В.С. АНИЩЕНКО

СЛОЖНЫЕ КОЛЕБАНИЯ В ПРОСТЫХ СИСТЕМАХ

МЕХАНИЗМЫ ВОЗНИКНОВЕНИЯ, СТРУКТУРА И СВОЙСТВА ДИНАМИЧЕСКОГО ХАОСА В РАДИОФИЗИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

МОСКВА "НАУКА"
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1990

ББК 22.33
А67
УДК 537.86

Рецензент
доктор физико-математических наук *П.Н. Юшманов*

А н и щ е н к о В.С. **Сложные колебания в простых системах: Механизмы возникновения, структура и свойства динамического хаоса в радиофизических системах.** – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. – 312 с. – ISBN 5-02-014168-2.

Методами численного и физического экспериментов исследуются общие закономерности развития и свойства хаотических колебаний на примере радиофизических систем. Анализируются типичные бифуркации регулярных и странных аттракторов, вызываемые изменением параметров и воздействием флуктуаций. Обосновывается методика экспериментальных исследований динамического хаоса, приводятся алгоритмы и принципы построения программ для ЭВМ, базирующихся на результатах современной теории динамических систем.

Для научных работников, инженеров-исследователей, аспирантов и студентов, специализирующихся в области теории нелинейных колебаний и волн и ее приложений.

Табл. 6. Ил. 156. Библиогр.: 268 назв.

Научное издание

А н и щ е н к о Вадим Семенович

СЛОЖНЫЕ КОЛЕБАНИЯ В ПРОСТЫХ СИСТЕМАХ:

Механизмы возникновения, структура и свойства динамического хаоса в радиофизических системах

Заведующий редакцией *Л.И. Гладнева*. Редактор *Н.А. Михалина*
Младший редактор *В.А. Кузнецова*. Художественный редактор *Т.Н. Кольченко*
Технические редакторы *С.В. Геворкян, С.Н. Баронина*
Корректоры *Е.Ю. Рычагова, Н.П. Круглова, Т.В. Обод, Т.А. Печко*

Набор осуществлен в издательстве на наборно-печатающих автоматах

ИБ № 32806

Сдано в набор 02.10.89. Подписано к печати 10.01.90. Т–06412
Формат 60 × 90 / 16. Бумага офсетная
Гарнитура Пресс-Роман. Печать офсетная
Усл.печ.л. 19,5. Усл.кр.-отт. 19,5. Уч.-изд.л. 21,24
Тираж 2000 экз. Тип.зак. *905* . Цена 4 р. 60 к.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство "Наука"
Главная редакция физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Четвертая типография издательства "Наука"
630077 г. Новосибирск-77, ул. Станиславского, 25

А $\frac{1604050000-011}{053(02)-90}$ 84-90

© "Наука". Физматлит, 1990

ISBN 5-02-014168-2

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 7

Глава 1. ОСНОВЫ ДИНАМИЧЕСКОГО ПОДХОДА К ОПИСАНИЮ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ЯВЛЕНИЙ 10

1.1. Динамическая система и ее математическая модель 10
1.2. Кинематическая интерпретация системы дифференциальных уравнений 11
1.3. Классификация динамических систем 12
1.4. Колебательные системы и их свойства 13
1.5. Фазовые портреты типовых колебательных систем 15
1.6. Автоколебательные системы 20
1.7. Регулярные и странные аттракторы динамических систем 22

Глава 2. ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ 26

2.1. Устойчивость решений дифференциальных систем по линейному приближению. Уравнения в вариациях 26
2.2. Спектры ляпуновских характеристических показателей фазовой траектории динамической системы 27
2.3. Устойчивость состояний равновесия 29
2.4. Устойчивость периодических решений. Мультипликаторы предельного цикла 30
2.5. Устойчивость квазипериодических и хаотических решений 31
2.6. Системы с дискретным временем. Отображение Пуанкаре 34
2.7. Устойчивость решений дискретных систем 36

Глава 3. ТИПИЧНЫЕ БИФУРКАЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ 38

3.1. Структурная устойчивость и бифуркации 38
3.2. Бифуркации состояний равновесия 39
3.3. Бифуркации периодических решений 44
3.4. Нелокальные бифуркации в окрестности двоякоасимптотических траекторий 53

Глава 4. СТРАННЫЕ АТТРАКТОРЫ 55

4.1. Эргодичность динамических систем 55
4.2. Экспоненциальная неустойчивость и перемешивание. Энтропия Колмогорова 59
4.3. Гомоклинические траектории и стохастичность 62

4.4. Размерность и геометрическая структура аттракторов 64
4.5. Классификация странных аттракторов 70
4.6. Бифуркации странных аттракторов 71
4.7. Динамический хаос в присутствии флуктуаций 73

Глава 5. МЕХАНИЗМЫ РАЗВИТИЯ И КРИТЕРИИ ДИНАМИЧЕСКОЙ СТОХАСТИЧНОСТИ 78

5.1. О возникновении динамического хаоса 78
5.2. Переход к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода. Универсальность Фейгенбаума 80
5.3. Динамика систем с гомоклинической кривой состояния равновесия типа седло-фокус. Теорема Шильникова 87
5.4. Механизмы перехода к стохастичности в результате бифуркаций квазипериодических колебаний 90
5.5. Взаимодействие аттракторов. Перемежаемость 99

Глава 6. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ХАОСА 104

6.1. Экспериментальный подход к исследованиям динамики нелинейных систем 104
6.2. Расчет отображений Пуанкаре 106
6.3. Численный анализ периодических решений и их бифуркаций 112
6.4. Численный анализ статистических свойств аттракторов 119
6.5. Алгоритмы вычисления спектра ляпуновских характеристических показателей 124
6.6. Метод численного построения особых решений системы дифференциальных уравнений типа сепаратрис и сепаратрисных контуров 127
6.7. Алгоритмы расчета размерности аттракторов 132

Глава 7. МОДИФИКАЦИЯ КЛАССИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ГЕНЕРАТОРА С ИНЕРЦИОННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ. БИФУРКАЦИОННЫЙ АНАЛИЗ РЕГУЛЯРНЫХ РЕЖИМОВ КОЛЕБАНИЙ 136

7.1. Обобщенные уравнения генераторов с полутора степенями свободы 136
7.2. Формулировка уравнений модифицированного генератора с инерционной нелинейностью 140
7.3. Периодические режимы колебаний в генераторе и их бифуркации при вариации параметров 144

Глава 8. ДИНАМИКА МОДИФИЦИРОВАННОГО ГЕНЕРАТОРА С ИНЕРЦИОННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ В РЕЖИМЕ АВТОНОМНЫХ КОЛЕБАНИЙ 153

8.1. Двупараметрический анализ перехода к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода 153
8.2. Отображение Пуанкаре системы и возможность его одномерной аппроксимации 158

Глава 9. ДИНАМИКА МОДИФИЦИРОВАННОГО ГЕНЕРАТОРА С ИНЕРЦИОННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ В РЕЖИМЕ АВТОНОМНЫХ КОЛЕБАНИЙ (ПРОДОЛЖЕНИЕ) 166

9.1. Режимы колебаний в закритической области значений параметров. Гистерезис и переход к хаосу через перемежаемость, индуцированную флуктуациями 166
9.2. Взаимодействие странных аттракторов. Перемежаемость типа "хаос – хаос" 174
9.3. Влияние диссипативной нелинейности на бифуркации аттракторов 178

Глава 10. МЕХАНИЗМЫ ОБРАЗОВАНИЯ, СТРУКТУРА И СВОЙСТВА КВАЗИАТТРАКТОРОВ И ГОМОКЛИНИЧЕСКИЕ ТРАЕКТОРИИ АВТОНОМНОЙ МОДЕЛИ ГЕНЕРАТОРА 183

10.1. Динамика генератора в окрестности гомоклинической траектории типа петли сепаратрисы седло-фокуса 183
10.2. Роль гомоклинических траекторий седловых циклов в бифуркациях хаотических аттракторов 192
10.3. Физическая интерпретация возбуждения сложных колебательных процессов в модифицированном генераторе с инерционной нелинейностью 198

Глава 11. ВЛИЯНИЕ ВНЕШНИХ ФЛУКТУАЦИЙ, СТАТИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА И РАЗМЕРНОСТЬ АТТРАКТОРОВ СЕДЛО-ФОКУСНОГО ТИПА 202

11.1. Бифуркации аттракторов в присутствии шумов 202
11.2. Время корреляции и энтропия хаоса при обратных бифуркациях удвоения периода квазиаттракторов 205
11.3. Типичные законы распределения и их эволюция с изменением параметров и интенсивности флуктуаций квазиаттракторов седло-фокусного типа 209
11.4. О размерности аттрактора 215

Глава 12. РАЗРУШЕНИЕ ДВУХЧАСТОТНЫХ КОЛЕБАНИЙ В НЕАВТОНОМНОМ ГЕНЕРАТОРЕ С ИНЕРЦИОННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ. ТОР-АТТРАКТОРЫ И ИХ СВОЙСТВА 219

12.1. Общая постановка задачи 219
12.2. Бифуркационная диаграмма неавтономного генератора в окрестности основного резонанса. Численный эксперимент 221
12.3. Экспериментальная диаграмма разбиения плоскости параметров системы (12.1) на секторы с различными колебательными режимами 224
12.4. Бифуркация удвоения одного из периодов движения на двумерном торе. Мягкий переход к хаосу при потере тором гладкости 228
12.5. Бифуркационные механизмы рождения тор-хаоса при разрушении двухчастотных колебаний 232
12.6. Универсальные количественные закономерности мягкого перехода к хаосу через разрушение двумерного тора 237

Глава 13. ЗАКОНОМЕРНОСТИ РАЗРУШЕНИЯ КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ С ДВУМЯ И ТРЕМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ЧАСТОТАМИ 247

13.1. Переходы к тор-хаосу в автономной системе двух связанных генераторов 247
13.2. Качественное описание бифуркационных явлений в системе связанных генераторов с помощью модельного отображения 253
13.3. Закономерности в переходах к хаосу через режим квазипериодических колебаний с тремя независимыми частотами 261
13.4. Влияние внешних флуктуаций и статистические характеристики тор-аттракторов 271

Глава 14. ПЕРЕХОДЫ К ХАОСУ В РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМАХ И СТРАННЫЕ АТТРАКТОРЫ 279

14.1. Странные аттракторы и турбулентность 279
14.2. Переход к хаосу через маломерный аттрактор в течении Куэтта – Тейлора 280
14.3. Развитие и свойства хаоса в полубесконечной однонаправленно связанной цепочке генераторов 283

14.4. Пространственная синхронизация и бифуркации развития хаоса в цепочке связанных генераторов с инерционной нелинейностью 285
14.5. Механизмы возникновения и эволюция хаоса в низкотемпературной плазме стратифицированного положительного столба газового разряда 295
Список литературы 301

Светлой памяти отцов
(моего и жены моей)

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эффект хаотизации движений в детерминированных нелинейных системах, еще совсем недавно казавшийся просто невероятным в рамках традиционных стереотипов классической механики и теории колебаний, сейчас уже представляется как научно обоснованное явление фундаментальной значимости. Для этого потребовалось 25 лет интенсивных исследований.

Однако интерес к этой тематике не только не ослабевает, но продолжает нарастать, о чем свидетельствует увеличивающийся поток научной информации, большое количество конференций и научных школ по проблемам стохастичности. В чем же причины столь многолетней популярности проблемы динамического хаоса, блеск новизны которой, казалось бы, успел потускнеть? Их, безусловно, много, но наиболее важными, на мой взгляд, являются две следующие.

Первая причина заключается в общем междисциплинарном характере этого явления. На наших глазах усилиями специалистов различных областей знаний формируется самостоятельный раздел нелинейной теории колебаний. Утверждается принципиально новое естественнонаучное мировоззрение, указывающее качественно иные подходы к решению сложных проблем физики нелинейных явлений.

Вторая причина обусловлена широким спектром экспериментальных приложений теории детерминистического хаоса в различных областях знаний. Овладев теорией стохастичности, экспериментаторы получили возможность создания генераторов хаотических автоколебаний и управления их физическими характеристиками для разработки новых практически важных технических устройств.

За последние годы появилось много интересных книг о динамическом хаосе [1–11]. Однако вопросы динамики диссипативных систем, детального сопоставления теории и эксперимента и неразрывно связанная с ними проблема роли флуктуаций в автостохастических процессах исчерпывающего отражения в монографиях пока не нашли. Предлагаемая книга призвана отчасти восполнить этот пробел.

Основой монографии послужили курсы лекций автора по разделам нелинейной теории колебаний, читаемые на кафедре радиофизики Саратовского государственного университета, переработанный и дополненный

материал книг [12–14], а также результаты научных исследований, проведенных совместно с аспирантами. Книга посвящена исследованию процессов динамической стохастизации автоколебаний в относительно простых системах, взятых из радиофизики. Анализируются нелинейные диссипативные системы, математическим образом режима незатухающих хаотических пульсаций в которых является странный (а точнее – квазигиперболический) аттрактор. Основной задачей книги является рассмотрение бифуркационных механизмов возникновения, структуры и типичных свойств маломерного хаоса при тщательном сопоставлении результатов численных и физических экспериментов с радиофизическими устройствами, допускающими моделирование в виде систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Гл. 1 – 6 монографии содержат общие сведения по теории динамических систем, теории устойчивости и бифуркаций, а также описание основных механизмов перехода к хаосу и алгоритмов их численного анализа.

Основной динамической системой, которая детально анализируется в книге, является модифицированный классический генератор с инерционной нелинейностью К.Ф. Теодорчика. Предложенный относительно простой генератор с 1,5 степенями свободы во всех отношениях оказался удобной системой для изучения стохастичности, характерной для динамических систем с негрубой гомоклинической траекторией типа петли сепаратрисы седло-фокуса.

Гл. 7 – 11 посвящены детальному исследованию режимов автоколебаний автономного генератора в широкой области вариации управляющих параметров. В гл. 12 – 14 исследуются типичные иерархии неустойчивостей, сопровождающие нелинейные явления при разрушении режимов квазипериодических колебаний. Использование в качестве основной системы генератора с инерционной нелинейностью позволяет целенаправленно усложнить исследуемые системы. Анализируются неавтономные колебания и колебания в системе связанных генераторов. Рассматриваются механизмы перехода к хаосу через режимы биений с двумя и тремя базовыми частотами.

Изложение результатов ведется на основе детального сопоставления численных и экспериментальных бифуркационных диаграмм режимов колебаний в параметрическом пространстве исследуемых систем. Радиофизический эксперимент служит не только проверкой на грубость типичных режимов автоколебаний и их бифуркаций, установленных численными методами, но выступает и в качестве самостоятельной методики исследования сложной динамики автостохастических систем. Традиционные приемы и измерительная аппаратура, используемые в радиофизике, позволяют дать наглядную физическую интерпретацию многим качественным закономерностям, лежащим в основе изучаемых явлений, а также оценить роль флуктуаций в режимах динамической стохастичности.

Формирование представлений о динамической стохастичности, положенных в основу монографии, происходило под влиянием творческого общения с активно работающими научными коллективами, в частности – с радиофизиками известной Горьковской школы. Выражаю искреннюю признательность М.И. Рабиновичу, Ю.И. Неймарку, В. Эбелингу, В.Я. Кислову, С.П. Кузнецову, И.Н. Минаковой, П.С. Ланда, их коллегам и ученикам

за многочисленные дискуссии и обсуждения материалов книги. Я благодарю также В.В. Астахова, Т.Е. Вадивасову-Летчфорд, М.А. Сафонову и Д.Э. Постнова – моих учеников и соавторов по публикациям, использованным при написании книги.

Особую благодарность я выражаю Ю.Л. Климонтовичу и Л.П. Шильникову за счастливую возможность у них учиться, за радость человеческого общения и большую интеллектуальную поддержку во время работы над этой книгой.

ГЛАВА 1

ОСНОВЫ ДИНАМИЧЕСКОГО ПОДХОДА К ОПИСАНИЮ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ЯВЛЕНИЙ

1.1. Дииамическая система и ее математическая модель

Под *динамической системой* понимают любой объект или процесс, для которого однозначно определено понятие состояния как совокупности некоторых величин в данный момент времени и задан оператор, описывающий эволюцию начального состояния во времени. Понятие динамической системы, первоначально возникшее как обобщение понятия системы механической природы, при таком определении существенно расширяется. Динамические системы – это механические, физические, химические и биологические объекты, вычислительные процессы и процессы преобразования информации, совершаемые в соответствии с конкретными алгоритмами. Описание динамических систем в смысле задания оператора эволюции также допускает большое разнообразие: оно осуществляется с помощью дифференциальных уравнений, дискретных отображений, с помощью теории графов, теории марковских цепей и т.д. Выбор одного из способов описания задает конкретный вид *математической модели* соответствующей динамической системы.

Математическая модель динамической системы считается заданной, если введены параметры (*координаты*) системы, определяющие однозначно ее *состояние*, и указан *эволюционный оператор*, позволяющий решать задачу определения изменения состояния во времени.

В зависимости от степени приближения одной и той же реальной системе могут быть поставлены в соответствие принципиально различные математические модели. Исследование реальных систем исторически идет по пути изучения соответствующих математических моделей, совершенствование и развитие которых определяется анализом экспериментальных и теоретических результатов при их сопоставлении. В связи с этим под динамической системой мы будем понимать именно ее математическую модель. Дело в том, что из качественных соображений мы часто можем ввести в рассмотрение динамическую систему (например, сердечно-сосудистую систему живого организма), а ее математическую модель – не всегда. Однако, исследуя одну и ту же динамическую систему (к примеру, движение маятника), в зависимости от степени учета различных факто-

ров мы получим различные математические модели, описывающие качественно отличающиеся динамические процессы (маятник с учетом и без учета трения).

Нередки случаи, когда при исследовании реальной системы в рамках определенных предположений формулируется ее приближенная математическая модель, которая, как становится ясно в дальнейшем, в значительно большей степени соответствует действительности применительно к иной динамической системе. В этом проявляется глубокая общность динамических явлений в материальном мире, отражаемая единством математических закономерностей, которые эту общность описывают. Иллюстрацией может служить созданная современная теория нелинейных колебаний. Возникнув в 30-е годы как математический аппарат радиофизики, в настоящее время теория колебаний стала мощным инструментом познания колебательных процессов и явлений в самых различных областях науки.

1.2. Кинематическая интерпретация системы дифференциальных уравнений

Рассмотрим динамические системы, моделируемые конечным числом обыкновенных дифференциальных уравнений. Применительно к таким системам в большей степени сохранились представления и терминология, первоначально возникшие в механике. В рассматриваемом случае для определения динамической системы необходимо указать объект, допускающий описание состояния заданием величин $x_1, x_2, \ldots, x_N$ в некоторый момент времени $t = t_0$. Величины x_i могут принимать произвольные значения, причем двум различным наборам величин $\{x_i\}$ и $\{x_i'\}$ отвечают два строго разных состояния. Закон эволюции динамической системы во времени записывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$dx_i/dt = \dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_N), \quad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{1.1}$$

Если рассматривать величины $x_1, x_2, \ldots, x_N$ как координаты точки x в N-мерном пространстве, то получается наглядное геометрическое представление состояния динамической системы в виде этой точки. Последнюю называют изображающей или представляющей, а чаще – *фазовой точкой*, а пространство состояний – *фазовым пространством* динамической системы. Изменению состояния системы во времени отвечает движение фазовой точки вдоль некоторой линии, которая называется *фазовой траекторией*. В фазовом пространстве системы уравнениями (1.1) определяется векторное поле скоростей, сопоставляющее каждой точке x выходящий из нее вектор скорости $F(x)$, компоненты которого даются правыми частями уравнений (1.1):

$$[f_1(x_1, x_2, \ldots, x_N), f_2(x_1, x_2, \ldots, x_N), \ldots, f_N(x_1, x_2, \ldots, x_N)]. \tag{1.2}$$

Динамическая система (1.1), таким образом, может быть записана в векторной форме:

$$\dot{x} = F(x), \tag{1.3}$$

где $F(x)$ – вектор-функция размерности N.

Может оказаться, что N-мерное фазовое пространство динамической системы является евклидовым и наблюдается соответствие между всеми возможными состояниями системы и точками евклидова пространства $\mathbb{R}^N$.

Определенный класс возможных движений динамической системы описывается посредством векторного поля на некотором инвариантном многообразии W, имеющем меньшую, чем N, размерность, т.е. на подмногообразии фазового пространства, удовлетворяющем следующему свойству: траектория, проходящая через точку x подмногообразия W, целиком лежит в W. Такие ситуации возникают при некоторой симметрии исходных уравнений задачи, в определенных режимах автоколебаний в диссипативных системах, в консервативных системах и других особых случаях. В связи с этим необходимо уточнение взаимосвязи понятий числа степеней свободы и размерности фазового пространства динамической системы.

Под *числом степеней свободы* понимается наименьшее число независимых координат, необходимых и достаточных для однозначного определения состояния системы. Под координатами первоначально понимались именно пространственные переменные, характеризующие взаиморасположение тел или объектов. В то же время для однозначного решения соответствующих уравнений движения необходимо, помимо координат, задать соответствующие начальные значения импульсов или скоростей. В связи с этим система с n степенями свободы характеризуется фазовым пространством размерности в два раза большей ($N = 2n$). Эта терминология общепринята в статистической механике.

1.3. Классификация динамических систем

Если динамическая система задана уравнением (1.3), то постулируется, что каждому $x(t_0)$ в фазовом пространстве ставится в соответствие то единственное состояние $x(t)$ $(t > t_0)$, куда за время $t - t_0$ переместится фазовая точка, движущаяся в соответствии с уравнением (1.3). В операторной форме (1.3) можно записать в виде

$$x(t) = \mathbf{T}_t x(t_0), \tag{1.4}$$

где $\mathbf{T}_t$ – оператор отображения фазового пространства на себя. Отображение $\mathbf{T}$ для автономных систем образует однопараметрическую группу диффеоморфизмов фазового многообразия W^N, обладающую свойством

$$\mathbf{T}_t \mathbf{T}_s = \mathbf{T}_{t+s}, \quad t > 0, \quad s > 0. \tag{1.5}$$

Динамические системы можно классифицировать в зависимости от вида оператора отображения и структуры фазового пространства. Операторы отображения классифицируются в соответствии с их свойствами и по форме задания. Если оператор обладает свойством суперпозиции, то он называется линейным. Если оператор нелинейный, то и соответствующая динамическая система называется нелинейной. Различают непрерывные и дискретные операторы и соответственно *системы с непрерывным и дискретным временем*. Системы, для которых отображение $x(t)$ с помощью оператора $\mathbf{T}$ может быть определено для любых $t > t_0$ (непрерывно во времени), называют также *потоками* по аналогии со стационарным течением

жидкости. Если оператор отображения определен на дискретном множестве значений времени, то соответствующие динамические системы называют *каскадами* или системами с дискретным временем.

Способы задания оператора отображения **T** также могут различаться. Оператор T можно задать в виде дифференциального или интегрального преобразования, в виде матрицы или таблицы, в виде графика или функции и т.д.

В зависимости от того, какой ряд значений могут принимать фазовые координаты, определяющие состояние системы, различают *непрерывное и дискретное фазовые пространства.*

Определенные классы нелинейных преобразований могут приводить к вероятностным свойствам соответствующих решений и допускать возможность статистического описания. Такие преобразования, или операторы эволюции, являются предметом изучения эргодической теории [15].

Для динамических систем, оператор эволюции которых задан обыкновенными дифференциальными уравнениями, важной является так называемая задача Коши. Суть ее состоит в обосновании существования и единственности решения. Основные вопросы здесь касаются доказательства существования и единственности решения, отыскания области определения решения и выявления условий корректности в смысле непрерывности решения относительно начальных условий и параметров.

1.4. Колебательные системы и их свойства

Среди широкого класса динамических систем особую роль играют системы, в которых возможны колебания. Колебательные системы с точки зрения их математических моделей разделяют на определенные классы. Различают *линейные и нелинейные* колебательные системы, *сосредоточенные и распределенные, консервативные и диссипативные, автономные и неавтономные.* Особый класс представляют так называемые *автоколебательные системы.* Основные свойства указанных колебательных систем подробно обсуждаются в работах по теории колебаний [16–21].

Хаотические автоколебания возникают в нелинейных диссипативных колебательных системах как результат усложнения привычных режимов регулярных периодических колебаний при изменении управляющих параметров системы. В связи с этим кратко проанализируем основные свойства различных классов колебательных систем.

Колебательная система называется *линейной* или *нелинейной* в зависимости от того, линейна или нелинейна описывающая ее система дифференциальных уравнений. Линейные системы являются частным случаем нелинейных, однако в силу принципиальной важности линейных систем в исследовании вопросов устойчивости колебаний, в возможности использования принципа суперпозиции решений, позволяющего исследовать общее поведение линейных систем с помощью частных решений, такая классификация оправдана.

Динамические системы, моделируемые конечным числом обыкновенных дифференциальных уравнений, называют *сосредоточенными* или *точечными* системами. Они описываются с помощью конечномерного фазового пространства и характеризуются конечным числом степеней свободы.

Такое описание возможно в том случае, если динамика системы допускает исследование в предположении сосредоточенных параметров. Например, когда колебательный контур представим как последовательное соединение в замкнутую цепь индуктивности, емкости и сопротивления. Одна и та же система в различных условиях может рассматриваться как сосредоточенная либо как распределенная. Математические модели *распределенных* систем – это дифференциальные уравнения в частных производных, интегральные уравнения или обыкновенные уравнения с запаздывающим аргументом. Число степеней свободы распределенной системы бесконечно, и требуется бесконечное число данных для определения ее состояния. В теории электрических колебаний систему рассматривают как сосредоточенную в тех случаях, когда длина волны колебаний существенно превышает геометрические размеры самой системы. Если размеры прибора соизмеримы с длиной волны генерируемых колебаний, то систему необходимо рассматривать как распределенную.

По энергетическому признаку динамические системы делятся на консервативные и неконсервативные. *Консервативные* системы характеризуются неизменным во времени запасом энергии. В механике их называют *гамильтоновыми*. Для консервативных систем с n степенями свободы определяется так называемый гамильтониан системы $H(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$, где q_i – обобщеные координаты, p_i – обобщенные импульсы системы, $i = 1, 2, \ldots, n$. Гамильтониан полностью характеризует динамическую природу системы и с физической точки зрения в большинстве случаев представляет собой ее полную энергию. Эволюция во времени консервативных систем описывается уравнениями механики Гамильтона

$$\dot{q}_i = \partial H(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})/\partial p_i, \quad \dot{p}_i = -\partial H(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})/\partial q_i, \tag{1.6}$$

которые определяют характер фазовых траекторий в $2n$-мерном фазовом пространстве. Наличие интегралов движения (или изолирующих интегралов) в гамильтоновых системах приводит к тому, что движение фазовой точки нужно рассматривать не во всем $2n$-мерном фазовом пространстве, а на его подмногообразии меньшей размерности.

Из уравнений (1.6) следует

$$\sum_{i=1}^{n} (\partial \dot{q}_i/\partial q_i + \partial \dot{p}_i/\partial p_i) = 0. \tag{1.7}$$

В терминах обобщенных фазовых координат x_i (1.1) соотношение (1.7) можно представить как

$$\sum_{i=1}^{N} \partial \dot{x}_i/\partial x_i = 0, \tag{1.8}$$

что означает равенство нулю дивергенции векторного поля скоростей. Движение изображающих точек в фазовом пространстве интерпретируется в данном случае как стационарное течение несжимаемой жидкости, подчиняющееся уравнению непрерывности. Отсюда следует, что элемент фазового объема в консервативных системах не изменяется во времени, что принципиально отличает такие системы от диссипативных.

Динамические системы с изменяющимся во времени запасом энергии называются соответственно *неконсервативными*. Системы, в которых

энергия уменьшается во времени ввиду наличия трения или рассеяния, называются *диссипативными*. В соответствии с этим системы, энергия которых во времени нарастает, называются системами с отрицательным трением или отрицательной диссипацией. Такие системы можно рассматривать как диссипативные при смене направления отсчета времени на противоположное. Принципиальной особенностью диссипативных систем является зависимость элемента фазового объема от времени. В системах с поглощением энергии фазовый объем во времени уменьшается, в системах с отрицательным трением – увеличивается. Это обстоятельство приводит к тому, что в диссипативных нелинейных системах могут существовать *изолированные траектории*, являющиеся предельными для начальных состояний из некоторой области притяжения.

Динамические системы называются *автономными*, если они не подвержены действию внешних сил, переменных во времени. Уравнения автономных систем явной зависимости от времени не содержат. Та или иная форма воздействия на систему делает ее *неавтономной* и приводит к явной зависимости уравнений от времени.

Большинство реальных колебательных систем в физике, радиофизике, биологии, химии и других областях знаний является неконсервативными. Среди них выделяется особый класс так называемых *автоколебательных* систем, которые принципиально неконсервативны и нелинейны. Автоколебательной называют динамическую систему, преобразующую энергию источника в энергию незатухающих колебаний, причем основные характеристики колебаний (амплитуда, частота, форма колебаний и т.д.) определяются параметрами системы и в определенных пределах не зависят от выбора исходного начального состояния [17].

1.5. Фазовые портреты типовых колебательных систем

Геометрическое представление колебаний. Метод анализа колебательных процессов с помощью исследования фазовых траекторий динамической системы был введен в теорию колебаний Л.И. Мандельштамом [16] и А.А. Андроновым [17] и с тех пор стал привычным инструментом при исследовании самых различных колебательных явлений. С открытием динамической стохастичности роль этого метода существенно возросла. Изучение сложных автоколебаний с помощью анализа соответствующих фазовых портретов достаточно наглядно и дает больше информации, чем, скажем, наблюдение временных реализаций и спектров процесса. Анализ фазовых портретов в режиме стохастических колебаний позволяет судить о топологической структуре предельного стохастического множества, которую по виду реализаций процессов определить затруднительно. Конечно, наиболее исчерпывающую информацию о сложных колебательных процессах удается получить с применением комплекса методов, однако методу анализа фазовых траекторий в этом вопросе принадлежит важное место.

Рассмотрим несколько простых, но типичных примеров представления динамических процессов в виде траекторий изображающей точки в фазовом пространстве, обратив особое внимание на некоторые детали, важные для анализа стохастических режимов колебаний.

Консервативный осциллятор. Рассмотрим линейный осциллятор без потерь, уравнения которого можно сформулировать на примере колебательного LC-контура (рис. 1.1*а*), предположив амплитуду колебаний достаточно малой. Выбрав в качестве переменной заряд q на конденсаторе, с помощью уравнений Кирхгофа получим

$$\ddot{q} + (LC)^{-1} q = 0. \tag{1.9}$$

Домножив (1.9) на $L\dot{q}$, находим изолирующий интеграл системы :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{L\dot{q}^2}{2} + \frac{q^2}{2C}\right) = 0, \tag{1.10}$$

т.е. для любого момента времени выполняются равенства

$$E = E_L + E_C = \text{const}, \quad E_L = L\dot{q}^2/2, \quad E_C = q^2/2C, \tag{1.11}$$

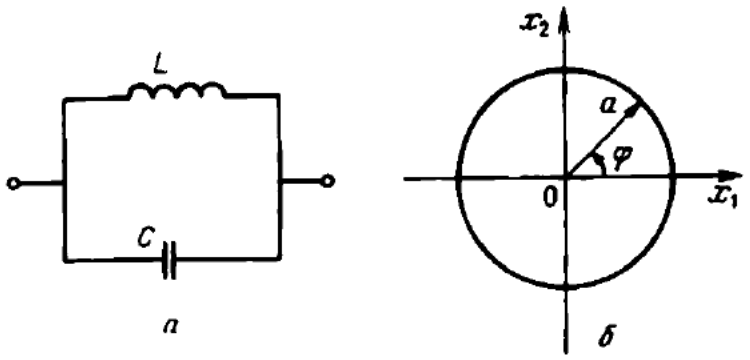
отражающие постоянство во времени полной энергии осциллятора (суммы магнитной E_L и электрической E_C энергий). В более удобных координатах уравнения консервативного осциллятора можно записать следующим образом:

$$\ddot{x} + x = 0, \quad \dot{x}^2 + x^2 = a^2, \quad a = \text{const}. \tag{1.12}$$

Введя фазовые координаты $x_1 = x$ и $x_2 = \dot{x}$, запишем уравнения в виде

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1; \quad x_1^2 + x_2^2 = a^2. \tag{1.13}$$

Фазовый портрет системы представляет собой окружность радиуса a с центром в начале координат. Точка в фазовом пространстве, в которой



Р и с. 1.1. Колебательный контур, моделируемый уравнениями (1.12) (*а*), и фазовый портрет его колебаний при фиксированном уровне энергии (*б*)

вектор фазовой скорости обращается в нуль, называется особой, и в данном случае нуль координат есть *особая точка* типа *центр*.

Наличие интеграла движения у консервативной системы 2-го порядка, отражающее в данном примере факт сохранения энергии, дает возможность описать ее с помощью уравнения 1-го порядка. Действительно, введя новую переменную φ соотношениями

$$x_1 = a\cos\varphi, \quad x_2 = a\sin\varphi, \tag{1.14}$$

получим уравнения

$$\dot{\varphi} = 1, \quad \dot{a} = 0. \tag{1.15}$$

которые и определяют закон движения фазовой точки. Во времени эволюционирует одна переменная φ, и фазовое пространство консервативного осциллятора, таким образом, одномерно. Гармоническим колебаниям осциллятора отвечает равномерное движение изображающей точки по окружности радиуса a, как это показано на рис. 1.1*б*.

Если консервативная система нелинейна, то ее фазовый портрет усложняется. Проиллюстрируем это на примере уравнений нелинейного консервативного осциллятора

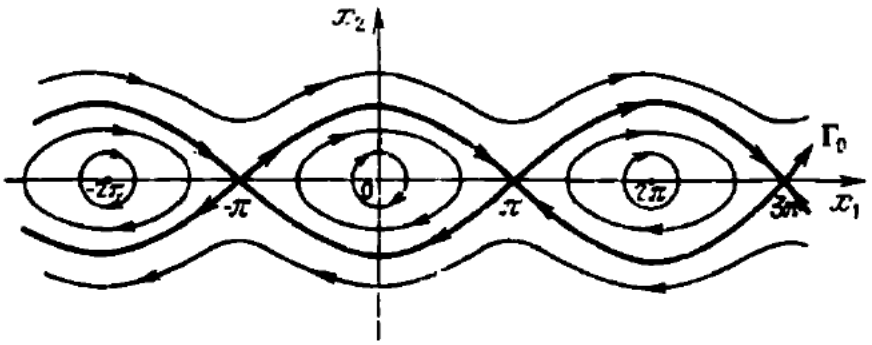
$$\ddot{x} + \sin x = 0. \tag{1.16}$$

В фазовых переменных $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$ эти уравнения записываются следующим образом:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\sin x_1. \tag{1.17}$$

Состояния равновесия нелинейного маятника на фазовой плоскости расположены вдоль оси x_1 ($x_2 = 0$) в точках $x_1 = 0, \pm\pi, \pm 2\pi \ldots$ Соответствующий фазовый портрет системы представлен на рис. 1.2. Видно, что особые точки $x_1 = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$ – типа центр, а $x_1 = \pm\pi, \pm 3\pi, \ldots$ – неустойчивые точки типа *седло*.

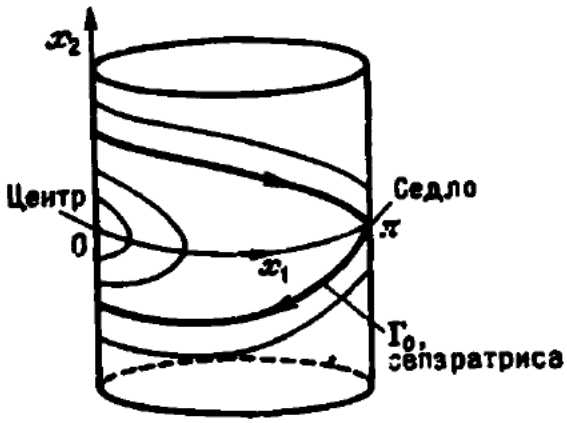
Вблизи центров фазовый портрет качественно соответствует линейному осциллятору: траектории представляют собой концентрические замкнутые кривые, близкие к окружностям, отражающим характер малых по амплитуде колебаний, близких к гармоническим. Через неустойчивые точки проходят особые интегральные кривые Γ_0, называемые *сепаратрисами* седла. Они разделяют фазовое пространство на области с принципиально различным поведением [17]. С увеличением энергии маятника его



Р и с. 1.2. Фазовый портрет нелинейного консервативного осциллятора, моделируемого уравнениями (1.17)

колебания от квазигармонических вблизи точек типа центр эволюционируют к нелинейным периодическим колебаниям вблизи сепаратрис (движения внутри области, ограниченной сепаратрисами). Дальнейшее увеличение энергии приведет к вращательному движению (движения вне сепаратрис). Ситуация, когда энергия маятника соответствует движению по сепаратрисе, называется негрубой. Малейшие отклонения энергии в ту или иную сторону приводят к качественно различным типам движения: колебательному либо вращательному [17].

Как видно из рис. 1.2, состояние маятника определяется углом его отклонения от положения равновесия x_1 и скоростью x_2, но для значений



Р и с. 1.3. Фазовые траектории осциллятора, моделируемого уравнениями (1.17), на цилиндре

x_1, отличающихся на целое число $2n\pi$, динамика системы идентична. Поэтому плоскость переменных x_1, x_2 не является, строго говоря, фазовой плоскостью системы в силу отсутствия однозначности. Пока речь идет о движениях, изображающие траектории которых лежат внутри сепаратрисного контура, т.е. о колебаниях в окрестности центра, неясностей не возникает. Но в случае, если энергия системы превышает критическое значение и движение становится вращательным, фазовая плоскость не годится для однозначного описания и в рассмотрение вводят *цилиндрическое* фазовое пространство.

На цилиндрической фазовой поверхности ситуация изображается, как это показано на рис. 1.3. Кривые, лежащие внутри сепаратрис, замкнуты и охватывают особую точку – центр. Кривые вне сепаратрис также замкнуты, но они охватывают цилиндр и описывают новый тип периодических движений, обусловленных вращением. Введение в рассмотрение цилиндрического фазового пространства позволяет, помимо периодических движений, лежащих на поверхности цилиндра, анализировать новый класс периодических движений, траектории которых охватывают сам цилиндр.

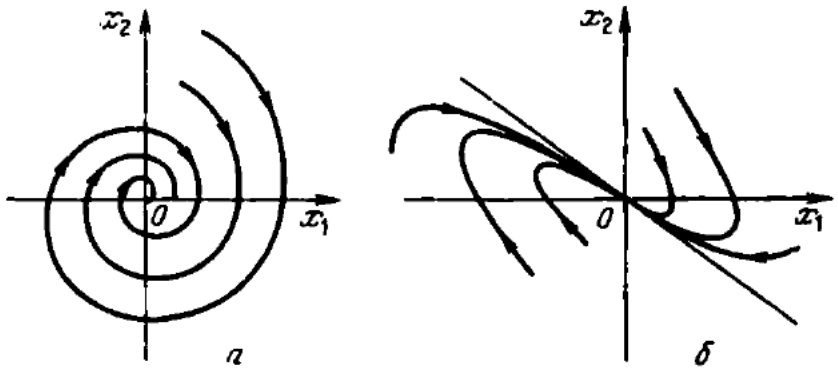
Общей особенностью консервативных систем является, как уже отмечалось, сохранение во времени фазового объема системы. Следствием этого является отсутствие притягивающих или изолированных фазовых траекторий. Притягивающих в том смысле, что все траектории из некоторой области фазового пространства со временем к ним стремятся. Если в консервативной системе возможно периодическое движение, то таких движений бесконечно много и определяются они заданием начальных условий для энергии.

Линейный осциллятор с затуханием. Диссипация энергии, обусловленная наличием потерь, оказывает принципиальное влияние на характер движения системы. Наиболее простые закономерности проявляются в системах с полной диссипацией энергии, когда силы трения действуют по всем степеням свободы, а поступление энергии извне отсутствует. Рассмотрим процессы в линейном осцилляторе с вязким трением, когда сила трения пропорциональна скорости изменения координаты. Примером такой системы служит колебательный контур, содержащий активное сопротивление R. Уравнение диссипативного контура

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + q/C = 0 \qquad (1.18)$$

заменой переменных сводится к безразмерной форме

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + x = 0, \quad 2\delta = R\sqrt{L/C}, \quad \tau = t/\sqrt{LC}. \qquad (1.19)$$



Р и с. 1.4. Фазовые траектории уравнения (1.19) с параметром $\delta < 1$ (*а*) и $\delta > 1$ (*б*)

При $\delta = 0$ имеем консервативный линейный осциллятор, рассмотренный выше. Введение сколь угодно малого трения $0 < \delta \leqslant 1$ качественно меняет фазовый портрет системы. Для $0 < \delta < 1$ решением уравнения (1.19) является

$$x = A\exp(-\delta\tau)\cos(\omega\tau + \psi), \quad \omega = (1 - \delta^2)^{1/2}, \tag{1.20}$$

где A и ψ – произвольные постоянные, определяемые начальными условиями. На фазовой плоскости для любых начальных данных имеют место скручивающиеся спирали, по которым фазовые точки асимптотически приближаются к началу координат, характеризуя затухающий колебательный процесс. Нуль координат является особой точкой системы, которая в случае $\delta < 1$ есть *устойчивый фокус* (рис. 1.4*а*). Если коэффициент вязкого трения $\delta > 1$, процесс в системе апериодический:

$$x = A_1\exp(\lambda_1\tau) + A_2\exp(\lambda_2\tau), \quad \lambda_{1,2} = [-\delta \pm (\delta^2 - 1)^{1/2}]/2, \tag{1.21}$$

и фазовые траектории выглядят в виде семейства характерных кривых, по которым, как и в предыдущем случае, изображающие точки стремятся к нулю координат (рис. 1.4*б*). Особая точка в указанных условиях является *устойчивым узлом*.

Итак, при любых значениях физических параметров системы, когда $\delta > 0$, диссипативный маятник характеризуется единственным глобально устойчивым состоянием равновесия в нуле фазовых координат. Независимо от выбора начальных условий наблюдается затухающее колебательное или апериодическое движение. При $t \to \infty$ любая (!) изображающая точка стремится к началу координат в устойчивый фокус либо узел.

Описанное свойство является общим для динамических систем с полной диссипацией энергии. Положения равновесия типа устойчивого фокуса или узла являются здесь *глобально притягивающими* в том смысле, что фазовые траектории из любой точки фазового пространства асимптотически к ним стремятся.

Введение диссипации энергии в колебательную систему привело к качественной перестройке структуры фазового портрета. Появились притягивающие множества типа устойчивых положений равновесия. Однако стационарные незатухающие колебания в линейных диссипативных системах оказываются невозможными. С физической точки зрения это понятно –

нет условий поддержания колебаний. Энергия, расходуемая на преодоление сил трения, не восполняется. Поэтому в линейных диссипативных системах наблюдаются только переходные затухающие колебательные процессы и в принципе невозможны установившиеся автоколебания.

1.6. Автоколебательные системы

Возможность существования периодического асимптотически устойчивого движения, которое изображается изолированной замкнутой траекторией в фазовом пространстве системы, к которой со временем притягиваются траектории из некоторой окрестности независимо от начальных условий, обеспечивается только в нелинейных диссипативных системах. Этот тип динамических систем настолько важен при изучении колебательных процессов, что для его выделения А.А. Андронов предложил специальный термин – автоколебательные системы [17]. Математическим образом автоколебаний служит *предельный цикл Пуанкаре* – замкнутая траектория в фазовом пространстве, отвечающая периодическому движению. Эти термины прочно утвердились в теории колебаний [16–21].

В качестве примера динамической системы с предельным циклом Пуанкаре рассмотрим классический нелинейный осциллятор Ван дер Поля, уравнения колебаний которого

$$\ddot{x} - a(1 - bx^2)\dot{x} + x = 0. \qquad (1.22)$$

Параметр a, характеризующий подкачку энергии в систему от внешнего источника, является существенным параметром осциллятора и называется *параметром возбуждения*. Из сравнения уравнений (1.22) и (1.19) следует, что осциллятор Ван дер Поля описывает более сложный колебательный контур, характер и значение диссипации в котором нелинейным образом зависит от колеблющейся переменной x. В фазовых координатах уравнение колебаний осциллятора (1.22) представляется как

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = a(1 - bx_1^2)x_2 - x_1 \qquad (1.23)$$

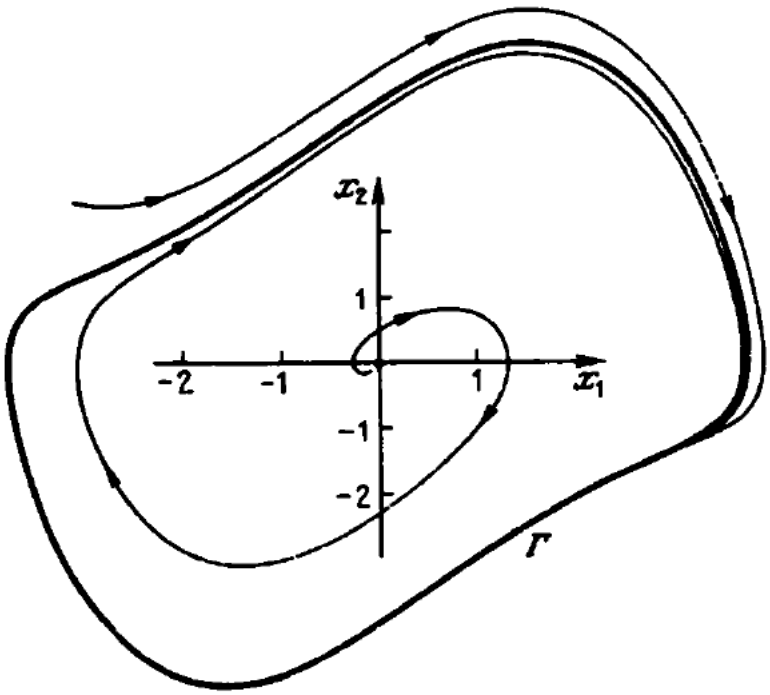
со знакопеременной дивергенцией, тождественно не равной нулю:

$$a(1 - bx_1^2) \not\equiv 0. \qquad (1.24)$$

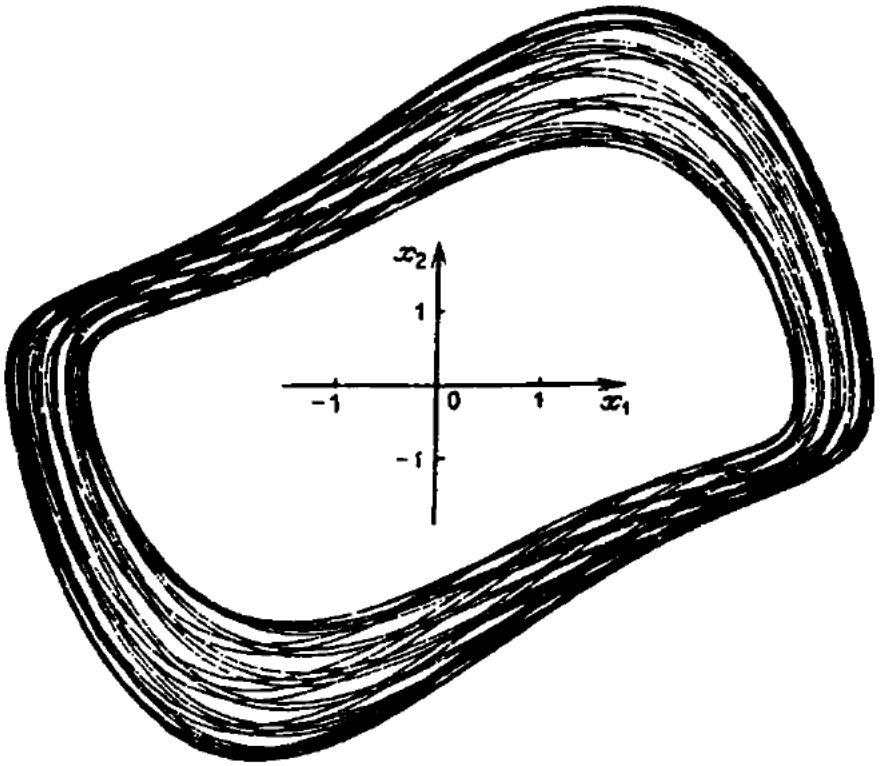
В общем случае (1.23) не интегрируются и исследования проводятся с использованием численных методов. В практически важном случае ($a > 0$, $b > 0$) уравнения (1.23) имеют единственное устойчивое решение в виде *предельного цикла* Г, изображенного на рис. 1.5.

Положение равновесия в начале координат, как это следует из уравнения (1.22), в котором вблизи нуля можно пренебречь нелинейностью, является неустойчивым фокусом. Траектории из окрестности состояния равновесия асимптотически стремятся к предельному циклу. Как показывает анализ, предельный цикл является глобально устойчивой изолированной структурой, притягивающей к себе траектории из любой точки на фазовой плоскости.

Таким образом, в динамических системах с нелинейной зависимостью диссипации энергии от переменной, совершающей колебания, впервые появляется принципиально новый тип устойчивого предельного множества



Р и с. 1.5. Предельный цикл системы (1.23). Численный счет проведен для значений параметров $a = 1$, $b = 0{,}3$



Р и с. 1.6. Проекция двумерного тора на плоскость переменных x_1, x_2. Численное интегрирование системы (1.25) проведено для значений параметров $a = 1$; $b = 0{,}3$; $B = 1{,}0$; $p = 1{,}5$; $\varphi_0 = 0$

фазовых траекторий: предельный цикл. Движение на предельном цикле отражает сложный процесс энергетических изменений во времени, происходящий в автоколебательной системе. Если внешним возмущением сместить траекторию на фазовой плоскости внутрь предельного цикла, то вносимая энергия будет в среднем превосходить рассеиваемую. Среднее значение дивергенции здесь окажется положительным. Вне предельного цикла дивергенция отрицательна, что ведет к стремлению фазовых траекторий к предельному циклу извне.

Расчеты свидетельствуют, что на предельном цикле за время периода колебаний доли рассеиваемой и вносимой энергии строго компенсируются. Однако если рассчитать среднее значение дивергенции, задав начальные условия на предельном цикле, то мы получим отрицательную величину. Это принципиальное свойство диссипативных систем. Дивергенция в линейном приближении характеризует локальное свойство фазового потока (в данном случае – сжатие фазового объема в окрестности цикла). В реальных диссипативных системах это свойство ведет к глобальным закономерностям – существованию в фазовом пространстве замкнутых притягивающих предельных множеств, к которым асимптотически стремятся близлежащие траектории.

Наконец, рассмотрим еще один случай типичной структуры в фазовом пространстве динамической системы, возникающей, например, при периодическом возмущении системы с предельным циклом. Добавим в уравнение (1.22) источник гармонического возмущения сравнительно малой амплитуды B и частоты p, которую считаем рационально не связанной с частотой периодических колебаний автономного осциллятора:

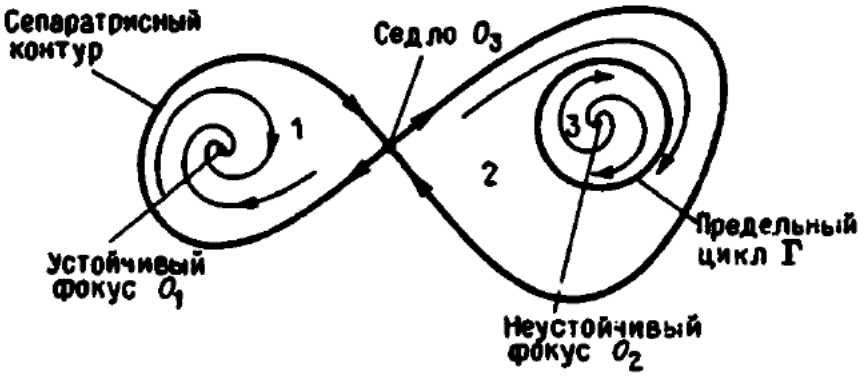
$$\ddot{x} - a(1 - bx^2)\dot{x} + x = B\sin(p\tau + \varphi_0). \qquad (1.25)$$

Периодическая модуляция предельного цикла автономной системы приводит к тому, что фазовая траектория с заданной частотой p вращается вокруг предельного цикла и лежит на двумерном многообразии, представляющем собой *тороидальную поверхность*. Аналогично случаю предельного цикла эта поверхность будет устойчивым предельным множеством, к которому стягиваются со временем все траектории из некоторой окрестности тора (как изнутри него, так и снаружи!). Нетрудно представить себе, что минимальная размерность фазового пространства, в которое можно вложить *двумерный тор*, равна трем. На рис. 1.6 показана проекция на плоскость переменных x_1, x_2 фазовой траектории на двумерном торе, полученная численным интегрированием системы (1.25).

1.7. Регулярные и странные аттракторы динамических систем

Рассмотренные выше примеры иллюстрируют типичные предельные множества траекторий на фазовой плоскости: состояния равновесия, периодические движения и особые траектории типа сепаратрисных контуров, двоякоасимптотических к седловым состояниям равновесия. Указанные предельные множества полностью исчерпывают возможные ситуации на фазовой плоскости. Им отвечают три различных типа решений уравнений. Отметим, что в реальных системах "сепаратрисные" решения в принципе не реализуются ввиду их неустойчивости. К обсуждению этого вопроса мы еще вернемся.

Движения диссипативных систем целесообразно разделить на два класса: класс *переходных, нестационарных* движений, отвечающих процессу релаксации от начального к предельному множеству состояний, и класс *установившихся, стационарных* движений, фазовые траектории которых целиком принадлежат предельным множествам. Важными с физической точки зрения являются *притягивающие предельные множества – аттракторы*. С течением времени произвольное начальное состояние из некоторой области притяжения G, включающей в себя аттрактор G_0, релаксирует к



Р и с. 1.7. Предельные множества траекторий на фазовой плоскости. O_1 – фокус с областью притяжения *1*, Г – предельный цикл с областями притяжения *2* и *3*

G_0. Движение, которому отвечает фазовая траектория в области притяжения, есть переходной процесс. Установившееся движение характеризуется принадлежностью фазовых траекторий инвариантному предельному множеству, т.е. аттрактору G_0.

На рис. 1.7 представлены возможные предельные инвариантные множества на фазовой плоскости, указаны аттракторы и области их притяжения.

К чему может привести повышение размерности системы, например, до $N = 3$, т.е. выход с плоскости в трехмерное фазовое пространство? Совсем еще недавно, до начала 60-х годов, с увеличением размерности фазового пространства диссипативных систем связывали возможность появления (в дополнение к указанным выше) лишь квазипериодических аттракторов, соответствующих движениям на p-мерных торах [22–24]. Примером из радиофизики является режим биений, когда периодическое колебание частоты ω_0 модулируется сигналом частоты $\omega_1 \neq \omega_0$, в общем случае рационально не связанной с ω_0. В фазовом пространстве системы траектории притягиваются к двумерной поверхности тора, который и является квазипериодическим аттрактором (рис. 1.6).

Важным результатом исследований последних лет явилось обнаружение принципиально новых типов движений в динамических системах. Таким движениям в фазовом пространстве размерности $N \geqslant 3$ соответствуют сложным образом устроенные притягивающие множества, траектории изображающих точек которых не принадлежит ни к одному из описанных выше типов аттракторов. Фазовые траектории представляются здесь в виде бесконечной нигде не пересекающейся линии, причем при $t \to \infty$ траектория не покидает замкнутой области и не притягивается к известным типам аттракторов.

Такие траектории в математике называют *устойчивыми по Пуассону*, имея в виду факт возвращаемости траектории со временем в малую окрестность начальной точки. Именно с существованием таких траекторий связывают возможность стохастического поведения детерминированных динамических систем с размерностью фазового пространства $N \geqslant 3$.

Впервые подобные свойства динамической системы в 1963 г. обнаружил Э. Лоренц при численном исследовании динамики трехмерной модели тепловой конвекции [26]. Спустя восемь лет в теоретической работе Д. Рюэля и Ф. Такенса притягивающая область в фазовом пространстве динамической системы, характеризующаяся режимом установившихся непериодических автоколебаний, была названа *странным аттрактором* [27]. Этот термин был сразу воспринят исследователями и утвердился для обозначения математического образа режима нерегулярных автоколебаний детерминированных динамических систем.

Движения динамических систем не всегда строго отвечают режиму странного аттрактора, что в деталях обсуждается в дальнейшем.

Аттракторы в виде состояний равновесия, предельных циклов или l-мерных торов называют *простыми* или *регулярными*, подчеркивая тем самым, что движения на них отвечают сложившимся представлениям об устойчивом по Ляпунову детерминированном поведении динамической системы. Со *странным* аттрактором связывается реализация сложного нерегулярного (в смысле отсутствия периодичности) колебательного режима, который во многом сходен с нашими представлениями о стационарных случайных процессах.

Однако термин "случайный" имеет вполне определенный смысл. Случайное движение непредсказуемо либо предсказуемо с определенной вероятностью. Другими словами, траектории случайного движения нельзя многократно и однозначно воспроизвести ни в численном, ни в физическом экспериментах. Примером служит классическое движение броуновской частицы. В случае странного аттрактора имеется строгая предсказуемость в смысле детерминированности оператора эволюции $T_t(x)$. Решение уравнений (как и для регулярных аттракторов) подчиняется теореме единственности и однозначно воспроизводится при фиксированных начальных условиях. Поэтому для обозначения сложных "шумоподобных" автоколебаний, математическим образом которых служит странный аттрактор, используются термины типа *динамическая стохастичность, детерминированный хаос* и подобные. Важно отличать эти процессы от стохастических в классическом смысле, которые при описании требуют учета флуктуаций в исходных динамических уравнениях либо непосредственно подчиняются уравнениям для плотности распределения вероятностей статистической теории [28–30].

Принципиальное различие регулярных и странных аттракторов динамических систем состоит в следующем. Регулярные аттракторы характеризуются асимптотической *устойчивостью и по Ляпунову и по Пуассону*. Для странных аттракторов устойчивость по Пуассону всегда сопровождается экспоненциальной неустойчивостью по Ляпунову. Как следствие, это ведет к экспоненциальной расходимости близких траекторий (чувствительности к малым изменениям начальных данных), а также к перемешиванию [15, 31, 32]. Наличие экспоненциального "разбегания" близких

траекторий может служить количественной характеристикой и критерием "странности" аттрактора. Перемешивание как результат экспоненциальной неустойчивости дает основания для возможности построения статистической теории странных аттракторов.

К сожалению, на пути создания статистической теории реальных хаотических аттракторов динамических систем возникают сложности принципиального характера. Они обусловлены тем, что практически анализируемые автостохастические системы не удовлетворяют строгим требованиям грубой гиперболичности. Образом хаотических автоколебаний в таких системах являются так называемые квазнаттракторы – более сложным образом устроенные (в сравнении со странными аттракторами) притягивающие множества в фазовом пространстве. Тем не менее все возрастающий уровень понимания качественных закономерностей формирования квазиаттракторов в совокупности с конструктивным использованием фундаментальных представлений статистической физики вселяет надежды на возможности успешного решения в будущем этой важной проблемы.

ГЛАВА 2

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

2.1. Устойчивость решений дифференциальных систем по линейному приближению. Уравнения в вариациях

Пусть динамическая система задана автономными уравнениями

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_N; \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m), \quad i = 1, 2, \ldots, N, \tag{2.1}$$

в которых правые части f_i – в общем случае нелинейные дифференцируемые функции, зависящие от параметров μ_k, или в векторной форме

$$\dot{x} = F(x, \mu). \tag{2.2}$$

Будем считать, что система (2.1) не обладает какими-либо специальными свойствами симметрии, являясь *системой общего положения*.

Пусть $x^0(t)$ – частное решение системы, устойчивость которого нужно исследовать. Введем в рассмотрение переменные $y_i(t)$, характеризующие малое отклонение от частного решения:

$$y_i(t) = x_i(t) - x_i^0(t). \tag{2.3}$$

Подставив (2.3) в (2.1), получим

$$\dot{y} = F(x^0 + y) - F(x^0),$$

или

$$\dot{y}_i = \sum_{j=1}^{N} (\partial f_i/\partial x_j) y_j + O(y_i), \tag{2.4}$$

где производные f_i' взяты в точках частного решения $x_i = x_i^0$. Совокупность нелинейных относительно y_i членов $O(y_i)$ стремится к нулю с уменьшением возмущений y_i быстрее суммы линейных слагаемых.

Устойчивость частного решения нелинейной системы $x^0(t)$ определяется устойчивостью линеаризованной системы (2.4):

$$\dot{y}_i = \sum_{j=1}^{N} (\partial f_i/\partial x_j) y_j. \tag{2.5}$$

Уравнения (2.5) называют *уравнениями в вариациях* [33–35]. Их можно

записывать в матричной форме:

$$\dot{y} = A(t)y, \tag{2.6}$$

где $A(t)$ – квадратная матрица, элементы которой определяются производными

$$a_{i,j}(t) = \partial f_i/\partial x_j \Big|_{x_i = x_i^0}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, N. \tag{2.7}$$

Для линейного матричного уравнения (2.6) существует фундаментальная система решений. *Фундаментальная матрица* решений $Y(t)$, составленная из N линейно независимых решений системы (2.6), удовлетворяет матричному уравнению

$$\dot{Y}(t) = A(t)\,Y(t). \tag{2.8}$$

Произвольное решение системы (2.6) может быть записано в виде

$$y(t) = Y(t)y(t_0), \tag{2.9}$$

если $Y(t)$ нормирована при $t = t_0$, т.е. $Y(t_0) = E$.

Автономная линейная система (2.6) *устойчива по Ляпунову* тогда и только тогда, когда любое решение (2.9) ограничено. Следовательно, коэффициенты фундаментальной матрицы $Y(t)$ устойчивой системы должны быть ограничены.

2.2. Спектр ляпуновских характеристических показателей фазовой траектории динамической системы

Характеристическим показателем Ляпунова, или просто характеристическим показателем функции $\Phi(t)$, называется действительное число, определяемое соотношением

$$\mathcal{L}[\Phi(t)] = \overline{\lim_{t\to\infty}}\,[t^{-1}\ln|\Phi(t)|], \tag{2.10}$$

где черта сверху означает верхний предел. Для экспоненты $\Phi(t) = \exp\alpha t$, $\mathcal{L} = \alpha$.

Понятие характеристического показателя дает способ оценки степени роста функции в сравнении с экспонентой.

Для линейной системы (2.6) с произвольной матрицей $A(t)$ характеристические показатели нетривиальных решений можно ввести аналогичным образом [33, 36, 10]:

$$\lambda_i = \overline{\lim_{t\to\infty}}\,[t^{-1}\ln\|y^i(t)\|], \quad i = 1, 2, \ldots, N, \tag{2.11}$$

где $y^i(t)$ – i-е фундаментальное решение системы (2.6), $\|0\|$ – норма. В силу определения характеристические показатели действительны, а так как матрица $A(t)$ ограничена, то и конечны. Числа λ_i называются *обобщенными характеристическими показателями* произвольной линейной системы типа (2.6). Для системы в вариациях, описывающей эволюцию возмущений $y(t)$ вблизи частного решения $x^0(t)$ нелинейной системы (2.2), совокупность λ_i называют ляпуновскими характеристическими показателями частного решения (или фазовой траектории) $x^0(t)$ нели-

нейной системы. Упорядоченная по убыванию совокупность чисел $\lambda_1 \geqslant \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_N$ образует так называемый *спектр ляпуновских характеристических показателей* (спектр ЛХП) фазовой траектории $x^0(t)$, являющийся одной из важнейших характеристик решения нелинейной системы, определяющей, в частности, ее устойчивость.

Первый, наибольший показатель λ_1 называют *старшим* показателем спектра ЛХП решения. В случае равенства $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k$ ($k < N$, $\lambda_{k+j} < \lambda_k$, $j = 1, \ldots, N-k$) старших показателей будет k штук.

В зависимости от вида матрицы $A(t)$, определяющей тип решения системы в вариациях, *сигнатура**) *спектра ЛХП* будет *различна*. По-разному трактуется и устойчивость частного решения.

Для линейной автономной динамической системы сумма характеристических показателей спектра ее решений не меньше верхнего предела от среднего значения следа матрицы [35]:

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i \geqslant \overline{\lim_{t\to\infty}}\, t^{-1} \int_{t_0}^{t} \mathrm{Sp}\, A(\tau)\, d\tau. \tag{2.12}$$

Знак равенства справедлив для *правильных по Ляпунову* систем.

Определитель матрицы как определитель линейного оператора не зависит от выбора базиса и представляет собой объем N-мерного параллелепипеда, построенного в фазовом пространстве системы на векторах, координаты которых задаются столбцами матрицы. Характер изменения фазового объема во времени подчиняется формуле Остроградского – Лиувилля

$$V(t) = V(t_0) \exp\left[\int_{t_0}^{t} \mathrm{Sp}\, A(\tau)\, d\tau\right], \tag{2.13}$$

где $V(t) = \det Y(t)$ – фазовый объем.

Рассмотрим дивергенцию вектора фазовой скорости нелинейной системы уравнений (2.1):

$$\mathrm{div}\, F = \sum_{i=1}^{N} \partial \dot{x}_i / \partial x_i = \sum_{i=1}^{N} \partial f_i / \partial x_i. \tag{2.14}$$

Для уравнений в вариациях выражение (2.14) принимает вид

$$\mathrm{div}\, F = \sum_{i=1}^{N} a_{ii}(t) = \mathrm{Sp}\, A(t). \tag{2.15}$$

Таким образом, дивергенция в линейном приближении совпадает со значением следа матрицы $A(t)$. Локально вблизи частного решения фазовый объем системы во времени изменяется в соответствии с выражением

$$V(t) = V(t_0) \exp\left[t\,\overline{(\mathrm{div}\, F)}\right] = V(t_0) \exp\left[t \sum_{i=1}^{N} \lambda_i\right], \tag{2.16}$$

где чертой обозначено усреднение по времени.

---

*) Под сигнатурой понимается упорядоченная последовательность из трех символов ("+", "0", "–"), отвечающая положительным, нулевым или отрицательным действительным числам спектра ЛХП решения $x^0(t)$.

Рассматривая относительную скорость изменения малого элемента фазового объема, получаем

$$V(t)^{-1}\frac{d}{dt}[V(t)] = \sum_{i=1}^{N}\lambda_i. \qquad (2.17)$$

Следовательно, сумма показателей спектра ЛХП траектории $x^0(t)$ характеризует скорость изменения фазового объема в ее окрестности. Для систем с отрицательной дивергенцией, т.е. диссипативных, сумма показателей спектра ЛХП отрицательна. Предельный объем аттрактора в фазовом пространстве нулевой.

Для предельного цикла старший показатель спектра ЛХП – нулевой*), все другие отрицательны. Аттрактором является замкнутая кривая в фазовом пространстве системы.

Режим странного аттрактора реализуется только в диссипативных системах и характеризуется наличием в спектре ЛХП положительных показателей. В этом сложном случае аттрактор локализуется в конечной области фазового пространства и включает канторово множество гиперповерхностей. Предельное множество траекторий, отвечающее странному аттрактору, многообразием не является.

Если сумма показателей спектра ЛХП равна нулю, то фазовый объем системы во времени не изменяется – система консервативна и аттракторов не содержит. В случае положительной дивергенции векторного поля фазовый объем во времени нарастает. С физической точки зрения такой режим как стационарный не реален. Однако рост фазового объема может наблюдаться на конечном интервале времени, что свидетельствует о переходном процессе релаксации к новому установившемуся режиму.

2.3. Устойчивость состояний равновесия

Если частное решение $x^0(t)$ характеризует состояние равновесия, т.е. не зависит от времени, то правые части (2.1) обращаются в нуль:

$$f_i(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_N^0, \mu) = 0. \qquad (2.18)$$

Корни алгебраических уравнений (2.18) определяют координаты возможных состояний равновесия, отвечающих особым точкам в фазовом пространстве системы. В особой точке матрица A системы в вариациях от времени не зависит и общее решение системы имеет вид

$$y(t) = \exp(At)y(t_0). \qquad (2.19)$$

Решение устойчиво по Ляпунову, если собственные числа матрицы линеаризации, определяемые корнями векового уравнения

$$\det[A - sE] = 0, \qquad (2.20)$$

характеризуются действительными частями $\mathrm{Re}\, s_i \leqslant 0$. Если все s_i удовлетворяют строгому неравенству $\mathrm{Re}\, s_i < 0$, то решение $y(t)$ асимптотически

*) Равенство нулю старшего показателя спектра ЛХП устойчивого периодического решения впервые доказано А.А. Андроновым [17]. Для произвольного ограниченного решения $x^0(t)$ автономной системы (2.1), не стремящегося во времени к особой точке, по крайней мере один из показателей спектра ЛХП всегда равен нулю [10].

устойчиво. Это означает, что произвольные малые возмущения положения равновесия x^0 затухают и при $t \to \infty$ асимптотически стремятся к нулю.

Спектр ЛХП устойчивого стационарного решения, как это видно из определения (2.11), состоит из упорядоченных по убыванию отрицательных чисел $\lambda_i = \mathrm{Re}\, s_i(\mu)$, $i = 1, 2, \ldots, N$. Условием асимптотической устойчивости решения будет отрицательность старшего показателя спектра ЛХП. Если хотя бы одно из собственных значений положительно в своей действительной части, то равновесие неустойчиво. Условие $\mathrm{Re}\, s_i(\mu) \neq 0$ выделяет случай *грубых состояний равновесия*, которые либо устойчивы, либо неустойчивы в некоторой конечной области вариации параметров μ.

Обращение в нуль старшего показателя спектра ЛХП стационарного решения $x^0(t)$ отвечает бифуркационной ситуации и требует специального анализа, изложению которого посвящена гл. 3. Здесь же отметим, что сигнатура спектра ЛХП аттрактора системы, представляющего собой устойчивое равновесие, имеет вид

"–", "–", "–", . . . , "–".

Потеря устойчивости равновесным решением (состоянием) означает переход от одного грубого устойчивого аттрактора к какому-либо другому типу аттрактора через негрубое состояние в точке бифуркации.

2.4. Устойчивость периодических решений. Мультипликаторы предельного цикла

Любое периодическое частное решение системы (2.1) выделяется условием

$$x^0(t) \equiv x^0(t+T), \quad T - \text{период решения}. \tag{2.21}$$

Устойчивость периодического решения определяется исследованием соответствующей системы в вариациях, которая также является периодической:

$$\dot{y} = A(t)y, \quad A(t) \equiv A(t+T). \tag{2.22}$$

Нетрудно убедиться в том, что если $Y(t)$ – нормированная фундаментальная матрица решений системы (2.22), то матрица $Y(t+T)$ также является фундаментальной и справедливо соотношение [35]

$$Y(t+T) = Y(t)\,Y(T). \tag{2.23}$$

Матрица $Y(T)$ носит название *матрицы или оператора монодромии*. Решение уравнений в вариациях в силу (2.23) определяет линейное отображение, ставящее в соответствие произвольному значению возмущения $y(t)$ значение возмущения $y(t+T)$ через период:

$$y(t+T) = Y(T)y(t). \tag{2.24}$$

Матрица монодромии не зависит от времени. Собственные значения ρ_i матрицы монодромии $Y(T)$, т.е. корни характеристического уравнения

$$\det[Y(T) - \rho E] = 0, \tag{2.25}$$

называются *мультипликаторами периодического решения* $x^0(t)$ и определяют его устойчивость. Действительно, действие оператора монодромии

(2.24) заключается в том, что первоначальное возмущение периодического решения, рассматриваемое в проекциях на собственные векторы, через период T умножается на соответствующий мультипликатор ρ_i. Значит, затуханию возмущений должно отвечать требование $|\rho_i| < 1$.

Любому мультипликатору ρ_i соответствует нетривиальное решение $\xi(t + T) = \rho_i \xi(t)$ системы (2.22), и наоборот, выполнение указанного равенства служит определением мультипликатора. Отсюда следует важный вывод: периодическое решение $x^0(t)$ имеет по крайней мере один из мультипликаторов, равный +1 [17, 35].

Мультипликаторы как собственные значения матрицы монодромии удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{i=1}^{N} \rho_i = \mathrm{Sp}\, Y(T), \quad \prod_{i=1}^{N} \rho_i = \det Y(T) > 0, \tag{2.26}$$

которые весьма полезны при анализе численных результатов.

Спектр ЛХП периодического решения определяется в соответствии с (2.11) через мультипликаторы

$$\lambda_i = \ln |\rho_i| / T. \tag{2.27}$$

Один из показателей спектра всегда равен нулю и отвечает единичному мультипликатору. Если все оставшиеся на комплексной плоскости значений мультипликаторы принадлежат внутренности единичного круга, т.е. $|\rho_i| < 1$, $i = 1, 2, \ldots, N-1$, то периодическое решение *устойчиво*. Сигнатура спектра ЛХП устойчивого предельного цикла такова:

"0", "–", "–", . . . , "–".

Если по одному или нескольким собственным направлениям возмущения нарастают, то соответствующие мультипликаторы $|\rho| > 1$ и в спектре ЛХП периодического решения появятся положительные показатели. Периодическое решение, часть мультипликаторов которого лежит внутри единичного круга, а часть – вне его, является *неустойчивым* и называется *седловым*.

Грубые устойчивые или седловые периодические решения $x^0(t)$ системы (2.2) существуют в некоторой области значений параметров и характеризуются наличием в спектре ЛХП только одного нулевого показателя. Признаком *негрубости* является выход на единичную окружность дополнительно одного мультипликатора или комплексно-сопряженной пары мультипликаторов предельного цикла. При этом в спектре ЛХП периодического решения появляются дополнительные нулевые показатели, свидетельствующие о бифуркационной ситуации.

2.5. Устойчивость квазипериодических и хаотических решений

С увеличением размерности фазового пространства системы (2.2) до $N \geqslant 3$ становятся возможными решения $x^0(t)$ в виде квазипериодических или апериодических (хаотических) автоколебаний. Соответствующая система уравнений в вариациях в этих случаях характеризуется квазипериодической или апериодической матрицей $A(t)$. Исследование устойчивости таких частных решений в отличие от стационарных и периодических стано-

вится более сложным и осуществляется, как правило, с помощью численных методов на ЭВМ.

Пусть частное решение $x^0(t)$ есть квазипериодическая функция:

$$x^0(t) = x^0[\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_p(t)]. \qquad (2.28)$$

где $\varphi_l(t) = \omega_l t$, $l = 1, 2, \ldots, p$. Функция $x^0(\varphi)$ имеет период 2π по каждому из аргументов φ_l:

$$x^0(\varphi_l + 2\pi) \equiv x^0(\varphi_l). \qquad (2.29)$$

Для квазипериодических функций равенство типа (2.21) не выполняется. Квазипериодические колебания в общем случае не являются периодическими. Если между частотами ω_l не существует рациональных соотношений, то решение $x^0(t)$ называется *эргодическим квазипериодическим колебанием.*

Устойчивость квазипериодических решений характеризуется спектром ЛХП. Матрица линеаризации $A(t)$ уравнений в вариациях квазипериодическая, и ляпуновские характеристические показатели λ_l строго определены лишь в пределе, при $t \to \infty$. На практике можно ограничиться конечным временем, зависящим в каждом конкретном случае от скорости сходимости функций $\lambda_l(t)$ к пределам λ_l, и получить значения показателей спектра ЛХП с некоторой заданной точностью. Периодичность решения $x^0(t)$ по каждой из функций $\varphi_l(t)$ ведет к тому, что спектр ЛХП квазипериодического колебания содержит p нулевых показателей. Если решение асимптотически устойчиво, то p нулевых показателей спектра ЛХП будут старшими, все оставшиеся – строго отрицательными. Аттрактором системы в фазовом пространстве в этом случае является инвариантное многообразие размерности p, называемое *p-мерным тором.* Если хотя бы один из показателей спектра ЛХП решения на многомерном торе становится положительным (при наличии p нулевых показателей), то квазипериодическое решение неустойчиво по Ляпунову.

Простейшим примером двухчастотного квазипериодического решения является режим периодической амплитудной модуляции сигнала (режим биений). Подобные режимы колебаний возникают при взаимодействии нелинейных осцилляторов при периодическом воздействии на автоколебательную систему и в других случаях, реализующихся, как минимум, в системах с 1,5 степенями свободы. В идеальном случае гармонических сигналов решение для режима двухчастотных биений можно представить как

$$x(t) = B_0(1 + m\sin\Omega t)\sin(\omega_0 t + \psi), \qquad (2.30)$$

где ω_0 – частота основного колебания, Ω – частота сигнала модуляции, рационально несоизмеримая с ω_0. Устойчивому режиму биений с двумя независимыми частотами отвечает аттрактор в виде *двумерного эргодического тора*, сигнатура спектра ЛХП которого имеет вид

"0", "0", "–", "–", . . . , "–".

Если частное решение $x^0(t)$ является апериодическим, но ограниченным для любых $t \to \infty$, то оно отвечает режиму хаотических автоколебаний. В спектре ЛХП такого решения появляется не менее одного положи-

тельного показателя и существует по крайней мере один нулевой *). Реализуется ситуация, принципиально отличная от всех выше рассмотренных случаев. Наличие положительных показателей в спектре ЛХП апериодического решения свидетельствует, по определению, о неустойчивости решения по Ляпунову. В каком же смысле можно говорить об устойчивости хаотического решения? Вопрос нетривиальный, но может иметь вполне определеиный ответ.

Апериодическое решение $x^0(t)$, отвечающее режиму хаотических автоколебаний, соответствует притягивающему ограниченному предельному множеству траекторий в фазовом пространстве – *странному аттрактору*. Это множество траекторий характеризуется неустойчивостью по Ляпунову, с одной стороны, но в силу ограниченчости решения должно быть устойчивым в смысле Пуассона – с другой. Экспоненциальное разбегание близких фазовых траекторий и ограниченность размеров аттрактора с неизбежностью ведут к тому, что траектория рано или поздно возвращается в сколь угодно малую, но конечную окрестность любого начального состояния в аттракторе.

Налицо логически оправданная цепочка усложняющихся явлений: стационар – фазовая точка неподвижна во времени; предельный цикл – фазовая траектория возвращается в любую точку аттрактора строго через период; квазипериодическое колебание – периода нет, но есть регулярная возвращаемость фазовой траектории в заданную окрестность начального состояния; и, наконец, странный аттрактор – есть возвращаемость, которая, однако, нерегулярна во времени и носит характер случайной последовательности. Таким образом, *хаотические траектории* можно называть устойчивыми, если существует предельное множество – аттрактор с некоторой областью притяжения, внутри которого траектории неустойчивы по Ляпунову, но устойчивы по Пуассону.

Матрица линеаризацин $A(t)$ системы уравнений в вариациях относительно хаотического решения $x^0(t)$ будет апериодической, но ограниченной. Поэтому предел в (2.11) существует при $t \to \infty$ и определяет спектр ЛХП решения. Сигнатура спектра ЛХП странного аттрактора наиболее простой структуры имеет вид

"+", "0", "–", "–", . . . , "–".

Проведенный анализ уравнений в вариациях относительно различных типов решений нелинейной системы (2.2) позволяет ввести классификацию типов аттракторов, основанную на понятиях устойчивости по Ляпунову и по Пуассону. Предельное множество, отвечающее конкретному типу устойчивого решения, притягивающее к себе фазовые траектории из некоторой области начальных условий, есть аттрактор. Если фазовые траектории на аттракторе устойчивы и по Ляпунову и по Пуассону – *аттрактор регулярный*, или *простой*. Если устойчивые по Пуассону траектории в аттракторе неустойчивы по Ляпунову, то *аттрактор странный*. Регулярных аттракторов существует конечное число: состояния равновесия, периодические и квазипериодические движения. Все другие возможные типы аттракторов – странные.

---

*) См. замечание на с. 29.

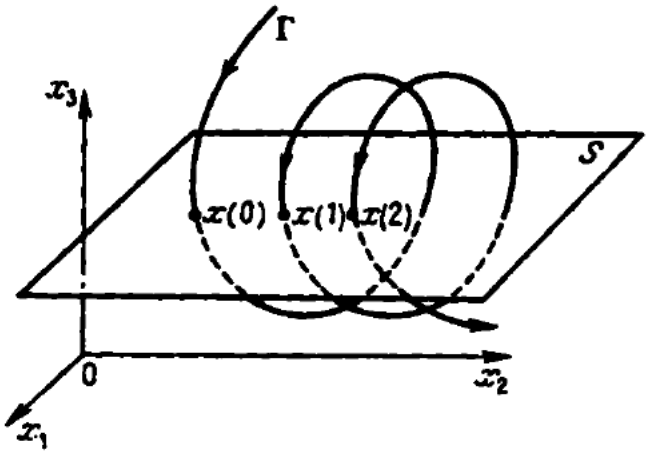
2.6. Системы с дискретным временем. Отображение Пуанкаре

Рассмотренный выше вопрос об устойчивости решений дифференциальных систем может быть поставлен и решен аналогичным образом для *систем с дискретным временем*. Эти системы могут рассматриваться как самостоятельные при описании, к примеру, экологических процессов, а могут быть получены однозначно из дифференциальных систем при переходе к *точечным отображениям Пуанкаре* [37–39].

Рассмотрим некоторый режим движения дифференциальной системы, характеризующийся траекторией Γ в фазовом пространстве $\mathbb{R}^N$ уравнений (2.2). В последнем введем в рассмотрение некоторую гиперповерхность S размерности $N - 1$. Предположим, что фазовая траектория Γ последовательно и *трансверсально* (под ненулевым углом) пересекает эту поверхность. Поверхность S называется *секущей Пуанкаре* к фазовой траектории Γ.

Траектория Γ порождает на секущей некоторое точечное отображение, однозначно (но не взаимно однозначно!) ставящее в соответствие любой точке $x(k)$ пересечения Γ с S ближайшую следующую за $x(k)$ точку $x(k+1)$. Для иллюстрации на рис. 2.1 приведен пример построения точечного отображения в случае $N = 3$. Последовательность точек отображения задается пересечениями Γ с S в одном направлении. Полученное дискретное множество $\{x(k)\}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ на секущей называется *сечением Пуанкаре* для траектории Γ.

Закон соответствия между предыдущей и последующей точками пересечения называется отображением последования или *отображением Пуанкаре*.



Р и с. 2.1. Точечное отображение, порождаемое пересечениями некоторой фазовой траектории Γ с секущей поверхностью S

В общем случае отображение Пуанкаре задается нелинейным дискретным уравнением, размерность которого равна размерности секущей Пуанкаре. Нелинейной динамической системе (2.1) тем самым ставится в однозначное соответствие $N - 1$-мерное фазовое пространство, которым является секущая гиперповерхность S. Фазовыми траекториями становятся последовательности точек $x(k)$ на секущей. Каждая последующая точка $x(k+1)$ получается путем применения нелинейного преобразования P к предыдущей точке $x(k)$:

$$x(k+1) = P[x(k), \mu] \qquad (2.31)$$

(μ – набор параметров), которое в координатной форме имеет вид

$$x_i(k+1) = P_i[x_i(k), \mu_1, \ldots, \mu_m], \qquad i = 1, 2, \ldots, (N-1). \tag{2.32}$$

Задача изучения динамической системы сводится к задаче изучения соответствующего отображения Пуанкаре. При этом структура динамической системы однозначно (но не взаимно однозначно) определяет структуру порождаемого ею точечного отображения [37].

Нелинейное уравнение (2.31) является дискретным аналогом дифференциальной системы, но может, как упоминалось, рассматриваться вне зависимости от порождающей дифференциальной системы *).

В дискретных системах также могут существовать частные решения, представляющие собой стационарные, периодические, квазипериодические и хаотические последовательности $x^0(k)$.

Устойчивость частного решения $x^0(k)$ исследуется на основе соответствующего уравнения в вариациях [39]. Если ввести в рассмотрение малое отклонение (возмущение) $y(k) = x(k) - x^0(k)$, записать его в координатной форме

$$y_i(k) = x_i(k) - x_i^0(k), \qquad i = 1, 2, \ldots, (N-1), \tag{2.33}$$

и линеаризовать исходное уравнение (2.31) вблизи частного решения, то получим линейное дискретное уравнение в вариациях

$$y_i(k+1) = \sum_{j=1}^{N-1} (\partial P_i / \partial x_j) y_j(k), \tag{2.34}$$

где производные берутся в точках частного решения.

В векторной форме уравнения в вариациях записываются аналогично случаю дифференциальных систем:

$$y(k+1) = M(k, \mu)\, y(k), \tag{2.35}$$

где $M(k, \mu)$ – квадратная матрица линеаризации, элементы которой m_{ij} заданы соответствующими производными (2.34). Нетрудно убедиться, что из (2.35) следует

$$y(k+1) = \prod_{i=1}^{k} M(i, \mu) y(1). \tag{2.36}$$

По аналогии с дифференциальными системами определим ляпуновские характеристические показатели частного решения дискретной системы (2.34):

$$\lambda_i = \overline{\lim_{k \to \infty}} [k^{-1} \ln \| y^i(k) \|], \tag{2.37}$$

где $y^i(k)$ представляет собой i-е фундаментальное решение системы уравнений (2.35).

---

*) Для отображений Пуанкаре (см. рис. 2.1) существует строгая функциональная взаимосвязь непрерывного времени t с точками дискретизации t_k, причем разность $t_{k+1} - t_k = \Delta(k)$. Для дискретных модельных систем эта взаимосвязь утрачивается и полагается $\Delta = 1$. С этим, в частности, связано то, что конкретной фазовой траектории однозначно соответствует отображение P на секущей, но обратное неверно.

2.7. Устойчивость решений дискретных систем

Совокупность чисел $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{N-1}^0$, не зависящих от дискретного времени и удовлетворяющих исходному нелинейному уравнению (2.32), называется *неподвижной точкой* x^0 дискретной системы отображения или ее стационарным решением. Матрица линеаризации уравнений в вариациях также не зависит от k. Устойчивость стационарного решения определяется собственными значениями матрицы M:

$$\det(M - \rho E) = 0, \tag{2.38}$$

т.е. мультипликаторами неподвижной точки ρ_i. Стационарное решение асимптотически устойчиво, когда все мультипликаторы по модулю строго меньше единицы. Соответствующий спектр ЛХП аттрактора системы в виде устойчивого состояния равновесия определяется упорядоченной по убыванию совокупностью λ_i :

$$\lambda_i = \ln|\rho_i| < 0. \tag{2.39}$$

Решение $x^0(k)$ – периодическое, если выполняется условие

$$x^0(k) \equiv x^0(k+n), \qquad n - \text{период}.$$

В этом случае $x^0(k)$ называется *n-периодическим решением* дискретной системы или *n-циклом* отображения. Матрица линеаризации также n-периодическая, т.е. $M(k) \equiv M(k+n)$.

Аналогом матрицы монодромии в данном случае является матрица M_n, не зависящая от дискретного времени:

$$M_n = M(n) \cdot M(n-1) \cdot \ldots \cdot M(1). \tag{2.40}$$

Для периодических решений дискретное время можно измерять целым числом периодов $k = rn$, что позволяет записать

$$y(k) = M_n^{(r)} y(1), \qquad M_n^{(r)} = \underbrace{M_n \cdot M_n \cdot \ldots \cdot M_n}_{r \text{ раз}}. \tag{2.41}$$

Мультипликаторы ρ_{ni} матрицы линеаризации n-цикла отображения M_n вычисляются аналогично (2.38):

$$\det(M_n - \rho_n E) = 0. \tag{2.42}$$

Они определяют устойчивость n-периодического решения. Нетрудно убедиться, что по определению (2.37) спектр ЛХП n-периодического решения состоит из

$$\lambda_i = \ln|\rho_{ni}|/n. \tag{2.43}$$

Асимптотически устойчивому n-циклу отображения отвечают мультипликаторы $|\rho_{ni}| < 1$ для любых $i = 1, 2, \ldots, N-1$. Спектр ЛХП устойчивого n-цикла содержит, таким образом, только отрицательные числа.

Если дискретное уравнение (2.31) представляет собой отображение Пуанкаре некоторой дифференциальной системы, то стационарная точка отображения отвечает простому однооборотному предельному циклу в этой системе. Наличие n-периодической точки в отображении соответ-

ствует n-тактному, более сложному предельному циклу дифференциальной системы. В отличие от потоковых систем в отображениях стационарные и периодические решения характеризуются в общем случае n-циклом ($n = 1, 2, 3, \ldots$). Сигнатура спектра ЛХП этих решений одинакова для аттракторов в виде устойчивой неподвижной точки периода 1 и любого другого периода $n = 2, \ldots$:

"$-$", "$-$", "$-$", $\ldots$, "$-$".

Линеаризованная матрица отображения Пуанкаре M_n в общем случае, включая $n = 1$, есть аналог матрицы монодромии произвольного периодического решения исходной дифференциальной системы. Замечательное свойство отображения Пуанкаре заключается в том, что собственные значения линеаризации ρ_{ni} $i = 1, 2, \ldots, N-1$, дополненные единичным мультипликатором $\rho_N = 1$, строго равны собственным значениям матрицы монодромии $Y(T)$ дифференциальной системы (2.2). На этом основании устойчивость периодических режимов колебаний в дифференциальных системах количественно характеризуется мультипликаторами n-цикла отображения Пуанкаре. Спектр ЛХП отображения Пуанкаре, дополненный одним нулевым показателем, даст соответственно спектр ЛХП периодического решения дифференциальной системы, порождающей соответствующее отображение.

Мультипликаторы отображения характеризуют изменение проекций вектора возмущения частного решения на собственные направления матрицы линеаризации за один период. Если частное решение не является n-циклом и представляет собой квазипериодическую или хаотическую последовательность $x^0(k)$, понятие мультипликатора утрачивает смысл. Задача анализа устойчивости решений усложняется и требует прямого вычисления показателей спектра ЛХП в пределе $k \to \infty$ численными методами, как и в случае апериодических решений дифференциальных систем. Алгоритмы расчета обсуждаются в гл. 5, а здесь отметим, что сигнатура спектров ЛХП квазипериодических и хаотических аттракторов в отображениях аналогична соответствующим аттракторам потоковых систем за вычетом одного нулевого показателя.

ГЛАВА 3

ТИПИЧНЫЕ БИФУРКАЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

3.1. Структурная устойчивость и бифуркации

Исследование условий сохранения структуры притягивающих предельных множеств при возмущениях – задача, связанная с введением понятий *грубости, структурной устойчивости и топологической эквивалентности* диссипативных динамических систем. С физической точки зрения представляются реальными такие математические модели, которые при малых возмущениях качественно не меняют структуры разбиения пространства параметров на области, отвечающие различающимся типам решений. Такие модели называют *грубыми* или *структурно устойчивыми*. Понятие грубости системы, введенное А.А. Андроновым и Л.С. Понтрягиным для двумерных систем, оказалось чрезвычайно важным и полезным в физике. Совершенно ясно, что практически невозможно записать точную систему уравнений, соответствующую конкретной физической системе, функционирующей в произвольном из некоторого множества возможных режимов. Следовательно, модельная динамическая система должна обладать качественными свойствами, сохраняющимися при малых возмущениях.

Структурно устойчивыми называют такие дифференциальные динамические системы, для которых малые возмущения оператора эволюции, дифференцируемые хотя бы один раз, приводят к *топологически эквивалентным* решениям. Последнее, по сути дела, означает, что возмущенный поток можно перевести в невозмущенный с помощью некоторой непрерывной замены фазовых координат.

Реакция динамической системы на малое возмущение определяется ее состоянием, и в одних случаях возмущающие факторы влияют на режим функционирования системы незначительно, в других – приводят к резкому отличию характера возмущенного движения по сравнению с исходным. В первом случае состояние системы (или тип движения) устойчиво, во втором – нет. Как было показано в гл. 2, задача теории устойчивости в том и состоит, чтобы указать признаки и сформулировать критерии, позволяющие с определенной уверенностью судить о том, устойчиво или нет рассматриваемое движение системы.

Большинство интересных физических задач при их математическом описании продит к дифференциальным уравнениям, зависящим от параметров. Изменение параметра может вызвать потерю устойчивости одним режимом движения и переход системы в другое состояние. Пример – возникновение периодических колебаний в генераторе Ван дер Поля с превышением порога генерации. Это явление называется *бифуркацией*, а значение параметра, при котором оно происходит, – *точкой бифуркации*. Особо интересны такие бифуркации, в результате которых при прохождении точки бифуркации в системе возникают новые устойчивые режимы движения.

Иерархия смены одних устойчивых состояний системы другими с изменением управляющих параметров вызывает последовательность *фазовых переходов* от одних грубых (структурно устойчивых) режимов к другим грубым и осуществляется через негрубое состояние в точке бифуркации.

Математической основой элементарной теории бифуркаций является кратко изложенная в гл. 2 теория устойчивости. С помощью теорий устойчивости и бифуркаций становится возможным рассмотрение задачи о разбиении фазового пространства динамической системы на типичные траектории, анализ структуры этого разбиения, выявление областей в пространстве параметров с характерными типами предельных множеств. Практически это дает возможность построения бифуркационных диаграмм, поясняющих механизмы перестроек режимов движения в фазовом пространстве динамической системы при вариации ее параметров. Совокупность этих вопросов составляет предмет современной качественной теории динамических систем, которая естественным образом включает в себя теорию устойчивости и теорию бифуркаций [40–47].

3.2. Бифуркации состояний равновесия

Бифуркация коразмерности 1 – двукратное равновесие. Рассмотрим динамическую систему, описываемую одним дифференциальным уравнением 1-го порядка на прямой x:

$$\dot{x} = F(x, \mu). \tag{3.1}$$

Пусть $x^0(\mu)$ есть грубое состояние равновесия, т.е. $s(\mu) \neq 0$, где $s(\mu) = F'_x(x^0, \mu)$. Модельным уравнением, описывающим динамику вблизи особой точки, в данном случае будет линеаризованное уравнение (3.1):

$$\dot{y} = sy. \tag{3.2}$$

Из решения $y = y_0 \exp(st)$ видно, что устойчивость x^0 определяется знаком собственного числа s, т.е. знаком производной $F'_x(\mu)$. При некоторых значениях параметров собственное число s в положении равновесия может обратиться в нуль:

$$s(\mu) = F'_x(x^0, \mu) = 0. \tag{3.3}$$

Предположим, что вторая производная при этом отлична от нуля:

$$a(\mu) = F''_{xx}(x^0, \mu)/2 \neq 0. \tag{3.4}$$

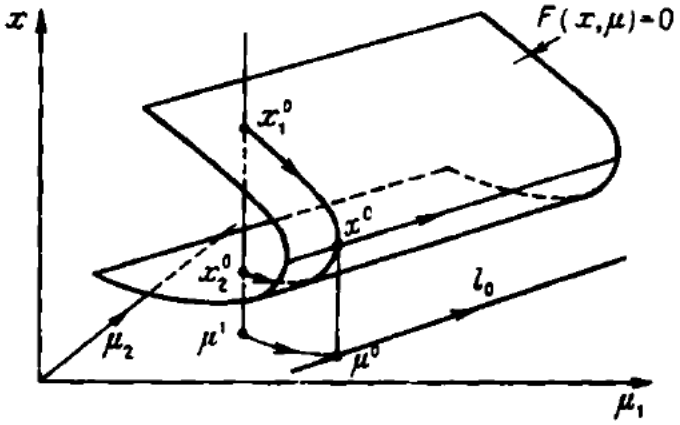
Тогда x^0 есть двукратный корень исходного уравнения (3.1). Модельная

система для данной бифуркации будет

$$\dot{y} = b_1(\mu) + a(\mu)y^2, \qquad (3.5)$$

где b_1 – некоторый параметр.

Пусть, для определенности, $a > 0$. Тогда при $b_1 < 0$ в системе (3.5) существуют два положения равновесия (устойчивое и неустойчивое). При $b_1 = 0$ они сливаются в одно, и при $b_1 > 0$ равновесия исчезают. Если изобразить многообразие $F(x, \mu) = 0$ в комбинированном пространстве параметров и фазовой координаты (рис. 3.1), то при его проецировании



Р и с. 3.1. Особенность типа складки при седло-узловой бифуркации состояния равновесия

на пространство параметров имеется одна особенность типа *складка* [48, 49]. Бифуркация "двукратное равновесие" имеет *коразмерность 1*, так как выделяется единственным бифуркационным условием (3.3). В приложениях эта бифуркация встречается довольно часто и называется также *бифуркацией срыва равновесия* или *седло-узловой бифуркацией.*

Бифуркация коразмерности 2 – трехкратное равновесие. Изменим значения параметров системы (3.1), двигаясь в пространстве параметров вдоль линии l_0 (см. рис. 3.1), отвечающей бифуркационному условию (3.3). При некоторых значениях параметров возможно обращение в нуль величины $a(\mu)$:

$$a(\mu) = F''_{xx}(x^0, \mu)/2 = 0, \quad s(\mu) = F'_x(x^0, \mu) = 0. \qquad (3.6)$$

При этом третья производная $F'''_{xxx}(x^0, \mu) \neq 0$. В этом случае одновременно выполняются два бифуркационных условия (3.6). Реализуется бифуркация *коразмерности 2*; x^0 – трехкратный корень уравнения (3.1). Модельная система для данной бифуркации представляется в виде

$$\dot{y} = b_1 + b_2 y + b(\mu)y^3, \quad b(\mu) \neq 0. \qquad (3.7)$$

В системе (3.7) могут существовать либо одно, либо три грубых стационарных решения. На рис. 3.2 изображено многообразие бифуркации "трехкратное равновесие". Для значений параметров, лежащих в заштрихованной области внутри характерного треугольника (точка, к примеру, A), система имеет три стационарных решения. Одно из них x_2^0, всегда неустойчиво, два других x_1^0 и x_3^0 – устойчивы. Вне этой области значений параметров существует только одно состояние равновесия. В точке B три состояния равновесия сливаются в одно устойчивое равновесие.

Слева от точки B движение по параметрам трансверсально к бифуркационным линиям l_0 характеризуется гистерезисом: в одном направлении осуществляется срыв равновесия за счет слияния и исчезновений состояний равновесия x_1^0 и x_2^0, в обратном направлении – за счет слияния и исчезновения другой пары состояний равновесия x_2^0 и x_3^0.

Особенность, возникающая при проецировании многообразия бифуркации "трехкратное равновесие" на пространство параметров, называется *сборкой* [48, 49]. Сборке, как это видно из рис. 3.2, отвечает пересечение двух бифуркационных линий складок l_0 в точке сборки B.

Бифуркация рождения предельного цикла. В динамических системах размерности $N \geqslant 2$ может реализоваться бифуркация коразмерности 1, когда в нуль обращаются действительные части комплексно-сопряженной пары собственных чисел матрицы линеаризации стационарного решения. Этой бифуркации отвечает возбуждение автоколебаний, и она носит название "бифуркация Андронова – Хопфа".

Пусть при некоторых значениях параметров пара комплексно-сопряженных значений $s_{1,2}$ положения равновесия динамической системы на плоскости становится чисто мнимой, т.е.

$$\operatorname{Re} s_{1,2}(\mu_0) = 0, \qquad \operatorname{Im} s_{1,2}(\mu_0) \neq 0. \tag{3.8}$$

Модельная система, локально описывающая данную бифуркацию, зависит от одного параметра и в комплексной форме записывается в виде [40, 46]

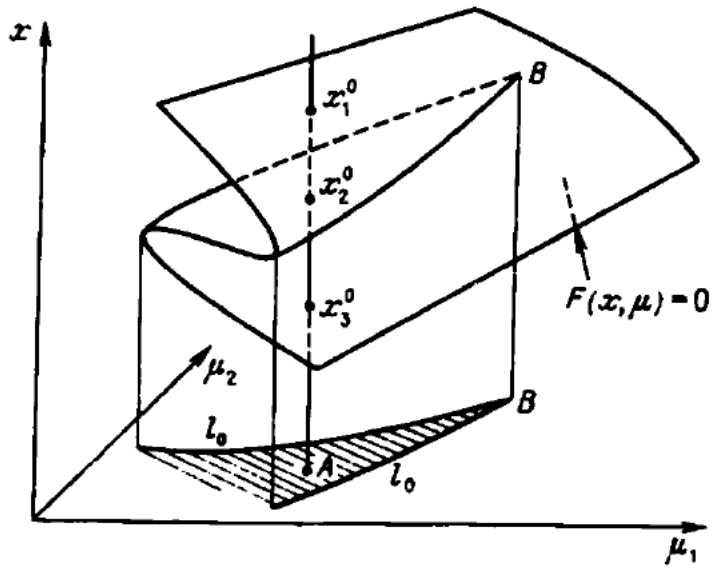
$$\dot{z} = (b_1 + j\omega)z + \mathcal{L}_1 z|z|^2, \tag{3.9}$$

где

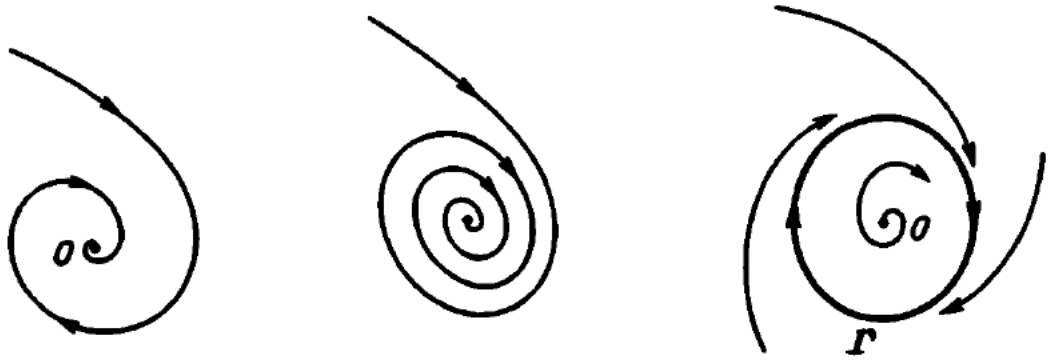
$$\omega(\mu_0) \neq 0, \qquad \mathcal{L}_1(\mu_0) \neq 0.$$

Величина $\mathcal{L}_1(\mu)$ называется первой ляпуновской величиной состояния равновесия и определяет устойчивость периодического режима, рождающегося в результате бифуркации Андронова – Хопфа.

Рассмотрим бифуркационные диаграммы модельной системы на плоскости. Независимо от знака первой ляпуновской величины положение равновесия $z = 0$ системы (3.9) при переходе b_1 через нуль теряет устой-



Р и с. 3.2. Многообразие бифуркации "трехкратное равновесие". Особенность типа сборки



Р и с. 3.3. Мягкая бифуркация Андронова – Хопфа

чивость. Устойчивый при $b_1 < 0$ фокус превращается в неустойчивый при $b_1 > 0$.

Пусть $\mathcal{L}_1(\mu_0) < 0$. В этом случае потеря устойчивости состояния равновесия сопровождается рождением малого устойчивого предельного цикла, размер которого растет с изменением параметра как корень квадратный из надкритичности, а период цикла определяется соотношением

$$T \approx 2\pi/\omega(\mu_0): \qquad \omega(\mu_0) = |\operatorname{Im} s_{1,2}(\mu_0)|. \tag{3.10}$$

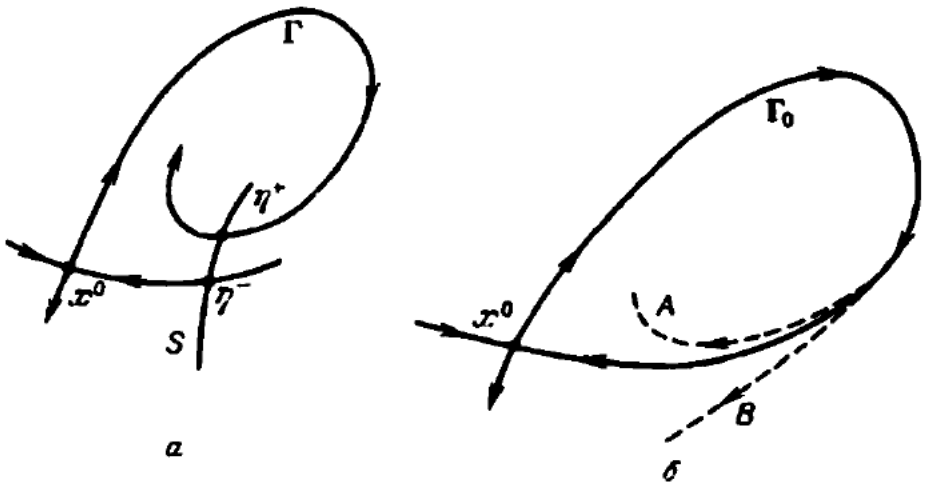
В этом случае говорят о *мягкой бифуркации рождения предельного цикла.* Перестройка фазового портрета системы в случае мягкой бифуркации Андронова -- Хопфа представлена на рис. 3.3.

Рассмотрим случай $\mathcal{L}_1(\mu_0) > 0$. Состояние равновесия до точки бифуркации окружено неустойчивой замкнутой траекторией, ограничивающей область притяжения устойчивого фокуса *O*. При подходе к точке бифуркации неустойчивый цикл стягивается к состоянию равновесия. В точке бифуркации цикл исчезает, сливаясь с точкой равновесия, которая становится неустойчивой. В системе устанавливается какой-то другой режим, сильно отличающийся от режима, претерпевшего бифуркацию. В этом случае говорят о *жесткой потере устойчивости* [46]. Перестройка фазового портрета системы в случае жесткой бифуркации Андронова – Хопфа показана на рис. 3.4.

Отметим, что условие отличия от нуля первой ляпуновской величины обеспечивает рождение ($\mathcal{L}_1 < 0$) или гибель ($\mathcal{L}_1 > 0$) единственного предельного цикла в системе.

Нелокальная бифуркация коразмерности 1 – петля сепаратрисы седлового состояния равновесия. Рассмотрим один важный для дальнейшего случай *нелокальной* бифуркации грубого седлового состояния равновесия: образование особой фазовой траектории, когда одна из выходящих сепа-

Р и с. 3.4. Жесткая бифуркация Андронова – Хопфа



Р и с. 3.5. *а* – К определению функции расщепления сепаратрис $H(\mu)$. *б* – Возможные случаи разрушения петли сепаратрисы Γ_0

ратрис седла $x^0(\mu)$ возвращается назад в седло, образуя *петлю сепаратрисы* Γ_0. Выполнению этого чисто геометрического условия в пространстве параметров системы отвечает бифуркационное многообразие коразмерности один.

Перестройки фазовых портретов системы вблизи петли сепаратрисы при вариации параметров относительно бифуркационного многообразия характеризуются *функцией расщепления сепаратрис*. Рассмотрим случай двумерного фазового пространства, в котором введем вблизи седла одномерную секущую S. Определим на секущей координату η, как это показано на рис. 3.5*а*. Назовем функцией расщепления сепаратрис $H(\mu)$ разность координат пересечения входящей и выходящей сепаратрис с секущей S:

$$H(\mu) = \eta^+ - \eta^-.$$

Если расщепление отвечает случаю A (рис. 3.5*б*), то $H(\mu) < 0$, в случае B $H(\mu) > 0$. Реализации петли сепаратрисы отвечает нулевое значение функции $H(\mu) = 0$.

Условием грубости данной бифуркации является отличие от нуля величины $\sigma(\mu)$, которая называется *седловой величиной*:

$$\sigma(\mu) = \mathrm{Sp}\, A(\mu) = s_1(\mu) + s_2(\mu) \neq 0. \qquad (3.11)$$

В качестве бифуркационного параметра можно рассматривать значение функции $H(\mu)$. Пусть $\sigma < 0$. Тогда при $H(\mu) < 0$ (разрушение петли в сторону A на рис. 3.5*б*) из петли сепаратрисы Γ_0 рождается единственный устойчивый предельный цикл. Если $H(\mu) > 0$ (разрушение петли в сторону B), то из петли ничего не рождается. При значениях седловой величины $\sigma > 0$ петля Γ_0 называется неустойчивой и из нее при расщеплении сепаратрис может возникнуть только неустойчивый предельный цикл [40, 47, 50].

3.3. Бифуркации периодических решений

Постановка задачи. Вопрос об устойчивости и бифуркациях периодических траекторий может быть рассмотрен как непосредственно в отношении дифференциальных уравнений, когда частному решению отвечает предельный цикл, так и путем анализа устойчивости неподвижных точек соответствующего отображения Пуанкаре. Наиболее наглядным и удобным для численного исследования является метод анализа отображения.

Рассмотрим задачу о *типичных локальных бифуркациях* периодических движений, которую решим в терминах отображения Пуанкаре. Пусть Γ – фазовая траектория в N-мерном пространстве, соответствующая периодическому решению автономной системы дифференциальных уравнений (2.1), зависящих от совокупности параметров μ. Введем в рассмотрение секущую S. Пусть точка x^0 пересечения Γ с S является неподвижной точкой отображения Пуанкаре (2.31) *).

Устойчивость неподвижной точки x^0, как было показано, полностью описывается собственными значениями матрицы линеаризации отображения, т.е. *мультипликаторами цикла* $\rho_i(\mu)$, $i = 1, 2, \ldots, N-1$, удовлетворяющими уравнению (2.38). Цикл Γ устойчив (асимптотически устойчив), если при фиксированных значениях параметров все мультипликаторы $|\rho_i| \leqslant 1$ $(|\rho_i| < 1)$. При изменении параметров системы мультипликаторы меняются по величине и при достижении некоторого критического значения $\mu = \mu^*$ один или несколько мультипликаторов могут обратиться по модулю в единицу. Выход на единичную окружность хотя бы одного из мультипликаторов отвечает бифуркационной ситуации, приводящей в итоге к топологической перестройке структуры фазовых траекторий в окрестности цикла Γ.

Рассмотрим случаи потери устойчивости циклом, когда при изменении параметра на единичную окружность выходят один или пара комплексно-сопряженных мультипликаторов. Напомним, что один из мультипликаторов матрицы монодромии равен единице: $\rho_N = 1$. Систему базисных векторов на секущей всегда можно выбрать так, что собственный вектор мультипликатора ρ_N будет касательным к траектории Γ в неподвижной точке отображения x^0. В этом случае устойчивость цикла определяется мультипликаторами отображения, из которых анализируется наибольший по модулю (для комплексно-сопряженных их, естественно, два). Предположим, для упрощения, что меняется один из параметров системы $\mu_i = \mu$, который назовем управляющим **) [11, 51, 12–14].

Седло-узловая бифуркация предельного цикла. При достижении параметром критического значения $\mu = \mu^*$ наибольший мультипликатор цикла $\rho(\mu^*)$ обращается в $+1$. Что при этом происходит?

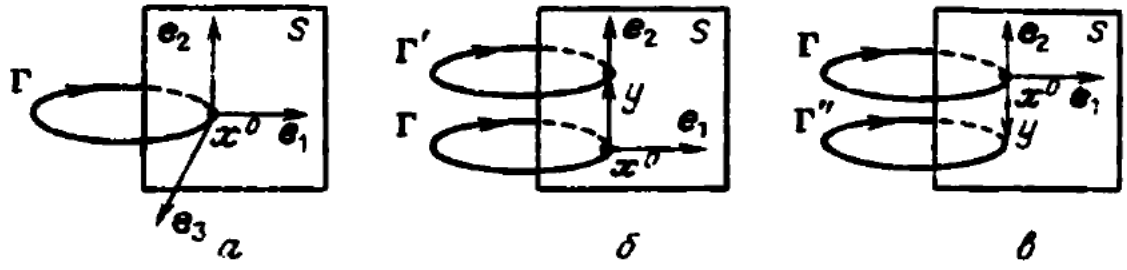
Проиллюстрируем качественно эту ситуацию на примере трехмерного фазового пространства. На рис. 3.6*а* изображен цикл, пересекающий секу-

---

*) Для удобства рассматривается случай простого однооборотного предельного цикла с единственной неподвижной точкой на секущей. Однако все результаты останутся справедливыми и в случае n-цикла в отображении.

**) В общем случае число управляющих параметров определяется коразмерностью бифуркации. Одним параметром можно ограничиться, анализируя бифуркации коразмерности 1.

шую S в неподвижной точке x^0. Пусть e_1 и e_2 – собственные векторы, лежащие на секущей, третий собственный вектор e_3 касателен к траектории Γ в неподвижной точке. Собственному вектору e_1 отвечает мультипликатор $\rho_1(\mu)$, а вектору e_2 – $\rho_2(\mu)$. Будем считать, что $\rho_1(\mu) < 1$ при значениях параметра вблизи критического. Это означает, что через некоторое число оборотов любая возмущенная траектория вблизи цикла Γ по направлению e_1 приблизится к x^0 на секущей. В направлении e_2 в критической точке $\rho_2(\mu^*) = +1$. В зависимости от ориентации малого начального

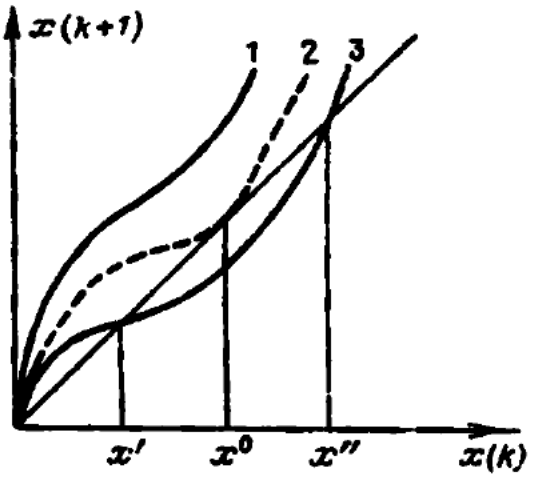


Р и с. 3.6. Седло-узловая бифуркация периодического решения

возмущения y относительно собственного направления e_2 возможны два случая, показанные на рис. 3.6*б*, *в*. В точке бифуркации либо рождается пара циклов Γ' и Γ'', либо они сливаются и исчезают. Наглядно бифуркация рождения (гибели) пары циклов иллюстрируется модельным одномерным отображением на диаграмме Ламерея.

На рис. 3.7 дан график некоторого одномерного модельного отображения $x(k+1) = P[x(k), \mu]$ и его эволюция с изменением управляющего параметра. Кривая *2* отвечает негрубой ситуации в критической точке μ^*, когда $P'_x(x^0, \mu) = +1$. Для одномерного отображения матрица линеаризации состоит из одного члена $P'_x(x^0)$, который и является мультипликатором неподвижной точки. С изменением параметра μ касание графика отображения с биссектрисой либо исчезает (рис. 3.7, кривая *1*), либо появляются две точки пересечения x' и x''. В первом случае в критической точке гибнут, сливаясь, два цикла, во втором – из сгущения фазовых траекторий жестко рождается пара неподвижных точек: устойчивая x' и седловая x''.

Если ввести в рассмотрение малый параметр $\epsilon = |\mu - \mu^*|$, то асимптотическая зависимость $\rho(\epsilon)$ при $\epsilon \to 0$ описывается в случае бифуркации +1



Р и с . 3.7. Седло-узловая бифуркация в модельном отображении

соотношением

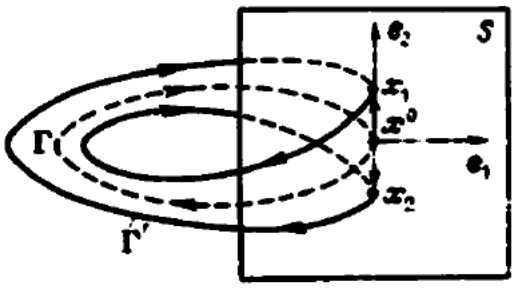
$$\rho(\epsilon) = 1 - c\epsilon^{1/2}. \qquad (3.12)$$

Зависимость (3.12) дает асимптотику мультипликатора устойчивого цикла при стремлении параметра μ к критическому значению μ^*.

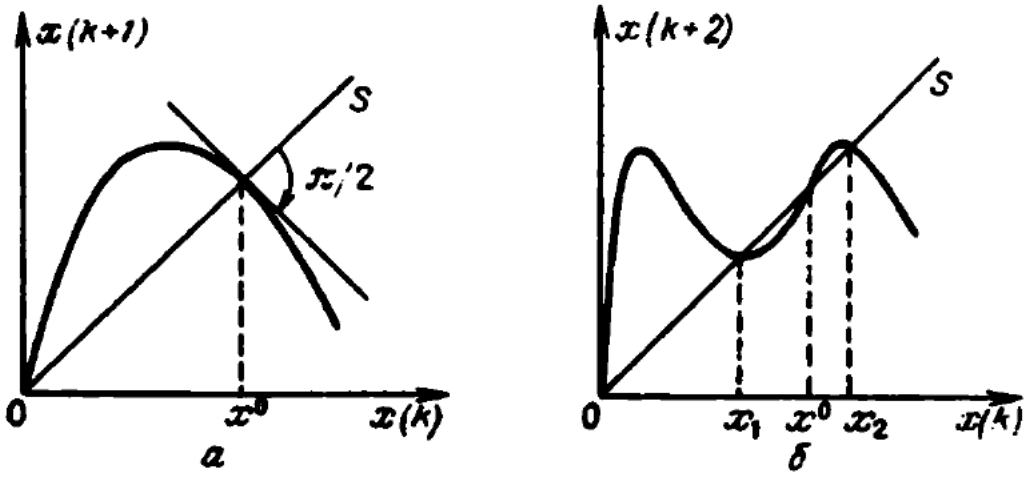
Рассмотренная бифуркация предельного цикла в отображении аналогична бифуркации срыва равновесия для стационарных решений и также называется седло-узловой бифуркацией периодического решения.

Бифуркация удвоения периода цикла. В основном случае в критической точке $\mu = \mu^*$ при условии, что $\rho'_\mu \neq 0$, имеет место обращение мультипликатора $\rho(\mu^*)$ в -1. Цикл Γ при $\mu > \mu^*$ продолжает существовать как седловой, а вблизи него рождается предельный цикл, период которого близок к удвоенному. Рассмотрим соответствующую картину в фазовом пространстве, представленную на рис. 3.8. Цикл Γ в критической точке μ^* пересекает S в точке x^0. Зададим малое приращение y в направлении e_2 и проследим за возмущенной траекторией Γ'. Через один оборот по траектории Γ' вблизи Γ вектор приращения сменит направление на противоположное (мультипликатор равен -1), оставшись в линейном приближении по модулю без изменения. Возмущенная траектория Γ' пересечет поверхность S в точке x_2 и, сделав еще один оборот, замкнется, вернувшись в исходную точку x_1. Неподвижная точка отображения x^0 периода 1 при данной бифуркации теряет устойчивость, образуя цикл периода 2.

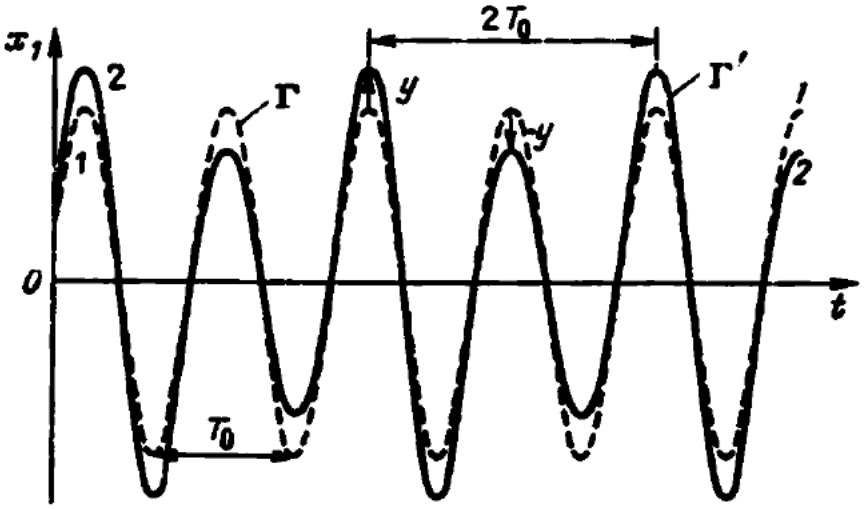
На примере одномерного отображения бифуркация удвоения периода иллюстрируется рис. 3.9. На рис. 3.9*а* $\mu = \mu^*$ и $P'_x(x^0) = -1$. Дважды применив оператор отображения, для $\mu \gtrsim \mu^*$ найдем родившийся устойчивый цикл удвоенного периода. Из рис. 3.9*б* видно, что график $P^{(2)}[x(k)]$ пересекает биссектрису в трех точках: x^0 – неустойчивая и x_1, x_2 – две устойчивые неподвижные точки. Если при подходе к точке бифуркации μ^*



Р и с. 3.8. Возмущенная траектория Γ' в окрестности предельного цикла Γ при бифуркации удвоения периода



Р и с. 3.9. Мягкая бифуркация удвоения периода в одномерном отображении с параметром $\mu = \mu^*$ (*а*) и $\mu \gtrsim \mu^*$ (*б*)



Р и с. 3.10. Бифуркация удвоения периода на примере временной зависимости фазовой координаты $x_1(t)$ с параметром $\mu < \mu^*$ (1) и $\mu \geq \mu^*$ (2)

исходный цикл Г был устойчив не в малом, т.е. характеризовался конечной областью притяжения, то родившийся предельный цикл удвоенного периода будет устойчив.

Бифуркацию удвоения периода можно проиллюстрировать на примере наблюдения временной зависимости одной из фазовых координат системы; пусть это будет $x_1(t)$. На рис. 3.10 штриховой линией показана реализация $x_1(t)$ периодического движения Г в момент бифуркации удвоения периода $\rho(\mu^*) = -1$. Сплошной линией изображена реализация $x_1(t)$ для $\mu \gtrsim \mu^*$, отвечающая родившемуся циклу удвоенного периода. Асимптотическая зависимость мультипликатора от параметра вблизи критической точки дается выражением

$$\rho(\epsilon) = c\epsilon - 1, \tag{3.13}$$

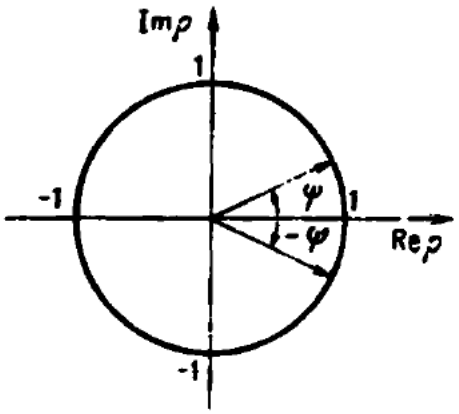
т.е. зависимость $\rho(\mu)$ аппроксимируется линейной функцией.

Бифуркация рождения (гибели) двумерного тора. Эта бифуркация реализуется, когда с изменением параметра на единичную окружность выходит пара комплексно-сопряженных мультипликаторов. В критической точке μ^* имеет место соотношение

$$\rho_{1,2}(\mu^*) = |\rho_{1,2}| \exp(\pm j\psi), \tag{3.14}$$

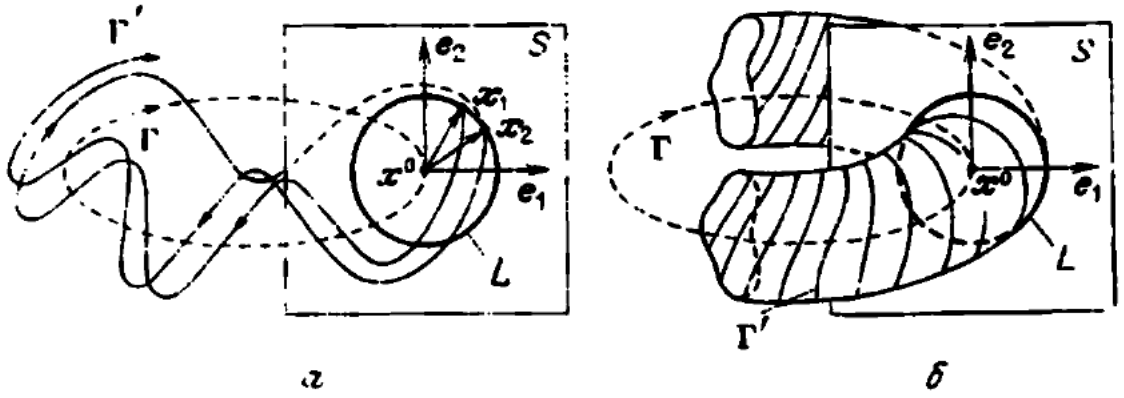
где $|\rho_{1,2}(\mu^*)| = 1$, $\psi(\mu^*) \neq 0, \pi, \pi/2, 2\pi/3$. На комплексной плоскости значений мультипликаторов ситуации соответствует рис. 3.11. Неподвижная точка отображения Пуанкаре становится неустойчивой, и вблизи нее либо мягко рождается, либо стягивается в точку *инвариантная* замкнутая *кривая* в отображении. В окрестности цикла Г при этом либо мягко рождается, либо стягивается к предельному циклу инвариантная замкнутая двумерная поверхность в фазовом пространстве системы.

Рассмотрим эту бифуркацию подробнее на примере трехмерного фазового пространства. Пусть для неподвижной точки x^0 имеет место условие (3.14). Так как отображение Пуанкаре двумерно, устойчивость x^0 описывается двумя мультипликаторами. Задавая произвольное возмущение y вблизи x^0, мы наблюдаем картину, изображенную на рис. 3.12*а*. С каждым последующим пересечением Г с S на окружности L будут появляться новые



Р и с. 3.11. Пара комплексно-сопряженных мультипликаторов цикла на единичной окружности в момент бифуркации рождения двумерного тора

Р и с. 3.12. Рождение двумерного тора из цикла



а *б*

точки x_i, $i = 1, 2, \ldots, \infty$. Так как угол ψ в общем случае не кратен 2π, то эти точки образуют бесконечную последовательность, но остаются на окружности постоянного радиуса $r = |y|$. Если долго следить за возмущенной траекторией Γ', то точки пересечения ее с секущей S всюду плотно покроют *инвариантную окружность* в сечении Пуанкаре. Инвариантную в том смысле, что любая точка на этой окружности переходит в точку этой же окружности. Спустя большое время реализуется картина, изображенная на рис. 3.12*б*. Траектория Γ' всюду плотно покроет поверхность "бублика", сечение Пуанкаре которого представляет собой окружность L. Эта поверхность называется *двумерным тором*. В случае мягкого рождения двумерного тора все траектории в окрестности потерявшего устойчивость цикла Γ со временем будут приближаться и располагаться на поверхности тора.

Отметим, что рассмотренная бифуркация рождения тора для отображений может трактоваться как бифуркация Андронова – Хопфа, когда из неподвижной точки x^0 в результате потери ею устойчивости рождается предельный цикл, которому отвечает инвариантная окружность L. При мягкой бифуркации рождения тора устойчивые траектории на двумерном торе близки к седловому циклу Γ. Возможны случаи жесткой бифуркации, когда в момент потери устойчивости предельным циклом в него "влипает" неустойчивый двумерный тор. В экспериментах в этом случае наблюдается жесткий переход от потерявшего устойчивость предельного цикла Γ к некоторому другому режиму, фазовые траектории которого могут быть удалены от цикла, и их структуру в общем случае предсказать невозможно.

Если угол ψ в момент бифуркации оказывается целочисленным кратным 2π, то точки пересечения x_i образуют периодическую последовательность.

n-цикл на L. В таком случае говорят о *явлении резонанса на торе.* Траектория, сделав конечное число оборотов по поверхности тора, замыкается и представляет собой более сложное, но периодическое движение — резонансный предельный цикл на торе. В математике различают случаи сильных и слабых резонансов. Порядок резонанса определяется величиной q, если мультипликаторы записать в форме

$$\rho_{1,2} = |\rho_{1,2}| \exp(\pm j \cdot 2\pi p/q), \quad \psi = 2\pi p/q, \tag{3.15}$$

где p/q – *число вращения* Пуанкаре. Особенно большое влияние на картину потери устойчивости оказывают сильные резонансы: $q = 1, 2, 3$ и 4 [52].

Физической интерпретацией описанной бифуркации мягкого рождения двумерного тора служит явление возникновения устойчивой периодической модуляции исходного периодического колебания (биения), когда частота модуляции Ω и частота модулируемого колебания ω_0 либо кратны (резонансные биения), либо несоизмеримы (квазипериодические колебания с иррациональным соотношением частот). В последнем случае отсутствия резонансов движение на двумерном торе называют *эргодическим.* Зависимости от времени для любой из фазовых переменных $x_i(t)$ исходной системы уравнений (2.2) в режиме квазипериодических колебаний имеют вид, качественно изображенный на рис. 3.13.

При качественной интерпретации бифуркаций периодического движения всюду предполагалось, что $\mu = \mu^*$, и анализировалась эволюция возмущенной траектории. При малых отклонениях параметра от критического значения реализуются топологически эквивалентные рассмотренным выше режимы. Однако нужно четко уяснить, что эти режимы наблюдаются только при $\mu \gtrsim \mu^*$ и зависят от уровня надкритичности. Например, инвариантная окружность L в отображении (рис. 3.12) имеет радиус $r = \sqrt{\epsilon}$, и т.д. Заканчивая обсуждение бифуркации рождения (гибели) двумерного тора, укажем асимптотическое выражение для зависимости мультипликаторов от параметра вблизи критической точки:

$$|\rho(\epsilon)| = 1 - c\epsilon. \tag{3.16}$$

Бифуркация потери симметрии. Рассмотрим бифуркацию предельных циклов, характерную для динамических систем с некоторыми свойствами симметрии. Пусть наибольший из мультипликаторов предельного цикла Г в бифуркационной точке обращается в +1: $\rho(\mu^*) = +1$. Все другие мульти-

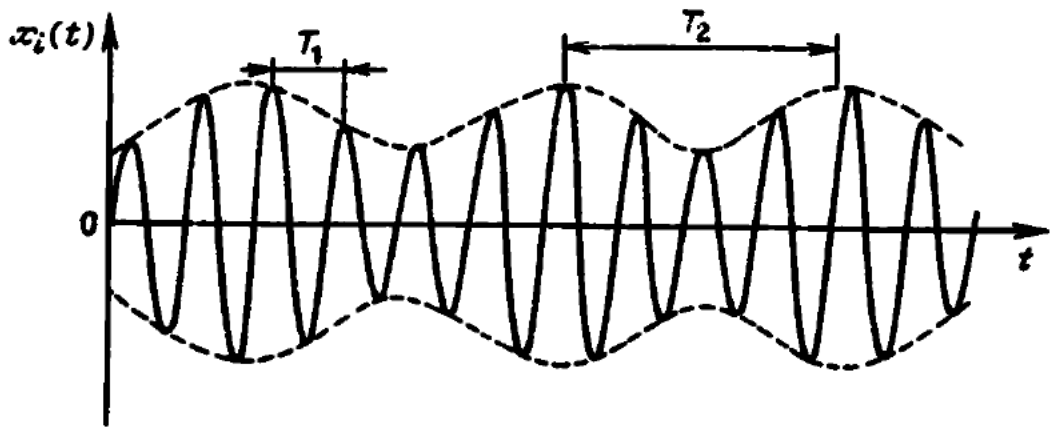


Рис. 3.13. Временная зависимость $x_i(t)$ в режиме двухчастотных биений; T_1 и T_2 квазипериоды

пликаторы лежат внутри единичного круга. С превышением критического значения μ^* цикл не исчезает, но становится седловым. Вблизи цикла Г в критической точке рождается два устойчивых цикла (либо с циклом Г сливается пара седловых циклов)*). Эта бифуркация в принципе отлична от седло-узловой бифуркации в системе общего положения. Для пояснения рассмотрим следующий простой пример. Пусть имеется система двух идентичных симметрично связанных нелинейных осцилляторов. Уравнения системы можно записать в форме

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + G(\mu, x_1)\dot{x}_1 + x_1 &= \gamma\theta(x_1, x_2), \\ \ddot{x}_2 + G(\mu, x_2)\dot{x}_2 + x_2 &= \gamma\theta(x_1, x_2). \end{aligned} \tag{3.17}$$

Здесь x_1, x_2 – переменные, совершающие колебания, $G(\mu, x)$ – некоторая нелинейная функция, обеспечивающая существование предельного цикла в парциальной системе, μ – параметр нелинейности, γ – коэффициент связи, θ – функция, задающая характер симметричной связи. Уравнения (3.17) инвариантны относительно замены x_1 на x_2. При некоторых значениях параметров автоколебания в системе (3.17) могут быть синхронными, т.е. удовлетворять требованию

$$x_1 = x_2, \quad \dot{x}_1 = \dot{x}_2, \tag{3.18}$$

и асинхронными, если одно из условий (3.18) нарушено. Для синхронного режима можно описать процесс автоколебаний одним уравнением:

$$\ddot{x} + G(x, \mu)\dot{x} + x = \gamma\theta(x). \tag{3.19}$$

Фазовое пространство системы (3.19) – плоскость переменных $x = x_1$ и $\dot{x} = x_2$. В случае синхронных колебаний предельный цикл исходной системы (3.17), фазовое пространство которой имеет размерность $N = 4$, расположен в инвариантном пространстве меньшей размерности. Оно представляет собой двумерную поверхность в четырехмерном пространстве. Если синхронный цикл асимптотически устойчив, то мультипликаторы отображения Пуанкаре $|\rho_i| < 1$, $i = 1, 2, 3$. С изменением μ или γ синхронный цикл Г может потерять устойчивость различными способами. Нас интересует случай, когда неустойчивость цикла сопровождается нарастанием возмущений в направлениях, трансверсальных к инвариантному подпространству. При $\mu = \mu^*$ один из мультипликаторов цикла Г, собственный вектор которого не лежит в инвариантной плоскости, принимает значение +1. С ростом $\mu > \mu^*$ цикл Г в четырехмерном пространстве стал седловым, но в инвариантной поверхности цикл может при этом оставаться устойчивым. В бифуркационной точке μ^* от синхронного цикла, лежащего в инвариантной плоскости, ответвляется два зеркально-симметричных (по отношению к инвариантной плоскости) цикла Г′ и Г″, что иллюстрирует рис. 3.14.

Таким образом, если в эксперименте зафиксирована бифуркация предельного цикла, при которой один из мультипликаторов обратился в +1, но цикл в системе не исчез, а стал седловым, это свидетельствует о бифуркации потери симметрии, когда синхронные колебания стали неустойчи-

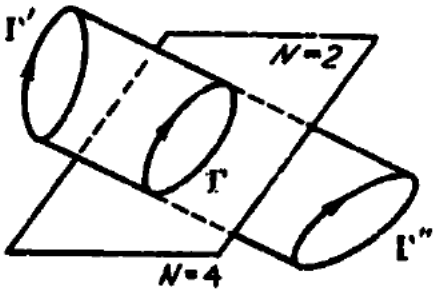
*) В общем случае дополнительных вырождений могут рождаться несколько предельных циклов.

выми и в системе возникли асинхронные (асимметричные) режимы колебаний.

Асимптотика зависимости мультипликатора $\rho(\epsilon)$ в данном случае дается соотношением

$$\rho(\epsilon) = 1 - c\epsilon \qquad (3.20)$$

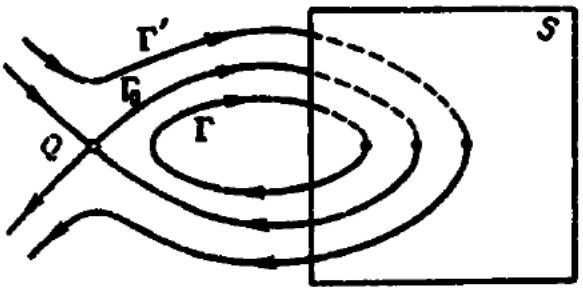
как при движении по параметру снизу ($\mu < \mu^*$, $c > 0$), так и сверху ($\mu > \mu^*$, $c < 0$).



Р и с. 3.14. Бифуркация рождения циклов при потере устойчивости симметричным периодическим решением

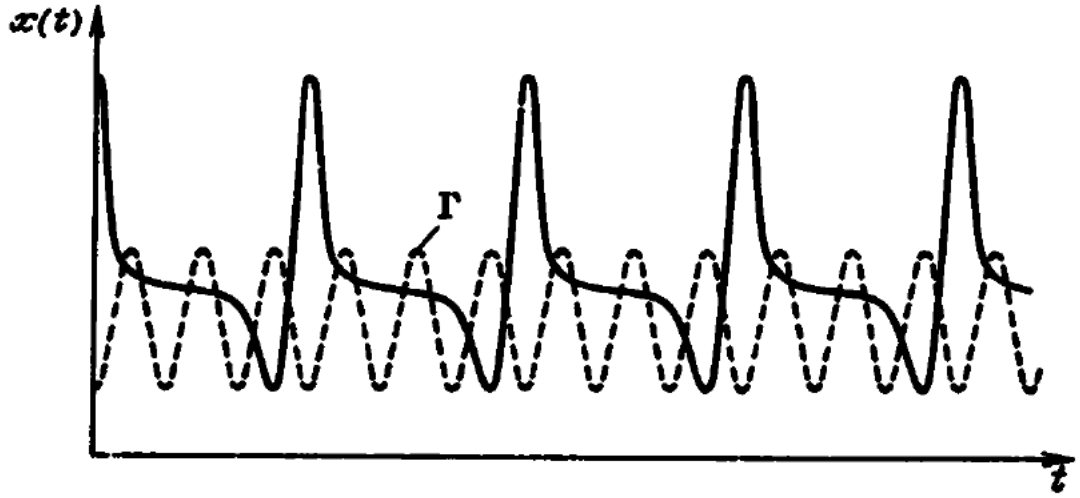
Нелокальные бифуркации периодических движений, сопровождающиеся обращением периода в бесконечность. Рассмотрим два случая наиболее часто встречающихся бифуркаций предельных циклов, общим для которых при подходе к точке бифуркации μ^* является стремление периода $T(\mu)$ цикла в бесконечность.

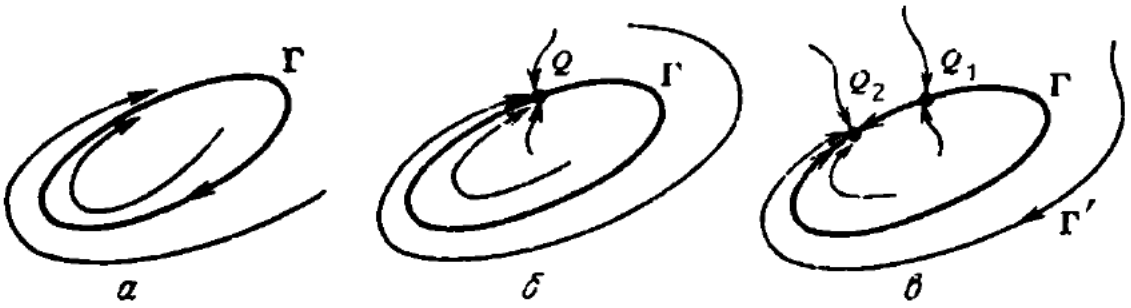
Первый случай связан с исчезновением периодического движения путем его "влипания" в петлю сепаратрисы Γ_0 седла Q, как это показано на рис. 3.15. Сепаратрисный контур Γ_0 неустойчив, так как любая близлежащая траектория Γ' покидает окрестность петли. Устойчивый предельный цикл при подходе к критической точке увеличивается в размере и в итоге "захватывает" седловое состояние равновесия, "влипая" в петлю сепара-



Р и с. 3.15. Бифуркация исчезновения предельного цикла при слиянии его с петлей сепаратрисы седла

Р и с. 3.16. Типичная временная зависимость фазовой координаты цикла вблизи петли сепаратрисы седла





Р и с. 3.17. Бифуркация исчезновения цикла при рождении на нем негрубой стационарной точки типа седло-узел

трисы. Для периода цикла $T(\epsilon)$ характерна зависимость

$$T(\epsilon) = c \ln(\epsilon^{-1}) + c_0, \tag{3.21}$$

отражающая факт стремления его к бесконечности. Если цикл $\Gamma(\mu)$ при $\mu < \mu^*$ был устойчив, то мультипликаторы также стремятся к нулю для $\epsilon \to 0$.

Бифуркации исчезновения периодического движения в этом случае отвечает типичная эволюция во времени любой из фазовых координат цикла, качественно проиллюстрированная на рис. 3.16. Периодическое движение вблизи бифуркации выглядит как некоторая последовательность импульсов, частота которых стремится к нулю при подходе к критической точке. В критической точке временная реализация имеет вид одиночного импульса, т.е. становится апериодической. Естественно, что апериодическая траектория может быть получена только в численном эксперименте. В физических экспериментах фиксируется лишь увеличение периода колебаний в соответствии с (3.21) и вблизи критической точки колебания жестко срываются, сменяясь каким-либо иным режимом. С превышением параметром критического значения в численных экспериментах возмущенная траектория, как правило, больше не имеет точек пересечения с секущей. Регистрируется потеря цикла и жесткий переход в новый режим движения системы.

Второй случай бифуркации, приводящий к обращению периода цикла в критической точке в бесконечность, связан с исчезновением периодического движения в момент рождения на цикле стационарной особой точки типа седло-узел. При подходе к критическому значению параметра период цикла стремится к бесконечности по закону

$$T(\epsilon) = c\epsilon^{-1/2}. \tag{3.22}$$

Мультипликаторы цикла, как и в предыдущем случае, стремятся к нулю. Перестройки фазового портрета системы при данной бифуркации качественно показаны на рис. 3.17. При значениях $\mu < \mu^*$ цикл асимптотически устойчив (рис. 3.17*а*). В бифуркационной точке μ^* на цикле рождается негрубое состояние равновесия Q типа седло-узел (рис. 3.17*б*). С превышением параметром критического значения $\mu > \mu^*$ седло-узел расщепляется на седло Q_1 и устойчивый узел Q_2 (рис. 3.17*в*).

3.4. Нелокальные бифуркации в окрестности двоякоасимптотических траекторий

Рассмотрим динамическую систему с трехмерным фазовым пространством, в которой существует стационарное решение в виде седловой особой точки, зависящей от параметров грубым образом. Предположим, что при μ^* имеется особое решение системы в виде двоякоасимптотической к особой точке траектории Γ_0. Петля сепаратрисы седла Γ_0, очевидно, не является грубым решением и разрушается при сколь угодно малом отклонении параметра от бифуркационного значения. Что при этом происходит?

Как уже обсуждалось в 3.2, в двумерном случае возможно лишь одно рождение единственного предельного цикла (устойчивого либо неустойчивого). Выход с фазовой плоскости в пространство трех и более измерений приводит к качественно новым явлениям. Строгий анализ бифуркаций многомерных динамических систем при разрушении петли сепаратрисы седла и седло-фокуса был проведен Л.П. Шильниковым в серии замечательных работ [53]. Эти работы сыграли важную роль в понимании и объяснении явления динамической стохастизации автоколебаний и стали, по существу, классическими.

Рассмотрим основные результаты, ограничившись для ясности трехмерным случаем. Пусть собственные числа матрицы линеаризации седлового состояния равновесия s_i ($i = 1, 2$ и 3) удовлетворяют условиям

$$s_3 > 0, \quad \operatorname{Re} s_{1,2} < 0. \tag{3.23}$$

Введем в рассмотрение две седловые величины

$$\begin{aligned} \sigma_1(\mu) &= \max_{i=1,2} \operatorname{Re} s_i(\mu) + s_3(\mu), \\ \sigma_2(\mu) &= 2\operatorname{Re} s_1(\mu) + s_3(\mu) \end{aligned} \tag{3.24}$$

и предположим, что реализуется грубый случай, когда σ_1 и σ_2 в бифуркационной точке и ее малой окрестности отличны от нуля.

При отклонении значения параметра от бифуркационного μ^* петля Γ_0 разрушается. Реализующиеся при этом бифуркации определяются тремя основными случаями.

1. $\sigma_1(\mu^*) < 0$. В этом случае из петли Γ_0 рождается *единственный устойчивый предельный цикл*. Ситуация аналогична рассмотренной ранее для двумерного фазового пространства. В системе жестко возбуждаются устойчивые периодические колебания конечной амплитуды с относительно большим периодом.

2. $\sigma_1(\mu^*) > 0$, при этом собственные значения $s_{1,2}$ комплексно сопряжены. С разрушением петли в ее окрестности рождается *счетное множество седловых периодических движений*. Однако они не исчерпывают всего множества возможных траекторий в окрестности разрушившейся петли. Помимо них в зависимости от знака седловой величины σ_2 реализуется еще одна из двух систем предельных циклов.

Если $\sigma_2(\mu^*) < 0$, то вблизи петли Γ_0 с изменением μ в счетном множестве интервалов значений параметра $\Delta\mu_i$ существуют *устойчивые* периодические движения. В зависимости от размеров интервалов существования

по параметру и от области притяжения в фазовом пространстве эти циклы могут наблюдаться в экспериментах. Если $\sigma_2(\mu^*) > 0$, то также существует счетное множеество интервалов $\Delta\mu_i$, в которых имеют место *абсолютно неустойчивые* периодические режимы (предельные циклы с мультипликаторами вне единичного круга). Естественно, что указанные периодические режимы в реальных системах наблюдать невозможно.

3. $\sigma_1(\mu^*) > 0$, при этом все собственные значения s_i – действительные числа. С разрушением петли может родиться *единственное периодическое движение*, причем только *седлового* типа.

Итак, из петли сепаратрисы седлового состояния равновесия Γ_0 при малом отклонении параметра от бифуркационного могут рождаться периодические движения как устойчивые, так и седловые и абсолютно неустойчивые. Случай $\sigma_1(\mu^*) > 0$, приводящий к рождению счетного множества седловых периодических движений, представляется особо интересным с точки зрения понимания возможности реализации хаотической динамики. В окрестности петли при этом возникает нетривиальное *гиперболическое подмножество траекторий* – необходимое условие существования странного аттрактора.

ГЛАВА 4

СТРАННЫЕ АТТРАКТОРЫ

4.1. Эргодичность динамических систем

Чтобы осознать возможность стохастического поведения автоколебательной системы, нужно понять, каким образом в детерминированной системе с небольшим числом степеней свободы в отсутствие флуктуаций может возникать движение, отвечающее сложившимся представлениям о случайном процессе. В общих чертах это можно пояснить, опираясь на такие понятия, как неустойчивость и автоколебание.

Неустойчивость режима колебаний в смысле Ляпунова есть самое существенное обстоятельство, поясняющее возможность хаотического движения в детерминированной системе. В неустойчивом режиме малые возмущения нарастают во времени. Если система линейна, то изображающие траектории стремятся к бесконечности. В нелинейных системах нарастание малых возмущений может быть конечным (благодаря определенному механизму нелинейного ограничения, всегда присутствующему в автоколебательных системах) и фазовые траектории из области притяжения стремятся во времени к аттрактору. Локальная неустойчивость в области притяжения сменяется устойчивостью движения на аттракторе. Примером служит режим мягкого возбуждения автоколебаний в генераторе Ван дер Поля. Но этого может и не произойти. Тогда все траектории в аттракторе будут неустойчивыми по Ляпунову.

Любая возмущенная траектория вблизи неустойчивой локально покидает ее окрестность, экспоненциально удаляясь от нее со временем. Наличие аттрактора требует возвращаемости траекторий. Для этого необходим глобальный механизм нелинейного ограничения. На фазовой плоскости эффект возвращаемости в общем случае неизбежно приведет к самопересечению фазовых траекторий, что исключается в силу теоремы о единственности решения. Возвращаемость без самопересечений диктует необходимость выхода траектории с плоскости в пространство, т.е. автоколебательная система со сложным поведением должна быть минимумом трехмерной.

Если траектория принадлежит аттрактору и неустойчива, то, оказавшись спустя некоторое время в окрестности начальной точки, она будет от нее удаляться. Это и исключает возможность периодичности процесса. Возни-

кает новый тип движения детерминированной системы: предсказуемый, но не периодический. В чем сходство и различие таких движений с истинно случайными? Можно ли описать эти движения, взяв за основу методы статистической теории? Вот принципиальные вопросы, на которые нужно получить ответ.

Проблема взаимосвязи законов статистической механики и динамики детерминированных систем, несмотря на многолетнюю историю, и сейчас представляется одной из интереснейших в современной математической физике. С понятием стохастической изменчивости состояния так или иначе связывается случай, диктующий необходимость введения количественной характеристики неопределенности состояния в виде вероятностной меры. Хотя состояние системы может изменяться случайным образом, законы, управляющие этими изменениями, могут не меняться во времени. Ключом к пониманию таких случайных изменений состояния является *эргодическая теория*. Зарождение ее непосредственно связано с классической механикой. При обосновании последней впервые возник вопрос, можно ли, не решая системы дифференциальных уравнений, описывающей движение множества взаимодействующих частиц, указать свойства статистического характера, появляющиеся в поведении всех или почти всех ее фазовых траекторий при $t \to \infty$? Например, существует ли предел переменного среднего

$$\overline{x(t)} = \lim_{t \to \infty} t^{-1} \int_0^t \theta[\mathbf{T}_t(x)]\,dt. \qquad (4.1)$$

где функция $\theta(x)$ определена в фазовом пространстве, и зависит ли этот предел от начальных условий?

Центральным понятием классической эргодической теории является понятие *эргодичности движения*. Если фазовая траектория всюду плотно заполняет некоторый доступный фазовый объем G в фазовом пространстве, движение называют эргодическим. При этом в пределе $t \to \infty$ относительное время пребывания траектории в любом конечном элементе объема ΔG пропорционально относительному объему этого элемента [6, 15, 32, 54, 55]:

$$P_{\Delta G} = \lim_{t \to \infty} (t_{\Delta G}/t) \sim \Delta G/G. \qquad (4.2)$$

Здесь $t_{\Delta G}$ – время пребывания траектории в элементе объема ΔG, $P_{\Delta G}$ – вероятность попадания траектории в элемент обьема ΔG.

Существование предела (4.2) является важнейшей теоремой эргодической теории и позволяет ввести понятие *инвариантной* (т.е. не зависящей от времени и начальных данных) *вероятностной меры* по данным наблюдения конкретной траектории динамической системы. Введение инвариантной вероятностной меры для эргодического движения и послужило основой эргодической теории, изучающей преобразования $\mathbf{T}_t(x)$, которые сохраняют меру.

Простым наглядным примером эргодического движения служит движение на двумерном торе при иррациональном соотношении базовых частот. Доступный фазовый объем G в этом случае есть просто двумерная поверхность тора, являющаяся аттрактором системы. Все предельные траектории лежат на этой поверхности. Эргодичность движения означает равномерное и плотное покрытие этой поверхности фазовой траекторией.

Если определено понятие вероятности (4.2), то для эргодического движения системы справедливо соотношение

$$\lim_{t \to \infty} t^{-1} \int_0^t \theta[x(t)]\, dt = \int_G \theta(x)\, dP(x), \tag{4.3}$$

что означает с вероятностью единица равенство усреднения по времени вдоль конкретной траектории $x(t)$ и усреднения по вероятностной мере, определенной в фазовом пространстве с помощью теоремы (4.2). Условие (4.3), по сути дела, является определением эргодичности динамической системы.

Однако, как обсуждалось выше, квазипериодический аттрактор, представляющий собой в общем случае p-мерный тор, не является странным. Спектр ЛХП любой траектории на эргодическом торе содержит в качестве старших p нулевых показателей и отвечает устойчивому движению. Значит, эргодичность слишком слабое свойство динамических систем, чтобы использовать его как критерий стохастичности.

Здесь уместно обсудить спектральные характеристики режимов колебаний, отвечающих различным типам аттракторов динамических систем. Любое периодическое ограниченное решение системы можно представить в виде ряда Фурье

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp(jn\omega_0 t), \quad \omega_0 = 2\pi/T. \tag{4.4}$$

Спектр периодических автоколебаний представляется в виде суперпозиции определенным образом сфазированных гармонических составляющих с кратными частотами (гармониками $n\omega_0$). Определим автокорреляционную функцию процесса $x(t)$:

$$\Psi_x(\tau) = \lim_{t \to \infty} t^{-1} \int_0^t x(\xi)\, x(\xi + \tau)\, d\xi; \tag{4.5}$$

с учетом (4.4) получаем

$$\Psi_x(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 \exp(jn\omega_0\tau). \tag{4.6}$$

Автокорреляционная функция периодического процесса является периодической с тем же периодом. Спектральная плотность мощности периодических автоколебаний есть фурье-преобразование от $\Psi_x(\tau)$:

$$S_x(\omega) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_x(\tau) \exp(-j\omega\tau)\, d\tau = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 \delta(\omega - n\omega_0) \tag{4.7}$$

и содержит только дискретные составляющие на гармониках основной частоты $n\omega_0$.

Если аттрактор системы – квазипериодический, то решение $x(t)$ представимо в виде (2.28). Разложим квазипериодическое решение в многократный ряд Фурье

$$x(t) = \sum_{n_1, \ldots, n_l} C_{n_1, \ldots, n_l} \exp[j(n_1\omega_1 + \ldots + n_l\omega_l)t]. \tag{4.8}$$

Для автокорреляционной функции и спектральной плотности мощности процесса получим соответственно

$$\Psi_x(\tau) = \sum_{n_1, \ldots, n_l} |C_{n_1 \ldots n_l}|^2 \exp[j(n_1\omega_1 + \ldots + n_l\omega_l)\tau].$$
$$S_x(\omega) = \sum_{n_1, \ldots, n_l} |C_{n_1 \ldots n_l}|^2 \delta(\omega - n_1\omega_1 - \ldots - n_l\omega_l). \quad (4.9)$$

Автокорреляционная функция процесса $x(t)$ является квазипериодической функцией времени τ. Спектральная плотность мощности квазипериодического процесса включает совокупность дискретных линий с частотами, представляющими всевозможные линейные комбинации на основе базовых частот

$$\omega_{n_1, \ldots, n_l} = n_1\omega_1 + n_2\omega_2 + \ldots + n_l\omega_l, \quad (4.10)$$

которые назовем комбинационными частотами квазипериодического аттрактора.

В случае если решение динамической системы характеризует движение на странном аттракторе и, следовательно, не является периодическим или квазипериодическим, оно представимо в виде интеграла Фурье

$$x(t) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega) \exp(j\omega t)\, d\omega,$$
$$\Phi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j\omega t)\, dt, \quad (4.11)$$

где $\Phi(\omega)$ – спектральная амплитуда процесса. В предположении стационарности и эргодичности движения на странном аттракторе справедливы соотношения Винера – Хинчина [28, 29]

$$\Psi_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) \exp(j\omega\tau)\, d\omega.$$
$$S_x(\omega) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_x(\tau) \exp(-j\omega\tau)\, d\tau, \quad (4.12)$$

которые применимы к описанию случайных процессов. Случайные (в классическом смысле) процессы характеризуются затуханием во времени автокорреляционной функции и континуальным характером зависимости спектральной плотности мощности от частоты. Действительно, пусть $\Psi_x(\tau) = \delta(\tau)$, что соответствует "абсолютно" случайному процессу. Из (4.12) следует, что спектральная плотность мощности такого δ-коррелированного процесса постоянна для любых частот, что и характеризует случай "белого" шума.

Решению детерминированной задачи $x(t)$, отвечающему движению на странном аттракторе, в силу отсутствия периодичности также соответствует затухающий характер зависимости от времени автокорреляционной функции и сплошной спектр мощности колебаний. Именно это обстоятельство роднит стохастические автоколебания детерминированных систем по своим физическим свойствам со случайными процессами и служит для экспериментаторов одним из основных критериев перехода к хаоти-

ческой динамике. Спектр регулярных аттракторов всегда дискретный. Возбуждение режима динамической стохастичности сопровождается появлением нового качества: ярко выраженной непрерывной компоненты в частотном спектре процесса. Реальные автоколебания диссипативных систем всегда имеют сплошной спектр за счет наличия флуктуаций. Однако переход к режиму странного аттрактора сопровождается качественными изменениями в распределении энергии по частотам вне связи с шумовым воздействием.

Эргодическое свойство системы, позволяющее ввести вероятностную меру, в общем случае не может служить критерием стохастичности. Эргодичность необходима, но недостаточна для описания автостохастичности; тому пример – квазипериодические автоколебания. Эргодическое движение может быть регулярным в том смысле, что существует квазипериод колебаний, обусловленный возвращаемостью траектории в окрестность начальной точки через вполне определенный интервал времени. Следствием является дискретный характер спектра мощности, как и в случае периодических колебаний.

Для хаотических траекторий возвращаемость также обязательна вследствие устойчивости по Пуассону или в силу наличия аттрактора. Так в чем же различие? Различие в том, что времена возврата для хаотических траекторий представляют случайную последовательность интервалов, характеризующуюся некоторым распределением длительностей. Этим свойством могут обладать только перемешивающие системы.

4.2. Экспоненциальная неустойчивость и перемешивание. Энтропия Колмогорова

Чтобы проследить за движением изображающей точки в фазовом пространстве колебательной системы, в общем случае целесообразно исследовать эволюцию малого фазового объема, включающего начальную точку. Если предельная траектория есть устойчивое состояние равновесия или периодическое движение, то малая область сжимается в точку (линию) и подходящим является детерминированное динамическое описание. Если же предельная траектория неустойчива по Ляпунову, то малая начальная область растягивается вдоль одних направлений, сжимается по другим и в виде сильно деформированного образования заполняет исходное фазовое пространство или некоторую его часть; фазовый объем начальной области может сохраняться (консервативные системы) или уменьшаться в пределе до нуля (диссипативные системы). Этот процесс называют *перемешиванием*. В ходе эволюции в системе с перемешиванием две сколь угодно близкие по начальным данным фазовые траектории спустя определенное время могут оказаться в различных, удаленных друг от друга областях фазового пространства. В результате получается, что, хотя эволюция произвольной фазовой точки полностью детерминирована, для описания эволюции любой сколь угодно малой области в фазовом пространстве системы с перемешиванием, по существу, нужно использовать статистический подход.

Для эргодических систем предельные значения (в смысле статистических средних) достигаются только в среднем по времени, а при наличии перемешивания они имеют место асимптотически на больших временах.

Перемешивающие системы эргодичны, но не наоборот. Перемешивание – более сильное по сравнению с эргодичностью свойство, которое дает возможность определить понятие вероятности для индивидуальной фазовой траектории и понятие асимптотической статистической независимости событий (например, таких, как посещение траекторией различных областей фазового пространства системы). Статистическая взаимосвязь будущего состояния системы $x(t)$ и настоящего $x(t_0)$ при этом распространяется на конечные интервалы времени $\tau = t - t_0$. Говорят о явлении расщепления корреляции, вследствие чего автокорреляционная функция процесса экспоненциально затухает во времени. Спектр перемешивающих процессов – сплошной с шириной по частоте, обратно пропорциональной времени корреляции τ_0. Характерное время $\tau = \tau_0$ уменьшения автокорреляционной функции в $e = 2{,}713\ldots$ раз отражает скорость процесса перемешивания. Величина, обратная τ_0, связана с метрической энтропией.

Фундаментальное понятие метрической энтропии преобразования с сохраняющейся вероятностной мерой введено А.Н. Колмогоровым в 1958 г. и положило начало новому направлению в эргодической теории [56–58]. Благодаря понятию *энтропии Колмогорова* удалось строго сформулировать абсолютный критерий стохастичности динамической системы как неустойчивого по Ляпунову движения с положительной *метрической энтропией*.

Введение в рассмотрение метрической энтропии обобщает шенноновские представления на случай динамических систем. Если имеется множество $M = m^n$ различных комбинаций из m символов по n, на котором определена вероятностная мера, то степень неопределенности, характеризующая среднее количество информации на один символ в отсутствие шумов, дается *энтропией Шеннона*

$$H = -n^{-1} \sum_{j=1}^{M} P_j \ln P_j, \qquad \sum_j P_j = 1, \tag{4.13}$$

где P_j – вероятность j-й последовательности в n символов из алфавита m. Эта неопределенность (и информация) будет нулевой в случае, когда одна из последовательностей характеризуется единичной вероятностью, а все оставшиеся – нулевой. Неопределенность отлична от нуля только тогда, когда задано любое другое распределение вероятностей, и максимальна при равновероятных исходах событий.

Существенным различием между стохастическим и периодическим движениями системы является то, что хаотическая траектория непрерывно производит энтропию, чего не может быть в случае периодичности. Докажем это простыми рассуждениями. Произведем разбиение фазового пространства G, включающего в себя аттрактор, на m элементарных непересекающихся ячеек ΔG_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$. Проделаем серию измерений, следя за траекторией $x(t)$ и через равные промежутки времени Δt отмечая n последовательных ячеек ΔG_j, в которой побывала траектория. При каждом независимом испытании получим конкретную n-членную реализацию в виде последовательности $G_j(n, \Delta t)$. Предположим, что нам известна нормированная на единицу вероятностная мера $P(G_j)$ на множестве возможных последовательностей $G_j(n, \Delta t)$. Неопределенность (или энтропия), определяющая среднее количество информации на одиу реализацию, в дан-

ном эксперименте будет

$$H_n = -\sum_j P(G_j)\ln P(G_j). \qquad (4.14)$$

Величина H_n зависит от числа элементов n в последовательности, от интервала времени Δt регистрации положения точки в фазовом пространстве и от способа разбиения фазового пространства на элементы ΔG_j. Введем нормированную характеристику – энтропию на один элемент процесса в единицу времени – как предел:

$$H = \lim_{n \to \infty} (H_n / n\Delta t). \qquad (4.15)$$

Для стационарных эргодических процессов этот предел существует и конечен. Величина H есть средняя скорость производства энтропии на один элемент процесса. Однако остается зависимость H от способа разбиения фазового пространства на элементы. Выберем такое разбиение, при котором H максимальна, и получим метрическую энтропию динамической системы [57, 59]:

$$h_\mu = \sup_G H. \qquad (4.16)$$

Если траектория регулярная, то при измерениях всегда найдется такое $n = n_0$, что для любых измерений последовательность $G_j(n_0)$ идентична, т.е. имеет вероятность, равную единице. Метрическая энтропия в таком случае равна нулю. Для стохастической последовательности, когда каждые отдельно взятые отрезки реализаций отличаются друг от друга для любых сколь угодно больших n, энтропия всегда положительна, что служит строгим критерием автостохастичности системы. Положительность энтропии характеризует качественную сторону вопроса, а ее числовое значение является количественной характеристикой степени хаотичности системы. Для истинно случайных процессов энтропия неограниченно велика, для регулярных – $h_\mu = 0$. Энтропия системы в режиме странного аттрактора положительна, но имеет конечное значение.

Обратим внимание на типичное для эргодической теории обстоятельство. Наличие инвариантной меры предполагается независимо от начальных условий, что требует исключения из рассмотрения нетипичных начальных условий и соответствующих им траекторий. Предполагается, что такие траектории маловероятны, а точнее – они имеют нулевую вероятность. В динамических системах со стохастическим поведением, в отличие от систем класса Морса – Смейла, могут иметь место бесконечное число различных регулярных и хаотических режимов, реализующихся при задании соответствующих начальных данных. Этим обусловлена возможность существования, вообще говоря, множества различных инвариантных распределений. Поэтому вышеизложенные соображения относятся к типичным для конкретного инвариантного распределения начальным условиям, что необходимо всегда иметь в виду.

Существенным достижением теории динамических систем явилось установление количественной взаимосвязи метрической энтропии со свойствами локальной неустойчивости движения. Доказано, что энтропия положительна в том и только том случае, когда фазовая траектория в среднем экспоненциально неустойчива в аттракторе. Значит, спектр ЛХП такой

траектории обязан содержать в качестве старшего положительный ляпуновский показатель. Явное выражение, связывающее энтропию Колмогорова с положительными показателями спектра ЛХП решения, получено в [60] и в типичных случаях, когда показатели спектра ЛХП не зависят от точки на траектории, выглядит достаточно просто:

$$h_\mu = \sum_{\lambda_i > 0} \lambda_i, \qquad (4.17)$$

т.е. энтропия равна сумме положительных показателей спектра ЛХП.

В качестве критерия стохастичности в численных экспериментах в соответствии с (4.17) используется факт положительности старшего показателя спектра ЛХП решения. Максимальный показатель Ляпунова можно вычислить как предел:

$$\lambda_1 = \lim_{t \to \infty} t^{-1} \ln(|D(t)|/|D(0)|). \qquad (4.18)$$

где $|D(t)|$ – текущее расстояние между точками возмущенной и невозмущенной траекторий, $|D(0)|$ - длина вектора малого начального возмущения.

Здесь важны два момента. Необходимо учитывать, что ляпуновские показатели характеризуют линеаризованную систему. Следовательно, процедура вычислений должна обеспечить выполнение условий линейного приближения за счет перенормировки, например, [61]. В противном случае нелинейность системы ограничит величину $|D(t)|$ размерами аттрактора и с ростом времени показатель будет неограниченно стремиться к нулю, что неверно. Далее, нужно правильно выбирать направление вектора первоначального возмущения $D(0)$, исключая тем самым возможность влияния "нетипичных" траекторий. В реальных экспериментах типичное направление вектора возмущения $D(0)$ определяется достаточно просто. Нужно добиться постоянства результатов при малых вариациях величины и направления вектора начального возмущения.

4.3. Гомоклинические траектории и стохастичность

Обыкновенные дифференциальные уравнения, моделирующие эволюционные процессы в нелинейных диссипативных системах, при некоторых условиях могут иметь решение задачи Коши в виде сложной апериодической траектории, заполняющей ограниченную область в фазовом пространстве. Доказательство факта существования таких решений является математическим результатом, обосновывающим принципиальную возможность возбуждения стохастических автоколебаний в системах с более чем одной степенью свободы в отсутствие флуктуаций. С точки зрения качественной теории такая возможность ведет к появлению в фазовом пространстве системы континуума самопредельных траекторий, устойчивых по Пуассону, но экспоненциально неустойчивых в смысле Ляпунова. Необходимым условием возникновения таких предельных множеств является существование в системе особых фазовых траекторий, называемых гомоклиническими.

Рассмотрим седловое периодическое движение Г некоторой трехмерной (для наглядности) динамической системы. Значения мультипликато-

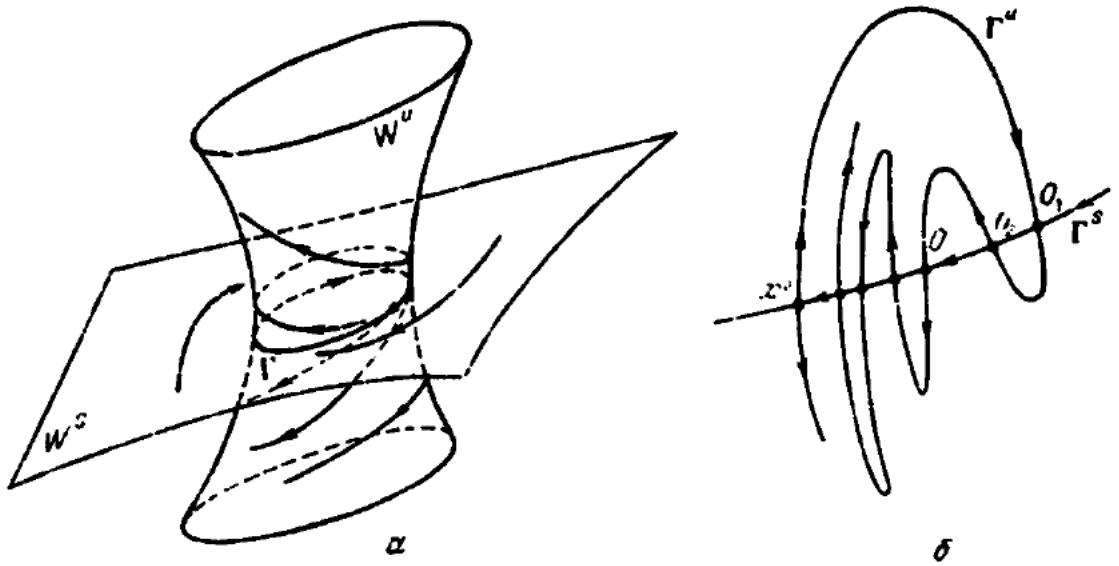


Рис. 4.1. Инвариантные многообразия седлового цикла Г (*а*) и их взаимопересечение в отображении Пуанкаре (*б*)

ров седлового цикла $|\rho_1| < 1$ и $|\rho_2| > 1$ отражают тот факт, что в фазовом пространстве системы существуют двумерные инвариантные поверхности: устойчивое W^s и неустойчивое W^u многообразия седлового периодического движения. Любая возмущенная траектория, принадлежащая W^s, асимптотически стремится к Г, а по W^u удаляется от цикла (асимптотически стремится к Г в обратном времени). Качественная картина поведения фазовых траекторий в окрестности седлового цикла дана на рис. 4.1 *а*.

В нелинейных системах при некоторых условиях может осуществиться взаимопересечение устойчивого и неустойчивого многообразий седлового периодического движения. Если такое пересечение трансверсально, то линия пересечения многообразий W^u и W^s образует особую траекторию в фазовом пространстве, открытую А. Пуанкаре и названную им *гомоклинической* [62, 63]. Отметим, что гомоклинические траектории седловых циклов представляют собой структурно устойчивые объекты в фазовом пространстве системы. Именно с существованием гомоклинических траекторий связана возможность возвращаемости неустойчивых траекторий нелинейной системы в ограниченную область фазового пространства, т.е. возможность хаотического решения. Другими словами, выполнение требований существования континуума устойчивых по Пуассону траекторий достигается лишь при наличии гомоклинических траекторий.

Анализ гомоклинической траектории удобно проводить в отображении на секущей Пуанкаре (рис. 4.1 *б*), где эффекту пересечения многообразий соответствует трансверсальное пересечение устойчивой Γ^s и неустойчивой Γ^u сепаратрис седловой точки равновесия x^0. Гомоклинической траектории в отображении отвечает гомоклиническая точка O_1. Однако если возникнет хотя бы одна гомоклиническая точка, то можно показать, что их появится счетное множество ($O_2, O_3, \ldots$) [37]. В окрестности седлового цикла при этом реализуется сложная картина взаимопересечений устойчивых и неустойчивых многообразий, характеризуемая наличием бесконечного числа гомоклинических траекторий. Возникает гомоклиническая структура [11, 20, 62], содержащая множество седловых периодических движений

одного типа и совокупность сложных траекторий, двоякоасимптотических к ним.

Наличие гомоклинической структуры в нелинейных диссипативных системах является необходимым условием возникновения динамической стохастичности. Но для реализации режима странного аттрактора этого еще недостаточно. Нужно, чтобы для значений параметров системы, отвечающих области существования гомоклинической структуры, либо отсутствовали вовсе, либо потеряли устойчивость любые регулярные аттракторы. Если это условие выполнено и все траектории в аттракторе седловые, то возникает в строгом смысле динамический хаос, математическим образом которого является странный аттрактор [26, 27].

Рассмотренный тип гомоклинических траекторий и структур не является единственным. Сложные гомоклинические структуры возникают с пересечением устойчивых и неустойчивых многообразий двух и более седловых предельных циклов. Они называются *гетероклиническими*. Гомоклиническими сейчас называют также и двоякоасимптотические траектории типа петель сепаратрис седлового положения равновесия и траектории, выходящие из одного седла и при $t \to \infty$ входящие в другое. Естественно, что траектории типа сепаратрисных петель структурно устойчивыми (или грубыми) не являются, так как разрушаются при сколь угодно малом "шевелении" параметров системы.

Общим важным свойством любых гомоклинических траекторий и структур является то, что при вариации параметров системы в их окрестности осуществляется бесконечное число различных бифуркаций рождения и исчезновения множества регулярных и странных аттракторов. Поэтому сам факт существования в динамической системе тех или иных типов гомоклинических траекторий можно расценивать как критерий сложности ее поведения.

4.4. Размерность и геометрическая структура аттракторов

Результаты численных исследований динамической стохастичности в дифференциальных трехмерных системах и соответствующих им двумерных отображениях, а также в диссипативных модельных отображениях плоскости свидетельствуют о сложной геометрической структуре странных аттракторов уже в этих относительно простых примерах [1–14]. Отличительная особенность странных аттракторов состоит в наличии свойства *масштабной инвариантности*, выражающегося в повторяемости их структуры на все более мелких масштабах. Следствием закономерностей подобия является универсальность в геометрии стохастических множеств сечений Пуанкаре, в распределении энергии колебаний по частотам и амплитудам в спектре, в зависимостях определяющих характеристик от параметров и др. Это важное свойство дает основания к применению метода ренормализационной группы для нахождения количественных закономерностей, описывающих движение на странном аттракторе с масштабно инвариантной структурой.

Для характеристики странных аттракторов целесообразно ввести понятие *размерности*. Размерность определяет количество информации, необходимое для задания координат точки, принадлежащей аттрактору, в рам-

ках указанной точности. Для регулярных аттракторов, являющихся многообразиями, размерность – целое число: неподвижная точка имеет размерность 0, предельный цикл – 1, двумерный тор – 2 и т.д. Ввиду сложности геометрической структуры странные аттракторы не являются многообразиями и имеют дробную размерность.

Размерность – одна из фундаментальных характеристик аттрактора, наряду с метрической энтропией Колмогорова. Обсуждаемые в литературе определения размерности в общем разделяются на два типа: зависящие только от метрических свойств аттрактора и, помимо метрики, зависящие от статистических свойств потока, обусловленных динамикой. В типичных случаях *метрические размерности* принимают одинаковую величину, которую принято называть *фрактальной размерностью* аттрактора D_F. Размерность, определяемую с учетом вероятности посещения траекторией различных областей аттрактора в фазовом пространстве, называют *информационной* или *размерностью натуральной меры*. Последняя, что важно для приложений, может быть оценена по спектру ЛХП аттрактора. Для типичных аттракторов информационная и ляпуновская (оцениваемая по спектру ЛХП) размерности обычно совпадают количественно, но могут отличаться от значений фрактальной размерности. По проблеме размерности заинтересованному читателю можно порекомендовать специальные работы [64–73].

Введем определение фрактальной размерности D_F произвольного предельного множества G в N-мерном фазовом пространстве по Колмогорову–Хаусдорфу:

$$D_F = \lim_{\epsilon \to 0} [\ln M(\epsilon)/\ln(1/\epsilon)], \qquad (4.19)$$

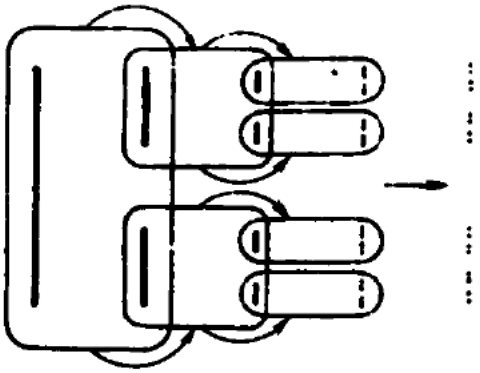
где $M(\epsilon)$ – минимальное число N-мерных кубиков со стороной ϵ, необходимых для покрытия всех элементов множества G. Применив это определение для вычисления размерности точки, линии и поверхности, легко убедиться в привычных значениях 0, 1 и 2 соответственно. Для нетривиальных множеств G размерность D_F может оказаться дробной.

В качестве простого наглядного примера множества дробной хаусдорфовой размерности приведем канторово множество. Это множество строится последовательным исключением открытых интервалов длиной 1/3 из середины закрытого (включающего граничные точки) единичного интервала. Выбросив первый раз среднюю треть, оставляем два закрытых интервала длиной в 1/3 каждый. Затем, выбросив средние трети из оставшихся двух отрезков, получим четыре закрытых интервала длиной 1/9 каждый. Канторово множество будет построено, если процесс исключения "ненужных" открытых интервалов продолжить до бесконечности, как схематически изображено на рис. 4.2. На n-м шаге процедуры построения канторова множества останется $M = 2^n$ разделенных между собой закрытых интервалов одинаковой длины $\epsilon = 3^{-n}$. По определению (4.19) найдем фрактальную размерность канторова множества:

$$D_F = \ln 2/\ln 3 \approx 0{,}63. \qquad (4.20)$$

Как видно из рис. 4.2, структура множества G_{n+1} на $n+1$-м шаге разбиения при рассмотрении ее с трехкратным увеличением повторяет структуру

G_n предыдущего n-го разбиения. В этом и проявляется свойство масштабной инвариантности. Универсальность в процессе дробления масштабов здесь задается самим алгоритмом построения канторова множества. Как впервые наблюдал в численном эксперименте М. Хенон, странные аттракторы имеют структуру типа канторовой [74]. Эти множества порождаются нелинейными операторами эволюции, характеризуются более сложными законами подобия и имеют дробную размерность. Неизвестно, все ли типы странных



Р и с. 4.2. Принцип построения и масштабная инвариантность канторова множества

аттракторов имеют масштабно инвариантные структуры, однако четко установлено, что их фрактальная размерность в общем случае дробная. Последнее свойство используется как характерный признак "странности" аттрактора.

Информационная размерность D_I определяется следующим образом:

$$D_I = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{I(\epsilon)}{\ln(1/\epsilon)}, \qquad I(\epsilon) = -\sum_{i=1}^{M(\epsilon)} P_i \ln P_i. \tag{4.21}$$

Здесь $I(\epsilon)$ – энтропия Шеннона (количество информации, необходимое для определения состояния системы в пределах точности ϵ), $M(\epsilon)$ – число кубиков со стороной ϵ, покрывающих аттрактор, P_i – вероятность посещения фазовой траекторией i-го кубика. Так как для малых ϵ $I(\epsilon) \approx \approx D_I \ln(1/\epsilon)$, то D_I характеризует скорость возрастания информации с уменьшением ϵ.

Удивительна на первый взгляд, но совершенно естественна при детальном рассмотрении взаимосвязь фрактальной размерности D_F хаотического множества с показателями спектра ЛХП. Доказано, что для аттракторов двумерных обратимых отображений с постоянным якобианом преобразования справедливо соотношение [75, 76]

$$D_F = 1 + \lambda_1/|\lambda_2|, \quad \lambda_1 > \lambda_2, \tag{4.22}$$

где λ_i определены соотношением (2.11). Если двумерное стохастическое множество в секущей Пуанкаре порождается соответствующим потоком, то в силу непрерывности потока (4.22) можно обобщить на случай трехмерных дифференциальных систем с отрицательной дивергенцией, не зависящей от фазовых координат:

$$D_F = 2 + \lambda_1/|\lambda_3|, \quad \lambda_1 > 0 > \lambda_3. \tag{4.23}$$

Здесь учитывается, что непрерывной траектории соответствует один нулевой показатель в спектре ЛХП.

Ляпуновские показатели спектра ЛХП, являясь усредненными характеристиками аттрактора, описывают его свойства независимо от начальных условий из области притяжения. Исключением являются начальные данные, отвечающие неподвижным точкам, циклам и двоякоасимптотическим траекториям типа петель сепаратрис, имеющим отличающиеся ляпуновские показатели, а также траекториям, для которых спектр ЛХП вообще не определен. Полагается, что такие траектории имеют меру нуль (являются нетипичными), и это подтверждается численными экспериментами.

Определенные трудности возникают при теоретическом обосновании взаимосвязи фрактальной размерности со спектром ЛХП для многомерных ($N > 3$) систем, в которых степень сжатия фазового объема зависит от координат. Сейчас многими принята *гипотеза Каплана – Йорка*, в соответствии с которой размерность аттрактора, называемая *ляпуновской*, выражается через спектр ЛХП на основе следующих соображений [70, 11, 12]. Пусть известен спектр ЛХП странного аттрактора N-мерной системы, размерность которого нужно оценить:

$$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_N. \tag{4.24}$$

Сумма всех показателей спектра отрицательна в силу диссипативности системы. Рассмотрим первые j показателей спектра ЛХП, где j – наибольшее число, удовлетворяющее условию

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_j \geqslant 0. \tag{4.25}$$

В указанное число показателей включены все положительные, все нулевые и некоторая часть отрицательных, чтобы сумма оставалась неотрицательной. Поскольку сумма показателей задает характер локального изменения элемента фазового объема в аттракторе, то фазовый объем размерности $j < N$ в среднем не уменьшается. Увеличение размерности подпространства на единицу приведет в среднем уже к сжатию элемента объема:

$$\sum_{i=1}^{j+1} \lambda_i < 0. \tag{4.26}$$

Значит, можно предположить, что размерность аттрактора заключена в интервале $j \leqslant D_L < j + 1$. Разумно потребовать, чтобы движение на аттракторе подчинялось условию, отвечающему физическим представлениям о стационарности процесса,

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + d\,\lambda_{j+1} = 0, \tag{4.27}$$

где d – *дробная часть* размерности. Полная размерность аттрактора D_L, называемая *ляпуновской*, будет суммой целой j и дробной d частей:

$$D_L = j + d = j + \Big(\sum_{i=1}^{j} \lambda_i\Big)/|\lambda_{j+1}|. \tag{4.28}$$

В случае трехмерного пространства из (4.28) однозначно следует (4.23). Это любопытно и вот почему. Ляпуновская размерность по определению (4.28) зависит от типичной траектории $x(t)$, для которой определяется спектр ЛХП, и тем самым автоматически учитывает вероятностные свойства потока. Выражение (4.23) получено из определения размерности (4.19).

т.е. непосредственным покрытием множества с заданной метрикой, без учета вероятностных свойств различных его элементов. Таким образом, фрактальная и ляпуновская размерности аттрактора в $\mathbb{R}^3$ совпадают по крайней мере для систем с постоянной степенью сжатия. Этому имеется и экспериментальное подтверждение [77].

Для многомерных динамических систем вопрос о соответствии ляпуновской размерности размерностям натуральной меры и фрактальной пока еще открыт. Однако есть основания полагать, что ляпуновская размерность, как наиболее понятная с физической точки зрения величина, является самостоятельной и важной характеристикой аттрактора. В отличие от фрактальной ляпуновская размерность многомерных аттракторов допускает возможность ее прямого вычисления при больших, но реально допустимых затратах времени на ЭВМ

В неавтономных системах при периодическом внешнем воздействии выражение (4.28) можно применить для описания размерности стохастического множества в отображении Пуанкаре через период внешней силы. Для вычисления полной ляпуновской размерности аттракторов неавтономных систем в выражение (4.28) нужно добавить единицу (или еще один нулевой показатель в спектр ЛХП), тогда

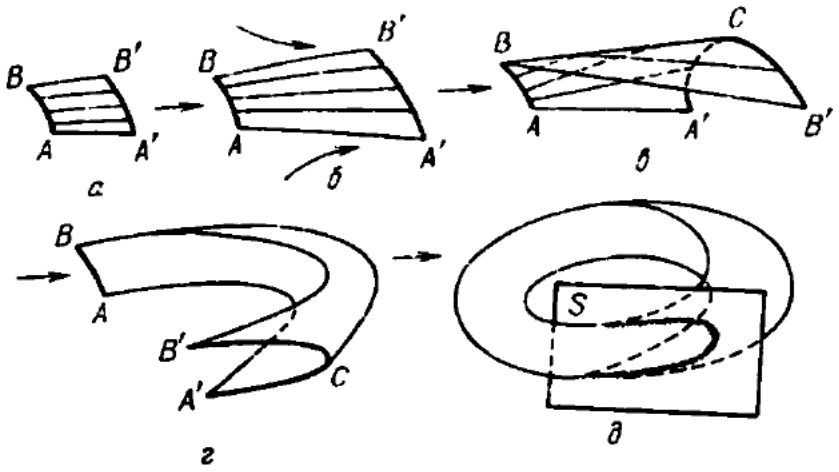
$$D_L = j + 1 + \Big(\sum_{i=1}^{j} \lambda_i\Big) / |\lambda_{j+1}|. \quad . \qquad (4.29)$$

Различия в сигнатуре спектров ЛХП и размерность D_L могут быть признаком классификации регулярных и странных аттракторов. Размерность регулярных аттракторов равна числу нулевых показателей в спектре ЛХП. Ляпуновская размерность точки, предельного цикла и двумерного тора равна 0, 1 и 2 соответственно. Для регулярных аттракторов в полном соответствии находятся: ляпуновская размерность, фрактальная (метрическая) размерность и сигнатура спектра ЛХП аттрактора. В отношении странных аттракторов о подобном взаимосоответствии можно говорить лишь применительно к трехмерным дифференциальным системам и двумерным обратимым отображениям.

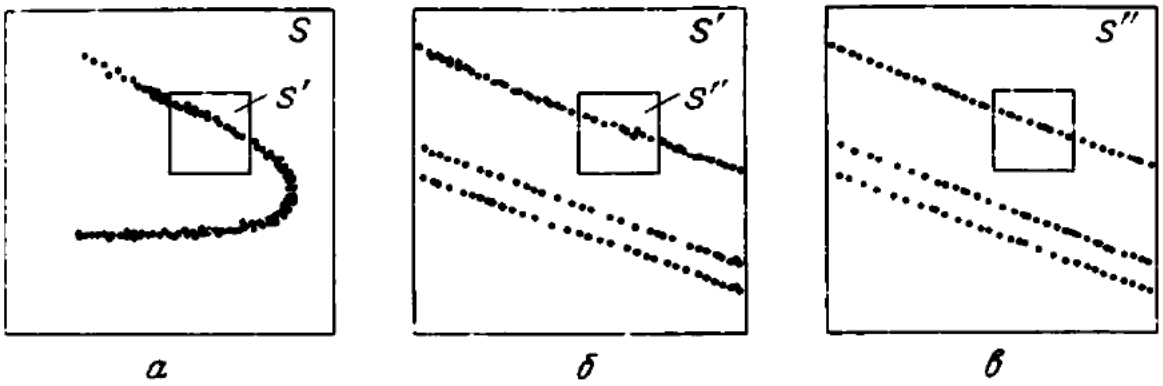
Рассмотрим геометрическую структуру одного из типичных странных аттракторов, реализующихся в трехмерных дифференциальных системах*), на примере которого можно продемонстрировать содержательную сторону понятий дробной размерности и масштабной инвариантности. Аттракторы этого типа возникают в результате каскада бифуркаций удвоения периода.

Пусть задана трехмерная динамическая система, в которой реализуется аттрактор указанного типа. Выберем в качестве начальных данных отрезок (линию) AB, все или почти все точки которого принадлежат аттрактору, и проследим за его эволюцией во времени. Картина геометрического преобразования отрезка AB нелинейным потоком во времени изображена на рис. 4.3. На очень малых временах (рис. 4.3*а*) изменений практически нет. Граничные точки отрезка AB переходят в A' и B' соответственно. Далее

*) Подобные аттракторы возможны в многомерных и распределенных системах, однако они локализуются в трехмерном подпространстве исходного фазового пространства системы и допускают исчерпывающее описание при трехмерном моделировании.



Р и с. 4.3. Геометрия странного аттрактора, возникающего в результате каскада бифуркаций удвоения периода



Р и с. 4.4. Иллюстрация канторовости структуры хаотического множества в сечении Пуанкаре

видно растяжение отрезка AB, обусловленное экспоненциальной неустойчивостью (рис. 4.3*б*). Длина отрезка $A'B'$ заметно увеличивается в сравнении с исходной при $t = 0$. Затем, испытывая существенное растяжение, отрезок складывается вдвое (рис. 4.3*в*). Поток образует двумерную поверхность со складкой $A'CB'$. Геометрия аттрактора формируется путем уплотнения складки ($A' \to B'$, оба листа складки как бы спрессовываются) и склеивания точек A' и B' с первоначальной точкой A, а точка C подклеивается к B (рис. 4.3*г, д*).

Для обеспечения непрерывности склейки в силу условия непрерывности потока необходимо бесконечное множество подобных поверхностей и соответственно отрезков AB. Как в этом убедиться экспериментально? Введем секущую Пуанкаре, как показано на рис. 4.3*д*. Сечение Пуанкаре при относительно грубом рассмотрении дает близкую к одномерной кривую типа подковы (рис. 4.4*а*). Если увеличить разрешающую способность, то проявляются канторовость структуры этой подковы и масштабная инвариантность (рис. 4.4*б, в*).

Размерность подобных аттракторов $D_F = 2 + d$, где $d \ll 1$, в силу преимущественного сжатия потока в сравнении с растяжением. Такой аттрактор при грубом рассмотрении представляется почти поверхностью с экспоненциально расходящимися по ней близкими траекториями. Поэтому и размер-

ность аттрактора близка к двум. На самом деле таких поверхностей в аттракторе бесконечное множество. Отсюда канторовость структуры в сечении Пуанкаре. Поэтому странные аттракторы не являются многообразиями, а представляют собой прямое произведение многообразия на множество типа канторова.

4.5. Классификация странных аттракторов

Гомоклинические траектории Пуанкаре всегда имеют место в фазовом пространстве системы со стохастическим поведением. В их существовании кроется причина появления счетного множества седловых периодических движений, континуума устойчивых по Пуассону траекторий, счетного множества грубых гомоклинических траекторий, что и определяет в итоге чрезвычайно сложную картину разбиения фазового пространства на топологически различные типы ее движения. Именно с гомоклиническими эффектами связана возможность рождения динамической стохастичности, т.е. возникновение странного аттрактора. Однако, чтобы в системе реализовались хаотические автоколебания, необходимо обеспечить дополнительное условие: гомоклиническая структура должна быть включена в область аттрактора. Результаты исследований последних лет в области современной теории бифуркаций выявили типичные структуры странных аттракторов, к которым могут быть отнесены известные из теории и экспериментов на ЭВМ режимы хаотических автоколебаний [79]. Странные аттракторы можно разделить на три класса: *гиперболические,* аттракторы *типа Лоренца* и *квазиаттракторы.*

Гиперболические странные аттракторы — это *грубые* аттракторы, состоящие из множества неустойчивых по Ляпунову траекторий, которые всюду в аттракторе являются седловыми. Не в среднем, а в любой произвольной точке аттрактора траектория седловая! Гиперболические аттракторы не могут включать регулярных, т.е. устойчивых, траекторий любого типа. Примером гиперболических аттракторов служат предельные множества с *Y*-структурой Аносова [80], соленоиды Смейла–Вильямса [81], Плыкина [82] и др. Однако следует отметить, что в конкретных динамических системах гиперболические аттракторы пока не обнаружены.

Аттракторы *типа Лоренца* представляют собой *негрубые* предельные множества, в которых всюду плотны седловые периодические движения. Как и в гиперболических аттракторах, в аттракторах типа Лоренца при малых изменениях параметров и правых частей уравнений устойчивые периодические движения не возникают. Аттракторы типа Лоренца формируются в результате вполне определенного бифуркационного механизма и имеют характерную структуру. Впервые механизм рождения аттрактора в знаменитой модели Лоренца установлен в [83, 84, 53] и сейчас в качестве классического примера рассматривается в целом ряде книг [1–3, 9, 11, 43]. В [79] сформулированы общие математические условия, выполнение которых конкретно выделяет класс странных аттракторов Лоренца. К настоящему времени аттракторы лоренцевского типа обнаруживаются в ряде динамических систем при численном моделировании и с экспериментальной точки зрения являются наиболее близкими по своим свойствам к аттракторам гиперболического типа.

Однако наиболее часто встречающиеся в численных и физических экспериментах хаотические аттракторы относятся к третьему классу так называемых *квазистохастических* или просто *квазиаттракторов*. Квазиаттракторы являются *сложными притягивающими* предельными множествами, которые наряду с гомоклиническими структурами включают и устойчивые периодические аттракторы. Как правило, области притяжения регулярных аттракторов относительно малы, а характерные временные интервалы (период, квазипериод) достаточно велики. При вариации параметров системы структура квазиаттракторов претерпевает цепочку сложных изменений, обусловленную бифуркациями регулярных и хаотических аттракторов. Причина этих изменений связана с тем, что в квазиаттракторе, наряду с грубыми гомоклиническими структурами, появляются и исчезают негрубые гомоклинические траектории седловых периодических движений. Седловая величина их по модулю может быть меньше единицы, что приводит к рождению и последующим каскадам бифуркаций счетного множества устойчивых предельных циклов. В связи с этим возникли и обсуждаются проблемы выявления и описания типичных последовательностей бифуркаций, приводящих к развитию динамического хаоса. Классическими примерами квазиаттракторов служат аттракторы Хенона [74, 3, 7], Смейла–Фейгенбаума, тор-аттрактор [13] и др.

4.6. Бифуркации странных аттракторов

Как следует из результатов экспериментов, возникнув благодаря определенному бифуркационному механизму, странный аттрактор с изменением управляющих параметров системы может эволюционировать с сохранением первоначальной топологической структуры, но может демонстрировать и резкие (бифуркационные) ее изменения. Такие переходы в хаосе типичны в основном для квазиаттракторов. Причем квазиаттрактор может возникнуть при эволюции, например, аттрактора типа Лоренца с нарушением условий существования последнего. Бифуркационные переходы типа "хаос–хаос" разнообразны и порой загадочны, однако в значительной мере менее исследованы в сравнении с бифуркациями регулярных режимов.

По аналогии с эволюцией регулярных режимов при вариации параметров явления резкой перестройки геометрической структуры аттрактора при прохождении параметром критической точки, вызванные качественными изменениями характера фазовых траекторий, можно назвать *бифуркациями странных аттракторов*. Содержательная сторона этого термина скорее качественная, чем количественная. И это вполне понятно, так как даже в отношении квазипериодических аттракторов теории устойчивости и бифуркаций в завершенном виде пока что нет. В качестве подтверждения приведем обоснованное высказывание В. Франческини: "Проблема разработки численных методов изучения устойчивости и бифуркаций торов в строгих теоретических рамках очень важна, но кажется почти неразрешимой" [85]. Опыт численных исследований бифуркаций торов дает все основания разделять эту точку зрения.

Бифуркация странного аттрактора может осуществляться как переход типа "хаос–хаос" или "хаос–порядок". В экспериментах бифуркации

странных аттракторов сопровождаются резкой перестройкой их структуры в фазовом пространстве и соответствующих стохастических множеств в сечении Пуанкаре. Если анализируются статистические характеристики динамической стохастичности, то переходы в хаосе приводят к резким изменениям функций распределения, интенсивности колебаний, интегрального спектра мощности и распределения энергии по частотам, автокорреляции и других моментных функций.

Бифуркация странного аттрактора может быть вызвана сменой "устойчивости" нетривиальных гиперболических подмножеств, которые, будучи непритягивающими при значениях параметров ниже точек бифуркации, порождают метастабильный хаос. Метастабильная стохастичность наблюдается конечное время вместе со "стабильным" хаосом исследуемого хаотического режима, а с превышением параметрами бифуркационных значений гиперболическое подмножество в окрестности исходного аттрактора становится притягивающим. Фиксируется бифуркационный переход "хаос–хаос".

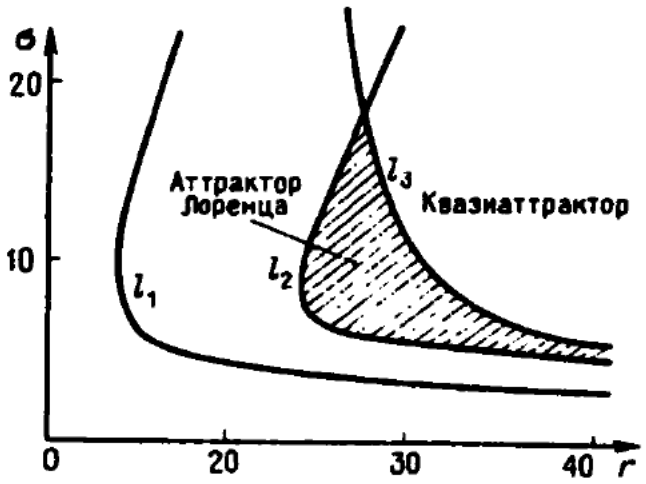
Описание бифуркаций стохастических аттракторов на языке качественной теории – весьма актуальная задача, решение которой могло бы пролить свет на закономерности развития турбулентности сплошной среды. К сожалению, математически строгое описание бифуркаций нетривиальных гиперболических множеств – проблема чрезвычайной сложности. Один из способов ее решения может заключаться в соединении качественных методов с методом численного эксперимента, примененном в [86].

Рассмотрим бифуркацию рождения квазиаттрактора из аттрактора Лоренца, реализующуюся в известной модели Лоренца [26]:

$$\dot{x} = -\sigma(x - y), \qquad \dot{y} = -xz + rx - y, \qquad \dot{z} = -bz + xy. \tag{4.30}$$

В [86] методом численного эксперимента с использованием строгих результатов установлены границы области существования ориентируемого аттрактора Лоренца на плоскости параметров r и σ для $b = 8/3$.

Обратимся к рис. 4.5, где приведены соответствующие бифуркационные кривые. Кривая l_1 отвечает существованию двоякоасимптотической негрубой траектории типа петли седлового состояния равновесия в нуле координат. Кривая l_2 характеризует бифуркацию рождения аттрактора Лоренца. Заштрихованная область значений параметров отвечает условиям существования негрубого аттрактора Лоренца. Бифуркационная кривая l_3 разде-



Р и с. 4.5. Бифуркационная диаграмма перехода типа "хаос – хаос" в аттракторе Лоренца

ляет пространство параметров системы на области существования аттрактора Лоренца и квазиаттрактора. Пересечение этой линии вызывает бифуркационный переход "хаос–хаос", при котором аттрактор Лоренца разрушается, уступая место квазиаттрактору. В области квазиаттрактора сохраняется сложная структура разбиения фазового пространства на траектории, включающие и гомоклинические. Однако появляются негрубые гомоклинические траектории седловых циклов и как следствие – устойчивые периодические движения с большими периодами и малыми областями притяжения.

Интерес к задаче о бифуркациях странных аттракторов стимулирует дальнейшее развитие экспериментальных подходов и методов ее решения. Одним из них является метод расчета полного спектра ЛХП решения при изменении управляющих параметров. Точка бифуркации странного аттрактора при таком подходе – это негрубое состояние системы в момент прохождения одного из показателей спектра через нулевое значение в критической точке. Например, для некоторого $\mu < \mu_1$ сигнатура спектра ЛХП аттрактора была

"+", "0", "–", . . . , "–".

В бифуркационной точке $\mu = \mu_1$ третий показатель спектра обращается в нуль, отражая негрубость режима:

"+", "0", "0", "–", . . . , "–",

и с превышением $\mu > \mu_1$ появляется грубый аттрактор с другой сигнатурой спектра ЛХП:

"+", "+", "0", "–", . . . , "–".

Переходы в хаосе сопровождаются изменениями размерности и с физической точки зрения соответствуют вовлечению в колебательный процесс новых степеней свободы. К сожалению, указанные последовательности бифуркаций сигнатуры спектра ЛХП весьма трудно диагностируются в численных экспериментах. Ввиду резкого замедления скорости сходимости ляпуновских показателей вблизи критической точки достоверно диагностируется лишь грубая ситуация, сопровождаемая "скачком":

"+", "0", "–", . . . , "–" → "+", "+", "0", "–", . . . , "–".

4.7. Динамический хаос в присутствии флуктуаций

Любое движение реальных динамических систем происходит в присутствии шумов. Описывать движения в диссипативных системах без учета флуктуаций не корректно, так как рассеяние энергии неизбежно генерирует собственные шумы внутри самой системы. Поэтому в строгом смысле описание диссипативных систем с помощью детерминированных операторов эволюции не может являться полным. Тем не менее широкий класс устойчивых колебательных режимов автогенераторов допускает анализ с помощью детерминированных уравнений. Это возможно, если собственные флуктуации оказываются малыми и динамика системы позволяет пренебречь их влиянием.

Действительно, при движении на регулярном аттракторе (например, в случае устойчивых периодических автоколебаний) малые флуктуации затухают, не оказывая принципиального влияния на режим работы системы. Малые шумы в устойчивых регулярных режимах движения вызывают малые отклонения от детерминированного решения, которые требуют к себе внимания лишь в ряде специальных задач (разработка эталонов частоты и времени, чувствительность приемников сигналов и др.).

В то же время роль флуктуаций приобретает принципиальный характер вблизи точек бифуркаций, когда чисто динамическое описание может оказаться недостаточным. Неустойчивость системы вызывает ее повышенную чувствительность к действию флуктуаций, которые в итоге могут определять тип вновь установившегося режима после прохождения точки бифуркации. Таким образом, вопрос о влиянии флуктуаций даже в случае регулярных автоколебаний приобретает серьезное значение, если он рассматривается с учетом бифуркационных свойств системы.

Сложный характер движения системы в режиме странного аттрактора как внутренне неустойчивого множества, безусловно, требует детального анализа реакции системы на шумовое возмущение. Экспоненциальная неустойчивость траекторий в аттракторе сразу наводит на мысль, что роль флуктуаций может быть принципиальной. Первоначальная неопределенность в задании исходного состояния при наличии шумов неизбежна. А это значит, что требуется изучать эволюцию не начальной фазовой точки, а начального малого элемента фазового объема. В системах с перемешиванием детерминированный подход к решению этой задачи не конструктивен по сути дела даже в отсутствие возмущений. Требуется статистическое описание некоторого ансамбля в определенном смысле типичных траекторий.

Исследование влияний малых случайных возмущений динамических систем вне зависимости от конкретного типа детерминированного решения сводится к анализу траекторий стохастических дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = F(x, \mu) + K(x, t), \qquad (4.31)$$

где $K(x, t)$ – источник случайных сил, в общем случае зависящих от фазовых координат и времени. Если интенсивность случайных воздействий мала и не зависит от координат состояния системы, (4.31) описывают аддитивное случайное возмущение и называются уравнениями Ланжевена:

$$\dot{x} = F(x, \mu) + \xi(t), \qquad (4.32)$$

где $\xi(t)$ – источник флуктуаций, имеющий интенсивность $D \ll 1$. Статистика случайных сил определяется природой действующего шума (тепловой, дробовой, фликкерный внутренние шумы, шумы внешней среды) и является важной при решении конкретных задач. Для выяснения принципиальных эффектов, вызываемых флуктуационными возмущениями малой интенсивности, на первом этапе достаточно ограничиться предположениями о гауссовом распределении. Источник флуктуаций представ-

ляется δ-коррелированным "белым" шумом с нулевым средним и интенсивностью $D \ll 1$.

Возникает вопрос, какой из факторов - собственная детерминированная сложная динамика или внешний шум – в большей степени определяет статистические свойства автостохастической системы? Несколько неожиданным оказывается то, что динамическая стохастичность может оказывать решающее влияние на статистические свойства системы, находящейся под действием белого шума. Именно динамическая стохастичность может в итоге определять временное поведение системы при малых интенсивностях шума. Такими свойствами обладают системы с гиперболическими аттракторами. Малые случайные возмущения динамической системы с гиперболическими свойствами приводят к малым изменениям ее статистических характеристик. Динамическая стохастичность оказывается сильнее стохастичности, добавляемой шумами малой интенсивности [90 -92]. На примере *Y*-систем Аносова для гиперболических систем обоснован предельный переход статистических характеристик возмущенной системы в статистические характеристики детерминированной системы при стремлении интенсивности воздействия к нулю.

Однако, как уже указывалось, гиперболические системы представляют собой идеализированную модель грубых систем с максимально выраженными стохастическими свойствами. В реальных системах приходится сталкиваться чаще всего с квазигиперболичностью. И здесь вопрос о влиянии флуктуаций принципиально усложняется. Под действием флуктуаций структура квазиаттракторов может претерпевать резкие качественные изменения. Шумовое воздействие вызывает разнообразные переходы в хаосе, а также от хаоса к порядку. Причиной таких переходов является множество возможных режимов, сосуществующих в фазовом пространстве квазигиперболических диссипативных систем и претерпевающих при малых изменениях параметров серию различных бифуркаций. Совершенно ясно, что в зависимости от близости или удаленности значений параметров от бифуркационных точек реакция квазиаттрактора на внешний шум различна. Здесь имеется полная аналогия с реакцией на шум регулярных режимов. Кроме того, ввиду сосуществования множества регулярных и хаотических аттракторов, разделяемых сепаратрисными поверхностями, в фазовом пространстве в отсутствие флуктуаций под действием шума возможны эффекты взаимодействия этих режимов.

В отличие от гиперболических систем теоретический анализ влияния флуктуаций на системы с квазиаттракторами наталкивается на математические трудности принципиального характера и до сих пор не проведен.

Статистические характеристики режимов колебаний возмущенных динамических систем (4.31) можно исследовать методами численного эксперимента, основываясь на свойстве эргодичности перемешивающих систем. Эргодичность дает возможность экспериментального построения вероятностных распределений и других статистических характеристик путем соответствующих усреднений по времени. Но можно осуществить переход от стохастических дифференциальных уравнений к кинетическому уравнению Фоккера Планка для функции плотности распределения вероятностей (или просто функции распределения) $p(x, \mu, t)$ [28--30,

92–94]:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial (A_i p)}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial^2 (B_{ij} p)}{\partial x_i \partial x_j}. \qquad (4.33)$$

Коэффициенты сноса A_i однозначно определяются правыми частями соответствующих динамических уравнений в отсутствие шума, коэффициенты диффузии B_{ij} – статистикой случайного источника. С окончанием переходного процесса, т.е. с выходом на аттрактор, стационарное распределение зависит только от фазовых координат, параметров и интенсивности флуктуаций. С точки зрения теории бифуркаций учет влияния шумов приводит к появлению нового равноправного управляющего параметра наряду с параметрами невозмущенной системы – интенсивности шума. Поэтому бифуркационные свойства системы определяются всей совокупностью параметров и учитывают возможность фазовых переходов, индуцированных шумами.

Характеристикой стохастической системы, отражающей степень неопределенности плотности распределения вероятностей (или степень неупорядоченности системы), является энтропия как функционал функции распределения [30, 95]:

$$H = -k_{\text{Б}} \int p(x, \mu, t) \ln p(x, \mu, t) dx. \qquad (4.34)$$

Есть ли взаимосвязь энтропии H с энтропией динамических систем по Колмогорову? Какова эта связь и как ведет себя энтропия H при бифуркационных переходах с изменением параметров системы? Ответ на эти вопросы необходимо иметь, чтобы быть последовательными в применении статистического подхода к описанию реальных систем с автостохастическим поведением.

В теории самоорганизации нелинейных процессов в диссипативных системах принципиальной проблемой является установление закономерностей перехода от хаоса к порядку, выявление фундаментальных количественных характеристик степени упорядоченности режима движения системы. Может ли энтропия H системы являться количественной мерой степени порядка? Казалось бы, ответ тривиален: коль скоро энтропия, являясь мерой степени "хаотичности" закона распределения, определяет степень близости случайного процесса к белому шуму, она может служить количественной характеристикой степени порядка. Энтропия упорядоченных движений в системе будет меньше энтропии хаотических движений. Это утверждение не вызывает противоречий по крайней мере в случаях, когда энергия системы в различных состояниях остается постоянной.

При управлении режимами движения в диссипативных системах с изменением параметров могут существенно изменяться как внутренние потери энергии за счет диссипации, так и доля энергии, поступающая в систему от внешнего источника (за счет обратной связи, например). В результате средний запас энергии системы в каждом конкретном режиме, безусловно, является функцией параметров. Возникает новый вопрос: может ли энтропия характеризовать количественно степень порядка (беспорядка) безотносительно к значению энергии системы? Имеет ли смысл нормиро-

вать энтропию на значение энергии и будет ли нормированная энтропия мерой степени хаотичности режима движения, с помощью которой возможно сравнить уровни упорядоченности различных как по характеру, так и по энергетическим характеристикам состояний в диссипативных системах со сложными режимами движения? Исследованию этих важных проблем посвящена теоретическая работа [96].

В качестве количественной меры степени упорядоченности движения системы автором [96] вводится определенным способом нормированная на энергию энтропия, уменьшение которой при изменении параметров трактуется как критерий самоорганизации системы ("*S*-теорема" Климонтовича [96–98]). Однако здесь остается не до конца понятным, как непротиворечивым образом ввести количественно энергию диссипативной системы? От этого зависит корректность определения нормированной энтропии и все последующие утверждения по поводу количественных оценок степени порядка (беспорядка), а также направлений пути самоорганизации в пространстве управляющих параметров. Указанная проблема в настоящее время является безусловно, одной из важнейших в вопросах выявления количественных закономерностей процессов самоорганизации.

В заключение отметим, что приведенные здесь соображения и методы исследования влияния шумов на динамику нелинейных диссипативных систем касались дифференциальных динамических систем. Все описанные результаты в равной степени имеют отношение и к дискретным динамическим системам, для которых определены как стохастические дифференциальные уравнения, уравнения Ланжевена, так и уравнения Фоккера – Планка.

ГЛАВА 5

МЕХАНИЗМЫ РАЗВИТИЯ И КРИТЕРИИ ДИНАМИЧЕСКОЙ СТОХАСТИЧНОСТИ

5.1. О возникновении динамического хаоса

Стохастичность в детерминированных системах реализуется в соответствии с определенными закономерностями в последовательностях бифуркаций регулярных движений, которые будем называть *бифуркационными механизмами* рождения хаотических аттрактов. Процессу мягкого возникновения турбулентности в сплошных средах, как выяснилось сравнительно недавно, предшествует появление режима маломерного хаоса, что стимулирует дальнейшие исследования проблемы перехода к стохастичности в конечномерных моделях [99–103]. С математической точки зрения переход от регулярных к стохастическим режимам в общем случае рассматривается как переход из класса динамических *систем Морса Смейла* с конечным числом грубых периодических и стационарных аттракторов в класс *систем с гиперболическими или квазигиперболическими свойствами*, характеризующихся наличием счетного числа периодических движений и континуума устойчивых по Пуассону, но не устойчивых в смысле Ляпунова траекторий [9, 20, 41]*). Неустойчивые траектории могут заполнять все фазовое пространство динамической системы, например гиперболические *У*-системы Д.В. Аносова с максимально неустойчивым поведением [80]. Однако для широкого класса систем с не столь резко выраженной неустойчивостью гиперболические траектории заполняют не все фазовое пространство, которое может содержать также множество устойчивых предельных циклов сколь угодно больших периодов с узкими областями притяжения. Квазигиперболические системы наиболее часто встречаются в радиофизике.

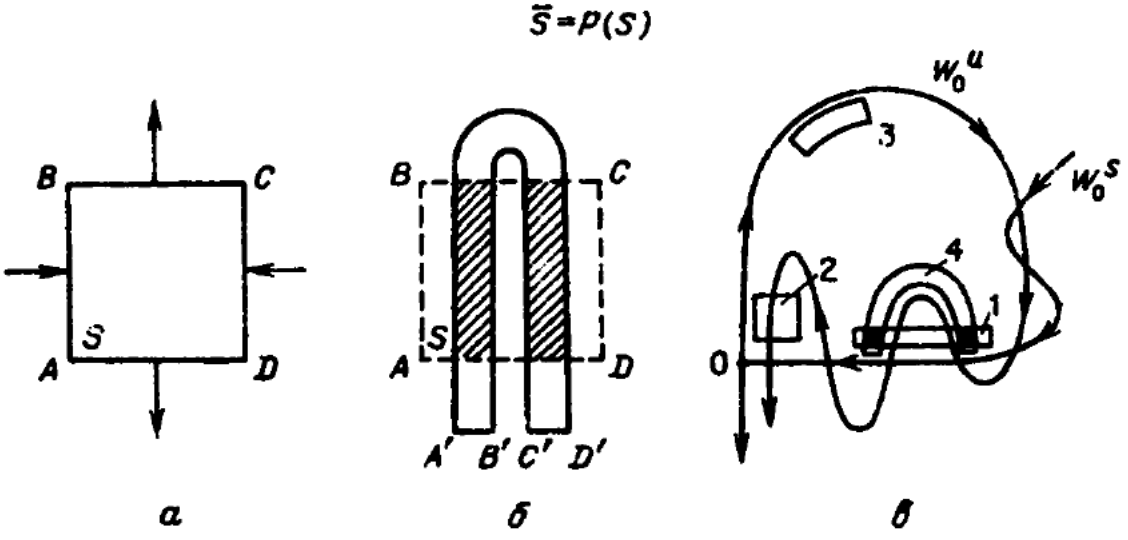
Рождение нетривиального гиперболического подмножества траекторий при детерминированном преобразовании можно проиллюстрировать на примере "подковы Смейла" [81, 9]. Рассмотрим отображение единичного квадрата S плоскости в себя, которое осуществляется, как показано на рис. 5.1*а, б*. Образ квадрата S под действием преобразования P растягива-

*) Подобный переход может реализоваться и в квазигиперболических системах за счет бифуркаций аттракторов.

ется в вертикальном направлении, сжимается в горизонтальном и, складываясь в виде подковы, накладывается на прообраз S. Если проитерировать отображение $\bar{S} = P(S)$ k раз, то при $k \to \infty$ мы получим счетное число вертикальных бесконечно узких полос, наложенных на счетное число горизонтальных бесконечно узких полос. Их пересечения дадут бесконечное число точек, не покидающих единичного квадрата. Для этих точек строго доказано существование бесконечного числа n-циклов отображения и непериодических траекторий. При конечной точности задания координат точки, принадлежащей указанному множеству, становится невозможным предсказание ее эволюции и естественным является вероятностное описание.

Явления, подобные рассмотренным на примере модельного отображения Смейла, наблюдаются в реальных потоковых системах, приводя к рождению квазиаттракторов. Рассмотрим некоторую дифференциальную систему в $\mathbb{R}^3$, для которой определено двумерное отображение на плоскости S, содержащее седловую точку O как образ соответствующего неустойчивого цикла Г. Пусть устойчивая W_0^s и неустойчивая W_0^u сепаратрисы точки O, являющиеся линиями пересечения с S соответствующих многообразий W_Γ^s и W_Γ^u, образуют в отображении грубую гомоклиническую структуру, как показано на рис. 5.1*в*. Элемент плоскости (*1*) вдоль устойчивой сепаратрисы сжимается (*2*), а вдоль неустойчивой – растягивается (*3*), образуя в итоге подкову (*4*), имеющую области пересечения с прообразом (*1*). Для этих областей, подобно подкове Смейла, можно доказать существование счетного множества седловых циклов и континуума гомоклинических траекторий, двоякоасимптотических к ним. Картина рис. 5.1*в* в окрестности точки O является структурно устойчивой по отношению к возмущениям потока и поясняет возникновение квазиаттрактора Смейла.

К настоящему времени вскрыты и изучены несколько *типичных механизмов* перехода к квазигиперболическому хаосу в диссипативных динамических системах. Их типичность проявляется в том, что вблизи критической точки различные системы характеризуются качественными, а иногда



Р и с. 5.1. Образование "подковы Смейла" в отображении плоскости (*а*, *б*) и в сечении трехмерного потока при наличии гомоклиники (*в*)

и количественными *едиными закономерностями перехода* вне зависимости от конкретного вида уравнений и размерности системы, которая может быть и распределенной. Некоторые из типичных механизмов рождения квазиаттракторов рассмотрены в настоящей главе.

5.2. Переход к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода. Универсальность Фейгенбаума

Один из типичных механизмов, реализующий переход от систем Морса – Смейла к системам с хаотическим поведением, состоит в бесконечной сходящейся *последовательности бифуркаций удвоения периода* предельных циклов. Этот тип перехода наблюдается в системах со сжатием трехмерного элемента фазового объема и на начальной стадии перехода к хаосу приводит, как правило, к образованию подковы Смейла [104]. Вблизи критической точки при условии, что степень сжатия по всем направлениям существенно превышает растяжение, локально имеющее место только по одному из собственных направлений, переход можно описать с помощью одномерных отображений.

Задолго до открытия странных аттракторов и постановки задачи о путях их возникновения математикам было хорошо известно о возможности сложного поведения во времени простых дискретных систем типа отображений окружности и отображений прямой в себя. В частности, при исследовании гладких однозначных, но необратимых одномерных отображений была установлена возможность реализации серии бифуркаций удвоения периода циклов. Наличие каскада бифуркаций удвоения периода циклов отображения и закономерности в последовательности их реализаций непосредственно следуют из замечательной *теоремы А.Н. Шарковского* (1963 г.) для гладких необратимых отображений отрезка [105]. Согласно теореме закономерности сосуществования циклов отображения строго подчиняются так называемому *порядку Шарковского*. В частности, если отображение имеет цикл периода 3, то оно имеет и счетное множество циклов всевозможных периодов $p \cdot 2^k$ ($p = 1, 2, \ldots, k = 0, 1, 2, \ldots$). Отсюда сразу следует утверждение: цикл периода 3 рождает хаос.

Нужно признать, что эти фундаментальные математические результаты не были своевременно и должным образом использованы в прикладных исследованиях. Положение стало резко меняться спустя 15 лет с открытием универсальных законов, описывающих каскад сходящихся бифуркаций удвоения. В 1978 г. М. Фейгенбаум установил *универсальные* количественные закономерности перехода к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода, присущие определенному классу одномерных отображений $x_{n+1} = f(x_n, \mu)$ [106]. Класс функций $f(x, \mu)$ определяется требованием гладкости и невырожденности, а также возможностью квадратичной аппроксимации $f(x)$ вблизи максимума. Такие отображения имеют вид параболы, описывая однозначное, но не взаимно однозначное, преобразование отрезка прямой в себя. Оставляя в стороне вопрос о строгом теоретическом доказательстве закона Фейгенбаума, которое рассмотрено в ряде работ [106–110], обсудим важные для приложений универсальные свойства указанного класса отображений.

Так как указанные свойства универсальны и не зависят от конкретного задания $f(x, \mu)$, исследуем их на примере простейшего отображения класса Фейгенбаума, имеющего вид

$$x_{n+1} = \mu - x_n^2 = f(x_n, \mu). \tag{5.1}$$

К виду (5.1) простой заменой переменных сводятся несколько различных систем, наиболее популярны из которых следующие:

$$x_{n+1} = 1 - \mu x_n^2, \qquad x_{n+1} = 4\mu x_n(1 - x_n).$$

Отображение (5.1) представляет собой однопараметрическое семейство кривых типа перевернутой параболы с квадратичным максимумом в точке $x_n = 0$. Найдем цикл отображения (5.1) периода 1 и исследуем его на устойчивость. Неподвижная точка в положительном квадранте будет

$$\bar{x}_0 = -(1/2) + |(1/4 + \mu)^{1/2}| \tag{5.2}$$

(вторая неподвижная точка всегда неустойчива).

Мультипликатор $\rho_1(\mu)$ цикла периода 1

$$\rho_1(\mu) = f_x'(\bar{x}_0, \mu) = -2\bar{x}_0 = 1 - 2|(1/4 + \mu)^{1/2}|. \tag{5.3}$$

Цикл устойчив для значений μ в интервале

$$-0{,}25 < \mu < 0{,}75, \tag{5.4}$$

в котором $|\rho_1(\mu)| < 1$. При $\mu = \mu_0 = 0.75$ $\rho_1(\mu_0) = -1$ и имеет место бифуркация удвоения периода цикла. Рождается устойчивый цикл периода 2, или 2-цикл. Найдем этот цикл, решая систему двух уравнений для элементов 2-цикла,

$$\bar{x}_1 = \mu - \bar{x}_2^2, \qquad \bar{x}_2 = \mu - \bar{x}_1^2. \tag{5.5}$$

Получим

$$\bar{x}_1 = (1/2) + |(\mu - 3/4)^{1/2}|, \qquad \bar{x}_2 = (1/2) - |(\mu - 3/4)^{1/2}|. \tag{5.6}$$

Цикл периода 2 устойчив в области значений параметра $0{,}75 < \mu < 1{,}25$, так как мультипликатор 2-цикла равен

$$\rho_2(\mu) = f_x'(\bar{x}_1) f_x'(\bar{x}_2) = 4(1 - \mu).$$

В бифуркационной точке $\mu_1 = 1{,}25$ 2-цикл теряет устойчивость через удвоение и мягко рождается устойчивый 4-цикл. Продолжив численно процедуру расчета бифуркационных значений μ_k ($k = 2, 3 \ldots$), увидим, что последовательность $\{\mu_k\}$ накапливается к некоторой критической точке $\mu = \mu^* = 1{,}40115 \ldots$: $\mu_0 = 0{,}75$, $\mu_1 = 1{,}25$, $\mu_2 = 1{,}368099$, $\mu_3 = 1{,}394046$, $\mu_4 = 1{,}399637$ и т.д.

Сходимость последовательности бифуркационных значений μ_k к μ^* характеризуется отношением

$$\delta_k = \Delta_k / \Delta_{k+1} = (\mu_{k+1} - \mu_k)/(\mu_{k+2} - \mu_{k+1}). \tag{5.7}$$

С ростом k отношение (5.7) в пределах разумно задаваемой точности перестает зависеть от k и сходится к константе

$$\delta = \lim_{k \to \infty} \delta_k = 4{,}669201 \ldots \tag{5.8}$$

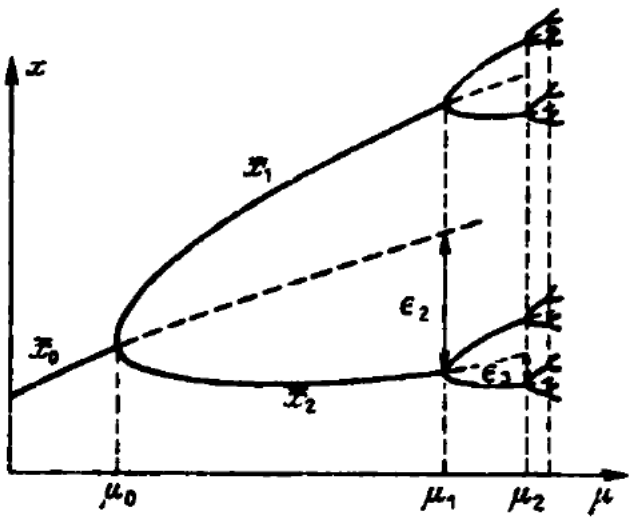


Рис. 5.2. Процесс дробления масштабов амплитуд циклов при удвоениях Фейгенбаума

Разность $\mu^* - \mu_k$ убывает с ростом k по закону геометрической прогрессии со знаменателем

$$\mu^* - \mu_k = A\delta^{-k}, \qquad (5.9)$$

где $A = 0{,}724$ – неуниверсальная константа, которая зависит от конкретного вида функции $f(x, \mu)$.

Если численно построить зависимость устойчивых неподвижных точек (элементов k-циклов отображения) от параметра μ, то получим результат, качественно изображенный на рис. 5.2, который иллюстрирует наличие еще одной универсальной константы, характеризующей закономерность в процессе дробления масштабов амплитуд.

Точка $\bar{x}_0$ при $\mu = \mu_0$ расщепляется на две $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$, затем, при прохождении параметром μ значения $\mu = \mu_1$, $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$ расщепляются на две каждая, и т.д. Процесс дробления масштабов с ростом μ продолжается и демонстрирует универсальные свойства, заключающиеся в том, что

$$a = \lim_{k \to \infty} (\epsilon_k / \epsilon_{k+1}) = -2{,}5029\ldots \qquad (5.10)$$

Из простых расчетов, которые можно провести с использованием карманного микрокалькулятора, следует, что каскаду бифуркаций удвоения периода присущи две универсальные количественные закономерности. Первая характеризует скорость схождения бифуркационных значений параметра μ_k к μ^* и называется *универсальной константой Фейгенбаума* δ (5.8). Вторая отражает закономерность в процессе дробления масштабов и называется *универсальным масштабным множителем* a (5.10).

Структуру и логику, вообще говоря, сложной теории универсальности Фейгенбаума можно проиллюстрировать на основе приближенного анализа, который позволит установить наличие еще одной универсальной константы. Следуя результатам [111, 112, 7, 12], рассмотрим схему приближенного построения ренормгрупп, лежащих в основе строгой теории [106 – 110]. Запишем дважды примененное отображение (5.1)

$$x_{n+2} = f[f(x_n, \mu)] = \mu - \mu^2 + 2\mu x_n^2 - x_n^4 \qquad (5.11)$$

и пренебрежем в (5.11) x_n^4 в силу условия $|x_n| < 1$ (в этом и состоит приближенность анализа!). Произведем замену переменных (ренормируем переменную x_n)

$$x' = -2\mu x. \qquad (5.12)$$

Отображение (5.11) запишем в форме исходного (5.1), но справедливого для ренормированных элементов 2-цикла:

$$x'_{n+2} = \mu^{(1)} - (x'_n)^2, \qquad \mu^{(1)} = 2\mu^2(\mu - 1) = \varphi(\mu). \qquad (5.13)$$

Проведя указанную процедуру ренормировки k раз, получим (штрихи у x в дальнейшем опускаем)

$$x_{n+2^k} = \mu^{(k)} - x_n^2, \quad \mu^{(k)} = \varphi^{(k)}(\mu). \tag{5.14}$$

Отображение (5.14) описывает ренормированный 2-цикл и по форме записи совпадает с видом (5.1). Но для (5.1) потеря устойчивости 1-циклом происходит при $\mu_0 = 0{,}75$. Значит, потеря устойчивости 2^k-циклом имеет место для значений μ_k, удовлетворяющих уравнению

$$\varphi^{(k)}(\mu_k) = 0{,}75. \tag{5.15}$$

Бесконечная последовательность μ_k ($k = 1, 2, 3, \ldots$) сходится к критической точке μ^*, которая есть неподвижная точка отображения $\varphi(\mu)$:

$$\mu^* = \varphi(\mu^*) = 2(\mu^*)^2(\mu^* - 1), \qquad \mu^* = (1 + \sqrt{3})/2. \tag{5.16}$$

Для больших значений k μ_k близки к μ^* и можно разложить $\varphi(\mu)$ в ряд Тейлора в окрестности критической точки:

$$\mu_k \approx \varphi(\mu^*) + \varphi'_\mu(\mu^*)(\mu_{k+1} - \mu^*), \qquad k \gg 1. \tag{5.17}$$

Из (5.17) получаем

$$\mu^* = \frac{\mu_{k+1}\delta - \mu_k}{\delta - 1}, \qquad \delta = \varphi'_\mu(\mu^*) = \frac{\mu_{k+1} - \mu_k}{\mu_{k+2} - \mu_{k+1}}. \tag{5.18}$$

Для исследуемого нами отображения $\varphi(\mu)$ задается соотношением (5.13), откуда $\delta = 4 + \sqrt{3}$.

Таким образом, приближенная процедура ренормировки позволила в явном виде получить выражение (5.18) для μ^* и δ. При построении ренормированного уравнения (5.14) замена масштаба переменной x осуществлялась в соответствии с (5.12). В критической точке и близко к ней масштаб переменной таким образом изменился в a раз:

$$a = -2\mu^* = -(1 + \sqrt{3}). \tag{5.19}$$

Параметр a и есть *универсальный масштабный множитель.*

Поскольку в критической точке $\mu = \mu^*$ ренормированное уравнение (5.14) имеет для любого из циклов периода 2^k один и тот же вид, совпадающий по форме с (5.1),

$$x_{n+2^k} = \mu^* - x_n^2, \quad k \gg 1, \tag{5.20}$$

то в критической точке существует бесконечное множество циклов периода 2^k, которые неустойчивы и имеют одинаковое значение мультипликатора

$$\rho(\mu^*) = \rho^* = 1 - |(1 + 4\mu^*)^{1/2}| \approx -1{,}54. \tag{5.21}$$

Таким образом, закономерность Фейгенбаума характеризуется еще одним *универсальным* количественным *параметром – значением мультипликатора* 2^k*-цикла* ($k \gg 1$) *в критической точке*: $\rho^* = -1.54$. Этим можно воспользоваться в численных экспериментах при построении линий критических значений параметров [12].

Принципиальные выводы, полученные выше с использованием приближенной процедуры ренормировки, подтверждаются строгой теорией

Таблица 5.1

Сравнение точных значений констант квадратичного отображения с полученными приближенно

Константа	Значения		Константа	Значения	
	точные	приближенные		точные	приближенные
δ	4,6692011...	5,73	ρ^*	−1.60119...	−1,54
a	−2,50291...	−2,73	μ^*	1,4011551...	1,37

и численными расчетами. Следствием приближений, использованных при формулировке уравнения (5.14), является лишь то, что количественные значения универсальных констант δ, a и ρ^*, а также неуниверсальной константы μ^*, определены с погрешностью, что можно видеть из табл. 5.1.

Универсальность значения мультипликатора 2^k-цикла в критической точке можно положить в основу алгоритма численного расчета постоянных, характеризующих фейгенбаумовский переход. Пусть отображение задано в прежней форме (5.1). Перепишем соотношения (5.2), (5.5), (5.6) в виде

$$\begin{aligned} &x_1 = \mu - x_1^2, \qquad x_1 = [+(4\mu+1)^{1/2} - 1]/2, \\ &x_2 = \mu - x_3^2, \\ &x_3 = \mu - x_2^2, \qquad x_{2,3} = [\pm(4\mu-3)^{1/2} + 1]/2. \end{aligned} \tag{5.22}$$

Воспользуемся в первом приближении универсальностью ρ^*, т.е. предположим, что $\rho_1(\mu^*) = \rho_2(\mu^*)$:

$$-2x_1(\mu^*) = 4x_2(\mu^*)x_2(\mu^*). \tag{5.23}$$

Уравнения (5.22) и (5.23) представляют собой замкнутую систему, которую назовем ренормгруппой 1-го порядка:

$$\begin{aligned} &x_1 = \mu^* - x_1^2, \qquad x_3 = \mu^* - x_2^2, \\ &x_2 = \mu^* - x_3^2, \qquad x_1 = -2x_2x_3. \end{aligned} \tag{5.24}$$

Из (5.24) находим

$$\begin{aligned} &\mu^* = (7+\sqrt{17})/8 \approx 1.3904, \quad \delta_1 = \partial\mu_1/\partial\mu_2|_{\mu=\mu^*} = [2(9+\sqrt{17})]^{1/2} = 5{,}123, \\ &\rho^* = \rho_1(\mu^*)\rho_2(\mu^*) = 1 - (9+\sqrt{17})^{1/2}/4 = -1.56155\ldots \end{aligned} \tag{5.25}$$

Описанный алгоритм построения ренормгруппы можно обобщить на случай цикла периода 2^k. Пусть $\{x_i\}$ будут элементами k-цикла:

$$x_{i+1} = f(x_i, \mu) \pmod k. \tag{5.26}$$

Неподвижные точки удовлетворяют уравнению

$$\bar{x}_i = f^{(k)}(\bar{x}_i, \mu). \tag{5.27}$$

Универсальность значения мультипликатора ρ^* в критической точке μ^* приводит к соотношению

$$\rho_k(\mu) = \prod_{i=1}^{k} f_x'(x_i, \mu), \quad f_x'(x_i, \mu) = \partial f/\partial x|_{x=x_i} \tag{5.28}$$

Пусть $\{x'_i\}$ будут элементами 2^k-цикла. По аналогии

$$x'_{i+1} = f(x'_i, \mu) \pmod{2k},$$

$$\rho_{2k}(\mu) = \prod_{i=1}^{2k} f'_x(x'_i, \mu). \tag{5.29}$$

В критической точке μ^* имеем замкнутую систему из $3k + 1$ уравнений относительно $\{x_i\}$, $\{x'_i\}$ и μ^*:

$$x_{i+1} = f(x_i, \mu^*) \pmod{k}, \quad x'_{i+1} = f(x'_i, \mu^*) \pmod{2k},$$

$$\prod_{i=1}^{k} f'_x(x_i, \mu^*) = \prod_{i=1}^{2k} f'_x(x'_i, \mu^*). \tag{5.30}$$

Определив из (5.30) значение μ^*, с помощью (5.28) найдем универсальную константу Фейгенбаума:

$$\delta \simeq \delta_{2k} = \partial\mu_k / \partial\mu_{2k}|_{\mu=\mu^*}. \tag{5.31}$$

С применением ЭВМ весьма просто рассчитать μ^* и δ_{2k}, решая уравнения (5.30) и (5.31) для $k = 1, 2, 3$ и т.д. Уравнения ренормгруппы 3-го порядка (8-цикл) приводят к результатам, близким к точным [113]. Для μ^* и δ получаются значения (ср. с данными табл. 5.1)

$$\mu^* = 1{,}4011487\ldots, \quad \delta_8 = 4{,}6753244\ldots$$

Описанный алгоритм можно с успехом применить для анализа отображения вида

$$x_{n+1} = 1 - \mu x_n^p, \quad p = 2, 4, 6, \ldots \tag{5.32}$$

Расчет μ^* и δ для $p = 4$, 6 и 8, проведенный в [114] с использованием ренормгруппы 2-го порядка, дает результаты, представленные в табл. 5.2.

Как видно из табл. 5.2, с увеличением показателя степени p (5.32) постоянная δ и значение параметра в критической точке заметно возрастают. Однако в литературе отсутствуют экспериментальные данные, свидетельствующие об увеличенной по сравнению со случаем квадратичного максимума скорости накопления бифуркационных значений параметра к критическому. Измеренное в физических экспериментах значение δ лежит, как правило, в пределах $3 < \delta < 5$, что свидетельствует в пользу квадратичного максимума приближенного одномерного отображения исследуемой системы.

Вырожденные случаи, когда в тейлоровском разложении функции $f(x, \mu)$ вблизи экстремума отсутствует квадратичный член, видимо, не свойственны системам общего положения и поэтому не типичны. Тем не менее при численном моделировании динамики систем с помощью одномерных отображений подобная ситуация может возникнуть. Примером служит результат работы [115], в которой анализируется отображение типа (5.32), где p является функцией независимого параметра. Естественно, что в подобном случае скорость схождения бифуркаций удвоения к критической точке будет непрерывно зависеть от этого параметра, что, вообще говоря, иллюстрируется данными табл. 5.2.

Универсальные свойства эволюции с ростом параметра элементов 2^k-циклов отображения (5.1), которые представляют собой реализацию

Таблица 5.2

Универсальная константа, подобная для различных значений степени отображения

$f(x)$	μ_1^*	δ_1	δ_k $(k > 1)$
$1 - \mu x^4$	1,5958	6,9992	7,284...
$1 - \mu x^6$	1,6842	8,8071	9,926...
$1 - \mu x^8$	1,7366	10,3294	10,948

некоторого процесса в дискретном времени, естественно могут быть описаны на языке спектров, являющихся взаимно однозначным интегральным преобразованием временных зависимостей. При бифуркациях удвоения, когда 2^k-цикл переходит в 2^{k+1}-цикл, в спектре мощности процесса мягко рождаются субгармоники $\omega_{k+1} = \omega_0/2^{k+1}$, амплитуды которых с ростом параметра возрастают и к моменту следующей бифуркации рождения 2^{k+2}-цикла становятся максимальными, подчиняясь универсальному соотношению [115, 7]

$$|C(\omega_{k+1})|^2 / |C(\omega_{k+2})|^2 \approx 13 \text{ дБ}, \tag{5.33}$$

где $C(\omega_i)$ – амплитуда спектра субгармоники $\omega_0/2^i$ в момент бифуркации. Таким образом, при фейгенбаумовском переходе в докритической области имеет место последовательное обогащение спектра субгармониками $m\omega_0/2^k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, m = 1, 2, \ldots)$, амплитуды которых подчиняются универсальному соотношению (5.33). В итоге в критической точке период 2^k-цикла $(k \to \infty)$ становится бесконечным, а спектр теоретически сплошным, представляющим собой некоторый пьедестал с выбросами на частотах $m\omega_0/2^k$, амплитуда которых тем больше, чем меньше k и m.

Оказывается, что при фейгенбаумовском переходе универсален не только сам путь к хаосу, но и особенности поведения системы за критической точкой $\mu > \mu^*$. Так, например, положительный ляпуновский характеристический показатель растет с превышением порога по закону [117]

$$\lambda^+ = c(\mu - \mu^*)^\gamma, \quad \gamma = \ln 2/\ln \delta, \quad \delta = 4{,}66920\ldots \tag{5.34}$$

По аналогии с теорией фазовых переходов 2-го рода универсальный коэффициент γ называют *критическим индексом перехода* к стохастичности через последовательность бифуркаций удвоения периода.

Универсальным оказывается и процесс уширения спектральных линий субгармоник с превышением порога [118]

$$\Delta\omega = c(\mu - \mu^*)^\beta, \quad \beta \approx 2{,}42. \tag{5.35}$$

Вследствие уширения спектральных линий (5.35) в закритической области с ростом параметра странный аттрактор постепенно "разбухает", последовательно вовлекая в область стохастичности элементы 2^k-циклов $(k = \infty, \ldots, k, k-1, \ldots, 0)$. В физических экспериментах, как правило, эффект фиксируется, начиная с момента стохастизации элементов 8-тактных циклов [13]. Универсальность в явлении уширения спектральных линий естественно ведет к универсальности в эволюции интегрального

спектра мощности, который в закритической области растет по закону [119]

$$S_l = \int_{-\infty}^{\infty} |C(\omega)|^2 d\omega = c(\mu - \mu^*)^{\sigma}, \quad \sigma \approx 1{,}525. \tag{5.36}$$

Как установлено экспериментально, переход к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода типичен для широкого класса нелинейных динамических систем, включая распределенные.

5.3. Динамика систем с гомоклинической кривой состояния равновесия типа седло-фокус. Теорема Шильникова

Рассмотрим однопараметрическое семейство F_μ трехмерных (как наиболее простых из класса систем со сложным поведением) гладких динамических систем

$$\dot{x} = F(x, \vec{\mu}), \tag{5.37}$$

непрерывно зависящих от одного управляющего параметра μ (другие, если они имеются, зафиксированы). Без потери общности можно полагать, что система уравнений (5.37) характеризуется особой точкой в начале координат, которую обозначим O. Будем считать, что система в точке O имеет грубое состояние равновесия типа седло-фокуса, сохраняющееся в некотором интервале значений управляющего параметра μ. В этом случае (5.37) можно привести к виду [53]

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \rho x + \omega y + P(x, y, z), \\ \dot{y} &= -\omega x + \rho y + Q(x, y, z), \\ \dot{z} &= \upsilon z + R(x, y, z), \end{aligned} \tag{5.38}$$

где ρ, ω и υ зависят от параметра μ, а P, Q и R – аналитические функции, обращающиеся в особой точке в нуль вместе со своими первыми производными. Корни характеристического уравнения матрицы линеаризации (5.38) в точке O пусть удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{aligned} &s_{1,2}(\mu) = \rho(\mu) \pm j\omega(\mu), \quad s_3 = \upsilon(\mu), \\ &\rho < 0, \quad \upsilon > 0, \quad \sigma_1(\mu) = \operatorname{Re} s_{1,2} + s_3, \quad \sigma_1(0) \neq 0, \end{aligned} \tag{5.39}$$

где $\sigma_1(\mu)$ – седловая величина особой точки O.

Предположим, что при $\mu = 0$ в системе (5.38) существует гомоклиническая траектория Γ_0, выходящая из особой точки O и при $t \to \infty$ возвращающаяся в O. Другими словами, уравнения (5.38) при $\mu = 0$ имеют особое решение в виде петли сепаратрисы седло-фокуса, причем с ненулевой седловой величиной $\sigma_1(0) \neq 0$. При сделанных выше предположениях справедлива теорема Шильникова, утверждающая [120, 121, 53] следующее.

1. Пусть $\sigma_1(0) < 0$. Тогда из петли Γ_0 может родиться только *одно устойчивое периодическое движение*, если разрушение петли Γ_0 при $\mu \neq 0$ происходит в сторону A, как показано на рис. 5.3. При разрушении Γ_0 в сторону B рождения цикла не происходит. В случае $\sigma_1(0) < 0$ петля Γ_0 называется неопасной.

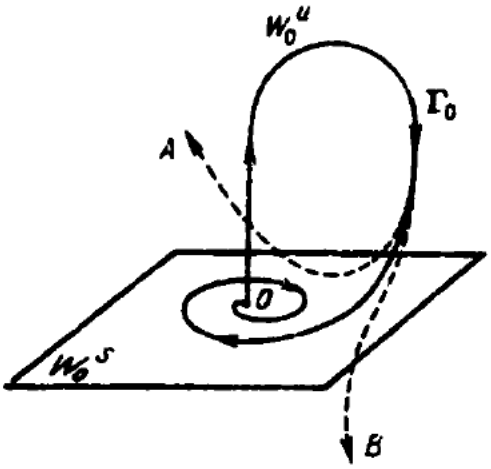


Рис. 5.3. Петля сепаратрисы седло-фокуса и возможные случаи ее разрушения (*A* и *B*) при "шевелении" параметров системы

2. Пусть $\sigma_1(0) > 0$. В случае опасной петли в любой окрестности Γ_0 а также при ее разрушении как в сторону *A*, так и *B*, существует *нетривиальное гиперболическое множество*, содержащее счетное множество седловых периодических движений. При некоторых условиях гиперболическое множество может быть аттрактором (странным!), однако этот факт необходимо исследовать самостоятельно. Теорема Шильникова в общем случае не позволяет сделать каких-либо конкретных выводов о наличии динамической стохастичности.

Указанное гиперболическое множество не исчерпывает всего множества траекторий, целиком лежащих в окрестности петли Γ_0. Отображение последования Пуанкаре в секущей плоскости, трансверсальной к Γ_0, при $\mu = 0$ (когда есть петля!) имеет *счетное множество подков Смейла*, которых при $\mu \neq 0$ остается конечное число. Бифуркационные явления в этой ситуации определяются новой седловой величиной

$$\sigma_2(\mu) = 2\,\mathrm{Re}\, s_1(\mu) + s_3(\mu) \neq 0. \qquad (5.40)$$

Если $\sigma_2(0) < 0$, то однопараметрическое семейство систем F_μ (5.37) для значений μ из счетного множества интервалов имеет устойчивое периодическое движение, которое с изменением μ претерпевает бифуркции рождения (гибели) и удвоения периода. Для $\sigma_2(0) > 0$ существует *счетное множество интервалов* для значений μ, где F_μ имеет полностью неустойчивое периодическое движение (оба мультипликатора цикла по модулю больше единицы). В обратном времени, т.е. при замене в (5.38) t на $-t$, этот цикл абсолютно устойчив.

Если исследуемая система имеет седло-фокус O с корнями $s_3 < 0$ и $\mathrm{Re}\, s_{1,2} > 0$, т.е. характеризуется одномерным устойчивым и двумерным неустойчивым многообразиями, то для применения теоремы Шильникова необходимо произвести замену времени в (5.38) на обратное. Отметим, что замена времени на противоположное не влияет на топологию предельных множеств, которые отличаются лишь характером устойчивости.

Как видно из сказанного, с точки зрения возможности возникновения странного аттрактора представляется интересным п. 2 теоремы, касающийся бифуркаций в окрестности *опасной* петли сепартрисы седло-фокуса.

При рассмотрении двупараметрических семейств динамических систем $F(x, \mu_1, \mu_2)$ рождение петли седло-фокуса представляет собой бифурка-

цию коразмерности 1. Область существования петли на плоскости двух параметров есть некоторая линия $l_{\Gamma_0}(\mu_1, \mu_2)$. При движении по параметрам вдоль этой линии возможны случаи вырождений, когда кроме условий существования петли Γ_0 выполняется еще одно бифуркационное условие. Дополнительное вырождение определяет на линии l_{Γ_0} особые точки коразмерности 2 [122, 123], которые характеризуются тем, что являются общими для линии петли l_{Γ_0} и некоторых других бифуркационных линий коразмерности 1.

Укажем два возможных случая вырождений, приводящих к бифуркации коразмерности 2. Первый реализуется при условии, когда на линии петли l_{Γ_0} седловая величина σ_1 обращается в нуль. Во втором случае при движении вдоль линии петли может произойти бифуркация смены седло-фокуса на седло (или наоборот) в особой точке с кратными собственными значениями ($\operatorname{Im} s_{1,2} = 0$, $s_3 = \upsilon$, $\operatorname{Re} s_{1,2} = \rho$). Указанные параметрические точки коразмерности 2 в первом случае, если O – седло-фокус, приводят к наличию бесконечного числа бифуркационных линий, отвечающих кратным циклам и многообходным петлям сепаратрис, которые сгущаются к рассматриваемой точке на линии петли. Во втором случае параметрический портрет для опасной петли ($\sigma_1 > 0$) в окрестности точки коразмерности 2 также содержит бесконечное число бифуркационных линий коразмерности 1. В частности, из данной особой точки на линии петли l_{Γ_0} в область существования седло-фокуса выходит пучок счетного числа линий, отвечающих возникновению в системе многообходных петель сепаратрис. Случай $\sigma_1 < 0$ особым здесь не является [122, 123].

Несмотря на то что теорема Шильникова не называет необходимых и достаточных условий рождения странного аттрактора, она указывает конкретную ситуацию, в которой имеет место появление подсистемы гиперболических траекторий, и в этом смысле является строгим математическим критерием возможности возникновения сложной динамики нелинейной системы. Факт наличия петли сепаратрисы Γ_0 в конкретной системе иногда можно установить аналитическими методами. Примером может служить доказательство существования петли в системе Лоренца [124]. Однако получить конкретный вид траектории и значения параметров, при которых она реализуется, в общем случае возможно лишь с применением численного интегрирования на ЭВМ. Экспериментальные данные свидетельствуют о том, что если гомоклиническая траектория Γ_0 и область ее существования в пространстве параметров найдены, то в окрестности опасной петли практически всегда имеет место странный аттрактор, который называют *аттрактором Шильникова* [125, 126].

Хотя формулировка и доказательство обсуждаемой теоремы относятся к 60-м годам, конкретные исследования роли гомоклинических траекторий в вопросе возникновения странных аттракторов появились сравнительно недавно [125, 126, 13]. Помимо экспериментальной иллюстрации теоремы, результаты этих работ свидетельствуют о том, что в механизмах рождения странных аттракторов кроме локальных бифуркаций в окрестности петли (что и изучалось Л.П. Шильниковым) существенную роль могут играть глобальные бифуркации, свойства которых отчасти могут прогнозироваться по собственным значениям линеаризованной в особой точке

системы, если развивать аналитический метод построения отображений, первоначально использованный Л.П. Шильниковым [127].

Интерес многих исследователей к решениям обыкновенных дифференциальных уравнений в виде гомоклинических траекторий различного типа резко возрос в последние годы. Дело в том, что при исследовании распределенных нелинейных сред различной природы, моделируемых уравнениями в частных производных, установлена возможность возникновения стационарных уединенных волн (импульсов или солитонов), распространяющихся вдоль активной среды. Сейчас стало ясно, что помимо волн простой формы в виде импульсов с одним ярко выраженным максимумом в системе могут возникать и более сложные по форме волны. Они выглядят как импульсы с различным числом больших всплесков и осциллирующими "хвостами" или как непериодические *хаотические волны* [128]. Существование таких сложных по форме волн может быть обусловлено возникновением в автомодельных уравнениях решений типа петли сепаратрисы седло-фокуса и их бифуркациями.

Примером может служить математическая модель в виде диффузионных уравнений с нелинейной кинетикой, именуемая чаще системой "реакция – диффузия",

$$u_t = F(u, \mu) + Du_{xx}, \tag{5.41}$$

где x – пространственная, а t – временная переменные. В случае ограниченных решений типа стационарной бегущей волны

$$u(x, t) = u(x - vt), \tag{5.42}$$

представляющих собой некоторый стационарный профиль, движущийся вдоль оси x с постоянной скоростью v без изменения формы, система (5.41) при подстановке в нее (5.42) приводится к так называемым автомодельным уравнениям. Они представляют собой обыкновенные дифференциальные уравнения, зависящие от параметров. Если число компонент в нелинейных автомодельных уравнениях $N \geqslant 3$, то в принципе может возникнуть ситуация, обсуждавшаяся выше.

5.4. Механизмы перехода к стохастичности в результате бифуркаций квазипериодических колебаний

В 1944 г. Л.Д. Ландау [88], а позднее, в 1948 г., и в несколько иной форме Е. Хопфом [89] был предложен сценарий возникновения турбулентного движения в виде бесконечной иерархии бифуркаций, приводящих к усложнению регулярных пульсаций в нелинейных диссипативных средах, примером которых может служить поток движущейся жидкости.

Механизм возникновения турбулентного движения по Ландау – Хопфу выглядит так: при некотором значении управляющего параметра $\mu = \mu_1$ в среде возникает периодический режим автоколебаний частоты ω_1. С ростом $\mu = \mu_2 > \mu_1$ появляется модуляция на второй частоте ω_2 в общем случае, рационально не связанной с ω_1. Возникают двухчастотные биения, которым в фазовом пространстве системы соответствует аттрактор в виде эргодического двумерного тора. При дальнейшем возрастании управляющего параметра в спектре Фурье автоколебаний последовательно возникают

новые независимые дискретные частоты ω_i ($i = 3, 4, 5, \ldots$) наряду с их целыми суммарными и разностными комбинациями. Аттрактор представляется в этом случае l-мерным эргодическим тором, но не является странным ввиду дискретности спектра и отсутствия перемешивания. Если число l несоизмеримых частот в спектре квазипериодического движения велико, то временная реализация $x(t)$ выглядит "случайной", так как автокорреляционная функция $\Psi_x(\tau)$ процесса $x(t)$ спадает во времени пропорционально $l^{-1/2}$, а время возврата Пуанкаре (квазипериод колебаний) растет пропорционально $\exp kl$, $k \approx 1$.

За счет конечности времени регистрации экспериментальный спектр мощности будет всегда обладать сплошным пьедесталом с дискретными δ-образными выбросами, число которых для $l \gg 1$ очень велико. Наличие малых флуктуаций в связи с большим квазипериодом приводит к размытию спектральных линий, а для $l > l_0$ (l_0 зависит от конкретного уровня шумов) – к их перекрытию. В результате реализуется вполне оправданная с физической точки зрения картина возникновения турбулентности, которая согласуется с традиционными представлениями о стохастизации движения в системах с большим числом степеней свободы, но не имеет ничего общего с динамической стохастичностью, которой отвечает странный аттрактор.

В связи с дальнейшим развитием методов качественной теории дифференциальных уравнений (начало 60-х годов) стали возникать новые идеи трактовки механизма образования турбулентности как сложного характера в поведении фазовых траекторий. Наиболее отчетливо эта тенденция проявилась в работах Д. Рюэля и Ф. Такенса [27, 129]. По *сценарию Рюэля – Такенса* (1971 г.) динамическая стохастичность может развиться после конечной последовательности бифуркаций. Исследователи показали, что если имеется динамическая система с квазипериодическим решением, характеризующимся четырьмя несоизмеримыми частотами ω_i, то можно указать типы возмущений достаточно общего вида, в результате которых квазипериодический поток разрушается с образованием странного аттрактора. Отметим, что вне зависимости от конкретных выводов работы Рюэля – Такенса огромную роль в формировании принципиально новых взглядов на динамику нелинейных систем сыграло введенное ими в рассмотрение понятие странного аттрактора как математического образа стохастичности в динамической системе.

Результат Рюэля – Такенса состоит в следующем. Предположим, что в окрестности значения параметра $\mu = \mu_0$ N-мерная динамическая система имеет единственное устойчивое состояние равновесия O. При $\mu = \mu_1 > \mu_0$ в результате бифуркации Андронова – Хопфа из состояния равновесия рождается устойчивый предельный цикл T_1, характеризующий автоколебания частоты ω_1. С ростом параметра T_1 теряет устойчивость с выходом пары комплексных мультипликаторов на единичную окружность ($\mu = \mu_2 > \mu_1$). Рождается двумерный тор T_2 с двумя в общем случае независимыми частотами ω_1 и ω_2. Частоты ω_1 и ω_2 зависят от μ, и в области существования T_2 соотношение частот изменяется, принимая рациональные и иррациональные значения. При $\mu = \mu_3 > \mu_2$ T_2 теряет устойчивость и в его окрестности рождается инвариантный трехмерный тор T_3, характеризующий трехчастотное квазипериодическое движение с компонента-

ми частот ω_1, ω_2 и ω_3. При достижении параметром значения $\mu = \mu_4 > \mu_3$ T_3 становится неустойчивым, но окружен устойчивым квазипериодическим потоком на T_4. Д. Рюэль и Ф. Такенс показали, что *этот поток не будет общим* для всех систем [27]. Малые возмущения квазипериодического потока на T_4 приводят к странному аттрактору. В 1978 г. С. Ньюхаус, Д. Рюэль и Ф. Такенс показали, что странный аттрактор может возникнуть при разрушении трехмерного тора T_3 [130].

По сравнению с механизмом Ландау – Хопфа, предполагающим бесконечную иерархию потери устойчивости торами, сценарий Рюэля – Такенса в принципе характеризуется конечной цепочкой бифуркаций, обеспечивающих достижение хаотического режима. Экспериментальные и теоретические исследования последних лет свидетельствуют о том, что предложенная в [27, 129, 130] картина развития турбулентного движения дает по крайней мере верное направление решения задачи. Это подтверждено рядом экспериментов на радиофизических моделях, а также непосредственно на потоках жидкости (течение Куэтта, неустойчивость Рэлея – Бенара и др.), которые в своей основе не противоречат идее Рюэля – Такенса.

Математическое обоснование существования типичных возмущений, разрушающих квазипериодический поток с образованием стохастичности, оставляет открытым ряд вопросов, стимулирующих дальнейшее теоретическое и экспериментальные исследования проблемы перехода к турбулентности через квазипериодическое движение [131, 132]. Конечное число локальных бифуркаций, предшествующих рождению странного аттрактора, отчасти может объясняться разрушением тора в отличие от ситуации, когда тор остается, а структура движения на нем стохастизуется. Поэтому с чисто математической точки зрения принципиально важно установить условия существования и разрушения p-мерных торов. Общей теории бифуркаций квазипериодических режимов пока нет, поэтому условия реализации, стохастизации структуры на p-торе и его разрушения, по-видимому, нужно исследовать для конкретных значений p самостоятельно.

Определенная ясность достигнута сейчас в понимании механизмов разрушения двухчастотных колебаний. Появились работы теоретического и экспериментального характера, в которых деталью исследуются бифуркации двумерного тора, обуславливающие эффекты синхронизации, смены устойчивости синхронными режимами, разрушения тора, в результате чего в окрестности разрушившегося тора может рождаться квазиаттрактор.

При переходах от двухчастотного квазипериодического режима к стохастическому во многих экспериментах отмечается режим *синхронизации* [131–135]. Явление резонанса на торе характеризуется рациональным значением числа вращения Пуанкаре ($\phi = p/q$, p и q – целые числа). Для двумерного тора число вращения определяется отношением базовых частот ω_1/ω_2. С математической точки зрения в рамках квазилинейной трактовки выделяются *сильные* и *слабые резонансы* [52]. В окрестности сильных резонансов ($q = 1, 2, 3, 4$) динамическая система характеризуется более сложными перестройками топологической структуры фазовых траекторий, существенно зависящими от порядка резонанса. Для слабых резонансов ($q \geqslant 5$) проблема разбиения пространства параметров системы на области с различными режимами более проста и во многом сходна для различных значений q. Кроме того, слабые резонансы с достаточно большим

значением q мало отличимы от эргодического двухчастотного движения [52, 134, 13].

В принципиально нелинейном случае более правильно говорить о явлении внутренней синхронизации, а не о сильных резонансах. Поэтому с физической точки зрения понятие сильного резонанса связывают не только и не столько с перестройкой топологической структуры движения в его окрестности, а именно с явлением синхронизации (эффект захвата частоты), проявляющимся в конечной и наблюдаемой экспериментально области значений управляющих параметров. С указанной точки зрения в численных и физических экспериментах имеют место явления сильных резонансов, соответствующие внутренней синхронизации, для значений $q \geqslant 5$ [134].

Для рациональных значений числа вращения Пуанкаре ϕ грубая структура фазовых траекторий на торе в простейшем случае представляет собой предельное множество из грубых устойчивого Γ^+ и неустойчивого Γ^- периодических движений [87]. Если ϕ иррационально, то предельным множеством будет вся двумерная поверхность тора. В резонансном случае поверхность тора образуется двумерным неустойчивым миогообразием цикла Γ^-, которое замыкается на устойчивый цикл Γ^+. Если наименьший по модулю мультипликатор предельного цикла Γ^+ действителен и однократен, то система имеет гладкий притягивающий инвариантный тор.

Как следует из теоретических и экспериментальных работ, прежде чем разрушиться, двумерный тор теряет гладкость [13, 133, 135, 136]. Потеря гладкости тором может происходить в результате различных бифуркационных механизмов и не всегда связана с возникновением стохастичности. Однако переходу к стохастичности всегда предшествует потеря гладкости тором, что эквивалентно потере дифференцируемости инвариантной кривой в отображении Пуанкаре.

Рассмотрим динамическую систему, заданную уравнениями

$$\dot{x} = F(x, \vec{\mu}), \quad N \geqslant 3 \tag{5.43}$$

с достаточно гладкими правыми частями, зависящими от совокупности параметров $\vec{\mu}(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k)$. Пусть система (5.43) в некоторой области G фазового пространства при $\mu = \mu_0$ имеет гладкий притягивающий двумерный тор $T_2(\mu_0)$, образованный замыканием неустойчивого многообразия W^u цикла Γ^-. Наименьший по модулю мультипликатор ρ устойчивого цикла Γ^+ на $T_2(\mu)$ однократен и действителен. Введем в рассмотрение множество непрерывных кривых $H = \{\mu(s)\}$ в пространстве параметров системы (5.43), $0 \leqslant s \leqslant 1$, таких, что для $\mu(0)$ система в некоторой области G имеет гладкий притягивающий тор $T_2(\mu_0)$, а для $\mu(1)$ – не имеет. При сделанных предположениях справедлива *теорема о разрушении тора* [137], утверждающая следующее.

1. Существует промежуточное значение параметра $0 < s_1 < 1$ такое, что либо при $s > s_1$ $T_2[\mu(s)]$ теряет гладкость в результате негладкости подхода неустойчивого многообразия W^u в окрестности Γ^+, либо при $s = s_1$ пара мультипликаторов $\rho_{1,2}$ устойчивого цикла Γ^+ становится комплексной.

2. Существует такое $s^* > s_1$, что для значений $s \geqslant s^*$ система не имеет притягивающего тора $T_2(\mu)$, разрушение которого осуществляется одним из трех возможных способов:

A. Устойчивый предельный цикл Γ^+ на $T_2(\mu)$ при $s = s^*$ теряет устойчивость в результате одной из типичных бифуркаций (см. гл. 3).

B. У седлового периодического движения Γ^- возникает негрубая гомоклиническая кривая.

C. Устойчивый и неустойчивый циклы на торе при $s = s^*$ сливаются, образуя периодическое движение типа седло-узел, и исчезают, а тор при этом негладкий.

Разрушение тора, осуществляющееся в результате указанных в теореме бифуркаций, еще не гарантирует появления режима динамической стохастичности. Однако если выполнены некоторые дополнительные условия, то при разрушении тора могут возникать квазиаттракторы.

Обратимся к рис. 5.4, на котором качественно изображена бифуркационная диаграмма на плоскости двух параметров μ_1, μ_2 для окрестности некоторой произвольной резонансной области, соответствующей грубой структуре на торе, и указаны направления движения, реализующие ситуации A, B, C п. 2 теоремы. Резонансный "клюв" опирается на бифуркационную точку A_i коразмерности 2, принадлежащую линии бифуркации рождения тора l_0, и образован двумя бифуркационными линиями l_1 обращения мультипликатора устойчивого цикла Γ^+ в +1 (седло-узловая бифуркация слияния и исчезновения циклов Γ^+ и Γ^-).

При движении по направлению PA на линии l_2 цикл Γ^+ теряет устойчивость и T_2 разрушается. Здесь возможно несколько случаев. Если на линии l_2 $\rho = -1$, то не исключена последовательность удвоений Фейгенбаума и рождение квазиаттрактора Смейла – Фейгенбаума. Если на линии l_2 на единичный круг выходит пара комплексных мультипликаторов цикла Γ^+, то рождается новый двумерный тор и вновь применима теорема о разрушении. На линии рождения тора из цикла Γ^+ в точках сильных резонансов могут реализовываться бифуркации утроения $[\rho_{1,2} = \exp(j \cdot 2\pi/3)]$ и учетверения $[\rho_{1,2} = \exp(j\pi/2)]$ периода [136, 137].

Если двигаться в направлении PB, то при пересечении бифуркационной линии l_3 возникает *негрубая гомоклиническая кривая* (неустойчивое многообразие цикла Γ^- касается устойчивого). Тор T_2 при этом разрушается, но устойчивый цикл Γ^+ не исчезает. Выше линии l_3 по направлению PB возникает нетривиальное гиперболическое подмножество траекторий, которое, однако, не является аттрактором. Притягивающим режимом здесь остается устойчивый цикл Γ^+, и возможен лишь *метастабильный*

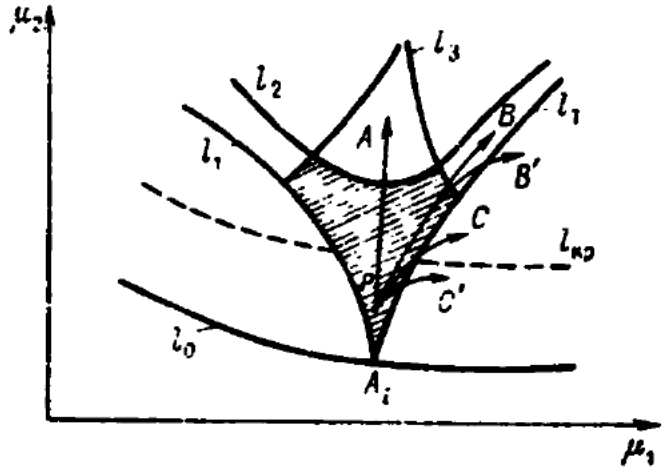
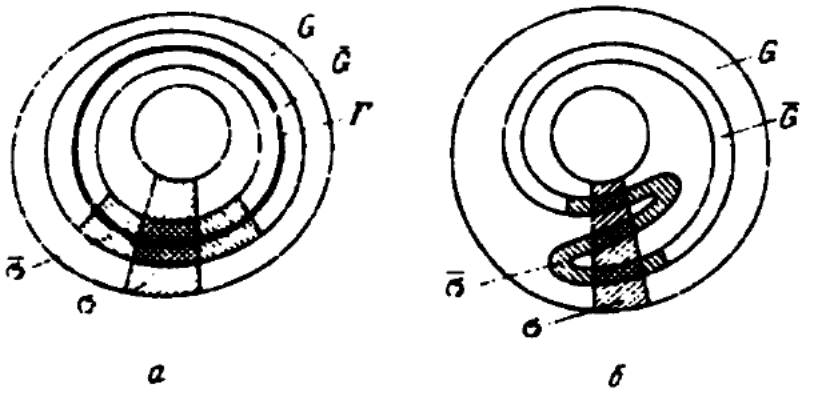


Рис 5.4. Возможные пути разрушения двумерного тора на плоскости параметров μ_1, μ_2

хаос как длительный переходный процесс. Странный аттрактор возникает только в случае исчезновения Γ^+, если, например, сдвинуться по направлению PB' и пересечь линию l_1.

Третий случай движения по кривой PC приводит к слиянию и исчезновению на линии l_1 периодического движения типа седло-узел, не имеющего грубой гомоклиники (тор в бифуркационной точке негладкий). Осуществляется переход к стохастичности через перемежаемость и возникает так называемый "тор-аттрактор" [104]. Если движение осуществляется по кривой PC' в область ниже линии $l_{кр}$ на рис. 5.4,



Р и с. 5.5. Возможные случаи отображения кольца на плоскости внутрь себя

характеризующей разрушение тора через потерю гладкости, то фиксируется переход от резонансных биений к эргодическим, т.е. тор сохраняется, оставаясь регулярным аттрактором.

Экспериментальный и численный анализы проблемы разрушения двумерного тора требуют минимум двупараметрического анализа ввиду того, что явление синхронизации (резонанса) на торе представляет собой бифуркацию коразмерности 2 и на плоскости двух управляющих параметров характеризуется конкретной точкой (точка A_i на рис. 5.4). Подобные явления в случае общего положения не могут исследоваться при однопараметрическом подходе. Традиционный для физики путь изучения поведения системы при вариации лишь одного параметра в задачах подобного типа приводит, как это ни парадоксально, лишь к усложнению наблюдаемой картины.

Фазовый поток в окрестности двумерного тора в общем случае порождает изоморфное диссипативное двумерное отображение некоторого кольца. Пусть кольцо G преобразуется строго внутрь себя так, что область G переходит в область $\bar{G}$, как показано на рис. 5.5. Можно указать общие условия, при которых внутри кольца будет существовать замкнутая кривая Г, преобразующаяся в себя так, что на ней определяется некоторое отображение, гомеоморфное отображению окружности:

$$\varphi_{n+1} = \Phi(\varphi_n, \beta_1, \ldots, \beta_m). \qquad (5.44)$$

где β_i – параметры отображения.

При некоторых условиях отображение кольца в кольцо может иметь довольно сложный вид. Сложная структура возникает, например, в случае, если после некоторого числа преобразований область G переходит в область $\bar{G}$, как это показано на рис. 5.5 *б*. Возникающее при этом отоб-

ражение сходно с подковой Смейла. Наличие взаимопересечений областей σ и $\bar{\sigma}$ свидетельствует о существовании бесконечного числа различных кратных седловых неподвижных точек и о сложной структуре точечного отображения [11, 138, 139]. В поперечном сечении предельное множество в отображении будет иметь структуру типа канторовой. Вспомогательное отображение замкнутой кривой Г в себя становится при этом не взаимно однозначным. Если исследовать отображение (5.44), то канторовость структуры учитываться не будет.

Приближенное описание динамики отображения кольца можно получить, исследуя модельное отображение окружности (5.44), которое адекватно описывает процессы до критической точки, когда теряется взаимная однозначность отображения. Тем не менее исследования модельных отображений окружности позволили вскрыть ряд закономерностей перехода к хаосу от режима двухчастотных колебаний, получивших экспериментальное подтверждение.

Наиболее часто рассматривается отображение окружности вида

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + \Omega - (K/2\pi)\sin(2\pi\varphi_n). \qquad (5.45)$$

где K и Ω – параметры отображения. Для $0 \leqslant K < 1$ отображение (5.45) является диффеоморфизмом (взаимно однозначное), однако для $K > 1$ обратного отображения Φ^{-1} не существует. При $K = 1$ обратное отображение Φ^{-1} существует, но не дифференцируемо при $\varphi = 0$.

Гладкое взаимно однозначное отображение окружности характеризуется числом вращения Пуанкаре ϕ. Если преобразование характеризует вращение на угол $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_0$, число вращения определяется как $\Delta\varphi/n$. В этом случае для (5.45) $\phi = \Omega$. В общем случае число вращения определяется как предел:

$$\phi = \lim_{n\to\infty} [(\varphi_n - \varphi_0)/n], \qquad (5.46)$$

где $(\varphi_n - \varphi_0)$ – полный угол поворота отображаемой точки φ_0 при n итерациях отображения. Для гладких взаимно однозначных отображений окружности этот предел существует и не зависит от задания начальной точки. Условия грубости, вид грубого отображения, а также непрерывность зависимости числа вращения от параметра установлены в [87].

Из условий существования и независимости от начальной точки предела (5.46) следует, что для иррациональных значений ϕ отображение окружности (5.45) не имеет неподвижных точек, а при рациональных значениях ϕ отображение (5.45) имеет грубые устойчивые и неустойчивые неподвижные точки кратности q. В силу грубости каждое рациональное значение ϕ сохраняется неизменным в некоторых областях изменения параметров, образуя горизонтальные ступеньки на графике зависимости ϕ от любого из параметров отображения β_i, влияющего на число вращения.

Если отображение окружности не изоморфно, то предел (5.46), если он существует, становится зависящим от начальной точки, и число вращения определено здесь неоднозначно. Горизонтальные участки на графике зависимости $\phi(\beta_i)$ в этом случае взаимно перекрываются, отражая факт взаимопересечений (перекрытия) резонансных областей с различными числами вращения.

Поиску количественных закономерностей перехода от режима двухчастотных колебаний к хаосу, имеющих место в модельных отображениях окружности, посвящено много работ [140–144]. Автор [143] численно исследовал последовательности резонансов с периодами, определяемыми числами Фибоначчи u_n для отображения (5.45) при $K \leqslant 1$, $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$. При $n \to \infty$ число вращения $\phi = u_{n-1}/u_n$ имеет пределом иррациональное число $\sigma_g^{-1} = (\sqrt{5} \quad 1)/2$, называемое обратным золотым сечением. Установлены следующие закономерности:

$$\Omega_\infty - \Omega_n \approx \delta^{-n}, \tag{5.47}$$

$$\Phi^{u_n}(\varphi = 0,\ \Omega = \Omega_n) - u_{n-1} \approx \alpha^{-n}, \tag{5.48}$$

где Ω_n определялось из соотношения

$$\Phi^{u_{n+1}}(\varphi = 0,\ \Omega = \Omega_n) = u_n. \tag{5.49}$$

Константы δ и α имеют тривиальные значения ($\delta = -\sigma_g^2$, $\alpha = -\sigma_g$) при $K < 1$ и нетривиальные ($\delta = -\sigma_g^y$, $\alpha = -\sigma_g^x$, где $y \approx 2{,}164$, $x \approx 0{,}527$) при $K = 1$. Изменение этих констант свидетельствует о разрушении инвариантной кривой. Тривиальность означает, что в области $0 \leqslant K < 1$ значения констант α и δ не меняются, т.е. они остаются такими же, как в случае $K = 0$.

На основе метода ренормгруппы экспериментальные результаты [143] получили теоретическое обоснование [140–142, 144]. Авторами введена в рассмотрение функция

$$\tilde{\Phi}_n(\varphi) = \alpha^n \{ \Phi^{u_{n+1}}[\alpha^{-n}\varphi,\quad \Omega = \Omega_n] - u_n \}, \tag{5.50}$$

относительно которой предположено, что она является приближением функции неподвижной точки $\Phi^*(\varphi)$. Тогда функция $\Phi^*(\varphi)$ удовлетворяет функциональным уравнениям [144]

$$\Phi^*(x) = \alpha\Phi^*[\alpha\Phi^*(\alpha^{-2}, x)],\quad \Phi^*(x) = \alpha^2\Phi^*[\alpha^{-1}\Phi^*(\alpha^{-1}, x)]. \tag{5.51}$$

которые имеют линейное решение $\Phi^*(x) = x - 1$. В последнем случае критические константы имеют тривиальные значения.

Однако при $K = 1$ линейное решение не удовлетворяет (5.51), поскольку $\Phi(\varphi)$ имеет теперь кубическую точку перегиба при $\varphi = 0$. Следовательно, $\Phi^*(x)$ должна быть функцией от x^3. Нетривиальная функция фиксированной точки такого типа была получена численно таким же методом, что и фейгенбаумовская функция неподвижной точки при бифуркациях удвоения периода. Соответствующее собственное значение функционального уравнения, линеаризованного в окрестности этой функции неподвижной точки, дает константу δ и возможность определения константы α. Теоретические результаты хорошо согласуются с экспериментальными. Значения констант δ и α зависят от характера разложения числа вращения ϕ в цепную дробь. Они одинаковы для всех ϕ, у которых разложение имеет один и тот же "хвост".

Важно, что установленные свойства отображения не зависят от конкретного вида функции Φ, являясь таким образом универсальными для класса функций, имеющих кубическую точку перегиба.

Универсальными свойствами характеризуется также спектр мощности отображения окружности в критической точке $K = 1$. В [143] обнаружена самоподобная структура спектра при значении числа вращения $\phi = \sigma_g^{-1}$, теоретическое обоснование которой получено впоследствии в [141]. Количественные характеристики спектра существенно зависят от числа вращения. В случае когда ϕ представимо в виде цепной дроби, спектр обладает свойством масштабной инвариантности, т.е. самоподобной структурой.

Наиболее простым разложением в периодическую цепную дробь характеризуется обратное золотое сечение:

$$\phi = \sigma_g^{-1} = 0{,}5(\sqrt{5} - 1) = \langle 1, 1, \ldots, 1, \ldots \rangle.$$

В этом случае частоты спектра в интервале [0, 1] удовлетворяют соотношению

$$\nu = | n_2 \sigma_g^{-1} - n_1 |, \quad n_2 > n_1, \tag{5.52}$$

где n_2 и n_1 – последовательные члены одного из рядов Фибоначчи.

Хотя отображение окружности при $K > 1$, строго говоря, уже не описывает адекватно хаотическое множество, возникающее в окрестности разрушившегося тора, тем не менее исследования динамики (5.45) при $K > 1$ обнаружили некоторые закономерности, характерные для "тор-аттракторов". В частности, установлено, что при $K > 1$ переход к хаосу возможен через серию бифуркаций удвоения и жестко – через перемежаемость [145]. В [146, 147] показано, что при $K > 1$ в отображении (5.45) возможно одновременное сосуществование двух аттракторов, что можно связывать с неоднозначностью числа вращения.

Таким образом, для исследования проблемы разрушения двумерного тора и связанных с ней вопросов о качественных и количественных закономерностях перехода к хаосу многочисленные работы по анализу динамики модельных отображений окружности оказались весьма важными.

Что касается проблемы перехода к хаосу через режимы многочастотных колебаний, т.е. перехода к хаосу через разрушение или перестройку структуры фазовых траекторий многомерных торов, то строгих результатов в этом вопросе пока нет. Кроме того, по-видимому, далеко не все вопросы о бифуркациях двумерных торов представляются сейчас теоретически ясными. Например, как следует из результатов экспериментов [13, 85, 136], двумерный тор может претерпевать по крайней мере конечную цепочку бифуркаций удвоения, которая не связана с удвоениями резонансных циклов на торе. Удваивается эргодический тор как единое целое! В итоге удвоенный тор, который топологически эквивалентен двумерному тору, может в дальнейшем разрушаться с образованием странного аттрактора в полном соответствии с выводами теории.

Имеются экспериментальные результаты о возможности реализации притягивающего трехчастотного движения и переходах к стохастичности через трехмерный тор [13, 131, 133, 134]. Подобная задача теоретически не решена, и в свете сказанного выше тщательные эксперименты в этом направлении представляются необходимыми и чрезвычайно интересными.

5.5. Взаимодействие аттракторов. Перемежаемость

Существенное свойство квазигиперболической стохастичности, как уже отмечалось, состоит в принципиальной неустранимости бифуркаций предельных множеств в квазиаттракторах с изменением параметров. Квазихаотическое поведение типично для реальных динамических систем и требует серьезного теоретического исследования. Первоначально с таким поведением пришлось столкнуться, наблюдая в численных экспериментах эффект взаимодействия исчезающего в результате седло-узловой бифуркации предельного цикла со стохастическим режимом. Этот эффект сопровождается случайным во времени процессом смены почти периодических колебаний (*ламинарных фаз* движения) турбулентными вспышками (*турбулентными фазами*) и назван *переходом к хаосу через перемежаемость* [3, 4]. Такой переход было бы неверным рассматривать собственно как механизм образования хаотического аттрактора. Дело в том, что здесь имеет место типичная для квазиаттракторов ситуация: аттрактор рождается благодаря вполне определенным бифуркационным явлениям, приводящим к образованию гомоклинических структур. Однако вариация параметров приводит к бифуркациям уже сформированного аттрактора, т.е. к переходам в хаосе. В частности, возможны и наиболее типичны бифуркации жесткого рождения (исчезновения) множества предельных циклов внутри хаотического аттрактора. Именно внутренние бифуркационные явления и приводят к резким перестройкам структуры аттракторов, т.е. *к перемежаемости* и другим типам взаимодействий аттракторов.

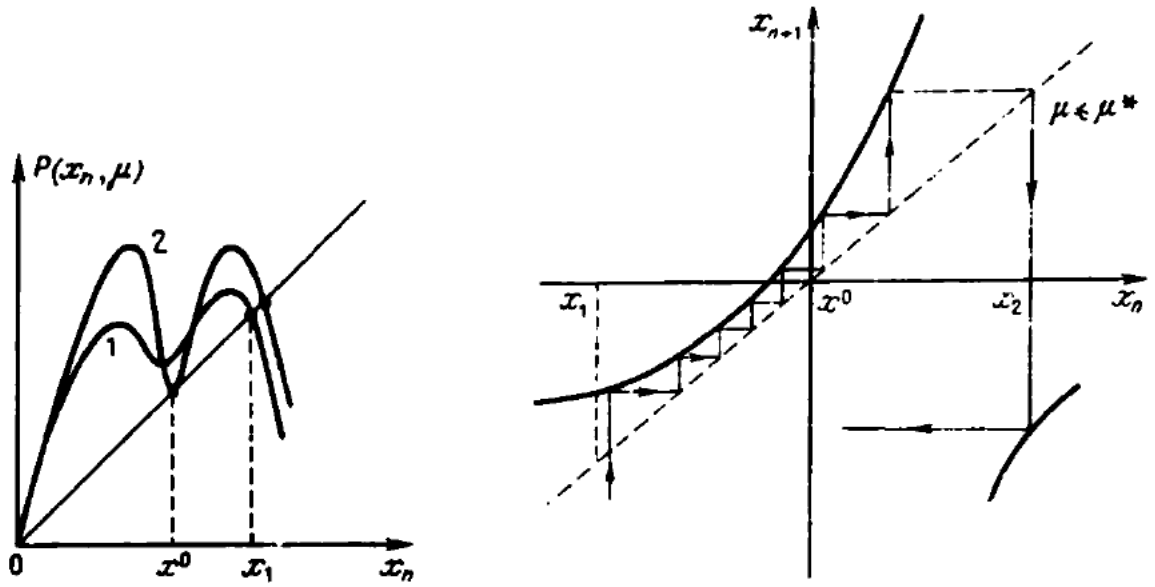
Рассмотрим несколько типичных примеров эффекта взаимодействия аттракторов. Без потери общности предположим, что в силу преимущественного сжатия аттрактор N-мерной системы локализован в трехмерном подпространстве и имеет размерность, близкую к двум. Тогда справедливо приближенное моделирование динамики системы одномерными необратимыми отображениями.

Пусть вид одномерного отображения в режиме стохастичности соответствует изображенному на рис. 5.6 (кривая *1*). Неподвижная точка периода 1 неустойчива с мультипликатором $|\rho| > 1{,}601$, что свидетельствует о непериодическом характере дискретной последовательности.

Пусть нелинейные свойства отображения $P(x_n, \mu)$ таковы, что с изменением μ в некотором интервале $\mu_1 < \mu < \mu_2$ реализуется случай, изображенный на рис. 5.6 (кривая *2*), отражающий эффект касательной бифуркации: при $\mu = \mu^*$ производная $P'_x(x^0, \mu) = +1$. При вариации параметра μ в окрестности μ^* либо рождается, либо исчезает пара неподвижных точек в отображении (седло-узловая бифуркация). Если ввести малый параметр $\epsilon = |\mu - \mu^*|$ и рассмотреть явления вблизи $x = x^0$, то справедливо локальное представление

$$x_{n+1} = \epsilon + x_n + g(x_n), \tag{5.53}$$

где $x_n \ll 1$, $g(x_n)$ – некоторая нелинейная функция, например $g(x_n) = ax_n^2$, $\epsilon = |\mu - \mu^*| \ll 1$.



Р и с. 5.6. Седло-узловая бифуркация в одномерном отображении со странным аттрактором с параметром $\mu < \mu^*$ (*1*) и $\mu = \mu^*$ (*2*)

Р и с. 5.7. Ламинарная фаза движения в окрестности точки касательной бифуркации

Для малых ϵ и x_n можно от дискретного перейти к дифференциальному уравнению

$$dx_n/dn = \epsilon + g(x_n), \tag{5.54}$$

решением которого является

$$n = \int [\epsilon + g(x_n)]^{-1} dx_n. \tag{5.55}$$

Для $g(x_n) = ax_n^2$ получаем

$$n = (a\epsilon)^{-1/2} \operatorname{arctg} [x_n (a/\epsilon)^{1/2}]. \tag{5.56}$$

При $\epsilon \to 0$ $\operatorname{arctg} [x_n (a/\epsilon)^{1/2}] \to \pm \pi/2$ и длительность ламинарной фазы (число итераций в окрестности точки касательной бифуркации)

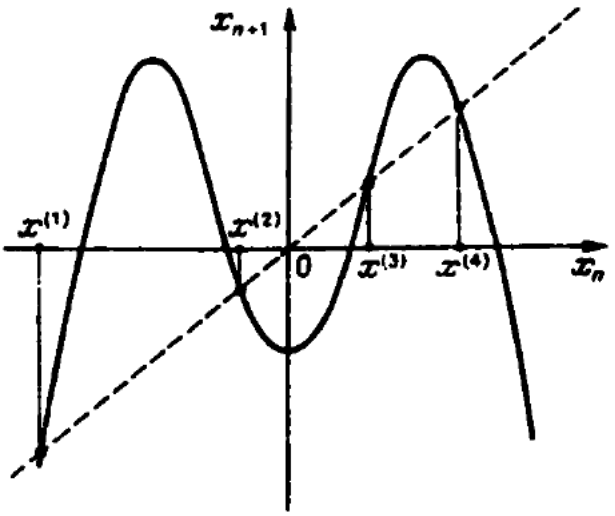
$$n \approx |\mu - \mu^*|^{-1/2}. \tag{5.57}$$

Длительность ламинарной фазы оказывается обратно пропорциональной корню квадратному из надкритичности. Действительно, рассмотрим в увеличенном масштабе окрестность точки касательной бифуркации, представленную на рис. 5.7. При отклонении параметра от бифуркационного число итераций отображения в окрестности исчезнувшей неподвижной точки будет тем больше, чем меньше ϵ. В дифференциальной системе этому отвечает процесс последовательного повторения близких к периодическим участков фазовой траектории, средняя длительность которых

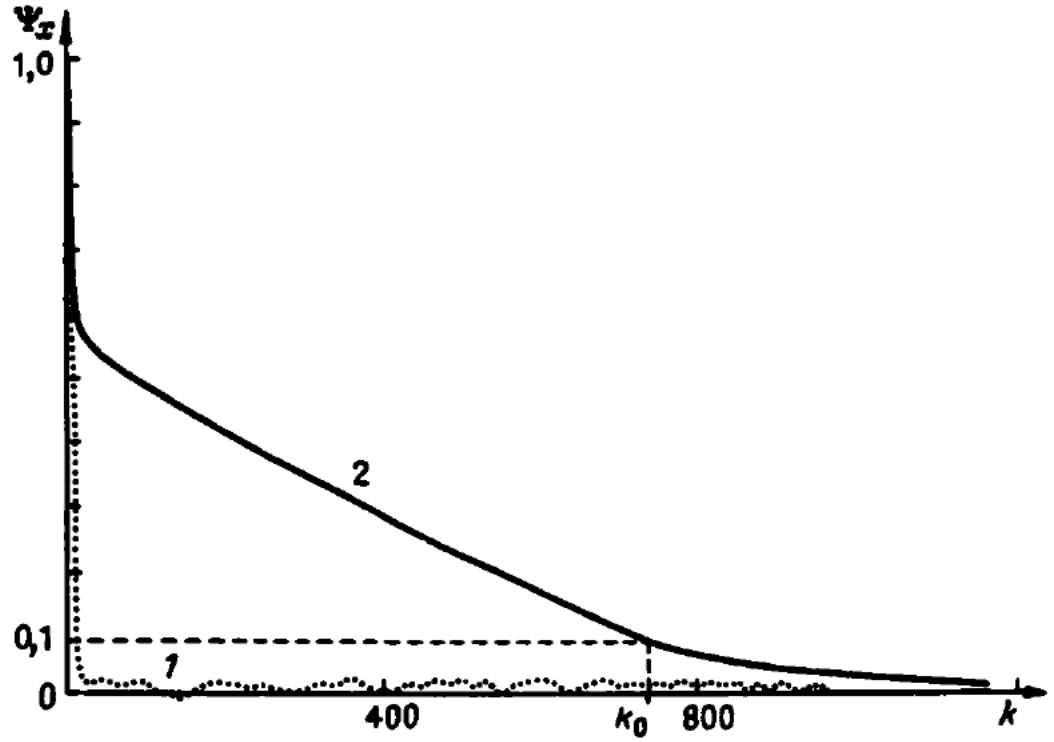
$$\langle \tau_л \rangle = c |\mu - \mu^*|^{-1/2}. \tag{5.58}$$

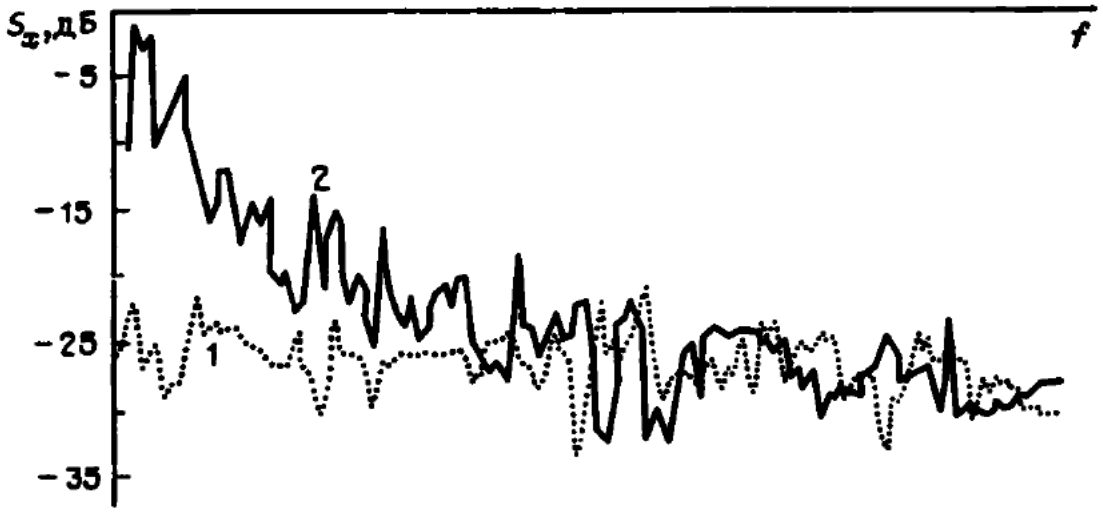
Исчезающий в результате седло-узловой бифуркации устойчивый предельный цикл в окрестности точки бифуркации ведет себя подобно Чеширскому Коту из сказки Л Кэрола "Алиса в стране чудес". Кот, как известно, имел обыкновение исчезать, оставляя после себя парящую в воздухе улыбку. Такой "парящей улыбкой" исчезнувшего устойчивого решения является ламинарная фаза перемежающейся стохастичности [148].

Р и с. 5.8. **График отображения (5.59)**



Р и с. 5.9. **Автокорреляционная функция для значений параметра μ: 1,54368 < $< \mu^{**}$ (*1*), 1,54369 > μ^{**} (*2*)**





Р и с. 5.10. **Спектральная плотность мощности для значений параметра μ: 1,54368 < $< \mu^{**}$ (*1*), 1,54369 > μ^{**} (*2*)**

Впервые перемежаемость типа "цикл–хаос" вблизи седло-узловой бифуркации была обнаружена численно в модели Лоренца при больших значениях r (в области квазиаттрактора!) Помо и Манневилем [149], а затем наблюдалась во многих других системах [3–4]. Безусловно, это далеко не единственная возможность взаимодействия различных режимов при обратных бифуркациях регулярных режимов в системах с квазиаттракторами. Качественно сходные явления наблюдаются вблизи точек субкритических бифуркаций рождения тора, рождения циклов удвоенного периода и др. [3]. Подобные явления могут осуществляться и при взаимодействии не только с регулярными, но и с хаотическими режимами. В этом случае можно говорить о *перемежаемости типа "хаос–хаос"*.

Рассмотрим отображение, получаемое на второй итерации из логистической параболы [150],

$$x_{n+1} = P^{(2)}(x_n, \mu) = 1 - \mu + 2\mu^2 x_n^2 - \mu^3 x_n^4, \qquad (5.59)$$

где $P(x_n, \mu) = 1 - \mu x_n^2$. График этого отображения представлен на рис. 5.8. Неподвижные точки $x^{(1)}$, $x^{(3)}$ всегда неустойчивы. Их мультипликаторы положительны и больше единицы. Точки $x^{(2)}$ и $x^{(4)}$ имеют мультипликаторы $\rho < 0$ и с ростом μ претерпевают бифуркации удвоения периода. При $\mu = \mu^* = 1{,}401155\ldots$ их мультипликаторы проходят критическое значение $\rho^* = -1{,}601\ldots$ и одновременно рождаются два аттрактора Фейгенбаума. Области притяжения этих аттракторов в одномерном фазовом пространстве системы (5.59) разделяет "сепаратриса" – неустойчивая точка $x^{(3)}$. Дальнейшее увеличение $\mu > \mu^*$ сопровождается эволюцией обоих аттракторов через серию обратных бифуркаций удвоения к режиму развитой стохастичности. Для значений параметра $\mu < \mu^{**} = 1{,}543689\ldots$ неустойчивая неподвижная точка $x^{(3)}$ продолжает играть роль сепаратрисы, разграничивая области притяжения аттракторов. В зависимости от задания начальных точек слева или справа от $x^{(3)}$ результирующим будет движение на первом или втором хаотических аттракторах. В критической точке $\mu = \mu^{**}$ аттракторы начинают взаимодействовать через перемежаемость и с превышением порога $\mu \gtrsim \mu^{**}$ объединяются.

Рассмотрим результаты расчетов нормированной автокорреляционной функции $\Psi_x(k)$ и фурье-спектр интенсивности хаотических последовательностей $\{x_n\}$ до порога взаимодействия и выше критической точки μ^{**}. Для $\mu < \mu^{**}$ $\Psi_x(k)$ двух независимых аттракторов идентичны и представляют собой зависимость, близкую к δ-функции (рис. 5.9, кривая *1*). Близок к равномерному в широком диапазоне частот и спектр $S_x(f)$ (рис. 5.10, кривая *1*). С превышением порога взаимодействия $\mu \geqslant \mu^{**}$, когда регистрируется эффект перемежаемости "хаос–хаос", статистические свойства последовательности $\{x_n\}$ меняются. При малых превышениях над порогом резко возрастает время корреляции k_0 (рис. 5.9, кривая *2*). Это ведет к соответствующим изменениям в характере огибающей спектра, которая принимает вид $S_x(f) \approx f^{-\alpha}$ (рис. 5.10, кривая *2*). В окрестности критической точки $\mu^{**} < \mu < 1{,}6$ график зависимости

$$\ln n_0 = \Phi[\ln(\mu - \mu^{**})] \qquad (5.60)$$

представляется прямой в пределах точности расчетов на ЭВМ. Отсюда

следует зависимость длительности ламинарной фазы от уровня надкритичности:

$$n_0 = c(\mu - \mu^{**})^{-\beta}, \quad c = 1{,}196, \quad \beta = 0{,}484. \tag{5.61}$$

Увеличение времени корреляции, характеризующее среднее время жизни состояния (длительность "ламинарной" фазы), ведет к соответствующим изменениям в характере огибающей спектра мощности $S_x(f)$. На рис. 5.10 (кривая *2*) показана зависимость $S_x(f)$, которая имеет вид $f^{-\alpha}$, где α определяется уровнем надкритичности. С ростом параметра $\mu > \mu^{**}$ время корреляции уменьшается, при этом показатель α стремится к нулю. Вдали от точки бифуркации μ^{**} спектр объединенного аттрактора становится практически равномерным.

ГЛАВА 6

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ХАОСА

6.1. Экспериментальный подход к исследованиям динамики нелинейных систем

В общем случае эволюционная задача применительно к нелинейной динамической системе

$$\dot{x} = F(x, \vec{\mu}) \tag{6.1}$$

аналитически не разрешима. Решение уравнений (6.1) может быть найдено либо численными методами на ЭВМ, либо аналоговым моделированием. При численном исследовании конкретных нелинейных систем с математической точки зрения возникают разнообразные задачи, требующие применения специальных алгоритмов и программ вычислений. Но первоочередной задачей является *численное интегрирование* (6.1) для нахождения зависимости $x(t, \vec{\mu})$ при заданных начальных условиях, т.е. *решение задачи Коши*. Методы численного интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений, как правило, позволяют построить решение при различных значениях начальных условий и параметров. Что здесь принципиально важно, так это предоставляемая возможность исследования регулярных неустойчивых решений, которые в физических экспериментах не реализуются. Эволюция таких режимов с изменением параметра очень часто принципиально важна, так как определяет механизмы возникновения структурно устойчивых режимов, наблюдаемых экспериментально.

Численными методами находятся координаты неподвижных точек (6.1) как решение нелинейных алгебраических уравнений $F(x, \vec{\mu}) = 0$ и их зависимость от параметров. Эта задача, многократно решаемая при вариации параметров, служит основой для построения характерных бифуркационных линий в пространстве параметров системы. С помощью соответствующих методов находят *отображение Пуанкаре* на секущей гиперповерхности, которое наглядно иллюстрирует характер решения и весьма информативно при исследовании автостохастических режимов колебаний в системах малой размерности.

Алгоритмы расчета, базирующиеся на методах линейной алгебры с использованием результатов численного интегрирования, позволяют решать вопрос об *устойчивости* решений, их *бифуркациях* и тем самым исследовать процесс перестройки структуры разбиения фазового пространства на траектории с изменением параметров.

При исследовании "физических" свойств хаотических колебаний, таких, например, как интегральная мощность, ее распределение по частоте, степень "случайности" процесса (автокорреляция) и других, применяются методы статистической обработки множества выборочных (усеченных) реализаций $x_T(t, \mu)$, позволяющие вычислять функции распределения $p(x)$, коэффициент корреляции $R_x(\tau)$, спектр мощности процесса $S_x(f)$, интересующие моменты функции распределения $p(x)$ (например, $\langle x \rangle$, $\langle x^2 \rangle$, дисперсию и др.) и зависимость названных характеристик от параметров.

Важной задачей является исследование влияния флуктуаций на динамику системы. Под влиянием флуктуаций странный аттрактор может практически не изменять своей структуры и свойств, в то же время регулярный режим под воздействием флуктуаций может смениться хаотическим (индуцированные флуктуациями хаотические колебания). Может наблюдаться и обратная картина: странный аттрактор под действием шумов может разрушиться, сменившись регулярным режимом, а предельный цикл не изменит в целом своих свойств, если флуктуации достаточно малы. Математическое моделирование и численный анализ указанных явлений требуют формулировки и решения либо стохастических дифференциальных уравнений, когда случайное воздействие вводится в правые части системы (6.1) в виде генератора случайных чисел с заданной статистикой, либо соответствующего кинетического уравнения Фоккера – Планка [28–30, 92–94]. Обе последние задачи чрезвычайно тонкие и требуют привлечения аппарата статистической радиофизики.

При исследовании конкретных систем возникают самые неожиданные ситуации, поэтому перечислить все необходимые алгоритмы нет возможности и здесь рассмотрены лишь основные, позволяющие решать типичные задачи.

Не менее важными являются и методы *физических* экспериментов. Принципиальная особенность физических экспериментов состоит в том, что они иллюстрируют устойчивые режимы колебаний в системе, математическая модель которой всегда является приближенной. Физический эксперимент позволяет решить вопрос об адекватности математического описания реальной системы и установить на опыте границы применимости приближенного математического описания. Если это сделано, то физический эксперимент позволяет исследовать поведение найденных численно решений с изменением параметров, наблюдать, например, странный аттрактор, а если их в фазовом пространстве несколько, то выяснить, какие из них наиболее вероятны.

В физических экспериментах используют устройства, ставящие в соответствие фазовым координатам изучаемой системы токи или напряжения, т.е. электрические сигналы, для исследования которых имеется разнообразная измерительная аппаратура. Если физическая модель непосредственно этого условия обеспечить не в состоянии (например, при экспе-

риментах с течением жидкости), то прибегают к различным способам изоморфного преобразования фазовых координат исходной системы в соответствующие электрические сигналы. Так, например, при исследованиях турбулентных течений для определения скорости движения частиц в жидкость добавляют светоотражающие шарики из специального вещества. Эти шарики увлекаются потоком, движутся вместе с жидкостью, и скорость жидкости можно измерить по доплеровскому сдвигу частоты отраженного сигнала облучающего монохроматического лазера [134].

При работе с радиофизическими моделями динамических систем, а точнее — с реальными электрическими автоколебательными системами, математической моделью которых является динамическая система (6.1), экспериментальные исследования в некотором смысле упрощаются, часто становятся более наглядными и могут обходиться заметно дешевле численных. В физических экспериментах гораздо проще и быстрее производится анализ динамики системы при вариации ее параметров, однако получаемые при этом результаты желательно контролировать численно в некоторых характерных режимах. Это связано с тем, что при изменении параметров системы подчас очень легко нарушаются условия адекватности физической и математической моделей. Это может произойти за счет "подключения" нелинейных эффектов, не учитываемых в уравнениях, но имеющих место при изменении параметров реальной модели.

Еще одно важное обстоятельство всегда нужно помнить при изучении динамики нелинейных систем: это принципиальная зависимость характера того или иного решения $x(t, \vec{\mu})$ (6.1) от конкретных начальных условий $x(t_0, \vec{\mu})$. В физическом эксперименте трудно, а подчас и практически невозможно проконтролировать начальные условия исследуемого процесса. Кроме того, при вариации параметров одно решение (один конкретный динамический режим) может потерять устойчивость и смениться другим, область притяжения которого близка к области первого режима. Это явление может ускользать от наблюдателя и в итоге приводить к необоснованным выводам.

Из сказаного ясно, что при исследовании динамики нелинейных систем в целом нельзя отдать предпочтения численным или физическим методам, каждый из которых обладает соответствующими преимуществами и недостатками. Разумнее, там, где это возможно, использовать оба подхода, естественным образом дополняющих друг друга.

В настоящей главе внимание сосредоточено на обсуждении алгоритмов, лежащих в основе наиболее часто используемых численных методов анализа механизмов развития и свойств странных аттракторов. Что касается методов физического эксперимента, то они в отличие от численных не требуют серьезных модификаций применительно к исследованиям хаотических режимов колебаний и нет необходимости специально на них останавливаться.

6.2. Расчет отображений Пуанкаре

Рассмотрим некоторую автономную динамическую систему

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_N, \mu_1, \ldots, \mu_k). \qquad (6.2)$$

В фазовом пространстве $\mathbb{R}^N$ системы (6.2) зададим $N-1$-мерную поверх-

ность S, удовлетворяющую требованиям, предъявляемым к секущей Пуанкаре, уравнение которой имеет вид

$$S(x_1, \ldots, x_N, \mu_1, \ldots, \mu_k) = 0. \tag{6.3}$$

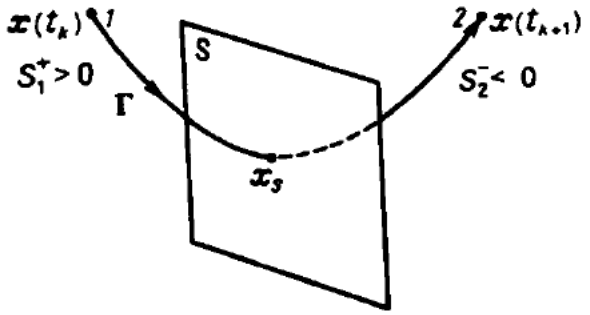
Отображение Пуанкаре P преобразует точки, принадлежащие поверхности S, в точки этой же поверхности, т.е. отображает секущую S в себя: для любой точки $x_n \in S$ преобразованная точка $P(x_n) = x_{n+1} \in S$. Для нахождения отображения P необходимо решать систему уравнений (6.2) при фиксированных значениях параметров μ_i, задав начальные условия

$$x_i(0) = x_i^0, \quad i = 1, 2, \ldots, N, \quad x^0 \in S, \tag{6.4}$$

и последовательно находить точки пересечения полученного решения (т.е. траектории Γ, выходящей из x^0) с поверхностью S.

Возникают две самостоятельных задачи. Первая – это расчет траектории $x(t)$ системы (6.2) при заданных значениях параметров и начальных условиях (6.4). Вторая – определение координат точек пересечения траектории с секущей поверхностью, т.е. построение отображения (*сечения*) Пуанкаре*). Вычислить траекторию можно с помощью любого из известных методов численного интегрирования. Например, при исследовании хаотических систем широко применяются методы Рунге–Кутта, в частности, 4-го порядка. Для определения координат точек пересечения Γ с S необходимо на каждом временном шаге интегрирования системы (6.2) вычислять значение функции $S(x, \vec{\mu})$ до тех пор, пока не будет зарегистрирован момент смены знака $S(x)$.

Пусть, например, на интервале времени от t_k до $t_k + \Delta t = t_{k+1}$ (где Δt – шаг численного интегрирования) произошла смена знака функции $S(x)$, как показано на рис. 6.1. Необходимо уточнить точку x_S пересечения траектории с секущей. Эту задачу можно решать с заданной степенью точности,



Р и с. 6.1. К иллюстрации метода расчета точки пересечения траектории с секущей поверхностью S

применяя методы интерполяции. Последовательно уменьшая шаг интегрирования Δt в два раза, можно использовать метод дихотомии и закончить вычисления, когда разность значений $|S_1^+ - S_2^-|$ будет меньше наперед заданной величины, определяющей точность расчета точек x_S. Принципиальных трудностей здесь нет, однако повышенные требования к точности определения x_S требуют дополнительных вычислений, усложнения алгоритма, что ведет к увеличению затрат машинного времени, особенно если размерность N системы велика.

*) Различие в терминах "*сечение*" и "*отображение*" Пуанкаре возникает только в случае утраты информации об операторе эволюции, например при простом геометрическом изображении множества точек на секущей (или ее проекции).

Хеноном предложен простой и экономичный метод, который заключается в следующем [151]. Введем в рассмотрение переменную $x_{N+1} = S(x_1, x_2, \ldots, x_N)$. Тогда с учетом (6.2) запишем

$$\frac{dx_{N+1}}{dt} = \frac{dS}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial S}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} \equiv \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial S}{\partial x_i} f_i. \tag{6.5}$$

Теперь секущую поверхность определяет уравнение

$$x_{N+1} = 0. \tag{6.6}$$

Рассмотрим новую систему, полученную добавлением к (6.2) уравнения

$$\dot{x}_{N+1} = f_{N+1}(x_1, \ldots, x_N), \quad f_{N+1} = \sum_{i=1}^{N} f_i \partial S / \partial x_i. \tag{6.7}$$

Преобразуем найденную систему из $N + 1$ уравнений так, чтобы введенная в рассмотрение новая переменная x_{N+1} стала, формально, эквивалентной переменной t в (6.2). Для этого поделим первые N уравнений на последнее (6.7), а само последнее уравнение обратим. Получим систему уравнений вида

$$\begin{aligned} &dx_1/dx_{N+1} = f_1(x)/f_{N+1}(x), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &dx_N/dx_{N+1} = f_N(x)/f_{N+1}(x), \\ &dt/dx_{N+1} = [f_{N+1}(x)]^{-1}. \end{aligned} \tag{6.8}$$

В результате интегрирования системы (6.2) получается, что в момент времени $t = t_{k+1}$ функция S изменила знак в сравнении со знаком при $t = t_k$. Теперь можно найти точку $x_S \in S$ путем интегрирования системы (6.8) всего на одном шаге по новой переменной x_{N+1}, а именно

$$\Delta x_{N+1} = -S_2, \tag{6.9}$$

где $S_2 = S(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ в момент времени $t = t_{k+1}$, соответствующий точке 2 на траектории Γ (рис. 6.1). Начальными условиями для интегрирования (6.8) на шаге (6.9) соответственно будут

$$x_i(S_2) = x_i(t_{k+1}), \quad t(S_2) = t_{k+1}, \quad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{6.10}$$

В результате интегрирования системы (6.8) на одном шаге (6.9) мы сразу попадаем на секущую S, причем погрешность определения точки пересечения строго равна заданной погрешности интегрирования системы (6.2) на одном шаге и является минимальной. При интегрировании системы (6.8) на шаге $\Delta x_{N+1} = -S_2$, который с каждым новым пересечением траекторией Γ поверхности S будет в общем случае изменяться, можно использовать лишь те методы, которые допускают произвольный временной шаг. Предпочтительнее при этом использовать какой-либо один метод интегрирования как при расчете траектории (при решении системы (6.2)), так и при нахождении отображения Пуанкаре (при решении системы (6.8)). При составлении программы, реализующей описанный алгоритм Хенона, нет необходимости в отдельной записи уравнений (6.2) и (6.8), которые

можно вводить в общей форме ($i = 1, 2, \ldots, N$)

$$dx_i/d\tau = q f_i(x_1, \ldots, x_N), \quad dt/d\tau = q, \ \tau = x_{N+1}. \tag{6.11}$$

Из уравнений (6.11) система (6.2) получается при $q = 1$, а система (6.8) при $q = (f_{N+1})^{-1}$. Таким образом, применение алгоритма Хенона в совокупности с одним из численных методов интегрирования позволяет в принципе просто получить множество точек пересечения траектории Γ с секущей S.

Метод сечения Пуанкаре наиболее нагляден в случае $N = 3$, когда множество точек пересечения лежит на двумерной поверхности. Для $N \geqslant 4$ графическое представление многомерного сечения Пуанкаре теряет наглядность и в этом случае удобнее анализировать *проекции многомерного сечения* на интересующие двумерные поверхности. Многомерное сечение Пуанкаре задается множеством точек $x \in S$. Из этого множества выбирают совокупность двух каких-либо координат x_l и x_m, $l \neq m, l, m = 1, 2, \ldots, N$ и графически изображают двумерную проекцию сечения Пуанкаре на плоскость выбранных координат.

Для периодических решений исходной системы (6.2) сечение Пуанкаре (как многомерное, так и его проекции) содержит конечное множество неподвижных точек. В режиме странного аттрактора на секущей появляется некоторое хаотическое (псевдослучайное) множество точек, число которых растет с увеличением времени интегрирования. В некоторых особых случаях это хаотическое множество может располагаться вдоль тонкой ленты, близкой по структуре к одномерной кривой на секущей [12, 13]. Здесь можно легко рассчитать одномерное отображение (или одномерную функцию последования), которое строится численно для одной из выбранных координат x^i отображения Пуанкаре. Функция последования $\varphi(x)$ является отображением отрезка в себя:

$$x^i_{n+1} = \varphi(x^i_n, \vec{\mu}), \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{6.12}$$

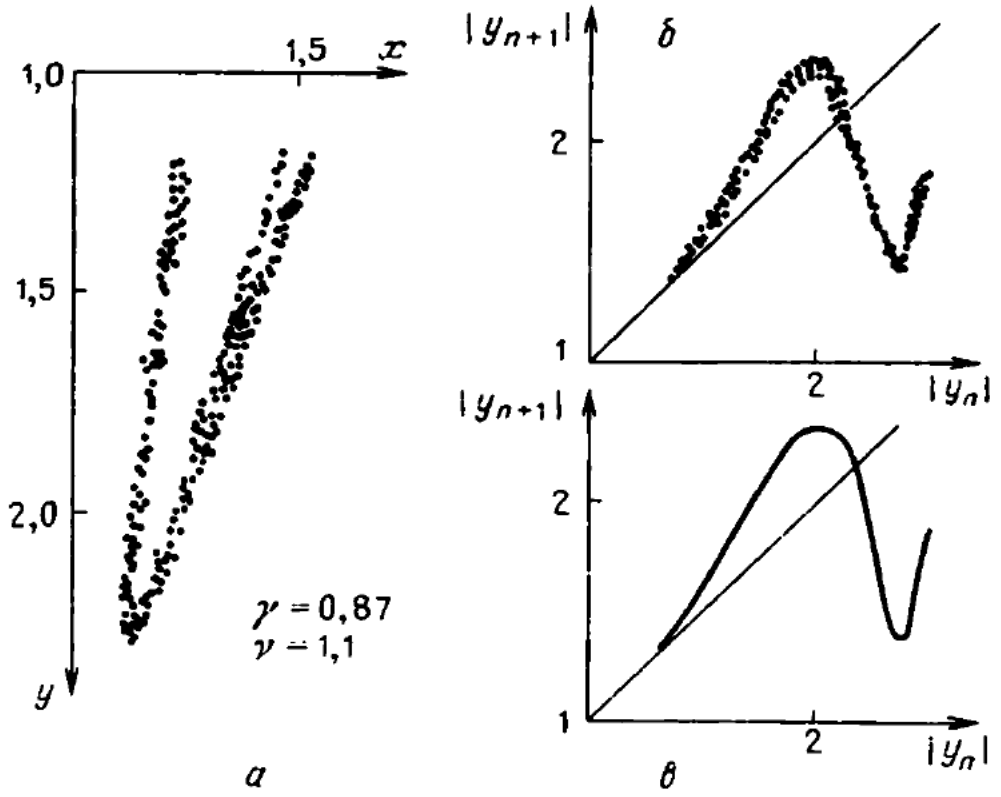
и на графике выглядит в виде близкой к одномерной кривой, составленной из множества точек. Анализ одномерной функции последования методом диаграммы Ламерея [7] позволяет ответить на ряд принципиальных вопросов, касающихся особенностей динамики исходной системы уравнений (6.2).

Отметим, что при анализе стохастических колебаний, когда информацию о структуре стохастического множества можно получить лишь при достаточно большом числе точек в сечении Пуанкаре ($n = 10^4 - 10^5$), желательно применять либо графопостроитель, либо выводить данные расчета на графический дисплей с последующим фотографированием результата.

В качестве примера рассмотрим результаты расчета отображения Пуанкаре для трехмерной двупараметрической системы, введенной в [152],

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y(z - 1 + x^2) + \gamma x, \\ \dot{y} &= x(3z + 1 - x^2) + \gamma y, \\ \dot{z} &= -2z(\nu + xy). \end{aligned} \tag{6.13}$$

где x, y, z – фазовые переменные, γ и ν – варьируемые параметры. Сис-



Р и с. 6.2. Построение модельного одномерного отображения системы (6.13)

тема диссипативна при $\gamma < \nu$ и характеризуется постоянной дивергенцией $2(\gamma - \nu) < 0$.

На рис. 6.2*а* изображено двумерное сечение Пуанкаре в плоскости $z =$ = const для $\gamma = 0{,}87$ и $\nu = 1{,}1$, которое свидетельствует о преимущественном сжатии потока по x и растяжении по y. Модельное отображение, вычисленное по переменной y как $|y_{n+1}| = \varphi(|y_n|)$, показано на рис. 6.2*б*. С ростом степени сжатия это отображение приближенно можно заменить одномерным (рис. 6.2*в*), что существенно упрощает анализ.

Метод секущей Пуанкаре используется и при анализе динамики неавтономных систем. Введем периодическое воздействие в первое уравнение системы (6.2):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \ldots, x_N, \vec{\mu}) + B \sin pt, \\ \dot{x}_i &= f_i(x_1, x_2, \ldots, x_N, \vec{\mu}), \quad i = 2, 3, \ldots N. \end{aligned} \tag{6.14}$$

Здесь B – амплитуда гармонического воздействия, p – нормированная частота вынуждающей силы, t – безразмерное время. Число фазовых координат системы (6.14) осталось равным N. Однако в силу неавтономности системы размерность фазового пространства (6.14) стала равной $N + 1$. Как определить в этом случае отображение Пуанкаре?

Один из способов заключается в следующем. Как видно из (6.14), N-мерное пространство фазовых координат x_i, $i = 1, \ldots, N$, отображается в себя (т.е. точка $x_i^{n-1} \in \mathbb{R}^N$ переходит в точку $x_i^n \in \mathbb{R}^N$) спустя время, равное периоду внешней силы, $t_0 = 2\pi/p$. Для случая $p = 1$ это время $t_0 = 2\pi$. Если выбрать шаг интегрирования $\Delta t = t_0/k$, где k – целое число, то можно запоминать значения $\{x_i^n\}$, соответствующие моментам времени nt_0, где $n = 1, 2, 3, \ldots$

Например, для $p = 1$ при шаге счета $\Delta t = 2\pi/10$ необходимо запоминать каждую десятую точку, полученную при интегрировании (6.14). Набранный таким образом массив данных представляет собой дискретное (стробоскопическое) описание динамического процесса в системе в моменты времени, кратные периоду внешнего воздействия. В качестве секущей в данном методе выступает каждый раз новая поверхность определяемая условием

$$t_n = nt_0 = 2\pi n/p, \tag{6.15}$$

а отображение Пуанкаре представляется в виде дискретного набора значений фазовых координат $\{x_i^n\}$ в указанные моменты времени и имеет размерность N. Что же делать дальше с полученным набором данных?

Рассмотрим конкретный пример. Пусть система (6.2) представляет собой двумерное ($N = 2$) неавтономное уравнение

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \vec{\mu}) + B\sin pt, \quad \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, \vec{\mu}), \tag{6.16}$$

(для простоты примем $p = 1$). Подобными уравнениями можно описать явление синхронизации генератора Ван дер Поля. В памяти ЭВМ в этом случае имеем набор из n пар точек $\{x_1^n, x_2^n\}$, характеризующих состояние системы (6.16) в дискретные моменты времени $nt_0 = n \cdot 2\pi$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$). Если изобразить это множество точек на плоскости переменных x_1, x_2, то получим отображение двумерного фазового пространства на себя через период внешней силы, представляющее собой проекцию множества точек пересечения траектории Г с секущими плоскостями на интересующую нас плоскость координат. На рис. 6.3 показан случай синхронизации на частоте внешней силы, когда начальная точка (x_1^0, x_2^0) отображается в себя же через интервалы времени $\Delta t = 2\pi$.

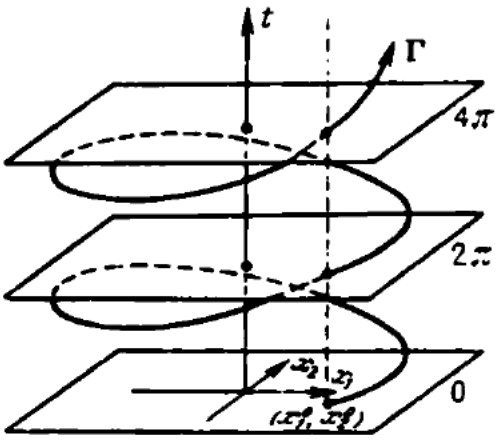
Регулярным (периодическим) режимам, как и в автономном случае, соответствует конечное при сколь угодно больших n число точек в отображении Пуанкаре. В режиме странного аттрактора множество точек $\{x_1^n, x_2^n\}$ на плоскости выглядит случайным. Их число всегда равно n, так как фазовая траектория не замыкается. Это стохастическое множество может выглядеть весьма забавным и эволюционирует с изменением параметров системы μ. Наглядность отображения Пуанкаре при $N > 2$ утрачивается, и в этих случаях прибегают к построению его двумерных проекций.

Рассмотрим один из примеров, в котором указанным методом анализируется динамика неавтономной трехмерной системы [153]

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \quad \dot{y} = -0{,}125(x^2 + 3z^2)x - k_1 y + B\cos t, \\ \dot{z} &= -k_2 \cdot 0{,}125(3x^2 + z^2)z + B_0. \end{aligned} \tag{6.17}$$

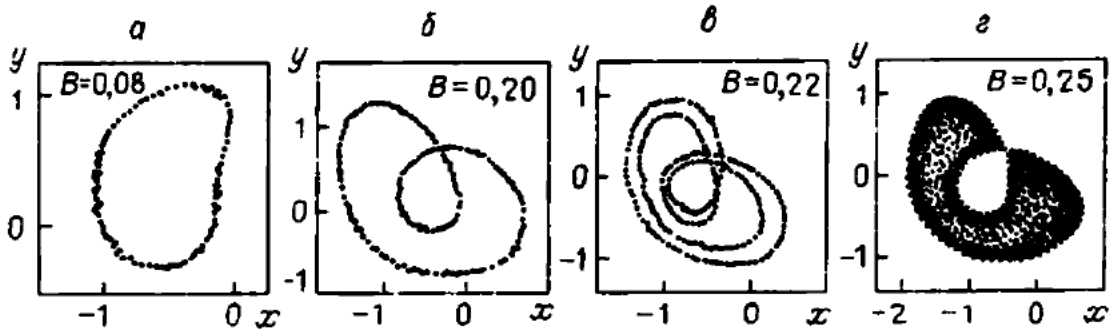
В уравнениях (6.17) k_1, k_2 и B_0 – параметры системы. Для значений $k_1 = k_2 = 0{,}5$ и $B_0 = 0{,}03$ система интегрировалась для различных амплитуд B и вычислялись предельные множества в трехмерном отображении фазового пространства на себя через период внешней силы $t_0 = 2\pi$.

Авторами обнаружено при этом интересное явление бифуркаций двупериодических решений. В сечении Пуанкаре на плоскости, как уже отмечалось, двумерному тору однозначно соответствует инвариантная зам-



Р и с. 6.3. Отображение фазовой плоскости неавтономной системы (6.16) на себя через период внешней силы в режиме синхронизации

Р и с. 6.4. Предельные множества системы (6.16) в проекции стробоскопического отображения на плоскость: *а* – инвариантная замкнутая кривая, *б*, *в* – удвоение инвариантных кривых, *г* – странный аттрактор



кнутая кривая, бифуркации которой адекватны бифуркациям тора. На рис. 6.4 показана эволюция инвариантной кривой в проекции трехмерного отображения Пуанкаре на плоскость переменных x, y через период внешней силы. Как видно из рис. 6.4, инвариантная замкнутая кривая с ростом интенсивности воздействия B претерпевает серию бифуркаций удвоения периода, завершающуюся рождением странного аттрактора. Бифуркация удвоения периода для двумерных торов авторами [153] при численных исследованиях, по-видимому, наблюдалась впервые. Как показали дальнейшие исследования, число удвоений двумерного тора, предшествующее рождению стохастичности, при конечных амплитудах B конечно и механизм перехода к хаосу здесь связан с закономерностями разрушения тора [13].

В качестве отображения Пуанкаре неавтономной системы можно рассматривать и множество точек пересечения траектории Γ с определенным образом выбранной фиксированной секущей S, т.е. вводить секущую уравнением (6.3) в $\mathbb{R}^N$, как и в автономном случае.

6.3. Численный анализ периодических решений и их бифуркаций

Важным для практики классом решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений являются периодические по времени решения $x(t) \equiv x(t + T)$, которые для удобства называют *циклами*. Интересные сами по себе, эти решения и их эволюция с изменением параметров играют особую роль в объяснении многих механизмов рождения странных аттракторов.

С исследованием циклов возникает ряд самостоятельных вычислительных проблем. Прежде всего, нужно решить задачу нахождения периодических решений при фиксированных значениях параметров системы и определе-

ния характера их устойчивости. Во-вторых – задачу изучения эволюции конкретного семейства циклов с изменением параметра и выяснения возможных бифуркаций, обуславливающих потерю устойчивости циклом. И, наконец, необходимо решить задачу построения бифуркационных диаграмм в пространстве параметров системы, определяющих области существования и характер потери устойчивости циклом на границах области.

На практике, естественно, может возникнуть еще целый ряд вопросов, ответ на которые связан, например, с необходимостью построения устойчивых и неустойчивых многообразий седловых циклов, выявлением гомоклинических траекторий и т.д. Однако указанные выше задачи являются наиболее общими, и здесь мы ими ограничимся.

Обратимся снова к автономной системе уравнений (6.1), задающей поток в пространстве $\mathbb{R}^N$.

1. Найдем периодическое решение системы (6.1). Для этого необходимы приближенные сведения о расположении цикла в фазовом пространстве и характере его устойчивости. Например, если цикл мягко рождается из положения равновесия типа фокуса в соответствии с бифуркационной теоремой Андронова–Хопфа, то при малом смещении по параметру от точки бифуркации предельный цикл нужно искать вблизи неустойчивой особой точки. Встречаются другие ситуации, допускающие качественную интерполяцию, которая приближенно может указать форму и область локализации цикла в фазовом пространстве.

В основу численного нахождения цикла можно положить тот факт, что точка пересечения цикла Γ в $\mathbb{R}^N$ с секущей S есть неподвижная точка x^* отображения Пуанкаре $P(x_n)$. Пусть $x(t)$ – периодическое решение системы (6.1) с периодом T. Траектория Γ в фазовом пространстве пересекает поверхность S в точке x^*, удовлетворяющей условию

$$x^* = P(x^*). \tag{6.18}$$

Предположим, что из каких-либо соображений нам известна точка x_0 на секущей S, близкая к неподвижной точке x^*. Найти последнюю можно, решая уравнение

$$x = P(x) \tag{6.19}$$

с помощью *итерационной процедуры Ньютона*

$$x_n = x_{n-1} - [P(x_{n-1}) - x_{n-1}]/[M(x_{n-1}) - E]. \tag{6.20}$$

где $P(x)$ – отображение Пуанкаре на S, $M(x)$ – линеаризация отображения в точке x, E – единичная матрица. В качестве начального приближения задается близкая к x^* точка x^0. Сходимость итерационной процедуры не зависит от характер устойчивости цикла! Если известно заранее, что цикл устойчив, то можно использовать метод простых итераций отображения P.

Неподвижная точка x^* вычисляется с заданной степенью точности ϵ, если выполняется условие

$$|x_n - x_{n-1}| \leqslant \epsilon. \tag{6.21}$$

Когда x^* найдена, то, выбрав в качестве начальных условий ее координаты $x(0) = x^*$, систему (6.1) интегрируют из начальной точки до момента $t = T$,

когда траектория Γ вновь пересекает S в $x = x^*$, т.е. выполняется условие

$$x^* = x(0) = x(T), \tag{6.22}$$

определяющее период искомого цикла Γ.

В результате численного интегрирования строится весь цикл в фазовом пространстве или его проекция на интересующее подпространство, как правило, размерности $N = 1$ (реализация одной из фазовых координат) или $N = 2$ (проекция цикла на выбранную плоскость двух переменных).

Если заранее известно, что искомый цикл Γ пересекает секущую k раз, то неподвижная точка x^* должна быть соответствующей тактности, что необходимо учесть при записи уравнений (6.18) – (6.20)

После нахождения цикла он исследуется на устойчивость, определяемую в линейном приближении мультипликаторами цикла ρ_i или (то же самое) мультипликаторами неподвижной точки x^* отображения Пуанкаре. Возможны два пути численного решения этой задачи: определить либо собственные числа оператора монодромии $Y(T)$, либо собственные числа линеаризации отображения Пуанкаре в неподвижной точке x^*. Если все мультипликаторы ρ_i ($i = 1, 2, \ldots, N-1$) отображения Пуанкаре принадлежат внутренности единичного круга, то найденный цикл асимптотически устойчив по Ляпунову.

2. После того как цикл найден и определен характер его устойчивости, приступают к решению второй задачи. Цикл известен для конкретного значения параметра $\mu = \mu_0$ системы (6.1), и задана неподвижная точка $x^*(\mu_0)$ на секущей S, принадлежащая циклу. Требуется проследить численно эволюцию этого решения при вариации параметра μ от значения $\mu = \mu_0$ до значения $\mu_k = \mu_0 + k\Delta\mu$ (k – целое число, $\Delta\mu$ – шаг движения по параметру). Для этого в общем случае (для различных k) из начальной точки $x^0(\mu_k)$ методом Ньютона уточняется неподвижная точка $x^*(\mu_k)$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$) на цикле $\Gamma(\mu_k)$. Эта точка используется затем в качестве начального приближения для определения близкой к циклу $\Gamma(\mu_{k+1})$ начальной точки

$$x^0(\mu_{k+1}) = x^*(\mu_k) + (dx^*(\mu_k)/d\mu)\,\Delta\mu, \tag{6.23}$$

где $dx^*/d\mu$ – "производная цикла по параметру", определяемая из уравнения

$$P(x^*, \mu) = x^*(\mu) \tag{6.24}$$

как производная неявной функции:

$$dx^*/d\mu\,|_{\mu = \mu_k} = (\partial P/\partial\mu)\,(M - E)^{-1}. \tag{6.25}$$

Таким образом находится периодическое решение системы (6.1) при различных значениях параметра $\mu = \mu_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, т.е. отслеживается эволюция грубого цикла в фазовом пространстве системы с изменением параметра.

На каждом шаге счета при движении по параметру вычисляются мультипликаторы цикла $\rho_i(\mu)$. Их зависимость от μ дает исчерпывающую информацию о характере устойчивости семейства циклов $\Gamma(\mu)$. Выход одного (или нескольких) мультипликаторов на единичную окружность приводит к бифуркационным ситуациям, подробно обсуждавшимся выше, и определяет бифуркационное значение параметра (точку бифуркации) μ^*, кото-

рое при необходимости может быть определено с заданной степенью точности ϵ. Решение второй задачи, базирующееся на свойстве непрерывности решений системы (6.1) от параметра, дает практически полную информацию о способе рождения (исчезновения) конкретного семейства циклов, об области их существования и изменения характера устойчивости при вариации параметра μ.

3. Перейдем к более общему случаю зависимости решений системы (6.1) от двух параметров:

$$\dot{x} = F(x, p, q). \tag{6.26}$$

Поставим задачу построения бифуркационных линий на плоскости параметров p и q, отвечающих определенному типу потери устойчивости семейством циклов $\Gamma(p, q)$. Зафиксировав, например, $p = p_0$ и двигаясь по параметру q вышеописанным способом (предполагается, что для значения $p = p_0$ и некоторого q цикл $\Gamma(p_0, q)$ найден), определим значение $q = q_0$, при котором наибольший из мультипликаторов цикла Γ $\rho(p_0, q_0)$ выходит на единичную окружность, свидетельствуя, например, о бифуркации удвоения периода ($\rho(p_0, q_0) = -1$). В этой точке плоскости параметров нам известен цикл $\Gamma(p_0, q_0)$ и соответствующая ему неподвижная точка отображения Пуанкаре $x^*(p_0, q_0)$ на S. Точка (p_0, q_0) плоскости принадлежит бифуркационной линии l (в данном случае линии бифуркации удвоения периода)*), и для ее уточнения необходимо проверять выполнение соответствующего бифуркационного условия. В случае удвоений $\rho = -1$ и должно удовлетворяться уравнение

$$\det[M(p_0, q_0) - E] = 0. \tag{6.27}$$

Для построения бифуркационной линии возьмем новое значение $q_1 = q_0 + \Delta q$ и, используя данные по неподвижной точке $x^*(p_0, q_0)$ в качестве начального приближения, решим методом Ньютона уравнение

$$x = P(x, p, q_1) \tag{6.28}$$

совместно с соответствующим бифуркационным уравнением (для удвоений это (6.27)) относительно x и p. В результате найдем новую бифуркационную точку $(p_1, q_1) \in l$. Действуя подобным образом, на плоскости p, q строим бифуркационную линию, при пересечении которой семейство циклов $\Gamma(p, q)$ теряет устойчивость определенным образом, что зависит от вида бифуркационного уравнения.

Одно и то же семейство циклов $\Gamma(p, q)$ может терять устойчивость несколькими способами при различных p и q. Построение соответствующих бифуркационных линий l_i дает большую информацию о поведении системы при вариации управляющих параметров. В случаях зависимости уравнений (6.1) от $\vec{\mu} \in \mathbb{R}^k$, $k = 3, 4, 5, \ldots$, алгоритм допускает обобщение и позволяет строить соответствующие гиперповерхности в $\mathbb{R}^k$, отвечающие определенным типам потери устойчивости при бифуркациях коразмерности 1. Нет принципиальных трудностей и в обобщении алгоритма на бифуркацион-

---

*) Бифуркационные линии на плоскости или соответствующие гиперповерхности в $\mathbb{R}^k$, выделяемые одним бифуркационным условием типа равенства, описывают бифуркации коразмерности 1.

ные ситуации коразмерности 2 (например, построение в $\mathbb{R}^3$ бифуркационной линии, соответствующей рождению резонансного двумерного тора с заданным числом вращения Пуанкаре). Однако ясно, что для подобных задач потребуется существенное увеличение машинного времени.

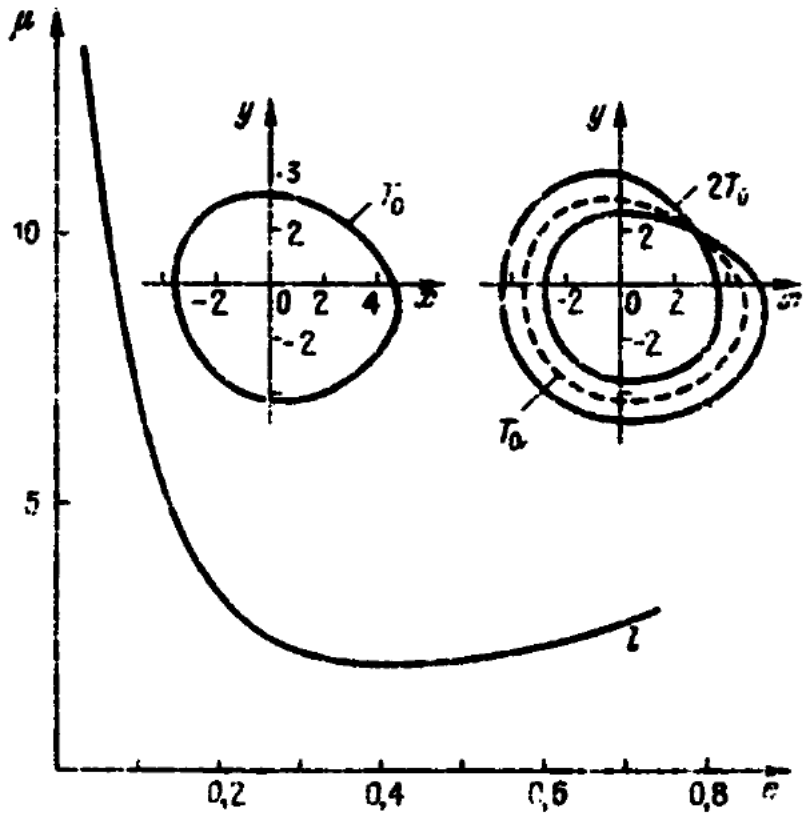
Создание комплекса программ, реализующих на ЭВМ описанные выше в общих чертах алгоритмы, – далеко не простая задача. Наиболее удачными, полными и надежными в эксплуатации, как показала практика, являются комплексы программ, разработанные в НИВЦ АН СССР (г. Пущино) [51, 154].

С целью иллюстрации применения описанных выше алгоритмов рассмотрим процедуру построения бифуркационных линий удвоения периода циклов для одной из модельных систем Рёсслера [155]

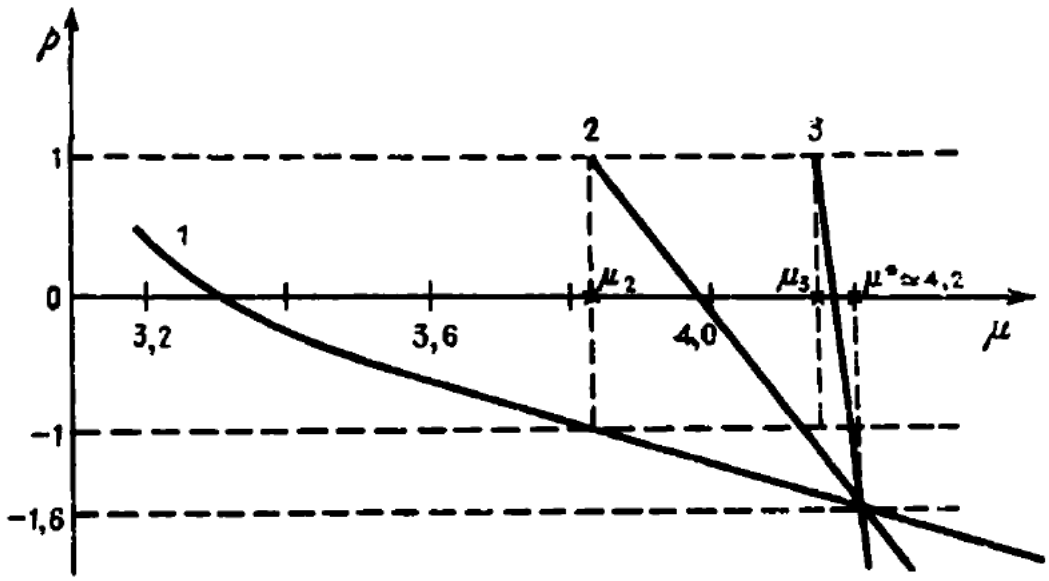
$$\dot{x} = -(y+z), \quad \dot{y} = x + ey, \quad \dot{z} = b + xz - \mu z, \tag{6.29}$$

где параметр $b = 0{,}2$ зафиксируем. Вначале найдем устойчивый предельный цикл системы, выбрав значения параметров $e = 0{,}2$ и $\mu = 2{,}5$. Этот цикл существует, имеет форму однооборотной кривой в фазовом пространстве (цикл периода T_0) и устойчив. Проследим за эволюцией этого цикла, двигаясь по параметру μ ($e = 0{,}2$). В точке $\mu \approx 2{,}83$ цикл периода T_0 претерпевает бифуркацию удвоения периода, так как его наибольший по модулю мультипликатор обращается в -1. Теперь построим бифуркационную линию l, отвечающую условию $\rho = -1$ на плоскости параметров e, μ.

Участок этой линии изображен на рис. 6.5. Используем точку на цикле периода T_0 в качестве начального приближения итерационной процедуры Ньютона и попробуем найти цикл периода $2T_0$ (выше бифуркационной



Р и с. 6.5. Бифуркационная линия удвоения периода циклов для системы Рёсслера (6.29) на плоскости параметров e, μ для $b = 0{,}2$



Р и с. 6.6. К расчету критической точки на основе универсальности значений мультипликаторов седловых циклов

линии *l* на рис. 6.5). Расчеты для $e = 0.2$, $\mu = 2{,}9$ дают устойчивый цикл периода $2T_0$. Задав начальные условия на теперь уже седловом цикле периода T_0 (выше точки бифуркации $\rho = -1$), проинтегрируем систему (6.29) и найдем неустойчивый цикл периода T_0' для $\mu = 2{,}9$ Результаты вычислений представлены в верхней части рис. 6.5 в виде проекций соответствующих фазовых траекторий на плоскость x, y.

Известно, что в системе (6.29) при движении вверх по μ для $e = b = 0{,}2$ наблюдается последовательность удвоений Фейгенбаума, сходящаяся к критической точке $\mu^* \approx 4{,}2$. Эту точку можно было бы найти, вычислив последовательность μ_k точек бифуркации $\rho = -1$ циклов периода $2^k T_0$ для $k = 1, 2, 3, \ldots$ Можно предложить другой способ, базирующийся на универсальном значении мультипликаторов неустойчивых циклов в критической точке $\rho^* = -1{,}601\ldots$ На рис. 6.6 даны результаты расчета зависимостей $\rho(\mu)$ для циклов периода $2T_0$ (кривая *1*), $4T_0$ (кривая *2*) и $8T_0$ (кривая *3*). Видна тенденция к сходимости всех линий графика к точке $\mu^* \simeq 4{,}2$, $\rho^* = -1{,}6$. Таким образом, с практически достаточной точностью критическая точка $\mu^* = 4{,}2$ найдена. Если есть уверенность в бесконечной цепочке удвоений, то можно построить бифуркационную линию критических значений на плоскости параметров e, μ, определив ее как линию $\rho = -1{,}6$ для циклов периода $4T_0$ или $8T_0$.

Здесь речь шла о построении алгоритмов численного анализа периодических решений системы дифференциальных уравнений (6.1). Но в качестве метода выбран способ анализа устойчивости неподвижных точек отображения Пуанкаре. Следовательно, все вышеописанные алгоритмы, исключая процедуру численного построения отображения Пуанкаре на секущей, непосредственно могут быть применены для анализа неподвижных точек дискретных отображений при задании операторов отображения в явном виде.

Для примера рассмотрим двумерное двупараметрическое модельное отображение в виде двух связанных отображений Фейгенбаума, моделирующее при некоторых условиях систему двух взаимодействующих нелиней-

ных осцилляторов со стохастическим поведением в $\mathbb{R}^6$:

$$x_{n+1} = 1 - \alpha x_n^2 + \gamma(y_n - x_n),$$
$$y_{n+1} = 1 - \alpha y_n^2 + \gamma(x_n - y_n). \qquad (6.30)$$

где $\alpha \in [-2, 2]$, $\gamma \in [0, 1]$ – параметры системы.

Для циклов периода 1 система (6.30) допускает аналитическое решение. Его можно использовать для отладки программы, реализующей алгоритмы на ЭВМ. Неподвижные точки отображения (6.30) могут быть двух типов: симметричные (СМ; неустойчивая СМ-1 точка не рассматривается)

$$x = y = [(4\alpha + 1)^{1/2} - 1]/2\alpha, \qquad (6.31)$$

и асимметричные (АСМ)

$$x_{1,2} = y_{1,2} = 0{,}5\,[-b(2\gamma + 1) \pm b^{1/2}(b - 4b\gamma^2 + 4)^{1/2}], \qquad (6.32)$$

где $b = \alpha^{-1}$. Мультипликаторы этих неподвижных точек соответственно равны

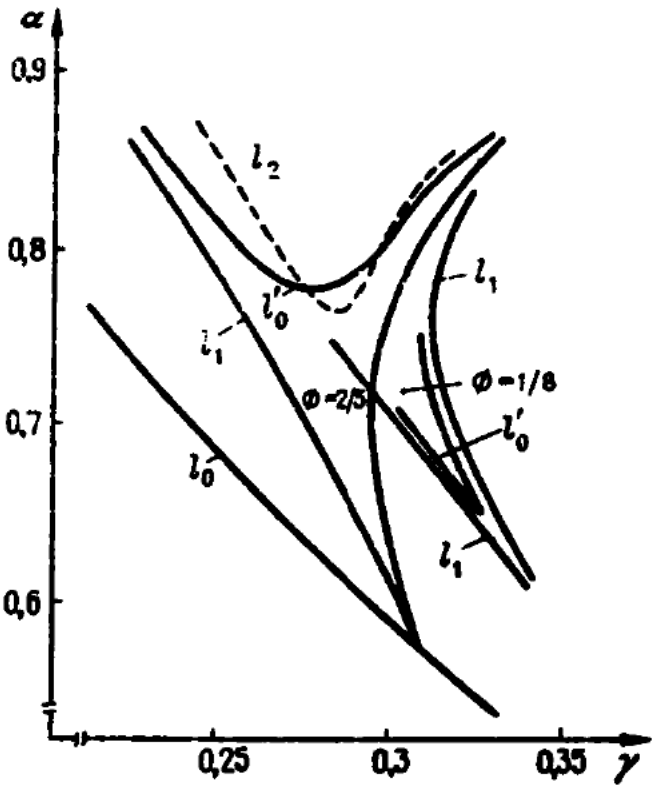
$$\rho_1^{(\mathrm{CM})} = 1 - (1 + 4\alpha)^{1/2}, \quad \rho_2^{(\mathrm{CM})} = 1 - (1 + 4\alpha)^{1/2} - 2\gamma, \qquad (6.33)$$

$$\rho_{1,2}^{(\mathrm{ACM})} = (1 + \gamma) \pm (4\alpha - 3\gamma^2 + 1)^{1/2}. \qquad (6.34)$$

Рассмотрим бифуркации СМ-1 точки при увеличении параметра α и фиксированном $\gamma \neq 0$. Линия на плоскости параметров α и γ $\alpha = -0{,}25$ отвечает бифуркации рождения СМ-1 точки ($\rho_1^{(\mathrm{CM})} = +1$). С ростом параметра α мультипликаторы СМ-1 точки убывают, и при выполнении условия

$$\alpha = 0{,}25(4\gamma^2 - 8\gamma + 3) \qquad (6.35)$$

мультипликатор $\rho_2^{(\mathrm{CM})} = -1$, а $|\rho_1^{(\mathrm{CM})}| < 1$. Линия на плоскости, на которой выполнено условие (6.35), – бифуркационная линия рождения АСМ-2 точки (асимметричной неподвижной точки периода 2). Неподвижная АСМ-2 точка является устойчивым узлом, так как оба ее мультипликатора действительны и по модулю меньше единицы. С увеличением α устойчивый узел превращается в устойчивый фокус, и далее реализуется бифуркация Андронова – Хопфа для отображений: комплексно-сопряженная пара мультипликаторов выходит на единичный круг. Мягко рождается инвариантная замкнутая кривая в отображении на плоскости x_n, y_n.



Р и с. 6.7. Бифуркационная диаграмма системы (6.30) в области резонансов $\phi = 2/5$ и $1/8$

Линия l_0, на которой $\rho_{1,2}^{(\text{АСМ})} = \exp(\pm j \cdot 2\pi\phi)$, отвечает этой бифуркации и нанесена на диаграмме рис. 6.7. Вдоль этой линии число вращения ϕ непрерывно меняется, принимая рациональные значения в дискретном ряде точек, отвечающих бифуркациям коразмерности 2. В этих точках рождаются циклы соответствующих периодов, лежащие на инвариантных окружностях. Области существования этих циклов ограничены линиями обращения их мультипликатора в +1 и имеют вид клювов синхронизации с постоянным значением числа вращения.

Представляется интересным исследовать бифуркации синхронных периодических точек внутри областей их существования. На диаграмме рис. 6.7 нанесены бифуркационные линии $\rho = +1$ (l_1), $\rho = \exp(j \cdot 2\pi\phi)$ (l_0, l_0') и $\rho = -1 (l_2)$ внутри областей синхронизации с $\phi = 2/5$ и $\phi = 1/8$ (соответственно АСМ-10 и АСМ-16 периодические точки отображения). Как видно из рис. 6.7, неподвижные точки внутри зон синхронизации вновь претерпевают бифуркацию Андронова – Хопфа, порождая новую систему инвариантных замкнутых кривых.

6.4. Численный анализ статистических свойств аттракторов

Экспоненциальная неустойчивость в режиме хаотических колебаний, порождающая при конечной точности задания исходного состояния вероятностные свойства детерминированного процесса $x(t)$ в системе (6.1), обосновывает целесообразность использования статистических методов анализа странных аттракторов. С физической точки зрения к тому же важно, насколько качественное поведение системы в режиме стохастичности сохраняется при возмущениях, т.е. является ли хаотический аттрактор с физической точки зрения грубым или структурно устойчивым? Обычно для ответа на эти вопросы исследуются статистические свойства решений соответствующих ланжевеновских уравнений

$$\dot{x}_i = f_i(x_i, \vec{\mu}) + \xi_i(t), \quad i = 1, 2, \ldots, N, \tag{6.36}$$

где $f_i(x_i, \vec{\mu})$ – детерминированный оператор эволюции, $\xi_i(t)$ – случайные возмущения системы, моделируемые, как правило, в виде белого шума интенсивности D:

$$\langle \xi_i(t)\, \xi_j(t') \rangle = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ D\delta(t - t'), & i = j, \end{cases} \quad \langle \xi_i(t) \rangle = 0. \tag{6.37}$$

При анализе дискретных систем ланжевеновский источник вводится в правые части уравнений каскада

$$x_{n+1}^i = P(x_n^i, \vec{\mu}) + \xi^i(n). \tag{6.38}$$

Полную информацию о вероятностных свойствах аттрактора дает функция распределения $p(x, t, \vec{\mu}, D)$, удовлетворяющая соответствующему уравнению Фоккера – Планка. В многомерных случаях ($N \geqslant 3$) решать это уравнение – далеко не простая задача даже с помощью современных быстродействующих ЭВМ. Исходя из чисто физических наблюдений, можно существенно облегчить нахождение функции распределения $p(x, t, \vec{\mu}, D)$, предположив, что процесс $x(t)$ в системе стационарный и эргодический. Вследствие стационарности исключается зависимость установившегося рас-

пределения от времени, а предположение эргодичности дает возможность заменить усреднение по ансамблю усреднением по времени вдоль одной реализации. При таких предположениях необходимость интегрирования уравнения Фоккера – Планка отпадает и нужная информация может быть полностью получена из численного решения стохастических уравнений (6.36) или (6.38).

Функция распределения $p_0(x, \vec{\mu}, D)$ стационарного эргодического процесса может быть вычислена как предел относительного времени пребывания траектории системы $x(t)$ в элементах объема фазового пространства ΔV_j, соответствующих некоторому дискретному разбиению.

При заданном конкретном разбиении, например в виде N-мерных кубиков с одинаковыми ребрами Δ, система (6.36) интегрируется каким-либо методом на большом интервале времени t_0. При этом запоминаются данные о числе точек k_j, принадлежащих пронумерованным элементам объема ΔV_j. Если запоминание осуществляется через равные промежутки времени, определяемые, как правило, временным шагом интегрирования, то число точек $k_j \in \Delta V_j$, отнесенное к общему числу точек в массиве данных $n = t/\Delta t$ (Δt – шаг интегрирования по времени) будет характеризовать вероятность посещения траекторией элемента объема ΔV_j, равную относительному времени пребывания траектории в указанном элементе ΔV_j. Определив вероятности для всех $j = 1, 2, 3, \ldots$, получим соответствующий дискретный закон распределения вероятностей.

Рассмотрим пример численного построения одномерной функции распределения $p_0(x_i, \vec{\mu}, D)$, где i – любое число от 1 до N. Получив по реализации область изменения координаты $x_i(t)$, разобьем ее на равные интервалы длины Δ:

$$x^i_{j-1} \leqslant x^i_j \leqslant x^i_{j-1} + \Delta, \quad j = 1, 2, 3, \ldots \tag{6.39}$$

Вычислим число точек k_j реализации $x_i(n \cdot \Delta t)$, попадающих в каждый интервал. Если в среднем в каждом интервале имеется достаточно большое количество точек, что определяется выбором t_0 и Δ, то относительные числа k_j/n будут близки к соответствующим вероятностям и мы получим дискретную аппроксимацию функции распределения $p_0(x_i, \vec{\mu}, D)$ как совокупность вероятностей

$$P_j(x^i_{j-1} \leqslant x^i_j < x^i_{j-1} + \Delta) = k_j/n, \quad \sum_{j=1}^{j_m} P_j = 1, \tag{6.40}$$

где число j_m определяется интервалом значений x_i.

$$j_m = (x_{i\,\max} - x_{i\,\min})/\Delta. \tag{6.41}$$

Закон распределения представляется на графике в виде гистограммы, но если Δ достаточно мало, то приближенно можно изображать $P_j(x)$ как непрерывную зависимость, соответствующую одномерному распределению $p_0(x, \vec{\mu}, D)$.

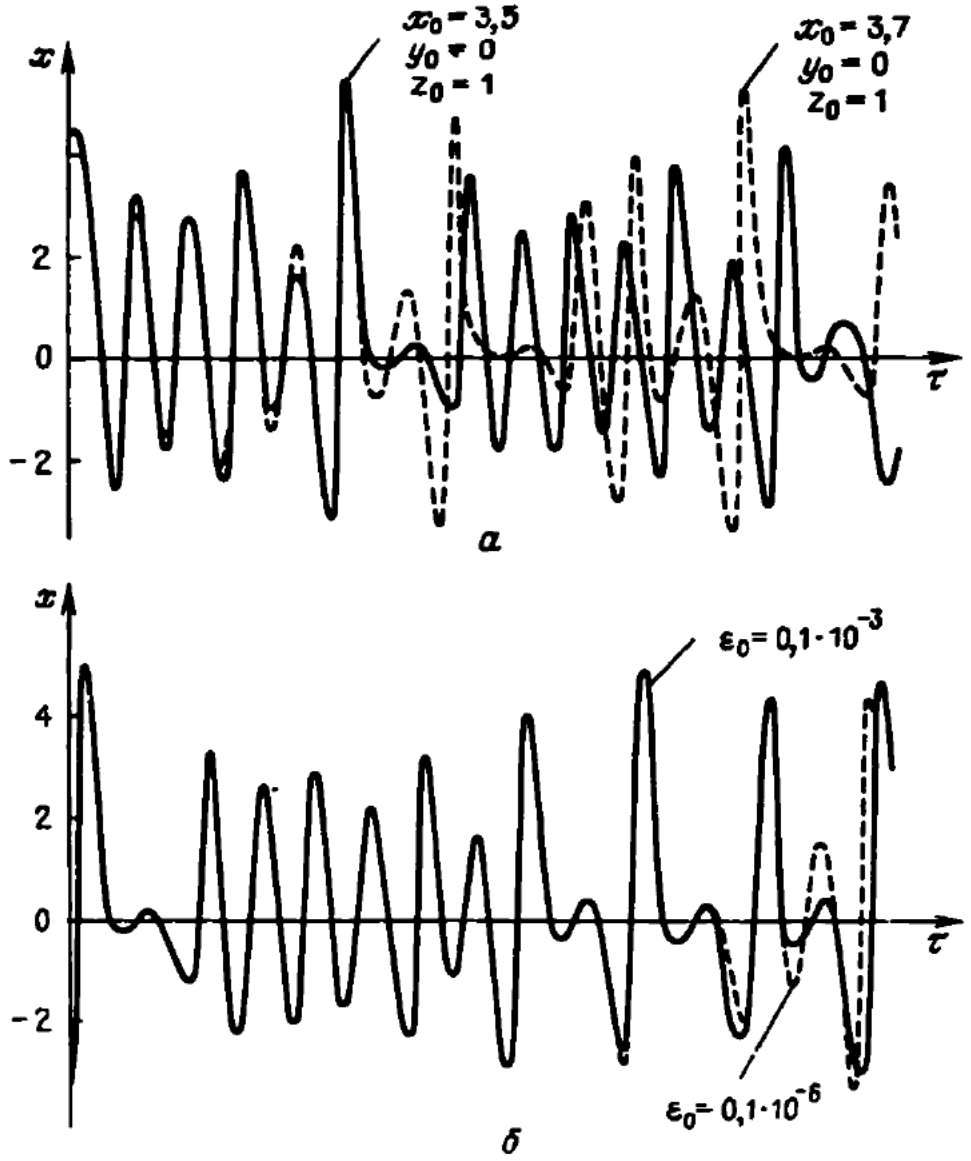
Зная распределение, можно вычислять энтропию системы по дискретному соотношению

$$H(\vec{\mu}, D) = -\sum_j P_j \ln P_j \tag{6.42}$$

и при необходимости исследовать ее эволюцию в зависимости от интенсивности шума D и параметров $\vec{\mu}$.

Если функция распределения $p_0(x, \vec{\mu}, D)$ известна, то можно вычислять такие моменты, как средние значения, среднеквадратичные значения, дисперсию и корреляционную функцию процесса $x(t)$ в системе. Однако в предположении стационарности процесса процедуру счета моментов функции распределения можно заметно упростить, вычисляя соответствующие величины как временные средние. Алгоритмы расчета среднестатистических характеристик стационарных эргодических процессов хорошо известны, они входят в стандартные программы обеспечения современных ЭВМ и не требуют практически никаких изменений применительно к режимам динамической стохастичности.

Отметим следующий принципиальный момент. При интегрировании на ЭВМ системы, находящейся в режиме странного аттрактора, конкретный вид реализации $x(t)$ весьма чувствителен к изменениям начальных условий, заданию точности интегрирования, шага счета по времени и зависит от конкретного метода численного интегрирования. Все это может сначала вызвать удивление, однако, на самом деле как раз свидетельствует об экспоненциальной неустойчивости траекторин в аттракторе, т.е. принципиально присуще динамической стохастичности.



Р и с. 6.8. Результаты численного интегрирования системы (6.43) с разными начальными условиями (*а*) и разной погрешностью интегрирования ε (*б*)

Для примера рассмотрим результаты интегрирования методом Рунге – Кутта 4-го порядка системы уравнений [13]

$$\begin{aligned} &\dot{x} = mx + y - xz, \\ &\dot{y} = -x, \\ &\dot{z} = -gz + gI(x)x^2, \end{aligned} \qquad I(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0, \end{cases} \tag{6.43}$$

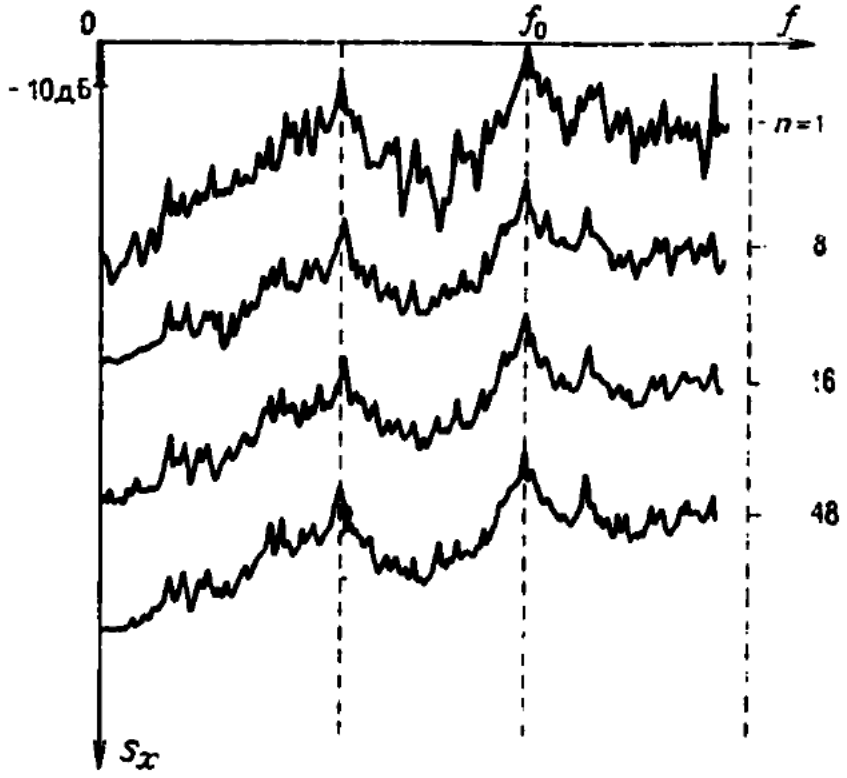
при значениях параметров $m = 1{,}45$, $g = 0{,}21$, соответствующих режиму странного аттрактора.

На рис. 6.8 представлены данные расчетов реализации $x(\tau)$ с разными начальными условиями при фиксированной погрешности счета ϵ (рис. 6.8*а*) и для фиксированных начальных данных, но с разной погрешностью интегрирования ϵ (рис. 6.8*б*). Все четыре реализации заметно отличаются друг от друга, однако интуитивно угадывается некое сходство в характера временных процессов. Это сходство объясняется принадлежностью всех траекторий одному странному аттрактору, что подтверждается статистической обработкой на ЭВМ всех четырех реализаций. Они характеризуются одинаковыми стационарными статистическими характеристиками. В частности, положительный показатель спектра ЛХП во всех случаях равен $\lambda_1 = 6{,}3 \cdot 10^{-2}$.

Вычисление таких статистических средних, как автокорреляция, энтропия, спектр ЛХП, размерность D_L, и других характеристик аттрактора, показывает, что они не зависят от факторов, влияющих на расчет конкретных реализаций. Это обстоятельство должно быть использовано в экспериментах в качестве критерия правильности выбора шага счета по времени и точности интегрирования. Обычно используют метод Рунге – Кутта 4-го порядка, погрешность задают $10^{-4} - 10^{-8}$, шаг счета определяется конкретной системой и должен быть выбран в сравнении с наименьшим из ее характерных времен.

Наглядную информацию о механизмах перехода и свойствах динамической стохастичности дает расчет спектра мощности реализации процесса $x_l(t)$ в соответствующих режимах при вариации параметров. Расчеты спектров мощности важны также и потому, что в физических экспериментах измерение спектра, как правило, типичная, а часто и единственная информация, по которой оценивается переход к хаосу в многомерных и распределенных системах.

Фурье-спектр, точнее спектральная плотность мощности, может быть вычислен на ЭВМ непосредственно по соотношениям теоремы Винера – Хинчина через автокорреляционную функцию. Однако это не совсем удобно, так как трудно указать заранее временной интервал определения корреляционной функции, обеспечивающий необходимую точность при расчете спектра. Поэтому обычно спектры мощности вычисляются непосредственной обработкой данных реализации с помощью алгоритма быстрого преобразования Фурье. Для уменьшения погрешности счета, вызванной конечностью реализации $x_l(t)$, $0 < t \leqslant t_0$, можно применить методы введения специальных окон, однако для качественного анализа распределения интенсивности колебаний по частотам можно ограничиться использованием прямоугольных окон, но обрабатывать при этом относительно длинные реализации [156, 157].



Р и с. 6.9. Влияние числа усредняемых периодограмм на результаты расчета спектра мощности реализации $x(\tau)$

Более важным является необходимость усреднения результатов расчета спектров по совокупности начальных данных из области притяжения странного аттрактора. Эта процедура адекватна расчету спектра по некоторому наперед заданному числу различных периодограмм одинаковой длительности с последующим усреднением результатов. Существуют стандартные программы, реализующие указанный алгоритм, например, на машинах серии ЕС [158].

В качестве примера рассмотрим результаты расчета спектра мощности системы (6.43) для значений параметров $m = 1{,}45$, $g = 0{,}21$ и начальных условий $x(0) = 3{,}5$, $y(0) = 0$, $z(0) = 1$, принадлежащих области притяжения странного аттрактора [12–14]. Спектр рассчитывался для реализации $x(\tau)$ при шаге счета $\Delta\tau = 0{,}3$ путем усреднения n периодограмм с массивами 4096 точек. На рис. 6.9 даны спектры мощности, полученные усреднением по $n = 1, 8, 16$ и 48 периодограммам. Как видно из рис. 6.9, спектры для $n = 16$ и 48 практически неразличимы, но не совпадают со случаем $n = 1$.

В экспериментах по изучению сложных бифуркационных переходов к хаосу, обусловленных разрушением квазипериодических режимов, спектры мощности реализаций $x_i(t)$ могут сильно усложняться, затрудняя диагностику характера их перестройки при переходе. В этом случае прибегают к построению спектров, используя в качестве исходной реализации точки пересечения траектории x_i^S с заданной секущей S, т.е. расчет спектра проводится для отображения Пуанкаре системы. В физической трактовке эта процедура может соответствовать детектированию исходного колебания и анализу спектра огибающей процесса $x_i(t)$. Машинное время, необходимое для набора массива данных по отображению, при этом, естественно, возрастает.

6.5. Алгоритмы вычисления спектра ляпуновских характеристических показателей

Знание полного спектра ляпуновских характеристических показателей (ЛХП) аттрактора как предельного множества в фазовом пространстве системы позволяет сделать ряд важных выводов о его свойствах. Так, например, наличие положительных показателей в спектре служит строгим критерием "странности" аттрактора, а их сумма в спектре ЛХП связана с метрической энтропией системы неравенством

$$h_\mu \geqslant \sum_i \lambda_i^+ . \tag{6.44}$$

Спектр ЛХП строго определяет размерность любого типа регулярных аттракторов, а для странных определяет ляпуновскую размерность D_L [70] и в общем случае позволяет произвести оценку фрактальной (метрической) размерности. Сигнатура спектра ЛХП может быть ключом к выяснению топологической структуры аттракторов и их бифуркаций при изменении параметров.

Строго математически доказано существование и конечность ляпуновских характеристических показателей любой интегральной кривой системы уравнений (6.1). ЛХП отражают среднюю скорость экспоненциального растяжения (сжатия) проекций малого возмущения на собственные направления выбранного базиса [33, 36, 60, 61, 159].

Однако само по себе строгое определение не может быть принято в качестве алгоритма для расчета спектра ЛХП, который требует использования понятия *обобщенных k-мерных показателей* и применения процедуры ортогонализации Грама – Шмидта [159, 160].

Введем понятие k-мерного ляпуновского показателя динамической системы (6.1):

$$\lambda_{x_0}^k = \lim_{t \to \infty} t^{-1} \ln \frac{\| Y_{x_0}^t e_1^0 \Lambda Y_{x_0}^t e_2^0 \Lambda \ldots Y_{x_0}^t e_k^0 \|}{\| e_1^0 \Lambda e_2^0 \Lambda \ldots e_k^0 \|} . \tag{6.45}$$

Здесь $\{ e_i^0 \}$ – ортонормированный базис k-мерного подпространства исходного пространства $\mathbb{R}^N$ системы (6.1) с началом в точке x_0, Λ – внешнее произведение векторов, $\| 0 \|$ – евклидова норма, $Y_{x_0}^t$ – фундаментальная матрица решений линеаризованной системы (6.1).

Вектор $y_{x_0,i}^t = Y_{x_0}^t e_i^0$ представляет собой решение линейной задачи

$$\dot{y}_{x_0} = A(x) y_{x_0}, \quad y_{x_0}(0) = e_i^0 \tag{6.46}$$

в момент времени t, $A(x)$ – матрица Якоби системы (6.1). Так как значение внешнего произведения k N-мерных векторов строго равно объему k-мерного параллелепипеда, построенного в N-мерном пространстве на этих векторах как на ребрах, то $\lambda_{x_0}^k$ (т.е. k-мерный ляпуновский показатель) представляет собой скорость изменения объема этого параллелепипеда вдоль траектории, исходящей из начальной точки x_0. Значения $\lambda_{x_0}^k$ не зависят от выбора базиса $\{ e_i^0 \}$ и способа определения нормы, а определяются только размерностью подпространства k и начальными данными x_0. Существование и конечность предела (6.45) строго доказаны [159].

Отметим два важных свойства k-мерных показателей: а) $\lambda^{\wedge}_{x_0}$ может принимать самое большее C^k_N различных значений; б) при произвольном выборе ортонормированного базиса $\{e^0_i\}$ k-мерные показатели с вероятностью, близкой к единице, стремятся к максимальному значению из всех C^k_N возможных допустимых.

В свете вышесказанного спектр ЛХП определяют одномерные показатели, расположенные в порядке их убывания:

$$\lambda_{x_0,1} \geqslant \lambda_{x_0,2} \geqslant \ldots \geqslant \lambda_{x_0 N}.$$

Из определения и свойства б) k-мерного показателя (6.45) видно, что при $k = 1$ можно найти только один максимальный одномерный показатель $\lambda^1_{x_0} = \lambda_{x_0,1}$, при $k = 2$ – максимальный двумерный показатель $\lambda_{x_0} = \lambda^2_{x_0,1} + \lambda_{x_0,2}$ и т.д. Следовательно, все одномерные показатели, т.е. спектр ЛХП, можно определить, вычислив все максимальные k-мерные показатели, по рекуррентной формуле

$$\lambda_{x_0,1} = \lambda^1_{x_0}, \quad \lambda_{x_0,i} = \lambda^i_{x_0} - \lambda^{i-1}_{x_0}, \quad i = 2, 3, \ldots, N, \tag{6.47}$$

Итак, задача нахождения спектра ЛХП сводится к вычислению максимальных k-мерных показателей для $k = 1, 2, \ldots, N$. Но, как оказалось, вычислять их, принимая определения (6.45) в качестве алгоритма, практически невозможно, так как в общем случае вдоль "хаотической" траектории длина части векторов быстро возрастает и углы между ними за конечное время становятся слишком малыми, чтобы можно было уверенно вычислить объем соответствующего параллелепипеда. Это является следствием того, что решения линеаризованной системы (6.46) изменяются по экспоненциальному закону. Указанную чисто вычислительную трудность можно обойти, прибегнув к следующей процедуре. Через некоторое фиксированное время τ полученные из исходного базиса $\{e^0_i\}$ векторы $\{y_i\}$ заменяются новой ортонормированной системой векторов $\{u_i\}$, построенной с помощью хорошо известной процедуры ортогонализации Грама – Шмидта [161] ($i = 1, 2, \ldots, N$)

$$\mathbf{v}_1 = y_1, \quad u_1 = \mathbf{v}_1 / \| \mathbf{v}_1 \|,$$

$$\mathbf{v}_{i+1} = y_{i+1} - \sum_{k=1}^{i} (u_k y_{i+1}) u_k, \tag{6.48}$$

$$u_{i+1} = \mathbf{v}_{i+1} / \| \mathbf{v}_{i+1} \|.$$

Применение указанной процедуры изменения базиса основано на следующем свойстве внешнего произведения: если два разных базиса $\{e_i\}$ и $\{u_i\}$ порождают одно и то же k-мерное подпространство, то справедливо соотношение

$$\frac{\| \bigwedge_{i=1}^{k} Le_i \|}{\| \bigwedge_{i=1}^{k} e_i \|} = \frac{\| \bigwedge_{i=1}^{k} Lu_i \|}{\| \bigwedge_{i=1}^{k} u_i \|}, \quad L \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k. \tag{6.49}$$

Пусть $x_0 = x(0)$, $x_n = x(n\tau)$. Тогда в силу цепного свойства фундаментальных матриц можно записать

$$Y^{n\tau}_{x_0} = Y^{\tau(n-1)+\tau}_{x_0} = Y^{\tau(n-1)}_{x_0} Y^{\tau}_{x_0}. \tag{6.50}$$

Обозначим через $\{ e_i^n \}$ новый базис, полученный из системы векторов $\{ Y^{\tau}_{x_{n-1}} e_i^{n-1} \}$ с помощью процедуры (6.48), и преобразуем выражение под знаком логарифма в формуле (6.45):

$$\frac{\| \bigwedge_{i=1}^{k} Y^{n\tau}_{x_0} e_i^0 \|}{\| \bigwedge_{i=1}^{k} e_i^0 \|} = \frac{\| \bigwedge_{i=1}^{k} Y^{\tau(n-1)}_{x_1} (Y^{\tau}_{x_0} e_i^0) \|}{\| \bigwedge_{i=1}^{k} Y^{\tau}_{x_0} e_i^0 \|} \cdot \frac{\| \bigwedge_{i=1}^{k} Y^{\tau}_{x_0} e_i^0 \|}{\| \bigwedge_{i=1}^{k} e_i^0 \|} =$$

$$= \frac{\| \bigwedge_{i=1}^{k} Y^{\tau(n-1)}_{x_1} e_i^1 \|}{\| \bigwedge_{i=1}^{k} e_i^1 \|} \cdot \frac{\| \bigwedge_{i=1}^{k} Y^{\tau}_{x_0} e_i^0 \|}{\| \bigwedge_{i=1}^{k} e_i^0 \|} = \ldots = \prod_{j=0}^{n-1} \frac{\| \bigwedge_{i=1}^{k} Y^{\tau}_{x_j} e_i^j \|}{\| \bigwedge_{i=1}^{k} e_i^j \|}. \tag{6.51}$$

Для ортонормированного базиса $\{ e_i \}$ справедливо

$$\| \bigwedge_{i=1}^{k} e_i \| = 1. \tag{6.52}$$

поэтому знаменатели в (6.51) равны 1 для всех $i = 0, 1, \ldots, n-1$ (исходный базис $\{ e_i^0 \}$ ортонормирован).

Подставив в определение (6.45) соотношение (6.51) с учетом (6.52), получим окончательное выражение

$$\lambda^k_{x_0} = \lim_{n \to \infty} (n\tau)^{-1} \sum_{j=0}^{n-1} \ln \| \bigwedge_{i=1}^{k} Y^{\tau}_{x_j} e_i^j \|. \tag{6.53}$$

Так как внешние произведения можно вычислить прямо по определению без особых технических сложностей, то (6.53) представляет собой непосредственный алгоритм расчета k-мерных показателей, а следовательно, и полного спектра ЛХП. Для вычисления N k-мерных показателей, как видно из (6.53), практически нужно решать систему из $N(N+1)$ дифференциальных уравнений. Первые N уравнений — это исходная нелинейная система (6.1) с начальными условиями $x_0 = x(0)$. Ее решение необходимо для получения матрицы Якоби, определяющей систему уравнений линейного приближения. Оставшиеся N^2 уравнений появляются в связи с необходимостью N раз решать линейные уравнения (6.46) с N различными начальными условиями, меняющимися через интервал времени τ: $y_{x_0,i}(j\tau) = e_i^j$, $i = 1, 2, \ldots, N$, $j = 1, 2, \ldots, N$. При $j = 0$ $\{ e_i^0 \}$ — исходный базис, а при $j = 1, 2, \ldots, N$ это базис, полученный в результате процедуры (6.48).

Полностью аналогично строится алгоритм расчета спектра ЛХП применительно к N-мерным отображениям:

$$x_{n+1} = P(x_n). \tag{6.54}$$

Обозначив матрицу Якоби отображения через M_{x_0}, т.е.

$$M_{x_0} = \begin{bmatrix} \partial P_1/\partial x_1 \ldots \partial P_1/\partial x_N \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \partial P_N/\partial x_1 \ldots \partial P_N/\partial x_N \end{bmatrix}, \tag{6.55}$$

подобно (6.45) определим k-мерный ляпуновский показатель для отображения:

$$\lambda^k_{x_0} = \lim_{n\to\infty} n^{-1} \ln \left(\| \bigwedge_{i=1}^{k} M^n_{x_0} e^0_i \| / \| \bigwedge_{i=1}^{k} e^0_i \| \right). \tag{6.56}$$

Чтобы избежать прерываний переполнения и исчезновения порядка, как и в случае потока, применим процедуру ортогонализации Грама – Шмидта (6.48) на каждом шаге итерации отображения. Преобразовав выражение (6.56) так же, как и для потока, получим формулу, позволяющую практически считать спектр ЛХП:

$$\lambda^k_{x_0} = \lim_{n\to\infty} n^{-1} \sum_{j=0}^{n-1} \ln \| \bigwedge_{i=1}^{k} M_{x_j} e^j_i \|. \tag{6.57}$$

Из (6.45) и (6.57) видно, что k-мерные показатели являются пределами некоторой бесконечной последовательности, поэтому процесс вычисления необходимо оборвать при достижении заданного уровня точности в сходимости показателей к предельным значениям.

Если нет нужды вычислять все N одномерных показателей спектра, можно ограничиться числом $l < N$ наибольших показателей. Алгоритм это позволяет и требует интегрирования $N(l + 1)$ уравнений, что существенно экономит машинное время.

В простейшем случае $l = 1$ вычисляется один наибольший показатель спектра ЛХП. Процедуре ортогонализации при этом соответствует перенормировка длины единственного вектора на единицу с сохранением ориентации.

6.6. Метод численного построения особых решений системы дифференциальных уравнений типа сепаратрис и сепаратрисных контуров

Ряд практических задач, связанных с выяснением механизмов развития динамического хаоса, приводит к необходимости анализа гомоклинических и гетероклинических траекторий и бифуркаций решений в их локальной окрестности. Некоторые общие выводы о движении в окрестности таких траекторий можно сделать на основании линейного анализа в окрестности особых точек [16–21, 40–46], однако нахождение особых траекторий и исследование глобальных свойств решений в их окрестности доступно лишь с применением ЭВМ.

Вновь обратимся к исходной системе N нелинейных дифференциальных уравнений (6.1). Пусть x_0 – это особая точка системы, т.е. $F(x_0) = 0$. Собственные числа $\{ s_1, s_2, \ldots, s_N \}$ точки x_0 можно разделить на две группы в зависимости от знака их действительной части. Известно, что если для m собственных чисел выполняется условие $\mathrm{Re}\, s_l > 0$, а для

остальных $N - m$ чисел $\mathrm{Re}\, s_i < 0$, то в точке x_0 существует m-мерное неустойчивое инвариантное многообразие, образованное траекториями, выходящими из особой точки, и $(N - m)$-мерное устойчивое инвариантное многообразие, образованное траекториями, входящими в x_0.

Случай $\mathrm{Re}\, s_i = 0$ является бифуркационным, так как при этом происходит резкая перестройка инвариантных многообразий. Если у системы (6.1) существует несколько положений равновесия, то каждое из них имеет устойчивые и неустойчивые инвариантные многообразия соответствующих размерностей. Взаиморасположение всех этих многообразий (или, другими словами, сепаратрисных поверхностей) в фазовом пространстве задает структуру его разбиения на области с различными режимами.

Наиболее изученным и интересным для нас является случай $m = 1$, т.е. когда в точке x_0 имеется единственное положительное собственное число, которому соответствует одномерная неустойчивая сепаратриса, а остальные собственные числа порождают $(N - 1)$-мерное устойчивое инвариантное многообразие. В такой ситуации, если система зависит еще и от параметров, при некоторых фиксированных их значениях неустойчивая сепаратриса может образовать петлю, т.е., выйдя из точки x_0, вернуться в нее же, касаясь устойчивого многообразия. Это интересно тем, что с петлей связан один из механизмов исчезновения (или рождения) циклов [162, 47]. Кроме того, при некоторых дополнительных условиях в окрестности петли наблюдаются сложные явления, такие как рождение бесконечного множества кратных циклов и многообходных петель, что может привести к возникновению стохастичности [53].

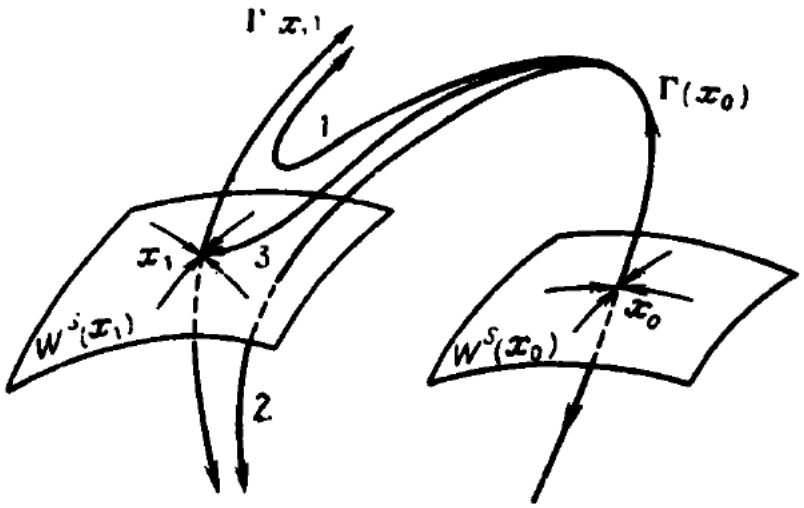
В связи с этим одной из важных задач численного исследования систем вида (6.1) является построение сепаратрис, а при наличии параметров системы – нахождение бифуркационного момента рождения петли сепаратрисы при изменении одного параметра и построение бифуркационных кривых, отвечающих наличию петли, на плоскости двух параметров. Интерес также представляют сепаратрисы, идущие из одной седловой особой точки в другую, по отношению к которым петля является частным случаем.

Пусть система (6.1) имеет две седловые особые точки x_0 и x_1, каждая из которых имеет ровно по одному положительному собственному числу s_1^0 и s_1^1 соответственно. Тогда из x_0 выходит одномерная неустойчивая сепаратриса $\Gamma(x_0)$, а из точки x_1 – $\Gamma(x_1)$; $\Gamma(x_0)$ – это траектория, выходящая из точки x_0 в направлении собственного вектора $\mathbf{v}_1^0$, отвечающего собственному числу s_1^0. Для построения $\Gamma(x_0)$ необходимо просто проинтегрировать систему (6.1) из начальной точки, лежащей на векторе $\mathbf{v}_1^0$ на очень малом расстоянии ϵ от точки x_0.

Предположим, что система (6.1) зависит теперь от двух параметров. Запишем ее в виде

$$\dot{x} = F(x, \mu_1, \mu_2).$$

Зафиксируем один из параметров, например $\mu_2 = \mu_2^0$, и построим сепаратрису $\Gamma(x_0, \mu_1)$ при изменении параметра μ_1. В общем случае $\Gamma(x_0, \mu_1)$, выйдя из точки x_0, проходит мимо седла x_1, например, загибаясь вверх по отношению к устойчивому многообразию $W^s(x_1)$ точки x_1 (рис. 6.10, кривая *1*). При вариации μ_1 ситуация может измениться и сепаратриса

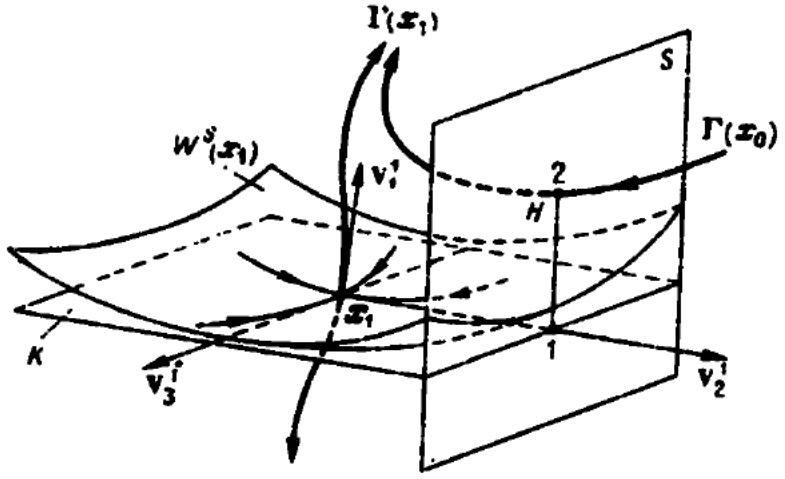


Р и с. 6.10. Возможные случаи поведения неустойчивой сепаратрисы в окрестности седла

пойдет ниже $W^s(x_1)$ (рис. 6.10, кривая *2*). Ясно, что в силу непрерывности при каком-то промежуточном значении $\mu_1 = \mu_1^*$ сепаратриса $\Gamma_0(x_0, \mu^*)$ должна попасть точно на $W^s(x_1)$ и прийти в точку x_1 (рис. 6.10, кривая *3*). В случае $x_0 = x_1$ бифуркационному значению параметра $\mu_1 = \mu_1^*$ соответствует двоякоасимптотическая траектория $\Gamma_0(x_0)$ типа петли сепаратрисы.

Для уточнения бифуркационного значения μ_1^* необходимо задать некоторую функцию, которая обращается в нуль при $\mu_1 = \mu_1^*$. Ее можно определить следующим образом. Выберем в фазовом пространстве $\mathbb{R}^N$ в качестве базиса систему собственных векторов положения равновесия x_1. Пусть v_1^1 – это собственный вектор, соответствующий положительному собственному значению s_1^1. Из отрицательных собственных чисел выберем числа с максимальной действительной частью, которые называются ведущими собственными числами. В случае общего положения имеется либо одно действительное ведущее число, либо пара комплексных ведущих чисел. Назовем условно точку x_1 в первом случае седлом, а во втором – седло-фокусом. Предположим сначала, что x_1 – седло. Обозначим через v_2^1 ведущий собственный вектор, т.е. вектор, соответствующий ведущему собственному числу. Проведем гиперплоскость S, чуть сдвинувшись по вектору v_2^1, параллельно $(N-1)$-мерному подпространству, образованному всеми остальными собственными векторами. Если же x_1 – седло-фокус, то гиперплоскость S проведем через точку x_0 параллельно $(N-2)$-мерному собственному подпространству, отвечающему всем собственным числам, кроме ведущих, и параллельно некоторому вектору, лежащему в ведущей инвариантной плоскости.

В качестве функции расщепления H возьмем расстояние между точкой пересечения $\Gamma(x_0)$ с гиперплоскостью S и проекцией пересечения S с устойчивым многообразием $W^s(x_1)$ на $(N-1)$-мерное собственное подпространство, отвечающее всем собственным векторам, кроме v_1^1. Так как точка пересечения $\Gamma(x_0)$ с S лежит достаточно близко от x_1, то устойчивое многообразие $W^s(x_1)$ можно заменить касательной к нему в седле гиперповерхностью K. Наши рассуждения иллюстрирует рис. 6.11.



Р и с. 6.11. К определению функции расщепления сепаратрис в случае, когда x_1 – седло

Уточнить нулевое значение функции расщепления H можно любым стандартным методом, например методом дихотомии или интерполированием. После уточнения бифуркационного значения параметра μ_1^* можно приступить к построению бифуркационной кривой на плоскости уже двух меняющихся параметров. Эта кривая задается условием обращения в нуль функции расщепления сепаратрис и строится так же, как бифуркационные кривые, соответствующие потере устойчивости циклом.

Комплекс программ, реализующий вышеописанные алгоритмы, создан в НИВЦ АН СССР [123, 154].

Теперь рассмотрим периодическое решение $x(t)$ системы (6.1). Оно, как известно, характеризуется мультипликаторами $\rho_1, \ldots, \rho_{N-1}$. Так же как и у положений равновесия, у периодических решений (циклов) имеются устойчивые и неустойчивые инвариантные многообразия, образованные траекториями, "наматывающимися" на цикл и "сматывающимися" с него. Пусть цикл Γ имеет m мультипликаторов таких, что $|\rho_i| < 1$, а для остальных выполняется условие $|\rho_i| > 1$. Тогда размерность устойчивого многообразия равна $m + 1$, а неустойчивого $N - m$. Так, например, седловой цикл Γ в трехмерном фазовом пространстве имеет двумерные устойчивое и неустойчивое многообразия (рис. 6.12*а*). Если в фазовом пространстве существует несколько циклов, то их устойчивые и неустойчивые многообразия могут пересекаться по так называемым *гетероклиническим* траекториям [62, 63].

Устойчивые и неустойчивые многообразия одного и того же цикла могут пересекаться по *гомоклиническим* траекториям. В окрестностях этих особых траекторий могут происходить сложные явления, приводящие, в частности, к стохастичности. Однако задача численного построения гомоклинических и гетероклинических траекторий гораздо сложнее задачи построения сепаратрис положений равновесия, поскольку требуется находить линии пересечения многомерных поверхностей. Размерность задачи можно понизить, если перейти к соответствующему отображению Пуанкаре. Точка пересечения цикла с секущей S является неподвижной точкой отображения, а пересечения инвариантных многообразий с секущей S образуют инвариантные многообразия этой непод-

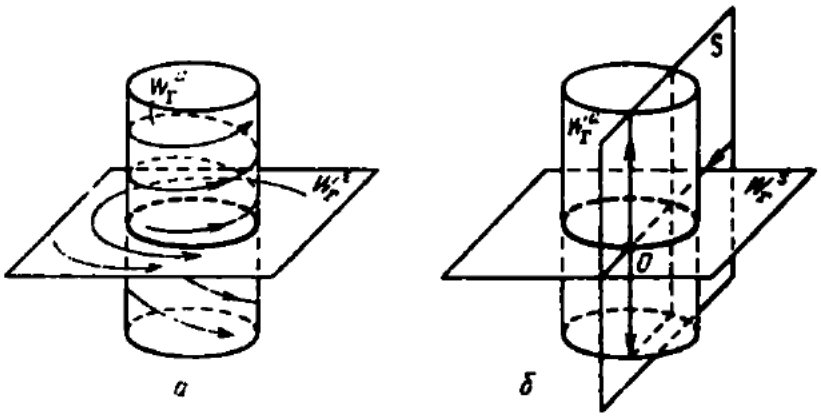
вижной точки (рис. 6.12*б*). В случае трехмерного фазового пространства эти многообразия одномерны и пересекаются в точках, называемых гомоклиническими.

Поскольку задача построения гомо- и гетероклинических траекторий системы (6.1) сводится к нахождению гомо- и гетероклинических точек отображения Пуанкаре, перейдем к рассмотрению дискретного отображения

$$x_{n+1} = P(x_n, \mu), \tag{6.58}$$

где $x_n = (x_n^1, x_n^2, \ldots, x_n^N)$. Пусть x_0 – неподвижная точка отображения (6.58), а $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_N$ – ее мультипликаторы. Пусть один из них, например ρ_1, лежит вне единичного круга, а все остальные – внутри. Тогда мультипликатору ρ_1 соответствует одномерная неустойчивая инвариантная кривая, которую можно построить следующим образом. Найдем собственный вектор, соответствующий ρ_1, и отложим из точки x_0 в направлении этого вектора отрезок очень малой длины. На этом отрезке зададим k точек, лежащих на равных расстояниях друг от друга, и, выбирая их поочередно в качестве начальных, произведем из каждой точки некоторое достаточно большое число итераций отображения (6.58). В результате получим кривую в фазовом пространстве. Конечно, таким образом мы не получим информации о ее пересечениях с другими инвариантными многообразиями, но зато сможем судить о степени ее гладкости, что тоже представляет немалый интерес.

Если неподвижная точка x_0 имеет единственный мультипликатор внутри единичного круга, а остальные – снаружи, то одномерной является



Р и с. 6.12. Инвариантные многообразия седлового цикла (*а*) и соответствующие им сепаратрисы в отображении (*б*)

устойчивая сепаратриса. Ее можно построить, если отображение (6.58) обратимо. Тогда запишем

$$x_n = P^{-1}(x_{n+1}, \mu). \tag{6.59}$$

Точка x_0 останется неподвижной точкой отображения (6.59), но будет теперь иметь один мультипликатор вне единичного круга, а остальные – внутри. Неустойчивая одномерная сепаратриса отображения (6.59) будет совпадать с устойчивой сепаратрисой отображения (6.58).

Задача численного нахождения гомо- и гетероклинических точек практически разрешима только для двумерных обратимых отображений. По-

строив для такого отображения устойчивые и неустойчивые сепаратрисы одной или нескольких неподвижных точек, можно найти и точки их пересечения. При этом возникает проблема: как по результатам численного счета математически строго обосновать существование трансверсального пересечения сепаратрис? Для ее решения можно использовать предложенный в [163] алгоритм, посредством которого вокруг сепаратрис строятся некоторые доверительные окрестности, и трансверсальное пересечение сепаратрис при определенных условиях оказывается следствием трансверсального пересечения построенных окрестностей.

6.7. Алгоритмы расчета размерности аттракторов

Вычисление размерности аттракторов – одно из важных направлений исследований в области динамического хаоса. Расчет размерности полезен при анализе распределенных систем методами конечномерных аппроксимаций, так как дает возможность указать верхнюю границу размерности фазового пространства модельной системы [71, 99–103]. С размерностью аттрактора связана также проблема приближенного описания динамики системы с помощью дискретных отображений.

Наиболее часто вычисляют *фрактальную* (4.19) или *информационную* (4.21) размерности:

$$D_F = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\ln M(\epsilon)}{\ln(1/\epsilon)}, \quad D_I = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{I(\epsilon)}{\ln(1/\epsilon)}.$$

Простейшим, хотя и не всегда оптимальным, способом вычисления D_F и D_I является непосредственное покрытие имеющегося множества точек аттрактора N-мерными кубиками со стороной ϵ (N – размерность фазового пространства). Из определения (4.19) при конечности ϵ следует:

$$\ln M(\epsilon) = D_F \ln(1/\epsilon) + \ln K, \quad K - \text{const}, \tag{6.60}$$

и величина D_F определяется по наклону графика зависимости $M(\epsilon)$ от $1/\epsilon$ в двойном логарифмическом масштабе.

При вычислении информационной размерности вероятности P_i, определяющие энтропию Шеннона в (4.21), аппроксимируются отношениями n_i/n_0, где n_i – число фазовых точек, находящихся в i-м кубике со стороной ϵ, а n_0 – суммарное число точек аттрактора.

Метод прямого покрытия оказывается работоспособным только для маломерных аттракторов ($N \leqslant 3$) и при относительно небольшой степени сжатия фазового объема в окрестности аттрактора, т.е. при больших значениях дробной части размерности. В противном случае ($N > 3$, $d \ll 1$) требуется очень большой объем данных, малые значения ϵ и огромное число покрывающих ячеек $M(\epsilon)$.

Более эффективный алгоритм вычисления фрактальной размерности основан на соотношении [164]

$$D_F = N - \lim_{\epsilon \to 0} [\ln V(\epsilon)/\ln(1/\epsilon)], \tag{6.61}$$

где $V(\epsilon)$ – объем множества, состоящего из всех точек, находящихся в ϵ-окрестности аттрактора.

Для вычисления информационной размерности D_I можно использовать эффективные алгоритмы, реализующие методы ближайшего соседа [165], методы отслеживания проекции [166], а также специальные методы, описанные в [167].

Важным представителем класса вероятностных размерностей является *корреляционная* размерность D_c [66, 67, 168, 169], определяемая соотношением

$$D_c = \lim_{\epsilon \to 0} [\ln(\sum_{i=1}^{M(\epsilon)} P_i^2)/\ln \epsilon], \tag{6.62}$$

где P_i^2 – вероятность того, что пара точек аттрактора принадлежит i-му элементу покрытия. Отметим, что корреляционная размерность D_c представляет частный случай так называемой *обобщенной* размерности, использующей вместо энтропии Шеннона в (4.21) *энтропию Реньи* порядка q [170]:

$$I_q(\epsilon) = (1 - q)^{-1} \ln(\sum_{i=1}^{M(\epsilon)} P_i^q). \tag{6.63}$$

Определение корреляционной размерности (6.62) отвечает случаю $q = 2$. Корреляционную размерность можно представить в виде

$$D_c = \lim_{\epsilon \to 0} [\ln C(\epsilon)/\ln \epsilon], \tag{6.64}$$

$$C(\epsilon) = \lim_{n_0 \to \infty} n_0^{-2} \sum_{i,j=1}^{n_0} \Theta[\epsilon - |x_i - x_j|], \tag{6.65}$$

где

$$\Theta(\epsilon - |x_i - x_j|) = \begin{cases} 1 \text{ для } |x_i - x_j| \leqslant \epsilon, \\ 0 \text{ для } |x_i - x_j| > \epsilon, \end{cases} \tag{6.66}$$

x_i – вектор изображающей точки в фазовом пространстве. Таким образом, размерность D_c определяется значением корреляционного интеграла $C(\epsilon)$, характеризующим относительное число пар точек x_i, x_j, удаленных на расстояния $d_{ij} = |x_i - x_j| \leqslant \epsilon$.

Для расчета корреляционного интеграла $C(\epsilon)$ и, следовательно, корреляционной размерности D_c необходимо вычислить все расстояния d_{ij} и подсчитать число пар точек $n(\epsilon)$, для которых $d_{ij} \leqslant \epsilon$. Тогда корреляционный интеграл

$$C(\epsilon) = n(\epsilon)/n_0^2. \tag{6.67}$$

Расстояния d_{ij} вычисляются значительно быстрее с учетом реализуемого в ЭВМ представления чисел с плавающей запятой [171].

Приведенные алгоритмы расчета фрактальной, информационной и корреляционной размерностей аттрактора свидетельствуют, что для вычислений необходимо иметь множество точек, определенных в фазовом пространстве размерности N и принадлежащих аттрактору. Число точек n_0 в расчетах конечно, но обязано быть достаточно большим. Задача вычисления размерностей для случаев, когда динамическая система задана (либо дискретным оператором отображения, либо системой дифферен-

циальных уравнений), принципиальных трудностей не содержит и при достаточной памяти и быстродействии ЭВМ реально разрешима.

Однако часто требуется вычислить размерность аттрактора некоторой реальной системы, математическая модель которой неизвестна. При этом, как правило, неизвестна (даже приближенно) размерность ее фазового пространства. Экспериментатор располагает в этой ситуации информацией о поведении во времени какой-либо одной из динамических переменных (например, зависимостью от времени тока или напряжения, давления или скорости и т.д.). К тому же и интервал времени экспериментальной реализации процесса естественно ограничен. Можно ли при таких условиях получить оценку размерности аттрактора?

Путь к решению этой проблемы был предложен Ф. Такенсом. В [172] доказано, что почти для всех гладких динамических систем по имеющейся временной реализации одной наблюдаемой динамической переменной можно сконструировать новое многообразие, основные свойства которого (размерность, в частности) будут такими же, как у исходного.

Пусть экспериментальному измерению доступна некоторая зависимость $x(t)$, которая дискретизируется с интервалом по времени Δt. В результате получаем последовательность чисел $x(t_i)$, где $t_i = t_0 + i\Delta t$. Такенсом предложено по этой последовательности строить множество m-мерных векторов $\mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^m$, которые вводятся так:

$$(x_i, x_{i+\tau}, x_{i+2\tau}, \ldots, x_{i+(m-1)\tau}), \quad x_i = x(t_i), \quad \tau = k\Delta t. \tag{6.68}$$

Время дискретизации Δt исходной реализации называется временем выборки, время τ в (6.68) — временем задержки, а число m — размерностью вложения. Основной результат Такенса состоит в следующем. Если временная реализация $x(t)$ представлена в виде бесконечной последовательности чисел $\{x_i\}$, то бесконечное множество векторов $\mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^m$ задает вложение исходного многообразия почти при любом выборе наблюдаемой переменной, если m не меньше удвоенной размерности исходного многообразия.

Восстановленное таким образом m-мерное многообразие является реконструкцией исходного многообразия, в которое был вложен интересующий нас аттрактор. Применительно к этой реконструкции можно вычислять любую из введенных выше размерностей, что должно дать в результате оценку размерности реального исследуемого аттрактора. Кроме того, становится разрешимой и задача реконструкции фазового портрета аттрактора или его проекций [168, 171, 173, 174].

Как уже указывалось, в реальном эксперименте временная реализация представляется конечной последовательностью чисел $x(t_i)$, а размерность фазового пространства исходной системы остается неизвестной. С целью уменьшения ошибки, обусловленной конечностью набора экспериментальных точек, необходимо производить расчеты при нескольких различных значениях n_0 и m и добиваться в численном эксперименте независимости полученной оценки размерности от n_0 и m в пределах заданной точности. Так как для малых времен выборки Δt значения x_i и x_{i+1} будут близкими, большое значение приобретает правильный выбор времени задержки τ. Необходимо стремиться выбрать τ так, чтобы корреляция между x_i и x_{i+k} была по возможности минимальной. Вре-

мя τ приближенно можно оценить с помощью автокорреляционной функции $\Psi_x(\tau)$ или определив минимум взаимной информации между измерениями [174, 175].

Отметим также, что оценку размерности аттрактора можно получить, рассчитывая спектр ЛХП траектории на аттракторе, с помощью определения Каплана–Йорке (4.28). Здесь не требуется новых алгоритмов, вся информация дается результатами расчета спектра ЛХП.

***

Гл. 6 завершает изложение общих сведений по теории динамических систем, описание основных характеристик стохастичности и бифуркационных механизмов рождения странных аттракторов, а также алгоритмов и численных методов исследования хаоса. Содержание первой части книги в равной степени является базовым для любых естественнонаучных задач, сводящихся в итоге к исследованию хаотических решений соответствующих эволюционных уравнений.

Последующие главы книги посвящены исследованию динамики конкретных радиофизических систем с хаотическим поведением, но полученные в них результаты в большинстве своем носят принципиально общий характер, базируясь на фундаментальных выводах теории динамических систем.

Материал первой части служит методологической основой проведения экспериментальных исследований, освобождая нас от необходимости пояснения ряда деталей эксперимента. Предоставляется возможность сосредоточиться на анализе результатов эксперимента с целью выявления закономерностей общего характера.

ГЛАВА 7

МОДИФИКАЦИЯ КЛАССИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ГЕНЕРАТОРА С ИНЕРЦИОННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ. БИФУРКАЦИОННЫЙ АНАЛИЗ РЕГУЛЯРНЫХ РЕЖИМОВ КОЛЕБАНИЙ

7.1. Обобщенные уравнения генераторов с полутора степенями свободы

Автономные системы с трехмерным фазовым пространством наиболее просты среди динамических систем с хаотическим поведением. Эта простота относительна и должна пониматься в том смысле, что теоретический, численный и экспериментальный анализы динамики трехмерных систем проще в сравнении с анализом многомерных и тем более распределенных систем. В таких системах сравнительно нетрудно найти характерные гомоклинические траектории и изучить типичные бифуркации в их окрестности с использованием теоретических и экспериментальных методов. В то же время динамика систем, реализующих тот или иной тип гомоклиники, подчиняется закономерностям общего характера.

Интересны автономные динамические системы, описывающие генерацию хаотических колебаний в моделях размерности $N = 3$, т.е. генераторы с 1.5 степенями свободы. Введем наиболее общие уравнения таких систем, исходя из результатов, известных применительно к генераторам с 1 степенью свободы, фазовое пространство которых – плоскость. В общем виде автоколебательные системы на плоскости описываются уравнением

$$\ddot{x} + \varphi(x, \vec{\mu})\dot{x} + \Psi(x, \vec{\mu}) = 0, \qquad (7.1)$$

где x – переменная, совершающая периодические колебания, $\vec{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k)$ – совокупность управляющих параметров, $\varphi(x, \vec{\mu})$ и $\Psi(x, \mu)$ – нелинейные функции, характеризующие действие сил, обеспечивающих возможность автоколебаний.

Уравнение (7.1) можно обобщить на определенный класс систем с 1,5 степенями свободы. Рассмотрим радиотехническое устройство, блок-схема которого изображена на рис. 7.1. Штриховой линией выделена основная часть генератора, состоящего из усилителя *1*, селективного элемента (колебательный контур, резонатор или мост Вина, к примеру) и цепи положительной обратной связи. При выполнении соответствующих амплитудных и фазовых условий в таком генераторе возникают автоколебания, описываемые уравнением (7.1).

Рассмотрим дополнительную цепь обратной связи, которая осуществляет инерционное преобразование воздействующей переменной $x(t)$ в отклик $z(t)$, управляющий параметрами усилителя и селективного элемента основного генератора. Уравнения полной системы (рис. 7.1) можно записать как

$$\begin{aligned} &\ddot{x} + F_1(x, z, \vec{\mu})\dot{x} + F_2(x, z, \vec{\mu}) = 0, \\ &\dot{z} = F_3(x, z, \vec{\mu}). \end{aligned} \tag{7.2}$$

Здесь F_i – в общем случае нелинейные функции. Фазовая переменная $z(t)$ в (7.2) связана с переменной $x(t)$, совершающей колебания, посредством дифференциального оператора 1-го порядка. Если взаимосвязь отклика $z(t)$ на воздействие переменной $x(t)$ безынерционна, т.е. описывается алгебраическим полиномом типа

$$z = \sum_{n=0}^{k} C_n x^n = \varphi(x), \tag{7.3}$$

то уравнения (7.2) просто сводятся к уравнению (7.1). Если же переменная z зависит от x инерционным образом, т.е. задается дифференциальным уравнением 1-го порядка (в простейшем случае), то уравнения (7.2) описывают процессы колебаний в трехмерном фазовом пространстве и являются обобщением уравнения (7.1) на этот случай.

Известные динамические системы, моделирующие колебания в генераторах с 1,5 степенями свободы, допускают форму записи вида (7.2) исключением третьей переменной и при необходимости введением гладких замен масштабов координат и времени. Эту процедуру назовем сведением к обобщенным уравнениям (7.2), представляющим собой математическую модель нелинейного автоматически регулируемого осциллятора.

Рассмотрим несколько примеров. О.Е. Рёсслером предложена следующая математическая модель [155]:

$$\begin{aligned} &\dot{x} = -(y + z), \quad \dot{z} = -cz + bx + xz, \\ &\dot{y} = x + ay, \quad \operatorname{div} F = a - c + x. \end{aligned} \tag{7.4}$$

Дифференцируя по времени первое уравнение и исключая из (7.4) переменную y, получаем

$$\begin{aligned} &\ddot{x} - a\dot{x} + \\ &+[(1 + b + z)x - \\ &- (a + c)z] = 0, \\ &\dot{z} = -cz + bx + xz. \end{aligned} \tag{7.5}$$

Эта система выпекает из (7.2) при соответствующем задании функций $F_i(x, z, \vec{\mu})$.

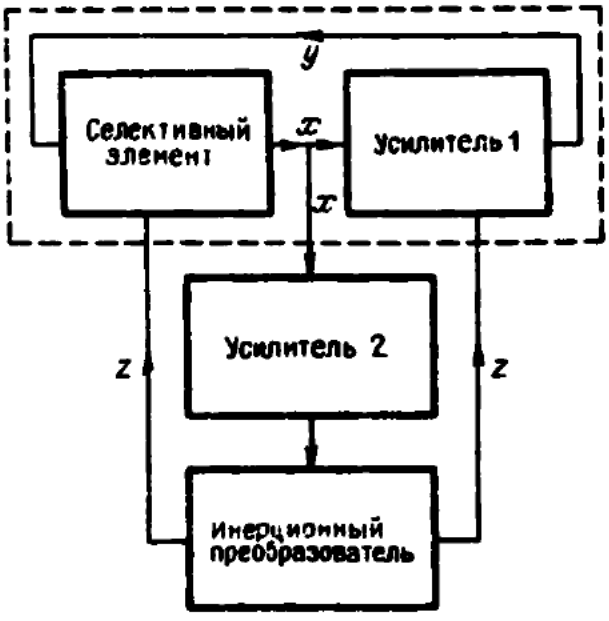


Рис. 7.1. Блок-схема инерционного самосогласованного воздействия на основные элементы классического генератора

В [21, 177, 178] исследуются уравнения релаксационного генератора

$$\dot{x} = 2hx + y - gz, \quad \dot{y} = -x, \quad \mu\dot{z} = x - f(z),$$
$$f(z) = z^3 - z, \quad \mathrm{div}F = 2h - (2z^2 + 1)/\mu, \tag{7.6}$$

которые простым преобразованием тоже сводятся к виду (7.2):

$$\ddot{x} - 2h\dot{x} + (1 + g/\mu)x - gf(z)/\mu = 0,$$
$$\dot{z} = [x - f(z)]/\mu. \tag{7.7}$$

Рассмотрим известную систему уравнений Лоренца [26, 2]:

$$\dot{x} = \sigma(y - x), \quad \dot{y} = -y - xu + rx, \quad \dot{u} = -bu + xy,$$
$$\mathrm{div}F = -(\sigma + b + 1). \tag{7.8}$$

Исключив из (7.8) переменную y, придем к уравнениям

$$\ddot{x} + (1 + \sigma)\dot{x} + \sigma(1 - r + u)x = 0,$$
$$\dot{u} = -bu + x^2 + x\dot{x}/\sigma, \tag{7.9}$$

которые заменой переменных [22]

$$y = \frac{\epsilon x}{\sqrt{2\sigma}}, \quad z = \frac{\epsilon}{\sigma}\left(\sigma u - \frac{x^2}{2}\right), \quad \tau = \frac{\sqrt{\sigma}t}{\epsilon}, \quad \epsilon = (\sqrt{r - 1})^{-1} \tag{7.10}$$

сводятся к системе

$$\ddot{y} + \epsilon h\dot{y} + y^3 + (z - 1)y = 0,$$
$$\dot{z} = -\epsilon az + \epsilon\beta y^2. \tag{7.11}$$

где $h = (1 + \sigma)/\sqrt{\sigma}$, $a = b/\sqrt{\sigma}$, $\beta = (2\sigma - b)\sqrt{\sigma}$.

Замена переменных (7.10) предложена В.И. Юдовичем с целью аналитического исследования асимптотического поведения системы Лоренца при больших значениях r, что соответствует малому параметру ϵ в уравнениях (7.11). Перечень подобных примеров можно продолжить, включив в него уравнения модели химической реакции Белоусова – Жаботинского и другие уравнения химической кинетики, в которых обнаружены режимы хаотических колебаний. Отметим, что в форме (7.2) можно записать и уравнения генератора с инерционной нелинейностью.

Общая форма записи трехмерных динамических систем в виде (7.2) не вскрывает в деталях возможные принципиальные с физической точки зрения различия конкретных систем, такие, как способ возбуждения колебаний, возможность генерирования двухчастотных колебаний, хаотических колебаний и пр. При необходимости можно вводить в рассмотрение некоторые подклассы систем, удовлетворяющих (7.2), но отличающихся по некоторым признакам в связи с конкретными ограничениями на явный вид функции $F_i(x, \dot{x}, z, \vec{\mu})$ в (7.2).

В частности, выделяют два подкласса генерирующих систем, удовлетворяющих в общем виде уравнениям (7.2), но отличающихся механизмами возбуждения колебаний. В первом подклассе возбуждение автоколебаний осуществляется благодаря компенсации собственных потерь отрицательным трением при положительной обратной связи. Ко второму подклассу систем относят генераторы, представляющие собой некото-

рый диссипативный контур, параметрически возбуждаемый за счет инерционного воздействия усиленного сигнала с контура на элементы самого контура. Примером такого генератора является модель Лоренца в форме регулируемого маятника (7.11), в котором возбуждение автоколебаний осуществляется благодаря самосогласованному параметрическому воздействию на нелинейную емкость диссипативного контура. Общая блок-схема второго подкласса генераторов изображена на рис. 7.2. Различия с блок-схемой рис. 7.1 очевидны. Второму подклассу инерционных генераторов принадлежат многие реальные колебательные системы

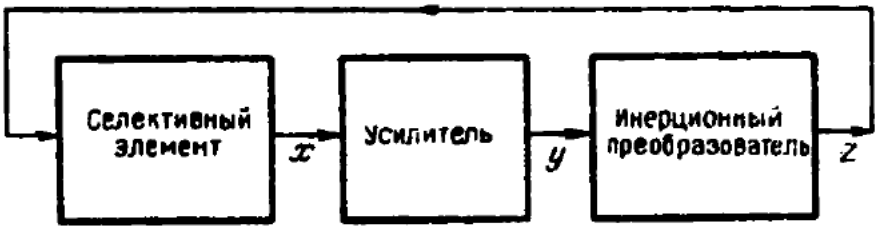


Рис. 7.2. Структурная схема инерционного управления колебательной системой в генераторах с параметрическим возбуждением

типа электромеханических вибраторов, резонатора Гельмгольца, некоторых химических и биологических систем [11, 19, 179, 180].

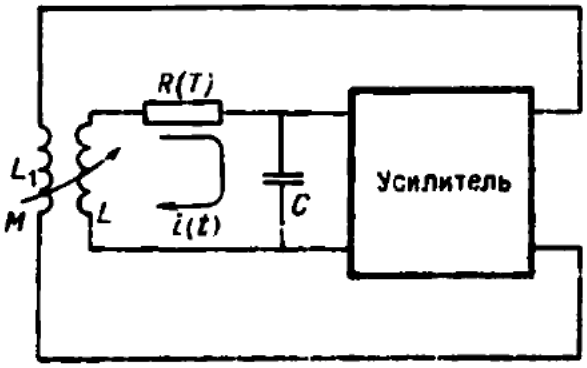
Однако указанное разделение автоколебательных систем по типу самовозбуждения колебаний может быть не принципиально с точки зрения общих механизмов перехода к стохастичности. Возникнув с физической точки зрения по-разному, автоколебания с ростом управляющего параметра могут претерпевать полностью идентичные бифуркационные переходы к хаосу. Поэтому анализ рождения стохастичности нуждается в другой классификации систем, отражающей принципиальное сходство и отличие именно в механизмах развития странных аттракторов в генераторах с 1.5 степенями свободы.

Обратимся к примерам (7.4)–(7.11) и отметим, что в одних моделях дивергенция векторного поля зависит от фазовых координат, а в других является постоянной отрицательной величиной. Для динамических систем с *трехмерным* фазовым пространством в *первом* случае *возможны биения*, во *втором* – *нет*, и последнее утверждение строго обосновано. В трехмерных системах с переменной дивергенцией не исключено существование двумерного тора, а значит и возможность перехода к хаосу через квазипериодические колебания. В трехмерных системах с постоянной отрицательной дивергенцией этот механизм не реализуется. Системы могут отличаться числом особых точек, в которых вектор фазовой скорости потока обращается в нуль. Особые точки определяют топологию предельных множеств в фазовом пространстве системы, и это важное обстоятельство должно учитываться при классификации.

Теоретические результаты, позволяющие по виду уравнений системы строго предсказать наличие динамического хаоса и указать механизмы его развития и структуру, к сожалению, отсутствуют даже для простейшего случая $N = 3$.

7.2. Формулировка уравнений модифицированного генератора с инерционной нелинейностью

Классический генератор с инерционной нелинейностью был предложен и описан *К.Ф. Теодорчиком* [181]. Автоколебания в системе обеспечиваются введением в колебательный контур термосопротивления $R(T)$, свойства которого нелинейным и инерционным образом зависят от протекающего через него тока. Схема генератора с инерционной нелинейностью



Р и с. 7.3. Классическая схема генератора с инерционной нелинейностью

К.Ф. Теодорчика изображена на рис. 7.3. Уравнения для тока $i(t)$ в контуре имеют вид

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \left[\frac{R(T)}{L} - \frac{MS_0}{LC}\right]\frac{di}{dt} + \left[(LC)^{-1} + L^{-1}\frac{\partial R(T)}{\partial T}\frac{dT}{dt}\right]i = 0. \tag{7.12}$$

где S_0 – крутизна характеристики усилителя, который предполагается линейным, M – взаимная индуктивность цепи обратной связи, $R(T)$ – сопротивление термистора, зависящее от температуры T, L и C – индуктивность и емкость в колебательном контуре.

Полагая зависимость $R(T)$ линейной:

$$R(T) = R_0 + LbT, \tag{7.13}$$

и считая, что процесс теплообмена подчиняется закону Ньютона:

$$\rho q\, dT/dt + k_Б\, T = R(T)\, i^2, \tag{7.14}$$

где q – удельная теплоемкость нити термистора, а ρ – ее масса, получаем замкнутую систему уравнений вида

$$d^2i/dt^2 + \omega_0^2 i = (\mu - hT)\, di/dt - bi\, dT/dt, \tag{7.15}$$

$$dT/dt + \gamma T = \alpha(T)\, i^2,$$

где использованы обозначения:

$$\mu = \omega_0^2 S_0 M - R_0/L, \quad \omega_0^2 = 1/LC, \quad \gamma = k/\rho q, \tag{7.16}$$

$$\alpha(T) = \alpha_0 + bLT/\rho q, \quad \alpha_0 = R_0/\rho q.$$

В безразмерных переменных

$$x = ai, \quad \dot{y} = -x, \quad z = bT/\omega_0, \quad \tau = \omega_0 t, \quad a = (\sigma b \rho q/\omega_0 k)^{1/2} \tag{7.17}$$

уравнения (7.15) принимают вид

$$\dot{x} = mx + y - xz, \qquad m = \mu/\omega_0 = \omega_0 S_0 M - R_0/\omega_0 L,$$
$$\dot{y} = -x, \qquad g = \gamma/\omega_0, \qquad (7.18)$$
$$\dot{z} = -gz + gx^2, \qquad \dot{x} = dx/d\tau.$$

В трехмерной двупараметрической системе (7.18) параметр m пропорционален разности вносимой и рассеиваемой в контуре энергий, g – параметр, характеризующий относительное время релаксации термистора. В дальнейшем m будем называть параметром возбуждения, а g – параметром инерционности генератора.

Рассмотрим схему, изображенную на рис. 7.4. Колебательный контур в этой схеме в отличие от классического случая (рис. 7.3) не содержит нелинейных элементов. Усилитель *1* управляется дополнительной цепью обратной связи, содержащей линейный усилитель 2 и инерционный преобразователь. Дифференциальные уравнения генератора можно записать в явном виде, конкретизировав зависимость крутизны усилителя *1* $S(x, V)$ и задав уравнения инерционного преобразования $V(x)$.

Аппроксимируем функцию $S^1(x)$, т.е. крутизну усилителя *1*, без учета воздействия дополнительной обратной связи полиномом

$$S^1(x) = S_0 - S_1 x^2, \qquad (7.19)$$

где x – напряжение на входе усилителя *1*, S_0 и S_1 – постоянные положительные коэффициенты. Предположим, что механизм воздействия цепи инерционной обратной связи подчиняется закономерности

$$S = S^1(x) - bV = S_0 - S_1 x^2 - bV. \qquad (7.20)$$

где $V = V(\tau)$ – напряжение на выходе инерционного преобразователя, b – параметр. Пусть инерционное преобразование осуществляется в соответствии с уравнением

$$\dot{V} = -\gamma V + \varphi(x). \qquad (7.21)$$

Уравнение для тока в контуре генератора (рис. 7.4)

$$L\,di/dt + Ri + C^{-1}\int(i - MS\,di/dt)\,dt = 0 \qquad (7.22)$$

совместно с уравнениями (7.20) и (7.21) дает замкнутую систему, сводящуюся в безразмерных переменных к виду

$$\dot{x} = mx + y - xz - dx^3, \quad \dot{y} = -x, \quad \dot{z} = -gz + g\Phi(x), \qquad (7.23)$$

где $d = d(S_1)$ – параметр, отвечающий степени влияния нелинейности кру-

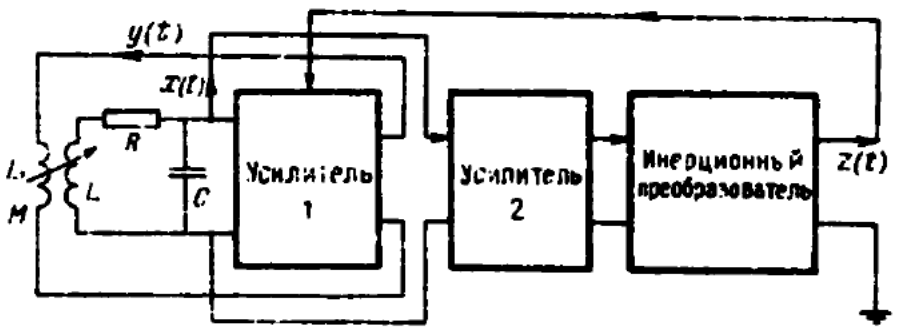
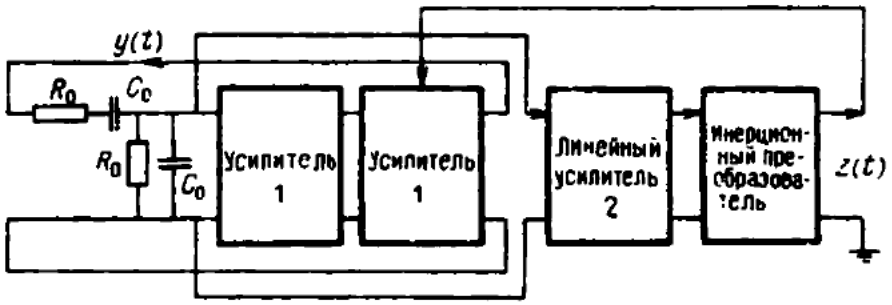


Рис. 7.4. Модифицированная схема генератора с инерционной нелинейностью

Р и с. 7.5. Схема варианта практической реализации инерционного преобразователя



Р и с. 7.6. Схема *RC*-генератора с инерционной нелинейностью

тизны характеристики (7.19); $\Phi(x)$ – функция, описывающая свойства инерционного преобразователя.

В генераторе действуют два механизма нелинейного ограничения амплитуды колебаний (см. (7.20) и (7.23)). Первый – безынерционный и связан с нелинейностью характеристики усилителя, второй – инерционный, обусловленный зависимостью крутизны S от напряжения V. Пусть усилитель работает на линейном участке характеристики ($s_1 = 0$), а инерционный преобразователь собран по схеме двухполупериодного квадратичного детектора с *RC*-фильтром (рис. 7.5) и описывается уравнением

$$z = -gz + gx^2. \tag{7.24}$$

Параметр инерционности g равен отношению периода колебаний контура T_0 к постоянной времени фильтра $\tau_\Phi = R_\Phi C_\Phi$.

При сделанных предположениях уравнения (7.23) переходят в уравнения классического генератора (7.18). Значит, если усилитель *1* линейный, а инерционный преобразователь удовлетворяет (7.24), то математические модели генераторов, схемы которых изображены на рис. 7.3 и 7.4, неразличимы. Схема с детектором в экспериментальном отношении более удобна, так как позволяет варьировать инерционные свойства генератора регулировкой постоянной времени фильтра, что практически неосуществимо при использовании термистора [19, 183, 184].

Вид уравнений (7.23) не изменится, если в качестве селективного элемента использовать *RC*-цепочку в виде моста Вина [183, 184]. Для обеспечения условий генерации в этом случае нужно применить два каскада усиления, как это показано на рис. 7.6. Для симметричного моста Вина управляющие параметры m и g в уравнениях (7.23) просто и с точки зрения эксперимента удобным образом выражаются через параметры схемы:

$$m = K_0 - 3, \quad g = R_0 C_0 / \tau_\Phi, \tag{7.25}$$

где K_0 – коэффициент усиления двухкаскадного усилителя, $R_0 C_0$ и τ_Φ –

постоянные времени моста Вина и фильтра детектора. В физическом эксперименте параметры m и g легко менять и измерять, варьируя коэффициент усиления и постоянную времени фильтра.

Динамика системы (7.23) во многом зависит от конкретного вида функции $\Phi(x)$, задающей свойства инерционного преобразователя. Наиболее богатая картина режимов колебаний, включая хаотические, и их бифуркаций в генераторе с инерционной нелинейностью имеет место в случае, когда используется однополупериодный детектор [13, 185]. Функция $\Phi(x)$ может быть типа

$$\Phi(x) = \exp x - 1 \tag{7.26}$$

или, что удобно при численных исследованиях,

$$\Phi(x) = I(x)x^2, \quad I(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0. \end{cases} \tag{7.27}$$

Определив функцию $\Phi(x)$ в соответствии с (7.27), из (7.23) получаем *уравнения модифицированного генератора с инерционной нелинейностью*, представляющие собой трехмерную трехпараметрическую нелинейную диссипативную систему:

$$\dot{x} = mx + y - xz - dx^3, \quad \dot{y} = -x, \quad \dot{z} = -gz + gI(x)x^2. \tag{7.28}$$

Исключением переменной y уравнения генератора с инерционной нелинейностью (7.28) приводятся к виду (7.2):

$$\ddot{x} - (m - z - 3dx^2)\dot{x} + |1 - gz + g\Phi(x)|x = 0, \tag{7.29}$$
$$\dot{z} = -gz + g\Phi(x).$$

Автоматически регулируемый нелинейный осциллятор (7.29) характеризуется инерционной зависимостью диссипации и частоты от переменной x. В случае сильной инерционности системы ($\tau_\Phi \gg T_0$), когда $g \to 0$, исходная система (7.28) вырождается в двумерную:

$$\ddot{x} - a(1 - bx^2)\dot{x} + x = 0, \tag{7.30}$$
$$a = m - z_0, \quad b = 3d/(m - z_0), \quad z_0 = z(0),$$

и независимо от вида функции $\Phi(x)$ совпадает по форме записи с уравнениями *генератора Ван дер Поля*. Параметры a и b, как видно из (7.30), зависят от начальных условий $z(0)$.

Другой асимптотический случай – безынерционный генератор, соответствующий стремлению параметра g в бесконечность. Из третьего уравнения системы (7.23) при этом условии следует алгебраическая взаимосвязь переменных z и x, сводящая исходную систему к виду

$$\ddot{x} - |m - \Phi(x) - 3dx^2|\dot{x} + x = 0. \tag{7.31}$$

Полная аналогия с уравнением Ван дер Поля в этом предельном случае достигается при условии $\Phi(x) = x^2$. В реальном генераторе с инерционной нелинейностью область значений параметра инерционности g, в которой система ведет себя принципиально как трехмерная, ограничена некоторым интервалом $g_1 \leqslant g \leqslant g_2$. За его пределами приближенным описанием могут служить рассмотренные асимптотические уравнения на фазовой плоскости.

7.3. Периодические режимы колебаний в генераторе и их бифуркации при вариации параметров

Сформулируем в общих чертах цель бифуркационного исследования и алгоритм его проведения. Из множества возможных режимов колебаний в системе попытаемся описать характерные колебания и их перестройки с изменением параметров. Для этого с применением ЭВМ выясним *структуру разбиения* плоскости параметров на области качественно различных типов движения, укажем их *фазовые портреты* и конкретизируем *типы бифуркаций* режимов на границах областей. Для двупараметрических систем общий алгоритм построения бифуркационных диаграмм состоит в следующем [186].

1. Необходимо найти особые точки системы, исследовать их устойчивость и выявить характерные бифуркации потери устойчивости, в частности бифуркацию рождения периодического движения (цикла).

2. Исследовать характер бифуркации рождения цикла, определяющий его устойчивость.

3. Провести однопараметрическое исследование эволюции циклов по параметрам и найти точки характерных бифуркаций.

4. Провести двупараметрическое исследование циклов, заключающееся в построении бифуркационных линий, отвечающих различным типам бифуркаций коразмерности 1, и найти на них точки дополнительных вырождений – точки бифуркаций коразмерности 2.

На этом качественное исследование двупараметрических систем заканчивается.

В системах с тремя параметрами повторяется двупараметрический анализ для выборочных значений 3-го параметра и исследуются бифуркационные ситуации более высокой коразмерности.

Математическая модель модифицированного генератора с инерционной нелинейностью (7.23) есть нелинейная трехмерная диссипативная система с тремя независимыми параметрами, задающая поток в $\mathbb{R}^3$,

$$-\infty < x < \infty, \quad -\infty < y < \infty, \quad 0 \leqslant z < \infty,$$

где переменная z определена на положительной полуоси, так как с физической точки зрения представляет собой продетектированное напряжение $x(t)$ на выходе фильтра. Дивергенция векторного поля скоростей потока (7.23) зависит от параметров и фазовых координат:

$$\operatorname{div} F = m - g - 3dx^2 - z. \tag{7.32}$$

Исследования в квазилинейном приближении $m < g \ll 1$ свидетельствуют о том, что система глобально диссипативна и для любых начальных данных из области определения фазовых переменных всегда справедливо

$$\operatorname{div} F < 0.$$

В квазилинейном приближении переменная $z \approx m$ и независимо от координаты x дивергенция отрицательна. С увеличением параметра $m > g$, g – конечно (наиболее интересная область генерирования нелинейных колебаний), знак дивергенции зависит от координат. Условием диссипативности

является

$$m - g < z + 3dx^2. \tag{7.33}$$

Для автоколебаний при $d \neq 0$ это условие всегда выполняется. В этом смысле параметр d определяет безынерционную диссипативную нелинейность системы. Если же усилитель работает на линейном участке характеристики и нелинейное ограничение амплитуды за счет инерционности наступает раньше, чем значения переменной x выходят в область нелинейности характеристики $S(x)$, выражение (7.33) принимает вид

$$m - g < z(\tau). \tag{7.34}$$

Последнее неравенство разделяет фазовое пространство системы (7.23) на две области плоскостью $z = z^0 = m - g$. Для $z > z^0$ система диссипативна, для $z < z^0$ фазовый объем в локальной окрестности любой траектории системы расширяется. Стационарные режимы автоколебаний реализуются в том случае, когда подкачка энергии и ее расход в среднем по времени компенсируются, что возможно при условии

$$m - g < \bar{z}, \tag{7.35}$$

где $\bar{z}$ – среднее по времени значение переменной $z(\tau)$. Для достаточно больших $m > 1$ неравенство (7.35) может не выполняться и траектории системы будут уходить в бесконечность, если диссипативная нелинейность отсутствует ($d = 0$).

Система (7.23) характеризуется единственной особой точкой в начале координат. Если функция $\Phi(x)$ не содержит линейных по x членов, линеаризация системы в особой точке приводит к характеристическому полиному [187]

$$(g + s)(s^2 - ms + 1) = 0, \tag{7.36}$$

собственные значения (корни) которого суть

$$s_{1,2} = m/2 \pm (i/2)(4 - m^2)^{1/2}, \quad s_3 = -g. \tag{7.37}$$

В области плоскости параметров $g > 0$, $-2 < m < 0$ действительные части всех собственных значений отрицательны и особая точка устойчива. С физической точки зрения параметр g всегда положителен как отношение характерных времен системы (периода колебаний ко времени релаксации фильтра). Параметр m может быть как меньше нуля (генератор недовозбужден), так и больше нуля в режимах генерации, которые собственно и представляют интерес. В области $0 < m < 2$ *особая точка есть седло-фокус* с двумерным неустойчивым и одномерным устойчивым многообразиями (7.37). Линия $m = 2$ – бифуркационная и отвечает смене седло-фокуса на седло-узел.

В бифуркационной точке $m = 0$, как видно из (7.37), собственные значения $s_{1,2}$ пересекают мнимую ось с ненулевой скоростью

$$\partial \mathrm{Re}\, s_{1,2}(m)/\partial m|_{m=0} = 1/2.$$

При этом третье собственное значение $s_3 = -g$ отделено от мнимой оси. Реализуется классическая бифуркация Андронова–Хопфа: бифуркация рождения цикла из седло-фокуса. Линейный анализ бифуркации рождения

цикла не чувствителен как к наличию диссипативной нелинейности (собственные значения от коэффициента d не зависят), так и к виду функции $\Phi(x)$, которая не должна лишь включать линейный по x член. Таким образом, в физически реализуемой области управляющих параметров системы, представляющей собой положительный квадрант плоскости $m \geqslant 0$, $g > 0$, линия $g > 0$, $m = 0$ есть бифуркационная линия рождения цикла.

Вначале проведем исследование системы (7.28) для случая $d = 0$:

$$\dot{x} = mx + y - xz, \quad \dot{y} = -x, \quad \dot{z} = -gz + gf(x)x^2, \tag{7.38}$$

ограничившись двупараметрическим анализом. Влияние безынерционной диссипативной нелинейности обсудим особо.

Расчет устойчивости неподвижной точки в линейном приближении – практически единственная задача, которую в отношении изучаемой системы удается решить аналитически. Последующие расчетные исследования проведем с использованием ЭВМ, а экспериментальные – на радиофизическом генераторе.

Для решения вопроса об устойчивости рождающегося цикла нужно проанализировать характер бифуркации Андронова – Хопфа. Численные расчеты показали, что *первая ляпуновская величина* $L_1(g)$ в особой точке всюду вдоль линии рождения цикла *отрицательна*; рождающийся предельный цикл системы устойчив (*суперкритическая* бифуркация). Вычисление первой ляпуновской величины приближенно можно провести аналитически, используя алгоритм Н.Н. Баутина [188]*). Приближенные аналитические и численные результаты качественно совпадают. Таким образом, в системах (7.38) и (7.23) на линии $m = 0$, $g > 0$ мягко рождается *устойчивый предельный цикл*, радиус которого растет пропорционально $\sqrt{m}$, а период, согласно теореме, равен

$$T_0 \approx 2\pi/|s_{1,2}(0)| = 2\pi. \tag{7.39}$$

Интегрированием системы (7.38) на ЭВМ установлено, что для значений $0 < m < 2$, $0 < g < 2$ решением задачи Коши с начальными условиями вблизи особой точки в нуле является устойчивое периодическое колебание с амплитудой, пропорциональной $\sqrt{m}$, и периодом $T_0 \approx 2\pi$. Для значений $m < 0{,}5$ соответствие с теоремой о рождении цикла в пределах точности счета на ЭВМ практически полное. С увеличением $m > 0.5$ появляются малые отклонения в зависимостях амплитуды и периода цикла $\Gamma_0(m)$ от теоретически предсказываемых.

На рис. 7.7*а* приведены данные расчета нормированного на $\sqrt{m}$ размера устойчивого предельного цикла $\Gamma_0(m)$ для $g = 0{,}097$. В области $0{,}5 < m < 1{,}1$ видно отклонение зависимости от константы, которое не превышает 2,5–3,0 %. На рис. 7.7*б* даны зависимости нормированного размера, периода и наибольшего по модулю мультипликатора цикла от параметра m для значения $g = 0{,}2$ при прохождении параметром точки бифуркации удвоения периода ($m^* = 0{,}966\ldots$).

---

*) Из-за разрыва второй производной $\Phi(x) = f(x)x^2$ в (7.38) возникают сложности в применении указанного алгоритма. Если аппроксимировать $\Phi(x)$ экспонентой $(\exp x - 1)$ и ограничиться первыми тремя членами ее тейлоровского разложения, то вычисления можно довести до конца и показать, что $L_1(g) < 0$ для любых $g > 0$.

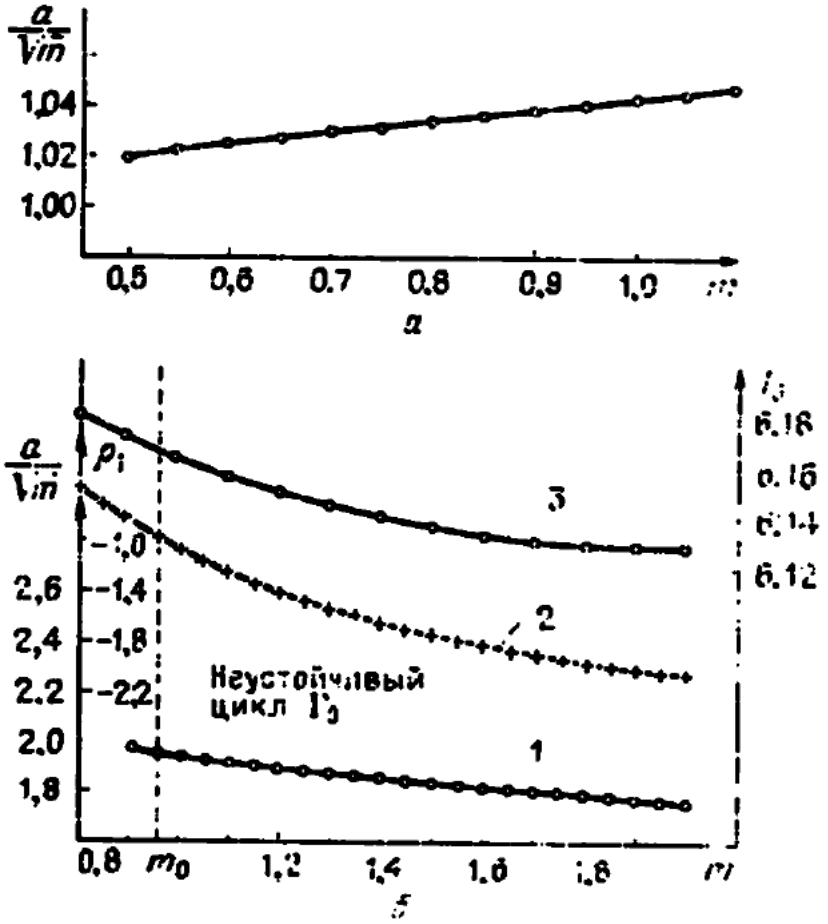
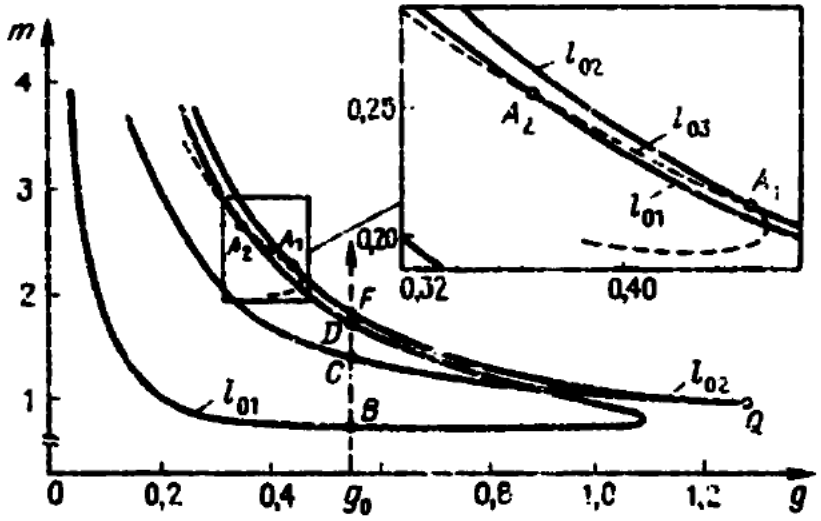


Рис. 7.7. а – Зависимость нормированной амплитуды устойчивого цикла Γ_0 от параметра m. *б* – Зависимость амплитуды $a/\sqrt{m}$ (*1*), мультипликатора ρ_1 (*2*) и периода T_0 (*3*) цикла Γ_0 от параметра m при прохождении точки бифуркации удвоения периода

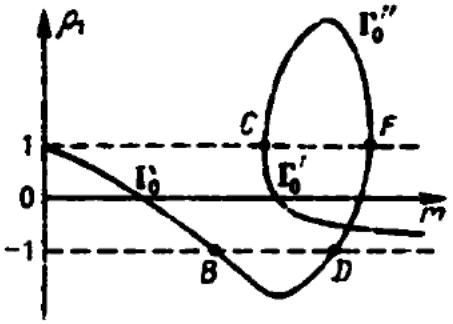
Как свидетельствуют расчеты, бифуркационная теорема Андронова – Хопфа достаточно хорошо описывает эволюцию предельного цикла не только в малой окрестности по параметру вблизи рождения и не только устойчивого, но и седлового цикла Γ_c. Отличия периода колебаний и размера цикла от теоретических значений составляют и здесь ±3 %, хотя превышение над порогом генерации весьма существенно и соответствует режимам принципиально нелинейных колебаний.

Проведем однопараметрическое исследование эволюции родившегося семейства циклов $\Gamma_0(m, g)$ с целью нахождения точек характерных бифуркаций. Обследуем различные сечения плоскости параметров m и g, фиксируя первый из них и осуществляя расчет цикла и его мультипликаторов при вариации второго.

Расчеты показывают, что исследуемому семейству циклов $\Gamma_0(m, g)$ присущи следующие бифуркации: а) наибольший по модулю мультипликатор ρ_1 в бифуркационной точке обращается в -1, что соответствует бифуркации *удвоения периода* колебаний; б) мультипликатор ρ_1 цикла Γ_0 принимает значение $+1$, что соответствует слиянию и исчезновению (или рождению) устойчивого и неустойчивого циклов; в) имеют место случаи, когда произведение мультипликатора цикла с изменением параметра удовлетворяет условию $|\rho_1\rho_2| = 1$.



Р и с. 7.8. Бифуркационная диаграмма для семейства 1-тактных циклов системы (7.38); l_{01} – линия удвоения периода, l_{02} – линия кратности, l_{03} – линия нейтральности, A_1, A_2 и Q – точки бифуркаций коразмерности 2



Р и с. 7.9. Качественный вид зависимости мультипликатора ρ_1 (m) для цикла Γ_0 в сечении $g = g_0$. Критические точки B, C, D и F соответствуют указанным на рис. 7.8

Последнее условие назовем *условием нейтральности*, так как оно отвечает обращению в нуль суммы ляпуновских показателей цикла Γ_0: $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$. Если при этом мультипликаторы комплексно-сопряженные, то реализуется *бифуркация рождения* двумерного *тора*. Для действительных мультипликаторов ρ_1 и ρ_2 бифуркационной ситуации здесь нет, цикл седловой. Для семейства циклов $\Gamma_0(m, g)$ отмечены оба случая, т.е. бифуркация рождения тора в системе (7.38) имеет место!

Определив особые точки по параметрам, отвечающие интересующим нас бифуркациям циклов $\Gamma_0(m, g)$, приступим к двупараметрическому анализу – построению бифуркационных линий в пространстве параметров. На рис. 7.8 приведена *бифуркационная диаграмма* для семейства 1-тактных циклов Γ_0, рождающихся в результате бифуркации Андронова – Хопфа. На линии l_{01} один из мультипликаторов цикла обращается в -1 (*линия бифуркации удвоения* периода). Внутри области, ограниченной линией l_{01}, цикл Γ_0 седловой, вне линии l_{01} он устойчив, так как оба его мультипликатора принадлежат внутренности единичного круга. На линии l_{02} $\rho_1 = +1$. Здесь происходит слияние и последующее исчезновение устойчивого и седлового циклов. Либо, если двигаться по параметрам в противоположном направлении, из сгущения траекторий рождается пара циклов. Линию l_{02} далее будем называть линией кратных циклов или *линией кратности*. Внутри области, ограниченной линией кратности, существуют всегда три 1-тактных цикла: седловой Γ_0'' и два цикла Γ_0 и Γ_0', которые могут быть устойчивыми или седловыми.

Ситуацию поясняет рис. 7.9, где качественно изображена рассчитанная зависимость наибольшего из мультипликаторов цикла ρ_1 при движении

по параметру m для фиксированного g_0, указанного на рис. 7.8. В точке C рождается пара циклов Γ_0 и Γ_0'', в точке F сливаются и исчезают циклы Γ_0 и Γ_0'', в точке B цикл Γ_0 претерпевает бифуркацию удвоения периода, становится седловым, но в точке D он вновь обретает устойчивость*). Ситуация описана при условии движения по параметру m в сторону его увеличения. Характерные точки особенностей B, C, D и F нанесены и на рис. 7.8.

Линия кратности l_{02} образует характерный уголок с вершиной в точке Q, где сливаются в один все три цикла Γ_0, Γ_0' и Γ_0''. Точка Q является бифуркационной и имеет коразмерность 2. В теории катастроф эту точку называют *точкой сборки*. Наличие сборки отвечает простейшей и наиболее часто встречающейся катастрофе в многопараметрических системах и единственно возможной катастрофе в двупараметрических системах общего положения [48, 49]. Взаимосвязь катастрофы сборки и динамики исследуемой системы обсудим ниже.

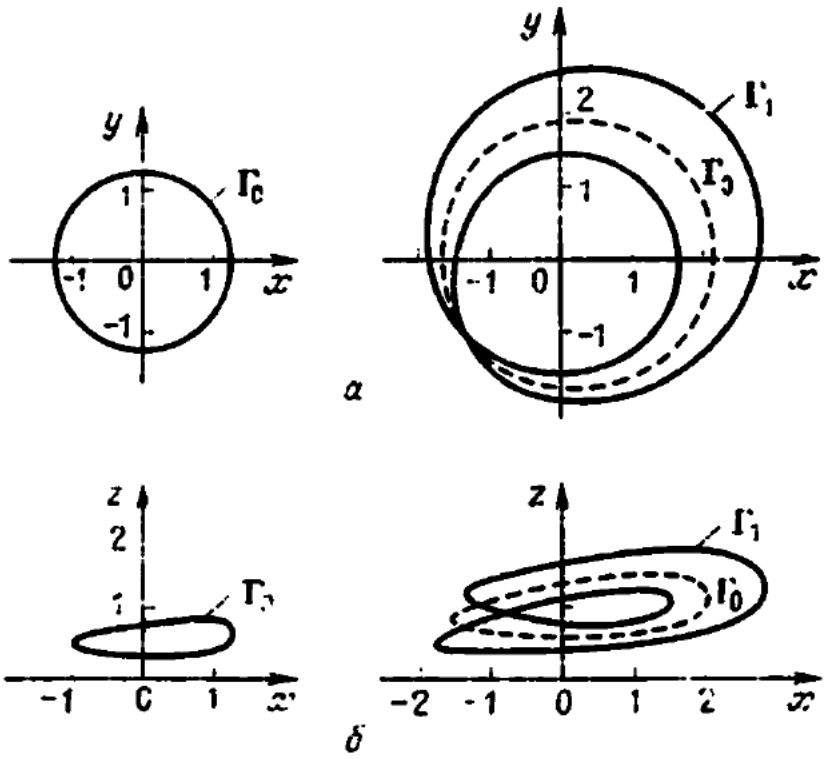
На рис. 7.8 изображен участок бифуркационной линии l_{03}, на котором выполняется условие нейтральности цикла Γ_0: $|\rho_1\rho_2| = 1$. Строго бифуркационной линия l_{03} является на участке от точки A_1 до A_2, где мультипликаторы цикла комплексно-сопряженные и выходят на единичный круг. В точках A_1 и A_2 оба мультипликатора равны либо -1 (точка A_2), либо $+1$ (точка A_1), что отвечает резонансам 1/1 (A_1) и 1/2 (A_2). Как и точка Q, бифуркационные точки A_1 и A_2 имеют коразмерность 2. В них, помимо условия выхода пары мультипликаторов на единичный круг, удовлетворяются условия резонансов. Как показали расчеты, бифуркация рождения тора из цикла Γ_0 *субкритическая*. Режим устойчивых биений в автономной системе (7.38) не найден. Двупараметрический анализ характера устойчивости однотактных циклов системы можно на этом закончить, так как определены типичные бифуркации и построена соответствующая диаграмма на плоскости (рис. 7.8).

При подходе к линии удвоения l_{01} снизу цикл Γ_0 устойчив не в малом (первая ляпуновская величина в особой точке строго отрицательна). Значит, пересечение линии l_{01} приведет к мягкому рождению устойчивого цикла Γ_1, период которого в линейном приближении вдвое больше ($T_1 \approx 2T_0$). Взяв в качестве начального приближения точку на цикле Γ_0 вблизи точки бифуркации удвоения, будем искать цикл Γ_1, который характеризуется двупериодической неподвижной точкой в отображении Пуанкаре. Сместившись по параметру за бифуркационную линию l_{01}, численным интегрированием определим цикл Γ_1, который действительно устойчив, имеет близкий к удвоенному период и в фазовом пространстве дважды обходит 1-тактный цикл, потерявший устойчивость.

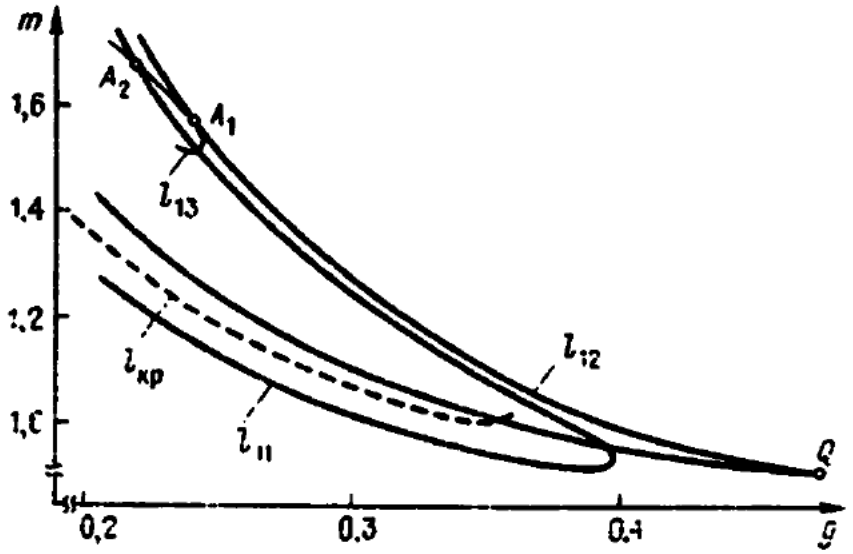
Рис. 7.10 иллюстрирует сказанное для значения $g = 0{,}2$. Ниже точки бифуркации $m^* = 0{,}966\ldots$ в системе устойчив цикл Γ_0, показанный на рис. 7.10 для $m = 0{,}5$. Выше по параметру ($m > m^*$) устойчивым является цикл удвоенного периода Γ_1; цикл Γ_0 становится седловым и изображен на рис. 7.10 штриховой линией.

---

*) Подобные расчеты, требующие переходов в точках C и F на неустойчивые циклы, нетривиальны, но возможны при соответствующей модификации алгоритмов вычисления мультипликаторов циклов. Обычное интегрирование приводит здесь к потере цикла и жесткой смене режимов [51].



Р и с. 7.10. Бифуркация удвоения 1-тактного цикла. Проекции фазовых траекторий на плоскости переменных x, y (*а*) и x, z (*б*)



Р и с. 7.11. Бифуркационная диаграмма для семейства 2-тактных циклов $\Gamma_1^1(m, g)$; $l_{кр}$ – линия критических значений параметров, пересечению которой отвечает переход к хаосу

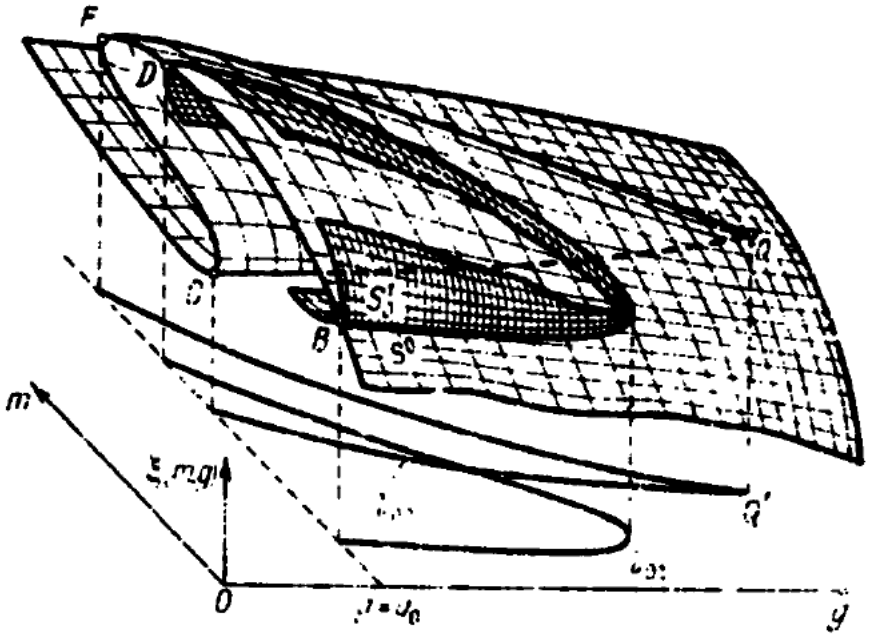
Проведем аналогичным образом однопараметрическое, а затем и двупараметрическое исследование семейства 2-*тактных* циклов $\Gamma_1(m, g)$. Бифуркационный анализ показывает, что характер бифуркаций и структура взаиморасположения соответствующих бифуркационных линий на плоскости параметров для циклов Γ_1 удвоенного периода полностью повторяет картину для 1-тактных циклов (рис. 7.9) с той лишь разницей, что обнаруживаются два самостоятельных семейства 2-тактных циклов Γ_1^1 и Γ_1^2 [12–14, 189].

На рис. 7.11 изображена бифуркационная диаграмма одного из семейств циклов $\Gamma_1^1(m, g)$, подтверждающая сказанное выше. Наличию двух се-

мейств 2-тактных циклов отвечает зависимость мультипликатора от параметра m в виде двух петель в отличие от одной петли для циклов периода T_0. Расчеты свидетельствуют, что внутри каждой из областей, ограничиваемых бифуркационными линиями удвоения периода циклов $\Gamma_1^1(m, g)$ и $\Gamma_1^2(m, g)$, имеются по два самостоятельных семейства 4-тактных циклов [189]. Можно полагать, что иерархия размножения семейств циклов продолжается до бесконечности, их бифуркационные диаграммы являют собой систему топологически эквивалентных *вложенных структур*, которым отвечают универсальные свойства, обобщающие закономерности подобия типа Фейгенбаума на случай двух параметров. Для циклов Γ_k периода $T_k \simeq 2^k T_0$, $k = 0, 1, 2$ и частично для $k = 3$, это проверялось экспериментально и качественно подтвердилось. Количественные закономерности установить трудно, так как с этой целью необходимо численно анализировать циклы достаточно больших периодов и с высокой степенью точности. Эту задачу удобнее рассматривать применительно к двупараметрическим двумерным модельным отображениям [190].

Наглядное представление о сложности разбиения фазового пространства на различные типы траекторий в относительно простой системе (7.38) дает геометрическое изображение полученных результатов. Введем в рассмотрение комбинированное трехмерное пространство, в котором изобразим графически зависимость $\xi = \xi(m, g)$, где под ξ будем понимать одну из координат неподвижной точки в сечении Пуанкаре для цикла. К примеру, если ввести в $\mathbb{R}^3$ системы (7.38) секущую плоскость $x = 0$, то под ξ можно понимать координату z двумерного отображения на секущей.

Расчеты показывают, что геометрическим местом точек, отвечающим устойчивым и неустойчивым циклам $\Gamma_0(m, g)$ системы, является сложная двумерная поверхность S^0 в указанном пространстве, изображенная на рис. 7.12. Поверхность S^0 для $\xi \geqslant 0$ выходит из линии рождения цикла Γ_0 и имеет две складки и сборку. На рис. 7.12 для наглядности дан разрез поверхности S^0 плоскостью $g = g_0$. Внутри области между точками C и F имеются три листа поверхности, которые соответствуют циклам Γ_0 (верх-



Р и с. 7.12. Геометрическая трактовка критических явлений в системе (7.38); точки особенностей те же, что и на рис. 7.8 и 7.9

ний лист), Γ_0' (нижний лист) и Γ_0'' (внутренний лист). Проецирование сложной поверхности на плоскость параметров m и g благодаря наличию складок дает линию особенности l_{02}, состоящую из верхней и нижней ветвей, пересекающихся в точке Q. С движением по параметру m ($g = g_0$) неизбежно связано явление *гистерезиса*, обусловленного "перескоками" в точках F (если двигаться по m снизу) и C (при движении по m сверху). В теории катастроф эти *жесткие переключения* хорошо известны и составляют, собственно, сам эффект катастрофы сборки. В двупараметрических семействах, кроме складки и сборки, никаких особенностей при проецировании поверхности на плоскость быть не может.

Таким образом, бифуркационная линия кратности l_{02} на диаграмме рис. 7.8 обязана своим происхождением наличию складок и сборки у поверхности S^0. Каково происхождение бифуркационной линии удвоения l_{01}? Если анализировать только однотактные циклы Γ_0, то эта линия соответствует проекции соответствующей линии на поверхности S^0, отвечающей критическим значениям амплитуд цикла, когда мультипликатор принимает значение -1. Учитывая, что при этом мягко рождается цикл удвоенного периода Γ_1, на рис. 7.12 намечена поверхность S_0^1, которая пересекает поверхность S^0 по линии удвоения. Проекция линии пересечения поверхности S_0^1 с S^0 на плоскость параметров m и g даст бифуркационную линию l_{01}. Катастрофы в окрестности этой линии не происходит, так как переход от одного устойчивого режима к другому устойчивому *происходит мягко.*

Наличие удвоений усложняет общую картину динамических свойств системы при вариации параметров, так как реально наблюдаемы только те переходы, которые сопровождаются сменой устойчивых режимов. Однако именно указанная сложность позволяет мысленно представить себе возможные варианты смены режимов в реальном генераторе при изменении параметра. Так, если двигаться по параметру m из нуля в плоскости $g = g_0$, то в точке B 1-тактный цикл теряется, система переходит в режим 2-тактных колебаний, чему соответствует выход на поверхность S_0^1 (рис. 7.12). Явления гистерезиса по отношению к циклу Γ_0 не будет, так как удвоение произойдет раньше. Взаиморасположение точек бифуркаций B, F, C и D в различных сечениях по параметру g будет меняться, в связи с чем конкретная последовательность в смене режимов колебаний и гистерезис могут зависеть от выбора сечения.

В случае когда реализуется каскад накапливающихся бифуркаций удвоения, геометрическое изображение типа рис. 7.12 практически затруднено. Более наглядно построение зависимости амплитуд устойчивых циклов от параметра – так называемое *бифуркационное дерево* ветвления амплитуд, которое получается, если вычислять амплитуды устойчивых циклов в функции лишь одного параметра. Эволюция амплитуд колебательных режимов на первом этапе удвоений в сечении $g = g_0$ видна на рис. 7.12.

ГЛАВА 8

ДИНАМИКА МОДИФИЦИРОВАННОГО ГЕНЕРАТОРА С ИНЕРЦИОННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ В РЕЖИМЕ АВТОНОМНЫХ КОЛЕБАНИЙ

8.1. Двупараметрический анализ перехода к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода

Бифуркационная диаграмма для семейства 1-тактных циклов (рис. 7.8) содержит три характерные бифуркационные линии, отвечающие определенному типу потери устойчивости. Исследуем роль этих бифуркаций в общей картине смены колебательных режимов генератора (7.38) и взаимосвязь между типом потери устойчивости и механизмами рождения и свойствами аттракторов системы. Начнем с выяснения роли бифуркаций удвоения.

Общий анализ структуры вложения бифуркационных диаграмм циклов периода $2^k T_0$*) свидетельствует, как указывалось, об увеличении числа семейства циклов при каждом удвоении в 2 раза. Проанализируем бифуркации удвоения периода применительно к семействам циклов, бифуркационные диаграммы которых лежат ближе к линии рождения цикла Γ_0 $m = 0$. В этом случае можно ожидать последовательность мягко рождающихся циклов удвоенного периода. Проведем численный эксперимент по однопараметрическому изучению последовательности бифуркационных значений параметра μ_k, отвечающих точкам бифуркаций удвоения периода циклов $2^k T_0$. Выберем два направления движения по плоскости параметров: фиксируя $g = 0{,}3$, обеспечим движение по параметру m, а при $m = 1{,}45$ – движение по параметру g. Будем вычислять бифуркационные значения параметров μ_k, при которых мультипликатор цикла периода $2^k T_0$ обращается в -1. Значения параметров m_k и g_k определялись с погрешностью $\epsilon = 10^{-6}$ и для $k \leqslant 4$ сведены в табл. 8.1 [176].

Значения постоянной Фейгенбаума δ_k и критических точек в табл. 8.1 рассчитывались по асимптотическим соотношениям (5.7) и (5.18). Полученные данные свидетельствуют о том, что при движении в плоскости параметров как по m, так и по g имеет место сходящаяся последовательность бифуркаций удвоения периода, подчиняющаяся закону Фейгенбаума.

*) Значение периода не следует понимать буквально, так как $T_0 = T_0(m, g)$. Для дифференциальных систем равенство $T_k = 2^k T_0$ в отличие от отображений в общем случае не выполняется и отражает главным образом топологию траекторий.

Таблица 8.1

Бифуркационные значения параметров m_k, g_k, постоянная Фейгенбаума δ_k и критические точки при удвоениях в системе (7.38) (расчет на ЭВМ)

	$g = 0.3$			$m = 1.45$		
	m_k	δ_k	m^*	g_k	δ_k	g^*
0	0.7700		-	0.1200	-	-
1	1,0200	-	1.0880	0.16898	-	0,18233
2	1.0713	4.873	1.0953	0.18162	3.876	0,18506
3	1.08216	4.724	1.08511	0.18438	4.582	0.18513
4	1.08449	4.66896	1.08512	0.18497	4.66836	0.18513

Для двупараметрических систем переходу к странному аттрактору через удвоения на плоскости параметров должна отвечать бифуркационная линия критических значений коразмерности 1. Эту линию можно построить, применяя описанный выше однопараметрический подход. Другой способ, существенно экономящий машинное время, состоит в расчете линии на плоскости параметров, отвечающей критическому значению мультипликатора цикла $2^k T_0$, $k \gg 1$, $\rho^* = -1{,}60119\ldots$ (см. (5.21) и табл. 5.1). С необходимой для практических целей точностью достаточно взять $k = 2$, т.е. ограничиться расчетом мультипликатора четырехтактного цикла*). Рассчитанная указанным способом линия критических значений параметров нанесена на рис. 7.11 штрихом.

Проведенный анализ динамики системы (7.38) в ходе эволюции ее к стохастичности через серию бифуркаций удвоения периода основного семейства циклов подсказывает сравнительно редкую возможность экспериментально не только качественно, но и количественно проверить выводы, полученные численно. Действительно, при малых m и конечных g цикл Γ_0 является единственным мягко рождающимся из особой точки в нуле предельным циклом системы (7.38). Каждый последующий цикл удвоенного периода мягко рождается из предыдущего в точках бифуркации m_k, g_k и является устойчивым.

Если собственные шумы системы достаточно малы, то в радиофизическом генераторе с ростом параметра возбуждения можно проследить эволюцию предельных циклов вплоть до критической точки рождения хаоса и малых превышений над порогом, где касательные бифуркации циклов сравнительно малых периодов не будут влиять на режим колебаний (их линии кратности лежат выше линии критических значений параметров). Такой эксперимент не связан с точным заданием начальных условий, что в физической системе обычно трудно обеспечить.

Для натурных экспериментов был разработан и изготовлен *RC*-генератор низкочастотного радиодиапазона [183] ($f_0 = T_0^{-1} \approx 7$ кГц) в соответствии с рис. 7.6. Основной генератор включал два каскада усиления с достаточно большим участком линейной характеристики и селективный

*) При этом необходима уверенность в том, что цепочка удвоений бесконечна и контроль с помощью однопараметрического анализа в выборочных точках обязателен.

элемент в виде симметричного моста Вина. Дополнительная цепь инерционной отрицательной обратной связи состояла из анодного однополупериодного квадратичного детектора и RC-фильтра. Тщательным подбором параметров элементов генератора и характеристик детектора, усилителей и фильтра экспериментально достигалось максимально возможное соответствие реальной и математической моделей системы [183, 191, 192]. Измерительная установка в целом позволяла независимо варьировать и количественно определять параметр возбуждения m, измеряя коэффициент усиления основного усилителя K_0 и параметра инерционности g, который регулировался емкостью фильтра C_Φ. Точность в измерении управляющих параметров m и g была не хуже ±1 %.

Отметим одну исключительную особенность системы (7.38) и, следовательно, генератора: независимая вариация параметров m и g дает возможность в экспериментах раздельно управлять степенью сжатия ($s_3 = s_3(g)$) и растяжения ($s_{1,2} = s_{1,2}(m)$) в окрестности седло-фокуса, т.е. *независимо* управлять свойствами *устойчивого* и *неустойчивого многообразий* особой точки (см. (7.37)).

Изучение режимов колебаний и их бифуркаций осуществлялось с помощью системы осциллографов, анализатора спектра и селективного микровольтметра, входящих в измерительную установку.

Осуществим исследование эволюции режимов колебаний при движении по параметру m снизу для ряда дискретных значений параметра g. На рис. 8.1 приведена бифуркационная диаграмма режимов колебаний на участке плоскости параметров m, g. Как и ожидалось, при движении по m в эксперименте наблюдается накопление бифуркационных линий удвоения l_{k1} к линии критических значений параметров $l_{кр}$. Уверенно регистрируются бифуркации удвоения для $k = 0, 1, 2$, т.е. вплоть до перехода $4T_0 \to 8T_0$. Переход $8T_0 \to 16T_0$ также наблюдался экспериментально, но в некоторых областях плоскости параметров был неустойчив за счет естественных и технических шумов установки. На рис. 8.1 соответствующая бифуркационная линия l_{31} не показана.

Переход к стохастичности, включая малые превышения над порогом, в эксперименте осуществлялся *без гистерезиса*, указанные бифуркационные линии l_{k1} и $l_{кр}$ в пределах точности измерений совпадали как при движении по параметру

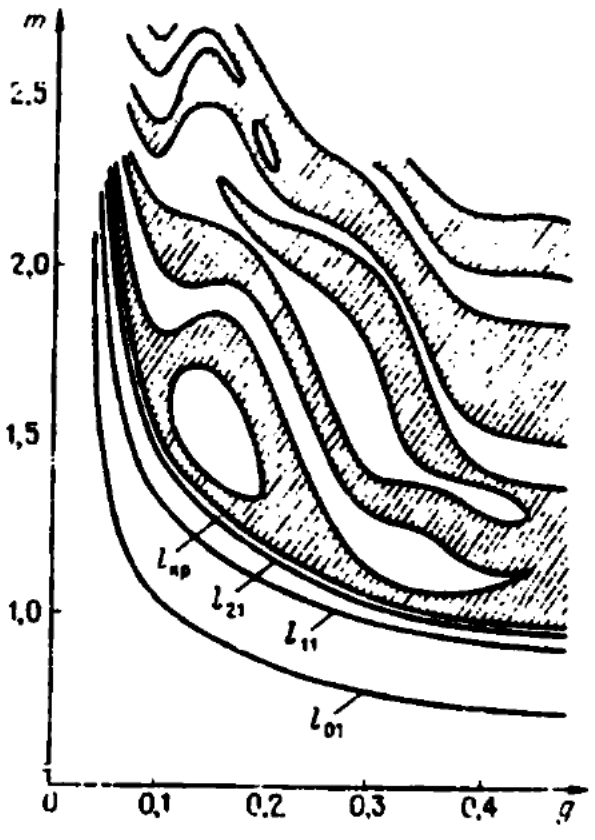


Рис. 8.1. Экспериментальная бифуркационная диаграмма режимов колебаний в генераторе; l_{k1} – линии удвоения, $k_{кр}$ – линия критических значений параметров. Заштрихованные области соответствуют хаосу, незаштрихованные – отвечают многотактным устойчивым циклам

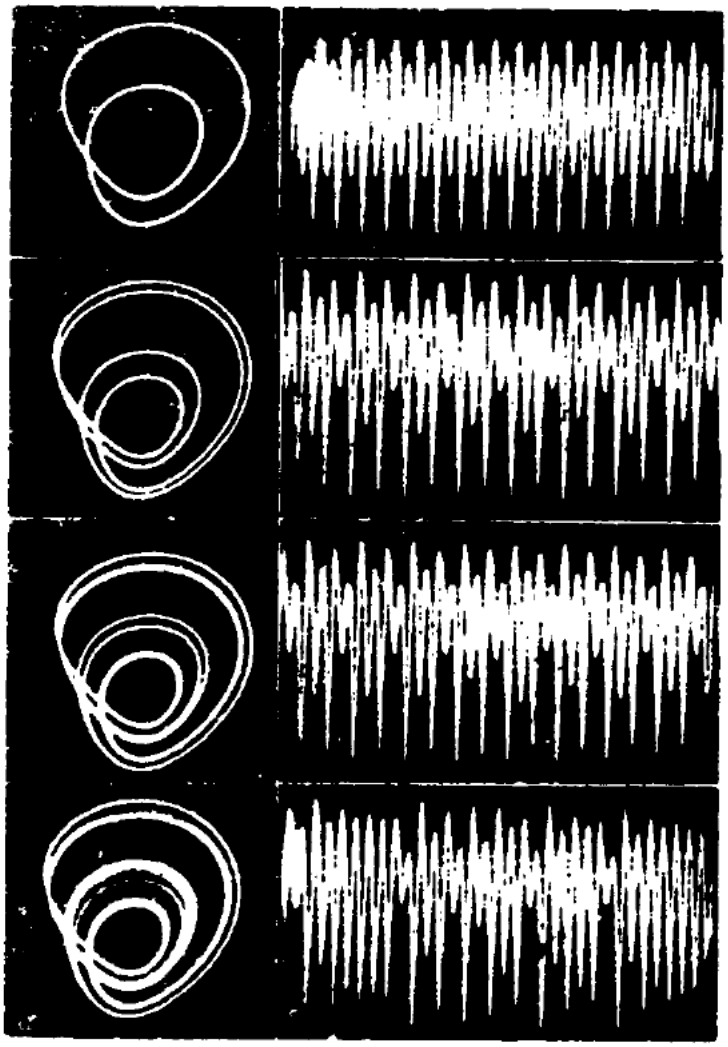


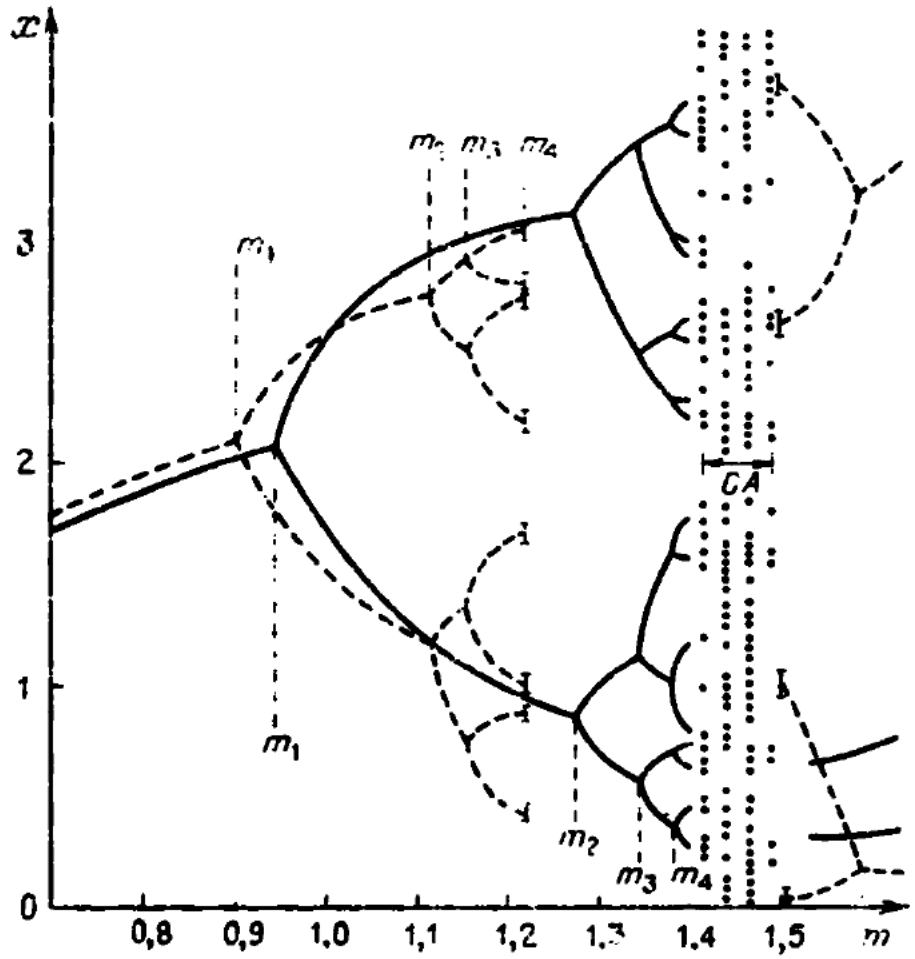
Рис. 8.2. Вид фазовых траекторий в проекции на плоскость переменных x, y ($а$) и соответствующие зависимости процессов $x(t)$ ($б$) при переходе к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода (физический эксперимент)

m вверх, так и вниз. Заметные превышения над порогом приводили к жестким переходам в режимы колебаний периода $p \cdot 2^k T_0$ ($p = 1, 2, 3, \ldots$, $k = 1, 2, 3, \ldots$), которые чередовались с зонами странных аттракторов отличающейся структуры [183]. В этой области типичным было явление гистерезиса и данные рис. 8.1 отражают картину смены режимов при движении по параметру m в сторону его увеличения. Свойства системы при значительных превышениях над порогом стохастичности обсудим в следующих разделах, а здесь сосредоточим внимание на переходе к хаосу через серию *бифуркаций удвоения*.

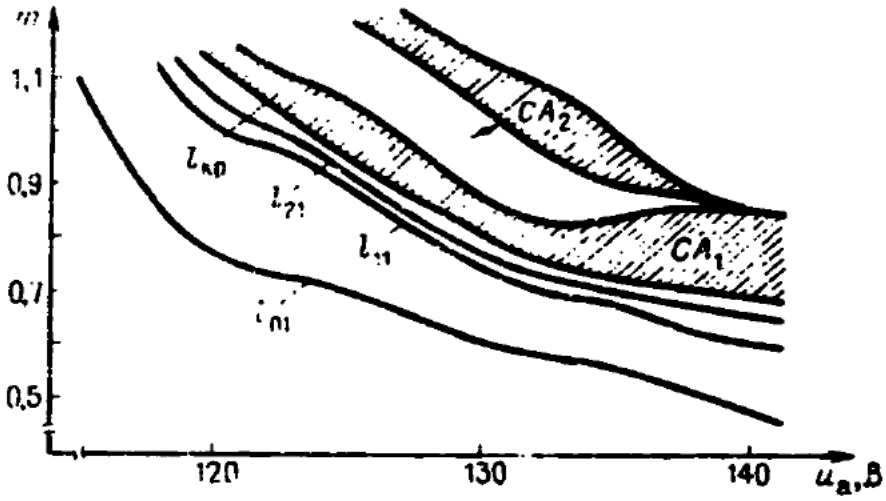
На рис. 8.2 дана серия фотографий режимов колебаний, иллюстрирующая бифуркации удвоения $2T_0 \to 4T_0 \to 8T_0$ и вид странного аттрактора вблизи критической точки. Результаты эксперимента соответствуют значению $g = 0{,}2$ и различным m. Однотактный цикл, предшествующий первому удвоению, на рис. 8.2 не показан. Фотографии отражают эволюцию временных реализаций $x(t)$ и проекций фазовых траекторий на плоскость переменных x, y для различных значений m. Качественная картина перехода весьма наглядна. Для выяснения количественных закономерностей приведем результаты следующих численных и физических экспериментов.

Зафиксируем значение параметра $g = 0{,}2$ и построим на ЭВМ *бифуркационное дерево* ветвления амплитуд устойчивых циклов при движении по параметру m. С этой целью введем в фазовом пространстве системы секущую поверхность условием $y = 0$ и будем регистрировать координату x на секущей, двигаясь по параметру m. На рис. 8.3 результаты расчетов показаны сплошными кривыми. Установив значение $g = 0.2$ в физическом эксперименте, произведем измерение амплитуд колебаний переменной $x(t)$. Нормированные результаты для сравнения нанесены на рис. 8.3 штриховыми кривыми.

Сопоставление численных и экспериментальных данных дает хорошее качественное соответствие результатов, однако расчетные и измеренные



Р и с. 8.3. Бифуркационное дерево ветвления амплитуд при удвоениях периода



Р и с. 8.4. Экспериментальная бифуркационная диаграмма режимов колебаний на плоскости параметров m, u_a; CA_1 и CA_2 – аттракторы 1-й и 2-й зон стохастичности. Остальные обозначения те же, что и на рис. 8.1.

Таблица 8.2

Сравнение расчетных и экспериментальных бифуркационных значений параметра m для $g = 0{,}3$

k	m_k (расчет)	m_k (эксперимент)	δ_2
0	0.770 ± 10^{-6}	0.77 ± 0.01	
1	$1{,}020 \pm 10^{-6}$	1.02 ± 0.01	
2	1.0713 ± 10^{-6}	1.07 ± 0.01	$\delta_2 = 4.873$
3	1.08216 ± 10^{-6}	1.08 ± 0.01	(расчет)
	1.08516 ± 10^{-6}	1.09 ± 0.01	$\delta_2 = 5.0 \pm 0.12$ (эксперимент)

значения параметра m_k в точках бифуркаций удвоения *не совпадают*! Причина, как выяснилось, кроется в следующем. Из уравнений модели следует, что характеристика детектора $\Phi(x)$ квадратичная (см. (7.27)). Реальная характеристика $\Phi(x)$ в генераторе может несколько отличаться от аппроксимации (7.27), но допускает корректировку путем вариации анодного напряжения детектора инерционного каскада генератора.

На рис. 8.4 представлена экспериментальная бифуркационная диаграмма режимов колебаний на плоскости параметров m, u_a, где u_a – напряжение анода детектора, для значения $g = 0{,}3$. Специальные измерения показали, что наилучшее соответствие экспериментальной характеристики $\Phi(x)$ теоретической аппроксимации (7.27) достигается при $u_a^0 = 120$ В. Для $u_a = u_a^0$ были измерены бифуркационные значения параметра m_k ($k = 0, 1, 2$ и 3) и $m_{кр}$. Результаты сведены в табл. 8.2.

По первым трем бифуркациям в пределах точности эксперимента наблюдается хорошее соответствие результатов; экспериментальное и численное значения δ_2 также близки, близкими являются и значения критической точки. Полученные данные свидетельствуют о том, что в исследуемой системе переход к стохастичности через последовательность бифуркаций удвоения *подчиняется закону Фейгенбаума* с константой подобия $\delta = 4.669...$ [13, 176].

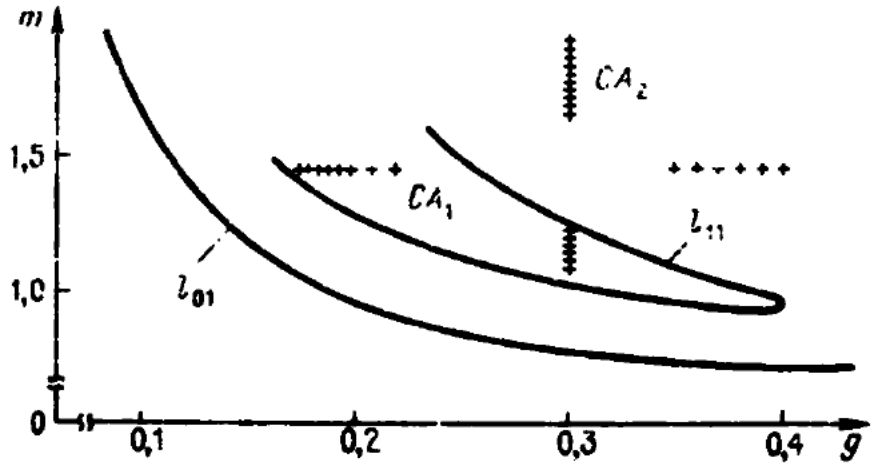
8.2. Отображение Пуанкаре системы и возможность его одномерной аппроксимации

Критерием стохастичности служит появление положительного показателя в спектре ЛХП системы. Для систем в $\mathbb{R}^3$ в общем случае сигнатура спектра ЛХП может быть: "–", "–", "–" – устойчивая стационарная точка, "0", "–", "–" – предельный цикл, "+", "0", "–" – странный аттрактор. Вычислим полный спектр ЛХП системы (7.38), двигаясь по параметрам в тех сечениях, где проводился расчет бифуркационных значений m_k и g_k при удвоениях ($m = 1{,}45$ и $g = 0{,}3$). Сигнатура спектра ЛХП не чувствительна к перестройкам режимов при удвоениях вплоть до критической точки, при прохождении которой появляется положительный показатель в спектре, свидетельствуя о рождении странного аттрактора. Точка бифуркации спектра ЛХП должна принадлежать линии критических значений параме-

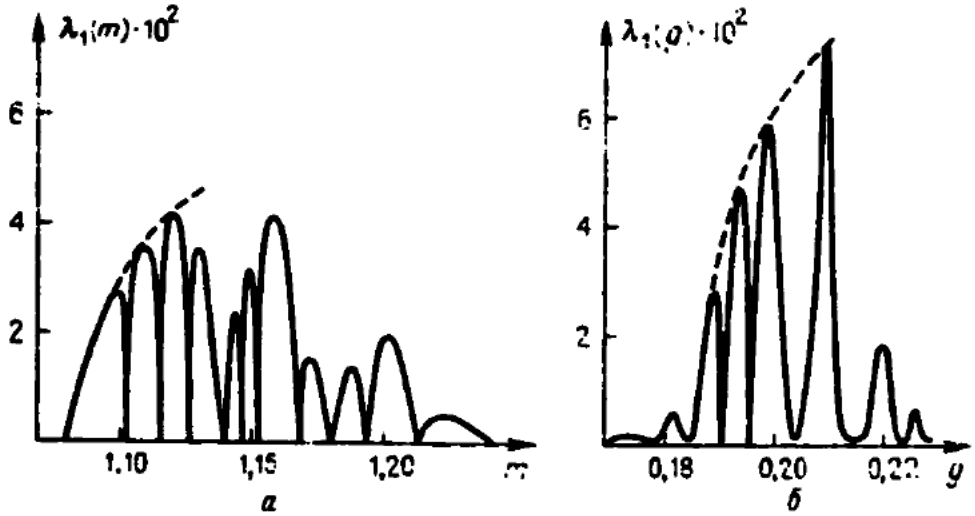
тров. Предоставляется возможность независимо определить критические значения параметров и сравнить их с данными, полученными вычислением мультипликаторов циклов при удвоениях.

На рис. 8.5 показан участок плоскости параметров m и g, содержащий бифуркационные линии удвоений l_{01} и l_{11}, на котором крестиками помечены точки плоскости, отвечающие наличию положительного показателя в спектре ЛХП. В других точках на указанных прямых спектр ЛХП был типа "0", "−", "−". свидетельствуя об устойчивых периодических колебаниях в системе. При движении как по параметру m, так и по g, обнаруживаются две локализованные области стохастичности CA_1 и CA_2. Исследования показали, что каждая из зон также представляет собой сложные области, в которых реализуются различные типы как регулярных, так и странных аттракторов, сменяющих друг друга при вариации параметров и начальных условий. Результаты расчетов $\lambda_1(m)$ и $\lambda_1(g)$ представлены на рис. 8.6.

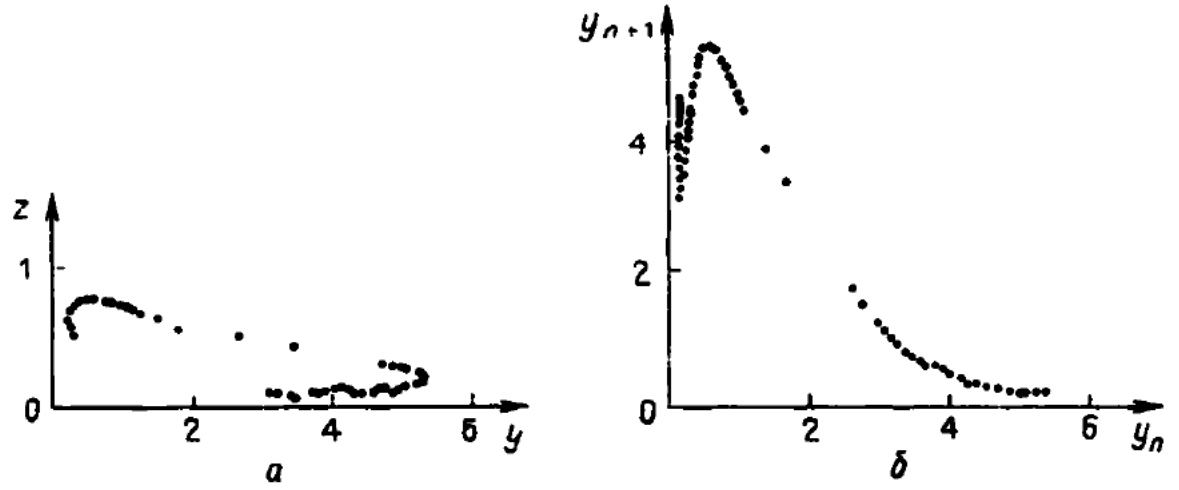
Расчеты спектра ЛХП с использованием относительно больших интервалов времени усреднения ($\tau \gtrsim 10^4$) и линейная аппроксимация зависимости положительного показателя от параметра непосредственно вблизи точки перехода подтвердили результаты табл. 8.1: $m^* = 1.0853 \pm 5 \cdot 10^4$



Р и с. 8.5. Фрагмент бифуркационной диаграммы с указанием точек с положительной энтропией Колмогорова (помечены крестиками в сечениях $m = 1{,}45$ и $g = 0.3$)



Р и с. 8.6. Результаты расчетов показателей спектра ЛХП в сечениях $g = 0.3$ (*а*) и $m = 1{,}45$ (*б*)



Р и с. 8.7. Сечения Пуанкаре плоскостью $x = 0$ (*а*) и модельное отображение последования (*б*), рассчитанные для режима стохастичности $m = 1{,}16$ и $g = 0{,}3$

для $g = 0{,}3$ и $g^* = 0{,}1854 \pm 5 \cdot 10^{-4}$ для $m = 1{,}45$. Таким образом, *критические точки* в пределах заданной точности счета спектра ЛХП *соответствуют* найденным численно *по закону Фейгенбаума*. Отметим, что в окрестности критической точки, где старший показатель спектра ЛХП претерпевает бифуркацию "0" → "+", необходима особая тщательность в проведении расчетов ввиду медленной сходимости значений показателей во времени. Уменьшение времени усреднения при определении λ_1 приводит к заниженным значениям критических точек по сравнению с точными.

Знание полного спектра ЛХП странного аттрактора системы позволяет определить его *ляпуновскую размерность*. В указанных двух зонах стохастичности $D_L = 2 + d$, причем $0 < d < 0{,}4$ и уменьшается с ростом параметра g. В точках развитой стохастичности $m = 1{,}45$, $g = 0{,}21$ и $m = 1{,}16$, $g = 0{,}3$ размерность равна соответственно 2,341 и 2,187.

Дробная часть d вблизи критической линии стремится к нулю, что обосновывает приближенное описание динамики перехода с помощью одномерного отображения [78. 193]. Численные эксперименты подтверждают возможность такой аппроксимации. Двумерное отображение на секущей плоскости y, z ($x = 0$) имеет вид близкой к одномерной кривой типа подковы (рис. 8.7*а*). Модельное отображение $y_{n+1} = \varphi(y_n)$ (рис. 8.7*б*), построенное численно для переменной y, представляется функцией, принадлежащей к классу отображений Фейгенбаума (отсутствуют разрывы и имеется один гладкий максимум). *Канторова* структура в поперечном сечении близкого к одномерному отображения (рис. 8.7) за счет относительно сильной диссипации ($g = 0{,}3$) в масштабах рисунка не проявляется. Однако если уменьшить значение параметра $g \leqslant 0{,}1$, то отображение системы на секущей будет выглядеть как система вложенных близких к одномерным кривых типа подковы, демонстрируя канторовость даже без изменения масштаба изображения [176].

Сечение Пуанкаре можно *визуализовать* в физическом эксперименте [194–196]. С этой целью необходимо обеспечить возможность подсветки электронного луча осциллографа в моменты времени прохождения фазовой траекторией заданной секущей поверхности. Например, можно формировать короткие импульсы подсветки при прохождении реализации

$x(t)$ через нулевые значения. В этом случае на экране осциллографа на фоне проекции аттрактора на фазовую плоскость будет одновременно изображаться более яркими точками и проекция сечения Пуанкаре плоскостью $x = 0$. На рис. 8.8 представлены фотографии двух типов хаотических аттракторов, на фоне которых видны соответствующие сечения Пуанкаре. Режим колебаний на рис. 8.8*а* отвечает значениям параметров, при которых проводился расчет сечения и функции последования, представленных на рис. 8.7.

Качественное соответствие результатов физического и численного экспериментов очевидно. Обратим внимание на то, что в случаях, представленных на рис. 8.7 и рис. 8.8*а*, реализована 2-тактная лента аттрактора, отображение Пуанкаре которого содержит две непересекающиеся хаотические зоны. В случае развитой стохастичности эти зоны сливаются и сечение Пуанкаре приобретает характерный вид, близкий к одномерной квадратичной параболе (рис. 8.8*б*).

Результаты совокупности проведенных численных и физических экспериментов наглядно свидетельствуют о том, что в дифференциальной системе (7.38) при переходе к хаосу через удвоения строго выполняется *универсальный закон Фейгенбаума.*

Проверим количественно закономерности в характере зависимости положительного спектра ЛХП от уровня надкритичности. Как видно из рис. 8.6, вблизи порога имеют место нелинейные зависимости $\lambda_1(m)$ и $\lambda_1(g)$, прерываемые резкими провалами с изменением параметра. Изрезанность кривых $\lambda_1(m)$ и $\lambda_1(g)$ отвечает появлению "окон" устойчивости периодических движений (циклов), обусловленных жесткими бифуркациями, расширяющимися с увеличением параметра. Огибающая графиков зависимостей $\lambda_1(m)$ и $\lambda_1(g)$ вблизи порога допускает аппроксимацию соотношения

$$\lambda_1(m) = c_1(m - m^*)^\gamma, \quad g = 0{,}3; \quad \lambda_1(g) = c_2(g - g^*)^\gamma, \quad m = 1{,}45, \qquad (8.1)$$

где $c_1 = 0{,}181$, $m^* = 1{,}085$ и $c_2 = 0{,}395$, $g^* = 0{,}185$, а $\gamma = \ln 2/\ln \delta = 0{,}449$. Аппроксимирующие кривые (8.1) нанесены на рис. 8.6 пунктиром и подтверждают количественно теоретическую зависимость $\lambda_1(\mu)$, установленную для фейгенбаумовского перехода на основе одномерных отображений [13, 117].

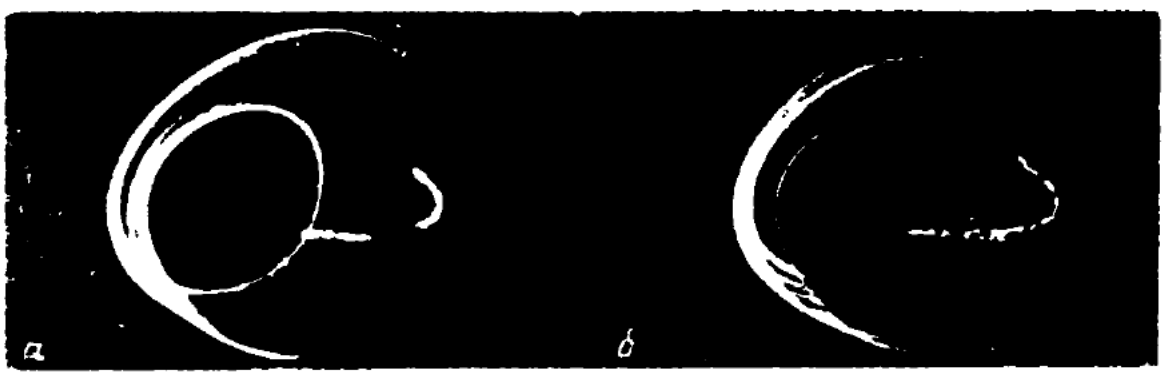


Рис. 8.8. Два типа хаотических аттракторов, на фоне которых видны соответствующие проекции сечений Пуанкаре (физический эксперимент)

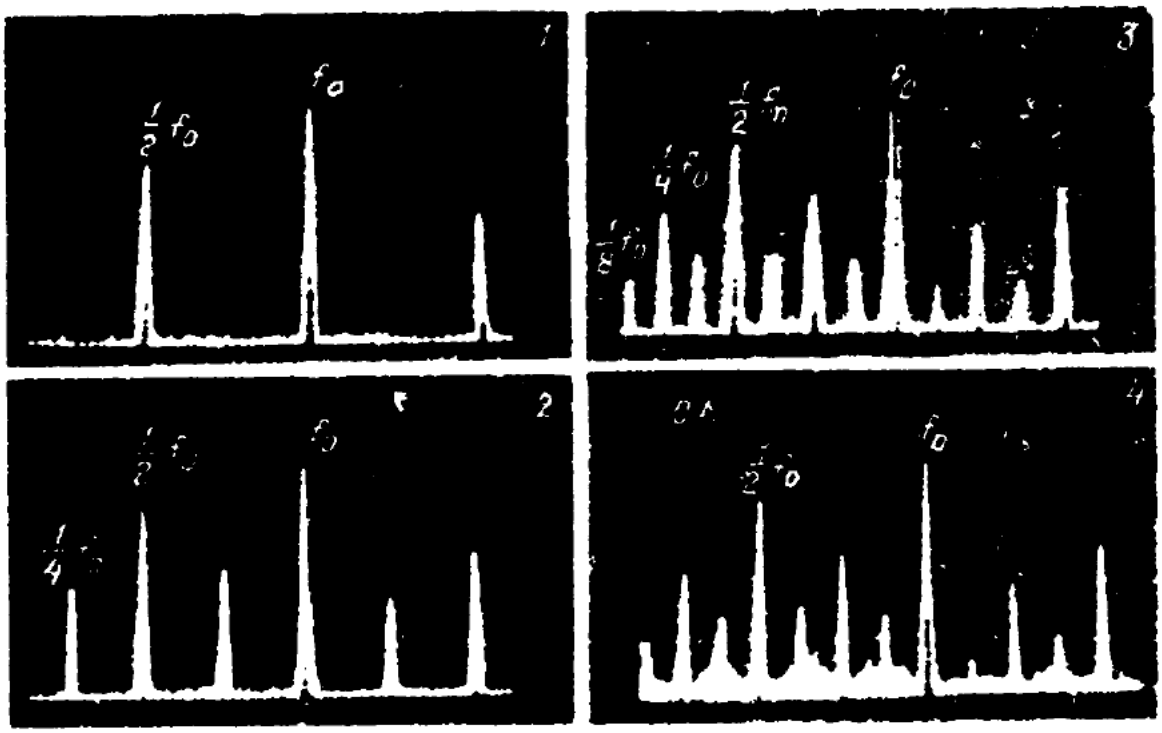


Рис. 8.9. Эволюция спектров мощности $S_x(f)$ колебаний при удвоениях: *1* – цикл $2T_0$, *2* – $4T_0$, *3* – $8T_0$, *4* – *CA* при малой надкритичности (физический эксперимент)

Рассмотрим эволюцию спектра мощности колебаний по пути к хаосу через серию бифуркаций удвоения периода при изменении параметра m. Последовательности циклов, период которых при прохождении точек бифуркаций удваивается, взаимно однозначно соответствует последовательность в обогащении дискретного спектра *субгармониками*. Амплитуды субгармоник подчиняются количественной закономерности, следующей из масштабно инвариантных свойств процесса ветвления амплитуд циклов. На рис. 8.9 показаны экспериментальные спектры мощности $S_x(f)$ колебаний. Соответствующие им проекции фазовых траекторий и временные реализации $x(t)$ даны на рис. 8.2.

Спектр 1-тактных колебаний (на рис. 8.9 не представлен) состоит из основной линии $f_0 = T_0^{-1}$ и ее гармоник nf_0. В спектре 2-тактных колебаний появляются гармоники половинной частоты $nf_0/2$, их амплитуды растут с увеличением глубины модуляции и достигают насыщений к моменту следующей бифуркации удвоения. В точке бифуркации появляются и плавно увеличиваются с ростом параметра компоненты спектра $nf_0/4$, отвечая мягкому рождению цикла периода $4T_0$. Для перехода $4T_0 \to 8T_0$ картина повторяется. Тщательные измерения показали, что отношение интенсивности субгармоник $f_0/2^k$ к $f_0/2^{k+1}$ для $k = 0$ и 1 составляет 10 – 12 дБ и достигает величины 13,0 ± 0,3 дБ при $k = 2$. Расчеты спектра мощности реализации $x(\tau)$, соответствующей циклу периода $16T_0$ ($n = 1{,}084$, $g = 0{,}3$), проведенные на ЭВМ с помощью алгоритма быстрого преобразования Фурье, для отношения интенсивностей субгармоник $f_0/4$ к $f_0/8$ дают близкий результат: 13,03 ± 0,3 дБ. Можно полагать, что при достаточно больших k достигается теоретическое значение около 13,5 дБ.

Процесс обогащения спектра субгармониками по пути к хаосу через удвоения характеризуется *масштабно инвариантными свойствами*. Если

рассмотреть спектр 2-тактного цикла, то в окрестности частоты f_0 он содержит две линии меньшей интенсивности: $f_0 \pm f_0/2$. Для 4-тактного цикла масштабной единицей служит $\Delta f_2 = f_0/4$ и в окрестности линии $f_0/2$ спектр также содержит две боковые составляющие $f_0/2 \pm f_0/4$. В пределе накопления бифуркаций удвоения периода $k \gg 1$ становится справедливой масштабно инвариантная структура спектра в точках бифуркации. Дробление масштаба по оси частот соответствует делению интервала между ближайшими субгармониками пополам, а интенсивность возникших частотных компонент $f_0/2^k$ в точках бифуркации μ_{k+1} на 13.5 дБ меньше, чем интенсивность субгармоник $f_0/2^{k+1}$.

При подходе к критической точке число предшествующих удвоений стремится к бесконечности и интервал частот между ближайшими субгармониками $\Delta f_k \to 0$. Спектр становится сплошным. Однако интенсивность субгармоник с ростом k очень резко убывает и стремится к нулю при $k \to \infty$. Поэтому реальный экспериментальный спектр при конечной точности регистрации в критической точке будет дискретным. С превышением порога стохастичности начинается процесс уширения спектральных линий высших субгармоник, приводящий к росту интенсивности сплошного шумового пьедестала в спектре. С некоторого значения параметра (*всегда выше критического* уровня) в экспериментах действительно регистрируется сплошной спектр. Обычно это слегка размытый спектр (8 – 16)-тактного цикла.

Рис. 8.9,*4* иллюстрирует спектр странного аттрактора при малом превышении над порогом, который соответствует размытому спектру 8-тактного цикла. В фазовом пространстве системы такой аттрактор представляет 8-тактную ленту (рис. 8.2).

С ростом надкритичности происходит последовательное слияние многотактных лент аттрактора, порождающее в итоге развитую 1-тактную ленту. Рассмотрим процесс слияния 2-тактной ленты в 1-тактную, показанный на рис. 8.10. В момент слияния 4-тактной ленты в 2-тактную (рис. 8.10,*1*) в спектре колебаний полностью зашумлены линии субгармоник $f_0/2^k$ ($k \geqslant 3$). Видно, как размываются спектральные линии $nf_0/4$. При этом линии спектра nf_0 и $nf_0/2$ практически не размыты. С ростом параметра формируется развитая 2-тактная лента аттрактора (рис. 7.10,*2*), спектр колебаний здесь уже не содержит выбросов на гармониках частоты $f_0/4$. В момент слияния 2-тактной ленты в 1-тактную быстро (по параметру) размываются спектральные линии $nf_0/2$, и спектр развитой 1-тактной ленты характеризуется сплошным шумовым пьедесталом с выбросами только на основной частоте f_0 и ее гармониках (рис. 8.10,*3*).

Механизм *слияния многотактных лент* аттрактора с ростом надкритичности, сопровождаемый последовательным размытием спектральных линий субгармоник $nf_0/2^k$ ($k = \infty, \ldots, 2$ и 1), обусловливается гомоклиническими эффектами*). В критической точке перехода динамическая система характеризуется наличием бесконечного числа седловых циклов периода $2^k T_0$. Рост параметра m приводит к пересечению двумерных устойчи-

*) Детальный бифуркационный анализ эффекта слияния хаотических лент аттрактора излагается ниже в гл. 10.

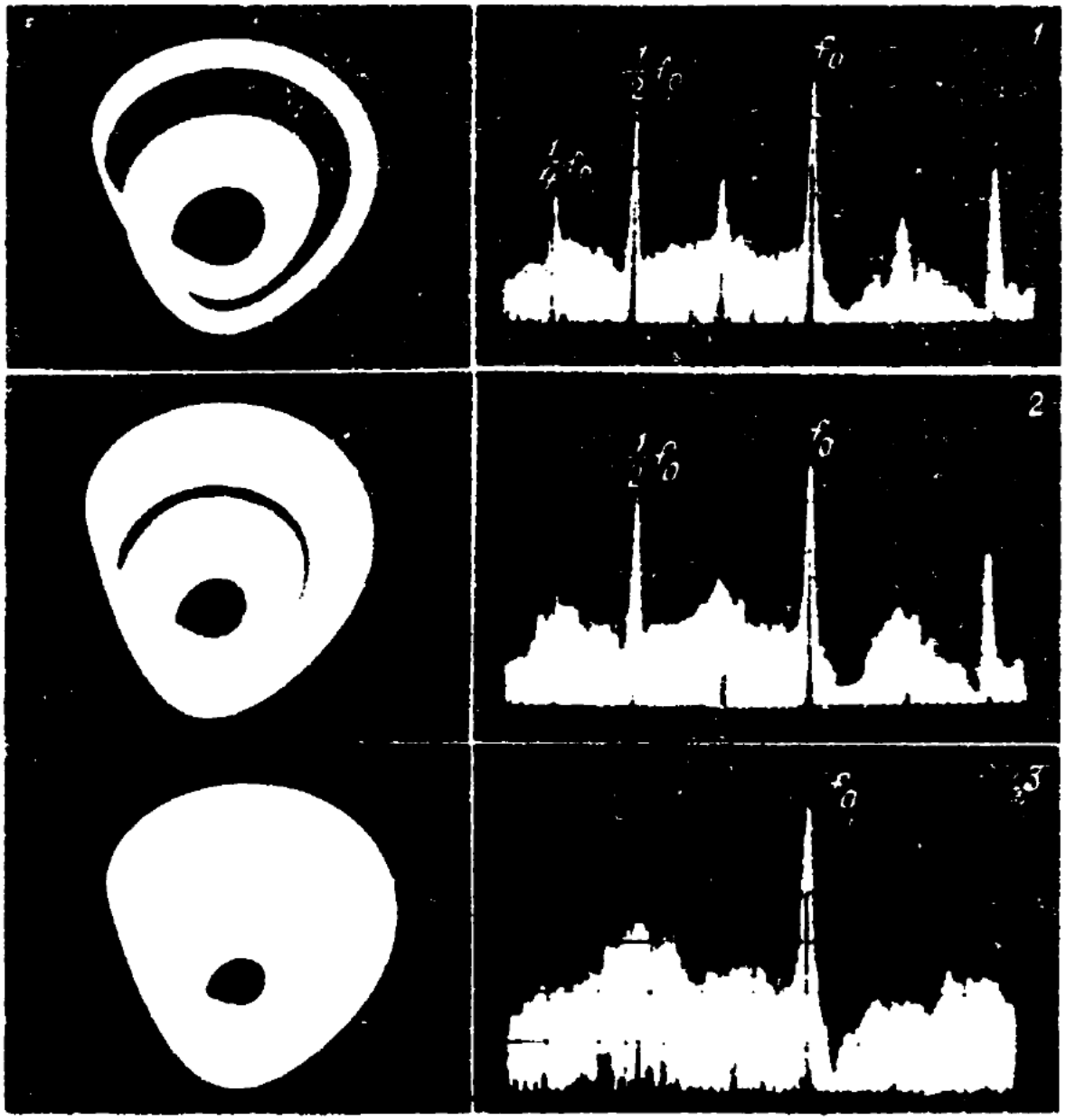


Рис. 8.10. Проекции фазовых портретов (слева) и спектры мощности колебаний (справа) при бифуркациях слияния 2-тактной ленты аттрактора в 1-тактную за критической точкой (физический эксперимент)

вых и неустойчивых многообразий циклов с образованием грубых гомоклинических кривых. В отображении Пуанкаре на секущей плоскости устойчивые и неустойчивые сепаратрисы седловых точек, являющиеся прообразами соответствующих многообразий циклов, пересекаются грубо с рождением гомоклинической точки и, следовательно, гомоклинической структуры. Имеет место четкая последовательность в возникновении таких структур, обратная по отношению к закономерности процесса накопления бифуркаций удвоения. С ростом надкритичности гомоклинические структуры у седловых циклов периода $2^k T_0$ возникают в обратном порядке по k, в связи с чем бифуркации аттрактора в закритической области иногда называют *обратными* или *бифуркациями связности*.

Универсальность в распределении энергии колебаний по частоте на первый взгляд противоречит процессу дробления масштабов амплитуд в последовательности бифуркаций удвоения Фейгенбаума. Обратимся к би-

фуркационному дереву ветвления амплитуд (рис. 8.3). При каждом последующем удвоении амплитуды неустойчивых циклов периода $2^k T_0$ исчезают, уступая место устойчивым амплитудам циклов периода $2^{k+1} T_0$. Картина в распределении энергии по спектру иная: после каждого удвоения спектральные линии неустойчивых циклов сохраняются и добавляются новые субгармоники, амплитуда которых в пределе на 13,5 дБ меньше. В спектре колебаний реально присутствуют собственные частоты периодических движений, потерявших устойчивость!

Это явление легко понять, рассмотрев зарождение хаоса при удвоениях как процесс усложняющейся автомодуляции исходного колебания. При первой бифуркации удвоения к спектру автоколебаний частоты f_0 добавляются боковые составляющие $f_0 \pm f_0/2$, отвечающие режиму резонансных биений с частотой модуляции $f_0/2$. Полная энергия сигнала включает энергию несущей и энергию сигнала модуляции. Потеря устойчивости исходным периодическим движением не означает исчезновения несущей частоты, вследствие чего и основная линия в спектре колебаний сохраняется. Каскад бифуркаций удвоения, приводящий к последовательному уменьшению амплитуд модулирующих составляющих все более низких частот, приводит к тому, что заметная доля энергии аттрактора сосредоточена на частоте несущей и первых субгармоник. Вклад высших субгармоник весьма мал, что обусловлено последовательным уменьшением энергии модуляции на частотах, близких к нулю. Указанные свойства спектра колебаний в режиме аттрактора Фейгенбаума при малых уровнях надкритичности типичны и могут служить отличительным признаком данного типа квазиаттрактора.

Совокупность представленных экспериментальных данных позволяет сделать вывод о возможности приближенного описания перехода к хаосу в модифицированном генераторе с инерционной нелинейностью через последовательность бифуркаций удвоения с помощью одномерного отображения типа квадратичной параболы. Такое представление справедливо по крайней мере для значений $0{,}15 \leqslant g \leqslant 0{,}35$ и при малых превышениях параметром линии критических значений $l_{кр}$ (рис. 7.11).

ГЛАВА 9

ДИНАМИКА МОДИФИЦИРОВАННОГО ГЕНЕРАТОРА С ИНЕРЦИОННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ В РЕЖИМЕ АВТОНОМНЫХ КОЛЕБАНИЙ (продолжение)

9.1. Режимы колебаний в закритической области значений параметров. Гистерезис и переход к хаосу через перемежаемость, индуцированную флуктуациями

Вернемся к обсуждению результатов расчета старшего показателя спектра ЛХП $\lambda_1(m)$ (рис. 8.6*а*). С превышением порога зависимость $\lambda_1(m)$ включает дискретные области по параметру m, в которых положительный показатель обращается в нуль. Вначале $\lambda_1 = 0$ в узких интервалах значений параметра. С ростом надкритичности ширина этих интервалов увеличивается, свидетельствуя о наличии устойчивых периодических режимов, которые можно наблюдать в эксперименте. Появление окон устойчивости за критической точкой обусловлено двумя причинами. Во-первых, здесь из сгущения траекторий в результате бифуркаций $\rho = +1$ рождаются устойчивые и неустойчивые циклы различных семейств. Во-вторых, исходные циклы периодов $2T_0$, которые в критической точке все седловые, с превышением порога обретают устойчивость через обратные бифуркации удвоения (мультипликатор входит в единичный круг через -1). Ширину областей существования устойчивых периодических режимов за критической точкой можно определить по зависимости мультипликатора соответствующего цикла от параметра, изображенной качественно на рис. 7.9, и, следовательно, по расположению линий кратности на диаграммах (рис. 7.8 и 7.11).

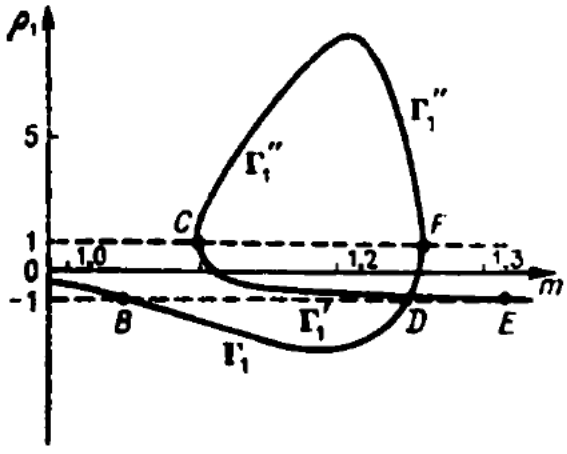
Рассмотрим в качестве примера эволюцию 2-тактного цикла Γ_1, рождающегося из цикла Γ_0 в результате удвоения. Анализ проведем в сечении $g = 0.3$, изменяя параметр m. В бифуркационной точке $m = 0{,}77$ цикл Γ_1 мягко рождается и далее устойчив.

На рис. 9.1 представлена рассчитанная на ЭВМ зависимость мультипликатора ρ_1 цикла Γ_1 от параметра m. Кривая $\rho_1(m)$ неоднозначна и имеет вид петли с особенностями в точках B, D, F, C и E, где модуль мультипликатора равен единице. В точке B ($m_B \approx 1{,}02$) цикл Γ_1 претерпевает бифуркацию удвоения и далее до точки D ($m_D \approx 1{,}257$) остается седловым. В точке D мультипликатор входит внутрь единичного круга через -1, а цикл Γ_1 вновь приобретает устойчивость. В точке F ($m_F \approx 1{,}267$) цикл Γ_1

исчезает, сливаясь с неустойчивым циклом Γ_1'' в результате бифуркации $\rho_1 = +1$. Появилось окно устойчивости цикла Γ_1 с шириной по параметру $m_F - m_D \approx 0.01$. Далее, в точке C ($m_C \approx 1.101$), если двигаться по параметру m в сторону увеличения, рождается пара циклов: устойчивый Γ_1' и неустойчивый Γ_1''. Появляется второе окно устойчивости, так как цикл Γ_1' в интервале по параметру $m_E - m_C \approx 0.22$ устойчив. Далее цикл Γ_1' в точке E ($m_E \approx 1.32$) теряет устойчивость через удвоение и с увеличением m возможен каскад бифуркаций удвоения Фейгенбаума применительно к семейству циклов Γ_1' *). Если же рассчитать зависимость $\rho_1(m)$ для цикла Γ_1', то она качественно повторит петлю на рис. 9.1.

На границах окон устойчивости, где мультипликатор соответствующего устойчивого цикла обращается в +1, наблюдаются жесткие смены режимов колебаний (катастрофы) и сложные гистерезисные явления. Например, пусть начальные условия соответствуют циклу Γ_1 в области его устойчивости между точками D и F (рис. 9.1). При движении вверх по m в точке F цикл исчезает и вероятным будет перескок изображающей точки на устойчивый цикл Γ_1'. С уменьшением параметра m всюду до критической точки C существует устойчивый цикл Γ_1', а при его исчезновении за точкой C предсказать режим колебаний затруднительно. Возможна реализация одного из многотактных циклов системы либо странного аттрактора, так как ниже точки C по параметру m устойчивых циклов периода $2T_0$ нет.

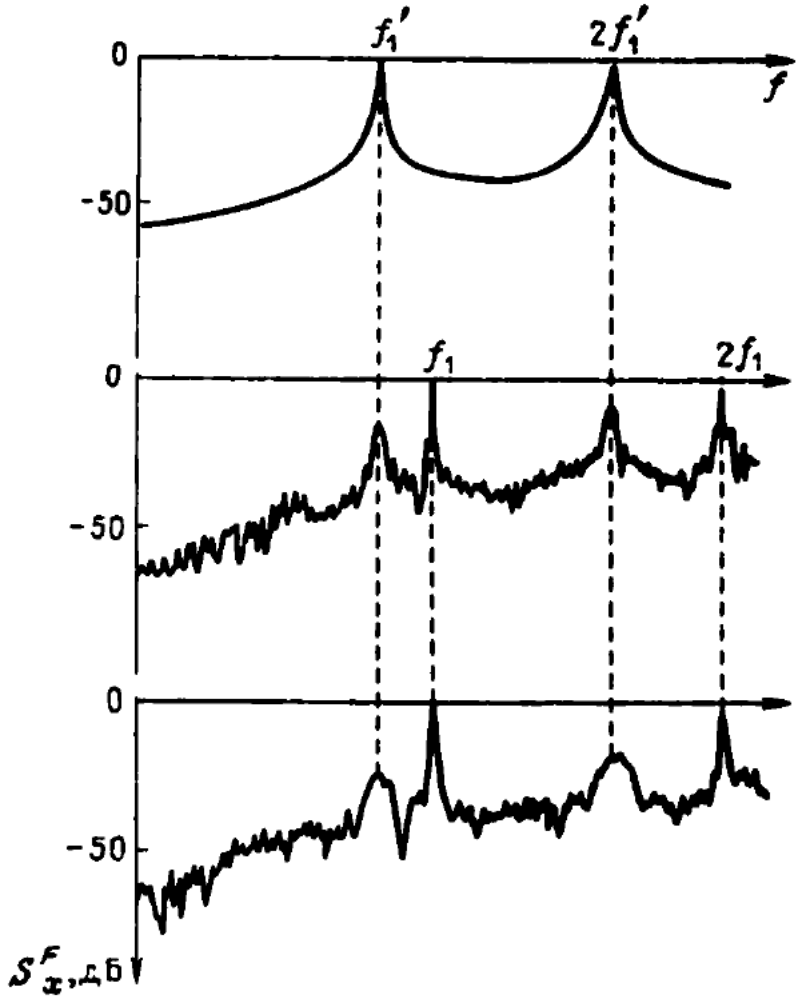
Исследуем влияние *жестких бифуркаций* вблизи точек C и F более детально (рис. 9.1). В точке $m_C = 1.10112$ система (7.38) интегрировалась



Р и с. 9.1. Зависимость мультипликатора ρ_1 2-тактного цикла Γ_1 от параметра m в сечении $g = 0.3$

на временах $\tau_0 \gtrsim 10^3$ и вычислялись спектр мощности, автокорреляционная функция, функция распределения, полный спектр ЛХП и размерность аттрактора. Затем, при начальных условиях на цикле Γ_1' параметр m незначительно уменьшался и вновь производились указанные расчеты. Установлено следующее. При малом удалении от точки C ($m = 1.1010 < m_C$) наблюдалась длительная *ламинарная* фаза колебаний, почти повторяющая движение на цикле Γ_1', однако в итоге система "переключалась" на режим странного аттрактора, который локализован в фазовом пространстве сис-

*) Исследование бифуркации удвоения циклов Γ_1' в различных сечениях по параметру g показало, что, начиная с некоторых $g < g_0$, реализуется каскад удвоений Фейгенбаума; для $g > g_0$ число удвоений конечно.



Р и с. 9.2. Спектры мощности колебаний при удалении по параметру от точки касательной бифуркации

темы так, что не содержит в себе окрестности неподвижной точки цикла Γ_1' в отображении Пуанкаре. Длительность ламинарной фазы уменьшалась с удалением по параметру от точки C, однако явления *перемежаемости*, т.е. случайным образом повторяющегося возврата траектории в окрестность цикла Γ_1', *не фиксировалось*. Нестационарный характер длительного во времени переходного процесса к хаосу вблизи точки C приводил к размытию спектральных линий исходного цикла Γ_1', и с удалением от точки касательной бифуркации возникал сплошной спектр аттрактора Фейгенбаума.

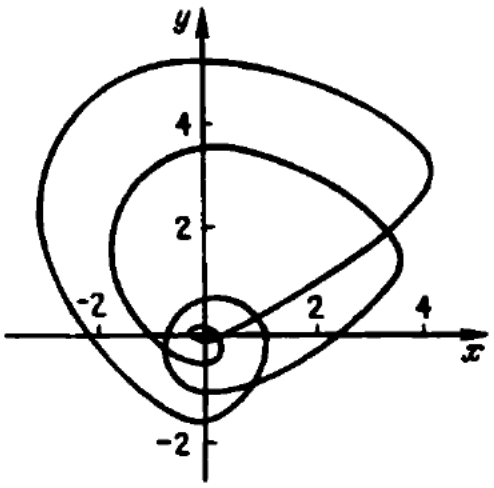
Результаты расчетов иллюстрирует рис. 9.2. Исходные линии спектра nf_1' устойчивого цикла Γ_1 с удалением от точки C постепенно уширяются. В итоге появляются новые линии nf_1, строго соответствующие неустойчивому циклу Γ_1: осуществляется переход к аттрактору, который возникает в результате последовательности удвоений в критической точке $m^* = 1{,}085\ldots$

В окрестности точки F картина в целом аналогична, но переключение осуществляется с исчезающего цикла Γ_1 на устойчивый цикл Γ_1'. Получается, что в точках касательных бифуркаций C и F происходят *только жесткие* переходы либо к хаосу, либо к устойчивому периодическому движению без эффекта перемежаемости. Это принципиальный результат, нуждающийся в строгом объяснении.

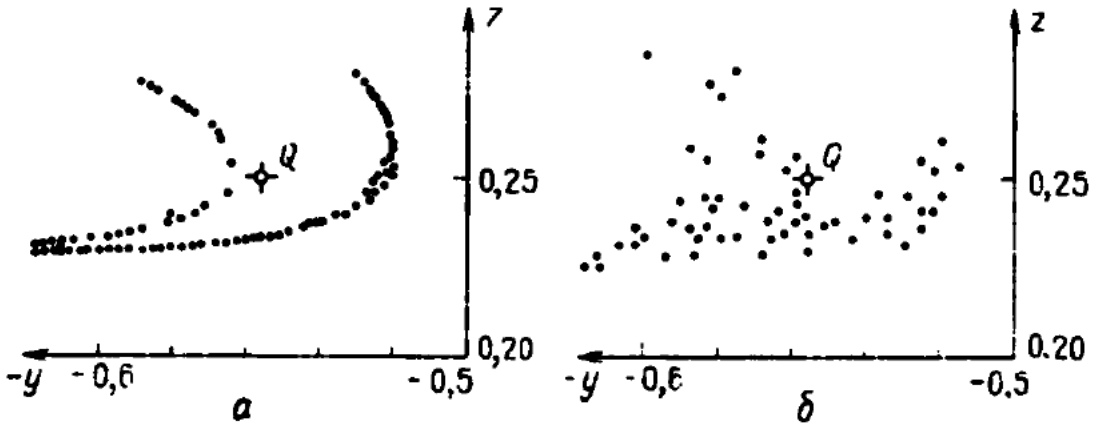
Как возникает истинная перемежаемость? В отображении Пуанкаре неустойчивому циклу Γ_1'' и устойчивому Γ_1 соответствуют неподвижные точки типа седла и узла (или фокуса) соответственно. До их слияния неустойчивые сепаратрисы седла могут не пересекаться с устойчивыми. Перемежаемость реализуется, если моменту седло-узловой бифуркации предшествует образование гомоклиники в окрестности указанных точек. В момент слияния и исчезновения седло-узла гомоклиническая структура становится притягивающей и изображающая траектория в отображении случайным образом во времени возвращается в окрестность исчезающей устойчивой точки.

В динамической системе (7.38) указанный бифуркационный механизм не реализуется. Подтвердим это численными экспериментами. Вновь обратимся к рис. 8.6*а* и сосредоточим внимание на области значений параметра вблизи m =1,15, где существует окно устойчивости. В зависимости от начальных условий здесь возможны устойчивые периодические режимы различной структуры. Выберем 4-тактный цикл и обозначим его Г. В точке плоскости параметров m = 1.152, g = 0,3 цикл Г устойчив, его мультипликаторы равны ρ_1 = 0,3890, ρ_2 = 0.0228. Проекция цикла Г на плоскость x, y изображена на рис. 9.3. В точке m = 1.15231, g = 0,3 мультипликатор ρ_1 обращается в +1. Эта точка идентична с точкой F рис. 9.1, и в ней цикл Г исчезает, сливаясь с неустойчивым.

Сместимся по параметру m в точку m = 1,155, произведем интегрирование системы (7.38) с начальными условиями на цикле Г, исключим длительный период установления $\tau_y \geqslant 10^{+3}$ и для установившегося режима



Р и с. 9.3. Четырехтактный устойчивый цикл системы (7.38) в закритической области значений параметров m = 1,152, g = 0,3



Р и с. 9.4. Сечения Пуанкаре при жестком переключении на режим странного аттрактора в результате бифуркации +1: *а* – флуктуации отсутствуют, *б* – интенсивность флуктуаций $D = 10^{-3}$

построим сечение Пуанкаре на плоскости $x = 0$. Результаты приведены на рис. 9.4*а* и свидетельствуют о жестком переключении с цикла Г на странный аттрактор. Перемежаемости нет, о чем говорит взаиморасположение аттрактора и неподвижной точки цикла Г, обозначенной буквой Q. Точка Q изолирована, т.е. ее окрестность не включается в аттрактор. Если по результатам счета сечения (рис. 9.4*а*) построить одномерную функцию последования $y_{n+1} = \varphi(y_n)$, то график модельного отображения оказывается типичным для касательной бифуркации в локальной окрестности точки Q, однако нелокальные свойства отображения не обеспечивают возвращаемости траектории в окрестность точки Q, исключая тем самым перемежаемость!

Эффекты переключения с режима на режим, носящие характер катастрофы, проявляются при расчетах на ЭВМ с высокой степенью точности в интервалах значений параметра $\Delta m \simeq 10^{-3}$. В радиофизическом генераторе управляемое изменение параметра возбуждения m осуществимо с погрешностью 1%, т.е. на порядок грубее. Следовательно, детальное исследование эффектов переключения в натурном эксперименте заведомо исключается. Тем не менее в физическом эксперименте явления переключения, гистерезиса и перемежаемости уверенно наблюдаются. Как это объяснить?

Существует по крайней мере две причины возможного расхождения экспериментальных и расчетных данных. Первая – несоответствие математической модели реальному генератору при значениях параметров в закритической области. Численные и физические эксперименты обоснованно отклоняют такое предположение, что будет проиллюстрировано всем последующим изложением. Вторая причина – воздействие естественных и технических флуктуаций на колебательные процессы в генераторе – является принципиальной и заслуживает внимания.

Влияние естественных флуктуаций моделируется соответствующей системой стохастических дифференциальных уравнений генератора [189]:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= mx + y - xz + \xi_1(\tau), \\ \dot{y} &= -x + \xi_2(\tau), \\ \dot{z} &= -gz + gI(x)x^2 + \xi_3(\tau), \end{aligned} \tag{9.1}$$

где $\xi_I(\tau)$ – нормально распределенный шум, удовлетворяющий условиям

$$\langle \xi_I(\tau) \rangle = 0, \ \langle \xi_i(\tau)\xi_j(\tau') \rangle = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ D\delta(\tau - \tau'), & i = j \end{cases} \tag{9.2}$$

D – интенсивность белого шума.

Исследуем колебательные процессы в системе при наличии *аддитивного шума* в предположении, что внешнее воздействие является малым возмущением исходных уравнений (7.38). Вычислим зависимость $\lambda_1(m)$ для $g = 0{,}3$, изменяя интенсивность шума D. Случаю $D = 0$ соответствует рис. 8.6. Рост интенсивности шумов приводит к последовательному исчезновению наименьших по параметру окон устойчивости многотактных циклов, и для $D \approx 10^{-2}$ аттрактор системы *становится* как бы *гиперболическим*, т.е. в некоторой конечной области параметра Δm не содержит

устойчивых периодических траекторий. Критическая точка рождения стохастичности смещается в сторону меньших значений параметра за счет зашумления циклов периода $2^k T_0$, начиная с некоторых $k > k_0$.

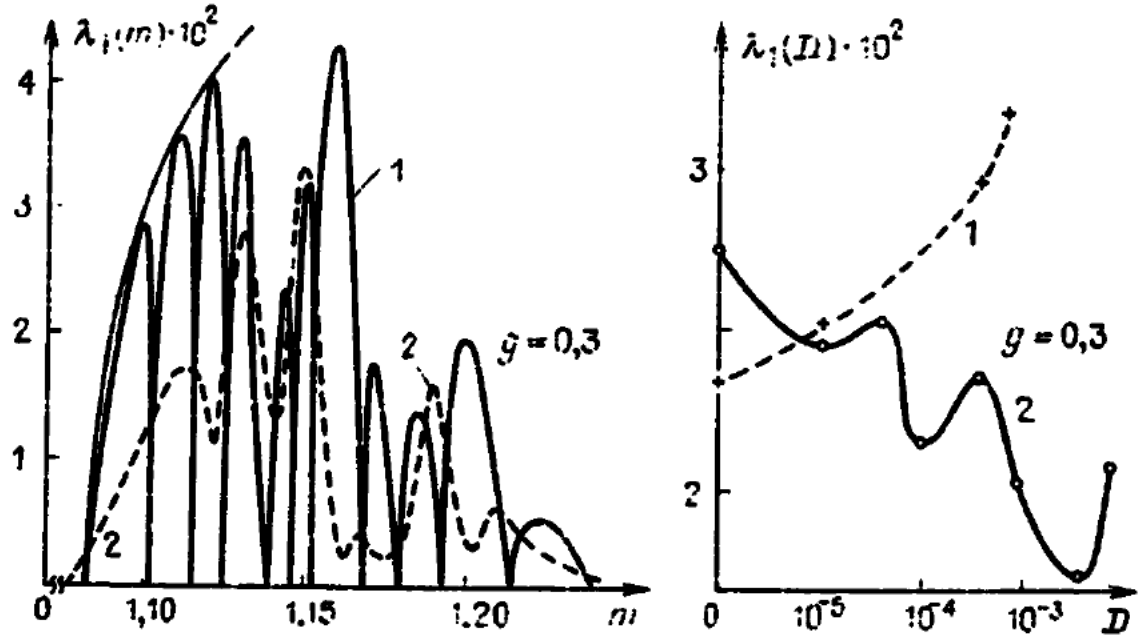
Реакция системы на *аддитивный* внешний нормальный шум в режимах, близких по параметрам к точкам касательных бифуркаций, оказывается принципиально нелинейной, зависящей от интенсивности D и расстояния по параметру от точки бифуркации $\rho_1 = +1$. Вблизи критической точки длительность почти периодических колебаний (ламинарной фазы) увеличивается с ростом интенсивности D, а величина λ_1 уменьшается. Удаление от критической точки приводит к противоположному результату: с ростом интенсивности шума D положительный показатель λ_1 возрастает, а время переключения на другой устойчивый режим уменьшается. Результаты расчетов по влиянию аддитивных флуктуаций на динамику системы иллюстрирует рис. 9.5. Таким образом, воздействие внешних шумов на систему (7.38) вблизи точки касательной бифуркации проявляется в том, что характерные времена релаксации к новому устойчивому режиму сложным образом зависят от интенсивности флуктуаций и значений параметров. Однако внешние *аддитивные шумы не индуцируют* явления перемежающейся *стохастичности*!

Обратимся к рис. 9.4*б*, где изображено сечение Пуанкаре для значений параметров рис. 9.4*а*, но при введении аддитивного шума интенсивности $D = 10^{-3}$. Близкая к одномерной в отсутствие шумов лента аттрактора под действием флуктуаций "разбухает", становится принципиально двумерной, но изображающие точки практически с равной вероятностью заполняют область вблизи невозмущенного аттрактора и не концентрируются в окрестности точки Q.

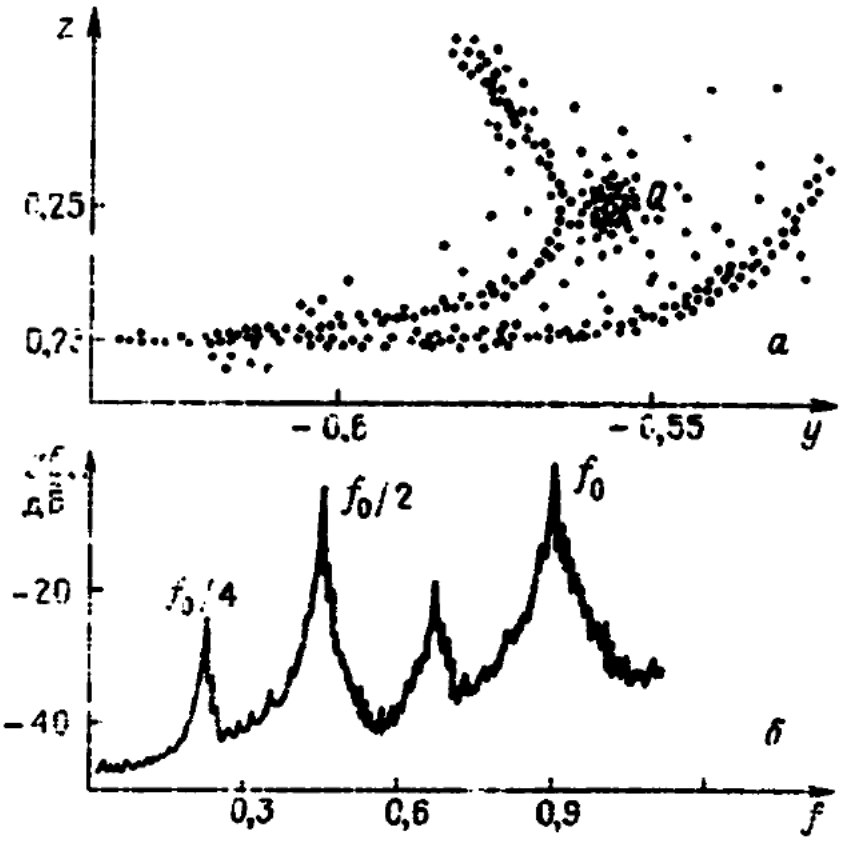
Вновь вернемся к циклу Г (рис. 9.3). Для значений параметра $m \lesssim m^0 = 1{,}15231$ режим устойчив. Увеличение параметра $m \gtrsim m^0$ приводит к жесткому переключению системы на CA (рис. 9.4*а*). Если медленно по сравнению с основным периодом колебаний генератора $T_0 \approx 2\pi$ изменять параметр m в малых пределах $\pm(0.005\text{--}0{,}010)$, то система генерирует либо периодические колебания, либо стохастические. При случайном характере изменений параметра колебания включают ламинарные фазы (движение на предельном цикле Г), нерегулярно во времени прерываемые турбулентными (движение на CA, когда значения параметра превышают критическое). Временные реализации процесса колебаний $x(\tau)$ не будут отличаться от типичных при перемежаемости. Но это не автоколебательный процесс, а *модуляционный, индуцированный флуктуациями параметров* системы! В отличие от систем типа Морса – Смейла, в которых технические шумы приводят к уширению спектральной линии генерируемого колебания, в системах со стохастическим поведением вблизи линий кратности *мультипликативные шумы могут индуцировать перемежающийся хаос*.

Математическая модель, описывающая процесс *модуляционной перемежаемости*, индуцированной техническими флуктуациями параметров генератора, в общем виде может быть записана так:

$$\dot{x} = [m^0 + \eta_1(\tau)]x + y - xz, \qquad \dot{y} = -x,$$
$$\dot{z} = [g^0 + \eta_2(\tau)][I(x)x^2 - z], \tag{9.3}$$



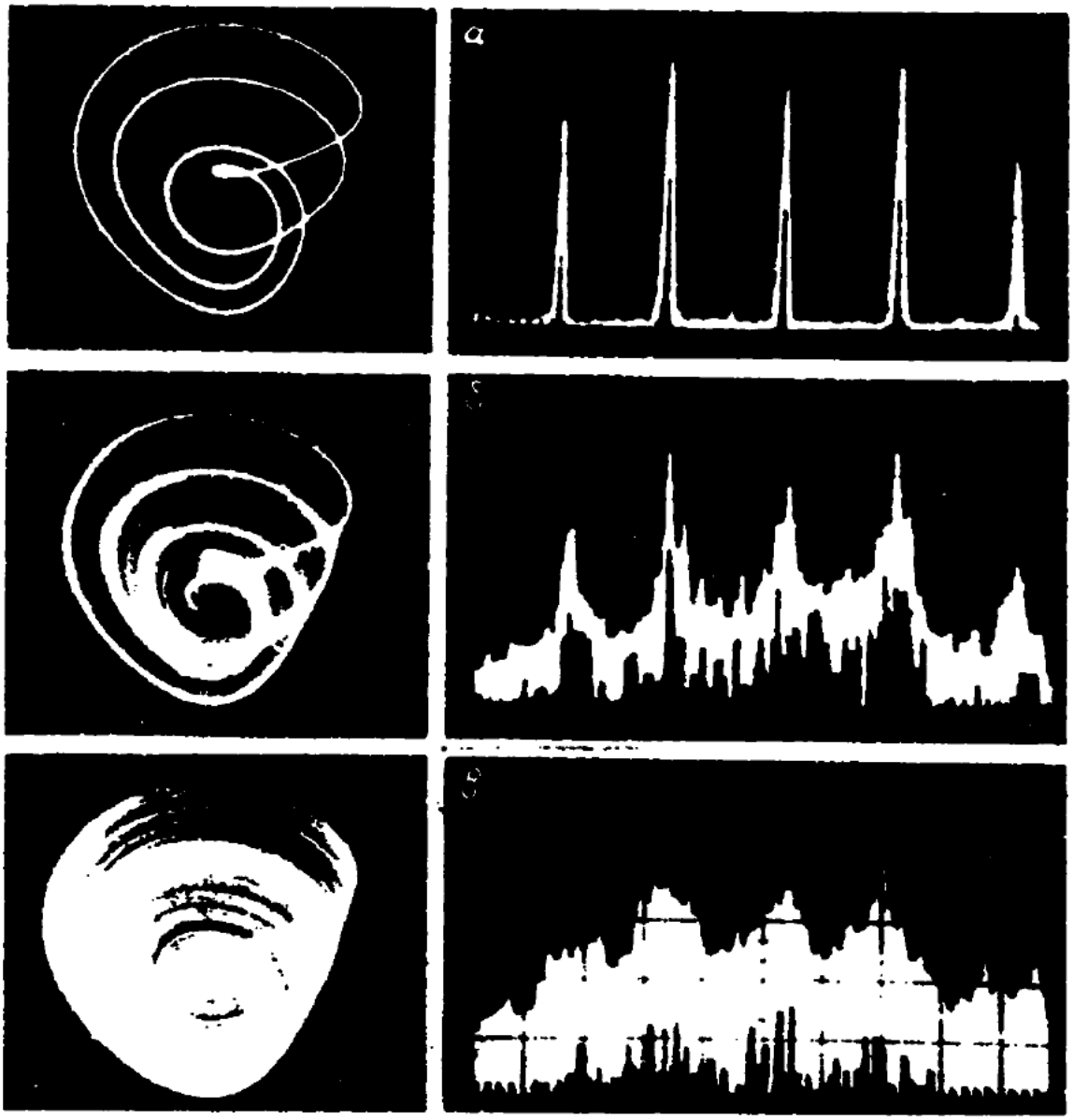
Р и с. 9.5. Влияние шумов на степень хаотичности движения: *а* – $\lambda_1(m)$ для $D = 0$ (кривая *1*) и $D = 10^{-3}$ (кривая *2*). *б* – $\lambda_1(D)$ для $m = 1{,}10050$ (кривая *1*), $m = 1.10100$ (кривая *2*); $m^* = 1{,}10112$



Р и с. 9.6. Сечение Пуанкаре (*а*) и спектр мощности (*б*) при индуцированной мультипликативным шумом перемежаемости ($m = 1.1522$, $g = 0.3$, $D = 0.01$, $p = 0{,}01$)

где m^0 и g^0 – значения параметров, отвечающие периодическому режиму колебаний в точке касательной бифуркации (точки на бифуркационных линиях кратности), $\eta(\tau)$ – функции типа периодических возмущений со случайными амплитудой и фазой. Начальные условия решения задачи Коши должны принадлежать периодическому режиму колебаний в невозмущенной системе (9.3).

Проведем численный эксперимент с системой (9.3), задав $\eta_1(\tau) = \xi(\tau)\sin(p\tau)$. $\eta_2(\tau) \equiv 0$, считая $\xi(\tau)$ белым шумом интенсивности D и положив $p = 0{,}01$. На рис. 9.6 представлены данные расчета сечения Пуанкаре и спектра мощности режима колебаний при указанных условиях. Видно, что изображающие точки в сечении концентрируются в окрестности точки Q, свидетельствуя о наличии *возвращаемости* траекторий (ламинарные фазы колебаний). В то же время в сечении Пуанкаре присутствуют изображающие точки в окрестности хаотической ленты (см. рис. 9.4*а*, при $D = 0$), что свидетельствует о "турбулентных" фазах движения. Спектр режима, дискретный в отсутствие шума, приобретает характерный вид, отражающий процесс модуляционной перемежаемости.



Р и с. 9.7 Проекции фазовых потретов (слева) и спектры мощности колебаний (справа) при модуляционной перемежаемости (физический эксперимент): *а* – цикл Г вблизи точки бифуркации +1 (рис. 9.3), *б* – перемежаемость, *в* – странный аттрактор

Теперь обратимся к физическому эксперименту. На рис. 9.7*а* показан устойчивый периодический режим вблизи точки бифуркации $\rho_1 = +1$. $m \approx 1{,}15$. $g = 0{,}3$. На рис. 9.7*б* представлена проекция фазовой траектории на плоскость x, y в режиме перемежаемости, реализующемся, если установить промежуточное значение параметра $1{,}15 < m < 1{,}16$. На рис. 9.7*в* – странный аттрактор, на который система переключается с увеличением параметра m до значения 1,16. Как видно из сопоставления расчетных и экспериментальных данных, *в физическом* эксперименте наблюдается именно *модуляционная перемежаемость* с типичными закономерностями в характере спектров процесса.

В экспериментах явление модуляционной перемежаемости вблизи линий кратности многотактных циклов уверенно регистрировалось для 3-, 4- и 5-тактных циклов. Анализ усеченных реализаций временных процессов с помощью запоминающего осциллографа подтвердил случайный характер появления и длительности ламинарных фаз колебаний, прерывающихся турбулентными всплесками движения на CA.

Наличие складок у поверхности S^0 (рис. 7.12), число которых увеличивается с ростом "тактности" периодических колебаний, и бифуркации удвоения периода, вызывающие иерархию ветвления поверхностей Q, отвечающих устойчивым колебаниям удвоенных периодов, приводят к сложным, практически непредсказуемым гистерезистным явлениям, фундаментальной причиной которых является катастрофа сборки.

Ограниченность нашего воображения, пасующего перед возможностью наглядного представления картины бесконечного ветвления бесконечного числа базовых периодических решений, поначалу порождает чувство безысходности и сомнения в возможность проникнуть в тайны динамики даже простейшей в этом смысле системы в $\mathbb{R}^3$ с двумя параметрами. На что же рассчитывать в случае увеличения размерности фазового пространства и числа управляющих параметров динамической системы? В подобной ситуации в начале века оказался А.Пуанкаре, когда пришел к выводу о невозможности наглядного представления гомоклинической структуры, возникающей при действии возмущения на сепаратрисный контур. От подобных настроений необходимо решительно отказаться, если иметь целью изучение систем со стохастическим поведением, для которых указанные явления типичны.

9.2. Взаимодействие странных аттракторов. Перемежаемость типа "хаос – хаос"

В диссипативных системах с хаотической динамикой в зависимости от параметров и начальных условий, как правило, реализуется бесконечное число аттракторов, как регулярных, так и странных, отличающихся по своей структуре. Фиксирование управляющих параметров не меняет картины: аттракторов остается бесконечное множество, их области притяжения разделены в фазовом пространстве сепаратрисными поверхностями. То обстоятельство, что наряду со странными аттракторами в фазовом пространстве системы сосуществует множество регулярных периодических режимов, делает проблему теоретического описания динамики диссипативных систем чрезвычайно сложной.

Многочисленные результаты экспериментов свидетельствуют, что области притяжения и существования периодических режимов в фазовом пространстве и по параметрам уменьшаются с увеличением периода. В физических и численных экспериментах это приводит к тому, что циклы больших периодов за счет флуктуаций не регистрируются, аттрактор не включает устойчивых периодических траекторий, т.е. становится как бы гиперболическим. Теоретически это уже не динамическая система, а стохастическая в классическом смысле термина. Подобные динамические системы предложено называть системами с *квазиаттракторами* (квазигиперболическими системами). Многочисленные экспериментальные данные свидетельствуют, что именно квазиаттракторы являются наиболее точным математическим образом хаотических колебаний реальных систем. Недостаточное количество строгих результатов по статистической и эргодической теории квазиаттракторов должно стимулировать экспериментальные исследования.

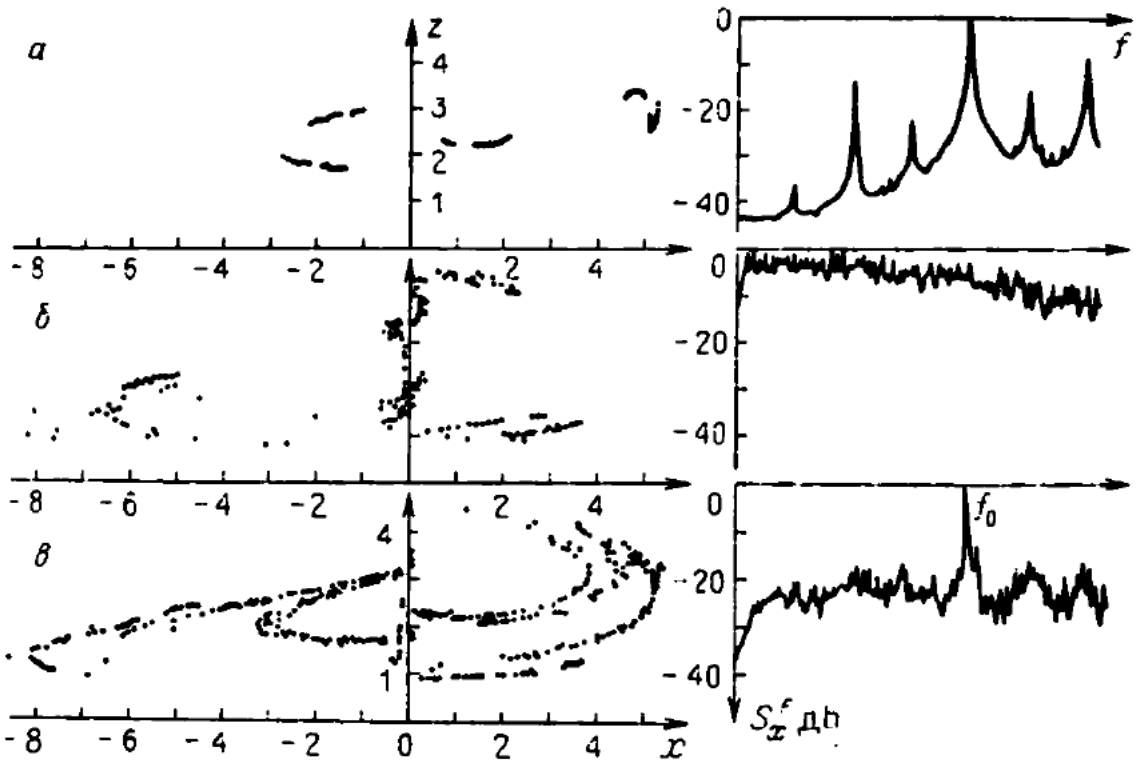
Типичное явление в квазигиперболических системах рассмотрено в 9.1 – это модуляционная перемежаемость, необходимыми условиями реализации которой являются близкие по параметрам и в фазовом пространстве сосуществование хотя бы двух устойчивых режимов (регулярного и странного) и флуктуации параметров. Обсудим еще одно типичное для таких систем явление: взаимодействие странных аттракторов, приводящее к *перемежаемости* нового типа "*хаос – хаос*" [197–200, 159].

Проведем численный эксперимент с динамической системой (7.38) в сечении $g = 0{,}097$ плоскости параметров, изучая режимы колебаний с изменением параметра m. Основной предельный цикл системы периода T_0 в результате накопления бифуркаций удвоения периода эволюционирует к странному аттрактору (обозначим его CA_1), мягко рождающемуся в критической точке $m^* = 2{,}39$. Этот аттрактор в сечениях $g = 0{,}2$ и $0{,}3$ уже подробно рассматривался. В закритической области $m \gtrsim 2{,}39$ аттрактор CA_1 развивается в полном соответствии с закономерностями, рассмотренными выше.

В бифуркационной точке $m = 2{,}31$ из слушения траекторий в результате бифуркации $\rho = +1$ жестко рождается пара 3-тактных циклов, седловой и устойчивый*). Устойчивый 3-тактный цикл с ростом параметра m также претерпевает бесконечную последовательность бифуркаций удвоения периода, которая завершается рождением аттрактора CA_3 в критической точке $m_3^* = 2{,}35$. С ростом параметра m до значений, меньших некоторого критического ($2{,}44 < m_0^* < 2{,}45$), CA_3, как и CA_1, демонстрирует типичные закономерности, включая появление узких по параметру окон устойчивости многотактных циклов различных семейств. В интервале значений параметра $2{,}40 < m < m_0^*$ независимо существуют оба странных аттрактора CA_1 и CA_3, зоны притяжения которых в фазовом пространстве разделяет сложная сепаратрисная поверхность.

---

*) В зависимости от m и начальных данных в сечении $g = 0{,}097$ жестко возникает несколько типов 3-тактных колебаний. Первое семейство 3-тактных циклов рождается при $m = 1{,}25$ и развивается в странный аттрактор через удвоения в критической точке $m^* = 1{,}413$ в соответствии с законом Фейгенбаума. В интервале $1.4 < m < 1.5$ одновременно в разных областях фазового пространства существует странный аттрактор на базе 3-тактных циклов и устойчивый цикл периода T_0 [191, 198].



Р и с. 9.8. Сечения Пуанкаре (слева) и спектры мощности колебаний (справа) при перемежаемости типа "хаос–хаос"

На рис. 9.8 приведены результаты расчета сечения Пуанкаре системы (7.38) на плоскости $y = 0$ и соответствующих спектров мощности. Сечения Пуанкаре, изображенные на рис. 9.8*а, б*, вычислялись для значения параметра $m = 2{,}41$ с начальными условиями на аттракторах CA_1 и CA_3 соответственно. По расположению точек на секущей видно, что существует два независимых аттрактора, локализующихся в различных областях фазового пространства системы (7.38) без пересечения. Аттракторы CA_1 и CA_3 грубые, так как сохраняют свою структуру и статистические свойства при малых изменениях управляющих параметров и воздействии нормального шума интенсивности $D \leqslant 10^{-2}$.

С увеличением параметра m аттракторы начинают взаимодействовать. Сепаратрисная поверхность, разделяющая CA_1 и CA_3 до некоторого порогового значения m_0^*, при достижении порога разрушается, и аттракторы сливаются. Формируется объединенный аттрактор CA_0, включающий в себя как CA_1, так и CA_3. На рис. 9.8*в* изображено стохастическое множество в секущей плоскости для значения параметра $m = 2.45 > m_0^*$, которое включает аттракторы CA_1 и CA_3 с учетом их незначительной эволюции с ростом параметра m. Объединенный аттрактор реализуется независимо от того, принадлежат ли начальные условия областям притяжения CA_1 или CA_3, свидетельствуя о разрушении сепаратрисной поверхности. По-видимому, при образовании объединенного аттрактора CA_0 происходит и объединение областей притяжения CA_1 и CA_3.

Детальные исследования временных реализаций, автокорреляции, спектра мощности и интегральной интенсивности колебаний в режимах CA_1, CA_3 и CA_0 показывают, что при прохождении параметром m критической точки объединения аттракторов m_0^* система вначале более длительное

время проводит непрерывно на CA_1. Переключение на CA_3 происходит нерегулярно во времени и носит характер "турбулентных" всплесков на фоне относительно более длительных "ламинарных" фаз движения на CA_1, энергия которого заметно меньше энергии CA_3. Переключение на аттрактор CA_3 можно диагностировать по временной реализации $x(\tau)$, когда возникает отрицательный всплеск в зависимости $x(\tau)$, амплитуда которого превышает максимально возможные при движении на CA_1.

Статистический анализ относительного времени пребывания системы в состояниях "турбулентных" и "ламинарных" фаз в режиме объединенного аттрактора показал, что для малых превышений над порогом зависимость среднего времени пребывания системы на CA_1 допускает приближенную оценку в виде соотношения, справедливого для перемежаемости типа "цикл – хаос" [198]:

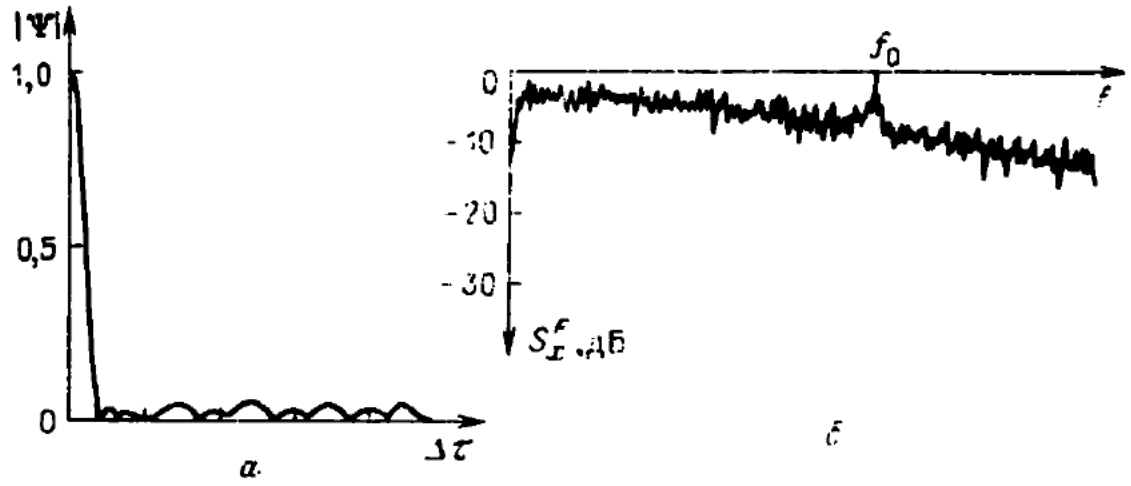
$$\langle \tau_1 \rangle = c(m - m_0^*)^{-1/2}, \quad c = 18.0, \quad m_0^* = 2.445. \tag{9.4}$$

Длительность ламинарной фазы колебаний (здесь ей соответствует режим стохастичности, близкий по структуре к CA_1) уменьшается с ростом надкритичности с критическим индексом $-1/2$, а средняя длительность турбулентных всплесков (движение на CA_3) соответственно возрастает. Очевидная аналогия с режимом перемежаемости "цикл – хаос" позволяет назвать описанное явление *перемежаемостью типа "хаос – хаос"* [198].

С ростом надкритичности турбулентные всплески следуют чаще, что приводит к увеличению средней энергии CA_0. Заметно растет интенсивность автоколебаний, спектр мощности которых все более выравнивается, эволюционируя одновременно в область более низких частот. Автокорреляционная функция процесса колебаний стремится к δ-образной, свидетельствуя о сильном перемешивании.

На рис. 9.9 приведены автокорреляционная функция и усредненный спектр мощности объединенного аттрактора CA_0, рассчитанные по реализации $x(\tau)$ для $m = 2{,}55$. Трубулентные всплески следуют в среднем через относительно большее время. Это и является причиной эволюции спектра мощности в область более низких частот.

Объединенный аттрактор не разрушается под действием δ-коррелированного шума, демонстрируя свойство грубости. Влияние шума при чис-



Р и с. 9.9. Автокорреляционная функция (*а*) и спектр мощности колебаний (*б*) объединенного аттрактора CA_0 ($m = 2{,}55$, $g = 0{,}097$)

ленном моделировании процесса стохастическими уравнениями (9.1) приводило к изменению конкретных моментов времен переключения системы с CA_1 на CA_3, однако средние статистические характеристики CA_0 практически не изменялись. В зависимости от интенсивности шумового воздействия на CA_0 можно было индуцировать более сложную перемежаемость типа "*хаос – цикл – хаос*". Такой процесс автоколебаний случайным образом включает отрезки реализаций, принадлежащие CA_1, CA_3 и одному или нескольким многотактным циклам.

Приведенные результаты можно, в частности, трактовать как экспериментальное доказательство нетривиального факта возможности ветвления хаотических решений системы нелинейных дифференциальных уравнений при изменении управляющих параметров.

9.3. Влияние диссипативной нелинейности на бифуркации аттракторов

В системах малой размерности хаотические автоколебания имеют место, в частности, в моделях с линейными диссипативными членами в уравнениях, характеризующими затухание мод. Автоколебания таких систем обусловлены, как правило, параметрическим возбуждением и нелинейной инерционной перекачкой энергии в затухающую моду [22]. Уточнение моделей с целью более правильного описания реальных систем часто требует учета нелинейных *диссипативных* слагаемых в правых частях исходных дифференциальных уравнений*). Примером служит система уравнений (7.28), являющаяся обобщением уравнений генератора (7.38) на случай нелинейной крутизны характеристики основного усилителя.

Можно ожидать, что бифуркационные механизмы разрушения странного аттрактора с введением нелинейной диссипации будут в определенном смысле общими.

Проиллюстрируем это на примерах двух наиболее типичных трехмерных систем: классической модели Лоренца (7.8) и обобщенной модели генератора с инерционной нелинейностью (7.28). Модель Лоренца типична для динамических систем с инерционными возбуждениями [179, 180], в которых режим странного аттрактора возникает жестко. Модель генератора с инерционной нелинейностью – пример типа систем с мягким возбуждением квазигиперболической стохастичности за счет накопления бифуркаций удвоения периода.

Классическая модель Лоренца (7.8), описывающая трехмодовую конвекцию вязкой жидкости, при больших числах Прандтля ($\sigma > 1 + b$) уже не соответствует реальной конвекции, но остается интересной для физиков (уравнения лазера [201]), механиков и радиофизиков (инерционный параметрически возбуждаемый нелинейный осциллятор (7.11) [202]), а также, с точки зрения строгой математики, интересна как система с негрубым гиперболическим аттрактором [1, 2, 43, 83]. Оставим в стороне детальное обсуждение вопроса о соответствии математической модели и реальной системы и рассмотрим следующие уравнения:

$$\dot{x} = -\sigma(x - y), \quad \dot{y} = rx - y - xz, \quad \dot{z} = -bz - dz^3 + xy. \tag{9.5}$$

*) Нелинейности, способствующие дополнительному сжатию фазового потока, будем называть диссипативными.

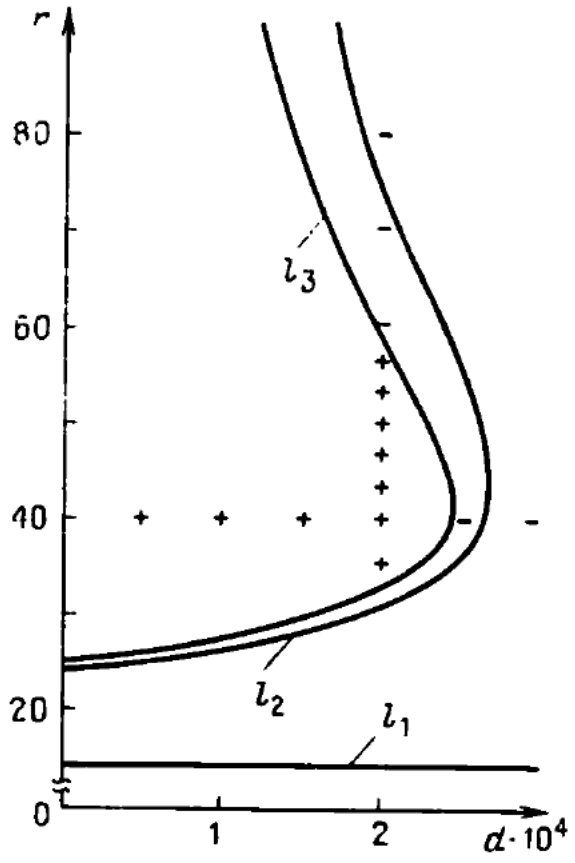
В третьем уравнении системы (9.5) добавлен член $-dz^3$, учитывающий в первом приближении нелинейный характер диссипации, что может быть обусловлено, например, нелинейностью теплопроводности [203]. Дивергенция векторного поля скоростей (9.5) зависит теперь от координат:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F} = -(\sigma + 1 + b + 3dz^2) < 0. \qquad (9.6)$$

Бифуркации в классической модели (7.8) хорошо изучены [1, 2, 43, 83]. Для традиционных значений $\sigma = 10$, $b = 8/3$ при $1 < r < r_1 = 13{,}92$ имеется седловая точка в начале координат и два устойчивых фокуса O_1 и O_2. При $r = r_1$ сепаратрисы становятся двоякоасимптотическими к седлу в начале координат, и переход через бифуркационную точку $r = r_1$ сопровождается рождением пары седловых периодических движений. В интервале $r_1 < r < r_2 = 24{,}06$ единственным притягивающим множеством системы остаются фокусы O_1 и O_2. В интервале $r_2 < r < r_3 = 24{,}74$ появляется аттрактор Лоренца, но еще остаются устойчивые фокусы. В этой области значений параметра r в зависимости от начальных условий реализуются три аттрактора, но при $r \geqslant r_3$ остается лишь один – аттрактор Лоренца.

Результаты расчета характерных бифуркационных линий на плоскости параметров r и d системы (9.5) для фиксированных $\sigma = 10$ и $b = 8/3$ представлены на рис. 9.10 [182]. Линия l_1 рассчитывалась исходя из условия возвращения сепаратрисы в седло в начале координат. При начальных условиях на сепаратрисе, определяемых из решения линеаризованных вблизи нуля уравнений, система (9.5) интегрировалась с выводом на печать координат x и y в секущей, заданной уравнением $\dot{z} = 0$. С достижением параметром бифуркационного значения сепаратриса возвращалась в седло, о чем свидетельствовало одновременное изменение знака у координат x и y, вызываемое уходом сепаратрисы в область второго фокуса. Для значений d в интервале $0 < d < 3 \cdot 10^{-4}$ влияния нелинейной диссипации на эту бифуркацию практически не заметно. Объясняется это тем, что координата z при данной бифуркации лишь незначительно превосходит величину $r - 1$ и слагаемым $3dz^2$ в (9.6) можно пренебречь.

Влияние становится заметным для $d > 10^{-3}$. Бифуркационная линия l_2, соответствующая режиму "намотки" сепаратрисы на неустойчивый цикл, характеризуется, как



Р и с. 9.10. Бифуркационная диаграмма на плоскости параметров r и d системы (9.5)

видно из рис. 9.10, сложной нелинейной зависимостью $r(d)$. Расчет проводился методом дихотомии: определялись значения параметров d_1 и d_2 (либо r_1 и r_2), лежащие по разные стороны от линии l_2. При этом сепаратрисы вели себя принципиально различно: либо стохастически, либо сходились в фокусы. Затем разность Δd (либо Δr) плавно уменьшалась до малого значения, определяющего точность расчета бифуркационной линии l_2.

Линия l_3 – бифуркационная линия исчезновения неустойчивого цикла, когда в системе остается только аттрактор Лоренца. Эта линия рассчитывалась путем линеаризации векторного поля в точке равновесия O_1:

$$x = y = [b(r-1) + d(r-1)^3]^{1/2}, \quad z = r - 1, \tag{9.7}$$

и нахождения условий, при которых характеристический полином векового уравнения

$$\begin{aligned} &3d^2(r-1)^5 + 9(\sigma+1)d^2(r-1)^4 + d(1-\sigma+4b)(r-1)^3 + \\ &+ 3(\sigma+1)(\sigma+2b+1)d(r-1)^2 + \\ &+ b(1+\sigma+b)(r-1) + (\sigma+1)(1+\sigma+b)b = 0 \end{aligned} \tag{9.8}$$

имеет два чисто мнимых корня.

Алгебраическое уравнение (9.8) при фиксированных σ и b задает искомую зависимость $r(d)$, т.е. бифуркационную линию l_3, которая определяет границу области устойчивости на плоскости параметров. Поведение системы на границе области устойчивости требует учета влияния нелинейных членов уравнений (9.5), вычисления и определения знака ляпуновских величин.

Расчет ℓ_1 для системы (9.5) показал, что на границе области устойчивости (на линии l_3) первая ляпуновская величина положительна, что доказывает сохранение субкритического характера бифуркации Андронова – Хопфа, установленного для классической модели (7.8) в [204].

Субкритический характер бифуркации еще не доказывает рождения хаоса, хотя грубость системы по отношению к введению в уравнения (7.8) нелинейного диссипативного слагаемого дает основания предполагать наличие странного аттрактора внутри области значений параметров, ограничиваемой бифуркационной линией l_3 (рис. 9.10). Абсолютным критерием стохастичности служит наличие положительного показателя в спектре ЛХП системы и, как следствие, дробная размерность притягивающего множества. С целью определения размерности аттрактора рассчитывался полный спектр ЛХП системы (9.5) вдоль прямых на плоскости параметров $r = 40$ и $d = 2 \cdot 10^{-4}$. Внутри области, ограниченной бифуркационной линией l_3, тип спектра ЛХП соответствует странному аттрактору с ляпуновской размерностью $D_L = 2{,}065 \pm 5 \cdot 10^{-3}$ и положительным ляпуновским показателем $0{,}98 < \lambda_1 < 1{,}06$. В точке $r = 40$, $d = 2 \cdot 10^{-4}$ спектр ЛХП равен: +1,032; 0,000; −15,491, что соответствует размерности $D_L = 2{,}0666$.

Выход из области стохастичности (переход через линию l_3) сопровождается бифуркацией в спектре ЛХП, который состоит теперь из трех отрицательных показателей. Это обусловлено сменой характера устойчивости стационаров и вне бифуркационной линии l_3 траектории системы при-

тягиваются к одному из них, O_1 или O_2. На рис. 9.10 точки с положительной метрической энтропией отмечены символом "+" ($\lambda_1 > 0$), символом "–" помечены точки, соответствующие устойчивым стационарам.

Расположение и характер бифуркационных линий на рис. 9.10 наглядно свидетельствует о том, что с ростом параметра диссипативной нелинейности d область существования аттрактора Лоренца в пространстве параметров системы постепенно уменьшается, и в итоге стохастичность исчезает, уступив место регулярному аттрактору, которым является положение устойчивого равновесия. Отметим, что аттрактор Лоренца разрушается при движении по параметру d в результате серии характерных бифуркаций, реализующихся в обратном порядке в сравнении с последовательностью критических явлений, приводящих к жесткому рождению аттрактора Лоренца в классической модели (7.8).

Рассмотрим влияние диссипативной нелинейности на бифуркации аттракторов в системе (7.28). Численные эксперименты проводились следующим образом. Для значений $d = 0$, $g = 0{,}3$, $m = 0{,}2$ находился основной предельный цикл системы Γ_0 периода 2π и осуществлялось слежение за его мультипликаторами с ростом параметра d. Применялся описанный выше прием сначала однопараметрического, а затем двупараметрического анализа устойчивости семейства 1-тактных циклов Γ_0.

Результаты расчетов представлены на рис. 9.11. Бифуркационная линия l_{01} соответствует удвоению цикла Γ_0 (мультипликатор цикла на линии l_{01} равен -1), линия l_{02} – бифуркационная линия кратности. Внутри области, ограниченной линией l_{01}, существуют два самостоятельных семейства 2-тактных циклов Γ_1 и Γ_1', бифуркационные диаграммы которых качественно повторяют картину для 1-тактного цикла Γ_0. Бифуркационная картина в указанном смысле подобна той, которая подробно обсуждалась при двупараметрическом анализе критических явлений в системе (7.38) на плоскости параметров m и g.

Последовательность бифуркаций удвоения для каждого семейства циклов приводит к рождению аттрактора в соответствии с законом Фейгенбаума. На рис. 9.11 нанесена линия критических значений параметров $l_{кр}$, выше которой рождается один из аттракторов системы за счет накопления бифуркаций удвоения основного семейства предельных циклов.

Если двигаться из области стохастичности на плоскости параметров по прямой m = const

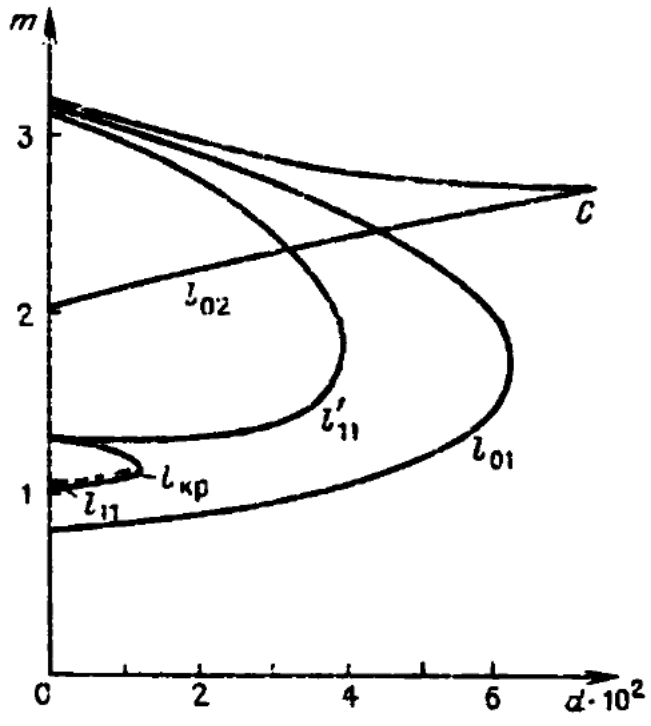


Рис. 9.11. Бифуркационная диаграмма на плоскости параметров m и d системы (7.28)

в сторону возрастания d (рис. 9.11), то последовательно пересекаются бифуркационные линии удвоений циклов периода $2^k T_0$ для $k = \infty, \ldots, \ldots n, \ldots, 1$. Имеет место последовательность бифуркаций *"уполовинивания" периода*. При каждой бифуркации период цикла уменьшается вдвое, а завершается процесс установлением в системе регулярных автоколебаний периода T_0. Увеличение параметра диссипативной нелинейности d приводит к разрушению странного аттрактора системы, причем последовательность критических явлений при этом строго соответствует обратной последовательности бифуркаций, в результате которых рождается странный аттрактор. Доказательством этому служат результаты вычисления скорости накопления бифуркаций удвоения периода по параметру d, которые свидетельствуют о выполнении закона Фейгенбаума с константой $\delta = 4{,}66920\ldots$ [182].

Процесс разрушения стохастичности с увеличением параметра диссипативной нелинейности можно наблюдать и исследовать в физическом эксперименте. В силу нелинейности характеристики любого реального усилителя степень влияния диссипативной нелинейности зависит от положения рабочей точки на характеристике, которое можно изменять внешней регулировкой уровня постоянного смещения. Изменяя уровень смещения и специальным образом поддерживая постоянным коэффициент усиления основного усилителя генератора, в физическом эксперименте можно плавно варьировать степень влияния нелинейного участка характеристики $S(x)$, что соответствует изменению параметра d математической модели (7.28).

Эксперименты показали, что при уменьшении уровня отрицательного смещения (увеличение степени влияния диссипативной нелинейности) наблюдается разрушение странного аттрактора. Вначале увеличивается тактность ленты аттрактора, затем фиксируется 8-тактный цикл, далее – последовательность бифуркаций "уполовинивания" периода, завершающаяся переходом в режим 1-тактных колебаний. Экспериментальные результаты полностью аналогичны изображенным на рис. 8.2, если их рассматривать в направлении уменьшения параметра m [182].

Проведенные численные и экспериментальные исследования влияния диссипативной нелинейности на динамику конкретных систем с различными бифуркационными механизмами рождения странного аттрактора свидетельствуют о том, что диссипативная нелинейность разрушает режим стохастичности. В модели Лоренца это приводит к переходу в стационарное состояние, в генераторе с инерционной нелинейностью – к устойчивым 1-тактным колебаниям. Бифуркационные механизмы разрушения стохастичности в рассмотренных моделях строго соответствуют тем, в результате которых стохастичность возникает, однако с ростом параметра диссипативной нелинейности указанные механизмы реализуются в обратном порядке.

ГЛАВА 10

МЕХАНИЗМЫ ОБРАЗОВАНИЯ, СТРУКТУРА И СВОЙСТВА КВАЗИАТТРАКТОРОВ И ГОМОКЛИНИЧЕСКИЕ ТРАЕКТОРИИ АВТОНОМНОЙ МОДЕЛИ ГЕНЕРАТОРА

10.1. Динамика генератора в окрестности гомоклинической траектории типа петли сепаратрисы седло-фокуса

Принципиально важную роль в понимании сложности динамических явлений в системах с квазигиперболическими свойствами играют, как уже отмечалось выше, *гомоклинические траектории*, возникающие в окрестности седловых периодических движений или седловых точек равновесия. Гомоклинические траекторни (точки) как результат грубого пересечения устойчивых и неустойчивых многообразий седловых циклов (устойчивых и неустойчивых сепаратрис седловых неподвижных точек) со времени открытия и изучения их А. Пуанкаре, Г. Биркгофом и С. Смейлом служат своего рода сигналом бедствия, предвещающим возможность сложного апериодического движения системы. Из существования гомоклинических траекторий при некоторых дополнительных предположениях строго следует наличие в их окрестности счетного множества устойчивых и неустойчивых периодических траекторий различных периодов, включая континуум траекторий, устойчивых по Пуассону.

Не будет большой ошибкой считать, что гомоклиническая траектория неизбежно порождает в своей окрестности по параметрам и фазовым координатам квазиаттракторы. Поэтому доказательство существования гомоклинических точек и траекторий в динамических системах является безусловно фундаментальным шагом в исследовании стохастичности и может рассматриваться в качестве ее критерия. Строгое обоснование на уровне теоремы проблемы существования гомоклинических траекторий в динамических системахобщего вида и тем самым доказательство наличия счетного числа циклов – задача, пока не решенная. В связи с этим в конкретных случаях необходимо прибегать к помощи численных экспериментов.

Многосторонний экспериментальный анализ механизмов возникновения и топологической структуры хаотических притягивающих множеств в модифицированном генераторе с инерционной нелинейностью обоснованно приводит к мысли о существовании в автономной динамической системе гомоклинической траектории типа *петли сепаратрисы состояния*

равновесия. Однако, как нетрудно показать, в системе (7.38) петля сепаратрисы седло-фокуса в начале координат не реализуется!

Действительно, особая точка системы характеризуется двумерным неустойчивым и одномерным устойчивым многообразиями. Заменим время в (7.38) на обратное и зададим начальные условия $x(0) = y(0) = 0, z(0) > 0$ на одномерном неустойчивом многообразии. Интегрирование системы подтвердит уход траектории на бесконечность вдоль оси z. Из уравнений (7.38) следует, что $z(\tau) = z(0)\exp(g\tau)$. Траектория при $\tau \to \infty$ в особую точку не возвращается!

Проведем другой эксперимент. Будем интегрировать систему (7.38) в прямом времени с начальными условиями на ленточном аттракторе и двигаться по плоскости параметров в область наиболее развитой стохастичности, уменьшая параметр g и увеличивая m (рис. 7.8). При интегрировании на больших временах обеспечим регистрацию величины R_{min} – наименьшего расстояния фазовой точки от одномерного устойчивого многообразия системы (оси переменной z). Результаты расчетов следующие:

$m = 1{,}16,\ g = 0{,}3 - R_{min} = 0{,}13;$

$m = 1{,}45,\ g = 0{,}21 - R_{min} = 0{,}53 \cdot 10^{-1};$

$m = 2{,}45,\ g = 0{,}1 - R_{min} = 0{,}28 \cdot 10^{-1};$

$m = 2{,}8,\ g = 0{,}06 - R_{min} = 0{,}46 \cdot 10^{-2}.$

Фазовая траектория в режиме развитой стохастичности хотя и не касается строго оси z, однако подходит к ней сколь угодно близко. При этом отмечается нерегулярная во времени возвращаемость траектории в малую окрестность особой точки в нуле. Петли седло-фокуса нет, но ситуация весьма близкая!

Возникает естественная гипотеза: петля сепаратрисы седло-фокуса существует в некоторой возмущенной системе, порождая ее хаотическое поведение. Снятие возмущения приводит к исчезновению самой петли, но структура разбиения фазового пространства на траектории остается ввиду грубости системы. Чтобы подтвердить эти соображения, нужно определить вид слабо возмущенной системы, доказать наличие в ней петли сепаратрисы седло-фокуса, выяснить структуру аттракторов и изучить их эволюцию при снятии возмущения. Решение указанной задачи неоднозначно, но в силу свойства грубости конкретный вид малого возмущения не должен иметь принципиального значения.

Добавим во второе уравнение исходной системы (7.38) постоянный положительный член γ и рассмотрим возмущенную таким способом систему [13]:

$$\dot{x} = mx + y - xz, \quad \dot{y} = -x + \gamma, \quad \dot{z} = -gz + gI(x)x^2. \qquad (10.1)$$

Особая точка потока (10.1) по-прежнему единственна, слегка смещена относительно начала координат и представляет собой седло-фокус. Ее координаты: $x^0 = \gamma, y^0 = \gamma(\gamma^2 - m), z^0 = \gamma^2$. Состояние равновесия в возмущенной системе (10.1) для $m > 0$ характеризуется двумерным неустойчивым и одномерным устойчивым многообразиями. Для нахождения петли Γ_0^1 в уравнениях системы произведем замену времени на обратное

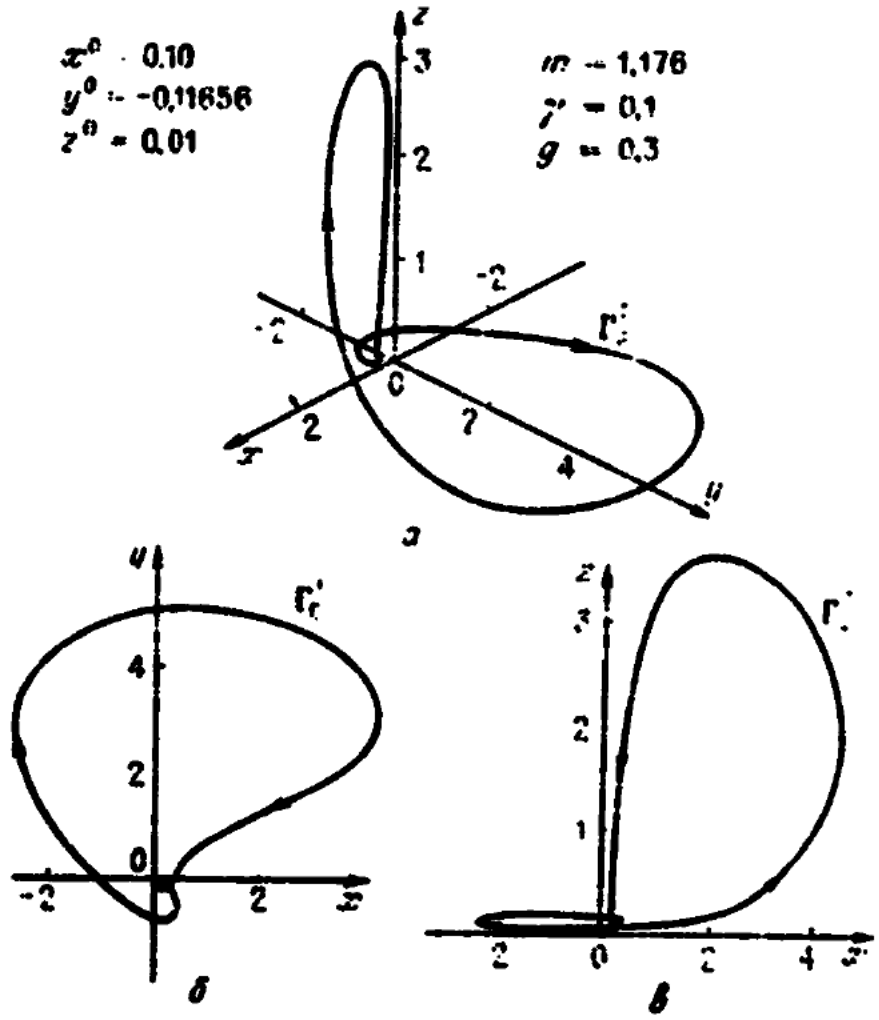
и с начальными условиями на одномерном неустойчивом многообразии решим многократно задачу Коши для фиксированного $g = 0{,}3$ и различных m и γ. Выбрав малое значение $\gamma = 0{,}1$, найдем бифуркационную точку $m^* = 1{,}176\ldots$, в которой реализуется однообходная петля седло-фокуса Γ_0^1. Трехмерное изображение двоякоасимптотической траектории Γ_0^1 и ее проекции на две плоскости представлены на рис. 10.1. Траектория Γ_0^1 негрубая, и для $m > m^*$ петля разрушается в сторону A, а для $m < m^*$ – в сторону B в соответствии с обозначениями на рис. 5.3.

Проведем численно двупараметрический анализ бифуркационных явлений в системе (10.1), построив на плоскости параметров m и g основные бифуркационные линии коразмерности 1 для фиксированного значения $\gamma = 0{,}1$. Бифуркационная диаграмма системы дана на рис. 10.2 и содержит линию бифуркации Андронова – Хопфа l_{00}, линии удвоения периода l_{01} и кратности l_{02} для основного семейства циклов. Расположение указанных бифуркационных линий на плоскости параметров качественно не отличаются от соответствующей диаграммы системы (7.38), свидетельствуя о грубости последней в отношении малого возмущения потока. Отличия есть в отклонении линии бифуркации рождения цикла l_{00} от прямой $m = 0$, в некотором увеличении бифуркационных значений параметра m при удвоениях и расширении зоны удвоений по параметру g (ср. диаграмму на рис. 7.8). Относительное положение линии критических значений параметров $l_{кр}$ на диаграмме также сохранилось.

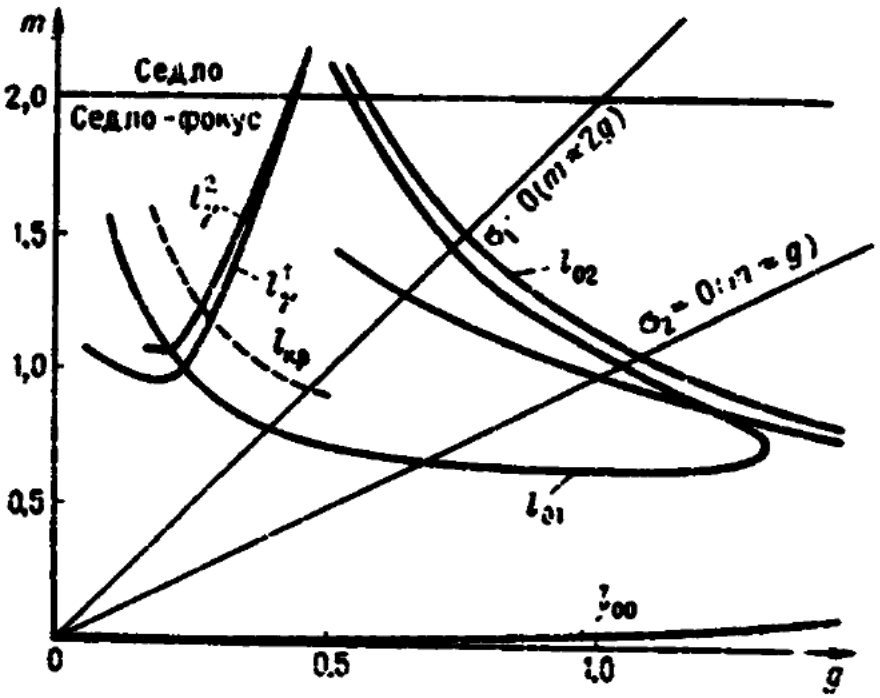
На диаграмме нанесена система бифуркационных линий, характеризующих критические явления в отношении состояния равновесия. Линия l_γ^1 отвечает условию существования в (10.1) *двоякоасимптотической* траектории Γ_0^1; линия $m \simeq 2$ разграничивает области, где особая точка системы является неустойчивым седло-фокусом ($m < 2$) и неустойчивым седлом ($m > 2$); указаны также линии обращения в нуль седловых величин состояния равновесия σ_1 и σ_2 (3.24). Расчеты свидетельствуют, что на бифуркационной линии l_γ^1 седловая величина σ_1 особой точки системы (10.1), записанной в соответствии с теоремой Шильникова в обратном времени, отлична от нуля и отрицательна. Петля является *не опасной*! Следовательно, при ее разрушении в строну A, что соответствует пересечению линии l_γ^1 снизу вверх по параметру m, должен рождаться единственный устойчивый цикл. Расчеты это подтверждают.

Цикл рождается при очень малых отклонениях параметров от линии l_γ^1 в строну A и в узкой области значений параметров претерпевает далее бифуркации удвоения. В исходной системе (10.1) (в прямом времени) рождающийся из петли сепаратрисы цикл абсолютно неустойчив и эволюционирует по параметру в седловой удвоенного периода.

Рис. 10.2 включает еще одну бифуркационную линию l_γ^2, отвечающую существованию более сложной *двухобходной* петли сепаратрисы седло-фокуса Γ_0^2. На этой линии неустойчивое многообразие особой точки, прежде чем замкнуться, делает два оборота вблизи основной петли Γ_0^1. С подобными явлениями все более часто приходится сталкиваться при решении конкретных задач [125–127]. Бифуркационная линия l_γ^2 берет начало в бифуркационной точке Q коразмерности 2 и направлена в область, где особая точка системы является неустойчивым седло-фокусом. Численный анализ проблемы существования многообходных петель сепаратрис Γ_0^k



Р и с. 10.1. Петля сепаратрисы седло-фокуса в возмущенной системе (10.1) (*а*) и ее проекции на выбранные плоскости переменных (*б*, *в*)

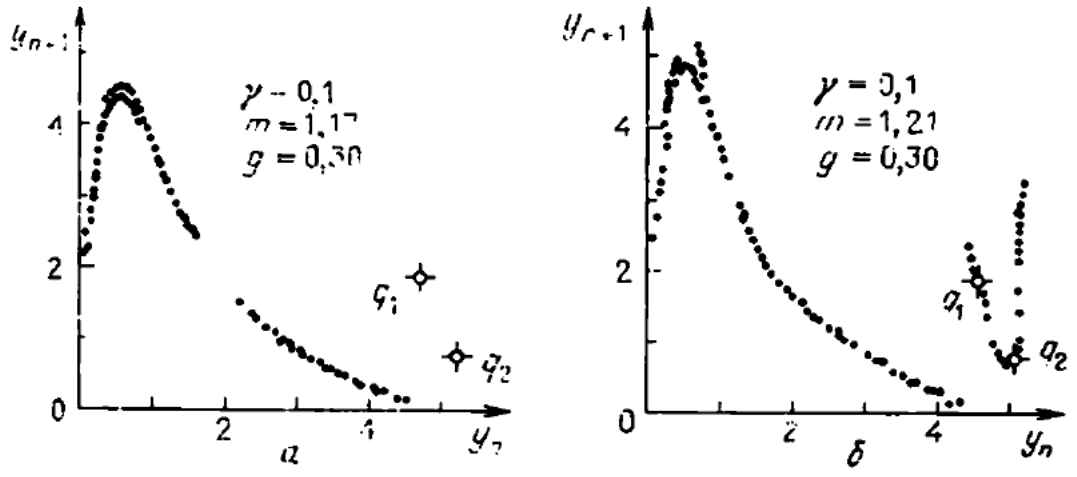


Р и с. 10.2. Бифуркационная диаграмма для системы (10.1)

и критических явлений в их окрестности чрезвычайно затруднен, так как в узкой области значений параметров реализуется бесконечное множество бифуркаций, из которых основную неприятность представляют бифуркации рождения (гибели) циклов ввиду их жесткого характера. По-видимому, существует бесконечное множество петель Γ_0^k, из которых рождается соответствующее множество многооборотных циклов, претерпевающих каскады различных бифуркаций.

В соответствии с полученным разбиением пространства параметров системы проведем исследование режимов колебаний. Если двигаться по параметру m в сечениях g = const вверх, оставаясь ниже линии однообходной петли l_γ^1, то фиксируется последовательность бифуркаций удвоения периода по отношению к основному семейству циклов. На линии $l_{кр}$ рождается аттрактор Фейгенбаума, который далее эволюционирует с уменьшением тактности ленты, кризисами и перемежаемостью. Динамика системы (10.1) топологически эквивалентна рассмотренной применительно к первой зоне хаоса в системе (7.38). Более того, вид фазовых портретов колебаний и распределение интенсивности по спектру практически не отличаются от полученных в экспериментах с невозмущенной системой. Изучение режимов хаотических колебаний в последней дало две зоны стохастичности на плоскости параметров m и g (рис. 8.5), но подробно анализировалась структура и свойства аттракторов лишь в первой (нижней) зоне. Делалось это сознательно, так как разобраться в механизмах возникновения стохастичности второй зоны без изучения роли гомоклинических траекторий не представлялось возможным.

Обсудим динамику системы (10.1) в окрестности разрушающейся петли сепаратрисы Γ_0^1. При малом отклонении значений параметров от линии l_γ^1 вниз интегрирование с начальными условиями на неустойчивом цикле, рождающемся из петли, свидетельствовало о жестком переключении системы на режим двухтактной ленты аттрактора Фейгенбаума. В окрестности петли Γ_0^1 специфического притягивающего гиперболического множества траекторий не обнаруживалось, что свидетельствует в пользу локальной теоремы Шильникова. Типичное одномерное отображение пос-



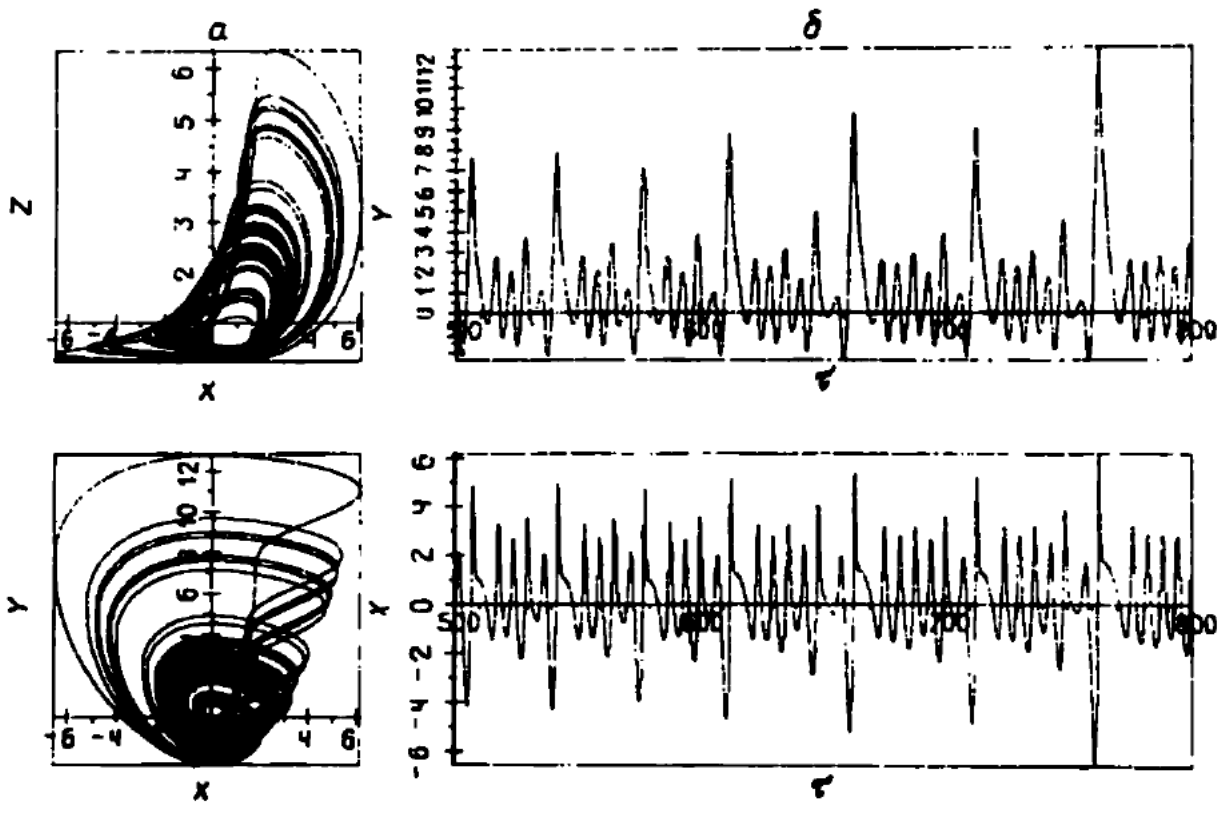
Р и с. 10.3. Модельные отображения последования для квазиаттракторов системы (10.1), соответствующие окрестности петли Γ_0^1 в области значений параметров ниже линии l_γ^1 (*а*) и выше ее (*б*)

ледования подобного аттрактора приведено на рис. 10.3*а* и имеет знакомый вид гладкой квадратичной параболы.

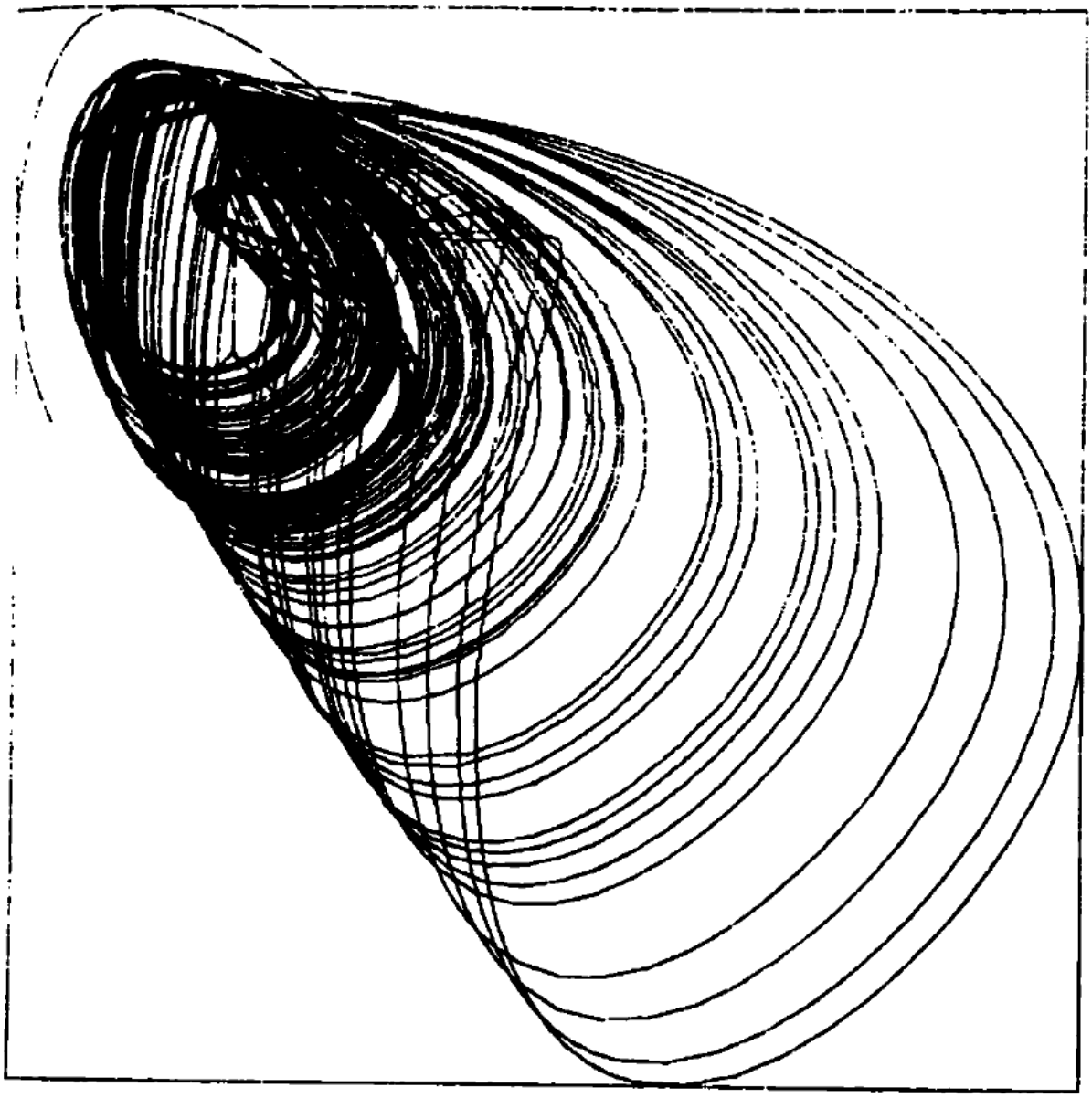
С увеличением значения параметра m (удаление от линии l_γ^1 вверх) возникают аттракторы несколько отличной структуры. Вид самих притягивающих множеств усложняется, фазовые траектории становятся более нерегулярными. Помимо хаотической модуляции амплитуды регистрируются случайные сбои фазы колебаний (случайный характер последовательности времен возврата траекторий в секущую плоскость). В модельных отображениях последования нарушается гладкость и появляются разрывы. Как правило, фиксируются более сильное перемешивание и рост ляпуновской размерности.

На рис. 10.3*б* представлено типичное модельное отображение аттрактора в области значений параметров выше линии l_γ^1. Виден характерный разрыв в отображении, причем точки q_1 и q_2, принадлежащие локальной окрестности петли, в отличие от случая на рис. 10.3*а*, здесь включены в аттрактор. Это доказывает факт хаотического во времени возврата фазовой траектории в локальную окрестность разрушившейся петли сепаратрисы седло-фокуса. В окрестности петли изображающая точка замедляет скорость движения при подходе к состоянию равновесия (на петле скорость вблизи седла стремится к нулю), вследствие чего и появляется сбой в фазе колебательного процесса; затем следует относительно равномерное вращение (движение по спирали с модуляцией амплитуды), которое при новом подходе к особой точке вновь испытывает резкое замедление, и т.д.

Если еще дальше двигаться по параметру m от линии рождения петли l_γ^1, то в зависимости от начальных условий реализуется бесконечное мно-



Р и с. 10.4. Двумерные проекции фазовой траектории (*а*) и временные зависимости $y(\tau)$, $x(\tau)$ (*б*) аттрактора Шильникова в системе (7.38) ($m = 1.45$, $g = 0.3$)



Р и с. 10.5. Общий вид аттрактора Шильникова рис. 10.4 в "трехмерном" изображении

жество регулярных и странных аттракторов, структуру и свойства которых во многом еще предстоит исследовать.

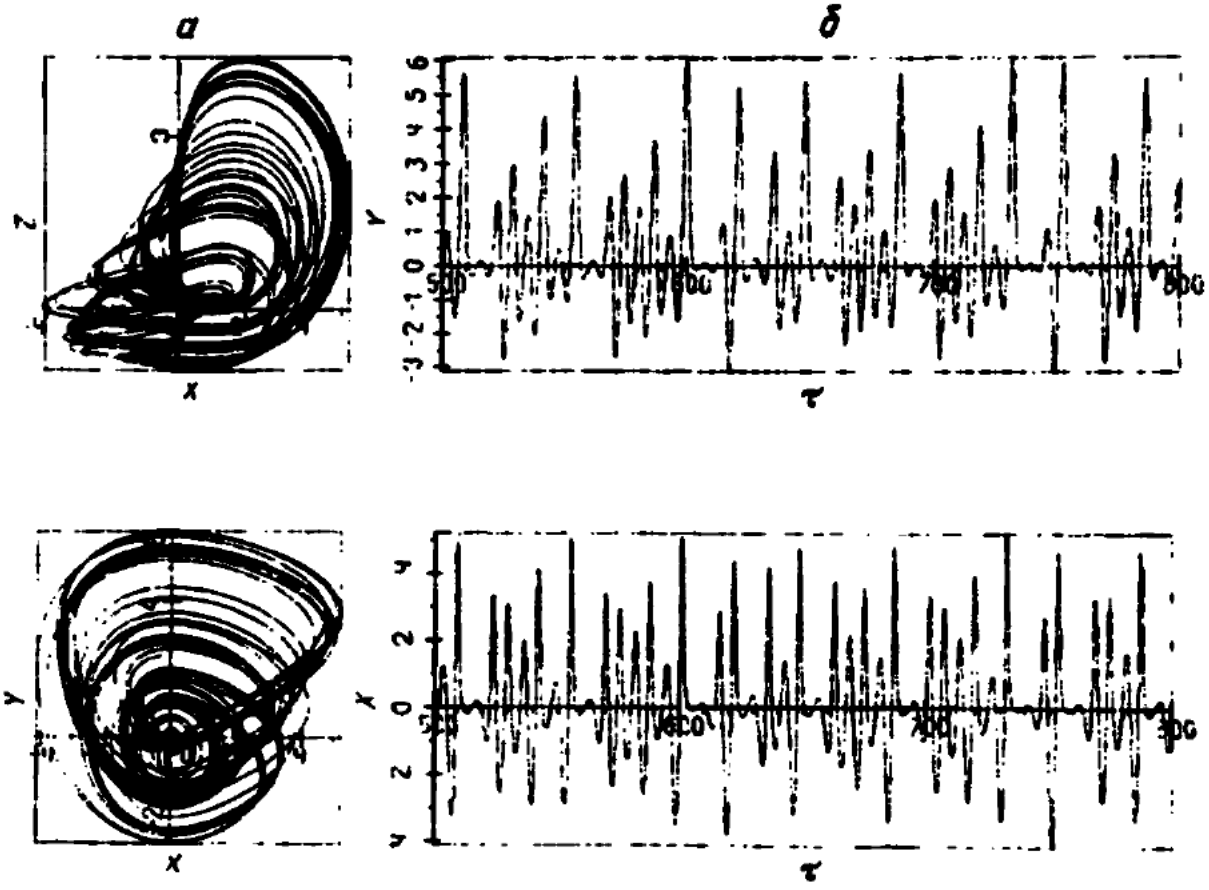
Описанная бифуркация аттракторов в окрестности разрушившейся петли седло-фокуса была отмечена в ряде численных работ и анализировалась как переход от хаоса *спирального* типа (ленточный аттрактор) к хаосу *винтового* типа (аттрактор со случайной модуляцией амплитуды и фазы колебаний или *аттрактор Шильникова*). Численные и физические эксперименты убедительно подтвердили, что при стремлении γ к нулю, когда исчезает гомоклиническая траектория Γ_0^1 и система (10.1) переходит в (7.38), все описанные выше бифуркации и свойства аттракторов второй зоны сохраняются.

В качестве примера на рис. 10.4 и 10.5 представлены проекции фазовой траектории, отрезки временных реализаций и общий вид аттрактора Шильникова в системе (7.38), полученные численно для значений параметров из второй зоны стохастичности. На фоне хаотической амплитудной модуляции видны нерегулярно следующие во времени сбои фазы,

вызванные замедлением в окрестности особой точки. Отметим, что аттрактор винтового типа в натурных экспериментах, когда невозможен анализ негрубых гомоклинических траекторий, легко можно принять за перемежаемость, так как движение на "спиральной" фазе колебаний по внешнему виду часто напоминает ламинарную фазу при касательной бифуркации (рис. 10.4).

Чтобы окончательно убедиться в том, что типичные режимы колебаний в системах (7.38) и (10.1) топологически эквивалентны, обратимся к результатам численных и физических экспериментов. На рис. 10.6 представлены результаты интегрирования системы (7.38) в режиме ленточного аттрактора, иллюстрирующие развитую стохастичность первой зоны. Выбором значений праметров $m = 1{,}17$, $g = 0{,}3$, $\gamma = 0{,}1$ и при тех же начальных условиях $x(0) = 3{,}5$, $y(0) = 0$, $z(0) = 1{,}0$ в возмущенной системе (10.1) удается реализовать режим хаотических колебаний, практически не отличающийся от изображенного на рис. 10.6. Чисто внешнее сходство режимов движения подтверждается детальными расчетами [13]: спектры ЛХП, автокорреляция и фурье-спектры режимов количественно близки. Общий вид хаотического аттрактора рис. 10.6 представлен на рис. 10.7.

Эксперименты на радиофизическом генераторе уверенно позволяли наблюдать хаотические аттракторы первой и второй зон, а при специальном выборе направлений движения по плоскости управляющих параметров – плавный переход от ленточного аттрактора к аттрактору Шильникова. Их топологическая структура качественно соответствует данным



Р и с. 10.6. Двумерные проекции фазовой траектории (*а*) и временные зависимости $y(\tau)$, $x(\tau)$ (*б*) хаотического аттрактора первой зоны в системе (7.38) ($m = 1{,}5$, $g = 0{,}2$)

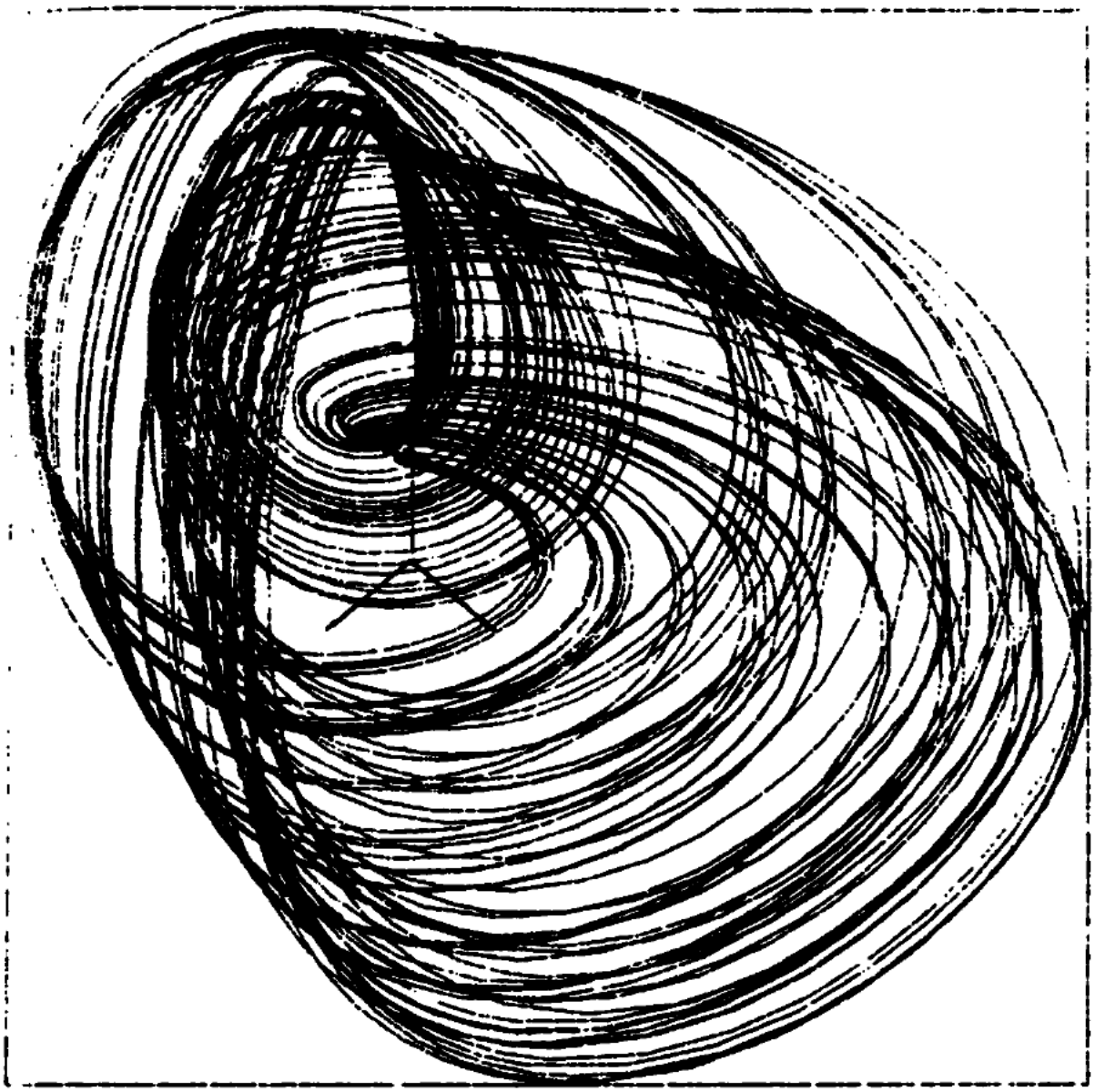


Рис. 10.7. Общий вид ленточного аттрактора рис. 10.6 в "трехмерном" изображении

численных экспериментов. Для иллюстрации сказанного на рис. 10.8 приведены проекции ленточного аттрактора на плоскости переменных x, y и x, z, сфотографированные с экрана осциллографа. Сравнение экспериментальных и расчетных траекторий с гомоклинической траекторией Γ_0 и соответствующих ее проекций на плоскости (рис. 10.1 *б*, *в*) не оставляет сомнений в оценке фундаментальной роли петли сепаратрисы седло-фокуса в структуре наблюдаемых аттракторов в расширенной ее окрестности.

Одной из наиболее вероятных причин дальнейшего изменения характера автоколебаний является наличие *многообходных* петель сепаратрис Γ_0^k и как следствие – более сложная структура притягивающих множеств в фазовом пространстве системы в их окрестности.

Как связать полученные результаты с выводами теории о закономерностях динамики систем с негрубой гомоклинической кривой седло-фокуса? Численные эксперименты с системой Рёсслера и рядом других систем касались классической ситуации, когда петля седло-фокуса была *опасной* ($\sigma_1 > 0$) [125, 126]. С этим обстоятельством авторы указанных

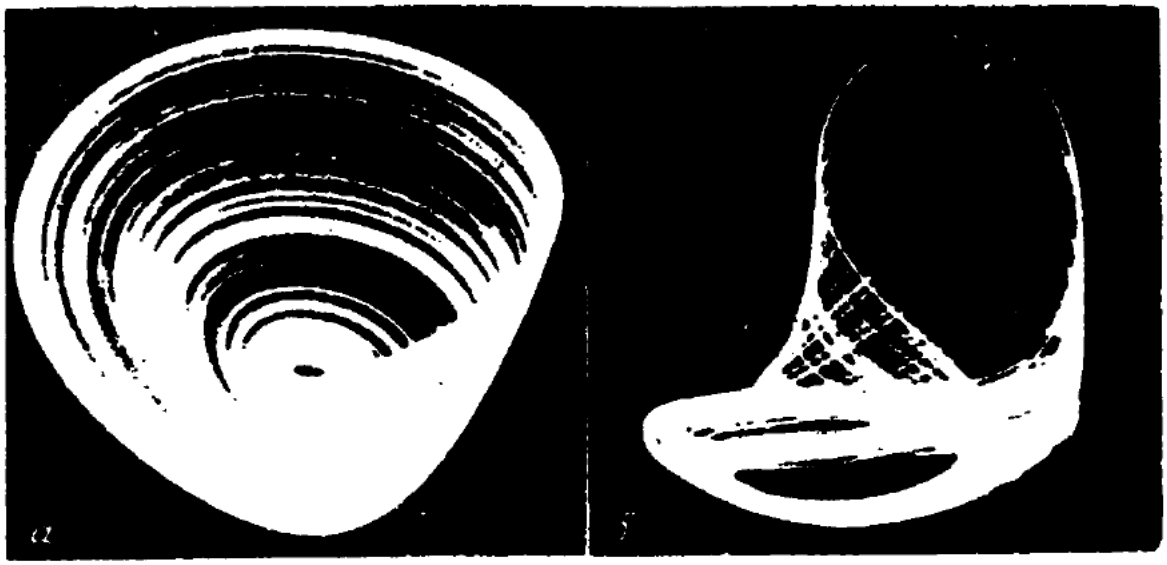


Рис. 10.8. Проекции фазовой траектории ленточного аттрактора на плоскости переменных x, y (*а*) и x, z (*б*) (физический эксперимент. $m = 1.5$, $g = 0.2$)

работ естественным образом связывали появление винтового хаоса. То, что в указанных экспериментах странный аттрактор локально в окрестности разрушившейся петли не регистрировался, не вызывало серьезных вопросов: теорема Шильникова не гарантирует того, что гиперболическое подмножество вблизи петли будет притягивающим. В итоге, специальных исследований по изучению структуры и свойств непритягивающего гиперболического подмножества в окрестности опасной петли не проводилось. Не исключено, что анализ динамики систем при удалении по параметрам от линии существования петли потребует привлечения существенно нелокального подхода к проблеме. В этом направлении уже получены некоторые обнадеживающие результаты [13. 127].

Безусловно ясно лишь то, что гомоклинические траектории типа сепаратрисных петель вне зависимости от знака седловой величины особой точки играют фундаментальную роль в механизмах образования квазиаттракторов. Конструктивных теоретических результатов, способных в более общих случаях описать динамические свойства систем с гомоклиническими траекториями типа петли седло-фокуса, можно ожидать, развивая классический подход Шильникова на случай нескольких параметров, т.е. исследуя бифуркационные ситуации коразмерности 2 и выше.

10.2. Роль гомоклинических траекторий седловых циклов в бифуркациях хаотических аттракторов

С превышением порога стохастичности дальнейшее увеличение надкритичности ведет, как уже указывалось, к внутренним бифуркациям хаотических аттракторов, в частности к каскаду объединения лент аттрактора с образованием развитой стохастичности. Это явление типично для систем с удвоениями периода и объясняется закономерностями гомоклинических бифуркаций седловых периодических движений.

Рассмотрим сечения Пуанкаре и спектры мощности колебаний в системе (7.38) при значениях параметров, указанных в подписи к рис. 10.9.

На рис. 10.9*а* сечение включает четыре отдельных несвязанных хаотических множества, на рис. 10.9*б* – только два. В соответствии с этим аттракторы первого типа назовем 4-тактными, второго – 2-тактными. С тактностью лент аттракторов однозначно связана структура распределения энергии по частотам (спектров мощности $S_x(f)$ колебаний). На рис. 10.9*а* спектр содержит резонансные линии на частотах nf_0, $nf_0/2$ и $nf_0/4$, а на рис. 10.9*б* выбросы на частотах $nf_0/4$ ($n = 1, 3, 5, \ldots$) размываются.

В интервале изменения параметра $1{,}09 < m < 1{,}10$ хаотический аттрактор претерпел бифуркацию слияния 4-тактной ленты в 2-тактную. На рис. 10.9 в сечении Пуанкаре указаны точки $q_{1,2,4}$, отвечающие пересечениям с секущей соответствующих седловых циклов Γ_1, Γ_2 и Γ_4, потерявших устойчивость в результате бифуркации удвоения периода. Как видно из рис. 10.9*а*, точки 4-тактного цикла q_4 включены в хаотическое множество, а точки $q_{1,2}$ – нет. В результате бифуркации слияния лент точки 2-тактного цикла q_2 оказались включенными в аттрактор.

Как выяснилось, к *внутренним бифуркациям* слияния лент аттрактора приводят изменения в характере неустойчивых многообразий седловых циклов. Проанализируем пример бифуркации слияния 4-тактной ленты аттрактора в 2-тактную.

Седловой цикл Γ_2 имеет двумерные устойчивое и неустойчивое инвариантные многообразия. Они пересекают секущую Пуанкаре $x = 0$ по одномерным кривым, представляющим собой устойчивую и неустойчивую сепаратрисы седловой неподвижной точки q_2. Названные сепаратрисы можно рассчитать на ЭВМ [205]. Результаты приведены на рис. 10.10. При $m = 1{,}09$ (рис. 10.10*а*) сепаратрисы не пересекаются, а при $m = 1{,}10$

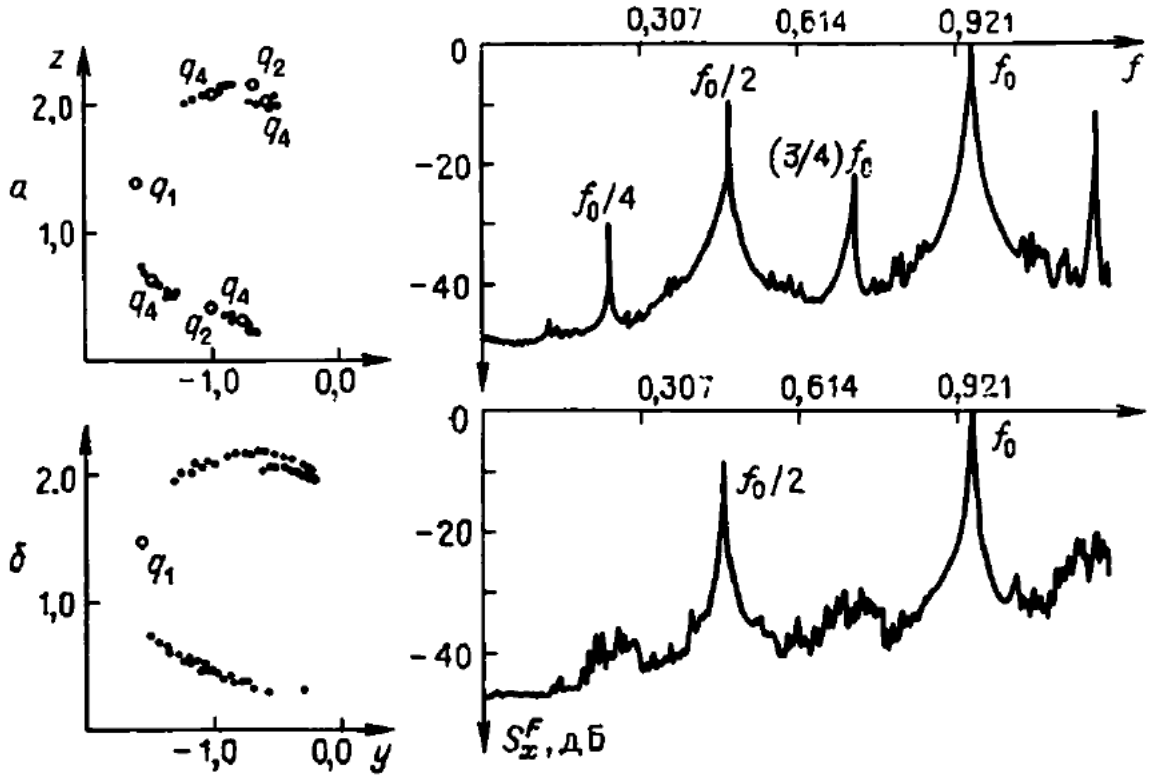
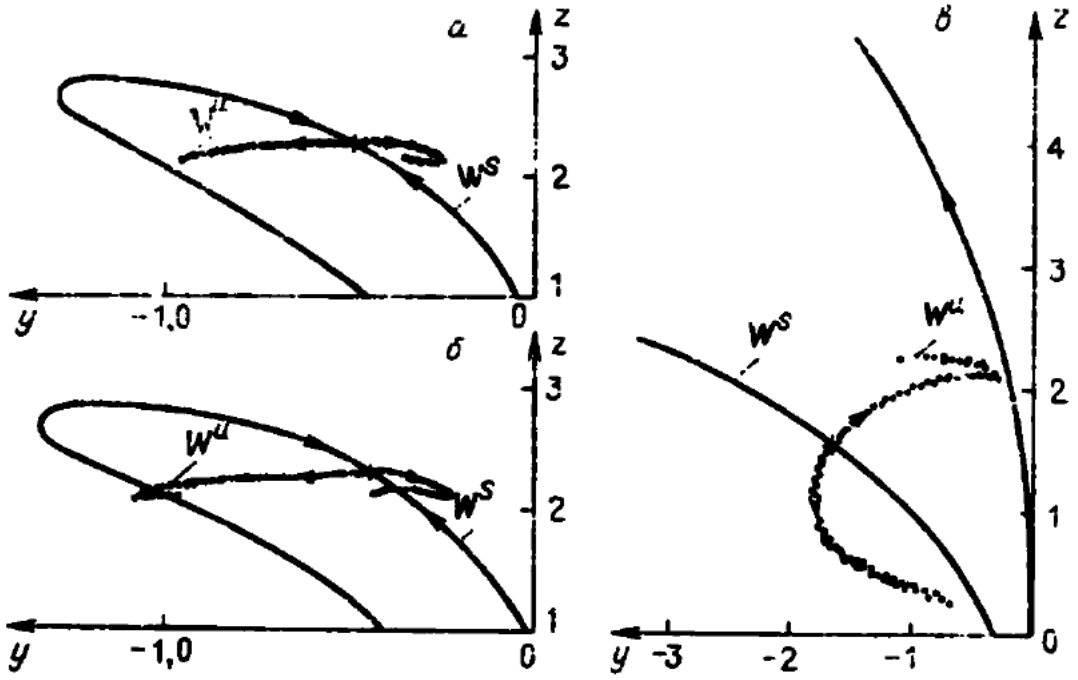


Рис. 10.9. Сечения Пуанкаре (слева) и спектры мощности (справа) при прохождении параметром точки бифуркации связности в системе (7.38): *а* – $m = 1{,}09$, *б* – $m = 1{,}10$; $g = 0{,}3$



Р и с. 10.10. Устойчивые и неустойчивые сепаратрисы седловых циклов системы (7.38) на секущей плоскости $x = 0$: *а* – $m = 1.09$, цикл $2\Gamma_0$: *б* – $m = 1.10$, цикл $2\Gamma_0$: *в* – $m = 1.09$, цикл Γ_0

(рис. 10.10*б*) пересекаются с образованием гомоклинических точек*). До появления гомоклиники сепаратрисные поверхности седлового цикла Γ_2 отделяют в фазовом пространстве системы (7.38) области, где существует поток фазовых траекторий. Рождение гомоклинической траектории приводит к перестройке структуры разбиения фазового пространства на траектории. В частности, реализуется *бифуркация слияния лент* хаотического аттрактора, обусловленная разрушением соответствующих сепаратрисных поверхностей. При этом к аттрактору "подключается" вновь образованная гомоклиническая структура, что ведет к росту положительного показателя спектра ЛХП, который увеличивается от значения $\lambda_1 = 0{,}016$ ($m = 1{,}09$) до значения $\lambda_2 = 0{,}026$ ($m = 1{,}10$). Эффект подключения новой гомоклинической структуры качественно выражается в том, что после бифуркации одна из ветвей 2-тактной ленты аттрактора в сечении Пуанкаре повторяет ход неустойчивой сепаратрисы седловой точки q_2 (ср. рис. 10.9 и 10.10). Окрестность неустойчивого многообразия в результате гомоклинической бифуркации стала притягивающей.

Факту существования 4-тактной ленты аттрактора при $m = 1{,}09$ отвечает наличие гомоклинической траектории у седлового цикла Γ_4. Отсутствие 1-тактной ленты (если наши рассуждения верны) должно быть обусловлено отсутствие гомоклинической траектории у 1-тактного цикла Γ_1. Расчеты это подтверждают. Как видно из рис. 10.10*в*, устойчивая и неустойчивая сепаратрисы точки q_1 при $m = 1{,}10$ еще не пересекаются. В то же время форма неустойчивой сепаратрисы 1-тактной точки q_1 предсказывает вид сечения Пуанкаре, реализующегося в результате слияния 2-такт-

*) На рис. 10.10 даны результаты расчета начальных ветвей неустойчивых сепаратрис, приводящие к появлению первых гомоклинических точек.

ной ленты в 1-тактную, что также подтверждается экспериментально [205, 206].

Для воссоздания более полной картины бифуркационных явлений, обусловленных гомоклиникой седловых циклов, естественно желание построить бифуркационную диаграмму системы (7.38) на плоскости параметров. Однако это чрезвычайно трудоемкий путь, так как расчетную процедуру непросто автоматизировать, и в любом случае она потребует больших затрат машинного времени. Выберем другой способ, основанный на следующих качественных соображениях. Как было установлено выше, динамика перехода к хаосу через серию бифуркаций удвоения периода в генераторе допускает приближенное описание с помощью одномерного квадратичного отображения. Более детально картина перехода моделируется двумерным отображением. Таким отображением, как показали эксперименты, может служить классическое диссипативное отображение Хенона [74, 7].

Уравнения модели Хенона следующие:

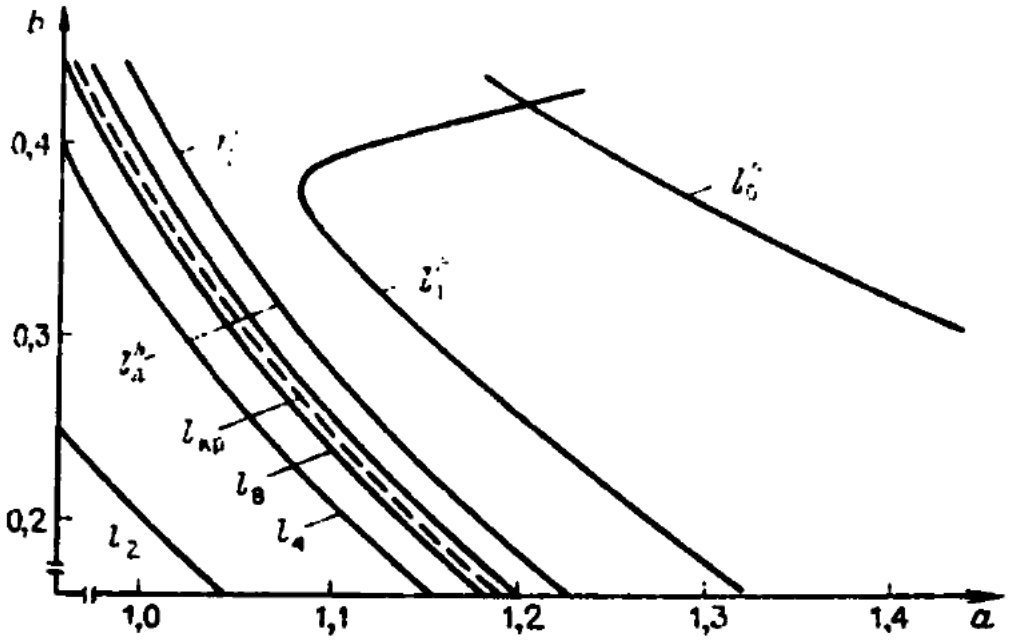
$$x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + y_n, \quad y_{n+1} = bx_n, \tag{10.2}$$

где параметры a и b в физическом смысле эквивалентны параметрам m и g генератора. Установлено, что дискретная модель Хенона в определенном смысле является аналогом дифференциальной системы (7.38), демонстрируя на плоскости управляющих параметров a и b совокупность бифуркаций, качественно эквивалентных реализующимся в отображении Пуанкаре модели (7.38).

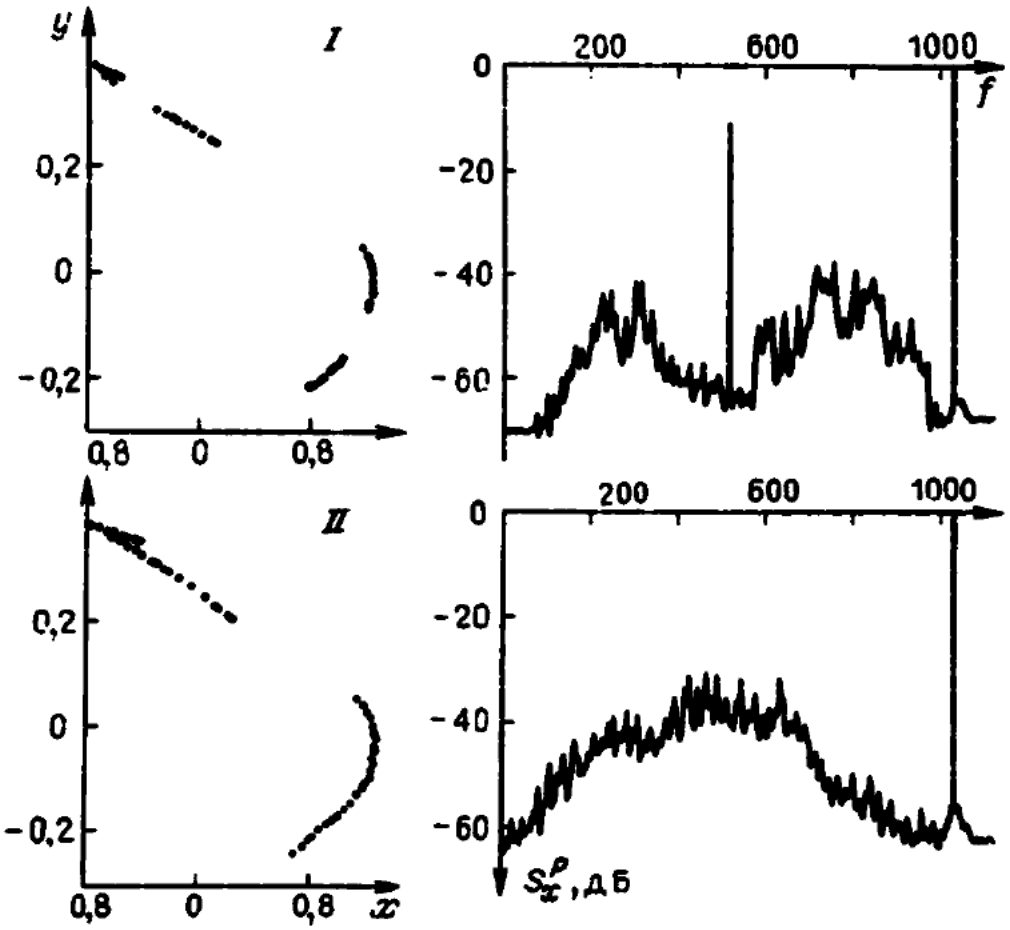
Бифуркационные линии потери устойчивости неподвижными точками кратности $1, 2, \ldots, 6$ для системы Хенона аналитически рассчитаны в [207]. Показано, что на некоторой линии l_0 рождаются две неподвижные точки: q_0 (седловая) и q_1 (устойчивая). В дальнейшем на линии l_1 точка q_1 претерпевает бифуркацию удвоения (мягко рождается устойчивый 2-цикл q_2). Далее следует каскад удвоений, подчиняющийся универсальному закону Фейгенбаума.

Фрагмент подробной бифуркационной диаграммы режимов системы Хенона представлен на рис. 10.11, где помимо линий удвоения $l_{2,4,8}$ и линии критических значений параметров $l_{кр}$, отвечающей рождению аттрактора Хенона, представлены рассчитанные бифуркационные линии *гомоклинического касания* $l^h_{0,1,2,4}$ применительно к седловым неподвижным точкам $q_{0,1,2,4}$ отображения (10.2).

Бифуркации неподвижных точек q_i отображения качественно соответствуют последовательности бифуркаций предельных циклов системы (7.38). Справа от любой из линий l^h_i имеет место грубое гомоклиническое пересечение устойчивых и неустойчивых сепаратрис седловых точек q_i, эквивалентное образованию грубых гомоклинических траекторий седловых периодических траекторий системы (7.38). Это подтверждено расчетами сепаратрис седловых точек q_i для различных значений параметров a и b. Сепаратрисы ведут себя качественно эквивалентно в сравнении с данными, представленными на рис. 10.10. Для всех седловых точек q_i отображения (10.2) выполняются условия теоремы [208] (как, впрочем, и для седловых циклов системы (7.38)), что подтверждает квази-



Р и с. 10.11. Фрагмент бифуркационной диаграммы отображения Хенона на плоскости параметров a и b



Р и с. 10.12. Фазовые портреты (слева) и спектры мощности (справа) отображения Хенона при прохождении параметром точки бифуркации связности: *I* – $b = 0.3$, $a = 1.07$; *II* – $b = 0.3$, $a = 1.10$

гиперболичность аттрактора Хенона и его адекватность в этом смысле ленточным аттракторам системы (7.38).

Зафиксируем значение параметра $b = 0{,}3$ и рассмотрим ряд значений параметра a, последовательно расположенных между бифуркационными линиями $l_{кр}$ и l_1^h. С ростом параметра a реализуется последовательность бифуркаций слияния лент аттрактора с образованием в итоге 1-тактной ленты при $a = 1{,}17$. Линии гомоклинического касания l_1^h являются, таким образом, бифуркационными линиями слияния многотактных лент аттракторов отображения Хенона. На рис. 10.12 представлены численные результаты, иллюстрирующие слияние 4-тактной ленты аттрактора в 2-тактную при прохождении параметром a бифуркационной линии l_2^h.

Как и для генератора, хаотические множества аттракторов в модели Хенона сконцентрированы в окрестности неустойчивых сепаратрис седловых точек, имеющих гомоклинические структуры. Для примера на рис. 10.13 приведены результаты расчетов устойчивой и неустойчивой сепаратрис седловых точек q_0 и q_1 в режиме существования гомоклиники. Как видно из графиков, геометрия неустойчивой сепаратрисы определяет форму хаотического множества развитого аттрактора Хенона.

Отметим важное для приложений обстоятельство. Если анализировать положительный ляпуновский показатель аттрактора в совокупности с автокорреляционной функцией процесса, то вскрывается следующее. Для развитой 1-тактной ленты аттрактора, когда существуют гомоклинические орбиты всей совокупности седловых циклов периода $2^k T_0$, справедливо фундаментальное соотношение

$$\lambda_1 = \tau_к^{-1}, \qquad (10.3)$$

где $\tau_к$ – время уменьшения автокорреляционной функции в $e = 2{,}718\ldots$ раз, т.е. время корреляции. Энтропия Колмогорова в данном случае строго

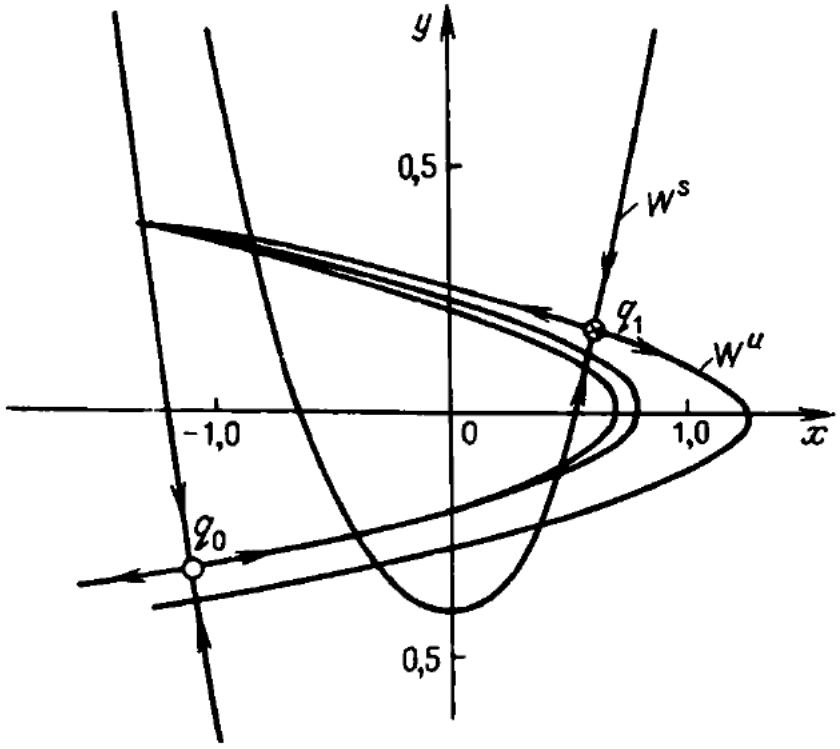


Рис. 10.13. Устойчивые и неустойчивые сепаратрисы седловых циклов q_0 и q_1 отображения Хенона

определяет скорость спадания временных корреляций процесса. Для многотактных лент аттрактора указанное соотношение непосредственно не выполняется. Дело в том, что появляются детерминированные периодические компоненты движения. Энтропия Колмогорова, равная положительному показателю спектра ЛХП, свидетельствует о перемешивании. Но перемешивание в случае многотактных лент аттрактора осуществляется в некоторой окрестности седлового цикла соответствующей тактности и не связано с наличием периодических компонент. Автокорреляция как характеристика временного процесса однозначно связана с видом временных зависимостей и естественно отражает наличие периодических компонент процесса. Равенство (10.3) для многотактных ленточных аттракторов в общем случае не выполняется. Однако если анализировать перемешивание (λ_1) и скорость спада корреляции ($\tau_к^{-1}$), исключив из рассмотрения соответствующую периодическую компоненту, то соотношение (10.3) оказывается справедливым. Например, если лента аттрактора 2-тактная, то нужно анализировать хаотическое множество точек в сечении Пуанкаре, получающееся регистрацией каждой второй точки пересечения фазовой траектории с секущей поверхностью. Результаты численных экспериментов, проведенных с системой (7.38) и с двумерным отображением Хенона, подтверждают сказанное выше и обсуждаются в дальнейшем.

Можно предполагать, что аналогичная картина реализуется и в случае разрушения многообходных петель сепаратрис Γ_0^k. Периодические компоненты движения на возникающих при этом аттракторах в общем виде отвечают седловым циклам периодов $p \cdot 2^k T_0$, где $p = 1, 2, 3, \ldots, \infty$, $k = 0, 1, 2, \ldots, \infty$.

10.3. Физическая интерпретация возбуждения сложных колебательных процессов в модифицированном генераторе с инерционной нелинейностью

Обнаружение и исследование гомоклинических траекторий в возмущенной модели генератора с инерционной нелинейностью позволяет с общей физической и качественной точек зрения пояснить результаты многочисленных экспериментов, последовательно описанных выше. Как выяснилось, система (7.38) является структурно устойчивой по отношению к малым возмущениям потока. Топологически эквивалентные режимы колебаний сохраняются при введении диссипативной нелинейности (7.28), при деформации вида функции $\Phi(x)$, описывающей характеристику детектора инерционного каскада, при возмущении второго уравнения (10.1) добавлением постоянного слагаемого.

Запишем систему (7.38) в виде дифференциальных уравнений для инерционного нелинейного осциллятора (7.2):

$$\begin{aligned} &\ddot{x} + (z - m)\dot{x} + [1 - gz + gI(x)x^2]x = 0, \\ &\dot{z} = -gz + gI(x)x^2. \end{aligned} \tag{10.4}$$

Нетрудно видеть, что генерирование стационарных автоколебаний возможно лишь в случае, когда коэффициент при первой производной $z - m$ в среднем за период T обращается в нуль. Во времени этот коэффициент

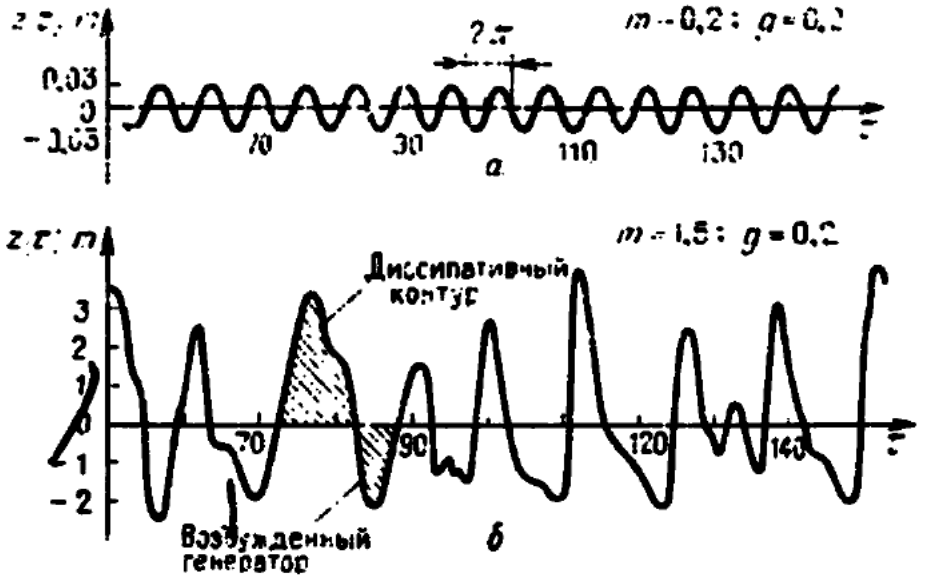


Рис. 10.14. Временная зависимость $z(\tau) - m$ в регулярном (*а*) и хаотическом (*б*) режимах автоколебаний

будет знакопеременной функцией. В области $z < m$ эффективные потери в колебательной системе отрицательны. Система неустойчива и при малом возмущении выходит из состояния равновесия. За счет нелинейной перекачки энергии начинает возрастать и уровень сигнала отрицательной обратной связи, растет переменная $z(\tau)$. Когда z превысит значение параметра возбуждения m, система превратится в нелинейный диссипативный контур и колебания прекратятся.

В квазилинейном случае ($m \ll 1$, $g \ll 1$) $z(\tau)$ меняется по закону, близкому к гармоническому, имеет малую амплитуду и период. Генерируются почти гармонические колебания, а доли поступающей и рассеиваемой энергий в среднем за один период колебаний полностью скомпенсированы. С ростом нелинейности колебания усложняются, что обусловлено синхронизацией во времени процессов обмена энергией с большими временами усреднения. Период колебаний увеличивается. Наконец возникает ситуация, когда для синхронизации энергообмена требуется неограниченно большое время - рождается хаотическая генерация. На рис. 10.14 даны результаты расчета разности $z(\tau) - m$ для двух предельных режимов, иллюстрирующие сказанное выше [13, 209].

Подобные рассуждения можно провести в терминах теории устойчивости. Регулярность (периодичность) режима колебаний требует равенства нулю старшего ляпуновского показателя спектра λ_1 в среднем вдоль траектории за период. В области $z < m$, где система неустойчива, старший показатель будет положительным, для $z > m$ – отрицательным. В среднем за период колебаний (λ_1) должен строго обратиться в нуль. Хаотический режим реализуется в том случае, если неустойчивость системы вблизи источника в точке равновесия "пересилит" стабилизирующее действие диссипативных элементов генератора в области $z > m$, удаленной в фазовом пространстве от источника. Усреднение на сколько угодно больших временах дает положительное значение λ_1 по аттрактору системы.

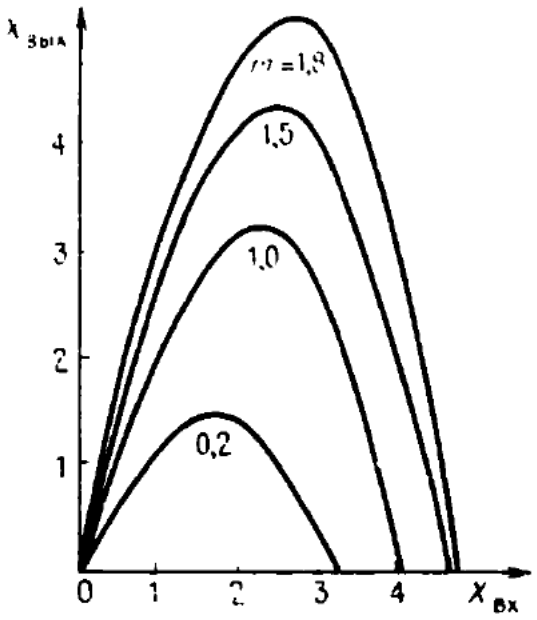


Рис. 10.15. Амплитудные характеристики инерционного усилителя для гармонического сигнала резонансной частоты на входе

Для подтверждения сказанного проведем весьма простой, но интересный численный эксперимент. В алгоритм расчета спектра ЛХП введем дополнительное условие независимого усреднения по времени для двух областей фазового пространства, разделенных плоскостью $z = m$. Рассчитаем средние значения показателей по первой, второй областям и фазовому пространству в целом. Результаты следующие. Для регулярных режимов показатели в первой и второй областях равны между собой по модулю и отличаются знаком, как и предполагалось. Суммарный показатель, естественно, нулевой.

В режиме стохастичности положительный показатель превалирует, суммарный показатель определяется соответствующей разностью и оказывается положительным. Интересно, что модули показателей обеих областей, как правило, заметно превышают значение показателя, усредненного по всему аттрактору. Это общий эффект для генерирующих систем с зависящей от фазовых координат дивергенцией векторного поля. Активное перемешиванне потока осуществляется не по всему фазовому пространству, занятому аттрактором, а локализовано в области источника.

Наконец, попытаемся объяснить причину того, что усложнение режимов колебаний в генераторе сопровождается последовательностью бифуркаций удвоения периода. С этой целью разорвем цепь в схеме генератора (рис. 7.4) на входе первого усилителя и рассчитаем аналитически коэффициент передачи разомкнутой системы для амплитуды гармонического сигнала резонансной частоты. Получим выражение [13, 185]

$$X_{вых} = \left(1 + \frac{m}{b}\right)\left|1 - F(g)\,\frac{X_{вх}^2}{m+b}\right| X_{вх}. \qquad (10.5)$$

где

$$F(g) = (1/4) - [\pi g(4+g^2)]^{-1}(1+e^{-\pi g})(1-e^{-\pi g})^2,$$

b — постоянный коэффициент, зависящий от параметров конкретного селективного элемента генератора. Нетрудно видеть, что (10.5) при фиксированных значениях параметра g описывает однопараметрическое семейство кривых типа параболы.

Для некоторых значений параметра m и $g = 0{,}2$ соответствующие зависимости приведены на рис. 10.15. Амплитудная характеристика инерционного усилителя принадлежит классу отображений Фейгенбаума. С ростом параметра m крутизна падающего участка амплитудной характеристики достигает критического значения и режим колебаний теряет устойчивость

через удвоение. Это обусловлено тем, что система, неустойчивая в точке бифуркации, обладает селективной чувствительностью к возмущениям удвоенного периода.

С общих позиций современных представлений о поведении систем, содержащих локальные области экспоненциальной неустойчивости, возможность "непредсказуемой" эволюции уже не представляется загадочной. В окрестности области сильной неустойчивости (на вершине шара, например) реакция системы хотя и строго детерминирована, но чрезвычайно чувствительна к малейшим отклонениям в начальных данных. На этом свойстве базируется вся "экономика" индустрии игральных автоматов. В генераторе с инерционной нелинейностью роль области сильной неустойчивости играет локальная окрестность особой точки в нуле координат. Наличие петли седло-фокуса с физической точки зрения означает, что нелинейные свойства системы обладают автономной возможностью "забрасывать" фазовую траекторию в окрестность особой точки. Поэтому рассмотренный генератор есть в прямом смысле радиофизический аналог игрального автомата.

ГЛАВА 11

ВЛИЯНИЕ ВНЕШНИХ ФЛУКТУАЦИЙ, СТАТИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА И РАЗМЕРНОСТЬ АТТРАКТОРОВ СЕДЛО-ФОКУСНОГО ТИПА

11.1. Бифуркации аттракторов в присутствии шумов

Воздействие флуктуаций на режимы сложных автоколебаний в квазигиперболических системах приводит к эффектам двух типов [92]. Под действием внешнего шума может наблюдаться *сдвиг* в пространстве управляющих параметров той или иной бифуркационной линии (поверхности), а иногда и *бифуркационной диаграммы* в целом*). При этом не исключено исчезновение определенной мелкомасштабной структуры бифуркационной диаграммы детерминированной системы, но важно, что под действием шума не возникают принципиально новые режимы, которые отсутствовали в детерминированной системе.

Другой тип бифуркационных явлений связан с *индуцированными* под воздействием шума *фазовыми переходами*, которые в детерминированной системе вовсе не имеют места. Конкретным примером подобного типа перехода является эффект модуляционной перемежаемости, индуцированной мультипликативным шумом, обусловленным техническими флуктуациями параметров системы (гл. 9).

Следует также различать две ситуации: движение по параметрам в присутствии внешних шумов заданной интенсивности и вариация интенсивности шума при фиксированных значениях параметров системы. Если следить, к примеру, за последовательностью бифуркаций удвоения периода в присутствии флуктуаций постоянной интенсивности, то наблюдаемая цепочка бифуркаций удвоения окажется конечной, а переход к хаосу осуществится при меньшем значении управляющего параметра. Реализуется типичный случай сдвига бифуркационной диаграммы с исчезновением ее мелкомасштабной структуры: размываются бифуркационные линии удвоения периода многотактных циклов и смещается линия критических значений параметра.

Описанное явление в принципе не реализуется при фиксировании управляющих параметров системы с увеличением интенсивности флуктуаций.

*) Действие флуктуаций приводит также к необходимости вместо точки (линии) бифуркации анализировать конечную область значений параметра, в которой происходит плавная смена режимов движения системы.

Каскад бифуркаций удвоения нельзя индуцировать увеличением интенсивности шумового воздействия*). В то же время имеется ряд других бифуркационных явлений, которые качественно воспроизводятся как за счет изменения параметров в отсутствие шумов, так и при увеличении интенсивности внешних флуктуаций для фиксированных значений параметров. Интенсивность шума в определенном смысле здесь играет роль управляющего параметра [210 – 217].

Приведенные соображения полезно иметь в виду при трактовке нижеизлагаемых экспериментальных результатов.

Рассмотрим систему ланжевеновских стохастических уравнений генератора (9.1), (9.2) и проведем ряд численных экспериментов в характерных точках плоскости параметров при различных интенсивностях шума**). На рис. 11.1 приведены результаты расчета старшего показателя спектра ЛХП в зависимости от интенсивности шума D при $g = 0{,}3$. Видно, что в зависимости от параметров увеличение интенсивности шума вызывает как увеличение λ_1, так и уменьшение его вплоть до нуля. Шум может "индуцировать" переход к регулярному движению (предельный цикл в случае рис. 11.1, кривая *3*), может не оказывать практически заметного действия, а может и увеличивать степень хаотичности режима (рис. 11.1, кривые *1*, *2*).

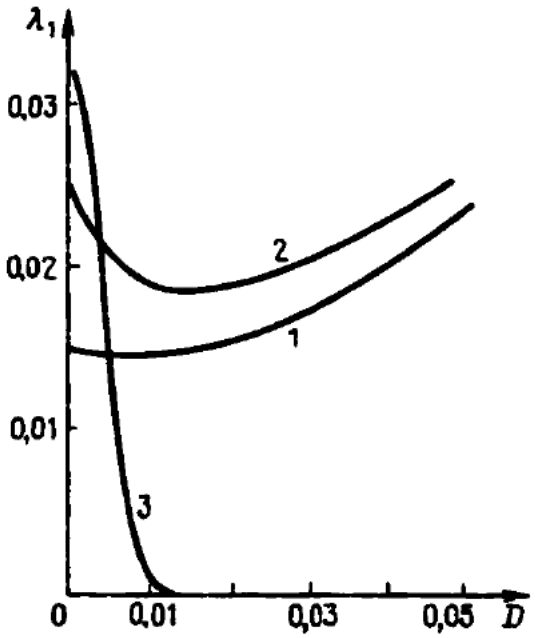
В чем причина таких принципиальных различий в реакции системы на шумовое воздействие? Как было детально установлено, отклик системы на внешний шум определяется характером бифуркационной диаграммы невозмущенной системы. Если под действием шума не происходит внутренних бифуркаций аттракторов, степень перемешивания слабо зависит от интенсивности флуктуаций. В случае близости по параметрам к точкам касательных бифуркаций (вблизи линий кратности многотактных циклов) шум перебрасывает фазовую траекторию в область притяжения цикла. Реализуется переход типа "хаос – порядок". В случаях когда под действием шума осуществляется бифуркационный переход в хаосе от аттрактора одной структуры к аттракторам иной структуры, возможно увеличение или уменьшение (в зависимости от конкретной ситуации) степени перемешивания. Можно утверждать, что приведенные на рис. 11.1 экспериментальные результаты суть прямое следствие эффекта сдвига бифуркационной диаграммы, обусловленного шумовым возмущением динамической системы.

Рассмотрим подробно одну из возможных внутренних бифуркаций аттракторов, иллюстрирующих сказанное выше, а именно *бифуркацию слияния* хаотических *лент* аттрактора, обусловленную действием аддитивных шумов малой интенсивности. На рис. 11.2 представлены сечения Пуанкаре и спектры мощности аттрактора системы (9.1) для $m = 1{,}09$, $g = 0{,}3$ при двух значениях интенсивности шума D***). Шум интенсивности $D = 0{,}01$

*) В равной степени это утверждение справедливо как в отношении отдельных бифуркаций удвоения, так и бифуркации Андронова – Хопфа.

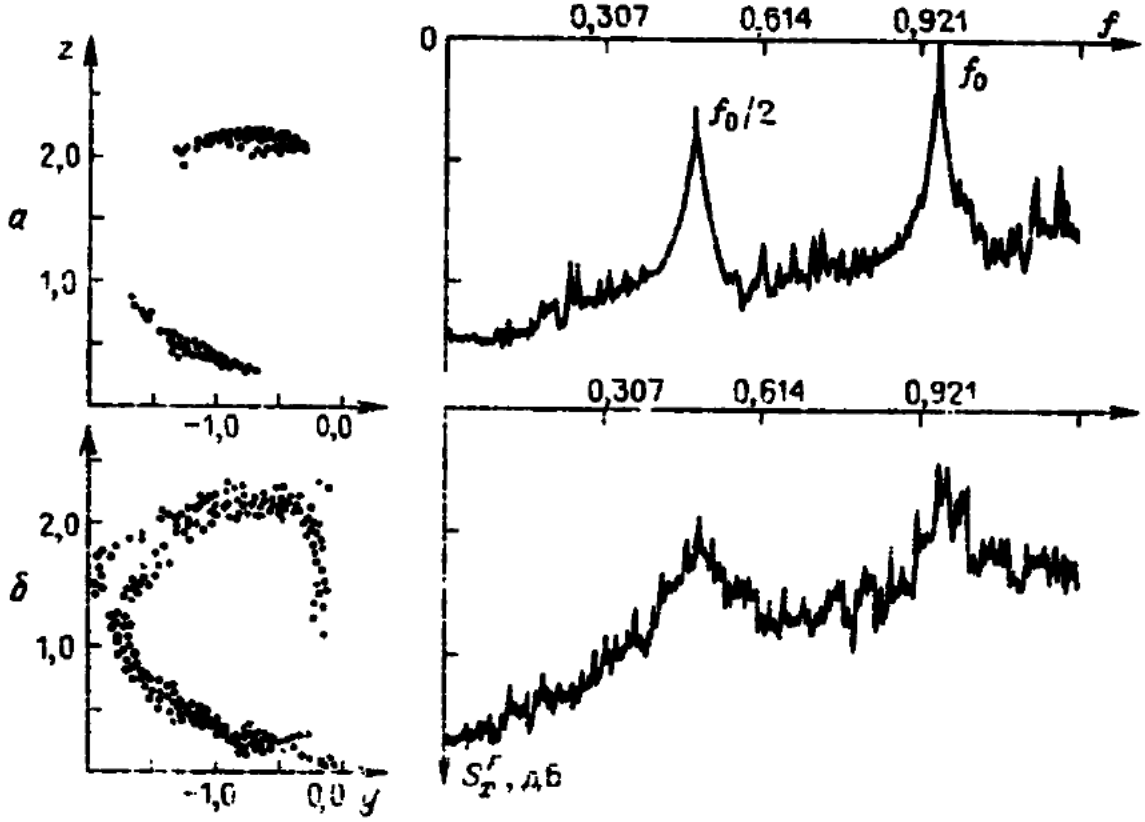
**) Выбор интенсивности аддитивных шумов, отвечающих условиям реального эксперимента, проводился на основе сопоставления данных физического и численного экспериментов при исследовании последовательности бифуркаций удвоения периода.

***) Случай $D = 0$ подробно обсуждался в 10.2 (рис. 10.9).



Р и с. 11.1. Зависимость старшего показателя спектра от интенсивности шума при различных значениях параметра m: 1.09 (*1*); 1.10 (*2*); 1.16 (*3*)

Р и с. 11.2. Режим динамической стохастичности, представленный на рис. 10.9, при воздействии шума различной интенсивности: D: 0,01 (*а*), 0,05 (*б*)



индуцирует бифуркацию слияния 4-тактной ленты аттрактора в 2-тактную (рис. 11.2*а*). Флуктуации малой интенсивности с физической точки зрения равносильны здесь малому увеличению параметра m (это и есть эффект сдвига бифуркационной диаграммы!). Увеличение интенсивности шума до $D = 0{,}05$ приводит к рождению 1-тактной ленты аттрактора (рис. 11.2*б*)*).

*) Переход к 1-тактной ленте аттрактора при однопараметрическом анализе для $D = 0$ в системе (9.1) исключается. Однако он становится реальным при двупараметрическом рассмотрении, что еще раз свидетельствует об эффекте сдвига бифуркационной диаграммы в целом [205, 206].

Подчеркнем типичное для квазигиперболических систем свойство, наглядно проявляющееся в данном конкретном эксперименте. Отклик нелинейной системы на изотропное шумовое возмущение характеризуется тем, что за счет преимущественного сжатия фазового потока флуктуации, трансверсальные к направлениям неустойчивых многообразий, уменьшаются. Эффект действия шума практически проявляется в увеличении хаотического множества вдоль неустойчивых сепаратрис. В результате под влиянием шума аттрактор в фазовом пространстве увеличивается именно в направлении неустойчивых многообразий и вблизи точек гомоклинических бифуркаций обуславливает явления, качественно эквивалентные бифуркациям аттракторов детерминированной системы (эффект слияния лент аттрактора в рассматриваемом примере).

Влияние флуктуаций на бифуркации ленточных аттракторов исследовалось экспериментально на реальном генераторе с инерционной нелинейностью при регулируемом уровне внешнего шума. Эксперименты полностью подтвердили результаты вычислений [205, 206]. Кроме того, описанные выше результаты качественно воспроизводятся и в модели Хенона, для которой эффект слияния хаотических лент удается проанализировать с использованием двухпараметрического подхода [205].

11.2. Время корреляции и энтропия хаоса при обратных бифуркациях удвоения периода квазиаттракторов

Статистические свойства динамической системы можно анализировать по зависимости автокорреляционной функции (АКФ) $\Psi_x(\tau)$ от времени τ. Для странных аттракторов АКФ во времени стремится к нулю, причем убывает экспоненциально, свидетельствуя о близости системы к конечной цепи Маркова [91]. Показатель экспоненты связывается со временем корреляции $\tau_к$, которое должно зависеть от степени перемешивания. Для гиперболических систем $\tau_к$ обратно пропорционально энтропии Колмогорова [6, 57] и может, следовательно, быть оценено как

$$\tau_к = \left(\sum_{i=1}^{l} \lambda_i \right)^{-1}, \qquad (11.1)$$

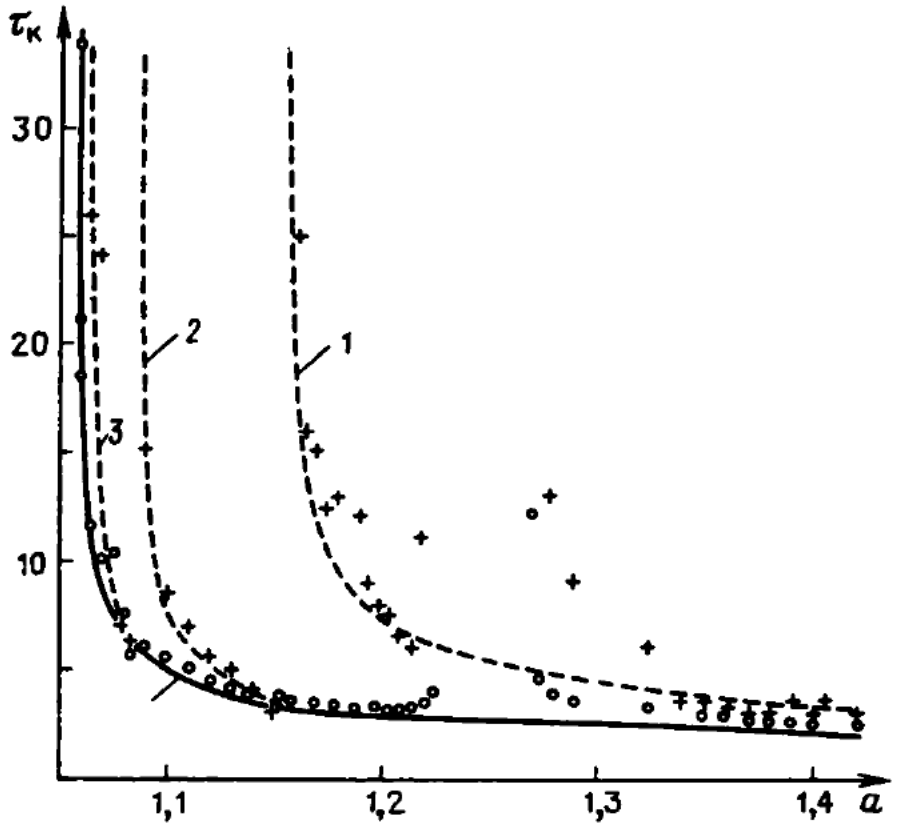
где λ_i – положительные ляпуновские показатели хаотической траектории.

Существует ли и какова взаимосвязь времени корреляции $\tau_к$ с энтропией хаотических аттракторов в динамических системах с квазигиперболическими свойствами? Можно привести ряд примеров, свидетельствующих об отсутствии зависимости (11.1) применительно к квазиаттракторам; при близких значениях энтропии времена корреляции могут существенно отличаться.

Исследуем взаимосвязь времени корреляции $\tau_к$ и положительного показателя λ_1 аттракторов отображения Хенона при бифуркациях связности с учетом флуктуаций [215]:

$$x_{n+1} = 1 - a\lambda_n^2 + y_n + \xi_1(n), \quad y_{n+1} = bx_n + \xi_2(n), \qquad (11.2)$$

где $\xi(n)$ – δ-коррелированный шум интенсивности D. Отображение Хенона – типичная квазигиперболическая система с аттрактором Фейгенбау-



Р и с. 11.3. Зависимость времени корреляции $\tau_к$ от параметра a отображения Хенона в отсутствие шума: *1* – $a^* = 1{,}155$; *2* – $a^* = 1{,}088$; *3* – $a^* = 1{,}064$

ма. Огибающая зависимость $\lambda_1(a)$ для случая $D = 0$ удовлетворяет универсальному закону

$$\lambda_1 = c(a - a^*)^\gamma, \quad \gamma = \ln 2/\ln \delta, \tag{11.3}$$

в котором для $b = 0{,}3$ $a^* = 1{,}058$, $c = 0{,}836$. Зависимость (11.3) хорошо подтверждается экспериментально до значений $a \leqslant 1{,}16$.

Если предположить, что время корреляции $\tau_к = \lambda_1^{-1}$, то соотношение (11.3) определит теоретическую зависимость $\tau_к(a)$, представленную на рис. 11.3 сплошной кривой. Кружочками указаны результаты прямых вычислений $[\lambda_1(a)]^{-1}$. Расчеты зависимости АКФ от параметра a привели к явному несоответствию результатов с предполагаемыми. Вплоть до значений $a \leqslant 1{,}155$ (до момента рождения развитой однотактной ленты аттрактора) АКФ остается близкой к периодической и огибающая к нулю не стремится! Это явление обусловлено сложностью дискретной последовательности $\{x_n\}$, содержащей как периодические, так и хаотические компоненты движения. Аттрактор, представляющий собой множество непересекающихся хаотических зон, можно описать суперпозицией периодических колебаний (между зонами) и шума [7]

$$x_n = \sum_{\nu=1}^{p} A_\nu \exp(j\omega_\nu n) + \xi(n). \tag{11.4}$$

Следствием (11.4) будет характер распределения ω_ν спектральной плотности мощности, содержащей δ-выбросы на частотах на фоне сплошного

спектра шума. По теореме Винера -- Хинчина АКФ

$$\Psi_x(\tau) = \lim_{k \to \infty} k^{-1} \sum_{n=1}^{k} (x_k - \bar{x})(x_{k+\tau} - \bar{x}) \qquad (11.5)$$

представляет собой суперпозицию периодических и δ-коррелированных компонент.

Воспользуемся процедурой исключения периодических компонент движения и выясним характер взаимосвязи $\Psi_x(\tau)$ с энтропией λ_1 применительно к отдельным хаотическим зонам аттрактора [7, 218]. Для этого в зависимости от тактности ленты аттрактора статистической обработке будем подвергать последовательность точек, принадлежащих конкретной хаотической зоне. К примеру, в случае 2-тактной ленты в память ЭВМ нужно набирать последовательность из каждой второй точки итерации исходного отображения (11.2).

Результаты расчетов также представлены на рис. 11.3. Значения $\tau_к$ (показаны крестиками) вычислялись как функции параметра a с учетом последовательности бифуркаций связности. Зависимость $\tau_к(a)$ имеет резкие выбросы в точках a, близких к 1,064; 1,088 и 1,155, в которых $\tau_к$ резко возрастает. В промежутках между выбросами $\tau_к$ экспоненциально спадает, стремясь к аппроксимирующей зависимости $\tau_к = \lambda_1^{-1}$ (сплошная кривая). Установлено, что зависимость $\tau_к(a)$ имеет разрывы строго в точках бифуркаций связности, где происходит объединение хаотических зон аттрактора.

В промежутках между точками бифуркаций связности время корреляции с высокой степенью точности аппроксимируется универсальными зависимостями

$$\tau_к = c_i(a - a_i^*)^{-\gamma}, \quad \gamma = \ln 2/\ln \delta, \qquad (11.6)$$

где a_i^* – критические точки бифуркаций связности, c_i – соответствующие константы. Расчеты показали, что для 8-, 4- и 2-тактной лент аттрактора эти параметры имеют следующие значения: $a_8^* = 1{,}064$, $c_8 = 1{,}04$; $a_4^* = 1{,}088$, $c_4 = 1{,}07$; $a_2^* = 1{,}155$, $c_2 = 1{,}79$. Аппроксимирующие зависимости (11.6) нанесены на рис. 11.3 штриховыми линиями и подтверждают сказанное выше.

Полученные результаты интересны с нескольких точек зрения.

1. Можно утверждать, что *внутренние бифуркации* аттракторов оказывают принципиальное влияние на *статистические свойства хаоса*, которые определяются не только и не столько энтропией, сколько бифуркациями рождения (исчезновения) периодических компонент движения. Время корреляции резко возрастает в точках бифуркаций связности.

2. Внутри хаотических зон аттрактора время корреляции универсальным образом (11.6) зависит от параметра.

3. В окрестности точек бифуркаций связности имеет место типичная картина в распределении энергии по спектру, отражающая появление низкочастотных компонент, характерных для фликкер-шума. Причиной является резкое увеличение длительности корреляций.

Добавление малых аддитивных возмущений (11.2) сдвигает порог хаотического режима в сторону уменьшения параметра a. При $D = 0{,}01$ критическое значение a^* в (11.3) становится равным 1,034. Зависимость

$\lambda_1^D(a)$ сохраняет вид (11.3) и аппроксимируется формулой

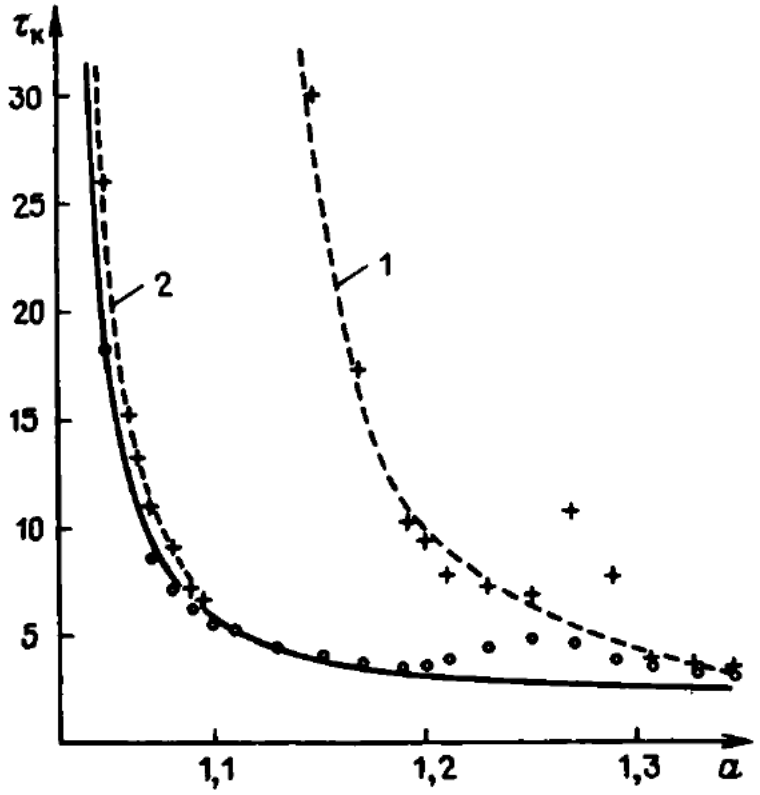
$$\lambda_1^D(a) = c(a - a^*)^k, \qquad (11.7)$$

где k уже не совпадает с универсальной константой γ в (11.6). Так, для $b = 0{,}3$, $D = 0{,}01$ константы в (11.7) принимают значения $c = 1{,}57$, $k = 0{,}82$, $a^* = 1{,}034$. В закономерностях эволюции АКФ $\Psi_x(\tau)$ наблюдается картина, качественно идентичная случаю $D = 0$. В точках бифуркаций связности время корреляций терпит разрывы, после чего зависимости $\tau_к(a)$ экспоненциально спадают, стремясь к обратному значению положительного показателя $\lambda_1(a)$.

Результаты численных экспериментов для $b = 0{,}3$, $D = 0{,}01$ представлены на рис. 11.4. Показаны две экспоненциальные ветви зависимости $\tau_к(a)$, отвечающие 1-тактной (кривая *1*) и 2-тактной (кривая *2*) лентам аттрактора Хенона. Приведенные графики хорошо описываются зависимостями типа (11.7), в которых значения всех констант определяются интенсивностью шума.

В целом можно сказать, что при наличии флуктуаций описанные закономерности в поведении $\tau_к(a, D)$ выражены более ярко, численные данные менее отклоняются от аппроксимирующих теоретических кривых (11.7), чем в случае отсутствия шумов. Так как шумовое возмущение системы ограничивает число бифуркаций слияния хаотических лент аттракторов, то в отличие от случая $D = 0$ (рис. 11.3) количество разрывов в зависимости $\tau_к(a)$ при конечных интенсивностях флуктуаций ограничено (рис. 11.4).

Установленные закономерности выполняются не только для отображения Хенона, а являются типичными для систем с квазиаттракторами седло-



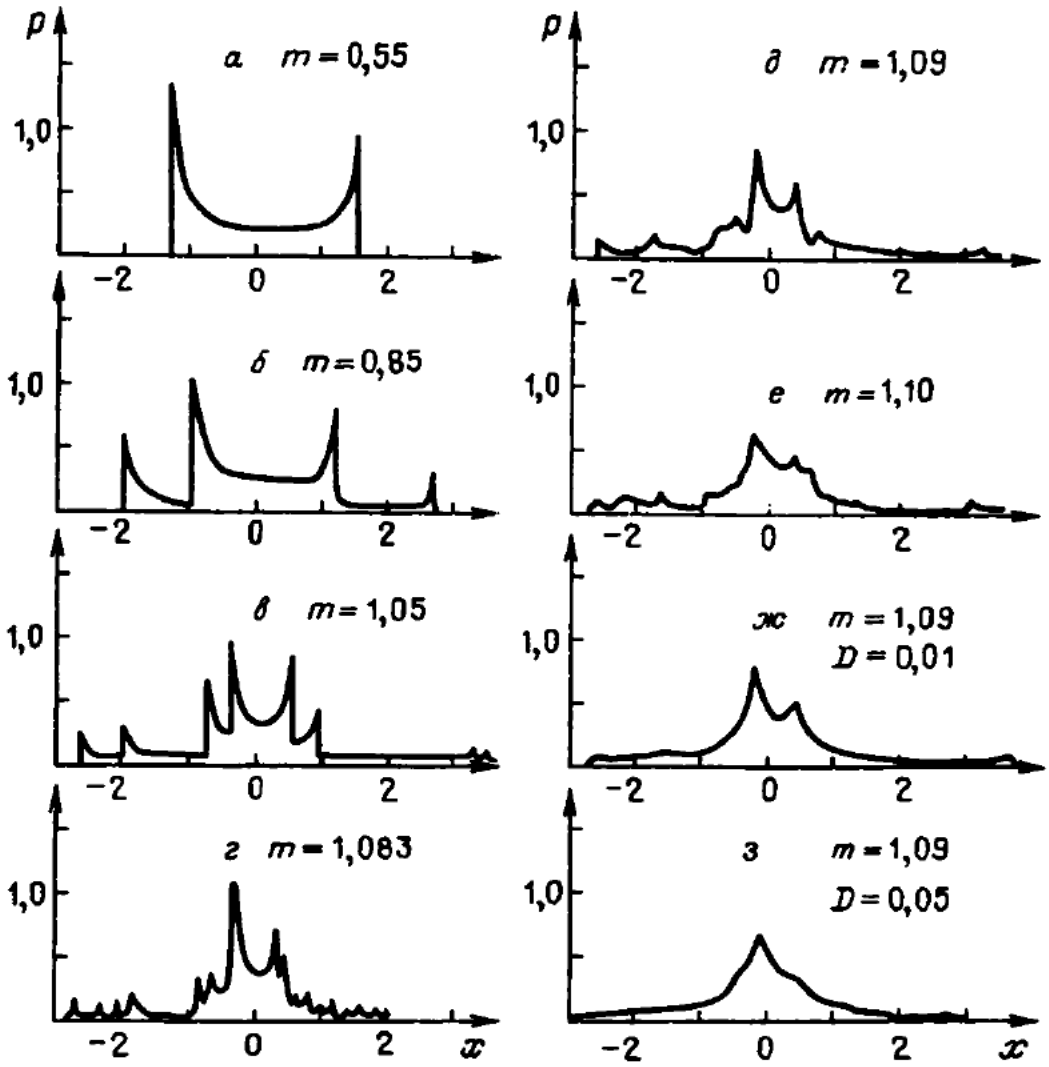
Р и с. 11.4. Зависимость времени корреляции от параметра a отображения Хенона при действии шума интенсивности $D = 0{,}01$. Обозначения те же, что и на рис. 11.3

фокусного типа, возникающими через каскад удвоений Фейгенбаума. В частности, рядом специальных экспериментов вышеописанные явления полностью подтверждены для случая бифуркации 4-тактной ленты аттрактора в 2-тактную в генераторе (7.38) [205, 206].

11.3. Типичные законы распределения и их эволюция с изменением параметров и интенсивности флуктуаций квазиаттракторов седло-фокусного типа

Будем базироваться на предположении существования *инвариантной меры*, сосредоточенной на аттракторе, что позволит применить *эргодическую теорию* к нелинейным диссипативным системам. Так как системы с перемешиванием заведомо эргодичны, можно предполагать наличие инвариантного распределения и для квазиаттракторов, описывающих стационарные хаотические автоколебания.

Проанализируем эволюцию *одномерных законов* распределения при переходе к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода на примере модифицированного генератора с инерционной нелинейностью. Распределения строились численными методами на основе расчетов относительного времени пребывания фазовой траектории в заданных областях



Р и с. 11.5. Эволюция одномерного распределения $p(x)$ в системе (7.38) при вариации параметра m

фазового пространства, т.е. в предположениях стационарности и эргодичности процессов автоколебаний.

Результаты расчетов функции распределения $p(x)$ в зависимости от параметра m в сечении $g = 0{,}3$ представлены на рис. 11.5. На устойчивом предельном цикле периода 1 функция распределения $p(x)$ близка к закону $\arcsin x$, однако в силу нелинейности колебаний не является симметричной. Хорошее соответствие дает аппроксимация $p(x)$ β-распределением (распределением Пирсона 1-го типа [219]):

$$p(x) \approx \varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha^{2\bar{m}}\,\beta^{2\bar{n}}\,(\alpha+x)^{\bar{m}}\,(\beta-x)^{\bar{n}}}{(\alpha+\beta)^{1+\bar{m}+\bar{n}}\,B(\bar{m},\,\bar{n})}, & x \in [-\alpha, \beta], \\ 0, & \beta < x < -\alpha. \end{cases} \tag{11.8}$$

Здесь α, β, $\bar{m}$ и $\bar{n}$ – параметры распределения, $B(\bar{m}, \bar{n}) = \Gamma(\bar{m})\,\Gamma(\bar{n})/\Gamma(\bar{m} + \bar{n} + 1)$. На рис. 11.6*а* изображены $p(x)$ (сплошная кривая) и $\varphi(x)$ (штриховая кривая) для 1-тактного цикла при значениях параметров (11.8) $\alpha = 1{,}3$, $\beta = 1{,}61$, $\bar{m} = -0{,}50$, $\bar{n} = -0{,}41$.

Рис. 11.5*б* иллюстрирует изменение распределения в результате бифуркации удвоения периода. Распределение на 2-тактном цикле можно аппроксимировать полусуммой двух β-распределений при соответствующем выборе параметров. Результаты аппроксимации представлены на рис. 11.6*б*. Каждая последующая бифуркация удвоения периода усложняет форму распределения по вполне определенному универсальному закону, и в пределе формируется сложное *многомодовое* распределение, отвечающее рождению хаотического аттрактора (рис. 11.5*г*).

За критической точкой эволюция функции распределения $p(x)$ качественно иная и отражает эффекты, обусловленные бифуркациями связности. Соседние моды с ростом m постепенно сближаются и сливаются. В итоге формируется распределение $p(x)$ развитой 2-тактной ленты аттрактора (рис. 11.5*е*). Так как в сечении $g = 0{,}3$ 1-тактная лента в отсутствие флуктуаций не реализуется, ее распределение рассчитывалось в сечении $g = 0{,}2$ ($m = 1{,}5$). Распределение $p(x)$, отвечающее развитой 1-тактной ленте хаотического аттрактора, является *унимодальным* с характерной острой формой экстремума вблизи $x = 0$ (рис. 11.6*в*, сплошная кривая). В качестве стандартного базового аппроксимирующего распределения здесь наиболее подходит распределение Лапласа (двойное экспоненциальное):

$$p(x) \simeq \varphi(x) = \begin{cases} \beta_1 \exp\left[-\beta_1(\alpha - x)\right]/2, & x \leqslant \alpha, \\ \beta_2 \exp\left[-\beta_2(x - \alpha)\right]/2, & x > \alpha. \end{cases} \tag{11.9}$$

Результаты количественной аппроксимации $p(x)$ для $m = 1{,}5$, $g = 0{,}2$ с помощью (11.9) представлены штриховой кривой на рис. 11.6*в*. Базовое распределение (11.9) можно применить к описанию плотности распределения вероятностей на 2-тактной ленте аттрактора ($m = 1{,}1$, $g = 0{,}3$, рис. 11.5*е*). Периодическая компонента движения позволяет построить распределения $p_1(x)$ и $p_2(x)$ для каждой из непересекающихся хаотических зон аттрактора. Результирующее распределение, как и в случае удвоений цикла, представляется в виде полусуммы $[p_1(x) + p_2(x)]/2$, в которой

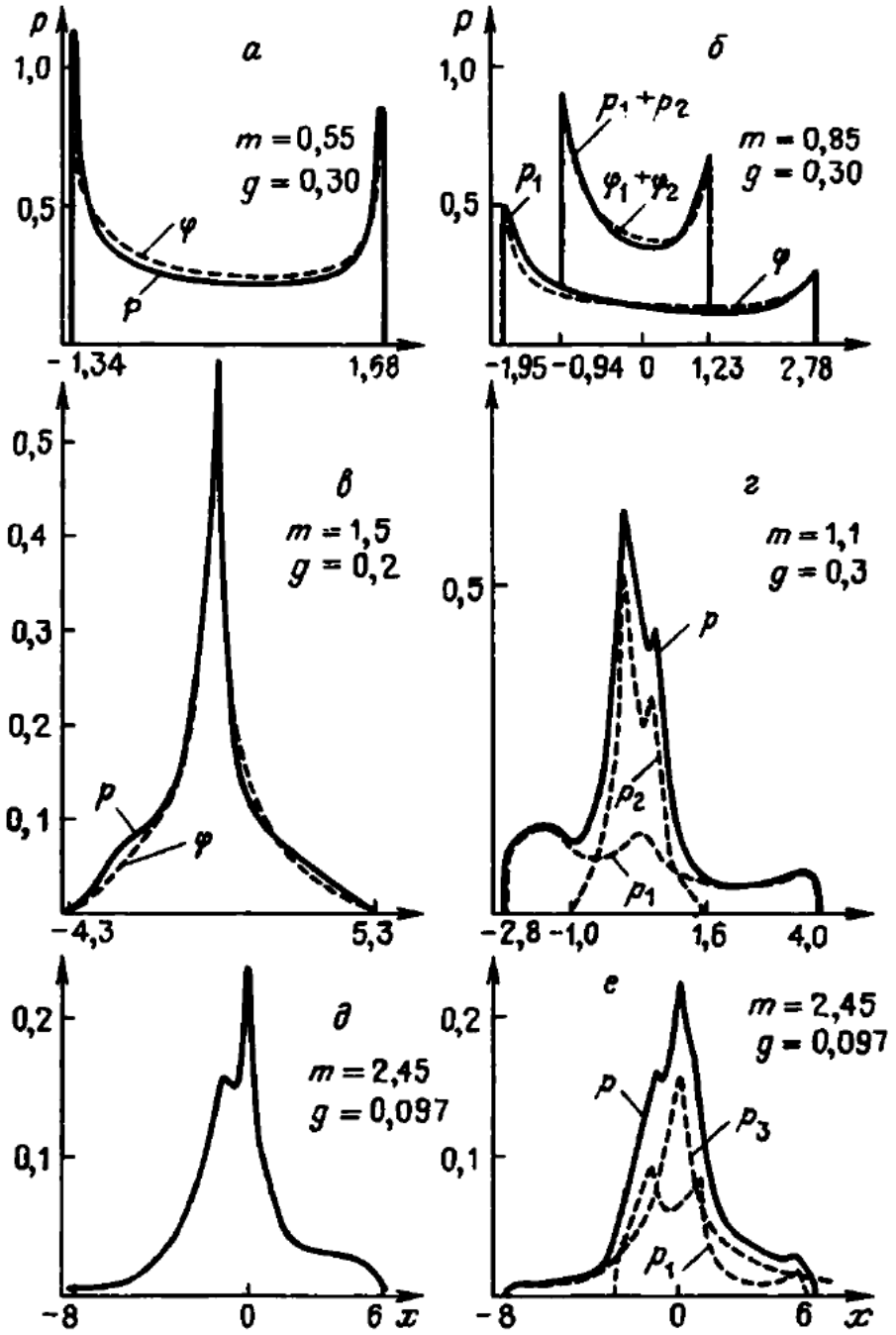


Рис. 11.6. Сопоставление данных численного счета рис. 11.5 с теоретическими аппроксимациями

$p_1(x)$ и $p_2(x)$ даются законом (11.9) с соответственно выбранными параметрами. Результаты эксперимента и теоретической аппроксимации представлены на рис. 11.6*г*. Аналогичным образом можно построить распределения любой из многотактных лент хаотического аттрактора.

Исследуем влияние внешнего аддитивного шума на форму одномерных законов распределения. Расчеты и здесь подтвердили установленные в 11.2 закономерности. Если интенсивность шума мала настолько, что не приводит к внутренним бифуркациям аттракторов, то их действие сводится к сглаживанию мелкомасштабной структуры распределения. С ростом интенсивности шума индуцируются бифуркации связности, что ведет к соответствующим перестройкам законов распределения. К примеру, действие шума интенсивности $D = 0.01$ на 4-тактную ленту аттрактора приводит

к переходу на 2-тактную, а увеличение интенсивности шума до $D = 0{,}05$ индуцирует переход к развитой 1-тактной ленте аттрактора (рис. 11.5*ж*, *з*).

В отличие от гиперболических систем, реакция квазиаттракторов на внешний шум существенно зависит от возможных бифуркаций аттракторов, реализующихся под действием флуктуаций. Если уровень шума не вызывает внутренних бифуркаций, то статистические свойства аттракторов главным образом определяются динамикой и слабо зависят от возмущений. *Динамическая стохастичность* в таких ситуациях оказывается *сильнее* навязываемой извне! Здесь практически наблюдается аналогия с гиперболическими аттракторами [90]. При уровнях шумового возмущения, способного вызвать внутренние бифуркации аттракторов, картина существен-

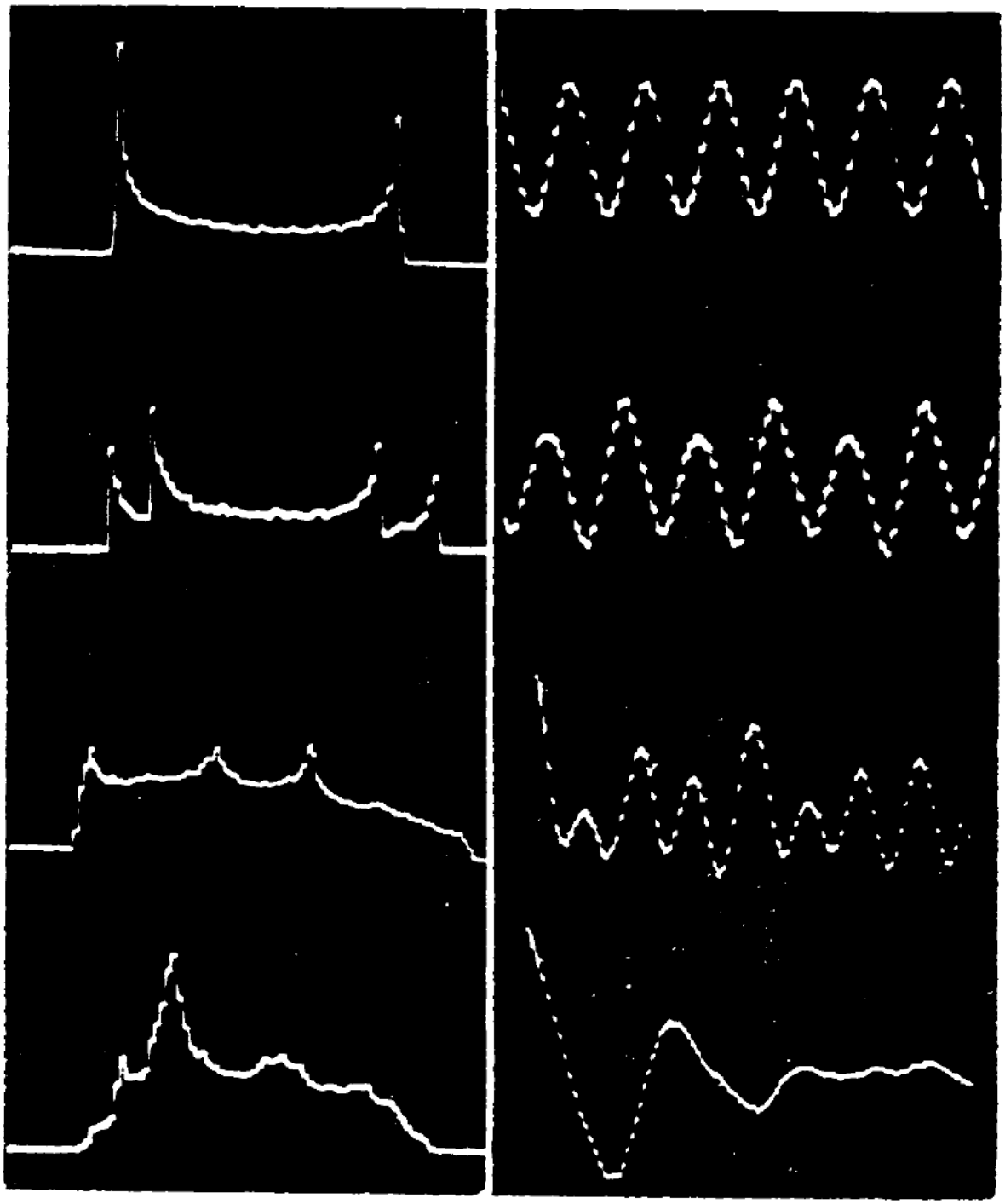


Рис. 11.7 Одномерные распределения $p(x)$ (слева) и соответствующие автокорреляции (справа) (физический эксперимент)

но иная. Интенсивность шума играет при этом роль управляющего параметра со всеми вытекающими последствиями. Становится ясным, как оценивать степень малости уровня шумового воздействия: чем меньше область значений параметров системы, отвечающая существованию той или иной конкретной структуры аттрактора, тем при меньших значениях интенсивности шума наблюдаются *индуцированные шумом* бифуркационные явления.

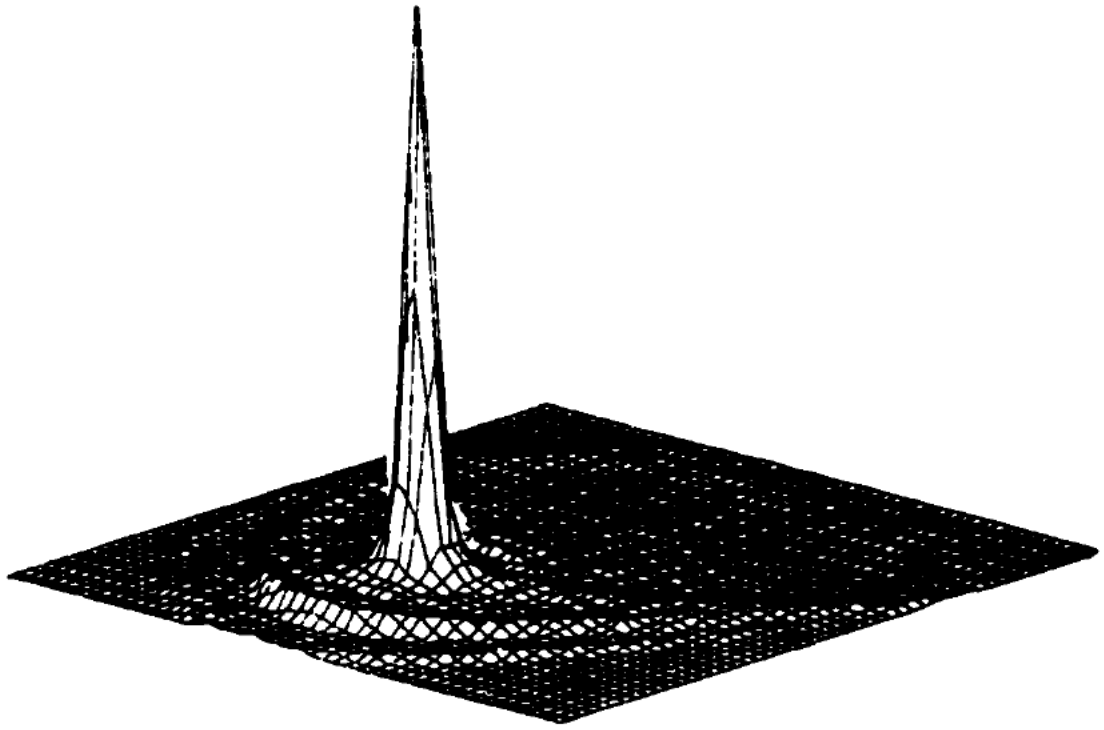
Приведенные результаты математического моделирования качественно воспроизводятся и в физическом эксперименте. С помощью измерителя плотности распределения вероятностей и автокорелляционных функций Х2-6 анализировались статистические характеристики x-компоненты колебательных режимов генератора с инерционной нелинейностью в зависимости от параметра m с фиксированием g. Достоинством эксперимента является то, что исследованию подвергался реальный процесс автоколебаний $x(t)$, содержащий информацию о сложных процессах воздействия флуктуаций. В силу ограниченной (и малой в сравнении с ЭВМ) памяти измерителя Х2-6 детальное количественное сопоставление теоретических и экспериментальных данных, вообще говоря, невозможно. Поэтому проведем сопоставление результатов на качественном уровне.

На рис. 11.7 приведены осциллограммы эволюции одномерных функций распределения $p(x)$ и соответствующих им автокорреляционных функций $\Psi_x(\tau)$ при переходе к хаосу через удвоения при вариации параметра m. Сравнение экспериментальных распределений $p(x)$ с расчетными, изображенными на рис. 11.5, не требует особых комментариев. Отметим лишь, что две нижних осциллограммы отвечают режимам 2- и 1-тактной лент аттрактора.

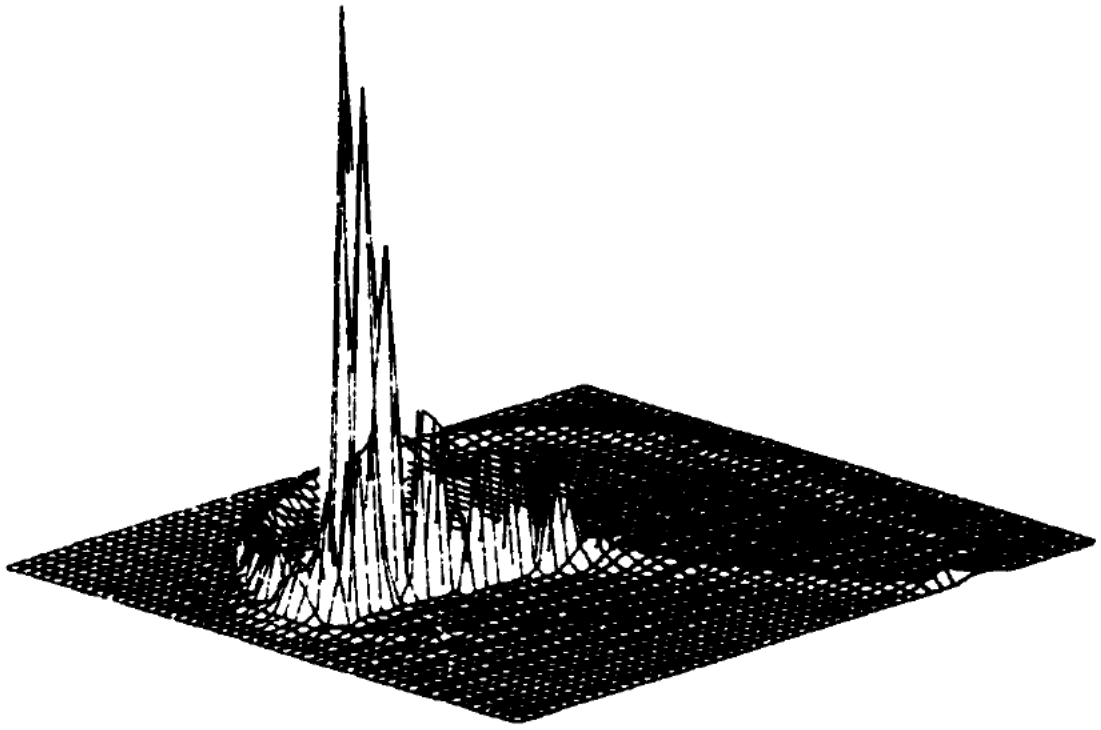
Так как в приборе Х2-6 статистическая обработка реализации $x(t)$ осуществляется, естественно, без специальной процедуры исключения периодических компонент движения, то $\Psi_x(\tau)$ для 2-тактной ленты аттрактора демонстрирует обсуждавшиеся в 11.2 эффект. Как видно из осциллограмм (третья сверху серия на рис. 11.7), АКФ $\Psi_x(\tau)$ для 2-тактной ленты аттрактора явно содержит периодическую компоненту с периодом 2 и за время регистрации к нулю не стремится. В случае развитой стохастичности перемешивание осуществляется по всему аттрактору, и следствием является экспоненциальное уменьшение $\Psi_x(\tau)$ (точнее — огибающей $\Psi_x(\tau)$) практически до нуля в полном соответствии с данными численного эксперимента.

Знание одномерных законов распределения хотя и позволяет дать ответы на ряд практических вопросов (вычисление средних значений, интенсивности, автокорреляции), тем не менее с теоретической точки зрения, безусловно, не решает проблемы статистического описания хаотического аттрактора. Для этого необходимо иметь в распоряжении N-мерный закон, характеризующий распределение вероятностей по всему фазовому пространству системы. Знание N-мерной плотности распределения вероятностей позволит учесть целый ряд более тонких факторов, в частности связанных и с влиянием внешних шумовых возмущений.

С целью иллюстрации приведем результаты численного расчета *двумерной* функции распределения $p(x, y)$, проведенного для режима развитой стохастичности в генераторе , задаваемом системой (7.38) при $m = 1.5$, $g = 0.2$ (см. рис. 10.7). На рис. 11.8 изображена функция распределения



Р и с. 11.8. Двумерное распределение $p(x, y)$ ленточного аттрактора, изображенного на рис. 10.7, в отсутствие шума



Р и с. 11.9. Эффект воздействия шума на двумерное распределение $p(x, y)$, изображенное на рис. 11.8

$p(x, y)$ в отсутствие шума. Сечение ее любой из плоскостей $x = 0$ или $y = 0$ дает близкие к представленным на рис. 11.6*в* результаты. Можно полагать, что в силу симметрии двумерной функции распределения рис. 11.8 одномерное распределение вообще не будет сколь-нибудь заметным образом зависеть от выбранной секущей.

При наличии слабого шумового воздействия это уже не так. Как видно из рис. 11.9, двумерное распределение возмущенной системы становится заметно асимметричным и одномерный закон будет в большей степени зависеть от направления проектирования. Наконец, отметим важную деталь. *Двумерная плотность* распределения вероятностей $p(x, y)$ аттрактора седло-фокусного типа *концентрируется над точкой седло-фокуса* в начале координат, свидетельствуя об относительно большей доли времени, которую фазовая траектория проводит вблизи нуля. Это явление обнаруживается при исследованиях ряда других систем с подобными квазиаттракторами. В частности, качественно аналогичные результаты получаются при статистическом анализе траекторий аттрактора Рёсслера.

11.4. О размерности аттрактора

Геометрические и вероятностные свойства хаотических аттракторов характеризуются различными размерностями, количественное взаимосоответствие которых пока дается оценками типа неравенств и в общем случае требует специальных теоретических исследований. Совокупность выявленных эталонных свойств динамической системы (7.38) подсказывает возможность проведения серии численных экспериментов по расчету различных размерностей хаотического аттрактора и их детального количественного сопоставления.

С этой целью рассмотрим режим развитой стохастичности в системе (7.38) при значениях параметров $m = 1{,}5$, $g = 0{,}2$, которому отвечает аттрактор седло-фокусного типа, изображенный на рис. 10.7. Вначале рассчитаем размерности двумерного хаотического множества в сечении Пуанкаре плоскостью $x = 0$. Естественно предполагать, что размерность в силу непрерывности фазового потока не зависит от выбора секущей. Полная размерность D аттрактора, вложенного в трехмерное фазовое пространство системы, получается добавлением единицы к размерности d хаотического множества в сечении:

$$D = 1 + d. \tag{11.10}$$

Численным интегрированием системы (7.38) с начальными условиями на аттракторе формировался массив данных из $3{,}18 \cdot 10^4$ точек на секущей плоскости $x = 0$, который рассматривался как двумерный аттрактор. Для вычисления размерностей аттрактор покрывался квадратиками со стороной ϵ и рассчитывались следующие величины:

$$\begin{aligned} d_\mu &= \lim_{\epsilon \to 0} [\ln M(\epsilon)/\ln (1/\epsilon)], \\ d_I &= -\lim_{\epsilon \to 0} \sum_{i=1}^{M(\epsilon)} p_i \ln p_i/\ln (1/\epsilon), \\ d_c &= -\lim_{\epsilon \to 0} [\ln (\sum_{i=1}^{Mi(\epsilon)} p_i^2)/\ln (1/\epsilon)], \end{aligned} \tag{11.11}$$

где $M(\epsilon)$ – число ячеек, покрывающих аттрактор; p_i – вероятности того, что точка аттрактора принадлежит i-й ячейке покрытия; d_μ, d_I и d_c – *метрическая*, *информационная* и *корреляционная* размерности аттрактора соответственно.

Так как при $\epsilon = 0$ расчеты проводить нельзя, то вычислялась оценка соответствующей размерности d_ϵ, зависящая от задания величины ϵ:

$$d_\epsilon = H_\epsilon \, [\ln (1/\epsilon)]^{-1}, \tag{11.12}$$

где в зависимости от определения (11.11)

$$H_\epsilon = \ln M(\epsilon), \quad H_\epsilon = - \sum_{i=1}^{M(\epsilon)} p_i \ln p_i, \quad H_\epsilon = - \ln \Big(\sum_{i=1}^{M(\epsilon)} p_i^2 \Big). \tag{11.13}$$

При достаточно малых ϵ можно считать, что

$$\exp H_\epsilon \approx c \epsilon^{-d}, \tag{11.14}$$

где c – некоторая постоянная, а d – значение соответствующей размерности. Тогда

$$H_\epsilon = \ln c + d \ln (1/\epsilon). \tag{11.15}$$

Таким образом, d линейно зависит от $[\ln(1/\epsilon)]^{-1}$ и в пределе при $\epsilon \to 0$ стремится к точному значению размерности аттрактора. В эксперименте необходимо ограничиться интервалом малых значений ϵ, в котором приближенно справедлива линейная зависимость (11.15), и для нахождения размерности d экстраполировать эту зависимость в область $\epsilon \to 0$.

Как видно из результатов расчетов, приведенных на рис. 11.10, экспериментальные зависимости близки к линейным в интервале $0{,}01 < \epsilon < 0{,}30$. Количественная оценка коэффициентов линейных зависимостей методом наименьших квадратов и аппроксимация соответствующих прямых до $\epsilon = 0$ дали следующие результаты:

$$d_\mu = 1{,}306 \pm 0{,}015, \quad d_I = 1{,}300 \pm 0{,}013, \quad d_c = 1{,}277 \pm 0{,}017, \tag{11.16}$$

где погрешность характеризует среднеквадратичные отклонения теоретических аппроксимаций от экспериментальных данных. Полные размерности D легко получить, добавив единицу (см. (11.10)).

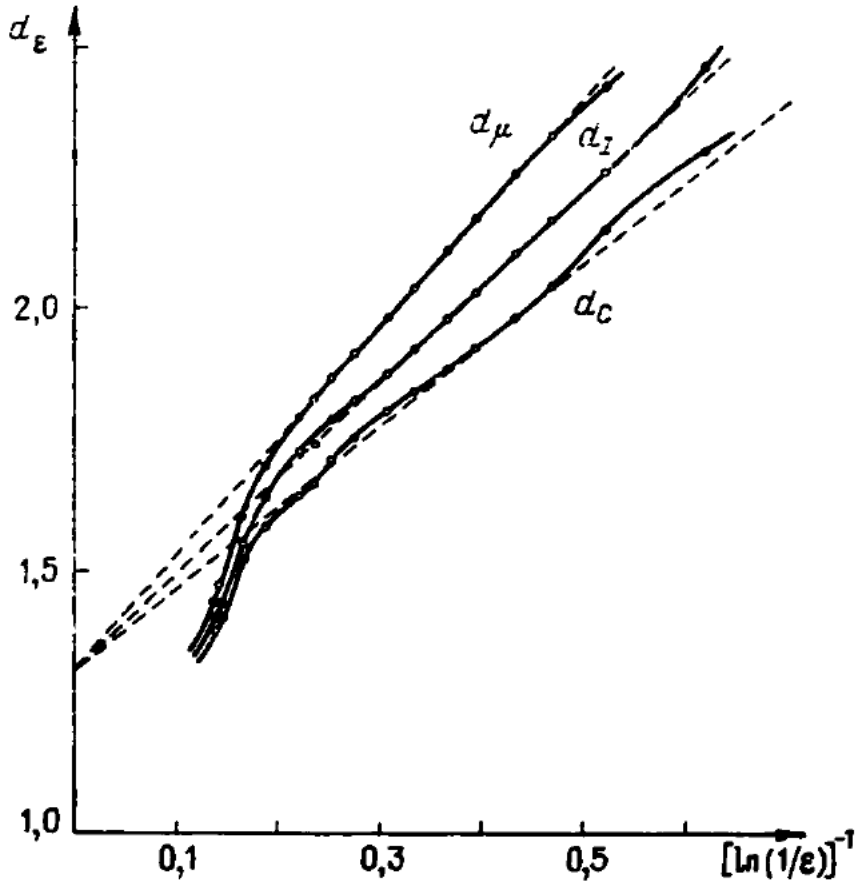
Полученные результаты удовлетворяют теоретическим оценкам $D_\mu > D_I > D_c$, однако с учетом оценки погрешности счета возможно и полное равенство

$$D_\mu = D_I = D_c \approx 2{,}29. \tag{11.17}$$

Проведем расчет *корреляционной размерности*, используя дискретную последовательность одной из координат двумерного аттрактора в отображении, *методом Грассбергера – Такенса*. С этой целью из набранного массива данных используем последовательность координаты y. Для размерности пространства вложения, равной 4, результаты эксперимента следующие:

$$d_c = 1{,}292 \pm 0{,}041; \quad D_c = 1 + d_c. \tag{11.18}$$

Как видно из сопоставления (11.18) и (11.16), и этот метод дает результаты, позволяющие предполагать справедливость (11.17).



Р и с. 11.10. Рассчитанные размерности аттрактора системы (7.38) в отображении на секущей плоскости $x = 0$ ($m = 1{,}5$, $g = 0{,}2$)

Алгоритм Грассбергера – Такенса для расчета корреляционной размерности можно применить и непосредственно к последовательности значений *одной из координат* трехмерного аттрактора системы (7.38). С этой целью формировался массив данных координаты $x(i, \Delta t)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, 2 \cdot 10^4$, $\Delta t = 0{,}25$. Для размерности пространства вложения, равной 5, и времени задержки $k\Delta t = 2$ результаты следующие:

$$D_c = 2{,}214 \pm 0{,}026. \qquad (11.19)$$

Наконец, вычислялась *ляпуновская* размерность D_L на основе полного спектра ЛХП аттрактора по формуле Каплана – Йорка. Результаты следующие:

$$\lambda_1 = 0{,}062, \quad \lambda_2 = 0{,}000, \quad \lambda_3 = -0{,}187, \quad D_L = 2{,}33. \qquad (11.20)$$

Результаты расчета корреляционной (11.19) и ляпуновской (11.20) размерностей аттрактора системы (7.38) дают несколько заниженное значение D_c и завышенное значение D_L в сравнении с данными, полученными на основе расчета размерностей аттрактора в отображении. Есть основания полагать, что указанные различия, не превышающие 3%, обусловлены относительно малой длиной анализируемой реализации $x(t)$ (для D_c) и малым временем усреднения (для D_L), которые в эксперименте ограничивались возможностями используемой вычислительной техники*).

*) Наращивание массива данных и времени усреднения демонстрировало явную тенденцию к увеличению D_c и уменьшению D_L.

Несмотря на некоторые различия в количественных значениях размерностей, выводы можно сделать однозначно: с точки зрения физики эти *отличия не существенны*. В частности, для решения вопроса о числе активных степеней свободы, задействованных в конкретном режиме автоколебаний системы, можно использовать любой тип размерности, расчет которой по тем или иным причинам наиболее удобен в конкретной ситуации.

Что касается рассмотренного конкретного примера аттрактора седло-фокусного типа в трехмерной системе, то не исключено, что все исследованные типы размерностей теоретически имеют одинаковое количественное значение. Как известно, для трехмерных потоковых систем с дивергенцией векторного поля, зависящей от фазовых координат, в теоретическом плане этот вопрос до сих пор остается открытым.

ГЛАВА 12

РАЗРУШЕНИЕ ДВУХЧАСТОТНЫХ КОЛЕБАНИЙ В НЕАВТОНОМНОМ ГЕНЕРАТОРЕ С ИНЕРЦИОННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ. ТОР-АТТРАКТОРЫ И ИХ СВОЙСТВА

12.1. Общая постановка задачи

Переходам к хаотическому движению в нелинейных распределенных системах и средах, как правило, предшествуют режимы усложняющейся автомодуляции. Спектр колебаний с ростом управляющего параметра обогащается новыми и комбинационными частотами, увеличивается их число и интенсивности, растет число гармоник, и в итоге спектр становится сплошным, свидетельствуя о нерегулярности колебаний. Исторически одна из первых теоретических моделей развития турбулентности по Ландау намного определила ход развития теории динамического хаоса и в экспериментальном плане отвечала реально наблюдаемым эволюционным процессам формирования спектра развитой стохастичности. Однако для более детальных исследований бифуркационных явлений, приводящих к рождению хаоса при разрушении квазипериодических колебаний, в то время не было разработано фундаментальных математических концепций. Непосредственное интегрирование сложных дифференциальных уравнений также сдерживалось отсутствием необходимой вычислительной техники. Отметим, что и физические представления о стохастичности до 60-х годов базировались в основном на статистических явлениях, обусловленных воздействием флуктуаций.

Положение изменилось после публикации знаменитых работ Э. Лоренца [26], Д. Рюэля и Ф. Такенса [27] и результатов фундаментальных исследований советских ученых [6, 11, 15, 20, 22, 23, 32, 37, 46, 52, 53, 56–58, 60, 79, 80, 82–84, 90, 91, 93, 94, 104, 105, 120, 121, 137–139]. Введена концепция странного аттрактора и квазиаттрактора, сформированы новые методы качественного анализа, позволяющие в деталях подойти к исследованию процессов возникновения и структуры притягивающих гиперболических подмножеств в фазовом пространстве многомерных динамических систем. Достижения теории в совокупности понимания с развитием математического обеспечения и быстродействия ЭВМ на принципиально новом уровне сделали возможным возвращение к исследованию проблем нелинейной физики, связанных с бифуркациями квазипериодических колебаний и рождением динамического хаоса.

За последние 10 лет появилось много интересных экспериментальных и теоретических работ по исследованию механизмов перехода к стохастичности через двух- и трехчастотные колебания. Можно выделить три направления в изучении указанной проблемы. Во-первых, строгий теоретический анализ на основе аналитических методов качественной теории динамических систем [17, 20, 37, 40 – 43, 46, 52, 53, 120 – 123, 137 – 139]. Во-вторых, модельное описание нелинейных явлений, приводящих к разрушению инвариантных кривых в дискретных отображениях с привлечением методов ренормгрупповых преобразований и численного счета [140 – 145]. И, наконец, численные и физические эксперименты по исследованию переходов к хаосу через квазипериодические колебания в конкретных конечномерных и распределенных системах [1 – 14, 22, 32, 85, 135 – 136, 220 – 234].

Анализ и сопоставление полученных экспериментальных и теоретических результатов указывают на целый ряд универсальных качественных закономерностей, присущих переходам к хаосу через квазипериодические режимы вне зависимости от конкретных систем. Более того, эти результаты свидетельствуют о том, что по крайней мере при относительно небольших превышениях над порогом критичности динамика распределенных и конечномерных систем во многом сходна.

Это чрезвычайно интересно и практически важно, так как вселяет надежды на создание теоретических основ адекватного моделирования процессов развития турбулентности сплошной среды с помощью систем обыкновенных дифференциальных уравнений и дискретных отображений, что существенно упрощает расчеты.

Как было показано в гл. 10, наличие негрубой гомоклинической кривой типа петли седло-фокуса и грубых гомоклинических траекторий у седловых периодических движений является первопричиной развития квазиаттракторов соответствующей структуры. В случае переходов к хаосу через квазипериодические колебания подобным центральным объектом является гомоклиническая структура, порождаемая нелинейными процессами разрушения двумерного тора.

В отображении Пуанкаре резонансному двумерному тору отвечает инвариантная кривая, образованная замыканием неустойчивых сепаратрис периодических седловых точек на устойчивые узлы. Если анализировать локальную окрестность одной из седловых точек на инвариантной кривой, то окажется, что механизмы развития гомоклиники качественно сходны с процессами в окрестности седловой точки периодического движения в отображении Пуанкаре. В то же время наличие конечного числа седловых точек и их принадлежность инвариантной замкнутой кривой приводят к характерным отличиям в структуре гомоклинических траекторий и как следствие – к специфическим свойствам возникающих квазиаттракторов (тор-аттракторов).

Режимы двухчастотных колебаний реализуются и исследуются при периодическом внешнем воздействии на устойчивый предельный цикл автономных систем, в системах двух взаимодействующих активных нелинейных осцилляторов, а также в автономных нелинейных многомерных и распределенных системах, способных работать в режимах автомодуляции. Для изучения ряда принципиальных явлений полезно использовать модель-

ные представления в виде дискретных систем с инвариантной замкнутой кривой, являющейся прообразом двумерного тора в отображении.

Способы возбуждения двухчастотных колебаний подсказывают возможность реализации режимов с тремя независимыми частотами. Например, при слабом периодическом возбуждении системы с аттрактором в виде двумерного тора можно ожидать возникновения трехчастотных колебаний.

Исследование бифуркационных явлений, сопровождающих переход от режима двухчастотных колебаний к тор-хаосу, проще начинать с анализа процессов в автогенераторе, возбуждаемом внешней периодической силой. Преимущества такого подхода связаны с малой (вплоть до минимально возможной!) размерностью динамической системы и простотой изменения числа вращения Пуанкаре путем вариации частоты сигнала накачки.

В гл. 12, 13 на ряде несложных автономных и неавтономных дифференциальных и дискретных систем радиофизики рассматриваются основные механизмы перехода и свойства хаоса, рождающегося при разрушении двух- и трехчастотных квазипериодических колебаний с привлечением широкого комплекса теоретических, численных и экспериментальных методов. Базовой моделью для целенаправленных усложнений возможных динамических явлений в исследуемых системах служит автономная система – модифицированный генератор с инерционной нелинейностью. Структурная устойчивость этой модели в сочетании с относительной простотой численных и физических экспериментов позволяет в деталях проанализировать весьма сложные динамические явления и выявить типичные закономерности.

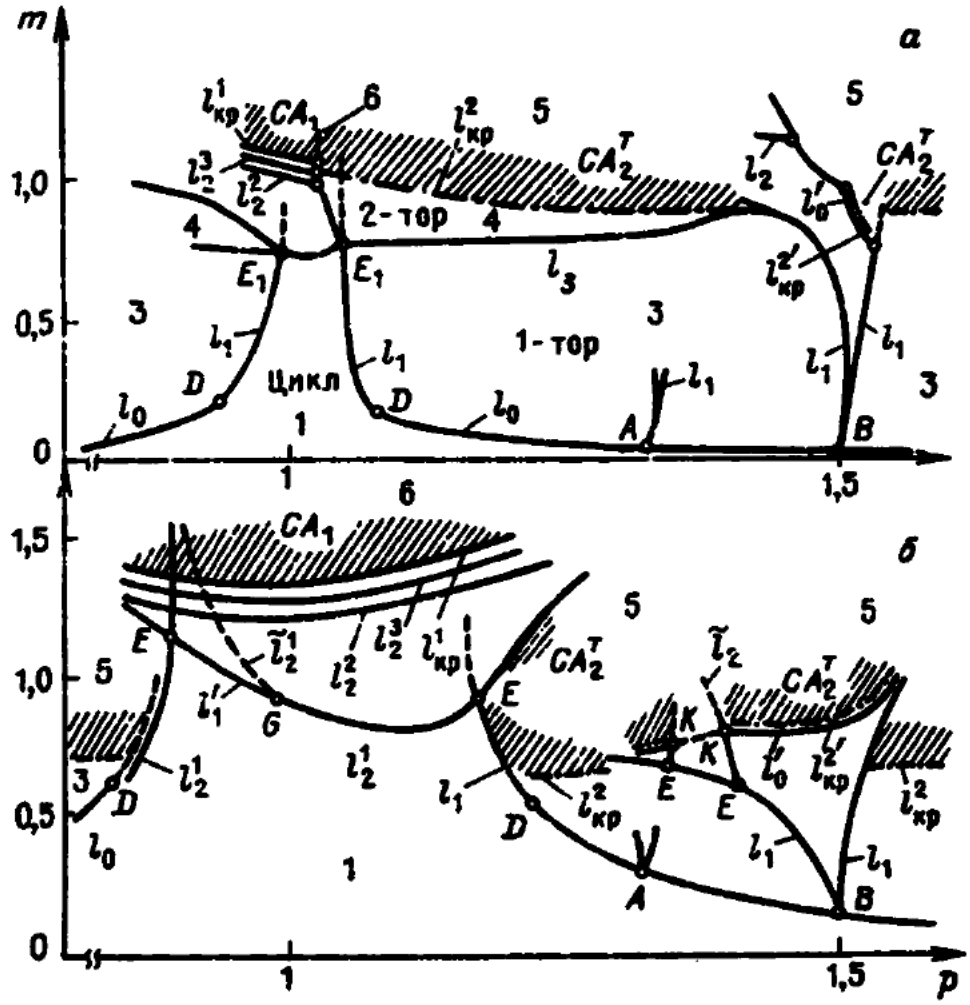
12.2. Бифуркационная диаграмма неавтономного генератора в окрестности основного резонанса. Численный эксперимент

Выбор исходной для нашей задачи системы с предельным циклом не безразличен. Так, например, динамика генераторов типа Ван дер Поля под действием периодической силы хотя и отражает некоторые особенности переходов к хаосу через режим биений, но далеко не полностью, что зависит от способа задания нелинейных характеристик модели [134]. Разумнее в качестве автономной системы рассмотреть не просто генератор периодических колебаний, а систему, способную работать в режимах как регулярных, так и хаотических автоколебаний, т.е. одну из простых систем со сложной динамикой. Поэтому изучение механизмов разрушения двумерного тора целесообразно начать с исследования *неавтономного* генератора с инерционной нелинейностью [13, 235 – 242], задаваемого уравнениями

$$\dot{x} = mx + y - xz + B_0 \sin p\tau, \quad \dot{y} = -x, \quad \dot{z} = g[I(x)x^2 - z], \qquad (12.1)$$

где в сравнении с (7.38) в первое уравнение введено гармоническое возмущение (воздействие) амплитуды B_0 и частоты p, τ – нормированное время.

Для изучения возможных режимов колебаний неавтономной системы вновь применим комплекс методов, использованный при анализе автономных колебаний в генераторе: построение бифуркационных диаграмм на выбранной плоскости управляющих параметров и изучение типичных ре-



Р и с. 12.1. Бифуркационная диаграмма системы (12.1). Численный эксперимент проведен для $g = 0{,}3$ и значений B_0: 0.1 (*а*), 0,5 (*б*)

жимов колебаний и их бифуркаций с помощью численного и физического моделирования. Для изучения бифуркационных явлений коразмерности 1 и 2 в динамических системах с числом параметров более двух важно найти удобную в экспериментальном отношении и наиболее информативную двумерную поверхность в параметрическом пространстве. Выберем в качестве таковой плоскость управляющих параметров m и p, зафиксировав $g = 0{,}3$, и рассмотрим динамику системы (12.1) для выборочных значений амплитуд воздействия B_0 [239, 241, 242].

На рис. 12.1 приведены результаты расчетов бифуркационных линий на плоскости параметров m, p. Область существования устойчивых колебаний частоты внешнего воздействия (сектор *1*) ограничена бифуркационными линиями нейтральности l_0, кратности l_1 и удвоения l_2^k. При пересечении линии l_0 из цикла внешней синхронизации мягко рождается двумерный тор, возникают двухчастотные биения. Вдоль линии l_0 число вращения ϕ монотонно изменяется. Последовательно проходятся точки бифуркаций коразмерности 2, соответствующие сильным резонансам A (1/4), B (1/3) и множеству слабых $\phi = \nu/q$, $q \geqslant 5$. В бифуркационных точках D помимо пары комплексно-сопряженных мультипликаторов на единичную окружность выходит третий мультипликатор $\rho_3 = +1$ и линия l_0 прерывается. Выше точек D регистрируется линия l_1. Переход из зоны резонансных

колебаний через линию кратности соответствует бифуркации слияния и исчезновения устойчивого и седлового циклов на торе. При выходе из сектора 3 через линию l_2^1 исходный цикл теряет устойчивость с мягким рождением устойчивого цикла удвоенного периода. Дальнейшее движение вверх по параметру m приводит к сходящейся последовательности бифуркаций удвоения периода резонансного цикла, завершающейся рождением странного аттрактора ленточного типа CA_1 (сектор *6*).

На рис. 12.1 нанесены линии удвоений l_2^k (k = 1, 2, 3) и линии критических значений параметров рождения CA_1 $l_{кр}^1$. Точками E обозначены пересечения линий l_2^k и l_1. При B_0 = 0.1 (рис. 12.1*а*) бифуркационная линия рождения цикла удвоенного периода совпадает на участке $E_1 - E_1$ с линией удвоения периода l_2^1. Для циклов больших кратных периодов картина аналогична. Увеличение B_0 до уровня 0,5 (рис. 12.1*б*) приводит к усложнению диаграммы. Линия l_2^1 совпадает с линией l_1' на участке $E - G$. Штриховой линией обозначен участок $\tilde{l}_2^1$, на котором происходит слияние устойчивого цикла периода внешнего воздействия с неустойчивым циклом удвоенного периода. Кроме того, в этом случае имеется еще одна линия удвоения l_2^1, ограничивающая сектор *1* слева.

На бифуркационные точки A и B опираются резонансные "клювы", образованные линиями седло-узловых бифуркаций, внутри которых число вращения постоянно и равно значению в точках резонанса на линии нейтральности. Если проследить за числом вращения ϕ вблизи и несколько выше линии нейтральности l_0, то вдоль нее наблюдается однозначная ступенчатая зависимость $\phi(m, p)$ типа "чертовой лестницы" за счет расширения резонансных клювов, которые еще не перекрываются.

На рис. 12.1 показана структура бифуркационных линий в B-клюве. При движении вверх по m внутри клюва на линии нейтральности l_0', которая здесь имеет отношение к синхронному циклу на торе, из резонансного цикла мягко рождается новый устойчивый двумерный тор! Для значения B_0 = 0,5 линия l_0' в B-клюве терпит разрыв в точках K, соответствующих резонансу 1/2. Из них берут начало две линии l_2 и $\tilde{l}_2$, на которых один из мультипликаторов синхронного цикла равен -1. Выше линии l_0' в B-клюве происходит разрушение вновь родившегося тора с образованием "тор-аттрактора" CA_2^T (сектор *5*).

Как видно из рис. 12.1, имеются еще два типа бифуркационных линий l_3 и $l_{кр}^2$, которые расположены в области эргодических биений и слабых резонансов. На линии $l_{кр}^2$, которая в действительности характеризуется сложной фрактальной структурой, фиксируется переход к стохастичности через серию многочисленных бифуркаций, завершающихся разрушением тора с образованием аттрактора CA_2. При B_0 = 0,5 на линии $l_{кр}^2$ разрушается "однотактный" тор (1-тор). С уменьшением амплитуды воздействия разрушению тора предшествует конечная последовательность *бифуркаций удвоения торов*. Так, для B_0 = 0,1 имеет место одно удвоение тора, происходящее при пересечении линии l_3 снизу вверх по параметру m, и на линии $l_{кр}^2$ разрушается 2-тор.

Как показали расчеты, с уменьшением интенсивности воздействия число бифуркаций удвоения торов растет, но остается конечным для конечных амплитуд B_0 внешнего сигнала.

Принципиально новая бифуркация удвоения торов будет обсуждаться специально, а сейчас подведем краткий итог по результатам численных экспериментов. Двупараметрический анализ системы (12.1) на плоскости параметров m и p позволил определить типичные бифуркации периодических и квазипериодических режимов и выявить характерные области топологически отличающихся типов колебаний. Основные режимы колебаний в неавтономном генераторе с инерционной нелинейностью следующие: *1* – область периодических колебаний частоты воздействия; *2* - область резонансных 2-тактных колебаний вблизи $p \simeq 2$ (на рис. 12.1 эта область не изображена). Характер бифуркаций резонансных 2-тактных колебаний в указанной области с числом вращения $\phi = 1/2$ во многом идентичен случаю резонанса 1/1. В обоих случаях имеются: *3* – область практически эргодических биений с различными числами вращения, *4* – области существования 2-торов, *5* – области странных аттракторов, порождаемых разрушением двумерных торов, *6* – области стохастичности, возникающей в результате накопления бифуркаций удвоения периода резонансных циклов на двумерных торах по Фейгенбауму. Внутри резонансных зон, опирающихся на бифуркационные точки коразмерности 2 на линии нейтральности, реализуются синхронные циклы с соответствующим рациональным числом вращения. Внутри клювов синхронизации при движении по параметру m (с удалением от их основания) резонансные циклы теряют устойчивость с рождением притягивающих двумерных торов, разрушение которых в дальнейшем вновь приводит к стохастичности.

12.3. Экспериментальная диаграмма разбиения плоскости параметров системы (12.1) на секторы с различными колебательными режимами

Численное построение бифуркационных диаграмм (рис. 12.1) требует больших затрат машинного времени, и дальнейшие исследования проведем на радиофизическом неавтономном генераторе, обращаясь к ЭВМ только в специальных случаях. Радиофизический эксперимент, как показал опыт, может не только играть роль контроля адекватности математической и физической моделей, но и служить самостоятельным методом исследования сложных бифуркационных явлений.

Интерпретацию экспериментальных данных проведем в терминах теории бифуркаций, в связи с чем дадим краткие пояснения по методике измерений. В физическом эксперименте параметр m регулировался значением сопротивления $R_m \propto m$, управляющего коэффициентом усиления в цепи положительной обратной связи генератора. Параметр p варьировался изменением частоты возбуждающего генератора $f_1 \propto p$, амплитуда воздействия B_0 определялась напряжением сигнала внешнего генератора: $V_0 \propto B_0$. Параметр g, как и при расчетах, был зафиксирован на уровне 0,3.

Для определения характера потери устойчивости режимами колебаний используем осциллограф и анализатор спектра, с помощью которых исследуем перестройку типов колебаний по виду временных реализаций, проекций фазовых траекторий на выбранные плоскости координат и соответствующих спектров мощности. Диагностика линий нейтральности и удвоения в случае суперкритических бифуркаций, соответствующих мягко-

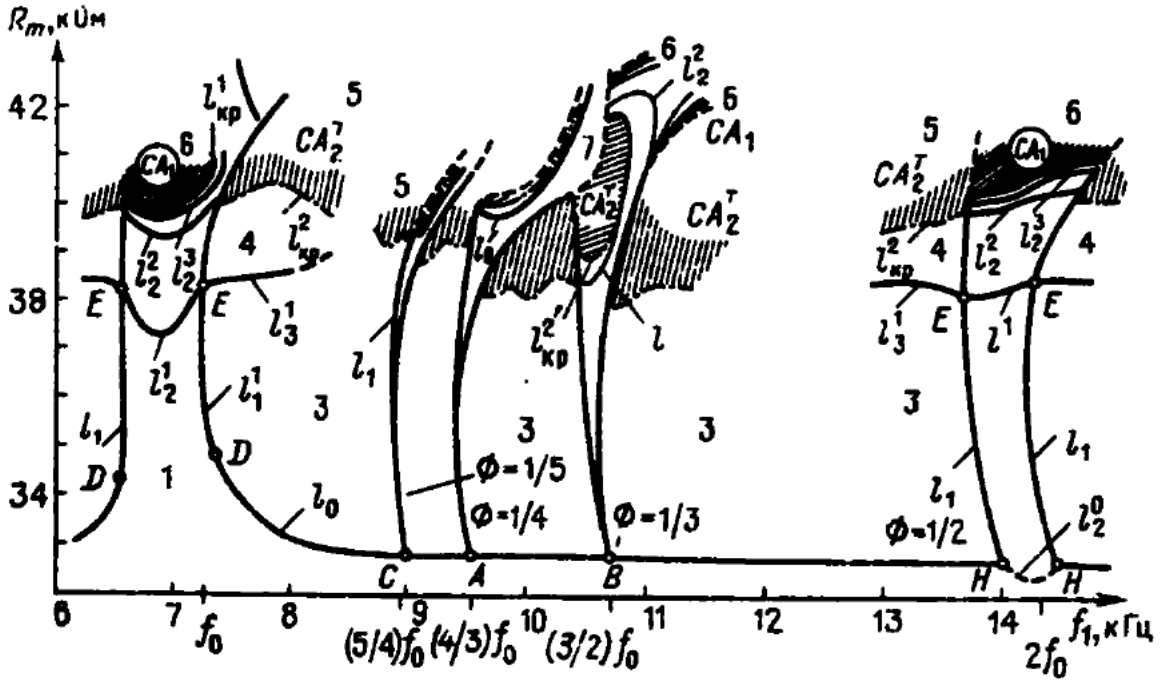


Рис. 12.2. Бифуркационная диаграмма системы (12.1) (физический эксперимент для V_0 = 0,5 В). Обозначения те же, что и на рис. 12.1

му рождению устойчивых торов и циклов удвоенного периода, не представляет особых сложностей. Линии кратности определять несколько сложнее, особенно в областях с сильными гистерезисными явлениями, однако тоже возможно. Бифуркации удвоения и разрушения торов при мягком их характере четко фиксируются при сопоставлении фазовых проекций и соответствующих спектров колебаний при переходах.

На рис. 12.2 представлен фрагмент бифуркационной диаграммы на плоскости параметров R_m, f_1 для диапазона частот воздействия $6 \leqslant f_1 \leqslant 15$ кГц, что соответствует области $0{,}75 \leqslant p \leqslant 2{,}0$ ($p = f_1/f_0$, $f_0 = 7{,}18$ кГц — собственная частота генератора при малых значениях R_m). Диаграмма включает большинство характерных режимов колебаний, качественно повторяющихся с расширением диапазона частот Δf_1 при различных значениях V_0. Разбиение плоскости параметров рис. 12.2 подтверждает, что экспериментально обнаруженные бифуркации в окрестности основного резонанса соответствуют расчетным данным рис. 12.1. Экспериментальная диаграмма рис. 12.2 содержит свыше 30 секторов, образованных пересечениями бифуркационных линий l_i ($i = 0, 1, 2, 3$) и $l^{1,2}_{кр}$. Как и при расчетах, экспериментально обнаружены бифуркационные линии l_3 и $l^2_{кр}$, отвечающие удвоениям тора и его разрушению с образованием аттрактора CA_2, отражающие нетривиальные бифуркации. Линия $l^2_{кр}$ характеризуется сложной фрактальной структурой. Вблизи $l^2_{кр}$ фиксируется разрушение торов с переходом к стохастичности.

Пересечения бифуркационных линий l_i на экспериментальной диаграмме определяют особые точки коразмерности 2, которых на рис. 12.2 свыше 40. Для точек, принадлежащих линии нейтральности l_0, экспериментально можно определить число вращения и, следовательно, порядок резонансов в областях синхронизации. Большинство других особых точек бифуркаций в общем случае с помощью эксперимента диагностике не

поддаются. Бифуркационные точки коразмерности 2 на линии нейтральности l_0 выделяются дополнительными условиями рациональности числа вращения и порождают клювы синхронных колебаний с соответствующими ϕ. Так, внутри A-клюва, который опирается на точку A линии нейтральности, $\phi = 1/4$, в B-клюве $\phi = 1/3$. Зоны слабых резонансов ($q \geqslant 5$) хотя частично и наблюдаются в экспериментах, но с большими погрешностями за счет шумов и с целью сохранения наглядности на рис. 12.2 не показаны.

Анализ режимов в различных секторах диаграммы позволяет выделить 7 топологически отличающихся режимов колебаний, области (секторы) существования которых помечены на расчетной и экспериментальной диаграммах арабскими цифрами. В секторе *1* система находится в режиме вынужденных колебаний частоты внешней силы f_1. Вблизи резонансной частоты f_0 для $R_m > 33$ кОм осуществляется захват частоты и синхронизация на основном тоне. Период колебаний здесь равен $1/pf_0$. На частотах воздействия f_1, близких к удвоенной собственной $2f_0$, осуществляется синхронизация на второй гармонике (сектор *2*, на рис. 12.2 не показан). Интересно, что цикл внешней частоты при переходе через линию l_2^0 снизу вблизи $p = 2$ претерпевает бифуркацию удвоения периода, после чего осуществляется захват частоты. Период цикла в секторе *2* равен $2/pf_0$.

В секторах *3* регистрируются устойчивые биения с различными числами вращения ($q > 5$), которые могут принимать и рациональные значения, отвечающие узким зонам резонансных колебаний. Ограниченное шумами разрешение измерительной установки не позволило провести анализ этих режимов. В секторах *4* траектории системы в фазовом пространстве расположены на поверхности 2-тора – удвоенного тора, когда один из собственных периодов биений претерпел бифуркацию удвоения [153, 236, 136, 237–244]. Множеством узких зон резонансов, реализующихся при вариации параметров, динамика системы в секторах *4* сходна с динамикой в секторах *3*, но отличается тем, что резонансные явления имеют место на 2-торах и проявляются в еще более узких зонах плоскости параметров [241].

В секторах *5* реализуется аттрактор CA_2^τ, который возникает при пересечении бифуркационных линий $l_{кр}^2$ за счет нескольких различных механизмов, приводящих к разрушению тора с образованием стохастичности. Движению внутрь областей *5* соответствуют процессы усложнения структуры CA_2^τ, сопровождающиеся выравниванием сплошного спектра, спаданием автокорреляции и ростом интегральной мощности колебаний. В секторах *6*, расположенных в областях основного резонанса и резонанса на второй гармонике, реализуется CA_1 – странный аттрактор, возникающий в результате накопления бифуркаций удвоения периода синхронных циклов по Фейгенбауму [241].

Сектор *7*, где перекрываются A- и B-клювы с различными числами вращения, характеризуется множеством различных режимов с гистерезисами, перемежаемостью типа "цикл–хаос" и "хаос–хаос", чувствительных к воздействию флуктуаций. Наиболее типичным в экспериментах при входе в сектор *7* снизу был режим перемежаемости между синхронным 3-циклом A-клюва и CA_2^τ, который рождается из двумерного тора на базе 2-цикла B-клюва (сектор *5* в B-клюве).

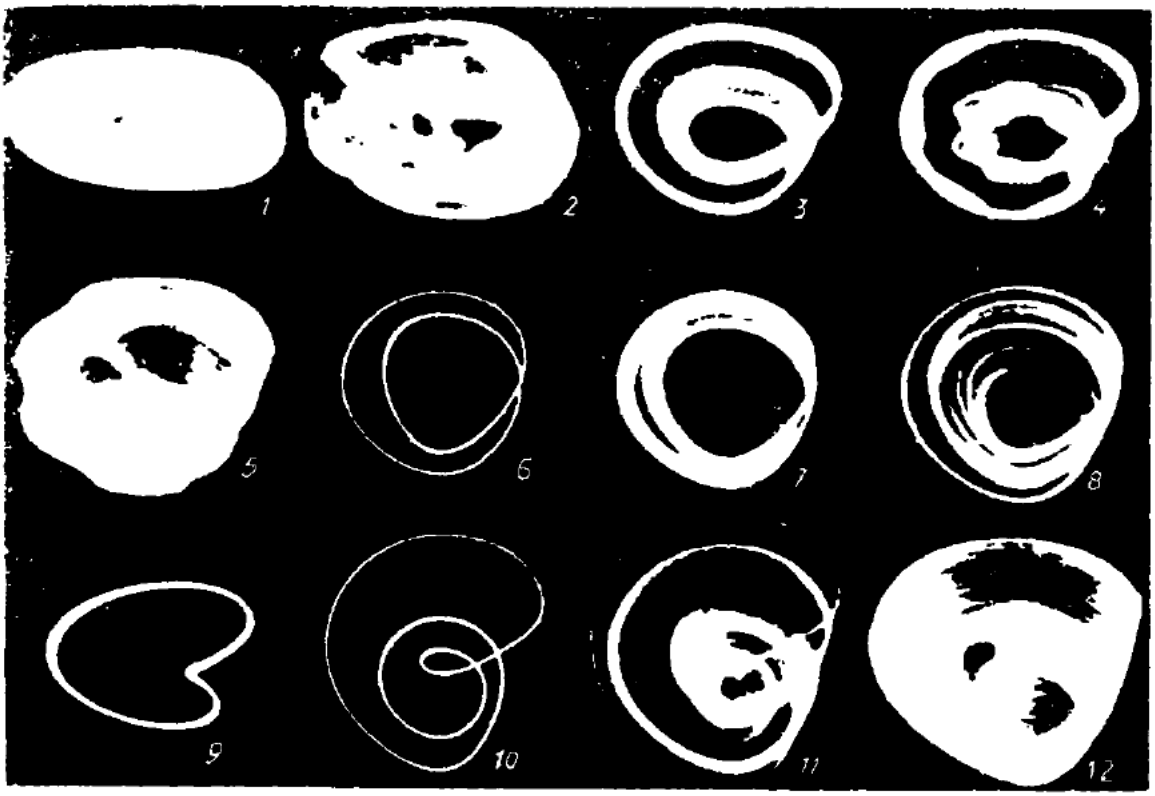


Рис. 12.3. Проекции аттракторов на плоскость x, y в характерных секторах бифуркационной диаграммы рис. 12.2 (физический эксперимент)

Режимы колебаний в описанных выше секторах бифуркационной диаграммы иллюстрирует рис. 12.3, содержащий проекции фазовых траекторий на плоскость x, y, сфотографированные с экрана осциллографа. Отметим, что точки плоскости параметров и масштабы изображений режимов выбраны из соображений наглядности.

По диаграммам рис. 12.1 и 12.2 динамической стохастичности отвечают два типа секторов: *5* и *6*. Однако возможных типов бифуркационных переходов к хаосу в изучаемой системе четыре. Первый тип – фейгенбаумовские удвоения резонансных циклов внутри областей синхронизации *1* и *2*, реализуется при движении по плоскости параметров трансверсально (под ненулевым углом) к линиям удвоений l_2^k. Второй тип переходов осуществляется при пересечении $l_{\text{кр}}^2$ снизу и обусловлен мягким разрушением двупериодических движений на 1-торе (или на 2-торе, если пересекаются секторы *4*). Третий тип переходов к *СА* имеет место при движении внутри любой из областей синхронизации в направлении секторов *5* трансверсально линиям кратности l_1. Стохастичность возникает при этом жестко. Вблизи линий l_1 отмечаются перемежаемость между CA_2^T и циклами синхронизации и гистерезис. Четвертый тип переходов реализуется при движении из секторов *5* в секторы *6* и наоборот. Здесь отмечаются сложные явления взаимодействия аттракторов, *перемежаемость типа "хаос–хаос"* [241, 197–200]. Подобная картина может наблюдаться в областях нелинейного взаимодействия колебаний с различными числами вращения Пуанкаре (в области перекрытия резонансов, сектор *7*).

12.4. Бифуркация удвоения одного из периодов движения на двумерном торе. Мягкий переход к хаосу при потере тором гладкости

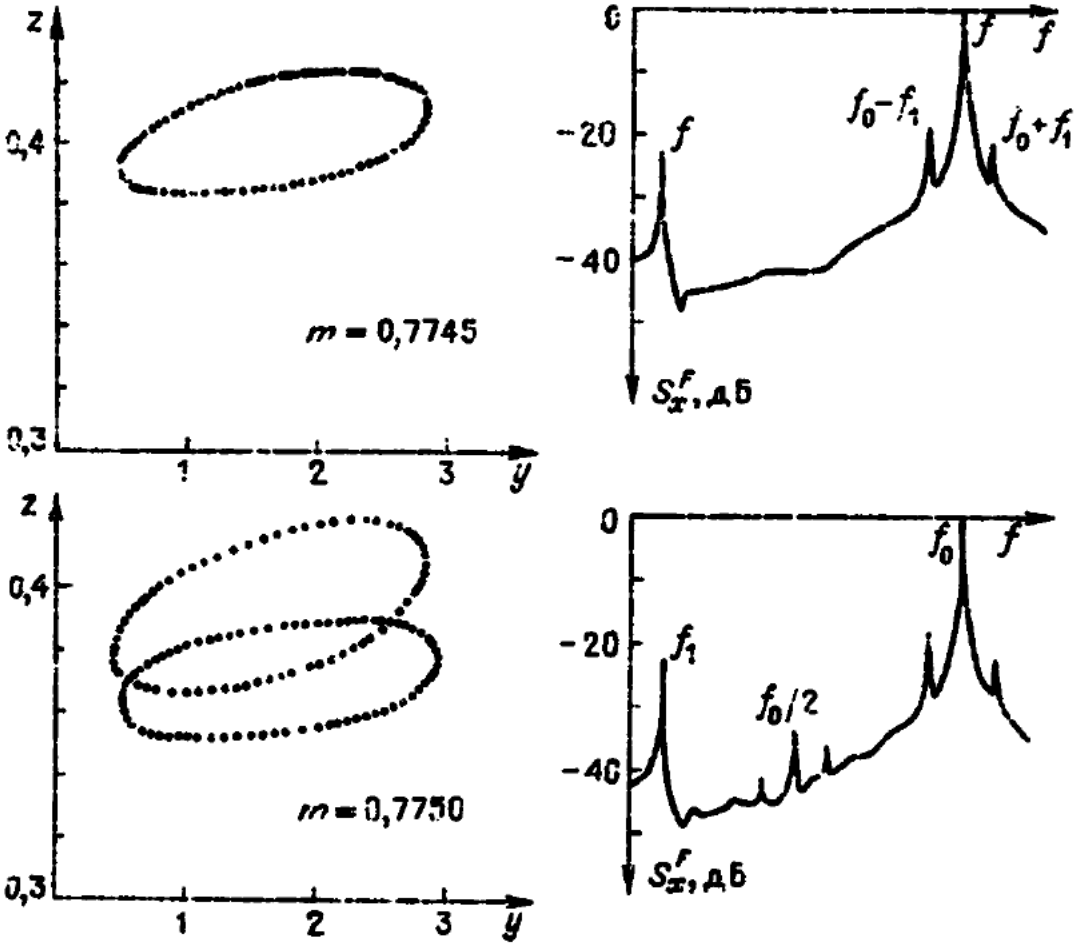
Рассмотрим подробнее переход к CA_2^τ при движении по параметру m, фиксируя различные значения параметров p и B_0. Примером может служить анализ перестроек режимов колебаний в сечении $f_1 = 13$ кГц (рис. 12.2). На линии l_0 из цикла внешнего воздействия мягко рождается 1-тор, который с ростом m проходит серию слабых резонансов и в экспериментах выглядит практически эргодическим. Пересечение линии l_3 вызывает переход 1-тор → 2-тор, т.е. *двумерный тор удваивается*. Удвоение эргодического тора впервые экспериментально установлено в [236]. В отличие от удвоения резонансного цикла на торе эта бифуркация пока не совсем понятна с точки зрения теории устойчивости. Тем не менее в последние годы она была подтверждена рядом численных и физических экспериментов [85, 100, 136, 153, 241–244].

На рис. 12.4 даны сечения Пуанкаре и соответствующие спектры мощности колебаний при прохождении точки бифуркации удвоения эргодического двумерного тора, рассчитанные на ЭВМ для $p = 0{,}111$, $B_0 = 1{,}2$ и указанных значений параметра m. Нет сомнения в том, что в пределах точности счета удвоение тора происходит без резонанса. В отображении содержится более 10^3 точек, причем исключен длительный интервал времени установления.

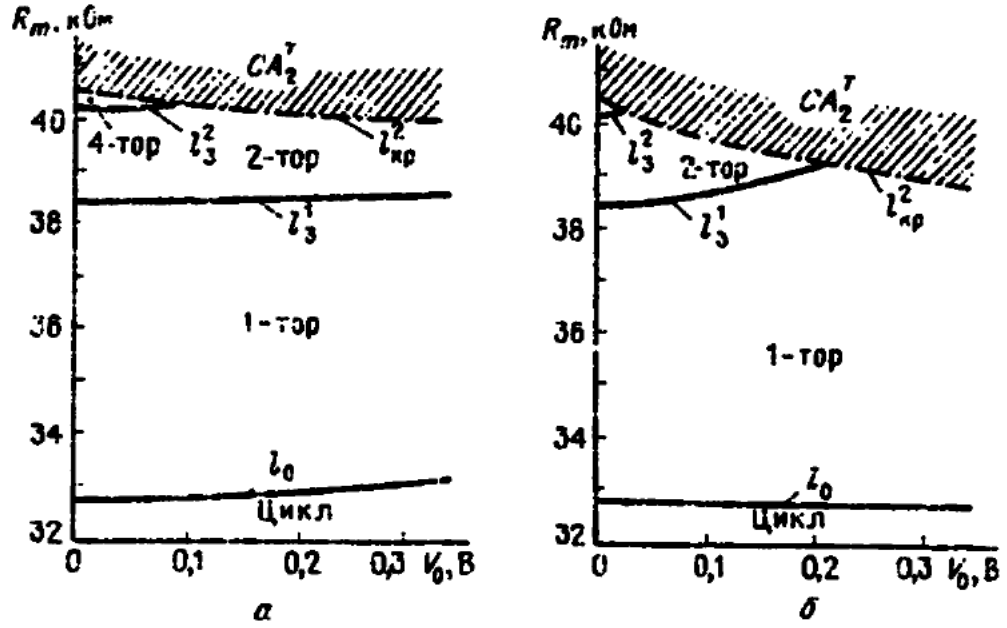
Прохождение точки бифуркации $0{,}7745 < m^* < 0{,}7750$ сопровождается мягким раздвоением исходной инвариантной замкнутой кривой на две самостоятельные инвариантные кривые, которые с ростом параметра m плавно удаляются друг от друга, оставаясь эргодическими. Численное построение одномерного модельного отображения и исследование его эволюции с ростом параметра m дали аналогичный результат. Отображение последования, представляющее собой симметричную относительно биссектрисы замкнутую кривую типа эллипса, при прохождении точки бифуркации m^* раздваивается на две замкнутые кривые, плавно расходящиеся симметрично относительно исходной.

Численные и физические эксперименты свидетельствуют о том, что *число бифуркаций удвоения тора*, предшествующее переходу к CA_2^τ, *конечно* и определяется уровнем воздействия B_0 и степенью удаления по частотам f_1 от резонансной частоты f_0. До сих пор остается неясным, возможна ли теоретически бесконечная последовательность сходящихся бифуркаций удвоения торов подобно каскаду удвоений периода Фейгенбаума? Скорее всего, нет, так как эксперименты свидетельствуют о том, что число удвоений растет с уменьшением интенсивности воздействия и, видимо, стремится в бесконечность при стремлении B_0 к нулю. Но здесь реализуется предельный случай перехода тора в цикл! Для конечных значений амплитуд воздействия B_0 удвоения тора сопровождают переход к хаосу, однако механизмом рождения CA_2^τ не являются.

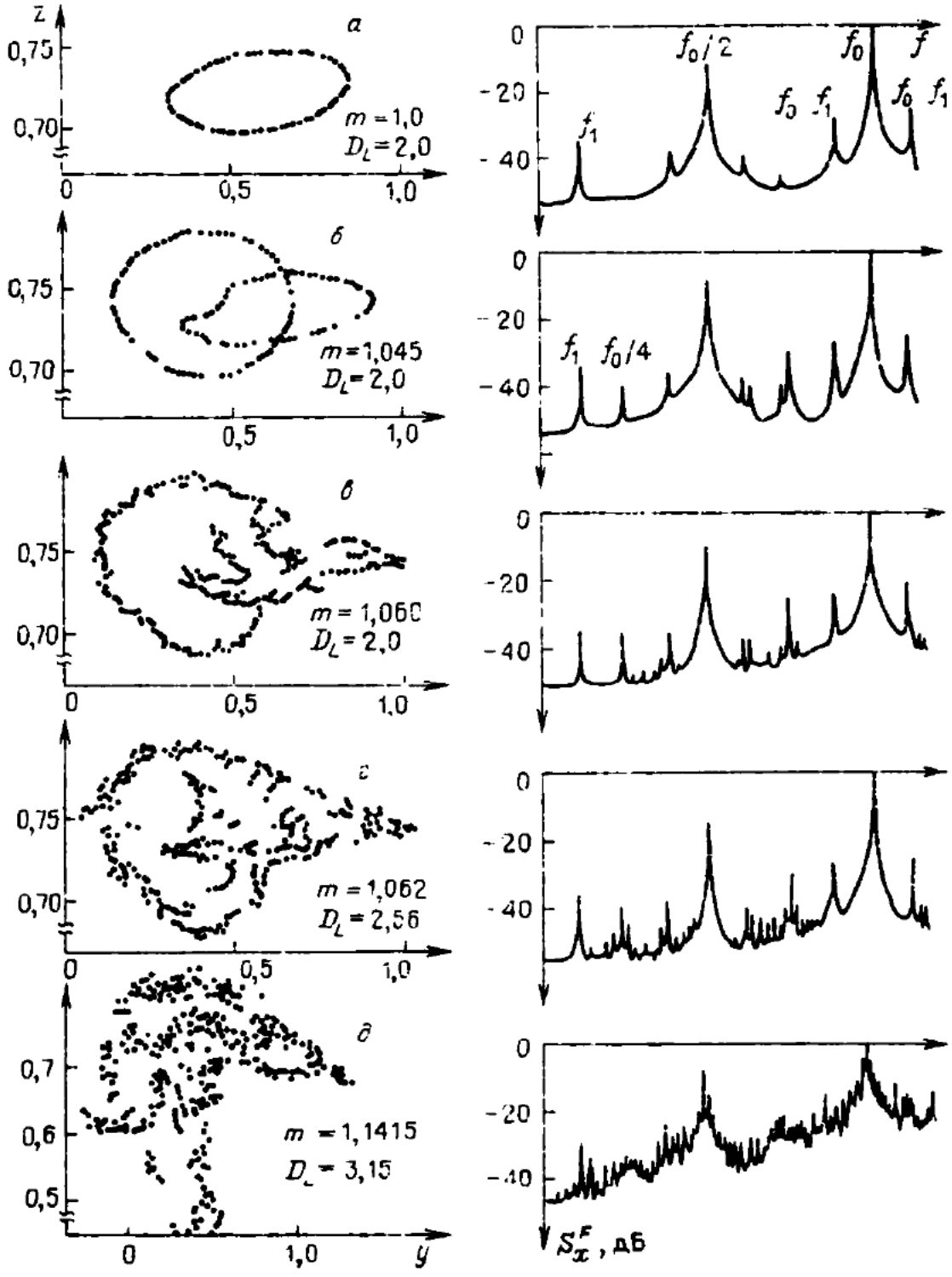
На рис. 12.5 даны диаграммы режимов колебаний на плоскости параметров R_m, V_0 для фиксированных значений частоты воздействия f_1, полученные экспериментально. Эти диаграммы наглядно поясняют, что цепочка бифуркаций удвоения торов конечна и обрывается тем раньше,



Р и с. 12.4. Сечения Пуанкаре (слева) и спектры мощности колебаний (справа) при прохождении точки бифуркации удвоения эргодического двумерного тора



Р и с. 12.5. Экспериментальные бифуркационные диаграммы системы (12.1) для разных f_1: 8 кГц (*а*), 11 кГц (*б*)



Р и с. 12.6. Развитие CA_2^T через потерю гладкости 4-тором. Численный эксперимент проведен для $B_0 = 0{,}3$, $p = 0{,}111$, $g = 0{,}3$

чем больше амплитуда воздействия. Каков же в действительности бифуркационный механизм рождения CA_2^T?

Для ответа на этот вопрос рассмотрим результаты численного эксперимента, проведенного в сечении $p = 0{,}111$ для $B_0 = 0{,}3$. На рис. 12.6 представлена эволюция одной из двух инвариантных кривых сечения Пуанкаре 2-тора плоскостью $x = 0$ с ростом параметра m. Эргодический 2-тор (рис. 12.6*а*) с возрастанием m еще раз удваивается (рис. 12.6*б*), при этом видно начало процесса искажения инвариантных кривых. Рис. 12.6*в* – це-

почка удвоений прерывается, инвариантные кривые теряют гладкость, выше по параметру $m > 1.06$ двумерного тора уже не существует. В его окрестности (рис. 12.6*г*) возникает стохастическое множество CA_2^T – *тор-аттрактор*, эволюционирующий далее к развитому хаосу (рис. 12.6*д*).

Расчет полного спектра ляпуновских показателей для перехода (рис. 12.6) показал, что ляпуновская размерность D_L на K-торах ($K = 1, 2, 4$) равна 2, затем в области $1{,}06 < m < 1{,}10$ быстро нарастает, оставаясь в интервале $2 < D_L < 3$ и далее превосходит 3. Анализ спектров мощности $S_x^F(f)$ свидетельствует также о двух стадиях в переходе к хаосу через двумерный тор. На первой стадии движения по параметру m за счет удвоений появляются гармоники половинной частоты $f_0/2$ (2-тор), затем гармоники $f_0/4$ (4-тор). Вторая стадия начинается постепенным развитием эффекта *потери гладкости* 4-тором с последующим его разрушением. В спектре мощности колебаний мягко возникают пички многочисленных комбинационных частот, однако до момента разрушения тора спектр остается дискретным, размерность $D_L = 2$, хотя сечение Пуанкаре выглядит сложным (рис. 12.6*в*).

Появление положительного ляпуновского показателя в спектре ЛХП сопровождается возникновением в спектре мощности сплошного пьедестала, который с ростом параметра m плавно увеличивается, о чем свидетельствует монотонный рост интегрального спектра $S_I = \int S(f)df$. Эти данные в совокупности свидетельствуют о *мягком* рождении CA_2^T при разрушении тора за счет потери им гладкости.

Исходная автономная система (7.38) демонстрирует переход к хаосу при изменении параметра m через последовательность бифуркаций удвоения периода и вблизи точки перехода приближенно моделируется одномерным отображением типа параболы (гл. 8). Совершенно естественна попытка построения теории универсальности, по аналогии с теорией Фейгенбаума, способной описать явления при периодическом возмущении системы с удвоениями. Так как существенным параметром задачи является один (для нашей системы это m), то следует изучить влияние периодического изменения именно этого параметра, проанализировав простейшую дискретную модель – периодически возмущаемое одномерное отображение Фейгенбаума

$$x_{n+1} = a + B\cos(2\pi n\phi + \psi) - x_n^2, \qquad (12.2)$$

где a – параметр, качественно адекватный превышению над порогом генерации, B – амплитуда, ψ – начальная фаза возмущения, ϕ – число вращения Пуанкаре. Синхронным циклам на торе в этой модели соответствуют рациональные значения ϕ, эргодическим биениям – иррациональные. Теоретическое и численное исследование системы (12.2) впервые проведено в [245] и, несмотря на существенное упрощение модели по сравнению с дифференциальной, подтвердило ряд основных эффектов, наблюдаемых экспериментально в системе (12.1). В частности, в модели (12.2) также установлено явление удвоения торов и обоснованно предполагается, что число бифуркаций удвоения возрастает, стремясь к бесконечности при уменьшении амплитуды воздействия до нуля.

Ограничения одномерного описания процессов эволюции инвариантных кривых с изменением параметров, к сожалению, исключают возможность

анализа механизмов разрушения двумерного тора, который требует привлечения модельных отображений кольца или плоскости.

Бифуркационные явления, качественно аналогичные рассмотренным, имеют место и внутри областей синхронизации (в A- и B-клювах, например). Резонансные циклы сложной структуры (рис. 12.3) на бифуркационных линиях l_0' теряют устойчивость с мягким рождением соответствующих торов, которые разрушаются при пересечении линий критических значений параметров $l_{кр}^2$.

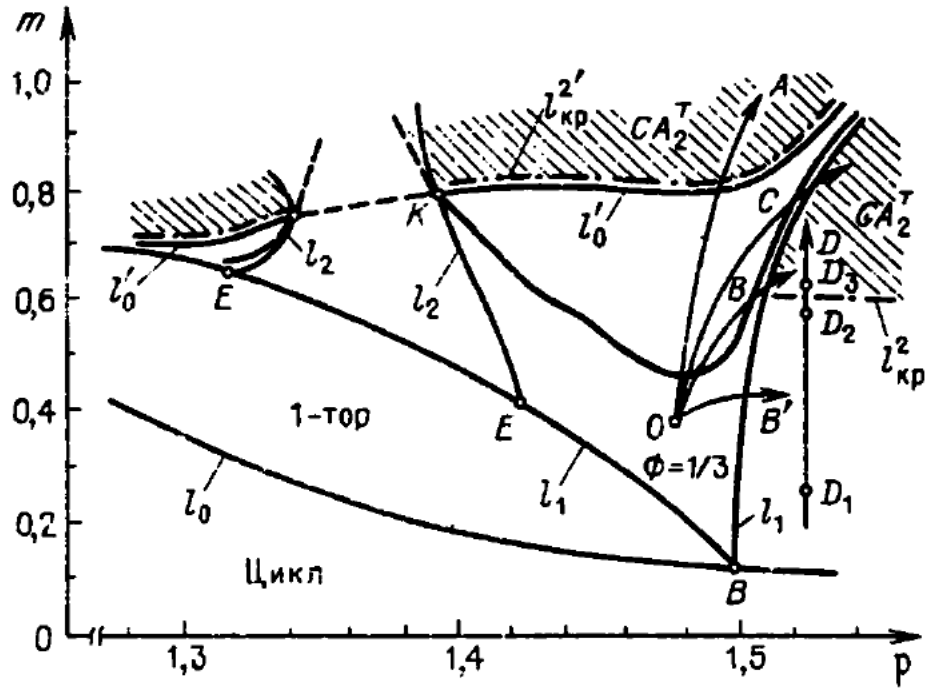
Видна закономерность в последовательности критических явлений. Синхронные циклы теряют устойчивость на линиях нейтральности l_0'. В бифуркационных точках коразмерности 2 на линиях l_0', где ϕ рационально, возникают клювы синхронизации, внутри которых более сложные резонансные циклы вновь теряют устойчивость с рождением двумерных торов. Периоды синхронных циклов при каждой бифуркации подобного типа увеличиваются в q раз, где q – порядок резонанса, и в итоге рождаются периодические режимы с периодом, стремящимся в бесконечность. Каскад критических явлений сгущается по параметрам и представляет собой качественное обобщение закономерностей подобия Фейгенбаума на случай двупараметрических семейств.

Рассмотренная задача с точки зрения радиофизики есть часть общей проблемы синхронизации нелинейных колебаний при сильных взаимодействиях в диссипативных системах. Здесь проявляются эффекты, которые трудно или невозможно рассчитать аналитически и в понимании которых помогают численные и физические модельные эксперименты, описанные выше.

Перечислим основные нелинейные явления, обнаруженные экспериментально в неавтономном генераторе с инерционной нелинейностью: эффект захвата частоты в области основного резонанса на субгармониках $f_k = pf_0/2^k$ $(k = 1, 2\ldots)$, бифуркация удвоения эргодического тора, накапливающийся по параметрам процесс рождения торов и резонансных циклов в областях синхронизации с рациональным числом вращения Пуанкаре, возникновение стохастичности через удвоения синхронных циклов и разрушение двумерных торов, которому предшествуют потеря гладкости и резонансы, а также перемежаемость типа "цикл–хаос" и "хаос–хаос". Система (12.1), как и ожидалось, реализует практически все типичные переходы к хаосу, являясь наиболее простой из подобного класса систем.

12.5. Бифуркационные механизмы рождения тор-хаоса при разрушении двухчастотных колебаний

Система (12.1) представляется весьма подходящей для детальных исследований проблемы разрушения двумерных торов и образования стохастичности. Результаты описанных экспериментов, по сути дела, уже в достаточной степени подтверждают строгий результат [137] о механизмах разрушения двумерного тора. Тем не менее желательно провести более тонкие исследования с целью интерпретации качественных выводов на языке радиофизики, в частности, описав механизмы разрушения тора с образованием CA_2^1 в терминах спектров мощности колебаний [241, 242].

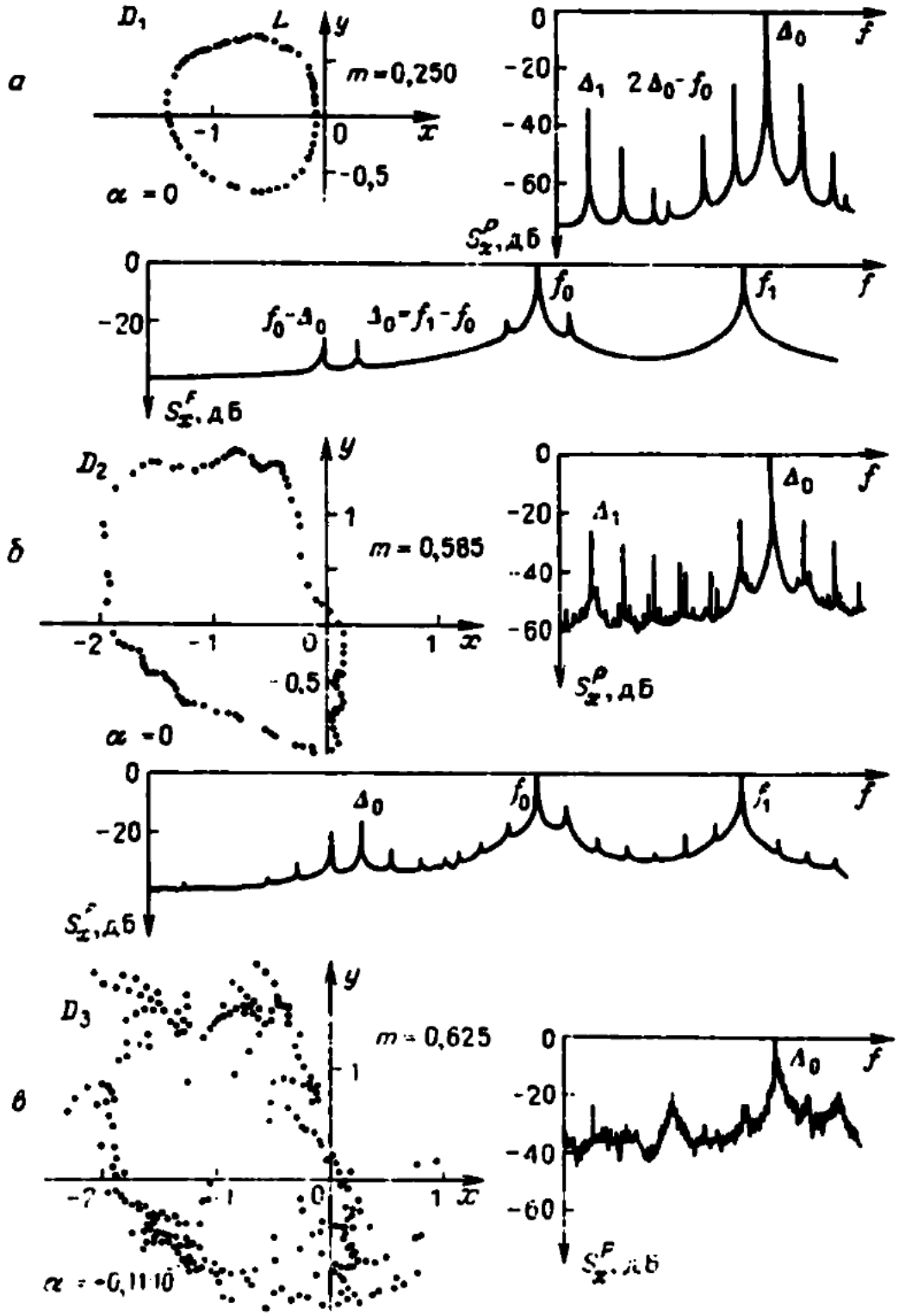


Р и с. 12.7. Критические явления в системе (12.1) в окрестности резонанса 1/3 (численный эксперимент)

С этой целью исследуем более подробно область синхронизации с числом вращения Пуанкаре $\phi = 1/3$ – (B-клюв на рис. 12.1*а*), представленную в увеличенном масштабе на рис. 12.7. Проанализируем эволюцию режимов колебаний численно, двигаясь в указанных на рис. 12.7 стрелками направлениях A, B, B', C и D. Рассмотрим проекции стробоскопического отображения через период внешней силы на плоскость переменных x, y, спектры мощности фазового потока $S_x^F(f)$ и спектры мощности соответствующего отображения $S_x^P(f)$. Для расчета последних массив данных набирался путем запоминания последовательности точек пересечения с секущей плоскостью с последующим расчетом спектра $S_x^P(f)$.

На рис. 12.8 представлена эволюция указанных характеристик при мягкой потере гладкости 1-тором, соответствующая движению по пути D рис. 12.7. Инвариантная кривая L, гладкая вблизи линии рождения тора l_0, с удалением в трансверсальном к l_0 направлении постепенно искажается, теряет гладкость и разрушается с переходом через линию $l^2_{кр}$. В окрестности разрушившегося тора рождается стохастическое притягивающее множество – тор-аттрактор CA^{τ}_2, образом которого является множество точек стробоскопического сечения при $m = 0{,}625$. Разрушение инвариантной кривой L в отображении сопровождается обогащением спектра $S_x^F(f)$ комбинационными частотами, растет их число, плавно увеличиваются амплитуды, и рождению аттрактора CA^{τ}_2 соответствует появление сплошного пьедестала. Особенно наглядна и информативна картина эволюции спектров отображения $S_x^P(f)$, отражающая изменения в низкочастотной части спектра с более высокой разрешающей способностью. Спектр отображения с физической точки зрения соответствует спектру огибающей временной реализации $x(\tau)$, т.е. спектру продетектированного сигнала.

Эволюция режимов колебаний, соответствующая движению по пути A (рис. 12.7), качественно повторяет картину, изображенную на рис. 12.8.



Р и с. 12.8. Эволюция отображений Пуанкаре и спектров мощности колебаний при потере гладкости двумерным тором. Точки D_1 (*а*), D_2 (*б*) и D_3 (*в*) соответствуют указанным на рис. 12.7

Отличия есть в расположении спектральных линий на оси частот, которое задается числом вращения ϕ в месте пересечения линии нейтральности l_0' по пути A.

Выход из области синхронизации в направлении, обозначенном на диаграмме (рис. 12.7) стрелкой B, сопровождается переходом к CA_2^τ при слиянии седло-узлов с их последующим исчезновением, когда тор в бифуркационной точке на линии l_1 уже не гладкий. Этот механизм пере-

хода возможен при условии, что бифуркационная линия негрубого гомоклинического касания расположена выше кривой движения по пути B, что обосновывается ниже. Если выход из области синхронизации осуществить по направлению B' (рис. 12.7), т.е. в область ниже критической линии $l^2_{кр}$ разрушения тора, то наблюдается переход к эргодическим биениям с дискретным спектром частот. Число и интенсивность комбинационных частот в спектре при этом определяется степенью удаленности от бифуркационной линии l_0.

Движение из области синхронизации по направлению C в область развитой стохастичности приводит к жесткому типу перехода "синхронный цикл – хаос". При подходе к линии l_1 по пути C за счет гомоклиники формируется нетривиальное гиперболическое подмножество траекторий, но притягивающим режимом здесь является синхронный цикл на торе. При слиянии седла и узла цикл исчезает, а хаотическое подмножество становится притягивающим, что и приводит к *жесткому* переходу к развитой стохастичности. Вблизи точки пересечения с линией l_1 типичны явление *гистерезиса* и *перемежаемость* между CA^1_2 и синхронным циклом на торе (рис. 12.3).

Механизмы перехода к стохастичности, соответствующие указанным направлениям движения по плоскости параметров бифуркационной диаграммы (рис. 12.7), уверенно регистрируются и в физическом эксперименте. Измерения проводились в окрестности резонанса 1/3 (B-клюв на рис. 12.2) с сохранением направлений движения по плоскости параметров, указанных на расчетной диаграмме.

На рис. 12.9 даны экспериментальные спектры мощности колебаний, соответствующие движению в направлении D. Четко фиксируется мягкий переход к CA^1_2 через потерю гладкости, сопровождаемый обогащением

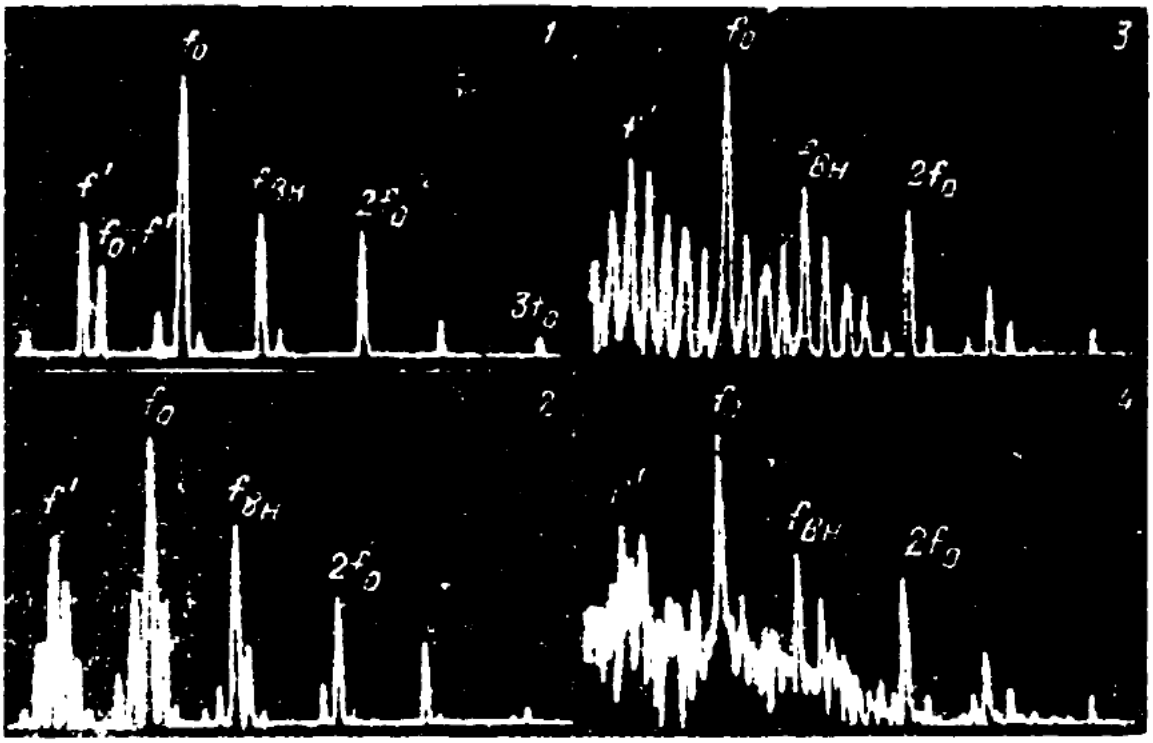
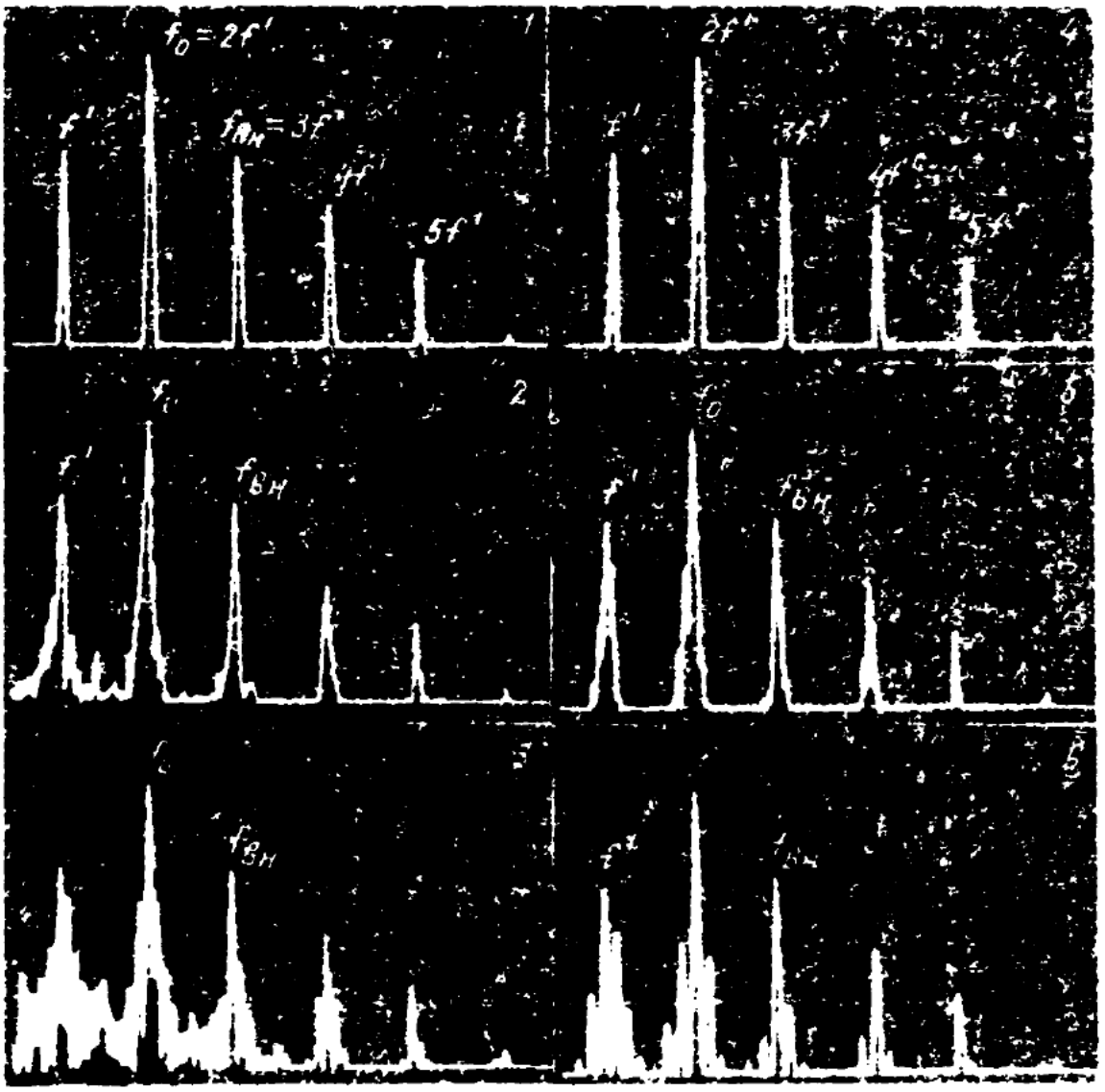


Рис. 12.9. Спектры мощности колебаний при движении по плоскости параметров (рис. 12.7) в направлении D: *1* – спектр гладкого тора, *2*, *3* – развитие эффекта потери гладкости, *4* – спектр "тор – хаоса" при малой надкритичности



Р и с. 12.10. Эволюция спектра мощности колебаний при выходе из области синхронизации в направлении B (*1–3*) и B' (*4–6*)

спектра комбинационными частотами с последующим ростом их интенсивности и образованием сплошного спектра с δ-выбросами на базовых частотах биений. Последняя особенность в формировании спектра CA_2^T типична и может служить экспериментальным критерием рождения тор-аттрактора. Полностью аналогичная картина качественно зафиксирована и при движении по направлению A трансверсально к линии нейтральности внутри зоны синхронизации.

Изменения в спектрах колебаний, имеющие место при движении в направлениях B и B' (рис. 12.7), иллюстрирует рис. 12.10. В первом случае осуществляется выход в область CA_2^T, во втором — в область искаженного эргодического тора, когда он еще не разрушен. Если осуществить движение в направлении C, то, как и предсказано вычислениями, регистрируется жесткий переход к развитой стохастичности через перемежаемость при наличии гистерезисных явлений. Детальные сопоставления экспериментальных и расчетных данных позволяют утверждать, что все механизмы перехода к CA_2^T в неавтономном генераторе с инерционной нелинейностью реализуются строго в соответствии с теоремой о разрушении тора.

В приведенных выше результатах численных и физических экспериментов потеря гладкости тором диагностировалась по искажениям инвариантной кривой и соответствующей эволюции спектра при движении близко к линии седло-узловой бифуркации, но вне, а не внутри зоны синхронизации. Но теорема о разрушении тора сформулирована для области резонанса и оперирует с эволюцией замыкания неустойчивых многообразий седлового цикла на устойчивый, которое, собственно, и образует двумерный грубый тор.

Использованный в экспериментах прием численной (отображения, спектры) и физической (проекции фазовых траекторий, спектры) визуализации эффекта потери гладкости тором базируется на том, что резонансное инвариантное многообразие при пересечении линий седло-узловых бифуркаций как бы не терпит разрыва, наследуя свою форму в область эргодических биений. Если подобные исследования проводить для области значений параметров внутри зоны синхронизации, где существует устойчивый предельный цикл, то эффект потери гладкости окажется "невидимым". Здесь необходимо вычислять неустойчивые многообразия седловых циклов или неустойчивые сепаратрисы седловых точек в отображении, которые будут "проявлять" невидимый в случае резонанса двумерный тор.

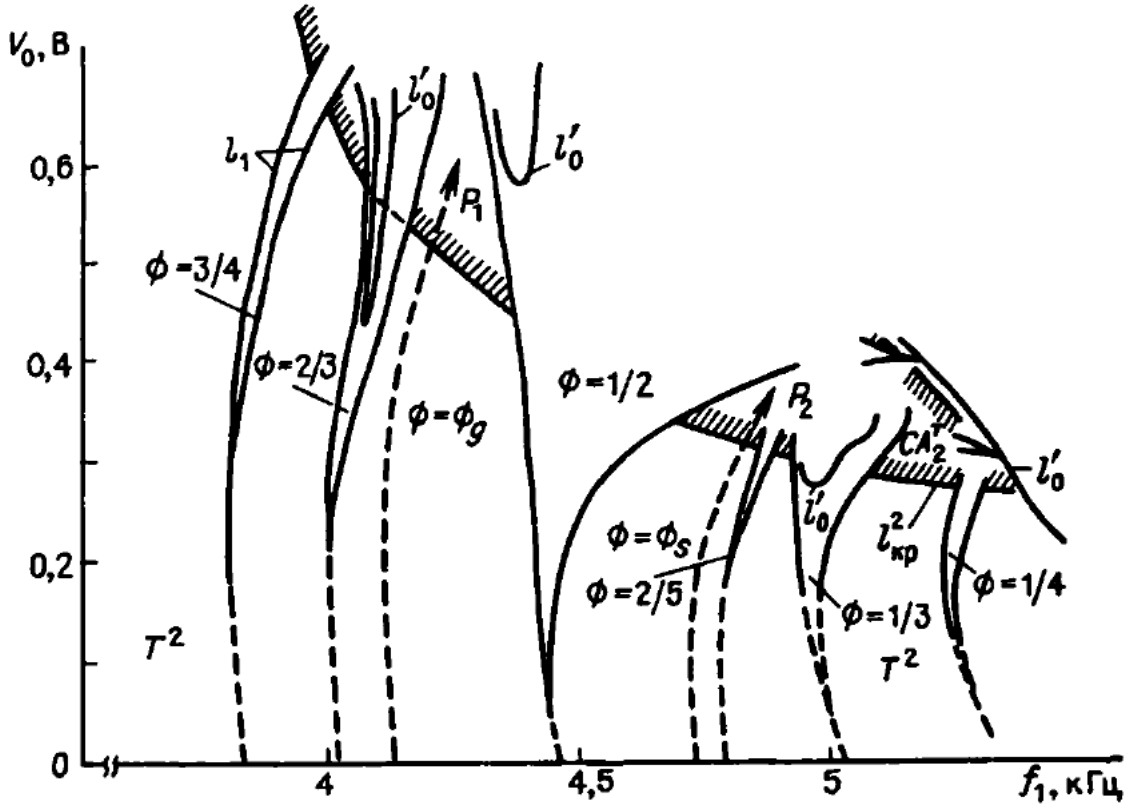
12.6. Универсальные количественные закономерности мягкого перехода к хаосу через разрушение двумерного тора

Переход к тор-хаосу от режима двухчастотных колебаний помимо *качественных* закономерностей, установленных теоремой о разрушении тора [137], описывается также рядом *универсальных количественных характеристик*. Их существование доказано теоретически применительно к одномерным отображениям окружности [140–145], и естественно желание выявить, насколько выводы об универсальности применимы к дифференциальным системам с инвариантной замкнутой кривой в отображении Пуанкаре.

Исследование общих закономерностей мягкого перехода к тор-хаосу проводилось методами численного и физического экспериментов на ряде дифференциальных систем и отображений плоскости [13, 246, 247]. Полученные результаты в пределах точности экспериментов практически идентичны. Поэтому ограничимся изложением исследований количественных закономерностей перехода к тор-хаосу в неавтономном генераторе с инерционной нелинейностью (12.1).

На рис. 12.11 представлены результаты физического эксперимента по исследованию режимов колебаний и их бифуркаций на традиционной для неавтономных систем плоскости параметров V_0 (амплитуда напряжения внешнего сигнала), f_1 (частота сигнала накачки). Качественно эквивалентную картину дал и численный расчет бифуркационной диаграммы системы (12.1) при соответствующих эксперименту значениях управляющих параметров.

Области резонансов диаграммы рис. 12.11 можно классифицировать в соответствии с правилом Фейри [247]. Резонансы, отвечающие числам вращения $\phi = 1/(n+1)$, принадлежат к так называемому первому ярусу "дерева Фейри". По правилу сложения Фейри резонансы первого яруса порож-



Р и с. 12.11. Бифуркационная диаграмма неавтономного генератора с инерционной нелинейностью

даются двумя рациональными числами*):

$$1/(n+1) = 1/n \oplus 0/1, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{12.3}$$

Второй ярус дерева Фейри формируется "сложением" двух рациональных дробей $a/b \oplus c/d$. Дробь $(a+c)/(b+d)$ является единственным рациональным числом с минимальным знаменателем на отрезке между числами a/b и c/d. Если при этом выполняется условие унимодулярности $|ad - bc| = 1$, то значение этой рациональной дроби лежит в середине указанного отрезка и называется *медиантой*.

Медианта $(a+c)/(b+d)$ унимодулярна с каждой из порождающих рациональных дробей a/b и c/d, что обеспечивает построение последующих медиантных ветвей дерева Фейри:

$$\begin{aligned}(2a+c)/(2b+d) &= (a+c)/(b+d) \oplus a/b,\\ (a+2c)/(b+2d) &= (a+c)/(b+d) \oplus c/d.\end{aligned} \tag{12.4}$$

Глобальная структура расположения резонансов на бифуркационной диаграмме системы (12.1) полностью соответствует порядку Фейри (12.3), (12.4). Резонансы, отвечающие второму, третьему и последующим ярусам дерева Фейри, становятся все более узкими по параметрам, различать их довольно трудно даже в численном эксперименте.

Из теории модельных отображений окружности следует универсальность в поведении ширины резонансных областей на линии критических значений параметров $l^2_{кр}$ в окрестности иррациональных чисел вращения [140–145].

*) Символ $\oplus$ означает: $1/n \oplus 0/1 = (1+0)/(n+1) = (n+1)^{-1}$.

Универсальность проявляется в том, что для ширины области синхронизации, независимо от конкретного вида отображения окружности, справедливо соотношение

$$\delta = \delta(\phi) = \lim_{n \to \infty} |(\Omega_{n-1} - \Omega_n)/(\Omega_n - \Omega_{n+1})|, \qquad (12.5)$$

где Ω_n – ширина области синхронизации, отвечающая аппроксимации рассматриваемого иррационального числа ϕ n-м членом последовательности рациональных чисел, сходящейся при $n \to \infty$ к ϕ. Универсальная константа δ зависит только от числа вращения и равна: $\delta_g = 2{,}833\ldots$ (золотое сечение, $\phi = 0{,}5(\sqrt{5} - 1)$), $\delta_s = 6{,}799\ldots$ (серебряное сечение, $\phi = \sqrt{2} - 1$).

На рис. 12.11 показаны экспериментально полученные одномерные кривые P_1 и P_2, на которых число вращения постоянно и равно золотому и серебряному сечениям соответственно. В окрестности серебряного сечения, как показали расчеты, значение $\delta = 6{,}25 \pm 0{,}5$, что удовлетворительно согласуется с теоретическими предсказаниями.

На линии критических значений параметров $l^2_{\text{кр}}$ множество пробелов между зонами резонансов, дополняющее множество резонансных отрезков до нормированной лебеговой меры 1, имеет канторову структуру. Мера множества этих пробелов нулевая, но фрактальная размерность D_F конечна. В окрестности золотого сечения, согласно теории, значение размерности $D_F = 0{,}867\ldots$ Для расчета D_F по результатам численных и физических экспериментов можно использовать соотношение

$$\lim_{n \to \infty} \sum_i [R_i(n)]^{D_F(n)} = 1, \qquad (12.6)$$

где $R_i(n) = L_i(n)/\bar{L}(n)$, $\bar{L}(n)$ – длина пробела между резонансами a/b и c/d на n-м ярусе дерева Фейри, $L_i(n)$, $i = 1, 2, \ldots$, – длины пробелов между каждым из этих резонансов и их медиантой $(a + c)/(b + d)$.

На основе соотношения (12.6) по данным физического и численного экспериментов на ряде систем определялись значения фрактальной размерности D_F. В частности, оценка D_F по данным физического эксперимента рис. 12.11, проведенная измерением длины пробелов между резонансами 1/2, 3/4 и 2/3 (в окрестности золотого сечения P_1 на линии $l^2_{\text{кр}}$) дает значение $D_F = 0{,}78$. В окрестности серебряного сечения (пробелы между резонансными 1/2, 1/3 и 2/5) эксперименты дали удивительный результат: $D_F = 0{,}86$! Полное соответствие с расчетным значением объясняется здесь скорее случайным совпадением за счет ошибок эксперимента, обусловленных аппроксимацией криволинейной границы $l^2_{\text{кр}}$ ломаной линией и относительно большой погрешностью определения границ резонансных областей. Близость полученных экспериментально значений размерности D_F к расчетному значению явно не случайна. В этом убеждают результаты расчетов, проведенных с более высокой в сравнении с экспериментом точностью. Расчетные значения размерности D_F в зависимости от числа вращения, рассматриваемого яруса резонансов дерева Фейри и конкретного вида исследуемой системы не выходят за границы интервала $0{,}85 < D_F < 0{,}90$ [247]. Если учесть, что абсолютная погрешность расчетов размерности D_F не превышала величины $\pm 0{,}05$, то полученные данные по крайней мере не противоречат теории.

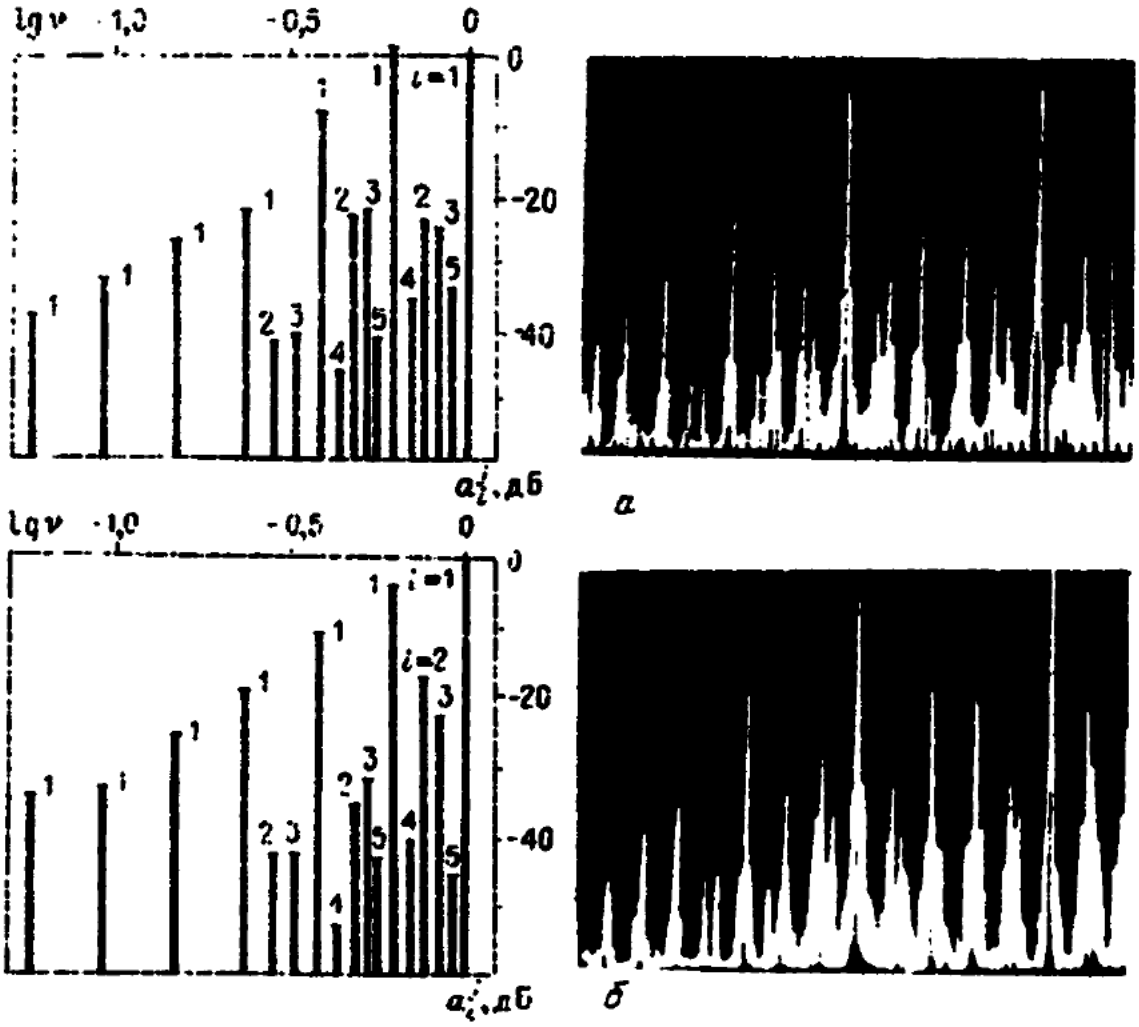
В [141] методом ренормгруппы показано, что спектр мощности отображения окружности в критической точке обладает рядом универсальных свойств. Характер спектра определяется значением числа вращения ϕ. Если ϕ можно представить в виде периодической цепной дроби, то спектр обладает свойством масштабной инвариантности. Наиболее простым разложением в периодическую цепную дробь характеризуется золотое сечение $\phi = \phi_g = 0{,}5(\sqrt{5} - 1) = \langle 1, 1, 1, 1 \ldots \rangle$. В этом случае приведенные частоты спектральных линий $\nu = f/f_1$ в интервале [0,1] удовлетворяют соотношению

$$\nu = |n_2\phi_g - n_1|, \quad n_2 > n_1,$$

где n_2, n_1 – последовательные члены одного из *рядов Фибоначчи*. Так, для главной спектральной серии, содержащей линии наибольшей амплитуды, n_2, n_1 – последовательные числа основного ряда Фибоначчи с основанием (1,1). Далее, спектральные серии, расположенные в порядке убывания их амплитуд, соответствуют рядам Фибоначчи с основаниями: серия 2 – (2,2), 3 – (1,3), 4 – (3,3), 5 – (1,4), 6 – (2,5) и т.д. Спектральная мощность для линий каждой серии S_i^j пропорциональна квадрату частоты:

$$S_i^j = C_i\nu^2(j), \tag{12.7}$$

где i – номер серии, j – номер линии данной серии. Для линий каждой



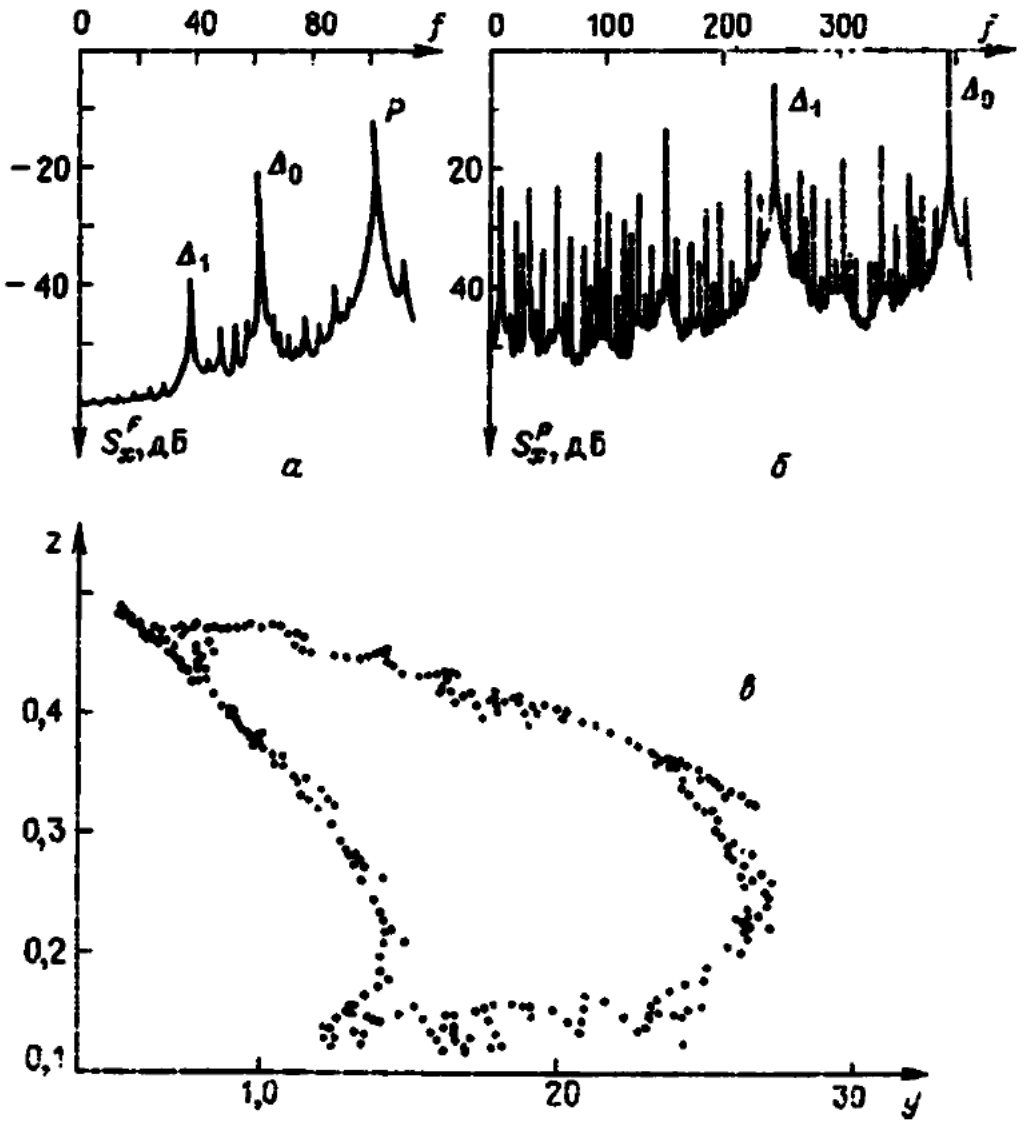
Р и с. 12.12. Спектр колебаний неавтономного генератора вблизи бифуркационной линии разрушения тора для значений g: 0,1 (*а*) и 0.4 (*б*)

серии отношение $S_i^j/\nu^2(j)$ при больших j постоянно (практически для отображения окружности оно становится постоянным уже при $j = 2, 3$).

Интересно исследовать количественные соотношения в спектре мощности колебаний при разрушении двухчастотных биений в реальной потоковой динамической системе. В этих целях генератор с внешним гармоническим воздействием (12.1) представлялся наиболее удобной моделью.

Экспериментально измерялись частоты спектральных линий в интервале $[0, f_1]$ вблизи точки разрушения тора (вблизи линии $l^2_{кр}$) при различных значениях параметра g. Результаты измерений приведены на рис. 12.12 вместе с фотографиями соответствующих спектров с экрана анализатора. Расположение спектральных линий по оси частот полностью соответствует теории! Что касается амплитуд спектральных линий $a_i^j = 10\lg[S_i^j/S_1^1\nu^2(j)]$, то предсказанной закономерности не наблюдается. Отношение мощности к частоте для линий одной серии не остается постоянным, а убывает с уменьшением частоты. Характер поведения спектральных линий качественно не меняется при изменении параметра g.

Для сравнения результатов физического эксперимента с данными исследования математической модели (12.1) проделаны расчеты спектра мощ-

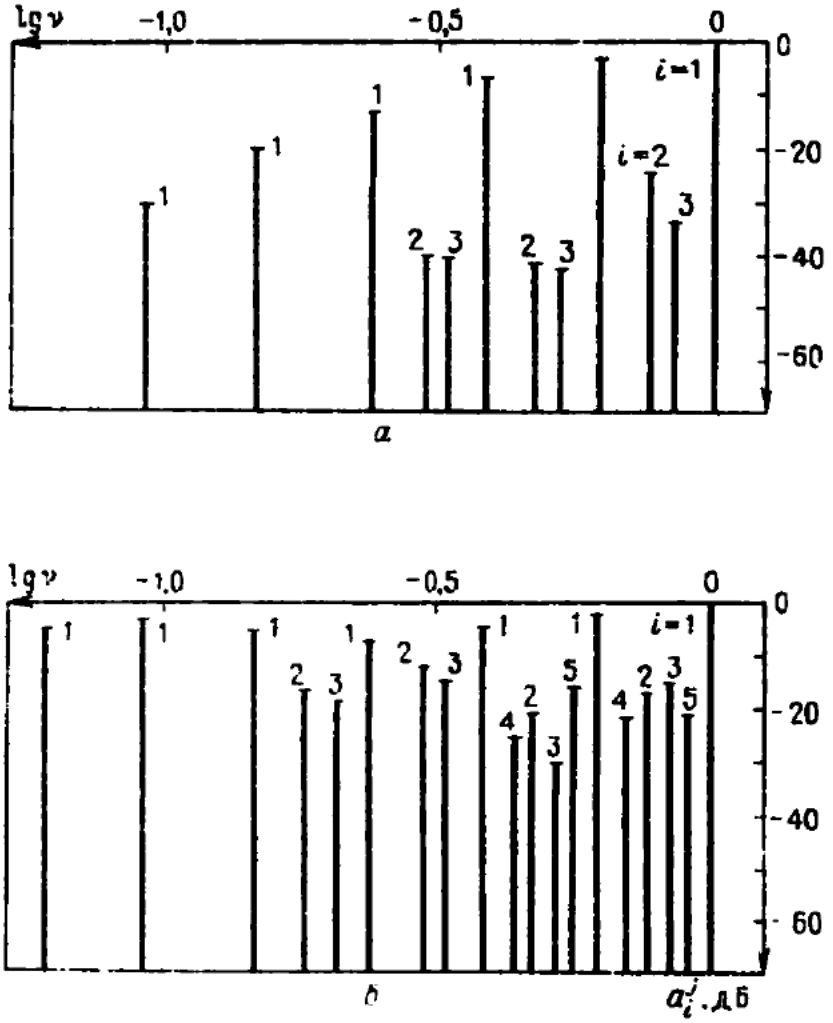


Р и с. 12.13. Спектры потока (*а*), отображения (*б*) и сечение Пуанкаре (*в*) вблизи критической точки разрушения тора (численный эксперимент, $g = 0{,}3$)

ности вблизи перехода к тор-аттрактору CA_2^Γ при числе вращения, равном золотому сечению. Параметр инерционности выбирался равным 0,3. Параметр возбуждения m = 0,7, что соответствует 1-тактному предельному циклу в автономном генераторе. Амплитуда внешнего воздействия увеличивалась до значения, близкого к критическому. Расчет проводился при $B_0 = 0{,}24$, $p = 2\pi f_1 = 0{,}62192$ (f_1 – нормированная частота).

На рис. 12.13 приведены результаты численного эксперимента: *а* – спектра потока $S_x^F(f)$, *б* – спектра отображения $S_x^P(f)$ в сечении потока плоскостью $x = 0$. *в* – инвариантная замкнутая кривая в сечении тора в момент разрушения. Как видно из рисунка, спектр потока не дает достаточной информации для анализа спектральных линий. Возникла необходимость перейти к рассмотрению спектра отображения.

В силу ограниченности памяти ЭВМ оказалось невозможным построить спектр отображения в диапазоне, включающем частоту внешнего воздействия f_1. Поэтому пришлось ограничиться интервалом $[0, \Delta_0]$ и взять в качестве базовых часто́ты Δ_0 и $\Delta_1 = f_1 - \Delta_0$, отношение которых также равно золотому сечению (так как это частоты соседних линий основной спектральной серии). С целью более детального сравнения результатов численного и физического экспериментов последний был повторен при g = 0,3 в соответствующем диапазоне частот $[0, \Delta_0]$.



Р и с. 12.14. Экспериментальный спектр потока (*а*) и расчетный спектр отображения (*б*) вблизи критической точки разрушения тора; g = 0,3

Полученные результаты приведены в табл. 12.1 (физический эксперимент) и табл. 12.2 (численный счет). Там же приведены оценки погрешности измерений частоты $|\pm\delta_1|$ и амплитуды $|\pm\delta_2|$ спектральных линий. В целях исключения систематической погрешности, связанной с неточным заданием числа вращения ϕ_g, в таблицах учтены те спектральные линии, приведенные частоты которых отличаются от теоретических значений не более чем на оцененную погрешность измерений.

Более наглядно результаты представлены на рис. 12.14. Характер экспериментально полученного спектра (рис. 12.14*а*) тот же, что и на рис. 12.12. Амплитуды спектральных линий a_i^j уменьшаются при движении в область низких частот. Это явление не может быть объяснено погрешностью в силу монотонного характера изменения амплитуд. Кроме того, перепад амплитуд спектральных линий значительно превышает погрешность измерений. Характер расчетного спектра (рис. 12.14*б*) иной. Амплитуды a_i^j не убывают с уменьшением частоты. Они колеблются около некоторого постоянного уровня, причем разброс их значений невелик и сравним с погрешностью измерений (~5 дБ). Последнее лучше соответствует выводам теории, чем результаты физических экспериментов. Амплитуды 2 и 3 серий в физическом эксперименте ниже амплитуд линий основной серии в среднем на 30 дБ, в то время как в численном – на 15 дБ.

Расхождение результатов физического и численного экспериментов можно объяснить тем, что первые относятся к спектру потока, а вторые – к спектру отображения. Переход от потоковой системы к отображению связан с нелинейным преобразованием спектра, индивидуальным для каждой конкретной динамической системы. Кроме того, как показывают численные исследования, даже для одномерных отображений соотношение амплитуд спектральных линий зависит от формы отображаемой кривой. Инвариантная замкнутая кривая в сечении конкретной динамической системы имеет свой особый характер искажений на пути к разрушению. Чтобы преобразовать эту кривую в окружность, требуется некоторая нелинейная (а в критической точке и негладкая) замена координат. Соответственно амплитуды спектральных линий также претерпевают нелинейное преобразование. Инвариантная кривая в сечении рассматриваемой динамической системы (12.1) в момент разрушения весьма далека от окружности (рис. 12.13*в*). Поэтому можно предполагать, что отличие спектра, представленного на рис. 12.14*б*, от спектра отображения окружности объясняется не столько погрешностью вычисления амплитуд спектральных линий, сколько искажением формы инвариантной кривой в сечении.

Таким образом, чтобы перейти от спектра конкретной динамической системы в момент разрушения тора при $\phi = \phi_g$ к универсальному спектру отображения окружности в себя, необходимо проделать некоторое нелинейное преобразование амплитуд спектральных составляющих для каждой конкретной системы. Что касается частотных соотношений при $\phi = \phi_g$, то они хорошо наблюдаются на любых моделях, так как полностью определяются значением числа вращения.

Представленные результаты экспериментов свидетельствуют о том, что ряд универсальных свойств одномерных отображений окружности

Таблица 12.1

Универсальные свойства спектра при мягком разрушении тора (физический эксперимент)

f, кГц	$\nu = f/\Delta_0$	δ_1	$\lvert n_2\phi_g - n_1\rvert$	l	$\lg\nu$	$\delta(\lg\nu)$	a_l^j, дБ	δ_2, дБ
0,240	0,092	0,002	$\phi_g^5 = 5\phi_g - 3 = 0.090$	1	−1.040	0,010	−31	3
0,380	0,146	0,002	$\phi_g^4 = \lvert 3\phi_g - 2\rvert = 0,146$	1	−0,840	0,007	−19	3
0,610	0,234	0,002	$\phi_g^3 = 2\phi_g - 1 = 0,236$	1	−0,631	0,004	−13	3
0,765	0,294	0,002	$\lvert 6\phi_g - 4\rvert = 0,292$	2	−0,532	0,004	−40	3
0,850	0,326	0,003	$7\phi_g - 4 = 0,326$	3	−0,487	0,003	−40	3
0,990	0,380	0,003	$\phi_g^2 = \lvert\phi_g - 1\rvert = 0,382$	1	−0,420	0,003	−6	3
1,230	0,472	0,003	$4\phi_g - 2 = 0,472$	2	−0,326	0,003	−41	3
1,375	0,528	0,003	$\lvert 4\phi_g - 3\rvert = 0,528$	3	−0,277	0,002	−42	3
1,610	0,618	0,003	$\phi_g = 0,618$	1	−0,209	0,002	−2	3
1,995	0,765	0,003	$\lvert 2\phi_g - 2\rvert = 0,764$	2	−0,116	0,002	−26	3
2,220	0,852	0,004	$3\phi_g - 1 = 1,854$	3	−0,070	0,002	−32	3
2,605	1,000	0,004	$\phi_g^0 = 1,000$	1	0,000	0,002	0	3

Таблица 12.2

Универсальные свойства спектра при мягком разрушении тора (численный эксперимент)

f, кГц	$\nu = f/\Delta_0$	δ_1	$\lvert n_2\phi_g - n_1\rvert$	i	$\lg\nu$	$\delta(\ln\nu)$	a_i^j, дБ	δ_2, дБ
23	0,059	0,003	$\phi_g^6 = \lvert 8\phi_g - 5\rvert = 0{,}056$	1	−1,230	0,020	−4	5
35	0,090	0,003	$\phi_g^5 = 5\phi_g - 3 = 0{,}090$	1	−1,040	0,010	−2	5
57	0,146	0,003	$\phi_g^4 = \lvert 3\phi_g - 2\rvert = 0{,}146$	1	−0,840	0,010	−5	5
69	0,177	0,003	$10\phi_g - 6 = 0{,}180$	2	−0,750	0,007	−16	5
80	0,205	0,003	$\lvert 11\phi_g - 7\rvert = 0{,}202$	3	−0,690	0,007	−18	5
92	0,235	0,003	$\phi_g^3 = 2\phi_g - 1 = 0{,}236$	1	−0,630	0,006	−6	5
115	0,294	0,003	$\lvert 6\phi_g - 4\rvert = 0{,}292$	2	−0,530	0,005	−12	5
127	0,325	0,003	$7\phi_g - 4 = 0{,}326$	3	−0,490	0,005	−13	5
150	0,384	0,004	$\phi_g^2 = \lvert\phi_g - 1\rvert = 0{,}382$	1	−0,416	0,004	−4	5
172	0,440	0,004	$\lvert 9\phi_g - 6\rvert = 0{,}438$	4	−0,357	0,004	−24	5
184	0,471	0,004	$4\phi_g - 2 = 0{,}472$	2	−0,327	0,003	−20	5
207	0,529	0,004	$\lvert 4\phi_g - 3\rvert = 0{,}528$	3	−0,277	0,003	−29	5
219	0,560	0,004	$9\phi_g - 5 = 0{,}562$	5	−0,252	0,003	−15	5
242	0,619	0,004	$\phi_g = 0{,}618$	1	−0,208	0,003	−1	5
276	0,706	0,004	$6\phi_g - 3 = 0{,}708$	4	−0,151	0,003	−21	5
299	0,765	0,005	$\lvert 2\phi_g - 2\rvert = 0{,}764$	2	−0,116	0,003	−16	5
334	0,854	0,005	$3\phi_g - 1 = 0{,}854$	3	−0,068	0,002	−14	5
357	0,913	0,005	$\lvert 5\phi_g - 4\rvert = 0{,}910$	5	−0,040	0,002	−21	5
391	1,000	0,005	$\phi_g = 1{,}000$	1	0,000	0,002	0	5

сохраняется и для дифференциальных систем. Наиболее четкое соответствие имеет место в отношении спектрального состава колебаний в критической точке для числа вращения $\phi = \phi_g$. Данные теории и эксперимента совпадают в рамках относительно высокой точности спектральных измерений. Хорошее совпадение с теорией можно констатировать и в отношении фрактальной размерности канторова множества иррациональных значений числа вращения вблизи критической линии разрушения тора.

Глобальная структура расположения областей резонансов на плоскости управляющих параметров, как следует из приведенных результатов, также соответствует теоретически описанной и определяется правилом Фейри. Универсальной, по-видимому, является и геометрическая структура резонансных областей вблизи критической линии $l^2_{\text{кр}}$, определяемая соотношением (12.5). Нужно отметить, что приведенные итоговые результаты являются важными и далеко не очевидными. Дело в том, что между отображением Пуанкаре и потоком взаимосвязь принципиально не однозначна. Именно в силу последнего обстоятельства масштабная инвариантность амплитудных соотношений в спектре квазипериодических колебаний не подтверждается для дифференциальных систем, хотя для одномерных отображений окружности она, безусловно, имеет место.

ГЛАВА 13

ЗАКОНОМЕРНОСТИ РАЗРУШЕНИЯ КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ С ДВУМЯ И ТРЕМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ЧАСТОТАМИ

13.1. Переходы к тор-хаосу в автономной системе двух связанных генераторов

Эволюция по параметрам двухчастотных колебаний в неавтономном генераторе с инерционной нелинейностью дает достаточно наглядную картину возможных механизмов разрушения режима биений и переходов к хаосу, но не затрагивает ряда интересных явлений, характерных для автономных динамических систем. Кроме того, с физической точки зрения желательно иметь обоснованные аргументы в пользу качественной аналогии в поведении автономных и неавтономных систем, учитывая важность автономных систем в понимании механизмов развития турбулентности сплошной среды.

Для этого рассмотрим эволюцию квазипериодических колебаний в автономной системе с биениями. Естественно обратиться к модели двух каким-либо образом *связанных* генераторов, способных индивидуально работать в режимах сложных автоколебаний.

Обратимся к системе двух индуктивно связанных генераторов с инерционной нелинейностью, структурная схема которой приведена на рис. 13.1. Считая параметры парциальных генераторов идентичными, запишем уравнения системы [237]:

$$
\begin{aligned}
&(1-\gamma^2)\dot{x}_1 = y_1 + x_1(m - z_1) + \gamma[y_2 + x_2(m - z_2)],\\
&(1-\gamma^2)\dot{x}_2 = y_2 + x_2(m - z_2) + \gamma[y_1 + x_1(m - z_1)],\\
&\dot{y}_1 = -x_1, \quad \dot{z}_1 = g[I(x_1)x_1^2 - z_1],\\
&\dot{y}_2 = -x_2, \quad \dot{z}_2 = g[I(x_2)x_2^2 - z_2],
\end{aligned}
\tag{13.1}
$$

где $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$ – коэффициент связи.

Случай $\gamma = 0$ тривиален. При $\gamma > 0$ возможны *два варианта* решений: общий случай, когда при любом сколь угодно большом времени τ выполнено хотя бы одно из условий $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$, $z_1 \neq z_2$, и вырожденный случай движения в инвариантном подпространстве размерности три шестимерного фазового пространства системы (13.1), в котором при любых τ

выполняются равенства $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, $z_1 = z_2$. Общий случай назовем *асимметричным* (АСМ), вырожденный – *симметричным* (СМ).

Проведем исследование критических явлений для периодических решений системы при вариации ее параметров. В СМ-случае уравнения (13.1) вырождаются в трехмерную систему:

$$(1-\gamma^2)\dot{x} = y + x(m - z),$$
$$\dot{y} = -x, \quad \dot{z} = -gz + I(x)x^2, \tag{13.2}$$

позволяющую проанализировать влияние связи на динамику парциального

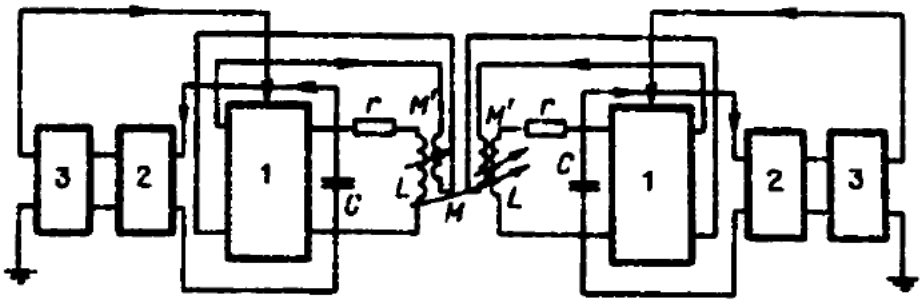


Рис. 13.1. Структурная схема двух индуктивно связанных генераторов: *1* – основные усилители, *2* – линейные усилители инерционных каскадов, *3* – однополупериодные квадратичные детекторы с *RC*-фильтрами

генератора. Линейной заменой переменных и параметров

$$x = (1-\gamma)^{1/4}X, \quad y = (1-\gamma)^{3/4}Y, \quad z = (1-\gamma)^{1/4}Z$$
$$\tau = (1-\gamma)^{1/2}t, \quad m = (1-\gamma)^{1/2}M, \quad g = (1-\gamma)^{-1/2}G \tag{13.3}$$

уравнения (13.2) по форме сводятся к случаю отсутствия связи: $\gamma = 0$. Поэтому динамика систем (13.2) и (7.38) идентична. Влияние связи приводит к изменениям бифуркационных значений параметров m и g, зависящих от γ в соответствии с заменой (13.3)*).

Представляется важным исследование СМ-режима в полной системе уравнений (13.1). Расчет мультипликаторов СМ-циклов в шестимерной системе уравнений в зависимости от параметра m при различных g и γ показал, что при вариации m грубым образом имеет место переход одного из мультипликаторов СМ-цикла через +1, при котором исследуемый цикл не исчезает! СМ-цикл теряет устойчивость в направлениях, трансверсальных к инвариантному трехмерному подпространству. При этой бифуркации от СМ-цикла ответвляется пара АСМ-циклов, зеркально-симметричных относительно потерявшего устойчивость СМ-цикла. В зависимости от значений параметров g и γ эта бифуркация относится либо к устойчивому, либо к неустойчивому СМ-циклу. Соответственно ответвляющаяся пара АСМ-циклов будет устойчивой или неустойчивой. На рис. 13.2*а* представлены типичные результаты расчетов мультипликаторов $\rho_i(m)$ 2-тактного СМ-цикла для

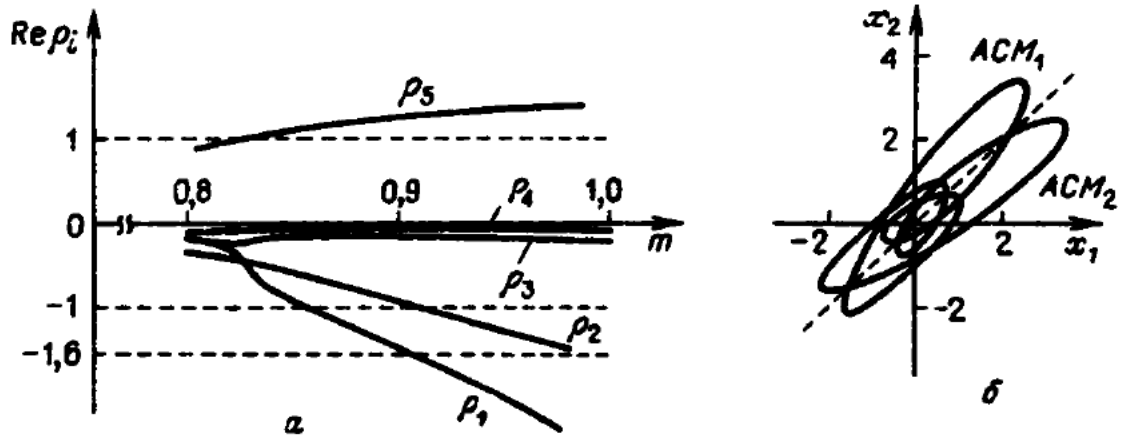
*) Отсюда следует принципиальный вывод о возможности полной *синхронизации* режимов *хаотических автоколебаний* в системе двух взаимодействующих генераторов. Хаотическая синхронизация будет реализовываться в экспериментах при условии устойчивости СМ-хаоса по отношению к возмущениям в трансверсальных к СМ-подпространству направлениях.

$g = 0{,}35$ и $\gamma = 0{,}3$, когда бифуркация +1 наблюдается для устойчивого 2-тактного цикла и рождающаяся при этом пара АСМ циклов устойчива (рис. 13.2*б*).

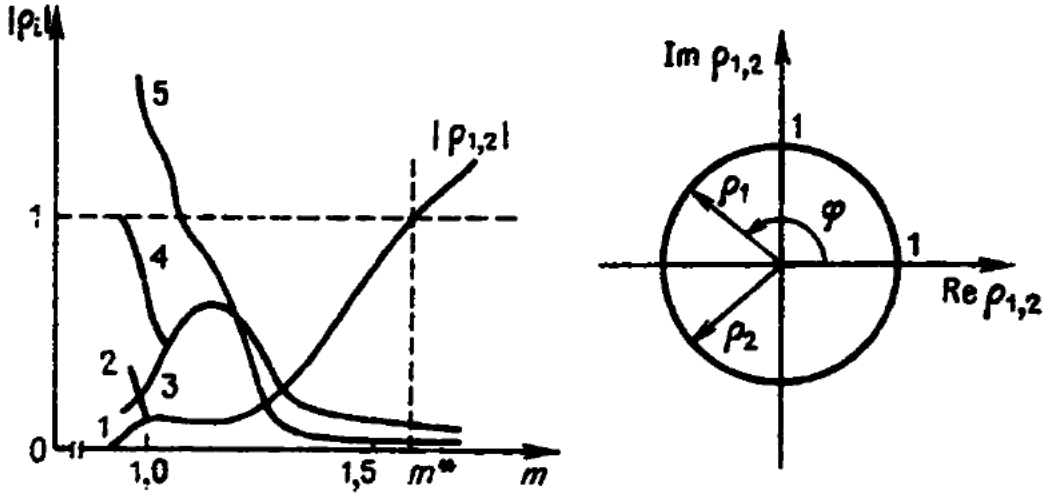
Эволюция АСМ-циклов при вариации параметров системы (13.1) оказывается принципиальио иной в сравнении с эволюцией СМ-циклов. Расчет зависимости мультипликаторов $\rho_i(m)$ $АСМ_1$-цикла показал, что с ростом параметра m потеря устойчивости периодическим режимом обуславливается выходом пары комплексио-сопряженных мультипликаторов на единичную окружность. При этом в шестимерном фазовом пространстве системы рождается устойчивый двумерный тор – бифуркация суперкритическая. Аналогичная картина наблюдается и для $АСМ_2$-цикла.

Бифуркация рождения двумерного тора в исследуемой системе, как и в общем случае, является типичной однопараметрической, имеющей коразмерность 1. Малые изменения параметров приводят к тому, что в пространстве параметров m, g и γ эта бифуркация не исчезает, а несколько сдвигается по гиперповерхности, отвечающей данному типу потери устойчивости.

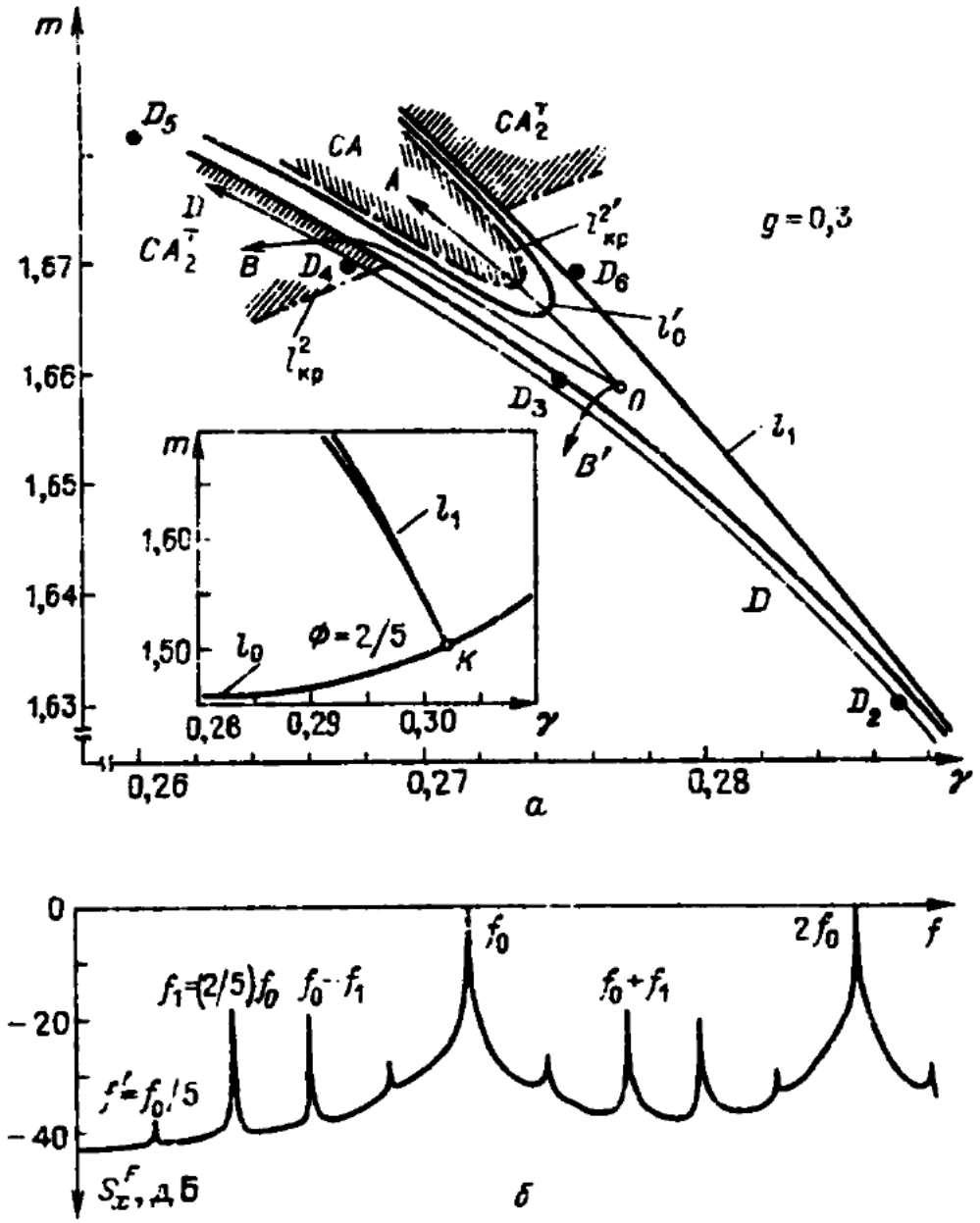
На рис. 13.3*а* приведены зависимости модуля мультипликаторов $\rho_i(m)$ 2-тактного $АСМ_1$-цикла для $g = 0{,}3$ и $\gamma = 0{,}3$. В бифуркационной точке



Р и с. 13.2. *а* – Мультипликаторы 2-тактного СМ-цикла системы (13.1) в зависимости от параметра m. *б* – Проекции 2-тактных АСМ-циклов на плоскость переменных x_1, x_2



Р и с. 13.3. *а* – Мультипликаторы 2-тактного $АСМ_1$-цикла системы (13.1) в зависимости от параметра m. *б* – Мультипликаторы $\rho_{1,2}$ в критической точке m^*



Р и с. 13.4. *а* – Бифуркационная диаграмма системы (13.1) вблизи резонанса 2/5. *б* – Спектр мощности резонансного цикла Γ^+ на торе, рассчитанный для точки *O*

$m^* = 1{,}57979\ldots \simeq 1{,}58$ пара мультипликаторов выходит на единичный круг: $\rho_{1,2} = \exp(\pm j\varphi)$, где $|\rho| = 1$, $\varphi = 145{,}0958^\circ\ldots$ (рис. 13.3*б*). Резонанс отсутствует (φ не кратно 360°), однако ситуация близка к слабому резонансу 2/5, чем удобно воспользоваться. Известно, что при слабых резонансах в автономных системах тор существует всегда [52]. Период резонансного цикла на торе зависит от числа вращения и для $\phi = 2/5$ он относительно невелик. Это дает практическую возможность численно проанализировать бифуркации рождения и потери устойчивости указанного синхронного цикла на двумерном торе.

Проанализируем бифуркации двумерного тора в окрестности резонанса 2/5. Используя в качестве исходной точку на линии нейтральности, найденную выше, построим саму линию l_0 на плоскости параметров m, γ для $g = 0.3$, определим на линии нейтральности бифуркационную точку кораз-

мерности 2, отвечающую резонансу 2/5, и построим бифуркационную диаграмму в ее окрестности. Результаты расчетов представлены на рис. 13.4*а*.

В области резонанса синхронный цикл Γ^+ на торе имеет спектр $S_x^F(f)$ с базовыми частотами $f_1/f_0 = 2/5$ и их гармониками. Наличие устойчивого цикла Γ^+ внутри зоны синхронизации исключает возможность наблюдать эффект потери гладкости тором по виду спектра $S_x^F(f)$. Всюду в резонансном клюве спектр цикла Γ^+ качественно идентичен показанному на рис. 13.4*б*. Однако если двигаться по пути D, где тор эргодический, то потеря гладкости тором проявляется в характерной эволюции спектров и отображений Пуанкаре.

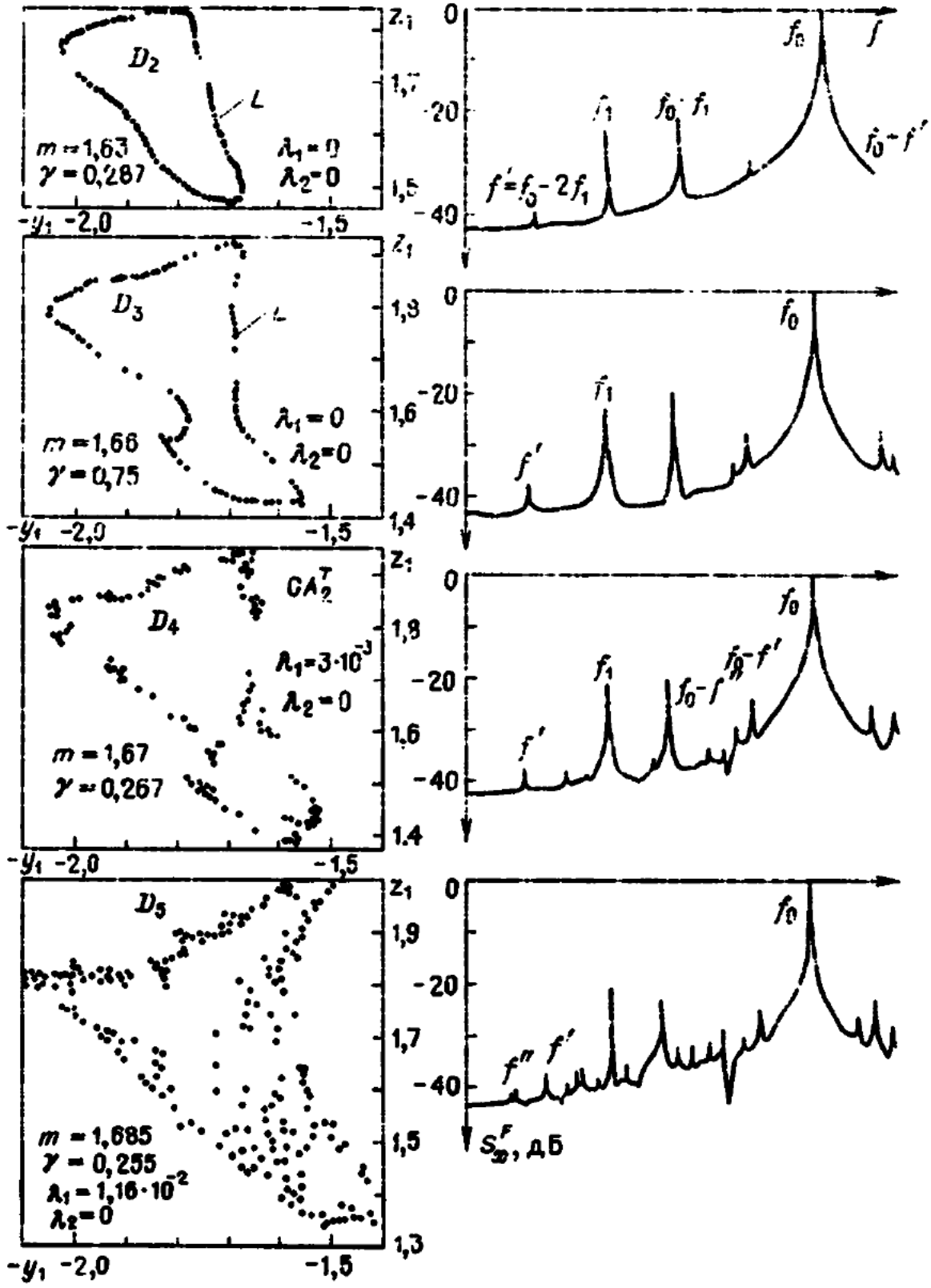
Вблизи точки K и вне клюва синхронизации инвариантная кривая проекции отображения на плоскость — гладкая кривая типа эллипса, спектр колебаний аналогичен спектру резонансного цикла, но соотношение частот f_1 и f_0 иррационально. С удалением от линии рождения тора l_0 инвариантная кривая L начинает искажаться и в спектрах появляются δ-выбросы на комбинационных частотах $kf_0 + lf_1$ (рис. 13.5). Как видно из рисунка, в точке D_3 заметно возрастают спектральные линии частоты $f' = f_0 - 2f_1$ и боковых составляющих $f_0 \pm f'$. Возникают новые комбинационные частоты $f_0 \pm f''$, где $f'' = 8f_1 - 3f_0$. Частота f'' за счет ограниченной точности счета в точке D_3 не видна, но появляется отчетливо в точке D_5 (рис. 13.5).

На пути от D_3 к D_4 кривая L еще более искажается, что сопровождается дальнейшим обогащением спектра комбинационными частотами и ростом их интенсивности. Вблизи точки D_4 кривая L перестает быть топологически окружностью (разрушается) и в ее окрестности мягко рождается CA_2^τ — тор-аттрактор, размерность которого $D_L = 2 + d$, $d \ll 1$.

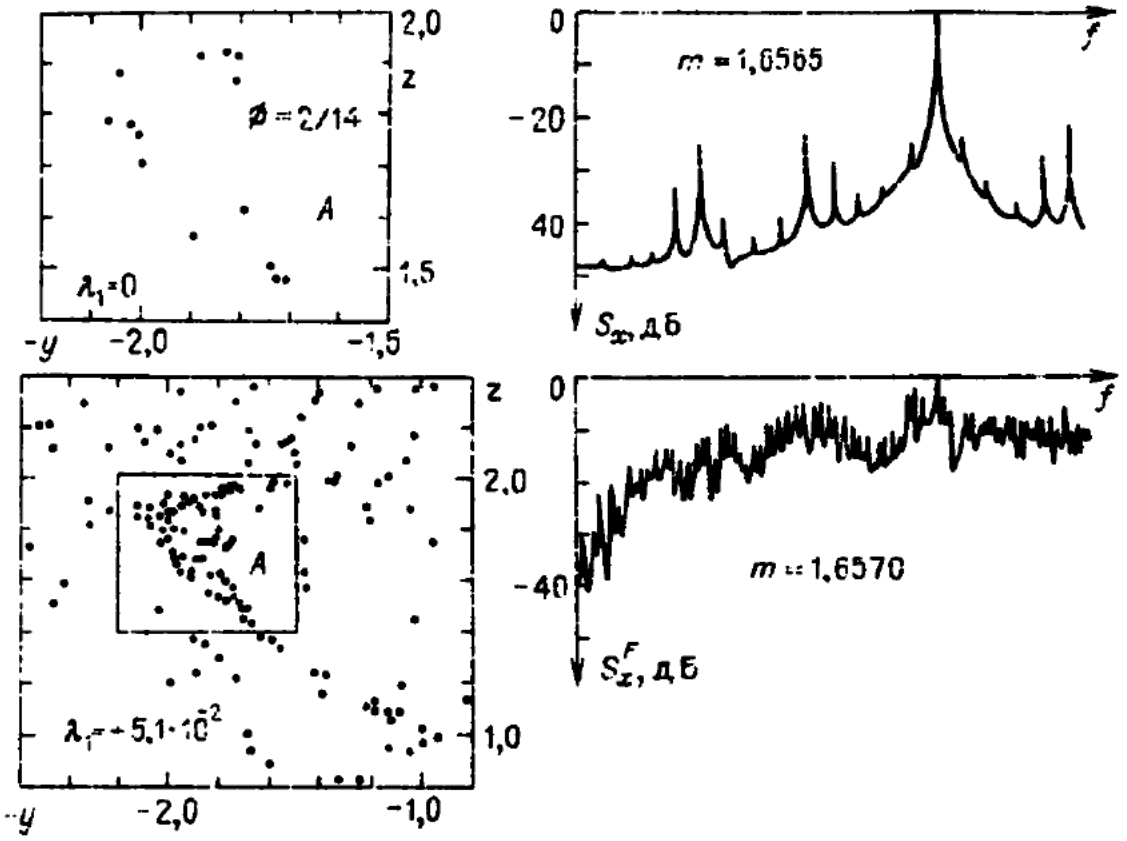
При движении в направлении A диаграммы (рис. 13.4*а*) из синхронного цикла на линии нейтральности рождается новый тор, который далее мягко разрушается через потерю гладкости, и возникает стохастичность, как и в случае движения по пути D. Путь B приводит к исчезновению на линии кратности l_1 периодического движения типа седло-узел и возникновению CA_2^τ, так как выше точки D_4 тор уже разрушился. Путь B' приводит к переходу в область существования эргодического тора. Движение через зону синхронизации от точки D_3 к точке D_6 приводит вначале к исчезновению в спектре комбинационных частот (резонанс), которые в точке D_6 вновь появляются. Существенной перестройки режимов здесь нет. Негладкий тор внутри клюва синхронизации себя практически не проявляет.

В многочисленных экспериментах с использованием однопараметрического подхода и дискретного шага счета по параметрам обычно наблюдается картина постепенного искажения инвариантной кривой, которая случайным образом прерывается различными резонансами. Резонансы высоких порядков, как правило, упускаются из вида в силу их узких резонансных клювов и конечного шага дискретизации управляющего параметра. В зависимости от выбора сечения при однопараметрическом исследовании могут наблюдаться различные последовательности бифуркационных явлений, которые лишь запутывают общую картину. Как видно из рассмотрения бифуркационных диаграмм на плоскости, при двупараметрическом анализе таких неясностей не возникает.

Наконец, исчезновение седло-узла на линии l_1 при наличии грубой гомоклиники выше линии критических значений параметров $l_{кр}^2$ приводит к



Р и с. 13.5. Эволюция отображений Пуанкаре (слева) и спектров мощности колебаний (справа) при потере гладкости двумерным тором. Точки D_2–D_5 соответствуют указанным на рис. 13.4*а*



Р и с. 13.6. Жесткий переход к стохастичности при выходе из области синхронизации

жесткому переходу в режим развитой стохастичности через перемежаемость. На рис. 13.6 этот тип перехода проиллюстрирован для седло-узловой бифуркации цикла 1^+, имеющего грубую гомоклиническую кривую, при выходе из области слабого резонанса 2/14. Изменение параметра m всего на $\Delta m = 5 \cdot 10^{-4}$ приводит к резкому скачку в спектре мощности и в интенсивности автоколебаний. В отображении четко видно рождение развитой притягивающей стохастичности и эффект перемежаемости (область проекции отображения Пуанкаре, обозначенная на рис. 13.6 буквой A) [239].

13.2. Качественное описание бифуркационных явлений в системе связанных генераторов с помощью модельного отображения

Как было подтверждено в гл. 10, динамическая система с 1,5 степенями свободы ($N = 3$), реализующая квазиаттрактор седло-фокусного типа, порождает в секущей двумерное отображение класса Хенона

$$x_{n+1} = P(x_n, \alpha) + y_n, \quad y_{n+1} = \beta x_n, \tag{13.4}$$

где $P(x_n, \alpha)$ – одномерное параболическое отображение класса Фейгенбаума, β – коэффициент, характеризующий эквивалентное сжатие фазового потока в исходной дифференциальной системе. Расчеты свидетельствуют, что в общем случае отображение системы (7.38) в секущей плоскости качественно соответствует (13.4). В связи с этим разумно исследовать динамику системы двух связанных генераторов, приближенно описав ее с помощью дискретной системы связанных отображений. Дискретная сис-

тема, моделирующая взаимодействие двух генераторов с инерционной нелинейностью, имеет вид

$$x_{n+1} = P(x_n, \alpha) + \gamma\varphi_1(x_n, y_n) + \xi_n,$$

$$y_{n+1} = P(y_n, \alpha) + \gamma\varphi_2(x_n, y_n) + \eta_n, \qquad (13.5)$$

$$\xi_{n+1} = \beta x_n, \quad \eta_{n+1} = \beta y_n,$$

где α – параметр, адекватный превышению над порогом генерации, $0 < \gamma < 1$ – эквивалентный коэффициент связи, $\varphi(x_n, y_n)$ – функция, описывающая характер связи, $\beta < 1$ – эквивалентный коэффициент диссипации.

В случае относительно сильного сжатия исходного фазового потока в модельной системе $\beta \ll 1$ и система сводится к необратимому двумерному отображению. Выбрав конкретный вид параболического отображения $P(x_n, \alpha)$, запишем систему (13.5) в виде

$$x_{n+1} = 1 - \alpha x_n^2 + \gamma\varphi_1(x_n, y_n),$$

$$y_{n+1} = 1 - \alpha y_n^2 + \gamma\varphi_2(x_n, y_n), \qquad (13.6)$$

представляющем собой два связанных отображения Фейгенбаума.

Динамика дискретных систем типа (13.6) изучалась многими авторами и с различными целями. Нас интересует возможность иллюстрации механизмов разрушения инвариантной кривой при сохранении качественных аналогий в переходах в сравнении с исходной дифференциальной системой (13.1). В [136, 225, 248] обсуждался переход к хаосу через разрушение инвариантной кривой, однако в силу применения однопараметрического анализа детали механизмов рождения стохастичности исследованы недостаточно.

Сравнительный анализ динамики систем (13.5) и (13.6) показал, что их бифуркационные диаграммы на плоскости управляющих параметров в случае линейной, билинейной [248] и инерционной [249–251] связи качественно могут не отличаться. Для достижения поставленной цели оказалось достаточным ограничиться изучением наиболее простой системы (13.6). Вопрос о влиянии типов связи, задаваемых функциями $\varphi(x_n, y_n)$, далеко не тривиален [251, 252], но в данном случае можно остановить выбор на инерционной связи [251], когда $\varphi_{1,2} = \pm (y_n - x_n)$. Сохраняется существенное требование задачи – симметрия модельного отображения (13.6). Итак, проанализируем бифуркационные явления в модельной системе [246]

$$x_{n+1} = 1 - \alpha x_n^2 + \gamma(y_n - x_n),$$

$$y_{n+1} = 1 - \alpha y_n^2 + \gamma(x_n - y_n), \qquad (13.7)$$

с двумя управляющими параметрами, существенными для нашей задачи: α – параметр, играющий роль параметра m, и γ – параметр, аналогичный коэффициенту связи в системе дифференциальных уравнений (13.1).

Отображение (13.7) симметрично относительно замены переменных x, y на y, x и имеет две неподвижные СМ-точки

$$x_{1,2} = y_{1,2} = (2\alpha)^{-1}[-1 \pm (1 + 4\alpha)^{1/2}] \qquad (13.8)$$

и две неподвижные АСМ-точки

$$x_{3,4} = \frac{-(1+2\gamma) \pm (1-4\gamma^2+4\alpha)^{1/2}}{2\alpha}, \qquad (13.9)$$

$$y_{3,4} = \frac{-(1+2\gamma) \mp (1-4\gamma^2+4\alpha)^{1/2}}{2\alpha}.$$

Линейный анализ устойчивости дает выражения для мультипликаторов неподвижных точек:

$$\rho_{1,2} = -\alpha(x+y) - \gamma \pm (\alpha^2(x-y)^2+\gamma^2)^{1/2}. \qquad (13.10)$$

Подставив в (13.10) координаты точек (13.9), получим

$$\rho_{1,2} = 1+\gamma \pm (1-3\gamma^2+4\alpha)^{1/2}, \qquad (13.11)$$

откуда следует, что АСМ-точки неустойчивы при любых значениях параметров. Для СМ-точек имеем

$$\rho_1 = 1 \mp (1+4\alpha)^{1/2}, \quad \rho_2 = 1 \mp (1+4\alpha)^{1/2} - 2\gamma. \qquad (13.12)$$

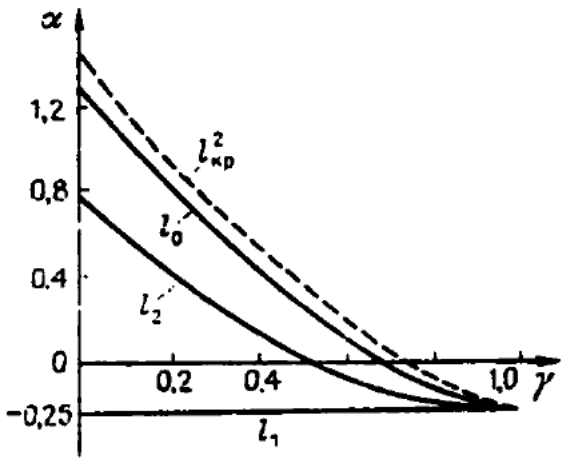
Видно, что у отображения (13.7) существует единственная СМ-точка

$$x = y = (2\alpha)^{-1}[-1+(1+4\alpha)^{1/2}], \qquad (13.13)$$

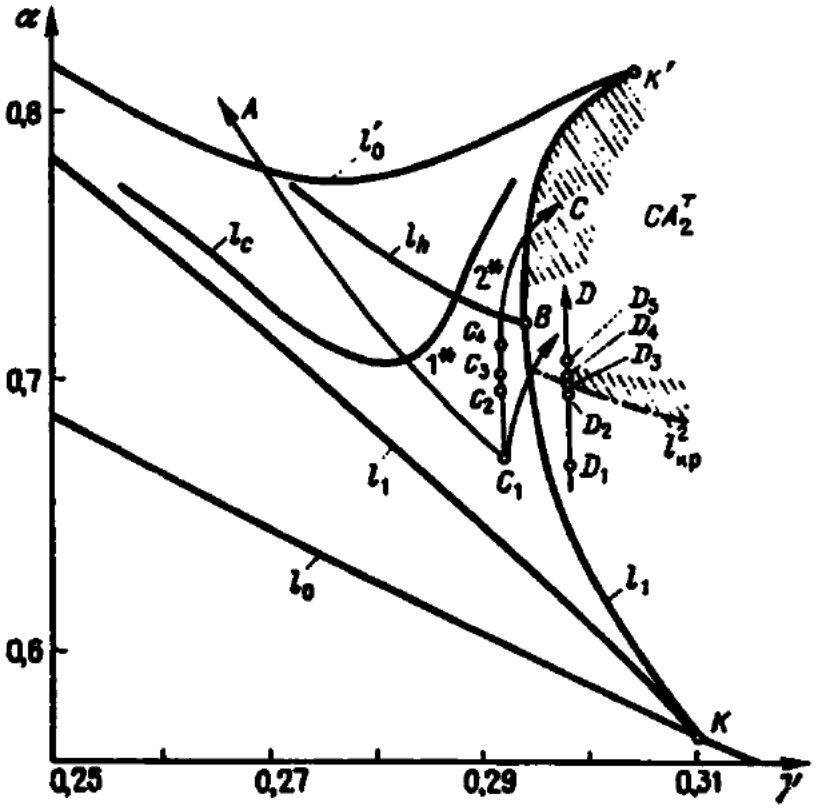
устойчивая в некоторой области плоскости параметров, исследованием которой мы ограничимся. Отметим, что дискретным аналогом фазового пространства шестимерной системы (13.1) является плоскость переменных x_n, y_n, а случаю вырождения (13.2) отвечает одномерное пространство в виде прямой $x_n = y_n$ на этой плоскости.

Неподвижная точка периода 1 рождается на линии l_1 при $\alpha = -0{,}25$ с мультипликаторами $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 1 - 2\gamma$. С увеличением параметра γ эта точка теряет устойчивость через удвоение. На плоскости управляющих параметров этой бифуркации отвечает линия l_2 при $\alpha = 0{,}25\ (4\gamma^2 - 8\gamma + 3)$. Обе линии изображены на рис. 13.7.

В результате бифуркации удвоения периода мягко рождается двупериодическая точка (2-цикл) отображения, расположенная симметрично относительно биссектрисы $x_n = y_n$. С увеличением параметра α мультипликаторы 2-цикла становятся комплексно-сопряженными, а затем на линии l_0, построенной численно (рис. 13.7), выходят на единичную окружность, т.е. реализуется бифуркация рождения инвариантной кривой. В окрестности



Р и с. 13.7. Бифуркационные линии $l_{0,1,2}$ потери устойчивости неподвижными точками на плоскости параметров отображения (13.7); $l_{кр}$ линия разрушения инвариантных кривых L с рождением тор-аттрактора



Р и с. 13.8. Бифуркационная диаграмма системы (13.7) в окрестности резонанса 2/5

двупериодических неподвижных точек, потерявших устойчивость, мягко рождаются устойчивые инвариантные кривые L_1 и L_2. Дальнейшее увеличение параметра α приводит к разрушению инвариантных кривых с рождением странного аттрактора (штриховая линия $l^2_{кр}$ на рис. 13.7).

Исследуем механизм разрушения инвариантных кривых L_1 и L_2, являющихся модельными образами двух двумерных торов, рождающихся из АСМ-циклов в дифференциальной системе (13.1) [237, 246]. Для этого найдем число вращения ϕ инвариантных кривых вдоль бифуркационной линии l_0, которое задается выражением

$$\phi = \arccos(\mathrm{Re}\,\rho)/2\pi, \qquad (13.14)$$

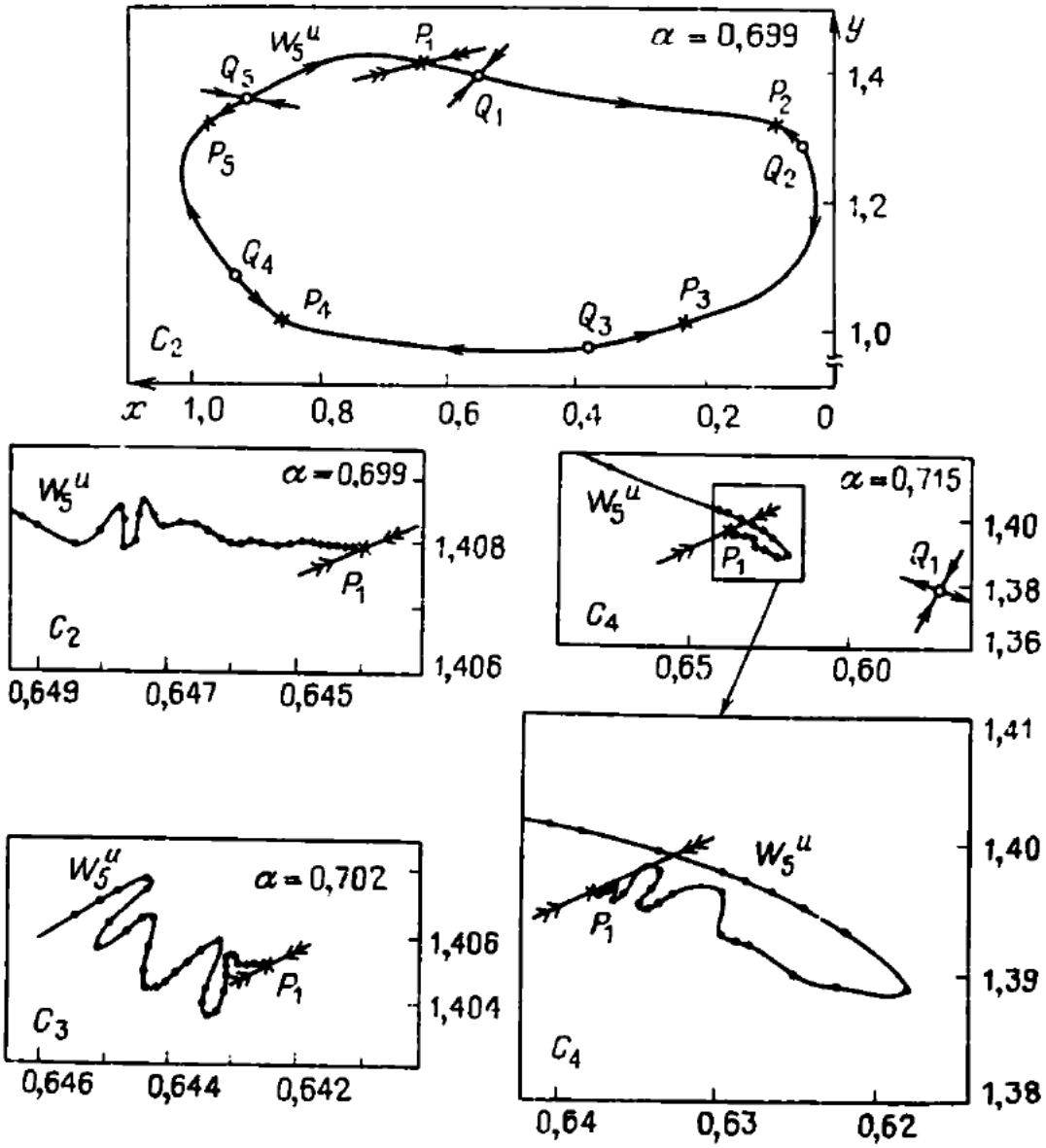
где ρ – мультипликатор 2-цикла отображения, равный по модулю единице на линии нейтральности l_0

На линии l_0 число вращения меняется непрерывно, принимая значения в интервале $0{,}5 \leqslant \phi \leqslant 1{,}0$. Определив на линии l_0 точку K резонанса 2/5, построим бифуркационную диаграмму для резонансного цикла на инвариантной окружности. Результаты расчетов представлены на рис. 13.8 и качественно находятся в соответствии с данными расчетов рис. 13.4. Проследим за механизмами разрушения резонансного тора, исследуя численно поведение неустойчивых сепаратрис седловых неподвижных точек на резонансной кривой L_1, иллюстрируемое рис. 13.9.

Инвариантное многообразие при резонансе образовано замыканием неустойчивых сепаратрис W_i^u седловых точек Q_i на устойчивые узлы P_j $(i, j = 1, 2, \ldots, 5)$. Вблизи основания резонансного клюва (точка K на рис. 13.8) это замыкание осуществляется гладко, производная в узле не терпит разрыва. Движение по направлению C рис. 13.8 вызывает колебания одной из ветвей неустоичивых сепаратрис (точки C_2 и C_3 рис. 13.9),

развитие которых приводит к эффекту их пересечения с неведущими направлениями узлов (рис. 13.9, точка C_4).

Для необратимой системы (13.7) можно рассчитать только неустойчивые сепаратрисы седловых точек и векторы, касательные к устойчивым сепаратрисам. С ростом параметра α происходит вначале негрубое *касание*, а затем и *грубое пересечение* неустойчивых и устойчивых сепаратрис седловых неподвижных точек – у цикла на резонансном торе возникает *грубая гомоклиническая кривая*. Момент рождения негрубой гомоклиники является бифуркационным. Инвариантная кривая при этом разрушается, а в ее окрестности рождается нетривиальное *гиперболическое* множество – предвестник странного аттрактора. Бифуркационная линия на плоскости параметров (рис. 13.8), отвечающая рождению негрубой гомоклиники, обозначена l_h. Выше бифуркационной линии l_h инвариантной замкнутой кривой L_1 уже нет. В дифференциальной системе это соответствует разрушению тора. Однако устойчивая неподвижная точка (или предельный цикл) внутри зоны синхронизации существует. Выход из области резонанса в направлении C приведет к исчезновению устойчивой неподвижной точки на линии седло-узловой бифуркации l_1, и произойдет жесткий переход в



Р и с. 13.9. Эволюция выделенных участков инвариантной кривой отображения (13.7) в области резонанса 2/5 при движении в направлении C диаграммы рис. 13.8

режим стохастичности, так как гиперболическое множество станет притягивающим.

Если теперь исследовать динамику отображения (13.7) вдоль пути D, где тор эргодический (рис. 13.8), то эффект потери гладкости инвариантным многообразием можно будет наблюдать по виду самого отображения и по эволюции спектров мощности.

На рис. 13.10 представлены результаты расчетов выделенных, для наглядности, участков инвариантной кривой L_1 и соответствующих спектров мощности отображения $S_x^P(f)$ при движении по пути D бифуркационной диаграммы. Видно, что движение по плоскости параметров в направлении D приводит к *мягкому* разрушению инвариантной кривой L_1 за счет потери гладкости. Эффект сопровождается обогащением спектра $S_x^P(f)$ комбинационными частотами, и при пересечении бифуркационной линии $l_{\text{кр}}^2$ возникает стохастичность CA_2^1.

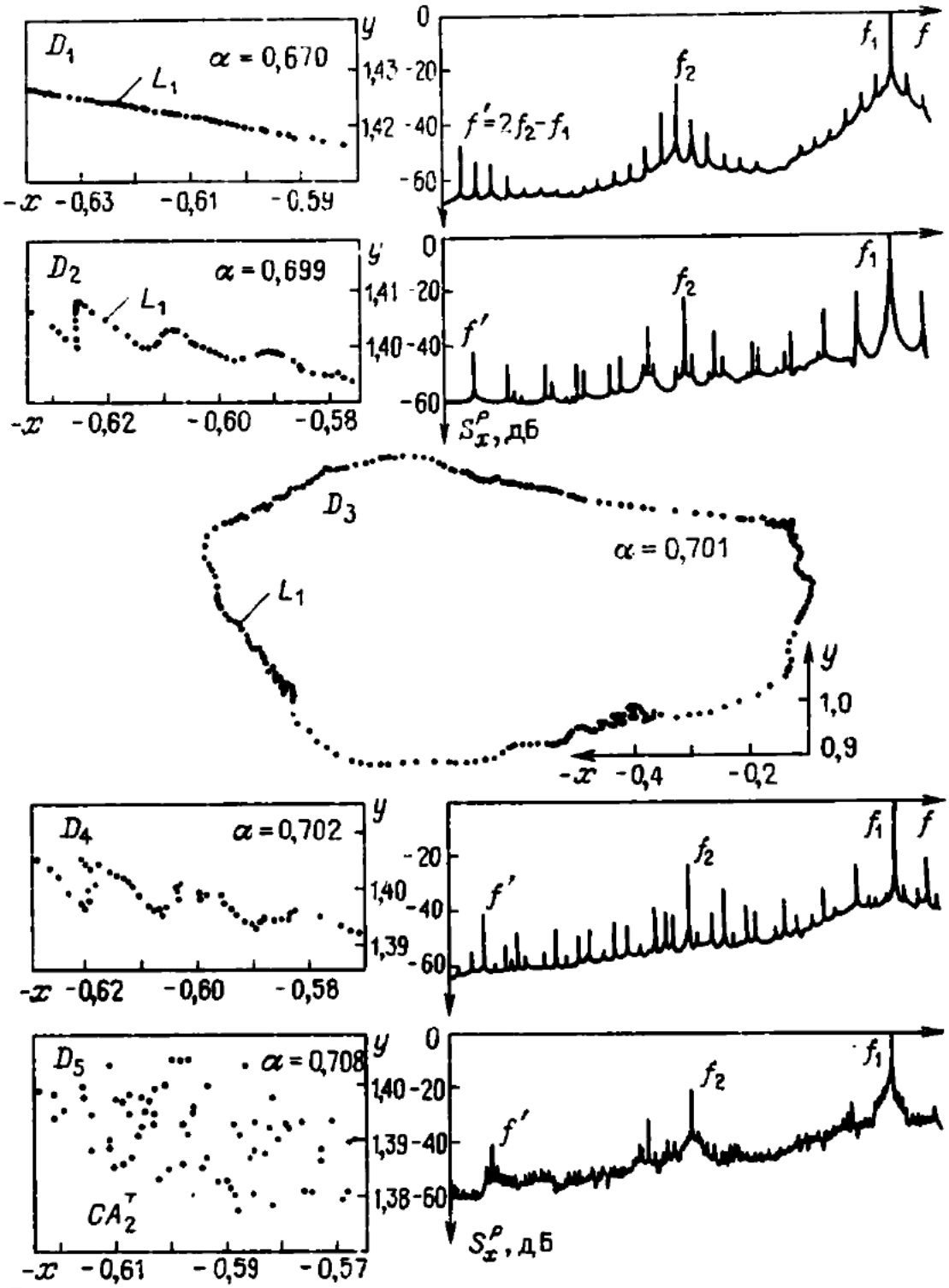
Один из основных результатов проведенного численного исследования дискретной модельной системы (13.7) состоит в экспериментальном обосновании исследования эффекта потери гладкости тором по эволюции эргодической инвариантной кривой вне области синхронизации. Сравнение данных расчетов для рационального (рис. 13.9, C_2) и иррационального (рис. 13.10, D_3) значений числа вращения ϕ наглядно свидетельствует о том, что инвариантное многообразие с пересечением бифуркационной линии кратности l_1 не терпит разрыва*). В случае отсутствия возможности рассчитать неустойчивые многообразия седлового цикла в области резонанса (а это типичная сложность в изучении многомерных дифференциальных систем) можно уверенно диагностировать эффект потери гладкости тором по сечениям Пуанкаре и спектрам мощности колебаний *вблизи линий кратности* l_1, но *вне* области синхронизации.

Физическое объяснение возможности такой "визуализации" состоит в следующем. Фазовая траектория на искаженном за счет колебаний неустойчивых многообразий (но резонансом!) торе *не посещает* все области тороидальной поверхности, в частности области наибольшей ее "гофрированности" вблизи узловых точек в отображении (рис. 13.9, C_3 и C_4). Поэтому спектр мощности не отражает эффектов, обусловленных нелинейными искажениями тора. Само отображение в резонансном клюве содержит конечный набор неподвижных точек и также исключает возможность наблюдать инвариантное многообразие (остается неясным, как идут сепаратрисы между видимыми устойчивыми неподвижными точками).

В области эргодических биений картина принципиально меняется. Фазовая траектория здесь *всюду плотно* покрывает тороидальную поверхность, и, следовательно, временная реализация любой из фазовых координат содержит информацию об "искажениях" инвариантного многообразия. Отсюда вытекает возможность диагностики эволюции тора по пути к разрушению с помощью спектров и отображений Пуанкаре.

Ясно, что с ростом порядка резонансов $q \gg 5$, когда периоды синхронных циклов заметно возрастают, резонансные фазовые траектории посещают все увеличивающиеся области на искаженной поверхности тора и их

*) С изменением параметра гладко наследуется сама форма инвариантного многообразия. При этом меняется структура траекторий на нем. Резонансный цикл отображения уступает место всюду плотной эргодической кривой L_1.



Р и с. 13.10. Потеря гладкости и разрушение инвариантной кривой при движении в направлении D диаграммы рис. 13.8

спектры будут наращивать информацию о степени гофрированности тора. Именно это обстоятельство в совокупности с непрерывностью инвариантных многообразий объясняет эволюцию спектров колебаний в ряде многочисленных экспериментов. Наблюдаемы лишь редкие области фазовой синхронизации с относительно малыми периодами резонансных циклов (относительно высокими базовыми частотами), имеющие заметную ширину клювов синхронизации. Вне этих зон фиксируются эргодические биения на негладких торах, спектры которых содержат большое число интенсивных комбинационных частот. Резонансные циклы высоких порядков, ха-

рактеризующиеся большими периодами, не регистрируются за счет шумов и неотличимы в экспериментах от эргодических биений. Наименьшая из двух базисных частот в подобных режимах стремится к значениям вблизи нуля, затрудняя уверенные измерения.

Несмотря на то что исследование проблемы разрушения двухчастотных колебаний с переходами к стохастичности проведено на *конкретных* динамических системах, полученные результаты носят *общий характер* и отражают явления, типичные для многомерных и распределенных систем. В этом нетрудно убедиться, сопоставляя полученные результаты с выводами качественной теории, с многочисленными данными расчетов на ЭВМ применительно к самым различным системам и, наконец, с результатами ряда экспериментальных работ [13, 85, 134, 137, 253].

В частности, можно указать типичные качественные закономерности в эволюции спектров мощности колебаний, отвечающие конкретным бифуркационным механизмам разрушения двухчастотных квазипериодических колебаний, которые могут быть использованы при анализе экспериментальных результатов.

1. При пересечении бифуркационных линий потери устойчивости резонансным циклом на торе (при движении в направлении *A* бифуркационной диаграммы рис. 13.8) эволюция спектров мощности всегда будет отражать закономерности, присущие механизмам переходов к хаосу через предельный цикл. Например, универсальные бифуркации спектра при переходе по Фейгенбауму, если внутри зоны синхронизации реализуется каскад бифуркаций удвоения периода.

2. Если выход из зоны синхронизации осуществляется в направлении *C* бифуркационной диаграммы рис. 13.8, то эволюция спектров сопровождается жестким переходом от дискретного внутри клюва спектра к сплошному, отвечающему развитому тор-аттрактору. Область перехода характеризуется здесь эффектами перемежаемости и гистерезиса. Типичная картина трансформации спектров в этом случае представлена на рис. 13.6.

3. Мягкий безгистерезисный переход к тор-хаосу характеризуется плавным обогащением дискретного спектра эргодических биений комбинационными частотами. Наблюдается постепенный рост их числа и интенсивности. Завершается переход образованием слабой сплошной компоненты в спектре как это иллюстрирует рис. 13.10. Указанный механизм реализуется при движении по направлению *D* бифуркационной диаграммы рис. 13.8.

Необходимо ясно сознавать, что наблюдение указанных закономерностей в эволюции спектров от дискретного к сплошному реально лишь при выборе строго специальных направлений движения в пространстве управляющих параметров системы. Контролируемых параметров должно быть не менее двух! В физических экспериментах, когда реально осуществима возможность вариации лишь одного параметра, эволюция спектров при переходе к хаосу от двухчастотных колебаний может оказаться чрезвычайно сложной. В зависимости от того, в каком направлении пересекаются бифуркационные гиперповерхности в параметрическом пространстве системы, будут наблюдаться многочисленные варианты перестройки структуры спектра мощности.

13.3. Закономерности в переходах к хаосу через режим квазипериодических колебаний с тремя независимыми частотами

Исследование проблемы разрушения двухчастотных колебаний расширило представление о переходах к хаосу в диссипативных многомерных системах, приблизив нас к пониманию механизмов зарождения развитой турбулентности сплошной распределенной среды. Этому способствовали строгие результаты качественной теории динамических систем. Однако эффекты, регистрируемые при разрушении двумерного тора, не исчерпывают всего многообразия критических явлений, наблюдаемых экспериментально. Примером служит переход к хаосу через режим биений с тремя базисными частотами.

Вопрос об эволюции трехчастотных колебаний при изменении параметров системы, в математической постановке сводящийся к изучению поведения фазовых траекторий в окрестности трехмерного тора (T^3), является важным, но, к сожалению, мало изученным. Этому есть объективные причины. Подход к проблеме разрушения двумерного тора сводится к качественному изучению критических явлений применительно к грубой структуре на торе в виде синхронных циклов и, следовательно, может с успехом базироваться на теории устойчивости периодических режимов колебаний. Решение же вопроса о нелинейных критических явлениях на трехмерном торе требует использования теории устойчивости квазипериодических режимов колебаний. Здесь основная трудность: указанная теория пока что не создана в виде, удобном для приложений.

Данных по исследованию динамики систем с трехчастотными колебаниями чрезвычайно мало, они касаются различных конкретных систем, не объединены общетеоретическими представлениями и носят в основном чисто эмпирический характер. Экспериментальные исследования закономерностей эволюции трехчастотных колебаний, базирующиеся на некоторых качественных аналогиях или, чаще всего, на интуиции исследователей, сейчас наиболее эффективный, если не единственный, путь изучения указанной проблемы. Можно лишь надеяться, что четкие закономерности общего плана, уверенно установленные в различных модельных и физических экспериментах, послужат хорошим основанием для построения соответствующей теории.

Рассмотрим критические явления *при* периодической *модуляции двухчастотных колебаний*. При некоторых ограничениях доказана структурная неустойчивость режима трехчастотных колебаний (трехмерного тора T^3), порождающая в окрестности T^3 режим странного аттрактора [130]. Но в общем случае трехчастотные колебания, несомненно, возможны, о чем свидетельствуют численные [131, 136, 254] и физические эксперименты [134]. Воспользуемся соображениями *аналогии*. Для реализации режима биений с двумя частотами необходимо и достаточно периодического слабого возмущения автономной системы с грубым устойчивым предельным циклом. Обеспечить режим устойчивых колебаний с тремя частотами, видимо, можно, если по аналогии подвергнуть воздействию независимой периодической силы динамическую систему с устойчивым режимом автономных биений. Такая система выше была рассмотрена – это автономная

модель двух связанных генераторов с инерционной нелинейностью. Исследуем случай неавтономных колебаний, введя гармоническое возмущение в правую чать первого уравнения автономной системы (13.1):

$$(1-\gamma^2)\dot{x}_1 = y_1 + x_1(m-z_1) + \gamma\,[y_2 + x_2(m-z_2)] + B_0 \sin(2\pi f_{\text{вн}}\tau),$$

$$(1-\gamma^2)\dot{x}_2 = y_2 + x_2(m-z_2) + \gamma\,[y_1 + x_1(m-z_1)],$$

$$\dot{y}_1 = -x_1, \quad \dot{z}_1 = -gz_1 + gI(x_1)x_1^2, \tag{13.15}$$

$$\dot{y}_2 = -x_2, \quad \dot{z}_2 = -gz_2 + gI(x_2)x_2^2.$$

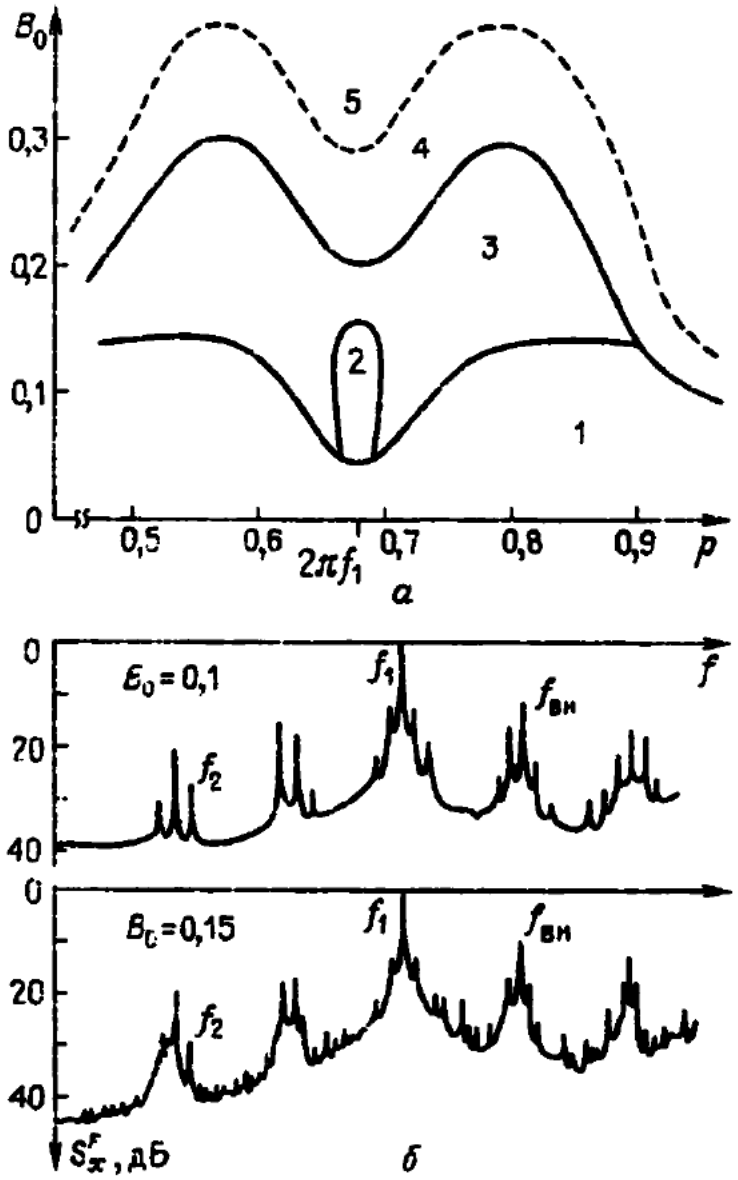
По сравнению с (13.1) добавилось два параметра: амплитуда B_0 и частота $f_{\text{вн}}$ внешнего сигнала; явно вошло время τ

Для $B_0 = 0$ в (13.15) из асимметричного периодического режима мягко рождается устойчивый двумерный тор T^2. На плоскости параметров m и γ рождению T^2 отвечает линия бифуркации l_0 коразмерности 1 (рис. 13.4*а*) на которой пара комплексно-сопряженных мультипликаторов цикла P^* выходит на единичный круг. В дальнейшем зафиксируем значения параметров $m = 1{,}59$, $g = 0{,}3$ и $\gamma = 0{,}3$, соответствующих при $B_0 = 0$ режиму T^2 с двумя рационально не связанными частотами $2\pi f_1 = 0{,}684\ldots$ и $2\pi f_2 = 0{,}283\ldots$, и будем численно изучать неавтономные режимы колебаний на плоскости параметров B_0 и $f_{\text{вн}}$ в области $0 \leqslant B_0 \leqslant 0{,}7$ и $0{,}1 \leqslant f_{\text{вн}} \leqslant 1{,}1$ [132].

На рис. 13.11 дан фрагмент бифуркацинной диаграммы в окрестности одной из собственных частот T^2 f_1, отражающий наиболее вероятные режимы колебаний. В секторе *1* наблюдаются трехчастотные колебания с базовыми частотами f_1, f_2, $f_{\text{вн}}$. При непрерывном изменении $f_{\text{вн}}$ в *1* возможны резонансы на T^3. Типичный спектр ляпуновских характеристических показателей в секторе *1* содержит три старших нулевых. В секторе *2* осуществляется захват частоты f_1 с асинхронным подавлением второй из собственных частот f_2. Система в секторе *2* синхронизуется внешним сигналом (*двукратное вырождение*).

Сектор *3* отвечает двухчастотным биениям, которые возникают либо за счет подавления частоты f_2 на базе частот f_1 и $f_{\text{вн}}$, либо за счет резонанса между f_2 и $f_{\text{вн}}$, когда соотношение частот $f_2/f_{\text{вн}}$ рационально. При вариации B_0 и $f_{\text{вн}}$ в секторе *3* возможны резонансные циклы на T^2, т.е. синхронизация $T^2 \to T^2_{\text{р}}$. На границе между секторами *3* и *4* двумерный тор разрушается с образованием тор-аттрактора CA_2, механизм рождения которого мягкий, обусловленный потерей режимом T^2 гладкости. Спектр ЛХП в секторе *4* включает один положительный показатель, ляпуновская размерность аттрактора $CA_2^{\text{т}}$ здесь $2 < D_L < 4$.

На границе между секторами *4* и *5* осуществляется *бифуркация в хаосе*: $CA_2^{\text{т}} \to CA_3^{\text{т}}$, при которой в спектре ЛХП появляется второй положительный показатель и возрастает размерность аттрактора $3 < D_L < 5$. Выход в сектор *4* для значений $2\pi f_{\text{вн}} > 0{,}9$ осуществляется из сектора *1*. Фиксируется переход $T^3 \to CA_3^{\text{т}}$. Размерность странных аттракторов здесь $3 < D_L < 4$. Не исключаются узкие зоны резонансов, отвечающих однократ-

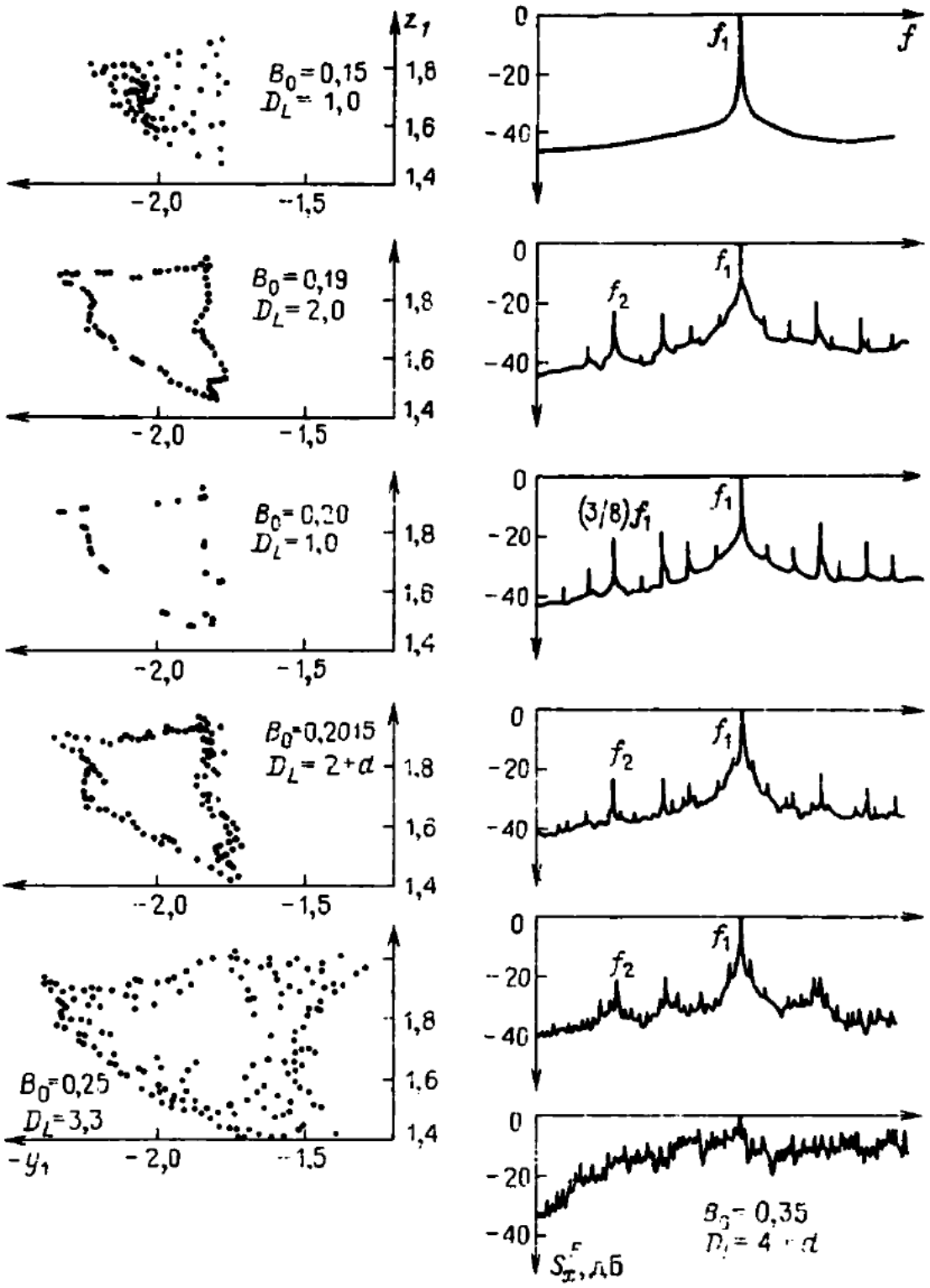


Р и с. 13.11. *а* – Разбиение плоскости параметров B_0, p системы (13.15) на секторы с различными режимами колебаний. *б* – Спектры мощности при мягком разрушении T^3 (переход из *1* в *4* для $p = 0{,}911$)

ным и двукратным вырождениям. Спектры мощности реализации $x_1(\tau)$ (рис. 13.11*б*) иллюстрируют указанный тип перехода.

Рассмотрим эволюцию режимов колебаний при увеличении амплитуды резонансного воздействия на частоте $f_{вн} = f_1$, проекции отображения Пуанкаре и спектры мощности которых даны на рис. 13.12. С ростом $0 < B_0 < 0{,}05$ плавно уменьшается амплитуда частоты f_2 в спектре мощности колебаний, и при полном асинхронном подавлении f_2 рождается устойчивый резонансный цикл частоты $f_{вн} = f_1$. Увеличение B_0 до значения 0,19 приводит к жесткой потере устойчивости резонансным циклом с рождением режима эргодических биений T^2 (переход из сектора *2* в сектор *3* на рис. 13.11*а*). Поверхность двумерного тора T^2 уже деформирована, но инвариантная кривая в отображении Пуанкаре еще не разрушилась, свидетельствуя о существовании режима двухчастотных биений.

В очень узкой области значений амплитуд вблизи $B_0 \simeq 0{,}2$ зафиксирован резонанс на T^2, $q = 16$. Далее, в критической точке $B = 0{,}201\ldots$ осу-



Р и с. 13.12. Проекции отображения Пуанкаре на плоскость $-y_1, z_1$ (слева) и соответствующие спектры мощности колебаний (справа) с увеличением амплитуды внешнего воздействия на частоте $f_{вн} = f_1$

ществляется переход к CA_2^T. Двумерный тор разрушается за счет исчезновения периодического движения типа седло-узел, когда тор в бифуркационной точке негладкий. Спектр ЛХП при этом переходе отличает появление одного положительного показателя. Спектр мощности колебаний становится сплошным с интенсивными выбросами на частотах f_1 и f_2, их гармониках и многочисленных комбинационных частотах, возникших при потере тором гладкости. За критической точкой $B_0 > B_0^*$ размерность аттрактора CA_2^T резко растет от $2 + d$ ($d \ll 1$) до $D_L = 3{,}14$ при $B_0 = 0{,}2015$ и далее $3 < D_L < 4$. С ростом амплитуды воздействия $B_0 \leqslant 0{,}35$ в спектре ЛХП появляется второй положительный показатель, размерность D_L достигает величины $4 + d$, осуществляется переход в хаосе $CA_2^T \to CA_3^T$ (переход из сектора *4* в сектор *5* на рис. 13.11).

В секторе *5* наблюдаются многочисленные резонансы в виде реализации двумерных торов или резонансных циклов (одно- или двукратные вырождения). Области их существования на плоскости параметров относительно малы в сравнении с областями хаотической динамики. Углубление в сектор *5* с ростом амплитуды воздействия B_0 сопровождается увеличением интенсивности хаотических пульсаций. Спектр мощности становится более равномерным (рис. 13.12, $B_0 = 0{,}35$). Размерность аттракторов в секторе *5* не превышает значения $D_L \leqslant 5$, а число положительных показателей спектра ЛХП меньше или равно 2. Увеличение амплитуды воздействия $B_0 > 1{,}0$ приводит в итоге к синхронизации системы в режиме периодических колебаний.

Полученные результаты допускают следующую трактовку. Трехчастотные колебания в областях интенсивных взаимодействий, определяемых близостью частоты возбуждения к одной из собственных частот системы, а также амплитудой сигнала внешнего воздействия, имеют ярко выраженную тенденцию к синхронизации либо в режим биений с двумя частотами T^2, либо в режим полной синхронизации в резонансный предельный цикл на трехмерном торе. Сопоставление полученных результатов с данными гл. 12 по механизмам разрушения двумерных торов позволяет сделать вывод о том, что в указанной области значений параметров механизмы перехода к хаосу не отличаются, в принципе, от описанных выше. Разница лишь в том, что *эффекту разрушения трехмерного тора* вначале предшествует *синхронизация* $T^3 \to T^2$; далее возможны переходы к хаосу как через режим двухчастотных эргодических биений, так и через резонансный цикл в результате седло-узловой бифуркации, включая и жесткие переходы с перемежаемостью и гистерезисом.

При слабых взаимодействиях, когда частоты возбуждения удалены по спектру от собственных частот автономных биений, в пределах неизбежных ошибок дискретизации в машинном счете регистрируется непосредственный переход к хаосу от режима трехчастотных колебаний – *трехмерный тор разрушается*. В экспериментах реализуется механизм рождения хаоса по Рюэлю–Такенсу. Не исключаются эффекты синхронизации в двумерные торы и резонансные циклы. Однако периоды циклов здесь, как правило, очень велики, и в экспериментах резонансы практически не регистрируются. Кроме того, области существования резонансов в пространстве параметров малы. По аналогии со случаем разрушения эргодического двумерного тора можно лишь высказать предположение, что переход

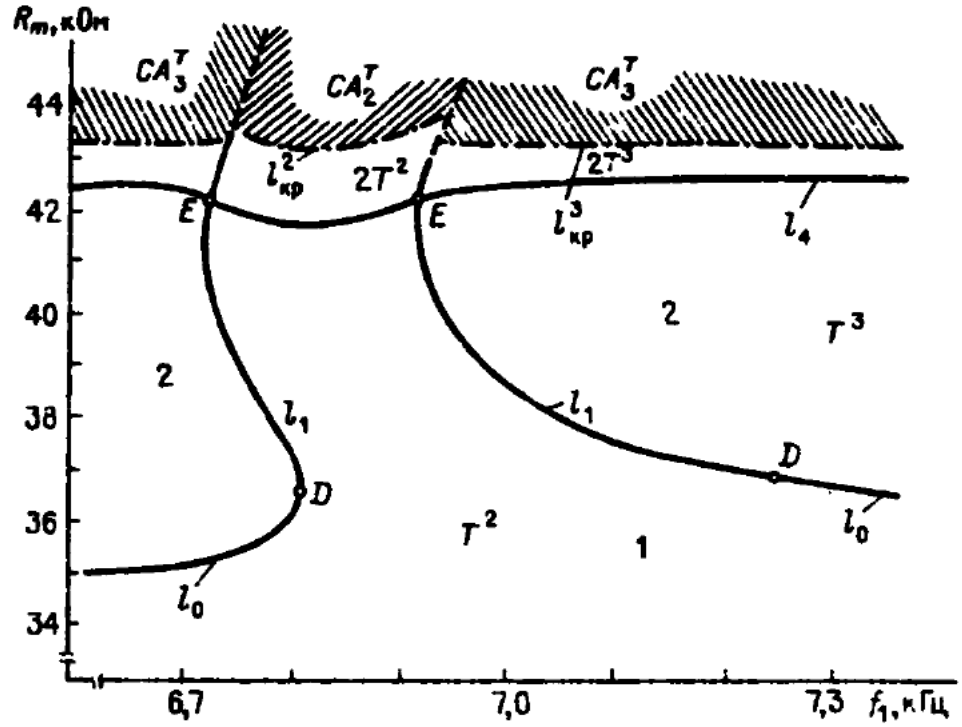
$T^3 \to CA_3^T$ строго возможен, но разрешающей способности численного счета для подобного утверждения недостаточно.

Наконец, обсудим *переход* типа *"хаос–хаос"*, связанный с бифуркацией сигнатуры спектра ЛХП и возрастанием размерности аттракторов. Установленное явление типично для стохастичности в многомерных системах. Вполне естественно, что именно в шестимерном случае оно себя и проявило. В динамических системах с размерностью фазового пространства $N \geqslant 3$ наблюдается цепочка усложняющихся бифуркаций в хаосе типа $CA_k^T \to \to CA_{k+1}^T$ $(k = 3, 4, 5, \ldots)$, обусловленная переходом через нулевое значение в область положительного все большего числа показателей полного спектра ЛХП. По-видимому, именно таким образом формируется развитая турбулентность в сплошных нелинейных средах и распределенных системах. Принципиально важно здесь другое: будет ли размерность аттракторов возрастать до бесконечности, до конечных, но очень больших значений, или возможен эффект *насыщения* в хаосе, характеризующийся стабилизацией размерности на уровне сравнительно небольших значений? К этим важным вопросам вернемся в гл. 14, где проанализируем цепочки связанных генераторов и некоторые типы распределенных систем и сред.

Помимо описанного выше способа реализации трехчастотных колебаний через периодическое возмущение режима эргодических двухчастотных биений в радиофизическом эксперименте оказалось более удобным изучать эволюцию трехчастотных колебаний, возникающих при подаче внешних периодических сигналов двух независимых частот на генератор с инерционной нелинейностью. Основное преимущество такого метода реализации режима T^3 состоит в практическом исключении возможности двукратных вырождений при вариации параметров, т.е. синхронизации в предельный цикл [255].

Двухчастотное внешнее воздействие представляет собой сумму гармонических сигналов $B_1 \sin(2\pi f_1 t) + B_2 \sin(2\pi f_2 t)$ независимых источников, воздействующую аддитивно на генератор с инерционной нелинейностью. Параметры сложного внешнего воздействия B_1, B_2, f_1 и f_2 можно независимо менять в широких пределах. В качестве управляющих параметров системы выбирались $R_m \approx m$ – параметр возбуждения генератора и f_1 – частота одного из сигналов внешнего воздействия. Другие параметры системы при построении бифуркационных диаграмм в экспериментах поддерживались постоянными на различных заданных уровнях. Параметр инерционности g всюду был равен 0,3. Как и в предыдущих исследованиях, диагностика режимов колебаний и их бифуркаций осуществлялась по спектрам мощности, временным реализациям и проекциям фазовых траекторий на интересующие плоскости двух переменных.

На рис. 13.13 показан участок экспериментальной бифуркационной диаграммы на плоскости параметров R_m, f_1 вблизи резонансной частоты генератора f_0. Взаиморасположение бифуркационных линий на плоскости качественно повторяет уже известную картину для одночастотного возмущения генератора (12.1), изображенную на рис. 12.2. Однако смысл бифуркационных линий и характер режимов во внешне подобных секторах плоскости параметров принципиально иной. На бифуркационной линии, которая по-прежнему обозначена f_0, рождаются *трехчастотные* биения вследствие возбуждения собственных колебаний генератора частоты,



Р и с. 13.13. Бифуркационная диаграмма режимов T^2 и T^3. Физический эксперимент для $f_1 = 8{,}97$ кГц, $B_1 = 0{,}8$ В, $B_2 = 0{,}15$ В

приблизительно равной f_0. Ниже линии нейтральности l_0 (сектор *1*) существует двумерный тор T^2, отвечающий режиму биений, созданному внешним воздействием. Выше линии l_0 (сектор *2*) расположена область существования трехмерного тора T^3.

В бифуркационных точках D линия нейтральности l_0 переходит в линию кратности l_1, смысл которой следующий. В секторе *1*, ограниченном слева и справа линиями l_1, осуществляется захват собственной частоты f_0 внешним сигналом частоты f_1, но присутствие второго внешнего сигнала независимой частоты f_2 вызывает биения T^2. Таким образом, в секторе *1* имеет место однократное вырождение – *частичный резонанс* на трехмерном торе, когда совпадают две из трех базисных частот колебаний. В общем случае частичный резонанс возникает при рациональном соотношении между двумя частотами режима T^3. Переход через линию l_1 в секторе *2* приводит к рассинхронизации частот f_0 и f_1 – жестко возникает режим T^3 *).

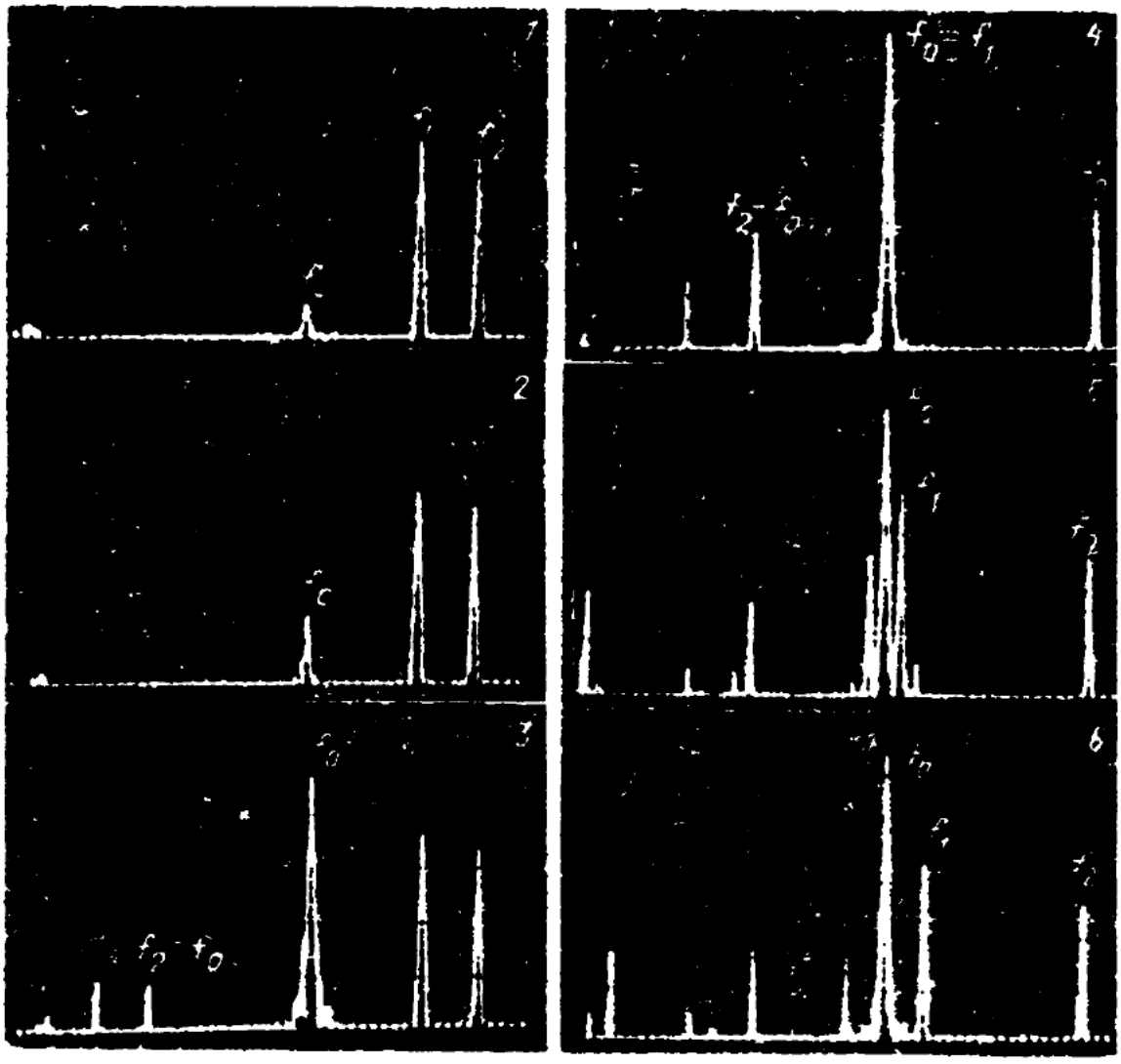
Экспериментально переходы в сектор *2* через бифуркационные линии l_0 и l_1 диагностировались по изменениям в характере спектров мощности и фазовых портретов колебаний. На рис. 13.14 представлены фотографии спектров мощности колебаний, соответствующие прохождению через линию нейтральности l_0 (*1–3*) и линию кратности l_1 (*4–6*). В первом случае к частотам воздействия f_1 и f_2 добавляется спектральная линия частоты f_0, интенсивность которой в силу мягкого характера бифуркации Андронова–Хопфа плавно возрастает от нулевого уровня на линии нейтральности. С удалением от линии l_0 в глубь сектора *2* последовательно появляются и комбинационные частоты на базе основной f_0.

*) Переход через линию l_0 из сектора *1* в сектор *2* также вызывает рождение режима T^3, но эта бифуркация *суперкритическая*, обусловленная мягким режимом возникновения собственных колебаний частоты f_0.

Переход через линию кратности сопровождается плавной рассинхронизацией частот f_0 и f_1, совпадающих в зоне резонанса (сектор *1*), при конечных значениях интенсивностей. В этом смысле указанный переход жесткий.

Базируясь на качественной аналогии картин бифуркационных явлений в рассматриваемой системе и в случае неавтономного генератора (12.1) (с учетом отмеченных принципиальных отличий, разумеется), можно предполагать, что двумерный тор внутри области частичного резонанса (сектор *1*) лежит на трехмерном торе. Резонансные явления на T^3 должно характеризовать двумя числами вращения: $\phi_1 = f_1/f_0$ и $\phi_2 = f_2/f_0$. Частичный резонанс в секторе *1* обусловлен рациональностью числа вращения $\phi_1 = 1/1$ (основной частичный резонанс). Полный резонанс, когда оба числа вращения рациональны, в исследуемом случае практически исключен. С изменением одной из частот воздействия в счетном множестве точек на оси частот возможна синхронизация $f_1/f_2 = p/q$. Однако исключается эффект затягивания частоты (в силу отсутствия связи между генераторами частот f_1 и f_2) и зоны синхронизации в эксперименте не наблюдаются.

При выходе из сектора *1* в сектор *2* через бифуркационную границу частичного резонанса l_1 *двумерный тор жестко преобразуется в трехмерный.*



Р и с. 13.14. Мягкая (*1–3*) и жесткая (*4–6*) бифуркации рождения трехмерного тора

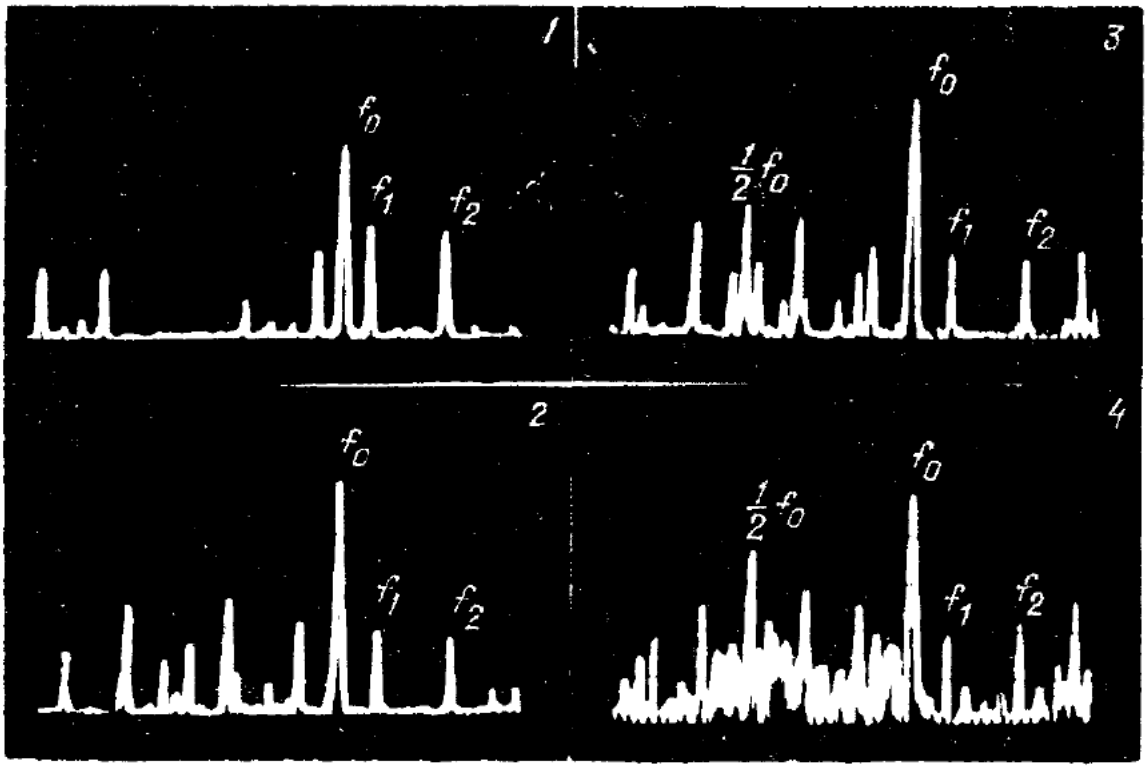
В силу той же аналогии эта бифуркация может представлять собой слияние и последующее исчезновение устойчивого и седлового двумерных торов на однократно вырожденном трехмерном торе. В указанном смысле линия l_2 есть *линия седло-узловой бифуркации для двумерных торов*. Строгого определения подобной бифуркации пока не существует. Нет параметра, характеризующего устойчивость квазипериодического колебания, адекватного мультипликатору цикла. Старший ляпуновский характеристический показатель траектории на торе лишь частично отражает свойства устойчивости. Он не чувствителен к знаку, а связан лишь с изменением модуля вектора малого возмущения вдоль квазипериодической траектории.

Если двигаться внутри резонансной области T^2 вверх по параметру R_m ∞ m, то фиксируются *бифуркации удвоения* двумерных торов. При пересечении бифуркационной линии l_3 в спектре мощности колебаний на T^2 мягко рождаются субгармоники половинной частоты $nf_0/2$. Независимо здесь регистрируется также эффект обогащения спектра комбинационными частотами – свидетельство потери гладкости двумерным тором. Цепочка удвоений торов T^2 конечна. Число бифуркаций зависит от амплитуд воздействия B_1 и B_2. На линии $l^2_{кр}$ двумерные 2-торы разрушаются. Механизм разрушения – потеря торами гладкости. Мягко рождается режим тор-аттрактора CA^T_2, структура спектра которого полностью соответствует случаю мягкого разрушения T^2, проанализированного ранее.

Если проследить за эволюцией трехмерного эргодического тора вне области синхронизации, двигаясь вверх по параметру R_m, то регистрируется эффект *удвоений трехмерного тора*. Спектр колебаний при значениях параметров ниже бифуркационной линии l_4 (рис. 13.13) дискретный и включает частоты $nf_0 + kf_1 + pf_2$ (n, k, p – целые числа). Пересечение линии l_4 приводит к мягкому возникновению частотных составляющих $nf_0/2$. Удваивается один из трех характерных периодов колебаний на T^3. Далее, с пересечением бифуркационной линии $l^3_{кр}$ мягко рождается тор-аттрактор CA^T_3, обусловленный разрушением эргодического тора T^3 через потерю им гладкости. Структура спектров мощности аттрактора CA^T_3 вблизи рождения повторяет характерную для режима CA^T_2 с той лишь разницей, что δ-образные выбросы в спектре CA^T_3 наблюдаются на трех независимых частотах, соответствующих трем базисным частотам разрушившегося режима T^3. В случае фазовой синхронизации, когда две из трех частот оказываются рационально связанными, спектры CA^T_3 и CA^T_2 неразличимы. Переход к CA^T_3 через удвоение одного из периодов колебаний на трехмерном торе иллюстрирует рис. 13.15.

Движение вдоль линии "нейтральности" l_0 неизбежно приводит к последовательности резонансных явлений, обусловленных прохождением числа вращения ϕ через рациональные точки. На эти точки опираются клювы частично резонансных трехмерных торов, внутри которых режимы колебаний представляются в виде двухчастотных биений. И здесь имеет место сходство в бифуркационных явлениях в сравнении с неавтономным генератором, если принять во внимание возросшую сложность соответствующих бифуркаций.

Экспериментальные данные по наблюдениям перехода от режима квазипериодических колебаний с тремя вначале независимыми частотами к стохастичности, полученные численно и на радиофизической системе, имеют



Р и с. 13.15. Переход к хаосу (CA_3^T), сопровождающийся бифуркацией удвоения периода трехмерного тора

общий характер. В этом нас убеждает сопоставление наблюдаемых бифуркационных явлений с литературными данными по численному, экспериментальному и теоретическому исследованиям этой проблемы. Несмотря на различия между анализируемыми системами, в закономерностях перехода от режима T^3 к хаосу очень много сходного. Основной механизм перехода заключается в потере гладкости тором, которая сопровождается частичными либо полными резонансами при изменении параметров и завершается рождением квазиаттракторов в силу гомоклинических эффектов.

Если бифуркационные явления на трехмерном торе рассматривать в отображении Пуанкаре, снижающем размерность системы на единицу, то динамическим эффектам на T^3 однозначно соответствует эволюция двумерного тора в отображении со всеми вытекающими последствиями. Хотя по соображениям структурной устойчивости сам факт реализации режима T^3 в автономных системах не типичен (более естественно грубое явление внутренней синхронизации), экспериментальные результаты требуют их изучения и объяснения.

Вновь возникает уже обсуждавшийся применительно к режиму T^2 вопрос: обязателен ли полный резонанс и последующий переход к хаосу через резонансный цикл? Одних экспериментальных данных для исчерпывающего ответа на него явно недостаточно. Однако вывод о непрерывности инвариантного многообразия при прохождении седло-узловых бифуркационных гиперповерхностей, к которому мы пришли, изучая эволюцию режима T^2, позволяет с экспериментальной точки зрения не делать здесь принципиальных различий. Синхронные циклы больших периодов практически полностью покрывают интегральное многообразие,

будь то T^3 или T^2, и в экспериментах не отличимы от эргодических биений. Исключение составляют реально наблюдаемые области синхронизации с относительно малыми периодами резонансных циклов, выход из которых приводит к жестким бифуркациям. Предшествующая этому выходу потеря гладкости инвариантным многообразием не всегда видна по спектрам мощности и отображениям Пуанкаре, но, как было экспериментально обосновано, она имеет место.

Остается неясным один из вопросов: разрушается ли трехмерный тор при переходах $T^3 \to CA_3^1$ или структура фазовых траекторий на нем стохастизуется при сохранении интегрального многообразия? Полученных данных для уверенных выводов недостаточно и на основании всей той же аналогии можно предположить, что в типичных случаях рождение хаоса обусловлено разрушением трехмерного тора.

13.4. Влияние внешних флуктуаций и стастические характеристики тор-аттракторов

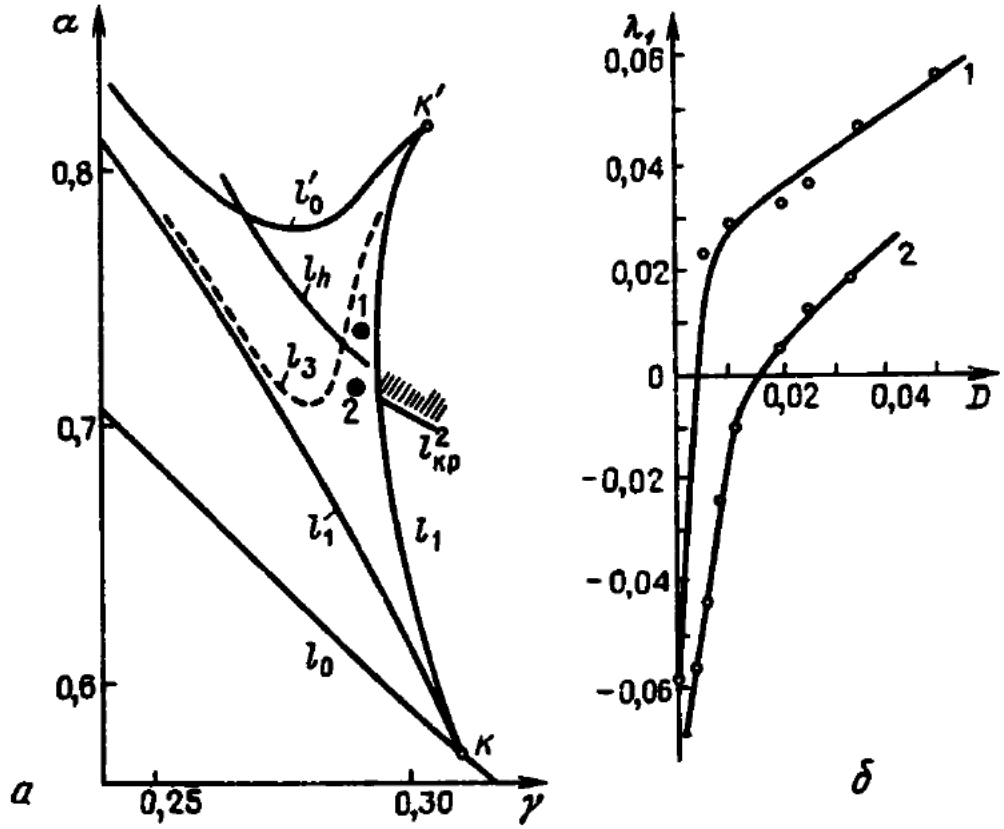
Экспериментальные результаты, описанные в гл. 12,13, позволяют утверждать, что процесс разрушения инвариантных двумерных торов с образованием тор-хаоса осуществляется в полном соответствии с теоретическими выводами [137, 253] вне зависимости от вида конкретной системы, реализующей двухчастотные колебания. В соответствии с этим проведем исследование влияния флуктуаций на примерах динамических систем, более удобных в экспериментальном плане, но в равной степени позволяющих выявить принципиальные и типичные закономерности.

Как и в случае автономного генератора, наиболее интересные явления, вызывающие качественную перестройку структуры аттракторов, имеют место при наличии в системе грубых гомоклинических структур. В качестве примера рассмотрим результаты численного анализа стохастической дискретной системы, описывающей взаимодействие двух осцилляторов Фейгенбаума при действии аддитивного δ-коррелированного шума интенсивности D [256, 257],

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 1 - \alpha x_n^2 + \gamma(y_n - x_n) + \xi_1(n), \\ y_{n+1} &= 1 - \alpha y_n^2 + \gamma(x_n - y_n) + \xi_2(n). \end{aligned} \tag{13.16}$$

Бифуркационная диаграмма невозмущенной системы (13.16) в окрестности резонанса 2/5 подробно обсуждалась выше (см. рис. 13.8). Появлению негрубой гомоклиники, когда неустойчивые многообразия седлового 5-тактного цикла на инвариантной кривой отображения (13.7) касаются своих устойчивых многообразий, отвечает бифуркационная линия l_h на рис. 13.8. В области резонанса, ограниченной линиями l_1 и l_0', один из 5-тактных циклов системы всюду устойчив (как ниже, так и выше линии l_h!). Спектр ЛХП, отвечающий устойчивому 5-тактному циклу, состоит из двух отрицательных показателей.

Исследуем характеристики режимов при воздействии шумов относительно малой интенсивности $D \ll 1$. Сигнатура спектра ЛХП резонансного устойчивого цикла на инвариантной кривой в области, близкой к осно-

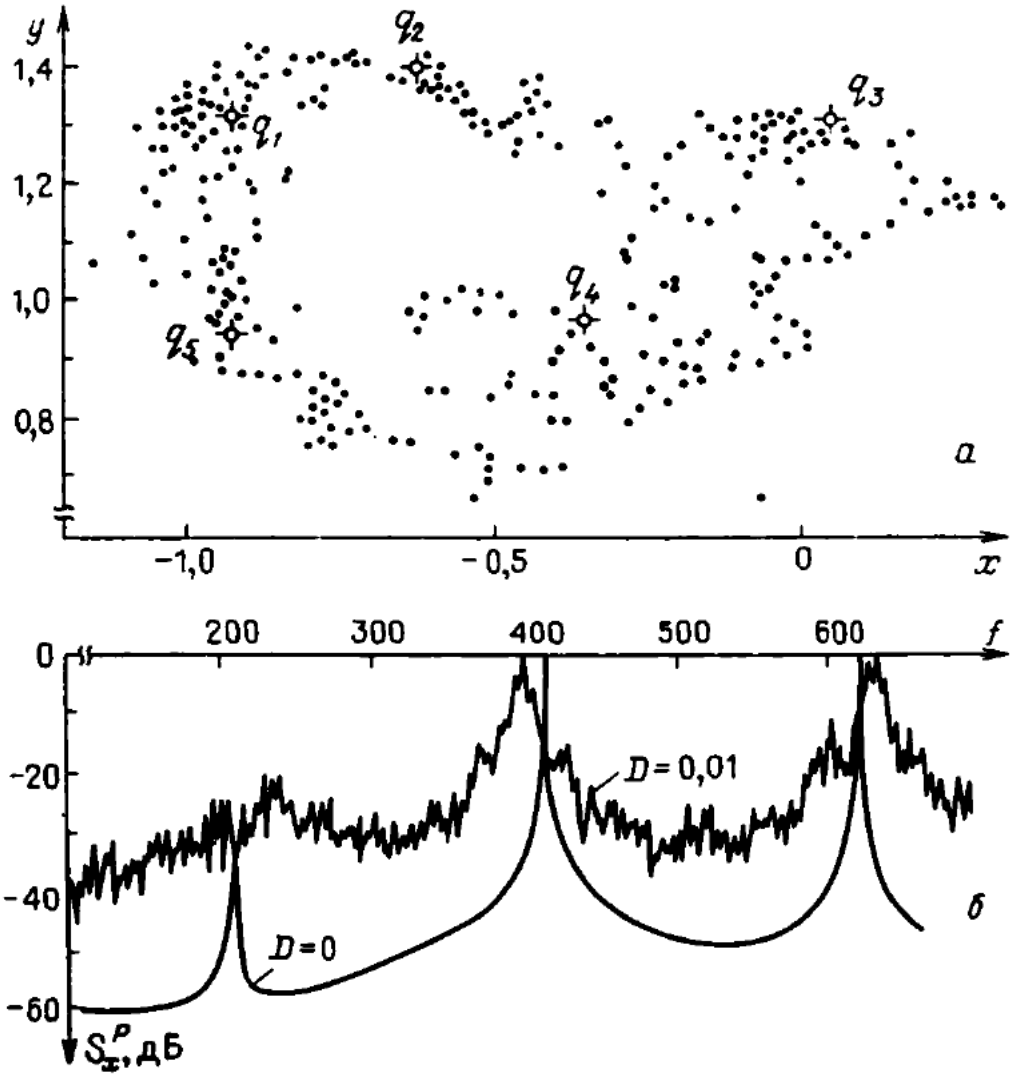


Р и с. 13.16. *а* – Бифуркационная диаграмма отображения (13.7): l_0 – линия рождения инвариантной кривой, l_1 – линии седло-узловых бифуркаций резонансного цикла, l_3 – линия обращения мультипликаторов устойчивого цикла в комплексно-сопряженные, l_0' – линия бифуркации Хопфа для устойчивого цикла, l_h – линия негрубой гомоклиники, $l_{кр}^2$ – участок линии разрушения инвариантной кривой вне резонанса. *б* – Зависимость λ_1 (D) для точек *1* и *2* диаграммы

ванию клюва синхронизации (точка K), не чувствительна к шумовому возмущению достаточно высокой интенсивности $D = 0{,}1$ и остается типа "–", "–". Характеристики движения здесь отвечают классической ситуации уширения спектральных линий колебаний под действием шума.

В точках плоскости управляющих параметров, близких к бифуркационной линии гомоклинического касания l_h, картина качественно меняется. Воздействие шумов малой интенсивности *индуцирует бифуркацию* в сигнатуре спектра ЛХП: "–", "–" → "+", "–", свидетельствуя о развитии экспоненциальной неустойчивости индивидуальных траекторий в аттракторе. Результат иллюстрирует рис. 13.16*б*, отражающий зависимость старшего показателя спектра ЛХП λ_1 от интенсивности шума D для двух точек плоскости параметров системы, взятых выше (*1*) и ниже (*2*) линии l_h на рис. 13.16*а*. В области выше линии l_h, где существует грубая гомоклиническая структура, *шумы* малой интенсивности ($D < 0{,}005$) *индуцируют хаотическое поведение*, отвечающее режиму тор-хаоса (кривая *1*). Стохастичность в точках плоскости параметров ниже бифуркационной линии l_h также возникает, но явление носит ярко выраженый *пороговый* характер (кривая *2*).

Совокупность характеристик хаотического режима, индуцированного действием внешних флуктуаций (сплошной характерный спектр, экспоненциальное спадание корреляций, наличие положительного показателя в



Р и с. 13.17. *а* – Отображение системы (13.16) на фазовой плоскости для $D = 0$ (точки $q_1 - q_5$) и $D = 0{,}01$ (хаотическое множество). *б* – Соответствующие спектры мощности процессов

спектре ЛХП и общий вид хаотического аттрактора в фазовом пространстве), подтверждает факт рождения тор-хаоса, индуцированного внешним шумом. Для иллюстрации сказанного на рис. 13.17 представлены фазовые портреты системы (13.16) и соответствующие спектры мощности, отвечающие устойчивому циклу ($D = 0$) и тор-аттрактору ($D = 0{,}01$). Сравнение результатов с данными рис. 13.10 не оставляет сомнения в том, что под действием внешних шумов в системе реализуется хаотический режим, эквивалентный тор-хаосу.

Объяснение наблюдаемого явления достаточно простое. Выше линии l_h инвариантная кривая разрушается, однако (в отсутствие внешних флуктуаций) существует устойчивый 5-цикл отображения, т.е. *регулярный* аттрактор. Вместе с ним сосуществует *непритягивающая гомоклиническая структура*, образовавшаяся за счет пересечения многообразий седлового цикла. Задание произвольных начальных условий за счет существования гомоклиники вызывает длительный переходный процесс выхода на регулярный аттрактор, отмечавшийся и ранее в ряде экспериментов и названный *метастабильной* стохастичностью [1]. Шумовое возмущение при-

водит к тому, что в эксперименте время переходного процесса стремится к бесконечности. Фазовая траектория "блуждает" в области гомоклинической структуры, проявляя ее геометрию в фазовом пространстве. Эта экспоненциально неустойчивая структура под действием шума становится как бы притягивающей и единственным "аттрактором", так как устойчивый цикл уже реализоваться не может.

Представленные результаты отражают принципиальные явления общего характера и свидетельствуют о том, что *регулярные* аттракторы, сосуществующие вместе с грубыми непритягивающими *гомоклиническими* траекториями, в экспериментах *не могут* реализоваться. Под действием флуктуаций сколь угодно малой интенсивности реально будут наблюдаться хаотические режимы колебаний, по своим характеристикам не отличающиеся от режимов динамической стохастичности*).

В тех случаях когда прямые расчеты гомоклинических точек по каким-либо причинам затруднительны, но обоснованно предполагается их существование, индуцированная шумом экспоненциальная неустойчивость системы является экспериментальным критерием диагностики структуры ее фазовых траекторий [257]. В частности, экспериментальные и численные исследования динамики неавтономного генератора в областях резонансов при действии внешнего шума дали результаты, качественно сходные с приведенными выше. Можно считать эти данные следствием грубой гомоклиники седловых циклов на резонансном торе, существование которой установлено теоретически.

Рассмотрим эволюцию одномерных законов распределения при переходе к тор-хаосу на примере неавтономного генератора, учитывая возможность проведения как численных, так и физических экспериментов. Исследуем процесс формирования тор-аттрактора в системе (12.1), двигаясь в направлении D бифуркационной диаграммы рис. 12.7. Рассчитанные в характерных точках плоскости параметров одномерные плотности распределения вероятностей (функции распределения) $p(x)$ представлены на рис. 13.18. Исходным режимом цепочки бифуркаций является устойчивый предельный цикл с распределением $p(x)$, аппроксимируемым законом (11.8). Мягкое рождение устойчивого двумерного тора сопровождается перестройкой распределения. Моды распределения смещаются с ростом параметра m от краев к центру (см. рис. 13.18*а, б*), функция распределения $p(x)$ приобретает специфическую для двухчастотных колебаний форму. Эволюция двумерного гладкого тора приводит в итоге к формированию *унимодального* распределения $p(x)$ (рис. 13.18*в*), характерного для биений в режиме интенсивной модуляции, когда амплитуды несущей частоты и частоты модуляции соизмеримы по величине. Дальнейшее увеличение параметра m вызывает эффект потери гладкости тором. В распределении $p(x)$ возникают многочисленные экстремумы, форма $p(x)$ становится достаточно сложной (см. рис. 13.18*г*). Однако в дальнейшем при образовании развитого тор-хаоса вновь формируется более гладкое, близкое к унимодальному, распределение, допускающее теорети-

---

*) Можно полагать, что за счет появления гомоклинических структур резонансных циклов на маломерных торах в экспериментах реализация перехода к хаосу по сценарию Ландау – Хопфа практически исключается.

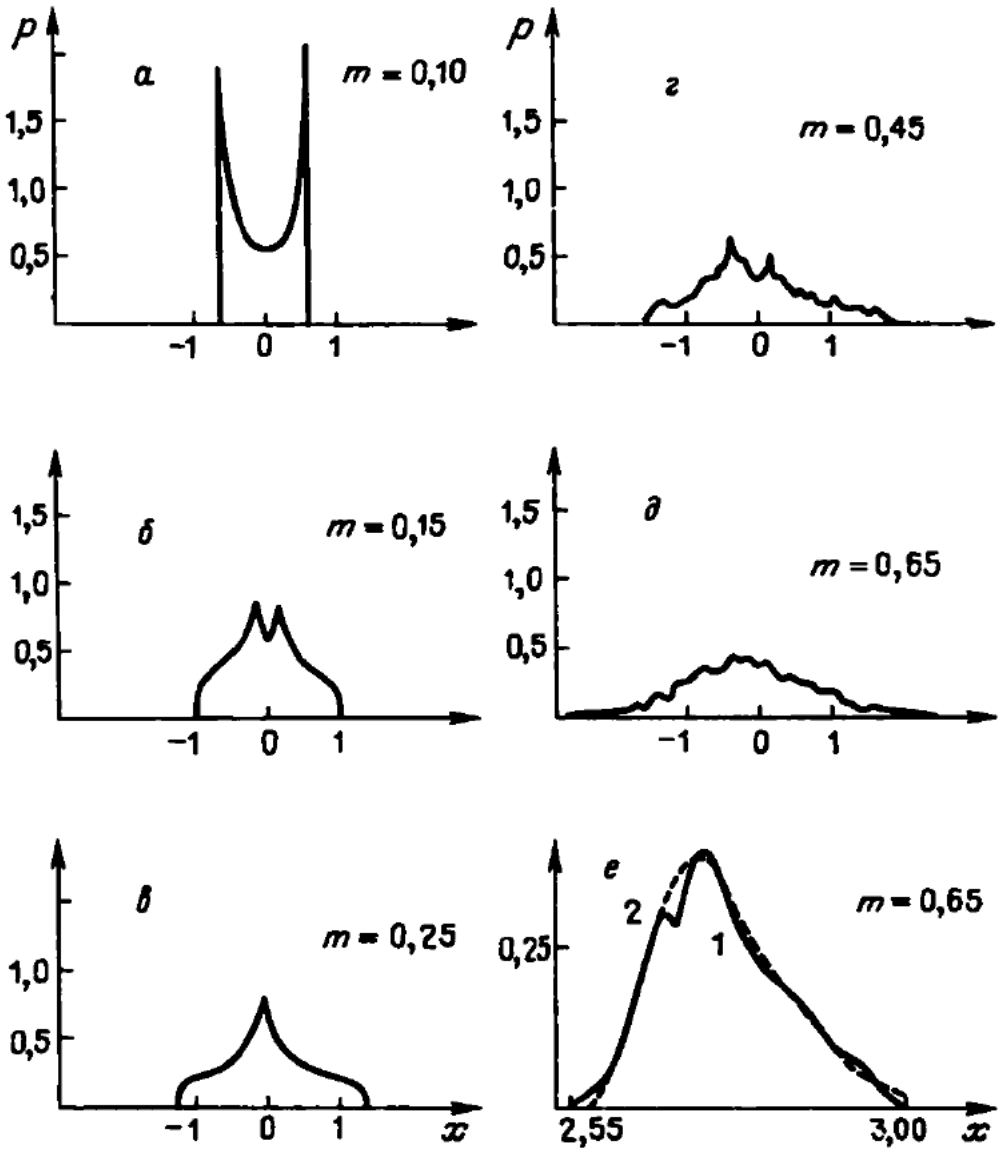


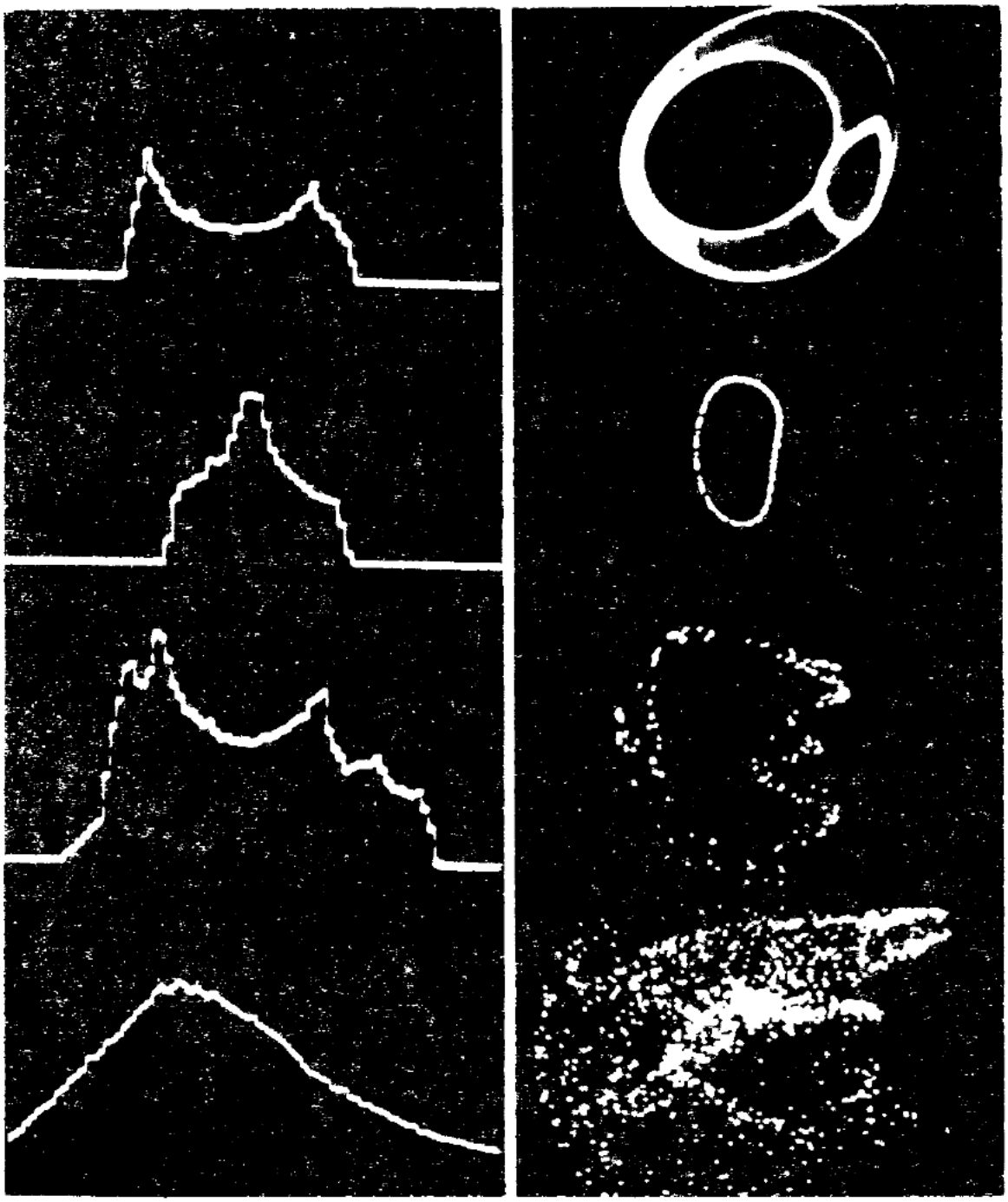
Рис. 13.18. Одномерные плотности распределения вероятностей $p(x)$ в неавтономном генераторе при движении в направлении D диаграммы рис. 12.7 (расчет на ЭВМ)

ческую аппроксимацию логнормальным законом [219]:

$$p(x) \simeq \varphi(x) = \begin{cases} (2\pi)^{-1/2}(\sigma x)^{-1}\exp\left[-\dfrac{(\ln x - \bar{x})^2}{2\sigma^2}\right], & x > 0, \\ 0, \quad x \leqslant 0, \end{cases} \tag{13.17}$$

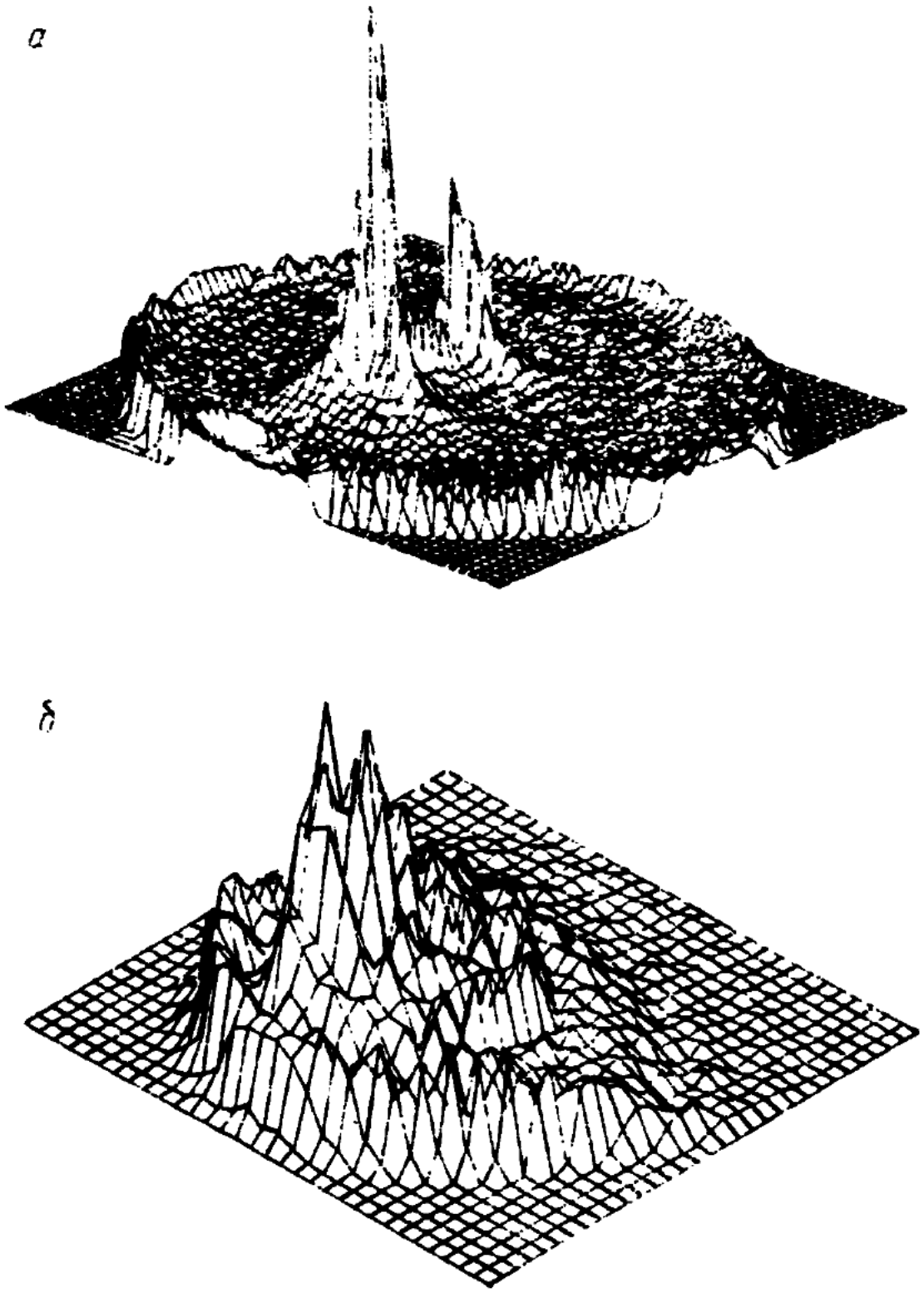
где под x необходимо понимать разность $x - x_{\min}$, $x_{\min}$ – минимальное значение координаты x в одномерном распределении $p(x)$, $\bar{x}$ и σ – параметры распределения.

Результаты аппроксимации расчетных данных (рис. 13.18$д$) теоретическими (13.17) представлены на рис. 13.18$е$. Теоретическое распределение (кривая *2*) отвечает значениям параметров $\sigma = 0{,}40$, $\bar{x} = 0{,}965$. Видно, что теоретическое распределение удовлетворительно описывает огибающую экспериментального распределения (кривая *1*). Качество аппроксимации становится хуже в области "хвостов" распределения, что в соответствии с (13.17) естественно.



Р и с. 13.19. Эволюция одномерного распределения (слева) и соответствующего сечения Пуанкаре (справа) при переходе к хаосу через двумерный тор (физический эксперимент)

Как и в случае аттрактора седло-фокусного типа, влияние малых флуктуаций (если не индуцируются бифуркационные переходы) приводит к сглаживанию мелкомасштабных структур распределений $p(x)$. В частности, экспериментальные и теоретические кривые $p(x)$ в режиме развитого тор-аттрактора при наличии шума оказываются более близкими. Для иллюстрации эффекта влияния малых флуктуаций на *одномерные* плотности распределения вероятностей удобно рассмотреть результаты измерений $p(x)$ в эксперименте, когда воздействие шумов неизбежно присутствует.



Р и с. 13.20. Двумерное распределение $p(x, y)$ на гладком горе (*а*) и в режиме тор-хаоса (*б*) (численный эксперимент)

На рис. 13.19 дана серия фотографий, содержащая одномерные плотности распределения вероятностей $p(x)$ и отвечающие им сечения Пуанкаре режимов колебаний при переходе к тор-хаосу. Видна эволюция вначале к унимодальному распределению на гладком двумерном торе, а затем через потерю гладкости -- к унимодальному логнормальному закону в режиме развитого тор-хаоса. Качественное соответствие результатов не вызывает сомнений, подтверждая основные результаты численного счета и выводы о влиянии флуктуаций.

Совершенно ясно, что одномерного распределения $p(x)$ для ответа на ряд вопросов, естественных при статистическом описании режимов тор-хаоса, недостаточно. Возникает потребность знать многомерное распределение. Эта задача пока не решена и вызывает вполне понятные трудности. Некоторые полезные выводы можно сделать, анализируя *двумерные* законы. В качестве примера приведем результаты расчетов двумерных плотностей распределения вероятностей $p(x, y)$ для режимов гладкого двумерного тора (рис. 13.20*а*) и развитого тор-хаоса (рис. 13.20*б*). Им отвечают одномерные плотности распределения вероятностей, показанные на рис. 13.18*б, д*. Характерным свойством двумерных законов является их близость к симметричным, что обусловлено геометрической структурой тора и тор-аттрактора.

ГЛАВА 14

ПЕРЕХОДЫ К ХАОСУ В РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМАХ И СТРАННЫЕ АТТРАКТОРЫ

14.1. Странные аттракторы и турбулентность

Открытие странных аттракторов прояснило природу возникновения, структуру и свойства динамического хаоса в нелинейных диссипативных системах малой размерности. Может ли концепция странных аттракторов быть полезной в изучении сложной нерегулярной динамики нелинейных распределенных систем и сплошных сред с бесконечным числом степеней свободы? Существует ли и какова взаимосвязь странных аттракторов с гидродинамической турбулентностью? Вот основные вопросы, убедительного ответа на которые пока нет.

Считается, что одной из принципиальных черт хаотического движения в распределенных системах является большое число колебательных мод, задействованных в движении [30]. Для гидродинамической турбулентности получена теоретическая оценка для числа активных степеней свободы, которое растет с увеличением числа Рейнольдса по степенному закону. В режиме развитой трубулентности число задействованных степеней свободы конечно, но очень велико.

Представления Ландау о турбулентности как квазипериодическом движении с множеством несоизмеримых частот (мод) отвечают указанным свойствам турбулентного движения. Полезно обратиться к фундаментальным идеям теории возникновения турбулентности по Ландау [88], развитием которых по существу являются современные представления о динамическом хаосе. Выводы Ландау следующие .

1. Существенно полезную информацию о турбулентном движении дает исследование *бифуркационных механизмов* его возникновения.

2. Развитая турбулентность формируется в результате *бесконечной иерархии бифуркаций*, связанных с потерей устойчивости вновь возникающими режимами автоколебаний.

Представления Ландау унаследованы в концепции Рюэля–Такенса и считаются сами собой разумеющимися. Однако нужно помнить, что эти идеи были высказаны Ландау в 1944 г., т.е. задолго до работы [27], и представлялись в то время далеко нетривиальными. Критика теории Ландау Рюэлем и Такенсом необоснованно отвлекла внимание от позитив-

ных элементов картины Ландау, которые правильней было бы рассматривать как исходные фундаментальные представления о механизмах развития хаотических колебаний.

Новые результаты Рюэля – Такенса в сравнении с концепцией Ландау сводятся к следующему.

1. Хаотическое движение *не является квазипериодическим.*

2. Этому движению присуща *неустойчивость по Ляпунову* индивидуальных траекторий в фазовом пространстве.

3. *Число бифуркаций*, сопровождающих переход к хаосу через квазипериодические режимы, *конечно.*

Открытие Рюэлем и Такенсом странного аттрактора, безусловно, является фундаментальным шагом в изучении турбулентного движения. Однако и концепция Рюэля – Такенса уязвима для критики. Так, конечным является не число бифуркаций, а число существенных мод, обеспечивающих переход к хаосу. Кроме того, нельзя игнорировать экспериментальные результаты по наблюдению многомерных торов.

В применении концепций странных аттракторов для анализа турбулентности существенна размерность притягивающего хаотического множества в фазовом пространстве системы. Знание размерности аттрактора позволяет количественно оценить число задействованных в движении степеней свободы. Если размерность конечна и относительно мала, то моделирование процессов в распределенных системах возможно с помощью конечного числа обыкновенных дифференциальных уравнений.

За последние 5 лет в указанном направлении получены важные результаты, вселяющие оптимизм в отношении конструктивного использования достижений теории динамических систем в изучении общей проблемы турбулентности сплошной среды. Число оригинальных работ по данному вопросу заметно растет и позволяет сейчас по-новому подойти к анализу и интерпретации полученных ранее экспериментальных данных.

Здесь описаны некоторые результаты теории и экспериментов по использованию динамического подхода к моделированию развития турбулентности.

14.2. Переход к хаосу через маломерный аттрактор в течении Куэтта – Тейлора

Возможность описания турбулентности вязкой жидкости при малой надкритичности с помощью конечного числа обыкновенных дифференциальных уравнений в принципе не вызывала сомнений давно [23, 258] *). Неизменно возникал вопрос: сколько и какие уравнения необходимо использовать для удовлетворительного описания конкретных течений при различных числах Рейнольдса? Детальные теоретические и экспериментальные исследования некоторых конкретных течений (например, тепловая конвекция в ячейке Хеле - Шоу) приводили к удовлетворительным ре-

*) Для описания развитой турбулентности используются уравнения полуфеноменологической теории. В отличие от уравнений динамики они включают явные характеристики, отражающие сложность турбулентного движения (турбулентная вязкость, к примеру).

зультатам, получение которых было сопряжено с чрезвычайными трудностями.

Как стало ясно из экспериментов, для более сложных течений число уравнений аппроксимации становится весьма большим. Это затрудняет анализ при сопоставлении численных и физических экспериментов, так как априори строго не известно число задействованных степеней свободы. Кроме того, формальное ограничение рядов аппроксимирующих функций методами типа Галеркина, как правило, приводит к изменениям тонких топологических характеристик аттракторов, которые могут иметь мало общего с установившимися движениями в исходной распределенной системе. Указанные сложности ставят под сомнение взаимосвязь построенных путем конечномерных аппроксимаций аттракторов с реальными движениями турбулентной среды [258].

Существенным облегчением решения задачи конечномерной аппроксимации может послужить информация о размерности аттрактора потока жидкости в конкретном режиме турбулентного движения. Значение размерности, если оно известно, дает определенную ясность в отношении числа модельных уравнений и позволяет сократить объем вычислительных работ на ЭВМ, придав им более целенаправленный характер.

С указанной точки зрения важной является работа коллектива авторов [102], в которой на примере течения Куэтта – Тейлора убедительно показывается, что, во-первых, переход к турбулентному движению в течении жидкости происходит через аттрактор *наименьшей* фрактальной размерности $2 + d$ и, во-вторых, даже при заметном превышении порога возникновения турбулентности (более чем на 30%) *размерность* странного аттрактора относительно *мала* (не более пяти)

Течение Куэтта – Тейлора являет собой пример так называемых внутренних (или ограниченных) течений и удобно для экспериментальных исследований мягкого поэтапного перехода к турбулентности в замкнутом потоке движущейся жидкости. Экспериментальное устройство включает два коаксиальных цилиндра радиусами r_1 и r_2, пространство между которыми заполняется водой постоянной температуры. Движение жидкости обеспечивается вращением внутреннего цилиндра с частотой ω_m. Изменение скорости вращения позволяет варьировать число Рейнольдса

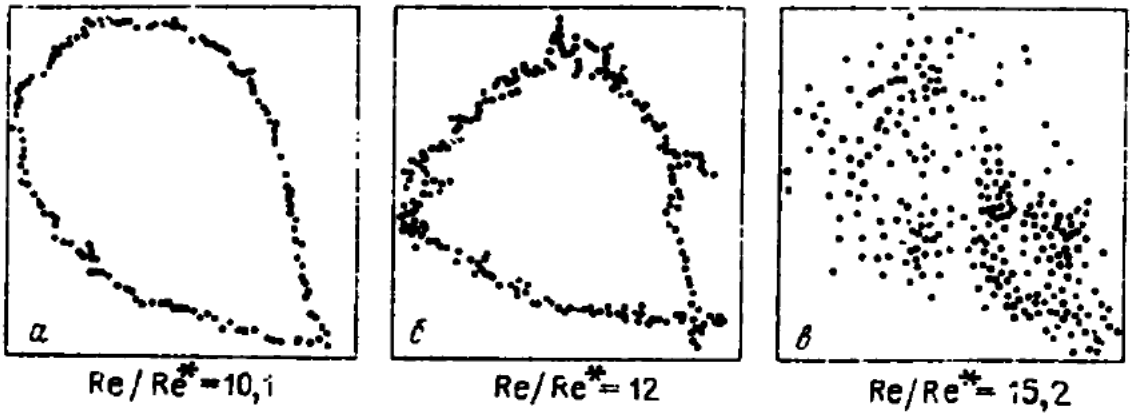
$$\mathrm{Re} = \omega_m (r_2 - r_1)/\eta, \qquad (14.1)$$

где η – вязкость.

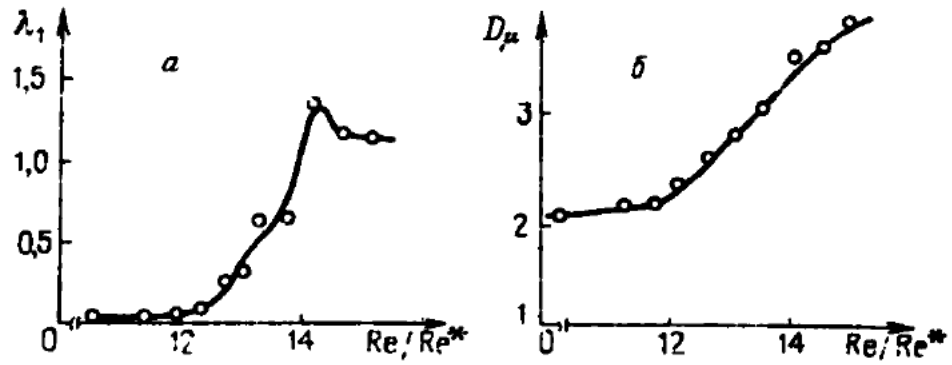
Скорость движения жидкости регистрируется с использованием лазерного доплеровского измерителя, не возмущающего поток. Обработка данных измерений осуществляется автоматизированной системой, базирующейся на ЭВМ.

При малых числах Рейнольдса течение ламинарно (течение Куэтта). По мере увеличения частоты вращения ω_m образуются вихри Тейлора, которые с ростом Re усложняются, и далее течение становится турбулентным.

Остановимся кратко на основных результатах [102]. Измерения проводились для значений Re в интервале $10\mathrm{Re}^* \leqslant \mathrm{Re} \leqslant 15\mathrm{Re}^*$, где Re^* – значение числа Рейнольдса, соответствующее появлению в системе вихрей Тейлора. Измерялась и анализировалась радиальная компонента вектора ско-



Р и с. 14.1. Сечения Пуанкаре трехмерного модельного фазового потока в течении Куэтта – Тейлора с ростом числа Рейнольдса [102] : *а* – Re/Re* =10,1, *б* – 12, *в* – 15,2



Р и с. 14.2. Зависимость старшего показателя спектра ЛХП (*а*) и фрактальной размерности (*б*) от числа Рейнольдса при переходе к турбулентному режиму в течении Куэтта [102]

рости течения $v(t_k)$, где $t_k = k\Delta t$, $k = 1, 2, \ldots, 32768$, $\Delta t = 6$ мс. С целью качественного анализа перехода к турбулентному движению строились его модельные фазовые портреты размерности m путем введения фазовых переменных в

$$\mathbb{R}^m \{ v(t_k),\ v(t_k + \tau),\ v(t_k + 2\tau), \ldots,\ v(t_k + [m-1]\tau) \},$$

где сдвиг по времени τ может быть произвольным. На рис. 14.1 даны двумерные сечения Пуанкаре модельного фазового потока для разных чисел Рейнольдса.

В результате анализа эволюции спектров мощности реализаций в совокупности с закономерностями трансформации фазовых портретов аттракторов системы установлено, что переходу к хаосу в течении Куэтта предшествует режим *двухчастотных биений* (замкнутая инвариантная кривая в отображении Пуанкаре – рис. 14.1*б*) и рождение стохастичности обусловлено *разрушением двумерного тора.* Этот интересный результат, вообще говоря, был известен и ранее [23, 258, 259]. На основании его можно предполагать, что размерность тор-аттрактора должна быть не больше $2 + d$. Однако утверждать последнее было бы опрометчиво.

Авторы [102] предприняли попытку непосредственной оценки размерности аттракторов, используя экспериментальные реализации $v(t_k)$ и

метод расчета размерности по Грассбергеру – Такенсу. Эта попытка удалась. На рис. 14.2 представлены результаты расчета старшего показателя спектра ЛХП λ_1 и нижней границы фрактальной размерности D_μ в зависимости от числа Рейнольдса. Как видно из графиков, переход к хаосу (момент появления положительного показателя) осуществляется через *тор-аттрактор*, который с ростом числа Re плавно эволюционирует, увеличивая размерность. Заметное превышение порога критичности характеризуется конечной и малой размерностью аттрактора, которая для $\mathrm{Re} = 1.5\mathrm{Re}^*$ имеет значение $4 + d < 5$.

Таким образом, экспериментальными работами подтверждена предполагаемая ранее *взаимосвязь странных аттракторов с гидродинамической турбулентностью* по крайней мере для внутренних течений и малой надкритичности [102, 103].

14.3. Развитие и свойства хаоса в полубесконечной однонаправленно связанной цепочке генераторов

Конечномерная природа перехода к турбулентности в ограниченных течениях может быть связана с затуханием высокочастотных мод за счет турбулентной вязкости, резко снижающей число активно задействованных в движении степеней свободы. Но отсюда вовсе не следует, что и в безграничных или полуограниченных гидродинамических течениях картина будет аналогичной. Кроме того, возможность и механизмы самопроизвольного развития хаотического движения в таких средах в отсутствие глобальной обратной связи пока окончательно не выяснены. В связи с этим чрезвычайную важность приобретают модельные численные и физические эксперименты, позволяющие имитировать нужную ситуацию и тем самым направленно проверять формирующиеся представления о возможных путях развития в пространстве хаотических колебаний. В этом плане радиофизические эксперименты обладают рядом преимуществ в сравнении с гидродинамическими.

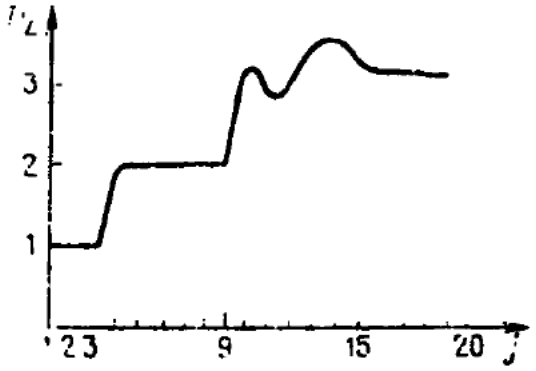
Первая попытка численно смоделировать полубесконечную неравновесную диссипативную среду с потоком была удачно предпринята авторами [260] на примере *цепочки* однонаправленно связанных *генераторов типа Ван дер Поля*. Для описания поля в полуограниченной невзаимной среде использована дискретная модельная система вида

$$\dot{u}_j + \alpha \Delta u_j = u_j(1 - \delta |u_j|^2), \quad \Delta u_j = u_j - u_{j-1}, \tag{14.2}$$

где $j = 1, 2, 3, \ldots$, u_j, α и δ – комплексные величины, j – порядковый номер ячейки. В численных экспериментах исследовалась система уравнений (14.2) для $\alpha = \alpha'(1 - i\alpha'')$, $\delta = 1 - i\beta$, где α', α'' – положительные действительные числа. Анализировались спектры мощности амплитуды и фазы $u_j(t)$ и вычислялась ляпуновская размерность аттракторов системы в зависимости от j (вдоль цепочки) при различных режимах работы парциальных генераторов и степени их взаимосвязи *).

*) Аттрактором цепочки из j связанных систем здесь и далее будем называть инвариантное притягивающее множество в фазовом пространстве jN измерений; N – размерность парциальной системы.

Эксперименты показали, что при малых коэффициентах связи (α' мало) в цепочке устанавливаются регулярные независимые колебания на частоте $|\omega| = \beta$, соответствующие локальным возбуждениям генераторов. Рост степени связи приводит к синхронизации генераторов цепочки, начиная с некоторого $j = l > 1$. При дальнейшем увеличении связи система переходит в режим пространственно неоднородных периодических колебаний, сменяющихся далее режимом двухчастотных биений. Нелинейное взаимодействие коллективных и локальных возбуждений приводит



Р и с. 14.3. Изменение размерности аттрактора вдоль цепочки (14.2) при значениях параметров $\alpha' = 0{,}5$, $\alpha'' = 1{,}71$, $\beta = 5{,}0$ [260]

в итоге к установлению режима хаотических автоколебаний, обусловленного *разрушением режима биений* (двумерного тора) с образованием тор-аттрактора, как и в случае течения Куэтта–Тейлора.

Благодаря наличию связи число степеней свободы динамической системы с ростом j увеличивается (растет число дифференциальных уравнений). Казалось естественным предположить, что размерность странных аттракторов вдоль цепочки тоже будет расти и при стремлении $j \to \infty$ должна бы увеличиваться неограниченно в соответствии с ожидаемой "бесконечномерной" турбулентностью. Однако этого не происходит! Здесь впервые наблюдается любопытный эффект: пространственное развитие турбулентного режима колебаний в цепочке связанных генераторов испытывает вдоль цепочки постепенное "*насыщение*". Достигается режим стационарной пространственно однородной "турбулентности".

Изменение ляпуновской размерности D_L вдоль цепочки, отвечающее описанному режиму, представлено на рис. 14.3. В первых трех генераторах размерность аттракторов единица (предельный цикл), в генераторах $4 \leqslant j \leqslant 9$ $D_L = 2$ (биения, двумерный тор); в последующих генераторах $j \geqslant 10$ $2 < D_L < 4$ (тор-аттрактор, хаос, обусловленный разрушением двумерного тора).

Режиму пространственно однородного хаоса соответствует *стабилизация размерности* аттракторов на относительно невысоком уровне $D_L < 4$. Таким образом, в рассмотренной модели полубесконечной цепочки, во-первых, переход к режиму хаоса осуществляется через *тор-аттрактор* размерности $D_L = 2 + d$; во-вторых, развитая "турбулентность" *конечномерна* ($D_L < 4$) и, в-третьих, наблюдается эффект пространственного *насыщения размерности*, чему соответствует стационарная пространственно однородная стохастичность в рассматриваемой "среде". Последний вывод заслуживает особого внимания.

В экспериментах на течении Куэтта – Тейлора эффекта насыщения не наблюдалось, в связи с чем осталось не ясным, будет ли размерность хаотических аттракторов с ростом числа Рейнольдса и далее увеличиваться или возможно ее ограничение? Не исключено последнее. В таком случае полученные на модели (14.2) результаты, может оказаться, имеют достаточно общий, а не частный характер. Пока ясно одно: для ответа на возникающие вопросы необходимы дальнейшие теоретические и экспериментальные исследования.

14.4. Пространственная синхронизация и бифуркации развития хаоса в цепочке связанных генераторов с инерционной нелинейностью

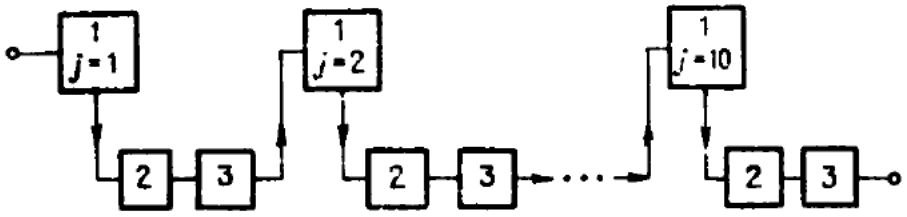
Идея имитировать полубесконечную неравновесную среду с потоком цепочкой однонаправленно связанных генераторов с целью изучения механизмов рождения, закономерностей и свойств пространственного развития хаоса чрезвычайно интересна и плодотворна. Открываются широкие возможности целенаправленного моделирования различных сред путем видоизменения дискретных элементов (парциальных генераторов) и характера их взаимодействия, проведения наряду с численными экспериментальных исследований, базирующихся, к примеру, на радиофизическом моделировании. При этом не возникает сложности в обосновании применимости достижений динамической теории, так как в основе лежит конечномерное представление процессов в системе.

Рассмотренные в 14.3 результаты, если подойти к ним критически, не дают окончательного ответа по крайней мере на естественно возникающий вопрос: не является ли эффект стабилизации размерности аттракторов в цепочке следствием относительной простоты парциального генератора? Генератору типа Ван дер Поля отвечает фазовая плоскость, существенно ограничивающая возможные динамические режимы и исключающая хаос. Неавтономный генератор способен реализовать странный аттрактор, но вполне возможно, что цепочка таких генераторов, представляющая собой последовательность связанных активных элементов с определенными резонансными и фильтрующими свойствами, в силу последнего обстоятельства диктует предел в возможности увеличения размерности притягивающего множества, действуя как эквивалентный полосовой фильтр. Высказанная гипотеза хороша тем, что может быть проверена теоретически и экспериментально.

Совершенно естественна мысль рассмотреть динамику *цепочки однонаправленно связанных генераторов* с инерционной нелинейностью. Парциальным элементом такой цепочки будет динамическая система, способная реализовать даже в автономном режиме бесконечное множество автоколебательных процессов различной сложности, включая хаотические. Кроме того, динамика как автономного, так и неавтономного парциальных генераторов уже подробно исследована, что естественно упрощает задачу. Применяя в качестве парциального элемента дискретного моделирования полубесконечной среды динамическую систему со странным аттрактором, можно ожидать более сложных колебательных явлений наряду с типичными, не зависящими от конкретных ячеек эффектами, если они имеют место.

Рассмотрим результаты радиофизического эксперимента. Экспериментальные исследования проводились с использованием десяти идентичных автономных генераторов низкочастотного диапазона с инерционным механизмом ограничения амплитуды колебаний, каждый из которых описывается системой нелинейных уравнений (7.38).

В парциальном генераторе, как установлено, могут реализовываться различные типы аттракторов. В частности, при движении по параметру



Р и с. 14.4. Блок-схема цепочки генераторов: *1* – парциальный генератор, *2* – катодный повторитель, *3* – линейный усилитель

m для $g < 0{,}4$ наблюдается сходящаяся последовательность бифуркаций удвоения периода. Экспериментальная система схематически изображена на рис. 14.4. Однонаправленный характер связи обеспечивается включением катодных повторителей и компенсирующих широкополосных линейных усилителей между генераторами. Коэффициент связи регулируется усилением сигнала между генераторами [261, 262].

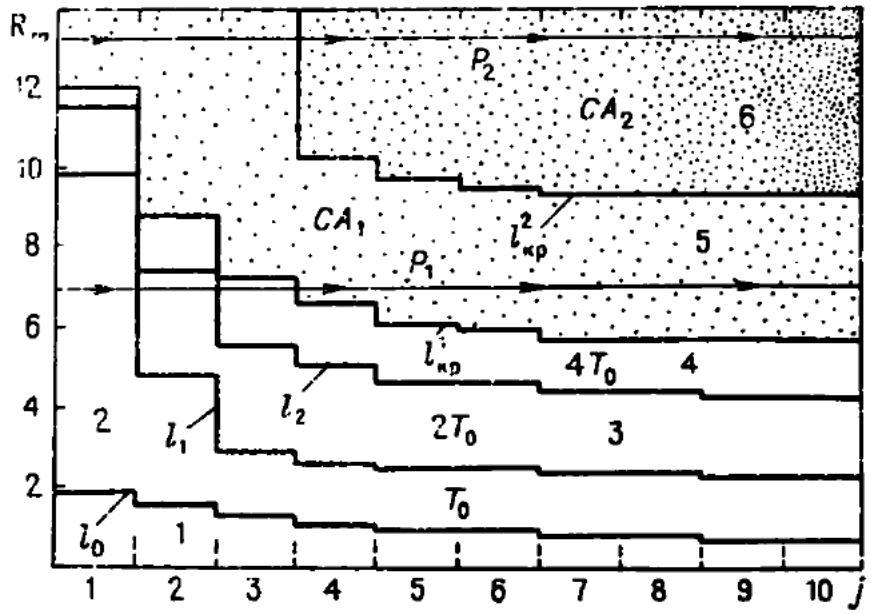
Диагностика и изучение колебательных режимов системы проводилось путем наблюдения проекций фазовых траекторий на любую из выбранных плоскостей переменных x_j, y_j с помощью осциллографа, а также регистрации спектра мощности колебаний генератора анализатором спектра.

Уравнения, моделирующие процессы в цепочке, с учетом описания экспериментальной системы, можно записать так:

$$\begin{aligned} \dot{x}_j &= mx_j + y_j - x_j z_j + \gamma x_{j-1}, \\ \dot{y}_j &= -x_j, \quad \dot{z}_j = -gz_j + gI(x_j)x_j^2, \end{aligned} \tag{14.3}$$

где $j = 1, 2, \ldots, 10$, $x_0 = 0$. Параметр m характеризует степень неравновесности системы в целом, g – инерционность парциального генератора, γ – коэффициент связи. В экспериментах значение параметра g фиксировалось на уровне 0,3, значение параметра m изменялось в пределах $0 < m \leqslant 1{,}6$, коэффициент связи варьировался в интервале $0{,}05 \leqslant \gamma \leqslant 0{,}38$.

Полученные результаты отражает бифуркационная диаграмма рис. 14.5, содержащая разбиение плоскости параметров R_m, j на области с различными режимами колебаний, снятая для коэффициента связи $\gamma = 0{,}1$; R_m – экспериментально измеряемый параметр, прямо пропорциональный параметру генерации m. Видны шесть областей топологически отличающихся режимов, ограниченных бифуркационными линиями l_k. В области *1* система не возбуждена и представляет собой цепочку связанных регенеративных нелинейных контуров. Переход через границу l_0 соот-



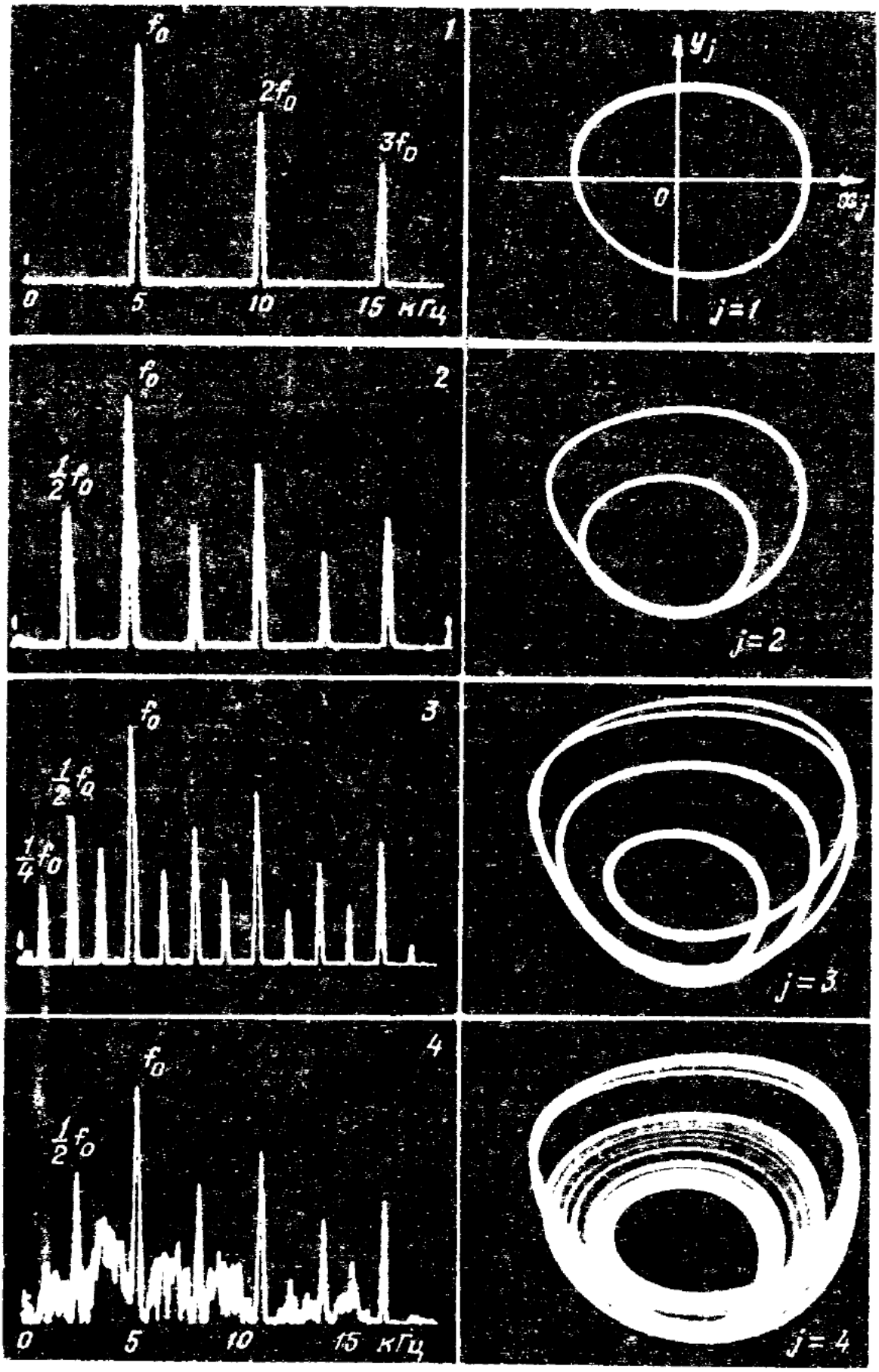
Р и с. 14.5. Бифуркационная диаграмма режимов колебаний цепочки (физический эксперимент)

ветствует мягкому возбуждению автоколебаний, и в области *2* система генерирует регулярные колебания периода T_0 (f_0 = 6,0 кГц). Увеличение R_m, соответствующее переходам через границы l_1 и l_2, приводит к установлению колебаний удвоенного периода: $T_0 \to 2T_0$ (l_1), $2T_0 \to 4T_0$ (l_2).

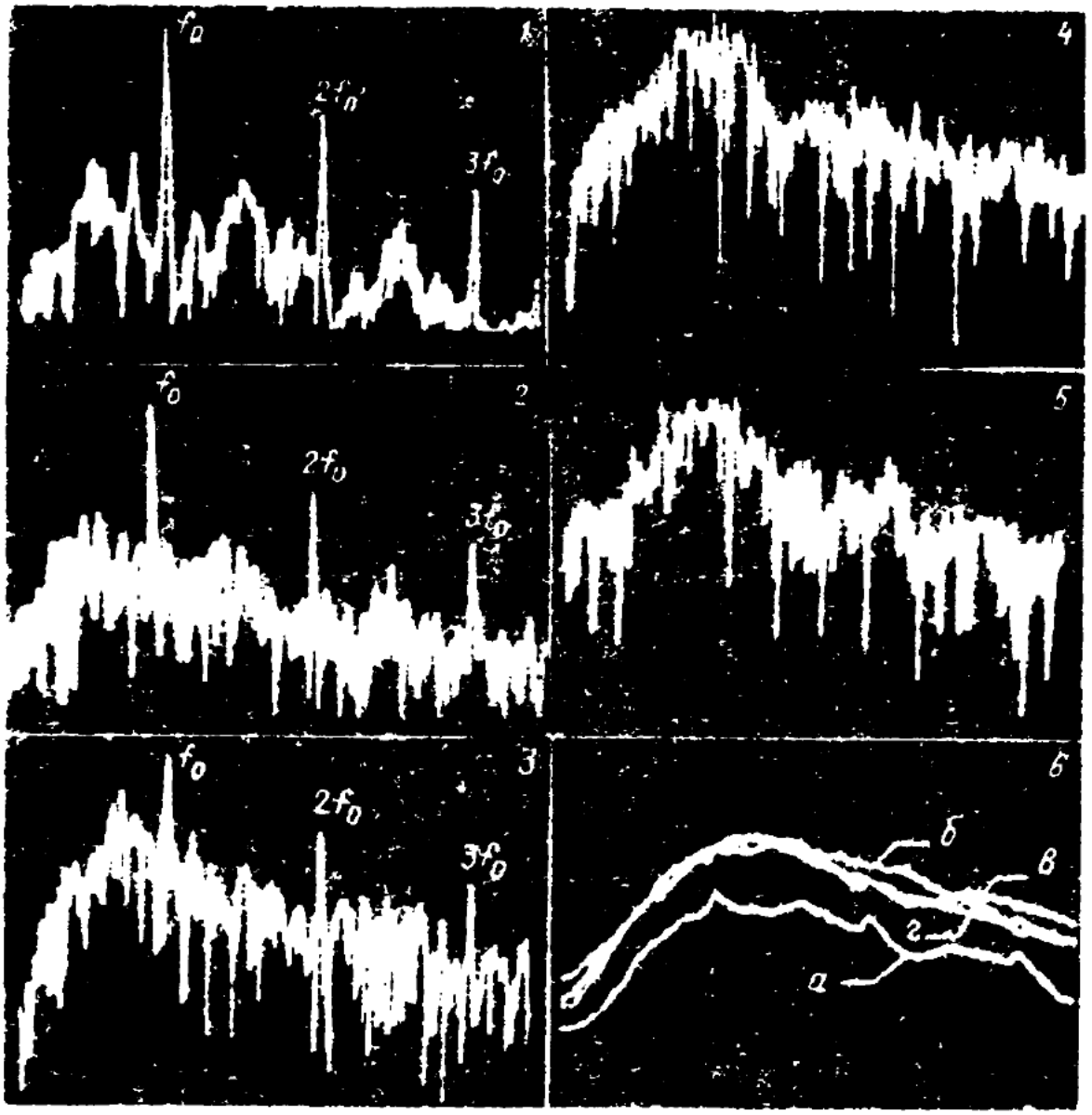
Дальнейший рост степени неравновесности – переход через границу $l^1_{кр}$ – приводит к возникновению хаотических колебаний, образом которых служит странный аттрактор ленточного типа CA_1 с небольшой фрактальной размерностью $D_F = 2 + d$, $d \leqslant 0{,}3$. В спектре мощности этих колебаний присутствуют четко выраженные пики на основной частоте $f_0 = T_0^{-1}$, половинной частоте $f_0/2$ и их гармониках, опирающиеся на относительно малого уровня сплошной шумовой пьедестал. Выбросы в спектре исчезают при переходе через границу $l^2_{кр}$, чему соответствует рождение аттрактора Шильникова (CA_2) более сложной структуры. Эта бифуркация связана с петлей седло-фокуса и отвечает рождению хаоса второй зоны парциального генератора.

При фиксированных R_m вдоль цепочки наблюдались следующие установившиеся режимы: а) для $1 \leqslant R_m \leqslant 2$ – режим пространственной синхронизации колебаний на частоте f_0; б) для $3 \leqslant R_m \leqslant 4{,}5$ и $j \geqslant 3$ – пространственная синхронизация в режиме колебаний удвоенного периода; в) для $4{,}5 \leqslant R_m \leqslant 5{,}5$ и $j \geqslant 5$ – пространственная синхронизация колебаний периода $4T_0$; г) для $R_m \simeq 7$ и $j > 3$ в цепочке устанавливался режим пространственно однородного хаоса. Спектр мощности стохастических колебаний практически не зависит от j; реализуется режим хаотической синхронизации в пространстве. Спектры мощности (слева) и проекции фазовых траекторий (справа) в первых четырех генераторах цепочки при $R_m \simeq 7{,}0$ представлены на рис. 14.6.

В случае больших R_m ($\gtrsim 12$) каждый из генераторов в отсутствие связи находится в режиме стохастических колебаний. С введением связи при движении вдоль цепочки наблюдается *пространственная эволюция хаоса.* Интенсивность колебаний несколько возрастает, а спектр сглаживается



Р и с. 14.6. Эволюция спектров колебаний (слева) и проекций фазовых траекторий (справа) при движении в направлении P_1 диаграммы рис. 14.5



Р и с. 14.7. Эволюция спектров колебаний при движении вдоль цепочки в направлении P_2 диаграммы рис. 14.5: $1 - 5$ — спектры колебаний в первых пяти генераторах, 6 – огибающие спектров колебаний для значений j: 1 (*а*), 4 (*б*), 6 (*в*), 10 (*г*)

(рис. 14.7). Уже при $j \geqslant 4$ наблюдается эффект *хаотической синхронизации*. Спектры мощности хаотических пульсаций не меняются вдоль цепочки существенным образом. Варьирование коэффициента связи между генераторами в области значений $0{,}05 \leqslant \gamma \leqslant 0{,}30$ качественно не изменяло характера автоколебательных режимов, свидетельствуя о грубости наблюдаемых режимов.

Использование в экспериментах конечной цепочки из десяти генераторов для моделирования "полубесконечной среды" в общем случае недостаточно. Однако эксперименты, проведенные для выяснения влияния числа генераторов на характер установленных закономерностей, подтвердили основной результат: наблюдаемые динамические явления сохраняются с увеличением числа генераторов цепочки $j > 10$.

Прямой путь наращивания числа генераторов в цепочке имеет границы, обусловленные техническими трудностями (низкочастотный парциальный генератор – относительно сложное радиоустройство). Более эффектив-

ное решение предложено нами в [263]. Вместо j генераторов для моделирования процессов в однонаправленной цепочке достаточно одного (!) генератора.

На ленту магнитофона с низким уровнем шумов записывается сигнал с выхода генератора. Запись по времени должна превышать длительность переходных процессов и быть достаточной для регистрации спектров и фазовых портретов колебаний. Затем эта кассета перекладывается во второй магнитофон и оба одновременно включаются. Первый теперь записывает сигнал с выхода неавтономного генератора, возбуждаемого сигналом записи со второго магнитофона. Имитируется процесс автоколебаний в цепочке из двух связанных генераторов. Степень связи регулируется уровнем воспроизведения сигнала магнитофоном на входе.

Последовательно перекладывая кассеты с записывающего на воспроизводящий магнитофоны, можно проследить эволюцию режимов вдоль цепочки генераторов. Ограничение числа j в такой "цепочке" переключений связано только с шумами магнитофонной записи и воспроизведения, что дает возможность имитации цепочек с $j > 10$. При этом отпадает необходимость кропотливой регулировки системы с целью обеспечения идентичности парциальных генераторов.

Эксперименты, проведенные указанным методом, подтвердили, что основные эффекты, зарегистрированные при исследованиях на реальной цепочке связанных генераторов, сохраняются с увеличением $j > 10$.

Перейдем к теоретическому описанию динамических эффектов в цепочке. В парциальном генераторе в заданной области параметров m и g реализуется переход к хаосу через мягкую последовательность удвоений периода. Как показано в гл. 8, данный механизм перехода при малых превышениях над порогом допускает модельное описание одномерным отображением типа квадратичной параболы. Для теоретического описания наблюдаемых в цепочке при относительно малой степени неравновесности явлений можно рассмотреть модельную систему в виде однонаправленно связанных отображений типа

$$x_j(n+1) = 2Kx_j(n) - 2x_j^2(n) + \gamma x_{j-1}(n+1), \qquad (14.4)$$

где $x_0(n) = 0$, $j = 1, 2, 3, \ldots$, n – дискретное время, $K > 0$ – аналог параметра неравновесности цепочки m, $\gamma \in [0, 1]$ – коэффициент связи.

Динамика модели (14.4) теоретически исследована в [262]. Рассмотрим основные результаты.

Режиму пространственно однородных колебаний в (14.4) отвечает условие $x_{j-1} = x_j$, которому соответствует отображение

$$(1-\gamma)x(n+1) = 2Kx(n) - 2x^2(n).$$

Заменой $K' = K/(1-\gamma)$, $y = x/(1-\gamma)$ последнее отображение приводится к отображению Фейгенбаума

$$y(n+1) = 2K'y(n) - 2y^2(n) \qquad (14.5)$$

с критической точкой рождения аттрактора $K'^* = 1{,}7847$. Полагая $K' > K'^*$, можно найти коэффициент связи γ, при котором пространственно однородный хаотический режим устойчив. Условие устойчивости имеет вид

$$\ln(1-\gamma) + |K'(1-\gamma)^{-1} - K'^*|^{\eta} \leqslant 0, \quad \eta = \ln 2/\ln\delta. \qquad (14.6)$$

Таким образом, при $K' \geqslant K'^{*}$ и $0 < \gamma < 1$ пространственно однородный режим возможен и устойчив. Из условия (14.6) следует, что для реализации режима хаотической синхронизации связь не должна быть слишком малой, так как в последнем случае парциальные ячейки "среды" становятся практически независимыми.

Пространственным бифуркационным переходам, реализующимся при относительно малых R_m (рис. 14.6), соответствует эволюция неподвижных точек индивидуального отображения вдоль цепочки. Пусть в первом генераторе реализуется режим 1-тактных колебаний периода T_0. Ему соответствует неподвижная точка индивидуального отображения периода 1, устойчивая для области значений $0{,}5 \leqslant K \leqslant 1{,}5$. Положив $x_j(n+1) = x_j(n)$, из (14.4) находим одномерное отображение, описывающее неоднородный режим из неподвижных точек,

$$x_j^0 = 2Kx_j^0 - 2(x_j^0)^2 + \gamma x_{j-1}. \qquad (14.7)$$

Вдоль цепочки при $j \to \infty$ устанавливается пространственно однородный режим, которому отвечает неподвижная точка $x^0 = 0{,}5 \cdot (1 - \gamma) - K$, устойчивая при условии $|2K + 4x_j^0| \leqslant 1$, $j = 1, 2, 3, \ldots$. Таким образом, при связи больше критической ($\gamma > \gamma_{кр} = 0{,}5 - K$) реализуется простейший режим пространственной синхронизации (1-тактная неподвижная точка). Если же уменьшить связь ($\gamma < \gamma_{кр}$), то при некотором $j = j^*$ 1-тактная точка становится неустойчивой. При этом, в силу квадратичности отображения, режим T_0 в цепочке сменяется $2^l T_0$ – периодическим режимом, где $l = 1, 2, 3, \ldots$ зависит от параметров. Если связь мала, то первым переходом вдоль цепочки будет удвоение периода. Аналогичные рассуждения можно теперь провести для $j = j^*$ и, повторив расчеты, найти условия существования и устойчивости режима синхронизации на частоте $(2T_0)^{-1}$ и т.д.

Отметим одно принципиально важное для систем в виде цепочек связанных отображений Фейгенбаума обстоятельство. Если параметры системы выбрать такими, что пространственная синхронизация в режиме регулярных колебаний не реализуется, то число *пространственных удвоений периода* по пути к режиму хаотической синхронизации будет *строго конечным* в отличие от бесконечной серии удвоений в индивидуальном отображении. Это можно показать аналитически с использованием метода ренормгруппы, что и сделано в [261]. Как следует из теоретического анализа, после каждой бифуркации удвоения эффективная связь между генераторами возрастает вдвое. Вследствие этого всегда найдется такое j^1, что для $j \leqslant j^1$ в генераторах будут устанавливаться режимы регулярных колебаний $2^l T_0$, $l = 1, 2, 3, \ldots$, а в $(j^1 + 1)$-м генераторе реализуется ленточный аттрактор CA_1, которому предшествует регулярный многотактный цикл периода $2^l T_0$ в j^1-м генераторе.

Явление *пространственной хаотической синхронизации*, установленное экспериментально и подтвержденное аналитически на дискретной модели, сопровождается *стабилизацией физических характеристик* колебаний вдоль цепочки. В физическом эксперименте это проявляется в насыщении спектров мощности и постоянстве геометрической структуры аттракторов, диагностируемой по виду проекций фазовых траекторий на плос-

кость переменных x_j, y_j. Желательно проведение численных экспериментов, позволяющих более детально исследовать это явление.

Численный анализ системы (14.3) дает возможность получения вышеуказанных характеристик колебаний и позволяет исследовать пространственную эволюцию по j ляпуновской размерности аттракторов, плотности распределения вероятностей и автокорреляционной функции для различных значений управляющих параметров. Кроме того, вычисления можно проводить с учетом влияния флуктуаций, всегда присутствующих в физическом эксперименте. Обратимся к ланжевеновским уравнениям цепочки связанных генераторов, учитывающих влияние малых собственных флуктуаций,

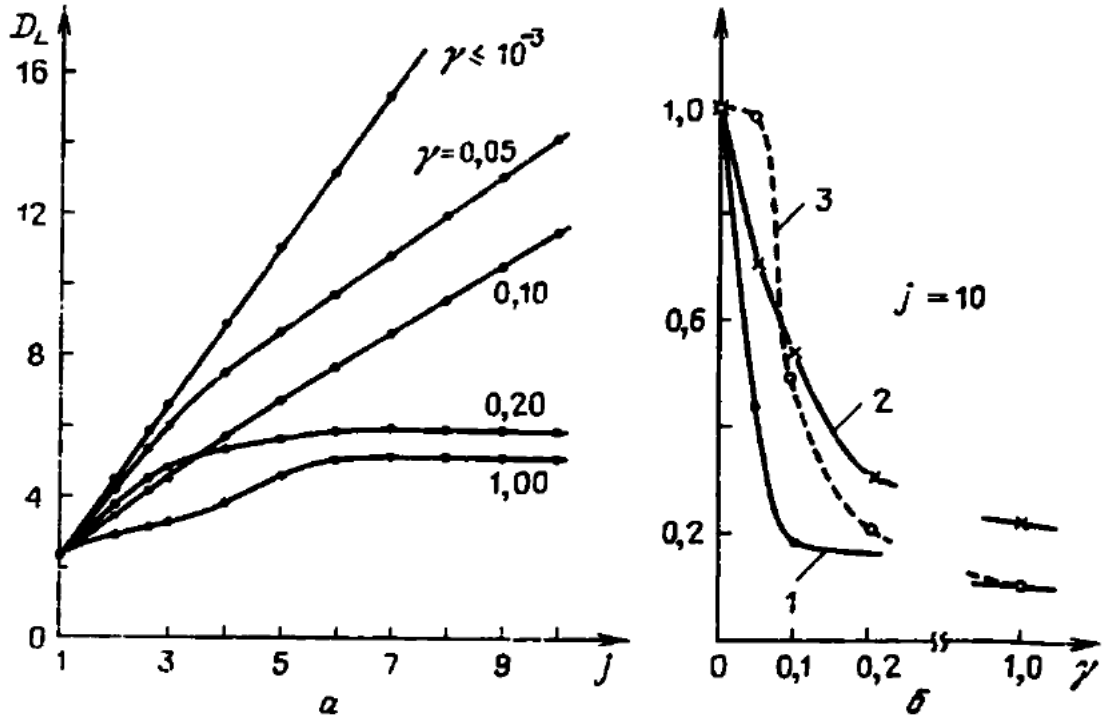
$$\begin{aligned} \dot{x}_j &= m x_j + y_j - x_j z_j + \gamma x_{j-1} + \xi_1(\tau), \\ \dot{y}_j &= -x_j + \xi_2(\tau), \\ \dot{z}_j &= -g z_j + g I(x_j) x_j^2 + \xi_3(\tau), \end{aligned} \tag{14.8}$$

где в сравнении с (14.3) добавлен δ-коррелированный шум интенсивности D с нулевым средним значением. Полагая в (14.8) $D = 0$, имеем динамическую систему (14.3), в то время как решения стохастических уравнений (14.8) моделируют процессы в реальной системе, подверженной действию флуктуаций.

С целью экономии машинного времени в качестве исходного режима работы индивидуальных генераторов цепочки выберем режим хаотических колебаний, зафиксировав параметры $m = 1{,}16$, $g = 0{,}3$. В этом случае аттрактор в парциальном генераторе являет собой 2-тактную ленту. В спектре мощности выделены гармоники основной и половинной частот, его ляпуновская размерность D_L, соответствующая спектру ЛХП (+0,0376, 0, −0,203), равна 2.187 ± 0,005. При численном моделировании в качестве исходного удобно выбрать режим хаотических колебаний, так как эффект синхронизации с введением связи наступает здесь при относительно малых $j \geqslant 5$.

Эксперименты показали, что применение обычного алгоритма расчета полного спектра ЛХП системы (14.3) в случаях слабой связи $\gamma < 0{,}1$ и $j \geqslant 1$ не эффективно. Требуется необычайно много часов машинного времени. Однонаправленность связи в цепочке, приводящая к упрощению вида линеаризованной матрицы системы, позволяет для данного класса задач усовершенствовать алгоритм вычисления полного спектра ЛХП (и, следовательно, размерности D_L), что сокращает затраты машинного времени более чем в десять раз и увеличивает точность [263, 264].

На рис. 14.8*а* представлены результаты расчетов размерности $D_L(j)$ для различных значений коэффициента связи γ. Видно, что для $\gamma > 0{,}1$ имеет место *эффект стабилизации размерности* аттракторов *вдоль цепочки*, уровень которой определяется степенью связи и уменьшается с ростом γ. Рис. 14.8*б* иллюстрирует зависимости нормированных энтропии Колмогорова $h_\mu = \sum_{i=1}^{n^+} \lambda_i^+ / \lambda_1$, ляпуновской размерности $D_L(\gamma)/D_L(0)$ и числа положительных показателей полного спектра ЛХП $n^+(\gamma)/n^+(0)$ от коэффициента связи для цепочки из 10 генераторов. Увеличение связи



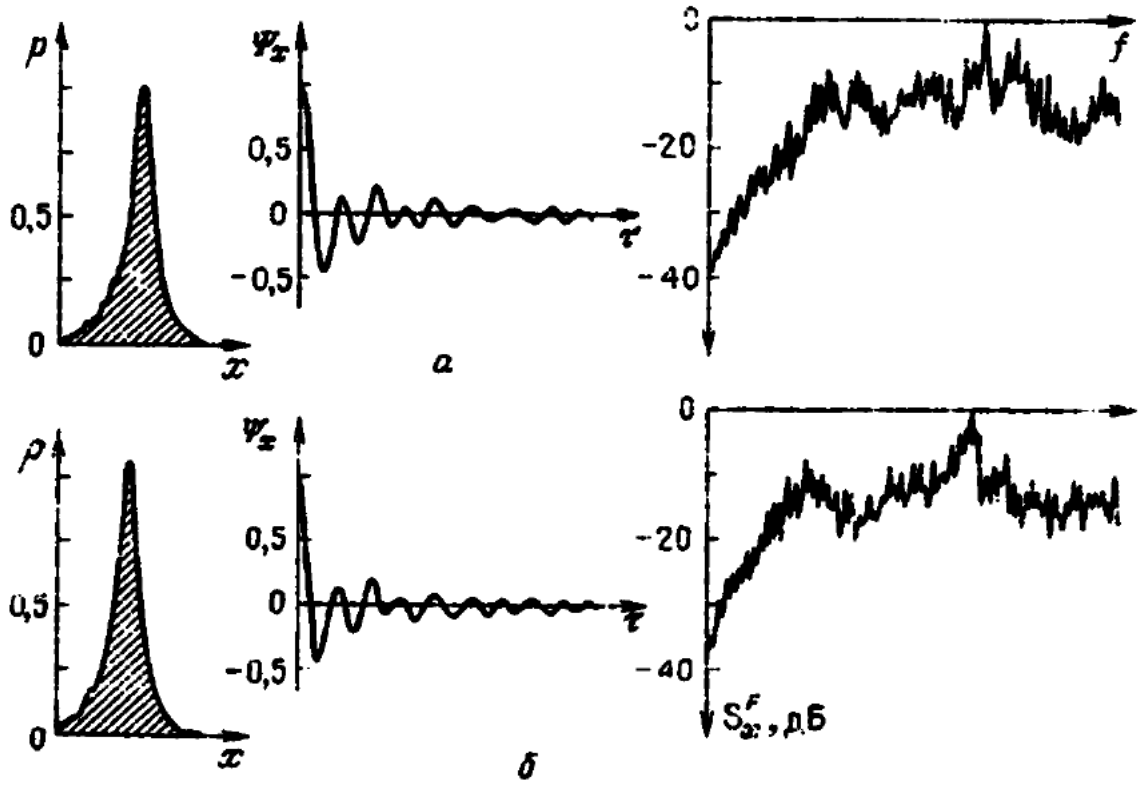
Р и с 14.8. *а* – Зависимость ляпуновской размерности от длины цепочки генераторов при различной связи. *б* – Зависимость нормированных энтропии Колмогорова (кривая *1*), размерности (кривая *2*) и числа положительных показателей спектра ЛХП (кривая *3*) от коэффициента связи

между генераторами приводит к резкому спаду всех указанных характеристик, свидетельствуя об упорядочивании хаотического движения с точки зрения уменьшения числа степеней свободы, активно задействованных в движении.

Становится ясным, что эффект стабилизации хаотического движения вдоль цепочки связанных генераторов сопровождается выходом размерности аттракторов на постоянный уровень, определяемый коэффициентом связи. Так, например, для $\gamma = 0{,}2$ в генераторах с $j \geqslant 6$ размерность $D_L = 5{,}85 \pm 0{,}005$ и не зависит от порядкового номера генератора j.

Расчет основных статистических характеристик аттракторов цепочки для $j = 6.7, \ldots 10$ ($\gamma = 0{,}2$) подтверждает результаты физических экспериментов: спектр мощности, функция распределения и автокорреляционная функция в режимах хаотической синхронизации практически индентичны для всех генераторов цепочки, начиная с некоторого γ^*. Наблюдаются мелкомасштабные различия, обусловленные конечной длительностью используемых для статистической обработки реализаций процессов во времени. Если же провести расчеты указанных характеристик с введением малого шума интенсивности $D \simeq 10^{-3}$, то указанные различия исчезают вовсе.

Последнее обстоятельство весьма существенно, так как свидетельствует о грубости хаотического режима автоколебаний в системе и о типичности исследуемых решений, локализующихся в конечной области фазового пространства. Об этом же свидетельствует постоянство основных статистических свойств решений при вариации начальных данных в некоторой конечной области фазового пространства. Проведенные расчеты по-



Р и с. 14.9. Функция распределения $p(x)$, автокорреляционная функция $\Psi_x(\tau)$ и спектр мощности $S_x^F(f)$ автоколебаний, вычисленные по реализации $x_6(\tau)$ для $m = 1.16$, $g = 0.3$, $\gamma = 0.2$ для $D = 0$ (*а*), $D = 10^{-3}$ (*б*)

казали, что размерность аттракторов D_L и характер ее зависимости от коэффициента связи при малых случайных воздействиях сохраняются.

На рис. 14.9 представлены основные характеристики аттрактора в цепочке из 6 генераторов, вычисленные в отсутствие шума (*а*) и при наличии шума интенсивности $D = 10^{-3}$ (*б*). Для цепочек с $j = 7, 8, 9$ и 10 результаты идентичны. А это означает, что для исследуемой цепочки в режиме хаотической синхронизации необходимую информацию можно получить, решая, например, 18 уравнений системы (14.3) вместо 30, соответствующих $j = 10$.

То, что эффекту хаотической синхронизации отвечает стабилизация размерности аттрактора, вызывает естественный вопрос: будут ли сходными физические характеристики хаотических колебаний, которым соответствуют аттракторы одинаковой размерности? В общем случае не будут. Дело в том, что размерность есть число, характеризующее геометрию странного аттрактора как объекта в фазовом пространстве динамической системы. Информация, заключенная в физических характеристиках, определяемых по временным реализациям процессов, несомненно, более богатая. Приведем простой пример. Рассмотрим эргодические биения вблизи момента их рождения. В фазовом пространстве им отвечает гладкий тор – поверхность, имеющая размерность 2. Спектр колебаний в этом случае содержит ярко выраженные две независимые частоты.

Гармоники и комбинационные частоты высших порядков пренебрежимо малы. С увеличением степени неравновесности системы появляются существенные нелинейные искажения. Поверхность тора вследствие этого

станет гофрированной, сморщенной, но тор при этом еще не разрушится. Негладкий в указанном смысле тор по-прежнему имеет размерность поверхности, равную 2. Однако спектр колебательного процесса резко изменится: появятся многочисленные гармоники и комбинационные частоты сравнимой интенсивности. Физические свойства колебаний станут, несомненно, иными.

Таким образом, стабилизации физических характеристик колебаний при изменении управляющих параметров системы однозначно соответствует стабилизация размерности аттрактора. Обратное не верно: аттракторам одинаковой размерности могут (и это подтверждается численными экспериментами) отвечать различные физические характеристики.

Указанное обстоятельство еще раз говорит о чрезвычайной сложности проблемы конечномерных аппроксимаций. Знание размерности D_L аттракторов позволяет лишь оценить число задействованных в движении степеней свободы системы (количество нормальных координат) и, как следствие, число уравнений возможной модельной динамической системы. Конкретный вид уравнений аппроксимации остается неизвестным.

Система в виде цепочки однонаправленно связанных генераторов, в определенном смысле описывающая процессы в полубесконечной среде с потоком, может использоваться для моделирования течений типа Куэтта – Тейлора. С этой целью необходимо замкнуть цепочку в кольцо, соединив выход последнего генератора со входом первого. Установившиеся режимы движений в кольцевой системе становятся "пространственно" однородными: автоколебания парциальных генераторов топологически эквивалентны. Вариация управляющих параметров приводит к определенной последовательности бифуркаций регулярных вначале типов колебаний. Осуществляется переход к хаосу и далее регистрируются более сложные бифуркации странных аттракторов [13].

14.5. Механизмы возникновения и эволюция хаоса в низкотемпературной плазме стратифицированного положительного столба газового разряда

Плазма редко бывает в спокойном однородном состоянии. В результате появления и развития неустойчивости в ней возникают бегущие волны или пространственно неоднородные стационарные структуры различной природы. В низкотемпературной плазме, реализующейся в положительном столбе тлеющего газового разряда, типична так называемая ионизационная неустойчивость, приводящая к возбуждению *ионизационно-диффузионных* бегущих или стоячих *волн*, названных *стратами*. С момента обнаружения страт в плазме газового разряда в конце прошлого века и до настоящего времени вопросам эволюции ионизационной неустойчивости посвящено большое количество теоретических и экспериментальных работ, однако и сейчас указанная проблема до конца не исследована и остается актуальной [265, 266].

Режим бегущих страт в инертных газах можно реализовать как в автономном случае, так и при внешней модуляции тока разряда в частотном диапазоне их усиления [266]. Частота и число возбуждаемых мод определяются давлением газа, током разряда и геометрией разрядной трубки. От-

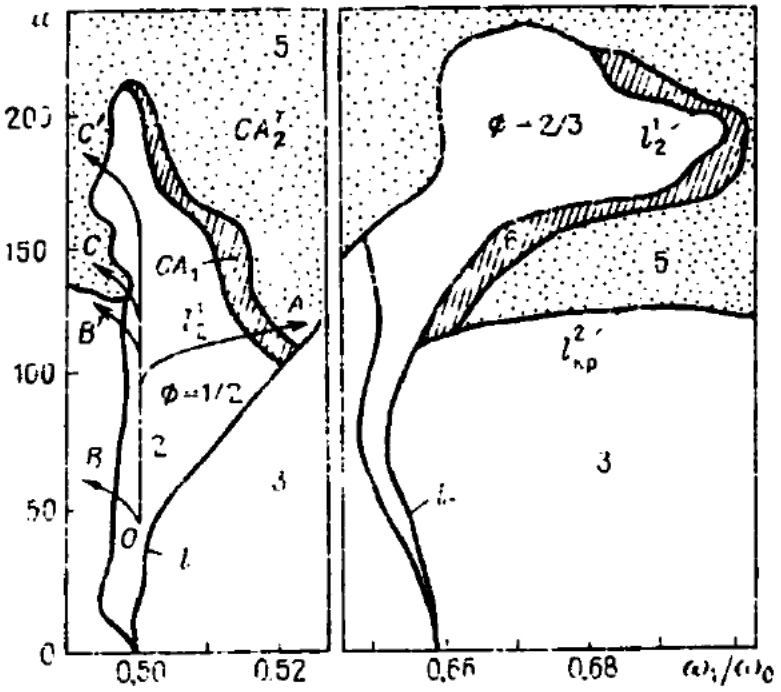
носительная простота регистрации страт и возможность эффективного управления ими с помощью изменения физических условий в разрядной трубке делают стратифицированный положительный столб газового разряда очень удобным радиофизическим объектом для изучения нелинейных колебательных явлений в распределенных системах.

Указанные свойства системы позволяют провести прямые экспериментальные исследования механизмов возникновения и закономерностей эволюции хаотических режимов колебаний в нелинейной распределенной среде. Сравнение результатов с полученными на динамических (конечномерных) моделях позволяет обосновать выводы об общности бифуркационных явлений, если они имеют место, и прояснить степень возможности динамического описания процессов в распределенных системах.

Исследуем бегущие ионизационные волны в неоне при давлении 0,2–3,0 мм рт. ст. в газоразрядных трубках диаметром 10–40 мм. Трубки имели подогревный катод и подвижный анод для изменения длины разрядного промежутка L. Специальная геометрия анода практически исключала отражения волн, обратная связь осуществлялась только по току разряда. Страты регистрировались по переменной составляющей интенсивности свечения с использованием световода и фотоэлектронного умножителя. Сигнал с ФЭУ анализировался измерительной установкой, содержащей осциллографы с запоминанием, селективный микровольтметр, частотомер и анализатор спектра высокой разрешающей способности. Для получения проекций фазовой траектории из бесконечномерного пространства на плоскость двух переменных использовался наряду с сигналом ФЭУ дополнительный сигнал, индуцируемый на металлической фольге, кольцом охватывающей малый участок разрядной трубки. Неавтономный режим колебаний реализовывался путем внешнего воздействия на плазму синусоидальными колебаниями низкочастотного генератора стандартных сигналов. За исключением определенной специфики исследуемого объекта, в целом методика экспериментального исследования режимов колебаний и их бифуркаций была идентична описанной в гл. 12 применительно к изучению неавтономных колебаний генератора с инерционной нелинейностью.

При воздействии на плазму периодическим сигналом малой амплитуды в результате взаимодействия страт с внешним полем возбуждались сложные, но регулярные волны. Если анализ вести в некоторой фиксированной точке $L=L_1$ по длине трубки, то регистрируются квазипериодические во времени колебания интенсивности свечения. Проекции фазовых траекторий на плоскость в совокупности с данными измерений спектров колебаний свидетельствуют о рождении режима биений с двумя частотами, которым отвечает двумерный тор. Это естественно, так как устойчивому режиму бегущих страт в точке $L=L_1$ соответствует периодическое изменение интенсивности или предельный цикл в фазовом пространстве. Гармоническое возмущение последнего на основании строгих результатов качественной теории приводит к рождению устойчивых биений. Спектр биений дискретный и определяется двумя базисными частотами: частотой страт в автономном режиме ω_0 и частотой внешней модуляции ω_1

В качестве управляющих параметров при исследовании бифуркационных явлений в системе были выбраны амплитуда воздействия u и частота ω_1. На рис. 14.10 приведены фрагменты бифуркационной диаграммы режи-



Р и с. 14.10. Бифуркационная диаграмма режимов колебаний в неавтономной газоразрядной плазме на плоскости параметров a и ω_1/ω_0. Обозначения соответствуют принятым на рис. 12.2

мов колебаний на плоскости указанных параметров, полученной экспериментально при токе разряда 34,2 мА в трубке длиной 243 мм, диаметром 10 мм, наполненной неоном до давления 2 мм рт. ст. Выделены области внутренней синхронизации, соответствующие резонансным циклам на торе с числами вращения Пуанкаре $\phi = 1/2$ и 2/3. В эксперименте наблюдались также многочисленные узкие зоны резонансов более высоких порядков, которые на диаграмме не представлены с целью сохранения наглядности. С качественной точки зрения бифуркационная картина перестроек режимов в неавтономной плазме газового разряда идентична с разбиением плоскости параметров неавтономного генератора с инерционной нелинейностью (рис. 12.11).

Механизмы перехода от резонансных колебаний в областях синхронизации к тор-аттракторам CA_2^1 полностью соответствуют теоретически установленным [137] и экспериментально подтвержденным на модели неавтономного генератора в гл. 12. С целью иллюстрации сказанного обратимся к области синхронизации с числом вращения $\phi = 1/2$ (рис. 14.10). Движение в направлении, обозначенном на диаграмме стрелкой OA, сопровождается переходом к хаосу CA_1 через серию мягких бифуркаций удвоения периода резонансных циклов. Регистрируются экспериментально три последовательных бифуркации. Выход из зоны синхронизации в направлениях OB и OB' с пересечением линии седло-узловой бифуркации приводит к рождению эргодических биений на гладком (OB) и теряющем гладкость (OB') двумерном торе. В последнем случае спектр дискретный с большим набором гармоник и комбинационных частот. Выход в направлении OC демонстрирует мягкий переход к тор-аттрактору. Спектр становится сплошным с выбросами, отвечающими комбинационным и базисным частотам тора в точке B.

Если же осуществить выход из области синхронизации в область развитой стохастичности в направлении OC', то реализуется жесткий переход к хаосу через перемежаемость вблизи линии l_1. Далее в спектре исчезают базовые частоты биений, он становится практически равномерным. Эволюция спектров колебаний, соответствующая механизмам разрушения двумерного тора, в исследуемой системе удивительно точно повторяет случай неавтономного генератора с инерционной нелинейностью и описана в [267]. Здесь же отметим главный, с нашей точки зрения, результат: в распределенной системе в режиме бегущих страт при внешней модуляции тока разряда периодическим сигналом реализуется *переход к хаосу через тор-аттрактор* в полном соответствии с теоремой о разрушении двумерного тора. Независимо и одновременно с результатами, полученными при исследовании периодического воздействия на режим бегущих страт в низкотемпературной плазме газового разряда [267], кратко описанными выше, группой А. Либхабера (США) была представлена в печать замечательная в экспериментальном отношении работа по количественному исследованию перехода к хаосу через режим двухчастотных колебаний в неавтономной ячейке Рэлея – Бенара с ртутью, периодически возбуждаемой извне переменным током [268]. Характер бифуркационных диаграмм и эволюция спектров колебаний при разрушении двумерного тора в конвекции Рэлея – Бенара и в плазме газового разряда идентичны, что еще раз свидетельствует о качественной общности изучаемых явлений. С учетом распространения колебаний в пространстве картина будет представляться как поэтапное усложнение амплитудной модуляции волны, затем появятся признаки фазовой модуляции и, наконец, осуществится переход в режим бегущих хаотических волн пространственно однородной структуры.

Приведенные результаты по разрушению двухчастотных колебаний в неавтономной газоразрядной плазме позволяют более детально понять зако-

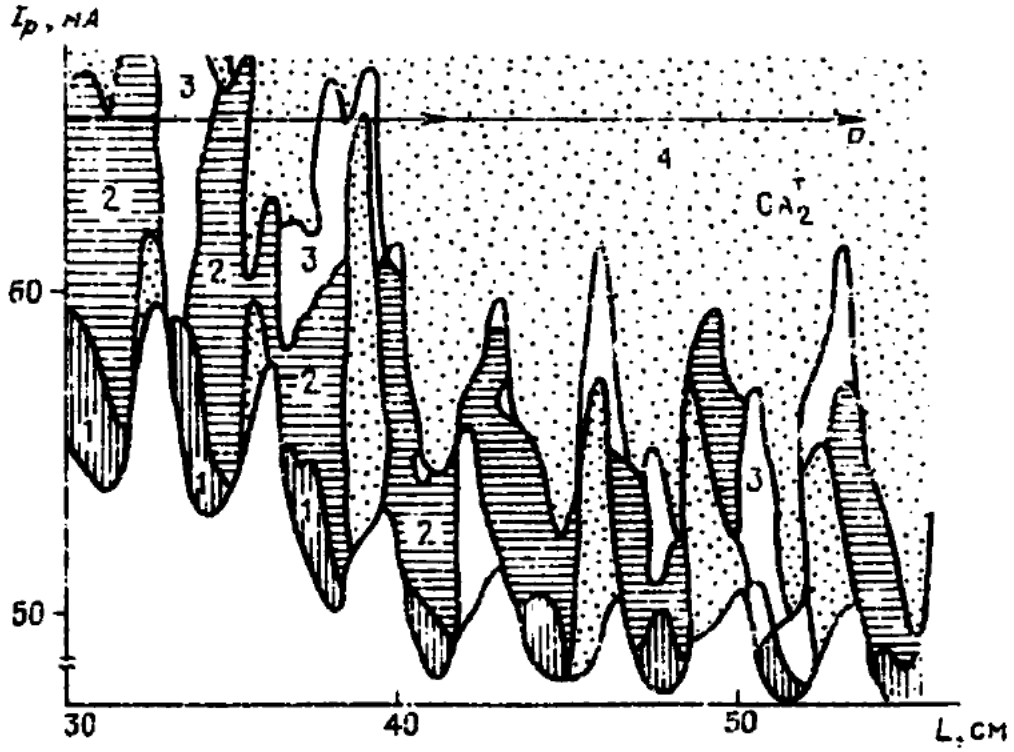
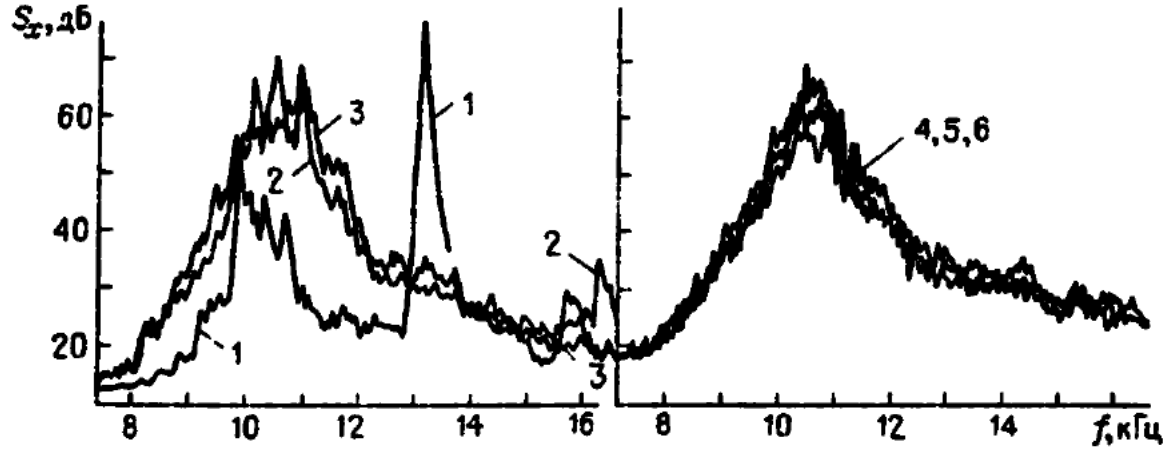


Рис. 14.11. Бифуркационная диаграмма режимов колебаний в автономной газоразрядной плазме на плоскости параметров I_p, L



Р и с. 14.12. Эволюция спектров колебаний в газоразрядной плазме с увеличением длины разрядного промежутка (физический эксперимент для разряда в неоне при давлении 0,2 мм рт.ст.)

номерности перехода к хаосу в автономном газовом разряде с увеличением его длины. В качестве управляющих параметров автономной системы выберем ток разряда I_p, пропорциональный коэффициенту усиления страт, и пространственную координату L разрядной трубки, определяющую длину волн возбужденных автоколебательных мод.

На плоскости указанных параметров на рис. 14.11 изображены экспериментальные результаты в виде бифуркационной диаграммы режимов колебаний для газоразрядной трубки диаметром 20 мм, наполненной неоном до давления 0,2 мм рт. ст. Число колебательных мод, попадающих в частотный диапазон усиления нелинейной среды, можно регулировать экспериментально, изменяя длину разрядного промежутка. Для относительно небольших длин разряда (в условиях рис. 14.11 $L < 30$) под контур усиления попадает не более трех мод.

Смена режимов генерации страт с ростом тока разряда при L = const происходит следующим образом. Сначала возникает одномодовый режим (области *1* на диаграмме), затем возбуждается вторая мода и колебания становятся квазипериодическими (области *2*). Далее с увеличением тока разряда на двумерном торе возникают резонансы как следствие рождения грубой структуры (области 3 диаграммы), и затем осуществляется переход к хаосу, обусловленный одним из механизмов разрушения двумерного тора (области *4*).

Как видно из рис. 14.11, можно реализовать переходы к динамическому хаосу через режимы резонансных или эргодических биений, двигаясь по специально выбранным направлениям в плоскости управляющих параметров. Тщательный анализ эволюции спектров колебаний, регистрируемых при этом, показал, что в автономном случае закономерности в изменениях спектрального состава колебаний полностью аналогичны рассмотренным выше применительно к неавтономной плазме. Более того, указанные закономерности в деталях соответствуют бифуркационным явлениям, сопровождающим переходы к тор-аттрактору CA_2^T, исследованные в гл. 12.

Интересно исследовать эволюцию режимов колебаний в автономной газоразрядной плазме, экспериментально увеличивая длину разрядного проме-

жутка при постоянном токе разряда. С физической точки зрения этим обеспечивается плавное вовлечение в процесс все большего числа колебательных мод*). Будут ли они активны, вызывая изменения характеристик аттрактора, или "сработает" принцип подчинения и увеличение числа мод на определенной стадии нелинейных "взаимоотношений" между ними не будет сказываться?

С этой целью проанализируем бифуркации аттракторов, двигаясь в направлении P диаграммы рис. 14.11. Увеличение длины разрядного промежутка в интервале $0 < L < 40$ приводит к сложной последовательности бифуркационных переходов: квазипериодические режимы сменяются резонансными биениями, наблюдаются бифуркации удвоения, утроения периода синхронных циклов, возникают зоны тор-аттракторов, которые вновь сменяются квазипериодическими колебаниями с различными числами вращения. Однако на длинах $L > 40$ устанавливается преимущественно хаотический режим, обусловленный разрушением двумерного тора. С увеличением L в спектре колебаний тор-аттрактора постепенно исчезают выбросы на базовых частотах. Интенсивность хаотических пульсаций возрастает и далее *спектр практически перестает меняться*. Реализуется режим *хаотической синхронизации*!

На рис. 14.12 представлены типичные спектрограммы, отвечающие последовательно возрастающим длинам разрядного промежутка, когда все другие параметры системы фиксированы. На первом этапе увеличения длины разряда, когда во взаимодействие последовательно вовлекаются две, затем три моды, заметны изменения в характере колебаний (рис. 14.12, спектры *1* и *2*). Далее отличия становятся менее существенными. Спектр, помеченный цифрой *3*, близок по форме к спектру *2* ($L_3 > L_2$). Наконец, дальнейшее увеличение длины разрядного промежутка практически не влияет на распределение энергии колебаний по спектру (рис. 14.12, спектры *4–6*). Вовлечение новых мод, начиная с пяти–шести, практически не вызывает изменений в характере движения. Регистрируется эффект хаотической синхронизации.

Как для цепочки и кольца связанных генераторов, скорость насыщения спектра с увеличением длины разрядного промежутка зависит от других параметров системы. Например, с увеличением давления газа она возрастает. Зависит от параметров и характер предельного режима хаотических колебаний. Принципиальным является то, что результирующее движение формируется за счет взаимодействия активных мод, число которых конечно и существенно меньше общего числа возбужденных степеней свободы системы. Указанное явление оказывается в равной степени типичным как для динамических конечномерных систем типа цепочек, так и для распределенных. Его реализация обусловлена механизмами, стимулирующими рост числа активных, независимых вначале колебательных мод. Их взаимодействие в результате наглядно демонстрирует справедливость общего принципа самоорганизующихся систем – принципа подчинения. С общей точки зрения эффекты самоорганизации "в пространстве" с ростом длины j цепочки генераторов и с изменением параметра по своей сущности не отличаются.

*) Межмодовые интервалы частот с ростом L уменьшаются. Число мод под контуром усиления среды растет.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Странные аттракторы / Под ред. Я.Г. Синая и Л.П. Шильникова. – М.: Мир, 1981.
2. *Sparrow C.* The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos and Strange Attractors // Appl. Math. Sci. V. 41. – Berlin: Springer, 1982.
3. *Bergé P., Pomeau Y., Vidal C.H.* Order within Chaos (Towards Deterministic Approach to Turbulence). – N.Y.: John Wiley and Sons, 1984.
4. *Schuster H.-G.* Deterministic Chaos. – Weinheim: Physik-Verlag, 1984.
5. *Guckenheimer J.M., Holmes Ph.* Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcation of Vector Fields. – N.Y.: Springer-Verlag, 1983.
6. *Заславский Г.М.* Стохастичность динамических систем. –М.: Наука, 1984.
7. *Лихтенберг А., Либерман М.* Регулярная и стохастическая динамика. – М.: Мир, 1984.
8. Синергетика / Под ред. Б.Б. Кадомцева. – М.: Мир, 1984.
9. *Сонечкин Д.М.* Стохастичность в моделях общей циркуляции атмосферы. – Л.: Гидрометеоиздат, 1984.
10. *Хакен Г.* Синергетика. Иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах. – М.: Мир, 1985.
11. *Неймарк Ю.И., Ланда П.С.* Стохастические и хаотические колебания. – М.: Наука, 1987.
12. *Анищенко В.С.* Стохастические колебания в радиофизических системах. Часть 1. Физико-математические основы описания и исследования динамической стохастичности. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1985.
13. *Анищенко В.С.* Стохастические колебания в радиофизических системах. Часть 2. Типичные бифуркации и квазиаттракторы в нелинейных системах с малым числом степеней свободы. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1986.
14. *Anishchenko V.S.* Dynamical Chaos – Basic Concepts. – Leipzig: Teubner-Texte zur Physik, Bd 14, 1987.
15. *Корнфельд И.П., Синай Я.Г., Фомин С.В.* Эргодическая теория. – М.: Наука, 1980.
16. *Мандельштам Л.И.* Лекции по колебаниям. – М.: Изд-во АН СССР, 1955.
17. *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. – М.: Наука, 1981.
18. *Мигулин В.В., Мустель Е.Р., Медведев В.И., Парыгин В.Н.* Основы теории колебаний. – М.: Наука, 1978.
19. *Ланда П.С.* Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. – М.: Наука, 1980.
20. *Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А.* Введение в теорию нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1976.
21. *Рабинович М.И., Трубецков Д.И* Введение в теорию колебаний и волн. – М.: Наука, 1984.
22. *Рабинович М.И.* Стохастические автоколебания и турбулентность // УФН. 1978. Т. 125, вып. 1. С. 123–168.

23. *Монин А.С.* О природе турбулентности // УФН. 1978. Т. 125, вып. 1. С. 97–122.
24. *Анищенко В.С.* Введение в статистическую радиофизику. Часть 2. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1982.
25. *Анищенко В.С.* К вопросу о стохастических колебаниях радиосистем с обратной связью // IX Междунар. конф. по нелинейным колебаниям. – Киев: Наукова думка, 1984. Т. 3. С. 341–343.
26. *Лоренц Э.* Детерминированное непериодическое течение // Странные аттракторы / Под ред. Я.Г. Синая и Л.П. Шильникова. – М.: Мир, 1981. С. 88–116.
27. *Рюэль Д., Такенс Ф.* О природе турбулентности // Странные аттракторы / Под ред. Я.Г. Синая и Л.П. Шильникова. – М.: Мир. 1981. С. 117–151.
28. *Рытов С.М.* Введение в статистическую радиофизику. Часть 1. Случайные процессы. – М.: Наука, 1976.
29. *Ахманов С.А., Дьяков Ю.Е., Чиркин А.С.* Введение в статистическую радиофизику и оптику. – М.: Наука, 1981.
30. *Климонтович Ю.Л.* Статистическая физика. – М.: Наука, 1982.
31. *Халмош П.Р.* Лекции по эргодической теории. – М.: ИЛ, 1959.
32. *Заславский Г.М., Чириков Б.В.* Стохастическая неустойчивость нелинейных колебаний // УФН. 1971. Т. 105. вып. 1. С. 3–39.
33. *Ляпунов А.М.* Собр. соч. Т. 1,2. – М.: Изд-во АН СССР, 1954–1956.
34. *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. – М.: Наука, 1966.
35. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967.
36. *Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В.* Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. – М.: Наука, 1966.
37. *Неймарк Ю.И.* Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1972.
38. *Гаушус Э.В.* Исследование динамических систем методом точечных преобразований. – М.: Наука, 1976.
39. *Иванов В.А., Ющенко А.С.* Теория дискретных систем автоматического управления. – М.: Наука, 1983.
40. *Андронов А.А., Леонтович Е.М., Гордон И.И., Майер А.Г.* Качественная теория динамических систем второго порядка. – М.: Наука, 1967.
41. *Немыцкий В.В., Степанов В.В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. – М; Л.: Гостехиздат, 1947.
42. *Баутин Н.Н.* Поведение динамических систем вблизи границы области устойчивости. – М.: Наука. 1984.
43. *Марсден Д., Мак-Кракен М.* Бифуркация рождения цикла и ее приложения. – М.: Мир, 1980.
44. *Йосс Ж., Джозеф Д.* Элементарная теория устойчивости и бифуркаций. – М.: Мир, 1983.
45. *Хессард Б., Казаринов Н., Вэн И.* Теория и приложения бифуркации рождения цикла. – М.: Мир. 1985.
46. *Арнольд В.И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Наука. 1978.
47. *Базыкин А.Д., Кузнецов Ю.А., Хибник А.И.* Бифуркационные диаграммы динамических систем на плоскости. – Пущино: НЦБИ АН СССР, 1985.
48. *Постон Т., Стюард И.* Теория катастроф и ее приложения. – М.: Мир, 1980.
49. *Арнольд В.И.* Теория катастроф. – М.: Знание, 1983.
50. *Баутин Н.Н., Леонтович Е.М.* Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. – М.: Наука, 1976.
51. *Хибник А.И.* Периодические решения системы *n* дифференциальных уравнений: Материалы по математическому обеспечению ЭВМ // Алгоритмы и программы на ФОРТРАНе. – Пущино: НЦБИ АН СССР, 1979. Вып. 5.
52. *Арнольд В.И.* Потеря устойчивости автоколебаний вблизи резонансов // Нелинейные волны / Под ред. А.В. Гапонова-Грехова. – М.: Наука, 1979. С. 116–130.
53. *Шильников Л.П.* Теория бифуркаций и модель Лоренца // Марсден Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения. – М.: Мир, 1980. С.317–335.
54. *Халмош П.Р.* Лекции по эргодической теории. – М.: ИЛ, 1959.
55. *Биллингслей П.* Эргодическая теория и информация. – М.: Мир, 1969.

56. *Колмогоров А.Н.* Новый метрический инвариант транзитивных динамических систем и автоморфизмов пространства Лебега // ДАН СССР. 1958. Т.119. С.861–864.
57. *Колмогоров А.Н.* Об энтропии на единицу времени как метрическом инварианте автоморфизмов // ДАН СССР. 1959. Т. 124. С. 754–755.
58. *Синай Я.Г.* О понятии энтропии динамической системы // ДАН СССР. 1959. Т. 124. С. 768–771.
59. *Farmer J.D.* Chaotic Attractor of an Infiniti-Dimensional Dynamical System // Physica D. 1982. V. 4D, №3. P. 366–393.
60. *Песин Я.Б.* Характеристические показатели Ляпунова и гладкая эргодическая теория // УМН. 1977. Т. 32, № 4. С. 55–112.
61. *Benettin G., Galgani L., Strelcyn J.M.* Kolmogorov Entropy and Numerical Experiments // Phys. Rev. A. 1976. V. 41, №6. P. 2338–2442.
62. *Пуанкаре А.* Избр. труды. Т. II. – М.: Наука, 1972.
63. *Пуанкаре А.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. – М.; Л.: ОГИЗ, 1947.
64. *Farmer J.D.* Information Dimension and the Probabilistis Structure of Chaos // Z. Naturforsch. 1982. Bd 37a, h. 11. S. 1304–1325.
65. *Farmer J.D., Ott E., Yorke J.A.* The Dimension of Chaotic Attractors // Physika D. 1983. V.7, №1–3. P. 153–180.
66. *Grassberger P.* On the Hausdorff Dimension of Fractal Attractors // J. Stat. Phys. 1981. V. 26, №1. P. 173–179.
67. *Grassberger P.* Generalized Dimension of Strange Attractors // Phys. Lett. 1983. V. 97A, №6. P. 227–231.
68. *Hausdorff G.* Dimension und Äußeres Maß // Math. Ann. 1918. Bd 79. h. 2. S.157–179.
69. *Mandelbrot B.B.* Fractals: Form, Chance and Dimension. San Francisco. Freeman Comp., 1977.
70. *Kaplan J.L., Yorke J.A.* Chaotic Behavior of Multi-Dimensional Difference Equations // Lect. Notes in Math. 1979. V. 730. P. 204–227.
71. *Mane R.* On the Dimension of the Compact Invariant Sets of Certain Non-Linear Maps // Lect. Notes in Math. 1981. V. 898. P. 230–242.
72. *Штерн В.Н.* Устройство и размерность аттракторов структурно-стохастического движения // Структурная турбулентность / Под ред. М.А. Гольдштика. – Новосибирск: Наука, – 1982. С. 49–76.
73. *Mori H.* Fractal Dimensions of Chaotic Flow of Autonomous Systems // Progr. Theor. Phys. 1980. V. 45. №4. P. 1175–1178.
74. *Хенон М.* Двумерное отображение со странным аттрактором // Странные аттракторы / Под ред. Я.Г. Синая и О.П. Шильникова. – М.: Мир, 1981. С. 152–163.
75. *Young L.S.* Dimension, Entropy and Lyapunov Exponents. - N.Y.: 1981.
76. *Ledrappier F.* Some Relations between Dimension and Lyapunov Exponents // Comm. Math. Phys. 1981. V. 81. №2. P. 229–238.
77. *Russel D.A., Hanson J.D., Ott E.* Dimension of Strange Attractors // Phys. Rev. Lett. 1980. V. 45. №14. P. 1175–1178.
78. *Izrailev F.M., Rabinovich M.I., Ugodnikov A.D.* Approximate Description of Three-Dimensional Dissipative Systems // Phys. Lett. 1981. V. 86A, №6,7. P. 321–325.
79. *Шильников Л.П.* Теория бифуркаций и странные аттракторы // Нелинейные колебания механических систем: Тез. докл. Всесоюз. конф. Часть 1. – Горький, 1987. – С. 11–13.
80. *Аносов Д.В.* Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны // Тр. мат. ин-та им. В.А. Стеклова. 1967. Т. 90. С.3–209.
81. *Смейл С.* Дифференцируемые динамические системы // УМН. 1970. Т. 25. № 1. С. 113–185.
82. *Плыкин Р.В.* О гиперболических аттракторах диффеоморфизмов // УМН. 1980. Т. 35, № 3. С. 94–104.
83. *Афраймович В.С., Быков В.В., Шильников Л.П.* О возникновении и структуре аттрактора Лоренца // ДАН СССР. 1977. Т. 234, № 2. С. 336–339.
84. *Афраймович В.С., Быков В.В., Шильников Л.П.* О существовании устойчивых периодических движений в модели Лоренца // УМН. 1980. Т. 35. № 4. С. 164–165.
85. *Francheschini V.* Bifurkations of Tori and Phase Locking in a Dissipative System of Differential Equations // Physica D. 1983. V. 6D. №3. P. 285–304.

86. *Быков В.В., Шильников А.Л.* О границах области существования аттрактора Лоренца // Нелинейные колебания механических систем: Тез. докл. Всесоюз. конф. Часть 1. – Горький, 1987. С. 48–50.
87. *Майер А.Г.* Грубое преобразование окружности // Уч. зап. ГГУ. 1939. Вып. 12. С. 215–230.
88. *Ландау Л.Д.* К проблеме турбулентности // ДАН СССР. 1944. Т. 44, № 8. С. 339–342.
89. *Hopf E.* A Mathematical Example Displaying the Features of Turbulence // Comm. Pure. Appl. Math. 1948. V. 1. P. 303–322.
90. *Кифер Ю.И.* Некоторые теоремы о малых случайных возмущениях динамических систем // УМН. 1974. Т. 29, вып. 3. С. 205.
91. *Синай Я.Г.* Стохастичность динамических систем // Нелинейные волны. – М.: Наука, 1979. С. 192–211.
92. *Хорстхемке В., Лефевр Р.* Индуцированные шумом переходы. – М.: Мир, 1987.
93. *Климонтович Ю.Л.* Кинетическая теория электромагнитных процессов. – М.: Наука, 1980.
94. *Стратанович Р.Л.* Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. – М.: Сов. радио, 1961.
95. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Статистическая физика. – М.: Наука, 1976.
96. *Климонтович Ю.Л.* Турбулентное движение, структура хаоса: Новый подход к статистической теории открытых систем. – М.: Наука, 1990.
97. *Климонтович Ю.Л.* Уменьшение энтропии в процессе самоорганизации: S-теорема // Письма в ЖТФ. 1983. Т. 9, вып. 23. С. 1412–1416.
98. *Анищенко В.С., Климонтович Ю.Л.* Эволюция энтропии в генераторе с инерционной нелинейностью при переходе к стохастичности через последовательность бифуркаций удвоения периода // Письма в ЖТФ. 1984. Т. 10, вып. 14. С. 876–880.
99. *Бабин А.В., Вишик М.И.* Аттракторы эволюционных уравнений с частными производными и оценка их размерности // УМН. 1983. Т. 38, вып. 4. С. 133–187.
100. *Ильяшенко Ю.С.* О размерности аттрактора K-сжимающих систем в бесконечномерном пространстве // Вестн. Моск. ун-та. Сер. физ. и астроном. 1983. Т. 24, № 3. С. 52–59.
101. *Hale J.* Infinite Dimensional Dynamical Systems // Lect. Notes in Math. V. 1007. – Berlin: Springer, 1983. P. 379–400.
102. *Brandstater A., Swift J., Swinney H.L., Wolf A.* Low-Dimensional Chaos in a Hidrodynamic System // Phys. Rev. Lett. 1983. V. 51, № 16. P. 1442–1445.
103. *Malreison B., Atten P., Bergé P., Dubois M.* Dimension of Strange Attractors: an Experimental Determination for the Chaotic Regime of Two Convective Systems // J. Physique Letters. 1983. T. 44, № 22. P. 897–902.
104. *Shilnikov L.P.* Bifurcation Theory and Turbulence // Nonlinear and Turbulent Processes. V. 2. – N. Y.: Gordon and Brench, Harward Academic Publichers, 1984. P. 1627–1635.
105. *Шарковский А.Н.* Сосуществование циклов непрерывного преобразования прямой в себя // Укр. мат. журн. 1964. Т. 26, № 1. С. 61–71.
106. *Feigenbaum M.J.* Quantitative Universality for a Class of Nonlinear Transformations // J. Stat. Phys. 1978. V. 19, № 1. P. 25–52.
107. *Фейгенбаум М.* Универсальность в поведении нелинейных систем // УФН. 1983. Т. 141, № 2. С. 343–374.
108. *Вул Е.Б., Синай Я.Г., Ханин К.М.* Универсальность Фейгенбаума и термодинамический формализм // УМН. 1984. Т. 39, № 3. С. 3–37.
109. *Feigenbaum M.J.* The Universal Metric Propertics of Nonlinear Transformations // J. Stat. Phys. 1979. V. 21, № 6. P. 669–706.
110. *Collet P., Eckmann J.P., Lanford O.E.* Universal Properties of Maps on a Interval // Comm. Math. Phys. 1980. V. 76, № 3. P. 211–254.
111. *Helleman R.H.G.* Self-Generated Chaotic Behavior in Nonlinear Mechanics // Fundamental Problems in Statistical Mechanics. V. 5. / Ed. E.G.D. Cohen. – Amsterdam; M.Y.: North-Holland, 1980. P. 165–233.
112. *Кузнецов С.П., Ерастова Е.Н.* Теория Фейгенбаума // Лекции по электронике СВЧ и радиофизике. Кн. 2. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1983. С. 3–22.
113. *Hu B., Mao J.M.* Periodic Doubling: Universality and Critical Point Order // Phys. Rev. 1982. V. 25A, № 6. P. 3259–3261.

114. *Hu B., Mao J.M* Third-Order Renormalisation-Group Calculation of the Feigenbaum Universal Bifurcation in the Transition to Chaotic Behavior // Phys. Rev. 1982. V. 25A, № 2. p. 1196–1198.
115. *Lubimov D.V., Zakc M.A.* Two Mechanisms of the Transition to Chaos in Finite-Dimensional Models of Convection // Physica D. 1983. V. 9, №1.2. P. 52–61.
116. *Nauenberg M., Rudnick J.* Universality and the Power Spectrum at the Onset of Chaos // Phys. Rev. 1981. V. 24B. № 1. P. 493–495.
117. *Huberman B.A., Rudnick J.* Scaling Behavior of Chaotic Flows // Phys. Rev. Lett. 1980. V. 45. № 3. P. 154–156.
118. *Пиковский А.С.* О поведении спектра странного аттрактора в критической точке // Изв. вузов. Сер. "Радиофизика". 1982. Т. 25. № 7. С. 846–848.
119. *Huberman B.A., Zisook A.B.* Power Spectra of Strange Attractors // Phys. Rev. Lett 1980. V. 46. № 10. P. 626–632.
120. *Шильников Л.П.* О некоторых случаях рождения периодических движений из особых траекторий // Мат. сб 1963. Т. 61 (104). С. 443–466.
121. *Шильников Л.П.* К вопросу о структуре расширенной окрестности грубого состояния равновесия типа седло-фокуса // Мат. сб. 1970. Т. 81 (123). С. 92–103.
122. *Беляков Л.А.* О структуре бифуркационных множеств в системах с петлей сепаратрисы седло-фокуса // IX Междунар. конф. по нелинейным колебаниям. – Киев: Наукова думка. 1984. Т. 2. С. 153–155.
123. *Кузнецов Ю.А.* Одномерные сепаратрисы системы обыкновенных дифференциальных уравнений, зависящей от параметров // Материалы по математическому обеспечению ЭВМ. Вып. 8. – Пущино: НЦБИ АН СССР, 1983.
124. *Белых В.Н.* О качественных структурах и бифуркациях некоторых коикретных динамических систем // IX Междунар. конф. по нелинейным колебаниям. – Киев: Наукова думка. 1984. Т. 2. С. 45–48.
125. *Arneodo A., Collet P., Tresser C.* Oscillators with Chaotic Behaviour: An Illustration of a Theorem of Shilnikov // J. Stat. Phys. 1982. V. 27, №1. P. 171–182.
126. *Gaspard P., Nicolis G.* What Can We Learn from Homoclinic Orbits in Chaotic Dynamics? // J. Stat. Phys. 1983. V. 31, № 3. P. 449–518.
127. *Glendinning P., Sparrow C.* Local and Global Behaviour Near Homoclinic Orbits // J. Stat. Phys. 1948. V. 35, № 5/6. P. 645–696.
128. *Пиковский А.С., Рабинович М.И.* О страиных аттракторах в физике // Нелиниейные волны / Под. ред. А.В. Гапонова–Грекова. – М.: Наука, 1979. С. 176–191.
129. *Ruelle D.* Strange Attractors // Math. Intellegencer. 1980. V. 2, № 3. P. 126–137.
130. *Newhouse S., Ruelle D., Takens F.* Occurance of Strange Axiom A Attractor Near Quasi-Periodic Flows on T^m m = 3.//Comm.Math. Phys. 1978. V. 64. P. 35–40.
131. *Moon H.T., Huerre P., Redekopp L.G.* Three-Frequency Motion and Chaos in the Ginzburg-Landau Equation // Phys. Rev. Lett. 1982. V. 49, № 7, P. 458–460.
132. *Kaneko K.* Transition from Torus to Chaos Accompanied by Frequensy Locking with Simmetry Breaking // Progr. Theor. Phys. 1983. V. 69, № 5. P. 1427–1442.
133. *Анищенко В.С., Летчфорд Т.Е., Сафонова М.А.* Критические явления при гармонической модуляции двухчастотных колебаний // Письма в ЖТФ. 1985. Т. 11, вып. 9. С. 536–541.
134. *Gollub J.P., Benson S.V.* Many Routes to Turbulent Convection // J. Fluid. Mech. 1980. V. 100, Part 3. P. 449–470.
135. *Кислов В.Я., Дмитриев А.С.* Стохастические колебания в радиотехнических и электронных системах // Проблемы современной радиотехники и электроники. – М.: ИРЭ АН СССР, 1983. С. 193–212.
136. *Kaneko K.* Collapse of Tori and Genesis of Chaos in Dissipative Systems. – Singapore: World Scientific, 1986. 264 p.
137. *Афраймович В.С., Шильников Л.П.* Инвариантные двумерные торы, их разрушение и стохастичность // Методы качественной теории дифференциальных уравнений. – Горький: Изд-во ГГУ, 1983. С. 3–26.
138. *Афраймович В.С., Шильников Л.П.* Принцип кольца и задача о взаимодействии двух автоколебательных систем // ПММ. 1977. Т. 42, № 4. С. 618–627.
139. *Афраймович В.С., Шильников Л.П.* О малых периодических возмущениях автономных систем // ДАН СССР. 1974. Т. 24, № 4. С. 739–742.
140. *Feigenbaum M.J., Kadanoff L.P., Shenker S.J.* Quasiperiodicity in Dissipative Systems: a Renonormalization Group Analysis // Physica D. 1982. V 5, № 2. P. 370–386.

141. *Rand D., Ostlund S., Sethna J., Siggia E.D.* Universal Transition from Quasiperiodicity to Chaos in Dissipative Systems // Physica D. 1983. V. 8, № 3. P. 303–342.
142. *Shraiman B.I.* Transition from Quasiperiodicity to Chaos: a Perturbative Renormalization-Group Approach // Phys. Rev. 1984. V. 29A, № 6. 3464–3466.
143. *Shenker S.J.* Scaling Behaviour in a Map of a Circle into Itself: Empirical Results // Physica D. 1982. V. 5. P. 405–411.
144. *Farmer J.D., Satiggia F.* Renormalisation of Quasiperiodic Transition to Chaos for Arbitrary Winding Numders // Phys. Rev. 1985. V. 31A, № 5. P. 3520–3522.
145. *Grebogi C., Ott E., Yorke J.* Chaotic Attractors in Crisis // Phis. Rev. Lett. 1982. V. 48, № 22. P. 1507–1510.
146. *Perez R., Class L.* Bistability, Period Doubling Bifurcations and Chaos in Periodically Forced Oscillator // Phys. Lett. 1982. V. 90A, № 9. P. 441–443.
147. *Schell M., Fraser S., Kapral R.* Subgarmonic Bifurcation in the Sine Map: an Infinite Hierarchy of Gusp Bistabilities // Phys. Rev. 1983. V. 28A. № 1. P. 373–378.
148. *Штерн В.Н.* Возникновение и свойства хаоса в простых моделях тепловой конвекции: Препринт ИТФ СО АН СССР. № 98. – Новосибирск, 1983.
149. *Pomeau Y., Manneville P.* Intermittent Transition to Turbulence in Dissipative Dynamical Systems // Comm. Math. Phys. 1980. V. 74, № 2. P. 189–197.
150. *Анищенко В.С., Нейман А.Б.* Увеличение длительности корреляций при перемежаемости типа "хаос – хаос"//Письма в ЖТФ. 1987. Т. 13, вып. 17. С. 1063–1066.
151. *Henon M.* On the Numerical Computation of Poincaré Maps // Physica D. 1982. V.5, № 2, 3. P. 412–414.
152. *Рабинович М.И., Фабрикант А.Л.* Стохастическая автомодуляция волн в неравновесных средах // ЖЭТФ. 1979. Т. 77, вып. 2 (8). С. 617–629.
153. *Hayashi C., Kawakami H.* Bifurcations and the Generation of Chaotic States in the Solutions of Nonlinear Differential o Equations//Теоретическая и прикладная механика. – 4-й Нац. конгр.; Варна, 1981. Докл. Кн. 1. – София, 1981. С. 537–542.
154. *Хибник А.И., Шноль Э.Э.* Программы для качественного исследования дифференциальных уравнений. – Пущино: НЦБИ АН СССР, 1982.
155. *Rössler O.E.* An Equation for Continuous Chaos // Phys. Lett. 1976. V. 57A, № 5. P. 397–398.
156. *Дженкинс Г., Ваттс Д.* Спектральный анализ и его приложения. Т. 1, 2. – М.: Мир, 1972.
157. *Чесноков С.С.* Численные методы в задачах теории колебаний и волн. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1980.
158. Вычисление сглаженных спектров методом усредненных периодограмм по коротким реализациям // Математическое обеспечение ЕС ЭВМ / Под ред. М.Л. Петрович. – Минск: ИМ АН БССР, 1978. Вып. 16. С. 57–59.
159. *Оселедец В.И.* Мультипликативная эргодическая теорема. Характеристические показатели Ляпунова динамических систем // Тр. Моск. мат. об-ва. 1968. Т. 19. С. 179–210.
160. *Shimada I., Nagashima T.* A Numerical Approach to Ergodic Problem of Dissipative Dynamical Systems // Progr. Theor. Phis. 1979. V. 61, № 6. P. 1605–1616.
161. Функциональный анализ / Под ред. С.Г. Крейна. – М.: Наука, 1972.
162. *Неймарк Ю.И., Шильников Л.П.* Об одном случае рождения периодических движений // Изв. вузов. Сер. "Радиофизика". 1965. Т. 8, № 2 С. 330–340.
163. *Ченцов Н.Н.* Проверка трансверсального пересечения сепаратрис с помощью ЭВМ: Препринт ИПМ АН СССР. № 8. – М., 1978.
164. *Hunt F., Sullivan F.* Efficient Algoritmus for Computing Fractal Dimensions // Dimension and Entropies in Chaotic Systems / Ed. G. Mayer-Kress. – N. Y.: Springer-Verlag, 1986. P. 74–81.
165. *Pettis K.W., Bailey T.A., Join A.K., Dubes R.C.* An Intrinsic Dimensionality Estimator from Near-Neighbor Information // IEEE Trans. – Pattern Anal. Machine. Intell. 1979. V. PAMI-1, № 1, P. 25–37.
166. *Huber P.J.* Projection Pursuit // Ann. Statist. 1985. V. 13. P. 435–475.
167. *Samorjai R.L.* Methods for Estimating the Intrinsic Dimensionality of High-Dimensional Point Set // Dimensional and Entropies in Chaotic Systems / Ed. G. Mayer-Kress. – N. Y.: Springer-Verlag, 1986. P. 137–147.

168. *Grassberger P., Procaccia I.* Measuring the Strangeness of Strange Attractors // Physica D. 1983. V. 9. № 1, 2. P. 189–208.
169. *Grassberger P., Procaccia I.* Characterization of Strange Attractors // Phys. Rev. Lett. 1983. V. 50. № 5. P. 346–349.
170. *Renyi A.* Probability Theory – Amsterdam: North-Holland. 1970.
171. *Паркер Т.С., Чжуа Л.О.* Введение в теорию хаотических систем для инженеров // ТИИЭР. 1987. Т. 75, № 8. С. 6–40.
172. *Takens F.* Detecting Strange Attractors in Turbulence // Lect. Notes in Math. – Warwick: Springer-Verlag, 1980. V. 898. P. 366–381.
173. *Broomhead D.S., King G.P.* Extracting Qualitative Dynamics from Experimental Data // Physica D. 1986. V. 20. P. 217–236.
174. *Fraser A.M., Swinney H.L.* Independent Coordinates for Strange Attractors from Mutual Information // Phys. Rev. 1986. V. 33A, N 2. P. 1134–1140.
175. *Fraser A.M.* Using Mutual Information to Estimate Metric Entropy // Dimensions and Entropies in Chaotic Systems / Ed. G. Mayer-Kress. – N. Y.: Springer-Verlag, 1986. P. 114–122.
176. *Анищенко В.С., Астахов В.В., Летчфорд Т.Е., Сафонова М.А.* О бифуркациях в трехмерной двупараметрической системе со странным аттрактором // Изв. вузов. Сер. "Радиофизика", 1983. Т. 26, № 2. С. 169–176.
177. *Пиковский А.С., Рабинович М.И.* Простой генератор со стохастическим поведением // ДАН СССР. 1978. Т. 239, № 2. С. 301–304.
178. *Кияшко С.В., Пиковский А.С., Рабинович М.И.* Автогенератор радиодиапазона со стохастическим поведением//Радиотехн. и электрон. 1980. Т. 25. С. 336/343.
179. *Бабицкий В.И., Ланда П.С.* Автоколебания в системах с инерционным возбуждением // ДАН СССР. 1982. Т. 266, № 5. С. 1087–1089.
180. *Babitsky V.I., Landa P.S.* Auto-Oscillation Systems with inertial Self-Excitation // Z. Angew. Math. u. Mech. 1984. Bd. 64, № 8. S. 329–339.
181. *Теодорчик К.Ф.* Автоколебательные системы с инерционной нелинейностью // ЖТФ. 1946. Т. 16, вып. 7. С. 845–854.
182. *Анищенко В.С., Летчфорд Т.Е., Сафонова М.А.* Влияние диссипативной нелинейности на бифуркации в автостохастических системах // Радиотехн. и электрон. 1984. Т. 29, № 7. С. 1355–1361.
183. *Анищенко В.С., Астахов В.В.* Экспериментальное исследование механизма возникновения и структуры странного аттрактора в генераторе с инерционной нелинейностью // Радиотехн. и электрон. 1983. Т. 28, № 6. С. 1109–1115.
184. *Астахов В.В.* Исследование динамических процессов в автоколебательных системах с инерционной нелинейностью // Вопросы электроники СВЧ. Некоторые проблемы радиофизики. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та. 1983. С. 45–51.
185. *Анищенко В.С.* К вопросу о стохатических колебаниях радиосистем с обратной связью // IX Междунар. конф. по нелинейным колебаниям. – Киев: Наукова думка, 1984. Т. 3. С. 341–343.
186. *Хибник А.И.* О вычислительных алгоритмах исследования нелинейных колебаний // IX Междунар. конф. по нелинейным колебаниям. – Киев: Наукова думка. 1984. Т. 2. С. 396–398.
187. *Анищенко В.С., Астахов В.В., Летчфорд Т.Е.* Многочастотные и стохастические автоколебания в генераторе с инерционной нелинейностью // Радиотехн. и электрон. 1982. Т. 27, № 10. С. 1972–1978.
188. *Баутин Н.Н., Шильников Л.П.* Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости состояний равновесия и периодических движений // Марсден Д., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения. – М.: Мир, 1980. С. 295–316.
189. *Анищенко В.С., Астахов В.В., Летчфорд Т.Е., Сафонова М.А.* К вопросу о структуре квазигиперболической стохастичности в инерционном генераторе // Изв. вузов. Сер. "Радиофизика". 1983. Т. 26, № 7. С. 832–842.
190. *Кузнецов С.П.* Универсальность и подобие в поведении связанных систем Фейгенбаума//Изв. вузов. Сер. "Радиотехника". 1985. Т. 28. № 8. С. 991–1007.
191. *Астахов В.В.* Механизмы перехода к стохастичности в генераторе с инерционной нелинейностью: Канд. дис. – Саратов, 1983.

192. *Анищенко В.С., Астахов В.В., Летчфорд Т.Е.* Экспериментальное исследование структуры странного аттрактора в модели генератора с инерционной нелинейностью // ЖТФ. 1983. Т. 53, № 1. С. 152–154.
193. *Израйлев Ф.М., Рабинович М.И., Угодников А.Д.* Структура стохастичности параметрически возбуждаемых осцилляторов // IX Междунар. конф. по нелинейным колебаниям. Т. 3. Киев: Наукова думка, 1984. С. 396–399.
194. *Testa J., Perez J., Jeffries C.* Evidence for Universal Chaotic Behaviour in Driven Nonlinear Oscillator // Phys. Rev. Lett. 1982. V. 48A, № 11. P. 714–717.
195. *Testa J., Perez J., Jeffries C.* Evidence for Bifurcation and Universal Chaotic Behaviour in Nonlinear Semiconducting Devices // Materials and Molecular Research Division, Lawrence Berkeley Laboratory, Departament of Physics, University of California, Berkeley, CA, 94720, 1982. 32 p.
196. *Buskirk R., Jeffries C.* Observation of Chaotic Dynamics of Coupled Nonlinear Oscillators // Phys. Rev. 1985. V. 31A, № 5. P. 3332–3357.
197. *Arecchi F.T., Lisi F.* Mechanism Generating 1/f Noise in Nonlinear Systems // Phys. Rev. Lett. 1982. V. 49, № 2. P. 94–98.
198. *Анищенко В.С.* Взаимодействие странных аттракторов. Перемежаемость "хаос – хаос"//Письма в ЖТФ, 1984. Т. 10, вып. 10. С. 629–633.
199. *Афраймович В.С., Рабинович М.И., Угодников А.Д.* Критические точки и "фазовые переходы" в стохастическом поведении неавтономного ангармонического осциллятора // Письма в ЖЭТФ. 1983. Т. 38, вып. 2. С. 64–67.
200. *Дмитриев А.С., Кислов В.Я., Старков С.О.* Экспериментальное исследование образования и взаимодействия странных аттракторов в кольцевом автогенераторе // ЖТФ. 1985. Т. 55, № 12. С. 2417–2419.
201. *Хакен Г.* Синергетика. – М.: Мир, 1980.
202. *Андрейчиков И.П., Петровская Н.В., Юдович В.Н.* Бифуркации и стохастические движения в некоторых динамических системах. – Ростов н/Д: Ростовский университет. – Деп. № 3485-80, 1. 06. 80. – М.: ВИНИТИ, 1980.
203. *Климонтович Ю.Л.* Неравновесные источники гидродинамических флуктуаций. Кинетические коэффициенты с учетом влияния гидродинамического движения и турбулентных пульсаций // Письма в ЖТФ. 1981. Т. 7, вып. 19. С. 1181–1184.
204. *Рощин Н.В.* Опасные границы устойчивости в модели Лоренца // ПММ. 1978. № 5. С. 950–952.
205. *Анищенко В.С., Сафонова М.А.* Бифуркации аттракторов в присутствии флуктуаций // ЖТФ. 1988. Т. 58, вып. 4. С. 641–651.
206. *Сафонова М.А.* Влияние флуктуаций на бифуркации аттракторов автоколебательных систем. Канд. дис. – Саратов, 1988.
207. *Hitzl D.L., Zele F.* An Exploration of the Hénon Attractor // J. Stat. Phys. 1981. V. 26, № 4. P. 683–695.
208. *Гонченко С.В., Шильников Л.П.* О динамических системах с негрубыми гомоклиническими кривыми // ДАН СССР. 1986. Т. 286, № 5. С. 1049–1053.
209. *Анищенко В.С., Астахов В.В., Летчфорд Т.Е.* Стохастический аттрактор в модели генератора с инерционной нелинейностью // Вопросы электроники СВЧ. Некоторые проблемы радиофизики. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1983. С. 31–45.
210. *Кравцов Ю.А., Эткин В.С.* К вопросу о роли флуктуационных сил в динамике автостохастических систем: ограниченность времени предсказуемости и разрушение слабых периодических режимов // Изв. вузов. Сер. "Радиофизика". 1981. Т. 24, № 8. С. 992–999.
211. *Кравцов Ю.А., Полянина Г.Д., Эткин В.С.* Экспериментальные исследования поведения стохастического генератора под действием внешних шумов // Радиотехн. и электрон. 1984. Т. 29, № 3. С. 479–483.
212. *Езерский А.Б., Кияшко С.В., Реутов В.П.* О хаотизации автоколебаний собственными шумами системы // Изв. вузов. Сер. "Радиофизика". 1985. Т. 28, № 9, С. 1126–1135.
213. *Пиковский А.С.* О влиянии шумов на статистику хаотических автоколебаний // Изв. вузов. Сер. "Радиофизика". 1986. Т. 29, № 5. С. 526–530.
214. *Анищенко В.С., Сафонова М.А., Тучин В.В.* Бифуркации и индуцированная внешним шумом стохастичность в лазере с нелинейным поглощением // Квант электрон. 1988. Т. 15, № 9. С. 1885–1894.

215. *Анищенко В.С., Кравцов Ю.А., Пиковский А.С.* Роль шумов в хаотической динамике // Флуктуационные явления в физических системах: Тез. докл. – Вильнюс: ИФП АН ЛССР, 1988. С. 212, 213.
216. *Анищенко В.С., Сафонова М.А.* Время корреляций и энтропия хаоса при обратных бифуркациях удвоения периода // Письма в ЖТФ. 1988. Т. 14, вып. 16. С. 1470–1447.
217. *Ebeling W., Herzel H., Richert W., Schimansky-Geier L.* Influence of Noise on Duffing Van der Pol Oscillators // ZAMM. 1986. V. 66, № 3, P. 141–146.
218. *Herzel H., Ebeling W.* The Decay of Correlations in Chaotic Maps // Phys. Lett. 1985. V. 111 A, № 1, 2. P. 1–4.
219. *Кендалл М. Дж., Стьюарт А.* Теория распределений. – М.: Наука, 1966.
220. *Гапонов-Грехов А.В., Рабинович М.И.* Л.И. Мандельштам и современная теория нелинейных колебаний и волн // УФН. 1979. Т. 128, вып. 4. С. 579–624.
221. *Рабинович М.И., Фабрикант А.Л.* Стохастическая автомодуляция волн в неравновесных средах // ЖЭТФ. 1979. Т. 77, вып. 2 (8). С. 617–629.
222. *Вышкинд С.Я.* О возникновении стохастичности при невырожденном взаимодействии волн в средах с усилением // Изв. вузов. Сер. "Радиофизика". 1978. № 6. С. 850–856.
223. *Вышкинд С.Я., Рабинович М.И.* Механизм стохастизации фаз и структура волновой турбулентности в диссипативных средах // ЖЭТФ. 1976. Т. 71, вып. 2 (8). С. 557–571.
224. *Гапонов-Грехов А.В., Рабинович М.И.* Вводные замечания редакторов перевода // Гидродинамические неустойчивости и переход к турбулентности / Под. ред. Х. Суинни, Дж. Голлаба. – М.: Мир, 1984. С. 5–11.
225. *Кислов В.Я., Залогин Н.Н., Мясин Е.А.* Исследование автоколебательных процессов в автогенераторах с запаздыванием // Радиотехн. и электрон. 1979. № 6. С. 1118–1130.
226. *Кислов В.Я.* Теоретический анализ шумоподобных колебаний в электронно-волновых системах и автогенераторах с запаздыванием и сильной нелинейностью // Радиотехн. и электрон. 1980. № 8. С. 1683–1691.
227. *Кислов В.Я., Залогин Н.Н., Мясин Е.А.* О нелинейной стохастизации автоколебаний в электронно-волновом генераторе с задержанной обратной связью // Радиотехн. и электрон. 1980. № 10. С. 2160–2168.
228. *Анищенко В.С., Астахов В.В.,* Экспериментальное исследование стохастизации колебаний в усилителях с внешней обратной связью // Лекции по электронике СВЧ и радиофизике. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1981. Кн. 5. С. 118–133.
229. *Анищенко В.С., Астахов В.В.* Экспериментальное исследование стохастических автоколебаний генератора на диоде Ганна // Лекции по электронике СВЧ и радиофизике. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1981. – Кн. 5. С. 134–141.
230. *Анищенко В.С., Постнов Д.Э.* Переходы к стохастичности в инерционном генераторе с запаздыванием. Проблема конечномерного описания // ЖТФ. 1985. Т. 55, № 1. С. 162–167.
231. *Кац В.А., Трубецков Д.И.* Возникновение хаоса при разрушении квазипериодических режимов и переходе через перемежаемость в распределенном генераторе с запаздыванием // Письма в ЖЭТФ. 1984. Т. 39, вып. 3. С. 116–119.
232. *Held G.A., Jeffries C.* Quasiperiodic Transitions to Chaos of Instabilities in an Electron-Hole Plasma Excited by an Perturbations of One and at Two Frequencies // Phys. Rev. Lett. 1986. V. 56, № 11. P. 1183–1186.
233. *Arneodo A., Coullet P.H., Spiegel E.A.* Cascade of Period Doublings of Tori // Phys. Lett. 1983. V. 94 A, № 1. P. 1–4.
234. *Leven R., Pompe B., Wilke C., Koch B.P.* Experiments on Periodic and Chaotic Motions of a Parametrically Forced Pendulum // Physica D. 1985. V. 16, № 3. P. 371–384.
235. *Анищенко В.С.* Индуцированные внешним воздействием фазовые переходы в радиофизической системе со странным аттрактором // Тез. докл. 3-й Всесоюзной конференции "Флуктуационные явления в физических системах". – Вильнюс: Изд-во АН ЛитССР, 1982. С. 17.
236. *Анищенко В.С.* Индуцированные внешним воздействием фазовые переходы в радиофизической системе со странным аттрактором // Флуктуационные явления в физических системах. III Всесоюзная конференция, 28–29 сентября 1982 г. – Вильнюс: Изд-во АН ЛитССР, 1983. С. 24–26.

237. *Анищенко В.С., Летчфорд Т.Е., Сафонова М.А.* Разрушение квазипериодического движения за счет удвоений и стохастичность в системе связанных генераторов // Изв. вузов. Сер. "Радиофизика". 1984. Т. 27, № 5. С. 565–575.
238. *Анищенко В.С., Астахов В.В.* Бифуркационные явления в автостохастическом генераторе при внешнем резонансном воздействии // ЖТФ. 1983. Т. 53, № 11. С. 2165–2169.
239. *Анищенко В.С.* Биения, синхронизация и хаос в системах типа связанных нелинейных осцилляторов // X Междунар. конф. по нелинейным колебаниям. – София: Изд-во Болгарской АН, 1985. С. 48–51.
240. *Анищенко В.С., Летчфорд Т.Е., Сафонова М.А.* Двупараметрический анализ динамики неавтономной трехмерной системы со странным аттрактором // X Междунар. конф. по нелинейным колебаниям. – София: Изд-во АН НРБ, 1985. С. 243–246.
241. *Анищенко В.С., Летчфорд Т.Е., Сафонова М.А.* Эффекты синхронизации и бифуркации синхронных и квазипериодических колебаний в неавтономном генераторе // Изв. вузов. Сер. "Радиофизика". 1985. Т. 28, № 9. С. 1112–1125.
242. *Анищенко В.С.* Разрушение квазипериодических колебаний и хаос в диссипативных системах // ЖТФ. 1986. Т. 56, № 2. С. 225–237.
243. *Kaneko K.* Doubling of Torus // Progr. Theor. Phys. 1983. V. 69, № 6. P. 1806–1810.
244. *Kaneko K.* Oscillation and Doubling of Torus // Progr. Theor. Phys. 1984. V. 72, № 2. P. 202–215.
245. *Кузнецов С.П.* О воздействии периодического внешнего возмущения на систему, демонстрирующую переход порядок – хаос через бифуркации удвоения периода // Письма в ЖЭТФ. 1984. Т. 39, вып. 3. С. 113–116.
246. *Анищенко В.С., Сафонова М.А.* Механизмы разрушения инвариантной кривой в модельном отображении плоскости // Радиотехн. и электрон. 1987. Т. 32, № 6. С. 1207–1216.
247. *Анищенко В.С., Летчфорд Т.Е., Сопочкин Д.М.* Универсальные закономерности мягкого перехода к хаосу через режим двухчастотных колебаний // ЖТФ. 1988. Т. 58, вып. 5. С. 849–858.
248. *Yuan J.-M., Tung M., Feng D.N., Narducci L.M.* Instability and Irregular Behaviour of Coupled Logistic Equations // Phys. Rev. 1983. V. 28A, № 3. P. 1662–1666.
249. *Пиковский А.С* О взаимодействии странных аттракторов: Препринт ИПФ АН СССР. № 79. – Горький, 1983.
250. *Белых В.Н.* О моделях систем фазовой синхронизации и их исследовании // Динамика систем. – Горький: Изд-во Горьк. ун-та, 1976. вып. 11. С. 23–32.
251. *Кузнецов С.П.* О критическом поведении одномерных цепочек // Письма в ЖТФ. 1983. Т. 9, № 2. С. 94–98.
252. *Анищенко В.С.* Влияние связи на динамику систем вблизи точки перехода к стохастичности через удвоения // ЖТФ. 1984. Т. 54, № 4. С. 844–846.
253. *Aranson D.G., Chori M.A., Hall G.R., McGenehe R.P.* Bifurcations from an Invariant Circle for Two-Parameter Families of Maps of the Plane: a Computer-Assisted Study. // Comm. Math. Phys. 1982. V. 83. P. 303–354.
254. *Grebogi G., Ott E., Yorke J.A.* Are Three-Frequency Quasiperiodic Orbits to be Expected in Typical Nonlinear Dynamical Systems? // Phys. Rev. Lett. 1983. V. 51, № 5. P. 339–342.
255. *Анищенко В.С., Летчфорд Т.Е.* Разрушение трехчастотных колебаний и хаос в генераторе при бигармоническом воздействии // ЖТФ. 1986. Т. 56, вып. 11. С. 2250–2253.
256. *Анищенко В.С., Сафонова М.А.* Индуцированное шумом экспоненциальное разбегание фазовых траекторий в окрестностях регулярных аттракторов // Письма в ЖТФ. 1986. Т. 12, вып. 12. С. 740–744.
257. *Anishchenko V.S., Herzel H.* Noise-Induced Chaos in a System with Homoclinic Points // ZAMM. 1988. V. 68, № 7. P. 317–318.
258. *Львов В.С., Предтеченский А.А.* Поэтапный переход к турбулентности в течении Куэтта // Нелинейные волны. Стохастичность и турбулентность. – Горький: ИПФ АН СССР, 1980. С. 57–77.
259. *Swinney H.L., Fenstermacher P.B., Gollub J.P.* Transition to Turbulence in a Fluid Flow // Synergetics / Ed. Y.Haken. – Berlin.: Springer Verlag, 1977. P. 60–65.

260. *Гапонов-Грехов А.В., Рабинович М.И., Старобинец И.М.* Динамическая модель пространственного развития турбулентности // Письма в ЖЭТФ. 1984. Т. 39, вып. 12. С. 561 - 563.
261 *Anishchenko V.S.* Auto-Oscillatory Regimes in the Chain of Coupled Generators // Selforganisation by Nonlinear Irreversible Processes / Ed. W.Ebeling and H.Ulbricht. – Berlin: Springer-Verlag, 1986. P. 198–202.
262. *Анищенко В.С., Арансон И.С., Постнов Д.Э., Рабинович М.И.* Пространственная синхронизация и бифуркации развития хаоса в цепочке связанных генераторов // ДАН СССР. 1986. Т. 28, № 5. С. 1120–1124.
263. *Анищенко В.С., Постнов Д.Э., Сафонова М.А.* Размерность и физические свойства хаотических аттракторов цепочки связанных генераторов // Письма в ЖТФ. 1985. Т. 12, вып. 24. С. 1505–1509.
264. *Сафонова М.А.* Ляпуновские характеристические показатели систем направленно связанных осцилляторов // Методы качественной теории дифференциальных уравнений. – Горький: Изд-во Горьк. ун-та, 1987. – С. 141 -148.
265. *Ланда П.С.* Автоколебания в распределенных системах. – М.: Наука, 1983.
266. *Ланда П.С., Мйскинова Н.А., Пономарев Ю.В.* Ионизационные волны в низкотемпературной плазме // УФН. 1980. Т. 132. вып. 4. С. 601–628.
267. *Анищенко В.С., Мелехин Г.В., Степанов В.А., Чиркин М.В.* Механизмы возникновения и эволюция хаоса в стратифицированном положительном столбе газового разряда // Изв. вузов. Сер. "Радиофизика" 1986. Т. 29, № 8. С. 903–912.
268. *Stewans J., Heslot F., Libchaber A.* Fixed Winding Number and the Quasiperiodic Route to Chaos in a Convective Fluid // Phys. Rev. Lett. 1985. V. 55, № 6. P. 596–599.

NAUKA PUBLISHERS

Main Editorial Board for Literature
on Physics and Mathematics

15, Leninski prospekt, Moscow W-71, 117071, USSR

COMPLICATED OSCILLATIONS IN SIMPLE SYSTEMS:
APPEARANCE ROUTES, STRUCTURE AND PROPERTIES OF DYNAMICAL CHAOS IN RADIOPHYSICAL SYSTEMS

Vadim S. ANISHCHENKO, *D. Sc. (Phys. and Math.)*

1990, 312 pages, ISBN 5-02-014168-2

Readership: Specialists in the field of nonlinear theory of oscillations in dissipative systems, research workers, using numerical experiment techniques, electronics engineers and also post-graduate students and teachers of physics and mathematics.

The book: The results of numerical and full-scale experimental researches of bifurcational mechanisms of strange attractors development and properties in small dimension dynamical systems are reported. An original three-dimensional chaotic system-inertial nonlinear generator (physical and mathematical models) is introduced for consideration. The further complication of processes is achieved by the external action, interaction of two and more associated systems. Using the qualitative theory techniques with the aid of computer the bifurcations of doublings of Feigenbaum have been analyzed in detail, as well as intermittency and destruction effects of quasiperiodic oscillations. The monograph contains a brief information about dynamical chaos theory and numerical techniques. For the first time the results of detailed correlation of theory and experiment are given, as well as the statistical characteristics of typical attractors with regard to outside noise.

Contents: Preface. Fundamentals of dynamical description. Linear theory of stability. Elements of theory of bifurcations. Strange attractor. The mechanisms of development and criteries of dynamical chaos. Chaos numerical research techniques. Chaos in the systems with separatrix contour of saddle-focus. Mechanisms of development and properties of "torus-attractors". Transition to chaos in dissipative system. Role of noise in chaotic dynamics.

The author: Vadim S. Anishchenko, Doctor of Science, professor of Saratov University, author of about 50 publications on dynamical chaos in dissipative systems.

Recommendations: "This book is original, valuable and, which is of no less importance, interesting. The latter is attributed not only to its content, but to a large extent to the author's scientific enthusiasm and to his outstanding lecturing skills" (Yu.L. Klimontovich, Professor of Moscow University).