значениям кручения и кривизны является стандартной задачей теории кривых, которая решается с помощью уравнения Риккати. Однако процедура вычислений весьма громоздка, поэтому мы опишем ее только вкратце и сразу приведем конечные результаты.

Пусть ось x направлена вдоль невозмущенной вихревой нити. Тогда, представляя единичные векторы в декартовой системе координат как

$$\begin{aligned} t &= i t_1 + j t_2 + k t_3, \\ n &= i n_1 + j n_2 + k n_3, \\ b &= i b_1 + j b_2 + k b_3 \end{aligned}$$

и учитывая, что $t = X'$, получаем

$$x = \int t_1 ds, \quad y = \int t_2 ds, \quad z = \int t_3 ds. \quad (5.59)$$

Компоненты касательного вектора находятся из уравнений Серре – Френе, куда входят известные величины – кручение и кривизна

$$\begin{aligned} t'_i &= \kappa n_i, \\ n'_i &= \tau b_i - \kappa t_i, \\ b'_i &= -\tau n_i, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Уравнения записаны в индексном виде, причем справедливо соотношение $t_i^2 + n_i^2 + b_i^2 = 1$.

Введем новые функции

$$\Phi_i = (t_i + in_i)/(1 - b_i), \quad -1/\chi_i = \Phi_i^* = (t_i - in_i)/(1 - b_i),$$

через которые просто выражаются компоненты единичных векторов. Дифференцируя по s и учитывая уравнения Серре – Френе, получаем уравнение Риккати как для Φ_i

$$\Phi_i' + i\chi_i \Phi_i + \frac{1}{2}i\tau(1 - \Phi_i^2) = 0,$$

так и для χ_i . Общее решение имеет вид

$$\Phi_i = \frac{\mathbf{c}_i \mathbf{P} + \mathbf{Q}}{\mathbf{c}_i \mathbf{R} + \mathbf{S}},$$

где \mathbf{c}_i – константы интегрирования, а функции $\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{S}$ – одни и те же для всех компонент. Опуская громоздкую процедуру вычисления этих функций, а также ряд других преобразований, выпишем окончательные выражения для (5.59) в параметрическом виде

$$\begin{aligned} x &= s - (2\mu/v) \operatorname{th} \eta, \\ y + iz &= r e^{i\theta}, \\ t_x &= 1 - 2\mu \operatorname{sech}^2 \eta, \quad t_y + it_z = -vr(\operatorname{th} \eta - iT) e^{i\theta}, \\ n_x &= 2\mu \operatorname{sech}^2 \eta \sinh \eta, \quad n_y + in_z = -[1 - 2\mu(\operatorname{th} \eta - iT)\operatorname{th} \eta] e^{i\theta}, \\ b_x &= 2\mu T \operatorname{sech} \eta, \quad b_y + ib_z = i\mu(1 - T^2 - 2iT\operatorname{th} \eta) e^{i\theta}, \end{aligned} \quad (5.60)$$

где

$$r = \frac{2\mu}{v} \operatorname{sech} \eta = \frac{\kappa}{v^2 + \tau^2},$$

$$\theta = T\eta + v^2(1 + T^2)t = \tau s + (v^2 - \tau^2)t,$$

$$\eta = v\xi = v(s - 2\tau t),$$

$$\mu = 1/(1 + T^2), \quad T = \tau/v.$$

Здесь в выражении для r учтено (5.58).

Проанализируем форму солитона, например, в момент времени $t = 0$. Тогда, переходя для удобства к относительным величинам

$$X = xv, \quad Y = yv, \quad Z = zv, \quad L = sv,$$

имеем

$$\begin{aligned} X &= L - \frac{2}{1+T^2} \operatorname{th} L, \\ Y &= \frac{2}{1+T^2} \operatorname{sech} L \cdot \cos TL, \\ Z &= \frac{2}{1+T^2} \operatorname{sech} L \cdot \sin TL. \end{aligned} \quad (5.61)$$

Как видно, единственным параметром, характеризующим форму солитона, является величина T , представляющая собой отношение кручения $\tau = \text{const}$ к максимальной кривизне $v = \kappa_{\max}/2$. Типичные формы солитона показаны на рис. 5.12 в проекциях на плоскости xy , xz , yz и в изометрической проекции при различных значениях параметра T . Штриховой линией на рис. 5.12д показана огибающая радиуса r , значение которого меняется от $r = 2\mu/v$ при $x = 0$ до нуля на бесконечности. Максимальная кривизна достигается при $x = 0$. Как следует из рисунков, солитон представляет собой спираль, ограниченную огибающей. Однако форма спирали сильно зависит от значения параметра T . При $T \geq 1$ y и z являются однозначными функциями x . Так как кручение $\tau > 0$ в силу условия (5.56) и предположения $c_g > 0$, то направление закрутки спирали правое (правая спираль), а параметр T также положителен. Если $T = 1$, то $dX/dL = 0$ при $L = X = 0$ и на огибающей появляется заострение, хотя на вихревой нити никаких сингулярностей не наблюдается.

При $T < 1$ происходит “перехлест” кривой и в проекции xy возникает замкнутая петля. Если кручение $\tau \rightarrow 0$, то в пределе $T \rightarrow 0$ спираль стремится к плоской кривой на плоскости xy , но пересечения (соединения точек нити) не происходит.

Характерная длина солитона \mathcal{L} определяется из условия уменьшения по-перечного размера в “ e ” раз, т. е. при $vs = 1$. Тогда $\mathcal{L} = 2x \approx 2s = 2/v = 4/\kappa_{\max}$. Длина волны λ находится из условия: $\Delta\theta = 2\pi = \tau\Delta s$. Тогда

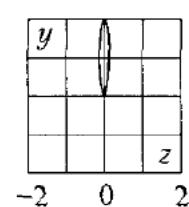
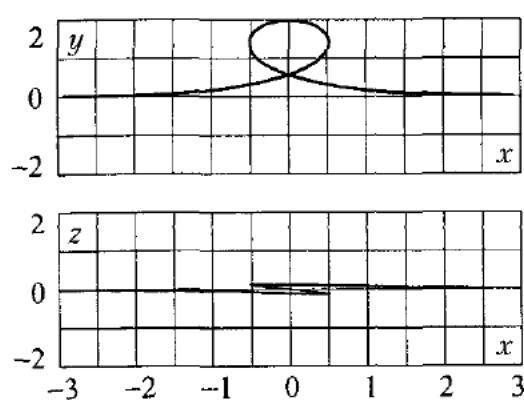
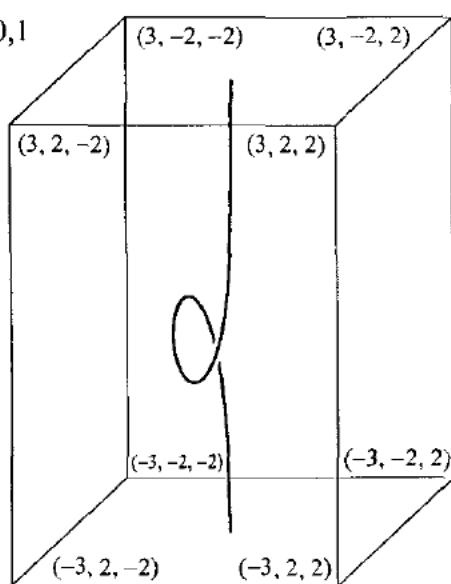
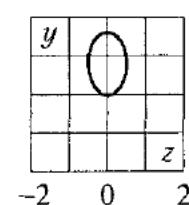
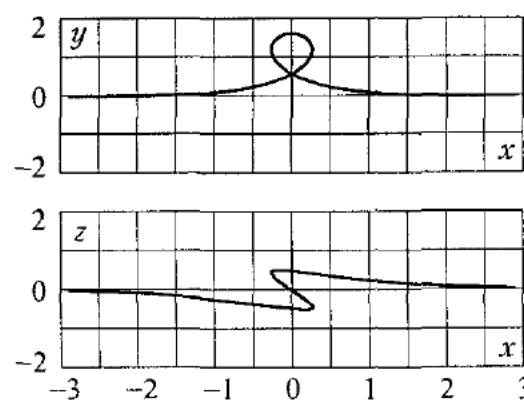
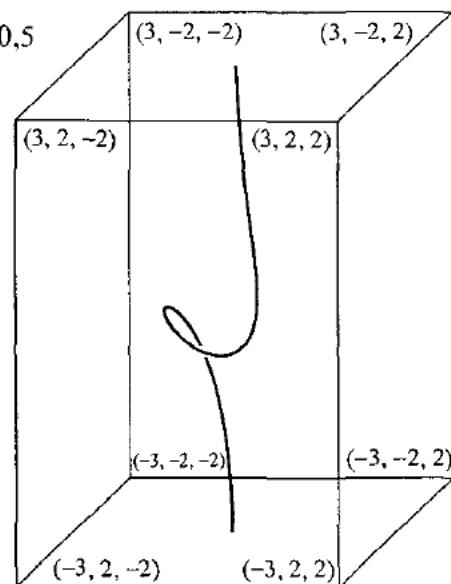
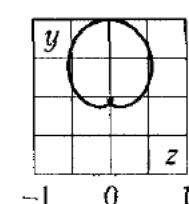
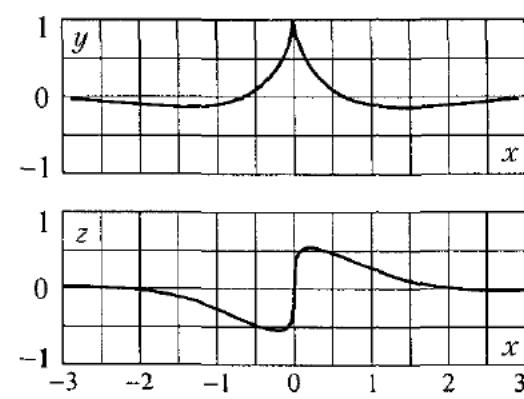
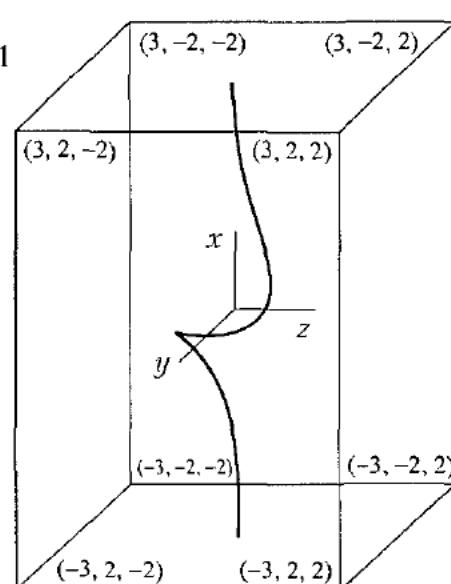
$$\lambda = x(s + 2\pi/\tau) - x(s) = \frac{2\pi}{\tau} + \frac{2\mu}{v} \left[\operatorname{th}(vs) - \operatorname{th}(vs) + \frac{2\pi}{T} \right], \quad (5.62)$$

т. е. длина волны меняется вдоль оси x . Длина волны вблизи $x = 0$ (с учетом симметрии)

$$\lambda = \frac{2\pi}{\tau} - \frac{4\mu}{v} \operatorname{th}\left(\frac{\pi}{T}\right).$$

При большом кручении $T \rightarrow \infty$ или на больших расстояниях $s \rightarrow \infty$ ($x \rightarrow \infty$) имеем простое выражение

$$\lambda = 2\pi/\tau.$$

a $T = 0,1$ *b* $T = 0,5$ *c* $T = 1$ 

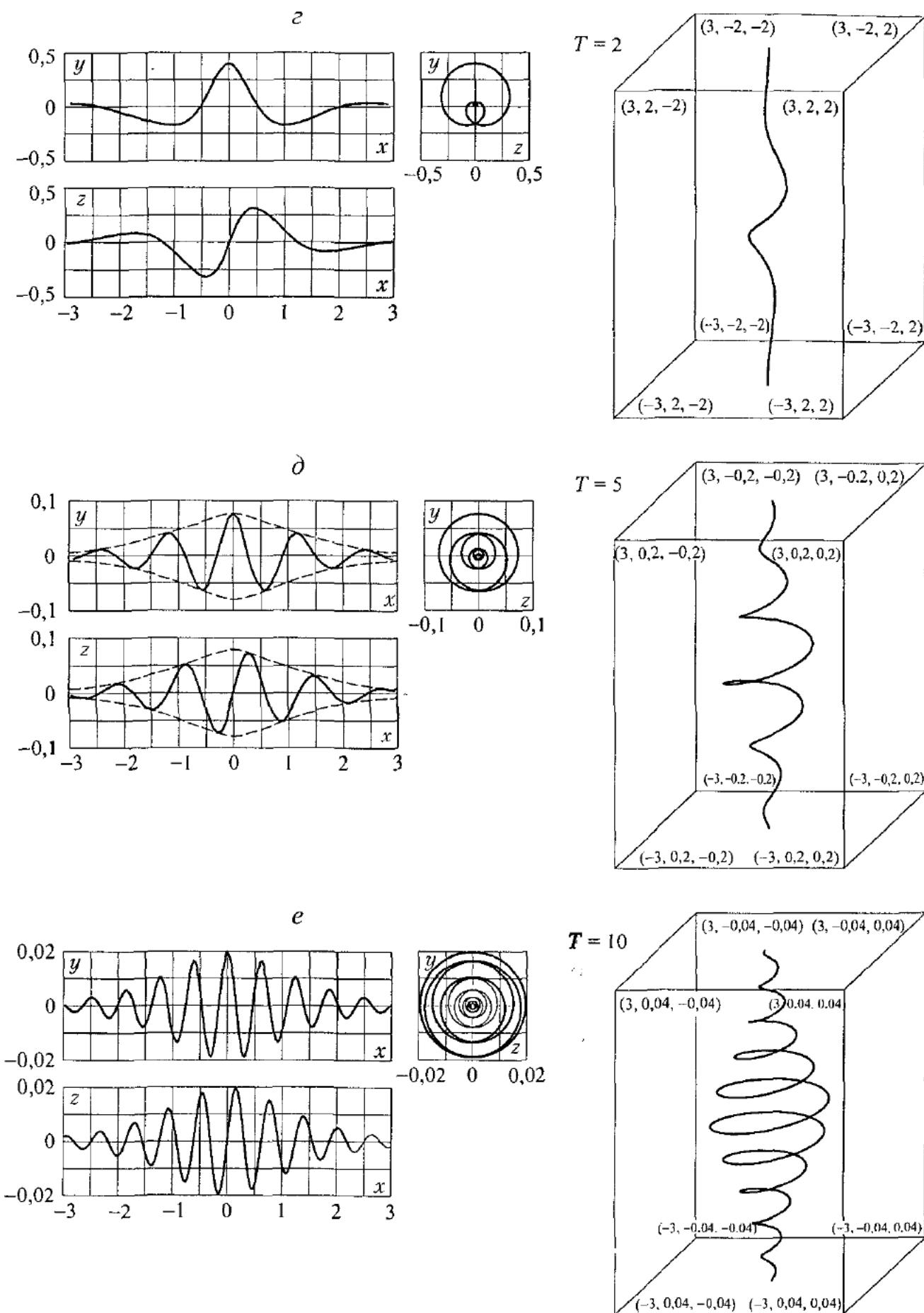


Рис. 5.12. Зависимость формы вихревого солитона от параметра T

Количество витков спирали n на характерном размере солитона \mathcal{L} есть $n = \mathcal{L}/\lambda$. В случае $T \rightarrow \infty$

$$n = \mathcal{L}/\lambda = T/\pi.$$

Теперь перейдем к анализу движения солитона Хасимото (или *вихревого солитона*, как его еще называют). Скорость материальной точки на вихревой нити в соответствии с (5.46) есть $\mathbf{u} = \dot{\mathbf{X}} = \kappa \mathbf{b}$. Тогда с учетом (5.58) и (5.60) получаем

$$u_x = 4\mu\tau \operatorname{sech}^2 \eta = \tau(v^2 + \tau^2)r^2,$$

$$\mathbf{w} = u_y + iu_z = [iv^2(1 - T^2) + 2v^2T \operatorname{th} \eta](y + iz),$$

где \mathbf{w} – вектор скорости в комплексной плоскости yz . Последнее выражение удобнее записать через радиальную w_r и азимутальную w_θ компоненты скорости в комплексной плоскости

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_\theta + \mathbf{w}_r,$$

где

$$\mathbf{w}_\theta = iv^2(1 - T^2)(y + iz) = i(v^2 - \tau^2)(y + iz),$$

$$\mathbf{w}_r = rv^2T \operatorname{th} \eta(y + iz) = 2v\tau \operatorname{th} \eta(y + iz).$$

Заметим, что умножение на мнимую единицу i означает поворот вектора $(y + iz)$ на 90° против часовой стрелки. Однако в \mathbf{w}_θ входит еще коэффициент $(1 - T^2)$, поэтому результирующее направление вращения спирали зависит от параметра T .

При $|T| < 1$ направление вращения спирали то же, что направление вихренности на бесконечности, т. е. при $T = 2$ и $T = 5$ спираль вращается вправо, если глядеть в сторону направления оси x . При этом она еще и закручена вправо и движется в сторону увеличения x со скоростью $c_g = 2\tau$ при $\tau > 0$.

При $|T| > 1$ направление вращения противоположное. А при $|T| = 1$ вращение отсутствует.

Величина $c_g = 2\tau$, очевидно, имеет смысл групповой скорости, поскольку характеризует движение спиральной структуры в целом или, что эквивалентно, ее огибающей. Действительно, пусть $r = r_{\max} = 2\mu/v$. Тогда из (5.60) следует, что $\eta = v(s - 2\tau t) = 0$ или $s = 2\tau t$. Соответственно продольная координата x точки нити с $r = r_{\max}$ есть $x = s - 2\mu/v \operatorname{th} \eta = c_g t$, т. е. центр пакета (солитона) движется с одной и той же скоростью $c_g = 2\tau$ как в абсолютной системе координат, так и вдоль длины дуги s .

Теперь определим фазовую скорость c_p . По определению – это скорость точки с постоянной фазой

$$\theta = ts + (v^2 - \tau^2)t = \tau(s - c_0 t) = \text{const.}$$

Отсюда получаем, что в системе координат, связанной с длиной дуги s , фазовая скорость $c_p = c_0 = (\tau^2 - v^2)/\tau = \text{const}$. Найдем выражение для c_p в абсолютной системе координат. Так как $s = c_0 t + \theta/\tau$, то координата x этой точки

$$x = c_0 t + \theta/\tau - \frac{2\mu}{v} \operatorname{th} \left[v(c_0 - c_g) t + \theta v/\tau \right].$$

Дифференцируя по времени и рассматривая для определенности случай, когда в момент времени $t = 0$ центр солитона находится в точке $x = s = 0$, получаем

$$c_p = \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = c_0 - \frac{2\mu(c_0 - c_g)}{\operatorname{ch}^2(\theta v/\tau)}. \quad (5.63)$$

Из этой формулы следует, что фазовая скорость различна в разных точках волнового пакета. Выпишем два предельных выражения фазовой скорости – для центра солитона ($\theta = 0$) и на бесконечности ($\theta \rightarrow \pm\infty$):

$$c_{p0} = c_p \Big|_{\theta=0} = c_0 - 2\mu(c_0 - c_g) = (\tau^2 + v^2)/\tau, \quad (5.64)$$

$$c_{p\infty} = c_p \Big|_{\theta \rightarrow \pm\infty} = c_0 = (\tau^2 - v^2)/\tau. \quad (5.65)$$

Далее обратим внимание на такой примечательный факт, что в соответствии с дифференциальными уравнениями движения солитона (см. (5.57) для кривизны k) *нелинейность определяется кривизной вихревой нити*. В формулах для фазовой скорости это отражается членом $v^2 = (k_{\max}/2)^2$. Для слабонелинейных волн ($v \rightarrow 0$) фазовая скорость постоянна вдоль волнового пакета и равна половине групповой скорости

$$c_{p0} = c_{p\infty} = \tau = c_g/2 \quad \text{при} \quad v \rightarrow 0.$$

Важным параметром является отношение групповой скорости к фазовой, которое есть функция параметра T

$$\frac{c_g}{c_{p0}} = \frac{2\tau^2}{\tau^2 + v^2} = \frac{2}{1 + 1/T^2}.$$

При больших кручениях ($T \rightarrow \infty$) $c_g = 2c_{p0}$, при $T = 1$ $c_g = c_{p0}$ (при этом вращение отсутствует), а при $T = 0$ (плоская волна) $c_g = 0$. Напомним, что в связи с перенормировкой времени t в уравнении (5.46), размерность скорости есть [м^{-1}], т. е. как у кривизны и кручения.

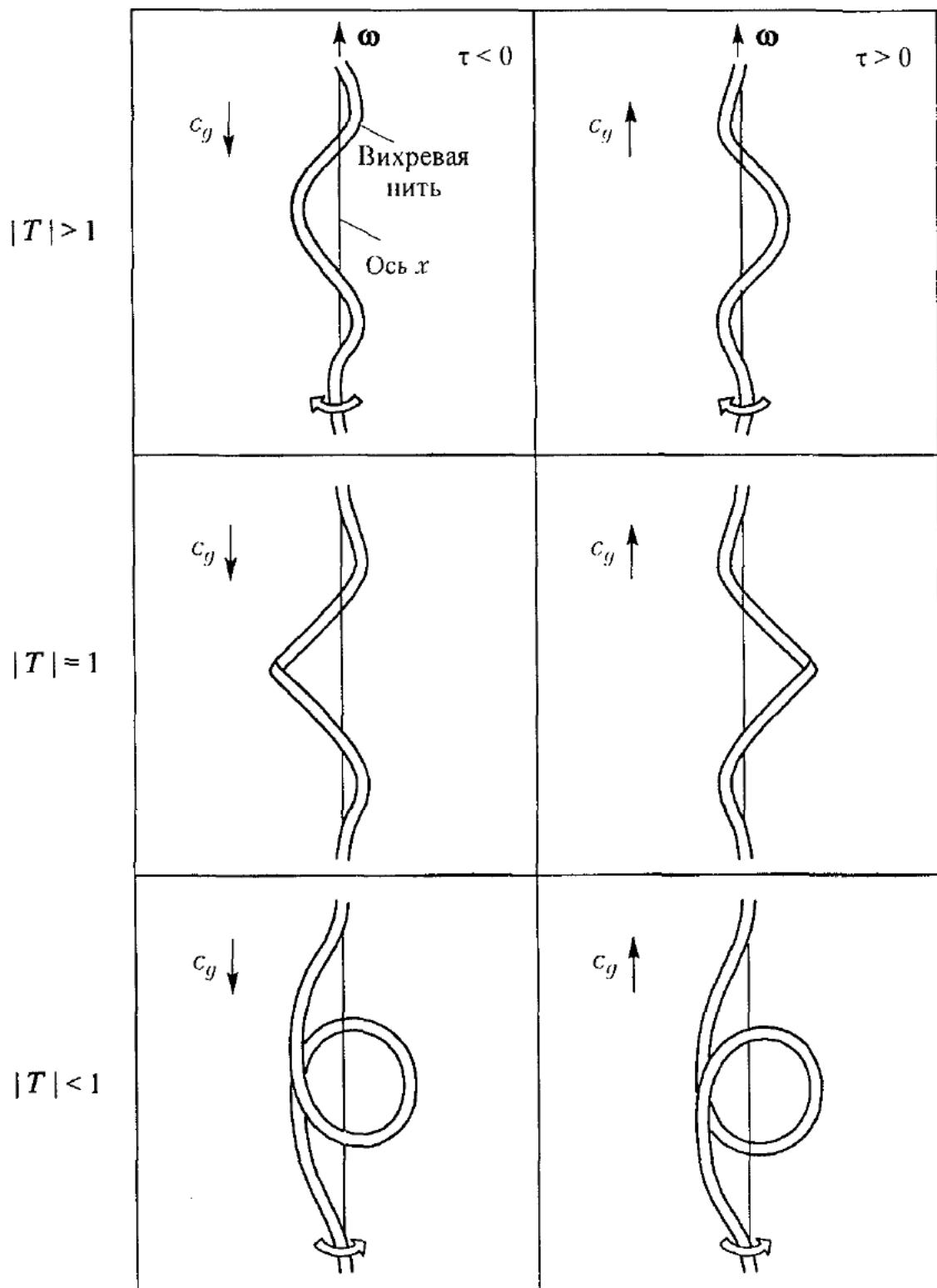


Рис. 5.13. Зависимость схемы движения вихревого солитона от значений параметров T и τ

Сводная картина движения вихревого солитона показана на рис. 5.13. Вектор завихренности в ните на бесконечности направлен везде вертикально вверх. Хотя изначально решение искалось для $c_g > 0$, но легко рассмотреть случай $c_g < 0$. Тогда $\tau < 0$ (левая спираль) и $T < 0$. Соответствующие примеры также приведены на рисунке.

5.4. ПРИМЕНЕНИЕ БАЛАНСА ИМПУЛЬСА К ОПИСАНИЮ ДИНАМИКИ ВИХРЕВЫХ НИТЕЙ

5.4.1. Силы, действующие на вихревую нить

Подход к описанию динамики тонких вихревых нитей, основанный на балансе импульса, в наибольшей степени развит в работе Moore, Saffman [1972] (см. также Ф. Дж. Сэффмэн [2000], с. 269–284). Идея заключается в составлении баланса сил, действующих на элемент вихревой нити. Можно выписать ряд сил, из которых выделим силу Кутта – Жуковского и натяжение нити. Понятие сил, действующих на нить, можно вводить разными способами: интуитивно, основываясь на некоторых физических соображениях, либо же путем интерпретации отдельных членов уравнения движения, выведенного более строгим образом. В соответствии с этим определения разных авторов могут существенно различаться.

Понятие *силы Кутта – Жуковского* для вихревой нити было впервые использовано в работе Widnall *et al.* [1971] на примере вихревого кольца, где было отмечено, что скорость вихревого кольца при наличии осевого течения уменьшается и равна

$$U = U_0 - \int_0^{\infty} \frac{2\pi r w^2 dr}{\rho \Gamma}, \quad (5.66)$$

где ρ – радиус кольца; Γ – циркуляция; r – радиальная координата, отсчитываемая от оси вихревой нити; $w = w(r)$ – осевая скорость; U_0 – скорость кольца в отсутствие аксиального течения. Выражение в числителе представляет собой аксиальный поток импульса. Тогда для поворота аксиального течения по кругу требуется сила

$$F = - \int_0^{\infty} \frac{2\pi r w^2 dr}{\rho},$$

которая направлена к центру кольца и с учетом (5.66) записывается как $\Gamma(U - U_0)$. Но форме записи это сила Кутта – Жуковского (см. п. 1.7.1), причем относительная скорость определяется как разность между действительной скоростью движения кольца U и равновесной скоростью U_0 , вычисленной в отсутствие аксиального течения. Иначе говоря, центробежная сила, возникающая за счет осевого течения вдоль кольца, компенсируется силой Кутта – Жуковского, появляющейся при отклонении скорости кольца от равновесного значения. Таким образом, в данном подходе сила Кутта – Жуковского вводится только для учета аксиального течения вдоль вихревой нити.

В такой интерпретации подъемная сила Кутта – Жуковского была использована в работе Widnall, Bliss [1971], где собственно и была впервые предложена идея баланса сил. В упомянутой работе (см. также Уиднелл [1979]) рассмотрено движение вихревой нити при наличии плоского синусоидального или спирального (винтового) возмущения, а баланс импульса заключался в равенстве силы Кутта – Жуковского силам инерции (с учетом присоединенной массы).

Moore, Saffman [1972] (см. также Сэффмэн [2000]) иначе определяют силу Кутта – Жуковского. Опять рассмотрим пример тонкого вихревого кольца. Тогда формально можно записать подъемную силу, действующую на элемент вихревой нити ds , в виде $\mathbf{F}_k = \Gamma \mathbf{t} \times \mathbf{U} ds$ (см. рис. 5.14). Здесь $\mathbf{U} = U \mathbf{b}$ есть скорость движения кольца относительно неподвижной на бесконечности жидкости и направлена она по бинормали $\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$. В этом случае сила \mathbf{F}_k лежит в плоскости кольца, направлена наружу и в первом приближении компенсируется силой *натяжения*, которая определяется как $\mathbf{F}_T = T_0 ds \mathbf{n} / \rho$. Понятие натяжения T_0 вводится для искривленного участка нити и допускает простую физическую интерпретацию, а именно, с внутренней стороны искривленного участка линии тока сгущаются, а давление снижается. Снаружи, наоборот, давление увеличивается. Возникающий перепад давления и приводит к силе, направленной в сторону центра кривизны. Баланс этих двух сил дает уравнение

$$\frac{T_0}{\rho} \mathbf{n} + \Gamma \mathbf{t} \times \mathbf{U} = 0. \quad (5.67)$$

Если считать скорость движения кольца известной, например для случая постоянной завихренности в ядре, тогда с учетом (5.7) получаем из (5.67) выражение для натяжения

$$T_0 = \frac{\Gamma^2}{4\pi} \left(\ln \frac{8\rho}{a} - \frac{1}{4} \right). \quad (5.68)$$

Для полого вихря аналогичная формула с использованием скорости по Hicks [1885] принимает вид

$$T_0 = \frac{\Gamma^2}{4\pi} \left(\ln \frac{8\rho}{a} - \frac{1}{2} \right). \quad (5.69)$$

Следует отметить, что понятием натяжения и баланса сил для вихревых нитей оперировали и ранее при изучении квантовых вихрей в сверхтекучем гелии [Hall, 1958, 1970], хотя приемлемых количественных результатов не было получено.

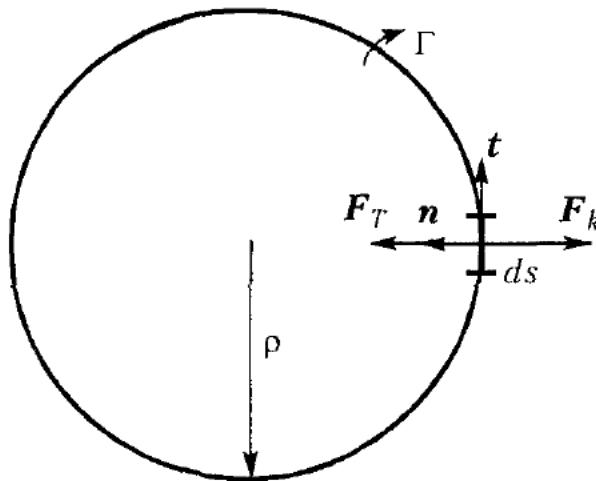


Рис. 5.14. Силы, действующие на элемент вихревого кольца (по Ф. Дж. Сэффмэну [2000])

Таким образом, из приведенных примеров видно, что определения силы Кутта – Жуковского по Widnall, Bliss [1971] и Moore, Saffman [1972] различаются не только по ее величине, но даже и по направлению. Ясно, что причина этому заключается в разных способах определения и вычисления относительной скорости. В частности, можно не использовать понятие натяжения путем включения силы натяжения в силу Кутта – Жуковского (см. Lundgren, Ashurst [1989]), что соответствует определению Widnall, Bliss.

Далее будем основываться преимущественно на подходе Moore, Saffman [1972], используя формальные выводы уравнений движения. А понятия различных сил в основном будут применяться для интерпретации различных членов уравнений движения. Главное достоинство метода баланса сил состоит в том, что не требуются знания о детальной структуре течения в ядре вихря, как и в других интегральных подходах гидродинамики, например методе Кармана – Польгаузена.

5.4.2. Вывод уравнений баланса сил

Рассмотрение метода баланса сил начнем с вывода уравнений баланса импульса для элемента тонкой вихревой нити (рис. 5.15). Пусть вихревая нить описывается в параметрической форме как

$$\mathbf{r} = \mathbf{R}(\xi, t),$$

где параметр ξ определяет положение вдоль вихревой нити. Соответственно расстояние вдоль нити есть $s = s(\xi, t)$, а единичный тангенциальный вектор выражается формулой

$$\mathbf{t} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \xi} / \frac{\partial s}{\partial \xi}.$$

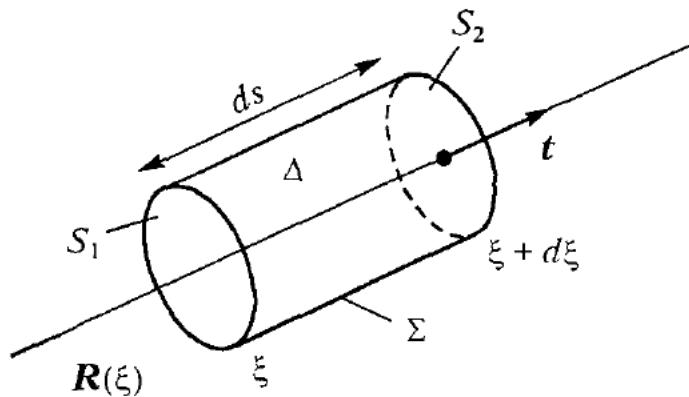


Рис. 5.15. К применению метода баланса сил для вихревой нити

Пусть точка $\xi = \text{const}$ движется со скоростью жидкой частицы, т. е. ξ – это материальная переменная. Тогда скорость вихря есть $\partial \mathbf{R} / \partial t$. Так как скорость пространственной кривой однозначно определена только для нормальной компоненты, то введенная выше скорость вихря допускает произвольное слагаемое, пропорциональное t . Дополнительное условие на тангенциальную компоненту скорости (см. (5.75)) позволяет однозначно определить параметр ξ . Движение вихря обусловлено двумя причинами – самовоздействием (самоиндуцированное движение) и внешним полем скорости, например от другого вихря. Задача состоит в выводе уравнения для $\partial \mathbf{R} / \partial t$.

Баланс импульса составим для элемента Δ вихревой трубы длиной ds , ограниченной боковой цилиндрической поверхностью Σ и двумя плоскими торцами S_1 и S_2 , перпендикулярными t . Балансовое уравнение имеет вид (для единичной плотности жидкости)

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Delta} \mathbf{u} dV + \int_{\Sigma} p n dA + \int_{S_1+S_2} [p \mathbf{n} + \mathbf{u} (\mathbf{u}_{\text{отн}} \cdot \mathbf{n})] dA = 0. \quad (5.70)$$

Здесь \mathbf{u} – локальная скорость жидкости; $\mathbf{u}_{\text{отн}}$ – скорость жидкости относительно контрольной поверхности; \mathbf{n} – наружная нормаль к поверхности. Первый член есть изменение импульса во времени в контрольном объеме, второй – сила давления на боковую поверхность, а третий – силы давления и поток импульса через торцевые поверхности.

Второй член можем переписать в виде

$$\int_{\Sigma} (-p) \mathbf{n} dA = ds \cdot \mathbf{F}_E, \quad (5.71)$$

где \mathbf{F}_E – сила на единицу длины вихря, вызванная воздействием жидкости вне ядра вихря на поверхность Σ .

Введем обозначение $w = \mathbf{u}_{\text{отн}} \cdot \mathbf{t}$ для тангенциальной компоненты относительной скорости. Тогда имеем

$$\int_{S_1+S_2} [p\mathbf{n} + \mathbf{u}(\mathbf{u}_{\text{отн}} \cdot \mathbf{n})] dA = ds \frac{\partial}{\partial s} \int_{S(s)} (pt + uw) dA,$$

где $S(s)$ – площадь сечения вихря как функция длины s . Объединяя с первым членом (5.70), получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Lambda} \mathbf{u} dV + ds \frac{\partial}{\partial s} \int_{S(s)} (pt + uw) dA = -ds \cdot \mathbf{F}_I. \quad (5.72)$$

Здесь \mathbf{F}_I означает силу на единицу длины вихря, действующую на границу ядра со стороны жидкости внутри вихревой нити. Таким образом, уравнение баланса импульса (5.70) записывается как равенство сил

$$\mathbf{F}_I + \mathbf{F}_E = 0, \quad (5.73)$$

которые определяются выражениями (5.71) и (5.72). Отметим, что наличие относительной скорости $\mathbf{u}_{\text{отн}}$ может быть вызвано как неравномерностью профиля аксиальной скорости, так и различием в скоростях движения контрольной торцевой поверхности и жидкости даже при однородном профиле.

Далее будем полагать, что внешние поля скорости отсутствуют, а движение нити обусловлено только самоиндукцией. Введем искусственным образом самоиндуцированную скорость \mathbf{V}_I как

$$\mathbf{V}_I(\xi) = \frac{\Gamma}{4\pi} \int \left\{ \mathbf{t}' \times \frac{\mathbf{R}(\xi) - \mathbf{R}(\xi')}{|\mathbf{R}(\xi) - \mathbf{R}(\xi')|^3} ds' - \mathbf{t}_{\odot} \times \frac{\mathbf{R}(\xi) - \mathbf{R}_{\odot}}{|\mathbf{R}(\xi) - \mathbf{R}_{\odot}|^3} ds_{\odot} \right\}. \quad (5.74)$$

Здесь \odot относится к вихревому кольцу, вписанному в нить в точке ξ (см. (5.17)), т. е. это скорость по Био – Савару за вычетом скорости вихревого кольца. Таким способом, как было показано в п. 5.2, устраняется сингулярность в интеграле Био – Савара. Смысл определения (5.74) и значения \mathbf{V}_I будут обсуждены ниже.

Имея скорость \mathbf{V}_I , теперь можем наложить условие

$$\mathbf{V}_I(\xi) \cdot \mathbf{t} = d\mathbf{R}/dt \cdot \mathbf{t} \quad (5.75)$$

с целью однозначного определения параметра ξ . Соответственно можно ввести относительную скорость \mathbf{Q}

$$\mathbf{Q}(\xi) = \mathbf{V}_I - d\mathbf{R}/dt, \quad (5.76)$$

которая характеризует относительное движение жидкости и нити. Из (5.75) следует, что $\mathbf{Q} \perp \mathbf{t}$. Существование относительной скорости дает возможность ввести искусственно силу Кутта – Жуковского, а также другие силы. Однако, как уже отмечалось, далее мы поступим формальным образом, используя уравнения Эйлера для описания поля скорости вне ядра вихря.

Проведем через точку вихревой нити $\mathbf{R}(\xi)$ плоскость, в которой лежат векторы нормали \mathbf{n} и бинормали \mathbf{b} (рис. 5.16). Введем локальную полярную систему координат (r, θ) в этой плоскости, а также вспомогательную декартову систему координат x, y с единичными векторами \mathbf{i}, \mathbf{j} . Тогда положение произвольной точки M , лежащей в данной плоскости, задается вектором

$$\mathbf{r} = \mathbf{R}(s(\xi)) + r\mathbf{e}_r, \quad (5.77)$$

где \mathbf{e}_r – единичный радиальный вектор. Очевидно, что для любой точки вблизи нити можно провести подобную плоскость и присвоить ей соответствующее значение параметра ξ . Далее мы будем использовать локальную *тороидальную* систему координат $\{r, \theta, s\}$, предложенную Widnall *et al.* [1971] для плоской вихревой нити Ting [1971] в общем случае (см. также Callegari, Ting [1978]). Данная система является ортогональной, если угол θ определен как

$$\theta = \varphi - \theta_0(s, t), \quad (5.78)$$

а $-d\theta_0/ds = \tau$ – кручение. Здесь θ_0 – угол между \mathbf{i} и \mathbf{n} , а φ – угол между \mathbf{n} и \mathbf{e}_r . Если в качестве угловой координаты использовать φ , что, казалось бы, логично, то система $\{r, \varphi, s\}$ не будет ортогональной!

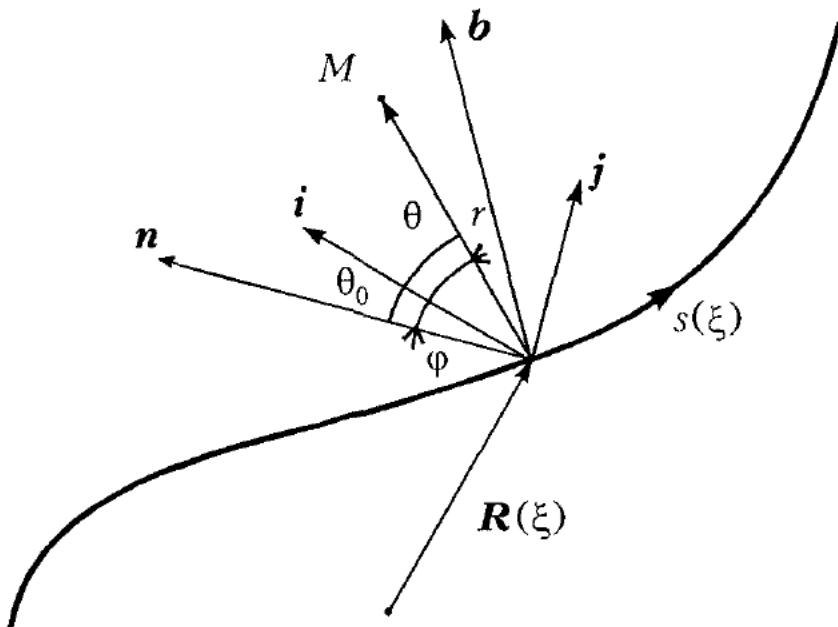


Рис. 5.16 К определению систем координат

В ортогональной криволинейной системе координат $\{r, \theta, s\}$ элемент длины $d\mathbf{r}$ записывается в виде

$$d\mathbf{r} = L_r \mathbf{e}_r dr + L_\theta \mathbf{e}_\theta d\theta + L_s \mathbf{e}_s ds, \quad (5.79)$$

где L_r, L_θ, L_s – коэффициенты Ламе. С целью вычисления этих коэффициентов и доказательства условия (5.78) воспользуемся уравнениями Серре – Френе (2.6)

$$\frac{dt}{ds} = \kappa \mathbf{n}, \quad \frac{d\mathbf{n}}{ds} = \tau \mathbf{b} - \kappa \mathbf{t}, \quad \frac{d\mathbf{b}}{ds} = -\tau \mathbf{n},$$

а также определим вектора касательной

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{R}}{ds}. \quad (5.80)$$

Здесь $\kappa \equiv 1/\rho$ – локальная кривизна вихревой нити в точке $\mathbf{R}(\xi)$. Исходя из геометрических построений на рис. 5.16, можем выписать выражения для единичных векторов \mathbf{e}_r и \mathbf{e}_θ , лежащих в плоскости $\mathbf{n}\mathbf{b}$

$$\mathbf{e}_r = \mathbf{e}_r(\theta, s, t) = \mathbf{n} \cos \varphi + \mathbf{b} \sin \varphi,$$

$$\mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_\theta(\theta, s, t) = \mathbf{b} \cos \varphi - \mathbf{n} \sin \varphi,$$

где $\varphi = \theta + \theta_0(s, t)$. Для некоторого момента времени t дифференциал $d\mathbf{r}$ с учетом (5.77) и (5.80) записывается как

$$d\mathbf{r} = d\mathbf{R} + r d\mathbf{e}_r + \mathbf{e}_r dr = \mathbf{t} ds + \mathbf{e}_r dr + r \left(\frac{d\mathbf{e}_r}{d\theta} d\theta + \frac{d\mathbf{e}_r}{ds} ds \right). \quad (5.81)$$

Используя выражения для \mathbf{e}_r и \mathbf{e}_θ и уравнения Серре – Френе, получаем

$$\frac{d\mathbf{e}_r}{d\theta} = -\mathbf{n} \sin \varphi + \mathbf{b} \cos \varphi = \mathbf{e}_\theta,$$

$$\frac{d\mathbf{e}_r}{ds} = \frac{d\mathbf{n}}{ds} \cos \varphi - \mathbf{n} \sin \varphi \frac{\partial \theta_0}{\partial s} + \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial s} \sin \varphi + \mathbf{b} \cos \varphi \frac{\partial \theta_0}{\partial s} = \mathbf{e}_\theta \left(\tau + \frac{\partial \theta_0}{\partial s} \right) - \kappa \mathbf{t} \cos \varphi.$$

Подставляя эти соотношения в (5.81), находим

$$d\mathbf{r} = \mathbf{e}_r dr + r \mathbf{e}_\theta d\theta + \left(1 - \kappa r \cos \varphi \right) \mathbf{t} ds + r \left(\tau + \frac{\partial \theta_0}{\partial s} \right) \mathbf{e}_\theta ds.$$

Сравнивая с представлением (5.79), справедливым в ортогональной криволинейной системе координат, видим, что для ортогональности действительно

необходимо условие $\partial\theta_0/\partial s = -\tau$. Соответственно для коэффициентов Ламе имеем

$$L_r = 1, \quad L_\theta = r, \quad L_s = 1 - \frac{r}{\rho} \cos \varphi.$$

Естественно, локальная система хорошо определена, если расстояния от вихревой нити ограничены величинами $O(\rho)$.

Течение вне ядра вихря с циркуляцией Γ является потенциальным и описывается уравнением Лапласа, которое в криволинейных координатах $\{q_1, q_2, q_3\}$ имеет вид (см. п. 1.3.1)

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{L_1 L_2 L_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{L_2 L_3}{L_1} \frac{\partial \Phi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{L_1 L_3}{L_2} \frac{\partial \Phi}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{L_1 L_2}{L_3} \frac{\partial \Phi}{\partial q_3} \right) \right] = 0, \quad (5.82)$$

где Φ – потенциал скорости. В координатах $\{r, \theta, s\}$ уравнение Лапласа принимает вид

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 h} \frac{\partial h}{\partial \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + r \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{h} \frac{\partial \Phi}{\partial s} \right) = 0,$$

где $h \equiv L_s = 1 - r \cos \varphi / \rho$.

По условию задачи $a/\rho \ll 1$. Поэтому решение вне ядра ищем в виде разложений

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_1 + \Phi_2 + \dots,$$

$$a = a_0(s) + a_1(s, \theta) + a_2(s, \theta) \dots$$

Индекс $i = 0, 1, 2, \dots$ означает, что величина имеет порядок $O(a^i/\rho^i)$. Невозмущенный потенциал Φ_0 согласно (2.24) есть

$$\Phi_0 = \Gamma \theta / 2\pi, \quad r > a_0,$$

а невозмущенное ядро является круглым, т. е. $a_0 = a_0(s)$. Подставляя разложение для Φ в уравнение Лапласа (5.82) и полагая $r \approx a$, $s \approx \rho$, получаем для Φ_1

$$\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \theta^2} = -\frac{\Gamma}{2\pi\rho r} \sin(\theta + \theta_0). \quad (5.83)$$

Для уравнения (5.83) необходимо задать два граничных условия – внутреннее при $r = a_0$ и внешнее при $r \rightarrow \infty$. Внутреннее граничное условие определяется тем, что граница ядра $r = a(s, \theta, t)$ является *материальной поверхностью*.

Иначе говоря, на этой границе мы должны поставить *кинематическое условие* (см. также кинематическое условие для вихревой пелены в п. 3.1)

$$u_r = \frac{da}{dt} \quad \text{при} \quad r = a(\theta, s, t). \quad (5.84)$$

Оно означает, что в системе координат $\{r, \theta, s\}$ субстанциональная производная от границы ядра равна радиальной компоненте скорости жидкости в этой точке. По определению

$$u_r = \frac{dr}{dt}, \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_{\text{отн}} \cdot \nabla,$$

где оператор

$$\nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\mathbf{e}_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\mathbf{e}_s}{h} \frac{\partial}{\partial s},$$

а $\mathbf{u}_{\text{отн}}$ есть скорость жидкости в системе $\{r, \theta, s\}$ на границе ядра.

Если локальная система вращается с угловой скоростью $\boldsymbol{\Omega}$ и движется поступательно со скоростью нити $\partial \mathbf{R}/\partial t$, то в такой движущейся системе координат

$$\mathbf{u}_{\text{отн}} = \nabla \Phi - \partial \mathbf{R} / \partial t - \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{r}_0 - \mathbf{R}). \quad (5.85)$$

Выражение для субстанциональной производной d/dt в движущейся системе координат можно вывести более строгим образом.

Учтем, что полная производная d/dt в абсолютной системе координат имеет вид

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t_0} + \mathbf{u}_0 \cdot \nabla_0,$$

где \mathbf{u}_0 – абсолютная скорость жидкости, а ∇_0 – оператор Лапласа в неподвижной декартовой системе координат. В движущейся системе координат $\{r, \theta, s\}$ оператор Лапласа заменяется на ∇_{r0s} , а частная производная по времени преобразуется как

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_0} \right)_{\mathbf{r}_0} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial t}{\partial t_0} \right)_{\mathbf{r}_0} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial r}{\partial t_0} \right)_{\mathbf{r}_0} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \theta}{\partial t_0} \right)_{\mathbf{r}_0} + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial s}{\partial t_0} \right)_{\mathbf{r}_0},$$

где $t_0 = t$. Поскольку $\mathbf{r}_0 = \mathbf{R}(s, t) + r \mathbf{e}_r(\theta, s, t)$, то при фиксированном значении \mathbf{r}_0 имеем

$$d\mathbf{r}_0 = \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} + r \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial t} \right) dt + \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial s} + r \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial s} \right) ds + r \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} + \mathbf{e}_r dr = 0.$$

Из геометрических построений следует

$$\partial \mathbf{R} / \partial s = \mathbf{e}_s \equiv \mathbf{t}, \quad \partial \mathbf{e}_r / \partial s = -\kappa \cos \varphi \mathbf{t}, \quad \partial \mathbf{e}_r / \partial \theta = \mathbf{e}_0.$$

Учитывая эти соотношения и умножая последовательно полученные выше тождество на единичные векторы \mathbf{t} , \mathbf{e}_r , \mathbf{e}_θ , находим

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -\left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} + r \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial t} \right) \cdot \frac{\mathbf{t}}{h},$$

$$\frac{\partial r}{\partial t} = -\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} \mathbf{e}_r,$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\frac{1}{r} \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} + r \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{e}_0.$$

Наконец, подставляя данные выражения в формулу для $(\partial / \partial t_0)_{r_0}$ и объединяя соответствующие члены в оператор Лапласа, получаем

$$\frac{\partial}{\partial t_0} = \frac{\partial}{\partial t} - \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} + r \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial t} \right) \nabla_{r_0 s}.$$

Здесь учтено, что $\mathbf{e}_r \cdot (\partial \mathbf{e}_r / \partial t) = 0$. Тогда для полной производной по времени в движущейся системе координат получаем (см. также п. 1.2.1)

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \left(\mathbf{u}_0 - \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} - r \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial t} \right) \nabla_{r_0 s}.$$

Так как $\mathbf{u}_0 = \nabla \Phi$, а $r(\partial \mathbf{e}_r / \partial t) \equiv \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{r}_0 - \mathbf{R})$, то выражение в скобках в точности совпадает с относительной скоростью (5.85).

Таким образом, расписывая условие (5.84), имеем

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \left[\nabla \Phi - \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} - \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{r}_0 - \mathbf{R}) \right] \cdot \nabla \right\} (r - a(\theta, s, t)) = 0$$

или

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} - \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} \cdot \mathbf{e}_r - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \theta} \frac{\partial a_1}{\partial \theta} - \frac{1}{h^2} \frac{\partial \Phi_1}{\partial s} \frac{\partial a_0}{\partial s} + \\ & + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} \cdot \left(\frac{\mathbf{e}_\theta}{r} \frac{\partial a_1}{\partial \theta} + \frac{\mathbf{e}_s}{h} \frac{\partial a_0}{\partial s} \right) + r [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{e}_r] \cdot \left[\frac{\mathbf{e}_\theta}{r} \frac{\partial a_1}{\partial \theta} + \frac{\mathbf{e}_s}{h} \frac{\partial a_0}{\partial s} \right] = 0. \end{aligned}$$

Здесь в разложениях Φ и a оставлены члены в первом неисчезающем приближении. С целью оценки производных по времени учтем, что самоиндцированная скорость по порядку величины равна $|\partial \mathbf{R} / \partial t| \sim (\Gamma / \rho) \ln(\rho/a) = O(1/\rho)$.

Тогда $\partial/\partial t = O(1/\rho^2)$, так как $|\delta\mathbf{R}| = O(\rho)$, и $|\boldsymbol{\Omega}| \sim 1/t = O(1/\rho^2)$. Оценивая члены полученного уравнения, видим, что первые три члена имеют порядок $1/\rho$, а остальные – $1/\rho^2$ и выше. Таким образом, оставляя эти три члена и расписывая \mathbf{e}_r через \mathbf{n} и \mathbf{b} , получаем граничное условие при $r = a_0(s, t)$

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial r} = \frac{\partial\mathbf{R}}{\partial t} \cdot [\mathbf{n}\cos(\theta + \theta_0) + \mathbf{b}\sin(\theta + \theta_0)] + \frac{\Gamma}{2\pi a_0^2} \frac{\partial a_1}{\partial \theta}. \quad (5.86)$$

Граничное условие для Φ_1 при $r \rightarrow \infty$ получается путем сопряжения с внутренним пределом внешнего течения, которое описывается законом Био – Савара. Используя представление (5.74), но не на нити, а в некоторой точке $M(\mathbf{r}_0)$ вблизи нити, имеем

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}_0, \xi) = \frac{\Gamma}{4\pi} \int \mathbf{t}' \times \frac{\mathbf{r}_0 - \mathbf{R}'}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{R}'|^3} ds' = \mathbf{U}_I(\mathbf{r}_0, \xi) + \frac{\Gamma}{4\pi} \int \mathbf{t}_\odot \times \frac{\mathbf{r}_0 - \mathbf{R}_\odot}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{R}_\odot|^3} ds_\odot,$$

где $\mathbf{U}_I(\mathbf{r}_0, \xi)|_{\mathbf{r}_0=\mathbf{R}} = \mathbf{V}_I(\xi)$. Разлагая интеграл при условии $r \ll \rho$, получим

$$\mathbf{u} = \mathbf{V}_I(\xi) + \frac{\Gamma}{2\pi r^2} (X\mathbf{b} - Y\mathbf{n}) + \frac{\Gamma}{4\pi\rho} \left[-\frac{XY}{r^2} \mathbf{n} - \frac{Y^2}{r^2} \mathbf{b} + \mathbf{b} \ln\left(\frac{8\rho}{r}\right) \right] + O\left(\frac{\Gamma r}{\rho^2}\right).$$

Здесь $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = X\mathbf{n} + Y\mathbf{b}$, а \mathbf{r}_0 – радиус-вектор в абсолютной системе координат.

Полагая $r \rightarrow \infty$ и учитывая, что $\mathbf{u} = \nabla\Phi_0 + \nabla\Phi_1 + \dots$, а $\nabla\Phi_0 = \mathbf{e}_\theta\Gamma/2\pi r = = \Gamma(X\mathbf{b} - Y\mathbf{n})/2\pi r^2$, находим граничное условие

$$\nabla\Phi_1 = \mathbf{V}_I + \frac{\Gamma}{4\pi\rho} \left[-\frac{XY}{r^2} \mathbf{n} - \frac{Y^2}{r^2} \mathbf{b} + \mathbf{b} \ln\left(\frac{8\rho}{r}\right) \right]$$

или
$$\Phi_1 = \mathbf{V}_I \cdot \mathbf{r} + \frac{\Gamma}{4\pi\rho} Y \ln\left(\frac{8\rho}{r}\right) + \int \mathbf{V}_I \cdot \mathbf{t} ds. \quad (5.87)$$

Можно проверить, что решения уравнения (5.83) с граничными условиями (5.86) и (5.87) есть

$$\begin{aligned} \Phi_1 = & \mathbf{V}_I \cdot \mathbf{r} - \frac{a_0^2}{r^2} \left(\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial t} - \mathbf{V}_I \right) \cdot \mathbf{r} + \frac{\Gamma Y}{4\pi\rho} \ln\left(\frac{8\rho}{r}\right) + \\ & + \frac{\Gamma Ya_0^2}{4\pi\rho r^2} \ln\left(\frac{8\rho}{a_0}\right) + \int \mathbf{V}_I \cdot \mathbf{t} ds + \Phi_1^{\text{def}}, \end{aligned} \quad (5.88)$$

где последний член появляется за счет вклада от a_1 , т. е. деформации сечения ядра.

Вычислим теперь давление на поверхности ядра вихря, используя уравнение Бернулли. Вообще говоря, это сделать непросто, так как расчет ведется в неинерциальной системе координат и необходимо учитывать как вращение, так и поступательное движение локальной системы координат. Однако, если в уравнении Бернулли оставить только члены $O(a/\rho)$, то получим достаточно простое выражение

$$\begin{aligned} p + \frac{\mathbf{u}_{\text{отп}}^2}{2} + \Pi &\approx p + \frac{1}{2} \left(\nabla \Phi - \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} \right)^2 \approx \\ &\approx p + \frac{1}{2} (\nabla \Phi_0)^2 + \nabla \Phi_0 \cdot \nabla \Phi_1 - \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} \cdot \nabla \Phi_0 = O\left(\frac{\Gamma^2}{\rho^2}\right). \end{aligned}$$

Заметим, что для безвихревого течения константа Бернулли одинакова для всей области, а давление p отсчитывается, естественно, относительно статического давления вдали от нити. Далее подставим выражение для Φ_0 и Φ_1 , а также учтем, что деформация ядра, т. е. член Φ_1^{def} , не дает вклада в силы. Тогда, полагая $r = a (= a_0)$, имеем для давления на поверхности ядра

$$\begin{aligned} p &= -\frac{\Gamma^2}{8\pi^2 a^2} + \frac{\Gamma}{\pi a^2} \left(\mathbf{V}_I - \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} \right) \cdot (Y\mathbf{n} - X\mathbf{b}) - \\ &- \frac{\Gamma^2 X}{4\pi^2 \rho a^2} \left(\ln \frac{8\rho}{a} - \frac{1}{2} \right) + O\left(\frac{\Gamma^2}{\rho^2}\right). \end{aligned} \quad (5.89)$$

Сила на единицу длины нити \mathbf{F}_E определяется путем интегрирования давления по искривленной поверхности ядра

$$\mathbf{F}_E = \Gamma \left(\mathbf{V}_I - \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} \right) \times \mathbf{t} + \frac{\Gamma^2}{4\pi\rho} \left(\ln \frac{8\rho}{a} - \frac{1}{2} \right) \mathbf{n} - \frac{\Gamma^2}{8\pi a^2} \frac{\partial a^2}{\partial s} \mathbf{t} - \frac{\Gamma^2}{8\pi\rho} \mathbf{n}. \quad (5.90)$$

При такой форме записи первый член представляет собой подъемную силу Кутта – Жуковского, а второй – натяжение, что было интуитивно введено ранее. Последний член обусловлен уменьшением давления за счет вращения жидкости вокруг оси нити, и он будет скомпенсирован аналогичным членом во внутренней силе \mathbf{F}_I . Третий член есть сила, которая направлена вдоль оси вихря и обусловлена изменением площади сечения ядра вдоль нити. Как будет показано далее, ее вклад пренебрежимо мал.

5.4.3. Полый вихрь

Применим метод баланса сил к наиболее простому случаю полого вихря, который, тем не менее, остается несжимаемым. Поскольку рассматриваются тонкие вихри, то необходимо учитывать поверхностное натяжение σ на границе ядра. Тогда для давления p_I внутри ядра в первом приближении получаем из (5.89)

$$p_I = -\frac{\Gamma^2}{8\pi^2 a^2} + \frac{\sigma}{a}, \quad (5.91)$$

где σ/a – добавка за счет капиллярных сил. Так как давление внутри ядра постоянно (на основании (5.91)), то отсюда следует, что $a = a(t)$. Соответственно справедливо соотношение

$$a^2 L = \text{const}, \quad (5.92)$$

где L – длина вихревой пити.

Теперь используем условие баланса сил (5.73), где \mathbf{F}_E уже определено формулой (5.90), а \mathbf{F}_I вычисляется с помощью (5.72)

$$\mathbf{F}_I = -\frac{\partial}{\partial s} \int_{S(s)} p t dA + \mathbf{F}_\sigma = -\frac{\partial}{\partial s} (p_I \pi a^2 \mathbf{t}) + \mathbf{F}_\sigma.$$

Здесь выписан дополнительный член \mathbf{F}_σ , обусловленный наличием поверхностного натяжения σ . Чтобы найти \mathbf{F}_σ , рассмотрим элемент ядра вихря длиной ds (рис. 5.17), полый внутри. Тогда по определению к окружности длиной $2\pi a$ на поверхности раздела фаз приложена сила (натяжение) $T = 2\pi a \sigma$. Равнодействующая двух таких сил $d\mathbf{f}$, действующая на элемент ds , равна

$$d\mathbf{f} = T\mathbf{t}|_{s+ds} - T\mathbf{t}|_s = \frac{\partial}{\partial s} (T\mathbf{t}) ds.$$

На единицу длины вихря действует сила

$$\mathbf{F}_\sigma = d\mathbf{f}/ds = \frac{\partial}{\partial s} (2\pi a \sigma \mathbf{t}).$$

Тогда для \mathbf{F}_I имеем с учетом (5.91) и определения $\mathbf{n} = \rho d\mathbf{t}/ds$

$$\mathbf{F}_I = \frac{\partial}{\partial s} \left[(2\pi a \sigma - \pi a^2 p_I) \mathbf{t} \right] = \left(\frac{\Gamma^2}{8\pi} + \pi a \sigma \right) \frac{\mathbf{n}}{\rho}. \quad (5.93)$$

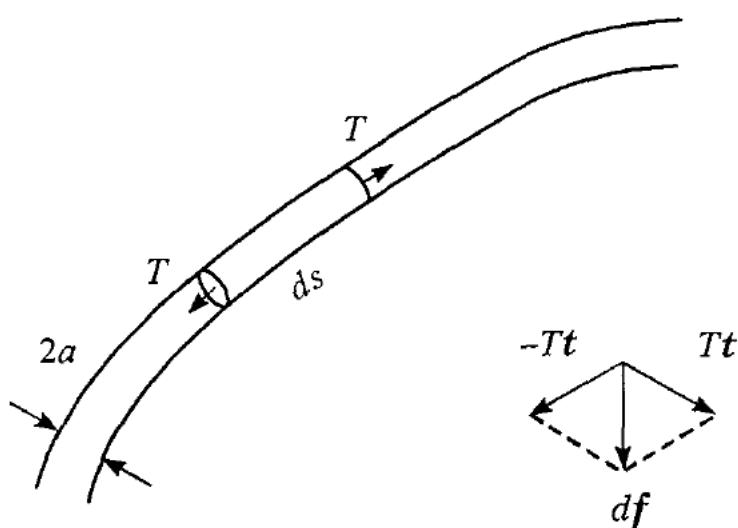


Рис. 5.17. Схема полого вихря

Наконец, подставляя (5.90) и (5.93) в (5.73) и умножая векторно на \mathbf{t} , получаем уравнение движения полой вихревой нити

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} = \mathbf{V}_I + (T_0 + \pi a \sigma) \frac{\mathbf{b}}{\rho \Gamma}. \quad (5.94)$$

При выводе учтены выражения (5.75) для скоростей и (5.69) для натяжения T_0 в полом вихревом кольце. Как видно, поверхностное натяжение дает поправку $\pi a \sigma$ к натяжению нити T_0 . Причем поправка есть результат действия капиллярного давления и натяжения как такового за счет поверхностных сил.

Теперь выведем аналогичное уравнение с использованием метода усечения. С этой целью воспользуемся уравнением (5.74) для \mathbf{V}_I , где интегрирование будем производить согласно методу усечения с исключением участка $2\delta\mathcal{L}$

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} = \mathbf{V}_I + \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{[\delta]} \mathbf{t}_\odot \times \frac{\mathbf{R}(\xi) - \mathbf{R}_\odot}{|\mathbf{R}(\xi) - \mathbf{R}_\odot|^3} ds_\odot = \mathbf{V}_I + \frac{\Gamma}{4\pi\rho} \left(\ln \frac{8\rho}{a} - \ln 2\delta \right) \mathbf{b}.$$

Здесь интеграл для кольца уже был вычислен в (5.8). Для полого вихревого кольца метод усечения дает $\ln 2\delta = 1/2$. Сравнивая с (5.94), видим полное соответствие при $\sigma = 0$. Учет σ позволяет записать для δ модифицированную формулу

$$\ln 2\delta = \frac{1}{2} - \frac{4\pi^2 a \sigma}{\Gamma^2}.$$

Используя (5.92) и (5.94), можно рассчитать радиус вихря $a = a(t)$. Но для этого нужно выразить длину вихревой нити через $\partial \mathbf{R} / \partial t$. В связи с этим выполним цепочку следующих преобразований:

$$\begin{aligned}
 L &= \oint ds = \oint \frac{\partial s}{\partial \xi} d\xi, \\
 \frac{dL}{dt} &= \oint \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial s}{\partial \xi} \right) \frac{\partial \xi}{\partial s} ds = \oint \frac{\partial}{\partial t} \left(\ln \frac{\partial s}{\partial \xi} \right) ds, \\
 \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} \right) \frac{\partial \xi}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \xi} \right) \frac{\partial \xi}{\partial s} = \\
 &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\mathbf{t} \frac{\partial s}{\partial \xi} \right) \frac{\partial \xi}{\partial s} = \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial t} + \mathbf{t} \frac{\partial}{\partial t} \left(\ln \frac{\partial s}{\partial \xi} \right). \tag{5.95}
 \end{aligned}$$

Далее умножим последнее уравнение скалярно на \mathbf{t} и получим с учетом тождества $\mathbf{t} \cdot \partial \mathbf{t} / \partial t = 0$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\ln \frac{\partial s}{\partial \xi} \right) = \mathbf{t} \cdot \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial s} \left(\mathbf{t} \cdot \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} \right) - \frac{\mathbf{n}}{\rho} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t}. \tag{5.96}$$

Подстановка этого соотношения в dL/dt и учет еще одного тождества $\oint \partial/\partial s (\mathbf{t} \cdot \partial \mathbf{R}/\partial t) ds = 0$ дает искомое выражение

$$\frac{dL}{dt} = - \oint \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} \cdot \frac{\mathbf{n}}{\rho} ds. \tag{5.97}$$

5.4.4. Вихревая нить с внутренней структурой

Рассмотрим более сложный случай вихревой нити с внутренней структурой. Чтобы рассчитать \mathbf{F}_I по формуле (5.72), необходимо найти силу давления и поток импульса через торец контрольного цилиндрического элемента в ядре вихря (см. рис. 5.15). Начнем с давления. В первом приближении имеем внутри ядра

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{u_\theta^2}{r},$$

а на границе (из (5.89))

$$p = -\Gamma^2 / 8\pi^2 a^2, \quad r = a.$$

Тогда сила давления на торец есть (со знаком минус, чтобы учесть знак в (5.72))

$$-\int_0^a 2\pi r p dr = -\pi \left[pr^2 \Big|_0^a - \int_0^a r^2 \frac{\partial p}{\partial r} dr \right] = \frac{\Gamma^2}{8\pi} + \frac{\pi}{2} a^2 \bar{u}_0^2,$$

где черта сверху означает осреднение по сечению ядра, а исходный интеграл взят по частям.

Теперь перейдем к потоку количества движения. Скорость жидкости в ядре вихря есть

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} + \omega \mathbf{t} + \mathbf{u}_c,$$

где $\partial \mathbf{R} / \partial t$ – скорость точки вихревой нити при $\xi = \text{const}$, ω – аксиальная скорость в локальной системе координат, движущейся с постоянным значением ξ , а \mathbf{u}_c – скорость в поперечном сечении ядра. Тогда поток импульса через поперечное сечение ядра вихря определяется как

$$-\int \omega \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} + \omega \mathbf{t} + \mathbf{u}_c \right) dA = -\pi a^2 \bar{\omega} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} - \pi a^2 \bar{\omega^2} \mathbf{t} - \int \omega \mathbf{u}_c dA.$$

Последний интеграл отличен от нуля только для искривленной вихревой нити. Прямое его вычисление весьма трудоемко. Поэтому применим способ, описанный в работе Moore, Saffman [1972]. Полагается, что с точностью $O(1/\rho)$ элемент ядра вихревой нити можно рассматривать как часть покоящегося вихревого кольца, обтекаемого однородным потоком. Выберем цилиндрическую полярную систему, как показано на рис. 5.18, с компонентами скорости (u_1, u_2, ω). В первом приближении уравнение поверхности кольца есть $x_1^2 + (x_2 - \rho)^2 = a^2$. Искомый интеграл запишем следующим образом:

$$\int \omega \mathbf{u}_c dA = \int \omega (\mathbf{e}_1 u_1 + \mathbf{e}_2 u_2) dA,$$

где $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ – соответствующие единичные векторы. Далее компоненты интеграла можно представить в общем виде как

$$\int \omega u_i dA = \int \left[\frac{\partial}{\partial x_j} (\omega u_j x_i) - \omega x_i \frac{\partial u_j}{\partial x_j} - x_i u_j \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] dA. \quad (5.98)$$

Здесь $i, j = 1, 2$, а по повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Производные в подынтегральном выражении можно найти из уравнений движения, записанных в цилиндрических координатах

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = -\frac{u_2}{x_2}, \quad u_j \frac{\partial \omega}{\partial x_j} = -\frac{u_2 \omega}{x_2}.$$

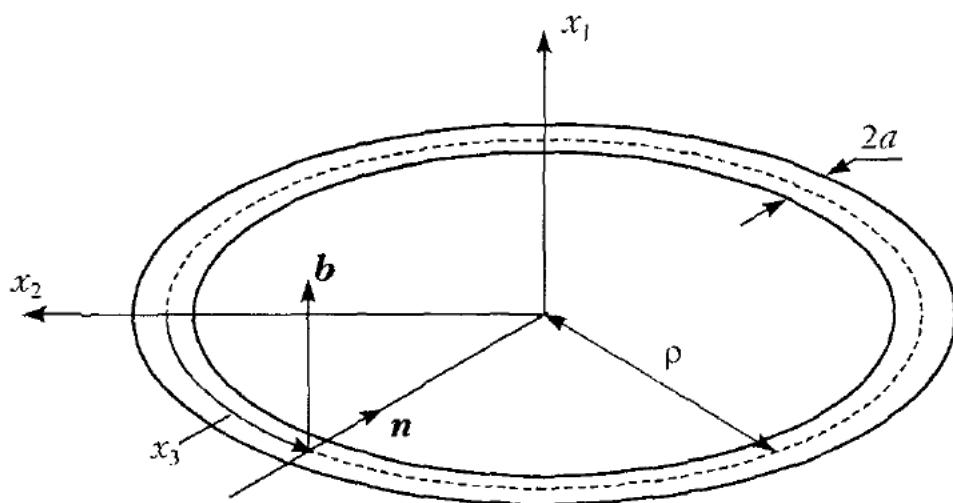


Рис. 5.18. К анализу вихревой нити с внутренней структурой

Первый интеграл в (5.98) равен нулю, так как сводится к значению поперечной к поверхности вихря компоненте скорости. Она является нулевой, поскольку поверхность вихря совпадает с линиями тока. Подставляя выражения для производных в (5.98), получаем

$$\int w u_i dA = 2 \int_{x_2}^{u_2} w x_i dA.$$

Полагая в первом приближении

$$w \approx w_0(r), \quad u_0 \equiv v \approx v_0(r), \quad u_2 = (x_1/r)v_0(r),$$

где $r^2 = x_1^2 + (x_2 - \rho)^2 \leq a^2$, θ – полярный угол в **поперечном сечении ядра**, окончательно имеем с точностью $O(1/\rho^2)$

$$\int w u_1 dA = 2 \int w_0 v_0 \frac{x_1^2}{x_2} d\theta dr \approx 2 \int w_0 v_0 \frac{r^2 \cos^2 \theta}{\rho} d\theta dr = \frac{2\pi}{\rho} \int_0^a w_0 v_0 r^2 dr,$$

$$\int w u_2 dA = 2 \int w u_2 dA = 0.$$

Таким образом

$$\int w u_c = \frac{2\pi \mathbf{b}}{\rho} \int_0^a r^2 w_0 v_0 dr = \lambda \Gamma \bar{w}_0 a^2 \mathbf{b} / \rho.$$

Здесь учтено, что $\mathbf{e}_1 \equiv \mathbf{b}$, а коэффициент λ введен для удобства дальнейших вычислений. В случае однородного вихря $w_0 = \bar{w} = \text{const}$, $v_0 / r = \text{const}$, $\lambda = 1/4$.

Далее, чтобы вычислить \mathbf{F}_I по (5.72), необходимо еще определить изменение во времени количества движения в объеме $\Delta = ds \cdot \pi a^2$, который движется с $\xi = \text{const}$. Тогда из (5.72)

$$\frac{1}{ds} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Delta} \left(\bar{w} \mathbf{t} + \mathbf{u}_c + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} \right) ds dA = \frac{1}{ds} \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\bar{w} \pi a^2 \mathbf{t} + \pi a^2 \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} + \int_{\Delta} \mathbf{u}_c dA \right) \frac{\partial s}{\partial \xi} d\xi \right].$$

Вычисления будем проводить с точностью $O(1/\rho^3)$. Тогда двумя последними членами справа можно пренебречь, если учесть оценки

$$\frac{\partial}{\partial t} = O\left(\frac{1}{\rho^2}\right), \quad \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} = O\left(\frac{1}{\rho}\right), \quad \int \mathbf{u}_c dA = \lambda \Gamma a^2 \mathbf{b} / \rho = O\left(\frac{1}{\rho}\right).$$

Вынося $d\xi$ за квадратные скобки (как независимую переменную) и расписывая первый член справа, получим

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{w} \pi a^2 \mathbf{t}) + \bar{w} \pi a^2 \mathbf{t} \frac{\partial}{\partial t} \left(\ln \frac{\partial s}{\partial \xi} \right).$$

Для дальнейших вычислений, а также оценок некоторых членов нам понадобится интегральное уравнение сохранения массы. Для его вывода рассмотрим цилиндрический элемент ядра вихря длиной $ds = s|_{\xi+d\xi} - s|_{\xi}$, который движется при $\xi = \text{const}$. Тогда баланс массы запишется как

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\left(s|_{\xi+d\xi} - s|_{\xi} \right) \pi a^2 \right] = \bar{w} \pi a^2 \Big|_{\xi} - \bar{w} \pi a^2 \Big|_{\xi+d\xi},$$

откуда

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[a^2 \frac{\partial s}{\partial \xi} \right] = - \frac{\partial}{\partial \xi} (\bar{w} a^2). \quad (5.99)$$

В частности, отсюда следует оценка

$$\frac{\partial}{\partial s} (\bar{w} a^2) = O\left(\frac{1}{\rho^2}\right).$$

Подставляя полученные выше выражения в (5.72), а также учитывая (5.96) и выписывая оценки членов, находим с точностью $O(1/\rho^3)$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}_I = & -\frac{\partial}{\partial t}(\bar{w}\pi a^2 \mathbf{t}) - \bar{w}\pi a^2 \mathbf{t} \frac{\partial}{\partial t} \left(\ln \frac{\partial s}{\partial \xi} \right) + \\
 & + \left[\frac{\Gamma^2}{8\pi} + \pi a^2 \left(\frac{\overline{u_\theta^2}}{2} - \overline{w^2} \right) \right] \frac{\mathbf{n}}{\rho} + \frac{\partial}{\partial s} \left[\pi a^2 \left(\frac{\overline{u_\theta^2}}{2} - \overline{w^2} \right) \right] \mathbf{t} - \\
 & - \pi a^2 \bar{w} \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial t} - \pi a^2 \bar{w} \mathbf{t} \frac{\partial}{\partial t} \left(\ln \frac{\partial s}{\partial \xi} \right) + \\
 & + \Gamma \lambda \tau \bar{w} a^2 \frac{\mathbf{n}}{\rho} - \Gamma \bar{w} a^2 \mathbf{b} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\lambda}{\rho} \right). \tag{5.100}
 \end{aligned}$$

Наконец, объединяя (5.73), (5.90), (5.100) и оставляя только перпендикулярные к \mathbf{t} компоненты, получаем искомое уравнение движения вихревой нити

$$\Gamma \left(\mathbf{V}_I - \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} \right) \times \mathbf{t} + T \frac{\mathbf{n}}{\rho} = 2\pi a^2 \bar{w} \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial t} + \Gamma \bar{w} a^2 \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\lambda}{\rho} \right) \mathbf{b} - \Gamma \lambda \tau \bar{w} a^2 \frac{\mathbf{n}}{\rho}, \tag{5.101}$$

где

$$T = T_0 + \frac{1}{2} \pi a^2 \overline{u_\theta^2} - \pi a^2 \overline{w^2},$$

T_0 совпадает с натяжением в полом вихревом кольце по формуле (5.69), а τ – кручение, появившееся благодаря использованию формул Серре – Френе. Отметим, что члены слева в (5.101) имеют порядок $O(1/\rho)$, а справа – $O(1/\rho^2)$.

С целью проверки (5.101) рассмотрим два частных случая. Пусть в первом примере *вихревое кольцо* распространяется в неподвижной среде. Тогда $\mathbf{V}_I \equiv 0$, а все члены справа обращаются в нуль. Умножая векторно на \mathbf{t} , получаем уравнение

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} = \left(T_0 + \frac{1}{2} \pi a^2 \overline{u_\theta^2} - \pi a^2 \overline{w^2} \right) \frac{\mathbf{b}}{\Gamma \rho},$$

которое ранее было выведено другими способами в работах Saffman [1970] и Widnall *et al.* [1971].

Второй пример – левовинтовая вихревая нить *большого шага*, вращающаяся с угловой скоростью ω и имеющая однородное ядро. Тогда в ядре $\lambda = 1/4$, $\Gamma = 2\pi \Omega a^2$, $\overline{u_\theta^2} = \Omega^2 a^2 / 2$, $\bar{w} = W$, $\overline{w^2} = W^2$, где Ω – угловая скорость вращения жидкости в ядре; W – постоянная аксиальная скорость. Скорость \mathbf{V}_I найдем прямым вычислением по (5.74). Подробно процедура для каждого из двух интегралов уже была выполнена в п. 5.1. при рассмотрении метода

усечения. Если параметр усечения δ одинаков для винта и кольца, то он исчезает при вычитании интегралов. Тогда имеем из (5.8) и (5.14) в длинноволновом пределе

$$\mathbf{V}_I = \frac{\Gamma}{4\pi\rho} \left[\frac{1}{2} - E - \ln \frac{\delta a \gamma}{R} - \ln \frac{4\rho}{\delta a} \right] \mathbf{b} = \frac{\Gamma}{4\pi} k^2 R \left[\ln \frac{2}{ka} - \ln \frac{8\rho}{a} - E + \frac{1}{2} \right] \mathbf{b}.$$

Здесь учтено, что для винта большого шага радиус кривизны $\rho = R/\gamma^2$, $\mathbf{j} \approx -\mathbf{b}$ (см. рис. 5.17), $\tau = -k$, где $\gamma = 2\pi R/\lambda$, $k = 2\pi/\lambda$, λ и R – шаг и радиус винта.

Для нахождения $\partial\mathbf{R}/\partial t$ и $\partial\mathbf{t}/\partial t$ мы не можем воспользоваться уже готовыми формулами пп. 5.1, 5.2, так как там – иная форма представления кривых. Величину $\partial\mathbf{R}/\partial t$ определим из следующих соображений. Поскольку $\mathbf{V}_I \sim \mathbf{b}$, то из геометрии винта и (5.75) следует, что $\partial\mathbf{R}/\partial t \sim \mathbf{b}$. В силу большого шага винта нить почти параллельна оси z (см. рис. 5.2). Следовательно, $\partial\mathbf{R}/\partial t = \omega R \mathbf{b}$. Производную $\partial\mathbf{t}/\partial t$ легко находим, исходя из (5.95), (5.96), последней формулы и (2.6)

$$\frac{\partial\mathbf{t}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial t} \right) = \omega R \frac{\partial\mathbf{b}}{\partial s} = -\omega R \tau \mathbf{n} = k R \omega \mathbf{n}.$$

Подставляя все полученные выражения в (5.101), находим безразмерную частоту вращения винта

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{\Omega} &= \left(\frac{k^2 a^2 K}{2} - \frac{k^2 W^2}{2\Omega^2} - \frac{W k^3 a^2}{4\Omega} \right) \Bigg/ \left(1 + \frac{W k}{\Omega} \right) \approx \\ &\approx \frac{k^2 a^2 K}{2} - \frac{k^2 W^2}{2\Omega^2} - \frac{W k^3 a^2}{4\Omega} + \frac{1}{2} \frac{W^3 k^3}{\Omega^3} - \frac{1}{2} \frac{a^2 k^3 K W}{\Omega}, \end{aligned}$$

где $K = \ln(2/ka) - E + 1/4$. Отметим, что здесь не было использовано условие $R \ll a$, принятое для волн Кельвина.

5.4.5. Учет внутренней структуры ядра

В общем случае произвольной вихревой нити уравнение (5.101) не является замкнутым, поскольку не определены изменения полей скорости внутри ядра в зависимости от времени и координат. Эти уточнения можно произвести за счет оставшихся двух неиспользованных уравнений – сохранения массы (5.99) и баланса продольной компоненты импульса, которое имеет вид (проекция уравнения (5.73) на t)

$$\frac{\partial}{\partial t} (\pi a^2 \bar{w}) = -\frac{I^2}{8\pi a^2} \frac{\partial a^2}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{2} \pi a^2 \bar{u}_0^2 - \pi a^2 \bar{w}^2 \right) - 2\pi a^2 \bar{w} \frac{\partial}{\partial t} \left(\ln \frac{\partial s}{\partial \xi} \right). \quad (5.102)$$

В работе Moore, Saffman [1972] показано, что изменения радиуса ядра вдоль нити имеют порядок $O(a^2/\rho^2)$. Поэтому в первом приближении положим

$$a = a(t),$$

а зависимость от времени определим из условия сохранения объема ядра нити с длиной L

$$La^2 = \text{const}. \quad (5.103)$$

Аналогично тангенциальная скорость u_θ в первом приближении не зависит от s и находится из условия сохранения циркуляции

$$u_0(r, t) = \frac{\Gamma}{2\pi r} g\left(\frac{r}{a}\right), \quad g(1) = 1. \quad (5.104)$$

Здесь безразмерная функция определяется начальным состоянием вихря. Тогда можем записать

$$a^2 \overline{u_0^2} = \frac{\Gamma^2}{8\pi^2} \mu, \quad (5.105)$$

где

$$\mu = 4 \int_0^1 \frac{g^2(\eta)}{\eta} d\eta.$$

Для ядра с постоянной завихренностью $g(\eta) = \eta^2$, $\mu = 1$.

Анализ аксиальной скорости $w(t, r, \xi)$ более сложен. В общем виде ее можно представить как

$$w = W(t) + q(\xi, t) + \frac{\Gamma}{m} \phi\left(\frac{r}{a}\right) \quad (5.106)$$

по следующим соображениям. При однородном растяжении трубы профиль скорости сохраняется, что отражает третий член, где длина m определяется из начальных условий. Первый член есть вклад в среднюю скорость при изменении $a(t)$. Второй член учитывает изменение средней скорости вдоль трубы и имеет порядок $O(1/\rho)$, так как оценивается компонентой скорости $V_{||} \equiv \mathbf{t} \cdot \partial \mathbf{R} / \partial t$. Дополнительно, без потери общности, накладывается условие

$$\int_0^1 \eta \phi(\eta) d\eta = 0,$$

которое означает нулевой вклад от третьего члена в общий расход жидкости через сечение трубы. Тогда для средних по сечению трубы величин получаем

$$\bar{w} = W + q, \quad a^2 \bar{w}^2 = a^2 W^2 + v a^2 \Gamma^2 / m^2 + 2 a^2 W q + O(1/\rho^2),$$

где $v = 2 \int_0^1 \eta \phi^2(\eta) d\eta = \text{const}$, которая находится из начальных условий.

Уравнение для q выводится путем подстановки (5.106) в уравнение сохранения массы (5.99) с учетом соотношений (5.96) и (5.103)

$$\frac{\partial q}{\partial s} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\ln \frac{\partial s}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{L} \frac{dL}{dt} = -\frac{\partial V_{ll}}{\partial s} + \frac{\mathbf{n}}{\rho} \cdot \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} + \frac{1}{L} \frac{dL}{dt}, \quad (5.107)$$

где длина вихря L , в свою очередь, задается уравнением (5.97). Заметим, что (5.107) позволяет вычислить q с точностью до произвольной функции от времени. Поэтому с целью однозначного определения q наложим дополнительное условие

$$\oint q ds = 0, \quad (5.108)$$

которое поясним ниже.

Теперь определим составляющую аксиальной скорости $W(t)$. С этой целью подставим (5.106) в (5.102) и, учитывая (5.107), получим

$$\frac{2a^2 W}{L} \frac{dL}{dt} + \frac{d}{dt}(a^2 W) = 0.$$

Откуда

$$W a^2 L^2 = \text{const}, \quad \text{или} \quad WL = \text{const}.$$

Последнее соотношение с учетом (5.108) означает сохранение циркуляции аксиальной скорости вдоль оси замкнутой вихревой нити. Действительно,

$$\oint_L \bar{w} ds = \oint_L W ds + \oint_L q ds = WL = \text{const}.$$

Осталась последняя величина, характеризующая внутреннюю структуру вихря, – параметр λ , который найдем из его определения

$$\lambda = \frac{2\pi}{\Gamma \bar{w} a^2} \int_0^a r^2 u_0 dr = \int_0^1 \left[1 + \frac{\Gamma}{Wm} \phi(\eta) \right] \eta g(\eta) d\eta + O(1/\rho).$$

Как видно, $\lambda = \lambda(t)$.

Таким образом, параметры внутренней структуры определяются начальными условиями и поведением длины нити L , которая, в свою очередь, нахо-

дится из уравнений движения вихря. В итоге получается замкнутая система уравнений динамики вихревой нити.

Уравнение движения нити (5.101) теперь можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \Gamma \left(\mathbf{V}_I - \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} \right) \times \mathbf{t} + T \frac{\mathbf{n}}{\rho} = 2\pi a^2 W q \frac{\mathbf{n}}{\rho} + 2\pi a^2 W \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial t} + \\ + \lambda \Gamma W a^2 \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\mathbf{b}}{\rho} \right) + O(1/\rho^3), \end{aligned} \quad (5.109)$$

где

$$T = T_0 + \frac{\Gamma^2 \mu}{16\pi} - \pi a^2 W^2 - \frac{\pi a^2 \Gamma^2 v}{m^2}, \quad T_0 = \frac{\Gamma^2}{4\pi} \left(\ln \frac{8\rho}{a} - \frac{1}{2} \right).$$

В уравнении (5.109) первый член справа перенесен из левой части выражения с натяжением T . Далее, домножая векторно на \mathbf{t} , получаем окончательно

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} - \mathbf{V}_I - \frac{T \mathbf{b}}{\Gamma \rho} = -2\pi a^2 \mathbf{t} \times \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial t} - 2\pi a^2 W q \frac{\mathbf{b}}{\rho} - \lambda \Gamma W a^2 \mathbf{t} \times \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\mathbf{b}}{\rho} \right). \quad (5.110)$$

В первом приближении остается только левая часть

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} = \mathbf{V}_I + \frac{T \mathbf{b}}{\Gamma \rho}. \quad (5.111)$$

Чтобы решать (5.110), необходимо оценить $\partial \mathbf{t} / \partial t$ и q , что можно сделать с помощью (5.95), (5.107), а также первого приближения для $\partial \mathbf{R} / \partial t$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{t} \times \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial t} &= \mathbf{t} \times \frac{\partial}{\partial s} \left(\mathbf{V}_I + \frac{T \mathbf{b}}{\Gamma \rho} \right), \\ q &= \int^s \left[-\frac{\partial}{\partial s} \left(\mathbf{t} \cdot \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} \right) + \frac{\mathbf{n}}{\rho} \cdot \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} \right] ds + \frac{s}{L} \frac{dL}{dt} = - \int^s \mathbf{t} \cdot \frac{\partial \mathbf{V}_I}{\partial s} ds + \frac{s}{L} \frac{dL}{dt}. \end{aligned}$$

В интеграле для q не поставлен нижний предел, поскольку в соответствии с (5.107) к q должна быть добавлена произвольная функция времени, чтобы удовлетворить (5.108).

Таким образом, (5.110) вместе с вспомогательными уравнениями образует замкнутую систему уравнений, достаточную для расчета движения деформированной вихревой нити. Добавим в заключение, что при наличии внешнего поля скоростей $\mathbf{V}_E(\xi)$ оно просто добавляется к величине \mathbf{V}_I .

5.4.6. Модифицированные уравнения движения вихревой нити

В работе Lundgren, Ashurst [1989] также на основе метода баланса сил выведены модифицированные уравнения. Основное отличие от предыдущего вывода заключается в том, что учтено локальное растяжение вихревой нити (“local stretching”), т. е. $a = a(\xi, t)$. Это означает, в частности, возможность описания бегущих волн с переменной площадью поперечного сечения ядра. Опуская выкладки и преобразования, которые во многом аналогичны предыдущему анализу, выпишем сразу замкнутую систему уравнений Lundgren, Ashurst [1989], описывающую эволюцию формы и радиуса вихревой нити

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} = \mathbf{V}_B + \mathbf{u}, \\ \frac{\partial}{\partial t} [2\mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{t})\mathbf{t}] = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{t}}{\sigma} \frac{\partial}{\partial \xi} [\mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{t})\mathbf{t} - \mathbf{V}_B] + \frac{\Gamma \sigma}{a_0^2} \mathbf{t} \times \mathbf{u} + \frac{\Gamma^2 \mathbf{t}}{8\pi a_0^2} \frac{\partial}{\partial \xi} (\ln \sigma), \\ \mathbf{t} = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \xi}, \quad \sigma = \left| \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \xi} \right| = \frac{\partial s}{\partial \xi}, \\ \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \mathbf{t} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} (\mathbf{V}_B + \mathbf{u}), \quad \sigma a^2 = a_0^2. \end{array} \right.$$

Здесь $\mathbf{R} = \mathbf{R}(\xi, t)$; $a = a(\xi, t)$; a_0 – начальный радиус ядра, параметр σ есть скорость локального растяжения; ξ – материальная переменная (точка с фиксированным значением ξ движется со скоростью $\mathbf{V} = \partial \mathbf{R} / \partial \xi$); $\mathbf{u} = \mathbf{V} - \mathbf{V}_B$ – скорость жидкости в ядре относительно окружающей среды; $\mathbf{V}_B = \mathbf{V}_B(s, t)$ – самоиндуцированная скорость в точке $\mathbf{R}(s, t)$, определенная по формуле Rosenhead (5.6) с параметром $\mu^2 = 0,22$ (постоянная завихренность в ядре). Последнее из выписанных уравнений означает сохранение массы для локального элемента ядра. Обратим еще раз внимание на условность понятия относительной скорости для вихря, в данном случае она определена относительно скорости \mathbf{V}_B .

5.5. МЕТОД СРАЩИВАЕМЫХ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЙ

Метод сращиваемых асимптотических разложений (“method of matched asymptotic expansions” – МАЕ) для описания динамики вихревых нитей с внутренней структурой впервые использован Widnall *et al.* [1971]. Вычисление самоиндуцированной скорости было выполнено с точностью $O(\Gamma/\rho)$. Callegari, Ting [1978] распространили данный метод на случай движения вихря в вязкой среде. Fukumoto, Miyazaki [1991] провели вычисления методом МАЕ

с точностью $O(\Gamma a/\rho^2)$ и вывели уравнение движения нити, ранее полученное Moore, Saffman [1972] менее строгим методом баланса сил (см. п. 5.4). Основная цель их исследований заключалась в определении влияния внутренней структуры вихря, прежде всего аксиальной скорости на движение и устойчивость вихревых нитей.

Метод МАЕ справедлив для *тонких вихревых нитей* ($a/\rho \ll 1$). Суть его состоит в том, что с использованием приближения тонкой нити находятся *внешнее* (на основе закона Био – Савара) и *внутреннее* (на основе уравнений Эйлера или Навье – Стокса) решения для поля скоростей. А затем производится сшивка этих решений.

Ниже мы изложим метод МАЕ, следуя, преимущественно, работе Fukumoto, Miyazaki [1991], которую далее будем для краткости обозначать как FM. Данный метод будет применен для вывода уравнения Moore, Saffman (MSE), которое является невязким и имеет точность $O(\Gamma a/\rho^2)$. Далее в рамках локального индукционного приближения (LIA) из MSE будут выведены упрощенные эволюционные уравнения – обобщенное локальное индукционное уравнение, уравнение Хироты, нелинейное уравнение Шредингера и модифицированное уравнение Кортевега – де Вриза. На основе полученных уравнений в качестве примера будут рассмотрены точные N -солитонные решения, а также прокомментированы некоторые другие решения.

5.5.1. Вывод уравнения движения вихревых нитей

Процедуру вывода начнем с оценки самоиндуцированной скорости \mathbf{u} , используя закон Био – Савара (2.14) в форме, когда имеется только аксиальная компонента завихренности,

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = -\frac{\Gamma}{4\pi} \int \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{R}') \times \mathbf{t}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}'|^3} ds'. \quad (5.112)$$

Здесь $\mathbf{R}(s', t)$ – радиус-вектор произвольной точки на оси вихревой нити. Будем использовать локальную ортогональную цилиндрическую систему координат (r, θ, s) , введенную в п. 5.4.2 и изображенную на рис. 5.16. Выпишем также из п. 5.4.2 необходимые соотношения, сохраняя прежние обозначения

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{R}(s, t) + r\mathbf{e}_r, \\ d\mathbf{r} &= \mathbf{e}_r dr + r\mathbf{e}_\theta d\theta + h\mathbf{t} ds, \\ h &= 1 - \kappa r \cos\phi, \\ \theta &= \phi - \theta_0(s, t), \quad \frac{\partial \theta_0}{\partial s} = -\tau. \end{aligned}$$

Теперь разложим \mathbf{R}' в ряд Тейлора относительно точки \mathbf{R} вплоть до кубических членов по $(s' - s)$, учитывая уравнения Серре – Френе. Аналогичная процедура до квадратичных членов была выполнена в п. 2.4. В результате имеем

$$\mathbf{R}'(s', t) = \mathbf{R}(s, t) + \mathbf{t}(s' - s) + \frac{1}{2} \kappa \mathbf{n}(s' - s)^2 + \frac{1}{3!} (-\kappa^2 \mathbf{t} + \kappa_s \mathbf{n} + \kappa \tau \mathbf{b})(s' - s)^3,$$

где $\kappa_s = d\kappa/ds$. Подставляя это выражение в (5.112) и интегрируя в конечных пределах $(-L, L)$, получим в пределе $a \ll r \ll \rho$ (см. п. 2.4)

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{r}) = & \frac{\Gamma}{2\pi r} \mathbf{e}_0 + \frac{\Gamma \kappa}{4\pi} \left[\ln\left(\frac{2L}{r}\right) - 1 \right] \mathbf{b} + \frac{\Gamma \kappa}{4\pi} \cos \phi \mathbf{e}_0 + \frac{3\Gamma \kappa^2 r}{16\pi} \times \\ & \times \left\{ (\mathbf{e}_r \sin 2\phi + \mathbf{e}_0 \cos 2\phi) \left[\ln\left(\frac{2L}{r}\right) - \frac{4}{3} \right] + \frac{1}{2} \cos 2\phi \mathbf{e}_0 + \frac{1}{18} \mathbf{e}_0 \right\} + \mathbf{Q} + O\left(\frac{\Gamma a^2}{R^3}\right). \end{aligned} \quad (5.113)$$

Здесь \mathbf{Q} означает оставшийся нелокальный вклад в интеграл Био – Савара, а первые три члена справа в точности совпадают с квадратичным приближением (2.35).

Уравнение (5.113) нельзя прямо использовать для определения скорости вихревой нити, поскольку оно справедливо в окрестности трубы, но не в самой трубе, где нужно учитывать внутреннюю структуру (поле скоростей). Чтобы найти скорость нити, будет применено уравнение Эйлера для вихревой трубы с привлечением метода возмущений, а затем полученное решение должно быть сопряжено с (5.113).

Прежде всего уточним определение радиуса-вектора $\mathbf{R}(s, t)$, характеризующего положение оси вихря, а именно центра распределения аксиальной завихренности в каждом поперечном сечении вихря. Дополнительно потребуем, что кривая \mathbf{R} движется как материальная линия, т. е. составлена из жидких частиц. С этой целью введем материальную переменную ξ , которая однозначно определена при дополнительном условии на \mathbf{R} , например

$$\dot{\mathbf{R}}(\xi, t) \cdot \mathbf{t} = \mathbf{Q}(\xi, t) \cdot \mathbf{t} = Q_1.$$

Здесь $\dot{\mathbf{R}} = \partial \mathbf{R}(\xi, t)/\partial t$ дает скорость точки на оси нити при $\xi = \text{const}$; \mathbf{Q} есть нелокальная составляющая самоиндукции скорости из (5.113) при $r \rightarrow 0$. Так как при скалярном умножении на \mathbf{t} все члены в (5.113) кроме \mathbf{Q} обращаются в нуль, то данное равенство означает равенство тангенциальных составляющих самоиндукции скорости и скорости оси вихря $\partial \mathbf{R} / \partial t$.

Далее удобнее использовать уравнения движения в безразмерной форме. В данной задаче имеется два масштаба длины – характерный радиус ядра a_0 , в качестве которого примем начальное невозмущенное значение, и характерный радиус кривизны ρ_0 кривой $\mathbf{R}(s, t)$. Введем отношение масштабов ϵ

$$\epsilon = a_0 / \rho_0$$

и будем искать решение в виде разложений в ряд по ϵ при условии

$$\epsilon \ll 1.$$

Полагая, что масштаб изменений вдоль вихревой нити есть $O(\rho_0)$, отнесем переменные s, ξ, R, ρ к величине ρ_0 . Для поперечной координаты r применим масштаб a_0 в случае *внутренних* разложений и масштаб ρ_0 – *внешних* разложений. В качестве масштаба времени возьмем величину $2\pi\rho_0^2 / \Gamma$. Это означает, что вихрь эволюционирует в целом по LIE и что рассматриваются медленные изгибные моды. И, наконец, за масштаб скорости примем максимальное значение тангенциальной скорости ($\Gamma / 2\pi a_0$).

Процедура МАЕ выглядит следующим образом. Внешнее решение находится из закона Био – Савара, для которого вихревая трубка рассматривается как пространственная кривая. Асимптотическое поведение внешнего решения в промежуточной области определяется уравнением (5.113). И это же уравнение применяется с целью сращивания внешнего и внутреннего решений как граничное условие для внутреннего решения на бесконечности.

Внутреннее решение естественно ищется в локальных цилиндрических координатах (r, θ, s) . Обозначим скорость жидкости в этой системе координат как $\mathbf{V} = (u, v, w)$. Тогда в неподвижной системе координат безразмерная скорость определяется выражением

$$\mathbf{u}(r, \theta, s, t) = \epsilon \dot{\mathbf{R}} + \mathbf{V}(r, \theta, s, t).$$

Разложения скоростей и давления в ряд по степеням ϵ запишем в виде

$$\begin{aligned} u &= \epsilon u^{(1)}(r, \theta, s, t) + \epsilon^2 u^{(2)}(r, \theta, s, t) + \dots, \\ v &= v^{(0)}(r, t) + \epsilon v^{(1)}(r, \theta, s, t) + \epsilon^2 v^{(2)}(r, \theta, s, t) + \dots, \\ w &= w^{(0)}(r, t) + \epsilon w^{(1)}(r, \theta, s, t) + \epsilon^2 w^{(2)}(r, \theta, s, t) + \dots, \\ p &= p^{(0)}(r, t) + \epsilon p^{(1)}(r, \theta, s, t) + \epsilon^2 p^{(2)}(r, \theta, s, t) + \dots, \\ \dot{\mathbf{R}} &= \dot{\mathbf{R}}^{(0)}(\xi, t) + \epsilon \dot{\mathbf{R}}^{(1)}(\xi, t) t \dots . \end{aligned} \quad (5.114)$$

Индексом (0) обозначены невозмущенные значения для прямолинейного вихря. Зависимость от времени в них обусловлена учетом растяжения вихревых линий, которое является однородным по отношению к s .

Границные условия на оси вихря есть

$$u = v = 0 \text{ при } r = 0.$$

Оставшиеся граничные условия следуют из сшивки внутреннего и внешнего решений. С этой целью перепишем (5.113) в безразмерных внутренних переменных. Тогда условия сшивки при $r \rightarrow \infty$ будут иметь вид

$$\begin{aligned} v^{(0)} &\sim \frac{1}{r} + 0(r^{-2}), \quad w^{(0)} \sim 0(r^{-2}), \\ u^{(1)} &\sim \frac{1}{2} \kappa \left[\ln \left(\frac{2\tilde{L}}{\varepsilon r} \right) - 1 \right] \sin \phi + [\mathbf{Q}^{(1)} - \dot{\mathbf{R}}^{(0)}] \mathbf{e}_r, \\ v^{(1)} &\sim \frac{1}{2} \kappa \left[\ln \left(\frac{2\tilde{L}}{\varepsilon r} \right) - 1 \right] \cos \phi + \frac{1}{2} \kappa \cos \phi + [\mathbf{Q}^{(1)} - \dot{\mathbf{R}}^{(0)}] \mathbf{e}_\theta, \\ u^{(2)} &\sim \frac{3}{8} \kappa^2 r \left[\ln \left(\frac{2\tilde{L}}{\varepsilon r} \right) - \frac{4}{3} \right] \sin 2\phi + [\mathbf{Q}^{(2)} - \dot{\mathbf{R}}^{(1)}] \mathbf{e}_r, \\ v^{(2)} &\sim \frac{3}{8} \kappa^2 r \left[\ln \left(\frac{2\tilde{L}}{\varepsilon r} \right) - \frac{5}{6} \right] \cos 2\phi + \frac{\kappa^2 r}{48} + [\mathbf{Q}^{(2)} - \dot{\mathbf{R}}^{(1)}] \mathbf{e}_\theta, \end{aligned}$$

где $\tilde{L} = L/\rho_0$. Чтобы найти внутреннее решение, необходимо разложения (5.114) подставить в уравнения Эйлера, записанные в движущейся криволинейной системе координат. Опуская громоздкую процедуру вывода (детали см. Fukumoto, Miyazaki [1991], а также Callegari, Ting [1978]), приведем сразу результирующее выражение для скорости вихревой нити в размерных переменных

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{R}}(\xi, t) = & \left[\frac{\kappa \Gamma}{4\pi} \ln \left(\frac{2L}{a} \right) - \frac{1}{2} + \lim_{r \rightarrow \infty} \left\{ \frac{4\pi^2}{\Gamma^2} \int_0^r [v^{(0)}]^2 dr - \ln \left(\frac{r}{a} \right) \right\} - \right. \\ & \left. - \frac{8\pi^2}{\Gamma^2} \int_0^\infty r \left\{ [w^{(0)}]^2 + 2\varepsilon w^{(0)} \hat{w}_0^{(1)} \right\} dr \right] \mathbf{b} - \frac{4\pi}{\Gamma} \left[\int_0^\infty r w^{(0)} dr \right] \mathbf{t} \times \frac{1}{\sigma} \dot{\mathbf{R}}_\xi^{(0)} - \\ & - \frac{2\pi}{\Gamma} \left[\int_0^\infty r^2 v^{(0)} w^{(0)} dr \right] \mathbf{t} \times \frac{\partial}{\partial l} (\kappa \mathbf{b}) + \mathbf{Q}. \end{aligned} \quad (5.115)$$

Здесь скорость локального растяжения $\sigma \equiv |\mathbf{R}_\xi| = \partial s / \partial \xi$; однородная часть $a = a(t)$ радиуса ядра определяется разложением $a(l, t) = a(t) + \varepsilon^2 a^{(2)}(s, t)$, причем из сохранения объема справедливо соотношение $a(t)^2 s(t) = \text{const}$; а $\hat{w}_0^{(1)}$ есть симметричная часть величины $w^{(1)}$: $w^{(1)} = \hat{w}_0^{(1)}(r, s, t) + \hat{w}^{(1)}(r, s, t) \cos \varphi$. Подчеркнем, что формула (5.115) выведена со вторым порядком точности и совпадает с соответствующим выражением Moore, Saffman [1972]. Но в последнем случае вывод осуществлен менее строго с привлечением метода баланса сил.

Прежде чем вывести модельные уравнения из (5.115), проанализируем дисперсионные соотношения, чтобы понять вклад поправок второго порядка и увидеть влияние аксиальной скорости в ядре вихря. Рассматривая изгибную моду $m = \pm 1$ в длинноволновом приближении, т. е. при $|k| \ll 1$, где k – азимутальное волновое число, можно получить аналитическое выражение для частоты ω (см. Fukumoto, Miyazaki [1991])

$$\omega = -\frac{m\Gamma k^2}{4\pi} C_0 + k^3 \left[\left(\int_0^\infty r w^{(0)} dr \right) C_0 + \frac{2\pi}{\Gamma} \left(\int_0^\infty r^2 v^{(0)} w^{(0)} dr \right) \right],$$

где константа интегрирования C_0 равна

$$C_0 = \ln \left(\frac{2}{a|k|} \right) - \gamma + \lim_{r \rightarrow \infty} \left[\frac{4\pi^2}{\Gamma} \int_0^r r [v^{(0)}]^2 dr - \ln \left(\frac{r}{a} \right) \right] - \frac{8\pi^2}{\Gamma^2} \int_0^\infty r [w^{(0)}]^2 dr.$$

Данное выражение справедливо для колоннообразного вихря с произвольными, но осесимметричными распределениями аксиальной и азимутальной компонент завихренности. Аналогичное соотношение получено Moore, Saffman [1972] для винтовой нити большого шага.

Примеры расчетов для профиля скорости (4.65) с эмпирическими константами $W_0/V_m = 0,4$, $\beta = 0,54$, $\alpha = 1,28$, $\Gamma/(2\pi a V_m) = 1,37$ [Maxworthy *et al.*, 1985], где V_m – максимум тангенциальной скорости, приведены на рис. 5.19, 5.20 для моды $m = -1$. На рис. 5.19 проведено сравнение расчетных значений частоты в первом приближении (1) и во втором (2). Как видно, учет поправок второго порядка приводит к асимметрии зависимости $\omega(k)$ относительно оси $k = 0$. На рис. 5.20 показаны распределения частоты ω , фазовой c и групповой c_g скоростей в зависимости от волнового числа k в безразмерном виде. Заметим, что эти данные согласуются с численными расчетами уравнения Howard–Gupta, выполненными Leibovich *et al.* [1986] для тех же профилей скорости и справедливыми для всего диапазона волновых чисел.

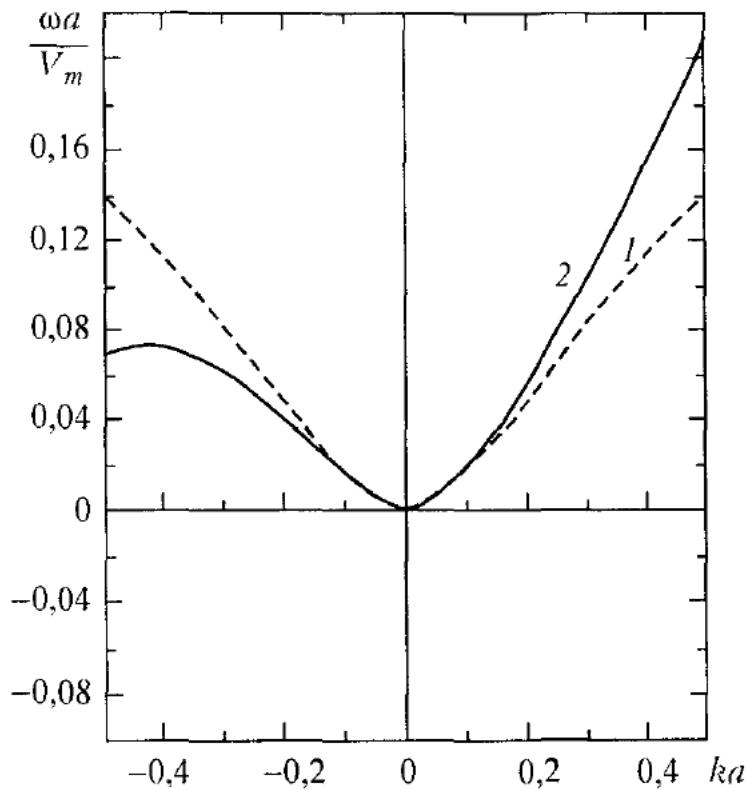


Рис. 5.19. Асимптотические значения дисперсионного соотношения для $m = -1$. Колоннообразный вихрь с эмпирическим профилем скорости по Maxworthy *et al.* [1985]. 1, 2 – расчеты в первом и втором порядках точности по ϵ соответственно [Fukumoto, Miyazaki, 1991]

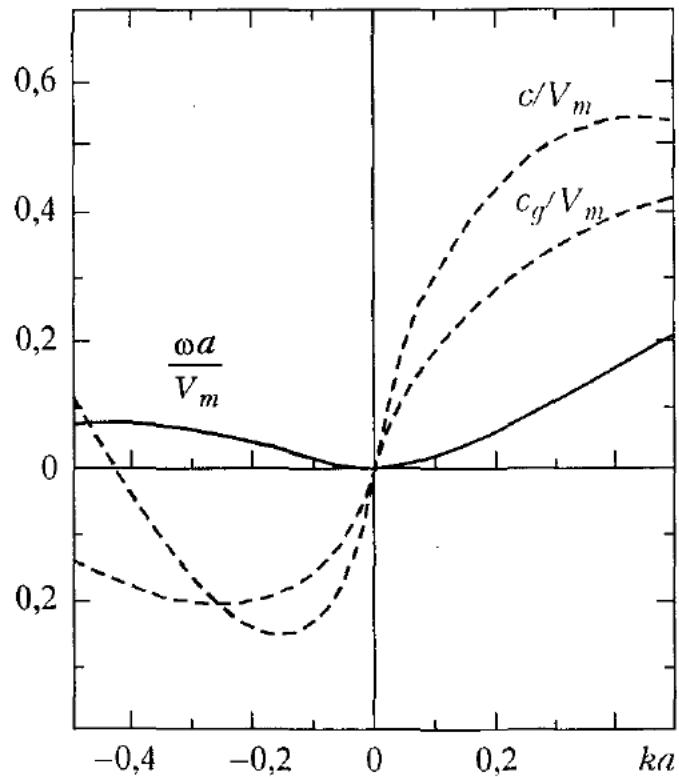


Рис. 5.20. Асимптотические значения частоты ω , фазовой скорости c и групповой скорости c_g во втором приближении по ϵ . Условия см. рис. 5.19

5.5.2. Локальное индукционное приближение

В рамках локального индукционного приближения (см. п. 2.4) пренебрежем вкладом нелокальной индукции \mathbf{Q} и изменением параметра усечения L/a вдоль вихревой нити. Перепишем (5.115) в виде

$$\dot{\mathbf{R}} = \kappa A \mathbf{b} - B \mathbf{t} \times \dot{\mathbf{R}}_{\xi}^{(0)} / \sigma - C \mathbf{t} \times \frac{\partial}{\partial s} (\kappa \mathbf{b}),$$

где A, B, C – соответствующие коэффициенты. Преобразуем производную по ξ следующим образом: $\dot{\mathbf{R}}_{\xi}^{(0)} / \sigma = \dot{\mathbf{R}}_s^{(0)}$, а $\dot{\mathbf{R}}^{(0)}$ заменим через первое приближение, т. е. $\kappa A \mathbf{b}$. Далее перенормируем время: $tA \rightarrow t$. Тогда, используя формулы Серре – Френе и определения единичных векторов, получим

$$\dot{\mathbf{R}}(\xi, t) = \kappa \mathbf{b} + \beta (\kappa_s \mathbf{n} + \kappa \tau \mathbf{b}), \quad (5.116)$$

где

$$\begin{aligned} \beta = & \frac{4\pi}{\Gamma} \int_0^{\infty} r w^{(0)} dr + \\ & + \frac{2\pi}{\Gamma} \int_0^{\infty} r^2 v^{(0)} w^{(0)} dr \\ & + \frac{\Gamma}{2\pi} \left[\ln \left(\frac{2L}{a} \right) - \frac{1}{2} \right] + \lim_{r \rightarrow \infty} \left[\frac{\pi}{\Gamma} \int_0^r r v^{(0)2} dr - \frac{\Gamma}{4\pi} \ln \left(\frac{r}{a} \right) \right] - \frac{2\pi}{\Gamma} \int_0^{\infty} r w^{(0)2} dr. \end{aligned}$$

В выражении для A пренебрегли малым членом, содержащим ε .

Теперь необходимо перейти к переменной s в левой части уравнения (5.116). Переменные ξ и s связаны зависимостью $\xi = s - Wt$, где W – некоторая скорость скольжения, которую необходимо найти. Обозначая $\partial \mathbf{R}(s, t) / \partial t$ как \mathbf{R}_t , а $\partial \mathbf{R}(\xi, t) / \partial t$ как $\dot{\mathbf{R}}$, имеем следующую цепочку преобразований:

$$\dot{\mathbf{R}} = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{R}(s - Wt, t) = -W \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial s} + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t}(s, t) = -W \mathbf{t} + \mathbf{R}_t.$$

Тогда вместо (5.116) получаем

$$\mathbf{R}_t = \kappa \mathbf{b} + \beta (\kappa_s \mathbf{n} + \kappa \tau \mathbf{b}) + W \mathbf{t}.$$

Продифференцируем это уравнение по длине дуги s , опять учитывая формулы Серре – Френе

$$\mathbf{R}_{st} = \kappa_s \mathbf{t} - \kappa \tau \mathbf{n} + \beta [\kappa_{ss} \mathbf{n} + \kappa_s (\tau \mathbf{b} - \kappa \mathbf{t}) + (\kappa_s \tau + \kappa \tau_s) \mathbf{b} - \kappa \tau^2 \mathbf{n}] + W_s \mathbf{t} + W \kappa \mathbf{n}.$$

Примем во внимание тождество $\mathbf{R}_{st} \cdot \mathbf{R}_s = 0$, которое следует из условия $\mathbf{R}_s \cdot \mathbf{R}_s = \mathbf{t} \cdot \mathbf{t} = 1$, если его продифференцировать по времени. Тогда, умножая последнее уравнение скалярно на \mathbf{R}_s , получим $W_s = \beta \kappa_s \kappa$ или $W = \beta \kappa^2 / 2$. Результатирующее уравнение для \mathbf{R}_t принимает вид

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{R}} &= \kappa \mathbf{b} + \beta \left(\frac{1}{2} \kappa^2 \mathbf{t} + \kappa_s \mathbf{n} + \kappa \tau \mathbf{b} \right) = \\ &= \mathbf{R}_s \times \mathbf{R}_{ss} + \beta \left[\mathbf{R}_{sss} + \frac{3}{2} \mathbf{R}_{ss} \times (\mathbf{R}_s \times \mathbf{R}_{ss}) \right].\end{aligned}\quad (5.117)$$

Это уравнение представляет собой обобщение LIE, учитывающее аксиальную скорость во втором порядке точности через параметр β .

В п. 5.3. было продемонстрировано, что с помощью преобразований Hasimoto [1972] LIE сводится к нелинейному уравнению Шредингера. Используя ту же самую процедуру, векторное дифференциальное уравнение (5.117) также можно свести к известному в литературе уравнению Nigota [1973] для скалярной функции. С этой целью введем комплексные функции Ψ и \mathbf{N} (см. п. 5.3)

$$\Psi = \kappa \exp \left(i \int_0^s \tau ds \right), \quad \mathbf{N} = (\mathbf{n} + i \mathbf{b}) \exp \left(i \int_0^s \tau ds \right),$$

где τ – кручение. Тогда формулы Серре – Френе

$$\mathbf{t}_s = \kappa \mathbf{n}, \quad \mathbf{n}_s = -\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b}, \quad \mathbf{b}_s = -\tau \mathbf{n}$$

могут быть переписаны в виде

$$\begin{aligned}\mathbf{t}_s &= \frac{1}{2} (\Psi^* \mathbf{N} + \Psi \mathbf{N}^*), \\ \mathbf{N}_s &= -\Psi \mathbf{t}.\end{aligned}\quad (5.118)$$

Здесь индекс s означает производную по длине дуги. Далее продифференцируем (5.117) по длине дуги и получим с учетом определения тангенциального вектора \mathbf{t}

$$\begin{aligned}\mathbf{t}_t &= \kappa_s \mathbf{b} - \kappa \tau \mathbf{n} + \beta \left[\left(\kappa_{ss} + \frac{1}{2} \kappa^3 - \kappa \tau^2 \right) \mathbf{n} + (2 \kappa_s \tau + \kappa \tau_s) \mathbf{b} \right] = \\ &= -\frac{1}{2} (\boldsymbol{\gamma}^* \mathbf{N} + \boldsymbol{\gamma} \mathbf{N}^*)\end{aligned}\quad (5.119)$$

где $\boldsymbol{\gamma} = -i \Psi_s - \beta \Psi_{ss} - \frac{1}{2} \beta |\Psi|^2 \Psi$. (5.120)

Для производной \mathbf{N}_t в п. 5.3 было показано, что ее можно представить в виде

$$\mathbf{N}_t = iF\mathbf{N} + \mathbf{f}\mathbf{t}, \quad (5.121)$$

где функции F и \mathbf{f} подлежат определению, причем F – действительная функция. Для этого вновь используем соотношения: $\mathbf{N} \cdot \mathbf{N} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{t} = 0$, $\mathbf{N} \cdot \mathbf{N}^* = 2$. Из условия $(\mathbf{N} \cdot \mathbf{t})_t = 0$ имеем с учетом (5.119), (5.121): $\mathbf{f} = \boldsymbol{\gamma}$. Далее возьмем производную по t от (5.118) и производную по s от (5.121). Приравнивая правые части получившихся уравнений, получим два новых уравнения для определения функции F

$$F_s = \frac{i}{2} (\Psi^* \boldsymbol{\gamma} - \Psi \boldsymbol{\gamma}^*), \quad (5.122)$$

$$\Psi_t - iF\Psi + \boldsymbol{\gamma}_s = 0. \quad (5.123)$$

Используя выражения для $\boldsymbol{\gamma}$ в (5.122) и интегрируя, находим F

$$F = \frac{1}{2} |\Psi|^2 + \frac{1}{2} i \beta (\Psi \Psi_s^* - \Psi_s \Psi^*).$$

Подставив выражения для $\boldsymbol{\gamma}$ и F в (5.123), приходим к уравнению Хироты [Hirota, 1973]

$$i\Psi_t + \Psi_{ss} + \frac{\Psi}{2} |\Psi|^2 - i\beta \left[\Psi_{sss} + \frac{3}{2} \Psi_s |\Psi|^2 \right] = 0. \quad (5.124)$$

При $\beta \rightarrow \infty$ получаем модифицированное уравнение Кортевега – де Вриза

$$\Psi_t - \beta \Psi_{sss} - \frac{3}{2} \beta \Psi_s |\Psi|^2 = 0.$$

В отсутствие же аксиального течения в ядре вихря ($\beta \rightarrow 0$) уравнение Хироты, как видно, сводится к нелинейному уравнению Шредингера НУШ (см. (5.55)). В п. 5.3 на основе НУШ было описано односолитонное решение – солитон Хасимото. Уравнение Хироты относится к классу интегрируемых уравнений и также имеет точное решение в виде солитонов. Для того, чтобы понять влияние аксиального течения в ядре вихря на динамику вихревой нити, приведем результаты FM для одиночного вихревого солитона, а также для двухсолитонного решения. Последние данные важны при описании взаимодействия солитонов.

5.5.3. N -солитонное решение

Для нахождения многосолитонного решения, т. е. при $N \geq 2$, метод Хасимото, описанный в п. 5.3, неприемлем. Поэтому FM использовали концепцию *солитонных поверхностей* (“soliton surface approach”), развитую Симом [Sym, 1984] и примененную Levi *et al.* [1983] к описанию N солитонов на вихревой нити без аксиального течения (т. е. на основе НУН). В соответствии с этой концепцией N -солитонное решение генерируется путем последовательного применения преобразования Бэклунда, начиная с невозмущенного состояния вихревой нити, т. е. решение получается чисто алгебраическим способом. Вычисления ничем не отличаются от случая LIE. Поэтому можно воспользоваться результатами, например, работы Levi *et al.* [1983], с одним лишь изменением: необходимо произвести замену дисперсионного соотношения. Полагая, согласно FM, $\Psi \sim \exp[2i(\zeta_s - \omega t)]$, имеем из (5.124)

$$\omega(\zeta_i) = 2\zeta_i^2 + 4\beta\zeta_i^3. \quad (5.125)$$

Здесь $\zeta_j = p_j + iq_j$ – дискретные собственные значения. Тогда точное решение для формы *одиночного солитона* ($j = 1$) записывается в декартовых координатах как

$$X + iY = A \operatorname{sech} \left[2q_1(s - c_g t) \right] \cdot \exp \left[2ip_1(s - ct) \right], \quad (5.126)$$

$$Z = s - A \tanh \left[2q_1(s - c_g t) \right], \quad (5.127)$$

где $\zeta_1 = p_1 + iq_1$. Здесь амплитуда солитона A , фазовая скорость несущей волны c и групповая скорость c_g (скорость огибающей) есть

$$A = q_1 / \left(p_1^2 + q_1^2 \right),$$

$$c = \frac{2}{p_1} \left[p_1^2 - q_1^2 + 2\beta p_1 \left(p_1^2 - 3q_1^2 \right) \right],$$

$$c_g = 4 \left[p_1 - \beta \left(q_1^2 - 3p_1^2 \right) \right].$$

В отсутствие аксиального течения ($\beta = 0$) данное решение совпадает с солитоном Хасимото (см. п. 5.3). Как следует из приведенных формул, аксиальное течение совершенно не влияет на форму солитона, а изменяет только значения групповой и фазовой скоростей.

В п. 5.3 решение для солитона Хасимото представлено через максимальную кривизну κ_{\max} и кручение τ . Для удобства сравнения собственные значе-

ния p_1 и q_1 также можно выразить через κ_{\max} и τ , если использовать их определения (см. п. 2.1)

$$p_1 = \tau/2, \quad q_1 = \kappa_{\max}/4.$$

Напомним (см. также п. 5.3), что скорости c_g и c постоянны вдоль длины дуги s . При переходе от переменной s к переменной Z форма солитона, с учетом (5.127), описывается выражением

$$X(Z, t) + iY(Z, t) = A \operatorname{sech} \left[2q_1 \{Z - c_g t + E(Z, t)\} \right] \cdot \exp \left[2ip_1 \{Z - ct + E(Z, t)\} \right],$$

где E определяется из трансцендентного уравнения

$$E(Z, t) = A \tanh \left[2q_1 (Z - c_g t + E) \right].$$

Отсюда видно, что фазовая и групповая скорости в лабораторной системе координат в общем случае уже не есть константы.

Выведем формулы для групповой C_g и фазовой C скоростей в лабораторной системе координат. Исходим из условия постоянства фазы

$$d\theta = \frac{\partial \theta}{\partial Z} dZ + \frac{\partial \theta}{\partial t} dt = 0,$$

откуда скорость точки с постоянной фазой есть

$$\frac{dZ}{dt} = -\frac{\partial \theta}{\partial t} / \frac{\partial \theta}{\partial Z}.$$

Тогда, полагая $\theta = 2q_1(Z - c_g t + E)$ и $\theta = 2p_1(Z - ct + E)$, находим соответственно групповую скорость (скорость огибающей) C_g и фазовую скорость (фазовую скорость несущей волны) C

$$C_g = c_g, \quad C = \frac{c + c_g \frac{\partial E}{\partial Z}}{1 + \frac{\partial E}{\partial Z}}.$$

При выводе учтено, что

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -c_g \frac{\partial E}{\partial Z}.$$

Таким образом, групповая скорость имеет то же самое постоянное значение и вдоль длины дуги s , и в абсолютной системе координат. Фазовая скорость $C = C(Z, t)$ уже не является постоянной в лабораторной системе координат. Однако для слабоискривленных нитей ($q_1 \ll 1$) $dE/dZ \ll 1$ и можно полагать $C \approx c = \text{const.}$

Аналогично, учитывая дисперсионное соотношение (5.125), из работы Levi *et al.* [1983] получаем двухсолитонное решение ($N = 2$)

$$\begin{aligned} X_2 + iY_2 &= \frac{\operatorname{Im}\zeta_1}{|\zeta_1|^2} \operatorname{sech} \eta_1 e^{i\xi_1} + \frac{\operatorname{Im}\zeta_2}{|\zeta_2|^2} \frac{1}{B} \times \\ &\times \left\{ \left[\left(\frac{1}{2} |\mathbf{D}|^2 + \operatorname{Re} \mathbf{D} \right) \cosh \eta_2 + \frac{1}{2} |\mathbf{D}|^2 \tanh \eta_1 \sinh \eta_2 - i \operatorname{Im} \mathbf{D} \sinh \eta_2 \right] e^{i\xi_1} + \right. \\ &+ \left[(1 + \operatorname{Re} \mathbf{D}) \cosh \eta_1 + \frac{1}{4} |\mathbf{D}|^2 \operatorname{sech} \eta_1 + i \operatorname{Im} \mathbf{D} \sinh \eta_1 \right] e^{i\xi_2} + \\ &\left. + \frac{1}{4} |\mathbf{D}|^2 \operatorname{sech} \eta_1 e^{i(2\xi_1 - \xi_2)} \right\}, \\ Z_2 &= s - \frac{\operatorname{Im}\zeta_1}{|\zeta_1|^2} \tanh \eta_1 - \frac{\operatorname{Im}\zeta_2}{|\zeta_2|^2} \frac{1}{B} \times \\ &\times \left\{ \left(\operatorname{Re} \mathbf{D} + \frac{1}{2} |\mathbf{D}|^2 \right) \sinh \eta_1 \cosh \eta_2 + \left(1 + \operatorname{Re} \mathbf{D} + \frac{1}{2} |\mathbf{D}|^2 \right) \sinh \eta_2 \cosh \eta_1 - \right. \\ &- \left. \frac{1}{2} |\mathbf{D}|^2 [\operatorname{sech} \eta_1 \sinh \eta_2 - \tanh \eta_1 \cos(\xi_1 - \xi_2)] + \operatorname{Im} \mathbf{D} \sin(\xi_2 - \xi_1) \right\}. \end{aligned}$$

Здесь $\zeta_j = p_j + iq_j$, $j = 1, 2$, $q_j \geq 0$,

$$B = \cosh \eta_1 \cos \eta_2 + \left(\operatorname{Re} \mathbf{D} + \frac{1}{2} |\mathbf{D}|^2 \right) [\cos(\xi_1 - \xi_2) + \cosh(\eta_1 + \eta_2)],$$

$$\eta_j = 2(\operatorname{Im} \zeta_j)s - 2 \operatorname{Im}[\boldsymbol{\omega}(\zeta_j)]t + \eta_j^0,$$

$$\xi_j = 2(\operatorname{Re} \zeta_j)s - 2 \operatorname{Re}[\boldsymbol{\omega}(\zeta_j)]t + \xi_j^0,$$

$$\mathbf{D} = \zeta_2^*(\zeta_1^* - \zeta_1)/[\zeta_1^*(\zeta_1 - \zeta_2^*)],$$

η_j^0, ξ_j^0 – действительные константы. Выражения для двухсолитонного решения весьма громоздки, но выписаны специально, чтобы читатель самостоятельно мог выполнить вычисления. В качестве примера на рис. 5.21 приведены два случая взаимодействия солитонов с параметрами: $\zeta_{1,2} = \pm 0,5 + 0,25i$. В первом случае (рис. 5.21a) аксиальное течение отсутствует ($\beta = 0$), а во втором

(рис. 5.21 δ) $\beta = -0,5$. Начальные состояния одинаковы. Как видно, основное различие заключается в разных скоростях распространения соответствующих солитонов на рисунках a и b . Следует заметить, что представленные расчеты не объясняют большого фазового сдвига после взаимодействия солитонов, наблюдавшегося в экспериментах Maxworthy *et al.* [1985]. Причина несоответствия может быть связана с пренебрежением нелокальной индукцией и изменением параметра усечения вдоль вихревой нити при выводе уравнения (5.117).

В работе Konno, Ichikawa [1992] многосолитонное решение для вихревой нити с аксиальным потоком найдено методом *обратной задачи рассеяния*. В качестве исходного уравнения использовано гибридное уравнение Wadati, Konno, Ichikawa [1979], которое эквивалентно уравнению (5.117). Результаты расчетов несколько отличаются от данных Fukumoto, Miyazaki [1991]. В частности, продемонстрирована симметрия двухсолитонного решения относительно перестановки солитонов. Приведем два показательных примера расчетов. На рис. 5.22 проведено сравнение взаимодействия солитонов на нити без аксиального течения (a) и с аксиальным протоком (b). Параметры солитонов и аксиальная скорость w указаны в размерных (но условных) величинах в связи с перенормировкой времени в LIE, а время t – в безразмерном виде. Параметры солитонов выбраны такими, что при $w=0$ они движутся вместе. Учет ненулевой аксиальной скорости немедленно приводит к разбеганию солитонов.

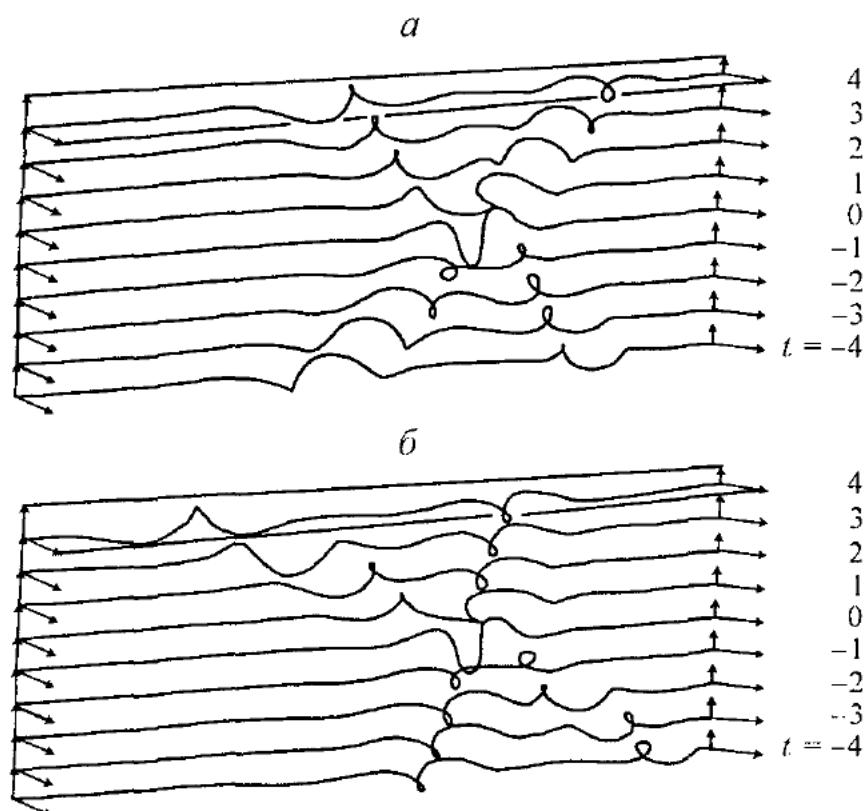


Рис. 5.21. Встречное взаимодействие двух вихревых солитонов с параметрами $\zeta_{1,2} = \pm 0,5 + 0,25i$. $\beta = 0$ (отсутствие аксиального протока) (a); $0,5$ (b)

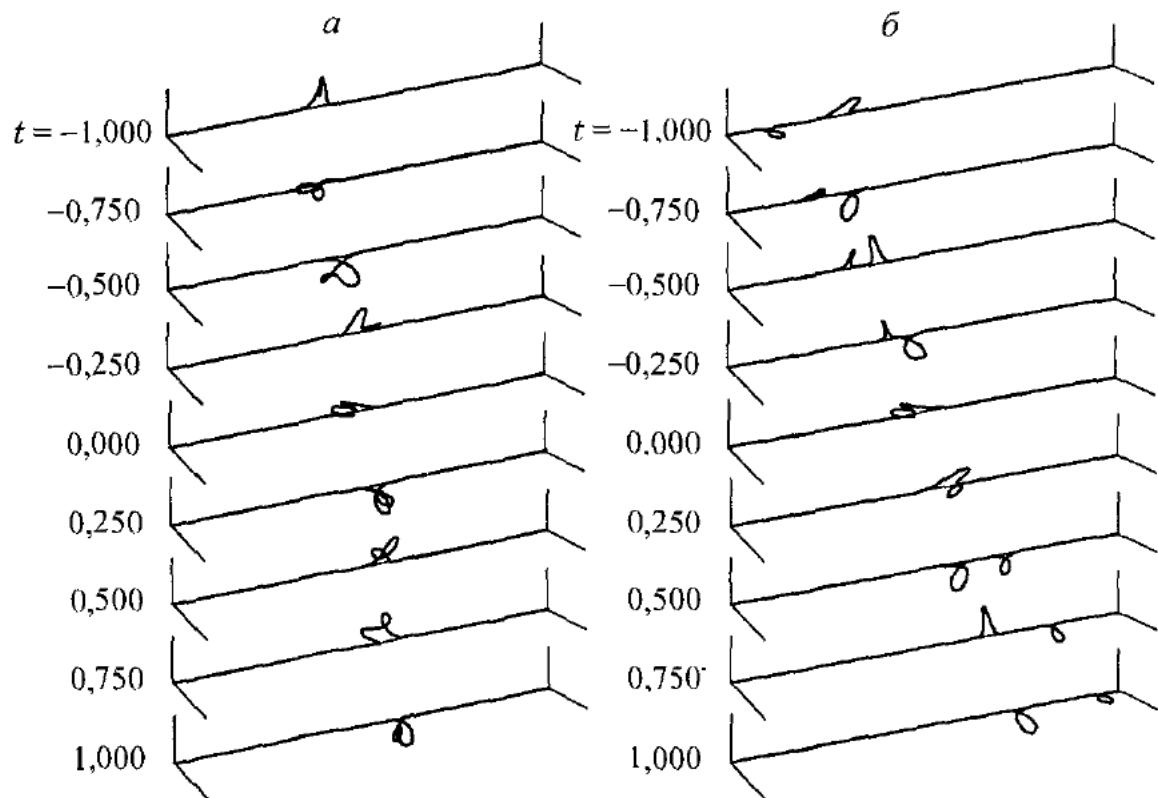


Рис. 5.22. Временная эволюция двух вихревых солитонов с параметрами $\zeta_1 = -0,5 + 2i \text{ [см}^{-1}\text{]}$ и $\zeta_2 = -0,5 + 3i \text{ [см}^{-1}\text{]}$. $w = 0$ (отсутствие аксиального протока) (а); 0,2 см (б)

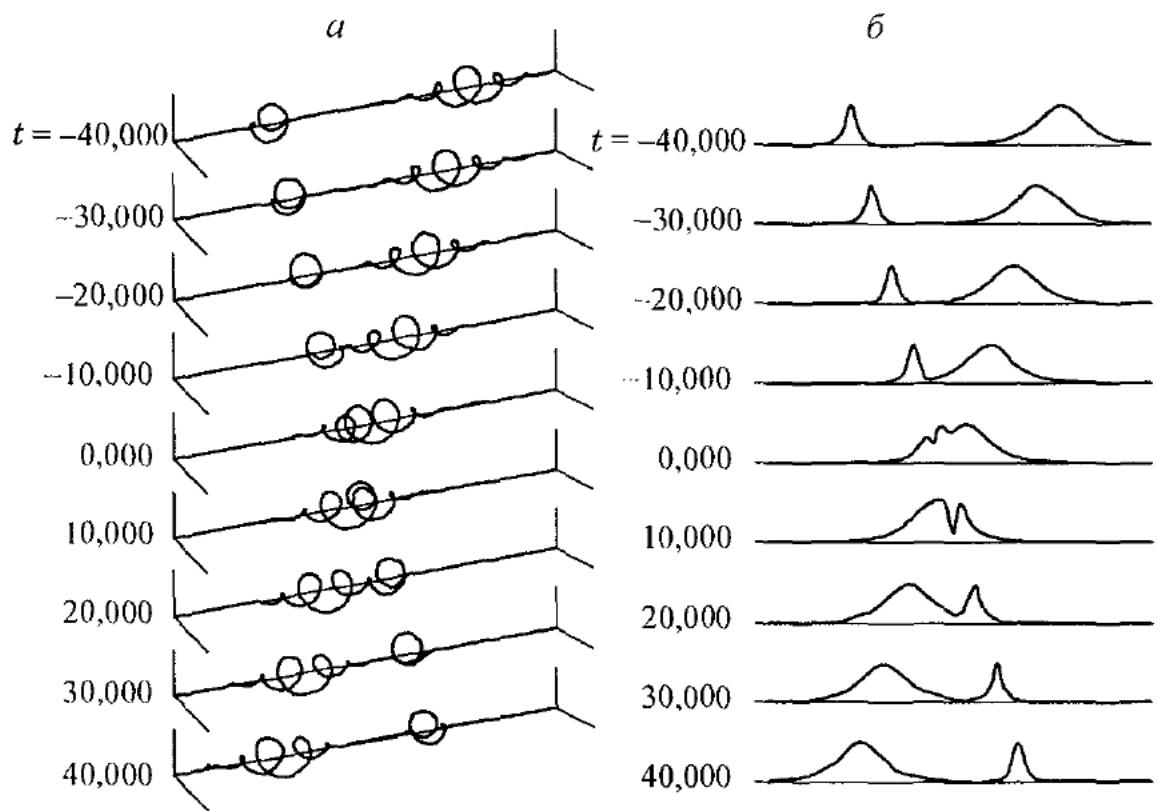


Рис. 5.23. Встречное взаимодействие двух вихревых солитонов с параметрами $\zeta_1 = -0,45 + 0,10i \text{ [см}^{-1}\text{]}$ и $\zeta_2 = -0,78 + 0,36i \text{ [см}^{-1}\text{]}$ на вихревой нити с $w = -0,53$ см: а – перспективный вид; б – проекция на плоскость

А на рис. 5.23 показано взаимодействие вихревых солитонов с параметрами, взятыми из эксперимента Maxworthy *et al.* [1985]. В целом наблюдается хорошее согласие между расчетом и опытом. Однако, как и у FM, фазовый сдвиг после взаимодействия солитонов существенно меньше, чем в эксперименте.

5.5.4. Комментарии

В предыдущем пункте в приближении LIE продемонстрировано влияние аксиального течения в ядре вихря на динамику вихревых солитонов. В данном разделе приведем уже без выводов некоторые важные результаты FM, касающиеся влияния аксиальной скорости на винтовые вихри и их устойчивость, а также обсудим нелокальные эффекты.

Винтовой вихрь. Одним из решений уравнения (5.117) является винтова вихревая нить, которая движется как тело без изменения формы в направлении оси z с трансляционной скоростью W_T и вращается вокруг z с угловой скоростью Ω

$$\mathbf{R} = \frac{\kappa}{\kappa^2 + \tau^2} \left(\cos \theta \mathbf{e}_x + \sin \theta \mathbf{e}_y \right) + Z \mathbf{e}_z.$$

Здесь

$$\theta = (\kappa^2 + \tau^2)^{1/2} \left\{ s - [\tau + \beta(\tau^2 - \frac{1}{2}\kappa^2)]t \right\} + \theta_0,$$

$$Z = \frac{\tau}{(\kappa^2 + \tau^2)^{1/2}} \left[s + \frac{\kappa^2}{\tau} \left(1 + \frac{3}{2}\beta\tau \right) t \right] + Z_0.$$

Выражения для W_T и Ω имеют вид

$$W_T = \frac{\kappa^2}{(\kappa^2 + \tau^2)^{1/2}} \left(1 + \frac{3}{2}\beta\tau \right),$$

$$\Omega = -(\kappa^2 + \tau^2)^{1/2} \left[\tau + \beta \left(\tau^2 - \frac{1}{2}\kappa^2 \right) \right].$$

В эксперименте измеряется обычно частота Ω_0 в фиксированной плоскости $Z = \text{const}$. С учетом этого условия, полагая $\theta = \Omega_0 t + \theta_0$, находим

$$\Omega_0 = -\frac{(\tau^2 + \kappa^2)^{3/2}}{\tau} (1 + \tau\beta).$$

Сравнивая с решениями (6.70) для винтовой нити без аксиального течения, видим, что опять эффект аксиальной скорости заключается только лишь в изменении значений трансляционной и угловой скоростей.

Линейная устойчивость винтовой вихревой нити. Для анализа устойчивости винтовой нити вначале, путем подстановки выражения для Ψ в (5.124), выводятся эволюционные уравнения в переменных кривизна k и кручение τ , которые являются параметрами винтовой нити. Затем, представляя возмущения k и τ в виде $\delta k \sim \cos(ks - \omega t)$, $\delta \tau \sim \sin(ks - \omega t)$, находится дисперсионное соотношение

$$\omega = 2k\tau_0 + \beta k(k^2 + 3\tau_0^2 - \frac{3}{2}\kappa_0^2) \pm |1 + 3\beta\tau_0| k(k^2 - \kappa_0^2)^{1/2}.$$

Здесь τ_0 и κ_0 – невозмущенные значения.

При $\beta = 0$ приходим к уравнению, ранее полученному Betchov [1965] для винта без аксиального протока. В упомянутой работе показано, что винт неустойчив к возмущениям с длиной волны более $2\pi/\kappa_0$. Из нового уравнения следует, что эффект аксиальной скорости на устойчивость винта таков. Если $\beta\tau_0 > 0$ или $\beta\tau_0 < -2/3$, то скорость роста неустойчивой моды возрастает. Если $-2/3 < \beta\tau_0 < 0$, то скорость роста падает. Наконец, при кручении $\tau_0 = -1/(3\beta)$ винтовая вихревая нить устойчива к любым малым возмущениям. Таким образом, аксиальное течение может оказывать сильное воздействие на устойчивость винтовой нити. Но эти выводы основаны на локальном подходе, который не описывает некоторые явления, в частности неустойчивость [Crow, 1970] при взаимодействии двух хвостовых вихрей.

Влияние всей нити на устойчивость винтовой вихревой нити. Для оценки вклада целокупного эффекта резюмируем здесь результаты FM по влиянию всей длины винтовой вихревой нити на ее устойчивость. Чтобы выполнить такие исследования, был привлечен метод усечения, как и в работе Widnall [1972], но расширенный до второго порядка точности по кривизне. Уже в работе Widnall [1972] было показано существование трех типов неустойчивости – *длинноволновой, коротковолновой и взаимно-индукционной*. В локальном приближении обнаруживается только длинноволновая неустойчивая мода. Поэтому естественно сравнение именно по этой моде. Расчеты проводились путем численного интегрирования закона Био – Савара с использованием модели Рэнкина, включающей постоянную аксиальную скорость W в ядре вихря. Естественным безразмерным параметром является отношение W/V , где V – максимальная тангенциальная скорость. Выводы следующие (для случая длинноволновой неустойчивости).

При достаточно низком значении отношения $|W/V|$ аксиальная скорость W стремится стабилизировать лево(право)винтовые вихри и дестабилизировать право(лево)винтовые, если заданная спиральность является положительной (отрицательной). При этом предсказания по локальной модели и модели усечения качественно совпадают. Расхождения увеличиваются с ростом $|W/V|$.

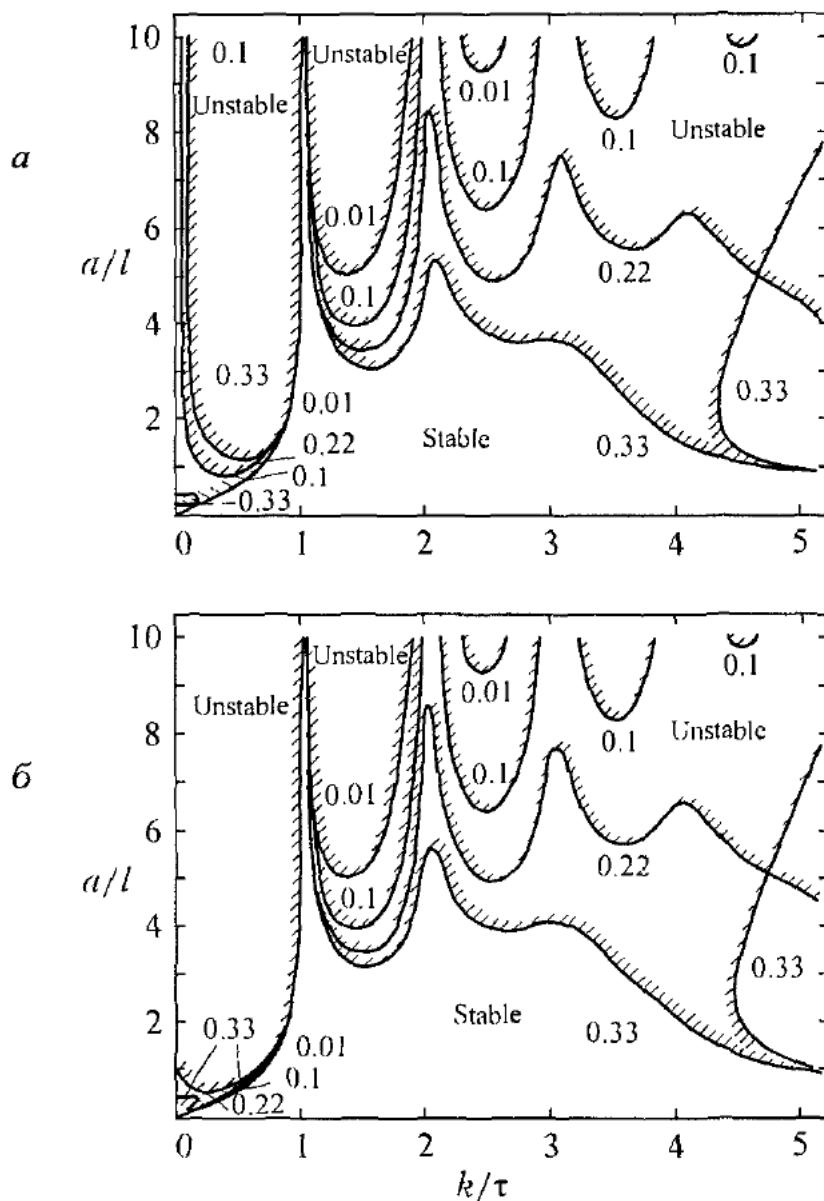


Рис. 5.24. Границы длинноволновой неустойчивости вихря Рэнкина с безразмерной аксиальной скоростью $W/V = -0,4$ (а) и $0,4$ (б). Цифры у кривых означают отношение ε/a

Выше некоторого значения $|W/V|$ скорость роста длинноволновой моды уменьшается как для право-, так и левовинтовых вихрей. При условии, что шаг винта не слишком мал, существуют полосы значений $|W/V|$, где длинноволновая мода запрещена. Границы окон устойчивости зависят от шага, радиуса ядра и кручения винтового вихря, как это показано на рис. 5.24. Здесь, кручение $\tau = l/(l^2 + a^2)$, $2\pi l$ – шаг винта, a – радиус винта, ε – радиус ядра вихря. Основное различие между двумя моделями состоит в том, что в модели усечения подавление длинноволновой моды достигается за счет эффекта первого порядка по кривизне, а в локальной модели – только при учете эффектов второго порядка.

Глава 6

ДИНАМИКА ДВУМЕРНЫХ ВИХРЕВЫХ СТРУКТУР

6.1. МЕТОД ДИСКРЕТНЫХ ВИХРЕВЫХ ЧАСТИЦ

При расчете вихревых течений используются различные методы. В последние годы все шире развиваются подходы, основанные на прямом численном решении уравнений Навье – Стокса. Как вариант таких подходов можно рассматривать и метод решения двумерных задач в переменных “функция тока – завихренность”. В случаях локализованной завихренности, особенно при больших числах Рейнольдса, когда влияние вязкости на динамику завихренности мало, с успехом используются *вихревые методы*, основанные на лагранжевом подходе к описанию движения жидкости.

Остановимся здесь на проблеме моделирования *плоских двумерных течений*. Отметим, что для расчета плоских течений с завихренностью, равномерно распределенной в ограниченных областях, применяется *метод контурной динамики* (см. обзор [Pullin, 1991]), имеющий более низкую размерность (рассчитывается лишь динамика границ областей, а не всех элементов, моделирующих распределение завихренности). В случае же произвольного распределения завихренности используются вихревые методы.

6.1.1. Уравнения движения вихревых частиц в безграничной жидкости

Наиболее просто система уравнений движения дискретных вихрей записывается в случае, когда носителями завихренности являются сингулярные объекты – бесконечно тонкие прямолинейные вихревые нити (или *точечные вихри*, если рассматривать лишь движение в плоскости). Поскольку точечный вихрь не имеет самоиндукционной скорости, то скорость его движения равна сумме скоростей, индуцированных другими вихрями. Если в некоторый момент времени вихри с интенсивностями Γ_α , $\alpha = 1, \dots, N$ имеют координаты $\mathbf{r}_\alpha = (x_\alpha, y_\alpha)$, то в соответствии с (2.25) имеем

$$\dot{x}_\alpha = -\frac{1}{2\pi} \sum_{\beta \neq \alpha} \Gamma_\beta \frac{y_\alpha - y_\beta}{|\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta|^2}, \quad \dot{y}_\alpha = \frac{1}{2\pi} \sum_{\beta \neq \alpha} \Gamma_\beta \frac{x_\alpha - x_\beta}{|\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta|^2}. \quad (6.1)$$

Экспоненты над символом означают произвольную по времени

Заметим, что при сближении точечных вихрей их скорости неограниченно растут, поэтому при практической реализации метода применяют те или иные способы регуляризации. В книге С.М. Белоцерковского и М.И. Ништа [1978] предлагается вводить некоторый радиус усечения δ . При сближении вихрей на расстояние менее δ на индуцированные скорости накладывается ограничение: скорость внутри окружности радиуса δ определяется линейной интерполяцией между значением скорости на окружности и нулевым значением скорости на оси вихря. В работе одного из основателей вихревых методов – Rosenhead [1930] – применялась простая алгебраическая регуляризация, заключающаяся в замене знаменателей в уравнениях (6.1) на величину $|\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta|^2 + \delta^2$. Более полный перечень приемов регуляризации можно найти в обзоре Leonard [1980]. Таким образом, фактически вместо точечных вихрей используются объекты конечных размеров – *вихревые частицы*.

Основные подходы к построению вихревых методов описаны в упомянутых обзорах. Опишем здесь метод построения моделей дискретных вихревых частиц, базирующийся на вариационном принципе [Веретенцев и др., 1986б]. Преимущества таких моделей заключаются в консервативности: на дискретную модель течения автоматически переносятся все законы сохранения, присущие континуальной модели течения.

В двумерном безграничном течении несжимаемой жидкости поле скорости, восстановленное по полю завихренности, имеет вид (см. (1.95))

$$\begin{cases} u(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{2\pi} \int \frac{y - y'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \omega(\mathbf{r}', t) dS(\mathbf{r}'), \\ v(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int \frac{x - x'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \omega(\mathbf{r}', t) dS(\mathbf{r}'). \end{cases} \quad (6.2)$$

Интегрирование производится по всей области течения.

Перейдем в (6.2) от эйлеровых переменных \mathbf{r} к лагранжевым $\zeta = (\xi, \eta)$, в качестве которых выберем начальное положение материальной точки: $\zeta = \mathbf{r}|_{t=0}$. В плоском течении завихренность и площадь жидкого элемента постоянна, т. е. $\omega(\zeta, t) = \omega(\zeta, 0) = \omega_0(\zeta)$; $dS = dS_0 = d\xi d\eta$. Имея в виду, что $u(\zeta, t) = \dot{x}(\zeta, t)$, $v(\zeta, t) = \dot{y}(\zeta, t)$, запишем уравнения движения материальной точки

$$\begin{cases} \dot{x}(\zeta, t) = -\frac{1}{2\pi} \int \frac{y(\zeta, t) - y(\zeta', t)}{|\mathbf{r}(\zeta, t) - \mathbf{r}(\zeta', t)|^2} \omega_0(\zeta') dS'_0, \\ \dot{y}(\zeta, t) = \frac{1}{2\pi} \int \frac{x(\zeta, t) - x(\zeta', t)}{|\mathbf{r}(\zeta, t) - \mathbf{r}(\zeta', t)|^2} \omega_0(\zeta') dS'_0. \end{cases} \quad (6.3)$$

Уравнениям движения (6.3) можно придать гамильтонову форму:

$$\begin{cases} \omega_0(\zeta) \cdot \dot{x}(\zeta, t) = \frac{\delta H[x, y]}{\delta y(\zeta, t)}, \\ \omega_0(\zeta) \cdot \dot{y}(\zeta, t) = -\frac{\delta H[x, y]}{\delta x(\zeta, t)}, \end{cases} \quad (6.4)$$

где вариационные производные берутся от функционала

$$H[x, y] = -\frac{1}{4\pi} \iint \ln \left\{ [x(\zeta, t) - x(\zeta', t)]^2 + [y(\zeta, t) - y(\zeta', t)]^2 \right\} \times \omega_0(\zeta) \omega_0(\zeta') dS_0 dS'_0. \quad (6.5)$$

Величина H , умноженная на плотность жидкости ρ_l , совпадает с кинетической энергией вихревого движения жидкости. Она определяется характером распределения завихренности и не зависит от времени [Бэтчелор, 1973]. Более того, гамильтониан (6.5) инвариантен относительно трансляций и вращений плоскости (x, y) . Эти свойства приводят к известным законам сохранения импульса и момента импульса (см. п. 1.6).

Как показано в работе А.Н. Веретенцева и др. [1986б], уравнения движения (6.4) можно вывести из вариационного принципа Гамильтона

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0, \quad \delta x(\zeta, t_1) = \delta x(\zeta, t_2) = 0, \quad 0 \leq t_1 < t_2 \leq t, \quad (6.6)$$

примененного к лагранжиану L , определенному следующим образом:

$$L = \int \dot{x}(\zeta, t) y(\zeta, t) \omega_0(\zeta) dS_0 - H[x, y]. \quad (6.7)$$

Для проверки найдем вариацию лагранжиана

$$\begin{aligned} \delta L &= \int [\delta \dot{x} y + \dot{x} \delta y] \omega_0 dS_0 - \delta H, \\ \delta H &= \int \left[\frac{\delta H}{\delta x} \delta x(\zeta, t) + \frac{\delta H}{\delta y} \delta y(\zeta, t) \right] dS_0. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Учитывая очевидное равенство

$$\int_{t_1}^{t_2} \int \delta \dot{x} y \omega_0 dS_0 dt = - \int_{t_1}^{t_2} \int \dot{y} \delta x \omega_0 dS_0 dt$$

и подставляя (6.8) в (6.6), получаем

$$\int_{t_1}^{t_2} \int \left\{ - \left[\omega_0(\zeta) \dot{y}(\zeta, t) + \frac{\delta H[x, y]}{\delta x(\zeta, t)} \right] \delta x(\zeta, t) + \left[\omega_0(\zeta) \dot{x}(\zeta, t) - \frac{\delta H[x, y]}{\delta y(\zeta, t)} \right] \delta y(\zeta, t) \right\} dS_0 dt = 0.$$

Вследствие произвольности вариаций $\delta x, \delta y$ отсюда следуют уравнения (6.4).

Сформулированный вариационный принцип позволяет строить консервативные дискретные вихревые методы расчета завихренных течений. При дискретизации область начального распределения завихренности разбивается на ячейки B_α ($\alpha = 1, \dots, N$), а ω аппроксимируется набором вихревых частиц

$$\omega_N = \sum_{\alpha=1}^N \frac{\Gamma_\alpha}{\sigma_\alpha^2} f\left(\frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha|}{\sigma_\alpha}\right) \quad (6.9)$$

с интенсивностями

$$\Gamma_\alpha = \int_{B_\alpha} \omega_0(\zeta) dS_0.$$

Центры частиц расположены в точках $\mathbf{r}_\alpha(t) = (x_\alpha(t), y_\alpha(t))$, совпадающих с центрами масс образов лагранжевых ячеек B_α в плоскости эйлеровых переменных. Характерные размеры σ_α зависят от площади соответствующих лагранжевых ячеек S_α , так что $\sigma_\alpha \rightarrow 0$ при $S_\alpha \rightarrow 0$. Функция f определяет форму распределения завихренности в частицах. Она нормирована на единицу, а функция $f(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha|/\sigma_\alpha)/\sigma_\alpha^2$ слабо сходится к δ -функции при $\sigma_\alpha \rightarrow 0$.

Подстановка ω_N в лагранжиан, переписанный в эйлеровых переменных, и применение вариационного принципа приводят к уравнениям Гамильтона для вихревых частиц

$$\Gamma_\alpha \dot{x}_\alpha = \frac{\partial H_N}{\partial y_\alpha}, \quad \Gamma_\alpha \dot{y}_\alpha = -\frac{\partial H_N}{\partial x_\alpha} \quad (6.10)$$

с гамильтонианом

$$H_N = -\frac{1}{4\pi} \sum_{\alpha, \beta=1}^N \frac{\Gamma_\alpha \Gamma_\beta}{\sigma_\alpha^2 \sigma_\beta^2} \iint \ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| f\left(\frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha(t)|}{\sigma_\alpha}\right) f\left(\frac{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_\beta(t)|}{\sigma_\beta}\right) dS dS'. \quad (6.11)$$

В некоторых случаях уравнения движения удобнее записывать в полярных координатах $r_\alpha = |\mathbf{r}_\alpha|$, $\varphi_\alpha = \arctg(y_\alpha/x_\alpha)$

$$\Gamma_\alpha \dot{r}_\alpha = \frac{\partial H_N}{r_\alpha \partial \varphi_\alpha}, \quad \Gamma_\alpha \dot{\varphi}_\alpha = -\frac{\partial H_N}{r_\alpha \partial r_\alpha} \quad (6.12)$$

или в комплексной форме ($\mathbf{z}_\alpha = x_\alpha + iy_\alpha$)

$$\Gamma_\alpha \dot{\bar{\mathbf{z}}}_\alpha = \frac{dH_N}{d\mathbf{z}_\alpha}. \quad (6.13)$$

Здесь черта над символом означает комплексное сопряжение.

В работе А.Н. Веретенцева и др. [1986б] показано, что зависимость членов суммы в гамильтониане H_N (6.10) от \mathbf{r}_α и \mathbf{r}_β определяется функцией от скалярной переменной $r_{\alpha\beta} = |\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta|$

$$H_N = -\frac{1}{4\pi} \sum_{\alpha\beta} \Gamma_\alpha \Gamma_\beta \int \frac{V_{\alpha\beta}(r_{\alpha\beta})}{r_{\alpha\beta}} dr_{\alpha\beta}, \quad (6.14)$$

$$V_{\alpha\beta}(r_{\alpha\beta}) = 2\pi \int_0^{r_{\alpha\beta}} F(r, \sigma_\alpha, \sigma_\beta) r dr, \quad (6.15)$$

$$F(|\mathbf{r}|, \sigma_\alpha, \sigma_\beta) = \frac{1}{\sigma_\alpha^2 \sigma_\beta^2} \int f\left(\frac{|\mathbf{r} + \mathbf{r}'|}{\sigma_\beta}\right) f\left(\frac{|\mathbf{r}'|}{\sigma_\alpha}\right) dS(\mathbf{r}'). \quad (6.16)$$

Уравнения движения (6.10) переписываются теперь через функцию $V_{\alpha\beta}$

$$\begin{cases} \dot{x}_\alpha = -\frac{1}{2\pi} \sum_\beta \Gamma_\beta \frac{y_\alpha - y_\beta}{|\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta|^2} V_{\alpha\beta}(|\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta|), \\ \dot{y}_\alpha = \frac{1}{2\pi} \sum_\beta \Gamma_\beta \frac{x_\alpha - x_\beta}{|\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta|^2} V_{\alpha\beta}(|\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta|). \end{cases} \quad (6.17)$$

Отметим важные свойства гамильтоновой системы уравнений движения вихревых частиц (6.10). Гамильтониан H_N не зависит явно от времени и инвариантен относительно трансляций и вращений плоскости (x, y). Отсюда следует, что энергия взаимодействия вихревых частиц $\rho_I H_N$, импульс системы $\mathbf{I}_N = (I_{Nx}, I_{Ny})$, где

$$I_{Nx} = \rho_I \sum_\alpha \Gamma_\alpha y_\alpha, \quad I_{Ny} = -\rho_I \sum_\alpha \Gamma_\alpha x_\alpha, \quad (6.18)$$

и момент импульса

$$M_N = -\frac{1}{2} \rho_l \sum_{\alpha} \Gamma_{\alpha} (x_{\alpha}^2 + y_{\alpha}^2) = -\frac{1}{2} \rho_l \sum_{\alpha} \Gamma_{\alpha} r_{\alpha}^2 \quad (6.19)$$

являются инвариантами и аппроксимируют соответствующие инварианты континуального распределения завихренности (см. п. 1.7.5). Для проверки рассмотрим скорость изменения величины I_{Nx}

$$\frac{d}{dt} \rho_l \sum_{\alpha} \Gamma_{\alpha} y_{\alpha} = \rho_l \sum_{\alpha} \Gamma_{\alpha} \dot{y}_{\alpha} = -\rho_l \sum_{\alpha} \frac{\partial H_N}{\partial x_{\alpha}}. \quad (6.20)$$

Представим гамильтониан в виде суммы

$$H_N = \sum_{\alpha\beta} H_{\alpha\beta}.$$

Ввиду записи (6.14) имеем $\partial H_{\alpha\beta}/\partial x_{\alpha} = -\partial H_{\beta\alpha}/\partial x_{\alpha}$. Учитывая, что самоиндукция скорости равна нулю, $\partial H_{\alpha\alpha}/\partial x_{\alpha} = 0$, убеждаемся, что сумма в (6.20) равна нулю. Аналогично проводится проверка для второй компоненты импульса. Закон сохранения момента импульса удобнее рассматривать в полярных координатах

$$\frac{dM_N}{dt} = -\frac{1}{2} \rho_e \sum_{\alpha} \Gamma_{\alpha} r_{\alpha} \dot{r}_{\alpha} = -\frac{1}{2} \rho_e \sum_{\alpha} \frac{\partial H_N}{\partial \phi_{\alpha}}.$$

Заметим, что $|\mathbf{r}_{\alpha} - \mathbf{r}_{\beta}|^2 = r_{\alpha}^2 + r_{\beta}^2 - 2r_{\alpha}r_{\beta} \cos(\phi_{\alpha} - \phi_{\beta})$. Учитывая свойства симметрии по индексам, находим, что последняя сумма равна нулю.

Из уравнений (6.17) при соответствующем выборе функции формы f и параметров σ_{α} можно получить практически все известные дискретные вихревые модели плоских течений. В частности, устремляя все σ_{α} к нулю, находим $V_{\alpha\beta} = 1$ и приходим к уравнениям движения системы точечных вихрей (6.1).

Если пренебречь размером наблюдаемой частицы, но сохранить размеры остальных частиц, получим обобщенную вихревую модель, в которой скорость частицы совпадает со скоростью, индуцированной всей системой в точке, где в данный момент времени находится центр частицы. Заметим, что в этом случае система уравнений (6.17) перестает быть гамильтоновой. Тем не менее такие модели широко распространены. Функция F , определенная уравнением (6.16), в этом случае пропорциональна функции формы

$$F(|r|, \sigma_{\beta}) = \frac{1}{\sigma_{\beta}^2} f(|r|/\sigma_{\beta}). \quad (6.21)$$

Чаще всего в расчетах используются простые функции формы (см. обзор Leonard [1980]). Функция

$$f(r) = \frac{1}{2\pi r} \theta(1-r)$$

соответствует модели, в которой индуцированная частицей β скорость становится нулевой, если расстояние от частицы α менее σ_β [Chorin, Bernard, 1973].

Упомянутая выше модель, используемая в работах Rosenhead [1930], вытекает из обобщенной вихревой модели при функции F (6.21) и функции формы

$$f(r) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{(1+r^2)^2}.$$

В модели, предложенной Kuwahara, Takami [1973], завихренность каждой частицы менялась со временем по закону диффузии изолированного вихря (см. п. 2.3.2), что соответствует функции F (6.14) с функцией формы

$$f(r) = \frac{1}{\pi} \exp(-r^2)$$

и с параметрами $\sigma_\beta = (2vt)^{1/2}$, где v – некоторая искусственная вязкость.

В работе А.Н. Веретенцева и др. [1986] также использована гауссова функция формы (6.22), но с постоянными размерами частиц. При этом функция $V_{\alpha\beta}$ принимает вид

$$V_{\alpha\beta}(r_{\alpha\beta}) = 1 - \exp\left(-\frac{r_{\alpha\beta}^2}{\sigma_\alpha^2 + \sigma_\beta^2}\right).$$

При выборе размеров вихревых частиц авторы приравнивают завихренность в центре частицы α завихренности в материальной точке, имеющей ту же лагранжеву координату ζ_α

$$\frac{\Gamma_\alpha}{\pi\sigma_\alpha^2} = \omega_0(\zeta_\alpha).$$

6.1.2. Уравнения движения вихревых частиц в ограниченных односвязных областях

Для применения метода дискретных вихрей к задачам обтекания тел и к задачам внутренних течений необходимо учитывать два обстоятельства: во-первых, уравнения движения должны удовлетворять условию непротекания на твердой границе; а во-вторых, в случае с отрывом, надо еще каким-либо образом моделировать генерацию завихренности. В более полной постановке

учитывается и условие прилипания на поверхности тел. При этом вблизи поверхности решаются уравнения пограничного слоя и производится срацивание с внешним невязким течением [Белоцерковский и др., 1988].

Удобным методом, позволяющим учесть условие непротекания на поверхности тела произвольной геометрии, является *метод присоединенных вихрей* [Белоцерковский, Ништ, 1978]. Поскольку поверхность тела, обтекаемого невязкой жидкостью, является линией тангенциального разрыва скорости, то ее заменяют присоединенной вихревой пеленой, которую, в свою очередь, моделируют набором точечных вихрей. Само же условие непротекания ставится лишь в конечном числе контрольных точек, расположенных между вихрями. Вопрос о способе размещения присоединенных вихрей и контрольных точек и о выборе их числа наиболее полно изучен в работах Д.Н. Горелова [1980, 1990]. В отличие от обычно применяемого равномерного размещения (см. С.М. Белоцерковский, М.И. Ништ [1978]), здесь предлагается находить положение контрольных точек из условия равенства в них скорости, индуцированной присоединенными вихрями, и скорости, индуцированной непрерывным вихревым слоем, что позволяет существенно повысить точность определения циркуляций сходящих вихрей или увеличивать шаг интегрирования по времени. Общая точность расчетов зависит и от числа присоединенных вихрей. Его увеличение ограничено возможностями ЭВМ – приходится решать системы линейных уравнений с большим числом неизвестных. По этой причине возникает сложность в применении метода присоединенных вихрей в задачах о движении завихренных областей вблизи протяженных границ (около плоскости, в канале и т. п.).

В то же время широкий класс задач позволяет применить методы теории функций комплексного переменного: отобразить область течения на более простую, например, на верхнюю половину комплексной плоскости, и ввести зеркально отраженную вихревую систему. Такой подход использовался в задачах о втекании жидкости в канал [Сабельников, Смирных, 1985], об обтекании препятствия [Власов и др., 1982; Evans, Bloor, 1977], об истечении струи [Shimizu, 1986] и др.

Генерацию завихренности в задачах обтекания тел с отрывом на острой кромке учесть легко: в соответствии с теоремой Кельвина (см. пп. 1.1, 1.2.2) циркуляция скорости по контуру, охватывающему тело и сходящие с него вихревые следы, не меняется со временем. Это условие дает уравнение для определения завихренности, сходящей с тела в поток. Именно такой подход используется в работах С.М. Белоцерковского, М.И. Ништа [1978], К.П. Ильичева, С.Н. Постоловского [1972], В.Ф. Молчанова [1975]. Другие соображения приходится применять в случае, если задача содержит бесконечные или полубесконечные элементы: пластина, канал и т. п. В таких задачах обычно удается записать условие Жуковского – Кутта в явном аналитическом виде

[Сабельников, Смирных, 1985; Веретецев и др., 1989; Evans, Bloor, 1977], которое и позволяет определить порождающую завихренность.

Остановимся далее на выводе уравнений движения вихревых частиц для моделирования *плоских течений в односвязных областях* с возможностью отрыва на острых кромках. Следуя работе П.А. Куйбина [1993], рассмотрим плоское течение несжимаемой невязкой жидкости в области D , граница которой ∂D имеет точку излома. Локально граница вблизи точки излома представляется в виде клина с углом раствора β . Введем в D декартовы координаты z_1, z_2 , выбрав начало координат на кромке клина, и соответствующую комплексную переменную $z = z_1 + iz_2$ (i – мнимая единица). Пусть известно конформное отображение $\zeta(z)$ области D на полуплоскость $\zeta = \zeta_1 + i\zeta_2$ ($\zeta_2 > 0$). Граница ∂D переходит при этом в линию $\zeta_2 = 0$. Без потери общности предположим, что $\zeta(0) = 0$. Отрыв течения будем моделировать сходом бесконечно тонкого вихревого слоя (вихревой пелены) с острой кромки. Представим поле завихренности ω в виде суммы внешней завихренности ω_e (external), присутствующей в общем случае в потоке в начальный момент времени, и завихренности, генерируемой в результате отрыва ω_s (separated). Зная поле завихренности и функцию Грина оператора Лапласа для полуплоскости [Владимиров, 1976], известным образом находим функцию тока

$$\psi(z, t) = \int_D K(z, z') \omega(z', t) dS' + \psi_p(z, t), \quad (6.22)$$

где $\omega = \omega_e + \omega_s$; $dS' = dz'_1 dz'_2$; ψ_p – функция тока потенциального (безотрывного) течения;

$$K(z, z') = -\frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{\zeta(z) - \zeta(z')}{\zeta(z) - \bar{\zeta}(z')} \right|.$$

Вычислим поле скорости по функции тока

$$u_1 = \frac{\partial \psi}{\partial z_2}, \quad u_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial z_1},$$

или в компактной форме

$$u_j = \sum_{k=1}^2 a_{jk} \frac{\partial \psi}{\partial z_k}, \quad (6.23)$$

a_{jk} – антисимметричная матрица: $a_{11} = a_{22} = 0$; $a_{12} = -a_{21} = 1$. Подставляя функцию тока (6.22) в (6.23), получаем

$$u_j = \int_D M_j(z, z') \omega(z', t) dS' + u_{jp}, \quad (6.24)$$

$$M_j = \sum_{k=1}^2 a_{jk} \frac{\partial K(z, z')}{\partial z_k}, \quad j = 1, 2, \quad (6.25)$$

u_{1p} , u_{2p} – компоненты скорости потенциального течения.

В идеальной несжимаемой жидкости завихренность жидкой частицы сохраняется, т. е., если считать начальное распределение ω_e по жидким частицам заданным, задача изучения динамики завихренности сводится к сложению за перемещением частиц. Величина же ω_s меняется со временем и зависит от текущего распределения завихренности в области течения. Заметим, что при отрыве жидкая частица, миновав кромку клина и получив порцию завихренности, далее ведет себя точно так же, как и частица из внешнего поля ω_e , т. е. ее завихренность не меняется. Для определения завихренности, получаемой частицей при сходе с кромки, воспользуемся, как и в работах В.А. Сабельникова и Е.А. Смирных [1985], Е.В. Власова и др. [1982], Evans, Bloor [1977], гипотезой о конечности скорости на острой кромке (гипотеза Жуковского – Кутта). Следует отметить, что в случае клина с углом раствора $\beta > 0$ необходимо дополнительно указать направление схода вихревого следа. Обычно полагается, что след сходит по касательной к клину с наветренной стороны [Pullin, 1978].

Выведем математическую запись условия конечности скорости на кромке. Перейдем для этого в выражении (6.23) к переменным ζ_1 , ζ_2

$$u_j = \sum_{k=1}^2 a_{jk} \left(\frac{\partial \zeta_1}{\partial z_k} \frac{\partial \psi}{\partial \zeta_1} + \frac{\partial \zeta_2}{\partial z_k} \frac{\partial \psi}{\partial \zeta_2} \right), \quad j = 1, 2.$$

Так как определитель матрицы Якоби $J = |dz/d\zeta|^2$ на кромке обращается в бесконечность, то условие $|u_j| < \infty$ требует, чтобы

$$\frac{\partial \psi}{\partial \zeta_1}(0) = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \zeta_2}(0) = 0.$$

Первое из этих уравнений удовлетворяется в силу условия непротекания. Второе, с учетом (6.21), приводит к уравнению для определения генерируемой завихренности

$$\frac{1}{\pi} \int_D \frac{\zeta_2(z)}{|\zeta(z)|^2} \omega(z, t) dS + \frac{\partial \psi_p}{\partial \zeta_2}(0) = 0. \quad (6.26)$$

При переходе к лагранжеву способу описания движения для частицы жидкости, принадлежащей отрывному слою, в качестве лагранжевой переменной выберем момент схода с кромки τ . Завихренность, генерируемую при отрыве, запишем в виде интеграла

$$\omega_s(z, t) = \int_0^t \delta(z - z^0(\tau, t)) \gamma(\tau) d\tau, \quad (6.27)$$

где $z^0(\tau, t)$ указывает положение в момент времени t элементарного отрезка вихревой пелены, сошедшего с кромки в момент времени τ ; $\gamma(\tau)$ – интенсивность вихревой пелены в точке $z^0(\tau, t)$, соответствующая сдвигу скорости; δ – дельта-функция Дирака.

Вследствие несжимаемости жидкости $dS = dS^0 = da db$. Тогда, с учетом определения ω_s , из (6.24) выводим скорость точек, ассоциированных с полем ω_e ,

$$\begin{aligned} u_j &= \int_D M_j(z(a, b, t), z(a', b', t)) \omega(a', b', t) dS'^0 + \\ &+ \int_{D0}^t \int M_j(z(a, b, t), z') \delta(z' - z^0(\tau, t)) \gamma(\tau) dS' d\tau + u_{jp}. \end{aligned}$$

Скорость материальных точек, связанных с вихревой пеленой, очевидно, описывается аналогичным выражением. Поменяем во втором слагаемом порядок интегрирования и проинтегрируем по штрихованным переменным. Введем далее с целью сокращения записей обозначения: $\mathbf{c}_1 = a + ib$, $c_2 = \tau$ – лагранжевые переменные; $B_1 = D$, $B_2 = [0, t]$ – соответствующие области их изменения; $\omega_1(c_1, t) = \omega_e(a, b, t)$, $\omega_2(c_2, t) = \gamma(\tau)$; $dS_1^0 = dS^0$, $dS_2^0 = d\tau$. Тогда скорость в лагранжевых переменных запишется так:

$$\begin{aligned} u_j(z(c_\alpha, t), t) &= \sum_{\beta=1}^2 \int_{B_\beta} M_j(z(c_\alpha, t), z(c_\beta, t)) \omega_\beta(c_\beta, t) dS_\beta^0 + u_{jp}(z(c_\alpha, t), t), \\ \alpha &= 1, 2, \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (6.28)$$

Отсюда получаем аналог уравнений (6.3) для определения закона движения жидкости

$$\begin{aligned} \dot{z}_j(c_\alpha, t) &= \sum_{\beta=1}^2 \int_{B_\beta} M_j(z(c_\alpha, t), z(c_\beta, t)) \omega_\beta(c_\beta, t) dS_\beta^0 + u_{jp}(z(c_\alpha, t), t) \\ \alpha &= 1, 2, \quad j = 1, 2, \end{aligned} \quad (6.29)$$

которое вместе с условием конечности скоростей (6.26), записанным в лагранжевых переменных

$$\frac{1}{\pi} \sum_{\beta=1}^2 \int_{B_\beta} \frac{\zeta_2(\mathbf{z}(c_\beta, t))}{\left| \zeta(\mathbf{z}(c_\beta, t)) \right|^2} \omega_\beta^0(c_\beta) dS_\beta^0 + \frac{\partial \psi_p}{\partial \zeta_2}(0) = 0, \quad (6.30)$$

образуют замкнутую систему уравнений. Как и в случае с безграничной жидкостью, уравнения (6.30) удается записать в гамильтоновой форме

$$\begin{cases} \omega_\alpha^0(c_\alpha) \dot{z}_1(c_\alpha, t) = \frac{\delta H[z_1, z_2]}{\delta z_2(c_\alpha, t)}, \\ \omega_\alpha^0(c_\alpha) \dot{z}_2(c_\alpha, t) = -\frac{\delta H[z_1, z_2]}{\delta z_1(c_\alpha, t)}, \quad \alpha = 1, 2, \end{cases} \quad (6.31)$$

$$H[z_1, z_2] = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\beta=1}^2 \iint_{B_\alpha B_\beta} K(\mathbf{z}(c_\alpha, t), \mathbf{z}(c_\beta, t)) \omega_\alpha^0(c_\alpha) \omega_\beta^0(c_\beta) dS_\alpha^0 dS_\beta^0 + \\ + \sum_{\alpha=1}^2 \int_{B_\alpha} \psi_p(\mathbf{z}(c_\alpha, t), t) \omega_\alpha^0(c_\alpha) dS_\alpha^0.$$

Уравнения (6.31) можно вывести из вариационного принципа (6.6), примененного к лагранжиану

$$L = \sum_{\alpha=1}^2 \int_{B_\alpha} \dot{z}_1(c_\alpha, t) z_2(c_\alpha, t) \omega_\alpha^0(c_\alpha) dS_\alpha^0 - H[z_1, z_2].$$

В случае, когда функция тока внешнего потенциального течения не меняется со временем ($\partial \psi_p / \partial t = 0$), а само течение – безотрывное, гамильтониан H не зависит явно от времени, т. е. выполняется закон сохранения энергии вихревого движения $\rho_l H$ [Бэтчелор, 1973]. Если область течения обладает еще какой-либо симметрией относительно трансляций (например, полуэлоскость, полоса) или вращения (круг), то и гамильтониан будет инвариантен относительно них. Тогда для трансляционной симметрии (например, вдоль оси Oz_1) будет справедлив закон сохранения соответствующей компоненты импульса

$$I_1 = \frac{1}{2} \rho_l \int z_2 \omega dS,$$

а для вращательной симметрии – закон сохранения момента импульса [Бэтчелор, 1973]

$$M = \frac{1}{3} \rho_I \int |\mathbf{z}|^2 \omega dS.$$

Переход к дискретной модели осуществим, как и в п. 6.1.1, дискретизацией поля завихренности. В отличие от поля ω_e , для дискретизации которого годятся подходы, описанные выше (см. аппроксимацию (6.9))

$$\omega_{eN}^0 = \sum_{k=1}^{N_e} \frac{\Gamma_{ek}}{\sigma_k^2} f\left(\frac{|\mathbf{z} - \mathbf{z}_k|}{\sigma_k}\right),$$

поле завихренности ω_s , генерируемой в результате отрыва, аппроксимируем путем разбиения области изменения лагранжевой переменной τ – оси времени – на интервалы метками $t_0 = 0, t_1, t_2, \dots$. Для представления этой доли завихренности получаем функцию

$$\omega_s(\mathbf{z}, t) = \sum_{k=1}^N \int_{t_{k-1}}^{t_k} \delta(\mathbf{z} - \mathbf{z}^0(\tau, t)) \theta(t - \tau) \gamma(\tau) d\tau,$$

где θ – функция Хевисайда.

Считая шаг по времени достаточно малым, аппроксимируем $\omega_s(z, t)$ следующим образом:

$$\omega_{sK} = \sum_{k=1}^{K(t)} \Gamma_{sk} f_k(\mathbf{z} - \mathbf{z}_{sk}(t), \sigma_{sk}), \quad \Gamma_{sk} = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \gamma(\tau) d\tau,$$

число разбиений $K(t) = \sum_k \theta(t - \tau_k)$; Γ_{sk} – суммарная интенсивность участка

вихревого слоя с центром в точке $\mathbf{z}_{sk}(t)$, сошедшего с кромки за время $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$. Функция f_k аппроксимирует здесь распределение завихренности этого участка слоя. Она должна слабо сходиться к δ -функции при $\sigma_{sk} \rightarrow 0$. Параметр σ_{sk} зависит от Δt_k так, что $\sigma_{sk} \rightarrow 0$ при $\Delta t_k \rightarrow 0$.

Теперь видно, что на дискретном уровне поля ω_e и ω_s описываются одинаковыми выражениями. Далее индексы “*e*” и “*s*” будут опущены. Таким образом, по структуре уравнения движения вихревых частиц будут такими же, как и в безграничной жидкости (6.10). Гамильтониан дискретной системы для гауссовой функции формы (6.22) имеет вид [Веретенцев и др., 1989]

$$H_N = \sum_{k=1}^{N(t)} \Gamma_k \Psi_p(z_k, t) - \\ - \frac{1}{8\pi} \sum_{k,n=1}^{N(t)} \Gamma_k \Gamma_n \left[\ln \left| \frac{\zeta_k - \zeta_n}{\zeta_k - \bar{\zeta}_n} \right|^2 - \text{Ei} \left(- \frac{|\zeta_k - \zeta_n|^2}{D_k^2 + D_n^2} \right) + \text{Ei} \left(- \frac{|\zeta_k - \bar{\zeta}_n|^2}{D_k^2 + D_n^2} \right) \right], \quad (6.32)$$

$\zeta_k = \zeta(z_k)$, $N(t) = N + K(t)$. Параметры D_k^2 – размеры вихревых частиц во вспомогательной плоскости – определяются выражением

$$D_k^2 = \frac{\sigma_k^2}{J_k} \left[1 - \exp \left(- \frac{|z_k|^{2-\alpha} \sigma^\alpha}{\sigma_k^2} \right) \right], \quad \alpha = \frac{2\pi}{2\pi - \beta},$$

где β – угол раствора кромки клина; σ – параметр регуляризации решения, вблизи кромки – пропорционален Δt . Для определенности полагалось, что на каждом шаге по времени $\sigma = \sigma_N$. $J_k = J(z_k)$, где J – якобиан конформного преобразования $J(z) = |dz/d\zeta|^2$. В отсутствие острых кромок полагаем $D_k^2 = \sigma_k^2/J_k$.

С учетом явного вида гамильтониана уравнения движения вихревых частиц принимают вид

$$\dot{\bar{z}}_k = \frac{1}{2\pi i z'_k} \sum_{n=1}^{N(t)} \Gamma_n \left\{ \frac{1}{\zeta_k - \zeta_n} \left[1 - \exp \left(- \frac{|\zeta_k - \zeta_n|^2}{D_k^2 + D_n^2} \right) \right] - \right. \\ \left. - \frac{1}{\zeta_k - \bar{\zeta}_n} \left[1 - \exp \left(- \frac{|\zeta_k - \bar{\zeta}_n|^2}{D_k^2 + D_n^2} \right) \right] - \right. \\ \left. - \left[\exp \left(- \frac{|\zeta_k - \zeta_n|^2}{D_k^2 + D_n^2} \right) - \exp \left(- \frac{|\zeta_k - \bar{\zeta}_n|^2}{D_k^2 + D_n^2} \right) \right] \frac{D_k^4 z''_k z'_k}{\sigma_k^2 (D_k^2 + D_n^2)} \right\} + \bar{u}_p(z_k, t), \\ k = 1, 2, \dots, N(t), \quad z'_k = \frac{dz}{d\zeta}(\zeta_k), \quad z''_k = \frac{d^2 z}{d\zeta^2}(\zeta_k). \quad (6.33)$$

Проанализируем уравнение (6.33). Первое слагаемое в фигурных скобках соответствует взаимодействию вихревых частиц друг с другом. Второе слагаемое описывает взаимодействие частиц с границей течения. Последнее слагаемое в скобках связано с изменением размеров образов вихревых частиц во вспомогательной ζ -плоскости.

Наконец, условие конечности скорости на кромке, записанное в дискретной форме, дает уравнение для определения интенсивности очередной вихревой частицы, зарождающейся на кромке

$$\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{N(t)} \Gamma_k \frac{\operatorname{Im} \zeta_k}{|\zeta_k|^2} \left[1 - \exp \left(-\frac{|\zeta_k|^2}{D_k^2} \right) \right] + \frac{\partial \psi_p}{\partial \zeta_2}(0) = 0. \quad (6.34)$$

Уравнения (6.33), (6.34) позволяют рассчитывать динамику плоских за-вихренных течений в односвязных областях с твердыми границами с учетом генерации завихренности при отрывном обтекании острых кромок. Кроме того, в силу гамильтоновости уравнений движения вихревых частиц (см. (6.10)) в случае, когда $\partial u_p / \partial t = 0$, в дискретной модели выполняется закон сохранения энергии $\rho H = \text{const}$. Если движение происходит вблизи плоской бесконечной стенки или в бесконечном канале, то из гамильтоновости системы следует закон сохранения проекции импульса на линию границы

$$I_{1N} = \frac{1}{2} \rho \sum_{k=1}^{N(t)} \Gamma_k \operatorname{Im}(\mathbf{z}_k) = \text{const},$$

а для течения в круге – закон сохранения момента импульса

$$M_N = \frac{1}{3} \rho \sum_{k=1}^{N(t)} \Gamma_k \left[|\mathbf{z}_k|^2 + \sigma_k^2 \right] = \text{const}.$$

6.1.3. Уравнения движения системы соосных вихревых колец

В отличие от плоских задач, моделирование двумерных течений другого класса – осесимметричных течений – с помощью вихревых методов наталкивается на дополнительную трудность, связанную с тем, что бесконечно тонкое вихревое кольцо имеет бесконечную скорость самоиндукции движения. Чтобы обойти эту проблему, используют различные приемы: исключают самоиндукционную скорость из рассмотрения и учитывают лишь наведенную системой окружающих вихрей [Брутян, Крапивский, 1984]; берут вместо одного два кольцевых вихря и приписывают им скорость, найденную в точке посередине между вихрями [Белоцерковский, Ништ, 1978]; вместо вихревых нитей берут вихревые трубы, радиус сечения которых определяет меру дискретности; внутри этих трубок скорость изменяется по линейному закону [Белоцерковский, Гиневский, 1995]. Рассмотрим подход к построению вихревых методов, предложенный в работе А.Н. Веретеницева и др. [1986а], где движение системы элементарных кольцевых вихрей конечного сечения описывается уравнениями Гамильтона.

Действуя в рамках изложенной выше методологии, перепишем закон осесимметричного движения завихренной жидкости без закрутки (1.97) в лагранжевых переменных $\xi = (\sigma, z_0)$, в качестве которых возьмем начальные координаты материальной точки $(\sigma(\xi, 0), z(\xi, 0))$ (каждому элементарному вихревому кольцу соответствует точка в плоскости $\phi = 0$):

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}(\xi, t) &= \frac{-1}{2\pi\sigma(\xi, t)} \int \frac{df}{dk'} \frac{\partial k'}{\partial z} \left(\sigma(\xi, t) \sigma(\xi', t) \right)^{1/2} \omega_0(\xi') dS'_0, \\ \dot{z}(\xi, t) &= \frac{1}{2\pi\sigma(\xi, t)} \int \left(\frac{f}{2\sigma(\xi, t)} + \frac{df}{dk'} \frac{\partial k'}{\partial \sigma} \right) \left(\sigma(\xi, t) \sigma(\xi', t) \right)^{1/2} \omega_0(\xi') dS'_0.\end{aligned}\quad (6.35)$$

При выводе уравнений (6.35) учтены законы сохранения завихренности [Бэтчелор, 1973] $\omega(\zeta, t)/\sigma(\zeta, t) = \omega(\zeta, 0)/\sigma(\zeta, 0) = \omega_0(\zeta)/\sigma_0$ и объема $\sigma d\sigma dz = \sigma_0 d\sigma_0 dz_0 = \sigma_0 dS_0$. Как и в плоской задаче, уравнения движения удается записать в гамильтоновой форме

$$\omega_0(\xi) \cdot \dot{z}(\xi, t) = \frac{\delta H[\sigma, z]}{\delta \sigma^2(\xi, t)}, \quad \omega_0(\xi) \cdot [\sigma^2(\xi, t)] = -\frac{\delta H[x, y]}{\delta z(\xi, t)} \quad (6.36)$$

с гамильтонианом

$$H[\sigma, z] = \frac{1}{2\pi} \iint f(k) \left(\sigma(\xi', t) \sigma(\xi'', t) \right)^{1/2} \omega_0(\xi') \omega_0(\xi'') dS'_0 dS''_0. \quad (6.37)$$

Вариационный принцип, из которого следуют уравнения (6.36), аналогичен принципу (6.6) с лагранжианом

$$L = \int \dot{z}(\xi, t) \sigma^2(\xi, t) \omega_0(\xi) dS_0 - H[\sigma, z].$$

Гамильтониан (6.37) не зависит явно от времени и инвариантен относительно сдвига по оси z . Это приводит к известным законам сохранения энергии ρH и импульса (см. п. 1.7.5)

$$I = \pi \rho \int \sigma^2(\xi, t) \omega_0(\xi) dS_0 = \pi \rho \int \sigma^2 \omega(r, t) dS.$$

Здесь введен радиус-вектор r в плоскости переменных (σ, z) .

Разбивая область завихренной жидкости на ячейки B_α ($\alpha = 1, \dots, N$) и помещая в них частицы (тонкие вихревые кольца), перейдем к дискретному распределению завихренности ω_N , аппроксимирующему исходное ω ,

$$\omega_N(r, t) = \sum_{\alpha=1}^N \Gamma_\alpha \chi(r, r_\alpha(t), \varepsilon_\alpha(t)).$$

χ – некоторая функция распределения завихренности в вихревой частице с центром $\mathbf{r}_\alpha = (\sigma_\alpha, z_\alpha)$, совпадающим с центром соответствующей лагранжевой ячейки. Интенсивности вихревых частиц

$$\Gamma_\alpha = \int_{B_\alpha} \omega_0(\xi) dS_0$$

не меняются со временем. В то же время в отличие от плоской задачи характерный размер частицы $\varepsilon_\alpha(t)$ зависит от времени. Естественно полагать, что ε_α^2 пропорционален площади лагранжевой ячейки, которая, в свою очередь, меняется таким образом, что объем занимаемой ею тороидальной области сохраняется.

Вычисляя теперь лагранжиан дискретной модели

$$L_N = \sum_{\alpha=1}^N p_\alpha \dot{z}_\alpha - H_N$$

$(p_\alpha = \Gamma_\alpha (\sigma_\alpha^2 + \varepsilon_\alpha^2))$ и применяя к нему вариационный принцип (6.6), получим уравнения Гамильтона, описывающие движение системы кольцевых вихрей

$$\dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H_N}{\partial z_\alpha}, \quad \dot{z}_\alpha = \frac{\partial H_N}{\partial p_\alpha}. \quad (6.38)$$

Конкретный вид уравнений движения зависит от выбора функции χ . Эта функция должна слабо сходиться к δ -функции и должна быть нормирована на единицу. Таким условиям удовлетворяет, в частности, функция

$$\chi = \frac{2\sigma}{\pi^{1/2} \varepsilon_\alpha^3} \exp \left[-\frac{\sigma^2 + \sigma_\alpha^2 + (z - z_\alpha)^2}{\varepsilon_\alpha^2} \right] I_0 \left(\frac{2\sigma\sigma_\alpha}{\varepsilon_\alpha^2} \right), \quad (6.39)$$

которую можно рассматривать как аналог гауссова распределения завихренности в плоской задаче. Параметры ε_α пропорциональны эффективным диаметрам соответствующих ячеек: $\varepsilon_\alpha = \mu_\alpha (S_\alpha^0 \sigma_\alpha^0 / \sigma_\alpha)^{1/2}$. Коэффициенты μ_α определим из условия наилучшей аппроксимации поля завихренности в начальный момент времени.

В результате вычисления интегралов [Веретенцев и др., 1986а] с помощью метода Лапласа для функции распределения (6.39) выведен гамильтониан дискретной модели

$$H_N = \frac{1}{4\pi} \sum_{\alpha=1}^N \Gamma_\alpha^2 \varphi_\alpha^2(\sigma_\alpha) \left(\ln \frac{32\sigma_\alpha^2}{\varepsilon_\alpha^2} - 4 + E \right) + \\ + \frac{1}{2\pi} \sum_{\alpha,\beta=1}^{N'} \Gamma_\alpha \Gamma_\beta \varphi_\alpha(\sigma_\alpha) \varphi_\beta(\sigma_\beta) \left[f(k_{\alpha\beta}) + \frac{1}{2} \text{Ei} \left(-\frac{r_{\alpha\beta}^2}{\varepsilon_\alpha^2 + \varepsilon_\beta^2} \right) \right]. \quad (6.40)$$

Здесь $\varphi_\alpha(\sigma) = 2\sigma^{3/2} \pi^{1/2} \varepsilon_\alpha^{-1} \exp[-2\sigma\sigma_\alpha\varepsilon_\alpha^{-2}] I_0(2\sigma\sigma_\alpha\varepsilon_\alpha^{-2})$; $E = 0,5772\dots$ – постоянная Эйлера; штрих в знаке суммы означает, что члены при $\alpha = \beta$ опущены; Ei – интегральная показательная функция.

Гамильтониан дискретной модели не зависит явно от времени и инвариантен относительно сдвига по оси z , поэтому и для дискретной модели имеют место законы сохранения энергии и импульса.

Если для дискретных вихревых колец выполняются условия $\varepsilon_\alpha^2 \ll \sigma_\alpha^2$ (вихревые кольца в этом случае будем называть тонкими), выражение (6.40) для гамильтониана существенно упрощается, так как тогда $\varphi_\alpha(\sigma_\alpha) \approx \sigma_\alpha^{1/2}$.

В частном случае, когда такие вихревые кольца находятся на достаточно большом расстоянии друг от друга, вкладом функции Ei в энергию взаимодействия вихрей можно пренебречь, в результате получаем модель тонких вихревых колец с исключенным ядром [Acton, 1980; Брутян, Крапивский, 1984]. Необходимо отметить, что предлагаемая модель обладает определенными преимуществами по сравнению с другими известными вихревыми моделями. Во-первых, при увеличении числа частиц улучшается аппроксимация, по крайней мере, интегральных характеристик течения, в частности – моментов поля завихренности. Во-вторых, все параметры дискретной модели при заданном числе вихревых частиц однозначно определяются по начальным данным конкретной гидродинамической задачи. В-третьих, скорости вихревых колец и энергия их взаимодействия и самовоздействия остаются конечными во всех случаях, в том числе и при их сближении, вследствие чего модель позволяет исследовать течения, в которых происходит концентрация завихренности, например образование вихревого кольца, развитие неустойчивости Кельвина – Гельмгольца в сдвиговом слое и т.д.

При построении описанной модели предполагалось, что область течения безгранична. Тем не менее модель может быть использована и при решении граничных задач. При этом необходимо, во-первых, ввести систему вихрей, обеспечивающую выполнение условия непротекания на твердой границе, и, во-вторых, каким-то образом моделировать генерацию вихрей в тех точках твердой поверхности, где происходит отрыв пограничного слоя.

6.2. ДВИЖЕНИЕ СИСТЕМЫ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ ВИХРЕЙ

Когда система вихрей в безграничной жидкости имеет ненулевую суммарную циркуляцию, условия сохранения импульса (6.19) позволяют ввести дополнительные инварианты. В самом деле, координаты центра завихренности

$$x_c = \frac{\sum \Gamma_\alpha x_\alpha}{\sum \Gamma_\alpha}, \quad y_c = \frac{\sum \Gamma_\alpha y_\alpha}{\sum \Gamma_\alpha} \quad (6.41)$$

и дисперсия распределения завихренности D^2 ^{*}

$$D^2 = \frac{\sum \Gamma_\alpha [(x_\alpha - x_c)^2 + (y_\alpha - y_c)^2]}{\sum \Gamma_\alpha} \quad (6.42)$$

остаются постоянными, аналогичны соответствующим величинам, введенным в п. 1.7.5, и весьма полезны при анализе движения систем вихрей.

Поскольку взаимодействия крупномасштабных вихревых структур играют значительную роль в процессах переноса в сдвиговых течениях, то представляет интерес рассмотреть основные типы взаимодействия изолированных вихревых структур и бесконечных цепочек вихрей. Исследованию взаимодействия вихрей посвящено большое число работ (см., Saffman, Baker [1979], Мелешко, Константинов [1993]). Новые математические методы, позволяющие изучать движение вихрей на поверхностях, в т.ч. сферических, приведены в книге А.В. Борисова, И.С. Мамаева [1999]. Для простоты ограничимся анализом взаимодействия вихрей круглой формы конечного диаметра с постоянным распределением завихренности в безграничной покоящейся жидкости [Верetenцев, Рудяк, 1986].

Рассмотрим двумерное течение невязкой несжимаемой жидкости, вызванное системой вихрей. Для моделирования эволюции такого течения методом, изложенным в п. 6.1.1, каждый вихрь разбивался на N ячеек равной площади. За начальные координаты вихревых частиц принимались центры завихренности соответствующих ячеек. Для определения последующего движения вихревых частиц используется система (6.17) с функцией формы $f(r)$ (6.22), которая даст

$$V_{\alpha\beta}(r_{\alpha\beta}) = 1 - \exp \left[- \left| \mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta \right|^2 / (\sigma_\alpha^2 + \sigma_\beta^2) \right].$$

* Из статьи Е.А. Новикова [1975] видно, что величина $D^2 = \left(\sum_{\alpha\beta} \Gamma_\alpha \Gamma_\beta r_{\alpha\beta}^2 \right) / 2 \left(\sum_\alpha \Gamma_\alpha \right)^2$, где $r_{\alpha\beta}$ – расстояние между вихрями с номерами α и β .

Параметры σ_α были приняты равными приведенным диаметрам ячеек

$$\sigma_\alpha^2 = d^2/N,$$

где d – диаметр вихря. Уравнения (6.17) интегрировались методом Рунге – Кутта 4-го порядка. Точность расчетов контролировалась по выполнению законов сохранения импульса I_N (6.18), момента импульса M_N (6.19) и кинетической энергии ρH_N с гамильтонианом (6.14).

6.2.1. Взаимодействие двух одинаковых вихрей при разных начальных расстояниях

Результаты расчетов взаимодействия двух вихрей диаметра d с циркуляциями $\Gamma_1 = \Gamma_2$ при разных начальных расстояниях $l = \text{var}$ представлены на рис. 6.1. Здесь $T = (2\pi l)^2/(\Gamma_1 + \Gamma_2)$ – период вращения соответствующей системы точечных вихрей. При $l = 3d$ вихри взаимодействуют как точечные: они вращаются относительно центра завихренности системы без изменения формы с постоянной угловой скоростью $\Omega = 2\pi/T$. При $l = 1,7d$ картина течения изменяется: вихри заметно деформируются, а их скорость вращения относительно центра завихренности увеличивается, однако процесса объединения не происходит, что согласуется с данными, полученными методом контурной динамики [Roberts, Christiansen, 1972; Zabusky, Hughes, Roberts, 1979]. При дальнейшем уменьшении l процесс взаимодействия становится более интенсивным – начинается обмен частицами.

Качественно иная картина процесса начинается с расстояния $l = 1,66d$. Уже к моменту времени $t = T/4$ вихри “зацепляются” друг за друга, после чего происходит их объединение и образование единой вихревой структуры. При еще меньшем начальном расстоянии спаривание вихрей происходит более регулярно и образующаяся вихревая структура более компактна.

Взаимодействие вихрей эллиптической формы происходит по тому же сценарию, причем с более близкими значениями “критических” расстояний, при которых начинается обмен частицами или полное объединение вихрей [Веретенцев, Рудяк, 1986]. Взаимодействие вихрей, начальная форма которых определяется из условия сшивки вихревого и потенциального течений, описано в монографии Сэффмэна [2000], где указано, в частности, критическое значение параметра $S/l^2 = 0,3121$ (S – площадь каждого из вихрей), при котором вихри становятся неустойчивыми к бесконечно малым двумерным возмущениям. Переходя к приведенному диаметру вихря $d = (4S/\pi)^{1/2}$, получаем критическое расстояние $l = 1,586d$, что несколько ниже, чем для круговых и эллиптических вихрей.

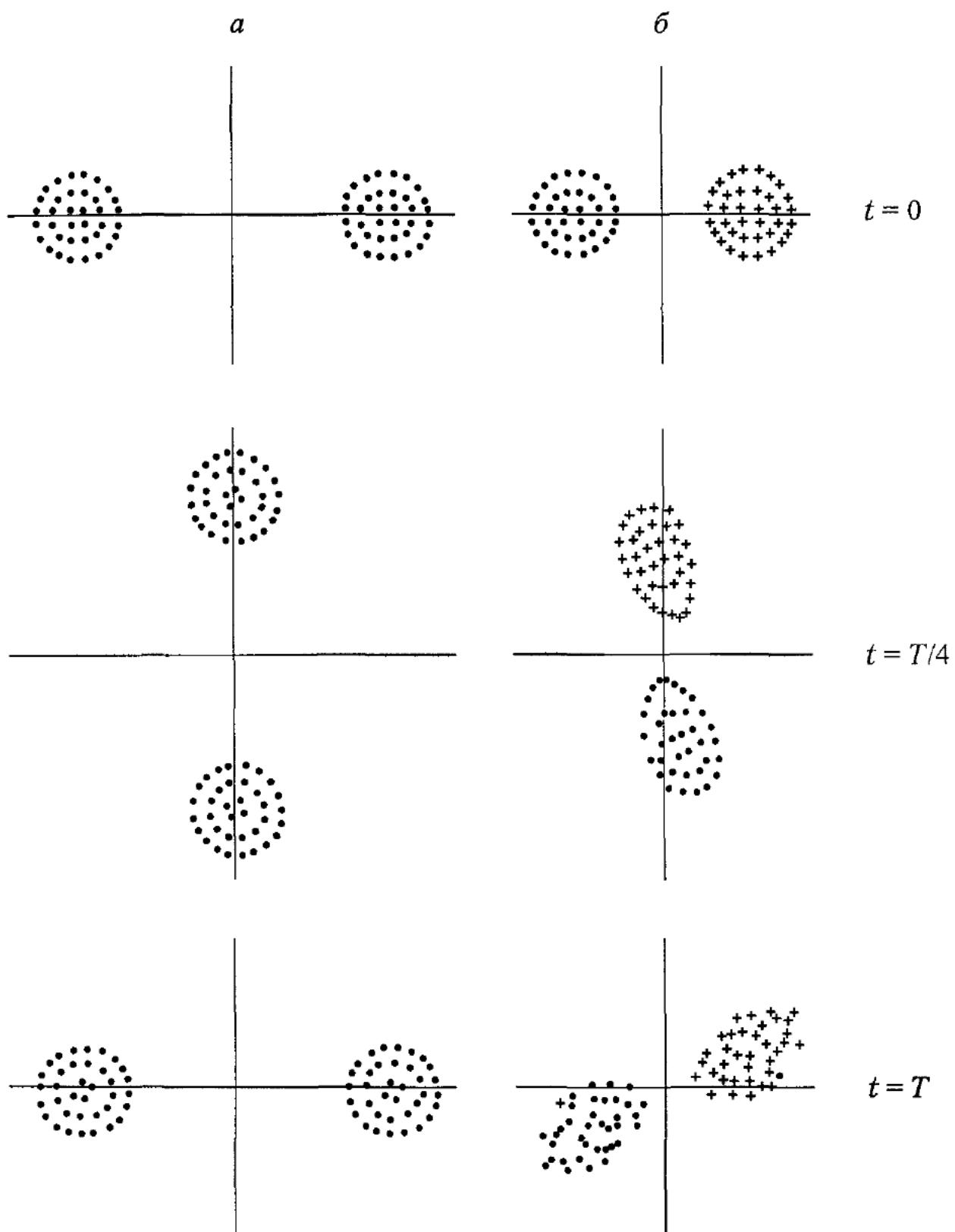
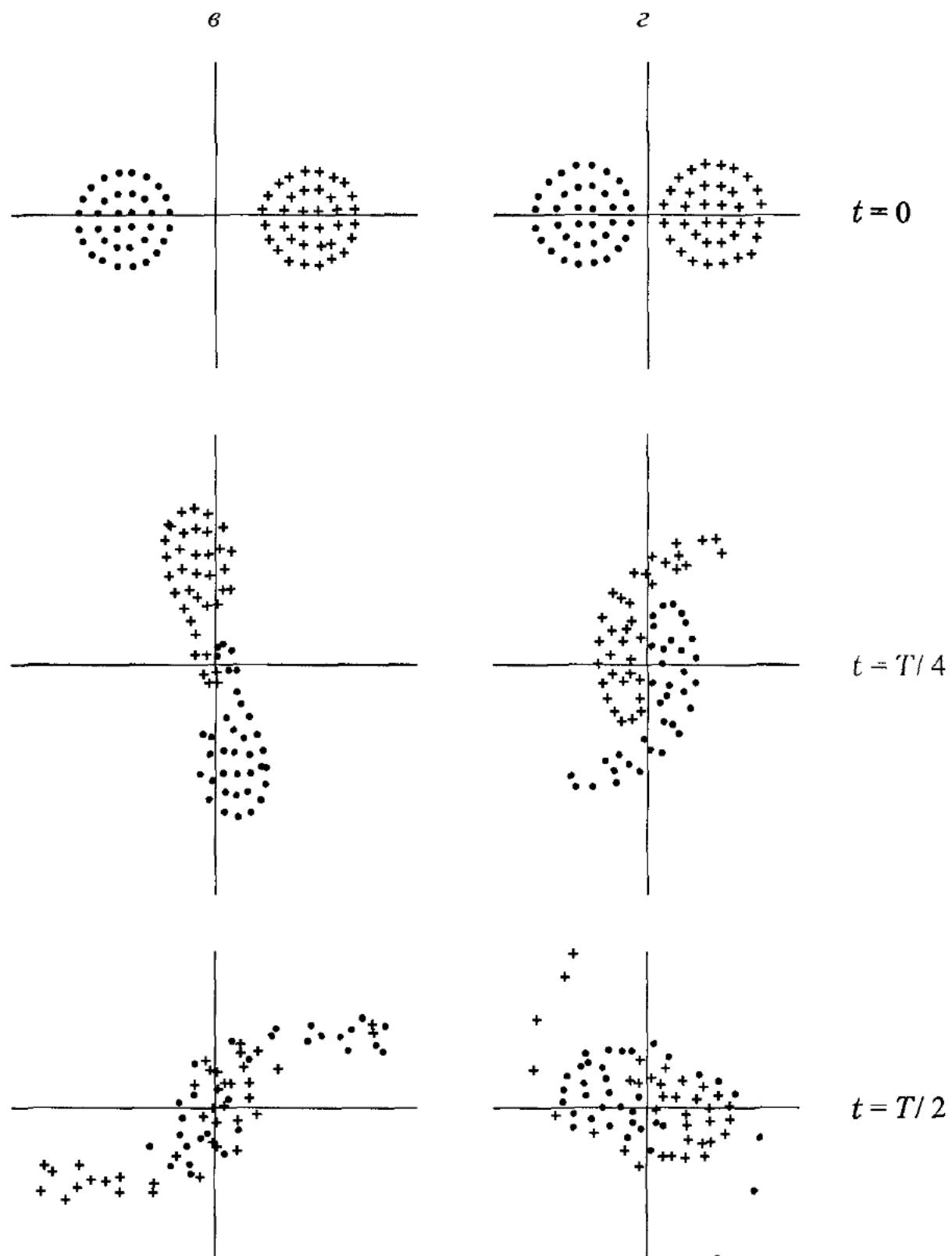


Рис 6 1 Взаимодействие двух вихрей равной циркуляции при различных



расстояниях между ними: $l/d = 3,00$ (α); $1,70$ (β), $1,66$ (γ), $1,10$ (ζ)

6.2.2. Взаимодействие двух вихрей одного размера, но с разными циркуляциями

Когда начальное расстояние велико, взаимодействие происходит аналогично случаю одинаковых вихрей. При уменьшении l вихрь с меньшей циркуляцией начинает деформироваться, а угловая скорость вращения вихрей относительно центра завихренности оказывается больше, чем для системы двух точечных вихрей с теми же циркуляциями. Если начальное расстояние между вихрями меньше критического, то характер взаимодействия определяется соотношением их циркуляций. При $\Gamma_1 \gg \Gamma_2$ вихрь с меньшей циркуляцией начинает накручиваться на вихрь с большей циркуляцией и разрушаться (рис. 6.2). Форма вихря с большей циркуляцией при этом остается неизменной. Со временем формируется вихревая структура с ядром, образованным вихрем большей циркуляции, окруженным облаком частиц, принадлежавших ранее вихрю с меньшей циркуляцией. Если же циркуляции вихрей – величины одного порядка, то здесь также вихрь с меньшей циркуляцией начинает накручиваться на более интенсивный вихрь, но при этом последний деформируется и разрушается.

6.2.3. Взаимодействие двух вихрей с одинаковой циркуляцией, но с разными размерами

Здесь меньший вихрь обладает большей начальной энергией и характер взаимодействия вихрей подобен описанному в п. 2.

В общем случае при взаимодействии вихрей с различными циркуляциями и размерами критическое расстояние зависит от соотношения циркуляций и размеров вихрей. Если начальное расстояние между вихрями меньше критического, возможны два механизма образования вихрей большего размера. Первый – это спаривание вихрей, второй – захват вихря, имеющего меньшую начальную энергию, более энергичным вихрем.

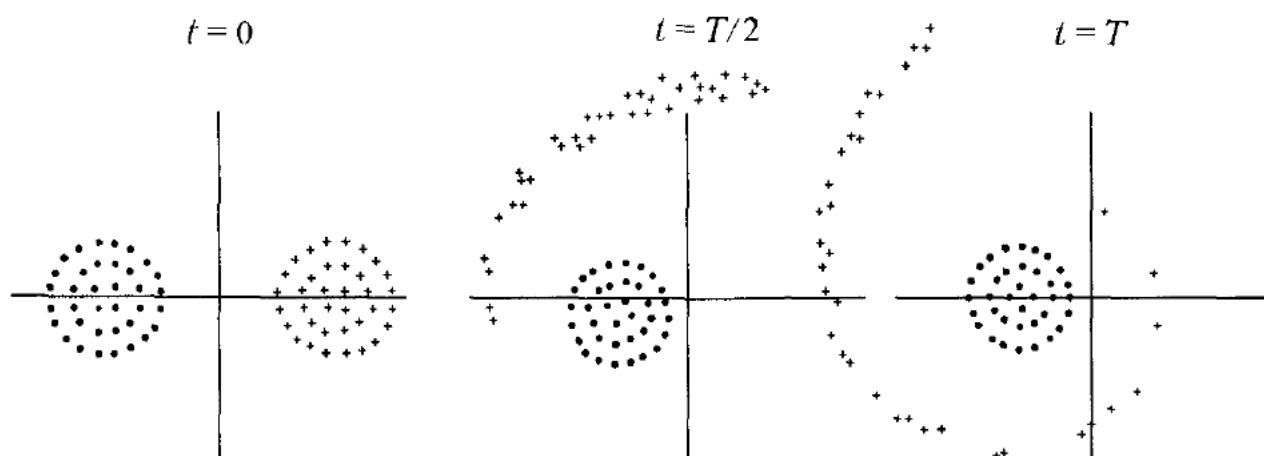


Рис. 6.2 Взаимодействие двух вихрей одного размера, но разных циркуляций:
 $l/d = 1,70$, $\Gamma_2 = 0,1\Gamma_1$

6.2.4. Взаимодействие трех вихрей с циркуляциями одного знака

При взаимодействии трех вихрей появляются дополнительные механизмы образования вихрей большего размера. Так, система из трех одинаковых вихрей с циркуляциями Γ , расположенных вначале в вершинах равностороннего треугольника со стороной l , при достаточно больших значениях l/d вращается как целое с постоянной угловой скоростью $\Omega = 3\Gamma/(2\pi l^2)$, соответственно с периодом $T = 2\pi/\Omega$ (рис. 6.3 a). Аналогичная конфигурация точечных вихрей, как известно, является устойчивой независимо от l . При уменьшении начального расстояния между вихрями конечного размера происходит их деформация, изменяется угловая скорость вращения системы и, начиная с некоторого значения l , вихри теряют устойчивость и объединяются в одну большую структуру (рис. 6.3 b).

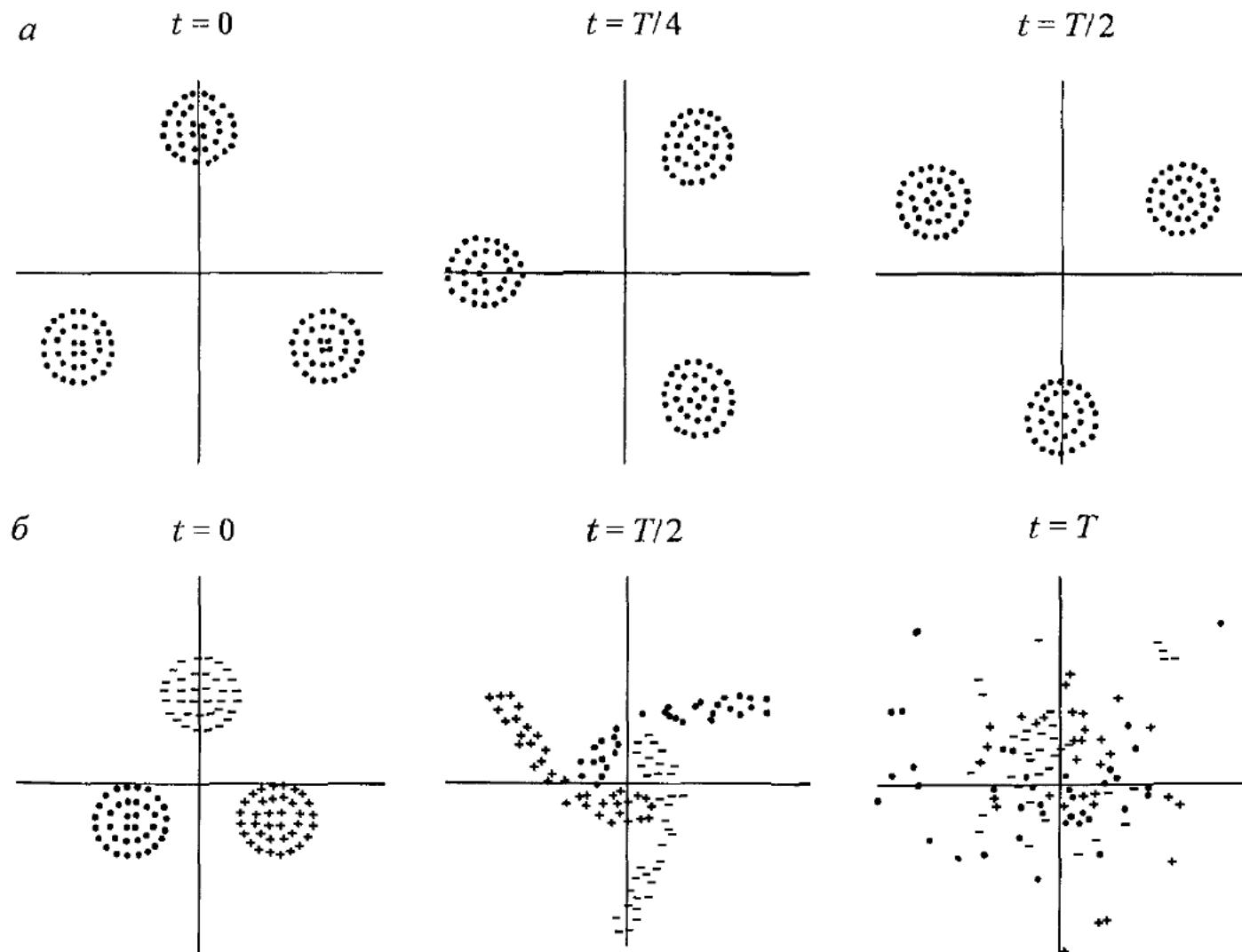


Рис. 6.3 Взаимодействие трех вихрей, расположенных первоначально в вершинах равностороннего треугольника: $l/d = 3,00$ (а); $1,70$ (б)

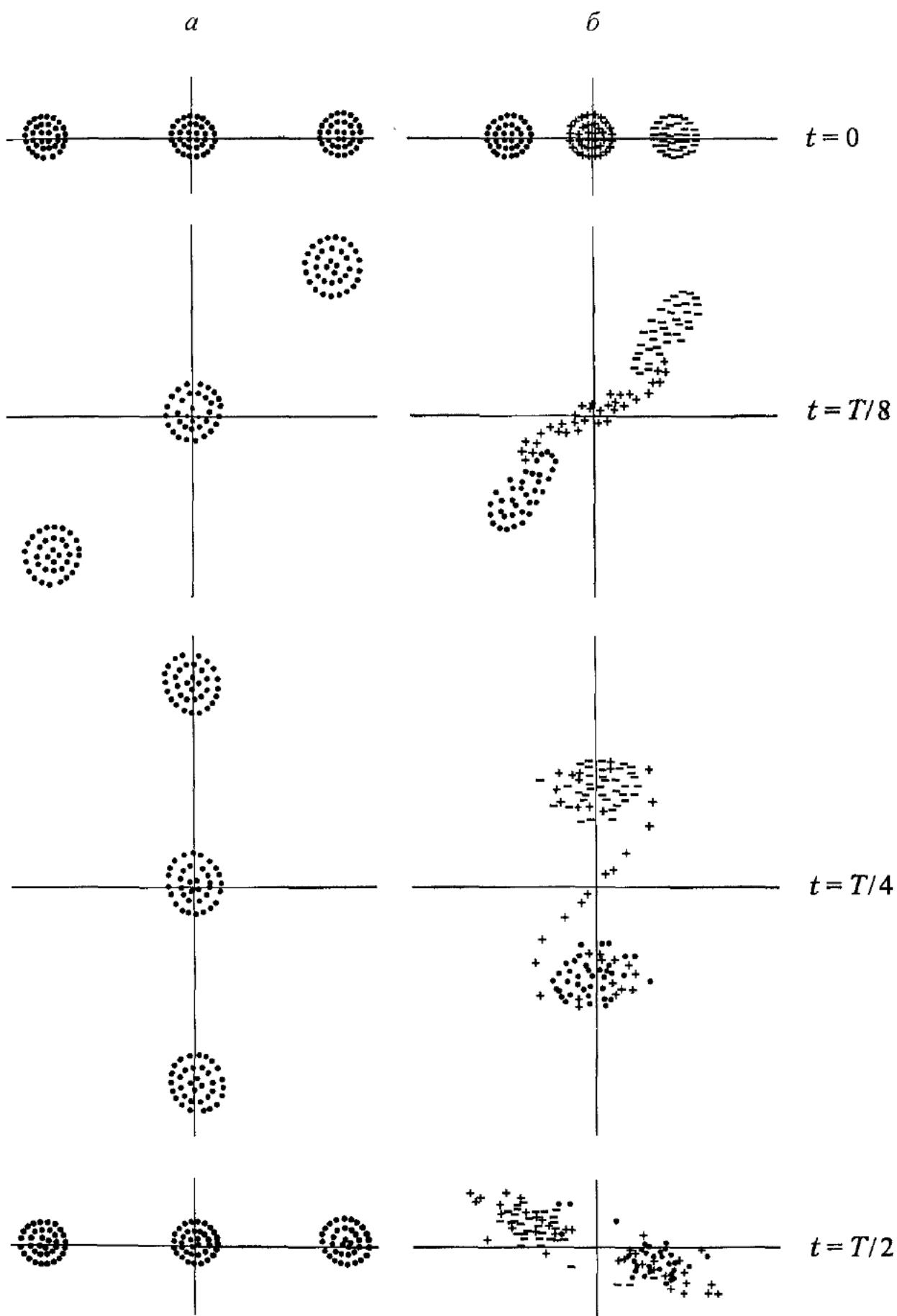


Рис. 6.4 Взаимодействие трех вихрей, расположенных первоначально на одной прямой.
 $l/d = 3,00$ (а), $1,70$ (б)

Другой механизм образования вихрей большего размера наблюдается, когда три одинаковых вихря вначале находятся на одной прямой на расстоянии l друг от друга (рис. 6.4 a). Соответствующая система точечных вихрей вращается с постоянной угловой скоростью $\Omega = 3\Gamma/(4\pi l^2)$ (с периодом $T = 2\pi/\Omega$). При большом начальном расстоянии l вихри взаимодействуют как точечные. Когда же l меньше критического, то средний вихрь разрывается крайними вихрями. В результате образуются две вихревые структуры (рис. 6.4 b). В дальнейшем, в зависимости от начального расстояния, две образовавшиеся структуры могут либо вращаться друг относительно друга, либо спариваться.

Если вихри в линейной цепочке трех вихрей имеют различные циркуляции, то более интенсивный вихрь захватывает вихри меньшей интенсивности (рис. 6.5 a). В случае, когда менее интенсивный вихрь находится в середине, то более интенсивные крайние вихри разрывают средний, образуя двухвихревую конфигурацию (рис. 6.5 b).

Дальнейшее увеличение числа вихрей в системе приводит к еще более сложным процессам образования больших вихрей. Тем не менее, эти процессы представляют собой последовательные комбинации двух основных механизмов: спаривания, страивания и т. д. и роста вихрей за счет захвата или разрыва соседних, менее интенсивных вихрей.

6.2.5. Взаимодействие двух вихрей с циркуляциями разных знаков

Если два вихря имеют равные по величине и противоположные по знаку циркуляции и находятся первоначально достаточно далеко друг от друга, то они движутся затем в направлении, перпендикулярном линии, соединяющей их центры, без изменения формы с постоянной скоростью $V = \Gamma/2\pi l$, т. е. ведут себя как пара точечных вихрей (см. п. 2.3.1). Уменьшение расстояния между вихрями приводит лишь к их деформации (рис. 6.6) и увеличению скорости поступательного движения. Форма вихрей, не меняющаяся при движении вихревой пары, исследована численно в работе Pierrehumbert [1980] в зависимости от параметра $\alpha = d_c/l$, где d_c – условный диаметр вихрей (см. рис. 6.7). Задача решалась методом сшивки вихревого и потенциального течений. Параметр α изменялся от 0 до 2,16. Предельная форма при соприкосновении вихрей в упомянутой работе найдена некорректно. Правильное решение о форме соприкасающихся вихрей, или, что эквивалентно, о форме вихря, присоединенного к плоскости, было найдено в работе Садовского [1971] и позднее в заметке Saffman, Tanveer [1982].

Если циркуляции вихрей не только по знаку, но и по абсолютным значениям отличны друг от друга, то при большом начальном расстоянии вихри движутся по круговым орбитам вокруг центра завихренности системы, который лежит на линии, проходящей через центры вихрей позади более интенсивного вихря (рис. 6.8). При значениях l меньше критических более интенсивный вихрь может захватывать часть вихря с меньшей циркуляцией.

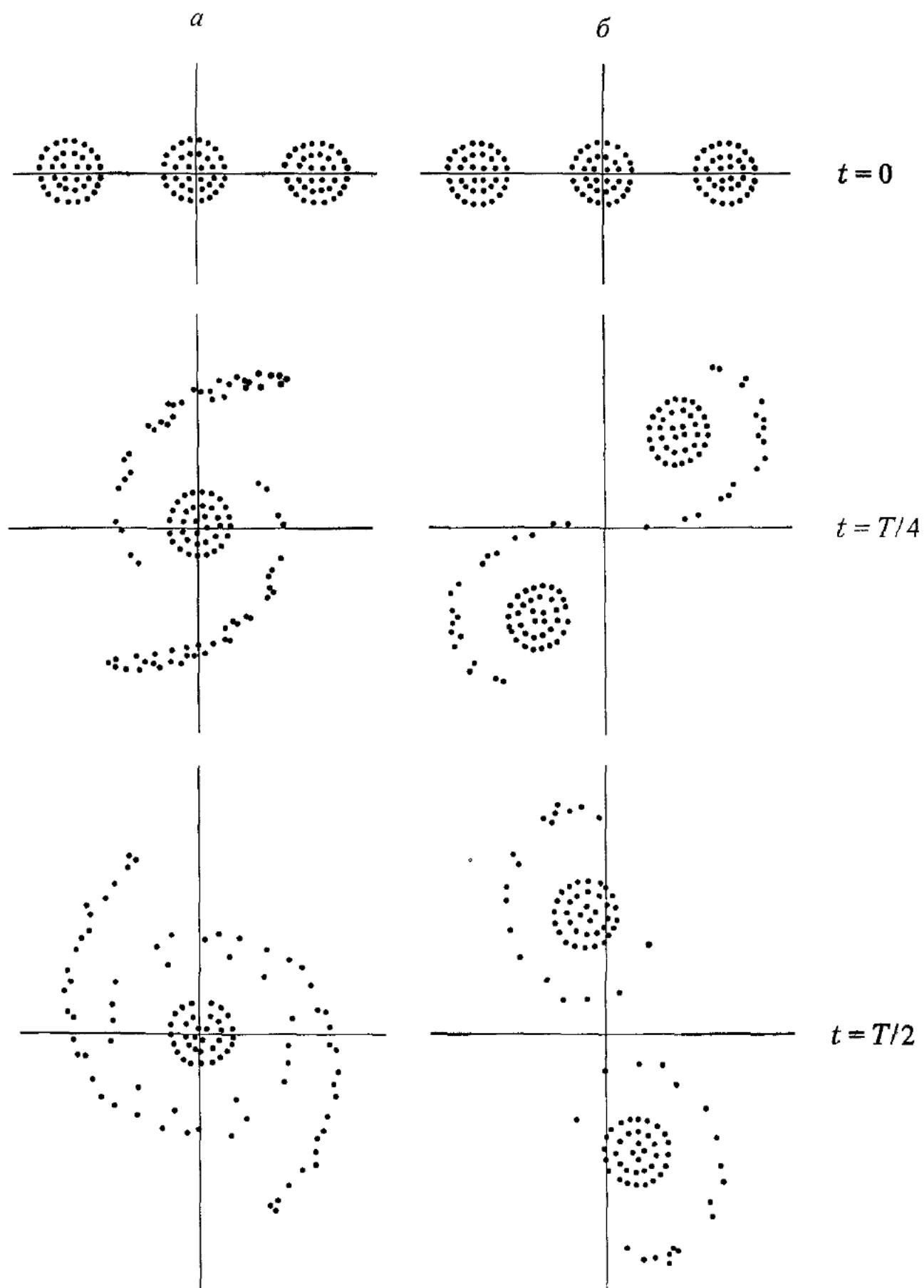


Рис 6.5. Взаимодействие трех вихрей с разными циркуляциями:
 $\Gamma_1 = \Gamma_3 - 0,1\Gamma_2$ (а), $10\Gamma_2$ (б)

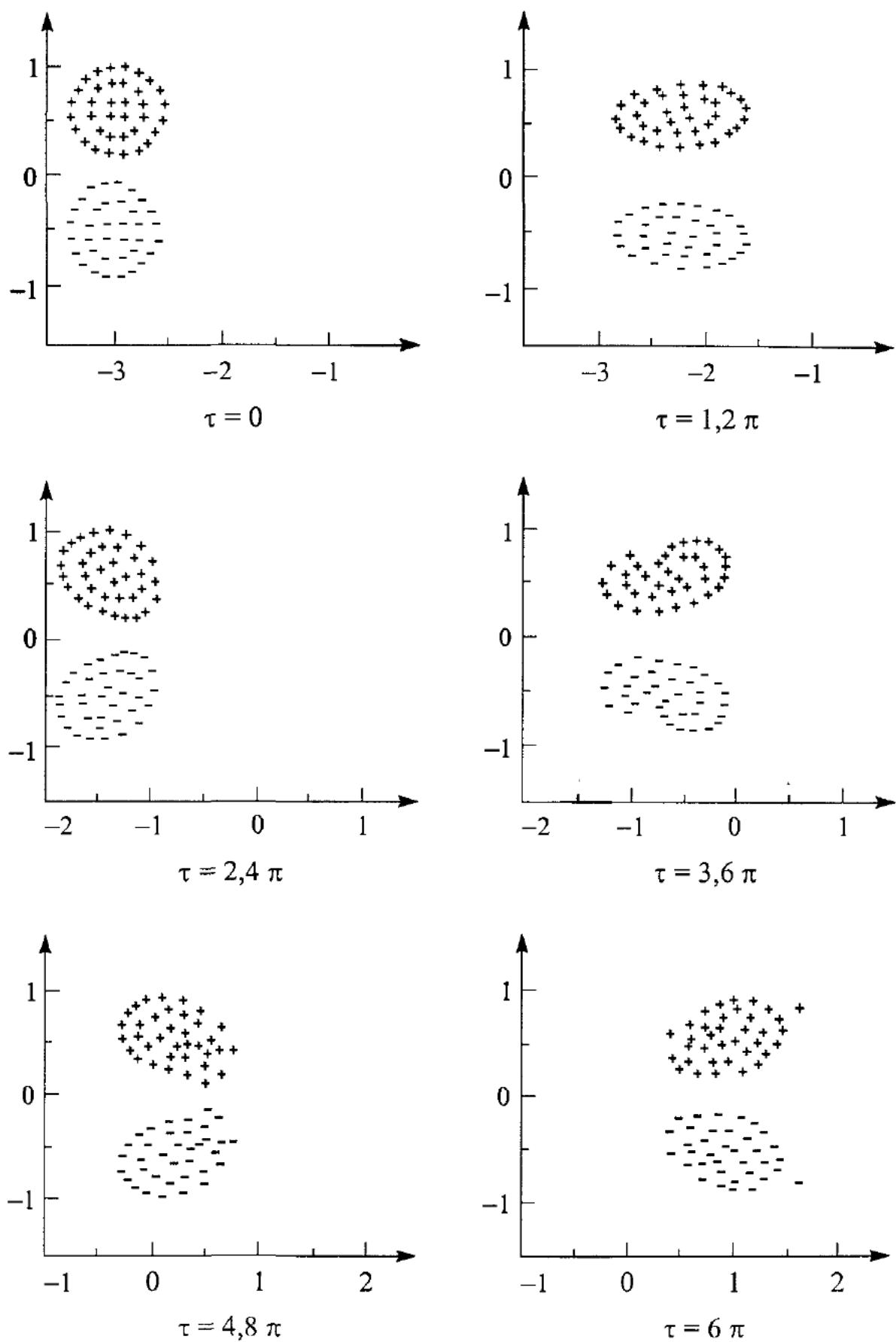


Рис 6.6. Взаимодействие двух вихрей с циркуляциями, равными по величине, но противоположными по знаку $l/d = 1,10$

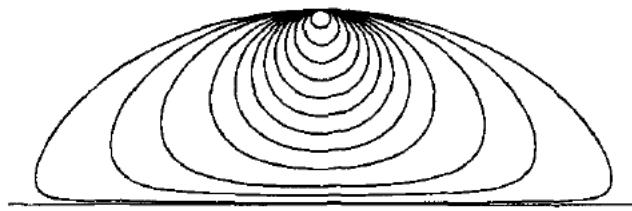


Рис. 6.7 Семейство стационарных вихревых пар. Значения параметра α , начиная снаружи: 1,97; 1,55, 1,22; 0,844; 0,639; 0,500; 0,390; 0,302; 0,225; 0,159; 0,100, 0,048

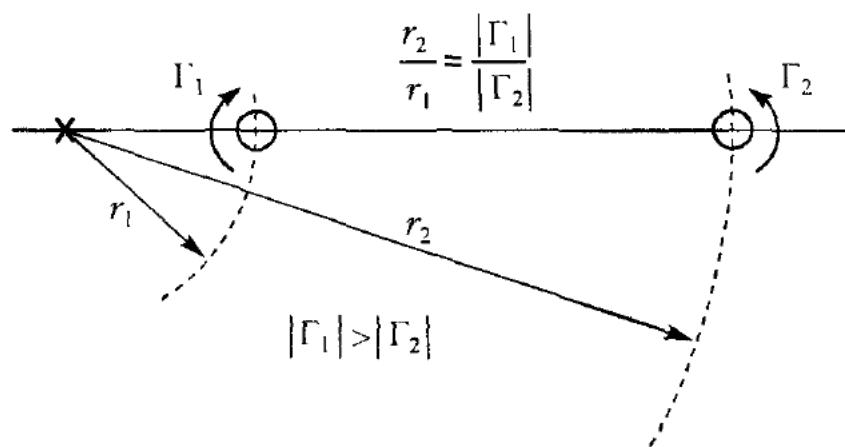


Рис. 6.8. Система двух вихрей с циркуляциями противоположного знака и различными по величине

6.2.6. Взаимодействие трех вихрей с циркуляциями разных знаков. Коллапс вихрей

В системе из трех вихрей возможен принципиально новый механизм образования больших вихревых структур – *коллапс вихрей*. Коллапс и обратное ему явление – антиколлапс системы точечных вихрей рассмотрены в работах Е.А. Новикова, Ю.Б. Седова [1979], Aref [1979], где сформулированы условия возникновения этого эффекта:

$$\sum_{\alpha<\beta} \Gamma_\alpha \Gamma_\beta = 0; \quad D = 0.$$

Здесь D – дисперсия распределения завихренности, введенная в начале параграфа (6.41). Дополнительным условием является равенство величин $\phi_\alpha = \omega_0$ и $\dot{\rho}_\alpha / \rho_\alpha = t_*^{-1}$ для всех вихрей, где $(\rho_\alpha, \phi_\alpha)$ – полярные координаты вихрей относительно центра завихренности. Со временем система эволюционирует по законам:

$$\rho_\alpha(t) = \rho_\alpha^0 \cdot \lambda(t), \quad \phi_\alpha(t) = \phi_\alpha^0 + \int_0^t \omega(t) dt,$$

где $\lambda^2(t) = 1 - t/t_*$; $\omega(t) = \omega_0/\lambda^2(t)$. Заметим, что при этом $\phi_\alpha(t) - \phi_\beta(t) = \phi_\alpha^0 - \phi_\beta^0$, $r_{\alpha\beta}(t) = r_{\alpha\beta}^0 \cdot \lambda(t)$, т. е. система вращается с угловой скоростью $\omega(t)$ сохраняя подобие исходной конфигурации с масштабным фактором $\lambda(t)$. Если $t_* < 0$, то имеет место антиколлапс (разбегание) вихрей. При $t_* > 0$ система стягивается в точку в момент времени $t = t_*$. Точка коллапса совпадает с центром завихренности системы. Далее, с ростом времени, вихри проскаивают центр завихренности и начинается процесс антиколлапса. При этом конфигурация вихрей отражается относительно центра завихренности, а величина t_* меняет знак, сохраняя абсолютное значение. Для системы из трех вихрей

$$t_* = \frac{3\pi(r_{12}^0 r_{23}^0 r_{13}^0)^2}{2S_0\gamma \left[(\Gamma_2 - \Gamma_1)(r_{12}^0)^2 + (\Gamma_3 - \Gamma_1)(r_{13}^0)^2 + (\Gamma_3 - \Gamma_2)(r_{23}^0)^2 \right]},$$

$$\omega_0 = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{(r_{12}^0)^2} + \frac{\Gamma_2 + \Gamma_3}{(r_{23}^0)^2} + \frac{\Gamma_1 + \Gamma_3}{(r_{13}^0)^2} \right].$$

Здесь γ – ориентация тройки вихрей, равная 1 при обходе вихрей в порядке их нумерации против часовой стрелки и -1 – в противном случае; S_0 – площадь треугольника, образованного вихрями.

Коллапс трех точечных вихрей показан на рис. 6.9а. Здесь $\Gamma_1 = \Gamma_2 = -2\Gamma_3$. Начальная конфигурация в данном случае – прямоугольный треугольник с катетами 3 и $3\sqrt{2}$.

Явление, аналогичное коллапсу точечных вихрей, наблюдается и для конечных областей завихренности. Динамика системы трех вихрей с циркуляциями и начальными координатами центров, такими же, как и в предыдущем варианте, показана на рис. 6.9б. Когда вихри сближаются на расстояние менее критического, происходит потеря устойчивости, вихри одного знака объединяются и образуется двухвихревая структура. В отличие от случая точечных вихрей, где коллапс неустойчив относительно малых возмущений, для вихрей конечного размера явление коллапса довольно устойчиво к возмущениям начальных координат и циркуляций.

Приведенные примеры дают представление о некоторых механизмах образования больших вихрей в изолированных системах. В последующих параграфах будет показано, что подобные механизмы реализуются в различных сдвиговых и отрывных течениях.

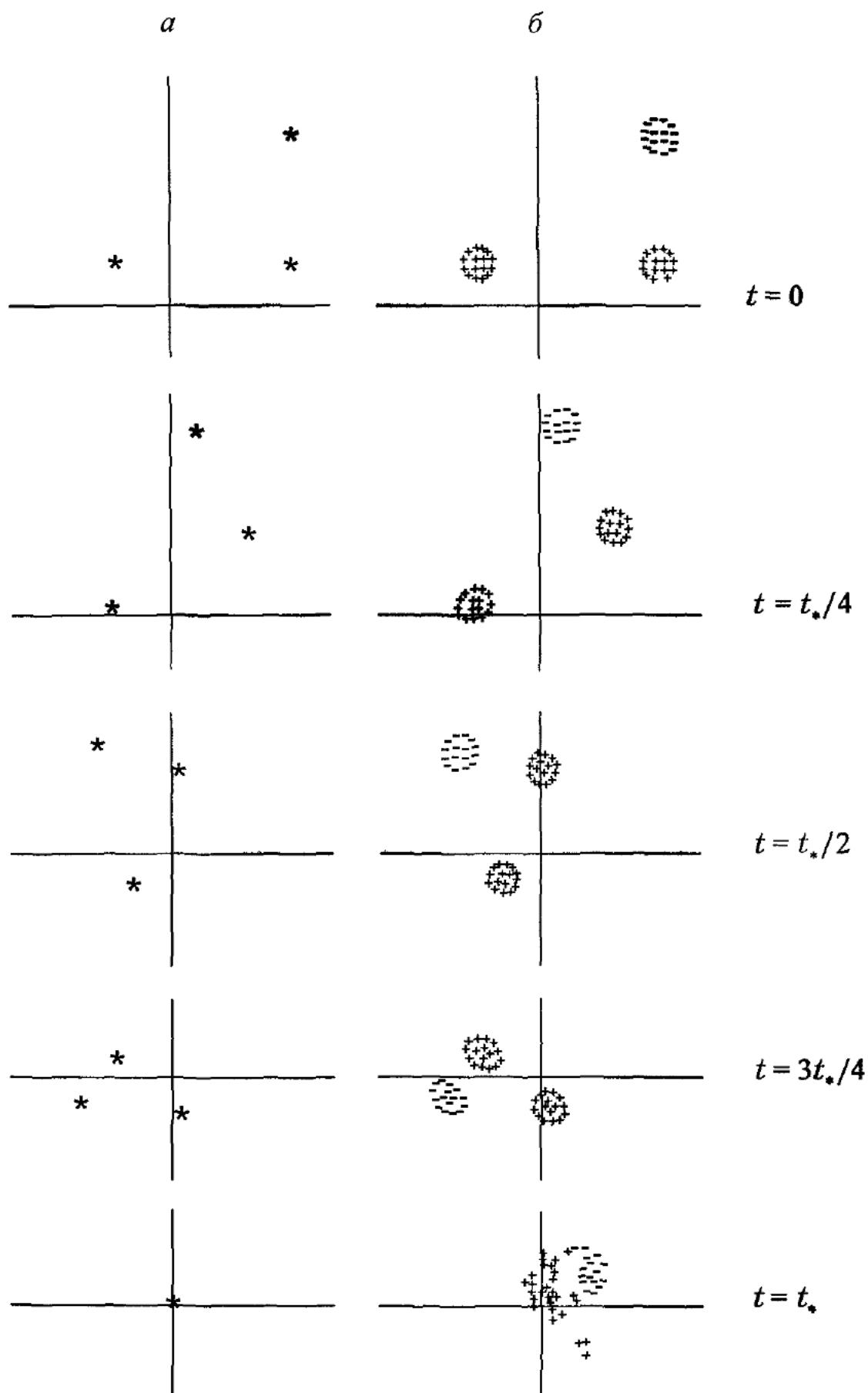


Рис. 6.9 Взаимодействие трех вихрей с циркуляциями, разными по знаку:
a – точечные вихри, *b* – вихри конечного размера, t_* – время коллапса

6.3. МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ СДВИГОВЫХ ТЕЧЕНИЙ

Свободные сдвиговые течения – струи, следы, слои смешения, слои сдвига – широко распространены и в природе, и в технике. Одна из важных особенностей сдвиговых течений – неустойчивость, приводящая к образованию крупномасштабных вихревых структур. Классические эксперименты Brown, Roshko [1974] по изучению эволюции слоя смешения стимулировали появление большого числа работ по исследованию динамики крупномасштабных вихревых структур в свободных сдвиговых течениях. Обзоры по этой тематике [Власов, Гиневский, 1986; Рабинович, Сущик, 1990; Cantwell, 1981; Fiedler, Fernholz, 1990; Bridges, Husain, Hussain, 1989; Liu, 1989] демонстрируют широкий спектр методов вычислительной гидродинамики, применяемых для изучения сдвиговых течений. Поскольку наибольший интерес представляют течения при больших числах Рейнольдса, которые являются турбулентными, применяются разнообразные модели турбулентности. Самый перспективный и содержащий наименьшее число допущений – метод прямого численного моделирования, основанный на численном решении нестационарных уравнений Навье – Стокса или Эйлера с последующим осреднением по времени, пространству или ансамблю реализаций, подобно тому, как это делается при проведении экспериментов. При реализации прямого численного моделирования используются разнообразные спектральные, псевдоспектральные и конечноразностные методы. Тем не менее основные механизмы образования крупномасштабных структур в свободных сдвиговых течениях можно изучить с помощью относительно простого, но наглядного метода дискретных вихревых частиц.

6.3.1. Механизмы образования крупных вихрей в сдвиговом слое

Рассмотрим двумерное движение невязкой несжимаемой жидкости, описываемое в невозмущенном состоянии профилем скорости $u(y) = -u_0 \operatorname{th}(2y/\delta)$, где δ – характерная толщина сдвигового слоя. В начальный момент времени на течение накладываются возмущения: основное – с длиной волны λ и субгармоническое – с длинами волн $n\lambda$ (n – целое число). Следяя работе А.Н. Веретенцева, В.Я. Рудяка [1987а], сдвиговый слой будем моделировать набором вихревых частиц, начальные координаты которых задаются формулами

$$x_\alpha|_{t=0} = X_\alpha, \quad y_\alpha|_{t=0} = Y_\alpha + \sum_n A_n \sin\left(\frac{k}{n} X_\alpha + \phi_n\right),$$

где X_α , Y_α – невозмущенные координаты вихревых частиц; A_n и φ_n – соответственно амплитуды и фазы вводимых возмущений; $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число. Решение задачи о развитии возмущений сводится к интегрированию уравнений движения вихревых частиц (6.17) с функцией

$$V_{\alpha\beta} = 1 - \exp\left[-r_{\alpha\beta}^2 / (\sigma_\alpha^2 + \sigma_\beta^2)\right].$$

При этом предполагается, что течение является периодическим по x с периодом $l = m\lambda$, где m – целое число, зависящее от того, какие именно субгармонические возмущения накладываются.

Картина развития возмущений в системе “гармоника+субгармоника” с начальными амплитудами $A_1 = 0,003$, $A_2 = 0,001$ для сдвигового слоя толщиной $\delta = 0,3/k$ представлена на рис. 6.10а. Расчеты проведены для разности фаз $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \pi/2$. На первом этапе, когда возмущения малы, они не взаимодействуют друг с другом и в соответствии с линейной теорией неустойчивости нарастают экспоненциально, без изменения синусоидальной формы. На рис. 6.10б этой стадии соответствует диапазон времени $\tau = tu_0/\lambda < 0,5$. Для определения энергий гармоник, представленных на данном рисунке, проводились спектральный анализ пульсаций продольной скорости и последующее осреднение по поперечной координате:

$$E_k = \frac{1}{32\theta_0 u_0^2} \int (u'_k)^2 dy.$$

Здесь θ_0 – начальная толщина потери импульса (в рассматриваемом случае $\theta_0 = \delta(1 - \ln 2) \approx 0,307\delta$). Номера линий соответствуют волновым числам: $1 - k = 2\pi/\lambda$, $2 - 2k$, $3 - k/2$, $4 - 3k/2$.

Когда возмущение скорости достигает нескольких процентов от u_0 , начинают проявляться нелинейные эффекты. Форма сдвигового слоя становится пилообразной, затем происходит сворачивание и образование первичных вихревых структур (рис. 6.10а, $\tau = 1,0$). В то же время начинается взаимодействие гармоник, проявляющееся, в частности, в уменьшении скорости роста основной гармоники, появлении высших (рис. 6.10б, линия 2) и комбинационных (линия 4) гармоник. Быстрый рост энергии субгармоники (линия 3) и комбинационной гармоники (4) происходит не только за счет энергии среднего течения, но и за счет энергии других составляющих спектра, в частности гармоники с волновым числом $2k$ (линия 2), чья энергия после момента времени $\tau = 1,0$ начинает уменьшаться. В среднем степень ее уменьшения имеет тот же порядок, что и энергия, приобретаемая субгармоникой и комбинационной гармоникой.

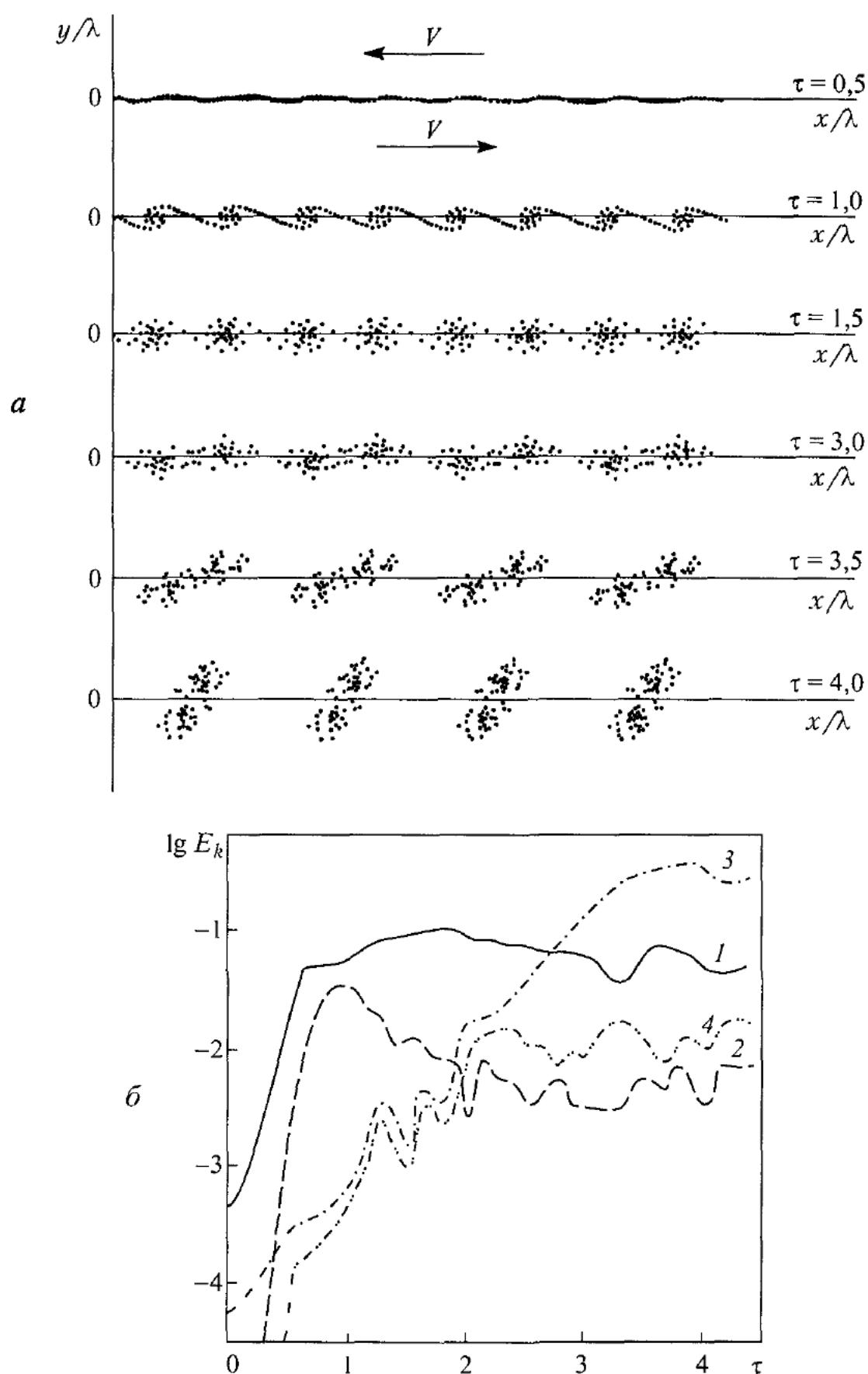


Рис. 6.10 Развитие возмущений в сдвиговом слое с длинами волн λ и 2λ . Начальные условия: $A_1 = 0,003$, $A_2 = 0,001$, $\Delta\phi = \pi/2$. *a* – форма сдвигового слоя в различные моменты времени; *б* – зависимость амплитуд развивающихся возмущений от времени

Когда энергия субгармонического возмущения достигает $\sim 1\%$ от u_0 , начинает развиваться вторичная неустойчивость, которая проявляется в чередующемся (вверх-вниз) поперечном смещении вихревых структур. Затем начинается попарное вращательное движение структур и, наконец, происходит их спаривание (см. рис. 6.10 a , $t=4,0$). Основную роль на этом этапе играет резонансное взаимодействие субгармонического возмущения $k/2$ с комбинационным возмущением $k - k/2$, возникающим на предшествующей стадии в результате слабого нелинейного взаимодействия основной гармоники k и субгармоники $k/2$.

В работе А.Н. Веретенцева и В.Я. Рудяка [1987а] показано, что эволюция сдвигового слоя существенно зависит от амплитуд A_1 , A_2 и сдвига фаз $\Delta\phi$. При этом амплитуда основной гармоники определяет характер эволюции сдвигового слоя на начальной стадии развития неустойчивости, а амплитуда субгармоники и разность фаз $\Delta\phi$ – на стадии вторичной неустойчивости. Влияние указанных параметров на характер изменения толщины потери импульса приведено на рис. 6.11. При фиксированных $A_2 = 4,17 \cdot 10^{-3}$, $\Delta\phi = \pi/2$ (рис. 6.11 a) и достаточно малой амплитуде основного возмущения существует пологий участок, соответствующий линейной стадии развития неустойчивости. С ростом A_1 этот участок становится короче и толщина слоя растет быстрее благодаря более быстрому развитию первичной неустойчивости. На более поздней стадии наблюдается обратная картина – с ростом A_1/A_2 скорость роста толщины потери импульса уменьшается. Это объясняется тем, что развитие первичной неустойчивости заканчивается прежде, чем субгармоническое возмущение достаточно усиливается и начнется стадия вторичной неустойчивости. Как видно из рис. 6.11 b , c , толщина слоя на этапе развития первичной неустойчивости практически не зависит от амплитуды субгармоники и сдвига фаз. Развитие вторичной неустойчивости наступает тем раньше, чем больше величина A_2 . При этом быстрее всего процесс происходит, когда $\Delta\phi = \pi/2$. Это связано с тем, что область пучности субгармонического возмущения совпадает с центрами первичных вихревых структур. С уменьшением/увеличением разности фаз развитие вторичной неустойчивости затягивается.

Дальнейшее развитие сдвигового слоя связано с нарастанием субгармоник с большими длинами волн. Наиболее характерен сценарий, когда в течении возбуждается и быстро нарастает субгармоника с волновым числом $k/4$, где k – волновое число, на котором развивается первичная неустойчивость в слое сдвига. В расчетах, где на течения накладывались возмущения с ненулевыми амплитудами A_1, A_2, A_4 , показано, что после спаривания первичных структур рост толщины сдвигового слоя не прекращался, наблюдалось спаривание вторичных структур и образование вихревых структур следующего поколения.

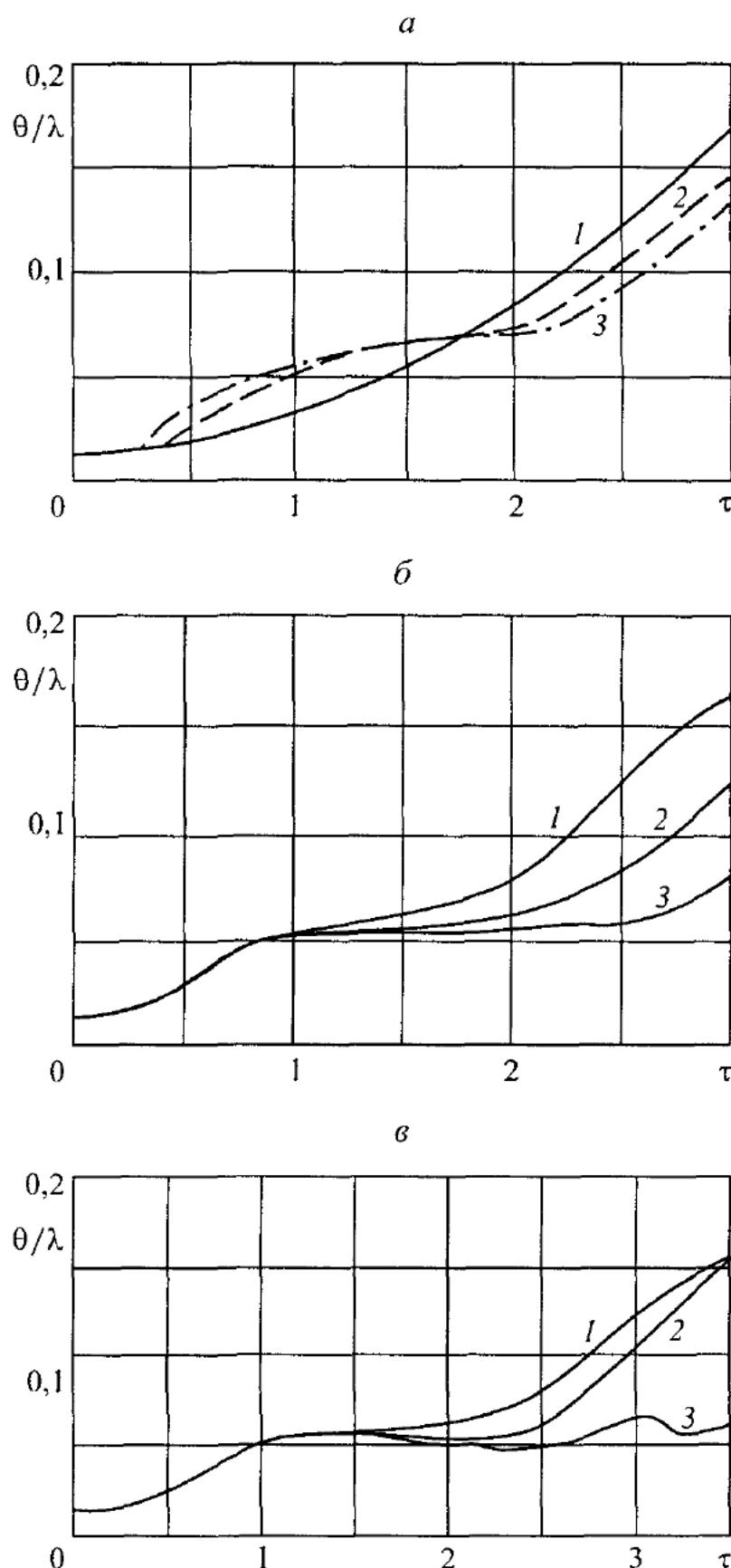


Рис. 6.11. Зависимость толщины потери импульса в сдвиговом слое от времени при варьировании амплитуды основной гармоники (а): $A_2 = 4,17 \cdot 10^{-3}$, $\Delta\phi = \pi/2$, $A_1 = 8,34 \cdot 10^{-4}$ (1), $4,17 \cdot 10^{-3}$ (2), $8,34 \cdot 10^{-3}$ (3); субгармоники (б): $A_1 = 7,41 \cdot 10^{-3}$, $\Delta\phi = \pi/2$, $A_2 = A_1$ (1), $A_1/2$ (2), $A_1/4$ (3) и величины сдвига фаз $\Delta\phi$ (в): $A_1 = 7,41 \cdot 10^{-3}$, $A_2 = A_1/2$, $\Delta\phi = \pi/2$ (1), $\pi/4$ (2), 0 (3)

Таким образом, развитие сдвигового слоя возможно через попарное слияние образующихся вихревых структур. Для этого необходимо, чтобы в спектре начальных возмущений доминировали субгармоники с волновыми числами $k/2^n$ ($n = 1, 2 \dots$). Если эти условия не выполняются, то возможны иные механизмы образования крупных вихревых структур и, как следствие, другая картина развития сдвигового слоя. Например, при наложении на основное течение возмущений с двумя длинами волн – λ и 3λ (рис. 6.12) – развитие первичной неустойчивости происходит подобно сценарию, представленному на рис. 6.10. В то же время, этапы развития вторичной неустойчивости существенно различаются. Как видно из рис. 6.12, $\tau = 3,5$, происходит спаривание первичных вихревых структур. Дальнейшая эволюция приводит к разрыву средних вихрей в каждой тройке и образованию цепочки двухвихревых структур. Подобный процесс имеет место и при счетверении первичных вихрей, когда в течении возбуждаются основная гармоника и субгармоника с длиной волны 4λ .

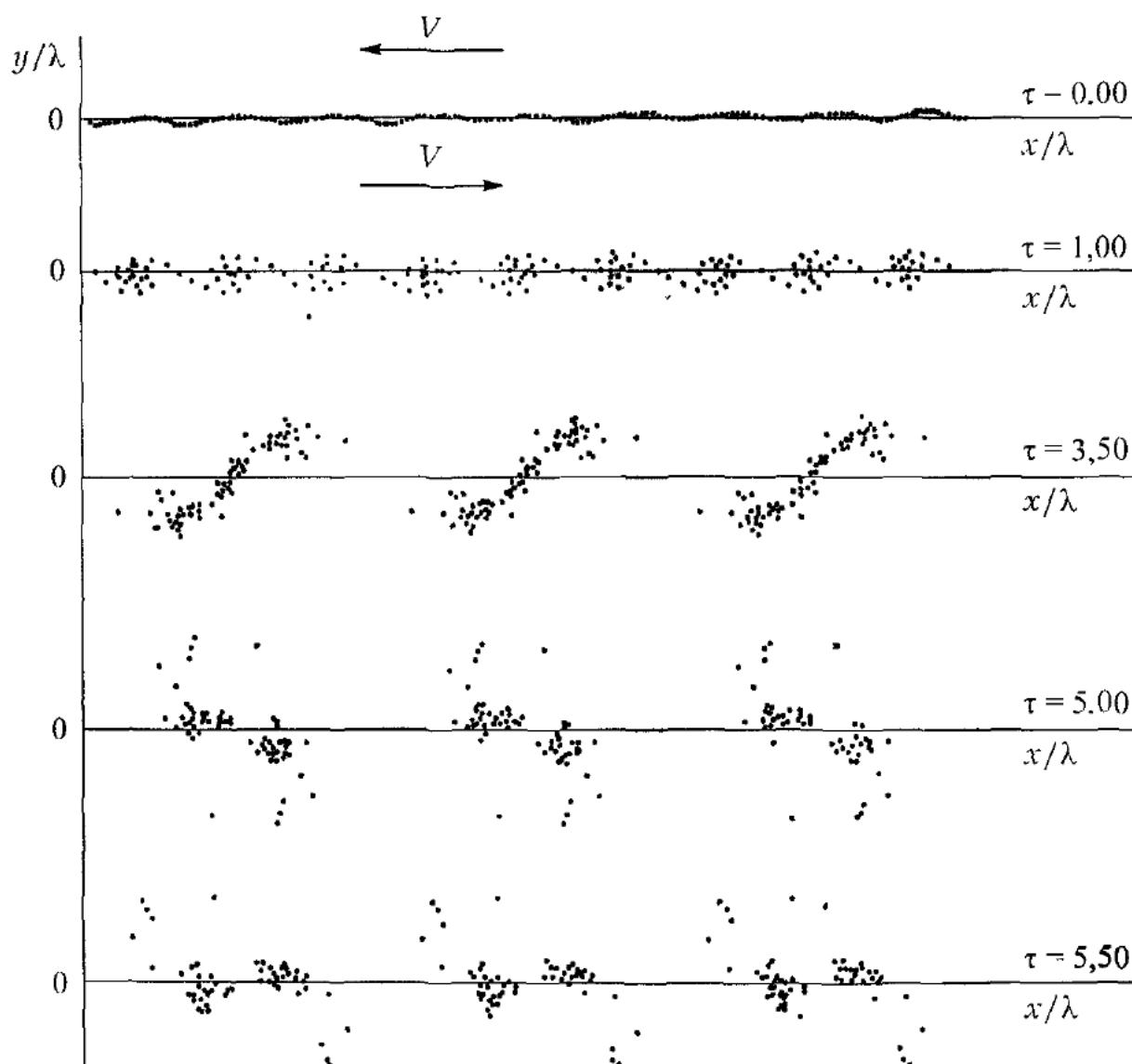


Рис. 6.12. Развитие возмущений в сдвиговом слое с длинами волн λ и 3λ .

Здесь, однако, четырехвихревая структура превращается сначала в трехвихревую, а затем уже в двухвихревую. Процессы взаимодействия оказываются еще более сложными, если симметрия вихрей внутри вторичных структур по какой-либо причине нарушена. Пристраивании вихрей такая ситуация может возникать, если на течение дополнительно наложить возмущения небольшой амплитуды на длине волны 2λ . Наконец, отметим, что в случае возбуждения в течении одновременно нескольких субгармоник процесс вторичной неустойчивости сильно усложняется и обусловлен их нелинейным взаимодействием. При этом образование вторичных вихревых структур может протекать по различным "каналам". Выбор канала целиком будет определяться начальными условиями: амплитудами и фазами субгармоник. Варьируя эти условия, можно управлять развитием сдвигового слоя.

6.3.2. Неустойчивость разгонного вихря

Идеализированное сдвиговое течение, в котором течения по разные стороны от слоя сдвига направлены навстречу друг другу и скорости вне слоя равны, практически не встречается. Если же на все поле наложить течение со скоростью $u_1 > u_0$, то получим более реалистичное одностороннее течение со скоростями $u_1 + u_0$ и $u_1 - u_0$ вдали от слоя сдвига. Характер развития неустойчивости в таком течении такой же, как и в идеализированном слое сдвига со скоростями $\pm u_0$. Ближайшим реальным прототипом сдвигового слоя является слой смешения – течение, развивающееся за кромкой пластины, обтекаемой параллельным ей потоком газа или жидкости с различной скоростью по разные стороны от пластины. Описание течения и характер развития неустойчивости можно найти в обзорах, упоминаемых в начале п. 6.3. Механизмы развития неустойчивости на нелинейной стадии оказываются весьма близкими к описываемым в п. 6.3.1.

Более сложным объектом для изучения развития неустойчивости является сдвиговое течение, возникающее при обтекании кромки пластины потоком, не параллельным пластине, или при обтекании клина. Характерная особенность такого течения – нестационарность: на кромке образуется растущий "разгонный" вихрь.

В качестве идеализированной задачи о разгонном вихре рассмотрим отрывное обтекание кромки полубесконечной пластины невязкой несжимаемой жидкостью, развивающейся из состояния покоя. Пусть на комплексной плоскости пластина занимает отрицательную вещественную полуось $\Re(z) \leq 0$, $\Im(z) = 0$. Главный член комплексного потенциала безотрывного обтекания пластины имеет вид [Pullin, 1978]

$$\mathbf{W}_p(z,t) = -ig(t)\sqrt{z}, \quad (6.43)$$

где $g(t)$ – функция, определяющая зависимость комплексного потенциала от времени. Такой потенциал приводит к полю скорости, имеющему особенность в точке $z = 0$. Физически образующийся на наветренной стороне пластины пограничный слой не может безотрывно обтекать острую кромку. Происходит отрыв пограничного слоя и формирование свободного сдвигового (вихревого) слоя, распространяющегося во внешнем потенциальном потоке. При больших числах Рейнольдса образующийся сдвиговый слой имеет малую толщину и его можно моделировать вихревой пеленой. Уравнение движения вихревой пелены во внешнем потенциальном поле (6.43) имеет вид

$$\frac{d}{dt} \bar{z}(\Gamma, t) = \frac{1}{2\zeta(\Gamma, t)} \left\{ g(t) - \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\Gamma_T(t)} \left[\frac{1}{\zeta(\Gamma, t) - \zeta(\Gamma', t)} - \frac{1}{\zeta(\Gamma, t) - \bar{\zeta}(\Gamma', t)} \right] d\Gamma' \right\}, \quad (6.44)$$

где $\zeta = i\sqrt{z}$. Условие Кутта – Жуковского требует конечности скорости на кромке пластины. Следовательно, выражение в фигурных скобках должно быть равно нулю при $z = 0$

$$g(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\Gamma_T(t)} \left[\frac{1}{\zeta(\Gamma', t)} - \frac{1}{\bar{\zeta}(\Gamma', t)} \right] d\Gamma' = 0. \quad (6.45)$$

Заметим, что система уравнений (6.44), (6.45) аналогична системе (6.29), (6.30). В работах Никольского [1957] и Pullin [1978] показано, что эта система имеет автомодельное решение, если $g(t) = at^m$. Образующийся при этом разгонный вихрь оказывается геометрически подобен самому себе в различные моменты времени.

Уравнение (6.44) имеет один интеграл, а именно, справедлив закон изменения продольной составляющей вихревого импульса [Куйбин, 1993]

$$\frac{dI}{dt} \equiv \frac{d}{dt} \int_0^{\Gamma_T(t)} z_2(\Gamma, t) d\Gamma = \frac{\pi}{4} g^2(t).$$

Поэтому для автомодельной задачи имеем

$$I = \frac{\pi}{4} a^2 \frac{t^{2m+1}}{2m+1}. \quad (6.46)$$

В рассматриваемой задаче можно сформулировать и другие автомодельные законы, например закон увеличения размера вихря, закон роста полной циркуляции и т. п. Последний закон

$$\Gamma_T(t) = J_m a^{4/3} t^{(4m+1)/3} \quad (6.47)$$

был рассмотрен в работе Pullin [1978]. Точное значение коэффициента J_m

неизвестно. В упомянутой работе, где приведены значения J_m для некоторых m , к сожалению, не указана точность расчетов.

При решении рассматриваемой задачи (6.44), (6.45) методом дискретных вихревых частиц уравнения движения частиц (6.33) могут быть значительно упрощены. Конформное отображение области течения (плоскость с разрезом по отрицательной вещественной полуоси) на полуплоскость $\text{Im}(\zeta) > 0$ задается формулой $\mathbf{z}(\zeta) = -\zeta^2$, а комплексный потенциал внешнего (безотрывного) течения (6.43) приобретает вид $\mathbf{W}_p(\zeta, t) = -g(t)\zeta$. В соответствии с этим находим комплексную скорость течения: $\bar{\mathbf{u}}_p = g(t)/2\zeta$.

Учитывая, что $z'_k = -2\zeta_k$, $z''_k = -2$, уравнения движения вихревых частиц (6.33) принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\mathbf{z}}}_k = & -\frac{1}{4\pi i \zeta_k} \sum_{n=1}^{N(t)} \Gamma_n \left\{ \frac{1}{\zeta_k - \zeta_n} \left[1 - \exp \left(-\frac{|\zeta_k - \zeta_n|^2}{D_k^2 + D_n^2} \right) \right] - \right. \\ & \left. - \frac{1}{\zeta_k - \bar{\zeta}_n} \left[1 - \exp \left(-\frac{|\zeta_k - \bar{\zeta}_n|^2}{D_k^2 + D_n^2} \right) \right] - \right. \\ & \left. - \left[\exp \left(-\frac{|\zeta_k - \zeta_n|^2}{D_k^2 + D_n^2} \right) - \exp \left(-\frac{|\zeta_k - \bar{\zeta}_n|^2}{D_k^2 + D_n^2} \right) \right] \frac{D_k^4 4\zeta_k}{\sigma_k^2 (D_k^2 + D_n^2)} \right\} + \frac{g(t)}{2\zeta_k}, \\ k = 1, 2, \dots, N(t), \quad D_k^2 = & \frac{\sigma_k^2}{4|\zeta_k|^2} \left[1 - \exp \left(-\frac{|\zeta_k|^2 \sigma}{\sigma_k^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (6.48)$$

В случае когда частицы, покидая кромку, в дальнейшем не приближаются к пластине на расстояние порядка трех – пяти своих размеров, экспоненциальные члены, ответственные за взаимодействие со стенкой, можно отбросить. В результате упрощенные уравнения движения и формула конечности скорости (6.34) запишутся так:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\mathbf{z}}}_k = & -\frac{1}{4\pi i \zeta_k} \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq k}}^{N(t)} \Gamma_n \left\{ \frac{1}{\zeta_k - \zeta_n} \left[1 - \exp \left(-\frac{|\zeta_k - \zeta_n|^2}{D_k^2 + D_n^2} \right) \right] - \frac{1}{\zeta_k - \bar{\zeta}_n} \right\} - \\ & - \frac{\Gamma_k}{4\pi i \zeta_k} \left[\frac{1}{2\zeta_k} + \frac{1}{\zeta_k - \bar{\zeta}_k} \right] + \frac{g(t)}{2\zeta_k}, \quad k = 1, 2, \dots, N(t), \end{aligned} \quad (6.49)$$

$$\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{N(t)} \Gamma_k \frac{\operatorname{Im}(\zeta_k)}{|\zeta_k|^2} = g(t). \quad (6.50)$$

Уравнение (6.49) так же, как и исходное уравнение (6.48), имеет множитель, стремящийся к бесконечности при приближении частицы к кромке, что представляет определенные неудобства при численной реализации метода. С другой стороны, подстановкой функции $g(t)$ из (6.50) в уравнение движения удается устранить эту особенность. Наконец, заметив, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta_k(\zeta_k - \zeta_n)} &= -\frac{1}{\zeta_k(\zeta_k + \zeta_n)} - \frac{2}{z_k - z_n}, \\ \frac{|\zeta_k - \zeta_n|^2}{D_k^2 + D_n^2} &\approx \frac{|z_k - z_n|^2}{\sigma_k^2 \left| \frac{\zeta_k + \zeta_n}{2\zeta_k} \right|^2 + \sigma_n^2 \left| \frac{\zeta_k + \zeta_n}{2\zeta_n} \right|^2}, \end{aligned}$$

а следовательно,

$$\exp\left(-\frac{|\zeta_k - \zeta_n|^2}{D_k^2 + D_n^2}\right) \approx \exp\left(-\frac{|z_k - z_n|^2}{\sigma_k^2 + \sigma_n^2}\right),$$

будем иметь следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{z}}_k &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1}^{N(t)} \frac{\Gamma_n}{z_k - z_n} \left[1 - \exp\left(-\frac{|z_k - z_n|^2}{\sigma_k^2 + \sigma_n^2}\right) \right] - \\ &- \frac{1}{4\pi i} \sum_{n=1}^{N(t)} \Gamma_n \left[\frac{1}{\zeta_k(\zeta_k + \zeta_n)} - \frac{1}{\bar{\zeta}_k(\bar{\zeta}_k - \bar{\zeta}_n)} \right], \quad k = 1, 2, \dots, N(t). \quad (6.51) \end{aligned}$$

Анализируя выведенные уравнения, видим, что второе слагаемое полностью описывает взаимодействие потока с поверхностью пластины, – отбрасывая его, получаем уравнения движения частиц в безграничной жидкости [Веретенцев и др., 1982].

При программной реализации метода возникает вопрос о выборе положения очередного сходящегося вихря. В схемах, где условие непротекания на твердой поверхности выполняется приближенно – в конечном числе контрольных точек, а сама поверхность заменяется набором присоединенных вихрей [Белоцерковский, Ништ, 1978], обычно предполагается, что свободные вихри сходят по касательной к пластине, причем сходящий вихрь располагается на расстоянии Δl от ближайшего присоединенного вихря, где Δl – расстояние между присоединенными вихрями. Но в этом случае шаг интег-

рирования по времени уравнений движения оказывается жестко связанным с числом присоединенных вихрей. С одной стороны, это приводит к неэкономичному вычислительному алгоритму, с другой, вследствие того, что на начальном этапе развития кривизна линии отрыва обычно бывает большой, – к значительным ошибкам при решении всей задачи. В работе А.И. Зобнина [1986] предлагается определять параметры сходящихся вихрей по данным асимптотического анализа формы и интенсивности вихревой пелены в окрестности кромки. Rott [1956] нашел, что вблизи кромки

$$\mathbf{z}(\Gamma, t) = (K_1 \lambda + i K_2 \lambda^{3/2}) t^{2(m+1)/3},$$

где $\lambda = 1 - \Gamma/\Gamma_T(t)$. Но значения констант K_1 и K_2 необходимо определять для каждого m . В работе П.А. Куйбина [1993] координаты сходящихся вихрей определяются следующим образом. На каждом шаге по времени на кромке помещается маркер (вихревая частица с нулевой интенсивностью). За время Δt маркер смещается в новое положение (как и все остальные частицы; напомним, что скорость на кромке конечна и в дискретной модели). Затем на место маркера ставится вихревая частица с интенсивностью, определяемой по уравнению конечности скорости на кромке. Очевидно, что при интегрировании уравнений движения методом Эйлера первого порядка вихрь окажется на линии, продолжающей пластину. Схемы более высокого порядка обеспечивают и поперечное смещение.

Что касается самого первого вихря, то он должен заменять разгонный вихрь, сформировавшийся за время Δt . Здесь предлагается определять его координаты из следующих условий: должен выполняться закон изменения вихревого импульса (6.46); скорость, индуцируемая на кромке пластины первым сошедшим вихрем, должна иметь только продольную ненулевую компоненту (т. е. вихрь располагается над кромкой).

Система уравнений движения (6.50), (6.51) интегрировалась методом Рунге – Кутта второго порядка. Точность решения автомодельной задачи оценивалась по выполнению законов изменения вихревого импульса и полной циркуляции, записанных для дискретной системы:

$$I_N \equiv \sum_{n=1}^{N(t)} \Gamma_n \operatorname{Im}(\mathbf{z}_n) = \frac{\pi a^2}{4} \cdot \frac{t^{2m+1}}{2m+1}, \quad \Gamma_{TN} \equiv \sum_{n=1}^{N(t)} \Gamma_n = J_m a^{4/3} t^{(4m+1)/3}. \quad (6.52)$$

Типичная картина формирования на острой кромке вихревой спиралевидной структуры для автомодельного течения с показателем $m=1$ представлена на рис. 6.13. Здесь точки означают центры вихревых частиц. Как видно, разгонный вихрь представляет собой гладкую спиралевидную структуру. Вместе с тем многочисленные эксперименты [Ван-Дайк, 1986; Pierce, 1961;

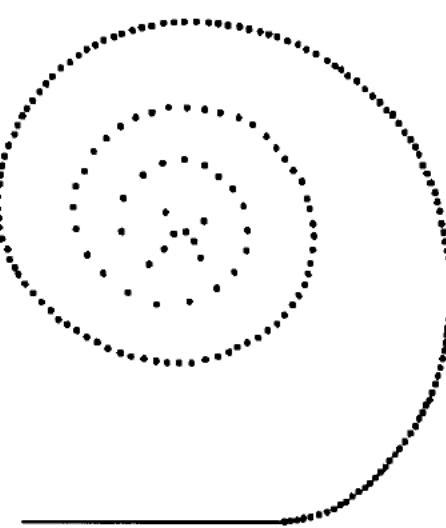


Рис 6.13 Форма разгонного вихря в случае автомодельного течения с показателем $m = 1$. Число шагов по времени $N = 200$

Freymuth, Bank, Palmer, 1983] показывают, что процесс формирования вихря сопровождается развитием в нем неустойчивости и образованием по периметру вихря когерентных структур.

Исследование неустойчивости разгонного вихря с помощью численного эксперимента на основе обобщенного метода дискретных вихревых частиц проведено в работах [Веретенцев и др., 1989; Kuibin, Rudyak, Veretentsev, 1991]. Расчеты отрывного обтекания полубесконечной пластины выполнялись при введении в течение контролируемых возмущений на заданной частоте. В частности, изучалось влияние вибрации кромки и самой пластины, различных внешних полей (в том числе акустического), наличия фоновых возмущений. Показано, что эти возмущения преобразуются в вихревые, которые и вызывают затем развитие неустойчивости в разгонном вихре.

Отличие в постановке задачи от рассмотренного выше невозмущенного разгонного вихря заключается лишь в комплексном потенциале внешнего безотрывного течения $\mathbf{W}_p(z, t)$. В самом деле, находя асимптотику потенциала возмущенного течения в окрестности кромки, получим

$$\mathbf{W}_p(z, t) = -i g(t) \sqrt{z} + h(t) \mathbf{q}(z). \quad (6.53)$$

Здесь функция $h(t)$ определяет характер зависимости от времени интенсивности источника возмущений. Если возмущения гармонические, то $h(t)$ представляется так:

$$h(t) = C_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) + C_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2). \quad (6.54)$$

Функция $\mathbf{q}(z)$ связана с типом возмущений. Так, $\mathbf{q}(z) = z$ в случае возмущений, порождаемых продольными колебаниями пластины. Для поперечных

колебаний $\mathbf{q}(\mathbf{z}) = i\sqrt{z}$. Фоновые пульсации, присутствующие в набегающем потоке, могут приводить к возмущениям потенциала как с функцией $\mathbf{q}(\mathbf{z}) = \mathbf{z}$, так и с $\mathbf{q}(\mathbf{z}) = i\sqrt{z}$, либо к их комбинации.

Как показано в работе А.Н. Верегеницева, В.Я. Рудяка [1987б], влияние на исследуемое течение внешнего акустического поля чистого тона сводится к генерации вихревых возмущений, интенсивность которых равна $A_f \sin(2\pi ft + \phi_f)$, где f – частота звуковых колебаний. Часть потенциала, соответствующая акустическим возмущениям, имеет вид $B_f \sin(2\pi ft + \chi_f) i\sqrt{z}$. Амплитуды A_f и B_f пропорциональны амплитуде падающей акустической волны. Возмущения, вызываемые вибрацией “кромки”, точнее, малоамплитудными колебаниями пластиинки конечной длины l , шарнирно прикрепленной к полубесконечной пластине, описываются таким же законом [Куйбин, 1993].

Вследствие автомодельности невозмущенной задачи масштабы основного течения определяются единственным размерным коэффициентом a и текущим временем t . В частности, характерный размер вихря L и время его эволюции связаны соотношением $L^{3/2} = aT^{m+1}$. При решении возмущенной задачи в качестве масштаба времени естественно выбрать период колебаний вводимых возмущений τ .

В эксперименте [Pierce, 1961] наиболее выраженная картина развития неустойчивости обнаруживается на стадии равноускоренного движения, что соответствует значению показателя $m=1$. Именно этот случай в дальнейшем и будет рассматриваться.

Проведенные численные эксперименты показали, что характер развития неустойчивости в разгонном вихре при всех перечисленных типах возмущений (с потенциалом типа (6.53) и функцией $\mathbf{q}(\mathbf{z}) = i\sqrt{z}$ или $\mathbf{q}(\mathbf{z}) = \mathbf{z}$) качественно одинаков. На рис. 6.14 представлена картина течения в последовательные моменты времени при $m=1$, $\mathbf{q}(\mathbf{z}) = i\sqrt{z}$, $h(t) = \sin 2\pi t/\tau$, $T = 25\tau$. Форма вихря в момент времени $t = 25\tau$, рассчитанного без введения возмущений, приведена на рис. 6.13.

Хорошо видно, что амплитуда развивающегося возмущения завихренности по мере удаления от кромки пластины быстро нарастает. Это приводит к образованию на спирали разгонного вихря мелких вихревых структур. Такая картина развития неустойчивости качественно хорошо согласуется с экспериментально наблюдавшейся [Pierce, 1961]. Фотография теневой картины отрывного обтекания профиля, движущегося с постоянным ускорением, из упомянутой работы приведена на рис. 6.15. Возмущения в опытах вызваны, по-видимому, вибрацией профиля, связанной, в свою очередь, с несовершенством механизма привода.

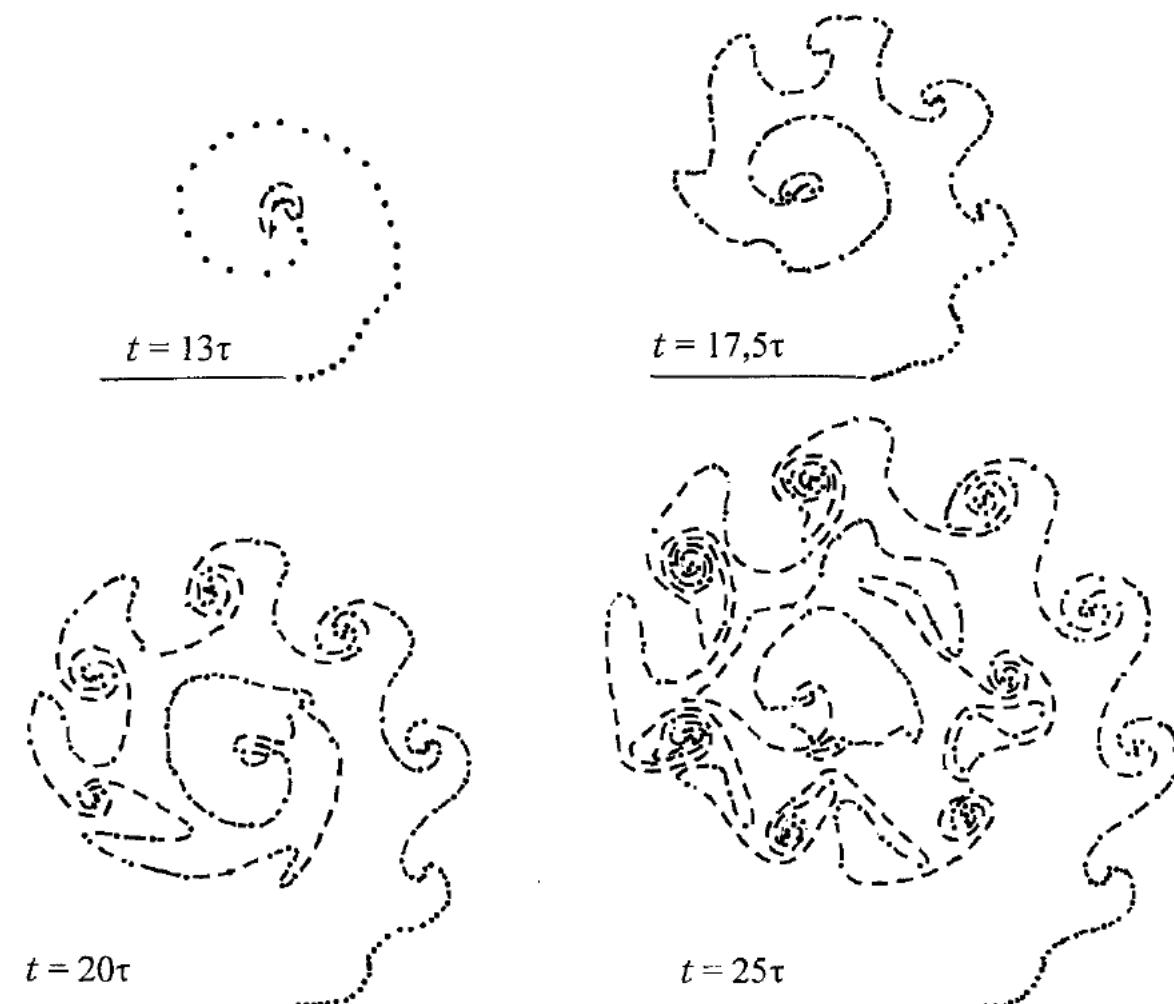


Рис. 6.14. Развитие возмущений в разгонном вихре: частота возмущения $f = 25/T$, где T – расчетный интервал формирования вихря. Точки соответствуют центрам вихревых частиц. Штриховая линия – интерполяция формы вихревой пелены



Рис. 6.15. Развитие неустойчивости в разгонном вихре, наблюдаемое в эксперименте [Pierce, 1961]

Чтобы получить количественную информацию об этом процессе, необходимо проанализировать спектральный состав развивающихся возмущений. Ситуация осложняется тем, что невозмущенное течение также нестационарно, и здесь не применима обычная теория устойчивости. Можно, однако, воспользоваться свойствами автомодельности разгонного вихря. В автомодельной переменной [Pullin, 1978] $\lambda = 1 - \Gamma/\Gamma_T(t)$ геометрия вихревой пелены описывается функцией $\omega(\lambda) = z(\Gamma, t)t^{-2(m+1)/3}$ и остается постоянной. Сохраняется также и приведенное поле скорости $\dot{z}(\Gamma, t)t^{(1-2m)/3}$. Поэтому удобно изучать спектральные свойства функции, составленной с учетом геометрического подобия течения в различные моменты времени

$$F(\lambda, t) = \left[U_n(\omega(\lambda)t^{2(m+1)/3}, t) - U_n^0(\omega(\lambda)t^{2(m+1)/3}, t) \right] \left(\frac{t}{t_0} \right)^{(1-2m)/3}, \quad (6.55)$$

где $U_n^0(z, t)$ – компонента скорости невозмущенного течения в момент времени t , вычисленная в точке z спирали и направленная по нормали к ней; $U_n(z, t)$ – соответствующая скорость возмущенного течения, спроектированная на ту же нормаль; t_0 – некоторый фиксированный момент времени. В случае малых амплитуд возмущений и на достаточно малом интервале изменения времени в окрестности t_0 функция (6.55) оказывается периодической функцией времени, что позволяет разложить ее в ряд Фурье и проанализировать спектральный состав развивающихся возмущений.

Проведенные расчеты показывают, что развитие первичной неустойчивости происходит на частоте внешнего возбуждения $f = 1/\tau$. Зависимость амплитуды возмущения основной моды от автомодельной переменной λ (в течении, приведенном на рис. 6.14) показана на рис. 6.16 (зависимость A_f). Фурье-анализ проводился на интервале времени $(23\tau, 25\tau)$. Здесь имеет место начальный монотонный участок роста возмущения, который можно назвать линейным. Далее амплитуда основной моды развивается немонотонно (явление нелинейных эффектов), однако до точки $\lambda = 0,17$ в среднем она увеличивается. Важной особенностью течения является генерация субгармонических возмущений (зависимость $A_{f/2}$) с частотой $f/2$. Спектограммы указывают на существование активных взаимодействий резонансного типа между основной и субгармонической модами с частотами $f/2$ и $3f/2$ (кривые $A_{f/2}$ и $A_{3f/2}$ на рис. 6.16). Это особенно ярко иллюстрируется наличием на спектrogramмах минимумов у основной моды и соответствующих им максимумов у субгармонической (см. рис. 6.16, значения $\lambda = 0,35; 0,42; 0,47; 0,52$ и т. д.). Амплитуда субгармонического возмущения $A_{f/2}$ на интервале $\lambda = 0 \div 0,38$ всегда ниже амплитуды основной моды A_f , а при $\lambda > 0,5$ – выше ее.

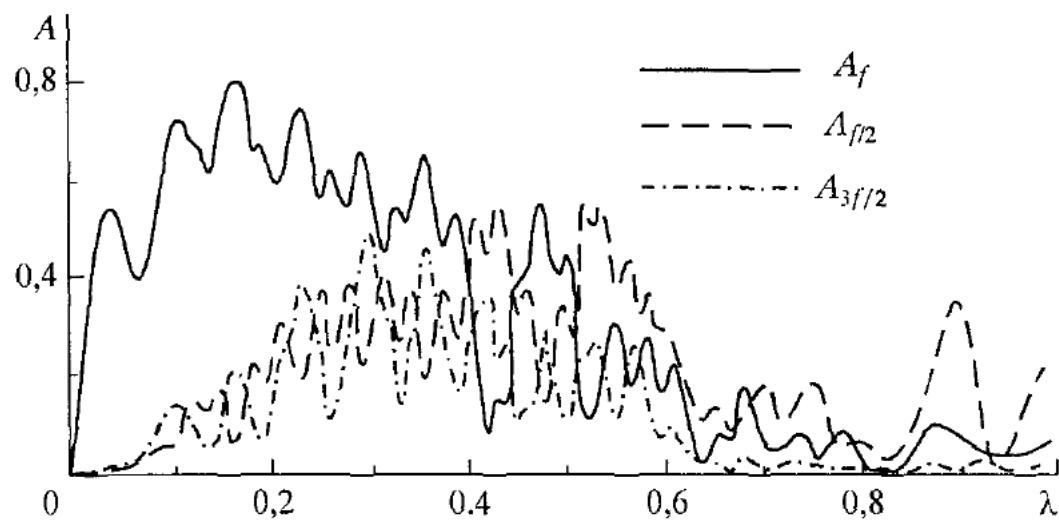


Рис. 6.16. Зависимость амплитуд развивающихся возмущений в разгонном вихре от автомодельной переменной

Это, в частности, приводит со временем к увеличению размеров первичных вихревых структур. Наконец, следует отметить, что, хотя на заключительной стадии $A_{f/2} > A_f$, абсолютный уровень субгармоники мал, вследствие чего не наблюдается развитие вторичной неустойчивости и спаривание вихрей, как это происходит в сдвиговом слое и в слое смешения. С ростом λ , или в терминах координат вихря – по мере приближения к ядру, возмущения на всех частотах затухают. Последнее связано с тем, что в ядре вихря генерируется интенсивное вращательное движение, подавляющее пульсации [Владимиров и др., 1980].

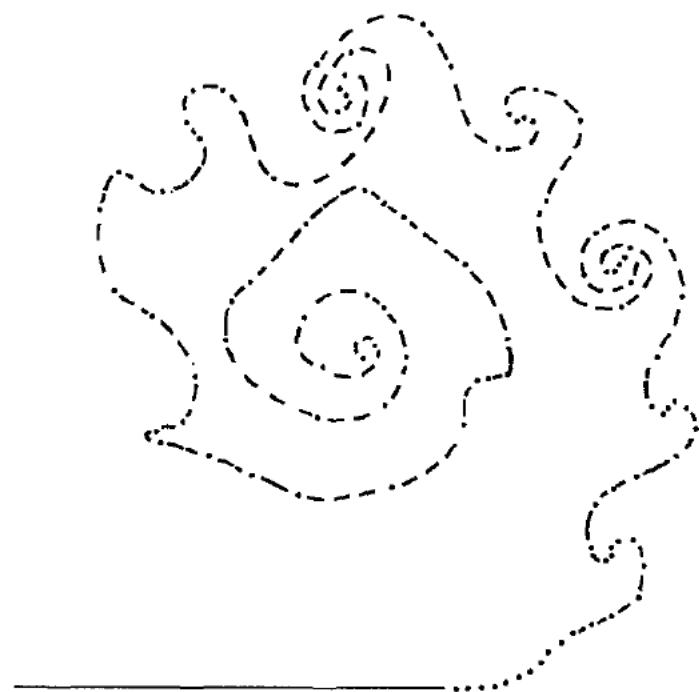


Рис. 6.17. Развитие неустойчивости разгонного вихря при возбуждении частот $f = 25/T$ и $12,5/T$

Момент времени t_0 , в окрестности которого производится Фурье-анализ функции (6.54), характеризует отношение длины волны возмущения к разме-ру разгонного вихря. Анализ развития возмущений и динамики их амплитуд при различном отношении t_0/τ [Куйбин, 1993] показал, что наибольшая ам-плитуда возмущений реализуется при $t_0 = 24\tau$. Это соответствует тому, что на правой половине внешнего витка спирали разгонного вихря укладывается 6 длин волн (см. рис. 6.14). В эксперименте Pierce [1961] вторичные вихревые структуры проявляются наиболее отчетливо при том же соотношении мас-штабов.

Чтобы изучить взаимодействие возмущений с различными длинами волн, исследовалось развитие возмущений при одновременном возбуждении основной моды и субгармоники с одинаковой амплитудой. В отличие от слоя сдвига спаривание вихрей не происходит. (Его можно было бы наблюдать при $T \gg \tau$, когда длина волны возмущения мала по сравнению с радиусом кривизны внешнего витка спирали разгонного вихря.) Но качественные из-менения имеют место и здесь: одни вихревые структуры (через одну) усили-ваются, другие – ослабевают (см. рис. 6.17).

6.3.3. Неустойчивость следа за тонкой пластиной

На первый взгляд, след за тонкой пластиной представляет собой частный случай слоя смешения, когда скорости с обеих сторон пластины одинаковы. Тем не менее переносить результаты исследования слоя смешения на задачу о следе нельзя. Это связано, в первую очередь, с симметрией профиля сред-ней скорости относительно оси следа и, как следствие, с наличием двух мод неустойчивости различной четности. О существовании двух мод неустойчи-вости в течениях с симметричным профилем скорости сообщалось в работах Michalke, Schade [1963], Tatsumi, Kakutani [1958]. Там же было показано, что в следе наиболее неустойчивой является антисимметричная мода (с нечетным профилем нульсаций продольной скорости). На этом основании в подавляю-щем большинстве работ по неустойчивости следа, особенно в эксперимен-тальных (см., например, Sato, Kuriki [1961], Mattingly, Criminale [1972]), вто-рой модой – симметричной – пренебрегали. Вместе с тем в экспериментах обычно возбуждается возмущение, являющееся суперпозицией двух мод. В работах Wygnanski, Champagne, Marasli [1986], Marasli, Champagne, Wygnan-ski [1989] предприняты попытки экспериментально генерировать отдельно каждую из мод. С другой стороны, ясно, что если на линейной стадии обе моды развиваются независимо, то на нелинейной взаимодействие между ними будет существенно влиять на характер развития течения.

Выше было показано, что основной механизм развития неустойчивости на нелинейной стадии в слое смешения – субгармонический. Из общих сооб-

ражений подобный механизм представляется возможным и для следа [Герценштейн, Штемлер, 1977]. В работе Kelly [1968] было, однако, показано, что, хотя для симметричного профиля принципиально и возможно резонансное взаимодействие нейтральных возмущений симметричной и антисимметричной мод, коэффициент связи мод, вычисленный в рамках слабонелинейной теории типа теории Стюарта – Ватсона, тождественно равен нулю. Полученный в цитируемой работе при многочисленных весьма сильных предположениях негативный результат вряд ли можно считать окончательным, и, кроме того, он не дает ответа на вопрос о том, как протекает нелинейная стадия развития неустойчивости в следе.

Развитие возмущений в течении типа следа за телом (точнее, в течении с профилем продольной скорости $u = 1 - 0,7\exp(-0,9y^2)$) изучалось ранее численно в [Герценштейн и др., 1985]. Здесь был получен целый ряд интересных результатов. В частности, установлено выделение длинноволновых составляющих спектра. Причем, при нелинейном взаимодействии таких возмущений наибольшее нарастание наблюдается у их разностной составляющей. Важным представляется и обнаружение вторичной неустойчивости конечно-амплитудных волновых режимов к поперечным трехмерным возмущениям.

С точки зрения построения методов управления рассматриваемым течением необходимо исследовать механизмы нелинейной стадии развития неустойчивости отдельно каждой из мод и при их взаимодействии. Принципиален и вопрос о возможности вторичной неустойчивости, связанной с резонансным усилением двумерных субгармонических возмущений.

Основываясь на работе П.А. Куйбина, В.Я. Рудяка [1992], рассмотрим плоский ламинарный след за пластиной, расположенной параллельно потоку несжимаемой жидкости. Скорость течения представим в виде: $u = u_0 + u'$, $v = v'$, где $u_0(x, y)$ – невозмущенная скорость установившегося течения. Эту скорость будем считать известной и аппроксимируем ее функцией $u_0 = U_\infty - \Delta u \exp(-0,6931y^2/b^2)$ [Nishioka, Miyagi, 1978], где U_∞ – скорость набегающего потока. Дефект скорости Δu убывает с расстоянием x от задней кромки пластины по закону $\Delta u = U_\infty(4x/l + 1)^{1/2}$, а полуширина следа b нарастает $b = l[0,6931(4x/l + 1)/Re]^{1/2}$. Здесь l – длина пластины, $Re = U_\infty l / \nu$ – число Рейнольдса. Ось x направлена вниз по потоку, а y – поперек, начало координат – на задней кромке пластины.

Будем в дальнейшем предполагать, что источник возмущений находится в окрестности задней кромки пластины. Это позволяет задавать возмущения завихренности $\omega'(0, y, t)$ в сечении $x = 0$. В такой постановке задача может быть решена методом дискретных вихревых частиц, описанным выше. Поле пульсаций завихренности моделируется тогда набором дискретных вихревых частиц, уравнения движения которых имеют вид (см. (6.51))

$$\dot{\bar{\mathbf{z}}}_k = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1}^{N_f} \frac{\Gamma_n}{\mathbf{z}_k - \mathbf{z}_n} \left[1 - \exp\left(-\frac{|\mathbf{z}_k - \mathbf{z}_n|^2}{\sigma_k^2 + \sigma_n^2}\right) \right] - \\ - \frac{1}{4\pi i} \sum_{n=1}^{N_f} \Gamma_n \left[\frac{1}{\zeta_k(\zeta_k + \zeta_n)} - \frac{1}{\bar{\zeta}_k(\zeta_k - \bar{\zeta}_n)} \right] + u_0(\mathbf{z}_k), \\ k = 1, 2, \dots, N(t), \quad \zeta_k^2 = -\mathbf{z}_k, \quad (6.56)$$

где $\mathbf{z}_k = x_k + iy_k$, x_k , y_k – координаты центра k -й вихревой частицы; $N_f = 2N_t$ – полное число сопровождаемых с пластины вихрей; N_t – номер шага по времени. Циркуляции сходящихся с пластины вихревых частиц определяются соотношением $\Gamma_n = \Delta x_n I_0^\pm$, где $\Delta x_n = \Delta t u_0(0, y_{n0})$ и

$$I_\gamma^\pm = \pm \int_0^\infty y^\gamma \omega'(0, y, t) dy, \quad \gamma = 0, 1, 2,$$

Δt – длительность шага по времени; $t = N_t \Delta t$, а знаки “плюс” и “минус” относятся к частицам над и под пластиной.

Начальное положение вихревой частицы задается координатами $x_{n0} = 0$ и $y_{n0} = I_1^\pm / I_0^\pm$. Дисперсии частиц определяются из условия наилучшей аппроксимации сходящейся на n -м шаге завихренности и равны

$$\sigma_n^2 = (\Delta x_n)^2 / 12 + I_2^\pm / I_0^\pm - y_{n0}^2.$$

Функцию $\omega'(0, y, t)$ удобно выбрать таким образом, чтобы циркуляции вихревых частиц имели вид

$$\Gamma_n^\pm = A_1^\pm \sin(2\pi f_1 t_n + \phi_1^\pm) + A_2^\pm \sin(2\pi f_2 t_n + \phi_2^\pm). \quad (6.57)$$

Тогда, если $A_n^+ = A_n^-$ и $\phi_n^+ = \phi_n^-$, получаются возмущения симметричной моды (которую по форме следа называют варикозной), а при $A_n^+ = A_n^-$, но $\phi_n^+ - \phi_n^- = \pi$ – антисимметричной (синусоидальной), f_i – частоты вводимых возмущений.

Таким образом, задача изучения развития неустойчивости в следе под действием заданных внешних возмущений сводится к решению системы нелинейных дифференциальных уравнений (6.56). Система интегрировалась методом Рунге – Кутта второго порядка с равномерным шагом по времени $\Delta t U_\infty / l = 0,0625$.

Расчеты соответствуют числу Рейнольдса $Re = 2,5 \cdot 10^5$ ($Re_0 = 443$, $\theta = 0,5l\sqrt{\pi/Re}$ – толщина вытеснения) и выполнялись при числах Струхала $St_k = f_k \theta/U_\infty = 0,015/k$. Безразмерные амплитуды возмущений $a_k^\pm = A_k^\pm/\theta U_\infty$ варьировались от 0,281 до 2,81. В дальнейшем верхние индексы будем опускать, а безразмерные амплитуды антисимметричной и симметричной мод обозначать соответственно a_k и s_k .

Нелинейное взаимодействие возмущений одинаковой моды

В случае, когда в течение вводятся малые возмущения частоты f какой-либо одной моды, первичная неустойчивость будет развиваться именно на этой частоте. Типичные результаты расчетов приведены на рис. 6.18. Расчет течения проводился вплоть до расстояний $x' = x/0 = 600$. При возбуждении антисимметричной моды наблюдается формирование синусоидального следа (см. рис. 6.18 a , $a_1 = 2,81$). На начальной линейной стадии развития возмущения форма возмущения остается синусоидальной, увеличивается лишь его амплитуда. Затем начинают проявляться нелинейные эффекты, форма возмущения перестает быть синусоидальной и формируется *вихревая дорожка* типа дорожки Кармана. Если в течении возбуждается возмущение варикозной моды, то его развитие приводит к формированию симметричной относительно осевой линии следа вихревой дорожки (рис. 6.18 b).

Характерной особенностью нелинейной стадии развития неустойчивости является генерация комбинационных частот различной четности. Так, если в течении возбуждена частота f антисимметричной моды, то в процессе эволюции течения генерируются возмущения частот $2f$, $3f$, и т. д., причем возмущение на частоте $2f$ оказывается симметричным, а $3f$ – антисимметричным. Если же исходное возмущение частоты f было симметричным, то оно порождает симметричные же возмущения комбинационных частот. Это связано с тем, что нелинейная эволюция продольного возмущения скорости управляетя нелинейным квадратичным членом уравнения переноса $v' du'/dy$, имеющим для антисимметричной моды четность, противоположную u' .

Как и предсказывается линейной теорией, течение менее восприимчиво к симметричной моде. Это, в частности, объясняет то обстоятельство, что появление комбинационных частот в случае возбуждения симметричной моды наблюдается значительно дальше вниз по потоку, нежели в случае возбуждения антисимметричной моды.

Уменьшение начальной амплитуды вводимого возмущения приводит лишь к затягиванию линейной стадии развития возмущения и не меняет качественно характер эволюции течения.

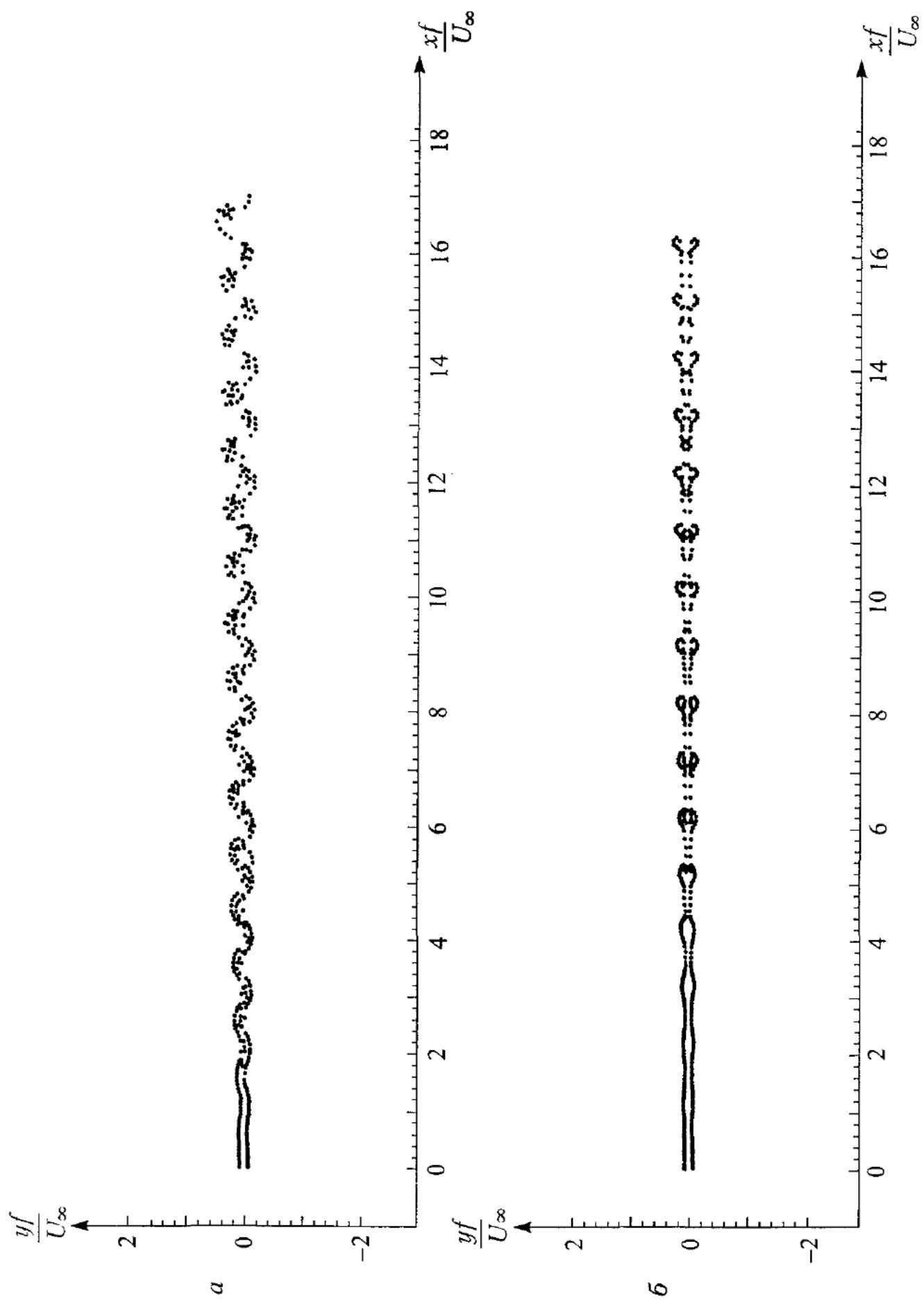


Рис. 6.18. Развитие неустойчивости в следе за пластиной: *a* – синусоидальная (антисимметричная) мода;
б – варикозная (симметричная)

Если при одновременном возбуждении обеих мод на заданной частоте амплитуда одной из них была существенно больше, то, так же, как в работе С.Я. Герценштейна и др. [1985], такое соотношение сохраняется достаточно далеко вниз по потоку. Если же амплитуды вводимых возмущений одного порядка, то профиль средней скорости течения сглаживается, “наполняется”, т. е. на оси скорость течения уменьшается, а вдали от оси увеличивается. При этом в зависимости от сдвига фаз между возмущениями симметричной и антисимметричной мод может проявляться различная степень асимметрии профиля средней скорости течения. Нелинейная стадия развития неустойчивости оказывается чрезвычайно сложной. Наблюдается генерация возмущений комбинационных частот обеих мод, их взаимодействие друг с другом и с основными гармониками. Такое взаимодействие в зависимости от соотношения фаз может приводить как к подавлению возмущений, так и к их росту.

Общепринятой в настоящее время [Маслоу, 1984] является точка зрения, согласно которой в следе отсутствует субгармонический резонанс, тогда как в слое смешения он является стандартным каналом развития вторичной неустойчивости [Веретенцев, Рудяк, 1987а]. Возможность или невозможность реализации субгармонического резонанса при взаимодействии двух возмущений антисимметричной моды – основного и субгармонического – легко понять из простой кинематической модели, когда след моделируется двумя рядами вихрей с завихренностью разных знаков (дорожка Кармана, см. рис. 6.19 a). В результате первичной неустойчивости на частоте f (или с длиной волны λ) исходного основного возмущения образуется дорожка Кармана из вихрей, расположенных в шахматном порядке. Вторичная неустойчивость, следствием которой является спаривание вихрей в каждом из рядов, реализуется на длине волны 2λ . Возмущение, развивающееся на этой длине волны,

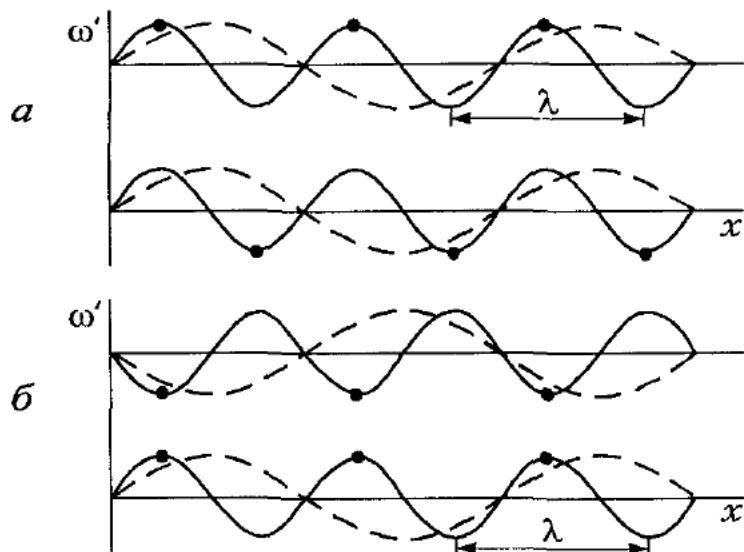


Рис 6.19 Кинематическая схема взаимодействия основного и субгармонического возмущений в следе за пластиной: а – синусоидальная мода; б – варикозная

выводит вихри из равновесия, образуя из них пары. Легко видеть, что наиболее благоприятный для этого сдвиг фаз между гармоникой и субгармоникой $\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2 = 0, \pi/2, \pi, \dots$, а неблагоприятный – $\pi/4 + n\pi, n = 1, 2, \dots$. В случае когда сдвиг фаз равен $\pi/4$, центры первичных вихрей расположены в узлах субгармонического возмущения и вторичная неустойчивость развиваться не должна. С другой стороны, развитие неустойчивости на варикозной моде приводит к образованию симметричной вихревой дорожки (рис. 6.19б). Здесь наиболее благоприятный для развития вторичной неустойчивости сдвиг фаз равен $\Delta\phi = 0$. При этом происходит попарное объединение вихрей того же типа, которое приводит к известной “чехарде”, наблюдаемой при взаимодействии двух вихревых пар. Напротив, сдвиг фаз субгармонического возмущения на π ($\Delta\phi = \pi$) делает подобное объединение вихрей невозможным.

Проведенные расчеты подтверждают описанную качественную картину взаимодействия основной гармоники с субгармоникой. Характер взаимодействия вводимых возмущений существенно зависит от сдвига фаз между основной частотой и субгармоникой. В частном случае, когда оба вводимых возмущения антисимметричные ($a_1 = a_2$), зависимость безразмерной, осредненной по y -координате, энергии пульсаций продольной скорости на частотах $f_1 = f$ и $f_2 = f/2$

$$\varepsilon_k = \frac{E_k^d(f_1, f_2)}{E_k^d(f_k)}, \quad E_k^d = \frac{1}{2m\theta} \int_{-m\theta}^{m\theta} \left\langle u'^2 \right\rangle \Big|_{x'=d} dy, \quad (6.58)$$

вычисленных в заданном сечении $x' = d$ (выбрано значение $m = 10$), представлена на рис. 6.20а. Здесь $E_k^d(f_k)$ – энергия пульсаций продольной скорости, получаемая при возбуждении лишь одной гармоники f , а $E_k^d(f_1, f_2)$ – при возбуждении гармоники и субгармоники. Анализ графика показывает, что, хотя вводимые возмущения активно взаимодействуют друг с другом, резонансного усиления субгармоники не наблюдается ни при каких $\Delta\phi$. Более того, имеет место подавление субгармонических возмущений. Это обусловлено тем, что в процессе нелинейного взаимодействия основного возмущения a_1 с субгармоническим a_2 генерируется субгармоническое возмущение s_2 . В результате исходное субгармоническое возмущение и порожденное имеют противоположные четности, что не только не может привести к общему усилению этих возмущений, но приводит к их подавлению.

При взаимодействии двух возмущений s_1 и s_2 на нелинейной стадии наряду с комбинационными супергармониками генерируется и субгармоника. Наиболее благоприятным сдвигом фаз основной частоты и субгармоники является действительно $\Delta\phi = 0$ (см. рис. 6.20б), а при $\Delta\phi > \pi/4$ наблюдается подавление субгармоники. Корреляция энергий возмущений основной частоты

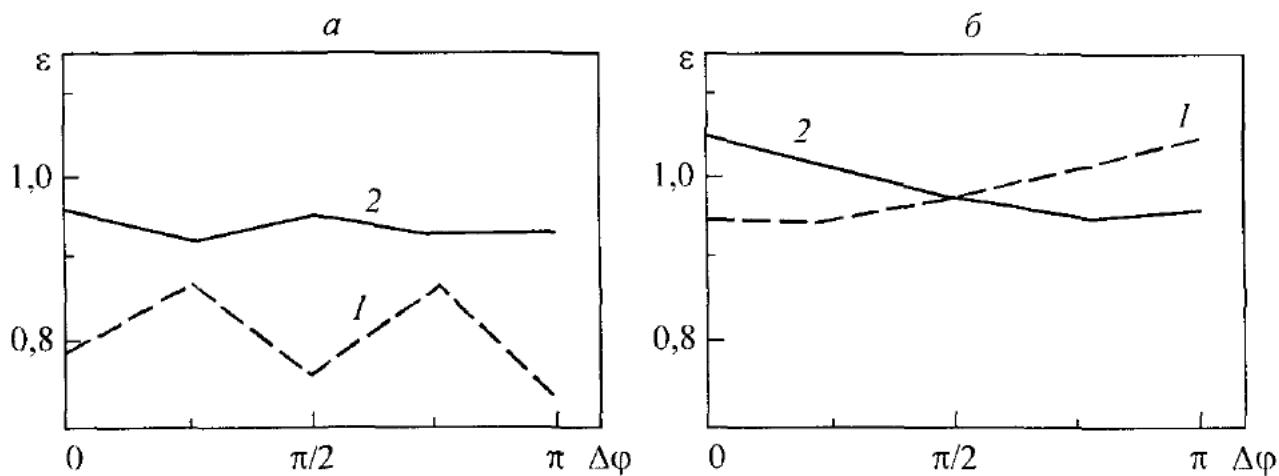


Рис. 6.20. Кинетическая энергия пульсаций при взаимодействии основного (1) и субгармонического (2) возмущений одинаковых мод в следе за пластиной: а – антисимметричные моды; б – симметричные

и субгармоники свидетельствует об их активном взаимодействии, хотя увеличение энергии субгармоники незначительно даже при благоприятном сдвиге фаз $\Delta\phi$. Связано это с тем, что генерируемая субгармоника имеет фазу, отличную от фазы вводимой субгармоники. В простейшей модели двух связанных осцилляторов сдвиг фаз между вводимой и генерируемой субгармоникой равен $\pi/2$. Поэтому результирующее субгармоническое возмущение имеет неблагоприятный сдвиг фаз для развития вторичной неустойчивости относительно фазы основного возмущения.

Уменьшение амплитуды вводимых возмущений качественно не изменяет картину развития течения и приводит лишь к увеличению длительности линейной стадии.

Резонансное взаимодействие возмущений различной моды

Поскольку при нелинейном взаимодействии в следе двух возмущений в общем случае генерируются комбинационные частоты обеих мод, то ясно, что если субгармонический резонанс возможен, то он может наблюдаться, когда генерируемое комбинационное возмущение будет иметь ту же четность, что и исходное. С этой точки зрения следует рассмотреть взаимодействия a_1 с s_2 и s_1 с a_2 (a_k, s_k – возмущения антисимметричной и симметричной мод частоты f_k соответственно). Можно ожидать, что резонансные взаимодействия в первом случае будут значительно слабее, так как симметричная мода имеет очень низкий коэффициент усиления. И если $a_1 = s_2$ в начальный момент времени, то амплитуды генерируемых субгармонических возмущений даже на расстоянии $x' \sim 200$ все еще очень малы. Проведенные расчеты подтверждают эти качественные соображения. При взаимодействии a_1 с s_2 обнаружено слабое усиление субгармоники. Наиболее благоприятный сдвиг фаз равен $\Delta\phi = \pi/4$ и π (рис. 6.21а).

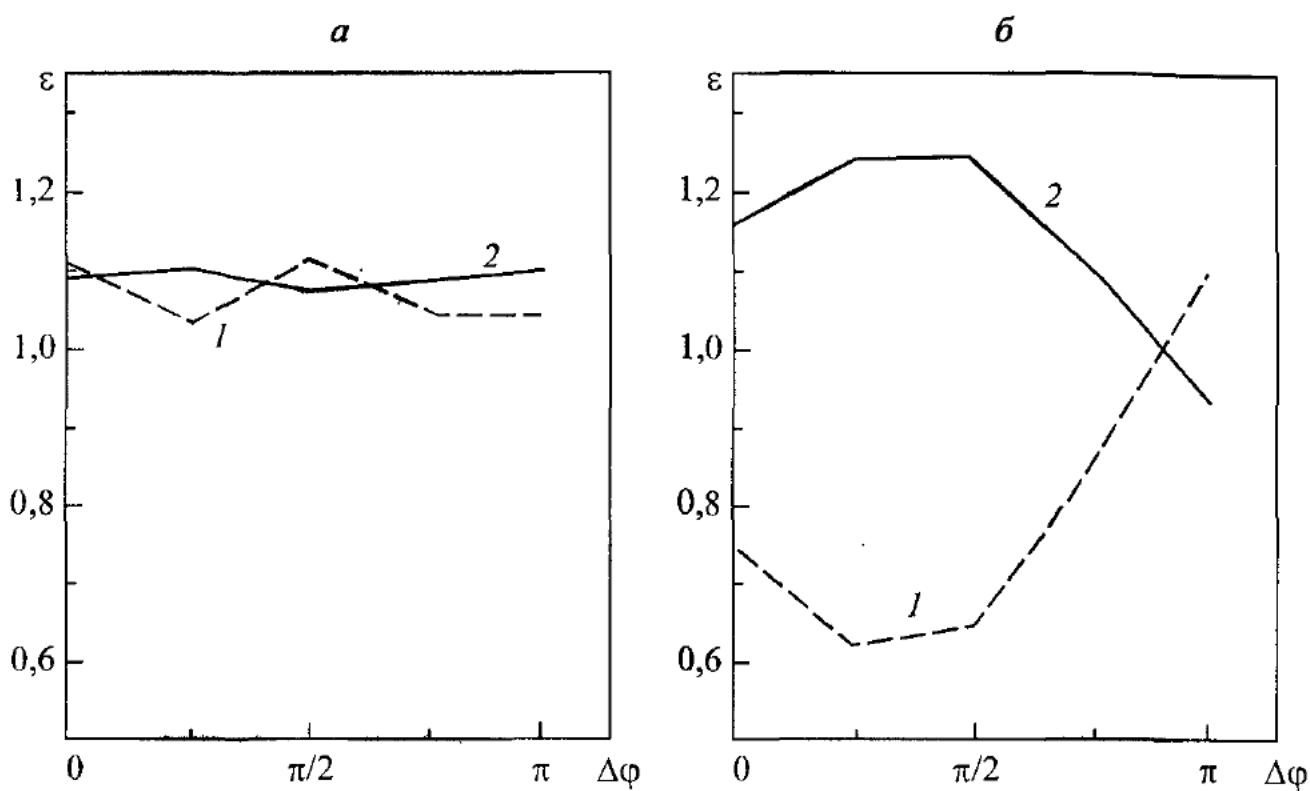


Рис. 6.21. Кинетическая энергия пульсаций при взаимодействии основного (1) и субгармонического (2) возмущений различных мод в следе за пластиной: *a* – гармоника антисимметричной моды и субгармоника симметричной моды; *б* – гармоника симметричной моды и субгармоника антисимметричной моды

Напротив, при взаимодействии s_1 с a_2 наблюдается резкое усиление субгармонических возмущений, которое имеет явно резонансный характер. Усиление субгармонических возмущений происходит в широком диапазоне изменения $\Delta\phi$: $0 \leq \Delta\phi \leq 3\pi/4$. Максимальное усиление достигается при $\Delta\phi = \pi/2$ (см. рис. 6.21б). На рис. 6.22 для этого случая представлена эволюция максимума амплитуды возмущений продольной скорости

$$A = \left\langle u'_{f_k}^2 \right\rangle_{\max}^{1/2}$$

вдоль по потоку. Сплошная кривая соответствует субгармоническим возмущениям, а штриховая – возмущениям основной частоты. Светлыми и темными точками отмечены уровни амплитуд уединенных возмущений субгармонической и основной частоты соответственно.

Эффект усиления субгармонических возмущений при взаимодействии мод s_1 и a_2 наблюдается при широком изменении уровня начальных амплитуд возмущений. Этот эффект имеет место и в плоскопараллельном приближении, когда $\Delta u = \text{const}$ и при разных значениях дефекта скорости, который варьировался от 0,2 до 0,75.

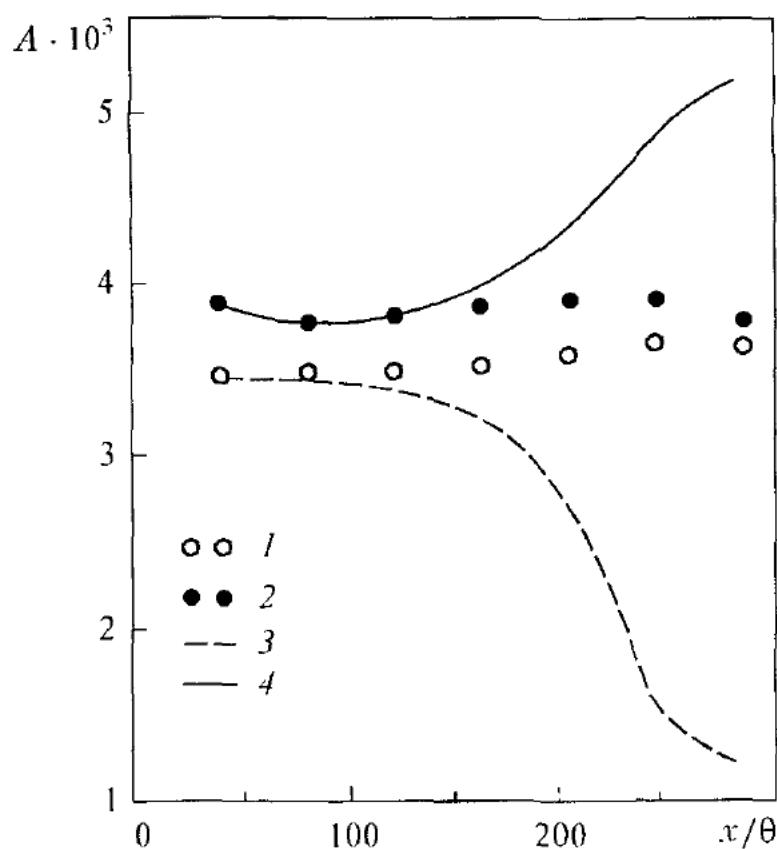


Рис. 6.22. Амплитуды развивающихся возмущений в следе за пластицией: 1 – при возбуждении гармоники симметричной моды; 2 – при возбуждении субгармоники антисимметричной моды; 3 – амплитуда гармоники; 4 – амплитуда субгармоники при возбуждении гармоник обоих возмущений со сдвигом фаз $\pi/2$

Методика генерации возмущений каждой из мод, предложенная в работах Wygnanski, Champagne, Marasli [1986], Marasli, Champagne, Wygnanski [1989], позволяет экспериментально наблюдать усиление субгармонических возмущений. Для этого следует независимо ввести в течение возмущение основной частоты симметричной моды и антисимметричное субгармоническое возмущение, сдвинутое по фазе относительно основного на $\pi/4 \div \pi/2$.

6.4. ДВИЖЕНИЕ ВИХРЕЙ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТРУБАХ

Необходимость изучения вихревого движения в цилиндрических трубах диктуется множеством проблем прикладного характера, возникающих при закрутке потока в трубах. Среди них одна из главных – генерация низкочастотных регулярных пульсаций скорости и давления. Это явление имеет место, например, в отсасывающих трубах гидротурбин [Murakami, 1961; Fandell, 1989], при горении топливной смеси в вихревой горелке [Кныш, Урывский, 1981], при работе циклонных сепараторов [Гунга, Лилли, Сайред, 1987] и других устройств, принцип работы которых предусматривает использова-

ние вращающихся потоков. Физический механизм возникновения колебаний в общих чертах ясен: экспериментально показано, что пульсации вызываются прецессией вихря, образующегося в потоке. Явление прецессии вихря, известное под названием “прецессия вихревого ядра” (ПВЯ), будет подробно описано в гл. 7. Здесь же остановимся на теоретических подходах и численном моделировании явления.

Теоретическая модель ПВЯ для струйного течения в трубе с кольцевым сдвиговым слоем построена Ю.А. Кнышем и А.Ф. Урывским [1981]. Они исследовали процесс, начиная с первичной неустойчивости сдвигового слоя которая приводит к образованию дискретных вихрей. Далее – в результате вторичной неустойчивости – вихри объединяются в вихревое “облако”, центр которого смешен относительно оси трубы, а само “облако” совершает круговое прецессионное движение. При моделировании вторичной неустойчивости авторы используют плоскую модель точечных вихрей. Однако, как уже говорилось выше, в системе точечных вихрей развиваются неустойчивости, нехарактерные физическим свойствам течения.

Большинство работ по изучению пульсаций скорости и давления в закрученных течениях типа следа основывается на предположении о сформировавшемся прямолинейном вихре, ось которого не совпадает с осью трубы [Murakami, 1961], или вихре винтовой формы [Бондаренко, Завьялов, 1979 Fanelly, 1989]. Далее будут рассмотрены возможные механизмы потери вихрем осевого положения, вопрос о движении винтового вихря в цилиндрической трубе и влияние трехмерности (величины шага винтовых вихревых линий) на характер развития неустойчивостей течения в трубе.

6.4.1. Уравнения движения вихревых частиц в круговой области

В общем виде уравнения движения вихревых частиц в ограниченной области с наличием острых кромок приведены в п. 6.1.2. Если граница области – окружность $|z|=1$, то острых кромок нет и естественно положить в (6.32) отсутствие дополнительного потенциального течения: $\psi_p = 0$. Отображение круга на плоскость задается формулой $\zeta = i(1-z)/(1+z)$. Учет интегральных экспонент в (6.32) важен лишь при сближении частиц между собой или при приближении к границе области. Поэтому, как и при выводе (6.51), заменим аргументы интегральных экспонент на

$$-\frac{|z_k - z_n|^2}{\sigma_k^2 + \sigma_n^2} \quad \text{и} \quad -\frac{|z_k - 1/\bar{z}_n|^2}{\sigma_k^2 + \sigma_n^2}$$

соответственно. Тогда гамильтониан (6.32) приобретает для задачи о круге следующий вид:

$$H_N = -\frac{1}{8\pi} \sum_{k,n=1}^N \Gamma_k \Gamma_n \left[\ln \left| \frac{\mathbf{z}_k - \mathbf{z}_n}{1 - \mathbf{z}_k \bar{\mathbf{z}}_n} \right|^2 - \text{Ei} \left(-\frac{|\mathbf{z}_k - \mathbf{z}_n|^2}{\sigma_k^2 + \sigma_n^2} \right) + \text{Ei} \left(-\frac{|\mathbf{z}_k - 1/\bar{\mathbf{z}}_n|^2}{\sigma_k^2 + \sigma_n^2} \right) \right]. \quad (6.59)$$

Подставляя полученное выражение в гамильтоновы уравнения (6.13), выводим уравнения движения частиц в круге

$$\begin{aligned} \dot{\bar{z}}_k = & -\frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1}^N \Gamma_n \left\{ \frac{1}{\mathbf{z}_k - \mathbf{z}_n} \left[1 - \exp \left(-\frac{|\mathbf{z}_k - \mathbf{z}_n|^2}{\sigma_k^2 + \sigma_n^2} \right) \right] - \right. \\ & \left. - \frac{1}{\mathbf{z}_k - \bar{\mathbf{z}}_n} \left[1 - \exp \left(-\frac{|\mathbf{z}_k - \bar{\mathbf{z}}_n|^2}{\sigma_k^2 + \sigma_n^2} \right) \right] \right\}, \quad k = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (6.60)$$

Заметим, что, как и система точечных вихрей [Гешев, Черных, 1983], система вихревых частиц в круге допускает интегралы движения, независящие от времени – инварианты. Во-первых, это сам гамильтониан H_N (6.59), который соответствует кинетической энергии движения завихренной жидкости. Во-вторых, поскольку область движения жидкости – круг, то в силу инвариантности гамильтониана (6.59) относительно вращений существует интеграл движения, связанный с законом сохранения момента импульса

$$M_N = \sum_{n=1}^N \Gamma_n |\mathbf{z}_n|^2 = \text{const.} \quad (6.61)$$

6.4.2. Прецессия прямолинейного вихря в трубе

Рассмотрим модельное течение с прямолинейным вихрем на оси трубы. Предположим, что в начальный момент времени в потоке присутствует дополнительная завихренность, неоднородно распределенная по окружной координате. В следе за гидротурбиной такая завихренность может генерироваться из-за отрыва потока с лопаток рабочего колеса, а окружная неравномерность может быть обусловлена асимметрией вихревой камеры.

Следуя работе П.А. Куйбина [1993], построим математическую модель процесса выхода основного вихря из центра, для чего рассмотрим закрученное течение невязкой несжимаемой жидкости в круглой цилиндрической трубе радиуса R со средней скоростью U вдоль оси трубы (ось Ox). (Далее все величины указываются в безразмерной форме, с масштабированием по R и U .) Пусть в начальный момент времени в центре трубы расположен вихрь с равномерным распределением завихренности (вихрь Рэнкина) диаметра d_0 с циркуляцией Γ_0 .

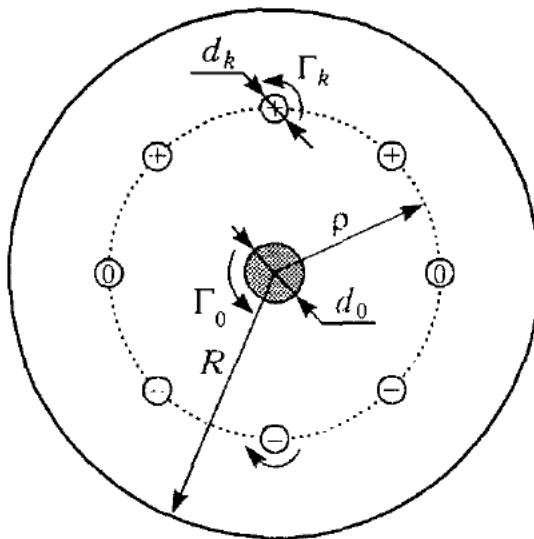


Рис. 6.23 К модели возникновения пресессии прямолинейного вихря

Окружную неравномерность распределения завихренности будем моделировать M вихрями (в соответствии с числом лопаток рабочего колеса в случае следа за турбиной), осевые линии которых расположены на цилиндрической поверхности радиуса ρ (рис. 6.23). Размеры возмущающих вихрей – d_k , завихренность внутри вихрей однородна, а циркуляции зададим по синусоидальному закону:

$$\Gamma_k = a \Gamma_0 \sin(2\pi k/M + \chi), \quad k = 1, 2, \dots, M,$$

где a – величина, характеризующая интенсивность неравномерности распределения завихренности; χ – сдвиг фазы. Каждый из вихрей разобьем на n_k равновеликих ячеек. В начальный момент времени помещаем вихревые частицы в центрах завихренности соответствующих ячеек. Интенсивности частиц, принадлежащих к одному вихрю, полагаем одинаковыми $\Gamma_k^j = \Gamma_k / n_k$. Параметры σ_j , характеризующие размеры частиц, определим через площади ячеек $(\sigma_j^2)_k = d_k^2 / 4n_k$.

Уравнения движения (6.60) в работе [Куйбин, 1993] интегрировались методом Рунге – Кутта второго порядка. Точность расчетов контролировалась по выполнению законов сохранения энергии ($H = \text{const}$) и момента импульса (6.61). В расчетах отклонение не превышало 1%.

Наглядная картина, иллюстрирующая эволюцию поля завихренности в круге, приведена на рис. 6.24. Вихревые частицы, помеченные квадратами, относятся к осевому вихрю. Частицы со знаком “+” моделируют вихри, вызывающие возмущения с положительными циркуляциями, а “–” – с отрицательными. Здесь для расчета выбраны следующие параметры: $a = 0,1$; $\rho = 0,6$; $M = 8$; $\chi = 0$; $n_0 = 16$; $n_k = 4$; $d_0 = d_k = 0,2$ ($j = 1, \dots, M$). Хорошо видно, что

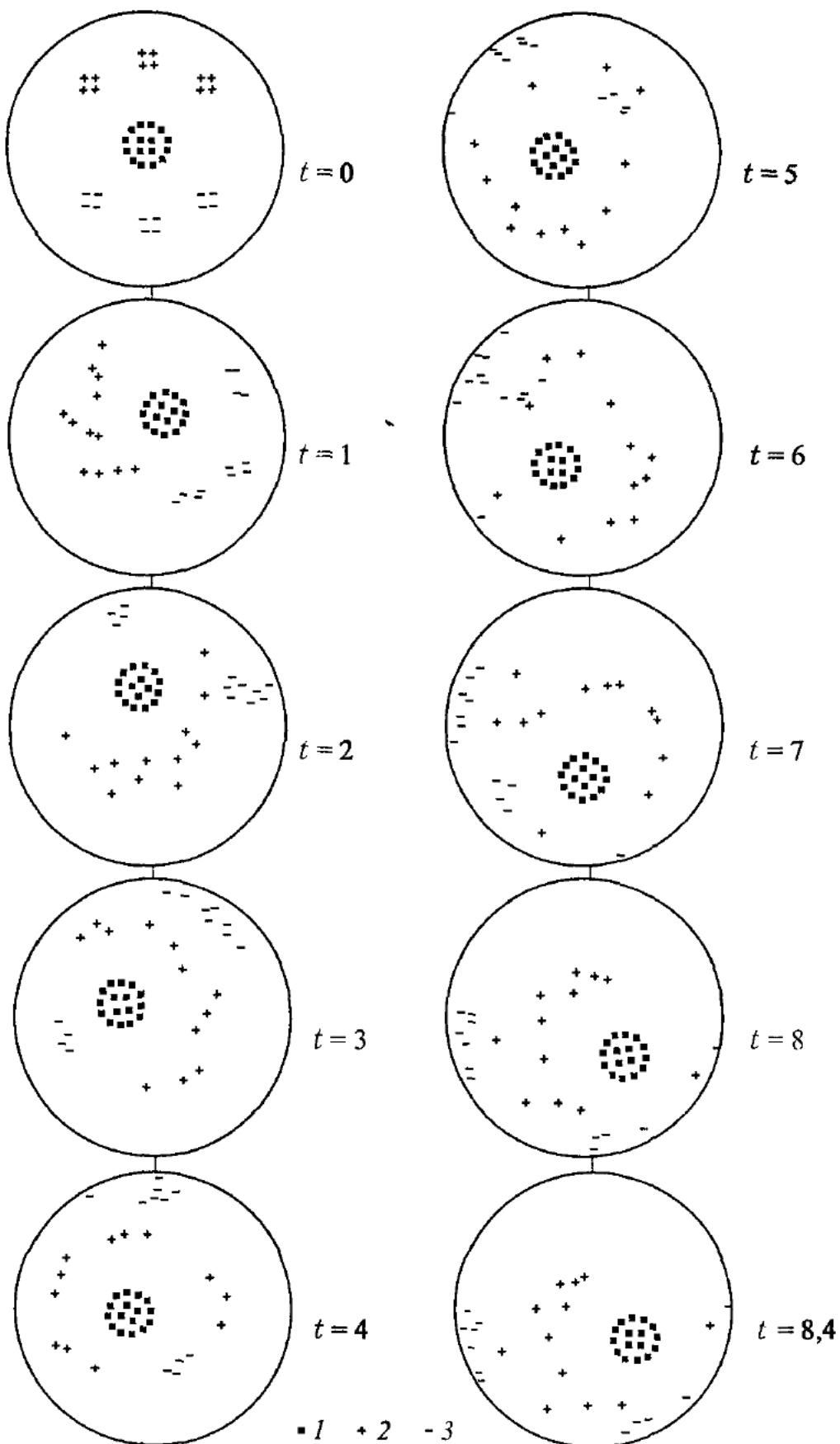


Рис. 6.24 Расчет динамики поля завихренности в модели прецессирующего прямолинейного вихря. 1 – частицы основного вихря, 2 – частицы возмущающих вихрей с положительными циркуляциями, 3 – с отрицательными

осевой вихрь быстро выходит из центра и начинает двигаться по траектории, близкой к круговой. Сама траектория движения центра основного вихря, выведенного из осевого положения, показана на рис. 6.25. Возмущающие вихри с отрицательными циркуляциями в соответствии с законом сохранения момента импульса оттесняются к стенке трубы, а с положительными, наоборот, — к центру. Скорость движения основного вихря после выхода на квазистационарную орбиту оказывается близкой к скорости движения одного вихря Рэнкина в круговой области [Murakami, 1961]

$$u_0 = \frac{\Gamma_0}{2\pi} \frac{r}{1-r^2}, \quad (6.62)$$

где

$$r = \frac{1}{2r_0} \left[1 + r_0^2 - \frac{d_0^2}{4} - \sqrt{\left(1 + r_0^2 - \frac{d_0^2}{4} \right)^2 - 4r_0^2} \right].$$

Здесь r_0 — радиус орбиты центра вихря Рэнкина, в качестве которого в нашем случае следует выбрать средний радиус орбиты основного вихря r_m (mean). Расчетные значения скорости отличались от значений, вычисленных по формуле (6.62), не более, чем на 2,2%.

Рассмотрим выражение для частоты прецессии вихря Рэнкина

$$\Omega = \frac{\Gamma_0}{2\pi} \frac{1}{1-r^2}. \quad (6.63)$$

При малых значениях r_m значение r также мало, а следовательно, в соответствии с (6.63) зависимость частоты Ω от r_m оказывается слабой. Поэтому в качестве величины, характеризующей устанавливающееся течение, целесообразно выбрать не Ω , а r_m . Далее исследуется зависимость r_m от начальных параметров задачи.

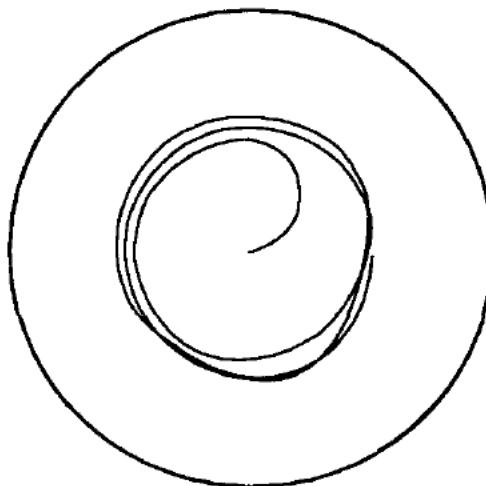


Рис. 6.25 Траектория центра прецессирующего вихря

Расчеты с различной заданной величиной возмущения a показали, что радиус орбиты r_m линейно растет с увеличением a от 0 до 0,05 (рис. 6.26; остальные параметры те же, что и в рассмотренном выше примере). При дальнейшем увеличении амплитуды возмущения рост r_m замедляется и достигает максимума при $a = 0,16$. Уменьшение r_m при больших возмущениях ($a > 0,16$) можно объяснить активным взаимодействием возмущающих вихрей с вероятным объединением вихревых частиц с циркуляциями разного знака, что приводит к уменьшению их воздействия на другие частицы. В расчетах с величиной $a > 0,25$ режим установления не наблюдался – траектория движения основного вихря становилась перегулярной.

Зависимость r_m от начального положения возмущающих вихрей также имеет немонотонный характер (рис. 6.27; параметры: $a = 0,1$; $M = 8$; $\chi = 0$; $n_0 = 16$; $n_k = 4$; $d_0 = d_k = 0,2$). Если радиус окружности ρ (на которой в начальный момент времени располагались центры вихрей, моделирующих возмущения поля завихренности) мал, то эти вихри быстро перемешиваются и слабо воздействуют на основной вихрь. В случае расположения их вблизи стенок трубы ($\rho > 0,7$) значительного смещения основного вихря от центра не может быть в силу действия закона сохранения момента импульса – вихрям с отрицательными циркуляциями некуда далее смещаться.

Увеличение числа возмущающих вихрей M приводит к росту r_m , и при больших M радиус орбиты основного вихря выходит на асимптоту $r_m \rightarrow 0,32$, которая соответствует непрерывному распределению возмущения по угловой координате (см. рис. 6.28; $a = 0,1$; $\rho = 0,6$; $\chi = 0$; $n_0 = 16$; $n_k = 4$; $d_0 = d_k = 0,2$). Влияние остальных параметров (χ , d_k) на величину r_m оказалось незначительным. С ростом числа разбиений n_k увеличивается точность расчетов, но величина r_m остается практически той же.

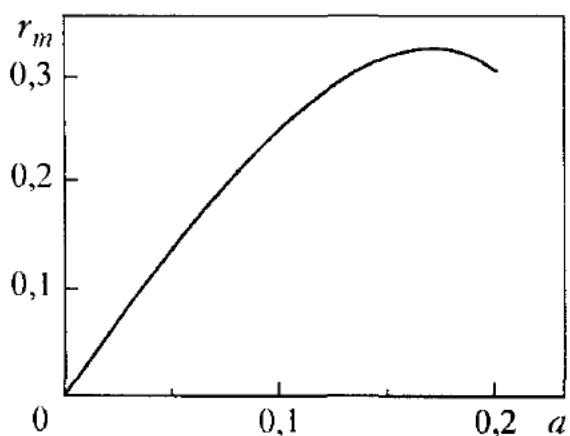


Рис. 6.26. Зависимость среднего радиуса орбиты прецессирующего вихря от амплитуды возмущения

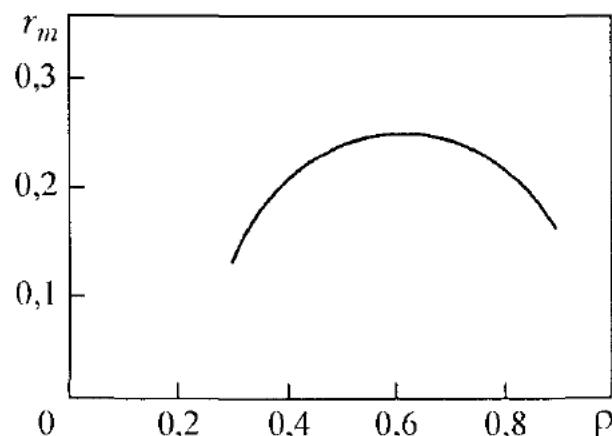


Рис. 6.27. Зависимость среднего радиуса орбиты прецессирующего вихря от начального радиуса положения возмущающих вихрей

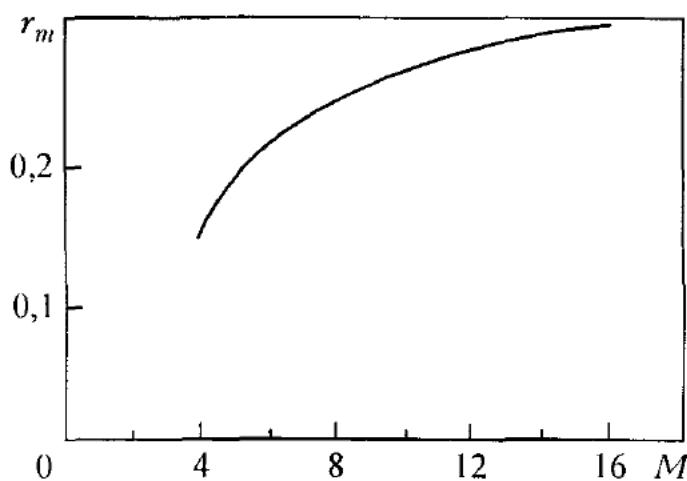


Рис. 6.28. Зависимость среднего радиуса орбиты прецессирующего вихря от числа вихрей, моделирующих возмущающее вихревое поле

В описанных выше численных экспериментах период возмущения завихренности по углу брался равным 2π (азимутальное волновое число $m = 1$). Поскольку реальные возмущения, как правило, имеют не чисто синусоидальное распределение по угловой координате, рассмотрим здесь также возмущения с большими волновыми числами. В этом случае циркуляции вихрей, моделирующих возмущения завихренности, определяются по формуле

$$\Gamma_k = a\Gamma_0 \sin(2\pi km/M + \chi), \quad k = 1, 2, \dots, M.$$

Очевидно, что при четном m воздействие на центральный вихрь будет нулевым, так как вихри одинаковые по интенсивности и знаку оказываются на одном диаметре по разные стороны от центра. При нечетном m воздействие ослабевает с ростом m . Так, если для $m = 1$ ($a = 0,1$, $\rho = 0,6$, $M = 8$) $r_m = 0,25$, то для $m = 3$ получили $r_m = 0,09$.

Другой практически интересный вид возмущений – когда полная завихренность, сходящаяся с каждой лопасти, равна нулю. Смоделируем такие возмущения набором вихрей, расположенных на двух концентрических окружностях различного радиуса так, что на каждом радиальном луче оказываются вихри одинаковой интенсивности, но противоположного знака. Расчет показывает, что и в этом случае осевой вихрь покидает центральное положение и начинает прецессировать.

В заключение рассмотрим пульсации давления на стенке трубы. Поскольку в расчетах частота прецессии основного вихря, как уже говорилось, оказалась близкой к частоте прецессии изолированного вихря Рэнкина в круговой области, по-видимому и пульсационные характеристики течения (по крайней мере, на частоте прецессии) будут близкими к случаю с одним вихрем.

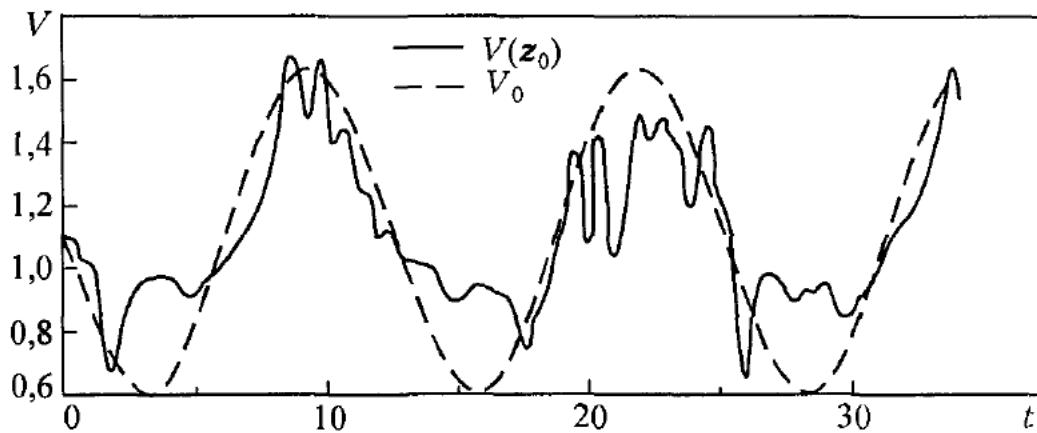


Рис. 6.29. Пульсации индуцированной скорости на стенке канала (V_{z_0}) и в модели прецессирующего вихря с радиусом орбиты $r_m(V_0)$ (см. (6.64))

Чтобы убедиться в этом, рассмотрим скорость, индуцированную движущимся вихрем на границе круга — в точке $z_0 = 1$. Воспользуемся для этого формулой (6.60), пренебрегая экспоненциальными членами и полагая $N = 1$, $z_1 = r_m \exp(i\Omega t)$. Скорость в точке z_0 направлена по касательной к стенке, а ее величина

$$V_0 = \frac{\Gamma_0}{2\pi} \frac{1 - r_m^2}{1 + r_m^2 - 2r_m \cos \Omega t}. \quad (6.64)$$

Сравнение зависимости (6.64) со значениями скорости в точке z_0 в процессе численного счета приведено на рис. 6.29. Полученный результат означает, что и пульсации давления на стенке трубы в расчете будут близки к пульсациям в случае с одним прецессирующим вихрем.

6.4.3. Движение винтового вихря в трубе

Выше была рассмотрена модель течения с прецессирующим прямолинейным вихрем в трубе. В реальности вихрь, теряющий осевое положение, приобретает форму винтовой спирали. Шаг винта при этом зависит от степени закрутки потока. Fanelli [1989] для описания движения винтового вихря в отсасывающей трубе гидротурбины воспользовался результатами аналитической работы Hashimoto [1971], в которой поле скорости, индуцированной винтовой вихревой нитью в цилиндрической трубе, было найдено в виде, подобном (2.69). Однако и при выводе поля скорости и при дальнейшем описании влияния стенок трубы на скорость движения винтового вихря Hashimoto допустил ряд ошибок. Более того, в работах Hashimoto [1971], Fanelli [1989] не учитывалась самоиндуцированная скорость винтового вихря. Наиболее полное и корректное исследование движения винтового вихря в трубе с анализом влияния различных факторов приведено в работе [Kuibin, Okulov, 1998].

Как и в случае с безграничным течением (см. п. 5.2), найдем прежде всего бинормальную компоненту скорости движения вихря. Влияние стенок цилиндрической трубы на скорость вихря определим через значение скорости, индуцированной “отраженным вихрем” в точке, где находится центр вихря. В формулах (5.36), (5.44) это соответствует учету в величине $C_{\text{ко}}$ дополнительного члена H^*

$$H^* = \frac{4(1+\tau^2)^{3/2}}{\tau^2} (S_\chi^* + R_\chi^*) \Bigg|_{\begin{array}{l} r=a \\ \chi=0 \end{array}}.$$

Величины S_χ^* и R_χ^* обозначают члены выражений (2.74), (2.75), содержащие \tilde{a}^* или \tilde{R} . Оценка величин в широком диапазоне параметров показывает, что вклад R_χ^* не превышает 1,5 % и им можно пренебречь. Таким образом,

$$H^* = \frac{2(1+\tau^2)^{3/2}}{\tau} \left[\frac{\tilde{a}^2}{\tilde{R}^2 - \tilde{a}^2} - k \ln \frac{\tilde{R}^2 - \tilde{a}^2}{\tilde{R}^2} \right],$$

$$k = \frac{1}{12} \left[\frac{9\eta}{(1+\eta^2)^{1/2}} - \frac{7\eta^3}{(1+\eta^2)^{3/2}} - \frac{3\tau}{(1+\tau^2)^{1/2}} + \frac{\tau^3}{(1+\tau^2)^{3/2}} \right], \quad \eta = \frac{l}{R}. \quad (6.65)$$

Сопоставление величины $C_{\text{ко}}$, рассчитанной без учета (рис. 6.30, кривая 1) и с учетом H^* при различных значениях a/R , показывает значительное влияние стенок трубы. С ростом τ это влияние усиливается, и при больших l/a и l/R получаем асимптоту

$$C \rightarrow -2l^2/(R^2 - a^2). \quad (6.66)$$

При описании движения вихря в трубе необходимо дополнительно учитывать вклад потенциального течения – равномерного поступательного движения вдоль оси z со скоростью u_0 . Вклад в $C_{\text{ко}}$ и соответственно в бинормальную скорость с использованием параметра $\beta = u_0 2\pi l / \Gamma$ записывается следующим образом:

$$2(\beta-1)(1+\tau^2)^{1/2} / \tau, \quad (6.67)$$

что при больших τ приводит к параллельному сдвигу кривых на рис. 6.30 по вертикали на величину $2(\beta-1)$, а при малых τ вклад становится большим $-2(\beta-1)/\tau$.

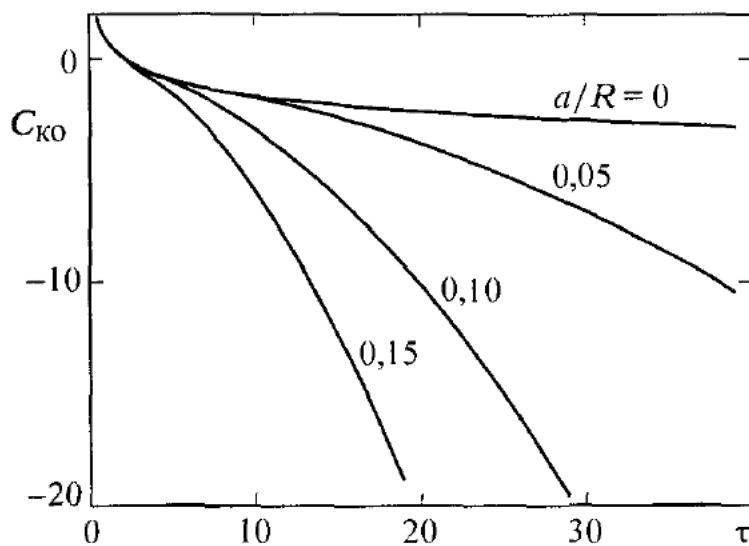


Рис. 6.30 Зависимость величины $C_{\text{ко}}$ от τ для винтового вихря в цилиндрической трубе при различных значениях a/R

Собирая вклады всех факторов, влияющих на движение винтового вихря в цилиндрической трубе, запишем результирующую формулу для бинормальной скорости

$$\hat{u}_b = \ln \frac{l}{\varepsilon} + \frac{1 + 1,455\tau + 1,723\tau^2 + 0,711\tau^3 + 0,616\tau^4}{\tau + 0,486\tau^2 + 1,176\tau^3 + \tau^4} - \left[\frac{1}{2} - 2 \frac{\pi^2 \varepsilon^2 \bar{u}^2}{\Gamma^2} + 4 \frac{\pi^2 \varepsilon^2 \bar{w}^2}{\Gamma^2} \right] + \frac{2(1 + \tau^2)^{1/2}}{\tau} (\beta - 1) - \frac{2(1 + \tau^2)^{3/2}}{\tau} \left(\frac{\tilde{a}^2}{\tilde{R}^2 - \tilde{a}^2} - k \ln \frac{\tilde{R}^2 - \tilde{a}^2}{\tilde{R}^2} \right). \quad (6.68)$$

Зависимость \hat{u}_b от τ при фиксированных значениях $\beta = 0$ и радиуса ядра (с равномерным распределением завихренности) $\varepsilon/R = 0,05$ и при различных значениях a/R приведена на рис. 6.31. Анализ формулы (6.68) и графика позволяет сделать важное заключение о возможности существования стационарных (неподвижных) винтообразных вихревых структур, когда самоиндукция скорости движения винтового вихря, вызванная его кривизной и кручением, полностью гасится скоростью, наведенной стенкой и скоростью на оси. На рис. 6.31 стационарным вихрям соответствуют точки, где кривые пересекают ось абсцисс, т. е. $\hat{u}_b = 0$. Из уравнения (6.68) следует, что для любого вихря можно подобрать значение β_0 , такое, что вихрь будет неподвижен. Зависимость β_0 от τ при различных значениях a/R показана на рис. 6.32. Заметим, что при малых τ при всех значениях a/R $\beta_0 \rightarrow 0,5$. При больших τ в соответствии с (6.66) кривые выходят на асимптоты $\tau^2/(R^2/a^2 - 1)$.

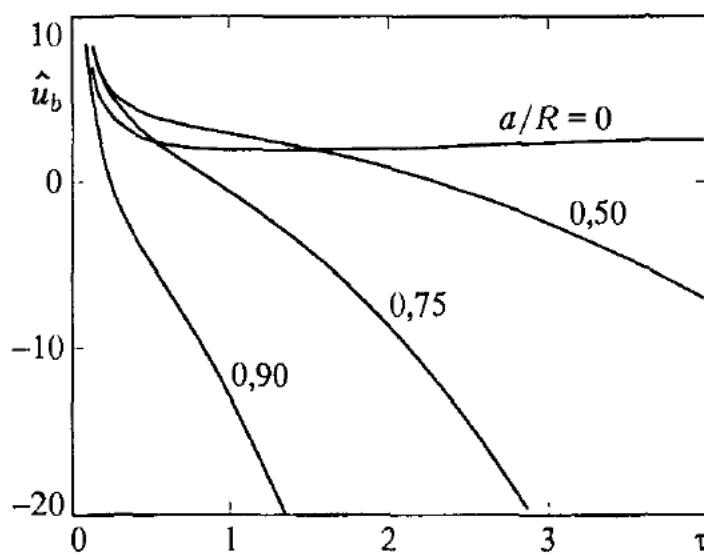


Рис. 6.31. Зависимость от τ бинормальной скорости движения винтового вихря в цилиндрической трубе при различных значениях a/R . $\varepsilon/R = 0,05$, $\beta = 0$

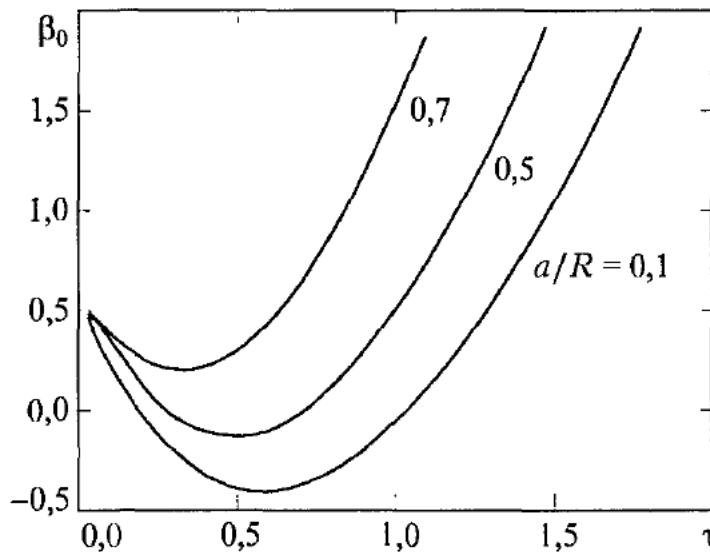


Рис. 6.32. Зависимость от τ параметра β_0 , соответствующего неподвижным винтовым вихрям, при различных значениях a/R

При изучении течения в трубе обычно рассматривают распределения характеристик в поперечном сечении трубы. В случае двумерного течения основную информацию получают из распределений радиальной u_r и окружной u_θ компонент скорости, а для прецессии вихря характеристикой служит угловая скорость его движения. Найдем угловую скорость и для винтового вихря. Зная связь бинормальной скорости с осевой и окружной (5.31), а также условие винтовой симметрии (1.62), запишем

$$\Omega = \frac{u_0}{a} = \frac{\Gamma}{4\pi a^2} \frac{1}{1+\tau^2} \left[2\beta - \hat{u}_b \frac{\tau}{(1+\tau^2)^{1/2}} \right]. \quad (6.69)$$

Имея в виду соотношение (6.68), получаем, что величина β (или u_0) не влияет на угловую скорость вихря, что согласуется с представлением для окружной компоненты скорости (2.69).

Отметим, однако, что если мы будем рассматривать скорость перемещения следа вихревого ядра в фиксированном поперечном сечении трубы, то ее значение не совпадет с Ω . Это связано с тем, что спиральный вихрь имеет ненулевую скорость собственного движения вдоль оси трубы. В самом деле, в силу винтообразной структуры вихря даже чистое его перемещение вдоль оси Z при $\Omega=0$ приведет к вращению изображения сечения вихря в фиксированной плоскости, перпендикулярной оси трубы, т. е. за время Δt след вихря в плоскости перемещается на величину $u_0\Delta t$ за счет окружной скорости и на величину $-u_z(a/l)\Delta t$ за счет осевой скорости и винтовой формы. В результате получаем, что угловая скорость следа вихря в поперечном сечении трубы

$$\Omega_l = \Omega \frac{\tau^2}{1 + \tau^2} - \frac{u_0}{l} = -\frac{\Gamma}{4\pi a^2} \frac{\hat{u}_b}{\tau(1 + \tau^2)^{1/2}}. \quad (6.70)$$

При большом шаге винта Ω и Ω_l совпадают. При малых же τ доминирующим может оказаться вклад u_0 .

Г л а в а 7

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ НАБЛЮДЕНИЕ КОНЦЕНТРИРОВАННЫХ ВИХРЕЙ В ВИХРЕВЫХ АППАРАТАХ

Данная глава представляет экспериментальные результаты. Основная ее цель – продемонстрировать существование и свойства реальных протяженных концентрированных вихрей и тем самым обосновать базовые положения и подтвердить основные выводы теоретических моделей, изложенных в предыдущих главах. Большая часть экспериментальных результатов приведена из работ авторов книги и их коллег.

7.1. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ

7.1.1. Экспериментальное оборудование

Как продемонстрировано во Введении, концентрированные вихри наблюдаются в самых разнообразных устройствах и при самых различных условиях. В экспериментальном плане их удобнее всего изучать в вихревых камерах с регулируемыми геометрическими и режимными параметрами. Всякая вихревая камера состоит из собственно рабочего объема и закручивающего устройства. Но часто закрутка потока осуществляется непосредственно в рабочем объеме. Из всего многообразия закручивающих устройств выделим наиболее типичные конструкции, часть из которых применялась в экспериментах, цитируемых в данной главе. Эти устройства можно разбить на два основных класса – тангенциальные (рис. 7.1 $a-d$, 7.2) и аксиальные (рис. 7.1 e вихрегенераторы). Но существуют и комбинированные схемы.

В тангенциальных схемах на входе в вихревую камеру потоку сообщается только окружная компонента скорости. При этом вектор скорости направлен по касательной к цилиндрической поверхности канала или некоторой условной окружности диаметра d (рис. 7.2). Наиболее распространенным завихрителем тангенциального типа является цилиндрический канал с тангенциальным патрубком (рис. 7.1 a). В качестве входного патрубка могут быть использованы щель (рис. 7.1 b [Escudier, 1988]), круглое или прямоугольное сопло, несколько щелей (рис. 7.1 c [Кутателадзе и др., 1987]) или сопел (рис. 7.2 [Alekseenko Shtork, 1992]). Более совершенной конструкцией является завихритель со спиральным подводом – улиткой (рис. 7.1 d), который часто применяется в вихревых трубках Ранка – Хилша [Штым, 1985; Пиралишвили и др., 2000].

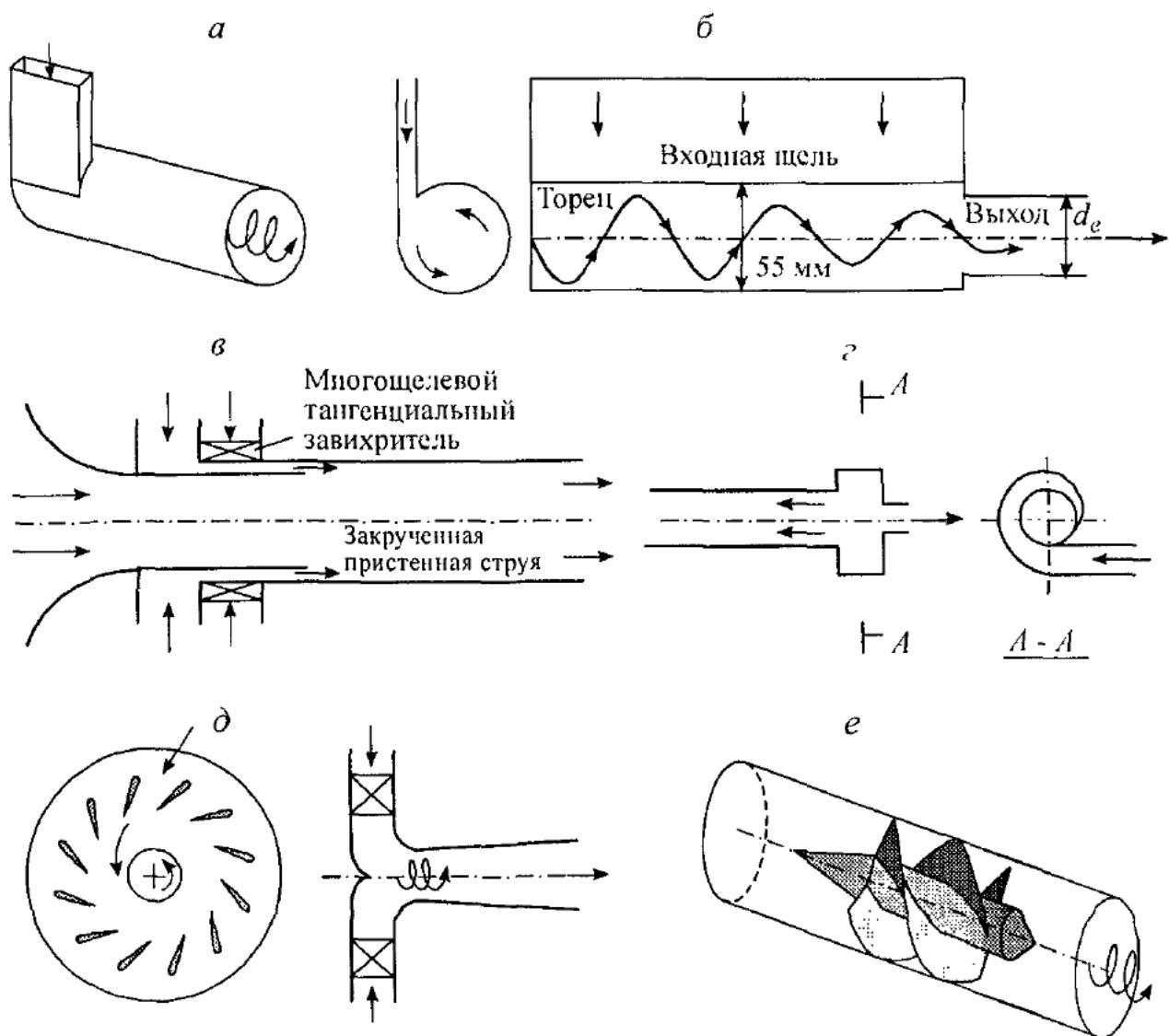


Рис. 7.1. Схемы устройств для закрутки потока

В тангенциальном лопаточном завихрителе окружное направление потоку сообщается посредством круговой решетки лопаток с изменяющимся углом наклона к радиальному направлению из центра камеры. Поворот потока от радиального к осевому направлению осуществляется профилированной вставкой. На рис. 7.1д показан лопаточный завихритель с профилированной вставкой, который использовался в опытах Sarpkaya [1971], Faler, Leibovich [1977, 1978], Garg, Leibovich [1979] и др. Аналогичный тип завихрителя без профилированной вставки применялся Guarga *et al.* [1985].

Оевые лопаточные завихрители представляют собой кольцевую решетку из плоских [Brüker, Althaus, 1992] или криволинейных лопаток [Халатов, 1989], расположенных под углом к набегающему потоку непосредственно в рабочем участке. Закрутка потока в рабочем участке может быть также осуществлена с помощью шнекового (рис. 7.1е) и ленточного завихрителей. Лопаточные оевые завихрители нашли широкое применение в измерительной технике, например в вихревом расходомере [Залманзон, 1973].

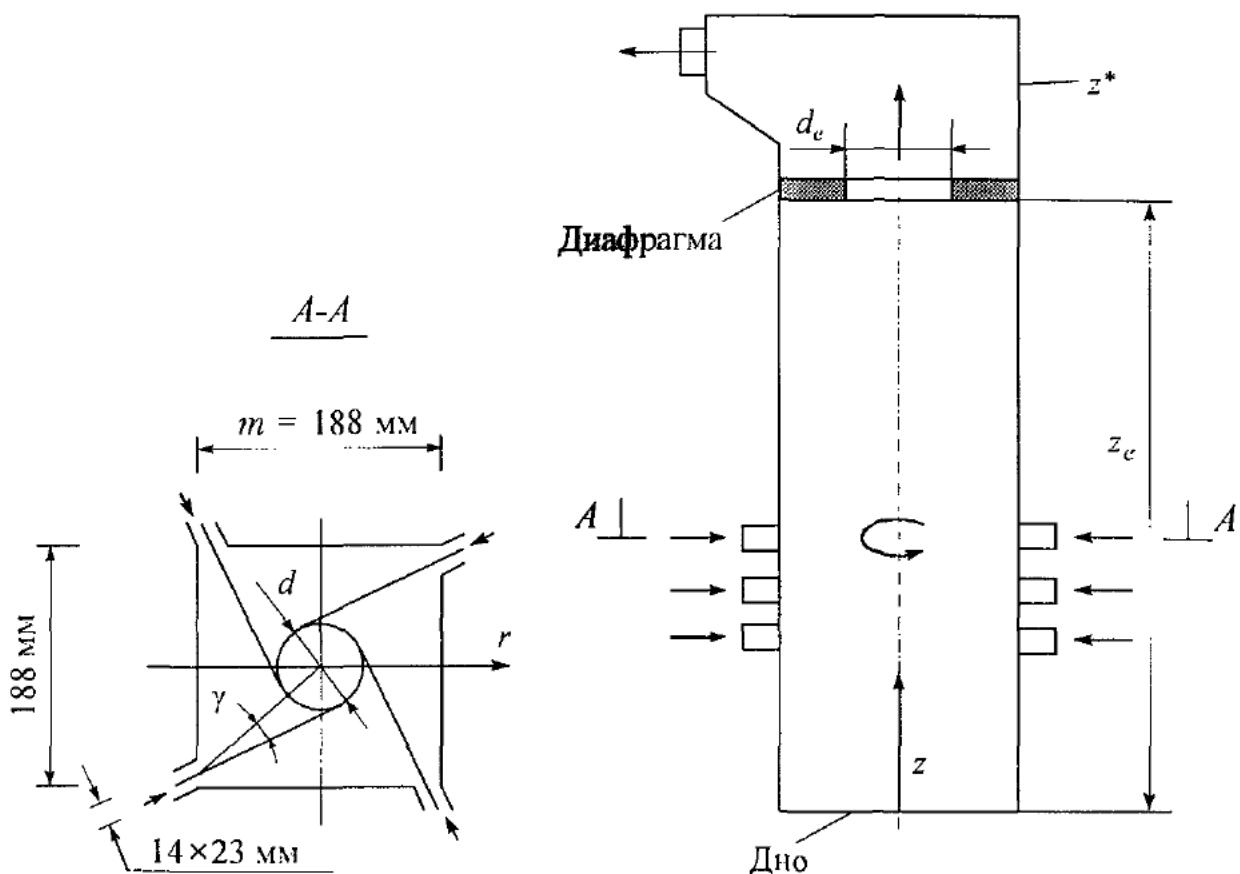


Рис. 7.2. Схема прямоугольной гидравлической камеры тангенциального типа

На рис. 7.2 показана схема вихревой камеры, применяемой в работах Alekseenko, Shtork [1992], С.И. Шторка [1994], Alekseenko *et al.* [1999]. Результаты именно этих работ использованы в основном в данной главе. Рабочий участок изготовлен из оргстекла и представляет собой вертикальную камеру квадратного сечения с размерами $188 \times 188 \times 600$ мм. Прямоточные прямоугольные сопла с выходным сечением 14×23 мм расположены в три яруса и объединены в угловые блоки. Ось сопла смешена от угла камеры на 15 мм. Угол поворота γ каждого из сопел регулируется в горизонтальной плоскости в пределах $0 \div 35^\circ$.

Закрученное течение организовывалось путем направления осей сопел по касательной к некоторой условной окружности с диаметром d и центром на оси канала. Таким образом реализовалась тангенциальная схема закрутки потока. Известно [Штым, 1985; Escudier *et al.*, 1980; Гупта и др., 1987], что в циклонно-вихревых камерах наиболее существенное влияние на структуру потока оказывают условия на выходе и на заглушенном торце камеры. В частности, концентрированный вихрь типа вихревой нити наблюдается в камере с диафрагмированным выходом. В тангенциальной модели геометрические условия менялись путем изменения угла поворота сопел и формы дна (торца), диафрагмирования выхода и смещения выходного отверстия.

Хотя применяемая в эксперименте вихревая камера не является каноническим объектом из-за квадратной формы поперечного сечения, тем не менее она оказалась весьма подходящей для изучения разнообразных вихревых структур. Более того, с помощью цилиндрических вставок было показано, что в режимах с концентрированными вихрями картины течения в приосевой области цилиндрического и прямоугольного каналов практически не отличаются друг от друга.

В качестве рабочей жидкости использовалась вода. Визуализация течения осуществлялась мелкими пузырьками воздуха. В ходе эксперимента измерялись распределения статического давления на стенках и в потоке, а также поля скоростей. Приемниками давления на стенке служили отверстия $\varnothing 0,4$ мм, а в потоке использовались стандартные напорные трубы $\varnothing 1,4$ мм. Регистрация давления осуществлялась тензорезисторными преобразователями, разработанными в Институте теплофизики СО РАН. Профили тангенциальной и аксиальной компонент скорости измерялись тремя способами: стандартными напорными трубками $\varnothing 1,4$ мм (вдали от оси вихря); методом стробоскопической визуализации частиц и электродиффузионным методом.

Для регистрации динамического давления использовались различные типы насадок, с помощью которых можно было измерять одну, две, три компоненты скорости. В указанных экспериментах с помощью дифференциальной трубы с коническим срезом определяли направление вектора скорости в плоскости, а дифференциальной трубкой Пито, ориентированной по измеренным углам наклона вектора скорости, – значение полной скорости.

Метод стробоскопической визуализации заключается в регистрации частиц меток при стробоскопическом освещении потока короткими импульсами света [Шторк, 1994]. В качестве частиц использовались мелкие пузырьки воздуха диаметром 20–30 мкм. Источником света служила импульсная лампа-вспышка. Электронный стробоскоп, созданный в Институте теплофизики СО РАН, выдавал на лампу-вспышку серию электрических импульсов с регулируемым интервалом времени и регулируемым количеством (от двух до шести). Ширина светового импульса составляла 20 мкс, а точность выдерживания временного интервала между вспышками 0,5 мкс. Принцип определения скорости основан на измерении перемещения маленьких частиц, отслеживающих движение потока, за определенный период времени, задаваемый стробоскопом.

Суть электродиффузионного метода [Алексеенко, Маркович, 1993] заключается в измерении скорости окислительно-восстановительной реакции в электрохимической ячейке, состоящей из датчика – катода К, анода А, специального электролита и измерительной цепи (рис. 7.3). Катодом служит впаянная в стеклянный капилляр платиновая проволока $\varnothing 50$ мкм. На катод относительно анода подается отрицательный потенциал. Анодом является державка

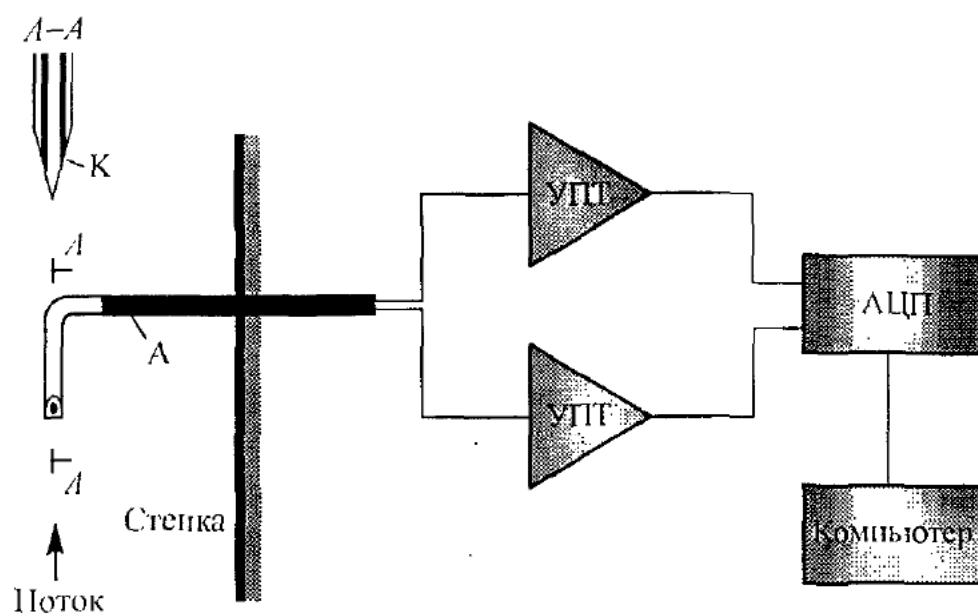


Рис. 7.3. Схема электродиффузионного метода измерения локальной скорости

из нержавеющей стали, имеющая площадь поверхности, значительно превышающую площадь катода, вследствие чего суммарная скорость электрохимической реакции определяется катодом. В качестве электролита применяется 0,005%-й раствор $K_3Fe(CN)_6$ и $K_4Fe(CN)_6$ с фоновой добавкой соды Na_2CO_3 , концентрация которой в растворе составляет 0,1 М. Фоновый электролит не участвует в электрохимической реакции и необходим для подавления миграционного тока, возникающего под действием электрического поля. При некоторой разности потенциалов наступает диффузионный режим, в котором ток достигает предельного значения и определяется гидродинамической обстановкой у катода. Зависимость диффузионного тока от скорости жидкости u и окрестности чувствительного элемента датчика обычно имеет вид $I = A\sqrt{u} + B$, где A , B – тарировочные константы. Тарировка датчиков осуществляется непосредственно в рабочем участке с помощью вспомогательного тарировочного сопла.

Используемый в эксперименте для измерения двумерного поля скоростей электродиффузионный датчик клиновидной формы представляет собой пару платиновых электродов, впаянных в стеклянный капилляр (см. рис. 7.3). Внешний диаметр чувствительного элемента датчика составляет 1 мм. Сигналы с датчика подаются на входы электродиффузионных преобразователей разработанных в Институте теплофизики СО РАН и включающих в себя усилитель постоянного тока УПТ и источник постоянного напряжения. Выходные сигналы поступают на аналого-цифровой преобразователь АЦП и затем обрабатываются на компьютере. С помощью калибровочных характеристики по сумме сигналов, снимаемых с электродов, определяется значение полной скорости, а по разности – направление вектора скорости.

7.1.2. Параметры закрученного потока

Как для любого другого вязкого течения, основным режимным параметром потока в вихревой камере является число Рейнольдса Re

$$Re = Q / (\Sigma \cdot v),$$

где Q – расход жидкости; Σ – площадь поперечного сечения камеры; v – кинематическая вязкость.

Чтобы охарактеризовать степень закрутки потока в вихревой камере, вводят дополнительный параметр – *параметр крутки* S . Существуют разнообразные способы определения этого параметра. Наиболее простые выражения – это отношения максимальной тангенциальной скорости к максимальной осевой или осредненной тангенциальной скорости к осредненной осевой. Более распространенное определение выражается формулой [Гупта и др., 1987]

$$S = F_{mm} / F_m L, \quad (7.1)$$

где величина

$$F_{mm} = \int_{\Sigma} (\rho v w + \rho \overline{v' w'}) r d\Sigma$$

является потоком момента количества движения в осевом направлении и учитывает вклад z - θ компоненты турбулентного напряжения; величина

$$F_m = \int_{\Sigma} (\rho w^2 + \rho \overline{w'^2} + (p - p_{\infty})) d\Sigma$$

является потоком количества движения в осевом направлении и учитывает вклад турбулентного нормального напряжения и давления; w и v – осевая и тангенциальная компоненты скорости; r – радиальная координата; ρ – плотность жидкости; L – характерный размер (радиус в случае цилиндрической камеры); p – избыточное давление. Обычно давлением и турбулентными пульсациями пренебрегают и рассчитывают параметр крутки по формуле (7.1) с упрощенными определениями потоков

$$F_{mm} = \int_{\Sigma} \rho v w r d\Sigma, \quad (7.2)$$

$$F_m = \int_{\Sigma} \rho w^2 d\Sigma. \quad (7.3)$$

Точное вычисление параметра крутки по формулам (7.1)–(7.3) практически невозможно, так как обычно поля скоростей также не известны. Однако

можно оценить параметр крутки через геометрические параметры камеры. Проведем такую оценку для тангенциальной камеры, изображенной на рис. 7.2.

Осевую компоненту потока момента количества движения можно приблизенно записать как

$$M = \sum_{i=1}^n (G_n V_n d / 2)_i = G V_n d / 2 = G^2 d / 2 \rho \Sigma_n.$$

Здесь i – номер сопла; n – число сопел; G – массовый расход; G_n – массовый расход через сопло; V_n – средняя скорость на срезе сопла; Σ_n – площадь поперечного сечения всех сопел. Сопла полагаются одинаковыми.

Поток количества движения оценивается как

$$F_m = G V = G^2 / \rho \Sigma,$$

где V – средняя скорость в поперечном сечении камеры. Из (7.1) следует, что

$$S = \frac{1}{2} \frac{\Sigma}{\Sigma_n} \frac{d}{L}.$$

Полагая, что $\Sigma = m^2$, $L = m/2$, $\Sigma_n = n\sigma$, где m – поперечный размер камеры, σ – площадь поперечного сечения сопла, получаем окончательно оценку параметра крутки

$$S = \frac{md}{n\sigma}. \quad (7.4)$$

Как видно, это чисто геометрический комплекс, поэтому он называется *конструктивным параметром крутки*. Для данной конструкции диаметр условной окружности $d(m)$ связан с углом поворота сопел γ (см. рис. 7.2) формулой

$$d = 0,246 \sin \gamma.$$

Если включены все сопла и направлены под одинаковым углом γ , то параметр крутки равен $S = 12 \sin \gamma$.

Feikema *et al.* [1990] на основе своих измерений провели прямое сравнение конструктивного параметра крутки (7.4) с точным выражением (7.1) в случае осесимметричного канала. Несмотря на большие количественные различия, наблюдается хорошая корреляция между этими определениями. Однако дальнейшие многочисленные исследования закрученных потоков, в том числе Alekseenko, Shtork [1992], С.В. Алексеенко и др. [1994], В.Л. Окулов, С.А. Мартемьянов [2001], Martemianov, Okulov [2002] показали, что число Рейнольдса и параметр крутки не характеризуют однозначно режим течения.

В частности, существенную роль играют условия на выходе и на заглушенном торце камеры. Так, при одних и тех же значениях расхода Q и параметра крутки S , но разных граничных условиях наблюдалась совершение различная структура течения в вихревой камере, изображенной на рис. 7.2. Это вихри: а) прецессирующий (плоское дно; открытый выход в камере); б) колониообразный (плоское дно; центральное выходное отверстие); в) винтовой (наклонное дно или смещенное выходное отверстие); г) два переплетенных (двускатное дно; центральное выходное отверстие). Подробно указанные структуры описаны в последующих разделах.

Из анализа перечисленных режимов следуют два важных факта. Во-первых, число Re и параметр крутки S не характеризуют однозначно структуру течения. Дополнительной характеристикой могут служить новые параметры, введенные в п. 7.2. Во-вторых, наблюдаемые вихревые структуры обладают винтовой симметрией, что означает наличие пространственного периода по оси z . Последний факт принят как основное допущение в теоретических моделях винтовых вихрей, изложенных в пп. 1.5, 2.6.2, 3.3.3, 3.3.4, 3.3.6.

7.2. ВИНТОВАЯ СИММЕТРИЯ ВИХРЕВЫХ ТЕЧЕНИЙ

Как было отмечено в п. 7.1.2, параметр крутки S при заданном числе Рейнольдса (или расходе Q) не характеризует однозначно структуру закрученного потока в вихревой камере. Альтернативным подходом для потоков с винтовой симметрией является введение двух новых параметров. Они следуют из проведенного выше теоретического анализа (п. 1.5) и представляют собой шаг винта $h = 2\pi l$ (или просто l) и скорость однородного потока u_0 . Эти параметры входят в соотношение (1.66), связывающее между собой аксиальную и тангенциальную компоненты скорости двумерных винтовых потоков.

В частном случае нулевой осевой скорости u_0 шаг винта l однозначно определяется через интегральный параметр крутки S . Действительно, при $u_0 = 0$ из (1.66) путем умножения на τ^w и интегрирования по поперечному сечению потока можно получить с учетом определения (7.1)

$$l = -F_{mm} / F_m \equiv -LS,$$

где $F_{mm} = \rho \int v w r^2 dr d\varphi$, $F_m = \rho \int w^2 r dr d\varphi$ – осевые компоненты потоков количества движения и момента количества движения соответственно; L – эффективный радиус канала.

Если на оси симметрии потока осевая компонента скорости не равна нулю, что наиболее часто встречается в опыте, то из (1.66) имеем

$$l = -F_{mn}/(F_m - u_0 G) = -LS/(1 - u_0 G/F_m), \quad (7.5)$$

где G – массовый расход. Следовательно, в произвольном закрученном течении с винтовой симметрией шаг винта зависит не только от параметра крутки S , но и от значения скорости на оси u_0 , определяющей однородный поток.

Следует отметить, что в реальных потоках условие винтовой симметрии по всей длине оси z , как правило, не выполняется. Действительно, по мере удаления от закручающего устройства поток претерпевает существенные изменения – от разрушения вихря до полного затухания закрутки. Предположение о винтовой симметрии в предложенной модели означает одинаковую структуру потока с периодичностью $2\pi l$ по оси z на всем ее бесконечном протяжении. Понятно, что описать с ее помощью всю область течения невозможно. Однако, как отмечается во многих исследованиях [Leibovich, 1984 Escudier, 1988; и др.], в закрученных потоках существуют достаточно протяженные области (до нескольких калибров), где профили скорости меняются незначительно. Применительно к этим областям локально применять гипотезу о винтовой симметрии (нашу двумерную модель) было бы вполне разумно. Для этого необходимо проверить выполнение условия (1.66) в реальных закрученных течениях. В случае его выполнения параметры l и u_0 , входящие в (1.66) естественно принять в качестве новых характеристик закрученных течений.

Для проверки гипотезы о локальной винтовой симметрии в закрученных течениях будем сопоставлять экспериментально измеренные в фиксированных сечениях профили осевой скорости со значением скорости w , пересчитанным через измеренные значения тангенциальной скорости по формуле (1.66). Для пересчета необходимо определить параметры l и u_0 . Если локальная характеристика течения u_0 в данном сечении находится путем прямого экспериментального измерения, то параметр l можно определять непосредственно из (7.5). Но рассчитать l с достаточной точностью не всегда удается. Это связано с тем, что для вычисления потоков количества движения и моментов количества движения необходимы подробные измерения поля скорости по всему сечению рабочего участка (трубы). Задачу определения l можно существенно упростить, используя линейность связи между компонентами скорости в (1.66). После осреднения (1.66) получается более простая формула

$$l = \frac{\langle rv \rangle}{u_0 - \langle w \rangle}, \quad (7.6)$$

где угловые скобки означают осреднение.

Осреднение в (7.6) может быть проведено как по всему сечению трубы, так и по некоторой его части, где предполагается наличие винтовой симметрии. В частности, при обработке экспериментальных данных [Алексеенко и др., 1994] исключались области вблизи стенок трубы, где проявляются вязкостные эффекты. Сравнение результатов осреднения с различными весовыми функциями показало, что при небольшом количестве точек измерения по радиальной координате в (7.6) вместо осреднения по сечению лучше использовать осреднение по радиусу с весовой функцией $1/r$.

Во многих экспериментах скорость на оси течения не определена или определена с большой погрешностью. В этом случае параметры u_0 и l находились путем минимизации среднеквадратичного отклонения от нулевого значения функционала

$$\langle (lw - lu_0 + rv)^2 \rangle.$$

Подставляя u_0 , определенное из (7.6), в исследуемый функционал, получаем выражение для l

$$l = \frac{\langle rv \rangle \langle w \rangle - \langle rvw \rangle}{\langle w^2 \rangle - \langle w \rangle^2}. \quad (7.7)$$

После определения l по (7.7) находим $u_0 = \langle w \rangle + \langle rv \rangle / l$.

Проверка выполнения локальной винтовой симметрии в реальных закрученных течениях проводилась в работах С.В. Алексеенко и др. [1994], Alekseenko *et al.* [1999] для разных типов завихрителей, режимов течения и способов диагностики потоков, описанных ранее. Параметры винтовой симметрии u_0 и l определялись одним из трех перечисленных выше способов. На рис. 7.4 представлены сопоставления измеренной в эксперименте осевой компоненты скорости с пересчитанными значениями через измеренную тангенциальную компоненту по формуле $w = u_0 - rv/l$. Измеренные значения w представлены черными точками, а пересчитанные – светлыми.

На рис. 7.4 σ, δ представлены данные для нестационарных закрученных потоков, где наблюдалось ярко выраженное явление прецессии вихревого ядра. В этом случае при определении u_0 и l в формулах (7.6) и (7.7) осреднение проводилось еще и по времени. Анализ представленных данных убеждает, что винтова симметрия реализуется практически во всей области течения, за исключением области вблизи стенок трубы. В этой зоне существенным становится влияние вязкости, которая обнаруживает себя через образование пограничного слоя и пристенных вихрей Гертлера. Незначительное различие в основной области течения не выходит за рамки точности измерений.

Аналогичные заключения следуют из анализа данных, полученных Falor, Leibovich [1977], Guarga *et al.* [1985], С.С. Кутателадзе и др. [1987].

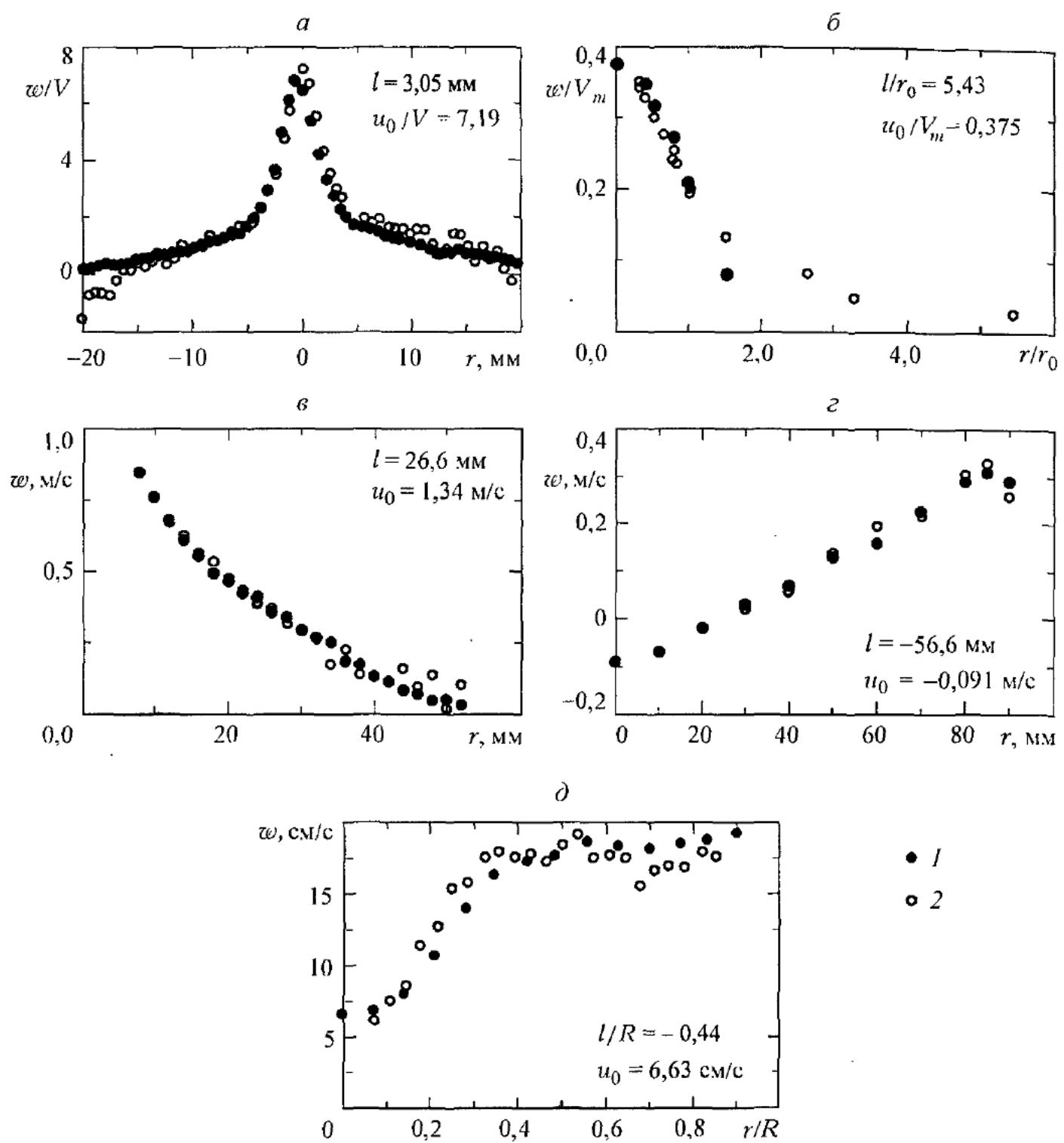


Рис. 7.4. Проверка локальной винтовой симметрии в закрученных потоках с различными за- вихрителями. 1 – измеренные значения аксиальной скорости w ; 2 – значения w , рассчитанные по формуле $w = u_0 - rv/l$. а – щелевой завихритель [Escudier, 1988], тип А, сечение iii; V – ско- рость во входной щели; б – вращающийся сосуд с центральным отсосом [Maxworthy *et al* 1985]; $\Omega \approx 1,51 \text{ с}^{-1}$, $Q = 180 \text{ л/ч}$, V_m – максимальная тангенциальная скорость, r_0 – радиус, где $v = V_m$; в, г – вихревая камера с сопловым завихрителем [Шторк, 1994] (см. рис. 7.2); в – диа- фрагмированный выход: $d_c = 70 \text{ мм}$, $z_p = 430 \text{ мм}$, $Re = 2,8 \cdot 10^4$, $S = 3$, сечение $z = 323 \text{ мм}$ г – камера без диафрагмы: $Re = 3,2 \cdot 10^4$, $S = 1$, $z = 385 \text{ мм}$; д – лопаточный завихритель [Gar- Leibovich, 1979]; $Re = 11480$, параметр крутки $\Omega = 0,79$, $z = 193 \text{ мм}$, R – радиус камеры; а–в – стационарное течение; г, д – закрученные потоки с прецессирующими вихревым ядром

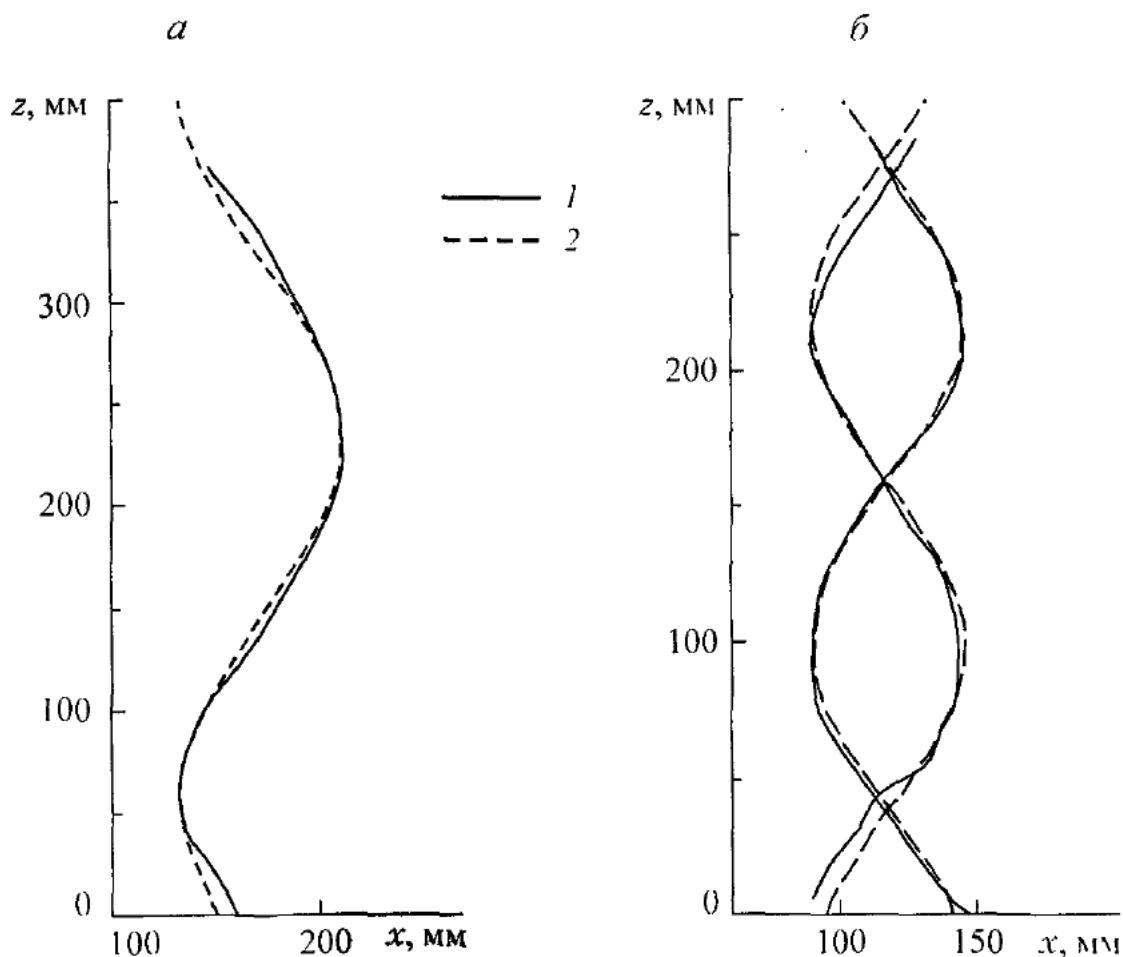


Рис. 7.5. Проверка винтовой симметрии путем сравнения формы вихря с винтом: *а* – левовинтовой вихрь; *б* – двойная спираль; 1 – проекция оси вихря на вертикальную плоскость; 2 – синусоида с параметрами: $h = 355$ (*а*), 238 мм (*б*)

Другой способ проверки винтовой симметрии можно осуществить оценкой качества (каноничности) винтовой формы у вихревых структур, образующихся в закрученных потоках. Так как подобные данные в литературе отсутствуют (см. Введение), проверка была осуществлена для двух режимов с ярко выраженным винтообразными вихревыми структурами (см. п. 7.5). Идея такой проверки основана на том, что проекция винтовой линии на плоскость является синусоидой. Для определения проекции реальных винтовых структур проводилась компьютерная обработка мгновенных видеоизображений воздушной нити, фиксирующей ось вихря. На рис. 7.5 проведено сопоставление среднего положения проекции оси для одиночного (*а*) и двойного (*б*) вихрей с синусоидами. Получено практически полное соответствие. По параметрам синусоид в обоих случаях определен шаг винтовой симметрии: $h = 335$ (*а*) и 238 мм (*б*).

Проведенный анализ указывает на существование винтовой симметрии в закрученных потоках для всех типов завихрителей и на возможность применения для их описания модели идеальной жидкости.

7.3. КОНЦЕНТРИРОВАННЫЙ ВИХРЬ С ПРЯМОЛИНЕЙНОЙ ОСЬЮ

7.3.1. Генерация концентрированных вихрей

Как отмечено выше, главная цель гл. 7 заключается в том, чтобы продемонстрировать существование концентрированных протяженных вихрей и описать их основные свойства. Естественно, первоочередная задача эксперимента состоит в генерации концентрированных вихрей каких-либо канонических типов. Во Введении в табл. В.1 и на рис. В.1 приведены разнообразные примеры концентрированных вихрей. Однако в большинстве случаев они не относятся к объектам, удобным для детального экспериментального описания в силу целого ряда причин – спонтанности образования, нестабильности во времени и пространстве, невозможности управления свойствами и т. д. Наиболее подходящими устройствами для генерации и наблюдения концентрированных вихрей являются вихревые камеры или трубы с закрученной потоком (см. рис. 7.1), в том числе камеры с вращающейся крышкой (см. рис. 7.57). В вихревых проточных камерах концентрированные вихри образуются путем диафрагмирования выходного отверстия [Штым, 1985; Escudie *et al.*, 1980]. Далее, если специально не оговаривается, под концентрированными вихрями будем подразумевать протяженные концентрированные вихри типа вихревой нити. Непосредственно термин *вихревая нить* будет использоваться для таких наблюдаемых в эксперименте вихрей, у которых поперечный размер (диаметр ядра) много меньше размеров камеры и длины вихря. Рассмотрим более подробно характерные режимы течения, способ управление и процесс формирования вихревой нити в тангенциальной гидравлической камере, изображенной на рис. 7.2 [Alekseenko, Shtork, 1992; Alekseenko *et al.*, 1999].

Основными параметрами, влияющими на режим течения, являются число Рейнольдса Re , конструктивный параметр крутки S , а также различные геометрические параметры, прежде всего диаметр d_e выходного отверстия диафрагмы и положение диафрагмы z_e относительно дна камеры. Число Re меняется путем изменения расхода жидкости. Обычно значения Re достаточно велики для вихревых камер, поэтому большинство наблюдаемых явлений и количественные характеристики (в безразмерных координатах) автомодельны относительно числа Re камеры, т. е. число Рейнольдса не является определяющим.

В то же время параметр крутки S , который меняется за счет регулирования количества сопел и угла их поворота γ (или диаметра условной окружности d , см. рис. 7.2), оказывает сильное воздействие на режим течения.

Наконец, управление симметрией потока осуществляется путем смешения выходного отверстия и изменения формы и наклона дна камеры.

При полностью открытом выходе закрученный поток в тангенциальной камере имеет сложную структуру. Максимумы скоростей расположены у боковых стенок камеры, в приосевой зоне реализуется возвратное движение, а на границе этой зоны формируется один нечетко выраженный концентрированный вихрь (иногда несколько), который прецессирует вокруг геометрической оси камеры. Такой режим течения описан в п. 7.4.

Диафрагмирование выхода приводит к стабилизации потока и смешению максимумов скорости к оси камеры. Практически полное подавление прецессии вихревого ядра происходит при наличии диафрагмы с относительным отверстием $d_e/m < 0,85$ (для данной камеры). Такая перестройка течения означает локализацию завихренности у оси камеры, тем большую, чем меньше диаметр выходного отверстия (но до определенного предела), и формирование соответственно структуры типа вихревой нити. Этот режим описан в данном параграфе.

Если для режима с вихревой нитью создать асимметричные граничные условия, например сместить выходное отверстие, то нить деформируется и принимает форму винта, неподвижного в пространстве и времени. В зависимости от способа создания асимметрии наблюдались стационарные структуры в виде левого и правого винтов, двойной спирали и вилта со сменой винтовой симметрии (см. п. 7.5).

Если в режиме со стабильной вихревой нитью увеличивать степень крутки, то течение теряет устойчивость. При этом наблюдаются волновые явления и возмущения в виде распада вихря. Эти же явления реализуются при внесении в поток искусственных возмущений (см. п. 7.6).

В данном параграфе детально рассмотрим случай, когда формируется течение со структурой типа *вихревой нити*. Визуализация течения в таком режиме и его схема представлены на рис. 7.6 a, b соответственно. Визуализация производится мелкими пузырьками воздуха при боковом освещении световым “ножом”. Резкое увеличение местной окружной скорости жидкости в центре камеры (см. рис. 7.13) сопровождается резким падением давления (см. рис. 7.14). Благодаря последнему эффекту на оси вихря возникает кавитационная область, представляющая собой тонкую воздушную непрерывную нить постоянной толщины с диаметром до 0,1 мм (рис. 7.6 a). Воздушная нить формируется из мелких пузырьков воздуха, добавленных в жидкость с целью визуализации потока, и простирается от дна канала до отверстия диафрагмы (и дальше). С ростом газосодержания толщина воздушной полости возрастает до 5–10 мм (рис. 7.7 a), нить становится неоднородной – тоньше у дна и толще к выходу, но течение остается устойчивым. Такую структуру можно рассматривать как полый вихрь.

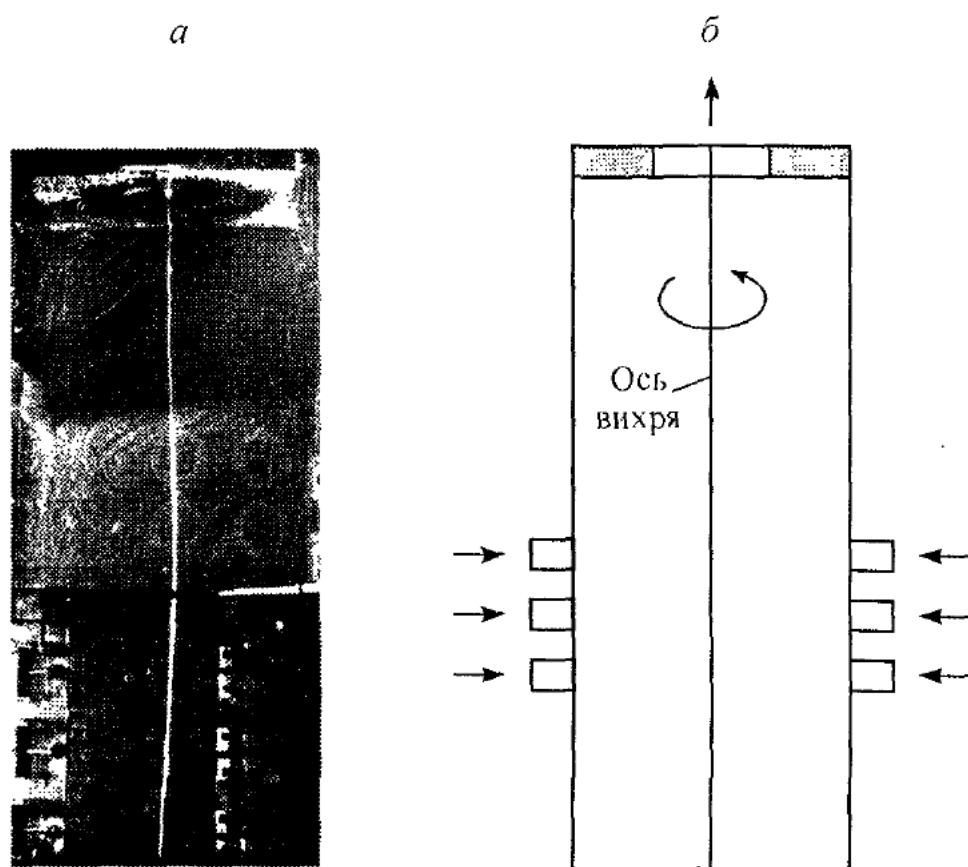


Рис. 7.6. Визуализация (а) и схема (б) течения с генерацией прямолинейного концентрированного вихря: $d_e = 70$ мм, $z_e = 560$ мм, $Re = 10^4$, $S = 2,9$. Светлая линия на фото – воздушная нить, визуализирующая ось вихря

С уменьшением подачи воздуха и при малых расходах жидкости воздушная нить становится настолько тонкой, что за счет капиллярных сил распадается на отдельные мелкие пузырьки, которые можно использовать как частицы-маркеры для визуализации течения (рис. 7.7б). Таким образом, образование газовой полости является эффективным способом визуализации оси концентрированных вихрей в жидкости.

На рис. 7.8а представлена визуализация течения в поперечном сечении камеры. Как видно, траектории частиц близки к круговым, что свидетельствует об осесимметричности закрученного потока в приосевой зоне даже при наличии квадратного сечения камеры.

Важную информацию несет визуализация течения в донной области (рис. 7.8б). Из фотографии следует, что частицы движутся по спиральным траекториям к центру. Такое их поведение связано с формированием торцевого пограничного слоя при взаимодействии вихря с плоскостью, чем и объясняется локализация завихренности в центральной части торцевой стенки. Действительно, в ядре двумерного вихря центробежные силы скомпенсированы радиальным градиентом давления

$$\rho \frac{v^2}{r} = \frac{\partial p}{\partial r}.$$

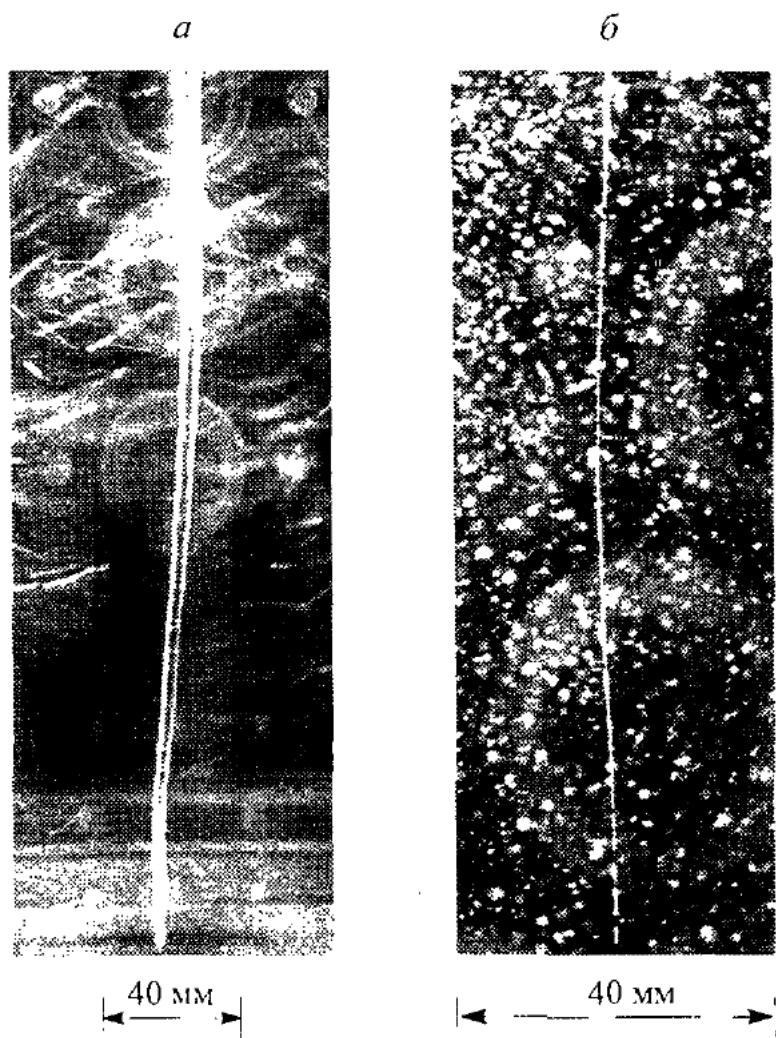


Рис. 7.7. Примеры визуализации концентрированных вихрей: *а* – вихревая нить у дна камеры при большой подаче воздуха для визуализации, $Re = 2,7 \cdot 10^4$, $S = 3$, $d_c = 70$ мм; *б* – увеличение изображение вихревой нити при малой подаче воздуха и крайне низком расходе жидкости

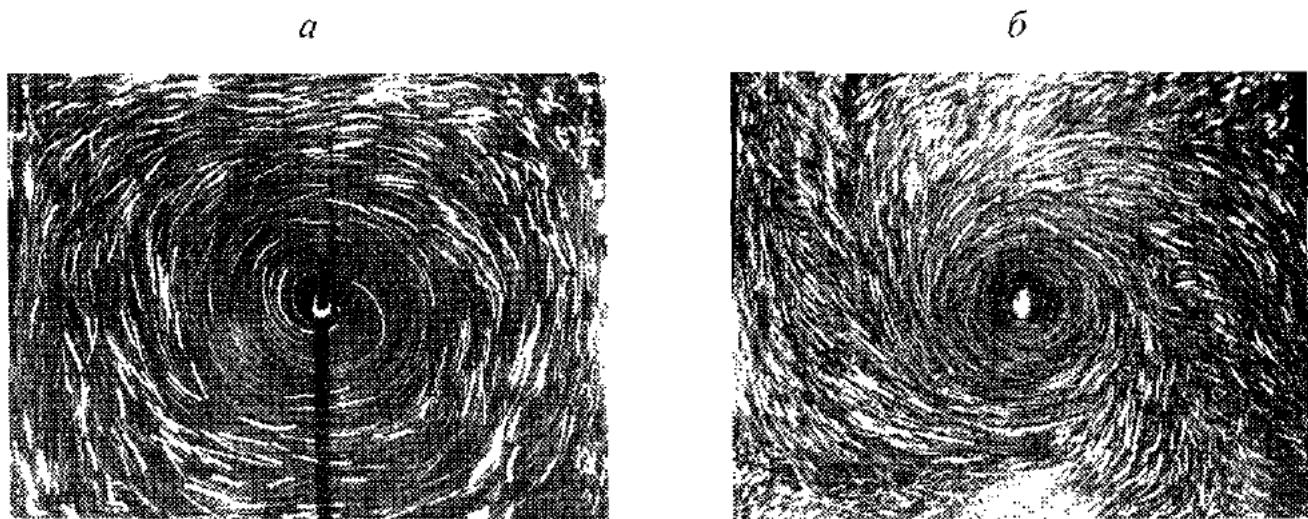


Рис. 7.8. Визуализация течения в горизонтальных сечениях тангенциальной камеры с диафрагмированным выходом. $S = 3$, $d_c = 70$ мм: $z = 90$ мм, $Re = 2,7 \cdot 10^4$ (*а*); $z < 5$ мм (у дна камеры), $Re = 10^4$ (*б*)

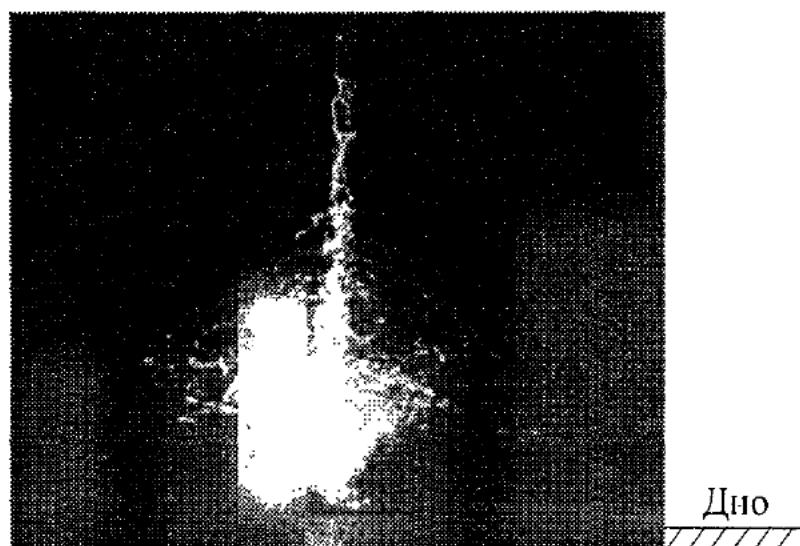


Рис. 7.9. Распад вихря у дна тангенциальной камеры (плоское дно под нижним ярусом сопел; выходная диафрагма с центральным отверстием)

В пограничном слое из-за вязкого торможения жидкости радиальный градиент уже не может быть уравновешен центробежными эффектами, что вызывает радиальное движение жидкости к центру. Вследствие сохранения расхода и момента количества движения происходит локализация завихренности и генерация вихревой нити с аксиальным протоком вдоль ее оси. Разрушение структуры вихревой нити может происходить за счет ее неустойчивости или явления распада вихря. Пример распада вихря, локализованного у дна камеры, показан на рис. 7.9. Диафрагмирование выходного сечения камеры позволяет сохранить вихревую нить на всем протяжении камеры, что продемонстрировано на рис. 7.6.

Таким образом, генерация концентрированного вихря в вихревой камере заданного типа возможна при специфических условиях на выходе из камеры и на торцевой стенке (дне). Теперь очевидно, что изменение формы дна существенно повлияет на структуру течения в вихревой камере. Этот вопрос специально рассматривался в ряде работ, прежде всего в связи с прикладными разработками [Гольдингик, 1981; Кутателадзе и др., 1987; Смульский, 1992]. В данном случае задача взаимодействия вихря с плоскостью представляет интерес не только с точки зрения генерации концентрированного вихря, но и в аспекте нахождения характеристик вихревой нити через измерения в донной области. Последняя проблема крайне актуальна для эксперимента, поскольку часто невозможно определить напрямую параметры вихревой нити (особенно, винтовой) внутри камеры из-за сложности измерений. Этот вопрос будет рассмотрен ниже.

Несмотря на то, что при диафрагмировании выходной секции камеры реализуется концентрированный вихрь, тем не менее в целом структура течения

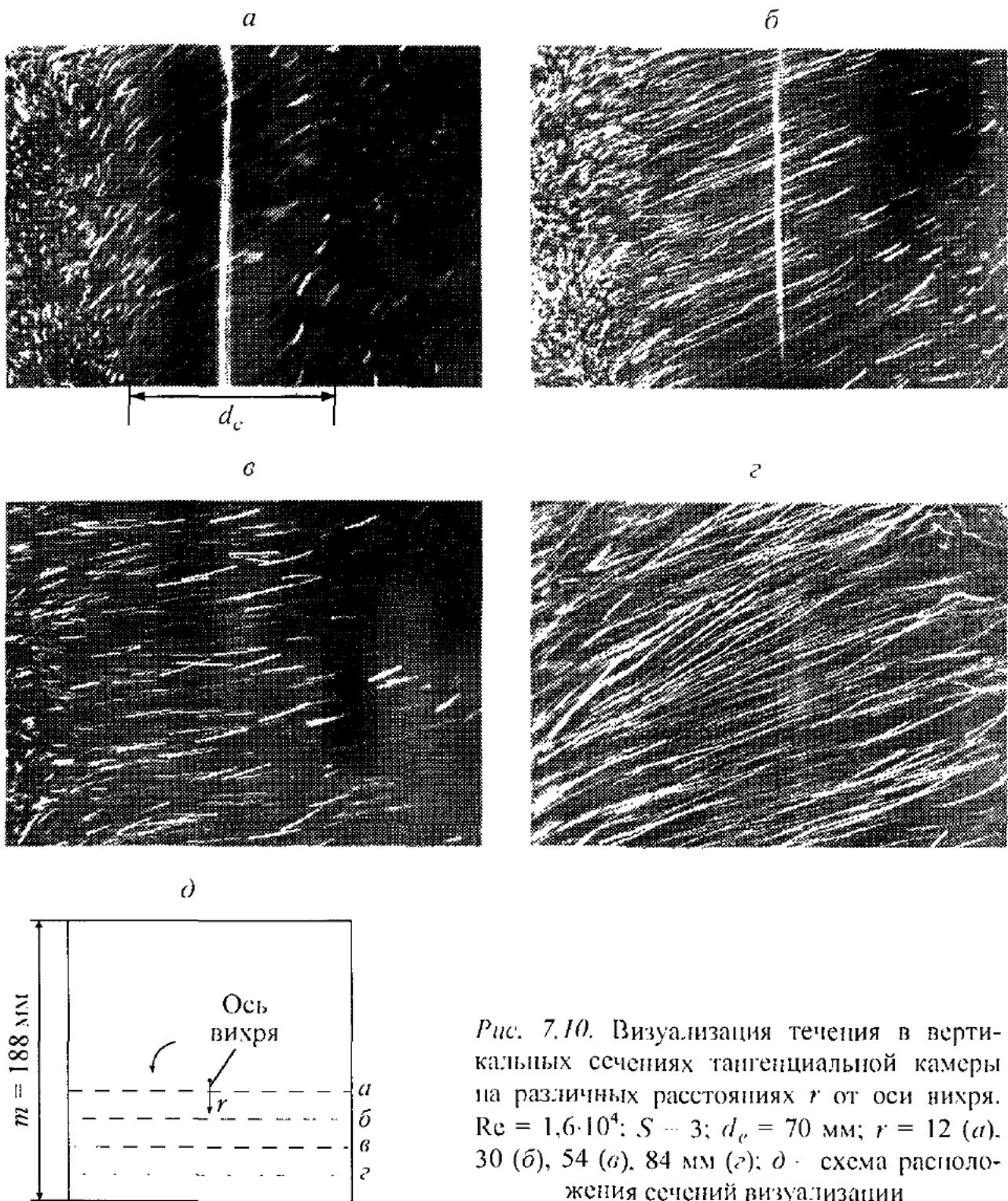


Рис. 7.10. Визуализация течения в вертикальных сечениях тангенциальной камеры на различных расстояниях r от оси вихря. $Re = 1,6 \cdot 10^4$; $S = 3$; $d_c = 70$ мм; $r = 12$ (а), 30 (б), 54 (в), 84 мм (г); д - схема расположения сечений визуализации

остается сложной. На рис. 7.10 изображена визуализация закрученного потока в различных вертикальных сечениях. Как следует из этих картин, вектор скорости немонотонно меняет свое направление при удалении от оси вихря. Угол наклона вектора скорости ϕ в зависимости от расстояния r до центра камеры показан на рис. 7.11 для двух поперечных сечений камеры. Видно, что распределения угла ϕ сильно меняются по высоте камеры. Но эти изменения определяются главным образом перестройкой профилей аксиальной скорости (см. рис. 7.12).

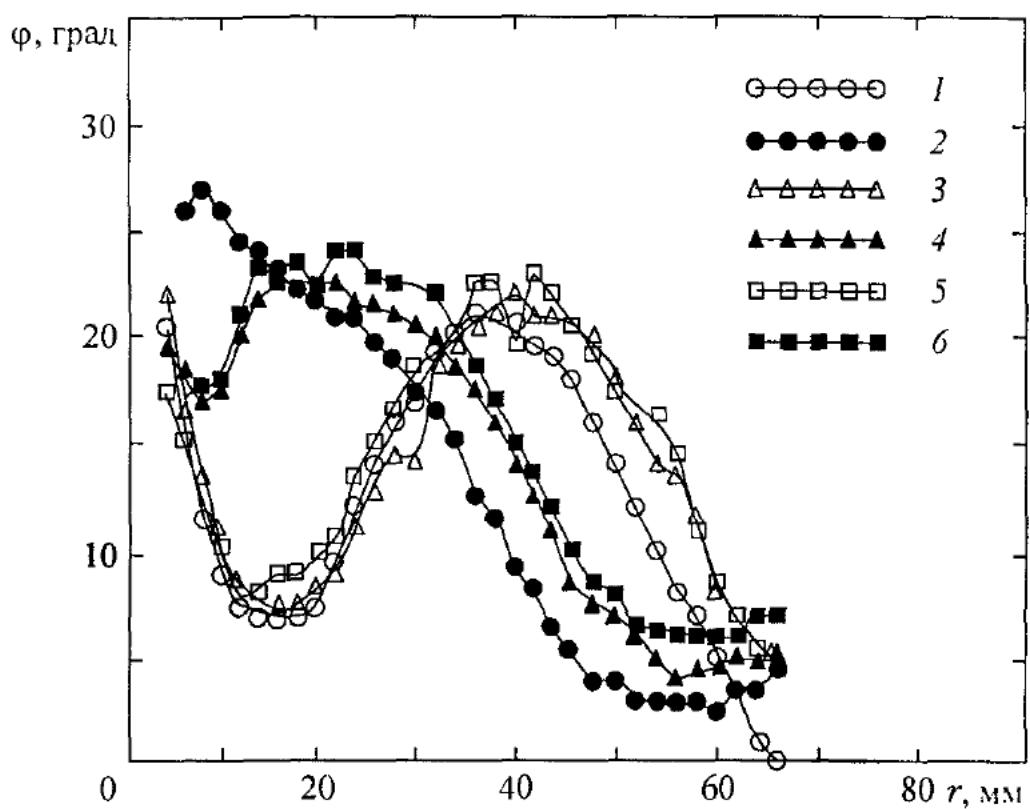


Рис. 7.11. Угол наклона ϕ вектора скорости в прямолинейном вихре (относительно горизонтали). $S = 3$, $z_e = 430$ мм. 1 – $z = 63$ мм, $d_e = 70$ мм, $Q = 5,17$ л/с; 2 – соответственно 323; 70; 5,17; 3 – 63; 100; 5,17; 4 – 323; 100; 5,17; 5 – 63; 100; 6,5; 6 – 323; 100; 6,5

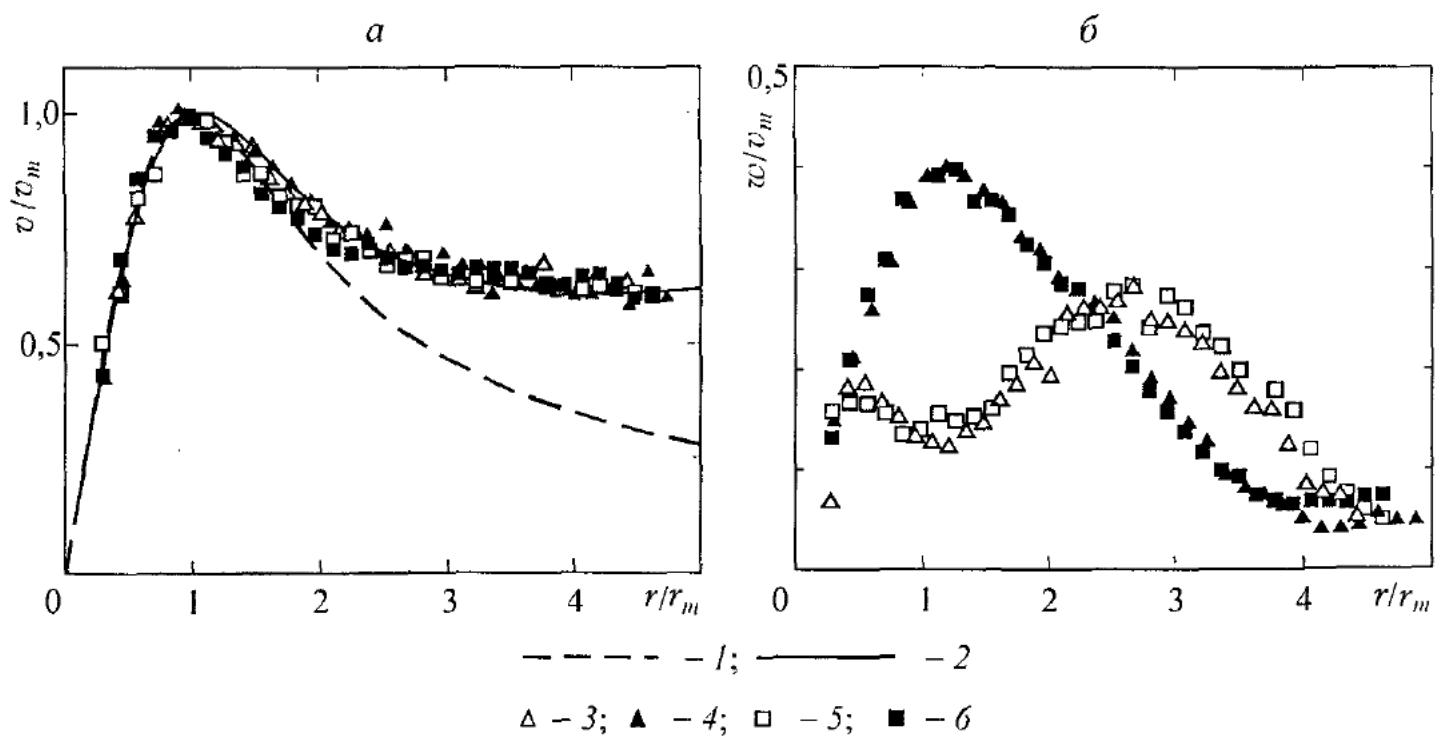


Рис. 7.12. Безразмерные профили тангенциальной (а) и аксиальной (б) компонент скорости в вихревой камере. $d_e = 100$ мм, $S = 3$. 1 – формула (3.74); 2 – эмпирическая формула Escudier *et al.* [1982] (см. формулу (7.10)); 3 – $z = 63$ мм, $Re = 2,7 \cdot 10^4$; 4 – соответственно 323 мм, $2,8 \cdot 10^4$; 5 – 63 мм, $3,5 \cdot 10^4$; 6 – 323 мм, $3,5 \cdot 10^4$

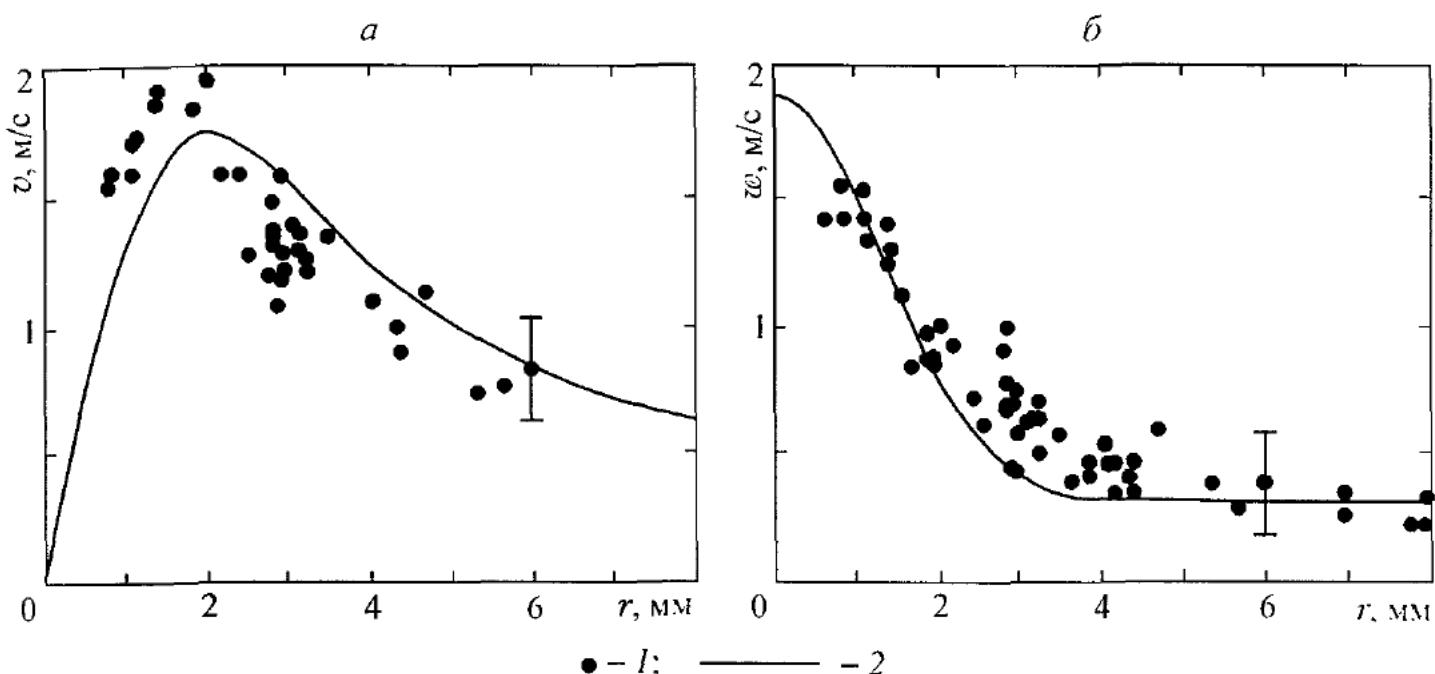


Рис. 7.13. Профили тангенциальной (а) и аксиальной (б) компонент скорости в вихревой камере с малым выходным отверстием. $d_e = 40$ мм, $z_e = 430$ мм, $Re = 0,8 \cdot 10^4$, $S = 3$: I – экспериментальные точки; 2 – эмпирическая формула (3.71)

Экспериментальные данные по профилям тангенциальной и аксиальной компонент скоростей представлены на рис. 7.12, 7.13, соответственно в безразмерных и размерных координатах. На рис. 7.12 показаны профили скоростей в двух сечениях для сравнительно большого диаметра выходного отверстия $d_e = 100$ мм. Эти данные получены напорной трубкой, поскольку радиус вихревой нити достаточно большой ($r_m \approx 14$ мм). Здесь r_m определено по положению максимума тангенциальной скорости v_m . Важно отметить, что профиль тангенциальной скорости не меняется по высоте канала, в то время как профиль аксиальной компоненты претерпевает значительные изменения, а именно максимум скорости при приближении к выходному отверстию смещается к оси вихря. Примечательной особенностью распределений аксиальной скорости является наличие локального минимума на оси. Но всегда, когда формируется концентрированный вихрь, наблюдается интенсивный проток вдоль вихря.

С уменьшением выходного отверстия провал на профилях аксиальной скорости исчезает, как это видно из экспериментальных данных на рис. 7.13 (для $d_e = 40$ мм). В этом случае радиус вихря составляет всего 1,8 мм, и измерения удалось провести только методом стробоскопической визуализации. Распределения скорости достаточно хорошо описываются эмпирическими зависимостями (3.71) со значениями констант: $K = 5$, $W_1 = 0,3$, $W_2 = 1,6$, $\alpha = 0,3$. Экспериментальные данные позволяют классифицировать регистрируемый прямолинейный вихрь как вихревую нить, поскольку диаметр вихревого ядра (3–10 мм) много меньше длины вихря (430–560 мм) и поперечного размера камеры (188 мм).

Чтобы применить для описания экспериментальных профилей точные решения (см. табл. 3.1 на с. 153), необходимо знать основные характеристики вихря: циркуляцию Γ , размер ядра ε , шаг винтовой симметрии l и скорость на оси вихря u_0 . Их можно пересчитать через эмпирические константы K , W_1 , W_2 , α , однако следует учесть, что при определении констант уже закладываются некоторые приближения. Например, Garg, Leibovich [1979] приближают зависимости (3.71) к эксперименту методом наименьших квадратов. Поэтому следует отдать предпочтение непосредственным способам определения параметров моделей вихрей. Способы вычисления l и u_0 были описаны в п. 7.2, а способы определения Γ и ε будут представлены ниже.

Для моделей вихрей I и II параметр ε совпадает с радиусом максимума тангенциальной скорости r_m , а для модели III пересчитывается по формуле $\varepsilon = r_m / 1,12$, т. е. его можно считать известным, если в эксперименте непосредственно удастся определить радиус r_m . Если еще известно значение максимальной скорости v_m , то циркуляцию Γ для соответствующих моделей можно определить по формулам

$$\Gamma = 2\pi r_m v_m \text{ для I и II,} \quad \Gamma = 4\pi r_m v_m / 0,715 \text{ для III.}$$

Таким образом, модели вихрей будут полностью определены, если в дополнение к параметрам l и u_0 , найденным одним из способов п. 7.2, будет известно положение и значение максимума тангенциальной компоненты скорости.

Другой способ нахождения Γ и ε связан с их вычислением через профили давления. Действительно, если удастся определить точку $r_{0,5}$, в которой изменение давления равно полуперепаду между его значениями на оси вихря и периферии, то в соответствии с теоретическими моделями п. 3.3.4 ее можно отождествить с точкой r_m – максимума тангенциальной скорости. С другой стороны, если известно значение перепада давления Δp_0 , то в соответствии с формулами для давлений в п. 3.3.4 можно определить значения циркуляции (см. табл. 3.1)

$$\Gamma = 2\pi r_{0,5} (\eta \Delta p_0 / \rho)^{1/2},$$

где $\eta = 1, 2$ и $1/\ln 2$ для моделей I, II и III соответственно.

В общем случае характеристики как поля скорости, так и поля давления для вихревой нити определить весьма трудно из-за малых размеров ядра, трехмерности течения в винтовых вихрях и всегда присутствующей нестационарности (в частности, прецессирующего движения и турбулентности). Однако некоторые параметры вихря можно оценить сравнительно просто по измерениям, например, донного давления [Кутателадзе и др., 1987]. В силу малой толщины пограничного слоя следует ожидать, что распределения статического давления на дне камеры и в ядре потока (в окрестности дна) будут идентичны. Конечно, должен быть исключен распад вихря, который обяза-

тельно предполагает наличие заметных значений осевого градиента давления [Escudier, 1988]. Пример распада вихря, локализованного у дна камеры, показан на рис. 7.9. В случае отсутствия распада по измерениям давления можно восстановить поле тангенциальных скоростей и определить другие характеристики, в частности размер ядра вихря.

На рис. 7.14 проведено сравнение радиальных распределений статического давления в разных сечениях камеры и на дне. Ясно, что в закрученном потоке жидкости невозможно напорной трубкой произвести измерения слишком близко к оси вихря. Тем не менее сравнение опытных данных в доступных для измерений областях свидетельствует о том, что профили давления не меняются по высоте камеры и соответствуют значениям донного давления. Аналогичный вывод делается С.С. Кутателадзе и др. [1987] для диафрагмированных камер иной конструкции. Поэтому далее мы проведем анализ данных по донному давлению и попытаемся оценить на их основе параметры вихревой нити, взаимодействующей с плоским дном.

Из визуализации течения в донной области (рис. 7.8б) следует, что частицы движутся по спиральным траекториям к центру. Это означает, что в окрестности дна радиальная компонента скорости $u_r \neq 0$. Поэтому представленный на рис. 7.14 факт имеет принципиальное значение. Действительно, если в соответствии с (3.63) давление не зависит от осевой компоненты скорости, то при постоянстве размера ядра следует ожидать его сохранения в разных сечениях камеры. Однако профиль давления сохраняется и при взаимодействии вихря с дном камеры, где наблюдается заметное радиальное движение. Следовательно, определение характеристик вихревой нити через измерения в донной области вполне оправдано.

На рис. 7.15 данные по донному давлению для разных значений числа Рейнольдса Re_n и параметра крутки S обобщены в координатах $[\Delta p / \Delta p_0, 2r/m]$. Диаметр выходного отверстия d_e фиксирован и равен 70 мм. Здесь $\Delta p_0 = |p_0 - p_\infty|$, p_0 – давление на оси вихря; p_∞ – давление вдали (на боковой стенке канала). Число Рейнольдса $Re_n = V_n d_n / v$, V_n – скорость на срезе сопла; d_n – гидравлический диаметр сопла.

На рис. 7.16а приведены экспериментальные данные по характерным масштабам r_m (положение максимума тангенциальной скорости) и $r_{0.5}$ (положение точки половины перепада давления) в зависимости от диаметра выходного отверстия d_e . Масштаб r_m обычно отождествляют с радиусом концентрированного вихря. Здесь наши данные совпадают с измерениями Escudier *et al.* [1980] для вихревой трубы с щелевым входом. Наиболее примечательным фактом является совпадение значений r_m и $r_{0.5}$. Это означает, что радиус вихря можно определять по точке, в которой давление равно половине полного перепада давления. Такой же вывод следует из проведенного выше анализа теоретических моделей.

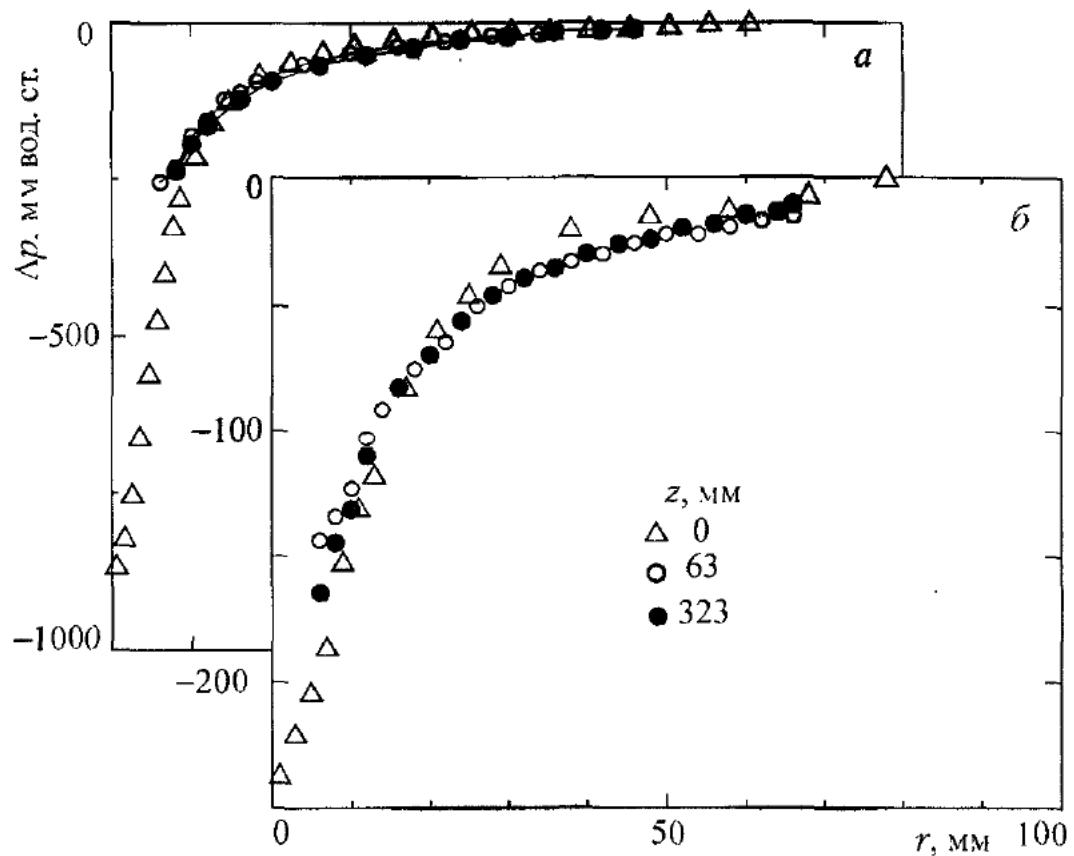


Рис. 7.14. Распределения статического давления в различных поперечных сечениях камеры. $z_c = 430$ мм, $Re = 0,8 \cdot 10^3$, $S = 3$. $d_e = 70$ (а), 100 мм (б); точки для $z = 0$ соответствуют донному давлению

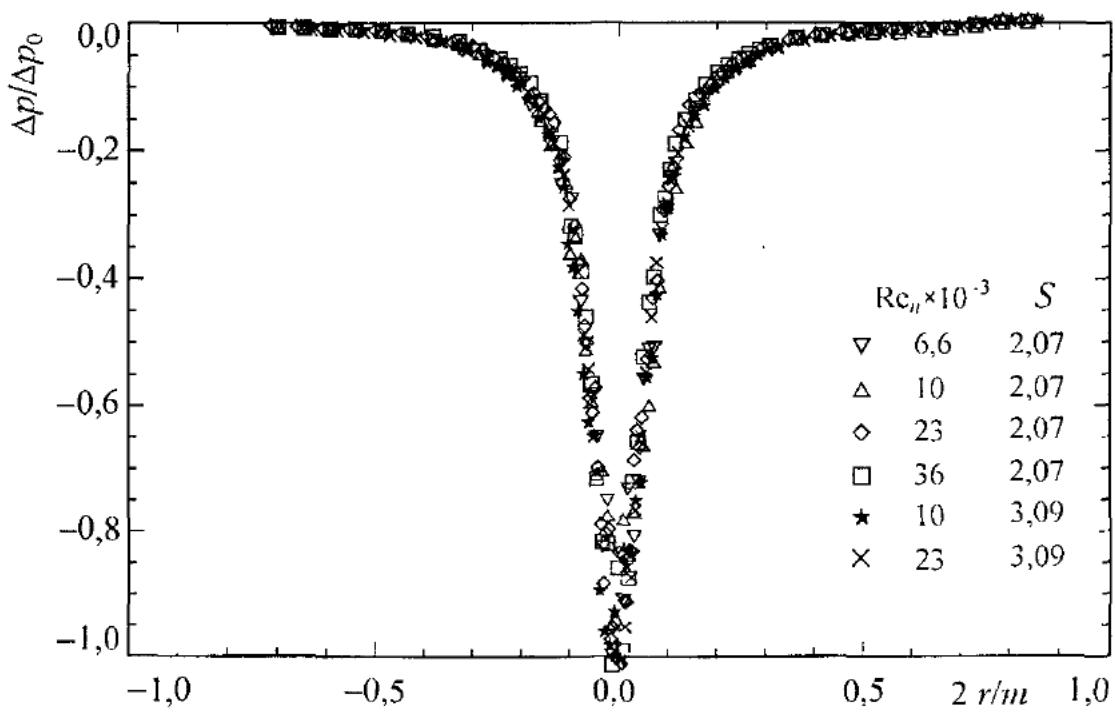


Рис. 7.15. Обобщенные профили донного давления для различных значений Re и S . $d_e = 70$ мм, $\Delta p_0 = |p_0 - p_\infty|$, где p_0 и p_∞ есть значения статического давления на оси вихря и периферии

Попытки теоретического расчета r_m были выполнены Г.Н. Абрамовичем [1953] на основе принципа максимального расхода и М.А. Гольдштиком [1981] на основе принципа минимума потока кинетической энергии. Получены формулы, в которых относительный размер вихря $2r_m/d_e$ выражается через конструктивный параметр вихревой камеры $m_c = 4\Sigma_n/(\pi d_e d)$, где Σ_n – площадь поперечного сечения сопел; d – диаметр условной окружности (см. рис. 7.2). Как показано И.И. Смульским [1992], удобнее использовать более простую эмпирическую формулу А.А. Овчинникова, Н.А. Николаева [1973]

$$\frac{2r_m}{d_e} = \frac{0,35}{\sqrt{m_c}}, \quad (7.8)$$

справедливую при $d_e/2R_c > 0,1$ и $m_c > 0,1$. Здесь R_c – радиус вихревой камеры.

Измерения значения максимума тангенциальной скорости приведены на рис. 7.16б также в виде зависимости от диаметра выходного отверстия d_e . Здесь V' – компонента скорости на срезе сопел, параллельная тангенциальной компоненте скорости в камере.

Простую оценку v_m можно осуществить на основе профиля (3.70), полагая, что он справедлив до стенки канала, т. е. $r = R_c$ [Гольдштик, 1981]. При этом в качестве значения скорости на стенке принимается величина V'

$$\frac{v_m}{V'} = 0,715 \frac{R_c}{r_m}. \quad (7.9)$$

Радиус вихря r_m можно рассчитать, например, по эмпирической формуле (7.8) или другим способом. Так, расчетные зависимости на рис. 7.16 получены на основе (7.9) с использованием модели М.А. Гольдштика [1981] для r_m . Иначе максимум тангенциальной скорости можно определить по разрежению Δp_0 в центре вихря, например, по модели Рэнкина

$$v_m = \sqrt{\Delta p_0 / \rho}.$$

Рассчитанные таким образом значения v_m хорошо согласуются с прямыми измерениями (см. светлые кружки на рис. 7.16б). На величину разрежения сильное влияние оказывают параметр крутки S (или угол поворота сопел γ), расход жидкости Q и диаметр выходного отверстия d_e , как это продемонстрировано на рис. 7.17.

Основной вывод из проведенного анализа состоит в том, что определение характеристик, используемых в теоретических моделях п. 3.3.4, возможно при решении более простой экспериментальной задачи – изучении взаимодействия вихря с плоскостью. Более того, возможно построение даже эвристических моделей типа (7.8) и (7.9) для определения параметров вихрей.

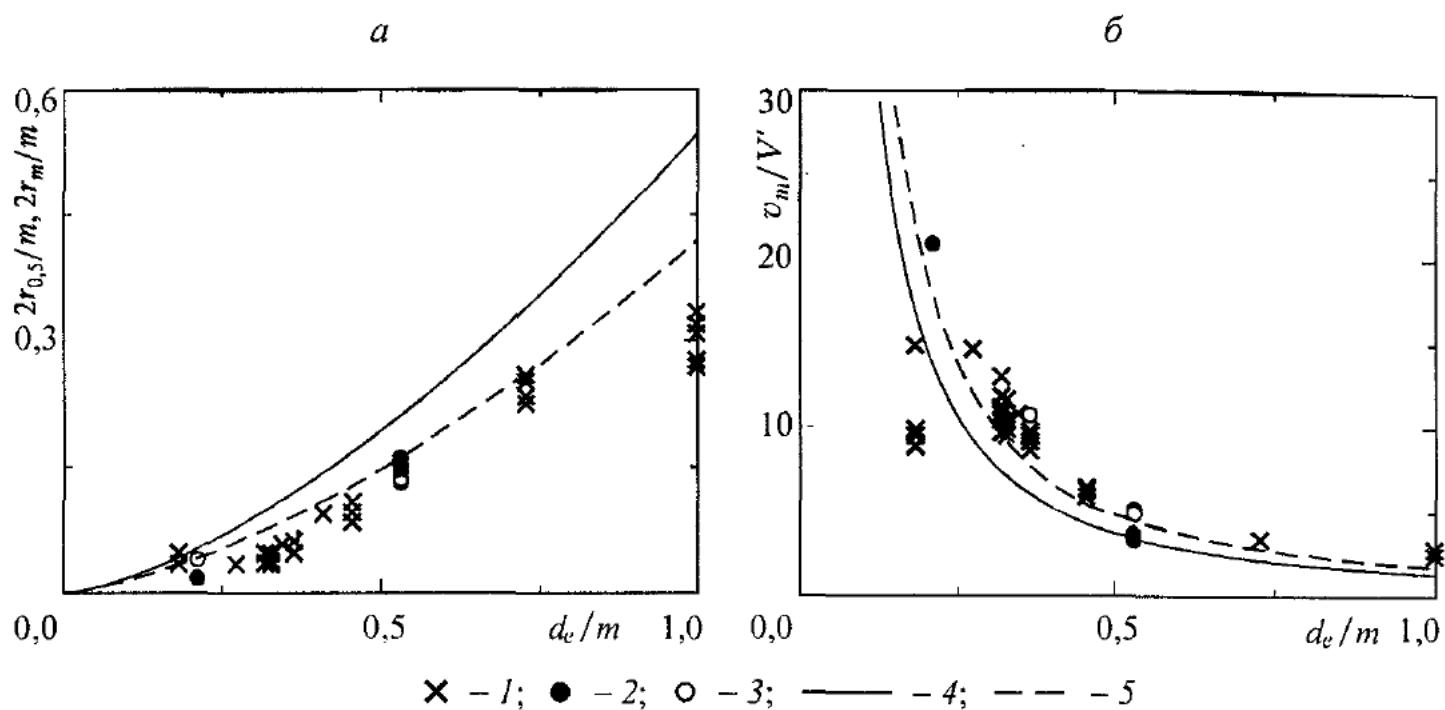


Рис. 7.16. Характерные масштабы поперечных размеров (а) и скорости (б) для концентрированного вихря: r_m – координата максимума тангенциальной скорости v_m , $r_{0.5}$ – координата точки полуперенада давления. 1 – данные Escudier *et al.* [1980], $S = 1,8$; 2 – Alekseenko *et al.* [1999], $S = 3,1$; 3 – измерения $2r_{0.5}/m$ (а) и расчет скорости по измеренным профилям давления с использованием модели Рэнкина (б). Другие символы – экспериментальные значения $2r_m/m$ (а) и относительного максимума скорости (б); 4, 5 – вычисления при $S = 3,1$ и $1,8$ соответственно, по формулам (7.8) (а) и (7.9) (б)

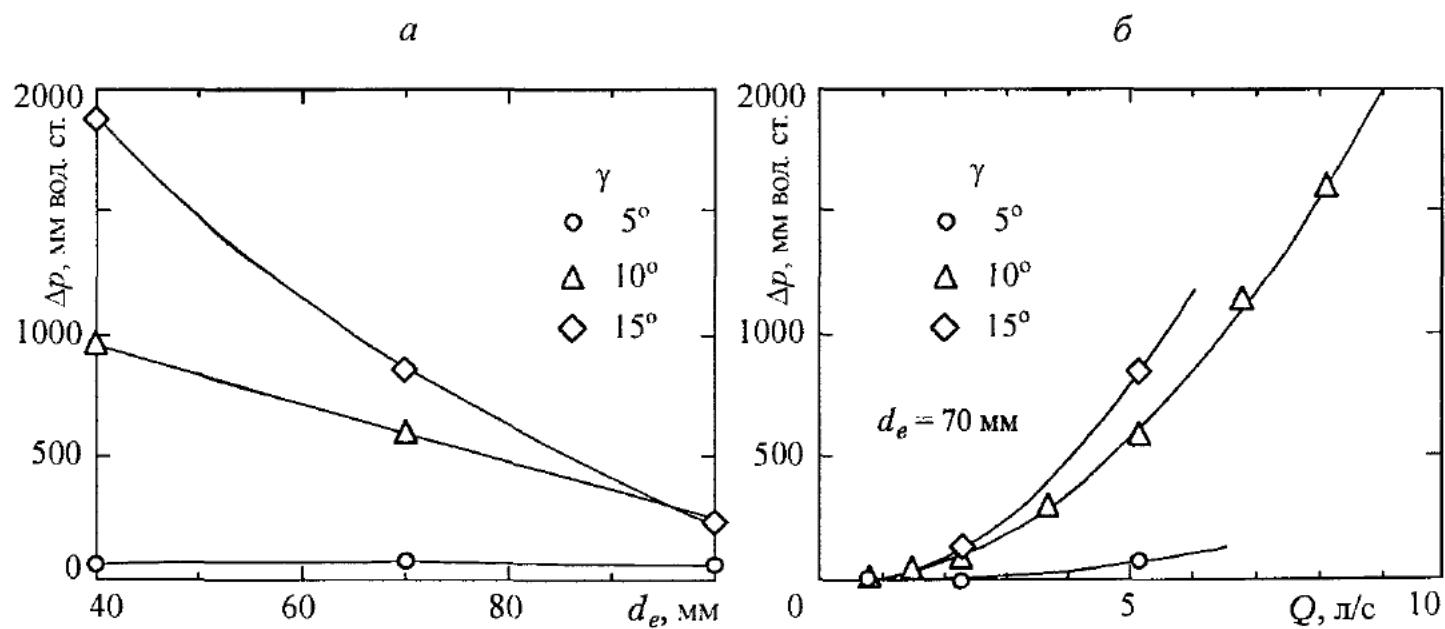


Рис. 7.17. Зависимость разрежения на оси вихря (относительно периферии) от расхода жидкости Q , диаметра выходного отверстия d_e и угла наклона сопел γ [Шторк, 1994]

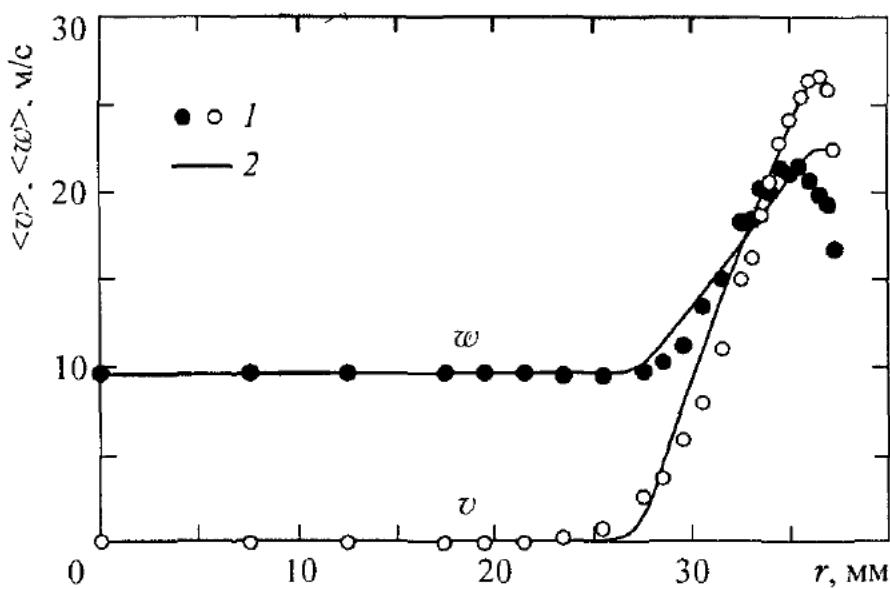


Рис. 7.18. Сравнение экспериментальных данных С.С. Кутателадзе и др. [1987] (пристенная закрученная струя в камере с открытым торцом) с моделью вихря, имеющего кольцевое распределение завихренности. 1 – эксперимент; 2 – формула (3.68)

Относительно сопоставления самих моделей с экспериментом отметим, что здесь уже накоплен достаточно обширный материал при сравнении профилей (3.71), или, как установлено теперь, модели III, с измерениями Leibovich [1984], Escudier [1988] и др. А так как модели I и III близки, то следует ожидать хорошего согласия и по модели вихря с постоянным распределением завихренности в ядре. В качестве примера на рис. 7.18 выполнено сравнение модели кольцевого вихря с экспериментальными данными С.С. Кутателадзе и др. [1987]. Эти результаты указывают на возможность существования вихря с кольцевым распределением завихренности.

Таким образом, обобщенная модель осесимметричного винтового вихря с произвольным распределением осевой компоненты завихренности по радиальной координате (в частности, рассмотренные три разных случая – I, II, III в п. 3.3.4) позволяет получить разнообразные поля скоростей и давлений, согласующиеся в предельных случаях с известными теоретическими моделями и хорошо описывающие экспериментальные данные. Кроме того, показано, что возможно определение параметров вихрей для этих моделей через измерения на дне или торцевой поверхности камеры, где вихрь взаимодействует с плоскостью.

7.3.2. Композиция вихрей

Качественно новая вихревая структура появляется в камере при увеличении отверстия диафрагмы. Появляется провал на профилях осевой скорости, а профиль тангенциальной скорости при больших радиусах все более начинает отклоняться от эмпирических профилей (3.71) или, как установлено в п. 3.3.4, от точного решения (3.70).

Вернемся к рис. 7.12, где показаны профили скоростей в двух сечениях для сравнительно большого диаметра выходного отверстия $d_e = 100$ мм. Приведенные результаты по профилям скорости в целом соответствуют измерениям Escudier *et al.* [1980], выполненным с помощью ЛДИС в вихревой камере с тангенциальной подачей по всей длине камеры (рис. 7.1б), а также данным Brüker, Althaus [1992], полученным методом PIV в камере с осевым завихрителем. Примечательной особенностью распределений осевой скорости является наличие локального минимума на оси потока, а тангенциальной – ее отклонение при больших радиусах от эмпирических зависимостей (3.71). При значениях $r/r_m > 2$ экспериментальные точки начинают настолько сильно отклоняться от эмпирических формул (3.71), что Escudier *et al.* [1982] модифицировали профиль линейной добавкой с эмпирическим коэффициентом ω_1

$$v = \frac{K}{r} \left[1 - \exp(-\alpha r^2) \right] + \omega_1 r. \quad (7.10)$$

Однако модифицированная формула уже переставала соответствовать решению Бюргерса, которое имеет ясный физический смысл. С профилем осевой скорости дело обстояло еще хуже. Обосновать и описать его немонотонное поведение простой манипуляцией с эмпирическими формулами (3.71) не удавалось. Тем не менее, проблему описания сложных профилей скорости, подобных изображенному на рис. 7.12, возможно разрешить в рамках моделей вихрей I и III.

Первоначально возникает вопрос о существовании винтовой симметрии в сечениях такого рода. Рассмотрим данный вопрос на примере профилей скорости (см. рис. 7.12), измеренных вдали от дна камеры на расстоянии 323 мм, где влиянием дна можно пренебречь. Разобьем течение на две зоны. Зона 1 – от оси до r_* – точки максимума осевой скорости и зона 2 – кольцевая область от r_* до периферии (стенки камеры). В соответствии со способами определения параметров винтовой симметрии определим их для каждой зоны течения отдельно:

$$\begin{aligned} l &= -46,7 \text{ мм}, u_0 = 0,12 \text{ м/с для зоны 1} \\ \text{и } l &= 46,7 \text{ мм}, u_0 = 0,80 \text{ м/с для зоны 2}. \end{aligned}$$

Как видно, шаг винтовой симметрии одинаков по величине, но имеет разный знак (т. е. окружная компонента завихренности оказывается знакопеременной). Этот результат приводит к заключению, что довольно сложное поведение распределений компонент скорости можно промоделировать путем композиции нескольких простых вихрей. Такому составному вихрю соответствуют непересекающиеся кольцевые области (в данном случае зоны 1 и 2). Пример композиции двух вихрей с прямолинейными осями показан на рис. 7.19.

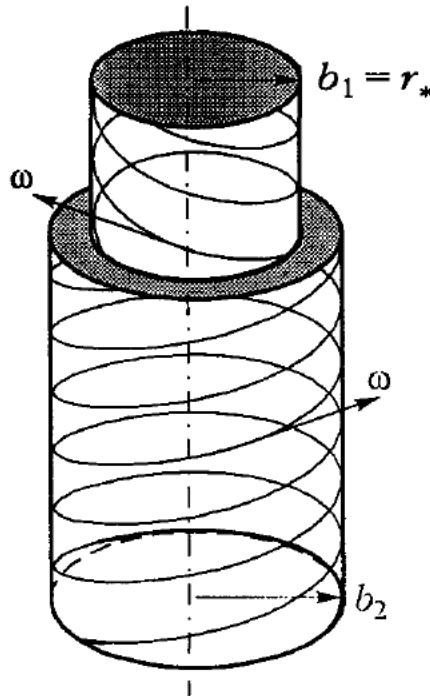


Рис. 7.19. Композиция двух колоннообразных вихрей

Здесь первому вихрю соответствует цилиндрическая область радиуса $b_1 = r_*$, внутри которой завихренность постоянна, а вектор завихренности ω направлен под некоторым углом к оси z (левый вихрь). Второй вихрь характеризуется кольцевой областью с радиусами b_1 и b_2 , внутри которой завихренность также постоянна, но вектор завихренности ориентирован иначе (правый вихрь). Результирующее поле скоростей, в силу линейной связи между завихренностью и скоростью, определяется как сумма вкладов от двух завихренных областей. Можно рассмотреть разные комбинации различных областей (в том числе некольцевых) и с различной ориентацией ω .

Для теоретического обоснования возможности композиции двух вихрей проанализируем решение (2.68) для функции тока элементарной винтовой нити. Если исключим слагаемое, содержащее u_0 в (2.68), то нетрудно заметить, что решение инвариантно относительно знака l . В сущности, u_0 есть константа интегрирования и должна определяться отдельно для каждой зоны. Следовательно, нет проблемы с учетом члена, содержащего u_0/l в (2.68). Тогда мы можем сконструировать модель вихря путем комбинации областей, состоящих из левых и правых винтовых нитей (исключая случай пересечения левых и правых нитей). Введенные выше кольцевые области не противоречат этому требованию.

Используя гипотезу о композиции правого и левого вихрей в зонах 1 и 2, можно записать результирующее соотношение для проверки винтовой симметрии, связывающее тангенциальную и осевую скорости (аналог соотношения (1.66) для проверки винтовой симметрии в простых течениях), в виде

$$\omega = \begin{cases} \omega_1 + \frac{rv}{|l|}, & r < r_* \\ \omega_2 - \frac{rv}{|l|}, & r > r_* \end{cases} \equiv u_0 + \frac{r_* v(r_*)}{|l|} - \left| \frac{rv - r_* v(r_*)}{l} \right|. \quad (7.11)$$

Здесь ω_1 и ω_2 – константы интегрирования.

Анализируя (7.11) можно заключить, что во внутренней области константа $\omega_1 = u_0$, т. е. совпадает с осевой компонентой скорости на оси камеры, а для внешнего вихря $\omega_2 = u_0 + 2r_*v(r_*)/|l|$, что определяется сшивкой профилей на границе двух областей. Таким образом, при выполнении условия (7.11) можно говорить о наличии обобщенной винтовой симметрии в течениях с немонотонным профилем осевой скорости и соответственно о композиции двух винтовых вихрей.

Результаты проверки наличия обобщенной винтовой симметрии для упомянутых выше режимов представлены на рис. 7.20. Они показывают, что для данных Brücker, Althaus [1992] и С.И. Шторка [1994] обобщенное условие винтовой симметрии выполняется с высокой степенью точности. Следовательно, можно утверждать, что в описанных режимах возникает комбинированный винтовой вихрь.

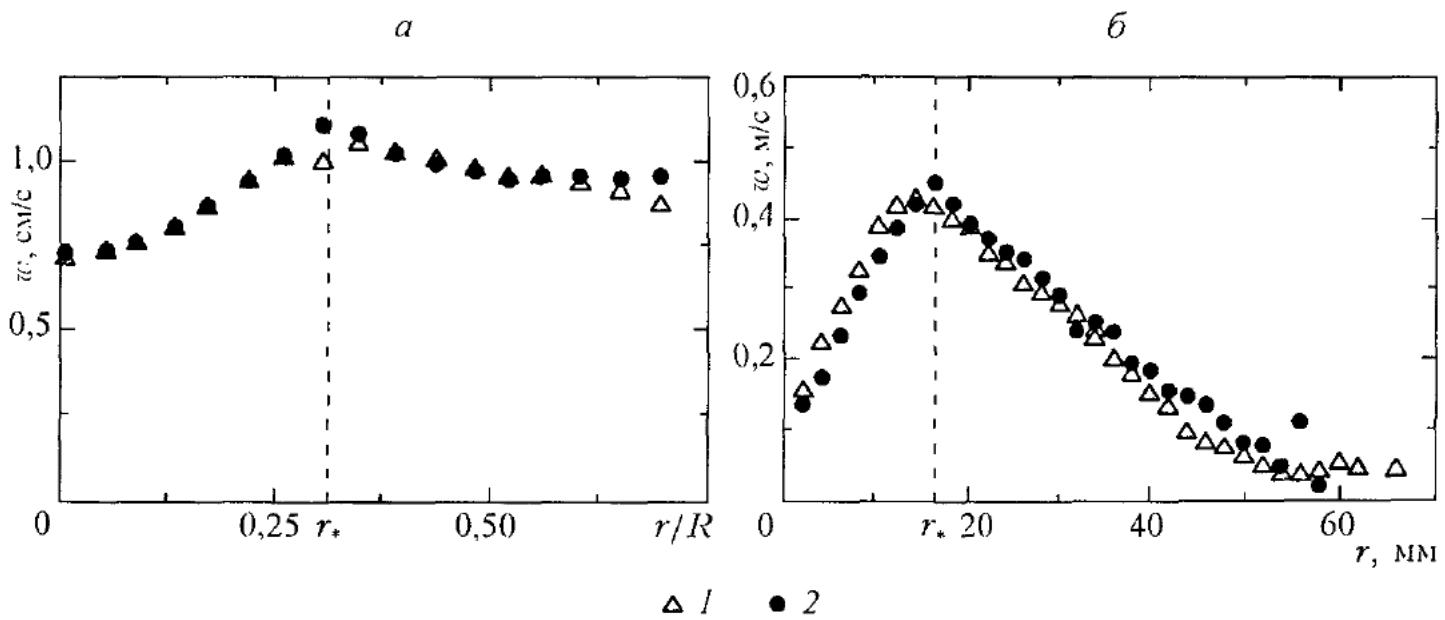


Рис. 7.20. Проверка винтовой симметрии в закрученном потоке с предполагаемой композицией двух вихрей. *а* – данные Brücker, Althaus [1992], $I/R = 0,67$, $w_1 = 0,72$ см/с, $w_2 = 1,53$ см/с, $r_*/R = 0,31$; *б* – данные С.И. Шторка [1994], $I = 46,7$ мм, $w_1 = 0,12$ м/с, $w_2 = 0,8$ м/с, $r_* = 16$ мм, $d_c = 100$ мм, $z_c = 430$ мм, $Re = 2,8 \cdot 10^4$, $S = 3$, $z = 323$ мм. *I* – измеренные значения аксиальной скорости; *2* – аксиальная скорость, вычисленная по измеренным значениям тангенциальной скорости с использованием условия винтовой симметрии (7.11)

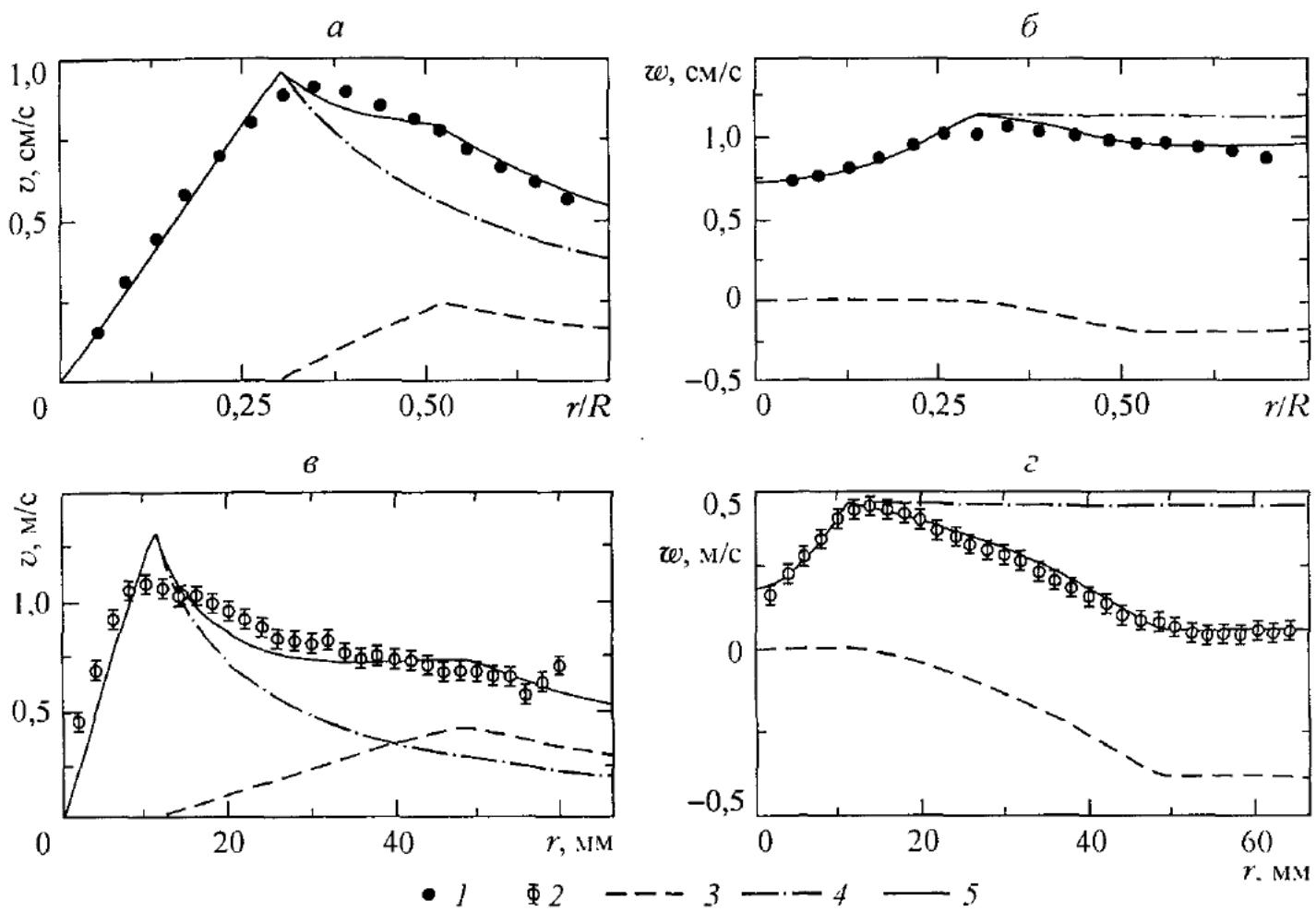


Рис. 7.21. Сравнение экспериментальных профилей скорости с точным решением (7.11) для композиции двух вихрей. 1 – эксперимент Brücker, Althaus [1992]; 2 – эксперимент С.И. Шторка [1994], те же данные, что и на рис. 7.20. Расчет по формуле (7.11): 3 – правовинтовой вихрь, 4 – левовинтовой вихрь; 5 – композиция вихрей

С целью аппроксимации поля скоростей для вихря с прямолинейной осью достаточно, по-видимому, использовать комбинацию, изображенную на рис. 7.19. Поле скоростей, индуцированное в каждой из этих завихренных областей, рассчитывается по модели I с одинаковыми по величине, но разными по знаку значениями l . Параметры базовых вихрей подобраны так, чтобы добиться наилучшего согласия между расчетом и экспериментом. Как видно из рис. 7.21, очень хорошо описывается профиль осевой компоненты w и несколько хуже – v . Последний факт связан с тем, что теоретическая модель в точке максимума v всегда дает излом, так как завихренность в этой точке претерпевает скачок от нуля до постоянного конечного значения.

Возвращаясь к рис. 7.12, отметим одно важное свойство: профиль тангенциальной скорости не меняется по высоте канала, в то время как профиль аксиальной компоненты испытывает значительные изменения, а именно максимум скорости при приближении к выходному отверстию смещается к оси вихря. На подобие профиля тангенциальной скорости по высоте камеры указывал и Escudier *et al.* [1980]. В том числе это касалось и течений с компози-

цией двух вихрей. Если учесть, что для осесимметричных течений давление определяется только тангенциальной компонентой скорости (3.63), то данный факт позволяет предположить возможность определения характеристик составного вихря по измерениям донного давления, как это было сделано для простых вихревых нитей в п. 7.4.1. Рисунок 7.14 подтверждает это предположение. Действительно, как для одиночных вихрей, так и для течений с композицией двух вихрей профили давления на дне камеры и в потоке идентичны.

В связи с вышесказанным исследованиями по режимам течения с композицией двух вихрей завершим описанием результатов измерения донного давления, а именно обобщения их для различных диаметров выходного отверстия. Как было отмечено выше о координатах, использованных в п. 7.4.1 профили донного давления не обобщаются для разных значений диаметра выходного отверстия d_e . Подходящим оказался подход, применяемый для струйных течений. Если в качестве масштаба расстояния привлечь значение радиальной координаты $r_{0,5}$, на котором изменение давления равно половине перепада давления Δp_0 , то в координатах $[\Delta p/\Delta p_0, r/r_{0,5}]$ хорошо обобщаются профили донного давления для разных d_e (рис. 7.22). При этом экспериментальные точки описываются простой эмпирической зависимостью

$$\Delta \bar{p} = -1/(1 + \bar{r}^2). \quad (7.12)$$

Здесь $\Delta \bar{p} = \Delta p / \Delta p_0$, $\bar{r} = r / r_{0,5}$. Этой же зависимостью аппроксимируются безразмерные профили донного давления в вихревой камере с боковым вдувом [Смульский, 1992].

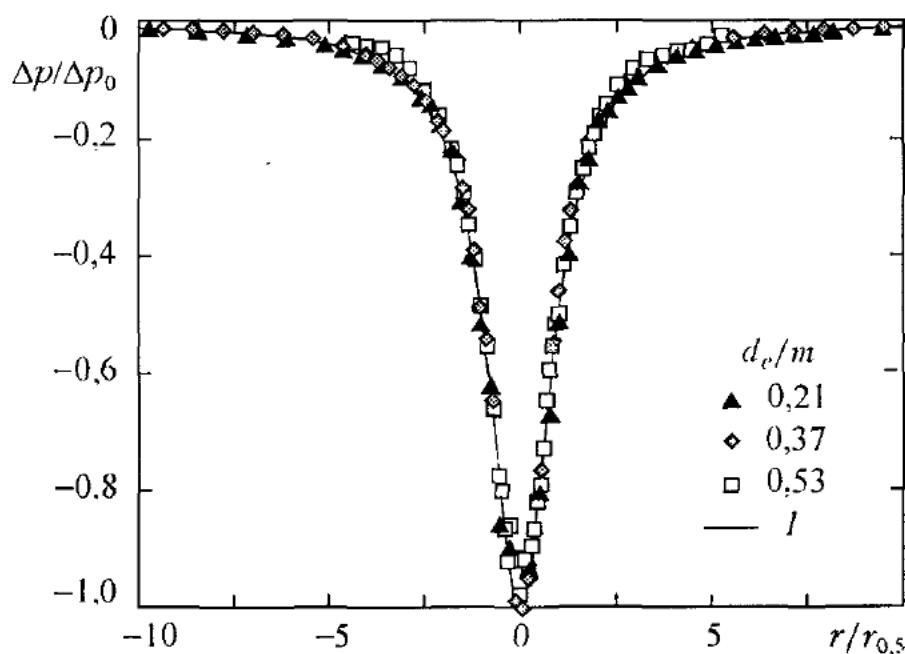


Рис. 7.22. Обобщение профилей донного давления для различных диаметров выходного отверстия. $z_o = 430$ мм, $Re = 2,8 \cdot 10^4$, $S = 3$. I – формула (7.12)

Таким образом, гипотеза о возможности в закрученных течениях реализации режимов с композицией двух вихрей позволила описать сложные распределения скоростей, измеренные в эксперименте. Но значимость принципа композиции не только в аппроксимации эмпирических полей скорости, но и в возможности дать физическую интерпретацию реального объекта. В данном примере концентрация завихренности в ядре реального вихря обусловлена интенсивным левовинтовым вихрем, а вне ядра завихренность вносится более слабым правовинтовым вихрем. Далее принцип композиции будет применен для объяснения структуры более сложных винтовых вихрей.

7.4. ПРЕЦЕССИЯ ВИХРЕВОГО ЯДРА

Продолжим описание режимов закрученного течения в вихревой камере (см. рис. 7.2) для случая, когда диафрагма в выходной части камеры отсутствует. В отличие от диафрагмированной камеры с малым выходным отверстием здесь течение становится нестационарным вследствие потери осевой симметрии. При этом выделяется достаточно выраженное прецессирующее вихревое ядро (рис. 7.23). Потеря осевой симметрии не связана с асимметрией выходной секции рабочего участка. Далее в этом разделе будем рассматривать область течения ниже уровня $z = z_*$ (см. рис. 7.2). Полагается на основе наблюдений, что конфигурация выходной части камеры при $z > z_*$ не оказывает определяющего влияния на течение в области $z < z_*$, поскольку главным фактором является наличие резкого расширения потока при $z > z_*$.

На рис. 7.23 схематично изображена структура закрученного течения в вихревой камере с открытым выходом. Особенность течения заключается в образовании обширной приосевой зоны обратных потоков, граница которой обозначена штриховой линией. При этом максимумы как осевой, так и тангенциальной компонент скорости смещены к периферии, что следует из осредненных по времени профилей. Анализу структуры осредненных по времени режимов подобного типа посвящено довольно много работ (см. Штым, [1985]). Нас, однако, интересуют нестационарные явления.

Как следует из визуальных наблюдений, на границе зон подъемного и опускного течений формируется концентрированный протяженный вихрь. Он вращается вместе с потоком вокруг геометрической оси камеры (см. рис. 7.23) и имеет слабо выраженную винтовую структуру. В дополнение к проверке винтовой симметрии для осредненных профилей скорости (рис. 7.4 α), этот факт дает основание применить к описанию таких режимов теорию течений с винтовой симметрией, что и было осуществлено в п. 3.3.6.

Вращающиеся концентрированные вихри, образующиеся в неустойчивом закрученном потоке, обычно называют *прецессирующими вихревыми ядрами* (ПВЯ).

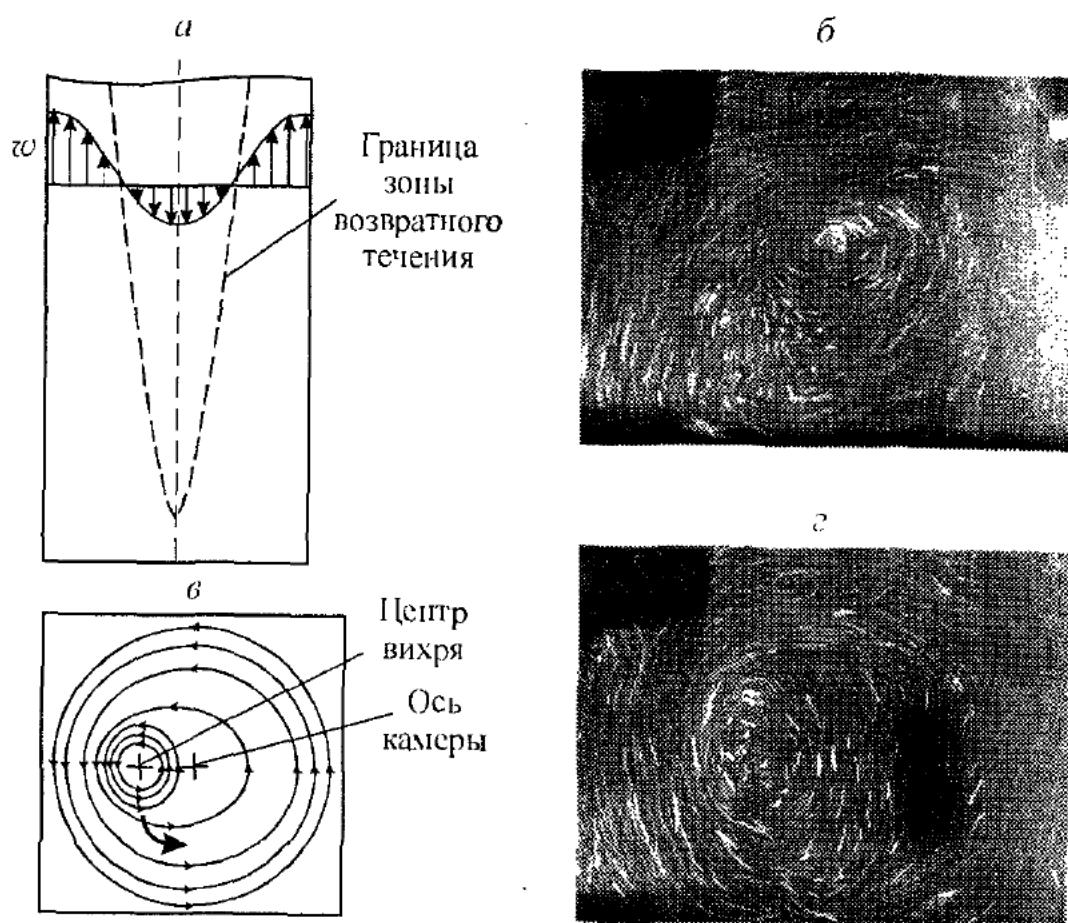


Рис. 7.23. Схемы (*а*, *в*) и визуализация (*б*, *г*) течения в вихревой камере с открытым выходом [Alekseenko, Shtork, 1992]. *б*, *г* – $z = 235$ мм, $Re = 4,3 \cdot 10^4$, $S = 3$ (см. рис. 7.2). Фотографии сняты в различные моменты времени. Ясно видно прецессирующее вихревое ядро

Однако описания ПВЯ в известной литературе связаны с иными условиями эксперимента, кроме того, не идентифицирована пространственная структура прецессирующего вихря. Так, в работе С.С. Кутателадзе и др. [1987] прецессия оси закрученного воздушного потока, сопровождаемая генерацией звука, наблюдалась в цилиндрическом канале со щелевым тангенциальным вводом и открытым выходом. А в книге Л.А. Залманзона [1973] описано явление прецессии в расширяющемся канале, которое нашло применение в измерительной технике. В монографии А. Гупты и др. [1987] рассмотрена прецессия в закручивающих устройствах и горелках, проанализировано влияние ПВЯ на горение. Согласно А. Гупте и др. [1987], а также Sozou, Swithenbank [1969], прецессирующее вихревое ядро – это одно из двух возможных состояний закрученного потока, реализующихся после распада вихря. Гидродинамический режим с ПВЯ характеризуется наличием обширной приосевой зоны рециркуляции с высокими скоростями обратного течения. На выходе из закручивающего устройства образуются крупномасштабные трехмерные возмущения. Сильное воздействие на ПВЯ (как подавление, так и усиление) оказывает горение. В частности, рост амплитуды и частоты пульсаций происходит в потоке с горением предварительно перемешанных компонент [Гупта и др. 1987].

В рассматриваемой вихревой камере наиболее выраженный характер ПВЯ имеет в диапазоне углов поворота сопел $\gamma = 5 - 10^\circ$ (см. рис. 7.2). Но даже при этих условиях ядро не всегда бывает непрерывным и устойчивым. При визуализации потока в поперечном сечении камеры видно, что иногда вместо одного вихря образуются два или более вихрей, которые затем сливаются опять в одно ядро. Наблюдая за воздушной полостью на оси вихря по всей его длине, можно заметить, что она эпизодически рвется на части, которые движутся по кругу самостоятельно и вновь соединяются в одно целое.

Данные по частоте прецессии в зависимости от расхода жидкости для разных значений параметра крутки потока S (или угла поворота сопел γ) приведены на рис. 7.24 a, b соответственно в размерном и безразмерном виде. Измерения выполнены электродиффузионными датчиками, тензодатчиками давления, а также на основе визуальных наблюдений. Здесь f – частота прецессии вихря; $Sh = fm/\omega_m$ – число Струхала; $Re_m = \omega_m \cdot m / v$ – число Рейнольдса; ω_m – среднерасходная по сечению камеры скорость. Как видно, частота f линейно растет с расходом Q . Этот факт был установлен и для других типов тангенциальных завихрителей [Chanaud, 1965; Cassidy, Falvey, 1970]. Наличие линейной связи между f и Q в широком диапазоне расходов зафиксировано и в других работах. И этот факт послужил основой для создания вихревых расходомеров [Залманзон, 1973]. Число Струхала автомодельно относительно числа Рейнольдса, но зависит от степени крутки потока S (рис. 7.25). При значениях $S \leq 4$ число Струхала увеличивается с ростом S по линейной зависимости.

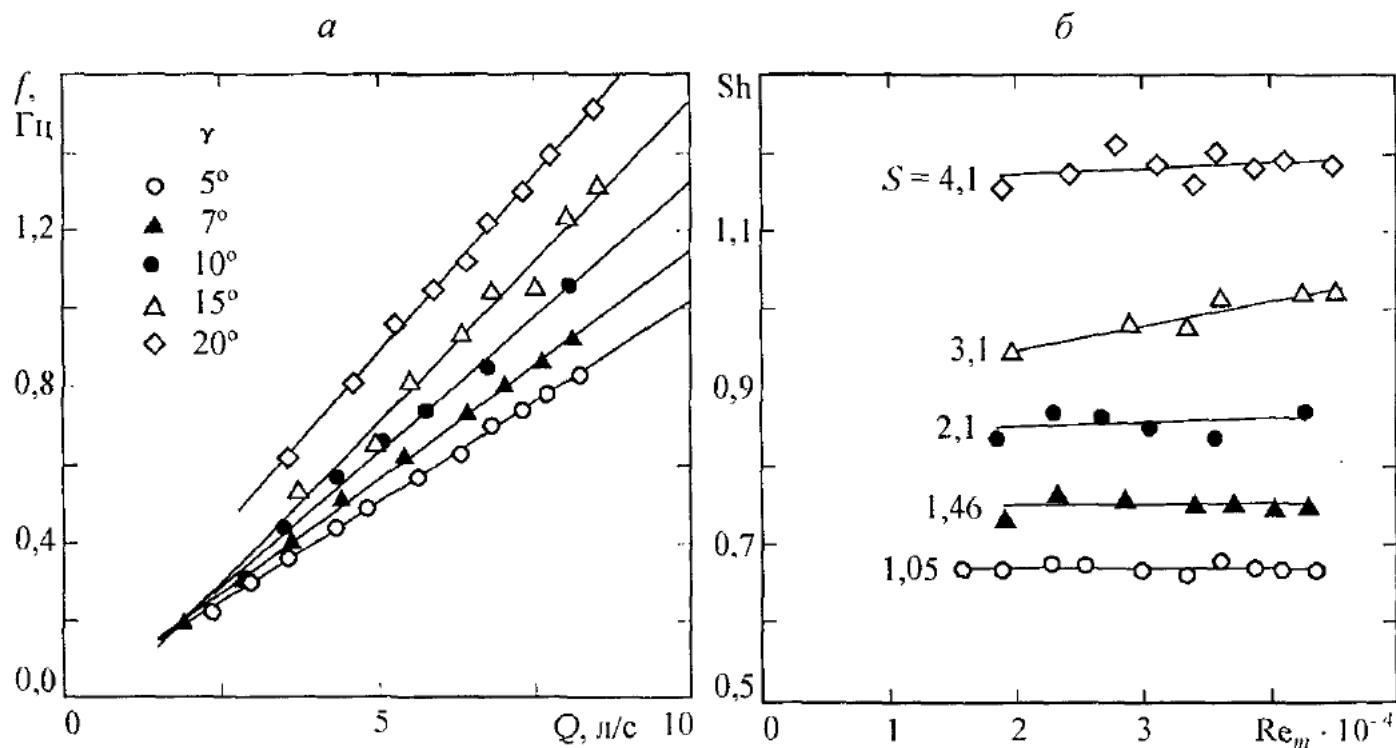


Рис. 7.24. Зависимость частоты прецессии от расхода в размерных (a) и безразмерных (b) координатах [Alekseenko *et al.*, 1999]

Многие исследователи не отождествляют ПВЯ с движением крупномасштабных вихревых структур – винтовых вихрей, однако отмечают, что возникновение ПВЯ сопровождается возникновением противотока вдоль оси закрученного потока [Yazdabadi *et al.*, 1994]. Но, как было показано в п. 2.6.2, наличие противотока может быть само по себе хорошим индикатором (доказательством) образования в потоке винтообразной вихревой структуры. Отсутствие большинстве исследований представления о пространственной структуре потока объясняется сложностью ее визуального выделения в прецессирующем потоке и отсутствием приемлемых методик экспериментального изучения нестационарных трехмерных закрученных потоков (см. обзор С.В. Алексеенко, В.Л. Окулова [1996]). Действительно, ПВЯ легко обнаруживается в плоскости перпендикулярной оси потока (рис. 7.23). Однако по плоской картине трудно восстановить реальную пространственную геометрию течения. Количественные измерения характеристик потока также выполняются в этой плоскости. Обычно – это измерения осредненных скоростей и давлений вдоль радиального направления (см. обзор С.В. Алексеенко, В.Л. Окулова [1996]). И только Mollenkopf, Raabe [1970] и Yazdabadi *et al.* [1994] получили распределение компонент скорости по всему поперечному сечению, используя технику фазового осреднения. Такие результаты позволяют установить только частоту прецессии и наличие противотока, но не пространственную структуру течения.

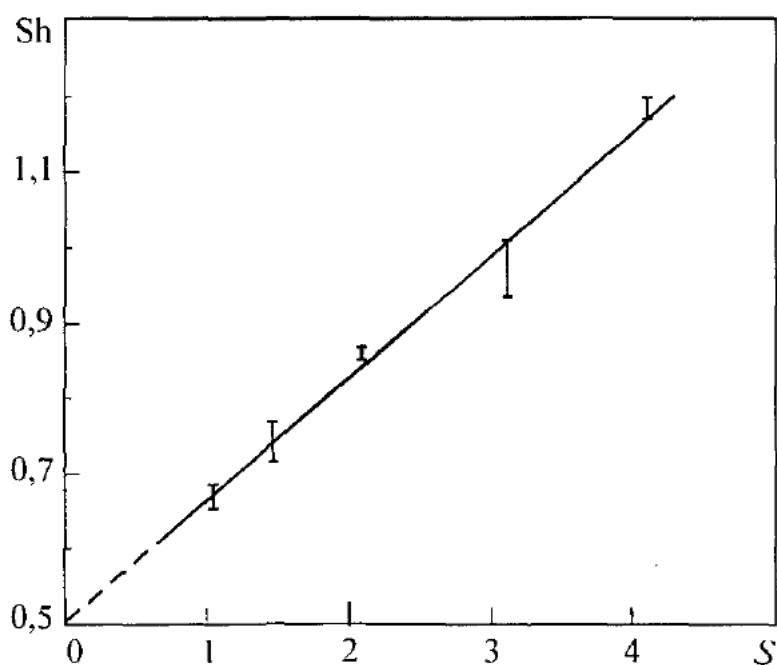


Рис. 7.25. Безразмерная частота прецессии в зависимости от параметра крутки в диапазоне чисел $Re = (1,5 \div 4,7) \cdot 10^4$ (из рис. 7.24б)

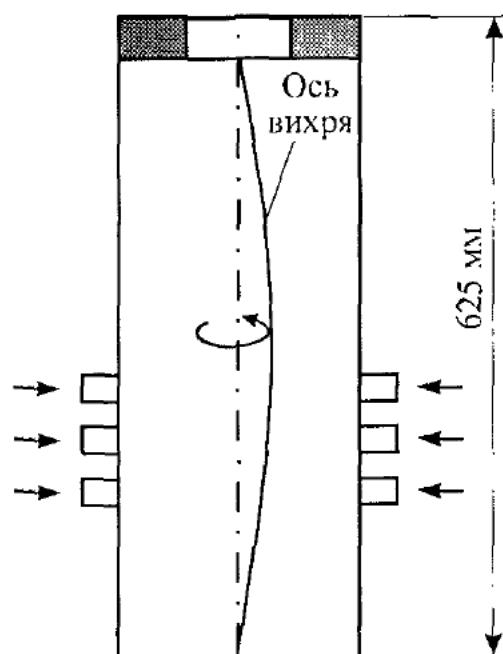


Рис. 7.26. Схема прецессирующей вихревой нити

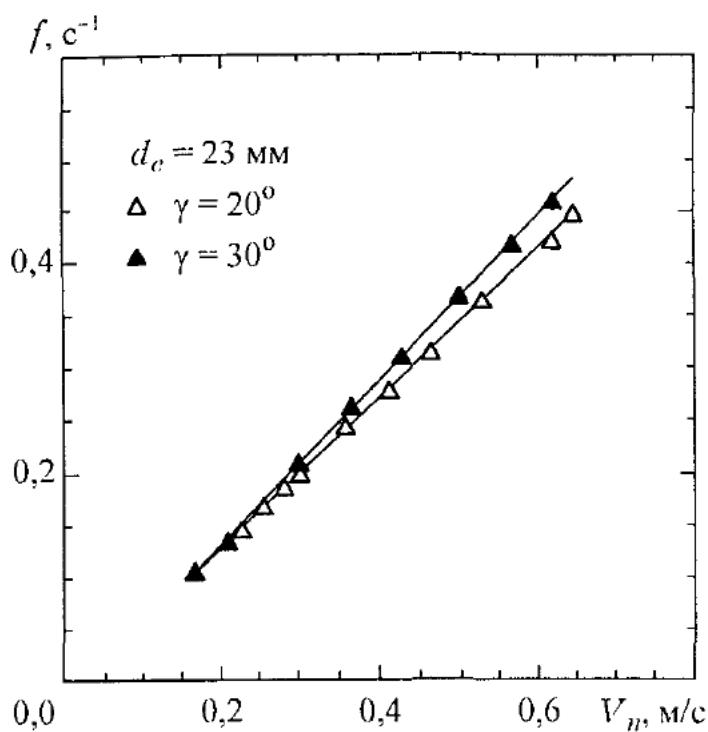


Рис. 7.27. Зависимость частоты прецессии вихревой нити от расхода (скорости жидкости на срезе сопла) и степени закрутки потока (угла γ)

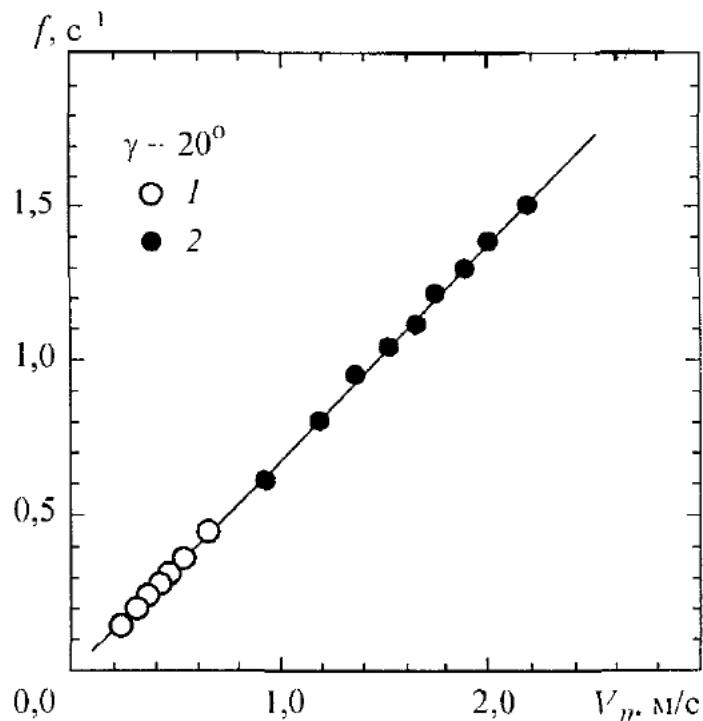


Рис. 7.28. Сравнение частоты прецессии вихревой нити (1) и ПВЯ в режиме с полностью открытым выходом (2)

Опыты показывают, что прецессионное движение характерно не только для режимов закрученного течения в камере с открытым выходом, но и для случая формирования вихревой нити в камере с диафрагмированным выходом. Это означает, что вихревая нить не является абсолютно стабильной и при некоторых условиях (а именно при угле поворота сопел $\gamma > 15^\circ$) совершает слабое, но четко выраженное прецессионное движение. Схема прецессии вихревой нити изображена на рис. 7.26, а частота прецессии в зависимости от расхода (скорости на срезе сопел) показана на рис. 7.27 для двух значений γ . Так же, как и для ПВЯ в камере с открытым выходом, частота прецессии линейно зависит от расхода и является тем большей, чем выше степень крутки. Более того, при $\gamma = \text{const}$ опытные данные для вихревой нити и ПВЯ ложатся на одну прямую (см. рис. 7.28).

Из представленных экспериментальных результатов следует, что ПВЯ можно интерпретировать как винтовой вихрь, врачающийся вокруг своей оси в ограниченном пространстве (камере). Подобная структура, а именно винтовой вихрь с ядром конечного размера в цилиндрической трубе, теоретически рассмотрена в п. 3.3.6. Сравним результаты теоретических расчетов с экспериментальными данными по профилям и частоте прецессии.

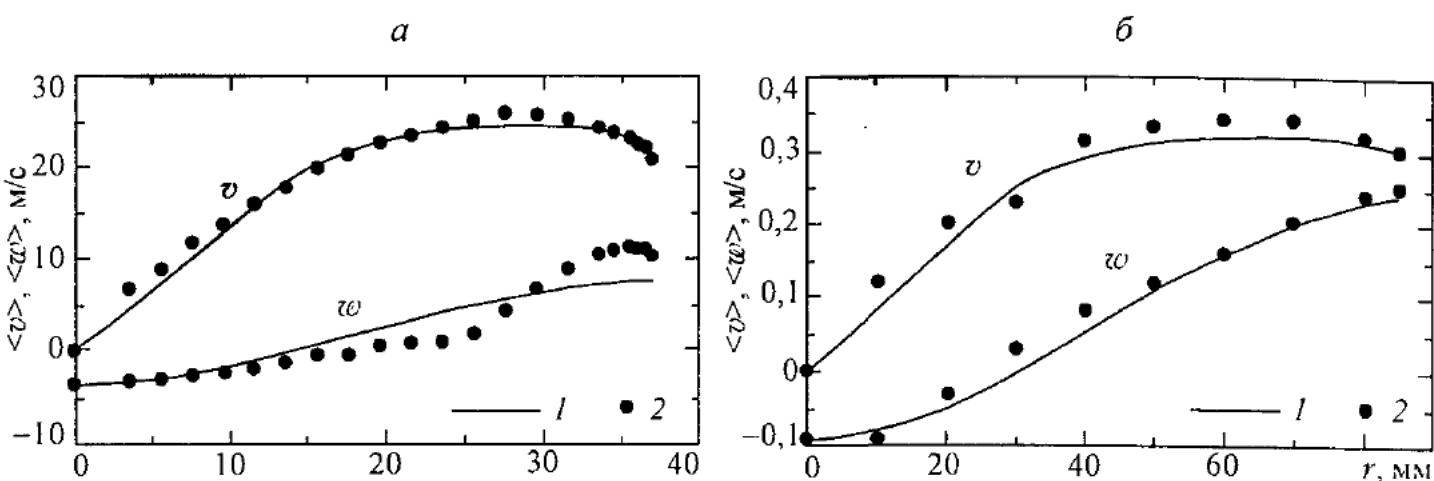


Рис. 7.29. Осредненные профили скорости в закрученном потоке с прецессирующим вихревым ядром. 1 – расчет по формуле (3.76) для вращающегося винтового вихря; 2 – эксперимент; а – С.С. Кутателадзе и др. [1987] (пристенная закрученная струя в круглом канале с заглушенным торцом, $x = 175$ мм); б – Alekseenko *et al.* [1999] (тангенциальная камера с открытым выходом, $Re = 3,2 \cdot 10^4$, $S = 1$, $z = 63$ мм, см. рис. 7.2)

На рис. 7.29а показаны профили скорости в цилиндрической камере с тангенциальным завихрителем и заглушенным левым торцом (см. рис. 7.1в, С.С. Кутателадзе и др. [1987]). Данные для тангенциальной камеры квадратного сечения (рис. 7.2) представлены на рис. 7.29б [Alekseenko *et al.*, 1999]. Все эти режимы течения характеризуются формированием прецессирующей вихревой структуры. Экспериментальные профили скорости осреднены по времени. Поэтому сравнение производится с теоретическими формулами (3.76), также представляющими осредненные во времени поля скоростей. Параметры вихрей будем определять по измеренным осредненным профилям осевой и окружной скоростей. При этом параметры l и u_0 находятся путем проверки винтовой симметрии (см. п. 7.2), а циркуляция Γ и эффективные размеры a и ϵ – по модели (3.76) методом наименьших квадратов (обозначения приведены на рис. 3.22). Найденные при сопоставлении параметры вихревых структур имеют следующие значения:

Рисунок	$\Gamma, m^2/c$	l, m	a, m	ϵ, m	$u_0, m/s$	R, m	
7.29а	5,15	-0,076	0,011	0,025	-3,5	0,0375	(7.13)
7.29б	0,16	-0,078	0,028	0,057	-0,09	0,094	(7.14)

Дополнительно рассмотрим еще один режим течения в упомянутой камере квадратного сечения с открытым выходом при числе Рейнольдса $Re = 4,3 \cdot 10^4$, параметре крутки $S = 3$, при котором распределения скоростей в сечении $z = 323$ мм соответствуют прецессирующему вихрю с параметрами

$\Gamma, m^2/c$	l, m	a, m	ϵ, m	$u_0, m/s$	R, m	
0,24	-0,063	0,038	0,044	-0,24	0,094	(7.15)

Переходя к вопросу о частоте прецессии вихря, отметим, что под ней обычно понимают частоту прохождения сгустка завихренности вблизи фиксированной точки (датчика), расположенной в потоке или на стенке трубы, т. е. частоту f вращения сечения вихря (вихревого ядра) в фиксированной плоскости. Формула для угловой скорости перемещения следа вихря в поперечном сечении трубы была выведена в п. 6.4.3 (6.70), в соответствии с которой

$$f = -\frac{\Gamma}{8\pi^2 a^2} \frac{\hat{u}_b}{\tau(1+\tau^2)^{1/2}}, \quad (7.16)$$

где $\tau = l/a$, \hat{u}_b – безразмерная бинормальная скорость движения винтового вихря в трубе согласно (6.68).

Зависимость безразмерной частоты прецессии $\bar{f} = 2\pi f R^2 / \Gamma$ от величины a/l при $\beta = u_0 2\pi l / \Gamma = 1$, $\varepsilon/R = 0,05$ и различных a/R приведена на рис. 7.30. Вклад самоиндукции скорости ощутим только при небольших τ . Влияние же скорости на оси при этом весьма существенно. Она дает вклад в частоту $\sim u_0/l$ (или $\sim \beta/l^2$). С ростом τ (уменьшением a/l), как видно из графиков, частота прецессии выходит на асимптоту. В самом деле, при больших τ из (6.68), (7.16) находим

$$f|_{\tau \gg 1} = \frac{\Gamma}{4\pi^2 a^2} \left[\frac{a^2}{R^2 - a^2} - \frac{1}{2\tau^2} \left(2\beta - 2 + \frac{R^2}{a^2} \ln \frac{R^2 - a^2}{R^2} + \frac{R^2 - 2a^2}{R^2} + \ln 2\tau \frac{a}{\varepsilon} \right) + O\left(\frac{1}{\tau^4} \ln \tau\right) \right]$$

и в пределе $\tau \rightarrow \infty$ получим известную формулу для частоты прецессии точечного вихря в круговой области (2.29).

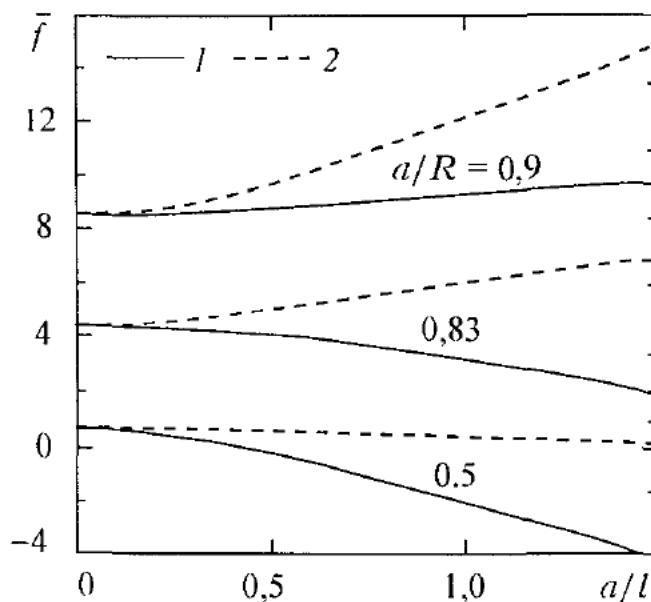


Рис. 7.30. Зависимость безразмерной частоты прецессии \bar{f} от обратного относительного шага a/l (1) и вклад в частоту, обусловленный стенкой трубы (2). $\beta = 1$, $\varepsilon/R = 0,05$

Вычислим теперь частоту прецессии для вихрей, параметры которых определены выше (см. (7.13)–(7.15)). В табл. 7.1 приведены в безразмерном виде значения экспериментально определенной частоты \bar{f}_{exp} и значения \bar{f}_{th} , рассчитанные по формуле (7.16). Показан также вклад отдельных эффектов:

$$\text{кривизны} \quad \bar{f}_k = -\frac{1}{4\pi} \frac{R^2}{a^2} \frac{1}{\tau(1+\tau^2)^{1/2}} \ln \left[\frac{a}{\varepsilon} (1+\tau^2) \right], \quad (7.17)$$

$$\begin{aligned} \text{кручения} \quad \bar{f}_\tau &= -\frac{1}{4\pi} \frac{R^2}{a^2} \frac{1}{\tau(1+\tau^2)^{1/2}} \left[\ln \left(\frac{\tau}{1+\tau^2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1+1,455\tau+1,723\tau^2+0,711\tau^3+0,616\tau^4}{\tau+0,486\tau^2+1,176\tau^3+\tau^4} - \frac{1}{4} - 2 \frac{(1+\tau^2)^{1/2}}{\tau} \right], \end{aligned} \quad (7.18)$$

$$\text{стенок трубы} \quad \bar{f}_R = \frac{1}{2\pi} \frac{R^2}{a^2} \frac{1+\tau^2}{\tau^2} \left(\frac{\tilde{a}^2}{\tilde{R}^2 - \tilde{a}^2} - k \ln \frac{\tilde{R}^2 - \tilde{a}^2}{\tilde{R}^2} \right), \quad (7.19)$$

$$\text{скорости на оси} \quad \bar{f}_\beta = -\frac{1}{2\pi} \frac{R^2}{a^2} \frac{\beta}{\tau^2}. \quad (7.20)$$

Здесь $\bar{f}_{\text{th}} = \bar{f}_k + \bar{f}_\tau + \bar{f}_R + \bar{f}_\beta$; величины с тильдой определяются как $\tilde{x} = x 2 \exp \left[\sqrt{1+x^2/l^2} - 1 \right] / \left(\sqrt{1+x^2/l^2} + 1 \right)$ (см. п. 2.6.2); коэффициент k в (7.19) зависит от τ и от $\eta = l/R$ (см. п. 6.4.3)

$$k = \frac{1}{12} \left[\frac{9\eta}{(1+\eta^2)^{1/2}} - \frac{7\eta^3}{(1+\eta^2)^{3/2}} - \frac{3\tau}{(1+\tau^2)^{1/2}} + \frac{\tau^3}{(1+\tau^2)^{3/2}} \right].$$

Таблица 7.1. Параметры прецессирующих вихрей

Формула	$\tau = l/a$	ε/ρ	a/ε	\bar{f}_{exp}	\bar{f}_{th}	\bar{f}_k	\bar{f}_R	\bar{f}_τ	\bar{f}_β
(7.13)	6,9	0,05	0,44	0,17	0,17	-0,06	0,07	0,17	-0,01
(7.14)	2,8	0,23	0,49	0,21	0,20	-0,16	0,30	0,13	-0,06
(7.15)	1,7	0,31	0,86	0,14	0,17	-0,18	0,36	0,13	-0,14

Из данных, представленных в таблице, следует, что, во-первых, теоретическая формула дает значения частоты, близкие к измеренным, и, во-вторых, учет всех перечисленных эффектов важен при определении частоты прецессии вихря. Кроме того, возможна ситуация, когда различные эффекты полностью компенсируют друг друга и вихрь оказывается неподвижным.

Строго говоря, формула для бинормальной скорости винтового вихря в трубе (6.68) справедлива либо для винтовых вихрей с тонким ядром $\varepsilon/\rho \ll 1$, либо для слабоискривленных колоннообразных вихрей $a/\varepsilon \ll 1$. Для вихря (7.13) имеем $\varepsilon = 0,05\rho$, а для (7.14) – $\varepsilon = 0,23\rho$. В первых двух случаях вихрь достаточно тонкий и точность определения частоты высока. В третьем случае (7.15) радиус вихря недостаточно мал ($\varepsilon = 0,31\rho$). Велика и степень искривленности ($a = 0,86\varepsilon$). В результате и точность вычисления частоты ниже. Очевидно, что для “толстого” вихря важно учитывать и внутреннюю структуру ядра вихря, в то время как при определении параметров вихря закладывалась модель с равномерным распределением завихренности в ядре. Наконец, заметим, что поскольку шаг винта вихрей достаточно большой, то вместо формулы (7.18) для описания вклада кручения можно пользоваться формулой длинноволнового приближения (см. (5.29)), в соответствии с которой

$$\bar{f}_\tau = -\frac{1}{4\pi} \frac{R^2}{a^2} \frac{1}{\hat{\tau} (1 + \hat{\tau}^2)^{1/2}} \left[0,366 - \ln \hat{\tau} - 2 \frac{(1 + \hat{\tau}^2)^{1/2}}{\hat{\tau}} \right].$$

При наименьшем рассмотренном значении $l/a = 1,7$ данное приближение дает ошибку 3,5%.

7.5. СТАЦИОНАРНЫЕ ВИНТОВЫЕ ВИХРЕВЫЕ НИТИ

Как отмечено в предыдущем разделе при анализе частоты вращения винтовых вихрей, возможны ситуации, когда вращение вихря компенсируется средним движением среды в канале. В таких случаях следует ожидать появления стационарных винтовых структур, которые действительно впервые наблюдались в экспериментах Alekseenko, Shtork [1992], Alekseenko *et al.* [1999] и описаны в данной главе.

Винтовые вихри могут возникать либо за счет неустойчивости осесимметричного потока к спиральным модам, либо вследствие деформации прямолинейной нити путем искусственного искажения граничных условий. В первом случае спиральные вихри являются нестационарными и преимущественно трехмерными (спиральные волны, спиральный распад вихря см. п. 7.6). Здесь мы будем касаться только второго способа генерации винтовых вихрей,

который позволяет наблюдать стационарные (неподвижные) структуры. Как и в предыдущих опытах, использовалась вихревая камера квадратного сечения, изображенная на рис. 7.2. Путем смещения выходного отверстия и изменения формы дна удалось наблюдать следующие стационарные винтовые структуры: правовинтовой вихрь, левовинтовой вихрь, вихрь со сменой винтовой симметрии и двойную спираль – два переплетенных винтовых вихря.

7.5.1. Одиночные винтовые вихри

Пусть, как и прежде, поток в вихревой камере закручен вправо и пусть в выходном сечении установлена диафрагма с отверстием d_e . Центральное расположение отверстия приводит к образованию устойчивого прямолинейного вихря (вихревой нити), диаметр которого тем меньше, чем меньше диаметр выходного отверстия (см. п. 7.3.1). Смещение выходного отверстия на расстояние δ относительно оси камеры приводит к радикальным изменениям в структуре течения (рис. 7.31). Воздушная нить, визуализирующая ось вихря, сворачивается в виток спирали. В целом данная структура является неподвижной. Частицы жидкости при этом движутся вокруг спиральной оси, совершая таким образом двойное спиральное движение. В окрестности геометрической оси канала величина скорости мала и направлена вниз, хотя вдоль оси вихревой нити наблюдается интенсивное течение в сторону выходного отверстия.

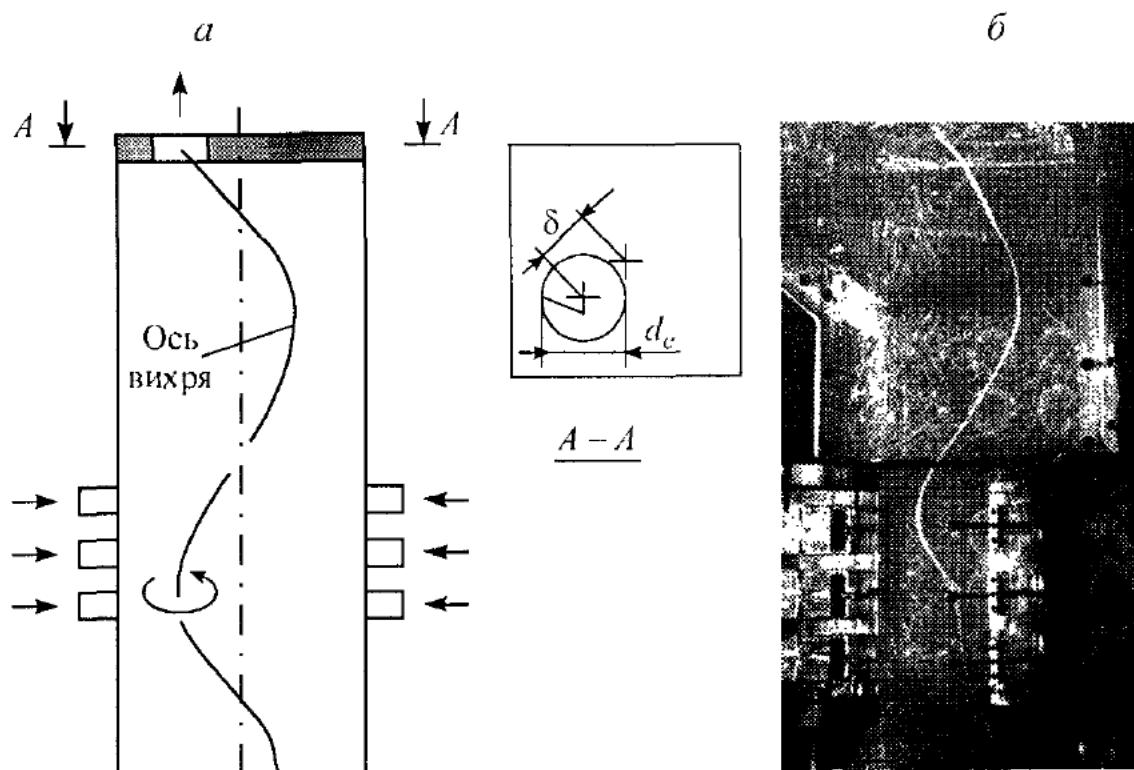


Рис. 7.31. Схема (а) и визуализация (б) закрученного течения с левовинтовым вихрем. $d_e = 70$ мм, $z_e = 560$ мм, $\delta = 62$ мм, $Re = 2,4 \cdot 10^4$, $S = 4,5$. Винтовой вихрь генерируется благодаря смещению выходного отверстия на расстояние δ от оси камеры.

Направление завивки оси вращения противоположно движению частиц, т. е. реализуется *левовинтовой вихрь*. Максимальное отклонение воздушной нити от оси канала растет с увеличением смещения выходного отверстия и при $\delta = 65$ мм достигает 43% от полуширины, что свидетельствует о нелинейности возмущения потока. Особо подчеркнем, что в столь сложном и турбулизованном потоке (числа Re по соплу до $4 \cdot 10^4$) тончайшая воздушная нить остается непрерывной. В частности, этот факт можно связать с затуханием турбулентности у оси интенсивного вихря [Владимиров и др. 1980].

Формирование спиральной оси вращения наблюдается при всех углах поворота сопел $\gamma > 5^\circ$, но наиболее устойчивое состояние воздушной нити реализуется при некотором промежуточном положении сопел $\gamma = 10\text{--}20^\circ$. В остальных случаях происходит периодическое разрушение воздушной нити, обусловленное мелкомасштабными возмущениями. Форма выходного отверстия практически не влияет на картину течения (в частности, при замене круглого отверстия на щель той же площади). В зависимости от смещения отверстия диафрагмы несколько сдвигается и точка пересечения оси вихря с дном канала, но не более, чем на 10–20 мм.

Количество витков спирали зависит от расстояния z_e от дна до диафрагмы (см. рис. 7.31). Так, при $z_e = 420$ мм формируется только половина витка, а при $z_e = 560$ мм – полный виток. Вообще говоря, форма оси вихря не является идеальным винтом. Обратим внимание на взаимодействие вихря с плоским дном камеры. Очевидно, ось должна быть перпендикулярна плоскости дна, но для соблюдения идеальной формы плоскость должна быть наклонена под определенным углом к горизонту. Поэтому вблизи дна происходит искажение винтовой формы. Это хорошо видно на рис. 7.32, где восстановлено трехмерное положение оси вихря (в трех проекциях). Пространственно сходственные точки обозначены одинаковыми цифрами. Очевидно, в вертикальной плоскости проекций винта является синусоида, а в горизонтальной – окружность. Как видно, эти условия приближенно выполняются для точек 5–14. Но в окрестности дна (точки 1–5) происходит искажение винта, которое заключается в изменении амплитуды и даже направления завивки. Поэтому эту область мы пока исключим из внимания.

Образование винтовой формы при деформации вихревой нити вполне объясняется самоиндуктированным движением, а неподвижность – компенсацией вращения винта средним потоком в ограниченном пространстве. Однако остается вопрос о том, почему ось вихря завита именно влево, а не вправо. Объяснение следует из анализа точного решения для поля скоростей (2.69). Действительно, завитая влево вихревая нить приводит к замедлению потока в приосевой зоне камеры. Следовательно, смещение отверстия исключает возможность протока вдоль геометрической оси камеры (винта), и таким образом выбирается реализация с левой завивкой оси вихря.

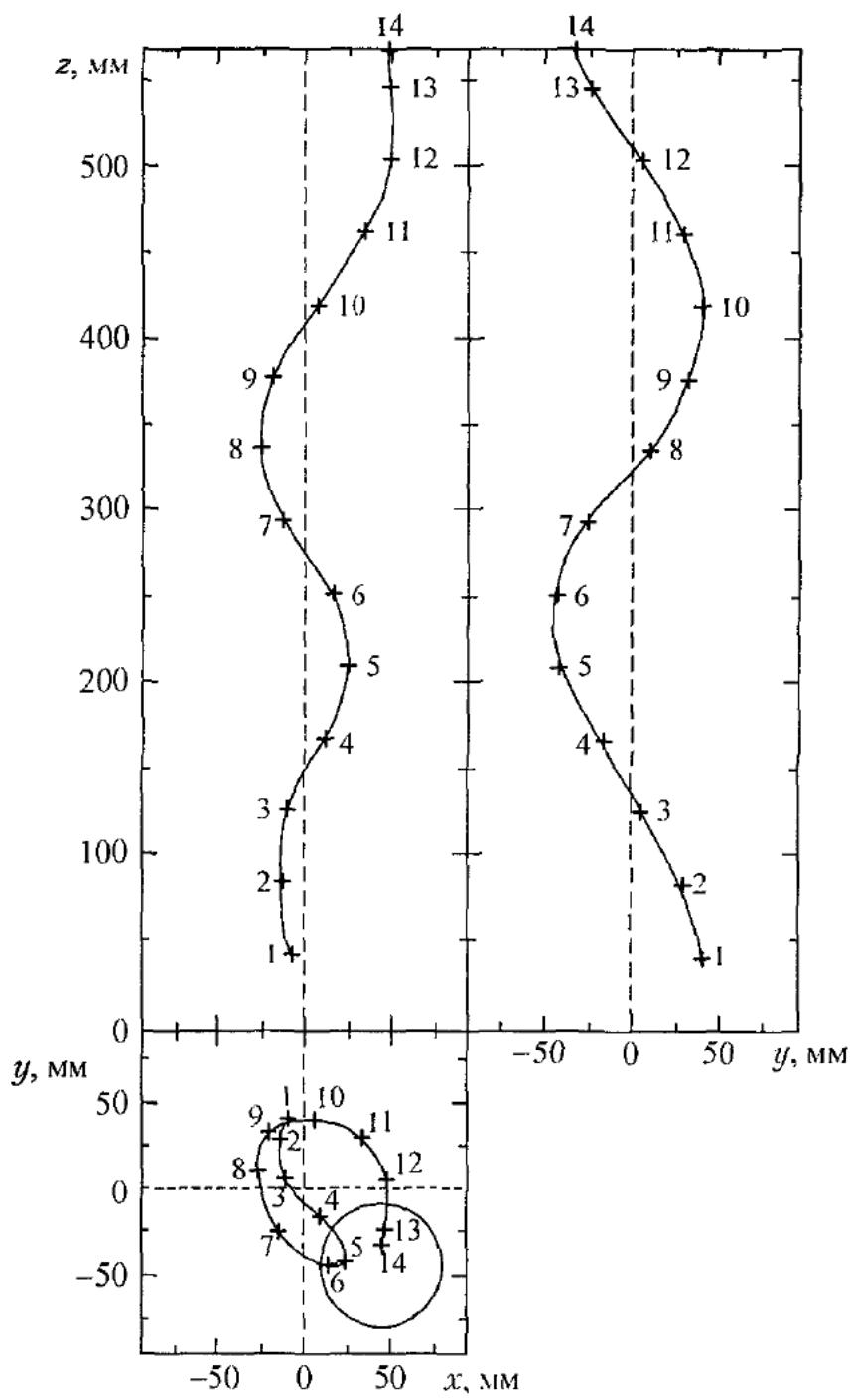


Рис. 7.32. Пространственная форма оси винтового вихря (в трех проекциях). $d_c = 70$ мм, $z_c = 560$ мм, $\delta = 62$ мм, $Re = 2,4 \cdot 10^4$, $S = 4,5$

С другой стороны, теория предсказывает, что в случае правого винта должен быть интенсивный проток вдоль оси камеры и замедление на периферии. Поэтому было высказано предположение, что в эксперименте правый вихрь может появиться при центральном расположении выходного отверстия (с целью организации протока) и, например, наклонном дне (чтобы вызвать начальную деформацию оси вихря). И действительно, правовинтовая структура была немедленно обнаружена при указанных условиях, что наглядно продемонстрировано на рис. 7.33.

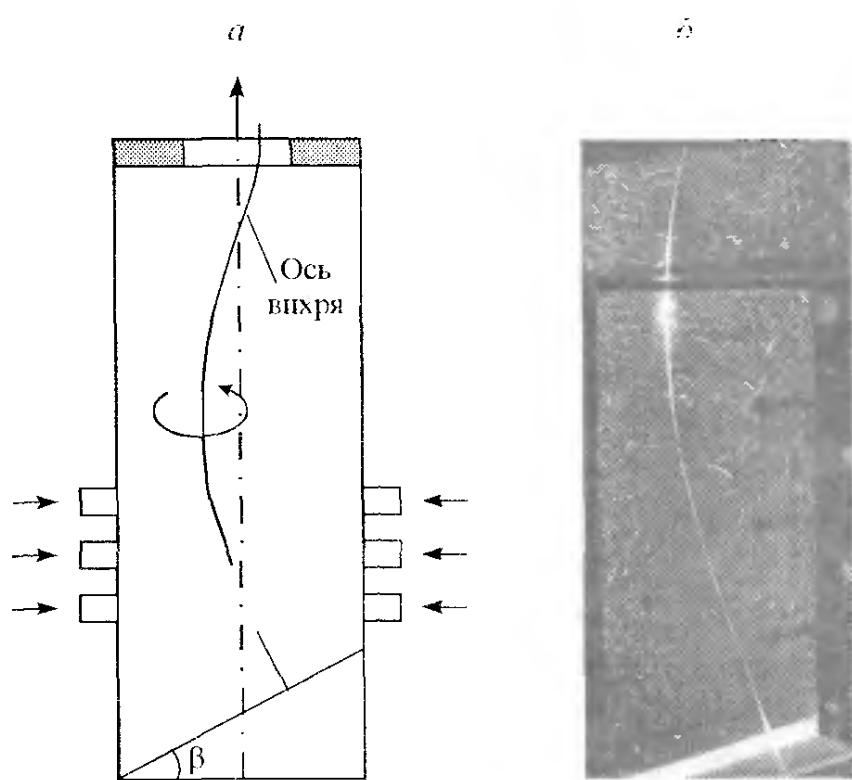


Рис. 7.33. Схема (а) и визуализация (б) закрученного течения с правовинтовым вихрем. $d_e = 70$ мм, $z_e = 390$ мм, $\beta = 18^\circ$, $Re = 1,3 \cdot 10^4$, $S = 2,9$. Винтовой вихрь генерируется благодаря наклонному дну

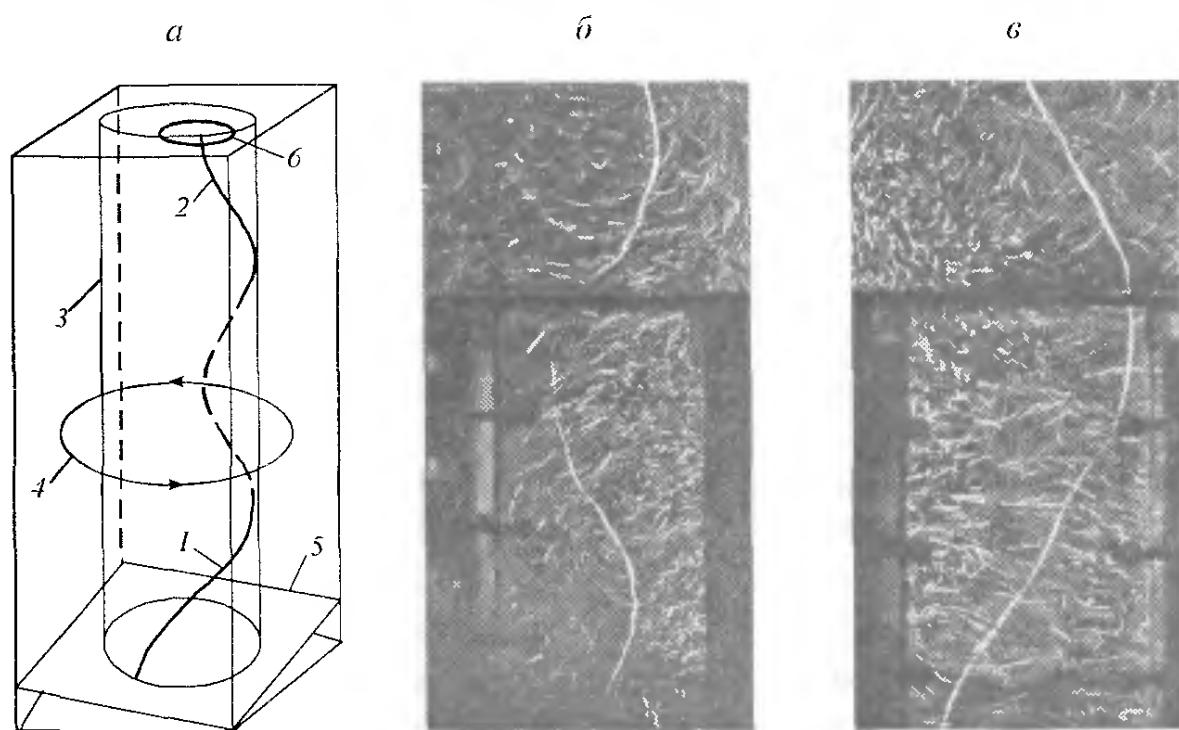


Рис. 7.34. Неподвижный винтовой вихрь с изменением винтовой симметрии. а – схема течения; 1 – правовинтовой вихрь; 2 – левовинтовой вихрь; 3 – воображаемая цилиндрическая поверхность; 4 – направление закрутки потока; 5 – наклонное дно; 6 – сменяющее выходное отверстие; б, в – визуализация течения; фотографии сняты с двух направлений под углом 90° . $d_e = 70$ мм, $z_e = 420$ мм, $\delta = 62$ мм, угол наклона дна $\beta = 20^\circ$, $Re = 2,8 \cdot 10^4$, $S = 3$

В рамках предложенной в п. 7.3.2 теоретической модели можно утверждать, что в исходном составном вихре в первом случае был подавлен правый винтовой вихрь, а во втором – левый.

Проведенный анализ позволил выдвинуть гипотезу о существовании более сложных винтообразных вихревых структур с переходом от правосторонней симметрии к левосторонней. Проверить ее удалось после внесения в конструкцию установки дополнительных усовершенствований, позволяющих в ходе эксперимента изменять наклон дна камеры [Алексеенко и др., 1995]. На выходе из камеры была установлена диафрагма со смещением на 62 мм от оси отверстия диаметра 70 мм. При угле наклона дна камеры 20° от горизонтальной плоскости, расходе $Q = 5,25$ л/с и конструктивном параметре крутки $S = 3$ была получена хорошо выраженная стационарная (неподвижная) вихревая структура с изменением винтовой симметрии от правой к левой. На рис. 7.34б,в представлены фотографии тонкой воздушной нити, фиксирующей геометрию вихря. Фотографии одного и того же неподвижного вихря сделаны с двух позиций под углом 90° . Несовпадение количества витков на фотографиях связано с изменением направления завивки оси вихря (см. схему рис. 7.34а). В нижней части камеры реализуется вихрь с правой винтовой симметрией, а в верхней части – с левой. Зона перехода в центре камеры имеет плавный характер. Здесь винтовая симметрия нарушается аналогично сопряжению левого вихря с горизонтальной плоскостью (см. рис. 7.32).

7.5.2. Двойная спираль

Описанные выше экспериментальные наблюдения винтовых структур относятся к одиночным вихревым нитям. Однако теория винтовых вихрей (см. п. 2.6) допускает любое количество взаимодействующих винтовых вихревых нитей. Априори можно было утверждать, что экспериментальное наблюдение таких явлений должно быть крайне затруднено. Действительно, имеется ограниченное количество указаний на существование двухспиральных структур, причем нестационарных и неоднородных. Так, Chandrsuda *et al.* [1978] зафиксировали спиральное скручивание двух протяженных вихрей в слое смешения (рис. 7.35). Boubnov, Golitsyn [1986] наблюдали нестационарное спиральное спаривание двух вихревых нитей при естественной конвекции во врачающемся сосуде, причем конечной стадией было слияние двух вихрей в один более мощный. Явно двухспиральный характер носит система взаимодействующих шпилькообразных вихрей в следе за телом в погранслое [Acarlar, Smith, 1987] и в струях [Perry, Lim, 1978]. Двойная спираль образуется и при распаде вихря [Faler, Leibovich, 1977], однако не показано, что окрашенные струйки являются осями вихрей (см. с. 444, табл. 7.2, тип 5).

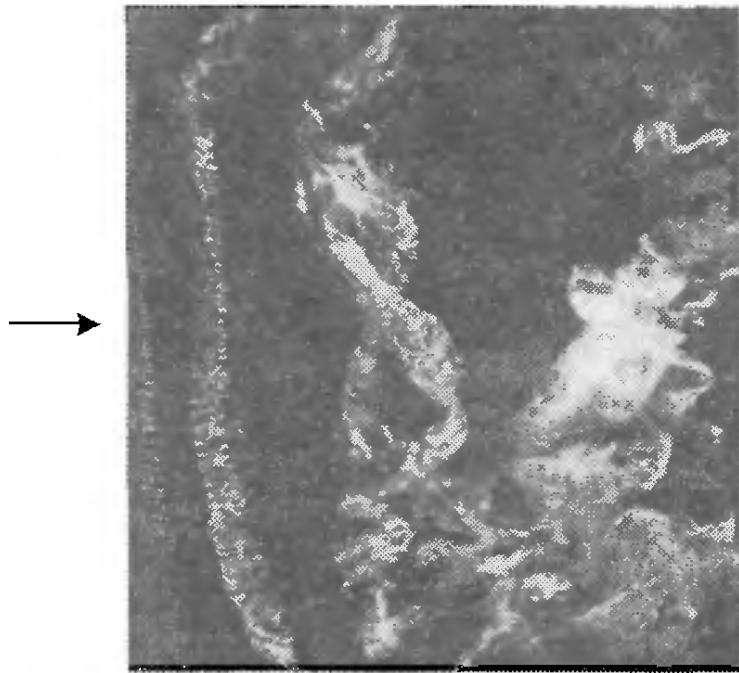


Рис. 7.35. Спиральнос скручивание двух протяженных вихрей в слое смешения при вдуве плоской воздушной струи в неподвижный воздух [Chandrsuda *et al.*, 1978]

Взаимодействие вихревых нитей играет, по-видимому, принципиальную роль в гидродинамике. Полагается [Takaki, Hussain, 1984], что спиральное спаривание является элементарным взаимодействием в турбулентности.

Попытки генерации стационарных двойных спиралей в тангенциальной камере были предприняты после наблюдения устойчивых одиночных винтовых нитей. И эти попытки удалось путем перебора множества вариантов [Алексеенко, Шторк, 1994; Alekseenko, Shtork, 1992].

Обнаружено, что *двойная спираль* возникает в вихревой камере с центрально расположенным выходным отверстием и двумя плоскими скатами на дне камеры (рис. 7.36, 7.37). Двойная спираль представляет собой две переплетенные винтовые вихревые нити одного знака. Завивка нитей соответствует закрутке потока, т. е. это правые винтовые вихри. На основании развитой теоретической модели понятно, что закрутка осей вихрей вправо обусловлена центральным расположением выходного отверстия (т. е. возможностью интенсивного протока вдоль оси камеры). Как и в случае одиночного правого вихря, наличие двух наклонных скатов на дне связано с необходимостью задать начальную деформацию осей вихрей. Визуально наблюдаемая кинематика поля течения (по траекториям пузырьков воздуха) полностью соответствует теоретическим расчетам (см. рис. 7.38, $N = 2$).

В отличие от весьма стабильного односпирального вихревого течения двухспиральный режим следует рассматривать как квазистационарный по следующим причинам. Во-первых, воздушные нити, визуализирующие оси вихрей, несколько размыты, хаотично колеблются и иногда распадаются.

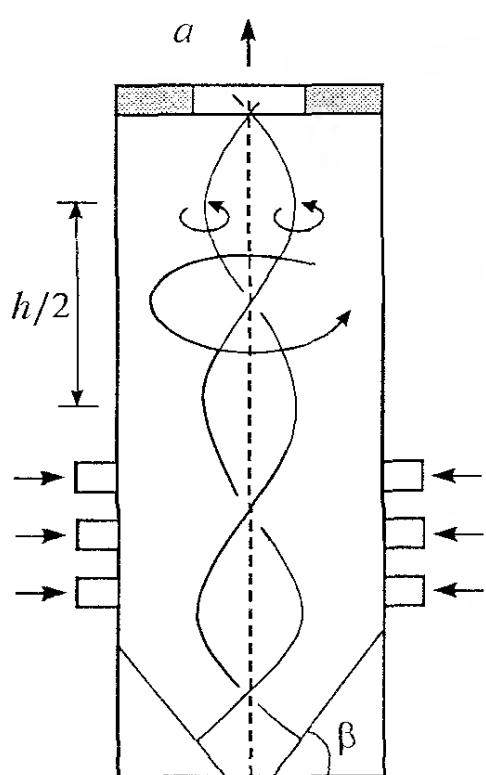


Рис. 7.36. Схема (а) и визуализация (б) течения с двойной спиралью. $d_e = 65$ мм, $z_c = 420$ мм, $\beta = 50^\circ$, $Re = 4 \cdot 10^4$, $S = 3$. Двухспиральный режим формируется благодаря двускатному дну

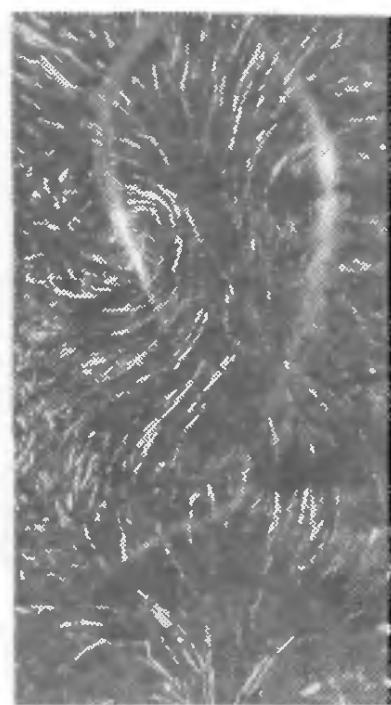
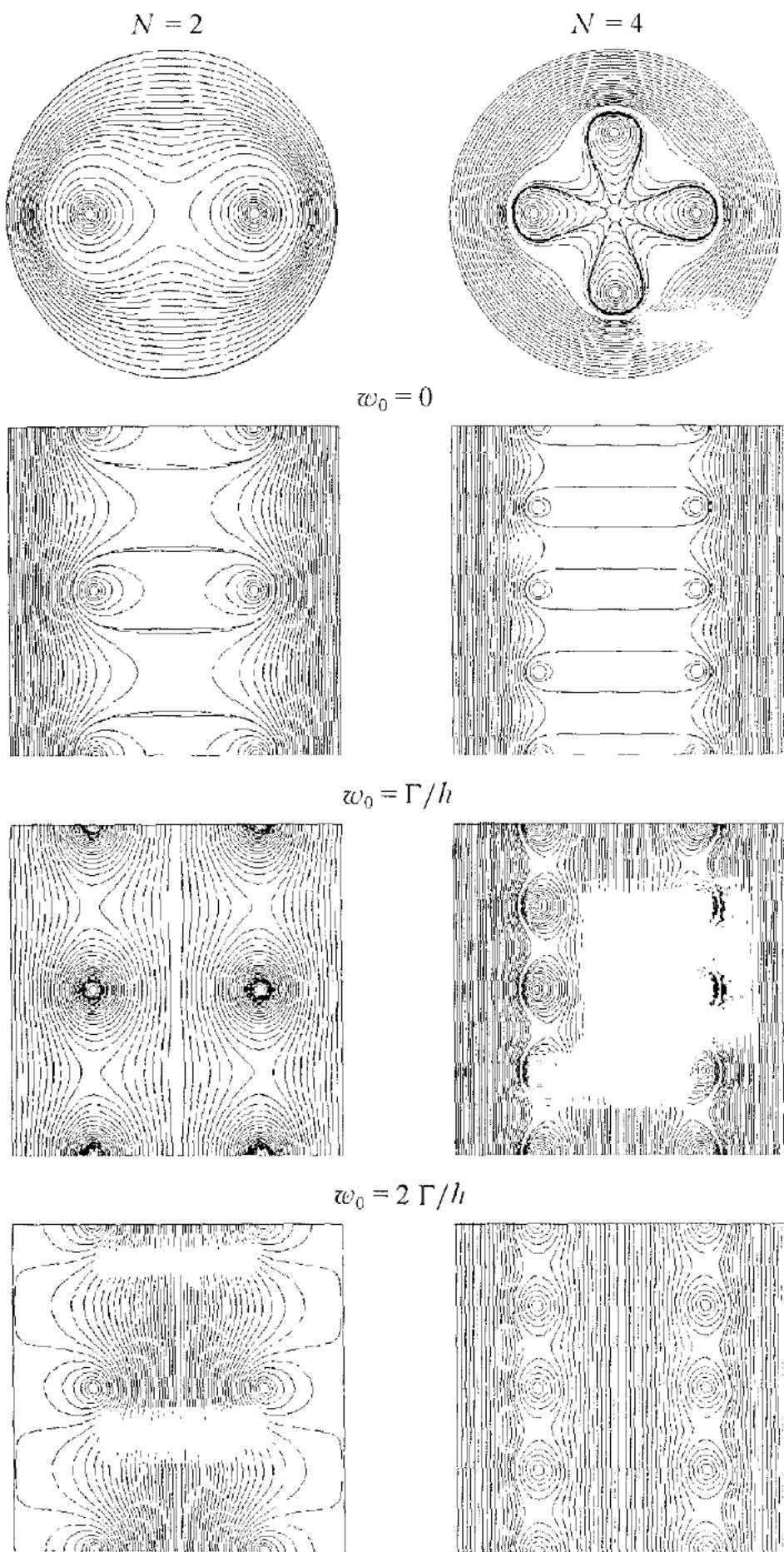


Рис. 7.37. Визуализация течения в вертикальной плоскости в режиме с двойной спиралью. $Re = 4 \cdot 10^4$, $S = 3$, $d_e = 65$ мм, $\beta = 50^\circ$

Числа Рейнольдса, как и в других опытах, не оказывают заметного влияния на картину течения. Во-вторых, одна из нитей всегда стремится доминировать, поэтому для выделения двойной спирали требуется тонкая регулировка направления сопел, а иногда и расходов через отдельные сопла. Но в целом двухспиральный режим вихревого движения фиксируется отчетливо. Значение числа Рейнольдса, как и в других опытах, не оказывает заметного влияния на картину течения.

На параметры двойной спирали (расстояние между нитями $2a$, шаг винта $h = 2\pi l$ и число полуволн j) главное влияние оказывает угол наклона скатов на дне камеры. Так, $j = 3$, $h = 250$ мм, $2a = 60$ мм при $\beta = 50^\circ$ (см. рис. 7.36) и $j = 6$, $h = 115$ мм, $2a = 25$ мм при $\beta = 30^\circ$ (рис. 7.39а). В последнем случае картина не совсем стабильная и иногда возникает двойной вихрь с пятью полуволнами (рис. 7.39б).

Теоретическая модель допускает любое количество винтовых вихрей в многовихревой структуре. Пример картины линий тока для четырех вихрей показан на рис. 7.38 ($N = 4$). Однако на практике наблюдение структур, состоящих из более чем двух вихрей, затруднено из-за неустойчивости при взаимодействии, в результате которой происходит их разрушение и слияние.



*Рис. 7.38. Многовихревые структуры в цилиндрической трубе (расчет).
 N – число бесконечно тонких винтовых вихревых нитей*

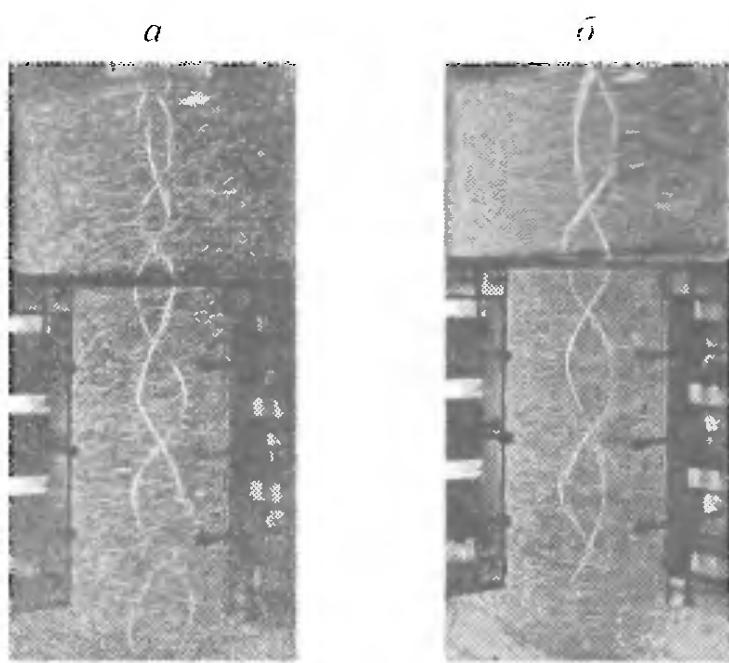


Рис. 7.39. Формирование двойной спирали с большим количеством витков. $Re = 4,3 \cdot 10^4$, $S = 3$, $d_c = 70$ мм, $\beta = 30^\circ$. а, б – различные моменты времени: $j = 6$ (а), 5 (б)

Кроме того, образование нескольких вихрей вместо одного означает, что их интенсивность в несколько раз уменьшается. По этим причинам не удалось получить систему из хорошо выраженных четырех стационарных вихрей [Alekseenko *et al.*, 1999], для которых камера квадратного сечения, казалось бы, вполне благоприятна по геометрии. С целью генерации четырех вихрей нижняя торцевая крышка была изготовлена в виде четырех ступенек с верхней наклонной плоскостью. Вблизи дна явно наблюдались четыре вихря, но в основном потоке они почти всегда разрушались и были различимы лишь в короткие моменты времени. Особенность четырехвихревой структуры в том, что вихри слабо искривлены и слабо выражены. Напротив, отчетливо фиксируется интенсивный проток вдоль оси канала (оси симметрии вихревой структуры). Это описание согласуется с расчетной картиной течения для четырехвихревой структуры.

7.6. ВОЗМУЩЕНИЯ ВИХРЕВОГО ЯДРА

7.6.1. Волны на концентрированных вихрях

Невозмущенные вихревые нити, изображенные на рис. 7.6, 7.7, существуют только при определенных условиях. В действительности же возмущенное состояние – характерная особенность протяженных концентрированных вихрей. К возмущениям вихревой нити относятся как волны различных мод, так и распад вихря. Винтовые структуры, описанные в пп. 7.3–7.5, также представляют собой возмущенные состояния вихря. Появление возмущений

может быть обусловлено неустойчивостью закрученного течения и внешними воздействиями, включая искусственное возбуждение. Цель данного раздела – продемонстрировать на качественном уровне, т. е. на уровне визуализации течений, существование различных типов возмущений на вихревых нитях. Тем самым подчеркивается важность теоретического рассмотрения устойчивости и динамики концентрированных вихрей, чему посвящены главы 4–6. Детальное количественное описание эксперимента не излагается здесь по следующим причинам. Экспериментальные данные по волнам на вихрях весьма ограничены в литературе. Поэтому не представляется возможным дать адекватное представление волновых явлений. Наоборот, по распаду вихря накоплен обширный эмпирический материал. Но эта тема, как отмечено во Введении, не является предметом детального обсуждения в предлагаемой книге.

Экспериментальные данные, приведенные в этом параграфе, получены главным образом в тангенциальной камере (рис. 7.2 [Alekseenko, Shtork, 1992; Шторк, 1994]), в слаборасширяющемся канале (см. рис. 7.40 a [Faler, Leibovich, 1977, 1978]), во вращающемся сосуде с локальным отсосом (см. рис. 7.40 b, c [Maxworthy *et al.*, 1985; Khoo *et al.*, 1997]), в закрученной струе [Panda, McLaughlin, 1994; Billant *et al.*, 1998], а также в некоторых других конфигурациях [Brücker, Althaus, 1992, 1995; Brücker, 1993].

На рис. 7.41 показаны примеры возмущений на вихревой нити, реализуемой в тангенциальной камере с выходной диафрагмой (рис. 7.2). Особенность данной конструкции в том, что на генерацию возмущений в объеме камеры до диафрагмы сильное воздействие может оказывать течение за диафрагмой, так как возмущения способны распространяться в любом направлении вдоль вихревой нити. В пространстве за диафрагмой образуется закрученная струя, т. е. область до диафрагмы фактически является закручивающим устройством для пространства за диафрагмой, которое вполне можно считать неограниченным во многих случаях. Распространение закрученной струи в свободном пространстве при достаточном уровне крутки сопровождается явлением распада вихря, формированием зон возвратного течения и турбулизацией потока. Указанные явления могут служить источниками возмущений для вихревой нити, существующей как в пространстве до диафрагмы, так и простирающейся за пределы выходного отверстия. В связи со сказанным, далее приводятся данные раздельно для трех областей – до диафрагмы, в ее окрестности и вдали.

Вернемся к рис. 7.41. Изображенные на снимках бегущие возмущения возникают спонтанно, распространяясь от выходного отверстия вниз (т. е. вверх по потоку). Наблюдаются следующие характерные типы возмущений: a – винтовые волны (в виде цуга); b – винтовые с перменной длиной волны; c – двухспиральные; g – высокочастотные винтовые; d, e – в виде бегущего распада вихря.

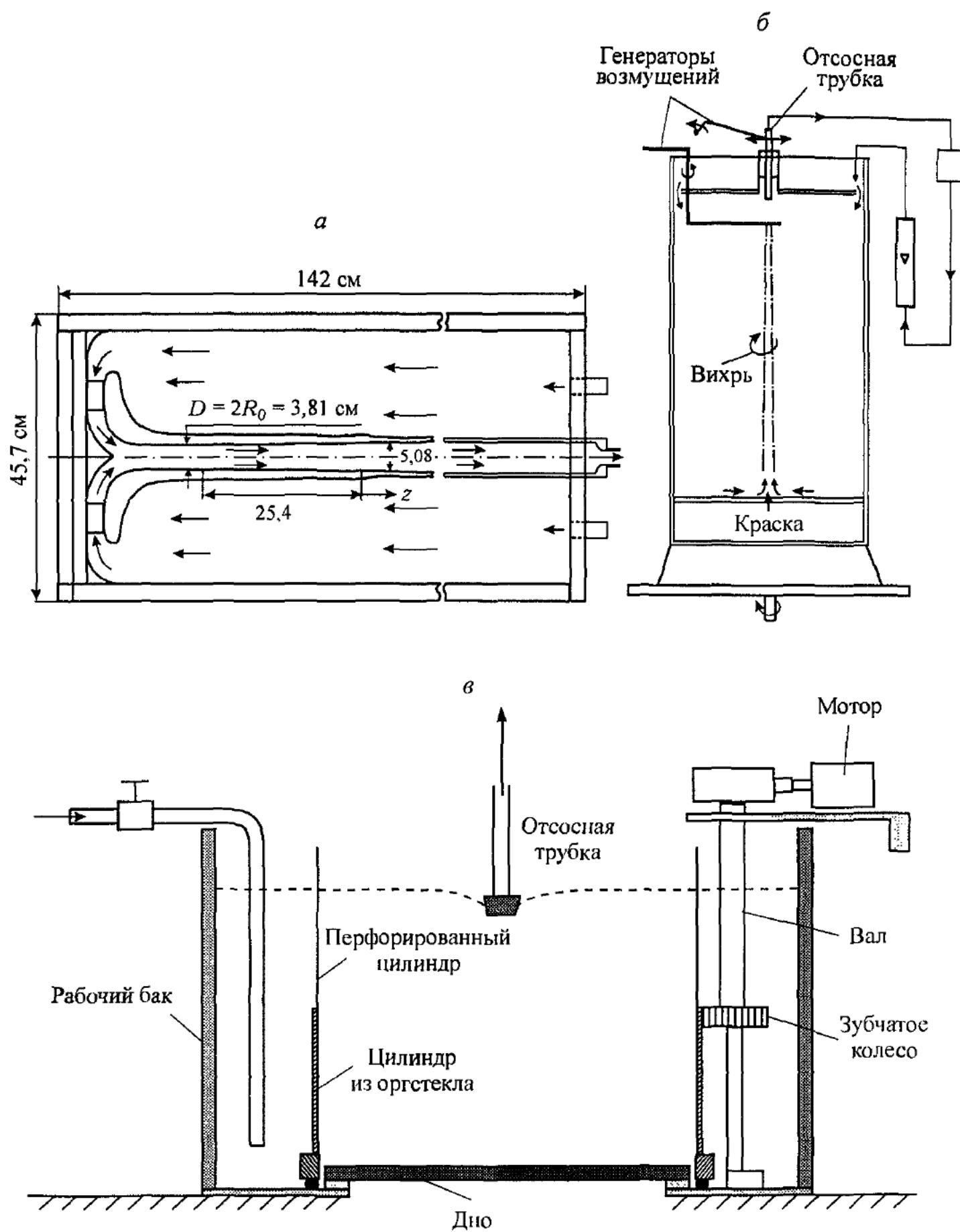


Рис. 7.40. Схемы экспериментальных установок для изучения распада вихря и волн на вихрях:
а – Faler, Leibovich [1977]; б – Maxworthy *et al.* [1985]; в – Khoo *et al.* [1997]

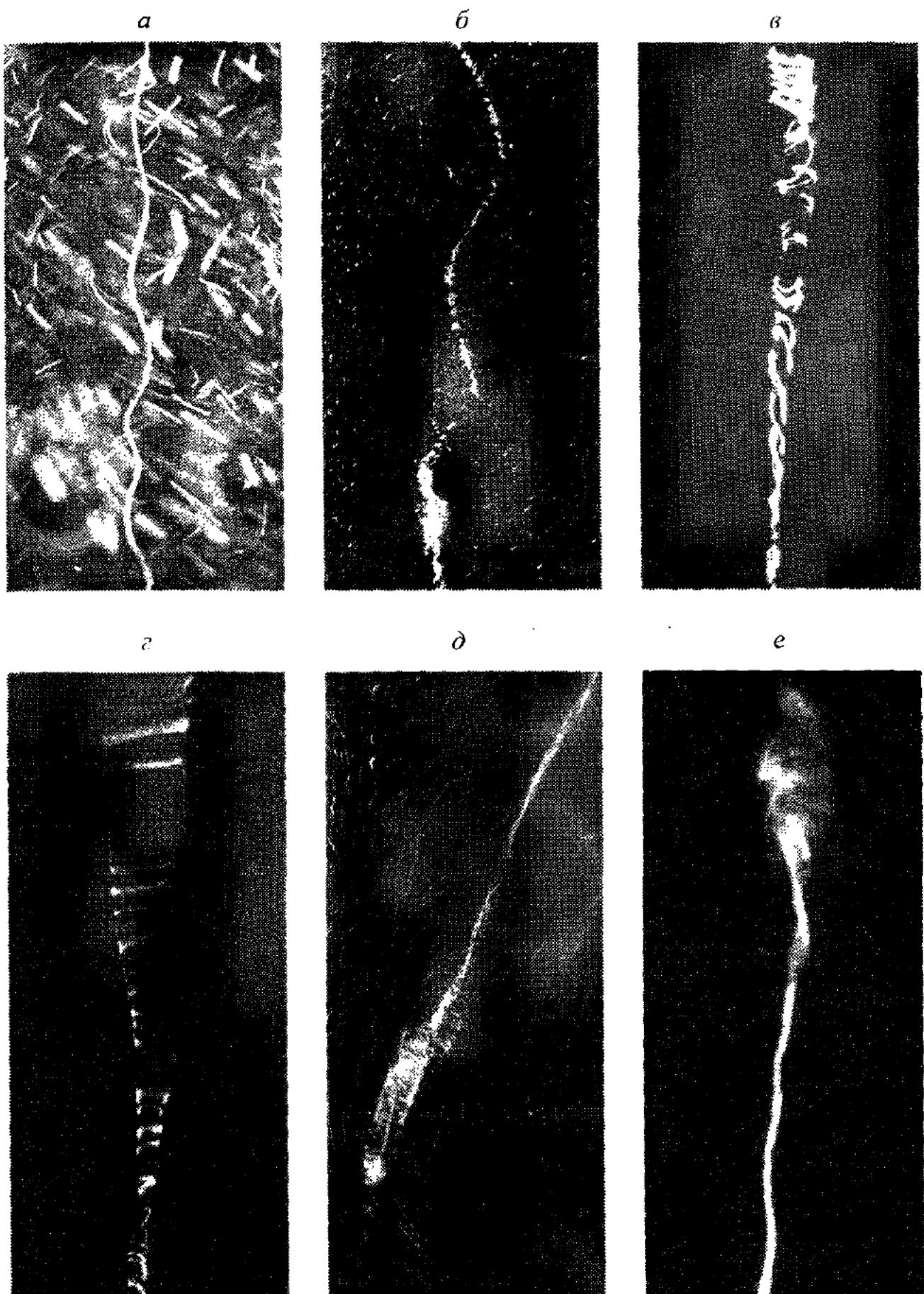


Рис. 7.41. Примеры возмущений вихревой нити в тангенциальной камере [Alekseenko, Shtork, 1992]: $a - Re = 1,7 \cdot 10^4$, экспозиция $1/30$ с; $b - 4 \cdot 10^4$, $1/1500$ с; $c - 4,3 \cdot 10^3$, $1/30$ с; $d - 4,2 \cdot 10^3$, $1/30$ с; $e - 2,4 \cdot 10^4$, $1/15$ с; $f - 1 \cdot 10^3$, $1/30$ с

С целью более детального определения структуры возмущений необходимо применять искусственное возбуждение. Такие опыты проводились Max-worthy *et al.* [1985] и Alekseenko, Shtork [1992], С.В. Алексеенко, С.И. Шторк [1997]. В первой работе использовалась вращающаяся вокруг своей оси вертикальная цилиндрическая камера с отсосом жидкости через тонкую трубку сверху (рис. 7.40б). Возбуждение производилось путем: а) генерации пульсаций расхода жидкости в отсосной трубке, б) периодического движения трубы, в) касания вихревой нити тонким стержнем. В результате обнаружено шесть типов волн: 1) винтовые; 2) плоские стоячие; 3) изолированные изгибные; 4) изолированные изгибные с хвостовым возмущением; 5) винтовые с возрастающей длиной волны; 6) осесимметричные. Охарактеризуем кратко основные из них.

Винтовые волны постоянной амплитуды (helical waves) представляют собой винт, который завит против потока (правый винг), вращается против потока и распространяется против потока. Групповая скорость больше фазовой.

Стоячие плоские волны образуются при взаимодействии бегущих сверху винтовых волн с отраженными от дна. Впервые описаны теоретически Kelvin [1880]. Вращаются против потока.

Изолированные изгибные волны (kink waves) имеют вид витка спирали, распространяющегося против потока с групповой скоростью, превышающей фазовую. Похожи на солитон Хасимото, однако строгого доказательства не удалось получить. Аналогичные единичные возмущения возникали спонтанно на вихревых нитях, генерируемых колеблющейся решеткой во вращающемся сосуде [Hopfinger *et al.*, 1982; Hopfinger, Browand, 1982]. Возможные теоретические схемы движения солитона Хасимото изображены на рис. 5.13 (для случая вихревой нити без аксиального протока).

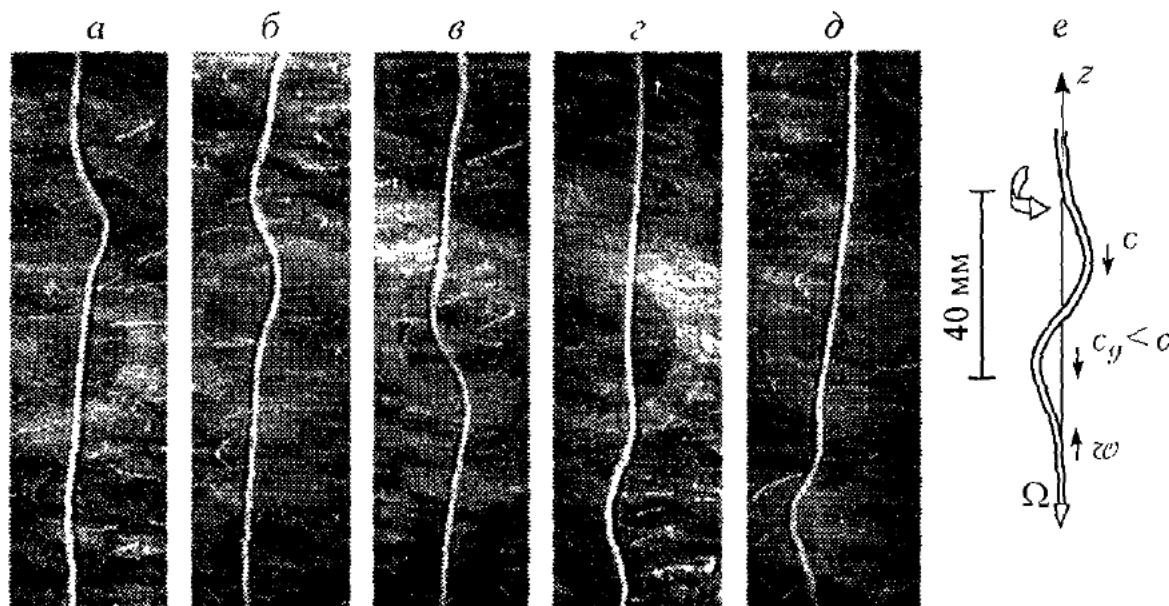


Рис. 7.42. Эволюция одиночной спиральной волны на вихревой нити в тангенциальной камере: а – д – стоп-кадры через 125 мс; е – схема движения возмущения. $Re = 1,6 \cdot 10^3$, $S = 3,5$

Отчетливо выраженную солитонообразную волну удалось сформировать в тангенциальной камере (см. рис. 7.2) путем искусственного возбуждения [Alekseenko, Shtork, 1992]. На рис. 7.42 приведена эволюция такой волны и схема ее движения. Возмущение имеет вид витка правой спирали, вращающейся и распространяющейся против потока. В отличие от работы Maxworthy *et al.* [1985] здесь групповая скорость c_g меньше фазовой c , что легко можно увидеть из рис. 7.42, проследив за траекториями центра волнового пакета и фазы волны. Вообще говоря, данный факт не согласуется с теорией солитона Хасимото (см. п. 5.3). Действительно, из последней в п. 5.3 формулы для слабонелинейных волн следует, что $c_g < c$ при значении кручения $|T| < 1$. Но этому случаю соответствует спиральный солитон с перехлестом (см. рис. 5.13, правая нижняя схема), не согласующийся со схемой рисунка 7.42 δ . Таким образом, вопрос о природе наблюдаемых спиральных волн еще требует своего разрешения.

7.6.2. Распад вихря в канале

Наблюдения режимов течения в вихревой камере (рис. 7.2) показывают, что как при спонтанном возникновении, так и искусственном возбуждении бегущие возмущения могут принимать вид распада вихря. Яркий пример *бегущего распада вихря* продемонстрирован на рис. 7.43 [Алексеенко, Шторк, 1997]. Возмущение распространяется против потока, оставляя за собой турбулизованный след, достаточно локализованный по ширине. Поперечный размер возмущения весьма мал (порядка нескольких диаметров пузырьков, визуализирующих течение), поэтому невозможно говорить о детальной структуре возмущения. Скорее всего, по типу оно близко к пузырковому распаду. В работе Maxworthy *et al.* [1985] отмечено, что только осесимметричные бегущие возмущения могли вызвать распад вихря. А в теоретических работах Benjamin [1962] и Leibovich [1970, 1978] предложены модели разрушения вихря именно на основе осесимметричных нелинейных волн типа солитонов Кортевега – де Вриза.

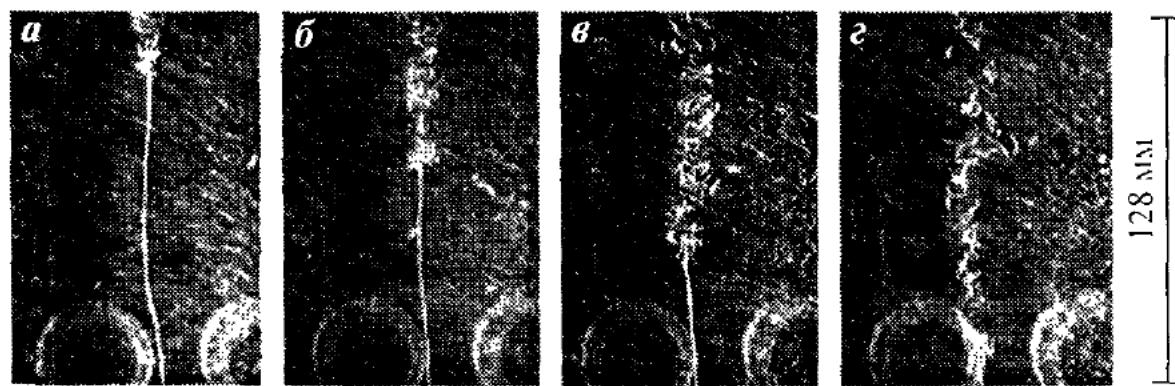


Рис. 7.43. Стоп-кадры вынужденного бегущего распада вихря. Интервал времени между кадрами 80 мс. Вихревой поток движется снизу вверх. Воздействие на вихревое ядро проводилось на расстоянии 50 мм от верхнего края канала. $Q = 1,31 \text{ л/с}$, $S = 3,5$ [Алексеенко, Шторк, 1997]

Далее перейдем от бегущих возмущений к возмущениям, локализованным в пространстве и в основном представляющим собой распад вихря. Возмущения типа *распада вихря* характеризуются тем, что в некоторой точке протяженного вихря происходит резкое уширение ядра вихря либо же внезапное отклонение оси вихря от первоначального направления. При этом во внутренней области на оси вихря или вблизи нее появляется *точка застоя* (stagnation point) и формируется зона возвратного движения.

Первое описание распада вихря было выполнено Peckham, Atkinsor [1957] для случая обтекания треугольного крыла (см. также рис. В5 [Lambourne, Bryer, 1961]). Были обнаружены два основных типа распада – *пузырьковый* и *спиральный*. Позже подавляющее число исследований было проведено в слаборасширяющихся трубах. Особо отметим работу Sarpkaya [1971], в которой впервые выявлен *двухспиральный распад* (*double helix*). Наиболее полная классификация типов распада в слаборасширяющейся трубе (см. рис. 7.40a) представлена Faler, Leibovich [1977, 1978]. Всего насчитываются семь типов распада. Их визуализация и краткие характеристики приведены в табл. 7.2. Восьмой тип распада – *конический* был независимо обнаружен для разных условий в работах Alekseenko, Shtork [1992], Sarpkaya [1995] Khoo *et al.* [1995] (см. также Khoo *et al.* [1997] и Billant *et al.* [1998]).

Аналогичная классификация распада вихря для *свободной вихревой нити* выполнена Khoo *et al.* [1997]. Соответствующий экспериментальный участок показан на рис. 7.40б. Здесь вихревая нить генерируется во вращающемся со суде при отсосе сверху через тонкую трубку (как и в эксперименте Maxworthy *et al.* [1985]). Соответствующие результаты описаны в табл. 7.3, которая для удобства сопоставления приведена симметрично табл. 7.2. Полагается, что представленными в двух таблицах данными исчерпываются все основные типы распада вихря. Для полноты картины на рис. 7.44–7.47 представлены режимные карты, а на рис. 7.48–7.55 – дополнительные иллюстрации по распаду вихря, полученные в иных условиях.

Режимная карта на рис. 7.44 отображает результаты Faler, Leibovich [1977] в координатах $[Re, z/R_0]$ при фиксированных значениях Ω . Здесь число Рейнольдса $Re = WD/v$; $R_0 = D/2$; z – среднее положение точки распада, параметр крутки $\Omega = \Gamma/WD$; Γ – циркуляция; W – среднерасходная скорость в горловине диаметра D (см. рис. 7.40a). Данные Khoo *et al.* [1997] изображены на рис. 7.45 в координатах $[Re^*, S]$ при фиксированных значениях расхода жидкости Ω . Здесь аналог числа Рейнольдса $Re^* = \Gamma/2\pi v$ (не зависит от расхода) циркуляция $\Gamma = V_0 R_0$; параметр крутки $S = R_0 \Gamma / 2Q$; V_0 – тангенциальная скорость на радиусе сосуда R_0 (см. рис. 7.40б). На рис. 7.46 данные Faler, Leibovich [1977] пересчитаны в координатах Khoo *et al.* [1997], что позволяет адекватно сравнивать режимные карты для неограниченного и ограниченного течений.

Таблица 7.2. Распад вихря в слаборасширяющемся канале (ограниченное течение), по данным Faler, Leibovich [1977] (типы 0–6, см. рабочий участок на рис. 7.40a) и Sarpkaya, Novak [1997] (тип “с”). Дополнительные пояснения по тексту

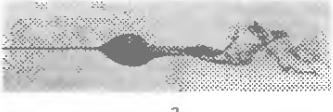
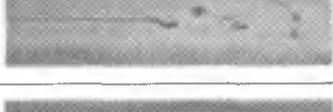
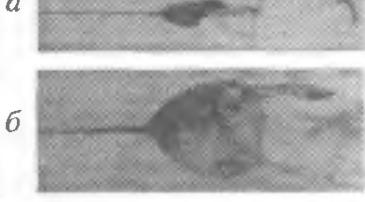
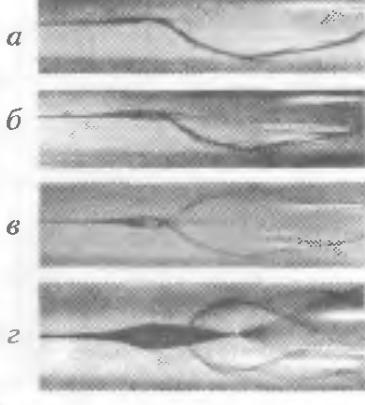
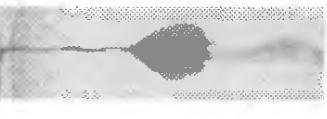
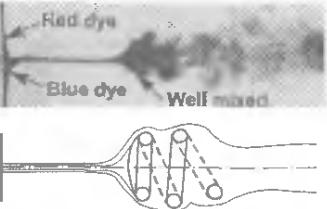
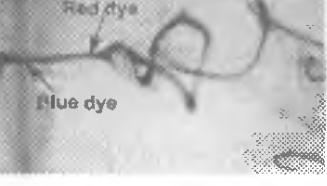
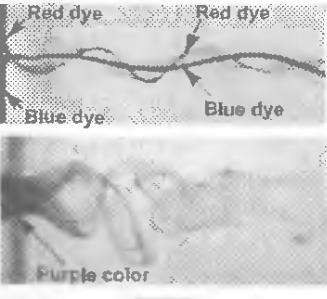
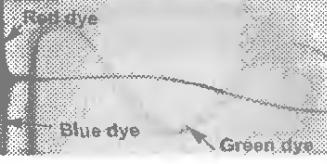
Тип	Наименование	Изображение	Описание
с	Конический Conical		Сильно турбулизованный след с конической огибающейся. При малом времени экспозиции наблюдаются две или более переплетенные спирали, завитые против потока и врачающиеся с потоком $a - \Delta\tau = 1/30$ с; $Re = 10^5$; $\Omega = 0,61$ $b - \Delta\tau = 6 \cdot 10^{-9}$ с; $Re = 1,15 \cdot 10^5$; $\Omega = 0,31$
0	Оссимметричный закрытый (или пузырьковый) Axisymmetric closed (or bubble vortex breakdown)	 $Re = 2,56 \cdot 10^3$; $\Omega = 1,777$	Имеются один или два хвоста, которые врачаются вместе с потоком. Через хвостовую часть происходит одновременно опустошение и заполнение пузыря. Внутри пузыря иногда наблюдается окраинная струйка
1	Оссимметричный открытый Axisymmetric open vortex breakdown		Полностью открытая хвостовая часть
2	Спиральный распад Spiral breakdown		Спираль завита по потоку и вращается с потоком
3	Модификация спирального распада Modification of spiral breakdown		
4	Уплощенный пузырьковый распад Flattened bubble breakdown		Нс вращается а – вид сбоку б – вид сверху
5	Двухспиральный распад Double helix breakdown		Возникает из типа 6. Сформировавшаяся структура устойчива по форме и положению $a - t = 0$ $б - t = 5$ мин $в - t = 10$ мин $г - t = 15$ мин
6	Искажение нити Filament disruption		Устойчивое неподвижное состояние. При малых отклонениях струйка лежит в плоскости, при больших – завита по потоку

Таблица 7.3. Распад вихря в неограниченном потоке, по данным Khoo *et al.* [1997] (см. схему на рис. 7.40 σ). Дополнительные пояснения по тексту. Изображения развернуты по горизонтали. Визуализация краской разного цвета

Тип	Наименование	Изображение	Описание
c	Конический Conical		Представляет собой спираль, имеющую коническую огибающую и врачающуюся с потоком $Re^* = 3,5 \cdot 10^3; S = 6,0$
0	Закрытый пузырьковый распад Closed bubble breakdown		Сильное смешение внутри пузыря. Внутри наблюдается наклонное торOIDальное вихревое кольцо, которое отвественно за наполнение и опустошение пузыря $Re^* = 2,5 \cdot 10^3; S = 2,5$
1	Открытый пузырьковый распад Open bubble breakdown		Высокая скорость вращения, сильное смешение. Сначала резкое расширение нити в виде чашки, затем плотно навитая спираль, которая в открытой хвостовой части генерирует вихревые кольца $Re^* = 3,0 \cdot 10^3; S = 4,0$
2	Сpiralный распад Spiral breakdown		Спираль завита против потока и вращается с потоком $Re^* = 10^3; S = 9,0$
3	Искаженный спиральный распад Distorted spiral breakdown		$Re^* = 750; S = 7,5$
4	Уплощенный пузырьковый распад Flattened bubble breakdown		$Re^* = 750; S = 7,5$
5	Двухспиральный распад Double helix breakdown		a – формируется из типа 6 за счет возникновения второй спирали. Нить завита по потоку б – ветви двойной спирали завиты против потока и вращаются вместе с потоком
6	Искажение нити Filament disruption		$Re^* = 10^3; S = 1,5$

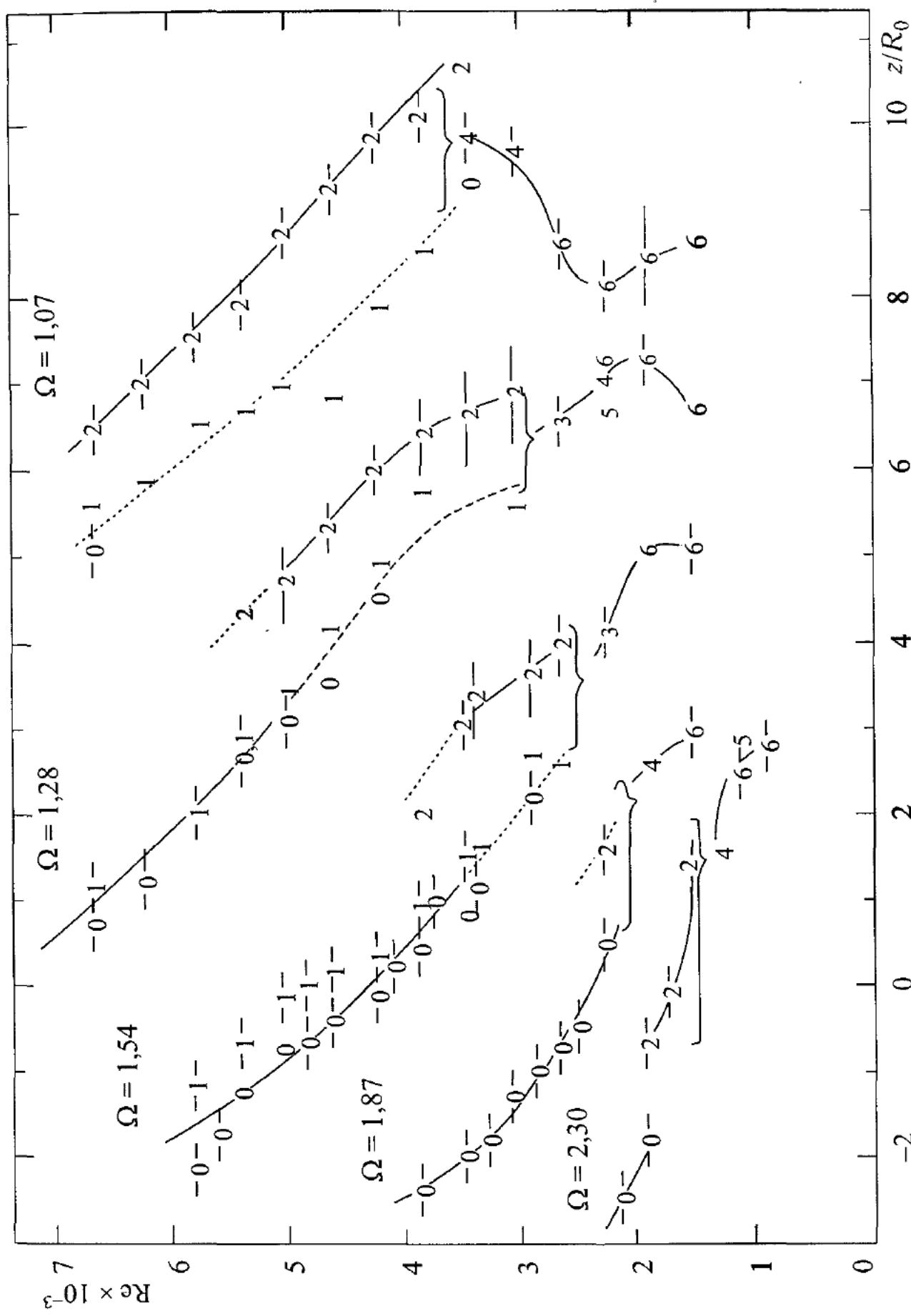


Рис. 7.44. Зависимость типов распада и их среднего аксиального положения z от числа Рейнольдса и параметра крутки Ω [Faler, Leibovich, 1977]. Обозначения типов см. в табл. 7.2

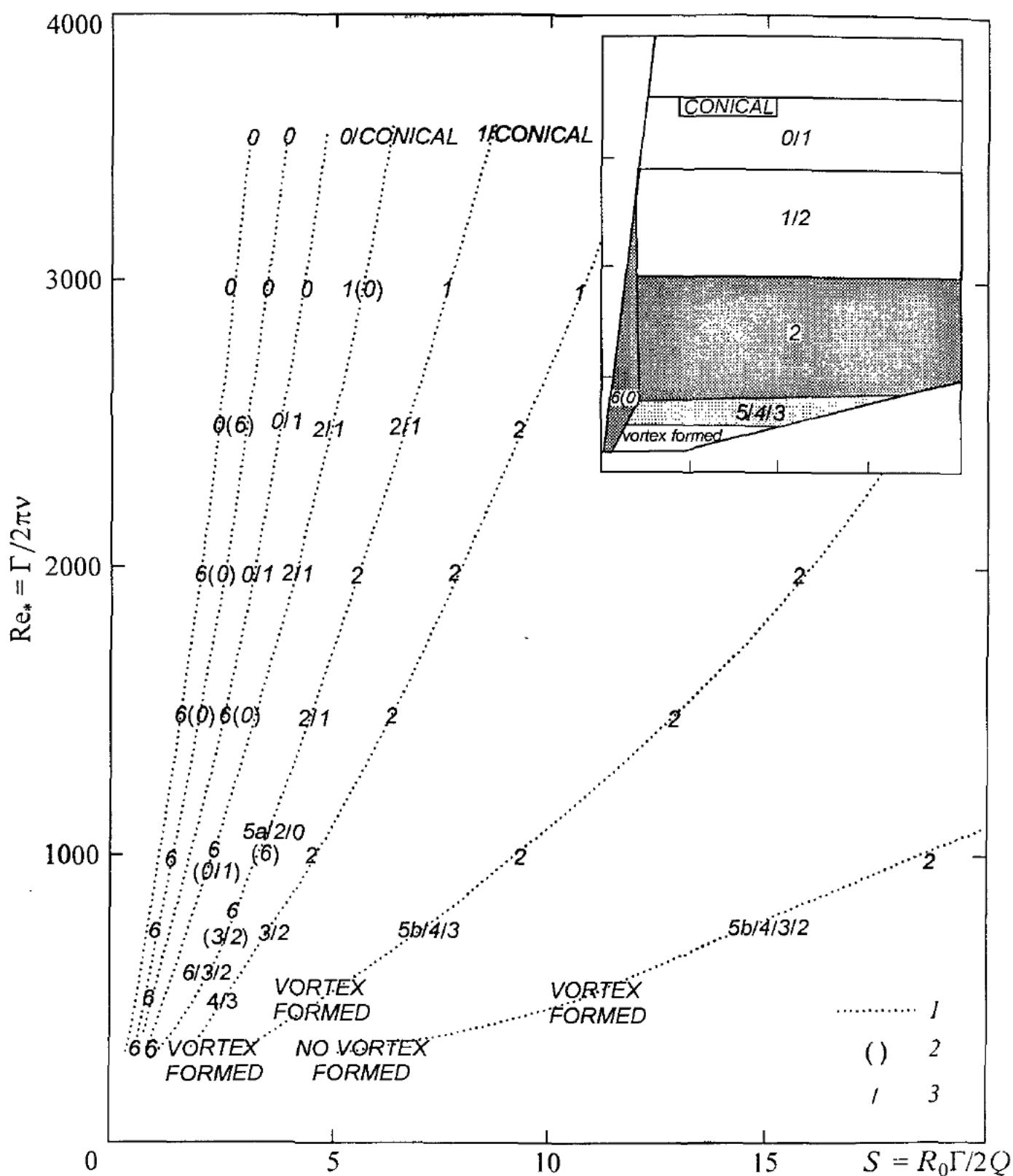


Рис. 7.45. Зависимость типов распада вихря в неограниченном пространстве от числа Рейнольдса и параметра крутки S [Khoo *et al.*, 1997]. Вставка показывает области доминирующих типов распада. Обозначения типов распада см. в табл. 7.3. 1 – линии постоянного расхода жидкости; 2 – менее доминирующий тип распада; 3 – одинаково доминирующий

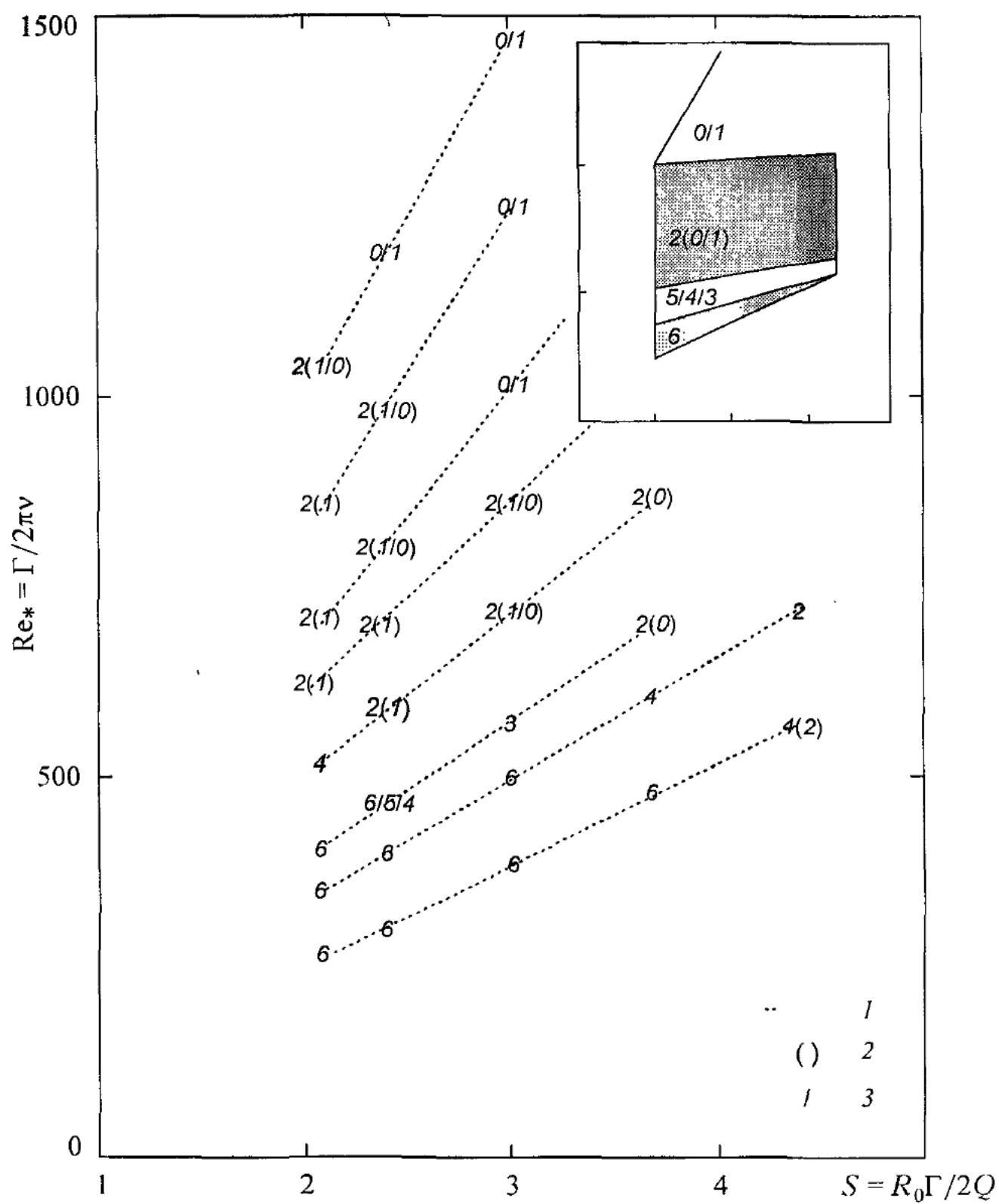


Рис. 7.46. Карта режимов Falter, Leibovich [1977] в координатах Khoo *et al.* [1997]. Вставка показывает области доминирующих типов распада Усл обозн см. на рис. 7.45

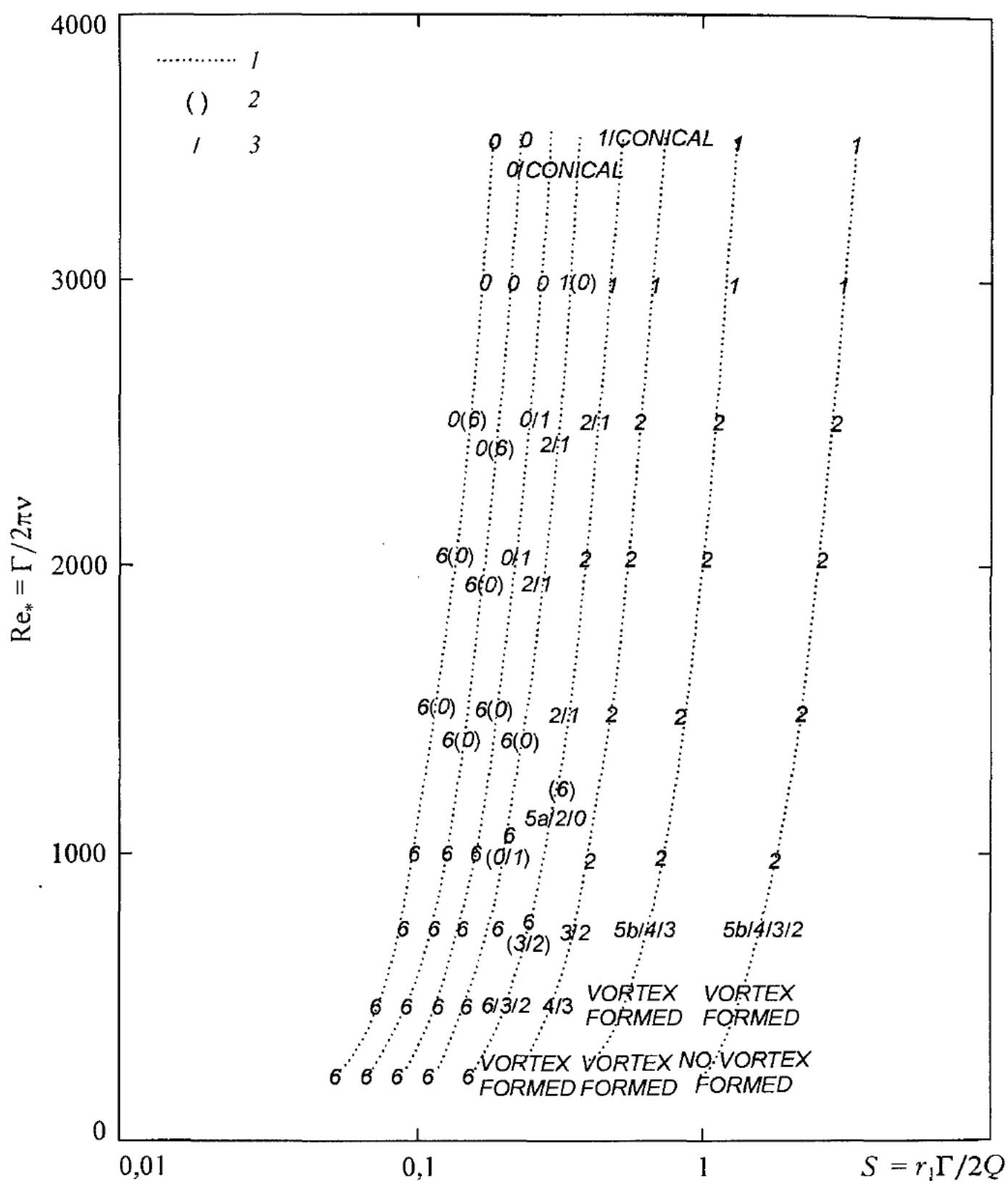


Рис. 7.47. Обобщенная карта режимов распада вихря [Khoo *et al.*, 1997].
Усл. обозн. см. на рис. 7.45

Наконец, на рис. 7.47 вместо размера камеры R_0 использован внутренний масштаб – эффективный радиус ядра вихря r_1 . Такая замена дает возможность абстрагироваться от конструктивных особенностей установки и перейти к более универсальному представлению данных.

Поскольку нас больше интересуют возмущения на свободных вихревых нитях, то в первую очередь будем давать описание распада в неограниченном потоке (см. табл. 7.3) производя сравнения с другими данными. Параметр S , определенный по Khoo *et al.* [1997], связан с Ω [Faler, Leibovich, 1977] приближенным соотношением: $S = 1,91\Omega$. Из общих свойств отметим, что положение точки распада может смещаться вдоль потока, а типы распада могут спонтанно переходить из одной формы в другую.

Анализ начнем с малых значений параметра крутки S и числа Рейнольдса Re^* , т. е. с нижней части табл. 7.3. Напомним, здесь Re^* не связано с расходом жидкости в отличие от числа Re в опытах Faler, Leibovich [1977] и других авторов. Далее будем обозначать работу Faler, Leibovich [1977] как FL, а работу Khoo *et al.* [1997] как KYLN.

Тип 6 (*filament disruption*) согласуется с данными FL и характеризуется плавным отклонением окрашенной струйки (оси вихря) от исходного направления. Течение ламинарное, и струйка наблюдается до дренажной трубки. В целом структура неподвижна. В слаборасширяющемся канале струйка лежит в плоскости при слабых отклонениях и завита по потоку при больших отклонениях (вплоть до почти полного касания стенки канала). Увеличение крутки в канале приводит к переходу в типы 4 и 5.

Тип 5 представляет собой *двухспиральный распад* (*double helix*). Но его проявления различны для ограниченного и неограниченного пространств. В слаборасширяющемся канале двойная спираль возникает из типа 6, как показано в табл. 7.2. Однажды сформированный образец устойчив по форме и положению (не вращается). Ветви завиты по потоку.

В неограниченном пространстве Khoo *et al.* обнаружили две иные формы двухспирального распада, которые обозначены как 5 a и 5 b (см. табл. 7.3). Тип 5 a также формируется непосредственно из типа 6. А именно, вокруг исходной винтообразной нити появляется вторая винтовая нить, возникающая за счет отрыва потока в пограничном слое плоского дна камеры. Закрутка нитей по потоку.

Тип 5 b наблюдается при меньших значениях Re^* (< 750). Спирали завиты против потока, но вращаются вместе с потоком.

Двухспиральные формы распада, видимо, наиболее многообразны по своему проявлению. Явно иной вид имеют двойные спирали в тангенциальной камере [Alekseenko, Shtork, 1992]. На рис. 7.41 c показано двухспиральное возмущение, спонтанно возникающее на вихревой нити, а на рис. 7.48 c – устойчивый двухспиральный распад в окрестности выходного отверстия диафрагмы.

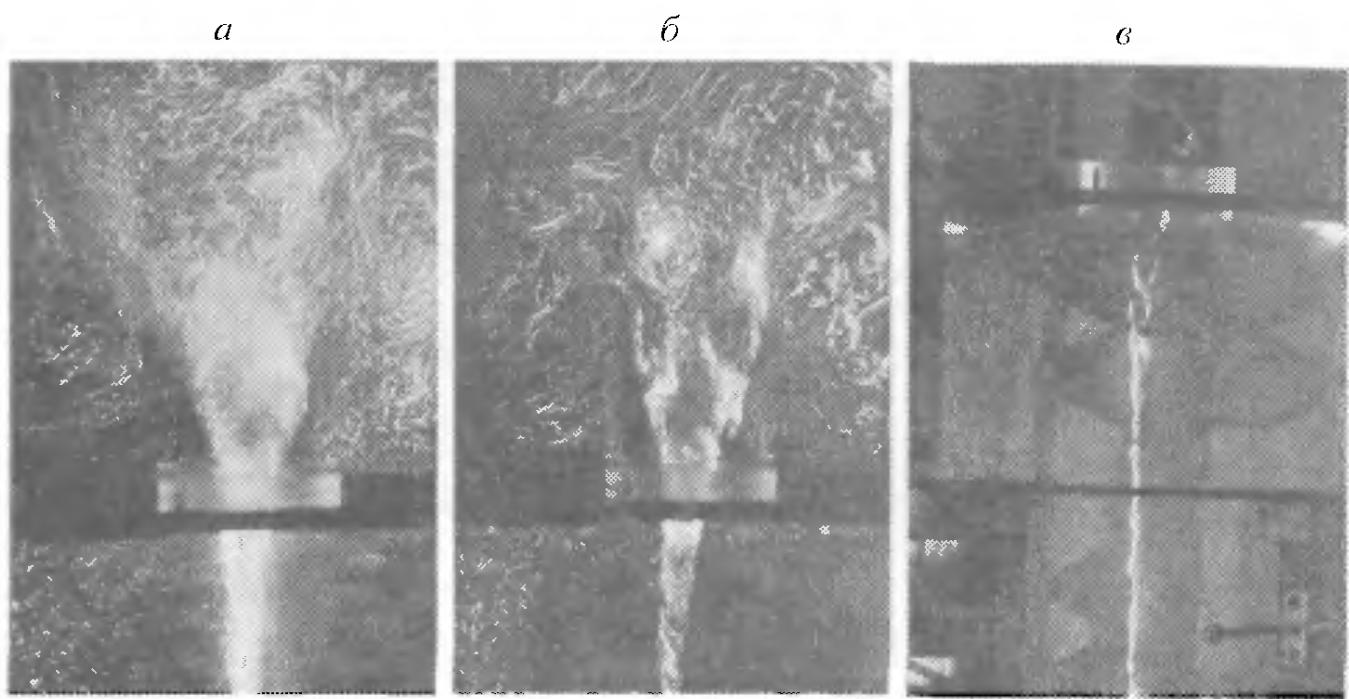


Рис. 7.48. Распад вихря в окрестности диафрагмы тангенциальной камеры. $Re = 1,4 \cdot 10^5$ (определен по параметрам отверстия, $d_c = 70$ мм), $S = 6,86$ (определен по характеристикам камеры до диафрагмы); *а* – экспозиция 1/30 с; *б* – 1/60 с; *в* – фотовспышка. Короткая экспозиция демонстрирует двухспиральный тип распада. При длительной экспозиции воспринимается как конический

Здесь спирали врачаются с потоком. Очевидно, что эти структуры отличаются от двойных спиралей, изображенных в табл. 7.2 и 7.3.

Тип 3 и 4, как и предыдущие типы распада, наблюдаются в области малых значений Re^* . Они отличаются нестабильным поведением. К типу 4 относится *уплощенный пузырьковый распад* (*flattened bubble breakdown*). Эта форма распада проявляется одинаково как в ограниченном, так и неограниченном пространствах. Характеризуется тем, что выглядит по-разному с двух взаимно перпендикулярных направлений. Система не вращается. В канале формируется из типа 6, либо спонтанно, либо с увеличением крутки потока.

Тип 3 – это *искаженный спиральный распад* (*distorted spiral breakdown*). В отличие от типа 2 характеризуется сильным возвратным течением. Согласуется с типом 3 в расширяющемся канале.

Тип 2, *спиральный распад* (*spiral breakdown*) – является преобладающим во многих случаях и имеет наиболее обширную область существования по числам Рейнольдса к параметру крутки. В неограниченном пространстве спираль завита против потока и вращается с потоком аналогично спирально-му распаду вихря при обтекании треугольного крыла. В то же время в расширяющемся канале спираль, наоборот, завита по потоку, но вращается также с потоком. Тип 2 может периодически переходить в типы 0 и 1.

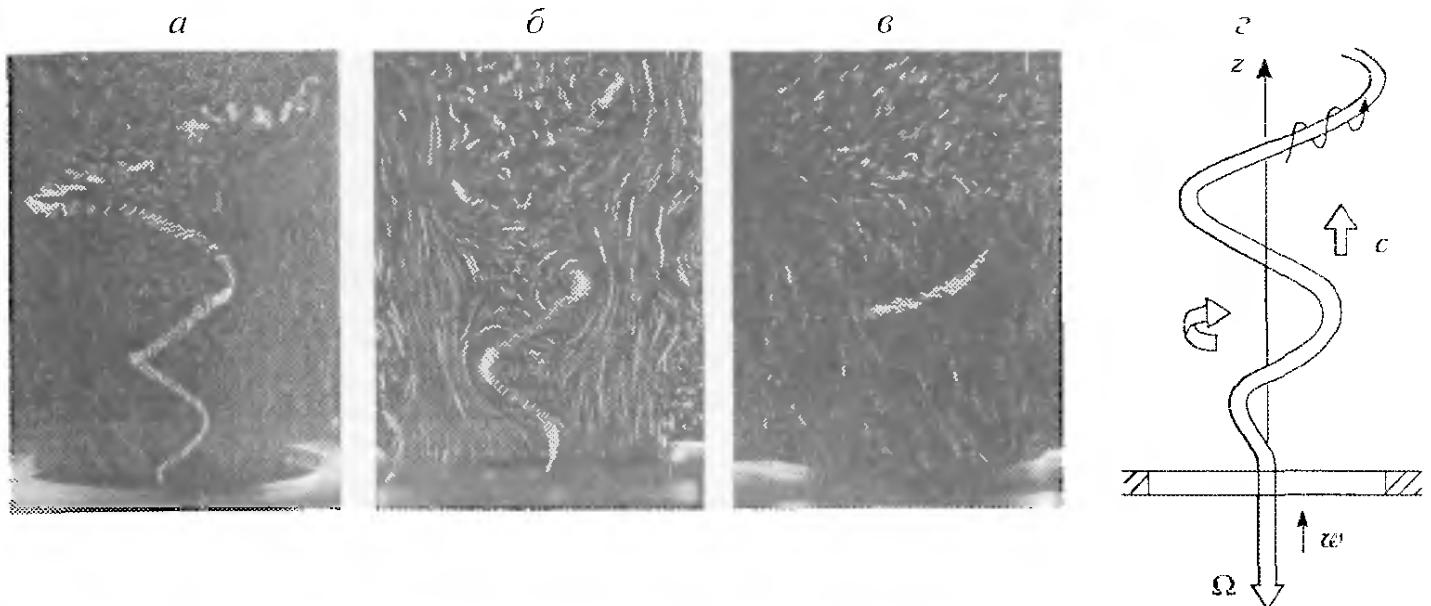


Рис. 7.49. Спиральный распад вихря за отверстием диафрагмы в тангенциальной камере. $Re = 4 \cdot 10^4$ (определен по параметрам выходного отверстия, $d_e = 110$ мм), $S = 5,52$ (определен по характеристикам камеры до отверстия); *а* – визуализация при общем освещении, экспозиция 1/60 с; *б* – световой нож в центральном сечении, 1/30 с; *в* – световой нож в ближнем вертикальном сечении, 1/30 с; *г* – схема течения

Четкая форма спирального распада наблюдается в тангенциальной камере за отверстием диафрагмы, т. е. по сути в закрученной струе, истекающей в свободное пространство [Шторк, 1994; Alekseenko, Shtork, 1992]. На рис. 7.49 хорошо видна детальная структура течения. Здесь поток закручен влево, спираль является правой, т. е. завита против потока и вращается вместе с потоком. Такая схема соответствует наблюдениям Kho *et al.* [1997]. Во внутренней зоне реализуется возвратное движение. Экспозиция кадров составляет 1/30 или 1/60 секунды, и по трекам пузырьков-меток можно оценить направления движения и скорость. В частности, по траекториям пузырьков на оси вихря видно, что вихревая нить смещается перпендикулярно образующей.

При пузырьковом распаде выделяют две формы типа распада – открытый и закрытый. *Открытый пузырьковый распад* (*open bubble breakdown*, тип 1) можно описать так. Вначале резкое расширение окрашенной струйки в виде чаши, затем формирование плотно навитой спирали, которая в полностью открытой хвостовой части генерирует вихревые кольца (цв. рис. 2). Данная структура характеризуется высокой скоростью вращения и интенсивным смешением, образуется из спирального типа при увеличении степени крутки. В целом соответствует типу 1 в ограниченном канале (FL).

Закрытый пузырьковый распад (*closed bubble breakdown*, тип 0) также соответствует типу 0 в ограниченном пространстве (FL). Имеет четко очерченную форму пузыря при визуализации краской. За пузырем тянется обычно один осесимметричный хвост (иногда два), который вращается по потоку и на некотором удалении закручивается в спираль.

Внутренняя структура пузыря нестационарна и трехмерна. Происходит одновременно заполнение и опустошение внутренней области. По наблюдениям FL существуют два механизма массообмена. В соответствии с первым способом имеется один хвост, через который производится опустошение, а заполнение идет в диаметрально противоположной точке хвостовой части. Второй способ реализуется очень редко при меньших числах Re . В этом случае наблюдаются два диаметрально противоположных опустошающих хвоста и две диаметрально противоположные точки заполнения, сдвинутые на 90° по отношению к хвостам.

Пузырь всегда дрейфует медленно вдоль оси канала около среднего положения, при этом меняясь в размерах: вверх по потоку – увеличиваясь, вниз – уменьшаясь. Еще одно свойство пузыря – частое появление внутри него окрашенной нити, берущей начало от носика пузыря.

В экспериментах KYLN и Brücker, Althaus [1992, 1995] выявлена более тонкая структура пузырькового распада. Обнаружено наклонное торOIDальное вихревое кольцо, которое прецессирует вокруг оси и отвечает за заполнение и опустошение внутренней области пузыря (см. визуализацию на цв. рис. 2б и реконструкцию изображения кольца по измерениям методом PIV на рис. 7.50). На рис. 7.51 приведена обобщенная схема пузыря в виде проекции линий тока на меридиональную плоскость. Видно наличие двух точек застоя. У передней точки S_1 происходит заполнение пузыря, а у задней S_2 – опустошение.

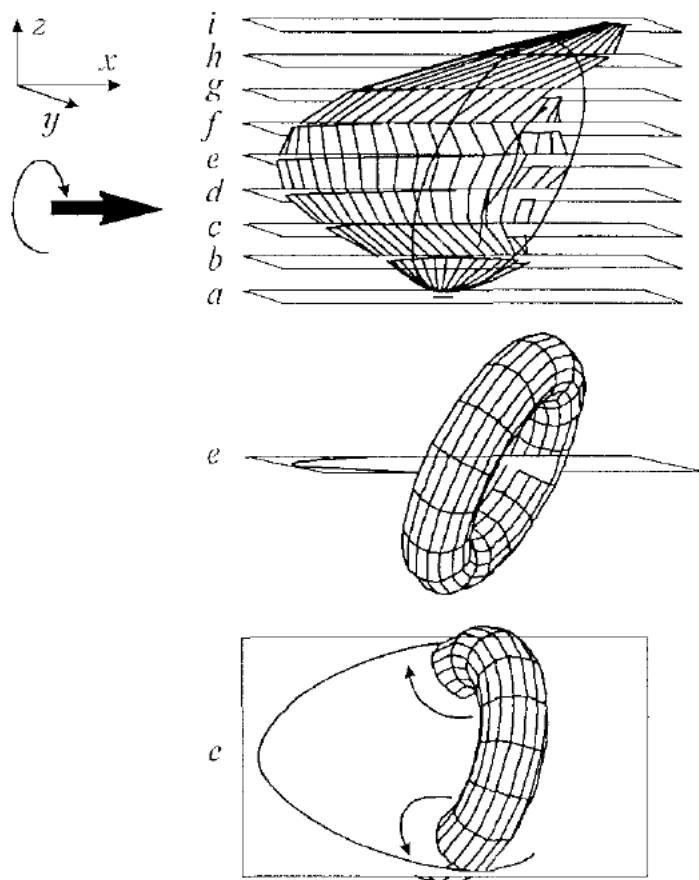


Рис. 7.50. Реконструкция трехмерной формы пузырькового распада [Brücker, Althaus, 1992]. Показан наклон вихревого кольца относительно осевой плоскости e

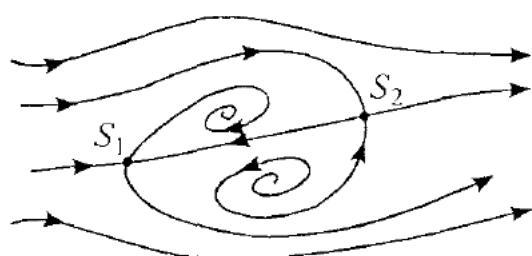


Рис. 7.51. Схема пузырькового распада вихря. Проекции линий тока на меридиональную плоскость [Brücker, Althaus, 1995]

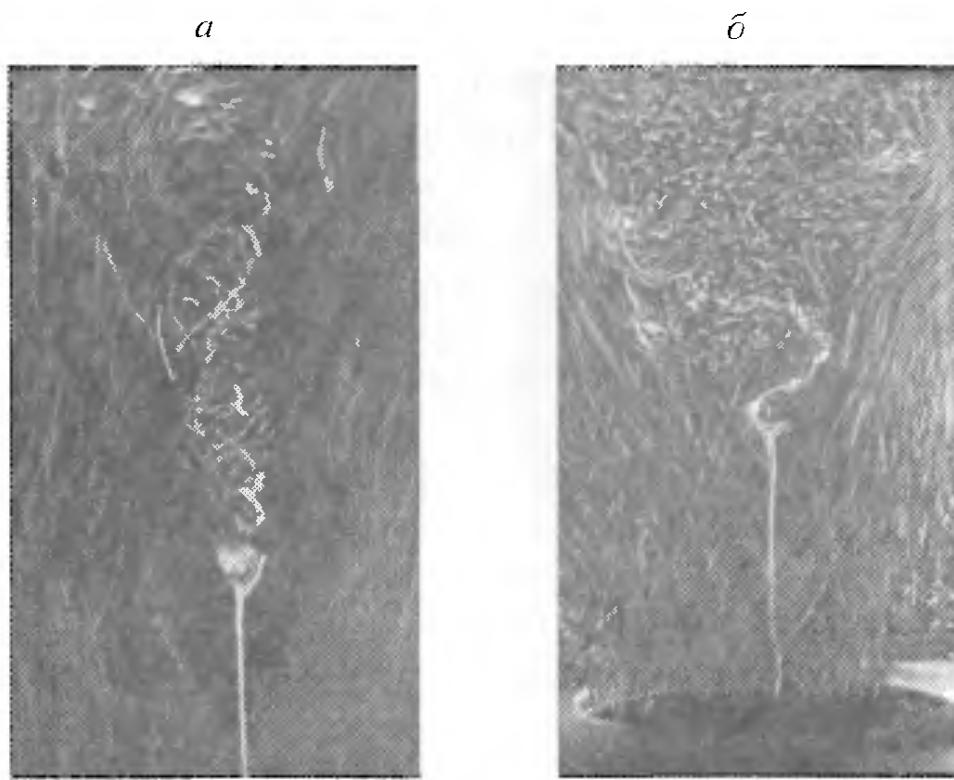


Рис. 7.52. Распад вихря пузырькового (а) и перемежающегося (б) типов за отверстием диафрагмы в тангенциальной камере. $Re = 3,7 \cdot 10^4$ (определен по параметрам отверстия, $d_c = 110$ мм). $S = 4,9$ (определен по характеристикам до отверстия), экспозиция 1/30 с

На рис. 7.52 дополнительно показаны примеры пузырькового и перемежающегося типов распада вихря в тангенциальной камере за отверстием диафрагмы.

Распад вихря, который был назван *коническим* (*conical*), обнаружен последним из всех типов распада при разных условиях и разными авторами. Конический распад Sarpkaya [1995] был представлен как турбулентный конический след при больших числах Рейнольдса в слаборасширяющемся канале. Но затем [Sarpkaya, Novak, 1997] съемка при исключительно малом времени экспозиции (6 нс) показала, что в действительности конический распад представляет собой структуру, состоящую из двух или более переплетенных спиралей и имеющую коническую огибающую (см. табл. 7.2, тип "с"). Аналогичный вывод сделан Khoо *et al.* [1997] (см. табл. 7.3 и цв. рис. 2), но они наблюдали конический распад в очень узком диапазоне условий и только одну спираль. В обоих случаях конический распад формировался из пузырькового. Из работ Alekseenko, Shtork [1992] также следует, что конический распад, зафиксированный в окрестности выходного отверстия диафрагмы в тангенциальной камере, есть врачающаяся двойная спираль. Рисунки 7.48а, б получены при идентичных условиях, но первый снимок сделан при экспозиции несколько миллисекунд (лампа-вспышка), а второй – 1/30 секунды.

Конический распад вихря, отличающийся от описанных выше, обнаружен Billant *et al.* [1998] в экспериментах с закрученной затопленной струей. Главное отличие состоит в том, что угол раствора конуса в опытах Billant *et al.* [1998] достигает 90° (цв. рис. 3), что существенно выше, чем в других работах, а течение – ламинарное. В указанной работе выделены четыре типа распада, которые строго можно отнести к явлению распада вихря, так как только они содержат точку застоя: пузырьковый, конический, асимметричный пузырьковый и асимметричный конический. Последние два типа формируются из первых двух при увеличении числа Рейнольдса и характеризуются наличием прецессии точки застоя вокруг оси струи. Кроме того, зафиксировано явление гистерезиса режимов. Следует заметить, что течения с конической симметрией широко распространены в вихревой динамике [Гольдштик, 1981; Shtern, Hussain, 1998]. Им, в частности, присущи такие свойства, как неоднозначность и гистерезис.

Приведем еще два примера распада вихря конической формы. На рис. 7.9 показан конический распад непосредственно у дна тангенциальной камеры. Здесь интересно то, что после распада вихря вихревая нить немедленно восстанавливается. Внешне похожая картина может наблюдаться и для торнадо (см. цв. рис. В1.).

Другой пример относится к случаю, когда в тангенциальной камере имеются две диафрагмы (рис. 7.53). В окрестности нижней перегородки, расположенной между ярусами сопел, реализуется конический распад вихря. Однако в пространстве между двумя диафрагмами вновь формируется вихревая нить, которая упирается примерно перпендикулярно на внутреннюю поверхность конуса.

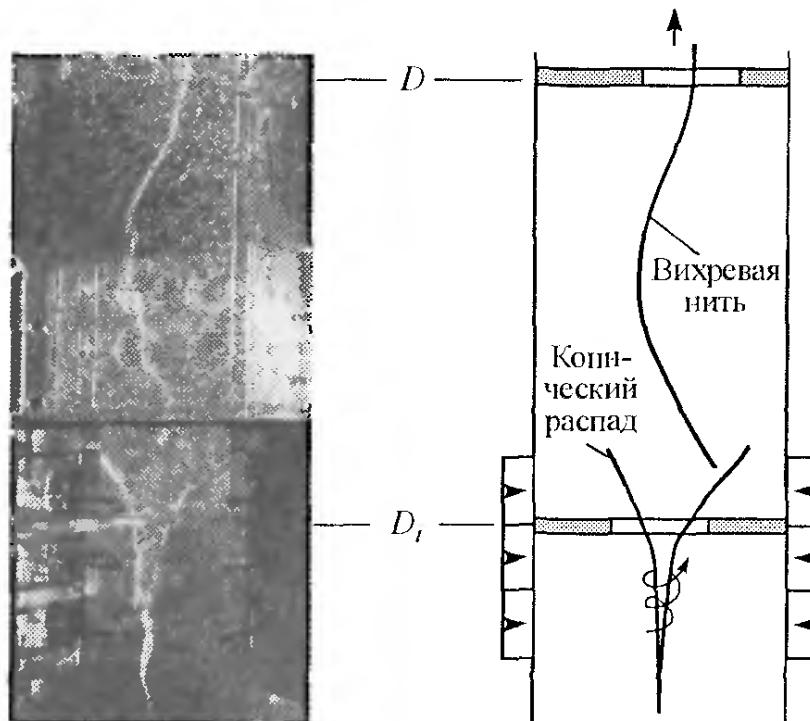


Рис. 7.53. Структура течения в тангенциальной камере с двумя диафрагмами. D – диафрагма со смещенным выходным отверстием; D_1 – промежуточная диафрагма с центральным отверстием

В заключение данного параграфа отметим, что даже на качественном уровне пока еще нет достаточно полного описания типов возмущений концентрированных вихрей. Как будет показано ниже, нельзя получить адекватное представление об изменениях структуры течения только на основании изучения визуальной картины течения.

7.6.3. Распад вихря в сосуде с вращающейся крышкой

Характерная особенность распада вихря в закрученных струях и проточных каналах заключается в многообразии форм его проявлений и их нестабильности. В этом плане каноническим и соответственно более привлекательным для изучения является распад вихря в сосуде с вращающейся крышкой. Такая система имеет и важное практическое значение, в частности для лабораторного моделирования торнадо [Окулов и др. (в печати); Maxworthy, 1972; Maxworthy *et al.*, 1985] и изучения процесса управления распадом вихря [Husain, Shtern, Hussain, 2003] или при моделировании процесса выращивания кристаллов методом Чохральского [Berdnikov *et al.*, 1989]. На рис. 7.54 показана

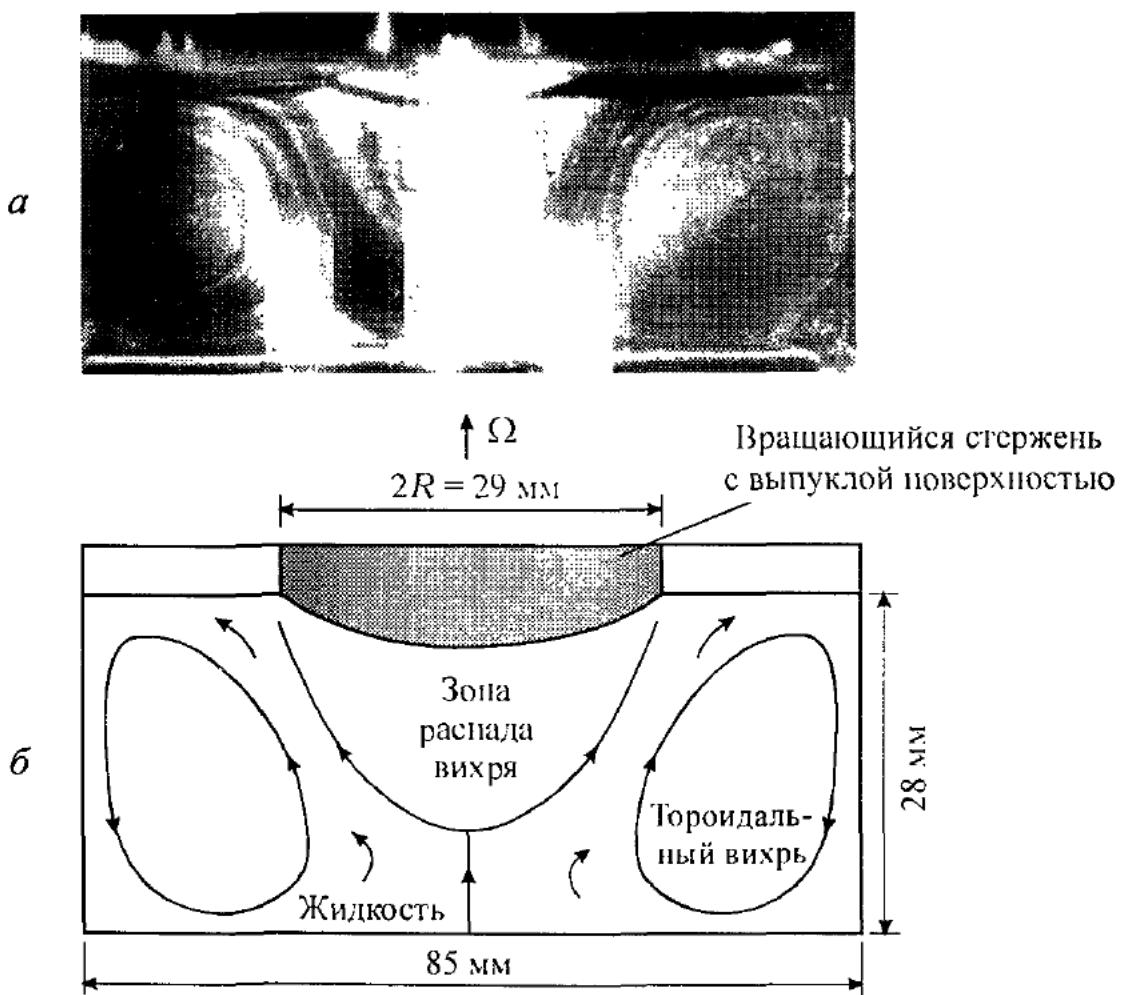


Рис. 7.54. Картина течения в сосуде с врачающимся стержнем при изотермическом моделировании процесса выращивания кристаллов методом Чохральского [Berdnikov *et al.*, 1989]. $Re = \Omega^2 R / v = 2570$. а - визуализация течения алюминиевой пудрой; б - схема

картина течения в сосуде с врачающимся цилиндрическим стержнем (моделью кристалла). Отчетливо видно, что под поверхностью кристалла формируется рециркуляционная зона типа пузырькового распада вихря, а у боковых стенок – тороидальный вихрь.

Типичная конструкция установки [Spohn *et al.*, 1998] для исследований распада вихря изображена на рис. 7.55. Закрученное течение с концентрированным вихрем на оси цилиндрического сосуда образуется путем вращения диска в донной области с угловой скоростью Ω . В верхней части может быть как свободная поверхность жидкости, так и неподвижная крышка. В ряде экспериментов использовалась вращающаяся верхняя крышка, а нижняя была неподвижна или допускалось вращение обеих крышек сразу. Физический механизм возникновения движения жидкости в таких системах имеет двоякое происхождение. С одной стороны, вращательное движение от диска передается жидкости за счет сил трения, а с другой – разрежение на оси вращения приводит к появлению осевого движения жидкости к центру вращающегося диска вдоль оси цилиндра и возвратного течения у стенок цилиндра (показано стрелками на рис. 7.55). Но эта простая схема нарушается возникновением рециркуляционных зон, связанных с *пузырьковым распадом вихря* (рис. 7.56–7.58). Вопрос о его образовании полностью не ясен до сих пор.

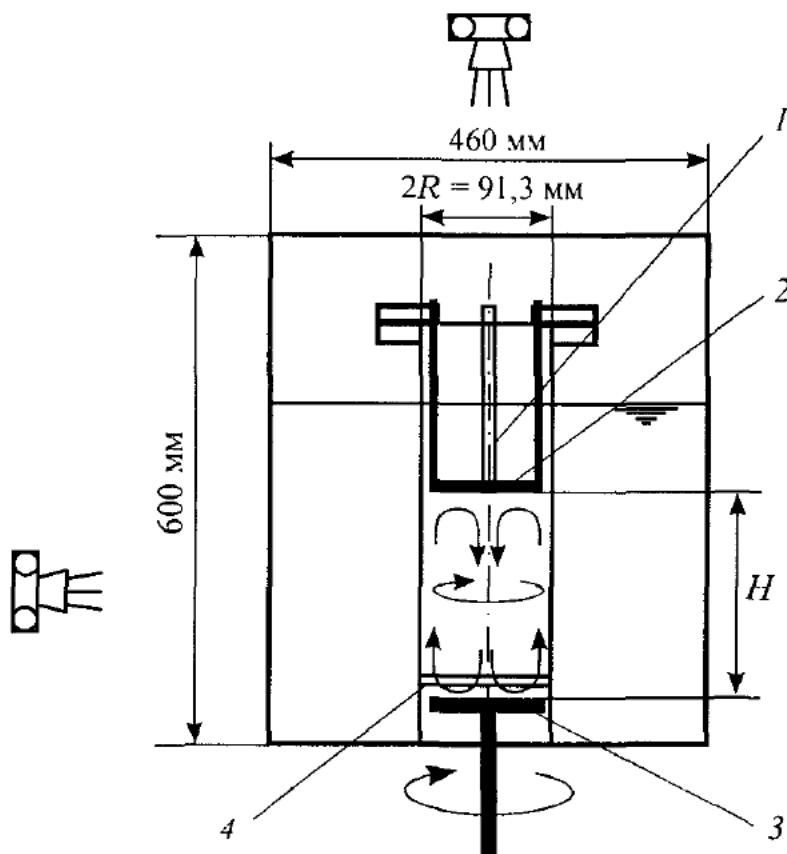


Рис. 7.55. Схема экспериментальной установки Spohn *et al.* [1998] для изучения распада вихря в сосуде с вращающимся дном. 1 – трубка для подачи флуоресцентной краски; 2 – проволочное кольцо в крышке для генерации трассера электролитическим методом; 3 – вращающийся диск; 4 – проволочное кольцо на цилиндрической стенке для генерации трассера

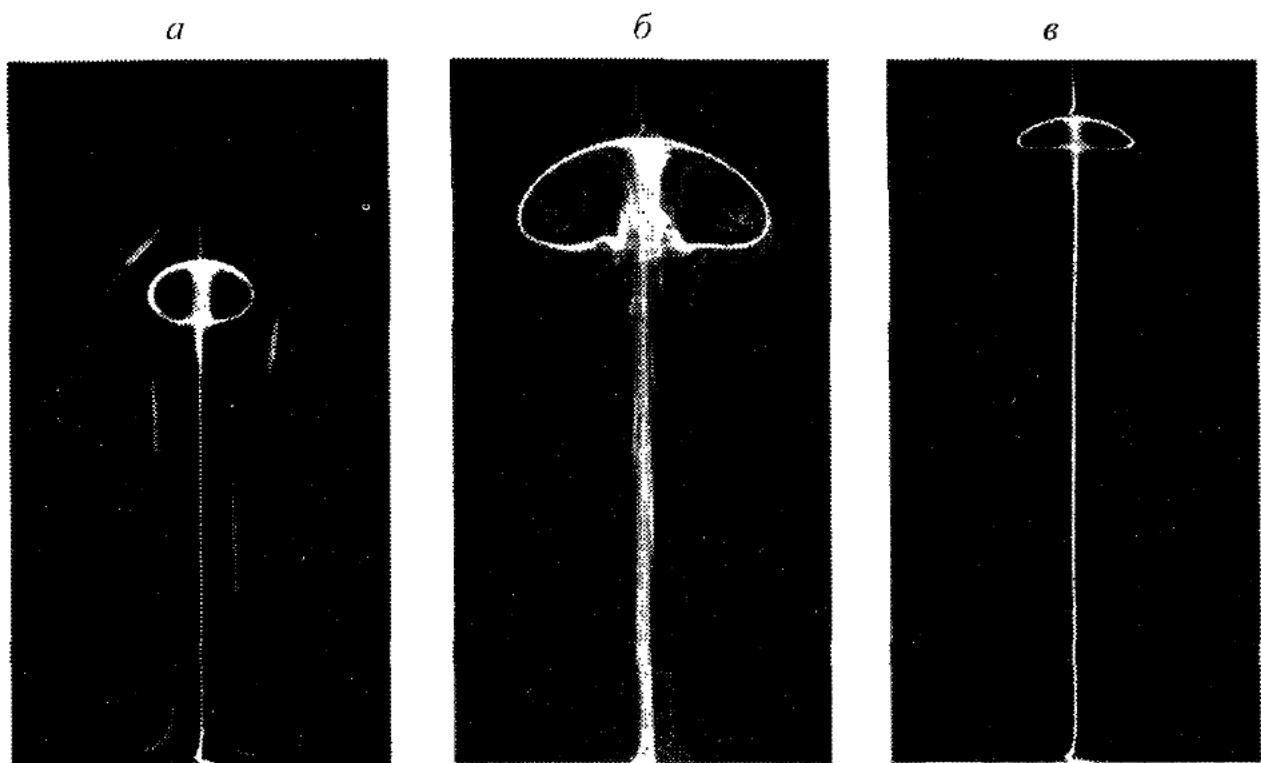


Рис. 7.56. 1-пузырьковый распад вихря в сосуде с верхней жесткой крышкой при $H/R = 1,5$ и разных Re : 1139 (а), 1492 (б) и 1854 (в). Визуализация флуоресцентной краской, подаваемой сверху по оси вихря [Escudier, 1984]

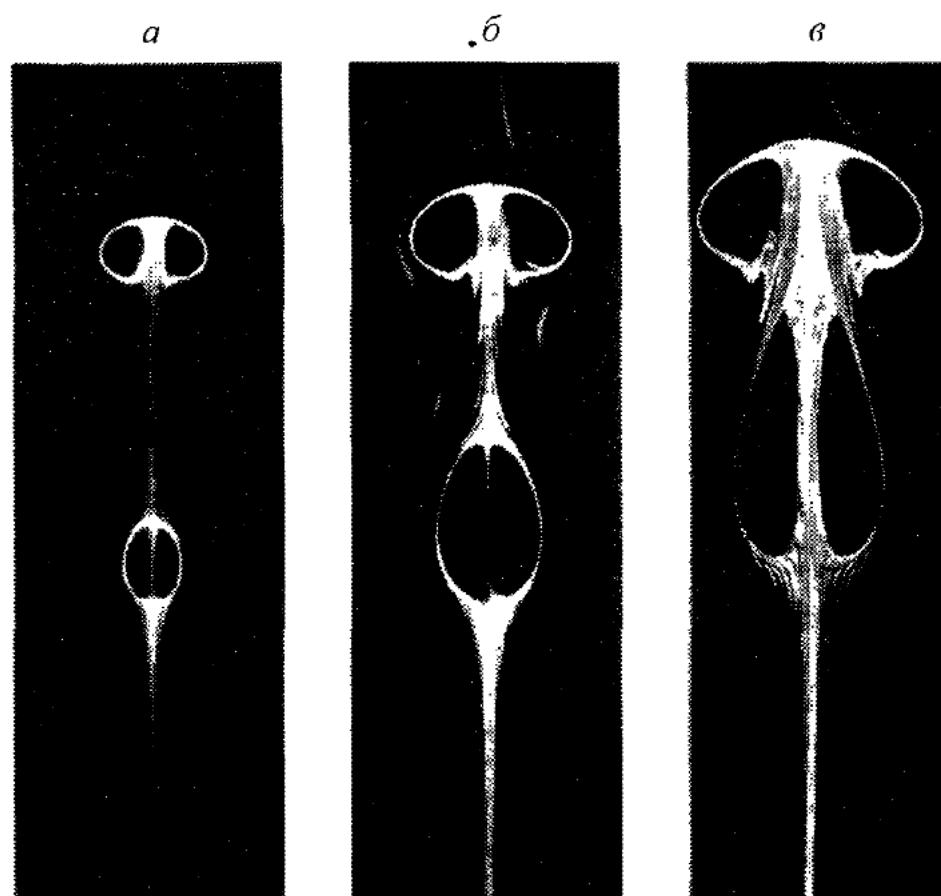


Рис. 7.57. 2-пузырьковый распад вихря в сосуде с верхней жесткой крышкой при $H/R = 2,5$ и разных Re : 1994 (а), 2126 (б) и 2494 (в) [Escudier, 1984]

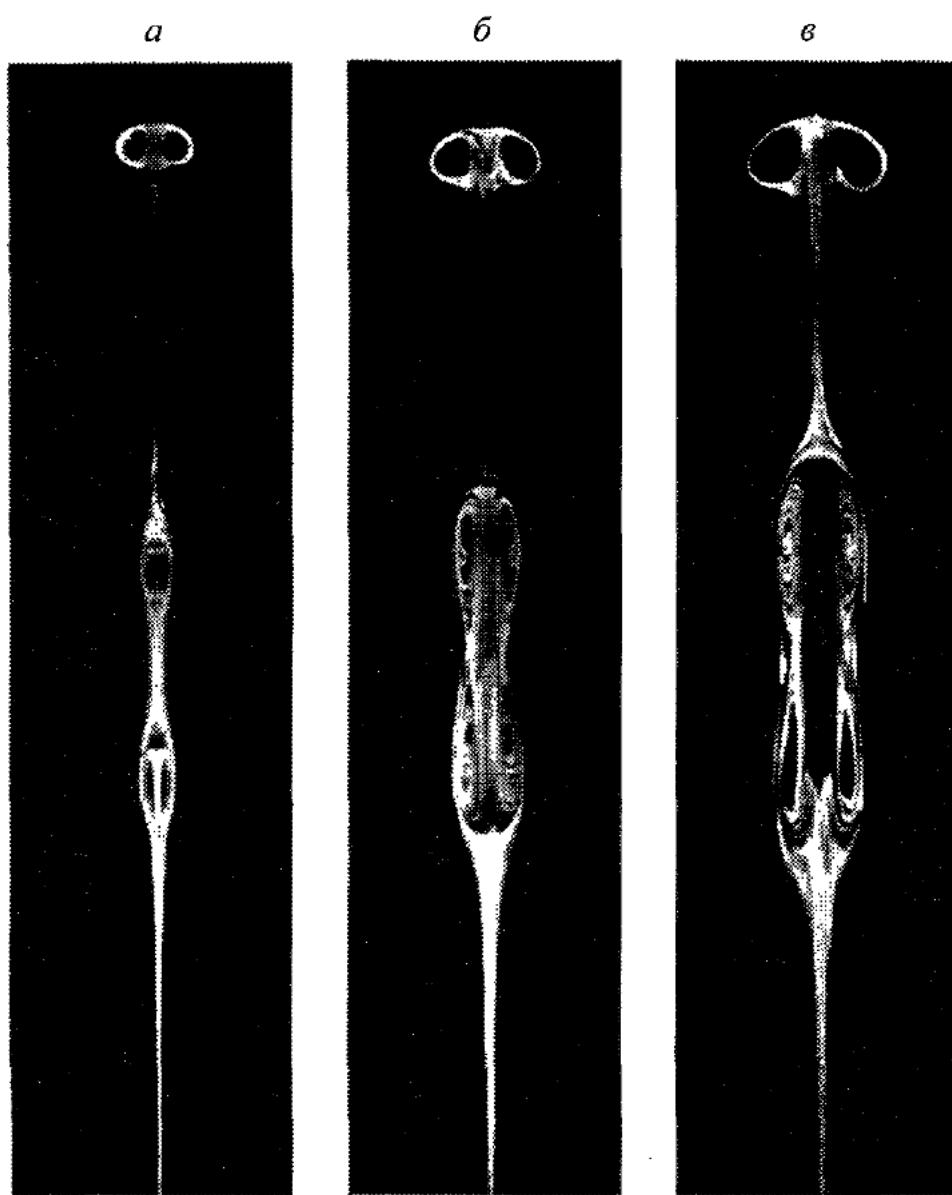


Рис. 7.58. 3-пузырьковый распад вихря в сосуде с верхней жесткой крышкой при $H/R = 3,25$ и разных Re : 2686 (а), 2752 (б) и 2819 (в) [Escudier, 1984]

В основополагающих работах Vogel [1968] и Escudier [1984] показано, что характер распада вихря зависит от числа Рейнольдса $Re = \Omega R^2 / \nu$ и отношения H/R , где H – высота, а R – радиус цилиндрической камеры. В указанных координатах на рис. 7.59 показана карта режимов, построенная Escudier [1984] по визуализациям течения в диаметральном сечении светового ножа путем ввода (инжекции) красящего вещества через центральное отверстие неподвижной верхней крышки. Кроме того, установлено, что визуальная картина течения с точностью до зеркального отражения относительно горизонтальной оси не зависит от того, какая крышка вращается – верхняя (Vogel) или нижняя (Escudier), т. е. гравитационными эффектами в силу их малости в этой задаче можно пренебречь. Поэтому для единобразия изложения образы течения, взятые из разных источников, ориентированы здесь так, что низ соответствует врачающемуся диску, а верх – неподвижному.

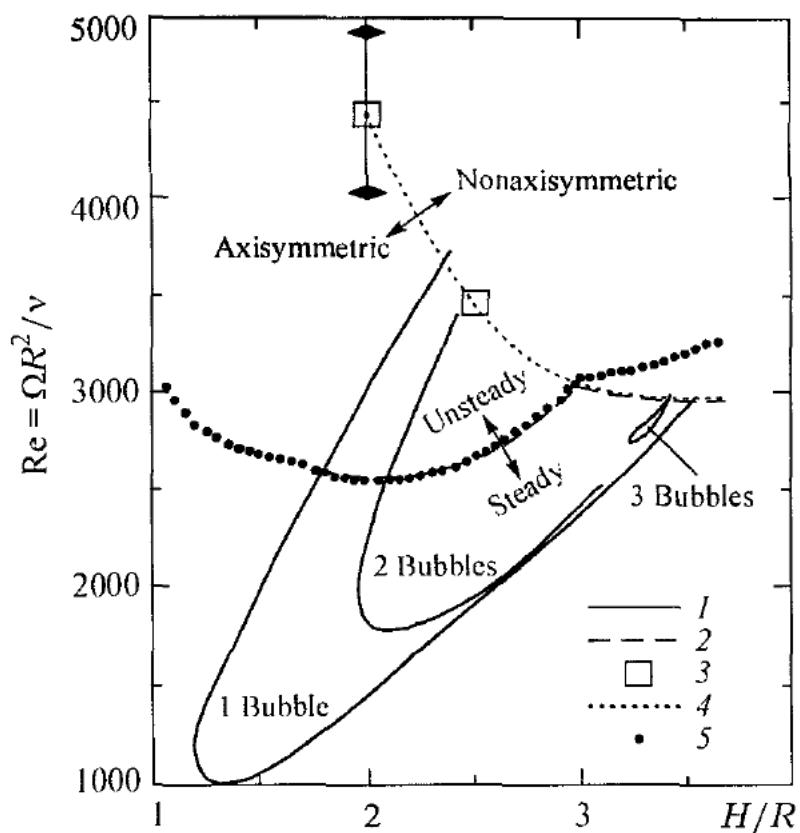


Рис. 7.59. Карта режимов распада вихря в сосуде с вращающимся дном и неподвижной верхней крышкой (1, 2) [Escudier, 1984], дополненная данными Sørensen [1992] и Stevens *et al.* [1999] для границы перехода от осесимметричного к неосесимметричному нестационарному режиму течения (3, 4), и расчетом Gelfgat *et al.* [1996a] значений критического Re для осесимметричной моды возмущений (5)

Доминирующим типом распада является пузырьковый с одним пузырем (см. рис. 7.56). Внешне он похож на закрытый пузырьковый распад в слабо-расширяющейся трубе, но гораздо стабильнее и по форме, и по положению. Зону существования однопузырькового распада в виде вытянутого языка (см. рис. 7.59) определил Vogel [1968]. Escudier [1984] повторил его результаты и дополнительно нашел, что с увеличением Re и H/R возникают два пузыря (см. рис. 7.57), область существования которых лежит внутри зоны однопузырькового распада. И далее совсем в узком диапазоне параметров возможно появление трех пузырей (см. рис. 7.58). Если фиксировать отношения H/R и увеличивать Re , то при превышении некоторого критического значения числа Рейнольдса (штриховая линия на рис. 7.59) в течении начинает проявляться неустойчивый характер. Причем, согласно экспериментам Escudier [1984], нестационарность в диапазонах $H/R < 3$ и $H/R > 3,1$ имеет различную природу. В частности, для $H/R < 3$ начинает осциллировать положение точки застоя вдоль оси, а течение сохраняет осевую симметрию. Для $H/R > 3,1$ первый признак нестационарного движения проявляется в виде прецессии нижней области распада вихревой структуры пузыревидного типа вокруг оси – очевидная асимметрия течения.

Sørensen [1992] расширил эти результаты для более широкого диапазона скорости вращения диска (при $H/R = 2$) и визуализировал осесимметричный режим течения с осциллирующей зоной распада во всей области существования, вплоть до границы потери осевой симметрии и далее до возникновения развитого трехмерного нестационарного течения. Чтобы устранить внешнее воздействие, которое может произойти при инжекции красителя в область течения при визуализации потока во время эксперимента, в его опытах свето-рассеивающие частицы нейтральной плавучести были заранее введены в контейнер (засеяны). На рис. 7.60 иллюстрируются переходы от стационарного осесимметричного режима течения к нестационарному осесимметричному и затем к трехмерному нестационарному режиму течения. В диапазоне Re от 2000 до 2500 наблюдается только одна область распада вихря с пузырем сложного вида, затем появляются его осесимметричные колебания. Так же, как было описано у Escudier [1984], из этих наблюдений следует, что течение становится нестационарным в области $Re = 2550$. При числах Рейнольдса больше 3000 осциллирующая пузыревидная область распада вихря постепенно разрушается, а при $Re > 4000$ начинает формироваться трехмерная винтовая вихревая структура, которая совершает вращательное движение вокруг оси потока. Stevens *et al.* [1999] повторили визуализацию данного режимного перехода, но с другим отношением $H/R = 2,5$ и другим способом ввода частиц – инжекцией. Их опыты подтвердили описанный выше сценарий развития течения при $H/R < 3$. Оба результата позволили продлить границу возникновения асимметрии в течении для $H/R < 3$ на диаграмме рис. 7.59 (4).

Следует отметить, что были выполнены многочисленные работы по численному моделированию стационарного осесимметричного пузырькового распада в замкнутом сосуде [Lugt, Haussling, 1982; Lugt, Abboud, 1987; Neitzel, 1988; Sørensen, Loc, 1989; Lopez, 1990; Lopez, Perry, 1992]. Основной их вывод состоит в том, что численное решение двумерных стационарных осесимметричных уравнений Навье – Стокса достаточно хорошо описывает не только возникновение вихревого распада, но и его местоположение, размер и число “пузырей” на оси. Показано также, что линии тока замкнуты внутри осесимметричной рециркуляционной зоны, и это – главное отличие от распада в расширяющихся трубах, где пузырь несимметричен и открыт.

Однако возможность существования осесимметричных режимов течения подверглась пересмотру в экспериментальных работах [Hourigan *et al.*, 1995; Spohn *et al.*, 1998]. В частности, для типичного осесимметричного режима $Re = 1850$, $H/R = 1,75$ в работе Spohn *et al.* [1998] было указано на открытость пузыря и асимметричную картину течения, визуализируемую световым ножом в диаметральном сечении контейнера. В этих опытах для визуализации течения был применен электролитический метод получения мелкодисперсных частиц,

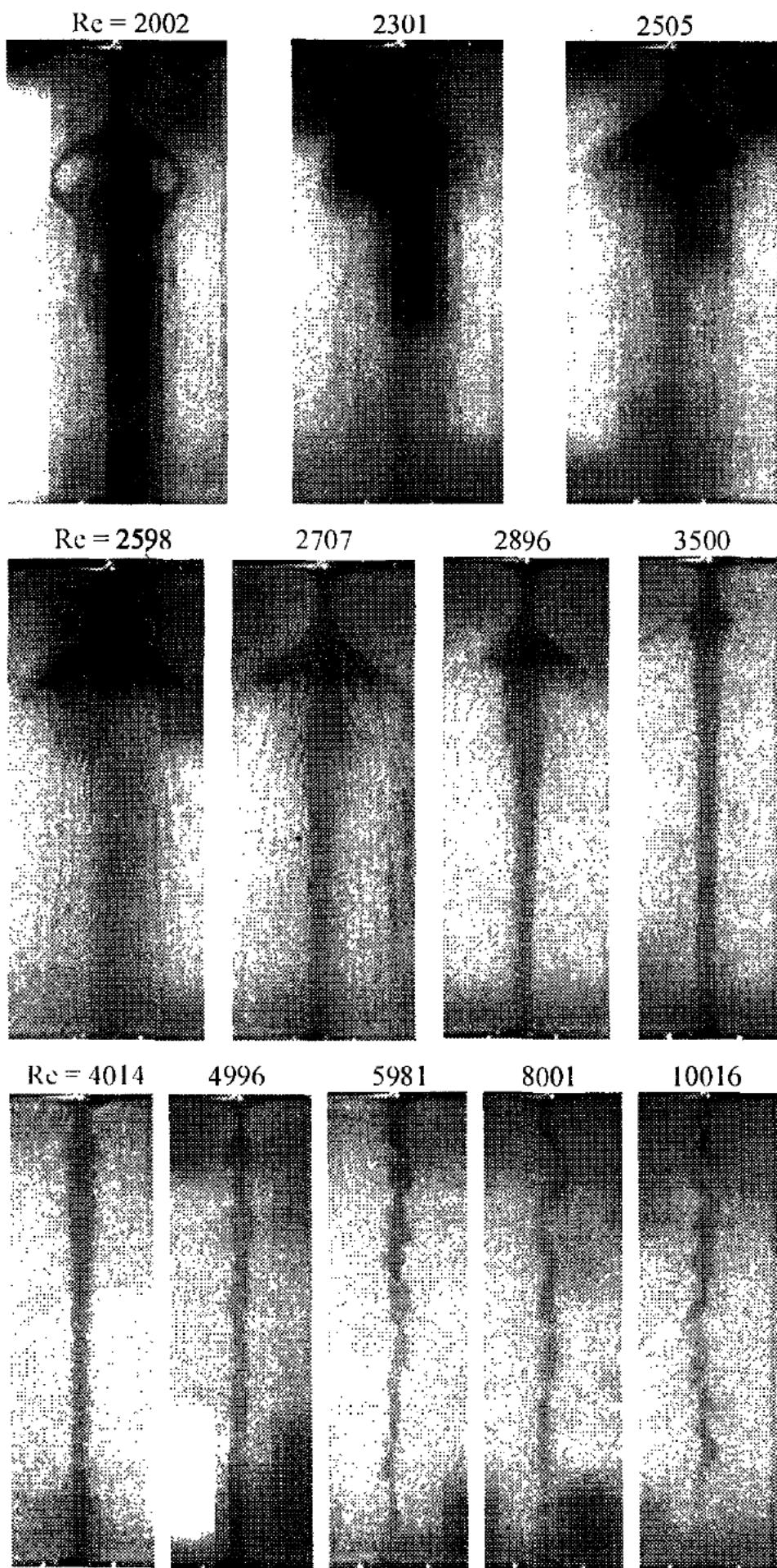


Рис. 7.60. Визуализация течения в цилиндрическом контейнере для разных Re [Sorensen, 1992]

что в отличие от инжекции и засеваания позволило вводить дозированно трассерные частицы в поток. Частицы испускались при воздействии 15-вольтовыми прямоугольными волнами напряжения частоты 10 Гц на проволочное кольцо диаметра 30 мм, расположенное осесимметрично на поверхности верхней крышки (см. рис. 7.55). На рис. 7.61 представлен типичный пример эволюции во времени трассерных частиц для полностью установившегося потока, когда сам пузырь уже является сформировавшимся и стационарным.

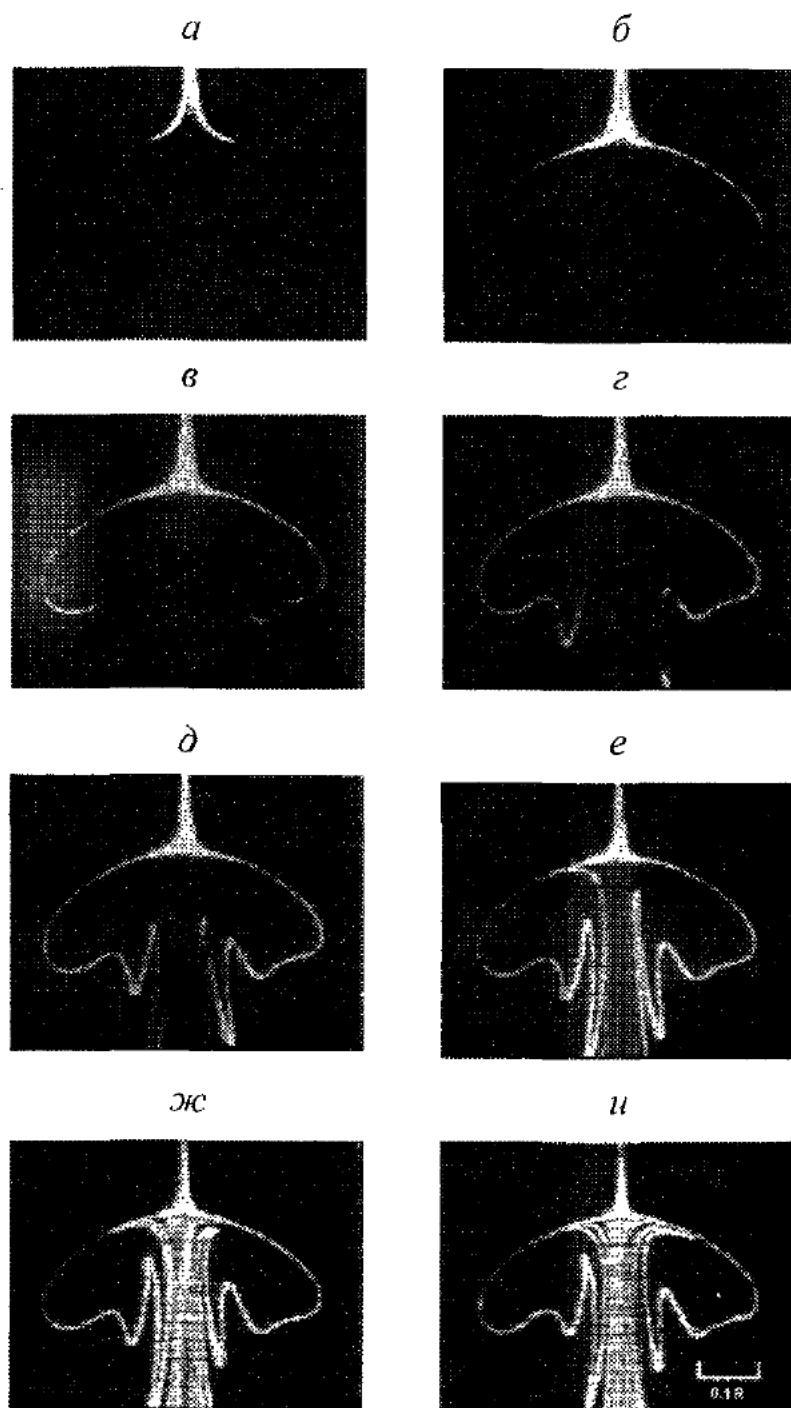


Рис. 7.61. Эволюция во времени трассерных частиц при пузырьковом распаде вихря в сосуде с жесткой верхней крышкой. $Re = 1850$, $H/R = 1,75$ [Spohn *et al.*, 1998]. Безразмерное время $t^* = t\Omega$ отсчитывается от момента начала вращения дна сосуда: $t^* = 1027$ (а), 1068 (б), 1099 (в), 1129 (?) , 1160 (д), 1191 (е), 1232 (ж), 1262 (и)

В первые моменты времени (рис. 7.61 a, b) частицы в плоском сечении светового ножа располагаются вдоль фронтальной поверхности пузыря немного несимметрично. В следующей фазе распространения частиц асимметрия проявляется более значительно в виде стабильных во времени неодинаковых складок слева и справа (рис. 7.61 c, d). Третья стадия демонстрирует открытый характер пузыря (рис. 7.61 e, f). Верхние складки движутся внутрь пузыря, радиально сжимаясь и одновременно растягиваясь вдоль оси. Нижние складки движутся вниз (наружу пузыря). Наконец, на последней стадии (рис. 7.61 g, h) частицы внутри пузыря достигают верхней границы пузыря, обнаруживая тем самым наличие верхней точки застоя. Овальные зоны остаются чистыми от частиц, что означает существование замкнутой торOIDальной кольцевой области внутри пузыря. Интересно проследить за изменением структуры потока с увеличением числа Re (рис. 7.62). Превышение критического значения числа Рейнольдса при $H/R = 1,75$ приводит к исчезновению пузыря, так же как и на рис. 7.60. Но в отличие от визуализации засеванием частиц здесь трассеры вырисовывают винтовую поверхность, проекция которой видна на рис. 7.62 b . Наблюдения в горизонтальных сечениях также показали, что частицы сосредоточены не осесимметрично, а по спиралям, особенно в хвостовой области пузыря. Таким образом, явно демонстрируется асимметрия и открытый характер пузырькового распада. Это противоречит предыдущим экспериментам и численным расчетам.

Разрешить данное противоречие помогает рассмотрение течения как сложного трехмерного движения жидкости. Дело в том, что в закрученных стационарных осесимметричных потоках линии тока имеют трехмерную винтообразную форму (см. п. 1.4.2 и примеры из гл. 3) и только их объединение

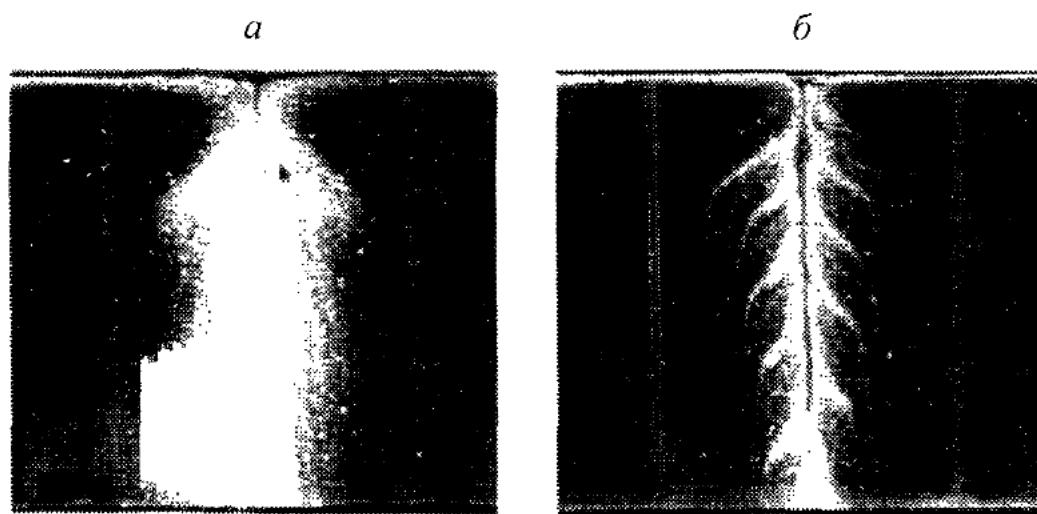


Рис. 7.62. Визуализация течения в сосуде с жесткой верхней крышкой и врачающимся дном при разных Re : 2250 (a) и 2750 (b), $H/R = 1,75$. Подача трассерных частиц по периметру боковой стенки [Spohn *et al.*, 1998]

в поверхности тока обладает осевой симметрией. Реально траектории маркирующих частиц описывают сложное трехмерное винтообразное движение что наглядно продемонстрировано расчетом Sotiropoulos, Ventikos [2001] на основе решения трехмерных нестационарных уравнений Навье – Стокса (це рис. 4). Поэтому, чтобы достичь симметричной картины в плоских продольных и поперечных сечениях светового ножа, необходимо обеспечить плотное и однородное распределение частиц вдоль всей поверхности тока. При контролируемом вводе частиц генерированием с заданной частотой это сделат оказалось невозможно, тогда как более простые методы визуализации – инжекция и засевание – позволяют получить более равномерное распределение частиц по всей поверхности тока.

Чтобы окончательно снять данный вопрос и установить различие между реальным течением в области существования осесимметричных режимов и его численным осесимметричным образом, в работе В.Л. Окулова и др. [печати] было проведено сопоставление расчетных и опытных данных. Сравнивались диаметральные сечения трубок тока, рассчитанных прямым численным моделированием с помощью двумерного осесимметричного кода [Sørensen, Loc, 1989] и вычисленных по данным PIV-измерений. На цв. рис. (так же, как и на цв. рис. 6 и в табл. 7.4 на с. 477) представлены сечения 2| трубок тока постоянного расхода Q_i , нанесенные с неравномерным шагом

$$\text{const}_{\text{level-}i} = \min(Q) + [\max(Q) - \min(Q)] \times (i/30)^3.$$

Сравнение дает превосходное соответствие не только для основных особенностей изменения в топологии течения, но и для распределенных характеристик. Этот факт, без сомнения, можно интерпретировать в пользу существования осесимметричного режима течения, несмотря на слабую асимметрию реального потока. Следовательно, можно с успехом использовать осесимметричные уравнения Навье – Стокса для диагностики реального течения в области ниже границы перехода к несимметричному течению (4 на рис. 7.59).

Другой важный вывод из результатов этого сравнения связан с тем, что PIV-измерения, как и численные расчеты, фиксируют замкнутый тип пузырькового распада (цв. рис. 5). Аналогичный вывод следует из работ Sørensen *et al.* [2001] и Pereira, Sousa [1999]. В последней работе с целью стабилизации распада эксперименты выполнены с вращающимся дном в виде выпуклого конуса. На основе измерений аксиальной компоненты скорости был реконструирована структура течения через линии тока (рис. 7.63).

Как следует из рис. 7.63 a , пузырьковый распад здесь также представляется собой замкнутую рециркуляционную зону торOIDальной формы с двумя точками застоя. Такая топология течения фиксирует две точки застоя, а заключенная между ними поверхность пузыря должна быть непроницаемой дл

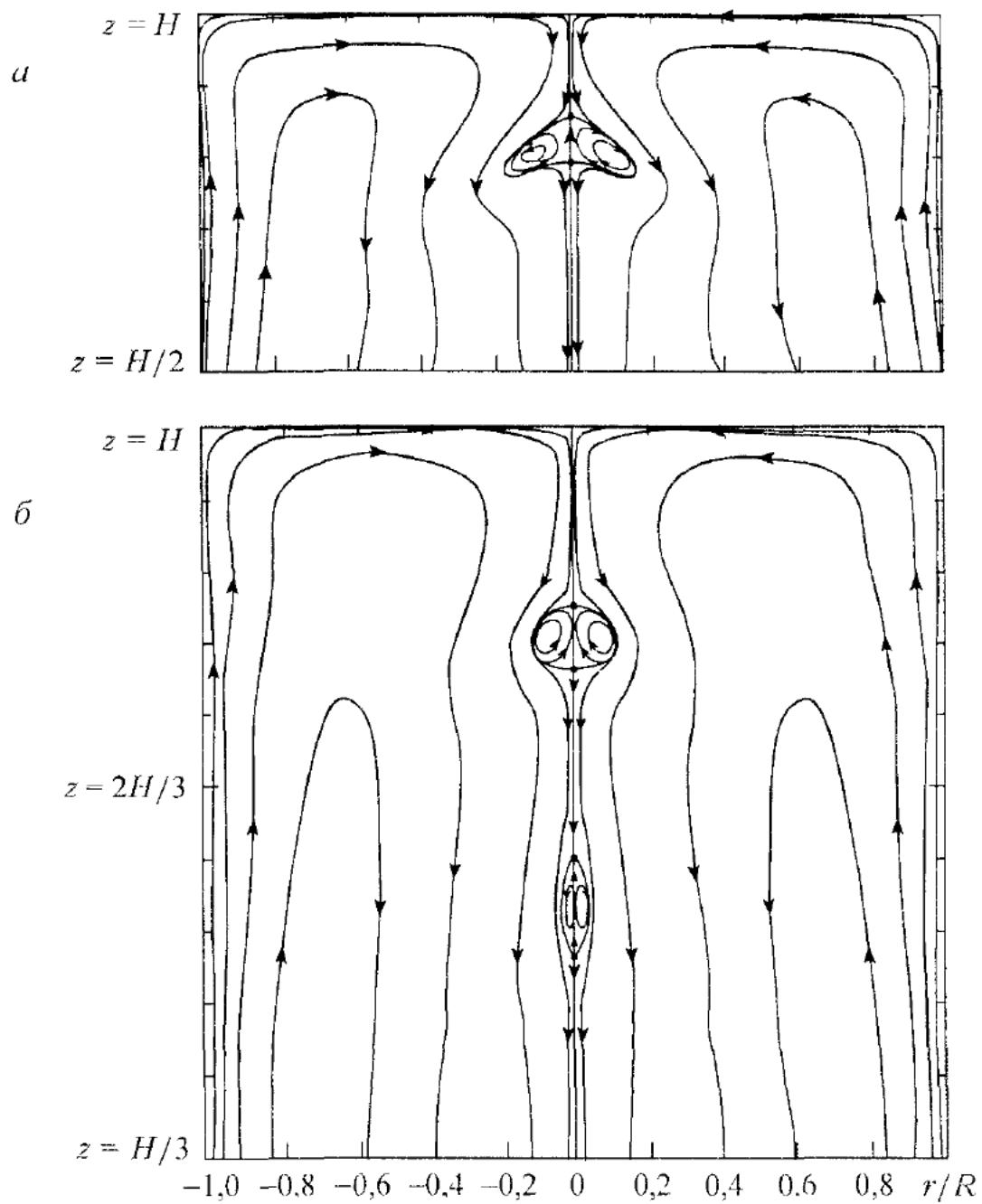


Рис. 7.63. Линии тока в режимах течения с распадом вихря (из измерений аксиальной компоненты скорости [Pereira, Sousa. 1999]). *а* – один пузырь, $Re = 2200$, $H/R = 2$; *б* – два пузыря, $Re = 2570$, $H/R = 3$

трассерных частиц, по крайней мере, для двух способов визуализации – инъекции и генерирования (при засевании частиц могла сразу находиться в области формирования пузыря). Но во всех случаях частицы проникают внутрь пузыря (см. рис. 7.56–7.58, 7.60 и 7.61). Здесь следует отметить, что режим совершенного осесимметричного стационарного течения (свободного от любых малых нульсаций и асимметричных искажений) принципиально не осуществим в эксперименте. Фактически в экспериментальных установках всегда существуют небольшая асимметрия и нестационарность течения из-за неизбежных искажений, возникающих вследствие геометрических, тепловых,

динамических или других неравномерностей. Пример влияния несимметричной установки верхней крышки из работы Sotiroopoulos *et al.* [2002] показан на рис. 7.64. Следует отметить, что такая асимметрия, связанная с погрешностью эксперимента, значительно меньше, чем зафиксированная в работах Hourigan *et al.* [1995] и Spohn *et al.* [1998] и обусловленная визуализацией линий, а не трубок тока. Однако она приводит к возникновению слабой нестационарности. Действительно, наклон крышки искажает поверхности тока, а они совершают вращательное движение, что, естественно, приводит к слабым пульсациям. В связи с этим можно дать простое объяснение проникновению трассерных частиц в замкнутую область пузыря. Оно связано с несовпадением траекторий жидких частиц (и соответственно маркирующих частиц) с мгновенными линиями тока в случае нестационарного движения жидкости.

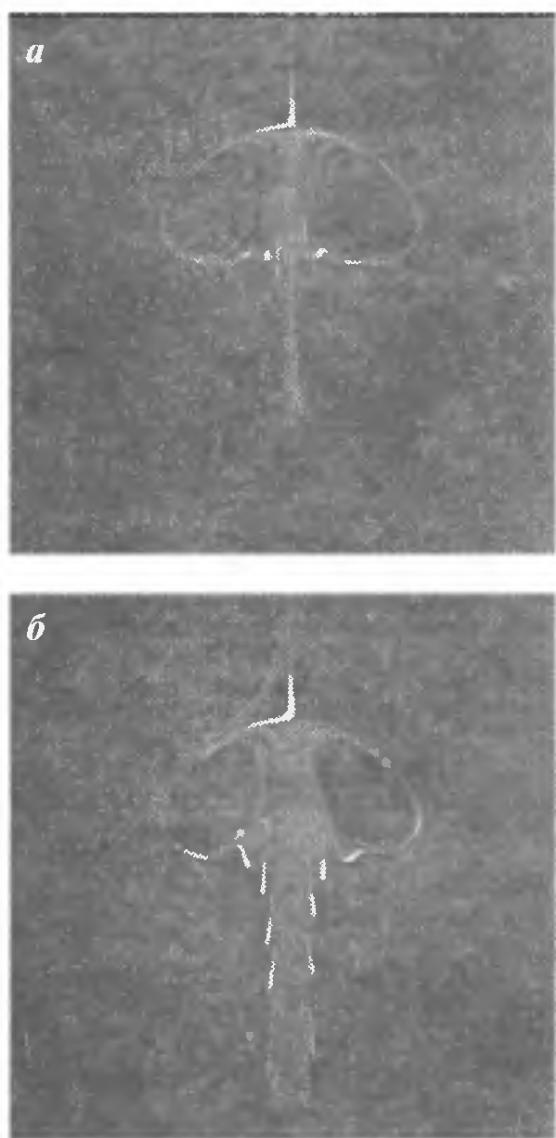


Рис. 7.64. Визуализация устойчивого пузырькового распада. $Re = 1850$, $H/R = 1,75$: *а* – «совершенный» контейнер; *б* – контейнер с неподвижной крышкой, наклоненной приблизительно на $0,4^\circ$ от горизонта

Более наглядно этот факт фиксируется при рассмотрении ярко выраженных нестационарных режимов, подробно описанных ниже. Но и здесь, несмотря на то, что погрешность эксперимента дает пренебрежимо малую нестационарность, наличие в потоке особых точек (застойных и угловых) приводит к значительному несоответствию визуальной (лагранжевой) и измеренной (мгновенной – эйлеровой) картин течения для традиционно стационарных режимов. Следует отметить, что данное простое объяснение не противоречит более сложному анализу лагранжевых характеристик течения [Sofitopoulos *et al.*, 2002].

Перейдем к более детальному рассмотрению нестационарных режимов течения, традиционно выделяемых на диаграмме рис. 7.59. Естественно, возникает вопрос, как отличить их от описанных выше фоновых нестационарностей в потоке, связанных с несовершенством экспериментальных установок. С этой целью в работе И.В. Наумова и др. [2003] в контейнере с $H/R = 2$ для разных чисел Рейнольдса были измерены пульсации скорости с помощью лазерного допплеровского анемометра (LDA) в точке на расстоянии $R/2$ от оси цилиндра и $H/4$ от вращающейся крышки. На рис. 7.65 приведен пример зависимости дисперсии скорости от числа Рейнольдса. Данные не противоречат диаграмме режимов рис. 7.59: при увеличении Re до 2500 наблюдается стационарный режим течения с одинаковым, пренебрежимо малым уровнем пульсаций, затем возникают интенсивные колебания, что характеризуется линейным ростом дисперсии осевой компоненты скорости.

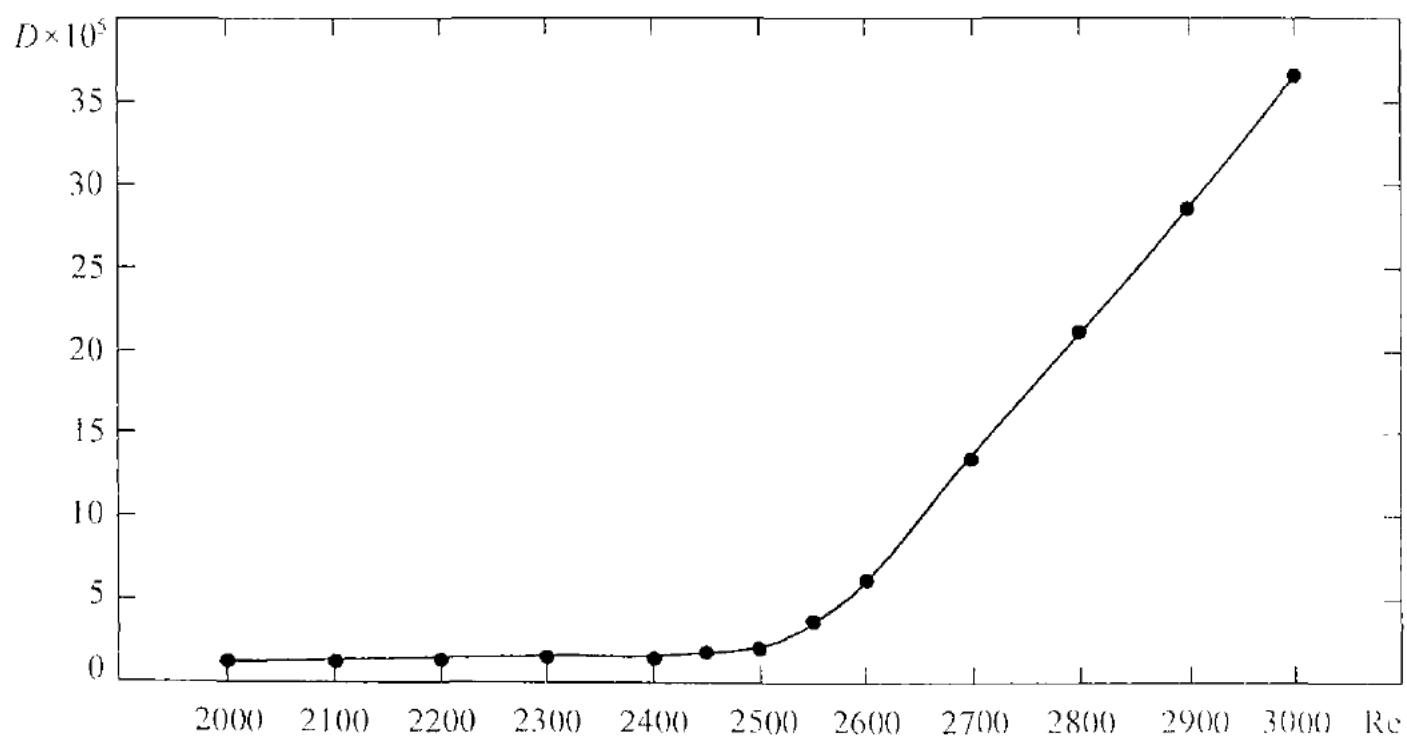
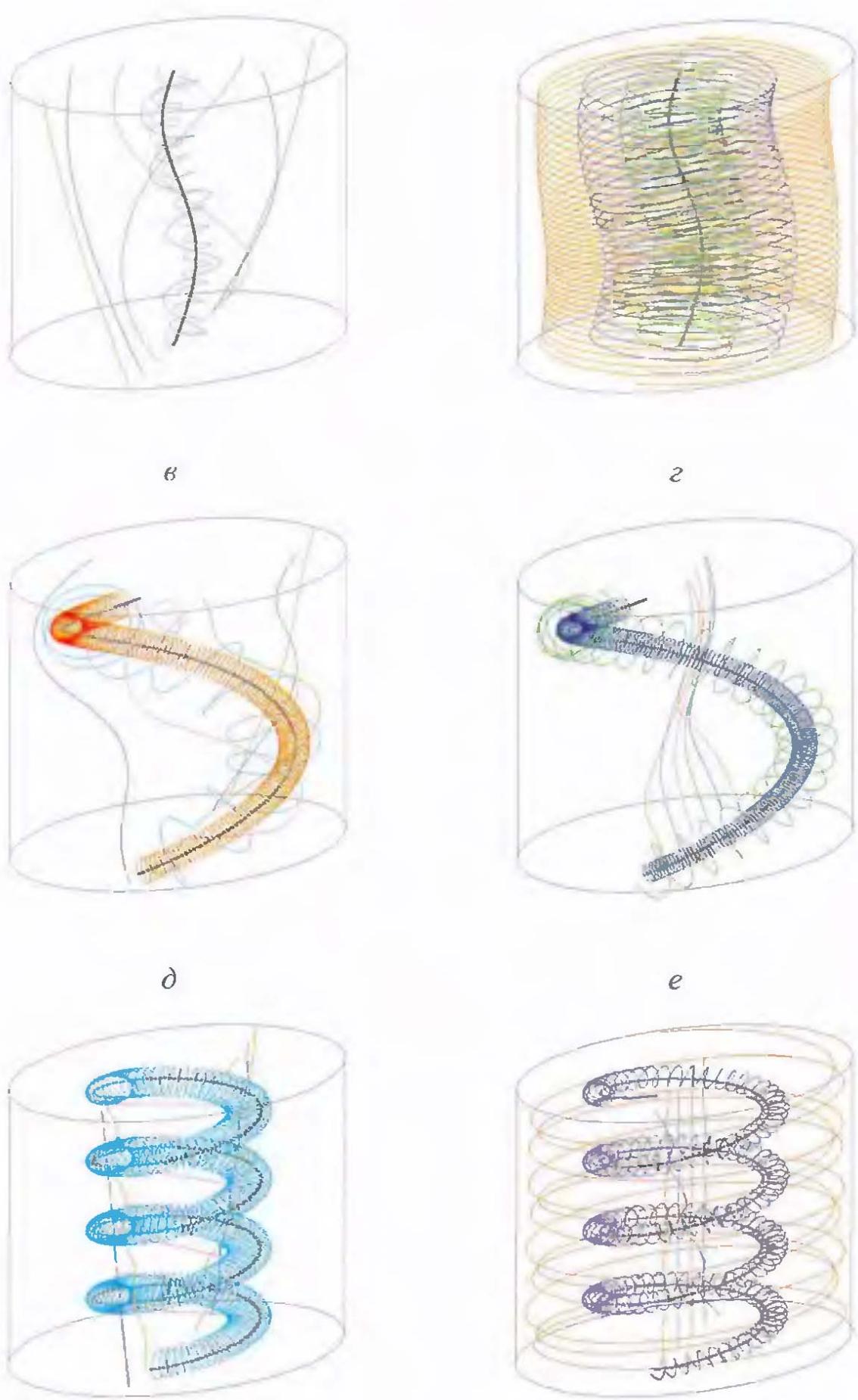
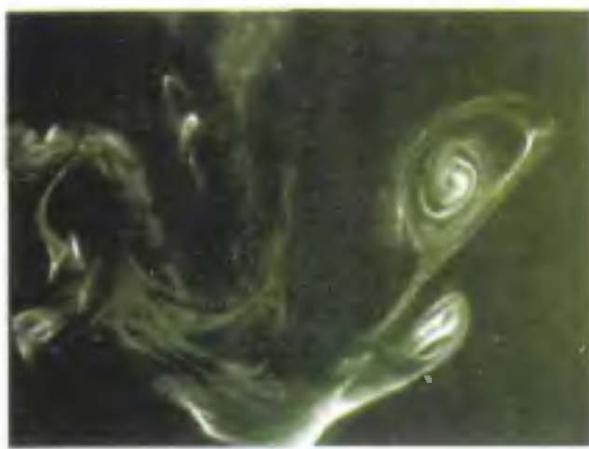


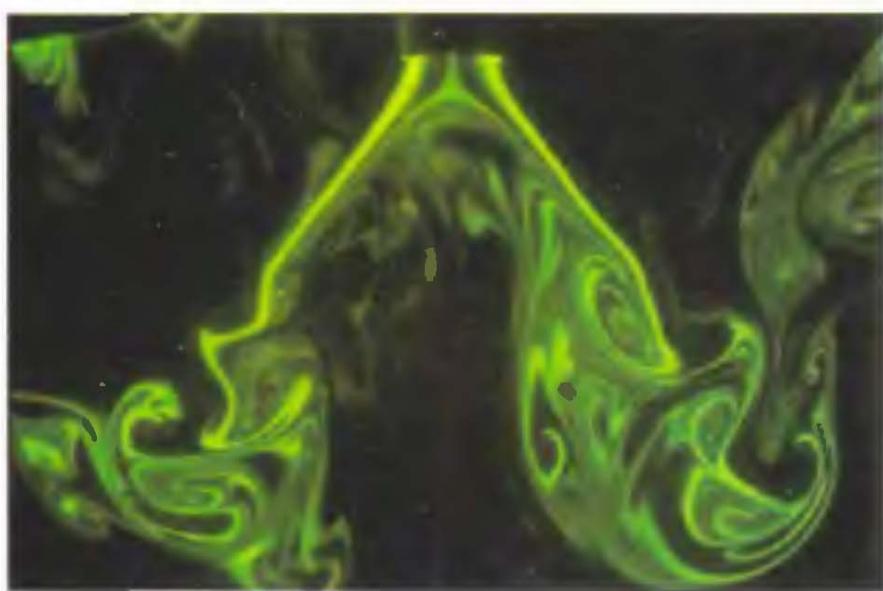
Рис. 7.65. Зависимость дисперсии осевой компоненты скорости, измеренной LDA в цилиндрическом контейнере, от Re



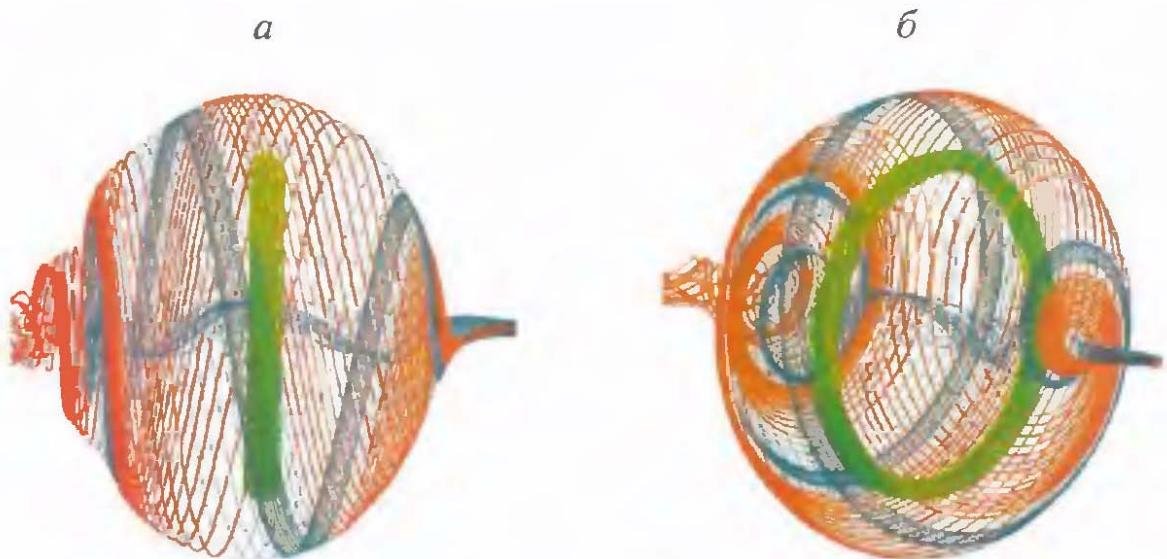
Цв. рис. 1. Пространственная форма линий тока в течении, индуцированном винтовой вихревой шпилью в цилиндрической трубе. а: $h = 2$, $a = 0,1$, $u_a = 0$; б: $h = 2$, $a = 0,1$, $u_a = 1$; в: $h = 2$, $a = 0,7$, $u_a = 0$; г: $h = 2$, $a = 0,7$, $u_a = 1$; д: $h = 0,5$, $a = 0,5$, $u_a = 0$; е: $h = 0,5$, $a = 0,5$, $u_a = 1$



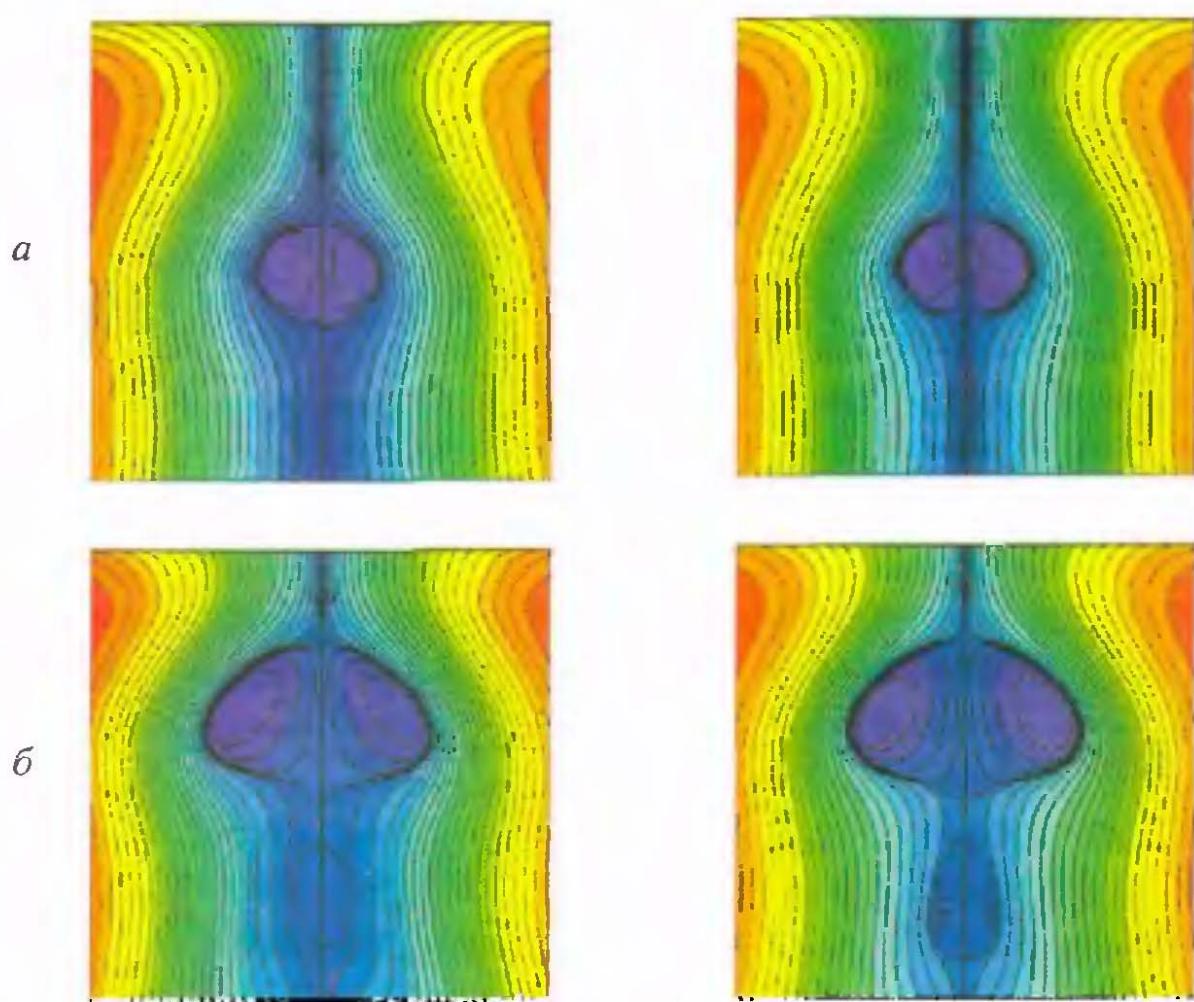
Цв. рис. 2. Визуализация в поперечном сечении потоков для открытого пузырькового (*а*), закрытого пузырькового (*б*) и конического (*в*) типов распада [Kho et al., 1997].
а: $Re = 3000$, $S = 4,0$; *б:* 2500 и $2,5$;
в: 3500 и $6,0$



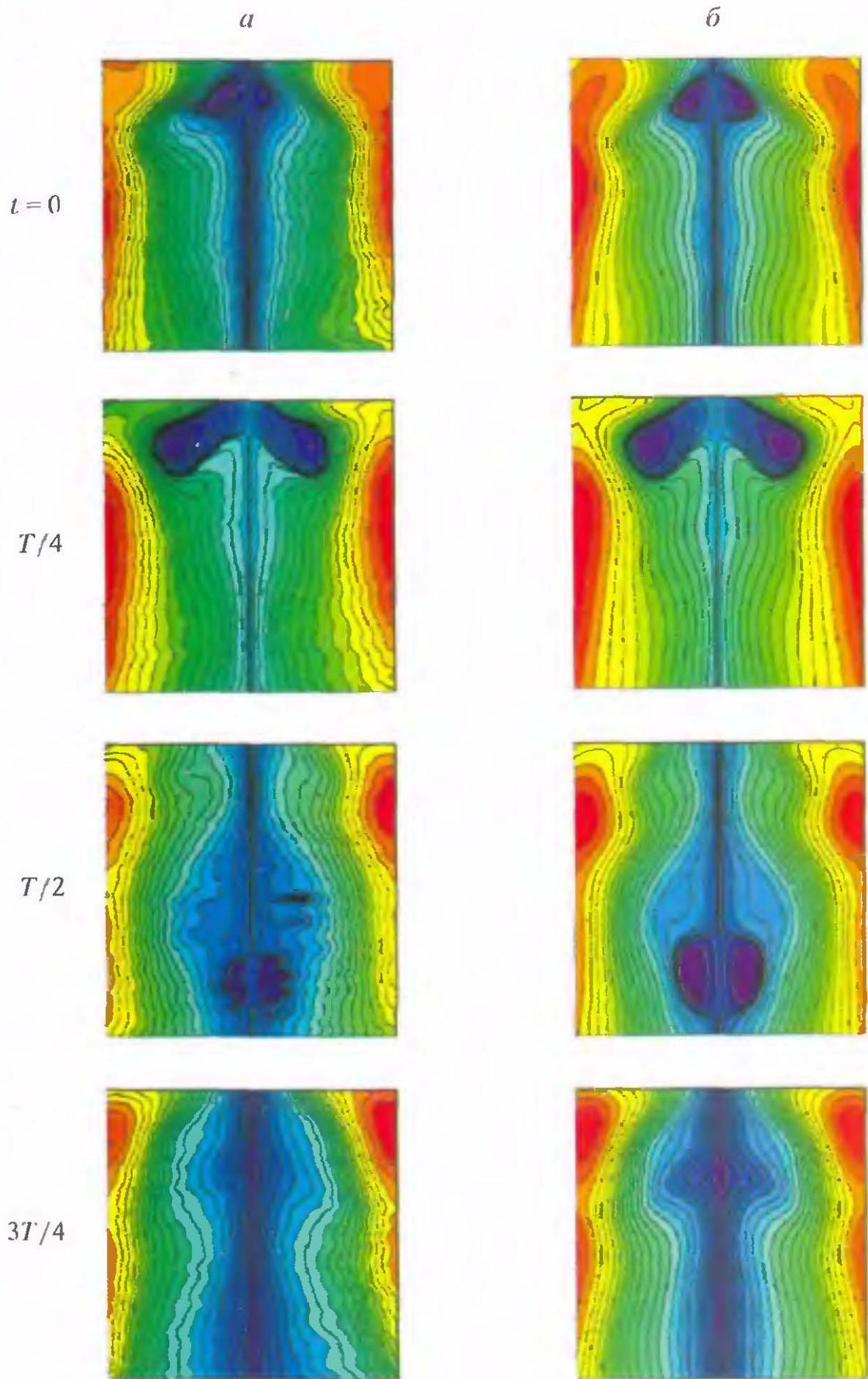
Цв. рис. 3. Визуализация конического типа распада в закрученной затопленной струе воды [Bilani et al., 1998]. Диаметр сопла 25 мм, $Re = 606$, $S = 1,37$ (определен как отношение тангенциальной скорости на половине радиуса сопла к аксиальной скорости на оси вблизи среза сопла)



Цв. рис. 4. Трехмерная картина траекторий трассерных частиц при пузырьковом распаде вихрей для $Re = 1492$, $H/R = 2$ (численный расчет Sotiropoulos, Ventikos [2001] для условий эксперимента Spohn *et al.* [1998]). Частицы испускались осесимметрично и равномерно на радиусе $0,004R$ от оси с локализацией $1,52R$ вверх по потоку от пузыря. Голубые частицы входят в пузырь, красные движутся вокруг него, зеленые демонстрируют характерные тороидальные траектории внутри пузыря



Цв. рис. 5. Сравнение сечений трубок тока, рассчитанных по данным PIV-измерений и рассчитанных численно для стационарных режимов течения при $Re = 1560$ (а) и 2043 (б) в окне с координатами $x = [72; 216]$ и $z = [30; 174]$



Цв. рис. 6. Сравнение сечений трубок тока, рассчитанных по данным PIV-измерений (а) и численно (б) для нестационарного режима течения с сильными осесимметричными колебаниями пульсаций в области распада вихря при $Re = 3004$. Сверху вниз: последовательные фазы в течение периода колебаний 7

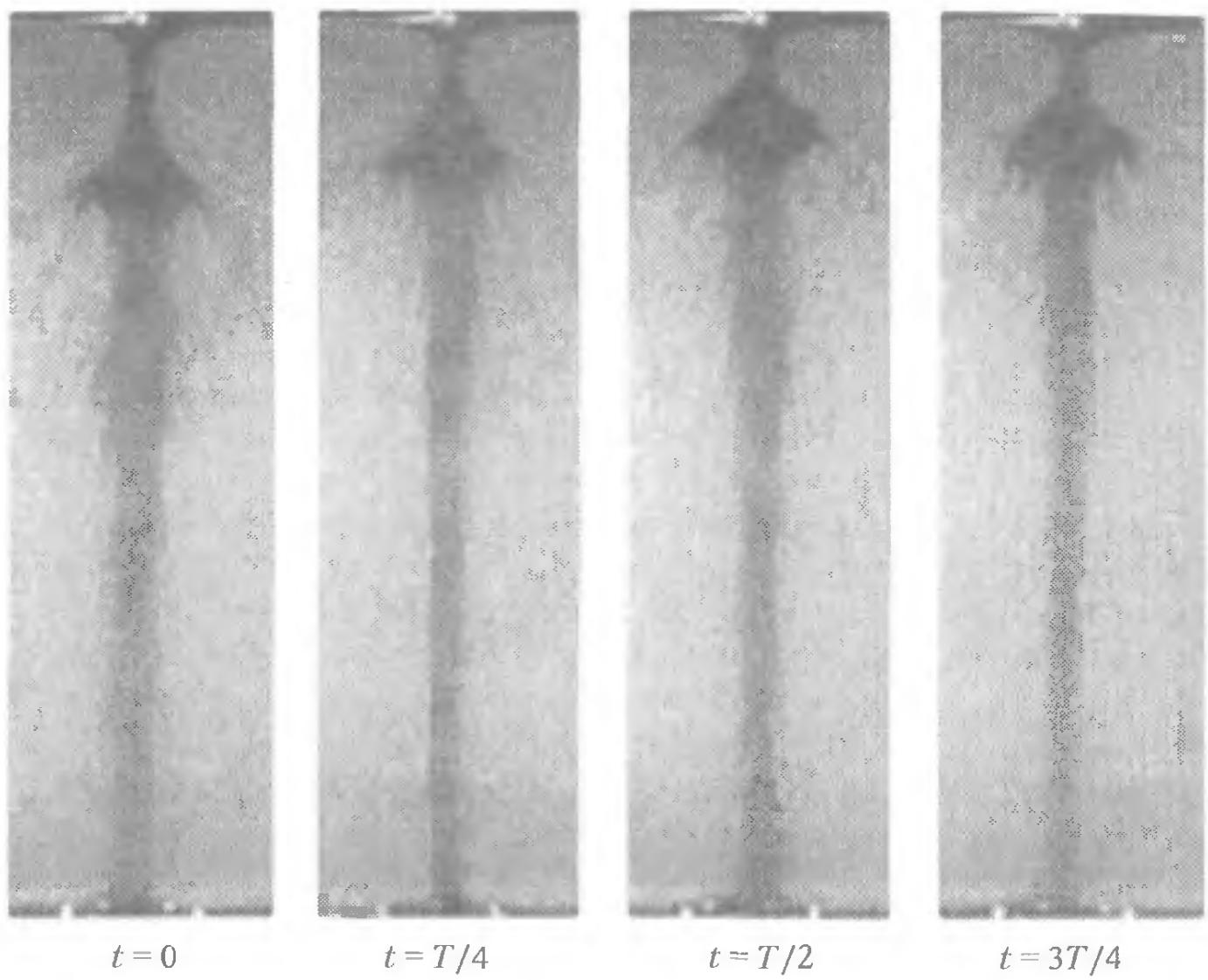


Рис. 7.66. Визуализация приосевой вихревой структуры для нестационарного режима с развитыми осесимметричными осцилляциями при $Re = 3004$ [Sorensen, 1992]

Пример визуализации [Sorensen, 1992] нестационарного распада вихря при $Re=3000$ показан на рис. 7.66 для разных моментов времени полного периода колебаний. В соответствии с фото данный режим можно классифицировать как конический тип распада вихря с воронкой, совершающей незначительные колебания вдоль вихревой оси, которые делают чрезвычайно трудными любые измерения распределенных характеристик течения. Чтобы преодолеть возникающие здесь трудности, в работе И.В. Наумова и др. [2003] был использован комбинированный подход с применением двух бесконтактных методов измерения поля скорости: лазерной допплеровской анемометрии (LDA) и определения поля скорости по трекам частиц (PIV). Сначала, с применением LDA, были получены параметры пульсаций скорости в некоторой фиксированной точке. Временная реализация осевой компоненты скорости для $H/R = 2$ и $Re = 3000$ (рис. 7.67 a) показывает ярко выраженный периодический характер колебаний с частотой $f = 0,63$ Гц (рис. 7.67 b).

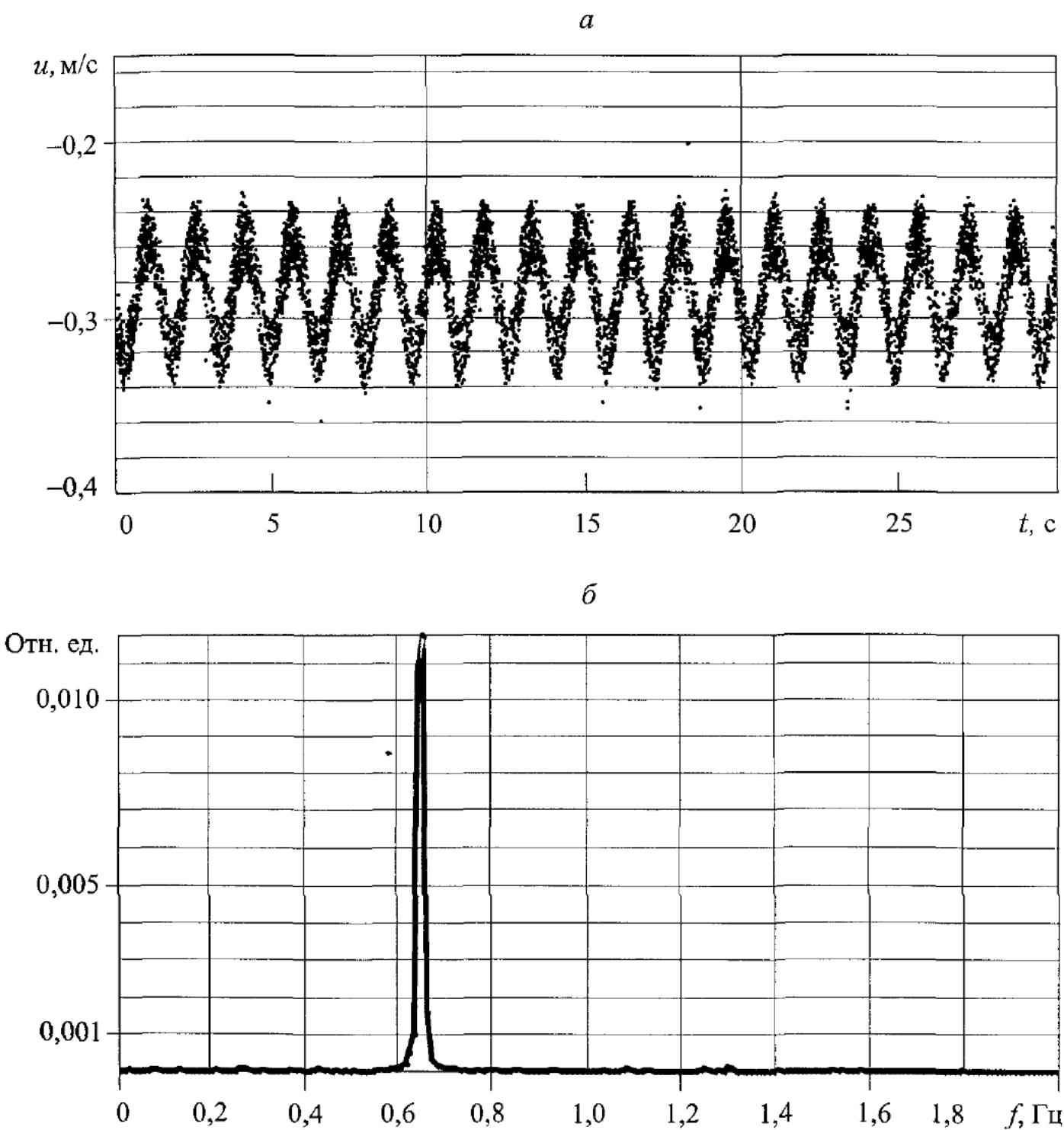


Рис. 7.67. Временная реализация осевой компоненты скорости, измеренной LDA (а), и спектральная плотность реализации (б) при $Re = 3004$

На основании этой информации был определен временной интервал для проведения осреднения мгновенных полей скорости, получаемых PIV. Измерения поля скорости для данного режима были выполнены для четырех моментов времени полного периода колебаний через интервал, кратный четверти периода ($T/4 = 0,39$ с). Для выбранных таким образом моментов времени поле скорости было получено путем статистического осреднения четырех

PIV-образов течения, полученных в соответствующие моменты времени с временной задержкой в $0, T, 2T, 3T$. Такое кратно-периодическое осреднение мгновенных полей скорости позволяет, как и в стационарном случае, существенно уменьшить случайную ошибку измерений, и, с другой стороны, оно практически полностью устраняет ошибку смещения, связанную с нестационарными изменениями структуры потока. На цв. рис. 6 демонстрируется сравнение полученных результатов с трехмерным нестационарным расчетом, метод которого детально описан в [Shen *et al.*, 2001]. На рисунке показаны сечения 25 мгновенных трубок тока постоянного расхода с неравномерным шагом, как и на цв. рис. 5. Размер окна определяется координатами $[-3R/4; 3R/4]$ в горизонтальном и $[H/8; 7H/8]$ в вертикальном направлениях. Из приведенных сечений трубок тока видно перемещение области пузыревидного распада вихревой структуры в осевом направлении сверху вниз, причем размах колебаний существенно превосходит амплитуду колебаний визуализированной структуры течения (рис. 7.66). Кроме того, PIV-образы течения фиксируют существование замкнутого пузыря, в то время как он полностью отсутствует при визуализации. В момент времени $t = 0$ пузырь находится в высшей точке своей траектории (у неподвижного дна) и растет, достигая своего максимального размера при $t = T/4$. Затем он сносится основным потоком вниз к вращающейся крышке, одновременно уменьшаясь в размере вплоть до полного исчезновения. В момент времени $t = T/2$ пузырь находится в нижней точке своей траектории и еще отчетливо фиксируется. При $t = 3T/4$ пузырь визуально не наблюдается, но на его перемещение вверх указывает локальное расширение трубок тока у оси, отчетливо наблюдаемое в верхней части рисунков. Затем, достигнув крайнего верхнего положения, пузырь возникает вновь (момент времени $t = 0$) и начинает расти в размерах. Цикл повторяется снова.

Данное сравнение позволило связать структуру течения при осесимметричном нестационарном распаде вихря с интенсивными осевыми колебаниями замкнутой пузыревидной области, исчезающей и возникающей вновь. В данном случае наблюдается более существенная разница с визуальной диагностикой течения, обусловленная еще большим отличием траекторий частиц от мгновенных линий тока – трассерные частички здесь просто не успевают за изменениями пузыря. Интересно отметить, что в области переходного режима к трехмерному течению ($Re=4000$) пузырь, как и при визуализации, не фиксировался вовсе.

Вернемся к рассмотрению карты режимов (см. рис. 7.59) в области существования нестационарных течений. Как уже отмечалось ранее, нестационарность в диапазонах $H/R < 3$ и $H/R > 3,1$ имеет различную природу. Найденная Escudier [1984] граница перехода в первой зоне – монотонно растущая

линия, выше которой возникают осесимметричные колебания пузыря (см. цв. рис. 6), а при $H/R > 3,1$ это – убывающая, почти горизонтальная линия. Вероятное объяснение такому поведению может заключаться в том, что граница состоит из двух кривых, представляющих разные режимы перехода к нестационарности, и они пересекаются при $H/R \approx 3$. Первая кривая описывает границу роста осесимметричной моды, а вторая отвечает за рост асимметричных возмущений. Гипотеза о существовании различных зон с преобладанием осесимметричных или асимметричных возмущений высказана Sørensen *et al.* [1996] и поддержана Gelfgat *et al.* [1996a] для одного из двух способов перехода к нестационарному течению. Следовательно, переход к нестационарному режиму течения можно описать как конкуренцию между двумя типами неустойчивостей с преобладанием осесимметричных или асимметричных возмущений. В соответствии с этой идеей можно предположить, что оба типа могут существовать при всех значениях H/R , а режим с самым низким критическим числом Рейнольдса для роста осесимметричной или асимметричной мод определяет начало перехода к соответствующему типу нестационарного перехода. Новые экспериментальные данные, описанные выше, и результаты численного моделирования подтверждают гипотезу и позволяют продлить обе границы. Линия из кружков была получена как нейтральная кривая роста осесимметричных возмущений в результате численного анализа осесимметричного решения уравнений Навье – Стокса [Gelfgat *et al.*, 1996a], а пунктирная линия обозначает начало перехода к асимметричному нестационарному потоку в визуализациях Escudier [1984], Sørensen [1992] и Stevens *et al.* [1999].

При $1,8 < H/R < 3$ расчетный критический параметр (см. рис. 7.59, 5) для осесимметричного типа перехода находится в хорошем согласии с экспериментом (см. рис. 7.59, 2) и данными других работ по численному моделированию [Lopez, Perry, 1992; Daube, Sørensen, 1989; Tsitverblit, 1993]. Близкое соответствие для этих значений H/R между измеренной границей перехода и расчетной нейтральной кривой еще раз подтверждает эффективность осесимметричного моделирования для полной диагностики течения в цилиндрическом контейнере вплоть до перехода к нестационарному потоку. Но для $H/R > 3$ сравнение с экспериментальными результатами (см. рис. 7.59) показало, что критические числа Рейнольдса, полученные численным анализом [Gelfgat *et al.*, 1996a], выше, чем в эксперименте. Это означает, что асимметричные возмущения начинают расти раньше, чем осесимметричные, и здесь необходим трехмерный численный анализ. Однако в настоящее время существуют только несколько примеров численного решения трехмерных уравнений Навье – Стокса для рассматриваемой задачи (см., например, Serre, Pullicani [2001], Sotiropoulos, Ventikos [2001], Marques, Lopez [2001]). В частности,

расчеты последней работы только для значения $H/R = 3$ показали доминирующий рост четвертой азимутальной моды при возрастании $Re = 2730, 2850$ и 2900 . Отметим также, что и новый анализ Gelfgat *et al.* [2001] не решил этой задачи, так как был проделан только для азимутальных мод без рассмотрения асимметричных винтообразных мод, которые более логичны для винтовой структуры реального потока (см. цв. рис. 4).

В завершение рассмотрим еще одну разновидность течений в сосудах с вращающимся дном (см. рис. 7.55), когда верхняя крышка отсутствует. Опыты со свободной поверхностью жидкости показывают существенные отличия как по режимным картам, так и по форме пузыря [Spohn *et al.*, 1993, 1998]. Действительно, основной формой распада становится пузырь, присоединенный к свободной поверхности (рис. 7.68), а области существования с отсекенным пузырем весьма узки в пространстве $[Re, H/R]$ (рис. 7.69). Если пренебречь искривлением свободной поверхности, рассматриваемая задача эквивалентна течению в замкнутом цилиндре удвоенной высоты с одновременно вращающимися с одинаковой частотой и в одну сторону торцевыми крышками [Brøns *et al.*, 2001]. Для таких задач (с вращением обоих торцов) проводились в основном только численные исследования [Valentine, Janke, 1994; Gelfgat *et al.*, 1996б; Brøns *et al.*, 2001].

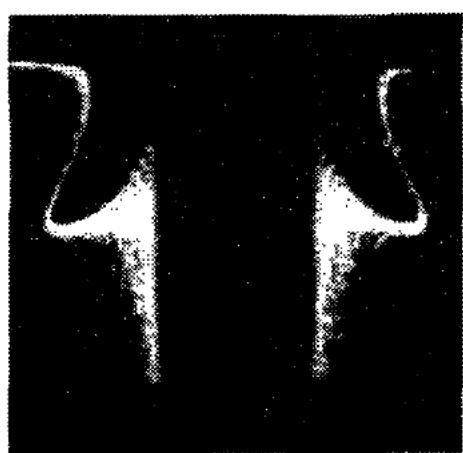


Рис. 7.68. Визуализация пузыря, присоединенного к свободной поверхности при распаде вихря в сосуде с вращающимся дном и свободной поверхностью жидкости [Spohn *et al.*, 1998] $Re = 1850$, $H/R = 1,0$

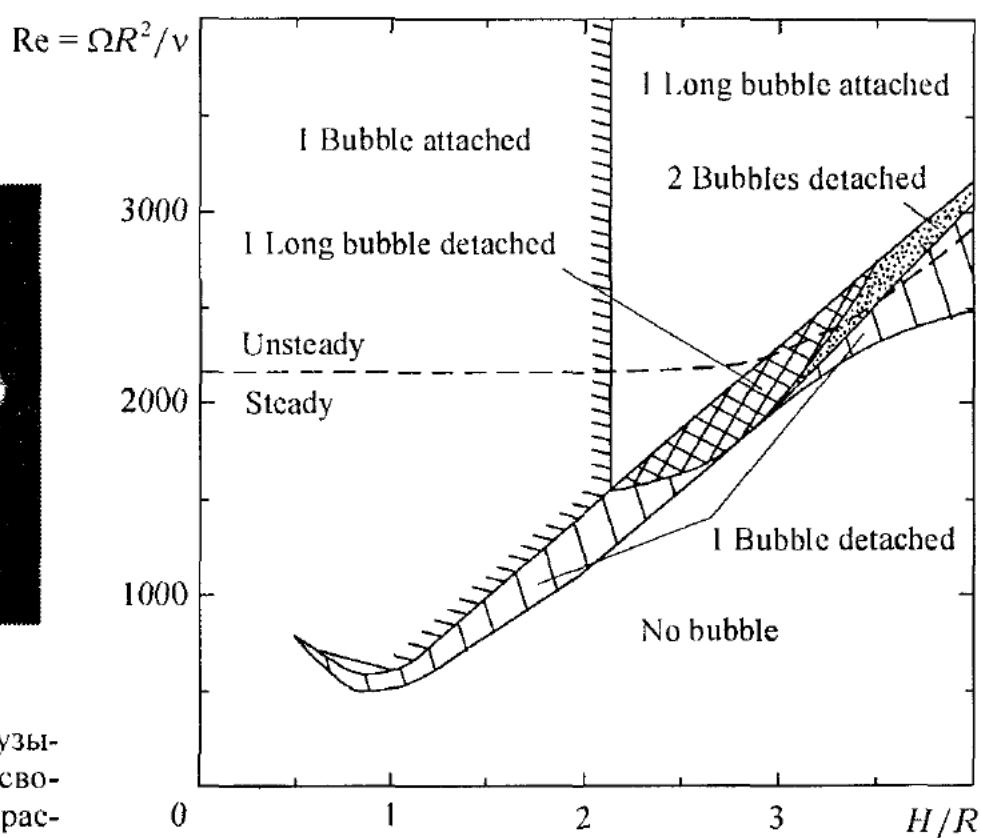


Рис. 7.69. Карта режимов распада вихря в сосуде с вращающимся дном и свободной поверхностью жидкости сверху [Spohn *et al.*, 1993]

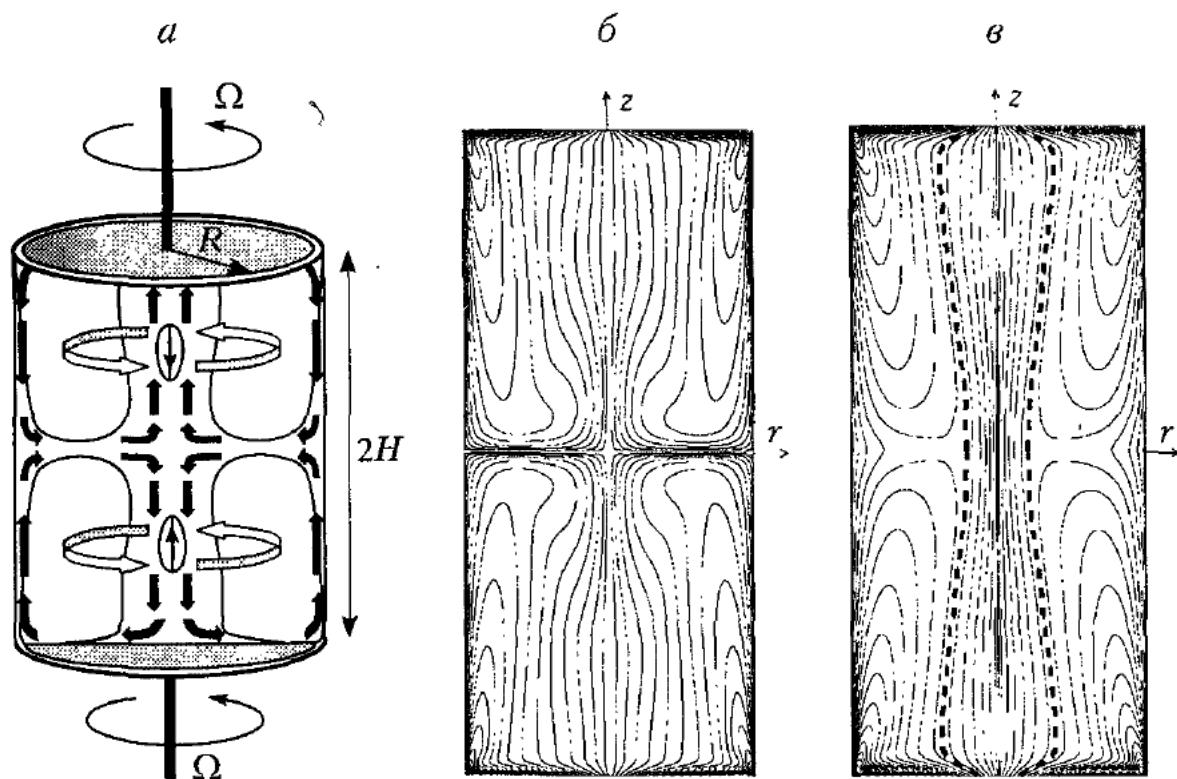


Рис. 7.70. Схема течения (a) и сечения вихревых трубок для $Re = 2000$ и $H/R = 2$ при противоположном вращении дисков (б) и при их вращении в одном направлении (с)

В работах Okulov *et al.*, [2001] и В.Л. Окулов и др. [2002] проведен анализ изменения поля завихренности и связанного с ним изменения топологии течения (образования рециркуляционных зон – пузырей) в частном случае одинаковых угловых скоростей вращения крышки и дна. В этом случае возникают симметричные течения в верхней и нижней части цилиндра с плоскостью симметрии в среднем горизонтальном сечении ($z = 0$). Физический механизм возникновения движения жидкости в этой системе обсужден выше, только здесь он применяется зеркально симметрично к верхней и нижней частям области течения (рис. 7.70a). В случае противоположного вращения дисков образуются два зеркально отраженных семейства вихревых трубок в виде вложенных друг в друга деформированных торов, замкнутых на поверхности врачающихся дисков (рис. 7.70б). Распределение завихренности в виде тора хорошо известно в механике жидкости как вихревое кольцо. Оно индуцирует на оси тора чисто поступательное движение, которое реализуется в данном случае из середины цилиндра к врачающимся торам. Конечно, деформация вихревых трубок от чисто тороидальной формы и винтообразный характер составляющих их вихревых нитей искажают картину течения по сравнению с полем течения, индуцированным вихревым кольцом (ппп. 2.5 и 3.2.1), но не так сильно, чтобы изменить поступательный характер течения к торам вдоль оси. Видимо, по этой причине возникновение рециркуляцион-

ных зон здесь не обнаружено. В случае вращения дисков в одну сторону картина распределения завихренности существенно меняется (рис. 7.70 ν). В средней части течения образуется система практически цилиндрических вихревых трубок, замкнутых на вращающихся дисках. Симметричные тороидальные семейства вихревых трубок оттесняются к периферии цилиндра (на рисунке граница выделена пунктиром). Поле скоростей в этом случае индуцируется уже тремя вихревыми структурами. Если влияние двух тороидальных вихрей, по-видимому, аналогично описанному выше примеру дает осевую компоненту скорости, направленную к вращающимся торцам, то влияние центральной вихревой структуры на поведение скорости на оси может быть неоднозначным. Это связано с индуцированием разных типов профилей осевой скорости (выпуклого и вогнутого) при разном знаке кручения вихревых нитей, составляющих колоннообразные вихревые трубы [Окулов, 1996; Мурахтина, Окулов, 2000; Alekseenko *et al.*, 1999]. Для наглядности на рис. 7.71 приведена структура вихревых линий, расположенных на центральной вихревой трубке, для двух значений числа Рейнольдса: $Re = 150$, когда пузырь не образуется, и $Re = 1300$, когда он существует. Представленные данные явно демонстрируют смену кручения вихревых линий для режимов с разной топологией течения. Более полная иллюстрация этой связи для случая одинакового вращения дисков и при $H/R = 1$ представлена в табл. 7.4, где в качестве меры интенсивности кручения винтообразных вихревых линий использована величина, обратная локальному шагу – $1/l$ (пп. 7.1.2 и 7.2). В первом столбце выделены вихревые трубы, вдоль которых рассчитывалась величина $1/l$. Ее изменение представлено во втором столбце тем же типом линий, которым выделена соответствующая вихревая трубка. При малых числах Рейнольдса ($Re = 150$) в верхней части течения реализуется вихревая структура с правой винтовой симметрией ($l > 0$), а в нижней – с левой ($l < 0$). Они индуцируют выпуклый и вогнутый профили соответственно или выпуклые в направлении вращающихся дисков профили осевой скорости, также как и периферийные тороидальные вихри (третий столбец в таблице). При увеличении скорости вращения дисков ($Re = 400$) винтовая симметрия вихрей спонтанно изменяется: сверху – левый, снизу – правый. Такие вихревые структуры индуцируют осевой поток, уже направленный в другом направлении (от вращающихся дисков к центру, см. рис. 7.71). В суперпозиции с течением, индуцированным тороидальными вихрями, получаем профиль осевой скорости с провалом на оси. Дальнейшее увеличение Re до 500 увеличивает степень кручения вихревых нитей (уменьшает шаг), что дает усиление индуцированного ими противотока и приводит к образованию пузырей (четвертый столбец таблицы). Еще одно изменение винтовой симметрии зафиксировано при $Re = 1300$. Оно происходит для внутренних вихревых трубок рассматриваемой структуры.

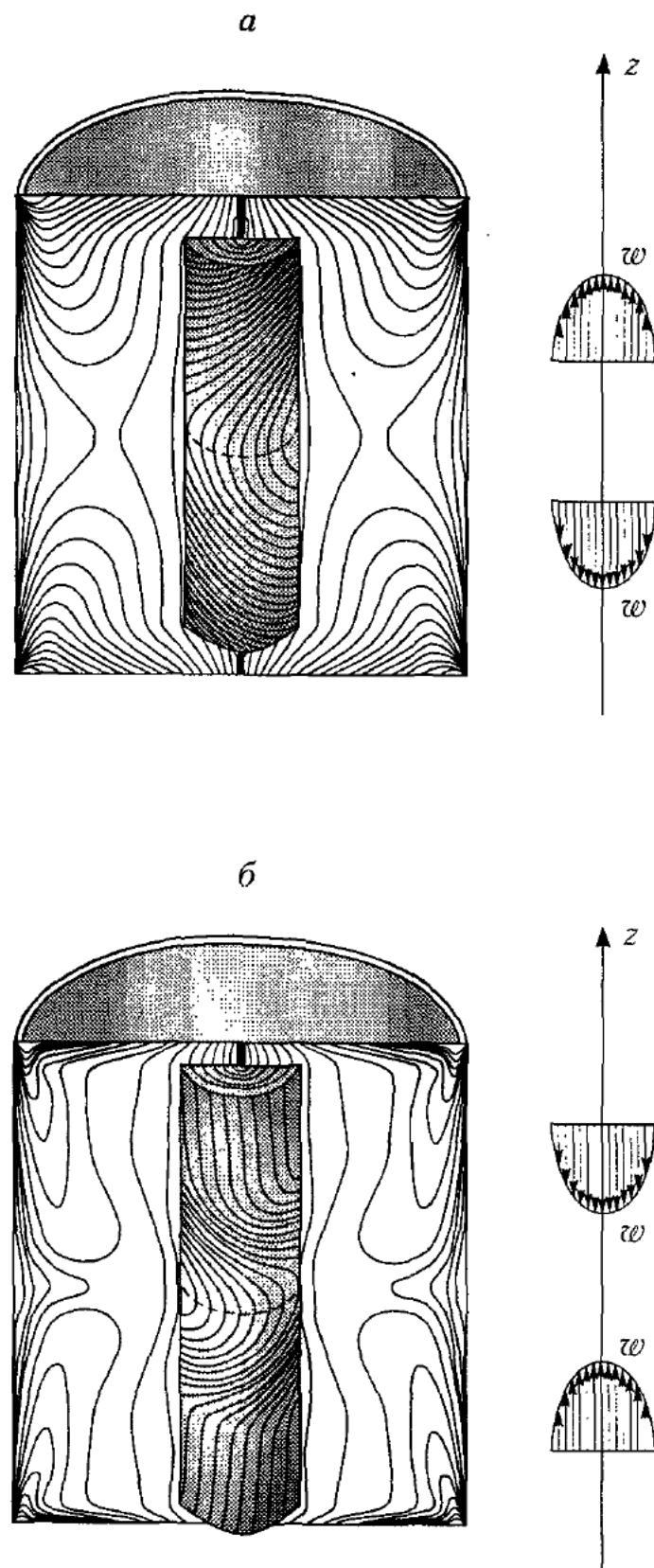


Рис. 7.71. Форма трехмерных вихревых линий, составляющих центральные, близкие к цилиндрическим, вихревые трубы, и индуцированные ими профили осевой скорости вдоль оси цилиндра с врачающимися в одном направлении верхней и нижней крышками при $Re = 150$ (*a*) и $Re = 1300$ (*b*) с $H/R = 1$

Таблица 7.4. Структура течения в сосуде с синхронно вращающимися крышкой и дном

Re	Сечения вихревых трубок	Степень кручения вихревых линий	Профили осевой скорости	Сечения трубок тока
150				
400				
500				
1300				
2400				

Для внешних вихревых трубок колоннообразной структуры, напротив, наблюдается увеличение степени кручения вихревых линий по левому винту сверху и по правому – снизу. Как результат зона противотока смещается от оси цилиндра в эту область, вместо пузыря рециркуляционная зона преобразуется в кольцо. При еще большем увеличении Re до 2400 рециркуляционное кольцо еще больше смещается к периферии и находится вне рассматриваемой центральной вихревой структуры, в которой практически полностью исчезло кручение винтовых нитей. Теперь подобно вихрю Рэнкина (п. 3.3.1) она состоит из почти прямых вихревых нитей и не индуцирует осевую компоненту скорости, значение которой практически равно нулю в приосевой зоне. Таким образом, для закрученных течений в цилиндрической полости установлена связь образования рециркуляционных зон со спонтанным изменением винтовой симметрии приосевой вихревой структуры в потоке. Завершая описание этой задачи, отметим корреляцию расчетных картин течения в нижней половине цилиндра с визуальными картинами для течения со свободной поверхностью [Spohn *et al.*, 1993, 1998]. Конечно, полного соответствия здесь установить не удастся из-за естественного искажения формы свободной поверхности в эксперименте, особенно при увеличении закрутки потока.

Описанные выше результаты изучения распада вихря в замкнутом контейнере показали, что для правильного диагностирования этого сложного феномена необходим комплексный подход с применением различных измерительных методик и численного моделирования. Проведенная классификация типов распада вихря (см. п. 7.6.2) и изучение нестационарных возмущений ядер концентрированных вихрей (см. п. 7.6.1) только на основании изучения визуальной картины течения совершенно недостаточны для корректного описания этих сложных явлений. Кроме того, так и остается открытым вопрос о создании непротиворечивой теории этих уникальных явлений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Абрамович М., Стиган И.** Справочник по специальным функциям. – М.: Наука, 1979. – 832 с.
- Абрамович Г.Н.** Прикладная газовая динамика. – М.: – ГИТТЛ, 1953. – 736 с.
- Алексеенко С.В., Куйбин П.А., Окулов В.Л., Шторк С.И.** Характеристики закрученных потоков с винтовой симметрией // Письма в Журн. техн. физики. – 1994. – Т. 20, вып. 18. – С. 33–39.
- Алексеенко С.В., Куйбин П.А., Окулов В.Л., Шторк С.И.** Стационарный вихрь с переменной винтовой симметрией // Докл. РАН. – 1995. – Т. 345, № 5. – С. 611–614.
- Алексеенко С.В., Маркович Д.М.** Применение электродиффузационного метода к измерениям в неодномерных потоках // Электрохимия. – 1993. – Т. 29, № 1. – С. 17–20.
- Алексеенко С.В., Окулов В.Л.** Закрученные потоки в технических приложениях (обзор) // Теплофизика и аэромеханика. – 1996. – Т. 3, № 2. – С. 101–138.
- Алексеенко С.В., Шторк С.И.** Экспериментальное наблюдение взаимодействия вихревых нитей // Письма в Журн. эксперим. и теорет. физики. – 1994. – Т. 59, вып. 11. – С. 746–750.
- Алексеенко С.В., Шторк С.И.** Бегущий распад вихря // Письма в Журн. техн. физики. – 1997. – Т. 23, вып. 22. – С. 24–28.
- Арбузов В.А., Дубнищев Ю.Н., Лебедев А.В., Правдина М.Х., Яворский Н.И.** Наблюдение крупномасштабных структур в вихревой трубке и эффект Ранка // Письма в Журн. техн. физики. – 1997. – Т. 23, вып. 23. – С. 84–90.
- Ахметов В.К., Шкадов В.Я.** К вопросу об устойчивости свободного вихря // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. – 1987. – № 2. – С. 35–40.
- Ахметов В.К., Шкадов В.Я.** О новой вязкой mode неустойчивости свободного вихря // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. – 1999. – № 6. – С. 76–80.
- Ахметов Д.Г.** Формирование и основные параметры вихревых колец // Журн. прикл. механики и техн. физики. – 2001. – Т. 42, № 5. – С. 70–83.
- Белоцерковский С.М., Гиневский А.С.** Моделирование турбулентных струй и следов на основе метода дискретных вихрей. – М.: Физматлит, 1995. – 368 с.
- Белоцерковский С.М., Котовский В.Н., Ништ М.И., Федоров Р.М.** Математическое моделирование гипоскопараллельного отрывного обтекания тел. – М.: Наука, 1988. – 232 с.
- Белоцерковский С.М., Ништ М.И.** Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью. – М.: Наука, 1978. – 351 с.
- Березовский А.А., Кацланский Ф.Б.** Диффузия кольцевого вихря // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. – 1997. – № 6. – С. 10–15.

- Березовский А.А., Капланский Ф.Б.** Динамика тонких вихревых колец в маловязкой жидкости // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. – 1992. – № 5. – С. 52–59.
- Бойко А.В., Грек Г.Р., Довгаль А.В., Козлов В.В.** Возникновение турбулентности в пристенных течениях. – Новосибирск: Наука, 1999. – 328 с.
- Бондаренко А.В., Завьялов П.С.** К объяснению пространственной формы вихревого жгута, образующегося в отсасывающих трубах гидротурбин // Гидравл. машины. – Харьков, 1979. – Вып. 13. – С. 123–126.
- Борисов А.В., Мамаев И.С.** Пуассоновы структуры и алгебры Ли в гамильтоновой механике. – Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 1999. – 464 с.
- Броунштейн И.Н., Семенджев К.А.** Справочник по математике. – М.: Наука, 1986. – 544 с.
- Брутян М.А., Крапивский П.Л.** Движение системы вихревых колец в несжимаемой жидкости // Прикл. математика и механика. – 1984. – Т. 48, вып. 3. – С. 503–506.
- Бэтчелор Дж.** Введение в динамику жидкости. – М.: Мир, 1973. – 758 с.
- Ван-Дайк М.** Методы возмущений в механике жидкости. – М.: Мир, 1967. – 311 с.
- Ван-Дайк М.** Альбом течений жидкости и газа. – М.: Мир, 1986. – 182 с.
- Васильев О.Ф.** Основы механики винтовых и циркуляционных потоков. – М.; Л.: Госэнергоиздат, 1958. – 144 с.
- Ватсон Г.Н.** Теория бесселевых функций. – М.: ИЛ, 1949. – Ч. I. – 798 с.
- Веретенцев А.Н., Гешев П.И., Куйбин П.А., Рудяк В.Я.** О развитии метода вихревых частиц применительно к описанию отрывных течений // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1989. – Т. 29, № 6. – С. 878–887.
- Веретенцев А.Н., Куйбин П.А., Меркулов В.И., Рудяк В.Я.** О выводе уравнений движения дискретных вихревых частиц для осесимметричных течений // Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук. – 1986а. – № 10, вып. 2. – С. 45–50.
- Веретенцев А.Н., Рудяк В.Я.** Динамика завихренности в двумерных течениях невязкой жидкости. – Новосибирск, 1986. – 41 с. – (Препринт / АН СССР. Сиб. отделение. Ин-т теорет. и прикл. механики; № 4).
- Веретенцев А.Н., Рудяк В.Я.** О процессах образования и эволюции вихревых структур в сдвиговых слоях // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1987а. – № 1. – С. 31–37.
- Веретенцев А.Н., Рудяк В.Я.** О взаимодействии внешнего акустического поля со слоем смешения // Моделирование в механике. – Новосибирск, 1987б. – Т. 1/18, № 6. – С. 14–19.
- Веретенцев А.Н., Рудяк В.Я., Яценко Н.Н.** Вариационный метод построения дискретных вихревых моделей. – Новосибирск, 1982. – 41 с. – (Препринт / АН СССР. Сиб. отделение. Ин-т теорет. и прикл. механики; № 29).
- Веретенцев А.Н., Рудяк В.Я., Яценко Н.Н.** О построении дискретных вихревых моделей течений идеальной несжимаемой жидкости // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1986б. – Т. 26, № 1. – С. 103–113.

- Вилля Г.** Теория вихрей. – М.; Л.: ОНТИ, НКТП, 1936. – 266 с.
- Владимиров В.А.** О вихревом импульсе течений несжимаемой жидкости // Журн. прикл. механики и техн. физики. – 1977а. – № 6. – С. 72–77.
- Владимиров В.А.** Формирование вихревых шнуров из восходящих потоков над испаряющейся жидкостью // Докл. АН СССР. – 1977б. – Т. 236, № 2. – С. 316–318.
- Владимиров В.А.** О сходстве эффектов плотностной стратификации и вращения // Журн. прикл. механики и техн. физики. – 1985. – № 3. – С. 58–68.
- Владимиров В.А., Луговцов Б.А., Тараксов В.Ф.** Подавление турбулентности в ядрах концентрированных вихрей // Журн. прикл. механики и техн. физики. – 1980. – № 5. – С. 69–76.
- Владимиров В.С.** Обобщенные функции в математической физике. – М.: Наука, 1976. – 512 с.
- Власов Е.В., Гиневский А.С.** Когерентные структуры в турбулентных струях и следах // Итоги науки и техники. ВИНИТИ. Сер. Механика жидкости и газа. – 1986. – Т. 20. – С. 3–84.
- Власов Е.В., Гиневский А.С., Каравосов Р.К., Франкфурт М.О.** Пристеночные пульсации давления в зоне отрыва за двумерными препятствиями // Тр. ЦАГИ. – 1982. – Вып. 2137. – С. 3–22.
- Вы Д.М., Вэкли А.Д., Ю Ф.М.** Взаимодействие асимметричной струи с поперечным потоком // Аэрокосм. техника. – 1989. – № 5. – С. 58–67.
- Герценштейн С.Я., Олару И.И., Рудницкий А.Я., Сухоруков А.Н.** О развитии конечно-амплитудных двумерных и трехмерных возмущений в струйных течениях // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1985. – № 5. – С. 8–19.
- Герценштейн С.Я., Штемлер Ю.М.** Нелинейное развитие возмущений в пограничных слоях и их неустойчивость // Докл. АН СССР. – 1977. – Т. 234, № 6. – С. 1277–1280.
- Гешев П.И., Черных А.И.** Движение вихрей в двумерной односвязной области. – Новосибирск, 1983. – (Препринт / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т теплофизики; № 65–80).
- Гольдштик М.А.** Вихревые потоки. – Новосибирск: Наука, 1981. – 366 с.
- Горелов Д.Н.** Локальная аппроксимация вихревого слоя системой дискретных вихрей // Журн. прикл. механики и техн. физики. – 1980. – № 5. – С. 76–82.
- Горелов Д.Н.** К выбору контрольных точек в методе дискретных вихрей // Журн. прикл. механики и техн. физики. – 1990. – № 1. – С. 167–170.
- Градштейн И.С., Рыжик И.М.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Наука, 1971.
- Гринспен Х.В.** Теория вращающихся жидкостей: Пер. с англ. – Л.: Гидрометеоиздат, 1975. – 304 с.
- Гупта А., Лилли Д., Сайред Н.** Закрученные потоки. – М.: Мир, 1987. – 590 с.
- Доннелли Р.Д.** Сверхтекучая турбулентность // В мире науки. – 1989. – № 1. – С. 46–54.

- Жуковский Н.Е.** Полное собрание сочинений. Т. 5. Вихри. Теория крыла. Авиация / Под ред. А.П. Котельникова. – М.; Л.: Гл. ред. авиац. лит., 1937а. – 484 с.
- Жуковский Н.Е.** Полное собрание сочинений. Т. 6. Винты. Ветряки. Аэродинамическая труба / Под ред. В.П. Ветчинкина. – М.; Л.: Гл. ред. авиац. лит., 1937б. – 424 с.
- Залманзон Л.А.** Аэродинамические методы измерения входных параметров автоматических систем. – М.: Наука, 1973. – 464 с.
- Зобнин А.И.** Исследование структуры вихревого следа за профилем с угловой кромкой в начальной стадии отрывного обтекания // Гидродинамика подводного крыла. – Новосибирск, 1986. – С. 71–84.
- Ильичев К.П., Постоловский С.Н.** Расчет нестационарного отрывного обтекания тел потоком невязкой жидкости // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1972. – № 2. – С. 72–82.
- Калтаев А.** Исследование динамических характеристик движения вихревого кольца в вязкой жидкости // Динамика сплошной среды. – Алма-Ата: Изд. КазГУ, 1982. – С. 63–70.
- Кантуэлл Б.** Организованные движения в турбулентных потоках // Вихри и волны. – М.: Мир, 1984. – С. 9–79.
- Кикнадзе Г.И., Краснов Ю.К., Подымака Н.Ф., Хабенский В.Б.** Самоорганизация вихревых структур при обтекании водой полусферической лунки // Докл. АН СССР. – 1986. – Т. 291, № 6. – С. 1315–1318.
- Кныш Ю.А., Урывский А.Ф.** Теория взаимодействия вторичных вихревых структур в закрученных потоках жидкости // Изв. вузов. Авиац. техника. – 1981. – № 3. – С. 53–58.
- Козлов В.В.** Общая теория вихрей. – Ижевск: Изд. дом «Удмуртский ун-т», 1998. – 238 с.
- Копьев В.Ф., Чернышев С.А.** Колебания вихревого кольца, возникновение в нем турбулентности и генерация звука // Успехи физ. наук. – 2000. – Т. 170, № 7. – С. 713–742.
- Кори Г., Кори Т.** Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1984. – 831 с.
- Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.** Теоретическая гидромеханика. – М.: Физматгиз, 1963. – Ч. I. – 583 С.
- Кроу.** Теория устойчивости двух систем хвостовых вихрей // Ракетно-косм. техника. – 1970. – № 12. – С. 73–81.
- Куйбин П.А.** Исследование динамики и неустойчивости отрывных течений и следов: Дис... канд. физ.-мат. наук. / Ин-т теплофизики СО РАН. – Новосибирск, 1993.
- Куйбин П.А., Окулов В.Л.** Одномерные решения для течений с винтовой симметрией // Теплофизика и аэромеханика. – 1996. – № 4. – С. 311–315.
- Куйбин П.А., Рудяк В.Я.** Изучение эволюции возмущений в следе за пластиной // Изв. вузов. Авиац. техника. – 1992. – № 1. – С. 29–32.

- Кутателадзе С.С., Волчков Э.П., Терехов В.И.** Аэродинамика и тепломассообмен в ограниченных вихревых потоках. – Новосибирск: ИТФ СО АН СССР, 1987. – 282 с.
- Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.** Проблемы гидродинамики и их математические модели. – М.: Физматгиз, 1973. – 416 с.
- Ламб Г.** Гидродинамика. – М.; Л.: Гостехиздат, 1947. – 928 с.
- Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.** Гидродинамика. – М.: Наука, 1988. – 733 с.
- Ларин А.В., Маврицкий В.И.** Явление вторичного вихреобразования // Открытия. Изобретения. – 1971. – № 32. – С. 3.
- Лейбович С.** Распад вихря // Вихревые движения жидкости. – М.: Мир, 1979. – С. 160–196.
- Лейбович С.** Устойчивость и разрушение вихрей: Современное состояние и перспективы исследований // Аэрокосм. техника. – 1985. – Т. 3, № 4. – С. 162–181.
- Лойцянский Л.Г.** Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1973. – 847 с.
- Луговцов Б.А.** О движении турбулентного вихревого кольца и переносе им пассивной примеси // Некоторые проблемы математики и механики. – Л.: Наука, 1970. – С. 182–197.
- Лэм Дж.** Введение в теорию солитонов. – М.: Мир, 1983. – 294 с.
- Маслоу С.А.** Неустойчивости и переход в сдвиговых течениях // Гидродинамические неустойчивости и переход к турбулентности. – М.: Мир, 1984. – С. 218–270.
- Мелешко В.В., Константинов М.Ю.** Динамика вихревых структур. – Киев: Наук. думка, 1993. – 280 с.
- Мили-Томсон Л.М.** Теоретическая гидродинамика. – М.: Мир, 1964. – 655 с.
- Молчанов В.Ф.** Некоторые вопросы расчета течений с тангенциальными разрывами // Учен. зап. ЦАГИ, 1975. – Т. 4, № 4. – С. 19–25.
- Мурахтина Т.О., Окулов В.Л.** Изменение топологии и симметрии поля завихренности при турбулентном распаде вихря // Письма в Журн. техн. физики. – 2000. – Т. 26, № 10. – С. 66–72.
- Наливкин Д.В.** Ураганы, бури и смерчи. – Л.: Наука, 1969. – 487 с.
- Наумов И.В., Окулов В.Л., Майер К.Е., Соренсен Ж.Н., Шен В.** LDA-PIV диагностика и 3-мерный расчет пульсирующего закрученного потока в цилиндрическом контейнере // Теплофизика и аэромеханика. – 2003. – Т. 10, № 2. – С. 151–156.
- Незлин М.В., Снежкин Е.Н.** Вихри Россби и спиральные структуры. – М.: Наука, 1990. – 240 с.
- Никольский А.А.** О “второй” форме движения идеальной жидкости около обтекаемого тела (исследование вихревых отрывных потоков) // Докл. АН СССР. – 1957. – Т. 116, № 2. – С. 193–196.
- Новиков Е.А.** Динамика и статистика системы вихрей // Журн. эксперим. и теорет. физики. – 1975. – Т. 68, вып. 5. – С. 1868–1882.

- Новиков Е.А., Седов Ю.Б.** Коллапс вихрей // Журн. эксперим. и теорет. физики. – 1979. – Т. 77, вып. 2(8). – С. 588–597.
- Овсянников Л.В.** Лекции по основам газовой динамики. – М.: Наука, 1981. – 368 с.
- Овчинников А.А., Николаев Н.А.** Определение радиуса вихря в вихревых газовых камерах // Тр. Казан. хим.-техн. ин-та. – 1973. – Вып. 51. – С. 9–14.
- Окулов В.Л.** Резонансные гидроакустические процессы в проточной части машин и агрегатов с интенсивной закруткой потока: Автореф. дис... д-ра физ.-мат. наук. – Новосибирск, 1993. – 34 с.
- Окулов В.Л.** Переход от правой винтовой симметрии к левой при распаде вихря // Письма в Журн. техн. физики. – 1996. – Т. 22, вып. 19. – С. 47–54.
- Окулов В.Л., Мартемьянов С.А.** Эффект снижения массообменных процессов в закрученных потоках // Письма в Журн. техн. физики. – 2001. – Т. 27, № 18. – С. 22–28.
- Окулов В.Л., Соренсен Ж.Н., Варламова Е.А.** Возникновение асимметрии и нестационарности при лабораторном моделировании гидродинамической структуры смерча // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. – (в печати).
- Окулов В.Л., Соренсен Ж.Н., Войт Л.К.** Чередование право- и левовинтовых вихревых структур при увеличении интенсивности закрутки потока в цилиндрической каверне с врачающимися торцами // Письма в Журн. техн. физики. – 2002. – Т. 28, № 2. – С. 37–44.
- Пейн Ф.М., Нг Т.Т., Нелсон Р.К., Шифф Л.Б.** Визуализация вихревой системы треугольного крыла и течения в его следе // Аэрокосм. техника. – 1988. – № 11. – С. 3–11.
- Пиралишвили Ш.А., Поляев В.М., Сергеев М.Н.** Вихревой эффект. Эксперимент, теория, технические решения / Под ред. А.И. Леонтьева. – М.: УНПЦ «Энергомаш», 2000. – 415 с.
- Рабинович М.И., Сущик М.М.** Регулярная и хаотическая динамика структур в течениях жидкости // Успехи физ. наук. – 1990. – Т. 160, вып. 1. – С. 3–64.
- Сабельников В.А., Смирных Е.А.** Численный расчет турбулентного течения на начальном участке плоского канала с острыми кромками методом дискретных вихрей // Учен. зап. ЦАГИ. – 1985. – Т. 16, № 4. – С. 59–64.
- Садовский В.С.** О вихревых зонах в потенциальном потоке со скачком постоянной Бернуlli на границе // Прикл. математика и механика. – 1971. – Т. 35. – С. 773–779.
- Седов Л.И.** Механика сплошной среды. – М.: Наука, 1970. – Т. 1. – 492 с.
- Смульский И.И.** Аэrodинамика и процессы в вихревых камерах / Под ред. И.Р. Шрейбера. Новосибирск: ВО «Наука». Сибирская издательская фирма, 1992. – 301 с.
- Сноу Д.** Торнадо // В мире науки. – 1984. – С. 44–55.
- Сэффмэн Ф.Дж.** Динамика вихрей. – М.: Научный мир, 2000. – 376 с.

- Уиднелл Ш.** Структура и динамика вихревых нитей // Вихревые движения жидкости. -- М.: Мир, 1979. -- С. 126–159.
- Уизем Дж.** Линейные и нелинейные волны. -- М.: Мир, 1977. -- 622 с.
- Халатов А.А.** Теория и практика закрученных потоков. -- Киев: Наук. думка, 1989.
- Шторк С.И.** Экспериментальное исследование вихревых структур в тангенциальных камерах: Дис... канд. физ.-мат. наук / Ин-т теплофизики СО РАН. -- Новосибирск, 1994. -- 156 с.
- Штым А.Н.** Аэродинамика циклонно-вихревых камер. -- Владивосток: Дальневост. ун-т, 1985. -- 199 с.
- Acarlar M.S., Smith C.R.** A study of hairpin vortices in a laminar boundary layers // J. Fluid Mech. -- 1987. -- Vol. 175. -- P. 1–83.
- Acton E.** A modelling of large eddies in an axisymmetric jet // J. Fluid Mech. -- 1980. -- Vol. 98, N 1. -- P. 1–31.
- Alekseenko S., Bilsky A., Heinz O., Ilyushin B., Markovich D., Vasechkin V.** Fine structure of the impinging turbulent jet // Proc. 5-th Int. Symp. Engineering Turbulence Modelling and Measurements. Mallorca, Spain, 16–18 Sept. 2002. -- P. 597–606.
- Alekseenko S.V., Kuibin P.A., Okulov V.L., Shtork S.I.** Helical vortices in swirl flow // J. Fluid Mech. -- 1999. -- Vol. 382. -- P. 195–243.
- Alekseenko S.V., Shtork S.I.** Swirling flow large-scale structures in a combustor model // Russ. J. Eng. Thermophys. -- 1992. -- Vol. 2, N 4. -- P. 231–266.
- Alekseenko S.V., Cherep A.A.** Spiral waves in dispersive media // Acta Mech. -- 1994. -- Vol. 105. -- P. 143–160.
- Althaus W., Weimer M.** Review of the Aachen work on vortex breakdown // Proc. IUTAM Symp. on Dynamics of Slender Vortices / Ed. E. Krause & K. Gersten (Aachen, Germany). -- Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997. -- P. 331–344.
- Andersson H., Alekseenko S.V.** Swirling Flows. Euromech and Ercoftac Colloquium. 16–20 September 2001, Bergen-Tromsø, Norway // Ercoftac Bull. -- 2002. -- Vol. 52. -- P. 31–36.
- Aref H.** Motion of three vortices // Phys. Fluids. -- 1979. -- Vol. 22. -- P. 393–400.
- Arendt S., Fritts D.C., Andreassen O.** The initial value problem for Kelvin vortex waves // J. Fluid Mech. -- 1997. -- Vol. 344. -- P. 181–212.
- Arms R.J., Hama F.R.** Localized-induction concept on a curved vortex and motion of an elliptic vortex ring // Phys. Fluids. -- 1965. -- Vol. 8. -- P. 553–559.
- Batchelor G.K.** Axial flow in trailing line vortices // J. Fluid Mech. -- 1964. -- Vol. 20. -- P. 645–658.
- Batchelor G.K., Gill A.E.** Analysis of the stability of axisymmetric jets // J. Fluid Mech. -- 1962. -- Vol. 14. -- P. 529–551.
- Bellamy-Knights P.G.** An unsteady two-cell vortex solution of Navier-Stokes equations // J. Fluid Mech. -- 1970. -- Vol. 41, Pt 3. -- P. 673–687.

- Benjamin T.B.** Theory of the vortex breakdown phenomenon // J. Fluid Mech. – 1962. – Vol. 14. – P. 593–629.
- Benjamin T.B.** Some developments in the theory of vortex breakdown // J. Fluid Mech. – 1967. – Vol. 28. – P. 65–84.
- Benney D.J.** Long non-linear waves in fluid flows // J. Math. Phys. – 1966. – Vol. 45. – P. 52–63.
- Berdnikov V.S., Borisov V.L., Markov V.A., Panchenko V.I.** Simulation of the hydrodynamical front and annular cross-section // Heat Transfer – Sov. Res. – 1989. – Vol. 21, N 6. – P. 828–845.
- Betchov R.** On the curvature and torsion of an isolated vortex filament // J. Fluid Mech. – 1965. – Vol 22. – P. 471–479.
- Betz A.** Verhalten von wirbelsystemen (i.e., Behaviour of vortex systems) // Z. Angew. Math. Mech. – 1932. – Vol. 12. – P. 164–174.
- Billant P., Chomaz J.M., Huerre P.** Experimental study of vortex breakdown in swirling jets // J. Fluid Mech. – 1998. – Vol. 376. – P. 183–219.
- Boersma J., Wood D.H.** On the self-induced motion of a helical vortex // J. Fluid Mech. – 1999. – Vol. 384. – P. 263–280.
- Boersma J., Yakubovich S.B.** Solution to problem 97–18*: the asymptotic sum of a Kapteyn series // SIAM Rev. – 1998. – Vol. 40. – P. 986–990.
- Borissov A.A., Kuibin P.A., Okulov V.L.** Flame shapes in swirl flow // Russ. J. Eng. Thermophys. – 1993. – Vol. 3. – P. 243–255.
- Borissov A.A., Kuibin P.A., Okulov V.L.** Calculation of Ranque's effect in vortex tube // Acta Mech. – 1994. – N 4. – P. 289–295.
- Boubnov B.M., Golitsyn G.S.** Experimental study of convective structures in rotating fluids // J. Fluid Mech. – 1986. – Vol. 167. – P. 503–531.
- Bragg S.L., Hawthorne W.R.** Some exact solutions of the flow through annular cascade actuator discs // J. Aeronaut. Sci. – 1950. – Vol. 17. – P. 243–249.
- Brasseur J.G.** Evolution characteristics of vortex rings over a wide range of Reynolds numbers // AIAA Papers. – 1986. – Vol. 1097. – P. 1–11.
- Bridges J., Husain H.S., Hussain F.** Whither coherent structures? Lecture notes in physics // Proc. of Workshop Held at Cornell University. – Itaca, NY, March 22–24, 1989. – Vol. 357. – P. 132–151.
- Brøns M., Voigt L.K., Sørensen J.N.** Topology of vortex breakdown bubbles in cylinder with rotating bottom and free surface // J. Fluid Mech. – 2001. – Vol. 428. – P. 133–148.
- Brown G.L., Roshko A.** On density effects and large structure in turbulent mixing layers // J. Fluid Mech. – 1974. – Vol. 64, N 4. – P. 755–816.
- Brücker Ch.** Study of vortex breakdown by particle tracing velocimetry (PTV). Part 2: Spiral-type vortex breakdown // Exp. in Fluids. – 1993. – Vol. 14. – P. 133–139.
- Brücker Ch., Althaus W.** Study of vortex breakdown by particle tracking velocimetry. Part 1: Bubble-type vortex breakdown // Exp. in Fluids. – 1992. – Vol. 13, N 5. – P. 339–349.

- Brücker C., Althaus W.** Study of vortex breakdown by particle tracking velocimetry (PTV). Part 3: Time-dependent structure and development of breakdown modes // *Exp. in Fluids.* – 1995. – Vol. 18. – P. 174–186.
- Bühler K.** Das Zeitverhalten der Druckverteilung beim Zerfließen des Potentialwirbels // *Z. Angew. Math. Mech.* – 1988. – Vol. 68, N 11. – P. 580, 581.
- Burgers J.M.** Application of a model system to illustrate some points of the statistical theory of free turbulence // *Proc. Acad. Sci. – Amsterdam.* – 1940. – Vol. 1, N 1. – P. 2–12.
- Burgers J.M.** A mathematical model illustrating the theory of turbulence // *Adv. Appl. Mech.* – 1948. – Vol. 1. – P. 197–199.
- Bush J.W.M., Stone H.A., Bloxham J.** Axial drop motion in rotating fluids // *J. Fluid Mech.* – 1995. – Vol. 282. – P. 247–278.
- Callegari A.J., Ting L.** Motion of a curved vortex filament with decaying vortical core and axial velocity // *SIAM J. Appl. Math.* – 1978. – Vol. 35, N 1. – P. 148–175.
- Cantwell B.J.** Organized motion in turbulent flow // *Annu. Rev. Fluid Mech.* – 1981. – Vol. 13. – P. 457–515.
- Cassidy J.J., Falvey H.T.** Observations of unsteady flow arising after vortex breakdown // *J. Fluid Mech.* – 1970. – Vol. 41. – P. 727–736.
- Chanaud R.C.** Observations of oscillatory in certain swirling flows // *J. Fluid. Mech.* – 1965. – Vol. 21. – P. 111–127.
- Chandrasekhar S.** Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability. – Oxford: Clarendon Press, 1961. – 652 p.
- Chandrsuda C., Mehta R.D., Weir A.D., Bradshaw P.** Effect of free-stream turbulence on large structure in turbulence mixing layers // *J. Fluid. Mech.* – 1978. – Vol. 85. – P. 693–704.
- Chorin A.J., Bernard P.S.** Discretization of vortex sheet with an example of roll up // *J. Comput. Phys.* – 1973. – Vol. 13. – N 3. – P. 423–429.
- Crow S.C.** Stability theory for a pair of trailing vortices // *AIAA J.* – 1970. – Vol. 8. – P. 2172–2179.
- Da Rios L.S.** On the motion of an unbounded fluid with a vortex filament of any shape (in Italian) // *Rend. Circ. Mat. Palermo.* – 1906. – Vol. 22. – P. 117–135.
- Daube O., Sørensen J.N.** Numerical-simulation of the axisymmetric periodic-flow in a cylindrical tank // *Comptes Rendus De L'Academie Des Sciences Serie II.* – 1989. – Vol. 308, N 5. – P. 463–469.
- Delbende I., Chomaz J.M., Huerre P.** Absolute/convective instabilities in the Batchelor vortex: a numerical study of the linear impulse response // *J. Fluid Mech.* – 1998. – Vol. 355. – P. 229–254.
- Donaldson C.P., Sullivan R.D.** Behaviour of solutions of the Navier–Stokes equations for a complete class of three-dimensional viscous vortices // *Proc. of the Heat Transfer Fluid Mechanics Conf.* – Stanford, 1960. – P. 16–30.

- Drazin P., Reid W.** Hydrodynamic Stability. – Cambridge Univ. Press, 1981. – 525 p.
- Dritschel D.G.** Generalized helical Beltrami flows in hydrodynamics and magnetohydrodynamics // J. Fluid. Mech. – 1991. – Vol. 222. – P. 525–541.
- Duck P.W., Foster M.R.** The inviscid stability of a trailing line vortex // Z. Angew. Math. Phys. – 1980. – Vol. 31. – P. 523–530.
- Escudier M.P.** Observations of the flow produced in a cylindrical container by a rotating endwall // Exp. in Fluids. – 1984. – Vol. 2, N 4. – P. 189–196.
- Escudier M.P.** Vortex breakdown: observations and explanations // Prog. Aerosp. Sci. – 1988. – Vol. 25. – P. 189–229.
- Escudier M.P., Bornstein J., Maxworthy T.** The dynamics of confined vortices // Proc. R. Soc. London. – 1982. – A382. – P. 335–360.
- Escudier M.P., Bornstein J., Zehnder N.** Observations and LDA measurements of confined vortex flow // J. Fluid Mech. – 1980. – Vol. 98. – P. 49–63.
- Evans R.A., Bloor M.I.G.** The starting mechanism of wave-induced flow through a sharp-edged orifice // J. Fluid Mech. – 1977. – Vol. 82. – P. 115–128.
- Faler J.H., Leibovich S.** Disrupted states of vortex flow and vortex breakdown // Phys. Fluids. – 1977. – Vol. 20. – P. 1385–1400.
- Faler J.H., Leibovich S.** An experimental map of the internal structure of a vortex breakdown // J. Fluid Mech. – 1978. – Vol. 86. – P. 313–335.
- Fanelli M.** The vortex rope in the draft tube of Francis turbines operating at partial load: a proposal for a mathematical model // J. Hydraulic Res. – 1989. – Vol. 27, N 6. – P. 769–807.
- Feikema D., Chen R.-H., Driscoll J.F.** Enhancement of flame blow-out limits by the use of swirl // Comb. & Flame. – 1990. – Vol. 80. – P. 183–195.
- Fiedler H.E., Fernholz H.H.** On management and control of turbulent shear flows // Prog. Aerosp. Sci. – 1990. – Vol. 27, N 4. – P. 305–387.
- Fraenkel L.E.** On the flow of rotating fluid past bodies in pipe // Proc. R. Soc. London. – 1956. – A233. – P. 506–526.
- Fraenkel L.E.** On steady vortex rings of small cross-section in an ideal fluid // Proc. R. Soc. London. – 1970. – A316. – P. 29–62.
- Fraenkel L.E.** Examples of steady vortex rings of small cross-section in an ideal fluid // J. Fluid Mech. – 1972. – Vol. 51. – P. 119–135.
- Freymuth P., Bank W., Palmer M.** Visualization of accelerating flow around an airfoil at high angles of attack // Z. Flugwiss. Weltraumsforsch. – 1983. – Bd 7, H. 6. – S. 392–400.
- Fukumoto Y., Miyazaki T.** Three-dimensional distortions of a vortex filament with axial velocity // J. Fluid Mech. – 1991. – Vol. 222. – P. 369–416.
- Fultz D.** A note on overstability and the elastoid-inertia oscillations of Kelvin, Solberg and Bjerknes // J. Meteorol. – 1959. – Vol. 16. – P. 199–208.

- Garg A.K., Leibovich S.** Spectral characteristics of vortex breakdown flow fields // Phys. Fluids. – 1979. – Vol. 22. – P. 2053–2064.
- Gelfgat A.Y., Bar-Yoseph P.Z., Solan A.** Stability of confined swirling flow with and without vortex breakdown // J. Fluid Mech. – 1996a. – Vol. 311. – P. 1–36.
- Gelfgat A.Y., Bar-Yoseph P.Z., Solan A.** Steady states and oscillatory instability of swirling flow in cylinder with rotating top and bottom // Phys. Fluids. – 1996b. – Vol. 8, N 10. – P. 2614–2625.
- Gelfgat A.Y., Bar-Yoseph P.Z., Solan A.** Three-dimensional instability of axisymmetric flow in rotating lid-cylinder enclosure // J. Fluid Mech. – 2001. – Vol. 438. – P. 363–377.
- Guarga R.F., Gracia J.S., Sanchez A.H., Rodal E.C.** LDV and pressure measurements in swirling confined, turbulent and non cavitating flows // Work group on the behaviour of hydraulic machinery under steady oscillatory conditions. – Mexico, 1985. Paper 12.
- Hall H.E.** An experimental and theoretical study of torsional oscillations in uniformly rotating liquid helium II // Proc. R. Soc. London. – 1958. – A245. – P. 546.
- Hall H.E.** Dynamics of a rectilinear vortex in liquid helium II // J. Phys., C: Solid State Phys. – 1970. – Vol. 3. – P. 1166.
- Hall M.G.** The structure of concentrated vortex cores // Prog. Aeronaut. Sci. – 1966. – Vol. 7. – P. 53–110.
- Hall M.G.** Vortex breakdown // Annu. Rev. Fluid Mech. – 1972. – Vol. 4. – P. 195–218.
- Hama F.R.** Progressive deformation of a curved vortex filament by its own induction // Phys. Fluids. – 1962. – Vol. 5. – P. 1156–1162.
- Hardin J.C.** The velocity field induced by a helical vortex filament // Phys. Fluids. – 1982. – Vol. 25, N 11. – P. 1949–1952.
- Hashimoto H.** Theoretical study of swirling flow accompanied by helical cavity core in circular pipe // Rep. Inst. High Speed Mech. – 1971. – Vol. 23, N 228. – P. 61–97.
- Hasimoto H.** A soliton on a vortex filament // J. Fluid Mech. – 1972. – Vol. 51. – P. 477–485.
- Helmholtz H.** Über integrale der hydrodynamischen gleichungen welche den wirbelbewegungen entsprechen // J. Reine Angew. Math. – 1858. – Vol. 55. – P. 25–55.
- Helmholtz H.** // Philos. Mag. (4). – 1868. – Vol. 36. – P. 337.
- Hicks W.M.** Researches on the theory of vortex rings—Part II // Philos. Trans. R. Soc. London. – 1885. – A176. – P. 725–780.
- Hicks W.M.** Researches in vortex motion—Part III. On spiral or gyrostatic vortex aggregates // Philos. Trans. R. Soc. London. – 1899. – A192. – P. 33–101.
- Hill M.J.M.** On a spherical vortex // Philos. Trans. R. Soc. London. – 1894. – A185. – P. 213–245.
- Hirota R.** Exact envelope-soliton solutions of a nonlinear wave equation // J. Math. Phys. – 1973. – Vol. 14. – P. 805–809.
- Hopfinger E.J., Browand F.K.** Vortex solitary waves in a rotating, turbulent flow // Nature. – 1982. – Vol. 295. – P. 393–395.

- Hopfinger E.J., Browand F.K., Gagne Y.** Turbulence and waves in a rotating tank // J. Fluid. Mech. – 1982. – Vol. 125. – P. 505–534.
- Hopfinger E.J., van Heijst G.J.F.** Vortices in rotating fluids // Annu. Rev. Fluid Mech. – 1993. – Vol. 25. – P. 241–289.
- Hourigan K., Graham L.J.W., Thompson M.C.** Spiral streaklines in pre-vortex breakdown regions of axisymmetric swirling flows // Phys. Fluids. – 1995. – Vol. 7, N 12. – P. 3126–3128.
- Howard L.N., Gupta A.S.** On the hydrodynamic and hydromagnetic stability of swirling flows // J. Fluid Mech. – 1962. – Vol. 14. – P. 463–476.
- Husain H.S., Shtern V., Hussain F.** Control of vortex breakdown by addition of near-axis swirl // Phys. Fluids. – 2003. – Vol. 15, N 2. – P. 271–279.
- Kachanov Yu.S.** Physical mechanisms of laminar-boundary-layer transition // Annu. Rev. Fluid Mech. – 1994. – Vol. 26. – P. 411–482.
- Kaplanski F., Rudi Ü.** Dynamics of a viscous vortex ring // Int. J. Fluid Mech. Res. – 1999. – Vol. 26, N 5–6. – P. 618–630.
- Kelly R.E.** On the resonant interaction of neutral disturbances in two inviscid shear flows // J. Fluid Mech. – 1968. – Vol. 31. – P. 789–799.
- Kelvin, Lord.** The translatory velocity of a circular vortex ring // Philos. Mag. – 1867. – Vol. 33. – P. 511–512.
- Kelvin, Lord.** Vibrations of a columnar vortex // Philos. Mag. – 1880. – Vol. 10. – P. 155–168.
- Khoo B.C., Yeo K.S., Lim D.F.** Visualization of an unconfined vortical flow // Proc. 5-th ISOPE Conf. Netherlands, 1995. – Vol. 3. – P. 645–652.
- Khoo B.C., Yeo K.S., Lim D.F., He X.** Vortex breakdown in an unconfined vortical flow // Exp. Therm. and Fluid Sci. – 1997. – Vol. 14. – P. 131–148.
- Khorrami M.R.** On the viscous modes of instability of a trailing line vortex // J. Fluid Mech. – 1991. – Vol. 225. – P. 197–212.
- Kim H.T., Kline S.J., Reynolds W.C.** The production of turbulence near a smooth wall in a turbulent boundary layer // J. Fluid Mech. – 1971. – Vol. 50. – P. 133–160.
- Klein R., Majda A.** Self-stretching of a perturbed vortex filament. I. The asymptotic equation for deviations from a straight line // Physica D. – 1991. – Vol. 49. – P. 323–352.
- Konno K., Ichikawa Y.** Solitons on a vortex filament with axial flow // Chaos, Solitons & Fractals. – 1992. – Vol. 2, N 3. – P. 237–250.
- Kribus A., Leibovich S.** Instability of strongly nonlinear waves in vortex flows // J. Fluid Mech. – 1994. – Vol. 269. – P. 247–264.
- Krishnamoorthy V.** Vortex breakdown and measurements of pressure fluctuations over slender wings: Ph. D Thesis. – Southampton Univ., 1966.
- Kuibin P.A.** On structure of vorticity field in the spherical Hicks vortex // J. Eng. Thermophys. – 2003 (в печати).

- Kuibin P.A., Okulov V.L.** Self-induced motion and asymptotic expansion of the velocity field in the vicinity of helical vortex filament // Phys. Fluids. – 1998. – Vol. 10, N 3. – P. 607–614.
- Kuibin P.A., Rudyak V.Ya., Veretentsev A.N.** Processes of the instability development in separated flows behind the plate // Separated Flows and Jets: Proc. IUTAM Symp Novosibirsk, USSR, July, 9–13 1990. – Berlin: Springer-Verlag, 1991. – P. 747–750.
- Kuwahara K., Takami H.** Numerical studies of two-dimensional vortex motion by a system of point vortices // J. Phys. Soc. Japan. – 1973. – Vol. 34, N 1. – P. 247–253.
- Lamb H.** Hydrodynamics. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1932.
- Lambourne N.C., Bryer D.W.** The bursting of leading-edge vortices – some observation and discussion on the phenomenon // Aeronaut. Res. Counc. R. and M. – 1961. – Vol. 3282. – P. 1–36.
- Landman M.J.** On the generation of helical waves in circular pipe flow // Phys. Fluids. – 1990. – A2. – P. 738–747.
- Leibovich S.** Weakly non-linear waves in rotating fluids // J. Fluid Mech. – 1970. – Vol. 42. – P. 803–822.
- Leibovich S.** The structure of vortex breakdown // Annu. Rev. Fluid Mech. – 1978. – Vol. 10. – P. 221–246.
- Leibovich S.** Vortex stability and breakdown: survey and extension // AIAA J. – 1984. – Vol. 22. – P. 1192–1206.
- Leibovich S.** Waves and bifurcations in vortex filaments // Studies of vortex dominated flows: Proc. Symp. July 9–11 1985, NASA Langley Research Center / Ed. M.Y. Hussaini, M.D. Salas: Springer, 1986. – P. 3–14.
- Leibovich S., Brown S.N., Patel Y.** Bending waves on inviscid columnar vortices // J. Fluid Mech. – 1986. – Vol. 173. – P. 595–624.
- Leibovich S., Kribus A.** Large-amplitude wavetrains and solitary waves in vortices // J. Fluid Mech. – 1990. – Vol. 216. – P. 459–504.
- Leibovich S., Ma H.Y.** Soliton propagation on vortex cores and the Hasimoto soliton // Phys. Fluids. – 1983. – Vol. 26, N 11. – P. 3173–3179.
- Leibovich S., Randall J.D.** Solitary waves in concentrated vortices // J. Fluid. Mech. – 1972. – Vol. 51, Pt 4. – P. 625–635.
- Leibovich S., Stewartson K.** A sufficient condition for the instability of columnar vortices // J. Fluid Mech. – 1983. – Vol. 126. – P. 335–356.
- Leonard A.** Vortex methods for flow simulation // J. Comput. Phys. – 1980. – Vol. 37, N 3. – P. 289–335.
- Leonard A.** Computing three-dimensional incompressible flows with vortex elements // Annu. Rev. Fluid Mech. – 1985. – Vol. 17. – P. 523–559.
- Lessen M., Deshpande N.V., Hadji-Ohanes B.** Stability of a potential vortex with a non-rotating and rigid-body rotating top-hat jet core // J. Fluid Mech. – 1973. – Vol. 60 N 3. – P. 459–466.

- Lessen M., Paillet F.** The stability of a trailing line vortex. Part II. Viscous theory // J. Fluid Mech. – 1974. – Vol. 63. – P. 769–779.
- Lessen M., Singh P.J., Paillet F.** The stability of a trailing line vortex. Part I. Inviscid theory // J. Fluid Mech. – 1974. – Vol. 65. – P. 753–763.
- Levi D., Sym A., Wojciechowski S.** N-solitons on a vortex filament // Phys. Lett. – 1983. – Vol. 94A, N 9. – P. 408–411.
- Liu J.T.C.** Coherent structures in transitional and turbulent free shear flows // Annu. Rev. Fluid Mech. – 1989. – Vol. 21. – P. 285.
- Loiseleur T., Chomaz J.M., Huerre P.** The effect of swirl on jets and wakes: linear instability of the Rankine vortex with axial flow // Phys. Fluids. – 1998. – Vol. 10, N 5. – P. 1120–1134.
- Long R.R.** A theoretical and experimental study of the motion and stability of certain atmospheric vortices // J. Meteorol. – 1951. – Vol. 8. – P. 207–221.
- Long R.R.** Steady motion around axisymmetric obstacle moving along the axis of a rotating liquid // J. Meteorol. – 1953. – Vol. 10. – P. 197–203.
- Lopez J.M.** Axisymmetric vortex breakdown. Part 1. Confined swirling flow // J. Fluid Mech. – 1990. – Vol. 221. – P. 533–552.
- Lopez J.M., Perry A.D.** Axisymmetric vortex breakdown. Part 3. Onset of periodic flow and chaotic advection // J. Fluid. Mech. – 1992. – Vol. 234. – P. 449–471.
- Ludweig H.** Stabilitat der stroemung in einem zylindrischen ringraum // Z. für Flugwiss. – 1960. – Vol. 8. – P. 135–140.
- Lugt H.J.** Vortex Flows in Nature and Technology. – NY: John Wiley & Sons, 1983. – 297 p.
- Lugt H.J.** Introduction to Vortex Theory. – Potomac, MD, USA: Vortex Flow Press, 1996. – 627 p.
- Lugt H.J., Abboud M.** Axisymmetric vortex breakdown with and without temperature effects in a container with a rotating lid // J. Fluid. Mech. – 1987. – Vol. 179. – P. 179–200.
- Lugt H.J., Haussling H.J.** Axisymmetric vortex breakdown in rotating fluid within a container // Trans. ASME: J. Appl. Mech. – 1982. – Vol. 49. – P. 921–923.
- Lundgren T.S., Ashurst W.T.** Area-varying waves on curved vortex tubes with application to vortex breakdown // J. Fluid Mech. – 1989. – Vol. 200. – P. 283–307.
- Marasli B., Champagne F.H., Wygnanski I.J.** Modal decomposition of velocity signals in a plane, turbulent wake // J. Fluid Mech. – 1989. – Vol. 198. – P. 255–273.
- Marques F., Lopez J.M.** Precessing vortex breakdown mode in an enclosed cylinder flow // Phys. Fluids. – 2001. – Vol. 13, N 6. – P. 1679–1682.
- Martemianov S.A., Okulov V.L.** Mass transfer ambiguities in swirling pipe flows // J. Appl. Electrochem. – 2002. – Vol. 32, N 1. – P. 25–34.
- Mattingly G.E., Crimale W.O.** The stability of an incompressible two-dimensional wake // J. Fluid Mech. – 1972. – Vol. 51. – P. 233–272.
- Maxworthy T.** On the structure of concentrated, columnar vortices // Astronaut. Acta. – 1972. – Vol. 17. – P. 363–374.

- Maxworthy T., Hopfinger E.J., Redekopp L.G.** Wave motions on vortex cores // J. Fluid Mech. – 1985. – Vol. 151. – P. 141–165.
- Mayer E.W., Powell K.G.** Viscous and inviscid instabilities of a trailing vortex // J. Fluid Mech. – 1992. – Vol. 245. – P. 91–114.
- Michalke A., Schade H.** Zur stabilität von freien grenzschesen // Ing.-Archiv. – 1963. – Bd 33, H. 1. – S. 1–23.
- Moffatt H.K.** The degree of knottedness of tangled vortex lines // J. Fluid Mech. – 1969. – Vol. 35. – P. 117–129.
- Moffatt H.K.** Simple topological aspects of turbulent vorticity dynamics // Proc. IUTAM Symp. on Turbulence and Chaotic Phenomena in Fluids / Ed. T. Tatsumi. – Elsevier, 1984. – P. 223–230.
- Moffatt H.K., Tsinober A.** Helicity in laminar and turbulent flow // Annu. Rev. Fluid Mech. – 1992. – Vol. 24. – P. 281–312.
- Mollenkopf G., Raabe J.** Measurements of velocity and pressure in the draft tube of a Francis turbine. B3 // Presented at 5-th IAHR Symposium. – Stockholm, Sweden 1970.
- Moore D.W.** Finite amplitude waves on aircraft trailing vortices // Aeronaut. Q. – 1972. – Vol. 23. – P. 307.
- Moore D.W.** The effect of compressibility on the speed of propagation of a vortex ring // Proc. R. Soc. London. – 1985. – A397. – P. 87–97.
- Moore D.W., Saffman P.G.** The motion of a vortex filament with axial flow // Philos Trans. R. Soc. London. – 1972. – A272. – P. 403–429.
- Murakami M.** Vibration of water-turbine draft tubes // J. Eng. for Power (Trans. ASME Ser. A.). – 1961. – Vol. 83, N 1. – P. 36–42.
- Neitzel G.P.** Streak-line motion during steady and unsteady axisymmetric vortex break down // Phys. Fluids. – 1988. – Vol. 31. – P. 958–960.
- Nemirovskii S.K., Tsubota M.** On stochastic motion of vortex loop // J. Low Temp Phys. – 2000. – Vol. 119, N 3/4. – P. 323–328.
- Nigam S.D., Nigam P.D.** Wave propagation in rotating liquids // Proc. R. Soc. London. – 1962. – A266. – P. 247–256.
- Nishioka M., Miyagi T.** Measurements of velocity distribution in the laminar wake of a flat plate // J. Fluid Mech. – 1978. – Vol. 84. – P. 705–715.
- Norbury J.** A family of steady vortex rings // J. Fluid Mech. – 1973. – Vol. 57. – P. 417–431.
- Okulov V.L.** The velocity field induced by vortex filaments with cylindrical and conic supporting surface // Russ. J. Eng. Thermophys. – 1995. – Vol. 5, N 2. – P. 63–75.
- Okulov V.L., Sørensen J.N., Voigt L.K.** L-transition from right- to left-handed helical vortices // Tubes, sheets and singularities in fluid dynamics. – Dordrecht: Kluwe Acad. Publishers, 2001. – P. 55–60.
- Olendraru C., Seller A.** Viscous effects in the absolute-convective instability of the Batchelor vortex // J. Fluid Mech. – 2002. – Vol. 459. – P. 371–396.

- Olendraru C., Sellier A., Rossi M., Huerre P.** Absolute / convective instability of the Batchelor vortex // C.R. Acad. Sci. Paris. Ser. II b. – 1996. – Vol. 323. – P. 153–159.
- Panda J., McLaughlin D.K.** Experiments on the instabilities of a swirling jet // Phys. Fluids. – 1994. – Vol. 6, N 1. – P. 263–275.
- Peckham D., Atkinson S.** Preliminary results of low speed wind tunnel tests on a Gothic wing of aspect ratio 1.0 // Aeronaut. Res. Counc. – CP-508, 1957.
- Pereira J.C.F., Sousa J.M.M.** Confined vortex breakdown generated by a rotating cone // J. Fluid. Mech. – 1999. – Vol. 385. – P. 287–323.
- Perry A.E., Lim T.T.** Coherent structures in coflowing jets and wakes // J. Fluid. Mech. – 1978. – Vol. 88, N 3. – P. 451–463.
- Pierce D.** Photographic evidence of the formation and growth of vorticity behind plates accelerated from rest in still air // J. Fluid Mech. – 1961. – Vol. 11. – P. 460–464.
- Pierrehumbert R.T.** A family of steady, translating vortex pairs with distributed vorticity // J. Fluid Mech. – 1980. – Vol. 99. – P. 129–144.
- Pocklington H.C.** The complete system of the periods of a hollow vortex ring // Philos. Trans. R. Soc. London. – 1895. – A186. – P. 603–619.
- Prandtl L.** Tragflügeltheorie II. Mitteilungen, Nachrichten. Ges. Wiss. Göttingen // Math.-Phys., 1919. Kl. 107–37. (Also 1920 N.A.C.A. T.N. 10 Calculation of core of rolled up vortex by energy.)
- Pritchard W.G.** Solitary waves in rotating fluids // J. Fluid Mech. – 1970. – Vol. 42, Pt 1. – P. 61–83.
- Proudman J.** On the motion of solids in liquids possessing vorticity // Proc. R. Soc. London. – 1916. – A92. – P. 408–424.
- Pullin D.I.** The large-scale structure of unsteady self-similar rolled-up vortex sheets // J. Fluid Mech. – 1978. – Vol. 88. – P. 401–430.
- Pullin D.I.** Contour dynamics methods // Annu. Rev. Fluid Mech. – 1991. – Vol. 24. – P. 84–115.
- Rayleigh, Lord.** On the stability, or instability, of certain fluid motions // Proc. London Math. Soc. – 1880. – Vol. 11. – P. 57–70.
- Rayleigh, Lord.** On the dynamics of revolving fluids // Proc. R. Soc. London. – 1916. A93. – P. 148–154.
- Ricca R.L.** The effect of torsion on the motion of a helical vortex filament // J. Fluid Mech. – 1994. – Vol. 273. – P. 241–259.
- Ricca R.L.** The contributions of Da Rios and Levi-Civita to asymptotic potential theory and vortex filament dynamics // Fluid Dynamics Res. – 1996. – Vol. 18. – P. 245–268.
- Roberts K.V., Christiansen J.P.** Topics in computational fluid mechanics // Comput. Phys. Commun. – 1972. – Vol. 3. – P. 14–32.
- Rosenhead L.** The spread of vorticity in the wake behind a cylinder // Proc. R. Soc. London. – 1930. – A127. – P. 590–612.

- Rott N.** Diffraction of weak shock wave with vortex generation // *J. Fluid Mech.* – 1956. – Vol. 1. – P. 111–129.
- Rott N.** On the viscous core of a line vortex // *Z. Angew. Math. Phys.* – 1958. – Vol. 9. – P. 543–553.
- Rott N., Cantwell B.** Vortex drift. I. Dynamic interpretation // *Phys. Fluids A.* – 1993a. – Vol. 5, N 6. – P. 1443–1450.
- Rott N., Cantwell B.** Vortex drift. II. The flow potential surrounding a drifting vortical region // *Phys. Fluids A.* – 1993b. – Vol. 5, N 6. – P. 1451–1455.
- Saffman P.G.** The velocity of viscous vortex rings // *Stud. Appl. Math.* – 1970. – Vol. 49. – P. 371–380.
- Saffman P.G.** *Vortex Dynamics*. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1992. – 311 p.
- Saffman P.G., Baker G.R.** Vortex interactions // *Annu. Rev. Fluid Mech.* – 1979. – Vol. 11. – P. 95–122.
- Saffman P.G., Tanveer S.** The touching pair of equal and opposite uniform vortices // *Phys. Fluids*. – 1982. – Vol. 25. – P. 1929–1930.
- Sarpkaya T.** On stationary and travelling vortex breakdowns // *J. Fluid Mech.* – 1971. – Vol. 45. – P. 545–559.
- Sarpkaya T.** Turbulent vortex breakdown // *Phys. Fluids*. – 1995. – Vol. 7, N 10. – P. 2301–2303.
- Sarpkaya T., Novak F.** Turbulent vortex breakdown: experiments in tubes at high Reynolds numbers // *IUTAM Symp. on Dynamics of Slender Vortices* /Ed. E. Krause and K. Gersten. – Kluwer Academic Publishers, 1997. – P. 287–296.
- Sato H., Kuriki K.** The mechanism of transition in the wake of a thin flat plate placed parallel to a uniform flow // *J. Fluid Mech.* – 1961. – Vol. 11. – P. 321–342.
- Scully M.P.** Computation of helicopter rotor wake geometry and its influence on rotor harmonic airloads // Massachusetts Inst. of Technology Publ. ARSL TR 178–1. – Cambridge, 1975.
- Seal C.V., Smith C.R.** Interwining laminar necklace vortices // *Phys. Fluids*. – 1997. – Vol. 9, N 9. – P. S9.
- Serre E., Pulicani J.P.** A three-dimensional pseudospectral method for rotating flows in a cylinder // *Comput. Fluids*. – 2001. – Vol. 30, N 4. – P. 491–519.
- Shen W.Z., Michelsen J.A., Sørensen J.N.** Improved Rhie-Chow interpolation for unsteady flow computations // *AIAA J.* – 2001. – Vol. 39, N 2. – P. 2406–2409.
- Shimizu S.** Discrete-vortex simulation of a two-dimensional turbulent impinging jet // *Bull. JSME*. – 1986. – Vol. 29, N 254. – P. 2440–2446.
- Shtern V., Hussain F.** Instabilities of conical flows causing steady bifurcations // *J. Fluid. Mech.* – 1998. – Vol. 366. – P. 33–85.
- Sørensen J.N.** Visualization of rotating fluid flow in a closed cylinder // Rep. AFM 92–06. Department of Fluid Mech. · Technical Univ. of Denmark, 1992.

- Sørensen J.N., Hansen M.O.L., Christensen E.A.** Numerical investigation of symmetry breakdown in a cylindrical lid driven cavity // Proc. ECCOMAS-96. – Published by J. Wiley & Sons, – 1996. – FS2. – P. 1–6.
- Sørensen J.N., Loc T.P.** High-order axisymmetric Navier–Stokes code: description and evaluation of boundary condition // Int. J. Numer. Methods Fluids. – 1989. – Vol. 9. – P. 1517–1537.
- Sørensen J.N., Okulov V., Naumov I., Varlamova E.** Comparison of rotating flows with vortex breakdown in cylindrical and quadratic containers // Proc. 5th World Conf. on Experimental Heat Transfer, Fluid Mechanics and Thermodynamics / Ed. G.P. Celata et al. – 2001. – Vol. 3. – P. 2435–2440.
- Sotiropoulos F., Ventikos Y.** The three-dimensional structure of confined swirling flows with vortex breakdown // J. Fluid Mech. – 2001. – Vol. 426. – P. 155–175.
- Sotiropoulos F., Webster D.R., Lackey T.C.** Experiments on Lagrangian transport in steady vortex-breakdown bubbles in a confined swirling flow // J. Fluid Mech. – 2002. – Vol. 466. – P. 215–248.
- Sozou C.J., Swithenbank J.** Adiabatic transverse waves in a rotating fluid // J. Fluid. Mech. – 1969. – Vol. 38. – P. 657–671.
- Spalart P.R.** Airplane trailing vortices // Annu. Rev. Fluid Mech. – 1998. – Vol. 30. – P. 107–138.
- Spohn A., Mory M., Hopfinger E.J.** Observations of vortex breakdown in an open cylindrical container with rotating bottom // Exp. in Fluids. – 1993. – Vol. 14. – P. 70–77.
- Spohn A., Mory M., Hopfinger E.J.** Experiments on vortex breakdown in a confined flow generated by a rotating disc // J. Fluid. Mech. – 1998. – Vol. 370. – P. 73–99.
- Squire H.B.** Rotating fluids // Surveys in Mechanics. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1956. – P. 139–161.
- Stevens J.L., Lopez J.M., Cantwell B.J.** Oscillatory flow states in an enclosed cylinder with a rotating endwall // J. Fluid Mech. – 1999. – Vol. 389. – P. 101–118.
- Sullivan R.D.** A two-cell vortex solution of the Navier–Stokes equations // J. Aerosp. Sci. – 1959. – Vol. 26, N 11. – P. 767.
- Sym A.** Soliton surfaces – VI – Gauge invariance and final formulation of the approach // Lett. Nuovo Cimento. – 1984. – Vol. 41. – P. 353–360.
- Synge J.L.** The stability of heterogeneous liquids // Trans. R. Soc. Canada, 1933. – Vol. 27, N 1. – P. 1–18.
- Takaki R., Hussain A.K.F.M.** Dynamics of entangled vortex filaments // Phys. Fluids. – 1984. – Vol. 27, N 4. – P. 761–763.
- Tani I., Komoda H., Komatsu Y.** Boundary-layer transition by isolated roughness // Aeronaut. Res. Inst. Rept. 375. – Univ. Tokyo. Nov, 1962.
- Tatsumi T., Kakutani T.** The stability of two-dimensional jet // J. Fluid Mech. – 1958. – Vol. 4. – P. 261–275.

- Taylor G.I.** Experiments on the motion of solid bodies in rotating fluids // Proc. R. Soc. London. – 1923. – A104. – P. 213–218.
- Thomson J.J.** A Treatise on the Motion of Vortex Rings. – L.: Mac-Millan, 1883.
- Ting L.** Studies in the motion and decay of vortices // Aircraft Wake Turbulence and its Detection. – N.Y.: Plenum Press, 1971. – P. 11–39.
- Ting L., Klein R.** Viscous vortical flows // Lecture Notes in Physics. – N.Y.: Springer Verlag, 1991. – Vol. 374.
- Tsitverblit N.** Vortex breakdown in cylindrical container in the light of continuation of a steady solution // Fluid Dyn. Res. – 1993. – Vol. 11. – P. 19–35.
- Tung C., Ting L.** Motion and decay of a vortex ring // Phys. Fluids. – 1967. – Vol. 10, N 5. – P. 901–910.
- Uberoi M.S., Chow C.Y., Narain J.P.** Stability of coaxial rotating jet and vortex of different densities // Phys. Fluids. – 1972. – Vol. 15. – P. 1718–1727.
- Valentine D.T., Janke C.C.** Flows induced in cylinder with both end walls rotating // Phys. Fluids. – 1994. – Vol. 6, N 8. – P. 2702–2710.
- Vogel H.U.** Experimentelle ergebnisse über die laminare strömung in einem zylindrischen gehäuse mit darin rotierender scheibe. – Max Plank Inst., 1968. – Bericht 6.
- Wadati M., Konno K., Ichikawa Y.H.** New integrable nonlinear evolution equations // J. Phys. Soc. Japan. – 1979. – Vol. 47. – P. 1698–1700.
- Widnall S.E.** The stability of helical vortex filament // J. Fluid Mech. – 1972. – Vol. 54. – P. 641–663.
- Widnall S.E., Bliss D.B.** Slender-body analysis of the motion and stability of a vortex filament containing an axial flow // J. Fluid Mech. – 1971. – Vol. 50. – P. 335–353.
- Widnall S.E., Bliss D.B., Zalay A.** Theoretical and experimental study of the stability of a vortex pair // Proc. Symp. on Aircraft Wake Turbulence. – Seattle, Washington, Plenum, 1971. – P. 305–338.
- Wu C., Farokhi S., Taghavi R.** Spatial instability of a swirling jet – theory and experiment // AIAA J. – 1992. – Vol. 30, N 6. – P. 1545–1552.
- Wygnanski I., Champagne F., Marasli B.** On the large-scale structures in two-dimensional small-deficit, turbulent wakes // J. Fluid Mech. – 1986. – Vol. 168. – P. 31–71.
- Yazdabadi P.A., Griffiths A.J., Syred N.** Characterization of the PVC phenomena in the exhaust of cyclone dust separator // Exp. in Fluids. – 1994. – Vol. 17. – P. 84–95.
- Zabusky N.J., Hughes M.H., Roberts K.V.** Contour dynamics for the Euler equations in two-dimensions // J. Comput. Phys. – 1979. – Vol. 30. – P. 96–106.

СПИСОК ОСНОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

<i>A</i>	амплитуда
A	векторный потенциал
<i>a</i>	радиус
<i>c</i>	фазовая скорость
<i>c_g</i>	групповая скорость
<i>d</i>	диаметр
<i>E</i>	константа Эйлера
e_r, e_θ, e_s	тройка единичных ортогональных векторов в локальной цилиндрической системе координат
F	сила
<i>f</i>	частота, функция
g	массовая сила
H	спиральность
<i>H</i>	константа Бернулли, гамильтониан
I	вихревой импульс
<i>I_m, K_m</i>	модифицированные функции Бесселя
i, j, k	тройка единичных ортогональных векторов
<i>k</i>	волновое число, параметр
L	длина усечения
<i>L₁, L₂, L₃</i>	коэффициенты Ламе
<i>l</i>	шаг винта
M	вихревой момент импульса
<i>m</i>	азимутальное волновое число
<i>p</i>	давление
<i>Q</i>	расход
<i>R</i>	радиус
R	радиус-вектор
<i>r, θ, z</i>	цилиндрическая система координат
Re	число Рейнольдса $\left(= \frac{Wd}{v} \right)$
Ri	число Ричардсона $\left(= \frac{g}{\rho} \frac{dp}{dr} \left(\frac{dW}{dr} \right)^{-2} \right)$
Ro	число Россби $\left(= \frac{Wk}{2\Omega} \right)$

<i>S</i>	площадь, параметр крутки
<i>s</i>	длина дуги, расстояние
<i>T</i>	кинетическая энергия, сила натяжения, параметр
<i>t</i>	время
<i>t, n, b</i>	тройка единичных ортогональных векторов (касательная, нормаль и бинормаль)
<i>U, V, u, v</i>	векторы скорости
<i>u, v, w, U, V, W</i>	компоненты скорости в декартовой или цилиндрической системе координат
<i>V</i>	объем
W	комплексный потенциал
X	радиус-вектор точки на вихревой нити
<i>x, y, z</i>	декартова система координат
<i>z</i>	комплексная переменная ($= x + iy$, $= z_1 + iz_2$)

Греческие символы

α, β	параметры
Γ	циркуляция, интенсивность вихря
$\delta()$	дельта-функция Дирака
ϵ	радиус ядра вихревой нити, малый параметр
ζ	комплексная переменная ($= \xi + i\eta$, $= \zeta_1 + i\zeta_2$)
θ	фаза, угол
κ	кривизна
ν	кинематическая вязкость, параметр
ρ	радиус, плотность
τ	кручение, относительный шаг
φ	потенциал, угол
χ	переменная ($= \theta - z/l$)
χ	интенсивность вихревой пелены
ψ, Ψ	функция тока
ω	завихренность, частота
$\boldsymbol{\omega}$	вектор завихренности
Ω	частота, телесный угол
$\boldsymbol{\Omega}$	угловая скорость

Жирным шрифтом выделены комплексные и векторные величины.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

В

- Вектор Бельтрами 55
— бинормальный 85
— касательный 85
— нормальный 85
— соленоидальный 24
Вихрь Бюргерса 163
— Бюргерса–Ротта 229
— винтовой одномерный 151
— винтовой с конечным ядром 159
— Гаусса 150
— Ламба–Озенна 97
— левовинтовой 430
— полый 187, 291
— присоединенный 68
— разгонный 357
— Рэнкина 147
— точечный 92, 320
— Салливана 166
— Хикса 141
— Хилла 138
Возмущение субгармоническое 351
Волны бездисперсионные 179
— "быстрые" 237
— винтовые постоянной амплитуды 441
— изгибные 236
— изгибные изолированные 441
— инерционные 175
— Кельвина 199
— "медленные" 237
— нелинейные 225
— осесимметричные 177
— плоские 172
— стоячие 225
— стоячие плоские 441
Вращение квазиверное 54
— твердотельное 172

Г

- Гамильтониан вихревого движения 322
Генерация завихренности 327
Гипотеза Жуковского–Кутта 329

Д

- Движение безвихревое 24
— вихревой нити самоиндцированное 97
— врацательное 25
— жидкости незакрученное (продольное) осесимметричное 49
— — осесимметричное с закруткой 51
— — плоскопараллельное 47
— чисто деформационное 25
Динамика свивовых течений 351
Диполь вихревой 94
Дисперсия волн 179
— распределения завихренности 82
Диффузия вихревой нити 95
Дорожка вихревая 370

Ж

- Жидкость вязкая 35
— идеальная 28
— несжимаемая 60

З

- Завихренность 24
Закон Био–Савара 88

И

- Изменение винтовой симметрии 433
Импульс жидкости 71
— — вихревой 71

Инварианты вихревого движения 64
 — двумерных течений 79
 Интеграл Коши–Лагранжа 34
 Интенсивность вихревой трубы 27
 Интенсификация завихренности 32

К

Коллапс вихрей 348
 Кольцо вихревое 130, 249
 — бесконечно тонкое 101
 Контур жидкий 27
 Коэффициенты Ламе 37
 Кривизна 85
 Критерии неустойчивости 213
 Критерий Рэлея 213
 Кручение 85

Л

Лагранжиан вихревого движения 322
 Линии тока 26
 Линия винтовая 86
 — вихревая 26

М

Метод баланса импульса 279
 — дискретных вихрей 320
 — отражения 94
 — присоединенных вихрей 327
 — срашиваемых асимптотических
 разложений 302
 — усечения 246
 Мода варикозная 370
 — встречная 203
 — вязкая 221
 — изгибающая 169, 202
 — осесимметрическая 169, 190, 200
 — радиальная 201, 206
 — спиральная 192
 — спутная 204
 Модели дискретные вихревые
 консервативные 321
 Момент импульса 73
 — вихревой 73

Н

Неустойчивость временная 188
 — Кельвина–Гельмгольца 172, 189, 190
 — пространственная 197
 Нить вихревая 84, 401, 402
 — бесконечно тонкая 84
 — винтовая 106
 — прямолинейная 91
 — свободная 443
 — синусоидальная 252

П

Параметр крутки 183, 394
 — конструктивный 395
 Пелена вихревая 125, 169, 186
 — плоская 126, 129
 — цилиндрическая 127, 128
 Плоскость соприкасающаяся 85
 Плотность объемных источников 60
 Поляризация волн круговая 177
 Потенциал скорости 34
 Поток винтовой (течение
 Бельтрами) 34, 43
 — неоднородный 44
 — одномерный 150
 — однородный 44
 — с винтовой симметрией поля
 течения 59
 Поток вихря 27
 Прецессия вихря 378
 Приближение локальное
 индукционное 101, 309
 Принцип построения вихревых
 моделей вариационный 321

Р

Радиус кривизны 85
 Распад вихря 443
 — бегущий 442
 — двухспиральный 443, 450
 — конический 443, 454
 — пузырьковый 443, 457
 — закрытый 452

— открытый 452
 — уплощенный 451
 — спиральный 443
 — искаженный 451

Растяжение вихревых линий 32, 206
 Регуляризация поля скорости точечных
 вихрей 321
 Решение двухсолитонное 314
 — многосолитонное 312
 — солитонное 235, 244

С

Сила вихревая 68
 — Кориолиса 173
 — Кутта–Жуковского 279
 — натяжения 280
 Симметрия винтовая 54
 Система координат тороидальная 284
 — криволинейных координат
 ортогональная 36
 Скорость групповая 175
 — фазовая 175
 Следствие II теоремы Гельмгольца 27
 Солитон вихревой 276
 — Хасимото 268
 Солитоны 243
 Соотношения дисперсионные 182, 199
 Спираль двойная 433
 Спиральность 77
 Столб Тейлора 180
 Структура правовинтовая 431

Т

Тензор скоростей деформации 25
 Теорема Бернулли 33
 — Кельвина 28
 — Лагранжа 32
 — Праудмена 180
 — Стокса (интенсивность вихревой
 трубки) 27
 — Стокса (преобразование интегралов) 26
 — I Гельмгольца 25
 — II Гельмгольца 27
 Течение двумерное 46
 — жидкости одномерное 53
 — ламинарное 450

— однородное 53
 — с винтовой завихренностью 56
 — с винтовой симметрией 54
 — сдвиговое 53
 Точка застоя 443
 Трехграницник сопровождающий 85
 Трубка вихревая 26
 — тока 26

У

Уравнение Bragg & Hawthorne 227
 — Howard & Gupta 217
 — Гельмгольца 29
 — Кортевега–де Вриза 235, 236
 — модифицированное 311
 — Нуассона 61
 — сохранения массы 28
 — в ортогональной системе
 криволинейных координат 38
 — Хироты 311
 — Шредингера 243, 270
 Уравнения Гамильтона для вихревых
 частиц 323
 — Громеки–Ламба 29
 — в ортогональной системе
 криволинейных координат 38
 — движения в неинерциальной системе
 координат 29
 — вихревых частиц 320
 — жидкости в декартовой системе
 координат 39
 — в ортогональной системе
 криволинейных координат 38
 — в сферической системе
 координат 41
 — в цилиндрической системе
 координат 40
 — Навье–Стокса 35
 — неразрывности в ортогональной системе
 криволинейных координат 37
 — Серре–Френе 86
 — Эйлера 28
 Устойчивость Q-вихря 215, 221
 — вихревой пелены 169
 — вихревых течений 167
 — вихря Рэнкина 182
 — следа 367

Ф

- Форма уравнений движения гамильтонова 322
Формула Кутта–Жуковского 67
Функция тока 47
— меридионального сечения 51
— Стокса 50
— формы вихревой частицы 325

Ц

- Центр завихренности 82
Циркуляция 25, 27

Ч

- Частицы вихревые 321
Число волновое азимутальное 167
— Рейнольдса 222
— Ричардсона 214
— Россби 176

Э

- Энергия жидкости кинетическая 76

Я

- Ядро вихревое прецессирующее 420
Q-вихрь 158

*Алексеенко Сергей Владимирович
Куйбин Павел Анатольевич
Окутов Валерий Леонидович*

**ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ
КОНЦЕНТРИРОВАННЫХ ВИХРЕЙ**

Редактор Т А Никигина
Корректор Г А Родина

ИД № 00677 от 05 01 2000 г

Сдано в набор 15 07 03 г Подписано к печати 29 10 03 г Формат 70×10⁰
Печать офсетная Уч -изд л 36,2 Тираж 500 экз Заказ № 163

Институт теплофизики СО РАН, 630090, г Новосибирск
просп Академика Лаврентьева, 1