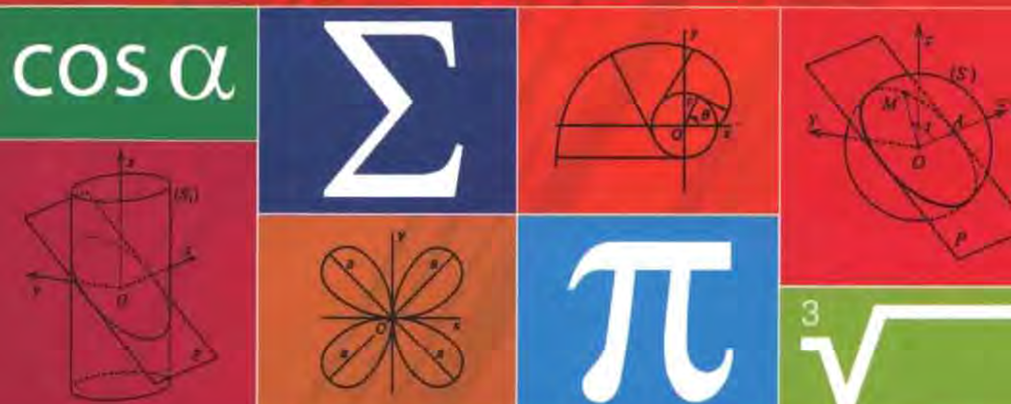
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

В. И. Антонов, М. В. Лагунова, Н. И. Лобкова,
Ю. Д. Максимов, В. М. Семёнов, Ю. А. Хватов

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Опорный конспект



ПРОСПЕКТ

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

В. И. Антонов, М. В. Лагунова, Н. И. Лобкова,
Ю. Д. Максимов, В. М. Семёнов, Ю. А. Хватов

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Опорный конспект

ПРОСПЕКТ
МОСКВА
2010

УДК [512.8+516.0](075.8)
ББК 22.12я73
Л59

Авторы:
В. И. Антонов — д-р техн. наук, проф.;
М. В. Лагунова — канд. физ.-мат. наук, доц.;
Н. И. Лобкова — канд. физ.-мат. наук, проф.;
Ю. Д. Максимов — канд. физ.-мат. наук, проф.;
В. М. Семёнов — канд. физ.-мат. наук, доц.;
Ю. А. Хватов — канд. техн. наук, проф.

Л59 Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Опорный конспект: учебное пособие. — Москва : Проспект, 2010. — 144 с.

ISBN 978-5-392-01332-6

Книга представляет собой учебное пособие по курсу линейной алгебры и аналитической геометрии. В ней собраны и объяснены базовые понятия, определения и формулировки, а также содержатся разобранные примеры, типовые задачи и вопросы для самопроверки.

Учебное пособие предназначено для начального и быстрого ознакомления с курсом линейной алгебры и аналитической геометрии, а также для повторения и закрепления ранее изученного материала.

Для студентов и преподавателей вечерних, заочных и дневных отделений как технических, так и экономических вузов.

УДК [512.8+516.0](075.8)
ББК 22.12я73

Учебное издание

Антонов Валерий Иванович,
Лагунова Марина Витальевна,
Лобкова Наталья Ивановна и др.

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ.
ОПОРНЫЙ КОНСПЕКТ

Учебное пособие

Оригинал-макет подготовлен компанией ООО «Оригинал-макет»
www.o-maket.ru; тел.: (495) 726-18-84

Санитарно-эпидемиологическое заключение
№ 77.99.60.953.Д.004173.04.09 от 17.04.2009 г.

Подписано в печать 01.02.10. Формат 60×90 1/16.
Печать офсетная. Печ. л. 9,0. Тираж 500 экз. Заказ № 1459.

ООО «Проспект»
111020, г. Москва, ул. Боровая, д. 7, стр. 4.

Отпечатано в ОАО «Домодедовская типография».
г. Домодедово, Каширское ш., д. 4, к. 1.

9785392013326

ПРЕДИСЛОВИЕ

Понятие опорного конспекта прочно вошло в педагогическую литературу, начиная с работ донецкого учителя-новатора Шаталова. Здесь опорный конспект по математике понимается расширительно в той мере, в какой он может заменить минимальный конспект для учащихся. Самое главное — это конспект, т. е. учебник, а не справочник. В нем вводятся и разъясняются все базисные понятия и методы. Даются иллюстрирующие примеры, контрольные вопросы для самопроверки, решаются типовые задачи. Материал располагается в той же последовательности, что и на лекциях, но без доказательств. Даются только определения, формулировки и пояснения теорем, их геометрическая и физическая интерпретация, чертежи, выводы, правила. Второстепенные вопросы опущены.

Опорный конспект целесообразно использовать для первичного, быстрого ознакомления с курсом математики, а далее нужно продолжить изучение отдельных тем теории по учебнику, где все изложено с достаточной полнотой и доказательно. Опорный конспект полезен и для закрепления изученного материала, для восстановления в памяти нужных понятий при изучении последующих разделов курса и других дисциплин, опирающихся на математику.

Опорный конспект предназначен для заочников, вечерников, экстернов и будет также полезен студентам дневной формы обучения.

Настоящий вариант опорного конспекта ориентирован на студентов, изучающих математику в объеме и на уровне, предназначенных для общетехнических специальностей и направлений. Нумерация формул, таблиц, рисунков и прочих элементов текста в каждом параграфе — двухпозиционная, в виде номера параграфа и порядкового номера по параграфу. Начало и конец доказательства или вывода формулы отмечаются знаками ▶ ◀. Материал, не обязательный для изучения, помечен знаком *.

Основная работа по подготовке опорного конспекта была проделана группой преподавателей кафедры высшей математики Санкт-Петербургского государственного политехнического университета — инициаторами проекта — профессорами Лобковой Н. И., Максимовым Ю. Д., Хватовым Ю. А.

Опорный конспект по математике состоит из введения и 15 разделов:

1. Линейная алгебра.
2. Векторная алгебра.

1*-1459

3. Аналитическая геометрия.
4. Введение в математический анализ.
5. Дифференциальное исчисление функций одной переменной.
6. Комплексные числа, многочлены, рациональные дроби.
7. Интегральное исчисление функций одной переменной.
8. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных.
9. Дифференциальные уравнения.
10. Числовые и функциональные ряды.
11. Ряды и интеграл Фурье.
12. Интегральное исчисление функций нескольких переменных.
13. Теория поля.
14. Теория вероятностей.
15. Математическая статистика.

Разделы указаны в порядке, рекомендуемом при изучении курса математики.

В настоящее издание «Математика. Выпуск 1. Опорный конспект» включены введение и первые три раздела.

Введение к курсу математики

1°. Математика как наука, ее предмет и метод. Определение математики как науки. *Математика* — это наука, исследующая пространственные формы, количественные отношения, аксиоматические структуры и вопросы доказательства путем построения абстрактных моделей действительного мира.

Моделью реального объекта, процесса, явления называется описание его существенных свойств на каком-либо языке. *Математическая модель* — это абстрактная модель, основанная на математических понятиях и математической символике, т. е. записанная на языке формул, функций, уравнений, неравенств, алгоритмов и т. д. Для решения своей основной задачи — построения математических моделей реального мира — математика использует *метод абстракции*, т. е. совершенно отвлекается от конкретных физических свойств предметов и явлений, исследует только сами количественные отношения, пространственные формы, теоретико-множественные структуры.

2°. Роль математики в других науках. Математизация — характерная черта любой современной науки. В принципе область применения математических методов ничем не ограничена. Особенно велика роль математики в естествознании и технических науках.

Математическая модель, в отличие от моделей в других науках, дающих лишь качественное описание явлений, позволяет получить количественный прогноз, т. е. описать явление более точно.

Функции математики:

— средство расчета;

— универсальный язык науки;

— метод исследования.

3°. Источники и критерии истинности математического знания. *Источником математического знания* является *практика*, т. е. математика строит свои абстрактные понятия на основе конкретных задач исследования природы, жизни, производства. Понятия длины, площади, объема, производной, интеграла вошли в математику благодаря потребностям измерения, решения задач о скорости, о пути, о работе и т. д.

Критерием истинности всякой науки также является практика. Математика не является исключением. Математические знания, созданные для решения практических задач, практикой и проверяются.

4°. Единство математики. Элементарная, высшая, вычислительная, чистая, прикладная, конструктивная и другие виды математики являются лишь ветвями, частями единой науки математики. Под элементарной математикой понимается математика, изучаемая в средней школе. Вся остальная математика условно называется высшей. Есть общие черты у всех ветвей математики, обеспечивающие единство математики:

1) дедуктивный (доказательный) абстрактный метод построения знаний;

2) общность математических понятий и символики. Наметившаяся тенденция аксиоматизации всех математических знаний;

3) все части математики охватываются одним и тем же определением математики.

5°. Математика как дисциплина высшего технического учебного заведения. Математика как дисциплина отличается от математики как науки прежде всего наличием технологии преподавания, к которой относятся методика преподавания, учебно-методические пособия, вычислительная лаборатория, учебные планы и программы.

Основными целями преподавания математики во втузе являются математические знания и умения, развитие и мышление, достаточные для решения задач по будущей технической специальности. Математика втуза должна в первую очередь обеспечить потребности общенаучных дисциплин — физики и механики. Ее положение среди дисциплин втуза можно изобразить цепочкой: *математика — обще-*

научные дисциплины — общетехнические дисциплины — специальные технические дисциплины.

Математика, как и всякая дисциплина, имеет свой базис. Его составляют *базисные понятия* (число, уравнение, множество, производная, интеграл и т. д.), *основные задачи*, возникающие на основе базисных понятий, и *базисные методы* решения основных задач.

6°. Краткие исторические сведения о развитии математики. Начало зарождения математики невозможно отметить. Счет предметов появился вместе с человеком. *Элементарная геометрия* сложилась в IV—III вв. до н. э. в античной Греции. Зарождение *элементарной алгебры* как науки относится к началу IX в. *Тригонометрия* как учение о тригонометрических функциях и их свойствах сложилась в XVII—XVIII вв., хотя отдельные тригонометрические знания в связи с астрономическими наблюдениями имелись в древние времена в античной Греции, Вавилоне, Египте.

Аналитическая геометрия в основном была разработана французскими математиками Декартом и Ферма в XVII в. Основоположниками *дифференциального* и *интегрального исчисления* являются английский математик Ньютон (1642—1727) и немецкий математик Лейбниц (1646—1716). Период *математики переменных величин* можно очертить рамками XVII — середины XIX в. Периодом *современной математики* условно считается промежуток с середины XIX в. по настоящее время.

7°. Развитие математики в России. Начало математических исследований в России связано с деятельностью Петербургской академии наук, Петербургского университета (1724), а также с именем Л. Эйлера (1707—1783), внесшего огромный вклад в развитие мировой математики.

Большое значение для науки и преподавания математики имела деятельность отечественных ученых Н. И. Лобачевского (1799—1856), П. Л. Чебышева (1821—1894), А. М. Ляпунова (1857—1918), А. Н. Колмогорова (1903—1987) и др.

Современные математики в России работают практически во всех областях этой науки.

Раздел 1. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Возникновение алгебры относится к глубокой древности. Ее задачи и методы создавались постепенно под влиянием нужд общественной деятельности в результате поисков общих приемов для решения однородных арифметических и геометрических задач. Уже в древнем Вавилоне (2-е тысячелетие до н. э.) решались задачи, содержащие уравнения 1 и 2-й степени. Неизвестные величины в них трактовались как длина, ширина, высота, площадь и т. д. и обозначались словами из шумерского языка, вышедшего из употребления уже к концу 3-го тысячелетия до н. э. Буквенная символика в алгебре впервые появилась у александрийского математика Диофанта (III в. н. э.), но решающий шаг в этом направлении был сделан французским математиком Ф. Виетом (1540—1603). Современная символика идет от Р. Декарта (1596—1650) и И. Ньютона (1642—1727).

До второй половины XIX в. алгебра понималась как наука об алгебраических уравнениях различных степеней и системах таких уравнений. Во второй половине столетия в ней была выделена часть, названная линейной алгеброй, включающая в себя теорию систем линейных уравнений и связанную с ней теорию определителей и матриц.

Значение систем линейных уравнений объясняется не только тем, что они являются простейшими системами алгебраических уравнений, но и тем, что их решение составляет существенную часть решения разнообразных практических задач. Матрицы и определители были введены в рассмотрение для решения и исследования систем линейных уравнений. Однако оказалось, что их роль этим не исчерпывается, и они стали предметом самостоятельного изучения. В наши дни теория матриц находит обширное применение в вычислительной математике, физике, экономике и других областях науки.

Глава 1. Определители и системы линейных уравнений

§ 1. Системы линейных уравнений. Основные понятия. Метод Гаусса

1°. Основные понятия. Равносильные системы.

Определение 1.1. Система линейных алгебраических уравнений (или система линейных уравнений) имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{1.1}$$

при этом $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называются *неизвестными*; a_{ik}, $i = 1, 2, \ldots, m$, $k = 1, 2, \ldots, n$ — *коэффициентами при неизвестных*, или *коэффициентами системы*, причем индекс i означает номер уравнения в системе (1.1), а индекс k — номер неизвестного. Величины $b_1, b_2, \ldots, b_m$ называются *свободными членами*. Иногда систему (1.1) будем называть *линейной системой*.

Замечание 1.1. Если система (1.1) содержит не более четырех неизвестных, то они часто обозначаются буквами x, y, z, t без индексов.

Если $m = n$, т. е. число уравнений равно числу неизвестных, то систему (1.1) называют квадратной. При $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$ система (1.1) называется однородной, в противном случае — неоднородной.

Например, $\begin{cases} 3x - 4y = 5, \\ 2x + 5y = 7 \end{cases}$ — неоднородная квадратная линейная система из двух уравнений с двумя неизвестными x и y.

Определение 1.2. *Решением системы* (1.1) называется такой упорядоченный набор чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, который при подстановке в систему (1.1) вместо неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ превращает ее в систему верных тождеств:

$$\begin{cases} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_n = b_1, \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \ldots + a_{mn}\alpha_n = b_m. \end{cases} \tag{1.2}$$

Решение системы (1.1) принято обозначать следующим образом: $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ или $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \ldots, x_n = \alpha_n$.

Определение 1.3. Система (1.1) называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение, и *несовместной* в противном случае. Совместная система называется *определенной*, если она имеет единственное решение. и *неопределенной* в противном случае.

Пример 1.1. Система $\begin{cases} 3x - 4y = -1, \\ 2x + 5y = 7 \end{cases}$ имеет единственное решение $x = 1$, $y = 1$, поэтому является совместной определенной системой.

Пример 1.2. Система $\begin{cases} 3x - 4y = -1, \\ -6x + 8y = 2 \end{cases}$ имеет более одного решения, например ее решениями являются: $x = 1, y = 1$; $x = 2, y = 7/4$; $x = 5, y = 4$. Эта система является совместной неопределенной системой.

Пример 1.3. У системы $\begin{cases} 3x - 4y = -1, \\ -6x + 8y = 7 \end{cases}$ нет решений, т. е. она несовместна.

Решить систему (1.1) — это значит найти все ее решения или доказать, что она не имеет решений. Для этого систему преобразуют в более простую, решения которой легко найти или доказать ее несовместность. При этом центральным понятием является равносильность двух систем.

Определение 1.4. Две линейные системы с неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называются *равносильными*, если они обе несовместны, или же они обе совместны и каждое решение одной системы является решением другой и наоборот.

Пример 1.4. Системы $\begin{cases} 3x - 4y = -1, \\ 2x + 5y = 7 \end{cases}$ и $\begin{cases} x + y = 2, \\ x - y = 0 \end{cases}$ равносильны, ибо $x = 1, y = 1$ — решение и той, и другой системы, а других решений они не имеют.

Пример 1.5. Системы $\begin{cases} 3x - 4y = -1, \\ 3x - 4y = 7 \end{cases}$ и $\begin{cases} x + y = 2, \\ x + y = 0 \end{cases}$ также являются равносильными, поскольку обе они несовместны.

Число уравнений в равносильных совместных системах может быть различным, но они должны содержать одни и те же неизвестные.

2°. Теорема об элементарных преобразованиях в системе линейных уравнений.

Определение 1.5. *Элементарными преобразованиями* над системой линейных уравнений вида (1.1) называются:

1) перестановка местами двух любых ее уравнений;
2) умножение всех членов любого уравнения системы на любое отличное от нуля число;
3) почленное сложение любых двух ее уравнений.

На практике обычно объединяют последние два элементарных преобразования в одно и рассматривают два основных типа:

1-й тип — перестановка местами уравнений системы;

2-й тип — почленное сложение двух любых ее уравнений, все члены одного из которых предварительно умножены на одно и то же число.

Теорема 1.1. Конечное число последовательно выполненных элементарных преобразований этих типов приводят систему (1.1) к равносильной системе.

Пример 1.6. Показать, что при помощи элементарных преобразований можно из системы $\begin{cases} 3x-4y=-1, \\ 2x+5y=7 \end{cases}$ получить систему $\begin{cases} x+y=2, \\ x-y=0. \end{cases}$

► Проведем последовательно следующие элементарные преобразования.

1. Умножим первое уравнение исходной системы на 3, а второе — на 7, получим равносильную систему $\begin{cases} 9x-12y=-3, \\ 14x+35y=49. \end{cases}$

2. К первому уравнению прибавим второе: $\begin{cases} 23x+23y=46, \\ 14x+35y=49. \end{cases}$

3. Первое уравнение умножим на $1/23$, а второе — на $2/7$: $\begin{cases} x+y=2, \\ 4x+10y=14. \end{cases}$

4. Ко второму уравнению прибавим первое, умноженное на -7: $\begin{cases} x+y=2, \\ -3x+3y=0. \end{cases}$

5. Второе уравнение умножим на $-1/3$: $\begin{cases} x+y=2, \\ x-y=0. \end{cases}$ ◄

3°. Расширенная матрица системы. Ступенчатая матрица. Метод Гаусса. Коэффициенты a_{ik} системы (1.1) удобно объединить в прямоугольную таблицу, называемую *матрицей системы*. Для матрицы принято обозначение:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Матрица A содержит m горизонтальных рядов, называемых *строками*, и n вертикальных рядов, называемых *столбцами*, числа a_{ik}, $i=1, 2,..., m$; $k=1, 2,..., n$ называются ее *элементами*. Таким образом, первый индекс i элемента a_{ik} — это номер строки (номер уравнения системы (1.1)), а второй индекс k — номер столбца (или номер неизвестного x_k, коэффициентом при котором является a_{ik} в i-м уравнении системы (1.1)).

При $m=n$ матрица A называется *квадратной* матрицей n-го (или m-го) порядка и обозначается A_n (индекс — это порядок матрицы). У квадратной матрицы число строк и столбцов одинаково. Квадратная матрица называется *единичной*, если ее элементы $a_{ii}=1$, $i=1, 2, ..., n$, а все остальные элементы равны нулю.

Например, матрица $A_3=\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ — квадратная матрица 3-го порядка, а матрица $E_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ — единичная матрица 2-го порядка.

Если к матрице A добавить $(n+1)$-й столбец из свободных членов, то получим так называемую *расширенную* матрицу A^* системы, содержащую всю информацию о системе:

$$A^*=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{21} & b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Для системы из примера 1.1 матрицей системы является $A=\begin{pmatrix}3 & -4\\ 2 & 5\end{pmatrix}$, а расширенной матрицей этой системы является матрица $A^*=\left(\begin{array}{cc|c}3 & -4 & -1\\ 2 & 5 & 7\end{array}\right)$.

На практике элементарным преобразованиям подвергают не саму систему, а ее расширенную матрицу. Преобразованиям двух типов над системой (1.1) соответствуют два типа элементарных преобразований над строками матрицы A^*:

1-й тип – перестановка местами двух любых ее строк;

2-й тип – сложение соответствующих элементов двух любых строк, все элементы одной из которых предварительно умножены на одно и то же число.

Целью элементарных преобразований является приведение расширенной матрицы A^* системы (1.1) к так называемой ступенчатой форме.

Определение 1.6. Матрица называется ***ступенчатой***, если для нее выполняются следующие условия:

1) если какая-либо строка данной матрицы состоит из нулей, то и все последующие строки также состоят из нулей;

2) если a_{ik} — первый ненулевой элемент i-й строки, а $a_{i+1,m}$ — первый ненулевой элемент $(i+1)$-й строки, то $m>k$.

Так, например, матрица $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ является ступенчатой.

Матрица из одной строки считается ступенчатой по определению.

Теорема 1.2. Любую матрицу A конечным числом элементарных преобразований первого и второго типов можно преобразовать в ступенчатую матрицу.

Пример 1.7. Привести к ступенчатому виду матрицу

$$A^*=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 2 & 8\\ -1 & 3 & 0 & -5\\ 1 & 1 & 1 & 4\end{array}\right).$$

► Выполним следующие элементарные преобразования над матрицей A^*:

1) к элементам второй строки прибавим элементы первой строки и из элементов третьей строки вычтем элементы первой строки, в результате A^* преобразуется к виду:

$$A^* \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \end{array}\right);$$

2) переставим вторую и третью строки: $A^* \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \end{array}\right);$

3) из третьей строки полученной матрицы вычтем вторую строку,

умноженную на 3, получим: $A^* \to A_1^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 5 & 15 \end{array}\right)$. ◄

На приведении расширенной матрицы A^* системы (1.1) к ступенчатой матрице A_1^* основан *метод Гаусса*, или метод последовательного исключения неизвестных. Система линейных уравнений с расширенной ступенчатой матрицей A_1^* называется *ступенчатой системой*, по теореме 1.1 она будет равносильна соответствующей системе в форме (1.1). Приведение системы (1.1) к ступенчатой форме называется *прямым ходом* метода Гаусса. Решение полученной ступенчатой системы называется *обратным ходом* метода Гаусса. Он может быть выполнен как в форме последовательного определения неизвестных, начиная с последнего уравнения ступенчатой системы, так и в форме преобразования матрицы A_1^* к ступенчатой матрице B^* специального вида.

Пример 1.8. Решить методом Гаусса систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 8, \\ -x_1 + 3x_2 = -5, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$$

► $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 8 \\ -1 & 3 & 0 & -5 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right)$ — расширенная матрица системы.

Прямой ход метода Гаусса. В примере 1.7 матрица A^* при помощи элементарных преобразований приведена к ступенчатой матрице

$$A_1^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 5 & 15 \end{array}\right).$$

Теперь матрице A_1^* сопоставим систему, для которой она будет расширенной матрицей:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 8, \\ x_2 - x_3 = -4, \\ 5x_3 = 15. \end{cases}$$

Обратный ход метода Гаусса.

1-й способ. Имеем: $x_3 = 3$; $x_2 = -4 + x_3 = -4 + 3 = -1 \;\Rightarrow\; x_2 = -1$; $x_1 = 8 - 2x_3 = 8 - 6 = 2$.

2-й способ. Умножим последнюю строку матрицы A_1^* на $1/5$, сложим со второй строкой, после чего к первой строке прибавим последнюю, умноженную на (-2), с целью получить нули в третьем столбце:

$$A_1^* \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) = B^*.$$

Напишем систему с расширенной матрицей B^*:

$$\begin{cases} x = 2, \\ y = -1, \\ z = 3. \end{cases}$$

Ответ: система совместная и определенная, она имеет единственное решение: $x_1 = 2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 3$. ◄

§ 2. Определители 2 и 3-го порядков

1°. Системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Понятие определителя 2-го порядка. Метод Гаусса не дает явных формул, выражающих решение системы линейных уравнений через элементы ее расширенной матрицы. Проблема отыскания таких формул приводит к понятию определителя. Рассмотрим систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases} \tag{2.1}$$

где x, y — неизвестные; a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 — известные величины.

Если $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, то система (2.1) имеет единственное решение, выражаемое формулами

$$\begin{cases} x_0 = (c_1b_2 - c_2b_1)/(a_1b_2 - a_2b_1), \\ y_0 = (a_1c_2 - a_2c_1)/(a_1b_2 - a_2b_1). \end{cases} \tag{2.2}$$

Это утверждение называется *теоремой Крамера* (1704—1752) для системы двух уравнений с двумя неизвестными, а равенства (2.2) — формулами Крамера. Далее эта теорема будет сформулирована в общем виде для системы из n линейных уравнений с n неизвестными.

При $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ система (2.1) может быть совместной и неопределенной (при условии $c_1b_2 - c_2b_1 = a_1c_2 - a_2c_1 = 0$) или несовместной (при условии $c_1b_2 - c_2b_1 \neq 0$ или $a_1c_2 - a_2c_1 \neq 0$).

Очевидно, что при решении системы (2.1) особую роль играют разности $a_1b_2 - a_2b_1$, $c_1b_2 - c_2b_1$, $a_1c_2 - a_2c_1$, построенные из элементов расширенной матрицы этой системы. Эти разности называются определителями 2-го порядка.

Определение 2.1. Пусть дана квадратная матрица 2-го порядка $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$. Определителем 2-го порядка, соответствующим матрице A (или определителем A), называется число $a_1b_2 - a_2b_1$, которое принято обозначать одним из символов: $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, $\det A$, $|A|$, Δ.

Таким образом, по определению

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1. \tag{2.3}$$

Числа a_1, a_2, b_1, b_2 называются элементами определителя; a_1, b_2 образуют главную диагональ определителя, а b_1, a_2 — побочную диагональ, следовательно, определитель 2-го порядка равен разности произведений его элементов, находящихся на главной и побочной диагоналях.

Так, определитель $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3\cdot(-1) - 4\cdot 2 = -11.$ ◄

В силу определения 2.1 формулы Крамера (2.2) можно записать в виде:

$$\begin{cases} x_0 = \Delta_x/\Delta, \\ y_0 = \Delta_y/\Delta, \end{cases} \tag{2.2 a}$$

где Δ — определитель матрицы системы (2.1); Δ_x, Δ_y — определители матриц, полученных путем замены первого и второго столбцов матрицы A соответственно на столбец свободных членов.

Пример 2.2. Решить по формулам Крамера (2.2 *a*) систему $\begin{cases} 3x+4y=7, \\ 2x-y=1. \end{cases}$

► Вычислим все нужные определители:

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -11; \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -11; \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -11.$$

Теперь находим решение системы по формулам (2.2 *a*): $x = 1$, $y = 1$. ◄

2°. Свойства определителей 2-го порядка.

Свойство 1. Определитель с двумя одинаковыми строками равен нулю.

Свойство 2. Определитель, в котором все элементы одной из строк являются суммой двух слагаемых, равен сумме двух определителей, у которых в рассматриваемой строке находятся соответствующие слагаемые. Например,

$$\begin{vmatrix} a_1' + a_1'' & b_1' + b_1'' \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1' & b_1' \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1'' & b_1'' \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Свойство 3. Общий множитель элементов какой-либо строки определителя можно выносить за знак определителя. Например,

$$\begin{vmatrix} \lambda a_1 & \lambda b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Свойство 4. При замене строк столбцами величина определителя не изменяется:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Замечание 2.1. Операция замены строк столбцами называется ***транспонированием***. Благодаря свойству 4 все свойства определителя, справедливые для его строк, будут справедливы и для его столбцов.

Свойство 5. Определитель единичной матрицы 2-го порядка равен 1.

Свойство 6. При перестановке двух строк (столбцов) определитель меняет знак, оставаясь неизменным по абсолютной величине. Например,

$$\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Свойство 7. Определитель не изменяется при элементарных преобразованиях второго типа над его строками (столбцами). Например,

$$\begin{vmatrix} a_1+\lambda a_2 & b_1+\lambda b_2 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Замечание 2.2. Все перечисленные свойства определителей 2-го порядка доказываются с помощью определения 2.1. Однако не все они являются независимыми. Например, свойства 6—7 следуют из свойств 1—5. Первые пять свойств далее будем называть основными.

3°. Определитель 3-го порядка и его свойства. К понятию определителя 3-го порядка приводит процесс отыскания формул, выражающих решение системы из трех линейных уравнений с тремя неизвестными через ее коэффициенты и свободные члены.

Определение 2.2. Пусть дана квадратная матрица 3-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

Определителем 3-го порядка, соответствующим матрице A (или определителем A), называется число

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31},$$

которое обозначается одним из следующих символов:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \det A, |A|, \Delta_3, \Delta.$$

Таким образом, по определению

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + \tag{2.5}$$
$$+ a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Элементы матрицы A из формулы (2.4) называются также *элементами* $\det A$. Элементы a_{11}, a_{22}, a_{33} образуют *главную диагональ* этого определителя, а элементы a_{13}, a_{22}, a_{31} — его *побочную диагональ*.

Правило Саррюса. Определитель 3-го порядка равен сумме произведений его элементов, находящихся на главной диагонали и в вершинах равнобедренных треугольников с основаниями, параллельными главной диагонали, минус сумма произведений элементов, находящихся на побочной диагонали и в вершинах равнобедренных треугольников с основаниями, параллельными побочной диагонали (рис. 2.1, *а*, *б*).

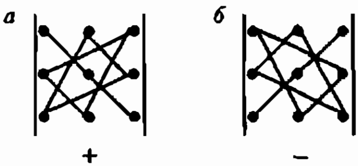


Рис. 2.1

Вычислим по правилу Саррюса определитель:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot 0(-1) + 4\cdot 2\cdot 2 + 3(-1)\cdot 5 - 3\cdot 0\cdot 4 +$$
$$+(-1)(-1)\cdot 2 - 1\cdot 2\cdot 5 = 0 + 16 - 15 - 0 - 2 - 10 = -11.$$

Сгруппировав слагаемые в правой части (2.5), это равенство с учетом (2.3) можно переписать в виде

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \det A = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \tag{2.6}$$
$$- a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Для исследования свойств определителя 3-го порядка введем новые понятия минора и алгебраического дополнения элемента матрицы A.

Определение 2.3. *Минором* M_{ik} элемента a_{ik} квадратной матрицы 3-го порядка из (2.4) называется определитель матрицы 2-го порядка, полученной из матрицы (2.4) путем вычеркивания ее i-й строки и k-го столбца, на пересечении которых находится a_{ik}.

Например, $M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, $M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$, $M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$.

Используя три последних равенства, формулу (2.6) можно переписать в виде

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{21} + a_{13}M_{31}. \tag{2.7}$$

Определение 2.4. *Алгебраическим дополнением* элемента a_{ik} матрицы A называется число

$$A_{ik} = (-1)^{i+k}M_{ik}. \tag{2.8}$$

Так, $A_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = M_{11}$; $A_{12} = (-1)^{2+1}M_{12} = -M_{12}$; $A_{13} = (-1)^{1+3}M_{13} = M_{13}$.

Пример 2.4. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$. Найти A_{32} и M_{23}.

► По определению 2.3 имеем: $M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1$, а в силу формулы (2.8) и определения 2.3 $A_{32} = (-1)^{3+2}M_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -(4+3) = -7$. ◄

Заменяя в (2.7) миноры на алгебраические дополнения, в соответствии с определением 2.4 получим:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}. \qquad (2.9)$$

Каждое из равенств (2.6), (2.7), (2.9) называется разложением *det A* по элементам его первого столбца.

Теорема 2.1 (теорема о разложении определителя по элементам какой-либо его строки или столбца). Определитель квадратной матрицы A третьего порядка равен сумме произведений элементов какой-либо его строки или столбца на их алгебраические дополнения.

Пример 2.5. Используя разложение определителя по строке или столбцу, вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$.

▶ Выберем строку или столбец, где есть нули. Разложим данный определитель, например, по второму столбцу:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 2\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} +$$

$$+0\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 3\cdot(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= -2(1-8) + 0 - 3(4+3) = 14 - 21 = -7.$$

Свойства определителей 3-го порядка

Свойство 1. Если определитель содержит две одинаковые строки или два одинаковых столбца, то он равен нулю.

Свойство 2. Определитель, в котором все элементы одной из строк (одного из столбцов) являются суммой двух слагаемых, равен сумме двух определителей, у которых в рассматриваемой строке находятся соответствующие слагаемые. Например,

$$\begin{vmatrix} a'_{11}+a''_{11} & a'_{12}+a''_{12} & a'_{13}+a''_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a''_{11} & a''_{12} & a''_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Свойство 3. Общий множитель элементов какой-либо строки определителя можно выносить за знак определителя.

Свойство 4. При транспонировании квадратной матрицы 3-го порядка величина ее определителя остается неизменной.

Свойство 5. Определитель единичной матрицы 3-го порядка равен 1.

Свойство 6. При перестановке местами двух любых строк или двух любых столбцов определителя его величина меняет знак.

Свойство 7. Величина определителя не изменяется при элементарных преобразованиях второго типа над его строками (столбцами).

Свойство 8. Сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки (столбца) равна нулю.

Свойство 8 также называется теоремой аннулирования.

Применение свойств существенно упрощает вычисление определителя.

Пример 2.6. Используя свойства определителя, вычислить

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 \\ -1 & -5 & 2 \\ 4 & 6 & -1 \end{vmatrix}.$$

► Выполним последовательно следующие преобразования.

1. Ко второй строке прибавим первую, а из третьей вычтем первую строку, умноженную на 4, величина определителя при этом не меняется: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 0 & -10 & 5 \\ 0 & 26 & -13 \end{vmatrix}$.

2. Из второй строки вынесем общий множитель -5, а из третьей — множитель 13: $\Delta = -65 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$, ибо получился определитель с равными строками. ◄

§ 3. Определители высших порядков

1°. Понятие определителя n-го порядка и его основные свойства. Обобщим теперь рассуждения предыдущего параграфа на случай произвольного натурального n. Определители 2 и 3-го порядков были введены как числовые функции, ставящие в соответствие квадратным матрицам 2 и 3-го порядков некоторое число. Эти функции обладают пятью основными свойствами (см. свойства 1—5 из § 2, п. 2°, 3°), из которых следуют свойства 6, 7 (см. пункты 2°, 3° § 2).

Положим, рассуждая индуктивно, что введено понятие определителя для квадратной матрицы k-го порядка, $k \le n-1$ как функции, ставящей в соответствие этой матрице некоторое вещественное число и обладающей вышеназванными пятью основными свойствами (а также свойствами 6, 7, следующими из них). Рассмотрим квадратную матрицу n-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

Если из матрицы (3.1) удалить элементы i-й строки и j-го столбца, $i, j = 1, \ldots, n$, то получим квадратную матрицу $(n-1)$-го порядка, существование определителя у которой предположено выше. По аналогии с определением 2.3 назовем этот определитель *минором* элемента a_{ij} матрицы A, находящегося на пересечении i-й строки и j-го столбца. Минор элемента a_{ij} будем обозначать M_{ij}.

Определение 3.1. *Определителем n-го порядка*, соответствующим матрице A из (3.1), называется число, равное $\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_{1k}M_{1k}$ и обозначаемое одним из символов: $\det A$, Δ, Δ_n, $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

Таким образом, по определению

$$\det A = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_{1k}M_{1k}. \tag{3.2}$$

Замечание 3.1. При $n=3$ формула (3.2) совпадает с равенством (2.7) для определителя 3-го порядка, а при $n=2$ из формулы (3.2) после некоторых преобразований можно получить равенство (2.3) для определителя 2-го порядка. Таким образом, формула (3.2) (и, следовательно, определение 3.1) обобщает на случай произвольного натурального n закономерности, вытекающие из способа построения определителей 2 и 3-го порядков.

Свойства определителя n-го порядка аналогичны свойствам определителей 2 и 3-го порядков из § 2, п. 2°, 3°.

Свойство 1. Если матрица A из (3.1) содержит две одинаковые строки, то $\det A=0$.

Свойство 2. Если элементы какой-либо строки матрицы A являются суммами двух слагаемых, то $\det A=\det A'+\det A''$, где

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a'_{s1}+a''_{s1} & \cdots & a'_{sn}+a''_{sn} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, A'=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a'_{s1} & \cdots & a'_{sn} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, A''=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a''_{s1} & \cdots & a''_{sn} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Свойство 3. Общий множитель элементов какой-либо строки матрицы A можно выносить за знак определителя.

Свойство 4. $\det A=\det A^T$, где A — матрица из формулы (3.1), а A^T — матрица, полученная из матрицы A заменой строк на столбцы, т. е.

$$A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Замечание 3.2. Замена строк столбцами называется операцией *транспонирования* матрицы, а сама матрица A^T называется *транспонированной* по отношению к матрице A.

Свойство 5. Определитель единичной матрицы n-го порядка равен 1.

Свойство 6. При перестановке двух любых строк в матрице A из формулы (3.1) для полученной матрицы A' справедливо равенство

$$\det A'=-\det A. \quad (3.5)$$

Свойство 7. Величина определителя матрицы A не меняется при элементарных преобразованиях второго типа над строками матрицы A.

Для определителя n-го порядка справедливы также теоремы, аналогичные теореме 2.1 и свойству 8 для определителя 3-го порядка (§ 2, п. 3).

Теорема 3.1 (***теорема о разложении определителя n-го порядка по элементам какого-либо столбца или строки***). Определитель матрицы A из формулы (3.1) равен сумме произведений элементов его любого столбца (или строки) на их алгебраические дополнения.

Теорема 3.2 (*теорема аннулирования*). Сумма произведений элементов какого-либо столбца (или строки) матрицы A из формулы (3.1) на алгебраические дополнения к элементам другого столбца (или строки) равна нулю.

2°. Примеры вычисления определителей n-го порядка.

Пример 3.1. Вычислить определитель 4-го порядка

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

▶ Вынесем последовательно из третьей строки общий множитель 2 и из последнего столбца — общий множитель 3, по свойству 3 имеем:

$$\Delta=2\cdot 3\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Пользуясь теоремой 3.1, разложим полученный определитель по элементам последней строки:

$$\Delta=6\left(3\cdot(-1)^{4+1}\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}+0\cdot(-1)^{4+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}+\right.$$

$$\left.+0\cdot(-1)^{4+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}+1\cdot(-1)^{4+4}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}\right)=$$

$$=-18\begin{vmatrix}-1 & 2 & 1\\ 2 & -3 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{vmatrix}+6\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\ 1 & 2 & -3\\ -1 & 2 & 0\end{vmatrix}.$$

Вычислив определители 3-го порядка по правилу Саррюса, получим:

$$\Delta=-18(3+6-4)+6(-3+4+4+6)=-24. \blacktriangleleft$$

Пример 3.2. Доказать, что определитель n-го порядка

$$\Delta_n=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n}\\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n}\\ . & . & . & . & .\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdot\ldots\cdot a_{nn}=\prod_{i=1}^{n}a_{ii}.$$

$\blacktriangleright$ Доказательство проведем методом математической индукции.
1. Проверим наличие базы для индукции. При $n=2$ имеем:

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ 0 & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}\cdot 0=a_{11}a_{22}.$$

2. Выдвигаем индукционную гипотезу: пусть справедливо равенство

$$\Delta_{n-1}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1}\\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1}\\ . & . & . & .\\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdot\ldots\cdot a_{n-1,\,n-1}.$$

3. Докажем законность индукционного перехода. Разложим определитель Δ_n по элементам последней строки. Имеем

$$\Delta_n=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n}\\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n}\\ . & . & . & . & .\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=a_{nn}(-1)^{n+n}\Delta_{n-1}=a_{nn}\Delta_{n-1}.$$

Используя индукционное предположение, окончательно получим:

$$\Delta_n = a_{nn}\Delta_{n-1} = a_{11}a_{22}\cdot\ldots\cdot a_{n-1,n-1}a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}. \blacktriangleleft$$

В примере 3.2 показано, что определитель от треугольной матрицы, или треугольный определитель, равен произведению элементов, находящихся на главной диагонали. Вычисляя определитель высшего порядка, удобно с помощью свойств определителя привести его к определителю от треугольной матрицы.

Пример 3.3. Вычислить определитель из примера 3.1, приведя его к определителю от треугольной матрицы.

▶ Вычтем из второй строки определителя первую строку, к третьей строке прибавим первую строку, умноженную на 2, а из последней строки вычтем первую, умноженную на 3. Величина определителя при этом не изменится.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -5 & -3 \\ 0 & 2 & 4 & 12 \\ 0 & 3 & -6 & -6 \end{vmatrix}.$$

Из третьей строки вынесем общий множитель 2, а из четвертой — множитель 3, после чего переставим местами вторую и третью строки, при этом величина определителя изменит знак:

$$\Delta = -6\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \end{vmatrix}.$$

Из последней строки вычтем вторую, а из третьей строки вычтем вторую строку, умноженную на 3, после этого вынесем из последней строки общий множитель −4 и переставим две последние строки, получим:

$$\Delta = -24\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -11 & -21 \end{vmatrix}.$$

Чтобы получить определитель от треугольной матрицы, осталось к последней строке прибавить третью, умноженную на 11:

$$\Delta=-24\begin{vmatrix}1&-1&2&3\\0&1&2&6\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{vmatrix}=-24. \blacktriangleleft$$

При вычислении определителей n-го порядка часто пользуются рекуррентными соотношениями, выражающими определитель n-го порядка через определитель меньшего порядка, имеющий ту же структуру. Поясним этот способ на примере вычисления определителя Вандермонда.

Пример 3.4. Вычислить определитель Вандермонда n-го порядка.

$$\Delta_n(x_1,x_2,\dots,x_n)=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\x_1&x_2&x_3&\cdots&x_n\\x_1^2&x_2^2&x_3^2&\cdots&x_n^2\\ \cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\x_1^{n-1}&x_2^{n-1}&x_3^{n-1}&\cdots&x_n^{n-1}\end{vmatrix}\text{ при }\forall x_1,x_2,\dots,x_n\in\boldsymbol{R}.$$

▶ Из каждой строки, начиная со второй, вычтем предыдущую, умноженную на x_1, величина определителя при этом не изменится:

$$\Delta_n(x_1,x_2,\dots,x_n)=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\0&x_2-x_1&x_3-x_1&\cdots&x_n-x_1\\0&x_2(x_2-x_1)&x_3(x_3-x_1)&\cdots&x_n(x_n-x_1)\\ \cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\0&x_2^{n-2}(x_2-x_1)&x_3^{n-2}(x_3-x_1)&\cdots&x_n^{n-2}(x_n-x_1)\end{vmatrix}.$$

Разложим полученный определитель по элементам первого столбца и после этого вынесем из каждого столбца полученного определителя общий множитель (x_i-x_1), где $i=2,3,\dots,n$,

$$\Delta_n(x_1,x_2,\dots,x_n)=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdot\ldots\cdot(x_n-x_1)\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\x_2&x_3&\cdots&x_n\\ \cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\x_2^{n-2}&x_3^{n-2}&\cdots&x_n^{n-2}\end{vmatrix}.$$

Заметим, что определитель в правой части последнего равенства является определителем Вандермонда $(n-1)$-го порядка. Таким образом, получаем рекуррентное соотношение:

$$\Delta_n(x_1,x_2,\dots,x_n)=\prod_{i=2}^{n}(x_i-x_1)\cdot\Delta_{n-1}(x_2,x_3,\dots,x_n).$$

Используя это соотношение, имеем

$$\Delta_n(x_1,x_2,\dots,x_n)=\prod_{i=2}^{n}(x_i-x_1)\cdot\prod_{i=3}^{n}(x_i-x_2)\cdot\ldots\cdot\prod_{i=n-1}^{n}(x_i-x_{n-2})\Delta_2(x_{n-1},x_n).$$

Учитывая, что $\Delta_2(x_{n-1},x_n)=\begin{vmatrix}1 & 1\\ x_{n-1} & x_n\end{vmatrix}=x_n-x_{n-1}$, приходим к равенству:

$$\Delta_n(x_1,x_2,\dots,x_n)=\prod_{\substack{2\le i\le n\\ 1\le j\le i-1}}(x_i-x_j).$$

Таким образом, заключаем, что определитель Вандермонда равен произведению всевозможных разностей (x_i-x_j), где $i>j$. Определитель Вандермонда обращается в нуль тогда и только тогда, когда среди чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$ есть равные. ◀

Глава 2. Матрицы и действия с ними

§ 1. Линейные операции с матрицами и их свойства

В гл. 1 было введено понятие числовой матрицы A как прямоугольной таблицы чисел (см. гл. 1, § 1, п. 3°). Матрица

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

содержит m строк и n столбцов. Говорят, что она имеет *размер* $m\times n$, для нее принято также обозначение $A_{m\times n}$. Элементы матрицы A обозначают малыми латинскими буквами с двумя индексами, первый из которых указывает номер строки, в которой стоит элемент, а второй — номер столбца; так, например, элемент a_{ij} стоит в i-й строке и в j-м столбце матрицы A.

Определение 1.1. Две матрицы A и B называются *равными*, если они имеют одинаковый размер и их соответствующие элементы равны, т. е.

$$A_{m\times n}=B_{k\times l} \Leftrightarrow \begin{cases} m=k, \\ n=l, \\ a_{ij}=b_{ij}, i=1,\ 2,\dots,m, j=1,\ 2,\dots,n. \end{cases}$$

При $m=n$ матрица (1.1) называется *квадратной*. Квадратная матрица называется *диагональной*, если все ее элементы равны нулю, кроме находящихся на главной диагонали (т. е. кроме элементов $a_{ii}, i=1,\ 2,\dots,n$). *Единичные* матрицы — частный случай диагональных матриц, в них все элементы, находящиеся на главной диагонали, равны 1. Матрица, все элементы которой равны нулю, называется ***нулевой матрицей*** или ***нуль-матрицей***.

Пример 1.1. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -5 & \pi \\ \sqrt{7} & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{7} \\ -5 & 0 \\ \pi & 2 \end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

а) Указать размер каждой матрицы;

б) какие матрицы являются квадратными, диагональными?

Ответ:

а) размеры матриц: A — 2×2, B — 2×3, C — 3×2, D — 3×3;

б) квадратными являются матрицы A и D, а диагональной — только матрица D.

Определение 1.2. *Суммой* двух матриц A и B одинакового размера $m \times n$ называется матрица C того же размера, элементы которой суть суммы соответствующих элементов матриц-слагаемых, т. е.

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij},\ i = 1, 2, \dots, m,\ j = 1, 2, \dots, n.$$

Принято обозначение $C = A + B$.

Таким образом, если $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$, то

$$C = A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Пример 1.2. Найти сумму матриц $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & -2 \\ 3 & -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

► $A + B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & -2 \\ 3 & -3 & 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} -1+1 & 2+2 & 3+3 & -2+4 \\ 3+4 & -3+3 & 2+2 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 6 & 2 \\ 7 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. ◄

Определение 1.3. *Произведением* матрицы A размера $m \times n$ на вещественное число λ называется матрица того же размера, обозначаемая λA, элементы которой есть произведения соответствующих элементов матрицы A на число λ.

Таким образом, $\lambda A = \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$.

Пример 1.3. Дана матрица А из примера 1.2. Найти 3А.

► $3A=3\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3 & -2\\ 3 & -3 & 2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 6 & 9 & -6\\ 9 & -9 & 6 & 0\end{pmatrix}$. ◄

Определение 1.4. Операции сложения матриц и умножения матрицы на вещественное число называются *линейными операциями* с матрицами.

Свойства линейных операций с матрицами.

1. $A+B=B+A$ — коммутативность (переместительный закон) сложения.

2. $(A+B)+C=A+(B+C)$ — ассоциативность (сочетательный закон) сложения.

3. Для любой матрицы A существует единственная матрица, равная нуль-матрице O, такая что $A+O=A$.

4. Для любой матрицы A существует единственная матрица $(-A)$, называемая противоположной, такая что $A+(-A)=O$, где O — нуль-матрица.

5. $1\cdot A=A$.

6. $\lambda(\mu A)=(\lambda\mu)A$.

7. $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$.

8. $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$.

Замечание 1.1. Во всех перечисленных выше свойствах λ, μ — произвольные вещественные числа, а A, B, C, O — такие матрицы, для которых осуществимы указанные в этих свойствах операции. При этом все перечисленные выше равенства понимаются в том смысле, что если определена правая часть равенства, то определена и левая, и наоборот, при этом матрицы в левой и правой частях равенств равны между собой.

Замечание 1.2. Матрица $(-A)$ из свойства 4 равна $(-1)\cdot A$.

Пример 1.4. Для матрицы A из примера 1.2 найти противоположную, а также проверить, что $2A+3A=5A$.

► $-A=(-1)A=(-1)\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3 & -2\\ 3 & -3 & 2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2 & -3 & 2\\ -3 & 3 & -2 & 0\end{pmatrix}$,

$$2A+3A=2\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3 & -2\\ 3 & -3 & 2 & 0\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3 & -2\\ 3 & -3 & 2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 4 & 6 & -4\\ 6 & -6 & 4 & 0\end{pmatrix}+$$

$$+\begin{pmatrix}-3 & 6 & 9 & -6\\ 9 & -9 & 6 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & 10 & 15 & -10\\ 15 & -15 & 10 & 0\end{pmatrix}=5\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3 & -2\\ 3 & -3 & 2 & 0\end{pmatrix}=5A. ◄$$

§ 2. Операция умножения матриц и ее свойства

Для прямоугольных матриц A и B произведение определено, если длины строк первого сомножителя A равны длинам столбцов второго сомножителя B, т. е. если число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B.

Определение 2.1. *Произведением* матрицы A размера $m\times k$ на матрицу B размера $k\times n$ называется матрица C размера $m\times n$, элемент c_{ij} которой, стоящий в i-й строке и в j-м столбце, равен сумме произведений соответствующих элементов i-й строки матрицы A и j-го столбца матрицы B:

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{ik}b_{kj}=\sum_{\mu=1}^{k}a_{i\mu}b_{\mu j}.$$

Принято обозначение $C=AB$.

Рассмотрим частный случай произведения матриц. Пусть даны матрица-строка $A_{1\times n}=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \ldots & a_n\end{pmatrix}$ и матрица-столбец $B_{n\times 1}=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}$. Матрица $C=AB$ имеет размер 1×1, причем ее элемент

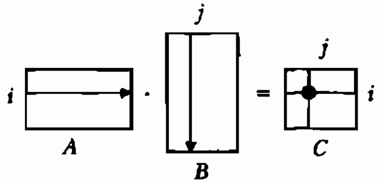
$$c_{11}=a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i,\text{ или}$$

$$\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \ldots & a_n\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}=\left(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n\right)=\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right).$$

Пример 2.1. Найти произведение матрицы-строки $A=(\sqrt{2}\ \ 0\ \ -3)$ на матрицу-столбец $B=\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\ \pi\\ 1\end{pmatrix}$.

$$\blacktriangleright\ AB=\begin{pmatrix}\sqrt{2} & 0 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\ \pi\\ 1\end{pmatrix}=(\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}+0\cdot\pi+(-3)\cdot 1)=(-1).\ \blacktriangleleft$$

Правило для вычисления произведения матриц схематично проиллюстрировано на рис. 2.1.



К определению произведения матриц

Замечание 2.1. При умножении матриц обычно говорят, что элемент c_{ij} матрицы $C=AB$, стоящий в i-й строке и в j-м столбце, является «произведением i-й строки матрицы A и j-го столбца матрицы B».

Пример 2.2. Даны матрицы A, B из примера 2.1, а также матрицы $C=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 5 & 3\end{pmatrix}$ и $F=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 3 & 2 & 0\end{pmatrix}$. **Установить, для каких матриц определена операция умножения, и найти эти произведения.**

▶ Имеем: $A_{1\times3}, B_{3\times1}, C_{2\times2}, D_{2\times2}, F_{2\times3}$. Сравнивая размеры данных матриц, убеждаемся, что определены следующие произведения: AB, BA, CD, DC, CF, DF, FB. Произведение AB было найдено в примере 2.1.

$$BA=\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\ \pi\\ 1\end{pmatrix}(\sqrt{2}\quad 0\quad -3)=\begin{pmatrix}\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} & \sqrt{2}\cdot 0 & \sqrt{2}\cdot(-3)\\ \pi\sqrt{2} & \pi\cdot 0 & \pi\cdot(-3)\\ 1\cdot\sqrt{2} & 1\cdot 0 & 1\cdot(-3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0 & -3\sqrt{2}\\ \pi\sqrt{2} & 0 & -3\pi\\ \sqrt{2} & 0 & -3\end{pmatrix};$$

$$CD=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 5 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+2\cdot5 & 1\cdot2+2\cdot3\\ 3\cdot1+4\cdot5 & 3\cdot2+4\cdot3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11 & 8\\ 23 & 18\end{pmatrix};$$

$$DC=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 5 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+2\cdot3 & 1\cdot2+2\cdot4\\ 5\cdot1+3\cdot3 & 5\cdot2+3\cdot4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 10\\ 14 & 22\end{pmatrix};$$

$$CF=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 3 & 2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+2\cdot3 & 1\cdot0+2\cdot2 & 1\cdot(-1)+2\cdot0\\ 3\cdot1+4\cdot3 & 3\cdot0+4\cdot2 & 3\cdot(-1)+4\cdot0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}7 & 4 & -1\\ 15 & 8 & -3\end{pmatrix}.$$

Произведения DF и FB найдите самостоятельно. ◀

Замечание 2.2. Как видно из примера 2.2, при перестановке матриц результат умножения может получиться различным (сравните AB и BA, CD и DC). Кроме того, легко заметить, что. хотя определено произведение CF, произведение FC не определено. В общем случае свойство коммутативности при умножении матриц не имеет места.

Определение 2.2. Матрицы A и B, для которых $AB=BA$, называются *коммутирующими*.

Чтобы матрицы были коммутирующими, необходимо, чтобы они были квадратными матрицами одинакового порядка, однако, как показывают приведенные выше примеры, это условие не является достаточным, так как матрицы C и D из примера 2.2 не коммутируют.

Пример 2.3. Показать, что матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}0 & 4\\ 6 & 6\end{pmatrix}$ коммутируют.

$$\blacktriangleright\ AB=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 4\\ 6 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot0+2\cdot6 & 1\cdot4+2\cdot6\\ 3\cdot0+4\cdot6 & 3\cdot4+4\cdot6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12 & 16\\ 24 & 36\end{pmatrix},$$

$$BA=\begin{pmatrix}0 & 4\\ 6 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\cdot1+4\cdot3 & 0\cdot2+4\cdot4\\ 6\cdot1+6\cdot3 & 6\cdot2+6\cdot4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12 & 16\\ 24 & 36\end{pmatrix},$$

т. е. $AB=BA$, значит, матрицы A и B коммутируют. ◀

Свойства действия умножения матриц.

1. $(AB)C=A(BC)$ (ассоциативность умножения).
2. $(\lambda A)B=A(\lambda B)=\lambda(AB)$.
3. $(A_1+A_2)B = A_1B+A_2B$.
4. $A(B_1+B_2) = AB_1+AB_2$.
5. Если матрица A имеет размер $m\times n$, то равенство $E_mA=AE_n=A$ справедливо, только если E_m, E_n — единичные матрицы m-го и n-го порядка.

Все перечисленные свойства трактуются таким образом, что если одна из частей равенства имеет смысл, то имеет смысл и другая, и они равны.

Теорема 2.1. Если A и B — квадратные матрицы n-го порядка, то

$$\det AB=\det A\cdot\det B. \tag{2.1}$$

Упражнение. Доказать самостоятельно для случая матриц 2-го порядка.

§ 3. Операция транспонирования матриц и ее свойства

Определение 3.1. Если в матрице A размера $m\times n$ заменить строки на столбцы, то получится матрица размера $n\times m$, называемая *транспонированной* по отношению к матрице A.

Транспонированная матрица обозначается A^T; таким образом, если

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ то } A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Так, если $A=\begin{pmatrix} 1 & -5 & \pi \\ \sqrt{7} & 0 & 2 \end{pmatrix}$, то $A^T=\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{7} \\ -5 & 0 \\ \pi & 2 \end{pmatrix}$. ◀

Диагональная матрица совпадает со своей транспонированной. Для двух матриц A и A^T всегда определена операция умножения.

Свойства операции транспонирования.

1. $(A^T)^T=A$.
2. $(A+B)^T=A^T+B^T$.
3. $(\lambda A)^T=\lambda A^T$.
4. $(AB)^T=B^TA^T$.

§ 4. Обратная матрица

1°. Понятие обратной матрицы. Существование и единственность обратной матрицы. Присоединенная матрица.

Определение 4.1. Пусть A — квадратная матрица порядка n. Матрица B называется *правой обратной* для матрицы A, если $AB=E_n$, где E_n — единичная матрица порядка n. Матрица C называется *левой обратной* для матрицы A, если $CA=E_n$. Матрица, являющаяся одновременно правой и левой обратной по отношению к матрице A, называется *обратной* к матрице A.

Для матрицы, обратной к матрице A, принято обозначение A^{-1}.

Замечание 4.1. В силу определения 2.1 матрицы B и C из определения 4.1 также должны быть квадратными матрицами порядка n.

Определение 4.2. Квадратная матрица A называется *невырожденной* (*неособенной*), если $\det A\neq 0$. В противном случае матрица A называется *вырожденной* (*особенной*).

Теорема 4.1. Если квадратная матрица A имеет правую или левую обратную матрицу, то она невырожденная.

Следствие из теоремы 4.1. Если матрица A вырожденная, то она не имеет обратной.

3*-1459

Теорема 4.2 (*о существовании и единственности обратной матрицы*). Всякая невырожденная квадратная матрица A n-го порядка имеет единственную обратную матрицу A^{-1}, для которой справедливо равенство:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}, \qquad (4.1)$$

где A_{ij} — алгебраические дополнения элементов a_{ij} определителя матрицы A.

Определение 4.3. Матрица $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$ из правой части соотношения (4.1) называется *присоединенной* по отношению к матрице A и обозначается $A^{\vee}$.

Формулу (4.1) можно переписать в виде $A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}A^{\vee}$.

Пример 4.1. Найти матрицу, обратную к матрице $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

► $\det A=-5\neq 0 \Rightarrow$ матрица A неособенная и имеет обратную. Вычислим алгебраические дополнения ее элементов.

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=3,\quad A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=2;$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}=-6;\quad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=1;$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-1,\quad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}=-2;$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-4,\quad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-1;$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 0\\ -1 & 3\end{vmatrix}=3.$$

Обратной матрицей является матрица

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & 2 & -6\\ 1 & -1 & -2\\ -4 & -1 & 3\end{pmatrix}.$$

Сделаем проверку. Покажем, например, что $A^{-1}A=E$.

▶ $$A^{-1}A=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & 2 & -6\\ 1 & -1 & -2\\ -4 & -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ -1 & 3 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3-2-6 & 0+6-6 & 6+0-6\\ 1+1-2 & 0-3-2 & 2+0-2\\ -4+1+3 & 0-3+3 & -8+0+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E. ◀$$

Свойства обратной матрицы

1. $\det A^{-1}=(\det A)^{-1}$.
2. $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.
3. $(A^{-1})^{-1}=A$.
4. $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$.

2°. Обращение матрицы методом элементарных преобразований. Для матрицы большого размера вычисление обратной матрицы по формуле (4.1) связано с трудоемкими вычислениями. В этом случае используется *метод элементарных преобразований*. Вместо данной квадратной матрицы A порядка n рассматривается прямоугольная матрица размера $n\times 2n$, первые n столбцов которой являются столбцами матрицы A, а вторые n столбцов — столбцами единичной матрицы E того же размера (обычно она отделяется от исходной матрицы чертой). После этого при помощи элементарных преобразований над строками эта матрица приводится к виду $(E|B)$. Тогда $A^{-1}=B$.

Пример 4.2. Методом элементарных преобразований найти матрицу, обратную к матрице A из примера 4.1.

▶ Припишем к матрице A справа единичную матрицу 3-го порядка, получим матрицу C и проведем последовательно такие элементарные преобразования:

1) из третьей строки матрицы C вычтем первую, а ко второй строке прибавим первую и после этого поменяем местами вторую и третью строки:

$$C=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)\to$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right);$$

2) из последней строки вычтем вторую, умноженную на 3:

$$C\to\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 4 & 1 & -3 \end{array}\right);$$

3) последнюю строку разделим на 5:

$$C\to\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4/5 & 1/5 & -3/5 \end{array}\right);$$

4) ко второй строке прибавим третью, а из первой строки вычтем третью строку, умноженную на 2:

$$C\to\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3/5 & -2/5 & 6/5 \\ 0 & 1 & 0 & -1/5 & 1/5 & 2/5 \\ 0 & 0 & 1 & 4/5 & 1/5 & -3/5 \end{array}\right).$$

Матрица, стоящая справа от черты, и будет являться обратной к матрице A:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} -3/5 & -2/5 & 6/5 \\ -1/5 & 1/5 & 2/5 \\ 4/5 & 1/5 & -3/5 \end{pmatrix}=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 2 & -6 \\ 1 & -1 & -2 \\ -4 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Получен тот же результат, что и в примере 4.1. ◄

§ 5. Понятие о ранге матрицы. Ранг ступенчатой матрицы

Определение 5.1. *Минором порядка k* матрицы $A_{m\times n}$ $\left(k \le \min(m, n)\right)$ называется определитель k-го порядка, составленный из элементов этой матрицы, находящихся на пересечении любых ее k строк и k столбцов. Обозначение: M_k.

Пример 5.1. Дана матрица $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$. Определить число ее миноров 2-го порядка и найти какой-нибудь один из них.

► В соответствии с определением 5.1 матрица A может иметь несколько миноров данного порядка. Число N миноров 2-го порядка M_2 данной матрицы равно $N=N_1N_2$, где N_1 — число способов, которыми можно выбрать две строки из трех, а N_2 — число способов, которыми можно выбрать два столбца из четырех. Поскольку $N_1=3$, $N_2=6$, то $N=18$. Так, одним из миноров M_2 будет определитель $M_2=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=5$, составленный из элементов этой матрицы, находящихся на пересечении ее первой и второй строк с третьим и четвертым столбцами.◄

Определение 5.2. *Базисным минором* матрицы A размера $m\times n$ называется любой ее минор порядка r $\left(r\le\min(m,n)\right)$, если он отличен от нуля, а все миноры порядка $(r+1)$ либо равны нулю, либо не существуют. Порядок r базисного минора называется *рангом* матрицы A, а ее строки и столбцы, входящие в базисный минор, называются *базисными*.

Для ранга матрицы A приняты обозначения: $\operatorname{rang} A$, $\operatorname{rank} A$, $r(A)$. Ранг нулевой матрицы принимается равным нулю.

Пример 5.2. Найти ранг матрицы A из примера 5.1.

► Ранг матрицы A равен 3, так как у нее есть минор $M_3\ne 0$,

$$M_3=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=10\ne 0,$$

а миноров 4-го порядка она не имеет. ◄

Пример 5.3. Найти $\operatorname{rang} A$, если $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 3 & -1 & 0\\ 4 & -1 & -1\end{pmatrix}$.

▶ $\exists M_2=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 3 & -1\end{vmatrix}=-1\neq 0\Rightarrow \operatorname{rang} A\geq 2.$

Данная матрица имеет только один минор третьего порядка

$$M_3=\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ 3 & -1 & 0\\ 4 & -1 & -1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 3\\ 0 & -1 & 3\end{vmatrix}=0\Rightarrow \operatorname{rang} A=2. \blacktriangleleft$$

Теорема 5.1. Ранг ступенчатой матрицы равен числу ее ненулевых строк.

Пример 5.4. Найти $\operatorname{rang} A$, если $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

▶ Матрица A — ступенчатая (см. определение 1.6, гл.1), у нее три ненулевые строки, поэтому ее ранг в силу теоремы 5.1 равен 3. ◀

Можно доказать, что при элементарных преобразованиях над матрицей ранг не изменяется, т. е. ранг полученной матрицы равен рангу исходной.

Это утверждение вместе с теоремой 5.1 положено в основу вычисления ранга матрицы методом элементарных преобразований, при этом матрицу A преобразуют к ступенчатой форме A_1. Такая операция всегда возможна согласно теореме 1.2 гл. 1. Ранг A_1 определяется по теореме 5.1, а ранг матрицы A получают из равенства $\operatorname{rang} A=\operatorname{rang} A_1$.

Пример 5.5. Методом элементарных преобразований найти $\operatorname{rang} A$, если $A=\begin{pmatrix}2 & -2 & 0 & 4 & 2\\ 1 & 1 & -1 & 3 & 1\\ 0 & 2 & -1 & 4 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 6 & 2\end{pmatrix}$.

▶ Выполним следующие элементарные преобразования:

1) переставим первую и вторую строки, после чего из четвертой строки вычтем первую, а из второй — первую, умноженную на 2, получим:

$$A \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix};$$

2) переставим вторую и третью строки, затем из третьей строки вычтем вторую, умноженную на 2, в полученной матрице переставим третью и четвертую строки:

$$A \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 2 \end{pmatrix};$$

3) из четвертой строки вычтем третью, умноженную на 2,

$$A \to A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку A_1 — ступенчатая матрица, имеющая три ненулевых строки, то по теореме 5.1 $\operatorname{rang} A_1 = 3$. Но тогда и $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} A_1 = 3$. ◄

Глава 3. Общая теория линейных систем

§ 1. Крамеровские системы линейных уравнений

1°. Матричная форма записи системы линейных уравнений. Пусть дана система из m линейных уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{1.1}$$

С введением понятия матриц и операций над ними (см. § 1—2 гл. 2) появляется возможность записать систему (1.1) в более компактном виде, а именно в виде так называемого матричного уравнения.

Сопоставим с системой (1.1) следующие матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Матрица A — это *матрица коэффициентов системы* (см. § 1 гл. 1), матрица X называется *столбцом неизвестных*, а матрица B — *столбцом свободных членов*. Вычислим произведение матриц A и X:

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

Элементами столбца из правой части (1.2) являются левые части уравнений системы (1.1). Используя определение равенства двух матриц (определение 1.1 гл. 2), перепишем эту систему в виде

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Заменяя в последнем соотношении его левую часть в силу (1.2) на AX, а правую — на B, приходим к соотношению

$$AX = B. \tag{1.3}$$

Равенство (1.3) называется *матричным уравнением*, соответствующим системе (1.1). *Решением* матричного уравнения (1.3) называется такой столбец X, который при подстановке в это уравнение обращает его в матричное тождество. Понятно, что решение матричного уравнения (1.3) эквивалентно решению системы (1.1).

2°. Крамеровские системы. Теорема Крамера. Рассмотрим систему из n уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{1.4}$$

Система (1.4) называется *квадратной*. Матрица A этой системы — квадратная матрица n-го порядка,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Определитель матрицы A называется *главным определителем* системы и обозначается Δ. Таким образом,

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Наряду с главным определителем системы Δ рассмотрим так называемые *вспомогательные определители* Δ_i, $i = 1, 2, \dots, n$, которые получаются из главного путем замены его i-го столбца на столбец свободных членов:

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \; i = 1, \dots, n.$$

Теорема 1.1 *(теорема Крамера.)* Если главный определитель Δ системы (1.4) отличен от нуля, то эта система имеет единственное решение, определяемое равенствами

$$x_i = \Delta_i / \Delta, \; i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.5}$$

Равенства (1.5) называются ***формулами Крамера***, а система (1.4) при $\Delta \neq 0$ называется *крамеровской системой.*

Пример 1.1. Используя формулы Крамера, решить систему

$$\begin{cases} x + 2z = 8, \\ -x + 3y = -5, \\ x + y + z = 4. \end{cases}$$

▶ Для отыскания решения системы по формулам (1.5) вычислим главный определитель системы Δ и вспомогательные определители Δ_x, Δ_y, Δ_z, получающиеся из Δ путем замены его первого, второго и третьего столбцов соответственно на столбец свободных членов:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 2 = -5;$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 8 & 0 & 2 \\ -5 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 8\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 8 \cdot 3 + 2(-5 - 12) = -10;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 8 & 2 \\ -1 & -5 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -1 & -5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} = 2(-4 + 5) + (-5 + 8) = 5;$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 8 \\ -1 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 8\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 12 + 5 + 8(-1 - 3) = -15.$$

Теперь находим решение системы по формулам (1.5):

$$x = \Delta_x / \Delta = 2; \; y = \Delta_y / \Delta = -1; \; z = \Delta_z / \Delta = 3. \blacktriangleleft$$

Замечание 1.1. При доказательстве теоремы Крамера излагается метод обратной матрицы, позволяющий выразить решение крамеровской системы в матричной форме:

$$X = A^{-1}B, \tag{1.6}$$

где A^{-1} — матрица, обратная к матрице системы A; B — столбец свободных членов.

Пример 1.2. Используя матричную форму записи, решить систему уравнений из примера 1.1.

▶ Через A обозначим матрицу системы, через B — столбец свободных членов, а через X — столбец из неизвестных: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Рассматриваемой системе соответствует уравнение (1.3), где матрицы A и B имеют указанный смысл. Матрица A имеет обратную (см. пример 4.1 гл. 2), $A^{-1} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 2 & -6 \\ 1 & -1 & -2 \\ -4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. С помощью (1.6) найдем решение системы:

$$X = A^{-1}B = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 2 & -6 \\ 1 & -1 & -2 \\ -4 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3\cdot 8 + 2\cdot(-5) + (-6)\cdot 4 \\ 1\cdot 8 + (-1)\cdot(-5) + (-2)\cdot 4 \\ -4\cdot 8 + (-1)\cdot(-5) + 3\cdot 4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -10 \\ 5 \\ -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, система имеет единственное решение: $x = 2$, $y = -1$, $z = 3$. ◀

Замечание 1.2. Систему уравнений с квадратной неособенной матрицей (крамеровскую систему) можно решать тремя способами: методом Гаусса, по формулам Крамера (1.5), а также методом обратной матрицы по формуле (1.6) (см. примеры 1.8 гл. 1, примеры 1.1 и 1.2 настоящего параграфа).

§ 2. Решение произвольных систем линейных уравнений

Выше рассматривались в основном квадратные системы линейных уравнений, число неизвестных в которых совпадает с числом уравнений. В настоящем параграфе исследуются системы, в которых число линейных уравнений и число неизвестных произвольны. Такие системы будем называть произвольными системами линейных уравнений.

Пусть дана система из m линейных уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{2.1}$$

где m и n — произвольные натуральные числа. Через A и A^* обозначим матрицу коэффициентов системы и ее расширенную матрицу,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right). \tag{2.2}$$

Выполнив конечное число элементарных преобразований, матрицу A^* всегда можно привести к ступенчатой матрице A_1^* (см. теорему 1.2 гл. 1):

$$A^* \to A_1^* = \left(\begin{array}{ccccccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1r}^{(1)} & a_{1,r+1}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2r}^{(1)} & a_{2,r+1}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & a_{rr}^{(1)} & a_{r,r+1}^{(1)} & \cdots & a_{rn}^{(1)} & b_r^{(1)} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{r+1}^{(1)} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right). \tag{2.3}$$

Можно считать, что ни один из элементов $a_{11}^{(1)}, \dots, a_{rr}^{(1)}$ матрицы A_1^* не равен нулю, в противном случае этого можно добиться перестановкой столбцов матрицы A^*, изменив при этом нумерацию неизвестных.

Первые n столбцов матрицы A_1^* соответствуют матрице A_1, получающейся при указанных преобразованиях из матрицы A. При $r<m$ матрица A_1 имеет r ненулевых строк, а в матрице A_1^* число таких строк равно $(r+1)$ или r в зависимости от величины ее элемента $b_{r+1}^{(1)}$. При $r=m$ число ненулевых строк в матрицах A_1 и A_1^* одинаково и равно r.

Случай 1. $r<m$, $b_{r+1}^{(1)}\neq 0$, число ненулевых строк в матрицах A_1 и A_1^* различно и равно r и $(r+1)$ соответственно.

Матрица A_1^* является расширенной матрицей следующей системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}^{(1)}x_1+a_{12}^{(1)}x_2+\ldots+a_{1r}^{(1)}x_r+a_{1,r+1}^{(1)}x_{r+1}+\ldots+a_{1n}^{(1)}x_n=b_1^{(1)}, \\ a_{22}^{(1)}x_2+\ldots+a_{2r}^{(1)}x_r+a_{2,r+1}^{(1)}x_{r+1}+\ldots+a_{2n}^{(1)}x_n=b_2^{(1)}, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ a_{rr}^{(1)}x_r+a_{r,r+1}^{(1)}x_{r+1}+\ldots+a_{rn}^{(1)}x_n=b_r^{(1)}, \\ 0\cdot x_1+0\cdot x_2+\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad+0\cdot x_n=b_{r+1}^{(1)}, \\ 0\cdot x_1+0\cdot x_2+\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad+0\cdot x_n=0, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ 0\cdot x_1+0\cdot x_2+\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad+0\cdot x_n=0. \end{cases} \qquad (2.4)$$

Система (2.4) несовместна, поскольку ее $(r+1)$-е уравнение не имеет решений. Так как в силу теоремы 1.1 гл. 1 системы (2.1) и (2.4) равносильны, то несовместной оказывается и система (2.1).

Пример 2.1. Решить систему уравнений $\begin{cases} 2x_1+3x_2-2x_3=1, \\ x_1-x_2+x_3=0, \\ 3x_1+2x_2-x_3=2. \end{cases}$

▶ Рассмотрим расширенную матрицу этой системы:

$$A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right).$$

Первые три столбца этой матрицы образуют матрицу A — матрицу системы. Подвергнем A^* следующим элементарным преобразованиям. Переставим первую и вторую строки, затем последовательно умножим первую строку на (–2) и на (–3) и сложим со второй и третьей строками, после чего из третьей строки вычтем вторую:

$$A^* \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & 1 \\ 0 & 5 & -4 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = A_1^*.$$

Матрица A при этом преобразуется в матрицу A_1, составленную из первых трех столбцов матрицы A_1^*. Матрице A_1^* соответствует система $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 5x_2 - 4x_3 = 1, \\ 0 \cdot x_3 = 1, \end{cases}$ которая является несовместной, так как ее последнее уравнение не имеет решений. Поэтому несовместна и равносильная ей исходная система. ◀

Случай 2. $r < m, b_{r+1}^{(1)} = 0$ или $r = m$. Число ненулевых строк в матрицах A_1 и A_1^* одинаково и равно r.

В этом случае с матрицей A_1^* сопоставляется следующая система:

$$\begin{cases} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{1r}^{(1)}x_r + a_{1,r+1}^{(1)}x_{r+1} + \ldots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)}, \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2r}^{(1)}x_r + a_{2,r+1}^{(1)}x_{r+1} + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{rr}^{(1)}x_r + a_{r,r+1}^{(1)}x_{r+1} + \ldots + a_{rn}^{(1)}x_n = b_r^{(1)}, \end{cases} \qquad (2.5)$$

равносильная системе (2.1) в силу теоремы 1.1 из гл. 1.

Система (2.5) (а следовательно, и система (2.1)) будет иметь различное число решений в зависимости от соотношения между числами r и n.

Частные случаи

2.1. $r = n$. Система (2.5) имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)}, \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{nn}^{(1)}x_n = b_n^{(1)}. \end{cases} \qquad (2.6)$$

и является крамеровской (она квадратная и ее определитель $\Delta \neq 0$),

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \cdot & a_{rr} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdot\ldots\cdot a_{rr} \neq 0. \qquad (2.7)$$

Система (2.6) имеет единственное решение, которое можно найти по формулам Крамера (1.5), но естественнее и проще выполнить обратный ход метода Гаусса, который заключается в том, что сначала из последнего уравнения системы (2.6) находят $x_n = b_n^{(1)} / a_{nn}^{(1)}$, потом из предпоследнего уравнения находят x_{n-1} после подстановки в него найденного значения x_n. Аналогичные операции производят до тех пор, пока из первого уравнения не будет найдено x_1.

Пример 2.2. Решить систему уравнений $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = -2, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 7, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -4, \\ 4x_1 - 2x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$

▶ Выпишем расширенную матрицу этой системы A^*:

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -3 & 7 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 4 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right),$$

и подвергнем ее элементарным преобразованиям. Умножим первую строку на числа 2, 1, 4 и вычтем ее последовательно из второй, третьей и четвертой строк, после чего поменяем местами вторую и третью строки, получим:

$$A^* \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 & 11 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -5 & 9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & -5 & 11 \\ 0 & 2 & -5 & 9 \end{array}\right).$$

Умножим теперь вторую строку на числа 3, 2 и сложим ее последовательно с третьей и четвертой строками, получим:

$$A^* \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \end{array}\right).$$

Наконец, умножим вторую строку на -1, третью строку вычтем из четвертой, после чего умножим третью строку на $-1/5$, получим:

$$A^* \to A_1^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Матрице A_1^* соответствует система $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = -2, \\ x_2 = 2, \\ x_3 = -1, \end{cases}$ которая является крамеровской, так как ее главный определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Она имеет единственное решение: $x^1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -1$. ◀

2.2. $r < n$. Перенесем члены с неизвестными $x_{r+1}, \dots, x_n$ в правые части уравнений системы (2.5), получим:

$$\begin{cases} a_{11}^{(1)} x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + \dots + a_{1r}^{(1)} x_r = b_1^{(1)} - a_{1,r+1}^{(1)} x_{r+1} - \dots - a_{1n}^{(1)} x_n, \\ a_{22}^{(1)} x_2 + \dots + a_{2r}^{(1)} x_r = b_2^{(1)} - a_{2,r+1}^{(1)} x_{r+1} - \dots - a_{2n}^{(1)} x_n, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{rr}^{(1)} x_r = b_r^{(1)} - a_{r,r+1}^{(1)} x_{r+1} - \dots - a_{rn}^{(1)} x_n. \end{cases} \tag{2.8}$$

Относительно неизвестных $x_1, \dots, x_r$ система (2.8) является крамеровской (число ее уравнений равно числу неизвестных, и ее определитель Δ отличен от нуля (см. (2.7)). Поэтому из системы (2.8) можно единственным образом выразить неизвестные $x_1, \ldots, x_r$ через неизвестные $x_{r+1}, \ldots, x_n$ по формулам Крамера или осуществив обратный ход метода Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 + \alpha_{11}x_{r+1} + \ldots + \alpha_{1,n-r}x_n, \\ x_2 = \beta_2 + \alpha_{21}x_{r+1} + \ldots + \alpha_{2,n-r}x_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r = \beta_r + \alpha_{r1}x_{r+1} + \ldots + \alpha_{r,n-r}x_n. \end{cases} \tag{2.9}$$

Числа β_i, α_{ij} $(i=1,\ldots,r,\ j=1,\ldots,n-r)$ получаются в результате арифметических операций над коэффициентами $a_{ik}^{(1)}$, $i=1,\ldots,r$, $k=1,\ldots,n$ и свободными членами $b_i^{(1)}$, $i=1,\ldots,r$ системы (2.8) в процессе вычислений. Для них можно записать и явные выражения в виде

$$\beta_i = \Delta_i/\Delta,\ \ \alpha_{ij} = -\Delta_{ij}/\Delta,\ i=1,\ldots,r, j=1,\ldots,n-r, \tag{2.10}$$

где через Δ_i, Δ_{ij} обозначены определители, полученные из Δ путем замены его i-го столбца на столбцы $\left(b_1^{(1)},\ldots,b_r^{(1)}\right)^T$ и $\left(a_{1,j}^{(1)},\ldots,a_{r,j}^{(1)}\right)^T$, $j=1,\ldots,n-r$. Равенства (2.10) являются следствием формул Крамера и свойств определителей.

В равенствах (2.9) неизвестные $x_{r+1},\ldots,x_n$ принимают произвольные значения; поэтому их называют *свободными* неизвестными, а неизвестные $x_1,\ldots,x_r$ — *базисными*. Используя для свободных неизвестных традиционные обозначения $x_{r+1} = C_1, x_{r+2} = C_2, \ldots, x_n = C_{n-r}$, перепишем (2.9) в виде

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 + \alpha_{11}C_1 + \ldots + \alpha_{1,n-r}C_{n-r}, \\ x_2 = \beta_2 + \alpha_{21}C_1 + \ldots + \alpha_{2,n-r}C_{n-r}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r = \beta_r + \alpha_{r1}C_1 + \ldots + \alpha_{r,n-r}C_{n-r}, \\ x_{r+1} = C_1 \in \boldsymbol{R}, \\ \cdots\cdots \\ x_n = C_{n-r} \in \boldsymbol{R}. \end{cases} \tag{2.11}$$

При частных значениях $C_1, C_2, \ldots, C_{n-r}$ правые части равенств (2.11) определяют все решения системы (2.1).

4*-1459

Определение 2.1. Совокупность правых частей системы равенств (2.11) называется *общим решением* системы (2.1).

Пример 2.3. Найти все решения системы $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 5, \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 7, \\ x_2 + 2x_3 - x_4 = 1. \end{cases}$

► Выпишем расширенную матрицу системы

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 5 & -4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Подвергнем матрицу A^* элементарным преобразованиям. Умножим первую строку на числа -2 и -3 и сложим последовательно со второй и третьей строками:

$$A^* \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Вычтем теперь вторую строку из третьей и четвертой:

$$A^* \to A_1^* = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Матрице A_1^* соответствует следующая система:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ x_2 + 2x_3 - x_4 = 1, \end{cases}$$

равносильная данной. Неизвестные x_1, x_2 примем за *базисные*, а неизвестные x_3, x_4 — за *свободные*. Перенесем члены со свободными неизвестными в правые части уравнений последней системы:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 2 - x_3 + x_4, \\ x_2 = 1 - 2x_3 + x_4. \end{cases}$$

Отсюда имеем:

$$\begin{cases} x_2 = 1 - 2x_3 + x_4, \\ x_1 = 2 - x_3 + x_4 + x_2 = 3 - 3x_3 + 2x_4. \end{cases}$$

Приняв обозначения $x_3 = C_1 \in \boldsymbol{R}, x_4 = C_2 \in \boldsymbol{R}$, получаем совокупность всех решений данной системы в виде

$$\begin{cases} x_1 = 3 - 3C_1 + 2C_2, \\ x_2 = 1 - 2C_1 + C_2, \\ x_3 = C_1 \in \boldsymbol{R}, \\ x_4 = C_2 \in \boldsymbol{R}. \end{cases} \blacktriangleleft$$

Резюмируя вышеизложенное, заключаем, что при решении произвольной системы линейных уравнений (т. е. системы (2.1)) реализуется один из следующих случаев.

1. Система (2.1) не имеет решений (т. е. она несовместна), если не совпадает число ненулевых строк в матрицах A_1 и A_1^*, полученных в результате приведения матрицы системы A и ее расширенной матрицы A^* к ступенчатой форме.

2. Система (2.1) имеет единственное решение (т. е. является совместной и определенной), если число ненулевых строк в матрицах A_1 и A_1^* одинаково и равно числу неизвестных. В этом случае система (2.1) — крамеровская или равносильна такой системе.

3. Система (2.1) имеет бесчисленное множество решений (т. е. является совместной и неопределенной), если число ненулевых строк в матрицах A_1 и A_1^* одинаково и меньше числа неизвестных.

Пример 2.4. Дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} (\lambda - 2)x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + (\lambda - 2)x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + (\lambda - 2)x_3 = 1. \end{cases}$$

При каких значениях параметра λ она: а) не имеет решений; б) имеет единственное решение; в) имеет бесчисленное множество решений?

▶ Рассмотрим матрицы

$$A=\begin{pmatrix}\lambda-2 & 1 & 1\\ 1 & \lambda-2 & 1\\ 1 & 1 & \lambda-2\end{pmatrix} \text{ и } A^*=\left(\begin{array}{ccc|c}\lambda-2 & 1 & 1 & 1\\ 1 & \lambda-2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & \lambda-2 & 1\end{array}\right).$$

Для приведения матрицы A^* (и тем самым матрицы A) к ступенчатой форме A_1^* выполним над A^* следующие элементарные преобразования.

1. Переставим местами первую и третью строки:

$$A^*\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & \lambda-2 & 1\\ 1 & \lambda-2 & 1 & 1\\ \lambda-2 & 1 & 1 & 1\end{array}\right).$$

2. Последовательно вычтем из второй строки первую и из третьей — первую, умноженную на $(\lambda-2)$, получим

$$A^*\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & \lambda-2 & 1\\ 0 & \lambda-3 & 3-\lambda & 0\\ 0 & 3-\lambda & -\lambda^2+4\lambda-3 & 3-\lambda\end{array}\right).$$

3. К третьей строке прибавим вторую, имеем

$$A^*\to A_1^*=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & \lambda-2 & 1\\ 0 & \lambda-3 & 3-\lambda & 0\\ 0 & 0 & -\lambda^2+3\lambda & 3-\lambda\end{array}\right)$$

и, следовательно,

$$A\to A_1=\begin{pmatrix}1 & 1 & \lambda-2\\ 0 & \lambda-3 & 3-\lambda\\ 0 & 0 & -\lambda^2+3\lambda\end{pmatrix}.$$

При $-\lambda^2+3\lambda\neq 0$ (т. е. $\lambda\neq 0$, $\lambda\neq 3$) матрицы A_1 и A_1^* имеют по три ненулевых строки, причем число ненулевых строк совпадает с числом неизвестных в системе. Итак, в этом случае рассматриваемая система является крамеровской и имеет единственное решение.

При $\lambda=0$

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 0 & -3 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \text{ и } A_1^*=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & 1\\ 0 & -3 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{pmatrix}.$$

Число ненулевых строк в матрицах A_1 и A_1^* различно, поэтому при $\lambda=0$ система не имеет решений.

При $\lambda=3$ имеем:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \text{ и } A_1^*=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Число ненулевых строк в матрицах A_1 и A_1^* одинаково, и оно меньше числа неизвестных в системе. Система имеет бесчисленное множество решений.

Ответ: а) система не имеет решений при $\lambda=0$;

б) система имеет единственное решение при $\lambda\neq 0$, $\lambda\neq 3$;

в) система имеет бесконечное множество решений при $\lambda=3$. ◄

Замечание 2.1. Поскольку в силу теоремы 5.1 гл. 2 число ненулевых строк в матрицах A_1 и A_1^* совпадает с их рангами и, как было отмечено в § 5 гл. 2, справедливы равенства $\operatorname{rang} A_1=\operatorname{rang} A$, $\operatorname{rang} A_1^*=\operatorname{rang} A^*$, то приведенное выше резюме о числе решений системы (2.1) перефразируется следующим образом:

1) если $\operatorname{rang} A\neq\operatorname{rang} A^*$, то система (2.1) несовместна;

2) если $\operatorname{rang} A=\operatorname{rang} A^*=r$, и $r=n$, то система (2.1) имеет единственное решение;

3) если $\operatorname{rang} A=\operatorname{rang} A^*=r$ и $r<n$, то система (2.1) имеет бесчисленное множество решений.

§ 3. Однородные системы линейных уравнений

Рассмотрим однородную систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=0,\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=0, \end{cases} \tag{3.1}$$

где m и n – произвольные натуральные числа. Обозначим через A и A^* матрицу и расширенную матрицу системы (3.1):

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},\ A^*=\left(\begin{array}{ccc:c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & 0 \end{array}\right).$$

Система (3.1) всегда совместна, ибо при любых значениях ее коэффициентов она имеет так называемое *нулевое* (или *тривиальное*) решение: $x_1=\ldots=x_n=0$. Решение системы (3.1), не совпадающее с тривиальным, называется ***ненулевым***. Система (3.1) является частным случаем произвольной системы линейных уравнений (2.1), она получается из этой системы при $b_i=0$, $i=1,\ldots,m$. Поэтому к ней можно отнести результаты исследований упомянутой системы.

Расширенная матрица однородной системы при помощи конечного числа элементарных преобразований может быть приведена к виду

$$A^*\to A_1^*=\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1r}^{(1)} & a_{1,r+1}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & 0 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2r}^{(1)} & a_{2,r+1}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & a_{rr}^{(1)} & a_{r,r+1}^{(1)} & \cdots & a_{rn}^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

при этом первые n столбцов матрицы A_1^* образуют матрицу A_1, получающуюся из матрицы A при выполнении указанных преобразований. Очевидно, число ненулевых строк в матрицах A_1 и A_1^* всегда совпадает, поэтому при решении однородной системы реализуется один из следующих двух случаев.

1. Нулевое решение системы (3.1) единственно, если число r ненулевых строк в матрице A_1^* совпадает с числом неизвестных ($r=n$). В этом случае рассматриваемая система является крамеровской или равносильна такой системе. Для квадратной однородной системы условие $r=n$ эквивалентно условию $\Delta\neq 0$, где Δ – главный определитель этой системы.

2. Система (3.1) имеет наряду с тривиальным бесчисленное множество ненулевых решений, если число ненулевых строк в матрице

A_1^* меньше числа неизвестных ($r<n$). Общее решение такой системы выражается системой равенств (2.11) при условии $\beta_i=0$, $i=1,2,\ldots,r$:

$$\begin{cases} x_1=\alpha_{11}C_1+\ldots+\alpha_{1,n-r}C_{n-r}, \\ x_2=\alpha_{21}C_1+\ldots+\alpha_{2,n-r}C_{n-r}, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ x_r=\alpha_{r1}C_1+\ldots+\alpha_{r,n-r}C_{n-r}, \\ x_{r+1}=C_1\in \boldsymbol{R}, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ x_n=C_{n-r}\in \boldsymbol{R}. \end{cases} \tag{3.2}$$

Для квадратной однородной системы условие $r<n$ эквивалентно равенству $\Delta=0$, где Δ — главный определитель этой системы.

Пример 3.1. Дана система

$$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=0, \\ 2x_1-x_2+3x_3=0, \\ 3x_1+\beta x_2+2x_3=0. \end{cases}$$

Найти значения параметра β, при которых: а) нулевое решение этой системы единственно; б) данная система имеет ненулевые решения.

► Данная система является квадратной. Вычислим ее главный определитель Δ:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & \beta & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & \beta-6 & 5 \end{vmatrix}=-25-5\beta+30=5(1-\beta),$$

а) нулевое решение $x_1=x_2=x_3=0$ единственно, если $\Delta\neq 0$. Это условие выполняется в случае $\beta\neq 1$;

б) поскольку система имеет ненулевые решения при $\Delta=0$, то для параметра β получаем условие $\beta=1$.

Ответ: а) нулевое решение системы единственно в случае $\beta\neq 1$; б) система имеет ненулевые решения при $\beta=1$. ◄

Дополнение к разделу 1 «Линейная алгебра»

Характеристика раздела и требования к усвоению тем раздела

А. Общая характеристика раздела. В разделе развиваются идеи решения систем уравнений, известные из элементарного курса алгебры. Линейная алгебра применяется в аналитической геометрии, векторной алгебре, теории дифференциальных уравнений, численных методах.

А1. Темы раздела. **1.** Матрицы. **2.** Определители 2, 3-го и n-го порядков. **3.** Системы линейных алгебраических уравнений.

А2. Базисные понятия. **1.** Матрица. **2.** Определитель. **3.** Система линейных алгебраических уравнений.

А3. Основные задачи. **1.** Решение матричных уравнений. **2.** Решение систем линейных алгебраических уравнений. **3.** Исследование систем линейных алгебраических уравнений.

А4. Базисные методы. **1.** Метод Гаусса. **2.** Метод Крамера. **3.** Метод обратной матрицы.

В. Знания и умения, которыми должен владеть студент

В1. Знания на уровне понятий, определений, описаний, формулировок

1. Определители 2, 3-го, n-го порядков.
2. Матрицы. Линейные операции над матрицами. Умножение матриц.
3. Обратная матрица.
4. Минор, ранг матрицы.
5. Определенные, неопределенные, совместные, несовместные системы линейных алгебраических уравнений.
6. Матричная запись систем линейных алгебраических уравнений.
7. Решение линейных алгебраических систем уравнений методом Гаусса.

В2. Знания на уровне доказательств и выводов

1. Свойства операций сложения, вычитания, умножения матриц (выборочно).
2. Свойства определителей 3-го порядка.

3. Существование обратной матрицы, ее конструкция.

4. Метод обратной матрицы решения квадратной системы линеі ных алгебраических уравнений.

5. Теорема Крамера.

ВЗ. Умения в решении задач

Студент должен уметь:

1) вычислять определители 2, 3-го и старших порядков;
2) находить сумму, разность, произведение матриц;
3) находить ранги матриц;
4) решать произвольные системы линейных алгебраически уравнений методом Гаусса;
5) решать квадратные системы методом Крамера.

С. Образцы зачетных (экзаменационных) задач

1.1. Вычислите определители:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -7 \\ -1 & 2 & -3 \\ 0 & 7 & 1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$.

1.2. Пусть даны две матрицы:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 0 & 7 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найдите матрицу C, удовлетворяющую уравнениям:

а) $A\cdot B+\lambda\cdot C=A$; $\lambda\neq 0$;

б) $A\cdot C=E$.

1.3. Решите систему уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_4=1, \\ x_1-2x_2+x_3-x_4=-1, \\ x_1-2x_2+x_3+5x_4=5. \end{cases}$$

1.4. Решите систему уравнений по формулам Крамера:

$$\begin{cases} -x_1+x_2+2x_3=-1, \\ 2x_1-x_2+2x_3=-4, \\ 4x_1+x_2+4x_3=-2. \end{cases}$$

1.5. Исследуйте на совместность систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1- x_2+ 3x_3=3, \\ 3x_1+ x_2- 5x_3=0, \\ 4x_1- x_2+ x_3=3, \\ x_1+3x_2-13x_3=-6. \end{cases}$$

Ответы к образцам зачетных (экзаменационных) задач.

1.1 а) 74; **б)** 900. **1.2. а)** $C=A(E-B)/\lambda$; **б)** $C = A^{-1}$. **1.3.** $x_1= 2x_2$; x_2 — любое число; $x_3=0$; $x_4=1$; **1.4.** $x_1=1$; $x_2=2$; $x_3=-2$. **1.5.** Система совместна, $x_1= x_3=1$; $x_2=2$.

РАЗДЕЛ 2. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

Предметом изучения в векторной алгебре являются векторные величины (векторы) и действия с ними. Примерами таких величин могут служить скорость и ускорение движущейся точки, сила и т. п. Они характеризуются не только своими численными значениями, но и направленностью.

Начальные сведения о векторах и некоторых действиях с ними (сложение векторов, умножение вектора на число и скалярное произведение векторов) содержатся в школьном курсе элементарной математики. В данном разделе на основе дальнейшего развития и углубления этих сведений вводятся новые понятия линейной зависимости и линейной независимости векторов, базиса на некоторых множествах векторов, а также рассматриваются новые действия с векторами — векторное и смешанное произведения. Изучение свойств операций с векторами приводит к алгебраизации геометрических высказываний, т. е. к замене геометрических утверждений некоторыми векторными равенствами. Введение понятия координат вектора заменяет действия с векторами действиями с числами. Построенная таким образом теория, называемая «векторная алгебра», служит математическим аппаратом для построения аналитической геометрии и других разделов математики, а также имеет многочисленные приложения в физике, теоретической механике и различных технических дисциплинах.

На основе понятия так называемого прямоугольного базиса вводится прямоугольная декартова система координат, названная именем великого французского ученого Р. Декарта (1596–1650). В дальнейшем (см. разд. 3) она служит основой для построения аналитической геометрии.

Глава 1. Линейные операции над векторами

§ 1. Понятие вектора. Равные векторы. Коллинеарные и компланарные векторы

Определение 1.1. *Геометрическим вектором* (или *вектором*) называется направленный прямолинейный отрезок, для которого указано, какая из ограничивающих его точек считается началом, а какая — концом. Начало вектора называют также точкой его приложения.

Если точки A и B — начало и конец данного вектора, то сам вектор обозначается символом $\overrightarrow{AB}$ или $\vec{a}$ (рис. 1.1).

Пусть выбрана какая-либо система измерения длин прямолинейных отрезков, иначе говоря, масштаб. *Длиной* вектора, или его *модулем*, называется длина отрезка, образующего вектор. Обозначение: $|\overrightarrow{AB}|$, $|\vec{a}|$.

Определение 1.2. Два вектора называются *равными*, если они лежат на параллельных прямых (или на одной прямой), одинаково направлены и имеют равные длины.

Вектор, у которого начало и конец совпадают, называется *нулевым*, или *нуль-вектором*. Нуль-вектор не имеет определенного направления, а его модуль равен нулю. Таким образом, можно считать все нуль-векторы равными и ввести для них единое обозначение: $\vec{0}$.

Определение 1.3. Векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ называются *коллинеарными*, если они лежат либо на одной прямой, либо на параллельных прямых.

Для обозначения коллинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 1.2) используется символ параллельности: $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

Определение 1.4. Векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ называются *компланарными*, если они расположены на прямых, параллельных одной и той же плоскости.

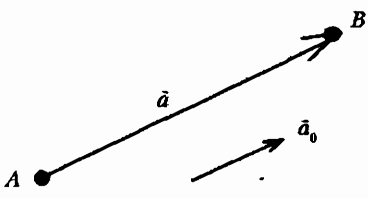


Рис. 1.1. Векторы

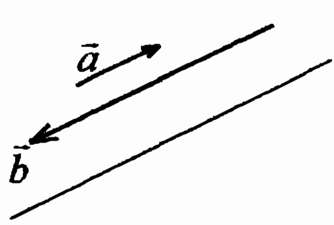


Рис. 1.2. Коллинеарные векторы

Определение 1.5. Вектор, коллинеарный данному вектору $\vec{a}$, одинаково направленный с ним и имеющий единичную длину, называется *ортом* вектора $\vec{a}$ и обозначается $\vec{a}_0$ (рис. 1.1).

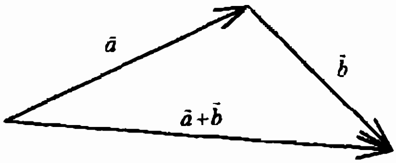


Рис. 2.1. Сумма векторов

§ 2. Операция сложения векторов и ее свойства

Действие сложения векторов определим с помощью так называемого *правила треугольника*.

Определение 2.1. Пусть даны два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Приложим вектор $\vec{b}$ к концу вектора $\vec{a}$. Тогда вектор, начало которого совпадает с началом вектора $\vec{a}$, а конец – с концом вектора $\vec{b}$, называется *суммой* векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и обозначается $\vec{a}+\vec{b}$ (рис. 2.1).

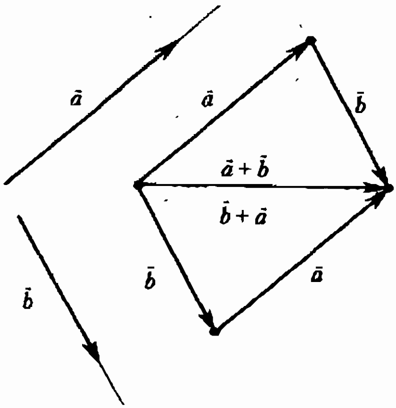


Рис. 2.2. Сложение векторов по правилу параллелограмма

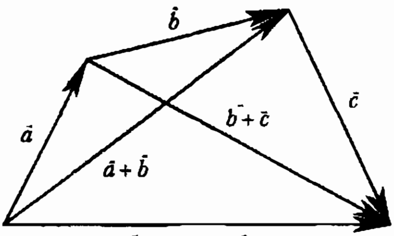
Вектор $\vec{a}+\vec{b}$ можно также получить по *правилу параллелограмма*, построив на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, как на сторонах, параллелограмм (рис. 2.2).

Свойства операции сложения векторов

1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ – коммутативное (переместительное) свойство.
2. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ – ассоциативное (сочетательное) свойство.
3. Существует единственный вектор, равный нуль-вектору $\vec{0}$, такой что $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$ для любого вектора $\vec{a}$.
4. Для любого вектора $\vec{a}$ существует единственный вектор $(-\vec{a})$, называемый *противоположным*, такой что $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$.

Понятие суммы двух векторов обобщается на случай сложения n векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ (рис. 2.4).

Определение 2.2. *Разностью* двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$ такой, что $\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}$ (рис. 2.5). Обозначение: $\vec{a}-\vec{b}$.



$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

Рис. 2.3. Ассоциативное свойство сложения векторов

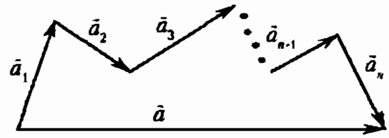


Рис. 2.4. Сложение векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$

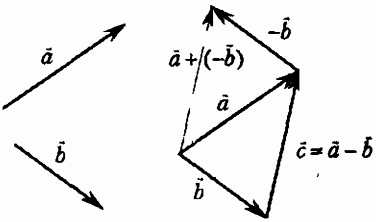


Рис. 2.5. Разность векторов

Для любых двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ разность существует и выражается формулой $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$.

Из определений 2.2 и 2.1 следует, что разность $\vec{a}-\vec{b}$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, приведенных к общему началу, представляет собой вектор, идущий из конца вектора $\vec{b}$ (вычитаемого) в конец вектора $\vec{a}$ (уменьшаемого).

§ 3. Операция умножения вектора на число и ее свойства

Определение 3.1. *Произведением* вектора $\vec{a}$ на вещественное число λ называется вектор $\vec{b}$, определяемый следующими тремя условиями:

1) $|\vec{b}|=|\lambda|\cdot|\vec{a}|$;

2) вектор $\vec{b}$ коллинеарен вектору $\vec{a}$;

3) векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ одинаково направлены, если $\lambda>0$, и противонаправлены, если $\lambda<0$.

Для введенной операции применяется обозначение: $\lambda\vec{a}$, т. е. $\vec{b}=\lambda\vec{a}$. При $\vec{a}=\vec{0}$ или $\lambda=0$ из условия 1) следует $|\lambda\vec{a}|=0$, т. е. $\lambda\vec{a}=\vec{0}$.

При $\lambda=\dfrac{1}{|\vec{a}|}$ получаем вектор $\vec{b}=\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\vec{a}_0$ — орт вектора $\vec{a}$.

Противоположный вектор $(-\vec{a})=(-1)\cdot\vec{a}$.

Теорема 3.1 (*свойство коллинеарных векторов*). Для того чтобы два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\vec{b} = \lambda\vec{a} \tag{3.1}$$

при некотором вещественном λ.

Замечание 3.1. Число λ в равенстве (3.1) определяется единственным образом. Его можно найти из соотношения $\lambda = \pm\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$, где знак «+» выбирается в случае, если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены ($\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$), и знак «−», если они противонаправлены ($\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$).

Свойства операции умножения вектора на число

1. $1\cdot\vec{a} = \vec{a}$.
2. $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$ (свойство ассоциативности относительного скалярного множителя).
3. $(\lambda+\mu)\vec{a} = \lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$ (свойство дистрибутивности умножения вектора на сумму вещественных чисел).
4. $\lambda(\vec{a}+\vec{b}) = \lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$ (свойство дистрибутивности умножения вещественного числа на сумму векторов).

Замечание 3.2. Операции сложения векторов и умножения вектора на число называются ***линейными операциями*** над векторами.

Пример 3.1. Показать, что середины сторон произвольного четырехугольника являются вершинами параллелограмма.

►Обозначим середины сторон четырехугольника $ABCD$ буквами E, F, G, H (рис. 3.1). Тогда для вектора $\overrightarrow{EF}$ имеем равенство $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})$. Аналогично $\overrightarrow{HG} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}) = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA})$. Поскольку $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA} = \vec{0}$, то, очевидно, $\overrightarrow{EF}-\overrightarrow{HG} = \vec{0}$, т. е. $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$. Последнее равенство означает равенство длин и параллельность двух противолежащих сторон четырехугольника $EFGH$. Следовательно, как известно из планиметрии, он является параллелограммом.◄

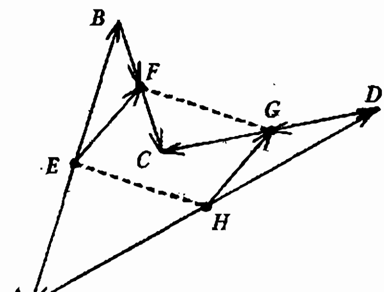


Рис. 3.1

§ 4. Понятие линейной зависимости и линейной независимости системы векторов

Пусть даны векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$. . Линейные операции над векторами позволяют определить так называемую линейную комбинацию векторов.

Определение 4.1. *Линейной комбинацией* векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ называется вектор $\vec{a}$, равный сумме произведений данных векторов на произвольные вещественные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Таким образом, линейная комбинация векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ имеет вид

$$\lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \ldots + \lambda_n\vec{e}_n, \tag{4.1}$$

где $\lambda_i \in \boldsymbol{R}$, $i = 1, \ldots, n$. Здесь под $\boldsymbol{R}$ понимается множество всех вещественных чисел. Очевидно, линейная комбинация векторов также является вектором.

Определение 4.2. Линейная комбинация (4.1) векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ называется ***нетривиальной***, если не все числа λ_i, $i = 1, \ldots, n$ равны нулю, т. е. $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_n^2 > 0$. Если все $\lambda_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$, то линейная комбинация (4.1) называется ***тривиальной***.

Заметим, что тривиальная линейная комбинация любых векторов является нуль-вектором. Действительно, $0 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + \ldots + 0 \cdot \vec{e}_n = \vec{0}$.

Определение 4.3. Векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ называются *линейно зависимыми*, если существует их нетривиальная линейная комбинация, равная нуль-вектору, иначе данные векторы называются *линейно независимыми*.

Для линейно зависимых векторов равенство

$$\lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \ldots + \lambda_n\vec{e}_n = \vec{0} \tag{4.2}$$

выполняется при некоторых $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, удовлетворяющих условию: $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_n^2 > 0$, а для линейно независимых векторов равенство (4.2) справедливо только при $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$.

Свойства линейно зависимых векторов

1. Если хотя бы один из векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ — нулевой, то эти векторы линейно зависимы.

2. Если какие-то k $(k < n)$ векторов из n векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ линейно зависимы, $2 \le k < n$, , то и все векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ линейно зависимы.

3. Векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда хотя бы один из векторов является линейной комбинацией всех остальных.

§ 5. Геометрический смысл линейной зависимости векторов

Один вектор линейно зависим тогда и только тогда, когда он нулевой. Действительно, равенство $\lambda\vec{a} = \vec{0}$ при $\lambda \neq 0$ справедливо только при $\vec{a} = \vec{0}$.

Теорема 5.1. Для того чтобы два вектора $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ были линейно зависимы, необходимо и достаточно, чтобы они были коллинеарны.

Следствие из теоремы 5.1. Для того чтобы два вектора были неколлинеарны, необходимо и достаточно, чтобы они были линейно независимы.

Пример 5.1. $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — неколлинеарные векторы. Доказать, что векторы $\vec{a} + 2\vec{b}$ и $\vec{a} - 3\vec{b}$ линейно независимы.

► Приравняем к нуль-вектору линейную комбинацию данных векторов: $\lambda_1(\vec{a} + 2\vec{b}) + \lambda_2(\vec{a} - 3\vec{b}) = \vec{0}$. Перегруппируем члены в левой части этого равенства: $(\lambda_1 + \lambda_2)\vec{a} + (2\lambda_1 - 3\lambda_2)\vec{b} = \vec{0}$. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны и, следовательно, линейно независимы (следствие из теоремы 5.1), их линейная комбинация, равная нуль-вектору, может быть только тривиальной. Для λ_1 и λ_2 получаем следующую систему уравнений: $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0, \\ 2\lambda_1 - 3\lambda_2 = 0. \end{cases}$ Так как главный определитель λ этой системы отличен от нуля ($\Delta = -3 - 2 = -5 \neq 0$), то по теореме Крамера ее нулевое решение $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ единственно. Итак, показано, что линейная комбинация данных векторов, равная нуль-вектору, может быть только тривиальной, поэтому эти векторы линейно независимы по определению 4.3. ◄

Теорема 5.2. Пусть даны два неколлинеарных вектора $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$. Любой компланарный с ними вектор $\vec{a}$ можно представить в виде линейной комбинации этих векторов:

$$\vec{a} = \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2, \text{ где } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}, \tag{5.1}$$

причем разложение (5.1) единственно.

Пример 5.2. Даны векторы $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OA}$; $\vec{e}_2 = \overrightarrow{OB}$; $\vec{a} = \overrightarrow{OC}$; $|\vec{e}_1| = 2$; $|\vec{e}_2| = 3$; $|\vec{a}| = 4$; угол AOB — прямой, а угол COB равен $\pi/3$ (рис. 5.1). Разложить вектор $\vec{a}$ по векторам $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$.

▶ Из точки C опустим перпендикуляры на прямые OA, OB, получим точки A_1, B_1 (рис. 5.1). Тогда $\vec{a} = \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1}$, при этом

$$\left|\overrightarrow{OA_1}\right| = |\vec{a}|\sin\frac{\pi}{3} = 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3};\ \left|\overrightarrow{OB_1}\right| = |\vec{a}|\cos\frac{\pi}{3} = 4\cdot\frac{1}{2} = 2.$$

Так как $\overrightarrow{OA_1} \uparrow\uparrow \vec{e_1}$ и $\overrightarrow{OB_1} \uparrow\uparrow \vec{e_2}$, то в силу (3.1) имеем

$$\overrightarrow{OA_1} = \frac{\left|\overrightarrow{OA_1}\right|}{|\vec{e}_1|}\vec{e}_1 = \frac{2\sqrt{3}}{2}\vec{e}_1 = \sqrt{3}\vec{e}_1.\ \overrightarrow{OB_1} = \frac{\left|\overrightarrow{OB_1}\right|}{|\vec{e}_2|}\vec{e}_2 = \frac{2}{3}\vec{e}_2.$$

Для вектора $\vec{a}$ получаем разложение $\vec{a} = \sqrt{3}\vec{e}_1 + \frac{2}{3}\vec{e}_2$. ◀

Теорема 5.3. Для того чтобы три вектора были линейно зависимы, необходимо и достаточно, чтобы они были компланарны.

Следствие из теоремы 5.3. Для того чтобы три вектора были некомпланарны, необходимо и достаточно, чтобы они были линейно независимы. Доказательство — от противного.

Теорема 5.4. Любой вектор $\vec{a}$ можно разложить по трем некомпланарным векторам $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, , т. е. представить в виде

$$\vec{a} = \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \lambda_3\vec{e}_3,\ \text{где}\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3 \in \mathbf{R}, \tag{5.2}$$

причем разложение (5.2) единственно.

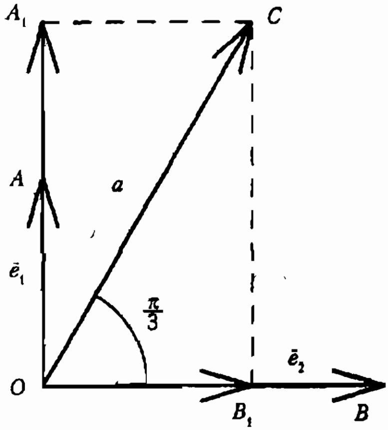


Рис. 5.1. К примеру 5.2

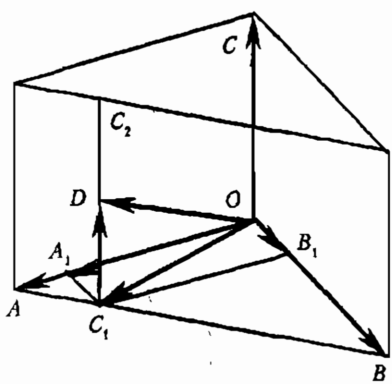


Рис. 5.2. К примеру 5.3

Пример 5.3. Векторы $\vec{e}_1=\overrightarrow{OA}$; $\vec{e}_2=\overrightarrow{OB}$; $\vec{e}_3=\overrightarrow{OC}$ попарно перпендикулярны, на них, как на ребрах, построена треугольная призма (рис. 5.2). Вектор $\vec{a}=\overrightarrow{OD}$, где точка D – середина отрезка C_1C_2, при этом точки C_1C_2 делят соответствующие ребра призмы в отношении 1 : 3. Разложить вектор $\vec{a}$ по векторам $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$.

► $\vec{a}=\overrightarrow{OC_1}+\overrightarrow{C_1D}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{C_1D}$, где точки A_1, B_1 – основания перпендикуляров, опущенных из точки C_1 на прямые OA и OB (рис. 5.2).

Поскольку $\overrightarrow{OA_1}=\frac{3}{4}\overrightarrow{OA}=\frac{3}{4}\vec{e}_1$; $\overrightarrow{OB_1}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OB}=\frac{1}{4}\vec{e}_2$; $\overrightarrow{C_1D}=\frac{1}{2}\overrightarrow{C_1C_2}=\frac{1}{2}\vec{e}_3$, то для вектора $\vec{a}$ получаем разложение $\vec{a}=\frac{3}{4}\vec{e}_1+\frac{1}{4}\vec{e}_2+\frac{1}{2}\vec{e}_3$. ◄

Теорема 5.5. Любые четыре вектора линейно зависимы.

§ 6. Базис и координаты вектора. Прямоугольная декартова система координат

Понятия вектора и линейных операций над векторами алгебраизируют геометрические высказывания, т. е. заменяют геометрические утверждения векторными равенствами. Используя результаты предыдущих параграфов, приведем теперь действия с векторами к действиям с числами, т. е. арифметизируем векторно-алгебраические соотношения. Для этого введем понятия *базиса* на данном множестве векторов как упорядоченного набора из n его линейно независимых векторов, где n равно максимально возможному числу линейно независимых векторов этого множества, а также системы координат на прямой, плоскости и в пространстве.

1°. Случай прямой линии и множества V_1 векторов, параллельных данной прямой. Пусть дана прямая l и множество V_1 векторов, параллельных l, V_1 – это множество коллинеарных векторов. Любая пара векторов из V_1 по теореме 5.1 линейно зависима, а любой ненулевой вектор $\vec{a}$ из V_1, как было отмечено в § 5, линейно независим. Поэтому максимально возможное число линейно независимых векторов в V_1 равно 1.

Определение 6.1. Любой вектор $\vec{a}\neq\vec{0}$ из V_1 называется *базисом* в V_1 и на данной прямой l.

Для любого вектора $\vec{b}$ из V_1 в силу теоремы 3.1 справедливо равенство

$$\vec{b}=x\vec{a},\quad x\in\mathbf{R}, \tag{6.1}$$

которое называется *разложением* вектора $\vec{b}$ по базису $\vec{a}$, а число x — координатой вектора $\vec{b}$ в базисе $\vec{a}$. Выбор базиса в V_1 вводит взаимно однозначное соответствие между векторами из V_1 и вещественными числами.

Выбор базиса $\vec{a}$ на прямой l задает на ней направление и превращает ее в ось $\vec{l}$. Пусть $\vec{a}=\vec{e}$, $|\vec{e}|=1$, вектор $\vec{e}$ называется *ортом* данной оси. Тогда $\vec{b}=x\vec{e}$, а $x=\pm|\vec{b}|$, как это следует из определения 3.1. Знак «+» соответствует сонаправленности векторов $\vec{b}$ и $\vec{e}$, а «−» — противонаправленности. Число x в этом случае называется *координатой* вектора $\vec{b}$ на оси $\vec{l}$.

2°. Случай плоскости и множества V_2 векторов, параллельных данной плоскости. Пусть дана некоторая плоскость и множество V_2 векторов, ей параллельных. Итак, V_2 — множество компланарных векторов. Любая тройка векторов из V_2 линейно зависима по теореме 5.3, а любая пара неколлинеарных векторов из V_2 линейно независима по следствию из теоремы 5.1. Поэтому максимально возможное число линейно независимых векторов в V_2 равно 2.

Определение 6.2. Любая упорядоченная пара неколлинеарных векторов $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ из множества V_2 векторов, параллельных данной плоскости, называется *базисом* в V_2 и на данной плоскости.

Любой вектор $\vec{a}$ из V_2 по теореме 5.2 можно представить единственным образом в виде

$$\vec{a}=x\vec{e}_1+y\vec{e}_2,\ x,\ y\in \boldsymbol{R}. \tag{6.2}$$

Числа x и y называются *координатами* вектора $\vec{a}$ в данном базисе $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, а равенство (6.2) называется *разложением* вектора $\vec{a}$ по данному базису. Выбор базиса в V_2 устанавливает взаимно однозначное соответствие между векторами из V_2 и упорядоченными парами (x, y) вещественных чисел. Так, для вектора $\vec{a}$ из примера 5.2 числа $\sqrt{3}$, $2/3$ — его координаты в базисе $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Пример 6.1. $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – неколлинеарные векторы. При каких значениях параметра α векторы $\vec{a}+2\vec{b}$ и $3\vec{a}+\alpha\vec{b}$ образуют базис в множестве V_2?

▶В силу определения 6.2 найдем значения параметра α, при которых векторы $\vec{a}+2\vec{b}$ и $3\vec{a}+\alpha\vec{b}$ линейно независимы. Приравняем к нуль-вектору линейную комбинацию данных векторов: $\lambda_1(\vec{a}+2\vec{b})+\lambda_2(3\vec{a}+\alpha\vec{b})=\vec{0}$. Перегруппируем члены в левой части этого равенства: $(\lambda_1+3\lambda_2)\vec{a}+(2\lambda_1+\alpha\lambda_2)\vec{b}=\vec{0}$. Линейная комбинация векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, равная нуль-вектору, может быть только тривиальной, так как эти векторы неколлинеарны и, следовательно, линейно независимы (следствие из теоремы 5.1). Поэтому для λ_1 и λ_2 получаем следующую систему уравнений: $\begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 = 0, \\ 2\lambda_1 + \alpha\lambda_2 = 0. \end{cases}$ Теперь задача формулируется так: найти значения параметра α, для которых нулевое решение этой системы единственно. В силу теоремы Крамера это условие выполняется только в том случае, если главный определитель Δ системы отличен от нуля. Поскольку $\Delta = \alpha - 6$, то приходим к выводу, что нужные значения параметра α определяются неравенством $\alpha \neq 6$. ◀

3°. Случай пространства и множества V_3 всех векторов пространства. Любые четыре вектора из V_3 линейно зависимы по теореме 5.5, а три некомпланарных вектора из V_3 линейно независимы по следствию из теоремы 5.3. Поэтому максимально возможное число линейно независимых векторов в V_3 равно 3.

Определение 6.3. Любая упорядоченная тройка некомпланарных векторов $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ из множества V_3 всех векторов пространства называется *базисом* в V_3 и в пространстве.

Любой вектор $\vec{a}$ из V_3 согласно теореме 5.4 можно единственным образом представить в виде

$$\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3,\ x,\ y,\ z \in \mathbf{R}. \tag{6.3}$$

Числа x, y, z называют *координатами* вектора $\vec{a}$ в данном базисе $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, а равенство (6.3) называется *разложением* вектора $\vec{a}$ по данному базису. Выбор базиса в V_3 устанавливает взаимно-однозначное соответствие между векторами из V_3 и упорядоченными тройками (x, y, z) вещественных чисел. Для вектора $\vec{a}$ из примера 5.3 числа 3/4, 1/4, 1/2 — его координаты в базисе $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

Обобщая вышесказанное, заключаем, что на пути арифметизации векторно-алгебраических соотношений сделан важный шаг — установлено взаимно-однозначное соответствие между векторами из множеств V_1, V_2, V_3 и упорядоченными наборами действительных чисел. Для достижения поставленной цели осталось установить правила выполнения линейных операций с векторами, заданными разложениями в некотором базисе.

Правило 6.1. При сложении векторов, заданных разложениями в некотором базисе, складываются их соответствующие координаты.

Правило 6.2. При умножении вектора, заданного разложением в некотором базисе, на вещественное число λ все его координаты умножаются на это число.

Свойство координат коллинеарных векторов. Соответственные координаты коллинеарных векторов в любом базисе пропорциональны.

Поставленная в начале параграфа задача решена — линейные операции с векторами сведены к арифметическим операциям (сложению и умножению) над действительными числами.

4°. Прямоугольный базис. Прямоугольная декартова система координат. Особую роль в аналитической геометрии играет так называемый прямоугольный базис, в котором векторы попарно перпендикулярны и имеют единичную длину. В этом случае приняты обозначения: $\vec{e}_1 = \vec{i}$; $\vec{e}_2 = \vec{j}$; $\vec{e}_3 = \vec{k}$. Векторы $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ называются ортами прямоугольного базиса. С прямоугольным базисом связано понятие о прямоугольной декартовой системе координат.

Определение 6.4. *Прямоугольной декартовой системой координат* в пространстве называется совокупность некоторой точки O и прямоугольного базиса. Точка O называется *началом координат*; прямые Ox, Oy, Oz, проходящие через начало в направлении ортов базиса, называются *координатными осями* — *абсцисс*, *ординат* и *аппликат* соответственно (рис. 6.1). Плоскости, проходящие через какие-либо две координатные оси, называются *координатными плоскостями* и *обозначаются* Oxy, Oyz и Oxz *соответственно. Прямоугольными координатами произвольной точки* M пространства называются координаты ее радиуса-вектора $\overrightarrow{OM}$ в данном прямоугольном базисе (рис. 6.1). Их пишут в скобках после обозначения точки, например $M(x, y, z)$, при этом x называется *абсциссой*, y — *ординатой*, а z — *аппликатой* точки M.

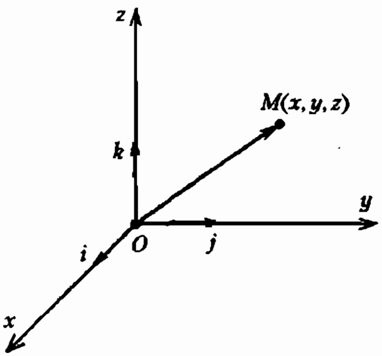


Рис. 6.1. Прямоугольный базис и прямоугольная декартова система координат

Выбранное определение прямоугольных координат точки пространства устанавливает взаимно-однозначное соответствие между точками пространства и упорядоченными тройками действительных чисел (x, y, z).

Пусть заданы точки $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$, для вектора $\overrightarrow{AB}$ имеем:

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_1 - z_2)\vec{k}. \quad (6.4)$$

Замечание 6.1. Координаты вектора в прямоугольном базисе часто пишут в скобках после обозначения вектора и знака равенства. Например,

$$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1).$$

§ 7. Полярная система координат

Прямоугольная декартова система координат не является единственным способом установления взаимно-однозначного соответствия между точками плоскости и упорядоченными парами действительных чисел. Во многих задачах более удобна так называемая полярная система координат.

При введении полярной системы координат на плоскости выбирают некоторую точку O, называемую *полюсом*, и исходящий из нее луч OP с выбранным на нем масштабом, называемый *полярной осью* *Полярными координатами* точки M называются *полярный радиус* $r=|OM|$ и *полярный угол* φ, определяемый как угол поворота полярной оси до совмещения с лучом OM (рис. 7.1). Очевидно, для любой точки плоскости $r \geq 0$. Полярный угол φ обычно измеряется в радианах и считается положительным, если поворот осуществлен в направлении против часовой стрелки, и отрицательным — в противоположном случае. Итак, определение полярного угла совпадает с определением угла в тригонометрии. Очевидно, что любая пара действительных чисел (r, φ) при условии $r \geq 0$ определяет на плоскости единственную точку. Обратное утверждение неверно. Так, две различные пары $(2, \pi/4)$ и $(2, 9\pi/4)$ определяют на плоскости одну и ту же точку. Однако если условиться брать полярный угол φ в

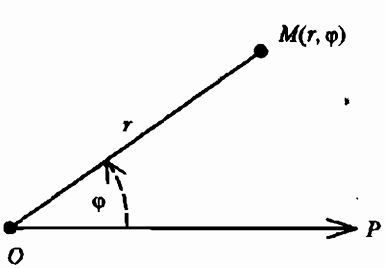


Рис. 7.1. Полярная система координат

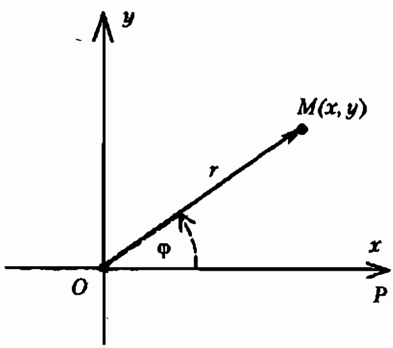


Рис. 7.2. К установлению связи между прямоугольными и полярными координатами точки плоскости

границах $-\pi < \varphi \le \pi$ или $0 \le \varphi < 2\pi$ (так называемое *главное значение* полярного угла), то тогда между точками плоскости (кроме полюса) и упорядоченными парами вещественных чисел (r, φ) устанавливается взаимно-однозначное соответствие (при условии $r > 0$). В полюсе $r = 0$, а φ — любое.

Для установления связи между полярными и прямоугольными координатами одной и той же точки плоскости введем прямоугольную систему координат специальным образом, а именно поместим ее начало в полюс O, а ось Ox направим вдоль полярной оси OP (рис. 7.2). Определения тригонометрических функций синус и косинус приводят к следующим соотношениям:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases} \tag{7.1}$$

По формулам (7.1), выражающим прямоугольные координаты (x, y) точки M через ее полярные координаты (r, φ), осуществляется переход от полярных к прямоугольным координатам.

Пример 7.1. Точки M_1 и M_2 заданы полярными координатами $M_1(2, \pi/3)$, $M_2(\sqrt{2}, 3\pi/4)$. Найти их прямоугольные координаты.

▶ Пусть x_1, y_1 и x_2, y_2 — прямоугольные координаты данных точек M_1 и M_2. По формулам (7.1) имеем:

$$x_1 = 2\cos(\pi/3) = 2\cdot(1/2) = 1.\ y_1 = 2\cdot\sin(\pi/3) = 2\cdot(\sqrt{3}/2) = \sqrt{3};$$

$$x_2 = \sqrt{2}\cos(3\pi/4) = \sqrt{2}\cdot(-\sqrt{2}/2) = -1.\ y_2 = \sqrt{2}\sin(3\pi/4) = \sqrt{2}\cdot(\sqrt{2}/2) = 1;$$

$$M_1\left(1, \sqrt{3}\right),\ M_2(-1, 1). ◀$$

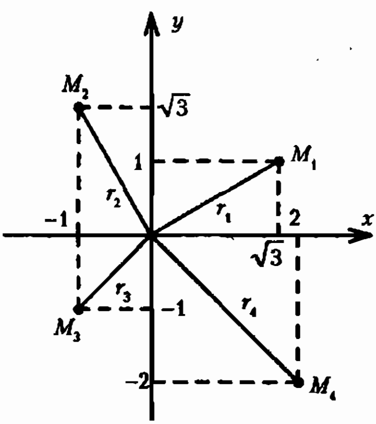


Рис. 7.3. К примеру 7.2

Разрешив равенства (7.1) относительно r и φ, получим формулы перехода от прямоугольных координат точки M к ее полярным координатам:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x}. \end{cases} \tag{7.2}$$

Угол φ с помощью второго из равенств (7.2) определяют с учетом четверти, в которой находится данная точка, или выбирают его значение так, чтобы $\sin\varphi$ имел тот же знак, что и ордината y.

Пример 7.2. Точки M_1, M_2, M_3, M_4 заданы их прямоугольными координатами: $M_1\left(\sqrt{3}, 1\right)$, $M_2\left(-1,\sqrt{3}\right)$, $M_3(-1, -1)$, $M_4(2,-2)$ (рис. 7.3). Найти их полярные координаты.

►Пусть r_i, φ_i — полярные координаты точки M_i, i=1, 2, 3, 4. Для r_i и φ_i, $i = 1, 2, 3, 4$ из (7.2) имеем:

$$r_1 = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2, \quad \operatorname{tg}\varphi_1 = 1/\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \varphi_1 = \pi/6;$$

$$r_2 = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2, \quad \operatorname{tg}\varphi_2 = -\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \varphi_2 = 2\pi/3;$$

$$r_3 = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \quad \operatorname{tg}\varphi_3 = 1 \quad \Rightarrow \quad \varphi_3 = 5\pi/4;$$

$$r_4 = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}, \quad \operatorname{tg}\varphi_4 = -1 \quad \Rightarrow \quad \varphi_4 = 7\pi/4,$$

при этом значения полярных углов данных точек выбраны с учетом четверти, в которой они находятся. Таким образом, $M_1(2, \pi/6)$, $M_2(2, 2\pi/3)$, $M_3\left(\sqrt{2}, 5\pi/4\right)$, $M_4\left(2\sqrt{2}, 7\pi/4\right)$.◄

§ 8. Задача о делении отрезка в данном отношении

Пусть на некоторой прямой l заданы три различные точки A, B, C. Выберем в пространстве прямоугольную декартову систему координат $Oxyz$. Если x_A, y_A, z_A и x_B, y_B, z_B — координаты точек A и B, то координаты точки C определяются из равенства

$$x_C = \frac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda}; \quad y_C = \frac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda}; \quad z_C = \frac{z_A + \lambda z_B}{1+\lambda}, \tag{8.1}$$

где $\lambda = \pm|\overrightarrow{AC}|/|\overrightarrow{CB}|$, причем знак «плюс» берется, если векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CB}$ сонаправлены, а «минус» — в противном случае (рис. 8.1, 8.2). В обоих случаях число λ называется отношением, в котором точка C делит отрезок AB, хотя в первом из них она не принадлежит

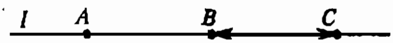


Рис. 8.1. Задача о делении отрезка в данном отношении. Случай $\lambda < 0$ $(\lambda = -2)$.

Рис. 8.2. Задача о делении отрезка в данном отношении. Случай $\lambda > 0$ $(\lambda = 2)$.

этому отрезку. Заметим, что в принятой постановке задачи $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq -1$.

Замечание 8.1. В случае, когда точка C делит отрезок AB пополам, $\lambda = 1$ и формулы (8.1) принимают вид

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2};\ y_C = \frac{y_A + y_B}{2};\ z_C = \frac{z_A + z_B}{2}. \tag{8.2}$$

Пример 8.1. Даны вершины треугольника: $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$. Найти координаты точки пересечения его медиан.

▶ Пусть точки K и M — середины сторон AC и BC данного треугольника, тогда BK и AM — его медианы, а L — точка их пересечения (рис. 8.3). Из планиметрии известно, что $\frac{KL}{LB} = \frac{1}{2}$. Координаты точки K найдем по формулам (8.2):

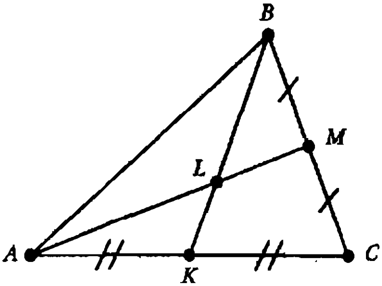


Рис. 8.3. К примеру 8.1

$$x_K = \frac{x_1 + x_3}{2};\quad y_K = \frac{y_1 + y_3}{2};$$

$$z_K = \frac{z_1 + z_3}{2},$$

а координаты точки L — по формулам (8.1), приняв $\lambda = 1/2$. Имеем:

$$x_L = \frac{x_K + x_2/2}{1 + 1/2} = \frac{(x_1 + x_3)/2 + x_2/2}{3/2} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}.$$

Проведя аналогичные вычисления для y_L и z_L, получим равенства

$$y_L = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3};\quad z_L = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}. \blacktriangleleft$$

Глава 2. Операции умножения векторов

§ 1. Проекция вектора на ось и ее свойства

Определение 1.1. *Проекцией* точки P на ось $\vec{l}$ называется основание Q перпендикуляра, опущенного из точки P на прямую $\vec{l}$ (рис. 1.1).

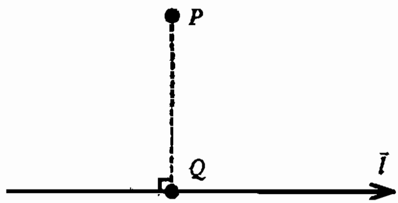


Рис. 1.1. Проекция точки на ось

Определение 1.2. *Компонентой* любого вектора $\overrightarrow{AB}$ вдоль оси $\vec{l}$ называется вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$, где A_1, B_1 — проекции точек A и B на ось $\vec{l}$ (рис. 1.2).

Пусть $\vec{e}$ — орт оси (рис. 1.2), тогда

$$\overrightarrow{A_1B_1} = \pm|\overrightarrow{A_1B_1}|\vec{e}. \qquad (1.1)$$

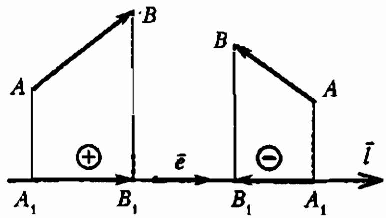


Рис. 1.2. Понятие компоненты вектора вдоль оси

Определение 1.3. *Проекцией вектора* $\overrightarrow{AB}$ на ось $\vec{l}$ называется длина его компоненты $\overrightarrow{A_1B_1}$, взятая со знаком «+», если компонента сонаправлена с $\vec{e}$, и со знаком «–», если компонента и ось $\vec{l}$ противонаправлены.

Обозначение: $\text{пр}_{\vec{l}}\overrightarrow{AB}$ или $\text{пр}_{\vec{l}}\vec{a}$.

Из определения 1.3 и соотношения (1.1) следует равенство

$$\overrightarrow{A_1B_1} = \text{пр}_{\vec{l}}\overrightarrow{AB}\cdot\vec{e}. \qquad (1.2)$$

Определение 1.4. *Угол* между двумя ненулевыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, приведенными к общему началу, называется наименьшим углом, на который надо повернуть один из этих векторов так, чтобы его направление совпало с направлением второго вектора. Обозначение: $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$.

Угол между векторами не является направленным углом (т. е. он не зависит от направления поворота) и принимает любое значение между 0 и π.

Свойства проекций векторов

1. Пр$_{\vec{l}}\vec{a}$ есть координата на оси $\vec{l}$ компоненты вектора $\vec{a}$ вдоль этой оси.

2. Проекции вектора $\vec{a}$ на оси прямоугольной декартовой системы координат являются координатами $\vec{a}$ в прямоугольном базисе $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, определяющем эту систему.

3. $\text{пр}_{\vec{l}}(\vec{a}+\vec{b}) = \text{пр}_{\vec{l}}\vec{a} + \text{пр}_{\vec{l}}\vec{b}$.

4. $\text{пр}_{\vec{l}}(\lambda\vec{a}) = \lambda \cdot \text{пр}_{\vec{l}}\vec{a}$.

5. $\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a} = |\vec{a}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$, $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq 0$.

Пример 1.1. Дан вектор $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, , где $A(1, -1, 0)$, $B(-1, 2, 3)$. Найти его проекции на оси прямоугольной декартовой системы координат.

►По свойству 2 проекции $\vec{a}$ на оси координат — это его координаты в базисе $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. В силу формулы (6.4) гл. 1 имеем $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k}$, отсюда $\text{пр}_{Ox}\vec{a} = -2$; $\text{пр}_{Oy}\vec{a} = 3$; $\text{пр}_{Oz}\vec{a} = 3$. ◄

§ 2. Скалярное произведение двух векторов

Определение 2.1. *Скалярным произведением* двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется произведение длин этих векторов на косинус угла между ними.

Если хотя бы один из векторов нулевой, то угол между ними не определен (т. е. может принимать любое значение между 0 и π). Однако косинус этого угла ограничен, и в соответствии с определением 2.1 скалярное произведение таких векторов существует и равно 0.

Скалярное произведение двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ принято обозначать так: $\vec{a}\cdot\vec{b}$, иногда $(\vec{a}, \vec{b})$. Таким образом, по определению

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}),$$

где $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$ — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Скалярное произведение применяется в физике при вычислении работы A, затрачиваемой при движении материальной точки из положения P_1 в положение P_2 в поле действия силы $\vec{F}$,

$$A = \vec{F}\cdot\overrightarrow{P_1P_2}. \tag{2.1}$$

Свойства скалярного произведения

1. $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$.

2. $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{b}|\cdot\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}$.

3. $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$.
4. $\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$.
5. $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$.
6. $\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \Leftrightarrow$ либо $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|=0$, либо $\vec{a}\perp\vec{b}$ при $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\neq 0$.

Замечание 2.1. Свойства 3—4 называются *линейными свойствами* скалярного произведения.

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы разложениями в прямоугольном базисе

$$\begin{aligned}\vec{a}&=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k},\\ \vec{b}&=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k},\end{aligned} \tag{2.2}$$

то

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z. \tag{2.3}$$

В частном случае, при $\vec{a}=\vec{b}$ имеем $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2=a_x^2+a_y^2+a_z^2$, т. е.

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}. \tag{2.4}$$

В равенстве (2.4) длина вектора $\vec{a}$ выражена через его координаты. Если $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, то $\vec{a}=\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1)\vec{i}+$ $+(y_2-y_1)\vec{j}+(z_2-z_1)\vec{k}$ (см. формулу (6.4) гл. 1), и в силу (2.4) имеем:

$$|\vec{a}|=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \tag{2.5}$$

Соотношение (2.5) является формулой для определения расстояния между точками A и B по известным прямоугольным координатам этих точек.

Из определения 2.1 с учетом (2.3) и (2.4) следует формула для косинуса угла между данными векторами:

$$\cos(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}. \tag{2.6}$$

Полагая в (2.6) поочередно $\vec{b}=\vec{i}$, $\vec{b}=\vec{j}$, $\vec{b}=\vec{k}$, получаем формулы для *направляющих косинусов* вектора $\vec{a}$, под которыми понимают косинусы углов, образованных данным вектором с векторами прямоугольного базиса $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, или, что то же самое, с осями прямоугольной системы координат. Имеем:

$$\cos(\vec{a},\hat{\ }\vec{i})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{i}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{i}|}=\frac{a_x}{|\vec{a}|};\ \cos(\vec{a},\hat{\ }\vec{j})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{j}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{j}|}=\frac{a_y}{|\vec{a}|};$$

$$\cos(\vec{a},\hat{\ }\vec{k})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{k}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{k}|}=\frac{a_z}{|\vec{a}|};$$

$$\cos^2(\vec{a},\vec{i})+\cos^2(\vec{a},\vec{j})+\cos^2(\vec{a},\vec{k})=1.$$

Направляющие косинусы вектора $\vec{a}$ — это координаты его орта $\vec{a}_0=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$. Наконец, для проекции вектора $\vec{a}$, заданного первым из разложений (2.2), на ось $\vec{l}$ с ортом $\vec{e}$ справедливо равенство

$$\text{пр}_{\vec{l}}\vec{a}=\vec{a}\cdot\vec{e}=a_x\cos\alpha+a_y\cos\beta+a_z\cos\gamma,$$

где $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ — направляющие косинусы вектора $\vec{e}$.

Пример 2.1. Точки $A(1, -1, 0)$, $B(3, -3, 1)$, $C(2, 1, 2)$, — вершины треугольника. Найти его внутренний угол при вершине B.

▶ Угол треугольника ABC при вершине B образован векторами $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$ (рис. 2.1). Их координаты найдем, вычитая из координат концов координаты начала (формула (6.4), гл. 1): $\overrightarrow{BA}=(-2, 2, -1)$, $\overrightarrow{BC}=(-1, 4, 1)$, а их длины по формуле (2.4): $|\overrightarrow{BA}|=\sqrt{(-2)^2+2^2+(-1)^2}=3$; $|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{(-1)^2+4^2+1^2}=3\sqrt{2}$. Для $\cos\hat{B}$ из (2.6) имеем равенство

$$\cos\hat{B}=\frac{(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|}=\frac{(-2)(-1)+2\cdot4+(-1)\cdot1}{3\cdot3\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

откуда заключаем, что $\hat{B}=\pi/4$.◀

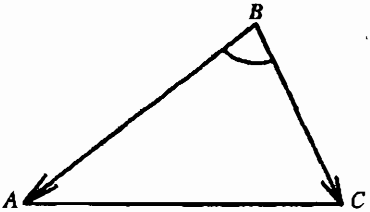


Рис. 2.1. К примеру 2.1

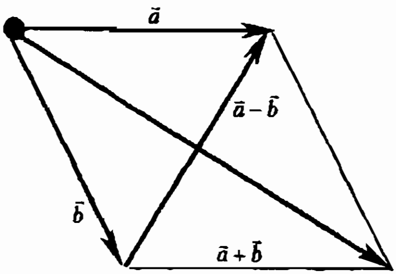


Рис. 2.2. К примеру 2.2

Пример 2.2. Найти длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ как на сторонах, если $\vec{a}=3\vec{p}+2\vec{q}$; $\vec{b}=2\vec{p}-\vec{q}$; $|\vec{p}|=4$; $|\vec{q}|=3$; $(\vec{p},\hat{\ }\vec{q})=2\pi/3$.

▶ Длины диагоналей параллелограмма равны $|\vec{a}+\vec{b}|$ и $|\vec{a}-\vec{b}|$ (рис. 2.2), $\vec{a}+\vec{b}=5\vec{p}+\vec{q}$, $\vec{a}-\vec{b}=\vec{p}+3\vec{q}$. По свойству 5 $|\vec{a}+\vec{b}|=$ $=\sqrt{(\vec{a}+\vec{b})^2}$, поэтому $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{(5\vec{p}+\vec{q})^2}=\sqrt{25\vec{p}^2+10\vec{p}\vec{q}+\vec{q}^2}$. Так как $\vec{p}\vec{q}=|\vec{p}||\vec{q}|\cos(\vec{p},\hat{\ }\vec{q})=4\cdot 3\cdot\cos(2\pi/3)=-6$; $\vec{p}^2=|\vec{p}|^2=16$; $\vec{q}^2=|\vec{q}|^2=9$, то $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{25\cdot 16-60+9}=\sqrt{349}$. Аналогично $\sqrt{(\vec{a}-\vec{b})^2}=\sqrt{(\vec{p}+3\vec{q})^2}=$ $=\sqrt{\vec{p}^2+6\vec{p}\vec{q}+9\vec{q}^2}=\sqrt{16-36+9\cdot 9}=\sqrt{61}$. ◀

Пример 2.3. Найти работу, совершаемую при прямолинейном движении материальной точки из положения $P_1(1, -1, 3)$ в положение $P_2(2, 1, 1)$ в поле действия силы $\vec{F}=(-2, 3, -5)$.

▶ Согласно (2.1) для работы A имеем равенство $A=(\vec{F}, \overrightarrow{P_1P_2})$. Поскольку $\overrightarrow{P_1P_2}=(1, 0, -2)$, то $A=(-1)\cdot 1+3\cdot 0+(-5)(-2)=8$ (ед. энергии). ◀

§ 3. Векторное произведение двух векторов

Определение 3.1. Упорядоченная тройка некомпланарных векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, приведенных к общему началу, называется *правоориентированной*, или *правой* (соответственно *левой*), если поворот от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ на наименьший угол виден из конца вектора $\vec{c}$ происходящим против (по) часовой стрелке (рис. 3.1, 3.2).

Замечание 3.1. Угол φ поворота от $\vec{a}$ к $\vec{b}$ в этом определении, очевидно, равен по величине углу между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, $\varphi=(\vec{a},\hat{\ }\vec{b})$, и поэтому $0<\varphi<\pi$. Он не может быть равным 0 или π, так как

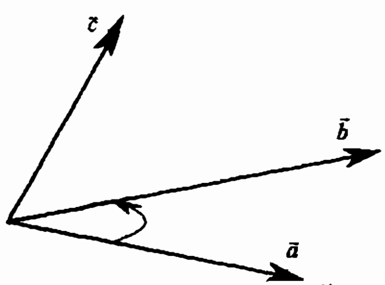


Рис. 3.1. Тройка векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ — правая

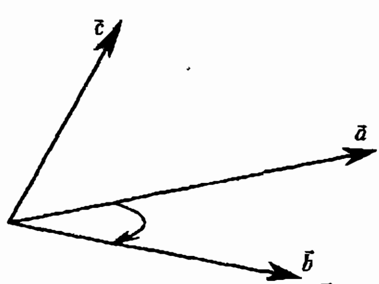


Рис. 3.2. Тройка векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ — левая

$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — некомпланарные векторы и, следовательно, $\vec{a}$, $\vec{b}$ — неколлинеарные векторы.

Замечание 3.2. В соответствии с ориентацией ортов декартовой прямоугольной системы координат последняя называется *правой* или *левой*. В дальнейшем, если не оговорено противное, используется правая система координат.

Определение 3.2. *Векторным произведением* вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, удовлетворяющий следующим трем условиям:

1) $|\vec{c}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$;
2) вектор $\vec{c}$ перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
3) векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют правую тройку.

Замечание 3.3. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны или хотя бы один из них нулевой, то их векторное произведение $\vec{c}$ равно нуль-вектору. В самом деле, в этом случае $|\vec{c}|=0$, так как либо $\sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})=0$, либо $|\vec{a}|=0$, либо $|\vec{b}|=0$.

Для векторного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ принято обозначение $\vec{a}\times\vec{b}$, иногда $[\vec{a},\vec{b}]$.

Пример 3.1. Даны два вектора $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{b}=-\vec{i}+\vec{j}$, где $\vec{i}$, $\vec{j}$ — орты прямоугольного базиса. Используя определение 3.2, найти векторное произведение $\vec{a}\times\vec{b}$ и изобразить его на чертеже.

▶ Рассмотрим прямоугольный базис $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ и построим векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 3.3). Так как $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})=\pi/2$ и $|\vec{a}|=|\vec{b}|=\sqrt{2}$, то $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=2$. Вектор $\vec{k}$ перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а тройка $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{k}$ — правая (рис. 3.3). Поэтому векторы $\vec{a}\times\vec{b}$ и $\vec{k}$ коллинеарны и сонаправлены и $\vec{a}\times\vec{b}=\dfrac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{|\vec{k}|}\vec{k}=2\vec{k}$. ◀

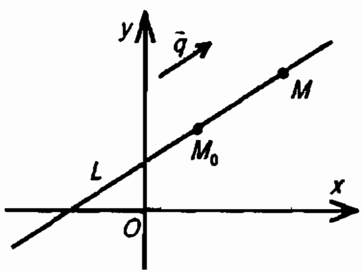


Рис. 3.3. К примеру 3.1

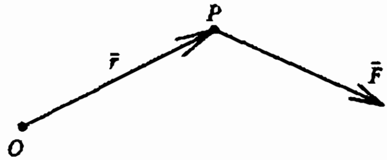


Рис. 3.4. К понятию момента силы $\vec{F}$ относительно точки O

Векторное произведение применяют, например, в физике для вычисления момента $\vec{M}$ силы $\vec{F}$ относительно данной точки O, который по определению равен $\vec{r}\times\vec{F}$, где $\vec{r}$ — радиус-вектор точки P — точки приложения силы $\vec{F}$, отложенный от точки O (рис. 3.4). Таким образом,

$$\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}. \qquad (3.1)$$

Свойства векторного произведения

1. Модуль векторного произведения двух неколлинеарных векторов численно равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах как на сторонах.

2. Векторное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда его сомножители коллинеарны (линейно зависимы).

Следствие: $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$ для любого вектора $\vec{a}$.

3. $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$ (антикоммутативность).

4. $(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$.

5. $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$ (дистрибутивность).

Пример 3.2. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=2\vec{p}-\vec{q}$ и $\vec{b}=\vec{p}+3\vec{q}$, если $|\vec{p}|=2$, $|\vec{q}|=3$, а $(\widehat{\vec{p},\vec{q}})=\pi/6$.

▶ Искомая площадь $S=|\vec{a}\times\vec{b}|$ (свойство 1), $\vec{a}\times\vec{b}=(2\vec{p}-\vec{q})\times(\vec{p}+3\vec{q})$. Используя свойство 5, раскроем скобки в правой части последнего равенства: $\vec{a}\times\vec{b}=(2\vec{p})\times\vec{p}-\vec{q}\times\vec{p}+(2\vec{p})\times(3\vec{q})-\vec{q}\times(3\vec{q})$. По следствию из свойства 2 имеем $(2\vec{p})\times\vec{p}=\vec{q}\times(3\vec{q})=\vec{0}$, а по свойству 4 — $(2\vec{p})\times(3\vec{q})=6(\vec{p}\times\vec{q})$. В результате получаем равенство

$$\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{q}\times\vec{p}+6(\vec{p}\times\vec{q}). \qquad (3.2)$$

Поменяем местами сомножители в первом слагаемом в правой части (3.2). В силу свойства 3 это слагаемое изменяет знак. После приведения подобных членов приходим к соотношению $\vec{a}\times\vec{b}=7(\vec{p}\times\vec{q})$. Теперь имеем

$$S=|7(\vec{p}\times\vec{q})|=7|\vec{p}\times\vec{q}|=7|\vec{p}||\vec{q}|\sin(\widehat{\vec{p},\vec{q}})=7\cdot2\cdot3\cdot1/2=21 \text{ (кв. ед.)}. ◀$$

§ 4. Смешанное произведение векторов

Пусть дана тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Так как $\vec{a}\times\vec{b}$ есть вектор, то можно рассматривать скалярное произведение этого вектора на вектор $\vec{c}$.

Определение 4.1. Скалярное произведение $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ вектора $\vec{a}\times\vec{b}$ на вектор $\vec{c}$ называется *смешанным* произведением векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$.

Очевидно, смешанное произведение $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ есть число.

Свойства смешанного произведения

1. Смешанное произведение $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ трех некомпланарных векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ по модулю равно объему V параллелепипеда, построенного на данных векторах, как на ребрах.

2. Тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ является компланарной тогда и только тогда, когда их смешанное произведение $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ равно нулю.

3. Тройка некомпланарных векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ является правой (левой) тогда и только тогда, когда их смешанное произведение $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ положительно (отрицательно).

4. Смешанное произведение векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ не изменяется при циклической перестановке сомножителей, т. е. справедливы равенства.

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}=(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}, \tag{4.1}$$

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=b\cdot(\vec{c}\times\vec{a}). \tag{4.2}$$

Замечание 4.1. Равенство $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ из (4.2) позволяет обозначать смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b},\vec{c}$ в виде $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$, не указывая при этом, какая пара из них перемножается векторно.

Пример 4.1. Найти объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, как на ребрах, если $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$, $|\vec{c}|=3$, $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\frac{\pi}{4}$, $\vec{c}\perp\vec{a}$, $\vec{c}\perp\vec{b}$.

▶ Обозначим объем данного параллелепипеда через $V_{\text{пар}}$, $V_{\text{пар}}=|\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$ (свойство 1). Векторы $\vec{a}\times\vec{b}$ и $\vec{c}$ коллинеарны, так как каждый из них перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$; кроме того, $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=2\cdot 3\sin\frac{\pi}{4}=3\sqrt{2}$.

Поэтому

$$\vec{a}\times\vec{b}=\pm\frac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{|\vec{c}|}\vec{c}=\pm\frac{3\sqrt{2}}{3}\vec{c}=\pm\sqrt{2}\vec{c}.$$

Тогда $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\left(\pm\sqrt{2}\vec{c},\vec{c}\right)=\pm\sqrt{2}\vec{c}^2=\pm 9\sqrt{2}$ и $V_{\text{пар}}=$ $=|\pm 9\sqrt{2}|=9\sqrt{2}$ (куб. ед.). ◄

§ 5. Векторное и смешанное произведения векторов, заданных разложениями в прямоугольном базисе

Пусть векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ заданы разложениями в прямоугольном базисе:

$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k},$$
$$\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k},$$
$$\vec{c}=c_x\vec{i}+c_y\vec{j}+c_z\vec{k}.$$

Для $\vec{a}\times\vec{b}$ и $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ имеем:

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_yb_z-a_zb_y)\vec{i}-(a_xb_z-a_zb_x)\vec{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\vec{k}, \qquad (5.1)$$

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=(a_yb_z-a_zb_y)c_x-(a_xb_z-a_zb_x)c_y+(a_xb_y-a_yb_x)c_z. \qquad (5.2)$$

Записывая разности в круглых скобках в формулах (5.1) — (5.2) как определители второго порядка (см. формулу (2.3) гл. 1 разд. 1), а также используя теорему 2.1 из упомянутой главы, получаем:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\vec{k},$$

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=c_x\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}-c_y\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}+c_z\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \qquad (5.3)$$

Для компактной записи $\vec{a}\times\vec{b}$ введем формальный определитель 3-го порядка, у которого первая строка состоит не из чисел, а из векторов $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. По аналогии с упомянутой теоремой по определению примем

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix},$$

тогда векторное произведение $\vec{a}\times\vec{b}$ записывается в виде

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \qquad (5.4)$$

Пример 5.1. Сила $\vec{F}=3\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$ приложена в точке $P(1, 1, 2)$. Найти момент этой силы относительно точки $Q(2, -1, 2)$.

▶ Пусть $\vec{M}$ — искомый момент. По формуле (3.1) $\vec{M}=\overrightarrow{QP}\times\vec{F}$. Так как $QP(-1, 2, 0)$, то

$$\vec{M}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}=2\vec{i}+\vec{j}-4\vec{k}. \blacktriangleleft$$

Пример 5.2. Доказать, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарны, если $\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$; $\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$ и $\vec{c}=3\vec{i}-2\vec{j}-\vec{k}$.

▶ Вычислим смешанное произведение $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ по формуле (5.3):

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}-(-3)\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}=$$

$$=-10+15-5=0.$$

Поскольку $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=0$, то векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ — компланарны. ◀

Пример 5.3. Дан тетраэдр, вершинами которого являются точки $A(1, -1, 2)$, $B(2, 1, 2)$, $C(1, 1, 4)$, $D(6, -3, 8)$. Найти объем тетраэдра V и длину высоты h, опущенной из вершины D на грань ABC.

▶ Рассмотрим векторы

$$\overrightarrow{AB}=(1,\ 2,\ 0),\ \overrightarrow{AC}=(0,\ 2,\ 2),$$

$$\overrightarrow{AD}=(5,\ -2,\ 6).$$

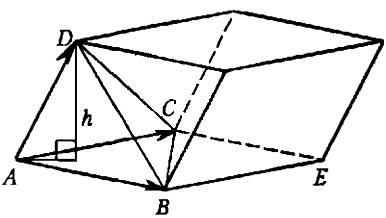


Рис. 5.1. К примеру 5.3

Они служат ребрами тетраэдра $ABCD$ и одновременно ребрами параллелепипеда с основанием $ABEC$ (рис. 5.1). Очевидно, тетраэдр и параллелепипед имеют одну и ту же высоту h, а объем тетраэдра $V_{\text{Т}}$ составляет одну шестую часть объема параллелепипеда $V_{\text{П}}$. Действительно,

$$V_{\text{Т}} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC}\, h = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} S_{ABEC}\right) h = \frac{1}{6} V_{\text{П}}.$$

Так как

$$V_{\text{П}} = |\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD}|,\ S_{ABEC} = |\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|,\ h = \frac{V_{\text{П}}}{S_{ABEC}} = \frac{|\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD}|}{|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|},$$

то здесь более рационально сначала вычислить $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k},$$

тогда $\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD} = (\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\,\overrightarrow{AD} = (4\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k})(5\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}) = 36 \Rightarrow$

$\Rightarrow V_{\text{П}} = 36$ и $V_{\text{Т}} = \frac{1}{6}\cdot 36 = 6$; $S_{ABEC} = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$;

$h = \dfrac{36}{2\sqrt{6}} = 3\sqrt{6}$. ◄

РАЗДЕЛ 3. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Аналитическая геометрия — раздел математики, в котором геометрические фигуры изучаются с помощью алгебраического анализа. При этом геометрическим фигурам по некоторому способу сопоставляются алгебраические уравнения. Это способ, называемый методом координат, был создан независимо друг от друга двумя великими французскими математиками XVII в. — Р. Декартом (1596—1650) и П. Ферма (1601—1665). Метод координат дал возможность определить положение точки с помощью чисел и тем самым выразить геометрические свойства фигур в свойствах их уравнений. Сопоставляя геометрическим фигурам уравнения, аналитическая геометрия решает две основные задачи: 1) получить уравнение (или систему уравнений) данной геометрической фигуры и с его помощью исследовать ее свойства; 2) данному уравнению сопоставить геометрическую фигуру и с его помощью изучить ее свойства. В трех главах настоящего раздела решаются эти задачи для прямых, плоскостей, некоторых кривых и поверхностей, традиционно изучаемых в аналитической геометрии. При этом понятия точки, прямой и плоскости считаются начальными, а под кривой (линией) и поверхностью понимаются некоторые множества точек, обладающие общим геометрическим свойством. Такой подход к этим понятиям соответствует элементарной планиметрии и стереометрии и обеспечивает непрерывность и преемственность изучения математики в школе и в вузе.

Глава 1. Геометрия прямых и плоскостей

§ 1. Понятие об уравнении плоской линии. Алгебраические линии. Теорема об инвариантности порядка

Пусть на плоскости задана прямоугольная декартова система координат Oxy и некоторая линия Г.

Определение 1.1. Уравнение $F(x, y) = 0$ с двумя переменными x и y называется ***уравнением плоской линии*** Г, если ему удовлетворяют координаты x, y любой точки Г и не удовлетворяют координаты точек, не принадлежащих Г.

В аналитической геометрии под функцией $F(x, y)$ от двух переменных x, y понимают, как правило, многочлен.

Равенство

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \qquad (1.1)$$

является уравнением окружности с центром в точке $A(a, b)$ и радиусом r (рис. 1.1), так как ему удовлетворяют координаты любой ее точки и не удовлетворяют координаты точек, не принадлежащих ей.

Уравнению $(x-a)^2+(y-b)^2=0$ удовлетворяют координаты единственной точки $A(a, b)$, а уравнению $(x-a)^2+(y-b)^2=-1$ не удовлетворяют координаты ни одной точки плоскости.

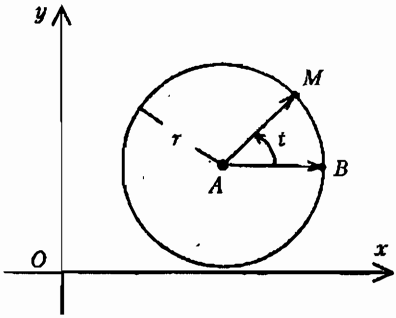


Рис. 1.1. Окружность с центром в точке A и радиусом r

Две основные задачи аналитической геометрии на плоскости

1. По описанию общего геометрического свойства всех точек линии Г получить уравнение Г в выбранной системе координат и по нему изучить такие ее свойства, как форма, место расположения на плоскости и т. д.

2. Данному уравнению $F(x, y) = 0$ соотнести множество точек плоскости, в частности линию Г, и с помощью свойств уравнения исследовать свойства Г.

Для окружности, задаваемой уравнением (1.1), рассмотрена первая из этих задач, а для уравнений $(x-a)^2+(y-b)^2=0$ и $(x-a)^2+(y-b)^2=-1$ — вторая.

Уравнение с двумя переменными не является единственным способом задания линии Г с помощью уравнения. В некоторых случаях представляется удобным выразить координаты точек этой линии через третью вспомогательную переменную (или параметр) t.

Определение 1.2. Система уравнений

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \end{cases} \quad t\in T \qquad (1.2)$$

называется ***параметрическими уравнениями*** линии Г, если для любой ее точки $M_0(x_0, y_0)$ найдется такое значение параметра $t_0 \in T$, что ее координаты определятся из этой системы при $t=t_0: x_0=x(t_0), y_0=y(t_0)$, а для точек, не принадлежащих ей, такого значения t не существует.

Под $x(t)$ и $y(t)$ в правых частях уравнений системы (1.2) понимаются некоторые функции параметра t, например такие, которые выражаются через элементарные функции, изученные в школьном курсе алгебры и начал анализа.

В соответствии с принятым определением система уравнений

$$\begin{cases} x = r\cos t + a, \\ y = r\sin t + b, \end{cases} \qquad t \in [0,\ 2\pi]$$

задает рассмотренную выше окружность. Параметр t в данном случае является углом поворота вектора $\overrightarrow{AB}$, коллинеарного оси Ox, до совмещения с вектором $\overrightarrow{AM}$, где $M(x, y)$ — произвольная точка окружности (рис. 1.1).

При задании параметрическими уравнениями траектории Г движущейся по плоскости точки M за параметр t принимается время, прошедшее от начала движения. Тогда функции $x(t)$ и $y(t)$ из уравнений (1.2) определят координаты точки M на любой момент времени t из промежутка T.

Определение 1.3. Плоская линия Г называется ***алгебраической линией порядка n***, если в некоторой прямоугольной декартовой системе координат Oxy она может быть задана уравнением вида

$$A_1 x^{k_1} y^{l_1} + \ldots + A_s x^{k_s} y^{l_s} = 0, \tag{1.3}$$

где все показатели степени — неотрицательные целые числа; n — степень этого уравнения, равная наибольшей из сумм $k_i + l_i$, $i = 1, \ldots, s$, при этом отличен от нуля хотя бы один коэффициент A_i, для которого $k_i + l_i = n$.

На плоскости можно выбрать бесчисленное множество прямоугольных декартовых систем координат, поэтому возникает вопрос о зависимости порядка данной алгебраической линии от выбора системы координат. Ответом на этот вопрос служит теорема об инвариантности порядка.

Теорема 1.1. Порядок алгебраической линии инвариантен по отношению к выбору прямоугольной декартовой системы координат.

Замечание 1.1. Все линии, не являющиеся алгебраическими, называются ***трансцендентными***. Таковыми будут, например, графики логарифмической, показательной, тригонометрических функций.

§ 2. Прямая как линия первого порядка. Общее уравнение прямой на плоскости. Уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно заданному вектору

Введем на плоскости прямоугольную декартову систему координат Oxy и рассмотрим уравнение первой степени относительно x, y:

$$Ax+By+C=0,\ A^2+B^2 \neq 0. \tag{2.1}$$

Теорема 2.1. Любая прямая на плоскости может быть задана в произвольной прямоугольной декартовой системе координат уравнением вида (2.1).

Теорема 2.2. Любое уравнение вида (2.1) определяет на плоскости прямую.

Из теорем 2.1 и 2.2 следует, что прямая на плоскости и только она является линией первого порядка.

Уравнение (2.1) называется ***общим уравнением*** прямой на плоскости. Его коэффициенты A и B имеют определенный геометрический смысл, а именно они являются координатами вектора $\vec{n}$, перпендикулярного прямой, определяемой этим уравнением. Этот вектор называется ***вектором нормали***, или ***нормальным вектором***, к данной прямой. Уравнение

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0 \tag{2.2}$$

при различных значениях коэффициентов A, B задает все прямые плоскости, проходящие через точку $M_0(x_0, y_0)$. Оно называется ***уравнением пучка прямых с центром в точке*** M_0. Выбор конкретных значений A и B в (2.2) приводит к уравнению прямой пучка, проходящей через точку M_0 перпендикулярно заданному вектору $\vec{n}=(A, B)$ (рис. 2.1).

Если один из коэффициентов A, B равен нулю, то уравнение (2.1) задает прямую, параллельную одной из осей координат, а именно при $A=0$ — прямую, параллельную оси Ox, при $B=0$ — оси Oy. При $C=0$ уравнение (2.1) задает прямую, проходящую через начало координат.

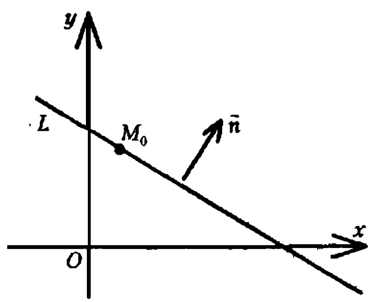


Рис. 2.1. К уравнению пучка прямых

Пример 2.1. Написать уравнение прямой L, проходящей через точку $M_0(-1, 2)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}=(3,-2)$.

▶ Напишем уравнение пучка прямых с центром в точке $M_0(-1, 2)$:

$$A(x+1)+B(y-2)=0. \tag{2.3}$$

Коэффициентами уравнения (2.3), как отмечено выше, являются координаты вектора нормали к прямой L, каковым здесь можно считать вектор $\vec{n}=(3,-2)$ из условия задачи. Подставив в (2.3) вместо A и B координаты вектора $\vec{n}$, после очевидных преобразований получаем уравнение прямой $L: 3x-2y+7=0$. ◀

Пример 2.2. При каком значении параметра α прямая $L:(\alpha^2-4)x+(\alpha^2-3\alpha+2)y+\alpha-4=0$: 1) параллельна оси абсцисс; 2) параллельна оси ординат; 3) проходит через начало координат?

▶ Параметр $\alpha\neq 2$, иначе коэффициенты при x и y в данном уравнении обращаются одновременно в нуль, и оно не определяет никакой прямой.

1. $\alpha^2-4=0$ и $\alpha\neq 2$, отсюда $\alpha=-2$. Уравнение L имеет вид $y=1/2$.

2. $\alpha^2-3\alpha+2=0$, $\alpha\neq 2$, отсюда $\alpha=1$. Уравнение L имеет вид $x=-1$.

3. $\alpha=4$, ее уравнение имеет вид $2x+y=0$. ◀

§ 3. Различные виды задания прямой на плоскости

1°. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Выберем на плоскости прямоугольную декартову систему координат Oxy и прямую L, определяемую уравнением (2.1). Пусть в этом уравнении $B\neq 0$. При этом условии прямая L не параллельна оси Oy, а упомянутое уравнение приводится к виду

$$y=kx+b, \tag{3.1}$$

где $k=-A/B$, $b=-C/B$.

Коэффициент b из уравнения (3.1) называется *начальной ординатой* прямой L. Он равен ординате точки пересечения этой прямой с осью Oy ($y=b$ при $x=0$). Для геометрической интерпретации коэффициента k введем понятие угла наклона данной прямой к оси Ox.

Определение 3.1. *Углом наклона* φ прямой L к оси Ox называется наименьший угол поворота этой оси, производимого вокруг точки пересечения Ox и L в направлении против часовой стрелки до совмещения Ox с L (рис. 3.1).

Угол φ принимает значения из промежутка $[0, \pi)$, при этом $\varphi = 0$, если прямая L и ось Ox параллельны или совпадают.

Коэффициент k из правой части уравнения (3.1) равен тангенсу угла наклона φ прямой L к оси Ox. Он называется *угловым коэффициентом* этой прямой, а уравнение (3.1) — *уравнением прямой с угловым коэффициентом*.

Замечание 3.1. Уравнением с угловым коэффициентом нельзя задать прямую, параллельную оси Oy, так как она определяется уравнением вида (2.1) при $B = 0$ и, следовательно, не имеет углового коэффициента.

Уравнение

$$y - y_0 = k(x - x_0) \tag{3.2}$$

при всевозможных значениях k вместе с уравнением

$$x - x_0 = 0 \tag{3.3}$$

задает все прямые пучка с центром в точке $M_0(x_0, y_0)$.

Если известны координаты двух точек $M_0(x_0, y_0)$ и $M_1(x_1, y_1)$ прямой L, то ее угловой коэффициент k определяется из равенства

$$k = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}, \tag{3.4}$$

которое можно получить из (3.2), подставив туда координаты точки M_1.

Пример 3.1. Найти угол между осью Ox и прямой $L: \sqrt{3}x + y - 2 = 0$.

▶ Обозначим искомый угол через φ. Преобразуем уравнение L к виду (3.1): $y = -\sqrt{3}x + 2$, отсюда $k = \operatorname{tg}\varphi = -\sqrt{3}$ и $\varphi = 2\pi / 3$. ◀

Пример 3.2. Луч света проходит через точку $A(6, 2)$ и, отразившись от оси Ox в точке B, проходит через точку $C(-4, 3)$. Найти абсциссу точки B.

▶ Как известно из физики, угол падения равен углу отражения. Для угловых коэффициентов k_1 и k_2 прямых L_1 и L_2 (рис. 3.2) справедливо равенство

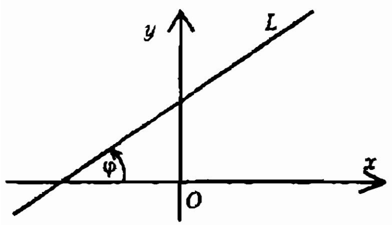


Рис. 3.1. Угол наклона прямой к оси Ox

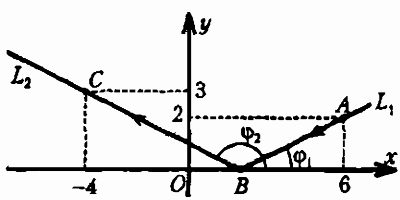


Рис. 3.2. К примеру 3.2

$$k_2 = -k_1, \tag{3.5}$$

поскольку $\varphi_2 = \pi - \varphi_1$ и $\operatorname{tg}\varphi_2 = -\operatorname{tg}\varphi_1$. Для k_1 и k_2 из (3.4) имеем:

$$k_1 = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{2}{6 - x_B},\ k_2 = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{3}{-4 - x_B},$$

где x_B — абсцисса точки B (рис. 3.2), отсюда с учетом (3.5) получаем

$$\frac{2}{6 - x_B} = \frac{3}{4 + x_B} \Rightarrow x_B = 2. \blacktriangleleft$$

2°. Каноническое уравнение прямой на плоскости. Уравнение

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} \tag{3.6}$$

называется *каноническим уравнением* прямой на плоскости. Оно определяет прямую L, проходящую через точку $M_0(x_0, y_0)$ параллельно вектору $\vec{q} = (l, m)$, называемому ее *направляющим вектором* (рис. 3.3, точка $M(x, y)$ — текущая точка прямой).

Если заданы две точки $M_0(x_0, y_0)$ и $M_1(x_1, y_1)$, принадлежащие данной прямой, то ее уравнение можно записать в виде

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}, \tag{3.7}$$

ибо за направляющий вектор $\vec{q}$ здесь можно принять вектор $\overrightarrow{M_0M_1}$ $(x_1 - x_0, y_1 - y_0)$. Уравнение (3.7) называется *уравнением прямой, проходящей через две данные точки*.

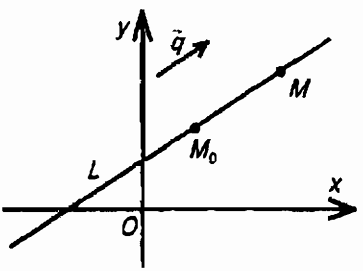


Рис. 3.3. К заданию прямой на плоскости каноническим уравнением

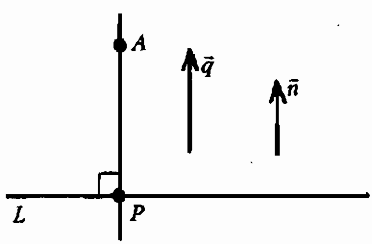


Рис. 3.4. К примеру 3.3

Пример 3.3. Написать уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $A(2, -1)$ на прямую L: $3x-2y+5=0$.

▶ За направляющий вектор $\vec{q}$ перпендикуляра AP примем $\vec{n}$ — вектор нормали к прямой L (рис. 3.4): $\vec{q}=\vec{n}=(3, -2)$. Уравнение AP имеет вид:

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{-2}. \blacktriangleleft$$

Пример 3.4. Написать уравнение прямой, проходящей через точки $A(2, -1)$ и $B(1, 3)$.

▶ Подставим координаты точек A и B в уравнение (3.7), получим:

$$\frac{x-2}{1-2}=\frac{y+1}{3+1} \Rightarrow \frac{x-2}{-1}=\frac{y+1}{4}. \blacktriangleleft$$

3°. Параметрические уравнения прямой. Приравняем каждое из равных отношений в (3.6) параметру t:

$$\frac{x-x_0}{l}=t, \ \frac{y-y_0}{m}=t. \qquad (3.8)$$

Выражая x и y из равенств (3.8), приходим к следующей системе:

$$\begin{cases} x=lt+x_0, \\ y=mt+y_0, \end{cases} \quad t \in \mathbf{R}, \qquad (3.9)$$

которая называется ***параметрическими уравнениями*** прямой на плоскости.

Система (3.9) допускает механическую интерпретацию, а именно она определяет координаты точки, движущейся равномерно по данной прямой, причем числа l и m являются координатами вектора скорости, а параметр t трактуется как время, прошедшее с начала движения.

Пример 3.5. Точка движется по прямой из положения $(1, 0)$ с постоянной скоростью $\vec{v}=(2, 3)$. Написать уравнение траектории движения.

▶ Из системы (3.9) получаем параметрические уравнения траектории Г: $x=2t+1$, $y=3t$, $t \geq 0$, где за параметр t принято время. Исключение из этих уравнений параметра t приводит к каноническому уравнению траектории: $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}$. И наконец, после очевидных преобразований получим уравнение траектории в виде общего уравнения прямой: $3x-2y-3=0$. ◀

§ 4. Взаимное расположение двух прямых на плоскости. Вычисление угла между двумя прямыми

Две прямые на плоскости могут либо совпадать, либо пересекаться в одной точке, либо не иметь ни одной общей точки, т. е. быть параллельными.

Пусть прямые L_1 и L_2 заданы следующими уравнениями с угловым коэффициентом: L_1: $y = k_1x + b_1$; L_2: $y = k_2x + b_2$.

Условие параллельности таких прямых следует из условия равенства углов наклона φ_1 и φ_2 этих прямых к оси Ox. Поскольку $\operatorname{tg}\varphi_1 = \operatorname{tg}\varphi_2$, то приходим к следующему утверждению:

$$L_1 \| L_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2.$$

Для угла φ между прямыми L_1 и L_2, понимаемого как угол поворота в направлении против часовой стрелки прямой L_1 до совмещения с прямой L_2 (рис. 4.1), имеем формулу

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}, \tag{4.1}$$

где $k_1 = \operatorname{tg}\varphi_1$, $k_2 = \operatorname{tg}\varphi_2$.

Если $1 + k_1k_2 = 0$, то $\operatorname{ctg}\varphi = 0$, следовательно, угол φ равен $\pi/2$ и данные прямые перпендикулярны. Итак, любое из следующих равенств:

$$k_1k_2 + 1 = 0 \text{ или } k_1 = -1/k_2,$$

является условием перпендикулярности прямых, заданных уравнениями с угловым коэффициентом.

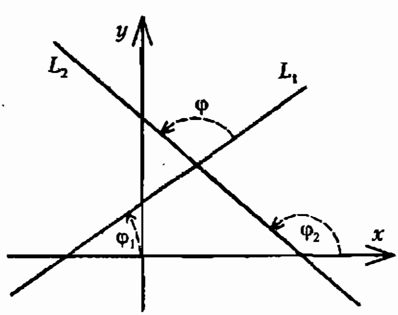


Рис. 4.1. К формуле для тангенса угла между прямыми

Пример 4.1. Написать уравнение прямой L, проходящей через точку (2, 3), если она: а) параллельна прямой L_1: $y = -2x + 5$; б) перпендикулярна прямой L_2: $y = 3x - 1$; в) перпендикулярна прямой L_3: $y = 1$; г) образует угол $\pi/4$ с прямой L_4: $y = 3x + 5$.

▶ Пусть k_1, k_2, k_3, k_4 — угловые коэффициенты прямых L_1, L_2, L_3, L_4, $k_1 = -2$; $k_2 = k_4 = 3$; $k_3 = 0$, а k — угловой коэффициент прямой L. Напишем уравнение пучка прямых с центром в точке (2, 3): $y-3=k(x-2)$, $x=2$, и определим k так, чтобы удовлетворить условиям а) — г):

а) $k=k_1=-2$, тогда L: $y-3=-2(x-2) \Rightarrow L$: $y=-2x+7$;

б) $k=-1/k_2=-1/3$, тогда L: $y-3=-(x-2)/3 \Rightarrow L$: $y=-x/3+$ $+11/3$.

в) прямая L_3 параллельна оси Ox, следовательно, прямая L перпендикулярна этой оси и не имеет углового коэффициента. Данному условию удовлетворяет прямая L: $x=2$ из рассматриваемого пучка;

г) из (4.1) имеем равенства $\operatorname{tg}\varphi=1=\dfrac{k-3}{1+3k}$ или $\operatorname{tg}\varphi=1=\dfrac{3-k}{1+3k}$,

откуда для k получаем два уравнения:

$$\left[\begin{array}{l} 1+3k=k-3, \\ 1+3k=3-k, \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} k=-2, \\ k=1/2. \end{array}\right.$$

Итак, данному условию удовлетворяют две прямые:

$$L: y-3=-2(x-2) \Rightarrow L: y=-2x+7;$$

$$L: y-3=\frac{1}{2}(x-2) \Rightarrow L: y=\frac{1}{2}x+2. \blacktriangleleft$$

§ 5. Расстояние от точки до прямой на плоскости

Пусть на плоскости введена прямоугольная декартова система координат и заданы прямая L: $Ax+By+C=0$ и точка $M_0(x_0, y_0)$, не принадлежащая L.

Расстоянием d от точки M_0 до прямой L называется, как известно, длина отрезка M_0N, где $N(x_1, y_1)$ — проекция точки M_0 на данную прямую (рис. 5.1). Для d имеем формулу

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}. \tag{5.1}$$

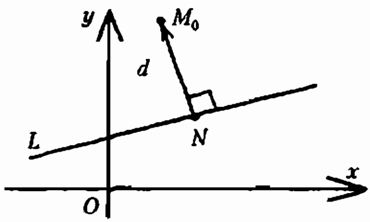


Рис. 5.1. К понятию расстояния от точки M_0 до прямой L

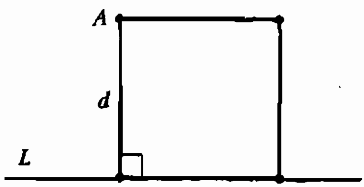


Рис. 5.2. К примеру 5.1

Пример 5.1. Найти длину стороны квадрата, если одна из его сторон расположена на прямой L: $y=-x+3$, а одна из вершин находится в точке $A(3,\ 6)$.

►Точка A не принадлежит прямой L, так как ее координаты не удовлетворяют уравнению L. Поэтому длина стороны квадрата равна расстоянию d от точки A до прямой L (рис. 5.2). Преобразовав уравнение L к виду $x+y-3=0$, найдем d по формуле (5.1):

$$d=\frac{|3+6-3|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{6}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}.$$ ◄

§ 6. Понятие об уравнении поверхности. Алгебраические поверхности. Теорема об инвариантности порядка

Пусть в пространстве введена прямоугольная декартова система координат $Oxyz$ и задана некоторая поверхность (S), понимаемая как множество точек пространства, обладающих общим геометрическим свойством.

Определение 6.1. Уравнение $F(x, y, z) = 0$ с тремя переменными x, y, z называется *уравнением данной поверхности* S, если ему удовлетворяют координаты x, y, z любой точки S и не удовлетворяют координаты точек, не принадлежащих ей.

Под функцией $F(x, y, z) = 0$ в аналитической геометрии понимаются в основном многочлены.

Равенство $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$ является уравнением сферы с центром в точке $A(a, b, c)$ и радиусом r (рис. 6.1), так как ему удовлетворяют координаты любой точки этой сферы и не удовлетворяют координаты точек, не принадлежащих ей.

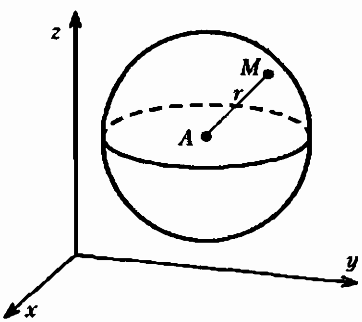


Рис. 6.1. Сфера с центром в точке A и радиусом r

Уравнению $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = 0$ удовлетворяют координаты единственной точки $A(a,\ b,\ c)$, а уравнению $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=-1$ не удовлетворяют координаты ни одной точки пространства.

Две основные задачи аналитической геометрии в пространстве

1. По описанию общего геометрического свойства точек поверхности S получить ее уравнение в данной системе координат и с его помощью изучить такие ее свойства, как форма, расположение в пространстве и т. д.

2. Данному уравнению $F(x, y, z) = 0$ соотнести множество точек пространства, в частности поверхность S, и с помощью уравнения изучить свойства S.

Для вышерассмотренной сферы решена первая из этих задач, а для уравнений $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=0$ и $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=-1$ — вторая.

Определение 6.2. Поверхность S называется *алгебраической поверхностью n-го порядка*, если в некоторой прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ она может быть задана уравнением вида

$$A_1 x^{k_1} y^{l_1} z^{m_1} + \ldots + A_s x^{k_s} y^{l_s} z^{m_s} = 0,$$

где все показатели степени — неотрицательные целые числа, а n — степень этого уравнения, равная наибольшей из сумм $k_i + l_i + m_i$, $i = 1, \ldots, s$, при этом отличен от нуля хотя бы один коэффициент A_i, для которого $k_i + l_i + m_i = n$.

Для алгебраической поверхности, так же как и для алгебраической плоской линии, справедлива теорема об инвариантности порядка.

Теорема 6.1. Порядок алгебраической поверхности инвариантен по отношению к выбору прямоугольной декартовой системы координат.

Замечание 6.1. Все поверхности, не являющиеся алгебраическими, называются *трансцендентными*.

§ 7. Плоскость как поверхность первого порядка. Общее уравнение плоскости. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно заданному вектору

Введем в пространстве прямоугольную декартову систему координат $Oxyz$ и рассмотрим уравнение первой степени относительно x, y, z:

$$Ax + By + Cz = 0, A^2 + B^2 + C^2 \neq 0. \qquad (7.1)$$

Теорема 7.1. Любая плоскость может быть задана в произвольной прямоугольной декартовой системе координат уравнением вида (7.1).

7*-1459

Точно так же, как и в случае прямой на плоскости, справедлива теорема, обратная теореме 7.1.

Теорема 7.2. Любое уравнение вида (7.1) задает в пространстве плоскость.

Из теорем 7.1 и 7.2 следует, что плоскость и только она является поверхностью первого порядка.

Уравнение (7.1) называется *общим уравнением плоскости.* Его коэффициенты A, B, C трактуются геометрически как координаты вектора $\vec{n}$, перпендикулярного плоскости, определяемой этим уравнением. Этот вектор $\vec{n}=(A, B, C)$ называется вектором нормали к данной плоскости. Уравнение

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \tag{7.2}$$

при различных значениях коэффициентов A, B, C задает все плоскости, проходящие через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Оно называется *уравнением связки плоскостей.* Выбор конкретных значений A, B, C в (7.2) означает выбор плоскости P из связки, проходящей через точку M_0 перпендикулярно вектору $\vec{n}=(A, B, C)$ (рис. 7.1).

Пример 7.1. Написать уравнение плоскости P, проходящей через точку $A(1, 2, 0)$ параллельно векторам $\vec{a}=(1, 2, -1)$, $\vec{b}=(2, 0, 1)$.

► Вектор нормали $\vec{n}$ к P ортогонален данным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 7.2), поэтому за $\vec{n}$ можно взять их векторное произведение:

$$\vec{n}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}=2\vec{i}-3\vec{j}-4\vec{k}.$$

Подставим координаты точки M_0 и координаты вектора $\vec{n}$ в (7.2), получим уравнение плоскости:

$$P\colon 2(x-1)-3(y-2)-4z=0 \Rightarrow P\colon 2x-3y-4z+4=0. \blacktriangleleft$$

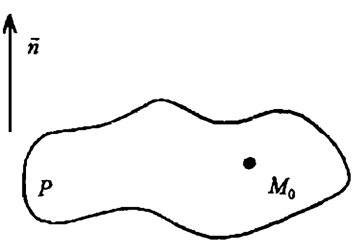


Рис. 7.1. К уравнению связки плоскостей

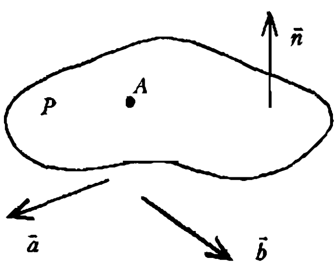


Рис. 7.2. К примеру 7.1

Если два из коэффициентов A, B, C уравнения (7.1) равны нулю, оно задает плоскость, параллельную одной из координатных плоскостей. Например, при $A=B=0$, $C\neq 0$ — плоскость $P_1: Cz+D=0$ или $P_1: z=-\dfrac{D}{C}$. Она параллельна плоскости Oxy, ибо ее вектор нормали $\vec{n}_1=(0,\ 0,\ C)$ перпендикулярен этой плоскости. При $A=C=0$, $B\neq 0$ или $B=C=0$, $A\neq 0$ уравнение (7.1) определяет плоскости P_2: $By+D=0$ и P_3: $Ax+D=0$, параллельные координатным плоскостям Oxz и Oyz, так как их векторы нормали $\vec{n}_2=(0,\ B,\ 0)$ и $\vec{n}_3=(A,\ 0,\ 0)$ им перпендикулярны (рис. 7.3). Если только один из коэффициентов A, B, C уравнения (7.1) равен нулю, то оно задает плоскость, параллельную одной из координатных осей. Так, плоскость P: $Ax+By+D=0$ параллельна оси Oz, поскольку ее вектор нормали $\vec{n}=(A,\ B,\ 0)$ перпендикулярен оси Oz. Заметим, что она проходит через прямую $L: Ax+By=0$, лежащую в плоскости Oxy (рис. 7.4). При $D=0$ уравнение (7.1) задает плоскость, проходящую через начало координат.

Пример 7.2. Найти значения параметра λ, при которых уравнение

$$\lambda x+(\lambda^2+2\lambda)y+(\lambda^2+\lambda-2)z+\lambda-3=0$$

определяет плоскость P: а) параллельную одной из координатных плоскостей; б) параллельную одной из координатных осей; в) проходящую через начало координат.

►Запишем данное уравнение в виде

$$\lambda x+\lambda(\lambda+2)y+(\lambda+2)(\lambda-1)z+\lambda-3=0. \qquad (7.3)$$

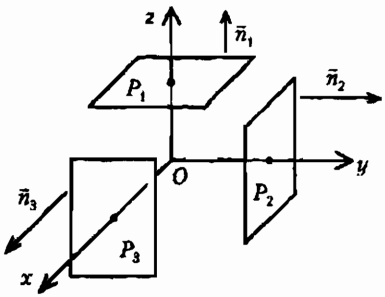


Рис. 7.3. Плоскости, параллельные плоскостям координат

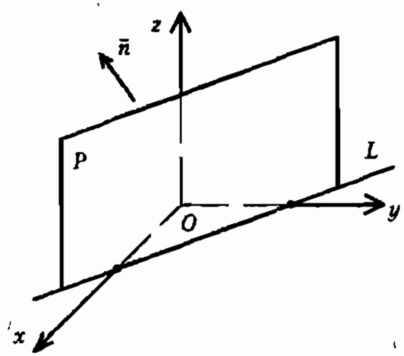


Рис. 7.4. Плоскость $P: Ax+By+D=0$, параллельная оси Oz

При любом значении λ уравнение (7.3) определяет некоторую плоскость, так как коэффициенты при x, y, z в (7.3) не обращаются в нуль одновременно:

а) при $\lambda = 0$ уравнение (7.3) определяет плоскость P, параллельную плоскости Oxy, $P: z = -3/2$, а при $\lambda = -2$ оно определяет плоскость P, параллельную плоскости Oyz, $P: x = -5/2$. Ни при каких значениях λ плоскость P, определяемая уравнением (7.3), не параллельна плоскости Oxz, поскольку коэффициенты при x, z в (7.3) не обращаются в нуль одновременно;

б) при $\lambda = 1$ уравнение (7.3) определяет плоскость P, параллельную оси Oz, $P: x + 3y - 2 = 0$. При остальных значениях параметра λ оно не определяет плоскости, параллельной только одной из координатных осей;

в) при $\lambda = 3$ уравнение (7.3) определяет плоскость P, проходящую через начало координат, $P: 3x + 15y + 10z = 0$. ◀

§ 8. Расстояние от точки до плоскости

Пусть в пространстве введена прямоугольная декартова система координат, задана плоскость P, определяемая уравнением

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{8.1}$$

и точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, не принадлежащая P.

Расстоянием d от точки M_0 до плоскости P называется, как известно, длина отрезка M_0N, где $N(x_1, y_1, z_1)$ — проекция точки M_0 на плоскость P (рис. 8.1). Для величины d справедлива формула

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{8.2}$$

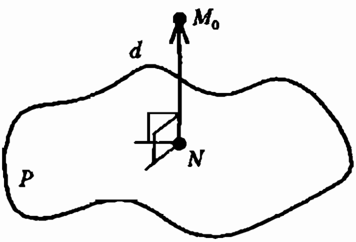


Рис. 8.1. К понятию расстояния от точки M_0 до плоскости P

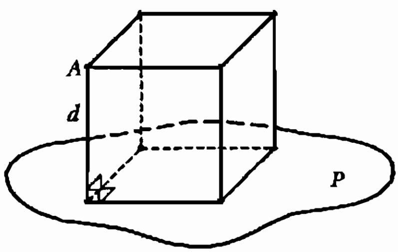


Рис. 8.2. К примеру 8.1

Пример 8.1. Найти длину ребра куба, если одна из его граней расположена в плоскости P: $x-2y-2z+2=0$, а одна из его вершин — в точке $A(4,-1,-2)$.

► Точка $A(4,-1,-2)$ не принадлежит плоскости P, поскольку ее координаты не удовлетворяют уравнению P. Следовательно, длина d ребра куба равна расстоянию от точки A до плоскости P (рис. 8.2). Найдем это расстояние по формуле (8.2):

$$d=\frac{|4-2(-1)-2(-2)+2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-2)^2}}=\frac{12}{\sqrt{9}}=4. ◄$$

§ 9. Уравнения линии в пространстве

Пусть в пространстве введена прямоугольная декартова система координат $Oxyz$ и задана линия Г, понимаемая как множество точек пространства, обладающих общим геометрическим свойством. Таким свойством, например, может служить принадлежность любой ее точки одновременно двум поверхностям, что соответствует заданию Г как линии пересечения этих поверхностей.

Определение 9.1. Система из двух уравнений с тремя переменными x, y, z вида

$$\begin{cases} F_1(x,y,z)=0, \\ F_2(x,y,z)=0 \end{cases} \qquad (9.1)$$

называется ***уравнениями линии*** Г, если координаты любой ее точки удовлетворяют этой системе, а координаты точек, не принадлежащих Г, ей не удовлетворяют.

Под функциями $F_1(x, y, z)$, $F_2(x, y, z)$ в аналитической геометрии понимают, как правило, многочлены от трех переменных x, y, z.

Каждое из уравнений системы (9.1) задает некоторую поверхность, а Г является линией пересечения этих поверхностей. Например, система уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=r^2, \\ y=z \end{cases} \qquad (9.2)$$

определяет в пространстве окружность как линию пересечения сферы (S): $x^2+y^2+z^2=r^2$ и плоскости $P: y=z$ (рис. 9.1).

Одна и та же линия может быть пересечением различных пар поверхностей. Поэтому ее можно задавать различными системами уравнений вида (9.1). Так, вышеупомянутая окружность является также линией пересечения плоскости $P: y = z$ и поверхности S_1: $x^2 + 2y^2 = r^2$, которая (см. гл. 3, § 6) называется цилиндром (рис. 9.2). Поэтому система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 = r^2, \\ y = z \end{cases}$$

также, наряду с (9.2), является уравнениями данной окружности.

Для линии Г, определяемой системой (9.1), можно найти уравнение ее проекции Г′ в ту или иную координатную плоскость. Пусть, например, точка $M'(x, y, 0)$ — проекция точки $M(x, y, z)$, принадлежащей Г, в плоскость Oxy (рис. 9.3). Очевидно, что абсциссы и ординаты этих двух точек равны. Поэтому исключение координаты z из уравнений (9.1) дает ту связь между x и y, которая и характеризует линию Г′ — проекцию Г в плоскость Oxy, т. е. приводит к уравнению Г′. Так, при исключении z из уравнений (9.2) приходим к уравнению $x^2 + 2y^2 = r^2$, определяющему проекцию Г′ данной окружности Г в плоскость Oxy, которая, как мы увидим ниже (гл. 2, § 2), является эллипсом (рис. 9.3). Аналогично может быть рассмотрен вопрос об

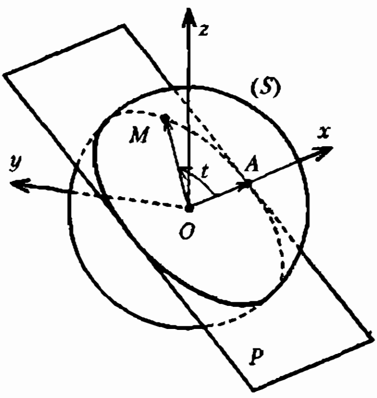


Рис. 9.1. Окружность Г как линия пересечения сферы S и плоскости P

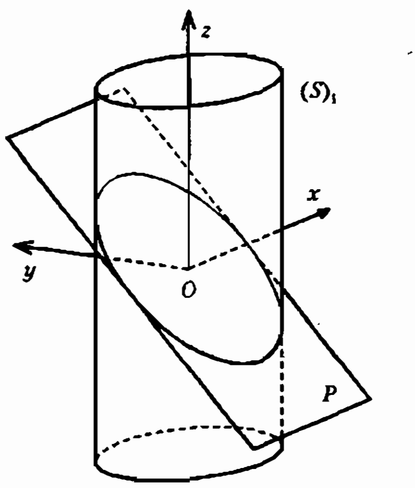


Рис. 9.2. Окружность Г как линия пересечения цилиндра и плоскости P

уравнении проекции данной линии в другие координатные плоскости.

Система из двух уравнений с тремя переменными x, y, z не является единственным способом задания линии в пространстве с помощью уравнений. В некоторых случаях представляется более удобным выразить координаты ее точек через третью вспомогательную переменную (или параметр) t.

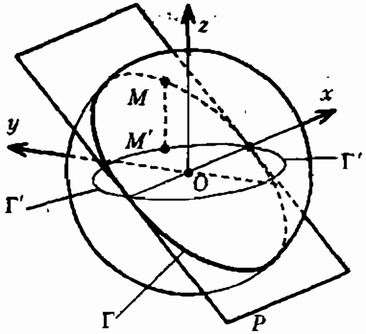


Рис. 9.3. Линия Г' – проекция линии Г в плоскость Oxy

Определение 9.2. Система уравнений

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases} \quad t \in T, \tag{9.3}$$

называется *параметрическими уравнениями* линии Г, если для любой точки $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \Gamma$ найдется такое значение параметра $t_0 \in T$, что ее координаты определятся из этой системы при $t = t_0$: $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$, $z_0 = z(t_0)$, $t_0 \in T$, а для точек, не принадлежащих Г, такого значения параметра не существует.

Под $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ в правых частях уравнений системы (9.3) понимают некоторые функции параметра t, например, выражающиеся через элементарные функции, из школьного курса алгебры и начал анализа. Так, вышеупомянутую окружность можно задать такими параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = (R/\sqrt{2})\sin t, \\ z = (R/\sqrt{2})\sin t, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi].$$

За параметр t принят угол поворота вектора $\overrightarrow{OA}$ до совмещения с радиусом-вектором $\overrightarrow{OM}$ точки M окружности (рис. 9.1). В самом деле подстановка этих уравнений в (9.2) обращает каждое из уравнений этой системы в тождество.

Если линия Г есть траектория движущейся точки, то за параметр t принимают время, прошедшее от начала движения. Функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ из уравнений (9.3) определят координаты этой точки на любой момент времени $t \in T$.

§ 10. Различные виды уравнений прямой в пространстве

Введем в пространстве прямоугольную систему координат $Oxyz$.

1°. Общие уравнения прямой. Пусть прямая L является линией пересечения двух плоскостей $P_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $P_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$. Система:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases} \tag{10.1}$$

называется *общими уравнениями* прямой L. При этом равенства

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$$

не имеют места хотя бы для одной из пропорций, что следует из условия параллельности плоскостей.

2°. Канонические уравнения прямой. Любую прямую L в пространстве можно задать принадлежащей ей точкой $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и ненулевым вектором $\vec{q}(l, m, n)$, коллинеарным ей и называемым ее *направляющим вектором* (рис. 10.1), причем и точка M_0, и вектор $\vec{q}$ могут быть выбраны произвольно.

Уравнения

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n} \tag{10.2}$$

называются *каноническими уравнениями* прямой в пространстве.

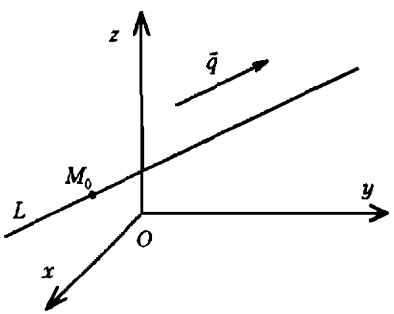


Рис. 10.1. К заданию прямой в пространстве каноническими уравнениями

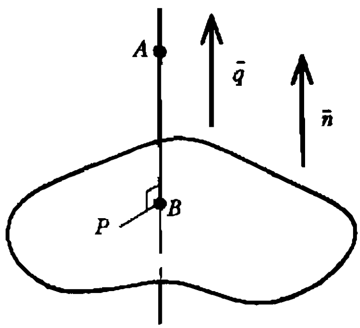


Рис. 10.2. К примеру 10.1

Пример 10.1. Написать уравнения перпендикуляра, опущенного из точки $A(1, -2, 1)$ на плоскость P: $x+2y-z+2=0$.

▶ За направляющий вектор $\vec{q}$ перпендикуляра AB к плоскости P можно взять вектор нормали $\vec{n}$ к плоскости P (рис. 10.2): $\vec{q}=\vec{n}=(1, 2, -1)$. Уравнения AB имеют вид:

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{-1}. \blacktriangleleft$$

3°. Параметрические уравнения прямой. Параметрические уравнения прямой в пространстве получим так же, как для прямой на плоскости, приняв за параметр t равные отношения в уравнениях (10.2):

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}=t. \tag{10.3}$$

Приравнивая каждое отношение в (10.3) к t и выражая из полученного равенства соответствующую координату, получим:

$$\begin{cases} x=lt+x_0, \\ y=mt+y_0, \quad t\in\mathbf{R}. \\ z=nt+z_0, \end{cases} \tag{10.4}$$

Данная система называется ***параметрическими уравнениями*** прямой в пространстве. Она имеет такое же механическое истолкование, как и система (3.9).

4°. Взаимное расположение двух прямых в пространстве. Задание прямой каноническими уравнениями позволяет легко установить их взаимное расположение в пространстве.

Так, пусть прямые L_1 и L_2 заданы следующими уравнениями:

$$L_1: \frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}, \; L_2: \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}.$$

Их направляющие векторы — $\vec{q}_1=(l_1, m_1, n_1)$ и $\vec{q}_2=(l_2, m_2, n_2)$ соответственно.

Условие параллельности прямых L_1 и L_2 сводится к условиям коллинеарности векторов $\vec{q}_1$ и $\vec{q}_2$, заключающимся в пропорциональности их координат:

$$\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}. \qquad (10.5)$$

Условие перпендикулярности этих прямых эквивалентно условию ортогональности векторов $\vec{q}_1$ и $\vec{q}_2$, которое, в свою очередь, приводит к условию выполнения равенства $\vec{q}_1\cdot\vec{q}_2=0$, или $l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$.

Понимая угол φ между прямыми L_1 и L_2 как угол между их направляющими векторами, получаем для $\cos\varphi$ следующую формулу:

$$\cos\varphi=\frac{\vec{q}_1\cdot\vec{q}_2}{|\vec{q}_1|\cdot|\vec{q}_2|}=\frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\cdot\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}. \qquad (10.6)$$

Условием совпадения прямых L_1 и L_2 является совместное выполнение равенства (10.5) и равенства

$$\frac{x_2-x_1}{l_1}=\frac{y_2-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1},$$

выражающего условие принадлежности точки $M_2(x_2, y_2, z_2)$ прямой L_2, а также и прямой L_1.

Пример 10.2. Найти значения параметров λ и μ так, чтобы прямые

$$L_1: \frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z-2}{1}, \quad L_2: \frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{\lambda}=\frac{z}{\mu}$$

были: а) параллельны, б) перпендикулярны.

► Обозначим через $\vec{q}_1$ и $\vec{q}_2$ направляющие векторы данных прямых, $\vec{q}_1=(2,-2,1)$, $\vec{q}_2=(3,\lambda,\mu)$:

а) $L_1\|L_2 \Leftrightarrow \vec{q}_1\|\vec{q}_2 \Leftrightarrow \dfrac{2}{3}=-\dfrac{2}{\lambda}=\dfrac{1}{\mu}\Rightarrow\lambda=-3,\ \mu=\dfrac{3}{2}$;

б) $L_1\perp L_2 \Leftrightarrow \vec{q}_1\perp\vec{q}_2 \Leftrightarrow \vec{q}_1\cdot\vec{q}_2=0\Rightarrow 6-2\lambda+\mu=0\Rightarrow \begin{cases}\mu=2\lambda-6,\\ \lambda\in\mathbb{R},\end{cases}$ например $\lambda=1$, $\mu=-4$. ◄

Пример 10.3. Найти угол φ между прямыми

$$L_1: \frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{1}; \quad L_2: \frac{x+2}{1}=\frac{y-1}{-4}=\frac{z+1}{-1}.$$

▶ Обозначим через $\vec{q}_1$, $\vec{q}_2$ направляющие векторы данных прямых $\vec{q}_1=(2,-2,1)$, $\vec{q}_2=(1,-4,1)$. Из (10.6) имеем

$$\cos\varphi=\frac{2\cdot1-2(-4)+1\cdot1}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+(-4)^2+1^2}}=\frac{9}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{18}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\varphi=\frac{\pi}{4}.$$ ◀

5°. Переход от общих уравнений прямой к ее каноническим уравнениям. Задание прямых в пространстве каноническими уравнениями позволяет исследовать их взаимное расположение по простым формулам, приведенным выше. Поэтому важно уметь переходить от общих уравнений прямой L вида (10.1) к ее каноническим уравнениям вида (10.2). Координатами точки M_0, принадлежащей L, может служить любое решение системы (10.1). Предположим, что

$$\frac{A_1}{A_2}\neq\frac{B_1}{B_2}. \tag{10.7}$$

Координате z придадим произвольное значение, например $z=0$. Из системы (10.1) получим:

$$\begin{cases}A_1x+B_1y=-D_1,\\ A_2x+B_2y=-D_2.\end{cases} \tag{10.8}$$

Ввиду условия (10.7) система (10.8) имеет единственное решение. Обозначим его через (x_0, y_0). Точка $M_0(x_0, y_0, 0)$ принадлежит L, так как ее координаты удовлетворяют уравнениям (10.1) этой прямой. Чтобы найти направляющий вектор $\vec{q}$, заметим, что $\vec{q}\perp\vec{n}_1=(A_1, B_1, C_1)$ и $\vec{q}\perp\vec{n}_2=(A_2, B_2, C_2)$, где $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ — векторы нормали к плоскостям P_1 и P_2, определяемым уравнениями системы (10.1) (рис. 10.3), поэтому за $\vec{q}$ можно принять векторное произведение нормалей $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$, $\vec{q}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2$. После того как найдены координаты $\vec{q}$, пишут канонические уравнения L в форме (10.2).

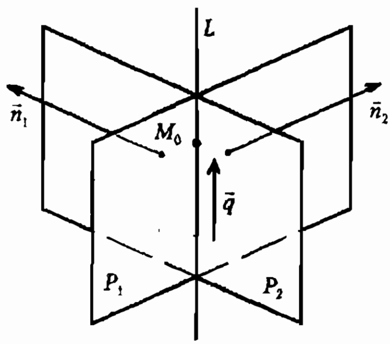


Рис. 10.3. К переходу от общих уравнений прямой L к ее каноническим уравнениям

Пример 10.4. Перейти от общих уравнений прямой L,

$$L:\begin{cases}2x-y+z+4=0,\\ x+2y-z+7=0,\end{cases} \qquad (10.9)$$

к каноническим.

▶ В уравнениях (10.9) положим $z=0$, приходим к системе

$$\begin{cases}2x-y+4=0,\\ x+2y+7=0,\end{cases}$$

из которой получим: $x=-3$, $y=-2$. Таким образом, мы нашли точку $M_0(-3,-2,0)\in L$. За направляющий вектор $\vec{q}$ прямой L примем векторное произведение $\vec{n}_1\times\vec{n}_2$, $\vec{n}_1=(2,-1,1)$, $\vec{n}_2=(1,2,-1)$ — векторы нормалей к плоскостям, определяем уравнениями системы (10.9). Его найдем по формуле (5.4) гл. 2 разд. 2:

$$\vec{q}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&-1&1\\1&2&-1\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}-1&1\\2&-1\end{vmatrix}-$$

$$-\vec{j}\begin{vmatrix}2&1\\1&-1\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}2&-1\\1&2\end{vmatrix}=-\vec{i}+3\vec{j}+5\vec{k}.$$

Теперь, используя соотношение (10.2), напишем канонические уравнения данной прямой:

$$L:\ \frac{x+3}{-1}=\frac{y+2}{3}=\frac{z}{5}.$$ ◀

§ 11. Взаимное расположение прямой и плоскости

Прямая и плоскость в пространстве могут быть параллельными, прямая может принадлежать плоскости, а также может пересекать ее в некоторой точке. Пусть плоскость P задана общим уравнением

$$P: Ax+By+Cz+D=0,\quad A^2+B^2+C^2\neq 0,$$

а прямая L — каноническими уравнениями

$$L:\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}.$$

Тогда $\vec{n}=(A, B, C)$ — вектор нормали к P, вектор $\vec{q}=(l, m, n)$ — направляющий вектор прямой L, а точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ принадлежит L.

Условие параллельности прямой L плоскости P сводится к условию ортогональности векторов $\vec{n}$ и $\vec{q}$ (рис. 11.1), заключающемся в равенстве нулю их скалярного произведения: $\vec{n}\cdot\vec{q}=0$, что в свою очередь приводит к соотношению:

$$Al+Bm+Cn=0. \tag{11.1}$$

Если к равенству (11.1) присоединить условие принадлежности точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ прямой L плоскости P, т. е. равенство

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0, \tag{11.2}$$

то система равенств (11.1) и (11.2) выражает условие принадлежности прямой L плоскости P.

Условие перпендикулярности прямой L и плоскости P равносильно условию коллинеарности векторов $\vec{n}$ и $\vec{q}$ (рис. 11.2), выражаемому равенством

$$\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}. \tag{11.3}$$

Пример 11.1. Найти значение параметра λ, при котором прямая

$$L\colon\ \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{\lambda}$$

и плоскость $P\colon 2x-y+z+5=0$ параллельны.

▶ Обозначим через $\vec{q}$ направляющий вектор прямой L, $\vec{q}=(2, 3, \lambda)$, а через $\vec{n}$ — вектор нормали к плоскости P, $\vec{n}=(1, -1, 1)$. Прямая L и плоскость P будут параллельны, если векторы $\vec{q}$ и $\vec{n}$ будут ортогональны (рис. 11.1). Поскольку последнее условие эк-

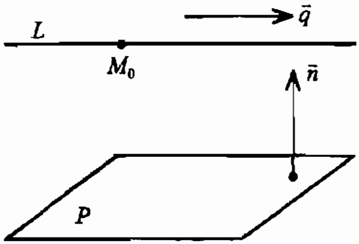


Рис. 11.1. Прямая L параллельна плоскости P

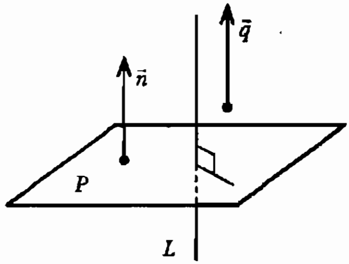


Рис. 11.2. Прямая L перпендикулярна плоскости P

вивалентно равенству $(\vec{q}, \vec{n})=0$, то для λ получаем уравнение $2\cdot 2+3\cdot(-1)+\lambda=0$, откуда находим $\lambda=-1$. ◀

Пример 11.2. Найти значения параметров λ и μ, при которых прямая L: $\frac{x+2}{1}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+1}{2}$ и плоскость $P: 2x+\lambda y+\mu z+5=0$ перпендикулярны.

▶ Пусть $\vec{q}$ – направляющий вектор прямой L, $\vec{q}=(1, 3, 2)$, а $\vec{n}$ – вектор нормали к плоскости P, $\vec{n}=(2, \lambda, \mu)$. Прямая L и плоскость P будут перпендикулярны, если векторы $\vec{q}$ и $\vec{n}$ будут коллинеарны (рис. 11.2). Из (11.3) имеем соотношения $\frac{1}{2}=\frac{3}{\lambda}=\frac{2}{\mu}$, откуда находим: $\lambda=\frac{3}{2}$, $\mu=4$. ◀

За *угол* φ между прямой L и плоскостью P, не перпендикулярной L, примем, как в стереометрии, угол между L и ее проекцией на плоскость P (рис. 11.3). Очевидно, $\varphi=0$, если прямая L принадлежит плоскости P. В случае, когда L перпендикулярна P, будем считать $\varphi=\pi/2$. Имеем

$$\sin\varphi=|\cos(\widehat{\vec{n}, \vec{q}})|=\frac{|\vec{n}\cdot\vec{q}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{q}|}=\frac{|Al+Bm+Cn|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{l^2+m^2+n^2}}. \quad (11.4)$$

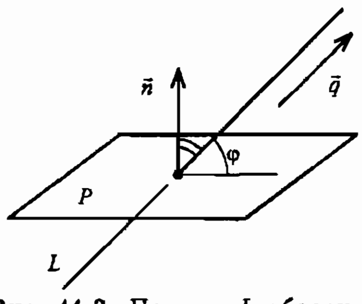


Рис. 11.3. Прямая L образует угол φ с плоскостью P

Пример 11.3. Найти угол между прямой

$$L: \frac{x+2}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+2}{-2}$$

и плоскостью P: $4x+y-z-5=0$.

▶ Вектор $\vec{n}=(4,1,-1)$ – вектор нормали к плоскости P, а $\vec{q}=(2,-1,-2)$ – направляющий вектор прямой L. Понимая угол φ между L и P в вышеописанном смысле, из формулы (11.4) имеем:

$$\sin\varphi=|\cos(\widehat{\vec{n}, \vec{q}})|=\frac{|4\cdot 2+1\cdot(-1)+(-1)\cdot(-2)|}{\sqrt{(-4)^2+1^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\varphi=\frac{\pi}{4}. \quad ◀$$

Глава 2. Кривые второго порядка

§ 1. Общее уравнение линии второго порядка. Классификация линий второго порядка

Определение 1.1. Линией второго порядка называется линия, определяемая в произвольной прямоугольной декартовой системе координат $O'x'y'$ алгебраическим уравнением второй степени, т. е. уравнением вида

$$Ax'^2 + 2Bx'y' + Cy'^2 + Dx' + Ey' + F = 0, \qquad (1.1)$$

где $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

При подходящем выборе системы координат уравнение (1.1) можно привести к одному из следующих девяти видов:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; \qquad (1.2)$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1; \qquad (1.3)$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0; \qquad (1.4)$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1; \qquad (1.5)$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0; \qquad (1.6)$$

$$y^2 = 2px; \qquad (1.7)$$

$$y^2 - a^2 = 0; \qquad (1.8)$$

$$y^2 + a^2 = 0; \qquad (1.9)$$

$$y^2 = 0. \qquad (1.10)$$

Предполагается, что $a, b, p > 0$ в каждом из уравнений (1.2) — (1.9). Уравнения (1.3) и (1.9) не задают никакого множества точек; говорят, что они определяют мнимые линии второго порядка. Уравнение (1.4) задает одну точку — начало координат. Уравнения (1.6), (1.8), (1.10) определяют пару пересекающихся прямых, пару параллельных и пару совпадающих прямых соответственно. Эти пары прямых называются *вырожденными линиями второго порядка*. Остаются три уравнения: (1.2), (1.5) и (1.7), которые определяют *невырожденные линии второго порядка* (или *невырожденные кривые второго порядка*), называемые *эллипсом, гиперболой и параболой*. Именно эти кривые и будут изучаться в настоящей главе. При этом будет решаться вторая из двух основных задач аналитической геометрии на плоскости — каждому из этих уравнений будет сопоставлена линия и с его помощью будут изучены ее свойства.

§ 2. Эллипс и его свойства

Определение 2.1. *Эллипсом* называется кривая второго порядка, определяемая в некоторой прямоугольной декартовой системе координат уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ a\geq b>0. \qquad (2.1)$$

Равенство (2.1) называется *каноническим уравнением* эллипса.

Свойства эллипса

1. Эллипс — *осесимметричная и центрально-симметричная* фигура. Осями симметрии эллипса являются оси координат, а центром симметрии — начало координат.

2. Эллипс — *ограниченная кривая. Построение эллипса.* Эллипс заключен внутри прямоугольника $D=\{(x,y):|x|\leq a,|y|\leq b\}$, а также внутри окружности $x^2+y^2=a^2$ с центром в начале координат и радиусом a (рис. 2.1).

На рис. 2.1 заштрихована та часть плоскости Oxy, в которой расположен эллипс.

Эллипс получается из рассматриваемой окружности путем ее равномерного сжатия к оси Ox с коэффициентом b/a, при этом

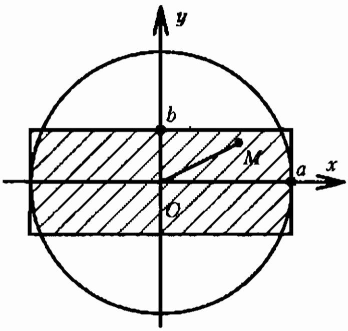


Рис. 2.1. К расположению эллипса на координатной плоскости

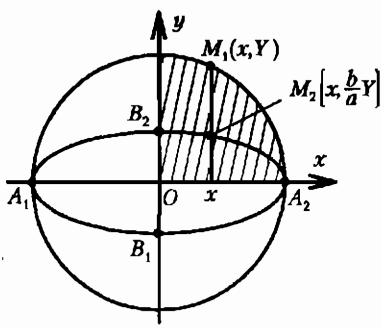


Рис. 2.2. Эллипс как фигура, получаемая при сжатии окружности ($b/a=2/5$)

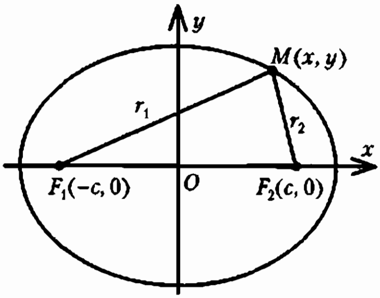


Рис. 2.3. Точки F_1 и F_2 — фокусы эллипса; r_1 и r_2 — фокальные радиусы его точки

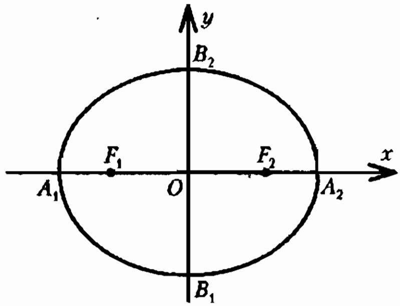


Рис. 2.4. К примеру 2.1

ордината каждой ее точки $M_1(x, Y)$ умножается на одно и то же число b/a, получающаяся при этом точка $M_2\left(x, \frac{b}{a}Y\right)$ принадлежит данному эллипсу (рис. 2.2). Построив таким образом дугу эллипса в первом квадранте ($x \geq 0$, $y \geq 0$), остальные его части получим, используя его симметрию относительно осей координат (рис. 2.2).

Как следует из уравнения (2.1), точки $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$, $B_1(0, -b)$ и $B_2(0, b)$ принадлежат эллипсу. Они называются его *вершинами*. Отрезки A_1A_2 и B_1B_2, а также их длины $2a$ и $2b$ называются *большой* и *малой осями* эллипса соответственно, а числа a и b — *большой* и *малой полуосями* (рис. 2.2).

3. *Фокусы эллипса. Свойство фокальных радиусов точки эллипса.*

Точки $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$, где $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, находящиеся на большой оси эллипса, называются его *фокусами*, а расстояния r_1 и r_2 произвольной точки эллипса $M(x, y)$ до этих точек — *фокальными радиусами* точки M (рис. 2.3).

Свойство фокальных радиусов

$$r_1 + r_2 = 2a. \tag{2.2}$$

4. *Эксцентриситет эллипса.*

Определение 2.2. Отношение расстояния между фокусами эллипса к длине его большой оси называется *эксцентриситетом* эллипса и обозначается e.

8*-1459

По определению $e = 2c/2a = c/a$, откуда следует, что $e \in [0, 1)$, так как $0 \le c < a$. Если $e = 0$, то $c = 0$ и, следовательно, $b = a$, в этом случае эллипс есть окружность с центром в начале координат и радиусом a, а оба его фокуса сливаются в один в начале координат.

Пример 2.1. Эллипс задан уравнением $16x^2 + 25y^2 = 400$. Найти его полуоси, координаты фокусов и эксцентриситет. Изобразить этот эллипс на чертеже.

► Разделим обе части уравнения эллипса на 400, получим равенство $x^2/25 + y^2/16 = 1$, сравнив которое с уравнением (2.1) заключаем, что $a^2 = 25$, $b^2 = 16$, откуда $a = 5$, $b = 4$, $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 3$. Точки $F_1(-3, 0)$, $F_2(3, 0)$ — фокусы эллипса, эксцентриситет $e = c/a = 3/5$. На рис. 2.4 изображен данный эллипс: $A_1 A_2$ — его большая ось, $A_1(-5, 0)$, $A_2(5, 0)$; B_1B_2 — малая ось; $B_1(0, -4)$, $B_2(0, 4)$. ◄

§ 3. Гипербола и ее свойства

Определение 3.1. *Гиперболой* называется кривая, определяемая в некоторой прямоугольной декартовой системе координат уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad a,\ b > 0. \tag{3.1}$$

Равенство (3.1) называется *каноническим уравнением* гиперболы.

Свойства гиперболы

1. Гипербола — *осесимметричная* и *центрально-симметричная кривая*. Осями симметрии являются оси координат, а центром симметрии — начало координат.

2. Точки гиперболы принадлежат множеству $G = \left\{(x,y):\ |x| \ge a,\ |y| < \frac{b}{a}|x|\right\}$. Гипербола — *неограниченная* кривая.

У гиперболы две бесконечные ветви, расположенные в левой и правой полуплоскостях координатной плоскости. На рис. 3.1 заштрихованы части плоскости Oxy, в которых расположены ветви гиперболы.

Из уравнения (3.1) следует, что точки $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$ принадлежат гиперболе. Отрезок A_1A_2 и его длина $2a$ называется *действительной* осью гиперболы (рис. 3.2). Гипербола не пересекает ось Oy.

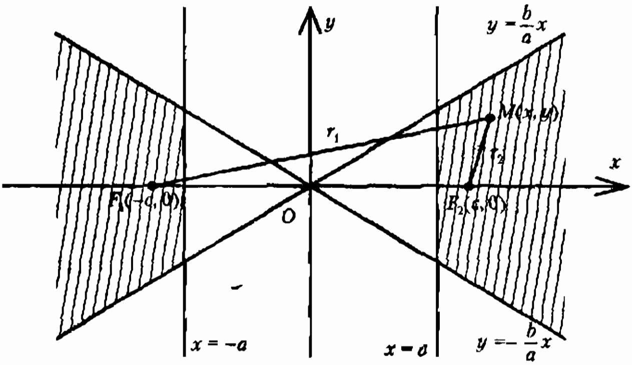


Рис. 3.1. К расположению гиперболы на координатной плоскости

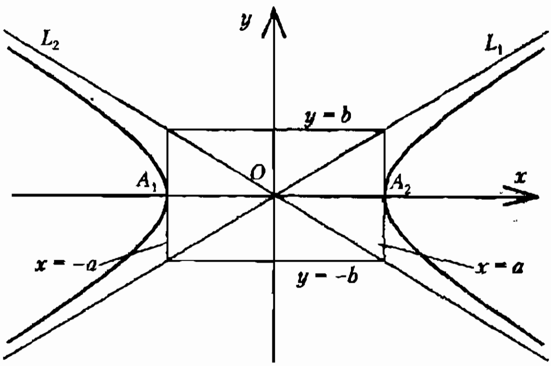


Рис. 3.2. Построение гиперболы; прямые L_1 и L_2 – асимптоты гиперболы

3. *Фокусы гиперболы. Свойство фокальных радиусов точки гиперболы.* Точки $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$, где $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, находящиеся на действительной оси гиперболы, называются ее *фокусами*, а расстояния r_1, r_2 произвольной точки $M(x, y)$ до этих точек – *фокальными радиусами* точки M (рис. 3.1).

Свойство фокальных радиусов

$$|r_1 - r_2| = 2a.$$

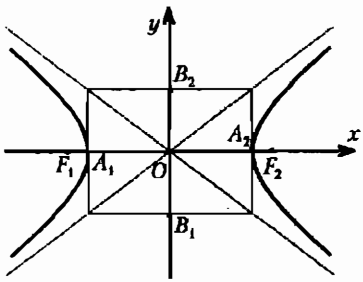


Рис. 3.3. К примеру 3.1

4. *Асимптоты гиперболы. Построение гиперболы.* Прямые L_1: $y=\frac{b}{a}x$ и L_2: $y=-\frac{b}{a}x$ играют важную роль в исследовании и построении гиперболы. По мере удаления точки $M(x, y)$ от начала координат по гиперболе эта точка приближается сколь угодно близко к одной из этих прямых (но никогда не пересекает ее (рис. 3.2 и свойство 2)). Прямые L_1 и L_2 называются ***асимптотами*** гиперболы. Они проходят через противолежащие вершины прямоугольника, ограниченного прямыми $x=\pm a$, $y=\pm b$, называемого ***основным прямоугольником*** гиперболы (рис. 3.2).

5. *Эксцентриситет гиперболы.*

Определение 3.2. Отношение расстояния между фокусами гиперболы к длине ее действительной оси называется ***эксцентриситетом*** гиперболы и обозначается e.

По определению $e=2c/2a=c/a$, откуда следует, что $e>1$, поскольку для гиперболы $c>a$.

Пример 3.1. Гипербола задана уравнением $9x^2-16y^2=144$. Найти ее полуоси, координаты фокусов, эксцентриситет, уравнения асимптот. Изобразить гиперболу на чертеже.

▶ Разделим обе части данного уравнения на 144, получим равенство $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$, сравнив которое с (3.1), заключаем, что $a^2=16$, $b^2=9$, откуда $a=4$, $b=3$, $c=\sqrt{a^2+b^2}=5$. Точки $F_1(-5, 0)$, $F_2(5, 0)$ — фокусы гиперболы, а ее эксцентриситет $e=\frac{c}{a}=\frac{5}{4}$. Асимптоты гиперболы L_1 и L_2 имеют уравнения $y=\pm\frac{3}{4}x$. Основной прямоугольник гиперболы образован прямыми $x=\pm 4$, $y=\pm 3$, прямые L_1 и L_2 проходят через вершины этого прямоугольника (рис. 3.3). На этом рисунке изображена данная гипербола, ее действительная ось A_1A_2, $A_1(-5, 0)$, $A_2(5, 0)$, отрезок B_1B_2, называемый ***мнимой осью***, $B_1(0, -4)$, $B_2(0, 4)$, точки F_1, F_2 — фокусы гиперболы. ◀

§ 4. Парабола и ее свойства

Определение 4.1. *Параболой* называется кривая второго порядка, определяемая в некоторой прямоугольной декартовой системе координат уравнением

$$y^2 = 2px, \quad p > 0. \tag{4.1}$$

Равенство (4.1) называется *каноническим уравнением* параболы.

Свойства параболы

1. Парабола — *осесимметричная кривая.* Ось Ox является осью симметрии параболы. Других осей симметрии и центра симметрии парабола не имеет.

2. Парабола *вся расположена в правой полуплоскости и является неограниченной кривой.* Как следует из уравнения (4.1), начало координат $O(0, 0)$ принадлежит параболе. Эта точка называется вершиной параболы.

3. Фокус и директриса параболы. Точка $F(p/2, 0)$, находящаяся на оси параболы, называется *фокусом*, а прямая D: $x = -p/2$ — *директрисой.*

Расстояние r от любой точки параболы до фокуса F называется *фокальным радиусом* этой точки. Для фокального радиуса r справедливо равенство

$$r = x + p/2, \tag{4.2}$$

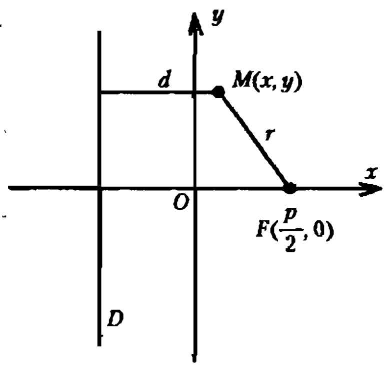


Рис. 4.1. Фокус и директриса параболы

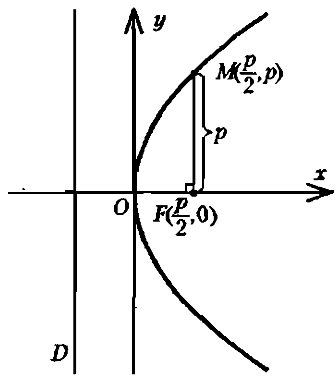


Рис. 4.2. Построение параболы, параметр параболы

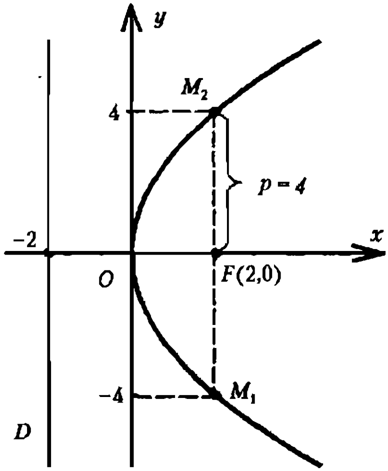


Рис. 4.3. К примеру 4.1

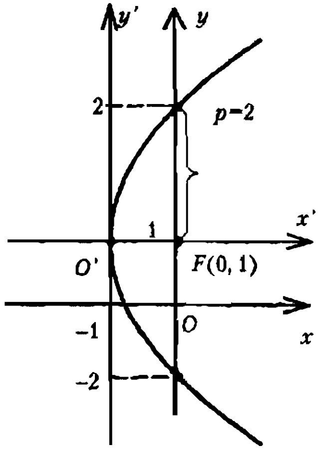


Рис. 4.4. К примеру 4.2

где x — абсцисса точки параболы. Отношение фокального радиуса r к расстоянию d от данной точки параболы до директрисы D (рис. 4.1) равно 1, т. е. $r/d=1$.

4. *Параметр параболы. Построение параболы.* Число p из уравнения (4.1) называется *параметром* параболы. При $x=p/2$ из (4.2) имеем

$$r=p. \tag{4.3}$$

Таким образом, параметр параболы равен фокальному радиусу точки параболы, расположенной на перпендикуляре, восставленном из ее фокуса к оси Ox (это свойство вместе с предыдущими позволяет построить параболу (рис. 4.2)).

Пример 4.1. Парабола задана уравнением $y^2=8x$. Найти ее параметр, координаты фокуса, уравнение директрисы. Изобразить эту параболу на чертеже.

▶ Сравнив данное уравнение с (4.1), имеем $8=2p$, откуда $p=4$. Точка $F(2, 0)$ — фокус параболы, а $x=-2$ — уравнение ее директрисы D. Построим на чертеже точки $M_1(2, -4)$ и $M_2(2, 4)$. Теперь проведем параболу через эти точки и ее вершину — начало координат (рис. 4.3). ◀

Пример 4.2. **Найдите координаты фокуса параболы $y^2-2y=4x+3$ и постройте эту кривую.**

▶ В левой части уравнения выделим полный квадрат: $y^2-2y+1=4x+4$ или $(y-1)^2=4(x+1)$, и перейдем к новым прямоугольным координатам x', y' по формулам $x'=x+1$, $y'=y-1$, получим: $y'^2=4x'$. В системе координат $O'x'y'$ — это каноническое уравнением параболы вида (4.1). Имеем $4=2p$, откуда $p=2$. В новой системе координат фокус параболы имеет координаты $(1, 0)$, а его старые координаты можно найти из формул перехода: $F(0, 1)$. Вершина параболы находится в точке O', следовательно, в системе Oxy она имеет координаты $(-1, 1)$. Далее строим параболу, используя свойство параметра (рис. 4.4). ◀

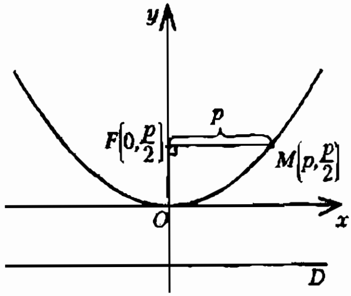


Рис. 4.5. Парабола, определяемая уравнением $x^2=2py$, $p>0$

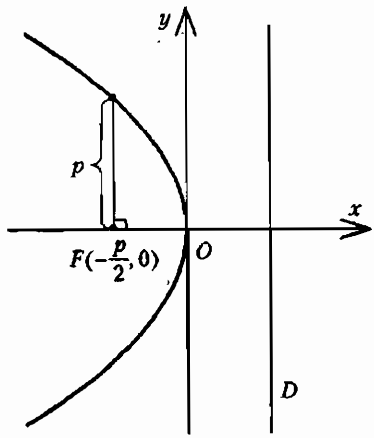


Рис. 4.6. Парабола, определяемая уравнением $y^2=-2px$, $p>0$

Замечание 4.1. Наряду с параболой, определяемой уравнением (4.1), рассмотрим параболу, задаваемую уравнением

$$x^2=2py, \quad p>0. \qquad (4.4)$$

Ось симметрии такой параболы — ось Oy, ее фокус находится в точке $F(0, p/2)$, а директриса D имеет уравнение $y=-p/2$ (рис. 4.5). В этой параболе читатель, очевидно, узнает график квадратной функции $y=ax^2$ ($a>0$) из курса элементарной математики ($a=\frac{1}{2}p$).

Замечание 4.2. Ветви парабол, определяемых уравнениями (4.1) и (4.4), направлены вправо и вверх соответственно. Параболы с противоположным направлением ветвей определяются уравнениями

$$y^2=-2px, \quad p>0, \qquad (4.5)$$

$$x^2=-2py, \quad p>0. \qquad (4.6)$$

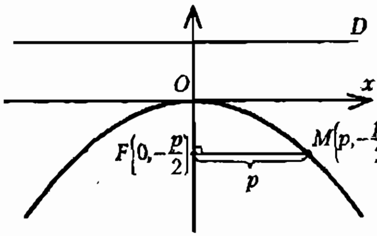


Рис. 4.7. Парабола, определяемая уравнением $x^2 = -2py$, $p > 0$

Осью симметрии параболы, определяемой уравнением (4.5), является ось Ox, ее фокус находится в точке $F(-p/2, 0)$, а директриса D имеет уравнение D: $x = p/2$ (рис. 4.6). Осью симметрии параболы, определяемой уравнением (4.6), является ось Oy, ее фокус находится в точке $F(0, -p/2)$, а директриса D имеет уравнение D: $y = p/2$ (рис. 4.7).

Пример 4.3. Найти параметр, координаты фокуса и вершины, а также уравнение директрисы параболы $x^2 - 2x = -4y - 3$.

▶ В левой части уравнения выделим полный квадрат: $(x-1)^2 = -4(y+1)$. Перейдя к новым координатам x', y' по формулам $x' = x - 1, y' = y + 1$, получим уравнение: $x'^2 = -4y'$, которое в системе координат $O'x'y'$ имеет вид (4.6). Поскольку $4 = 2p$, то $p = 2$. Координаты фокуса параболы в новой системе координат есть (0, –1), а его старые координаты можно найти из формул перехода: $F(1, -2)$. Вершина параболы находится в точке O', следовательно, в системе Oxy она имеет координаты (1, –1). Уравнение директрисы D: $y = 0$. ◀

ГЛАВА 3. ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§ 1. Общее уравнение поверхности второго порядка. Классификация поверхностей второго порядка

Определение 1.1. *Поверхностью второго порядка* называется множество точек, координаты которых в некоторой прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ удовлетворяют алгебраическому уравнению второй степени

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Eyz+Fxz+Gx+Hy+Iz+J=0, \quad (1.1)$$

где $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J \in \mathbf{R}$, а $A^2+B^2+C^2+D^2+E^2+F^2 \neq 0$.

Можно показать, что при надлежащем выборе прямоугольной системы координат множество точек, определяемое уравнением (1.1), будет задано одним из нижеперечисленных уравнений:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1; \quad (1.2)$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1; \quad (1.3)$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1; \quad (1.4)$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0; \quad (1.5)$$

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z, \quad p,\ q>0; \quad (1.6)$$

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z, \quad p,\ q>0; \quad (1.7)$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1; \quad (1.8)$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1; \quad (1.9)$$

$$y^2=2px; \quad (1.10)$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0; \quad (1.11)$$

$$x^2-a^2=0; \quad (1.12)$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0; \quad (1.13)$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0; \quad (1.14)$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1; \quad (1.15)$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1; \quad (1.16)$$

$$\frac{x^2}{a^2}=-1. \quad (1.17)$$

Последние три из этих уравнений задают пустые множества точек, уравнение (1.13) задает ось Oz ($x=0$, $y=0$, $z\in \mathbf{R}$), уравнение (1.14) — начало координат ($x=0$, $y=0$, $z=0$). Уравнения (1.11) и (1.12) определяют пару пересекающихся и пару параллельных (или слипшихся) плоскостей соответственно. Геометрические образы, задаваемые уравнениями (1.2) — (1.10), называются *невырожденными поверхностями второго порядка*, а уравнения (1.2) — (1.10) — их *каноническими уравнениями*. Форма и некоторые свойства этих поверхностей, вытекающие из их уравнений, изучаются в следующих параграфах с помощью так называемого *метода параллельных сечений*.

§ 2. Эллипсоид

Определение 2.1. *Эллипсоидом* называется поверхность второго порядка, определяемая в некоторой прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ уравнением вида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ a\geq b\geq c>0. \qquad (2.1)$$

Уравнение (2.1) называется *каноническим уравнением* эллипсоида. Эллипсоид обладает центральной симметрией относительно начала координат и симметрией относительно координатных плоскостей.

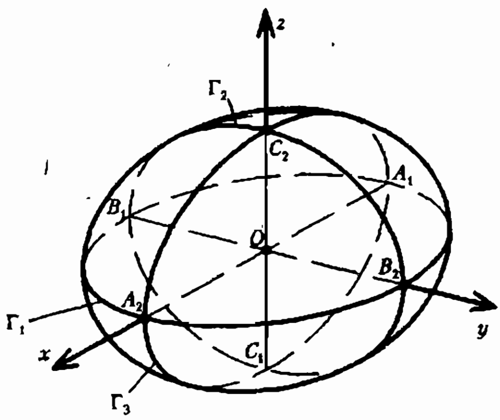


Рис. 2.1. Эллипсоид

Эллипсоид — *ограниченная* поверхность. Он находится внутри шара радиусом a с центром в начале координат.

В сечении эллипсоида плоскостью $z=0$ получается эллипс Γ_1 с полуосями a и b (рис. 2.1), а сечения эллипсоида координатными плоскостями $x=0$ и $y=0$ являются эллипсами Γ_2 и Γ_3 с полуосями b, c и a, c соответственно (рис. 2.1). Числа a, b, c называются ***полуосями*** эллипсоида, а точки $A_1(-a, 0, 0)$, $A_2(a, 0, 0)$, $B_1(0, -b, 0)$, $B_2(0, b, 0)$, $C_1(0, 0, -c)$, $C_2(0, 0, c)$ — его ***вершинами*** (рис. 2.1).

§ 3. Гиперболоиды

Определение 3.1. Поверхности второго порядка, определяемые в некоторой прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ уравнениями

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \tag{3.1}$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \tag{3.2}$$

$(a \geq b > 0,\ \ c > 0)$, называются ***однополостным*** и ***двуполостным*** гиперболоидами соответственно.

Характер симметрии этих поверхностей такой же, как у эллипсоида. Числа a, b, c называются их ***полуосями***.

1°. Однополостный гиперболоид. В сечении плоскостью $z=0$ получаем так называемый *горловой эллипс* $\Gamma_1: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ с полуосями a и b, а в сечении плоскостями $x=0$ и $y=0$ — гиперболы $\Gamma_2: \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ и $\Gamma_3: \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ (рис. 3.1).

2°. Двуполостный гиперболоид. Поверхность расположена вне части пространства, лежащей между плоскостями $z=\pm c$, где $|z|<c$. Точки $C_1(0, 0, -c)$ и $C_2(0, 0, c)$ называются ***вершинами*** двуполостного гиперболоида (рис. 3.2).

Сечения данной поверхности координатными плоскостями $x=0$ и $y=0$ являются гиперболами $\Gamma_4: \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$; $\Gamma_5: \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ (рис. 3.2).

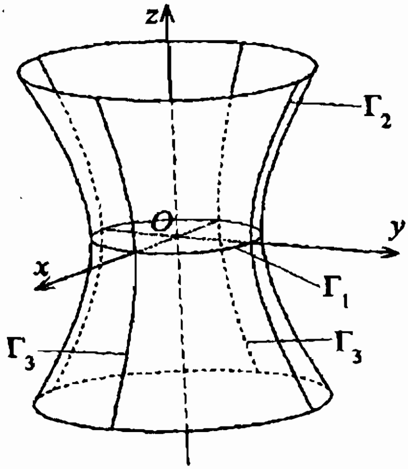


Рис. 3.1. Однополостный гиперболоид

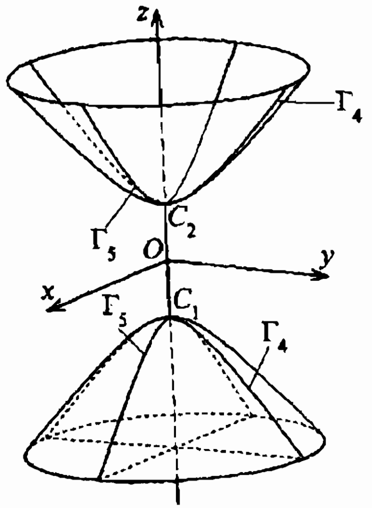


Рис. 3.2. Двуполостный гиперболоид

§ 4. Конус второго порядка

Определение 4.1. Алгебраическая поверхность n-го порядка называется *конической поверхностью* (*конусом*), если в некоторой прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ она может быть задана уравнением вида

$$F(x, y, z) = 0, \qquad (4.1)$$

где $F(x, y, z) = 0$ — многочлен относительно переменных x, y, z такой, что сумма показателей степени при x, y, z в каждом его члене постоянна и равна n:

$$F(x,y,z) = A_1 x^{k_1} y^{l_1} z^{m_1} + \ldots + A_s x^{k_s} y^{l_s} z^{m_s},$$

$$k_1 + l_1 + m_1 = \ldots = k_s + l_s + m_s = n,\ k_i,\ l_i,\ m_i, n \in N, \forall i = 1,\ 2,\ \ldots,\ s.$$

Начало системы координат $O(0, 0, 0)$, очевидно, принадлежит конусу. Если точка $M(x, y, z)$ лежит на конусе (рис. 4.1), то прямая, проходящая через точки O и M, лежит на этом конусе (рис. 4.1). Любая коническая поверхность, определяемая уравнением вида (4.1), образована прямыми, проходящими через одну и ту же точку O (на-

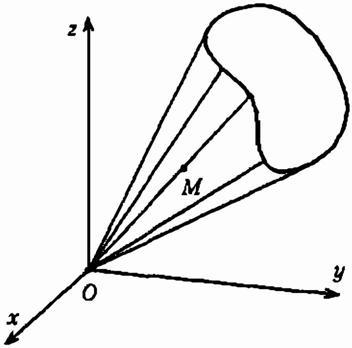


Рис. 4.1. К понятию конической поверхности

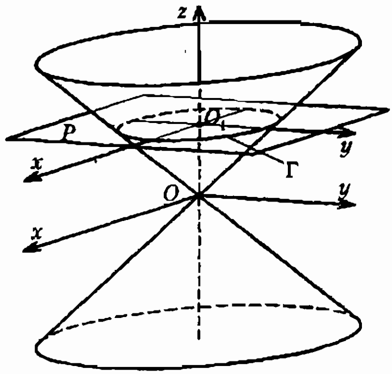


Рис. 4.2. Конус второго порядка

чало координат). Эти прямые называются ее образующими, а точка O — ее вершиной.

Определение 4.2. Поверхность второго порядка, определяемая в некоторой прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0, \quad a, b, c>0, \tag{4.2}$$

называется *конусом второго порядка.*

Характер симметрии этой поверхности такой же, как у эллипсоида. Ее сечение плоскостью $P: z=z_0$ ($z_0 \neq 0$) представляет собой эллипс Г (рис. 4.2). *Образующими* конуса второго порядка, определяемого уравнением (4.2), являются прямые, проходящие через начало координат — *вершину* этого конуса и пересекающие эллипс Г, называемый его *направляющей.*

§ 5. Параболоиды

Определение 5.1. Поверхности второго порядка, определяемые в некоторой прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ уравнениями

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z, \quad p, q>0, \tag{5.1}$$

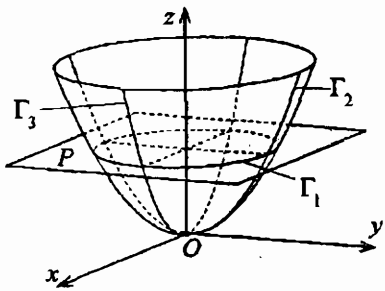


Рис. 5.1. Эллиптический параболоид

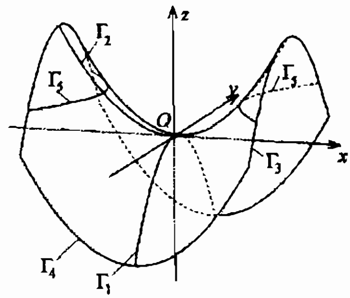


Рис. 5.2. Гиперболический параболоид

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z, \quad p, q > 0, \tag{5.2}$$

называются *эллиптическим* и *гиперболическим* параболоидами соответственно.

Данные поверхности симметричны относительно координатных плоскостей Oxz и Oyz. В отличие от ранее изученных поверхностей, эллиптические и гиперболические параболоиды не обладают ни центральной симметрией, ни симметрией относительно плоскости Oxy.

1°. Эллиптический параболоид. При принятом предположении $p, q > 0$ вся поверхность расположена в полупространстве, где $z \geq 0$. Начало координат принадлежит эллиптическому параболоиду и называется его *вершиной*.

Сечение эллиптического параболоида плоскостью $P\colon z = z_0$ $(z_0 > 0)$ – эллипс Γ_1 с полуосями $\sqrt{2pz_0}$ и $\sqrt{2qz_0}$ (рис. 5.1), а в сечении координатными плоскостями $x = 0$ и $y = 0$ имеем параболы $\Gamma_2\colon y^2 = 2qz$ и $\Gamma_3\colon x^2 = 2pz$ (рис. 5.1).

2°. Гиперболический параболоид. Сечения этой поверхности плоскостями $x = 0$ и $y = 0$ – параболы $\Gamma_1\colon y^2 = -2qz$ и $\Gamma_2\colon x^2 = 2pz$ (рис. 5.2). Сечение плоскостью $x = x_0$ $(x_0 \neq 0)$ – парабола Γ_3 с вершиной на параболе Γ_2, а сечение плоскостью $y = y_0$ $(y_0 \neq 0)$ – парабола Γ_4 с вершиной на параболе Γ_1 (рис. 5.2). Параболы Γ_3 и Γ_4 можно получить путем параллельного переноса парабол Γ_1 и Γ_2 соответственно. Название «гиперболический параболоид» объясняется тем, что в его сечении плоскостью $z = z_0$ $(z_0 \neq 0)$ образуется гипербола Γ_5 (рис. 5.2).

§ 6. Цилиндры второго порядка

Определение 6.1. Алгебраическая поверхность n-го порядка называется *цилиндрической поверхностью* (или *цилиндром*), если в некоторой прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ она может быть задана уравнением вида

$$F(x, y) = 0, \tag{6.1}$$

где $F(x, y)$ — многочлен n-й степени относительно переменных x, y, не содержащий переменной z. Кривая Г, определяемая уравнением (6.1) в плоскости Oxy, называется *направляющей* этого цилиндра (рис. 6.1).

Если точка $M(x, y, 0)$ принадлежит Г (и, следовательно, данному цилиндру), то все точки $M'(x, y, z)$, где z — любое вещественное число, тоже ему принадлежат, ибо координаты M' удовлетворяют (6.1). Все эти точки расположены на прямой L, проходящей через точку $M(x, y, 0)$ параллельно оси Oz (рис. 6.1). Итак, данный цилиндр образован прямыми, параллельными оси Oz и пересекающими его направляющую Г. Эти прямые называются его *образующими*.

Замечание 6.1. Цилиндры с образующими, параллельными осям Ox и Oy, определяются уравнениями вида $G(y, z) = 0$ и $H(x, z) = 0$.

Определение 6.2. Поверхности второго порядка, определяемые в некоторой прямоугольной декартовой системе координат уравнениями вида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a,\ b > 0, \tag{6.2}$$

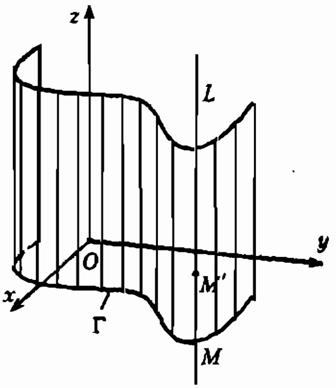


Рис. 6.1. К понятию цилиндрической поверхности

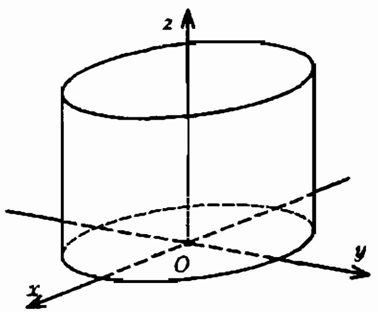


Рис. 6.2. Эллиптический цилиндр

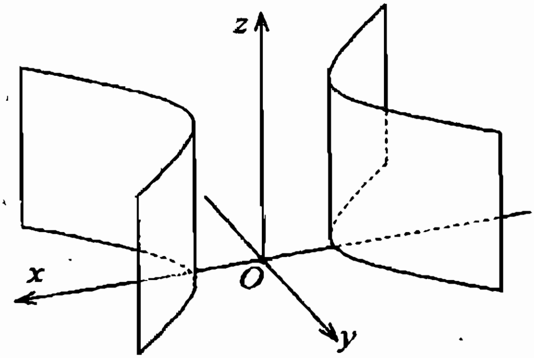


Рис. 6.3. Гиперболический цилиндр

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \quad a, b>0, \tag{6.3}$$

$$y^2=2px, p>0, \tag{6.4}$$

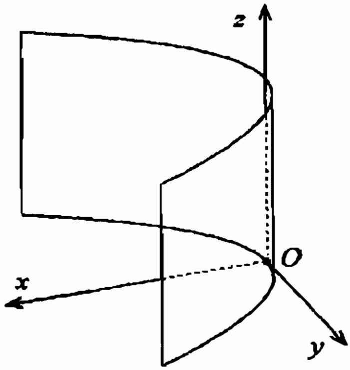


Рис. 6.4. Параболический цилиндр

называются *цилиндрами второго порядка*, или эллиптическим, гиперболическим и параболическим цилиндрами соответственно.

Направляющими этих цилиндров служат эллипс, гипербола и парабола, определяемые уравнениями (6.2) – (6.4) в плоскости Oxy. Их образующие, как было установлено выше, параллельны оси Oz (рис. 6.2 – 6.4).

§ 7. Поверхности вращения второго порядка

Определение 7.1. Алгебраическая поверхность называется *поверхностью вращения*, если в некоторой прямоугольной декартовой системе координат она может быть задана уравнением вида

$$F(x^2+y^2, z)=0, \tag{7.1}$$

где $F(x^2+y^2, z)$ – многочлен от x^2+y^2, z.

Замечание 7.1. Данное определение является конструктивным в том смысле, что позволяет выделить поверхности вращения по виду их уравнений из множества всех алгебраических поверхностей. Так, например, в соответствии с этим определением уравнения $2(x^2+y^2)+z=0$ и $(x^2+y^2)^2+4z^2=1$ задают алгебраические поверхности вращения.

Теорема 7.1. Поверхность S, определяемая уравнением (7.1), образуется при вращении вокруг оси Oz кривой Г, являющейся линией пересечения S с плоскостью Oyz.

▶ Пусть $M_0(0, y_0, z_0)$ – любая точка Г (рис. 7.1). В силу (7.1) имеем

$$F(y_0^2, z_0)=0. \tag{7.2}$$

Проведем через M_0 плоскость $P:\ z=z_0$, перпендикулярную оси Oz, и рассмотрим в ней окружность с центром в точке $O_1(0, 0, z_0)$ и радиусом $|O_1M_0|=|y_0|$ (рис. 7.1). Пусть точка $M(x, y, z_0)$ – произвольная точка этой окружности. Так как $|O_1M|^2=|O_1M_0|^2$, то $x^2+y^2=y_0^2$. Подставляя координаты точки M в уравнение (7.1), с учетом последнего равенства и равенства (7.2) имеем

$$F(x^2+y^2, z_0)=F(y_0^2, z_0)=0.$$

Таким образом, показано, что координаты произвольной точки M упомянутой окружности удовлетворяют уравнению (7.1). Следовательно, эта точка принадлежит (S). Тем самым установлено, что поверхность S образуется при вращении линии Г вокруг оси Oz (рис. 7.1). ◀

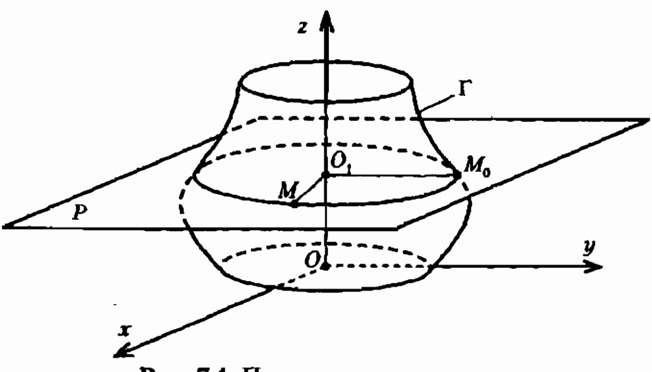


Рис. 7.1. Поверхность вращения

Следствие из теоремы 7.1. Алгебраические поверхности, определяемые уравнениями $G(x, y^2+z^2)=0$ и $H(x^2+z^2, y)=0$, образуются при вращении некоторых кривых вокруг оси Ox и оси Oy соответственно.

Из вышеприведенного определения следует, что уравнение поверхности вращения второго порядка в некоторой прямоугольной декартовой ситеме координат имеет вид

$$A(x^2+y^2)+Cz^2+Iz+J=0. \tag{7.3}$$

Сопоставляя равенство (7.3) с каноническими уравнениями эллипсоида, гиперболоидов, конуса второго порядка, эллиптического параболоида и эллиптического цилиндра из § 2—6, заключаем, что эти поверхности являются поверхностями вращения при условии $p=q$ для эллиптического параболоида и $a=b$ для всех остальных поверхностей. Сопоставление этого равенства с цилиндров из § 6 приводит к выводу, что эти поверхности не могут быть поверхностями вращения ни при каких значениях констант. Итак, уравнения

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1; \ \frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=\pm 1,$$

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0; \ \frac{x^2+y^2}{p}=2z \text{ и } \frac{x^2+y^2}{a^2}=1$$

определяют алгебраические поверхности вращения второго порядка, а именно: эллипсоид вращения, гиперболоиды вращения, конус вращения второго порядка (или прямой круговой конус), параболоид вращения (или круговой параболоид) и цилиндр вращения второго порядка (или прямой круговой цилиндр) соответственно. Каждая из этих поверхностей образуется при вращении вокруг оси Oz кривой, являющейся пересечением данной поверхности с плоскостью Oyz. Так, например, вышеуказанный эллипсоид вращения образуется при вращении вокруг оси Oz линии Γ_2 (рис. 2.1).

Дополнение к разделам 2—3. «Векторная алгебра» и «Аналитическая геометрия»

Характеристика раздела и требования к усвоению тем раздела

А. Общая характеристика раздела

Элементы векторной алгебры и аналитической геометрии изучены в школе. Векторный и координатный методы решения геометрических задач, развитые здесь далее, — важнейшие в математическом анализе и его приложениях.

А1. Темы разделов. **1.** Векторная алгебра. **2.** Аналитическая геометрия на плоскости. **3.** Аналитическая геометрия в пространстве.

А2. Базисные понятия. **1.** Геометрический вектор. **2.** Базис на плоскости и в пространстве. **3.** Декартова прямоугольная система координат. **4.** Полярная система координат. **5.** Координаты точки и вектора. **6.** Уравнение поверхности в пространстве. **7.** Линии и поверхности 1 и 2-го порядков.

А3. Основные задачи. **1.** Выполнение операций над векторами. **2.** Изучение взаимного расположения векторов. **3.** Построение уравнений прямых и плоскостей по различным данным. **4.** Исследование взаимного расположения прямых и плоскостей. **5.** Построение кривых и поверхностей 2-го порядка, цилиндрических поверхностей и поверхностей вращения по их уравнениям. **6.** Построение уравнений кривых и поверхностей 2-го порядка по различным данным.

А4. Базисные методы решения основных задач. **1.** Использование типовых задач и готовых формул аналитической геометрии. **2.** Использование векторной алгебры. **3.** Преобразование системы координат при исследовании уравнений. **4.** Использование канонических уравнений кривых и поверхностей 2-го порядка. **5.** Метод сечений в исследовании формы и расположения поверхностей 2-го порядка по их уравнениям.

В. Знания и умения, которыми должен владеть студент

В1. Знания на уровне понятий, определений, описаний, формулировок

Раздел 2. Векторная алгебра.

1. Понятие геометрического вектора. Сложение и вычитание векторов, умножение вектора на скаляр, свойства линейных операций над векторами.

2. Линейная зависимость и линейная независимость векторов.

3. Базис на прямой, на плоскости и в пространстве. Декартова прямоугольная система координат. Координаты вектора.

4. Скалярное произведение векторов.

5. Векторное произведение векторов.

6. Смешанное произведение векторов.

Раздел 3. Аналитическая геометрия.

1. Различные уравнения прямой на плоскости (типовые задачи по составлению уравнения прямой).

2. Уравнение пучка прямых.

3. Кривые второго порядка — эллипс, гипербола, парабола (канонические уравнения).

4. Общее уравнение кривых 2-го порядка.

5. Полярная система координат, ее связь с декартовой.

6. Плоскость. Различные уравнения плоскости (типовые задачи по составлению уравнения плоскости).

1. Цилиндрические поверхности.

2. Поверхности вращения.

3. Поверхности 2-го порядка. Метод сечений.

B2. Знания на уровне доказательств и выводов

1. Необходимое и достаточное условие линейной зависимости системы ненулевых векторов.

2. Единственность разложения вектора по базису.

3. Свойства скалярного произведения; вычисление скалярного произведения через координаты векторов.

4. Свойства векторного произведения (выборочно); вычисление векторного произведения через координаты векторов.

5. Свойства смешанного произведения; геометрический смысл; вычисление смешанного произведения через координаты векторов.

6. Уравнение прямой с угловым коэффициентом.

7. Общее уравнение прямой на плоскости; его исследование.

8. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки.

9. Угол между прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности прямых.

10. Вывод канонического уравнения эллипса.

11. Плоскость. Общее уравнение плоскости.

12. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору.

13. Канонические и параметрические уравнения прямой в пространстве.

В3. Умения в решении задач

Студент должен уметь:

1) составить уравнение прямой, проходящей через две заданные точки, через одну точку в заданном направлении (на плоскости и в пространстве);

2) составить уравнение плоскости, проходящей через заданную точку перпендикулярно данному вектору;

3) находить углы между прямыми и плоскостями;

4) находить сумму (разность) векторов, их скалярное, векторное и смешанное произведения;

5) строить кривые 2-го порядка, заданные каноническими уравнениями;

6) строить (по точкам) стандартные кривые, заданные уравнениями в полярных координатах;

7) делать приближенные чертежи поверхностей 2-го порядка, заданных каноническими уравнениями;

8) делать приближенные чертежи цилиндрических поверхностей вида $f(x, y)=0$, $f(x, z)=0$, $f(y, z)=0$ и поверхностей вращения.

С. Образцы зачетных (экзаменационных) задач

1. Даны векторы $\vec{a}=-5\vec{i}+2\vec{j}-7\vec{k}$, $\vec{b}=3\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$. Найдите: а) проекцию вектора $\vec{a}$ на направление вектора $\vec{b}$; б) косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$; в) площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

2. Даны четыре точки: $A(1,-1,3)$, $B(0,7,9)$, $C(5,-4,1)$, $D(2,-2,3)$. Найдите объем тетраэдра $ABCD$.

3. На плоскости Oxy даны прямая L: $x-2y+2=0$ и точка $A(2,-1)$. Найдите:

а) проекцию точки A на прямую L; б) уравнение прямой, проходящей через точку A параллельно прямой L; в) расстояние от точки A до прямой L.

4. Даны плоскость P: $3x-2y+7=0$ и точка $A(2,-1,3)$. Найдите проекцию точки A на плоскость P.

5. Постройте кривую $4x^2-2x+y^2-1=0$.

6. Постройте поверхности, определенные следующими уравнениями:

а) $x=3$; б) $x^2=4(x+y)$; в) $x^2+y^2-z^2=-1$.

Ответы к образцам зачетных (экзаменационных) задач

1. а) $-24/\sqrt{11}$; **б)** $-24/(\sqrt{78}\cdot\sqrt{11})$; **в)** $\sqrt{282}$. **2.** 10/3. **3. а)** (4/5; 7/5); **б)** $x-2y-4=0$; **в)** $6/\sqrt{5}$. **4.** (–19/13; 17/13; 3). **5.** Эллипс с центром $C(1/4;\ 0)$. Оси симметрии эллипса параллельны координатным осям. Длины полуосей: $\sqrt{5}/4$, $\sqrt{5}/2$. **6. а)** плоскость, перпендикулярная оси Ox и отсекающая от нее отрезок, равный 3; **б)** параболический цилиндр с образующими, параллельными оси Oz; **в)** двуполостный гиперболоид вращения. Ось гиперболоида – ось Oz.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Боревич З.И.* Определители и матрицы. СПб.: Лань, 2004.

2. *Головина Л.И.* Линейная алгебра и некоторые ее приложения. М.: Наука, 1985.

3. *Беклемишев Д.В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Физматлит, 2007.

4. *Ильин В.А.*, *Позняк Э.Г.* Аналитическая геометрия. М.: Физматлит, 2007.

5. Сборник задач по математике для втузов: в 4 ч. / под ред. А. В. Ефимова, А. С. Поспелова. Ч. 1 [4-е изд., перераб. и доп.]. М.: Физматлит, 2004.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие 3
Введение к курсу математики 4

Раздел 1. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА 7

Глава 1. Определители и системы линейных уравнений 8

§ 1. Системы линейных уравнений. Основные понятия. Метод Гаусса 8
§ 2. Определители 2 и 3-го порядков 14
§ 3. Определители высших порядков 22

Глава 2. Матрицы и действия с ними 29

§ 1. Линейные операции с матрицами и их свойства 29
§ 2. Операция умножения матриц и ее свойства 32
§ 3. Операция транспонирования матриц и ее свойства 34
§ 4. Обратная матрица 35
§ 5. Понятие о ранге матрицы. Ранг ступенчатой матрицы 39

Глава 3. Общая теория линейных систем 42

§ 1. Крамеровские системы линейных уравнений 42
§ 2. Решение произвольных систем линейных уравнений 46
§ 3. Однородные системы линейных уравнений 55
Дополнение к разделу 1 «Линейная алгебра» 58

Раздел 2. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА 61

Глава 1. Линейные операции над векторами 62

§ 1. Понятие вектора. Равные векторы. Коллинеарные и компланарные векторы 62
§ 2. Операция сложения векторов и ее свойства 63
§ 3. Операция умножения вектора на число и ее свойства 64
§ 4. Понятие линейной зависимости и линейной независимости системы векторов 66
§ 5. Геометрический смысл линейной зависимости векторов 67
§ 6. Базис и координаты вектора. Прямоугольная декартова система координат 69
§ 7. Полярная система координат 73
§ 8. Задача о делении отрезка в данном отношении 75

Глава 2. Операции умножения векторов 77

§ 1. Проекция вектора на ось и ее свойства 77
§ 2. Скалярное произведение двух векторов 78
§ 3. Векторное произведение двух векторов 81
§ 4. Смешанное произведение векторов 83

§ 5. Векторное и смешанное произведения векторов, заданных разложениями в прямоугольном базисе 85

Раздел 3. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ 88

Глава 1. Геометрия прямых и плоскостей 88

§ 1. Понятие об уравнении плоской линии. Алгебраические линии. Теорема об инвариантности порядка 88
§ 2. Прямая как линия первого порядка. Общее управление прямой на плоскости. Уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно заданному вектору 91
§ 3. Различные виды задания прямой на плоскости 92
§ 4. Взаимное расположение двух прямых на плоскости. Вычисление угла между двумя прямыми 96
§ 5. Расстояние от точки до прямой на плоскости 97
§ 6. Понятие об уравнении поверхности. Алгебраические поверхности. Теорема об инвариантности порядка 98
§ 7. Плоскость как поверхность первого порядка. Общее уравнение плоскости. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно заданному вектору 99
§ 8. Расстояние от точки до плоскости 102
§ 9. Уравнения линии в пространстве 103
§ 10. Различные виды уравнений прямой в пространстве 106
§ 11. Взаимное расположение прямой и плоскости 110

Глава 2. Кривые второго порядка 113

§ 1. Общее уравнение линии второго порядка. Классификация линий второго порядка 113
§ 2. Эллипс и его свойства 114
§ 3. Гипербола и ее свойства 116
§ 4. Парабола и ее свойства 119

Глава 3. Поверхности второго порядка 123

§ 1. Общее уравнение поверхности второго порядка. Классификация поверхностей второго порядка 123
§ 2. Эллипсоид 124
§ 3. Гиперболоиды 125
§ 4. Конус второго порядка 126
§ 5. Параболоиды 127
§ 6. Цилиндры второго порядка 129
§ 7. Поверхности вращения второго порядка 130
Дополнение к разделам 2–3 «Векторная алгебра» и «Аналитическая геометрия» 133

ЛИТЕРАТУРА 137

СОДЕРЖАНИЕ 138

В. И. Антонов, М. В. Лагунова, Н. И. Лобкова,
Ю. Д. Максимов, В. М. Семёнов, Ю. А. Хватов

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Опорный конспект

Книга представляет собой учебное пособие по курсу линейной алгебры и аналитической геометрии. В ней собраны и объяснены базовые понятия, определения и формулировки, а также содержатся разобранные примеры, типовые задачи и вопросы для самопроверки.

Учебное пособие предназначено для начального и быстрого ознакомления с курсом линейной алгебры и аналитической геометрии, а также для повторения и закрепления ранее изученного материала.

Для студентов и преподавателей вечерних, заочных и дневных отделений как технических, так и экономических вузов.

• ПРОСПЕКТ •
Издательство «ПРОСПЕКТ»
(495) 967-15-72
e-mail: mail@prospekt.org
www.prospekt.org