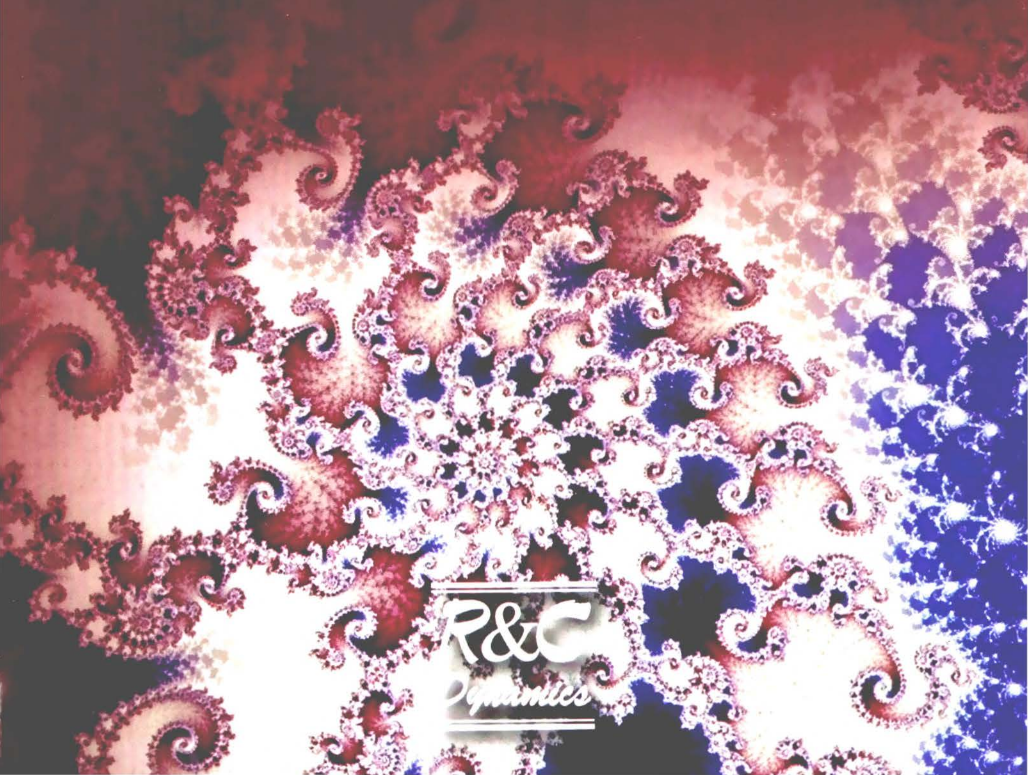
В. С. Анищенко
Т. Е. Вадивасова

ЛЕКЦИИ ПО НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКЕ



R&C Dynamics

В. С. Анищенко, Т. Е. Вадивасова

ЛЕКЦИИ
ПО НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКЕ

Рекомендовано УМО РАЕ
по классическому университетскому и техническому образованию
в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по специальностям:
(013800) — «Радиофизика и электроника», (010400) — «Физика»
(Протокол № 239 от 20 октября 2009 г.)

R&C Dynamics

Москва ♦ Ижевск

2011

УДК 537.86
ББК 22.33
А 67

Перевод и издание книги выполнены в рамках гранта Правительства Российской Федерации для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских образовательных учреждениях высшего профессионального образования, договор № 11.G34.31.0039

Рецензенты:
Кафедра радиофизики и нелинейной динамики физического факультета Саратовского государственного университета;
доктор физико-математических наук, профессор *В. В. Астахов*

Анищенко В. С., Вадивасова Т. Е.
Лекции по нелинейной динамике: учеб. пособие для вузов. — М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2011. — 516 с.

В лекционном курсе по фундаментальным аспектам нелинейной динамики детерминированных и стохастических систем излагаются основы теории динамических систем, теории устойчивости и бифуркаций, теории фракталов и размерности; анализируются основные нелинейные эффекты, такие как генерация регулярных и хаотических колебаний и синхронизация; обсуждаются проблемы флуктуаций в нелинейных системах, включая влияние шумов на автогенераторы регулярных и хаотических колебаний, стохастический резонанс и стохастическую синхронизацию.

Для магистров, аспирантов и молодых ученых в области радиофизики, статистической радиофизики, теории колебаний и волн, а также для студентов естественно-научных специальностей классических университетов.

ISBN 978-5-93972-920-8 **ББК 22.33**

http://shop.rcd.ru
http://ics.org.ru

Оглавление

Предисловие
ко второму изданию

Вниманию читателей предлагается исправленное и дополненное издание курса лекций по нелинейной динамике, первоначально опубликованного малым тиражом в Саратовском университете в рамках мероприятий, связанных с празднованием 100-летнего юбилея университета (В. С. Анищенко, Т. Е. Вадивасова «Лекции по нелинейной динамике», Изд-во Сарат. университета, СГУ, 2010). Во второе издание включены две новые лекции: лекция 20 — «Возбудимые осцилляторы. Явление когерентного резонанса» и лекция 21 — «Автоколебания динамических и стохастических ситем». Основной текст оставлен без изменений. Мы ограничились исправлением ряда формул и опечаток, а также несколько расширили список рекомендованной литературы.

Предлагаемый курс лекций отражает основные фундаментальные проблемы современной нелинейной динамики детерминированных и стохастических систем и иллюстрирует ряд прикладных аспектов на примерах в основном радиофизических задач. Однако это вовсе не означает чисто радиофизической направленности содержания книги. Фундаментальные теоретические основы курса лекций могут быть полезны широкому кругу специалистов как в области физико-математических наук, так и в биологии, химии, экологии и экономике.

Курс лекций можно отнести к курсам повышенной степени сложности, и он ориентирован на магистров, аспирантов и молодых ученых в области естественных наук.

г. Саратов
февраль 2011 г.

В. С. Анищенко
Т. Е. Вадивасова

Предисловие к первому изданию

100-летию Саратовского ордена Трудового Красного Знамени государственного университета имени Н. Г. Чернышевского и памяти основателя кафедры радиофизики СГУ профессора Венедикта Ивановича Калинина посвящают свой труд авторы

Вашему вниманию предлагается книга лекций по нелинейной динамике. Нелинейная динамика, предметом исследований которой является анализ сложных эволюционных процессов в принципиально нелинейных системах, сформировалась в качестве научного направления сравнительно недавно, примерно за последние 25–30 лет. Пока не создано четкой программы, тем более стандарта этой дисциплины, которая продолжает интенсивно развиваться. На физико-математических факультетах классических университетов мира ведущие профессора включают вопросы нелинейной динамики в курсы лекций по теории колебаний и волн, теории динамических систем, статистической физики, а также в спецкурсы по теории самоорганизации или синергетике. В то же время в ряде университетов появились самостоятельные курсы лекций по нелинейной динамике. Анализ содержания этих курсов лекций свидетельствует о том, что ряд научных проблем, составляющих базовую основу нелинейной динамики, входит в программу курсов практически у всех лекторов. К таким проблемам относятся элементы теории динамических систем, теория устойчивости и бифуркаций, механизмы формирования режимов детерминированного хаоса, теория фракталов и размерности. Отличия в содержании курсов лекций в основном касаются уровня строгости изложения указанных разделов и, главным образом, представления прикладных аспектов нелинейной динамики. Вопросы изложения прикладных проблем, как правило, носят индивидуальный характер, что связано с научными задачами, которые решаются профессором, читающим курс лекций.

Вниманию читателей предлагается наша версия программы курса лекций по нелинейной динамике, которая не претендует на истину в последней инстанции, но базируется на большом опыте научной и педагогической работы авторов. Содержание программы отражает оглавление и собственно название лекций. В основу книги положены лекции по курсу «Введение в нелинейную динамику», который на протяжении многих лет читается студентам кафедры радиофизики и нелинейной динамики физического факультета СГУ одним из авторов. Материалы лекций существенно переработаны и дополнены. Предлагаемый курс лекций характеризуется рядом особенностей. Содержание и объем представленных лекций удовлетворяют достаточно высокому уровню требований, предъявляемых сегодня к научным работникам в области нелинейной динамики. В связи с этим полный текст лекций ориентирован на магистров, аспирантов и молодых ученых, работающих в данной области. В то же время материалы лекций при определенном сокращении можно использовать для чтения студентам старших курсов естественно-научных специальностей университетов. Вторая особенность книги заключается в том, что помимо проблем нелинейной динамики детерминированных (динамических) систем лекции включают большой материал по описанию и исследованию динамики нелинейных систем в условиях воздействия внешних флуктуаций. В результате предлагаемый курс лекций служит по существу развитием и дополнением содержания классических курсов теории нелинейных колебаний и статистической радиофизики применительно к современным требованиям.

Нелинейная динамика как новое научное направление, связанное с изучением колебательных явлений в принципиально нелинейных системах, сформировалась, как уже упоминалось, совсем недавно. Коллектив кафедры радиофизики и нелинейной динамики в силу ряда благоприятных обстоятельств оказался в числе тех, кто принимал активное участие в создании этого научного направления и внес свой небольшой, но заметный вклад в содержание этой дисциплины. Поэтому третьей особенностью настоящей книги является то, что лекции органически включают ряд научных результатов, полученных сотрудниками и аспирантами кафедры под руководством авторов книги.

Относительно литературы. К лекциям мы прилагаем список рекомендуемой литературы, который содержит наиболее важные монографии и учебники. Подробных ссылок на оригинальные научные статьи в лекциях мы не даем. Однако при необходимости читатель может найти всю информацию, используя подробную библиографию, представленную в рекомендованных учебниках и монографиях.

Пользуемся приятной возможностью выразить глубокую благодарность сотрудникам кафедры, совместные научные результаты которых в той или иной степени использованы нами при написании книги. Среди них особо отметим В. В. Астахова, А. Б. Неймана, Д. Э. Постнова, А. Н. Павлова, М. А. Сафонову, Б. В. Шульгина, Н. Б. Янсон, Г. И. Стрелкову, С. М. Николаева, С. В. Астахова, А. С. Захарову и других. В частности, мы благодарны В. В. Астахову и А. Н. Павлову за материалы, использованные нами при написании лекций 4 и 20 соответственно.

Считаем своим долгом выразить особую благодарность нашим учителям и коллегам, которые привили нам интерес к этой области знания и благодаря общению с которыми в итоге стало возможным написание этой книги. Среди них в первую очередь отметим Ю. Л. Климонтовича, Л. П. Шильникова, М. И. Рабиновича, А. Хибника, В. Н. Белых, В. Эбелинга, Л. Чуа, Л. Шиманского-Гайера, Ф. Мосса и С. П. Кузнецова.

Мы выражаем глубокую благодарность Г. И. Стрелковой и С. Ю. Маловой за большой труд по изготовлению электронного макета книги для печати.

Книга посвящается 100-летнему юбилею со дня основания Саратовского государственного университета и памяти одного из выдающихся профессоров СГУ, основателя кафедры радиофизики и саратовской радиофизической школы, Калинина Венедикта Ивановича, столетие со дня рождения которого отмечалось в 2008 году.

Мы благодарны руководству СГУ и, в частности, профессору Е. Г. Елиной за проявленный интерес к этой книге и поддержку ее издания.

г. Саратов — *В. С. Анищенко*
январь 2010 г. — *Т. Е. Вадивасова*

Лекция 1
Динамические системы

1.1. Введение

Одной из важных научных проблем естествознания является решение задачи предсказания поведения изучаемого объекта во времени и пространстве на основе определенных знаний о его начальном состоянии. Эта задача сводится к нахождению некоторого закона, позволяющего по имеющейся информации об объекте в начальный момент времени t_0 определить его будущее в любой момент времени $t > t_0$. В зависимости от степени сложности самого объекта этот закон может быть детерминированным или вероятностным, может описывать эволюцию объекта только во времени, а может описывать пространственно-временную эволюцию.

Проблема предсказания эволюции объекта в естествознании представляет собой, безусловно, математическую задачу. Математическая логика требует от нас четкой формулировки предмета и задачи исследования. С этой целью необходимо сформулировать определение изучаемого объекта и указать его свойства. Предметом нашего анализа будут не системы и объекты вообще, а так называемые динамические системы в математическом понимании этого термина.

1.2. Динамическая система и ее математическая модель

Под *динамической системой* (ДС) понимают любой объект или процесс, для которого однозначно определено понятие состояния как совокупности некоторых величин или функций в данный момент времени, и задан закон, который описывает изменение (эволюцию) начального состояния с течением времени. Этот закон позволяет по начальному состоянию прогнозировать будущее состояние динамической системы, и его называют законом эволюции. Динамические системы — это механические, физические, химические и биологические объекты, вычислительные процессы и процессы преобразования информации, совершаемые в соответствии с конкретными алгоритмами. Описание динамических систем в смысле задания закона эволюции также допускает большое разнообразие: оно осуществляется с помощью дифференциальных уравнений, дискретных отображений, с помощью теории графов, теории марковских цепей и т. д. Выбор одного из способов описания задает конкретный вид *математической модели* соответствующей динамической системы.

Математическая модель динамической системы считается заданной, если введены динамические переменные (*координаты*) системы, определяющие однозначно ее *состояние*, и указан *закон эволюции* состояния во времени.

В зависимости от степени приближения одной и той же системе могут быть поставлены в соответствие различные математические модели. Исследование реальных систем идет по пути изучения соответствующих математических моделей, совершенствование и развитие которых определяется анализом экспериментальных и теоретических результатов при их сопоставлении. В связи с этим под динамической системой мы будем понимать именно ее математическую модель. Исследуя одну и ту же динамическую систему (к примеру, движение маятника), в зависимости от степени учета различных факторов мы получим различные математические модели. В качестве примера рассмотрим модель нелинейного консервативного осциллятора:

$$\ddot{x} + \sin x = 0, \quad \ddot{x} = d^2x/dt^2. \tag{1.1}$$

Как известно, функция $\sin x$ аналитическая и ее разложение в ряд Тейлора выглядит так:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-1}}{(4n-1)!}. \tag{1.2}$$

При малых $x \ll 1$ $\sin x \simeq x$. С увеличением x требуется учет второго, третьего и т.д. членов ряда, чтобы с заданной точностью аппроксимировать $\sin x$. Поэтому в случае $x \ll 1$ мы получаем самую простую модель математического маятника:

$$\ddot{x} + x = 0. \tag{1.3}$$

Следующим приближением будет модель нелинейного маятника:

$$\ddot{x} + x - \frac{x^3}{6} = 0 \tag{1.4}$$

и так далее. На рис. 1.1 приведены результаты аппроксимации функции $\sin x$ конечным числом членов ряда для $n = 0, 1, \dots, 43$. Для каждого конкретного значения n мы будем получать новую динамическую систему,

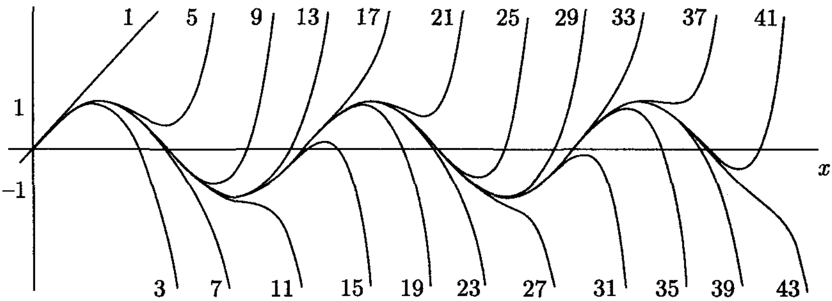


Рис. 1.1. Аппроксимация функции $\sin x$ конечным числом членов ряда (1.1) для $n = 1, \ldots, 43$

в заданном приближении описывающую процесс колебаний физического маятника.

1.3. Кинематическая интерпретация системы дифференциальных уравнений

Рассмотрим динамические системы, моделируемые конечным числом обыкновенных дифференциальных уравнений. Применительно к таким системам сохранились представления и терминология, первоначально возникшие в механике. В рассматриваемом случае для определения динамической системы необходимо указать объект, допускающий описание состояния заданием величин $x_1, x_2, \ldots, x_N$ в некоторый момент времени $t = t_0$. Величины x_i могут принимать произвольные значения, причем двум различным наборам величин x_i и x'_i отвечают два разных состояния. Закон эволюции динамической системы во времени описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = \dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_N), \quad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{1.5}$$

Если рассматривать величины $x_1, x_2, \ldots, x_N$ как координаты точки $\vec{x}$ в N-мерном пространстве, то получается наглядное геометрическое представление состояния динамической системы в виде этой точки. Последнюю называют изображающей, а чаще — *фазовой точкой*, а пространство состояний — *фазовым пространством* динамической системы. Изменению состояния системы во времени отвечает движение фазовой точки вдоль некоторой линии, называемой *фазовой траекторией*. В фазовом пространстве системы уравнениями (1.5) определяется векторное поле скоростей, сопоставляющее каждой точке $\vec{x}$ выходящий из нее вектор скорости $\vec{F}(\vec{x})$, компоненты которого даются правыми частями уравнений (1.5):

$$[f_1(x_1, x_2, \ldots, x_N),\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_N),\ \ldots,\ f_N(x_1, x_2, \ldots, x_N)].$$

Динамическая система (1.5) может быть записана в векторной форме:

$$\dot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x}), \tag{1.6}$$

где $\vec{F}(\vec{x})$ — вектор-функция размерности N.

Необходимо уточнить взаимосвязь понятий числа степеней свободы и размерности фазового пространства динамической системы. Под *числом степеней свободы* понимается наименьшее число независимых координат, необходимых для однозначного определения состояния системы. Под координатами первоначально понимались именно пространственные переменные, характеризующие взаиморасположение тел и объектов. В то же время для однозначного решения соответствующих уравнений движения необходимо, помимо координат, задать соответствующие начальные значения импульсов или скоростей. В связи с этим система с n степенями свободы характеризуется фазовым пространством размерности в два раза большей ($N = 2n$).

1.4. Определение динамической системы, классификация

Динамическая система формально определена, если заданы три следующих элемента:

1) множество состояний X, образующее полное метрическое пространство (фазовое пространство);

2) множество моментов времени Θ;

3) *оператор эволюции* $T_{t_0}^{\tau}$ — некоторое отображение $T_{t_0}^{\tau} : X \to X$, которое каждому состоянию $\vec{x}_0 \in X$ в начальный момент времени $t_0 \in \Theta$ однозначно ставит в соответствие некоторое состояние $\vec{x}_t \in X$ в любой другой момент времени $t = t_0 + \tau \in \Theta$. Таким образом, можно записать:

$$\vec{x}_t = T_{t_0}^{\tau}\vec{x}_0, \quad t = t_0 + \tau. \tag{1.7}$$

Оператор эволюции является непрерывным в X и обладает следующими свойствами:

$$T_{t_0}^{0}\vec{x}_0 = \vec{x}_0; \tag{1.8}$$

$$T_{t_0}^{\tau+s}\vec{x}_0 = T_{t_0+s}^{\tau} \circ T_{t_0}^{s}\vec{x}_0 = T_{t_0+\tau}^{s} \circ T_{t_0}^{\tau}\vec{x}_0, \tag{1.9}$$

где $\circ$ означает суперпозицию операторов.

Исходя из характера множеств X, Θ и свойств оператора эволюции можно дать наиболее общую классификацию динамических систем. Если $\Theta = R^1$, то есть время принимает непрерывное множество значений, то оператор эволюции непрерывен по τ и соответствующую динамическую систему называют *системой с непрерывным временем* или *потоком*, по аналогии с течением жидкости. Если множество Θ является счетным, то динамическую систему называют *системой с дискретным временем* или *каскадом*.

Множество состояний X, так же как и множество моментов времени, может быть различно. Это может быть конечное или счетное множество, что характерно для класса ДС, называемых *клеточными автоматами*. Множество X может представлять собой арифметическое пространство с конечной размерностью N (вещественное — R^N или комплексное — Z^N). Таким является фазовое пространство ДС, задаваемых обыкновенными дифференциальными уравнениями. Наконец, X может быть функциональным пространством. В этом случае ДС задается дифференциальными уравнениями в частных производных, интегральными, интегро-дифференциальными уравнениями или обыкновенными дифференциальными уравнениями, содержащими задержку во времени. В дальнейшем мы в основном сосредоточимся на потоковых системах с пространством состояний $X = R^N$.

Оператор эволюции может обладать теми или иными характерными свойствами, позволяющими выделить особые классы динамических систем. Например, можно выделить класс *линейных* ДС, для которых оператор эволюции является линейным, то есть удовлетворяет правилу суперпозиции:

$$T_{t_0}^{\tau}(\vec{x} + \vec{y}) = T_{t_0}^{\tau}\vec{x} + T_{t_0}^{\tau}\vec{y}. \tag{1.10}$$

Если оператор нелинейный (не удовлетворяет правилу (1.10)), то и соответствующая динамическая система называется *нелинейной*.

Если оператор эволюции $T_{t_0}^{\tau}$ определен для всех значений сдвига во времени τ, как для $\tau \geqslant 0$, так и для $\tau < 0$, то он является обратимым, т.е. существует обратный к нему оператор $T_{t_0+\tau}^{-\tau}$, позволяющий, зная состояние системы в момент $t = t_0 + \tau$, найти состояние системы в предшествующий момент t_0. ДС также называется *обратимой во времени*. Если оператор эволюции определен только для $\tau \geqslant 0$, то он необратим и предшествующее состояние системы однозначно определить нельзя. Система в этом случае называется *необратимой во времени*.

Если оператор эволюции $T_{t_0}^{\tau}$ не зависит от момента времени t_0, а определяется только начальным состояниям $\vec{x}_0$ и интервалом τ, то соответствующая динамическая система называется *автономной*, в противном случае система называется *неавтономной*. В обозначении оператора эволюции автономной системы не нужно указывать начальный момент времени, то есть $T_{t_0}^{\tau} = T^{\tau}$, а свойство (1.9) принимает вид

$$T^{\tau+s}\vec{x}_0 = T^{\tau} \circ T^{s}\vec{x}_0 = T^{s} \circ T^{\tau}\vec{x}_0.$$

С физической точки зрения автономность системы означает, что на систему не действуют никакие внешние силы и параметры системы постоянны во времени. В дальнейшем мы будем рассматривать автономные системы или системы, которые можно свести к автономным, добавив некоторые дополнительные переменные состояния. Важно при этом, чтобы характерные траектории ДС оставались ограниченными. Например, к автономному виду легко сводятся системы с гармоническим внешним воздействием. Роль дополнительной переменной играет фаза внешнего воздействия, задаваемая в ограниченном интервале (например, в интервале $[-\pi; +\pi]$).

Если оператор эволюции сохраняет фазовый обьем, то динамическая система называется *консервативной*. Полная энергия консервативной системы остается постоянной. Если оператор эволюции сжимает фазовый обьем, то система называется *диссипативной*. В такой системе происходит рассеяние (диссипация) энергии.

Способы задания оператора эволюции могут быть различными. Как уже отмечалось, оператор $T_{t_0}^{\tau}$ часто задается в неявной форме в виде дифференциального уравнения или системы дифференциальных уравнений. Возможно представление оператора эволюции в виде интегрального преобразования, в виде матрицы или таблицы, в виде графика или функции и т.д.

1.5. Колебательные системы и их свойства

Важную группу динамических систем представляют системы, в которых возможны колебания. Колебательные системы с точки зрения их математических моделей разделяют на определенные классы. Различают *линейные* и *нелинейные* колебательные системы, *сосредоточенные и распределенные, консервативные и диссипативные, автономные и неавтономные*. Особый класс представляют так называемые *автоколебательные системы*. Основные свойства указанных систем подробно обсуждаются в работах по теории колебаний.

Колебательная система называется *линейной* или *нелинейной* в зависимости от того, линейна или нелинейна описывающая ее система дифференциальных уравнений. Линейные системы являются частным случаем нелинейных. Однако в силу принципиальной важности линейных систем при исследовании вопросов устойчивости колебаний, а также возможности использования принципа суперпозиции решений такая классификация оправдана.

Колебательные системы, моделируемые конечным числом обыкновенных дифференциальных уравнений, называют *сосредоточенными* или *точечными* системами. Они описываются с помощью конечномерного фазового пространства и характеризуются конечным числом степеней свободы. Одна и та же система в различных условиях может рассматриваться как сосредоточенная либо как распределенная. Математические модели *распределенных* систем — это дифференциальные уравнения в частных производных, интегральные уравнения или обыкновенные уравнения с запаздывающим аргументом. Число степеней свободы распределенной системы бесконечно, и требуется бесконечное число данных для определения ее состояния. В теории электрических колебаний систему рассматривают как сосредоточенную в тех случаях, когда длина волны колебаний существенно превышает геометрические размеры самой системы. Если размеры прибора соизмеримы с длиной волны генерируемых колебаний, то систему необходимо рассматривать как распределенную.

По энергетическому признаку динамические системы делятся на консервативные и неконсервативные. *Консервативные* системы характеризуются неизменным во времени запасом энергии. В механике их называют *гамильтоновыми*. Для консервативных систем с n степенями свободы определяется так называемый *гамильтониан* системы $H(\vec{p},\vec{q})$, где q_i — обобщенные координаты, p_i — обобщенные импульсы системы, $i = 1, 2, \ldots, n$. Гамильтониан полностью характеризует динамическую природу системы и с физической точки зрения в большинстве случаев представляет собой ее полную энергию. Эволюция во времени консервативных систем описывается уравнениями механики Гамильтона

$$\dot{q}_i = \partial H(\vec{p},\vec{q})/\partial p_i, \quad \dot{p}_i = -\partial H(\vec{p},\vec{q})/\partial q_i. \tag{1.11}$$

Из уравнений (1.11) следует

$$\sum_{i=1}^{n}(\partial \dot{q}_i/\partial q_i + \partial \dot{p}_i/\partial p_i) = 0. \tag{1.12}$$

В терминах обобщенных фазовых координат соотношение (1.12) можно представить как

$$\sum_{i=1}^{N} \partial\dot{x}_i/\partial x_i = 0, \tag{1.13}$$

что означает равенство нулю дивергенции векторного поля скоростей. Движение изображающих точек в фазовом пространстве интерпретируется в данном случае как стационарное течение несжимаемой жидкости, подчиняющееся уравнению непрерывности. Отсюда следует, что элемент фазового объема в консервативных системах не изменяется во времени.

Динамические системы с изменяющимся во времени запасом энергии называются соответственно *неконсервативными*. Системы, в которых энергия уменьшается во времени из-за трения или рассеяния, называются *диссипативными*. В соответствии с этим системы, энергия которых во времени нарастает, называются системами с отрицательным трением или отрицательной диссипацией. Такие системы можно рассматривать как диссипативные при смене направления отсчета времени на противоположное. Принципиальной особенностью диссипативных систем является зависимость элемента фазового объема от времени. В системах с поглощением энергии фазовый объем во времени уменьшается, в системах с отрицательным трением — увеличивается.

Колебательные системы называются *автономными*, если они не подвержены действию внешних сил, переменных во времени. Уравнения автономных систем явной зависимости от времени не содержат.

Большинство реальных колебательных систем в физике, радиофизике, биологии, химии и других областях знаний неконсервативны. Среди них выделяется особый класс так называемых *автоколебательных* систем, которые принципиально неконсервативны и нелинейны. Автоколебательной называют динамическую систему, преобразующую энергию источника в энергию незатухающих колебаний, причем основные характеристики колебаний (амплитуда, частота, форма колебаний и т. д.) определяются параметрами системы и в определенных пределах не зависят от выбора исходного начального состояния.

1.6. Фазовые портреты типовых колебательных систем

Метод анализа колебательных процессов с помощью исследования геометрии фазовых траекторий динамической системы был введен в теорию колебаний Л. И. Мандельштамом и А. А. Андроновым и с тех пор стал привычным инструментом при исследовании самых различных колебательных явлений.

Обсудим несколько простых, но типичных примеров представления динамических процессов в виде траекторий изображающей точки в фазовом пространстве.

Консервативный осциллятор. Рассмотрим линейный осциллятор без потерь, уравнения которого можно сформулировать на примере колебательного LC-контура (рис. 1.2, *а*), предположив амплитуду колебаний достаточно малой. Выбрав в качестве переменной заряд q на конденсаторе, с помощью уравнений Кирхгофа получим

$$\ddot{q} + (LC)^{-1}q = 0. \tag{1.14}$$

Домножив (1.14) на $L\dot{q}$, получаем:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{L\dot{q}^2}{2} + \frac{q^2}{2C}\right) = 0, \tag{1.15}$$

т. е. для любого момента времени выполняются равенства

$$E = E_L + E_C = \text{const}, \quad E_L = L\dot{q}^2/2, \quad E_C = q^2/2C, \tag{1.16}$$

отражающие постоянство во времени полной энергии осциллятора (суммы магнитной E_L и электрической E_C энергий). В более удобных координатах уравнения консервативного осциллятора можно записать следующим образом, введя замену времени $\tau = t/\sqrt{LC}$:

$$\ddot{x} + x = 0, \quad \dot{x}^2 + x^2 = a^2, \quad a = \text{const}. \tag{1.17}$$

Для фазовых координат $x_1 = x$ и $x_2 = \dot{x}$ запишем уравнения в виде

$$\dot{x_1} = x_2, \quad \dot{x_2} = -x_1; \quad x_1^2 + x_2^2 = a^2. \tag{1.18}$$

Фазовый портрет системы представляет собой окружность радиуса a с центром в начале координат. Точка в фазовом пространстве, в которой вектор фазовой скорости обращается в нуль, называется особой, и в данном случае нуль координат есть *особая точка* типа *центр*.

Наличие интеграла движения у консервативной системы 2-го порядка, отражающее в данном примере факт сохранения энергии (1.16), дает возможность описать ее с помощью уравнения 1-го порядка. Действительно, определив новую переменную φ соотношениями

$$x_1 = a\cos\varphi, \quad x_2 = -a\sin\varphi, \tag{1.19}$$

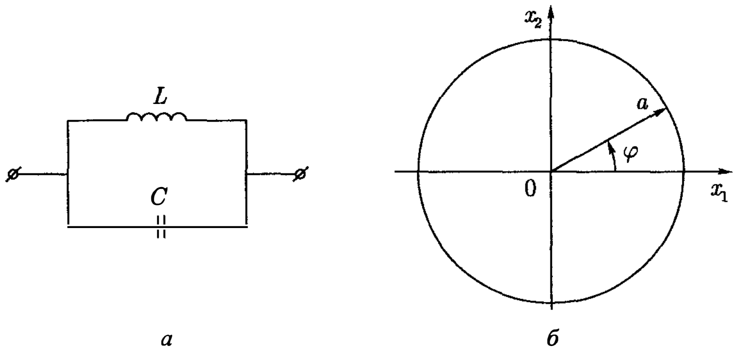


Рис. 1.2. Консервативный осциллятор: *а* — колебательный контур, моделируемый уравнением (1.17); *б* — фазовый портрет колебаний при заданном уровне энергии

получим уравнения

$$\dot{\varphi} = 1, \quad \dot{a} = 0, \tag{1.20}$$

которые и представляют закон движения фазовой точки. Во времени эволюционирует одна переменная φ, и фазовое пространство консервативного осциллятора с заданной энергией одномерно. Гармоническим колебаниям осциллятора отвечает равномерное движение изображающей точки по окружности радиуса a, как это показано на рис. 1.2, *б*.

Если консервативная система нелинейна, то ее фазовый портрет усложняется. Проиллюстрируем это на примере уравнения

$$\ddot{x} + \sin x = 0. \tag{1.21}$$

В фазовых переменных $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$ уравнение (1.21) записывается следующим образом:

$$\dot{x_1} = x_2, \quad \dot{x_2} = -\sin x_1. \tag{1.22}$$

Состояния равновесия нелинейного маятника на фазовой плоскости расположены вдоль оси $x_1 (x_2 = 0)$ в точках $x_1 = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$ Соответствующий фазовый портрет системы представлен на рис. 1.3. Видно, что особые точки $x_1 = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$ — типа центр, а $x_1 = \pm\pi, \pm 3\pi, \ldots$ — неустойчивые точки типа *седло*.

Вблизи центров фазовый портрет соответствует линейному осциллятору: траектории представляют собой замкнутые кривые, близкие к окружностям, отражающим характер малых по амплитуде колебаний, близких

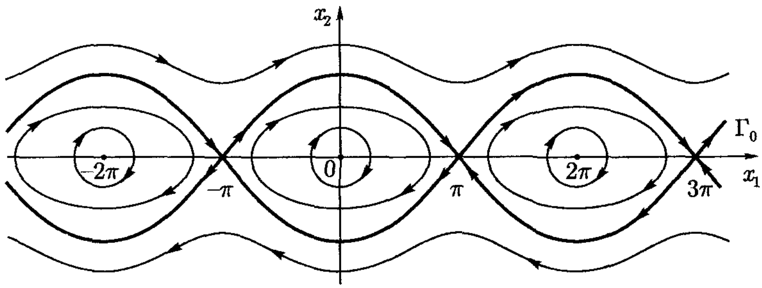


Рис. 1.3. Фазовый портрет осциллятора (1.21)

к гармоническим. Через неустойчивые точки проходят особые интегральные кривые Γ_0, называемые *сепаратрисами* седла. Они разделяют фазовое пространство на области с различным поведением. С увеличением энергии маятника его колебания от квазигармонических вблизи точек типа центр эволюционируют к нелинейным периодическим колебаниям вблизи сепаратрис. Дальнейшее увеличение энергии приведет к вращательному движению (движения вне сепаратрис). Ситуация, когда энергия маятника соответствует движению по сепаратрисе, называется негрубой. Малейшие отклонения энергии в ту или иную сторону приводят к качественно различным типам движения: колебательному или вращательному.

Как видно из рис. 1.3, состояние маятника определяется углом его отклонения от положения равновесия x_1 и скоростью x_2, но для значений x_1, отличающихся на целое число $2n\pi$, динамика системы идентична. Поэтому плоскость переменных x_1, x_2 не является, строго говоря, фазовой плоскостью системы в силу отсутствия однозначности. Пока речь идет о движениях, изображающие траектории которых лежат внутри сепаратрисного контура, т. е. о колебаниях в окрестности центра, неясностей не возникает. Но в случае если энергия системы превышает критическое значение и движение становится вращательным, фазовая плоскость не годится для однозначного описания и в рассмотрение вводят *цилиндрическое* фазовое пространство.

Линейный осциллятор с затуханием. Диссипация энергии, обусловленная наличием потерь, оказывает принципиальное влияние на характер движения системы. Наиболее простые закономерности проявляются в системах с полной диссипацией энергии, когда силы трения действуют по всем степеням свободы, а поступление энергии извне отсутствует. Рассмотрим процессы в линейном диссипативном осцилляторе, когда сила трения пропорциональна скорости изменения координаты. Примером такой системы служит колебательный контур, содержащий активное сопротивление R. Уравнение контура

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + q/C = 0 \qquad (1.23)$$

заменой переменных сводится к безразмерной форме

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + x = 0, \quad 2\delta = R\sqrt{L/C}, \quad \tau = t/\sqrt{LC}. \qquad (1.24)$$

При $\delta = 0$ имеем консервативный линейный осциллятор, рассмотренный выше. Введение малого трения качественно меняет фазовый портрет системы. Для $0 < \delta < 1$ решением уравнения (1.24) является

$$x = A\exp(-\delta\tau)\cos(\omega\tau + \psi), \quad \omega = (1 - \delta^2)^{1/2}, \qquad (1.25)$$

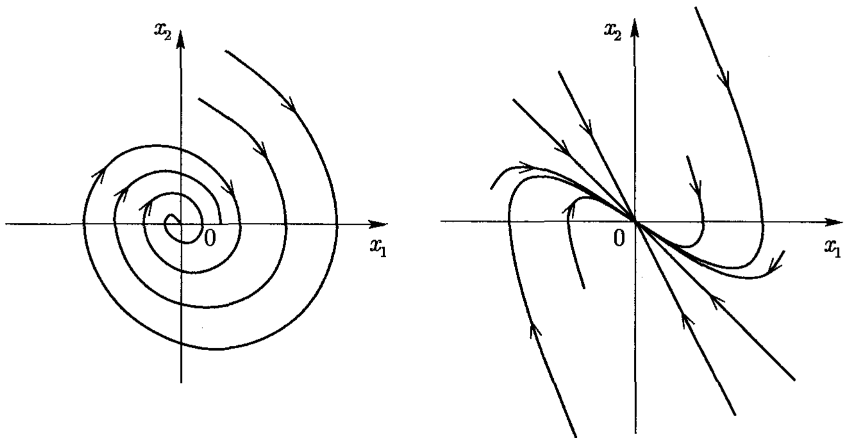
где A и ψ — произвольные постоянные, определяемые начальными условиями. На фазовой плоскости для любых начальных данных имеют место скручивающиеся спирали, по которым фазовые точки асимптотически приближаются к началу координат, характеризуя затухающий колебательный процесс. Нуль координат является особой точкой системы, которая в случае $\delta < 1$ есть *устойчивый фокус* (рис. 1.4, *а*). Если коэффициент трения $\delta > 1$, процесс в системе апериодический:

$$x = A_1\exp(\lambda_1\tau) + A_2\exp(\lambda_2\tau), \quad \lambda_{1,2} = [-\delta \pm (\delta^2 - 1)^{1/2}]/2, \qquad (1.26)$$

и фазовые траектории выглядят в виде семейства характерных кривых, по которым, как и в предыдущем случае, изображающие точки стремятся к нулю координат (рис. 1.4, *б*). Особая точка в указанных условиях является *устойчивым узлом*.

Итак, при любых значениях физических параметров системы, когда $\delta > 0$, диссипативный маятник характеризуется единственным глобально устойчивым состоянием равновесия в нуле фазовых координат. Независимо от выбора начальных условий наблюдается затухающее колебательное или апериодическое движение. При $t \to \infty$ любая (!) изображающая точка стремится к началу координат в устойчивый фокус либо узел.

Описанное свойство является общим для динамических систем с полной диссипацией энергии. Положения равновесия типа устойчивого фокуса или узла являются здесь *глобально притягивающими* в том смысле, что фазовые траектории из любой точки фазового пространства асимптотически к ним стремятся. Стационарные незатухающие колебания в линейных диссипативных системах оказываются невозможными. С физической точки зрения это понятно — нет условий поддержания колебаний. Энергия, расходуемая на преодоление сил трения, не восполняется.



а *б*

Рис. 1.4. Фазовый портрет диссипативного осциллятора (1.24) с параметром: *а* — $\delta < 1$; *б* — $\delta > 1$

1.7. Автоколебательные системы

Возможность существования в автономной системе периодического асимптотически устойчивого движения, которое изображается изолированной замкнутой траекторией в фазовом пространстве, к которой со временем притягиваются траектории из некоторой окрестности независимо от начальных условий, обеспечивается только в нелинейных диссипативных системах. Этот тип динамических систем настолько важен при изучении колебательных процессов, что для его выделения А. А. Андронов предложил специальный термин — автоколебательные системы. Математическим образом автоколебаний служит *предельный цикл Андронова–Пуанкаре* — замкнутая изолированная траектория в фазовом пространстве, отвечающая устойчивому периодическому движению.

В качестве примера динамической системы с предельным циклом Пуанкаре рассмотрим классический нелинейный осциллятор Ван дер Поля, уравнение колебаний которого

$$\ddot{x} - (\varepsilon - x^2)\dot{x} + x = 0. \tag{1.27}$$

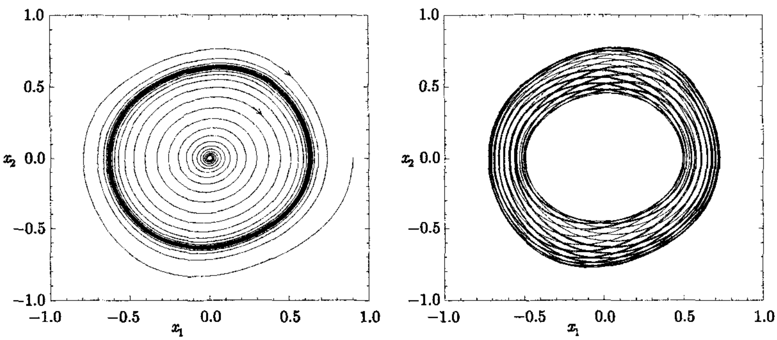
Параметр ε, характеризующий подкачку энергии в систему от внешнего источника, является существенным параметром осциллятора и называется *параметром возбуждения*. Из сравнения уравнений (1.27) и (1.24) следует, что осциллятор Ван дер Поля описывает более сложный колебательный контур, характер и значение диссипации в котором зависят от переменной x. В фазовых координатах уравнение колебаний осциллятора (1.27) представляется как

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = (\varepsilon - x^2)(1 - bx_1^2)x_2 - x_1, \tag{1.28}$$

причем

$$(\varepsilon - x_1^2)(1 - bx_1^2) \neq 0. \tag{1.29}$$

Аналитически уравнения (1.28) строго не решаются и исследования проводятся с использованием численных методов. В практически важном случае ($\varepsilon > 0$) уравнения (1.28) имеют единственное устойчивое решение в виде *предельного цикла* Г, изображенного на рис. 1.5, *а* (см. лекцию 4).



а *б*

Рис. 1.5. Предельные множества осциллятора Ван дер Поля (1.27): *а* — предельный цикл Г, рассчитанный для значения параметра $\varepsilon = 0,1$; *б* — проекция двумерного тора на плоскость переменных $x_1 = x, x_2 = x$; численное интегрирование уравнения (1.30) для значений параметров $\varepsilon = 0,1$; $B = 0,1; p = 1,35; \varphi_0 = 0$

Положение равновесия в начале координат, в котором вблизи нуля можно пренебречь нелинейностью, является неустойчивым фокусом. Траектории из окрестности состояния равновесия асимптотически стремятся к предельному циклу. Как показывает анализ, предельный цикл является устойчивой изолированной структурой, притягивающей к себе траектории из любой точки на фазовой плоскости.

Таким образом, в динамических системах с нелинейной зависимостью диссипации энергии от переменной, совершающей колебания, впервые появляется принципиально новый тип притягивающего множества фазовых траекторий: предельный цикл. Расчеты свидетельствуют, что на предельном цикле за время периода колебаний доли рассеиваемой и вносимой энергии строго компенсируются.

Наконец, рассмотрим еще один случай типичной структуры в фазовом пространстве динамической системы, возникающей, например, при периодическом возмущении системы с устойчивым предельным циклом. Добавим в уравнение (1.27) источник гармонического действия сравнительно малой амплитуды B и частоты p, которую считаем рационально не связанной с частотой периодических колебаний автономного осциллятора:

$$\ddot{x} - (\varepsilon - x^2)(1 - bx^2)\dot{x} + x = B\sin(p\tau + \varphi_0). \tag{1.30}$$

Периодическая модуляция предельного цикла автономной системы приводит к тому, что фазовая траектория с заданной частотой p вращается вокруг предельного цикла и лежит на двумерной поверхности, представляющей собой *поверхность тора.* Аналогично случаю предельного цикла эта поверхность будет предельным множеством, к которому стягиваются со временем все траектории из некоторой окрестности тора (как изнутри него, так и снаружи!). Нетрудно представить себе, что минимальная размерность фазового пространства, в которое можно вложить *двумерный тор*, равна трем. На рис. 1.5, *б* показана проекция на плоскость переменных x_1, x_2 фазовой траектории на двумерном торе, полученная численным интегрированием системы (1.30).

1.8. Регулярные и хаотические аттракторы

Все траектории в фазовом пространстве диссипативной системы можно разделить на траектории, соответствующие переходным процессам (процессам релаксации системы к некоторым установившимся режимам), и траектории, принадлежащие инвариантным предельным множествам. Траектории второго типа соответствуют установившимся режимам функционирования системы. Мы уже говорили о предельном цикле и предельном тороидальном множестве. Дадим общее определение предельных множеств ДС. Точка $p \in R^N$ называется *ω-предельной точкой* траектории $\vec{x}(t), t \geqslant t_0$, если существует последовательность $t_k \to \infty$ при $k \to \infty$ такая, что последовательность состояний $\vec{x}(t_k)$ сходится к точке p. Аналогично точка $q \in R^N$ называется *α-предельной точкой* траектории $\vec{x}(t), t \leqslant t_0$, если существует последовательность $t_k \to -\infty$ при $k \to \infty$ такая, что последовательность состояний $\vec{x}(t_k)$ сходится к точке q. Множество всех ω-предельных точек траектории $\vec{x}(t)$ называется *ω-предельным множеством данной траектории.* Обозначим его $\omega(\vec{x}(t))$. Множество всех α-предельных точек траектории $\vec{x}(t)$ есть *α-предельное множество данной траектории.* Обозначим его $\alpha(\vec{x}(t))$. Предельные множества любой фазовой траектории сами состоят из фазовых траекторий. Кроме того, предельные множества ω и α инвариантны относительно оператора эволюции. Это означает, что оператор эволюции отображает любую точку предельного множества в точку этого же множества.

Рассмотрев, куда стремятся различные траектории ДС в прямом и обратном времени, можно выделить все инвариантные предельные множества в фазовом пространстве. Типичные предельные множества траекторий на фазовой плоскости — это состояния равновесия, периодические движения и особые траектории типа сепаратрисных контуров, двоякоасимптотических к седловым состояниям равновесия. Указанные предельные множества полностью исчерпывают возможные ситуации на фазовой плоскости. Им отвечают три различных типа решений уравнений. Сепаратрисные контуры и петли — это особые кривые, которые в диссипативных системах не являются *структурно устойчивыми* (*грубыми*). Они существуют только при определенных значениях параметров и исчезают при сколь угодно малом возмущении оператора эволюции. Напротив, точки равновесия и предельные циклы при выполнении некоторых условий будут структурно устойчивыми предельными множествами и могут существовать в некоторой области пространства параметров.

Рассмотрим структурно устойчивые предельные множества в R^N. Если некоторое множество Q является предельным множеством в фазовом пространстве ДС, это означает одну из трех возможностей:

1) Q является ω-предельным множеством для всех траекторий из некоторой области фазового пространства U, не принадлежащих Q. В этом случае множество Q есть *притягивающее предельное множество* или *аттрактор* динамической системы;

2) Q является α-предельным множеством для всех траекторий из U, не принадлежащих Q. Тогда Q называют *отталкивающим предельным множеством* или *репеллером*;

3) в U существуют траектории, не принадлежащие Q, для которых Q является ω-предельным множеством, и траектории, для которых Q является α-предельным множеством. В этом случае множество Q есть *седло* (например, седловая точка равновесия, седловой предельный цикл, седловой тор).

Фазовые траектории, для которых седло Q является ω-предельным множеством, и фазовые траектории, для которых Q является α-предельным множеством, принадлежат некоторым гладким инвариантным многообразиям размерности меньшей, чем N. Эти многообразия называются соответственно *устойчивым и неустойчивым многообразиями* седлового предельного множества Q. Для седловой точки равновесия на плоскости устойчивое и неустойчивое многообразия состоят из пары сепаратрис, соответственно входящих в седло и выходящих из него (см. рис. 1.3).

При инверсии времени (замене $t \to -t$) аттракторы ДС становятся репеллерами, а репеллеры — аттракторами. Седла остаются седлами, но характер инвариантных многообразий меняется на противоположный: устойчивые многообразия становятся неустойчивыми, а неустойчивые — устойчивыми.

При всей важности репеллеров и седел в структуре фазового портрета динамической системы наибольший интерес для нас представляют аттракторы, так как они соответствуют экспериментально наблюдаемым устойчивым установившимся режимам функционирования динамической системы. Поэтому остановимся подробнее на определении понятия «аттрактор». Данное выше определение аттрактора (как и репеллера) не является вполне строгим и единственно возможным. Вообще говоря, единого общеупотребительного определения аттрактора не существует. Наиболее часто, особенно в математической литературе, используется определение аттрактора как *максимального аттрактора поглощающей области*. Приведем данное определение.

Пусть ДС задана оператором эволюции $T^\tau : R^N \to R^N$ и пусть B есть *поглащающая область* в R^N, то есть для B выполняется условие: $T^\tau \bar{B} \subset B$, $\tau > 0$. *Максимальным аттрактором* $A_{\max}$ в поглощающей области B называется множество

$$A_{\max} = \bigcap_{\tau>0} T^\tau B.$$

Некоторое инвариантное множество A назовем *аттракторм* ДС, если существует поглащающая область, для которой A является максимальным аттрактором. *Бассейном (областью) притяжения* аттрактора A называется множество U, такое что все траектории из U стремятся к A при $t \to \infty$.

Максимальный аттрактор не всегда совпадает с ω-предельным множеством траекторий в U. Например, рассмотрим двумерный тор в R^N с резонансной структурой, состоящей из устойчивого и седлового циклов. Тор в этом случае образован неустойчивым многообразием седлового цикла. Вся поверхность тора является максимальным аттрактором для некоторой поглощающей области, но ω-предельным множеством будет только устойчивый резонансный цикл. Именно он является аттрактором с «физической точки зрения», так как соответствует экспериментально наблюдаемому режиму установившихся колебаний.

Аттракторами систем, состояние которых задается одной вещественной скалярной переменной (то есть множество состояний есть R^1), могут быть только точки равновесия. Для систем на фазовой плоскости аттракторами могут быть как точки равновесия, так и предельные циклы. К чему может привести повышение размерности системы, например до $N = 3$, то есть выход с плоскости в трехмерное фазовое пространство? Совсем еще недавно, до начала 1960-х гг., с увеличением размерности фазового пространства диссипативных систем связывали возможность появления (в дополнение к указанным выше) лишь квазипериодических аттракторов, соответствующих движениям на k-мерных торах ($k = 2, 3, \ldots$).

Важным результатом исследований последних лет явилось обнаружение принципиально новых типов движений в динамических системах. Таким движениям в фазовом пространстве размерности $N \geqslant 3$ соответствуют сложным образом устроенные притягивающие множества, траектории изображающих точек которых не принадлежат ни к одному из описанных выше типов аттракторов. Фазовые траектории представляются здесь в виде бесконечной нигде не пересекающейся кривой. При $t \to \infty$ траектория не покидает замкнутой области и не притягивается к известным типам аттракторов. Именно с существованием таких траекторий связывают возможность хаотического поведения детерминированных динамических систем с размерностью фазового пространства $N \geqslant 3$. Впервые подобные свойства динамической системы в 1963 г. обнаружил Э. Лоренц при численном исследовании динамики трехмерной модели тепловой конвекции. Спустя восемь лет в теоретической работе Д. Рюэля и Ф. Такенса притягивающая область в фазовом пространстве динамической системы, характеризующаяся режимом установившихся непериодических колебаний, была названа *странным аттрактором*. Этот термин был сразу воспринят исследователями и утвердился для обозначения математического образа режима нерегулярных колебаний детерминированных динамических систем.

Аттракторы в виде состояний равновесия, предельных циклов или l-мерных торов называют *простыми* или *регулярными*, подчеркивая тем самым, что движения на них отвечают сложившимся представлениям об устойчивом, по Ляпунову, детерминированном поведении динамической системы. Со *странным* аттрактором связывается реализация нерегулярного (в смысле отсутствия периодичности) колебательного режима, который во многом сходен с нашими представлениями о стационарных случайных процессах.

Однако термин «случайный» имеет вполне определенный смысл. Случайное движение непредсказуемо либо предсказуемо с определенной вероятностью. Другими словами, траектории случайного движения нельзя многократно и однозначно воспроизвести ни в численном, ни в физическом экспериментах. Примером служит классическое движение броуновской частицы. В случае странного аттрактора имеется строгая предсказуемость в смысле детерминированности закона эволюции. Решение уравнений (как и для регулярных аттракторов) подчиняется теореме единственности и однозначно воспроизводится при фиксированных начальных условиях. Поэтому для обозначения сложных «шумоподобных» автоколебаний, математическим образом которых служит странный аттрактор, используются термины типа *динамическая стохастичность, детерминированный хаос* и подобные. Важно отличать эти процессы от стохастических в классическом смысле, которые при описании требуют учета флуктуаций в исходных динамических уравнениях либо непосредственно подчиняются уравнениям для плотности распределения вероятностей статистической теории.

Примером системы с хаотическим аттрактором являются уравнения генератора с инерционной нелинейностью (генератора Анищенко–Астахова, 1981). Эта система является обобщением уравнений Ван дер Поля на случай трехмерного пространства:

$$\dot{x} = mx + y - xz, \quad \dot{y} = -x, \quad \dot{z} = -gz + gI(x)x^2, \tag{1.31}$$

$$I(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0. \end{cases}$$

Результаты численного решения уравнения (1.31) для значений параметров $m = 1.5$, $g = 0.2$ приведены на рис. 1.6, который иллюстрирует хаотический аттрактор.

1.9. Системы с дискретным временем. Отображения последования

Системы с дискретным временем (каскады) играют важную роль в нелинейной динамике. Их называют также *точечными отображениями* или *отображениями последования*[1]. Отображение последования может быть записано в виде

$$\vec{x}(n+1) = \vec{P}(\vec{x}(n)), \tag{1.32}$$

[1] Часто используемый термин «дискретное отображение» не совсем удачен, поскольку отображение задается, как правило, на непрерывном множестве состояний, а дискретным является только множество моментов времени.

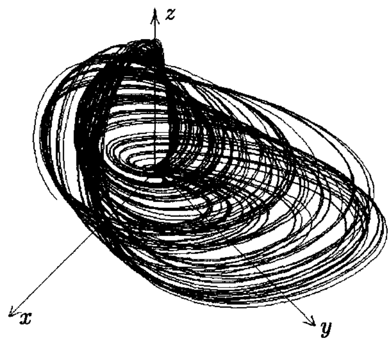


Рис. 1.6. Странный аттрактор в модели генератора Анищенко – Астахова (1.31)

где $\vec{x} \in R^N$ — вектор состояния, n — номер итерации (дискретное время), $\vec{P}(\vec{x})$ — некоторая вектор-функция, называемая *функцией последования*. Функция последования в явном виде задает оператор эволюции на одном шаге по времени (за одну итерацию): $T_n^1 \vec{x} = \vec{P}(\vec{x}(n))$. Зная вектор состояния $\vec{x}$ в некоторый момент времени n, мы можем найти состояние системы в любой другой момент времени $m = n + k$, $k > 0$:

$$\vec{x}(n+k) = T_n^k \vec{x} = \vec{P}^{(k)}(\vec{x}(n)) = \vec{P}(\vec{P}(\ldots \vec{P}(\vec{x}(n))\ldots)).$$

Таким образом, выражение (1.32) задает динамическую систему. Для отображений последования мы не будем требовать обратимости оператора эволюции во времени, иначе из рассмотрения придется исключить необратимые одномерные отображения, которые широко используются в нелинейной динамике в качестве базовых моделей.

Так же как потоки, отображения последования могут быть диссипативными (сжимающими) и консервативными (сохраняющими объем). В фазовом пространстве диссипативных отображений можно выделить аттракторы и другие предельные множества. Фазовая траектория отображения (1.32) состоит из последовательности точек фазового пространства: $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_i, \ldots$, где $\vec{x}_i = \vec{x}(i)$. Фазовая траектория, принадлежащая предельному множеству системы (1.32), может состоять из одной точки $\vec{x}_0$, называемой *неподвижной точкой отображения*. Для нее справедливо

$$\vec{P}(\vec{x}_0) = \vec{x}_0.$$

Если траектория замкнута и состоит из k точек $\vec{x}_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$, таких что для любого i

$$\vec{P}^{(k)}(\vec{x}_i) = \vec{x}_i,$$

то множество точек $\vec{x}_i$ называют *циклом отображения периода* k. Точки цикла называют также *неподвижными точками кратности* k. Квазипериодические и хаотические траектории отображения последования представляют собой незамкнутые последовательности точек, которые никогда не возвращаются строго в свои предыдущие положения.

Обратимые отображения последования могут быть непосредственно связаны с потоковыми системами, задаваемыми обыкновенными дифференциальными уравнениями. Для того чтобы от потоковой системы перейти к отображению с дискретным временем, нужно ввести секущую поверхность S (в многомерном случае — гиперповерхность) так, чтобы все фазовые траектории пересекались с ней строго трансверсально. Если рассматривать точки пересечения траекторий с поверхностью S при движении в одном направлении, то поток порождает в S отображение последования, называемое также *отображением Пуанкаре* (рис. 1.7). Отображение Пуанкаре обязательно обратимо и однозначно (но не взаимно-однозначно) связано с исходным потоком. Порядковый номер пересечения заданной траектории с секущей поверхностью есть дискретное время n.

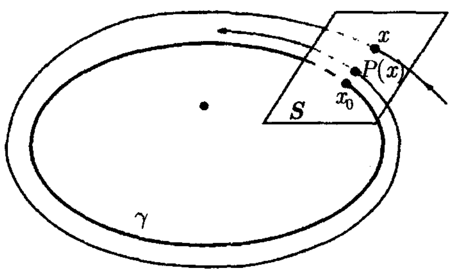
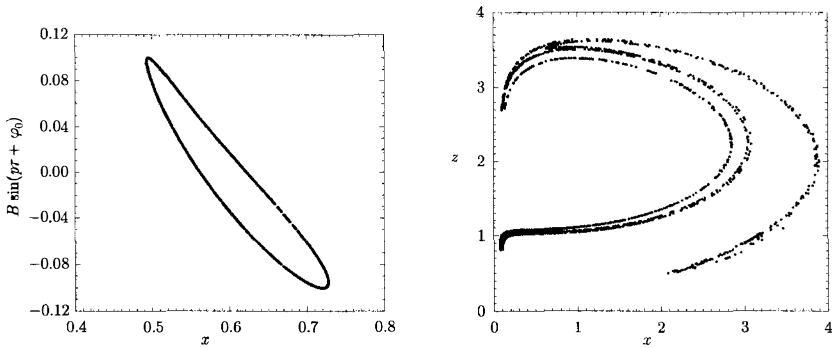


Рис. 1.7. Построение отображения Пуанкаре секущей поверхности S

Если на динамическую систему воздействует периодическая внешняя сила, то для построения отображения последования можно использовать так называемое *стробоскопическое сечение*. Рассматриваются точки фазовой траектории, получаемые через период внешней силы T: $\vec{x}(t_0 + nT)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Стробоскопическое сечение, по сути, есть частный случай сечения Пуанкаре. Действительно, если внешнее воздействие является периодическим, мы можем представить неавтономную систему в виде автономной, введя фазу воздействия $\Psi \in [-\pi; +\pi]$. Тогда стробоскопическое сечение сводится к сечению траекторий плоскостью $\Psi = \text{const}$.

Размерность всех предельных множеств в фазовом пространстве системы при переходе к отображению Пуанкаре понижается на единицу, что делает фазовые портреты отображения более наглядными. Предельным циклам потоковой системы соответствуют неподвижные точки или циклы отображения Пуанкаре, состоящие из k точек (рис. 1.7). Число k определяется тем, сколько раз траектория пересекла поверхность S в выбранном направлении. Квазипериодическим и хаотическим траекториям потоковой системы соответствуют квазипериодические и хаотические незамкнутые траектории отображения. Квазипериодические траектории, порождаемые эргодическими траекториями на двумерном торе, заполняют инвариантную замкнутую кривую, являющуюся образом двумерного тора в отображении (рис. 1.8, *а*). Хаотические траектории отображения Пуанкаре принадлежат множествам, имеющим сложную геометрическую структуру. Если размерность хаотического аттрактора не велика, то его геометрическая структура в секущей S более наглядна, чем «клубок ниток», наблюдаемый в фазовом пространстве потоковой системы (рис. 1.8, *б*).



а *б*

Рис. 1.8. Сечения Пуанкаре сложных предельных множеств: *а* — инвариантная замкнутая кривая в сечении двумерного тора в (1.30) для параметров $a = 1$, $\varepsilon = 0,1$, $b = 0,3$, $B = 0,1$, $p = 1,35$, $\varphi_0 = 0$; *б* — множество со сложной геометрической структурой в сечении хаотического аттрактора в системе (1.31) при $m = 1,5$, $g = 0,2$. В качестве секущей поверхности S в обоих случаях использовалась плоскость $y = 0$

Если ДС имеет размерность фазового пространства $N = 3$, то отображение Пуанкаре будет двумерным. В этом случае оно может быть сведено к отображению плоскости, что делает динамику системы особенно наглядной. Если в фазовом пространстве потоковой системы имеется сильное сжатие вдоль некоторых направлений, то может оказаться, что точки в сечении S ложатся практически на кривую. В действительности это не одномерная кривая, а фрактальное множество со сложной поперечной структурой, которая не заметна из-за сильного сжатия. В пределах некоторой точности можно задать состояние системы с помощью одной координаты $x = s$ — расстояния от данной точки на кривой до некоторой фиксированной точки, выбранной за ноль отсчета (рис. 1.9, *а*). Таким образом, в некоторых случаях, при сильном сжатии, можно описать поведение ДС с помощью одномерного точечного отображения некоторого интервала в себя:

$$x(n+1) = P(x(n)). \tag{1.33}$$

Такое отображение, как правило, не является обратимым, но его поведение в прямом времени позволяет качественно проанализировать некоторые существенные черты поведения исходной потоковой системы. Исследовать же одномерное отображение значительно проще как численно, так и теоретически.

Графическим методом исследования одномерного отображения является построение *итерационной диаграммы Ламерея*. Диаграмма строится с помощью графика функции последования $P(x)$ и биссектрисы первого координатного угла (см. рис. 1.9, *б*). Из начальной точки x_0 проводится вертикальная линия до пересечения с графиком функции последования. От точки пересечения проводится горизонтальная линия до пересечения с биссектрисой и затем опускается вертикальная линия до пересечения с осью абсцисс. На оси абсцисс мы получаем точку x_1, являющуюся образом точки x_0. Многократное повторение этой процедуры приводит к построению «лестницы Ламерея» — ломаной линии, состоящей из вертикальных и горизонтальных отрезков (на рис. 1.9, *б* эти отрезки помечены стрелками, указывающими направление движения по диаграмме). Лестница Ламерея может «привести» к неподвижной точке отображения или замкнуться на точках цикла. В случае квазипериодического или хаотического поведения системы (1.33) лестница состоит из бесконечного числа ступенек. Таким образом, диаграмма Ламерея дает очень наглядное представление о динамике системы.

К сожалению, получение двумерных и одномерных отображений последования в явной форме (в виде системы (1.32) или (1.33)) для конкретных потоковых ДС оказывается в большинстве случаев сложной задачей или вообще невозможно. Однако существует множество модельных одномерных и двумерных точечных отображений, которые, не будучи непосредственно связаны с конкретными потоковыми системами, тем не менее широко применяются в нелинейной динамике для исследования и описания тех или иных явлений фундаментального характера.

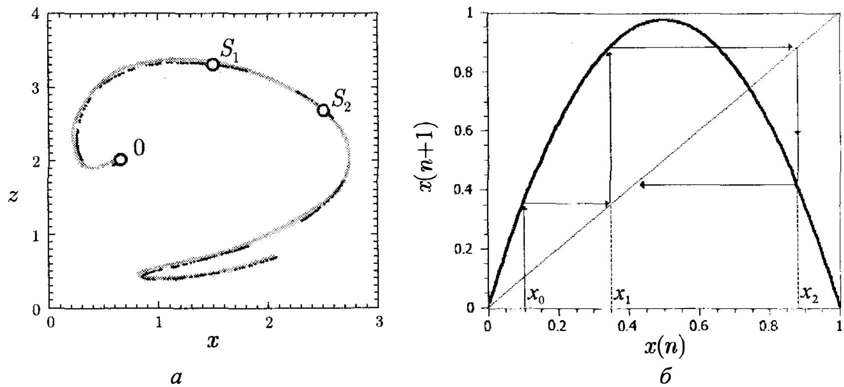


Рис. 1.9. Получение одномерного отображения последования в сечении хаотического аттрактора в системе (1.31) при $m = 1,45$, $g = 0,35$ (*а*); построение итерационной диаграммы Ламерея для модельного одномерного отображения (*б*)

Перечислим наиболее популярные модельные отображения.

Отображение растяжения:

$$x(n+1) = \alpha x(n), \mathrm{mod} 1.$$

Отображение задано на интервале $[0;1]$, mod1 означает, что берется дробная часть числа, $\alpha > 0$ — параметр отображения.

Логистическое отображение:

$$x(n+1) = \alpha x(n)(1 - x(n)).$$

Отображение задано на интервале $[0;1]$, $\alpha \in [0;4]$ — параметр. Логистическое отображение может также быть приведено к виду

$$x(n+1) = a - x^2(n) \text{ или } x(n+1) = 1 - \varepsilon x^2(n).$$

Отображение окружности:

$$x(n+1) = \Omega + x(n) + K \sin(x(n)), \mathrm{mod} 1.$$

Отображение задано на интервале $[0;1]$, $\Omega \in [0;1]$ и $K \geqslant 0$ — параметры.

Отображение Эно:

$$x(n+1) = 1 - ax^2(n) + y(n),$$
$$y(n+1) = by(n),$$

a и b — параметры отображения.

Отображение Лози:

$$x(n+1) = 1 - a|x(n)| + y(n),$$
$$y(n+1) = by(n).$$

Отображения плоскости Эно и Лози являются обратимыми.

С помощью этих и других подобных отображений были исследованы универсальные закономерности развития хаоса, рассмотрена структура и бифуркации хаотических аттракторов, изучены особенности взаимодействия хаотических систем, смоделировано поведение осцилляторных ансамблей и нелинейных распределенных сред со сложной динамикой. Многие результаты, полученные для простых модельных отображений последования, казалось бы не имеющих отношения к реальным системам, оказались фундаментальными и получили экспериментальное подтверждение.

1.10. Заключение

В настоящей лекции мы дали общее определение динамической системы и детально ознакомились с динамическими системами, описываемыми обыкновенными дифференциальными уравнениями. Мы установили, что такие динамические системы могут иметь четыре типа установившихся режимов поведения: состояние равновесия, периодическое движение, квазипериодическое движение и хаотическое. Этим типам решений соответствуют аттракторы системы в виде устойчивой точки равновесия, предельного цикла, квазипериодического аттрактора (k-мерного тора) и хаотического или странного аттрактора. Важным является то, что простейшие типы квазипериодических и хаотических аттракторов могут реализовываться в динамических системах с размерностью фазового пространства не менее трех. Мы также рассмотрели системы с дискретным временем (отображения последования), показали их взаимосвязь с динамическими системами, задаваемыми обыкновенными дифференциальными уравнениями, и проанализировали возможные типы фазовых траекторий отображений последования.

Лекция 2

Устойчивость динамических систем. Линейное приближение

2.1. Введение

Наши представления об устойчивости того или иного режима функционирования динамической системы интуитивно формируются в процессе познания природы и жизни. Первые шаги маленького ребенка дают ему вполне реальные представления об устойчивости при ходьбе, хотя они (представления) еще неосознанны. Глядя на знаменитую картину П. Пикассо «Девочка на шаре», мы как бы на себе ощущаем, что положение равновесия девочки неустойчиво. Взрослея, мы уже можем рассуждать об устойчивости корабля в бушующем море, об устойчивости экономики по отношению к действиям управленцев, об устойчивости нашей нервной системы к стрессорным возмущениям и т.д. В каждом конкретном случае речь идет об отличающихся свойствах, специфических для рассматриваемых систем. Однако если внимательно вдуматься, то можно найти нечто общее, присущее любой системе. Это общее заключается в том, что когда мы говорим об устойчивости, то понимаем при этом характер реакции динамической системы на малое возмущение ее состояния. Если сколь угодно малые изменения состояния системы начинают нарастать во времени — система неустойчива. В противном случае малые возмущения затухают со временем — система устойчива.

Анализ устойчивости режима функционирования динамической системы является чрезвычайно важным с практической точки зрения. Устойчивость таких систем, как автомобиль, воздушный или морской лайнеры, по отношению к возмущениям, которые всегда сопровождают их движение, безусловно, жизненно важный фактор в самом прямом смысле этого слова.

Приведенные рассуждения являются качественными и приобретают вполне определенный смысл лишь в том случае, когда нам удается перевести их на формальный язык математики. Основы строгой математической теории устойчивости были заложены в трудах крупного русского математика А. М. Ляпунова около 100 лет назад; развитие качественной теории и теории бифуркаций динамических систем связано с именами российских ученых А. А. Андронова, В. И. Арнольда и их учеников.

Попытаемся дать определение устойчивости динамической системы и на простых и понятных примерах проиллюстрировать содержание и методы решения задач об устойчивости.

2.2. Определение устойчивости

Существует довольно много различных определений устойчивости, из которых наиболее часто используются следующие: устойчивость по Пуассону, устойчивость по Ляпунову и асимптотическая устойчивость.

Пусть ДС задана системой обыкновенных дифференциальных уравнений (1.5) или в векторной форме уравнением (1.6) и пусть нас интересует устойчивость траектории $\vec{x}^0(t)$.

Устойчивость по Пуассону означает, что через некоторое время фазовая траектория возвращается в сколь угодно малую окрестность начальной точки $\vec{x}_0^0 = \vec{x}^0(t_0)$. Причем если система обратима, то возврат происходит как в прямом, так и в обратном времени. Таким образом, каждая точка устойчивой по Пуассону траектории одновременно является ее α- и ω-предельной точкой. Интервал времени, по прошествии которого траектория возвращается в окрестность точки $\vec{x}_0^0$ заданного радиуса ε, называется *периодом возврата Пуанкаре*. Периоды возврата могут соответствовать периоду или квазипериоду регулярного движения или представлять случайную последовательность в режиме динамического хаоса (рис. 2.1).

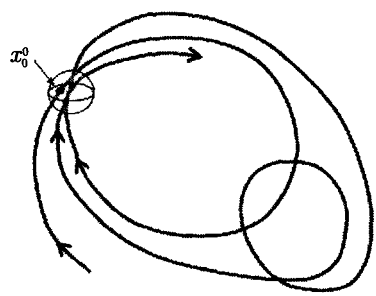


Рис. 2.1. Устойчивая по Пуассону незамкнутая траектория

Устойчивость по Пуассону является важным, но слабым свойством устойчивости. Мы ничего не можем сказать о поведении соседних траекторий, изначально близких к $\vec{x}^0(t)$. В практических задачах нас чаще всего интересует другое свойство устойчивости, связанное с малым возмущением заданной траектории. В зависимости от поведения малого возмущения во времени различают устойчивость по Ляпунову и асимптотическую устойчивость.

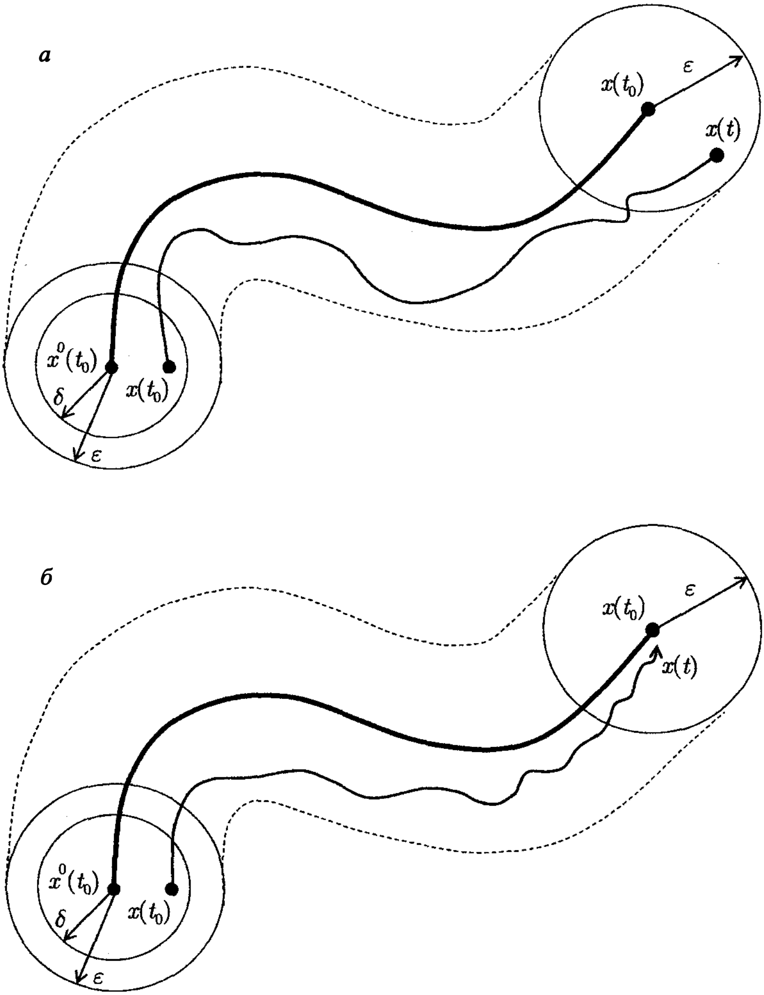


Рис. 2.2. Иллюстрации к определению устойчивости: *а* — по Ляпунову; *б* — асимптотической устойчивости траектории $\vec{x}^0(t)$

Траектория $\vec{x}^0(t)$ называется *устойчивой по Ляпунову*, если для любого произвольно малого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для любой траектории $\vec{x}(t)$, для которой $\|\vec{x}(t_0) - \vec{x}^0(t_0)\| < \delta$, при всех $t > t_0$ выполняется неравенство $\|\vec{x}(t) - \vec{x}^0(t)\| < \varepsilon$. Символ $\|\ldots\|$ обозначает норму в R^N. Таким образом, малое начальное возмущение устойчивых по Ляпунову фазовых траекторий не возрастает с течением времени (рис. 2.2, *а*). Если малое возмущение δ со временем уменьшается, то есть $\|\vec{x}(t) - \vec{x}^0(t)\| \to 0$ при $t \to \infty$, то траектория обладает более сильной устойчивостью, а именно *асимптотической устойчивостью* (рис. 2.2, *б*). Любая асимптотически устойчивая фазовая траектория устойчива по Ляпунову. Обратное утверждение в общем случае не верно.

Свойства устойчивости фазовых траекторий, принадлежащих предельным множествам (например, аттракторам), имеют особую важность при исследовании динамики систем. Изменение характера устойчивости того или другого предельного множества во многих случаях приводит к смене режима функционирования системы.

2.3. Линейный анализ устойчивости

Устойчивость решений дифференциального уравнения первого порядка. Любая динамическая система (физическая, химическая, механическая и т. д.) ассоциируется в нашем представлении с эволюцией во времени. Предвидя возражения, укажем, что и состояние равновесия, т. е. стационарное состояние, при котором скорость изучаемого процесса равна нулю, также можно трактовать как предельный случай эволюции системы во времени. Рассмотрим простую модель ДС, представляющую собой одно обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{dx(t)}{dt} = \dot{x} = F(x), \tag{2.1}$$

где $x(t)$ — переменная состояния, F — некоторая функция состояния, характеризующая закон эволюции. Пространство состояний такой системы есть множество вещественных чисел R^1. Если задано начальное состояние $x(t_0)$, то существует единственное решение уравнения (2.1), которое позволяет определить состояние $x(t)$ в любой момент времени t.

В связи с тем, что проблема устойчивости по Ляпунову и асимптотической устойчивости связана с анализом реакции системы на малое возмущение ее состояния, она может быть исследована в рамках линейного приближения. Поясним это. Пусть $x^0(t)$ есть некоторое частное решение уравнения (2.1). Устойчивость этого решения мы хотим исследовать. Введем в рассмотрение переменную $y(t)$, которая задает малое отклонение от частного решения:

$$y(t) = x(t) - x^0(t) \tag{2.2}$$

(здесь $x(t)$ — возмущенное решение).

Наша задача состоит в исследовании эволюции во времени малого возмущения $y(t)$, которая подчиняется уравнению (2.1). Разложим функцию F в степенной ряд в окрестности частного решения $x^0(t)$:

$$F(y) = \left.\frac{dF}{dx}\right|_{x=x^0} y(t) + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2F}{dx^2}\right|_{x=x^\bullet} y^2(t) + \ldots \tag{2.3}$$

Производные функции F должны вычисляться в точках, соответствующих частному решению. Перепишем уравнение (2.1) для возмущения $y(t)$ с учетом (2.3):

$$\dot{y}(t) = F(y, \mu) = \left.\frac{dF}{dx}\right|_{x=x^0} y(t) + \Phi(y), \tag{2.4}$$

где

$$\Phi(y) = \frac{1}{2}\left.\frac{d^2F}{dx^2}\right|_{x=x^\bullet} y^2(t) + \ldots \tag{2.5}$$

Слагаемые $\Phi(y)$ включают все члены с $y^n (n \geqslant 2)$, т.е. учитывают нелинейные добавки. По определению переменная $y(t)$ есть малое отклонение от частного решения. Поэтому нелинейными членами в выражении (2.4) в первом приближении можно пренебречь. Таким образом, для эволюции малого возмущения мы получаем линейное уравнение:

$$\dot{y} = A(t)y, \quad \text{где } A(t) = \left.\frac{dF}{dx}\right|_{x=x^0}. \tag{2.6}$$

Рассмотрим пример. Пусть динамическая система задана уравнением:

$$\dot{x} = a - bx^2, \quad a > 0, \quad b > 0. \tag{2.7}$$

Найдем стационарные состояния x^0 этой системы и исследуем их устойчивость. В стационарном состоянии изменений во времени нет, значит, $\dot{x}^0 = 0$ и мы получаем:

$$x^0_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{a}{b}}. \tag{2.8}$$

Рассмотрим уравнение для возмущений (2.6) применительно к первому стационарному состоянию x_1^0

$$\dot{y} = -(2bx_1^0)y = (-2\sqrt{ab})y = sy,$$

$$s = \left.\frac{dF}{dx}\right|_{x_1^0} = -2\sqrt{ab}. \tag{2.9}$$

Решением уравнения (2.9) будет $y = \exp(st)$. Возмущение y экспоненциально затухает во времени (s есть отрицательное число). Это означает, что состояние x_1^0 устойчиво! Так как второе состояние x_2^0 отличается от первого только знаком, то решение уравнения (2.9) в этом случае будет экспоненциально нарастающим во времени. Стационарное состояние x_2^0 неустойчиво!

Достаточно простая идея предсказания устойчивости по линейному приближению оказалась весьма плодотворной. Используя математический формализм, можно обобщить уравнение для возмущения (2.6) на N переменных состояния.

Устойчивость динамической системы в $\mathbf{R}^N$. Рассмотрим автономную ДС, задаваемую векторным дифференциальным уравнением вида

$$\dot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x}), \tag{2.10}$$

где $\vec{x} \in R^N$. Проанализируем устойчивость частного решения $\vec{x}^0(t)$. Если одномерное уравнение (2.1) описывает эволюцию исключительно в окрестности точек равновесия, то уравнение (2.10) может иметь в качестве решения не только точки равновесия, но также периодические, квазипериодические и хаотические траектории.

Введем вектор возмущения $\vec{y} = \vec{x}(t) - \vec{x}^0(t)$, предполагая, что его длина $||\vec{y}||$ — мала. Для $\vec{y}$ можно записать уравнение

$$\dot{\vec{y}} = \vec{F}(\vec{x}^0 + \vec{y}) - \vec{F}(\vec{x}^0). \tag{2.11}$$

Раскладывая $\vec{F}(\vec{x}^0 + \vec{y})$ в ряд в окрестности $\vec{x}^0$ и принимая во внимание тот факт, что возмущение по норме является малым, приходим к следующему линеаризованному уравнению относительно $\vec{y}$:

$$\dot{\vec{y}} = \hat{A}(t)\vec{y}, \tag{2.12}$$

где $\hat{A}(t)$ — матрица с элементами

$$a_{j,k}(t) = \left.\frac{\partial f_j}{\partial x_k}\right|_{\vec{x}(t)=\vec{x}^0(t)}, \qquad j,k = 1,2,\ldots,N, \tag{2.13}$$

называемая *матрицей линеаризации* системы в окрестности решения $\vec{x}^0(t)$, а f_j — компоненты вектор-функции $\vec{F}$. Так как элементы матрицы $\hat{A}$ зависят от точки на исследуемой траектории, то в общем случае они меняются во времени. Матрица характеризуется N собственными значениями $s_i(t)$, также меняющимися во времени. Собственные значения являются корнями характеристического уравнения

$$\mathrm{Det}\left[\hat{A}(t) - s\hat{E}\right] = 0, \tag{2.14}$$

где $\hat{E}$ — единичная матрица. N собственным значениям (считая кратные) соответствуют N линейно независимых собственных вектора $\vec{e}_i(t)$, изменяющих свои направления при движении вдоль траектории $\vec{x}^0(t)$ и удовлетворяющих уравнению

$$\hat{A}(t)\vec{e}_i(t) = s_i(t)\vec{e}_i(t), \quad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{2.15}$$

Рассмотрим матрицу линеаризации в точке исследуемой траектории в момент времени t. Начальное возмущение в направлении i-го собственного вектора, заданное в момент t, меняется за малый интервал времени τ следующим образом:

$$\vec{y}^i(t+\tau) = \vec{y}^i(t)\exp\left[\tau s_i(t)\right]. \tag{2.16}$$

Увеличение или уменьшение нормы возмущения $\|\vec{y}^i(t+\tau)\|$ определяется знаком вещественной части $s_i(t)$. При движении вдоль траектории $\vec{x}^0(t)$ показатель экспоненты $s_i(t)$ принимает различные значения. Следовательно, возможна ситуация, когда возмущение $\vec{y}(t+\tau) = \sum_{i=1}^{N} \vec{y}^i(t+\tau)$ экспоненциально растет с ростом τ в одних точках исследуемой траектории и уменьшается в других.

Рассмотрим эволюцию компоненты малого возмущения $\vec{y}^i(t)$, направленной вдоль i-го собственного вектора матрицы $\hat{A}(t)$. Устойчивость траектории вдоль собственного вектора $\vec{e}_i(t)$ определяется *характеристическим показателем Ляпунова* λ_i,

$$\lambda_i = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t - t_0} \ln \left\| \frac{\vec{y}^i(t)}{\vec{y}^i(t_0)} \right\|, \tag{2.17}$$

где черта сверху означает верхний предел, t_0 — начальный момент времени. Таким образом, устойчивость траектории в R^N определяется набором из N показателей Ляпунова. Расположенные в убывающем порядке — $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_N$, они образует так называемый *спектр характеристических показателей Ляпунова* (*спектр ЛХП*) фазовой траектории $\vec{x}^0(t)$.

Выясним, как показатели Ляпунова связаны с собственными значениями матрицы линеаризации $s_i(t)$. Рассмотрим (2.16) в начальный момент времени $t = t_0$, предполагая, что интервал τ мал. Перейдем в точку $\vec{x}(t_1)$, где $t_1 = t_0 + \tau$, и в качестве начального возмущения возьмем

$$\vec{y}^i(t_1) = \vec{y}^i(t_0)\exp\left[s_i(t_0)\tau\right].$$

Поскольку τ мало, будем считать, что направление собственных векторов $\vec{e}_i$ почти не меняется за время τ, и можно считать, что вектор $\vec{y}^i(t_1)$ направлен вдоль i-го собственного вектора $\vec{e}_i(t_0)$. Полагаем, что начальное возмущение $\vec{y}^i(t_0)$ настолько мало, что оно остается малым и в последующие моменты времени. Перемещаясь по кривой $\vec{x}^0(t)$ с малым шагом τ, получаем приближенное выражение, описывающее эволюцию малого возмущения в направлении i-го собственного вектора:

$$\vec{y}^i(t) \approx \vec{y}^i(t_0)\exp\left[\sum_k s_i(t_k)\tau\right]. \tag{2.18}$$

Переходя к пределу $\|\vec{y}^i(t_0)\| \to 0$ и $\tau \to 0$, получаем строгое равенство

$$\vec{y}^i(t) = \vec{y}^i(t_0)\exp\left[\int\limits_{t_0}^{t} s_i(t')\mathrm{d}T'\right]. \tag{2.19}$$

В результате подстановки (2.19) в (2.17) приходим к равенству

$$\lambda_i = \overline{\lim_{t\to\infty}}\,\frac{1}{t - t_0}\int\limits_{t_0}^{t} \mathrm{Re}\, s_i(t')\mathrm{d}t'. \tag{2.20}$$

Таким образом, i-й показатель Ляпунова λ_i можно понимать как усредненную вдоль изучаемой траектории вещественную часть собственного значения s_i матрицы линеаризации $\hat{A}(t)$. Он показывает, что происходит с соответствующей компонентой начального возмущения в среднем вдоль траектории. Дивергенция потока и, следовательно, эволюция фазового объема определяется суммой показателей Ляпунова. При достаточно общих предположениях о свойствах ДС можно показывать, что

$$\sum_{i=1}^{N}\lambda_i = \overline{\lim_{t\to\infty}}\,\frac{1}{t - t_0}\int\limits_{t_0}^{t} \mathrm{div}\vec{F}(t')\mathrm{d}t'. \tag{2.21}$$

Если траектория $\vec{x}^0(t)$ устойчива по Ляпунову, то произвольное начальное возмущение $\vec{y}(t_0)$, в среднем, вдоль траектории не растет. Для этого необходимо и достаточно, чтобы спектр ЛХП не содержал положительных показателей. Если произвольная ограниченная траектория $\vec{x}^0(t)$ автономной системы (2.10) не является состоянием равновесия или асимптотической траекторией седла, то по крайней мере один из показателей Ляпунова всегда равен нулю. Действительно, малое возмущение в среднем остается неизменным вдоль направления, касательного к траектории. Элемент фазового объема должен сжиматься для фазовых траекторий, расположенных вблизи аттрактора. В этом случае усредненная дивергенция фазового потока $\vec{F}(\vec{x}(t))$ диссипативной ДС отрицательна и сумма показателей Ляпунова удовлетворяет следующему неравенству:

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i < 0. \tag{2.22}$$

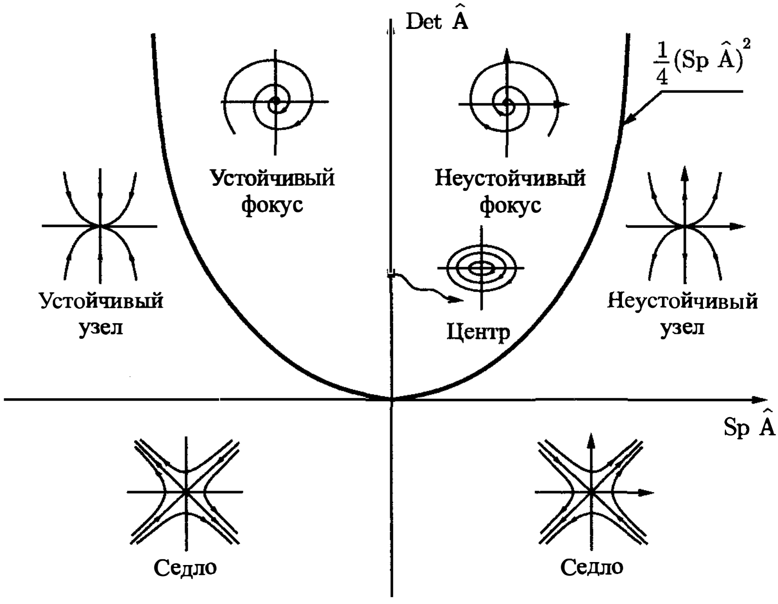


Рис. 2.3. Диаграмма состояний равновесия на плоскости (фазовые портреты показаны в преобразованных координатах)

Устойчивость состояний равновесия в $\mathbf{R}^N$. Если частное решение $\vec{x}^0(t)$ системы (2.10) является состоянием равновесия, то есть $\vec{F}(\vec{x}^0) = \vec{0}$, то матрица линеаризации $\hat{A}$ рассчитывается только в одной точке фазового пространства и, следовательно, является матрицей с постоянными элементами $a_{i,j}$. Собственные векторы и собственные значения матрицы $\hat{A}$ постоянны во времени, а показатели Ляпунова равны вещественным частям собственных значений: $\lambda_i = \mathrm{Re}s_i$. Сигнатура спектра ЛХП показывает, является ли состояние равновесия устойчивым или нет. Для анализа поведения фазовых траекторий в локальной окрестности состояния равновесия необходимо знать также и мнимые части собственных значений матрицы линеаризации. На фазовой плоскости (случай $N = 2$) положение равновесия характеризуется двумя собственными значениями матрицы $\hat{A}$: s_1 и s_2. Возможны следующие случаи: 1) s_1 и s_2 являются вещественными отрицательными числами. В этом случае состояние равновесия представляет собой устойчивый узел; 2) s_1 и s_2 — вещественные положительные числа. Состояние равновесия является неустойчивым узлом; 3) s_1 и s_2 — вещественные числа, но с различными знаками. Состояние равновесия в этом случае — седло; 4) s_1 и s_2 — комплексно-сопряженные числа с $\mathrm{Re}s_{1,2} < 0$. Состояние равновесия — устойчивый фокус; 5) s_1 и s_2 — комплексно–сопряженные с $\mathrm{Re}s_{1,2} > 0$. Состояние равновесия — неустойчивый фокус; 6) s_1 и s_2 — чисто мнимые числа: $s_{1,2} = \pm j\omega$. Состояние равновесия в этом случае является центром. На рис. 2.3 показана диаграмма состояний равновесия, существующих на фазовой плоскости при различных значениях детерминанта и следа матрицы $\hat{A}$ (соответственно $\mathrm{Det}\hat{A} = s_1 s_2$ и $\mathrm{Sp}\hat{A} = s_1 + s_2$).

Помимо вышеупомянутых состояний равновесия, в пространстве с размерностью $N \geqslant 3$ возможны и другие типы состояний равновесия, например, неустойчивое по Ляпунову состояние равновесия, называемое седло-фокусом. На рис. 2.4 показаны два варианта состояния равновесия седло-фокусного типа, реализуемые в R^3. Они различаются размерностями их устойчивых и неустойчивых многообразий.

Зная показатели Ляпунова, нетрудно определить, к какому типу предельных множеств принадлежит исследуемое состояние равновесия. Положение равновесия является аттрактором, если оно асимптотически устойчиво во всех направлениях, т. е. его спектр ЛХП состоит только из отрицательных показателей (устойчивый узел или фокус). Если состояние равновесия неустойчиво во всех направлениях, то оно является репеллером (неустойчивый узел или фокус). Если спектр ЛХП включает как положительные, так и отрицательные показатели, то состояние равновесия принадлежит к седловому типу (простое седло или седло-фокус). Кроме того, число показате-

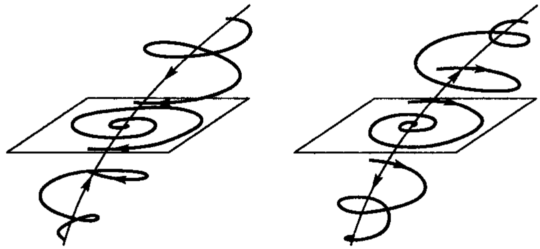


Рис. 2.4. Седло-фокусы в трехмерном фазовом пространстве: *а* — s_1 — вещественно и отрицательно, $s_{2,3}$ — комплексно-сопряженные $\mathrm{Re}s_{2,3} > 0$; *б* — s_1 — вещественно и положительно, $s_{2,3}$ — комплексно-сопряженные $\mathrm{Re}s_{2,3} < 0$

лей $\lambda_i \geqslant 0$ и $\lambda_j \leqslant 0$ определяет размерность неустойчивого и устойчивого многообразий.

Устойчивость периодических решений. Любое периодическое решение $\vec{x}^0(t)$ системы (2.10) удовлетворяет условию

$$\vec{x}^0(t) \equiv \vec{x}^0(t+T), \tag{2.23}$$

где T — период решения. Матрица линеаризации $\hat{A}(t)$, вычисляемая в точках траектории, соответствующей периодическому решению $\vec{x}^0(t)$, также является периодической:

$$\hat{A}(t) = \hat{A}(t+T). \tag{2.24}$$

В этом случае уравнение для возмущений (2.12) представляет собой линейное уравнение с периодическими коэффициентами. Устойчивость периодического решения можно оценить, определив, как малое возмущение $\vec{y}(t_0)$ меняется за период T. Его эволюция может быть представлена следующим образом:

$$\vec{y}(t_0+T) = \hat{M}_T\vec{y}(t_0), \tag{2.25}$$

где $\hat{M}_T$ — постоянная матрица, называемая *матрицей монодромии*. Собственные значения матрицы монодромии, то есть корни характеристического уравнения

$$\mathrm{Det}[\hat{M}_T - \mu\hat{E}] = 0, \tag{2.26}$$

называются *мультипликаторами* периодического решения $\vec{x}^0(t)$. Мультипликаторы определяют устойчивость периодического решения. Действительно, действие оператора монодромии (2.25) за период T сводится к следующему: компоненты разложения первоначального возмущения по собственным векторам матрицы $\hat{A}(t_0)$ умножаются на соответствующие мультипликаторы μ_i. Таким образом, для того чтобы периодическое решение $\vec{x}^0(t)$ было устойчиво по Ляпунову, необходимо и достаточно, чтобы его мультипликаторы удовлетворяли требованию $|\mu_i| \leqslant 1, i = 1, 2, \ldots, N$. По крайней мере, один из мультипликаторов всегда равен $+1$. Как собственные значения матрицы монодромии, мультипликаторы удовлетворяют условиям:

$$\sum_{i=1}^{N} \mu_i = \mathrm{Sp}\hat{M}_T, \qquad \prod_{i=1}^{N} \mu_i = \mathrm{Det}\hat{M}_T. \tag{2.27}$$

Мультипликаторы связаны с показателями Ляпунова для периодического решения следующим образом:

$$\lambda_i = \frac{1}{T} \ln |\mu_i|. \tag{2.28}$$

Нулевой показатель в спектре ЛХП предельного цикла соответствует мультипликатору, равному единице. Предельный цикл является аттрактором, если все другие показатели отрицательны, а соответствующие мультипликаторы по абсолютной величине меньше единицы. Если спектр ЛХП включает показатели различного знака, то предельный цикл является седловым. Размерность неустойчивого многообразия седлового цикла равна числу неотрицательных показателей в спектре ЛХП, а размерность его устойчивого многообразия равна числу показателей, для которых $\lambda_i \leqslant 0$. Если все $\lambda_i > 0$, то предельный цикл является абсолютно неустойчивым (репеллером).

Устойчивость квазипериодических и хаотических решений. Пусть частное решение $\vec{x}^0(t)$ системы (2.10) соответствует квазипериодическим колебаниям с k независимыми частотами ω_j, $j = 1, 2, \ldots, k$, т. е. справедливо следующее:

$$\begin{aligned} \vec{x}^0(t) &= \vec{x}^0\big(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_k(t)\big) = \\ &= \vec{x}^0\big(\varphi_1(t) + 2\pi m, \varphi_2(t) + 2\pi m, \ldots, \varphi_k(t) + 2\pi m\big), \end{aligned} \tag{2.29}$$

где m — произвольное целое число, $\varphi_j(t) = \omega_j t, j = 1, 2, \ldots, k$. Устойчивость квазипериодического решения характеризуется спектром ЛХП. Матрица линеаризации $\hat{A}(t)$ является квазипериодической, поэтому показатели Ляпунова строго определены только в пределе $t \to \infty$. В случае *эргодических* квазипериодических колебаний периодичности решения по всем аргументам φ_j соответствует наличие k нулевых показателей в спектре ЛХП.

Если все другие показатели — отрицательные, то k-мерная тороидальная гиперповерхность (мы будем использовать для простоты термин «k-мерный тор»), на которой лежит исследуемая квазипериодическая траектория, является аттрактором. Если все отличные от нуля показатели положительны, то k-мерный тор будет репеллером. Тор является седловым, если спектр ЛХП траекторий на торе помимо нулевых показателей содержит как положительные, так и отрицательные показатели[1].

Хаотическая траектория, независимо от того, принадлежит ли она хаотическому аттрактору, хаотическому репеллеру или седлу, всегда имеет хотя бы одно направление неустойчивости. Поэтому спектр ЛХП хаотического решения всегда имеет по крайней мере один положительный показатель Ляпунова. Неустойчивость фазовых траекторий на хаотическом аттракторе и притягивающий характер предельного множества не противоречат друг другу. Фазовые траектории, стартующие из близких начальных точек в бассейне притяжения, стремятся на аттрактор и в то же время экспоненциально расходятся на нем. Следовательно, хаотические траектории на аттракторе неустойчивы по Ляпунову, но устойчивы по Пуассону.

2.4. Устойчивость фазовых траекторий в системах с дискретным временем

Пусть система с дискретным временем описывается отображением

$$\vec{x}(n+1) = \vec{P}(\vec{x}(n)), \tag{2.30}$$

где $\vec{x} \in R^N$ — вектор состояния, n — дискретная переменная времени, $\vec{P}(\vec{x})$ — вектор-функция с компонентами $P_j, j = 1, 2, \ldots, N$. Проанализируем устойчивость произвольного решения $\vec{x}^0(n)$. Рассматривая малое возмущение $\vec{y}(n) = \vec{x}(n) - \vec{x}^0(n)$ и линеаризуя отображение вблизи решения $\vec{x}^0(n)$, получаем линейное уравнение для возмущения:

$$\vec{y}(n+1) = \hat{M}(n)\vec{y}(n), \tag{2.31}$$

где $\hat{M}(n)$ — линеаризованная матрица с элементами

$$m_{j,k} = \left.\frac{\partial P_j(\vec{x})}{\partial x_k}\right|_{\vec{x}\in\vec{x}^0(n)}. \tag{2.32}$$

[1]Эту ситуацию следует отличать от хаотической динамики на k-мерном торе, которая может иметь место при $k \geqslant 3$.

Из (2.31) следует, что начальное возмущение эволюционирует согласно закону

$$\vec{y}(n+1) = \hat{M}(n)\hat{M}(n-1)\ldots\hat{M}(1)\vec{y}(1). \tag{2.33}$$

По аналогии с дифференциальными системами введем показатели Ляпунова для решения $\vec{x}^0(n)$:

$$\lambda_i = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, \frac{1}{n} \ln \left\| \frac{\vec{y}^i(n)}{\vec{y}^i(1)} \right\|. \tag{2.34}$$

Принимая во внимание тот факт, что

$$\hat{M}(n)\vec{y}^i(n) = \mu_i(n)\vec{y}^i(n), \tag{2.35}$$

где μ_i — собственное значение матрицы $\hat{M}(n)$, соответствующее i-му собственному вектору, и из (2.33) и (2.34) получаем

$$\lambda_i = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln |\mu_i(k)|. \tag{2.36}$$

Устойчивость неподвижных точек и предельных циклов отображения характеризуется мультипликаторами. Последовательность состояний $\vec{x}_1^0, \vec{x}_2^0, \ldots, \vec{x}_l^0$ называется *циклом периода* l отображения, или просто *l-циклом*, если выполнено следующее условие:

$$\vec{x}_1^0 = \vec{P}^l(\vec{x}_1^0). \tag{2.37}$$

Если $l = 1$, то есть

$$\vec{x}^0 = \vec{P}(\vec{x}^0), \tag{2.38}$$

состояние $\vec{x}^0$ называется *неподвижной точкой* отображения или *циклом периода* 1. Матрица линеаризации $\hat{M}$ для периодического решения $\vec{x}^0(n)$ тоже является периодической, то есть $\hat{M}(n+l) = \hat{M}(n)$. Компонента возмущения $\vec{y}^i(1)$ за период l меняется следующим образом:

$$\vec{y}^i(l+1) = \hat{M}(l)\hat{M}(l-1)\ldots\hat{M}(1)\vec{y}^i(1) = \hat{M}_l\vec{y}^i(1). \tag{2.39}$$

Матрица $\hat{M}_l$ не зависит от выбора начальной точки и является аналогом матрицы монодромии в дифференциальной системе. Собственные значения μ_i^l матрицы $\hat{M}_l$ называются *мультипликаторами l-цикла* отображения. Они показывают, как изменяются проекции вектора возмущения на собственные векторы линеаризованной матрицы $\hat{M}$ за период l. Мультипликаторы μ_i^l связаны с показателями Ляпунова соотношением

$$\lambda_i = \frac{1}{l}\ln|\mu_i^l|. \tag{2.40}$$

l-цикл отображения асимптотически устойчив, если его мультипликаторы удовлетворяют условию $|\mu_i^l| < 1$, $i = 1, 2, \ldots, N$. Таким образом, спектр ЛХП устойчивого цикла содержит только отрицательные значения.

Если отображение с размерностью фазового пространства $N - 1$ является отображением последования в сечении Пуанкаре некоторой N-мерной дифференциальной системы, то оно обладает следующим свойством: множество собственных значений $\mu_i^l, i = 1, 2, \ldots, (N-1)$ матрицы $\hat{M}_l$ для l-цикла, дополненное мультипликатором $\mu_N^l = 1$, полностью совпадает с множеством собственных значений матрицы монодромии соответствующего предельного цикла исходной дифференциальной системы. На этом основании устойчивость периодических решений в дифференциальных системах может быть количественно описана мультипликаторами соответствующих циклов в отображении Пуанкаре.

2.5. Заключение

В данной лекции мы кратко и в несколько упрощенном виде привели основные представления и методы теории устойчивости. Главное внимание было уделено линейному анализу устойчивости траекторий. Теория устойчивости имеет огромное значение для нелинейной динамики. Исследование устойчивости траекторий позволяет определить характер предельных множеств системы и качественно представить ее фазовый портрет. Кроме того, изменение характера устойчивости траекторий, принадлежащих тому или иному предельному множеству, при изменении параметров системы позволяет диагностировать бифуркацию — явление, состоящее в качественной перестройке фазового портрета ДС. Наиболее типичные бифуркации динамических систем будут рассмотрены в следующей лекции. Отметим, что при всей важности линейного анализа устойчивости его одного не достаточно для представления полной картины поведения ДС и описания возможных в системе бифуркаций.

Лекция 3
Бифуркации динамических систем

3.1. Введение

Если внимательно присмотреться к окружающей нас природе, то можно, в частности, сделать следующее интересное наблюдение. Жизнь на планете Земля возможна лишь благодаря тепловому излучению Солнца, которое служит источником энергии. Летом эта энергия в северном полушарии больше, чем зимой. И картина летней природы при этом заметно отличается от зимней. Давайте рассмотрим в качестве примера обьем воды в озере. Количественной мерой привносимой солнечной энергии является температура воды (точнее, энергия пропорциональна температуре). Летом вода в озере теплая и можно купаться. С наступлением осени температура воды постепенно уменьшается. Купаться уже не хочется, однако вода и при более низкой, но плюсовой температуре остается водой! Глубокой осенью верхний слой воды в озере остывает до нулевой температуры и вдруг превращается в лед! Далее и при $-20°$ С лед остается льдом. Что же произошло? При прохождении температуры через нуль вода резко изменила свои свойства: она из жидкого состояния перешла в твердое. И не плавно, а скачком.

Если рассматривать температуру воды как некий параметр системы, то хорошо известно, что с изменением параметра вода резко меняет свои свойства при переходе через $0°$ С, через $100°$ С, когда вода превращается в пар. Есть и другие особые значения температуры воды. Оказывается, что большинство интересных физических задач при их математическом описании приводят к дифференциальным уравнениям, зависящим от одного или нескольких параметров.

Рассмотрим в качестве примера уравнения колебаний обыкновенного маятника или (что с математической точки зрения полностью идентично) параллельного RLC-контура:

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad \omega_0 = 1. \tag{3.1}$$

Уравнение (3.1) содержит два параметра: α — параметр затухания, характеризующий трение, и ω_0 — параметр, определяющий частоту колебаний.

Если потери энергии отсутствуют, параметр затухания $\alpha = 0$, то решением уравнения (3.1) будут гармонические незатухающие колебания. При малом трении $0 < \alpha < 1$ движение системы будет колебательным с амплитудой, которая уменьшается во времени по экспоненциальному закону. Наконец, при достаточно большом трении ($\alpha > 1$) движение маятника становится апериодическим, затухающим во времени. Уже в этом простом примере выделяются два особых значения параметра $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$, отклонения от которых качественно меняют свойства системы.

Управляя параметрами динамической системы (например, коэффициентом α в дифференциальном уравнении (3.1)), мы можем наблюдать качественное изменение фазового портрета. Такое явление называют *бифуркацией* (от слова раздвоение) динамической системы, а значения параметров, при которых имеет место бифуркация, называются *бифуркационными.* Под качественным изменением фазового портрета мы понимаем изменение его структуры, состоящее в появлении или исчезновении предельных множеств, а также в изменении характера устойчивости траекторий, принадлежащих предельным множествам. Например, если в фазовом пространстве системы существует устойчивая точка равновесия, а при изменении одного или нескольких управляющих параметров она становится неустойчивой, то коренным образом меняется поведение всех фазовых траекторий системы из области притяжения этой точки равновесия. Теперь они будут притягиваться к другому аттрактору, то есть в системе происходит бифуркация.

Чаще всего наблюдаемое состояние системы ниже точки бифуркации и выше ее при изменении параметра заметно меняется. Так, охлаждая воду до 0° С, мы сразу видим, что вода переходит в другое состояние, становясь льдом. В то же время при изменении температуры от +22° С до +3° С вода остается водой! Однако возможны и такие бифуркации, которые, вроде бы, не приводят к изменению состояния системы. Сюда можно отнести бифуркации предельных множеств, не являющихся аттракторами. Результат таких бифуркаций не сразу заметен при экспериментальном наблюдении, поскольку установившийся режим, существующий до бифуркации, продолжает существовать и быть устойчивым. Однако в фазовом пространстве происходят изменения, которые так или иначе существенны для ДС. Примером может служить седло-репеллерная бифуркация предельных циклов в области синхронизации автоколебаний. Она приводит к исчезновению пары циклов: седлового и репеллерного. Устойчивый цикл при этом остается неизменным, и в эксперименте мы наблюдаем все те же периодические колебания. Однако до бифуркации устойчивый предельный цикл располагался на поверхности тора, а после седло-узловой бифуркации тора уже не существует. Исчезновение тора существенно меняет фазовый портрет.

Меняются многие черты поведения системы. Но это видно не сразу, а при изменении управляющих параметров, при воздействии на систему внешних сигналов, при анализе влияния шума.

Различают *локальные* и *нелокальные бифуркации* ДС. *Локальные бифуркации* связаны с локальной окрестностью траектории на предельном множестве. Они отражают изменение устойчивости как отдельных траекторий, так и всего предельного множества целиком и могут свидетельствовать об исчезновении исследуемого предельного множества в результате его слияния с другим предельным множеством. Все перечисленные выше явления могут быть обнаружены в рамках линейного анализа устойчивости. Например, смена знака одного из ляпуновских показателей траектории на предельном множестве свидетельствует о локальной бифуркации предельного множества. *Нелокальные бифуркации* связаны с поведением многообразий предельных седловых множеств, в частности, с образованием сепаратрисных петель, гомоклинических и гетероклинических кривых, а также с возникновением касания аттрактора и сепаратрисной кривой или поверхности. Перечисленные эффекты не могут быть обнаружены в рамках линейного приближения. В такой ситуации необходимо учитывать нелинейные свойства изучаемой системы.

В математике и физике существует понятие грубости или структурной устойчивости. Суть этого понятия в том, что при малом изменении параметра грубая система хоть и изменяет в деталях режим функционирования, но не принципиально. Можно сказать, что качественной перестройки фазового портрета не происходит. С этой точки зрения для грубых систем переход через точку бифуркации означает смену одного структурно устойчивого режима на другой. При этом в точке бифуркации система не является грубой: малое изменение параметра в ту или иную сторону приводит к резким изменениям состояния.

Анализ бифуркаций ДС при изменении параметров системы позволяет построить *бифуркационную диаграмму* системы. *Бифуркационная диаграмма* представляет собой набор точек, линий и поверхностей в пространстве параметров, которые соответствуют различным бифуркациям предельных множеств системы. Если при некоторых значениях параметров существует несколько предельных множеств, то бифуркационная диаграмма является «многолистной». Сосуществование большого (даже бесконечного) числа предельных множеств типично для систем со сложной динамикой. В многомерном пространстве параметров системы бифуркации характеризуются некоторым количеством условий, налагаемых на параметры системы. Число таких условий определяет *коразмерность* бифуркации. Например, коразмерность 1 означает, что имеется только одно бифуркационное условие.

3.2. Бифуркация «двукратное равновесие»

Давайте вернемся к нашему примеру с устойчивостью стационарных состояний в системе (2.7). Мы условились, что в уравнении (2.7) параметры a и b положительны. Устойчивость определяется знаком производной правой части уравнения (2.7) в точке равновесия, т. е. знаком величины s в (2.9). При положительных значениях параметров a и b эта производная всегда отлична от нуля. А что если мы будем уменьшать значение параметра a? Как видно из (2.9), при $a = 0$ (независимо от величины $b > 0$) величина s обращается в нуль, возмущение y не нарастает и не затухает! Мало того, при $a = 0$ в системе два состояния рановесия как бы сливаются в одно ($x = 0$)! Далее, если $a < 0$, то состояний равновесия нет вовсе! Действительно, в этом случае $x_{1,2}^0 = \pm j\sqrt{\frac{|a|}{b}}$, т. е. становятся чисто мнимыми.

Приведем теперь результаты математического анализа этой бифуркации, которая известна как бифуркация «*двукратное равновесие*» или *седло-узловая бифуркация* точек равновесия. Вновь рассмотрим уравнение (2.7). Пусть $x^0(a)$ есть грубое состояние равновесия, т. е. $s(a) \neq 0$. Это означает, что при малой вариации параметра a состояние равновесия $x^0(a)$ продолжает существовать как устойчивое или неустойчивое.

При некотором значении параметра $a = a^*$ собственное число $s(a^*)$ в точке равновесия может обратиться в ноль:

$$s(a) = \left.\frac{dF}{dx}\right|_{x^0} = 0, \quad a = a^*. \tag{3.2}$$

Для реализации бифуркации «двукратное равновесие» необходимо, чтобы вторая производная была отлична от нуля

$$\left.\frac{d^2F}{dx^2}\right|_{x^0} \neq 0. \tag{3.3}$$

Для выполнения условий (3.2) и (3.3) в общем случае необходимо, чтобы исходное уравнение в правой части включало как минимум квадратичное нелинейное слагаемое, как в нашем примере (2.7).

Если условия (3.2) и (3.3) выполнены, то x^0 есть двукратный корень исходного уравнения (2.7). Значение параметра a^*, при котором выполняется условие (3.2), является точкой бифуркации. Выше точки бифуркации $a > a^*$ мы имеем 2 состояния равновесия, одно из которых устойчиво, а другое — неустойчиво. В точке бифуркации $a = a^*$ они сливаются в одно, при $a < a^*$ состояний равновесия в системе не будет! В нашем случае (2.7) $a^* = 0$. Результаты можно представить графически (см. рис. 3.1).

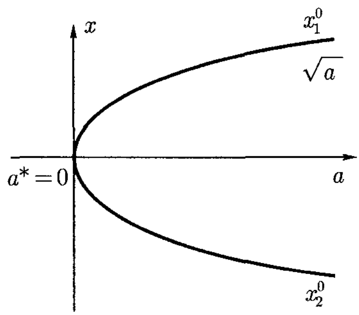


Рис. 3.1. Бифуркация «двукратное равновесие». При $a > 0$ в системе (2.7) два стационарных состояния x_1^0 и x_2^0, при $a = 0$ они сливаются в одно и при $a < 0$ стационарные состояния исчезают

Для фазового пространства R^N устойчивая точка равновесия является узлом, а неустойчивая — седлом, поэтому данная бифуркация называется также *седло-узловой бифуркацией точек равновесия*.

3.3. «Мягкие» и «жесткие» бифуркации. Катастрофы

Несмотря на многолетнюю историю существования и развития классической теории устойчивости и бифуркаций, наступил момент (как это часто бывает), когда к этой теории было вдруг привлечено всеобщее внимание. Причиной тому послужили популярно изложенные версии работ французского математика Рене Тома по так называемой теории катастроф. Теория катастроф в начале 1970-х гг. стала модной, понятной (как им казалось!) для неспециалистов и универсальностью своих претензий стала напоминать псевдонаучные теории прошлых времен. В чем же суть дела? Появление теории катастроф Р. Тома специалистами было воспринято нормально. Ряд результатов этой теории заслуживает самого глубокого уважения. Но «философского» открытия здесь нет. Поясним почему.

Суть дела заключается в том, что речь идет все о тех же бифуркациях, но при этом выбирается один из типов — так называемые *жесткие бифуркации* или *кризисы*. Для пояснения рассмотрим два простых примера. В первом случае (рис. 3.2, *а,б*) в результате бифуркации исходное стационарное состояние теряет устойчивость и рождаются два новых устойчивых стационарных состояния. При этом вновь появившиеся два стационарных состояния (рис. 3.2, *в*) расположены в непосредственной близости от исходного состояния, которое потеряло устойчивость (помечено звездочкой). Бифуркации такого типа называют *мягкими*, имея в виду то, что вновь родившийся режим функционирования системы как бы появляется из режима, потерявшего устойчивость, и сосуществует рядом с ним.

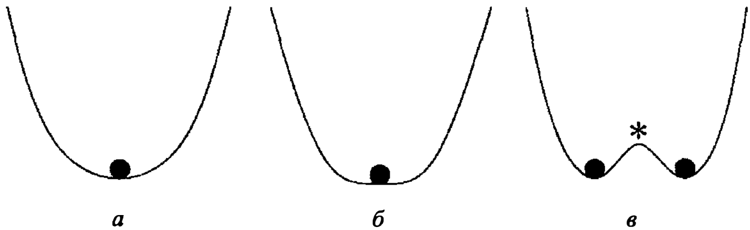


Рис. 3.2. Пример мягкой бифуркации. Стационарное состояние (*а*) теряет устойчивость (*б*) и вблизи него появляются два новых устойчивых стационарных состояния (*в*)

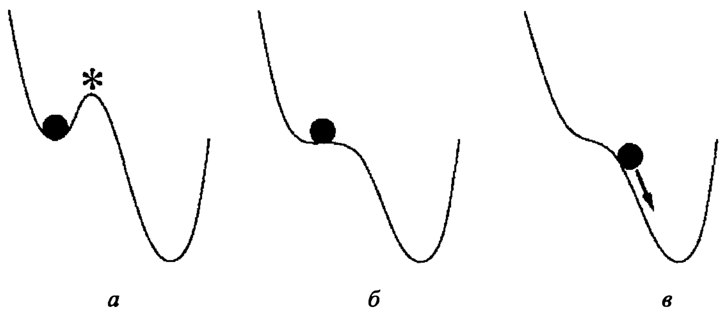


Рис. 3.3. Жесткая потеря устойчивости стационарным состоянием, катастрофа. Качественная иллюстрация бифуркации «двукратное равновесие» (см. рис. 3.1)

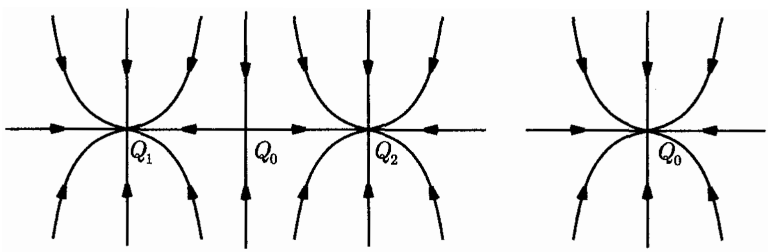
Другой пример бифуркации качественно представлен на рис. 3.3. При значении параметра $\alpha < \alpha^*$ (рис. 3.3, *а*) шарик находится в устойчивом стационарном состоянии. При этом существует еще одно, неустойчивое состояние (помечено звездочкой).

В точке бифуркации $\alpha = \alpha^*$ устойчивое и неустойчивое состояния сливаются в одно (рис. 3.3, *б*). Далее они исчезают и система выбирает новый режим (например, как это показано на рис. 3.3, *в*, который существенно отличается от предыдущего и не находится в непосредственной близости от исходного режима. Такой тип бифуркаций называют *жестким* и именно жесткие бифуркации явились предметом анализа в теории катастроф.

Рассмотренный выше пример бифуркации «двукратное равновесие» в системе (2.7) представляет собой типичный пример жесткой бифуркации, который качественно проиллюстрирован на рис. 3.3.

3.4. Бифуркация «трехкратное равновесие»

Рассмотренная нами бифуркация «двукратное равновесие» относится к так называемым бифуркациям коразмерности один. Бифуркация «трехкратное равновесие», которую мы собираемся теперь проанализировать, относится к бифуркациям коразмерности два и требует управления двумя параметрами Эта бифуркация состоит в слиянии трех состояний равновесия: двух узлов Q_1, Q_2 и седла Q_0, расположенного между ними. В результате остается один устойчивый узел в точке Q_0 (иллюстрация на рис. 3.4).



а *б*

Рис. 3.4. Иллюстрация бифуркации «трехкратное равновесие»: *а* — два устойчивых узла и седло до бифуркации; *б* — один устойчивый узел после бифуркации

Модельная система для такой бифуркации может быть записана в виде

$$\dot{x} = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^3. \tag{3.4}$$

Анализ состояний равновесия показывает, что при $\alpha_2 < 0, \alpha_3 < 0$ вне зависимости от значения α_1 у системы имеется единственное состояние равновесия Q_0 с собственным значением $s_{Q_0} < 0$, т. е. оно является асимптотически устойчивым. При $\alpha_2 > 0, \alpha_3 < 0$ существует область значений параметра α_1 (заштрихованная область на бифуркационной диаграмме, изображенной на рис. 3.5, *а*), в которой система имеет три состояния равновесия, Q_0, Q_1 и Q_2. Одно из них, Q_0, является неустойчивым с $s_{Q_0} > 0$, а два других, Q_1 и Q_2, устойчивы с $s_{Q_{1,2}} \leqslant 0$. Область бистабильности на бифуркационной диаграмме (см. рис. 3.5) ограничена линиями l_1 и l_2, которые соответствуют седло-узловым бифуркациям узлов $Q_{1,2}$ с седлом Q_0.

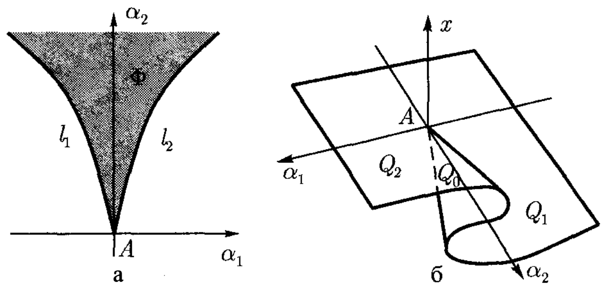


Рис. 3.5. Иллюстрация бифуркации трехкратного равновесия: *а* — бифуркационная диаграмма; *б* — фазо-параметрическая диаграмма

Линии l_1 и l_2 сходятся к точке A ($\alpha_1 = \alpha_2 = 0$), называемой *точкой сборки*, или *каспом*. В этой точке одновременно выполняются два бифуркационных условия: $s_{Q_1}(\alpha_1, \alpha_2) = 0$ и $s_{Q_2}(\alpha_1, \alpha_2) = 0$. Поэтому бифуркация трехкратного равновесия имеет коразмерность два. В фазо-параметрическом пространстве системы (3.4) имеет место структура, называемая сборкой (см. рис. 3.5, *б*). В области сборки верхний и нижний листы бифуркационной диаграммы соответствуют устойчивым состояниям равновесия, а центральный — неустойчивому.

3.5. Бифуркация Андронова–Хопфа

В динамической системе с размерностью $N \geqslant 2$ возможна такая ситуация, когда пара комплексно-сопряженных собственных значений точки равновесия типа «устойчивый фокус» пересекает мнимую ось. Это означает, что выполнено бифуркационное условие $\mathrm{Re} s_{1,2} = 0$. Пусть при этом $\mathrm{Im} s_{1,2} \neq 0$. Этот случай отвечает *бифуркации Андронова–Хопфа*, иначе называемой *бифуркацией рождения (исчезновения) предельного цикла*. Такая бифуркация была впервые исследована А.А. Андроновым для случая $N = 2$ и затем обобщена Е. Хопфом на системы с произвольным числом измерений N. Существуют два различных вида бифуркаций Андронова–Хопфа: *суперкритическая* бифуркация и *субкритическая*, или *жесткая*, бифуркация. Суперкритическая бифуркация является мягкой, а субкритическая бифуркация соответствует кризису аттрактора. Бифуркация Андронова–Хопфа определяется единственным бифуркационным условием и поэтому имеет коразмерность один.

Суперкритическая бифуркация Андронова–Хопфа проиллюстрирована на рис. 3.6, *а–в* и состоит в следующем. При $\alpha < \alpha^*$ существует устойчивый фокус F, который в точке бифуркации $\alpha = \alpha^*$ превращается в центр и имеет пару чисто мнимых собственных значений $s_{1,2} = \pm \mathrm{j}\omega_0$. При $\alpha > \alpha^*$ фокус F становится неустойчивым ($\mathrm{Re} s_{1,2} > 0$), и вблизи него рождается устойчивый предельный цикл C_0.

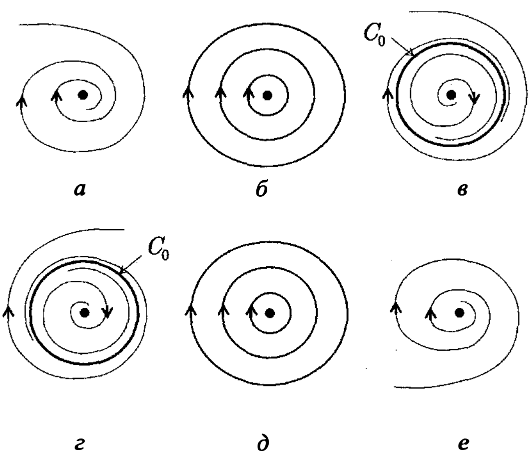


Рис. 3.6. Бифуркации Андронова – Хопфа: *а–в* — суперкритическая; *г–е* — субкритическая

Субкритическая бифуркация Андронова – Хопфа происходит, когда при $\alpha = \alpha^*$ неустойчивый (в общем случае для $N > 2$ седловой) предельный цикл C_0 «стягивается» в точку фокуса F, который был устойчивым при $\alpha < \alpha^*$. В результате цикл исчезает, а фокус становится неустойчивым (рис. 3.6, *г–е*).

Модельная система для бифуркации Андронова – Хопфа имеет следующий вид:

$$\dot{a} = (\alpha + \mathrm{j}\omega_0)a + L_1 a|a|^2, \quad \omega_0 \neq 0, L_1 \neq 0, \tag{3.5}$$

где a — мгновенная комплексная амплитуда. Величина L_1 называется *первой ляпуновской величиной* состояния равновесия. Если $L_1 < 0$, бифуркация является суперкритической. Если $L_1 > 0$, то бифуркация — субкритическая[1]. Для вещественной мгновенной амплитуды и мгновенной фазы колебаний из (3.5) получаем:

$$\dot{A} = \alpha A + L_1 A^3, \quad \dot{\Phi} = \omega_0, \tag{3.6}$$

[1] Характер бифуркации в особом (вырожденном) случае $L_1 = 0$ нуждается в дополнительном анализе с учетом высших степеней a.

где $A = |a|$ и $\Phi = \operatorname{Arg}(a)$. Из уравнения для стационарной амплитуды $\alpha A + L_1 A^3 = 0$ получаем значения, соответствующие фокусу ($A_F = 0$) и предельному циклу ($A_0 = \sqrt{-\alpha/L_1}$). Предельный цикл существует при условии, что $\alpha/L_1 < 0$. Величина ω_0 определяет его период $T = 2\pi/\omega_0$. Анализ линеаризованного уравнения для возмущения амплитуды позволяет найти собственные значения для решений $A = A_F$ и $A = A_0$: $s_{F,0} = \alpha + 3L_1 A^2_{F,0}$. Отсюда видно, что для $L_1 < 0$ цикл существует и устойчив при $\alpha > 0$, а фокус устойчив при $\alpha < 0$ и неустойчив при $\alpha > 0$. В случае $L_1 > 0$ при $\alpha < 0$ существуют неустойчивый цикл и устойчивый фокус, тогда как при $\alpha > 0$ — только неустойчивый фокус.

3.6. Бифуркации предельных циклов

Рассмотрим локальные бифуркации коразмерности 1 невырожденного предельного цикла, у которого имеется только один равный единице мультипликатор. Отбросим единичный мультипликатор и расположим оставшиеся мультипликаторы в порядке убывания абсолютных значений. В этом случае бифуркации предельного цикла связаны с одним действительным или двумя комплексно-сопряженными старшими мультипликаторами $\mu_{1,2}$. Поскольку бифуркация коразмерности 1 предполагает только одно бифуркационное условие, соответствующее равенству $|\mu_1| = 1$, то возможны лишь три различных типа бифуркаций: $\mu_1(\alpha^*) = +1$, $\mu_1(\alpha^*) = -1$ и $\mu_{1,2}(\alpha^*) = \exp(\pm \mathrm{j}\varphi)$, где α^* — бифуркационное значение параметра. Для анализа бифуркаций предельного цикла целесообразно использовать сечение Пуанкаре. Неподвижные точки в отображении последования характеризуются теми же самыми мультипликаторами, что и исходный предельный цикл, а переход к сечению делает анализ более удобным.

Седло-узловая бифуркация. При достижении параметром α бифуркационного значения $\alpha = \alpha^*$ мультипликатор μ_1 устойчивого цикла становится равным $+1$. Рис. 3.7 иллюстрирует эту бифуркацию для случая трехмерного фазового пространства ($N = 3$). При $\alpha < \alpha^*$ существуют два предельных цикла: устойчивый цикл C_1 и седловой цикл C_2 (см. рис. 3.7, *а*). Им отвечают устойчивая Q_1 и неустойчивая Q_2 неподвижные точки в сечении Пуанкаре. Условие $\mu_1 = 1$ определяет бифуркацию, подобную седло-узловой бифуркации состояний равновесия, рассмотренной выше. В бифуркационной точке $\alpha = \alpha^*$ происходит слияние циклов C_1 и C_2, в результате чего возникает негрубая замкнутая траектория C типа седло–узел (см. рис. 3.7, *б*), которая исчезает при $\alpha > \alpha^*$. Изменение параметра α в обратном направлении приводит к рождению пары циклов C_1 и C_2 из сгущения фазовых траекторий.

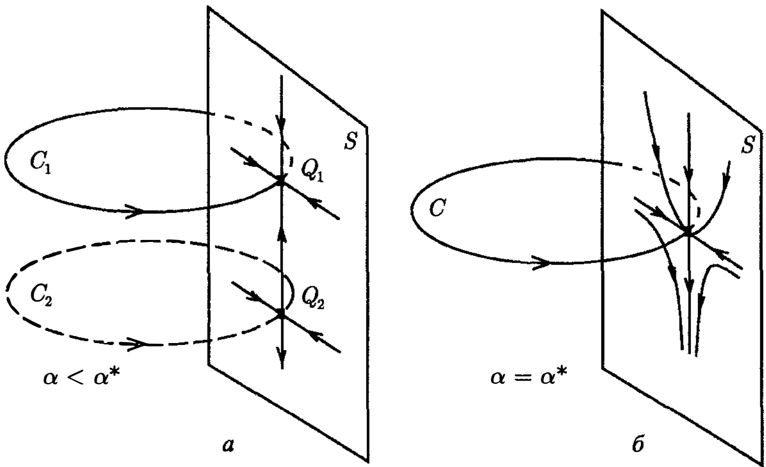


Рис. 3.7. Седло-узловая бифуркация предельных циклов: *а* — до бифуркации; *б* — после бифуркации

Бифуркация удвоения периода. В бифуркационной точке $\alpha = \alpha^*$ мультипликатор $\mu_1(\alpha^*)$ становится равным -1, причем $\mathrm{d}\mu/\mathrm{d}\alpha|_{\alpha^*} \neq 0$. Бифуркация, определяемая таким условием, называется *бифуркацией удвоения периода.* Эта бифуркация может быть суперкритической (внутренней) или субкритической (кризисом). Суперкритическая бифуркация удвоения происходит следующим образом: пусть при $\alpha < \alpha^*$ существует устойчивый предельный цикл C_0 с периодом T_0. При $\alpha > \alpha^*$ цикл C_0 становится седловым и в его окрестности рождается устойчивый предельный цикл C с периодом T, близким к удвоенному T_0 ($T \approx 2T_0$). Фазовые траектории C_0 и C, а также их сечение Пуанкаре вблизи точки бифуркации изображены на рис. 3.8, *а*. Рис. 3.8, *б* показывает, как меняется форма колебаний одной из динамических переменных при прохождении точки бифуркации.

Когда происходит субкритическая бифуркация удвоения периода, устойчивый цикл C_0 и седловой цикл C с удвоенным периодом, существующий при $\alpha < \alpha^*$, сливаются в точке бифуркации, после чего в фазовом пространстве остается только цикл C_0, ставший седловым.

Бифуркация рождения (исчезновения) двумерного тора (бифуркация Неймарка[2]). Эта бифуркация происходит, когда пара комплексно-сопряженных мультипликаторов предельного цикла выходит на единичную окружность. В бифуркационной точке $\alpha = \alpha^*$ имеет место следующее со-

[2]Она также называется бифуркацией Неймарка – Сакера.

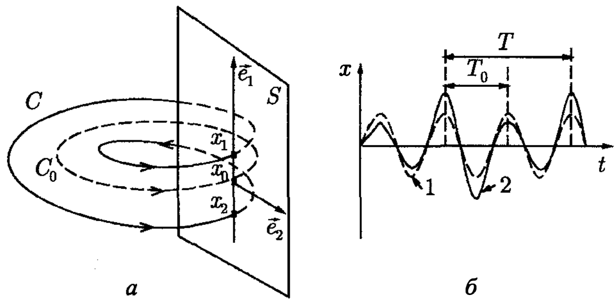


Рис. 3.8. Суперкритическая бифуркация удвоения периода: *а* — циклы C_0 и C и их сечение Пуанкаре; *б* — форма колебаний до (*кривая 1*) и после (*кривая 2*) бифуркации

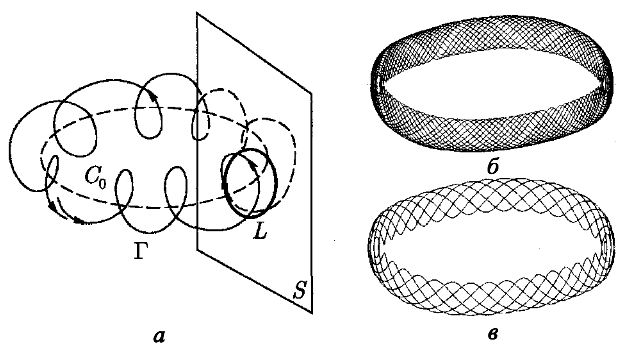


Рис. 3.9. Бифуркация рождения тора из предельного цикла C_0: *а* — траектория Г на торе в окрестности неустойчивого цикла C_0; *б* — эргодический тор; *в* — резонанс на торе

отношение: $\mu_{1,2}(\alpha^*) = \exp(\pm \mathrm{j}\varphi)$, где $\varphi \in [0, 2\pi]$ и $\varphi(\alpha^*) \neq 0, \pi/2, \pi/3$ (исключены так называемые *сильные резонансы*). Данная бифуркация также может быть суперкритической (внутренней) и субкритической (кризисом). В зависимости от характера бифуркации могут возникать различные ситуации. В случае суперкритической бифуркации из устойчивого предельного цикла C_0 рождается устойчивый двумерный ($2D$) тор T^2. Цикл C_0 в результате бифуркации теряет устойчивость и становится седловым. Субкритическая бифуркация имеет место, когда неустойчивый (седловой) тор T^2 «стягивается» к устойчивому циклу C_0, который в этот момент теряет устойчивость. Рождение тора из предельного цикла изображено на рис. 3.9, *а*. Вблизи точки бифуркации $\alpha = \alpha^*$ вектор малого возмущения $\vec{y}$ цикла C_0

вращается вдоль траектории C_0. В то же время величина возмущения остается неизменной, так как выполняется условие $|\mu_{1,2}(\alpha^*)| = 1$. Таким образом, изображающая точка в сечении Пуанкаре движется вдоль замкнутой кривой L, называемой *инвариантной замкнутой кривой*. Величина $\theta(\alpha) = \varphi/2\pi$ называется *числом вращения* на торе T^2 (или на соответствующей инвариантной замкнутой кривой). Если число вращения $\theta(\alpha^*)$ принимает иррациональное значение, любая траектория C на торе незамкнута и возникший тор является *эргодическим* (рис. 3.9, *б*). Если $\theta(\alpha^*) = p/q$, где p и q — любые положительные целые числа, то говорят, что на торе имеет место резонанс порядка p/q. Траектория замыкается, образуя предельный цикл, лежащий на поверхности тора. Пример резонанса на торе показан на рис. 3.9, *в*.

Бифуркации нарушения симметрии. Бифуркации предельных циклов, задаваемые условиями $\mu_1(\alpha^*) = \pm 1$ или $\mu_{1,2}(\alpha^*) = \exp(\pm \mathrm{j}\varphi)$, могут привести к ситуации, когда предельный цикл теряет свою симметрию. Такие бифуркации типичны, например, для систем, состоящих из двух или более идентичных подсистем. Свойство симметрии связано с существованием в фазовом пространстве системы некоторого инвариантного многообразия U. В качестве примера рассмотрим случай двух связанных идентичных подсистем:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}} &= \vec{F}(\vec{x}, \alpha) + \gamma \vec{g}(\vec{y}, \vec{x}), \\ \dot{\vec{y}} &= \vec{F}(\vec{y}, \alpha) + \gamma \vec{g}(\vec{x}, \vec{y}), \end{aligned} \tag{3.7}$$

где $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{R}^N$ — векторы состояния подсистем, α — управляющий параметр, γ — параметр связи. Функция $\vec{g}$ задает функцию связи между подсистемами, причем $\vec{g}(\vec{x}, \vec{x}) = 0$. В этом случае подпространство $\vec{x} = \vec{y}$ есть инвариантное симметричное многообразие. Пусть устойчивый предельный цикл расположен в U, т. е. является симметричным. Если какой-либо мультипликатор симметричного цикла, соответствующий собственному вектору, не лежащему в U, принимает бифуркационное значение, то имеет место бифуркация нарушения симметрии. В результате возникает несимметричный аттрактор, то есть аттрактор, не расположенный в U. Говорят, что в результате бифуркации аттрактор теряет симметрию. Бифуркации нарушения симметрии, определенные условиями $\mu_1(\alpha^*) = -1$ или $\mu_{1,2}(\alpha^*) = \exp(\pm \mathrm{j}\varphi)$ очень похожи на аналогичные бифуркации в системе без симметрии. Бифуркация, определенная условием $\mu_1(\alpha^*) = +1$, представляет особый случай. В результате этой бифуркации симметричный цикл $C_0 \in U$ продолжает существовать, но становится седловым. Это приводит к рождению двух устойчивых циклов с тем же самым периодом. Они не лежат в U, но взаимно симметричны. Такая бифуркация известна под названием *бифуркации вил.* Рис. 3.10 изображает фазовые портреты после бифуркации вил. Фазо-параметрическая диаграмма этой бифуркации представлена на рис. 3.10, *б*, где по оси ординат отложена разность соответствующих переменных $(x_1 - y_1)$ в некотором сечении циклов.

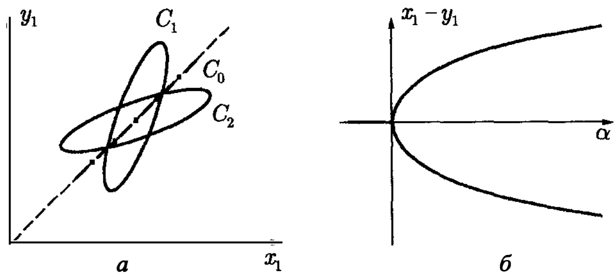


Рис. 3.10. Бифуркация вил в системе с симметрией: *а* — проекция предельных циклов после бифуркации; *б* — качественная иллюстрация фазо-параметрической диаграммы

Мы рассмотрели локальные бифуркации состояний равновесия и предельных циклов. Различные бифуркации происходят также и с более сложными множествами (торами, хаотическими аттракторами). Однако их изучение зачастую основано на экспериментальных результатах. Теория бифуркаций квазипериодических и хаотических аттракторов еще не завершена и находится в состоянии развития.

3.7. Нелокальные бифуркации. Гомоклинические траектории и структуры

Нелокальные бифуркации связаны с поведением устойчивых и неустойчивых многообразий седловых предельных множеств в фазовом пространстве. Сами по себе эти бифуркации не являются причиной топологических изменений седловых предельных множеств, но могут существенно влиять на динамику системы. Рассмотрим основные нелокальные бифуркации.

Петля сепаратрисы седлового состояния равновесия. Эта бифуркация в простейшей форме может быть реализована уже на фазовой плоскости. Рассмотрим седловое состояние равновесия Q, устойчивая W_Q^S и неустойчивая W_Q^u сепаратрисы которого сближаются при увеличении параметра α и касаются друг друга при $\alpha = \alpha^*$. В момент касания рождается особая двоякоасимптотическая фазовая траектория Γ_0, называемая *петлей* *сепаратрисы седла* (рис. 3.11, *а*). Выполнение условия касания соответствует бифуркационному многообразию коразмерности один в пространстве параметров. Сепаратрисная петля в диссипативной системе является негрубой структурой и разрушается при $\alpha \neq \alpha^*$. Что будет происходить после ее разрушения, зависит от поведения сепаратрис после их расщепления и от *седловой величины* σ_Q состояния равновесия в точке бифуркации. Седловая величина определяется как $\sigma_Q(\alpha) = s_1(\alpha) + s_2(\alpha)$, где $s_{1,2}$ — собственные значения матрицы линеаризации в точке Q. Если $\sigma_Q(\alpha^*) < 0$, то при разрушении петли в направлении A, как показано на рис. 3.11, *а*, из нее рождается единственный устойчивый цикл C (см. рис. 3.11, *б*). При разрушении петли в направлении B рождения цикла не происходит. Если $\sigma_Q(\alpha^*) > 0$, то петля Γ_0 называется *неустойчивой* и при разрушении Γ_0 может родиться неустойчивый предельный цикл.

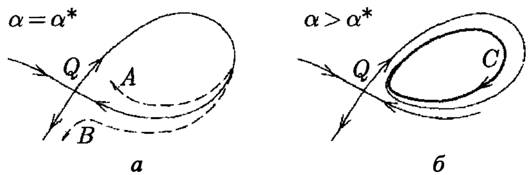


Рис. 3.11. Бифуркация образования петли сепаратрисы: *а* — поведение сепаратрис в бифуркационной точке; *б* — после бифуркации

Бифуркация образования сепаратрисной петли, рассматриваемая при движении по параметру в обратном направлении, может интерпретироваться как кризис предельного цикла C, связанный с касанием седла Q. В момент касания возникает петля Γ_0. При приближении к точке бифуркации период цикла стремится к бесконечности, а мультипликаторы обращаются в нуль.

Более сложный вариант нелокальной бифуркации подобного типа возможен в фазовом пространстве с размерностью $N \geqslant 3$. Рассмотрим его для $N = 3$. Пусть Q является седло-фокусом с одномерным неустойчивым и двумерным устойчивым многообразиями. Он характеризуется так называемой *первой седловой величиной* $\sigma_1(\alpha) = \mathrm{Re}s_{1,2}(\alpha) + s_3(\alpha)$, где $s_{1,2} = \mathrm{Re}s_{1,2} \pm \mathrm{j}\mathrm{Im}s_{1,2}$ и s_3 — собственные значения линеаризованной матрицы в точке Q. Пусть при $\alpha = \alpha^*$ существует *петля сепаратрисы седло-фокуса* Γ_0 (рис. 3.12) и $\sigma_1(\alpha^*) \neq 0$. При сделанных предположениях справедлива теорема Л. П. Шильникова, которая утверждает следующее:

1) $\sigma_1(\alpha^*) < 0$ (случай безопасной петли). Если петля разрушается по направлению A, как показано на рис. 3.12, из нее рождается устойчивый

цикл Г. При разрушении петли по направлению B ничего не происходит;

2) $\sigma_1(\alpha^*) > 0$ (опасная петля). В момент существования петли Γ_0 и затем, при ее разрушении в направлении A или B, в окрестности петли образуется сложная структура фазовых траекторий. Эта структура состоит из счетного множества периодических аттракторов, репеллеров и седел, а также из подмножества хаотических траекторий, называемого *нетривиальным гиперболическим подмножеством*.

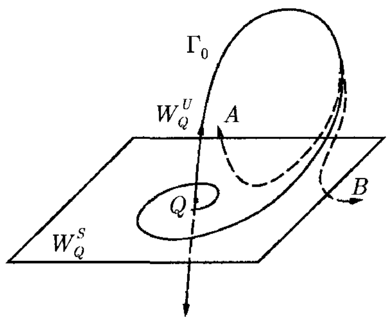


Рис. 3.12. Петля сепаратрисы седло–фокуса и возможные способы ее разрушения

Если изучаемая система имеет седло-фокус с одномерным устойчивым и двумерным неустойчивым многообразиями, теорема Шильникова может быть применена при использовании замены t на $-t$.

Петля сепаратрисы седло-узла. Эта бифуркация также возможна уже для $N = 2$. Предположим, что при $\alpha < \alpha^*$ на фазовой плоскости существуют два состояния равновесия: седло Q_1 и устойчивый узел Q_2. Кроме того, в результате стремления неустойчивых сепаратрис седла к устойчивому узлу образуется сепаратрисный контур, как показано на рис. 3.13, *а* замыкания неустойчивых сепаратрис седла на устойчивый узел образуется петля сепаратрисы седла, как показано на рис. 3.13, *а*. В точке $\alpha = \alpha^*$ происходит седло-узловая бифуркация состояний равновесия и возникает негрубое состояние равновесия типа седло-узел. При этом седло-узел имеет двоякоасимптотическую гомоклиническую траекторию Γ_0, то есть сепаратрисную петлю (рис. 3.13, *б*). Когда $\alpha > \alpha^*$, седло-узел исчезает и из петли возникает предельный цикл C (рис. 3.13, *в*).

Эта бифуркация, при рассмотрении ее в обратном порядке, является бифуркацией исчезновения цикла C. Она приводит к возникновению на

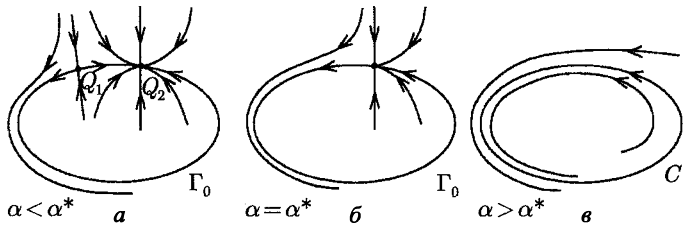


Рис. 3.13. Бифуркация возникновения петли сепаратрисы седло-узла: *а* — до бифуркации; *б* — в момент бифуркации; *в* — после бифуркации

цикле седло-узловой точки. При $\alpha \to \alpha^*$ период цикла возрастает до бесконечности, а мультипликаторы цикла стремятся к нулю.

Бифуркация, описанная выше, сохраняет границы притягивающей области (бассейна притяжения) и, таким образом, является внутренней бифуркацией.

Возникновение гомоклинической траектории седлового предельного цикла. Такая бифуркация возможна только при $N \geqslant 3$. Пусть $N = 3$. В этом случае могут существовать седловые предельные циклы с двумерными устойчивыми W^s и двумерными неустойчивыми W^u многообразиями. В секущей плоскости такому циклу соответствует седловая неподвижная точка. Эта неподвижная точка имеет одномерные устойчивое и неустойчивое многообразия. Предположим, что с ростом параметра α многообразия цикла сближаются и при $\alpha = \alpha^*$ происходит их касание. Бифуркация коразмерности один состоит в появлении негрубой двоякоасимптотической кривой Γ_0, называемой *гомоклинической кривой Пуанкаре.* При $\alpha > \alpha^*$ многообразия W^s и W^u пересекаются, при этом возникают две грубых гомоклинических кривых Γ_1^0 и Γ_2^0. В секущей плоскости каждой гомоклинической кривой соответствует бесконечная двоякоасимптотическая последовательность точек пересечения сепаратрис $Q_n, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ (рис. 3.14). При приближении к седлу точки Q_n уплотняются, но стремятся к седлу только в пределе $n \to \pm\infty$.

Было доказано, что около гомоклинической кривой седлового цикла возникает сложное множество траекторий. Это множество, называемое *гомоклинической структурой*, подобно множеству траекторий, возникающему в окрестности опасной петли сепаратрисы седло-фокуса. В окрестности гомоклинической кривой всюду плотны устойчивые, неустойчивые и седловые периодические орбиты. Кроме того, гомоклиническая структура включает подмножество хаотических траекторий, которое, при соответствующих условиях, может стать притягивающим.

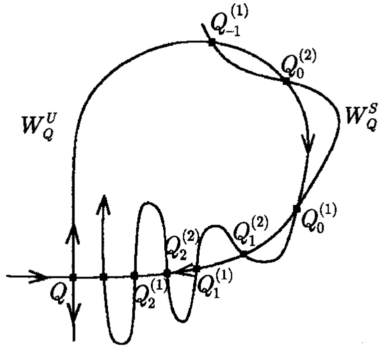


Рис. 3.14. Гомоклиническое пересечение многообразий седлового цикла (представление в секущей плоскости)

Подобная структура характерна и для окрестности *гетероклинических траекторий*, которые появляются, когда неустойчивое многообразие одного седлового цикла касается, а затем пересекает устойчивое многообразие другого седлового цикла.

3.8. Заключение

Эволюция любых систем при изменении параметров сопровождается потерей устойчивости одними режимами функционирования и их бифуркационными переходами в новые. Эти «фазовые переходы» могут осуществляться плавно, мягко, а могут происходить скачкообразно, в виде катастроф. Строгий математический анализ устойчивости и бифуркаций позволяет сегодня рассматривать широкий спектр проблем, связанных с исследованиями бифуркационных переходов в различных динамических системах. Одной из таких проблем является переход системы от регулярного поведения к хаотической динамике. Сценарии развития хаоса будут рассмотрены нами в лекциях 6 и 7.

Лекция 4

Динамические системы с одной степенью свободы

4.1. Введение

Рассмотрим класс автономных динамических систем с непрерывным временем, состояние которых в любой момент времени может быть однозначно задано некоторой переменной x и ее производной $y = dx/dt$. Фазовое пространство такой системы есть фазовая плоскость (x, y). Таким образом, размерность фазового пространства есть $N = 2$, а число степеней свободы $N/2 = 1$. Математическая модель ДС с одной степенью свободы в большинстве случаев может быть сведена к следующему обобщенному уравнению осциллятора:

$$\ddot{x} + p(x, \dot{x})\dot{x} + q(x) = 0, \tag{4.1}$$

где $p(x, \dot{x})$, $q(x)$ — некоторые функции, или представлена в виде системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y), \\ \dot{y} &= g(x, y), \end{aligned} \tag{4.2}$$

где функции $f(x)$ и $g(x)$ задают компоненты фазовой скорости в каждой точке фазовой плоскости. В ДС с одной степенью свободы может возникнуть только одна колебательная мода, то есть только одна независимая частота колебаний.

ДС на фазовой плоскости могут быть, как и в общем случае, линейными и нелинейными, консервативными и неконсервативными. Примеры консервативных линейного и нелинейного осцилляторов с одной степенью свободы были рассмотрены в лекции 1, там же исследована динамика линейного осциллятора с постоянными потерями. В уравнении (4.1) за диссипацию энергии отвечает коэффициент $p(x, \dot{x})$. Если $p = \mathrm{const} > 0$, то имеем осциллятор с постоянной диссипацией. Рано или поздно колебания, возникшие в таком осцилляторе, затухают и система приходит в состояние устойчивого равновесия. Однако можно таким образом задать функцию $p(x, \dot{x})$, что энергия, расходуемая на диссипацию в некоторой области фазовой плоскости, будет компенсироваться подкачкой энергии в другой части плоскости и, следовательно, возникнут автоколебания. Классический пример автоколебательной системы (осциллятор Ван дер Поля) также уже был рассмотрен в лекции 1. В настоящей лекции, учитывая фундаментальное значение данной модели, мы исследуем осциллятор Ван дер Поля более детально, использовав приближенный аналитический метод усреднения.

4.2. Предельные множества и аттракторы на фазовой плоскости. Предельный цикл Андронова–Пуанкаре

На фазовой плоскости возможен лишь очень ограниченный набор предельных множеств. Пуанкаре и Бендиксон установили, что ограниченное предельное множество на плоскости может быть одного из следующих топологических типов: 1) точка равновесия; 2) замкнутая периодическая траектория; 3) сепаратрисная петля или сепаратрисный контур, состоящий из состояний равновесия и соединяющих их траекторий, стремящихся к состояниям равновесия при $t \to \pm\infty$ (рис. 4.1).

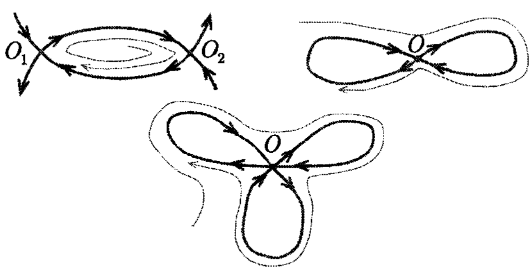


Рис. 4.1. Примеры сепаратрисных контуров на фазовой плоскости

Так как на плоскости вектор возмущения можно разложить только по двум ортогональным направлениям, то устойчивость траекторий характеризуется только двумя ляпуновскими показателями, двумя собственными значениями матрицы линеаризации или двумя мультипликаторами. Устойчивость точек равновесия на плоскости уже рассматривалась в лекции 2, поэтому здесь мы не будем на ней подробно останавливаться. Скажем лишь, что точка равновесия может быть аттрактором (устойчивый узел и устойчивый фокус), репеллером (неустойчивый узел и неустойчивый фокус) и седлом. Точка равновесия «центр» в неконсервативных системах не типична и может существовать только при особом выборе параметров. Устойчивость предельного цикла на фазовой плоскости определяется только одним мультипликатором, так как второй мультипликатор всегда равен единице (вдоль цикла нет ни сжатия, ни растяжения). Поэтому предельный цикл в системах с одной степенью свободы может быть либо аттрактором, либо репеллером. Равенство единице обеих мультипликаторов свидетельствует о том, что система находится в точке касательной бифуркации устойчивого и неустойчивого циклов. Седловые циклы на фазовой плоскости невозможны.

В течение многих лет, до широкого применения методов компьютерного эксперимента, нелинейная теория колебаний была сосредоточена именно на фазовой плоскости, где движения носят сравнительно простой характер и можно в некоторой степени применять приближенные аналитические методы. Несмотря на ограниченность типов поведения исследование фазовой плоскости позволило сформулировать многие базовые понятия нелинейной динамики, такие как предельное множество, аттрактор, сепаратрисы седла, локальные и нелокальные бифуркации, структурная устойчивость ДС и т. д. Особенно важную роль сыграли автоколебательные системы с одной степенью свободы. Размерность фазового пространства $N = 2$ является минимально возможной для реализации автоколебаний. Автоколебательные системы с половиной степени свободы являются вырожденными, полученными в результате некоторой идеализации системы, когда в двумерном фазовом пространстве можно выделить одномерные множества «быстрых» и «медленных» движений.

Впервые термины «автоколебания» и «автоколебательные системы» были введены А. А. Андроновым почти сто лет назад. Андронов подчеркнул целесообразность выделения автоколебательных систем как особого класса многочисленных и практически важных систем. Общей чертой этих систем, согласно Андронову, «является их способность совершать *автоколебания*, т. е. такие колебания, амплитуда которых, с одной стороны, в течение долгого времени может оставаться постоянной, а с другой стороны, вообще говоря, не зависит от начальных условий и определяется не начальными условиями, а свойствами самой системы». Андронов отмечает, что независимость параметров колебаний от начальных условий является характерным признаком автоколебаний, однако это свойство не абсолютно и может распространяться не на все начальные состояния, а на некоторую конечную область фазового пространства. То есть возможны несколько стационарных процессов с различными параметрами колебаний, которые устанавливаются в зависимости от того, в какой области выбрано начальное состояние. В наше время это явление получило название мультистабильности. Другой типичной чертой автоколебаний, согласно А. А. Андронову, является подкачка энергии от постоянного источника, осуществляемая в некоторые моменты времени и регулируемая самой системой, т. е. «*за счет непериодического источника энергии создается периодический процесс*»[1].

А. А. Андроновым была создана теория автоколебательных систем с одной степенью свободы. Автоколебания систем с одной степенью свободы, по Андронову, есть устойчивые грубые периодические колебания, образом которых на фазовой плоскости является ассимптотически устойчивая изолированная замкнутая траектория — притягивающий предельный цикл Андронова–Пуанкаре Γ_0. Под изолированной замкнутой траекторией понимается такая, окрестность которой не содержит никаких других замкнутых траекторий, за исключением ее самой. Ассимптотическая устойчивость означает, что малое возмущение траектории на цикле экспоненциально убывает, ассимптотически стремясь к нулю при $t \to \infty$. Иначе говоря, ассимптотически устойчивый предельный цикл притягивает траектории из некоторой окрестности, т. е. является аттрактором. Независимо от того, выбраны начальные условия внутри цикла Γ_0 или снаружи, фазовые траектории при $t \to \infty$ стремятся к предельному циклу Γ_0 и остаются на нем. Совершенно ясно, что реализация предельного цикла (или режима автоколебаний) возможна исключительно в нелинейных диссипативных системах. Средняя дивергенция векторного поля для траекторий внутри цикла должна быть положительной, вне цикла — отрицательной. Это возможно лишь в случае, когда в системе присутствуют и диссипация, и подкачка энергии, а во-вторых, соотношение между диссипацией и подкачкой зависит от мгновенного состояния. В случае периодических автоколебаний затраченная энергия восполняется строго за период колебаний.

4.3. Структурная устойчивость систем на фазовой плоскости. Системы Андронова–Понтрягина

Важную роль в нелинейной динамике играют понятия *грубости* и *структурной устойчивости* ДС. В предыдущих лекциях термины «грубость» и «структурная устойчивость» уже использовались, хотя определения этим свойствам еще не было дано[2]. Эти понятия были впервые сформу-

[1] *Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э.* Теория колебаний. М.: Наука, 1981. С. 222.

[2] В исходном определении эти понятия несколько различаются, хотя в настоящее время часто используются как синонимы.

лированы Андроновым и Понтрягиным для систем с одной степенью свободы, а затем обобщены на случай динамической системы с произвольной конечной размерностью фазового пространства. Приводимые далее определения справедливы для любого N.

Прежде чем определить свойства грубости и структурной устойчивости ДС, необходимо ввести понятие топологической эквивалентности. Две ДС называются *топологически эквивалентными*, если существует гомеоморфизм фазового пространства, который отображает траектории одной системы в траектории другой системы, сохраняя топологическую структуру разбиения фазового пространства, т. е. сохраняются все предельные множества, их топология и свойства устойчивости.

Рассмотрим ДС:

$$\dot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x}), \quad \vec{x} \in R^N,$$

где траектории $\vec{x}(t)$ являются гладкими функциями и определены в замкнутой ограниченной области $V \in R^N$. На множестве всевозможных динамических систем заданной размерности N некоторым образом можно ввести норму $||\vec{F}(\vec{x})||$[3], а следовательно, и метрику, характеризующую отличие двух систем.

Определение грубости ДС. Система $\vec{F}(\vec{x})$ называется *грубой* в области V, если для любого произвольно малого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что если для двух систем, исходной $\vec{F}(\vec{x})$ и возмущенной $\tilde{\vec{F}}(\vec{x})$, справедливо

$$||\vec{F}(\vec{x}) - \tilde{\vec{F}}(\vec{x})|| < \delta,$$

(т.е. возмущение по норме мало), то две системы топологически эквивалентны и связывающий их гомеоморфизм $\mathbf{H}$ близок к тождественному преобразованию $\mathbf{I}$ так, что $||\mathbf{H} - \mathbf{I}|| < \varepsilon$.

Определение структурной устойчивости ДС. Система $\vec{F}(\vec{x})$ называется *структурно устойчивой* в области V, если существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что из

$$||\vec{F}(\vec{x}) - \tilde{\vec{F}}(\vec{x})|| < \delta$$

следует топологическая эквивалентность систем $\vec{F}(\vec{x})$ и $\tilde{\vec{F}}(\vec{x})$.

Для ДС с одной степенью свободы справедлива следующая *теорема Андронова–Понтрягина.* Динамическая система, задаваемая уравнениями

[3]Как именно рассматривать не будем, чтобы не усложнять лекции излишней «математизированностью».

(4.2), с гладкими правыми частями является грубой тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия: 1) все состояния равновесия ДС (4.2) — простые, т. е. ни один из корней характеристического уравнения линеаризованной системы не лежит на мнимой оси; 2) все периодические траектории ДС простые, т. е. только один из мультипликаторов (собственных чисел матрицы монодромии) лежит на единичной окружности; 3) не существует траекторий, двоякоасимптотических к седлу или идущих из седла в седло (т. е. нет сепаратрисных петель и контуров).

Как уже отмечалось в лекции 1, грубыми предельными множествами на фазовой плоскости могут быть только состояния равновесия, не имеющие чисто мнимых собственных значений, и периодические траектории, имеющие только один единичный по абсолютной величине мультипликатор (равный $+1$). Негрубые предельные множества на фазовой плоскости — это петли и контуры, образованные двоякоасимптотическими траекториями седловых точек равновесия. Определения грубости и структурной устойчивости и теорему Андронова–Понтрягина можно сформулировать и для каскадов (отображений с дискретным временем).

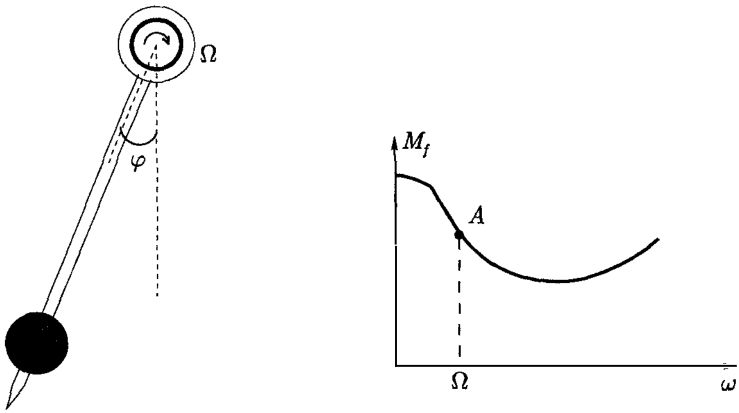
Системы с одной степенью свободы, для которых выполняются условия теоремы, называются *системами Андронова–Понтрягина.* Они представляют собой подмножество определенного класса структурно-устойчивых систем в R^N, называемых системами Морса–Смейла, о которых будет сказано в следующих лекциях.

4.4. Генераторы с одной степенью свободы

Обратимся к автоколебательным системам с одной степенью свободы и рассмотрим некоторые классические примеры таких систем.

Маятник Фроуда. Примером простой механической автоколебательной системы может служить маятник на вращающемся валу (рис. 4.2, *а*), называемый *маятником Фроуда.*

На равномерно вращающемся с угловой скоростью Ω валу подвешен обычный маятник. Между муфтой маятника и валом существует некоторая сила трения, которая создает момент силы M. Предполагается, что скорость вращения вала всегда больше по абсолютной величине скорости вращения маятника при колебаниях. Рассмотрим работу, которую совершает этот момент при периодических колебаниях маятника. За одну половину периода работа момента M равна энергии, отнятой у маятника, когда вал и маятник вращаются в противоположных направлениях. За вторую половину периода, когда маятник и вал вращаются в одинаковом направлении, работа момента M добавляет энергию маятнику. Момент силы трения вала о муф-



а *б*

Рис. 4.2. Пример механической автоколебательной системы: *а* — маятник на вращающемся валу; *б* — график зависимости момента силы трения от скорости вращения вала

ту зависит от относительной угловой скорости вращения вала и муфты. Допустим, что сила трения растет со скоростью скольжения. Момент сил трения, когда вал и маятник вращаются в противоположном направлении, будет больше, чем в состоянии, когда вал и маятник вращаются в одном направлении, так как в первом случае скорость скольжения больше, чем во втором. Следовательно, действие сил трения отнимает энергию у маятника за период, и колебания маятника будут сильнее затухать. Энергия колебаний маятника расходуется в подвесе, и трение о вращающийся вал только увеличивает затухание колебаний.

Картина явления может принципиально измениться, если сила трения падает с увеличением скорости скольжения. При небольшой смазке в определенном диапазоне изменения скорости скольжения такие условия можно осуществить. Типичная кривая зависимости момента силы трения при неподвижном маятнике от скорости вращения вала показана на рис. 4.2, *б*. Пусть скорость вращения вала соответствует абсциссе точки *A*. Тогда энергия колебаний маятника за период будет возрастать. На этапе торможения относительная скорость вращения больше, сила трения меньше, а значит, меньше и рассеиваемая энергия, чем на этапе ускорения, поскольку относительная скорость вращения здесь меньше, сила трения больше и на «подталкивание» маятника идет больше энергии. Колеблющийся маятник будет получать от вала определенную порцию энергии за период, и если она больше энергии, идущей на трение о воздух, то амплитуда колебаний маятника со временем будет нарастать.

С ростом амплитуды колебаний маятника амплитуда момента силы трения о вал возрастает медленнее амплитуды момента силы трения о воздух, и при некотором значении амплитуды колебаний маятника они сравняются. Маятник будет совершать стационарные незатухающие колебания — автоколебания. Вращающийся вал мотора сообщает маятнику энергию, необходимую на покрытие потерь энергии на тепло при стационарных автоколебаниях. Энергия передается от мотора к маятнику силой трения скольжения. Частота автоколебаний определяется собственной частотой колебаний маятника.

Уравнение движения маятника Фроуда будет отличаться от уравнения движения обычного маятника только тем, что в этом уравнении должен быть учтен момент силы трения вращающегося вала о подшипник, на котором подвешен маятник. Так как сила трения зависит от относительной скорости трущихся поверхностей, т. е. от относительной угловой скорости вала и маятника $(\Omega - \dot{\varphi})$, то момент силы трения можно представить как $M(\Omega - \dot{\varphi})$. Если ограничиться малыми углами φ, заменить $sin(\varphi)$ через φ, и учесть сопротивление воздуха, считая, что оно пропорционально угловой скорости, то уравнение движения маятника будет иметь вид

$$I\ddot{\varphi} + h\dot{\varphi} + mga\varphi = M(\Omega - \dot{\varphi}), \tag{4.3}$$

где I — момент инерции, m — масса маятника, h — коэффициент трения (исключая трение между муфтой и валом), a — расстояние от центра масс маятника до оси, Ω — угловая скорость вращения вала, φ — угол отклонения маятника от вертикали.

Разложим функцию $M(\Omega - \dot{\varphi})$ в ряд вблизи значения Ω

$$M(\Omega-\dot{\varphi}) = M(\Omega)+M^{(1)}(\Omega)(-\dot{\varphi})+\frac{1}{2}M^{(2)}(\Omega)(-\dot{\varphi})^2+\frac{1}{6}M^{(3)}(\Omega)(-\dot{\varphi})^3+\ldots \tag{4.4}$$

(где $M^{(k)}$ — производная k-го порядка) и подставим (4.4) в (4.3), ограничиваясь членами ряда не выше третьей степени,

$$\ddot{z} + \frac{h}{I}\dot{z} + \frac{mga}{I}z = -\frac{M^{(1)}(\Omega)}{I}\dot{z} + \frac{M^{(2)}(\Omega)}{2I}\dot{z}^2 - \frac{M^{(3)}(\Omega)}{6I}\dot{z}^3, \tag{4.5}$$

где $z = \varphi - \dfrac{1}{mga}M(\Omega)$. Выберем угловую скорость вращения вала так, чтобы она являлась абсциссой точки перегиба на «падающем» участке функции $M(\Omega)$, тогда $M^{(1)}(\Omega) < 0$ и $M^{(2)}(\Omega) = 0$. Кроме того, допустим, что

$M^{(3)}(\Omega) > 0$. Уравнение (4.5) примет вид

$$\ddot{z} - (\mu - \beta\dot{z}^2)\dot{z} + \omega_0^2 z = 0, \tag{4.6}$$

где

$$\mu = -\frac{M^{(1)}(\Omega)}{I} - \frac{h}{I},$$

$$\beta = \frac{M^3(\Omega)}{6I}, \quad \omega_0^2 = \frac{mga}{I}.$$

Переходя к безразмерному времени $\tau = \omega_0 t$ и делая замену переменных и параметров $\varepsilon = \mu/\omega_0, \quad y = \sqrt{\beta\omega_0}z$, получим уравнение

$$\ddot{y} - (\varepsilon - \dot{y}^2)\dot{y} + y = 0. \tag{4.7}$$

Мы получили известное уравнение Рэлея, которое при замене $x = \sqrt{3}\dot{y}$ сводится к уравнению Ван дер Поля:

$$\ddot{x} - (\varepsilon - x^2)\dot{x} + x = 0. \tag{4.8}$$

Закрепленный грузик на движущейся ленте. В качестве еще одного примера механической автоколебательной системы рассмотрим устройство, изображенное на рис. 4.3.

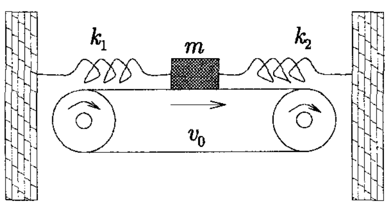


Рис. 4.3. Простейший пример механической автоколебательной системы: закрепленный пружинами грузик на движущейся ленте

На движущейся равномерно со скоростью v_0 ленте лежит грузик массой m, который закреплен с двух сторон пружинками с коэффициентами упругости k_1 и k_2. Обозначим смещение груза от состояния равновесия через x, а его скорость через $\dot{x}$. Силу трения ленты о груз обозначим через $F(v_0 - \dot{x})$. Она представляет собой некоторую функцию относительной скорости ленты и грузика $(v_0 - \dot{x})$. «Результирующий» коэффициент упругости двух пружин обозначим через k. Будем считать пропорциональными первой степени скорости все остальные силы трения, действующие в этой системе (например, сопротивление воздуха или внутреннее трение в пружинах). Запишем уравнение движения грузика

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F(v_0 - \dot{x}). \tag{4.9}$$

Будем полагать, что постоянная скорость движения ленты v_0 много больше скорости движения грузика. Раскладывая функцию F в ряд вблизи значения v_0, ограничимся несколькими первыми членами ряда

$$F(v_0-\dot{x}) = F(v_0)+F^{(1)}(v_0)(-\dot{x})+\frac{1}{2}F^{(2)}(v_0)(-\dot{x})^2+\frac{1}{6}F^{(3)}(v_0)(-\dot{x})^3+\ldots, \tag{4.10}$$

где $F^{(k)}(v_0)$ — производная k-го порядка в точке v_0. Уравнение движения примет вид

$$m\ddot{x}+b\dot{x}+kx = F(v_0)-F^{(1)}(v_0)\dot{x}+\frac{1}{2}F^{(2)}(v_0)(\dot{x})^2-\frac{1}{6}F^{(3)}(v_0)(\dot{x})^3. \tag{4.11}$$

Значения коэффициентов $F^{(1)}(v_0), F^{(2)}(v_0), F^{(3)}(v_0)$ зависят от характеристики трения. Пусть функция $F(v_0 - \dot{x})$ имеет «падающий» участок $(F^{(1)}(v_0) < 0)$, точку перегиба на падающем участке и $F^{(3)}(v_0) > 0$. Выберем постоянную скорость движения ленты такой, чтобы ее значение соответствовало точке перегиба на «падающем» участке функции $F(v_0 - \dot{x})$. Тогда $F''(v_0) = 0$ и уравнение (4.11) можно переписать в виде

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F(v_0) + \alpha\dot{x} - \beta(x)^3, \tag{4.12}$$

где $\alpha = -F^{(1)}(v_0), \beta = \frac{1}{6}F'''(v_0)$. Переходя к безразмерному времени $\tau = \sqrt{\frac{k}{m}}t$ и производя следующую замену переменных и параметров в уравнении (4.12)

$$y = \sqrt{\frac{\beta}{m}\sqrt{\frac{k}{m}}\left(x - \frac{f(v_0)}{k}\right)},$$

$$\varepsilon = \frac{\alpha - b}{\sqrt{mk}},$$

получим уравнение осциллятора:

$$\ddot{y} - \left(\varepsilon - \dot{y}^2\right)\dot{y} + y = 0.$$

Таким образом, мы снова получили уравнение Рэлея (4.7), которое сводится к уравнению Ван дер Поля, как показано ранее.

Ламповый генератор с колебательным контуром в цепи сетки. Упрощенная схема радиотехнического генератора с колебательным контуром в цепи сетки и индуктивной обратной связью изображена на рис. 4.4. Используя законы Кирхгофа, можно записать дифференциальные уравнения для колебательного контура относительно напряжения u на конденсаторе C:

$$LC\frac{d^2u}{dt^2} + RC\frac{du}{dt} + u = M\frac{dI_a}{dt}, \tag{4.13}$$

где L, R, C — индуктивность, сопротивление и емкость колебательного контура, M — коэффициент взаимной индукции, I_a — анодный ток лампы.

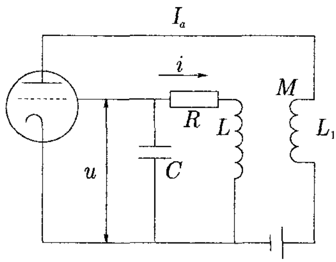


Рис. 4.4. Ламповый генератор с колебательным контуром в цепи сетки

Предположим, что анодный ток зависит лишь от напряжения на сетке лампы и анодно-сеточную характеристику можно аппроксимировать в окрестности рабочей точки полиномом

$$I_a = I_0 + S_0 u - S_2 u^3.$$

Тогда уравнение (4.13) можно записать в виде

$$\frac{d^2u}{dt^2} - \left[\frac{MS_0 - RC}{LC} - \frac{3MS_2}{LC}u^2\right]\frac{du}{dt} + \frac{1}{LC}u = 0. \tag{4.14}$$

Это уравнение можно представить следующим образом:

$$\frac{d^2u}{dt^2} - \alpha\left(1 - \beta u^2\right)\frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0, \tag{4.15}$$

где

$$\alpha = \frac{MS_0 - RC}{LC}, \quad \beta = \frac{3MS_2}{MS_0 - RC}, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}.$$

Введем безразмерное время $\tau = \omega_0 t$. Тогда уравнение (4.15) примет вид

$$\frac{d^2u}{d\tau^2} - \frac{\alpha}{\omega_0}\left(1 - \beta u^2\right)\frac{du}{d\tau} + u = 0. \tag{4.16}$$

Сделав замену переменных и параметров $x = \sqrt{\beta}u$ и $\varepsilon = \alpha/\omega_0$, получим уравнение Ван дер Поля

$$\ddot{x} - \varepsilon\left(1 - x^2\right)\dot{x} + x = 0, \tag{4.17}$$

где $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$. Во многих случаях его удобно представлять в виде

$$\ddot{y} - \left(\varepsilon - y^2\right)\dot{y} + y = 0, \tag{4.18}$$

которое получается из уравнения (4.17) при замене $y = \sqrt{\varepsilon}x$.

RC-генератор с мостом Вина. Генератор с мостом Вина — наиболее распространенный тип RC-генератора. Он представляет собой последовательно-параллельную RC-цепочку, включенную в цепь обратной связи усилителя. Упрощенная схема RC-генератора изображена на рис. 4.5.

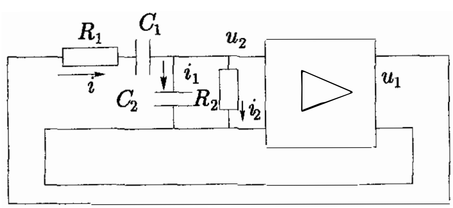


Рис. 4.5. Схема RC-генератора с мостом Вина

Используя законы Кирхгофа и учитывая, что $u_1 = f(u_2)$, получаем уравнение относительно напряжения u_2:

$$\frac{d^2u_2}{dt^2} + \left[\frac{1}{R_2C_2} + \frac{1}{R_1C_1} + \frac{1}{R_1C_2} - \frac{1}{R_1C_2}\frac{df(u_2)}{du_2}\right]\frac{du_2}{dt} + \frac{1}{R_1C_1R_2C_2}u_2 = 0.$$

Будем рассматривать симметричный мост Вина, когда $R_1 = R_2 = R$ и $C_1 = C_2 = C$. В этом случае уравнение примет вид

$$\frac{d^2u_2}{dt^2} + \left[\frac{3}{RC} - \frac{1}{RC}\frac{df(u_2)}{du_2}\right]\frac{du_2}{dt} + \frac{1}{R^2C^2}u_2 = 0. \tag{4.19}$$

Введем обозначение $\omega_0 = 1/RC$ и предположим, что зависимость выходного напряжения u_1 усилителя от входного u_2 можно аппроксимировать функцией

$$f(u_2) = ku_2 - k_1u_2^3. \tag{4.20}$$

Тогда получим уравнение

$$\frac{d^2u_2}{dt^2} - \left[\frac{k-3}{RC} - \frac{3k_1}{RC}u_2^2\right]\frac{du_2}{dt} + \omega_0^2u_2 = 0. \tag{4.21}$$

Перейдем к безразмерному времени и сделаем замену переменных и параметров:

$$\tau = \omega_0 t, \qquad x = u_2\sqrt{3k_1}, \quad \varepsilon = k - 3.$$

В результате получим уравнение

$$\ddot{x} - \left(\varepsilon - x^2\right)\dot{x} + x = 0.$$

Таким образом, для генератора с симметричным мостом Вина при условии, что характеристика усилителя может быть апроксимирована функцией (4.20), получили уравнение Ван дер Поля (4.18).

Колебательный контур с активным нелинейным элементом. Автоколебательная система может быть получена, если в линейный колебательный контур включить элемент, обладающий нелинейной проводимостью с падающим участком на вольт-амперной характеристике. Автогенераторы подобного типа называются в радиотехнике генераторами с отрицательным сопротивлением. В них в качестве активного нелинейного элемента могут быть использованы, например, туннельный диод, диод Чуа, некоторые типы вакуумных ламп и другие приборы.

Выведем уравнение генератора, схема которого представлена на рис. 4.6, *а* с нелинейным элементом, вольт-амперную характеристику которого (рис. 4.6, *б*) можно аппроксимировать функцией

$$I = -\alpha u + \beta u^3. \tag{4.22}$$

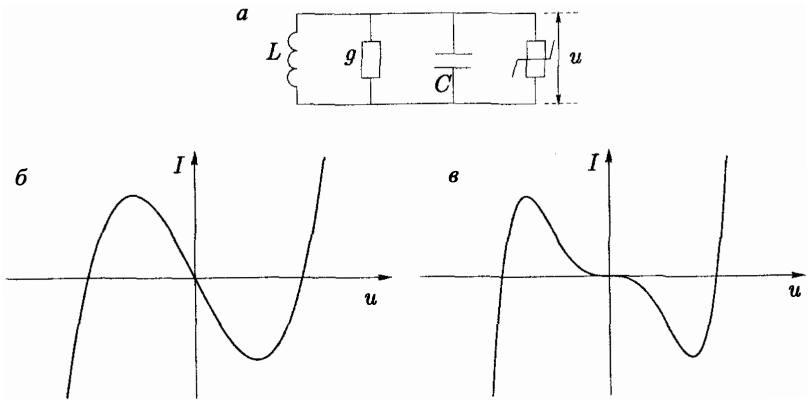


Рис. 4.6. Генератор с нелинейным элементом: *а* — схема генератора; *б*, *в* — вольт-амперные характеристики нелинейного элемента

Используя законы Кирхгофа, получим уравнения для тока i через индуктивность L и напряжения u на емкости C

$$C\frac{du}{dt} + gu - \alpha u + \beta u^3 + i = 0,$$

$$L\frac{di}{dt} = u. \tag{4.23}$$

Дифференциальное уравнение относительно напряжения u на нелинейном элементе имеет вид

$$\frac{d^2u}{dt^2} - \frac{\alpha - g}{C}\left[1 - \frac{3\beta}{\alpha - g}u^2\right]\frac{du}{dt} + \frac{1}{LC}u = 0.$$

Переходя к безразмерным переменным и параметрам

$$\tau = \omega_0 t, \quad \left(\omega_0 = \frac{1}{LC}\right), \quad x = \sqrt{\frac{3\beta}{\alpha - g}}u, \quad \varepsilon = \frac{\alpha - g}{\omega_0 C},$$

получим уравнение Ван дер Поля

$$\ddot{x} - \varepsilon\left(1 - x^2\right)\dot{x} + x = 0.$$

Если для контура записать дифференциальное уравнение относительно тока i, протекающего через индуктивность L, то получим уравнение Рэлея (4.7).

Осциллятор Ван дер Поля и осциллятор Рэлея представляют собой две различные формы записи уравнения автоколебательной системы с мягким возбуждением. Применительно к рассматриваемому примеру генератора (рис. 4.6, *а*) характер возбуждения автоколебаний определяется видом вольт-амперной характеристики нелинейного элемента. Так, если вместо зависимости в виде кубического полинома (4.22) использовать нелинейный элемент с вольт-амперной характеристикой, график которой изображен на рис. 4.6, *в*, мы придем к автоколебательной системе с жестким возбуждением. Проделаем детальный вывод уравнения для такого генератора.

Вольт-амперную характеристику нелинейного элемента (рис. 4.6, *в*) аппроксимируем функцией

$$I = -g_0 u - g_1 u^3 + g_2 u^5, \tag{4.24}$$

здесь коэффициенты имеют положительные значения $(g_0, g_1, g_2 > 0)$. Используя законы Кирхгофа, можно получить следующее уравнение автогенератора в безразмерной форме:

$$\ddot{x} - \left(\varepsilon_0 + \varepsilon_1 x^2 - x^4\right)\dot{x} + x = 0, \tag{4.25}$$

где

$$x = u\left(5g_2\sqrt{\frac{L}{C}}\right)^{1/4}, \quad \varepsilon_0 = (g_0 - g)\sqrt{\frac{L}{C}}, \quad \varepsilon_1 = \frac{3g_1\sqrt{L/C}}{\sqrt{5g_2\sqrt{L/C}}}. \tag{4.26}$$

Уравнение (4.25) описывает динамику генератора с жестким возбуждением автоколебаний. В отличие от осцилляторов Ван дер Поля и Рэлея поведение данного осциллятора с нелинейной диссипацией зависит от двух управляющих параметров ε_0 и ε_1. Из выражений (4.26) видно, что параметр возбуждения ε_0 может принимать как отрицательные, так и положительные значения, а другой параметр нелинейной диссипации (ε_1) — только положительные значения, с учетом того, что $g_0, g_1, g_2 > 0$.

4.5. Анализ уравнения Ван дер Поля. Возникновение автоколебаний

Как уже было показано, уравнение осциллятора Ван дер Поля можно записать в разных формах в зависимости от способа нормировки динамических переменных и параметров системы. Обычно уравнение Ван дер Поля представляют в виде (1.27), (4.17) или (4.18). К уравнению Ван дер Поля сводится и упомянутое ранее уравнение Рэлея (4.7).

При определении условий возникновения автоколебаний важно знать какие состояния равновесия существуют в системе и как меняется характер их устойчивости в зависимости от управляющих параметров. Используя материалы лекции 1, определим точки равновесия и характер их устойчивости в осцилляторе Ван дер Поля, взяв за основу уравнение (4.18)

$$\ddot{x} - \left(\varepsilon - x^2\right)\dot{x} + x = 0.$$

Перепишем его в виде системы уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_1(x, y, \varepsilon), \\ \dot{y} &= f_2(x, y, \varepsilon), \end{aligned} \tag{4.27}$$

где

$$\begin{aligned} f_1(x, y, \varepsilon) &= y, \\ f_2(x, y, \varepsilon) &= \left(\varepsilon - x^2\right) y - x. \end{aligned}$$

Запишем уравнения для состояний равновесия, приравняв нулю функции f_1 и f_2:

$$\begin{aligned} y &= 0, \\ \left(\varepsilon - x^2\right) y - x &= 0. \end{aligned}$$

Видно, что существует единственная особая точка, расположенная на фазовой плоскости в начале координат: $x^0 = 0$, $y^0 = 0$.

Как было показано ранее, для определения устойчивости состояния равновесия следует линеаризовать систему в окрестности неподвижной точки, построить матрицу линеаризации (матрицу Якоби). Для системы (4.27) получим следующую матрицу:

$$\hat{A}\left(x^0, y^0\right) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1\left(x^0, y^0\right)}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1\left(x^0, y^0\right)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2\left(x^0, y^0\right)}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2\left(x^0, y^0\right)}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \varepsilon \end{bmatrix}. \tag{4.28}$$

Собственные значения матрицы (4.28) определяют устойчивость состояния равновесия осциллятора Ван дер Поля. Их легко получить из характеристического уравнения

$$\mathrm{Det}\begin{bmatrix} 0 - s & 1 \\ -1 & \varepsilon - s \end{bmatrix} = 0$$

или
$$s^2 - \varepsilon s + 1 = 0. \tag{4.29}$$

В результате имеем два собственных значения
$$s_{1,2} = \frac{\varepsilon}{2} \pm \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{4} - 1}. \tag{4.30}$$

Проследим за устойчивостью состояния равновесия $(x^0 = 0, y^0 = 0)$ осциллятора Ван дер Поля в зависимости от управляющего параметра ε.

1) При $\varepsilon < -2$ собственные значения s_1 и s_2 — действительные и отрицательные числа. В этом случае состояние равновесия представляет собой устойчивый узел (см. лекцию 2).

2) При $-2 < \varepsilon < 0$ собственные значения s_1 и s_2 — комплексно-сопряженные числа и $\mathrm{Re}\,[s_{1,2}] < 0$. Состояние равновесия — устойчивый фокус.

3) При $0 < \varepsilon < 2$ собственные значения s_1 и s_2 — комплексно-сопряженные числа и $\mathrm{Re}\,[s_{1,2}] > 0$. Состояние равновесия является неустойчивым фокусом.

4) При $\varepsilon > 2$ собственные значения s_1 и s_2 являются действительными положительными числами. Состояние равновесия представляет собой неустойчивый узел.

   Значение управляющего параметра $\varepsilon = 0$ является бифуркационным, поскольку комплексно-сопряженные собственные значения матрицы линеаризации в состоянии равновесия становятся чисто мнимыми. Как уже говорилось в лекции 3, такая ситуация соответствует бифуркации Андронова–Хопфа. Чтобы определить, является ли бифуркация суперкритической или субкритической, и выяснить, как ведет себя рождающийся из точки равновесия предельный цикл, перейдем к приближенному квазигармоническому описанию автогенератора в терминах мгновенной амплитуды и фазы.

Уравнения для амплитуды и фазы автогенератора. Известно несколько классических методов получения квазигармонического приближенного решения уравнения Ван дер Поля. Мы рассмотрим метод усреднения Ван дер Поля применительно к уравнению генератора в форме (4.18):
$$\frac{d^2x}{dt^2} - \left(\varepsilon - x^2\right)\frac{dx}{dt} + x = 0.$$

Будем считать, что при малых положительных значениях ε решение уравнения близко к гармоническим колебаниям. Запишем его в виде гармонической функции с медленно меняющимися параметрами:

$$x(t) = \mathrm{Re}\,[a(t)\exp(jt)] = \frac{1}{2}\,[a\exp(jt) + a^*\exp(-jt)], \tag{4.31}$$

где $a(t)$ — комплексная амплитуда, $\mathrm{Re}\,[\ldots]$ — действительная часть комплексной величины, a^* — комплексно-сопряженная величина. Поскольку вместо действительной функции $x(t)$ мы ввели новую комплексную функцию $a(t)$ и она недостаточно определена, введем дополнительное условие. Потребуем, чтобы функция $a(t)$ удовлетворяла условию

$$\frac{da}{dt}\exp(jt) + \frac{da^*}{dt}\exp(-jt) = 0. \tag{4.32}$$

Подставим решение (4.31) в уравнение Ван дер Поля, предварительно вычислив первую и вторую производные с учетом дополнительного условия (4.32). В результате получим следующее выражение

$$\begin{aligned} j\frac{da}{dt}\exp(jt) &= \left[\varepsilon - \frac{a^2\exp(2jt) + 2|a|^2 + (a^*)^2\exp(-2jt)}{4}\right] \times \\ &\times \frac{ja\exp(jt) - ja^*\exp(-jt)}{2}. \end{aligned}$$

Раскроем скобки и разделим обе части уравнения на $j\exp(jt)$:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{1}{2}\varepsilon a - \frac{1}{8}|a|^2 a - \frac{1}{2}\varepsilon a^*\exp(-2jt) - \frac{1}{8}a^3\exp(2jt) + \\ &+ \frac{1}{4}|a|^2 a^*\exp(-2jt) - \frac{1}{8}|a|^2 a^*\exp(-2jt) + \frac{1}{8}\,(a^*)^3\exp(-4jt). \end{aligned} \tag{4.33}$$

Будем полагать, что $a(t)$ — медленно меняющаяся функция времени и ее изменением за один период колебаний системы можно пренебречь. Также считаем, что производная da/dt в течение одного периода практически постоянна. Умножая обе части уравнения (4.33) на $1/2\pi$ и интегрируя по времени от 0 до 2π, получим

$$\frac{da}{dt} = \frac{1}{2}\varepsilon a - \frac{1}{8}|a|^2 a. \tag{4.34}$$

Уравнение (4.34) называется «укороченным» или «усредненным» уравнением Ван дер Поля для комплексной амплитуды. Запишем его в действительных переменных, представив комплексную величину в полярных координатах:

$$a(t) = \rho(t)\exp(j\varphi(t)),$$

где $\rho(t)$ — вещественная амплитуда, $\varphi(t)$ — вещественная фаза колебаний. В результате из (4.34) получается система укороченных уравнений для амплитуды и фазы:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= \frac{\varepsilon}{2}\rho - \frac{1}{8}\rho^3, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= 0. \end{aligned} \tag{4.35}$$

Из (4.35) легко определить стационарные состояния системы. Приравнивая производные нулю, находим два возможных состояния:

$$\begin{aligned} \rho^0(t) &= 0, \\ \varphi^0(t) &= \varphi_0 \end{aligned} \tag{4.36}$$

и

$$\begin{aligned} \rho^0(t) &= 2\sqrt{\varepsilon}, \\ \varphi^0(t) &= \varphi_0. \end{aligned} \tag{4.37}$$

Первое из стационарных решений соответствует отсутствию колебаний, состоянию равновесия в осцилляторе Ван дер Поля (4.18). Второе соответствует квазигармоническим автоколебаниям автогенератора, которые представляются в виде

$$x(t) = 2\sqrt{\varepsilon}\cos(t + \varphi_0), \tag{4.38}$$

где φ_0 — начальная фаза колебаний (она может быть произвольной).

Рассмотрим устойчивость стационарных состояний. Поскольку первое и второе уравнения системы (4.35) независимы, то их можно рассматривать по отдельности. Малое отклонение амплитуды от стационарного значения изменяется во времени по экспоненциальному закону с показателем

$$s_\rho = \frac{\varepsilon}{2} - \frac{3}{8}\left(\rho^0\right)^2.$$

Для стационарного значения $\rho^0 = 2\sqrt{\varepsilon}$ получим $s_\rho = -\varepsilon$. Оно отрицательно при положительных значениях параметра ε и, следовательно, ненулевое стационарное состояние уравнения для вещественной амплитуды устойчиво. Стационарное решение для фазы — нейтрально устойчиво: любое возмущение начальной фазы не возрастает и не убывает со временем.

Таким образом, анализ укороченных уравнений показывает, что бифуркация Андронова–Хопфа в генераторе (4.18) является суперкритической («мягкой»). При переходе параметра ε к положительным значениям возникают устойчивые периодические колебания вида (4.38). При этом амплитуда автоколебаний нарастает от нуля пропорционально $\sqrt{\varepsilon}$.

Для того чтобы описать переходный процесс к установившимся колебаниям, необходимо найти решение системы (4.35) в зависимости от начальных условий. Решение уравнения для фазы очевидно. Уравнение для амплитуды также может быть решено аналитически. Для этого разделим его на ρ^3:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho^2}\right) = -\varepsilon\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{4}.$$

Сделав замену переменных $y = 1/\rho^2 - 1/4\varepsilon$, перейдем к уравнению:

$$\frac{dy}{dt} = -\varepsilon y,$$

которое легко решается. Для исходной переменной $\rho(t)$ решение может быть выражено следующим образом:

$$\rho(t) = \frac{1}{\sqrt{\left(\left(\frac{1}{\rho_0}\right)^2 - \frac{1}{4\varepsilon}\right)\exp(-\varepsilon t) + \frac{1}{4\varepsilon}}}, \tag{4.39}$$

где $\rho_0 = \rho(0)$ — начальная амплитуда колебаний (по условиям решения $\rho_0 \neq 0$). Выражение (4.39) определяет процесс установления колебаний в осцилляторе Ван дер Поля. При возрастании времени решение (4.39) стремится к стационарному состоянию $\rho^0 = 2\sqrt{\varepsilon}$. В отличие от уравнения Ван дер Поля в форме (4.17) стационарное значение амплитуды ρ^0 для (4.18) зависит от параметра ε ($\rho^0 = 2\sqrt{\varepsilon}$). Это обусловлено выбором данной формы уравнения как более предпочтительной с точки зрения анализа бифуркации рождения предельного цикла в сравнении с (4.17).

4.6. Генератор с жестким возбуждением автоколебаний

Рассмотрим генератор с жестким возбуждением: исследуем устойчивость состояния равновесия; получим укороченные уравнения для амплитуды и фазы; исследуем бифуркационные переходы и построим бифуркационные диаграммы.

Анализ устойчивости состояния равновесия. Определим точки равновесия и характер их устойчивости в генераторе с жестким возбуждением, заданном уравнением вида (4.25):

$$\ddot{x} - \left(\varepsilon_0 + \varepsilon_1 x^2 - x^4\right)\dot{x} + x = 0.$$

Перепишем (4.25) в виде системы уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_1\left(x, y, \varepsilon_0, \varepsilon_1\right), \\ \dot{y} &= f_2\left(x, y, \varepsilon_0, \varepsilon_1\right), \end{aligned} \tag{4.40}$$

где

$$\begin{aligned} f_1\left(x, y, \varepsilon_0, \varepsilon_1\right) &= y, \\ f_2\left(x, y, \varepsilon_0, \varepsilon_1\right) &= \left(\varepsilon_0 + \varepsilon_1 x^2 - x^4\right) y - x. \end{aligned}$$

Точки равновесия определим из уравнений:

$$\begin{aligned} y &= 0, \\ \left(\varepsilon_0 + \varepsilon_1 x^2 - x^4\right) y - x &= 0. \end{aligned}$$

Видно, что на фазовой плоскости существует одна точка равновесия с координатами $x^0 = 0, y^0 = 0$. Матрица линеаризации в окрестности данного состояния равновесия системы (4.40) имеет следующий вид:

$$\hat{A}\left(x^0, y^0\right) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1\left(x^0, y^0\right)}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1\left(x^0, y^0\right)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2\left(x^0, y^0\right)}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2\left(x^0, y^0\right)}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \varepsilon_0 \end{bmatrix}. \tag{4.41}$$

Собственные значения матрицы (4.40) определяют устойчивость состояния равновесия генератора с жестким возбуждением. Записав характеристическое уравнение

$$\mathrm{Det}\begin{bmatrix} 0 - s & 1 \\ -1 & \varepsilon_0 - s \end{bmatrix} = 0$$

или
$$s^2 - \varepsilon_0 s + 1 = 0, \tag{4.42}$$
получим следующие собственные значения:
$$s_{1,2} = \frac{\varepsilon_0}{2} \pm \sqrt{\frac{\varepsilon_0^2}{4} - 1}. \tag{4.43}$$

Из представленных результатов видно, что в генераторе с жестким возбуждением (4.25), так же как в осцилляторе Ван дер Поля, существует единственное состояние равновесия, также расположенное на фазовой плоскости в начале координат: $x^0 = 0, y^0 = 0$. Кроме того, характер этой особой точки зависит только от одного управляющего параметра ε_0 и полностью совпадает с поведением состояния равновесия в зависимости от параметра ε в осцилляторе Ван дер Поля, а именно:

1) при $\varepsilon_0 < 2$ состояние равновесия представляет собой устойчивый узел;
2) при $-2 < \varepsilon_0 < 0$ состояние равновесия является устойчивым фокусом;
3) при $0 < \varepsilon_0 < 2$ состояние равновесия — неустойчивый фокус;
4) при $\varepsilon > 2$ состояние равновесия — неустойчивый узел.

При $\varepsilon_0 = 0$ состояние равновесия характеризуется парой мнимых собственных значений, то есть выполняется условие бифуркации Андронова – Хопфа. Продолжим исследование динамики генератора с жестким возбуждением в квазигармоническом приближении и получим укороченные уравнения для амплитуды и фазы.

Укороченные уравнения для амплитуды и фазы генератора с жестким возбуждением. В уравнении генератора (4.25) будем полагать, что параметры ε_0 и ε_1 близки к нулю и система представляет собой квазигармонический осциллятор (правая часть уравнения рассматривается как слабое возмущение гармонического осциллятора). В этом случае решение можно искать в виде гармонической функции с медленно меняющимися во времени амплитудой и фазой, а именно:
$$x(t) = Re\,[a(t)\exp(jt)] = \frac{1}{2}\,[a\exp(jt) + a^*\exp(-jt)]. \tag{4.44}$$
Для комплексной амплитуды $a(t)$ введем дополнительное условие
$$\dot{a}\exp(jt) + \dot{a}^*\exp(-jt) = 0. \tag{4.45}$$

Подставив решение $x(t)$ в виде (4.44) и его первую и вторую производные по времени в уравнение (4.25), с учетом дополнительного условия (4.45) получим

$$\begin{aligned} &j\dot{a}\exp(jt) = \\ &= \left[\varepsilon_0 + \varepsilon_1\frac{(a\exp(jt)+a^*\exp(-jt))^2}{4} - \frac{(a\exp(jt)+a^*\exp(-jt))^4}{16}\right]\times \\ &\qquad\times\frac{1}{2}\left[ja\exp(jt) - ja^*\exp(-jt)\right]. \qquad (4.46) \end{aligned}$$

Разделим обе части уравнения (4.46) на $j\exp(jt)$ и проведем усреднение за период, учитывая, что $a(t)$ и $\dot{a}(t)$ являются медленно меняющимися во времени функциями и на периоде колебаний 2π они остаются практически постоянными. В результате получим укороченное уравнение для комплексной амплитуды:

$$\dot{a} = \left[\frac{\varepsilon_0}{2} + \frac{\varepsilon_1}{8}|a|^2 - \frac{1}{16}|a|^4\right]a. \qquad (4.47)$$

Представляя комплексную величину $a(t)$ как

$$a(t) = \rho(t)\exp\left[j\varphi(t)\right],$$

перепишем (4.47) в виде системы уравнений для амплитуды и фазы:

$$\begin{aligned} &\dot{\rho} = \left[\frac{\varepsilon_0}{2} + \frac{\varepsilon_1}{8}\rho^2 - \frac{1}{16}\rho^4\right]\rho, \\ &\dot{\varphi} = 0. \end{aligned} \qquad (4.48)$$

Из системы (4.48) видно, что в рассматриваемом приближении уравнение для амплитуды и уравнение для фазы полностью разделены: первое не зависит от фазы, второе не зависит от амплитуды. Фаза $\varphi(t)$ не меняется во времени, она равна константе, величина которой задается начальными условиями. Таким образом, задача о существовании периодических движений, их устойчивости и возможных бифуркациях в генераторе с жестким возбуждением в квазигармоническом приближении сводится к изучению амплитудного уравнения (4.48).

Бифуркационная диаграмма генератора с жестким возбуждением. Как уже отмечалось, данная задача сводится к исследованию состояний равновесия, их устойчивости и их бифуркаций при вариации управляющих параметров системы, заданной дифференциальным уравнением для амплитуды (4.48).

Из уравнения

$$\rho\left[\frac{\varepsilon_0}{2}+\frac{\varepsilon_1}{8}\rho^2-\frac{1}{16}\rho^4\right]=0 \tag{4.49}$$

получаем три состояния равновесия с координатами:

$$\rho_1^0=0,$$

$$\rho_2^0=\sqrt{\varepsilon_1+\sqrt{\varepsilon_1^2+8\varepsilon_0}},$$

$$\rho_3^0=\sqrt{\varepsilon_1-\sqrt{\varepsilon_1^2+8\varepsilon_0}}.$$

Таким образом, для управляющего параметра ε_0 можно выделить три характерных интервала:

1) Если $\varepsilon_0<-\left(\varepsilon_1^2/8\right)$, то в системе существует одна точка равновесия ρ_1^0.

2) Если $-\left(\varepsilon_1^2/8\right)<\varepsilon_0<0$, то существуют три точки равновесия ρ_1^0,ρ_2^0 и ρ_3^0. Следует отметить, что при $\varepsilon_0=-\left(\varepsilon_1^2/8\right)$ две точки равновесия сливаются $\left(\rho_2^0=\rho_3^0=\sqrt{\varepsilon_1}\right)$ и ниже указанного значения ε_0 исчезают.

3) Если $\varepsilon_0>0$, то существуют два состояния равновесия ρ_1^0 и ρ_2^0. При стремлении ε_0 к нулю со стороны отрицательных значений неподвижная точка ρ_3^0 перемещается к точке ρ_1^0 и при $\varepsilon_0=0$ сливается с ней. Выше этого значения остаются две точки.

Устойчивость состояний равновесия $\rho_1^0,\rho_2^0,\rho_3^0$ определяется собственным значением

$$\begin{aligned} s_i &= \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\rho+\frac{\varepsilon_1}{8}\rho^3-\frac{1}{16}\rho^5\right)\bigg|_{\rho=\rho_i^0} = \\ &= \frac{\varepsilon_0}{2}+\frac{3\varepsilon_1}{8}\left(\rho_i^0\right)^2-\frac{5}{16}\left(\rho_i^0\right)^4, \end{aligned} \tag{4.50}$$

где индекс $i=1,2,3$ указывает на одно из трех состояний равновесия.

Для состояния равновесия ρ_1^0 имеем $s_1=\frac{\varepsilon_0}{2}$. Следовательно, при $\varepsilon_0<0$ точка является устойчивой, а при положительных значениях ε_0 становится неустойчивым состоянием равновесия.

Рассмотрим собственное значение для неподвижной точки ρ_2^0:

$$s_2 = -\frac{1}{4}\sqrt{\varepsilon_1^2 + 8\varepsilon_0}\left[\varepsilon_1 + \sqrt{\varepsilon_1^2 + 8\varepsilon_0}\right]. \tag{4.51}$$

Прежде чем исследовать устойчивость состояния равновесия ρ_2^0 в зависимости от параметров, напомним, что по физическому смыслу ε_0 может принимать как отрицательные, так и положительные значения, в то время как ε_1 может принимать только положительные значения.

Состояние равновесия ρ_2^0 появляется при выполнении условия $\varepsilon_0 = -\left(\varepsilon_1^2/8\right)$, когда имеет место равенство $s_2 = 0$, что соответствует точке бифуркации. При $\varepsilon_0 > -\left(\varepsilon_1^2/8\right)$ все три множителя в выражении (4.51) положительные, следовательно, собственное значение $s_2 < 0$ и состояние равновесия ρ_2^0 является устойчивым.

Выражение для собственного значения s_3 состояния равновесия ρ_3^0 имеет вид

$$s_3 = \frac{1}{4}\sqrt{\varepsilon_1^2 + 8\varepsilon_0}\left[\varepsilon_1 - \sqrt{\varepsilon_1^2 + 8\varepsilon_0}\right]. \tag{4.52}$$

Состояние равновесия ρ_3^0 существует при $-\left(\varepsilon_1^2/8\right) < \varepsilon_0 < 0$. В этой области значений параметра собственное значение $s_3 > 0$, следовательно, точка ρ_3^0 является неустойчивой.

Таким образом, в результате для генератора с жестким возбуждением получается бифуркационная диаграмма, представленная на рис. 4.7. Динамика системы зависит от управляющего параметра ε_0, значения которого отложены на оси абсцисс. По оси ординат отложены стационарные значения амплитуды $\rho(t)$. Для исходного уравнения генератора с жестким возбуждением (4.25) точки $\rho = 0$ на бифуркационной диаграмме рис. 4.7 соответствуют неподвижной точке на фазовой плоскости (x, y), расположенной в начале координат. Точки с ординатой $\rho > 0$ на бифуркационной диаграмме рис. 4.7 соответствуют предельному циклу радиуса ρ на фазовой плоскости (x, y) с центром в начале координат.

В генераторе с жестким возбуждением (4.25) при $\varepsilon_0 < -\left(\varepsilon_1^2/8\right)$ существует единственный аттрактор на фазовой плоскости — устойчивая точка равновесия в начале координат. С увеличением параметра ε_0 при переходе значения $\varepsilon_0 = -\left(\varepsilon_1^2/8\right)$ происходит бифуркация рождения пары циклов — устойчивого с радиусом ρ_2^0 и неустойчивого с радиусом ρ_3^0. С ростом параметра радиус устойчивого предельного цикла увеличивается, а неустойчивого — уменьшается. При достижении значения $\varepsilon_0 = 0$ неустойчивый предельный цикл стягивается в неподвижную точку в начале координат

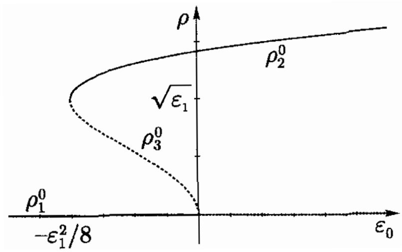


Рис. 4.7. Бифуркационная диаграмма генератора с жестким возбуждением

($\rho_1^0 = 0$), происходит субкритическая бифуркация Андронова–Хопфа, состояние равновесия $\rho_1^0 = 0$ становится неустойчивым. При $\varepsilon_0 > 0$ на фазовой плоскости имеется неустойчивое состояние равновесия и устойчивый предельный цикл. При значениях параметров $\left(\varepsilon_1^2/8\right) < \varepsilon_0 < 0$ в генераторе с жестким возбуждением наблюдается явление бистабильности. На фазовой плоскости сосуществуют два аттрактора: устойчивая неподвижная точка и устойчивый предельный цикл. Границей их бассейнов притяжения является неустойчивый предельный цикл. В генераторе с жестким возбуждением также наблюдается явление гистерезиса. С ростом управляющего параметра переход из состояния равновесия на устойчивый предельный цикл происходит при $\varepsilon_0 = 0$, а при обратном движении по параметру переход от устойчивого предельного цикла к устойчивому состоянию равновесия происходит при $\varepsilon_0 = -\left(\varepsilon_1^2/8\right)$.

4.7. Заключение

В данной лекции рассмотрены два наиболее типичных примера автоколебательных систем на фазовой плоскости — генератор Ван дер Поля и генератор с жестким возбуждением автоколебаний. Проведено исследование динамики систем в квазигармоническом приближении. Получены укороченные уравнения для амплитуды и фазы, с помощью которых построены бифуркационные диаграммы и описаны условия возбуждения и характеристики автоколебаний.

Лекция 5

Системы с размерностью фазового пространства $N \geqslant 3$. Детерминированный хаос

5.1. Введение

Выход с фазовой плоскости в пространство большей размерности приводит к принципиальным качественным изменениям. Значительно увеличивается число возможных бифуркаций состояний равновесия и предельных циклов, многие из которых пока еще не исследованы. Становятся возможными такие седловые множества, как состояние равновесия седло-фокусного типа, седловой предельный цикл, а в пространстве с размерностью $N \geqslant 4$ — цикл седло-фокусного типа, седловой тор и т. д. Появление многомерных устойчивых и неустойчивых многообразий седловых множеств и новых типов двоякоасимптотических траекторий, таких как сепаратрисные петли седло-фокусов и гомоклинические кривые Пуанкаре, во многих случаях обеспечивает сложную структуру фазового портрета ДС. Реализуемые режимы поведения оказываются гораздо сложнее и многообразнее. Кроме периодических колебаний становятся возможными квазипериодические и хаотические колебания. Возникают новые типы аттракторов — двумерные и многомерные торы, соответствующие квазипериодическим режимам, странные хаотические аттракторы, служащие образом динамического хаоса. При некоторых условиях возможны особые типы поведения ДС и особые «экзотические» аттракторы: странные хаотические и хаотические нестранные. Наиболее важным и интересным для нас типом поведения систем в R^N, $N \geqslant 3$, является детерминированный (динамический) хаос.

Хаотические процессы в детерминированных нелинейных диссипативных системах — одна из фундаментальных проблем современного естествознания, являющаяся предметом пристального внимания исследователей. Убедительно доказано, что в таких системах причина генерирования сложных колебательных процессов, которые могут не отличаться по физическим характеристикам от истинно случайных, кроется не в большом числе степеней свободы и не в наличии флуктуаций, как ранее полагалось, а в экспоненциальной неустойчивости режимов, порождающей чувствительную зависимость от точности задания начального состояния системы. Возможность подобных явлений прекрасно понимал и предвидел А. Пуанкаре. В неустойчивых системах «...совершенно ничтожная причина, ускользающая от нас по своей малости, вызывает значительное действие, которого мы не можем предусмотреть... Предсказание становится невозможным, мы имеем перед собой явление случайное». Так писал он еще в 1908 г. в книге «Наука и метод». Развитие идей А. Пуанкаре в настоящее время привело к созданию фундамента хаотической динамики детерминированных систем. Как оказалось, необходимым условием возникновения хаоса в дифференциальных системах является размерность фазового пространства $N \geqslant 3$ и возбуждение незатухающих хаотических пульсаций становится принципиально возможным в генераторах всего с полутора степенями свободы.

В системах с одной степенью свободы, фазовым пространством которых служит фазовая плоскость, возможные динамические режимы исчерпываются состояниями равновесия и периодическими колебаниями (предельными циклами). Это обстоятельство многие годы служило психологическим барьером, преодолению которого не помогали даже очевидные (сейчас!) экспериментальные результаты. Ограниченность «нелинейного мышления» на базе фазовой плоскости понимали многие ведущие ученые, однако ввиду отсутствия соответствующего математического аппарата обоснованный выход с плоскости в пространство трех и более измерений был практически невозможен.

5.2. Детерминированность

Что же представляет собой явление детермированного хаоса? Попытаемся ответить на этот вопрос. Вначале необходимо внести ясность в понимание терминов «*детермированность*» и «*хаос*», а затем определить содержание термина «*детерминированный хаос*». Во всех случаях, когда говорят о детермированности, подразумевают однозначную взаимосвязь причины и следствия (см. лекцию 1). В применении к эволюционным законам это означает, что если задано некоторое начальное состояние системы при $t = t_0$, то оно *однозначно* определяет состояние системы в любой момент времени $t > t_0$. Например, если тело движется равноускоренно, то его скорость определяется детерминированным законом:

$$v(t) = v(t_0) + at. \tag{5.1}$$

При задании начальной скорости $v(t_0)$ мы однозначно определяем значение скорости $v(t)$ в любой момент времени $t > t_0$.

В общем случае зависимость будущего состояния $x(t)$ от начального $x(t_0)$ можно записать в виде: $x(t) = F[x(t_0)]$, где F — детерминированный закон (или оператор), который осуществляет строго однозначное преобразование начального состояния $x(t_0)$ в будущее состояние $x(t)$ для любого $t > t_0$. Этот закон может представлять собой функцию, дифференциальное или интегральное уравнение, просто некоторое правило, заданное таблицей или графиком и т. д. Важно главное: закон F *однозначно* трансформирует начальное состояние (причину) в будущее состояние (следствие).

5.3. Хаос

Теперь внесем ясность в понятие «*хаос*». Давайте проведем мысленный эксперимент с броуновской частицей. Поместим частицу в начальный момент $t = t_0$ в раствор жидкости и с помощью микроскопа начнем фиксировать ее положение во времени, отмечая координаты частицы через равные интервалы $\triangle t$. Нетрудно убедиться, что под действием случайных толчков со стороны окружающих молекул частица будет совершать нерегулярные блуждания, которые характеризуются запутанной траекторией. Повторим эксперимент несколько раз подряд, осуществляя в пределах возможностей воспроизводство начальных условий опыта. Каковы будут результаты? Их, главным образом, два. Первый — каждый раз траектория движения частицы будет сложной, непериодической. Второй — любая попытка однозначного повторения опыта приведет к отрицательному результату. Каждый раз при повторении опыта с одинаковыми (в пределах наших возможностей) начальными условиями мы будем получать различные траектории движения частицы, которые даже близко не напоминают друг друга!

Классическое явление движения броуновской частицы дает нам четкие физические представления о хаосе как о непредсказуемом, случайном процессе. Таким образом, если мы говорим о хаосе, мы подразумеваем, что изменение во времени состояния системы является случайным (его нельзя однозначно предсказать) и невоспроизводимым (процесс нельзя повторить).

Изложенные выше размышления приводят нас к убеждению, что понятия «*детерминизм*» и «*хаос*» есть прямопротивоположные по смыслу. Детерминизм ассоциируется с полной однозначной предсказуемостью и воспроизводимостью, хаос — с полной непредсказуемостью и невоспроизводимостью. Возникает закономерный вопрос, что понимается под термином «*детерминированный хаос*», где объединены два противоположных по смыслу понятия? Ответить на этот вопрос непросто, но возможно. Попытаемся это сделать.

5.4. Устойчивость и неустойчивость

Нам понадобится рассмотреть понятие *устойчивости* (*неустойчивости*) движения системы. Начнем с простейшего, рассмотрев состояние покоя или равновесия системы. Поместим маленький шарик в нижнюю точку внутри полой сферы. Слегка толкнем его и пронаблюдаем за движением. После совершения нескольких затухающих колебаний шарик вновь займет положение на дне сферы. В этом случае положение равновесия *устойчиво*: малые возмущения исходного состояния затухают во времени. Если мы поместим шарик на вершину сферы (снаружи), то реакция на малое возмущение будет иной: при любом сколь угодно малом отклонении шарика от состояния равновесия он скатывается с вершины. Это положение равновесия *неустойчиво*: малые возмущения исходного состояния нарастают во времени.

Физический смысл понятия «*устойчивость*» (*неустойчивость*), рассмотренный нами применительно к состоянию равновесия, сохраняется и в отношении любого другого режима. Режим функционирования динамической системы называют *устойчивым*, если малые возмущения в окрестности этого режима затухают во времени, стремясь к нулю. Если этого не происходит и малые отклонения от режима функционирования системы нарастают во времени, такой режим будет *неустойчивым* (см. лекцию 2).

5.5. Нелинейность

Теперь обсудим другое важное свойство сложных систем — *нелинейность*. Пусть мы имеем дело с неустойчивым режимом. Слегка нарушив режим малым воздействием, мы поначалу будем фиксировать нарастание возмущения. Будет ли оно бесконечным? В реальной жизни — никогда! Отклонение будет нарастать до тех пор, пока не вступит в действие некий механизм нелинейного ограничения процесса нарастания возмущения. Что это такое? Ответим на этот вопрос с физической и математической точек зрения.

С физической точки зрения нарастание амплитуды не может происходить до бесконечности. На первом этапе, когда отклонение от исходного состояния мало, оно может нарастать. А дальше? Дальше, в силу ограниченности энергетических ресурсов системы, это нарастание должно прекратиться или смениться уменьшением амплитуды отклонения. Любой новый режим должен иметь конечную амплитуду и управляют этими процессами нелинейные законы. Мы говорим о нелинейности в том случае, когда свойства системы непосредственно зависят от ее состояния. Приведем пример. Пусть зависимость амплитуды отклонения $f(x)$ от исходного состояния x определяется следующим соотношением:

$$f(x) = kx - bx^3, \tag{5.2}$$

где k и b — постоянные положительные коэффициенты. Если $x \ll 1$, то $bx^3 \ll kx$ и

$$f(x) \cong kx. \tag{5.3}$$

В случае (5.3) $f(x)$ линейно растет с ростом x. Если же x становится сравнимым с единицей, то членом bx^3 пренебрегать уже нельзя. В случае (5.2) рост отклонения $f(x)$ за счет члена kx начнет испытывать нелинейное ограничение в силу вычитания величины bx^3. При некоторых значениях x величина отклонения (5.2) вновь будет близка к нулю и все начнется сначала: отклонение начнет нарастать, достигнет максимума и затем, испытывая ограничение, опять уменьшится. Система будет как бы автоматически себя регулировать, так как ее свойства зависят от ее текущего состояния.

5.6. Неустойчивость и нелинейное ограничение

Теперь рассмотрим неустойчивую детерминированную систему с учетом действия механизма нелинейного ограничения нарастаний возмущений. Для простоты рассмотрим состояние равновесия, которому отвечает точка в пространстве фазовых координат системы. Выведем систему из равновесия малым отклонением. Это возмущение начнет нарастать в силу неустойчивости. Далее нарастание возмущения начнет замедляться (вступит в силу механизм нелинейного ограничения). Что можно ожидать в этой ситуации? Во-первых: в силу нелинейного ограничения отклонение уменьшится строго до нуля. Система вернется в исходное состояние равновесия. Теоретически это возможно, однако очень маловероятно, так как исходное состояние равновесия неустойчиво. Более вероятна вторая ситуация: система вернется в малую окрестность исходного состояния (подойдет очень близко к состоянию неустойчивого равновесия) и вновь (в силу неустойчивости) начнет от него удаляться. Этот процесс будет длиться бесконечно во времени! Но реализация такого процесса требует некоторых специальных условий.

Предположим, что мы имеем дело с двумерной дифференциальной динамической системой. Пространство ее состояний — фазовая плоскость с координатами x и y. Если малое возмущение состояния равновесия в такой системе будет нарастать, а в результате нелинейного ограничения далее уменьшаться, то возможны два варианта: появление новых устойчивых состояний равновесия вблизи неустойчивого либо выход траектории на новый режим, отвечающий периодическим колебаниям.

Второй вариант иллюстрирует рис. 5.1. При малых амплитудах возмущения (см. рис. 5.1, *а*) траектория по спирали удаляется от точки равновесия О. При больших отклонениях (см. рис. 5.1, *б*) траектория возвращается. В результате вместо потерявшего устойчивость состояния равновесия появляется новый режим — периодические автоколебания, которым отвечает предельный цикл Г на фазовой плоскости.

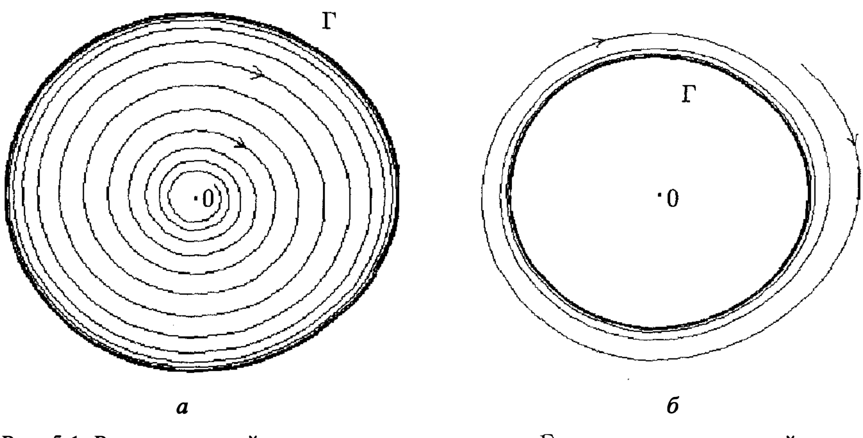


Рис. 5.1. Рождение устойчивого предельного цикла Г в окрестности неустойчивого равновесия О. Поведение траекторий: *а* — при малых отклонениях от равновесия; *б* — при больших

Неустойчивость состояния равновесия в двумерной системе при наличии механизма нелинейного ограничения нарастания возмущений порождает новый режим — режим устойчивых периодических колебаний. Если мы вообразим себе иную ситуацию, когда отклонение от состояния равновесия вначале нарастает, а затем в силу нелинейности вновь стремится к нулю, мы придем к противоречию: фазовая траектория обязана будет самопересекаться! (рис. 5.2). Но это будет означать, что существуют начальные условия, приводящие в процессе эволюции к различным состояниям!

Это невозможно в силу понятия детерминизма, которое в данном примере проявляется в содержании теоремы единственности решения: при заданных начальных условиях решение существует и оно *единственное*, другого не дано.

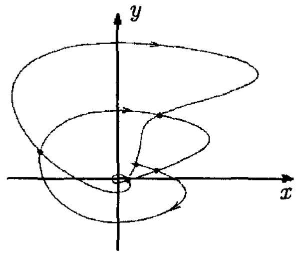


Рис. 5.2. Поведение динамической системы, которое невозможно реализовать на плоскости в силу пересечения фазовых траекторий. Реально эта картина получается путем проекции трехмерной траектории на плоскость двух переменных

5.7. Детерминированный хаос

Картина принципиально изменится, если мы рассмотрим динамическую систему, состояние которой характеризуется тремя независимыми переменными (фазовыми координатами). Другими словами, давайте повторим наши рассуждения, осуществив выход с плоскости в трехмерное фазовое пространство. Ничто не запрещает нам реализовать ситуацию (рис. 5.2) в пространстве трех измерений. Траектория раскручивается в трехмерном пространстве, удаляясь от точки 0 по спирали. Достигнув некоторых значений и испытывая действие механизма нелинейного ограничения, траектория вновь вернется в окрестность исходного состояния. Далее, ввиду неустойчивости, процесс будет повторяться.

Возможны два варианта. Первый заключается в следующем: траектория, совершив несколько оборотов в трехмерном пространстве, через некоторое время замкнется. Это будет означать наличие в системе сложного, но периодического процесса колебаний. Второй вариант: траектория, хотя и будет возвращаться в окрестность нуля координат, но не будет замыкаться, демонстрируя некий апериодический процесс, длящийся бесконечно. Второй случай и отвечает режиму детерминированного хаоса! Действительно, работает основной принцип детерминизма: будущее однозначно определено начальным состоянием. Однако процесс эволюции системы сложный, непериодический. Чисто внешне он ничем не отличается от случайного!

При более детальном анализе вскрывается одно важное отличие этого процесса от случайного: этот процесс воспроизводим! Действительно, повторив еще раз начальное состояние, в силу детерминированности мы вновь однозначно воспроизведем ту же самую траекторию независимо от степени ее сложности. Значит, этот непериодический процесс не является хаотическим в смысле определения хаоса, данного нами выше? Да, это сложный, похожий на случайный, но тем не менее детерминированный процесс. Важно здесь то, что он характеризуется неустойчивостью и это обстоятельство позволяет нам понять еще одно принципиально важное свойство систем с детерминированным хаосом — *перемешивание*.

5.8. Перемешивание

Мы установили, что в диссипативных системах, размерность фазового пространства которых $N \geqslant 3$, теоретически возможен режим сложных непериодических пульсаций. Этот тип движения детерминирован и характеризуется неустойчивостью. К чему это приводит? Давайте рассуждать. Вначале поговорим об устойчивых режимах движения в детерминированных диссипативных динамических системах.

Рассмотрим в качестве начального состояния не точку $\vec{x}^0$ с определенными координатами в пространстве состояний, а малую сферу радиуса $\varepsilon > 0$, окружающую эту точку. Любая точка внутри сферы характеризует малое отклонение от $\vec{x}^0$. Сфера включает совокупность возможных отклонений от исходного состояния, не превышающих по модулю ε. Теперь применим оператор эволюции и проследим за трансформацией этой сферы. В силу устойчивости выбранного нами режима любое малое отклонение во времени должно затухать! Это означает, что под действием детерминированного закона эволюции шарик радиуса ε во времени будет уменьшаться и при $t \to \infty$ его радиус уменьшится до нуля! Сказанное выше иллюстрирует рис. 5.3. Исходный фазовый обьем в диссипативных системах во времени уменьшается. Это означает, что малые возмущения в итоге будут затухать и система вновь вернется в исходный устойчивый режим.

А если исходный режим неустойчив? Что будет в этом случае? Фазовый обьем может увеличиваться до бесконечности, если неустойчивая система линейна. Но если система нелинейна и диссипативна, то процесс эволюции начального малого фазового обьема будет весьма нетривиальным. Попытаемся это понять.

Неустойчивость режима ведет к росту возмущений. Это одно обстоятельство. Второе — диссипативные системы вне зависимости от вида устойчивости вызывают уменьшение элемента фазового обьема во времени до

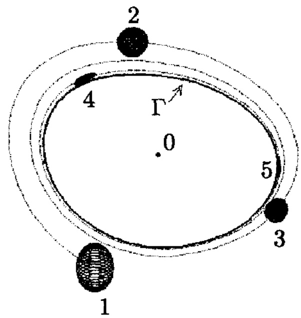


Рис. 5.3. Сжатие первоначальной области неопределенности *1* во времени в случае, когда цикл Г является устойчивым предельным режимом

нуля, что связано с потерями энергии. Как совместить эти два фактора? Существует единственное решение этой дилемы: элемент фазового объема по некоторым направлениям должен растягиваться, а по другим — сжиматься. Причем степень сжатия в среднем должна обязательно превалировать над степенью расширения, чтобы в итоге фазовый объем во времени уменьшался! В нелинейных диссипативных системах это оказывается возможным. Вышесказанное иллюстрирует рис. 5.4. В силу наличия механизма нелинейного ограничения фазовая траектория сложного режима колебаний сосредоточена в ограниченной области фазового пространства. При этом любая малая окрестность исходного начального состояния эволюционирует так, как показано на рис. 5.4 и в итоге премешивается по всей области, занятой траекторией. Этот процесс весьма трудно представить себе наглядно.

Проведем мысленный эксперимент. В стакан с водой поместим маленькую чаинку и размешаем воду чайной ложкой, вызвав неустойчивость. Чаинка будет при этом двигаться по сложной спиралеобразной траектории, которая обусловлена движением воды в стакане. При этом в любой заданный момент времени мы теоретически можем зафиксировать ее координаты $\vec{x}(t)$ в объеме воды! Теперь вместо чаинки поместим в стакан с водой очень маленькую капельку чернил и вновь размешаем воду чайной ложкой. Что при этом произойдет? Чернила практически равномерно разбегутся по всему объему воды, слегка окрасив ее! Частички чернил, первоначально сосредоточенные в маленьком объеме капельки, спустя время перемешивания можно будет обнаружить в *любой* части объема воды в стакане! В жизни этот процесс мы привыкли называть перемешиванием. В математике это понятие также существует и с точки зрения физической интерпретации оказывается весьма близким по смыслу. Действительно, поток воды

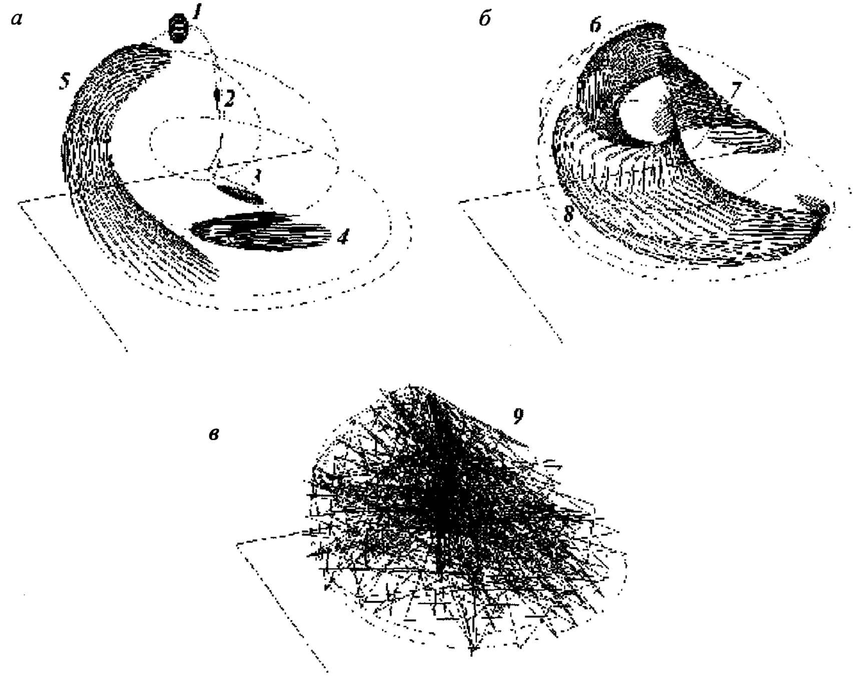


Рис. 5.4. Эволюция малого первоначального фазового объема *1* во времени в системе со странным аттрактором, иллюстрирующая перемешивание. Исходный объем *1* сжимается по одним и растягивается по другим направлениям (*2, 3, 4*), изгибается (*5, 6*), «складывается» (*7, 8*) и в итоге перемешивается по аттрактору (*9*)

в стакане, созданный движением чайной ложки, можно интерпретировать как действие детерминированного эволюционного оператора динамической системы. Чаинка при этом будет двигаться по сложной, но детерминированной (хотя и очень сложной) траектории. А капелька чернил, которую можно интерпретировать как некий маленький объем в фазовом пространстве вокруг чаинки, под действием оператора эволюции перемешается по всему объему воды!

5.9. Вероятностные свойства детерминированных систем

Таким образом, в неустойчивых режимах в детерминированных нелинейных системах с перемешиванием мы можем предсказать будущее состояние однозначно только в случае строгого задания начальных условий. Однако если учесть сколь угодно малую, но конечную ошибку (т. е. рассмотреть капельку чернил вместо чаинки), то детерминированное предсказание становится невозможным. Малая область первоначальной неопределенности размывается за счет перемешивания на конечную область в фазовом пространстве. Теперь мы имеем дело с процессом, который ассоциируется с настоящей случайностью, с настоящим хаосом!

Основным свойством динамических систем, демонстрирующих режим детерминированного хаоса, является чувствительная зависимость режима функционирования к сколь угодно малым изменениям начальных условий. Именно это обстоятельство ведет по сути дела к потере детерминированной предсказуемости и необходимости вводить вероятностные характеристики для описания динамики таких систем. В этом смысле становится понятным термин «детерминированный хаос», который характеризует рождение случайного, непредсказуемого поведения системы, которое управляется детерминированными законами.

Неопределенность в задании начального состояния — ситуация вполне реальная с точки зрения физики. Действительно, в силу конечной точности регистрации состояния любыми приборами оно определяется с конечной (пусть сколь угодно малой) ошибкой. Это означает, что мы должны анализировать эволюцию во времени не начальной точки, а начальной области вокруг этой точки. В силу перемешивания мы столкнемся с процессом, подробно описанным выше.

5.10. Детерминированный хаос — математическая экзотика или типичное свойство материального мира?

Путем простейших рассуждений мы пришли к выводу о возможности режима детерминированного хаоса в нелинейных системах с диссипацией энергии. В современной науке этот эффект строго обоснован теоретически и достоверно подтвержден экспериментально. Может возникнуть вопрос, не является ли этот феномен математической экзотикой в том смысле, что его реализация теоретически возможна, но практически — маловероятна? Нет и еще раз нет! После открытия детерминированного хаоса, ясного понимания свойств эффекта и разработки методов его диагностики хаос был обнаружен практически во всех областях современного естествознания: в физике, радиотехнике, химии, биологии, механике, экономике и др. Может возникнуть естественный вопрос, почему до недавнего времени этот типичный режим функционирования динамических систем не был обнаружен и описан? Этому есть объяснение.

Хотя теоретически подавляющее число реальных материальных систем и процессов нелинейны, существует широкий класс процессов, достаточно корректно описываемых в линейном или квазилинейном приближении. Линейная теория динамических систем и процессов разработана достаточно полно и позволяет дать их исчерпывающее описание, хорошо согласующееся с экспериментом. Но детерминированный хаос — явление, присущее исключительно нелинейным системам! А в отношении нелинейной теории дела обстоят намного хуже. Пока не существует, например, общей теории решения нелинейных дифференциальных уравнений. Анализ динамики нелинейных систем и сейчас требует искусства, творческого подхода, индивидуального в каждом конкретном случае.

Именно отсутствие строгих теоретических результатов применительно к нелинейным системам сдерживало открытие и понимание этого универсального явления. Экспериментаторы давно сталкивались с проявлением хаоса. Однако ограниченность теоретических знаний, обусловленная влиянием линейной и квазилинейной структуры научного мышления, приводила к ошибкам в трактовке наблюдаемых результатов. Делался вывод о том, что шумоподобные колебания обусловлены либо действием флуктуаций, либо огромным числом степеней свободы системы, либо неисправностью измерительной аппаратуры.

Сейчас положение изменилось. Наша жизнь все более настоятельно требует количественного учета таких факторов, как сверхвысокая плотность, сверхвысокая температура, давление, сверхвысокие скорости, плотности населения и т. д. А, как известно, учет этих факторов требует принципиально нелинейного подхода к описанию эволюционных процессов. Эти процессы моделируются и анализируются с помощью компьютеров, для которых нелинейность модели не является препятствием для ее детального анализа. И выяснилось, что в таких системах хаотический режим функционирования скорее правило, чем исключение!

5.11. Странные хаотические аттракторы

Математическим образом установившегося режима функционирования диссипативной динамической системы служит *аттрактор* — притягивающее предельное множество в фазовом пространстве, к которому стремятся все исходные траектории. Если установившийся режим есть устойчивое состояние равновесия — аттрактор системы будет просто неподвижной точкой, если это устойчивое периодическое движение — аттрактором будет замкнутая кривая, называемая предельным циклом. Раньше считалось, что аттрактор есть образ исключительно устойчивого режима функционирования системы. Сейчас мы понимаем, что режим детерминированного хаоса тоже аттрактор в смысле определения предельной траектории в ограниченной области фазового пространства. Однако такой аттрактор имеет два существенных отличия: траектории и на таком аттракторе непериодические (они не замыкаются) и режим функционирования неустойчив (малые отклонения от режима нарастают). Именно эти отличия и привели к необходимости ввести в рассмотрение новый термин. С легкой руки французского исследователя Ф. Такенса такие аттракторы стали называть *странными*. Сейчас чаще употребляют термин *хаотический* или *нерегулярный* аттрактор.

Каков критерий «станности», или, точнее, «хаотичности»? Как установлено теоретиками, основным критерием хаотического аттрактора является неустойчивость траектории. Причем неустойчивость обязана быть экспоненциальной! Это означает, что малое возмущение режима $D(0)$ должно во времени увеличиваться по экспоненте:

$$D(t) = D(0)\exp(\lambda t), \quad \lambda = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \frac{D(t)}{D(0)}, \tag{5.4}$$

где λ — старший показатель Ляпунова.

Оказалось, что положительность величины λ говорит не только об экспоненциальной неустойчивости режима колебаний, но и доказывает наличие в системе перемешивания. Если установлено, что исследуемый режим имеет $\lambda > 0$, то следствием будут: непериодичность в зависимости от времени любой из координат состояния, сплошной спектр мощности (в спектре колебаний присутствуют все частоты из некоторого интервала) и спадающая во времени автокорреляционная функция. До недавнего времени с таким поведением указанных характеристик однозначно связывали представления о случайном процессе. Теперь мы знаем, что подобными свойствами может обладать процесс, порождаемый детерминированными законами. Это обстоятельство и послужило основанием называть такие процессы детерминированным хаосом.

5.12. Странные нехаотические и хаотические нестранные аттракторы

Хаотические аттракторы, описанные выше, объединяют два принципиальных свойства: сложная геометрическая структура (как следствие — дробная метрическая размерность) и экспоненциальная неустойчивость индивидуальных траекторий. Именно эти свойства используются экспериментаторами в качестве критериев при диагностике режимов детерминированного хаоса.

Однако режимы сложной динамики вышеописанными типами хаотических аттракторов не исчерпываются. Выяснилось, что хаотическое поведение в смысле наличия перемешивания и геометрическая «странность» аттрактора могут не соответствовать друг другу. Странные в геометрическом понимании аттракторы могут не быть хаотическими ввиду отсутствия экспоненциальной неустойчивости фазовых траекторий. С другой стороны, есть примеры перемешивающих диссипативных систем, аттракторы которых не являются в строгом смысле странными, т. е. не характеризуются фрактальной структурой и дробной метрической размерностью (Лекция 9).

Другими словами, существуют конкретные примеры диссипативных динамических систем, аттракторы которых характеризуются следующими свойствами:

1) при регулярной геометрической структуре с точки зрения целочисленной метрической размерности индивидуальные фазовые траектории в среднем экспоненциально неустойчивы;

2) при сложной геометрической структуре траектории ассимптотически устойчивы; перемешивание отсутствует.

Первый тип называют *хаотическим нестранным аттрактором* (ХНА), второй — *странным нехаотическим аттрактором* (СНА).

В итоге все аттракторы динамических систем можно разделить на два типа: *регулярные*, к которым относятся дифференцируемые многообразия — точки равновесия, предельные циклы, двумерные и многомерные торы, и *нерегулярные*, к которым относятся все аттракторы, обладающие свойством «странности» или «хаотичности» (или, как это чаще всего бывает, сразу обоими этими свойствами).

Далее будут приведены примеры хаотического нестранного и странного нехаотического аттракторов в двумерных отображениях. Странные нехаотические аттракторы были обнаружены также в дифференциальных неавтономных системах с квазипериодическим внешним воздействием. Минимальная размерность такой системы, приведенной к автономному виду, есть $N = 3$. Хаотические нестранные аттракторы очень мало рассматривались в научной литературе. Все известные случаи относятся к обратимым отображениям на двумерном торе. Такое отображение можно рассматривать как отображение Пуанкаре, возникающее в сечении потока на трехмерном торе.

Размерность дифференциальной системы, в которой можно было бы реализовать трехмерный тор, есть $N = 4$. Однако существование ХНА в какой-либо конкретной системе, задаваемой дифференциальными уравнениями, пока строго не установлено.

Хаотические нестранные аттракторы. Хаотические аттракторы, не являющиеся с точки зрения их геометрии странными, известны относительно давно, однако изучены недостаточно. В качестве примера динамической системы с ХНА можно привести модифицированное отображение Арнольда. Это отображение представляет собой известное «cat map» с добавлением нелинейного периодического слагаемого:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + y_n + \delta\cos(2\pi y_n), \mathrm{mod} 1, \\ y_{n+1} &= x_n + 2y_n, \mathrm{mod} 1. \end{aligned} \tag{5.5}$$

При условии что $\delta < 1/2\pi$, отображение (5.5) есть диффеоморфизм тора. Другими словами, отображение (5.5) взаимно-однозначно (обратимо) и переводит единичный квадрат (x_n, y_n) в себя. Отображение (5.5) является диссипативным, т. е. при каждой итерации элемент площади сжимается. Это свойство легко доказать, если вычислить якобиан преобразования (5.5):

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 1 - 2\pi\delta\sin 2\pi y_n \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0, \delta < \frac{1}{2\pi}. \tag{5.6}$$

Среднее по времени значение $|J| < 1$. При этом сигнатура спектра ляпуновских показателей представляет собой $+, -$, т. е. фиксируется наличие перемешивания.

Казалось бы, мы имеем дело с обычным хаотическим странным аттрактором. Но это не так. Главной отличительной особенностью рассматриваемого случая является то, что, несмотря на сжатие площади, движение изображающей точки отображения (5.5) является эргодическим. Точка при $n \to \infty$ посещает любой элемент единичного квадрата, представляющего полную развертку двумерного тора! Свидетельством этого факта является то, что метрическая размерность аттрактора (емкость по Колмогорову) равна 2. Плотность точек аттрактора, хотя и неравномерна в единичном квадрате, нигде не обращается в нуль. Таким образом, несмотря на сжатие, аттрактором системы (5.5) является весь единичный квадрат. В этом смысле аттрактор Арнольда не является странным, так как ему нельзя приписать фрактальную геометрию.

Несмотря на то, что точки практически полностью покрывают квадрат (как видно из фазового портрета аттрактора на рис. 5.5), плотность их распределения явно неоднородна! Количественной мерой этой неоднородности является величина информационной размерности $1 < D_I < 2$. Например, для значений $\delta = 0.05$ $D_I \simeq 1.96$, для $\delta = 0.10 D_I \simeq 1.84$. При этом, как уже говорилось, емкость $D_C = 2.0$ (это строгий результат Синая). В результате неоднородности плотности распределения вероятностей точек на аттракторе значения всех вероятностно-метрических размерностей аттрактора Арнольда будут лежать в интервале $1 < D < 2$. Эти размерности учитывают не только геометрические, но и динамические свойства аттрактора.

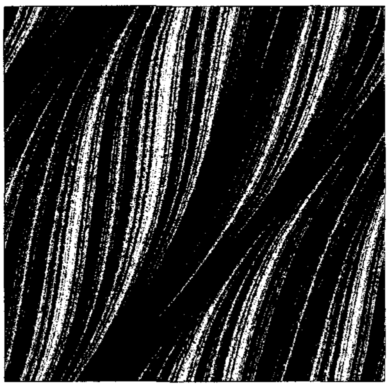


Рис. 5.5. Хаотический нестранный аттрактор в отображении Арнольда при $\delta = 0.15$

ХНА обнаружены в ряде других отображений на торе. Можно предположить, что эргодические хаотические движения типичны для диффеоморфизмов на торе. Факт существования ХНА в таких отображениях позволяет предполагать, что есть потоковые (дифференциальные) системы в R^N ($N \geqslant 4$), имеющие режимы ХНА. Однако до настоящего времени ХНА в дифференциальных динамических системах не обнаружены. В связи с этим, в частности, до сих пор является открытым вопрос о возможности существования хаотического аттрактора на поверхности трехмерного тора, вложенного в фазовое пространство размерности $N \geqslant 4$.

Странные нехаотические аттракторы. Как мы уже говорили, хаотические аттракторы обладают геометрической «странностью» и перемешиванием. Другими словами, сложная динамика перемешивающей системы порождает и геометрическую сложность соответствующего аттрактора. Тем не менее в случае ХНА мы вынуждены разделить эти свойства: перемешивание может не приводить к геометрической «странности» аттрактора.

Здесь мы рассмотрим возможность реализации противоположной ситуации, когда система демонстрирует сложный непериодический режим колебаний, асимптотически устойчивый (без перемешивания), а аттрактор при этом явно не является регулярным с точки зрения его геометрической структуры.

Примеры негрубых странных нехаотических аттракторов (СНА) привести нетрудно. По сути дела любой странный хаотический аттрактор в критической точке перехода к хаосу являет собой пример СНА. В критической точке ляпуновский показатель равен нулю (хаоса нет!). По определению такой аттрактор является СНА. Однако он негрубый. С точки зрения физики интерес представляют грубые аттракторы, которые существуют на множестве значений параметров ненулевой меры и сохраняют свою структуру при возмущениях. Как оказалось, динамические системы с грубыми СНА существуют как в дифференциальных, так и в дискретных динамических системах.

СНА типичны для динамических систем с квазипериодическим возбуждением. Уместно уточнить, что мы понимаем под аттрактором неавтономной системы. Предположим, что автономная динамическая система в R^N находится под действием периодической силы с периодом $T_0 = 2\pi/\omega_0$. Будем анализировать сечение Пуанкаре через период внешней силы. В секущей поверхности $t = nT_0$ мы каждый раз (при любом n) будем наблюдать некоторое множество точек. Аттрактором в этом случае называют проекцию этого множества точек в секущих, полученное для последовательности $n \to \infty$, на исходную секущую поверхность при $n = 1$.

Впервые СНА был обнаружен и исследован в отображении

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} &= \lambda \tan(x_n) \cos(2\pi\phi_n), \\
\phi_{n+1} &= \omega + \phi_n, \mathrm{mod} 1.
\end{aligned}
\tag{5.7}
$$

Иррациональное значение параметра ω чаще всего выбирается равным так называемому *золотому сечению*: $\omega = 0.5(\sqrt{5} - 1)$. Для значений $\lambda > 1$ в отображении (5.7) строго доказано существование СНА (рис. 5.6). Но СНА обнаружены также при введении квазипериодического воздействия в отображение окружности, логистическое отображение, отображение Эно и др.

Ряд особенностей СНА является основанием для выделения этих объектов в отдельный класс.

Геометрические характеристики СНА. Аттрактор (например, на фазовой плоскости) образуется кривой бесконечной длины, недифференцируемой на плотном множестве точек. Эта кривая, подобно кривой Пеано, плотно покрывает часть фазовой плоскости так, что метрическая размер-

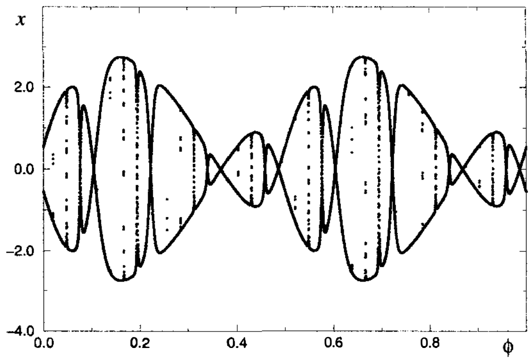


Рис. 5.6. Странный нехаотический аттрактор в отображении (5.7) для $\lambda = 1.5$

ность (емкость) СНА оказывается строго равной 2. Но, в отличие от отображения (5.5), в этом случае все же нельзя считать, что часть плоскости является аттрактором, так как совокупная мера точек, принадлежащих аттрактору, равна нулю. Этот факт отражается в равенстве информационной размерности D_I единице, что соответствует линии, но не плоскости. В связи с отсутствием положительного показателя в спектре ЛХП ляпуновская размерность СНА равна единице. (О различных определениях размерности множества будет говориться в лекции 9.) Несмотря на целочисленную метрическую размерность, СНА, как правило, демонстрирует самоподобие структуры и вследствие этого — свойства скейлинга. Совокупность указанных свойств позволяет говорить о «странной» геометрии СНА.

Спектр ЛХП странного нехаотического аттрактора. Динамика системы в режиме СНА не является хаотической ввиду отсутствия перемешивания. Экспоненциальной неустойчивости траекторий на аттракторе в среднем нет. В спектре ЛХП отсутствует положительный показатель. Сигнатура спектра ЛХП фазовых траекторий на СНА не отличается от соответствующей сигнатуры спектра ЛХП квазипериодического движения. Однако СНА нельзя считать квазипериодическим аттрактором, в частности, потому, что локальный (рассчитанный на конечном времени) старший показатель спектра ЛХП траектории на СНА будет положительным (доказано, что вероятность того, что старший локальный ляпуновский показатель будет положительным, отлична от нуля).

Спектр и автокорреляционная функция. Отсутствие перемешивания в режиме СНА обусловливает отсутствие в строгом смысле непрерывной (сплошной) компоненты в спектре мощности. В то же время спектр траектории на СНА не является дискретным! Спектр СНА занимает как бы промежуточное положение между дискретным и непрерывным случаями и имеет специальное название: сингулярно-непрерывный спектр. Особенность сингулярно-непрерывного спектра в том, что он включает плотное множество δ-пиков самоподобной структуры и обладает свойствами фракталов.

Так как спектр СНА не является непрерывным, автокорреляционная функция $\Psi(\tau)$ не стремится к нулевому пределу при $\tau \to \infty$. Для траекторий на СНА, как правило, наблюдается спадание $\Psi(\tau)$ до некоторого предельного ненулевого уровня. При этом $\Psi(\tau)$ так же, как и спектр, будет демонстрировать масштабно-инвариантные свойства.

Необходимо отметить, что диагностика режима СНА в численных экспериментах представляет собой весьма трудную, нестандартную задачу и требует проведения тонких вычислений с использованием хорошей современной техники. В противном случае режим СНА и квазипериодический режим с большим числом комбинационных частот в спектре различить не удается.

5.13. Заключение

В результате простого качественного рассмотрения особенностей нелинейных диссипативных динамических систем мы пришли к ряду принципиальных выводов.

1) В дифференциальных системах с размерностью фазового пространства $N \geqslant 3$ теоретически возможны установившиеся режимы колебаний, не являющиеся ни периодическими, ни квазипериодическими. Они представляют собой динамический хаос.
2) Принципиальной особенностью хаотических колебаний является их неустойчивость, что приводит к чувствительной зависимости динамики системы от малых возмущений.
3) Неустойчивость нелинейной системы в совокупности с ограниченностью энергии колебаний может вызывать перемешивание.
4) Наличие перемешивания приводит к необходимости введения статистического описания динамики детерминированных систем с хаотическими аттракторами как наиболее удобного.

Перечисленные результаты убеждают нас в том, что режимы функционирования детерминированных нелинейных систем со странными хаотическими аттракторами действительно обладают рядом специфических свойств, совокупность которых включается в понятие «детерминированный хаос».

Так как в общем случае экспоненциальная неустойчивость индивидуальных траекторий и «странная» геометрия аттрактора однозначно не связаны, то в некоторых случаях могут наблюдаться нерегулярные аттракторы особого типа. Существуют режимы хаотических (неустойчивых) автоколебаний, которым соответствуют регулярные в геометрическом смысле аттракторы. Это так называемые хаотические нестранные аттракторы. С другой стороны, можно наблюдать непериодические устойчивые по Ляпунову колебания, соответствующий аттрактор которых является странным геометрическим объектом. В этом случае мы имеем дело со странными нехаотическими аттракторами.

Лекция 6

От порядка к хаосу: бифуркационные сценарии (часть I)

6.1. Введение

Нелинейные свойства динамической системы по-разному проявляются при изменении ее управляющих параметров. Но, как правило, с ростом влияния нелинейности происходит усложнение динамического режима. Простые аттракторы в фазовом пространстве диссипативной системы сменяются более сложными. При определенных условиях нелинейность приводит к возникновению динамического хаоса. Движение в пространстве параметров вдоль соответствующего направления позволяет наблюдать последовательность бифуркаций, в результате которой формируется хаотический аттрактор. Такие типичные бифуркационные последовательности объединяются понятием *бифуркационных механизмов* или *сценариев развития хаоса.*

Первый из подобных сценариев был предложен Л. Д. Ландау в 1944 г. и независимо от него Е. Хопфом в связи с попытками объяснить возникновение турбулентного поведения жидкости при увеличении числа Рейнольдса. Соответствующий бифуркационный механизм, получивший название *сценария Ландау–Хопфа,* предусматривает последовательность бифуркаций (типа бифуркации Андронова–Хопфа), каждая их которых порождает новую несоизмеримую частоту: $\omega_1 \to \omega_1, \omega_2 \to \ldots \to \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k$. В результате возникает многочастотный квазипериодический режим, соответствующий многомерному тору в фазовом пространстве ДС. Если число бифуркаций k достаточно велико, то спектр процесса с учетом флуктуаций, всегда присутствующих в реальных системах, становится достаточно широкополосным, как и спектр хаотических колебаний. Однако многочастотные квазипериодические колебания, даже в присутствии шума, могут оставаться устойчивыми по Ляпунову. Перемешивание в такой системе будет связано только с шумом, а не с детерминированным оператором эволюции. Таким образом, сценарий Ландау–Хопфа не предполагает обязательного перехода к хаотической динамике и, строго говоря, не является сценарием развития хаоса. Кроме того, данный сценарий не может объяснить возникновения колебаний со сплошным спектром в маломерных системах.

Идея развития турбулентности через квазипериодические колебания в начале 1970-х гг. была переработана с новых позиций Д. Рюэлем, Ф. Такенсом и С. Ньюхаусом. Они связали турбулентное поведение с динамическим хаосом и впервые ввели понятие *странного аттрактора* как математического образа хаоса в детерминированной системе. При этом было показано, что странный аттрактор может возникать в системах даже с небольшой размерностью фазового пространства ($N \geqslant 3$).

К настоящему времени открыты и исследованы три типичных бифуркационных сценария развития хаоса в диссипативных системах, реализуемые уже в трехмерном фазовом пространстве. Причем каждый из них обладает свойствами *универсальности*, то есть некоторыми общими закономерностями, не зависящими от конкретного вида оператора эволюции. Эти сценарии будут представлены в настоящей лекции. Кроме того, в рамках квазипериодического сценария будут рассмотрены особенности развития нерегулярной динамики в системах с грубым эргодическим двумерным тором.

6.2. Переход к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода. Универсальность Фейгенбаума

Переход к хаосу через *последовательность бифуркаций удвоения периода* наблюдается в численных и натурных экспериментах в огромном количестве самых разнообразных динамических систем, начиная с простейших отображений последования и кончая распределенными средами. Этот переход допускает однопараметрический анализ (так как бифуркация удвоения имеет коразмерность 1) и состоит в следующем. Пусть ДС при некотором значении управляющего параметра $\alpha = \alpha_0$ имеет устойчивый предельный цикл C с периодом $T(\alpha)$. Пусть при увеличении параметра до значения $\alpha = \alpha_1$ происходит суперкритическая бифуркация удвоения периода, приводящая к рождению устойчивого предельного цикла $2C$ с периодом $2T(\alpha)$. Далее наблюдается бесконечная последовательность бифуркаций удвоения периодов циклов 2^kC в точках $\alpha = \alpha_k, k = 1, 2, 3, \ldots$ В спектре возникают субгармоники частоты $\omega_0 = 2\pi/T_0$, поэтому последовательность бифуркаций удвоения иногда называют *субгармоническим каскадом*. Бифуркационные точки α_k сходятся в пределе $k \to \infty$ к некоторому критическому значению $\alpha = \alpha_{cr}$, при котором период становится бесконечным, а спектр сплошным. При $\alpha > \alpha_{cr}$ возникают апериодические колебания, неустойчивые по Ляпунову. Этим колебаниям соответствует хаотический аттрактор в фазовом пространстве системы. В качестве примера на рис. 6.1 представлены изменения, происходящие в процессе перехода к хаосу через последовательность удвоений периода в генераторе с инерционной нелинейностью (ГИН) Анищенко – Астахова, описываемом уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x} &= mx + y - xz, \\ \dot{y} &= -x, \\ \dot{z} &= -gz + g\Phi(x), \end{aligned} \tag{6.1}$$

где $\Phi(x) = x^2$ при $x \geqslant 0$ и $\Phi(x) = 0$ при $x < 0$.

Экспериментально было установлено, что во всех без исключения трехмерных потоковых системах формирующийся в результате последовательности удвоений периода хаотический аттрактор имеет фрактальную размерность $2 < d < 3$, а его сечение по форме напоминает подкову Смейла. В этом случае простейшей моделью возникающего в секущей поверхности отображения может служить отображение Эно,

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 1 + y_n - ax_n^2, \\ y_{n+1} &= bx_n, \end{aligned} \tag{6.2}$$

которое является обратимым и при $b < 1$ сжимает элемент площади. При изменении любого из параметров (a или b) отображение (6.2) демонстрирует переход к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода циклов. Если сжатие элемента площади столь велико, что поперечной канторовой структурой подковы можно пренебречь и считать точки в отображении ложащимися на одну гладкую изогнутую кривую, то, вводя вдоль этой кривой новую координату, можно прийти к необратимому модельному отображению отрезка прямой, задаваемому гладкой функцией последования с одним экстремумом. Оно растягивает элемент отрезка и «укладывает» его в тот же самый отрезок. Поскольку функция последования предполагается всюду гладкой, то, как и в случае с подковой, имеется область (вблизи экстремума), для которой растяжение отсутствует. Существование такой области является причиной рождения устойчивых периодических орбит в зоне хаоса, так называемых *окон устойчивости*. Исключить окна устойчивости можно при условии, что отображение будет всюду растягивающим (как, например, кусочно-линейное отображение типа треугольника, имеющее излом в точке экстремума), но в таких моделях вместе с окнами устойчивости исчезает и последовательность бифуркаций удвоения. Теория

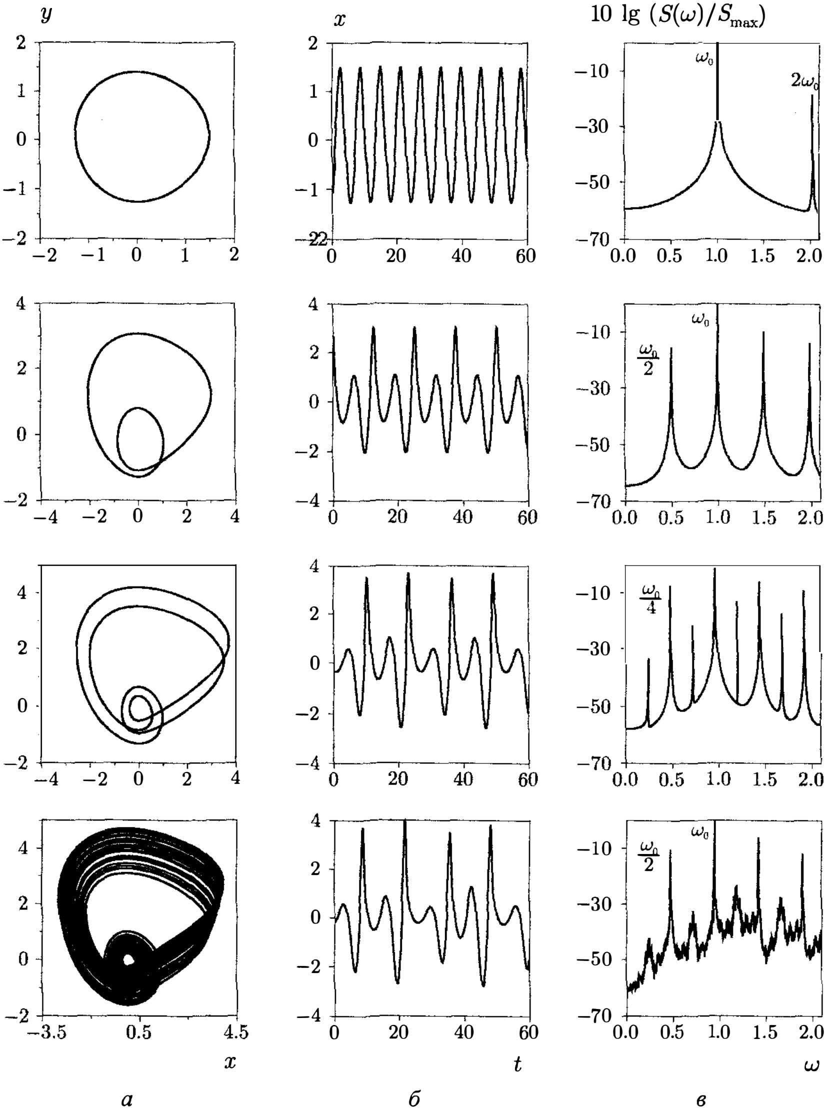


Рис. 6.1. Последовательность бифуркаций удвоения периода в ГИН: *а* — проекции фазовых траекторий, *б* — форма колебаний, *в* — спектры мощности для циклов с периодами $2T_0^k, k = 1, 2, 3$, и странного аттрактора

перехода к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода была развита на базе модельных одномерных отображений М. Фейгенбаумом, поэтому данный бифуркационный механизм получил название *сценария Фейгенбаума.*

Простейшей моделью для исследования сценария Фейгенбаума служит *логистическое отображение*

$$x_{n+1} = f(x_n) = r - x_n^2, \tag{6.3}$$

где r – параметр отображения, $r \geqslant 0$.

Логистическое отображение может быть представлено в других формах записи, сводящихся к (6.3) заменой переменных, например,

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n), \quad x_{n+1} = 1 - rx_n^2.$$

Рассмотрим, как ведет себя отображение (6.3) с ростом параметра r. Неподвижная точка отображения $x_0 > 0$ (цикл периода 1, или 1-цикл) имеет координату $x_0 = -1/2 + \sqrt{r + 1/4}$ и устойчива при $r \in [0; 3/4]$ (мультипликатор неподвижной точки μ_1 равен $-2x_0$). При $r = r_1 = 3/4$ мультипликатор принимает значение $\mu_1 = -1$. Имеет место бифуркация удвоения периода 1-цикла. Рождается устойчивый цикл периода 2, состоящий из точек x_1, x_2. Координаты точек 2-цикла равны $x_{1,2} = 1/2 \pm \sqrt{r - 3/4}$, а мультипликатор цикла есть $\mu_2 = f_x'(x_1)f_x'(x_2) = 4(1 - r)$. 2-цикл устойчив в области значений параметра $r \in [3/4; 5/4]$. При $r = r_2 = 5/4$ мультипликатор принимает значение $\mu_2 = -1$ и происходит следующая бифуркация удвоения периода. Рождается 4-цикл и т. д. Получаем последовательность бифуркационных значений параметра $r_1 = 3/4, r_2 = 5/4, r_3 \approx 1.368099, r_4 \approx 1.394046, r_5 \approx 1.399637, \ldots$, накапливающуюся к критической точке $r_{\text{кр}} \approx 1.40115\ldots$ При $k \to \infty$ скорость сходимости бифуркационных значений стремится к некоторому конечному пределу

$$\delta = \lim_{k\to\infty} \frac{r_{k+1} - r_k}{r_{k+2} - r_{k+1}} \approx 4.669201\ldots \tag{6.4}$$

Фазопараметрическая диаграмма режимов отображения (6.3), приведенная на рис. 6.2, характерна для систем с каскадом удвоений периодов, приводящим к хаосу. Подобный вид диаграммы получил название *«дерево Фейгенбаума»*. Диаграмма дает наглядное представление о дроблении масштаба динамической переменной и наличии свойств *скейлинга*, т. е. *масштабной инвариантности*, когда один и тот же элемент изображения повторяется во все более мелком масштабе. Обозначив расстояния между подобными точками ветвей дерева Δ_k (как показано на рис. 6.2), можно ввести масштабные множители $a_k = \Delta_k/\Delta_{k+1}$, которые в пределе сходятся к некоторому значению

$$a = \lim_{k\to\infty} \frac{\Delta_k}{\Delta_{k+1}} \approx -2.5029\ldots \tag{6.5}$$

Как показали численные исследования, величины δ и a не зависят от конкретного вида отображения. Главное, чтобы оно было унимодальным (имело один экстремум) и чтобы экстремум был квадратичным.

Универсальный характер количественных закономерностей перехода к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода был объяснен М. Фейгенбаумом, создавшим *теорию универсальности*. Для анализа отображений типа логистической параболы Фейгенбаум применил метод *ренормализационной группы* (РГ), содержание которого сводится к следующему. Пусть в критической точке $r = r_{\text{кр}}$ имеется отображение

$$x_{n+1} = f_0(x_n), \tag{6.6}$$

где f_0 — произвольная унимодальная функция с квадратичным экстремумом в точке $x_n = 0$, причем $f_0(0) = 1$. Дважды примененное отображение (6.6) дает отображение $x_{n+1} = f_0(f_0(x_n))$. Произведем перемасштабирование переменной $x \to x/a_0$ так, чтобы новое отображение в начале координат тоже было отнормировано на единицу, то есть $a_0 = 1/f_0(f_0(0))$, и обозначим новое отображение как $x_{n+1} = f_1(x_n) = a_0 f_0(f_0(x_n/a_0))$. Повторяя эту процедуру много раз, получаем *уравнение ренормализационной группы*:

$$f_{i+1}(x) = a_i f_i(f_i(x/a_i)), \tag{6.7}$$

где $a_i = 1/f_i(f_i(0))$. В критической точке в силу свойств самоподобия существуют пределы

$$\lim_{i\to\infty} f_i(x) = g(x), \quad \lim_{i\to\infty} a_i = a. \tag{6.8}$$

Функция $g(x)$ является неподвижной точкой функционального *уравнения Фейгенбаума–Цветановича*:

$$\hat{T}g(x) = ag(g(x/a) = g(x), \tag{6.9}$$

где $\hat{T}$ — оператор удвоения; $a = 1/g(g(0))$.

Для критической точки, соответствующей сценарию перехода к хаосу через удвоения периодов, граничными условиями уравнения (6.9) будут:

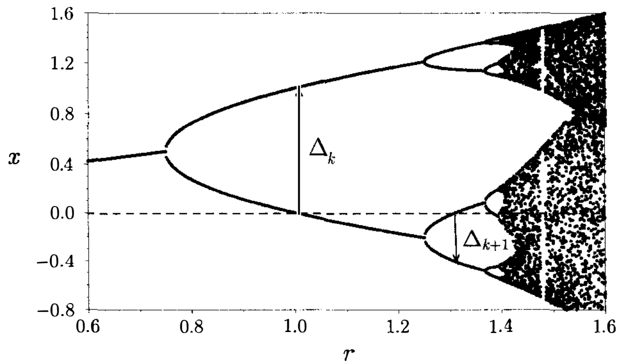


Рис. 6.2. Фазопараметрическая диаграмма режимов отображения (6.3)

$g(0) = 1$, $g'_x(0) = 0$. Функция $g(x)$ называется *универсальной*, поскольку она не зависит от конкретной формы исходного отображения и определяется только порядком экстремума. Она дает асимптотическую форму 2^i-кратно примененного оператора эволюции в критической точке при $i \to \infty$ с учетом перенормировки динамической переменной x. Входящая в уравнение неподвижной точки константа a также является универсальной. Найденное Фейгенбаумом численное решение уравнения (6.9) в предположении квадратичности экстремума и указанных граничных условий имеет вид

$$\begin{aligned} g(x) &= 1 - 1.5276330x^2 + 0.1048152x^4 + 0.0267057x^6 - 0.0035274x^8 + \\ &+ 0.0000816x^{10} + 0.0000254x^{12} - 0.0000027x^{14}. \end{aligned} \tag{6.10}$$

Универсальная константа Фейгенбаума a оказывается равной $a = -2.502907876\ldots$

Если внести малое возмущение оператора эволюции $f(x_n)$, слегка отклонив значение параметра от критического, оператор удвоения $\hat{T}$ также оказывается возмущенным. Линеаризовав оператор $\hat{T}$ в точке $g(x)$ при $r = r_{\text{кр}}$, получаем оператор $\hat{L}_g$, определяющий поведение возмущения, и уравнение для собственных функций $h(x)$ и собственных значений ρ линеаризованного оператора:

$$\hat{L}_g h(x) = a[g'(g(x/a))h(x/a) + h(g(x/a))] = \rho h(x). \tag{6.11}$$

Определяющую роль в поведении возмущения будут играть собственные значения, превышающие по модулю единицу. В случае квадратичного экстремума имеется одно такое значение, соответствующее неустранимой компоненте возмущения, и оно определяет вторую *универсальную фейгенбаумовскую константу* $\delta = \rho_1 = 4.6692016091\ldots$

Отображения с неквадратичным экстремумом характеризуются другими значениями универсальных констант. Однако в численных и натурных экспериментах, проведенных для множества потоковых систем (в том числе распределенных) с фейгенбаумовским сценарием развития хаоса, масштабный множитель a и скорость сходимости бифуркационной последовательности δ в пределах ошибки эксперимента соответствовали значениям, полученным на основании теории Фейгенбаума для отображений с квадратичным экстремумом. Очевидно, в типичном случае отображение, порождаемое оператором эволюции потоковой системы в окрестности критической точки, близко к одномерному отображению с квадратичным экстремумом, другие же случаи являются нетипичными.

Универсальность сценария Фейгенбаума проявляется в поведении спектральных амплитуд субгармоник, возникающих при каждом удвоении периода. Так, отношение амплитуд субгармоник $\omega_0/2^k$ и $\omega_0/2^{k+1}$ в точке бифуркации удвоения периода k-цикла, при $k \to \infty$, является универсальной константой.

Предельное множество точек одномерного отображения с квадратичным экстремумом, возникающее при $r = r_{\text{кр}}$, называется *аттрактором Фейгенбаума*. Аттрактор Фейгенбаума является странным, так как характеризуется дробной емкостной размерностью[1], но не хаотическим, поскольку ляпуновский показатель λ в критической точке равен нулю. Особенности поведения в закритической области $r > r_{\text{кр}}$ также обладают свойствами универсальности как для модельных отображений, так и для потоковых систем. Ляпуновский показатель, ставший в критической точке положительным, растет по универсальному закону

$$\lambda \sim \varepsilon^{\gamma}, \quad \gamma = \frac{\ln 2}{\ln \delta} \approx 0.4498, \tag{6.12}$$

где $\varepsilon = r - r_{\text{кр}}$ — *параметр надкритичности*. Коэффициент γ, по аналогии с теорией фазовых переходов 2-го рода, называется *критическим* индексом перехода к хаосу. На рис. 6.3 представлены полученные численно зависимости ляпуновского показателяот параметра для логистического отображения и двух старших показателей для ГИН.

За критической точкой в системах с фейгенбаумовским сценарием развития хаоса наблюдается каскад бифуркаций связанности. Бифуркация *свя-*

[1] О дробной размерности множеств со сложной геометрической структурой будет говориться в лекции 9.

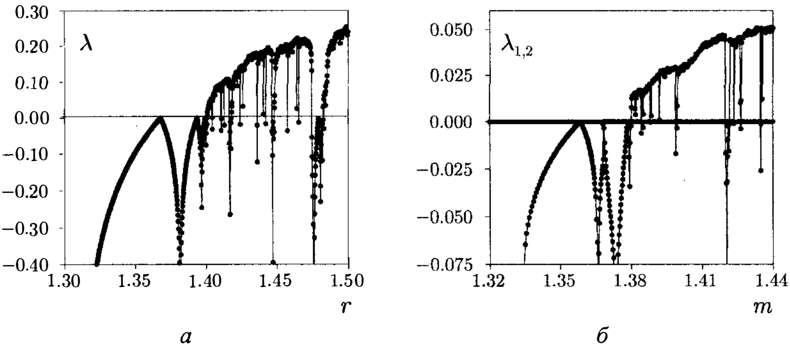


Рис. 6.3. Зависимости от параметра: *а* — ляпуновского показателя λ для логистического отображения, *б* — двух старших показателей для системы (6.1) при $g = 0.2$

занности представляет собой объединение частей (лент) хаотического аттрактора, посещаемых изображающей точкой в определенном порядке. При каждой бифуркации связанности в спектре исчезают соответствующие субгармоники. На рис. 6.4 приведены проекции фазовых траекторий и соответствующие спектры при бифуркациях связанности, рассчитанные для системы (6.1). Для одномерного отображения бифуркация связанности выглядит как объединение соседних интервалов, заполненных точками хаотической последовательности. Обозначим значения параметра, соответствующие бифуркациям связанности, как $\overline{r}_k$ (индекс $k = 1, 2, \ldots$ возрастает с приближением к критической точке справа налево). Расположение на оси значений r интервалов существования периодических аттракторов 2^i (2^i — период цикла отображения) до критической точки и 2^i-связанных хаотических множеств за критической точкой обладает симметрией относительно критической точки. Фрагменты многосвязанных хаотических множеств в соответствующих точках каждого отрезка обладают свойством подобия с масштабными множителями, стремящимися к универсальной константе a. Скорость накопления значений $\overline{r}_k$ к критической точке равна универсальной константе δ.

Кроме хаотических траекторий, логистическое отображение имеет в закритической области множество периодических траекторий с различными периодами. В работе А. Н. Шарковского (1964 г.) устанавливается иерархия циклов гладкого необратимого отображения отрезка. Цикл периода M считается более сложным, чем цикл периода N, если из существования M-цикла следует существование N-цикла. Говорят, что между периодами существует отношение порядка $M \to N$. Согласно теореме Шарковского, это

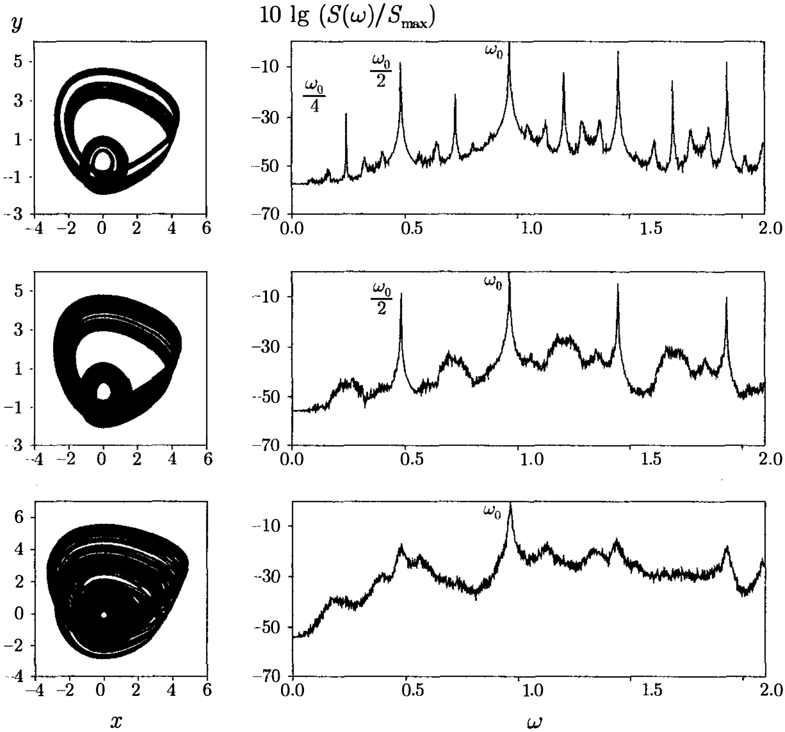


Рис. 6.4. Проекции фазовых траекторий и спектры при бифуркациях связанности в ГИН: верхний ряд — четырехсвязанный хаотический аттрактор; средний ряд — двухсвязанный хаотический аттрактор; нижний ряд — односвязанный хаотический аттрактор (ω_0 — основная частота спектра, связанная с периодом T_0 порождающего цикла)

отношение упорядочивает циклы следующим образом (так называемый *порядок Шарковского*):

$$3 \to 5 \to 7 \to 3*2 \to 5*2 \to 7*2 \to \ldots \to 3*2^2 \to$$
$$\to 5*2^2 \to 7*2^2 \to \ldots \to 2^3 \to 2^2 \to 2 \to 1. \tag{6.13}$$

Самым сложным в смысле Шарковского оказывается цикл периода 3. Из его существования следует существование циклов любого периода. К аналогичному результату независимо от Шарковского пришли Т. Ли и Дж. Йорк в 1975 г. Они также доказали, что из существования у отображения цикла периода 3 следует существование хаотических последовательностей и поэтому назвали свою работу «Период три рождает хаос». Однако ни в теореме Шарковского, ни в теореме Ли – Йорка ничего не говорится об устойчивости циклов. Расположение областей устойчивости (*окон периодичности*) циклов различного периода в закритической области подчиняется следующей закономерности: $6, 5, 3, 6, 5, 6, 4, 6, 5, 6, \ldots$ Причем, хотя ширина окон и бифуркационные значения параметра, соответствующие границам окон, различны в различных ДС, закономерность в порядке их появления с ростом параметра надкритичности столь универсальна, что не зависит даже от порядка экстремума функции последования. Наиболее широкое окно устойчивости соответствует циклу периода 3, который возникает в результате касательной бифуркации и с ростом параметра претерпевает последовательность удвоений периода с образованием хаоса. Аналогично возникают и эволюционируют в окнах устойчивости циклы с другими периодами. Вообще говоря, в закритической области в сколь угодно малой окрестности любого значения параметра существует окно устойчивости какого-либо цикла. Период цикла может быть столь велик, а окно устойчивости столь узко, что цикл невозможно наблюдать даже в численных экспериментах. Однако сам этот факт говорит о негрубости хаотического аттрактора, возникающего по сценарию Фейгенбаума, по отношению к малым возмущениям и о том, что он является квазиаттрактором. Зависимости ляпуновских показателей от параметра, представленные на рис. 6.3, также имеют типичный для квазиаттрактора вид.

6.3. Жесткие переходы к хаосу. Кризис и перемежаемость

С развитием представлений о динамическом хаосе было установлено, что переход от периодических колебаний к хаосу может происходить скачком, в результате одной единственной бифуркации. Такой механизм возникновения хаоса называют *жестким*. Он сопровождается явлением *перемежаемости*. *Перемежаемостью* называют режим чередования во времени почти регулярных колебаний (*ламинарная фаза*) с интервалами хаотического поведения (*турбулентная фаза*), наблюдающийся сразу за порогом возникновения хаоса. Типичный вид колебаний в режиме перемежаемости приведен на рис. 6.5.

Жесткий переход к хаосу и явление перемежаемости были впервые рассмотрены в работах И. Помо и П. Манневиля, поэтому соответствующий бифуркационный механизм возникновения хаоса получил название *сценария Помо – Манневиля*.

При жестком возникновении хаоса единственная бифуркация периодического режима приводит к резкой качественной перестройке структуры

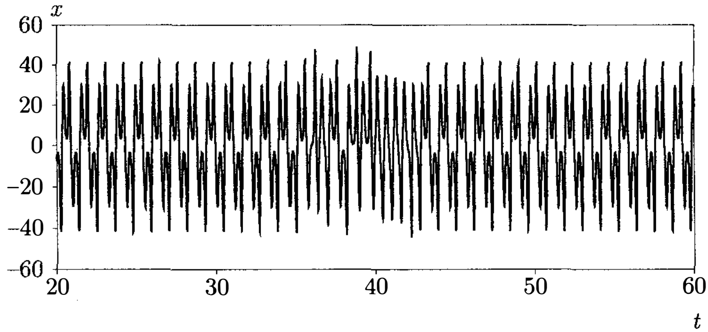


Рис. 6.5. Перемежаемость в системе Лоренца ($\dot{x} = \sigma(y - x)$, $\dot{y} = -xy + rx - y$, $\dot{z} = xy - bz$) при $r = 166.1$, $\sigma = 10$, $b = 8/3$

фазового пространства, включая структуру бассейна притяжения аттрактора. Подобные бифуркации аттракторов называют *кризисами*. Как уже отмечалось в лекции 3, типичными кризисами периодического режима (предельного цикла) являются следующие локальные бифуркации коразмерности 1: касательная (седло-узловая) бифуркация, субкритическая бифуркация удвоения периода и субкритическая бифуркация рождения тора (бифуркация Андронова – Хопфа в отображении). В случае касательной бифуркации устойчивый предельный цикл исчезает, сливаясь с седловым. В двух других случаях предельный цикл продолжает существовать и после бифуркации, но становится неустойчивым (седловым).

Пусть при $\alpha < \alpha_{кр}$ система имеет аттрактор — предельный цикл C. В результате любой из перечисленных бифуркаций в точке $\alpha = \alpha_{кр}$ аттрактор C перестает существовать. При $\alpha > \alpha_{cr}$ фазовые траектории из локальной окрестности исчезнувшего аттрактора C должны попадать на какой-то другой аттрактор, либо уже существовавший в системе при $\alpha < \alpha_{кр}$, либо возникающий в результате бифуркации. Пусть ДС уже имела другой аттрактор. Тогда в результате бифуркации наблюдается простое переключение с одного режима на другой. Перемежаемость при этом не возникает, даже если новый режим является хаотическим. Дело в том, что в этом случае кризис предельного цикла не служит причиной, порождающей хаотический аттрактор, а сам аттрактор не захватывает локальную окрестность цикла C. Траектории уходят из этой окрестности и не возвращаются. Каковы же условия, при которых кризис предельного цикла приводит к возникновению перемежающегося хаоса? Очевидно, это происходит в том случае, когда в бифуркационной точке $\alpha = \alpha_{кр}$ уже существует хаотическое множество, которое при $\alpha > \alpha_{\text{кр}}$ становится притягивающим и включает в себя локальную окрестность цикла C так, что фазовая траектория на хаотическом аттракторе время от времени в эту окрестность возвращается. Условием реализации такого поведения системы может явиться наличие у седлового предельного множества, участвующего в кризисе аттрактора C, гомоклинической траектории. В качестве примера на рис. 6.6 представлена касательная бифуркация циклов, приводящая к хаотической перемежаемости. Седловой цикл имеет пару грубых гомоклинических траекторий. В точке бифуркации $\alpha = \alpha_{\text{кр}}$ образуется негрубая седло-узловая орбита с гомоклинической структурой в ее окрестности. Траектории удаляются от нее и приближаются к ней вдоль двоякоасимптотических гомоклинических кривых (им соответствуют точки пересечения многообразий в сечении, изображенном на рис. 6.6). При $\alpha > \alpha_{\text{кр}}$ негрубая замкнутая орбита исчезает, а непритягивающая гомоклиническая структура становится притягивающей. В фазовом пространстве ДС возникает хаотический аттрактор. Траектории на нем сгущаются в области, где существовала седло-узловая орбита, подолгу повторяя движение на ней, что соответствует ламинарной фазе перемежающегося хаоса.

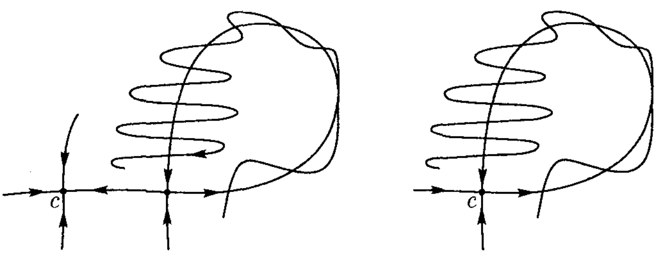


Рис. 6.6. Качественный вид сечений Пуанкаре для касательной бифуркации устойчивого и седлового циклов, приводящей к возникновению хаоса через перемежаемость: *а* — до бифуркации, *б* — в точке бифуркации

Перемежаемость, связанная с касательной бифуркацией циклов, наиболее типична для широкого класса ДС. Она была обнаружена и исследована раньше других случаев перемежаемости и получила название — *перемежаемость I типа.* Для анализа свойств перемежаемости I типа используется одномерное модельное отображение вида

$$x_{n+1} = f(x_n) = \varepsilon + x_n + \beta|x_n|^p + \text{«возврат»}. \tag{6.14}$$

Параметр ε соответствует параметру надкритичности $(\alpha - \alpha_{\text{cr}})$ системы, так как в (6.14) касательная бифуркация имеет место при $\varepsilon = 0$; p — целое число, определяющее порядок экстремума функции последования. Возврат изображающей точки в ограниченный интервал значений x может быть осуществлен различными способами. Например, для отображения, представленного на рис. 6.7, для возврата изображающей точки служит ветвь графика функции последования на отрезке AB. Отображение, приведенное на рис. 6.7, *а*, соответствует моменту касательной бифуркации $\varepsilon = 0$. Пунктирные линии на графике представляют собой построение с помощью диаграммы Ламерея двоякоасимптотической траектории седло-узловой точки. Отображение на рис. 6.7, *б* соответствует случаю $\varepsilon \gtrsim 0$. В окрестности исчезнувшей неподвижной точки график функции последования образует так называемый *канал*, по которому изображающая точка движется довольно долго, что соответствует ламинарной фазе перемежаемости. Уход изображающей точки из канала определяет турбулентную фазу, в которой точка должна попасть на участок AB, обеспечивающий ее возврат в канал.

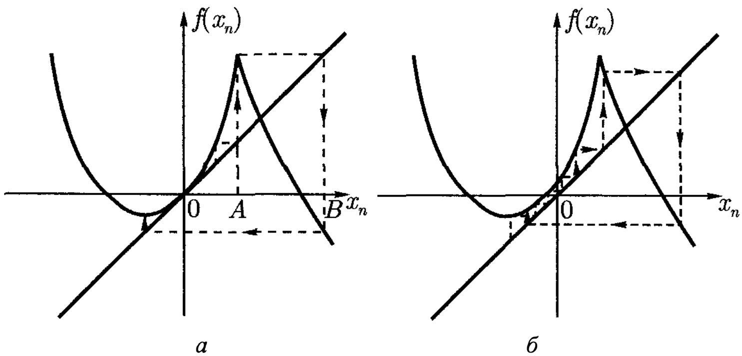


Рис. 6.7. Отображение, моделирующее перемежаемость I типа: *а* — в точке бифуркации, *б* — сразу после бифуркации

Исследование отображений вида (6.14) выявляет определенные количественные закономерности перемежаемости I типа (например, характер зависимости средней длительности ламинарной фазы от параметра надкритичности), носящие универсальный характер в том смысле, что они не зависят от конкретного вида отображения и определяются порядком экстремума p. Для типичного случая $p = 2$ эти закономерности хорошо согласуются с результатами численных и экспериментальных исследований перемежаемости I типа в потоковых системах. К исследованию перемежаемости I типа был применен РГ метод. Рассмотрим отображение в критической точке, ограничиваясь интервалом $x_n \in [0;1]$, на котором отображение задано монотонной функцией вида $x_{n+1} = f_0(x_n)$, для которой $f_0(0) = 0, f_0'(0) = 1$. Применив все те же рассуждения, что и в случае сценария Фейгенбаума, можно получить то же самое уравнение Фейгенбаума–Цветановича (6.9), но с другими граничными условиями: $g(0) = 0; g'(0) = 1$. РГ-анализ позволяет теоретически определить асимптотику поведения средней длительности ламинарной фазы:

$$T_l \sim \varepsilon^{-\nu}, \quad \nu = \frac{p-1}{p}. \tag{6.15}$$

При $p = 2$ имеем $T_л \sim 1/\sqrt{\varepsilon}$, что хорошо согласуется с результатами многочисленных экспериментов.

Другие типы перемежаемости, как уже отмечалось, связаны с субкритической бифуркацией Андронова–Хопфа в сечении и субкритической бифуркацией удвоения периода цикла. Они называются, соответственно, *перемежаемостями II и III типа*. Модельным отображением для *перемежаемости II типа* служит следующее отображение плоскости, задаваемое в полярных координатах:

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= (1+\varepsilon)r_n + \beta r_n^3 + \text{«возврат»}, \\ \phi_{n+1} &= \phi_n + \Omega, \bmod 1. \end{aligned} \tag{6.16}$$

При $\varepsilon = 0$ в отображении имеет место субкритическая бифуркация Андронова–Хопфа, которая представляет собой «влипание» неустойчивой инвариантной окружности в устойчивый фокус. Неустойчивая инвариантная окружность соответствует седловому тору в потоковой системе размерности $N \geqslant 4$. Данный тип перемежаемости характеризуется асимптотическим поведением средней длительности ламинарной фазы вида

$$T_l \sim \frac{1}{\varepsilon}, \tag{6.17}$$

где $\varepsilon = \alpha - \alpha_{cr}$ — параметр надкритичности.

Перемежаемость III типа может быть описана одномерным модельным отображением вида

$$x_{n+1} = -(1+\varepsilon)x_n - \beta x_n^2 + \text{«возврат»}, \tag{6.18}$$

демонстрирующим при $\varepsilon = 0$ субкритическую бифуркацию удвоения периода 1-цикла. Асимптотическое поведение средней длительности ламинарной фазы имеет тот же вид, что и в случае перемежаемости II типа.

Лекция 7

От порядка к хаосу: бифуркационные сценарии (часть II)

7.1. Переход к хаосу через разрушение квазипериодических колебаний

Согласно сценарию Рюэля – Такенса – Ньюхауса переход от квазипериодических колебаний к хаосу происходит после рождения третьей частоты, когда на трехмерном торе становится возможным появление неустойчивых по Ляпунову хаотических траекторий. Однако исследование конкретных динамических систем показало, что не менее типичным является переход к хаосу через разрушение двухчастотного квазипериодического движения. При этом двумерный тор T^2 в фазовом пространстве должен разрушаться, после чего траектории попадают на множество с фрактальной размерностью $2 + d, d \in [0; 1]$, образующееся в его окрестности и называемое *тор-хаосом*. Такой сценарий можно рассматривать как особый случай перехода к хаосу через квазипериодическое движение.

В отличие от сценария Фейгенбаума, переход $T^2 \to CA$ требует двупараметрического анализа. Это связано с тем обстоятельством, что характер квазипериодического режима зависит от числа вращения θ, определяющего отношение базовых частот колебаний. Если θ рационально, то имеет место резонанс на торе (и соответственно периодические колебания). При иррациональном значении числа вращения движение на торе будет эргодическим. Наблюдать переход от тора к хаосу при фиксированном значении числа вращения можно только контролируя, как минимум, два параметра системы одновременно. На линии рождения тора, задаваемой бифуркационным условием $\mu_{1,2} = \exp j\phi$, где $\mu_{1,2}$ — пара комплексно-сопряженных мультипликаторов предельного цикла, число вращения определяется как $\theta = \phi/2\pi$. Области резонансов на плоскости двух управляющих параметров имеют форму языков, опирающихся острым концом на соответствующие точки линии рождения тора. Эти области называют *языками* или *клювами Арнольда* (в честь В. И. Арнольда, исследовавшего структуру резонансных областей). Для каждого выбранного пути движения в пространстве параметров характерна своя последовательность бифуркаций, связанных с возникновением и исчезновением различных резонансов на торе.

Теорема о разрушении двумерного резонансного тора. Для понимания механизмов разрушения двумерного тора и рождения тор-хаоса важны результаты, полученные математиками в рамках качественной теории динамических систем. Л. П. Шильниковым и В. С. Афраймовичем доказана теорема о разрушении двумерного тора T^2 с резонансной структурой на нем и указаны возможные пути возникновения хаотической динамики.

Рассмотрим N-мерную ДС ($N \geqslant 3$)

$$\dot{\vec{x}} = \vec{F}(x, \vec{\alpha}), \tag{7.1}$$

где компоненты вектор-функции $\vec{F}$, $j = 1, 2, \ldots, N$, принадлежат классу гладкости C^k, $k \geqslant 3$; $\vec{\alpha}$ — вектор параметров системы. Предположим следующее:

1) при $\vec{\alpha} = \vec{\alpha_0}$ система (7.1) в некоторой области фазового пространства имеет гладкий притягивающий тор $T^2(\vec{\alpha_0})$ с грубой структурой на нем, состоящей из четного числа циклов, половина из которых являются устойчивыми, а половина — седловыми, что соответствует области резонансного клюва. Тор $T^2(\vec{\alpha_0})$ является замыканием неустойчивых многообразий седловых циклов. Предположим для простоты, что имеется два цикла: устойчивый $C^{\mathrm{st}}(\vec{\alpha_0})$ и седловой $C^{\mathrm{sd}}(\vec{\alpha_0})$. Тогда $T^2(\vec{\alpha_0}) = W^{\mathrm{u}}(\vec{\alpha_0}) \bigcup C^{\mathrm{st}}(\vec{\alpha_0})$, где $W^{\mathrm{u}}(\vec{\alpha_0})$ – неустойчивое многообразие седлового цикла. Сечение резонансного тора изображено на рис. 7.1, *а*. Пусть при $\vec{\alpha} = \vec{\alpha_1}$ инвариантного тора не существует. Тогда для непрерывной кривой $\vec{\alpha}(s)$, где $s \in [0, 1]$, $\vec{\alpha}(0) = \vec{\alpha_0}$, $\vec{\alpha}(1) = \vec{\alpha_1}$, существует такое значение $s = s^*$, что в точке $\vec{\alpha}(s^*)$ тор разрушается, и, по крайней мере, для некоторых сколь угодно близких к s^* значений $s > s^*$ система (7.1) не имеет тора T^2;

2) пусть при всех $0 \leqslant s < s^*$ притягивающее множество системы (7.1) совпадает с тором $T^2(\vec{\alpha}(s))$;

3) пусть при $s > s^*$ неустойчивое многообразие седлового цикла $W^{\mathrm{u}}(\vec{\alpha}(s))$ не содержит периодических движений, отличных от C^{st} и C^{sd}.

В сделанных предположениях справедлива *теорема о разрушении тора*, согласно которой тор T^2 разрушается одним из следующих трех способов: 1) в связи с потерей устойчивости циклом C^{st}; 2) в результате возникновения гомоклинического касания неустойчивого (W^{u}) и устойчивого (W^{s}) многообразий седлового цикла C^{sd}; 3) в результате касательной бифуркации циклов C^{st} и C^{sd} на торе. Перед тем как разрушиться, тор при $s > s^{**}$ теряет гладкость, то есть $T^2(\vec{\alpha}(s > s^{**}))$ *гомеоморфен*, но не *диффеоморфен* тору.

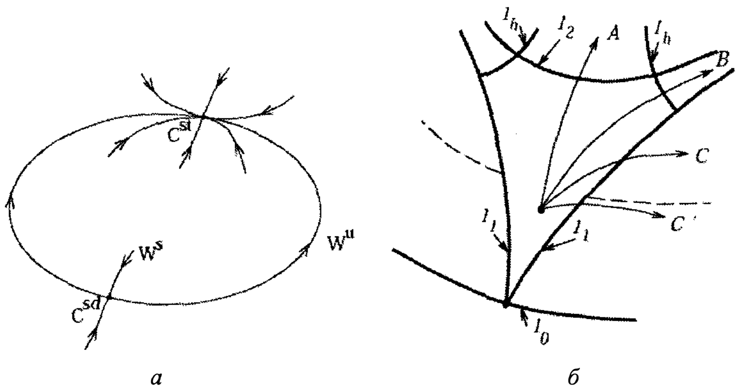


Рис. 7.1. Сечение резонансного тора T^2 (*а*) и качественная бифуркационная диаграмма разрушения тора T^2 (*б*). Пути, соответствующие различным механизмам разрушения, обозначены буквами A, B, C

На рис. 7.1, *б* приведен качественный вид клюва Арнольда на плоскости параметров α_1 и α_2 и указаны направления A, B, C, отвечающие трем механизмам разрушения резонансного тора в соответствии с теоремой. На диаграмме использованы следующие обозначения: l_0 — линия рождения тора; l_1 — линии касательной бифуркации циклов на торе, определяющие границы области синхронизации; l_2 — линия потери устойчивости резонансным циклом C^{st} в области синхронизации; l_{h} — линия гомоклинического касания многообразий W^{u} и W^{s}. Пунктиром нанесена условная граница разрушения тора вне рассматриваемой резонансной области (в действительности она имеет сложную фрактальную структуру). Направление C' соответствует случаю, когда в результате касательной бифуркации на линии l_1 резонансный тор не разрушается, а становится эргодическим.

При движении по направлению A на линии l_2 цикл C^{st} теряет устойчивость либо вследствие бифуркации удвоения периода, либо вследствие бифуркации рождения тора из цикла C^{st}. Резонансный тор T^2 теряет гладкость, когда мультипликаторы цикла становятся комплексно-сопряженными или один из мультипликаторов — отрицательным. В момент бифуркации длина инвариантной кривой в сечении тора становится бесконечной (рис. 7.2, *а*), что означает разрушение тора. При дальнейшем движении по направлению A может образоваться хаотический аттрактор либо в результате последовательности бифуркаций удвоения периода, либо через разрушение тора, родившегося на линии l_2.

При движении по направлению B неустойчивое многообразие седлового цикла W^{u}, образующее поверхность тора, искривляется и на линии l_{h} происходит его гомоклиническое касание с устойчивым многообразием W^{s} (рис. 7.2, *б*). В этот момент ($s = s^*$) образуется негрубая гомоклиническая кривая Γ_0, а тор T^2 разрушается. При $s > s^*$ возникают две грубые гомоклинические кривые и гомоклиническая структура циклов и хаотических траекторий в их окрестности. Однако аттрактором остается цикл C^{st}, а хаотическая динамика может возникнуть только в том случае, если он исчезнет или потеряет устойчивость. Так, при пересечении границы области синхронизации выше линии l_{h} наблюдается переход к хаосу, сопровождающийся перемежаемостью I типа.

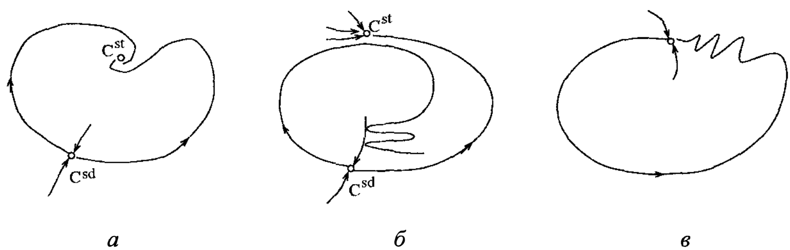


Рис. 7.2. Качественный вид инвариантной кривой в сечении в момент разрушения тора T^2 при движении по направлениям A, B, C (соответственно (*а*), (*б*), (*в*)), указанным на рис. 7.1, *б*

Направление C также соответствует искажению многообразия W^{u} при подходе к устойчивому циклу C^{st}. Разрушение тора происходит при переходе через линию касательной бифуркации l_1. Пусть в момент бифуркации инвариантная кривая в сечении тора стала негладкой (рис. 7.2, *в*). Это означает, что при последовательном применении отображения Пуанкаре образ малой окрестности некоторого куска неустойчивой сепаратрисы седло-узла изогнут, как подкова. Исчезновение седло-узла приводит к возникновению в его окрестности отображения типа подковы Смейла, порождающего счетное множество седловых циклов и непрерывное множество непериодических гиперболических траекторий, которые при некоторых дополнительных условиях могут сформировать хаотический аттрактор.

Таким образом, рассмотренные в теореме механизмы разрушения резонансного тора приводят к образованию в окрестности тора хаотического множества, которое может стать притягивающим. Хаотический аттрактор порождается отображением типа подковы с гладким изгибом и является квазиаттрактором. Описанные механизмы возникновения хаоса связаны с бифуркациями резонансных циклов на торе. Они не ведут к резкой перестройке поглощающей области и поэтому составляют бифуркационный механизм мягкого перехода к хаосу. Общий характер выводов теоремы о разрушении тора был подтвержден численными и натурными экспериментами для широкого класса дискретных и потоковых систем. Если в эксперименте попытаться проследить за эволюцией инвариантной кривой в сечении тора, изменяя параметры таким образом, чтобы число вращения оставалось иррациональным, можно увидеть следующее: перед разрушением форма инвариантной кривой в сечении эргодического тора искажается, повторяя форму неустойчивого многообразия седлового резонансного цикла. Затем происходит потеря гладкости и разрушение эргодического тора, но хаос возникает не сразу, так как в окрестности разрушившегося тора с иррациональным числом вращения в фазовом пространстве ДС существуют еще не разрушившиеся резонансные торы, которые являются аттракторами системы. Таким образом, переходу к хаосу всегда предшествует резонанс на T^2. Линия разрушения тора на плоскости двух управляющих параметров имеет сложную структуру. Она состоит из счетного множества отрезков линий, на которых происходит разрушение резонансного тора в соответствии с указанными теоремой механизмами, и множества точек разрушения эргодического тора, имеющих совокупную нулевую меру.

Отображение окружности. Универсальные закономерности мягкого перехода от квазипериодических колебаний к хаосу. Движение на двумерном торе в общем случае моделируется изоморфным диссипативным отображением кольца Q в себя. Для различных значений параметров отображения возможны следующие случаи:

1) внутри кольца существует замкнутый контур L (рис. 7.3, *а*), преобразующийся в себя (т. е. инвариантная замкнутая кривая отображения, соответствующая двумерному тору в потоковой системе); на контуре L можно задать новое отображение, которое будет одномерным и гомеоморфным отображению окружности:

$$\phi_{n+1} = \Phi(\phi_n, \vec{\alpha}), \mathrm{mod} 1, \tag{7.2}$$

где $\vec{\alpha}$ — вектор параметров отображения окружности;

2) возникает отображение типа подковы, порождающее счетное множество периодических и непрерывное множество непериодических гиперболических траекторий. Такая структура образуется тогда, когда некоторая часть области Q (обозначим ее σ) преобразуется в $\tilde{\sigma}$, как показано на рис. 7.3, *б*. Замкнутый контур L в этом случае не существует, а модельное отображение (7.2) становится необратимым.

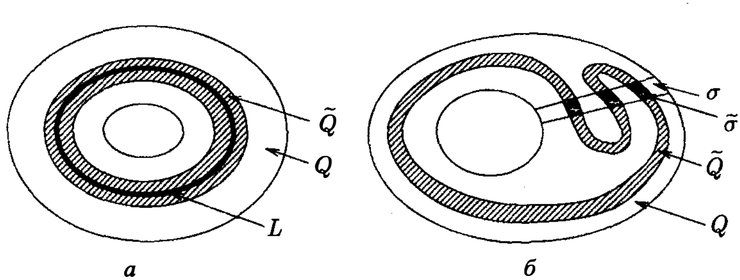


Рис. 7.3. Отображение кольца в случае: *а* — существования инвариантной замкнутой кривой L, *б* — образования локального отображения типа подковы

Наиболее часто отображение окружности задается в виде

$$\phi_{n+1} = \Phi(\phi_n, \Omega, K) = \phi_n + \Omega - \frac{K}{2\pi}\sin(2\pi\phi_n), \mathrm{mod} 1, \tag{7.3}$$

где угол ϕ определен в интервале $[0; 1]$; $K \geqslant 0$ и $\Omega \in [0; 1]$ — параметры отображения. Вообще говоря, форма задания функции $\Phi(\phi)$ почти не существенна (как и в случае с логистическим отображением), но должны выполняться следующие условия: 1) $\Phi(\phi + 1) = 1 + \Phi(\phi)$; 2) при $K < K_{\text{cr}}$ функция $\Phi(\phi)$ и обратная функция $\Phi^{-1}(\phi)$ существуют и дифференцируемы (т. е. отображение есть диффеоморфизм окружности); 3) при $K = K_{\text{cr}}$ функция $\Phi^{-1}(\phi)$ теряет дифференцируемость в точке $\phi = 0$, а при $K > K_{\text{cr}}$ не существует однозначной обратной функции. Для (7.3) все эти условия выполняются, причем $K_{\text{cr}} = 1$.

Динамика точки в отображении окружности характеризуется числом вращения θ:

$$\theta = \lim_{n\to\infty} \frac{\Phi^n(\phi_0) - \phi_0}{n}. \tag{7.4}$$

Оно представляет собой средний угол поворота изображающей точки на окружности за одну итерацию. Для гладкого взаимно-однозначного отображения (т. е. в случае $0 \leqslant K < 1$) предел (7.4) существует и не зависит от начальной точки ϕ_0. Из этого факта следует, что при иррациональном значении числа вращения θ отображение (7.3) не имеет неподвижных точек, а при рациональном значении $\theta = p/q$ (где p и q — взаимно простые числа) отображение окружности имеет четное число устойчивых и неустойчивых неподвижных точек кратности q, т. е., по крайней мере, один устойчивый и один неустойчивый q-цикл отображения. Числитель p определяет число полных оборотов по окружности за q итераций. Резонансная структура, соответствующая рациональному значению числа вращения, является грубой.

Каждое рациональное значение θ сохраняется неизменным в некоторой области изменения параметров (в клюве Арнольда). Зависимость числа вращения от параметра Ω называется *«чертовой лестницей»* и представляет собой фрактальную кривую, состоящую из бесконечного числа «ступенек», соответствующих рациональным значениям θ, и множества отдельных точек, соответствующих иррациональным значениям θ. При $K = 0$ число вращения для (7.3) совпадает с параметром Ω и имеет множество рациональных значений меры нуль. При $0 \leqslant K < 1$ мера как рациональных, так и иррациональных значений числа вращения отлична от нуля. С ростом K мера рациональных значений растет, а иррациональных — убывает, обращаясь в нуль на критической линии $K = 1$ (сумма длин всех ступенек равна единице). Однако при $K = 1$ еще имеется счетное множество точек с иррациональными значениями числа вращения.

При $K > 1$ отображение окружности не имеет квазипериодических траекторий. Зависимость $\theta(\Omega)$ становится неоднозначной, что соответствует перекрытию клювов Арнольда. В закритической области отображение окружности описывает резонансы на торе и хаотические движения в окрестности разрушившегося тора T^2. Оно демонстрирует указанные в теореме сценарии разрушения тора и возникновения хаотической динамики. В клювах Арнольда устойчивый резонансный цикл теряет устойчивость на линии удвоения периода. В каждом клюве наблюдается переход к хаосу по сценарию Фейгенбаума. В областях перекрытия резонансов имеют место кризисы, приводящие к объединению хаотических аттракторов, возникших на базе различных резонансных циклов. В результате объединения хаотических множеств формируется тор-хаос. Диаграмма режимов отображения (7.3) на плоскости параметров отражает сложную самоподобную структуру языков Арнольда (рис. 7.4)[1].

При разрушении эргодических квазипериодических движений отображение (7.3) демонстрирует некоторые количественные закономерности универсального характера, т. е. не зависящие от конкретного вида функции $\Phi(\phi)$, если она удовлетворяет перечисленным ранее условиям. Однако эти закономерности зависят от выбранного значения числа вращения.

Иррациональное число раскладывается в *непрерывную цепную дробь*:

$$\theta = \cfrac{1}{m_1 + \cfrac{1}{m_2 + \cfrac{1}{\dots}}} = \langle m_1, m_2, \dots, m_k, \dots \rangle. \tag{7.5}$$

[1]Рисунок взят из работы: Кузнецов А. П., Кузнецов С. П., Сатаев И. Р. Коразмерность и типичность в контексте проблемы описания перехода к хаосу через удвоения периода в диссипативных динамических системах. Регулярная и хаотическая динамика, **2** (1997), № 3-4, с. 90–105.

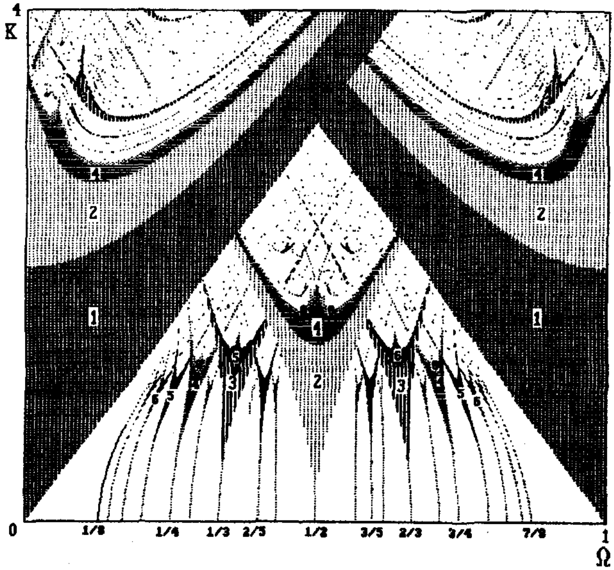


Рис. 7.4. Диаграмма режимов отображения окружности. Штриховкой выделены области периодических режимов; соответствующие периоды обозначены цифрами

Если ограничиться k первыми членами разложения, то получается рациональное число $\theta_k = p_k/q_k$, называемое *рациональной аппроксимацией* числа θ порядка k. Тогда иррациональное число можно представить как предел последовательности рациональных чисел:

$$\theta = \lim_{k\to\infty} \theta_k. \tag{7.6}$$

Наиболее простое представление в виде периодической цепной дроби имеет иррациональное число, называемое *золотым сечением*[2]: $\theta_g = 0.5(\sqrt{5} - 1) = \langle 1, 1, 1, \ldots \rangle$.

Для иррациональных значений θ, имеющих периодическое (хотя бы начиная с некоторого m_k) разложение в цепную дробь, характерны опреде-

[2]Для золотого сечения p_k и q_k есть последовательные члены основного ряда Фибоначчи: $p_k = F_k$, $q_k = F_{k+1}$. Ряды Фибоначчи определяются рекурентной формулой $F_{k+1} = F_{k-1} + F_k$, где (F_0, F_1) – основание ряда. Основной ряд имеет основание (0,1). Соответственно, $\theta_g = \lim_{k\to\infty} \dfrac{F_k}{F_{k+1}}$.

ленные закономерности. Пусть $\Omega_k(K)$ — значение параметра Ω при фиксированном K, для которого $\theta = \theta_k$, и точка $\phi = 0$ принадлежит устойчивому циклу периода q_k. То есть Ω_k определяется соотношением $\Phi^{q_k}(0, \Omega_k, K) = p_k$, где Φ^{q_k} — q_k раз примененная функция. Величины Ω_k сходятся к некоторому значению $\Omega_\infty(\theta, K)$ по закону геометрической прогрессии со скоростью δ:

$$\delta = \lim_{n\to\infty} \frac{\Omega_k - \Omega_{k-1}}{\Omega_{k+1} - \Omega_k}. \tag{7.7}$$

Величина δ является универсальной константой, определяемой значениями θ и K. Для золотого сечения было получено: $\delta = -2.6180339\ldots = -\theta_g^{-2}$ при $K < K_{\text{кр}}$ и $\delta = -2.83362\ldots$ при $K = K_{\text{кр}}$.

Для масштаба, определяемого величиной $d_k = \Phi_{\Omega_k}^{q_{k-1}}(0, \Omega_k, K) - p_{k-1}$, существует предел

$$\lim_{k\to\infty} \frac{d_k}{d_{k+1}} = a, \tag{7.8}$$

где a — универсальная константа. Для $\theta = \theta_g$ было получено: $a = -1.618\ldots = -\theta_g^{-1}$ при $K < K_{\text{кр}}$ и $a = -1.28857\ldots$ при $K = K_{\text{кр}}$.

Спектр траекторий отображения окружности в критической точке $K = K_{\text{кр}}$ также обладает рядом универсальных свойств. Если θ можно представить в виде периодической цепной дроби, то спектр обладает свойством *скейлинга*. Для $\theta = \theta_g$ частоты спектральных компонент, приведенные к интервалу [0;1], удовлетворяют соотношению

$$\nu = |F_{k+1}\theta_g - F_k|, \tag{7.9}$$

где F_k, F_{k+1} — последовательные члены одного из рядов Фибоначчи. Спектральные серии, расположенные в порядке убывания амплитуд спектральных линий, соответствуют рядам Фибоначчи с основаниями: главная серия — (0,1); 2-я серия — (2,2); 3-я серия — (1,3); 4-я серия — (3,3); 5-я серия — (1,4); 6-я серия — (2,5) и т. д. Для линий каждой серии приведенная спектральная мощность имеет предел при $j \to \infty$:

$$S_i = \lim_{j\to\infty} \frac{S_i^j}{\nu^2(j)} = \text{const}. \tag{7.10}$$

Нормированный спектр $a_i^j = S_i^j / \big(S_1^1 \nu^2(j)\big)$, представленный в координатах $\log a_i^j - \log \nu$, разбивается на идентичные интервалы, заключенные между соответствующими линиями каждой серии.

Вышеперечисленные и другие количественные закономерности разрушения двухчастотных квазипериодических режимов оказываются характерными не только для модельных одномерных отображений, но и для обратимых отображений размерности $N \geqslant 2$ и потоковых систем. Они наблюдались (в пределах достижимой точности) в натурных экспериментах и при компьютерном моделировании различных ДС.

Для анализа отображений типа (7.3) в ряде исследований был применен метод ренорм-группы. Так, для $\theta = \theta_g$ можно получить функциональное уравнение неподвижной точки:

$$\Phi^*(\phi) = a\Phi^*(a\Phi^*(\phi/a^2)), \tag{7.11}$$

где $\Phi^*(\phi+1) = \Phi^*(\phi)+1$. Его решение $\Phi^*(\phi)$ есть универсальная функция, а масштабный множитель a является универсальной константой. Уравнение (7.11) имеет линейное решение $\Phi^*(\phi) = \phi - 1$. Ему соответствуют значения $a_{1,2} = 0.5(\pm\sqrt{5}-1)$. Численно найденное при $K < K_{\text{кр}}$ значение масштабного множителя совпадает с решением $a_2 = 0.5(-\sqrt{5}-1) = -\theta_g^{-1} \approx$ ≈ -1.618. При $K = K_{\text{кр}}$ линейное решение не удовлетворяет (7.11). Поскольку $\Phi(\phi)$ имеет в нуле кубическую точку перегиба, универсальная функция $\Phi^*(\phi)$ должна содержать кубическое слагаемое ϕ^3. Нетривиальная функция такого типа была получена численно в виде

$$\Phi^*(\phi) = 1 + c_1\phi^3 + c_2\phi^6 + \ldots \tag{7.12}$$

Найденное значение константы a согласуется с численно полученными результатами. Линеаризованное уравнение в неподвижной точке в качестве одного из собственных значений имеет величину, совпадающую с численно найденной по формуле (7.7) константой. Это объясняет универсальный характер константы δ. Результаты, полученные методом ренорм-группы для $\theta = \theta_g$, были обобщены на случай произвольного иррационального числа вращения, которое можно представить в виде периодической цепной дроби. При этом вид функции $\Phi^*(\phi)$ и значения констант a и δ, естественно, зависят от значения θ.

7.2. Переход к хаосу через разрушение эргодического тора. Странные нехаотические аттракторы

Ранее отмечалось, что при квазипериодическом сценарии перехода к хаосу важнейшую роль играют резонансные явления, всегда предшествующие формированию хаотического множества. Однако можно выделить целый класс систем, для которых эргодическое квазипериодическое движение является грубым, а переход к хаосу не сопровождается возникновением резонансных периодических движений. Этот класс составляют системы с квазипериодическим воздействием. Квазипериодическое воздействие с фиксированным иррациональным соотношением частот «навязывает» системе иррациональное число вращения, не зависящее от внутренних параметров системы. Рассмотрим простейший случай: одна из частот воздействия совпадает с собственной частотой периодических колебаний системы. При этом в области синхронизации собственных колебаний наблюдается грубый квазипериодический двухчастотный режим с фиксированным значением числа вращения, которое задается извне и предполагается иррациональным. Меняя параметры системы и амплитуду воздействия, можно добиться разрушения двумерного тора T^2 и перехода к хаосу. Сценарий перехода от эргодического тора к хаосу имеет свои особенности по сравнению с ранее рассмотренным случаем разрушения тора с произвольно меняющимся числом вращения. Многочисленные исследования потоковых систем и отображений с квазипериодическим воздействием показали, что для таких систем типичен режим так называемого странного нехаотического аттрактора (СНА). СНА представляет собой притягивающее предельное множество ДС, не являющееся многообразием. Особенностью этого множества является отсутствие разбегания фазовых траекторий при наличии фрактальной геометрии.

Для изучения механизмов перехода от эргодического тора к хаосу удобно использовать модельные отображения с квазипериодическим воздействием, представляя их в автономном виде:

$$\begin{aligned} \vec{x}_{n+1} &= \vec{F}(\vec{x}_n, \phi_n, \vec{\alpha}), \\ \phi_{n+1} &= \phi_n + \theta, \mathrm{mod} 1, \end{aligned} \tag{7.13}$$

где $\vec{x} \in R^N$ — вектор состояний автономной системы; $\vec{F} \in R^N$ — периодическая по аргументу ϕ функция с периодом 1; $\vec{\alpha}$ — векторный параметр системы; ϕ — фаза воздействия; θ — число вращения. Воздействие является квазипериодическим, если θ — иррационально. Обычно число вращения фиксируют равным золотому сечению $\theta = 0.5(\sqrt{5} - 1)$. Наиболее просто использовать одномерные отображения ($N = 1$). Двумерному тору в (7.13) соответствует инвариантная замкнутая кривая. Изображающие точки всюду плотно заполняют эту кривую, поскольку θ — иррационально. Так как на торе не возникает резонансной структуры и нет необходимости контролировать значение числа вращения, то бифуркационные механизмы разрушения T^2 и возникновения хаоса в этом случае допускают однопараметрический анализ. Поэтому будем считать α скалярной величиной.

Пусть при $\alpha = \alpha_0$ существует эргодический тор T^2 с жестко фиксированным иррациональным числом вращения, а при $\alpha = \alpha_1$ существует хаотический аттрактор СА. Каков сценарий перехода к хаосу в этом случае? Исследования показали, что разрушение грубого эргодического T^2 первоначально приводит к возникновению СНА, который затем преобразуется в хаотический аттрактор. В отображении первоначально наблюдаются искажения формы инвариантной кривой, ведущие к потере гладкости. Резонансный тор по теореме Афраймовича–Шильникова перед разрушением тоже теряет гладкость. Но это происходит на конечном множестве неподвижных точек инвариантной кривой, соответствующих точкам устойчивого резонансного цикла. Такой «негладкий тор» может какое-то время существовать в фазовом пространстве ДС, прежде чем произойдет его разрушение.

В случае эргодического тора неподвижные точки на инвариантной кривой отсутствуют, и при некотором значении $\alpha = \alpha_{\text{кр}1}$ происходит потеря гладкости инвариантной кривой одновременно на всюду плотном множестве точек. В результате кривая разрушается и возникает множество, не являющееся многообразием. Однако разрушение тора не ведет автоматически к возникновению экспоненциальной неустойчивости движения. Динамика становится хаотической позже, при некотором значении $\alpha = \alpha_{\text{кр}2} > \alpha_{\text{кр}1}$. Таким образом, имеется конечная область значений параметра $\alpha_{\text{кр}1} < \alpha < \alpha_{\text{кр}2}$, в которой существует СНА. Режим СНА обладает свойствами, являющимися промежуточными между квазипериодическим режимом и хаосом. Проблема исследования СНА состоит в следующем: если в численном эксперименте СНА очень легко отличить от хаоса (по отсутствию положительного ляпуновского показателя), то выявить различие с квазипериодическим режимом гораздо сложнее. Критерии численного эксперимента не позволяют однозначно определить, чем является исследуемое множество: странным нехаотическим аттрактором или сильно искаженным, но все же тором.

В работах А. С. Пиковского и др.[3] были предложены наиболее достоверные численные методы диагностики режима СНА. К ним относятся метод, связанный с рациональной аппроксимацией числа вращения, метод, основанный на свойстве фазовой чувствительности режима СНА, и критерий положительных локальных ляпуновских показателей. Рассмотрим (7.13) для случая $N = 1$. Отображение примет вид

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n, \phi_n, \alpha), \\ \phi_{n+1} &= \phi_n + \theta, \mathrm{mod} 1. \end{aligned} \tag{7.14}$$

[3] Например, Pikovsky A.S., Feudel U., Chaos **5** (1995), p. 253.

Исследуется разрушение инвариантной кривой отображения на фазовой плоскости. *Метод рациональной аппроксимации* базируется на бифуркационном анализе циклов, возникающих в отображении при рациональной аппроксимации числа вращения $\theta_k = p_k/q_k$, $\lim_{k\to\infty} \theta_k = \theta$. Поведение отображения в этом случае сильно зависит от выбора начальной фазы ϕ_0. Если при достаточно больших (теоретически при сколь угодно больших) k циклы с изменением ϕ_0 претерпевают бифуркации, то можно говорить о существовании в (7.14) СНА. При использовании этого метода для $\theta = \theta_k$ строят фазопараметрическую диаграмму $x(\phi_0), \phi_0 \in [0; 1/q_k]$, названную *аппроксимирующим притягивающим множеством*. Действительно, зависимость координат аттракторов отображения от ϕ_0 при $\theta = \theta_k$ аппроксимирует маленький участок эргодического аттрактора. Гладкий характер аппроксимирующего множества свидетельствует о квазипериодическом режиме отображения, в то время как наличие точек негладкости говорит о режиме СНА.

Другой критерий основан на свойстве *чувствительности динамической переменной к изменению фазы воздействия*, которая рассматривается уже не для рациональной аппроксимации, а для иррационального значения числа вращения. Оценивается максимум производной $\partial x_n/\partial\phi_0$ при ее вычислении вдоль траектории. Для (7.14) легко получить

$$\frac{\partial x_n}{\partial \phi_0} = \sum_{k=1}^{n} f_\phi \mu_{n-k}(x_k, \phi_k) + \mu_n(x_0, \phi_0)\frac{\partial x_0}{\partial \phi_0}, \tag{7.15}$$

где

$$\mu_m(x_k, \phi_k) = \prod_{i=0}^{m-1} f_x(x_{k+i}, \phi_{k+i}), \quad \mu_0 = 1, \tag{7.16}$$

есть «локальный мультипликатор» фазовой траектории. Отображение (7.14) имеет один, отличный от тождественного нуля, ляпуновский показатель:

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln|\mu_n|. \tag{7.17}$$

Поскольку в режиме СНА он отрицателен, локальный мультипликатор должен стремиться к нулю с ростом n. С учетом этого (7.15) можно переписать в виде

$$\frac{\partial x_n}{\partial \phi_0} = \sum_{k=1}^{n} f_\phi \mu_{n-k}(x_k, \phi_k). \tag{7.18}$$

Введем величину Γ_n:

$$\Gamma_n = \min_{x_0,\phi_0} \max_{0\leqslant i\leqslant n} \left|\frac{\partial x_i}{\partial \phi_0}\right|, \tag{7.19}$$

где максимум ищется по всем точкам одной траектории, а минимум — по множеству различных начальных условий. Неограниченный рост величины Γ_n при $n \to \infty$ означает, что производная $\partial x_n / \partial \phi_0$ не существует, т. е. что инвариантная кривая потеряла гладкость и возник СНА. Можно представить Γ_n в виде

$$\Gamma_n \sim n^{\eta}. \tag{7.20}$$

Показатель η называют *показателем фазовой чувствительности*. Было показано, что в режиме СНА $\eta = 1$.

Фазовая чувствительность связана с существованием ненулевой меры положительных значений локального ляпуновского показателя. *Локальным ляпуновским показателем* называется ляпуновский показатель траектории, рассчитанный на конечном времени. Для отображения (7.14) локальный ляпуновский показатель есть

$$\Lambda_n(x, \phi) = \frac{1}{n} \ln |\mu_n(x, \phi)|, \tag{7.21}$$

где $\mu_n(x, \phi)$ определяется по формуле (7.16). Разумеется, величина и знак локального ляпуновского показателя зависят от выбора начальной точки (x, ϕ). В силу негладкости СНА и неограниченности локального мультипликатора μ_n мера положительных значений Λ_n должна быть отлична от нуля даже при достаточно больших n. При этом $\lim_{n \to \infty} \Lambda_n = \lambda < 0$, так как аттрактор не хаотический.

К сожалению, рассмотренные критерии применимы, главным образом, к одномерным дискретным моделям с квазипериодическим воздействием и мало подходят для потоковых систем. Исключение, быть может, составляет критерий положительных локальных ляпуновских показателей. Однако его применение связано с вопросом, каково для данной ДС минимальное время, на котором локальные показатели квазипериодического режима уже не могут быть положительными. Предлагались и другие численные критерии существования СНА, связанные со свойствами спектра и корреляционной функции, но и они в большинстве случаев не дают однозначного результата. По этой причине к исследованию разрушения эргодического тора надо подходить осторожно, по возможности используя различные критерии СНА.

Анализ причин потери гладкости и разрушения инвариантной кривой в модельных отображениях выявил два механизма, приводящих к СНА: 1) кризис эргодического тора при $\alpha = \alpha_{\text{кр1}}$ в результате нелокальной бифуркации; 2) постепенная деформация тора, приводящая в точке $\alpha = \alpha_{\text{кр1}}$ к потере гладкости и его разрушению. Кризис эргодического тора происходит в результате касания устойчивым тором седлового тора или его устойчивого многообразия, играющего роль сепаратрисной поверхности. Для одномерных моделей с квазипериодическим воздействием (7.14) роль седлового тора играет неустойчивая инвариантная кривая (репеллер). Кризис может быть связан с объединением частей квазипериодического аттрактора[4]. Дело в том, что в результате бифуркаций удвоения тора по одному из периодов инвариантная кривая в его сечении будет состоять из 2^k частей, посещаемых изображающей точкой в строго определенном порядке и разделенных сепаратрисной поверхностью, в качестве которой выступает поверхность в сечении устойчивого многообразия седлового тора. Для одномерных моделей сепаратрисой является неустойчивая инвариантная кривая. На рис. 7.5 представлен кризис объединения частей инвариантной кривой в логистическом отображении с квазипериодической модуляцией параметра:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \alpha(1 + \varepsilon\cos(2\pi\phi_n))x(1 - x), \\ \phi_{n+1} &= \phi_n + \theta, \mathrm{mod} 1. \end{aligned} \tag{7.22}$$

При $\alpha < \alpha_{\text{кр}1}$ имеется инвариантная кривая, состоящая из двух частей, разделенных репеллером. Изображающая точка посещает каждую из частей через итерацию. Искажение формы инвариантной кривой приводит к тому, что при $\alpha = \alpha_{\text{кр}1}$ она касается репеллера, разделяющего части аттрактора. В момент касания происходит потеря гладкости и разрушение устойчивой инвариантной кривой. При $\alpha > \alpha_{\text{кр}1}$ существует СНА, объединяющий обе части разрушенной кривой, которые теперь посещаются изображающей точкой в случайном порядке. Именно такой механизм разрушения тора ограничивает последовательность бифуркаций удвоения эргодического тора, которая в типичном случае конечна.

Кризис тора может быть также связан с объединением двух различных квазипериодических аттракторов. Возможна ситуация, когда кризис не связан с объединением квазипериодических аттракторов или частей одного аттрактора. Такая ситуация особенно типична для резонанса на T^3, одно из чисел вращения которого имеет фиксированное иррациональное значение, а второе произвольно меняется. В результате искажения формы инвариантных кривых в сечении устойчивого и неустойчивого двумерных торов на T^3 вместо касательной бифуркации торов на границе области синхронизации может произойти кризис касания в отдельных точках.

[4]С точки зрения определения кризиса такое объединение кризисом не является, так как не ведет к изменению поглощающей области. Но термин «кризис» в данном случае является устоявшимся.

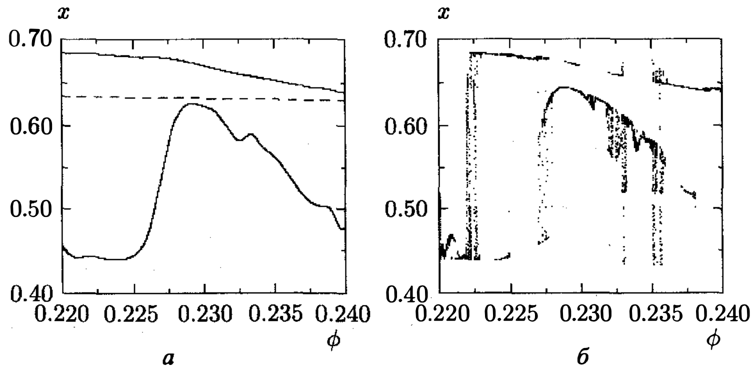


Рис. 7.5. Кризис объединения частей инвариантной кривой в отображении (7.22) при $\varepsilon = 0.1, \theta = \theta_g$. Фрагмент инвариантной кривой до касания ($\alpha = 3.271$) (*а*) и после касания ($\alpha = 3.272$) (*б*) с репеллером (пунктир)

Потеря гладкости и разрушение эргодического тора может происходить и без нелокальных бифуркаций, связанных с касанием сепаратрис. В этом случае с изменением управляющего параметра α постепенно происходит искажение формы инвариантной кривой в сечении тора, приводящее к росту фазовой чувствительности. В критической точке $\alpha = \alpha_{\text{кр}1}$ производная по начальной фазе перестает быть ограниченной. Если аппроксимировать число вращения рациональными приближениями, то динамика отображения при некоторых значениях ϕ_0 становится хаотической, а при других остается регулярной. Однако ляпуновский показатель при $n \to \infty$ сходится еще к отрицательному значению. Аппроксимирующее множество в этом случае не может быть гладким, что соответствует существованию СНА в пределах некоторого интервала $\alpha_{\text{кр}1} \leqslant \alpha \leqslant \alpha_{\text{кр}2}$.

Предполагается, что СНА, возникающий в результате кризиса или эволюционным путем, существует на множестве значений параметров, имеющем ненулевую меру. Однако это утверждение очень трудно доказать. Известно, что в интервале $\alpha \in [\alpha_{\text{кр}1}, \alpha_{\text{кр}2}]$ СНА может вырождаться в инвариантную кривую, имеющую конечное число точек нарушения гладкости, а затем вновь возникать. Неизвестен бифуркационный механизм перехода от СНА к хаотическому аттрактору. Изученные сценарии формирования хаоса предполагают наличие гомоклинических траекторий седловых циклов или опасных сепаратрисных петель состояний равновесия седлофокусного типа, в окрестности которых возникает отображение типа подковы и формируется хаотическое множество траекторий. При постоянном иррациональном значении числа вращения θ система не имеет ни состояний равновесия, ни предельных циклов. В этом случае гомоклиническая структура должна быть связана с касанием и пересечением многообразий седловых торов. Гомоклиника подобного типа в настоящее время недостаточно исследована.

В завершение данного раздела лекции отметим, что рассмотренные нами бифуркационные механизмы возникновения хаоса через разрушение квазипериодических колебаний не предусматривают появления третьей независимой частоты колебаний. Следовательно, описанный сценарий может иметь место в потоковых системах с размерностью фазового пространства $N = 3$. Квазипериодический сценарий перехода к хаосу в многомерных системах допускает появление четвертой, пятой и т. д. независимых частот колебаний. Для систем с размерностью $N \geqslant 4$ сценарий Рюэля–Такенса–Ньюхауса вполне реален. Однако теоремы, доказанные в работах Рюэля, Такенса и Ньюхауса, ничего не говорят о конкретных бифуркационных последовательностях, приводящих к хаосу. Утверждается только, что малое возмущение квазипериодического движения на трехмерном торе T^3 может приводить к рождению странного аттрактора. По-видимому, возможно множество различных конкретных сценариев развития хаотической динамики в этом случае. В целом эти сценарии еще не достаточно хорошо изучены. Отметим только, что в силу нелинейного взаимодействия колебательных мод системы мера эргодических многочастотных режимов крайне мала и переход к хаосу, как правило, связан с возникновением резонансных структур на многомерных торах.

7.3. Заключение

В лекциях 6 и 7 нами были рассмотрены три известных на сегодняшний день типичных сценария перехода к хаосу: последовательность бифуркаций удвоения периода цикла (сценарий Фейгенбаума), кризис периодических колебаний и переход к хаосу через перемежаемость (сценарий Помо–Манневиля) и различные варианты перехода к хаосу через квазипериодические режимы (квазипериодический сценарий, или сценарий Рюэля–Такенса). Надо заметить, что для одной и той же системы могут наблюдаться различные сценарии перехода к хаосу, соответствующие различным областям пространства параметров и направлениям движения в нем. Более того, наблюдаемые бифуркационные последовательности могут быть сложным образом скомбинированы. Поэтому, чтобы представить картину возникновения хаотических колебаний в целом, нельзя ограничиваться однопараметрическим анализом. Необходимо иметь представление, хотя бы в общих чертах, о диаграмме режимов системы в пространстве параметров, о том, что происходит на ее различных листах, где они «сшиваются» и т. д.

Рассмотренные сценарии являются типичными в том смысле, что наблюдаются для широкого класса ДС как с малой, так и с большой размерностью фазового пространства, а также для распределенных систем при довольно произвольном выборе контрольных параметров и путей их изменения. Возможны ли какие-либо иные сценарии возникновения хаоса? Очевидно, такие сценарии возможны, но не типичны. Они могут быть связаны с какими-то особенностями (вырождениями) ДС или со специальным выбором путей движения в пространстве параметров, проходящих через критические точки высокой коразмерности.

Лекция 8

Грубые и негрубые динамические системы. Классификация типов аттракторов

8.1. Введение

Рассмотрим класс автономных динамических систем с непрерывным временем и размерностью фазового пространства $N \geqslant 3$. Кроме грубых систем, аналогичных системам Андронова–Понтрягина на плоскости, появляется класс грубых систем с нетривиальной гиперболичностью, то есть систем с хаотической динамикой. Хаотические аттракторы грубых гиперболических систем — это в строгом математическом смысле странные аттракторы. Обычно такие аттракторы представляют собой некую математическую идеализацию и в экспериментах, как правило, не наблюдаются. В большинстве случаев системы с нерегулярной динамикой оказываются негрубыми. Математиками доказано, что грубые гиперболические системы не являются всюду плотными на множестве динамических систем с $N \geqslant 3$. Структурная неустойчивость (негрубость) связана с возникновением негрубых двоякоасимптотических траекторий: сепаратрисных петель, гомоклинических и гетероклинических кривых, образующихся при нетрансверсальном пересечении многообразий седловых циклов и других седловых множеств. Строгое математическое описание негрубых систем со сложной динамикой вызывает большие сложности, поскольку даже при малых изменениях параметров наблюдается множество бифуркаций. Теоретически число бифуркаций в любом интервале значений управляющего параметра может быть бесконечным и описать их все невозможно. Кроме того, негрубые системы очень чувствительны к точности задания начального состояния и к наличию шума (даже если это шум округления при проведении численных экспериментов). При таких условиях нас, как правило, уже не интересуют отдельные бифуркации и детали фазового портрета. Важным становится общий характер поведения с учетом флуктуаций и статистические характеристики режима, которые можно измерять экспериментально. Негрубые диссипативные ДС можно разделить на два класса: почти гиперболические (квазигиперболические) ДС и ДС с квазиаттракторами. Квазигиперболические системы характеризуются аттракторами, которые наиболее близки по своим характеристикам к грубым гиперболическим. Основной отличительной чертой таких аттракторов является отсутствие устойчивых циклов и торов, включенных в аттрактор. Квазиаттракторы принципиально содержат устойчивые циклы (торы), которые существенно влияют на их свойства.

Понятие аттрактора ДС в последние годы приобрело важность не только в связи с открытием эффекта детерминированного хаоса. С понятием аттрактора в нелинейной теории колебаний связывают эффект автоколебаний в ДС. Если за основу определения автоколебаний в отличие от Андронова принять главное: независимость установившегося режима от начальных условий, то любой тип аттрактора автономной ДС будет представлять собой математический образ автоколебаний системы в ее фазовом пространстве. Свойства автоколебательных режимов при таком понимании будут определяться структурой и свойствами соответствующих им аттракторов. Так, например, устойчивым регулярным автоколебаниям будут отвечать устойчивые предельные циклы и торы, а хаотическим автоколебаниям — соответствующие хаотические аттракторы.

В настоящей лекции мы рассмотрим грубые гиперболические аттракторы, квазигиперболические аттракторы, к которым относятся и так называемые аттракторы типа Лоренца, и квазиаттракторы, наиболее часто реализующиеся в экспериментах.

8.2. Гомоклинические и гетероклинические кривые

В понимании динамики нелинейной системы большая роль принадлежит многообразиям седловых множеств и двоякоасимптотическим траекториям. Дадим более общее определение многообразий седловой точки равновесия и седлового цикла.

Рассмотрим ДС:

$$\dot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x}), \quad \vec{x} \in R^N. \tag{8.1}$$

Пусть $\vec{x}_0$ — состояние равновесия. Устойчивость $\vec{x}_0$ характеризуется собственными значениями s_i матрицы линеаризации

$$\hat{A}(\vec{x}) = \left.\frac{\partial \vec{F}}{\partial t}\right|_{\vec{x}_0}. \tag{8.2}$$

Пусть имеется m собственных значений s_i, таких что $Re s_i < 0$, $i = 1, 2, \ldots, m \neq 0$, и k значений s'_j, таких что $Re s'_j > 0$, $j = 1, 2, \ldots, k \neq 0$ $(m + k = N)$. Это означает, что $\vec{x}_0$ — состояние равновесия седлового типа (седло, седло-фокус). Множество точек $\vec{x} \in R^N$, таких что $\vec{x} \to \vec{x}_0$ при $t \to \infty$, называется *устойчивым многообразием* $W^s_{\vec{x}_0}$ *точки равновесия* $\vec{x}_0$. Оно имеет размерность m. Множество точек $\vec{x} \in R^N$, таких что $\vec{x} \to \vec{x}_0$ при $t \to -\infty$, называется *неустойчивым многообразием* $W^u_{\vec{x}_0}$ *точки равновесия* $\vec{x}_0$. Оно имеет размерность k.

Пусть L — периодическая траектория (предельный цикл) с периодом T. Устойчивость периодической траектории характеризуется мультипликаторами, которые представляют собой собственные значения матрицы монодромии M_T. Пусть имеется m мультипликаторов μ_i, таких что $|\mu_i| < 1$, $i = 1, 2, \ldots, m \neq 0$, и k мультипликаторов μ'_j, таких что $|\mu'_j| > 1$, $j = 1, 2, \ldots, k \neq 0$ $(m + k + 1 = N)$. Это означает, что периодическая траектория L принадлежит к седловому типу. Множество точек $\vec{x} \in R^N$, таких что $\vec{x} \to L$ при $t \to \infty$ называется *устойчивым многообразием* W^s_L *периодической траектории* L. Оно имеет размерность $m + 1$. Множество точек $\vec{x} \in R^N$, таких что $\vec{x} \to L$ при $t \to -\infty$ есть *неустойчивое многообразие* W^u_L *периодической траектории* L. Оно имеет размерность $k + 1$.

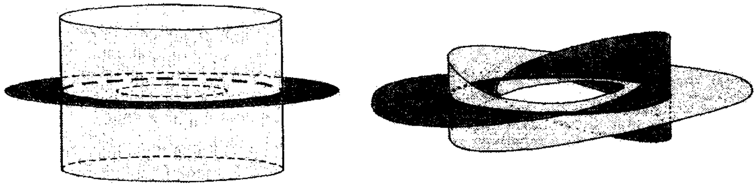
Пусть W^s и W^u — соответственно устойчивое и неустойчивое многообразия седловых периодических орбит или состояний равновесия. Определим понятие *трансверсальности* пересечения многообразий. Для этого введем касательные плоскости (при $N > 3$ касательные пространства) $E_{\vec{x}}(W^s)$ и $E_{\vec{x}}(W^u)$ к многообразиям W^s и W^u в точках $\vec{x} \in W^s \bigcap W^u$. Говорят, что многообразия W^s и W^u пересекаются трансверсально, если имеет место равенство

$$\dim E_{\vec{x}}(W^s) + E_{\vec{x}}(W^u) - \dim \left(E_{\vec{x}}(W^s) \bigcap E_{\vec{x}}(W^u) \right) = N, \qquad (8.3)$$

где символ $\dim \ldots$ обозначает размерность множества. Свойство трансверсальности многообразий сохраняется при малых возмущениях, т. е. является структурно-устойчивым.

Само седловое предельное множество принадлежит трансверсальному пересечению многообразий. Возможны два типа пересечения многообразий в точках седлового предельного цикла, показанные на рис. 8.1.

Кроме самого седлового предельного множества, пересечению его многообразий могут принадлежать двоякоасимптотические траектории. *Двоякоасимптотической траекторией седла* (седловой точки равновесия или седлового цикла) называется траектория, которая стремится к седлу как

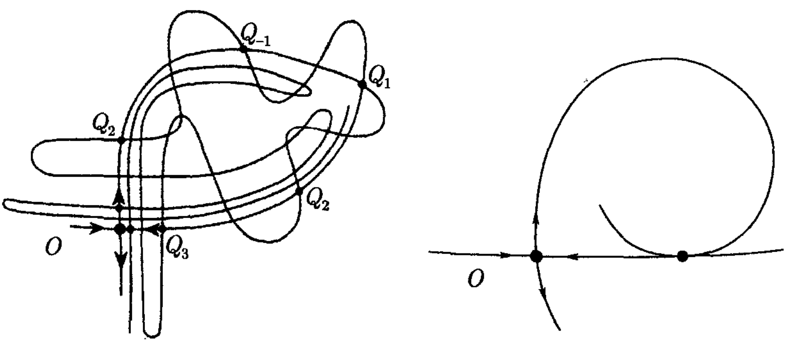


а *б*

Рис. 8.1. Два случая пересечения многообразий седлового предельного цикла: *а* — цилиндр и полоскость, *б* — два листа Мёбиуса

в прямом, так и в обратном времени. На плоскости примером такой траектории служит сепаратрисная петля седловой неподвижной точки. Многообразия в этом случае не пересекаются трансверсально, и петля всегда является негрубой.

Двоякоасимптотические траектории седловых предельных циклов называются *гомоклиническими кривыми Пуанкаре* (рис. 8.2, *а*). Возможны также двоякоасимптотические траектории, принадлежащие пересечению многообразий двух различных седловых циклов. Они называются *гетероклиническими кривыми Пуанкаре*. Гетероклиническая кривая в прямом времени наматывается на один седловой цикл (по его устойчивому многообразию), а в обратном времени — на другой (по его неустойчивому многообразию).



а *б*

Рис. 8.2. Трансверсальное пересечение многообразий (*а*) и касание многообразий седлового цикла (вид в секущей плоскости) (*б*). Последовательность точек $Q_{\pm 1}$, $Q_{\pm 2}$,... принадлежит сечению одной из трансверсальных гомоклинических кривых

Нужно заметить, что в R^N, $N > 3$, дваякоасимптотические кривые, подобные гомоклиническим и гетероклиническим кривым Пуанкаре, могут возникать при пересечении многообразий не только седловых циклов, но и седловых состояний равновесия.

В отличие от сепаратрисных петель и контуров на фазовой плоскости, двоякоасимптотические кривые в пространстве размерности $N \geqslant 3$ могут быть грубыми. Необходимым и достаточным условием грубости гомоклинических и гетероклинических кривых служит условие трансверсальности пересечения устойчивых и неустойчивых многообразий, которым принадлежат эти кривые. При касании многообразий условие трансверсальности нарушается и существующая в момент касания двоякоасимптотическая кривая является негрубой (рис. 8.2, *б*)

8.3. Структурно-устойчивые системы в R^N, $N \geqslant 3$. Свойство гиперболичности

В пространстве $R^N, N \geqslant 3$, можно выделить три типа структурно-устойчивых (грубых) систем: *системы Морса – Смейла*; *системы Аносова* и *системы Смейла с нетривиальной гиперболичностью*.

Системы Морса – Смейла представляют собой класс ДС, удовлетворяющих следующим требованиям: 1) в фазовом пространстве ДС имеется конечное число структурно устойчивых предельных множеств, представляющих собой состояния равновесия и периодические орбиты; 2) устойчивые и неустойчивые многообразия состояний равновесия и периодических траекторий пересекаются трансверсально.

Системы Морса – Смейла (МС) — это системы с наиболее простым поведением, являющиеся обобщением класса систем Андронова – Понтрягина на случай размерности фазового пространства $N > 2$. В фазовом пространстве систем МС имеется только конечное число аттракторов и все они — регулярные. Особенностью систем МС является отсутствие сепаратрисных петель, контуров и нетрансверсальных пересечений многообразий седловых орбит. Понятие систем МС может быть распространено и на ДС с дискретным временем (отображения последования).

Более сложным типом структурно-устойчивых систем в $R^N, N \geqslant 3$ являются *системы Аносова* или *У-системы,* а также системы Смейла с нетривиальной гиперболичностью.

Гиперболические множества. Чтобы определить У-системы и системы Смейла надо дать определение *гиперболического множества.* Вообще говоря, свойство гиперболичности играет очень важную роль в нелинейной динамике. Для большей простоты начнем с определений *гиперболического состояния равновесия* и *гиперболического предельного цикла.*

Состояние равновесия ДС называется гиперболическим, если у него нет собственных значений на мнимой оси. Таким образом, узел (устойчивый или неустойчивый), фокус (устойчивый или неустойчивый), седло и седло-фокус — это все гиперболические точки равновесия. Примером негиперболического равновесия является точка типа центр. Предельный цикл ДС с непрерывным временем называется гиперболическим, если он имеет только один мультипликатор, абсолютная величина которого равна единице. Для отображения последования неподвижная точка или цикл называются гиперболическими, если они не имеют ни одного мультипликатора, абсолютная величина которого равна единице. Как видно из определения, гиперболические состояния равновесия и предельные циклы — это структурно устойчивые точки и циклы. Все состояния равновесия и предельные циклы в системах Аносова–Понтрягина и Морса–Смейла – гиперболические.

Обобщим определение гиперболичности на произвольное инвариантное множество автономной ДС с непрерывным временем (8.1). Обозначим как $T^\tau(\vec{x})$ оператор эволюции на интервале времени τ, действующий на состояние $\vec{x}$. Касательное пространство ДС в точке $\vec{x}$ есть пространство $E_{\vec{x}}$, натянутое на собственные векторы линеаризованного оператора эволюции $DT^\tau_{\vec{x}}$. Инвариантное множество $M \in R^N$ системы (8.1) называется *гиперболическим,* если в любой точке $\vec{x} \in M$ касательное пространство $E_{\vec{x}}$ можно разложить в виде прямой суммы трех подпространств $E_{\vec{x}} = E^s_{\vec{x}} + E^u_{\vec{x}} + E^c_{\vec{x}}$. $E^s_{\vec{x}}$ — *подпространство сжимающихся векторов*, или *устойчивое подпространство*, $E^u_{\vec{x}}$ — *подпространство растягивающихся векторов*, или *неустойчивое подпространство* и $E^c_{\vec{x}}$ — *центральное подпространство*, порождаемое вектором фазовой скорости. Размерность центрального подпространства равна единице. Для любых векторов $\vec{\xi} \in E^s_{\vec{x}}$, $\vec{\eta} \in E^u_{\vec{x}}$, $\vec{\kappa} \in E^s_{\vec{x}}$ при любом $\tau > 0$ справедливы неравенства:

$$||DT^\tau_{\vec{x}}\vec{\xi}|| < a|\vec{\xi}|e^{-C\tau}; \quad ||DT^{-\tau}_{\vec{x}}\vec{\eta}|| < b|\vec{\eta}|e^{-C\tau}; \quad ||DT^{\pm\tau}_{\vec{x}}\vec{\kappa}|| < k|\vec{\kappa}|.$$

Здесь a, b, k, C — независящие от $\vec{x}$ положительные константы.

Приведенные ранее определения гиперболического состояния равновесия и гиперболического предельного цикла вытекают из данного общего определения. Из него также следует, что двоякоасимптотические траектории, принадлежащие трансверсальному пересечению многообразий, также являются гиперболическими множествами. Таким образом, все инвариантные предельные множества систем Морса–Смейла — гиперболические. Это и является причиной структурной устойчивости МС систем.

Системы Аносова. Обратимые во времени динамические системы, для которых условия гиперболичности выполняются в каждой точке фазового пространства, называются *системами Аносова* или *У-системами*[1]. Это могут быть *У-потоки* и *У-каскады*. У-каскады также называются *диффеоморфизмами Аносова*. Математиками строго доказано, что У-системы являются грубыми (структурно устойчивыми).

Примером диффеоморфизма Аносова может служить отображение на N-мерном торе вида

$$\vec{\Theta}(n+1) = \hat{A}\vec{\Theta}(n) + \vec{F}(\vec{\Theta}(n)), \bmod 1, \tag{8.4}$$

где $\hat{A}$ — постоянная матрица с целыми элементами, отличная от единичной матрицы, и такая, что $|\det \hat{A}| = 1$, $\vec{F}(\vec{\Theta})$ — периодическая функция с периодом 1, $\bmod 1$ означает, что рассматривается только дробная часть выражения. Частным случаем отображения (8.4) является линейный автоморфизм тора

$$\begin{aligned} x(n+1) &= 2x(n) + y(n), \bmod 1, \\ y(n+1) &= x(n) + y(n), \bmod 1, \end{aligned} \tag{8.5}$$

известный как *отображение Арнольда* или *отображение кошки*. Это отображение является сохраняющим площадь (консервативным). При этом происходит сжатие элемента площади в одном направлении и растяжение в другом. Действие отображения проиллюстрировано на рис. 8.3[2].

Система (8.5) демонстрирует хаотическую динамику, но поскольку элемент площади сохраняется, то у (8.5) нет аттрактора. Возможны также сжимающие диффеоморфизмы Аносова на торе. Примером сжимающего диффеоморфизма тора может служить модифицированное отображение кошки (5.5), рассмотренное в лекции 5. Отображение (5.5) сжимает площадь. При этом система имеет хаотический нестранный аттрактор, которым является весь тор, так как любая траектория всюду плотна на нем.

Системы Смейла с нетривиальной гиперболичностью. Странные аттракторы. Системы, для которых гиперболическим множеством является не все фазовое пространство, тоже могут быть структурно устойчивыми. Простейшим примером служат системы Морса–Смейла. В общем случае структурно-устойчивыми системами являются системы, удовлетворяющие некоторым условиям, называемым *условиями Смейла*.

---

[1]Буква «У» является первой буквой слова «условие», в литературе на английском языке употребляется соответствующий термин «C-systems».

[2]Взято из книги: *Арнольд В. И.*, Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.

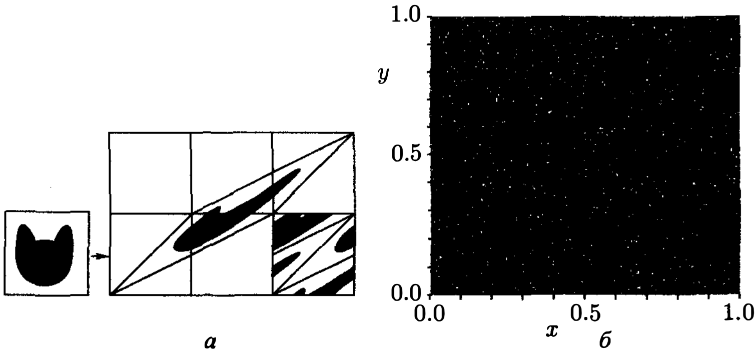


Рис. 8.3. Отображение кошки: *а* — иллюстрация действия отображения за одну итерацию, *б* — результат действия отображения после 10000 итераций

Система удовлетворяет аксиоме А (А-система): неблуждающее множество Ω[3] ДС гиперболично (состоит из гиперболических множеств); неблуждающее множество Ω является замыканием периодических траекторий[4]. Кроме того, для нее выполняются условия строгой трансверсальности пересечения многообразий всех седловых предельных множеств.

Доказано, что если ДС удовлетворяет аксиоме А и условию строгой трансверсальности, то она структурно устойчива. Для систем с дискретным временем доказана необходимость и достаточность условий Смейла для структурной устойчивости. В случае систем с непрерывным временем необходимость условий Смейла строго не доказана, но, по-видимому, имеет место.

Системы Морса – Смейла удовлетворяют аксиоме А и условию строгой трансверсальности. Однако возможны каскады с $N \geqslant 2$ и потоки с $N \geqslant 3$, удовлетворяющие условиям Смейла, но не являющиеся системами Морса – Смейла. Их называют *системами Смейла с нетривиальной гиперболично-*

[3]*Неблуждающее множество* ДС есть множество всех неблуждающих точек в фазовом пространстве. Точка называется *неблуждающей*, если для любого заданного интервала времени θ любая ее окрестность под действием оператора эволюции спустя некоторое время $\tau > \theta$ пересекает свое начальное положение. Точки предельных множеств являются неблуждающими. Однако понятие неблуждающих множеств, в отличие от предельных множеств, применимо к консервативным системам. Нужно также отметить, что понятие неблуждающей точки несколько отлично от понятия точки, устойчивой по Пуассону. Очевидно, точки, устойчивые по Пуассону, являются неблуждающими. Обратное не всегда верно. Например, сепаратрисные контуры на плоскости состоят из неблуждающих точек, но составляющие их двоякоасимптотические траектории не являются траекториями, устойчивыми по Пуассону.

[4]То есть периодические траектории всюду плотны в Ω.

стью. Нетривиальная гиперболичность означает, что в системе существует нетривиальное гиперболическое множество. Это множество, в котором имеется всюду плотная трансверсальная гомоклиническая кривая. Нетривиальные гиперболические множества могут быть притягивающими (аттракторами), могут и не быть притягивающими. Классическим примером системы с нетривиальным гиперболическим множеством является *подкова Смейла*, о которой будет говориться в лекции 9.

Странный аттрактор (СА) в строгом смысле представляет собой притягивающее нетривиальное гиперболическое множество. Странные аттракторы являются грубыми гиперболическими аттракторами. Странные аттракторы обладают следующими свойствами: 1) в странных аттракторах всюду плотны седловые периодические орбиты, грубые гомоклинические и гетероклинические траектории, а также незамкнутые устойчивые по Пуассону гиперболические траектории; 2) странный аттрактор обладает свойством транзитивности, т. е. имеется хотя бы одна фазовая траектория, всюду плотная в аттракторе; 3) неустойчивые многообразия всех периодических орбит странного аттрактора располагаются в аттракторе; 4) локальная структура в любой точке в сечении аттрактора гомеоморфна канторову множеству.

В математике известно очень немного примеров грубых гиперболических странных аттракторов. Это аттрактор Смейла – Вильямса, аттрактор Плыкина и некоторые другие (в том числе аттрактор в отображении тора (5.5), хотя мы и назвали его «нестранным»). Рассмотрим, например, как строится аттрактор Смейла – Вильямса. Двумерный тор растягивается в длину, а его сечение сжимается так, чтобы объем преобразованного тора был меньше объема исходного. Затем преобразованный тор складывается вдвое и помещается внутрь исходного, как показано на рис. 8.4. Эта же процедура повторяется с новым тором, и так бесконечное число раз. В пределе получается гиперболическое множество со сложной структурой, называемое аттрактором Смейла – Вильямса.

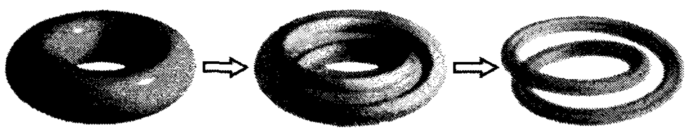


Рис. 8.4. Построение аттрактора Смейла – Вильямса

В последнее время был предложен ряд математических моделей и физических устройств, реализующих аттракторы по ряду черт очень похожие на грубые гиперболические[5]. Однако эти модели и устройства конструировались специальным образом с целью получения гиперболического хаоса. В системах естественного происхождения гиперболические аттракторы до настоящего времени не обнаружены.

8.4. Структурно-неустойчивые динамические системы

Большинство динамических систем, моделирующих реальные системы и процессы, не являются грубыми гиперболическими системами. Структурная неустойчивость ДС, удовлетворяющих аксиоме А, как правило, связана с нарушением условия строгой трансверсальности, т. е. с возникновением негрубых гомоклинических и гетероклинических кривых, подобных кривой на рис. 8.2, *б*. Для такой ситуации Ньюхаусом были получены следующие строгие результаты.

Теорема 1 (Ньюхауса). *В любой окрестности C^r–гладкого $(r \geqslant 2)$ двумерного диффеоморфизма, имеющего седловую неподвижную точку со структурно-неустойчивой гомоклинической траекторией, существуют области, где всюду плотны системы со структурно-неустойчивыми гомоклиническими траекториями. Эти области называются* областями Ньюхауса. *При изменении управляющего параметра в структурно-неустойчивой ДС наблюдается счетное множество областей Ньюхауса.*

Теорема 2 (Ньюхауса). *Любой сколь угодно малый интервал $(-\alpha, \alpha)$ изменения некоторого параметра $|\alpha| > 0$ системы содержит счетное множество областей Ньюхауса, где $\alpha = 0$ соответствует случаю гомоклинического касания.*

Эти результаты особенно важны для решения многих проблем нелинейной динамики. Отметим, что результаты Ньюхауса обобщены на многомерный случай. Хаотические аттракторы структурно-неустойчивых систем не являются в строгом смысле странными аттракторами. Они характеризуются более сложной структурой и свойствами, к обсуждению которых мы и перейдем.

8.5. Квазигиперболические аттракторы. Аттракторы типа Лоренца

Условия гиперболичности аттрактора, сформулированные выше, для реальных динамических систем, как правило, не выполняются. Вместе

[5] Например, *Кузнецов С. П.* Динамический хаос и однородно гиперболические аттракторы: от математики к физике. УФН. 2011. Т. 181. № 2. С. 121–149.

с тем известны динамические системы, аттракторы которых являются близкими к гиперболическим. Такие аттракторы являются хаотическими, не включают устойчивых регулярных аттракторов и сохраняют эти свойства при возмущениях. С математической же точки зрения для таких систем нарушается условие строгой трансверсальности и образуются негрубые двоякоасимптотические кривые.

Мы будем называть почти гиперболические аттракторы квазигиперболическими. Известны квазигиперболические аттракторы Лози, Белыха и аттракторы типа Лоренца. Для указанных аттракторов существуют строгие доказательства того, что они являются квазигиперболическими в указанном выше смысле. Целесообразно выявить и систематизировать отличительные экспериментальные характеристики квазигиперболических аттракторов, которые можно использовать для их диагностики при компьютерном моделировании.

Квазигиперболический аттрактор в отображении Лози. Обоснование существования квазигиперболического аттрактора в динамической системе требует доказательства двух положений: 1) в аттракторе все фазовые траектории являются неустойчивыми, 2) при вариации параметров системы устойчивых траекторий не возникает. Эта сугубо математическая задача в силу нелинейности динамической системы не может быть решена в общем виде. Однако применительно к некоторым конкретным динамическим системам эта задача, к счастью, имеет решение.

Рассмотрим наиболее простой пример — *аттрактор Лози* в двумерной системе с дискретным временем:

$$\begin{aligned} x(n+1) &= 1 - a|x_n| + y_n, \\ y(n+1) &= bx_n. \end{aligned} \tag{8.6}$$

Система (8.6) представляет собой нелинейное взаимно-однозначное диссипативное (для $b < 1$!) отображение, которое в силу диффеоморфизма является в строгом смысле отображением Пуанкаре некоторой дифференциальной системы с размерностью фазового пространства $N = 3$. Поэтому свойства, обнаруженные и доказанные для этой системы, будут достоверно применимы к потоку в R^3.

Теоретически установлено, что в системе (8.6) в области значений $1.3 < a < 1.8$ существует единственный хаотический аттрактор, который не содержит устойчивых неподвижных точек. Этот аттрактор известен в литературе как квазигиперболический аттрактор Лози, для которого нарушается условие строгой трансверсальности.

На рис. 8.5 приведен аттрактор Лози и область (бассейн) его притяжения. Аттрактор Лози G_0 — единственное притягивающее множество в ин-

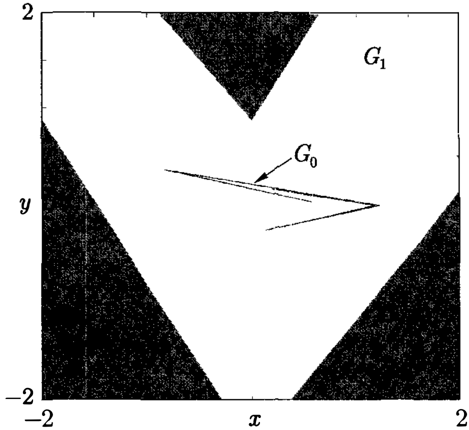


Рис. 8.5. Аттрактор Лози G_0 и бассейн его притяжения G_1 для $a = 1.5$ при $b = 0.3$ (траектории из серой области имеют в качестве аттрактора бесконечность)

тервале $1.3 < a < 1.8$ при $b = 0.3$ с однородным бассейном притяжения G_1. Любая начальная точка (x_0, y_0), принадлежащая бассейну притяжения G_1, со временем стремится к аттрактору Лози.

Характерной является зависимость старшего показателя Ляпунова от параметра a. При фиксированном $b = 0.3$ аттрактор Лози возникает жестко при $a_{\text{кр}} = 1.3$ и остается хаотическим во всей области существования $1.3 < a < 1.8$. Зависимость $\lambda_1(a)$ не имеет провалов до нуля и представляет собой гладкую положительно определенную функцию. Этот результат отражает факт отсутствия устойчивых неподвижных точек (окон устойчивости) в области существования аттрактора Лози.

Спектр мощности $S(\omega)$, рассчитанный по координате $x(n)$ в области существования аттрактора Лози, является гладкой функцией и не включает явных выбросов на каких-либо характерных частотах. Вследствие этого автокорреляционная функция (АКФ) процесса $x(n)0$ спадает по закону, близкому к экспоненциальному (рис. 8.6).

Как уже отмечалось, для грубых гиперболических аттракторов должно выполняться условие трансверсальности пересечения устойчивых и неустойчивых многообразий седловой траектории. Сопоставление рис. 8.5 и 8.7 показывает, что устойчивые многообразия седловых циклов определяют границы бассейна притяжения аттрактора, а сам хаотический аттрактор располагается вдоль неустойчивых сепаратрис, повторяя их форму. Из рис. 8.7 видно, что пересечение многообразий всюду трансверсально и по-

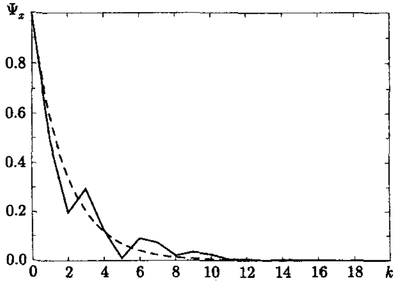


Рис. 8.6. Автокорреляционная функция для $a = 1.75$. Пунктирной линией показана аппроксимация экспоненциальной функцией ($\lambda_1 = 0.53$ — старший ляпуновский показатель, соответствующий параметру a)

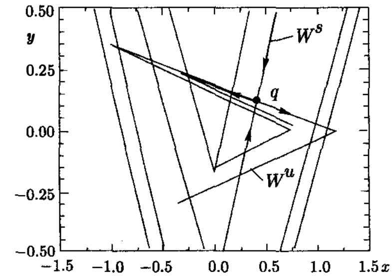
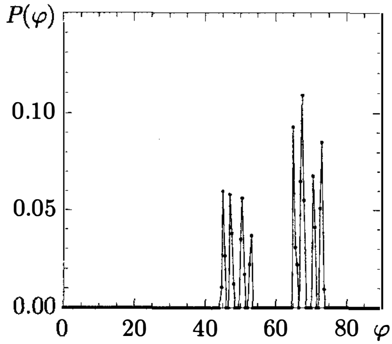


Рис. 8.7. Поведение устойчивого и неустойчивого многообразий седлового состояния равновесия q отображения Лози при $a = 1.7, b = 0.3$

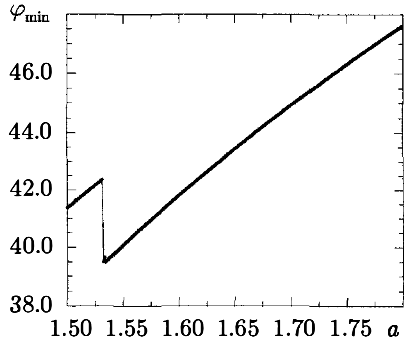
явление гомоклинических траекторий не ведет к рождению устойчивых периодических орбит. Гиперболическое хаотическое множество – единственное притягивающее предельное множество в фазовом пространстве системы (8.6).

Система Лози является одной из простейших, для которых условие гиперболичности траекторий на хаотическом аттракторе можно проверить в численном эксперименте. С этой целью была разработана специальная программа, позволяющая рассчитать вероятность $P(\phi)$ угла ϕ между направлениями устойчивого и неустойчивого многообразий седловой траектории $(x(n), y(n))$ при $n \to \infty$ (рис. 8.8, *а*). Расчеты углов были проведены для 18000 точек на аттракторе. Из графика видно, что существует некоторое минимальное значение, принимаемое углом ϕ, и оно отлично от нуля. Минимальное значение $\phi_{\min}$ зависит от параметров отображения (рис. 8.8, *б*). Во всем интервале значений a, где существует хаотический аттрактор, минимальный угол между направлениями устойчивого и неустойчивого многообразий фазовой траектории больше 39^0 и в нуль не обращается. Многообразия хаотических траекторий ведут себя так же, как и многообразия седлового цикла: они всегда трансверсальны.

Аттрактор Лоренца. Рассмотрим пример квазигиперболического аттрактора в дифференциальной системе — в системе Лоренца. Для аттрактора Лоренца, как и для аттрактора Лози, нарушается одно из требований гиперболичности (условие строгой трансверсальности). Аттракторы типа Лоренца обнаружены в ряде систем и являют собой типичный пример ква-



а



б

Рис. 8.8. Распределение вероятностей угла ϕ между направлениями устойчивого и неустойчивого многообразий хаотической траектории на аттракторе Лози для $a = 1.7, b = 0.3$ (*а*), зависимость минимального угла $\phi_{\min}$ от параметра системы a при $b = 0.3$ (*б*)

зигиперболических аттракторов. Доказано, что аттрактор Лоренца включает только седловые траектории, при вариации параметров бифуркации в нем отсутствуют устойчивые точки или циклы не возникают. Аттрактор Лоренца характеризуется качественно теми же свойствами, что и аттрактор Лози, и рассматривается как классический пример квазигиперболического хаоса.

Уравнения Лоренца были получены из уравнений Навье–Стокса в задаче о тепловой конвекции и имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\sigma(x-y), \\ \dot{y} &= rx - y - xz, \\ \dot{z} &= xy - bz, \end{aligned} \tag{8.7}$$

где σ, b и r — управляющие параметры. К уравнениям типа (8.7) сводятся некоторые модели лазеров, а также модель дискового динамо.

Отметим, что в системе (8.7) режим квазигиперболического хаоса реализуется в конечной области значений ее управляющих параметров. На рис. 8.9 представлена бифуркационная диаграмма системы. Существованию аттрактора Лоренца отвечает заштрихованная область в параметрическом пространстве. Фазовый портрет аттрактора Лоренца представлен на рис. 8.10, *а*. Вне указанной области свойства хаотического аттрактора будут иными: аттрактор Лоренца трансформируется в квазиаттрактор.

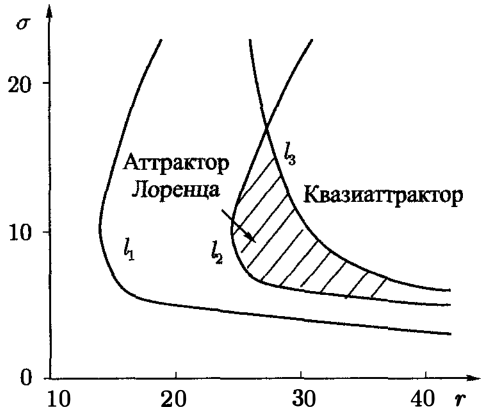


Рис. 8.9. Бифуркационная диаграмма системы Лоренца на плоскости параметров r и σ для $b = 8/3$

Назовем типичные свойства аттрактора Лоренца. Спектр ЛХП не изменяется при вариации начальных условий, так как аттрактор Лоренца является единственным, бассейном притяжения которого служит все фазовое пространство; спектр ЛХП практически не меняется, если варьировать управляющие параметры системы в области существования аттрактора Лоренца. Эти свойства наглядно иллюстрируют грубость аттрактора Лоренца с точки зрения эксперимента: структура аттрактора сохраняется при вариации параметров и начальных условий, бифуркации аттрактора отсутствуют.

Следствием хаотической динамики является характерный вид автокорреляционной функции. Автокорреляционная функция аттрактора Лоренца экспоненциально спадает с увеличением времени практически монотонно, что иллюстрирует рис. 8.10, *б*. Сравнение графиков автокорреляционных функций аттракторов Лоренца и Лози свидетельствует о качественной эквивалентности динамических процессов в почти гиперболических системах.

8.6. Квазиаттракторы и их свойства

В системах с квазиаттракторами реализуются режимы детерминированного хаоса, характеризуемые экспоненциальной неустойчивостью траекторий и фрактальной структурой аттрактора. С этой точки зрения характеристики указанных режимов автоколебаний идентичны основным характеристикам грубых гиперболических аттракторов и квазигиперболических

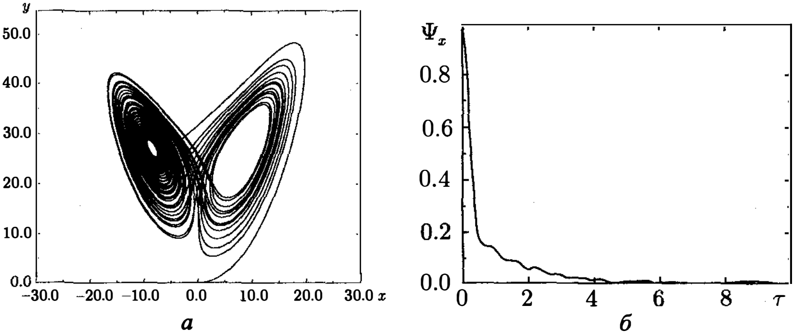


Рис. 8.10. Фазовый портрет (*а*) и автокорреляционная функция (*б*) аттрактора Лоренца при $\sigma = 10$, $r = 28$ и $b = 8/3$

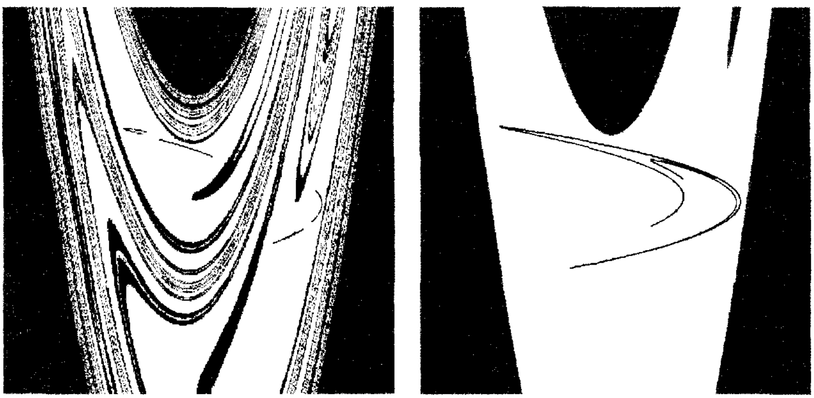
аттракторов. Однако есть весьма существенное различие, которое требует понимания во избежание неверной трактовки экспериментальных результатов. Отличительной чертой квазиаттракторов является одновременное сосуществование счетного множества различных хаотических и регулярных притягивающих подмножеств в ограниченном элементе объема фазового пространства системы при фиксированных значениях ее параметров. Эта совокупность всех сосуществующих предельных множеств траекторий в ограниченной области G_0 фазового пространства, куда стремятся все или почти все траектории из области G_1, включающей G_0, и называется *квазиаттрактором* динамической системы. Отсюда следует чрезвычайно сложная структура вложенных бассейнов их притяжения. Но этим сложность не ограничивается. При конечной вариации параметров системы реализуются каскады различных бифуркаций как регулярных, так и хаотических аттракторов. Соответственно осуществляется бифуркационная перестройка их бассейнов притяжения. Причиной сложности квазиаттракторов являются эффекты гомоклинического касания устойчивых и неустойчивых многообразий седловых траекторий или возникновение петли сепаратрисы седло-фокуса, которые имеют место на множестве значений параметров ненулевой меры. Другими словами, нарушается условие трансверсальности многообразий.

Если при этом учесть, что бассейны притяжения сосуществующих предельных множеств могут иметь фрактальную структуру и составлять чрезвычайно узкие области в фазовом пространстве, то становится понятно, насколько важны проблемы точности расчетов на ЭВМ и влияния флуктуаций.

Квазиаттрактор в отображении Эно. Рассмотрим структуру и свойства квазиаттрактора известной модели Эно:

$$x(n+1) = 1 - ax_n^2 + y_n,$$
$$y(n+1) = bx_n. \tag{8.8}$$

При $0 < b < 1$ отображение (8.8) является диссипативным и характеризуется наличием квазиаттрактора. Отображение (8.8) взаимно-однозначно, т. е. является диффеоморфизмом. Отображение Эно отличается от отображения Лози тем, что в качестве нелинейности включает гладкую квадратичную функцию.



а *б*

Рис. 8.11. Аттракторы, реализующиеся в системе Эно, и структура бассейнов их притяжения в фазовом пространстве (x_n, y_n) при $b = 0.3$: *а* — для $a = 1.078$, *б* — для $a = 1.32$

Рассмотрим фазовые портреты притягивающих множеств системы (8.8) вместе с бассейнами притяжения и их эволюцию при вариации параметра a для $b = 0.3$. Рис. 8.11, *а* иллюстрирует режим сосуществования двух притягивающих подмножеств на фазовой плоскости. Видна сложная структура вложенных бассейнов их притяжения. Если менять начальные условия, то наблюдается резкое чередование двух режимов. На рис. 8.12, *а* представлены результаты расчета старшего показателя Ляпунова для $a = 1.078$ в зависимости от изменения начального значения координаты x при фиксированном y. Максимальный показатель λ_1 случайным образом «скачет» между значениями $\lambda_1 = 0.126$ и $\lambda_1 = 0.062$, свидетельствуя о переходах системы с одного хаотического аттрактора на другой. Если сравнить эти результаты с видом структуры бассейнов притяжения (рис. 8.11, *а*), то становится понятным, почему это происходит. Изменение начальных условий приводит к пересечению границ соответствующих бассейнов притяжения.

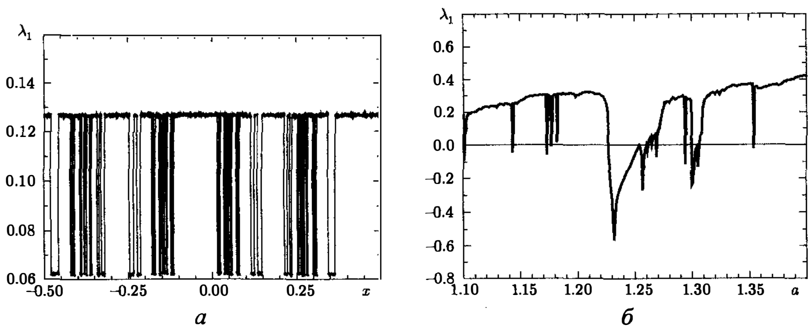


Рис. 8.12. Зависимость старшего ляпуновского показателя системы Эно: *а* — от начальных значений координаты x при $y = 0.5$ и $b = 0.3$ для $a = 1.078$, *б* — от параметра a при $b = 0.3$

Бассейн аттрактора для $\alpha = 1.32$ (рис. 8.11, *б*) выглядит однородным, что должно свидетельствовать о наличии лишь одного аттрактора. Однако известно, что в системе сосуществуют устойчивые циклы больших периодов с очень узкими бассейнами притяжения, которые в численном счете не регистрируются.

Если менять управляющий параметр a в области квазиаттрактора $1.1 < a < 1.4$, то наблюдается чередующаяся картина смены регулярных и хаотических аттракторов. Результаты расчетов старшего ляпуновского показателя λ_1 в зависимости от a представлены на рис. 8.12, *б*: зависимость $\lambda_1(a)$ характеризуется наличием как положительных, так и отрицательных значений λ_1, что свидетельствует о нерегулярном чередовании хаотических и периодических аттракторов в системе при вариации параметра.

В хаотических аттракторах модели Эно отмечаются и другие характерные особенности: спектры мощности в зависимости от тактности лент хаотических аттракторов имеют δ-выбросы на кратных частотах, а АКФ может вообще не спадать до нуля в случае, если тактность ленты равна 2 и больше.

В аттракторе Эно нарушается условие трансверсальности пересечения устойчивых и неустойчивых многообразий седловых циклов на счетном множестве значений параметров, при которых имеет место касание многообразий.

На рис. 8.13 представлены расчеты устойчивых и неустойчивых сепаратрис седловой точки. В некоторых точках устойчивая W^s и неустойчивая W^u сепаратрисы касаются друг друга, угол между ними равен нулю.

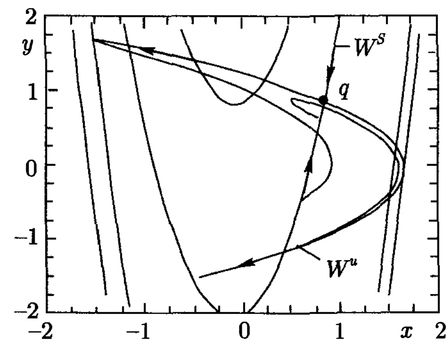


Рис. 8.13. Поведение устойчивого и неустойчивого многообразий седловой точки q отображения Эно при $a = 1.3$, $b = 0.3$

Если проследить за эволюцией угла между многообразиями вдоль хаотической траектории, то можно рассчитать распределение вероятностей угла ϕ между многообразиями $P(\phi)$. Результаты представлены на рис. 8.14, *а* и свидетельствуют о том, что вероятность обращения значения угла ϕ в нуль достоверно отлична от нуля, т. е. касание имеет отличную от нуля вероятность.

Если изменять параметр a системы и вычислять вероятность $P^{\delta\phi}$ принятия углом между многообразиями значения вблизи нуля ($\delta\phi \leqslant 1^0$), то получим результаты, представленные на рис. 8.14, *б*.

Как видно из графика, существует счетное множество значений параметра, при которых вероятность $P^{\delta\phi}$ обращается в нуль. Эти значения параметра a четко соответствуют наличию периодических аттракторов отображения (ср. с данными рис. 8.12, *б*). Обращение $P^{\delta\phi}$ в нуль, вообще говоря, может свидетельствовать о реализации режима гиперболического хаоса, однако в проведенных экспериментах это условие соответствовало реализации режимов регулярных циклов отображения Эно[6].

Наконец, обсудим свойство квазиаттрактора, весьма важное в плане анализа и трактовки экспериментальных результатов. Обратимся к рис. 8.11. Структура бассейнов притяжения свидетельствует о высокой чувствительности системы к точности задания начальных условий. Проведем следу-

[6]В силу специфики алгоритма вычислений вероятность приравнивалась нулю, если фазовая траектория не имела неустойчивого направления.

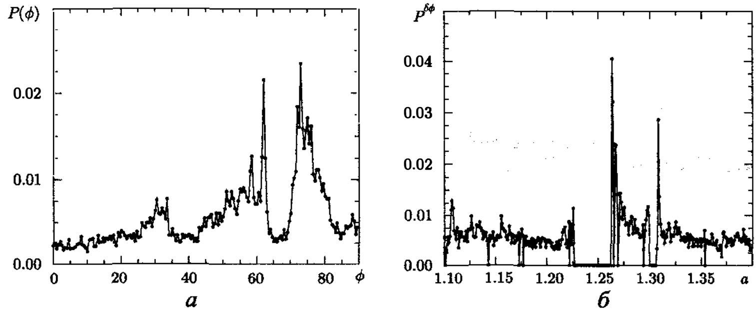


Рис. 8.14. Распределение вероятностей угла ϕ между направлениями устойчивого и неустойчивого многообразий хаотической траектории аттрактора Эно для $a = 1.179$ при $b = 0.3$ (a); зависимость вероятности $P^{\delta\phi}$ попадания угла ϕ между многообразиями в малую окрестность нуля ($\delta\phi \leqslant 1^0$) от управляющего параметра системы a при $b = 0.3$ (*б*)

ющий эксперимент. Выберем значение параметра $a = 1.078$, при котором в (8.8) сосуществуют два хаотических аттрактора. На рис. 8.15, *а* и *б* представлены плотности распределения вероятностей $p(x, y)$ для аттракторов. Добавим в уравнения (8.8) аддитивный, близкий к белому, шум интенсивности $D = 5 \cdot 10^{-6}$. Воздействие слабого шума индуцирует объединение аттракторов в один (рис. 8.15, *в*). Результирующий режим не зависит от того, какой из аттракторов был выбран первоначально путем задания соответствующих начальных данных.

Отметим, что при $b \to 0$ модель Эно (8.8) переходит в известную одномерную модель логистического отображения:

$$x(n+1) = 1 - ax_n^2. \tag{8.9}$$

Отображение (8.9) необратимо и диффеоморфизмом не является. Тем не менее свойства аттракторов модели (8.9) качественно будут повторять все вышеперечисленные свойства отображения Эно.

Квазиаттрактор в модифицированном генераторе с инерционной нелинейностью. Рассмотрим дифференциальную динамическую систему (генератор Анищенко–Астахова), иллюстрирующую механизм рождения и типичные свойства квазиаттрактора в системах с петлей сепаратрисы седло-фокуса состояния равновесия. Эта модель представляет собой трехмерную двупараметрическую дифференциальную систему уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= mx + y - xz, \\ \dot{y} &= -x, \end{aligned} \tag{8.10}$$

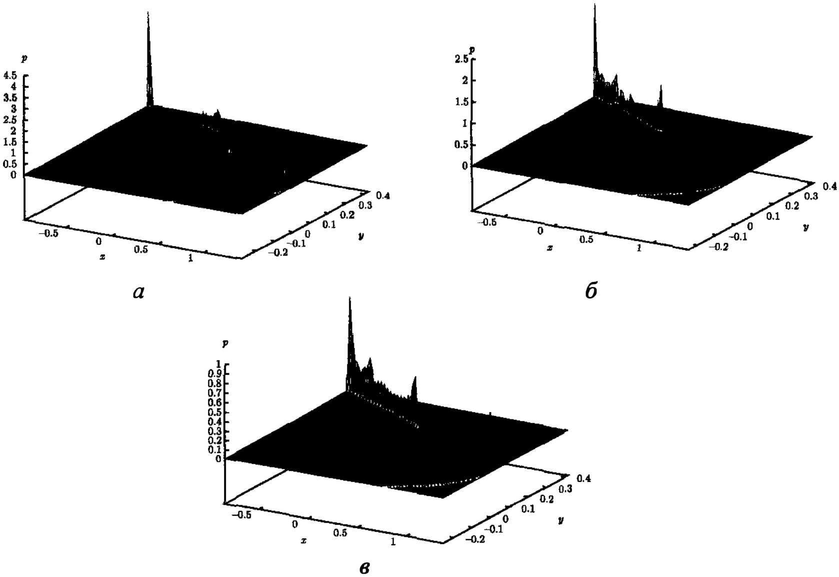


Рис. 8.15. Плотности распределения вероятностей $p(x, y)$ на хаотических аттракторах, сосуществующих в системе Эно при $a = 1.08$, в отсутствие шума (*а*), (*б*), эффект воздействия шума интенсивности $D = 5 \cdot 10^{-6}$ на приведенные распределения вероятностей (*в*)

$$\dot{z} = -gz + gI(x)x^2, \text{ где } I(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0. \end{cases}$$

Зафиксируем значения параметров $m = 2.412, g = 0.097$ и вычислим зависимость старшего показателя спектра ЛХП от начальных условий. Результаты представлены на рис. 8.16, *а* и свидетельствуют о сосуществовании двух хаотических и периодического режимов колебаний.

При изменении параметров системы совокупность ее предельных множеств претерпевает бифуркации. Иллюстрацией этого факта может служить график зависимости старшего показателя спектра ЛХП от параметра m, представленный на рис. 8.16, *б*. Обращение в ноль показателя λ_1 свидетельствует о рождении одного из множеств предельных циклов, претерпевающих каскады бифуркаций удвоения периода. Бифуркации аттракторов сопровождаются изменением структуры бассейнов их притяжения, которые приобретают фрактальные свойства.

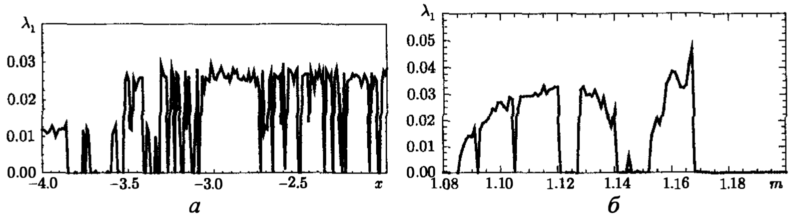


Рис. 8.16. Зависимости старшего показателя Ляпунова для системы (8.10): *а* — от начальных значений координаты x при $m = 2.412, g = 0.097$, *б* — от параметра m при $g = 0.3$

Присутствие в квазиаттракторе устойчивых и седловых циклов наряду с хаотическими предельными множествами проявляется в структуре автокорреляционной функции, которая в среднем экспоненциально спадает во времени и в структуре спектра мощности, являющегося сплошным. Однако в структуре АКФ присутствуют периодические компоненты и в спектре заметны резкие выбросы на некоторых характерных частотах. Эти особенности АКФ и спектра хаотического режима являются типичными и существенно отличают квазиаттрактор от аттрактора Лоренца, так же как квазиаттрактор Энона от квазигиперболического аттрактора Лози.

Фрактальность границ бассейнов притяжения и свойство системы, обусловленное множеством бифуркаций режимов при малом шевелении параметров, приводят к высокой чувствительности системы к внешним шумовым возмущениям подобно аттрактору Энона. Безусловно, фундаментальной причиной совокупности указанных свойств квазиаттрактора является счетное множество гомоклинических касаний устойчивых и неустойчивых многообразий, в силу которого системы типа (8.10) являются негрубыми. В системе Энона эффекты гомоклинического касания можно наблюдать в численном эксперименте, в трехмерных системах это пока неразрешимая задача. Однако данные рис. 8.16 являются, безусловно, следствием эффекта гомоклинического касания и могут рассматриваться в качестве типичных характеристик квазиаттрактора.

8.7. Заключение

Анализ структуры и свойств аттракторов нелинейных диссипативных систем как образов сложных непериодических автоколебаний позволяет сделать следующие выводы.

1. Классические свойства детерминированного хаоса как непериодических экспоненциально неустойчивых решений соответствующих динами-

ческих систем демонстрируют грубые гиперболические системы и системы типа Лоренца. Им соответствуют в качестве математических образов странные (или практически странные) аттракторы. Их отличительной особенностью является фрактальность геометрической структуры аттрактора, дробная метрическая размерность и наличие хотя бы одного положительного показателя спектра ЛХП как следствие перемешивания. Грубые гиперболические аттракторы и аттракторы типа Лоренца малочувствительны к шумовому воздействию. Бассейны притяжения таких аттракторов являются гладкими, однородными; свойства аттрактора не чувствительны к изменению начальных условий.

2. Более сложными объектами являются квазиаттракторы, которые включают конечную или бесконечную совокупность регулярных и хаотических притягивающих подмножеств, сосуществующих одновременно при фиксированных параметрах системы. Вариация параметров системы приводит к различным бифуркациям этих подмножеств, которых может быть бесконечное число при конечном изменении параметров. Бассейны притяжения сосуществующих аттракторов представляют собой чрезвычайно сложную структуру вложенных областей, обладающих фрактальной геометрией. В результате квазиаттракторы демонстрируют высокую чувствительность к изменению начальных условий и действию шума.

Лекция 9

Фракталы в нелинейной динамике

9.1. Введение

Одной из важнейших характеристик объектов научного анализа является их геометрия. Геометрические свойства изучаемого объекта занимают центральное место при построении моделей вне зависимости от конкретного предмета исследований и являются, в определенном смысле, междисциплинарной характеристикой. Геометрия траекторий частиц, высотного здания, ландшафта местности, аттрактора в фазовом пространстве, кристаллической структуры вещества и т. д. — все это используется нами при разработке и анализе моделей в естествознании и технике.

Естественно, что с наиболее общих теоретических представлений геометрия является самостоятельным разделом математики. Помимо классической евклидовой геометрии математиками была разработана геометрия многомерных пространств с неевклидовыми метриками (пространства Лобачевского и Римана), а также геометрия необычных множеств, названных фракталами. Как это часто бывает, строгие результаты математиков далеко не сразу привлекли к себе внимание представителей естественных наук. В частности, это касается и геометрии фракталов. И это понятно, так как нетрадиционные геометрические представления первоначально являлись абстракциями, лишенными конкретного практического смысла.

Со временем стало ясно, что фрактальная геометрия не является только лишь математической экзотикой, а отражает свойства реальных систем и объектов. Различают конструктивные (искусственно построенные), динамические (порождаемые динамическими системами), стохастические (формирующиеся в соответствии со случайными закономерностями) и естественные (существующие в природе) фракталы. В конце XX в. теория фракталов особенно интенсивно развивалась в связи с достижениями нелинейной динамики и компьютерной техники. Существенное влияние на интерес к фрактальной геометрии оказало открытие детерминированного хаоса. Было установлено, что странные аттракторы и квазиаттракторы в фазовом пространстве ДС являются объектами с нетривиальной, как правило, фрактальной геометрией. Фрактальную структуру могут иметь границы бассейнов притяжения аттракторов и границы областей различных режимов в пространстве параметров ДС. Фрактальные множества даже нашли применение в практических задачах (проектирование фрактальных антенных устройств, фрактальные методы сжатия данных). Методы компьютерного моделирования позволяют воспроизводить и исследовать множество разнообразных фракталов. Они очень красивы и широко используются в современном дизайне.

В лекции мы рассмотрим элементы теории фрактальных множеств в объеме, необходимом для описания характеристик динамического хаоса. Введем понятие фрактала, рассмотрим примеры различных типов фракталов. Более детально обсудим природу возникновения фрактальности в динамических системах. Особое внимание в лекции уделено анализу фрактальных размерностей предельных множеств, которые широко применяются при исследовании динамического хаоса.

9.2. Понятие фрактала. Классические примеры фрактальных множеств

Термин «фрактал» был введен Б. Мандельбротом в 70-е гг. XX в. для обозначения нетривиальных геометрических объектов. Определение фрактальных множеств, данное Мандельбротом, основано на свойстве скейлинга (самоподобия или масштабной инвариантности), то есть фрактал — это множество, обладающее самоподобной структурой. Элемент такого множества повторяется бесконечно во все более мелком масштабе. Однако данное определение сильно сужает круг фрактальных множеств, исключая из рассмотрения естественные и стохастические фракталы.

Другое определение, не требующее строго самоподобной структуры, основано на понятии метрической размерности. В соответствии с ним фрактальное множество — это компактное множество в метрическом пространстве, для которого метрическая размерность строго больше топологической размерности. Для «обычных» множеств обе размерности совпадают. Такими «обычными» множествами являются многообразия. Многообразие есть обобщение таких понятий, как точка, линия, поверхность и т. д. Каждая точка многообразия имеет окрестность, топологически эквивалентную шару в R^n. Величина n — это и есть топологическая размерность многообразия, т. е. число координат, определяющих положение точки на многообразии. Топологическая размерность всегда выражается целым неотрицательным числом. Для того чтобы различить многообразия и фракталы и охарактеризовать свойства последних, была введена метрическая (фрактальная) размерность. Что это такое, мы постараемся рассмотреть в этой лекции чуть позже. Пока отметим только, что если для многообразий фрактальная размерность всегда является целой и совпадает с их метрической размерностью, то для фракталов она чаще всего (хотя и не всегда) оказывается дробной. Из этого свойства происходит само название «фрактал» (лат. fractus — дробленый, дробный).

Конструктивные фракталы были придуманы математиками уже достаточно давно. Наиболее простым и широко известным примером конструктивного фрактала служит множество Кантора, предложенное Г. Кантором в 1883 г. Алгоритм его построения следующий: возьмем единичный отрезок прямой, разделим его на три равные части и выбросим среднюю треть. Это первый шаг итерационной процедуры. Затем повторим эти действия в отношении оставшихся первой и третьей частей единичного отрезка. Выполняя эти действия бесконечное число раз, получим в итоге множество, которое называется совершенным канторовым множеством (рис. 9.1).

Рис. 9.1. Построение канторова множества

На n-м шаге мы получим 2^n отрезков, каждый из которых имеет длину $(1/3)^n$. Однако при $n \to \infty$ длина отрезков будет стремиться к нулю, а их число — к бесконечности. Что собой представляет получаемое в итоге множество из бесконечного числа отрезков бесконечно малой длины? Это очень интересный вопрос. С одной стороны, в процессе построения канторова множества мы выбросили весь единичный отрезок. Действительно, на первом шаге мы удалили треть отрезка, на втором — 2/9 отрезка и так далее. В итоге получаем, что удалено

$$L = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 1. \tag{9.1}$$

Значит множество Кантора имеет нулевую меру (нулевую длину). С другой стороны, множество Кантора взаимно-однозначно соответствует подмножеству точек исходного единичного отрезка в силу алгоритма его построения. Это означает, что множество Кантора имеет мощность континуума.

Отметим еще одно важное свойство канторова множества. На $(n+1)$-м шаге алгоритма мы можем выделить элемент структуры, который с помощью перемасштабирования сводится к структуре, полученной на n-м шаге. Таким образом, канторово множество обладает самоподобной структурой, в том смысле, что оно воспроизводит исходную структуру во все более мелких масштабах.

Изменив правило деления единичного отрезка и введя деление на три неравные части, можно получить более сложное двухмасштабное канторово множество (мультифрактал). Однако принципиальные свойства фрактала сохраняются и в этом случае.

Другим классическим примером фрактала служит фрактальная кривая, впервые сконструированная Х. фон Кохом в 1904 г. Алгоритм построения кривой Коха следующий. Как и при построении канторова множества возьмем за исходный единичный отрезок прямой. Далее внутреннюю треть отрезка выбросим и заменим на ломаную линию, состоящую из двух отрезков, длиной 1/3 каждый (рис. 9.2). Общая длина построенной ломаной линии есть 4/3. Применим описанную процедуру к каждому из отрезков ломаной линии. Получим еще более сложную ломаную линию из 8 отрезков, общей длиной 16/9. Повторяя эту процедуру бесконечное число раз, получаем сложную кривую, длина которой бесконечна. В то же время эта кривая принадлежит ограниченному элементу плоскости, имеющему конечную площадь. Как и канторово множество, кривая Коха демонстрирует свойство самоподобия. Если мы применим тот же алгоритм не к единичному отрезку, а к равностороннему треугольнику, то получим фрактальное множество, называемое «снежинкой Коха».

Кривая Коха, хотя она имеет бесконечную длину и располагается в ограниченной части плоскости, не заполняет элемента плоскости (то есть не является всюду плотной в некоторой части плоскости). Кривая, всюду плотно заполняющая квадрат (то есть попадающая в сколь угодно малую окрестность любой точки квадрата), известна как кривая Пеано. Это тоже фрактал. Хотя кривая Пеано и заполняет квадрат, ее топологическая размерность равна 1, а не 2. Метод построения кривой Пеано, предложенный Д. Гильбертом, проиллюстрирован на рис. 9.3).

Математики создали множество конструктивных фракталов, алгоритм построения которых заключается в добавлении или изъятии бесконечное число раз некоторого элемента самоподобной структуры. Так, если из квадрата или равностороннего треугольника вынимать середину, то получается множество, называемое «ковром Серпинского» (рис. 9.4), если вынимать середину из куба, то можно получить «губку Менгера» и т. д.

В соответствии с задачами нелинейной динамики в 1961 г. математиком С. Смейлом была предложена конструкция, приводящая к формиро-

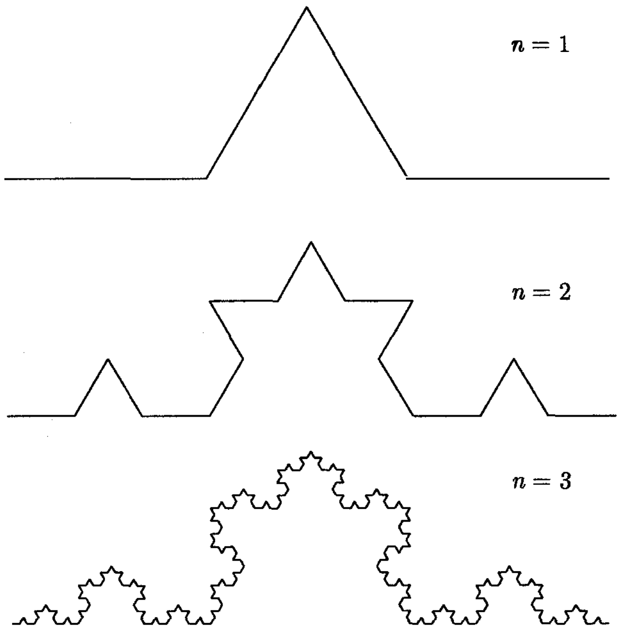


Рис. 9.2. Построение кривой Коха

ванию фрактала, называемого «подковой Смейла». Эта конструкция мыслится как некоторое двумерное отображение, однако оно не задается в явном виде с помощью функций, а описывается как некий алгоритм. По этой причине трудно решить, относить ли подкову Смейла к конструктивным фракталам или к динамическим.

На рис. 9.5, *а* показано, как формируется подкова. Отображение f на каждой итерации растягивает прямоугольник S в горизонтальном направлении, сжимает в вертикальном и изгибает в виде подковы. Изгибаемая часть не попадает в S, что обеспечивает линейное отображение на $S \bigcap f^{-1}(S)$. В результате бесконечной последовательности итераций образуется предельное множество

$$\Sigma^{+} = \bigcap_{k=0}^{\infty} f^{k}(S), \tag{9.2}$$

состоящее из бесконечного числа бесконечно тонких горизонтальных полос. Оно представляет собой произведение некоторого канторова множества и интервала. Если рассмотреть обратное отображение f^{-1}, то получа-

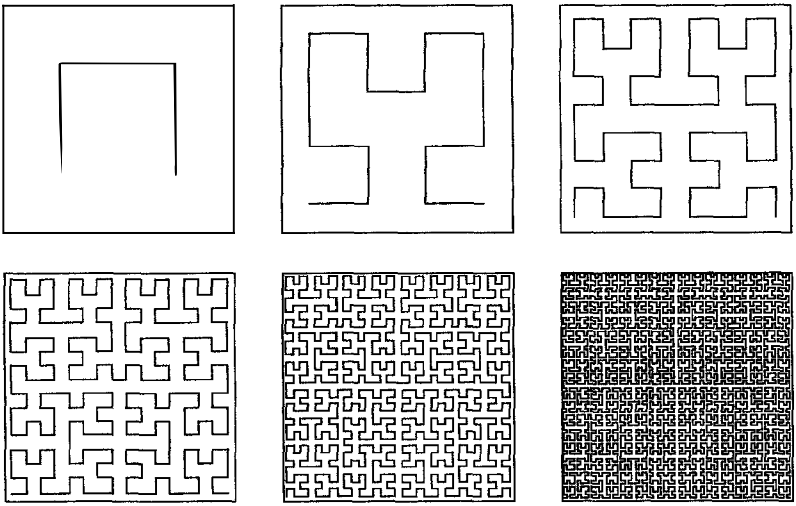


Рис. 9.3. Построение кривой Пеано

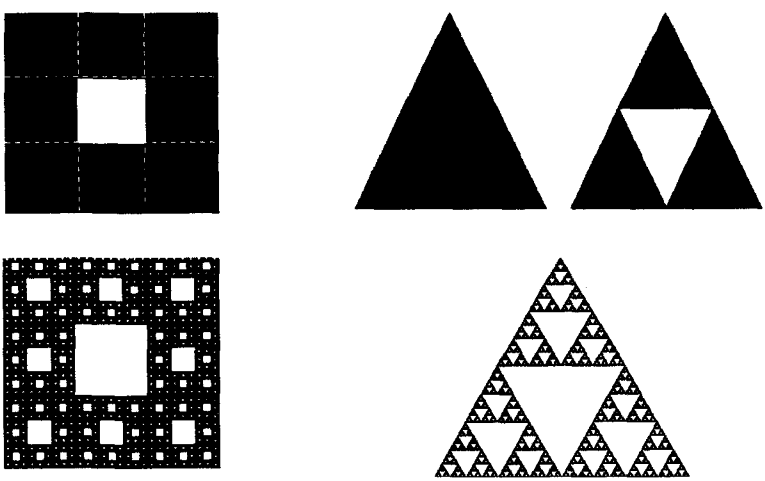


Рис. 9.4. «Ковры Серпинского»

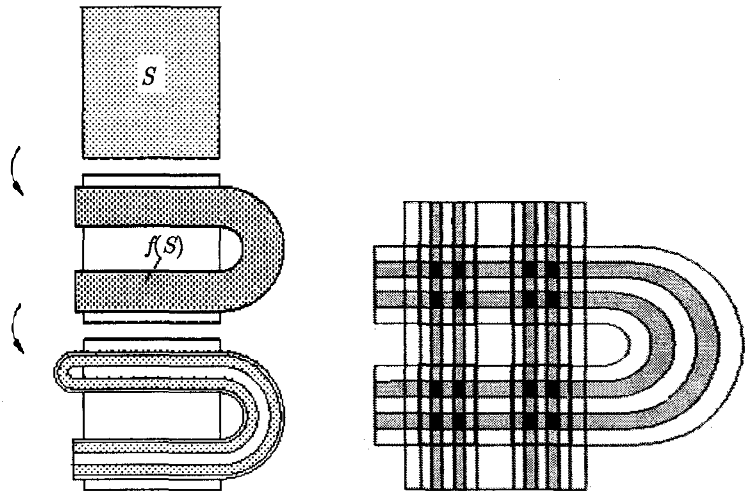


Рис. 9.5. «Подкова Смейла»: *а* — построение канторова множества Σ^+ при прямых итерациях отображения, *б* — инвариантное канторово множество $\Sigma = \bigcap_{k=-\infty}^{\infty} f^k(S)$

ется аналогичное множество

$$\Sigma^- = \bigcap_{k=0}^{\infty} f^{-k}(S), \tag{9.3}$$

состоящее из бесконечного числа вертикальных полос. Их пересечение $\Sigma = \Sigma^+ \bigcap \Sigma^-$ есть множество тех точек, которые остаются в S при всех прямых и обратных итерациях отображения f (рис. 9.5, *б*). Это наибольшее инвариантное множество, содержащееся в S. Оно представляет собой произведение двух канторовых множеств Σ^+ и Σ^- и само также является канторовым. Можно доказать, что множество Σ содержит счетное множество седловых периодических орбит всевозможных периодов, которые всюду плотны в нем. Кроме того, оно содержит множество непериодических (хаотических) орбит, имеющее мощность континуума.

Подкова Смейла сыграла очень важную роль в понимании многих свойств нелинейных систем со сложной динамикой. Сконструированное Смейлом отображение явилось первым примером обратимого двумерного отображения с нерегулярной динамикой. В последующем мы увидим, что подкова возникает в связи с трансверсальными пересечениями многообразий седловых периодических орбит. Образование подковы во многих случаях свидетельствует о хаотической динамике.

9.3. Природа фрактальности в ДС

Как уже говорилось, фракталы, порождаемые детерминированной динамикой нелинейных систем, называются динамическими. Динамическими фракталами могут быть аттракторы или иные предельные множества в фазовом пространстве, размерность которого N для потоков должна быть $N > 2$, а для систем с дискретным временем $N \geqslant 2$. Часто, говоря о нерегулярных аттракторах, разделяют понятия «странный» и «хаотический», как характеристики его различных свойств. Свойство «хаотичности» означает экспоненциальную неустойчивость траекторий на аттракторе, в то время как свойство «странности» относится к его нетривиальной (то есть фрактальной) геометрии. Можно ввести понятие нерегулярного аттрактора, понимая под этим такой аттрактор ДС, который обладает хотя бы одним из двух отмеченных свойств. Однако многочисленные исследования показывают, что оба эти свойства обычно сопутствуют друг другу. Имеются некоторые особые случаи, позволяющие говорить о странных нехаотических аттракторах или, наоборот, о хаотических нестранных аттракторах. Эти аттракторы уже рассматривались в предыдущих лекциях.

Рассмотрим хаотический аттрактор двумерного отображения Эно (8.8). Мы увидим свойство масштабной инвариантности (скейлинга): одна и та же структура повторяется во все более мелком масштабе (рис. 9.6). Сам аттрактор Эно похож на фрактальное множество, порождаемое подковой Смейла.

Фрактальный характер хаотического аттрактора можно пояснить следующим образом. Рассмотрим хаотический аттрактор системы, задаваемой обыкновенными дифференциальными уравнениями, с фазовым пространством R^3. Любое обратимое двумерное отображении (в том числе и отображение Эно) можно мысленно предсталять себе как отображение Пуанкаре, возникающее в сечении трехмерного потока. Непрерывные траектории на аттракторе в R^3 расходятся. В силу сжатия фазового объема размерность аттрактора должна быть меньше, чем размерность фазового пространства системы (то есть меньше трех). Но траектории не могут расходиться на двумерном многообразии (поверхности) не пересекаясь, значит, хаотический аттрактор не может быть многообразием и, таким образом, должен представлять собой фрактал. Таким образом, регулярные (простые) аттракторы

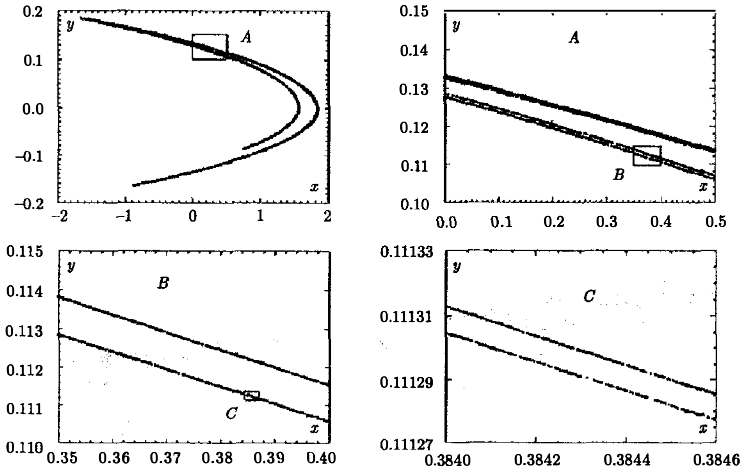


Рис. 9.6. Скейлинг аттрактора в отображении (8.8) при $a = 1.71$, $b = 0.1$

являются гладкими подмногообразиями фазового пространства, а нерегулярные (странные в обобщенном смысле) аттракторы — фракталами.

Фрактальность границ бассейнов притяжения нескольких сосуществующих аттракторов также является характерной чертой нелинейных ДС. Пример фрактальной границы бассейнов двух хаотических аттракторов в отображении Эно был приведен в предыдущей лекции (рис. 8.11). Фрактальность границ бассейнов связана с гомоклиническими пересечениями многообразий седловых циклов и порождаемой в их окрестности подковой Смейла. Можно отметить, что фрактальная граница может разделять бассейны притяжения не только хаотических, но и регулярных аттракторов.

Много известных своей красотой динамических фракталов связано со следующим простым отображением Жюлиа:

$$Z(n+1) = C - Z^2(n), \tag{9.4}$$

где Z — комплексная переменная, а C — комплексный параметр. Отображение (9.4) было исследовано Г. Жюлиа еще в начале XX в., но «увидеть» порождаемые им фракталы стало возможным лишь с появлением современной компьютерной техники. Множество Жюлиа (рис. 9.7, *а*) представляет собой пример фрактальной границы между бассейнами притяжения аттрактора на бесконечности (светлая область) и периодического движения (темная область). Тон определяется числом итераций, которое требуется для достижения аттрактора. Множество Мандельброта иллюстрирует фрактальную структуру в пространстве параметров. Темная область (рис. 9.7, *б*) определяется как множество точек комплексной плоскости, соответствующих значениям параметра C, для которых решение (9.4) ограничено.

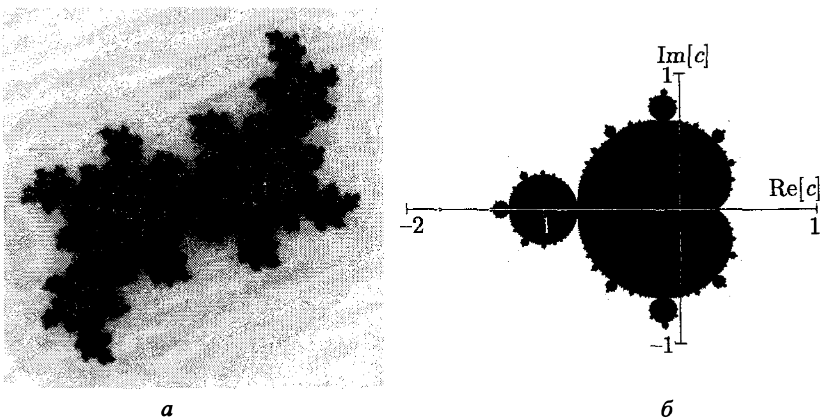


Рис. 9.7. Фракталы, порождаемые комплексным отображением (9.4): *а* — множество Жюлиа, *б* — множество Мандельброта

Не только детерминированный оператор эволюции приводит к возникновению фрактальных множеств. Они появляются и в стохастических системах, управляемых случайными явлениями. Такие фракталы называются стохастическими. Пример стохастического фрактала — траектория броуновской частицы (как и вообще произвольная траектория диффузионного случайного процесса). Многие из естественных фракталов, по-видимому, относятся к этому типу, например, изображенный на рис. 9.8 фрагмент береговой линии.

9.4. Фрактальные размерности множеств

В строгой математической теории под метрической или фрактальной размерностью понимается размерность Хаусдорфа–Безиковича, которая будет определена далее. Однако это довольно сложное абстрактное понятие и рассчитать численно хаусдорфову размерность для произвольного динамического фрактала не представляется возможным. По этой причине введен ряд определений фрактальной размерности, допускающих численный расчет. Все они являются некоторыми оценками размерности Хаусдорфа–Безиковича. Определения фрактальной размерности могут быть

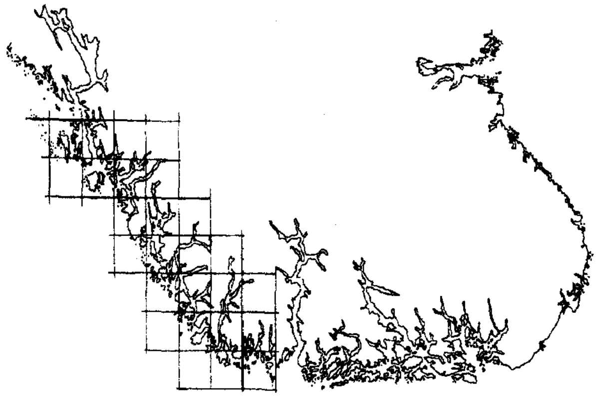


Рис. 9.8. Пример естественного фрактала

основаны только на метрических свойствах множеств, а могут (что важно для динамических фракталов) учитывать вероятностную меру (т. е. частоту, с которой фазовая траектория посещает различные части множества). Таким образом, все фрактальные размерности можно разделить на две подгруппы: 1) чисто метрические и 2) вероятностно-метрические. Рассмотрим наиболее часто применяемые виды фрактальных размерностей.

Размерность Хаусдорфа – Безиковича. Пусть в пространстве R^n имеется множество точек M. Покроем это множество (все его точки) n-мерными кубиками с ребрами $\varepsilon_i \leqslant \varepsilon$ (рис. 9.9). Введем величину

$$l_D = \lim_{\varepsilon \to 0} \inf \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i^d,$$

где N — число элементов покрытия. Инфинум означает, что берется наибольшее значение по всевозможным покрытиям. Хаусдорф показал, что существует критическое значение $D = D_H$, такое что $l_D = 0$ при $D > D_H$ и $l_D = \infty$ при $D < D_H$. Величина D_H называется размерностью Хаусдорфа – Безиковича. Для многообразий D_H принимает целые значения, равные топологической размерности, для фракталов значения D_H больше топологической размерности и чаще всего дробные.

Емкость множества D_C. Емкость — это упрощение понятия хаусдорфовой размерности. Покроем множество M в R^n одинаковыми n-мерными кубиками с ребром ε (рис. 9.10). Для точки достаточно одного кубика, для линии необходимо $N \sim 1/\varepsilon$ кубиков, для поверхности — $N \sim 1/\varepsilon^2$

и т. д. Если имеется фрактальное множество, тогда по аналогии имеем: $N \sim 1/\varepsilon^{D_C}$, где D_C может быть дробной величиной.

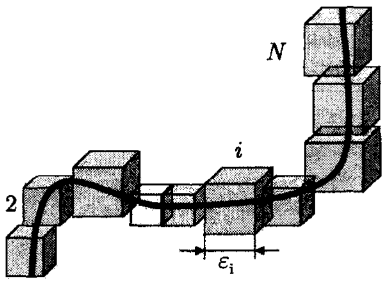


Рис. 9.9. Иллюстрация к определению размерности Хаусдорфа D_H

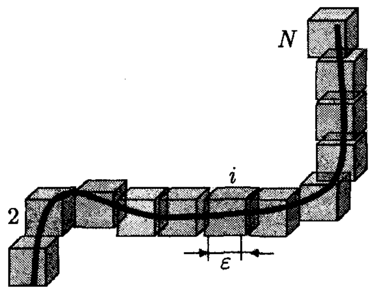


Рис. 9.10. Иллюстрация к определению емкости множества D_C

Пусть $N \approx a/\varepsilon^{D_C}$, где $a = \text{const}$. Взяв логарифм и перейдя к пределу $\varepsilon \to 0$, получаем выражение для D_C, которое можно считать определением емкости множества:

$$D_C = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log \varepsilon^{-1}}. \tag{9.5}$$

Для многообразий и, во многих случаях, для фракталов $D_C = D_H$. В общем случае имеет место неравенство: $D_C \geqslant D_H$, то есть емкость служит оценкой хаусдорфовой размерности сверху. Очевидно, емкость является чисто метрической размерностью.

Для приведенных ранее простых примеров фрактальных множеств емкость совпадает с хаусдорфовой размерностью и может быть найдена аналитически.

Рассмотрим множество Кантора. Выберем на каждом шаге величину ε (длину элемента покрытия), равную длине удаляемой части интервала. Тогда на k-м шаге: $\varepsilon = 1/3^k$. Получаем

$$D_C = \lim_{k \to \infty} \frac{\log 2^k}{\log 3^k} = \frac{\log 2}{\log 3} \approx 0.63092\ldots$$

Аналогичные рассуждения для кривой Коха дают:

$$D_C = \frac{\log 4}{\log 3} \approx 1.26185\ldots$$

Наконец, рассмотрим подкову Смейла. Пусть коэффициент растяжения единичного квадрата по горизонтали равен 2, а коэффициент сжатия по вертикали равен 2ν, где $\nu > 1$, тогда емкости множества Σ^+ есть

$$D_C(\Sigma^+) = 1 + \frac{\log 2}{\log 2\nu}.$$

Информационная размерность D_I. Эта характеристика аналогична емкости, но учитывает вероятностную меру на исследуемом множестве. Покрываем множество точек в R^n одинаковыми n-мерными кубиками с ребром ε и находим вероятность попадания точки в каждый кубик. Можно ввести энтропию распределения:

$$H(\varepsilon) = -\sum_{i=1}^{N} P_i \log_2 P_i,$$

где P_i — вероятность обнаружения точки множества в i-м кубике. Информационная размерность определяется как

$$D_I = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{H(\varepsilon)}{\log \varepsilon^{-1}}. \tag{9.6}$$

Очевидно, что для равномерного распределения вероятности ($P_i = 1/N$) имеет место равенство: $D_I = D_C$. При любом другом распределении энтропия будет меньше и, соответственно, $D_I < D_C$.

Корреляционная размерность D_{cor}. Этой характеристикой удобно пользоваться при анализе временных рядов (каких-либо экспериментальных данных). Пусть имеется последовательность из m точек, принадлежащих некоторому множеству в R^n: $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_m$. Обозначим за $m_\varepsilon(x_i)$ число точек последовательности, попадающих в сферу радиусом ε с центром в точке x_i, принадлежащей той же последовательности (рис. 9.11). При $\varepsilon \to 0$ и $m \to \infty$ число $m_\varepsilon(x_i)$ будет вести себя как: $\sim m\varepsilon^0$ — для счетного множества точек; $\sim m\varepsilon^1$ — для линии; $\sim m\varepsilon^2$ — для поверхности; $\sim m\varepsilon^3$ — для трехмерного многообразия и т. д. В произвольном случае можно записать: $m_\varepsilon(x_i) \approx am\varepsilon^{D_i}$, где $a = \text{const}$.

Величина D_i в общем случае зависит от выбора точки x_i. Рассмотрим среднее по всем точкам число m_ε:

$$m_\varepsilon = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} m_\varepsilon(x_i)$$

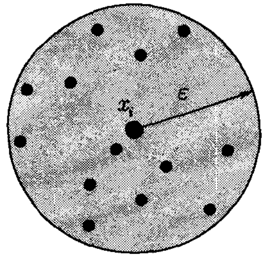


Рис. 9.11. Иллюстрация к определению корреляционной размерности $D_{\rm cor}$

и, в пределе $\varepsilon \to 0$, $m \to \infty$, представим его в виде

$$m_\varepsilon = am\varepsilon^{D_{\rm cor}},$$

где показатель $D_{\rm cor}$ может принимать нецелые значения. Тогда

$$\varepsilon^{D_{\rm cor}} = \frac{1}{am^2}\sum_{i=1}^{m} m_\varepsilon(x_i).$$

Число точек, попадающих в сферу радиусом ε с центром в точке x_i, можно представить как

$$m_\varepsilon(x_i) = \frac{1}{m}\sum_{j=1, j\neq i}^{m} \xi(\varepsilon - |x_i - x_j|),$$

где $\xi()$ — функция Хевисайда. Получаем

$$\varepsilon^{D_{\rm cor}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{a}C(\varepsilon),$$

где

$$C(\varepsilon) = \lim_{m\to\infty}\frac{1}{m^2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1, j\neq i}^{m} \xi(\varepsilon - |x_i - x_j|).$$

Функцию $C(\varepsilon)$ называют корреляционным интегралом. Корреляционная размерность множества определяется как

$$D_{\rm cor} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\log C(\varepsilon)}{\log\varepsilon}. \tag{9.7}$$

Обобщенная размерность D_q. Можно обобщить размерности D_C, D_I, D_{cor} и ввести размерность порядка q, пользуясь обобщенной энтропией порядка q (энтропией Реньи).

$$H_q(\varepsilon) = \frac{1}{1-q}\log\left(\sum_{i=1}^{N} P_i^q\right),$$

где P_i — вероятность обнаружения точки множества в i-м элементе покрытия. Тогда размерность порядка q есть

$$D_q = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{H_q(\varepsilon)}{\log\varepsilon^{-1}}. \tag{9.8}$$

Можно показать, что $D_0 = D_C$, $D_1 = D_I$ и $D_2 = D_{\text{cor}}$.

Кроме рассмотренных нами размерностей существуют и другие, такие как поточечная размерность, хаусдорфова размерность ядра, емкость ядра и т. д. Мы не станем на них останавливаться и перейдем к размерности Ляпунова, которая особенно часто используется при численном моделировании и экспериментальном исследовании динамических систем.

Размерность Ляпунова D_L. Фрактальную размерность аттрактора ДС в фазовом пространстве R^n можно оценить с помощью спектра характеристических ляпуновских показателей (ЛХП). Такая оценка называется ляпуновской размерностью D_L. Выстроим спектр ЛХП в порядке убывания значений показателей: $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$. Ляпуновская размерность задается следующей фомулой Каплана–Йорка:

$$D_L = k + \frac{1}{|\lambda_{k+1}|}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i, \tag{9.9}$$

где целая часть размерности k определяется из условий

$$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i \geqslant 0, \quad \sum_{i=1}^{k+1}\lambda_i < 0.$$

Таким образом, k — это число первых показателей в спектре ЛХП, сумма которых еще не отрицательна.

Из формулы Каплана–Йорка для регулярных аттракторов получаем следующие значения ляпуновской размерности, совпадающие с топологической размерностью соответствующего множества:

$$\text{состояние равновесия } (-, -, -, -, \dots) - D_L = 0;$$
$$\text{предельный цикл } (0, -, -, -, \dots) - D_L = 1;$$
$$\text{двумерный тор } (0, 0, -, -, \dots) - D_L = 2;$$
$$N\text{-мерный тор } (0, 0, 0, \dots 0 -, \dots) - D_L = N$$
(в скобках дана сигнатура спектра ЛХП).

Для ДС с постоянным растяжением и сжатием имеет место равенство: $D_L = D_C$. Например, рассмотрим двумерное отображение, характеризующееся постоянным растяжением в $\exp(\lambda^+)$ раз и сжатием в $\exp(|\lambda^-|)$ на каждой итерации, где λ^+ и λ^- — положительный и отрицательный показатели Ляпунова. Таким образом за k итераций отображения единичный квадратик превратится в тонкую длинную ленточку (рис. 9.12). Кроме растяжения и сжатия образовавшаяся ленточка будет изгибаться и складываться (на рисунке не изображено).

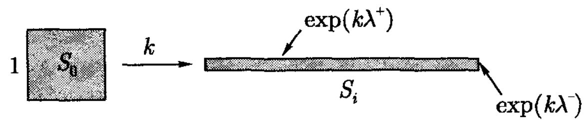


Рис. 9.12. Иллюстрация к доказательству равенства $D_L = D_C$ для двумерного отображения с постоянным растяжением и сжатием

На k-й итерации мы можем покрыть образовавшуюся ленточку, площадью S_k, с помощью N квадратиков с ребром $\exp(k\lambda^-)$, где

$$N(\varepsilon) = \exp(k(\lambda^+ + |\lambda^-|)).$$

При $k \to \infty$ получаем, что $\varepsilon \to 0$ и, соответственно, можно найти емкость предельного множества:

$$D_C = \lim_{i\to\infty} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log \varepsilon^{-1}} = \frac{\lambda^+ + |\lambda^-|}{|\lambda^-|} = 1 + \frac{\lambda^+}{|\lambda^-|} = D_L.$$

Она совпадает с ляпуновской размерностью D_L.

Для отображения Смейла с коэффициентом растяжения $\alpha = 2$ и коэффициентом сжатия $\beta = 2\nu$, $\nu \geqslant 1$, аналогично получаем

$$D_C(\Sigma^+) = D_L = 1 + \frac{\log 2}{\log 2\nu}.$$

В общем случае, для систем с переменной дивергенцией, равенство $D_L = D_C$ может нарушаться.

9.5. Соотношение между различными размерностями

Как мы увидели, фрактальные множества и фрактальные размерности играют очень важную роль в нелинейной динамике. Однако точный рассчет какой-либо из размерностей в большинстве случаев невозможен. Кроме того, остается не совсем ясным вопрос: какие из перечисленных размерностей ближе к хаусдорфовой и лучше отражают фрактальную структуру исследуемого множества? Грассбергер и Прокачча показали, что в общем случае имеет место соотношение:

$$D_{\text{cor}} \leqslant D_I \leqslant D_C. \tag{9.10}$$

Равенство $D_I = D_C$, как уже говорилось, имеет место в случае равномерного вероятностного распределения по всем элементам покрытия. Корреляционная размерность D_{cor} учитывает совместную вероятность попадания пары точек в i-й элемент разбиения и, соответственно, должна быть еще меньше чем D_I. Для ляпуновской размерности D_L обычно имеет место равенство: $D_L = D_I$, хотя известны и исключения. Для большинства хаотических аттракторов значения всех перечисленных размерностей очень близки. Напомним, что емкость D_C является оценкой сверху для хаусдорфовой размерности. Неравенство (9.10) не позволяет сделать выводы о соотношении D_I, D_{cor} и D_H.

Численные эксперименты показывают, что, как правило, для типичных хаотических аттракторов значения всех рассмотренных нами размерностей очень близки и являются дробными. В качестве примера приведем результаты расчетов для генератора Анищенко – Астахова (1.31). В режиме хаотического аттрактора при $m = 1.5, g = 0.2$ были получены следующие значения размерностей:

$$\begin{gathered}
\text{емкость } D_C = 2.306 \pm 0.015; \\
\text{информационная размерность } D_I = 2.300 \pm 0.013; \\
\text{корреляционная размерность } D_{\text{cor}} = 2.277 \pm 0.017; \\
\text{ляпуновская размерность } D_L = 2.33 \pm 0.02.
\end{gathered}$$

Можно видеть, что выполняется неравенство:

$$D_L \geqslant D_C \geqslant D_I \geqslant D_{\text{cor}}.$$

Однако в пределах возможных ошибок вычислений можно приближенно считать, что

$$D_L \approx D_C \approx D_I \approx D_{\text{cor}}.$$

9.6. Заключение

В этой лекции мы обсудили общие представления о фрактальных множествах, подробно остановились на иллюстрации фрактальных множеств, порождаемых нелинейными динамическими системами. Введены и проанализированы наиболее распространенные на сегодняшний день определения фрактальной размерности множества и описаны соотношения между значениями размерностей, отвечающих различным определениям. При выборе, каким определением размерности лучше воспользоваться, обычно исходят из возможностей численных рассчетов. При численном моделировании ДС наиболее удобно использовать размерность Ляпунова или емкость множества. Для оценки фрактальной размерности аттрактора, по экспериментальным данным, лучше всего подходит корреляционная размерность. Некоторые отличия между значениями различных размерностей, по-видимому, тоже несут определенную информацию о структуре исследуемого множества и могут служить важным инструментом для его детального изучения. Однако смысл этих тонких различий и их взаимосвязь со свойствами хаоса на сегодняшний день не достаточно исследованы.

Лекция 10

Генератор хаотических автоколебаний Анищенко–Астахова

10.1. Введение

В общем виде автоколебательные системы с одной степенью свободы описываются уравнением:

$$\ddot{x} + \Phi(x, \vec{\alpha})\dot{x} + \Psi(x, \vec{\alpha}) = 0, \tag{10.1}$$

где x — переменная, совершающая периодические колебания, $\vec{\alpha}$ — вектор параметров $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $\Phi(x, \vec{\alpha})$ и $\Psi(x, \vec{\alpha})$ — нелинейные функции, характеризующие действие сил, обеспечивающих возможность периодических автоколебаний. Так, в случае генератора Ван дер Поля мы имеем два управляющих параметра $\alpha_1 = \varepsilon$ и $\alpha_2 = \omega_0^2$ и функции $\Phi(x, \vec{\alpha})$ и $\Psi(x, \vec{\alpha})$ имеют вид

$$\Phi(x, \varepsilon) = -(\varepsilon - x^2), \quad \Psi(x, \omega_0^2) = \omega_0^2 x. \tag{10.2}$$

Уравнения (10.1) можно обобщить на определенный класс ДС с полутора степенями свободы следующим образом:

$$\begin{aligned} &\ddot{x} + F_1(x, z, \vec{\alpha})\dot{x} + F_2(x, z, \vec{\alpha}) = 0, \\ &\dot{z} = F_3(x, \dot{x}, z, \vec{\alpha}), \end{aligned} \tag{10.3}$$

где F_i ($i = 1, 2, 3$) — в общем случае нелинейные функции. Фазовая переменная $z(t)$ в (10.3) связана с переменной $x(t)$ посредством дифференциального оператора. Это означает, что z зависит от x инерционным образом. Если взаимосвязь переменной $z(t)$ с переменной $x(t)$ безынерционна и описывается алгебраическим соотношением

$$z(t) = \sum_{n=0}^{K} C_n x^n(t) = \varphi(x), \tag{10.4}$$

то уравнения (10.3) сводятся к уравнению генератора на фазовой плоскости (10.1). В случае инерционной зависимости этих переменных уравнения (10.3) описывают автоколебания в трехмерном фазовом пространстве и являются обобщением (10.1) на этот случай.

Следуя К. Ф. Теодорчику, обобщенные уравнения (10.3) будем называть ДС с инерционной нелинейностью. Действительно, как видно из уравнений (10.3), они описывают системы, параметры которых инерционным образом зависят от переменных, совершающих колебания. Например, функция нелинейной диссипации в (10.3) есть $F_1(x, z, \vec{\alpha})$, которая может быть записана как $F_1[x, \alpha(x)]$, где $\alpha(x)$ есть параметр, инерционным образом зависящий от переменной x. А именно это свойство было положено К. Ф. Теодорчиком в основу определения автоколебательных систем с инерционной нелинейностью.

Генераторы с полутора степенями свободы способны реализовать режимы квазипериодических и хаотических автоколебаний. Поэтому генераторы с инерционной нелинейностью представляют собой простейшие модели квазипериодических и хаотических автоколебаний. Если в системах типа (10.1) аттрактором является предельный цикл, то в системах типа (10.3) помимо предельного цикла могут быть реализованы автоколебания, образом которых служат двумерный тор и хаотический (странный) аттрактор.

Известно несколько моделей генераторов с инерционной нелинейностью, реализующих режимы детерминированного хаоса. Среди них наиболее популярными являются модель Лоренца, модель Рёсслера, модель Чуа и генератор Анищенко – Астахова.

Уравнения модели Лоренца (1963 г.) имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y - x), \\ \dot{y} &= -y - xz + rx, \\ \dot{z} &= -bz + xy, \end{aligned} \tag{10.5}$$

где r, σ и b — параметры.

Рёсслером было предложено несколько систем, из которых наиболее часто используемой исследователями является следующая (1976 г.):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -(y + z), \\ \dot{y} &= x + ay, \\ \dot{z} &= -cz + bx + xz, \end{aligned} \tag{10.6}$$

где a, b, c — параметры.

Система Чуа также представляет собой три дифференциальных уравнения первого порядка (1986 г.):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha[y - h(x)], \\ \dot{y} &= x - y + z, \\ \dot{z} &= -\beta y, \end{aligned} \tag{10.7}$$

где α и β — параметры системы, а $h(x)$ — кусочно-линейная характеристика

$$h(x) = \begin{cases} bx + a - b, & x \geqslant 1, \\ ax, & x \leqslant 1, \\ bx - a + b, & x \leqslant -1. \end{cases}$$

Легко убедиться, что простыми преобразованиями указанные уравнения систем Лоренца, Рёсслера и Чуа сводятся к форме (10.2) и являются в этом смысле системами с инерционной нелинейностью. Другим общим свойством указанных систем является то, что они имеют особые решения в виде петли сепаратрисы состояний равновесия типа седла или седло-фокуса. Именно это важное свойство является фундаментальной причиной наличия в указанных системах хаотических решений, образом которых является странный аттрактор. В лекции мы подробно обсудим динамику генератора Анищенко – Астахова (1981 г.) как типичный пример системы с петлей сепаратрисы состояния равновесия типа седло-фокус.

10.2. Генератор Теодорчика

Классический генератор с инерционной нелинейностью был предложен и описан *К. Ф. Теодорчиком*. Автоколебания в системе обеспечиваются введением в колебательный контур термосопротивления $R(T)$, свойства которого нелинейным и инерционным образом зависят от протекающего через него тока. Схема генератора с инерционной нелинейностью К. Ф. Теодорчика изображена на рис. 10.1. Уравнение для тока $i(t)$ в контуре имеет вид

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \left[\frac{R(T)}{L} - \frac{MS_0}{LC}\right]\frac{di}{dt} + \left[(LC)^{-1} + L^{-1}\frac{\partial R(T)}{\partial T}\frac{dT}{dt}\right] i = 0, \tag{10.8}$$

где S_0 — крутизна характеристики усилителя, который предполагается линейным, M — взаимная индуктивность цепи обратной связи, $R(T)$ — сопротивление термистора, зависящее от температуры T, L и C — индуктивность и емкость в колебательном контуре.

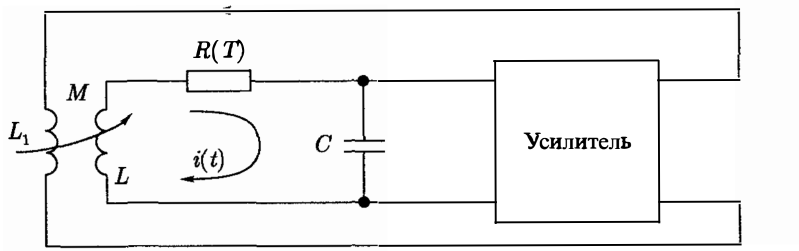


Рис. 10.1. Классическая схема генератора с инерционной нелинейностью Теодорчика

Полагая зависимость $R(T)$ линейной:

$$R(T) = R_0 + LbT, \quad b = \text{const}, \tag{10.9}$$

и считая, что процесс теплообмена подчиняется закону Ньютона:

$$\rho q dT/dt + kT = R(T)i^2,$$

где q — удельная теплоемкость нити термистора, ρ — ее масса, k — коэффициент теплоотдачи, получаем замкнутую систему уравнений вида

$$\begin{gathered} d^2i/dt^2 + \omega_0^2 i = (\mu - bT)di/dt - bidT/dt, \\ dT/dt + \gamma T = \alpha(T)i^2, \end{gathered} \tag{10.10}$$

где использованы обозначения:

$$\begin{gathered} \mu = \omega_0^2 S_0 M - R_0/L, \quad \omega_0^2 = 1/LC, \quad \gamma = k/\rho q, \\ \alpha(T) = \alpha_0 + bLT/\rho q, \quad \alpha_0^2 = R_0/\rho q. \end{gathered} \tag{10.11}$$

В безразмерных переменных

$$x = ai, \quad \dot{y} = -x, \quad z = bT/\omega_0, \quad \tau = \omega_0 t, \quad a = (\alpha b \rho q/\omega_0 k)^{1/2} \tag{10.12}$$

уравнения (10.10) принимают вид

$$\begin{aligned} &\dot{x} = mx + y - xz, && m = \mu/\omega_0 = \omega_0 S_0 M - R_0/\omega_0 L, \\ &\dot{y} = -x, && g = \gamma/\omega_0, \\ &\dot{z} = -gz + gx^2, && \dot{x} = dx/d\tau. \end{aligned} \tag{10.13}$$

В трехмерной двупараметрической системе (10.13) параметр m пропорционален разности вносимой и рассеиваемой в контуре энергий, g — параметр, характеризующий относительное время релаксации термистора. В дальнейшем m будем называть параметром возбуждения, а g — параметром инерционности генератора.

Обратим внимание на следующее. Как видно из первого уравнения системы (10.13), в силу линейности характеристики усилителя ограничение роста переменной x происходит инерционным образом за счет члена xz. Таким образом, возможность возникновения устойчивых автоколебаний в генераторе Теодорчика обеспечивается за счет инерционной нелинейности. При этом усилитель генератора характеризуется линейной зависимостью сигнала на выходе от сигнала на входе. Крутизна характеристики усилителя S_0 является постоянной величиной

$$i_{\text{out}} = S_0 U_{\text{in}}, \qquad \frac{di_{\text{out}}}{dU_{\text{in}}} = S_0, \tag{10.14}$$

где U_{in} — входное напряжение, i_{out} — ток на выходе усилителя.

Схема генератора Теодорчика (рис. 10.1) не совсем удобна при проведении экспериментов. Она включает термистор и не позволяет варьировать параметр g в модели (10.13), который для конкретного термистора является некоторой константой. Этого неудобства можно избежать, используя иную схему генератора.

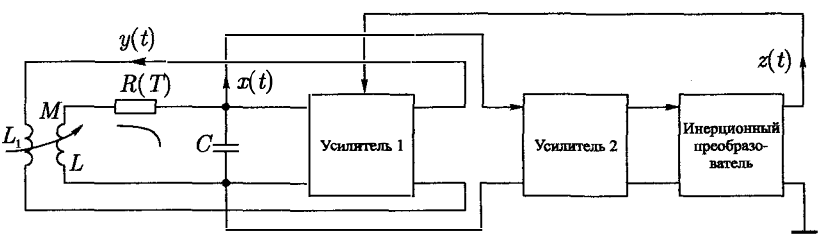


Рис. 10.2. Модифицированная схема генератора с инерционной нелинейностью

Рассмотрим схему, представленную на рис. 10.2. Колебательный контур в этой схеме в отличие от классического случая (рис. 10.1) не содержит нелинейных элементов. Усилитель 1 управляется дополнительной цепью обратной связи, содержащей линейный усилитель 2 и инерционный преобразователь. Дифференциальные уравнения генератора можно записать в явном виде, конкретизировав зависимость крутизны усилителя 1 $S(x, z)$. Сигнал с выхода инерционного преобразователя управляет крутизной основного усилителя 1 следующим образом:

$$S(x) = S_0 - bz, \tag{10.15}$$

где b — некоторая константа, z — нормированное напряжение на выходе инерционного каскада. Предположим, что инерционный каскад можно описать уравнением:

$$\dot{z} = -\gamma z + \gamma x^2. \tag{10.16}$$

Схема, реализующая такое преобразование, включает двуполупериодный квадратичный детектор и RC-фильтр.

Напряжение x на входе усилителя 1 связано с током y, протекающим через катушку L_1, следующим уравнением:

$$\ddot{x} + \frac{R}{L}\dot{x} + \omega_0^2 x = M\omega_0^2 \dot{y}. \tag{10.17}$$

Будем считать, что ток y линейно зависит от напряжения x, т. е.

$$y = S \cdot x. \tag{10.18}$$

В случае (10.15) зависимость (10.18) становится более сложной

$$y = S_0 x - bxz. \tag{10.19}$$

Совокупность уравнений (10.17), (10.19) и (10.16) после несложных преобразований дает нам замкнутую систему уравнений, строго совпадающую с уравнениями генератора Теодорчика (10.13):

$$\begin{aligned} &\dot{x} = mx + y - xz, \quad && m = \omega_0 S_0 M - R_0/\omega_0 L, \\ &\dot{y} = -x, && g = \gamma/\omega_0, \\ &\dot{z} = -gz + gx^2, && \tau = \omega_0 t. \end{aligned} \tag{10.20}$$

В уравнениях (10.20) параметр g уже допускает вариацию в эксперименте, так как зависит от постоянной времени фильтра детектора (10.20).

Схема генератора (рис. 10.2), включающая колебательный контур, также оказывается не совсем удобной в экспериментальном плане. Как показали исследования, гораздо более предпочтительной является схема с использованием в качестве эквивалента колебательного контура моста Вина (рис. 10.3).

Вид уравнений (10.20) не изменится, если в качестве селективного элемента использовать RC-цепочку в виде моста Вина. Для обеспечения условий генерации в этом случае нужно применить два каскада усиления (как

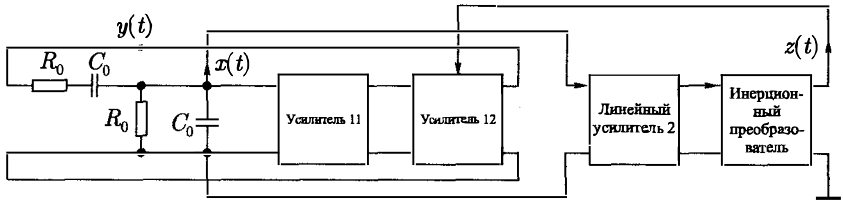


Рис. 10.3. Схема RC-генератора с инерционной нелинейностью

показано на рис. 10.3). Для симметричного моста Вина управляющие параметры m и g в уравнениях (10.20) просто и с точки зрения эксперимента удобным образом выражаются через параметры схемы:

$$m = K_0 - 3, \qquad g = R_0 C_0 / \tau_f, \qquad \tau_f = R_f C_f,$$

где K_0 — коэффициент усиления двухкаскадного усилителя, $R_0 C_0$ и τ_f — постоянные времени моста Вина и фильтра детектора. В физическом эксперименте параметры m и g легко менять и измерять, варьируя коэффициент усиления и постоянную времени фильтра.

Таким образом, генератор Теодорчика с радиотехнической точки зрения может быть реализован несколькими способами, которые приводят к одной и той же математической модели — трехмерной двупараметрической ДС (10.20). Проведем анализ этой ДС.

Нетрудно убедиться, что система (10.20) характеризуется одним состоянием равновесия в нуле координат. Линеаризация системы (10.20) в точке равновесия приводит к характеристическому полиному

$$(g + s)(s^2 - ms + 1) = 0, \tag{10.21}$$

собственные числа (корни) которого есть

$$s_{1,2} = \frac{m}{2} \pm \mathrm{j}\sqrt{1 - \frac{m^2}{4}}, \qquad s_3 = -g. \tag{10.22}$$

Состояние равновесия характеризуется устойчивым (неустойчивым) двумерным многообразием и устойчивым одномерным (так как с физической точки зрения параметр $g > 0$). Если $g > 0$ и $0 < m < 2$, особая точка есть седло-фокус и является неустойчивой. Она устойчива лишь для $m < 0$. Точка $m = 2$ является бифуркационной: для $0 < m < 2$ мы имеем седло-фокус, для $m > 2$ — седло.

Есть еще одно бифуркационное значение параметра m, это $m = 0$. В этой точке $s_{1,2}$ принимают чисто мнимые значения $s_{1,2} = \pm j$. При этом

$$\frac{\partial \mathrm{Re} s_{1,2}}{\partial m}|_{m=0} = \frac{1}{2},$$

т. е. собственные значения пересекают мнимую ось с ненулевой скоростью. Реализуется классическая бифуркация рождения предельного цикла, бифуркация Андронова – Хопфа. Расчеты и эксперименты свидетельствуют, что в результате этой бифуркации в системе (10.20) мягко рождается устойчивый предельный цикл, амплитуда которого растет пропорционально $\sqrt{m}$, а период равен $T_0 \simeq 2\pi$. Линия $m = 0$ на плоскости параметров m и g является бифуркационной линией рождения предельного цикла.

Численный анализ системы (10.20) показал, что динамика генератора Теодорчика во многом сходна с генератором Ван дер Поля: из устойчивого состояния равновесия мягко рождается предельный цикл, который является единственным аттрактором системы при $m > 0$ и $g > 0$. Однако подчеркнем важные особенности ДС (10.20): режим устойчивости автоколебаний достигается за счет инерционной нелинейности в условиях, когда основной усилитель генератора имеет линейную характеристику. И вторая особенность — состояние равновесия в нуле координат является седло-фокусом (или седлом). Как мы увидим из дальнейшего, эти особенности могут стать причиной более сложной динамики.

На рис. 10.4 представлены результаты численного расчета эволюции предельного цикла в системе (10.20) с ростом параметра m для фиксированного значения $g = 0.3$. Как видно из рисунка, проекции предельного цикла на плоскость переменных (x, y) напоминают предельный цикл в генераторе Ван дер Поля. Амплитуда цикла возрастает пропорционально $\sqrt{m}$ в области значений $m \lesssim 0.7$. Для больших значений $m > 1$ цикл искажается и в спектре колебаний возрастает число и интенсивность гармоник на частотах $n\omega_0$ ($n = 2, 3, \ldots$), что также характерно и для генератора Ван дер Поля.

Отметим, что простым преобразованием уравнения генератора Теодорчика (10.13) и (10.20) легко можно свести к общей форме (10.3)

$$\begin{aligned} &\ddot{x} - (m - z)\dot{x} + (1 - gz)x + gx^3 = 0, \\ &\dot{z} = -gz + gx^2, \end{aligned} \tag{10.23}$$

где $F_1 = z - m$, $F_2 = (1 - gz + gx^2)x$, $F_3 = g(x^2 - z)$. Первое уравнение по форме соответствует уравнению нелинейного осциллятора типа Дуффинга,

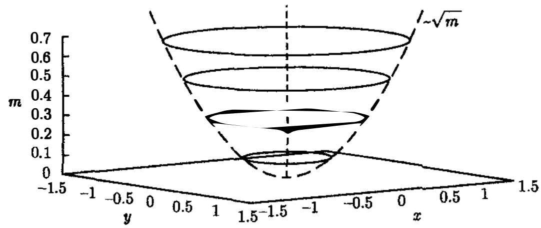


Рис. 10.4. Эволюция предельного цикла в системе (10.20) с ростом параметра m для фиксированного значения $g = 0.3$

в котором диссипация и частота инерционным образом зависят от переменной x. Вид этой зависимости задает второе уравнение системы (10.23).

10.3. Модификация генератора с инерционной нелинейностью. Генератор Анищенко – Астахова

Вернемся к схеме генератора Теодорчика, представленной на рис. 10.2. Предположим более общий случай, когда основной усилитель 1 генератора является нелинейным. Крутизна его характеристики (без учета дополнительной инерционной обратной связи) пусть будет

$$S^1(x) = S_0 - S_1x^2. \tag{10.24}$$

Мы полагаем, что основной генератор по сути идентичен генератору Ван дер Поля (2.22). Теперь учтем воздействие инерционной обратной связи. Пусть механизм воздействия управляет крутизной $S^1(x)$ такой же, как и в генераторе Теодорчика (10.15):

$$S(x) = S^1(x) - bV = S_0 - S_1x^2 - bV, \tag{10.25}$$

где $V = V(x)$ — напряжение на выходе инерционного преобразователя, b — параметр. Пусть инерционное преобразование осуществляется в соответствии с уравнением

$$\dot{V} = -\gamma V + \varphi(x), \tag{10.26}$$

где $\varphi(x)$ — некоторая нелинейная функция. Уравнение для тока в колебательном контуре генератора (рис. 10.2) будет:

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int\limits_0^t \left(i - MS\frac{di}{dt}\right) dt = 0. \tag{10.27}$$

Уравнения (10.25), (10.26) и (10.27) позволяют получить замкнутую систему, которая в безразмерных переменных имеет вид:

$$\begin{aligned} &\dot{x} = mx + y - xz - dx^3, && m = \omega_0 S_0 M - R_0/\omega_0 L, \\ &\dot{y} = -x, && g = \gamma/\omega_0, \\ &\dot{z} = -gz + g\Phi(x), && \tau = \omega_0 t, \end{aligned} \tag{10.28}$$

где $d = d(S_1)$ — параметр, отвечающий степени влияния безынерционной нелинейности характеристики основного усилителя (10.24), $\Phi(x)$ — нелинейная функция инерционного преобразователя, определяемая видом функции $\varphi(x)$ в (10.26).

Исключая переменную y из системы (10.28), запишем ее в виде (10.3):

$$\begin{gathered} \ddot{x} + (m - z - 3dx^2)\dot{x} + (1 - gz + g\Phi(x))x = 0, \\ \dot{z} = -gz + g\Phi(x). \end{gathered} \tag{10.29}$$

Нелинейный осциллятор (10.29) характеризуется инерционной зависимостью как диссипации, так и частоты от переменной x. В случае сильной инерционности системы ($\tau_ф \gg T_0$), когда $g \to 0$, система (10.29) сводится к уравнению генератора Ван дер Поля (2.22):

$$\ddot{x} - \alpha(1 - \beta x^2)\dot{x} + x = 0, \tag{10.30}$$

где $\alpha = m$, $\beta = 3d/m$, причем соответствие с уравнением Ван дер Поля будет иметь место при любых зависимостях $\Phi(x)$.

Как следует из исходной системы уравнений (10.28), при $d = 0$ и $\Phi(x) = x^2$ она полностью идентична уравнениям генератора Теодорчика (10.20). Интересен и другой предельный случай – безынерционный генератор, отвечающий условию $g \to \infty$. Как видно из (10.28), при этом условии $z = -\Phi(x)$, мы получаем уравнение:

$$\ddot{x} - (m - \Phi(x) - 3dx^2)\dot{x} + x = 0, \tag{10.31}$$

которое будет совпадать с уравнением Ван дер Поля только в случае, когда

$$\Phi(x) = x^2. \tag{10.32}$$

Исследования показали, что в генераторе Анищенко – Астахова (10.28) могут быть реализованы не только периодические, но и хаотические режимы автоколебаний, что зависит от вида функции $\Phi(x)$, которая должна отличаться от (10.32), и от степени инерционности (параметр g должен принимать значения в некотором интервале $g_1 \leqslant g \leqslant g_2$).

Перейдем к более детальному анализу режимов колебаний в генераторе (10.28).

Периодические режимы автоколебаний и их бифуркации. Исследования показали, что ДС (10.28) при специальном задании вида нелинейности $\Phi(x)$ способна генерировать различные типы как периодических, так и хаотических колебаний, которые с изменением параметров претерпевают бифуркации. Бифуркационный анализ системы (10.28) становится просто необходимым.

Сформулируем в общих чертах цель бифуркационного исследования и алгоритм его проведения. Из множества возможных режимов колебаний в системе попытаемся описать характерные колебания и их перестройки с изменением параметров. Для этого с применением компьютера выясним *структуру разбиения* плоскости параметров на области качественно различных типов движения, укажем их *фазовые портреты* и конкретизируем *типы бифуркаций* режимов на границах областей. Для двупараметрических систем общий алгоритм построения бифуркационных диаграмм состоит в следующем:

1) необходимо найти особые точки системы, исследовать их устойчивость и выявить характерные бифуркации потери устойчивости, в частности, бифуркацию рождения периодического движения (цикла);

2) исследовать характер бифуркации рождения цикла, определяющий его устойчивость;

3) провести однопараметрическое исследование эволюции циклов по параметрам и найти точки характерных бифуркаций;

4) провести двупараметрическое исследование циклов, заключающееся в построении бифуркационных линий, отвечающих различным типам бифуркаций коразмерности 1, и найти на них точки дополнительных вырождений — точки бифуркаций коразмерности 2.

В системах с тремя параметрами повторяется двупараметрический анализ для выборочных значений 3-го параметра и исследуются бифуркационные ситуации более высокой коразмерности.

Математическая модель модифицированного генератора с инерционной нелинейностью (10.28) есть нелинейная трехмерная диссипативная система с тремя независимыми параметрами, задающая поток в R^3,

$$-\infty < x < \infty, \quad -\infty < y < \infty, \quad 0 \leqslant z < \infty,$$

где переменная z определена на положительной полуоси, так как с физической точки зрения представляет собой продетектированное напряжение $x(t)$ на выходе фильтра. Дивергенция векторного поля скоростей потока (10.28) зависит от параметров и фазовых координат:

$$\mathrm{div}\vec{F} = m - g - 3dx^2 - z. \tag{10.33}$$

Исследования в квазилинейном приближении $m < g \ll 1$ свидетельствуют о том, что система глобально диссипативна и для любых начальных данных из области определения фазовых переменных всегда справедливо

$$\mathrm{div}\vec{F} < 0.$$

Если функция $\Phi(x)$ не содержит линейных по переменной x членов, то линеаризованная вблизи особой точки система уравнений (10.28) будет полностью совпадать с линеаризацией системы уравнений (10.20). Вследствие этого мы получим аналогичное (10.21) характеристическое уравнение

$$(g + s)(s^2 - ms + 1) = 0 \tag{10.34}$$

и, соответственно, его собственные значения:

$$s_{1,2} = m/2 \pm (\mathrm{i}/2)(4 - m^2)^{1/2}, \quad s_3 = -g. \tag{10.35}$$

Учитывая важность анализа характеристик, и бифуркацией состояния равновесия мы повторим его применительно к уравнениям генератора (10.28). В области плоскости параметров $g > 0$, $-2 < m < 0$ действительные части всех собственных значений отрицательны и особая точка устойчива. С физической точки зрения параметр g всегда положителен как отношение характерных времен системы (периода колебаний ко времени релаксации фильтра). Параметр m может быть как меньше нуля (генератор недовозбужден), так и больше нуля в режимах генерации, которые собственно и представляют интерес. В области $0 < m < 2$ особая точка есть *седло-фокус* с двумерным неустойчивым и одномерным устойчивым многообразиями (10.35). Линия $m = 2$ — бифуркационная и отвечает смене седло-фокуса на седло.

В бифуркационной точке $m = 0$, как видно из (10.35), собственные значения $s_{1,2}$ пересекают мнимую ось с ненулевой скоростью

$$\left.\frac{\partial \mathrm{Re} s_{1,2}(m)}{\partial m}\right|_{m=0} = 1/2.$$

При этом третье собственное значение $s_3 = -g$ отделено от мнимой оси. Реализуется классическая бифуркация Андронова – Хопфа: бифуркация рождения цикла из седло-фокуса. Линейный анализ бифуркации рождения цикла не чувствителен как к наличию диссипативной нелинейности (собственные значения от коэффициента d не зависят), так и к виду функции $\Phi(x)$, которая не должна лишь включать линейный по x член. Таким образом, в физически реализуемой области управляющих параметров системы, представляющей собой положительный квадрант плоскости $m \geqslant 0$, $g > 0$, линия $g > 0$, $m = 0$ есть бифуркационная линия рождения цикла.

Вначале проведем исследование системы (10.28) для случая $d = 0$:

$$\begin{aligned}
&\dot{x} = mx + y - xz, \\
&\dot{y} = -x, \\
&\dot{z} = -gz + gI(x)x^2, \qquad I(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0, \end{cases}
\end{aligned} \tag{10.36}$$

ограничившись двупараметрическим анализом. Влияние безынерционной диссипативной нелинейности обсудим особо.

Расчет устойчивости неподвижной точки в линейном приближении — практически единственная задача, которую в отношении изучаемой системы удается решить аналитически. Последующие расчетные исследования проведем с использованием компьютера, а экспериментальные — на радиофизическом генераторе.

Для решения вопроса об устойчивости рождающегося цикла нужно проанализировать характер бифуркации Андронова – Хопфа. Численные расчеты показали, что *первая ляпуновская величина* $L_1(g)$ в особой точке всюду вдоль линии рождения цикла *отрицательна*; рождающийся предельный цикл системы устойчив (*суперкритическая* бифуркация).

Вычисление первой ляпуновской величины приближенно можно провести аналитически, используя алгоритм Н. Н. Баутина[1]. Приближенные аналитические и численные результаты качественно совпадают. Таким образом, в системах (10.28) и (10.36) на линии $m = 0$, $g > 0$ мягко рождается *устойчивый предельный цикл*, радиус которого растет пропорционально $\sqrt{m}$, а период, согласно теореме, равен

$$T_0 \approx 2\pi/|s_{1,2}(0)| = 2\pi.$$

Интегрированием системы (10.36) установлено, что для значений $0 < m < 2$, $0 < g < 2$ решением задачи Коши с начальными условиями вблизи особой точки в нуле являются устойчивые периодические колебания

[1] Из-за разрыва второй производной $\Phi(x) = I(x)x^2$ в (10.28) возникают сложности в применении указанного алгоритма. Если аппроксимировать $\Phi(x)$ экспонентой $(\exp(x) - 1)$ и ограничиться первыми тремя членами ее тейлоровского разложения, то вычисления можно довести до конца и показать, что $L_1(g) < 0$ для любых $g > 0$.

с амплитудой пропорциональной $\sqrt{m}$ и периодом $T_0 \approx 2\pi$. Для значений $m < 0.5$ соответствие с теоремой о рождении цикла в пределах точности компьютерных расчетов практически полное. С увеличением $m > 0.5$ появляются малые отклонения в зависимостях амплитуды и периода цикла $\Gamma_0(m)$ от теоретически предсказываемых.

Проведем более детальное однопараметрическое исследование эволюции родившегося семейства циклов $\Gamma_0(m, g)$ с целью нахождения точек характерных бифуркаций. Исследуем различные сечения плоскости параметров m и g, фиксируя первый из них и осуществляя расчет цикла и его мультипликаторов при вариации второго.

Расчеты показывают, что исследуемому семейству циклов $\Gamma_0(m, g)$ присущи следующие бифуркации: а) наибольший по модулю мультипликатор μ_1 в бифуркационной точке обращается в -1, что соответствует бифуркации *удвоения периода* колебаний; б) мультипликатор μ_1 цикла Γ_0 принимает значение $+1$, что соответствует слиянию и исчезновению (или рождению) устойчивого и неустойчивого циклов; в) имеют место случаи, когда произведение мультипликатора цикла с изменением параметра удовлетворяет условию $|\mu_1 \mu_2| = 1$.

Последнее условие назовем *условием нейтральности*, так как оно отвечает обращению в нуль суммы ляпуновских показателей цикла Γ_0: $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$. Если при этом мультипликаторы комлексно-сопряженные, то реализуется *бифуркация рождения* двумерного *тора*. Для действительных мультипликаторов μ_1 и μ_2 бифуркационной ситуации здесь нет, цикл седловой. Для семейства циклов $\Gamma_0(m, g)$ отмечены оба случая, т. е. бифуркация рождения тора в системе (10.36) имеет место!

Определив особые точки по параметрам, отвечающие интересующим нас бифуркациям циклов $\Gamma_0(m, g)$, приступим к двупараметрическому анализу — построению бифуркационных линий в пространстве параметров.

На рис. 10.5 приведена *бифуркационная диаграмма* для семейства 1-тактных циклов Γ_0, рождающихся в результате бифуркации Андронова–Хопфа. На линии l_{01} один из мультипликаторов цикла обращается в -1 (*линия бифуркации удвоения* периода). Внутри области, ограниченной линией l_{01}, цикл Γ_0 седловой, вне линии l_{01} он устойчив, так как оба его мультипликатора принадлежат внутренности единичного круга. На линии l_{02} $\mu_1 = +1$. Здесь происходит слияние и последующее исчезновение устойчивого и седлового циклов. Либо, если двигаться по параметрам в противоположном направлении, из сгущения траекторий рождается пара циклов. Линию l_{02} далее будем называть линией кратных циклов или *линией кратности*. Внутри области, ограниченной линией кратности, существует всегда три 1-тактных цикла: седловой Γ_0'' и два цикла Γ_0 и Γ_0', которые могут быть устойчивыми или седловыми.

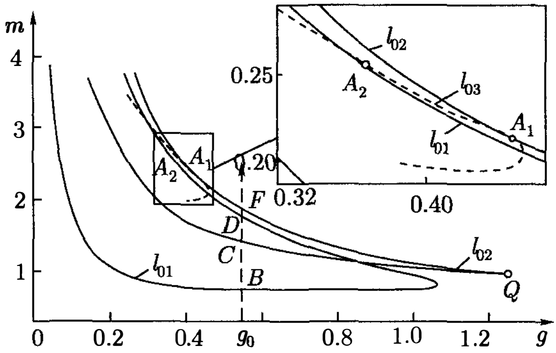


Рис. 10.5. Бифуркационная диаграмма для семейства 1-тактных циклов системы (10.36); l_{01} — линия удвоения периода, l_{02} — линия кратности, l_{03} — линия нейтральности, A_1, A_2 и Q — точки бифуркаций коразмерности 2

Ситуацию поясняет рис. 10.6, где качественно изображена рассчитанная зависимость наибольшего мультипликаторов цикла μ_1 при движении по параметру m для фиксированного g_0, указанного на рис. 10.5. В точке C рождается пара циклов Γ_0' и Γ_0'', в точке F сливаются и исчезают циклы Γ_0 и Γ_0'', в точке B цикл Γ_0 претерпевает бифуркацию удвоения периода, становится седловым, но в точке D он вновь обретает устойчивость[2]. Ситуация описана при условии движения по параметру m в сторону его увеличения. Характерные точки бифуркаций B, C, D и F нанесены на рис. 10.5.

Линия кратности l_{02} образует характерный уголок с вершиной в точке Q, где сливаются в один все три цикла Γ_0, Γ_0' и Γ_0''. Точка Q является бифуркационной и имеет коразмерность 2. В теории катастроф эту точку называют *точкой сборки*. Наличие сборки отвечает простейшей и наиболее часто встречающейся катастрофе в многопараметрических системах и единственно возможной катастрофе в двупараметрических системах общего положения. Взаимосвязь катастрофы сборки и динамики исследуемой системы обсудим ниже.

На рис. 10.5 изображен участок бифуркационной линии l_{03}, на котором выполняется условие нейтральности цикла Γ_0: $|\mu_1\mu_2| = 1$. Строго бифуркационной линия l_{03} является на участке от точки A_1 до A_2, где мульти-

[2]Подобные расчеты, требующие переходов в точках C и F на неустойчивые циклы, нетривиальны, но возможны при соответствующей модификации алгоритмов вычисления мультипликаторов циклов. Обычное интегрирование приводит здесь к потере цикла и жесткой смене режимов.

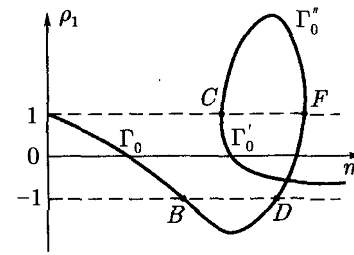


Рис. 10.6. Качественный вид зависимости мультипликатора $\mu_1(m)$ для цикла Γ_0 в сечении $g = g_0$. Критические точки B, C, D и F соответствуют указанным на рис. 10.5

пликаторы цикла комплексно-сопряженные и выходят на единичный круг. В точках A_1 и A_2 оба мультипликатора равны либо -1 (точка A_2), либо $+1$ (точка A_1), что отвечает резонансам $1/1$ (A_1) и $1/2$ (A_2). Как и точка Q, бифуркационные точки A_1 и A_2 имеют коразмерность 2. В них, помимо условия выхода пары мультипликаторов на единичный круг, удовлетворяются условия резонансов. Как показали расчеты, бифуркация рождения тора из цикла Γ_0 приводит к режиму неустойчивых биений. В автономной системе (10.36) режим устойчивых двухчастотных колебаний нами не обнаружен. Двупараметрический анализ характера устойчивости однотактных циклов системы можно на этом закончить, так как определены типичные бифуркации и построена соответствующая бифуркационная диаграмма на плоскости параметров m и g.

При подходе к линии удвоения l_{01} снизу цикл Γ_0 устойчив не в малом (первая ляпуновская величина в особой точке строго отрицательна). Значит, пересечение линии l_{01} приведет к мягкому рождению устойчивого цикла Γ_1, период которого в линейном приближении вдвое больше ($T_1 \simeq 2T_0$). Взяв в качестве начального приближения точку на цикле Γ_0 вблизи точки бифуркации удвоения, будем искать цикл Γ_1, который характеризуется двупериодической неподвижной точкой в отображении Пуанкаре. Сместившись по параметру за бифуркационную линию l_{01}, численным интегрированием определим цикл Γ_1, который действительно устойчив, имеет близкий к удвоенному период и в фазовом пространстве дважды обходит 1-тактный цикл, потерявший устойчивость. Рис. 10.7 иллюстрирует сказанное для значения $g = 0.2$. Ниже точки бифуркации $m^* = 0.966\ldots$ в системе устойчив цикл Γ_0. Выше по параметру ($m > m^*$) устойчивым является цикл удвоенного периода Γ_1; цикл Γ_0 становится седловым.

Проведем аналогичным образом однопараметрическое, а затем и двупараметрическое исследование семейства *2-тактных* циклов $\Gamma_1(m, g)$. Би-

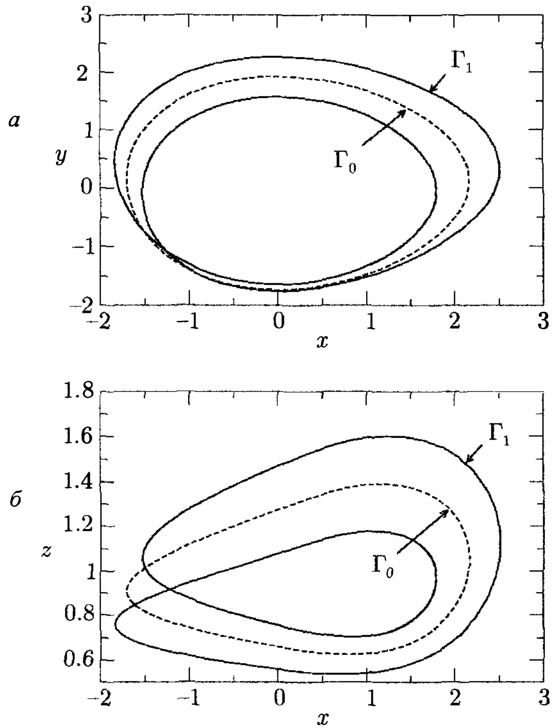


Рис. 10.7. Бифуркация удвоения 1-тактного цикла. Проекции фазовых траекторий на плоскости переменных x, y (*а*) и x, z (*б*). Γ_0 — цикл периода 1, Γ_1 — цикл удвоенного периода

фуркационный анализ показывает, что характер бифуркаций и структура взаиморасположения соответствующих бифуркационных линий на плоскости параметров для циклов Γ_1 удвоенного периода полностью повторяет картину для 1-тактных циклов с той лишь разницей, что обнаруживаются два самостоятельных семейства 2-тактных циклов Γ_1^1 и Γ_1^2.

На рис. 10.8 изображена бифуркационная диаграмма одного из семейств циклов $\Gamma_1^1(m, g)$, подтверждающая сказанное выше. Наличию двух семейств 2-тактных циклов отвечает зависимость мультипликаторов от параметра m в виде двух петель в отличие от одной петли для циклов периода T_0. Расчеты свидетельствуют, что внутри каждой из областей, ограничиваемых бифуркационными линиями удвоения периода циклов $\Gamma_1^1(m, g)$

и $\Gamma_1^2(m, g)$, имеется по два самостоятельных семейства 4-тактных циклов. Можно полагать, что иерархия размножения семейств циклов продолжается до бесконечности, их бифуркационные диаграммы являют собой систему топологически эквивалентных *вложенных структур*, которым отвечают универсальные свойства, обобщающие закономерности подобия типа Фейгенбаума на случай двух параметров. Для циклов Γ_k периода $T_k \simeq 2^k T_0$, $k = 0, 1, 2$ и частично для $k = 3$ это проверялось экспериментально и качественно подтвердилось. Количественные закономерности установить трудно, так как с этой целью необходимо численно анализировать циклы достаточно больших периодов и с высокой степенью точности. Эту задачу удобнее рассматривать применительно к двупараметрическим двумерным модельным отображениям. Наглядное представление о сложности разбиения фазового пространства на различные типы траекторий в относительно простой системе (10.36) дает геометрическое изображение полученных результатов. Введем в рассмотрение комбинированное трехмерное пространство, в котором изобразим графически зависимость $\xi = \xi(m, g)$, где под ξ будем понимать одну из координат неподвижной точки в сечении Пуанкаре для цикла. К примеру, если ввести в R^3 системы (10.36) секущую плоскость $x = 0$, то под ξ можно понимать координату z двумерного отображения на секущей.

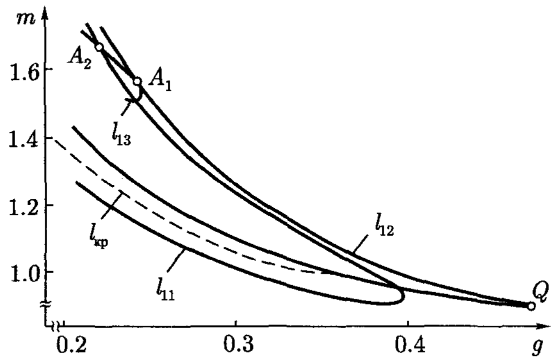


Рис. 10.8. Бифуркационная диаграмма для семейства 2-тактных циклов $\Gamma_1^1(m, g)$; $l_{кр}$ — линия критических значений параметров, пересечению которой отвечает переход к хаосу

Расчеты показывают, что геометрическим местом точек, отвечающим устойчивым и неустойчивым циклам $\Gamma_0(m, g)$ системы, является сложная двумерная поверхность S^0 в указанном пространстве, изображенная на рис. 10.9. Поверхность S^0 для $\xi \geqslant 0$ выходит из линии рождения цикла Γ_0 и имеет две складки и сборку. На рис. 10.9 для наглядности дан разрез поверхности S^0 плоскостью $g = g_0$. Внутри области между точками C и F имеется три листа поверхности, которые соответствуют циклам Γ_0 (верхний лист), Γ_0' (нижний лист) и Γ_0'' (внутренний лист). Проецирование сложной поверхности на плоскость параметров m и g благодаря наличию складок дает линию особенности l_{02}, состоящую из верхней и нижней ветвей, пересекающихся в точке Q. С движением по параметру m ($g = g_0$) неизбежно связано явление *гистерезиса*, обусловленного «перескоками» в точках F (если двигаться по m снизу) и C (при движении по m сверху). В теории катастроф эти *жесткие переключения* хорошо известны и составляют, собственно, сам эффект катастрофы сборки. В двупараметрических семействах, кроме складки и сборки, никаких особенностей при проецировании поверхности на плоскость быть не может.

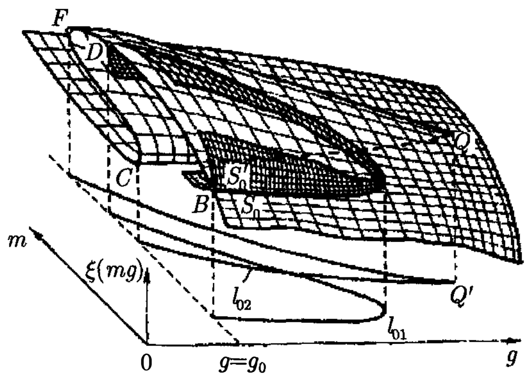


Рис. 10.9. Геометрическая трактовка критических явлений в системе (10.36); точки особенностей те же, что и на рис. 10.5 и 10.6

Таким образом, бифуркационная линия кратности l_{02} на диаграмме рис. 10.5 обязана своим происхождением наличию складок и сборки у поверхности S^0. Каково происхождение бифуркационной линии удвоения l_{01}? Если анализировать только однотактные циклы Γ_0, то эта линия соответствует проекции соответствующей линии на поверхности S^0, отвечающей критическим значениям амплитуд цикла, когда мультипликатор принимает значение -1. Учитывая, что при этом мягко рождается цикл удвоенного периода Γ_1, на рис. 10.9 намечена поверхность S_0^1, которая пересекает поверхность S^0 по линии удвоения. Проекция линии пересечения поверхности S_0^1 с S^0 на плоскость параметров m и g даст бифуркационную линию l_{01}. Катастрофы в окрестности этой линии не происходит, так как переход от одного устойчивого режима к другому устойчивому *происходит мягко*.

Бифуркации удвоения периода. Универсальность Фейгенбаума. Как следует из анализа бифуркационных диаграмм рис. 10.5 и рис. 10.8, в генераторе Анищенко – Астахова реализуется бифуркация удвоения периода циклов периода 1 и 2 при движении как по параметру m ($g = \mathrm{const}$), так и по параметру g ($m = \mathrm{const}$). Детальные исследования закономерностей бифуркаций удвоения периода в системе (10.36) были проведены как в численном, так и в физическом эксперименте.

Рассмотрим кратко результаты указанных экспериментов. На рис. 10.10 представлены данные расчетов эволюции предельных циклов в системе (10.36), полученные при движении по параметру m при фиксированном значении $g = 0.3$. Рисунок иллюстрирует проекции фазовых траекторий на плоскость переменных (x, y), отрезков реализации $x(t)$ и соответствующие спектры мощности $S_x(f)$, рассчитанные для временных реализаций переменной $x(t)$. Данные рис. 10.10 иллюстрируют наличие каскада бифуркаций удвоений периода, завершающихся переходом к режиму хаотического аттрактора. Расчеты бифуркационных значений параметров m_k и g_k, при которых мультипликаторы соответствующих циклов μ_k обращаются в «-1», приведены в табл. 10.1. Универсальная постоянная Фейгенбаума δ оценивалась по выражению:

$$\begin{aligned} \delta &= \lim_{k\to\infty} \delta_k = \frac{\Delta_k}{\Delta_{k+1}} = \frac{\alpha_{k+1} - \alpha_k}{\alpha_{k+2} - \alpha_{k+1}}, \qquad (10.37) \\ \text{где} \quad \alpha_k &= m_k(g = \mathrm{const}) \text{ или } \alpha_k = g_k(m = \mathrm{const}). \end{aligned}$$

Расчеты проводились для значений $k = 1, 2, 3, 4$, то есть до точки бифуркации удвоения цикла периода 16. Как показали эксперименты, разумная точность оценки универсальной постоянной Фейгенбаума δ достигается уже в этом случае, хотя соотношение (10.37) справедливо лишь в пределе $k \to \infty$.

Критические значения параметров m^* (или g^*), отвечающие точке бифуркации рождения хаотического аттрактора, оценивались по формуле:

$$\alpha^* = \frac{\alpha_k \delta - \alpha_{k-1}}{\delta - 1}, \qquad (10.38)$$

где k отвечало значению $k = 4$.

Данные расчетов сопоставлялись с результатами физического эксперимента на радиотехнической модели генератора. На рис. 10.11 приведены

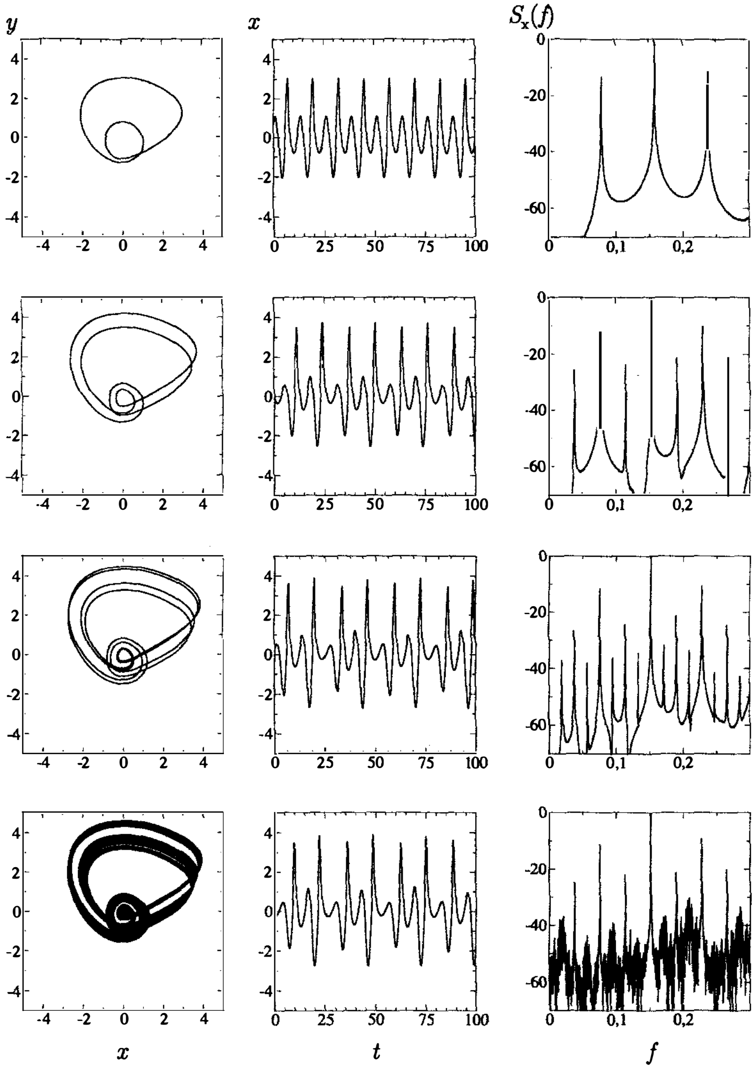


Рис. 10.10. Результаты расчетов проекций фазовых портретов траекторий на плоскость переменных (x, y), отрезков временных реализаций $x(t)$ и соответствующих им спектров мощности $S_x(f)$ в системе (10.36) для значения параметра $g = 0.3$ и возрастающих (сверху вниз) значений параметра m в интервале $0.8 < m < 1.09$

Таблица 10.1. Бифуркационные значения параметров m_k, g_k, постоянная Фейгенбаума δ_k и критические точки при удвоениях в системе (10.36) (численный расчет)

k	$g = 0.3$			$m = 1.45$		
	m_k	δ_k	m^*	g_k	δ_k	g^*
0	0.7700	—	—	0.1200	—	—
1	1.0200	—	1.0880	0.16898	—	0.18233
2	1.0713	4.873	1.0853	0.18162	3.876	0.18506
3	1.08216	4.724	1.08511	0.18438	4.582	0.18513
4	1.08449	4.66896	1.08512	0.18497	4.66836	0.18513

проекции фазовых портретов циклов и соответствующих спектров мощности, иллюстрирующие эволюцию режимов колебаний при вариации параметра m ($g = 0.3$) в эксперименте. Нетрудно убедиться, что данные эксперимента рис. 10.11 соответствуют результатам расчетов (рис. 10.10). Более детальную информацию можно получить из сравнения расчетных и экспериментальных данных для бифуркационнных значений параметра m_k, представленных в табл. 10.2.

Таблица 10.2. Сравнение расчетных и экспериментальных бифуркационных значений параметра m для $g = 0.3$

k	m_k (расчет)	m_k (эксперимент)	δ_2
0	0.770 ± 10^{-6}	0.77 ± 0.01	
1	1.020 ± 10^{-6}	1.02 ± 0.01	
2	1.0713 ± 10^{-6}	1.07 ± 0.01	$\delta_2 = 4.873$ (расчет)
3	1.08216 ± 10^{-6}	1.08 ± 0.01	
m^*	1.08516 ± 10^{-6}	1.09 ± 0.01	$\delta_2 = 5.0 \pm 0.12$ (эксперимент)

В эксперименте уверенно можно было измерить бифуркационные значения m_k вплоть до $k = 3$, отвечающего бифуркации удвоения цикла периода $8T_0$. Как видно из таблицы, для определения константы Фейгенбаума этого недостаточно как в физическом ($\delta_2 = 5.0 \pm 0.12$), так и в численном ($\delta_2 = 4.873$) экспериментах. В то же время соотношение расчетных и экспериментальных значений m_k вплоть до $k = 3$ свидетельствует о том, что в динамической системе (10.36) переход к хаосу через каскад бифуркаций удвоения осуществляется в соответствии с универсальностью Фейгенбаума.

В связи с тем, что универсальность перехода к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода была доказана Фейгенбаумом для класса

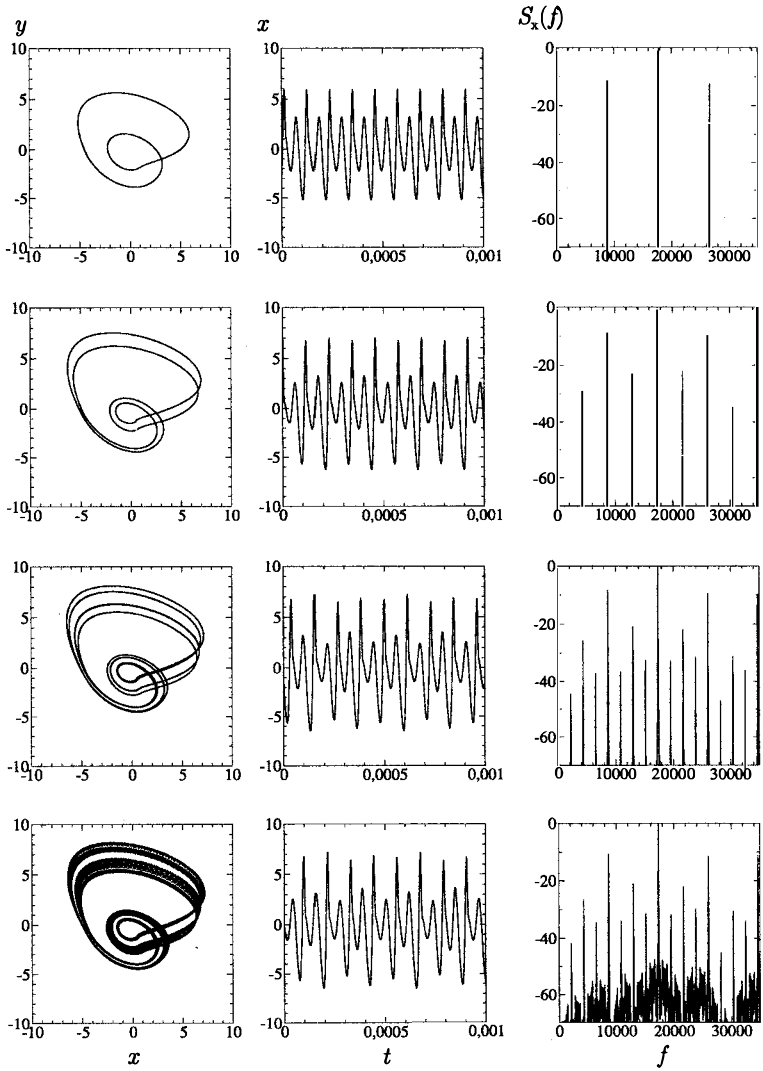


Рис. 10.11. Соответствующие рис. 10.10 данные физического эксперимента на радиотехнической модели генератора (10.36). Результаты получены путем преобразования аналогового сигнала $x(t)$ в цифровой с последующей обработкой сигнала на компьютере

гладких одномерных отображений с квадратичным максимумом, возникает естественный вопрос: почему эти закономерности с высокой степенью точности выполняются для трехмерной динамической системы (10.36)? Ответ на этот вопрос, безусловно, есть и заключается в том, что динамика системы (10.36) с высокой степенью точности может быть охарактеризована одномерным отображением класса Фейгенбаума.

Рассмотрим режим хаотического аттрактора в системе (10.36) при значениях параметров $m = 1.5$ и $g = 0.3$. Введем в фазовом пространстве секущую плоскость условием $x = 0$ и построим двумерное отображение $(y_{n+1}, x_{n+1}) = F(y_n, z_n)$ на секущей плоскости. Как показали расчеты, полученное отображение близко к одномерному. Чтобы убедиться в этом, используя данные расчета отображения в секущей плоскости $x = 0$, построим численно одномерное отображение $y_{n+1} = f(y_n)$. Результаты представлены на рис. 10.12. Как видно из графика, отображение действительно близко к одномерному и имеет гладкий квадратичный максимум.

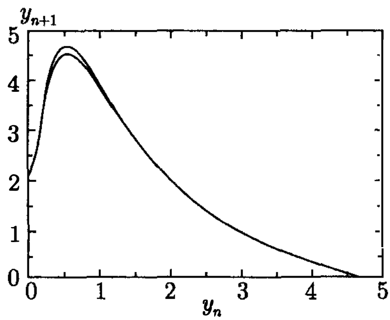


Рис. 10.12. Одномерное отображение $y_{n+1} = f(y_n)$, построенное численно для $m = 1.5$ и $g = 0.3$

Хаотический аттрактор и гомоклиниические траектории в генераторе. Гомоклинические траектории (точки) как результат грубого пересечения устойчивых и неустойчивых многообразий седловых циклов (устойчивых и неустойчивых сепаратрис седловых неподвижных точек) со времени открытия и изучения их А. Пуанкаре, Г. Биркгофом и С. Смейлом служат своего рода «сигналом бедствия», предвещающим возможность сложного апериодического движения системы. Из существования гомоклинических траекторий при некоторых дополнительных предположениях следует наличие в их окрестности счетного множества устойчивых и неустойчивых периодических траекторий различных периодов, включая континуум траекторий, устойчивых по Пуассону.

Одним их фундаментальных результатов в теории динамического хаоса является теорема Шильникова о седло-фокусе. Суть теоремы в том, что если в динамической системе существует двоякоасимптотическая траектория в виде петли сепаратрисы седло-фокуса, то в ее окрестности возникает нетривиальное гиперболическое подмножество траекторий. Это подмножество может оказаться притягивающим, и тогда в эксперименте будет наблюдаться хаотический аттрактор как образ детерминированного хаоса.

Многосторонний экспериментальный анализ механизмов возникновения и топологической структуры хаотических притягивающих множеств в модифицированном генераторе с инерционной нелинейностью обоснованно привел к мысли о существовании в автономной динамической системе гомоклинической траектории вида *петли сепаратрисы состояния равновесия типа седло-фокус.*

Первые попытки найти петлю сепаратрисы в уравнениях генератора (10.28) к успеху не привели. Более того, выяснилось, что такого решения эти уравнения точно не имеют. Покажем, что это так. Особая точка системы характеризуется двумерным неустойчивым и одномерным устойчивым многообразиями. Заменим время в (10.28) на обратное и зададим начальные условия $x(0) = y(0) = 0$, $z(0) > 0$ на одномерном неустойчивом многообразии. Интегрирование системы подтвердит уход траектории на бесконечность вдоль оси z. Из уравнений (10.28) следует, что $z(\tau) = z(0)\exp(g\tau)$. Траектория при $\tau \to \infty$ в особую точку не возвращается!

Возникла гипотеза, которая оказалась весьма успешной. Петля сепаратрисы седло-фокуса существует в некоторой возмущенной системе. Снятие возмущения приводит к исчезновению самой петли, но структура разбиения фазового пространства на траектории остается. Чтобы подтвердить эти соображения, нужно определить вид слабо возмущенной системы, доказать наличие в ней петли сепаратрисы седло-фокуса, выяснить структуру аттракторов и изучить их эволюцию при снятии возмущения. Решение указанной задачи неоднозначно, но в силу свойства грубости конкретный вид малого возмущения не должен иметь принципиального значения.

Добавим во второе уравнение исходной системы (10.28) постоянный положительный член γ и рассмотрим возмущенную таким способом систему:

$$\dot{x} = mx + y - xz, \quad \dot{y} = -x + \gamma, \quad \dot{z} = -gz + gI(x)x^2. \qquad (10.39)$$

Особая точка потока (10.39) по-прежнему единственная, слегка смещена относительно начала координат и представляет собой седло-фокус. Ее координаты: $x^0 = \gamma$, $y^0 = \gamma(\gamma^2 - m)$, $z^0 = \gamma^2$. Состояние равновесия в возмущенной системе (10.39) для $m > 0$ характеризуется двумерным неустойчивым и одномерным устойчивым многообразиями. Для нахождения петли Γ_0^1 в уравнениях системы произведем замену времени на обратное и с начальными условиями на одномерном неустойчивом многообразии решим многократно задачу Коши для фиксированного $g = 0.3$ и различных m и γ. Выбрав малое значение $\gamma = 0.1$, найдем бифуркационную точку $m^* = 1.176\ldots$, в которой реализуется однообходная петля седло-фокуса Γ_0^1. Трехмерное изображение двояко асимптотической траектории Γ_0^1 приведено на рис. 10.13, и при отклонении любого из управляющих параметров системы (10.39) она, естественно, разрушается. Детальные расчеты бифуркационных диаграмм для системы (10.28) и возмущенной системы (10.39) подтвердили их качественную эквивалентность.

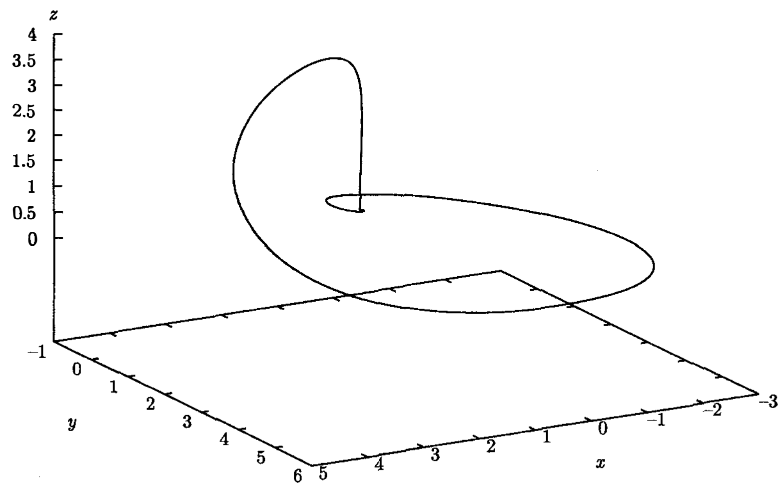


Рис. 10.13. Петля сепаратрисы седло-фокуса в возмущенной системе (10.39) для $m = 1.176$ и $g = 0.3$

На основании этого можно утверждать, что структура и свойства хаоса в системе (10.28) полностью определяются фактом существования петли сепаратрисы седло-фокуса в системе (10.39).

Экспериментальные и численные исследования убедительно доказали возможность генерации хаотических автоколебаний различной структуры и взаимосвязь эффекта детерминированного хаоса с петлей сепаратрисы седло-фокуса в системе (10.28). В качестве примера на рис. 10.14 приведены проекции хаотических траекторий на плоскость (x, y), отвечающие так называемому *спиральному типу* аттрактора. Пример *винтового аттракто-*

ра приведен на рис. 10.15. На этом же рисунке представлена петля сепаратрисы седло-фокуса Γ_0. Указанные результаты были получены численно. Однако все они воспроизводятся в физическом эксперименте. При этом имеет место удивительно хорошее соответствие экспериментальных и численных результатов. В качестве примера на рис. 10.16 приведены фотографии аттрактора, полученного в эксперименте.

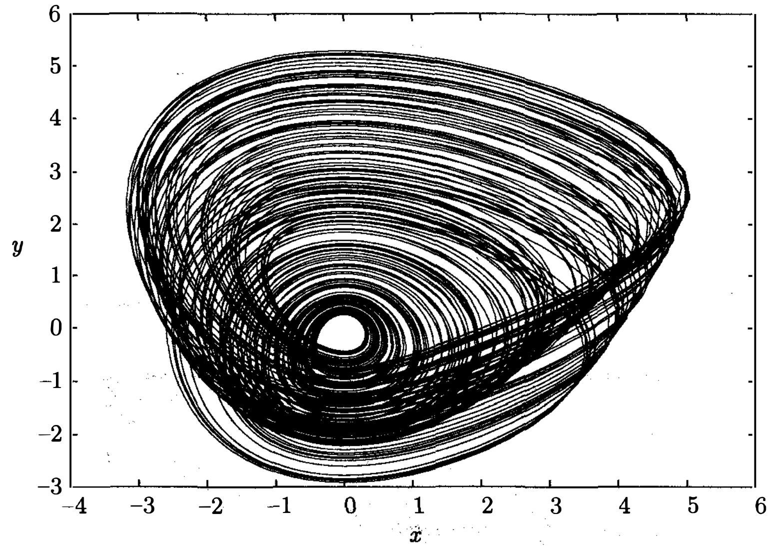


Рис. 10.14. Проекция хаотического аттрактора спирального типа на плоскость (x, y) в системе (10.28) при $d = 0$, $m = 1.563$, $g = 0.17$

Можно сделать следующий принципиально важный вывод. Для реализации простейшего типа генератора хаотических автоколебаний необходимо и достаточно:

- создать усилительный каскад с резонансным контуром на входе, обеспечивающий характеристику типа перевернутой параболы с управляемой крутизной падающего участка, имеющего производную больше, чем единица;
- ввести положительную обратную связь, удовлетворяющую всем условиям возбуждения автоколебаний.

В генераторе Анищенко–Астахова необходимая характеристика усилителя реализована за счет инерционной обратной связи с использованием

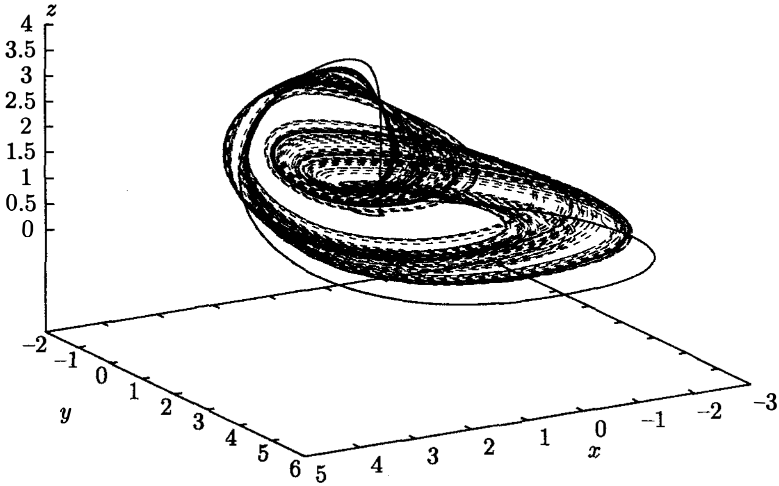


Рис. 10.15. Хаотический аттрактор винтового типа и петля сепаратрисы седло-фокуса в системе (10.28) и (10.39) соответственно

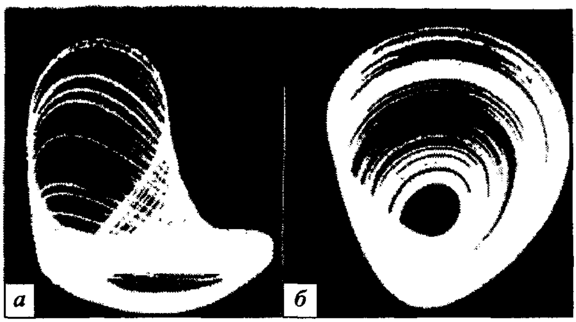


Рис. 10.16. Проекции фазовой траектории спирального аттрактора на плоскости переменных (физический эксперимент, $m = 1.5$, $g = 0.2$): *а* – (x, z), *б* – (x, y)

однополупериодного детектора в качестве нелинейности. Мы уверены, что это далеко не единственный практнческий способ достижения результата, существуют и другие пути.

В заключение данного раздела отметим следующий важный факт. Большинство результатов, полученных с использованием генератора, относится к модели (10.36). С точки зрения физического и численного экспериментов это оправданно. Однако в математическом плане есть некоторая особенность. Функция $\Phi(x) = I(x)x^2$ в нуле терпит разрыв производной, т. е. является негладкой. Это обстоятельство приводит к ряду математических сложностей. Было установлено, что основные свойства генератора слабо зависят от таких математических тонкостей. В частности, генератор демонстрирует весь спектр свойств, если представить функцию $\Phi(x)$ в виде экспоненты

$$\Phi(x) = \exp(x) - 1. \qquad (10.40)$$

Эта функция является гладкой, аналитической и может с успехом быть использована при теоретическом анализе свойств системы (10.28).

Исследования показали, что в возмущенной системе (10.28) с $\Phi(x) = \exp(x) - 1$ также реализуется особое решение в виде петли сепаратрисы. Результаты расчетов представлены на рис. 10.17. Таким образом, генератор Анищенко–Астахова реализует режим детерминированного хаоса и в случае задания нелинейного детектора в соответствии с (10.40).

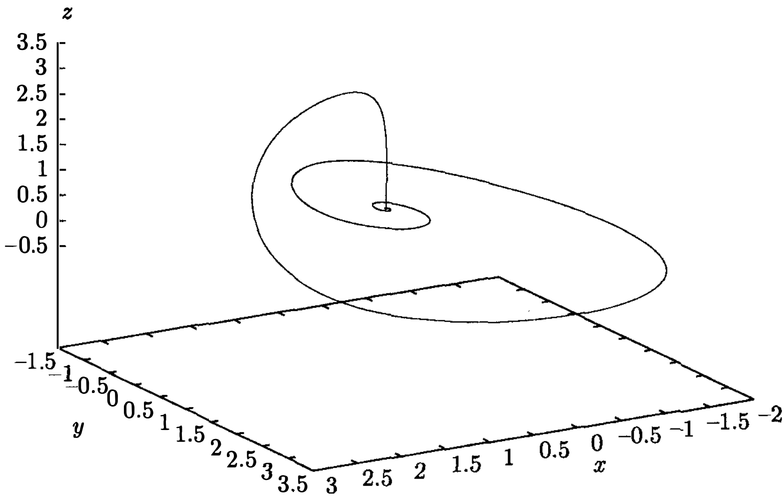


Рис. 10.17. Петля сепаратрисы седло-фокуса, реализующаяся в возмущенной системе (10.39) с $\Phi(x) = \exp(x) - 1$

10.4. Заключение

В лекции изложены принципы построения моделей динамических систем с полутора степенями свободы, которые с точки зрения теории колебаний можно отнести к моделям генераторов с инерционной нелинейностью. Подробно дается радиофизическое описание принципа построения генератора Анищенко – Астахова и формулируются соответствующие уравнения системы; дается общий алгоритм проведения численных исследований динамики генератора хаотических автоколебаний, детально анализируется механизм возникновения хаотических автоколебаний через каскад бифуркаций удвоения периода по Фейгенбауму; иллюстрируется фундаментальная роль наличия в системе петли сепаратрисы седло-фокуса, являющейся первопричиной возникновения как каскада бифуркаций удвоения периода, так и хаотического аттрактора в соответствии с теорией Шильникова.

Лекция 11

Генератор квазипериодических колебаний с двумя независимыми частотами

11.1. Введение

Квазипериодические колебания широко распространены в природе и являются важным предметом исследований в естествознании. Особенность квазипериодических колебаний состоит в том, что они включают две и более независимые частоты в спектре колебаний:

$$x(t) = x[\phi_1(t), \phi_2(t), \ldots, \phi_p(t)], \tag{11.1}$$

где $\phi_i(t) = \omega_i t$, $i = 1, 2, \ldots, p$. В результате $x(t)$ (11.1) имеет период 2π по каждому из аргументов $\phi_i(t)$, а сам квазипериодический процесс в общем случае не является периодическим, т. е. $x(t) \neq x(t + T_0)$. Спектр мощности колебаний $x(t)$ в общем случае включает все независимые частоты ω_i, их гармоники $n\omega_i$ (n = 2, 3, ...) и комбинационные частоты типа $n\omega_i \pm m\omega_k$, где n и m — целые положительные числа, а i, k = 1, 2, ..., p.

Примером простого квазипериодического колебания может служить движение любой фиксированной точки на поверхности Земли. Эта точка совершает периодическое движение, связанное с суточным вращением Земли вокруг своей оси. В то же время эта точка участвует в периодическом движении Земли вокруг Солнца с периодом 1 год. Квазипериодические (многочастотные) колебания возникают при модуляции несущего электромагнитного колебания информационным сигналом (радиотехника, техника связи), сопровождают переход к турбулентному течению жидкости в гидродинамике, а также описывают сложные колебательные процессы в живых организмах (биофизика, электрофизиология) и т. д.

В фазовом пространстве динамической системы квазипериодическому колебанию с n независимыми частотами будет отвечать n-мерный тор. Анализ проблем устойчивости, бифуркаций и переходов к хаосу применительно к квазипериодическим колебаниям связан с изучением бифуркаций n-мерных торов. Эти задачи на протяжении многих лет остаются предметом исследований специалистов по нелинейной динамике и турбулентности. После публикации работ Рюэля и Такенса интерес к исследованиям квазипериодических колебаний с числом ω_i, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, $n \geqslant 4$, в определенной степени уменьшился. Это связано с доказательством неустойчивости движений на трех- и четырехмерных торах. В то же время ряд работ свидетельствует о существовании устойчивых колебаний с 4-мя и 6-ю независимыми частотами. Этот факт не позволяет исключать из рассмотрения гипотезу Ландау о переходе к хаосу через режим торов высокой размерности. Более того, ряд нерешенных до конца проблем остается до сих пор и применительно к двумерному тору. Отметим, например, бифуркацию удвоения двумерного тора, впервые наблюдавшуюся авторами и позднее многими исследователями. До сих пор вопрос о бифуркационном механизме удвоения одного из периодов двумерного тора остается не полностью ясным. Можно привести и другой пример. До сих пор остается открытым ряд проблем, связанных с эффектом синхронизации двухчастотных колебаний.

Для решения указанных и ряда других возможных задач необходимо иметь в распоряжении простую базовую модель генератора автономных двухчастотных колебаний. Как это принято в теории колебаний, необходимо ввести в рассмотрение динамическую систему, имеющую решение в виде устойчивых двухчастотных колебаний. Она является также необходимой, как, например, уравнения генератора Ван дер Поля для изучения предельных циклов. В настоящей лекции дается физическое обоснование и вводится в рассмотрение базовая модель генератора квазипериодических колебаний с двумя независимыми частотами.

11.2. Пути реализации двухчастотных колебаний и их свойства

Для получения режима квазипериодических колебаний можно использовать несколько различных методов или способов. Наиболее простой из них заключается в осуществлении внешней периодической модуляции колебаний некоторого автономного генератора. Пусть мы имеем автономный генератор в виде

$$\ddot{x} + F(x, \dot{x}, \alpha)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \tag{11.2}$$

где $F(x, \dot{x}, \alpha)$ — функция, обеспечивающая автоколебания. Система (11.2) имеет решение в виде устойчивого предельного цикла с периодом $T = 2\pi/\omega_0$, $\omega_0 = 2\pi f_0$. Подадим на генератор (11.2) внешнее гармоническое (в общем случае — любое периодическое) воздействие относительно малой амплитуды A_0:

$$\ddot{x} + F(x, \dot{x}, \alpha)\dot{x} + \omega_0^2 x = A_0 \sin(\omega_1 t + \phi), \tag{11.3}$$

которое приведет к модуляции автономных колебаний частоты f_0 внешним сигналом частоты f_1. Мы получим устойчивые двухчастотные колебания. В целом ряде задач нелинейной динамики этот способ широко используется. Однако он имеет один принципиальный недостаток, заключающийся в следующем. Хотя колебания системы (11.3) двухчастотные, одна из собственных частот, а именно частота сигнала воздействия, не является независимой и сохраняет свое значение при вариации управляющего параметра α автономной системы (11.2). Это обстоятельство затрудняет решение определенного класса задач, в которых независимость частот и автоколебательный характер процесса являются принципиальными.

Избежать этого неудобства можно, применив другой способ получения квазипериодических колебаний. Этот способ предусматривает использование системы двух связанных генераторов

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + F(x_1, \dot{x}_1, \alpha_1)\dot{x}_1 + \omega_{01}^2 x_1 &= \gamma \Phi_1(x_1, x_2), \\ \ddot{x}_2 + F(x_2, \dot{x}_2, \alpha_2)\dot{x}_2 + \omega_{02}^2 x_2 &= \gamma \Phi_2(x_1, x_2), \end{aligned} \tag{11.4}$$

где $\Phi_{1,2}$ — функции связи, γ — коэффициент связи. Если частоты каждого из двух автономных генераторов различны ($f_{01} \neq f_{02}$), то при наличии связи ($\gamma \neq 0$) мы получим автономные двухчастотные автоколебания в системе (11.4). Базовые частоты квазипериодических автоколебаний в этом случае будут действительно независимыми. Отметим, что использование системы связанных генераторов из двух, трех и более парциальных подсистем дает возможность реализации квазипериодических автоколебаний с двумя, тремя и более независимыми частотами.

Обсудим пример реализации автономных двухчастотных колебаний указанным способом. Рассмотрим два связанных генератора периодических колебаний. В качестве парциальной автоколебательной системы выберем модель генератора Ван дер Поля в режиме предельного цикла как образа устойчивых почти гармонических колебаний:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= y_1, \\ \dot{y}_1 &= (\varepsilon - x_1^2)y_1 - \omega_1^2 x_1. \end{aligned} \tag{11.5}$$

Здесь ε — параметр возбуждения, $\omega_1^2 = (2\pi f_1)^2$, $f_1 = 1/T_0$, где f_1 — частота, T_0 — период колебаний. Как хорошо известно, автоколебания в системе (11.5) возникают вследствие бифуркации Андронова – Хопфа в точке $\varepsilon^* = 0$, их амплитуда при $\varepsilon > \varepsilon^*$ растет пропорционально $\sqrt{\varepsilon}$.

В качестве второй системы рассмотрим тот же генератор Ван дер Поля (11.5), введя расстройку по частоте ($f_2 \neq f_1$). Будем исследовать режим автоколебаний в случае симметричной связи между генераторами:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= y_1, \\ \dot{y}_1 &= (\varepsilon - x_1^2)y_1 - \omega_1^2 x_1 + \gamma(x_2 - x_1), \\ \dot{x}_2 &= y_2, \\ \dot{y}_2 &= (\varepsilon - x_2^2)y_2 - \omega_2^2 x_2 + \gamma(x_1 - x_2). \end{aligned} \tag{11.6}$$

Здесь параметр γ характеризует степень внутренней связи между генераторами, параметр ε будет одинаковым для обоих генераторов, а частоты ω_1 и ω_2 выберем различными, но достаточно близкими друг к другу.

Рассмотрим режимы автоколебаний в системе (11.6) при значениях параметров $\varepsilon = 0.1, \omega_1 = 1, \gamma = 0.02$. Параметр ω_2 будем изменять в пределах $0.98 < \omega_2 < 1.02$, исследуя влияние расстройки парциальных частот на динамику системы.

На рис. 11.1 представлены результаты расчетов динамических режимов на плоскости параметров системы (11.6) (γ, ω_2) при фиксированных значениях других управляющих параметров. Расчеты проведены для случая, когда частоты парциальных генераторов f_1 и f_2 отличаются незначительно. На рис. 11.1 отмечены две области: I и II. В области II реализуются квазипериодические колебания, а в области I имеет место резонанс, отвечающий условию равенства частот $f_1 = f_2$. Обсудим этот принципиальный эффект.

Важной характеристикой двухчастотных колебаний является число вращения Пуанкаре Θ. С экспериментальной точки зрения Θ можно характеризовать как отношение частот: $\Theta = \omega_2 : \omega_1 = f_2 : f_1$. При изменении второй частоты в системе (11.6) число вращения будет меняться, принимая при этом как иррациональные, так и рациональные значения. В случае если Θ рационально, то $f_2 : f_1 = m : n$, где m и n — целые числа. Тогда мы получаем кратные частоты $f_2 = f_1 \dfrac{m}{n}$, то есть формально независимой частотой в системе является лишь одна, это f_1, а f_2 представляет либо ее гармонику, либо субгармонику. По теории Арнольда мы имеем дело с эффектом резонанса на торе. Оказывается, что области резонансов, когда Θ рационально, являются некоторыми конечными областями в пространстве параметров и характеризуют эффект синхронизации, который мы обсудим подробно в отдельной лекции. Если Θ иррационально, то в системе существуют эргодические квазипериодические колебания с двумя рационально не связанными частотами. Для рациональных значений Θ имеет место эффект синхронизации в виде захвата частоты, движение становится периодическим с одной независимой частотой.

На рис. 11.1 представлен результат расчета области резонанса $\Theta = 1:1$, которая соответствует эффекту захвата частоты на основном тоне. Первый генератор захватывает частоту второго и в результате в области синхронизации (область I на рис. 11.1) частоты взаимодействующих генераторов равны: $f_1 = f_2$. Область синхронизации I на плоскости параметров связь (γ) — расстройка (ω_2) представляет собой «клюв» или «язык» Арнольда с числом вращения Пуанкаре $\Theta = 1 : 1$, что отвечает синхронизации на основном тоне.

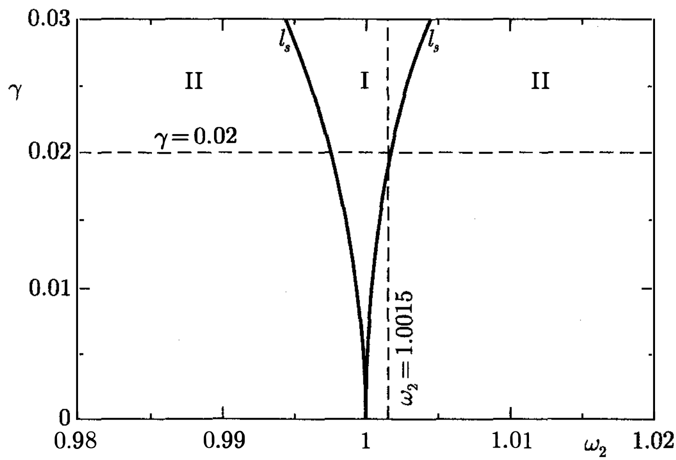


Рис. 11.1. Область взаимной синхронизации генераторов (11.6) при $\varepsilon = 0.1$, $\omega_1 = 1$. I — область существования резонансного предельного цикла с числом вращения $\Theta = 1 : 1$, II — область квазипериодических колебаний

Вне области синхронизации (на рис. 11.1 это области II) наблюдаются режимы двухчастотных колебаний или биений, при которых частоты парциальных генераторов не совпадают ($f_1 \neq f_2$). В области II образом автоколебательного режима является нерезонансный (в общем случае) эргодический двумерный тор, отвечающий режиму двухчастотных квазипериодических колебаний.

При входе в область I из области II (с пересечением бифуркационных линий l_s (рис. 11.1)) на двумерном торе рождается структура в виде устойчивого и седлового предельных циклов, лежащих на поверхности тора. Устойчивый цикл отвечает режиму взаимной синхронизации двух генераторов, характеризуя устойчивое периодическое движение с частотой $f_1 = f_2$ в режиме захвата частоты.

Вышесказанное иллюстрирует рис. 11.2, где представлены проекции фазовых портретов двумерного тора T^2 (рис. 11.2, *а*) и устойчивого (L_0) и седлового (L_0^*) резонансных предельных циклов на нем (рис. 11.2, *б*). Отметим весьма важное обстоятельство: тор T^2 существует как в области II, так и в области I! В физическом эксперименте в области I мы видим только устойчивый предельный цикл L_0. Однако этот цикл лежит на поверхности двумерного тора.

Рассмотрим сечение Пуанкаре плоскостью $x_1 = 0$ как для режима рис. 11.2, *а*, так и рис. 11.2, *б*. Результаты представлены на рис. 11.3. Рис. 11.3, *а* иллюстрирует замкнутую инвариантную кривую l как образ T^2 в сечении Пуанкаре. Рис. 11.3, *б* необходимо пояснить более детально. В области синхронизации I (рис. 11.1) на торе существуют два предельных цикла: устойчивый и седловой (рис. 11.2, *б*). В сечении Пуанкаре (рис. 11.3, *б*) им отвечают устойчивая неподвижная точка P и седловая Q. Неустойчивые сепаратрисы седла Q замыкаются на устойчивый узел P, образуя замкнутую инвариантную кривую. Эта кривая и есть образ резонансного двумерного тора в области синхронизации. Если двигаться в плоскости параметров области I в направлении к бифуркационным линиям l_s (рис. 11.1), то имеет место следующая картина: седло Q и узел P идут на сближение, на бифуркационных линиях l_s они сливаются и с входом в область II они исчезают в результате седло-узловой бифуркации. Таким образом, режиму синхронизации отвечает область существования устойчивого и седлового предельных циклов на двумерном торе, а разрушению режима синхронизации — седло-узловая бифуркация этих циклов.

Описанные выше результаты анализа динамики системы (11.6) в окрестности резонанса $\Theta = 1:1$ будут использованы при исследовании эффекта синхронизации квазипериодических автоколебаний в лекции 13.

Перейдем к описанию автономной модели генератора квазипериодических колебаний, которая позволяет реализовать не только режимы двухчастотных колебаний, но и бифуркации удвоения двумерных торов. Эта модель иллюстрирует третий способ получения квазипериодических колебаний, при котором используется режим автомодуляции в самой системе.

11.3. Формулировка уравнений генератора

Рассмотрим в качестве исходной модель генератора Анищенко – Астахова, схема которого представлена на рис. 10.2 (см. лекцию 10). Генератор

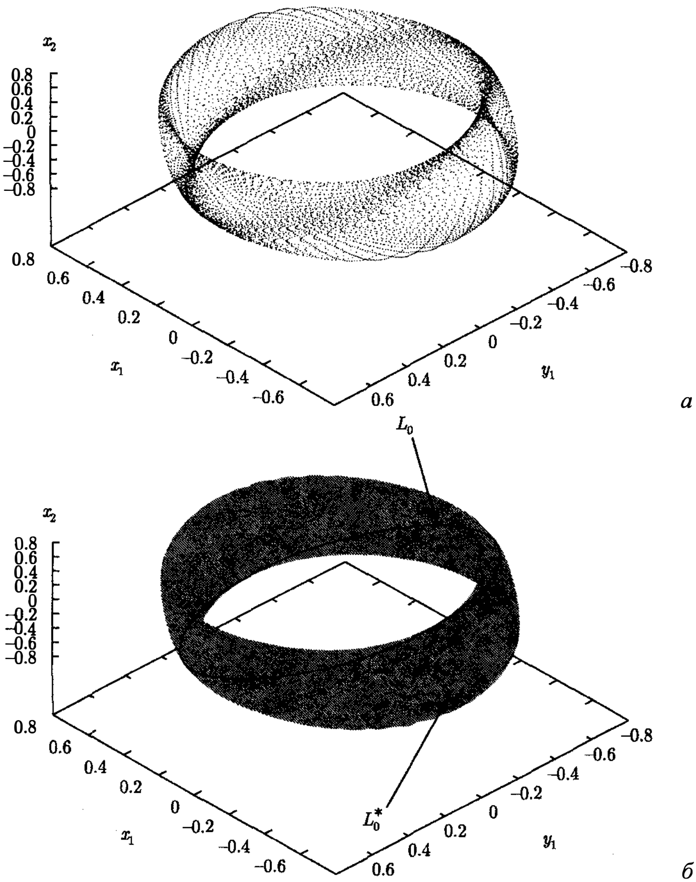


Рис. 11.2. Проекции фазовых траекторий на плоскость переменных (x_1, y_1, x_2) системы (11.6) для значений параметров $\varepsilon = 0.1$, $\gamma = 0.02$, $\omega_1 = 1$: *а* — для области II ($\omega_2 = 1.003$); *б* — для области I ($\omega_2 = 1.0015$). Проекция двумерного тора вне резонанса изображена серым, устойчивый L_0 и седловой L_0^* циклы на торе в области резонанса изображены жирными линиями

включает классический генератор Ван дер Поля, в котором введена дополнительная инерционная обратная связь. Уравнения генератора представляют собой трехмерную динамическую систему с тремя параметрами:

$$\dot{x} = mx + y - xz - dx^3, \quad \dot{y} = -x, \quad \dot{z} = -gz + g\Phi(x). \qquad (11.7)$$

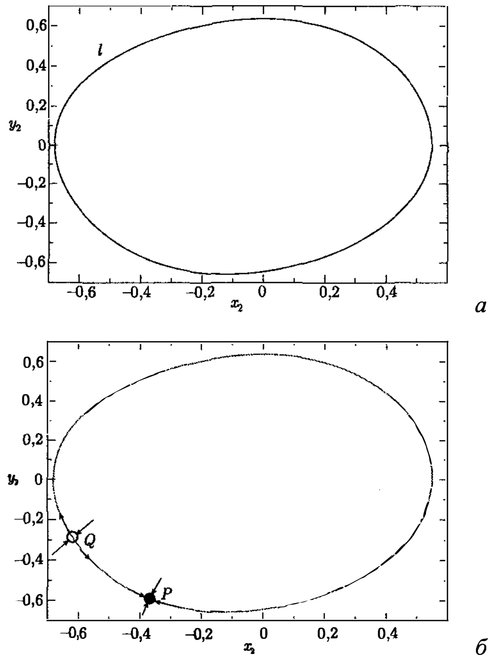


Рис. 11.3. Сечения эргодического тора (*а*) и резонансных циклов на нем (*б*) для случаев (*а*) и (*б*) рис. 11.2 соответственно

Первые два уравнения системы (11.7) описывают генератор Ван дер Поля. В этом легко убедиться, положив $\dot{z} = 0$ и используя $\Phi(x) = x^2$. Как было показано, система (11.7) реализует переход к хаосу в соответствии с теоремой Шильникова при условии, что нелинейная функция $\Phi(x)$ является асимметричной относительно переменной x и задается в виде:

$$\Phi(x) = I(x)x^2, \quad I(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0, \end{cases} \tag{11.8}$$

или

$$\Phi(x) = \exp x - 1.$$

Условия асимметрии (11.8) обеспечивают существование в системе (11.7) особого решения в виде петли сепаратрисы седло-фокуса и, как следствие, реализацию режима спирального хаоса. С физической точки зрения это достигается за счет самосогласованного воздействия на основной усилитель со стороны обратной связи, заданной третьим уравнением в системе (11.7). При малых амплитудах сигнала $x(t)$ это воздействие незначительно, и система (11.7) генерирует предельный цикл. С ростом параметра возбуждения m интенсивность колебаний $x(t)$ растет, сигнал обратной связи $z(t)$ нарастает тоже и более активно начинает влиять на коэффициент усиления основного усилителя. Система реализует последовательность бифуркаций удвоения периода циклов и переход к хаосу.

С целью обеспечения незатухающих двухчастотных колебаний в систему (11.7) необходимо ввести элемент, обладающий собственной частотой, отличающейся от резонансной частоты контура генератора. Одним из возможных способов является использование колебательного контура в цепи дополнительной обратной связи. Необходимо сделать так, чтобы сигнал обратной связи $z(t)$ представлял собой колебания независимой частоты, которые будут модулировать коэффициент усиления и обеспечивать квазипериодические автоколебания.

Рассмотрим схемы, представленные на рис. 11.4. На рис. 11.4, *а* показана схема инерционного каскада дополнительной обратной связи генератора Анищенко – Астахова. Каскад представляет собой RC-цепочку, описываемую одномерным дифференциальным уравнением (третье уравнение в системе (11.7)). На рис. 11.4, *б* представлена схема нового инерционного каскада, который включает колебательный контур некоторой резонансной частоты. Уравнения, описывающие схему на рис. 11.4, *б*, имеют вид:

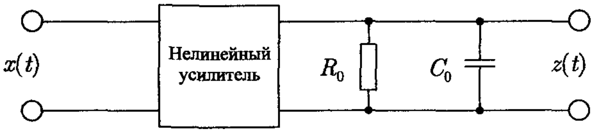
$$\dot{z} = \phi, \quad \dot{\phi} = -\gamma\phi + \gamma\Phi(x) - gz, \tag{11.9}$$

где γ — параметр затухания, а g — параметр, представляющий нормированную резонансную частоту нового фильтра. Нетрудно убедиться, что уравнения (11.9) описывают диссипативный колебательный контур в режиме вынужденных колебаний:

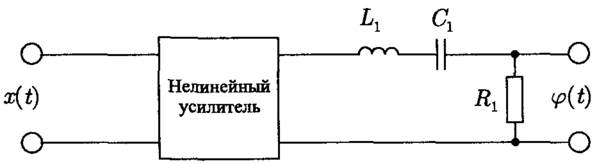
$$\ddot{z} + \gamma\dot{z} + gz = \gamma\Phi(x). \tag{11.10}$$

Введем новую обратную связь в генератор (рис. 10.2) так, чтобы управляющий сигнал обратной связи представлял собой $\dot{z}(t) = \phi(t)$. Уравнения нового генератора будут иметь вид:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= mx + y - xz - dx^3, \\
\dot{y} &= -x, \\
\dot{z} &= \phi. \\
\dot{\phi} &= -\gamma\phi + \gamma\Phi(x) - gz.
\end{aligned} \tag{11.11}$$



а



б

Рис. 11.4. Схема инерционного каскада дополнительной обратной связи: *а* — в генераторе Анищенко – Астахова; *б* — в генераторе квазипериодических колебаний

Система (11.11) является нелинейной диссипативной динамической системой размерности $N = 4$ и характеризуется четырьмя управляющими параметрами: m — параметр возбуждения, d — параметр нелинейной диссипации, γ — параметр затухания и g — параметр инерционности фильтра. Существенными параметрами системы (11.11) являются два: параметр возбуждения генератора m и параметр инерционности g, характеризующий резонансную частоту фильтра.

При задании $\Phi(x)$ в соответствии с (11.8) система (11.11) имеет решения в виде устойчивых двухчастотных колебаний. Пример указанного режима иллюстрирует рис. 11.5.

11.4. Бифуркационная диаграмма генератора квазипериодических колебаний

На рис. 11.6 представлена бифуркационная диаграмма системы (11.11) на плоскости основных управляющих параметров m и g для фиксированных значений $\gamma = 0.2$ и $d = 0.001$. Функция $\Phi(x)$ в (11.11) задавалась в виде $I(x)x^2$ (11.8).

На линии $m = 0$ в соответствии с мягкой бифуркацией Андронова – Хопфа рождается устойчивый предельный цикл T_0, который при пересечении бифуркационной линии l_1 претерпевает бифуркацию удвоения периода, на линии l_2 бифуркацию удвоения периода претерпевает цикл, возникший на линии l_1 (рис. 11.6). Бифуркационная линия l_t отвечает условию выхода на единичную окружность пары комплексно-сопряженных мультипликаторов цикла T_0 и мягкому рождению двумерного тора ($\mu_{1,2} = \exp(\pm j\theta)$,

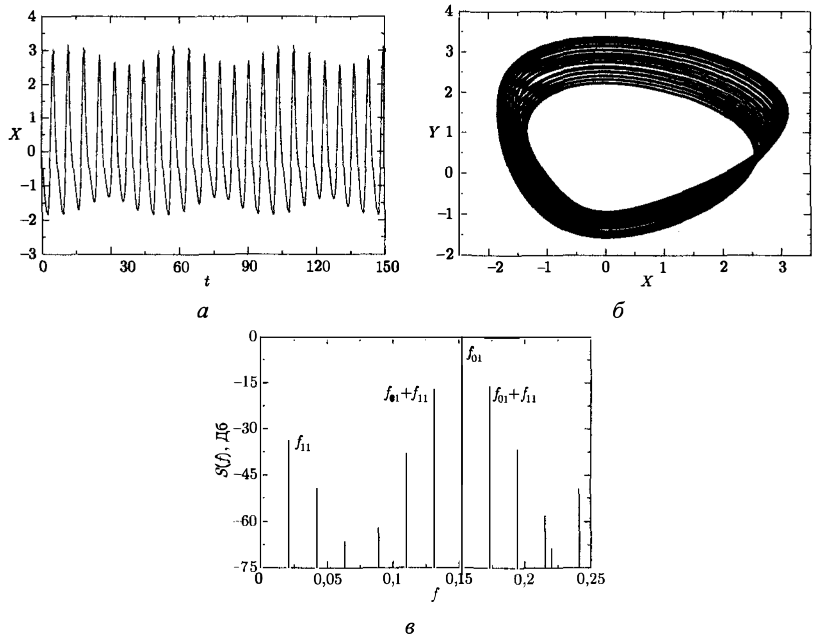


Рис. 11.5. Режим квазипериодических двухчастотных колебаний: *а* — временная реализация; *б* — проекция фазового портрета; *в* — спектр мощности. Значения параметров: $m = 0.06$, $g = 0.5$, $\gamma = 0.2$, $d = 0.001$

бифуркация Неймарка). Естественно, двигаясь вдоль линии l_t, угол θ будет пробегать множество рациональных значений, отвечающих резонансам на торе. В качестве примера на рис. 11.6 нанесена область резонанса $\theta = 1 : 4$, ограниченная линиями седло-узловых бифуркаций резонансного цикла на торе l_r, опирающаяся на точку A коразмерности 2. Выше линии рождения тора l_t показана линия l_u, при пересечении которой снизу вверх наблюдается переход к хаосу через разрушение квазипериодических колебаний. На линии l_c имеет место кризис (разрушение) возникшего на линии l_u хаотического аттрактора. Линия l_{dc} отвечает бифуркации слияния и последующего исчезновения пары седловых циклов.

11.5. Бифуркация удвоения двумерного тора

Зафиксируем значения параметров $g = 0.5$, $d = 0.001$ и $\gamma = 0.2$ и рассмотрим эволюцию режима тора в области значений параметра m между

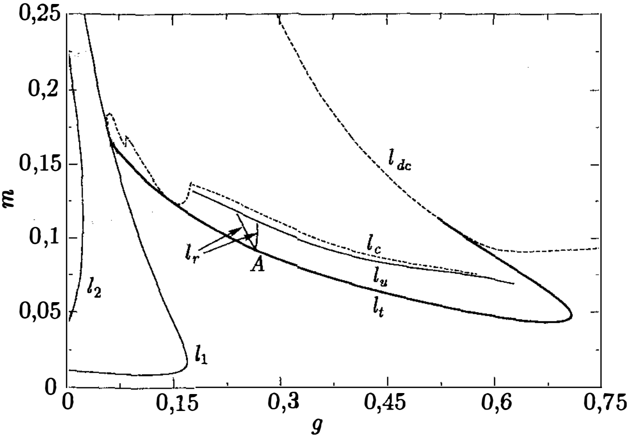


Рис. 11.6. Бифуркационная диаграмма режимов генератора ($\gamma = 0.2$, $d = 0.001$). $l_{1,2}$ — линии бифуркаций удвоения периода циклов, l_t — линия рождения тора, l_u — линия разрушения тора, l_c — линия разрушения хаотического аттрактора, l_r — линии, ограничивающие область резонанса на торе 1:4, l_{dc} — линии кратных циклов, A — точка коразмерности 2, отвечающая условию $\psi = 1 : 4$

указанными линиями l_t и l_u. На рис. 11.7, *а–г* представлены проекции аттракторов на плоскость при прохождении точек бифуркаций удвоения двумерного тора. Об удвоении четко свидетельствует структура сечения Пуанкаре, а также анализ временных реализаций и их спектров мощности. Бифуркации удвоения периода тора здесь соответствует бифуркация удвоения периода модуляции (или бифуркация удвоения периода цикла в отображении Пуанкаре).

С точки зрения теории бифуркаций важным является ответ на вопрос, удваивается ли эргодический тор или вблизи точки бифуркации сначала имеет место резонанс на торе, удвоение резонансного цикла, из которого затем образуется удвоенный тор? Для ответа на этот вопрос производился расчет полного спектра показателей Ляпунова при прохождении точек бифуркаций удвоения тора.

Как видно из рис. 11.8, в точках бифуркаций (точки B, C, D) в ноль обращаются сразу три старших показателя Ляпунова ($\Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda_3 = 0$). Бифуркационный переход характеризуется следующим изменением сигнатуры спектра ляпуновских характеристических показателей:

$$\underset{\text{тор}_2}{0,0,-,-} \Longrightarrow \underset{\substack{\text{точка}\\ \text{бифуркации}}}{0,0,0,-} \Longrightarrow \underset{\text{тор}_2}{0,0,-,-}$$

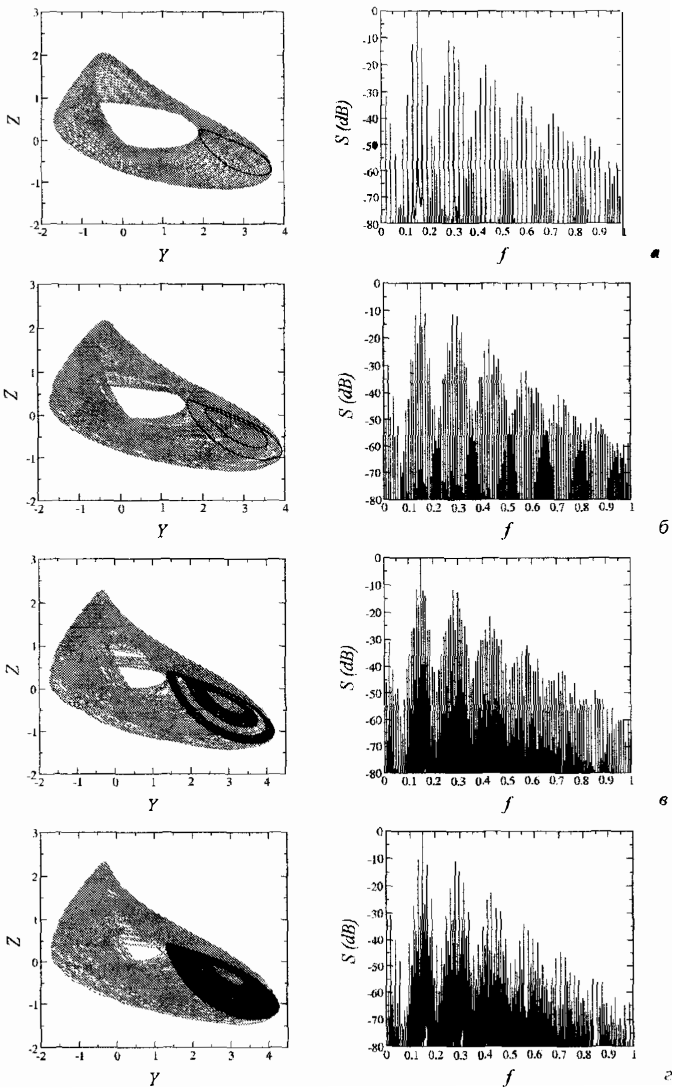


Рис. 11.7. Проекции аттракторов системы (11.11) и соответствующих сечений Пуанкаре на плоскость, а также их спектры мощности, при изменении параметра m для значений $d = 0.001$, $\gamma = 0.2$, $g = 0.5$

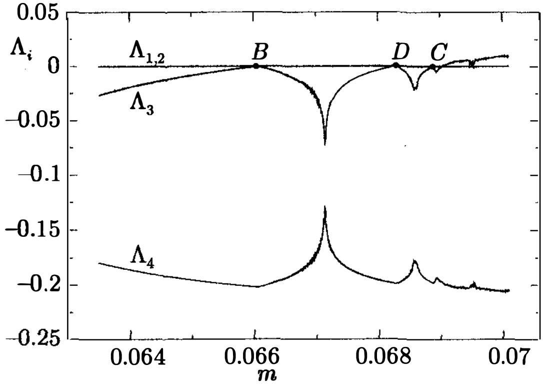


Рис. 11.8. График зависимости спектра показателей Ляпунова от параметра m ($d = 0.001$, $\gamma = 0.2$, $g = 0.5$) в области значений параметров между линиями l_t и l_u (B, C, D — точки бифуркаций удвоения тора)

Расчеты проводились с очень малым шагом по параметру m ($\Delta m = 3 \times 10^{-6}$) и свидетельствуют о том, что при прохождении точки бифуркации рождения предельного цикла (спектр показателей Ляпунова: $0, -, -, -$) не наблюдается! Бифуркацию удвоения периода претерпевает эргодический тор; резонансных циклов в численном эксперименте не наблюдается.

Приведенные выше данные вычислений убедительно доказывают, что введенная в рассмотрение система (11.11) в зависимости от значений управляющих параметров способна в автономном режиме реализовать устойчивые двухчастотные колебания с различными значениями числа вращения, демонстрировать каскад бифуркаций удвоения двумерных торов и переход к хаосу при разрушении тора.

11.6. Заключение

В лекции введена в рассмотрение модель генератора двухчастотных квазипериодических автоколебаний, которую можно рассматривать как одну из базовых моделей теории нелинейных колебаний. Модель представляет автономную систему четырех обыкновенных дифференциальных уравнений с четырьмя параметрами. Система реализует устойчивые квазипериодические колебания, которые с изменением параметра демонстрируют бифуркации удвоения тора и переходы к хаосу при разрушении двумерного тора. Предложенная модель может быть использована для детального изучения нелинейных свойств двухчастотных автоколебаний, таких, например, как синхронизация.

Лекция 12

Синхронизация периодических автоколебаний

12.1. Введение

Синхронизация — одно из фундаментальных свойств нелинейных систем, которое заключается в установлении определенных соотношений между характерными временами, частотами или фазами колебаний парциальных систем в результате их взаимодействия. Эффект синхронизации, открытый Гюйгенсом в XVII в., играет огромную роль в природе и технике. Большое влияние на создание теории синхронизации оказало развитие электронных средств связи в первой половине XX в. В дальнейшем была детально разработана ставшая классической теория синхронизации периодических автоколебаний, в том числе в присутствии шума.

В рамках классической теории различают *вынужденную синхронизацию*, т. е. синхронизацию автоколебаний внешним сигналом, и *взаимную синхронизацию*, наблюдающуюся при взаимодействии двух автоколебательных систем. В обоих случаях проявляются одни и те же эффекты, связанные с двумя классическими механизмами синхронизации: захватом собственных частот (и, соответственно, фаз) колебаний или же подавлением одной из двух независимых частот.

Пусть $\Phi_1(t)$ и ω_1 — фаза и частота одного квазигармонического автогенератора, а $\Phi_2(t)$ и ω_2 — фаза и частота другого, связанного с ним автогенератора. Условия синхронизации формулируются как

$$m\Phi_1(t) - n\Phi_2(t) = \text{const} \tag{12.1}$$

и

$$m\omega_1 = n\omega_2, \tag{12.2}$$

где m и n — целые числа. Условия (12.1, 12.2) определяют эффект захвата фаз и частот, который должен выполняться в некоторой области значений управляющих параметров, называемой областью синхронизации. Простейший случай $1:1$ ($m = n = 1$) соответствует основной области синхронизации или области синхронизации на основном тоне.

Явление синхронизации автоколебаний в рамках хорошо разработанной теории синхронизации периодических колебаний уже многие годы привлекает особое внимание исследователей. Отчасти это обусловлено важностью данного явления с точки зрения практических приложений. В качестве примера можно привести синхронизацию электронных часов внешним воздействием высокостабильного генератора, в результате которой обеспечивается высокая точность времени в системе транспорта. Синхронизация мощных генераторов периодических колебаний с помощью слабого воздействия от внешнего высокостабильного генератора позволяет существенно улучшить их характеристики, такие как стабильность частоты, флуктуации амплитуды и фазы и другие.

В последние годы интерес к эффекту синхронизации проявляют биологи, химики и даже представители социальных и экономических наук. Отмечено синхронное поведение взаимодействующих клеток живой ткани, ансамблей нейронов, биологических популяций и т. д. Однако весьма существенно при исследовании этих проблем то, что анализируемые колебательные процессы здесь не всегда являются строго периодическими. Естественно, возникают многие вопросы о применимости классической теории синхронизации к такого рода колебательным процессам, ответы на некоторые из них мы дадим в лекциях 13, 14 и 17–19.

В настоящей лекции мы детально ознакомимся с классической теорией синхронизации периодических автоколебаний внешним гармоническим воздействием на примере неавтономного генератора Ван дер Поля. Этот эффект проявляется в том, что при определенных условиях генератор подстраивает свой ритм под частоту воздействия. При этом амплитуда воздействия может быть достаточно малой величиной, существенно меньше амплитуды колебаний автономного генератора. В простейшем случае генератор совершает колебания на частоте внешней силы, когда она меняется в конечной окрестности собственной частоты автономного генератора, в так называемой основной области синхронизации.

Мы ограничимся описанием только основной области синхронизации неавтономного осциллятора Ван дер Поля, используя фазовое уравнение, укороченные уравнения для амплитуды и фазы и полное неавтономное уравнение Ван дер Поля.

12.2. Внешняя синхронизация генератора Ван дер Поля. Укороченные уравнения для амплитуды и фазы

Рассмотрим уравнение генератора Ван дер Поля при внешнем гармоническом воздействии в форме:

$$\ddot{x} - \left(\varepsilon - x^2\right)\dot{x} + x = b\sin\omega t, \qquad (12.3)$$

где ε — управляющий параметр автономного генератора, b, ω — амплитуда и частота аддитивного внешнего воздействия.

Перепишем уравнение (12.3) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + x &= \left(\varepsilon - x^2\right)\dot{x} + b\sin\omega t, \\ \ddot{x} + \omega^2 x &= \left(\omega^2 - 1\right)x + \left(\varepsilon - x^2\right)\dot{x} + b\sin\omega t. \end{aligned} \tag{12.4}$$

Если частота внешнего воздействия близка к собственной частоте автономного генератора ($\omega \sim 1$), параметр возбуждения ε является малой положительной величиной и внешнее воздействие слабое (амплитуда b — малая величина), то правая часть уравнения (12.4) представляет собой малое возмущение гармонического осциллятора с частотой ω и неавтономный генератор является квазигармонической или слабонелинейной системой. В этом случае решение уравнения (12.4) можно искать в виде[1]:

$$x(t) = \mathrm{Re}\big(a(t)\exp(i\omega t)\big) = \frac{1}{2}\big(a\exp(i\omega t) + a^*\exp(-i\omega t)\big) \tag{12.5}$$

с дополнительным условием

$$\dot{a}\exp(i\omega t) + \dot{a}^*\exp(-i\omega t) = 0. \tag{12.6}$$

С учетом дополнительного условия запишем первую и вторую производную:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{1}{2}\Big[\dot{a}\exp(i\omega t) + \dot{a}^*\exp(-i\omega t) + i\omega a\exp(i\omega t) - i\omega a^*\exp(-i\omega t)\Big] = \\ &= \frac{1}{2}\Big[i\omega a\exp(i\omega t) - i\omega a^*\exp(-i\omega t)\Big], \\ \ddot{x} &= \frac{1}{2}\Big[i\omega\dot{a}\exp(i\omega t) - i\omega\dot{a}^*\exp(-i\omega t) - \omega^2 a\exp(i\omega t) - \omega^2 a^*\exp(-i\omega t)\Big] = \\ &= i\omega\dot{a}\exp(i\omega t) - \frac{\omega^2}{2}\Big[a\exp(i\omega t + a^*\exp(-i\omega t)\Big]. \end{aligned}$$

Подставив $\ddot{x}, \dot{x}, x$ в уравнение (12.4) и выразив $\sin(\omega t)$ через экспоненты, получим

$$i\omega\dot{a}\exp(i\omega t) = \frac{\omega^2 - 1}{2}\Big[a\exp(i\omega t) + a^*\exp(-i\omega t)\Big] +$$

[1] Такое представление аналогично замене переменных $x = \rho(t)\cos(\omega t + \varphi(t))$, $\dot{x} = -\omega\rho(t)\sin(\omega t + \varphi(t))$, где $\rho(t) = |a(t)|$, $\varphi(t) = \mathrm{Arg}\,a(t)$, которую также широко используют в методе усреднения Ван дер Поля.

$$+\frac{i\omega}{2}\left[\varepsilon-\frac{1}{4}\Big(a^2\exp(2i\omega t)+2|a|^2+(a^*)^2\exp(-2i\omega t)\Big)\right]\times$$
$$\times\Big(a\exp(i\omega t)-a^*\exp(-i\omega t)\Big)+\frac{b}{2i}\Big(\exp(i\omega t)-\exp(-i\omega t)\Big),$$
$$\dot{a}=\frac{\omega^2-1}{2i\omega}\Big[a+a^*\exp(-2i\omega t)\Big]+$$
$$+\left[\frac{\varepsilon}{2}-\frac{1}{8}\Big(a^2\exp(2i\omega t)+2|a|^2+(a^*)^2\exp(-2i\omega t)\Big)\right]\times$$
$$\times\Big(a-a^*\exp(-2i\omega t)\Big)-\frac{b}{2\omega}\Big(1-\exp(-2i\omega t)\Big).$$

Далее, раскрывая скобки и усредняя за период $T=2\pi/\omega$ правую и левую части уравнения, получим укороченное уравнение для комплексной амплитуды

$$\dot{a}=-i\frac{\omega^2-1}{2\omega}a+\frac{\varepsilon}{2}a-\frac{1}{8}|a|^2a-\frac{b}{2\omega}. \qquad (12.7)$$

Представляя комплексную величину в полярных координатах

$$a(t)=\rho(t)\exp(rmi\varphi(t)), \qquad (12.8)$$

получим укороченные уравнения для амплитуды и разности фаз колебаний генератора и внешней силы:

$$\dot{\rho}=\frac{\varepsilon}{2}\rho-\frac{1}{8}\rho^3-\beta\cos\varphi, \qquad (12.9)$$

$$\dot{\varphi}=-\Delta+\frac{\beta}{\rho}\sin\varphi, \qquad (12.10)$$

где $\Delta=\dfrac{\omega^2-1}{2\omega}$ характеризует расстройку между частотой внешнего воздействия и собственной частотой генератора, а $\beta=\dfrac{b}{2\omega}$ — интенсивность внешнего воздействия.

Синхронизация — подстройка частоты генератора к частоте внешней силы — возможна и при очень слабом воздействии. В этом случае возмущение амплитуды является малым, а существенным является возмущение фазы. Процесс синхронизации может быть описан в фазовом приближении.

Предположим, что в системе укороченных уравнений для амплитуды и фазы (12.9), (12.10) амплитуда внешнего воздействия β является малой величиной. Амплитуда колебаний $\rho(t)$ под внешним воздействием существенно не изменилась по сравнению с амплитудой автоколебаний автономного генератора. То есть амплитуда $\rho(t)$ практически соответствует радиусу предельного цикла автономного генератора и может быть найдена из уравнения

$$\dot{\rho} = \frac{\varepsilon}{2}\rho - \frac{1}{8}\rho^3. \tag{12.11}$$

Стационарным значениям амплитуды ($\dot{\rho} = 0$) соответствуют состояния равновесия (особые точки или неподвижные точки) уравнения (12.11). Интегрируя дифференциальное уравнение (12.11), можно получить функцию $\rho(t)$, соответствующую переходному процессу из некоторого начального состояния $\rho(0)$ к стационарному состоянию $\rho_{\text{ст}}$.

Определим состояния равновесия и их устойчивость. В состоянии равновесия (или в неподвижной точке) производная $\dot{\rho} = 0$. Тогда правая часть дифференциального уравнения (12.11) равна нулю, и получаем алгебраическое уравнение для неподвижных точек

$$\frac{\varepsilon}{2}\rho - \frac{1}{8}\rho^3 = 0, \tag{12.12}$$

из которого находим три неподвижные точки P_1, P_2, P_3 с координатами

$$\rho_1 = 0, \tag{12.13}$$

$$\rho_{2,3} = \pm\sqrt{4\varepsilon} \tag{12.14}$$

соответственно.

Первая неподвижная точка P_1 $[\rho_1 = 0]$ существует при любых значениях параметра ε, а две других $P_{2,3}$ $\left[\rho_{2,3} = \pm\sqrt{4\varepsilon}\right]$ – только при $\varepsilon \geqslant 0$. При $\varepsilon = 0$ все три точки сливаются в одну. В автономном осцилляторе Ван дер Поля на фазовой плоскости $(x, \dot{x})$ решение $\rho_1 = 0$ отвечает неподвижной точке, расположенной в начале координат. Решения $\rho_{2,3} = \pm\sqrt{4\varepsilon}$ отвечают радиусу предельного цикла, который возникает при переходе через бифуркационное значение $\varepsilon = 0$ и растет пропорционально $\sqrt{\varepsilon}$.

Устойчивость неподвижных точек P_1, P_2, P_3 системы (12.11) определяется собственным значением

$$\mu = \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\varepsilon}{2}\rho - \frac{1}{8}\rho^3\right)_{\rho=\rho_i}, \tag{12.15}$$

которое представляет собой производную по динамической переменной от правой части уравнения (12.11), вычисленную в неподвижной точке P_i с координатой $\rho_i (i = 1, 2, 3)$. Для неподвижной точки P_1 $[\rho_1 = 0]$ получаем

$\mu_1 = \varepsilon/2$. Следовательно, при $\varepsilon < 0$ собственное значение μ_1 отрицательное и точка P_1 устойчива. При $\varepsilon > 0$ собственное значение μ_1 положительное и точка P_1 неустойчива. Для неподвижных точек $P_{2,3}$ $\left[\rho_{2,3} = \pm\sqrt{4\varepsilon}\right]$ собственные значения одинаковые и равны

$$\mu_{2,3} = \frac{\varepsilon}{2} - \frac{3}{8}\rho_i^2 = \frac{\varepsilon}{2} - \frac{3}{2}\varepsilon = -\varepsilon.$$

Следовательно, при $\varepsilon > 0$ рождаются устойчивые неподвижные точки $P_{2,3}$ $\left[\rho_{2,3} = \pm\sqrt{4\varepsilon}\right]$. Непосредственно для системы (12.11) изложенное выше соответствует бифуркации вил, и уравнение (12.11) представляет собой нормальную форму суперкритической «бифуркации вил».

Бифуркационная диаграмма, представленная на рис. 12.1, показывает, что при $\varepsilon < 0$ существует одна устойчивая неподвижная точка P_1 $[\rho_1 = 0]$. При переходе через бифуркационное значение $\varepsilon = 0$ точка P_1 теряет устойчивость и в ее окрестности рождается пара устойчивых симметричных друг другу неподвижных точек P_2, P_3, координаты которых меняются с ростом управляющего параметра пропорционально корню из надкритичности:

$$\rho_{2,3} = \pm\sqrt{4\varepsilon}.$$

Уравнение типа (12.11) в комплексном виде представляет собой нормальную форму суперкритической бифуркации Андронова – Хопфа[2].

В автономном генераторе Ван дер Поля на фазовой плоскости $(x, \dot{x})$ при вариации управляющего параметра ε будут наблюдаться следующие перестройки фазовых портретов. При $\varepsilon < 0$ имеется одна устойчивая точка равновесия, расположенная в начале координат. С увеличением параметра ε при переходе через ноль состояние равновесия теряет устойчивость. В его окрестности рождается устойчивый предельный цикл, радиус которого растет пропорционально корню из надкритичности $\rho_{\text{ст}} = \sqrt{4\varepsilon}$ (где $\rho_{\text{ст}}$ — радиус предельного цикла или стационарное значение амплитуды автоколебаний).

Для того чтобы описать процесс установления стационарной амплитуды автоколебаний, проинтегрируем дифференциальное уравнение (12.11). Разделим обе части уравнения на ρ^3 и умножим на -2.

$$\frac{-2}{\rho^3}\frac{d\rho}{dt} = -\varepsilon\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{4}. \tag{12.16}$$

[2] Строго говоря, нормальная форма суперкритической бифуркации вил и суперкритической бифуркации Андронова – Хопфа имеют следующий вид: $\dot{x} = mx - x^3$ и $\dot{z} = (m + i\omega)z - z|z|^2$ соответственно.

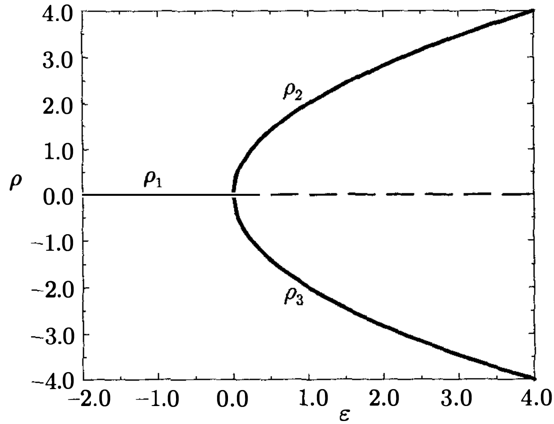


Рис. 12.1. Диаграмма суперкритической бифуркации вил

Перепишем это уравнение в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho^2}\right) = -\varepsilon\left(\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{4\varepsilon}\right). \tag{12.17}$$

Сделав замену переменных

$$r = \frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{4\varepsilon}, \tag{12.18}$$

получим

$$\frac{dr}{dt} = -\varepsilon r. \tag{12.19}$$

Решение уравнения имеет вид

$$r(t) = C\exp(-\varepsilon t). \tag{12.20}$$

Константу C определим из начальных условий. При $t = 0$ получим $r(0) = r_0 = C$ или

$$C = r_0 = \frac{1}{\rho_0^2} - \frac{1}{4\varepsilon},$$

где ρ_0 — значение амплитуды автоколебаний в начальный момент времени.

Перепишем решение для исходной переменной ρ

$$\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{4\varepsilon} = \left[\frac{1}{\rho_0^2} - \frac{1}{4\varepsilon}\right] \exp(-\varepsilon t). \tag{12.21}$$

Напомним, что стационарное значение амплитуды автоколебаний равно $\rho_{\text{ст}} = \sqrt{4\varepsilon}$. С учетом этого перепишем решение в виде

$$\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{\rho_{\text{ст}}^2} = \left[\frac{1}{\rho_0^2} - \frac{1}{\rho_{\text{ст}}^2}\right] \exp(-\varepsilon t),$$

$$\frac{\rho_{\text{ст}}^2}{\rho^2} - 1 = \left[\frac{\rho_{\text{ст}}^2}{\rho_0^2} - 1\right] \exp(-\varepsilon t),$$

$$\rho(t) = \frac{\rho_{\text{ст}}}{\sqrt{\left[\dfrac{\rho_{\text{ст}}^2}{\rho_0^2} - 1\right] \exp(-\varepsilon t) + 1}}. \tag{12.22}$$

Данное выражение определяет процесс установления амплитуды автоколебаний в автономном генераторе Ван дер Поля. При возрастании времени в системе устанавливается стационарное значение $\rho(t) \to \rho_{\text{ст}} = \sqrt{4\varepsilon}$.

На рис. 12.2 проиллюстрирован процесс установления стационарной амплитуды автоколебаний при различных начальных значениях ρ_0.

12.3. Анализ синхронизации в фазовом приближении

Вернемся к укороченным уравнениям для амплитуды и фазы (12.9), (12.10). При слабом внешнем гармоническом воздействии полагаем, что амплитуда $\rho(t)$ соответствует радиусу предельного цикла автономного генератора $\rho(t) = \rho_{\text{ст}} = \sqrt{4\varepsilon}$, и процесс синхронизации может быть описан в фазовом приближении

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\Delta + \frac{\beta}{\sqrt{4\varepsilon}} \sin(\varphi). \tag{12.23}$$

Уравнение (12.23) описывает одну динамическую переменную φ, и, соответственно, размерность фазового пространства равна единице. Динамику системы можно представлять либо на действительной оси от $-\infty$ до $+\infty$, либо на окружности радиуса $\rho_{\text{ст}} = \sqrt{4\varepsilon}$, учитывая периодичность функции

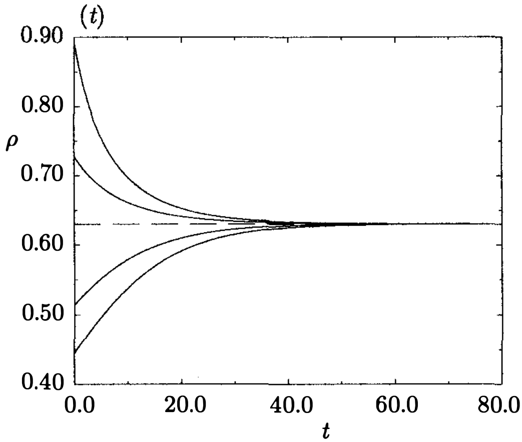


Рис. 12.2. Процесс установления стационарного значения амплитуды автоколебаний при различных начальных значениях ρ_0, для $\varepsilon = 0.1$

$\sin\varphi$. Поведение системы зависит от параметров $\Delta, \beta, \varepsilon$, которые характеризуют расстройку между частотой внешнего воздействия и частотой автономного генератора (Δ), амплитуду внешнего воздействия (β) и поведение автономного генератора (ε).

Рассмотрим динамику фазы в зависимости от расстройки Δ и амплитуды внешнего воздействия β при фиксированном значении параметра ε, отвечающем квазигармоническим колебаниям автономного генератора.

На рис. 12.3 построены зависимости фазы φ от времени t при $\varepsilon = 0.1$, $\beta = 0.01$ и различных значениях параметра расстройки. При малых значениях расстройки фаза не меняется во времени, оставаясь постоянной величиной (линии 5 и 6 при $\Delta = \mp 0.03$). С увеличением расстройки по частоте, когда $|\Delta|$ превышает некоторое критическое значение $|\Delta_c|$, происходит качественное изменение в поведении фазы $\varphi(t)$. Ее величина начинает меняться во времени.

В зависимости от знака параметра Δ (если частота внешнего воздействия больше (меньше) собственной частоты генератора) величина фазы $\varphi(t)$ либо уменьшается, либо нарастает во времени. При малой надкритичности $|\Delta - \Delta_c|$ во временной реализации $\varphi(t)$ можно выделить продолжительные интервалы, в течение которых фаза остается практически постоянной, чередующиеся с короткими интервалами, во время которых происходит изменение фазы на 2π. С ростом надкритичности $|\Delta - \Delta_c|$ интервалы постоянства фазы уменьшаются, средняя скорость изменения фазы увеличивается.

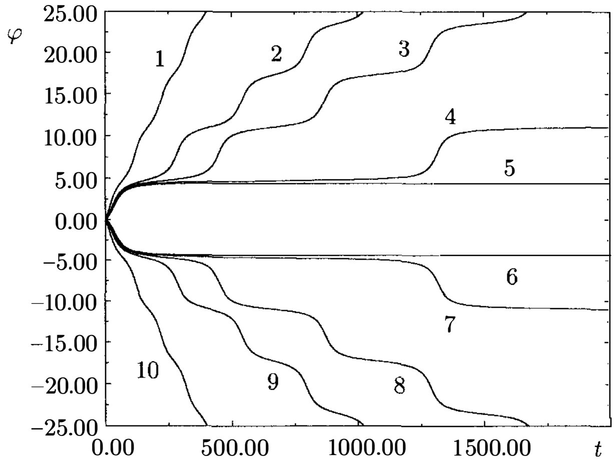


Рис. 12.3. Графики зависимости фазы φ от времени t при $\varepsilon = 0.1, \beta = 0.01$ и различных значениях параметра расстройки. Линии 1 и 10 соответствуют $\Delta = \mp 0.07$; 2 и 9 — $\Delta = \mp 0.04$; 3 и 8 — $\Delta = \mp 0.035$; 4 и 7 — $\Delta = \mp 0.032$; 5 и 6 — $\Delta = \mp 0.03$

Таким образом, существует интервал значений расстройки $|\Delta| < \Delta_c$, где фаза не меняется ($\varphi(t) = \mathrm{const}$), ее производная (скорость изменения фазы) равна нулю. Это означает, что генератор совершает периодические колебания на частоте внешнего воздействия, наблюдается явление синхронизации. За пределами интервала синхронизации фаза меняется во времени, колебания становятся квазипериодическими. Средняя скорость изменения фазы $\langle \dot{\varphi}(t) \rangle$ определяет вторую независимую частоту — частоту биений. Из рис. 12.3 видно, что при малой надкритичности средняя скорость изменения фазы очень низкая, что соответствует очень малой частоте биений. С ростом надкритичности происходит увеличение частоты биений.

При фазовом описании синхронным движениям отвечают состояния равновесия или неподвижные точки динамической системы (12.23). Режимы синхронизации должны соответствовать устойчивым состояниям равновесия. Для системы (12.23) найдем состояния равновесия, определим их область существования по параметрам, исследуем устойчивость и бифуркации неподвижных точек при изменении параметров системы.

Неподвижные точки системы (12.23) будем представлять в одномерном фазовом пространстве на окружности радиуса $\rho_{\text{ст}} = \sqrt{4\varepsilon}$, построенной на плоскости с координатами $\rho\sin(\varphi), \rho\cos(\varphi)$ (см. рис. 12.4).

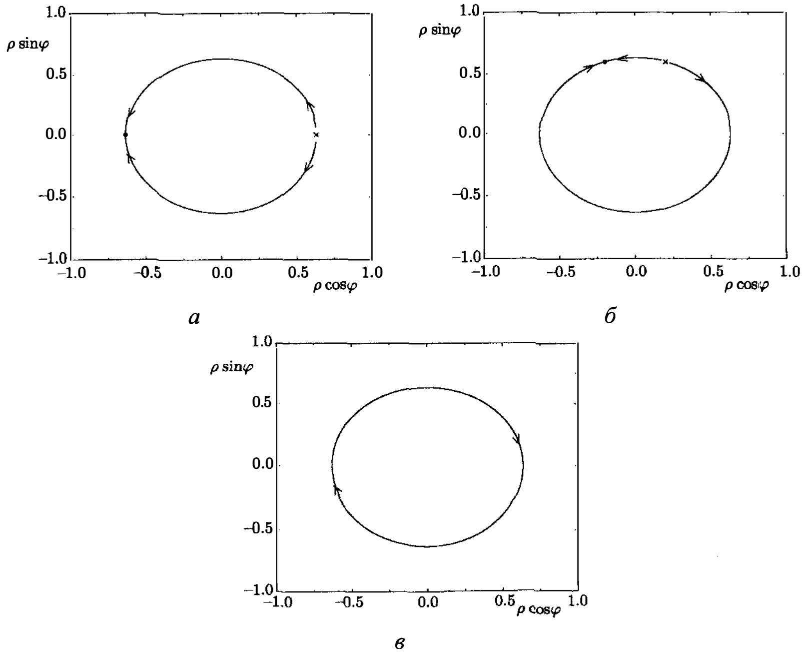


Рис. 12.4. Фазовые портреты системы (12.23) при $\varepsilon \approx 0.1, \beta = 0.01$ и различных значениях параметра расстройки: *а* — $\Delta = 0$; *б* — $\Delta = 0.03$; *в* — $\Delta = 0.032$. Символами ($\bullet$) и ($\times$) показаны устойчивая и неустойчивая точки, соответственно

Условием существования состояний равновесия является равенство нулю правой части уравнения (12.23)

$$-\Delta + \frac{\beta}{\sqrt{4\lambda}} \sin(\varphi) = 0. \qquad (12.24)$$

Из (12.24) находим две неподвижные точки с координатами

$$\varphi_1 = \arcsin \frac{\Delta\sqrt{4\varepsilon}}{\beta}, \qquad (12.25)$$

$$\varphi_2 = \pi - \arcsin \frac{\Delta\sqrt{4\varepsilon}}{\beta}. \qquad (12.26)$$

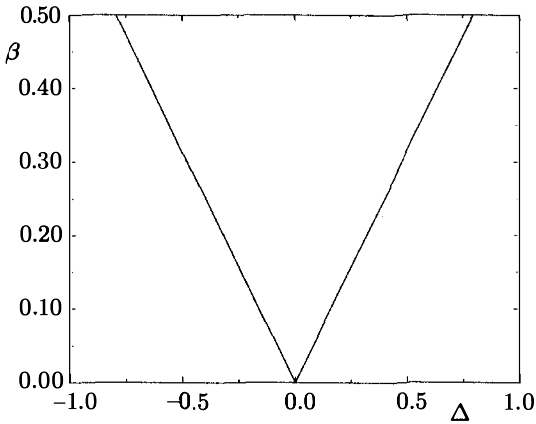


Рис. 12.5. Область синхронизации на плоскости управляющих параметров при $\varepsilon = 0.1$

Они существуют, если $\left|\frac{\Delta\sqrt{4\varepsilon}}{\beta}\right| \leqslant 1$ или $|\Delta| \leqslant \frac{\beta}{\sqrt{4\varepsilon}}$. Следовательно, при фиксированном ε границы области существования неподвижных точек на плоскости параметров (β, Δ) определяет линия, заданная уравнением

$$\beta = \sqrt{4\varepsilon}\,|\Delta|\,. \tag{12.27}$$

Область синхронизации, границы которой определяет уравнение (12.27), построены на рис. 12.5.

Исследуем устойчивость неподвижных точек. Рассмотрим поведение системы (12.23) в окрестности неподвижных точек $\varphi_i (i = 1, 2)$ в линейном приближении. Представим динамическую переменную в виде $\varphi(t) = \varphi_i + \tilde{\varphi}(t)$, где $\tilde{\varphi}(t)$ характеризует малое отклонение от состояния равновесия φ_i. Перепишем уравнение (12.23) следующим образом:

$$\frac{d}{dt}\,(\varphi_i + \tilde{\varphi}) = -\Delta + \frac{\beta}{\sqrt{4\varepsilon}}\sin\,(\varphi_i + \tilde{\varphi}),$$

$$\frac{d\tilde{\varphi}}{dt} = -\Delta + \frac{\beta}{\sqrt{4\varepsilon}}\,(\sin\varphi_i\cos\tilde{\varphi} + \sin\tilde{\varphi}\cos\varphi_i).$$

Раскладывая $\cos\tilde{\varphi}$ и $\sin\tilde{\varphi}$ в ряд Тейлора и учитывая слагаемые не выше первого порядка малости по $\tilde{\varphi}$, получим следующее линеаризованное уравнение:

$$\frac{d\tilde{\varphi}}{dt} = -\Delta + \frac{\beta}{\sqrt{4\varepsilon}}(\sin\varphi_i + \tilde{\varphi}\cos\varphi_i).$$

Из определения неподвижной точки следует, что

$$-\Delta + \frac{\beta}{\sqrt{4\varepsilon}}\sin\varphi_i = 0.$$

В результате получаем уравнение

$$\frac{d\tilde{\varphi}}{dt} = \left(\frac{\beta}{\sqrt{4\varepsilon}}\cos\varphi_i\right)\tilde{\varphi}, \tag{12.28}$$

решение которого имеет вид

$$\tilde{\varphi}(t) \sim \exp\left[\left(\frac{\beta}{\sqrt{4\varepsilon}}\cos(\varphi_i)\right) \times t\right]. \tag{12.29}$$

Таким образом, устойчивость состояний равновесия зависит от знака $\cos\varphi_i$. Если $\cos\varphi_i > 0$, то малое отклонение $\tilde{\varphi}(t)$ нарастает во времени, и состояние равновесия φ_i является неустойчивым. Если $\cos\varphi_i < 0$, то малое отклонение затухает во времени, и состояние равновесия является устойчивым. Из выражения для координат неподвижных точек (12.25), (12.26) следует, что $\cos\varphi_1 > 0$ и неподвижная точка φ_1 неустойчивая. Точка φ_2 является устойчивой, поскольку $\cos\varphi_2 < 0$.

На рис. 12.4, *а,б* показана устойчивая и неустойчивая неподвижные точки в фазовом пространстве системы при различных значениях параметра Δ. Как видно из выражений (12.25) и (12.26), при $\Delta = 0$ координата неустойчивой точки равна $\varphi_1 = 0$, а координата устойчивой точки равна $\varphi_2 = \pi$ (рис. 12.4, *а*). При увеличении расстройки, когда $\dfrac{\Delta\sqrt{4\varepsilon}}{\beta}$ стремится к единице, неустойчивая и устойчивая неподвижные точки перемещаются по окружности навстречу друг другу: неустойчивая — против часовой стрелки, устойчивая — по часовой. При $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ они сливаются и затем исчезают, когда $\dfrac{\Delta\sqrt{4\varepsilon}}{\beta}$ превышает единицу (рис. 12.4, *в*). Исчезновение неподвижных точек происходит при выходе из области синхронизации. Изображающая точка совершает вращательное движение по окружности, средняя скорость которого $\langle\dot{\varphi}(t)\rangle$ определяет частоту биений.

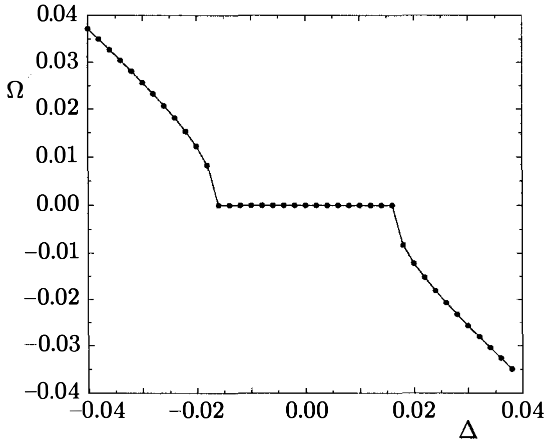


Рис. 12.6. График зависимости $\Omega = \langle \dot{\varphi}(t) \rangle$ от расстройки по частоте Δ системы (12.23) при $\beta = 0.01$ и $\varepsilon = 0.1$

На рис. 12.6 построена зависимость $\Omega = \langle \dot{\varphi}(t) \rangle$ от расстройки по частоте Δ системы (12.23) при $\beta = 0.01$ и $\varepsilon = 0.1$. Частота $\Omega(t)$ представляет собой разность средней частоты автоколебаний и частоты внешнего воздействия. Ее также называют *частотой биений*. Интервал значений Δ, где $\Omega = 0$, соответствует области синхронизации, за пределами которой наблюдаются биения с частотой Ω.

12.4. Бифуркационный анализ системы укороченных уравнений

Фазовое описание явления синхронизации с помощью уравнения (12.23) допустимо только при очень слабом внешнем воздействии, когда возмущением амплитуды колебаний автономного генератора можно пренебречь. Появление или исчезновение синхронизации связано с бифуркацией рождения или исчезновения устойчивой и неустойчивой неподвижных точек в одномерном фазовом пространстве. На плоскости управляющих параметров (β, Δ) имеется «язык» синхронизации, границы которого заданы прямыми линиями $\beta = \sqrt{4\varepsilon}\,|\Delta|$, на которых и происходит указанная единственная бифуркация для двух неподвижных точек. Учет амплитудного уравнения, то есть рассмотрение системы укороченных уравнений для амплитуды и фазы (12.9), (12.10) приводит к более сложным бифуркационным явлениям на плоскости управляющих параметров (β, Δ).

Для системы укороченных уравнений (12.9), (12.10) режимам синхронизации также отвечают состояния равновесия $\varphi(t) = \mathrm{const}$ и $\rho(t) = \mathrm{const}$, но уже на фазовой плоскости с координатами $\rho \sin\varphi$ и $\rho\cos\varphi$. На рис. 12.7 на плоскости управляющих параметров (β, Δ) при фиксированном $\varepsilon = 0.1$ построены области синхронизации и линии различных бифуркаций синхронных движений.

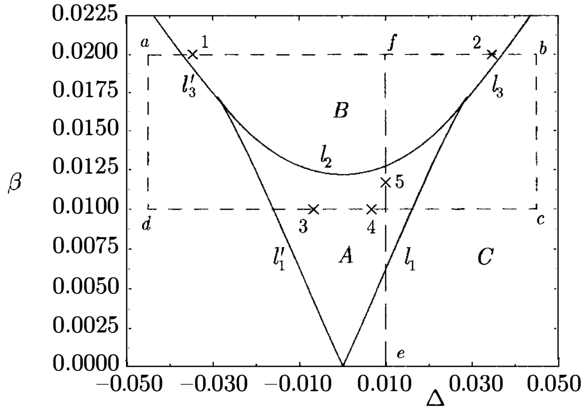


Рис. 12.7. Линии бифуркационных значений устойчивых и неустойчивых состояний равновесия системы укороченных уравнений (12.9), (12.10) на плоскости управляющих параметров (β, Δ) при фиксированном значении $\varepsilon = 0.1$

Режим синхронизации существует при значениях параметров из области A и области B, которые окружает область C квазипериодических движений. В области A на фазовой плоскости имеется три неподвижных точки: устойчивый узел P_N (именно эта точка отвечает режиму синхронизации), седловая точка P_S и неустойчивая точка P_R, которая в зависимости от значений β и Δ может быть либо неустойчивым узлом (репеллером), либо неустойчивым фокусом. На рис. 12.8, *а* представлен фазовый портрет, характерный для области синхронизации A. В области B режиму синхронизации также отвечает устойчивая неподвижная точка P_N, однако структура фазового пространства стала принципиально иной (рис. 12.8, *б*). Здесь отсутствуют неустойчивые точки P_R и P_S. Область C соответствует квазипериодическим режимам, которым в системе укороченных уравнений (12.9), (12.10) отвечает устойчивый предельный цикл C (рис. 12.8, *в*). На фазовом портрете системы помимо устойчивого предельного цикла C имеется неустойчивый фокус P_R.

Рассмотрим бифуркации характерных режимов системы при движении по плоскости параметров (β, Δ) на рис. 12.7.

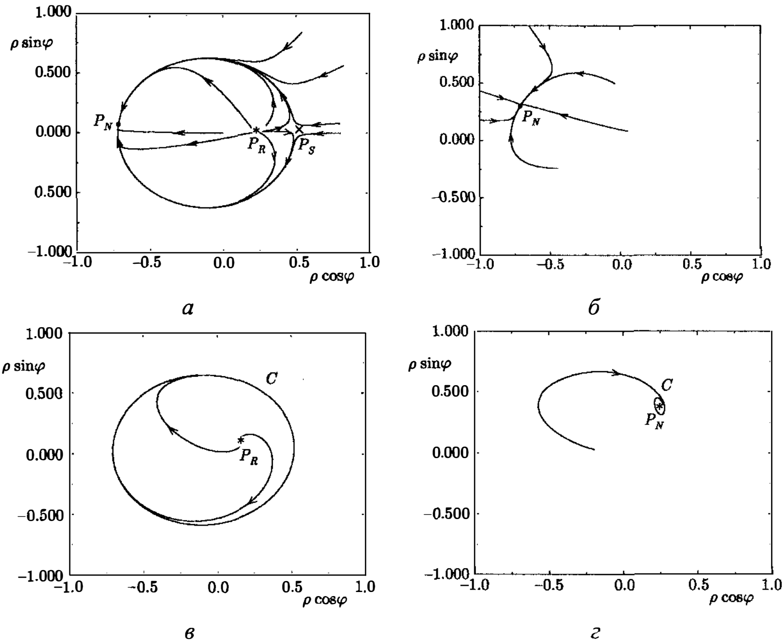


Рис. 12.8. Характерные фазовые портреты системы (12.9)–(12.10) при $\varepsilon = 0.1$ и параметрах внешнего воздействия β и Δ из областей A, B и C на рис. 12.1, а именно: *а* – $\beta = 0.01, \Delta = 0.001$ (область A); *б* – $\beta = 0.02, \Delta = 0.01$ (область B); *в* – $\beta = 0.01, \Delta = 0.03$ (область C); *г* – $\beta = 0.02, \Delta = 0.037$ (область C)

На рис. 12.9 построена бифуркационная диаграмма в зависимости от параметра расстройки Δ при фиксированном $\beta = 0.01$. На плоскости параметров (β, Δ) это соответствует перемещению вдоль линии dc. При малой расстройке Δ (в интервале между точками 3 и 4, отмеченными символами «$\times$» на рис. 12.7 и 12.9) неподвижная точка P_R является неустойчивым узлом (репеллером). Фазовый портрет системы для рассматриваемой ситуации показан на рис. 12.8, *а*. С увеличением или уменьшением Δ при переходе через точки 3 и 4 репеллер превращается в неустойчивый фокус. При дальнейшем изменении Δ, включая и выход из области A при пересечении линий l_1 и l_1', неустойчивый фокус P_R никаких бифуркаций не претерпевает. Нарушение режима синхронизации определяет поведение неподвижных

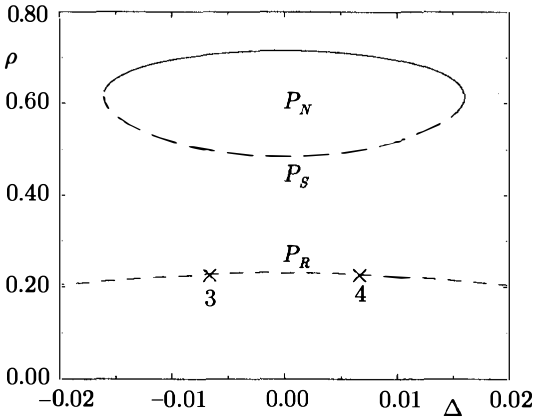


Рис. 12.9. Бифуркационная диаграмма для неподвижных точек P_N, P_S и P_R системы (12.9)–(12.10) при изменении параметра расстройки Δ и фиксированных значениях $\beta = 0.01$ и $\varepsilon = 0.1$

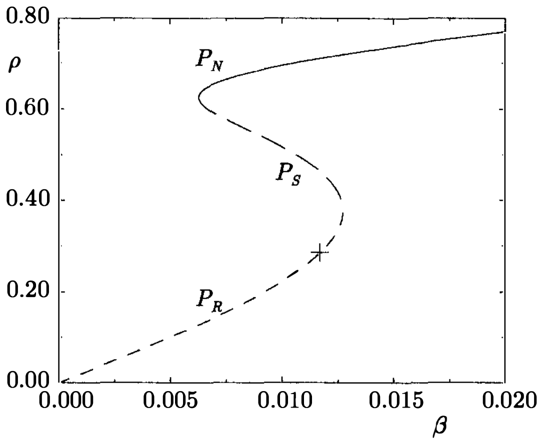


Рис. 12.10. Бифуркационная диаграмма для неподвижных точек системы (12.9), (12.10) при изменении параметра β и фиксированных значениях $\Delta = 0.01$ и $\varepsilon = 0.1$

точек P_N и P_S. На фазовом портрете неустойчивые многообразия седла P_S замыкаются на устойчивый узел P_N. С увеличением Δ седло и устойчивый узел сближаются и на границе l_1 сливаются в седло-узел. Далее происходит бифуркация рождения устойчивого предельного цикла при исчезновении сложной особой точки типа седло-узла. Предельный цикл возникает «жестко» и сразу же за бифуркационной точкой имеет конечный радиус (рис. 12.8, *в*). Вблизи бифуркационной точки соответствующие колебания конечной амплитуды имеют очень большой период. В исходной системе для переменной $x(t)$ это будет соответствовать жесткому возникновению медленных биений. Рассмотренные бифуркации на границе областей A и C определяют как механизм синхронизации через захват. Область A языка синхронизации также называют областью захвата.

На рис. 12.10 построена бифуркационная диаграмма для неподвижных точек системы (уравнения (12.9) и (12.10)) при изменении параметра β и фиксированном значении $\Delta = 0.01$. На плоскости параметров (β, Δ) (рис. 12.7) это соответствует перемещению вдоль линии ef. В области C ниже линии l_1 на фазовой плоскости имеется устойчивый предельный цикл C и расположенный внутри него неустойчивый фокус P_R. С ростом амплитуды внешнего воздействия β неустойчивый фокус P_R перемещается по фазовой плоскости. При пересечении линии l_1 с ним никаких бифуркаций не происходит. На границе области синхронизации предельный цикл C исчезает, рождается сложная особая точка седло-узел. Выше линии l_1 устойчивый узел P_N и седло P_S расходятся на фазовой плоскости. С увеличением β за точкой, отмеченной символом «$\times$», неустойчивый фокус P_R превращается в неустойчивый узел и сближается с седлом P_S. При пересечении линии l_2 происходит седло-узловая бифуркация, в результате которой неустойчивый узел P_R и седло P_S сливаются и исчезают. На фазовой плоскости остается одна особая точка — устойчивый узел P_N, который в области B на рис. 12.7 продолжает отвечать режиму вынужденной синхронизации генератора Ван дер Поля. Область B языка синхронизации называется областью подавления. Механизм нарушения (или возникновения) синхронизации здесь иной, чем на границе областей A и C.

На рис. 12.11 построена бифуркационная диаграмма неподвижной точки P_N при изменении параметра Δ и фиксированном значении $\beta = 0.02$. На плоскости параметров (β, Δ) (см. рис. 12.7) это соответствует перемещению вдоль линии ab. В интервале значений расстройки, ограниченном точками 1 и 2, состояние равновесия P_N является устойчивым узлом. За точкой 2 до пересечения линии l_3 устойчивый узел превращается в устойчивый фокус. При пересечении линии l_3 происходит суперкритическая бифуркация Андронова–Хопфа. Точка P_N теряет устойчивость. Из неустойчивого фокуса в его окрестности рождается устойчивый предельный цикл, радиус которого увеличивается пропорционально корню из надкритичности. Соответствующий фазовый портрет показан на рис. 12.8, *г*. Во временной реализации $x(t)$ генератора Ван дер Поля при внешнем воздействии это соответствует мягкому возникновению биений. Вторая независимая мода квазипериодических движений нарастает плавно от нуля. При обратном движении по параметру при входе в область B происходит полное подавление автоколебательной моды и система совершает колебания на частоте внешнего воздействия, что возможно только при больших амплитудах внешней силы.

На рис. 12.12 построена зависимость $\Omega = \langle\dot{\varphi}(t)\rangle$ от расстройки по частоте Δ для системы укороченных уравнений (12.9)–(12.10) при $\varepsilon = 0.1$ и $\beta = 0.01$. Горизонтальный участок соответствует области синхронизации, когда $\Omega = 0$ и колебания $x(t)$ происходят на частоте внешнего воздействия ω. Ширина полки на графике зависит от параметра β. По мере его увеличения область синхронизации расширяется. Выбранные значения $\beta = 0.01$ и $\varepsilon = 0.1$ соответствуют области захвата (область A на рис. 12.7).

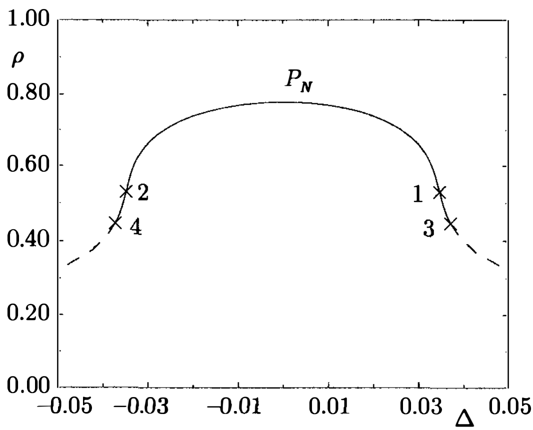


Рис. 12.11. Бифуркационная диаграмма состояния равновесия P_N системы (12.9), (12.10) при изменении параметра расстройки Δ и фиксированных значениях $\beta = 0.02$ и $\varepsilon = 0.1$

12.5. Бифуркационный анализ неавтономного генератора Ван дер Поля

Вернемся к полным уравнениям (12.3) генератора Ван дер Поля при внешнем гармоническом воздействии

$$\ddot{x} - \left(\varepsilon - x^2\right)\dot{x} + x = b\sin\omega t,$$

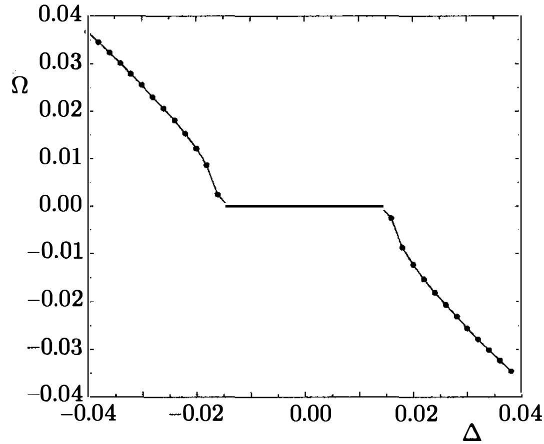


Рис. 12.12. График зависимости $\Omega = \langle\dot{\varphi}(t)\rangle$ от расстройки по частоте Δ системы уравнений для амплитуды и фазы (12.9)–(12.10) при $\varepsilon = 0.1$ и $\beta = 0.01$

и исследуем поведение этой системы в зависимости от амплитуды и частоты внешнего гармонического воздействия при фиксированном значении управляющего параметра автономного генератора ε.

Размерность фазового пространства неавтономного генератора Ван дер Поля равна трем, и здесь помимо неподвижных точек и предельных циклов может существовать двумерный тор. Запишем уравнение неавтономного генератора (12.3) в виде системы трех дифференциальных уравнений первого порядка

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = \left(\varepsilon - x^2\right) y - x + b\sin(z), \quad \dot{z} = \omega. \tag{12.30}$$

Здесь x, y, z — динамические переменные, которые и определяют размерность фазового пространства. В широкой области значений параметров динамика данной системы является довольно сложной и разнообразной. Мы ограничимся исследованием режимов синхронизации и их бифуркаций в окрестности так называемого основного языка синхронизации, когда частота синхронных колебаний совпадает с частотой внешнего воздействия. Будем рассматривать только квазигармонические режимы автономного генератора, когда параметр ε имеет небольшие значения.

Режиму синхронизации отвечает устойчивый предельный цикл C_N. Он и седловой предельный цикл C_S лежат на поверхности двумерного тора, который образован замыканием неустойчивых многообразий седлового цикла C_S на устойчивый цикл C_N. Рассмотрим бифуркации этих предельных циклов при движении по плоскости управляющих параметров (b, ω) и фиксированном $\varepsilon = 0.1$.

На рис. 12.13 на плоскости амплитуда–частота внешнего воздействия построены линии бифуркационных значений синхронных движений при фиксированном значении параметра ε. В областях A и B система демонстрирует режимы синхронизации, а в области C — режим квазипериодических колебаний. Следует отметить, что в отличие от укороченных уравнений для амплитуды и фазы в системе (12.30) устойчивым и неустойчивым синхронным движениям отвечают устойчивые и неустойчивые предельные циклы, а квазипериодическим колебаниям соответствует двумерный эргодический тор в трехмерном фазовом пространстве системы. При значениях параметров из области A в фазовом пространстве системы имеется три предельных цикла: устойчивый C_N, седловой C_S и абсолютно неустойчивый C_R. Проекции предельных циклов на плоскость (x, y) показаны на рис. 12.14.

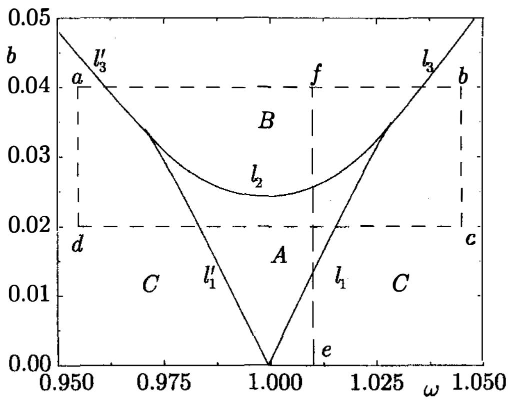


Рис. 12.13. Основной язык синхронизации на плоскости параметров «амплитуда b — частота ω внешнего воздействия» системы (12.30) при $\varepsilon = 0.1$

На рис. 12.15 построена бифуркационная диаграмма в зависимости от частоты внешнего воздействия ω при фиксированной амплитуде $b = 0.02$, что соответствует перемещению вдоль линии dc на рис. 12.13. На оси ординат бифуркационной диаграммы (рис. 12.15) отложены максимальные значения динамической переменной $x(t)$ соответствующих предельных циклов C_N, C_S, C_R. При изменении частоты внешнего воздействия ω при пересечении границ области синхронизации l_1 и l_1' неустойчивый предельный цикл C_R никаких бифуркаций не претерпевает. Переход от синхрон-

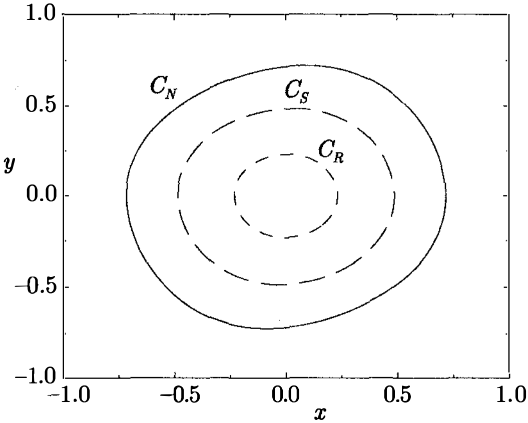


Рис. 12.14. Проекции предельных циклов на плоскость (x, y) системы (12.30) при значениях параметров $b = 0.02, \omega = 1.01, \varepsilon = 0.1$

ных колебаний к квазипериодическим связан с бифуркациями двух других предельных циклов. Из диаграммы видно, что с увеличением или уменьшением ω с приближением к бифуркационным линиям l_1 или l_1' устойчивый цикл C_N сближается с седловым C_S. На границе они сливаются в особый седло-узловой цикл (один из мультипликаторов цикла принимает значение $+1$) и при переходе через бифуркационную линию исчезают. Данная седло-узловая бифуркация слияния и исчезновения предельных циклов C_N и C_S происходит на поверхности двумерного тора. Вне области синхронизации фазовая траектория покрывает поверхность тора, нигде не замыкаясь, что соответствует квазипериодическим колебаниям. Проекция фазового портрета двумерного тора показана на рис. 12.16. При пересечении границ l_1 и l_1' квазипериодические колебания возникают жестким образом, амплитуда модуляции («толщина» тора на фазовом портрете) сразу же за точкой бифуркации принимает конечную достаточно большую величину. Здесь помимо притягивающего тора T в фазовом пространстве системы имеется еще неустойчивый предельный цикл C_R. Рассмотренные перестройки фазового портрета системы на границе областей A и C определяют как бифуркационный механизм синхронизации через захват. Область A языка синхронизации называют областью захвата.

На рис. 12.17 построена бифуркационная диаграмма для устойчивого C_N, неустойчивого C_R и седлового C_S предельных циклов системы (12.30) в зависимости от амплитуды внешнего воздействия b при фиксированных значениях $\omega = 1.01, \lambda = 0.1$, что соответствует перемещению вдоль ли-

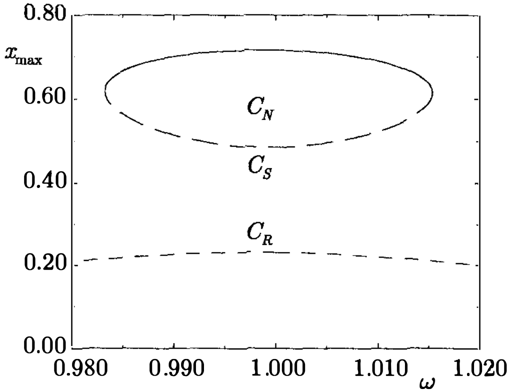


Рис. 12.15. Бифуркационная диаграмма для предельных циклов C_N, C_S, C_R системы (12.30) при изменении частоты внешнего воздействия ω и фиксированных значениях $b = 0.02$ и $\varepsilon = 0.1$

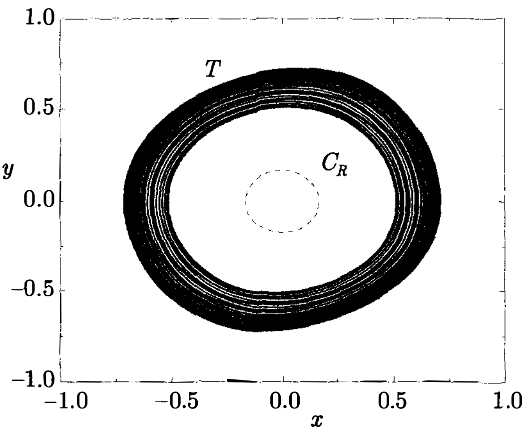


Рис. 12.16. Фазовый портрет (притягивающий двумерный тор T и неустойчивый предельный цикл C_R) системы (12.30) после седло-узловой бифуркации предельных циклов C_N и C_S при значениях параметров $\varepsilon = 0.1, b = 0.02, \omega = 1.017$

нии ef на плоскости параметров амплитуда–частота внешнего воздействия рис. 12.13.

При малых амплитудах внешнего воздействия b ниже линии l_1, помимо притягивающего тора, существует неустойчивый предельный цикл C_R, родившийся из состояния равновесия в начале координат. С ростом b

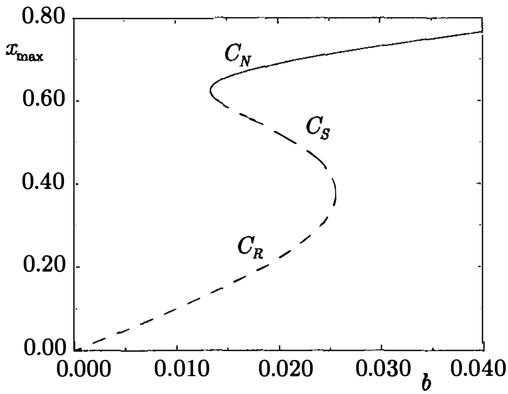


Рис. 12.17. Бифуркационная диаграмма предельных циклов системы (12.30) при изменении амплитуды внешнего воздействия b и фиксированных значениях $\omega = 1.01$, $\varepsilon = 0.1$

амплитуда этого неустойчивого цикла растет. При пересечении линии l_1 с ним ничего не происходит, в то время как на притягивающем двумерном торе в результате седло-узловой бифуркации рождается пара предельных циклов — устойчивый C_N и седловой C_S. При дальнейшем увеличении b седловой цикл C_S сближается с неустойчивым циклом C_R.

При пересечении линии l_2 происходит седло-репеллерная бифуркация, эти два цикла сливаются и исчезают. Исчезновение седлового цикла C_S приводит к разрушению резонансного тора. В фазовом пространстве остается только устойчивый предельный цикл C_N, отвечающий режиму синхронизации. Область синхронизации B, расположенную выше линии l_2 на рис. 12.13, называют областью подавления. В отличие от области захвата A при выходе из области подавления с изменением частоты внешнего воздействия квазипериодические колебания возникают мягким образом, амплитуда модуляции нарастает постепенно от нуля, что обусловлено характером бифуркаций предельного цикла C_N.

На рис. 12.18 представлена бифуркационная диаграмма предельного цикла C_N при изменении частоты внешнего воздействия ω и фиксированных значениях $b = 0.04$, $\varepsilon = 0.1$, что соответствует перемещению вдоль линии ab по плоскости параметров амплитуда–частота внешнего воздействия на рис. 12.13. В интервале значений, ограниченных линиями l_3 и l'_3, предельный цикл является устойчивым (сплошная линия бифуркационной диаграммы на рис. 12.18). Для предельного цикла один из мультипликаторов всегда равен единице. Два оставшихся мультипликатора по модулю меньше единицы в этом интервале значений. При пересечении бифуркационных линий l_3 и l_3' два мультипликатора являются комплексно-сопряженными и по модулю становятся больше единицы. Предельный цикл теряет устойчивость и из него рождается притягивающий двумерный тор, проекция которого на плоскость (x, y) представлена на рис. 12.19. «Толщина» тора плавно увеличивается с ростом надкритичности. Такая перестройка фазового портрета называется бифуркацией Неймарка–Сакера, и она определяет механизм синхронизации через подавление[3].

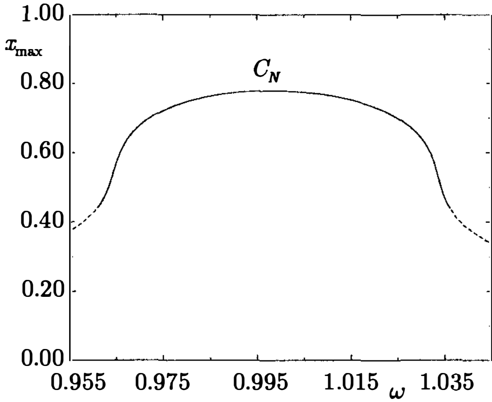


Рис. 12.18. Бифуркационная диаграмма предельного цикла системы (12.30) при изменении частоты внешнего воздействия ω и фиксированных значениях $b = 0.04$, $\varepsilon = 0.1$. Сплошная линия соответствует устойчивому состоянию, штриховая — неустойчивому состоянию предельного цикла C_N

В области синхронизации B генератор совершает колебания на частоте внешнего воздействия. Однако в отличие от случая слабого внешнего воздействия здесь собственная автоколебательная мода не подстраивается к ритму внешнего воздействия, а является полностью подавленной им. И только с увеличением расстройки по частоте при переходе границ l_3 и l_3' области синхронизации (рис. 12.13) возбуждается автоколебательная мода и начинает плавно нарастать. При небольшой надкритичности в спектре

[3]Здесь следует отметить, что границы l_3 и l_3' на плоскости параметров (β, ω) представляют собой линии рождения тора, на которые опираются языки синхронизации с различными числами вращения, которые определяются отношением частоты биения к частоте внешнего воздействия. Частота биений характеризуется разностью частот автоколебательной моды и внешнего воздействия. Однако в рамках данной лекции мы не рассматриваем структуру пространства управляющих параметров в широкой области значений.

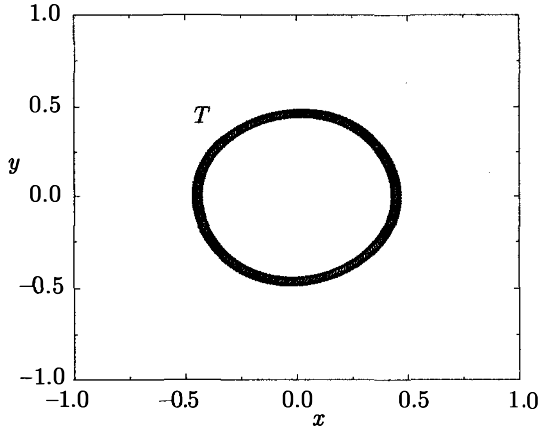


Рис. 12.19. Проекция двумерного тора при значениях параметров $\varepsilon = 0.1$, $b = 0.04$, $\omega = 1.0357$ (вблизи линии l_3 на рис. 12.13), родившегося в результате вторичной прямой бифуркации Андронова – Хопфа (или бифуркации Неймарка – Сакера)

квазипериодических колебаний с двумя независимыми частотами продолжают превалировать спектральные составляющие, соответствующие внешней силе. По этой причине такой режим слабо модулированных колебаний часто также относят к режиму синхронизации.

На рис. 12.20 построена зависимость разности между средней частотой автоколебаний и частотой внешнего воздействия системы (12.30) при $\varepsilon = 0.1$ и $b = 0.02$. Горизонтальный участок соответствует области синхронизации, когда генератор совершает колебания на частоте внешнего воздействия ω. Ширина горизонтального участка зависит от амплитуды внешнего воздействия b. Данное значение $b = 0.02$ при $\varepsilon = 0.1$ соответствует области захвата.

12.6. Заключение

В лекции представлены результаты классической теории синхронизации периодических автоколебаний. Изложение теории дано применительно к простейшей автоколебательной системе с одной степенью свободы — генератору Ван дер Поля, находящейся под воздействием гармонической внешней силы; рассмотрено явление внешней синхронизации. Отметим, что все описанные эффекты, по сути дела, реализуются и при взаимной синхронизации без каких-либо принципиальных отличий. В связи с этим

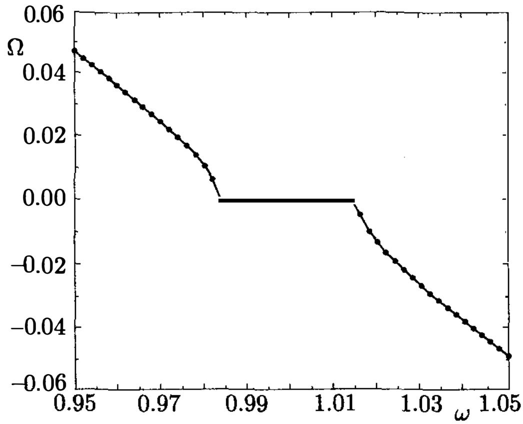


Рис. 12.20. График зависимости Ω (разности между средней частотой автоколебаний и частотой внешнего воздействия) от частоты внешнего воздействия ω системы (12.30) при $\varepsilon = 0.1$ и $b = 0.02$

взаимная синхронизация двух связанных генераторов в лекции не рассматривается.

Анализ эффекта внешней синхронизации проведен в фазовом (одномерном) приближении, в приближении укороченных уравнений и для полной неавтономной системы Ван дер Поля. Показаны принципиальные бифуркационные механизмы синхронизации через захват частоты (фазы) и за счет подавления собственных колебаний генератора. Результаты получены для основной области синхронизации, когда частоты сигналов воздействия и собственных автоколебаний близки (синхронизация на основном тоне). Подробный анализ эффекта внешней синхронизации, представленный в лекции, имеет целью сравнить суть наблюдаемого эффекта для квазигармонического осциллятора с эффектами синхронизации квазипериодических, хаотических и стохастических колебаний. Указанные проблемы будут обсуждаться в последующих лекциях.

Лекция 13

Синхронизация двухчастотных автоколебаний

13.1. Введение

Двухчастотные колебания представляют собой простейший случай квазипериодических колебаний с двумя независимыми частотами. Квазипериодические колебания с двумя частотами в автономном режиме сопровождаются эффектом взаимной синхронизации, которому отвечают рациональные значения числа вращения Пуанкаре. Области синхронизации в этом случае характеризуются так называемыми «языками Арнольда», в которых число вращения Θ удовлетворяет условию $\Theta = m : n$, где m и n — целые числа.

Вопрос о синхронизации квазипериодических автоколебаний связан с анализом реакции генератора двухчастотных колебаний на внешнее периодическое воздействие (внешняя синхронизация) или с исследованием динамики двух связанных двухчастотных генераторов (взаимная синхронизация). Наличие резонансов Арнольда ведет к необходимости анализа влияния воздействия как на эргодические колебания, так и на колебания, отвечающие условиям резонанса. В любом случае ясно, что проблема синхронизации квазипериодических двухчастотных колебаний представляется задачей более высокого уровня сложности в сравнении с анализом синхронизации предельного цикла. В настоящей лекции мы рассмотрим основные принципиальные эффекты, которые будем изучать с использованием простых моделей генераторов двухчастотных колебаний, которые обсуждались в лекции 11.

13.2. Воздействие внешней периодической силы на резонансный предельный цикл в системе связанных генераторов

Начнем изучение особенностей синхронизации устойчивого резонансного предельного цикла на торе, показанного на рис. 11.2, *б*, внешним гармоническим сигналом. С этой целью исследуем реакцию системы (11.6) на внешний периодический сигнал, введя источник гармонического воздействия $b\sin[(2\pi f_{\rm e})t]$ во второе уравнение системы (11.6):

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= y_1, \\
\dot{y}_1 &= (\varepsilon - x_1^2)y_1 - \omega_1^2 x_1 + \gamma(x_2 - x_1) + b\sin[(2\pi f_{\rm e})t], \\
\dot{x}_2 &= y_2, \\
\dot{y}_2 &= (\varepsilon - x_2^2)y_2 - \omega_2^2 x_2 + \gamma(x_1 - x_2).
\end{aligned} \tag{13.1}$$

Выберем режим колебаний автономной системы (13.1) ($b = 0$), соответствующий области резонанса I (см. рис. 11.1), задав значения параметров $\varepsilon = 0.1$, $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 1.0015$, $\gamma = 0.02$. Этому режиму отвечает указанная точка на плоскости параметров рис. 11.1. Автономная система будет реализовывать режим устойчивых периодических автоколебаний. Ему соответствует устойчивый предельный цикл L_0. Отметим, что с точки зрения экспериментатора, наблюдающего режим периодических колебаний, это обычное устойчивое периодическое движение с частотой f_1 и спектром, включающим нечетные гармоники $f_{\rm n} = 2n + 1$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$) в силу квадратичного характера нелинейности. Тот факт, что предельный цикл L_0 лежит на поверхности двумерного тора, никак не сказывается в физическом эксперименте. Однако более детальные исследования показали, что этот факт является принципиальным и приводит к весьма существенным отличиям при анализе эффекта внешней синхронизации, если речь идет о синхронизации резонансного предельного цикла на двумерном торе.

На рис. 13.1, *а,б* представлены зависимости частот генераторов f_1 и f_2 от частоты внешнего сигнала $f_{\rm e}$. Амплитуда сигнала воздействия была выбрана $b = 0.025$, частоты f_1 и f_2 нормировались на частоту внешнего сигнала $f_{\rm e}$. Рис. 13.1, *в* иллюстрирует зависимость числа вращения $\Theta = f_1 : f_2$ от частоты внешнего воздействия. Как видно из графиков, на рис. 13.1 целесообразно выделить области A, B, C и D, в которых динамика системы качественно различна. Используем для анализа результаты расчета спектра ляпуновских характеристических показателей, представленные на рис. 13.2.

В области A частота внешнего сигнала достаточно удалена от частоты предельного цикла $f_1 = f_2 \approx 0.158$. В системе реализуются квазипериодические колебания с частотами $f_{\rm e}$ и $f_1 = f_2$. Им отвечает существование в фазовом пространстве двумерного тора, что подтверждается наличием двух нулевых показателей Ляпунова в спектре ЛХП (см. рис. 13.2). Условие резонанса $f_1 = f_2$ в области A еще не нарушается.

В области B режим взаимной синхронизации (см. рис. 11.1, 11.2) разрушается. Частоты f_1 и f_2 становятся различными, о чем свидетельствует

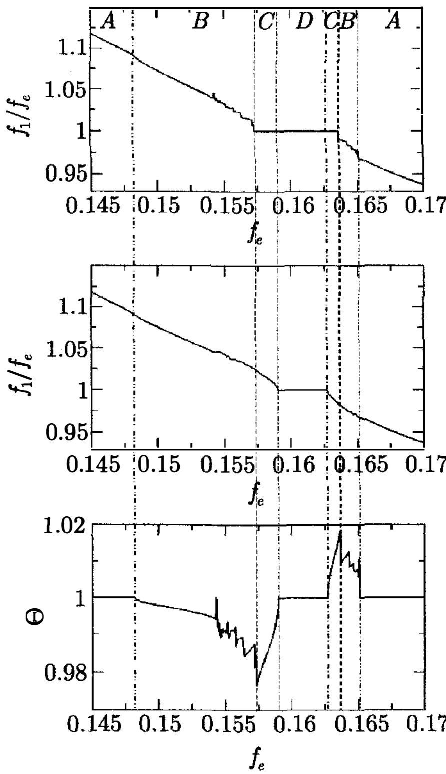


Рис. 13.1. Зависимости отношений частот генераторов f_1 (*а*) и f_2 (*б*) к частоте внешнего воздействия f_e и числа вращения $\Theta = f_1 : f_2$ (*в*) от частоты внешнего воздействия f_e при $b = 0.025$

график зависимости числа вращения Θ (рис. 13.1, *в*). Рождается режим квазипериодических колебаний с тремя независимыми частотами f_1, f_2 и f_e. Ему отвечает аттрактор в виде трехмерного тора и наличие трех нулевых показателей в спектре ЛХП (рис. 13.2). Динамика системы в области B достаточно сложна. На трехмерном торе с изменением частоты f_e могут возникать частичные резонансы в виде T^2 и даже хаотические режимы.

В области C реализуется первое из явлений, представляющих особый интерес: имеет место захват базовой частоты первого генератора внешним сигналом, при котором $f_e = f_1$, но $f_1 \neq f_2$. На трехмерном торе возникает резонансная структура в виде двумерного тора, что доказывается наличием двух нулевых показателей в спектре ЛХП (рис. 13.2). Расчеты показали, что сечение Пуанкаре в этом режиме имеет вид замкнутой инвариантной кривой.

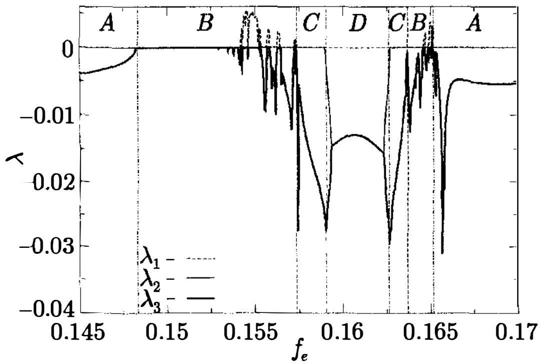


Рис. 13.2. Зависимости трех старших показателей Ляпунова от частоты внешнего воздействия f_e при $b = 0.025$

Наконец, в области D реализуется режим полной синхронизации: внешний сигнал захватывает обе частоты взаимодействующих генераторов, и выполняется условие $f_e = f_1 = f_2$. В области D в спектре ЛХП лишь один показатель является нулевым, на фазовом портрете можно видеть аттрактор в виде предельного цикла.

Изложенные выше результаты свидетельствуют о весьма важном отличии эффекта синхронизации резонансного предельного цикла на двумерном торе от классического случая. Это отличие заключается в том, что при уменьшении расстройки частот $f_e - f_1$ внешнее воздействие вначале разрушает режим исходной взаимной синхронизации, а затем осуществляется последовательный захват вначале одной базовой частоты, потом второй. В итоге реализуется режим полной синхронизации, которому отвечает эффект захвата числа вращения (рис. 13.1, *в*, область D).

13.3. Основные бифуркации квазипериодических режимов при синхронизации резонансного предельного цикла

С целью более детального понимания механизмов перестройки режимов колебаний в системе (13.1) при вариации частоты внешнего воздействия была построена бифуркационная диаграмма системы на плоскости параметров «амплитуда–частота» внешней силы (см. рис. 11.1). Графики, представленные на рис. 13.1 и 13.2, соответствуют движению по прямой $b = 0.025$ диаграммы рис. 13.3. Переходам из областей A в области B отвечают бифуркационные линии l_{T^3}, из областей B в области C – линии l_p, из областей C в область D – линии l_f. Как видно из диаграммы, переходы в область D (полная синхронизация резонансного цикла) могут осуществляться из областей A или B через бифуркационные линии l_f. Рассмотрим более детально бифуркационные явления, которым отвечают вышеуказанные бифуркационные линии l_{T^3}, l_p и l_f.

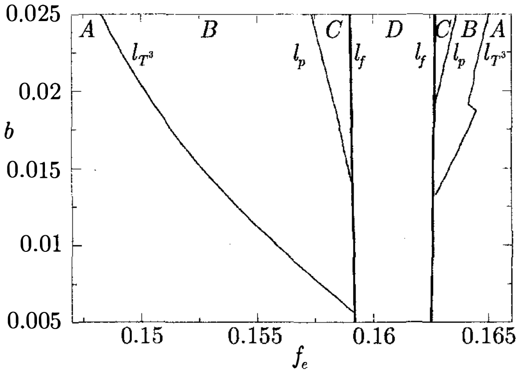


Рис. 13.3. Бифуркационная диаграмма системы (13.1) на плоскости параметров (f_e, b) построена для фиксированных значений $\varepsilon = 0.1$, $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 1.0015$, $\gamma = 0.02$

Как показали исследования, основным колебательным режимом системы (13.1) является режим трехчастотных квазипериодических колебаний с частотами $f_e \neq f_1 \neq f_2$. Соответствующим аттрактором является трехмерный тор T^3, область существования которого на диаграмме рис. 13.3 обозначена символом B. Все основные бифуркации в системе (13.1), ведущие к синхронизации исходного резонансного цикла, связаны с бифуркациями именно режима T^3.

Рассмотрим область B, где существует устойчивый трехмерный тор T^3. С целью более наглядного представления бифуркаций трехмерного тора будем использовать двойное сечение Пуанкаре. Для получения двойного сечения Пуанкаре сначала производился расчет обычного сечения Пуанкаре, а затем в полученную последовательность точек вводилась дополнительная секущая плоскость. Далее, так как вероятность того, что полученные точки окажутся близки к дополнительной секущей плоскости, мала, производилась линейная аппроксимация решений в ее окрестности. Обычное сечение Пуанкаре для T^3 даст нам двумерный тор T_{T^3}. Двойное сечение Пуанкаре будет представлять собой инвариантную замкнутую кривую L_{T^3}. Неподвижная точка на этой инвариантной кривой будет являться образом резонансного двумерного тора, лежащего на T^3.

Исследуем переход из области B в область A диаграммы рис. 13.3 через бифуркационную линию l_{T^3}. На рис. 13.4 представлены результаты соответствующих расчетов с использованием двойного сечения Пуанкаре. Образом T^3 здесь является кривая L_{T^3}, отвечающая режиму T^3 в области B. При достижении бифуркационной точки (точки пересечения линии l_{T^3} из области B в направлении области A) на кривой L_{T^3} рождается неподвижная точка типа «седло-узел». Смещение по параметрам в область A приводит к расщеплению седло-узла на устойчивый узел и седло. В представлении двойного сечения Пуанкаре реализуется классическая седло-узловая бифуркация.

В полном фазовом пространстве системы (13.1) картина, представленная на рис. 13.4, отвечает рождению (исчезновению) пары двумерных торов на трехмерном торе T^3. Один из этих торов устойчивый (T_n^2), другой — седловой (T_{ns}^2).

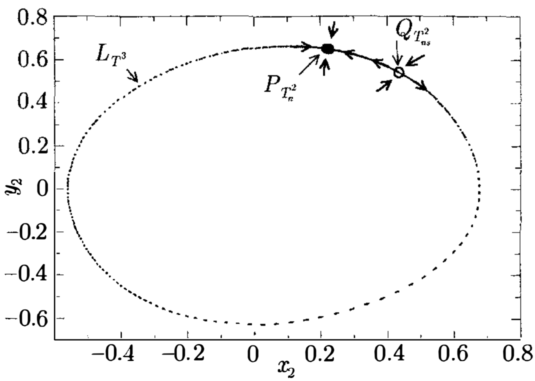


Рис. 13.4. Седло-узловая бифуркация в двойном сечении Пуанкаре, соответствующая пересечению линии l_{T^3} из области B в область A. L_{T^3} — инвариантная кривая, $P_{T_n^2}$ — устойчивый узел, $Q_{T_{ns}^2}$ — седло. Расчеты представлены для значений параметров: $f_e = 1.482$, $b = 0.025$, $\varepsilon = 0.1$, $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 1.0015$, $\gamma = 0.02$

Исследуем бифуркационный переход из области B в область C, которому отвечает пересечение бифуркационных линий l_p на диаграмме рис. 13.3. Расчеты показали, что на линии l_p реализуется также седло-узловая бифуркация и в области C рождаются также устойчивый и седловой резонансные[1] двумерные торы, лежащие на трехмерном торе T^3. Результаты расчетов иллюстрирует рис. 13.5. Режиму колебаний в области B отвечает трехмерный тор T^3, сечение Пуанкаре которого обозначено T_{T^3} на рис. 13.5. Резонансному устойчивому двумерному тору в области C отвечает инвариантная замкнутая кривая, обозначенная на рис. 13.5, $L_{T_p^2}$. Для сравнения на рис. 13.5 представлен и образ устойчивого двумерного резонансного тора $L_{T_n^2}$ в области A. Седловые торы на рис. 13.5 не приведены.

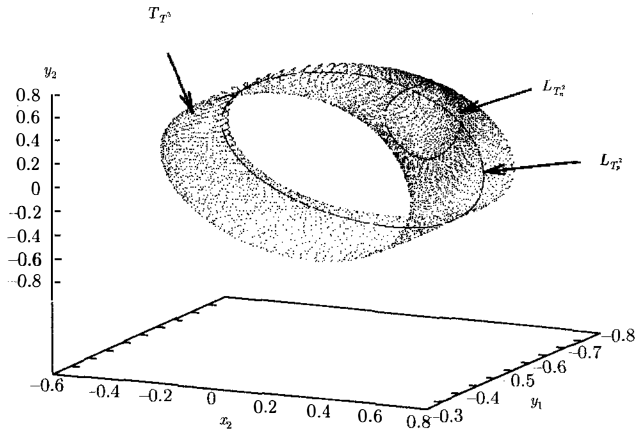


Рис. 13.5. Проекции сечений Пуанкаре трехмерного тора T_{T^3} ($f_e = 0.15$) и резонансных двумерных торов $L_{T_n^2}$ ($f_e = 0.1482$) и $L_{T_p^2}$ ($f_e = 0.158$)

Торы T_n^2 и T_p^2 различные, так как с физической точки зрения отвечают разным условиям частичной синхронизации. В области A – $f_1 = f_2$ и $f_e \neq f_1$, а в области C – $f_e = f_1$ и $f_1 \neq f_2$.

Наконец, рассмотрим бифуркационный переход из области C в область D путем пересечения линии l_f. Этому переходу отвечает эффект захвата второй частоты $f_2 = f_e$ и возникновение режима полной синхронизации $f_1 = f_2 = f_e$. Исследования показали, что линия l_f отвечает классической седло-узловой бифуркации резонансных циклов, лежащих на двумерном торе T_p^2. На двумерном торе T_p^2, который существует в области C и является резонансной структурой на T^3, в бифуркационной точке (на линии l_f) рождается устойчивый и седловой циклы. При пересечении

[1] Под резонансным двумерным тором здесь понимается частичный резонанс на трехмерном торе, когда две из трех независимых частот становятся равными. При этом двумерный тор на трехмерном торе является эргодическим.

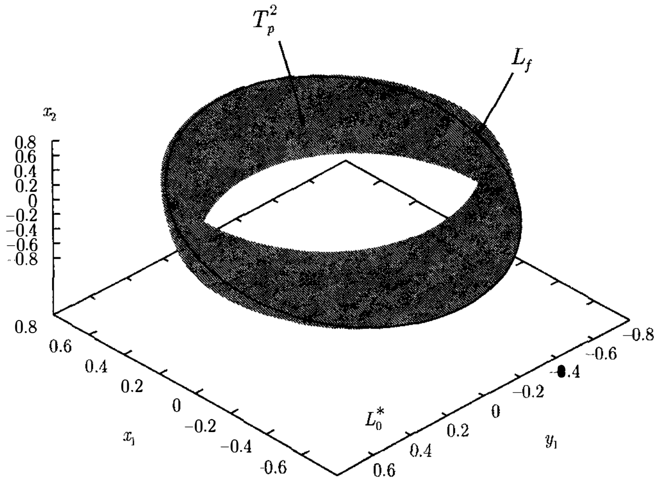
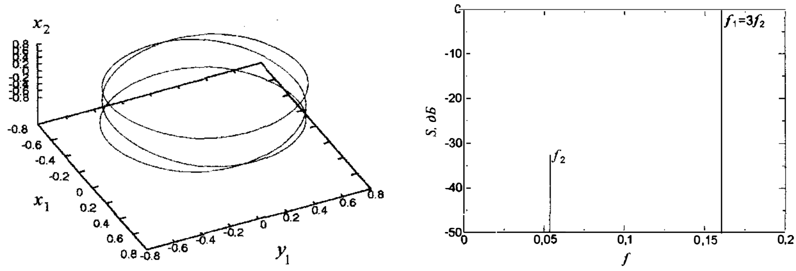


Рис. 13.6. Проекции фазовых портретов двумерного тора T_p^2 (серый) и резонансного предельного цикла L_f (черный) на нем, рассчитанные для значений частоты $f_e = 0.1587$ (T_p^2) и $f_e = 0.1592$ (L_f)

линии l_f в направлении области D возникает устойчивое периодическое движение, отвечающее режиму полной синхронизации. Результаты иллюстрирует рис. 13.6, где представлены фазовые проекции двумерного тора T_p^2 (в области C) и устойчивого резонансного предельного цикла L_f на нем (область D).

Особенности синхронизации резонансных предельных циклов. Изучение эффектов синхронизации, представленных выше, показало, что рассмотренный случай резонанса с числом вращения $\Theta = 1 : 1$ является наиболее общим и достаточно сложным с точки зрения теории бифуркаций. Представляется важным изучение эффектов синхронизации при других значениях числа вращения, отвечающих резонансам $\Theta = m : n$, где $m, n = 1, 2, \ldots$ Кроме того, эффекты синхронизации в системе (13.1) должны зависеть от коэффициента связи генераторов γ. Эта зависимость важна для понимания механизмов синхронизации генераторов квазипериодических колебаний, в которых параметр связи может не входить явным образом в динамическую модель или в силу конструктивных особенностей системы не являться независимым параметром. В связи с вышесказанным представляется интересным исследовать особенности бифуркационных свойств системы (13.1) при различных значениях параметра связи γ.

Рассмотрим режим резонансного предельного цикла в системе (11.6) с числом вращения $\Theta = 1 : 3$ и попытаемся осуществить его синхронизацию внешним периодическим сигналом (13.1).



а *б*

Рис. 13.7. Предельный цикл в системе (11.6) в условиях резонанса $\Theta = 1 : 3$ (*а*) и соответствующий спектр мощности колебаний (*б*), рассчитанные для $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 0.328$, $\varepsilon = 0.1$ и $\gamma = 0.005$

В автономной системе (13.1) ($b = 0$) при значениях параметров $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 0.328$, $\varepsilon = 0.1$ и $\gamma = 0.005$ реализуется эффект взаимной синхронизации и существует устойчивый резонансный цикл на двумерном торе с числом вращения $\Theta = 1 : 3$. Фазовый портрет этого цикла и спектр мощности показаны на рис. 13.7. Введем внешнее воздействие в (13.1) и будем изменять f_e вблизи частоты f_2.

Результаты внешнего воздействия представлены на рис. 13.8. Главное отличие результатов от случая $\Theta = 1 : 1$ (см. рис. 13.1) заключается в том, что эффект полной синхронизации здесь не реализуется. Наблюдается эффект захвата второй частоты ($f_e = f_2$), но при этом частота f_1 не изменяется под действием внешней силы. Как и в случае резонанса $1 : 1$ при условии, что частота f_e далека от f_2, существует область A, в которой существует резонансный двумерный тор $T^2_{n1:3}$ на поверхности трехмерного тора T^3. Также имеется область B, в которой ввиду разрушения резонанса $1 : 3$ существует трехмерный тор T^3. Далее, происходит переход из области B в область C, при котором возникает резонансный двумерный тор $T^2_{p1:3}$, отвечающий режиму частичной синхронизации $f_e = f_2$, $f_1 \neq 3f_2$.

Область D в данном случае отсутствует. Для полной синхронизации резонансного цикла в рассматриваемом случае необходимо использовать дополнительный внешний сигнал, по частоте близкий к f_1. На рис. 13.9 представлены в виде циклов L проекции сечений Пуанкаре двумерных торов, отвечающих областям A ($T^2_{n1:3}$) и C ($T^2_{p1:3}$) рис. 13.8, лежащие на трех-

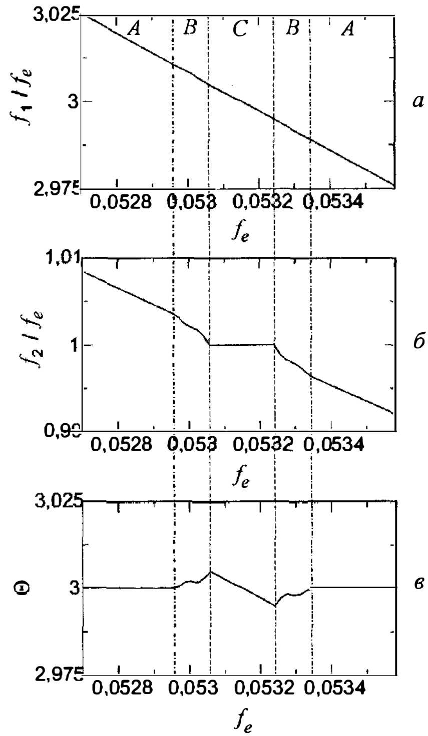


Рис. 13.8. Зависимость отношений частот генераторов f_1 (*а*) и f_2 (*б*) к частоте f_e и числа вращения Θ от частоты внешнего воздействия f_e (*в*) при $b = 0.005$ для резонанса 1 : 3

мерном торе T^3, представленном в сечении Пуанкаре в виде двумерного тора T_{T^3}.

Результаты рис. 13.8 получены для относительно малой величины коэффициента связи $\gamma = 0.005$. Интересно выяснить, как повлияет увеличение степени взаимосвязи генераторов на эффекты синхронизации? С этой целью были проведены расчеты для значения $\gamma = 0.02$, результаты которых представлены на рис. 13.10. Как видно из рис. 13.10, с увеличением связи появляется область D — область полной синхронизации резонансного цикла на торе. Исследования показали, что с ростом $k > 0.02$ ширина области D увеличивается и реализуется картина, качественно повторяющая случай резонанса 1 : 1 (см. рис. 13.1).

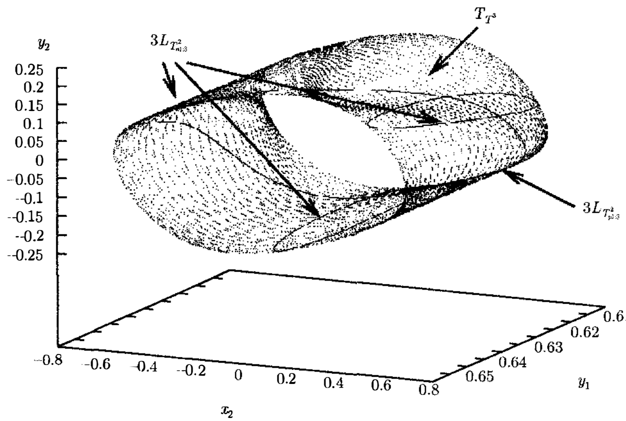


Рис. 13.9. Проекции сечений Пуанкаре двумерных торов в виде циклов: $3L_{T^2_{n1:3}}$, отвечающего области A (рис. 13.8) ($f_e = 0.0527$), и $L_{T^2_{p1:3}}$, отвечающего области C (рис. 13.8) ($f_e = 0.0531$), лежащих на поверхности трехмерного тора T_{T^3}

Фазовая синхронизация системы связанных генераторов Ван дер Поля внешним гармоническим сигналом. Как было показано выше, при определенных условиях эффект синхронизации можно анализировать на основе фазового приближения. В настоящем разделе мы рассмотрим задачу о внешней синхронизации автоколебаний в системе связанных генераторов Ван дер Поля, используя приближение фазовой динамики. С этой целью рассмотрим дифференциальные уравнения системы:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 &= \left(\varepsilon - x_1^2\right)\dot{x}_1 + \gamma\left(\dot{x}_2 - \dot{x}_1\right) + b\cos\left(\omega_e t\right), \\ \ddot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 &= \left(\varepsilon - x_2^2\right)\dot{x}_2 + \gamma\left(\dot{x}_1 - \dot{x}_2\right). \end{aligned} \tag{13.2}$$

В уравнениях (13.2) ε — параметр возбуждения, одинаковый для первого и второго генераторов в отсутствие связи, $F\left(\dot{x}_1, \dot{x}_2\right) = \gamma\left(\dot{x}_{21} - \dot{x}_{12}\right)$ — функция связи, γ — коэффициент связи, b и ω_e — амплитуда и частота внешнего сигнала.

Как видно из (13.2), взаимодействие генераторов осуществляется через производные $\dot{x}_{1,2}$, что в эксперименте соответствует резистивной связи.

Будем искать решение уравнений (13.2) в виде $x_{1,2} = \rho_{1,2}(t)\cos\Psi_{1,2}(t)$, где $\Psi_{1,2}(t) = \omega_e t + \varphi_{1,2}(t)$, полагая (в полном соответствии с классическим описанием динамики генератора Ван дер Поля в квазипериодическом приближении) $\rho_{1,2}(t)$ и $\varphi_{1,2}(t)$ медленно меняющимися во времени функциями. Это означает, что $\dot{\rho}_{1,2}(t) \ll \rho_{1,2}(t)$ и $\dot{\varphi}_{1,2}(t) \ll \varphi_{1,2}(t)$.

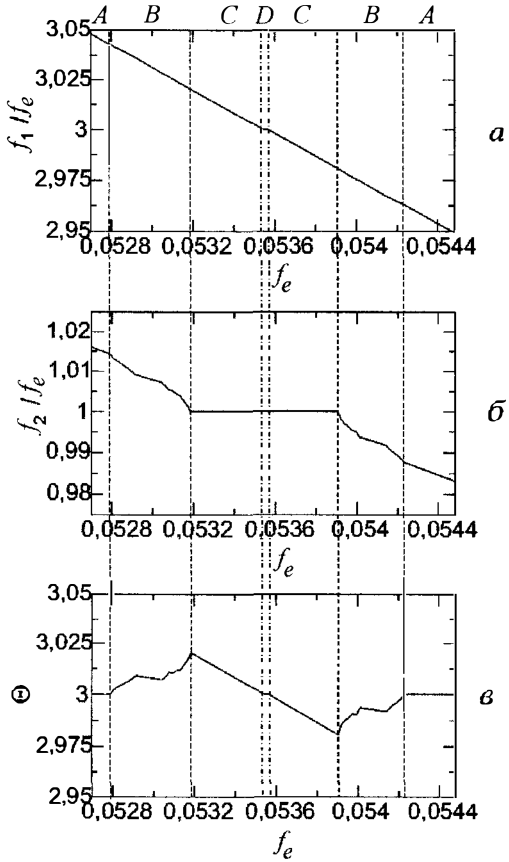


Рис. 13.10. Зависимость отношений частот генераторов f_1 (*а*) и f_2 (*б*) к частоте f_e и числа вращения Θ от частоты внешнего воздействия f_e (*в*) при $b = 0.005$ и $\gamma = 0.02$ для резонанса 1 : 3

Перепишем уравнения (13.2) в виде динамической системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = y_1, \\ \dot{y}_1 = \left(\varepsilon - x_1^2\right) y_1 - \omega_1^2 x_1 + \gamma \left(y_2 - y_1\right) + b\cos(\omega_e t), \\ \dot{x}_2 = y_2, \\ \dot{y}_2 = \left(\varepsilon - x_2^2\right) y_2 - \omega_2^2 x_2 + \gamma \left(y_1 - y_2\right) \end{cases} \tag{13.3}$$

и, в соответствии с вышесказанным, введем замену переменных:

$$\begin{cases} x_1 = \rho_1(t)\cos(\omega_e t + \varphi_1(t)), \\ y_1 = \dot\rho_1(t)\cos(\omega_e t + \varphi_1(t)) - \\ -\rho_1(t)\dot\varphi_1(t)\sin(\omega_e t + \varphi_1(t)) - \\ -\rho_1(t)\omega_e\sin(\omega_e t + \varphi_1(t)), \\ x_2 = \rho_2(t)\cos(\omega_e t + \varphi_2(t)), \\ y_1 = \dot\rho_2(t)\cos(\omega_e t + \varphi_2(t)) - \\ -\rho_2(t)\dot\varphi_2(t)\sin(\omega_e t + \varphi_2(t)) - \\ -\rho_2(t)\omega_e\sin(\omega_e t + \varphi_2(t)). \end{cases} \tag{13.4}$$

Используя стандартное условие

$$\begin{gathered} \dot\rho_{1,2}\cos(\omega_e t + \varphi_{1,2}(t)) - \\ -\rho_{1,2}(t)\dot\varphi_{1,2}(t)\sin(\omega_e t + \varphi_{1,2}(t)) = 0 \end{gathered} \tag{13.5}$$

и произведя усреднение за период внешней силы, получим уравнения первого приближения для амплитуд колебаний $\rho_{1,2}(t)$:

$$\begin{aligned} &\dot\rho_1 = \rho_1\left(\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\rho_1^2}{8}\right) + \frac{\gamma}{2}\left[\rho_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1) - \rho_1\right] - \\ &-\frac{b}{2\omega_e}\sin\varphi_1, \\ &\dot\rho_2 = \rho_2\left(\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\rho_2^2}{8}\right) + \frac{\gamma}{2}\left[\rho_1\cos(\varphi_2 - \varphi_1) - \rho_2\right] \end{aligned} \tag{13.6}$$

и фаз колебаний в первом и втором генераторах $\varphi_{1,2}(t)$:

$$\begin{aligned} &\dot\varphi_1 = \Delta_1 + \frac{\gamma}{2}\frac{\rho_2}{\rho_1}\sin(\varphi_2 - \varphi_1) - \frac{b}{2\rho_1\omega_e}\cos\varphi_1, \\ &\dot\varphi_2 = \Delta_2 - \frac{\gamma}{2}\frac{\rho_1}{\rho_2}\sin(\varphi_2 - \varphi_1), \end{aligned} \tag{13.7}$$

где $\Delta_{1,2} = \dfrac{\omega_{1,2}^2 - \omega_e^2}{2\omega_e}$.

Будем предполагать, что расстройка базовых частот генераторов $\omega_2 - -\omega_1 = \delta \ll 1$, а также близость частоты внешнего воздействия к значениям базовых частот $\omega_{1,2}$, т.е. $\Delta_{1,2} \simeq \omega_{1,2} - \omega_e$. В этом приближении справедливо:

$$\Delta_2 = \Delta_1 + \delta. \tag{13.8}$$

Из уравнений для амплитуд (13.6) следует, что при малой связи $\gamma \ll 1$ и малой амплитуде воздействия $b \ll 1$ можно считать, что

$$\rho_1 = \rho_2 = 2\sqrt{\varepsilon}. \tag{13.9}$$

Амплитуды предельных циклов в генераторах будут постоянными и равными друг другу. В этом приближении динамика системы может быть исследована на основе уравнений для фаз колебаний $\varphi_{1,2}(t)$ (13.7):

$$\begin{aligned} \dot\varphi_1 &= \Delta_1 + g\sin(\varphi_2 - \varphi_1) - \frac{C}{1-\Delta_1}\cos\varphi_1, \\ \dot\varphi_2 &= \Delta_1 + \delta - g\sin(\varphi_2 - \varphi_1), \end{aligned} \tag{13.10}$$

где $g = \dfrac{\gamma}{2}$, $C = \dfrac{b}{4\sqrt{\varepsilon}}$, $\Delta_1 = \dfrac{\omega_1^2 - \omega_e^2}{2\omega_e} \simeq \omega_1 - \omega_e$, $\delta = \omega_2 - \omega_1$, $\omega_1 = 1$.

Уравнения (13.10) описывают фазовую динамику исходной системы (13.2) и дают возможность бифуркационного анализа эффектов фазовой синхронизации при вариации амплитуды C и частоты ω_e внешней силы для выбранных значений связи g и расстройки генераторов по частотам δ.

Бифуркации состояния равновесия. Координаты состояния равновесия системы (13.10) определяются из условий $\dot\varphi_1 = \dot\varphi_2 = 0$, т. е. из уравнений

$$\begin{aligned} &\Delta_1 + g\sin(\varphi_2 - \varphi_1) - \frac{C}{1-\Delta_1}\cos\varphi_1 = 0, \\ &\Delta_1 + \delta - g\sin(\varphi_2 - \varphi_1) = 0. \end{aligned} \tag{13.11}$$

Условия существования действительных решений имеют вид

$$\begin{aligned} &\left|\frac{\Delta_1 + \delta}{g}\right| \leqslant 1, \\ &\left|\frac{(1-\Delta_1)(2\Delta_1 + \delta)}{C}\right| \leqslant 1. \end{aligned} \tag{13.12}$$

При этих условиях уравнения (13.11) имеют четыре решения, которым отвечают следующие четыре пары координат неподвижных точек:

$$
\begin{cases}
\varphi_1^{(1)} = \arccos\left(\dfrac{(1-\Delta_1)(2\Delta_1+\delta)}{C}\right),\\
\varphi_2^{(1)} = \varphi_1^{(1)} + \arcsin\left(\dfrac{\Delta_1+\delta}{g}\right),
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\varphi_1^{(2)} = -\arccos\left(\dfrac{(1-\Delta_1)(2\Delta_1+\delta)}{C}\right),\\
\varphi_2^{(2)} = \varphi_1^{(2)} + \arcsin\left(\dfrac{\Delta_1+\delta}{g}\right),
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\varphi_1^{(3)} = \arccos\left(\dfrac{(1-\Delta_1)(2\Delta_1+\delta)}{C}\right),\\
\varphi_2^{(3)} = \varphi_1^{(3)} - \arcsin\left(\dfrac{\Delta_1+\delta}{g}\right) + \pi,
\end{cases}
\tag{13.13}
$$

$$
\begin{cases}
\varphi_1^{(4)} = -\arccos\left(\dfrac{(1-\Delta_1)(2\Delta_1+\delta)}{C}\right),\\
\varphi_2^{(4)} = \varphi_1^{(4)} - \arcsin\left(\dfrac{\Delta_1+\delta}{g}\right) + \pi.
\end{cases}
$$

Система (13.10) характеризуется четырьмя состояниями равновесия, устойчивость и бифуркации которых необходимо исследовать. Решение характеристического уравнения матрицы линеаризации системы (13.10) дает следующие собственные значения для состояний равновесия

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{1,2} = \frac{1}{2}\Bigg\{ &-\left[2g\cos(\varphi_2-\varphi_1) - \frac{C}{1-\Delta_1}\sin\varphi_1\right] \pm \\
&\pm\left[\left[2g\cos(\varphi_2-\varphi_1) - \frac{C}{1-\Delta_1}\sin\varphi_1\right]^2 + \right.\\
&\left. +4g\frac{C}{1-\Delta_1}\cos(\varphi_2-\varphi_1)\sin\varphi_1\right]^{\frac{1}{2}}\Bigg\}.
\end{aligned}
\tag{13.14}
$$

На рис. 13.11 представлена бифуркационная диаграмма системы (13.10). В области D, ограниченной бифуркационными линиями L_{T_1} и L_{T_2}, существует 4 состояния равновесия, из которых одно является устойчивым узлом, два — седла и одно — неустойчивый узел (репеллер). При выходе из области D с пересечением линий L_{T_1} и L_{T2} имеют место седло-узловые бифуркации состояний равновесия. Обсудим это более детально. На рис. 13.12 представлены фазовые портреты состояний равновесия на 2π-периодической фазовой плоскости координат φ_1, φ_2 до пересечения линий L_{T_1} (рис. 13.12, *а*) и на бифуркационной линии L_{T_1} (рис. 13.12, *б*). Как видно из рис. 13.12, *б*, на линии L_{T_1} состояния равновесия попарно сливаются в негрубые состояния равновесия типа седло-узел и затем исчезают. В момент бифуркации (на линии L_{T_1}) собственные значения соответствующих пар неподвижных точек $\varepsilon_1^{(1)}$, $\lambda_1^{(2)}$ и $\lambda_2^{(3)}$, $\lambda_2^{(4)}$ обращаются в нуль, свидетельствуя о седло-узловой бифуркации.

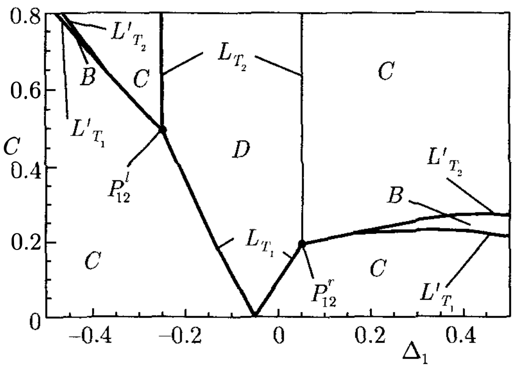


Рис. 13.11. Линии бифуркаций коразмерности 1 системы (13.10) на плоскости параметров (Δ_1, C) при фиксированных значениях $g = 0.15$, $\delta = 0.1$. L_{T_1} — линии седло-узловых бифуркаций состояний равновесия $\varphi^{(1)} \leftrightarrow \varphi^{(2)}$ и $\varphi^{(3)} \leftrightarrow \varphi^{(4)}$; L_{T_2} — линии седло-узловых бифуркаций состояний равновесия $\varphi^{(1)} \leftrightarrow \varphi^{(3)}$ и $\varphi^{(2)} \leftrightarrow \varphi^{(4)}$; L'_{T_1} и L'_{T_2} — линии касательных бифуркаций устойчивых и седловых инвариантных замкнутых кривых

Качественно эквивалентная картина реализуется при пересечении бифуркационных линий L_{T2}, что иллюстрирует рис. 13.13.

Отличия рис. 13.12 и рис. 13.13 в том, что в первом случае седло-узловая бифуркация реализуется для точек 1, 2 и 3, 4, а во втором — для точек 3, 1 и 4, 2.

Как видно из рис. 13.12, 13.13, в результате седло-узловых бифуркаций состояния равновесия исчезают и вне области D (в областях C) рождаются соответствующие пары устойчивых (l_1) и неустойчивых (l_2) инвариантных кривых.

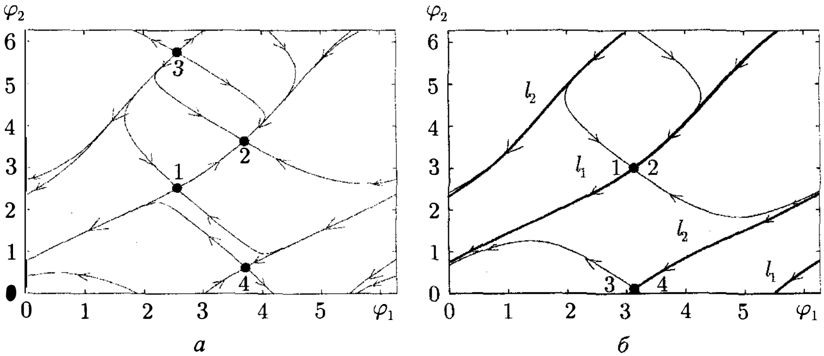


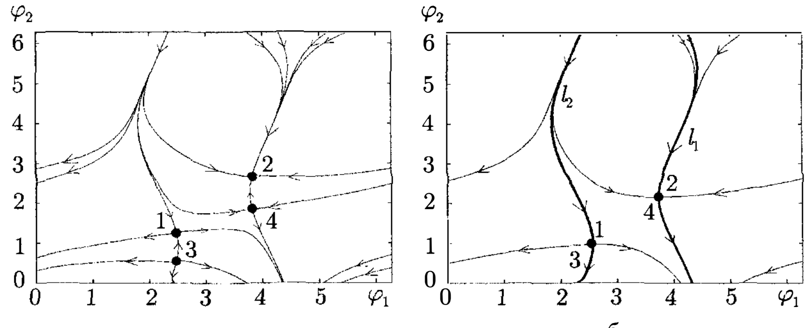
Рис. 13.12. Седло-узловые бифуркации состояний равновесия при пересечении кривой L_{T_1} на плоскости параметров (рис. 13.11): *а* — состояния равновесия и их инвариантные многообразия до бифуркации; *б* — негрубое состояние «седло-узел» в момент бифуркации. $\lambda_i^{(j)}$ — i-е собственное значение j-го состояния равновесия. Параметры $g = 0.15$, $\delta = 0.1$, $C = 0.15$. Для состояния (*а*) $\lambda_1^{(1)} = 0.041$, $\lambda_2^{(1)} = -0.268$, $\lambda_1^{(2)} = -0.032$, $\lambda_2^{(2)} = -0.34$, $\lambda_1^{(3)} = 0.34$, $\lambda_2^{(3)} = 0.032$, $\lambda_1^{(4)} = 0.268$, $\lambda_2^{(4)} = -0.041$, $\Delta_1 = -0.10713$. Для состояния (*б*) $\lambda_1^{(1)} = 0$, $\lambda_2^{(1)} = -0.297$, $\lambda_1^{(2)} = 0$, $\lambda_2^{(2)} = -0.299$, $\lambda_1^{(3)} = 0.299$, $\lambda_2^{(3)} = 0$, $\lambda_1^{(4)} = 0.297$, $\lambda_2^{(4)} = -0$, $\Delta_1 = -0.11713$

С точки зрения полной системы уравнений (13.2) область D на рис. 13.11, в которой существует одна устойчивая неподвижная точка, отвечает устойчивому предельному циклу режима полной синхронизации. При этом обе частоты взаимодействующих генераторов ω_1' и ω_2' [2] захвачены сигналом внешнего воздействия и выполняется равенство $\omega_1' = \omega_2' = \omega_e$. При выходе из области D возникают биения, т. е. двухчастотные колебания, образом которых является устойчивая инвариантная кривая l_1.

Бифуркации инвариантных замкнутых кривых. Бифуркации состояний равновесия при выходе из области D в области C исследованы аналитически с использованием выражений (13.13) и (13.14). Для анализа бифуркаций инвариантных кривых l_1, l_2 применим метод численного моделирования. Результаты расчетов представлены на рис. 13.14 (для инвариантных кривых рис. 13.12, *б*).

Если двигаться в пространстве параметров диаграммы рис. 13.11 из области C в область B, то наблюдается следующая картина. Инвариантные кривые l_1 и l_2 приближаются друг к другу, на бифуркационных линиях L_{T_1}'

[2]Следует различать собственные частоты ω_1 и ω_2 автономных генераторов, задаваемые как параметры системы, и частоты взаимодействующих генераторов ω_1' и ω_2'.



а *б*

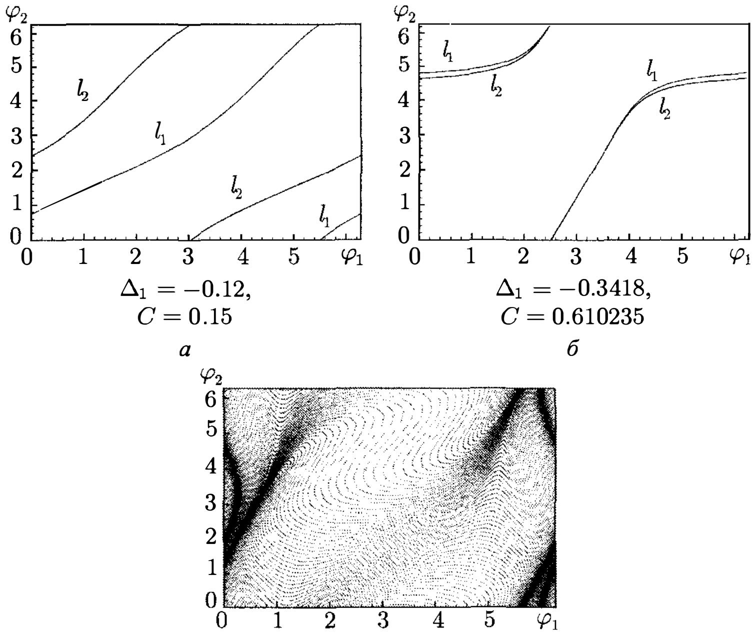
Рис. 13.13. Седло-узловые бифуркации состояний равновесия при пересечении кривой L_{T_2} на плоскости параметров (рис. 13.11): *а* — состояния равновесия и их инвариантные многообразия до бифуркации; *б* — негрубое состояние «седло-узел» в момент бифуркации. $\lambda_i^{(j)}$ — i-е собственное значение j-го состояния равновесия. Параметры $g = 0.15$, $\delta = 0.1$, $C = 0.6$. Для состояния (*а*) $\lambda_1^{(1)} = 0.255$, $\lambda_2^{(1)} = -0.064$, $\lambda_1^{(2)} = -0.045$, $\lambda_2^{(2)} = -0.363$, $\lambda_1^{(3)} = 0.363$, $\lambda_2^{(3)} = 0.045$, $\lambda_1^{(4)} = 0.064$, $\lambda_2^{(4)} = -0.255$, $\Delta_1 = -0.2399$. Для состояния (*б*) $\lambda_1^{(1)} = 0.265$, $\lambda_2^{(1)} = 0$, $\lambda_1^{(2)} = 0$, $\lambda_2^{(2)} = 0.266$, $\lambda_1^{(3)} = 0.266$, $\lambda_2^{(3)} = 0$, $\lambda_1^{(4)} = 0$, $\lambda_2^{(4)} = -0.265$, $\Delta_1 = -0.249999$

они сливаются в единую седло-узловую инвариантную кривую, а с пересечением линии L'_{T_1} кривые $l_{1,2}$ исчезают. В результате в областях B траектории всюду плотно покрывают всю фазовую плоскость, что иллюстрирует рис. 13.14, *в*. Таким образом, имеет место бифуркация, которую можно называть седло-узловой бифуркацией инвариантных замкнутых кривых по аналогии с седло-узловой бифуркацией состояний равновесия. Для инвариантных кривых рис. 13.13, *б* аналогичная бифуркация реализуется при пересечении линий L_{T_2} из областей C в область B. С точки зрения динамики исходной дифференциальной системы (13.2) описанной бифуркации отвечает переход от режима двухчастотных колебаний к режиму трехчастотных колебаний, когда все три частоты системы не кратны и не равны друг другу ($\omega_1' \neq \omega_2' \neq \omega_e$).

Седло-узловую бифуркацию инвариантных кривых удобно иллюстрировать следующим образом. Введем средние частоты фазовых осцилляторов (13.10)[3]:

$$\Omega_{1,2} = \langle \dot{\varphi}_{1,2} \rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T \dot{\varphi}_{1,2}(t)dt. \tag{13.15}$$

[3]Они представляют частоты биений автогенераторов в (13.2).



$\Delta_1 = -0.12$, $C = 0.15$

а

$\Delta_1 = -0.3418$, $C = 0.610235$

б

$\Delta_1 = -0.4064$, $C = 0.7$

в

Рис. 13.14. Трансформации фазового портрета в результате седло-узловой бифуркации инвариантных кривых (переход из области C в область B диаграммы рис. 13.11). Параметры $g = 0.15$, $\delta = 0.1$

Используя систему уравнений (13.10), произведем расчет зависимости частот $\Omega_{1,2}$ от параметров. Зафиксируем значения параметров $C = 0.25$, $\delta = 0.1$, $g = 0.15$ и будем двигаться по плоскости бифуркационной диаграммы рис. 13.11, изменяя параметр Δ_1. С увеличением Δ_1 мы последовательно пересечем области D, C и B бифуркационной диаграммы рис. 13.11. Результаты представлены на рис. 13.15.

В области D ($\Delta_1 \leqslant 0.05$) имеем $\Omega_1 = \Omega_2 = 0$, что соответствует устойчивой неподвижной точке в области синхронизации D. С пересечением линии L_{T_2} (переход из области D в области C) имеет место бифуркация рождения инвариантных кривых l_1 и l_2. На рис. 13.15 этой бифуркации отвечает появление отличной от нуля частоты $\Omega_2 \neq 0$. При этом другая частота $\Omega_1 = 0$. Далее, при пересечении бифуркационной линии L'_{T_2} (переход в область B) имеет место седло-узловая бифуркация инвариантных

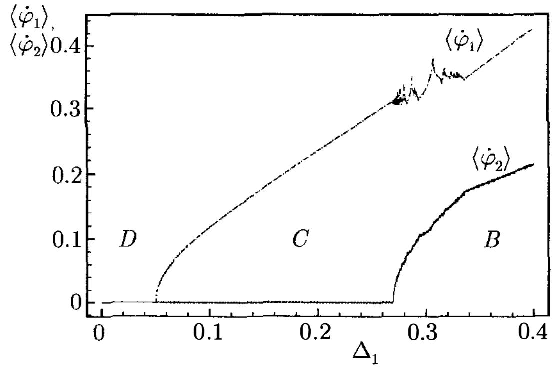


Рис. 13.15. Зависимости частот $\Omega_{1,2} = \langle\dot\varphi_{1,2}\rangle$ от параметра Δ_1, рассчитанные по уравнениям (13.10) при значениях $C = 0.25$, $\delta = 0.1$, $g = 0.15$

кривых l_1 и l_2, в результате которой рождается двумерный тор. На рис 13.15 этой бифуркации отвечает появление отличной от нуля второй частоты Ω_1 при $\Delta_1 = 0.27$. Таким образом, в области B диаграммы рис. 13.11 имеют место колебания с двумя независимыми частотами $\Omega_1 \neq 0$ и $\Omega_2 \neq 0$, которые возникают в результате седло-узловой бифуркации инвариантных кривых l_1, l_2.

Отметим важный результат. Существование в системе (13.10) четырех состояний равновесия является следствием того, что система (13.10) описывает фазовую динамику двух взаимодействующих осцилляторов (13.2). Попарное слияние неподвижных точек 1, 2 и 2, 4 (рис. 13.13) в результате седло-узловой бифуркации порождает две инвариантные замкнутые кривые (устойчивую l_1 и неустойчивую l_2 соответственно). В результате становится возможной седло-узловая бифуркация инвариантных кривых, представляющая собой следующий по уровню сложности тип бифуркации в сравнении с классической седло-узловой бифуркацией состояний равновесия.

Представленный бифуркационный анализ динамики системы фазового приближения (13.10) показал следующее. При наличии расстройки частот генераторов $\delta \neq 0$ и расстройки между частотой внешней силы и частотой первого генератора $\Delta_1 \neq 0$ в системе реализуются эргодические квазипериодические колебания с двумя независимыми частотами (области B на диаграмме рис. 13.11). Их образом на фазовом портрете является двумерный тор. Выход из области B в области C приводит к возникновению пары инвариантных кривых, устойчивой l_1 и седловой l_2. Далее, переходу из областей C в область D отвечает классическая седло-узловая бифуркация, в результате которой в области D появляются 4 неподвижные точки, одна из которых является устойчивой.

В исходной дифференциальной системе (13.2) описанным бифуркационным переходам отвечают следующие перестройки режимов. В области B система (13.2) характеризуется квазипериодическими колебаниями с тремя независимыми частотами ω_e, ω_1' и ω_2'. Выход из областей B в области C характеризует возникновение двумерного тора как частичного резонанса на трехмерном торе. Частичный резонанс отвечает эффекту захвата одной из парциальных частот системы (13.2). Здесь возможны случаи: $\omega_e = \omega_1'$ и $\omega_2' \neq \omega_1'$, либо $\omega_e = \omega_2'$, но $\omega_1' \neq \omega_2'$. Имеет место частичная синхронизация. Переходу из областей C в область D отвечает режим установления устойчивых периодических движений. Рождается устойчивый предельный цикл, лежащий на поверхности двумерного тора. Этому предельному циклу отвечает режим полной синхронизации, при котором внешний сигнал захватывает обе частоты парциальных генераторов ($\omega_e = \omega_1' = \omega_2'$).

Отметим, что представленные результаты анализа динамики уравнений фазового приближения (13.10) находятся в полном качественном соответствии с результатами, представленными в разделе 4.3.1.

Синхронизация двухчастотных колебаний в автогенераторе квазипериодических колебаний. Представленные результаты свидетельствуют о следующем: резонансный цикл на двумерном торе в общем случае невозможно синхронизовать внешним периодическим сигналом. Основной причиной является то, что под действием внешнего сигнала режим резонанса разрушается. Колебания становятся квазипериодическими с тремя независимыми частотами. При вариации параметров происходит частичная синхронизация, состоящая в захвате одной из базовых частот системы внешней силой. Эффект частичной синхронизации реализуется через седло-узловую бифуркацию рождения резонансных двумерных торов на трехмерном торе. После чего возможен захват второй базовой частоты, который осуществляется классическим образом через седло-узловую бифуркацию предельных циклов на двумерном торе.

Наблюдаемые эффекты зависят от расстройки базовых частот (от числа вращения) и от степени взаимосвязи двух генераторов. Большая расстройка, когда исходные базовые частоты отличаются в несколько раз, приводит к тому, что синхронизуется лишь одна из базовых частот системы. При очень сильной связи двух генераторов внешняя сила не разрушает их взаимной синхронизации, а синхронизует оба генератора одновременно. В этом случае реализуется вынужденная синхронизация резонансного цикла на торе по классическому сценарию. Таковы основные выводы. Являются ли они в достаточной степени общими? С целью ответа на поставленный вопрос проведем исследования синхронизации квазипериодических колебаний с использованием генератора двухчастотных колебаний.

Рассмотрим уравнения генератора:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= mx + y - x\phi - px^3, \\
\dot{y} &= -x, \\
\dot{z} &= \phi, \\
\dot{\phi} &= -\gamma\phi + \gamma\Phi(x) - gz.
\end{aligned} \tag{13.16}$$

Используя бифуркационную диаграмму системы (13.16), выберем значения управляющих параметров так, чтобы реализовать режим резонансных колебаний с числом вращения $\Theta = = 1 : 4$ и эргодических колебаний с близким, но иррациональным значением числа вращения. Параметры имеют следующие значения: $m = 0.096$, $\gamma = 0.2$, $p = 0.001$; функция $\Phi(x) = I(x)x^2$. Для значения $g = 0.257$ получаем режим эргодического двумерного тора, для $g = 0.263$ — резонансный[4] тор с числом вращения $\Theta = 1 : 4$. Результаты расчетов иллюстрирует рис. 13.16.

Теперь исследуем динамику системы (13.16) в указанных на рис. 13.16 режимах при внешнем гармоническом воздействии:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= mx + y - x\phi - px^3 + b\sin(2\pi f_e), \\
\dot{y} &= -x, \\
\dot{z} &= \phi, \\
\dot{\phi} &= -\gamma\phi + \gamma\Phi(x) - gz.
\end{aligned} \tag{13.17}$$

Проведем численные расчеты спектра колебаний переменной $x(t)$ при изменении частоты внешнего сигнала f_e. Результаты представлены на рис. 13.17. Как видно из рис. 13.17, *а*, в области $f_e \simeq 0.0381 \div 0.0385$ имеет место захват частоты f_1, т. е. синхронизация. В области синхронизации (рис. 13.17, *а*) частота модуляции f_1 захвачена внешней силой и выполняется условие $f_1/f_e = 1$. Результаты (рис. 13.17, *б*) свидетельствуют, что при этом частота f_0 не синхронизуется внешней силой. Как видно из графика, частота f_0 как вне области синхронизации частоты f_1, так и внутри нее, практически не меняется, т. е. не реагирует на изменение частоты внешнего воздействия f_e.

[4]Здесь термин «резонансный тор» используется в классическом смысле и характеризует режим устойчивого предельного цикла на торе.

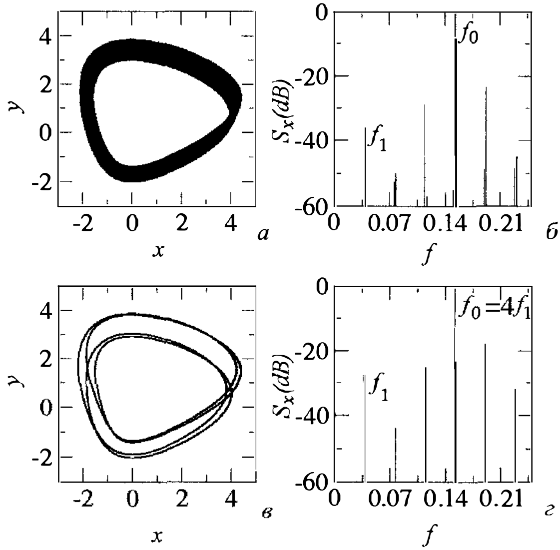


Рис. 13.16. Режимы эргодических (*а,б*) и резонансных (*в,г*) квазипериодических колебаний с двумя частотами (f_1 — частота модуляции, f_0 — частота несущей): *а* — проекция эргодического тора на плоскость (x, y); *б* — соответствующий спектр мощности колебаний $x(t)$; *в* — предельный цикл на торе в случае резонанса $f_1 : f_0 = 1 : 4$; *г* — спектр мощности резонансного цикла на торе

Полностью аналогичные результаты получаются в случае воздействия внешнего сигнала на генератор в режиме эргодических биений (рис. 13.17). И это понятно. Как установлено при исследовании системы двух связанных генераторов Ван дер Поля (13.1), внешнее воздействие вначале разрушает режим резонанса. Именно это и наблюдается. Резонанс 1 : 4 вначале разрушается, затем синхронизуется одна из базовых частот (рис. 13.17). Если мы разрушим резонанс, выйдя из области синхронизации $\Theta = 1 : 4$ (рис. 13.16, *а*), то при внешнем воздействии будет синхронизоваться только одна из базовых частот. В случае, показанном на рис. 13.17, *а*, таковой является f_1, так как частота внешнего сигнала близка именно к f_1. Изменив частоту внешнего сигнала, приблизив ее к f_0, будем наблюдать эффект захвата частоты $f_0 = f_e$, при этом f_1 останется незахваченной.

Приведенные результаты подтверждают общий характер выводов, к которым мы пришли при исследовании системы двух связанных генераторов Ван дер Поля. Действительно, вблизи резонанса $\Theta = 1 : 4$, когда f_1 в четы-

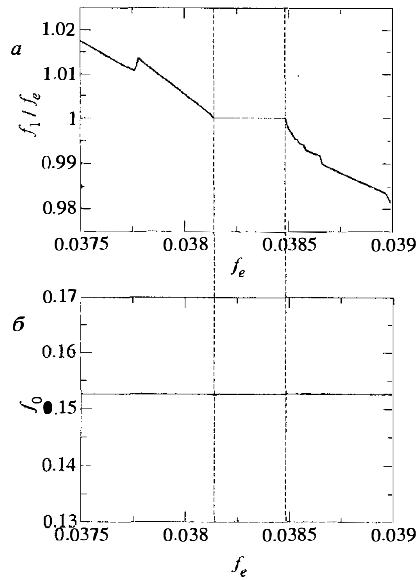


Рис. 13.17. Результаты численных расчетов: *а* — зависимость отношения частот f_1/f_e; *б* — зависимость частоты f_0 от частоты воздействия в неавтономной системе (13.17) для значений параметров $m = 0.096$, $g = 0.263$, $\gamma = 0.2$, $p = 0.001$, $b = 0.01$

ре раза меньше f_0 (расстройка между базовыми частотами велика), внешнее воздействие приводит к эффекту захвата лишь одной из двух базовых частот. Синхронизовать обе частоты не представляется возможным. Причиной является не только их большое различие, но и тот факт, что генератор (13.16) не позволяет увеличить степень взаимосвязи между двумя автоколебательными модами системы. Эта взаимосвязь задается внутренними свойствами системы (13.16). Изложенные выше результаты численного моделирования эффекта синхронизации подтверждаются данными физического эксперимента, полученными на электронной модели генератора двухчастотных колебаний (13.16).

В эксперименте исследовалась синхронизация предельного цикла, отвечающего резонансу 1 : 3. На рис. 13.18, *а,б* представлены результаты измерений, аналогичных расчетам рис. 13.12. Рис. 13.18, *а* иллюстрирует эффект внешней синхронизации частоты f_1, а рис. 13.14, *б* подтверждает независимость частоты f_0 генератора от частоты внешнего сигнала f_e.

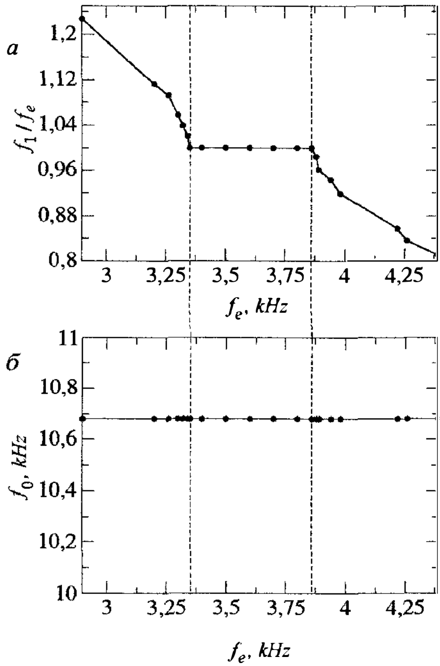


Рис. 13.18. Результаты физического эксперимента: *а* — зависимость отношения частот f_1/f_e; *б* — зависимость частоты f_0 от частоты внешнего воздействия f_e

Представленные выше результаты свидетельствуют о том, что синхронизация двухчастотных колебаний внешним гармоническим сигналом вне зависимости от условий резонанса проявляется в захвате сначала одной и затем (возможно) второй базовой частоты генератора квазипериодических колебаний. При некоторых особых условиях (большой коэффициент связи парциальных подсистем или близость базовых частот) возможно реализовать эффект захвата двух базовых частот. Однако в общем случае это не достигается. Естественно предположить, что эффект захвата двух базовых частот генератора можно обеспечить при внешнем двухчастотном воздействии, если число вращения внешнего генератора будет близко к числу вращения синхронизуемого генератора.

Рассмотрим случай однонаправленного воздействия квазипериодических колебаний одного генератора на второй, работающий также в режиме квазипериодических колебаний. Уравнения системы двух взаимодействующих генераторов (13.16) при однонаправленной связи имеют вид:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= mx_1 + y_1 - x_1\phi_1 - px_1^3 + bx_2,\\
\dot{y}_1 &= -x_1,\\
\dot{z}_1 &= \phi_1,\\
\dot{\phi}_1 &= -\gamma\phi_1 + \gamma\Phi(x_1) - g_1 z_1,\\
\dot{x}_2 &= mx_2 + y_2 - x_2\phi_2 - px_2^3,\\
\dot{y}_2 &= -x_2,\\
\dot{z}_2 &= \phi_2,\\
\dot{\phi}_2 &= -\gamma\phi_2 + \gamma\Phi(x_2) - g_2 z_2.
\end{aligned} \tag{13.18}$$

Данная системы описывает случай воздействия второго генератора на первый (слагаемое bx_2 в первом уравнении), интенсивность которого определяет величина параметра b. Зафиксируем значения параметров $m = 0.06$, $d = 0.001$, $\gamma = 0.2$, $g_1 = 0.55$. При фиксированном параметре $g_1 = 0.55$ первый генератор в автономном режиме реализует квазипериодические колебания с числом вращения $\Theta_1 = f_{11}/f_{01}$ (первая цифра «0» соответствует частоте несущей, первая цифра «1» — частоте модуляции, вторая цифра — номер генератора). Число вращения второго генератора Θ_2 управляется с помощью параметра g_2. В случае нулевой связи при $g_1 \neq g_2$ числа вращения будут отличаться: $\Theta_1 \neq \Theta_2$. По аналогии с синхронизацией предельного цикла, когда вводится расстройка частот $\Delta f = f_1 - f_2$, мы будем рассматривать расстройку числа вращения $\Delta\Theta \sim g_1 - g_2$. Задача анализа синхронизации в этом случае состоит в анализе режимов колебаний на плоскости двух управляющих параметров b и g_2.

Численное решение этой задачи иллюстрирует рис. 13.19, представляющий структуру областей синхронизации.

Внутри большого «клюва» синхронизации, ограниченного бифуркационными линиями l_c, имеет место эффект захвата базовых частот квазипериодических колебаний, $f_{01} = f_{02}$, т. е. происходит синхронизация несущих частот. При этом частоты модуляции остаются различными, $f_{11} \neq = f_{12}$. Наблюдается эффект частичной синхронизации квазипериодических колебаний. Внутри области, ограниченной бифуркационными линиями l_m, реализуется захват частот модуляции и, соответственно, числа вращения $\Theta_1 = \Theta_2$. Этот эффект иллюстрирует рис. 13.20. Как видно из рисунка, существует конечная область расстройки по числу вращения Δg_2, в которой $\Theta_2/\Theta_1 = 1$. Число вращения генератора 2 захватывает число вращения генератора 1. Как и в случае предельного цикла, ширина области захвата числа вращения растет с увеличением интенсивности воздействия b.

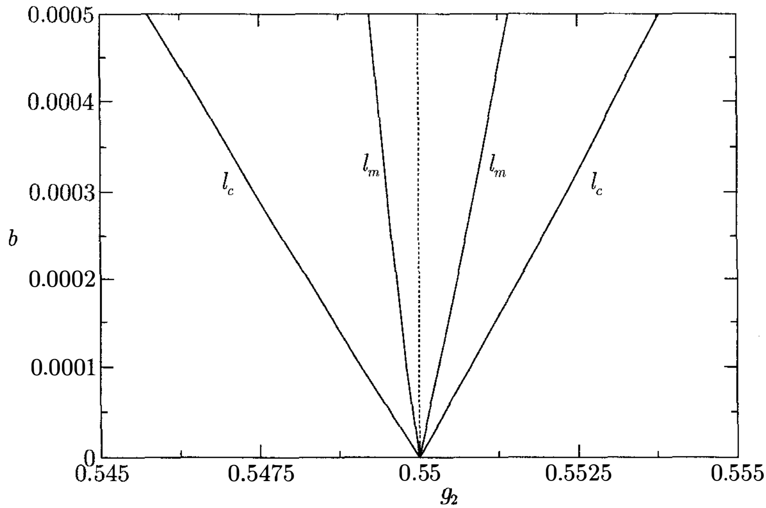


Рис. 13.19. Области синхронизации несущей (l_c) и огибающей (l_m) ($m = 0.06$, $\gamma = 0.2$, $g_1 = 0.55$, $p = 0.001$)

Описанные численные эксперименты по внешней синхронизации двух генераторов квазипериодических колебаний показали, что область захвата частот модуляции генераторов лежит внутри клюва синхронизации несущих частот. Сближая значения управляющих параметров генераторов, в колебаниях системы сначала присутствуют четыре независимые частоты, затем, после захвата несущих частот, остаются три независимые частоты, а затем захватываются частоты модуляции и, соответственно, числа вращения.

Исследуем эффекты воздействия двухчастотных колебаний в физическом эксперименте. Выберем в качестве синхронизуемого генератор квазипериодических колебаний, описываемый уравнениями (13.16). Внешним сигналом $F(t)$ будут служить амплитудно-модулируемые колебания, которые получались с использованием двух генераторов стандартных сигналов и модулятора:

$$F(t) = b[1 + K_{\mathrm{mod}} \sin(2\pi f_{1\mathrm{e}} t)] \sin(2\pi f_{0\mathrm{e}} t),$$

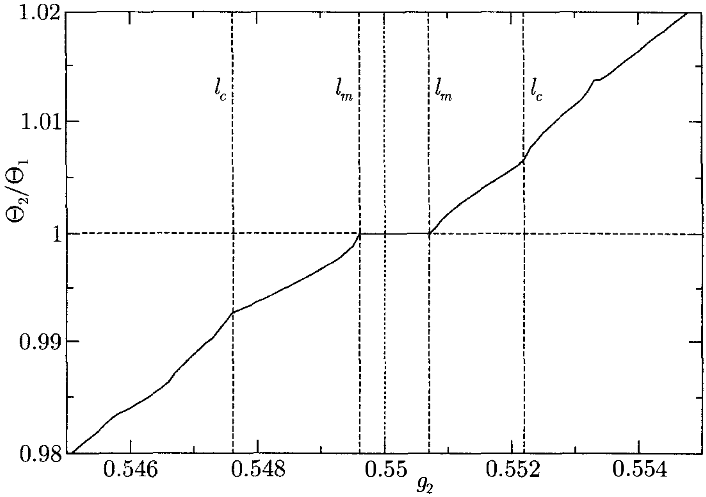


Рис. 13.20. Эффект захвата числа вращения ($m = 0.06$, $\gamma = 0.2$, $g_1 = 0.55$, $p = 0.001$, $b = 0.0003$)

где b — амплитудный множитель, K_{mod} — коэффициент модуляции, $f_{1\text{e}}$ — частота модуляции, $f_{0\text{e}}$ — частота несущей. Параметры генератора квазипериодических колебаний были выбраны следующими: $f_{1\text{g}} = 2.82$ кГц, $f_{0\text{g}} = 10.69$ кГц, а коэффициент модуляции был равен $\simeq 0.3$.

Зададим параметры внешнего сигнала $F(t)$ следующими: $f_{1\text{e}} = 3.06$ кГц, $f_{0\text{e}} = 10.69$ кГц, $K_{\text{mod}} = 0.5$ и будем изменять в эксперименте несущую частоту $f_{0\text{e}}$ в пределах $10.0 \leqslant f_{0\text{e}} \leqslant 11.0$ кГц. Так как высокочастотная часть спектра сигнала $F(t)$ будет состоять из трех спектральных линий $f_{0\text{e}}$ и $f_{0\text{e}} \pm f_{1\text{e}}$, то изменяя $f_{0\text{e}}$, мы будем изменять число вращения внешнего квазипериодического сигнала $\Theta = f_{1\text{e}}/f_{0\text{e}}$. Результаты представлены на рис. 13.21. На графиках изображены зависимости нормированных частот $f_{0\text{e}}/f_{0\text{g}}$ (обозначено черными кружочками) и $f_{1\text{g}}/f_{1\text{e}}$ (треугольники) от частоты несущей $f_{0\text{e}}$. Как видно из графиков, вначале осуществляется захват несущей частоты генератора ($f_{0\text{g}}$) несущей частотой внешнего сигнала ($f_{0\text{e}}$). Появляется область в интервале частот $10.5 < f_{0\text{e}} < 10.85$, в которой $f_{0\text{g}} = f_{0\text{e}}$. Затем имеет место эффект захвата частоты модуляции, которому отвечает заметно меньший интервал частот ($10.65 < f_{0\text{e}} < 10.77$). Именно в этой области обе частоты генератора $f_{0\text{g}}$ и $f_{1\text{g}}$ оказываются захвачены внешним сигналом $F(t)$. Реализуется эффект захвата числа вращения.

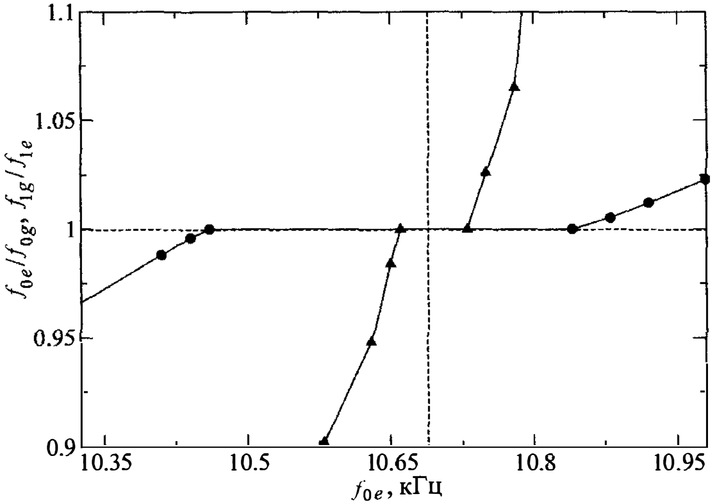


Рис. 13.21. Зависимость нормированных частот модуляции и несущей генератора от несущей частоты сигнала внешнего возмущения

13.4. Заключение

Представленные результаты анализа синхронизации двухчастотных квазипериодических колебаний позволяют обоснованно сделать следующие выводы. Квазипериодические автоколебания с двумя независимыми частотами можно представить как результат взаимодействия двух нелинейных активных осцилляторов, каждый из которых характеризуется собственной независимой базовой частотой автоколебаний. Случаи резонансов, отвечающие «языкам Арнольда», соответствуют эффектам взаимной синхронизации, когда осуществляется взаимозахват базовых частот. Несмотря на тот факт, что формально резонансам отвечают режимы устойчивых периодических колебаний с некоторой частотой синхронизации, с физической точки зрения в системе продолжают существовать две базовые моды колебаний. При попытке синхронизовать резонансный предельный цикл системы внешним гармоническим сигналом режимы резонансов разрушаются и в системе возникают трехчастотные колебания. Эффект синхронизации в этом случае будет наблюдаться для каждой из существующих мод независимо. Вначале реализуется эффект захвата одной из двух независимых частот, затем второй. Конкретные условия синхронизации будут зависеть от числа вращения (от первоначальной расстройки базовых частот взаимодействующих осцилляторов) и от степени их взаимосвязи.

Лекция 14

Синхронизация хаотических колебаний

14.1. Введение

Периодические и квазипериодические колебания составляют лишь небольшую долю возможных колебательных режимов динамических систем с размерностью фазового пространства $N \geqslant 3$. В связи с развитием нелинейной динамики и теории динамического хаоса неизбежно встал вопрос о синхронизации хаотических автоколебаний. Будучи фундаментальным свойством автоколебательных систем, синхронизация должна в той или иной форме наблюдаться и в режиме динамического хаоса. Хаотические автоколебания отличаются от периодических и квазипериодических прежде всего тем, что имеют сплошной спектр, напоминающий по форме спектр цветного шума. По этой причине для хаотических колебаний невозможно ввести строгий период и однозначно определить фазу колебаний, а спектральные линии (если они выделяются в спектре мощности хаоса на фоне сплошной компоненты) имеют конечную ширину.

Известно несколько определений синхронизации хаоса. Одной из первых была концепция, согласно которой синхронизация хаоса понималась как явление установления периодического режима под влиянием внешнего гармонического воздействия на систему в режиме хаотических автоколебаний. Переход от хаотических к регулярным колебаниям при этом наблюдается при достаточно высокой интенсивности воздействия, то есть имеется некий порог синхронизации.

Другой тип синхронизации хаоса имеет место при взаимодействии двух одинаковых хаотических систем. С увеличением коэффициента связи колебания в двух взаимодействующих системах становятся полностью идентичными: временные реализации соответствующих динамических переменных обеих подсистем полностью повторяют друг друга. Этот тип синхронизации принято называть *полной синхронизацией*.

Исследования показали, что классические представления о синхронизации как об эффектах захвата или подавления частоты допускают обобщение на случай хаотических колебаний. Такой подход к проблеме синхронизации хаоса, на наш взгляд, является наиболее последовательным. Соответствующий тип синхронизации получил название *частотно-фазовой* синхронизации хаоса. Частотно-фазовая синхронизация наблюдается не для любых хаотических автогенераторов, а только для автогенераторов в режиме так называемого спирального аттрактора.

Помимо указанных выше типов синхронизации хаоса известны некоторые другие эффекты частичной синхронизации, возникающие при взаимодействии неидентичных хаотических систем: к ним относятся *запаздывающая синхронизация* (lag-synchronization) и *обобщенная синхронизация*. Запаздывающая синхронизация наблюдается при сильном взаимодействии хаотических систем с незначительной расстройкой параметров. По своим характеристикам она близка к полной синхронизации: временные реализации соответствующих динамических переменных двух систем повторяют друг друга с некоторым запаздыванием во времени. Обобщенная синхронизация хаоса означает возникновение функциональной взаимосвязи между мгновенными состояниями взаимодействующих хаотических систем. В настоящей лекции главным образом анализируются эффекты частотно-фазовой и полной синхронизации.

14.2. Частотно-фазовая синхронизация хаотических автоколебаний

Режим спирального аттрактора можно назвать фазокогерентным хаосом. Действительно, хаотические автоколебания в этом случае характеризуются наличием ярко выраженной спектральной линии на некоторой базовой частоте ω_0, которая соответствует средней частоте вращения фазовых траекторий вокруг состояния равновесия в подходящим образом выбранной проекции. Базовая частота хаотических автоколебаний может быть захвачена или подавлена при взаимодействии генераторов, подобно частоте квазигармонических автоколебаний. Кроме того, можно определенным образом ввести мгновенную фазу хаотических автоколебаний и наблюдать эффект фазового захвата. Синхронизация хаоса в таком понимании наблюдается в широком классе динамических систем, в которых имеет место режим спирального аттрактора. Возможна как взаимная, так и вынужденная синхронизация фазокогерентного хаоса, в том числе при периодическом воздействии. Хотя спиральный аттрактор является частным случаем хаотического аттрактора, он реализуется во многих динамических системах, в которых имеется петля сепаратрисы состояния равновесия типа седлофокус. Поэтому частотно-фазовая синхронизация хаоса не является чем-то исключительным, а представляет собой широко распространенное явление.

Рассмотрим режим спирального аттрактора в хорошо известной динамической системе Рёсслера:

$$\dot{x} = -y - z, \quad \dot{y} = x + \alpha y, \quad \dot{z} = \beta + z(x - \mu). \tag{14.1}$$

Проекция фазовой траектории на плоскость переменных (x, y) и спектральная плотность мощности $S_x(\omega)$ колебаний $x(t)$ представлены на рис. 14.1. Как видно из рисунка, в проекции (рис. 14.1, *а*) траектория совершает вращательные движения вокруг нуля координат, а спектр $S_x(\omega)$ на фоне сплошного пьедестала имеет достаточно узкополосный пик на некоторой частоте $\omega = \omega_0$ и ее второй гармонике (рис. 14.1, *б*).

Спиральные аттракторы типа рис. 14.1, *а* возникают в результате последовательности бифуркаций удвоения периода предельного цикла. Исходный устойчивый предельный цикл становится неустойчивым (седловым), но траектории на спиральном аттракторе вращаются вблизи этого седлового цикла с высокой степенью регулярности. Если в фазовом пространстве ввести секущую поверхность, которую траектория пересекает всюду трансверсально (например, плоскость $y = 0$), и рассчитать последовательность интервалов времени T_i между пересечениями траекторией этой поверхности в одном и том же направлении, то можно убедиться в следующем. Распределение интервалов времени $p(T)$ (см. рис. 14.2) имеет ярко выраженный максимум при $T = T_0$, что свидетельствует о близком к регулярному вращении с почти постоянным периодом. По этой причине данный тип хаоса называют фазокогерентным. Следствием регулярности вращения фазовых траекторий является наличие в спектре мощности узкой спектральной линии с максимумом на частоте $\omega_0 = 2\pi/T_0$. Ширина этой линии конечна, но мала: $\Delta\omega/\omega_0 \ll 1$. Таким образом, без учета широкого, но низкого пьедестала (на уровне -50 децибел) генератор спирального хаоса подобен зашумленному генератору периодических колебаний.

В работах В. С. Анищенко и соавторов впервые был установлен эффект захвата базовой частоты хаотических автоколебаний и показано существование области захвата (области синхронного хаоса) в пространстве параметров. Эти результаты положили начало формированию представлений о синхронизации хаоса на основе классической теории колебаний. В указанных работах явление синхронизации хаоса исследовалось для генератора с инерционной нелинейностью (ГИН) Анищенко – Астахова. Здесь мы проиллюстрируем их на примере аттрактора Рёсслера. Введем внешнее гармоническое воздействие в систему (14.1)

$$\dot{x} = -y - z + b\sin(\omega_1 t), \quad \dot{y} = x + \alpha y, \quad \dot{z} = \beta + z(x - \mu). \tag{14.2}$$

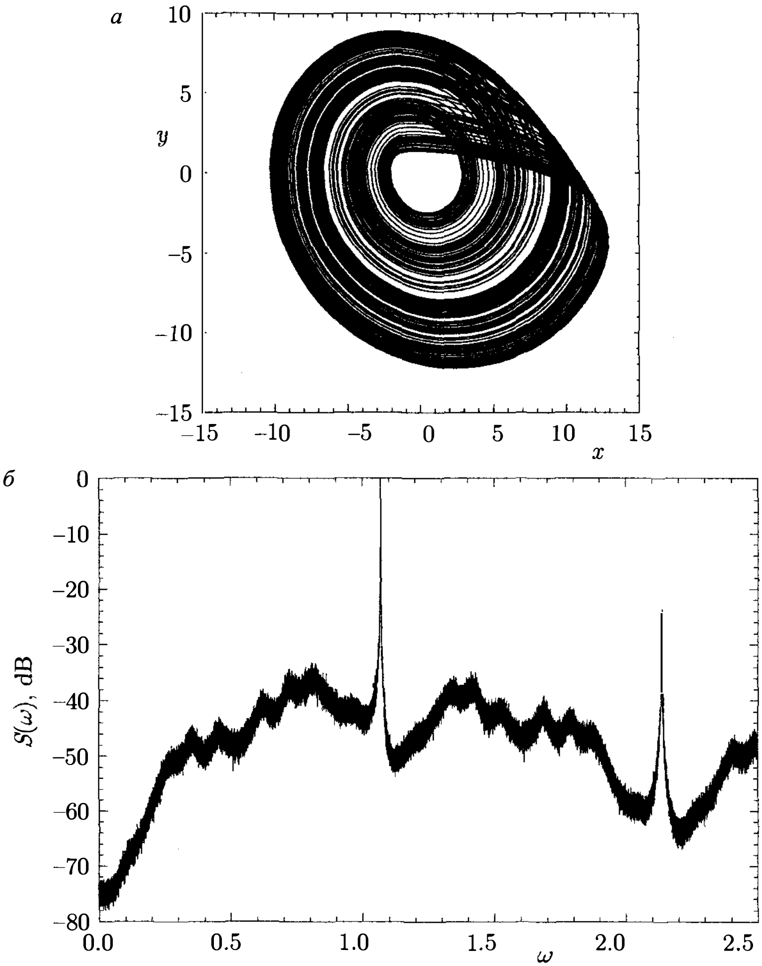


Рис. 14.1. Проекция спирального аттрактора на плоскость переменных (x, y) (*а*) и нормированный спектр мощности $S_x(\omega)$ колебаний $x(t)$ (*б*) в системе (14.1) при $\alpha = \beta = 0.2$, $\mu = 6.5$

Здесь b, ω_1 — амплитуда и круговая частота внешнего воздействия. Зафиксируем значения параметров $\alpha = \beta = 0.2$, $\mu = 6.5$. В этом случае значение базовой частоты спирального аттрактора в отсутствие внешней силы будет $\omega_0 = 1.0683 \pm 10^{-4}$ (см. рис. 14.1, *б*). Выберем значение амплитуды $b = 0.05$

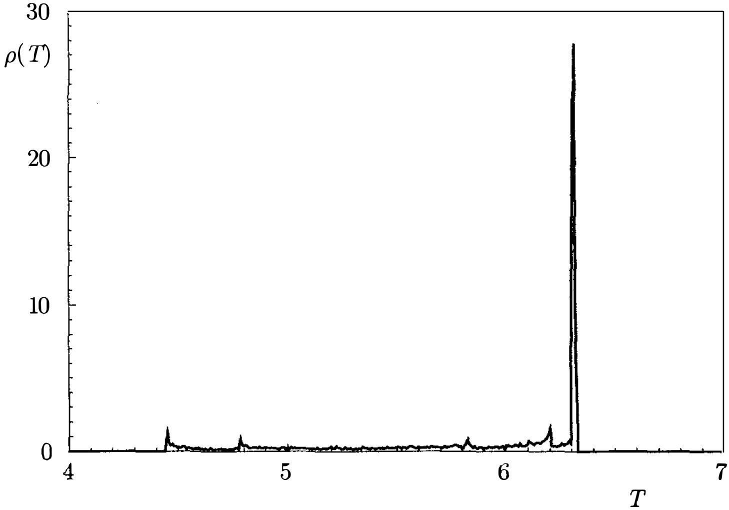


Рис. 14.2. Распределение интервалов времени между последовательными пересечениями фазовой траекторией секущей плоскости $y = 0$ в одном направлении, рассчитанное для аттрактора Рёсслера, представленного на рис. 14.1, *а*

и будем исследовать эволюцию спектра мощности $S_x(\omega)$ переменной $x(t)$ при изменении частоты воздействия ω_1 в интервале $1.060 \leqslant \omega_1 \leqslant 1.065$. Результаты расчета спектров для трех значений ω_1 представлены на рис. 14.3.

Как видно из данных, приведенных на рис. 14.3, для относительно большой расстройки частоты воздействия и базовой частоты автономной системы в спектре колебаний (кривая *1*) присутствуют линия сигнала воздействия ω_1 и линия базовой частоты ω_0. С уменьшением расстройки эти линии сближаются (кривая *2*) и, наконец, происходит захват базовой частоты хаотических автоколебаний внешним сигналом: $\omega_0 = \omega_1$ (кривая *3*). Моменту захвата отвечает значение частоты воздействия $\omega_1 = 1.065$, не равное исходной величине $\omega_0 = 1.0683$. Таким образом, в результате захвата спектральная линия базовой частоты хаотических автоколебаний сместилась и стала равной частоте внешнего воздействия. Имеет место полная аналогия с эффектом захвата частоты в классической теории синхронизации предельного цикла. Дальнейшие исследования показали, что эта аналогия имеет фундаментальный характер. Для спирального хаоса, как и для предельного цикла, можно говорить об эффектах захвата частоты и фазы. Однако, чтобы применить фазовый подход, требуется корректно определить мгновенную фазу хаотических автоколебаний.

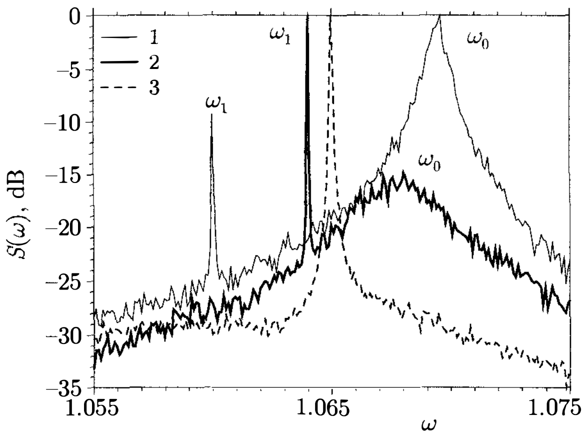


Рис. 14.3. Эффект захвата базовой частоты ω_0 в системе (14.2). Нормированный спектр мощности колебаний $x(t)$ при $\omega_1 = 1.06$ (кривая *1*), $\omega_1 = 1.064$ (кривая *2*) и $\omega_1 = 1.065$ (кривая *3*)

Высокая степень регулярности вращения фазовой траектории аттрактора Рёсслера позволяет представить колебания $x(t)$ и $y(t)$ в том же виде, который использовался ранее при анализе синхронизации генератора Ван дер Поля:

$$x(t) = \rho(t)\cos\Phi(t), \quad y(t) = \rho(t)\sin\Phi(t). \tag{14.3}$$

Замена переменных (14.3) означает следующее. На плоскости переменных (x, y) (рис. 14.1, *а*) изображающей точке на траектории сопоставляется вектор с началом в состоянии равновесия. Для системы Рёсслера при значениях параметров, соответствующих спиральному аттрактору, состояние равновесия расположено практически в начале координат. Таким образом, начало рассматриваемого вектора можно совместить с точкой $(0, 0)$. Длина вектора представляет собой мгновенную амплитуду колебаний $\rho(t)$, а угол поворота вектора относительно оси абсцисс — мгновенную фазу $\Phi(t)$. Положительный угол соответствует вращению против часовой стрелки. Именно так вращается изображающая точка в плоскости (x, y) в системе Рёсслера. В случае когда вращение изображающей точки в рассматриваемой проекции происходит по часовой стрелке (как, например, в ГИН), следует во втором уравнении (14.3) перед синусом поставить знак «—». Замена переменных (14.3) означает переход на плоскости динамических переменных (x, y) к полярной системе отсчета. Таким образом, зная текущие значения x и y, легко найти мгновенные значения амплитуды и фазы:

$$\begin{aligned} \rho(t) &= \sqrt{x^2(t)+y^2(t)}, \\ \Phi(t) &= \operatorname{arctg}\frac{y(t)}{x(t)} \pm \pi k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{14.4}$$

Добавление или вычитание целого числа поворотов на угол π необходимо, чтобы «достроить» фазу до полного угла вращения. При этом значение целочисленной переменной k определяется из условия непрерывности функции $\Phi(t)$. Полученная таким образом мгновенная фаза $\Phi(t)$ является полной фазой, определенной в бесконечном интервале: $\Phi(t) \in [-\infty, +\infty]$. Кроме того, иногда возникает необходимость рассмотреть фазу, определенную в ограниченном интервале: $\tilde{\Phi}(t) \in [-\pi, +\pi]$ или $\tilde{\Phi}(t) \in [0, 2\pi]$. Очевидно, что $\Phi(t) = \tilde{\Phi}(t) \pm 2m\pi$, где m — некоторое целое число.

Рассмотренное нами определение мгновенных амплитуды и фазы не является единственным. Вместо динамических переменных $x(t)$ и $y(t)$ в (14.3) могут быть использованы и другие пары переменных. При выборе таких переменных главное — обеспечить регулярное вращение проекции фазовой траектории вокруг некоторой точки, которая берется за начало радиус-вектора. Подходящими переменными могут быть производные $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ и $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$ или переменные $x(t)$ и $x_\mathrm{H}(t)$, где $x_\mathrm{H}(t)$ — сопряженный по Гильберту процесс $x_\mathrm{H}(t)$:

$$x_\mathrm{H}(t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\theta)}{t-\theta}\mathrm{d}\theta. \tag{14.5}$$

Кроме того, можно ввести фазу, используя последовательность моментов времени t_i, соответствующих пересечениям траекторией секущей плоскости в заданном направлении. При кусочно линейной аппроксимации фаза в произвольный момент времени определяется как

$$\Phi(t) = 2\pi\frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i} \pm 2\pi i, \quad i = 0, 1, 2, \ldots \tag{14.6}$$

Здесь i — число пересечений в заданном направлении за время наблюдения $t - t_0$.

Из любого определения мгновенной фазы $\Phi(t)$ следует определение мгновенной и средней частот колебаний:

$$\omega(t) = \frac{\mathrm{d}\Phi(t)}{\mathrm{d}t}, \quad \omega_\mathrm{c} = \left\langle \frac{\mathrm{d}\Phi(t)}{\mathrm{d}t} \right\rangle = \langle \omega(t) \rangle. \tag{14.7}$$

Здесь скобки $\langle\ldots\rangle$ могут означать как усреднение по ансамблю, так и усреднение по времени, поскольку процесс $\omega(t)$, как правило, обладает свойством эргодичности. Рассматривая усреднение по времени, легко получить

$$\omega_c = \lim_{T\to\infty} \frac{\Phi(t_0+T) - \Phi(t_0)}{T}. \tag{14.8}$$

Очевидно, что мгновенные значения амплитуды, фазы и частоты при различных способах введения амплитуды и фазы будут различны. Однако, чтобы амплитудно-фазовое представление динамики хаотической системы имело смысл, необходимо, чтобы статистические характеристики (по крайней мере те, которые связаны с наблюдаемыми величинами и явлениями) не зависели от принятого за основу определения фазы. Необходимо отметить следующее: при исследовании фазовой синхронизации хаотических автоколебаний очень важно, чтобы мгновенная фаза была определена корректно. Критерием корректности определения мгновенной фазы в режиме спирального аттрактора служит совпадение средней частоты ω_c (14.8) с базовой частотой колебаний ω_0.

Произведя замену переменных (14.3) в уравнениях (14.2), получим уравнения системы Рёсслера в виде:

$$\begin{aligned}
\dot\rho &= \frac{1}{2}\alpha\rho - \frac{1}{2}\alpha\rho\cos 2\Phi - z\cos\Phi + b\cos\Phi\sin(\omega_1 t),\\
\dot\Phi &= 1 + \frac{1}{2}\alpha\sin 2\Phi + \frac{1}{\rho}z\sin\Phi - \frac{1}{\rho}b\sin\Phi\sin(\omega_1 t),\\
\dot z &= \beta + z(\rho\cos\Phi - \mu).
\end{aligned} \tag{14.9}$$

Зафиксировав значения параметров $\alpha = \beta = 0.2$, $\mu = 6.5$ и $b = 0.05$, проинтегрируем систему (14.9) численно, изменяя частоту внешнего воздействия ω_1.

Используя полученные данные для $\Phi(t)$, вычислим соответствующие значения средней частоты ω_c (14.8). На рис. 14.4 представлены зависимости отношений частот $\Theta_c = \omega_c/\omega_1$ (кривая 1) и $\Theta_0 = \omega_0/\omega_1$ (кривая 2) от частоты сигнала воздействия ω_1.

Как видно из графиков, имеет место захват средней частоты ω_c внешним сигналом в конечной области частот $1.065 \leqslant \omega_1 \leqslant 1.078$. При этом рассчитанные значения средней частоты ω_c и базовой частоты ω_0 совпадают в пределах ошибки вычислений.

Используя данные расчетов мгновенной фазы $\Phi(t)$, построим графики зависимости мгновенной разности фаз автоколебаний и воздействия

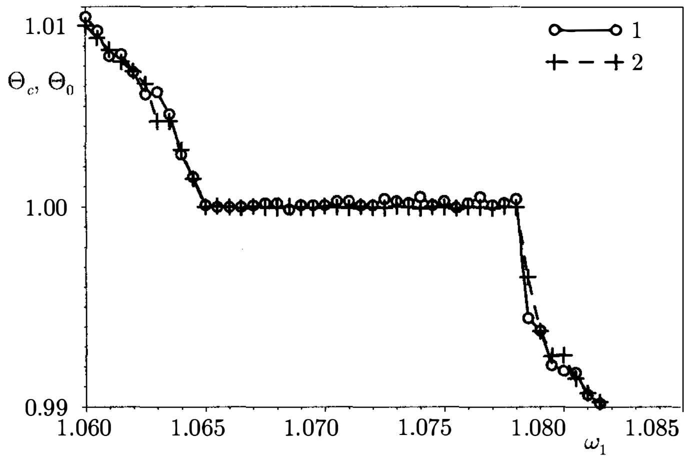


Рис. 14.4. Зависимости отношений частот $\Theta_c = \omega_c/\omega_1$ (кривая 1) и $\Theta_0 = \omega_0/\omega_1$ (кривая 2) от частоты воздействия ω_1, рассчитанные для системы (14.9)

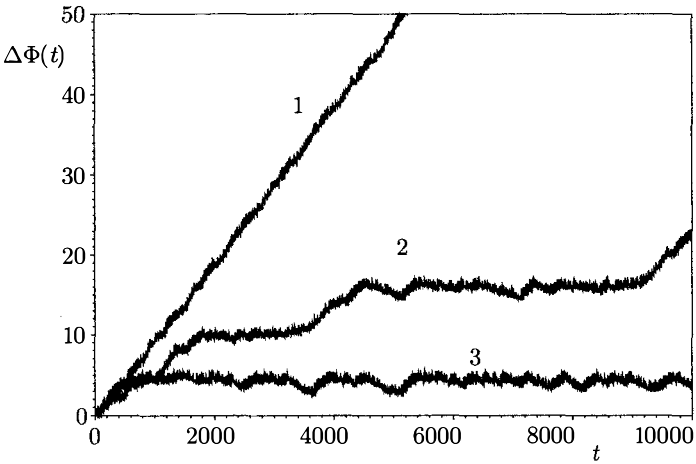


Рис. 14.5. Мгновенная разность фаз $\Delta\Phi(t) = \Phi(t) - \omega_1 t$ в зависимости от времени в системе (14.9) для трех значений частоты внешнего сигнала: $\omega_1 = 1.06$ (1), $\omega_1 = 1.064$ (2) и $\omega_1 = 1.065$ (3)

$\Delta\Phi(t) = \Phi(t) - \omega_1 t$ от времени. На рис. 14.5 представлены такие зависимости, полученные для трех значений частоты внешнего сигнала.

Как видно из графика, в области синхронизации (кривая 3) имеет место эффект захвата фазы генератора Рёсслера внешним сигналом: абсолютная величина разности фаз $|\Delta\Phi|$ не растет во времени, а остается ограниченной вблизи некоторого постоянного значения.

Согласно концепции фазовой синхронизации хаотических автоколебаний классическое определение эффекта фазового захвата должно быть преобразовано следующим образом:

$$|m\Phi_1(t) - n\Phi_2(t)| \leqslant K, \tag{14.10}$$

где K — ограниченная константа, зависящая от начальной разности фаз, m и n — целые числа. В отличие от синхронизации периодических колебаний, в случае захвата фаз хаотических автогенераторов разность фаз не является константой. Она флуктуирует во времени, но ее отклонения от некоторого постоянного значения строго ограничены. Абсолютная величина таких отклонений не должна превышать π. Легко видеть, что из условия фазового захвата (14.10) следует рациональное соотношение средних частот:

$$m\omega_{c1} = n\omega_{c2}, \text{ где } \omega_{c1} = \left\langle \frac{\mathrm{d}\Phi_1(t)}{\mathrm{d}t} \right\rangle, \quad \omega_{c2} = \left\langle \frac{\mathrm{d}\Phi_2(t)}{\mathrm{d}t} \right\rangle. \tag{14.11}$$

Поскольку в режиме спирального аттрактора базовые частоты спектров парциальных генераторов совпадают с соответствующими средними частотами, то равенство (14.11) должно выполняться и для базовых частот. Таким образом, частотная и фазовая синхронизации хаоса не являются двумя различными эффектами, а так же, как и в классическом случае, представляют собой две стороны одного явления — частотно-фазовой синхронизации.

Синхронизация хаотического автогенератора наблюдается в некоторой области значений управляющих параметров, называемой *областью синхронизации*. Рассмотрим системы (14.2), (14.9) при $\alpha = \beta = 0.2$, $\mu = 6.5$. Будем менять параметры внешнего воздействия ω_1 и b и построим область синхронных режимов на плоскости (ω_1, b), используя для диагностики синхронизации хаоса рассмотренные выше критерии. Результаты расчетов приведены на рис. 14.6.

Область, помеченная на диаграмме цифрой 1, отвечает режиму синхронного хаоса. В этой области имеет место эффект захвата базовой частоты хаотического аттрактора ω_0 внешним сигналом на основном тоне, $\omega_c = \omega_1$. Одновременно в этой области происходит захват фазы с условием $|\Delta\Phi| = |\Phi(t) - \omega_1 t| \leqslant K$. Переход из области 1 в область 2 означает переход

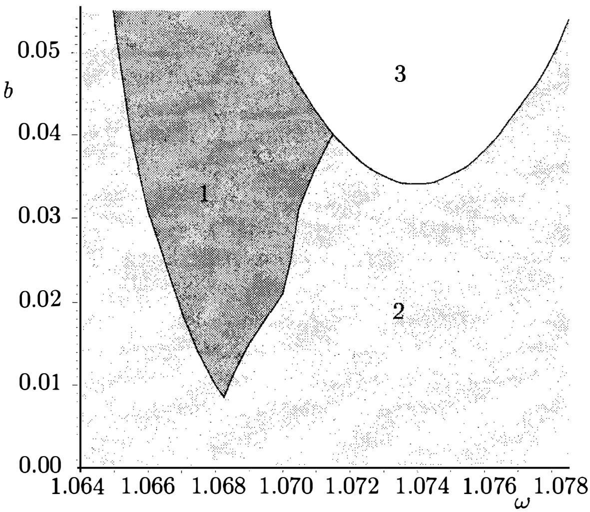


Рис. 14.6. Диаграмма режимов системы (14.2) на плоскости параметров (ω_1, b): 1 — область синхронного хаоса; 2 — область несинхронного хаоса; 3 — область синхронных периодических колебаний

от синхронного хаоса к несинхронному хаосу, чему соответствует нарушение режима захвата частоты и фазы. Поскольку в спектре несинхронного хаоса (область 2), кроме широкополосного пьедестала, присутствуют спектральные линии двух базовых частот ω_0 и ω_1, его называют *тороидальным хаосом* или *тор-хаосом*. В области 3 существуют устойчивые периодические колебания (предельный цикл) периода $T = \dfrac{8\pi}{\omega_0}$ с захваченной основной частотой: $\omega_0 = \omega_1$ и субгармониками $\dfrac{\omega_1}{2}$ и $\dfrac{\omega_1}{4}$. Таким образом, область синхронизации, представленная на рис. 14.6, состоит из двух областей с различным характером синхронных колебаний: области синхронного хаоса (1) и области синхронных периодических колебаний (3). В общем случае устройство области синхронизации хаотических автоколебаний может быть очень сложным и включать множество областей, соответствующих различным хаотическим и периодическим аттракторам.

Если ограничиться малыми значениями амплитуды воздействия (в рассматриваемом случае $b \leqslant 0.34$), то картина будет сравнительно простой: имеет место характерная область синхронизации хаоса в виде «клюва», как и для случая периодических автоколебаний. Отличие в том, что клюв синхронизации хаоса не опирается на ось абсцисс, соответствующую нулевой амплитуде воздействия. Для того чтобы фазовый захват хаотических автоколебаний стал возможен, необходимо, чтобы амплитуда воздействия (или связь, при взаимной синхронизации) превысила некоторое пороговое значение. Причина существования порога тесно связана с бифуркационным механизмом частотно-фазовой синхронизации хаоса. Этот механизм все еще недостаточно изучен, однако ясно, что принципиальную роль в нем играют седловые предельные циклы, встроенные в хаотический аттрактор. Было показано, что на плоскости управляющих параметров линии касательных бифуркаций седловых циклов различных периодов накапливаются к границе синхронизации хаоса. Сама граница хаотической синхронизации представляет собой критическую линию, к которой сходятся точки касательных бифуркаций для циклов с возрастающими периодами.

Для анализа данной проблемы вводится некоторое искусственно сконструированное двумерное необратимое отображение, моделирующее синхронизацию хаотического генератора периодической внешней силой. Седловые циклы, являющиеся как бы «скелетом» синхронного хаотического аттрактора, претерпевают касательные бифуркации в паре с соответствующими периодическими репеллерами. Последние составляют скелет хаотического репеллера, который касается хаотического аттрактора в отдельных точках, а именно в точках седловых и репеллерных циклов в момент их слияния[1]. Каждая пара скелетных циклов принадлежит неустойчивой инвариантной кривой (соответствующей седловому тору потоковой системы). В результате касательной бифуркации движение на инвариантной кривой становится эргодическим, т. е. возникает направление, по которому изображающая точка уходит от синхронного аттрактора и, сделав оборот вдоль инвариантной кривой, вновь возвращается. При этом наблюдается скачок разности фаз на 2π.

Существование порога синхронизации хаоса имеет очевидное объяснение: скелетные циклы хаотического аттрактора имеют близкие, но все же несколько различающиеся основные частоты. Каждый такой цикл имеет свой клюв синхронизации, границами которого служат линии седло-репеллерных бифуркаций. Клювы синхронизации различных циклов опираются на различные точки оси абсцисс, соответствующей нулевой амплитуде воздействия. Таким образом, область синхронизации хаоса, представляющая собой пересечение клювов синхронизации всевозможных скелетных циклов, уже не может иметь общую точку с осью абсцисс. Ее нижняя гра-

[1] В моделируемой потоковой системе роль репеллерных циклов очевидно играют седловые циклы, но с большей размерностью неустойчивого многообразия, чем скелетные циклы аттрактора, а вместо хаотического репеллера существует хаотическое седло.

ница отстоит от оси абсцисс на некоторое расстояние, равное пороговому значению амплитуды воздействия (рис. 14.7).

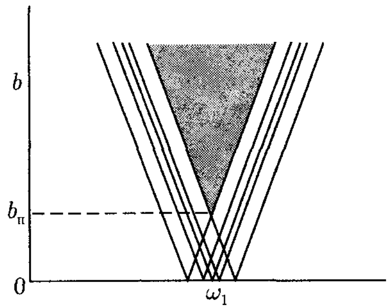


Рис. 14.7. Качественная иллюстрация возникновения амплитудного порога при синхронизации хаоса: сплошными тонкими линиями обозначены границы клювов синхронизации седловых скелетных циклов; закрашенная область соответствует синхронизации хаоса; пунктиром отмечен порог синхронизации $b_п$

Численные эксперименты с автогенераторами когерентного хаоса, описываемыми обыкновенными дифференциальными уравнениями, в целом подтверждают предполагаемый бифуркационный механизм фазового захвата хаотических колебаний.

В классической теории синхронизации периодических автоколебаний различают два механизма синхронизации: захват фаз и подавление автоколебаний в одной из взаимодействующих систем. Переход в область синхронизации через подавление автоколебаний наблюдается при больших значениях частотной расстройки и сильном взаимодействии систем (см. лекцию 12). Подавление может иметь место и в случае хаотических автоколебаний. Как показывают результаты исследований, при взаимной синхронизации хаотических автогенераторов или при вынужденной синхронизации хаоса гармоническим сигналом эффекту подавления автоколебаний предшествует переход от несинхронного хаоса к квазипериодическому режиму. В области синхронизации в этом случае наблюдаются периодические колебания, а ее граница соответствует бифуркации рождения тора (бифуркации Неймарка–Сакера)[2]. Для того чтобы наблюдать переход «несинхронный хаос» → «синхронный хаос», реализуемый через механизм подавления, нужно рассмотреть однонаправленное воздействие одного хаотическо-

[2]Область периодических колебаний на рис. 14.6 не связана с эффектом подавления. Об этом свидетельствует характер границы между областями 2 и 3, которая связана с седло-узловой бифуркацией циклов.

го генератора на другой. При соответствующем выборе параметра частотной расстройки и коэффициента однонаправленной связи в такой системе в области хаотической динамики можно наблюдать оба классических механизма синхронизации, связанные с захватом и с подавлением автоколебаний.

Обобщенная синхронизация хаоса, наблюдаемая в системах с однонаправленной связью (связь типа *«master-slave»*), есть не что иное, как подавление автоколебаний вынуждаемой системы. Состояние вынуждаемой системы в этом случае полностью определяется состоянием воздействующей системы. Такое явление можно наблюдать при взаимодействии хаотических систем не только с близким типом поведения, но и с совершенно различной структурой хаоса. Возможно также подавление хаоса периодическим сигналом (о чем говорилось выше) и даже случайной силой.

14.3. Исследование вынужденной синхронизации генератора спирального хаоса в натурном эксперименте

Для проведения экспериментов была использована установка, включающая радиотехнический генератор с инерционной нелинейностью Анищенко – Астахова (ГИН), генератор гармонического сигнала, подаваемого на ГИН в качестве внешнего воздействия, и компьютер с быстродействующим аналого-цифровым преобразователем (АЦП).

При определенных значениях параметров в генераторе реализуется спиральный хаотический аттрактор, наблюдаемый экспериментально. Соответствующая проекция аттрактора в плоскости x, y и спектр процесса $x(t)$ представлены на рис. 14.8, *а,б*[3].

Исследуемый спиральный аттрактор является двухсвязанным, т. е. имеет вид двухобходной ленты Мёбиуса. Соответственно, в спектре мощности присутствует субгармоника на частоте $f_0/2$ и линии на кратных частотах. Этот факт не является принципиальным для исследования эффекта синхронизации. Если внешнее воздействие приводит к захвату базовой частоты f_0, то захваченными оказываются все ее гармоники и субгармоники. Выбор данного режима в эксперименте обусловлен тем обстоятельством, что развитый (односвязанный) спиральный аттрактор в ГИН оказывается слишком чувствительным к слабому шуму, неизбежно присутствующему в экспериментальной установке.

[3]В действительности экспериментально снимаются не безразмерные переменные x и y, а напряжения в определенных точках установки, пропорциональные данным величинам.

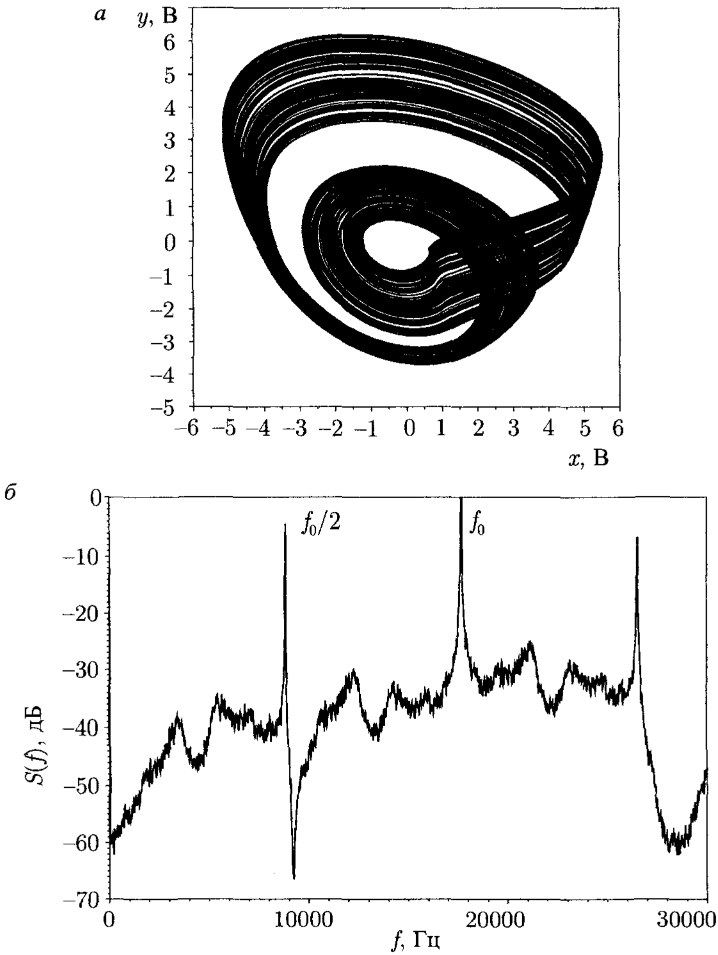


Рис. 14.8. Проекция спирального аттрактора (*а*) и нормированный спектр мощности $S_x(f)$ колебаний $x(t)$ (*б*) в режиме спирального хаоса, полученные экспериментально для радиотехнического генератора Анищенко – Астахова

Экспериментально исследовалась вынужденная синхронизация генератора гармоническим воздействием с частотой f_1, близкой к базовой частоте хаотических автоколебаний. Данные, полученные экспериментально для ГИН, находятся в полном соответствии с результатами численного моделирования вынужденной синхронизации хаоса в осцилляторе Рёсслера, которые были представлены в предыдущем разделе. На рис. 14.9 приведены фрагменты спектров колебаний, иллюстрирующие эффект захвата базовой частоты f_0.

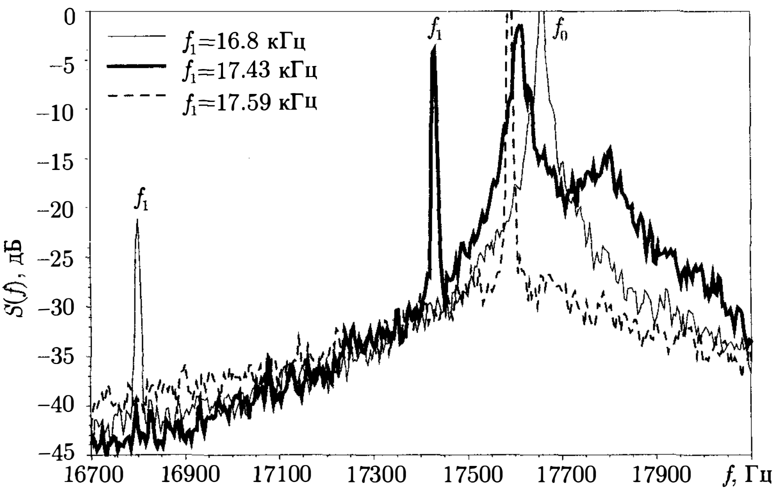


Рис. 14.9. Эффект захвата базовой частоты f_0 в хаотическом генераторе Анищенко–Астахова при изменении частоты гармонического воздействия (физический эксперимент)

Экспериментально измерялось отношение частот $\Theta_0 = f_0/f_1$ и была построена зависимость Θ_0 от частоты воздействия f_1 (рис. 14.10). Она свидетельствует о существовании конечной области захвата частоты.

На рис. 14.11 представлен фрагмент области вынужденной синхронизации хаотического радиотехнического генератора на плоскости управляющих параметров: частота воздействия f_1, амплитуда внешней силы b. Форма области синхронизации близка к соответствующей для генератора Ван дер Поля, однако четко виден порог синхронизации.

14.4. Полная синхронизация взаимодействующих хаотических систем

При взаимодействии двух совершенно идентичных хаотических автогенераторов можно наблюдать явление полной синхронизации хаоса: начи-

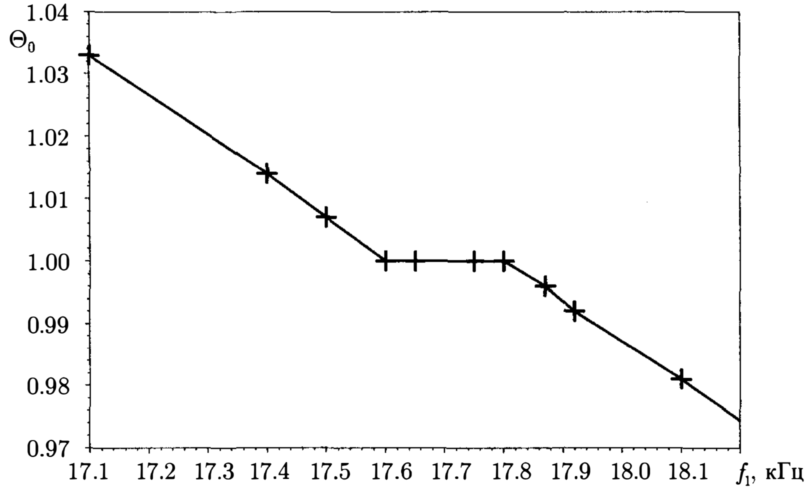


Рис. 14.10. Зависимость отношения частот $\Theta_0 = f_0/f_1$ от частоты воздействия f_1 в хаотическом генераторе Анищенко – Астахова (физический эксперимент)

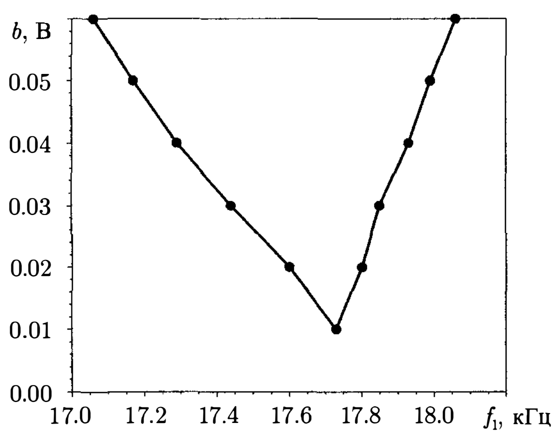


Рис. 14.11. Область синхронизации системы хаотического генератора Анищенко – Астахова на плоскости параметров (f_1, b) (физический эксперимент)

ная с некоторого значения параметра связи, колебания парциальных систем становятся полностью идентичными.

Рассмотрим в общем виде некоторую систему двух взаимодействующих полностью идентичных хаотических подсистем:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}}_1 &= \mathbf{F}(\vec{x}_1, \vec{\alpha}_1) + \gamma \mathbf{g}(\vec{x}_2, \vec{x}_1), \\ \dot{\vec{x}}_2 &= \mathbf{F}(\vec{x}_2, \vec{\alpha}_2) + \gamma \mathbf{g}(\vec{x}_1, \vec{x}_2). \end{aligned} \tag{14.12}$$

Здесь $\vec{x}_{1,2}$ — векторы состояния, а $\vec{\alpha}_{1,2}$ — векторные параметры подсистем. Если $\vec{\alpha}_1 = \vec{\alpha}_2$, то парциальные элементы полностью идентичны. Векторная функция $\vec{g}(\ldots)$ определяет характер связи, причем $\vec{g}(\vec{x}_1, \vec{x}_1) = \vec{g}(\vec{x}_2, \vec{x}_2) = 0$. В случае полной идентичности парциальных подсистем в фазовом пространстве полной системы (14.12) существует инвариантное многообразие $\vec{U}$ ($\vec{x}_1 = \vec{x}_2$), называемое *симметричным подпространством*. Фазовые траектории, лежащие в $\vec{U}$, соответствуют полностью синхронным колебаниям. Если предельное множество $\vec{U}$ является притягивающим в фазовом пространстве системы (14.12), то есть является аттрактором, то реализуется *эффект полной синхронизации*.

Проиллюстрируем эффект полной синхронизации на примере двух симметрично связанных идентичных осцилляторов Рёсслера. Уравнения системы имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -y_1 - z_1 + \gamma(x_2 - x_1), \\ \dot{y}_1 &= x_1 + \alpha y_1, \\ \dot{z}_1 &= \beta + z_1(x_1 - \mu), \\ \dot{x}_2 &= -y_2 - z_2 + \gamma(x_1 - x_2), \\ \dot{y}_2 &= x_2 + \alpha y_2, \\ \dot{z}_2 &= \beta + z_2(x_2 - \mu). \end{aligned} \tag{14.13}$$

Выберем режим спирального хаоса в каждой из взаимодействующих подсистем, положив $\alpha = \beta = 0.2$ и $\mu = 6.5$, и проследим эволюцию предельного множества фазовых траекторий системы (14.13) с увеличением параметра связи. С этой целью будем строить проекцию аттрактора на плоскость однотипных переменных (x_1, x_2) или (y_1, y_2). Режиму полной синхронизации при этом отвечает аттрактор, расположенный в симметричном подпространстве $\vec{U}$. Соответственно, проекции траекторий на аттракторе лежат на диагонали $x_1 = x_2$ (или $y_1 = y_2$).

На рис. 14.12 представлены результаты вычислений, проведенных для значения коэффициента связи $\gamma = 0.2$. Видно, что фазовая траектория, стартующая из начальной точки, не принадлежащей $\vec{U}$, после некоторого переходного процесса достигает инвариантного подпространства $\vec{U}$ и там остается. Таким образом, при выбранном значении параметра связи в системе реализуется режим полной хаотической синхронизации: для любого момента времени $t > t_п$ ($t_п$ — время переходного процесса) $x_1(t) \equiv x_2(t)$, $y_1(t) \equiv y_2(t)$ и $z_1(t) \equiv z_2(t)$.

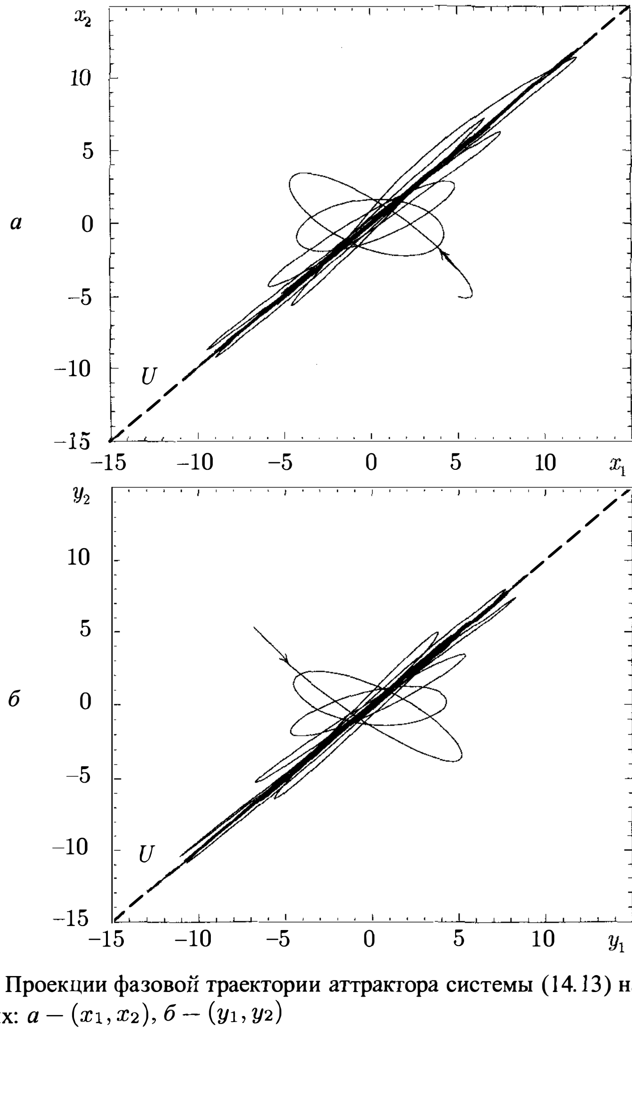


Рис. 14.12. Проекции фазовой траектории аттрактора системы (14.13) на плоскость переменных: *а* — (x_1, x_2), *б* — (y_1, y_2)

Многочисленные исследования показали, что полная синхронизация (в отличие от частотно-фазовой) может наблюдаться не только для спирального хаоса, но и в случае более сложных хаотических автоколебаний, таких как квазигиперболический хаос в системе Лоренца или режим двойной спирали в генераторе Чуа. Полная хаотическая синхронизация возможна не только для автогенераторов, но также и для взаимодействующих нелинейных хаотических осцилляторов, находящихся под воздействием одной и той же внешней силы, и модельных отображений последования.

Механизм возникновения и разрушения полной синхронизации, так же как и в случае частотно-фазовой синхронизации, связан с бифуркациями седловых и репеллерных циклов в хаотическом предельном множестве. В отличие от механизма частотно-фазовой синхронизации он достаточно полно исследован. Четко установлено, каким образом инвариантное многообразие $\vec{U}$ системы (14.12), в котором располагается «синфазный» хаотический аттрактор, перестает быть притягивающим при уменьшении параметра связи.

Для простоты вместо системы (14.12) рассмотрим модельные отображения последования, представляющие собой связанные одномерные необратимые отображения:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n) + \gamma g(y_n, x_n), \\ y_{n+1} &= f(y_n) + \gamma g(x_n, y_n). \end{aligned} \tag{14.14}$$

Устойчивость траекторий системы (14.14), принадлежащих инвариантному многообразию $\vec{U}$ (биссектрисе $x = y$), в этом случае определяется двумя ляпуновскими показателями: λ_{tn} и λ_{tr}. Показатель λ_{tn} характеризует эволюцию возмущений, лежащих в $\vec{U}$, а λ_{tr} — трансверсальных к нему. Таким образом, разрушение режима полной хаотической синхронизации в (14.14) диагностируется по знаку *трансверсального показателя*, определяемого выражением

$$\lambda_{\text{tr}} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln \left| \left\{ \frac{\partial}{\partial y_i} (f(y_i) + \gamma[g(x_i, y_i) - g(y_i, x_i)]) \right\}_{y_i = x_i} \right|. \tag{14.15}$$

Если показатель λ_{tr} становится положительным, это означает, что предельное множество, лежащее в $\vec{U}$, теряет устойчивость в трансверсальном направлении и траектория при сколь угодно малом нарушении симметрии в начальных условиях уходит от инвариантного многообразия $\vec{U}$ на какой-либо аттрактор, не лежащий в $\vec{U}$. В многомерном случае эволюция возмущения, трансверсального к $\vec{U}$, описывается N ляпуновскими показателями (где N — размерность фазового пространства парциальной системы). Если хотя бы один из них становится положительным, то инвариантное многообразие перестает быть устойчивым. В результате происходит разрушение режима полной синхронизации хаоса, называемое *бифуркацией прорыва* (*blowout bifurcation*). Оно обычно сопровождается явлением переходной (на конечных временах) или «истинной» перемежаемости (*перемежаемость Ямады – Фуджисаки*, или *on-off-перемежаемость*).

Однако ляпуновские показатели — это усредненные по аттрактору характеристики, которые не диагностируют всех локальных изменений в структуре предельного множества. Известно, что еще до того, как $\lambda_{\rm tr}$ становится положительным, возможно появление счетного множества точек инвариантного многообразия, в которых имеет место трансверсальная неустойчивость. Эти точки принадлежат неустойчивым циклам, лежащим в инвариантном подпространстве. Для двумерного отображения (14.14) эти циклы являются репеллерами, в общем случае — седлами. Попав в окрестность такого цикла, изображающая точка (если она не лежит строго в $\vec{U}$) удаляется от инвариантного многообразия. Если в системе при тех же значениях параметров нет другого аттрактора, кроме «синфазного» (лежащего в $\vec{U}$), то через некоторое время траектория вновь вернется в окрестность инвариантного многообразия и в конечном счете попадет на него. Однако если число встроенных в «синфазный» хаотический аттрактор неустойчивых циклов велико, может наблюдаться длительный переходный процесс on-off-перемежаемости. Воздействие малого шума на «синфазный» хаос приводит к постоянному возобновлению процесса перемежаемости. Наблюдаемый экспериментально хаотический аттрактор в результате действия шума уже не лежит в инвариантном многообразии, а как бы разбухает. Это явление получило название *баблинга*, или *пузырения* аттрактора[4].

Если в системе имеется какой-либо регулярный или хаотический аттрактор, не лежащий в $\vec{U}$, то возникновение неустойчивых циклов в «синфазном» аттракторе приводит к образованию «языков» бассейна притяжения «несинфазного» аттрактора, опирающихся на точки этих циклов. Подобный «язык» на фазовой плоскости качественно изображен на рис. 14.13. Границы языка образованы устойчивыми многообразиями «несинфазных» седловых циклов $S^{1,2}$.

Возникновение счетного множества языков, принадлежащих аттрактору, не лежащему в $\vec{U}$, приводит к «изрешечиванию» локальной окрестности инвариантного многообразия, так что сколь угодно близко от любой точки

[4]От слова bubling — пузырение.

«синфазного» аттрактора найдется точка, принадлежащая бассейну другого аттрактора. Такое явление получило название *ридлинга* или *изрешечивания*. В результате изрешечивания хаотический аттрактор в $\vec{U}$ перестает быть аттрактором в обычном смысле. Он превращается в так называемый *слабый аттрактор*, или *аттрактор Милнора*.

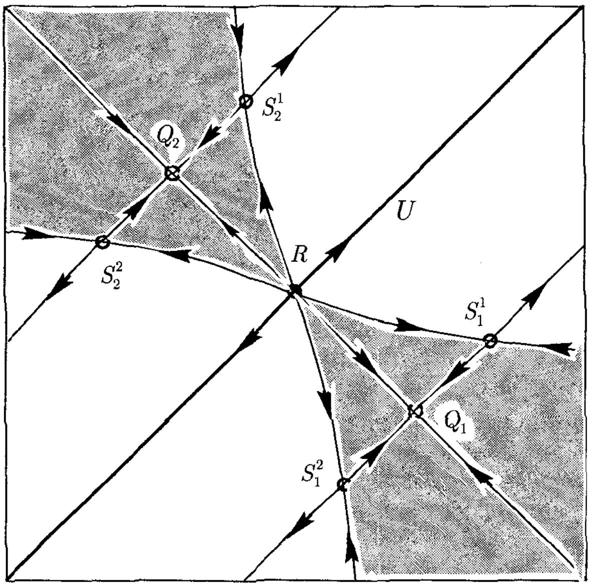


Рис. 14.13. Возникновение языка бассейна «несинфазного» цикла периода 2 (точки $Q_{1,2}$), опирающегося на репеллер R в инвариантном многообразии $\vec{U}$ (биссектриса). $S_{1,2}^1$ и $S_{1,2}^2$ – точки седловых циклов периода 2

На рис. 14.14 представлен вид изрешеченной окрестности хаотического аттрактора, лежащего в многообразии $\vec{U}$ (на биссектрисе), для системы связанных логистических отображений. Рисунок соответствует случаю, когда трансверсальный ляпуновский показатель еще отрицателен, т. е. бифуркация прорыва еще не произошла.

После того как трансверсальное направление становится неустойчивым в среднем на аттракторе, лежащий в инвариантном многообразии аттрактор перестает быть аттрактором даже в смысле Милнора, что и соответствует бифуркации прорыва.

Подчеркнем еще раз, что полная синхронизация хаоса возможна только для полностью идентичных взаимодействующих систем. При расстройке

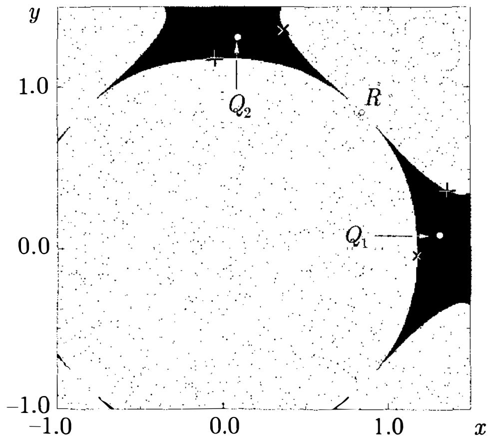


Рис. 14.14. Бистабильность и ридлинг в системе связанных логистических отображений. Помимо хаотического «синфазного» аттрактора, расположенного на биссектрисе $x = y$, имеется «несинфазный» устойчивый цикл периода 2 (ему принадлежат точки $Q_{1,2}$). Бассейн притяжения «несинфазного» аттрактора обозначен темными точками

парциальных систем по параметрам симметричное подпространство $\vec{U}$ перестает существовать, и соответственно, при конечном значении параметра связи полная синхронизация невозможна. Однако если различие взаимодействующих систем незначительно, то при достаточно сильной связи наблюдается эффект, близкий к полной синхронизации. Он состоит в том, что колебания парциальных систем полностью повторяют друг друга с некоторой задержкой $\tau_{\rm d}$ во времени: $\vec{x}_1(t) = \vec{x}_2(t + \tau_{\rm d})$. Этот эффект был назван *lag-синхронизацией* (*запаздывающей синхронизацией*). Хотя инвариантного подпространства $\vec{U}$ в случае запаздывающей синхронизации не существует, хаотический аттрактор топологически эквивалентен аттрактору при полной синхронизации. Таким образом, запаздывающую синхронизацию можно рассматривать как обобщение понятия полной синхронизации на случай систем со слабой частотной расстройкой.

14.5. Количественные характеристики степени синхронности хаотических автоколебаний

Для взаимодействующих хаотических автогенераторов одного типа, но характеризующихся частотной расстройкой можно выделить три степени синхронизации хаоса. Граница области синхронизации на плоскости параметров, управляющих связью и расстройкой, соответствует частотно-фазовой синхронизации парциальных систем. С уменьшением расстройки и ростом параметра связи может возникнуть более сильный эффект синхронизации — запаздывающая синхронизация. Переход от частотно-фазовой синхронизации к запаздывающей синхронизации является сложным процессом, бифуркационный механизм которого еще не в достаточной степени изучен, но, по-видимому, аналогичен механизму возникновения-разрушения полной синхронизации. При нулевой расстройке, начиная с некоторого значения параметра связи, может наблюдаться полная синхронизация: хаотическое предельное множество в симметричном подпространстве становится притягивающим в полном фазовом пространстве системы. В научной литературе можно встретить много различных количественных характеристик степени синхронности взаимодействующих хаотических автогенераторов. Одни из них позволяют определить границу частотно-фазового захвата, другие диагностируют запаздывающую или полную синхронизацию.

Взаимная частотно-фазовая синхронизация хаотических автогенераторов, так же как и рассмотренная ранее вынужденная синхронизация, легко диагностируется с помощью отношения характерных частот (базовых или средних частот взаимодействующих автогенераторов) Θ. В основной области синхронизации выполняется равенство $\Theta = 1$. Кроме того, фазовый захват можно определить с помощью коэффициента эффективной диффузии разности фаз $B_{\text{эф}\Delta\Phi}$, который дает оценку скорости линейного роста дисперсии разности фаз во времени. В случае строгого фазового захвата он должен быть равен нулю, что связано с выполнением условия (14.10). В численных экспериментах из-за ограниченной точности вычислений добиться нулевого значения коэффициента эффективной диффузии разности фаз не удается, однако $B_{\text{эф}\Delta\Phi}$ резко (на несколько порядков) уменьшается на границе области захвата.

Иногда для оценки степени синхронности используют характеристики типа следующей:

$$\nu = \frac{\sigma^2_{x_1+x_2}}{2(\sigma^2_{x_1} + \sigma^2_{x_2})}, \tag{14.16}$$

где $x_1(t)$ и $x_2(t)$ — однотипные динамические переменные автогенераторов, $\sigma^2_{x_1}$ и $\sigma^2_{x_2}$ — дисперсии переменных $x_1(t)$ и $x_2(t)$, а $\sigma^2_{x_1+x_2}$ — дисперсия их суммы. Очевидно $\nu \in [0.5; 1]$, причем $\nu = 1$ соответствует случаю полной синхронизации, а при полной независимости процессов $x_1(t)$ и $x_2(t)$

получаем $\nu = 0.5$. Однако данная характеристика не позволяет четко диагностировать ни фазового захвата, ни запаздывающей синхронизации.

Предлагается характеристика, позволяющая обнаруживать не только полную, но и запаздывающую синхронизацию взаимодействующих хаотических систем:

$$\kappa = \min_\tau G(\tau), \tag{14.17}$$

где $G(\tau)$ — функция подобия,

$$G^2(\tau) = \frac{\left\langle \left(x_2(t+\tau) - x_1(t) \right)^2 \right\rangle}{\sqrt{\left(\langle x_1^2(t) \rangle \langle x_2^2(t) \rangle \right)}}, \tag{14.18}$$

где $x_1(t)$ и $x_2(t)$ — однотипные динамические переменные двух парциальных систем. В случае полной и запаздывающей синхронизации $\kappa = 0$. С ростом расстройки и с уменьшением связи κ растет.

Чтобы охарактеризовать степень синхронности, можно использовать также взаимную нормированную корреляционную функцию (коэффициент взаимной корреляции):

$$R_{x_1x_2}(\tau) = \frac{\langle x_1(t)x_2(t+\tau)\rangle - \langle x_1(t)\rangle\langle x_2(t+\tau)\rangle}{\sqrt{\left(\langle x_1^2(t)\rangle - \langle x_1(t)\rangle^2\right)\left(\langle x_2^2(t+\tau)\rangle - \langle x_2(t+\tau)\rangle^2\right)}}. \tag{14.19}$$

Величина $\eta = \max_\tau R_{x_1x_2}(\tau)$ будет равна единице в случае запаздывающей синхронизации (и, разумеется, полной синхронизации) и стремится к нулю при потере колебаниями $x_1(t)$ и $x_2(t)$ статистической взаимосвязи.

Степень синхронности хаотических колебаний можно оценить и в рамках спектрального подхода. С этой целью используют функцию когерентности

$$r_{x_1x_2}(\omega) = \frac{|S_{x_1x_2}(\omega)|}{\sqrt{S_{x_1}(\omega)S_{x_2}(\omega)}}, \tag{14.20}$$

где S_{x_1}, S_{x_2} — спектры мощности флуктуаций $x_1(t) - \langle x_1\rangle$ и $x_2(t) - \langle x_2\rangle$; $S_{x_1x_2}$ — взаимный спектр флуктуаций. Для статистически независимых процессов $r_{x_1x_2} \equiv 0$, а в случае линейной взаимосвязи $x_1(t)$ и $x_2(t)$ имеем $r_{x_1x_2} \equiv 1$. Чтобы ввести не зависящую от частоты количественную характеристику, можно рассматривать среднее значение коэффициента когерентности в исследуемом частотном интервале $\overline{r}$.

На рис. 14.15 в качестве примера приведены зависимости рассмотренных выше характеристик степени синхронности хаотических колебаний от параметра связи, полученные для системы двух связанных осцилляторов Рёсслера с небольшой частотной расстройкой:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -y_1 - z_1 + \gamma(x_2 - x_1), \\ \dot{y}_1 &= x_1 + \alpha y_1, \\ \dot{z}_1 &= \beta + z_1(x_1 - \mu), \\ \dot{x}_2 &= -(1 - \Delta)y_2 - z_2 + \gamma(x_1 - x_2), \\ \dot{y}_2 &= (1 - \Delta)x_2 + \alpha y_2, \\ \dot{z}_2 &= \beta + z_2(x_2 - \mu), \end{aligned} \tag{14.21}$$

где Δ — параметр, задающий расстройку парциальных автогенераторов; γ — параметр связи.

Как можно видеть из графиков, представленных на рис. 14.15, различные характеристики по-разному реагируют на пересечение границ l_1 и l_2 и, соответственно, должны применяться с учетом того, какой именно эффект синхронизации изучается. Кроме выше рассмотренных, применяются и другие характеристики степени синхронизации, например, основанные на расчете взаимной или условной информации.

14.6. Заключение

Эффекты, рассмотренные в лекции, позволяют утверждать, что способность к синхронизации проявляют и хаотические автоколебательные системы. Однако как именно проявится фундаментальное свойство синхронизации, какие именно эффекты, связанные с синхронизацией, возможно наблюдать для той или иной системы, зависит от характеристик хаотического аттрактора. Наиболее последовательно классическая теория синхронизации применима к автогенераторам в режиме спирального аттрактора. Для них возможна частотно-фазовая синхронизация. По своим спектрально-корреляционным характеристикам такие хаотические автогенераторы подобны периодическим генераторам, находящимся под действием шума. В то же время, в отличие от зашумленных генераторов, частотно-фазовая синхронизация в детерминированном режиме спирального хаоса является строгой (т. е. мгновенная фаза остается захваченной сколь угодно долго) и эффективная диффузия разности фаз в области синхронизации строго равна нулю.

Для других типов хаотических аттракторов (винтового аттрактора, аттрактора Лоренца, двойной спирали Чуа и иных аттракторов переключа-

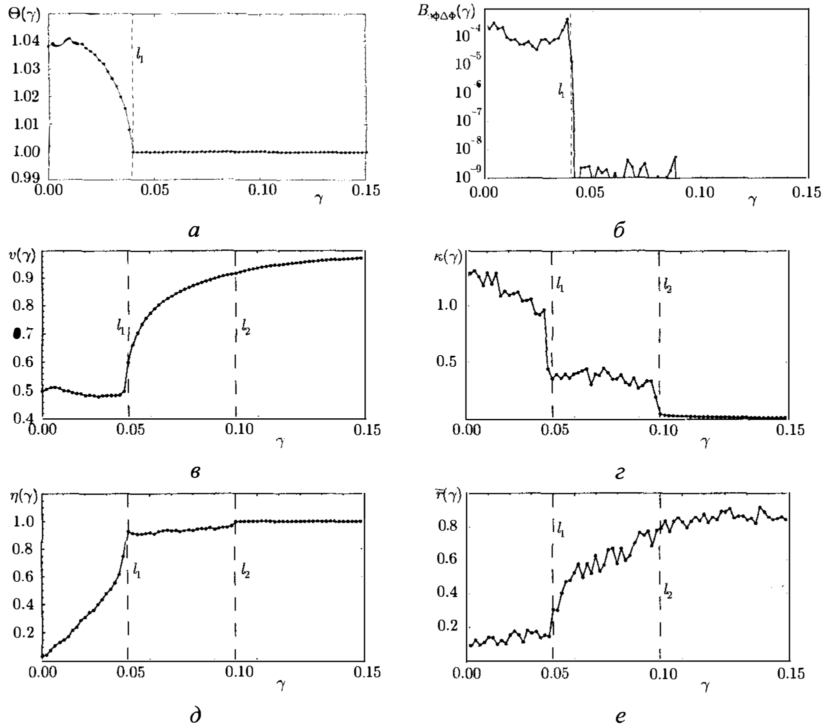


Рис. 14.15. Зависимость различных количественных характеристик степени синхронности взаимодействующих хаотических генераторов от параметра связи γ для модели (14.21) при $\alpha = \beta = 0.2$; $\mu = 6.5$; $\Delta = 0.02$: *а* — отношение средних частот $\Theta = \Omega_2/\Omega_1$; *б* — коэффициент эффективной диффузии $B_{\text{эф}\Delta\Phi}$ мгновенной разности фаз; *в* — величина ν, задаваемая выражением (14.16); *г* — минимальное значение функции подобия κ; *д* — минимальное значение коэффициента взаимной корреляции η; *е* — среднее значение коэффициента когерентности $\overline{r}$. Пунктирными линиями l_1, l_2 отмечены границы фазовой и lag-синхронизации соответственно

тельного типа) строгая частотно-фазовая синхронизация не наблюдается, но возможны другие эффекты, такие как частичная фазовая синхронизация, синхронизация переключений, полная или обобщенная синхронизация. Исследование каждого из эффектов синхронизации хаоса требует своих методов проведения численных и натурных экспериментов и своих наиболее подходящих для рассматриваемого случая средств диагностики и характеристик степени синхронизации.

Лекция 15

Основы теории случайных процессов

15.1. Введение

Широкий спектр задач статистической радиофизики и нелинейной динамики, теории колебаний и волн связан с необходимостью анализа динамики систем в условиях воздействия флуктуаций (или шумов). Любой шум, действующий на динамическую систему, представляет собой по определению случайный процесс. Если динамическая система испытывает воздействие шума, то ее эволюция во времени (или режим ее функционирования) будет представлять собой случайный процесс. Анализ случайных процессов и закономерностей их эволюции и преобразования нельзя осуществить на основе детерминированной теории динамических систем. Существует специальная наука — теория случайных процессов, на основе которой и решаются задачи, связанные с исследованием динамики систем в присутствии флуктуаций. Теория случайных процессов есть самостоятельная научная дисциплина, в рамках которой сформулированы способы описания случайных процессов, даны определения их статистических характеристик, классификация типов случайных процессов и введены основополагающие эволюционные уравнения. Теория случайных процессов лежит в основе статистической физики и радиофизики, статистической радиотехники и нелинейной динамики систем в условиях действия шумов.

В настоящей лекции приводятся основы теории случайных процессов, необходимые для решения задач нелинейной динамики, связанных с анализом характеристик и свойств нелинейных систем, испытывающих воздействие внешних случайных сил.

15.2. Основные характеристики случайных процессов

Случайный (стохастический) процесс — это процесс изменения состояния системы во времени, протекающий по вероятностным (статистическим) законам. Пусть множество M значений переменной X есть пространство состояний системы. Величина X может быть векторной, скалярной, вещественной или комплексной. Случайный процесс описывается случайной функцией $X(t)$, принимающей значения во множестве M, где аргумент t обычно имеет смысл времени. Для любого фиксированного t_0 значение $X_0 = X(t_0)$ — случайная величина. Множество состояний M может быть дискретным (конечным или счетным) или непрерывным. Время t может принимать непрерывное или счетное множество значений. В последнем случае говорят о *случайной последовательности* $X(n)$. В результате проведенных наблюдений, измерений или численного моделирования можно получить ту или иную *реализацию случайного процесса*. Она представляет собой детерминированную (неслучайную) функцию времени $x(t)$[1]. Случайный процесс характеризуется бесконечным множеством возможных реализаций, составляющих *статистический ансамбль* с заданными на нем вероятностными характеристиками.

Приведем методы описания и основные характеристики случайных процессов, ограничившись вещественными скалярными непрерывнозначными процессами.

Случайный процесс $X(t)$ характеризуется *n-мерной плотностью вероятности* $p_n(x_1, t_1, x_2, t_2, \ldots x_n, t_n)$, которая является вещественной функцией n текущих значений случайной переменной X в n произвольных момента времени и может быть задана следующим равенством:

$$\begin{gathered} p_n(x_1, t_1, x_2, t_2, \ldots, x_n, t_n) dx_1 dx_2 \ldots dx_n = \\ = P\{X(t_1) \in [x_1; x_1 + dx_1) \Lambda \ldots \Lambda X(t_n) \in [x_n; x_n + dx_n)\}, \end{gathered} \tag{15.1}$$

или

$$\begin{gathered} p_n(x_1, t_1, x_2, t_2, \ldots, x_n, t_n) = \lim_{\Delta x_i \to 0, i=1,2,\ldots,n} \times \\ \times \frac{P\{X(t_1) \in [x_1; x_1 + \Delta x_1) \Lambda \ldots \Lambda X(t_n) \in [x_n; x_n + \Delta x_n)\}}{\Delta x_1 \ldots \Delta x_n}, \end{gathered} \tag{15.2}$$

где $P\{\ldots\}$ — вероятность события, обозначенного в фигурных скобках.

Плотность вероятности должна удовлетворять следующим требованиям:

1) $p_n(\ldots) \geqslant 0$ (неотрицательность);

2) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \ldots \int\limits_{-\infty}^{\infty} p_n(x_1, t_1, x_2, t_2, \ldots, x_n, t_n) dx_1 dx_2 \ldots dx_n = 1$ (нормировка);

[1] Случайные величины и случайные функции будем, где возможно, обозначать заглавными буквами, а принимаемые ими значения — прописными буквами.

3) для любого $k < n$

$$p_k(x_1, t_1, x_2, t_2, \ldots, x_k, t_k) = \\ = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \ldots \int\limits_{-\infty}^{\infty} p_n(x_1, t_1, x_2, t_2, \ldots, x_n, t_n) dx_{k+1} dx_{k+2} \ldots dx_n$$

(согласование);

4) для любых i и j

$$p_n(x_1, t_1, \ldots, x_i, t_i, \ldots, x_j, t_j, \ldots, x_n, t_n) = \\ = p_n(x_1, t_1, \ldots, x_j, t_j, \ldots, x_i, t_i, \ldots, x_n, t_n)$$

(инвариантность относительно перестановки пар аргументов);

5) если значения случайного процесса в некоторые моменты времени t_i^0 статистически независимы, то

$$p_n(x_1, t_1^0, x_2, t_2^0, \ldots, x_n, t_n^0) = \\ = p_1(x_1, t_1^0) p_1(x_2, t_2^0) \ldots p_1(x_n, t_n^0).$$

Кроме плотности вероятности случайный процесс можно описать с помощью n-мерной функции распределения $F_n(x_1, t_1, x_2, t_2, \ldots, x_n, t_n)$ и n-мерной характеристической функции $\Theta_X(u_1, t_1, u_2, t_2, \ldots, u_n, t_n)$, которые связаны с плотностью вероятности следующими соотношениями:

$$F_n(x_1, t_1, x_2, t_2, \ldots, x_n, t_n) = \\ = \int\limits_{-\infty}^{x_1} \ldots \int\limits_{-\infty}^{x_n} p_n(x'_1, t_1, x'_2, t_2, \ldots, x'_n, t_n) dx'_1 dx'_2 \ldots dx'_n; \tag{15.3}$$

$$p_n(x_1, t_1, x_2, t_2, \ldots, x_n, t_n) = \frac{\partial^n F_n(x_1, t_1, x_2, t_2, \ldots, x_n, t_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n}; \tag{15.4}$$

$$\Theta_X(u_1, t_1, u_2, t_2, \ldots, u_n, t_n) = \\ = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \ldots \int\limits_{-\infty}^{\infty} p_n(x_1, t_1, \ldots, x_n, t_n) \exp\left(j \sum_{i=1}^{n} u_i x_i \right) dx_1 \ldots dx_n; \tag{15.5}$$

$$p_n(x_1, t_1, x_2, t_2, \ldots, x_n, t_n) = \\ = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \ldots \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Theta_X(u_1, t_1, \ldots, u_n, t_n) \exp\left(-j \sum_{i=1}^{n} u_i x_i \right) du_1 \ldots du_n, \tag{15.6}$$

где $j = \sqrt{-1}$.

Случайный процесс $X(t)$ считается *полностью заданным*, если для любого n известна одна из функций: $p_n(\ldots)$; $F_n(\ldots)$ или $\Theta_X(\ldots)$. В этом случае можно найти любые статистические характеристики процесса.

Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — некоторая детерминированная функция своих аргументов. Пусть аргументы функции f есть значения случайного процесса $X(t)$ в n моментов времени: $X(t_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. *Статистическим средним* (математическим ожиданием) функции $f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ на ансамбле реализаций случайного процесса $X(t)$ называется следующая детерминированная функция аргументов t_i:

$$\bar{f}(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \\ = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \ldots \int\limits_{-\infty}^{\infty} p_n(x_1, t_1, \ldots, x_n, t_n) f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n. \quad (15.7)$$

Далее будем обозначать операцию статистического усреднения с помощью угловых скобок $\langle \ldots \rangle$:

$$\bar{f}(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \langle f(X_1, X_2, \ldots, X_n) \rangle.$$

Моментными функциями (*моментами*) случайного процесса называют следующие статистические средние от степенных функций:

$$\langle X_1^{r_1} X_2^{r_2} \ldots X_k^{r_k} \rangle = \\ = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \ldots \int\limits_{-\infty}^{\infty} p_n(x_1, t_1, \ldots, x_k, t_k) x_1^{r_1} \ldots x_k^{r_k} dx_1 \ldots dx_k \quad (15.8)$$

либо

$$\left\langle \tilde{X}_1^{r_1} \tilde{X}_2^{r_2} \ldots \tilde{X}_k^{r_k} \right\rangle = \\ = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \ldots \int\limits_{-\infty}^{\infty} p_n(x_1, t_1, \ldots, x_k, t_k) \times \quad (15.9) \\ \times (x_1 - \overline{X}(t_1))^{r_1} \ldots (x_k - \overline{X}(t_k))^{r_k} dx_1 \ldots dx_k,$$

где $X_i = X(t_i)$ — значения случайного процесса в моменты времени t_i; а $\tilde{X}_i = X(t_i) - \overline{X}(t_i)$ — значения флуктуации (отклонения от среднего);

$\overline{X}(t) = \langle X(t) \rangle$ — среднее значение случайного процесса; r_i — целые неотрицательные числа. Моменты вида (15.8) называют *начальными*, а вида (15.9) — *центральными*. Число рассматриваемых отсчетов времени k называют *размерностью момента*, а сумму показателей степеней $\sum_{i=1}^{k} r_i = r$ — *порядком момента*. Моменты случайного процесса представляют собой детерминированные функции аргументов t_i или константы.

Наиболее важны моменты первого и второго порядка. К ним относятся следующие:

1) *среднее значение* случайного процесса (одномерный начальный момент порядка $r = 1$)

$$\overline{X}(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p_1(x,t) x dx; \qquad (15.10)$$

2) *средний квадрат* (одномерный начальный момент порядка $r = 2$)

$$\overline{X^2}(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p_1(x,t) x^2 dx; \qquad (15.11)$$

3) *дисперсия* (одномерный центральный момент порядка $r = 2$)

$$\sigma_X^2(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p_1(x,t)(x - \overline{X}(t))^2 dx = \overline{X^2} - (\overline{X})^2; \qquad (15.12)$$

4) *ковариационная* (или *автоковариационная*) функция (двумерный начальный момент порядка $r = 2$)

$$K_X(t_1,t_2) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} p_2(x_1,t_1,x_2,t_2) x_1 x_2 dx_1 dx_2; \qquad (15.13)$$

5) *корреляционная* (или *автокорреляционная*) функция (двумерный центральный момент порядка $r = 2$)

$$\psi_X(t_1,t_2) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} p_2(x_1,t_1,x_2,t_2)(x_1 - \overline{X}(t_1))(x_2 - \overline{X}(t_2)) dx_1 dx_2 =$$

$$= K_X(t_1,t_2) - \overline{X}(t_1) \cdot \overline{X}(t_2). \qquad (15.14)$$

Как видно из (15.13) и (15.14), для процессов с нулевым средним значением $\overline{X}(t) \equiv 0$ ковариационная и корреляционная функции совпадают. Нормированную автокорреляционную функцию

$$\Psi_X(t_1, t_2) = \frac{\psi_X(t_1, t_2)}{\sqrt{\sigma_X^2(t_1)\sigma_X^2(t_2)}} \tag{15.15}$$

называют *коэффициентом корреляции.*

Автокорреляционная функция случайного процесса обладает следующими свойствами:

1) $\psi_X^2(t_1, t_2) \leqslant \sigma_X^2(t_1)\sigma_X^2(t_2)$ (соответственно, $|\Psi_X(t_1, t_2)| \leqslant 1$);

2) $\psi_X(t, t) = \sigma_X^2(t)$;

3) $\psi_X(t_1, t_2) = \psi_X(t_2, t_1)$;

4) если значения случайного процесса в некоторые моменты времени t'_1 и t'_2 статистически независимы, то они *некоррелированы*, т.е. $\psi_X(t'_1, t'_2) = 0$. Обратное утверждение в общем случае неверно.

Начальные моменты случайного процесса являются коэффициентами в разложении n-мерной характеристической функции в ряд Маклорена:

$$\begin{gathered} \Theta_X(u_1, t_1, u_2, t_2, \ldots, u_n, t_n) = \\ = \sum_{r_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{r_n=0}^{\infty} \frac{\langle X^{r_1}(t_1) X^{r_2}(t_2) \ldots X^{r_n}(t_n) \rangle}{r_1! r_2! \ldots r_n!} \times \\ \times (ju_1)^{r_1} (ju_2)^{r_2} \ldots (ju_n)^{r_n} \end{gathered} \tag{15.16}$$

и соответственно могут быть найдены по формуле

$$\begin{aligned} &\langle X^{r_1}(t_1) \ldots X^{r_n}(t_n) \rangle = \\ &\qquad = (-j)^r \frac{\partial^r \Theta_X(u_1, t_1, \ldots, u_n, t_n)}{\partial u_1^{r_1} \ldots \partial u_n^{r_n}} \bigg|_{u_1=u_2=\ldots=u_n=0}, \end{aligned} \tag{15.17}$$

где $j = \sqrt{-1}$; $r = \sum_{i=1}^{n} r_i$.

Аналогично (15.16) можно представить разложение натурального логарифма от характеристической функции:

$$\begin{gathered} \ln \Theta_X(u_1, t_1, u_2, t_2, \ldots, u_n, t_n) = \\ = \sum_{r_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{r_n=0}^{\infty} \frac{\langle\langle X^{r_1}(t_1) X^{r_2}(t_2) \ldots X^{r_n}(t_n) \rangle\rangle}{r_1! r_2! \ldots r_n!} \times \\ \times (ju_1)^{r_1} (ju_2)^{r_2} \ldots (ju_n^{r_n}). \end{gathered} \tag{15.18}$$

Коэффициенты в разложении, обозначенные в выражении (15.18) как $\langle\langle X^{r_1}(t_1)X^{r_2}(t_2)\ldots X^{r_n}(t_n)\rangle\rangle$, называются *кумулянтными функциями* (*кумулянтами*) случайного процесса $X(t)$.

Среди множества случайных процессов выделяют *стационарные процессы.* Стационарность случайного процесса означает, что стохастическая система находится в установившемся состоянии и ее статистические характеристики не зависят от сдвига во времени. Различают стационарность в узком (строгом) смысле и стационарность в широком смысле.

Случайный процесс $X(t)$ называют *стационарным в узком* (*строгом*) *смысле*, если для любого целого положительного n, любой константы T и любых моментов времени t_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ имеет место равенство

$$p_n(x_1, t_1 \pm T, x_2, t_2 \pm T, \ldots, x_n, t_n \pm T) = \\ = p_n(x_1, t_1, x_2, t_2, \ldots, x_n, t_n), \quad (15.19)$$

что означает инвариантность плотности вероятности (и, следовательно, всех статистических характеристик) относительно сдвига во времени. При этом одномерная плотность вероятности не зависит от времени ($p_1(x,t) \equiv \equiv p_1(x)$) и одномерные моменты являются константами. Двумерная плотность вероятности зависит только от разности моментов времени $\tau = t_2 - t_1$ ($p_2(x_1, t_1, x_2, t_2) \equiv p_2(x_1, x_2, \tau)$). Соответственно, двумерные моменты являются функциями только τ.

Случайный процесс $X(t)$ называется *стационарным в широком смысле*, если выполняются условия

$$\langle X(t)\rangle \equiv \text{const}; \psi_X(t_1, t_2) = \psi_X(t_2 - t_1); \langle X^2(t)\rangle < \infty. \quad (15.20)$$

Для процессов с конечной «мощностью» (т.е. процессов, для которых $\langle X^2(t)\rangle < \infty$) из строгой стационарности следует стационарность в широком смысле. Из стационарности в широком смысле в общем случае не следует строгой стационарности.

Автокорреляционная функция стационарного процесса обладает следующими свойствами:

1) $|\psi_X(\tau)| \leqslant \sigma_X^2$, где $\tau = t_2 - t_1$;

2) $\psi_X(0) = \sigma_X^2$;

3) $\psi_X(\tau) = \psi_X(\tau)$ (четная функция);

4) если автокорреляционная функция непрерывна при $\tau = 0$, то она непрерывна для любого значения τ.

Стационарный в строгом смысле случайный процесс, для которого выполняется условие $\lim_{\tau\to\infty}\psi_X(\tau)=0$, называется *процессом с перемешиванием*. Для него справедливо равенство

$$\lim_{\tau\to\infty} p_2(x_1,x_2,\tau)=p_1(x_1)p_1(x_2), \quad \text{(расцепление корреляций)}.$$

Скорость перемешивания (расцепления корреляций) характеризуют *временем корреляции* $\tau_{\text{кор}}$. Чаще всего используют следующие два определения времени корреляции.

1. Время корреляции определяется как интервал, на котором огибающая автокорреляционной функции $\gamma_X(\tau)$ убывает в e раз (где e — основание натурального логарифма):

$$\gamma_X(\tau_{\text{кор}})=\frac{\sigma_X^2}{e}.$$

2. Время корреляции определяется по формуле

$$\tau_{\text{кор}}=\frac{1}{\sigma_X^2}\int\limits_0^{\infty}\gamma_X(\tau)d\tau.$$

Кроме свойства стационарности случайный процесс может обладать важным свойством *эргодичности*. Эргодичность случайного процесса означает, что можно получить определенные статистические характеристики процесса, заменяя статистическое усреднение (по ансамблю реализаций) усреднением по времени вдоль одной реализации. Можно выделить эргодичность относительно отдельных моментных функций, эргодичность 1-, 2-, ..., k-го порядка и, наконец, строгую эргодичность.

Пусть $X(t)$ — стационарный в строгом смысле случайный процесс. Среднее по времени значение детерминированной функции случайных аргументов $f[X(t_1),\ldots,X(t_k)]$ вдоль некоторой реализации $x(t)$ случайного процесса определяется как

$$\langle f[x(t_1),\ldots,x(t_k)]\rangle_t = \\ =\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^{T} f[x(t_1),x(t_1+\tau_1),\ldots,x(t_1+\tau_{k-1})]dt_1, \tag{15.21}$$

где $\tau_i=t_{i+1}-t_i$. Символом $\langle\ldots\rangle_t$ будем обозначать операцию усреднения по времени.

Эргодичность относительно среднего значения означает выполнение следующего равенства:

$$\underset{T\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\,\frac{1}{T}\int\limits_0^T X(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p_1(x)x dx, \tag{15.22}$$

где символом $\mathrm{l.i.m}$ обозначен среднеквадратический предел случайной функции. Если процесс $X(t)$ является эргодическим относительно среднего значения, то среднее по времени значение $< x(t) >_t$ для почти любой реализации $x(t)$ равно среднему по ансамблю значению $\langle X(t)\rangle$:

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T x(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p_1(x)x dx.$$

Аналогично можно ввести эргодичность относительно среднего квадрата, эргодичность относительно дисперсии и т. д.

Эргодичность первого порядка означает выполнение следующего равенства:

$$\underset{T\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\,\frac{1}{T}\int\limits_0^T f[X(t)]dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p_1(x)f(x)dx, \tag{15.23}$$

где $f(\ldots)$ — любая детерминированная функция своего аргумента.

Если процесс $X(t)$ является эргодическим 1-го порядка, то он также является эргодическим относительно всех одномерных моментов. В этом случае все одномерные моменты можно найти, используя усреднение по времени вдоль почти любой реализации случайного процесса. Достаточным условием эргодичности 1-го порядка является свойство перемешивания.

Аналогично определяется *эргодичность второго порядка*. В этом случае должно выполняться равенство:

$$\underset{T\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\,\frac{1}{T}\int\limits_0^T f[X(t), X(t+\tau)]dt =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} p_2(x_1, x_2, \tau)f(x)dx_1dx_2, \tag{15.24}$$

где $f(\ldots)$ — любая детерминированная функция своих аргументов.

Если процесс $X(t)$ является эргодическим 2-го порядка, то он обладает свойством эргодичности относительно всех двумерных моментов. В этом случае все двумерные моменты можно найти, используя усреднение по времени вдоль почти любой реализации случайного процесса. Подобным образом можно определить эргодичность 3-го и т. д. k-го порядка. *Строгая эргодичность* случайного процесса означает, что все статистические характеристики случайного процесса можно найти, используя усреднение по времени.

По форме вероятностного распределения выделяют класс *нормальных процессов*. *Нормальным* (*гауссовым*) случайным процессом называется такой процесс $X(t)$, для которого любая совокупность значений $X(t_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ распределена по совместному нормальному (гауссову) закону:

$$\begin{aligned} p_n(x_1, t_1, x_2, t_2, \ldots, x_n, t_n) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \mathrm{Det}\,\widehat{\Psi}}} \times \\ \times \exp &\left[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \tilde{\psi}_{ik}(t_i, t_k)(x_i - \overline{X}(t_i))(x_k - \overline{X}(t_k))\right], \end{aligned} \tag{15.25}$$

где $\widehat{\Psi}$ — матрица корреляций с элементами

$$\psi_{ik} = \left\langle (X(t_i) - \overline{X}(t_i))(X(t_k) - \overline{X}(t_k)) \right\rangle,$$

а $\tilde{\psi}_{ik}$ — элементы обратной матрицы $\widehat{\Psi}^{-1}$.

Одномерная гауссова плотность вероятности выражается формулой

$$p_1(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2(t)}} \exp\left[-\frac{(x - \overline{X}(t))^2}{2\sigma_X^2(t)}\right], \tag{15.26}$$

где $\overline{X}(t)$ — среднее значение; $\sigma_X^2(t)$ — дисперсия случайного процесса. Гауссово распределение со средним $\overline{X}(t) \equiv 0$ и дисперсией $\sigma_X^2(t) \equiv 1$ называется *стандартным*.

Нормальные случайные процессы обладают следующими важными свойствами:

1) нормальный случайный процесс полностью задан, если известны функции $\overline{X}(t)$ и $\psi_X(t_1, t_2)$;

2) некоррелированные значения нормального случайного процесса статистически независимы;

3) для нормальных случайных процессов с ограниченной дисперсией свойства стационарности в строгом смысле и в широком смысле совпадают;

4) если $X_1(t), X_2(t), \ldots X_m(t)$ — совместно нормальные случайные процессы, то их линейная комбинация $X(t) = \sum_{i=1}^{m} a_i(t)X_i(t)$, где $a_i(t)$ — детерминированные множители, также является нормальным случайным процессом;

5) случайный процесс, получаемый в результате линейного преобразования нормального случайного процесса, также является нормальным.

Во многих задачах используется *спектральное представление* случайных процессов. Пусть $X(t)$ — стационарный в широком смысле скалярный вещественный случайный процесс с ограниченным средним квадратом $\langle X^2(t)\rangle$. *Случайным спектром* процесса $X(t)$ на интервале $t \in [-T/2, T/2]$ называется преобразование Фурье от случайной функции:

$$X_T(j\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} X(t)e^{-j\omega t}dt. \tag{15.27}$$

$X_T(j\omega)$ — это комплексная случайная функция аргумента ω. Статистической спектральной характеристикой стационарного случайного процесса служит *спектральная плотность мощности* (или просто *спектральная плотность*). Она может быть введена как

$$W_X(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\langle|X_T(j\omega)|^2\rangle. \tag{15.28}$$

Можно показать, что для процесса с нулевым средним значением и достаточно быстро спадающей ковариационной функцией $K_X(\tau)$ из определения (15.28) следует, что спектральная плотность мощности есть прямое преобразование Фурье от ковариационной функции:

$$W_X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_X(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau. \tag{15.29}$$

Обратное преобразование Фурье дает ковариационную функцию:

$$K_X(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} W_X(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega. \tag{15.30}$$

Можно определить спектральную плотность для любого стационарного случайного процесса, воспользовавшись следующей *теоремой Винера — Хинчина.* Пусть $K_X(\tau)$ — ковариационная функция стационарного в широком смысле случайного процесса $X(t)$. Она всегда может быть представлена в виде интеграла Фурье — Стильтьеса:

$$K_X(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega\tau} dZ_X(\omega), \tag{15.31}$$

где $Z_X(\tau)$ — вещественная монотонно неубывающая ограниченная для $|\omega| < \infty$ неотрицательная функция (интегральный спектр стационарного случайного процесса). Спектральная плотность соответственно есть

$$W_X(\omega) = \frac{dZ_X(\omega)}{d\omega}. \tag{15.32}$$

Определенная таким образом функция $W_X(\omega)$ связана с ковариационной функцией преобразованиями Фурье (15.29) — (15.30). Однако при этом для некоторых частот она может принимать бесконечные значения.

Спектральная плотность $W_X(\omega)$ вещественного стационарного случайного процесса $X(t)$ обладает следующими свойствами:

1) $W_X(\omega)$ — вещественная неотрицательная функция[2];

2) $W_X(\omega) = W_X(-\omega)$ (четная функция);

3) в силу четности функций $K_X(\tau)$ и $W_X(\omega)$ можно переписать (15.29)–(15.30) в виде

$$W_X(\omega) = 2 \int\limits_{0}^{\infty} K_X(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau, \tag{15.33}$$

$$K_X(\tau) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\infty} W_X(\omega) \cos(\omega\tau) d\omega; \tag{15.34}$$

4) функция $W_X(\omega)$ при некоторых значениях аргумента может иметь особенности в виде δ-функции (т. е. спектр в общем случае является смешанным), что связано с отсутствием требования интегрируемости ковариационной функции. Например, если среднее значение процесса $\overline{X}$ отлично от нуля, то

$$W_X(\omega) = W_{\tilde{X}}(\omega) + 2\pi\delta(\omega)(\overline{X})^2, \tag{15.35}$$

[2]Это утверждение справедливо и для комплексного стационарного случайного процесса.

где

$$W_{\tilde{X}}(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi_X(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \tag{15.36}$$

$W_{\tilde{X}}(\omega)$ — спектр флуктуаций;

5) средний квадрат и дисперсию процесса $X(t)$ можно найти, интегрируя спектральную плотность $W_X(\omega)$ или $W_{\tilde{X}}(\omega)$ соответственно по всем частотам:

$$\begin{gathered} \overline{X^2} = K_X(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} W_X(\omega) d\omega, \\ \sigma_X^2 = \psi_X(0) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} W_{\tilde{X}}(\omega) d\omega. \end{gathered} \tag{15.37}$$

Кроме спектральной плотности $W_X(\omega)$, определенной как для положительных, так и для отрицательных значений аргумента, часто используют так называемую *одностороннюю* (*физическую*) *спектральную плотность* случайного процесса, которая отлична от нуля только для положительных частот и определяется следующим образом:

$$G_X(\omega) = 2W_X(\omega) \text{ при } \omega \geqslant 0 \text{ и } G_X(\omega) = 0 \text{ при } \omega < 0. \tag{15.38}$$

Часто рассматривают такую характеристику, как *ширина спектра* стационарного случайного процесса. Если спектральная плотность случайного процесса имеет один хорошо выраженный максимум, то используются следующие два определения ширины спектра:

1) эффективная ширина спектра

$$\Delta\omega_{\text{эфф}} = \frac{1}{W_{\tilde{X}}(\omega_0)} \int\limits_{0}^{\infty} W_{\tilde{X}}(\omega) d\omega = \frac{\pi\sigma_X^2}{W_{\tilde{X}}(\omega_0)}, \tag{15.39}$$

где ω_0 — частота спектрального максимума;

2) ширина спектра на уровне половинной мощности

$$\Delta\omega_{1/2} = \omega_2 - \omega_1, \text{ где } W_{\tilde{X}}(\omega_{1,2}) = \frac{1}{2} W_{\tilde{X}}(\omega_0). \tag{15.40}$$

Для ширины спектра и времени корреляции стационарного случайного процесса справедливы следующие соотношения (*соотношение неопределенности*): чем шире энергетический спектр случайного процесса, тем меньше время корреляции, и наоборот, чем у́же спектр, тем больше время корреляции.

По спектральным свойствам различают широкополосные и узкополосные случайные процессы. Идеализированной моделью случайного процесса с бесконечно широким спектром является *белый шум* — абсолютно случайный, стационарный в строгом смысле процесс, обладающий постоянной спектральной плотностью на всех частотах: $W_{\text{БШ}} \equiv W_0 \equiv \text{const}$. Легко видеть, что корреляционная функция такого процесса задается функцией Дирака ($\psi_{\text{БШ}}(\tau) = W_0\delta(\tau)$), а дисперсия — бесконечна.

15.3. Основы теории марковских процессов

Для любого случайного процесса $X(t)$ n-мерная плотность вероятности может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} &p_n(x_1, t_1, x_2, t_2, \dots x_n, t_n) = \\ &= p_{n-1}(x_1, t_1, x_2, t_2, \dots x_{n-1}, t_{n-1}) \times \\ &\times v(x_n, t_n/x_{n-1}, t_{n-1}, \dots x_1, t_1), \end{aligned} \tag{15.41}$$

где $v(x_n, t_n/x_{n-1}, t_{n-1}, \dots, x_1, t_1)$ — условная плотность вероятности, учитывающая $n-1$ предшествующее состояние процесса. Условная плотность вероятности — неотрицательна и нормирована на единицу:

$$\int_{-\infty}^{\infty} v(x_n, t_n/x_{n-1}, t_{n-1}, \dots x_1, t_1)dx_n \equiv 1. \tag{15.42}$$

Случайный процесс $X(t)$, для которого условная плотность вероятности зависит только от одного условия, т. е.

$$\begin{gathered} v(x_n, t_n/x_{n-1}, t_{n-1}, \dots x_1, t_1) = v(x_n, t_n/x_{n-1}, t_{n-1}), \\ t_1 < t_2 < \dots < t_n \end{gathered} \tag{15.43}$$

называется *марковским* (*простейшим марковским*) случайным процессом[3]. Условная плотность вероятности в этом случае называется *плотно-*

[3]Если условная плотность вероятности зависит от k предшествующих состояний, то процесс называется *k-связанным марковским* процессом.

стью вероятности перехода из предшествующего состояния в последующее. Марковский процесс называется *однородным*, если $v(x_2, t_2/x_1, t_1) = v(x_2, \tau/x_1)$, где $\tau = t_2 - t_1$.

Марковский процесс обладает следующими свойствами:

1) если точно известно состояние системы в момент времени t_1, то любое состояние в момент $t_2 > t_1$ не зависит от состояний системы в моменты времени $t < t_1$ (т.е. от предыстории процесса);

2) для марковского процесса $X(t)$ справедливо равенство

$$p_n(x_1, t_1, x_2, t_2, \ldots x_n, t_n) = p_1(x_1, t_1) \prod_{i=2}^{n} v(x_i, t_i/x_{i-1}, t_{i-1}), \quad (15.44)$$

и следовательно, он полностью задан, если известны функции $p_1(x, t)$ и $v(x_2, t_2/x_1, t_1)$;

3) плотность вероятности перехода определяет эволюцию одномерной плотности вероятности во времени:

$$p_1(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} v(x, t/x_0, t_0) p_1(x_0, t_0) dx_0. \quad (15.45)$$

Для любого марковского процесса плотности вероятности перехода между состояниями в три последовательных момента времени $t_1 < t_2 < t_3$ должны удовлетворять следующему уравнению:

$$v(x_3, t_3/x_1, t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} v(x_2, t_2/x_1, t_1) v(x_3, t_3/x_2, t_2) dx_2, \quad (15.46)$$

называемому *уравнением Чепмена–Колмогорова, уравнением Смолуховского* или *обобщенным уравнением Маркова*.

В зависимости от дискретности или непрерывности множества состояний и множества моментов времени различают дискретные марковские последовательности (*марковские цепи*), непрерывные марковские последовательности, дискретные марковские процессы и непрерывнозначные марковские процессы. Далее мы ограничимся кратким описанием только одного класса марковских процессов, а именно диффузионных процессов, которые наиболее часто встречаются в физических и радиофизических задачах.

Скалярный вещественный непрерывнозначный марковский процесс $X(t)$ называется *диффузионным*, если существуют следующие ограниченные пределы:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x' - x) v(x', t + \Delta t / x, t) dx' = A(x, t); \tag{15.47}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x' - x)^2 v(x', t + \Delta t / x, t) dx' = 2B(x, t) \not\equiv 0; \tag{15.48}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x' - x)^k v(x', t + \Delta t / x, t) dx' = C_k(x, t) \equiv 0 \tag{15.49}$$

для любого $k > 2$.

Величина $A(x,t)$ представляет собой среднее значение локальной скорости изменения состояния и называется *коэффициентом сноса* или *дрейфа*. Величина $B(x,t)$ характеризует локальную скорость роста дисперсии приращения процесса и называется *коэффициентом диффузии*[4].

Условия (15.48)–(15.49) означают локальный рост дисперсии приращения $\Delta X = X(t') - x(t)$ по линейному закону, т. е. для малых $\Delta t = t' - t$ справедливо

$$\sigma^2_{\Delta X}(t + \Delta t) = 2B(x, t)\Delta t. \tag{15.50}$$

Условие (15.49) исключает большие приращения процесса на малых временах. Хотя допускаются быстрые изменения значений процесса, но в противоположных направлениях. Конечные скачки появляются с нулевой вероятностью, а реализации процесса непрерывны с вероятностью единица. Примером диффузионного процесса может служить скорость и координата броуновской частицы.

Плотность вероятности перехода $v(x, t/x_0, t_0)$ диффузионного процесса $X(t)$ удовлетворяет некоторым уравнениям в частных производных, которые можно получить из уравнения Чепмена–Колмогорова и условий (15.47)–(15.49). Эти уравнения называются *прямым и обратным уравнениями Колмогорова*. Прямое уравнение определяет эволюцию распределения в прямом времени и называется также *уравнением Фоккера–Планка–*

[4]Иногда коэффициентом диффузии называют величину $2B(x,t)$.

Колмогорова (ФПК). Оно имеет вид

$$\frac{\partial v(x,t/x_0,t_0)}{\partial t} = -\frac{\partial A(x,t)v(x,t/x_0,t_0)}{\partial x} + \\ + \frac{\partial^2 B(x,t)v(x,t/x_0,t_0)}{\partial x^2} \tag{15.51}$$

и должно быть дополнено начальным условием: $v(x,t_0/x_0,t_0) = \delta(x-x_0)$. Умножая обе части этого уравнения на $p_1(x_0,t_0)$ и интегрируя по x_0, получаем аналогичное уравнение ФПК для безусловной одномерной плотности вероятности:

$$\frac{\partial p_1(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial A(x,t)p_1(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial^2 B(x,t)p_1(x,t)}{\partial x^2}, \tag{15.52}$$

с начальным условием $p_1(x,t_0) = p_1(x_0,t_0)$. Таким образом, диффузионный процесс $X(t)$ полностью определяется своими коэффициентами сноса и диффузии при заданных начальных и граничных условиях для уравнений (15.51)–(15.52).

Пусть $X(t)$ — стационарный (в строгом смысле) диффузионный процесс. Тогда для него $A(x,t) \equiv A(x)$; $B(x,t) \equiv B(x)$ и $p_1(x,t) \equiv p_1^{\text{ст}}(x)$. Налагая граничные условия

$$p_1^{\text{ст}}(x)\big|_{x=\pm\infty} \equiv 0, \qquad \left.\frac{dp_1^{\text{ст}}(x)}{dx}\right|_{x=\pm\infty} \equiv 0, \tag{15.53}$$

находим решение уравнения ФПК в виде

$$p_1^{\text{ст}}(x) = \frac{C}{B(x)} \exp\left(\int\limits_{x_0}^{x} \frac{A(x')}{B(x')}dx'\right), \tag{15.54}$$

где x_0 — произвольно выбранное значение случайной переменной; C — нормировочная константа.

Диффузионный процесс $X(t)$ с заданным начальным состоянием $X(t_0) = x_0$, для которого $A(x,t) \equiv 0$, а $B(x,t) \equiv \text{const}$, называется *винеровским процессом.*

Винеровский процесс обладает следующими свойствами:

1) он является гауссовым процессом;

2) его среднее значение определяется начальным состоянием ($\langle X(t)\rangle =$ $= x_0$);
3) винеровский процесс является нестационарным и его дисперсия растет линейно во времени со скоростью, равной удвоенному коэффициенту диффузии, т. е. $\sigma_X^2(t) = 2B \cdot (t - t_0)$;
4) винеровский процесс — это *процесс с независимыми приращениями* на неперекрывающихся интервалах времени.

Понятие диффузионного процесса может быть обобщено и на векторный марковский процесс $\vec{X}(t)$, для которого текущее состояние задается вектором $\vec{x}$ с компонентами x_j, $j = 1, 2, \ldots, N$. Векторный диффузионный процесс характеризуется вектором сноса $\vec{A}(\vec{x}, t)$ с компонентами

$$A_j(\vec{x}, t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int (x_j' - x_j) v(\vec{x'}, t + \Delta t / \vec{x}, t) d\vec{x'}, \quad j = 1, 2, \ldots N, \tag{15.55}$$

и матрицей диффузии $\widehat{\mathbf{B}}(\vec{x}, t)$ с элементами

$$B_{jk}(\vec{x}, t) = \frac{1}{2} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int (x_j' - x_j)(x_k' - x_k) v(\vec{x'}, t + \Delta t / \vec{x}, t) d\vec{x'}, \quad j, k = 1, 2, \ldots, N. \tag{15.56}$$

Интегралы в этих выражениях берутся по всем возможным значениям векторной переменной $\vec{x'}$. Уравнение ФПК для векторного диффузионного процесса $\vec{X}(t)$, записанное относительно одномерной плотности вероятности $p_1(\vec{x}, t)$, принимает вид

$$\frac{\partial p_1(\vec{x}, t)}{\partial t} = -\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial A_j(\vec{x}, t) p_1(\vec{x}, t)}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial^2 B_{jk}(\vec{x}, t) p_1(\vec{x}, t)}{\partial x_j \partial x_k}. \tag{15.57}$$

15.4. Стохастические дифференциальные уравнения (СДУ)

Пусть поведение некоторой системы описывается дифференциальным уравнением первого порядка (его часто называют *уравнением Ланжевена*), имеющим вид

$$\frac{dX}{dt} = f(X,t) + g(X,t)n(t), \tag{15.58}$$

где f и g — детерминированные гладкие функции своих аргументов; $n(t)$ — нормированный белый гауссов шум ($\langle n(t)\rangle \equiv 0$, $\langle n(t)n(t+\tau)\rangle = \delta(\tau)$). Множитель g характеризует интенсивность шума. Если g не зависит от состояния X, а является детерминированной функцией времени или константой, то шум, воздействующий на систему, называется *аддитивным*, если же интенсивность шумового воздействия зависит от X, то — *мультипликативным*.

Простейшее СДУ вида

$$\frac{dw}{dt} = gn(t), \quad w(t_0) = w_0, \quad g = \text{const} \tag{15.59}$$

описывает винеровский процесс $w(t)$ с коэффициентом диффузии $B_w = g^2/2$.

СДУ (15.58) можно переписать в интегральном представлении:

$$X(t) = X(t_0) + \int\limits_{t_\bullet}^{t} f(X(\theta),\theta)d\theta + \int\limits_{t_\bullet}^{t} g(X(\theta),\theta)dw(\theta), \tag{15.60}$$

где $w(t)$ — винеровский процесс с нулевым начальным значением и коэффициентом диффузии 1/2. Второй интеграл в этом выражении в случае мультипликативного шума является так называемым *стохастическим интегралом* по винеровскому процессу. Соответствующий среднеквадратический предел от интегральной суммы

$$\int\limits_{t_0}^{t} g(X(\theta),\theta)dw(\theta) =$$
$$= \underset{m\to\infty}{\mathrm{l.i.m}} \sum_{i=0}^{m-1} g(X(\theta_i'),\theta_i)[w(\theta_{i+1}) - w(\theta_i)] \tag{15.61}$$

зависит от выбора точек $\theta_i' \in [\theta_i, \theta_{i+1})$. Соответственно, стохастический интеграл (15.61) может быть определен по-разному. Пусть $\theta_i' = (1-\nu)\theta_i + \nu\theta_{i+1}$, где $\nu \in [0,1)$. При произвольном значении ν стохастический интеграл (15.61) называется *обобщенным стохастическим интегралом*, а уравнение (15.58) — *обобщенным СДУ*. Если положить $\nu = 0$, то получаем *стохастический интеграл Ито* и *СДУ Ито*. В случае $\nu = 1/2$ приходим к *стохастическому интегралу Стратоновича* и *СДУ Стратоновича*.

Случайный процесс $X(t)$, являющийся решением обобщенного СДУ (15.58) и удовлетворяющий детерминированному начальному условию $X(t_0) = x_0$, представляет собой диффузионный марковский процесс с коэффициентом сноса

$$A(x,t) = f(x,t) + \nu g(x,t)\frac{\partial g(x,t)}{\partial x} \tag{15.62}$$

и коэффициентом диффузии

$$B(x,t) = \frac{1}{2}g^2(x,t). \tag{15.63}$$

Второе слагаемое в выражении (15.62) появляется только в случае мультипликативного шума. Оно называется *ложным сносом*. Если процесс $X(t)$ описывается СДУ Ито, то ложный снос отсутствует.

Пусть имеется система N обобщенных стохастических дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{dX_j}{dt} = f_j(X_1,\ldots,X_N,t) + \sum_{k=1}^{N} g_{jk}(X_1,\ldots,X_N,t)n_k(t), \tag{15.64}$$
$$j = 1,2,\ldots,N,$$

где $n_k(t)$, $k = 1,2,\ldots N$ — статистически независимые нормированные источники нормального белого шума. При заданных начальных условиях $X_j(t_0) = x_j^0$, $j = 1,2,\ldots N$ система (15.64) описывает векторный диффузионный процесс $\vec{X}(t) = \{X_1(t), X_2(t),\ldots,X_N(t)\}$, который характеризуется вектором сноса с компонентами

$$A_j(\vec{x},t) = f_j(\vec{x},t) + \nu\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} g_{ik}(\vec{x},t)\frac{\partial g_{jk}(\vec{x},t)}{\partial x_i}, \tag{15.65}$$
$$j = 1,2,\ldots,N \tag{15.66}$$

и матрицей диффузии с элементами

$$B_{jk}(\vec{x},t) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} g_{ji}(\vec{x},t)g_{ki}(\vec{x},t), \quad j,k = 1,2,\ldots,N. \tag{15.67}$$

Зная вектор сноса и матрицу диффузии диффузионного процесса $\vec{X}(t)$, можно записать уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова (15.57) для одномерной плотности вероятности $p_1(\vec{x}, t)$ и аналогичное уравнение для плотности вероятности перехода $v(\vec{x}, t/\vec{x}_0, t_0)$. Решив эти уравнения и найдя функции $p_1(\vec{x}, t)$ и $v(\vec{x}, t/\vec{x}_0, t_0)$, мы могли бы определить все статистические характеристики процесса.

Таким образом, система, находящаяся под воздействием независимых источников белого гауссова шума, может быть описана как стохастическими дифференциальными уравнениями, так и уравнением ФПК. Оба способа описания полностью эквивалентны. Если система исследуется теоретическими методами, то это предполагает переход к уравнению ФПК и его строгое или приближенное решение. Решить уравнение ФПК аналитически удается только в наиболее простых случаях или с помощью каких-то существенно упрощающих задачу предположений. При проведении численных экспериментов более простым и удобным оказывается метод непосредственного интегрирования СДУ и определения тех или иных статистических характеристик процесса по результатам интегрирования. Численное решение уравнения ФПК уже для двумерных нелинейных систем связано с рядом трудностей и требует значительно больших затрат вычислительного времени.

15.5. Заключение

В лекции приведены необходимые сведения из теории случайных процессов, которые используются в последующих лекциях, посвященных вопросам анализа динамики зашумленных систем. Даны определения основных характеристик случайных процессов, таких как: закон распределения, моментные функции, характеристические и кумулянтные функции. Представлены основы спектрально-корреляционного анализа случайных процессов. Приведены основы теории марковских цепей и более подробно обсуждены свойства марковского процесса диффузионного типа, для которого введено эволюционное уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова (ФПК) для плотности вероятности перехода. Вводится определение стохастических дифференциальных уравнений и показывается, что для систем в присутствии белого гауссова шума описание с помощью уравнения ФПК и стохастических дифференциальных уравнений дает одинаковый результат.

Лекция 16

Флуктуации в квазигармонических и хаотических автогенераторах

16.1. Введение

Исследование влияния случайных воздействий на поведение нелинейных динамических систем (к которым относятся и автоколебательные системы) представляет собой важную задачу как с точки зрения фундаментальной теории, так и в свете практических приложений. Важность данной задачи определяется тем, что процессы, протекающие в реальных системах любой природы, в большинстве случаев нельзя рассматривать как чисто случайные (стохастические) или чисто детерминированные (динамические). Они, как правило, являются результатом совместного действия детерминированных и случайных сил. В радиофизических задачах флуктуации, вызванные действием случайных сил, традиционно называют шумом. В настоящее время этот термин получил общенаучное употребление. В радиофизике шум всегда играл особенно заметную, хотя в основном негативную роль. Вопросы генерации, усиления, передачи и приема сигналов при наличии шума, а также исследование природы и статистических характеристик источников шума в радиофизических системах традиционно составляют предмет статистической радиофизики. Именно в статистической радиофизике впервые встал вопрос исследования влияния шума на процессы в нелинейных динамических, в том числе автоколебательных системах. В классических трудах представителей радиофизической школы: Р. И. Стратоновича, А. Н. Малахова, С. М. Рытова и др. была развита теория автогенератора с источниками шума, исследовано явление синхронизации в присутствии шума, рассмотрен ряд других нелинейных стохастических задач. Однако, так же как и нелинейная теория колебаний, по своему происхождению тесно связанная с радиофизикой, теория флуктуаций в нелинейных системах все больше выходит за рамки радиофизики и становится самостоятельной фундаментальной научной дисциплиной.

Какова же природа шума в динамических системах? В самых общих чертах можно выделить два типа источников шума. Во-первых, в любой системе всегда присутствуют внутренние, принципиально неустранимые источники шума. Внутренний или естественный шум — это флуктуации макропеременных, задающих состояние системы, состоящей из большого числа микрочастиц. Множество возможных микросостояний очень велико, а макропараметры являются усредненными на множестве микросостояний характеристиками. Однако усредненные переменные не дают точного описания системы и возникает необходимость ввести источник шума. Микросостояние системы не может быть строго определено как в силу огромного числа микропараметров, так и вследствие квантового характера поведения микрочастиц. В радиоаппаратуре к естественным шумам относят: тепловой шум, связанный с тепловым движением носителей заряда; дробовой шум, вызванный случайным характером перехода носителей через потенциальный барьер; шум генерации-рекомбинации, возникающий в результате случайных процессов перехода носителей между зоной проводимости и валентной зоной, и т. д. Как правило, соответствующие флуктуации макропараметров системы очень малы, однако они принципиально неустранимы. Кроме того, естественные флуктуации имеют малое (по сравнению с какими-либо динамическими масштабами времени) время корреляции и, соответственно, широкий спектр. Во многих задачах естественный шум можно заменить идеализированной математической моделью — гауссовым белым шумом.

Во-вторых, любая система в действительности не является строго замкнутой и испытывает воздействия со стороны окружающей среды. Такое воздействие не поддается строго детерминированному описанию и задается в виде внешнего шума. В радиофизике такой шум называют техническим. Его величина может значительно превосходить величину естественного шума, однако при необходимости влияние внешнего шума может быть существенно снижено с помощью различных технических средств и способов.

Влияние внутренних и внешних источников шума на динамическую систему даже при незначительной интенсивности может оказаться весьма существенным и приводить к несколько неожиданным результатам. Так, при увеличении интенсивности шума может наблюдаться переход нелинейной системы к более упорядоченному поведению, как это имеет место в явлениях стохастического и когерентного резонанса. Шум в нелинейных системах может приводить к качественным изменениям динамической компоненты поведения системы, т. е. является причиной бифуркационных переходов. Результат шумового воздействия на динамическую систему определяется не только характеристиками шума, но в значительной степени зависит и от особенностей детерминированной компоненты поведения системы. Наиболее заметным влияние шума может оказаться в случае структурной неустойчивости динамической системы, например в точках бифуркаций или в режиме негиперболического хаоса. Все вышесказанное в полной мере относится и к автоколебательным системам. Кроме нерегулярного поведения, вызванного действием шума, автоколебательная система и сама, в силу свойств детерминированного оператора эволюции, может порождать шумоподобные (хаотические) колебания. Возникает вопрос о сходстве и различиях зашумленных регулярных автоколебаний и детерминированного хаоса.

В настоящей лекции представлены результаты классической теории флуктуаций в генераторе квазигармонических колебаний на примере генератора Ван дер Поля; формулируются стохастические уравнения для амплитуды и фазы автоколебаний, анализируются их решения; рассматриваются автокорреляционная функция и спектр мощности зашумленных автоколебаний; затем методами численного эксперимента анализируются спектрально-корреляционные характеристики хаотических автоколебательных процессов применительно к генераторам спирального хаоса; решается задача о статистических характеристиках спирального хаоса как в отсутствие, так и с учетом воздействия шума и проводится сопоставление результатов с классической теорией флуктуаций в генераторе Ван дер Поля.

16.2. Флуктуации в квазигармоническом генераторе с источником шума

Стохастические уравнения квазигармонического автогенератора. Теория флуктуаций в автоколебательной системе с источником шума была развита в классических работах по статистической радиофизике на примере низкочастотного радиофизического генератора. Основные теоретические результаты касаются квазигармонического режима и получены в условиях ряда упрощающих предположений. Рассматривается аддитивный гауссов δ-коррелированный (белый) шум. Флуктуации фазы и амплитуды во времени предполагаются «медленными» по сравнению с периодом автоколебаний. В рамках спектрально-корреляционного анализа делается предположение о слабом шуме и развитой генерации. В этом случае можно пренебречь флуктуациями амплитуды по сравнению с ее невозмущенным значением.

Эквивалентная схема низкочастотного радиогенератора приведена на рис. 16.1. Она может быть описана следующим дифференциальным уравнением:

$$\frac{d^2U}{dt_1^2} + \omega_0^2 U = \left(\frac{G_0 - G}{C} - \frac{3bU^2}{C} \right) \frac{dU}{dt_1} + \frac{1}{C} \frac{dI_{\text{ш}}(t_1)}{dt_1}, \tag{16.1}$$

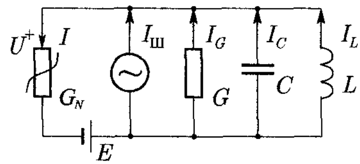


Рис. 16.1. Эквивалентная схема низкочастотного радиофизического генератора с источниками шума: $G_N(U)$ — нелинейная проводимость с вольт-амперной характеристикой $I = -G_0U + bU^3$; G, C, L — постоянные проводимость, емкость и индуктивность соответственно; $I_ш$ — эквивалентный шумовой ток, учитывающий все источники внутренних шумов системы, E — напряжение источника питания

где $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ — частота квазигармонических автоколебаний. Переходя к безразмерной переменной $X = \dfrac{U}{U_0}$ $\left(U_0 = \dfrac{1}{\sqrt{3bL\omega_0}}\right)$ и безразмерному времени $t = \omega_0 t_1$, получаем следующее стохастическое дифференциальное уравнение автогенератора[1]:

$$\ddot{X} + X = (\varepsilon - X^2)\dot{X} + \sqrt{2D}n(t), \tag{16.2}$$

где точками обозначены производные по безразмерному времени t. Безразмерный параметр возбуждения $\varepsilon = \dfrac{G_0 - G}{C\omega_0}$ управляет режимом генерации. Реальная случайная сила $\dfrac{+\omega_0 L}{U_0}\dfrac{dI_ш(t)}{dt}$ заменяется на эквивалентный гауссов белый шум: $\xi(t) = \sqrt{2D}n(t)$, где $\langle n(t)\rangle \equiv 0, \langle n(t+\tau)\xi(t)\rangle = \delta(\tau)$, D — константа, задающая интенсивность шума. Скобки $\langle \ldots \rangle$ означают статистическое усреднение.

Уравнение (16.2) описывает случайный процесс $X(t)$, представляющий собой «зашумленные» автоколебания. Статистические характеристики этого процесса определяются как режимом системы (параметром ε), так и характеристиками шума. В случае гауссова белого шума $X(t)$ является диффузионным марковским процессом. Если цикл достаточно сильно притягивает траектории (обладает большой жесткостью), а интенсивность шума мала, то траектория будет преимущественно вращаться в близкой окрестности предельного цикла (рис. 16.2).

[1]Колебания в системах с шумом описываются случайными функциями времени. Будем, по возможности, обозначать их заглавными буквами, чтобы отличить от колебаний детерминированных систем, которые по-прежнему будем обозначать прописными буквами.

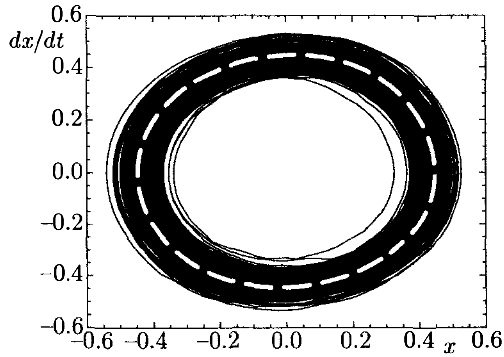


Рис. 16.2. Фазовый портрет «зашумленного» предельного цикла в системе (16.2) при $\varepsilon = 0.05$, $D = 0.0001$. Белой пунктирной линией показан невозмущенный предельный цикл

Будем полагать колебания автогенератора близкими к гармоническим, что справедливо при $\varepsilon \leqslant 0.1$ и $D \ll \varepsilon$ и искать решение (16.2) в виде

$$\begin{aligned} X(t) &= \rho(t)\cos(t+\varphi(t)), \\ \dot{X}(t) &= -\rho(t)\sin(t+\varphi(t)), \end{aligned} \tag{16.3}$$

где мгновенная амплитуда $\rho(t)$ и случайная компонента фазы $\varphi(t)$ предполагаются медленно меняющимися функциями по сравнению с периодом колебаний $T_0 = 2\pi$. Подставляя выражения (16.3) в (16.2) и производя усреднение за период $T_0 = 2\pi$, получаем следующую систему стохастических уравнений для амплитуды и фазы колебаний:

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \left(\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\rho^2}{8}\right)\rho - \sqrt{2D}\frac{1}{2\pi}\int\limits_t^{t+2\pi} n(\theta)\sin(\theta+\varphi)d\theta, \\ \dot{\varphi} &= -\frac{\sqrt{2D}}{\rho}\frac{1}{2\pi}\int\limits_t^{t+2\pi} n(\theta)\cos(\theta+\varphi)d\theta. \end{aligned} \tag{16.4}$$

Производя усреднение слагаемых, содержащих источник шума $n(t)$, приходим к классической стохастической модели квазигармонического автогенератора:

$$\dot{\rho} = \left(\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\rho^2}{8}\right)\rho + \frac{D}{2\rho} + \sqrt{D}n_1(t),$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\sqrt{D}}{\rho} n_2(t). \qquad (16.5)$$

Уравнения (16.5) можно рассматривать как универсальную, хотя и сильно упрощенную модель, описывающую поведение квазигармонического генератора, находящегося под действием белого гауссова шума постоянной интенсивности. Под универсальностью мы понимаем применимость данной модели к квазигармонической автоколебательной системе любой природы с собственной частотой в любом диапазоне. Это может быть как одномодовый лазер, так и модель, описывающая химическую реакцию, живую клетку или организм.

Флуктуации амплитуды автоколебаний. Первое уравнение системы (16.5) не содержит фазы колебаний и его можно рассматривать независимо от фазового уравнения. Его решение есть одномерный диффузионный процесс $\rho(t)$ с плотностью вероятности $p_\rho(\rho, t)$, удовлетворяющей следующему уравнению Фоккера–Планка–Колмогорова:

$$\frac{\partial p_\rho(\rho,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \rho}\left[\left(\left(\frac{1}{2}\varepsilon - \frac{\rho^2}{8}\right)\rho + \frac{D}{2\rho}\right) p_\rho(\rho,t)\right] + \frac{D}{2}\frac{\partial^2 p_\rho(\rho,t)}{\partial \rho^2}. \qquad (16.6)$$

Стационарное решение уравнения (16.6) имеет вид:

$$p_\rho^{\text{ст}}(\rho) = C\rho \exp\left[-\frac{1}{16D}(\rho^2 - \rho_0^2)^2\right], \qquad (16.7)$$

где $\rho_0 = 2\sqrt{\varepsilon}$ — невозмущенное (в отсутствие шума) значение амплитуды колебаний, C — нормировочная константа, определяемая из условия

$$\int\limits_0^\infty p_\rho^{\text{ст}}(\rho) d\rho = 1. \qquad (16.8)$$

На рис. 16.3 приведены распределения амплитуды, полученные для различных значений интенсивности шума D.

При слабом шуме плотность вероятности $p_\rho^{\text{ст}}$ существенно отлична от нуля только в окрестности невозмущенного значения амплитуды ρ_0. Наивероятное значение амплитуды ρ_m, соответствующее максимуму плотности вероятности, практически совпадает с невозмущенным значением ρ_0 и только при больших интенсивностях шума начинает смещаться вправо от ρ_0.

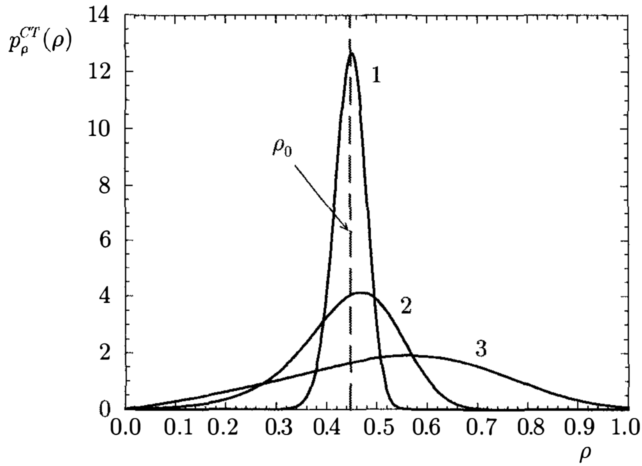


Рис. 16.3. Стационарные распределения амплитуды, рассчитанные по формуле (16.7) при $D = 0.0001$ (кривая 1), $D = 0.001$ (кривая 2), $D = 0.01$ (кривая 3). Пунктирной линией отмечено невозмущенное значение амплитуды

Кроме того, для слабого шума (кривая 1) график плотности вероятности $p_\rho^{\text{ст}}(\rho)$ почти симметричен относительно ρ_0. Это означает, что среднее значение амплитуды также близко к невозмущенному значению: $\bar{\rho} = \langle \rho(t) \rangle \approx \rho_0$.

При условии слабого шума и достаточно развитой генерации ($D \ll \varepsilon$) флуктуации амплитуды $\tilde{\rho}(t) = \rho(t) - \rho_0$ малы и могут быть описаны следующим линейным СДУ:

$$\dot{\tilde{\rho}} + \varepsilon\tilde{\rho} = \sqrt{D}n_1(t). \tag{16.9}$$

Оно задает так называемый одномерный процесс Орнштейна–Уленбека. Это — гауссов диффузионный процесс. Так как в сделанных предположениях $\bar{\rho} \approx \rho_0$, то можно положить $\langle \tilde{\rho}(t) \rangle \equiv 0$.

В пределе $t \to \infty$ процесс, задаваемый СДУ (16.9), является стационарным процессом с дисперсией

$$\sigma_\rho^2 = \langle \tilde{\rho}^2(t) \rangle = \frac{D}{2\varepsilon} \tag{16.10}$$

и экспоненциально спадающей автокорреляционной функцией

$$\psi_\rho(\tau) = \langle \tilde{\rho}(t)\tilde{\rho}(t+\tau) \rangle = \sigma_\rho^2 \exp(-\varepsilon|\tau|), \quad \tau = t_2 - t_1. \tag{16.11}$$

Случайная фаза автоколебаний. Случайная компонента фазы автоколебаний φ задается вторым уравнением системы (16.5), правая часть которого зависит от мгновенной амплитуды $\rho(t)$. В случае слабого шума и развитой генерации ($D \ll \varepsilon < 1$) мы можем пренебречь амплитудными флуктуациями по сравнению с невозмущенным значением ρ_0 и заменить переменную величину $\rho(t)$ на константу ρ_0. В таком приближении приходим к модели винеровского процесса для флуктуаций фазы $\varphi(t)$:

$$\dot{\varphi} = \sqrt{2B_\varphi} n_2(t), \tag{16.12}$$

где $B_\varphi = \mathrm{const}$ — коэффициент диффузии фазы, определяемый выражением[2]:

$$B_\varphi = \frac{1}{2}\frac{D}{\rho_0^2} = \frac{D}{8\varepsilon}, \quad \rho_0 = 2\sqrt{\varepsilon}. \tag{16.13}$$

Таким образом, $\varphi(t)$ — это нестационарный гауссов процесс со средним значением, определяемым начальным состоянием $\langle\varphi(t)\rangle = \varphi(t_0)$ и линейно растущей во времени дисперсией

$$\sigma_\varphi^2(t) = 2B_\varphi \cdot (t - t_0). \tag{16.14}$$

Очевидно, дисперсия полной фазы автоколебаний $\Phi(t) = t + \varphi(t)$ совпадает с $\sigma_\varphi^2(t)$. Из замены (16.3) следует, что фаза $\Phi(t)$ автогенератора (16.2) в любой момент времени может быть вычислена как

$$\Phi(t) = \mathrm{arctg}\left(\frac{-\dot{X}(t)}{X(t)}\right) \pm \pi k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{16.15}$$

Выбор целого k определяется условием непрерывности функции $\Phi(t)$. Результат численного расчета дисперсии мгновенной фазы $\Phi(t)$ автогенератора (16.2) представлен на рис. 16.4. Угловой коэффициент численно полученной линейной зависимости полностью совпадает с теоретическим значением $2B_\varphi = D/4\varepsilon = 0.0005$.

Кроме переменной $\varphi(t) \in (-\infty; \infty)$, часто рассматривают случайную фазу, принимающую значения в ограниченном интервале $[-\pi; \pi]$ или $[0; 2\pi]$:

$$\phi(t) = \varphi(t) + 2\pi\nu, \tag{16.16}$$

[2]Часто в литературе за коэффициент диффузии принимают величину в два раза больше указанной.

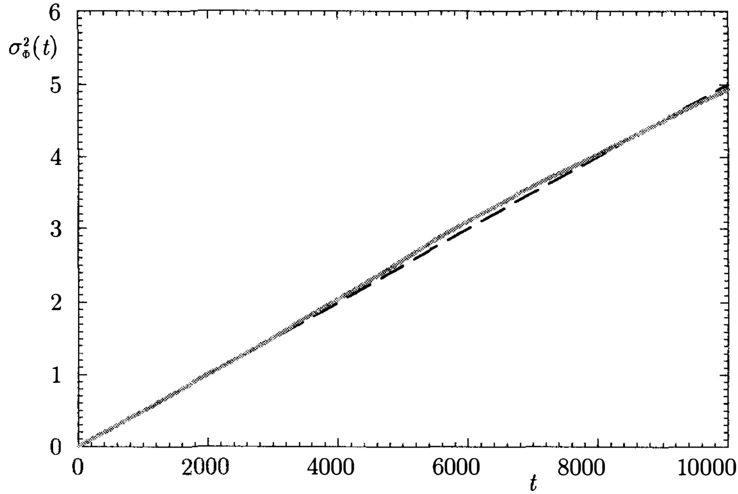


Рис. 16.4. Зависимость дисперсии мгновенной фазы Φ от времени, полученная численно для системы (16.2) при $\varepsilon = 0.05$, $D = 0.0001$ (серые точки) и по формуле (16.14) (пунктир)

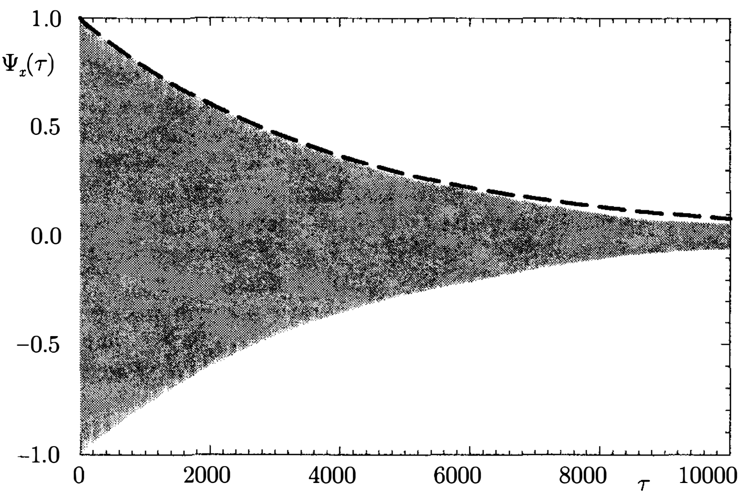


Рис. 16.5. Нормированная АКФ колебаний $X(t)$ в системе (16.2) при $\varepsilon = 0.05$, $D = 0.0001$, рассчитанная по формуле (16.18) (серый цвет), и нормированная огибающая, полученная по формуле (16.17) (пунктир)

где ν — некоторая целочисленная случайная функция. Представляя колебания в виде $X(t) = \rho(t)\cos(t + \varphi(t))$, можно заменить переменную $\varphi(t)$ на переменную $\phi(t)$. В силу 2π-периодичности косинуса процесс $X(t)$ от этого не изменится, однако использовать ограниченную переменную $\phi(t)$ в некоторых случаях оказывается удобнее, поскольку она имеет в пределе $t \to \infty$ стационарное равномерное распределение.

Автокорреляционная функция и спектр автоколебаний в присутствии шума. В рамках квазигармонического приближения можно получить известное выражение для автокорреляционной функции (АКФ) колебаний в зашумленном автогенераторе, задаваемом укороченными СДУ (16.5):

$$\psi_X(\tau) = \frac{1}{2}(\psi_\rho(\tau) + \rho_0^2)\exp(-B_\varphi|\tau|)\cos\tau, \quad \tau = t_2 - t_1, \tag{16.17}$$

где $\psi_\rho(\tau)$ определяется выражением (16.11). При выводе выражений (16.17) флуктуации амплитуды относительно невозмущенного значения ρ_0 предполагаются малыми, так что в фазовом уравнении можно положить $\rho(t) = \rho_0$. Тем самым мы пренебрегаем статистической зависимостью мгновенной фазы от мгновенной амплитуды и приходим к модели винеровского процесса для фазы φ. При малой интенсивности шума $D \ll \varepsilon$ такое приближение является вполне приемлемым. На рис. 16.5 представлена нормированная АКФ колебаний генератора (16.2) $\Psi_X(\tau) = \psi_X(\tau)/\psi_X(0)$, полученная численно непосредственно из определения АКФ процесса $X(t)$:

$$\psi_X(\tau) = \langle X(t)X(t+\tau)\rangle - \langle X(t)\rangle\langle X(t+\tau)\rangle, \tag{16.18}$$

где в предположении эргодичности процесса $X(t)$ статистическое усреднение $\langle\ldots\rangle$ заменялось усреднением по времени. Для сравнения на том же графике пунктиром нанесена нормированная огибающая теоретической автокорреляционной функции, рассчитанная при тех же значениях параметров ε и D по формуле (16.17). Можно видеть, что приближенная теория и численный результат находятся в полном соответствии. С ростом интенсивности шума флуктуации амплитуды будут возрастать и их влияние на поведение мгновенной фазы станет существенным. В этом случае результаты вычислений по формуле (16.17) и данные численного моделирования могут заметно отличаться.

Спектральная плотность стационарного случайного процесса $X(t)$ связана с АКФ следующим соотношением[3]:

$$G_X(\omega) = 2\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi_X(\tau)\exp(-j\omega\tau)d\tau + 4\pi(\overline{X})^2\delta(\omega), \ j = \sqrt{-1}, \ \omega \geqslant 0. \tag{16.19}$$

[3]Здесь имеется в виду так называемый односторонний («физический») спектр, определенный только для положительных частот.

Учитывая, что среднее значение $\overline{X}$ равно нулю, получаем спектр в виде суммы двух лоренцианов, со спектральными максимумами на частоте невозмущенных автоколебаний, приведенной к единице:

$$\begin{aligned} G_X(\omega) &= G_I(\omega) + G_{II}(\omega), \\ G_I(\omega) &= \frac{\rho_0^2 B_\varphi}{B_\varphi^2 + (\omega-1)^2}, \\ G_{II}(\omega) &= \frac{\sigma_\rho^2 (B_\varphi + \varepsilon)}{(B_\varphi+\varepsilon)^2 + (\omega-1)^2} \approx \frac{\sigma_\rho^2 \varepsilon}{\varepsilon^2 + (\omega-1)^2} \quad (\text{считая } B_\varphi \ll \varepsilon). \end{aligned} \tag{16.20}$$

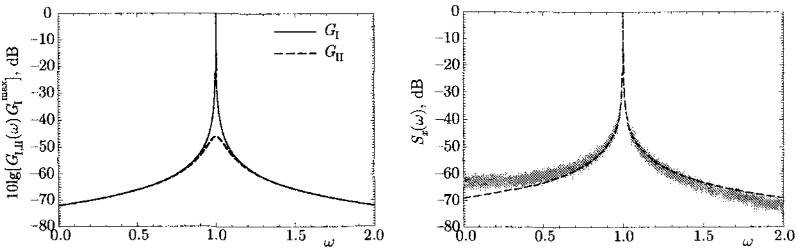
Слагаемое G_I связано с флуктуациям фазы. Ширина этой компоненты на уровне половинной мощности равна $2B_\varphi$, а значение в максимуме есть ρ_0^2/B_φ. Поскольку при слабом шуме величина B_φ очень мала, то лоренциан G_I является очень узким и высоким. Напротив, слагаемое G_{II} определяется, главным образом, флуктуациями амплитуды. Ширина этой компоненты на уровне половинной мощность есть примерно 2ε, т. е. относительно велика, а значение в максимуме, приблизительно равное $\sigma_\rho^2/\varepsilon$, мало. Таким образом, при условии слабого шума и развитой генерации спектр автоколебаний состоит из узкой спектральной линии на частоте автогенерации, ширина которой определяется коэффициентом диффузии фазы и широкополосного низкого пьедестала, в основном связанного с амплитудными флуктуациями.

Рассчитанные по формулам (16.20) слагаемые G_I и G_{II}, отнормированные на величину $G_I^{\max} = G_I(1)$, представлены на рис. 16.6, *а*. На рис. 16.6, *б* приведен нормированный спектр колебаний генератора (16.2)

$$S_X(\omega) = 10 \lg \left[\frac{G_X(\omega)}{G_X^{\max}} \right], \tag{16.21}$$

полученный численно. Здесь $G_X^{\max} = G_X(1)$. Пунктиром показан теоретический спектр. При выбранных параметрах данные приближенной теории достаточно хорошо соответствуют численному эксперименту.

Спектрально-корреляционный анализ автоколебаний в генераторах спирального хаоса. Спиральный хаотический аттрактор детально изучен и представляет собой очень распространенный пример негиперболического хаотического аттрактора, типичный для широкого класса динамических систем. Для спирального хаотического аттрактора характерно почти регулярное вращение фазовой траектории вокруг состояния равновесия



а *б*

Рис. 16.6. Спектральные характеристики автогенератора при $\varepsilon = 0.05$, $D = 0.0001$: *а* — нормированные функции $G_I(\omega)$ и $G_{II}(\omega)$, рассчитанные по формулам (16.20), в децибелах; *б* — нормированный спектр колебаний $X(t)$, полученный численно для системы (16.2) (серая сплошная линия) и теоретически по формулам (16.20) (пунктир)

и наличие четко выраженного спектрального максимума на частоте, соответствующей средней частоте вращения. По указанным причинам к спиральному аттрактору можно успешно применить амплитудно-фазовое описание. Сам же спиральный аттрактор часто называют фазово-когерентным. Переход к амплитудно-фазовому представлению позволяет не только качественно, но и количественно сопоставить хаотические автоколебания со случайным процессом, протекающим в квазигармоническом автогенераторе с шумом. Недавно полученные результаты компьютерного моделирования и натурных экспериментов показывают, что несмотря на сложное поведение мгновенной амплитуды хаотических колебаний в режиме спирального аттрактора, многие их важнейшие характеристики определяются поведением именно мгновенной фазы. Мгновенная фаза для спирального аттрактора является медленно меняющейся функцией времени по сравнению со средним периодом колебаний, а ее приращения на достаточно больших (по сравнению с тем же средним периодом) интервалах времени можно считать статистически независимыми.

16.3. Флуктуации амплитуды и фазы в генераторе хаотических колебаний

Классический пример автогенератора хаоса — осциллятор Рёсслера. Уравнения осциллятора имеют вид

$$\dot{x} = -y - z, \quad \dot{y} = x + \alpha y, \quad \dot{z} = \beta + z(x - \mu). \tag{16.22}$$

В (16.22) будем полагать, что $\alpha = \beta = 0.2$, а μ рассматривать в качестве управляющего параметра. В зависимости от выбора значения μ система может находиться в режиме периодических автоколебаний, спирального или винтового хаотического аттрактора.

Другим примером служит модифицированный генератор с инерционной нелинейностью (генератор Анищенко–Астахова, лекция 10).

$$\dot{x} = mx + y - z + px^3, \quad \dot{y} = -y, \quad \dot{z} = -gz + gf(x). \tag{16.23}$$

В качестве нелинейной характеристики $f(x)$ в (16.23) может быть выбрана любая положительно определенная при $x > 0$ функция, не являющаяся четной. Мы будем полагать

$$f(x) = \frac{1}{2}(x + |x|). \tag{16.24}$$

Параметры m и g управляют режимом автогенератора, который, как и в осцилляторе Рёсслера, может быть периодическим или хаотическим.

Мгновенная фаза $\Phi(t)$ автогенераторов (16.22) и (16.23) может быть введена аналогично фазе в генераторе Ван дер Поля (16.15) как угол вращения изображающей точки на плоскости динамических переменных x, y:

$$\Phi(t) = \left| \operatorname{arctg}\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right) \pm \pi k \right|, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{16.25}$$

Модуль берется по той причине, что направление вращения радиус-вектора может быть различно (и, действительно, различно в (16.22) и (16.23)), но нас интересует абсолютное значение фазы. Величина $\pm\pi k$ выбирается таким образом, чтобы фаза была непрерывной функцией времени. Мгновенная амплитуда колебаний есть длина радиус-вектора, исходящего из начала координат[4]:

$$\rho(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}. \tag{16.26}$$

Рассмотрим режим спирального аттрактора в модели (16.22) при $\mu = 6.5$. Вид x, y-проекции (рис. 16.7, *а*) соответствует режиму спирального аттрактора. Распределение амплитуды хаотических колебаний $\rho(t)$

[4]Состояние равновесия системы (16.22) на плоскости x, y, вокруг которого происходит вращение траектории, при выбранных значениях параметров очень близко к началу координат. В системе (16.23) оно при любых значениях параметров находится в начале координат.

(рис. 16.7, *б*), сильно отличается от аналогичного распределения в зашумленном квазигармоническом генераторе (рис. 16.3) и в окрестности среднего значения амплитуды $\rho_0 = \langle \rho(t) \rangle$ является далеким от гауссова. Разумеется, автоколебания осциллятора Рёсслера сильно отличаются от квазигармонических автоколебаний зашумленного осциллятора Ван дер Поля. В то же время с точки зрения поведения мгновенной фазы и связанных с ней характеристик наблюдается много общего. Хотя поведение мгновенной фазы $\Phi(t)$ хаотических автоколебаний в (16.22) является более сложным по сравнению с квазигармоническим случаем и $\Phi(t)$ нельзя строго считать винеровским процессом, однако распределение флуктуаций мгновенной фазы $\varphi(t) = \Phi(t) - \langle \Phi(t) \rangle$, рассчитанное на ансамбле фазовых траекторий одинаковой длины, достаточно хорошо аппроксимируется гауссовым законом (рис. 16.7, *в*). Дисперсия мгновенной фазы хаотических автоколебаний растет почти линейно (рис. 16.7, *г*), подобно тому, как она росла в квазигармоническом осцилляторе с шумом (рис. 16.4). Можно оценить по методу наименьших квадратов угловой коэффициент линейного роста дисперсии. Половину этого коэффициента называют эффективным коэффициентом диффузии мгновенной фазы хаотических автоколебаний $B_{эф}$. Эффективный коэффициент диффузии фазы можно рассматривать как коэффициент диффузии фазы некоторого квазигармонического автогенератора с шумом, эквивалентного данному хаотическому автогенератору с точки зрения скорости роста дисперсии фазы во времени и, как будет показано далее, с точки зрения некоторых спектрально-корреляционных характеристик. Для рассматриваемого режима в модели (16.22) было получено значение $B_{эф} = 0.00018 \pm 10^{-5}$. Напомним, что в данном случае диффузия фазы связана не с шумом, а только с детерминированной динамикой системы (16.22), в которой шум отсутствует.

Остановимся более подробно на спектрально-корреляционных характеристиках спирального хаоса. Как показывают расчеты, АКФ колебаний $x(t)$ в системе (16.22) в режиме спирального аттрактора очень хорошо аппроксимируется выражением (16.17), где вместо B_φ следует взять $B_{эф}$. На рис. 16.8, *а* приведен результат расчета АКФ колебаний $x(t)$ в системе (16.22) по формуле (16.18) с учетом нормировки. Там же изображена нормированная огибающая, соответствующая выражению (16.17) при $B_\varphi = B_{эф}$ и численно полученных значениях $\psi_\rho(\tau)$. Таким образом, учитывалось поведение не только фазы, но и амплитуды колебаний, так как в рассматриваемом хаотическом режиме флуктуации амплитуды являются существенными. На рис. 16.9 приведены результаты расчета ненормированной автокорреляционной функции амплитудных флуктуаций $\psi_\rho(\tau)$. Как видно из графика, $\psi_\rho(\tau)$ при $\tau = 0$ имеет значительную величину и резко спадает с ростом τ, представляя собой практически δ-функцию.

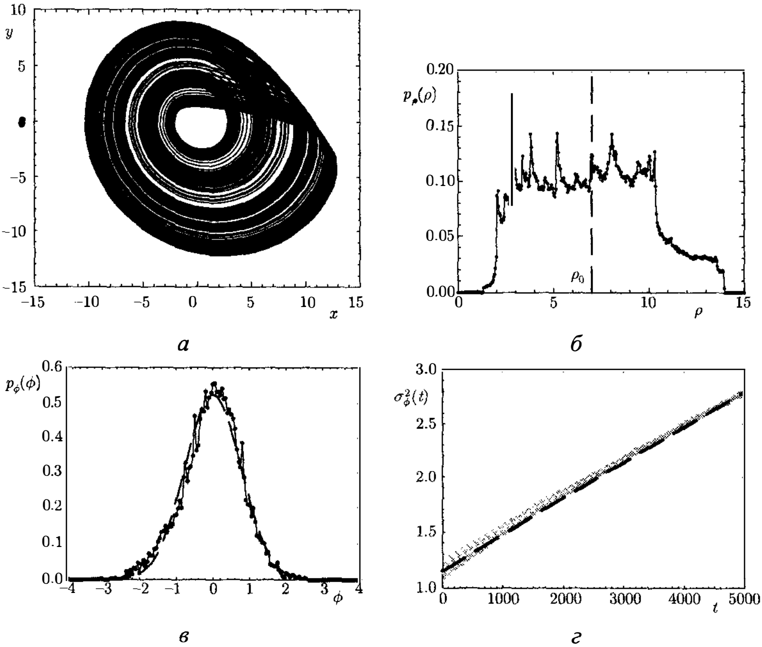


Рис. 16.7. Характеристики спирального аттрактора в модели (16.22) при $\mu = 6.5$: *а* — x, y-проекция аттрактора; *б* — распределение амплитуды хаотических колебаний; *в* — распределение флуктуаций мгновенной фазы в момент $t = 1000$ при начальном распределении в пределах интервала $[-\pi/30; \pi/30]$ и его гауссова аппроксимация (пунктир); *г* — зависимость дисперсии мгновенной фазы от времени (серые точки) и ее линейная аппроксимация (пунктир)

Именно с амплитудными флуктуациями связан спад на начальном участке АКФ, который заметен на графике рис. 16.8, *а*. Фрагмент нормированного спектра колебаний $x(t)$ в том же режиме представлен на рис. 16.8, *б*. Пунктирной линией изображена аппроксимация спектральной линии по формуле

$$S_x(\omega) = 10 \lg \left[\frac{G_x(\omega)}{G_x^{\max}} \right] = 10 \lg \left[\frac{B_{\text{эф}}^2}{B_{\text{эф}}^2 + (\omega - \omega_0)^2} \right], \qquad (16.27)$$

где $\omega_0 = 1.0683 \pm 10^{-4}$ — численно полученная частота главного спектрального максимума, совпадающая в пределах погрешности вычислений

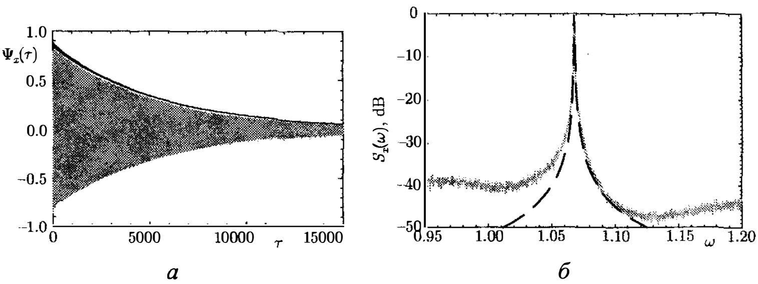


Рис. 16.8. Результаты спектрально-корреляционного исследования хаотических автоколебаний в системе Рёсслера (16.22) при $\mu = 6.5$: *а* — нормированная АКФ колебаний $x(t)$ в системе (16.22), рассчитанная по формуле (16.18) (серые точки), и нормированная огибающая, соответствующая выражению (16.17) при $B_\varphi = B_{\text{эф}}$ (черные точки); *б* — фрагмент нормированного спектра колебаний $x(t)$ (сплошная серая кривая) и аппроксимация основной спектральной линии по формуле (16.27) (черный пунктир). При аппроксимации использовались численно полученные значения коэффициента эффективной диффузии фазы $B_{\text{эф}}$ и частоты максимума: $B_{\text{эф}} = 0.00018 \pm 10^{-5}$; $\omega_0 = 1.0683 \pm 10^{-4}$

со средней частотой хаотических колебаний ω_c, определяемой выражением

$$\omega_c = \lim_{T\to\infty} \frac{\Phi(t_0 + T) - \Phi(t_0)}{T}. \tag{16.28}$$

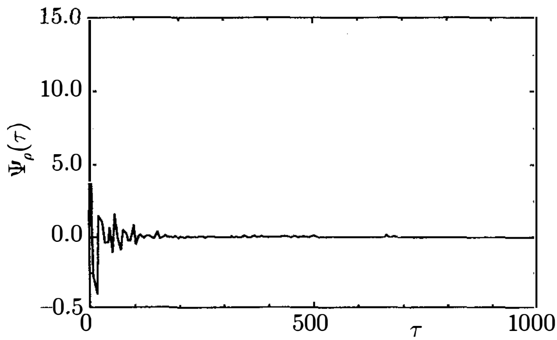


Рис. 16.9. Результаты расчета ненормированной автокорреляционной функции амплитудных флуктуаций $\psi_\rho(\tau)$ для системы Рёсслера (16.22) при $\mu = 6.5$

Таким образом, основная спектральная линия в режиме спирального аттрактора хорошо аппроксимируется лоренцианом в соответствии

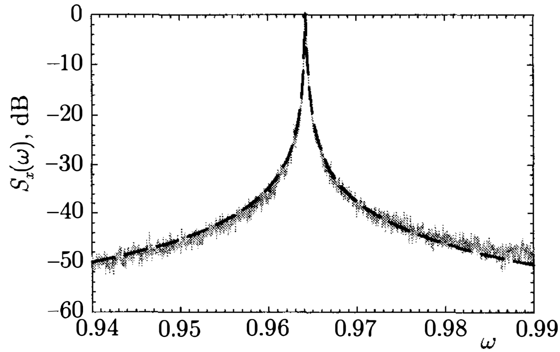


Рис. 16.10. Фрагмент нормированного спектра колебаний $x(t)$ в (16.23) при $m = 1.35$, $g = 0.21$, $p = 0.0001$ (сплошная серая линия) и аппроксимация основной спектральной линии по формуле (16.27) с коэффициентом эффективной диффузии фазы $B_{эф} = 0.00008 \pm 10^{-5}$ и частотой максимума $\omega_0 = 0.9642 \pm 10^{-4}$ (черный пунктир)

с (16.20), причем даже без учета амплитудных флуктуаций. Последние проявляются в спектре в форме широкополосного пьедестала на уровне менее −40 дБ. Ширина основной спектральной линии на уровне половинной мощности определяется коэффициентом эффективной диффузии фазы и, в пределах погрешности численных расчетов, равна $2B_{эф}$.

Аналогичные результаты были получены для генератора с инерционной нелинейностью (16.23) (рис. 16.10) и для других моделей хаотических автогенераторов в режиме спирального аттрактора, что позволяет говорить об их универсальном характере.

Влияние белого шума на хаотические автоколебания в режиме спирального аттрактора. Исследуем, как повлияет аддитивный белый шум на поведение мгновенной фазы хаотических автоколебаний в режиме спирального аттрактора. Рассмотрим модель (16.22), добавив в нее белый гауссов шум $n(t)$ ($\langle n(t)n(t+\tau)\rangle = \delta(\tau)$):

$$\dot{X} = -Y - Z + \sqrt{2D}n(t), \quad \dot{Y} = X + \alpha Y, \quad \dot{Z} = \beta + Z(X - \mu). \quad (16.29)$$

D — параметр, управляющий интенсивностью шумового воздействия. Численное исследование модели (16.29) и других моделей спирального хаоса показывает, что воздействие слабого белого шума не приводит к качественным изменениям поведения системы, в частности характера поведения мгновенной фазы, однако может существенно увеличить скорость перемешивания, за счет увеличения коэффициента эффективной диффузии фазы. Исследуем зависимость коэффициента эффективной диффузии фазы $B_{эф}$ от интенсивности белого шума в системе (16.29). Как следует из теории квазигармонического автогенератора, диффузия фазы прямо пропорциональна интенсивности шума D. Можно предположить линейный характер зависимости $B_{эф}(D)$ и в случае хаотического генератора, но при этом необходимо учесть, что хаотические автоколебания в отсутствие шума обладают собственным коэффициентом эффективной диффузии фазы $B_{эф}(0)$. Тогда получим:

$$B_{эф} = c_1 D + c_2, \tag{16.30}$$

где c_1 — некоторый коэффициент пропорциональности, определяемый характеристиками хаотических колебаний, а $c_2 = B_{эф}(0)$ — коэффициент эффективной диффузии фазы хаотических автоколебаний при $D = 0$. На рис. 16.11 в логарифмическом масштабе представлена зависимость $B_{эф}$ от интенсивности шума D, полученная численно для модели (16.29). Пунктиром изображена ее линейная аппроксимация (16.30). Коэффициенты c_1 и c_2 находились по методу наименьших квадратов. В целом данные численного эксперимента разбросаны в окрестности линейной зависимости, причем полученное в результате линейной аппроксимации значение $c_2 = 0.00020$ близко к численно найденному значению коэффициента диффузии: $B_{эф}(0) = 0.00018$. Соответственно, с ростом $B_{эф}$ возрастает скорость экспоненциального затухания АКФ хаотических колебаний и ширина основной спектральной линии.

Физический эксперимент. Статистические характеристики источников шума, неизбежно присутствующих в реальных устройствах, не всегда удается правильно определить, поэтому установленные для математической модели закономерности в реальности могут нарушаться. Чтобы подтвердить наблюдаемость установленных закономерностей, в реальных системах были проведены соответствующие физические эксперименты.

Использовалась измерительная установка, включающая исследуемую систему, компьютер, АЦП и генератор гауссова широкополосного шума с полосой частот от 0 до 100 кГц (рис. 16.12).

В качестве исследуемой системы был выбран генератор Анищенко–Астахова, представляющий собой реальный радиотехнический автогенератор с мостом Вина и цепочкой инерционной нелинейности, контролирующей коэффициент усиления усилительного каскада. В безразмерных переменных математическая модель генератора задается системой уравнений (16.23). Значения параметров m и g выбирались соответствующими режиму спирального хаоса. При заданной настройке моста Вина основная частота хаотических колебаний f_0 составляла 18,5 кГц. Частота дискретизации

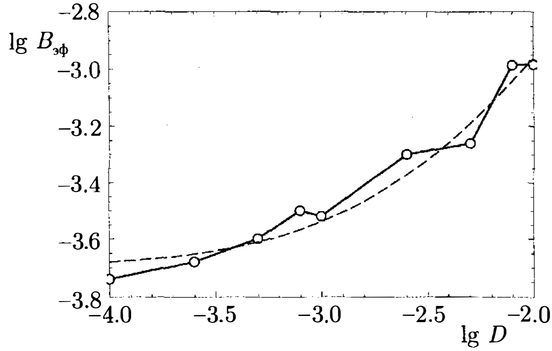


Рис. 16.11. Зависимость коэффициента эффективной диффузии фазы $B_{эф}$ от интенсивности шума D (сплошная кривая) и ее линейная аппроксимация по методу наименьших квадратов (пунктир)

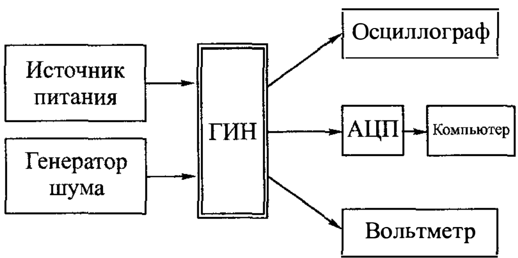


Рис. 16.12. Схема экспериментальной установки

АЦП выбиралась равной 694,44 кГц. Кроме внутренних источников шума на экспериментальный генератор воздействовал широкополосный шум от внешнего генератора, интенсивность которого можно было регулировать.

В ходе эксперимента с помощью АЦП проводилась запись колебаний $x(t)$ исследуемой системы и последующая обработка данных на компьютере. Для последовательности моментов времени вычислялись мгновенная амплитуда $\rho(t)$ и мгновенная фаза $\Phi(t)$ колебаний. В качестве амплитуды бралась длина радиус-вектора, а в качестве фазы — угол поворота радиус-вектора на плоскости переменных $x(t), x_H(t)$, где $x_H(t)$ — преобразование Гильберта от функции $x(t)$. По полученным экспериментальным данным вычислялись зависимость дисперсии фазы от времени и коэффициент эффективной диффузии мгновенной фазы $B_{эф}$. При этом использовалось усреднение на ансамбле, составленном из N фрагментов длинной реализации $x(t)$. Рассчитывалась также автокорреляционная функция записанных колебаний генератора. На рис. 16.13 в логарифмическом масштабе представлены графики огибающих нормированных АКФ, полученные при различных значениях интенсивности внешнего шума. Там же приведены экспоненциальные аппроксимации полученных зависимостей вида $\Psi_{\text{апп}}(\tau) = \exp(-B_{\text{эф}}\tau)$, где $B_{\text{эф}}$ — коэффициент эффективной диффузии мгновенной фазы, найденный по экспериментальным данным (флуктуации амплитуды в генераторе относительно малы, так что при аппроксимации АКФ их можно не учитывать).

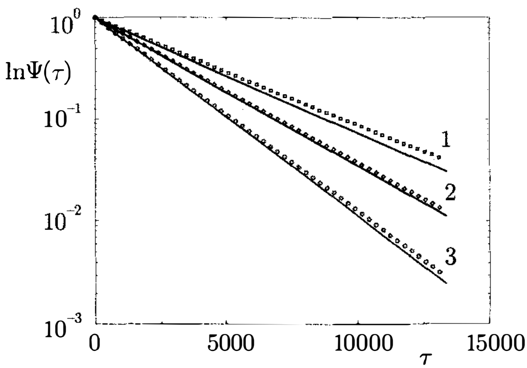


Рис. 16.13. Огибающие автокорреляционных функций (сплошные линии), полученные в эксперименте при различных значениях дисперсии внешнего шума: 1 — $D = 0$; 2 — $D = 0.0005$ мВ; 3 — $D = 0.001$ мВ, и их экспоненциальные аппроксимации (пунктир) с декрементами затухания: $B_{\text{эф}} = 0.00024$, $B_{\text{эф}} = 0.00033$, $B_{\text{эф}} = 0.000439$, соответственно

Аналогичные результаты физических экспериментов, находящиеся в полном соответствии с результатами численных исследований, были получены также для аналоговой модели осциллятора Рёсслера. Таким образом, физические эксперименты показали, что спектрально-корреляционные свойства хаотических автоколебаний в режиме спирального аттрактора и их связь с коэффициентом эффективной диффузии фазы являются достаточно грубыми по отношению к характеристикам источников шума и четко наблюдаются в экспериментах.

16.4. Заключение

Результаты анализа статистических характеристик колебаний зашумленного квазигармонического генератора на примере классической модели

Ван дер Поля показали следующее. Воздействие слабого δ-коррелированного шума приводит к установлению в генераторе случайных колебаний, математической моделью которых служит так называемый «гармонический шум»:

$$X(t) = \rho(t)\cos\left[\omega_0 t + \varphi(t)\right]. \tag{16.31}$$

В (16.31) $\rho(t) = \rho_0 + \tilde{\rho}(t)$ — случайная амплитуда, $\varphi(t)$ — случайная фаза процесса $X(t)$. Причем, в силу фильтрующих свойств резонансного контура генератора, флуктуации амплитуды $\tilde{\rho}(t)$ и фазы $\varphi(t)$ являются медленно меняющимися функциями в сравнении с периодом $T = 2\pi/\omega_0$ колебаний генератора.

Автокорреляционная функция случайного процесса $X(t)$ выражается следующим образом:

$$\psi_X(\tau) = \frac{1}{2}(\psi_\rho(\tau) + \rho_0^2)\exp(-B_\varphi|\tau|)\cos\omega\tau, \tag{16.32}$$

где $\psi_\rho(\tau)$ — АКФ амплитудных флуктуаций. Для квазигармонического зашумленного генератора амплитудные флуктуации малы и огибающая АКФ $\psi(\tau)$ спадает с ростом τ экспоненциально. Скорость спада определяется коэффициентом диффузии случайной фазы B_φ, которая представляет собой нестационарный винеровский процесс.

Выражения (16.31) и (16.32) могут быть применены к описанию статистических процессов в генераторах спирального (или фазокогерентного) хаоса. В этом случае вместо коэффициента диффузии фазы B_φ нужно использовать эффективный коэффициент диффузии фазы $B_{\text{эф}}$. При этом отметим, что в режиме спирального хаоса даже в отсутствие флуктуаций $B_{\text{эф}} > 0$. Этот факт еще раз убедительно свидетельствует о том, что режим детерминированного хаоса проявляет свойства случайного процесса, несмотря на то, что обусловлен динамическими закономерностями в нелинейной системе в отсутствие действия случайных внешних сил.

Лекция 17

Влияние шума на эффект синхронизации колебаний

17.1. Введение

Любой реальный генератор регулярных или хаотических колебаний функционирует в условиях шумовых возмущений. Как правило, интенсивность их мала, тем не менее шум оказывает влияние на характеристики колебательных процессов в генераторе (лекция 16). Этим влиянием при определенных условиях можно пренебречь, но в общем случае этого делать нельзя. В настоящей лекции мы обсудим конкретный вопрос влияния шумовых возмущений на эффект синхронизации автоколебаний в квазигармоническом и хаотическом генераторах. Будем использовать результаты, изложенные в лекциях 12 и 14. Подробно рассмотрим теорию эффективной синхронизации зашумленного генератора Ван дер Поля внешним гармоническим сигналом. Методом численного эксперимента проанализируем эффект взаимной синхронизации квазигармонических генераторов в присутствии флуктуаций. Рассмотрим частотно-фазовую синхронизацию хаотических автоколебаний в присутствии шума и синхронизацию автоколебаний (как периодических, так и хаотических) внешним узкополосным шумом.

Будем предполагать, что мощность шума существенно меньше мощности колебаний генератора и внешнего гармонического воздействия. Статистические характеристики случайного воздействия будем описывать моделью белого гауссова шума, учитывая, что время корреляции естественного шума в генераторе много меньше времени установления стационарных значений амплитуды и фазы колебаний.

17.2. Вынужденная синхронизация зашумленных автоколебаний внешней гармонической силой

Рассмотрим вынужденную синхронизацию на основном тоне, предполагая режим автоколебаний квазигармоническим. Простейшей математической моделью для исследования данного вопроса может служить следующее стохастическое дифференциальное уравнение:

$$\ddot{X} + X = (\varepsilon - X^2)\dot{X} + b\cos(\omega_1 t + \varphi_1^0) + \sqrt{2D}n(t), \tag{17.1}$$

где $\xi(t) = \sqrt{2D}n(t)$ — гауссов белый шум с постоянной интенсивностью D; b, φ_1^0 и ω_1 — амплитуда, начальная фаза и безразмерная частота внешнего воздействия соответственно. Введем замену переменных

$$\begin{aligned} X(t) &= \rho(t)\cos(\omega_1 t + \varphi(t)), \\ \dot{X}(t) &= -\rho(t)\omega_1 \sin(\omega_1 t + \varphi(t)) \end{aligned} \tag{17.2}$$

и, считая амплитуду $\rho(t)$ и фазу $\varphi(t)$ медленно меняющимися функциями, усредним правые и левые части равенства за период внешней силы $T_0 = 2\pi/\omega_1$. Далее, преобразовав источники шума аналогично случаю автономного генератора, приходим к следующей системе стохастических укороченных уравнений для амплитуды и фазы

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \left(\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\rho^2}{8}\right)\rho - \beta\sin(\varphi - \varphi_1^0) + \frac{D}{2\rho\omega_1^2} + \frac{\sqrt{D}}{\omega_1}n_1(t), \\ \dot{\varphi} &= \Delta - \frac{\beta}{\rho}\cos(\varphi - \varphi_1^0) + \frac{\sqrt{D}}{\omega_1\rho}n_2(t), \end{aligned}$$

где $n_1(t)$ и $n_2(t)$ — независимые источники нормированного гауссова белого шума, параметр $\Delta = (1 - \omega_1^2)/2\omega_1 \cong 1 - \omega_1$ характеризует частотную расстройку, а параметр $\beta = b/2\omega_1$ — амплитуду воздействия. Выбор начальной фазы воздействия φ_1^0 не принципиален. Он влияет только на постоянную составляющую переменной φ. В дальнейшем положим $\varphi_1^0 = 0$, тогда переменная φ равна разности фаз колебаний генератора и внешнего воздействия. Аналогичная система уравнений может быть получена не только при гармоническом воздействии, но и в случае, когда внешнее воздействие является периодической функцией любой формы, например, последовательностью импульсов.

Если выполняются условия $b^2 \ll \varepsilon, D \ll \varepsilon$, то отклонения амплитуды от ее невозмущенного значения $\rho_0 = 2\sqrt{\varepsilon}$ невелики. Пренебрегая амплитудными флуктуациями, получаем уравнение фазовой динамики в виде

$$\dot{\varphi} = \Delta - \Delta_c\cos\varphi + \sqrt{2B_\varphi}n_2(t), \tag{17.3}$$

где $\Delta_c = \dfrac{\beta}{2\sqrt{\varepsilon}}$ — ширина полосы синхронизации в отсутствие шума, а $B_\varphi = \dfrac{D}{8\omega_1^2\varepsilon}$ — интенсивность «фазового шума». Уравнение (17.3) описывает диффузионный процесс, который можно представлять как броуновское движение «частицы» с координатой φ в одномерном наклоненном периодическом потенциале $U(\varphi) = -\Delta \times \varphi + \Delta_c \sin\varphi$ (рис. 17.1). При отсутствии шума в случае $\Delta < \Delta_c$ минимумы потенциала $\varphi_k^{\min} = -\arccos(\Delta/\Delta_c) + 2\pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ соответствуют синхронизации, так как мгновенная разность фаз автоколебаний и внешней силы остается постоянной во времени. Наличие шума приводит к диффузии разности фаз в потенциале $U(\varphi)$: величина $\varphi(t)$ флуктуирует вблизи минимумов потенциала $\varphi_k^{\min}$, время от времени совершая случайные скачки, соответствующие переходу «частицы» из одной потенциальной ямы в другую.

На рис. 17.2 показаны реализации разности фаз для различных значений интенсивности шума и, соответственно, различных B_φ, полученные в результате численного интегрирования стохастического дифференциального уравнения (17.3). При малых интенсивностях шума ($B_\varphi = 0.02$) мгновенная разность фаз в течение длительного времени остается ограниченной в пределах $\varphi_k^{\min} \pm \pi$, что соответствует захвату фазы. Увеличение интенсивности шума приводит к уменьшению длительности времен пребывания φ в одной из потенциальных ям, и становятся видны перескоки мгновенной разности фаз между различными метастабильными состояниями ($B_\varphi = 0.05$). Участки приблизительного постоянства мгновенной разности фаз еще достаточно хорошо заметны, однако среднее значение φ возрастает во времени. Чем больше наклон потенциального профиля (расстройка), чем мельче ямы (меньше амплитуда синхронизирующего сигнала) и чем больше интенсивность шума, тем меньше суммарное время, в течение которого фазы генератора и воздействия захвачены. Сильный шум приводит к быстрому неограниченному росту абсолютной величины разности фаз (см. зависимость $\varphi(t)$ для $B_\varphi = 0.1$) и существенному изменению средней частоты колебаний.

Пусть значения параметров соответствуют области фазового захвата в отсутствие шума. Пренебрежем изменениями переменной $\varphi(t)$ в пределах одной потенциальной ямы и будем учитывать только приращения $\pm 2\pi$, возникающие в результате скачков из одной потенциальной ямы в другую. Скачки происходят в случайные моменты времени и их можно считать статистически независимыми. Таким образом, поведение разности фаз подобно случайным блужданиям. Спустя интервал времени $t - t_0$, значительно превосходящий среднее время между скачками, значение $\varphi(t)$ складывается из большого числа независимых случайных приращений. Вследствие центральной предельной теоремы распределение $\varphi(t)$ становится гауссовым, причем дисперсия распределения растет по линейному закону: $\sigma_\varphi^2(t) = 2B_{\text{эф}} \cdot (t - t_0)$. Величина коэффициента эффективной диффузии $B_{\text{эф}}$ про-

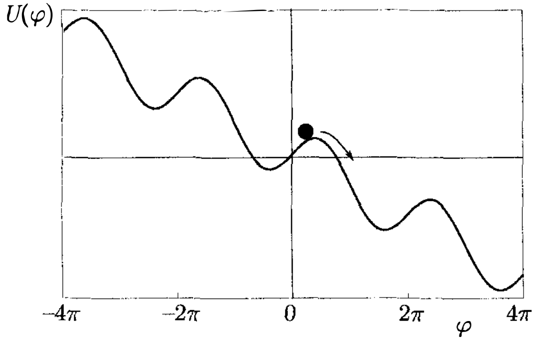


Рис. 17.1. Профиль потенциала $U(\varphi)$ при $\Delta \neq 0$

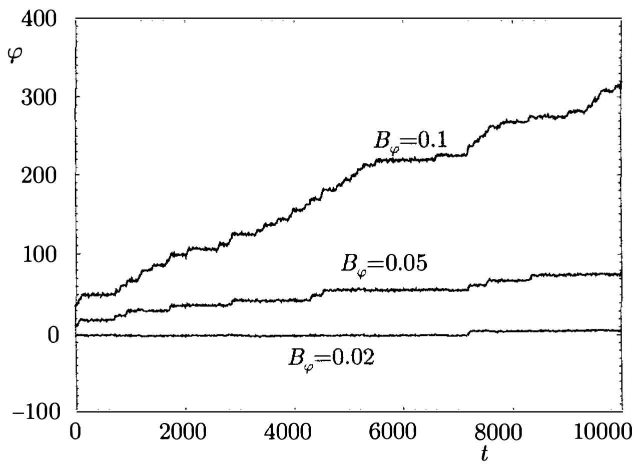


Рис. 17.2. Зависимость мгновенной разности фаз от времени для нескольких значений интенсивности шума. Другие параметры — $\Delta = 0.06$ и $\Delta_c = 0.15$

порциональна вероятности скачка в единицу времени. Последняя может быть найдена из решения задачи о времени первого достижения границы (т. н. задача Крамерса). В соответствии с результатами Р. Л. Стратоновича, для коэффициента эффективной диффузии разности фаз можно получить следующее приближенное аналитическое выражение:

$$B_{\text{эф}} = \pi\sqrt{\Delta_c^2 - \Delta^2}\left(1 + \exp\left(-\frac{2\pi\Delta}{B_\varphi}\right)\right)\exp\left(-\frac{U_0}{B_\varphi}\right), \tag{17.4}$$

где $U_0 = 2\left(\sqrt{\Delta_c^2 - \Delta^2} - \Delta \cdot \arccos\dfrac{\Delta}{\Delta_c}\right)$ — глубина потенциальных ям. Из (17.4) следует, что эффективная диффузия разности фаз быстро растет с ростом интенсивности шума, характеризующейся коэффициентом B_φ, а также с увеличением расстройки Δ. Необходимо отметить, что выражение (17.4) перестает быть справедливым при $\Delta \to \Delta_c$ и вне области синхронизации. По этой причине оно «не работает» и при близких к нулю значениях Δ_c, для которых ширина области синхронизации (без шума) очень мала.

При воздействии на генератор гауссова шума сбои фазы неизбежны для любых значений расстройки и амплитуды синхронизирующего воздействия, т. е. синхронизация не может быть строгой. В этом случае принято говорить об эффективной синхронизации, проявляющейся в захвате фазы на достаточно длительных интервалах времени. Коэффициент $B_{\text{эф}}$ характеризует среднее число фазовых сбоев в единицу времени, а значит, может служить критерием эффективной синхронизации.

Поскольку полная фаза автоколебаний есть $\Phi(t) = \omega_1 t + \varphi(t)$, где ω_1 — детерминированная константа, то процессы $\Phi(t)$ и $\varphi(t)$ характеризуются одним и тем же коэффициентом эффективной диффузии. Таким образом, $B_{\text{эф}}$ определяет полуширину непрерывной компоненты спектра колебаний $X(t)$, которая при небольших расстройках (вдали от границы синхронизации) имеет форму лоренциана.

Уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова (ФПК), соответствующее стохастическому дифференциальному уравнению (17.3), имеет вид

$$\frac{\partial p_\varphi(\varphi,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[(\Delta - \Delta_c\cos\varphi)\,p_\varphi(\varphi,t) - B_\varphi\frac{\partial p_\varphi(\varphi,t)}{\partial\varphi}\right]. \qquad (17.5)$$

Значения фазовой переменной φ при любых Δ и Δ_c неограниченно растут по абсолютной величине, поэтому случайный процесс, описываемый уравнением (17.5), является нестационарным. Однако, поскольку коэффициенты уравнения ФПК — периодические по φ, то можно рассматривать приведенную фазу ϕ, ограниченную в интервале $[-\pi,\pi]$: $\phi(t) = \varphi(t) - 2\pi n$, где $n = Int\left[(\varphi(t)+\pi)/2\pi\right]$. Плотность вероятности приведенной фазы ϕ выражается как

$$p_\phi(\phi,t) = \sum_n p_\varphi(\varphi,t). \qquad (17.6)$$

Уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова для $p_\phi(\phi,t)$ имеет тот же самый вид, что и (17.5), но теперь существует стационарное решение. Стационарную плотность вероятности $p_\phi^{\text{ст}}(\phi)$ можно найти с учетом периодичности

$p^{\text{ст}}_{\phi}(\phi + 2\pi) = p^{\text{ст}}_{\phi}(\phi)$ и условия нормировки $\int\limits_{-\pi}^{\pi} p^{\text{ст}}_{\phi}(\phi)d\phi = 1$:

$$\begin{aligned} p^{\text{ст}}_{\phi}(\phi) &= C \exp\left(\frac{\Delta \cdot \phi - \Delta_{\text{c}} \sin\phi}{B_{\varphi}}\right) \int\limits_{\phi}^{\phi+2\pi} \exp\left(-\frac{\Delta \cdot \psi - \Delta_c \sin\psi}{B_{\varphi}}\right) d\psi, \\ -\pi \leqslant & \ \phi \ \leqslant \pi, \end{aligned} \tag{17.7}$$

где C — нормировочная константа. В частном случае, когда $\Delta = 0$, т.е. когда собственная частота осциллятора точно соответствует частоте возбуждения, стационарная плотность вероятности приведенной разности фаз имеет простой вид:

$$p^{\text{ст}}_{\phi}(\phi) = \frac{1}{2\pi I_0(\Delta_c/B_{\varphi})} \exp\left(\frac{\Delta_c}{B_{\varphi}} \cos(\phi + \pi/2)\right), \quad -\pi \leqslant \phi \leqslant \pi, \tag{17.8}$$

где $I_0(z)$ — модифицированная функция Бесселя. Для большой интенсивности шума $I_0(\Delta_c/B_{\varphi}) \approx 1$ и $\exp\left[(\Delta_c/B_{\varphi})\cos(\phi + \pi/2))\right] \approx 1$; таким образом, стационарная плотность вероятности с ростом интенсивности шума стремится к однородной, $p^{\text{ст}}_{\phi}(\phi) = 1/2\pi$. Эта ситуация соответствует отсутствию синхронизации. В противоположном случае очень слабого шума отклонения фазы ϕ от невозмущенного состояния устойчивого равновесия $\phi_0 = -\pi/2$ будут малыми и можно положить $\cos(\phi + \pi/2) \approx 1 - (\phi + \pi/2)^2/2$, $I_0(\Delta_c/B_{\varphi}) \approx \exp(\Delta_c/B_{\varphi})/\sqrt{2\pi\Delta_c/B_{\varphi}}$. Получаем, что стационарная плотность вероятности имеет гауссову форму:

$$p^{\text{ст}}_{\phi}(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi B_{\varphi}/\Delta_c}} \exp\left(\frac{-(\phi + \pi/2)^2}{2B_{\varphi}/\Delta_c}\right) \tag{17.9}$$

с максимумом в точке ϕ_0. Хорошо заметный максимум гауссова распределения разности фаз свидетельствует о захвате фазы. В пределе $B_{\varphi} \to 0$ плотность вероятности становится δ-функцией, т.е., $\lim_{B_{\varphi}\to 0} p^{\text{ст}}_{\phi}(\phi) = \delta(\phi + \pi/2)$. При небольшой, но конечной интенсивности шума распределение $p^{\text{ст}}_{\phi}(\phi)$ отклоняется от гауссова, но имеет при этом хорошо заметный максимум.

Введение отличной от нуля расстройки приводит к изменению координаты равновесия ϕ_0 и соответствующему смещению максимума распределения $p_\phi^{\text{ст}}(\phi)$. Дисперсия распределения растет с ростом расстройки. Примеры распределений ϕ, численно полученных для модели (17.3), приведены на рис. 17.3. При $\Delta = \pm\Delta_c$ в системе (17.3) без шума устойчивое и неустойчивое состояния равновесия сливаются и исчезают, что соответствует границе фазового захвата. Однако в присутствии шума пересечение границы $\Delta = \pm\Delta_c$ не приводит к изменению характера распределения переменной ϕ (рис. 17.3). Причина этого ясна. Если $|\Delta| < \Delta_c$, то случайные толчки все равно выводят систему из состояния равновесия ϕ_0, приводя к распределению $p_\phi^{\text{ст}}(\phi)$ конечной ширины с максимумом в точке ϕ_0. Если $|\Delta| > \Delta_c$, то точки ϕ_0 в системе без шума не существует. Однако поскольку в окрестности исчезнувшей точки равновесия скорость $\dot{\phi}$ мала, то в течение длительных промежутков времени значения ϕ близки к ϕ_0. На графике зависимости $\varphi(t)$ этому соответствуют почти горизонтальные участки. Соответственно, у распределения $p_\phi^{\text{ст}}(\phi)$ сохраняется максимум в точке, близкой к исчезнувшей точке равновесия. При дальнейшем увеличении расстройки стационарное распределение постепенно приближается к равномерному. Таким образом, можно сделать вывод об отсутствии бифуркационного перехода, связанного с качественным изменением стационарного распределения разности фаз и определяющего границы фазовой синхронизации генератора с гауссовым шумом.

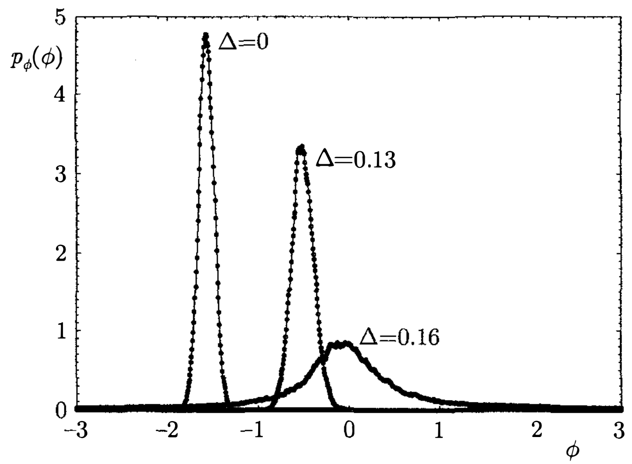


Рис. 17.3. Распределения ограниченной разности фаз $\phi \in [-\pi, \pi]$, численно полученные для модели (17.3) при $B_\varphi = 0.001$, $\Delta_c = 0.15$ и различных значениях расстройки

Зная стационарную плотность вероятности $p^{\text{ст}}_{\phi}(\phi)$, можно найти среднюю разностную частоту колебаний Ω:

$$\Omega = \omega_c - \omega_1 = \langle\dot{\phi}\rangle = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(\Delta - \Delta_c \cos\phi\right) p^{\text{ст}}_{\phi}(\phi) d\phi, \tag{17.10}$$

где ω_c — средняя частота автоколебаний в присутствии воздействия. В области синхронизации в системе с шумом величина Ω отлична от нуля и представляет собой средний сдвиг частоты синхронных колебаний в сторону собственной частоты автогенератора, вызванный флуктуациями фазы. Графики зависимости Ω от расстройки Δ, рассчитанные для модели (17.3), приведены на рис. 17.4. Величина Ω плавно меняется с изменением расстройки, обращаясь в ноль только в точке $\Delta = 0$. Полученные в присутствии шума кривые располагаются между кривой, соответствующей системе без шума, и прямой $\Omega = \Delta$, отражающей полное отсутствие синхронизации (штрих-пунктир). Таким образом, наличие случайных гауссовых возмущений приводит к тому, что средняя частота автоколебаний не совпадает с частотой воздействия, а находится между частотой воздействия и частотой невозмущенных автоколебаний. Однако, если интенсивность шума достаточно мала, зависимость $\Omega(\Delta)$ имеет характерную для синхронизации почти горизонтальную «полочку» (см. рис. 17.4, $B_{\phi} = 0.01$). С ростом интенсивности шума такая «полочка» постепенно исчезает.

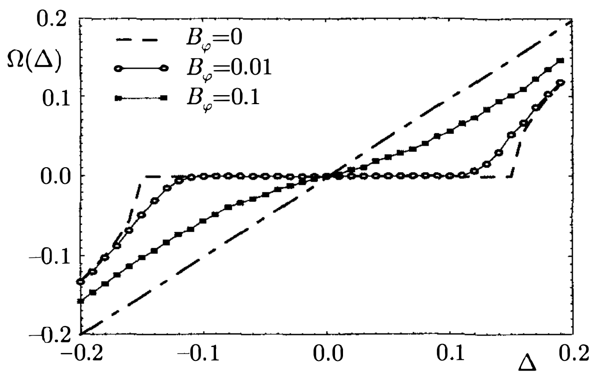


Рис. 17.4. Зависимости средней разностной частоты Ω от параметра расстройки в модели (17.3), полученные при $\Delta_c = 0.15$ для двух различных значений интенсивности шума и в отсутствии шума. Штрих-пунктиром нанесена прямая $\Omega = \Delta$

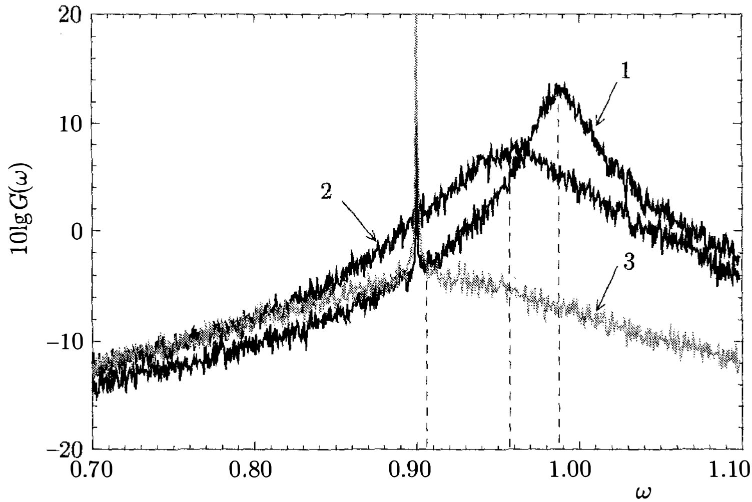


Рис. 17.5. Спектры колебаний $X(t) = \cos(\omega_1 t + \varphi(t))$, где $\varphi(t)$ задается фазовым уравнением (17.3) при фиксированном значении расстройки $\Delta = 0.1$ и различных значениях параметра Δ_c: 0.05 (кривая 1); 0.1 (кривая 2); 0.15 (кривая 3). Интенсивность шума $B_\varphi = 0.01$, частота воздействия $\omega_1 = 0.9$

При нулевой расстройке средняя частота автоколебаний совпадает с частотой воздействия, но это не означает, что имеет место эффективная синхронизация в смысле захвата фазы на длительных интервалах времени. О захвате фазы можно говорить, если коэффициент эффективной диффузии разности фаз принимает достаточно малые значения. Как следует из (17.4), при $\Delta = 0$ коэффициент $B_{\text{эф}}$ убывает с ростом амплитуды воздействия (параметра Δ_c в уравнении (17.3)) и любое его заданное малое значение может быть получено только при определенном значении Δ_c. Иначе говоря, существует амплитудный порог вынужденной синхронизации в системе с шумом.

Наконец, рассмотрим как эволюционирует спектр мощности синхронизируемых автоколебаний в присутствии шума, используя для этого фазовую модель (17.3). Зафиксируем расстройку Δ и интенсивность шума и проследим эволюцию спектральной плотности колебаний $X(t) = \cos(\omega_1 t + \varphi(t))$ при увеличении Δ_c (т. е. амплитуды воздействия). Результаты расчетов приведены на рис. 17.5. Для удобства сравнения спектры не нормированы. Пунктирными линиями отмечены спектральные максимумы на частоте автоколебаний ω_c. При малом значении Δ_c в спектре (кривая 1) кроме острого пика на частоте воздействия ω_1 (теоретически — это должна быть δ-функция) хорошо видна спектральная линия с максимумом на некоторой частоте ω_c, соответствующая автоколебаниям. Расстояние между спектральными максимумами равно Ω. С ростом Δ_c спектральная линия автоколебаний смещается в сторону δ-пика и при этом уширяется (кривая 2). Образуется широкий пьедестал спектра с максимумом, смещенным на величину Ω относительно частоты воздействия ω_1. Смещение может быть очень мало, но всегда отлично от нуля, если $\Delta \neq 0$ и значение Δ_c конечно (кривая 3).

17.3. Взаимная синхронизация квазигармонических автогенераторов в присутствии шума

Рассмотрим взаимную синхронизацию двух генераторов, содержащих источники шума. Пусть исходная модель имеет вид:

$$\begin{aligned}\ddot{X}_1 + \omega_1^2 X_1 &= (\varepsilon_1 - X_1^2)\dot{X}_1 + \gamma_1(\dot{X}_2 - \dot{X}_1) + \sqrt{2D_1}n_1(t),\\ \ddot{X}_2 + \omega_2^2 X_2 &= (\varepsilon_2 - X_2^2)\dot{X}_2 + \gamma_2(\dot{X}_1 - \dot{X}_2) + \sqrt{2D_2}n_2(t),\end{aligned} \tag{17.11}$$

где $n_1(t)$ и $n_2(t)$ — независимые источники стандартного гауссова белого шума, D_1 и D_2 — постоянные, задающие интенсивность шума, γ_1 и γ_2 — коэффициенты связи, ω_1 и ω_2 — параметры, управляющие собственными частотами генераторов. Переходя к укороченным стохастическим уравнениям и пренебрегая амплитудными возмущениями, получаем следующую систему стохастических уравнений, описывающих динамику фаз парциальных генераторов

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}_1 &= \Delta_{c1}\sin(\varphi_2 - \varphi_1) + \sqrt{2B_{\varphi 1}}n_{12}(t),\\ \dot{\varphi}_2 &= \Delta - \Delta_{c2}\sin(\varphi_2 - \varphi_1) + \sqrt{2B_{\varphi 2}}n_{22}(t).\end{aligned} \tag{17.12}$$

Здесь переменные $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ представляют собой случайные компоненты полных фаз первого и второго генераторов соответственно, а $n_{12}(t)$ и $n_{22}(t)$ — независимые источники стандартного гауссова белого шума ($\langle n_{12}(t)\rangle \equiv 0$, $\langle n_{22}(t)\rangle \equiv 0$, $\langle n_{12}(t)n_{22}(t+\tau)\rangle = \delta(\tau)$). Параметры модели (17.12) связаны с параметрами исходной модели (17.11) следующими соотношениями: $\Delta = \dfrac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2\omega_1} \approx \omega_2 - \omega_1$; $\Delta_{c1} = \dfrac{\gamma_1}{2}\sqrt{\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$; $\Delta_{c2} = \dfrac{\gamma_2}{2}\sqrt{\dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}$; $B_{\varphi 1} = \dfrac{D_1}{8\varepsilon_1\omega_1^2}$; $B_{\varphi 2} = \dfrac{D_2}{8\varepsilon_2\omega_1^2}$. Величина Δ представляет собой частотную расстройку невзаимодействующих генераторов, Δ_{c1} и Δ_{c2} определяют, соответственно, влияние второго генератора на первый и первого — на второй, а $B_{\varphi 1}$ и $B_{\varphi 2}$ задают интенсивности фазовых флуктуаций в генераторах при отсутствии связи и, таким образом, характеризуют ширину спектров автоколебаний.

Из уравнений (17.12) следует уравнение для мгновенной разности фаз генераторов $\varphi(t) = \varphi_2(t) - \varphi_1(t)$:

$$\dot{\varphi} = \Delta - \Delta_c \sin\varphi + \sqrt{2B_\varphi}n(t), \tag{17.13}$$

где $\Delta_c = \Delta_{c1} + \Delta_{c2}$ — параметр, характеризующий глубину связи, а $\sqrt{2B_\varphi}n(t)$ — гауссов белый шум с интенсивностью, складывающейся из интенсивностей источников шума каждого из генераторов: $B_\varphi = B_{\varphi 1} + B_{\varphi 2}$ (в силу статистической независимости последних). Уравнение (17.13) аналогично уравнению (17.3), исследованному в предыдущем разделе. Замена косинуса на синус влияет только на постоянную компоненту переменной φ и, соответственно, на координату максимума плотности вероятности. Для модели (17.13) при $\Delta = 0$ максимум распределения ϕ находится в нуле. В общем случае постоянная компонента разности фаз определяется типом связи парциальных генераторов в исходной модели (17.11). Таким образом, в случае взаимодействующих зашумленных генераторов, как и в случае периодического воздействия на зашумленный генератор, имеется конечная область значений расстройки, в которой наблюдается эффективная синхронизация, состоящая в захвате фаз на достаточно длительных интервалах времени. При этом разностная частота генераторов $\Omega = \langle\dot{\varphi}_2(t)\rangle - \langle\dot{\varphi}_1(t)\rangle$ оказывается близка к нулю, хотя строгое равенство $\Omega = 0$ имеет место только при нулевой расстройке. Эффект синхронизации зависит от глубины связи Δ_c и суммарной интенсивности шума обоих генераторов. При слабой связи и большом шуме эффективная синхронизация не наблюдается даже в случае $\Delta = 0$.

Рассмотрим, какова будет ширина спектральной линии синхронизованных автоколебаний. Приближенное аналитическое решение данной задачи можно найти в книге А. Н. Малахова. Здесь мы ограничимся результатами, полученными численно для модели (17.12). Колебания автогенераторов будем задавать в виде $X_{1,2}(t) = \cos(\omega_1 t + \varphi_{1,2}(t))$, пренебрегая амплитудами, значения которых полагаем постоянными. Пусть $\Delta = 0$ (расстройка отсутствует). Спектры колебаний имеют форму лоренцианов с максимумами на одной и той же частоте $\omega_0 = 1$. Полуширина спектра каждого из генераторов равна соответствующему коэффициенту эффективной диффузии фазы: $B_{\text{эф}1}$ или $B_{\text{эф}2}$. При отсутствии связи ($\Delta_{c1} = \Delta_{c2} = 0$) имеем: $B_{\text{эф}1} = B_{\varphi 1}$;

$B_{эф2} = B_{\varphi 2}$. Выберем $B_{\varphi 1} < B_{\varphi 2}$, т. е. спектр первого генератора у́же, чем спектр второго.

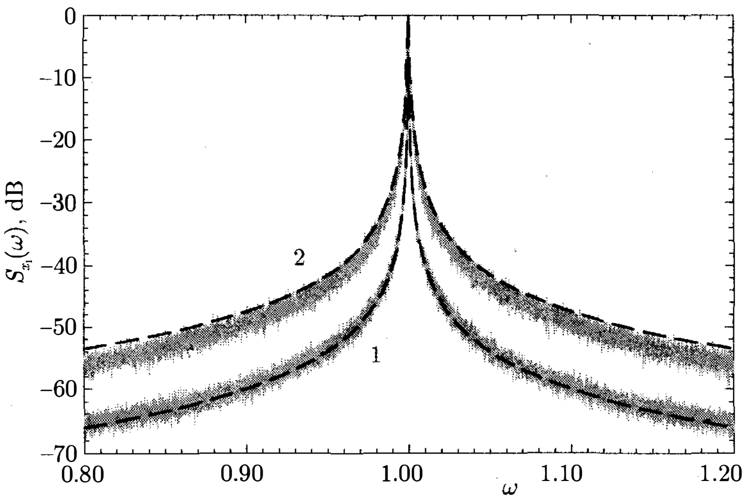


Рис. 17.6. Нормированные спектры мощности колебаний $X_1(t) = \cos(\omega_1 t + \varphi_1(t))$, при использовании модели (17.12), для двух значений параметра Δ_{c1}: 0.02 (кривая 1) и 0.2 (кривая 2). Значения других параметров: $B_{\varphi_1} = 0.0001$; $B_{\varphi_2} = 0.001$; $\Delta = 0$; $\Delta_{c2} = 0.1$; $\omega_1 = 1$

На рис. 17.6 приведены спектры колебаний первого генератора для двух значений Δ_{c1} при фиксированном Δ_{c2}. Пунктирными линиями нанесены соответствующие аппроксимации спектра в форме лоренциана с полушириной, равной численно найденному значению коэффициента эффективной диффузии фазы $B_{эф1}$. Оба случая соответствуют эффективной синхронизации, когда значения $B_{эф1}$ и $B_{эф2}$ близки между собой. Спектр второго генератора практически не отличается от спектра первого генератора и на рисунке не изображен.

Рис. 17.7 иллюстрирует зависимости парциальных коэффициентов $B_{эф1}$ и $B_{эф2}$ от параметра связи Δ_{c1}.

Результаты, приведенные на рис. 17.6 и рис. 17.7, свидетельствуют, что спектры синхронных колебаний будут уже, если генератор, оказывающий большее воздействие, (синхронизующий) является «менее зашумленным», и наоборот, спектры шире, если синхронизующий генератор «шумит сильнее».

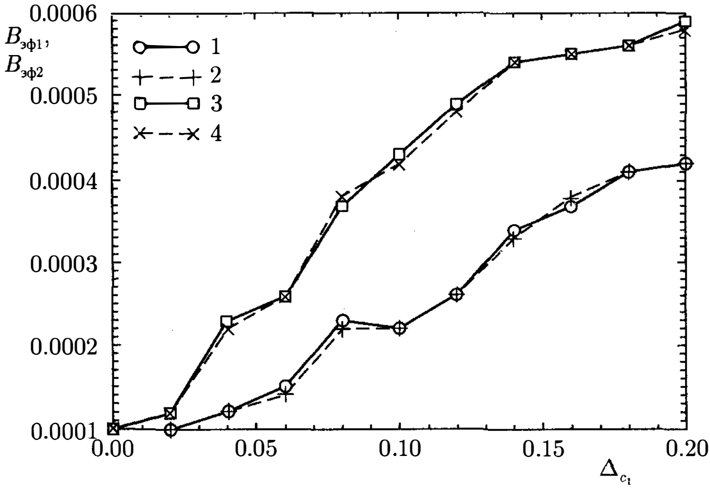


Рис. 17.7. Зависимости парциальных коэффициентов $B_{эф1}$ и $B_{эф2}$ от параметра связи Δ_{c1}: при $\Delta_{c2} = 0.1$ (кривые 1 и 2) и при $\Delta_{c2} = 0.05$ (кривые 3 и 4). Интенсивности источников шума задавались параметрами $B_{\varphi_1} = 0.0001$ и $B_{\varphi_2} = 0.001$

17.4. Синхронизация хаотических автоколебаний в присутствии шума

Тот факт, что частотно-фазовая синхронизация хаоса наблюдается в эксперименте (см. лекцию 16), означает грубость данного явления по отношению к слабому шумовому воздействию (поскольку в эксперименте всегда присутствует шум). При наличии шума синхронизация хаоса не будет строгой. Так же как и в задаче о синхронизации квазигармонических колебаний в присутствии шума, захват фазы на сколь угодно большом интервале времени становится невозможным. Однако если интенсивность шума мала, то условие ограниченности мгновенной разности фаз в окрестности некоторого постоянного значения K может выполняться достаточно долго. В этом случае возможно говорить об эффективной синхронизации хаотических автоколебаний.

С целью анализа влияния шума на синхронизацию спирального хаоса была численно исследована система Рёсслера с внешним гармоническим воздействием, содержащая источник аддитивного белого гауссова шума:

$$\begin{gathered} \dot{X} = -Y - Z + b\sin(\omega_1 t) + \sqrt{2D}\xi(t), \\ \dot{Y} = X + \alpha Y, \quad \dot{Z} = \beta + Z(X - \mu), \end{gathered} \tag{17.14}$$

где $\xi(t)$ – источник гауссова шума, причем: $\langle\xi(t)\rangle \equiv 0$; $\langle\xi(t)\xi(t+\tau)\rangle = \delta(\tau)$, $\delta(\ldots)$ — функция Дирака. Постоянная D задает интенсивность шума.

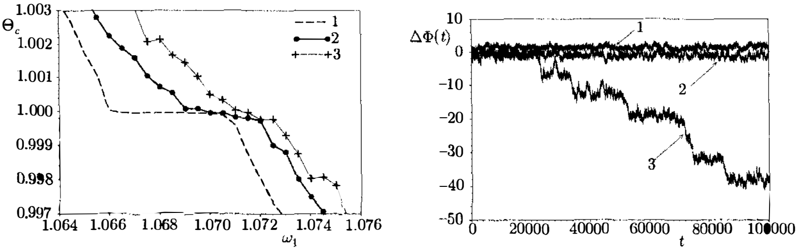
На рис. 17.8, *а* представлены зависимости отношения частот Θ_c от частоты воздействия ω_1, полученные для двух различных значений интенсивности шума. Пунктиром изображена кривая, полученная в отсутствие шума (кривая 1). При воздействии шума с интенсивностью $D = 0.01$ еще сохраняется область значений параметра ω_1, в пределах которой Θ_c близко к единице (кривая 2). В этом случае допустимо говорить о существовании области эффективной синхронизации спирального хаоса. Можно выделить два эффекта, вызванные шумовым воздействием: область синхронизации возмущенной системы слегка сдвигается вправо, что может быть связано с изменением характеристик автоколебательного режима под действием шума; ширина области синхронизации существенно уменьшается. При увеличении интенсивности шума до значения $D = 0.02$ область эффективной синхронизации практически исчезает (кривая 3). Зависимости разности фаз $\Delta\Phi$ от времени при $D = 0$, $D = 0.01$ и $D = 0.02$ представлены на рис. 17.8, *б*. Зависимость $\Delta\Phi$ от времени, соответствующей отсутствию шума, отвечает прямая линия $\Delta\Phi = 0$.

17.5. Синхронизация автоколебаний узкополосным шумом

Пусть на нешумящий генератор подается воздействие, представляющее собой узкополосный шум. В этом случае, как и при периодической синхронизации шумящего генератора, можно наблюдать нестрогий захват фазы. Эффект синхронизации зависит от свойств воздействующего случайного сигнала, причем важны не только его спектральные характеристики, но и вероятностное распределение.

Узкополосный случайный сигнал $\xi(t)$ может представлять собой колебания периодического генератора, содержащего внутренний источник шума. В этом случае вероятностное распределение случайной переменной ξ не является гауссовым. К такой ситуации мы приходим, если в системе (17.11) положим $\gamma_1 = 0$ и $D_2 = 0$, в то время как $\gamma_2 \neq 0$ и $D_1 \neq 0$. Первый, шумящий, генератор синхронизует второй генератор, который является нешумящим. Если интенсивность шума D_1 мала, то флуктуациями амплитуды можно пренебречь и сигнал $\xi(t) = \dot{X}_1(t)$ представляет собой узкополосный случайный процесс, спектр которого имеет форму лоренциана с полушириной $B_{\varphi 1} = D_1/8\varepsilon_1$ и максимумом на собственной частоте генерации (см. лекцию 16)[1]. В фазовом приближении разность фаз генераторов

[1]Спектры процессов $X_1(t)$ и $\dot{X}_1(t)$ связаны как $G_{\dot{X}}(\omega) = \omega^2 G_X(\omega)$, а распределения обоих процессов не являются гауссовыми.



а *б*

Рис. 17.8. Влияние гауссова белого шума на синхронизацию спирального хаоса в системе (17.14) при $\alpha = \beta = 0.2, \mu = 6.5, b = 0.03$: *а* — число вращения $\Theta_c = \omega_c/\omega_1$ в зависимости от частоты воздействия ω_1; *б* — поведение разности фаз $\Delta\Phi$ во времени. Кривые 1, 2 и 3 соответствуют значениям $D = 0$, $D = 0.01$ и $D = 0.02$. Расчет разности фаз проводился при значении ω_1, обеспечивающем оптимальные условия синхронизации (для $D = 0; 0.01; 0.02$ фиксировались значения $\omega_1 = 1.0683; 1.0705; 1.0720$ соответственно). Время системы (17.14) является безразмерным

описывается СДУ (17.13). Надо только положить $\Delta_c = \Delta_{c2}$ и $B_\varphi = B_{\varphi 1}$. С точностью до постоянной компоненты величины φ мы приходим к той же модели, которая описывает синхронизацию шумящего генератора гармоническим сигналом. Таким образом, в рамках фазового приближения не важно, какой из двух генераторов содержит источник шума — синхронизируемый или синхронизующий. Они также могут быть оба шумящими. Модель, задающая поведение разности фаз генераторов, в любом случае будет одна и та же. Однако спектры синхронизуемых колебаний будут для указанных случаев различаться. Спектры, полученные численно в случае синхронизации нешумящего генератора сигналом генератора с шумом, представлены на рис. 17.9. Они рассчитывались для колебаний $X_2(t) = \cos(\omega_1 t + \varphi_2(t))$, где $\varphi_2(t)$ задается уравнениями (17.12) с параметрами, соответствующими однонаправленному воздействию шумящего первого генератора на нешумящий второй генератор: $\Delta_{c1} = 0, B_{\varphi 2} = 0$. Представленные спектры соответствуют фиксированной расстройке и различным значениям параметра связи. Для удобства сравнения спектры не нормированы. Спектральные линии как на частоте воздействия ω_1, так и на собственной частоте ω_c имеют конечную ширину, что не является результатом ограниченной точности вычислений, а соответствует действительности. В остальном эволюция спектра та же, что и при синхронизации шумящего генератора гармоническим сигналом (рис. 17.5): с ростом интенсивности воздействия пик на частоте ω_c заметно смещается в сторону линии воздействия, при этом расширяясь (кривые 2 и 3). При сильном воздействии он становится незаметен, трансформировавшись в широкополосный пьедестал (кривая 3). В условиях эффективной (кривая 3) синхронизации ширина спектра колебаний определяется шириной спектра воздействия. Как видно из рис. 17.9, лоренциан с полушириной $B_{\varphi 1}$, соответствующей полуширине сигнала воздействия, хорошо аппроксимирует спектр синхронных колебаний в окрестности максимума на частоте воздействия (линия 4).

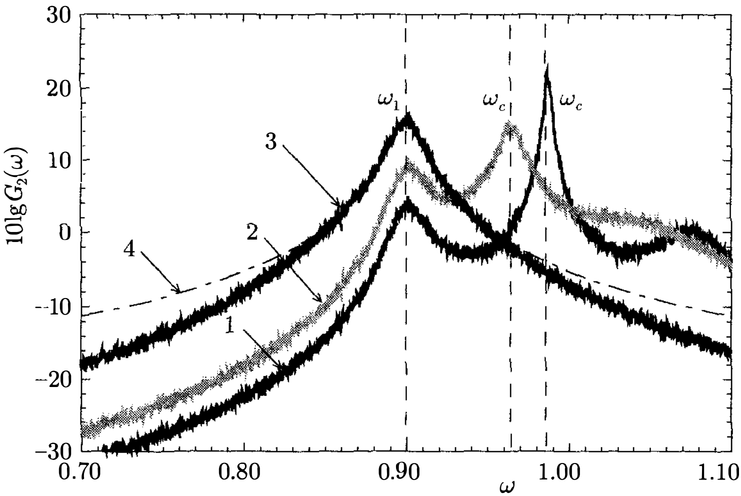


Рис. 17.9. Спектры колебаний $X_2(t) = \cos(\omega_1 t + \varphi_2(t))$ при фиксированной расстройке $\Delta = 0.1$ и для различных значений параметра связи Δ_{c2}: 0.05 (кривая 1); 0.08 (кривая 2); 0.15 (кривая 3). Интенсивность шума синхронизующего генератора $B_{\varphi 1} = 0.01$, частота воздействия $\omega_1 = 0.9$

Узкополосный шум с теми же спектральными характеристиками может быть гауссовым. Такой шум можно получить, пропустив белый шум через узкополосный фильтр (например, через высокодобротный колебательный контур). В этом случае, вне зависимости от интенсивности белого шума, амплитудные флуктуации получаемого сигнала оказываются существенными и чисто фазовая модель синхронизации не применима. Рассмотрим генератор под действием узкополосного гауссова шума $\xi(t)$:

$$\ddot{X} + X = (\varepsilon - X^2)\dot{X} + b\xi(t). \qquad (17.15)$$

Узкополосный стационарный случайный процесс $\xi(t)$ с нулевым средним значением ($\langle\xi(t)\rangle \equiv 0$) можно представить в виде $\xi(t) = U(t)\cos(\omega_1 t + \varphi_1(t))$,

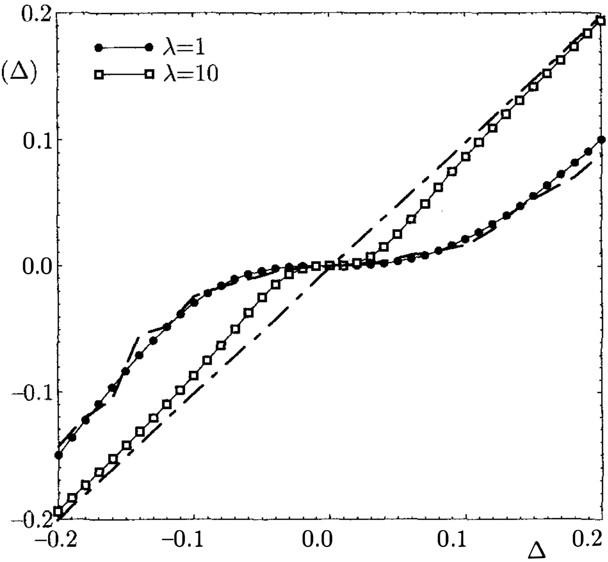


Рис. 17.10. Зависимости Ω от расстройки, полученные в соответствии с (17.17) и (17.18) для $b = 0.1$, $\varepsilon = 0.05$ и двух значений κ. Пунктиром нанесена зависимость, полученная при численном моделировании системы (17.15)–(17.20)

где $\omega_1 = \text{const}$ – частота спектрального максимума, $\langle\varphi_1(t)\rangle = \text{const}$. Случайные функции $U(t)$ и $\varphi_1(t)$ являются «медленными» по сравнению с $\cos(\omega_1 t)$, $\sin(\omega_1 t)$ и называются амплитудой (огибающей) и фазой (точнее, случайной компонентой фазы) процесса $\xi(t)$. Из уравнения (17.15) легко получить следующее приближенное уравнение, описывающее поведение случайной компоненты фазы генератора:

$$\dot{\varphi} = \Delta - \Delta_c U(t)\cos(\varphi - \varphi_1), \tag{17.16}$$

где $\Delta = (1-\omega_1^2)/2\omega_1 \approx 1-\omega_1$ — параметр расстройки, $\Delta_c = b/4\omega_1\sqrt{\varepsilon}$ — параметр, характеризующий степень воздействия. В силу «медленности» функции $U(t)$ можно воспользоваться выражением для частоты биений квазигармонического генератора без шума и, с учетом равенства $\langle\dot{\varphi}_1(t)\rangle = 0$, приближенно представить средний сдвиг частоты автоколебаний в виде

$$\Omega = \left\langle \frac{d(\varphi(t)-\varphi_1(t))}{dt} \right\rangle \approx \Delta \int\limits_0^{U_0} p_U(U)\sqrt{1-\frac{U^2}{U_0^2}}dU, \quad U_0 = \frac{\Delta}{\Delta_c}. \tag{17.17}$$

Усреднение проводится по стационарному распределению $p_U(U)$, которое, в случае гауссова распределения величины ξ, определяется законом Релея:

$$p_U(U) = 2\kappa U \exp(-\kappa U^2), \tag{17.18}$$

где κ — параметр распределения. На рис. 17.10 приведены зависимости Ω от расстройки, полученные в соответствии с (17.17) и (17.18). Для сравнения на том же рисунке приведен аналогичный график, полученный в результате численного моделирования системы (17.15). Полная фаза колебаний определялась по формуле

$$\Phi(t) = \operatorname{arctg}\left(\frac{-\dot{X}(t)}{X(t)}\right) \pm \pi k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{17.19}$$

а процесс $\xi(t)$ задавался уравнением

$$\ddot{\xi} + 2\alpha\dot{\xi} + \omega_1^2\xi = \sqrt{2D}n(t), \tag{17.20}$$

где $n(t)$ — стандартный гауссов белый шум. Параметры уравнений (17.15) и (17.20) выбирались в соответствии с параметрами уравнения (17.16) и параметром распределения амплитуды шума $\kappa = 1$. Полученные данные свидетельствуют, что приближенная формула (17.17) находится в хорошем соответствии с поведением исходной модели.

Спектры колебаний при синхронизации нешумящего генератора гауссовым узкополосным шумом, полученные численно для модели (17.15)–(17.20), приведены на рис. 17.11. Эволюция спектра с ростом интенсивности воздействия существенно отличается от рассмотренного нами выше случая синхронизации узкополосным шумом (рис. 17.9). Теперь с усилением воздействия можно отметить лишь очень незначительное смещение линии автоколебаний (максимум на частоте ω_c) в сторону линии воздействия (максимум на частоте ω_1), т. е. частота почти не захватывается, а механизм синхронизации состоит в увеличении ширины линии автоколебаний, мощность которой распределяется в широком частотном диапазоне.

Синхронизация узкополосным шумом наблюдается не только для квазигармонических генераторов, но и для более сложных автоколебательных систем, например для генераторов динамического хаоса в режиме спирального аттрактора. В качестве примера может служить осциллятор Рёсслера, находящийся под воздействием узкополосного шума

$$\dot{X} = -Y - Z + b\sin(\omega_1 t) + b\nu(t), \quad \dot{Y} = X + \alpha Y, \quad \dot{Z} = \beta + Z(X - \mu), \tag{17.21}$$

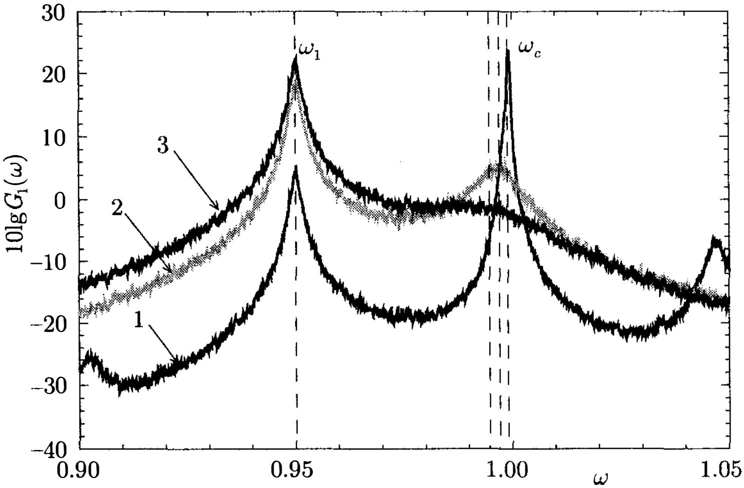


Рис. 17.11. Спектры колебаний $X(t)$ в системе (17.15)–(17.20), полученные при фиксированной расстройке $\Delta = 0.05$ и различных значениях интенсивности узкополосного случайного воздействия b: 0.01 (кривая 1); 0.05 (кривая 2); 0.1 (кривая 3). Другие параметры: $\varepsilon = 0.05$, $\alpha = 0.001$, $D = 0.001$

где $\nu(t) = \dot{\xi}(t)$, $\xi(t)$ задается (17.20). На рис. 17.12 приведена зависимость смещения средней частоты хаотических колебаний от параметра Δ, управляющего частотной расстройкой автоколебаний и узкополосного шумового сигнала. Качественно она аналогична зависимостям, полученным для квазигармонического генератора. Эволюция спектров хаотических автоколебаний при синхронизации узкополосным шумом двух рассмотренных нами типов также качественно повторяет результаты, приведенные на рис. 17.9 и 17.11.

17.6. Заключение

В данной лекции мы рассмотрели влияние шума на эффект синхронизации генераторов как регулярных квазигармонических, так и хаотических автоколебаний. Общим выводом является то, что воздействующий на систему шумовой сигнал препятствует вынужденной и взаимной синхронизации автоколебательных систем. Это относится к случаю произвольного шумового воздействия. Однако, если внешний шум достаточно слабый в сравнении с интенсивностью колебаний незашумленного генератора, можно ввести

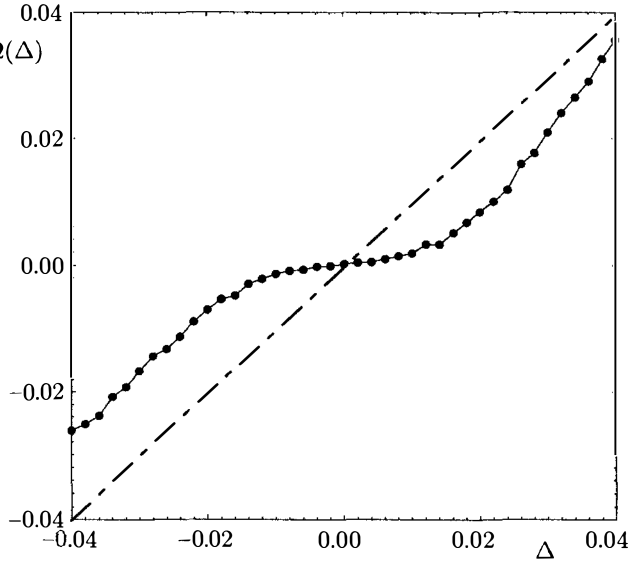


Рис. 17.12. Зависимость смещения средней частоты хаотических колебаний от параметра частотной расстройки при воздействии на осциллятор Рёсслера (17.21) узкополосного шума $\nu(t) = \dot{\xi}(t)$, задаваемого уравнением (17.20). Параметры воздействия: ширина спектра $\Delta\omega_\nu = 0.001$; дисперсия $\sigma_\nu^2 = 1$; интенсивность воздействия $b^2 = 0.02$. Параметры осциллятора Рёсслера: $\alpha = \beta = 0.2$; $\mu = 6.5$

понятие эффективной синхронизации. Эффективная синхронизация не может быть определена строго, так как не характеризуется бифуркационным переходом и не имеет строгого критерия. Границы эффективной синхронизации устанавливаются условно: либо накладывается требование на абсолютную величину смещения частоты Ω, которая не должна отклоняться от нуля более чем на заданную величину; либо требуют, чтобы коэффициент эффективной диффузии разности фаз $B_{\text{эф}}$ не превосходил некоторого достаточно малого значения. Узкополосный (гармонический) шум сам может синхронизовать автогенератор. Синхронизация в этом случае также будет нестрогой.

При исследовании влияния шума на автоколебательные системы мы в большинстве случаев ограничились квазигармоническими режимами генерации, рассмотрели синхронизацию только на основном тоне и в рамках фазового приближения. Однако исследованные нами на простейших моделях эффекты носят более общий характер и полученные результаты качественно справедливы для более сложных типов автоколебаний. Например, описанные в лекции закономерности синхронизации зашумленных автоколебательных систем могут быть применимы к анализу релаксационных и квазипериодических автоколебаний. Эти закономерности имеют место также при синхронизации автоколебаний на гармониках и субгармониках основной частоты. Отметим, что ряд практически важных вопросов в лекции не рассматривался. Например, влияние амплитудных флуктуаций синхронизующего сигнала на эффективную синхронизацию. Это влияние, особенно в случае относительно больших значений амплитуды синхронизирующего воздействия, может быть весьма существенным и требует специальных исследований.

Лекция 18

Стохастический резонанс

18.1. Введение

Понятие «шум» на обыденном уровне обычно воспринимается как «помеха», наличие которой может только ухудшить функционирование любой системы. Хорошо известны классические проблемы радиофизики, связанные с существованием предела чувствительности усилителей и конечностью ширины спектральной линии генераторов, обусловленных воздействием естественных и технических шумов.

Было установлено, что источники шума в нелинейных динамических системах могут индуцировать принципиально новые режимы функционирования, не реализуемые в отсутствие шума, например индуцированные шумом незатухающие колебания. Эти эффекты получили название индуцированных шумом переходов. Многообразие и сложность таких переходов в нелинейных динамических системах вызвали постановку удивительных до недавнего времени вопросов: всегда ли воздействие шума приводит к ухудшению характеристик динамических систем и возможны ли случаи, когда действие шума вызывает увеличение степени упорядоченности движений в системе или улучшение ее основных рабочих характеристик? Исследования последних лет убедительно показали, что в нелинейных системах воздействие шума может индуцировать новые более упорядоченные режимы, приводить к образованию более регулярных временных и пространственных структур, увеличивать степень когерентности, вызывать усиление слабых сигналов, сопровождающееся увеличением отношения сигнал/шум, или индуцировать направленные движения в системах в условиях чрезвычайно слабых внешних воздействий. Другими словами, в нелинейных системах шум может играть конструктивную или полезную роль.

Одним из наиболее ярких и относительно простых примеров указанного типа поведения нелинейных систем является эффект стохастического резонанса (СР). Термин *стохастический резонанс* был введен в 1981–1982 гг. на основе исследований модели бистабильного осциллятора, предложенной для описания периодичности в наступлении ледниковых периодов на Земле. Модель описывала движение частицы в симметричном двухъямном потенциале под действием периодической силы в условиях большого трения. Устойчивые положения частицы соответствовали ледниковому периоду и нормальному климату Земли. Периодическая сила соответствовала колебаниям эксцентриситета орбиты Земли, изменяющим энергетический баланс с периодом в 10^5 лет.

Расчеты показали, что реальная амплитуда периодической силы оказалась мала и не обеспечивала переключений системы из одного состояния в другое. Возможность переключений была достигнута введением дополнительной случайной силы (флуктуации атмосферы). Подобно прыжкам броуновских частиц в двухъямном силовом поле из одного устойчивого состояния в другое, атмосферные флуктуации индуцировали климатические изменения (переходы) от устойчивого холодного периода к теплому и наоборот. Фундаментальным результатом при исследовании данной модели явилось то, что авторам удалось найти последовательность упорядоченных во времени переходов. Климат практически следовал за чрезвычайно малым внешним периодическим возмущением при конечной интенсивности шума в атмосфере.

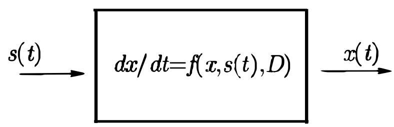


Рис. 18.1. Общая схема стохастического резонатора: нелинейная зашумленная система с временным масштабом, определяемым интенсивностью шума D, под воздействием упорядоченного сигнала $s(t)$. Отклик системы $x(t)$ управляется входным сигналом при оптимально выбранных уровнях шума

Общая схема стохастического резонатора показана на рис. 18.1. Этот эффект определяет группу явлений, при которых упорядоченный отклик нелинейной системы на слабые внешние сигналы заметно усиливается при оптимальной (отличной от нуля) интенсивности шума. Интегральные характеристики процесса, такие как коэффициент усиления, отношение сигнал/шум или значение взаимной корреляции входного и выходного сигналов, при достижении оптимального уровня шума имеют на выходе системы отчетливо выраженный максимум. В то же время энтропия, как мера степени беспорядка, достигает минимума, свидетельствуя о возрастании степени индуцированного шумом порядка.

В настоящее время эффект СР представляет собой хорошо известное поведение нелинейных стохастических систем. Он был обнаружен и исследован во многих бистабильных системах: триггере Шмитта, кольцевом лазере, магнитных системах, пассивных оптических бистабильных системах, системах с электронным парамагнитным резонансом, экспериментах с броуновскими частицами, экспериментах с магнитно-эластичной лентой, туннельном диоде, сверхпроводящих квантовых интерферометрах (SQUID), ферромагнетиках и сегнетоэлектриках. СР наблюдался также в химических системах. Наиболее яркие приложения эффекта СР были продемонстрированы в биологических системах. СР наблюдался на уровне отдельных сенсорных нейронов и даже на уровне ионных каналов. СР был исследован в психофизике человека и поведенческих экспериментах на животных. Эффект СР был реализован в бистабильных и моностабильных осцилляторах, а также в динамике возбудимых сред и нединамических пороговых системах и в хаотических системах.

В настоящей лекции будут рассмотрены бистабильные системы.

18.2. Физические основы эффекта стохастического резонанса

Физическая картина явления СР достаточно наглядна и проста. В отличие от линейной системы, нелинейная система по определению всегда имеет различные частоты или различные временные масштабы. Добавление шума, даже аддитивного, может выделять различные моды с различной вероятностью, что является отличительной особенностью от традиционно изучаемых линейных систем. Таким образом, воздействие и изменение уровня шума может изменить поведение нелинейной системы.

Специфика эффекта СР заключается в том, что один из характерных временных масштабов системы зависит от интенсивности шума. В случае бистабильной передемпфированной системы путем изменения интенсивности шума можно управлять частотой переключений между двумя метастабильными состояниями.

Рассмотрим качественно движение броуновской частицы в системе с симметричным бистабильным потенциалом типа $U(x) = -0.5x^2 + 0.25x^4$ в условиях действия слабого периодического возмущения $A\sin\Omega t$. Движение частицы в потенциальном поле $U(y)$ при наличии трения подчиняется уравнению

$$\ddot{y} + \gamma\dot{y} = -\frac{\partial U(y)}{\partial y}. \qquad (18.1)$$

В условиях большого трения ($\gamma \gg 1$), как показали многочисленные эксперименты, второй производной можно пренебречь и перейти к уравнению первого порядка

$$\dot{y} = \frac{-1}{\gamma}\frac{\partial U(y)}{\partial y} \text{ или } \dot{x} = -\frac{\partial U(x)}{\partial x}. \tag{18.2}$$

В указанном приближении уравнения передемпфированного бистабильного осциллятора в условиях действия шума $\xi(t)$ интенсивности D и периодической внешней силы $A\cos(\Omega t + \phi)$ принимают вид

$$\dot{x} = x - x^3 + A\cos(\Omega t + \phi) + \sqrt{2D}\xi(t). \tag{18.3}$$

Система имеет два временных масштаба. Один обусловлен случайными блужданиями частицы в окрестности одного из состояний равновесия, которые называются внутриямной или локальной динамикой. В случае глубоких потенциальных ям и не слишком большого шума этот временной масштаб не зависит от уровня шума.

Второй масштаб характеризует среднее время перехода через потенциальный барьер (глобальная динамика). В частотной области ему отвечает средняя скорость (или частота) выхода из метастабильного состояния — скорость Крамерса.

Для случая белого шума, параболических потенциальных ям и относительно высоких потенциальных барьеров скорость Крамерса дается законом Аррениуса:

$$r_{\text{K}} = \nu \exp(-\Delta U_0/D).$$

Префактор ν — коэффициент, определяемый кривизной потенциальных ям и барьера. Он также определяет скорость релаксации в линейном режиме в окрестности одного из состояний равновесия. Из этого следует, что время релаксации всегда меньше в сравнении со временем переключений. Разделение двух временных масштабов и, следовательно, нелинейный режим, который строго зависит от уровня шума, достигаются при условии, что высота потенциального барьера ΔU_0 больше интенсивности шума D.

Амплитуда периодического воздействия A предполагается малой настолько, что исключает переходы через барьер в отсутствие шума. Однако малое периодическое воздействие всегда приводит к малой модуляции высоты потенциального барьера ($\Delta U \simeq \Delta U_0 + A\sin\Omega t$) (рис. 18.2), что проявляется вследствие экспоненциальной зависимости нелинейной модуляции скоростей (частот). На рис. 18.3 представлены сигналы на выходе бистабильной системы и спектр мощности отфильтрованного сигнала. Отфильтрованный сигнал получается, если мы пренебрегаем движением частицы внутри одной из потенциальных ям. Полагается, что для частицы в левой яме сигнал характеризуется координатой $x = -1$, а в правой – $x = +1$. Таким образом, в результате переключений мы получаем сигнал в виде случайной последовательности импульсов (телеграфный сигнал). В результате в спектре мощности выходного сигнала на частоте модуляции и ее нечетных гармониках (в случае симметричного потенциала) четко регистрируется δ-пик. Даже при малых амплитудах внешнего воздействия выходной сигнал включает периодическую компоненту на частоте Ω.

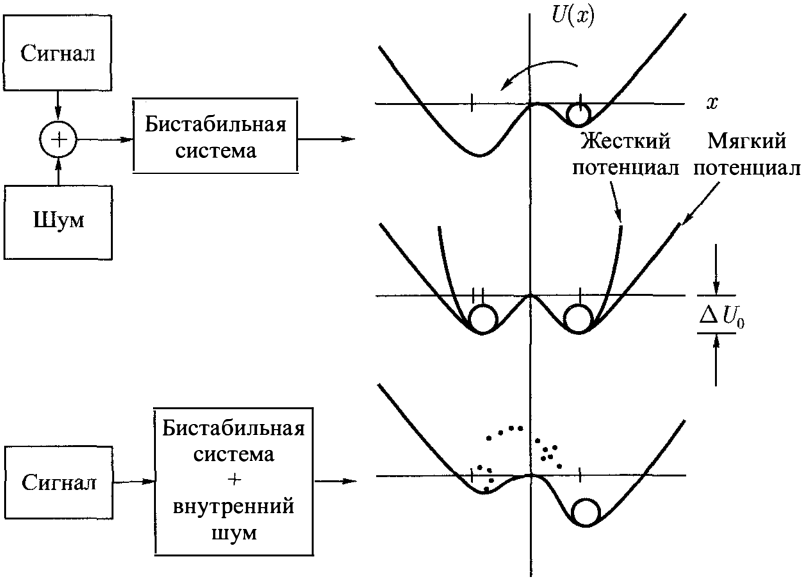


Рис. 18.2. Бистабильный потенциал под действием слабой периодической модуляции. Потенциал может иметь как «жесткую», так и «мягкую» формы. Частица, отмеченная шариком, может преодолеть потенциальный барьер ΔU_0 только при наличии внешнего или внутреннего шума

В общем случае это неудивительно, так как любая динамика, даже линейная, имеет периодический отклик на периодическое воздействие. Однако поведение отклика немонотонно. В нелинейной системе максимальная периодическая компонента наблюдается при конечной оптимальной интенсивности шума.

График зависимости отклика системы от интенсивности шума напоминает резонансную кривую для линейного диссипативного осциллятора. По

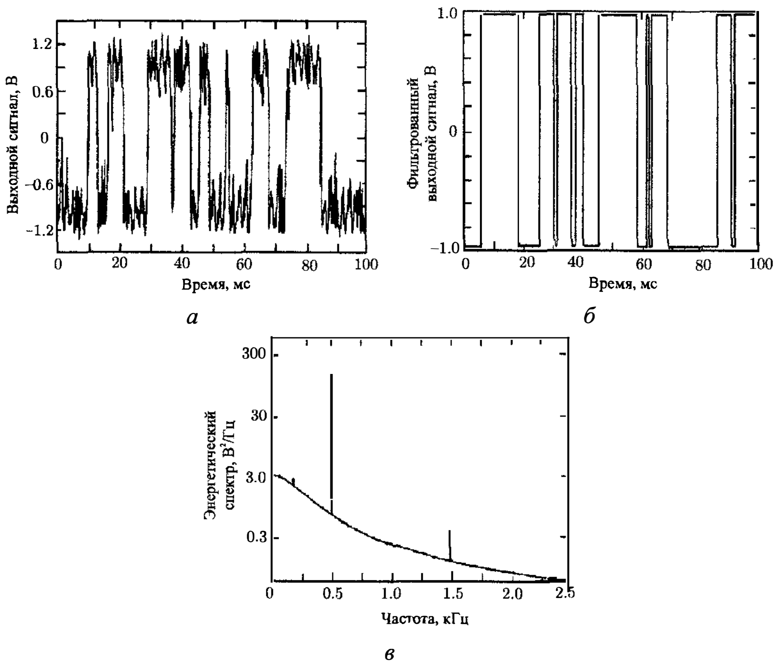


Рис. 18.3. Полный сигнал на выходе бистабильной системы с учетом внутриямной динамики (*а*), сигнал, отфильтрованный методом двух состояний (*б*) и спектр мощности отфильтрованного сигнала (*в*)

этой причине рассматриваемый эффект получил название стохастического резонанса. Действительно, при вариации интенсивности шума меняется средняя частота переключений (частота Крамерса). В результате подбором интенсивности шума можно управлять разностью между частотой воздействия и частотой переключений. При оптимальном уровне шума эти частоты оказываются близкими.

Изменение уровня шума приводит к совпадению временных масштабов на низких частотах, меньших скорости релаксации. Рассмотрим невозмущенный временной масштаб $1/r_K$ как функцию интенсивности шума D. При малой интенсивности шума средние времена выхода достаточно велики и намного превышают период сигнала модуляции. При высоком уровне шума за время одного периода сигнала система с высокой степенью вероятности совершит многократные переключения. Варьируя интенсивность шума, можно обеспечить режим, когда среднее время переходов через барьер будет близко к периоду модулирующего сигнала. Переключения системы будут происходить в среднем с частотой внешней периодической силы. Таким образом, путем изменения уровня шума можно настроить стохастическую бистабильную систему в режим максимального усиления модулирующего сигнала и отношения сигнал/шум.

Это было подтверждено теоретически и экспериментально во многих случаях для достаточно слабых сигналов. Отметим, что в этом приближении собственная динамика системы не зависит от значения амплитуды внешнего воздействия, как и в случае обычного резонанса в линейном осцилляторе.

18.3. Характеристики эффекта стохастического резонанса

Трактовка физического механизма СР и его определение во многом зависят от того, какие количественные характеристики этого явления вычисляются аналитически, моделируются на компьютере или измеряются в физическом эксперименте. В данном разделе мы рассматриваем гармоническое воздействие на зашумленную бистабильную систему. В этом случае в качестве основных характеристик СР используются коэффициент усиления по мощности η, отношение сигнал/шум (SNR) и плотность распределения времен пребывания частицы в одной из потенциальных ям $p(\tau)$. Отметим, что для получения стационарных значений перечисленные величины нужно усреднить по начальной фазе входного гармонического сигнала.

При аналитических расчетах усиление определяется как отношение мощности сигнала на выходе к мощности сигнала на входе:

$$\eta = P_{\mathrm{out}}/P_{\mathrm{in}}, \tag{18.4}$$

где P дается множителями при δ-функциях на частоте сигналов выхода и входа соответственно.

Отношение сигнал/шум (SNR) определяется как отношение спектральных плотностей мощности сигнала и шума на частоте сигнала. При гармоническом сигнале на входе такому определению в эксперименте отвечает отношение высоты спектральной линии сигнала модуляции над шумовым основанием к высоте шумового основания в спектре выходного сигнала. Результаты представляются либо в линейном (в единицах), либо в логарифмическом (децибелы) масштабах.

В результате случайных переключений сигнал на выходе стохастической бистабильной системы (без учета движений внутри потенциальной ямы) представляет собой случайный телеграфный процесс (см. рис. 18.3, *б*).

Время пребывания в одной из потенциальных ям — случайная величина, плотность распределения вероятностей которой $p(\tau)$ в отсутствие модуляции есть экспоненциально спадающая функция. Введение сигнала модуляции приводит к структурированию плотности распределения $p(\tau)$, приобретающей вид последовательности гауссообразных пиков, максимумы которых расположены над значениями времени $\tau = nT_s/2, n = 1, 3, 5, \ldots$, где T_s — период сигнала модуляции. Максимумы $p(\tau)$ экспоненциально спадают с ростом n, и в режиме СР наибольшему максимуму отвечает условие $n = 1$. При этом, естественно, среднее время пребывания $\langle\tau\rangle$ будет наиболее близко к полупериоду сигнала модуляции. Таким образом, описание СР на основе распределения времен пребывания отражает эффект синхронизации переключений системы внешним периодическим воздействием. Так как статистические свойства телеграфного сигнала зависят от интенсивности шума, структурой плотности распределения можно управлять путем вариации шума. Отсюда возникает иной, альтернативный, подход к анализу механизмов эффекта СР, основанный на исследовании статистики времен пребывания.

Характеристики и свойства СР, безусловно, должны зависеть от структуры сигналов, воздействующих на нелинейную систему. Это в одинаковой степени относится как к информационному сигналу, так и к шумовому. Сигнал модуляции может быть гармоническим или многочастотным, а может представлять собой узкополосный случайный процесс или быть чисто шумовым. Шумовой сигнал может по своим статистическим свойствам быть близким к белому шуму, а может иметь конечное время корреляции и ограниченный спектр. В зависимости от свойств сигнала, шума и конкретных свойств нелинейных систем эффект СР будет характеризоваться специфическими свойствами. В то же время, независимо от свойств системы и структуры сигналов, явлению СР присущи общие фундаментальные свойства, проявляющиеся в увеличении степени порядка в выходном сигнале в сравнении с сигналом на входе, которое достигается при некотором оптимальном уровне шума.

18.4. Теория двух состояний

Теория двух состояний, или адиабатическая теория, явилась первым теоретическим описанием эффекта СР. Благодаря своей универсальности, простоте и элегантности она используется во многих исследованиях по СР.

Рассмотрим симметричную бистабильную систему, переменная состояния которой может принимать только два дискретных значения: $\sigma(t) =$

$= \pm x_m$, то есть будем рассматривать отфильтрованный сигнал

$$p(x,t|x_0,t_0) = p(\sigma,t|\sigma_0,t_0)\,\delta(\sigma - x_m) + p(-\sigma,t|\sigma_0,t_0)\,\delta(\sigma + x_m), \quad (18.5)$$

где $p(\sigma,t|\sigma_0,t_0)$ — условные вероятности нахождения системы в одном из состояний σ в момент времени t, удовлетворяющие условиям нормировки.

Обозначив через $W_\sigma(t)$ вероятности переходов из одного состояния в другое в единицу времени, получим управляющее уравнение:

$$\frac{dp(\sigma,t|\sigma_0,t)}{dt} = -W_\sigma(t)\,p(\sigma,t|\sigma_0,t) + W_{-\sigma}(t)\,p(-\sigma,t|\sigma_0,t). \quad (18.6)$$

Используя условия нормировки, это уравнение может быть решено аналитически при заданной начальной плотности.

В предположении достаточно низких частот по сравнению с локальной динамикой вероятности переходов для бистабильной динамики в присутствии периодического воздействия имеют следующий вид:

$$W_\sigma(t) = r_\mathrm{K}\exp\left(-\frac{A\sigma}{D}\cos\Omega t\right). \quad (18.7)$$

В отсутствие сигнала ($A = 0$) плотности вероятностей переходов совпадают со скоростью Крамерса r_K. Для модели передемпфированного бистабильного осциллятора (18.3) скорость Крамерса описывается законом

$$r_\mathrm{K} = \frac{1}{\sqrt{2}\,\pi}\exp\left(-\frac{1}{4D}\right). \quad (18.8)$$

Выражение (18.7) напоминает скорость Крамерса с периодически модулированным потенциалом $\Delta U_\mathrm{eff} = \Delta U_0 \pm A x_m \cos\Omega t$. Достаточно малые амплитуды $\Delta U_0 - A \ll D$ по-прежнему обеспечивают разделение временных масштабов между локальной и глобальной динамикой.

Знание условных вероятностей позволяет вычислить автокорреляционную функцию. Для упрощения исследования сигнал предполагается слабым, $A x_m \ll D$, что накладывает ограничение на D. В этом случае выражение можно разложить в ряд Тейлора и удержать лишь линейные по амплитуде сигнала члены. В результате для условной вероятности получается выражение

$$p(\sigma,t|\sigma_0,t_0) = \frac{1}{2}\left[\exp[-2r_\mathrm{K}(t-t_0)]\left\{2\delta_{\sigma_\bullet,\sigma} - 1 - \frac{2r_\mathrm{K}Ax_m\cos(\Omega t_0+\varphi)}{D\sqrt{4r_\mathrm{K}^2+\Omega^2}}\right\} + \right.$$
$$\left. + 1 + \frac{2r_\mathrm{K}Ax_m\cos(\Omega t+\varphi)}{D\sqrt{4r_\mathrm{K}^2+\Omega^2}}\right], \quad (18.9)$$

где $\varphi = -\operatorname{arctg}(\Omega/2r_\mathrm{K})$.

Наибольший интерес представляют среднее значение, характеризующее отклик системы, и спектральная плотность, необходимая для оценки отношения сигнал/шум. Из (18.5) можно получить первый условный момент $\langle x(t)|x_0,t_0\rangle = \int xp(x,t|x_0,t_0)\,\mathrm{d}x$. В асимптотическом пределе $t_0 \to -\infty$ периодический отклик имеет вид

$$\langle x(t)\rangle_{\mathrm{as}} = A_1(D)\cos\left[\Omega t + \varphi(D)\right]. \tag{18.10}$$

Амплитуда $A_1(D)$ и фазовый сдвиг $\varphi(D)$ зависят от интенсивности шума и определяются выражениями:

$$A_1(D) = \frac{Ax_m^2}{D}\,\frac{2\,r_{\mathrm{K}}(D)}{\sqrt{4r_{\mathrm{K}}^2(D)+\Omega^2}}, \tag{18.11}$$

$$\varphi(D) = -\operatorname{arctg}\frac{\Omega}{2\,r_{\mathrm{K}}(D)}. \tag{18.12}$$

Зная амплитуду отклика на выходе, определяем коэффициент усиления по мощности:

$$\eta = \frac{4r_{\mathrm{K}}^2 x_m^4}{D^2(4r_{\mathrm{K}}^2+\Omega^2)}. \tag{18.13}$$

Нетрудно видеть, что коэффициент усиления, как функция интенсивности шума D, имеет единственный максимум.

Аналогично находится условная автокорреляционная функция $\langle x(t+\tau)x(t)|x_0,t_0\rangle = \int\int xyp(x,t+\tau|y,t)p(y,t|x_0,t_0)dx\,dy$ и ее асимптотический предел при $t_0 \to -\infty$. Однако в силу периодической модуляции плотностей вероятности переходов даже в асимптотическом пределе автокорреляционная функция зависит не только от временного сдвига τ, но и периодически от времени t. Поэтому для вычисления спектральной плотности необходимо провести дополнительное усреднение по периоду внешней силы. Отметим, что такая процедура эквивалентна усреднению по ансамблю случайной начальной фазы сигнала и соответствует экспериментальным методам измерения спектральных плотностей и корреляционных функций. После преобразования Фурье выражение для спектральной плотности $G_{\sigma,\sigma}(\omega)$ имеет вид

$$G_{\sigma,\sigma}(\omega) = G_{\sigma,\sigma}^{(0)}(\omega) + \frac{\pi}{2}A_1^2(D)\left[\delta(\omega-\Omega)+\delta(\omega+\Omega)\right]. \tag{18.14}$$

Она содержит две составляющие: периодическую, представленную дельта-функцией с весом, пропорциональным коэффициенту усиления, и шумовую

$G^{(0)}_{\sigma,\sigma}(\omega)$:

$$G^{(0)}_{\sigma,\sigma}(\omega) = \frac{4r_{\mathrm{K}}x_m^2}{4r_{\mathrm{K}}^2+\omega^2}\left(1-\frac{A_1^2(D)}{2x_m^2}\right). \tag{18.15}$$

Как видно из последнего выражения, шумовой пьедестал, в свою очередь, представлен суммой невозмущенного спектра (при $A_1 = 0$) и некоторым дополнительным членом порядка A_1^2. Появление дополнительного члена происходит вследствие наличия сигнала, понижающего шумовой пьедестал. Это возникает в силу использования теоремы Парсеваля в теории двух состояний.

Отношение сигнал/шум для модели двух состояний получается в виде

$$\mathrm{SNR} = \pi\left(\frac{Ax_m}{D}\right)^2 r_{\mathrm{K}} \tag{18.16}$$

и имеет единственный максимум при $D = \Delta U/2 = 1/4$.

18.5. Стохастический резонанс в хаотических системах с сосуществующими аттракторами

Для систем с квазиаттрактором, демонстрирующих динамический хаос, типично сосуществование в фазовом пространстве аттракторов различного типа. Области притяжения различных аттракторов разделяются в фазовом пространстве сепаратрисными гиперповерхностями. В отсутствие внешнего шума фазовая траектория будет достигать того или иного аттрактора в зависимости от начальных условий. Воздействие внешнего шума приведет к возникновению случайных переключений между сосуществующими аттракторами системы, статистика которых, естественно, будет определяться свойствами шума и динамической системы.

Теоретическое рассмотрение влияния внешнего шума на режимы динамического хаоса возможно в пределах малого и большого гауссова шума. Теория малых случайных возмущений динамических систем, основанная на понятии квазипотенциала, была недавно распространена на системы со сложной динамикой. Предположим, что динамическая система имеет аттрактор в N-мерном фазовом пространстве и существует инвариантная вероятностная мера на этом аттракторе. Пусть система возмущается слабым гауссовым белым шумом интенсивности D и описывается СДУ вида

$$\dot{x}_i = f_i(x) + \xi_i(t), \qquad i = 1,\ldots,N, \tag{18.17}$$

где $\langle \xi_i(t)\xi_j(0)\rangle = 2D\,\delta_{i,j}\delta(t)$. Тогда инвариантная мера или стационарная плотность вероятности $p(x)$ выражается через квазипотенциал (или неравновесный потенциал) $\Phi(x)$ следующим образом:

$$p(x) \propto \exp\left[-\frac{\Phi(x)}{D}\right]. \tag{18.18}$$

Квазипотенциал, являющийся аналогом свободной энергии для неравновесного стационарного состояния, зависит только от переменных состояния и параметров системы и не зависит от интенсивности шума D. Квазипотенциал принимает минимальные значения на аттракторе. Если в системе сосуществует несколько аттракторов (для определенности будем считать количество аттракторов равным двум), то $\Phi(x)$ будет иметь локальные минимумы, соответствующие этим аттракторам. В этом случае при слабом шуме возможна постановка задачи Крамерса о выходе из области притяжения аттрактора. При $D \ll 1$ движение такой системы будет содержать медленный временной масштаб, связанный со средним временем выхода из области притяжения аттрактора. Зависимость среднего времени выхода от интенсивности шума характеризуется экспоненциальным законом вида $\nu(D) \times \exp(\Delta\Phi/D)$. Если дополнительно к внешнему шуму на систему подается слабый периодический сигнал, не вызывающий переходов в области притяжения других аттракторов, то мы вправе ожидать проявление СР: отклик системы на слабое периодическое воздействие будет усилен.

Для систем с хаотической динамикой недавно был открыт принципиально иной эффект, так называемый *детерминированный стохастический резонанс*. Известно, что при вариации управляющих параметров квазигиперболических систем имеют место кризисы аттракторов. Примером кризиса может служить явление объединения двух аттракторов с возникновением динамической перемежаемости типа «хаос–хаос», когда фазовая траектория пребывает длительное время на каждом из объединившихся аттракторов и совершает нерегулярные переходы между ними. Отметим, что такие случайные переключения осуществляются в отсутствие внешнего шума и управляются детерминированным законом. Для систем с перемежаемостью типа «хаос–хаос» среднее время T_i нахождения фазовой траектории на аттракторе подчиняется универсальным закономерностям вида

$$T_i \propto (a - a_{\text{кр}})^{\gamma}, \tag{18.19}$$

где a — параметр системы; $a_{\text{кр}}$ — пороговое бифуркационное значение параметра, при котором реализуется кризис и возникает перемежаемость;

γ — универсальная постоянная. Таким образом, роль интенсивности шума здесь играет параметр системы, контролирующий медленный временной масштаб и, следовательно, ее спектральные свойства. При воздействии на систему медленного периодического сигнала можно путем изменения управляющего параметра добиться примерного совпадения периода сигнала и среднего времени переключения с одного аттрактора на другой, т. е. условий СР.

Проиллюстрируем вышесказанное на простом, но типичном примере дискретной системы с кризисом хаотических аттракторов:

$$x_{n+1} = (ax_n - x_n^3)\exp(-x_n^2/b) + A\sin\Omega n + \sqrt{2D}\xi(n). \quad (18.20)$$

Система (18.20) представляет собой одномерное кубическое отображение, возмущаемое слабым периодическим сигналом ($A \ll 1$) и δ-коррелированным шумом интенсивности D. Экспоненциальный множитель введен с целью избежать ухода траектории на бесконечность. Рассмотрим свойства отображения в отсутствие возмущений.

При значении параметра $a < a_{\text{кр}} = 2.839\ldots$ в системе сосуществуют два хаотических аттрактора, разделенных седловой точкой $x_n = 0$. При достижении параметром критического значения $a_{\text{кр}}$ реализуется кризис и аттракторы объединяются с рождением эффекта динамической перемежаемости типа «хаос–хаос», как это видно из рис. 18.4.

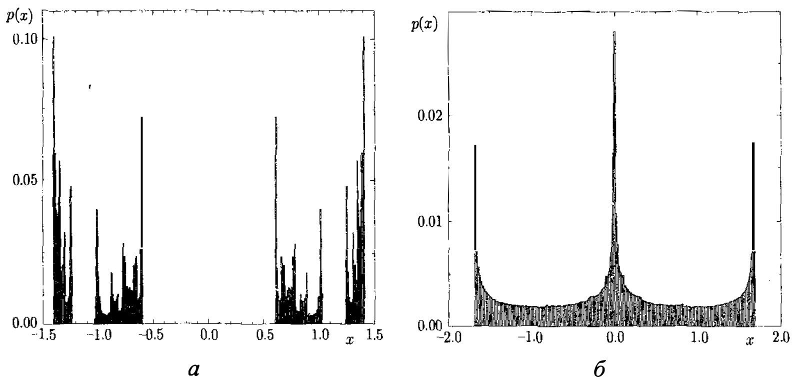


Рис. 18.4. Стационарная плотность распределения вероятности траекторий на аттракторах отображения (18.20) при $A = D = 0$, $b = 10$ для значений параметра a: *а* — 2.5; *б* — 2.84

Вначале исследуем эффект СР в режиме до кризиса $a < a_{\text{кр}}$, когда процесс переключений будет индуцироваться и управляться внешним шумом. Как видно из результатов расчета (рис. 18.5, *а*), коэффициент усиления и отношение сигнал/шум достигают максимумов при оптимальных уровнях шума. Налицо типичный эффект СР. Расчеты свидетельствуют о том, что оптимальному уровню шума ($D = D_{\rm opt}$) отвечает частота Крамерса, близкая к частоте внешнего сигнала Ω.

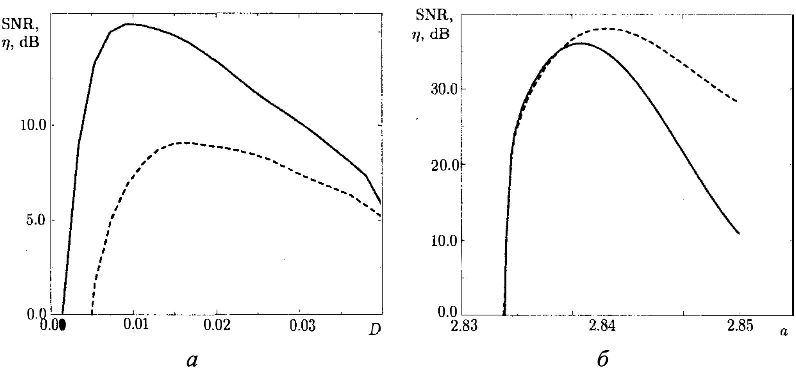


Рис. 18.5. Зависимость отношения сигнал/шум (*сплошная линия*) и коэффициента усиления (*пунктир*): *а* — от интенсивности шума при $a = 2.5$, $A = 0.05$, $\Omega = 0.1$; *б* — от управляющего параметра при $D = 0$, $A = 0.005$, $\Omega = 0.1$

Теперь исключим шумовое воздействие ($D = 0$) и рассмотрим реакцию системы (18.20) на периодическое возмущение в режиме перемежаемости типа «хаос–хаос», когда параметр a превышает значение критического ($a > a_{\rm кр}$). По данным расчетов, средняя частота переключений монотонно растет с увеличением параметра a. На рис. 18.5, *б* представлены зависимости коэффициента усиления и отношения сигнал/шум от величины параметра a, иллюстрирующие эффект детерминированного СР: максимума коэффициент усиления и отношение сигнал/шум достигают в области значений параметра $2.85 < a < 2.88$, когда частота Крамерса близка к частоте внешнего сигнала.

Описанные эффекты носят фундаментально общий характер, что подтверждается результатами их наблюдения в различных дискретных и дифференциальных системах, демонстрирующих как индуцированный шумом эффект перемежаемости, так и кризис. Например, рассмотрим СР в модели Лоренца в режиме индуцированной шумом перемежаемости. Система Лоренца является очень удобной для исследования влияния шума на хаотическую динамику. Для нее возможно корректное введение источников шума в уравнения модели. В работах доказана эргодичность стохастической модели Лоренца. Более того, в пространстве параметров этой системы есть области существования как аттрактора типа Лоренца, так и квазиаттрактора. Стохастическая модель Лоренца описывается системой СДУ:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\sigma\, x + \sigma\, y + \xi_1(t), \\ \dot{y} &= -y + r\, x - x\, z + \xi_2(t), \\ \dot{z} &= -b\, z + x\, y + \xi_3(t), \\ \langle \xi_i(t)\xi_j(0)\rangle &= D\, \delta_{i,j}\, \delta(t). \end{aligned} \tag{18.21}$$

Как было показано, в области значений параметров $\sigma = 10$, $r = 210$, $b = 8/3$, соответствующей существованию квазиаттрактора, реализуется индуцированный шумом режим перемежаемости типа «хаос–хаос» между двумя симметричными аттракторами.

В отсутствие шума (т. е. в чисто динамическом случае) фазовое пространство системы содержит два симметричных аттрактора. Начальные условия определяют, на какой из них попадет фазовая траектория. При наличии шума аттракторы объединяются. Если шум слабый, то фазовая траектория долгое время находится на каждом из аттракторов и совершает редкие переходы между ними. Это ведет к появлению медленного временного масштаба — среднего времени нахождения фазовой траектории на одном из объединившихся аттракторов, которое при $D \ll 1$ зависит от интенсивности шума по закону Аррениуса. Наличие медленного временного масштаба, естественно, приводит к качественному изменению структуры спектра мощности, который эволюционирует в область низких частот; его низкочастотная часть имеет форму лоренциана.

С учетом только стохастической динамики переходов между аттракторами (приближение двух состояний) корреляционная функция является экспоненциально спадающей: $c_{x,x}(\tau) \propto \exp\big(-2r(D)\big)$. Восприимчивость системы Лоренца может быть оценена таким же выражением, как и для бистабильного осциллятора.

Рассмотрим теперь совместное действие шума и слабого периодического сигнала $A\,\sin(\Omega\, t)$, включенного в первое уравнение системы (18.21). Спектральная плотность в этом случае будет содержать δ-пик на частоте сигнала.

Простейшая оценка для отношения сигнал/шум на выходе системы имеет вид

$$\mathrm{SNR} \propto \frac{r(D)}{D^2} = \frac{1}{D^2}\exp\left(-\frac{\Delta\Phi}{D}\right), \tag{18.22}$$

где $\Delta\Phi$ — высота барьера соответствующего эффективного потенциала.

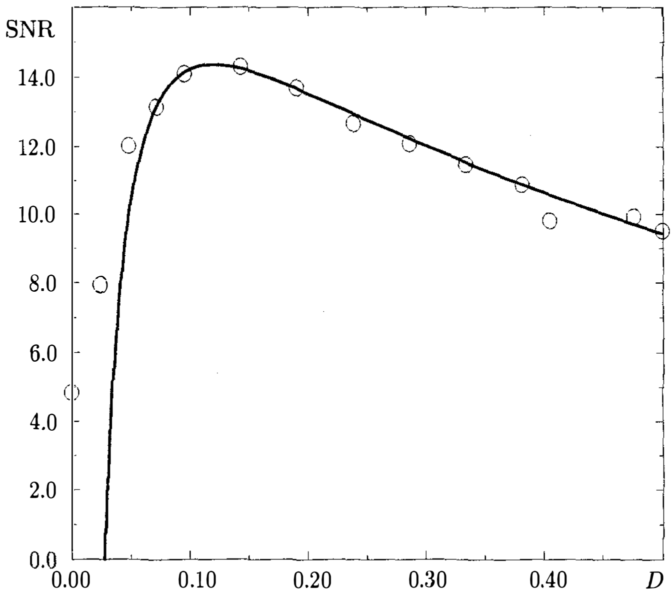


Рис. 18.6. Зависимость отношения сигнал/шум от интенсивности шума для системы Лоренца при $A = 1.0$, $\Omega = 0.1$. Символами $\circ$ показаны результаты численного моделирования; сплошная линия соответствует аппроксимации (18.22) с $\Delta\Phi = 0.24$

Результаты вычисления отношения сигнал/шум путем численного моделирования СДУ (18.21) и аппроксимация по формуле (18.22) представлены на рис. 18.6. Формула (18.22), являющаяся универсальной для систем, демонстрирующих СР, прекрасно описывает эффект и для системы со сложной динамикой. Отметим, что динамические уравнения системы могут быть трансформированы к виду бистабильного осциллятора с инерционной нелинейностью:

$$\begin{aligned} &\ddot{u} + \gamma\,\dot{u} + u^3 + (v-1)\,u = 0, \\ &\dot{v} = h\,(\beta u^2 - \alpha\, v), \end{aligned} \tag{18.23}$$

где $\gamma = (1+\sigma)/\sqrt{\sigma(r-1)}$; $h = (r-1)^{-1/2}$; $\beta = (2\sigma - b)/\sqrt{\sigma}$; $\alpha = b/\sqrt{\sigma}$. Для больших значений $r \gg 1$ переменная $v(t)$ является медленной. Исключая ее из (18.23), получаем уравнение бистабильного осциллятора уже без нелинейного инерционного члена:

$$\ddot{u} + \gamma\,\dot{u} + \frac{\alpha+\beta}{\alpha}\,u^3 - u = 0. \tag{18.24}$$

Таким образом, в пределах больших значений r система Лоренца допускает описание в виде бистабильного осциллятора, что гарантирует наличие СР.

18.6. Физический эксперимент

Первые результаты экспериментальных исследований эффекта СР были получены в измерениях зависимости SNR от интенсивности шума в триггере Шмитта и в кольцевом лазере. Эксперименты подтвердили наличие СР и показали хорошее совпадение экспериментальных данных с выводами адиабатической теории двух состояний. Позже эффект СР был многократно подтвержден экспериментально в бистабильных системах самой различной природы. В большинстве экспериментальных работ измерялись зависимости SNR от интенсивности шума на выходе системы и проводилось сравнение с выводами теории. И это естественно, так как именно вид этой зависимости послужил основанием для определения эффекта СР.

Как было показано выше, эффект СР характеризуется резонансной зависимостью усиления входного сигнала от интенсивности шума. В связи с этим рассмотрим результаты физических измерений коэффициента усиления гармонического сигнала малой амплитуды при вариации интенсивности шума в электронной цепи, моделирующей классический бистабильный осциллятор (18.3). На рис. 18.7 приведена принципиальная схема электронной цепи, представляющей аналоговую модель стохастической системы (18.3).

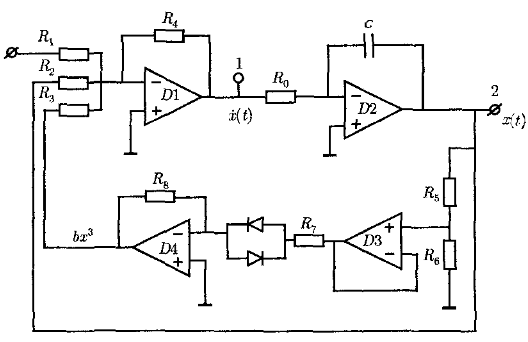


Рис. 18.7. Электронный аналог передемпфированного бистабильного осциллятора (номиналы элементов схемы: R_0 – $5.11k\Omega$, $R_{1,4,6}$ – $10k\Omega$, R_2 – $51.2k\Omega$, R_3 – – $2.2k\Omega$, R_5 – $0.5k\Omega$, R_7 – $1.1k\Omega$, R_8 – $57k\Omega$, C = 150 пФ)

Схема содержит операционные усилители $D1 - D4$ типа К157УД2, резисторы $R_0 - R_8$, емкость C и два диода типа $D9$, включенные противофазно. Сигнал на входе, представляющий собой сумму гармонического $A\sin(2\pi ft)$ и шумового $\xi(t)$ сигналов, подается на резистор R_1. В качестве источников соответствующих сигналов использовались стандартные генераторы. На выходе схемы измерялся результирующий сигнал отклика системы $x(t)$. Основной проблемой эксперимента являлась задача аппроксимации вида нелинейной функции, определяющей форму бистабильного потенциала $U(x)$. Противофазное включение двух идентичных диодов и соответствующий подбор номиналов резисторов схемы обеспечивали возможность моделирования характеристики, с высокой степенью точности аппроксимирующей классический бистабильный потенциал в интервале изменений переменной состояния $-1.5 < x < 1.5$ (переменная x нормирована):

$$-\frac{dU(x)}{dx} = ax - bx^3. \tag{18.25}$$

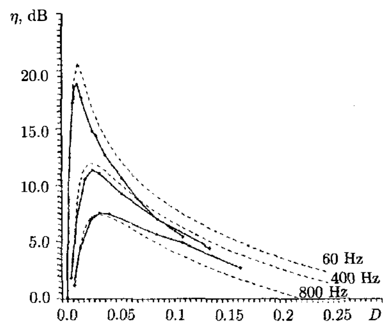
Коэффициент a в этом уравнении зависит от номинала резистора R_2, а коэффициент b определяется номиналами резисторов R_3, R_5, R_8.

Для корректного сравнения результатов эксперимента с теорией (18.13) необходимо обеспечить выполнение условия адиабатического приближения с целью применения метода двух состояний:

$$2\pi f_0 \ll \tau^{-1} = U''(x_{\min}), \tag{18.26}$$

где τ — время релаксации осциллятора (18.3). Период внешней силы должен существенно превышать время релаксации. Условие (18.26) накладывает ограничения на значения коэффициентов a и b в (18.25) и соответственно на номиналы резисторов схемы. Для указанных на рис. 18.7 значений номиналов резисторов из условия (18.26) следует ограничение на частоту внешнего сигнала $f \ll 12.5$ кГц, которое в эксперименте было выполнено.

Теоретические и экспериментальные результаты определения зависимостей коэффициента усиления от интенсивности внешнего шума и частоты воздействия прекрасно соответствуют друг другу качественно, но различаются количественно за счет ошибки измерений, составлявшей примерно $\pm 5\,\%$ (рис. 18.8, *а*). Следует, однако, отметить, что эти различия в среднем несколько превышают указанную погрешность измерений, по крайней мере, по двум причинам: во-первых, из-за имеющегося отличия нелинейной характеристики реальной схемы от кубического полинома (18.25), хотя специальные измерения показали, что это отличие в рабочем диапазоне $|x| \leqslant 2$ незначительное (не превышает $1\,\%$); во-вторых, из-за внутреннего шума схемы, влияние которого в экспериментах не учитывалось. Реальную возможность полностью исключить вышеуказанные причины дает метод прямого численного моделирования динамики системы (18.3). Результаты расчетов приведены на рис. 18.8, *б* в сравнении с данными теории. Как видно из графиков, различия между теоретическими и расчетными данными здесь существенно меньше и полностью укладываются в ошибку численного счета, обусловленную конечностью временных рядов, используемых при их статистической обработке.



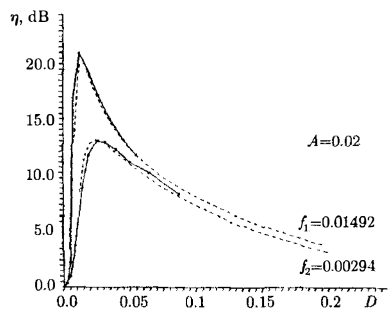


Рис. 18.8. Зависимость коэффициента усиления от интенсивности шума для различных значений частоты входного сигнала: *а* — по результатам измерений (сплошные кривые) и теоретическим данным (пунктир); *б* — по результатам численного моделирования динамики системы (18.3) (сплошные кривые) и данным теории (пунктир). Амплитуда сигнала на входе $A = 20$ мВ, нормированные значения частот f_1 и f_2 соответствуют в физическом эксперименте частотам 60 Гц и 400 Гц

18.7. Стохастический резонанс в механорецепторах речного рака

Рассмотренные результаты физического эксперимента по измерениям эффекта стохастического резонанса на модели бистабильного осциллятора в виде радитехнической цепи, отписанные выше, нужно воспринимать как достаточно предсказуемые. Дело в том, что радиотехническая схема (рис. 18.7) по сути является аналоговой моделью уравнений системы (18.3). По этой причине прекрасное соответствие теории данным эксперимента можно было ожидать заранее. Другое дело — проиллюстрировать эффект СР на сложной системе, математическая модель которой либо отсутствует, либо заведомо является приближенной. Именно с этих точек зрения представляются весьма интересными результаты по демонстрации эффекта СР, впервые полученные профессором Ф. Моссом с использованием механорецепторов живого рака.

Система механорецепторов речного рака расположена на его хвосте и изображена на рис. 18.9. Хвост в виде веера имеет примерно 250 длинных волосков, которые связаны с внутренним нервным узлом через сенсорные нейроны, сконцентрированные в девяти нервных основаниях.

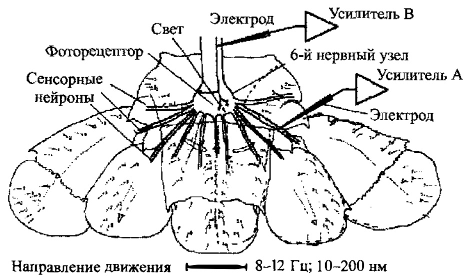


Рис. 18.9. Система нейрорецепторов хвоста речного рака

На хвосте имеется 6-й нервный узел, включающий пару фоторецепторных клеток. Как показано на рис. 18.9, можно измерять сигналы либо от сенсорных нейронов механорецепторов, либо от выходного нейрона фоторецептора 6-го нервного узла. С этой целью необходимо путем хирургического вмешательства обеспечить возможность введения микроэлектродов для измерения сигналов нейрона. Движение волосков механорецепторов стимулировалось возмущением жидкости в направлениях, указанных на рис. 18.9. Возбуждение жидкости осуществлялось с помощью гармонического сигнала с частотой 5–100 Гц и амплитудой 10–100 нм, который распространялся в жидкости со скоростью от 100 до 1000 мкм/с. Отклик фоторецепторной клетки можно измерять как при гидродинамическом возмущении, так и в присутствии светового потока постоянной интенсивности, сфокусированного на фоторецепторную область. В качестве источника шума использовался шум окружающей среды и внешний шум.

Измерения отношения сигнал/шум с сенсорного нейрона речного рака в зависимости от интенсивности внешнего шума продемонстрировали эффект СР. Результаты эксперимента вместе с теоретическими данными и данными моделирования системы Фитцхью – Нагумо, которая может служить приближенной математической моделью системы, приведены на рис. 18.10. Полученные данные свидетельствуют, что система механорецепторов обеспечивает восприятие периодического сигнала наилучшим образом в условиях действия шума оптимальной интенсивности. Наиболее высокую чувствительность сенсорные нейроны проявляли к сигналам с частотой, близкой к 100 Гц. Известно, что именно эта частота характерна для колебаний воды, вызванных плывущей рыбой. Так как гидродинамические волны распространяются в воде намного быстрее, чем сама рыба, то речной рак заблаговременно воспринимает сигнал опасности и успевает спрятаться.

Однако остается открытым вопрос о влиянии внутреннего шума нейронов. Фактически все нейроны являются зашумленными, причем уровень внутреннего шума может заметно превышать интенсивность естественного шума состояния термодинамического равновесия. Были предприняты попытки зарегистрировать эффект СР в механорецепторах рака путем управления уровнем внутреннего шума с помощью изменения температуры препарата. К сожалению, явления СР обнаружить при этом пока не удалось.

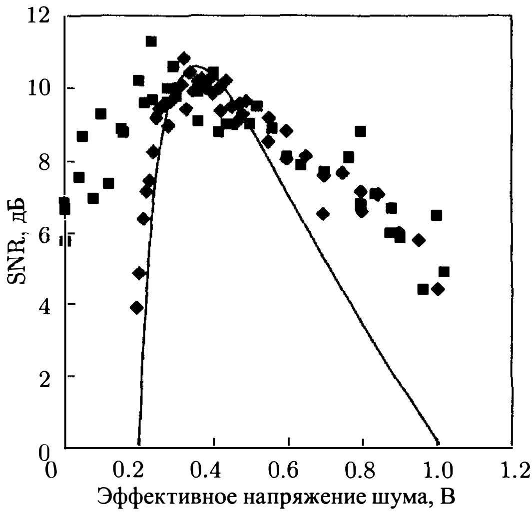


Рис. 18.10. Эффект СР в сенсорной системе речного рака (■), результаты теории двух состояний (непрерывная кривая) и данные моделирования системы Фитцхью – Нагумо (♦)

18.8. Заключение

Результаты, приведенные в данной лекции, наглядно иллюстрируют один из интересных эффектов нелинейной динамики стохастических систем — стохастический резонанс как индуцированный шумом переход в бистабильных системах, при котором некоторые характеристики системы могут быть оптимизированы путем варьирования интенсивности шума. Количественные меры эффекта СР, безусловно, зависят от структуры сигнала воздействия, статистических свойств шума и динамических свойств бистабильной системы. Однако физическая суть явления при этом принципиально не меняется. Одно из характерных времен системы нелинейным образом должно зависеть от интенсивности шума. В таком случае естественно, что откликом системы на внешнее воздействие можно управлять путем изменения интенсивности шума, добиваясь оптимального результата.

Понимание физики явления СР позволило вначале предположить, а затем и экспериментально доказать возможность реализовать подобный эффект в детерминированных хаотических бистабильных системах. Среднее время переключений в режиме перемежаемости типа «хаос–хаос» в таких системах нелинейным образом зависит не от величины шума, а от величины управляющего параметра. Изменяя параметр, можно управлять откликом хаотической системы на внешнее воздействие и аналогичным образом наблюдать эффект типа СР в отсутствие внешнего шума.

Представленные результаты в основном иллюстрируются на простейшей модели одномерного передемпфированного осциллятора. Для этой модели можно дать наиболее полное теоретическое описание эффекта СР, провести прямые численные расчеты и поставить адекватный физический эксперимент. Сравнение теоретических, численных и экспериментальных результатов для передемпфированного бистабильного осциллятора демонстрирует удивительно хорошее взаимосоответствие. Эффект СР качественно реализуется и в более сложных системах, включая живые. Эти результаты могут способствовать исследованиям эффекта СР в сложных нелинейных стохастических системах живой и неживой природы.

Лекция 19

Синхронизация стохастических колебаний

19.1. Введение

Одним из актуальных направлений в области нелинейной динамики, как уже упоминалось, является обобщение классических представлений о синхронизации периодических автоколебаний на случай более сложных колебательных процессов. Исследования в этом направлении привели к разработке представлений о синхронизации квазипериодических и даже хаотических автоколебаний, описанных в предыдущих лекциях. Вне рассмотрения остались лишь случайные или стохастические колебания, которые возбуждаются в нелинейных диссипативных системах в результате действия шума. Возникает вопрос: возможно ли конструктивно рассмотреть задачу о синхронизации стохастических колебаний? Что понимать в этом случае под эффектом синхронизации случайных колебательных процессов? Как связать классические представления теории синхронизации с процессами, происходящими в стохастических системах, характеризующихся непрерывным широкополосным спектром мощности? Ответы на поставленные вопросы в общем случае пока не получены, однако для определенного класса стохастических систем их можно обоснованно представить.

Центральной идеей синхронизации является концепция установления во взаимодействующих подсистемах равенства (или кратности) характерных временных масштабов (частот), обусловленного именно взаимодействием. Это равенство (или кратность) должно сохраняться в некоторой конечной области изменения управляющих параметров, которая представляет собой область синхронизации. Если мы хотим поставить и решить задачу синхронизации стохастических колебаний, необходимо выбрать такие системы, для которых можно обоснованно ввести понятие характерного времени (частоты), описывающего стохастический колебательный процесс. Если это возможно и характерное время (частота) определено, то имеет смысл постановка и решение задачи о вынужденной или взаимной синхронизации именно указанных характерных временных (частотных) масштабов стохастических колебаний, то есть задачи стохастической синхронизации.

Рассмотрим примеры нескольких стохастических систем, для которых можно корректно определить характерные времена или частоты и попытаться рассмотреть эффект синхронизации.

Модель передемпфированного бистабнльного осциллятора под действием шума. Рассмотрим модель передемпфированного бистабильного осциллятора, которая описывает движение броуновской частицы в пределе большого трения в двухъямном потенциале $U_0(x) = -x^2/2 + x^4/4$ под действием белого шума $\xi(t)$ интенсивности D:

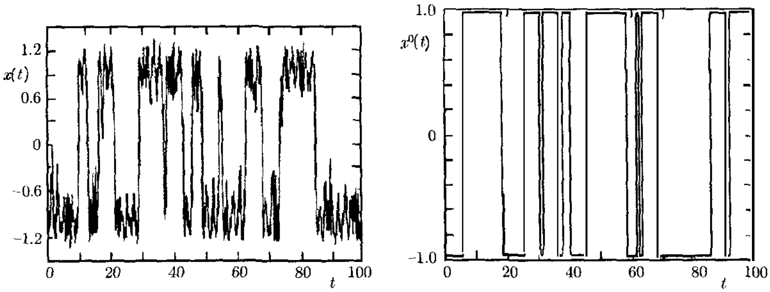
$$\dot{x} = x - x^3 + \sqrt{2D}\xi(t). \tag{19.1}$$

Система (19.1) моделирует случайный процесс, для которого можно ввести в рассмотрение два временных масштаба. Один обусловлен случайными блужданиями частицы в окрестности одного или другого состояния равновесия и характеризует внутриямную (или локальную) динамику. Для достаточно высоких потенциальных барьеров (или глубоких потенциальных ям) этот временной масштаб практически не зависит от интенсивности шума.

Нас будет интересовать второй масштаб времени, который характеризует среднее время перехода частицы через потенциальный барьер (глобальная динамика). Ему отвечает средняя частота переходов через потенциальный барьер — частота Крамерса. Отметим, что процесс переходов через потенциальный барьер характеризует индуцированные шумом колебания и в отсутствие шума не имеет места. Рис. 19.1, *а* иллюстрирует временную зависимость $x(t)$, полученную интегрированием стохастического уравнения (19.1). Четко видны случайные колебания в окрестности равновесий $x_{\bullet} = \pm 1$ (локальная динамика) и случайные переключения, связанные с переходами через барьер (глобальная динамика).

Внутриямная (локальная) динамика не является для нас существенной. Во многих задачах используется метод двух состояний для фильтрации внутриямных колебаний. Нахождению частицы в окрестности минимума потенциала $x_0(t) = -1$ ставится в соответствие значение $x(t) = -1$, а минимума $x_0(t) = +1$ — значение $x(t) = +1$. После такой фильтрации сигнал $x^0(t)$ преобразуется в случайный телеграфный процесс, показанный на рис. 19.1, *б*.

Отфильтрованный процесс, как видно из рис. 19.1, *б*, представляет собой случайную последовательность импульсов и может быть охарактеризован некоторой средней частотой переключений. Для осциллятора (19.1) эта частота была рассчитана Крамерсом и носит его имя. Частота Крамерса



а *б*

Рис. 19.1. Решение уравнения (19.1) $x(t)$ для $D = 0.05$ (*а*); сигнал $x^0(t)$, отфильтрованный методом двух состояний (*б*)

зависит от интенсивности шума и энергии потенциального барьера:

$$r = \frac{1}{\langle T \rangle} = \nu \exp[-\Delta U_0 / D], \tag{19.2}$$

где $\langle T \rangle$ — среднее время пребывания частицы в окрестности одного из состояний равновесия, ν — некоторая константа, ΔU_0 — потенциальный барьер, D — интенсивность шума. Как видно из выражения (19.2), частота Крамерса при фиксировании ΔU_0 управляется шумом и монотонно возрастает с ростом интенсивности D (см. лекцию 18).

Отметим важное обстоятельство. Несмотря на то, что частота переключений имеет простой и понятный физический смысл, спектр процесса $x(t)$ является сплошным типа Лоренциана и не содержит явных выбросов на частоте Крамерса. Причина понятна: процесс $x(t)$ — истинно случайный, следовательно, и последовательность времен пребывания $T_1, T_2, \ldots, T_n$ — также случайна. Частота Крамерса вводится как среднее по ансамблю значение $r = 1/\langle T \rangle$ и не выделяется в спектре колебаний как спектральная линия.

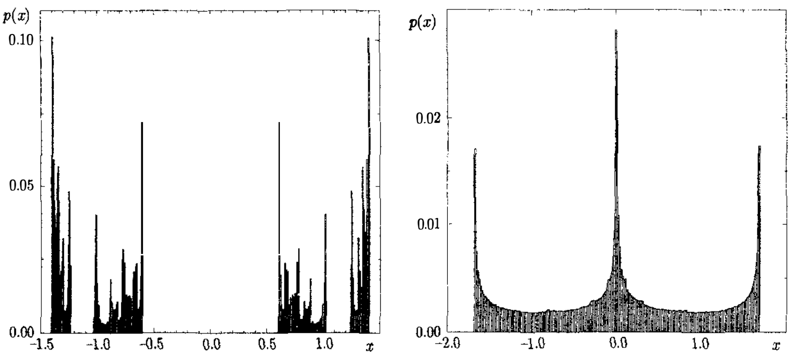
Модель бистабильной хаотической системы под действием шума. Рассмотрим второй класс систем, который во многом сходен с переключениями в бистабильном осцилляторе, но имеет некоторые специфические особенности. Обратимся к простой одномерной нелинейной дискретной системе:

$$x_{n+1} = (\alpha x_n - x_n^3) \exp(-x_n^2 / b) + \sqrt{(2D)} \xi(n), \tag{19.3}$$

где α — управляющий параметр, D — интенсивности случайного процесса $\xi(n)$. Экспоненциальный множитель $\exp(-x_n^2)/b)$ введен в систему с целью избежать ухода решения в бесконечность и является несущественным.

Система (19.3) в отсутствие шума имеет хаотический аттрактор, структура которого зависит от параметра α. На рис. 19.2, *а,б* приведены плотности распределения $p(x)$ системы (19.3) для двух характерных значений параметра α. При значении параметра $\alpha < \alpha^* = 2.839\ldots$ в системе сосуществуют два хаотических аттрактора, разделенных седловой точкой $x_n^0 = 0$. При достижении параметром α критического значения α^* реализуется кризис и аттракторы объединяются в единый (рис. 19.2, *б*). Сосуществование двух симметричных хаотических аттракторов в определенном смысле дает возможность обобщения эффектов, рассмотренных выше, для бистабильного осциллятора. Действительно, воздействуя шумом на систему, возможно индуцировать переходы от одного аттрактора на другой и обратно. Различия с процессами в системе (19.1) будут связаны исключительно с локальной динамикой. Эти различия несущественны и их роль практически будет отсутствовать, если использовать фильтрацию процесса методом двух состояний.

Интерес представляет случай кризиса аттракторов (рис. 19.2, *б*). В отсутствие шума система (19.3) будет генерировать хаотический (непериодический) процесс $x(t)$, при котором траектория будет последовательно посещать две области единого аттрактора: $x < 0$ и $x > 0$. Этот процесс будет нерегулярным и ему можно однозначно поставить в соответствие среднюю частоту переключений. Как показали эксперименты, эта частота характеризует систему в отсутствие шума и может управляться изменением параметра α.



а *б*

Рис. 19.2. Стационарная плотность распределения вероятности траекторий на аттракторах отображения (19.3) при $A = D = 0$ и $b = 10$ для значений параметра α: *а* — 2.5; *б* — 2.84

В настоящей лекции представлены результаты анализа эффекта синхронизации средней частоты переключений в системах, относящихся к описанным двум классам систем с переключениями, индуцированными внешним шумом и осуществляемыми в хаотических системах без внешних шумов.

Рассматриваемый в этой лекции эффект синхронизации частоты переключений внешним периодическим сигналом тесно связан с эффектом стохастического резонанса, подробно описанным в предыдущей лекции. Действительно, в рамках определенных предположений стохастический резонанс оказывается тесно связанным с эффектом синхронизации процесса переключений. По сути дела описание эффекта СР на основе концепции синхронизации служит иным методом или способом анализа явления СР, который с физической точки зрения, возможно, является более целесообразным.

19.2. Внешняя синхронизация процесса переключений в бистабильном осцилляторе под действием шума и периодического сигнала

Обратимся к более общей модели передемпфированного осциллятора, в который введем гармоническое воздействие амплитуды A и частоты Ω:

$$\dot{x} = \alpha x - \beta x^3 + \sqrt{2D}\,\xi(t) + A\,\cos(\Omega t + \varphi_0). \tag{19.4}$$

Коэффициенты α и β введены в систему с целью обеспечить возможность управления величиной потенциального барьера. Система (19.4) не имеет собственной детерминированной частоты, ее спектр (в отсутствие модуляции) представляет собой лоренциан, т. е. является сплошным. В то же время система характеризуется управляемым шумом временным масштабом — средним временем выхода из потенциальной ямы, которому в частотной области отвечает средняя частота переключений. Периодический сигнал амплитуды A по отношению к бистабильному осциллятору представляет собой как бы внешние «часы» с частотой Ω и начальной фазой φ_0. (Далее производилось усреднение по равномерно распределенной фазе φ_0.)

Будем полагать, что в стохастическом дифференциальном уравнении (СДУ) (19.4) $\alpha, \beta > 0, \varphi_0 = 0$ и амплитуда модуляции A является малой, так что в отсутствие шума процессы переключений не происходят. Более того, полагаем, что частота модуляции мала по сравнению со скоростью релаксации внутри ям.

Введем в рассмотрение аналитический сигнал $w(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t)$, где $y(t)$ — преобразование Гильберта исходного процесса $x(t)$:

$$y(t) = H[x] = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x(\tau)}{t-\tau}\mathrm{d}\tau = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{x(t-\tau)-x(t+\tau)}{\tau}\mathrm{d}\tau. \qquad (19.5)$$

Мгновенные амплитуда и фаза процесса определяются соответственно как абсолютное значение и аргумент комплексной функции $w(t)$:

$$w(t) = R(t)\,\exp[\mathrm{i}\Phi(t)]. \qquad (19.6)$$

Применяя концепцию аналитического сигнала к (19.4), получим следующее СДУ для аналитического сигнала $w(t)$:

$$\dot{w} = \alpha\,w - \frac{\beta}{4}\,(3\,R^2\,w + w^3) + \psi(t) + A\,\exp(rmi\Omega t), \qquad (19.7)$$

где $\psi(t) = \xi(t) + \mathrm{i}\,\eta(t)$ — аналитический шум, $\eta(t)$ — преобразование Гильберта от $\xi(t)$. Из уравнения (19.7) легко записать СДУ для мгновенных амплитуды и фазы:

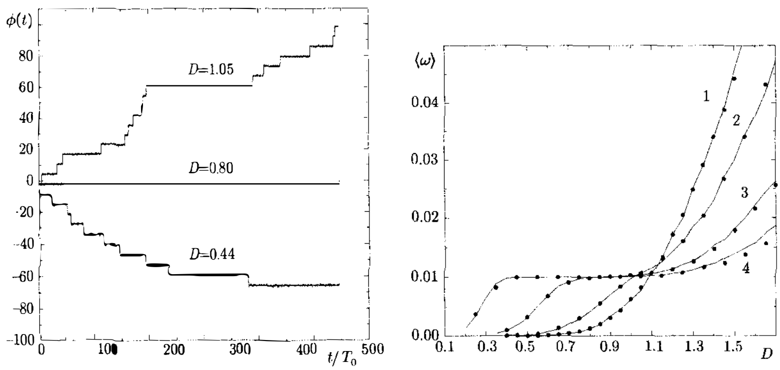
$$\begin{aligned}\dot{R} &= \alpha\,R - \frac{\beta}{2}\,R^3\,[1+\cos^2(\phi+\Omega t)] + A\,\cos\phi + \xi_1(t),\\ \dot{\phi} &= -\Omega - \frac{A}{R}\,\sin\phi - \frac{\beta}{4}\,R^2\,\sin[2(\phi+\Omega t)] + \frac{1}{R}\,\xi_2(t),\end{aligned} \qquad (19.8)$$

где $\phi(t) = \Phi(t) - \Omega\,t$ есть мгновенная разность фаз. Источники шума $\xi_{1,2}(t)$ определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned}\xi_1(t) &= \xi(t)\,\cos\Phi + \eta(t)\,\sin\Phi,\\ \xi_2(t) &= \eta(t)\,\cos\Phi - \xi(t)\,\sin\Phi.\end{aligned} \qquad (19.9)$$

Второе уравнение в (19.8), описывающее эволюцию разности фаз, сходно по структуре с соответствующим уравнением для синхронизованного генератора Ван дер Поля с шумом. Отличие заключается в том, что в этом уравнении, естественно, отсутствует член, отражающий наличие расстройки по частоте. Вместо него присутствует только член Ω. Это является еще одним фактором, свидетельствующим об отсутствии детерминированного временного масштаба в системе.

Фазовая синхронизация процессов переключения периодическим сигналом. Зависимость разности фаз от времени, вычисленная в рамках концепции аналитического сигнала, представлена на рис. 19.3, *а* для различных значений интенсивности шума. Наклон кривых дает разность между мгновенной частотой процесса x и Ω. Видно, что существует оптимальный уровень шума, при котором разность фаз равна нулю. Кроме этого, для данной интенсивности шума и заданной амплитуды воздействия фаза оказывается захваченной в течение времени наблюдения.



а *б*

Рис. 19.3. (*а*) Зависимость мгновенной разности фаз ϕ от времени для указанных значений интенсивности шума и для $A = 3$; (*б*) средняя частота (*сплошная линия*) и средняя частота переключений (•) как функции интенсивности шума для различных значений амплитуды воздействия: 1 — $A = 0$; 2 — $A = 1$; 3 — $A = 2$; 4 — $A = 3$. Значения остальных параметров: $\alpha = 5$, $\beta = 1$ и $\Omega = 0.01$

Отклонения от оптимального уровня шума приводят к разности фаз и появлению сбоев фаз, что ведет к постоянному отличному от нуля наклону зависимостей $\Phi(t)$. Зависимости средних частот, определяемых по формуле $\langle\omega\rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int\limits_0^T \frac{\mathrm{d}\,\Phi(t)}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t$, от интенсивности шума приведены на рис. 19.3, *б* для различных значений амплитуды сигнала A. Представленные результаты наглядно свидетельствуют об эффекте захвата средней частоты выходного сигнала $\langle\omega\rangle$ при некотором оптимальном уровне шума. Этот эффект был впервые установлен для случая стохастического триггера Шмитта.

Рис. 19.3, *б* иллюстрирует как наличие порога синхронизации, так и расширение области синхронизации с ростом амплитуды модуляции. В отсутствие воздействия ($A = 0$) средняя частота монотонно растет в соответствии с законом Крамерса. При значении $A \geqslant 1$ на графике зависимости $\langle\omega\rangle$ от D появляется слабо заметный изгиб; при $A = 2$ становится четко заметной «полочка», где $\langle\omega\rangle$ не зависит от D. Дальнейший рост амплитуды $A = 3$ ведет к расширению зоны синхронизации.

Как показывалось выше, совпадение частот сопровождается, по крайней мере, малым числом сбоев фаз. Поэтому наряду с захватом средней частоты флуктуации разности фаз становятся минимальными. В соответствии с введенным определением можно сказать, что случайный процесс переключений $x(t)$ эффективно синхронизован с внешней периодической силой.

Рассчитаем коэффициент эффективной диффузии:

$$D_{\text{eff}} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\langle\phi^2(t)\rangle - \langle\phi(t)\rangle^2\right]. \tag{19.10}$$

D_{eff} отвечает за качество синхронизации: чем меньше коэффициент эффективной диффузии, тем больше продолжительность интервалов времени захвата фаз. Результаты численных вычислений представлены на рис. 19.4. Как видно из графиков, с ростом амплитуды воздействия зависимости D_{eff} от интенсивности шума все более четко демонстрируют наличие минимума. Количественные значения D_{eff} в области синхронизации свидетельствуют о том, что эффект захвата частоты и фазы имеет место на временах, превышающих период внешней силы более чем в 10^3 раз. Таким образом, наличие вынужденной эффективной синхронизации на основном тоне установлено для бистабильного осциллятора. Этот эффект проявляется в захвате средней частоты переключений внешним гармоническим сигналом и минимизации коэффициента диффузии. Важно отметить, что добавление шума в систему приводит к упорядочиванию ее фазовой динамики: увеличение интенсивности шума вызывает уменьшение диффузии разности фаз.

19.3. Внешняя стохастическая синхронизация триггера Шмитта

Наиболее простой и легко реализуемой системой, с помощью которой случайный процесс можно преобразовать в случайный телеграфный сигнал, т. е. осуществить фильтрацию по методу двух состояний, является триггер Шмитта (рис. 19.5).

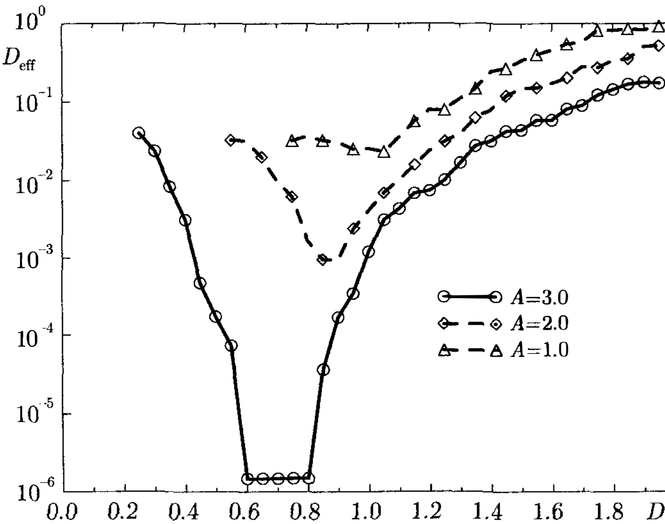


Рис. 19.4. Коэффициент эффективной диффузии как функция интенсивности шума для различных значений амплитуды воздействия (параметры: $\alpha = 5$, $\beta = 1$, $\Omega_0 = 0.01$)

Триггер Шмитта представляет собой электронное устройство (рис. 19.5, *г*), имеющее нелинейную характеристику с заданным порогом срабатывания K (рис. 19.5, *а*). Если сигнал $x(t) = V_{\text{R}}$ превышает пороговое значение $x(t) \geqslant K$, то на выходе триггера мы имеем сигнал $x(t) \equiv +K$, если $V_{\text{R}} \leqslant -K$, то на выходе $x(t) \equiv -K$. Используя функцию $\operatorname{sgn}(x)$, мы получим последовательность импульсов амплитуды ± 1. Если на вход триггера подать сигнал, который представляет собой сумму периодического $A \sin \Omega t$ и шумового $\xi(t)$ интенсивности D (рис. 19.5, *б*), то математическую модель динамики триггера можно представить в виде

$$x(t) = \operatorname{sgn}[Kx(t) - D\xi(t) - A\,\sin(\Omega t)], \tag{19.11}$$

где K — порог срабатывания триггера, D — интенсивность шума $\xi(t)$, A и Ω — амплитуда и частота внешней гармонической силы.

Рассмотрим результаты экспериментального исследования индуцированной шумом синхронизации в стохастическом триггере Шмитта под действием слабого периодического сигнала. На триггер Шмитта с порогом срабатывания $\Delta U = 150$ мВ подавался шумовой сигнал с частотой среза $f_c = 100$ кГц и периодический сигнал с частотой $\Omega = f_0 = 100$ Гц.

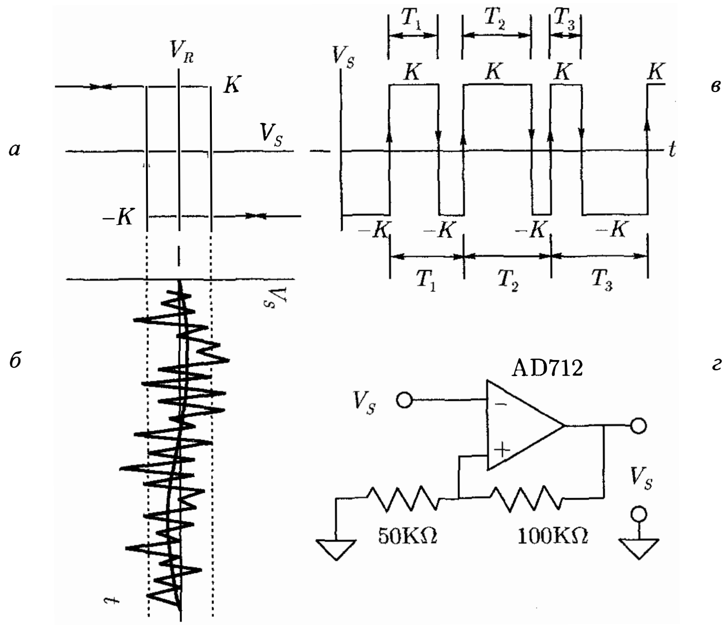


Рис. 19.5. Триггер Шмитта

По выходному сигналу, представляющему собой телеграфный процесс и оцифровываемому в компьютере, измерялась средняя частота переключений $\langle f\rangle = \lim_{M\to\infty} \dfrac{1}{M}\sum_{k=1}^{M}\dfrac{\pi}{t_{k+1}-t_k}$. Результаты измерений показаны на рис. 19.6, *а*. При слабом сигнале зависимость средней частоты от интенсивности шума следует закону Аррениуса, экспоненциально возрастая с ростом интенсивности шума. С увеличением амплитуды сигнала эта зависимость становится качественно иной: появляется область значений интенсивности шума, в которой средняя частота практически не меняется с ростом шума и в пределах погрешности эксперимента остается равной частоте сигнала. Наблюдается эффект захвата средней частоты переключений.

Повторяя измерения средней частоты для разных значений амплитуды и частоты сигнала, можно получить области синхронизации на плоскости параметров «интенсивность шума – амплитуда сигнала», в которых средняя частота равна частоте сигнала. Области синхронизации, напоминающие языки Арнольда, показаны на рис. 19.7. Как видно из рисунка, существует пороговое значение амплитуды сигнала $A_{\rm th}$, начиная с кото-

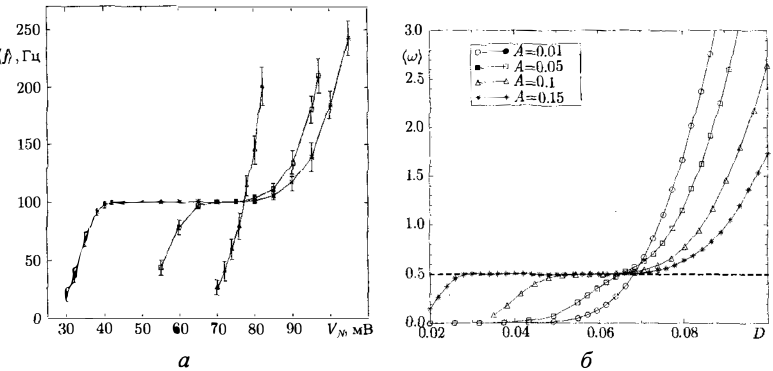


Рис. 19.6. Зависимости средней частоты выходного сигнала триггера Шмитта от интенсивности шума для амплитуд сигнала $A = 0$ мВ ($\triangle$), $A = 60$ мВ ($\square$), $A = 100$ мВ ($\star$), полученные в физическом эксперименте (*а*) и численным моделированием системы (19.11) (*б*). Порог срабатывания триггера $K = 0.2$, частота сигнала $\Omega = 0.5$

рого наблюдается эффект захвата средней частоты. При достижении порога периодический сигнал начинает эффективно управлять стохастической динамикой переходов. С ростом частоты сигнала эффект синхронизации ухудшается: во-первых, сужаются области синхронизации; во-вторых, увеличиваются пороговые значения амплитуды сигнала (см. рис. 19.7).

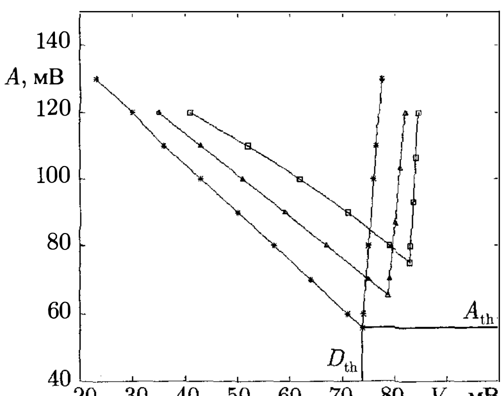


Рис. 19.7. Области синхронизации для триггера Шмитта (эксперимент) для разных частот сигнала: $f_0 = 100$ Гц ($\star$), $f_0 = 250$ Гц ($\triangle$), $f_0 = 500$ Гц ($\square$)

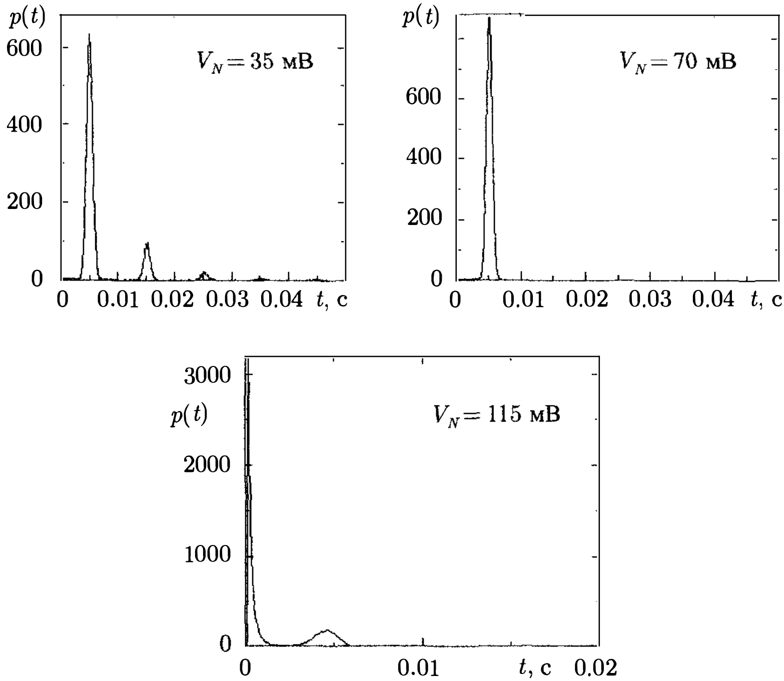
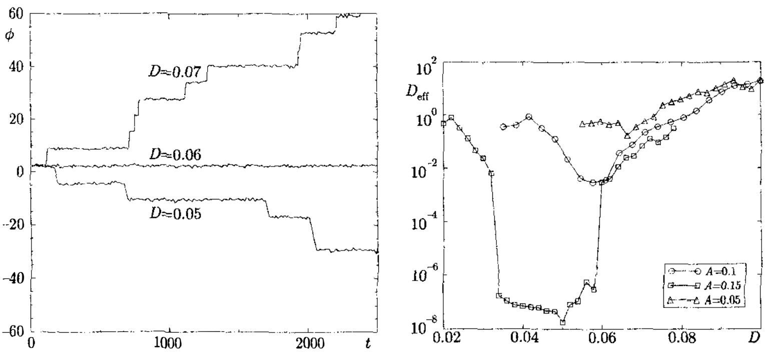


Рис. 19.8. Плотность вероятности времен пребывания триггера Шмитта в одном из состояний; амплитуда сигнала $A = 100$ мВ, частота сигнала $f_0 = 100$ Гц

На рис. 19.8 показана плотность вероятности времен пребывания $p(t)$ триггера в одном из метастабильных состояний при различных уровнях шума. При слабом шуме ($V_N = 35$ мВ) $p(t)$ содержит несколько пиков на временах, кратных половине периода сигнала. В области синхронизации ($V_N = 70$ мВ) среднее время нахождения триггера в одном из состояний совпадает с половиной периода и плотность вероятности времен нахождения содержит ярко выраженный пик при $t = T_0/2$. При большом шуме ($V_N = 115$ мВ), вне области синхронизации, среднее время, необходимое для переключения, много меньше половины периода. За период система успевает многократно переключиться из одного состояния в другое и появляется пик, соответствующий малым временам переключений. Пик, соответствующий половине периода сигнала, размывается и когерентность выходного сигнала разрушается.

Проведем сравнение полученных экспериментальных результатов с данными численного моделирования. С этой целью воспользуемся уравнением модели (19.11), задав следующие значения параметров: $K = 0.2$, $\xi(t)$ выберем в виде экспоненциально коррелированного шума с временем корреляции $\tau_c = 10^{-2}$ и интенсивностью D, описываемый процессом Орнштейна–Уленбека.



а *б*

Рис. 19.9. Временная эволюция разности фаз при $A = 0.1$, $\Omega = 0.5$ для различных значений интенсивности шума (*а*); зависимость коэффициента диффузии $D_{\rm eff}$ триггера Шмитта при $K = 0.2$, $\Omega = 0.5$ для разных значений амплитуды сигнала (*б*)

Результаты расчетов средней частоты как функции интенсивности шума, проведенных по уравнению (19.11), показаны на рис. 19.6, *б* и демонстрируют поведение, идентичное измеренному в эксперименте (рис. 19.6, *а*). На рис. 19.9, *а* показана эволюция мгновенной разности фаз ϕ триггера и входного сигнала для случая $A = 0.1$. При оптимальном уровне шума ($D = 0.06$) разность фаз остается постоянной в течение времени наблюдения. Вне области синхронизации ($D = 0.04$, $D = 0.08$) скачки фазы гораздо более частые, что приводит к быстрой диффузии фазы и, следовательно, к отсутствию синхронизации.

В случае малой амплитуды сигнала ($A \leqslant A_{\rm th}$) явление захвата средней частоты отсутствует. Результаты расчета мгновенной разности фаз свидетельствуют также об отсутствии фазовой синхронизации: наблюдается значительная диффузия фазы и временная реализация мгновенной разности фаз представляет собой пример случайного блуждания.

Результаты расчета коэффициента диффузии разности фаз показаны на рис. 19.9, *б*. Зависимость $D_{\rm eff}(D)$ характеризуется минимумом, что является следствием эффекта стохастической синхронизации.

Полученные данные свидетельствуют о том, что внешний периодический сигнал достаточной амплитуды синхронизирует стохастическую динамику переходов. Это явление сопровождается захватом мгновенной разности фаз и средней частоты.

19.4. Внешняя и взаимная стохастическая синхронизация процессов переключений в хаотических системах

Как было отмечено во введении, определенный класс хаотических систем в результате кризиса реализует режим непериодических переключений между выделенными подмножествами хаотического аттрактора. В силу нелинейности системы частота этих переключений контролируется не внешним шумом, а управляющим параметром. Как показали исследования, в таких системах возможно реализовать режим фазовой стохастической синхронизации. Для иллюстрации рассмотрим внешнюю и взаимную синхронизации процессов переключений в ряде систем с детерминированной хаотической динамикой.

Внешняя синхронизация. Обратимся к отображению

$$x_{n+1} = (ax_n - x_n^3)\exp(-x_n^2/b) + A\sin(\Omega n) \tag{19.12}$$

в режиме перемежаемости «хаос–хаос» при $a > a^* = 2.839\ldots$ Рассмотрим динамику системы в отсутствие внешнего шума для достаточно больших значений амплитуды внешней силы A. При этом процесс переключений принципиально нелинеен, его статистика будет существенно зависеть от параметра a. Используя метод двух состояний, вычислим эволюцию плотности времен пребывания $p(\tau)$ в отдельно взятой потенциальной яме при вариации параметра a. Результаты представлены на рис. 19.10 и качественно повторяют данные, полученные для триггера Шмитта (рис. 19.8).

При оптимальном значении $a = 8.34$ распределение имеет единственный гауссообразный пик с максимумом при $\tau = 0.5$, что соответствует равенству средней частоты переключений между хаотическими аттракторами частоте внешней силы.

Эффект захвата средней частоты переключений внешним сигналом для различных значений параметра A иллюстрирует рис. 19.11, *а*. С ростом амплитуды сигнала воздействия область синхронизации увеличивается, как и следовало ожидать. Из рис. 19.11, *б* видно, что данная область представляет собой типичную зону синхронизации, как и в случае триггера Шмитта (рис. 19.6). Как видно из рис. 19.11, *б*, имеет место порог синхронизации. Таким образом, эффект внешней синхронизации частоты переключе-

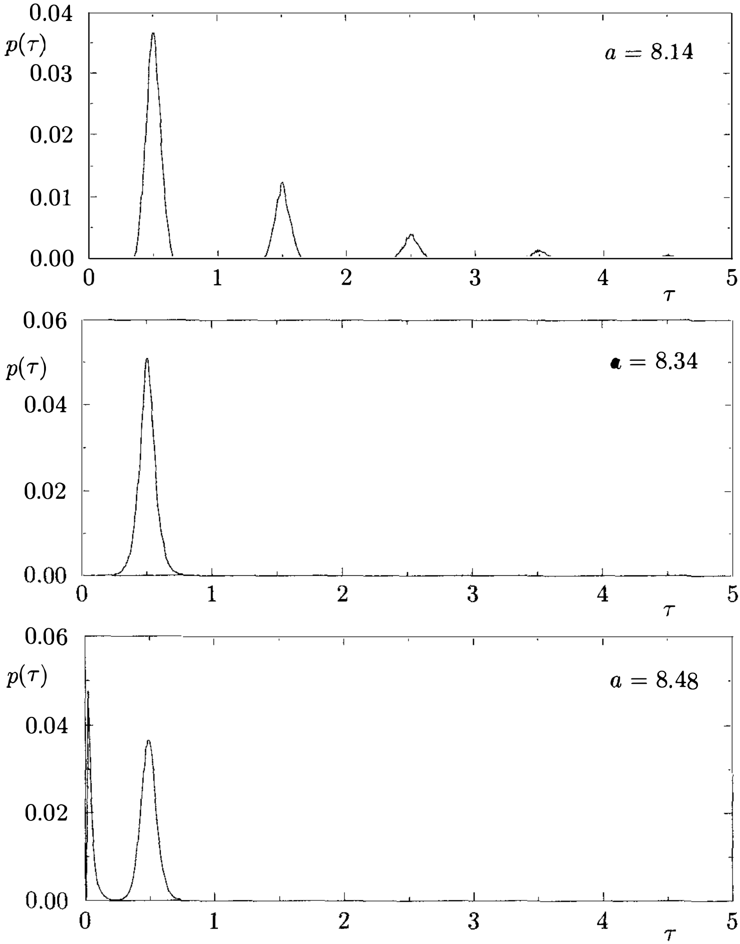


Рис. 19.10. Плотность вероятности времен пребывания в одной из потенциальных ям для отображения (19.12) для трех различных значений управляющего параметра a. Зависимости напоминают соответствующие графики для триггера Шмитта (см. рис. 19.8). τ измеряется в единицах периода внешней силы

ний в детерминированной хаотической системе уверенно регистрируется и оказывается качественно эквивалентным эффекту индуцированной шумом стохастической синхронизации.

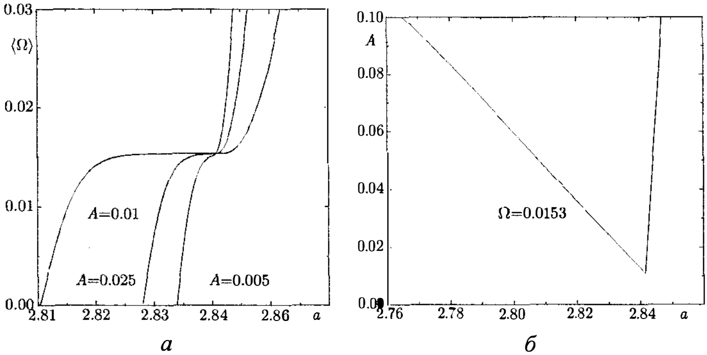


Рис. 19.11. Средняя частота переключений в зависимости от параметра a для разных значений амплитуды сигнала (*а*), область синхронизации частоты переключений для отображения (19.12) (*б*)

Эффект захвата средней частоты переключений является универсальным и проявляет себя в широком классе динамических систем с режимом перемежаемости. Исследуем в качестве примера нелинейную систему Чуа, реализующую режим динамической перемежаемости. Цепь Чуа описывается системой уравнений:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \alpha[y - h(x)],\\ \dot{y} &= x - y + z,\\ \dot{z} &= -\beta y + F(t),\end{aligned} \tag{19.13}$$

где $h(x) = m_1 x + 0.5(m_0 - m_1)(|x+1| - |x-1|)$ — кусочно-линейная характеристика системы, параметры которой фиксированы: $m_0 = -1/7, m_1 = 2/7$; $F(t) = A\cos(\Omega t)$ — внешняя периодическая сила.

Как было показано, процесс переключений в хаотической бистабильной системе (19.13) может быть индуцирован шумом либо иметь чисто динамическую природу. Применим метод двух состояний. Зафиксируем значение параметра $\beta = 14.286$. Динамика системы (19.13) будет зависеть от величины параметра α, а также от амплитуды A и частоты Ω внешнего сигнала. В отсутствие воздействия ($A = 0$) режим перемежаемости реализуется в системе (19.13) при $\alpha \approx 8.8$. Для $\alpha > 8.8$ средняя частота переключений (аналог частоты Крамерса) монотонно возрастает с увеличением α. Выберем значение амплитуды $A = 0.1$, когда реакция системы на внешнее воздействие принципиально нелинейна.

На рис. 19.12 представлены результаты расчета плотности распределения времен возврата $p(\tau)$ для различных значений параметра α. Время τ измеряется в единицах периода внешнего воздействия $T = 2\pi/\Omega$. Наблюдается удивительное сходство с данными, приведенными на рис. 19.8 для триггера Шмитта и на рис. 19.10. При определенном значении параметра $\alpha = = 8.8325$ распределение $p(\tau)$ имеет практически единственный гауссообразный пик с максимумом вблизи $\tau = 1$, что соответствует равенству средней частоты переключений и частоты внешней силы. Регистрируется эффект вынужденной синхронизации, проявляющийся в захвате средней частоты переключений периодическим сигналом.

На рис. 19.13 представлены области синхронизации, полученные в результате физического эксперимента, которые качественно напоминают «языки Арнольда», как и в случае триггера Шмитта (рис. 19.7). Отличия состоят лишь в том, что с ростом частоты сигнала уровень порога синхронизации здесь практически не изменяется, а ширина областей синхронизации увеличивается. Эти отличия обусловлены нелинейными свойствами исследуемой системы (19.13) и не касаются самой сущности наблюдаемого эффекта. Более детальные расчеты свидетельствуют о том, что эффекту синхронизации средней частоты переключений в системах (19.12) и (19.13) отвечает эффект фазовой синхронизации, полностью эквивалентный рассмотренным случаям триггера Шмитта и передемпфированного осциллятора.

Взаимная синхронизация. В качестве примера взаимной синхронизации процессов переключений рассмотрим динамику системы двух связанных моделей Лоренца:

$$\begin{gathered}
\dot{x}_1 = \sigma(y_1 - x - 1) + \gamma(x_2 - x_1), \quad \dot{x}_2 = \sigma(y_2 - x_2) + \gamma(x_1 - x_2),\\
\dot{y}_1 = r_1 x_1 - x_1 z_1 - y_1, \quad \dot{y}_2 = r_2 x - 2 - x_2 z_2 - y_2,\\
\dot{z}_1 = x_1 y_1 - z_1 b, \quad \dot{z}_2 = x_2 y_2 - z_2 b.
\end{gathered} \tag{19.14}$$

Выберем значения параметров $\sigma = 10$, $r_1 = 28.8$, $r_2 = 28$, $b = 8/3$, соответствующие случаю, когда в каждой из подсистем существует аттрактор Лоренца. Этот аттрактор в парциальной системе можно рассматривать как обобщенный бистабильный осциллятор, в котором имеет место нерегулярный процесс переключений со средней частотой, контролируемой управляющим параметром r. Введение связи ($\gamma > 0$) должно вызывать изменения средних частот переключений в каждой из подсистем и приводить к эффекту взаимной синхронизации.

Как показали расчеты, проведенные в приближении динамики двух состояний, при значениях коэффициента связи $\gamma > 5$ средние частоты пе-

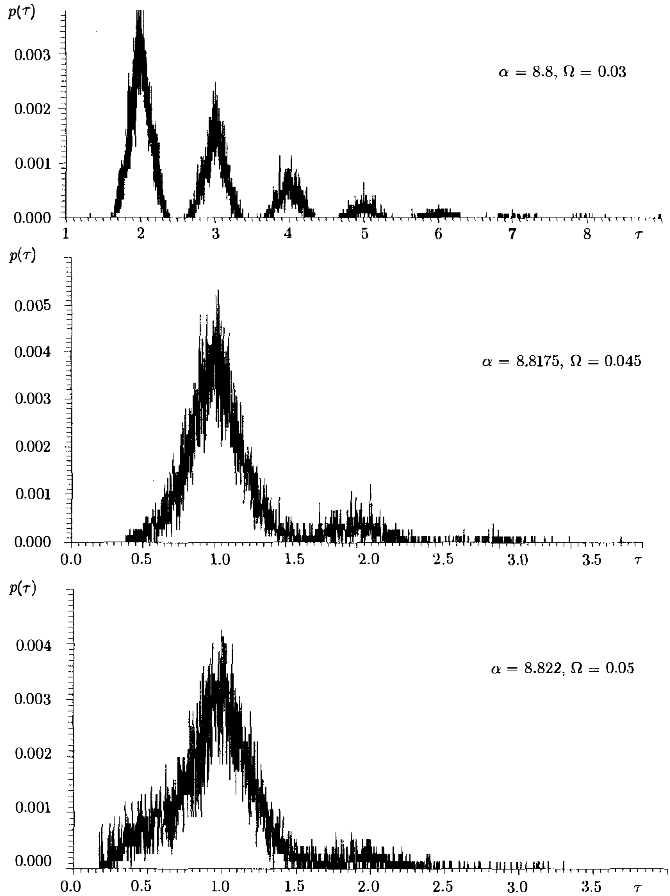


Рис. 19.12. Плотность распределения времен возврата в системе Чуа (19.13) для различных значений параметра α и частоты внешнего сигнала Ω

реключений $\langle f_1 \rangle$ и $\langle f_2 \rangle$ практически совпадают (рис. 19.14). Более того, численное моделирование динамики мгновенной разности фаз процессов $x_1(t)$ и $x_2(t)$ подтвердило эффект взаимной синхронизации: при $\gamma > 5$ разность фаз близка к нулю на временах, существенно превышающих среднее время переключений. Таким образом, при сильной связи между двумя хаотическими бистабильными осцилляторами имеет место эффект взаимной синхронизации частот переключений.

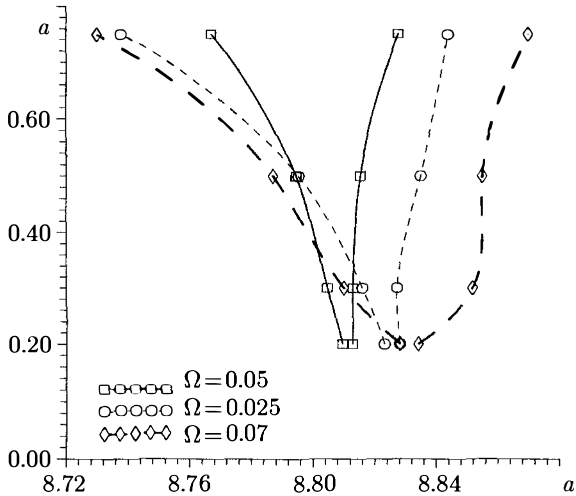


Рис. 19.13. Области синхронизации на плоскости параметров «амплитуда внешнего сигнала — управляющий параметр» для системы (19.13) для трех значений частоты внешнего сигнала Ω

19.5. Стохастическая синхронизация как индуцированный шумом порядок

Одной из важных характеристик эффекта синхронизации является повышение степени упорядочивания сигнала в результате синхронизации. Действительно, уже на качественном уровне можно оценить, например, эффект захвата частоты при синхронизации периодических автоколебаний внешним гармоническим сигналом. До наступления эффекта синхронизации в системе наблюдаются двухчастотные колебания, образом которых является двумерный тор. В режиме синхронизации реализуется режим устойчивых периодических колебаний, которому отвечает предельный цикл. Предельный цикл имеет метрическую размерность равную единице, а тор — двойке. Степени упорядоченности в данном случае можно поставить в соответствие уменьшению размерности предельного множества в фазовом пространстве системы, которое обусловлено эффектом синхронизации. Этот же эффект имеет место и при синхронизации квазипериодических и хаотических автоколебаний. Стохастическая синхронизация также должна приводить к увеличению степени упорядоченности режима колебаний. Для подтверждения такого вывода обратимся к энтропии как наибо-

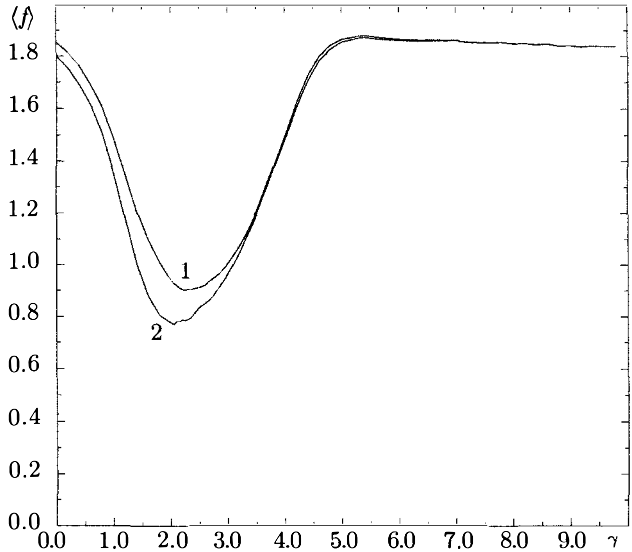


Рис. 19.14. Средние частоты переключений $\langle f_1 \rangle$ (*1*) и $\langle f_2 \rangle$ (*2*) для двух связанных неидентичных моделей Лоренца (19.14) в зависимости от степени связи. Параметры: $\sigma = 10$, $r_1 = 28.8$, $r_2 = 28$, $b = 8/3$

лее общей характеристике степени случайности процесса. Действительно, стохастическая синхронизация имеет место, как было показано выше, для случайных процессов переключений. Если справедливо утверждение о повышении степени порядка при синхронизации, то энтропия процесса при отсутствии эффекта стохастической синхронизации должна быть больше по величине энтропии процесса в режиме синхронизации. Энтропия, как мера степени случайности процесса, должна уменьшаться в результате эффекта синхронизации. Покажем, что это действительно так.

Мерой, описывающей передачу случайного сигнала через бистабильную систему, может служить спектр условных энтропий Шеннона. Иерархия условных энтропий Шеннона характеризует корреляции всех высших порядков и в пределе служит мерой упорядоченности процесса.

Анализ в терминах теории информации требует введения символьного алфавита, соответствующего стохастической динамике системы. Для бистабильных стохастических систем естественным является бинарный алфавит, состоящий из двух символов, например, «0» и «1», которые отвечают нахождению системы слева или справа от барьера. Пусть $\mathbf{i}_n = i_1, \ldots, i_n$ —

двоичная подпоследовательность или слово, состоящее из n букв. Обозначим относительную частоту повторения этого слова в данной последовательности (т. е. вероятность) через $p(\mathbf{i}_n)$. Если последовательность содержит периодическую компоненту, то временные корреляции будут отражаться в высокой структурированности функции распределения слов длины n. Аналогом здесь служит распределение времен пребывания.

Для количественной оценки степени упорядоченности этих структур используется энтропия Шеннона, применяемая к распределению слов длины n (n-слов):

$$H_n = -\sum_{(\mathbf{i}_n)\in\{0,1\}^n} p(\mathbf{i}_n)\,\log_2 p(\mathbf{i}_n). \tag{19.15}$$

H_n называются n-блоковыми энтропиями и интерпретируются как средняя информация, необходимая для предсказания появления слова $(i_1, \ldots, i_n)$ длины n.

Условные, или динамические энтропии, вводятся для $n = 1, 2, \ldots$ как

$$h_n = H_{n+1} - H_n = \left\langle -\sum_{i_{n+1}} p(i_{n+1}|\mathbf{i}_n)\,\log_2 p(i_{n+1}|\mathbf{i}_n)\right\rangle_{(\mathbf{i}_n)}, \tag{19.16}$$

где $\langle\ \rangle$ обозначает усреднение по предыстории $\mathbf{i}_n$. Это определение дополняется «начальным условием»: $h_0 = H_1$. В формуле (19.16) $p(i_{n+1}|\mathbf{i}_n)$ обозначает вероятность наблюдения символа i_{n+1} при условии наблюдения предшествующей последовательности n символов $\mathbf{i}_n$. Динамические энтропии h_n интерпретируются как средняя информация, необходимая для предсказания символа i_{n+1} (или информация, полученная после его наблюдения) при известной предыстории $\mathbf{i}_n$ (другими словами, h_n характеризует неопределенность в предсказании следующего символа в последовательности $\mathbf{i}_n$). Корреляции между символами обычно уменьшают это количество информации. Предел h_n, при $n \to \infty$

$$h = \lim_{n\to\infty} h_n, \tag{19.17}$$

называется энтропией источника. Энтропия источника определяет минимальное количество информации, необходимое для предсказания следующего символа в последовательности при наличии знания всей предыстории.

Применим подход, основанный на вычислении информационных мер, к данным, полученным из эксперимента с триггером Шмитта. Двоичные случайные последовательности, генерируемые триггером, записывались с помощью аналого-цифрового преобразователя в компьютер. Одновременно записывались последовательности на входе (сигнал и сигнал + шум), также представленные, в зависимости от знака, в виде нулей и единиц. Во всех экспериментах длина последовательностей равнялась $15000\Delta t$, где Δt — шаг выборки. Оптимальный шаг выборки, установленный в ходе вычисления энтропийных характеристик, соответствовал 12 точкам на периоде колебаний сигнала: $\Delta t = T_0/12 \approx 8.33 \cdot 10^{-4}$сек. Мы выбрали *режим синхронизации* стохастических переключений триггера и захвата средней частоты переключений, который имеет место при амплитуде сигнала $A = 100$мВ.

Разумно предположить, что последовательность, генерируемая триггером Шмитта, будет максимально упорядочена в режиме стохастической синхронизации, поэтому можно ожидать следующее поведение энтропии источника: при очень слабом шуме, когда переключения триггера крайне редки, последовательность будет характеризоваться большой степенью избыточности и энтропия будет низка; с ростом шума энтропия должна нарастать, затем убывать, достигая минимума в режиме стохастической синхронизации. Далее энтропия вновь нарастает, так как шум полностью контролирует динамику системы, разрушая режим синхронизации.

Описанная картина полностью подтверждается вычислениями, проведенными по экспериментальным данным. Все энтропийные меры рассчитывались усреднением по 20 реализациям длины $1500\Delta t$. Результаты (рис. 19.15) показывают хорошо выраженный минимум при предполагаемой интенсивности шума. Таким образом, с увеличением интенсивности шума предсказуемость выходной последовательности увеличивается. На выходе обычных линейных фильтров этот важный результат не может наблюдаться в принципе.

Увеличение предсказуемости предполагает повышение степени порядка в выходной последовательности. В режиме стохастической синхронизации энтропии отражают рост периодической части выходного сигнала, тогда при оптимальном уровне шума мы можем говорить об *индуцированном шумом порядке* во времени. Упорядоченное состояние означает, что максимальное количество переключений имеет место за время, равное половине периода сигнала, т. е. выход характеризуется более длительными корреляциями со входом.

Отметим, что минимум на графике зависимости энтропии источника от интенсивности шума наблюдается лишь для достаточно больших амплитуд периодического сигнала, когда имеет место явление синхронизации стохастических переключений триггера. В случае слабого сигнала, когда отклик стохастической системы на сигнал является практически линейным,

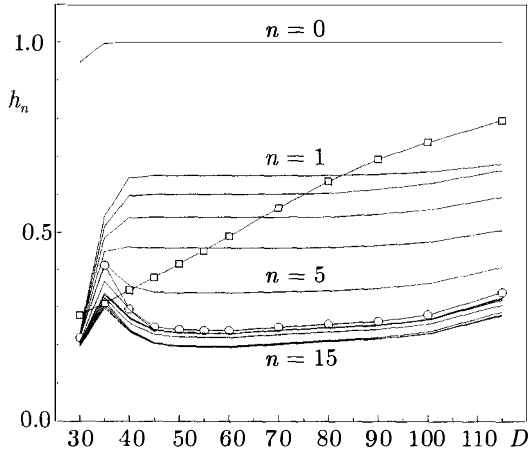


Рис. 19.15. Зависимость динамических энтропий h_n ($n = 0, 1, \ldots, 15$) от амплитуды шума. Символами □ показана $h_6(D)$ на входе триггера, а символами ○ — на выходе

энтропия монотонно возрастает с увеличением шума и в пределе большого шума стремится к 1.

19.6. Заключение

Результаты исследований, описанные в настоящей лекции, свидетельствуют о том, что классические представления о синхронизации колебаний могут быть обобщены и применены к стохастическим процессам. Существенным является требование наличия у стохастических колебаний некоторого характерного времени. Для случайных процессов в бистабильных системах таковым является среднее время пребывания или средняя частота переключений. Как было показано, несмотря на случайный характер процесса переключений, среднестатистическая частота может быть синхронизована. При этом реализуются эффекты как внешней, так и взаимной фазовой синхронизации. Эффект стохастической синхронизации проявляется в захвате средней частоты, реализуется в конечной области значений параметров и характеризуется возрастанием степени упорядоченности процесса колебаний в области синхронизации. Стохастическая синхронизация является принципиально нелинейным эффектом, наблюдается лишь при конечных значениях амплитуд сигнала воздействия или при достаточно сильной связи и допускает описание на основе обобщенных представлений теории фазовой синхронизации.

Эффект стохастической синхронизации не является некоторой математической экзотикой. Доказательством могут служить не только результаты физического эксперимента, представленные в настоящей лекции. Эффект стохастической синхронизации является одним из определяющих в понимании процессов усиления и оптимизации отношения сигнал/шум, реализующихся в режиме стохастического резонанса. Показано, что максимальное усиление сигнала в условиях стохастического резонанса при конечных амплитудах воздействующего сигнала имеет место, если реализуется эффект стохастической синхронизации.

Лекция 20

Возбудимые осцилляторы. Явление когерентного резонанса

20.1. Введение

В предыдущих лекциях мы рассмотрели один из видов стохастических осцилляторов — бистабильные осцилляторы, находящиеся под действием шума. Другой вид стохастических осцилляторов, в которых в результате действия достаточно слабого шума возникает колебательный процесс, составляют так называемые *возбудимые осцилляторы* или *возбудимые системы*.

Возбудимые стохастические осцилляторы — это системы с двумя состояниями, одно из которых является устойчивой точкой равновесия (*состояние покоя*), а другое представляет собой переходный процесс возврата к состоянию покоя (*состояние возбуждения*). Особенность возбудимых систем состоит в том, что релаксации к состоянию покоя соответствуют траектории в фазовом пространстве, имеющие форму почти замкнутой петли, т. е. по характеру близки к движению на предельном цикле. В отсутствии воздействий система находится в состоянии покоя. В результате внешнего воздействия (некоторого толчка) система приходит в состояние возбуждения, из которого сама возвращается в состояние покоя. При этом имеется некоторое характерное время возврата в состояние покоя.

Исследованию возбудимых осцилляторов, ансамблей таких осцилляторов и возбудимых сред посвящено значительное количество научных статей и монографий. Возбудимые осцилляторные режимы типичны для нейронной активности, поэтому их исследование очень важно с точки зрения понимания работы нервной системы живых организмов. Свойства последовательности импульсов возбуждения (в биофизике их обычно называют *спайками*) во многом контролируются действующим в системе шумом. При этом, как и в случае бистабильных осцилляторов, изменение параметров шумового воздействия может служить организующим фактором, приводящим к большей упорядоченности в поведении системы. Анализ моделей стохастических возбудимых систем свидетельствует о важной роли, которую шум может играть в живой природе.

20.2. Осциллятор ФитцХью–Нагумо (ФХН)

Классической моделью возбудимой системы является осциллятор ФитцХью–Нагумо (FitzHugh–Nagumo), представляющий собой двумерное упрощение модели Ходжкина–Хаксли (Hodgkin–Huxley), описывающей генерацию спайков в аксонах гигантского кальмара.

Модель ФитцХью–Нагумо может быть представленна в виде эквивалентной электрической схемы, легко реализуемой в физическом эксперименте (рис. 20.1).

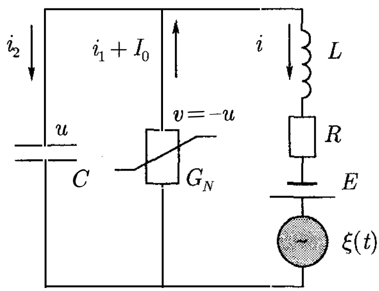


Рис. 20.1. Эквивалентная электрическая схема осциллятора ФитцХью–Нагумо: u — мембранный потенциал; i — переменная восстановления; I_0 — постоянный ток; L, C, R — эквивалентные электрические параметры системы (индуктивность, емкость и сопротивление, соответственно); G_N — нелинейная проводимость; E — э. д. с. постоянного источника питания; $\xi(t)$ — источник шума

Зададим вольт-амперную характеристику нелинейного элемента в виде

$$i_1 = -g_1 v + g_2 v^3,$$

где g_1 и g_2 — некоторые постоянные положительные коэффициенты.

Исходя из приведенной схемы легко получить следующие уравнения осциллятора в физических переменных:

$$\begin{aligned} C\frac{du}{dt_1} &= I_0 + g_1 u - g_2 u^3 - i, \\ L\frac{di}{dt_1} &= u - Ri + E + \xi(t), \end{aligned} \tag{20.1}$$

где t_1 — физическое время.

Перейдем к безразмерным переменным x и y и безразмерному времени t с помощью замены:

$$u = U_0 x, \quad i = U_0 g_1 y, \quad t = \frac{R}{L} t_1, \tag{20.2}$$

где U_0 — некоторый постоянный потенциал (например, можно выбрать $U_0 = E$). Второе уравнение содержит источник шума $\xi(t_1)$, который полагается стационарным гауссовым широкополосным случайным процессом с нулевым средним значением.

Подставляя (20.2) в (20.1), преобразовав источник шума, получаем безразмерную модель осциллятора ФХН

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{x} &= x - \alpha x^3 - y + s, \\ \dot{y} &= \gamma x - y + b + \sqrt{2D} n(t). \end{aligned} \tag{20.3}$$

Здесь точками обозначены производные по безразмерному времени t, параметры ε, α, s, γ, b также являются безразмерными и связаны с параметрами системы (20.1) следующим образом:

$$\varepsilon = \frac{CR}{Lg_1}, \quad s = \frac{I_0}{U_0 g_1}, \quad \alpha = \frac{g_2}{g_1} U_0^2, \quad \gamma \frac{1}{Rg_1}, \quad b = \frac{E}{Rg_1 U_0}.$$

Источник широкополосного гауссова шума во втором уравнении заменен нормированным гауссовым белым шумом $n(t)$ ($\langle n(t) n(t+\tau) \rangle = \delta(\tau)$, $\delta(\tau)$ — функция Дирака) с постоянной интенсивностью

$$D = \frac{1}{Rg_1 U_0} \int\limits_0^\infty \langle \xi(t_1 \xi(t_1 + \theta)) \rangle d\theta.$$

Если значение ε достаточно мало, то на фазовой плоскости можно выделить быстрые и медленные движения. Фазовый портрет системы (20.3) в возбудимом режиме без воздействия шума представлен на рис. 20.2. Медленным движениям соответствует кривая $y = x - \alpha x^3 + s$ ($\varepsilon \dot{x} = 0$), обозначенная жирной пунктирной линией серого цвета. На этой кривой располагается устойчивая неподвижная точка Q. Тонкая пунктирная прямая линия $y = \gamma x + b$ соответствует изоклине $\dot{y} = 0$. Отмеченные линии пересекаются в неподвижной точке Q. Если рассматривать осциллятор ФХН как модель нейрона, то точка Q соответствует состоянию покоя нервной клетки, точки, расположенные выше Q на левой ветке кривой медленных движений (область 1), отвечают за состояние невосприимчивости (рефрактерности), точки на правой ветви (область 3) соответствуют состоянию возбуждения, а переходы между ветвями соответствуют быстрым движениям: слева направо — переход в состояние возбуждения (область 2) и справа налево — релаксация к невозбужденному состоянию (область 4). Попав на левую ветвь (в область 1) траектория движется по ней к неподвижной точке Q. Как видно из рис. 20.2, если отклонить траекторию вниз от неподвижной точки на некоторое расстояние, то траектория совершит движение по петле, обойдя все указанные области. Необходимое отклонение от точки Q представляет собой порог возбуждения. При соответствующем выборе параметров порог может оказаться очень мал. Добавленный в систему шум время от времени выбрасывает ее за порог возбуждения, в результате чего движения по петле повторяются и возникают стохастические колебания.

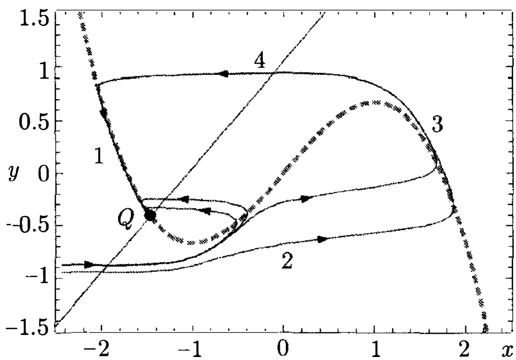


Рис. 20.2. Фазовый портрет системы (20.3) при значениях параметров $\varepsilon = 0.02$, $\alpha = 1/3$, $\gamma = 1$, $b = 1.05$, $s = 0$. Жирная пунктирная линия, изображенная серым цветом, представляет собой кривую медленных движений $y = x - \alpha x^3 + s$, тонкая пунктирная прямая соответствует изоклине $\dot{y} = 0$, точка Q — устойчивая неподвижная точка, область 1 — рефрактерное состояние (не чувствительное к действию шума), область 2 — быстрые движения, соответствующие переходу к возбужденному состоянию, 3 — состояние возбуждения, область 4 — быстрые движения, соответствующие переходу в рефрактерное состояние

Рассмотренный возбудимый режим с одной устойчивой неподвижной точкой в системе (20.3) не является единственно возможным. При вариации параметров система демонстрирует достаточно сложное бифуркационное поведение. На фазовой плоскости могут возникать и исчезать различные неподвижные точки. Имеется область параметров, соответствующая автоколебательному режиму, который возникает в результате бифуркации Андронова–Хопфа.

Качественно аналогичная модель осциллятора ФХН может быть задана в несколько упрощенном виде:

$$\begin{aligned} \varepsilon\dot{x} &= x - \alpha x^3 - y, \\ \dot{y} &= x + b + \sqrt{2D}n(t). \end{aligned} \tag{20.4}$$

Для модели (20.4) изоклина $\dot{y} = 0$ является вертикальной прямой, проходящей через неподвижную точку Q, а быстрые движения происходят вдоль прямых, параллельных оси $0X$ (см. рис. 20.3).

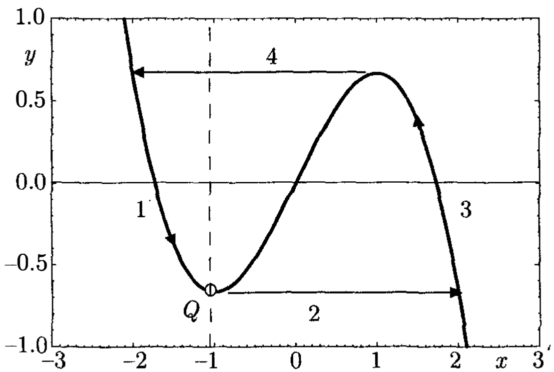


Рис. 20.3. Линии быстрых и медленных движений в модели (20.4) при значениях параметров $\alpha = 1/3$ и $b = 1.05$. Q – устойчивая неподвижная точка. Области 1–4 соответствуют аналогичным областям на рис. 20.2

Далее, без существенной потери общности, будем рассматривать упрощенную модель (20.4). Как уже отмечалось, действие случайной силы на осциллятор в возбудимом режиме приводит к возникновению стационарных стохастических колебаний. Иллюстрация стохастических колебаний приведена на рис. 20.4. При выбранной интенсивности шума стохастические колебания возбудимого осциллятора во многом похожи на периодические автоколебания релаксационного типа в генераторе с шумом. Фазовый портрет (рис. 20.4, *а*) напоминает зашумленный предельный цикл, колебания представляют собой последовательность коротких импульсов, повторяющихся с достаточно высокой регулярностью (рис. 20.4, *б*), а в спектре мощности присутствует четко выраженный максимум на некоторой характерной частоте системы ω_0 (рис. 20.4, *в*).

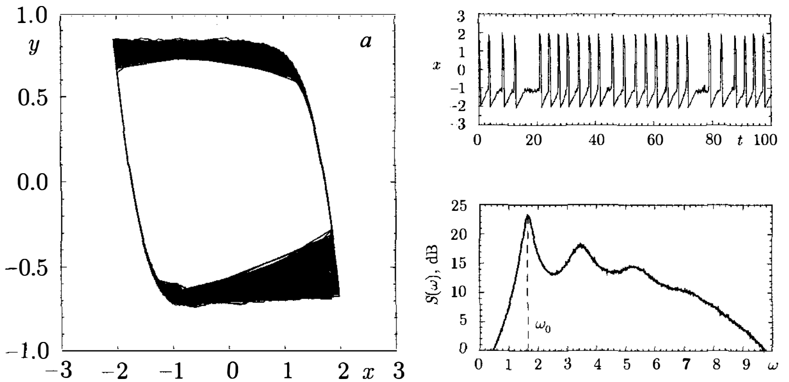


Рис. 20.4. Характеристики стохастических колебаний в модели (20.4) при значениях параметров $\alpha = 1/3$, $b = 1.05$ и интенсивности шума $D = 0.0025$

Тот факт, что в спектре стохастических колебаний возбудимых осцилляторов имеется максимум на собственной частоте ω_0 является существенным отличием данного типа стохастических осцилляторов от бистабильных осцилляторов, рассмотренных в предыдущих лекциях. Напомним, что в спектре стохастических колебаний бистабильного осциллятора отсутствует пик на средней частоте переключений. Присутствие характерной частоты ω_0 в спектре определяет сходство возбудимых стохастических осцилляторов с зашумленными автоколебательными системами.

20.3. Автоколебательный характер стохастических колебаний возбудимых систем

Данные численных и физических экспериментов свидетельствуют, что несмотря на то, что колебания в осцилляторе ФХН (в интересующем нас режиме) и подобных ему возбудимых системах возникают и поддерживаются только при наличии внешнего шумового сигнала, они характеризуются полным набором свойств, присущих автоколебательным процессам. Обсудим это более детально. Что представляет собой аттрактор исследуемой системы? В настоящее время нет общепринятого строгого определения аттрактора системы, находящейся под действием шума. В следующей лекции мы более подробно остановимся на этом вопросе и попытаемся обобщить определение аттрактора на случай неавтономной системы с произвольным (в том числе случайным) внешним воздействием. Пока отметим аналогию между существованием аттрактора в фазовом пространстве детерминированной системы и существованием инвариантной вероятностной меры в том же фазовом пространстве при воздействии на систему стационарного эргодического шума. Численные и натурные эксперименты показывают, что проекция множества стохастических траекторий на плоскость фазовых переменных системы ФХН практически не видоизменяется при вариации достаточно большого времени наблюдения. На основании имеющихся данных можно сделать вывод о существовании аттрактора у системы ФХН. Наличие аттрактора еще не доказывает того, что процесс является автоколебательным. Для этого необходимо обсудить проблему подкачки энергии в систему. С этой целью представим модель (20.4) в осцилляторном виде:

$$\varepsilon\ddot{x} + (3\alpha x^2 - 1)\dot{x} + x + b = \sqrt{2D}n(t) \tag{20.5}$$

(аналогично можно представить и систему (20.3)). Мы получили осциллятор с коэффициентом диссипации

$$\delta = \frac{3\alpha x^2 - 1}{\varepsilon}, \tag{20.6}$$

зависящим от координаты x, который может быть как положительным, так и отрицательным. Дивиргенция векторного поля системы (20.4) равна коэффициенту δ, взятому с обратным знаком, и соответственно, также меняет знак в зависимости от значения x. В области $|x| < 1/\sqrt{3\alpha}$ коэффициент диссипации — отрицателен, а дивергенция — положительна. Таким образом, в некоторой области состояний в систему происходит подкачка энергии и возбудимый осциллятор ведет себя как автогенератор. С физической точки зрения условия подкачки энергии выполняются, когда напряжение колебаний U отвечает значениям падающего участка характеристики нелинейного элемента G_N. На этом участке система характеризуется отрицательным сопротивлением и энергия источника увеличивает энергию колебаний.

Приведенные рассуждения свидетельствуют о том, что под действием шума система ФХН поддерживает колебательный режим, осуществляя синхронную нелинейную подкачку энергии от источника. Расчеты и экспериментальные измерения подтвердили важный факт: мощность колебательного процесса, которая пропорциональна $x^2(t)$, существенно превышает мощность источника шума.

20.4. Эффект когерентного резонанса

Характеристики стохастических колебаний возбудимой системы определяются как собственной динамикой системы, так и свойствами источника шума. Дело состоит в следующем. Система имеет два характерных времени: время движения по петле 1–4 и среднее время выхода за порог возбуждения (среднее время возбуждения спайка). Первое из этих времен определяется детерминированной динамикой и почти не чувствительно к шуму, а второе зависит от характеристик шума. В частности, при белом гауссовом шуме оно зависит от интенсивности шума D. Таким образом, зафиксировав параметры системы и меняя интенсивность шума, можно существенным образом менять статистику спайков.

Существует оптимальная интенсивность шума D, для которой последовательность импульсов возбудимой системы оказывается наиболее близка к регулярной. В качестве меры нерегулярности импульсов часто используется отношение среднеквадратической флуктуации интервала T между последовательными импульсами к среднему значению этого интервала:

$$R = \frac{\sqrt{\langle T^2 \rangle - \langle T \rangle^2}}{\langle T \rangle}. \tag{20.7}$$

Скобки $\langle \ldots \rangle$ могут означать как усреднение по ансамблю, так и усреднение по времени, поскольку, как правило, имеет место свойство эргодичности. Рассматривая усреднение по времени, имеем

$$\langle T \rangle = \lim_{\Delta t \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} T_i,$$

$$\langle T^2 \rangle = \lim_{\Delta t \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} T_i^2.$$

T_i — интервал между i-м и $(i+1)$-м импульсом (спайком). Он может быть определен как $t_{i+1} - t_i$, где $t_i, i = 1, 2, 3, \ldots$ — моменты времени, соответствующие достижению определенного уровня при изменении отслеживаемой динамической переменной в заданном направлении.

Экспериментальные исследования и теоретический анализ показывают, что зависимость R от D носит нелинейный характер и при некотором значении $D = D_m$ имеет минимум, соответствующий наибольшей упорядоченности последовательности импульсов (спайков), т. е. ее близости к периодической последовательности. На рис. 20.5 представлена зависимость величины R от интенсивности шума, полученная для системы (20.4). Она демонстрирует минимум R при значении интенсивности шума $D \approx 0.0025$. Характеристики колебаний, приведенные на рис. 20.4, получены как раз в этом режиме.

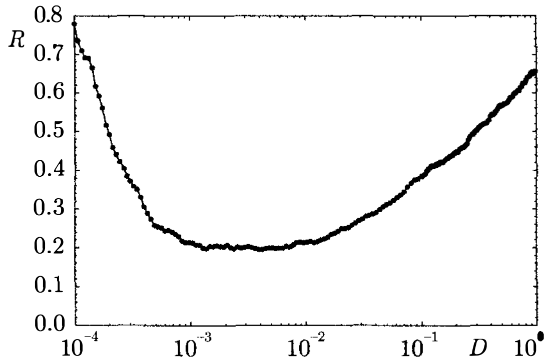


Рис. 20.5. Зависимость величины R от интенсивности шума D в (20.4) при $\varepsilon = 0.01$, $a = 1.05$

Средняя частота следования импульсов определяется как

$$\bar{\omega} = \lim_{\Delta t \to \infty} \frac{2\pi N}{\Delta t}, \tag{20.8}$$

где Δt — интервал наблюдения, N — число спайков за время Δt.

Так как

$$\sum_{i=1}^{N} T_i = \Delta t,$$

то легко видеть, что средняя частота есть величина обратная к среднему интервалу между импульсами:

$$\bar{\omega} = \frac{2\pi}{\langle T \rangle}.$$

С ростом шума импульсы возникают чаще и средняя частота следования импульсов увеличивается.

Можно ввести фазу стохастических колебаний возбудимой системы, используя последовательность моментов времени t_i. При кусочно линейной аппроксимации мгновенная фаза определяется как

$$\Phi(t) = 2\pi \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} \pm 2\pi i, \quad i = 0, 1, 2, \dots \tag{20.9}$$

Здесь i — число пересечений в заданном направлении за время наблюдения $t - t_0$.

Более универсальный способ введения мгновенной фазы стационарного случайного процесса основан на получении аналитического сигнала $s(t) = x(t) + jx_h(t)$, где j — мнимая единица, а $x_h(t)$ есть сопряженный по Гильберту процесс:

$$x_h(t) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\theta)}{t - \theta} d\theta. \tag{20.10}$$

Интеграл берется в смысле главного значения Коши. Тогда мгновенная фаза колебаний есть аргумент комплексной функции $s(t)$ или

$$\Phi(t) = arctg\left(\frac{x_h(t)}{x(t)}\right) \pm \pi k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{20.11}$$

Величина $\pm\pi k$ выбирается таким образом, чтобы фаза была непрерывной функцией времени.

Из определения мгновенной фазы $\Phi(t)$ следует определение мгновенной и средней частот колебаний:

$$\omega(t) = \frac{\mathrm{d}\Phi(t)}{\mathrm{d}t}, \quad \bar{\omega} = \left\langle \frac{\mathrm{d}\Phi(t)}{\mathrm{d}t} \right\rangle = \langle \omega(t) \rangle. \tag{20.12}$$

Используя усреднение по времени, получаем

$$\bar{\omega} = \lim_{T \to \infty} \frac{\Phi(t_0 + T) - \Phi(t_0)}{T}. \tag{20.13}$$

Значения средней частоты $\bar{\omega}$, определенной выражениями (20.8) и (20.13), а также частоты основного спектрального максимума ω_0 в пределах точности вычислений совпадают.

Мера нерегулярности импульсов R оценивает величину флуктуаций межспайкового интервала. Она связана с флуктуациями мгновенной частоты и фазы, а также с шириной спектра мощности и автокорреляционной функцией колебаний. При оптимальном значении интенсивности шума не только достигается минимальное значение величины R, но и другие статистические характеристики последовательности импульсов свидетельствуют о ее максимальной регулярности. Ширина основной спектральной линии на частоте ω_0 минимальна, а время корреляции колебаний — максимально. Минимальной ширине спектра соответствует минимальное значение коэффициента эффективной диффузии мгновенной фазы $B_{\text{эф}}$. Величина $B_{\text{эф}}$ показывает скорость линейного роста дисперсии фазы во времени и может быть оценена как

$$B_{\text{эф}} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\langle\phi^2(t)\rangle - \langle\phi(t)\rangle^2\right]. \tag{20.14}$$

Явление перехода к более упорядоченным колебаниям при выборе оптимального уровня шума получило название *когерентного резонанса* (КР).

Следует отметить, что эффекты, похожие на КР, характерны не только для возбудимых систем, но и для более широкого класса динамических систем, находящихся вблизи локальных бифуркаций периодических движений. Во многих исследованных случаях флуктуационный пик в спектре мощности имел оптимальные характеристики, т. е. был наиболее выражен на фоне шумового пьедестала, при некотором оптимальном уровне шума. Впервые подобный эффект был обнаружен в фазовой модели синхронизации вблизи седло-узловой бифуркации. Такая модель во-многом аналогична возбудимому осциллятору. Действительно, шум выбрасывает траекторию из точки устойчивого равновесия (соответствующей устойчивому предельному циклу синхронизованного автогенератора), после чего она делает полный оборот (разность фаз увеличивается на 2π) и возвращается в точку равновесия. Т.е. возникает возвратное движение по петле, как и для возбудимой системы. Данная модель обладает всеми характерными свойствами возбудимой системы, в том числе она имеет спектральный пик на характерной частоте, ширина которого достигает минимума при некотором оптимальном шуме. Кроме того наблюдаются эффекты захвата частоты и фазы, аналогичные тем, о которых будет говориться в дальнейшем.

Эффекты относительного роста когерентности наблюдались также вблизи бифуркации Андронова – Хопфа и вблизи бифуркации удвоения периода. При этом для оценки степени когерентности рассматривалась величина $C(D)$:

$$C(D) = \frac{S_{\max}(D)\omega_0}{\Delta\omega(D)}, \tag{20.15}$$

где $S_{\max}(D)$ — высота исследуемого спектрального пика при данной интенсивности шума, $\Delta\omega$ — ширина спектральной линии, ω_0 — частота спектрального максимума. Вблизи бифуркации (прежде чем она происходит в детерминированной системе) действие шума приводит к возникновению новой спектральной линии, называемой *предвестником*. В случае бифуркации рождения цикла — это линия на частоте автоколебаний, для бифуркации удвоения — это субгармоника основной частоты. Как показали исследования ряда авторов, в окрестности суперкритических бифуркаций Андронова–Хопфа и удвоения периода относительная ширина линии $\Delta\omega/\omega_0$ возрастает с ростом D практически линейно. С другой стороны, высота пика $S_{\max}(D)$ сначала растет линейно для малых значений интенсивности шума, а затем рост замедляется и, наконец, насыщается. Конкуренция роста высоты пика и относительной ширины линии при некотором значении интенсивности шума дает максимум величины $C(D)$. Однако, на наш взгляд, данный эффект еще не означает «истинного» роста степени когерентности и, соответственно, «истинного» эффекта КР. Ведь с ростом шума спектральная линия становится только шире, а время корреляции колебаний уменьшается. Сужение спектральной линии удалось наблюдать вблизи седло-узловой бифуркации предельных циклов в автогенераторах с жестким возбуждением. В этом случае, действительно, имеется некоторый оптимальный уровень шума, приводящий к росту порядка в системе, и можно говорить об эффекте КР в том же смысле, что и в возбудимых осцилляторах. Однако механизм влияния шума здесь, по-видимому, несколько иной и степень аналогии с возбудимыми системами пока не установлена.

20.5. Синхронизация возбудимых осцилляторов

Собственная частота ω_0, соответствующая главному максимуму в спектре колебаний возбудимого осциллятора, может быть захвачена внешним гармоническим сигналом. Средняя частота следования импульсов также будет меняться соответствующим образом. Добавим во второе уравнение системы (20.4) гармоническую силу $f(t) = C\cos\omega_1 t$ и рассмотрим зависимость отношения частот $\Theta = \bar{\omega}/\omega_1$ от частоты воздействия ω_1 при фиксированных значениях параметров системы, интенсивности шума и амплитуды воздействия. Результаты расчетов, полученные для трех значений амплитуды C, приведены на рис. 20.6.

Синхронизация стохастических колебаний возбудимого осциллятора находится в полной аналогии с классическим случаем эффективной синхронизации зашумленного автогенератора. Можно наблюдать смещение спектральной линии на собственной частоте непосредственно в спектре колебаний. Так как эта линия имеет конечную ширину, то синхронизация, как и в зашумленном генераторе, не является строгой. Полное совпадение частот наблюдается только при $\omega_0 = \omega_1$, а захват фазы (при любой расстройке частот) имеет место только на конечном времени. Именно это и называется эффективной синхронизацией. Для бистабильного осциллятора эффект синхронизации существенно отличается от классического. Его трудно ди-

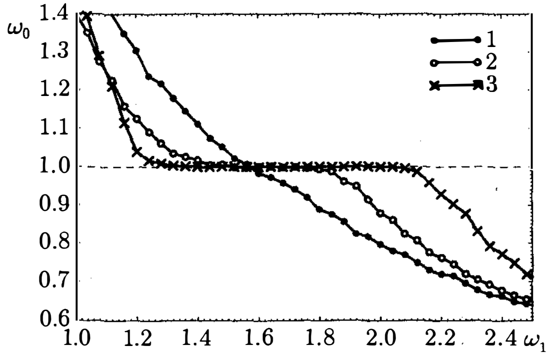


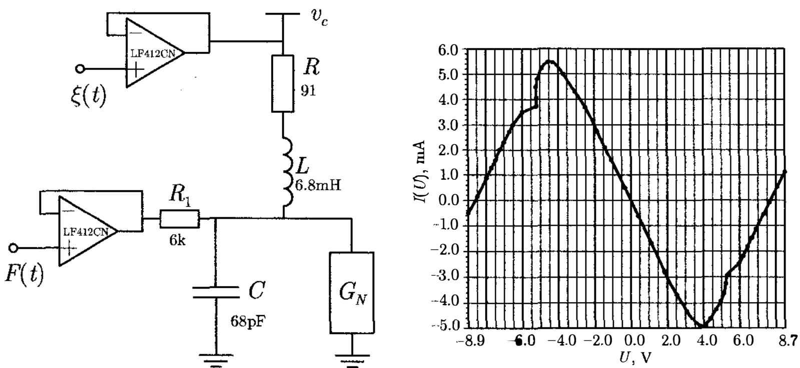
Рис. 20.6. Зависимость $\Theta = \bar{\omega}/\omega_1$ от частоты ω_1 в системе (20.4) при интенсивности шума $D = 0.0025$ и внешнем гармоническом воздействии $f(t) = C\cos\omega_1 t$ с различными значениями амплитуды C: $C = 0.05$ (кривая 1); $C = 0.2$ (кривая 2); $C = 0.5$ (кривая 3). Параметры системы: $\varepsilon = 0.01$, $a = 1.05$

агностировать по виду спектра мощности, в котором присутствуют только максимум на нулевой частоте и линия на частоте воздействия ω_1. Кроме того, захват фазы и средней частоты переключений бистабильного осциллятора проявляется лишь при изменении интенсивности шума, в то время как частота гармонического воздействия фиксируется постоянной. Получить эффект синхронизации при вариации частоты воздействия не удается.

20.6. Экспериментальное исследование когерентного резонанса и синхронизации стохастических колебаний в возбудимом осцилляторе

Явления когерентного резонанса и захвата собственной частоты стохастических колебаний в возбудимом осцилляторе были исследованы экспериментально на простой радиотехнической цепи (рис. 20.7, *а*), реализующей схему 20.1. Нелинейная проводимость G_N моделировалась с помощью устройства, собранного на операционном усилителе (вольт-амперная характеристика приведена на рис. 20.7, *б*). На исследуемую цепь подавался широкополосный шум $\xi(t)$ от внешнего источника шума с регулируемой интенсивностью (в эксперименте измерялось шумовое напряжение A_ξ). Также была предусмотрена возможность внешнего гармонического воздействия (сигнал $F(t)$).

Вначале рассмотрим поведение системы, возбуждаемой шумом без внешнего регулярного воздействия (сигнал $F(t)$ отсутствует). С ростом ин-



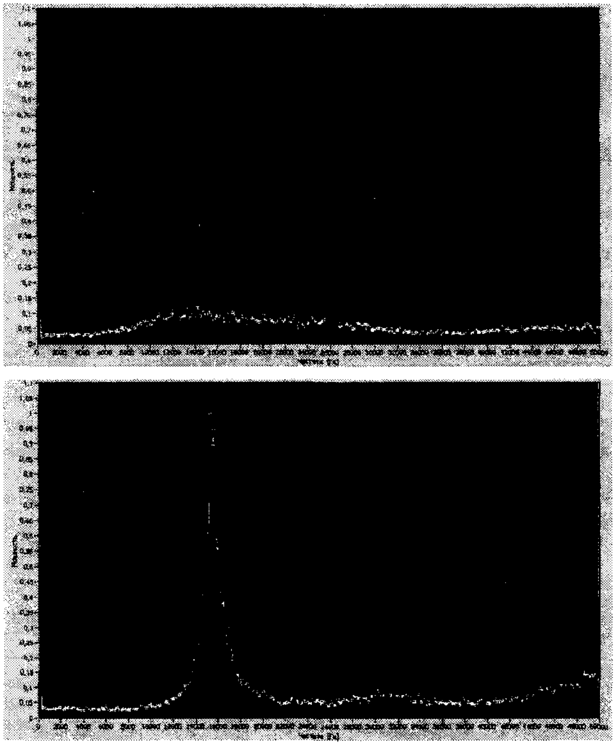
а *б*

Рис. 20.7. Схема экспериментальной установки с источником шумового напряжения $\xi(t)$ и внешним гармоническим воздействием $F(t)$ (*а*) и экспериментальная вольт-амперная характеристика нелинейного элемента (*б*). Номинальные значения элементов схемы: $R = 100$ Ом; $L = 6.8 \cdot 10^{-3}$ Гн; $C = 6.8 \cdot 10^{-11}$ Ф; $V_c = 7.2$ В

тенсивности шума $\xi(t)$ вначале возбуждаются стохастические колебания с достаточно широким спектром (рис. 20.8, *а*). Затем формируется сравнительно узкая спектральная линия с максимумом на некоторой характерной частоте (рис. 20.8, *б*). Эта линия имеет минимальную ширину при оптимальном уровне шума. При дальнейшем усилении шума ее ширина вновь увеличивается. Экспериментально были измерены зависимости ширины спектральной линии на уровне половинной мощности и спектральной плотности мощности на частоте максимума. Полученные графики представлены на рис. 20.9, *а, б*. Экспериментальные данные четко свидетельствуют о наличии эффекта КР, при котором ширина спектра минимальна, и следовательно, достигается наивысшая степень когерентности колебаний.

С целью синхронизации колебаний на осциллятор подавался внешний гармонический сигнал, как это показано на рис. 20.7, *а*. Уровень шума выбирался соответствующим режиму КР. Проводились измерения спектра мощности колебаний $S_i(\omega)$ при вариации параметров внешнего сигнала. Эффект захвата собственной частоты при изменении амплитуды и фиксированной частоте внешнего сигнала проиллюстрирован спектрами, представленны на рис. 20.10.

Захват собственных частот в режиме КР наблюдался также в экспериментах с двумя взаимодействующими осцилляторами ФХН, имеющими частотную расстройку.



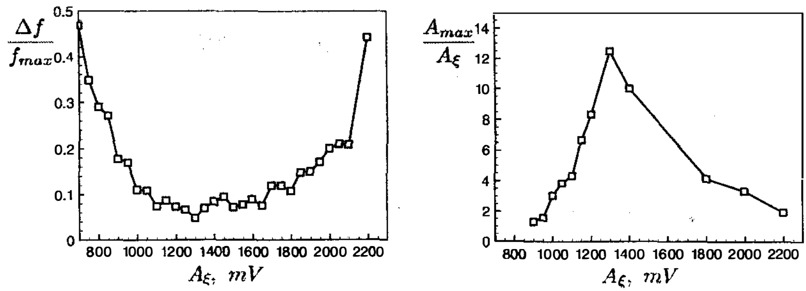
а

б

Рис. 20.8. Спектры мощности колебаний при увеличении шумового напряжения: *а* — вблизи порога возбуждения колебаний ($A_\xi = 900$ млВ); *б* – в режиме когерентного резонанса ($A_\xi = 1300$ млВ)

20.7. Индуцированная шумом синхронизация связанных возбудимых осцилляторов

Внешнее шумовое воздействие может управлять собственными колебательными режимами возбудимой системы: когерентность собственных колебаний может достигать максимума при ненулевом уровне шума, собственная частота колебаний (частота основного спектрального максимума) и совпадающая с ней средняя частота следования импульсов являются функциями интенсивности шума. При внешнем периодическом воздействии наблюдается явление синхронизации, состоящее в захвате собственной (средней) частоты колебаний. Мгновенная фаза колебаний также ока-



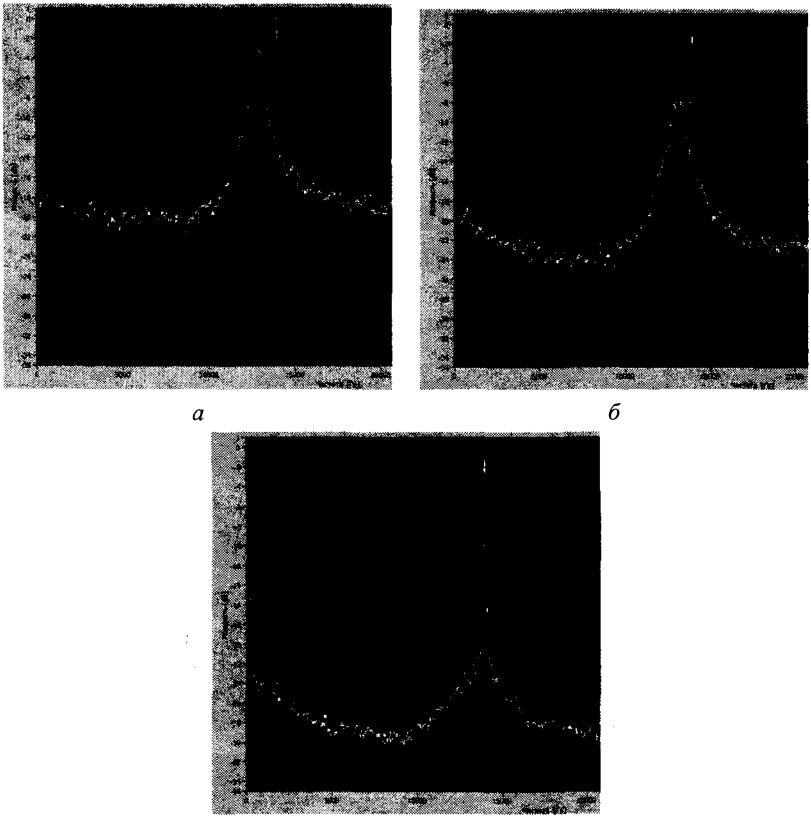
а *б*

Рис. 20.9. Зависимости относительной ширины спектра от уровня шума (*а*) и нормированной спектральной плотности мощности в точке максимума (*б*) от величины шумового среднеквадратичного напряжения A_ξ

зывается захваченной на длительных интервалах времени. В системе связанных возбудимых осцилляторов наблюдаются аналогичные эффекты, связанные со взаимной синхронизацией частот и фаз. Рассмотрим взаимную синхронизацию в ансамбле локально связанных неидентичных осцилляторов ФитцХью–Нагумо. Данная дискретная решетка диффузионно связанных осцилляторов имитирует зашумленную возбудимую среду, к которой проявляется большой интерес в биологии, химии и физике. Ансамбль описывается следующей системой стохастических дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \varepsilon\,\dot{x}(t,j) &= x - \frac{x^3}{3} - y + g\sum_k [x(t,k) - x(t,j)], \\ \dot{y}(t,j) &= x + b(j) + \sqrt{2D}\,n(t,j), \end{aligned} \qquad (20.16)$$

где $x(t,j)$ и $y(t,j)$ — соответственно быстрая и медленная переменные, j — дискретная пространственная координата, g — параметр связи. В одномерном случае эти переменные определяются по цепочке $j = 1,\ldots,m$, в двумерном случае — по квадратной решетке. Сумма по соседним элементам отвечает дискретному оператору Лапласа в одной и двух размерностях, моделируя локальные взаимодействия со степенью связи g. Параметр $b(j)$ зависит от пространственной переменной j и предполагается равномерно распределенной случайной величиной. В этом случае численно моделируется сеть неидентичных элементов ФитцХью–Нагумо. В качестве стохастического воздействия выбран гауссовский белый шум $n(t,j)$, который статистически независим по пространственной координате и имеет нуле-



а б

в

Рис. 20.10. Эффект захвата частоты осциллятора ФХН внешней силой $F(t) = C\cos(2\pi f_1 t)$ при постоянной частотной расстройке $\Delta = f_0 - f_1 = 1450$ Гц, ($f_0 = 12550$ Гц) с увеличением амплитуды C: *а* — $C = 400$ млВ; *б* — $C = 500$ млВ; *в* — $C = 900$ млВ

вое среднее и корреляцию $\langle \xi(t,j)\, \xi(t+\tau,k) \rangle = \delta_{j,k}\, \delta(\tau)$, где $\delta_{j,k}$ — символ Кронекера.

Число параметров модели можно уменьшить путем введения протяженности решетки l и затем ее нормировки: $l = \sqrt{g}\, l_0$. Теперь перед лапласианом остается один коэффициент связи, но интенсивность шума меняется. В результате влияние шума и зависимость от степени связи можно рассматривать с использованием общего параметра $Q = D/\sqrt{g^d}$, где $d = 1$

в одномерном случае и $d = 2$ — в двумерном. Например, сильная связь уменьшает силу воздействия шума, а случай большого шума соответствует пределу слабой связи. По этой причине в дальнейшем параметр g фиксируется, а в качестве управляющего параметра используется интенсивность шума.

Очевидно, следует ожидать, что при достаточно сильной связи моменты «зажигания» конкретных элементов будут происходить синхронно. Для численных расчетов выбирались $\varepsilon = 0.01$ и $g = 0.05$, а параметры активации $b(j)$ представляли собой случайные числа, равномерно распределенные в интервале $[1.03, 1.1]$. В присутствии шума это приводило к распределению времен вспышек. Расчеты выполнялись в предположении свободных границ и со случайными начальными условиями. В отсутствие шума любое начальное состояние системы эволюционировало к состоянию равновесия.

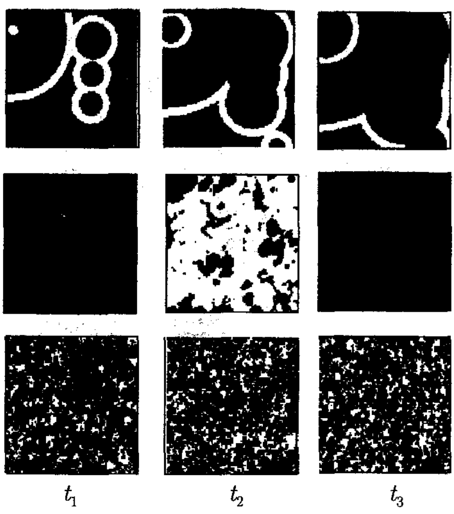


Рис. 20.11. Моментальные снимки двумерной 200×200 решетки для трех моментов времени $t_1 < t_2 < t_3$. Белый цвет соответствует возбужденным состояниям. При оптимальной интенсивности шума (второй ряд) среда демонстрирует коллективные индуцированные шумом колебания. Первый ряд: $D = 1.1 \cdot 10^{-4}$, второй ряд: $D = 3.12 \cdot 10^{-4}$ и третий ряд: $D = 5 \cdot 10^{-3}$

В зависимости от интенсивности шума D и при достаточно большом значении связи наблюдаются три основных типа пространственно-временного поведения. При малом шуме центры возбуждения возникают очень редко в случайных местах среды, приводя к распространению круговых волн. Разрушение этих волн не может привести к появлению устойчивых спиральных волн, так как скорость волн при пересечении всегда направлена в сторону от области пересечения. Таким образом, новые открытые спирали не возникают. Однако из научных публикаций известно, что в случае параметрического шума распространяющиеся фронты могут локально возбуждать небольшие направленные области, которые разрушают распространяющиеся возбуждения и приводят к появлению спиралей. В этом случае различные ячейки в среде коррелированы только на интервале времени, малом по сравнению со средним временем прохождения волн. Синхронизации между отдаленными ячейками не происходит.

При большом уровне шума скорость образования импульсов возбуждения очень велика и среда представляет собой стохастически вспыхивающие ячейки. Однако при оптимальной интенсивности шума среда становится фазово-когерентной: вспыхивания различных отдаленных ячеек происходят практически синфазно. Три описанных выше случая показаны на рис. 20.11.

При оптимальном уровне шума среда осциллирует почти периодически (см. средний ряд на рис. 20.11). Случай большого шума соответствует вспыхивающим случайным образом кластерам. Подобное поведение наблюдалось в модели зрительного центра коры головного мозга.

Рассмотрим явление индуцированных шумом глобальных колебаний в одномерном случае в контексте фазовой синхронизации. Мгновенная фаза $\Phi(t, j)$ j-го элемента вводится с помощью представления аналитического сигнала. В качестве контрольного элемента выбирается центральная ячейка в среде ($j = m/2$) и затем вычисляется разность фаз $\phi(t, k) = \Phi(t, m/2) - \Phi(t, m/2 + k)$, $k = -m/2, \ldots, m/2$.

Результаты численного моделирования показали, что при оптимальном уровне шума фазы различных осцилляторов захватываются в течение времени расчетов. В случае больших расстояний между осцилляторами фазовые флуктуации возрастают. Тем не менее разность фаз по-прежнему ограничена в определенной области в течение длительных периодов времени. При неоптимальных уровнях шума можно наблюдать частичную фазовую синхронизацию только между соседними элементами с возникающими случайным образом фазовыми сбоями. При дальнейшем увеличении расстояний между осцилляторами диффузия разностей фаз становится очень сильной и синхронизация разрушается.

В рассматриваемом случае соответствующей мерой стохастической синхронизации выступает коэффициент эффективной диффузии $B_{эф}(k)$ разности фаз $\phi(t, k)$. Величина $B_{эф}(k)$ описывает разброс во времени начального распределения разности фаз между $(m/2)$-м элементом и всеми остальными. Если постоянная диффузии уменьшается, то захват фаз происходит на более продолжительном интервале времени и, следовательно, фазовая синхронизация становится сильнее. Усредняя $B_{\text{эф}}(k)$ по пространственной координате, получаем следующую величину:

$$\bar{B}_{\text{эф}} = \frac{1}{m} \sum_{k=-m/2}^{m/2} B_{\text{эф}}(k). \tag{20.17}$$

Зависимость усредненного коэффициента эффективной диффузии $\bar{B}_{\text{эф}}$ от интенсивности шума приведена на рис. 20.12 и демонстрирует глобальный минимум при ненулевом уровне шума. Таким образом, фазовая синхронизация может быть усилена при соответствующей подстройке уровня шума.

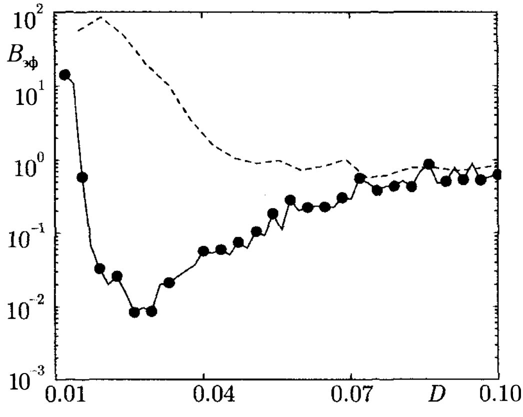


Рис. 20.12. Усредненный коэффициент эффективной взаимной диффузии как функция интенсивности шума. *Пунктир* соответствует несвязанному ансамблю ($g = 0$)

Синхронизация неидентичных осцилляторов проявляется также в захвате их частот. Рассматривались средние частоты осцилляторов $\bar{\omega}(j) = \langle \dot{\Phi}(t, j) \rangle$. В силу заданного распределения $b(j)$ элементы решетки имели различные, случайным образом распределенные частоты при чрезвычайно малой связи. Для каждого элемента решетки численно находилась средняя частота и затем строилось распределение $P(\bar{\omega})$ средних частот при различных интенсивностях шума. Полученные результаты четко показали эффект вызванной шумом пространственно-временной синхронизации. При оптимальном уровне шума, когда фазы различных осцилляторов оказываются захваченными в течение длительных периодов времени, средние частоты подстраиваются и их распределение становится чрезвычайно узким. Для других значений интенсивности шума средние частоты демонстрируют довольно широкое распределение, что свидетельствует о потере синхронизации.

20.8. Заключение

В настоящей лекции мы рассмотрели еще один тип стохастических осцилляторов — возбудимые осцилляторы. В качестве исследуемых моделей использовался осциллятор ФицХью–Нагумо и его экспериментальный радиотехнический аналог. Осциллятор ФХН в полной мере отражает существенные черты всего класса возбудимых систем, к которым можно отнести следующие:

1) возникновение стохастических колебаний под действием слабого шума;
2) наличие спектрального максимума на некоторой характерной (собственной) частоте, управляемой как параметрами системы, так и шумом;
3) эффект когерентного резонанса, выражающийся в существовании оптимального уровня шума, соответствующего максимальной упорядоченности колебаний;
4) явление вынужденной и взаимной синхронизации стохастических колебаний в режиме КР, состоящее в захвате характерных частот и фаз.

В предыдущих лекциях мы говорили о том, что бистабильные стохастические осцилляторы обладают некоторыми свойствами автоколебательных систем, к которым, прежде всего, следует отнести синхронизацию. Однако возбудимые стохастические осцилляторы еще в большей степени близки к автогенераторам. Это связано, прежде всего, с наличием собственной частоты в спектре колебаний, которая может быть захвачена при внешнем воздействии или в результате взаимодействия систем. Т. е. имеет место классический эффект синхронизации, проявляющийся в смещении соответствующего спектрального максимума, что не наблюдается для бистабильных осцилляторов. Кроме того, было показано, что возбудимые системы характеризуются коэффициентом диссипации, зависящим от мгновенного состояния. В определенных состояниях коэффициент диссипации становится отрицательным. Подкачка энергии в систему в большей степени осуществляется не благодаря шуму, а в результате включения внутреннего постоянного источника, как это имеет место в классическом автогенераторе. Роль шума, в основном, сводится к «выбрасыванию» системы из состояния устойчивого равновесия за порог возбуждения, что соответствует подключению источника энергии.

В заключение отметим, что изучение динамики простых моделей возбудимых систем чрезвычайно важно с точки зрения понимания механизмов функционирования ионных каналов и нейронной активности. Исследования стохастических моделей типа осциллятора ФитцХью–Нагумо, которые имитируют сложное поведение возбудимых биофизических элементов, может оказать существенную помощь в выявлении конструктивной роли шума в подобных компонентах. Результаты таких исследований позволяют установить общие закономерности самоорганизации в биофизике, в процессах образования индуцированных шумом структур в нелинейной химии и в электронных устройствах, на которых были проведены эксперименты по данной интересной проблеме.

Лекция 21

Автоколебания динамических и стохастических систем

21.1. Введение

Одним из важнейших типов колебательных процессов в природе являются так называемые автоколебательные процессы, или автоколебания. Автоколебания отличаются рядом характерных свойств, выделяющих их из общего широкого класса колебательных явлений, и составляют предмет одного из важных разделов теории нелинейных колебаний.

Впервые термины «автоколебания» и «автоколебательные системы» были введены А. А. Андроновым почти сто лет назад. Андронов подчеркнул целесообразность выделения автоколебательных систем как особого класса многочисленных и практически важных систем. Общей чертой этих систем, согласно Андронову, «является их способность совершать *автоколебания*, т. е. такие колебания, амплитуда которых, с одной стороны, в течение долгого времени может оставаться постоянной, а с другой стороны, вообще говоря, не зависит от начальных условий и определяется не начальными условиями, а свойствами самой системы». Андронов отмечает, что независимость параметров колебаний от начальных условий является характерным признаком автоколебаний, однако это свойство не абсолютно и может распространяться не на все начальные состояния, а на некоторую конечную область фазового пространства. То есть возможны несколько стационарных процессов с различными параметрами колебаний, которые устанавливаются в зависимости от того, в какой области выбрано начальное состояние. В наше время это явление получило название мультистабильности. Другой типичной чертой автоколебаний, согласно А. А. Андронову, является подкачка энергии от постоянного источника, осуществляемая в некоторые моменты времени и регулируемая самой системой, т. е. «*за счет непериодического источника энергии создается периодический процесс*».

А. А. Андроновым была создана теория автоколебательных систем с одной степенью свободы и предложен математический образ автоколебаний на фазовой плоскости — устойчивый предельный цикл. За прошедшие годы в теории нелинейных колебаний был получен ряд новых принципиальных результатов, связанных с открытием и исследованием широкого класса колебательных процессов, которые рассматриваются как автоколебания. Естественно попытаться понять, в чем состоит сходство всех известных автоколебательных процессов, каковы различия между ними и насколько они соответствуют определению А. А. Андронова. Кроме того, возникает потребность обобщить понятие автоколебаний на еще более широкий класс систем, которые традиционно к автоколебательным не относились, но имеют с ними много общих черт. Речь идет о неавтономных системах, находящихся под действием регулярных и случайных внешних сил. Такой подход требует рассмотрения с более общих современных позиций понятия аттрактора как математического образа автоколебаний. Если с регулярными аттракторами автоколебательных систем проблем не возникает, то вопрос об аттракторах хаотических автоколебаний, колебаний в неавтономных системах с периодическим воздействием и колебаний, возникающих под действием шума, требует детального обсуждения. В настоящей лекции мы попытаемся предложить единую концепцию автоколебаний в динамических и стохастических системах, рассмотреть математические образы соответствующих автоколебаний в виде аттракторов той или иной структуры и сформулировать наиболее общее определение автоколебаний.

21.2. Предельный цикл Пуанкаре как образ периодических автоколебаний по Андронову

Автоколебания систем с одной степенью свободы по Андронову есть устойчивые грубые периодические колебания, образом которых на фазовой плоскости является асимптотически устойчивая изолированная замкнутая траектория — притягивающий предельный цикл Андронова–Пуанкаре Γ_0 (рис. 21.1, *а*). Под изолированной замкнутой траекторией понимается такая, окрестность которой не содержит никаких других предельных траекторий за исключением ее самой. Асимптотическая устойчивость означает, что малое возмущение траектории на цикле экспоненциально убывает, асимптотически стремясь к нулю при $t \to \infty$. Иначе говоря, асимптотически устойчивый предельный цикл притягивает траектории из некоторой окрестности. Независимо от того, выбраны начальные условия внутри цикла Γ_0 или снаружи, фазовые траектории при $t \to \infty$ стремятся к предельному циклу Γ_0 и остаются на нем! Индивидуальная траектория (частное решение), безусловно, будет зависеть от начальных условий, но предельное множество — нет. Это означает, что колебания, соответствующие одному и тому же предельному циклу, в зависимости от начальных условий будут иметь разную фазу. Вне цикла Γ_0 движения носят переходный, нестационарный характер, на предельном цикле — это установившийся строго периодический процесс. Совершенно ясно, что реализация предельного цикла возможна исключительно в нелинейных диссипативных системах. Это возможно лишь в случае, когда, во-первых, в системе присутствуют и диссипация, и подкачка энергии, а во-вторых, соотношение между диссипацией и подкачкой зависит от мгновенного состояния. В случае периодических автоколебаний затраченная энергия восполняется строго за период колебаний.

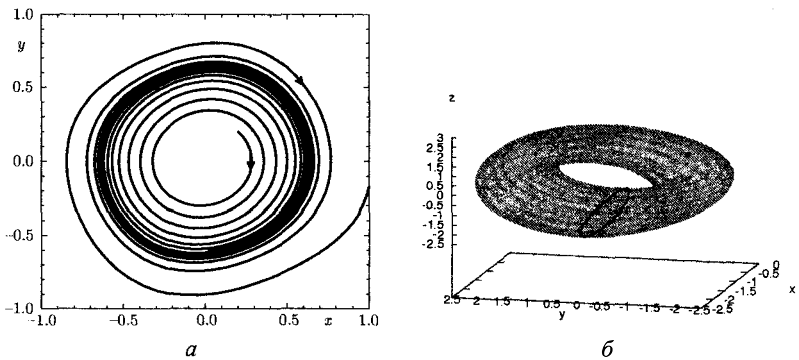


Рис. 21.1. Регулярные аттракторы автоколебательных систем: *а* — предельный цикл на плоскости; *б* — притягивающий двумерный тор в R^3. Темные точки соответствуют сечению Пуанкаре

Множества, подобные асимптотически устойчивому предельному циклу Γ_0, сейчас принято называть аттракторами. Аттрактор представляет собой инвариантное (то есть не изменяющееся под действием оператора эволюции) притягивающее предельное множество в фазовом пространстве динамической системы (ДС). Фазовые траектории из некоторой области (бассейна притяжения) «притягиваются» к аттрактору в пределе $t \to \infty$ и остаются на нем.

Естественно обобщить определение А. А. Андронова на случай динамической системы с размерностью фазового пространства $N > 2$. Пусть имеется автономная динамическая система конечной размерности N

$$\dot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x}, \vec{\mu}), \quad \vec{x} \in R^N, \quad \vec{\mu} \in R^m, \tag{21.1}$$

где $\vec{x}$ — вектор состояния, $\vec{\mu}$ — векторный параметр. Если система (21.1) имеет устойчивое периодическое решение $\vec{x}(t+T) \equiv \vec{x}(t)$, то ему отвечает аттрактор в виде устойчивого предельного цикла в N-мерном фазовом пространстве, который является математическим образом периодических автоколебаний.

21.3. Квазипериодические автоколебания. Регулярные аттракторы ДС

Подход А. А. Андронова можно применить и к квазипериодическим устойчивым колебаниям автономной системы, которые также можно назвать автоколебаниями. Пусть, к примеру, динамическая система (21.1) имеет устойчивое двухчастотное колебательное решение $\vec{x}(t) = \vec{x}(\omega_1 t, \omega_2 t)$. Асимптотическая устойчивость решения $\vec{x}$ означает, что независимо от начальных данных фазовые траектории из некоторой области фазового пространства в пределе $t \to \infty$ стремятся к инвариантному двумерному тору T^2 (рис. 21.1, *б*). Поверхность тора является притягивающим предельным множеством (аттрактором), соответствующим квазипериодическим автоколебаниям.

Как мы видим, определение автоколебаний, данное А. А. Андроновым, полностью можно отнести и к случаю квазипериодических автоколебаний. Автономная система с полутора и более степенями свободы может поддерживать устойчивые колебания за счет энергии постоянного источника. Затраты энергии на рассеяние в данном случае компенсируются не строго периодически, а с некоторой «погрешностью», что приводит к более сложному характеру колебаний. Однако при этом сохраняются оба требования: решение устойчивое и в установившемся режиме не зависит от начального состояния. Все приведенные рассуждения справедливы и для случая квазипериодических колебаний с n независимыми частотами ω_n, $n > 2$. Стационарные траектории в этом случае будут принадлежать n-мерному тору в фазовом пространстве ДС (21.1).

Назовем периодические и квазипериодические автоколебания *регулярными*, подразумевая их детерминированный характер и свойство повторяемости с заданной точностью через определенное время (период или квазипериод). Таким образом, математическими образами регулярных автоколебаний являются аттракторы в виде предельного цикла и тора. Будем называть такие аттракторы *регулярными*, так как они соответствуют регулярным колебаниям и, кроме того, имеют простую геометрическую структуру, являясь многообразиями (кривая, поверхность, гиперповерхность)[1].

[1]Напомним, что в сечении Пуанкаре периодическим колебаниям соответствует аттрактор в виде неподвижной точки или совокупности конечного числа точек, а двухчастотным квазипериодическим колебаниям — инвариантная замкнутая кривая.

К регулярным аттракторам также следует отнести асимптотически устойчивые точки равновесия (узел и фокус). Однако система, обладающая только такими аттракторами, по определению Андронова не является автоколебательной.

21.4. Хаотические автоколебания

Открытие и исследование динамического хаоса показали, что динамические системы могут иметь решения, соответствующие установившимся режимам, которые не являются ни периодическими, ни квазипериодическими. Такое поведение возникает не только под действием внешней силы, но также характерно для широкого класса автономных нелинейных диссипативных систем с размерностью фазового пространства $N \geqslant 3$. Таким образом, возможны хаотические автоколебания (см. лекции 5 и 10), обладающие лишь частичной и нерегулярной во времени повторяемостью. В фазовом пространстве им соответствует предельное множество со сложной геометрической структурой, называемое хаотическим или странным аттрактором (см. рис. 21.2). Распространяется ли определение Андронова на этот случай? Формально нет, поскольку хаотические решения являются неустойчивыми по Ляпунову, хотя и принадлежат аттрактору, а сам хаотический аттрактор в большинстве случаев не является структурно устойчивым (грубым). Однако если рассматривается автономная диссипативная система, то с физической точки зрения возникающие в ней хаотические колебания есть не что иное, как автоколебания в полном соответствии с представлениями Андронова: их характер не зависит от начального состояния (выбираемого в некоторой области), а рассеяние энергии компенсируется подкачкой от постоянного источника. Разница лишь в том, что компенсация затрат энергии в таких системах также регулируется самой системой, но происходит не регулярно. Равенство поступающей и расходуемой энергии выполняется в среднем по времени лишь в пределе $t \to \infty$.

Чтобы обобщить понятие автоколебаний на случай динамического хаоса, приходится отказываться от требования грубости и устойчивости решений. При этом сохраняется главное и практически наиболее важное требование: независимость стационарного режима от начального состояния, т. е. наличие хаотического аттрактора как образа хаотических автоколебаний. Тогда хаотические колебания как решение задачи Коши для автономной динамической системы (21.1), которому отвечает образ в виде хаотического аттрактора, можно трактовать как автоколебания. Характеристики и свойства хаотических автоколебаний определяются структурой хаотических аттракторов и могут быть соответствующим образом классифициро-

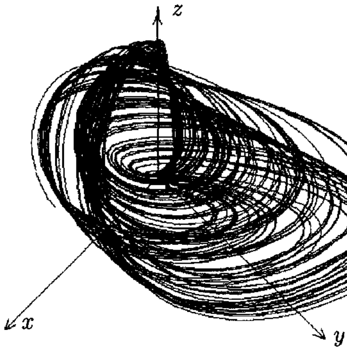


Рис. 21.2. Хаотический аттрактор в генераторе Анищенко – Астахова

ваны. С физической точки зрения такой подход, безусловно, плодотворен, так как отражает принципиально важное свойство автоколебательной системы независимо от начальных условий «самонастраиваться» на некий режим функционирования, определяющийся исключительно внутренними параметрами и характеристиками автономной нелинейной диссипативной системы. Отметим, что практически во всех научных работах авторы рассматривают режим динамического хаоса в качестве автоколебательного, не отмечая противоречия такого подхода определению автоколебаний по А. А. Андронову.

С обобщением понятия аттрактора на системы с хаотическим поведением связаны определенные проблемы. Данные нами ранее определения не являются математически строгими. До настоящего времени не существует единого общепринятого определения аттрактора, которое было бы математически непротиворечивым и находилось в соответствии с экспериментально наблюдаемым множеством типов установившихся колебаний. Различают максимальный аттрактор, вероятностно предельное множество по Милнору, статистически предельное множество по Ильяшенко. Наиболее часто используется определение аттрактора как *максимального аттрактора поглощающей области*. Приведем данное определение.

Пусть автономная ДС задана оператором эволюции $T^\tau : R^N \to R^N$ и пусть B есть *поглощающая область* в R^N, то есть для B выполняется условие: $T^\tau \bar{B} \subset B$, $\tau > 0$. *Максимальным аттрактором* $A_{\max}$ в поглощающей области B называется множество

$$A_{\max} = \bigcap_{\tau>0} T^\tau B.$$

Некоторое инвариантное множество A назовем *аттракторм* ДС, если существует поглащающая область, для которой A является максимальным аттрактором. *Бассейном* (*областью*) *притяжения* аттрактора A называется множество U, такое что все траектории из U стремятся к A при $t \to \infty$.

Определить хаотический аттрактор просто как притягивающее предельное множество не достаточно. Действительно, что собой представляет притягивающее предельное множество хаотической системы? Известно, что для большинства динамических систем то, что обычно называют хаотическим аттрактором, на самом деле представляет собой квазиаттрактор, состоящий из различных инвариантных подмножеств: аттракторов, репеллеров и седел, гомоклинических и гетероклинических орбит, причем в него оказываются включены и регулярные аттракторы. Траектории на хаотическом квазиаттракторе, вообще говоря, не являются эргодическими, так как не заполняют всюду плотно весь квазиаттрактор. Однако присутствие в системе даже очень малого шума, например, ошибок, связанных с конечной разрядностью при проведении численного моделирования, объединяет все множества и бассейны притяжения аттракторов (как правило, очень узкие). Траектории становятся действительно эргодическими. Но при этом возникает новый вопрос: что такое аттрактор в системе с шумом? Мы вернемся к этому вопросу позже, а сейчас рассмотрим случай неавтономных систем с регулярным внешним воздействием.

21.5. Колебания неавтономных систем

Рассмотрим режим колебаний в неавтономной динамической системе

$$\dot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x}, t, \vec{\mu}), \quad \vec{x} \in R^N, \quad \vec{\mu} \in R^m. \tag{21.2}$$

В случае неавтономной системы оператор эволюции зависит не только от интервала времени, на котором рассматривается изменение состояния ДС, но также от начального момента времени. Поэтому, чтобы однозначно определить состояние, надо задать не только фазовые координаты, но и момент времени. Другими словами, время t само является фазовой координатой. Таким образом, под действием оператора эволюции одна из фазовых координат, а именно t, неограниченно растет и фазовые траектории не принадлежат ограниченной области пространства состояний (R^N, t).

Сведение системы с регулярным воздействием к автономной форме.

Если воздействующая на систему внешняя сила является периодической, то система (21.2) может быть приведена к автономному виду, так что траектории на аттракторе будут ограничены. Например, пусть на динамическую систему (21.1) действует гармоническая внешняя сила $C\sin(\omega_{\text{вн}}t)$ и система описывается неоднородным уравнением:

$$\dot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x}, \vec{\mu}, C\sin(\omega_{\text{вн}}t)). \tag{21.3}$$

В этом случае можно представить неавтономную систему в автономной форме. Для этого нужно ввести фазу воздействия $\Psi = \omega_{\text{вн}}t$ и добавить в (21.3) уравнение для фазы Ψ. Получаем

$$\begin{aligned} &\dot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x}, \mu, C\sin(\Psi)), \\ &\dot{\Psi} = \omega_{\text{вн}}. \end{aligned} \tag{21.4}$$

Теперь состояние системы задается вектором с $N+1$ компонентами: $x_1, x_2, \ldots x_N$, Ψ. Если предполагать, что переменная Ψ определена на всей действительной оси, то новая переменная ничего не дает. Однако можно перейти к ограниченным фазовым траекториям, если положить, что $\Psi \in [0, 2\pi]$ и ввести цилиндрическое фазовое пространство. На рис. 21.3 показаны фазовые траектории неавтономной системы, лежащие на цилиндре (в целях наглядности приведена только одна динамическая переменная x). В частности, цилиндр охватывает устойчивая (притягивающая) траектория Γ_1, удовлетворяющая определению предельного цикла. Формально мы имеем дело с автономной системой (21.4), имеющей аттрактор в виде предельного цикла Γ_1 на цилиндре. Можно ли в этом случае говорить об автоколебаниях? Вопрос не простой и требует обсуждения. Если подходить к вопросу чисто формально, то, казалось бы, мы имеем дело с автоколебаниями: система (21.4) — автономная, имеет аттрактор в виде притягивающего предельного цикла, установившиеся колебания не зависят от начальных условий. Все требования по Андронову здесь выполняются. Однако с физической точки зрения есть принципиальное отличие системы (21.4) от классической автоколебательной системы, такой, например, как осциллятор Ван дер Поля. В системе (21.4) *неявно* присутствует внешняя сила, которая по существу является причиной колебаний, а собственная активная колебательная мода в системе отсутствует.

По-видимому, можно выделить формальные признаки, по которым модель типа (21.4) может быть отличима от «настоящей» автоколебательной системы (например, цилиндрическое фазовое пространство). Но нас больше интересуют различия в поведении системы, в характере установившихся в ней колебаний. Особенности неавтономных колебаний проявляются, если, в свою очередь, подать на систему (21.4) внешнее воздействие и попытаться

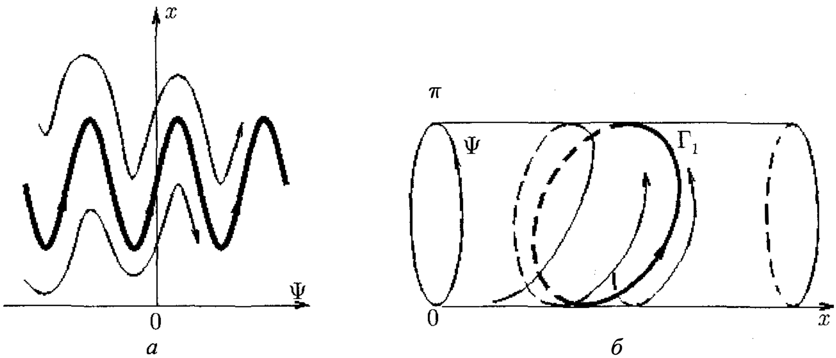


Рис. 21.3. Фазовые портреты неавтономной системы $\dot{x} = f(x) + B\sin\omega_{\text{вн}}t$: ($a$) для $\Psi = \omega_{\text{вн}}t$, определенной на интервале $(-\infty, +\infty)$, и ($б$) для $\Psi \in [0, 2\pi]$

синхронизовать колебания. Как известно, характерной особенностью автоколебаний является их способность «быть синхронизированными». Иначе говоря, автоколебательная мода системы должна обладать некоторой способностью к адаптации, к изменению своих характеристик в соответствии с управляющим сигналом. Под синхронизацией мы понимаем здесь синхронизацию в смысле Гюйгенса, а именно подстройку характерных частот и фаз автоколебаний, в отличие от полной синхронизации, имеющей место только при взаимодействии полностью идентичных систем или от эффекта подавления автоколебательного режима. Если колебания системы (21.4) не являются автоколебательной модой, а порождаются внешней силой, то синхронизовать их невозможно. Таковы колебания в неавтономном диссипативном осцилляторе, например, в осцилляторе Дуффинга. Вместе с тем неавтономная система может представлять собой генератор с внешним периодическим воздействием. В этом случае имеется колебательная мода, которая может быть захвачена, в то же время имеется частота или частоты, навязываемые системе извне. Они остаются постоянными. Таким образом, возможна лишь частичная синхронизация.

Приведенные рассуждения позволяют нам сделать следующее заключение: автоколебания предполагают в качестве необходимого условия наличие аттрактора в динамической системе. Однако этого не достаточно. С физической точки зрения целесообразно ввести дополнительное требование — возможность фазо-частотной синхронизации этого аттрактора. В этом плане и периодические колебания, и квазипериодический режим, и динамический хаос могут удовлетворять указанным двум требованиям. Периодические колебания в системе (21.4), которым соответствует предельный цикл на цилиндре, не удовлетворяют второму условию и в этом смысле не являются автоколебаниями.

Обобщение понятия аттрактора на случай неавтономной системы с произвольным воздействием. Если внешнее воздействие на систему (21.2) является нерегулярным (хаотическим или случайным), то представление системы в автономном виде невозможно[2]. Как ввести понятие аттрактора для неавтономной системы в общем случае? Поскольку состояние неавтономной системы задается не только вектором $\vec{x} \in R^N$, но и текущим моментом времени t, то фазовое пространство должно представлять собой уже не арифметическое пространство R^N, а функциональное пространство. В качестве фазового пространства для всех неавтономных систем в R^N может служить пространство H, которому принадлежат все ограниченные интегрируемые вектор-функции $\vec{x}(t)$[3]. В H можно задать скалярное произведение

$$\langle \vec{x}(t), \vec{y}(t) \rangle = \int\limits_0^\infty (\vec{x}, \vec{y}) \exp(-\beta t) dt, \quad \beta > 0 \tag{21.5}$$

и норму

$$||\vec{x}(t)|| = \sqrt{\int\limits_0^\infty |\vec{x}(t)|^2 \exp(-\beta t) dt}. \tag{21.6}$$

Скобки $(\,,\,)$ обозначают скалярное произведение векторов в R^N, а скобки $\langle\,,\,\rangle$ — скалярное произведение вектор-функций. Таким образом, H есть пространство Гильберта. Величина β — некоторая заданная константа. Если решение системы (21.2) $\vec{x}(t, \vec{x}_0)$ с начальным условием $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$ стремится по норме к ∞ медленнее, чем $\exp(\beta t)$, то оно также принадлежит H.

Определим оператор эволюции в H следующим образом:

$$T_\tau \{\vec{x}(t)\} := \vec{x}(t + \tau). \tag{21.7}$$

Действие оператора качественно проиллюстрировано на рис. 21.4. Заметим, что $\vec{x}(t + \tau)$ не обязательно является решением системы (21.2) $\vec{x}(t, \vec{y}_0)$ для какого-то начального $\vec{y}_0$.

---

[2] Точнее говоря, в случае хаотического воздействия система легко сводится к автономной, если ее дополнить уравнениями системы, генерирующей хаотический сигнал воздействия. Однако если эти уравнения не известны, то задача сведения системы к автономному виду оказывается невыполнимой.

[3] Мы используем идеи, высказанные в частной беседе профессором В. С. Афраймовичем, и выражаем ему свою благодарность.

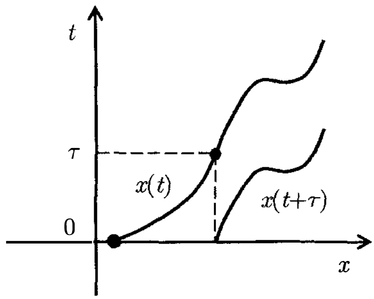


Рис. 21.4. Иллюстрация действия оператора эволюции в H

Оператор эволюции (21.7) обладает тем же характерным свойством, что и оператор эволюции автономной системы, определенный в R^N:

$$T_{\tau_1+\tau_2} = T_{\tau_1} o T_{\tau_2} = T_{\tau_2} o T_{\tau_1},$$

где символ o обозначает суперпозицию операторов.

Для автономной ДС справедливо следующее утверждение: если M есть множество решений, то

$$T_\tau M = M, \tag{21.8}$$

где T_τ — оператор эволюции автономной системы. Для неавтономной ДС (21.2) свойство (21.8), вообще говоря, не выполняется. Определим множество M' как

$$M' = \bigcup_{\tau=0}^{\infty} T_\tau M, \tag{21.9}$$

где T_τ — оператор эволюции неавтономной системы, заданный соотношением (21.7). Тогда для M' аналогично (21.8) получаем

$$T_\tau M' = M'. \tag{21.10}$$

Назовем *поглощающей областью* в M' множество $U \in M'$, для которого $T_\tau U \in U$. Тогда для неавтономной системы (21.2) с оператором эволюции (21.7) в H можно определить *максимальный аттрактор* в полной аналогии с определением в подразделе 20.4. *Максимальный аттрактор* A динамической системы (21.2) в области U есть

$$A = \bigcap_{\tau=0}^{\infty} T_\tau U. \tag{21.11}$$

Таким образом, понятие аттрактора чисто формально можно обобщить на случай неавтономной системы с произвольным внешним воздействием. Однако такое обобщение мало что дает с точки зрения наглядности и экспериментальной наблюдаемости аттрактора, поскольку введенный в рассмотрение аттрактор представляет собой множество в функциональном пространстве.

Можно определить аттрактор неавтономной системы и по-другому, рассматривая множество точек X_t в R^N, принадлежащих фазовым траекториям в фиксированный момент времени t. Определенный на этом множестве оператор эволюции $T_\tau(t) : X_t \to X_{t+\tau}$ зависит от момента времени и не удовлетворяет условию (21.8). Используя заданный таким образом оператор эволюции, можно дать определение поглащающей области и максимального аттрактора $A(t)$ в R^N, аналогичное определению в подразделе 20.4. Множество $A(t)$ в этом случае можно наглядно представить как множество точек в R^N, но оно оказывается зависящим от выбранного момента времени t, хотя в любой момент остается топологически эквивалентным. Подобный подход используется для определения аттрактора в системах со случайным возмущением оператора эволюции.

Аттрактор системы с шумом. Внешнее воздействие на систему может быть случайным. Более того, можно утверждать, что любая реальная система подвергается случайным воздействиям. В этом случае поведение системы представляет собой случайный процесс $\vec{x}(t)$. Переменная $\vec{X}$ в каждый момент времени случайным образом принимает одно из множества возможных значений в R^N, даже если начальное состояние $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$ строго задано. При определенных условиях в системе устанавливается стационарная плотность вероятности $p^{\text{ст}}(\vec{x})$, не меняющаяся во времени и не зависящая (в определенной мере) от начальной плотности вероятности $p_0(\vec{x})$.

Когда говорят об аттракторе в фазовом пространстве R^N динамической системы с шумом, то обычно подразумевают область, в которой фазовые траектории проводят большую часть времени в соответствии с распределением $p^{\text{ст}}(\vec{x})$. Эту область иногда называют *стохастическим аттрактором* (стохастическим равновесием, стохастическим циклом и т. д.). Однако употребление данного термина в указанном смысле не соответствует строгому определению и не является общепринятым. Далее мы определим *стохастический аттрактор* несколько иначе. Можно также употребить термин «зашумленный аттрактор» (noisy attractor). Границы зашумленного аттрактора строго не определены: при гауссовом шуме фазовая траектория теоретически может попасть в любую точку фазового пространства. Следует также отметить, что размерность зашумленного аттрактора совпадает с размерностью фазового пространства: это — область, имеющая ненулевой объем в отличие от аттрактора диссипативной детерминированной автономной системы. Данное интуитивное определение зашумленного аттрактора по сути совпадает со статистическим предельным множеством в случае, когда в системе есть шум.

Пусть имеется динамическая система, задаваемая векторным дифференциальным уравнением, правая часть которого зависит от некоторого случайного (в общем случае многокомпонентного) воздействия $\vec{\xi}(t)$,

$$\dot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x}, \vec{\xi}(t), \vec{\mu}), \quad \vec{x} \in R^N, \quad \vec{\xi} \in R^N, \quad \vec{\mu} \in R^m. \tag{21.12}$$

Такие системы отнесены к классу случайных динамических систем (random dynamical system).

Если зафиксировать реализацию внешнего случайного воздействия $\vec{\xi}(t)$, то система (21.12) будет представлять собой детерминированную неавтономную систему со сложным, нерегулярным сигналом воздействия. К такой системе применимы все рассуждения, приведенные в предыдущем разделе. Множество точек в R^N, определяющих мгновенные состояния системы (21.12) в фиксированный момент времени t для множества всевозможных начальных состояний в момент времени $t_0 \to -\infty$ и одной и той же реализации случайного воздействия $\vec{\xi}(t)$, назовем *случайным* или *стохастическим* аттрактором (random attractor) системы (21.12). Это множество, вообще говоря, зависит от выбора момента t и реализации $\vec{\xi}(t)$, но в предположении эргодичности случайного возмущения его геометрические свойства будут неизменными во времени и не зависящими от реализации $\vec{\xi}(t)$.

Стохастический аттрактор дает представление об устойчивости поведения ДС со случайным воздействием и сложности динамической компоненты оператора эволюции. На рис. 21.5 в качестве примера приведен вид стохастического аттрактора в осцилляторе Дуффинга с аддитивным шумом

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} - x + x^3 = \sqrt{2D}n(t), \tag{21.13}$$

где $n(t)$ — нормированный источник белого гауссова шума, D — константа, задающая интенсивность шума.

При выбранных значениях γ и D стохастический аттрактор является хаотическим и имеет сложную канторову структуру. Соответствующий старший ляпуновский показатель положителен. Изменяя γ или D, можно добиться превращения стохастического аттрактора в единственную точку, что соответствует переходу системы в устойчивый режим — старший ляпуновский показатель становится отрицательным. Кроме стохастических аттракторов, аналогичным образом можно ввести в рассмотрение и другие

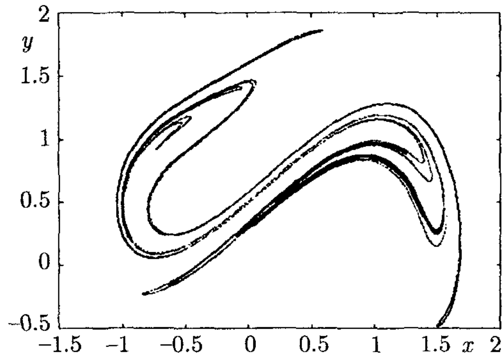


Рис. 21.5. Пример хаотического стохастического аттрактора в осцилляторе Дуффинга с шумом

стохастические предельные множества (репеллеры и седла), что позволяет построить теорию так называемых динамических бифуркаций в системах со случайными воздействиями.

К системе (21.12) может быть применено определение аттрактора произвольной неавтономной системы, данное ранее. Под состоянием в этом случае понимается случайная функция $\vec{x}(t)$. Случайный оператор эволюции, заданный соотношением (21.7), будет удовлетворять свойству (21.8). Однако использование такого определения на практике не удобно.

21.6. Автоколебания в зашумленных системах

Математическая модель системы с шумом (не важно с внешним или внутренним) является неавтономной, поскольку задается уравнениями, содержащими зависящие от времени случайные возмущения. Если учесть шум в автогенераторе, то можем ли мы в этом случае говорить об автоколебательном режиме? С физической точки зрения, очевидно, можем, по крайней мере, если шум слабый (что обычно имеет место) и не приводит к подавлению автоколебаний. В системе с источниками шума установившийся режим характеризуется стационарной плотностью вероятности $p^{\text{ст}}(\vec{x})$, не зависящей от начального состояния (или начального распределения вероятности), и определяется параметрами системы. Параметры шума, при условии его слабой интенсивности, играют гораздо меньшую роль. Исключением являются системы, находящиеся вблизи стохастической бифуркации.

Как мы уже говорили, критерием существования автоколебательного режима является возможность синхронизации колебаний. В случае зашумленного автогенератора естественно говорить о *режиме эффективной синхронизации*. Разумеется, эффективная синхронизация не является строгой. Фазовый захват наблюдается на конечных интервалах времени. Границы области эффективной синхронизации не определяются точно, так как не связаны с бифуркационными переходами. Тем не менее физический эффект частотно-фазового захвата автоколебаний при достаточно слабом шумовом воздействии сохраняется.

Эффективная синхронизация наблюдается как для зашумленных генераторов периодических автоколебаний, так и для зашумленных генераторов хаоса. В обоих случаях имеет место один и тот же эффект (лекция 17).

21.7. Стохастические автоколебания

Мы подошли к главному вопросу, который хотим рассмотреть в данной лекции. Дело в том, что можно выделить класс нелинейных диссипативных систем, которые в отсутствие шума не являются автоколебательными, но в которых шум приводит к возникновению колебаний, обладающих чертами автоколебательного режима. В литературе такие системы обычно называют *стохастическими осцилляторами*, хотя, на наш взгляд, правильнее было бы назвать их *стохастическими генераторами* или *стохастическими автоколебательными системами*, а возникающие в них индуцированные шумом колебания *стохастическими автоколебаниями*.

Различают два типа таких систем (хотя, возможно, есть и другие): *бистабильные осцилляторы* и *возбудимые осцилляторы*. Общей чертой стохастических осцилляторов является то, что за счет энергии стационарного источника шума в них возникают и поддерживаются незатухающие случайные колебания со следующими свойствами:

1) колебания являются стационарными с почти постоянной амплитудой, определяемой, главным образом, параметрами системы и слабо зависящей от характеристик шума;

2) в некотором диапазоне частот система усиливает мощность шума (т. е. она не является просто пассивным нелинейным фильтром), причем спектрально-корреляционные характеристики колебаний определяются свойствами системы и слабо зависят от соответствующих характеристик шума;

3) колебания системы обладают некоторыми свойствами «синхронизуемости» как под действием внешней силы, так и в результате взаимодействия.

В чем принципиальная разница стохастического осциллятора с шумом и диссипативного нелинейного осциллятора, возмущаемого регулярным сигналом? Почему индуцированные шумом колебания имеют сходство с автоколебаниями? На наш взгляд, дело в том, что в отличие от регулярного (периодического или квазипериодического) воздействия, широкополосный шум «не навязывает» динамической системе заданных извне характерных частот. Поэтому колебания такой неавтономной системы можно рассматривать как некоторую независимую колебательную моду, обладающую типичными свойствами автоколебаний: независимостью режима от начального состояния и способностью к синхронизации.

На сегоднешний день известны два типа стохастических осцилляторов, которые могут быть отнесены к стохастическим автоколебательным системам. Это — бистабильные осцилляторы и возбудимые осцилляторы. Они были детально рассмотрены в предыдущих лекциях. Остановимся подробнее на вопросе о сходстве стохастических автоколебаний в бистабильных и возбудимых осцилляторах с автоколебательными режимами.

Бистабильные осцилляторы. На первый взгляд индуцированные шумом колебания в бистабильной системе не похожи на автоколебательный режим, например, на зашумленный предельный цикл. В спектре отсутствует линия на характерной частоте колебаний (частоте Крамерса). Стохастический аттрактор (в смысле Л. Арнольда) не имеет форму замкнутой кривой, а является, в зависимости от значений γ и D, либо единственной точкой, перемещающейся по фазовой плоскости, либо множеством с фрактальной структурой, пример которого был дан на рис. 21.5. Однако системе (21.13) и подобным ей системам присущи все выделенные нами свойства стохастических автоколебаний. Действительно, переключения, вызванные шумом, являются стационарными случайными колебаниями с почти постоянной амплитудой (под амплитудой колебаний в данном случае понимается некоторая средняя величина отклонений динамической переменной от нуля). Амплитуда определяется, главным образом, расстоянием между потенциальными ямками, т. е. характеристикой динамической системы, и слабо зависит от свойств шумового воздействия. Спектр имеет форму лоренциана с максимумом в нуле, полуширина которого соответствует частоте переключений и определяется интенсивностью шума и высотой потенциального барьера. Характер спектра свидетельствует о перераспределении мощности широкополосного шума в область низких частот.

Принципиально важное свойство системы (21.13), позволяющее сопоставлять стохастические колебания с автоколебаниями, состоит в эффекте частичной синхронизации. Речь идет здесь о так называемой стохастической синхронизации бистабильных осцилляторов (см. лекцию 19). Интенсивность шума D можно рассматривать как внутренний параметр стохастического автогенератора, на который на заданной частоте воздействует гармоническая сила. Меняя D, мы изменяем характерное время системы $T_K = 2\pi/\omega_K$ и «подстраиваем» стохастический автогенератор под внешнее воздействие. При достаточной амплитуде гармонического сигнала существует область значений D, в которой частота ω_K, несмотря на изменение интенсивности шума, остается близка к частоте воздействия $\omega_{\text{вн}}$. Это — область синхронизации. Однако «синхронизуемость» бистабильных систем является свойством, не вполне аналогичным тому же свойству «настоящих» генераторов. Действительно, если зафиксировать параметры генератора и изменять частоту внешнего сигнала, то в некотором интервале частоты $\omega_{\text{вн}}$ будет наблюдаться захват собственной частоты. Для бистабильного стохастического осциллятора, зафиксировав интенсивность шума и изменяя частоту воздействия, захват частоты Крамерса в общем случае наблюдать не удается.

Возбудимые осцилляторы. Возбудимые осцилляторы, находящиеся под действием шума, в еще большей степени, чем бистабильные системы, обладают свойствами автогенераторов. Амплитуда индуцированных шумом колебаний задается характеристиками петли, которую образуют в фазовом пространстве траектории, выброшенные за порог возбуждения. Форма петли определяется детерминированной системой и практически не зависит от характеристик шума. В спектре мощности колебаний возбудимой системы имеется пик на характерной частоте ω_0, зависящей как от параметров системы, так и от свойств шумового воздействия. Существование такого спектрального пика отличает возбудимый стохастический осциллятор от бистабильного и его в большей степени сходным с зашумленным автогенератором. Частота ω_0 может быть захвачена внешним гармоническим сигналом. Можно также наблюдать захват частот при взаимодействии двух возбудимых осцилляторов. Захват частот диагностируется по соответствующим изменениям в спектрах мощности и полностью аналогичен явлению эффективной синхронизации в зашумленных автоколебательных системах (лекция 17).

Таким образом, возбудимые системы по совокупности свойств очень близки к обычным автоколебательным системам. Генерируемый такими системами процесс колебаний естественно назвать стохастическими автоколебаниями.

21.8. Заключение

Анализ различных колебательных процессов в нелинейных автономных и неавтономных диссипативных динамических и стохастических системах, приведенный в настоящей лекции, позволяет сделать следующие выводы. Фундаментальная важность понятий «автоколебания» и «автоколебательная система», введенных А. А. Андроновым для динамических систем на фазовой плоскости, делает целесообразной попытку расширить и обобщить это определение на существенно более широкий класс процессов и систем, включая стохастические. Мы пришли к выводу, что автоколебания могут иметь место в хаотических и зашумленных системах. Для этого достаточно выполнения двух условий. Первое заключается в существовании аттрактора, что по сути означает главную особенность автоколебаний — независимость установившегося процесса колебаний от начальных данных, выбранных в некоторой области (в области притяжения аттрактора). Второе условие требует возможности синхронизации указанного типа колебаний. Другими словами, если есть аттрактор и система демонстрирует эффект частотной синхронизации, то мы имеем дело с автоколебательным процессом.

Такое определение не вступает в противоречие с определением А. А. Андронова: и предельный цикл, и тор реализуют эффекты внешней и взаимной синхронизации. Это касается также и режимов детерминированного хаоса, синхронизация которых исследовалась в многочисленных работах последних лет. Однако вынужденные колебания нелинейных осцилляторов под действием периодической силы не удовлетворяют второму условию: аттрактор в системе есть, но отсутствует эффект синхронизации колебаний.

Все вышесказанное касается и динамики нелинейных диссипативных систем в присутствии шумовых возмущений. Колебания в таких системах формально характеризуются наличием аттрактора в пространстве решений M'. Однако не все типы стохастических колебаний демонстрируют эффекты частотной синхронизации. Если вызванные шумом колебания проявляют свойства частотной синхронизации (в смысле эффективной синхронизации Р. Л. Стратоновича), то такие колебания мы будем называть стохастическими автоколебаниями, а соответствующие системы — автоколебательными.

Отметим еще одну деталь. Согласно А. А. Андронову энергия, необходимая на поддержание автоколебаний, черпается из постоянного источника. Предлагаемое нами обобщение не вводит никаких ограничений на характер источника энергии. В принципе автоколебательная система может пополнять свою энергию за счет переменного или даже шумового источника. Главное, чтобы характерные частоты колебаний определялись самой системой, а не частотными характеристиками источника энергии.

Сформулированные условия стохастических автоколебаний (наличие аттрактора и возможность их синхронизации) мы рассматриваем и обосновываем в качестве достаточных. Являются ли они необходимыми? По всей видимости, нет. Вопрос формулировки необходимых и достаточных условий реализации стохастических автоколебаний требует дальнейших исследований.

Лекция 22

Реконструкция динамических систем

22.1. Введение

Важнейший метод исследования эволюционных процессов в естествознании состоит в построении математических моделей изучаемых систем и их анализе. Как сказал один из великих мыслителей прошлого, любое утверждение истинно настолько, насколько оно базируется на математике. Наличие математической модели исследуемой системы существенно расширяет возможности ее изучения, позволяя решать задачи предсказания поведения системы во времени и зависимости режимов ее функционирования от параметров. Таким образом, одной из центральных является задача математического моделирования, решение которой дает возможность осуществления научного прогноза функционирования системы во времени, являющегося одной из главных проблем в естествознании.

Решение задачи моделирования теоретически не содержит проблем, если реальная система задана. Хорошо известный пример — колебательный LC-контур. На основе знания схемы контура и электрических законов не представляет труда записать основополагающие соотношения и получить уравнения консервативного осциллятора:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad \omega_0^2 = 1/LC. \tag{22.1}$$

Решением уравнения (22.1) является гармонический колебательный во времени процесс, частота которого определяется параметрами контура L и C. При заданных начальных условиях $x(t_0)$ и $\dot{x}(t_0)$ состояние системы (22.1) будет однозначно известно для любого времени $t \geqslant t_0$.

Однако очень часто приходится сталкиваться с более сложной ситуацией, когда детальные сведения о реальной системе либо отсутствуют вовсе, либо явно недостаточны. Единственная информация о свойствах системы содержится лишь в экспериментальной зависимости одной из координат состояния системы во времени. Такая зависимость $a(t)$, измеренная в течение конечного времени t_0, называется *наблюдаемой* (или реализацией) системы, а при дискретизации с шагом Δt: $a(i\Delta t) = a_i$, $i = 1, \ldots, N$;

$N = [t_0/\Delta t]$, она носит название *одномерного временного ряда*. Делается предположение о том, что наблюдаемая $a(t)$ является детерминированно определенной, т. е. представляет собой одномерную проекцию фазовой траектории, порождаемой некоторой динамической системой (ДС). Одной из задач реконструкции динамической системы является восстановление модельной ДС, решение которой с известной степенью точности воспроизводит одномерную наблюдаемую $a(t)$ на заданном интервале времени t_0 и для $t > t_0$. Данная проблема относится к классу обратных задач, решение которых не может быть однозначным.

На самом деле, термин *реконструкция* включает достаточно широкий круг задач, и восстановление модельной ДС представляет собой лишь одну из них (причем наиболее сложную, иногда называемую «глобальной» реконструкцией). Это, пожалуй, задача-максимум при анализе автоколебательных систем по экспериментальным данным. К числу других проблем, также объединяемых термином «реконструкция», можно отнести восстановление фазового портрета ДС по наблюдаемой $a(t)$, расчет характеристик сложных режимов динамики, по которым можно было бы судить о геометрии хаотических аттракторов (фрактальные размерности), о скорости разбегания фазовых траекторий или о степени предсказуемости исследуемого режима динамики (ляпуновские показатели и различные варианты определения ошибки предсказания). В рамках настоящей лекции мы ограничимся кратким рассмотрением разных задач, которые можно отнести к проблематике реконструкции: от простых до более сложных. В частности, мы обсудим проблему получения модельной ДС в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) или дискретных отображений по одномерному временному ряду. Важно при этом не забывать, что временной ряд $a(i\Delta t)$ предполагается детерминированно определенным, то есть отражает эволюционный процесс реальной ДС, управляемой детерминированными динамическими законами. Естественно, что такое предположение сужает класс рассматриваемых сигналов. Если временной ряд есть следствие абсолютно случайного (шумового) процесса, то говорить о реконструкции не имеет смысла.

Попытаемся понять основные проблемы, с которыми связано решение задачи реконструкции. Первая обусловлена необходимостью введения каким-либо образом координат состояния системы. Ведь нам известна зависимость во времени (на *конечном* интервале!) лишь одной из координат реальной системы $a(t)$. Как ввести новые координаты и сколько их должно быть? Предположим, что нам удалось как-то решить эту проблему. Но сразу же возникают новые вопросы. Например, как определить скорость разбегания фазовых траекторий? Если бы нам были известны уравнения, которые генерируют исследуемый сигнал $a(t)$, то можно было бы перейти к уравнениям в вариациях, рассматривая бесконечно малые возмущения. Но в нашем распоряжении находится лишь временная зависимость одной из координат состояния, и всю информацию о сложном режиме колебаний мы должны извлечь только из нее.

Обратившись к более сложной проблеме — восстановлению модельной ДС, придется искать ответ еще на целый ряд серьезных вопросов, в частности, как записать сами уравнения? Каков вид модельного оператора эволюции, который в случае ОДУ определяется правыми частями системы n дифференциальных уравнений первого порядка? Дать обоснованные ответы на эти вопросы, по сути дела, и есть содержание раздела теории динамических систем, рассматривающего проблему реконструкции ДС по одномерным временным рядам.

Ранее считалось, что для изучения динамики автоколебательной системы в терминах фазового пространства необходимо знание всех координат, определяющих ее состояние. Однако в начале 1980-х годов данное представление подверглось пересмотру. В частности, в 1980 г. была опубликована работа Н. Пакарда, в которой показано, что фазовый портрет динамической системы может быть восстановлен по скалярному временному ряду a_i, если в качестве недостающих координат вектора состояния используется тот же самый ряд a_i, взятый с некоторым запаздыванием. В 1981 г. была доказана теорема, утверждающая, что по одномерной реализации $a(t)$ ДС, обладающей аттрактором A, принадлежащим гладкому d-мерному многообразию, методом задержки можно получить n-мерную реконструкцию A_R исходного аттрактора как множество векторов $\vec{x}(t)$ в R^n при $n \geqslant 2d+1$ (теорема Такенса):

$$\vec{x}(t) = \Lambda_n(a(t)) = \{a(t), a(t+\tau), \ldots, a(t+(n-1)\tau)\} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}. \tag{22.2}$$

Согласно теореме, отображение $\Lambda_n : A \to A_R$ является гладким и обратимым на A_R почти при любой задержке τ (если $N \to \infty$).

Попытаемся разобраться в содержании теоремы Такенса. Она обосновывает введение в качестве новых координат состояния системы значений реализации $a(t)$, взятых через некоторый интервал времени τ:

$$x_1(t) = a(t), \quad x_2(t) = a(t+\tau), \quad x_3(t) = a(t+2\tau), \quad \ldots \tag{22.3}$$

Поскольку на компьютере анализируется ряд значений переменной $a(t)$ в дискретные моменты времени $i\Delta t$, реконструируемое множество векторов также является дискретным $\vec{x}(i\Delta t)$, а величина τ имеет вид $\tau = k\Delta t$, где k — целое число. Иными словами, на практике равенство (22.2) может быть переписано следующим образом:

$$\vec{x}_i = \{a_i, a_{i+k}, \ldots, a_{i+(n-1)k}\}, \tag{22.4}$$

где нижний индекс i соответствует моменту времени $i\Delta t$.

Техника реконструирования состоит в выборе значений задержки τ, размерности пространства вложения n и в формировании массива векторов $\vec{x}(i\Delta t)$. Предполагается, что полное время наблюдения $T_{obs} = N\Delta t$ и число точек N достаточно велики, чтобы по траектории можно было судить о важнейших свойствах интересующего нас аттрактора.

В качестве примера рассмотрим уравнения модели Лоренца:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \sigma(y - x), \\ \frac{dy}{dt} &= rx - y - xz, \\ \frac{dz}{dt} &= -bz + xy \end{aligned} \tag{22.5}$$

при значениях параметров $\sigma = 10$, $r = 28$, $b = 8/3$, соответствующих режиму динамического хаоса. Проекция фазового портрета хаотического режима на плоскость (x, y) изображена на рис. 22.1, *а*. По временной зависимости $x(t)$ уравнений (22.5), рассматриваемой в качестве анализируемой реализации, можно осуществить реконструкцию методом задержки (22.2) — рис. 22.1, *б, в*. В соответствии с теоремой Такенса мы ожидаем, что по восстановленному аттрактору (см. рис. 22.1, *в*) могут быть вычислены такие характеристики анализируемого режима динамики (см. рис. 22.1, *а*), как фрактальные размерности.

Из-за работы с конечным числом точек N необходимо тщательно выбирать параметр τ, поскольку качество реконструкции будет заметно отличаться при его вариации. С точки зрения положений теории задержка τ может быть произвольной. Однако совершенно ясно, что если τ слишком мало (рис. 22.2, *а*), то i-я и $i+1$-я координаты точек фазовой траектории практически неотличимы друг от друга. Реконструируемый аттрактор в этом случае располагается вблизи главной диагонали пространства вложения («линии идентичности»). А этого допускать нельзя в силу определения: координаты состояния есть независимые переменные, однозначно определяющие состояние системы. С другой стороны, если время задержки очень велико (рис. 22.2, *б*), координаты оказываются некоррелированными, и реконструированный аттрактор не отражает истинной динамики. На основе

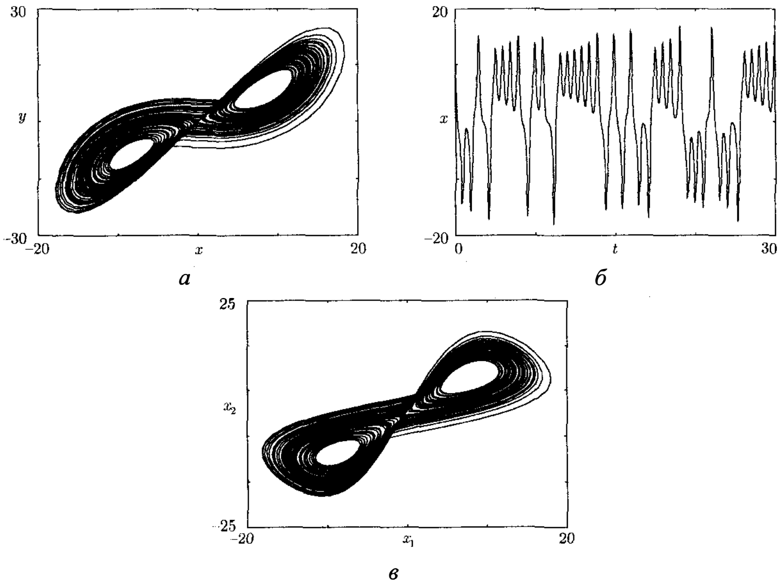


Рис. 22.1. Проекция фазового портрета хаотического аттрактора системы Лоренца (*а*), временная зависимость координаты $x(t)$ (*б*) и реконструированный аттрактор (*в*)

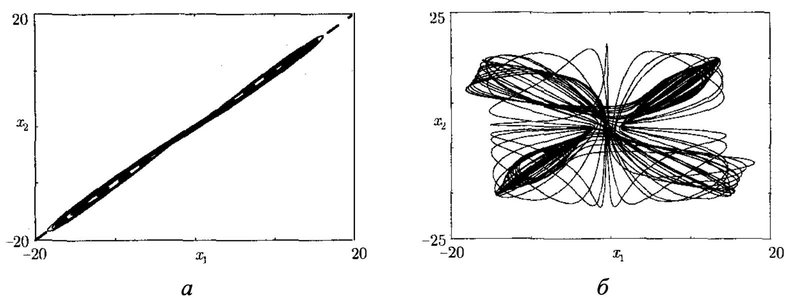


Рис. 22.2. Результат реконструкции: *а* — при малой, *б* — большой задержке

экспериментов установлено, что оценка оптимального времени задержки может быть получена из расчетов автокорреляционной функции $\psi(\tau_0) = \langle a(t)a(t+\tau_0)\rangle$, которая для сложных непериодических процессов будет спадающей во времени τ_0. Значение τ_0, соответствующее времени достижения первого нуля функции $\psi(\tau_0)$, используется в экспериментальных исследованиях для оценки задержки τ в (22.2) при введении новых координат состояния.

Можно пользоваться более сложными критериями, такими как минимум функции взаимной информации. Но для практических целей τ часто подбирают менее строгим образом, «на глаз», исходя из геометрии реконструируемого множества (чтобы аттрактор не был слишком вытянут ни в одном из направлений). Если анализируется сигнал, у которого наблюдается характерный период T, то лучше всего рассматривать значение $\tau = T/4$ (рис. 22.3).

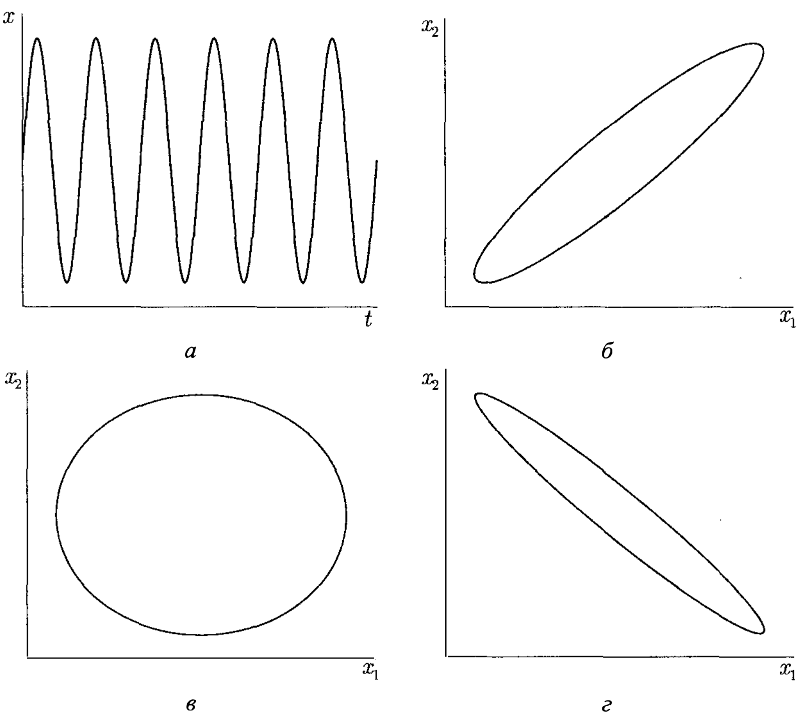


Рис. 22.3. Пример, иллюстрирующий, что при $\tau = T/4$ фазовый портрет имеет наименьшие геометрические искажения: исходный сигнал (*а*) и результаты реконструкции при $\tau = 0.1T$ (*б*), $\tau = 0.25T$ (*в*) и $\tau = 0.9T$ (*г*)

Теперь нужно каким-то способом найти размерность пространства вложения n. Из теории следует, что для определения n необходимо знать размерность аттрактора реальной динамической системы, которая может быть определена следующим образом. Выбрав произвольное (небольшое) значение размерности пространства вложения n_0, реконструируем аттрактор и определим его размерность d_F с помощью специальных алгоритмов. Затем повторим данную процедуру, увеличивая n_0 до тех пор, пока величина размерности d_F не перестанет претерпевать изменений. Соответствующее значение d_F для хаотических аттракторов будет нецелым. Далее определяется ближайшее сверху целое число и находится d — размерность пространства, в которое «укладывается» наш аттрактор. С помощью формулы Манэ

$$n \geqslant 2d + 1 \tag{22.6}$$

определяется размерность пространства вложения, необходимая для реконструкции аттрактора.

Отметим, что при выборе размерности пространства вложения обычно считается, что если хорошая реконструкция достигается при некотором n, то же справедливо и для $n+1$. В частности, практически перестает меняться взаимное расположение точек в фазовом пространстве, то есть если расстояние между точками было мало, оно и останется малым; если велико — соответственно будет большим. Неравенство (22.6) определяет минимальную гарантированную размерность вложения. Иногда можно ограничиться меньшим значением $d < n < 2d + 1$, получив при этом хорошую реконструкцию (однако понижение параметра n не должно приводить к самопересечениям фазовой траектории). Существует мнение, что наиболее важным параметром при реконструкции оказывается длина окна $w = (n-1)\tau$. Она не должна превышать время корреляции сигнала $a(t)$.

Таким образом, для решения задачи реконструкции необходимо определить размерность пространства вложения и задать набор векторов состояния ДС в этом новом фазовом пространстве. Рассмотрим данный этап более подробно.

22.2. Определение размерности вложения и реконструкция аттрактора

Предположим, что в результате эксперимента получены значения физической величины a, то есть набор $a_i = a(i\Delta t)$, $i = 1, \ldots, N$. Будем считать, что временной ряд a_i порождается некоторой ДС с непрерывным или дискретным временем, представляя собой дискретизованную с шагом Δt одномерную проекцию фазовой траектории. Эта траектория принадлежит аттрактору системы, размерность которого равна d. Согласно Такенсу, задать вектор состояния можно по методу (22.2).

Вначале необходимо определить размерность аттрактора d. Существуют различные варианты ее оценки. Согласно строгим математическим результатам, для описания сложной геометрии хаотических аттракторов целесообразно рассматривать размерность Хаусдорфа, которая вычисляется следующим образом. Предполагается, что анализируемое множество S в пространстве R^n покрывается кубиками $\{B_i\}$ с величиной ребра, не превышающей некоторое значение ε. При этом каждая точка множества S должна обязательно попасть в тот или иной кубик. Тогда мера Хаусдорфа l_δ вводится следующим образом:

$$l_\delta(S) = \lim_{\varepsilon\to 0} \inf_{K(\varepsilon)} \sum_{B_i\in K(\varepsilon)} |B_i|^\delta. \tag{22.7}$$

Здесь inf — минимальное значение (нижняя грань) по всем возможным покрытиям $K(\varepsilon)$ множества S кубиками $\{B_i\}$; $|B_i|$ — величина ребра кубика ($|B_i| \leqslant \varepsilon$). Указанный предел зависит от параметра δ. Размерность Хаусдорфа d_H представляет собой такое значение δ, при котором величина $l_\delta(S)$ является конечной:

$$\begin{cases} \delta > d_H(S) & \Longrightarrow l_\delta(S) = 0, \\ \delta < d_H(S) & \Longrightarrow l_\delta(S) = +\infty. \end{cases} \tag{22.8}$$

Согласно данному определению, d_H может принимать нецелые значения. В общем случае, если размерность является нецелой, ее называют *фрактальной*. Соответственно, объекты, характеризующиеся нецелой размерностью, называют *фракталами*. Наличие нецелой размерности является типичной особенностью хаотических аттракторов.

Понятие размерности Хаусдорфа хорошо определено с точки зрения математики, но ее чрезвычайно сложно вычислить. Поэтому обычно используют более «практичные» определения фрактальных размерностей. Одним из таких «практичных» определений является *емкость* (или емкостная размерность D_0). Пусть S — некоторое множество в пространстве R^n, которое покрывается кубиками размера ε. Если обозначить через $N(\varepsilon)$ число кубиков, необходимых для покрытия всего множества, то емкость представляет собой предел следующего вида:

$$D_0 = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\lg N(\varepsilon)}{\lg(1/\varepsilon)}. \tag{22.9}$$

По сути, эта величина характеризует, как меняется число элементов покрытия при изменении ε:

$$N \sim \varepsilon^{-D_0}. \tag{22.10}$$

Если в качестве S рассматривается единственная точка, то $N(\varepsilon) = 1$ и не зависит от ε:

$$N \sim \varepsilon^0 \Longrightarrow D_0 = 0. \tag{22.11}$$

Если анализируется отрезок линии длины L, то

$$N(\varepsilon) = \frac{L}{\varepsilon} \sim \varepsilon^{-1} \Longrightarrow D_0 = 1. \tag{22.12}$$

Для поверхности площади P:

$$N(\varepsilon) = \frac{P}{\varepsilon^2} \sim \varepsilon^{-2} \Longrightarrow D_0 = 2. \tag{22.13}$$

Во всех этих случаях емкость D_0 является целым числом. В качестве примера объекта с дробной размерностью D_0 (фрактального объекта) рассмотрим канторово множество. Процедура его построения состоит в следующем. Берется отрезок единичной длины [0, 1], разбивается на 3 равные части, и средняя из них выбрасывается. В результате на первом шаге процедуры построения канторова множества мы получаем два отрезка [0, 1/3] и [2/3, 1] длиной $\varepsilon = 1/3$ (рис. 22.4). На следующем шаге каждый из этих отрезков вновь разбивается на 3 равные части, и опять выбрасывается средняя часть. Такая процедура продолжается со всеми оставшимися отрезками. Если для покрытия множества на некотором шаге k используются кубики с величиной ребра $\varepsilon = 1/3^k$, то необходимое количество кубиков составит $N(\varepsilon) = 2^k$.

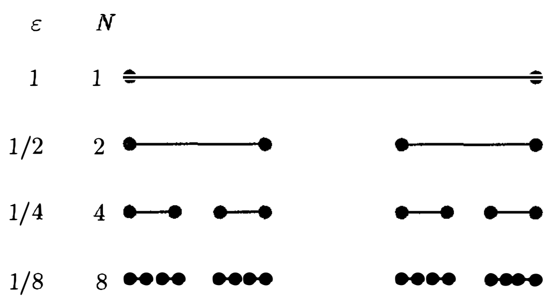


Рис. 22.4. Процедура построения канторова множества

Таким образом:

$$D_0 = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\lg 2^k}{\lg 3^k} = \frac{\lg 2}{\lg 3} \approx 0.63. \tag{22.14}$$

Если говорить о геометрии данного объекта, то канторово множество есть нечто большее, чем точка (для которой $D_0 = 0$), но нечто меньшее, чем интервал ($D_0 = 1$).

К сожалению, во многих случаях, представляющих практический интерес, определение D_0 непосредственно по формуле (22.9) зачастую осложняется очень медленной сходимостью отношения $\lg N(\varepsilon)/\lg(1/\varepsilon)$ к пределу $\varepsilon \to 0$ (если речь идет о расчете емкости объекта в фазовом пространстве размерности $n > 2$). Кроме того, D_0 не зависит от вероятности посещения тех или иных областей фазового пространства, то есть не учитывает статистические свойства потока, обусловленные динамикой анализируемой системы. Поэтому на практике вместо емкости предпочитают вычислять корреляционную размерность D_c, которую можно легче и быстрее оценить численно. Для объектов с целой размерностью $D_c = D_0$. В более общем случае $D_c \leqslant D_0$.

Для вычисления D_c используют формулу

$$D_c = \lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{N \to \infty} \frac{\lg C(\varepsilon, N)}{\lg \varepsilon}, \tag{22.15}$$

где $C(\varepsilon, N) = N^{-2} \sum_{i \neq j} v(\varepsilon - \mid \vec{x}_i - \vec{x}_j \mid)$ — корреляционный интеграл, ε — размер ячейки разбиения фазового пространства, N — число точек, используемых для оценки размерности, v — функция Хевисайда, $\vec{x}_i = \vec{x}(i\Delta t)$. Для определения D_c строят зависимость $\lg C(\varepsilon, N)$ от $\lg \varepsilon$ и ищут на ней линейный участок, наклон которого и определяет искомое значение размерности. Кроме того, иногда анализируют зависимость $D_c(n)$ и увеличивают n до тех пор, пока D_c не достигнет насыщения.

Известно, что при вычислении D_c существуют ограничения на величину ε. Если ε приближается к размерам аттрактора $\varepsilon_{\max}$, то линейная зависимость $\lg C(\varepsilon, N)$ от $\lg \varepsilon$ пропадает, что объясняется влиянием границ аттрактора, где число соседей у каждой точки обычно меньше, чем в «середине». В пределе, если $\varepsilon = \varepsilon_{\max}$, то $\lg C(\varepsilon, N) = 1$. С другой стороны, при уменьшении значения ε существует некоторое $\varepsilon_{\min}$, такое что для $\varepsilon < \varepsilon_{\min}$ структура аттрактора остается неразрешенной. Как следствие, вновь нарушается линейная зависимость $\lg C(\varepsilon, N)$ от $\lg \varepsilon$.

Одной из проблем при расчете размерности является выбор величин N и Δt. Существуют различные оценки минимального числа точек для правильного определения D_c. Аргументы в пользу той или иной оценки слегка варьируются в разных исследованиях, но все они основаны на предположениях об однородности аттрактора. Аттракторы в динамических системах почти никогда однородными не бывают, но тем не менее эти оценки полезны и дают, по крайней мере, общее представление о возможности определения размерности по экспериментальным данным. При расчете D_c можно выделить 3 важные характеристики массива данных: полное время наблюдения T_{obs}, число точек N и шаг между ними Δt. Они связаны соотношением $T_{obs} = N\Delta t$, и их следует рассматривать вместе, поскольку одной характеристики недостаточно: большое T_{obs} при малом N может быть столь же плохо, как и малое T_{obs} при большом N.

Возможность расчета корреляционной размерности по данным только об одной траектории основана на хорошо известном свойстве хаотических аттракторов: траектория, проходящая через любую точку, в течение некоторого времени блуждает по аттрактору, но затем (через интервал времени T_R) она возвращается в ε-окрестность этой точки. Чем меньше ε, тем больше должно быть T_R. При одном и том же ε величина T_R обычно меняется от одной точки к другой, но тем не менее можно ввести некоторое среднее время возврата. Чтобы определить D_c, точки аттрактора должны иметь достаточное число «соседей». Для различных точек число ε-соседей будет отличаться, но предполагается, что $\varepsilon_{\min}$ соответствует ситуации, когда в среднем у точки аттрактора существует порядка одного соседа внутри шара радиуса $\varepsilon_{\min}$. Соответствующее T_{obs} должно быть таким, чтобы для большинства точек траектория успела вернуться в их $\varepsilon_{\min}$-окрестность 1–2 раза. Таким образом, если рассмотреть покрытие аттрактора шарами размера ε_{min} (число которых равно M), то большинство из них траектория посетит 1–2 раза.

Для данного T_{obs} существует некоторое оптимальное число точек N, необходимое для того, чтобы обеспечить разрешение на масштабе $\varepsilon_{\min}$ (это число должно быть близко к M). Так как скорость $|d\vec{x}/dt|$ вдоль траектории меняется, при однородном разбиении траектории по времени t_i плотность точек в фазовом пространстве однородной не будет, но этим эффектом можно пренебречь. Если $N \ll M$, то разрешаемый масштаб будет ограничен уже величиной N вместо T_{obs}, а в случае $N \gg M$ на малых масштабах ($\varepsilon < \varepsilon_{\min}$) алгоритм будет измерять размерность не аттрактора, а самой траектории, если не принять специальных мер предосторожности. Следовательно, чтобы разрешить масштаб $\varepsilon_{\min}$, необходимо $N \approx M$.

Обычно поступают следующим образом. Выбирают произвольное малое значение размерности пространства вложения n и вычисляют D_c по наклону линейного участка графика $\lg C(\varepsilon, N)$ от $\lg \varepsilon$. Затем увеличивают n на единицу и вновь определяют D_c. Таким образом, анализируется зависимость результатов расчета корреляционной размерности от выбора пространства вложения. Этот прием позволяет сделать вывод о существовании маломерной динамики ($D_c < 4$): при ее наличии зависимость $D_c(n)$

быстро достигает насыщения и при дальнейшем увеличении n не меняется в пределах точности вычислений. Если маломерная динамика отсутствует, то D_c увеличивается с ростом n. В этом случае при достаточно больших n возможно насыщение, которое обусловлено фундаментальными ограничениями на значение корреляционной размерности, связанными с конечной длиной анализируемого временного ряда:

$$D_{\max} = \frac{2\lg N}{\lg(1/r)}, \quad r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{\max}}. \tag{22.16}$$

Данная формула означает, что алгоритм расчета размерности не может дать значение больше, чем $D_{\max}$ при заданном числе точек N. Иными словами, если $r = 0.1$ и $N = 1000$, то $D_{\max} \leqslant 6$; если $N = 100000$, то $D_{\max} \leqslant 10$. Наличие фундаментальных ограничений создает серьезные проблемы, если проводится сравнение сложных, но детерминированных режимов динамики в системах с достаточно большим числом степеней свободы и случайных процессов. При изучении динамики маломерных систем таких проблем не возникает.

Практическая реализация алгоритма расчета размерности D_c предполагает составление программы вычисления корреляционного интеграла в широком диапазоне по параметру ε и нахождение локальных наклонов зависимости $\lg C(\varepsilon, N)$ от $\lg\varepsilon$. Знание размерности позволит нам реконструировать аттрактор методом (22.2), как было описано выше.

Метод задержки Такенса является наиболее известным, но не единственным способом задания вектора состояния. Альтернативой ему служит так называемый метод последовательного дифференцирования, имеющий определенные преимущества при решении задачи реконструкции математической модели. Идея данного метода следующая. Пусть имеется временной ряд $a(i\Delta t) = a_i$, $i = 1, \dots, N$. Задание вектора состояния в фазовом пространстве производится следующим образом:

$$\vec{x}(t) = \{a(t), da(t)/dt, \dots, d^{n-1}a(t)/dt^{n-1}\} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}. \tag{22.17}$$

Поскольку известны значения a_i только в дискретные моменты времени $i\Delta t$, координаты x_j вектора $\vec{x}$ определяются путем численного дифференцирования исходного временного ряда по приближенным математическим формулам. Очевидно, что точность вычисления производных будет определяться малостью величины шага дискретизации Δt. Недостатком метода является повышенная чувствительность к шуму, что ограничивает его применимость для пространств вложения большой размерности (по крайней мере, без проведения предварительной процедуры фильтрации).

На настоящий момент разработан еще ряд способов задания вектора состояния, например, метод интегральной фильтрации:

$$x_j(t) = \int\limits_0^t a(t_1)\exp\left(\frac{t-t_1}{\beta}\right)dt_1.$$

При его использовании обеспечивается сглаживание исходной реализации и фильтрация шума. Разновидностью данного метода является метод скользящего среднего

$$x_j(i,k) = \frac{1}{2k+1}\sum_{l=-k}^{k} a(i+l),$$

где k — постоянный параметр. Данный метод также позволяет проводить сглаживание сигнала. Иногда для реконструкции аттрактора используется сразу несколько методов (для разных координат вектора состояния).

На рис. 22.5 изображены примеры реконструкции аттрактора в системе Рёсслера

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -y - z, \\ \frac{dy}{dt} &= x + ay, \\ \frac{dz}{dt} &= b - cz + xz \end{aligned} \tag{22.18}$$

с помощью различных вариантов задания координат вектора состояния. Отметим, что при расчете размерности обычно ограничиваются методом задержки, другие варианты восстановления траектории в фазовом пространстве применяются в более сложных задачах, например, при построении уравнений движения по временному ряду.

22.3. Расчет старшего показателя Ляпунова по временному ряду

Наряду с изучением сложной геометрии хаотических аттракторов реконструкция позволяет решать задачи исследования динамических характеристик, к числу которых относятся ляпуновские характеристические показатели (ЛХП). В рамках данной лекции мы рассмотрим наиболее часто используемый на практике метод расчета старшего показателя Ляпунова по временному ряду.

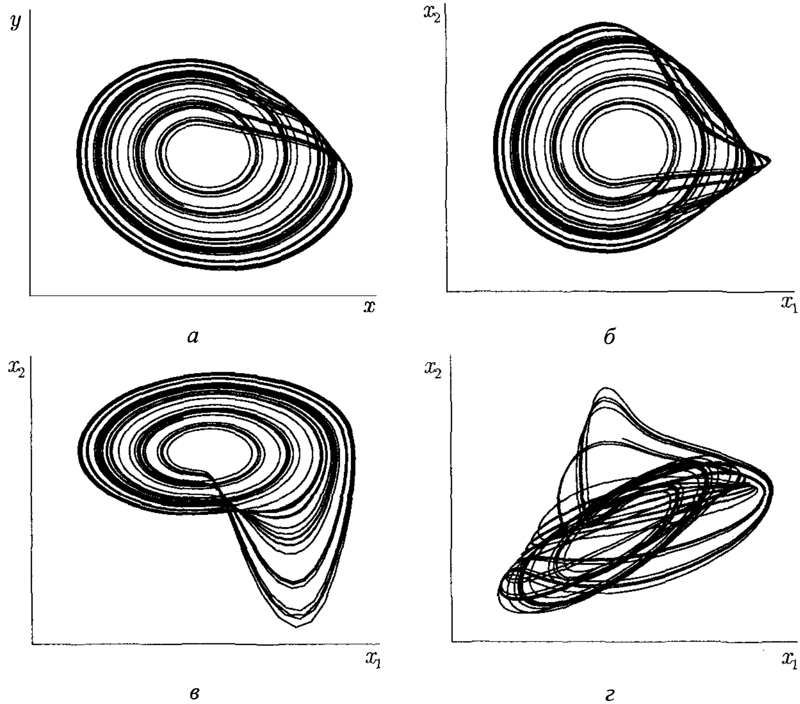


Рис. 22.5. Аттрактор в системе Рёсслера (22.18) (*а*) и его реконструкция по переменной $x(t)$ методами задержки (*б*), дифференцирования (*в*) и скользящего среднего (*г*)

Этот метод немного напоминает стандартный подход к вычислению спектра ЛХП потоковых систем по известной математической модели. В целом техника расчета ляпуновских показателей базируется на следующей идеологии. Предположим, что задана n-мерная динамическая система с непрерывным временем. Чтобы охарактеризовать устойчивость ее решения, анализируется временная эволюция бесконечно малой n-мерной сферы начальных условий; с течением времени эта сфера преобразуется в эллипсоид (рис. 22.6).

Если говорить о спектре ЛХП, то i-й показатель Ляпунова может быть определен в терминах длин осей эллипсоида $p_i(t)$:

$$\lambda_i = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \frac{p_i(t)}{p_i(0)}, \tag{22.19}$$

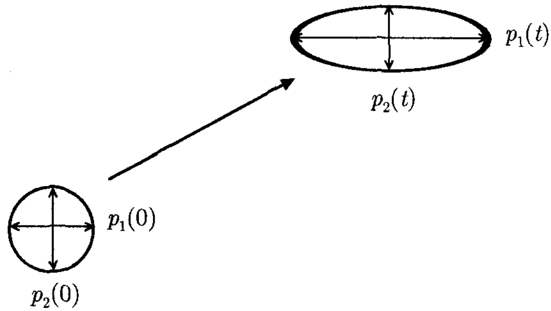


Рис. 22.6. Эволюция по времени бесконечно малой n-мерной сферы начальных условий

где λ_i упорядочены от наибольшего к наименьшему. Таким образом, показатели Ляпунова определяются расширением либо сжатием сферы по различным направлениям в фазовом пространстве. Поскольку ориентация эллипсоида непрерывно меняется со временем, меняются и направления, ассоциирующиеся с тем или иным показателем. Поэтому нельзя говорить о каком-то одном направлении для каждой ляпуновской экспоненты.

Отметим, что если задается только одно возмущение (это значит, что мы следим лишь за главной осью эллипсоида), то оно будет в линейном приближении увеличиваться по закону $e^{\lambda_1 t}$. Для двух независимых возмущений площадь образуемого ими квадрата (или прямоугольника) эволюционирует по закону $e^{(\lambda_1+\lambda_2)t}$; для трех — эволюция объема описывается законом $e^{(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)t}$ и т.д. Данное свойство приводит к несколько иному определению спектра ляпуновских экспонент: сумма первых j показателей определяется скоростью экспоненциального роста j-мерного элемента объема. Такая интерпретация обеспечивает основу для техники анализа экспериментальных данных (когда требуется вычислить несколько показателей).

Поскольку расчет ляпуновских экспонент по экспериментальным данным имеет одну общую идеологию с расчетом показателей по системе обыкновенных дифференциальных уравнений, кратко рассмотрим эту процедуру.

Как известно, для режима динамического хаоса характерно наличие экспоненциальной неустойчивости траекторий, количественной мерой которой является положительный ляпуновский показатель, характеризующий степень чувствительности системы к выбору начальных условий. Число положительных экспонент в спектре ЛХП определяется количеством неустойчивых направлений периодических орбит, встроенных в хаотический аттрактор, хотя в принципе возможны и более сложные ситуации, состоящие в сосуществовании периодических орбит с различным числом неустойчивых направлений. Мы ограничимся рассмотрением динамических систем с одним положительным показателем Ляпунова λ_1. При вычислении λ_1 делается предположение о «типичности» фазовой траектории, являющейся решением ДС при выбранных начальных условиях. В противном случае величина показателя, определенная на интервале времени T, может отличаться от предельного значения λ_1, соответствующего $T \to \infty$.

Если уравнения ДС, генерирующие фазовую траекторию, известны, то определить величину максимального показателя (или полный спектр ЛХП) можно с помощью стандартного алгоритма расчета ляпуновских экспонент. Рассмотрим систему ОДУ:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}, \vec{\mu}), \qquad \vec{x} \in R^n, \vec{\mu} \in R^m, \tag{22.20}$$

в которой $\vec{x}$ — вектор состояния, $\vec{f}$ — нелинейная вектор-функция, $\vec{\mu}$ — вектор управляющих параметров. Исследование данной системы на устойчивость ее частного решения $\vec{x}_p(t)$ сводится к анализу уравнений в вариациях и введению понятия k-мерного ляпуновского показателя. Но если ограничиться только вычислением старшего ЛХП, то этот алгоритм существенно упрощается. Искомая величина λ_1 будет определять эволюцию во времени вектора возмущения

$$r(t) = r_0 e^{\lambda_1 t}, \tag{22.21}$$

где r_0 — величина начального возмущения (в момент времени $t_0 = 0$), $r_0 = |\vec{x}(t_0) - \vec{x}_p(t_0)|$. Данная формула является очень приближенной, поскольку скорость разбегания траекторий не является постоянной, а зависит от выбора точки на аттракторе. Строго говоря, ляпуновские показатели определяют путем решения уравнений в вариациях, рассматривая бесконечно малые возмущения. Однако экспоненциальный закон разбегания траекторий справедлив не только для бесконечно малых возмущений, но также и для малых возмущений конечной величины, поэтому последняя формула вполне может быть использована при практическом анализе локальной неустойчивости (рис. 22.7).

Поскольку большие значения $r(t)$ принимать не может (в противном случае не будет выполняться условие линейного приближения), при расчете старшего ЛХП проводят перенормировки, в ходе которых задаются новые возмущения — малые по величине, но выбранные в направлении, которое соответствует вектору возмущения непосредственно перед перенормировкой. Затем вновь оценивают скорость экспоненциального разбегания близ-

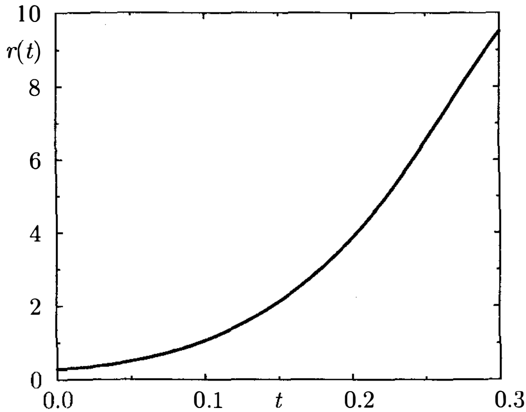


Рис. 22.7. Пример экспоненциального разбегания близких в начальный момент траекторий для аттрактора в системе Лоренца

лежащих траекторий. В результате вычисляется усредненная вдоль фазовой траектории $\vec{x}_p(t)$ количественная характеристика степени хаотичности. Схематично процедура перенормировки вектора изображена на рис. 22.8.

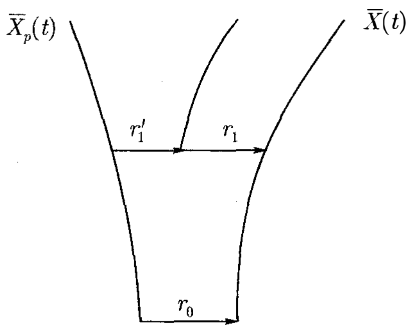


Рис. 22.8. Процедура перенормировок при расчете ЛХП по заданной системе уравнений. В данном случае r_1 — вектор возмущения до перенормировки, r_1' — после

Метод расчета λ_1 по реализации использует ту же идеологию, но теперь возникает одна проблема: нет возможности произвольным образом задавать вектор возмущения. Поскольку анализируется экспоненциальная неустойчивость траекторий в фазовом пространстве, на первом этапе процедуры расчета показателя нужно осуществить реконструкцию траектории в фазовом пространстве, то есть сформировать множество векторов $\vec{x}(t)$ в соответствии с формулой (22.2).

Мы не можем выбирать вектор возмущения при перенормировках строго в заданном направлении и должны брать новую точку там, где ее удается найти (в некотором конусе) (рис. 22.9). Невозможность выбора вектора возмущения в нужном направлении приводит к появлению ошибки ориентации (угол α между векторами r_1 и r'_1). Поскольку работа с одной единственной траекторией ограничивает возможности выбора вектора возмущения, на практике приходится искать компромисс между уменьшением ошибки ориентации в фазовом пространстве и минимизацией его длины. Ограничения на длину могут быть сформулированы следующим образом:

$$l_1 < r(t) < l_2. \tag{22.22}$$

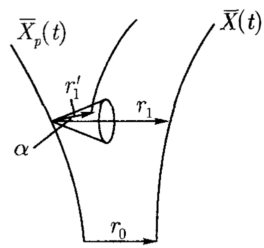


Рис. 22.9. Процедура перенормировок при расчете ЛХП по одномерной реализации

Необходимо вводить минимальное значение l_1, поскольку при $r(t) < l_1$ сказывается влияние шума, нарушающего экспоненциальный характер разбегания траекторий. Величина l_2 задает условие линейного приближения и часто может быть введена в процентном отношении от размера аттрактора (скажем, 5–10 %). По аналогии со стандартным алгоритмом проводятся перенормировки вектора возмущения, если расстояние между траекториями перестает удовлетворять условию линейного приближения ($r(t) > l_2$). Поскольку вычисление λ_1 предполагает реконструкцию аттрактора, результат расчета данной величины будет зависеть от качества реконструкции, что приводит к появлению дополнительных параметров численной схемы — размерности пространства вложения, задержки и т. п.

Несколько слов скажем о перенормировках вектора. Здесь возможны варианты:

- перенормировки проводятся после достижения определенного расстояния между траекториями, а именно если $r(t) > l_2$;

- перенормировки проводятся через фиксированные интервалы времени (например, через характерный период колебаний).

Возможны также комбинации этих двух способов осуществления перенормировок. В любом случае выбором параметров алгоритма приходится искать компромисс: слишком частые перенормировки приводят к увеличению ошибок ориентации; слишком редкие — позволяют увеличиваться вектору возмущения, выводя за рамки линейного приближения. Метод перенормировок при достижении фиксированного расстояния между траекториями эффективен для достаточно однородных аттракторов, когда зависимость от выбора точки на нем не слишком сильная. Если анализируются неоднородные аттракторы, то предпочтительнее оказывается метод перенормировок через фиксированные промежутки времени.

22.4. Реконструкция динамической системы

После восстановления фазового портрета аттрактора ДС любым из рассмотренных выше методов может быть решена задача реконструкции оператора эволюции. Наиболее простой способ для этого — создать n-мерное дискретное отображение

$$\begin{aligned} x_{1,i+1} &= F_1(x_{1,i}, x_{2,i}, \ldots, x_{n,i}), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n,i+1} &= F_n(x_{1,i}, x_{2,i}, \ldots, x_{n,i}), \end{aligned} \tag{22.23}$$

где $x_{j,i}$ — координаты вектора состояния, рассмотренного в моменты времени $i\Delta t$, F_j — нелинейные функции.

В рамках алгоритма глобальной реконструкции для получения конкретного вида эволюционного оператора функции F_j, $j = 1, \ldots, n$ представляют в виде разложения по некоторому базису, ограничиваясь при этом конечным числом членов разложения. В простейшем случае задание F_j может осуществляться полиномами некоторой степени ν:

$$F_j(\vec{x}_i) = \sum_{l_1, l_2, \ldots, l_n = 0}^{\nu} C_{j, l_1, l_2, \ldots, l_n} \prod_{k=1}^{n} x_{k,i}^{l_k}, \quad \sum_{k=1}^{n} l_k \leqslant \nu, \tag{22.24}$$

где $C_{j,l_1,l_2,\ldots,l_n}$ — неизвестные коэффициенты, которые требуется найти. Для аппроксимации могут применяться полиномы Лежандра либо может использоваться более сложная методика. Для задания F_j мы ограничимся формулой (22.24).

Система уравнений (22.23) допускает запись для любого номера i. Для нахождения коэффициентов (22.24) необходимо решить систему N линейных алгебраических уравнений

$$x_{j,i+1} = \sum_{l_1,l_2,\ldots,l_n=0}^{\nu} C_{j,l_1,l_2,\ldots,l_n} \prod_{k=1}^{n} x_{k,i}^{l_k}, \quad i = 1,\ldots,N \tag{22.25}$$

с неизвестными $C_{j,l_1,\ldots,l_n}$, в которой N — число точек скалярного временного ряда, используемых для аппроксимации правых частей, ν — степень полинома.

При заданных n и ν число коэффициентов K полиномов (22.24) в общем случае может быть определено по формуле $K = (n+\nu)!/(n!\nu!)$. Как правило, $N \gg K$, поэтому для конкретизации эволюционного оператора система уравнений (22.25) решается методом наименьших квадратов. Получающаяся математическая модель является громоздкой, но при условии удачного выбора общего вида нелинейных функций ее решение воспроизводит сигнал с высокой степенью точности.

Аналогичным образом можно реконструировать не только дискретные отображения, но и математические модели в виде системы ОДУ 1-го порядка:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dx_n}{dt} &= F_n(x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{aligned} \tag{22.26}$$

Смысл функций в правых частях тот же, что и ранее. Так как на первом этапе алгоритма была осуществлена реконструкция фазовой траектории, это значит, что все x_i известны; следовательно, можно определить производные от них. Поэтому (22.26) снова сводится к системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов.

Если в качестве способа задания вектора состояния в фазовом пространстве используется метод последовательного дифференцирования, то математическую модель можно восстановить в более простом виде

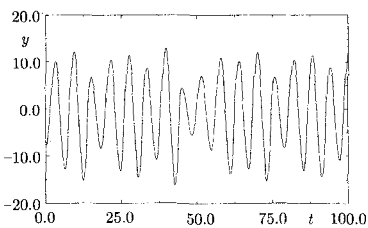
$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = x_3, \quad \ldots, \quad \frac{dx_n}{dt} = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{22.27}$$

в силу того, что взаимосвязь между координатами однозначно задается равенством (22.17).

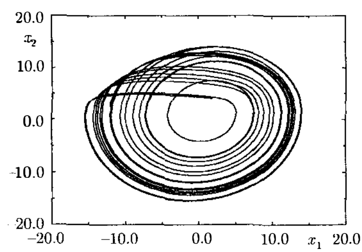
22.5. Пример реконструкции динамической системы

Рассмотрим конкретный пример применения описанного алгоритма. С этой целью выберем известную динамическую систему Рёсслера (22.18), описывающую режим непериодических колебаний. При значениях параметров $a = 0.15$, $b = 0.2$, $c = 10.0$ система (22.18) характеризуется режимом странного аттрактора.

Используем в качестве одномерного временного ряда a_i зависимость во времени одной из координат $y(i\Delta t)$, полученную численным интегрированием уравнений (22.18). Будем считать, что вид системы (22.18) и ее размерность нам неизвестны. Наблюдаемая $a(t) = y(t)$, заданная на конечном интервале времени $0 \leqslant t \leqslant 100$, представлена на рис. 22.10, *а*.



а



б

Рис. 22.10. Временная зависимость координаты $y(t)$ системы Рёсслера (22.18) (*а*), реконструированный аттрактор в проекции на плоскость (x_1, x_2), где $x_1(t) = y(t)$, $x_2(t) = y(t + \tau)$. Время задержки определялось как время достижения первого нуля автокорреляционной функции (что соответствует приблизительно 1/4 базового периода колебаний) (*б*)

Для задания вектора состояния реконструированной системы воспользуемся теоремой Такенса (22.2). Рассчитывая по наблюдаемой $a(t)$ автокорреляционную функцию, находим время спадания ее до нуля $\tau_0 \approx 1.6$ и используем эту величину в качестве времени задержки в (22.2). На рис. 22.10, *б* представлена проекция реконструированного аттрактора на плоскость двух переменных: $x_1(t) = y(t)$ и $x_2(t) = y(t + \tau)$.

Для определения размерности модельной системы нужно рассчитать размерность аттрактора и размерность пространства вложения. Для оценки размерности аттрактора вычислим его корреляционную размерность D_c (22.15), используя специальный алгоритм. На рис. 22.11 приведены результаты расчета зависимости D_c от $\lg \varepsilon$, где ε — размер ячейки разбиения фазового пространства. Как видно из графиков, вне зависимости от размерности пространства вложения n имеется «полочка» на уровне $D_c \approx 1.9$, который и принимаем за значение искомой размерности.

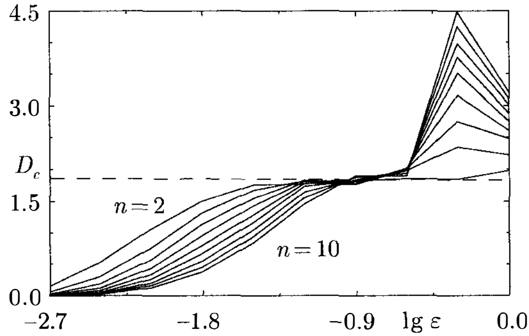


Рис. 22.11. Результаты расчета корреляционной размерности (при варьировании размерности пространства вложения n). Получено значение $D_c \approx 1.9$ (соответствующее «полочке»). Данное значение позволяет в принципе ограничиться 3-мерным пространством для вложения аттрактора и, соответственно, ограничиться системой трех ОДУ 1-го порядка при моделировании

Таким образом, реконструируемый аттрактор имеет размерность $D \approx 2$ и может быть «вложен» в трехмерное фазовое пространство. Это означает, что мы можем искать модельную ДС в виде системы ОДУ третьего порядка ($n = 3$). Искомую систему запишем в виде (22.26), используя полиномиальную аппроксимацию (22.24) и ограничившись значением $\nu = 2$. Результаты расчетов коэффициентов, определяющих вид правых частей уравнений (22.26) для $n = 3$ и $\nu = 2$, приведены в табл. 22.1

В результате процедуры реконструкции ДС по одномерному временному ряду мы получили трехмерную ДС вида (22.26) с коэффициентами, приведенными в таблице. Теперь проведем сравнение результатов, которые можно получить, интегрируя как тестовую модель (22.18), так и модельную ДС (22.26). Результаты интегрирования модельной ДС (22.26) представлены на рис. 22.12 в виде зависимости $x_1(t)$.

Сравнение данных рис. 22.12 с данными рис. 22.10, *а* показывает качественное сходство реального и модельного колебательных процессов. Однако важным, конечно, являются количественные соответствия. Возможно ли с помощью реконструированной системы осуществить прогноз эволюции системы во времени за пределами интервала, на котором нам известна наблюдаемая? С этой целью проведем следующий эксперимент. Возьмем в качестве начального значения координату последней точки наблюдаемой

Таблица 22.1. Коэффициенты аппроксимации нелинейностей в случае полиномиального представления функций F_j (22.24). Параметры реконструкции $n=3$, $\nu=2$. Для реконструкции аттрактора используется метод последовательного дифференцирования (22.17). Величины l_j обозначают степени переменных состояния x_i в правых частях системы (22.26)

l_1	l_2	l_3	Значение коэффициента аппроксимации		
			1-е уравнение	2-е уравнение	3-е уравнение
0	0	0	0.0	0.0	−0.189
0	0	1	0.0	1.0	−9.91
0	0	2	0.0	0.0	0.0
0	1	0	1.0	0.0	0.507
0	1	1	0.0	0.0	1.003
0	2	0	0.0	0.0	−0.150
1	0	0	0.0	0.0	−10.07
1	0	1	0.0	0.0	−0.145
1	1	0	0.0	0.0	1.026
2	0	0	0.0	0.0	−0.145

(рис. 22.10, *а*) в момент времени $t_0 = 100$. Далее проинтегрируем как исходную, так и модельную системы с начальными условиями при $t = t_0$ и сравним результаты для $t > t_0$. На рис. 22.13 приведены соответствующие графики зависимостей $y(t)$ для тестовой системы (22.18) и $x_1(t)$ для реконструированной ДС. Пунктирной линией показан результат интегрирования системы (22.18), сплошной линией — решение реконструированной модельной системы. Как следует из рис. 22.13, прогноз эволюции системы во времени осуществляется с некоторой ошибкой, которая со временем нарастает. Конкретное время прогноза можно указать, задав точность предсказания. Из результатов рис. 22.13 следует, что если ограничиться ошибкой ± 5 %, то время предсказания в нормированных единицах будет составлять примерно $T = 12.0$, то есть около двух базовых квазипериодов колебаний системы.

22.6. Заключение

Описание алгоритма реконструкции модельных динамических систем по одномерным временным рядам и конкретный пример их практического применения, приведенные в настоящей лекции, иллюстрируют как возможности современных методов моделирования, так и их недостатки. Нужно согласиться с тем, что техника реконструкции пока еще остается достаточ-

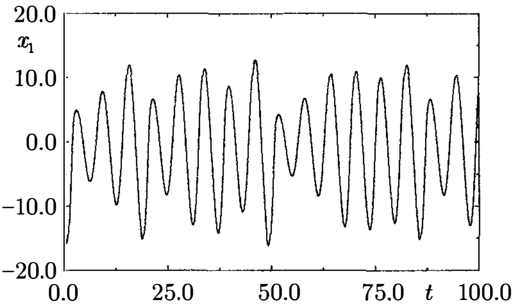


Рис. 22.12. Зависимость $x_1(t)$, полученная численным интегрированием реконструированной системы

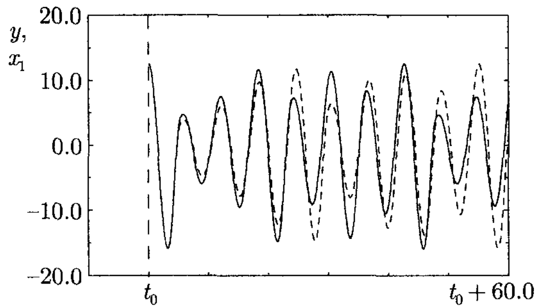


Рис. 22.13. Возможность предсказания поведения системы (22.18) после окончания наблюдения за генерируемым данной системой сигналом (рис. 22.10, *а*), т.е. для времен $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T$, где T — время предсказания с устраивающей экспериментатора степенью точности

но сложной и требует (помимо глубоких знаний современной нелинейной динамики) физической интуиции и экспериментального исскуства.

Выбранный для иллюстрации пример является далеко не простым, так как реконструируются хаотические автоколебания. С этим связаны и ошибки реконструкции, ограничивающие время предсказания. Если в качестве наблюдаемой мы имеем более простой тип движения (например, периодические колебания), реконструкция приводит к уменьшению ошибок и увеличению времени прогноза.

Лекция 23

Динамический хаос и диагностика в биологии и медицине

23.1. Введение

Открытие эффекта динамического хаоса, который характеризуется возможностью детерминированных систем иметь в качестве решения непериодический (и не квазипериодический) во времени процесс незатухающих колебаний, относится к разряду наиболее фундаментальных результатов, оказывающих все большее влияние на осознание картины мира природы и законов, управляющих ее эволюцией. Если совсем недавно ответ на вопрос о возможных решениях обыкновенных дифференцильных уравнений исчерпывался указанием трех типов: состояние равновесия, периодическое или квазипериодическое, то с 1971 года мы можем говорить о новом, четвертом типе решения — об установившихся непериодических (шумоподобных) колебаниях в динамических системах в отсутствие каких-либо внешних или внутренних флуктуаций. Подчеркнем, что речь идет о динамическом описании временных процессов, базирующемся на детерминированности оператора эволюции применительно к макроскопическим координатам состояния динамической системы. Из рассмотрения исключаются стохастические процессы, анализ которых изначально предполагает наличие случайных закономерностей, обусловленных флуктуациями, и базируется на уравнениях статистической теории.

В чем же состоит принципиальная важность эффекта динамического хаоса для развития естествознания? Пожалуй, наиболее важным мировоззренческим фактором является осознание того, что реальные динамические системы в условиях, когда их нелинейные свойства играют принципиальную роль, могут функционировать в режимах непериодических хаотических пульсаций в отсутствие случайных сил. Хаотические колебания по своему виду и характеристикам практически не отличаются от реализаций случайных процессов, но являются детерминированно определенными! До открытия динамического хаоса экспериментаторы довольно часто получали подобные результаты, однако с удивительным постоянством интерпретировали их как следствие воздействия шума, неисправности аппаратуры и т. д.

Сегодня исследователи знают о возможном возникновении режима динамического хаоса и относятся к анализу полученных данных с более общих позиций.

Нет сомнения в том, что моделирование любых реальных процессов с помощью динамических систем является мощным инструментом познания закономерностей эволюционных процессов в природе, применение которого все более и более расширяется. Типичным алгоритмом научного исследования свойств любой системы является следующий. Система всесторонне анализируется; выделяются основные физические величины, характеризующие ее состояние; на основе известных законов природы устанавливаются функциональные взаимосвязи между этими величинами и в итоге формулируются эволюционные уравнения для координат состояния. Далее проводится анализ возможных решений модельной динамической системы. С этой целью динамика системы моделируется на компьютерах, позволяющих достаточно точно и быстро выявить типичные режимы ее функционирования при варьировании управляющих параметров и начальных условий. Модельные решения сравниваются с данными натурных экспериментов с исследуемой системой. Если отличия существенны, идет уточнение модели, вновь численный эксперимент, сравнение и т. д. В итоге формулируются динамические уравнения, представляющие собой математическую модель исследуемой системы.

Зависимость во времени координат состояния системы в режиме детерминированного (динамического) хаоса описывается сложной функцией, свойства которой требуют введения новых количественных характеристик для ее диагностики, отличных от характеристик периодического или квазипериодического режимов. Представим себе гармонический периодический сигнал $x(t) = A\sin(\omega_0 t + \phi)$. Гармоническое колебание исчерпывающим образом описывается, если заданы амплитуда A, частота $\omega_0 = 2\pi f_0$ и начальная фаза колебания ϕ. В спектральном представлении мы имеем единственную линию в спектре колебаний на частоте ω_0, интенсивность которой однозначно определена амплитудой. В случае периодических негармонических колебаний картина изменится несущественно: периодический сигнал по теореме Фурье представляется в виде суммы гармонических компонент с различными амплитудами, фазами и частотами $n\omega_0$, кратными основной.

Квазипериодическое решение, в отличие от периодического, представляет собой суперпозицию тех же гармонических компонент с заданными амплитудами и фазами, но с более богатым спектром частот. В простейшем случае квазипериодических колебаний с двумя независимыми частотами, которые можно представить себе в виде периодического сигнала частоты ω_0, промодулированного периодическим сигналом более низкой частоты Ω, спектр теоретически будет включать все комбинационные частоты $\omega_{mn} = n\omega_0 + m\Omega$, $n, m = \pm 1, \pm 2, \ldots$ (m и n не могут быть равны нулю одновременно).

Сигналы любой природы представляют интерес с точки зрения информации, которую способны переносить. Полезная информация может быть заложена путем модуляции конкретного параметра системы. Так, в случае гармонического сигнала информацию может содержать амплитуда, частота или фаза. Хорошо известны классические способы передачи информационных сообщений с помощью амплитудной, частотной или фазовой модуляции гармонических сигналов. Хаотический сигнал благодаря своей сложности с этой точки зрения принципиально отличается. Сложная структура хаотических сигналов потребовала существенного расширения совокупности параметров (или характеристик), с помощью которых можно описать их отличительные особенности. Хаотические сигналы, безусловно, способны переносить большее количество информации, так как обладают заметно большим числом степеней свободы, описывающих сложность их структуры. Это обстоятельство служит основанием для использования специфических характеристик хаотических сигналов для диагностики динамических систем, которые генерируют эти сигналы.

23.2. Количественные характеристики хаотических сигналов

Каковы же наиболее важные количественные характеристики хаотических сигналов, отличающие их от регулярных и позволяющие расширить спектр критериев диагностики состояния динамических систем? Перечислим наиболее важные из них.

Степень хаотичности сигнала. Так как хаотический сигнал является очень похожим по своей структуре на случайный, естественно, должны существовать количественные меры «степени случайности» хаотического сигнала. Фундаментальной характеристикой степени случайности является *энтропия*. Имея достаточно длинную хаотическую реализацию $x(t)$, нужно рассчитать плотность распределения вероятностей $p(x)$, которая для стационарных процессов не зависит от времени. Далее вычисляется энтропия $H_x = -\int p(x)\log p(x)dx$. В силу дискретности процедуры счета на ЭВМ интеграл заменяется суммой и энтропия H[1] всегда будет ограниченной положительной величиной.

[1]Классическое понятие энтропии было введено для описания состояния консервативных систем, в которых нет диссипации энергии. Автоколебательные (или в общем случае — откры-

Использование энтропии для характеристики хаотических процессов имеет более глубокое фундаментальное обоснование. Хаотические траектории всегда неустойчивы в смысле Ляпунова. Степень неустойчивости имеет в качестве количественной меры так называемые положительные показатели Ляпунова. Именно наличие положительных показателей Ляпунова ведет к перемешиванию и «производит» энтропию динамической системы. Таким образом, энтропия и ляпуновский показатель являются взаимосвязанными количественными характеристиками степени хаотичности исследуемого процесса $x(t)$, что можно использовать в диагностических целях.

Размерность хаотического аттрактора. Как известно, хаотические аттракторы, как образы динамического хаоса в фазовом пространстве системы, имеют в общем случае дробную (нецелую) метрическую размерность. Этим специфическим свойством обладают только хаотические автоколебания, и размерность аттрактора, безусловно, является характерным специфическим количественным критерием, позволяющим различать структуру хаотических колебаний. Размерность формально вводится как чисто геометрическая характеристика аттрактора. Однако и здесь имеет место фундаментальная взаимосвязь размерности, введенной из геометрических соображений, с динамическими свойствами аттрактора, характеризуемыми спектром ляпуновских экспонент, определяющих так называемую «ляпуновскую» размерность. Следствием является использование для диагностики как метрических (фрактальных) размерностей, так и ляпуновской (динамической) размерности аттракторов.

Автокорреляционная функция и спектр мощности. В силу апериодической «шумоподобной» структуры хаотической реализации динамического процесса $x(t)$ ее спектральная плотность мощности, вычисляемая как преобразование Фурье от интенсивности процесса, представляет собой непрерывную функцию частоты $S(\omega)$. Вид этой функции, наличие ярко выраженных максимумов на характерных частотах, частотный диапазон, включающий основную энергию колебаний, и другие свойства функции $S(\omega)$ могут быть использованы в качестве диагностических критериев. В частности, если чисто формально рассматривать $S(\omega)$ как плотность распределения мощности сигнала $x(t)$ по частотам, то можно ввести понятие энтропии спектра H_ω и т. д.

По теореме Винера–Хинчина, спектр мощности $S(\omega)$ через преобразование Фурье связан с автокорреляционной функцией процесса $x(t)$:

тые) системы всегда неконсервативны и энтропия будет зависеть от энергии системы. В этом случае для диагностики необходимо использовать некую перенормированную величину энтропии (энтропию Климонтовича), которая не зависит от энергии системы.

$\Psi(\tau) = \langle x(t)x(t+\tau)\rangle$ (угловые скобки означают процедуру усреднения). Так как спектральная функция $S(\omega)$ непрерывна в конечном интервале частот, автокорреляционная функция $\Psi(\tau)$ будет иметь вид спадающей во времени τ функции. Время τ_0 спадания $\Psi(\tau)$ в заданное число раз называют временем корреляции, которое также характеризует степень случайности процесса и может быть использовано для диагностики.

Помимо вышеперечисленных характеристик хаотических колебаний, для диагностики состояния системы могут быть использованы и ряд других специфических характеристик режимов динамического хаоса. Например, по имеющейся экспериментальной зависимости одной из координат процесса $x(t)$, которая вводится в память компьютера в виде дискретного временного ряда ($x(i\Delta t), i = 1, 2, \ldots, \Delta t$ — время дискретизации), можно с помощью специальных методов восстановить аттрактор, топологически эквивалентный аттрактору исходной динамической системы, порождающей наблюдаемый экспериментально процесс $x(t)$. Структура восстановленного аттрактора, закономерности его эволюции при изменении условий эксперимента или режима функционирования исходной системы также могут использоваться для извлечения информации о системе и, следовательно, для диагностики.

Для анализа специального типа сигналов, представляющих собой некую непериодическую (хаотическую) последовательность временных интервалов $t_n, n = 1, 2, \ldots$, используется метод построения дискретных отображений последования. Такие отображения представляют собой дискретные динамические системы вида $x_{n+1} = f(x_n, \mu)$, где n — дискретное время, μ — параметр системы. Функция $f(x_n, \mu)$ позволяет по значению переменной в момент времени n получить ее значение на следующем шаге $(n+1)$ итерационной процедуры. Предельное множество фазовых траекторий при $n \to \infty$ характеризует аттрактор дискретной динамической системы. Свойства этого аттрактора можно описывать всеми вышеперечисленными количественными характеристиками, используя последние в качестве диагностических критериев. Примером такого рода сигналов в биологии и медицине являются последовательности RR-интервалов электрокардиограммы (ЭКГ) или последовательности интервалов времени между всплесками электрической активности нейронов (interspike intervals).

23.3. Динамические болезни

В организме здорового индивидуума (будь то человек, животное, отдельный орган или даже клетка) обнаружен широкий набор различных временных ритмов. Эти ритмы практически всегда не отражают строгую периодичность процессов. Анализ ритмов сердцебиения, дыхания, давления крови, электроэнцефалограмм (ЭЭГ) и других процессов свидетельствует о существенных отличиях указанных процессов от периодических. Эти отличия (например, для ЭЭГ) настолько явны, что высказываются предположения о соответствии нормальной динамики здоровых индивидуумов хаотическому режиму функционирования. Исследования таких процессов свидетельствуют о том, что наблюдаемый «хаос» может не быть следствием воздействия флуктуаций, а, скорее всего, присущ самой природе динамического процесса в организме. Та или иная степень хаотичности, характеризующая режим функционирования здорового индивидуума, может изменяться вследствие патологии в ту или иную сторону. Например, ЭЭГ здорового человека имеет достаточно высокую степень хаотичности, но при возникновении приступа эпилепсии демонстрирует переход к почти периодическому процессу. В то же время сердце здорового человека генерирует почти периодическую ЭКГ, но при некоторых типах заболеваний (аритмия, тахикардия) увеличивается число случайных сбоев ритма и соответственно возрастает степень хаотичности ЭКГ.

Характерные изменения в динамике какой-либо переменной состояния организма могут являться признаком патологии. Л. Гласс и М. Мэки ввели в науку термин «динамическая болезнь», характеризуя им именно возникновение аномалии во временных зависимостях переменных состояния, описывающих режимы функционирования живых систем. Богатство динамического поведения от периодичности до хаоса, наблюдаемое в физиологических системах и обнаруженное в относительно простых нелинейных системах малой размерности, дает надежду на саму возможность моделирования динамических болезней, их диагностику и в итоге лечение. Многие исследователи считают, что биология, физиология и медицина настолько отличаются от физики, что никогда не смогут стать предметом строгого теоретического анализа. Однако сегодня есть основания полагать и надеяться, что ряд обнаруженных и регистрируемых сейчас динамических явлений в живых организмах может быть более глубоко осознан и в перспективе математически описан на основе достижений современной теории динамических систем.

23.4. Моделирование динамики сердечного ритма

Рассмотрим ряд конкретных примеров, иллюстрирующих часть положений, сформулированных выше. В качестве первого примера опишем результаты экспериментов, проведенных в лаборатории нелинейной динамики СГУ по моделированию динамики сердечного ритма. В качестве исходного экспериментального материала использовались ЭКГ здорового человека (у которого отсутствуют признаки какого-либо сердечно-сосудистого заболевания). ЭКГ длительностью 60 секунд с помощью аналого-цифрового преобразователя вводилась в память компьютера. Далее применялась современная техника вычислений, позволяющая по одномерному временному ряду численно решить задачу реконструкции модели динамической системы, решение которой с заданной точностью воспроизводит исходный сигнал ЭКГ. Задача реконструкции неоднозначна и, естественно, может иметь много решений. Мы остановились на наиболее простой модели, которая имела размерность $N = 3$ и достаточно хорошо воспроизводила типичный кардиоцикл ЭКГ.

Исследования возможных динамических режимов колебаний в восстановленной динамической системе при вариации ее параметров показали, что эта модель описывает режимы как периодических, так и хаотических колебаний. Причем, изменяя некий управляющий параметр модели, можно было управлять степенью хаотичности результирующей ЭКГ, что отражало различные уровни вариабельности сердечного ритма. Исходная ЭКГ представляла собой непериодический сигнал. Подбором параметров реконструированной модели удалось найти режим ее функционирования, при котором характеристики исходной и модельной ЭКГ оказались близкими. На рис. 23.1 представлены фазовый портрет, спектр мощности и автокорреляционная функция экспериментально снятой ЭКГ, а на рис. 23.2 — те же характеристики, полученные из восстановленной математической модели. Нетрудно видеть достаточно хорошее соответствие прямых экспериментальных результатов с результатами, полученными с использованием модельной динамической системы.

Представленные результаты удивительны в силу, безусловно, слишком простой процедуры моделирования, однако еще более удивительными оказываются следующие данные. Известно, что структура спектральной плотности мощности (графики (*б*) на рис. 23.1 и 23.2) позволяет диагностировать ряд патологических отклонений в работе сердца человека. В частности, выделяют режимы, при которых частота сердечных сокращений практически постоянна (сердце «работает как часы») и режимы с большой степенью аритмии, когда спектр становится практически равномерным в низкочастотной области, напоминая чисто шумовой процесс (сердцебиения с повышенной аритмией). В модельной системе при вариации параметров удалось обнаружить как почти периодические, так и более развитые хаотические колебания. Другими словами, в зависимости от параметров модельная система способна воспроизводить ЭКГ не только здорового человека, но и некоторые типы патологии.

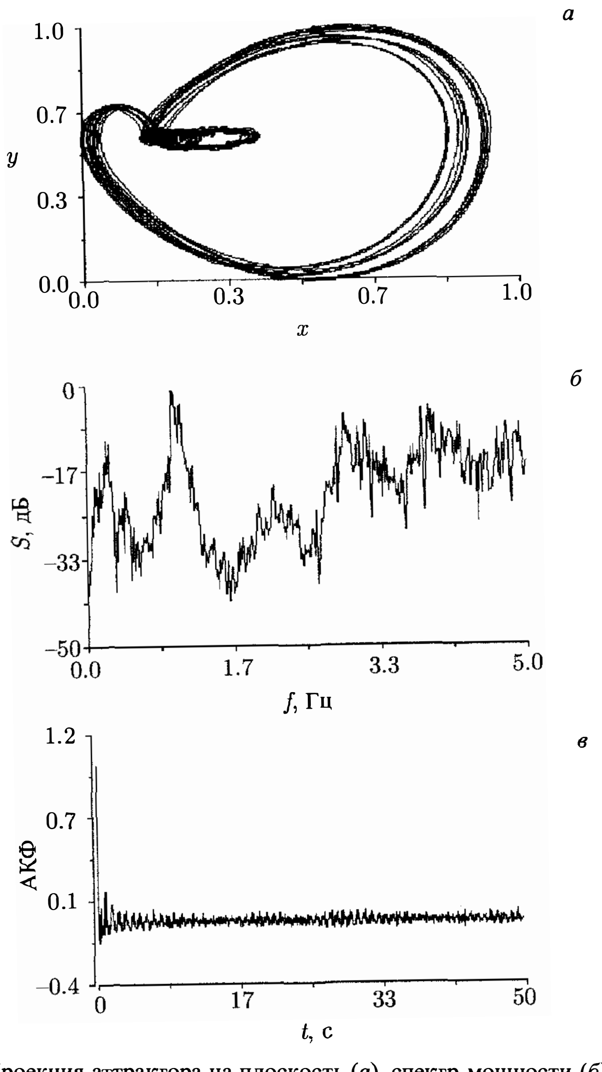


Рис. 23.1. Проекция аттрактора на плоскость (*а*), спектр мощности (*б*) и автокорреляционная функция (*в*), рассчитанные по экспериментальной ЭКГ здорового человека

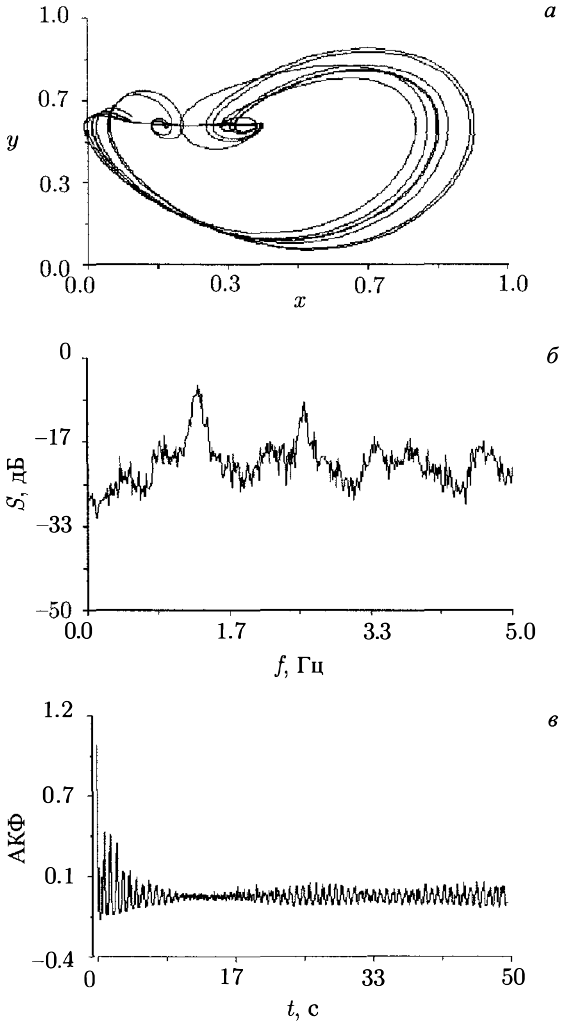


Рис. 23.2. Проекция аттрактора на плоскость (*а*), спектр мощности (*б*) и автокорреляционная функция (*в*) сигнала ЭКГ, полученного в результате решения реконструированной динамической системы

23.5. Синхронизация кардиоритма

Фазовая синхронизация кардиоритма внешним периодическим сигналом. Сердечно-сосудистая система (ССС) человека является одним из примеров наиболее сложной нелинейной колебательной системы. Очевидность факта существования самоподдерживающихся незатухающих колебаний наводит на мысль об автоколебательном характере функционирования ССС. С физической точки зрения можно полагать, что ССС человека действительно является автоколебательной, так как обладает принципиально важными отличительными характеристиками: свойства ССС в определенных пределах не зависят от начальных условий и установившийся режим незатухающих колебаний целиком определяется параметрами ССС организма. Однако хотелось бы получить более убедительное доказательство автоколебательного характера функционирования ССС, которое развеяло бы все сомнения. С этой целью нами был поставлен эксперимент по исследованию возможности синхронизации кардиоритма внешним сигналом. Известно, что эффект синхронизации реализуется исключительно в автоколебательных системах. Таким образом, если ССС демонстрирует классический эффект синхронизации, ее можно считать автоколебательной.

Для изучения внешней синхронизации кардиоритма нами была предложена следующая схема эксперимента. На испытуемого воздействует слабый сигнал, представляющий периодическую последовательность импульсов, частота которых f_F близка к средней частоте пульса испытуемого $\langle f_H \rangle$, а длительность составляет $\simeq 10\,\%$ от средней длительности одного кардиоинтервала (рис. 23.3).

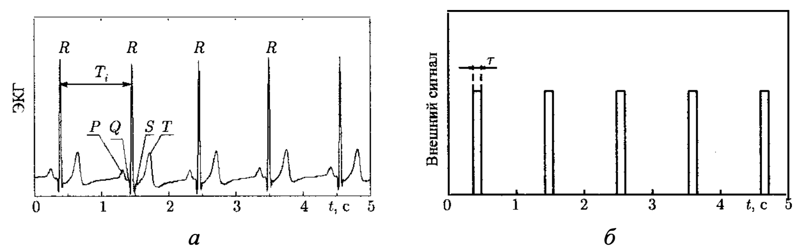


Рис. 23.3. Типичная ЭКГ человека (*а*) и форма сигнала внешнего воздействия (*б*)

Эти импульсы преобразовывались в синхронную периодическую последовательность вспышек на экране дисплея (высвечивался яркий красный квадрат), одновременно с которыми динамик компьютера издавал слабый звуковой сигнал. Схема проведения эксперимента приведена на рис. 23.4.

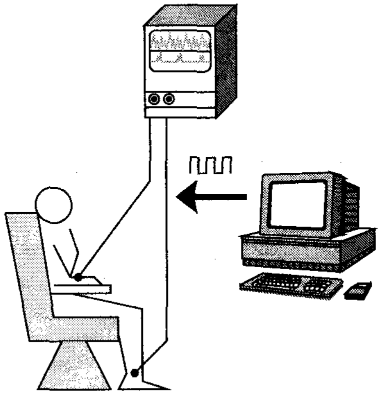


Рис. 23.4. Иллюстрация схемы проведения эксперимента

Эффекты синхронизации исследовались путем численной обработки сигнала электрокардиограммы (ЭКГ). ЭКГ испытуемого записывалась как в отсутствие, так и при наличии внешнего воздействия. Длительность записей ЭКГ составляла 300–600 секунд в реальном времени. Обработка данных экспериментов проводилась на основе расчетов мгновенной разности фаз между сигналом воздействия и ЭКГ испытуемого в установившемся режиме при наличии воздействия. Для расчетов использовались дискретные последовательности RR-интервалов ЭКГ с применением определения мгновенной фазы:

$$\Phi(t) = \pi \frac{t - t_k}{t_{k+1} - t_k} + \pi k, \quad t_k < t < t_{k+1}, \tag{23.1}$$

где t_k определяют моменты появления максимальных выбросов ЭКГ и соответствуют последовательности RR-интервалов.

Было проведено около 40 записей сигналов ЭКГ с привлечением в качестве испытуемых 16 молодых людей с отсутствием признаков патологии ССС. Степень достоверности результатов контролировалась специальными способами.

Рис. 23.5, *а* иллюстрирует типичную зависимость нормированной на 2π мгновенной разности фаз от времени для случая, когда средняя частота пульса испытуемого и частота внешнего воздействия отличались на $3\,\%$. Результаты свидетельствуют об эффективной фазовой синхронизации кардиоритма: мгновенная разность фаз остается ограниченной и близкой к нулю или целому числу 2π на отрезке времени $\Delta t \simeq 150$ с (примерно 150 кардиоинтервалов). Изменения частоты воздействия (в сторону увеличения и уменьшения ее в сравнении со средней частотой кардиоритма испытуемого в отсутствие воздействия) дали возможность экспериментально определить область захвата частоты. Результаты представлены на рис. 23.5, *б* и свидетельствуют о том, что средняя частота кардиоритма оказывается захваченной внешним сигналом в полосе частот $\pm 5\,\%$ от средней частоты кардиоритма в отсутствие воздействия. Расчеты показали, что в области синхронизации коэффициент эффективной диффузии фазы D_{eff} имеет ярко выраженный минимум, близкий к 10^{-2}, и резко возрастает при выходе из области синхронизации.

Фазовая синхронизация кардиоритма внешним апериодическим сигналом. Интересно проверить, возможно ли явление фазовой синхронизации кардиоритма человека при воздействии на него непериодическим сигналом? С этой целью внешний сигнал был выбран в виде последовательности RR-интервалов ЭКГ, полученных в экспериментах с другим человеком. Более того, отбирались испытуемые, у которых средние длительности RR-интервалов управляющего и управляемого испытуемых отличаются более чем на 5 %. Это означает выход из области синхронизации на основном тоне. Ниже мы рассмотрим результаты, полученные в условиях, когда средняя частота пульса управляющей ЭКГ была 1 Гц, а пульса испытуемого (в отсутствие воздействия) — 0,85 Гц.

В случае заметного различия средних частот управляющего и управляемого колебательных процессов условие фазовой синхронизации удовлетворяет общему соотношению:

$$\lim_{t\to\infty} |m\Phi_1(t) - n\Phi_2(t)| < M = \text{const}, \tag{23.2}$$

где m, n — целые числа, $\Phi_{1,2}(t)$ — мгновенные фазы сравниваемых колебательных процессов.

Типичные результаты экспериментов представлены на рис. 23.5, *в*. График иллюстрирует зависимость мгновенной разности фаз во времени, полученную при условии $m = 7$, $n = 6$. Разность фаз близка к нулю на отрезке времени $\Delta t \simeq 50$ с и не превосходит 2π на интервале $\Delta t \simeq 100$ с. Можно говорить об эффективной фазовой синхронизации, отвечающей резонансу $m : n = 7 : 6$. Синхронизация апериодическим сигналом была подтверждена в 19 из 20 проведенных экспериментов. Отметим, что результаты предыдущего раздела (рис. 23.5, *б*) с точки зрения условия (23.2) трактуются как эффективная синхронизация на основном тоне при условиях $m = 1, n = 1$.

Экспериментальное наблюдение эффекта синхронизации позволяет утверждать, что динамика сердечно-сосудистой системы человека имеет

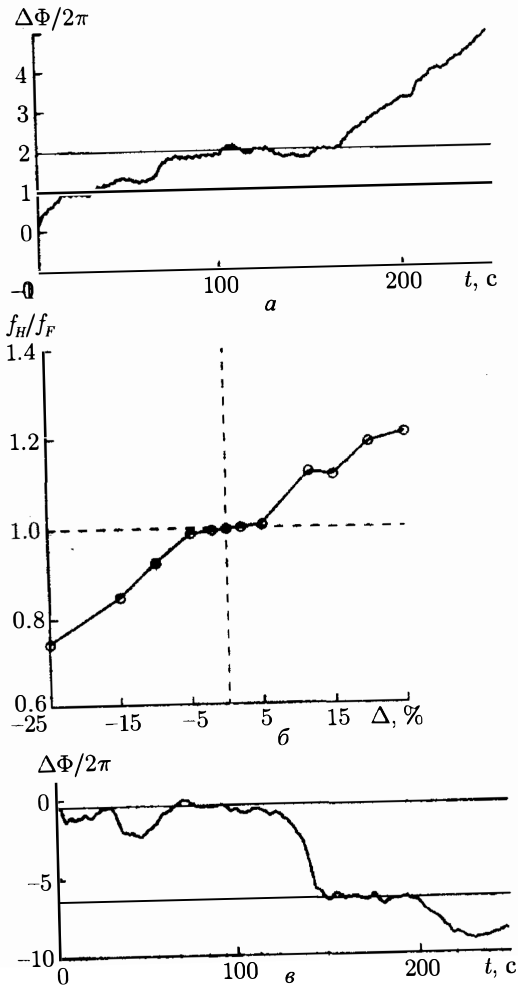


Рис. 23.5. (*а*) Мгновенная разность фаз между сигналом периодического воздействия и последовательностью RR-интервалов ЭКГ испытуемого для случая, когда $\Delta = |\langle f_{\text{H}} \rangle - f_{\text{F}}|/f_{\text{F}} = 3\,\%$; (*б*) зависимость отношения частот $f_{\text{H}}/f_{\text{F}}$ от расстройки Δ, свидетельствующая об эффективной фазовой синхронизации; (*в*) — то же, что и (*а*), но для случая апериодического воздействия

автоколебательный характер. Можно полагать, что именно автоколебательный характер функционирования ССС позволяет эффективно использовать электрические кардиостимуляторы для стабилизации сердечного ритма.

23.6. Степень хаотичности как критерий диагностики

В качестве иллюстрации рассмотрим два примера использования в качестве диагностического критерия количественных характеристик степени хаотичности процесса. В качестве исследуемых сигналов будем анализировать ЭКГ человека, а в качестве меры степени хаотичности выберем нормированную энтропию и старший показатель Ляпунова.

1. Обсудим вначале в общих чертах методику экспериментов, целью которых являлось исследование особенностей реакции здорового человека на слабые внешние раздражители (стресс). В качестве слабых стрессов использовались: физическая нагрузка (30 приседаний в течение 1 минуты), ментальная нагрузка (чтение незнакомого текста в течение 2 минут с целью его пересказа) и шумовое возмущение (одевались наушники и на 4 минуты включался генератор шума). Запись сигналов ЭКГ осуществлялась с частотой дискретизации 200 Гц и включала 60–70 кардиоинтервалов. Записи ЭКГ производились в исходном спокойном состоянии (до стрессорного воздействия) и по нескольку раз во время воздействия и после его окончания. В зависимости от вида стресса временные интервалы между записями сигналов ЭКГ могли отличаться. В экспериментах участвовали практически здоровые мужчины (16 чел.) и женщины (14 чел.) в возрасте от 20 до 35 лет.

Отметим важное обстоятельство. Исходными (контрольными) данными в этих экспериментах являлись ЭКГ, записанные с пациентов до осуществления стрессорного воздействия. Необходимо было выяснить, какие характеристики ЭКГ демонстрируют наибольшую стабильность во времени у всех пациентов. С этой целью для всех испытуемых записывался сигнал ЭКГ в течение 20 минут. Далее вычислялись как традиционные (частота сердечных сокращений, ее дисперсия, интенсивность основной частоты сердечных сокращений и др.), так и нетрадиционные (спектр мощности, интегральная мощность, нормированная энтропия, время корреляции и др.). Было установлено, что наибольшую стабильность во времени для всех участников экспериментов демонстрировала именно нормированная энтропия! Изменения нормированной энтропии не превышали $\pm 4\,\%$, в то время как изменения всех других характеристик были в пределах от $\pm 5 \div 6\,\%$ до $\pm 30 \div 40\,\%$ и более! Этот интересный факт достоин специального исследования, однако для нас он важен как экспериментальное обоснование того, что нормированная энтропия может использоваться как количественная характеристика исходного (до стресса) состояния сердечно-сосудистой системы участников экспериментов.

Исследования реакции на все указанные выше виды стрессорных воздействий позволили получить еще более удивительные результаты: из всей совокупности характеристик ЭКГ, записанных во время воздействий и после, устойчиво максимальные и достоверные изменения демонстрировала только одна — нормированная энтропия! В то время как артериальное давление при стрессах увеличивалось не более чем на 10 %, ЧСС — на 8 %, нормированная энтропия изменялась на 40 ÷ 70 % и более!

Обсудим конкретные результаты реакции пациентов на воздействие шума, представленные на рис. 23.6. Графики отражают изменение нормированной энтропии $\Delta H/E$ в сравнении с энтропией исходных ЭКГ во времени в течение 10 мин. Первые 4 минуты пациенты испытывали шумовое воздействие малой интенсивности. Результаты просто удивительные и вот почему. Во-первых, нормированная энтропия достоверно фиксирует наличие стресса (отклонения от исходной нормы для графика A 13 % и для графика $Б$ более 30 %). Во-вторых, графики позволяют судить о времени релаксации, при котором изменения энтропии стремятся к нулю. И в-третьих, для пациентов мужского пола (график $Б$) энтропия при стрессе уменьшается, а для женского пола (график A) — возрастает. Изменения нормированной энтропии в реакции человека на слабый шум приводят к росту степени хаотичности сигнала ЭКГ у женщин и к уменьшению — у мужчин! Отметим, что представленные результаты полностью коррелируют с известными в биологии данными о половых различиях в реакциях на стресс, полученными другими методами.

2. Рассмотрим другой пример, где в качестве диагностического критерия также используется количественная характеристика степени хаотичности сигнала ЭКГ — старший показатель Ляпунова. Для анализа были выбраны 40 пациентов Саратовского кардиоцентра, страдающих ишемической болезнью сердца (ИБС) различной степени тяжести. С помощью специальных медицинских методов (коронарография, степень потребления миокардом кислорода, холтеровский мониторинг, физиологическая проба на ИБС и др.) 40 пациентов кардиоцентра были разделены специалистами на 2 группы с различной степенью тяжести ИБС: 1-я группа — 24 пациента, 2-я группа — 16 пациентов. Отметим важное обстоятельство: применение стандартных методов обработки сигналов ЭКГ и RR-интервалов не позволило достоверно установить различия между больными 1-й и 2-й групп! Нашей задачей было доказательство возможности достоверного разделения больных по степени патологии на две группы, используя в качестве источника информации о состоянии здоровья только записи сигналов ЭКГ.

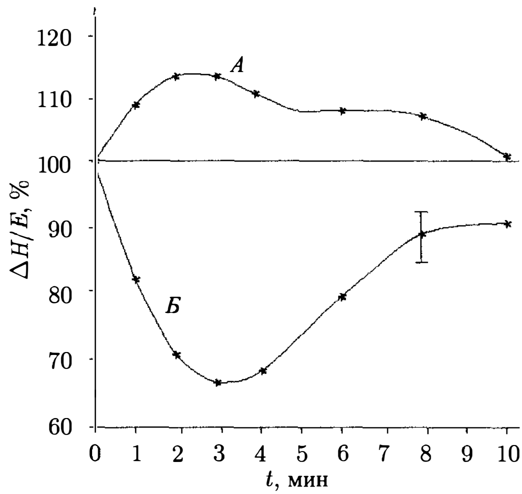


Рис. 23.6. Зависимость во времени среднего изменения величины нормированной энтропии сигнала ЭКГ, обусловленного воздействием шума: *А* — результаты для женщин, *Б* — результаты для мужчин. Нормировка осуществлялась на среднее по времени значение интенсивности колебаний сигнала ЭКГ. Средняя ошибка измерений составила $\pm 4\,\%$

Причем нам были представлены ЭКГ всех 40 пациентов без указания на то, к какой группе они относятся.

В результате длительных детальных исследований, включающих расчеты на ЭВМ различных характеристик ЭКГ, было установлено, что разделение пациентов возможно. Наиболее достоверно это разделение осуществляется по старшему ляпуновскому показателю ЭКГ[2].

Методика проведения экспериментов и результаты были следующими. Для каждого из 40 пациентов имелись записи двух последовательностей RR-интервалов по 350–500 точек: первая отвечала ЭКГ пациента в спокойном состоянии, вторая — во время установившегося процесса нагрузки, представляющей собой работу на велоэргометре. Пациенты крутили педали велоэргометра с частотой примерно 60 оборотов в минуту (нагрузка составляла 25 Вт) и после завершения переходного процесса осуществлялась запись последовательности RR-интервалов ЭКГ в течение 5–7 минут.

Обработка данных экспериментов показала, что у одной части пациентов под действием нагрузки ляпуновский показатель увеличивается (сте-

[2]Отметим, что в медицине достоверными считаются данные опытов, подтверждающиеся не менее чем для 66 % от общего числа пациентов, участвующих в эксперименте.

пень хаотичности сигнала ЭКГ возрастает), у другой — уменьшается (степень хаотичности падает). Более конкретно: у 12 пациентов из 16 (2-я группа) показатель Ляпунова при нагрузке возрастает, у 17 пациентов из 24 — уменьшается. Таким образом, изменение величины ляпуновского показателя сигнала, представляющего собой запись последовательности кардиоинтервалов во времени, обусловленного реакцией организма пациента на нагрузку, позволило установить принадлежность 29 пациентов из 40 (т.е. 72.5%) к 1-й или 2-й группе. Можно говорить о достоверной диагностике степени ИБС по ЭКГ!

Отметим важный факт. Как уже говорилось, степень хаотичности процесса характеризуется нормированной энтропией и положительными показателями Ляпунова. В экспериментах, описанных выше, этот факт подтвердился. Разделение пациентов на группы по степени тяжести ИБС достоверно можно провести, используя нормированную энтропию. Однако с чисто технической точки зрения (длительность записей ЭКГ, точность вычислений и др.) в рассмотренных выше экспериментах ляпуновский показатель, как диагностический критерий, оказался более предпочтительным.

23.7. Заключение

Применение современных достижений теории динамических систем и нелинейной динамики для математического моделирования функционирования и диагностики состояния живых систем является новым и перспективным направлением исследований, требующим объединения усилий физиков, математиков, биологов и медиков. Как любое новое направление в науке, оно подвергается усиленной критике и это естественно. Трудно представить себе и тем более доказать, что в недалеком будущем сердечно-сосудистая система человека будет адекватно описана математической моделью, параметры которой соответствуют физиологическому состоянию и воздействие на которые будет приводить к лечению той или иной болезни. Тем не менее многие серьезные исследователи верят в такое будущее и интенсивно работают для того, чтобы его приблизить.

Список рекомендуемой литературы

1. *Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э.* Теория колебаний. М.: Наука, 1981.
2. *Анищенко В. С.* Сложные колебания в простых системах. 2-е изд. М.: УРСС, 2009.
3. *Анищенко В. С.* Знакомство с нелинейной динамикой. 3-е изд. М.: УРСС, 2008.
4. *Анищенко В. С., Астахов В. В., Вадивасова Т. Е.* Регулярные и хаотические автоколебания. Синхронизация и влияние флуктуаций. М.: Изд. дом «Интеллект», 2009.
5. *Анищенко В. С., Астахов В. В., Вадивасова Т. Е., Стрелкова Г. И.* Синхронизация регулярных, хаотических и стохастических колебаний. М.–Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2008.
6. *Анищенко В. С., Астахов В. В., Вадивасова Т. Е., Нейман А. Б., Стрелкова Г. И., Шиманский-Гайер Л.* Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах. М.–Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2003.
7. *Анищенко В. С., Астахов В. В., Вадивасова Т. Е.* Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1999.
8. *Арнольд В. И., Афраймович В. С., Ильяшенко Ю. С., Шильников Л. П.* Теория бифуркаций. М.: ВИНИТИ, 1986.
9. *Ахромеева Т. С., Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г., Самарский А. А.* Структуры и хаос в нелинейных средах. М.: Физматлит, 2007.
10. *Белых В. Н.* Качественные методы теории нелинейных колебаний сосредоточенных систем: Учеб. пособие. Горький: Изд-во ГГУ, 1980.
11. *Блехман И. И.* Синхронизация в природе и технике. М.: Наука, 1981.
12. *Гукенхеймер Д., Холмс Ф.* Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. М.–Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2002.
13. *Данилов Ю. А.* Лекции по нелинейной динамике. М.: Изд-во «Постмаркет», 2001.
14. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. 2-е изд-е. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1998.
15. *Карлов Н. В., Кириченко Н. А.* Колебания, волны, структуры. М.: Физматлит, 2001.

16. *Кузнецов А. П., Кузнецов С. П., Рыскин Н. М.* Нелинейные колебания: Учеб. пособие для вузов. М.: Физматлит, 2002.
17. *Кузнецов С. П.* Динамический хаос. М.: Физматлит, 2001.
18. *Ланда П. С.* Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М.: Наука,1980.
19. *Ланда П. С.* Нелинейные колебания и волны. М.: Наука, 1997.
20. *Лоскутов А. Ю., Михайлов А. С.* Основы теории сложных систем. М.–Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2007.
21. *Малахов А. Н.* Флуктуации в автоколебательных системах. М.: Наука, 1968.
22. *Малинецкий Г. Г.* Хаос, структуры, вычислительный эксперимент. М.: УРСС, 2001.
23. *Малинецкий Г. Г., Потапов А. Б., Подлазов А. В.* Нелинейная динамика: подходы, результаты, надежды. М.: УРСС, 2006.
24. *Мун Ф.* Хаотические колебания. М.: Мир,1990.
25. *Неймарк Ю. И.* Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1972.
26. *Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю.* Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003.
27. *Стратонович Р. Л.* Случайные процессы в динамических системах. М.–Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2009.
28. *Рабинович М. И., Трубецков Д. И.* Введение в теорию колебаний и волн. М.–Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2000.
29. *Трубецков Д. И. Рожнев А. Г.* Линейные колебания и волны. М.: Физматлит, 2001.
30. Чуличков А. И. Математические модели нелинейной динамики. М.: Физматлит, 2003.
31. *Шильников Л. П., Шильников А. Л., Тураев Д. В., Чуа Л.* Методы качественной теории в нелинейной динамике. Ч. 2. М.–Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2009.

Анищенко Вадим Семенович
Вадивасова Татьяна Евгеньевна

ЛЕКЦИИ ПО НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКЕ

Дизайнер В. А. Толстолуцкая
Технический редактор А. В. Широбоков
Компьютерный набор и верстка А. В. Моторин
Корректор А. А. Чукарева

Подписано в печать 25.10.2011. Формат $60 \times 84^1/_{16}$.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 29,9. Уч. изд. л. 32,11.
Гарнитура Таймс. Бумага офсетная № 1. Заказ № 11-46.

Научно-издательский центр «Регулярная и хаотическая динамика»
426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
http://shop.rcd.ru   E-mail: mail@rcd.ru   Тел./факс: +7(3412)50-02-95