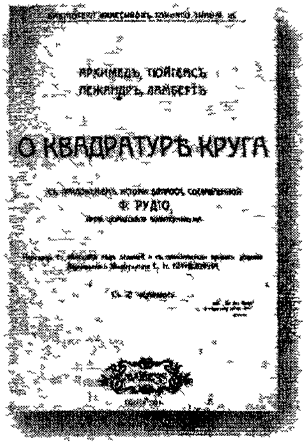
АРХИМЕД
ГЮЙГЕНС
ЛЕЖАНДР
ЛАМБЕРТ

О квадратуре круга

УРСС

АРХИМЕД • ГЮЙГЕНС • ЛЕЖАНДР • ЛАМБЕРТ

О квадратуре круга


АРХИМЕДЪ, ГЮЙГЕНСЪ
ЛЕЖАНДРЪ, ЛАМБЕРТЪ

О КВАДРАТУРѢ КРУГА

Ф. РУДІО,

С приложением истории вопроса, составленной
Ф. Рудио, проф. Цюрихского политехникума

Перевод с немецкого под редакцией
и с примечаниями приват-доцента
Харьковского Университета ***С. Н. Бернштейна***

Издание второе, стереотипное

УРСС
Москва • 2003

ББК 22.1г

Архимед, Гюйгенс, Лежандр, Ламберт

О квадратуре круга: Пер. с нем. под ред. и с прим. С. Н. Бернште[illegible] с прилож. Ф. Рудио. Изд. 2-е, стереотипное. — М.: Едиториал У[illegible] 2003. — 168 с.

ISBN 5-354-00218-4

В настоящей книге вниманию читателя представляются клас[illegible]ские сочинения Архимеда, Гюйгенса, Лежандра и Ламберта, сыгра[illegible]е исключительно крупную роль в истории развития задачи о квадр[illegible]е круга.

Книга предназначена широкому кругу читателей, интересую[illegible]я историческим развитием математики.

Издательство **УРСС**
научной и учебной литературы
E-mail: URSS@URSS.ru
Каталог изданий
в *Internet:* http://URSS.ru
Тел./факс: 7 (095) 135-44-23
Тел./факс: 7 (095) 135-42-46

ISBN 5-354-00218-4

Предисловіе.

Послѣ того, какъ десять лѣтъ тому назадъ г. Линдеманну удалось, на основаніи изслѣдованій г. Эрмита о показательной функціи, окончательно разрѣшить знаменитую задачу о квадратурѣ круга, строго доказавши трансцендентность числа π, послѣ того какъ въ 1885 г. результаты Эрмита и Линдеманна были опять выведены Вейерштрассомъ сравнительно болѣе простымъ путемъ, эта замѣчательная задача, которой исторія охватываетъ четыре тысячелѣтія, снова привлекла вниманіе широкой публики.

Теперь, когда уже сказано послѣднее слово, естественно желаніе подвести итоги, взглянуть въ глубь исторіи и отдать должное тѣмъ изслѣдованіямъ, которыя подвигали впередъ рѣшеніе этой рѣшенной, наконецъ, задачи. Мнѣ казалось поэтому своевременнымъ выбрать важнѣйшія изъ нихъ, и сдѣлать ихъ доступными всѣмъ интересующимся историческимъ развитіемъ математики. Такими работами, сыгравшими исключительно крупную роль въ исторіи развитія задачи о квадратурѣ круга, безспорно являются прежде всего сочиненія: Архимеда „*Κύκλου μέτρησις*"; Гюйгенса „De circuli magnitudine inventa"; Ламберта „Vorläufige Kenntnisse für die, so die Quadratur und Rectification des Circuls suchen"; Лежандра „Note où l'on démontre que le rapport de la circonférence au diamètre et son quarré sont des nombres irrationnels". Предлагая математической публикѣ тщательный переводъ этихъ классическихъ сочиненій, я имѣлъ различныя основанія надѣяться на общій интересъ. Прежде всего я могу указать на отрадное явленіе возрастающаго въ широкихъ кругахъ интереса къ историческимъ изслѣдованіямъ въ области математики и на все болѣе распространяющееся среди ученыхъ признаніе важности и даже необходимости историческихъ изслѣдованій. Но трудно найти другую задачу, которая была бы столь же удивительно подходящей для того, чтобъ послужить введеніемъ въ изученіе исторіи математики, какъ задача квадратуры круга, которая, возникши съ незапамятныхъ временъ, въ теченіе вѣковъ такъ тѣсно переплелась почти со всѣми математическими теоріями, что наконецъ рѣшеніе ея было дано лишь послѣ того, какъ былъ пущенъ въ ходъ весь могущественный арсеналъ современной науки. Кромѣ того, я надѣюсь изданіемъ этихъ мало распространенныхъ сочиненій оказать услугу особенно преподавателямъ среднихъ школъ. Ибо я не сомнѣваюсь, что изученіе этихъ работъ и, главнымъ образомъ, слишкомъ мало извѣстнаго, но чрезвычайно важнаго въ особенности для преподавателей элементарной математики сочиненія Гюйгенса должно оказать не малую услугу дѣлу преподаванія.

Въ частности, мнѣ остается сдѣлать слѣдующія замѣчанія. Переводъ Архимедова „Измѣренія круга" выполненъ мной съ чрезвычайно тщательно изданнаго г. Гейбергомъ *) текста, въ достоинствахъ котораго я имѣлъ возможность, насколько это было для меня доступно, самъ убѣдиться, сравнивая его съ предыдущими изданіями и въ частности съ Editio princeps (Basileae 1544). Само собой понятно, что я пользовался также имѣющимся переводомъ Гаубера (Hauber; Тюбингенъ 1798) и Ницце (Nizze; Штральзундъ 1824), однако мой переводъ, который спеціалистъ сейчасъ признаетъ за совершенно новый, въ одномъ существенномъ пунктѣ отличается отъ названныхъ переводовъ. А именно, между тѣмъ какъ Гауберъ и Ницце переводятъ сочиненіе Архимеда на современный математическій языкъ формулъ, я былъ того мнѣнія, что подобное обращеніе съ сочиненіемъ не только лишаетъ его индивидуальной окраски, но вызываетъ также ложныя представленія о математическомъ языкѣ его времени. Исходя изъ взгляда, что исторія математическаго языка и математическихъ обозначеній также имѣетъ высокій интересъ, я старался поэтому насколько возможно ближе придерживаться греческаго текста, чтобъ дать точное представленіе и о математическомъ способѣ выраженія Архимеда. Иначе, конечно, дѣло обстоитъ съ добавочными замѣчаніями, которыя **), какъ не принадлежащія Архимеду, изложены на болѣе короткомъ современномъ языкѣ формулъ. Эти замѣчанія составлены на основаніи комментарія Эвтокія при помощи

---

*) Archimedis opera omnia cum commentariis Eutocii. E codice florentino recensuit, latine uertit notisque illustrauit J. L. Heiberg, Dr. phil. (Lipsiae in aedibus B. G. Teubneri MDCCCLXXX).

**) Примѣчанія къ Гюйгенсу и Ламберту всѣ принадлежатъ также издателю.

обработокъ Гаубера и Ницце, а также замѣчаній Гейберга. Они достаточны для пониманія статьи, написанной очень сжато. Въ нѣкоторыхъ мѣстахъ текста вставлено кромѣ того въ скобкахъ ограниченіе „приблизительно".

При переводѣ сочиненія Гюйгенса „De circuli magnitudine inventa" я руководился тѣми же взглядами: я желалъ передать возможно точно не только содержаніе, но также математическій языкъ, которымъ онъ выражается. Здѣсь также піэтетъ не позволилъ мнѣ пользоваться современнымъ математическимъ языкомъ формулъ, хотя такимъ образомъ можно было получить нѣкоторыя сокращенія. Въ основу перевода положено изданіе 1724-го года Гравезанда (G. J. s'Gravesande) „Christiani Hugenii opera varia". Незначительные недосмотры въ формѣ опечатокъ или ошибокъ въ вычисленіи (какъ и въ двухъ слѣдующихъ статьяхъ) исправлены безъ особыхъ указаній.

Статья Ламберта представляетъ дословную перепечатку изъ „Beyträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung durch J. H. Lambert, Berlin 1770" (Zweiter Teil, fünfte Abhandl.). Я считалъ нужнымъ сохранить грамматическія особенности, орфографію и интерпункцію Ламберта, несмотря на встрѣчающіяся въ ней маленькія непослѣдовательности.

Наконецъ, при переводѣ замѣтки Лежандра я пользовался 14-мъ изданіемъ „Éléments de géométrie, avec des notes; par A. M. Legendre" (Paris 1855).

Чтобъ привести эти работы въ органическую связь между собой, я предпослалъ имъ обзоръ исторіи задачи о квадратурѣ круга отъ древности до нашихъ дней. Эта историческая статья, составляющая почти половину всей книги, представляетъ новую переработку съ значительными добавленіями моей прежней работы, помѣщенной въ 35-мъ томѣ „Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich". Оставляя въ сторонѣ все не имѣющее прямого отношенія къ предмету, я стремился не пропустить ни одного замѣчательнаго факта въ исторіи измѣренія круга. Хотя, разумѣется, о безусловной полнотѣ не можетъ быть и рѣчи, но тѣмъ не менѣе я надѣюсь, что я не пропустилъ ни одной болѣе важной работы.

Я старался, какъ это обусловливается отчасти самымъ содержаніемъ книги, возможно больше пользоваться оригинальными источниками. Но, когда это не удавалось, я прибѣгалъ къ прекраснымъ сочиненіямъ:

Cantor, Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik. Band 1 und 2 (коротко цитируется „Cantor, I, II").

Hankel, Zur Geschichte der Mathematik in Alterthum und Mittelalter (цитируется „Hankel").

Wolf, Handbuch der Astronomie, ihrer Geschichte und Litteratur. In zwei Bänden (цитируется „Wolf I, II").

Изъ работъ, спеціально посвященныхъ квадратурѣ круга, я пользовался также: Montucla, Histoire des recherches sur la quadrature du cercle (1-е изд. 1754 г., 2-е изд. 1831 г.), и Petri Vorsselmann de Heer responsio ad quaestionem ab academia Groningana propositam: „Detur succincta expositio praecipuarum methodorum, quae ad circuli quadraturam ducunt" (Groningen 1832). Кромѣ того, приходилось иногда обращаться за справками къ Kästner „Geschichte der Mathematik" и Klügel „Mathematisches Wörterbuch".

Хотѣлось бы, чтобъ этотъ трудъ былъ встрѣченъ благосклонно; въ особенности, чтобъ онъ содѣйствовалъ пробужденію и развитію интереса къ исторіи математики. Съ этой цѣлью я написалъ его и съ этимъ пожеланіемъ выпускаю его въ свѣтъ.

Цюрихъ, апрѣль 1892.

F. Rudio.

СОДЕРЖАНІЕ.

Стр.

I.

Обзоръ исторіи задачи о квадратурѣ круга отъ древности до нашихъ дней.

ПЕРВАЯ ГЛАВА.

Общія соображенія относительно задачи о квадратурѣ круга и о причинахъ ея популярности. Характеристика различныхъ эпохъ, на которыя распадается исторія этой задачи.

ВТОРАЯ ГЛАВА.

Пёрвый періодъ.

Съ древнѣйшихъ временъ до открытія дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій.

ТРЕТЬЯ ГЛАВА.

Второй періодъ.

Отъ открытія дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій до доказательства Ламбертомъ ирраціональности числа π.

I

ОБЗОРЪ

ИСТОРІИ ЗАДАЧИ О КВАДРАТУРѢ КРУГА

от древности до нашихъ дней

ПЕРВАЯ ГЛАВА.

Общія соображенія относительно задачи о квадратурѣ круга и о причинахъ ея популярности. Характеристика различныхъ эпохъ, на которыя распадается исторія этой задачи.

§ 1. О различныхъ причинахъ большой популярности задачи.

Изъ всѣхъ математическихъ задачъ, которыя въ теченіе вѣковъ занимали человѣчество, ни одна не пользовалась такой извѣстностью, какъ задача о квадратурѣ круга.

Исканіе квадратуры круга стало синонимомъ въ высшей степени труднаго, невыполнимаго, а потому и безнадежнаго предпріятія. Это самая древняя изъ всѣхъ математическихъ задачъ, ибо исторія ея охватываетъ четыре тысячелѣтія, столько же сколько исторія человѣческой культуры.

Вполнѣ удовлетворительный отвѣтъ на вопросъ, чѣмъ объясняется исключительная извѣстность именно этой отдѣльной математической задачи, можетъ быть полученъ только на основаніи ея исторіи.

Въ самомъ дѣлѣ, нельзя утверждать, что разсматриваемая задача, взятая сама по себѣ, независимо отъ другихъ многочисленныхъ математическихъ вопросовъ, которые присоединились къ ней съ теченіемъ времени, имѣетъ такое большое значеніе для науки или ея приложеній, какое ей часто приписываютъ мало свѣдующіе люди. Можно указать гораздо болѣе важныя и въ научномъ и въ практическомъ отношеніи задачи, которыя имѣютъ также сотни лѣтъ продолжающуюся исторію, но совершенно неизвѣстны широкой публикѣ. Достаточно припомнить, напримѣръ, теорему, открытую въ 1829 году женевскимъ математикомъ Карломъ Штурмомъ, эту замѣчательную теорему, которая для всякаго алгебраическаго уравненія съ вещественными коэффиціентами позволяетъ точно опредѣлить число вещественныхъ корней, содержащихся между данными предѣлами.

Задача о квадратурѣ круга въ значительной степени обязана своей извѣстностью весьма простымъ причинамъ. Прежде всего, это одна изъ весьма немногихъ математическихъ задачъ, которую достаточно высказать для того, чтобы каждому она стала тотчасъ понятной. Всѣ знаютъ, что такое кругъ и что такое квадратъ. Всѣ знаютъ, или по крайней мѣрѣ воображаютъ себѣ, что знаютъ, что такое площадь ограниченной фигуры; всякому кажется поэтому очень простой и понятной задача: начертить квадратъ, котораго площадь была бы точно равна площади даннаго круга. То же обстоятельство, что простая, повидимому, задача оказывала самое упорное сопротивленіе усиліямъ выдающихся умовъ, издавна привлекало къ ней какъ математиковъ, такъ, еще быть можетъ болѣе, нематематиковъ, для которыхъ большей частью оставалась неизвѣстной трудность, скрывающаяся въ постановкѣ вопроса. Такимъ образомъ, съ вѣками образовался особый ореолъ, окружавшій задачу: извѣстность ея росла вмѣстѣ съ увеличеніемъ числа неудачныхъ попытокъ ея разрѣшенія.

Кромѣ того, въ прежнія времена, когда метафизика въ большей степени владѣла человѣческими умами, чѣмъ въ настоящее время, съ разсматриваемой задачей часто связывалось достопримѣчательное суевѣріе. А именно, было распространено мнѣніе, что тотъ, кому удастся разрѣшить эту недоступную задачу, получитъ благодаря этому возможность вообще глубже проникнуть въ сущность взаимоотношеній между явленіями. Такимъ образомъ, разрѣшеніе задачи сулило особыя блага, представленіе о которыхъ, не будучи особенно яснымъ, было, однако, нерѣдко достаточнымъ для того, чтобы поднять интересъ къ задачѣ о квадратурѣ круга на одну высоту съ задачами о философскомъ камнѣ, жизненномъ элексирѣ и тому подобныхъ вещахъ.

Наконецъ, была еще третья причина, содѣйствовавшая именно среди нематематиковъ извѣстности нашей задачи.

Въ виду большого значенія для математики и ея приложеній, приписываемаго многими этой задачѣ, было распространено мнѣніе, сохранившееся и до позднѣйшихъ временъ, что многія академіи назначили крупныя награды для того, кому посчастливится наконецъ разрѣшить знаменитую задачу. Но это было горькое заблужденіе. Уже въ 1775 году парижская академія (а за нею и другія), утомленная непрерывнымъ безпокойствомъ, которое причиняли ей „квадраторы", сдѣлала слѣдующее заявленіе: „Академія постановила не разсматривать отнынѣ представляемыхъ ей рѣшеній задачъ удвоенія куба, трисекціи угла, квадратуры круга, а также машинъ, долженствующихъ осуществить вѣчное движеніе" (Histoire de l'Académie royale, année 1775, page 61). За заявленіемъ слѣдовало объясненіе, въ которомъ Кондорсэ (Condorcet), тогдашній непремѣнный секретарь академіи, излагалъ ясно и точно основанія, которыя привели академію къ указанному рѣшенію*). Тѣмъ не менѣе подобныя постановленія академій не уменьшали числа „квадраторовъ" съ той только разницей, что теперь къ сознанію совершеннаго великаго открытія у нихъ присоединялось чувство оскорбленнаго тщеславія и убѣжденія, что каста математиковъ не воздаетъ должнаго имъ изъ зависти или другихъ мелкихъ побужденій.

§ 2. Точная математическая формулировка задачи.

Прежде чѣмъ приступить къ историческому обзору работъ, посвященныхъ квадратурѣ круга, необходимо вкратцѣ напомнить, въ чемъ собственно заключается эта задача. Если обозначить радіусъ круга черезъ r, діаметръ его—черезъ $d = 2r$, длину окружности—черезъ u и площадь—черезъ J, то имѣютъ мѣсто равенства:

$$u = \pi d = 2\pi r \tag{1}$$

$$J = \pi r^2 = \frac{1}{4}\pi d^2 = \frac{1}{2} r u, \tag{2}$$

гдѣ π есть отношеніе, одно и то же для всѣхъ круговъ, длины окружности къ своему діаметру. Съ середины восемнадцатаго сто-

*) Интересно, что въ этомъ изложеніи, содержащемъ также краткій обзоръ исторіи задачи квадратуры круга, даже не упомянуто Ламбертово открытіе иррацiональности числа π.

лѣтія извѣстно, что π не можетъ быть представлено, какъ отношеніе двухъ цѣлыхъ чиселъ, т. е., что π есть **ирраціональное** число. Разложеніе π въ десятичную дробь начинается слѣдующими цифрами: 3,14159265358979З... Небезполезно указать, что не-математикамъ квадратура круга кажется обыкновенно невозможной потому, что число π не можетъ быть дано вполнѣ точно, а только приближенно. Мы впослѣдствіи вернемся еще къ этому вопросу и тогда выяснимъ, въ *какой* мѣрѣ невозможность квадратуры круга связана съ ирраціональностью π.

Изъ формулы (2) вытекаетъ извѣстная теорема, что площадь круга равновелика площади треугольника, имѣющаго основаніемъ окружность, а высотой—радіусъ круга. Если бъ возможно было, зная радіусъ, геометрическимъ построеніемъ получить длину окружности, то можно было бы построить этотъ треугольникъ, который въ свою очередь на основаніи извѣстныхъ планиметрическихъ правилъ было бы уже легко преобразовать въ равновеликій ему квадратъ. Наоборотъ, если бъ построеніемъ былъ найденъ квадратъ, равновеликій данному кругу, можно было бы построить указанный выше треугольникъ, а слѣдовательно и длину окружности.

Такимъ образомъ, мы видимъ, что условіе необходимое и достаточное для возможности квадратуры круга состоитъ въ томъ, чтобы было возможно по данному отрѣзку d построить отрѣзокъ $u = \pi d$. Чтобъ сдѣлать эту задачу вполнѣ опредѣленной, необходимо прежде всего выяснить, что мы понимаемъ подъ словомъ „построеніе".

Большинство планиметрическихъ задачъ на построеніе (какъ напримѣръ, преобразованіе многоугольника въ равновеликій квадратъ) можетъ быть разрѣшено исключительно при помощи комбинированія слѣдующихъ двухъ элементарныхъ задачъ.

1) **Провести прямую линію черезъ двѣ данныя точки.**

2) **Описать около данной точки окружность даннаго радіуса.**

Дѣйствительно, припоминая, напримѣръ, какъ многоугольникъ преобразуется въ равновеликій ему квадратъ, мы видимъ, что это дѣлается при помощи примѣненія болѣе простыхъ задачъ, которыя предполагаются рѣшенными раньше (какъ, напримѣръ, проведеніе черезъ данную точку прямой, параллельной данной прямой). Эти задачи, въ свою очередь, приводятся къ еще болѣе простымъ и т. д., пока не придемъ наконецъ къ указаннымъ выше двумъ элементарнымъ задачамъ, изъ многократнаго примѣненія которыхъ составляются всѣ построенія, ведущія къ рѣшенію первоначально данной задачи. Эти же двѣ элементарныя задачи не могутъ уже быть приведены къ болѣе простымъ, и въ планиметріи ихъ считаютъ разрѣшенными: первую съ помощью линейки, вторую съ помощью циркуля. Въ виду того, что планиметрія не даетъ рѣшенія обѣихъ элементарныхъ задачъ, а предполагаетъ его уже выполненнымъ, эти задачи называютъ также постулатами.

Подъ выраженіемъ „построить" мы будемъ всегда подразумѣвать „*построить при помощи только циркуля и линейки*". Вопросъ о возможности квадратуры круга заключается, такимъ образомъ, въ слѣдующемъ: возможно ли превратить кругъ въ равновеликій ему квадратъ, пользуясь исключительно двумя указанными элементарными задачами, т. е. употребляя только циркуль и линейку. Мы видѣли, что этотъ вопросъ сводится къ возможности построить отрѣзокъ πd по данному отрѣзку d, понимая слово „построить" въ указанномъ выше смыслѣ.

§ 3. Характеристика различныхъ эпохъ, на которыя можно раздѣлить исторію квадратуры круга.

Приступая къ краткому обзору исторіи развитія задачи о квадратурѣ круга съ древнѣйшихъ временъ до 1882 года, когда былъ данъ окончательный отвѣтъ на поставленный выше вопросъ, слѣдуетъ замѣтить, что къ указанной въ предыдущемъ параграфѣ точной постановкѣ вопроса пришли, конечно, не сразу, а постепенно, втеченіе столѣтій. Въ дальнѣйшемъ намъ нельзя будетъ ограничиться разсмотрѣніемъ однѣхъ только математическихъ работъ, имѣвшихъ непосредственной задачей квадратуру круга.

Въ виду тѣсной связи между квадратурой круга и опредѣленіемъ длины окружности намъ надо будетъ удѣлить одинаковое вниманіе всѣмъ важнѣйшимъ работамъ, относящимся къ вычисленію числа π и измѣренію круга.

Оставляя въ сторонѣ факты, лишенные дѣйствительнаго научнаго интереса и поэтому не имѣющіе, съ нашей точки зрѣнія, значенія, мы приходимъ къ естественному дѣленію исторіи нашей задачи на три періода, явно отличающихся другъ отъ друга по содержанію.

Первый періодъ начинается съ зарождающейся математикой и тянется до открытія дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій, т. е. до второй половины 17-го столѣтія.

Въ этотъ періодъ центральное мѣсто въ научныхъ изслѣдованіяхъ, относящихся къ нашей задачѣ, занимаетъ приближенное рѣшеніе задачи о квадратурѣ круга посредствомъ геометрическихъ соображеній, главнымъ образомъ, *даже почти исключительно*, съ помощью свойствъ вписанныхъ и описанныхъ многоугольниковъ—иначе говоря, методъ истощенія, которому основаніе положили греческіе математики. Архимедъ и Гюйгенсъ наиболѣе крупные представители этой эпохи: первый изъ нихъ математически обосновалъ методъ вписанныхъ и описанныхъ многоугольниковъ; второй довелъ этотъ методъ до той степени совершенства, которая можетъ быть осуществлена съ помощью элементарныхъ пріемовъ.

Второй періодъ, начинаясь съ открытія дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій, заканчивается въ 1766 году съ появленіемъ основного сочиненія Ламберта. Этотъ періодъ продолжался всего одно столѣтіе, но это былъ вѣкъ Ньютона, Лейбница, братьевъ Бернулли и Леонарда Эйлера! На мѣсто геометрическаго метода древнихъ появляются неистощимые пріемы вновь основаннаго анализа, который, хотя и коренился, въ сущности, въ методѣ истощенія, однако далъ задачѣ о квадратурѣ совершенно иной видъ и для изслѣдованій, относящихся къ ней, открылъ совершенно новые, неожиданные пути.

Въ первомъ періодѣ рѣчь *шла преимущественно о томъ*, чтобъ вычислить возможно точнѣе число π, т. е. осуществить съ какимъ угодно приближеніемъ квадратуру круга, и эта задача была разрѣшена; во второмъ періодѣ почти исключительное значеніе получаетъ существенно теоретическій вопросъ объ отысканіи для числа π аналитическихъ выраженій, содержащихъ безконечный рядъ операцій.

Въ противоположность этимъ двумъ періодамъ, третій періодъ можно назвать критическимъ. Здѣсь рѣчь не идетъ уже, какъ это было раньше, о величинѣ или аналитическомъ выраженіи числа π, но, главнымъ образомъ, о природѣ этого замѣчательнаго числа, т. е.

о томъ, является ли оно числомъ раціональнымъ или ирраціональнымъ, алгебраическимъ или трансцендентнымъ. Послѣ того, какъ въ 1766 году Ламбертъ далъ первое доказательство ирраціональности числа π, а Лежандръ усовершенствовалъ и обобщилъ это доказательство, въ 19-мъ столѣтіи появились работы, которыя привели къ окончательному разрѣшенію вопроса о квадратурѣ круга, работы Ліувилля, Эрмита, Линдемана и Вейерштрасса.

ВТОРАЯ ГЛАВА.

Первый періодъ.

Съ древнѣйшихъ временъ до открытія дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій.

§ 4. Египтяне и Вавилоняне.

Первыя свѣдѣнія о квадратурѣ круга мы находимъ въ учебникѣ математики древнихъ Египтянъ „Папирусъ Ринда" (переведенномъ Авг. Эйзенлоромъ въ 1877 году), составленномъ писцомъ короля Раус'а Ахмес'омъ въ промежуткѣ между 2000-мъ и 1700-ымъ годомъ до Рождества Христова по образцу, какъ сказано въ книгѣ, „древнихъ письменъ, относящихся ко времени короля Раенмата", которыя, такимъ образомъ, во всякомъ случаѣ на нѣсколько столѣтій старше Папируса Ринда *).

Въ Папирусѣ безъ всякаго обоснованія дано правило для опредѣленія площади круга: она равна площади квадрата, котораго сторона равна діаметру круга, уменьшенному на $\frac{1}{9}$ своей длины. Чтобъ составить себѣ понятіе о точности этого правила, которымъ въ Египтѣ продолжали пользоваться и въ позднѣйшія времена, достаточно сравнить величину $(\frac{8}{9})^2 d^2 = \frac{64}{81} d^2$ съ $\frac{1}{4}\pi d^2$, откуда для π получается приближенное значеніе $\frac{256}{81} = 3{,}1604\cdots$, обладающее порядочной точностью.

Вавилонянамъ принадлежитъ открытіе, что радіусъ шесть разъ помѣщается въ окружности въ качествѣ хорды; открытіе это стоитъ въ связи съ тѣмъ, что Вавилоняне раздѣлили годъ на 360 дней и, сообразно этому, кругъ (видимую орбиту солнца) на 360

---

*) См. Cantor, Vorlesungen I. Стр. 20 и слѣд.

градусовъ. Дѣленіе круга на шесть частей легко привело къ первому, еще очень неточному, спрямленію окружности, а именно къ допущенію, что окружность равна шесть разъ взятому радіусу или утроенному діаметру. Получаемое изъ этого допущенія значеніе $\pi=3$ показываетъ, насколько это воззрѣніе уступаетъ въ точности египетскому воззрѣнію, дающему значеніе $\pi=3,1604\ldots$

Вавилонское спрямленіе окружности встрѣчается также въ различныхъ мѣстахъ Библіи. Напримѣръ (въ первой книгѣ Царей 7,23 и второй книгѣ Паралипоменонъ 4,2), при описаніи большого бассейна, который подъ названіемъ „мѣднаго моря" украшалъ храмъ, построенный Соломономъ между 1014-мъ и 1007-мъ годомъ, тамъ сказано: „и онъ сдѣлалъ литое море въ 10 локтей отъ края до края, въ 5 локтей высоты и шнурокъ въ 30 локтей обхватывалъ его". Воззрѣніе, что длина окружности втрое больше діаметра, сохранилось еще втеченіе многихъ вѣковъ и находитъ также свое выраженіе въ Талмудѣ въ слѣдующемъ предложеніи: „то, что имѣетъ три ладони въ окружности, имѣетъ одну ладонь ширины" *).

§ 5. Греки.

Мы не знаемъ занимались ли квадратурой круга древнѣйшіе греческіе математики, Θалесъ изъ Милета (жившій приблизительно 640—548) и „отецъ математики" Пиθагоръ изъ Самоса (жившій приблизительно 580—500); во всякомъ случаѣ несомнѣнно, что оба они были въ Египтѣ и геометрію Египтянъ перенесли въ Грецію. Таково было мнѣніе древнегреческаго міра.

Первые слѣды задачи о квадратурѣ круга мы встрѣчаемъ на греческой почвѣ лишь въ 5-мъ столѣтіи до Рождества Христова, Анаксагоръ изъ Клазоменъ (500—428), по свидѣтельству Плутарха (въ сочиненіи „De exilio" гл. 17), находясь въ 434 году въ тюрьмѣ, отгонялъ печаль заключенія математическими размышленіями и „начерталъ квадратуру круга". Весьма вѣроятно, что Анаксагоръ, который, впрочемъ, по свидѣтельству Платона, былъ выдающимся математикомъ, построилъ—по образцу египетской ква-

---

*) Cantor I. Стр. 83 и 91. См. также: Mahler, Beitrag zur Gechichte der Mathematik (Zeitschrift für Math. u. Phys., Jahrgang 27, Historisch.-literarisch Abt. p. 207).

дратуры—квадратъ, приблизительно равновеликій кругу, и полагалъ, что разрѣшилъ задачу вполнѣ точно. Во всякомъ случаѣ, съ тѣхъ поръ эта задача уже не сходила со сцены.

Въ 420 году математикъ Гиппій изъ Элиды изобрѣлъ кривую, которая могла служить для двоякой цѣли, а именно—для трисекціи угла и для квадратуры круга. Это была трансцендентная линія, извѣстная подъ именемъ „τετραγωνίζουσα“ или квадратрисы. Эта линія, какъ впослѣдствіи показалъ Диностратъ (во второй половинѣ четвертаго столѣтія), дѣйствительно рѣшаетъ задачу о спрямленіи круга, но такъ какъ она сама не можетъ быть построена при помощи циркуля и линейки, то она не даетъ рѣшенія въ смыслѣ, установленномъ въ первой главѣ *).

Мы могли бы обойти молчаніемъ софистовъ, которые также занимались задачей о квадратурѣ круга, и изъ которыхъ нѣкоторые зашли такъ далеко въ своей болтовнѣ, что поставили квадратуру круга въ зависимость отъ „*циклическихъ квадратовъ*“, т. е. чиселъ, оканчивающихся той же цифрой, что и ихъ квадратный корень**) (напр., $25 = 5^2$, $36 = 6^2$); но въ числѣ софистовъ было два современника Сократа (469—399), Антифонъ и Бризонъ, которые въ высшей степени заслуживаютъ нашего вниманія.

Антифонъ разсуждалъ слѣдующимъ образомъ: если мы впишемъ въ кругъ квадратъ, потомъ правильный восьмиугольникъ, шестнадцатиугольникъ и т. д., пока такимъ образомъ не будетъ исчерпанъ весь кругъ, то мы прійдемъ наконецъ къ многоугольнику, который вслѣдствіе малости своихъ сторонъ совпадетъ съ кругомъ. Но такъ какъ можно построить квадратъ, равновеликій всякому многоугольнику, а кругъ замѣненъ равновеликимъ многоугольникомъ, то, слѣдовательно, возможно построить квадратъ, равновеликій данному кругу***). Если Антифонъ и упустилъ изъ виду, что разсуждая такимъ образомъ можно достигнуть только приближенной квадратуры, тѣмъ не менѣе „онъ первый сталъ на совершенно правильный путь и пытался опредѣлить площадь криволи-

*) См. Bretschneider, Die Geometrie und die Geometer vor Euklides Leipzig, 1870) p. 94—96 и 153—155; Cantor I, p. 164—168 и 211—213.

**) См. Bretschneider, p. 106.

***) Ibidem p. 101, 125.

нейной фигуры, исчерпывая ее (exhaurire) съ помощью многоугольниковъ съ постоянно увеличивающимся числомъ сторонъ" *).

Бризонъ **) пошелъ еще дальше Антифона, присоединивъ къ вписаннымъ многоугольникамъ описанные, и введя, такимъ образомъ, въ математику понятіе о нижней и верхней границѣ.

Среди математиковъ, которые до Архимеда успѣшно занимались *задачей о квадратурѣ круга*, выдающееся мѣсто занимаетъ Гиппократъ изъ Хіоса. Этотъ ученый, жившій во второй половинѣ 5-го вѣка въ Аѳинахъ и читавшій тамъ лекціи по геометріи, составилъ первый учебникъ элементарной геометріи. Кромѣ того, мы обязаны ему первымъ доказательствомъ предложенія, что площадь круга пропорціональна квадрату его діаметра и, наконецъ, онъ же далъ первый примѣръ дѣйствительной квадратуры площадей, ограниченныхъ кривыми линіями. Это луннообразныя площади (мениски), которые извѣстны изъ элементовъ геометріи подъ именемъ „Гиппократовыхъ луночекъ". При помощи такихъ „луночекъ" Гиппократъ старался найти квадратуру круга, но этого, конечно, онъ не могъ достигнуть***).

Несмотря на попытки всѣхъ выше названныхъ геометровъ, о дѣйствительно научной постановкѣ задачи квадратуры круга, еще не могло быть рѣчи****). За исключеніемъ египетскаго правила, ничего кромѣ намековъ, плановъ и предположеній не было дано.

Математикомъ, который впервые поставилъ задачу измѣренія круга на вполнѣ научную почву, былъ величайшій математикъ древности Архимедъ изъ Сиракузъ (онъ родился въ 287 году въ Сиракузахъ и былъ убитъ римскимъ солдатомъ въ 212 году при завоеваніи его родного города Марцелломъ) *****). Въ своемъ неоцѣ-

*) Hankel, p. 117. Ср. квадратуру круга Вьеты (Vieta), основанную на идеяхъ Антифона (см. § 9 этой книги).

**) Bretschneider p. 125—129.

***) См. Bretschneider, pag. 97—124, гдѣ приводится съ присоединеніемъ перевода необыкновенно цѣнное и интересное сообщеніе изъ исторіи геометріи Эвдема (ученика Аристотеля).

****) Слѣдуетъ замѣтить, что во времена Платона (429—348) начинало устанавливаться убѣжденіе, что квадратура круга можетъ быть осуществлена при помощи циркуля и линейки (см. Cantor I, 201—202 и Hankel, 156).

*****) Свѣдѣнія о жизни Архимеда можно найти въ книгахъ: Heiberg, Quaestiones Archimedeae (Kopenhagen 1879); Cantor I, стр. 253—254.

нимомъ основномъ сочиненіи „Измѣреніе круга“ (*κύκλου μέτρησις*) Архимедъ доказываетъ слѣдующія три предложенія:

1) Каждый кругъ равновеликъ прямоугольному треугольнику, котораго одинъ катетъ равенъ радіусу, а другой — равенъ выпрямленной окружности круга. 2. Площадь круга относится къ квадрату его діаметра (приблизительно), какъ 11 къ 14. 3) Длина окружности превышаетъ тройной діаметръ меньше, чѣмъ на одну седьмую, но больше чѣмъ на десять семьдесятъ первыхъ частей діаметра.

Такъ какъ это сочиненіе въ настоящей книгѣ приведено полностью, то здѣсь мы можемъ ограничиться лишь краткой его характеристикой. Первое предложеніе Архимедъ доказываетъ косвенно, а именно, разсматривая вписанные и описанные многоугольники съ достаточно большимъ числомъ сторонъ, онъ приводитъ къ противорѣчію допущеніе, что площадь круга меньше или больше площади указаннаго треугольника. Второе предложеніе основано на третьемъ, которое представляетъ, безъ сомнѣнія, одно изъ замѣчательнѣйшихъ математическихъ открытій древности. Архимедъ послѣдовательно опредѣляетъ стороны описанныхъ шестиугольника, двѣнадцатиугольника, двадцатичетырехугольника, сорокавосьмиугольника и девяностошестиугольника, выраженныя съ помощью діаметра, а именно, съ тонкимъ математическимъ чутьемъ онъ даетъ для опредѣляемаго, лишь приближенно, отношенія діаметра къ сторонѣ вписаннаго многоугольника, всегда нѣсколько меньшее значеніе для того, чтобы получить для его периметра и, тѣмъ болѣе, для длины окружности вѣрную верхнюю границу. Вычисленія, выполняемыя при этомъ Архимедомъ, тѣмъ болѣе достойны нашего удивленія, что многократныя извлеченія квадратныхъ корней, которыя нужно было выполнить, должны были въ эпоху, когда неизвѣстна была еще индійская система счисленія и десятичныя дроби, представлять трудности, о которыхъ въ настоящее время лишь съ трудомъ можно себѣ составить представленіе.

Чтобы найти нижнюю границу отношенія длины окружности къ діаметру, Архимедъ пользовался соотвѣтствующими вписанными многоугольниками, начиная отъ шестиугольника и кончая девяностошестиугольникомъ. При этихъ вычисленіяхъ Архимедъ съ той же сознательной увѣренностью беретъ встрѣчающіеся квадратные корни всякій разъ такъ, чтобы получить для соотвѣтствующихъ сторонъ многоугольника немного меньшія значенія. Такимъ образомъ, онъ получаетъ для периметра вписаннаго многоугольника, а слѣдовательно, тѣмъ болѣе, для окружности вѣрную нижнюю границу*).

Хотя верхняя граница $3\frac{1}{7}$ для числа π, найденная Архимедомъ, не столь близка къ дѣйствительному значенію π, какъ нижняя граница $3\frac{10}{71}$ (а именно, $3\frac{1}{7} = 3{,}142\,85\cdots$; $\pi = 3{,}141\,59\ldots$; $3\frac{10}{71} = 3{,}140\,84\cdots$), но въ виду большой простоты ею пользуются часто и теперь, когда требуется средняя точность.

Созданный Архимедомъ методъ вычисленія длины окружности посредствомъ вписанныхъ и описанныхъ многоугольниковъ игралъ руководящую роль вплоть до открытія дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій, т. е почти 2 тысячи лѣтъ.

Изъ позднѣйшихъ греческихъ математиковъ, которые, какъ напримѣръ, Геронъ изъ Александріи (100 л. до Р. Х.) пользовались для отношенія окружности къ діаметру, то значеніемъ $3\frac{1}{7}$, то даже болѣе простымъ (вавилонскимъ) числомъ 3, здѣсь умѣстно упомянуть еще Гиппарха, „отца астрономіи“ (жившаго приблизительно 180—125 до Р. Х.), составившаго первую, къ сожалѣнію, не дошедшую до насъ таблицу хордъ, и являющагося, такимъ образомъ, основателемъ тѣсно связанной съ измѣреніемъ круга тригонометріи, и великаго Клавдія Птолемея (жившаго приблизительно отъ 87 до 165 года послѣ Р. Х.)**). То что было начато первымъ, второй довелъ до конца. Исходя изъ теоремы о вписанномъ четырехугольникѣ, носящей его имя, по которой произведеніе діагоналей вписаннаго четыреугольника равно суммѣ произведеній его противоположныхъ сторонъ, и пользуясь нѣкоторыми

*) Ни въ сочиненіи Архимеда, ни въ комментаріи, который Евтокій изъ Аскалона (въ 6-мъ столѣтіи) написалъ къ измѣренію круга, нѣтъ никакихъ указаній на то, какимъ способомъ Архимедъ извлекалъ квадратные корни. Какъ ни разнообразны отвѣты на этотъ вопросъ, но всѣ они сходятся въ стремленіи связать методъ Архимеда съ современнымъ пріемомъ непрерывныхъ дробей. См.: Nesselmann, Die Algebra der Griechen, стр. 108 и слѣд S. Günther, Antike Näherungsmethoden im Lichte moderner Mathematik (Abh. der k. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften, Prag. 1878); Heiberg, Quaestiones Archimedeae, стр. 60—66; Cantor I, 272—274; P. Tannery, Sur la mesure du cercle d'Archimède (Mém. de la soc. des sciences phys. et natur. de Bordeaux, t. IV, 1882); Günther, Die quadratischen Irrationalitäten der Alten und deren Entwickelungsmethoden (Abh. zur Geschichte der Mathem. 1882). Послѣдняя работа содержитъ также обширныя литературныя указанія по этому вопросу.

**) О Гиппархѣ и Птолемеѣ см. Wolf I, стр. 163—165; Cantor I, стр. 312—313 и 350—360 извѣстными хордами, а именно сторонами правильныхъ треугольниковъ, четыреугольниковъ, пятиугольниковъ, шестиугольниковъ и десятиугольниковъ, Птолемей вычислилъ въ своемъ безсмертномъ сочиненіи „μεγάλη σύνταξις“ (большое собраніе) таблицу хордъ, по которой можно было найти хорды всѣхъ дугъ полуокружности. Онъ создалъ, такимъ образомъ, „для астрономическихъ надобностей столь совершенную тригонометрію, что втеченіе болѣе тысячелѣтія она не была превзойдена и господствовала въ наукѣ не въ меньшей мѣрѣ, но съ большимъ успѣхомъ, чѣмъ извѣстное подъ именемъ „Птолемеевой системы міра“*) ученіе о движеніи свѣтилъ“.

Имя Птолемея заслуживаетъ вниманія и въ непосредственной связи съ задачей о квадратурѣ круга, такъ какъ онъ первый пользуется болѣе точнымъ значеніемъ для числа π, чѣмъ найденное Архимедомъ: въ Птолемеевой шестидесятиричной системѣ значеніе π выражается числомъ $3 \cdot 8' 30''$, т. е. 3 и $\frac{8}{60}$ и $\frac{30}{3600}$ или $3\frac{17}{120} = 3{,}14166\ldots$**).

§ 6. Римляне, Индусы, Китайцы.

О римлянахъ намъ упомянать почти не приходится, такъ какъ они ни въ какомъ отношеніи не подвинули впередъ рѣшенія задачи измѣренія круга. Для народа, который такъ мало былъ расположенъ къ научнымъ математическимъ размышленіямъ, какъ римляне, для практическихъ надобностей вполнѣ было достаточно имѣвшихся въ то время приближенныхъ значеній для π. То обстоятельство, что даже эти приближенія, а именно Архимедово приближеніе $3\frac{1}{7}$ не пользовались большой извѣстностью, доказывается тѣмъ, что извѣстный архитекторъ Витрувій (жившій около 14 года до Р. X.) пользовался значительно менѣе точнымъ, хотя и болѣе удобнымъ значеніемъ $3\frac{1}{8} = 3{,}125$.

Совершенно иное мѣсто въ математикѣ занимаютъ индусы***) Арьябхатта (Âryabhatta; род. въ 476 году послѣ Р. X.) уже зналъ для числа π значеніе $\frac{62832}{20000} = 3{,}1416$. То же значеніе въ видѣ

*) См. Cantor I, 350.

**) См. т. I стр. 421 тщательнаго критическаго изданія (съ французскимъ переводомъ) Halma, Paris 1813 - 1816.

***) О математическомъ творчествѣ индусовъ можно судить по сочиненію, переведенному на англійскій языкъ Colebrooke'омъ: „Algebra with arithmetic and mensuration, from the Sanscrit of Brahmegupta and Bhâskara London, 1817.

дроби $\frac{3927}{1250}$ мы находимъ и у Бхаскара (Bhâskara; род. въ 1114 г. послѣ Р. Х.) въ сочиненіи „Siddhântaçiromani" (Вѣнецъ астрономической системы), а именно въ главѣ „Lîlâvatî" (прекрасная), трактующей объ ариѳметикѣ, гдѣ указанное *число онъ называетъ „точнымъ"* въ противоположность „неточному" значенію $3\frac{1}{7}$.

Комментаторъ Бхаскара, Ганеса (Ganeça) сооообщаетъ, какъ было получено это, дѣйствительно, поразительно точное значеніе.

При помощи формулы

$$s_{2n} = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - s_n{}^2}},$$

дающей сторону s_{2n} вписаннаго $2n$-угольника, если извѣстна сторона s_n вписаннаго n-угольника и радіусъ r, послѣдовательно опредѣлялись периметры многоугольниковъ о 12, 24, 48, 96, 192 и 384 сторонахъ. Если положимъ діаметръ круга равнымъ 100, то для периметра 384-угольника получается, такимъ образомъ, значеніе $\sqrt{98694}$, которое дѣйствительно приводитъ къ числу Арьябхатты.

Весьма замѣчательное значеніе, чисто индусскаго происхожденія, мы находимъ у математика Брахмагупта (Brahmagupta; род. въ 598 г. послѣ Р. Х.): *именно, онъ даетъ, какъ* грубое приближеніе $\pi = 3$, а какъ болѣе точное, $\pi = \sqrt{10}$. Ганкель предлагаетъ слѣдующее объясненіе происхожденія этого весьма замѣчательнаго значенія: „Въ древности, когда большія вычисленія, особенно извлеченіе корней, представляли большія трудности и неудобства, было замѣчено, что периметры 12, 24, 48, 96-угольниковъ при діаметрѣ равномъ 10 соотвѣтственно выражаются возрастающимъ рядомъ чиселъ

$$\sqrt{965},\quad \sqrt{981},\quad \sqrt{986},\quad \sqrt{987};$$

окружность круга была бы найдена, если бы въ этомъ возрастающемъ ряду двигаться впередъ безконечно; при этомъ число подъ знакомъ корня будетъ все болѣе приближаться къ значенію 1000 *и потому* $\sqrt{1000}$ *можно приближенно* разсматривать, какъ окружность". *)

---

*) Hankel, стр. 216—217. Cantor I, стр. 551 и 556.

Наконецъ, въ связи съ задачей о квадратурѣ круга, слѣдуетъ также отмѣтить очень счастливое и чреватое послѣдствіями нововведеніе, сдѣланное индусами въ тригонометріи. Именно, въ противоположность грекамъ, они пользовались въ своихъ вычисленіяхъ не хордами, стягивающими данныя дуги, а полухордами, которыя они связывали съ полудугами, т. е. вмѣсто хордъ разсматривали синусы, и древнія таблицы хордъ они замѣнили таблицами синусовъ. Бхаскара пошелъ такъ далеко въ этомъ направленіи, что съ помощью данныхъ имъ формулъ:

$$\sin 1^0 = \frac{10}{573} \quad \text{и} \quad \cos 1^0 = \frac{6568}{6569},$$

точность которыхъ превышаетъ нѣсколько десятимилліонныхъ и, слѣдовательно, значительно превосходитъ точность Птолемеевыхъ, показалъ, какъ составляется таблица синусовъ дугъ отъ 1^0 до 1^0. *)

У китайцевъ, которые утверждаютъ, что „всѣ науки ведутъ свое начало изъ Китая, откуда онѣ издавна перешли къ иностранцамъ, на родинѣ же онѣ будто-бы заглохли вслѣдствіе сожженія всѣхъ книгъ по приказанію тирана Ши-хоангъ-ти (Schi-hoâng-tí) въ 212 г. до Р. Х.“ **), мы находимъ въ древнѣйшія времена исключительно вавилонское значеніе $\pi=3$. Только жившій въ 6-мъ вѣкѣ послѣ Р. Х. писатель Цу тчунгъ тче (Tsu tschung tsche) упоминаетъ болѣе точное отношеніе $\frac{22}{7}$ и приблизительно въ то же время Ліу вуй (Liu hwuy) пользуется страннымъ значеніемъ $\frac{157}{50}$, нѣсколько менѣе точнымъ, чѣмъ $\frac{22}{7}$. Такимъ образомъ, объ осуществленіи китайцами какого-нибудь прогресса въ интересующемъ насъ вопросѣ не можетъ быть и рѣчи. ***)

---

*) Hankel, стр. 218; Cantor I, стр 560–562.

**) Hankel, стр. 410.

***) Относительно китайской математики см. статью Biernatzki'аго въ 52-мъ томѣ Journal für Mathematik (Crelle); также Cantor I, стр, 565—589 и Hankel, стр. 405 410.

§ 7. Арабы и христіанскіе народы въ древніе вѣка.

Напротивъ, чрезвычайнаго вниманія заслуживаютъ математическіе труды арабовъ; значеніе этого народа заключается не столько въ его оригинальныхъ работахъ, хотя и въ этомъ смыслѣ можно отмѣтить не одно выдающееся сочиненіе, сколько въ общекультурной роли, которую онъ сыгралъ. Вѣдь христіанскіе народы Западной Европы обязаны арабамъ въ одинаковой мѣрѣ первымъ знакомствомъ съ математической культурой грековъ и индусовъ!

Едва воздвиглось великое арабское государство и арабскій языкъ сталъ литературнымъ, какъ началась, преимущественно во времена калифовъ Гарунъ Аррашида (Hârûn Arraschîd) и Альмамуна (Almamûn), плодотворная работа переводчиковъ, благодаря которой много цѣнныхъ произведеній было спасено отъ гибели.

Первыми сочиненіями по математикѣ, которыя были переведены съ греческаго на арабскій, были „σύνταξις“ Птолемея, „Элементы“ Эвклида, „Коническія сѣченія“ Аполлонія и — что для насъ здѣсь наиболѣе важно — работы Архимеда объ измѣреніи круга, о шарѣ и цилиндрѣ. При этомъ сочиненіе Птолемея получило еще и теперь употребительное названіе „Альмагестъ“ (Almagest), происшедшее отъ соединенія арабскаго члена „al“ съ греческой превосходной степенью *μεγίστη*, въ которую съ теченіемъ времени обратилась *μεγάλη* (*σύνταξις*).

Но въ такой же мѣрѣ арабы, государство которыхъ простиралось вѣдь до Инда, сумѣли усвоить, съ помощью переводовъ, сочиненія индусскихъ математиковъ. Дѣйствительно, у старѣйшаго и крупнѣйшаго арабскаго математика Мухаммеда ибнъ Муса Альхуаризми (Muhammed ibn Mûsâ Alchwarizmî — отъ его имени произошло слово „алгориѳмъ“), жившаго въ началѣ 9-го вѣка при калифѣ Альмамунѣ, мы находимъ на ряду съ греческимъ числомъ $3\frac{1}{7}$, которое Альхуаризми указываетъ, какъ употребительное въ практикѣ, также и индусскія значенія для π, а именно $\sqrt{10}$ и $\frac{62832}{20000}$, индусское происхожденіе которыхъ вполнѣ опредѣленно отмѣчается авторомъ.*)

---

*) Сочиненіе Альхуаризми, написанное въ 820 году, носитъ названіе: „Al ǵebr w'al mukâbala“. Слово „ǵebr“ означаетъ „возстановленіе“ (restauratio).

Но въ арабской литературѣ мы встрѣчаемъ также отдѣльное сочиненіе о квадратурѣ круга. Это — сохранившееся въ Ватиканскомъ кодексѣ сочиненіе *) математика Ибнъ Альхайтама (Ibn Alchaitam; род. въ Аль Басра, переселился въ Египетъ и умеръ въ 1038 году), относительно котораго можно выразить сожалѣніе, что оно до сихъ поръ еще никѣмъ не изслѣдовано, между тѣмъ какъ это — первое извѣстное намъ со временъ Архимеда сочиненіе съ такимъ заглавіемъ и, судя по имени автора, слѣдуетъ ожидать найти въ немъ интересныя попытки подойти возможно ближе къ площади круга. **)

Мы должны здѣсь также отмѣтить, что именно Альхуаризми познакомилъ своихъ современниковъ съ индійской системой счисленія, которую впослѣдствіи, въ началѣ 13-го вѣка, позаимствовали у арабовъ и западные народы. Въ этомъ отношеніи крупную роль сыгралъ, безусловно, самый выдающійся изъ христіанскихъ математиковъ среднихъ вѣковъ, великій Леонардо Пизанскій (Фибоначчи). Какъ можно было бы выполнить, напримѣръ, Лудольфово вычисленіе числа π, еслибъ не была извѣстна индійская система счисленія! ***)

Наконецъ, остается упомянуть о значительныхъ успѣхахъ арабовъ въ тригонометріи. Подъ вліяніемъ гоніометрическихъ работъ индусовъ, Альбаттани (Albâttanî, называемый переводчиками Albategnius) между 878 и 918 годами составилъ первую таблицу котангенсовъ для астрономическихъ измѣреній.

т. е. перенесеніе отрицательнаго члена въ другую часть уравненія. Въ сочиненіи Альхуаризми впервые встрѣчается выраженіе „al ǵebr", отъ котораго произошло слово „алгебра". См. Hankel, стр. 260 и 271; Cantor I, стр. 616 и 625.

*) Кромѣ этого сочиненія, о существованіи котораго мы имѣемъ точныя свѣдѣнія, въ изданномъ недавно H. Suter'омъ на нѣмецкомъ языкѣ чрезвычайно интересномъ сочиненіи „Mathematikerverzeichnis im Fihrist des Ibn Abî la'kûb an-Nadîm" (Abh. zur Gesch. der Mathem. VI) говорится еще о различныхъ арабскихъ математикахъ, писавшихъ объ измѣреніи круга.

**) Cantor I, стр 679.

***) Именно высокимъ совершенствомъ индійской системы счисленія объясняется, что индусы настолько превзошли грековъ въ точности вычисленія числа π.

Онъ наблюдалъ длину тѣни, бросаемой вертикальнымъ шестомъ r на горизонтальную поверхность. Обозначая черезъ φ высоту солнца, имѣемъ $l=r\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$. При $r=12$ Альбаттани вычислилъ длину l тѣни (umbra recta), соотвѣтствующей $\varphi=1^0, 2^0, 3^0$..... *и составилъ такимъ* образомъ таблицу, изъ которой онъ могъ обратно по длинѣ тѣни l опредѣлять высоту φ солнца.

Слѣдующій важный шагъ былъ сдѣланъ ученымъ А б у л ь У а ф а (A b û ' l W a f â; род. въ 940 году). Вмѣсто „umbra recta" т. е. горизонтальной тѣни отъ вертикальнаго шеста, онъ ввелъ такъ называемую „umbra versa", а именно сталъ разсматривать тѣнь l, падающую отъ горизонтальнаго шеста r на вертикальную стѣну, къ которой онъ прикрѣпленъ, $l=r\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$. *Такимъ образомъ, онъ первый* ввелъ въ тригонометрію т а н г е н с ы и вычислилъ т а б л и ц у т а н г е н с о в ъ при $r=60$. При этомъ онъ такъ опредѣляетъ новую функцію: „umbra дуги есть линія, проведенная параллельно синусу изъ начала дуги въ промежуткѣ между этимъ началомъ дуги и проведенной изъ центра круга къ концу дуги линіей... Такъ, что umbra есть половина касательной двойной дуги, которая содержится между двумя прямыми, проведенными изъ центра круга къ концамъ двойной дуги". Затѣмъ онъ легко находитъ также всѣ зависимости между функціями $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, $\operatorname{tg}\varphi$, $\operatorname{ctg}\varphi$, $\sec\varphi$, $\operatorname{cosec}\varphi$. *)

Изъ остальныхъ арабскихъ математиковъ, которые содѣйствовали развитію тригонометріи, нужно упомянуть еще объ ученомъ *И б н ъ Ю н у с ъ* изъ Каира (I b n J û n u s; умеръ въ 1008 г.) и, въ особенности, о жившемъ въ Севильѣ въ 11-мъ вѣкѣ астрономѣ *И б н ъ А ф л а х ъ* (I b n A f l a h, иначе G e b e r), который впервые нашелъ основную формулу $\cos\beta=\cos b\sin\alpha$ для прямоугольнаго сферическаго треугольника, носящую его имя (теорема Гебера), и сверхъ того отличается отъ остальныхъ арабскихъ астрономовъ тѣмъ, что давалъ полныя доказательства устанавливаемыхъ имъ предложеній. **)

Переходя теперь къ исторіи х р и с т і а н с к и х ъ н а р о д о в ъ в ъ с р е д н і е в ѣ к а, мы можемъ обойти молчаніемъ время отъ

*) Hankel, стр. 280—285; Cantor I, стр. 632 - 642; Wolf I, стр 165—169

**) Hankel, стр. 285—287.

переселенія народовъ до конца 10-го вѣка. За это время не только задача квадратуры круга не подвинулась впередъ, но вообще въ это время у христіанскихъ народовъ Запада почти не было рѣчи о какихъ бы то ни было математическихъ изслѣдованіяхъ. Культура того времени была по существу латинская, поэтому и математическія знанія исключительно зависѣли отъ весьма незначительнаго, какъ мы видѣли, математическаго образованія римлянъ. Только послѣ неутомимаго и дѣльнаго Герберта, этого „возстановителя науки" („reparator studiorum"; родился въ первой половинѣ 10-го столѣтія въ Орильякѣ въ Оверни, затѣмъ, послѣ научной поѣздки въ Испанію, онъ былъ учителемъ въ монастырской школѣ въ Реймсѣ и въ 999 году подъ именемъ Сильвестра II вступилъ на папскій престолъ; умеръ онъ въ 1003 году) начался, хотя въ первое время лишь очень медленно, расцвѣтъ математическихъ занятій. Вскорѣ послѣ его смерти мы впервые встрѣчаемся съ задачей о квадратурѣ круга на христіанской почвѣ: Франкъ изъ Люттиха написалъ (между 1036 и 1055 г.г.) шеститомный трудъ о квадратурѣ круга, который онъ посвятилъ кельнскому архіепископу Германну II; это произведеніе недавно переиздано Винтербергомъ.*)

Научная жизнь нѣсколько оживилась въ 12-мъ и 13-мъ в.в. когда представители латинскаго образованія начали посѣщать высшія школы въ Толедо, Севильѣ, Кордовѣ и Гренадѣ для ознакомленія съ греческими классиками, которыхъ они переводили съ арабскаго на латинскій языкъ. Такъ напримѣръ, Герардъ изъ Кремоны перевелъ въ 1175 г. Альмагестъ и алгебру Альхуаризми, Ателардъ изъ Бата—„Эле-менты" Эвклида и астрономическія работы Альхуаризми, Платонъ изъ Тиволи— сочиненія Албаттани и т. д. Переводъ Платона изъ Тиволи особенно интересенъ еще въ томъ отношеніи, что мы здѣсь впервые находимъ терминъ „синусъ" въ его тригонометрическомъ смыслѣ. Объясненіе происхожденія этого выраженія слѣдующее. Хорда дуги у индусовъ называлась „jyâ" (джіа) или „jîva" (джива), оба эти слова обозначали также тетиву охотничьяго лука. Половина же хорды, т. е. линія, которая потомъ получила названіе синусъ, называлась сообразно съ этимъ „jiârdha" (джіардха) или „ardhajyâ" (ардхаджія); но такъ какъ индусы вообще, какъ мы знаемъ, пользовались только полухордами, то съ теченіемъ времени и полу-

*) Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik (1882).

хорду стали называть, для краткости, jîva. Это названіе перешло и къ арабамъ, которые, сообразно со своимъ произношеніемъ, писали его dschîba (джиба). Это слово на арабскомъ языкѣ не имѣетъ никакого смысла, но тѣ же согласныя, посредствомъ которыхъ оно пишется по арабски †), составляютъ также и слово „джайбъ", означающее заливъ. Это послѣднее чтеніе слова съ теченіемъ времени стало обычнымъ, такъ что Платонъ изъ Тиволи совершенно правильно перевелъ слово „джайбъ" словомъ sinus, которое затѣмъ было *принято всѣми*. *).

Первыя болѣе точныя данныя о числѣ π находимъ у Л е о н а р д а П и з а н с к а г о, котораго мы уже раньше назвали самымъ *выдающимся математикомъ* христіанскаго средневѣковья. Онъ родился въ Пизѣ въ концѣ 12-го столѣтія и былъ сыномъ писца Боначчи (Bonacci). Послѣ продолжительныхъ путешествій въ Египетъ, Сирію, Грецію и Провансъ, возвратился и въ 1202 году написалъ свое знаменитое сочиненіе „Liber Abaci". Другъ императора Фридриха, который привлекъ его въ Пизѣ къ своему блестящему двору, онъ умеръ въ 1228 году. Сочиненіе его, которое непосредственно насъ интересуетъ, носитъ названіе „Practica geometriae" и было написано въ 1220 году. Въ этой работѣ Леонардо излагаетъ, между прочимъ, спрямленіе окружности по способу вписанныхъ и описанныхъ многоугольниковъ значительно болѣе короткимъ путемъ, чѣмъ Архимедъ. Онъ также останавливается на 96-угольникѣ, но находитъ болѣе тѣсныя границы для π:

$$\frac{1440}{458\frac{1}{5}} = 3{,}1427\ldots \quad \text{и} \quad \frac{1440}{458\frac{4}{9}} = 3{,}1410\ldots,$$

чѣмъ данныя Архимедомъ:

$$3\tfrac{1}{7} = 3{,}1428\ldots \quad \text{и} \quad 3\tfrac{10}{71} = 3{,}1408\ldots$$

Леонардо беретъ среднее ариѳметическое этихъ границъ:

$$\frac{1440}{458\frac{1}{3}} = 3{,}1418\ldots \text{ **)}$$

---

†) Въ семитическихъ языкахъ гласныя обыкновенно пропускаются.
П р и м. р е д.

*) Cantor I, стр. 560 и 632. Hankel, стр. 280—281.

**) См. Scritti di Leonardo Pisano matematico del secolo decimoterzo pubblicati da B. Boncompagni (Roma 1857—62) II, стр. 87—90. Также: Cantor II, стр. 34; Hankel, стр. 345.

§ 8. Эпоха возрожденія. *)

Леонардо называютъ блестящимъ метеоромъ, который промелькнулъ и снова исчезъ. Въ частности, если остановимъ наше вниманіе на квадратурѣ круга, то спрямленіе, выполненное Леонардо, представится намъ, какъ особенная точка въ развитіи этой задачи. Дѣйствительно, намъ нечего сказать о слѣдующихъ послѣ него двухъ вѣкахъ, если оставить безъ вниманія схоластическую болтовню. Вѣдь даже такіе люди, какъ Іоаннъ Кампанъ изъ Наварры (Iohannes Campanus; во второй половинѣ тринадцатаго столѣтія) и Альбертъ Саксонскій (умеръ въ 1390 г.) считали значеніе $\pi=3\frac{1}{7}$ не приближеннымъ, а совершенно точнымъ. **)

Впервые опять привлекаетъ наше вниманіе выдающійся астрономъ и дѣльный гуманистъ вѣнскаго университета (основаннаго въ 1365 году) Георгъ Пейербахъ (1423—1461). Онъ былъ прекрасно знакомъ со всѣми предшествовавшими ему изслѣдованіями по измѣренію круга, зналъ найденныя Архимедомъ границы для π ($3\frac{1}{7}$ и $3\frac{10}{71}$), зналъ также, что Птолемей пользовался значеніемъ $\frac{377}{120}$ и что индусы нашли значеніе $\sqrt{10}$ и $\frac{62832}{20000}$. При этомъ Пейербахъ вполнѣ отдавалъ себѣ отчетъ въ томъ, что все это лишь приближенныя значенія, и сомнѣвался въ возможности вообще найти точную величину отношенія длины окружности къ діаметру. Но важнѣе косвенное участіе Пейербаха въ развитіи интересующей насъ задачи, заключающееся въ разработкѣ вспомогательныхъ средствъ тригонометріи. Точность арабскихъ таблицъ его не удовлетворяла, поэтому онъ составилъ новую таблицу синусовъ, для дугъ отъ 10′ до 10′, полагая радіусъ круга равнымъ 60000. ***)

---

*) См. Rudio, Über den Antheil der mathematischen Wissenschaften an der Kultur der Renaissance. (Heft 142 der Sammlung von Virchow und Wattenbach, Hamburg 1892).

**) H. Suter, Der Tractatus de quadratura circuli des Albertus de Saxonia (Hist.-litt. Abt. der Zeitschr. für Math. und. Physik. Bd. 29).

***) Cantor II, стр. 167—168; Wolf I, стр 170.

Оживленію интереса къ задачѣ о квадратурѣ круга значительно содѣйствовалъ Николай Кузанскій *) (1401 — 1464). Между 1450 и 1460 годами онъ посвятилъ нѣсколько работъ аркуфикаціи прямой. А именно, онъ поставилъ себѣ задачу, исходя изъ даннаго равносторонняго треугольника, постепенно переходить къ правильнымъ многоугольникамъ того же периметра, но большаго числа сторонъ, чтобы въ концѣ концовъ придти къ кругу того же периметра, радіусъ котораго нужно было бы тогда опредѣлить. Въ одномъ письмѣ къ извѣстному врачу и естествоиспытателю Паола Тосканелли (Paola Toscanelli), онъ сообщаетъ точное, по его мнѣнію, рѣшеніе этой задачи. Даваемое имъ построеніе, разумѣется, правильно только съ приближеніемъ; тѣмъ не менѣе точность его довольно значительна, такъ какъ вычисленіе значенія π, отвѣчающаго этому построенію, даетъ 3,1423..., въ то время какъ $3\frac{1}{7} = 3,1428...$. Гораздо менѣе точны самыя квадратуры и спрямленія, которыя ученый кардиналъ опубликовалъ. Уже въ 1464 г. Регіомонтанъ (Regiomontanus) въ полемическомъ сочиненіи **) противъ Кузы показываетъ, что значенія π, которыя лежатъ въ основаніи этихъ работъ, не содержатся даже между границами, указанными Архимедомъ и замѣчаетъ, не безъ легкой ироніи, что онъ готовъ признать доказательства Кузы философскими, но не можетъ признать ихъ математическими. ***)

Регіомонтанъ****) (Іоаннъ Мюллеръ, родился въ 1436 году во Франкскомъ городкѣ Кёнигсбергѣ и умеръ въ Римѣ въ 1476 году),

---

*) Свѣдѣнія объ этомъ разностороннемъ и живомъ ученомъ, который состоялъ въ оживленной перепискѣ съ Пейербахомъ и Регіомонтаномъ, можно найти у Schanz'a: Der Cardinal Nicolaus von Cusa als Mathematiker (Programm des Gymnasiums in Rottweil, 1871—72). См. также Cantor II, стр. 170—187. Сочиненія Кузы были изданы въ Базелѣ въ 1565 году.

**) Эта очень интересная работа, написанная отчасти въ формѣ діалога, и содержащая всѣ нужныя вычисленія, была издана въ 1533 году въ Нюренбергѣ Іоанномъ Шёнеромъ подъ заглавіемъ: „De quadratura circuli", какъ приложеніе къ знаменитому сочиненію Регіомонтана „De triangulis omnimodis libri quinque", которое было куплено и сохранено для потомства Вилибальдомъ Пиркгеймеромъ.

***) См. стр. 25 упомянутаго сочиненія „de quadratura circuli" или также: Cantor II, стр. 253.

****) Относительно жизни и трудовъ Регіомонтана см.: J. G. Doppelmayr, Historische Nachricht von den Nürnbergischen Mathematicis und Künst-

„наиболѣе дѣятельный реформаторъ точныхъ наукъ въ пятнадцатомъ столѣтіи“, сыгралъ столь крупную роль въ исторіи математики и особенно въ исторіи тригонометріи, которую онъ впервые превратилъ въ самостоятельную науку, что намъ необходимо сказать о немъ нѣсколько словъ.

Онъ показалъ впервые (въ своемъ сочиненіи „De triangulis“), что по тремъ угламъ сферическаго треугольника можно вычислить три стороны его; кромѣ того, онъ значительно подвинулъ впередъ рѣшеніе задачи, которую поставилъ себѣ уже учитель и другъ его Пейербахъ, а именно вычисленіе точныхъ таблицъ синусовъ угловъ, содержащихъ цѣлое число минутъ, при этомъ онъ сначала выбралъ радіусъ равнымъ 600 000, а затѣмъ 10 000 000, перейдя такимъ образомъ впервые отъ шестидесятичной системы къ десятичной. Но кромѣ этихъ таблицъ синусовъ Регіомонтанъ вычислилъ также еще таблицу тангенсовъ отъ 1^0 до 1^0, въ которой онъ также съ вполнѣ сознательною цѣлью усовершенствованія положилъ въ основаніе десятичную систему вмѣсто шестидесятичной и принялъ радіусъ равнымъ 100 000. Эта „Tabula foecunda“ — какъ назвалъ Регіомонтанъ свою таблицу тангенсовъ — тѣмъ болѣе вызываетъ наше удивленіе, что Регіомонтанъ, какъ и его современники, не былъ знакомъ съ работами Альбаттани и Абуль Уафа, такъ что онъ, какъ бы вторично, открылъ и ввелъ въ тригонометрію тангенсы, которые на этотъ разъ уже прочно въ ней утвердились.

Дальнѣйшій прогрессъ послѣ Пейербаха и Регіомонтана какъ въ теоріи тригонометріи, такъ и въ составленіи болѣе обширныхъ и точныхъ таблицъ, осуществили Коперникъ*) (Koppernikus; 1473—1543), который ввелъ въ науку понятіе „секансъ“, Ретикусъ (Rhäticus; 1514—1576) — другъ и ученикъ Коперника, Питискусъ (Pitiscus; 1561—1613), Юстъ Бюрги (Ioost Bürgi; 1552—1632) — составитель первой логариѳмической таблицы и Неперъ (Napier; 1550—1617), который независимо отъ Бюрги и почти одновременно съ нимъ открылъ логариѳмы; теорію и прак-

lern (Nürnberg 1730), стр. 1—23. Далѣе, M. A. Stern, Joannes de Monteregio (Ersch-Gruber's Encyclop. 22. Teil); S. Günther, Müller Iohannes (Allg. deutsche Biogr. Bd. 22); Cantor II, стр. 232—265; Wolf I, стр. 169—171; наконецъ, см. цитированное выше сочиненіе автора „Über den Antheil der mathematischen Wissenschaften an der Kultur der Renaissance“.

*) Cantor II, стр. 433—434.

тику логариѳмическихъ вычисленій затѣмъ разработали Бриггсъ (Briggs; 1556—1630), Влакъ (Vlacq; 1600—1667) и Іоаннъ Кеплеръ (Iohannes Kepler; 1571—1630). Мы ограничимся лишь этими краткими указаніями, чтобы не очень удаляться отъ нашей темы. *)

Возвращаясь къ задачѣ о квадратурѣ круга, мы должны еще вкратцѣ сообщить слѣдующіе факты. **) Лука Пачіоли (Luca Paciuoli; жилъ приблизительно отъ 1445 г. до 1514 г.), носившій въ качествѣ члена францисканскаго ордена имя Fra Luca di Borgo, вычислилъ въ своемъ сочиненіи „Summa de Arithmetica Geometria Proportioni et Proportionalita" подобно Архимеду при помощи 96-угольника приближенное значеніе $\pi=3\frac{1}{7}$. Его безсмертный другъ Леонардо да Винчи (Lionardo da Vinci; 1452—1519) осуществлялъ квадратуру круга посредствомъ колеса, котораго толщина равна половинѣ радіуса; слѣдъ, оставленный колесомъ послѣ полнаго оборота, давалъ площадь круга этого колеса. Альбрехтъ Дюреръ (Albrecht Dürer; 1471—1528), который подобно Леонардо занимаетъ почетное мѣсто въ исторіи математическихъ наукъ, даетъ въ своемъ знаменитомъ сочиненіи „Underweysung der messung mit dem zirckel und richtscheyt", посвященномъ меценату Вилибальду Пиркгеймеру ***) (Wilibald Pirckheimer) приближенное значеніе $\pi=\frac{25}{8}=3{,}125$, которымъ, какъ мы помнимъ, пользовался уже Витрувій.

Французскій математикъ Бувель (Bouvelles; 1470—1533) старался получить квадратуру круга при помощи катящагося колеса и указалъ построеніе, которое приводитъ къ индійскому значенію $\pi=\sqrt{10}$. При этомъ онъ училъ, что діаметръ круга, равновеликаго данному квадрату, равенъ $\frac{8}{10}$ его діагонали, т. е. полагалъ $\pi=3\frac{1}{8}$.

---

*) О названныхъ ученыхъ см. обстоятельное изложеніе: Wolf I, стр. 68—75, 169—175. О Віетѣ, о которомъ бы тоже слѣдовало здѣсь упомянуть, рѣчь будетъ еще впереди

**) Cantor II, стр. 303, 276—277, 352—354, 344—348, 356—358, 427.

***) Относительно Альбрехта Дюрера и Вилибальда Пиркгеймера см. чрезвычайно интересную книгу „Historische Nachricht von den Nürnbergischen Mathematicis und Künstlern" J. G. Doppelmayr'a. стр. 36—44, 153—155 и 182—190.

Но наибольшей извѣстностью пользовалось посмертное сочиненіе „De rebus mathematicis hactenus desideratis" (1556) популярнаго профессора „Collège royal" въ Парижѣ Оронтія Финея (Orontius Finaeus; 1494—1555), въ которомъ, между прочимъ, указывался способъ для полученія отношенія длины окружности къ діаметру при помощи только циркуля и линейки. Въ числѣ указанныхъ имъ предложеній и построеній имѣются два, которыя мы встрѣтимъ дальше въ сочиненіи Гюйгенса „De circuli magnitudine inventa" (§ 14); замѣтимъ здѣсь только, что приближенныя значенія, даваемыя Оронтіемъ $\frac{22}{7}$ и $\frac{245}{78}$ довольно удовлетворительны, но позднѣе онъ принимаетъ число $\frac{245}{78}$ за совершенно точное значеніе π. Произведеніе Оронтія Финея вскорѣ вызвало критическое сочиненіе „De erratis Orontii Finaei", которое написалъ португальскій математикъ и космографъ Педро Нунецъ или Ноніусъ (Pedro Nuñez, Nonius; 1492—1577), имя котораго еще и теперь связывается съ извѣстнымъ приспособленіемъ, правильнѣе называемымъ Vernier и служащимъ для точнаго отсчитыванія угловъ. Въ этомъ сочиненіи опровергались взгляды парижскаго ученаго.

Изъ великихъ итальянскихъ математиковъ эпохи возрожденія, послѣ Луки Пачіоли, ни Сципіонъ дель Ферро (Scipione del Ferro; ум. въ 1526 г.), ни Николай Тарталія (Nicolo Tartaglia; 1506—1559), ни Іеронимъ Карданъ (Hieronimo Cardano; 1501—1576), ни Луиджи Феррари (Luigi Ferrari; 1522—1565) не занимались непосредственно задачей о квадратурѣ круга; однако ихъ имена должны быть здѣсь указаны, вслѣдствіе великой роли, которую эти изслѣдователи сыграли при основаніи теоріи алгебраическихъ уравненій, съ которой впослѣдствіи наша задача должна была прійти въ самую тѣсную связь.

Наконецъ, нужно еще упомянуть о нѣкоторыхъ научныхъ трудахъ, которые хотя и не имѣютъ прямого отношенія къ задачѣ о квадратурѣ круга, но всетаки заслуживаютъ нашего вниманія, какъ имѣвшія большое значеніе для математическаго образованія того времени. Въ 1533 году Симонъ Гриней *) (Simon Grynaeus; 1493 — 1541; состоялъ профессоромъ Базельскаго университета, основаннаго въ 1459 году) напечаталъ въ Базелѣ

*) Wolf, Biographieen zur Kulturgeschichte der Schweiz, Bd. II, стр. 10.

первое греческое изданіе Эвклида; въ 1538 году онъ издалъ также Альмагестъ,*) и наконецъ, въ 1544 году Θома Венаторій (Thomas Venatorius; 1480—1551) выпустилъ первое полное изданіе сочиненій Архимеда съ латинскимъ переводомъ и комментаріями Эвтокія. **)

§ 9. Отъ эпохи возрожденія до открытія дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій.

Возрожденіе наукъ имѣло послѣдствіемъ такой расцвѣтъ математики, что теперь мы вынуждены будемъ ограничиться лишь указаніемъ тѣхъ фактовъ, которые существенно подвинули впередъ рѣшеніе нашей задачи.

Первый математикъ, которому удалось найти для отношенія окружности къ діаметру, т. е. для числа π значеніе, далеко превосходящее по точности всѣ раньше извѣстныя значенія, былъ голландскій инженеръ Адріанъ Меції (Adriaen Anthoniszoon, названный Metius). Имъ найдено значеніе $\frac{355}{113}=3{,}141\,592\,9\ldots$, въ которомъ лишь 7-й десятичный знакъ является неправильнымъ. Какъ Меції получилъ это число, ***) которое особенно интересно еще потому, что оно представляетъ собой одну изъ подходящихъ дробей разложенія π въ непрерывную дробь $\left(\frac{3}{1}, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}, \frac{103993}{33102}, \ldots\right)$, —

*) Это изданіе, посвященное англійскому королю Генриху VIII, содержитъ также комментаріи Теона, отца убитой въ 415 году знаменитой математички Ипатіи. Въ основу изданія положенъ былъ манускриптъ, привезенный другомъ и покровителемъ Регіомонтана кардиналомъ Бессаріономъ (Bessarion; 1395—1472) изъ Константинополя въ Римъ; этимъ манускриптомъ многократно пользовались и Пейербахъ, и Регіомонтанъ, и послѣдній изъ нихъ подготовилъ его къ печати. См. Wolf II, стр. 532—533, а также предисловіе къ Альмагесту въ изданіи Halma.

**) Относительно исторіи этой Editio princeps, въ основаніи которой лежали рукописи, оставшіяся послѣ Регіомонтана и Пиркгеймера, а также относительно позднѣйшихъ изданій Архимеда см. прежде всего предисловіе къ этому Базельскому изданію, а также цитированное выше сочиненіе Doppelmayr'a (стр. 14, 15, 41, 51—52, 116, 170), далѣе Heiberg, Quaest. Archim. cap. II и cap. VI, Heiberg, Neue Studien zu Archimedes (Zeitschr. für Math. u. Phys. 1890, Suppl.), а также Гейбергово изданіе Архимеда, 3 томъ. См. также примѣчаніе къ § 10 напечатанной въ этой книгѣ работы Ламберта.

***) См. также: Petri Vorsselman de Heer responsio ad quaestionem ab academia Groningana propositam: „Detur succincta expositio praecipuarum объ этомъ сообщаетъ сынъ его Адріанъ Мецій (Adrianus Metius; 1571—1635), профессоръ въ Franeker, въ сочиненіи „Arithmeticae et Geometriae Practica" (Franekerae 1611). Дѣло въ томъ, что французскій математикъ Симонъ Дюшенъ (Simon Duchesne), жившій въ Голландіи подъ именемъ Ванъ деръ Эйк'а (Van der Eycke), высказалъ въ 1584 г. утвержденіе, будто бы кругъ равновеликъ квадрату, сторона котораго составляетъ $\frac{39}{44}$ діаметра. Это соотвѣтствовало бы значенію $\pi=3,1425\ldots$ Мецій и Лудольфъ, о которомъ будетъ скоро рѣчь, старались посредствомъ болѣе точнаго вычисленія π доказать неправильность этого утвержденія. Въ названной работѣ Адріанъ II разсказываетъ, что его отецъ „P. M." (т. е. Piae Memoriae, а не „Peter Metius", какъ неправильно читали раньше), пользуясь методомъ Архимеда, нашелъ для π границы: $\frac{377}{120}$ и $\frac{333}{106}$, а затѣмъ взялъ среднія ариѳметическія числителей и знаменателей. *)

Совершенно особое мѣсто въ исторіи квадратуры круга занимаетъ великій французскій математикъ Вьета (François Viète; род. въ 1540 г. въ Фонтенѣ и былъ адвокатомъ въ Пуату; позднѣе онъ былъ призванъ Генрихомъ IV въ Парижъ, гдѣ и умеръ въ 1603 году).

Въ своихъ изслѣдованіяхъ объ измѣреніи круга **) онъ исходилъ изъ слѣдующей теоремы: Если въ кругъ вписаны два правильныхъ многоугольника, изъ которыхъ второй имѣетъ вдвое больше сторонъ, чѣмъ первый, то площадь второго многоугольника такъ относится къ площади перваго, какъ діаметръ относится къ хордѣ, дополнительной къ сторонѣ перваго (т. е. какъ радіусъ къ апоѳемѣ).

Начиная съ вписаннаго квадрата, Вьета переходилъ затѣмъ къ правильному 8-угольнику, 16-угольнику, 32-угольнику и т. д.

---

methodorum, quae ad circuli quadraturam ducunt" (Groningen 1832); далѣе Wolf I, стр. 161—162.

*) См. также главу „De mensura circuli" въ интересномъ сочиненіи того же автора „Arithmetici Libri duo et Geometriae libri VI (Lugd. Batavorum 1626), или также мои эскизы, опубликованные въ Züricher Vierteljahrsschrift (Bd. 35, стр. 14).

**) Francisci Vietae Opera mathematica (издалъ Schooten. Lugduni Batavorum. 1464), стр. 398—400.

до безконечности, постоянно удваивая число сторонъ. Вычисляя дополнительную хорду стороны каждаго изъ этихъ многоугольниковъ, онъ могъ послѣдовательно опредѣлить отношеніе площади каждаго многоугольника къ предыдущему. Перемноживъ это безконечное множество отношеній, онъ получилъ отношеніе площади круга къ первому многоугольнику, т. е. къ квадрату.

Развивая такимъ образомъ мысли, высказанныя, какъ онъ самъ это замѣчаетъ, Антифономъ, *) Вьета пришелъ къ очень замѣчательному результату, что кругъ, котораго діаметръ равенъ единицѣ, имѣетъ площадь **)

$$\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\ldots \text{in inf.}}$$

Такъ какъ эта площадь, съ другой стороны, равна $\frac{\pi}{4}$, то получается интересная формула:

$$\frac{\pi}{2}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\ldots \text{in inf.}}$$

Эта замѣчательная формула представляетъ собой не только первое точное аналитическое выраженіе для числа π, но также первый примѣръ

---

*) См. стр. 12.

**) У Вьеты, конечно лишь вслѣдствіе недосмотра, отсутствуетъ передъ каждымъ внутреннимъ знакомъ корня сомножитель $\frac{1}{2}$. Дѣйствительно, обозначая черезъ s_n дополнительную хорду къ сторонѣ правильнаго n-угольника, а діаметръ черезъ 1, имѣемъ $s_{2n}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}s_n}$; но $s_4=\sqrt{\frac{1}{2}}$, слѣдовательно,

$$s_8=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}},\quad s_{16}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\ \text{и т. д.}$$

выраженія числа въ видѣ безконечнаго произведенія. *)

Но кромѣ этой формулы для площади круга, Вьета, „идя по слѣдамъ Архимеда", далъ съ помощью вписанныхъ и описанныхъ многоугольниковъ, начиная съ шестиугольника и кончая 2^{16}. 6-угольникомъ, для числа π тѣсные предѣлы, опредѣляемые слѣдующимъ

---

*) Абсолютная сходимость безконечнаго произведенія. встрѣчающагося въ формулѣ Вьеты, слѣдующимъ образомъ доказана мною въ 36-мъ томѣ Zeitschrift für Math. u. Phys., Hist.-litt. Abt. („Über die Konvergenz einer von Vieta herrührenden eigentümlichen Produktentwicklung"): Эйлеръ, не зная формулы Вьеты, даетъ въ своемъ сочиненіи „Variae observationes circa angulos in progressione geometrica progredientes" (Opuscula anal. I, стр. 346) для дуги s круга формулу:

$$s=\frac{\sin s}{\cos\frac{s}{2}\cdot\cos\frac{s}{4}\cdot\cos\frac{s}{8}\cdot\cos\frac{s}{16}\cdots}\ (\text{при } |s|<\pi),$$

которая для $s=\frac{\pi}{2}$ обращается въ формулу Вьеты. Произведеніе же

$$P=\prod_{\nu=1}^{\infty}\cos\frac{s}{2^\nu}=\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-2\sin^2\frac{s}{2^{\nu+1}}\right)$$

абсолютно сходится, такъ какъ рядъ

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}2\sin^2\frac{s}{2^{\nu+1}}$$

сходится, какъ легко видѣть. †) Формула Вьеты, въ виду ея быстрой сходимости, очень удобна для логариѳмическаго вычисленія π. — Разложеніемъ въ произведенія функціи $\frac{\arcsin x}{x}$ и другихъ подобныхъ функцій занимается, повидимому не зная о рядахъ Вьеты и Эйлера, г. Зейдель въ статьѣ: „Über eine Darstellung des Kreisbogens, des Logarithmus und des Elliptischen Integrales I. Art durch unendliche Produkte (Crelle. Bd. 73). на которую любезно обратилъ мое вниманіе Штикельбергеръ.

†) $$\sum_{\nu=1}^{\infty}2\sin^2\frac{s}{2^{\nu+1}}<\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{s^2}{2^{2\nu+1}}$$

Прим. ред.

предложеніемъ *): Если положить діаметръ круга равнымъ 100 000, то длина его окружности болѣе, чѣмъ $314\,159\frac{26\,535}{100\,000}$ и менѣе, чѣмъ $314\,159\frac{26\,537}{100\,000}$. Вьета далъ, слѣдовательно, 9 правильныхъ десятичныхъ знаковъ для числа π. **)

Точность, которой достигъ Вьета, скоро превзошелъ голландскій математикъ Адріанъ Романскій (Adrianus Romanus, Adriaen van Roomen; род. въ Лёвенѣ въ 1561 г., былъ профессоромъ въ Вюрцбургѣ и умеръ въ Майнцѣ въ 1615 г.) въ сочиненіи „In Archimedis circuli dimensionem expositio et analysis. Apologia pro Archimede ad Cl. vir. Josephum Scaligerum ***) etc. (Wurceburgi, anno 1597)“, гдѣ онъ при помощи 2^{30}-угольника вычисляетъ π съ 17-ю десятичными знаками. Но еще гораздо больше терпѣнія, выдержки и искусства въ вычисленіяхъ обнаружилъ Лудольфъ Ванъ Цейленъ ****) (Ludolf van Ceulen; род. въ Гильдесгеймѣ въ 1539 году и умеръ профессоромъ математическихъ и военныхъ наукъ Лейденскаго университета въ 1610 году. Ванъ Цейленъ — *прибавленіе къ имени*, указывающее на происхожденіе его семьи изъ Кёльна, по голландски Ceulen). Въ сочиненіи „Van der Circkel“ *****) (Delft 1596) Лудольфъ излагаетъ свои вычисленія, начатыя въ 1586 г.; онъ показываетъ, какимъ образомъ, удваивая по методу Архимеда число сторонъ вписанныхъ и описанныхъ многоугольниковъ, онъ дошелъ

---

*) Vietae Opera, стр. 392.

**) Слѣдуетъ вкратцѣ упомянуть о заслугахъ Вьеты въ разработкѣ тригонометріи, особенно сферической, а также въ теоріи алгебраическихъ уравненій (формулы Вьеты). См. Wolf I, стр. 169—175.

***) Знаменитый филологъ Лейденскаго университета Іосифъ Скалигеръ (1540—1609) въ своемъ сочиненіи „Cyclometrica elementa“ (1594) при помощи весьма сомнительныхъ вычисленій пришелъ къ результату, что уже периметръ вписаннаго двѣнадцатиугольника больше окружности, а потому совершенно безполезно увеличивать число сторонъ и разсматривать описанные многоугольники. Геометрически вѣрное можетъ быть ариѳметически ложнымъ. Большое уваженіе, которымъ пользовался Скалигеръ, какъ филологъ, было причиной того, что самые выдающіеся математики того времени, какъ Адріанъ Романскій, Лудольфъ Клавій, Вьета и др. сочли нужнымъ выступить противъ него. (См. Kästner, Geschichte der Mathematik. B. I, стр. 486—511).

****) См. Vorstermann van Oijen „Notice sur Ludolfe von Colen“ (Boncompagni's Bullettino 1868).

*****) Въ латинскомъ переводѣ Willebrord'a Snellius'a издано подъ заглавіемъ: „Ludolphi a Ceulen de circulo et adscriptis liber“ (1619).

до $60 \cdot 2^{29}$-угольника съ цѣлью вычисленія π съ 20-ю десятичными знаками и заканчиваетъ свое произведеніе словами: „Die lust heeft, can naerder comen" (у кого есть охота, пусть пойдетъ дальше). Но охота пойти дальше явилась позднѣе у него самого. Въ сочиненіи *) „De Arithmetische en Geometrische fondamenten" вмѣсто верхней и нижней границъ числа π, данныхъ имъ ранѣе —

$$3{,}141\,592\,653\,589\,793\,238\,46 < \pi < 3{,}141\,592\,653\,589\,793\,238\,47,$$

онъ вычислилъ приближенныя значенія π съ 32 десятичными знаками

$$3{,}141\,592\,653\,589\,793\,238\,462\,643\,383\,279\,50 \quad \text{и}$$

$$3{,}141\,592\,653\,589\,793\,238\,462\,643\,383\,279\,51.$$

По позднѣйшимъ свѣдѣніямъ, Лудольфъ и этимъ не удовлетворился и далъ 35 десятичныхъ знаковъ для приближенія π, которые, согласно его послѣднему предсмертному желанію, должны были быть вырѣзаны на его надгробномъ камнѣ; послѣдній, впрочемъ, не сохранился.

При всемъ уваженіи къ гигантскому прилежанію и огромному терпѣнію, обнаруженнымъ Лудольфомъ при этихъ вычисленіяхъ, намъ въ настоящее время представляется довольно страннымъ, что число π названо и еще будетъ называться по имени математика, который проявилъ сравнительно мало оригинальности при опредѣленіи этого числа, — математика, труды котораго не могутъ быть ни коимъ образомъ поставлены на одну доску съ геніальнымъ произведеніемъ истиннаго творца теоріи измѣренія круга, Архимеда.

Несравненно бо́льшую цѣну имѣютъ прекрасныя предложенія, которыми обогатили теорію измѣренія круга два великихъ голландскихъ математика и физика Виллебрордъ Снеллій (Willebrord Snellius; род. въ 1580 г. въ Лейденѣ, умеръ тамъ же профессоромъ математики въ 1626 г.) и въ особенности Христіанъ

---

*) Изданіе посмертное вдовы Адріаны Симонсъ (Leyden 1615) съ портретомъ Лудольфа. Кромѣ уже названнаго обстоятельнаго изложенія Vorstermann'a van Oijen см. о Лудольфѣ еще: *Wolf I, стр. 162—163; Kästner*, Gesch. d. Math. Bd. 3, стр. 50—51; Klügels Wörterbuch, Artikel Cyklotechnie, стр. 649—650.

Гюйгенсъ*) (Christian Huygens; род. въ Гаагѣ въ 1629 г., умеръ тамъ же въ 1695 г.). Снеллія и Гюйгенса нужно считать первыми математиками, которые внесли новыя идеи и существенныя добавленія въ созданный Архимедомъ методъ численнаго спрямленія окружности. Въ прекрасной книгѣ „Cyclometricus" (Lugd. Bat. 1621), Снеллій показалъ, что для приближеннаго вычисленія длины дуги окружности съ весьма большой точностью нѣтъ надобности брать многоугольниковъ съ большимъ числомъ сторонъ, какъ это дѣлали раньше.

Къ сожалѣнію, Снеллію не удалось доказать двѣ теоремы, которыя лежатъ въ основаніи его изслѣдованій; поэтому со стороны Гюйгенса было вполнѣ умѣстно помѣстить впослѣдствіи эти теоремы въ своемъ знаменитомъ сочиненіи „De circuli magnitudine inventa" (см. § 15, теорема XII, и § 16, теорема XIII), такъ какъ данныя имъ строгія доказательства этихъ теоремъ находятся въ тѣснѣйшей связи съ его собственными изслѣдованіями.

Убѣжденный въ правильности своихъ двухъ теоремъ, Снеллій слѣдующимъ образомъ обнаружилъ большое сокращеніе, достигаемое при ихъ помощи (Cyclometricus, Prop. 31). По способу Архимеда, вписанный и описанный шестиугольники даютъ для π предѣлы 3 и 3,464. Напротивъ, при помощи его теоремъ тѣ же шестиугольники даютъ предѣлы 3,140 22 и 3,141 60, значительно болѣе тѣсные, чѣмъ тѣ, которые съ трудомъ вычислилъ Архимедъ, разсматривая 96-угольники. Беря же 96-угольники, Снеллій получалъ съ помощью своихъ теоремъ приближенія: 3,141 592 627 2 и 3,141 592 832 0 и т. д. Наконецъ, Снеллій провѣрилъ правильность Лудольфовыхъ предѣловъ, употребляя при этомъ несравненно меньше вычисленій.

Если принять во вниманіе тотъ фактъ, что основаніе снелліевой циклометріи требовало болѣе тщательнаго доказательства, хотя это не умаляетъ значенія этой богатой плодотворными идеями работы, то становятся понятными слова Гюйгенса, который въ введеніи къ знаменитому сочиненію **) „De circuli magnitudine

---

*) О жизни Гюйгенса см., напр., его біографію, составленную G. J. Gravesand'омъ въ „Opera varia" (Lugd. Bat. 1724).

**) По этому поводу см. письма Гюйгенса къ Ф. Ванъ Шотену (F. van Schooten), издателю сочиненій Вьеты, къ Григорію де С. Винсентъ (Grégoire inventa" (1654), говоритъ, что изъ всѣхъ предложеній, на которыя опирается измѣреніе круга, одно только до сихъ поръ установлено, а именно то, что кругъ больше вписаннаго многоугольника и меньше описаннаго. Онъ же — продолжаетъ едва достигшій тогда 25-лѣтняго возраста математикъ, съ основательной увѣренностью — хочетъ теперь произвести болѣе тщательное опредѣленіе величины круга. И дѣйствительно, Гюйгенсъ не сказалъ этимъ болѣе, чѣмъ слѣдуетъ. Въ самомъ дѣлѣ, это сочиненіе не только составляетъ эпоху для теоріи измѣренія круга, но оно принадлежитъ безспорно къ числу прекраснѣйшихъ и важнѣйшихъ работъ, которыя когда либо были написаны по элементарной геометріи, и на ряду съ сочиненіемъ Архимеда навсегда сохранитъ свою цѣну, несмотря на то, что современный анализъ можетъ привести къ тѣмъ же результатамъ гораздо болѣе короткимъ путемъ. Мы не будемъ приводить подробно богатаго содержанія названной работы — это значило бы поступить по отношенію къ ней неправильно: она принадлежитъ къ тѣмъ сочиненіямъ, которыя должны быть прочитаны каждымъ, кто интересуется исторіей математики. Укажемъ вкратцѣ лишь нѣкоторыя теоремы:

Всякій кругъ больше вписаннаго въ него равносторонняго многоугольника, увеличеннаго на треть разности между этимъ многоугольникомъ и другимъ вписаннымъ многоугольникомъ, имѣющимъ вдвое меньше сторонъ. (Теорема V).

Длина каждой окружности больше периметра, вписаннаго въ нее правильнаго многоугольника, увеличеннаго на треть разности между его периметромъ и периметромъ вписаннаго многоугольника съ вдвое меньшимъ числомъ сторонъ. (Теорема VII).

Каждый кругъ меньше двухъ третей описаннаго около него равносторонняго многоугольника, увеличенныхъ на одну треть подобнаго ему вписаннаго многоугольника. (Теорема VI).

---

de St. Vincent) и др., которыя помѣщены въ новомъ изданіи сочиненій Гюйгенса (1888). См. именно письма Nr. 181—192.

Длина окружности меньше, чѣмъ меньшее изъ двухъ среднихъ пропорціональныхъ между периметрами правильныхъ подобныхъ многоугольниковъ, изъ которыхъ одинъ вписанъ въ кругъ, а другой описанъ около него. Площадь же круга меньше, чѣмъ многоугольникъ, подобный этимъ многоугольникамъ, и имѣющій периметръ, равный большему изъ двухъ среднихъ пропорціональныхъ. (Теорема XI).

Если обозначить длину дуги, меньшей чѣмъ полуокружность, черезъ a, синусъ ея черезъ s, хорду ея черезъ s', то a заключается всегда между предѣлами:

$$s' + \frac{s'-s}{3} < a < s' + \frac{s'-s}{3} \cdot \frac{4s'+s}{2s'+3s} \quad \text{(Теорема XVI).}$$

Благодаря этимъ и многимъ другимъ предложеніямъ, которыя представляютъ большой интересъ независимо отъ задачи о численномъ спрямленіи, Гюйгенсу удается получить для числа π всегда втрое больше десятичныхъ знаковъ, чѣмъ получается по обыкновеннымъ методамъ. Для полученія Архимедовыхъ приближеній ему достаточно было пользоваться правильнымъ треугольникомъ! Шестидесятиугольникъ уже даетъ ему значенія

$$3{,}141\,592\,653\,3 \quad \text{и} \quad 3{,}141\,592\,653\,8,$$

между тѣмъ какъ по методу Снелліуса даже съ помощью 96-угольника получается лишь 6 десятичныхъ знаковъ, по методу же Архимеда только два первыхъ знака!

Кромѣ этого основного сочиненія, Гюйгенсъ занимался измѣреніемъ круга еще во многихъ другихъ случаяхъ; я упомяну о сочиненіи „Theoremata de quadratura hyperboles, ellipsis et circuli ex dato portionum gravitatis centro“ (Opera varia I, стр. 315—328); изложенные въ послѣднемъ результаты многократно примѣняются въ работѣ, о которой мы говорили выше; упомяну также о возникшемъ изъ обмѣна мыслей между Гюйгенсомъ и безвременно умершимъ англійскимъ математикомъ Грегори (J. Gregory; 1638—1675) въ сочиненіи „De circuli et hyperbolae quadratura controversia“

(Opera varia I, стр. 405—482). Дѣло въ томъ, что Грегори въ статьѣ „Vera circuli et hyperbolae quadratura“ (Opera varia, I, стр. 405—462), которая составляетъ часть упомянутыхъ „Controversia“, пытался доказать невозможность квадратуры круга. Гюйгенсу, который самъ, впрочемъ, былъ убѣжденъ въ невозможности этой квадратуры, удалось показать однако, что предложенное доказательство неудовлетворительно, а именно онъ указалъ, что не рѣшенъ еще даже вопросъ о томъ, соизмѣримъ ли кругъ съ квадратомъ своего діаметра или нѣтъ.

ТРЕТЬЯ ГЛАВА.

Второй періодъ.

Отъ открытія дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій до доказательства Ламбертомъ ирраціональности числа π.

§ 10. Основаніе новаго анализа и его вліяніе на методы измѣренія круга.

Въ классическихъ работахъ Снеллія и Гюйгенса созданный Архимедомъ методъ вписанныхъ и описанныхъ многоугольниковъ достигъ самаго высокаго развитія, но вмѣстѣ съ тѣмъ былъ исчерпанъ. Въ самомъ дѣлѣ, во второй половинѣ 17-го столѣтія подъ вліяніемъ анализа безконечно малыхъ, созданнаго Ньютономъ (Newton; 1642—1727) и Лейбницемъ (Leibnitz; 1646—1716), подготовленнаго трудами Гюйгенса, Ферма́, Валлиса, Броункера и другихъ, и развитаго при участіи двухъ братьевъ Бернулли (Jakob Bernoulli 1654—1705; Iohann Bernoulli 1667—1748), произошелъ великій переворотъ въ математическихъ воззрѣніяхъ и методахъ, который въ большой степени отразился и на теоріи круга. Вмѣсто способа вписанныхъ и описанныхъ многоугольниковъ, которымъ исключительно пользовались раньше для измѣренія круга, отнынѣ основной задачей сдѣлалось разысканіе аналитическихъ выраженій для отношенія длины окружности къ діаметру, вслѣдствіе чего старые элементарные геометрическіе методы были совершенно заброшены.

Такъ напримѣръ, Валлисъ (Iohn Wallis; род. въ 1616 г. умеръ профессоромъ въ Оксфордѣ въ 1703 г.) нашелъ для числа π

выраженіе въ видѣ безконечнаго произведенія, а именно онъ доказалъ въ своей „Arithmetica infinitorum“ (Opera I, стр. 467), что

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdots$$

Это выраженіе представляетъ, по сравненію съ произведеніемъ Вьеты, большое преимущество въ томъ отношеніи, что оно составлено исключительно при помощи раціональныхъ операцій. Затѣмъ лордъ Броункеръ (Brouncker; 1620—1684) далъ замѣчательную формулу:

$$\frac{4}{\pi}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\cfrac{49}{2+\cfrac{81}{2+\cfrac{121}{2+\ldots,}}}}}}$$

которая позволяетъ вычислить π при помощи безконечной непрерывной дроби. Броункеръ сообщилъ безъ доказательства эту формулу Валлису, который доказалъ затѣмъ ея правильность въ своей „Arithmetica infinitorum“. *)

Другое, правда, нѣсколько менѣе простое выраженіе дано упомянутымъ выше Грегори, который предложилъ для площади круга формулу:

$$\pi=\frac{4r^2}{2d-\frac{e}{3}-\frac{e^2}{90d}-\frac{e^3}{756d^2}-\frac{23e^4}{113400d^3}-\ldots},$$

въ которой r означаетъ радіусъ, a есть половина стороны вписаннаго квадрата и $e=r-d$. **)

Но важнѣйшимъ исходнымъ пунктомъ для дальнѣйшихъ изслѣдованій по измѣренію круга послужилъ рядъ, найденный сначала

*) Эйлеръ въ своемъ „Introductio in analysin infinitorum“ (I, стр. 305) вывелъ формулу Броункера, какъ частный случай гораздо болѣе общихъ разложеній. Тамъ же Эйлеръ доказалъ формулу Валлиса съ помощью разложеній $\sin\frac{m\pi}{2n}$ и $\cos\frac{m\pi}{2n}$ въ безконечныя произведенія (I. стр. 146).

**) Montucla, Histoire des recherches sur la quadrature du cercle стр. 138.

Грегори (1670), а затѣмъ, независимо отъ него, Лейбницемъ (1673), представляющій соотвѣтствующую данному тангенсу x (измѣренную радіусомъ) дугу $\operatorname{arctg} x$, а именно:

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

Пользуясь этими современными обозначеніями, мы не должны упускать изъ виду, что во времена Грегори не было принято измѣрять дугу радіусомъ, подъ тангенсомъ же подразумѣвали тогда линію, именно отрѣзокъ касательной, а не отношеніе этого отрѣзка къ радіусу круга. Если обозначить длину трехъ линій, а именно радіуса, дуги и тангенса, соотвѣтственно черезъ r, a и t, то рядъ Грегори въ старыхъ обозначеніяхъ будетъ имѣть видъ:

$$a = t - \frac{t^3}{3r^2} + \frac{t^5}{5r^4} - \frac{t^7}{7r^6} + \cdots$$

Полагая въ вышеуказанномъ ряду, выражающемъ $\operatorname{arctg} x$ съ помощью тангенса x, $x = 1$ и, слѣдовательно, $\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{4}$, получаемъ такъ называемый рядъ Лейбница:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots$$

Этотъ рядъ, который вмѣстѣ съ тѣмъ даетъ отношеніе площади круга къ квадрату діаметра, былъ сообщенъ въ 1674 году Лейбницемъ въ письмахъ нѣсколькимъ находящимся въ дружескихъ съ нимъ отношеніяхъ математикамъ. Напечаталъ же онъ впервые свои изслѣдованія по этому вопросу въ 1682 году подъ заглавіемъ*): „De vera proportione circuli ad quadratum circumscriptum in numeris rationalibus". Хотя Лейбницевъ рядъ по простотѣ значительно превосходитъ выраженія Вьеты, Валлиса и Броунекра, тѣмъ не менѣе, вслѣдствіе своей медленной сходимости, онъ не очень пригоденъ для вычисленія π.

---

*) Acta erud. Lips., стр. 11 и слѣд. Заглавіемъ сочиненія Лейбницъ отнюдь не имѣлъ въ виду выразить, что кругъ соизмѣримъ съ квадратомъ своего діаметра. — Въ томъ же томѣ имѣется изящное приближенное построеніе Коханскаго (Kochanski).

Но изъ ряда для $\operatorname{arctg} x$ можно вывести другіе весьма быстро сходящіеся ряды. Сначала пробовали достигнуть этого, полагая $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$, такъ что $\operatorname{arctg} x=\frac{\pi}{6}$. Такимъ образомъ получается:

$$\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}\left[1-\frac{1}{3.3}+\frac{1}{5.3^2}-\frac{1}{7.3^3}+\frac{1}{9.3^4}-\frac{1}{11.3^5}+\cdots\right],$$

откуда легко вычислить число π, послѣ того, какъ $\frac{1}{\sqrt{3}}$ опредѣлено съ достаточнымъ приближеніемъ. Абраамъ Шарпъ (Abraham Sharp; 1653—1742) по этой формулѣ вычислилъ $\frac{\pi}{6}$ съ 72 десятичными знаками. Гораздо болѣе удобными оказались зависимости, которыя въ настоящее время носятъ названіе теоремы сложенія и всѣ вытекаютъ изъ равенства

$$\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg} y=\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}.$$

Изъ этого равенства легко получить выраженіе для

$$\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg} y+\operatorname{arctg} z$$

или для $2\operatorname{arctg} x$, $3\operatorname{arctg} x$ и т. д. Это были почти единственныя зависимости, при помощи которыхъ математики, начиная съ 18-го столѣтія, пытались вычислять π. Благодаря искусному расположенію вычисленій такимъ образомъ были получены гораздо болѣе точныя значенія для π, чѣмъ раньше. Такъ напримѣръ, въ 1706 году англійскій математикъ Машинъ (Machin; 1680—1752) воспользовался формулой

$$\frac{\pi}{4}=4\operatorname{arctg}\frac{1}{5}-\operatorname{arctg}\frac{1}{239}, \dagger)$$

†) Въ самомъ дѣлѣ, по формулѣ для $\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg} y$ имѣемъ послѣдовательно

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{239}+\frac{\pi}{4}=\operatorname{arctg}\frac{1}{239}+\operatorname{arctg}1=\operatorname{arctg}\frac{120}{119},$$

$$2\operatorname{arctg}\frac{1}{5}=\operatorname{arctg}\frac{5}{12},\quad 4\operatorname{arctg}\frac{1}{5}=2\operatorname{arctg}\frac{5}{12}=\operatorname{arctg}\frac{120}{119},$$

слѣдовательно,

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{239}+\frac{\pi}{4}=4\operatorname{arctg}\frac{1}{5};\quad \frac{\pi}{4}=4\operatorname{arctg}\frac{1}{5}-\operatorname{arctg}\frac{1}{239}.$$

Прим. ред.

или:

$$\frac{\pi}{4} = 4\left[\frac{1}{5} - \frac{1}{3.5^3} + \frac{1}{5.5^5} - \frac{1}{7.5^7} + \cdots\right] -$$

$$-\left[\frac{1}{239} - \frac{1}{3.239^3} + \frac{1}{5.239^5} - \frac{1}{7.239^7} + \cdots\right],$$

для вычисленія числа π со 100 десятичными знаками. Выраженіе, которымъ пользовался Машинъ въ высшей степени хорошо приспособлено для вычисленій, такъ какъ первый рядъ легко вычисляется въ виду того, что отношеніе членовъ $\frac{1}{5}, \frac{1}{5^3}, \frac{1}{5^5}, \ldots$ равно $\frac{1}{25} = \frac{4}{100}$, второй же рядъ очень быстро сходится.

Вь 1719 году французскій математикъ Ланьи (Lagny; 1660—1734) далъ 127 десятичныхъ знаковъ числа π. Когда эти знаки позже провѣрилъ Вега (Vega; 1754—1802), который вычислилъ π со 140 знаками, то оказались вѣрными всѣ цифры, кромѣ 113-ой, которая должна быть не 7, а 8.

На этомъ не остановились. Въ 1844 году Гамбургскій вычислитель Захарій Дазе (Zacharias Dase; 1824—1861) въ теченіе не болѣе 2-хъ мѣсяцевъ нашелъ π съ 200 десятичными знаками, пользуясь формулой

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{5} + \operatorname{arctg}\frac{1}{8},$$

указанной ему вѣнскимъ профессоромъ Шульцемъ *) (Schulz). Вотъ это число:

$$\begin{aligned}\pi = 3{,}14159\ &26535\ 89793\ 23846\ 26433\\ &83279\ 50288\ 41971\ 69399\ 37510\\ &58209\ 74944\ 59230\ 78164\ 06286\\ &20899\ 86280\ 34825\ 34211\ 70679\\ &82148\ 08651\ 32823\ 06647\ 09384\\ &46095\ 50582\ 23172\ 53594\ 08128\\ &48111\ 74502\ 84102\ 70193\ 85211\\ &05559\ 64462\ 29489\ 54930\ 38196.\end{aligned}$$

*) См. Crelle Bd. 27 и Wolf I, стр 177.

Наконецъ, въ послѣднее время Рихтеръ (Richter) вычислилъ π съ 500 знаками, и затѣмъ Шенксъ (Shanks) — даже съ 700 знаками. Г. Шубертъ (Schubert) справедливо замѣчаетъ въ своемъ прекрасномъ общедоступномъ сочиненіи „Die Quadratur des Zirkels in berufenen und unberufenen Köpfen“ (Hamburg 1899), что вычисленія такого большого числа десятичныхъ знаковъ имѣютъ въ крайнемъ случаѣ лишь то значеніе, что показываютъ совершенство современныхъ методовъ по сравненію со старыми, для которыхъ такого рода результаты были недостижимы. Помимо этого такія вычисленія не имѣютъ ни научнаго, ни практическаго значенія. Г. Шубертъ очень наглядно показываетъ въ своей статьѣ, какую степень точности представляетъ, напримѣръ, всего лишь 15 знаковъ; точность же, соотвѣтствующая 100 десятичнымъ знакамъ, выше всякаго человѣческаго разумѣнія.

§ 11. Дѣятельность Леонарда Эйлера въ области измѣренія круга.

Прежде чѣмъ перейти къ тому математику, который указалъ совершенно новые пути для изслѣдованій объ измѣреніи круга, а именно создалъ основаніе для успѣшной научной постановки вопроса о возможности квадратуры круга, — нѣтъ надобности упоминать, что мы говоримъ о Леонардѣ Эйлерѣ — здѣсь умѣстно будетъ бросить взглядъ на то, что сдѣлано по отношенію къ нашей задачѣ до середины 18-го столѣтія.

Изслѣдованія Архимеда о вписанныхъ и описанныхъ многоугольникахъ, доведенныя до конца Гюйгенсомъ, въ особенности же изслѣдованія, которыя, начиная со второй половины 17-го столѣтія, опирались на анализъ безконечно малыхъ, а именно на теорію безконечныхъ рядовъ, въ частности, на рядъ Грегори, привели къ методамъ, *) дающимъ возможность выполнять измѣреніе круга съ какой угодно степенью точности. Хотя число π было извѣстно съ болѣе чѣмъ 100 десятичными знаками, хотя были также извѣстны

---

*) Совершенно отличны отъ изложенныхъ до сихъ поръ своеобразные и интересные методы, съ помощью которыхъ г. проф. Вольфъ (Wolf) опредѣлялъ число π на основаніи принциповъ теоріи вѣроятностей, — это его опыты съ бросаніемъ костей, опубликованные въ Züricher Vierteljahrsschrift (Bd. 26 и 27), а также его изслѣдованія задачи объ иглѣ, которую впервые

очень интересныя въ научномъ отношеніи и практически весьма удобныя выраженія для π, напримѣръ, въ формѣ быстро сходящихся рядовъ, однако природа этого важнаго и замѣчательнаго числа была столь же неизвѣстна, какъ и въ древности, въ томъ отношеніи, что все еще оставалось неизвѣстнымъ, раціонально ли число π или нѣтъ.*) Вмѣстѣ съ тѣмъ и вопросъ о возможности квадратуры круга оставался столь же темнымъ, какъ во времена Архимеда; еще даже не была найдена пригодная для научнаго изслѣдованія формулировка вопроса. Конечно, во всѣ времена находились люди, которые воображали, что задача квадратуры круга ими рѣшена; но эти квадратуры, съ какою бы увѣренностью авторы ни возвѣщали о нихъ, какъ о точныхъ рѣшеніяхъ задачи, оказывались только болѣе или менѣе точными приближеніями. То, что даже такія работы могли иногда способствовать развитію науки, тѣмъ ли, что вели къ изощренію критики или же тѣмъ, что, несмотря даже на нѣкоторыя ошибки, содержали новыя и интересныя истины — доказывается, между прочимъ, примѣромъ Григорія С. Винсента (Gregorius a Sancto Vincentio; род. въ Брюгге въ 1584 г., умеръ въ Гентѣ въ 1667 г.) и возникшаго у него съ Гюйгенсомъ и Декартомъ спора.**)

Таково было положеніе вопроса, когда Леонардъ Эйлеръ***) (род. въ Базелѣ 15-го апрѣля 1707 г., умеръ въ С.-Петербургѣ

разсматривалъ Бюффонъ, а затѣмъ Лапласъ, помѣщенныя въ Berner Mitth. (1850). †) См. также Wolf I, стр. 127—128 и стр. 177.

†) Изложеніе геометрическихъ задачъ теоріи вѣроятностей (въ частности „задачи объ иглѣ"), связанныхъ съ числомъ π, имѣется во всѣхъ учебникахъ теоріи вѣроятностей; см. напр.: Марковъ „Исчисленіе вѣроятностей".

Прим. Ред.

*) Попытки доказать ирраціональность числа π однако были. См. примѣчаніе къ § 10 прилагаемой здѣсь статьи Ламберта, гдѣ указывается доказательство, данное въ Ioh. Chr. Sturm'a Mathesis enucleata.

**) Гюйгенсъ „Opera Varia" I, стр. 329.

***) Для ознакомленія съ жизнью и трудами Эйлера см. рѣчи Кондорсэ и Фусса; также Wolf: Biographieen zur Kulturgeschichte der Schweiz. Bd. 4; „Die Basler Mathematiker Daniel Bernoulli und Leonhard Euler, hundert Jahre nach ihrem Tode gefeiert von der Naturforschenden Gesellschaft (Basel 1884); Rudio, Leonhard Euler. Vortrag gehalten auf dem Rathause zu Zürich am 6 Dec. 1883 (Basel, 1884).

18-го сентября 1783 г.), началъ свою многообразную дѣятельность, распространяющуюся на всѣ области математическаго знанія. Задачей этихъ строкъ не можетъ быть надлежащая оцѣнка заслугъ такого человѣка, какъ Эйлеръ, даже только въ сравнительно малой области измѣренія круга. Мы должны ограничиться краткимъ указаніемъ самаго важнаго.

Какъ была основана тригонометрія греками, какъ потомъ отъ арабовъ она перешла къ народамъ христіанскаго средневѣковья, какъ, наконецъ, въ эпоху возрожденія, благодаря трудамъ Пейербаха и особенно Регіомонтана, она превратилась въ самостоятельную науку, — все это мы старались представить хоть въ очень бѣглыхъ чертахъ. Но та тригонометрія, которой мы теперь располагаемъ, если мы пока даже ограничимся только ея элементарной частью, представляется по внѣшней формѣ твореніемъ Эйлера. Эйлеръ первый, напримѣръ, сталъ обозначать стороны треугольника коротко буквами a, b, c, противолежащіе же углы — буквами α, β, γ, (или A, B, C), что привело его къ краткимъ обозначеніямъ $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, $\sec\alpha$, $\operatorname{cosec}\alpha$, которыя такимъ образомъ вошли въ общее употребленіе. До Эйлера эти выраженія или замѣнялись особыми буквами, или чаще всего выражались длинно словами. Нѣкоторые примѣры уяснятъ это лучше всего. Если хотятъ по тремъ угламъ треугольника α, β, γ и сторонѣ его a найти двѣ стороны b и c, то пишутъ, какъ извѣстно:

$$b : a = \sin\beta : \sin\alpha, \quad \text{или} \quad b = a\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} \quad \text{и т. д.}$$

Вмѣсто этого Адріанъ Мецій, напримѣръ, не знавшій этого языка формулъ, долженъ былъ говорить: „Ut se habet sinus anguli lateri dato oppositi, ad latus datum: ita etiam reliquorum angulorum sinus, ad latera opposita“ (Adriani Metii Arithmeticae libri duo et Geometriae libri VI, Lugd. Batav. 1626, стр. 103). Іоаннъ Христофоръ Штурмъ (Iohann Christoph Sturm), который уже зашелъ довольно далеко впередъ въ искусствѣ обозначеній (онъ обозначаетъ, напримѣръ, особой буквой отношеніе длины окружности къ діаметру, именно, буквой e), въ 1689 году пользуется для той же теоремы въ своемъ „Mathesis enucleata“ совершенно тѣми же словами, что и Мецій, между тѣмъ какъ дальше аналогичное предложеніе

$$\sin a : \sin b : \sin c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$$

сферической тригонометріи онъ пишетъ въ формѣ:

Sin. ang. A ad Sin BC ut Sin ang. C ad Sin AB.

Изъ этихъ примѣровъ уже видно, какими неуклюжими и ненаглядными по виду были до Эйлера гоніометрическія формулы и тригонометрическія предложенія. Но не только внѣшнимъ изяществомъ тригонометрія обязана Эйлеру. Точно такъ же и само содержаніе тригонометрическихъ выраженій стало инымъ со времени Эйлера и благодаря ему. Въ то время, какъ раньше синусъ, косинусъ, тангенсъ, котангенсъ обозначали нѣкоторыя линіи, связанныя съ дугой круга, Эйлеръ впервые сталъ опредѣлять эти выраженія, какъ отношенія указанныхъ линій къ радіусу круга.*) Благодаря этому выраженія $\sin z$, $\cos z$ и т. д., пріобрѣли совершенно иной характеръ: они стали аналитическими величинами, функціями z. Такимъ образомъ, Эйлеръ является творцомъ тригонометрическихъ функцій. Вмѣстѣ съ тѣмъ новая точка зрѣнія на тригонометрическія величины привела его къ одному изъ его безспорно прекраснѣйшихъ открытій, а именно, къ открытію замѣчательной зависимости между показательной и тригонометрическими функціями. Эта зависимость выражается равенствами:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

гдѣ e^z есть показательная функція, опредѣляемая постоянно сходящимся рядомъ **)

$$e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \cdots$$

Здѣсь не мѣсто распространяться о томъ переворотѣ, который упомянутое открытіе произвело во всей математикѣ. Однако, нужно замѣтить, что формулы Эйлера, которыя могутъ быть написаны также въ видѣ:

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z, \quad e^{-iz} = \cos z - i \sin z,$$

---

*) Удивительно, что Legendre въ своихъ „Eléments de géométrie" (1794) даетъ еще старыя опредѣленія, благодаря чему получаются совершенно безполезныя усложненія.

(Онъ долженъ, напримѣръ, писать $\sin(a+b) = \frac{\sin a \cos b + \cos a \sin b}{R}$).

**) Introductio in analysin infinitorum, I, стр. 104.

представляютъ собой исходный пунктъ всѣхъ позднѣйшихъ изслѣдованій о природѣ числа π. Полагая въ нихъ $z = \pi$, получаемъ

$$e^{i\pi} = -1 \quad \text{или} \quad e^{2\pi i} = 1.$$

Эта основная зависимость между обоими числами

$$e = 2{,}718\,281\,828\,459\,045\ldots \quad \text{и} \quad \pi = 3{,}141\,592\,653\,589\,793\ldots$$

служитъ ключемъ для рѣшенія вопроса о возможности квадратуры круга.

Мы не имѣемъ возможности останавливаться здѣсь на многихъ интересныхъ выраженіяхъ, какъ напримѣръ:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \frac{2^0}{1.2.3} \cdot \frac{1}{1}\pi^2$$

$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \cdots = \frac{2^2}{1.2.3.4.5} \cdot \frac{1}{3}\pi^4$$

и т. д.

или:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots = \frac{\pi}{4}$$

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}$$

$$1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - \cdots = \frac{\pi^3}{32}$$

и т. д.

или:

$$\frac{2^2}{2^2-1} \cdot \frac{3^2}{3^2-1} \cdot \frac{5^2}{5^2-1} \cdot \frac{7^2}{7^2-1} \cdot \frac{11^2}{11^2-1} \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\frac{2^4}{2^4-1} \cdot \frac{3^4}{3^4-1} \cdot \frac{5^4}{5^4-1} \cdot \frac{7^4}{7^4-1} \cdot \frac{11^4}{11^4-1} \cdots = \frac{\pi^4}{90}$$

и т. д.,

которыя Эйлеръ далъ для π въ формѣ безконечныхъ рядовъ, произведеній и непрерывныхъ дробей въ многочисленныхъ статьяхъ,*) въ особен-

---

*) См. напр.: „Variae observationes circa series infinitas“ (Comment. Acad. Petrop. IX. стр. 160), или „De variis modis circuli quadraturam numeris

ности же въ своемъ классическомъ сочиненіи: „Introductio in analysin infinitorum“ (Lausannae, 1748). Почти всѣ эти формулы получаются изъ указанной зависимости между показательной функціей и тригонометрическими функціями. Точно также мы можемъ лишь вскользь упомянуть о различныхъ выраженіяхъ, найденныхъ Эйлеромъ для числа e. Изъ нихъ приводимъ, какъ заслуживающія особаго вниманія, разложенія въ непрерывныя дроби чиселъ e, $\sqrt{e}$ и $\frac{e-1}{2}$, *) а именно:

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \dots}}}}}}$$

или короче:

$$e = (2, \overline{1, 2m, 1}), \quad (m = 1, 2, 3 \dots),$$

$$\sqrt{e} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \dots}}}}}};$$

proxime exprimendi“ (тамъ же, стр. 222), или „Variae observationes circa angulos in progressione geometrica progredientes“ (Opuscula analytica I, стр. 345) и т. д., и т. д.

*) Эти выраженія указаны Эйлеромъ въ 1737 г. въ статьѣ „De fractionibus continuis dissertatio“ (Comment. Acad. Petrop. T. IX, стр. 120). Въ „Introductio“ помѣщено лишь разложеніе $\frac{e-1}{2}$; выраженія для e и $\sqrt{e}$ тамъ не содержатся, чѣмъ и объясняется, что, не смотря на ихъ важность, они были совершенно забыты, и недавно вновь были открыты г. Гурвицемъ (Sitzungsberichte der Physikalischökonomischen Gesellschaft zu Königsberg 1891). Въ этой интересной статьѣ, къ которой мы еще вернемся, г. Гурвицъ даетъ сверхъ того разложеніе въ непрерывную дробь

$$e^2 = (7, \overline{3m-1, 1, 1, 3m, 12m+6}), \quad (m = 1, 2, 3 \dots),$$

которое не встрѣчается у Эйлера.

или короче:

$$\sqrt{e}=(1, \overline{4m+1, 1, 1}), \quad (m=0, 1, 2\ldots),$$

и, наконецъ,

$$\frac{e-1}{2}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{14+\cfrac{1}{18+\ldots}}}}}$$

При изложеніи исторіи числа π, мы должны упомянуть также о слѣдующемъ обстоятельствѣ. Съ первыхъ же страницъ настоящей книги мы стали пользоваться обозначеніемъ π для выраженія отношенія длины окружности къ ея діаметру, и вообще весьма распространено мнѣніе, что это обозначеніе очень древняго происхожденія. Но это вовсе не такъ. Напротивъ того, потребность обозначать цѣлыя понятія простымъ неизмѣннымъ символомъ совсѣмъ недавняго происхожденія. До открытія анализа безконечно малыхъ, т. е. до конца 17-го столѣтія, эта потребность отнюдь не была всеобщей. До этого времени математики (напримѣръ, также Гюйгенсъ) говорили объ „отношеніи окружности къ діаметру", не обозначая его (за рѣдкими, быть можетъ, исключеніями) никакой буквой, не говоря уже о буквѣ π. Обозначеніе этого отношенія буквой π, равно какъ и обозначеніе основанія натуральныхъ логариѳмовъ буквою e, введено Эйлеромъ. Послѣ того, какъ Эйлеръ употребилъ букву π въ указанномъ значеніи впервые*) въ относящейся къ 1737 году статьѣ „Variae observationes circa series infinitas", Эйлеръ и Гольдбахъ въ своей перепискѣ, начиная съ 1739 года, пользовались постоянно этимъ обозначеніемъ, а также — съ того же времени — символомъ e, между тѣмъ какъ еще въ 1729 и 1730 годахъ они писали p вмѣсто π. Этимъ обозначеніемъ p вмѣсто π пользовался, впрочемъ, Эйлеръ, какъ доказано, до 1735 года (см. Comment. Acad. Petrop. T. VII, стр. 126), въ то время какъ съ этого же года онъ постоянно употреблялъ символъ e для обозначенія основанія натуральныхъ логариѳмовъ (см. Comment. Acad. Petrop, T. VII,

---

*) Eneström, Bibl. math. 1889, стр. 28.

стр. 181 и послѣдующія академическія статьи Эйлера). Иванъ Бернулли, который еще въ 1739 году въ письмахъ къ Эйлеру употребляетъ букву *c* (circumferentia), въ 1740 году принимаетъ также обозначеніе Эйлера π. Тѣмъ же символомъ пользуется постоянно, начиная съ 1742 года, и Николай Бернулли (племянникъ Ивана) въ своихъ письмахъ къ Эйлеру. *) Если, такимъ образомъ, Эйлеровъ символъ π съ начала 40-хъ годовъ былъ принятъ многими выдающимися математиками, то полное право гражданства онъ пріобрѣлъ лишь послѣ появленія знаменитаго „Introductio“ Эйлера (1748).

---

*) По поводу всѣхъ этихъ указаній см. изданную Фуссомъ „Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIII siècle“ (1843).

ЧЕТВЕРТАЯ ГЛАВА.

Третій періодъ.

Отъ Ламберта до настоящаго времени.

§ 12. Доказательство ирраціональности числа π Ламберта и Лежандра.

Послѣ того, какъ въ отношеніи аналитическихъ представленій числа π, такъ и въ отношеніи численнаго опредѣленія, врядъ ли какая нибудь задача оставалась неразрѣшенной, и начали приходить къ убѣжденію, что этотъ путь не ведетъ къ рѣшенію вопроса о возможности квадратуры круга, въ сознаніи математиковъ все болѣе и болѣе проявлялась потребность выяснить наконецъ истинную природу этого числа, а именно, узнать, принадлежитъ ли оно къ раціональнымъ числамъ или нѣтъ. Правда, начиная со второй половины 17-го столѣтія, не было ни одного крупнаго математика, который не былъ бы убѣжденъ въ ирраціональности числа π и не выражалъ бы этого убѣжденія,*) однако строгаго доказательства ирраціональности не существовало. Только послѣ открытія Эйлеромъ важной зависимости между показательной и тригонометрическими функціями для изслѣдованія этого вопроса были открыты новые пути.

Именно эта зависимость и позволила Іоанну Генриху Ламберту (Johann Heinrich Lambert; род. въ 1728 году въ Мюльгаузенѣ, **) умеръ въ 1777 году въ Берлинѣ, куда онъ

---

*) Introductio I, стр. 93.

**) Мюльгаузенъ въ то время уже около двухсотъ лѣтъ принадлежалъ къ мѣстностямъ, тяготѣющимъ къ швейцарскому союзу, что было отчетливо указано Вестфальскимъ миромъ. Къ Франціи онъ принадлежалъ, какъ извѣстно, лишь съ 1798 года до 1871 года. Іоаннъ Генрихъ Ламбертъ счибылъ приглашенъ Фридрихомъ Великимъ) дать въ 1766 году первое доказательство ирраціональности обоихъ столь тѣсно связанныхъ между собой чиселъ e и π. Въ прекрасномъ сочиненіи „Vorläufige Kenntnisse für die, so die Quadratur und Rectification des Circuls suchen“ (Beiträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung II, стр. 140—169) Ламбертъ доказалъ слѣдующія двѣ основныя теоремы:

1) Если x есть отличное отъ нуля раціональное число, то e^x не можетъ быть раціональнымъ числомъ. Отсюда само собой вытекаетъ, что натуральный логариѳмъ раціональнаго числа, отличнаго отъ единицы, не можетъ быть числомъ раціональнымъ.

2) Если x есть отличное отъ нуля раціональное число, то $\operatorname{tg} x$ не можетъ быть раціональнымъ числомъ.

Для доказательства этихъ теоремъ Ламбертъ беретъ разложеніе въ непрерывную дробь, данное Эйлеромъ въ „Introductio“ на стр. 319:

$$\frac{e-1}{2}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{14+\cfrac{1}{18+\cfrac{1}{22+\cdots}}}}}}$$

и выводитъ изъ него разложенія

$$\frac{e^x-1}{e^x+1}=\cfrac{1}{\cfrac{2}{x}+\cfrac{1}{\cfrac{6}{x}+\cfrac{1}{\cfrac{10}{x}+\cfrac{1}{\cfrac{14}{x}+\cdots}}}}$$

талъ себя всегда швейцарцемъ, и до пріобрѣтенія имъ ученыхъ титуловъ былъ извѣстенъ подъ кличкой „Mülhusino-Helvetus“. Интереснѣйшая біографія этого въ высшей степени оригинальнаго человѣка, который изъ простого ученика портного сталъ однимъ изъ величайшихъ и разностороннѣйшихъ ученыхъ 18-го вѣка, находится въ III томѣ Wolf'a „Biographieen zur Kulturgeschichte der Schweiz“.

и

$$\operatorname{tg} x = \cfrac{1}{\cfrac{1}{x} - \cfrac{1}{\cfrac{3}{x} - \cfrac{1}{\cfrac{5}{x} - \cfrac{1}{\cfrac{7}{x} - \cfrac{1}{\cfrac{9}{x} - \ldots}}}}},$$

позволяющія доказать, что при раціональномъ x ни $\operatorname{tg} x$, ни e^x не могутъ быть раціональны. Изъ равенства $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$, очевидно, вытекаетъ, такимъ образомъ, что π ирраціонально.

Вмѣсто дальнѣйшаго изложенія содержанія этого сочиненія, я отошлю читателя къ самому сочиненію, которое тѣмъ болѣе достойно чтенія, что оно содержитъ кромѣ того также еще цѣлый рядъ интересныхъ изслѣдованій и замѣтокъ и написано очень оригинальнымъ языкомъ, не лишеннымъ юмора, проглядывающаго и въ портретѣ этого рѣдкаго человѣка, который мнѣ удалось случайно видѣть у высокоуважаемаго товарища, г. проф. Вольфа.

Замѣтимъ еще, что Ламбертово доказательство ирраціональности числа π часто (какъ напримѣръ у Лежандра, см. примѣчаніе въ концѣ его статьи) неправильно относили къ 1761 году, но въ предисловіи ко 2-му тому „Beiträge“ Ламбертъ, для избѣжанія анахронизмовъ, говоритъ совершенно ясно: „Такъ, напримѣръ, входящая сюда пятая статья: для изслѣдователей квадратуры круга — написана въ 1766 году передъ той, которую нѣсколько мѣсяцевъ спустя я докладывалъ здѣшней королевской академіи наукъ по тому же предмету, но обѣ онѣ могутъ быть читаемы вмѣстѣ. Эта академическая статья, снабженная отмѣткой „lu 1767“, имѣетъ заглавіе: „Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendentes circulaires et logarithmiques“.

Ламбертову доказательству ирраціональности числа π не доставало для полной строгости одной леммы объ ирраціональности извѣстныхъ простирающихся въ безконечность непрерывныхъ дробей, которую позже далъ Лежандръ *) (Adrien-Marie Legendre; род. въ 1752 году въ Тулузѣ, умеръ въ 1833 году въ Парижѣ)

*) См. Beaumont, Eloge historique de Adrien-Marie Legendre (Paris, 1861).

въ его „Éléments de géométrie" (Note 4). Эта лемма заключается въ слѣдующемъ:

Если въ простирающейся въ безконечность непрерывной дроби

$$\cfrac{m}{n+\cfrac{m'}{n'+\cfrac{m''}{n''+\ldots}}}$$

m, n, m', n' и т. д. суть цѣлыя положительныя или отрицательныя числа, причемъ дроби $\frac{m}{n}$, $\frac{m'}{n'}$ и т. д. всѣ меньше единицы, то значеніе этой дроби есть ирраціональное число. Непрерывная дробь, какъ показалъ далѣе Лежандръ, ирраціональна и въ томъ случаѣ, когда $\frac{m}{n}$, $\frac{m'}{n'}$ и т. д. меньше единицы не съ самаго начала, а только начиная съ какого-нибудь звена. Съ помощью этого важнаго предложенія, которое представляетъ необходимое дополненіе къ изслѣдованіямъ Ламберта, Лежандръ могъ безъ труда доказать строго ирраціональность числа π. Тѣ же соображенія дали ему при этомъ возможность доказать*) также и ирраціональность квадрата числа π.

Доказательство ирраціональности числа π, данное Ламбертомъ и Лежандромъ, значительно подвинуло впередъ разрѣшеніе вопроса о возможности квадратуры круга. Правда, еще не была исключена возможность квадратуры, такъ какъ нѣкоторыя ирраціональныя числа также могутъ быть построены при помощи циркуля и линейки; но вѣроятность, что задача можетъ быть разрѣшена этими средствами, сдѣлалась значительно меньше. Главный результатъ былъ, однако, тотъ, что, наконецъ, послѣ продолжительныхъ поисковъ, былъ найденъ ясно намѣченный путь, по которому должно было пойти изслѣдованіе.

Для полноты слѣдуетъ замѣтить, что доказательство ирраціональности числа e, излагаемое обыкновенно въ учебникахъ, принадлежитъ Фурье (Fourier; 1768 — 1830) (согласно замѣчанію на

---

*) Другое доказательство ирраціональности числа π^2 далъ Эрмитъ (Hermite; Crelle, Bd. 76).

стр. 339 въ „Mélanges d'analyse algébrique“ [1815] Stainville'я). Это доказательство выводитъ ирраціональность e непосредственно изъ ряда

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

Допустимъ, что e равно раціональной дроби $\frac{p}{q}$, и перенеся въ лѣвую часть равенства всѣ члены ряда до $\frac{1}{q!}$ включительно, умножимъ равенство на $q!$; тогда съ лѣвой стороны получается неравное нулю цѣлое положительное число, съ правой же стороны — рядъ:

$$\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \cdots,$$

который имѣетъ значеніе, меньшее, чѣмъ $\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)^2} + \cdots$, т. е. меньшее чѣмъ $\frac{1}{q}$ и, слѣдовательно, не можетъ равняться цѣлому положительному числу.

§ 13. Открытіе Ліувилля.

Въ 1840 году Іосифъ Ліувилль (Joseph Liouville; 1809—1882) присоединилъ къ извѣстнымъ до него свойствамъ числа e еще два новыхъ свойства, а именно, пользуясь указаннымъ выше пріемомъ Фурье, онъ показалъ, что e не можетъ быть корнемъ квадратнаго уравненія съ раціональными коэффиціентами, т. е., что невозможно равенство $ae^2 + be + c = 0$, гдѣ a, b, c суть цѣлыя числа. И онъ могъ тотчасъ прибавить также, что e^2 обладаетъ тѣмъ же свойствомъ, т. е. равенство $ae^4 + be^2 + c = 0$ при тѣхъ же предположеніяхъ относительно a, b, c не можетъ имѣть мѣста. *)

*) Журналъ Liouville'я V (1840), стр. 192 и 193. См. таже: Stern, Algebraische Analysis, стр. 342—343. Что ни e ни e^2 не удовлетворяютъ квадратному уравненію съ цѣлыми коэффиціентами, слѣдуетъ также прямо безъ дальнѣйшаго доказательства изъ разложеній въ непрерывную дробь e и e^2 (стр. 49). Г. Гурвицъ показалъ въ названномъ сочиненіи также элементарнымъ путемъ, что e не можетъ быть корнемъ уравненія 3-й степени съ цѣлыми коэффиціентами. Можно, слѣдовательно, совершенно элементарнымъ путемъ показать, что e не можетъ быть корнемъ ни уравненій 1-й ни 2-й, ни 3-й степени, что, какъ справедливо замѣчаетъ г. Гурвицъ, достойно вниманія.

Такъ какъ свойства чиселъ e и π, найденныя Ламбертомъ, Лежандромъ и Ліувиллемъ всѣ состоятъ въ томъ, что эти числа не могутъ быть корнями извѣстныхъ алгебраическихъ уравненій съ раціональными коэффиціентами, то этимъ былъ поставленъ вопросъ, какихъ алгебраическихъ уравненій этого рода могутъ быть корнями числа e и π?

Но уже давно у математиковъ составилось убѣжденіе, что числа e и π вообще не могутъ быть корнями алгебраическихъ уравненій съ раціональными коэффиціентами, точно такъ же, какъ вѣрили вѣдь въ ирраціональность числа π гораздо раньше, чѣмъ она была строго доказана. Уже Эйлеръ выражаетъ это убѣжденіе въ статьѣ „De relatione inter ternas pluresve quantitates instituenda“ (Opuscula analytica II, стр. 98) и еще отчетливѣе высказывается Лежандръ въ достойномъ вниманія предложеніи (см. заключеніе статьи его):

„С л ѣ д у е т ъ с ч и т а т ь в е с ь м а в ѣ р о я т н ы м ъ, ч т о и р р а ц і о н а л ь н о с т ь ч и с л а π н е а л г е б р а и ч е с к а я, т. е., ч т о э т о ч и с л о н е м о ж е т ъ б ы т ь к о р н е м ъ а л г е б р а и ч е с к а г о у р а в н е н і я с ъ р а ц і о н а л ь н ы м и к о э ф ф и ц і е н т а м и. Н о, п о в и д и м о м у, с т р о г о д о к а з а т ь э т о п р е д л о ж е н і е о ч е н ь т р у д н о“.

Подобнымъ же образомъ высказывается и Ламбертъ въ упомянутой выше (стр. 54) статьѣ, выражая эту догадку относительно e и π въ формѣ предложенія и пытается дать доказательство его.

Однако всѣ эти догадки имѣли въ томъ отношеніи меньше основанія, чѣмъ такія же догадки въ предшествующій періодъ объ ирраціональности π, что до середины 19-го вѣка не было еще извѣстно ни одного примѣра, доказывающаго, что существуютъ числа, не удовлетворяющія никакому алгебраическому уравненію съ раціональными коэффиціентами.

Ліувилль былъ первымъ, который доказалъ это строго, построивъ числа, слѣдующія простому закону, относительно которыхъ можно показать, что они не удовлетворяютъ никакому алгебраическому уравненію съ раціональными коэффиціентами. Въ качествѣ такого примѣра онъ приводитъ между прочимъ одно число, которое имѣетъ законъ образованія, совершенно подобный закону образованія основанія натуральныхъ логариѳмовъ, а имечно:

$$x = \frac{1}{l} + \frac{1}{ll_1} + \frac{1}{ll_1 l_2} + \cdots + \frac{1}{ll_1 l_2 \ldots l_{m-1}} + \cdots$$

Если l, l_1, $l_2, \ldots$ означаютъ цѣлыя числа, и если l_m возрастаетъ достаточно быстро съ указателемъ m, то можно показать, что x не можетъ быть корнемъ алгебраическаго уравненія съ раціональными коэффиціентами. *)

Послѣ этого важнаго открытія Ліувилля, является возможность раздѣленія чиселъ на алгебраическія и трансцендентныя, между тѣмъ какъ раньше можно было говорить лишь о раціональныхъ и ирраціональныхъ. Подъ алгебраическимъ числомъ въ настоящее время, по терминологіи, введенной Кронекеромъ, понимаютъ всякое число x, являющееся корнемъ какого-нибудь алгебраическаго уравненія вида:

$$x^n + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \ldots + c_n = 0,$$

гдѣ всѣ коэффиціенты c_1, $c_2, \ldots c_n$ раціональны; коэффиціентъ при высшей степени x всегда предполагается равнымъ единицѣ. Если сверхъ того всѣ эти коэффиціенты суть цѣлыя числа, то x называется цѣлымъ алгебраическимъ числомъ.

Трансцендентнымъ числомъ называется всякое не алгебраическое число. **)

Такимъ образомъ, теперь предстояло рѣшить вопросъ, являются ли e и π алгебраическими числами или трансцендентными.

§ 14. Алгебраическая формулировка задачи о квадратурѣ круга.

Чтобы понять связь между задачей о квадратурѣ круга и вопросомъ о томъ, относится ли π къ классу трансцендентныхъ или алгебраическихъ чиселъ, намъ нужно сдѣлать нѣсколько добавочныхъ замѣчаній.

---

*) Журналъ Liouville'я XVI (1851): „Sur des classes très-étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique ni même réductible à des irrationnelles algébriques". Основныя теоремы этой статьи указаны Ліувиллемъ еще въ 1844 г. въ Comptes rendus XVIII, стр. 883 и 910. Другое доказательство существованія трансцендентныхъ чиселъ дано Канторомъ въ статьѣ: „Über eine Eigenschaft des Inbegriffs aller reellen algebraischen Zahlen" (Crelle, Bd. 77).

**) Критеріямъ, опредѣляющимъ трансцендентный характеръ числа, имѣющаго данный законъ образованія, противопоставляются замѣчательные

Возможность квадратуры круга, какъ мы видѣли выше (стр. 6), зависитъ отъ того, возможно ли при помощи только циркуля и линейки по данному отрѣзку d получить отрѣзокъ πd. Принимая для простоты d за единицу длины, мы видимъ, что задача сводится къ построенію отрѣзка, содержащаго π единицъ длины. Такъ какъ послѣ выбора единицы длины, всякому числу x соотвѣтствуетъ вполнѣ опредѣленный отрѣзокъ (содержащій x единицъ) и наоборотъ всякому отрѣзку (содержащему x единицъ) соотвѣтствуетъ вполнѣ опредѣленное число x, то для краткости мы можемъ говорить о построеніи числа x, подразумѣвая подъ этимъ построеніе отрѣзка, содержащаго x единицъ.

Изъ планиметріи извѣстно, что если коэффиціенты квадратнаго уравненія могутъ быть построены, то и корни квадратнаго уравненія могутъ быть также построены, при чемъ подъ словомъ „построеніе" всегда подразумѣвается „построеніе при помощи циркуля и линейки". На этомъ основаніи, въ частности, могутъ быть построены корни квадратнаго уравненія съ раціональными коэффиціентами, напримѣръ $\sqrt{2}$. Если назовемъ на время корни такихъ уравненій ирраціональностями перваго рода, то видимъ, что могутъ быть построены также и корни такихъ квадратныхъ уравненій, которыхъ коэффиціенты содержатъ ирраціональности лишь перваго рода, потому что коэффиціенты такого квадратнаго уравненія могутъ быть построены. Называя для краткости корни этихъ послѣднихъ уравненій ирраціональностями второго рода, мы приходимъ къ заключенію, что могутъ быть также построены корни каждаго квадратнаго уравненія, коэффиціенты котораго содержатъ ирраціональности лишь перваго и второго рода, и т. д.

Пусть будетъ теперь дана цѣлая цѣпь квадратныхъ уравненій, обладающихъ слѣдующимъ свойствомъ: коэффиціенты перваго уравненія суть раціональныя числа, между тѣмъ какъ коэффиціенты каждаго послѣдующаго уравненія содержатъ лишь такія ирраціональности, которыя получаются при рѣшеніи предыдущихъ уравненій. Въ такомъ случаѣ корни каждаго изъ этихъ уравненій, а слѣдова-

---

критеріи, посредствомъ которыхъ по Эйзенштейну (Berichte der Berl. Acad. 1852) можно рѣшить, произошло ли данное разложеніе съ раціональными коэффиціентами отъ алгебраической или трансцендентной функціи. См. разборъ моего нѣсколько разъ упомянутаго эскиза, сдѣланный г. Канторомъ (Zeitschr. für Math. und. Physik. Bd 36).

тельно, и послѣдняго изъ нихъ, могутъ быть послѣдовательно построены. Такимъ образомъ мы видимъ, что для того, чтобы нѣкоторое число могло быть построено, *достаточно*, чтобы оно представляло корень квадратнаго уравненія, являющагося послѣднимъ звеномъ цѣпи квадратныхъ уравненій указаннаго только что рода.

Но это условіе не только *достаточно*, оно также *необходимо* для того, чтобы число могло быть построено. Дѣйствительно, такъ какъ каждое построеніе есть ничто иное, какъ нѣкоторая комбинація двухъ элементарныхъ задачъ: провести прямую линію черезъ двѣ данныя точки и описать около данной точки окружность даннымъ радіусомъ, и такъ какъ, съ другой стороны, прямыя линіи и круги выражаются аналитически уравненіями первой и второй степени, то построеніе при помощи циркуля и линейки аналитически можетъ быть выражено цѣпью квадратныхъ уравненій (такъ какъ линейныя уравненія можно разсматривать, какъ частный случай квадратныхъ). Такъ какъ, далѣе, въ каждой элементарной задачѣ, входящей въ составъ построенія, могутъ быть употреблены лишь такіе элементы, которые построены при помощи рѣшенныхъ раньше элементарныхъ задачъ, то въ каждомъ изъ встрѣчающихся квадратныхъ уравненій, коэффиціенты будутъ содержать лишь такія ирраціональности, которыя получены изъ рѣшенія предыдущихъ квадратныхъ уравненій. Отсюда слѣдуетъ, что всякое число, могущее быть построеннымъ при помощи циркуля и линейки, можетъ быть представлено, какъ корень квадратнаго уравненія, являющагося послѣднимъ звеномъ цѣпи квадратныхъ уравненій указаннаго выше вида.

Но, съ другой стороны, такая цѣпь квадратныхъ уравненій всегда можетъ быть замѣнена однимъ единственнымъ алгебраическимъ уравненіемъ съ раціональными коэффиціентами такимъ образомъ, что ирраціональности, входящія въ послѣднее уравненіе, и являющіяся корнями предыдущихъ уравненій, будутъ исключены при помощи этихъ послѣднихъ. Такимъ образомъ, мы приходимъ къ слѣдующему, существенному для задачи о квадратурѣ круга, выводу:

Для того, чтобы нѣкоторое число могло быть построено при помощи циркуля и линейки, необходимо и достаточно, чтобы оно было корнемъ извѣстнаго алгебраическаго уравненія съ раціональными коэффиціентами, равнозначнаго цѣпи квадратныхъ уравненій указаннаго выше вида.

Благодаря этой теоремѣ связь вопроса о возможности квадратуры круга съ вопросомъ о томъ, трансцендентное ли или алгебраическое число π, получаетъ правильное освѣщеніе. Для того, чтобы квадратура круга была выполнима, нужно, слѣдовательно, не только, чтобы π было вообще алгебраическимъ числомъ, но необходимо, чтобы оно было корнемъ такого алгебраическаго уравненія, которое было бы разрѣшимо при помощи квадратныхъ корней, т. е. нужно, чтобъ само число π могло быть получено путемъ извлеченія квадратныхъ корней. Правда, формула Вьеты даетъ выраженія для π при помощи квадратныхъ корней, но операція извлеченія корня встрѣчается въ ней безконечно часто, между тѣмъ какъ корень алгебраическаго уравненія указаннаго вида долженъ, очевидно, выражаться черезъ конечное число корней. Формула Вьеты, скорѣе, слѣдовательно, могла привести къ догадкѣ, что число π не обладаетъ свойствами, необходимыми для возможности квадратуры круга. Какъ бы то ни было, во всякомъ случаѣ невозможность квадратуры круга была бы внѣ всякихъ сомнѣній, если бы оказалось, что число π есть вообще не алгебраическое, а трансцендентное число.

§ 15. Окончательное рѣшеніе вопроса о квадратурѣ круга на основаніи работъ Эрмита, Линдеманна и Вейерштрасса.

Разрѣшеніемъ основного вопроса о томъ, являются ли числа e и π алгебраическими или трансцендентными, наука обязана математикамъ Эрмиту и Линдеманну.

Прежде всего въ 1873 году Эрмитъ доказалъ трансцендентность основанія натуральныхъ логариѳмовъ, т. е. обнаружилъ невозможность равенства вида:

$$N_1e^{x_1} + N_2e^{x_2} + \cdots + N_re^{x_r} = 0,$$

гдѣ $x_1, x_2, \ldots x_r$ суть отличныя другъ отъ друга, а $N_1, N_2, \ldots N_r$ какія-либо цѣлыя числа, при чемъ послѣднія числа не должны быть всѣ равны нулю. *)

*) Hermite, Sur la fonction exponentielle (Comptes rendus, T. 77).

Исходя изъ этой основной работы, а именно пользуясь зависимостями между извѣстными опредѣленными интегралами, которыми пользовался Эрмитъ, Линдеманнъ въ 1882 году рѣшилъ наконецъ тысячелѣтнюю задачу о квадратурѣ круга, доказавши трансцендентность числа π.

Этотъ результатъ былъ полученъ изъ предложенія, которое можно разсматривать, какъ обобщеніе первой изъ теоремъ Ламберта, указанныхъ выше (стр. 53). Это предложеніе заключается въ слѣдующемъ:

Если z есть корень какого-нибудь неприводимаго алгебраическаго уравненія съ цѣлыми вещественными или комплексными коэффиціентами то e^z не можетъ быть раціональнымъ числомъ.

Но по формулѣ Эйлера $e^{\pi i} = -1$, т. е. равно раціональному числу. Поэтому πi, а слѣдовательно, и само π не можетъ быть корнемъ алгебраическаго уравненія указаннаго вида. Итакъ,

Лудольфово число не можетъ быть корнемъ никакого алгебраическаго уравненія съ раціональными коэффиціентами.

Вмѣстѣ съ тѣмъ такимъ образомъ окончательно установлено, что квадратура круга геометрически невыполнима. *)

Но теорема Линдеманна о трансцендентности числа π разрѣшаетъ вопросъ о квадратурѣ круга еще въ безконечно болѣе широкомъ смыслѣ, чѣмъ этого требовала первоначальная постановка вопроса: квадратура круга невозможна не только при помощи циркуля и линейки, она невыполнима даже при условіи, что для построенія будемъ пользоваться какими угодно алгебраическими кривыми и поверхностями. Дѣйствительно, построеніе съ помощью этихъ совершенно общихъ вспомогательныхъ средствъ, хотя и не приво-

*) Изслѣдованія Линдеманна впервые были сообщены въ Извѣстіяхъ Берлинской Академіи въ 1882 г.: „Über die Ludolph'sche Zahl" von Prof. F. Lindemann in Freiburg i. Br. Vorgelegt von Herrn Weierstrass am 22 Juni; болѣе подробно они изложены авторомъ въ статьѣ, Über die Zahl π" (Math. Annalen, Bd. 20, стр. 213—225).

дить, какъ раньше, къ цѣпи квадратныхъ уравненій, все же приводитъ къ цѣпи алгебраическихъ уравненій, поэтому число, которое могло бы быть построено при ихъ посредствѣ, непремѣнно должно быть алгебраическимъ. Слѣдовательно, для трансцендентнаго числа π эта возможность исключена.

Въ 1885 году Вейерштрассъ *) далъ новое болѣе простое доказательство. †)

Замѣчая, что $e^{\pi i} = -1$, и вообще e^x можетъ быть равно -1 лишь при значеніяхъ кратныхъ πi, Вейерштрассъ приводитъ доказательство трансцендентности π къ доказательству того, что:

„Величина $e^x + 1$ ни при какомъ алгебраическомъ значеніи x не можетъ быть равна нулю".

Кромѣ того, въ своей статьѣ Вейерштрассъ устанавливаетъ нѣкоторыя общія свойства показательной функціи, завершая изслѣдованія, начатыя Эрмитомъ, доказательствомъ слѣдующей теоремы, предложенной Линдеманномъ:

„Если $x_1, x_2, \ldots x_r$ суть отличныя другъ отъ друга алгебраическія числа, а $X_1, X_2, \ldots X_r$ — отличныя отъ нуля алгебраическія числа, то между ними не можетъ существовать зависимости:

$$X_1 e^{x_1} + X_2 e^{x_2} + \cdots + X_r e^{x_r} = 0".$$

Эта важная теорема заключаетъ, какъ частные случаи, трансцендентность e и π одновременно.

Но особенно интересенъ частный случай этой теоремы, указанный Линдеманномъ, когда

$$r=2, \quad X_1=-1, \quad x_2=0, \quad x_1=x, \quad X_2=X.$$

---

*) Berichte der Berliner Akademie (1885): Zu Lindemman's Abhandlung „Über die Ludolph'sche Zahl".

†) Въ настоящее время извѣстно нѣсколько элементарныхъ доказательствъ трансцендентности чиселъ e и π. Между прочимъ, такое доказательство имѣется въ „Энциклопедіи элементарной математики" Вебера, т. I, стр. 520 (изд. Mathesis, 1906 г.).

Прим. ред

Тогда получается, что равенство $e^x = X$ не можетъ имѣть мѣста если x, X оба суть алгебраическія числа и вмѣстѣ съ тѣмъ x не равно нулю. Мы приходимъ, такимъ образомъ, къ вѣрному обобщенію указанной раньше относящейся къ числу e теоремы Ламберта:

„Показательная функція e^x равна всегда трансцендентному числу, когда x есть алгебраическое число, отличное отъ нуля".

„Натуральный логариѳмъ алгебраическаго числа X, не равнаго 1, есть всегда трансцендентное число".

Эти два предложенія, особенно выдвигаемыя Линдеманномъ, являются, какъ замѣчаетъ Вейерштрассъ, одними изъ наиболѣе изящныхъ теоремъ ариѳметики.

Но и въ геометрическомъ отношеніи общая теорема Линдеманна даетъ богатые результаты. Полагая, вмѣстѣ съ Вейерштрассомъ,

$$r = 3,\ X_1 = -X_2 = i,\ x_2 = -x_1,\ x_3 = 0$$

и написавъ $\frac{xi}{2}$ вмѣсто x, X вмѣсто X_3, находимъ, что равенство

$$2\sin\frac{x}{2} = X$$

не можетъ имѣть мѣста, если x и X суть алгебраическія числа и x отлично отъ нуля.

Отсюда же вытекаетъ предложеніе, которое заключаетъ невозможность квадратуры круга, какъ весьма частный случай, и окончательно разрѣшаетъ относящіеся сюда вопросы съ величайшей общностью и полнотой.

„Дуга круга, хорда которой — измѣренная радіусомъ круга — выражается алгебраически, не можетъ быть выпрямлена посредствомъ геометрическихъ построеній, пользующихся лишь алгебраическими кривыми и поверхностями; точно также невозможна при тѣхъ же условіяхъ квадратура сектора, соотвѣтствующаго этой дугѣ.

„Дѣйствительно, полагая радіусъ круга равнымъ единицѣ, а длину дуги равной x, получаемъ для соотвѣтствующей хорды длину

$2 \sin \frac{x}{2}$, для площади же сектора величину $\frac{x}{2}$; поэтому, если бы возможно было построеніемъ указаннаго вида получить отрѣзокъ, равный дугѣ x, или осуществить квадратуру соотвѣтствующаго сектора, то это значило бы, что между x и $2 \sin \frac{x}{2}$ есть алгебраическая зависимость. Но такой зависимости не можетъ быть, если $2 \sin \frac{x}{2}$ есть алгебраическое число".

Изслѣдованія Линдеманна дали окончательное рѣшеніе задачи, замѣчательной не только своимъ древнимъ происхожденіемъ, но также ролью, сыгранною ею въ исторіи математики. Будучи первоначально чисто геометрической задачей сравнительно второстепеннаго значенія, задача о квадратурѣ круга въ теченіе вѣковъ превратилась въ чрезвычайно интересную ариѳметическую задачу. На ней отразились всѣ наиболѣе важныя измѣненія, которыя постепенно испытывали математическія воззрѣнія и методы; она измѣняла вмѣстѣ съ ними и при помощи ихъ свою форму, пока наконецъ постановка вопроса не стала столь ясной и точной, что могъ получиться опредѣленный отвѣтъ. Задача о квадратурѣ круга участвовала во всѣхъ этихъ измѣненіяхъ отнюдь не пассивно, но именно вслѣдствіе того, что она постоянно и притомъ въ измѣняющемся видѣ привлекала вниманіе математиковъ, она оказала сильное вліяніе на развитіе математическихъ наукъ и въ особенности тѣхъ теорій, которыя привели къ рѣшенію вопроса.

II

АРХИМЕДЪ

(287 — 212)

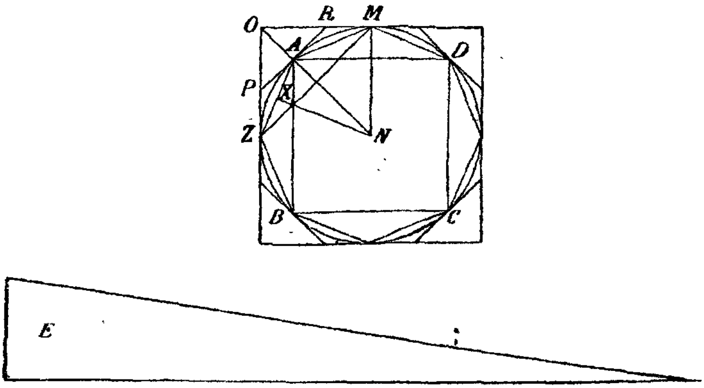
ИЗМѢРЕНІЕ КРУГА

(*ΚΥΚΛΟΥ ΜΕΤΡΗΣΙΣ*)

I.

Каждый кругъ равенъ прямоугольному треугольнику, если радіусъ равенъ одной изъ сторонъ, заключающихъ прямой уголъ, а окружность равна основанію.

Пусть кругъ *ABCD* находится въ такомъ отношеніи къ треугольнику *E*, какъ предположено (фиг. 1). Говорю, что они равны



Фиг. 1.

Пусть, если это возможно, кругъ будетъ больше. Впишемъ въ кругъ квадратъ *AC* и будемъ дѣлить каждую дугу пополамъ до тѣхъ поръ, пока сумма всѣхъ сегментовъ не сдѣлается меньше разности между кругомъ и треугольникомъ. *) Полученная прямолинейная фигура **) будетъ, слѣдовательно, больше треуголь-

*) Euklid XII, 2.

**) Именно, полученный указаннымъ образомъ вписанный правильный многоугольникъ.

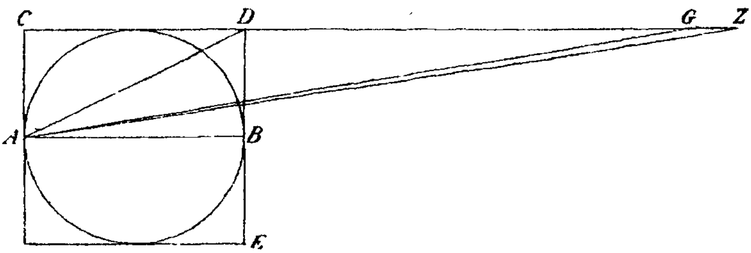
ника. Возьмемъ центръ N и перпендикуляръ NX, онъ будетъ меньше одной изъ сторонъ треугольника. Въ то же время периметръ прямоугольной фигуры менѣе второй стороны треугольника, потому что онъ меньше окружности. Итакъ, прямолинейная фигура меньше треугольника E, что невозможно.

Пусть теперь, если это возможно, кругъ меньше треугольника E. Опишемъ около круга квадратъ и будемъ дѣлить каждую дугу круга пополамъ, а черезъ точки дѣленія будемъ проводить касательныя. Уголъ OAR будетъ прямымъ и, слѣдовательно, OR больше, чѣмъ MR, такъ какъ MR равно AR. Поэтому треугольникъ ROP больше половины фигуры $OZAM$. Пусть, наконецъ, останутся отрѣзки, какъ PZA, которые, вмѣстѣ взятые, будутъ меньше, чѣмъ избытокъ треугольника E надъ кругомъ $ABCD$. *) Описанная прямолинейная фигура будетъ, такимъ образомъ, меньше треугольника E, что невозможно, потому что она больше. Въ самомъ дѣлѣ, NA равна высотѣ треугольника, а периметръ больше основанія треугольника.

Слѣдовательно, кругъ равенъ треугольнику E.

II.

Кругъ относится къ квадрату своего діаметра (приблизительно), какъ 11 къ 14.



Фиг. 2.

Пусть будетъ данъ кругъ (фиг. 2) діаметра AB, около котораго описанъ квадратъ CE; положимъ далѣе, что DG вдвое больше CD, и GZ равно одной седьмой CD.

*) Что это возможно, вытекаетъ изъ предложенія X, 1 Евклида на основаніи того, что $ROP > \frac{1}{2} OZAM$.

Такъ какъ ACG относится къ ACD, какъ 21 къ 7, а ACD къ AGZ, какъ 7 къ 1, то ACZ относится къ ACD какъ 22 къ 7. Но квадратъ CE въ четыре раза больше треугольника ACD, треугольникъ же $ACDZ$ равновеликъ кругу AB, [такъ какъ высота AC равна радіусу, основаніе же равно тремъ и одной седьмой діаметра, т. е., какъ будетъ доказано, приблизительно, равно окружности]. *) Такимъ образомъ, кругъ относится къ квадрату CE (приблизительно) какъ 11 къ 14.

III.

Длина окружности превышаетъ утроенный діаметръ менѣе, чѣмъ на одну седьмую, но болѣе, чѣмъ на десять семьдесятъ первыхъ діаметра.

1. Пусть данъ кругъ, діаметръ AC, центръ E, касательная (фиг. 3) CLB, и пусть уголъ BEC составляетъ треть прямого угла. Въ такомъ случаѣ EB относится къ BC, какъ 306 къ 153, напротивъ, EC къ CB (приблизительно), какъ 265 къ 153. **)

---

*) По поводу предложенія въ скобкахъ [такъ какъ ..... окружности] Гейбергъ (Сочиненія Архимеда, т. I, стр. 263) справедливо замѣчаетъ „Hic locus mire corruptus et confusus transcriptori tribuo, qui eum addidit, postquam prop. 2 et 3 permutavit; neque enim Archimedes hanc propositionem ante prop. 3, quo nititur, posuit."

**) Дѣйствительно,

$$EB : BC = 2 : 1 = 306 : 153 \quad \text{и} \quad EC : CB = \sqrt{3} : 1.$$

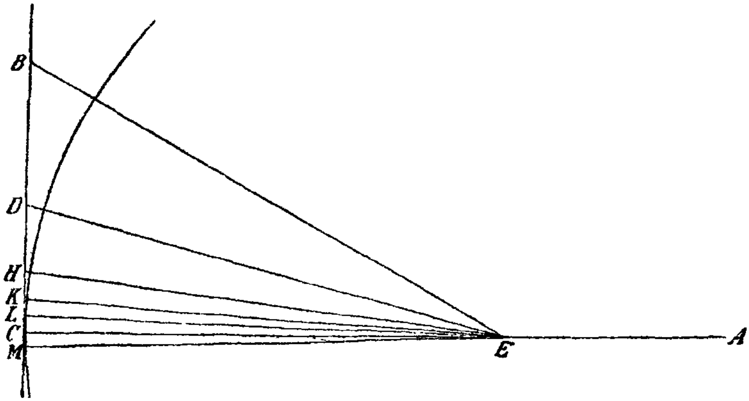
Архимедъ долженъ былъ, слѣдовательно, опредѣлить два числа, квадраты которыхъ относятся приблизительно, какъ 3 : 1. Числа же $265^2 = 70\,225$ и $3 \,.\, 153^2 = 3 \,.\, 23\,409 = 70\,227$, дѣйствительно, отличаются только на двѣ единицы. Такимъ образомъ, отношеніе $EC : CB$ весьма незначительно отличается отъ $\frac{265}{153}$. †)

†) Замѣтимъ, что $\frac{265}{153}$ представляетъ 9-ю подходящую дробь разложенія

$$\sqrt{3} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \ldots}}}}$$

Прим. ред.

Далѣе, пусть прямая ED дѣлитъ уголъ BEC пополамъ. Тогда BE относится къ EC, какъ BD къ DC. Посредствомъ соединенія, а затѣмъ перестановки получаемъ отсюда, что BE вмѣстѣ съ EC такъ относятся къ BC, какъ EC къ CD. Поэтому отношеніе CE къ CD больше, чѣмъ отношеніе 571 къ 153. *) Слѣдовательно, квадратъ ED относится къ квадрату DC (приблизительно),



Фиг. 3.

какъ 349 450 къ 23 409, поэтому отношеніе длинъ, т. е. ED къ EC (приблизительно) равно $591\frac{1}{8} : 153$. **)

Дѣля снова уголъ DEC пополамъ прямою EH, находимъ такимъ же образомъ, что отношеніе EC къ CH больше, чѣмъ отношеніе $1162\frac{1}{8}$ къ 153, и потому отношеніе HE къ HC въ свою очередь больше, чѣмъ отношеніе $1172\frac{1}{8}$ къ 153. ***)

---

*) Дѣйствительно, $\frac{BE + EC}{BC} > \frac{306 + 265}{153} = \frac{571}{153}$. Такимъ образомъ, Архимедъ сначала приходитъ къ результату, что радіусъ находится къ половинѣ стороны правильнаго описаннаго двѣнадцатиугольника въ отношеніи большемъ, чѣмъ 571 : 153.

**) Дѣйствительно,

$$ED^2 : DC^2 > (571^2 + 153^2) : 153^2, \text{ т. е. } > 349\,450 : 23\,409.$$

А потому $ED^2 : DC^2 > \left(591\frac{1}{8}\right)^2 : 153^2$, такъ какъ $\left(591\frac{1}{8}\right)^2 = 349\,428\frac{49}{64}$.

***) Такимъ образомъ, отношеніе радіуса къ половинѣ стороны описаннаго правильнаго двадцатичетырехугольника больше, чѣмъ $1162\frac{1}{8} : 153$.

Далѣе, дѣлимъ уголъ HEC прямою EK пополамъ. Тогда отношеніе EC къ CK болѣе, чѣмъ отношеніе $2334\frac{1}{4}$ къ 153 и, слѣдовательно, отношеніе EK къ CK болѣе, чѣмъ отношеніе $2339\frac{1}{4} : 153$. *)

Затѣмъ уголъ KEC снова дѣлится пополамъ прямою LE. Тогда отношеніе EC къ LC больше, чѣмъ отношеніе $4673\frac{1}{2}$ къ 153.**)

Такъ какъ уголъ BEC, который составляетъ треть прямого угла, четыре раза былъ раздѣленъ пополамъ, то уголъ LEC составляетъ одну сорокъ восьмую часть прямого угла. Отложимъ при

Пользуясь этапами, точно соотвѣтствующими тѣмъ, которые ведутъ отъ шестиугольника къ двѣнадцатиугольнику, мы переходимъ отъ этого послѣдняго къ двадцатичетырехугольнику посредствомъ слѣдующихъ пропущенныхъ Архимедомъ вычисленій: $DE : EC = DH : HC$, поэтому

$$(DE + EC) : DC = EC : CH,$$

такъ что

$$EC : CH > (591\frac{1}{8} + 571) : 153, \text{ т. е. } EC : CH > 1162\frac{1}{8} : 153.$$

Отсюда, далѣе, выводится, что $HE^2 : HC^2 > 1\,373\,943\frac{33}{64} : 23\,409$;

а слѣдовательно,

$$HE : HC > 1172\frac{1}{8} : 153, \text{ такъ какъ } \left(1172\frac{1}{8}\right)^2 = 1\,373\,877\frac{1}{64}.$$

*) Такимъ образомъ, найденъ нижній предѣлъ отношенія радіуса къ половинѣ стороны описаннаго сорокавосьмиугольника. Промежуточныя вычисленія слѣдующія:

$$HE : EC = HK : KC, \text{ откуда } (HE : EC) : HC = EC : CK$$

или

$$EC : CK > \left(1172\frac{1}{8} + 1162\frac{1}{8}\right) : 153, \text{ т. е. } EC : CK > 2334\frac{1}{4} : 153.$$

Далѣе,

$$EK^2 : CK^2 > 5\,472\,132\frac{1}{16} : 23\,409,$$

слѣдовательно,

$$EK : CK > 2339\frac{1}{4} : 153, \text{ такъ какъ } \left(2339\frac{1}{4}\right)^2 = 5\,472\,090\frac{9}{16}.$$

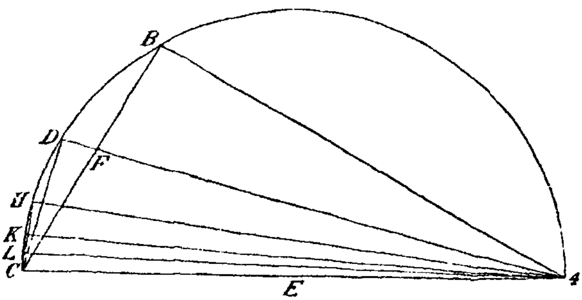
**) Дѣйствительно,

$$KE : EC = KL : LC, \text{ откуда } (KE + EC) : KC = EC : LC$$

и, слѣдовательно,

$$EC : LC > \left(2339\frac{1}{4} + 2334\frac{1}{4}\right) : 153, \text{ т. е. } EC : LC > 4673\frac{1}{2} : 153.$$

точкѣ E равный ему уголъ CEM. Въ такомъ случаѣ уголъ LEM составитъ одну двадцать четвертую часть прямого и, слѣдовательно, отрѣзокъ LM представляетъ собой сторону 96-угольника, описаннаго около круга. Такъ какъ доказано, что отношеніе EC къ CL больше, чѣмъ $4673\frac{1}{2}$ къ 153, и такъ какъ AC вдвое больше EC, а LM вдвое больше CL, то отношеніе AC къ периметру описаннаго девяностошестиугольника больше, чѣмъ $4673\frac{1}{2}$ къ 14688. Послѣднее число втрое больше перваго, увеличеннаго на $667\frac{1}{2}$, т. е. на число, меньшее, чѣмъ одна седьмая $4673\frac{1}{2}$. Такимъ образомъ, периметръ описаннаго около круга многоугольника равенъ утроенному діаметру, увеличенному менѣе, чѣмъ на седьмую его часть. Тѣмъ болѣе, поэтому, окружность круга будетъ меньше утроеннаго діаметра, увеличеннаго на седьмую долю его.



Фиг. 4.

2. Пусть будетъ данъ кругъ (фиг. 4), діаметръ AC и пусть уголъ BAC составляетъ треть прямого. Тогда отношеніе AB къ BC менѣе, чѣмъ 1351 къ 780, между тѣмъ какъ отношеніе AC къ CB равно 1560 : 780. *)

---

*) Дѣйствительно,

$$AC : BC = 2 : 1 = 1560 : 780 \text{ и } AC : BC = \sqrt{3} : 1,$$

такъ какъ BC сторона вписаннаго шестиугольника. Кромѣ того,

$$1351^2 = 1\,825\,201$$

лишь на одну единицу больше, чѣмъ

$$3 \,.\, 780^2 = 3 \,.\, 608\,400 = 1\,825\,200,$$

такъ что отношеніе $AC : BC$ лишь незначительно меньше, нежели отношеніе 1351 : 780. †)

†) Замѣтимъ, что $\frac{1351}{780}$ есть 12-я подходящая дробь непрерывной дроби, выражающей $\sqrt{3}$.

Прим. ред.

Дѣлимъ уголъ ABC прямою AD пополамъ. Такъ какъ уголъ BAD равенъ углу DCB и углу DAC, то углы DCB и DAC также равны между собой. Далѣе, общимъ будетъ прямой уголъ ADC, поэтому и третіе углы DFC и ACD равны и, слѣдовательно, треугольникъ ADC подобенъ треугольнику CDF. Вслѣдствіе этого AD относится къ DC, какъ CD къ DF и какъ AC къ CF. Но такъ же какъ AC относится къ CF, относятся и CA и AB, вмѣстѣ взятыя, къ BC. *) Поэтому и AD такъ относится къ DC, какъ взятыя вмѣстѣ CA и AB къ BC. Слѣдовательно, отношеніе AD къ DC менѣе, чѣмъ отношеніе 2911 къ 780, и отношеніе AC къ DC менѣе, чѣмъ отношеніе $3013\frac{3}{4}$ къ 780. **)

Уголъ CAD дѣлимъ пополамъ прямой AH. Тогда на точно такомъ же основаніи отношеніе AH къ HC менѣе, чѣмъ отношеніе $5924\frac{3}{4}$ къ 780 или чѣмъ отношеніе 1823 къ 240, такъ какъ каждое изъ этихъ послѣднихъ чиселъ составляетъ $\frac{4}{13}$ соотвѣтствующаго изъ прежнихъ. Поэтому AC относится къ CH (приблизительно), какъ $1838\frac{9}{11}$ къ 240. ***)

---

*) Такъ какъ въ треугольникѣ ABC уголъ A раздѣленъ прямою AF пополамъ, то

$$AC : CF = AB : BF = (CA + AB) : (BF + FC).$$

**) Мы имѣли

$$AC : CB = 1560 : 780 \quad \text{и} \quad AB : BC < 1351 : 780.$$

Слѣдовательно,

$$(CA + AB) : BC < 2911 : 780, \text{ и поэтому также } AD : DC < 2911 : 780.$$

Изъ неравенства $AD^2 : DC^2 < 8\,473\,921 : 608\,400$ вытекаетъ тогда, что

$$(AD^2 + DC^2) : DC^2 < 9\,082\,321 : 608\,400 \text{ т. е. } AC^2 : CD^2 < 9\,082\,321 : 608\,400$$

и тѣмъ болѣе

$$AC : CD < 3013\frac{3}{4} : 780, \text{ такъ какъ } \left(3013\frac{3}{4}\right)^2 = 9\,082\,689\frac{1}{16}\cdot$$

Такимъ образомъ, найденъ верхній *предѣлъ отношенія* діаметра къ сторонѣ вписаннаго двѣнадцатиугольника.

***) Тѣмъ же точно путемъ, какимъ была получена пропорція

$$(CA + AB) : BC = AD : DC,$$

получается, что $(CA + AD) : DC = AH : HC$, откуда

Далѣе, уголъ HAC дѣлится пополамъ прямой KA. Тогда отношеніе AK къ KC менѣе, чѣмъ отношеніе ($3661\frac{9}{11}$ къ 240 или, чѣмъ) *) 1007 къ 66, такъ какъ каждое изъ этихъ послѣднихъ чиселъ составляетъ $\frac{11}{40}$ предыдущихъ. Слѣдовательно, AC относится къ CK (приблизительно), какъ $1009\frac{1}{6}$ къ 66. **)

Дѣлимъ еще уголъ KAC прямою LA пополамъ. Тогда отношеніе AL къ LC менѣе, чѣмъ отношеніе $2016\frac{1}{6}$ къ 66, и отношеніе AC къ CL менѣе, чѣмъ отношеніе $2017\frac{1}{4}$ къ 66. ***)

$$AH : HC < \left(3013\frac{3}{4} + 2911\right) : 780, \text{ т. е. } < 5924\frac{3}{4} : 780 \text{ или} < 1823 : 240.$$

Изъ неравенства $AH^2 : HC^2 < 3\,323\,329 : 57\,600$ вытекаетъ тогда, что $(AH^2 + HC^2) : HC^2 < 3\,380\,929 : 57\,600$, или $AC^2 : CH^2 < 3\,380\,929 : 57\,600$, а потому

$$AC : CH < 1838\frac{9}{11} : 240, \text{ такъ какъ } \left(1838\frac{9}{11}\right)^2 = 3\,381\,252\frac{37}{121}.$$

Такимъ образомъ, найденъ верхній предѣлъ отношенія діаметра къ сторонѣ вписаннаго двадцатичетырехугольника.

*) Слова въ скобкахъ вставлены для ясности предложенія.

**) Изъ равенства $(CA + AH) : HC = AK : CK$ вытекаетъ, что

$$AK : KC < \left(1838\frac{9}{11} + 1823\right) : 240 \text{ или } < 3661\frac{9}{11} : 240,$$

или $< 1007 : 66$. Изъ неравенства $AK^2 : KC^2 < 1\,014\,049 : 4356$ получается тогда:

$$(AK^2 + KC^2) : KC^2 < 1\,018\,405 : 4356, \text{ или } AC : CK < 1009\frac{1}{6} : 66,$$

такъ какъ $\left(1009\frac{1}{6}\right)^2 = 1\,018\,417\frac{13}{36}$. CK есть сторона вписаннаго сорокавосьмиугольника.

***) Такъ какъ $(CA + AK) : KC = AL : LC$, откуда получаемъ

$$AL : LC < 2016\frac{1}{6} : 66.$$

Изъ неравенства $AL^2 : LC^2 < 4\,064\,928\frac{1}{36} : 4356$, вытекаетъ затѣмъ

$$(AL^2 + LC^2) : LC^2 < 4\,069\,284\frac{1}{6} : 4356 \text{ или } AC : CL < 2017\frac{1}{4} : 66,$$

такъ какъ

$$\left(2017\frac{1}{4}\right)^2 = 4\,069\,297\frac{9}{16}.$$

CL есть сторона вписаннаго девяностошестиугольника.

Поэтому, наоборотъ, отношеніе периметра многоугольника къ діаметру болѣе, чѣмъ 6336 къ $2017\frac{1}{4}$, что составляетъ болѣе, чѣмъ три и десять семьдесятъ первыхъ числа $2017\frac{1}{4}$. Итакъ, периметръ вписаннаго въ кругъ 96-угольника превосходитъ утроенный діаметръ больше, нежели на $\frac{10}{71}$ послѣдняго. Слѣдовательно, тѣмъ болѣе окружность превышаетъ длину утроеннаго діаметра болѣе, чѣмъ на $\frac{10}{71}$ долей его.

Такимъ образомъ, длина окружности болѣе утроенной длины діаметра, а именно превышаетъ послѣднюю менѣе, чѣмъ на $\frac{1}{7}$, но болѣе, чѣмъ на $\frac{10}{71}$ діаметра.

III

ХРИСТІАНЪ ГЮЙГЕНСЪ

(1629—1695)

О НАЙДЕННОЙ ВЕЛИЧИНѢ КРУГА

(DE CIRCULI MAGNITUDINE INVENTA)

Предисловіе.

Такъ какъ я недавно произвелъ по отношенію къ древней задачѣ о квадратурѣ круга, которой не превосходитъ никакая другая задача по извѣстности даже у лицъ, несвѣдущихъ въ математикѣ, изслѣдованіе, которое кажется мнѣ заслуживающимъ труда, и такъ какъ я при этомъ достигъ результатовъ, которые, какъ полагаю, лучше до сихъ поръ извѣстныхъ, то я намѣренъ представить ихъ геометрамъ вмѣстѣ съ доказательствами. Дѣйствительно, я держусь того мнѣнія, что эти доказательства полезны не только для изученія указанныхъ результатовъ, но также именно вслѣдствіе своей новизны они могутъ оказаться способными побуждать къ открытію скрытыхъ еще фактовъ, такъ какъ мнѣ думается, что и въ этой области, въ которой раньше работали всѣ съ величайшимъ напряженіемъ своихъ силъ, осталось еще сорвать не одинъ достойный труда плодъ. Правда, раньше очень многіе пытались уже присвоить себѣ славу открытія квадратуры и многократно публиковали эти разнообразнѣйшія открытія, смѣшивая вѣрное съ ложнымъ. Но мы знаемъ, что полная несостоятельность всего этого обнаружена болѣе свѣдущими людьми, и что до настоящаго времени изъ всѣхъ предложеній, на которыхъ основывались при измѣреніи круга, одно только твердо установлено, а именно то, что кругъ больше вписаннаго въ него многоугольника и меньше описаннаго около него многоугольника. Я же хочу дать болѣе тщательное опредѣленіе величины круга и показать, что, если построить два многоугольника, какъ средніе пропорціональные между одноименными вписаннымъ и описаннымъ многоугольниками, то периметръ меньшаго изъ нихъ больше окружности, между тѣмъ, какъ площадь второго въ томъ же отношеніи больше площади круга. Хотя это предложеніе является наиболѣе труднымъ и наиболѣе заслуживающимъ вниманія изъ тѣхъ предложеній, которыя я хочу доказать, но среди нихъ есть и другія, не только дающія бóльшую точность, но и болѣе пригодныя для приложеній; я не буду, однако, здѣсь перечислять ихъ, такъ какъ они будутъ понятнѣе впослѣдствіи. Напротивъ, будетъ полезно вкратцѣ показать, насколько важны для изученія геометріи эти легко примѣнимыя на практикѣ теоремы. Весь матеріалъ разработанъ мной двумя способами: сначала я разсматриваю то, что доказывается при помощи однихъ лишь обыкновенныхъ элементовъ геометріи, а затѣмъ я примѣняю также теорію центра тяжести. Обѣ части посвящены не только вычисленію длины всей окружности, но также и опредѣленію отрѣзковъ, равныхъ произвольнымъ дугамъ. Пріемъ, указываемый въ первой части, приводитъ къ простому механическому построенію, даже тогда, когда требуется весьма большая точность. Съ помощью этого пріема можно, если перейдемъ къ численному опредѣленію, получить отношеніе окружности къ діаметру, которое Архимедъ нашелъ изъ разсмотрѣнія 96-угольника, пользуясь только двѣнадцатиугольникомъ. Далѣе, между тѣмъ какъ многоугольникъ съ 10 800 сторонами по старому способу даетъ только границы 62 831 852 и 62 831 855 при діаметрѣ равномъ 20 000 000 частямъ, по нашему методу, какъ увидимъ, получаются границы

6 283 185 307 179 584 и 6 283 185 307 179 589.

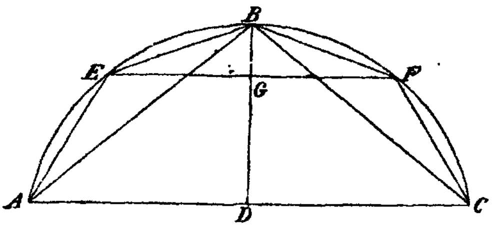
Вообще, каково бы ни было число сторонъ многоугольника, мы получаемъ всегда вдвое больше правильныхъ знаковъ, чѣмъ прежнимъ способомъ. Это вытекаетъ изъ столь же опредѣленнаго основанія, какъ то, что квадратъ числа имѣетъ по большей части вдвое болѣе знаковъ, чѣмъ само число. Но еще большія преимущества даетъ примѣненіе нѣкоторыхъ свойствъ центра тяжести; этимъ путемъ, повидимому, мы больше приближаемся къ разрѣшенію непреодолимой задачи. Дѣйствительно, для полученія Архимедовыхъ границъ длины окружности, достаточно теперь знать только сторону правильнаго треугольника! Изъ шестидесятиугольника мы уже знаемъ, что длина окружности содержится между 31 415 926 533 и 31 415 926 538, если діаметръ равенъ 10 000 000 000 частямъ, между тѣмъ какъ обычнымъ способомъ получаются лишь предѣлы 3140 и 3145. Я могу, такимъ образомъ, сказать, что получаю этимъ пріемомъ болѣе, чѣмъ тройное число правильныхъ знаковъ, подобно тому какъ предыдущій пріемъ даетъ ихъ вдвое болѣе; и это соотношеніе сохраняется подобно тому, какъ при большихъ числахъ кубъ даетъ тройное число знаковъ.

Если, поэтому, въ будущемъ кто-нибудь неправильно опредѣлитъ длину окружности, то для опроверженія его выводовъ не будетъ необходимости разсматривать чрезвычайно большое число многоугольниковъ, но достаточно будетъ короткаго, нисколько не запутаннаго вычисленія, на которое онъ не сможетъ уже такъ легко набросить подозрѣніе въ ошибочности, какъ это бывало обыкновенно до сихъ поръ. Далѣе, если бы при составленіи таблицы хордъ, для которой особенно важно отсутствіе ошибокъ, вкралась какая-нибудь погрѣшность, то было бы не трудно при помощи предлагаемыхъ вычисленій исправить ошибку, такъ какъ теперь возможно посредствомъ совершенно новаго метода находить по хордѣ круга длину отвѣчающей ей дуги. Даже въ случаѣ отсутствія таблицъ можно легко, какъ будетъ показано, по даннымъ сторонамъ треугольника, опредѣлить его углы, и притомъ такъ точно, что уклоненіе отъ истиннаго значенія никогда не достигнетъ двухъ секундъ, часто же не достигаетъ даже одной шестидесятой части секунды. Смѣю думать, что и этого нельзя считать незначительнымъ пріобрѣтеніемъ. Я узналъ, впрочемъ, что Декартъ (Renatus Cartesius), открытія котораго освѣтили такъ блестяще всю философію и особенно математику, также написалъ кое-что объ этомъ предметѣ. Говорятъ, что написанное имъ найдено послѣ его смерти среди его набросковъ, но мнѣ до сихъ поръ не удалось ничего узнать ни о методахъ, ни о результатахъ, которые онъ получилъ. Но существуетъ „Циклометрія" ученаго геометра Виллеброрда Снеллія, сочиненіе, составленное съ большой тщательностью, содержаніе котораго полностью заключается въ настоящей работѣ. Этотъ изслѣдователь, безъ сомнѣнія, заслуживалъ бы не малой похвалы, если бъ ему удалось доказать оба важнѣйшія предложенія, на которыхъ, какъ на фундаментѣ, построено все сочиненіе. Но то, что онъ предлагаетъ тамъ въ качествѣ доказательства названныхъ теоремъ, не имѣетъ для установленныхъ предложеній никакой силы, между тѣмъ какъ самыя предложенія, которыя я доказалъ съ помощью совершенно яснаго пріема, содержатъ весьма замѣчательную истину.

Я полагалъ, что могу съ полнымъ правомъ включить эти предложенія въ настоящее сочиненіе, такъ какъ доказательство ихъ покоится на томъ, что я самъ нашелъ.

§ 1. Теорема I.

Если въ круговой сегментъ, меньшій полукруга, вписать наибольшій треугольникъ и такимъ же образомъ затѣмъ вписать по треугольнику въ оба оставшіеся сегмента, то площадь перваго треугольника меньше учетверенной площади двухъ другихъ треугольниковъ, вмѣстѣ взятыхъ.



Фиг. 1.

Пусть сегментъ ABC (фиг. 1) менѣе полукруга, BD діаметръ; наибольшимъ вписаннымъ треугольникомъ будетъ въ такомъ случаѣ ABC, т. е. треугольникъ, имѣющій то же основаніе и ту же высоту, что и сегментъ. Въ оба остальные сегмента впишемъ также наибольшіе треугольники AEB и BFC. Я утверждаю, что треугольникъ ABC меньше, чѣмъ учетверенная сумма треугольниковъ AEB и BFC.

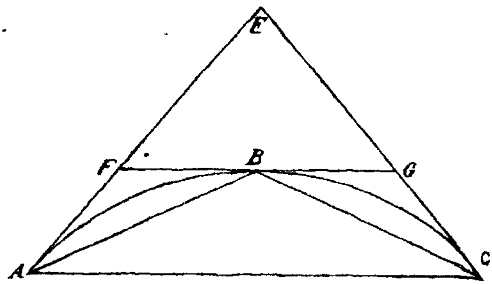
Дѣйствительно, проведемъ прямую EF, пересѣкающую діаметръ въ точкѣ G.. Такъ какъ дуга AB въ точкѣ E дѣлится пополамъ, то каждая изъ хордъ EA и EB больше половины хорды AB. Слѣдовательно, квадратъ AB меньше учетвереннаго квадрата EB или EA. Но квадратъ AB такъ относится къ квадрату EB, какъ отрѣзокъ DB—къ отрѣзку GB, ибо квадратъ AB равенъ прямоугольнику, составленному изъ BD и цѣлаго діаметра круга, квадратъ же EB равенъ прямоугольнику, составленному изъ того же діаметра и отрѣзка BG. Поэтому BD менѣе учетвереннаго BG. Но AC также менѣе удвоеннаго EF, такъ какъ этотъ отрѣзокъ равенъ AB. Отсюда слѣдуетъ, что треугольникъ ABC менѣе увосьмереннаго треугольника EBF. Но этому треугольнику равны порознь треугольники AEB и BFC. Такимъ образомъ, треугольникъ ABC меньше, чѣмъ учетверенная сумма этихъ двухъ послѣднихъ треугольниковъ, что и требовалось доказать.

§ 2. Теорема II.

Пусть данъ круговой сегментъ, меньшій полукруга, и треугольникъ, имѣющій общее основаніе съ сегментомъ и боковыя стороны касательныя къ сег-

менту; въ такомъ случаѣ касательная, проведенная черезъ вершину сегмента отсѣкаетъ отъ даннаго треугольника новый треугольникъ, который больше половины наибольшаго вписаннаго въ сегментъ треугольника.

Пусть будетъ круговой сегментъ ABC (фиг. 2) менѣе полукруга и B его вершина. Черезъ концы его основанія проведемъ касательныя AE и CE, которыя встрѣчаются въ E: онѣ встрѣчаются, потому что сегментъ меньше полукруга. Затѣмъ проведемъ касательную FG черезъ вершину B сегмента, и затѣмъ прямыя AB и BC. Требуется доказать, что треугольникъ FEG больше половины треугольника ABC.



Фиг. 2.

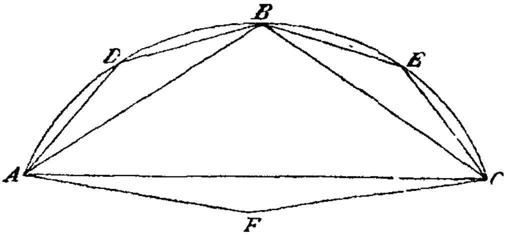
Ясно, что треугольники AEC и FEG, какъ и AFB и BGC, суть равнобедренные треугольники, и отрѣзокъ FG въ точкѣ B дѣлится пополамъ. Но сумма сторонъ FE и EG болѣе, чѣмъ FG, поэтому EF болѣе, чѣмъ FB или FA, а слѣдовательно, весь отрѣзокъ AE меньше двойного FE. Поэтому треугольникъ FEG больше четверти треугольника AEC. Но высота треугольника ABC относится къ высотѣ треугольника AEC, какъ FA къ AE, основаніе же у обоихъ треугольниковъ AC общее. Слѣдовательно, такъ какъ FA меньше половины AE, то и треугольникъ ABC будетъ меньше половины треугольника AEC. Но треугольникъ FEG оказался больше четверти того же треугольника. Слѣдовательно, треугольникъ FEG больше половины треугольника ABC, что и требовалось доказать.

§ 3. Теорема III.

Отношеніе всякаго кругового сегмента, меньшаго, чѣмъ полукругъ, къ наибольшему вписанному въ него треугольнику больше, чѣмъ 4 : 3.

Пусть данъ круговой сегментъ, меньшій полукруга, и вписанный въ него наибольшій треугольникъ ABC (фиг. 3). Я утверждаю, что отношенie сегмента къ этому треугольнику больше, чѣмъ 4 : 3.

Въ самомъ дѣлѣ, впишемъ въ оба остальные сегмента наибольшie треугольники ADB и BEC. Въ такомъ случаѣ (§ 1) треугольникъ ABC меньше, чѣмъ учетверенная сумма этихъ двухъ треугольниковъ, и можно поэтому прибавить къ треугольнику ABC такую площадь, чтобъ съ нею вмѣстѣ этотъ треугольникъ составилъ площадь, меньшую, чѣмъ учетверенная сумма треугольниковъ ADB и BEC. Сообразно съ этимъ, пусть прилежащiй треугольникъ AFC будетъ выбранъ такъ, чтобъ вся площадь $ABCF$ былл меньше, чѣмъ учетверенная сумма треугольниковъ ADB и BEC. Вообразимъ себѣ, что въ остальные сегменты опять вписаны наибольшie треугольники, въ тѣ, которые послѣ этого останутся — еще разъ и т. д. пока не окажется, что сегменты, въ которые мы въ послѣднiй разъ вписали треугольники, вмѣстѣ взятые будутъ меньше, чѣмъ треугольникъ AFC, что навѣрное когда нибудь случится. Тогда эти напослѣдокъ вписанные треугольники также будутъ менѣе треугольника AFC. Теперь четверть площади $ABCF$ менѣе суммы обоихъ треугольниковъ ADB и BEC, четвертая часть этой суммы опять таки менѣе суммы четырехъ треугольниковъ, вписанныхъ въ слѣдующie сегменты, четвертая часть суммы этихъ опять менѣе, чѣмъ сумма слѣдующихъ и т. д., сколько бы ни вписывать еще треугольниковъ. Поэтому площадь, составленная изъ четыреугольника $ABCF$ и остальныхъ вписанныхъ треугольниковъ, еще увеличенная на одну треть вписанныхъ напослѣдокъ треугольниковъ, больше чѣмъ $\frac{4}{3}$ четыреугольника $ABCF$. Дѣйствительно, Архимедъ доказалъ, что если даны какiя-либо площади, изъ которыхъ каждая послѣдующая составляетъ $\frac{1}{4}$ предыдущей, то сумма всѣхъ этихъ площадей, увеличенная на одну треть меньшей изъ нихъ, относится къ большей изъ нихъ, какъ 4 къ 3. Послѣ вычитанiя, получаемъ такимъ образомъ, что всѣ треугольники, вписанные въ сегменты ADB и BEC, увеличенные на одну треть треугольниковъ, вписанныхъ напослѣдокъ, больше, чѣмъ одна треть площади $ABCF$. Но послѣдняя треть меньше одной трети треуголь-

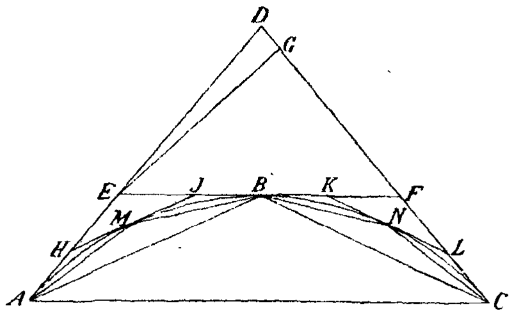


Фиг. 4.

ника ACF. Поэтому, если отнимемъ, съ одной стороны, одну треть вписанныхъ напослѣдокъ треугольниковъ, а съ другой стороны, отнимемъ изъ площади $ABCF$ прилежащій треугольникъ ACF, то сумма всѣхъ треугольниковъ, вписанныхъ въ сегменты ADB и BEC, будетъ больше одной трети треугольника ABC. Сложеніемъ получаемъ, наконецъ, что вся прямолинейная фигура, вписанная въ сегментъ, а тѣмъ болѣе самъ сегментъ, больше $\frac{4}{3}$ треугольника ABC, что и требовалось доказать.

§ 4. Теорема IV.

Всякій круговой сегментъ, меньшій чѣмъ полукругъ, менѣе двухъ третей треугольника, описаннаго около сегмента и имѣющаго съ нимъ общее основаніе.



Фиг. 4.

Пусть данъ круговой сегментъ, меньшій чѣмъ полукругъ, и пусть прямыя AD и CD (фиг. 4) будутъ касательными, проходящими черезъ концы его основанія, а D — точка ихъ пересѣченія. Я утверждаю, что сегментъ ABC меньше двухъ третей треугольника ADC.

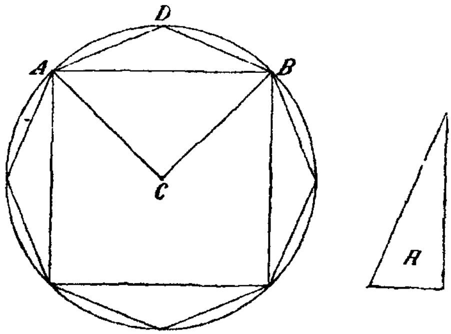
Въ самомъ дѣлѣ, проведемъ прямую, которая касается сегмента въ вершинѣ B и впишемъ наибольшій треугольникъ ABC. Такъ какъ треугольникъ EDF больше половины треугольника ABC (§ 2), то ясно, что можно отнять отъ него такую часть, чтобъ и остатокъ тоже былъ больше половины названнаго треугольника ABC. Пусть будетъ сообразно съ этимъ отсѣченъ треугольникъ EDG. Затѣмъ проведемъ прямыя HJ и KL, которыя касаются сегментовъ AMB и BNC въ ихъ вершинахъ, и впишемъ въ э сегменты наибольшіе треугольники. Такимъ же образомъ поступимъ съ оставшимися сегментами и т. д., пока, наконецъ, остаточные сегменты, вмѣстѣ взятые, не будутъ менѣе удвоеннаго треугольника EDG. Въ такомъ случаѣ нѣкоторая прямолинейная фигура будетъ вписана въ сегментъ, а другая описана около него. Но такъ какъ треугольникъ EGF больше половины треугольника ABC, а треугольники HEJ и KFL больше половины треугольника AMB и BNC, и то же соотношеніе сохраняется для всѣхъ послѣдующихъ сегментовъ, а именно треугольники, которыхъ основанія проходятъ черезъ вершины сегментовъ, болѣе половины соотвѣтствующихъ треугольниковъ, вписанныхъ въ сегментъ, то отсюда слѣдуетъ, что сумма всѣхъ лежащихъ внѣ сегмента треугольниковъ, даже послѣ вычитанія EGD, больше половины суммы всѣхъ вписанныхъ въ сегментъ треугольниковъ. Но треугольникъ EGD также больше половины упомянутыхъ раньше остаточныхъ сегментовъ. Слѣдовательно, треугольникъ EDF, сложенный со всѣми остальными находящимися внѣ сегмента треугольниками, больше половины всего сегмента ABC. Поэтому площадь, ограниченная касательными AD, DC и дугой ABC, тѣмъ болѣе должна быть больше половины сегмента ABC. Отсюда слѣдуетъ, что треугольникъ ADC больше $\frac{3}{2}$ сегмента ABC, что и требовалось доказать.

§ 5. **Теорема V.**

Всякій кругъ больше вписаннаго въ него равносторонняго многоугольника, увеличеннаго на одну треть величины, на которую этотъ многоугольникъ превосходитъ другой вписанный многоугольникъ съ вдвое меньшимъ числомъ сторонъ.

Пусть будетъ данъ кругъ съ центромъ C (фиг. 5); пусть будетъ въ него вписанъ равносторонній многоугольникъ, одна изъ сторонъ котораго есть AB. Пусть, кромѣ того, будетъ вписанъ другой такого же рода многоугольникъ, котораго двѣ стороны AD и DB стягиваются стороной AB. Этотъ многоугольникъ поэтому больше перваго. Пусть одна треть разности будетъ равна площади H. Я утверждаю, что кругъ больше, чѣмъ многоугольникъ ADB, сложенный съ площадью H.

Въ самомъ дѣлѣ, проведемъ изъ центра прямыя CA и CB. Такъ какъ круговой сегментъ ADB больше четырехъ третей вписаннаго въ него треугольника ADB (§ 3), то сегменты AD и DB, вмѣстѣ взятые, больше одной трети треугольника ADB. Поэтому секторъ CAB больше четыреугольника $CADB$, увеличеннаго на одну треть треугольника ADB. Но какъ секторъ CAB относится ко всему кругу, такъ четыреугольникъ $CADB$ относится къ многоугольнику ADB, и такъ же треть треугольника ADB относится къ одной трети разности между многоугольникомъ ADB и многоугольникомъ AB. Ясно поэтому, что и весь кругъ больше многоугольника ADB, увеличеннаго на одну треть разности между многоугольникомъ ADB и многоугольникомъ AB, т. е. увеличеннаго на площадь H, что и требовалось доказать.

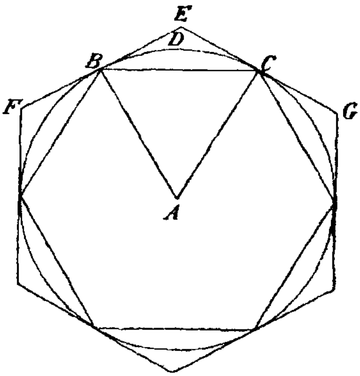


Фиг. 5.

§ 6. Теорема VI.

Всякій кругъ меньше двухъ третей описаннаго около него равносторонняго многоугольника, увеличеннаго на одну треть площади подобнаго ему вписаннаго многоугольника.

Пусть будетъ данъ кругъ съ центромъ A (фиг. 6); пусть будетъ въ него вписанъ равносторонній многоугольникъ, сторона котораго есть BC, и около него описанъ другой подобный ему многоугольникъ, стороны котораго касаются круга въ вершинахъ перваго многоугольника. Я утверждаю, что кругъ меньше двухъ третей многоугольника FEG, увеличеннаго на одну треть многоугольника BC.



Фиг. 6.

Въ самомъ дѣлѣ, проведемъ черезъ центръ прямыя AB и AC. Такъ какъ боковыя стороны треугольника BEC, имѣющаго общее основаніе съ сегментомъ BDC, касаются послѣдняго, то этотъ сегментъ менѣе двухъ третей треугольника BEC (§ 4). Поэтому, если къ треугольнику ABC прибавить двѣ трети треугольника BEC, т. е. двѣ трети разности между четыреугольникомъ $ABEC$ и треугольникомъ ABC, то полученная площадь будетъ больше, чѣмъ круговой секторъ ABC. Но совершенно все равно прибавлять-ли къ треугольнику ABC двѣ трети названной разности, или прибавить двѣ трети четыреугольника $ABEC$ и напротивъ того отнять двѣ трети треугольника ABC; но такимъ образомъ получаются двѣ трети четыреугольника $ABEC$, сложенныя съ одной третью треугольника ABC. Слѣдовательно, секторъ ABC меньше двухъ третей четыреугольника $ABEC$, сложенныхъ съ одной третью треугольника ABC. Умножая все на число сторонъ многоугольника, заключаемъ, что весь кругъ меньше, чѣмъ двѣ трети описаннаго многоугольника FEG, увеличенныхъ одной третью вписаннаго многоугольника BC, что и требовалось доказать.

§ 7. Теорема VII.

Длина всякой окружности больше периметра вписаннаго въ нее равносторонняго многоугольника, увеличеннаго на одну треть разности между этимъ периметромъ и периметромъ другого вписаннаго многоугольника съ вдвое меньшимъ числомъ сторонъ.

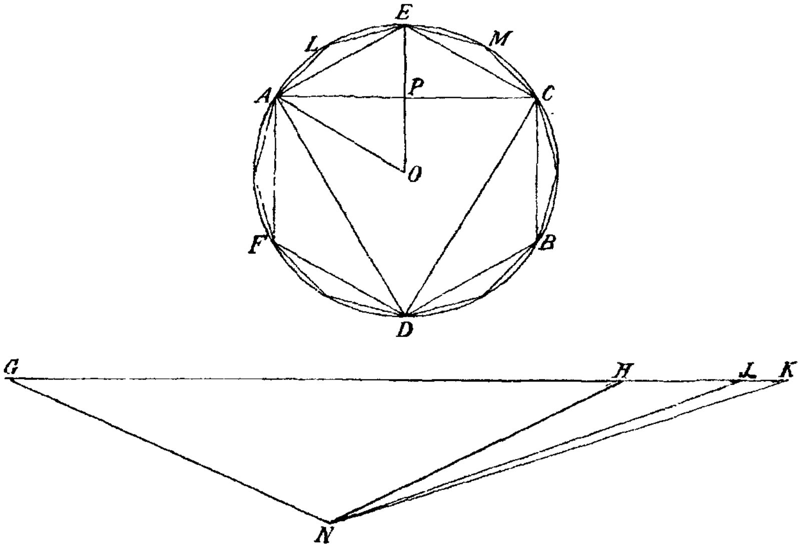
Пусть въ кругъ AB съ центромъ O (фиг. 7) *) будетъ вписанъ равносторонній многоугольникъ ACD и другой многоугольникъ $AECBDF$ съ двойнымъ числомъ сторонъ. Пусть отрѣзокъ GJ будетъ равенъ периметру многоугольника $AECBDF$, а отрѣзокъ GH периметру многоугольника ACD. Разность двухъ периметровъ есть поэтому отрѣзокъ HJ, третью часть котораго JK прибавимъ къ отрѣзку GJ. Я утверждаю, что длина окружности AB больше, чѣмъ весь отрѣзокъ GK.

Въ самомъ дѣлѣ, впишемъ въ кругъ еще третій равносторонній многоугольникъ $ALEMC$, имѣющій вдвое болѣе сторонъ, чѣмъ $AECBDF$. Затѣмъ построимъ треугольники, имѣющіе основаніями соотвѣтственно GH, HJ и JK, общую вершину N и высоту, рав-

---

*) Отрѣзки GH и GJ по недостатку мѣста начерчены нѣсколько уменьшенными.

ную радіусу круга. Но такъ какъ основаніе GH равно периметру многоугольника ACD, то треугольникъ GNH равенъ многоугольнику съ двойнымъ числомъ сторонъ, т. е. равенъ многоугольнику $AECBDF$. Это вытекаетъ изъ слѣдующаго: если изъ центра проведемъ прямыя OA и OE, изъ которыхъ послѣдняя пересѣкаетъ AC въ точкѣ P, то треугольникъ AEO будетъ равенъ треугольнику, имѣющему основаніе AP и высоту, равную радіусу OE.



Фиг. 7.

Но сколько разъ треугольникъ AEO содержится въ многоугольникѣ $AECBDF$, столько же разъ отрѣзокъ AP содержится въ периметрѣ ACD. Поэтому многоугольникъ $AECBDF$ будетъ равенъ треугольнику, имѣющему основаніемъ периметръ ACD и высоту, равную радіусу EO, т. е. равенъ треугольнику GNH. По той же самой причинѣ треугольникъ GNJ, какъ имѣющій основаніе GJ, равное периметру $AECBDF$, и высоту, равную радіусу круга, будетъ равенъ многоугольнику $ALEMC$. Поэтому треугольникъ HNJ равенъ разности между многоугольникомъ $ALEMC$ и многоугольникомъ $AECBDF$. Но треугольникъ JNK по построенію составляетъ треть треугольника HNJ, слѣдовательно, онъ составляетъ треть упомянутой разности. Поэтому (§ 5) весь треугольникъ HNK меньше круга AB. Но высота треугольника равна радіусу круга.

Поэтому ясно, что отрѣзокъ GK меньше окружности круга, что и требовалось доказать.

Отсюда слѣдуетъ, что если отъ четырехъ третей периметра вписаннаго многоугольника отнять одну треть периметра другого вписаннаго многоугольника съ вдвое меньшимъ числомъ сторонъ, то остатокъ будетъ меньше окружности круга, ибо безразлично, прибавить ли къ большему периметру одну треть разности между нимъ и меньшимъ периметромъ, или же прибавить одну треть бóльшаго периметра и отнять одну треть меньшаго периметра. Но это даетъ четыре трети бóльшаго периметра безъ одной трети меньшаго. Если, напримѣръ, изъ 16 сторонъ двѣнадцатиугольника отнять двѣ стороны шестиугольника, т. е. діаметръ круга, то остатокъ будетъ меньше длины окружности, или, если отнять изъ 8 сторонъ двѣнадцатиугольника радіусъ, то остатокъ будетъ меньше полуокружности. А это полезно для механическаго построенія, потому что, какъ будетъ доказано позже, разница незначительна.

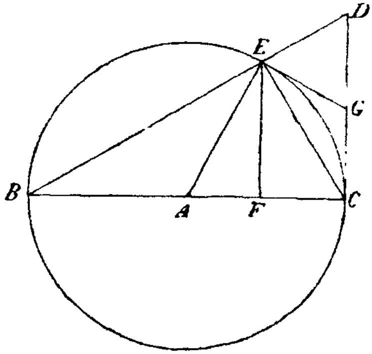
Изъ предыдущаго слѣдуетъ, далѣе, для каждой дуги, которая меньше полуокружности, что если къ хордѣ придать третью часть разности, на которую хорда превышаетъ синусъ, то сумма будетъ меньше, чѣмъ дуга.

§ 8. Теорема VIII.

Если черезъ одинъ конецъ діаметра круга проведемъ касательную, а черезъ другой конецъ сѣкущую, которая пересѣкаетъ окружность и эту касательную, то двѣ трети отрѣзка касательной, увеличенныя на одну треть перпендикуляра, опущеннаго на діаметръ изъ точки пересѣченія сѣкущей съ окружностью, будутъ больше отсѣченной дуги круга, прилежащей къ касательной.

Пусть будетъ данъ кругъ (фиг. 8) съ центромъ A и діаметромъ BC и CD — касательная къ кругу въ точкѣ C, пусть далѣе сѣкущая BD, проходящая черезъ другой конецъ діаметра, пересѣкаетъ окружность въ точкѣ E, и наконецъ, пусть EF будетъ перпендикулярна діаметру BC. Я утверждаю, что двѣ трети отрѣзка касательной CD, увеличенныя на одну треть EF, будутъ больше дуги EC.

Въ самомъ дѣлѣ, проведемъ прямыя AE и EC и построимъ въ E касательную къ кругу, которая пересѣчетъ касательную CD въ точкѣ G. Въ такомъ случаѣ GE равно GC и также DG; дѣйствительно, если изъ точки G, какъ центра, опишемъ кругъ, который проходитъ черезъ точки C и E, то онъ пройдетъ также черезъ D, вслѣдствіе того, что уголъ CED — прямой. Но выше было доказано, что двѣ трети четыреугольника $AEGC$, увеличенныя одной третью треугольника AEC, больше сектора AEC (§ 6). Но четыреугольникъ $AEGC$ равенъ треугольнику, имѣющему основаніемъ удвоенное CG, т. е. CD и высоту CA; треугольникъ же AEC равенъ треугольнику, имѣющему основаніемъ EF и высотой AC. Отсюда слѣдуетъ, что двѣ трети четыреугольника $AEGC$, увеличенныя на треть треугольника AEC, равны треугольнику, котораго основаніемъ служитъ сумма двухъ третей CD и одной трети EF, а высотой радіусъ AC. Поэтому этотъ треугольникъ также будетъ больше сектора AEC. А отсюда слѣдуетъ, что основаніе его, т. е. составленный изъ двухъ третей CD и одной трети EF отрѣзокъ больше дуги CE, что и требовалось доказать.



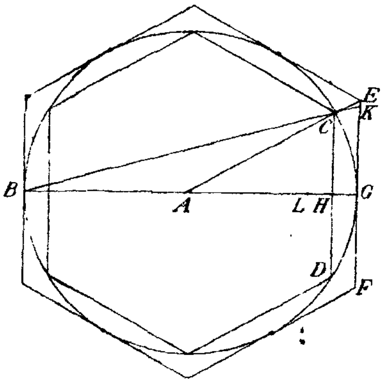
Фиг. 8.

§ 9. Теорема IX.

Окружность всякаго круга меньше, чѣмъ двѣ трети периметра равносторонняго вписаннаго многоугольника, увеличенныя на одну треть периметра подобнаго ему описаннаго многоугольника.

Пусть будетъ въ кругѣ съ центромъ A вписанъ правильный многоугольникъ, котораго сторона есть CD (фиг. 9); пусть также около круга будетъ описанъ подобный многоугольникъ съ сторонами, параллельными сторонамъ предыдущаго, и пусть будетъ EF одна изъ сторонъ второго многоугольника. Я утверждаю, что длина всей окружности меньше, чѣмъ двѣ трети периметра многоугольника CD, увеличенныя на одну треть периметра многоугольника EF.

Въ самомъ дѣлѣ, проведемъ діаметръ BG круга, который въ точкѣ H дѣлитъ пополамъ сторону вписаннаго многоугольника CD и въ то же время въ точкѣ G дѣлитъ пополамъ сторону описаннаго многоугольника EF (очевидно, кромѣ того, что точка G будетъ точкой касанія стороны EF). Отложимъ HL равнымъ HG и проведемъ прямыя AC и BC; пусть продолженіе BC встрѣтитъ сторону EF въ точкѣ K, между тѣмъ, какъ продолженіе AC попадетъ въ вершину E описаннаго многоугольника. Но вслѣдствіе того, что HL равно HG, BL будетъ вдвое больше AH. Поэтому



Фиг. 9.

GA относится къ AH, какъ GB къ BL. Но отношеніе HB къ BL больше, чѣмъ отношеніе GB къ BH, такъ какъ разность между отрѣзкомъ GB и HB равна разности между HB и BL. †) Поэтому отношеніе GB къ BL или, что то же, GA къ AH, будетъ больше, чѣмъ квадратъ отношенія GB къ BH. Съ другой стороны, отношенію GA къ AH равно отношеніе EG къ CH, отношенію же GB къ BH равно отношеніе KG къ CH. Поэтому отношеніе EG къ CH въ свою очередь больше квадрата отношенія KG къ CH. Слѣдовательно, отношеніе EG къ KG больше, чѣмъ отношеніе KG къ CH. Отсюда слѣдуетъ, что EG, увеличенное на CH, больше удвоеннаго KG. ††) Беря одну треть всего этого, находимъ, что треть EG и CH, взятыхъ вмѣстѣ, больше двухъ третей KG. Прибавляя еще одну треть CH, получимъ, что треть EG, увеличенная на двѣ трети CH, будетъ больше, чѣмъ двѣ трети KG, увеличенныя на одну треть CH. Но дуга CG (§ 8) меньше этой послѣдней суммы. Поэтому двѣ трети CH, увеличенныя на одну треть EG, навѣрное больше этой дуги CG. Если повторимъ

---

†) Заключеніе основано на томъ, что среднее ариѳметическое (HB) больше средняго геометрическаго.

Прим. ред.

††) Заключеніе основано на томъ, что ариѳметическое среднее отрѣзковъ EG и CH больше ихъ геометрическаго средняго.

Прим. ред.

все столько разъ, сколько разъ дуга BG заключается въ окружности, то найдемъ, что двѣ трети периметра многоугольника CD, увеличенныя на одну треть периметра многоугольника EF, больше длины всей окружности, что и требовалось доказать.

На основанiи того же, каждая дуга круга, меньшая, чѣмъ квадрантъ, меньше, чѣмъ двѣ трети ея синуса, увеличенныя на одну треть ея тангенса.

§ 10. Задача I.

Найти отношенiе длины окружности къ дiаметру съ какой угодно точностью.

Что отношенiе длины окружности къ дiаметру меньше $3\frac{1}{7}$ и больше $3\frac{10}{71}$ — показалъ Архимедъ съ помощью вписаннаго и описаннаго многоугольниковъ о 96 сторонахъ. Но то же самое я покажу здѣсь при помощи двѣнадцатиугольника.

Дѣйствительно, сторона вписаннаго въ кругъ двѣнадцатиугольника больше, чѣмъ $5176\frac{3}{8}$ такихъ частей, какихъ радiусъ содержитъ 10 000; поэтому двѣнадцать сторонъ, т. е. периметръ всего многоугольника содержитъ больше, чѣмъ $62\,116\frac{1}{2}$ этихъ частей; периметръ вписаннаго шестиугольника, т. е. шесть радiусовъ, составляетъ 60 000 частей. Поэтому периметръ двѣнадцатиугольника превышаетъ *периметръ шестиугольника болѣе*, чѣмъ на $2116\frac{1}{2}$ частей. Треть этого избытка поэтому больше, чѣмъ $705\frac{1}{2}$. Слѣдовательно, периметръ двѣнадцатиугольника, увеличенный на одну треть разности между нимъ и периметромъ шестиугольника, больше суммы $62116\frac{1}{2}$ и $705\frac{1}{2}$, т. е. больше 62 822 частей. Длина окружности будетъ поэтому навѣрное больше этой суммы (§ 7). Но отношенiе 62 822 къ *длинѣ дiаметра* 20 000 *болѣе*, чѣмъ $3\frac{10}{71}$. Слѣдовательно, отношенiе окружности къ дiаметру, тѣмъ болѣе превосходитъ это число.

Такъ какъ, съ другой стороны, сторона вписаннаго двѣнадцатиугольника менѣе $5176\frac{2}{5}$, то восемь его сторонъ т. е. $\frac{2}{3}$ периметра будутъ меньше, чѣмъ $41\,411\frac{1}{5}$. Далѣе, такъ какъ сторона описаннаго двѣнадцатиугольника меньше 5359, то четыре его стороны, т. е. одна треть периметра меньше 21 436. Поэтому $\frac{2}{3}$ периметра вписаннаго двѣнадцатиугольника, увеличенныя одной третью периметра описаннаго, будутъ меньше, чѣмъ $62\,847\frac{1}{5}$. Но длина окружности еще менѣе предшествующей суммы (§ 9), поэтому ея отношеніе къ діаметру меньше, чѣмъ отношеніе 62 847$\frac{1}{5}$ къ 20 000, и, слѣдовательно, безусловно меньше отношенія 62 857$\frac{1}{7}$ къ 20 000, т. е. меньше 3$\frac{1}{7}$. Такимъ образомъ получаются предѣлы отношенія длины окружности къ діаметру, установленные Архимедомъ. Тѣ же самые предѣлы мы позднѣе найдемъ, разсматривая только правильный вписанный треугольникъ.

Если, съ другой стороны, желаемъ найти точнѣе это отношеніе, то нужно разсматривать многоугольники съ бóльшимъ числомъ сторонъ. Вообразимъ поэтому многоугольникъ о 60-ти сторонахъ, вписанный въ кругъ, и другой такой же описанный и, кромѣ нихъ, еще вписанный многоугольникъ съ вдвое меньшимъ числомъ сторонъ, т. е. тридцатиугольникъ. Сторона вписаннаго шестидесятиугольника содержитъ болѣе 10 467 191 такихъ частей, какихъ въ радіусѣ содержится 100 000 000, сторона же тридцатиугольника меньше 20 905 693. Половина этой послѣдней стороны, или синусъ дуги, равной $\frac{1}{60}$ окружности, будетъ, слѣдовательно, меньше, чѣмъ 10 452 846$\frac{1}{2}$; хорда же этой дуги была больше, чѣмъ 10 467 191. Поэтому разность между ними больше, чѣмъ 14 344$\frac{1}{2}$. Прибавляя одну треть этой разности, т. е. 4781$\frac{1}{2}$, къ хордѣ 10 467 191, получимъ 10 471 972$\frac{1}{2}$. Слѣдовательно, дуга, равная $\frac{1}{60}$ окружности, содержитъ больше этого числа частей. Но если повторимъ 10 471 972$\frac{1}{2}$ шестьдесятъ разъ, то получимъ 628 318 350. Поэтому вся окружность содержитъ навѣрное больше, чѣмъ это число частей.

Такъ какъ, съ другой стороны, сторона вписаннаго шестидесятиугольника меньше, чѣмъ 10 467 192, то двѣ трети ея меньше, чѣмъ 6 978 128. Далѣе, такъ какъ сторона описаннаго шестидесятиугольника менѣе, чѣмъ 10 481 556, то одна треть ея меньше, чѣмъ 3 493 852. Это число, сложенное съ 6 978 128, даетъ 10 471 980. Полученная такимъ образомъ сумма навѣрное болѣе, чѣмъ шестидесятая часть окружности, а ушестидесятеренная сумма, т. е. 628 318 800 будетъ больше всей окружности.

Но разсмотримъ еще многоугольники съ 10 800 сторонами! По вычисленію Лудольфа изъ Кельна, отличнаго ариѳметика, сторона этого вписаннаго многоугольника равна 58 177 640 912 684 919 частямъ съ дробью, притомъ эта сторона стягиваетъ дугу въ двѣ минуты. Сторона же описаннаго многоугольника равна 58 177 643 374 063 182 безъ нѣкоторой дроби. Кромѣ того, сторона вписаннаго многоугольника съ вдвое меньшимъ числомъ сторонъ *равна* 116 355 276 902 613 523 *безъ нѣкоторой* дроби. Отсюда находимъ, что длина окружности больше 6 283 185 307 179 584 и меньше 6 283 185 307 179 589 такихъ частей, какихъ радіусъ содержитъ 1 000 000 000 000 000. Если бы согласно обычному методу просто сложить соотвѣтственно стороны вписаннаго и описаннаго многоугольниковъ, то получилось бы только, что длина окружности больше 62 831 852 и меньше 62 831 855.

Отсюда видно, что нашъ способъ даетъ болѣе, чѣмъ двойное число правильныхъ знаковъ. Это имѣетъ мѣсто всегда, каково бы ни было число сторонъ употребляемаго многоугольника. На основаніи того, что будетъ изложено дальше, окажется, что легко можно получить даже втрое большее число знаковъ.

§ 11. Задача II.

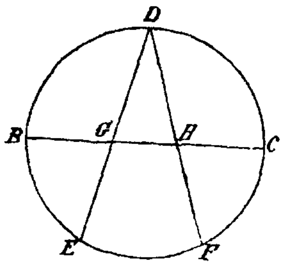
Построить отрѣзокъ, равный окружности даннаго круга.

Выше было показано, что восемь сторонъ вписаннаго двѣнадцатиугольника безъ радіуса меньше полуокружности. Но при построеніи въ большинствѣ случаевъ разница будетъ незамѣтной. Въ самомъ дѣлѣ, если къ найденной такимъ образомъ длинѣ придать только одну четырехтысячную часть діаметра, получится уже больше полуокружности. Въ этомъ можно убѣдиться слѣдующимъ образомъ. Сторона вписаннаго двѣнадцатиугольника содержитъ болѣе $5176\frac{3}{8}$ частей, которыхъ содержится 10 000 въ радіусѣ, такъ что восемь сторонъ болѣе 41 411. Если вычтемъ радіусъ, т. е. 10 000, то, такимъ образомъ, остатокъ будетъ больше, чѣмъ 31 411. Прибавляя же сюда 5 частей, т. е. $\frac{1}{4000}$ діаметра, получимъ 31 416, т. е., какъ видно изъ предыдущаго, болѣе полуокружности. Но сторону вписаннаго двѣнадцатиугольника легко найти, такъ какъ радіусъ стягиваетъ одну шестую окружности. Этотъ пріемъ къ тому же точнѣе, чѣмъ если въ основу положить значеніе $3\frac{1}{7}$, потому что при употребленіи этого послѣдняго значенія избытокъ надъ полуокружностью будетъ больше, чѣмъ $\frac{1}{1600}$ діаметра.

Второе рѣшеніе.

Пусть данъ кругъ съ діаметромъ BC (фиг. 10). Дѣлимъ полукругъ BC въ точкѣ D пополамъ; другой же полукругъ дѣлимъ въ точкахъ E и F на три равныя части, и проводимъ DE и DF, которыя пересѣкаютъ діаметръ соотвѣтственно въ точкахъ G и H. Тогда каждая изъ боковыхъ сторонъ треугольника GDH, сложенная съ его основаніемъ GH, незначительно, а именно менѣе, чѣмъ на $\frac{1}{5000}$ діаметра BC, больше квадранта BD.

Въ самомъ дѣлѣ, должно быть извѣстно, что отрѣзокъ DG, какъ и DH, равенъ удвоенной сторонѣ вписаннаго двѣнадцатиугольника. Но этимъ доказывается, что DG, увеличенная на GH, больше квадранта BD. Дѣйствительно (§ 9), восемь сторонъ вписаннаго въ кругъ двѣнадцатиугольника, сложенныя съ четырьмя сторонами описаннаго, больше всей окружности, а потому, если возьмемъ четверть всего, двѣ стороны вписаннаго двѣнадцатиугольника, сложенныя съ одной стороной описаннаго, будутъ больше кругового квадранта. Далѣе, такъ какъ сторона вписаннаго двѣнадцатиугольника содержитъ менѣе 51 764 такихъ частей, которыхъ содержится 200 000 въ BD, то двѣ стороны, т. е. GD, будутъ меньше 103 528. Сторона же описаннаго двѣнадцатиугольника, а, слѣдовательно, и GH, менѣе 53 590 частей. Поэтому DG и GH вмѣстѣ составляютъ менѣе, чѣмъ 157 118. Но изъ предыдущаго слѣдуетъ, что квадрантъ BD больше, чѣмъ 157 079. Итакъ, разность менѣе 39 частей, въ то время, какъ лишь 40 частей составляютъ $\frac{1}{5000}$ діаметра BC.



Фиг. 10.

Третье рѣшеніе.

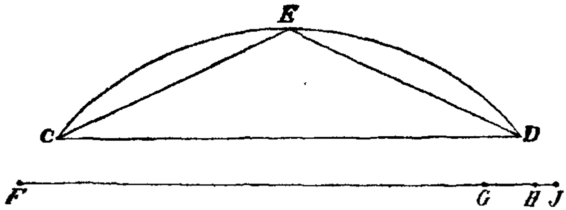
Нужно прибавить къ тремъ радіусамъ $\frac{1}{10}$ стороны вписаннаго квадрата; тогда сумма будетъ столь близко подходить къ полуокружности, что будетъ меньше ея на величину, недостигающую $\frac{1}{10000}$ діаметра. Дѣйствительно, сторона квадрата содержитъ болѣе 141 421 такихъ частей, какихъ въ радіусѣ содержится 100 000, откуда непосредственно вытекаетъ правильность утвержденія.

Чтобъ получить поэтому всю окружность, нужно къ тремъ діаметрамъ прибавить одну пятую стороны вписаннаго квадрата.

§ 12. **Задача III.**

Построить отрѣзокъ, равный любой данной дугѣ окружности.

Пусть требуется найти отрѣзокъ равный дугѣ CD (фиг. 11), которую полагаемъ сначала меньшей, чѣмъ квадрантъ. Раздѣлимъ дугу CD въ точкѣ E пополамъ; затѣмъ пусть будетъ отрѣзокъ FG равенъ хордѣ CD и отрѣзокъ FH равенъ суммѣ обѣихъ хордъ CE и ED, стягивающихъ половинныя дуги. Къ отрѣзку FH прибавимъ отрѣзокъ HJ, равный одной трети избытка GH. Тогда



Фиг. 11.

весь отрѣзокъ FJ *будетъ почти равенъ* дугѣ CD, и притомъ настолько точно, что если прибавить только одну изъ частей, которыхъ онъ содержитъ 1200, то получится больше, чѣмъ слѣдуетъ, *и это имѣетъ мѣсто даже* въ томъ случаѣ, когда дуга CD равна квадранту. Но при меньшихъ дугахъ разница будетъ еще незначительнѣе. Именно, если данная дуга не больше шестой части окружности, то найденный отрѣзокъ будетъ отличаться отъ истинной длины дуги менѣе, чѣмъ на $\frac{1}{6000}$ своей длины.

То, что полученный такимъ образомъ отрѣзокъ меньше дуги, вытекаетъ изъ теоремы VII. Утвержденіе же, касающееся величины разности, требуетъ доказательства.

Допустимъ сначала, что дуга CD равна квадранту, тогда хорда CD, т. е. FG, будетъ равна сторонѣ вписаннаго въ кругъ квадрата, и слѣдовательно, меньше 141 422 такихъ частей, какихъ содержится въ радіусѣ 100 000. Но CE и ED суть стороны вписаннаго восьмиугольника, а потому каждая изъ нихъ больше 76 536. Двойная ED равна отрѣзку FH, который поэтому больше 153 072. Слѣдовательно, избытокъ GH больше 11 650, а одна треть его, т. е. HJ, больше 3 883. Поэтому весь отрѣзокъ FJ больше 156 955. Но дуга CD, равная по предположенію круговому квадранту, менѣе

157 080. Поэтому отрѣзокъ FJ отличается отъ нея менѣе, чѣмъ на 125 такихъ частей, какихъ онъ самъ содержитъ болѣе 156 955; а это составляетъ меньше, чѣмъ $\frac{1}{1200}$ отъ FJ.

Если же дуга CD равна шестой части окружности, то хорда CD, или FG, есть сторона вписаннаго шестиугольника, и потому равна 10 000 частямъ. Далѣе, CE или ED будетъ стороной вписаннаго двѣнадцатиугольника, и слѣдовательно, будетъ больше $5\,176\frac{3}{8}$. Слѣдовательно, удвоенный этотъ отрѣзокъ, т. е. FH больше $10\,352\frac{3}{4}$, а потому GH больше $352\frac{3}{4}$ и HJ больше $117\frac{7}{12}$. Итакъ, весь отрѣзокъ FJ больше $10\,470\frac{1}{3}$; но дуга CD, какъ шестая часть окружности, меньше 10 472. Такимъ образомъ, отрѣзку FJ не хватаетъ менѣе $1\frac{2}{3}$ указанныхъ частей, т. е. меньше $\frac{1}{6000}$ отъ FJ.

Если, съ другой стороны, данная дуга больше квадранта, то ее слѣдуетъ раздѣлить на 4, 6 или болѣе равныхъ частей въ зависимости отъ требуемой точности, но во всякомъ случаѣ на четное число частей. Къ суммѣ хордъ этихъ частей нужно тогда прибавить треть избытка, на который она превышаетъ сумму хордъ, стягивающихъ двойныя дуги. Такимъ образомъ составится длина всей дуги.

Если нужно найти длину дуги, которая немного меньше или больше полуокружности или — если она больше трехъ квадрантовъ — немного меньше цѣлой окружности, то можно поступить также такимъ образомъ: длину разности прибавить или отнять отъ раннѣе найденной длины полуокружности или окружности.

§ 13. Теорема X.

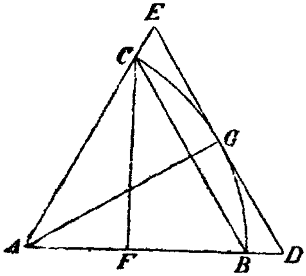
Сторона вписаннаго равносторонняго многоугольника есть средняя пропорціональная между стороной подобнаго ему описаннаго многоугольника и половиной стороны вписаннаго многоугольника съ вдвое меньшимъ числомъ сторонъ. *)

Пусть въ кругѣ съ центромъ A и радіусомъ AB (фиг. 12) BC будетъ стороной правильнаго вписаннаго многоугольника, а DE стороной подобнаго ему описаннаго многоугольника, параллель-

---

*) Ср. съ соотвѣтствующими теоремами Снеллія (Cycl. prop. 9) и Грегори (въ указанномъ на 37 стр сочиненіи). См. также Элементы Лежандра, Note III.

ной BC. Тогда продолженіе AB пройдетъ черезъ D, а продолженіе AC—черезъ E. Если линія CF будетъ проведена перпендикулярно къ AB, то она будетъ половиной стороны вписаннаго многоугольника съ вдвое меньшимъ числомъ сторонъ. Итакъ, нужно доказать, что BC есть средняя пропорціональная между ED и CF.

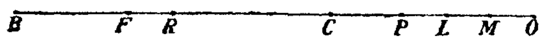


Фиг. 12.

Проведемъ линію AG, которая дѣлитъ пополамъ ED и потому есть радіусъ, а слѣдовательно равна AB. Но ED относится къ CB, какъ DA къ AB, или какъ DA къ AG. Вслѣдствіе же подобія треугольниковъ DAG и BCF, BC такъ относится къ CF, какъ DA относится къ AG. Отсюда слѣдуетъ, что ED относится къ CB, какъ CB къ CF, что и требовалось доказать.

Лемма.

Положимъ, что точка R (фиг. 13) дѣлитъ пополамъ отрѣзокъ BC, а точка F дѣлитъ его на неравныя части, при чемъ FC больше FB. Возьмемъ BO равнымъ суммѣ BC и CF, а BM



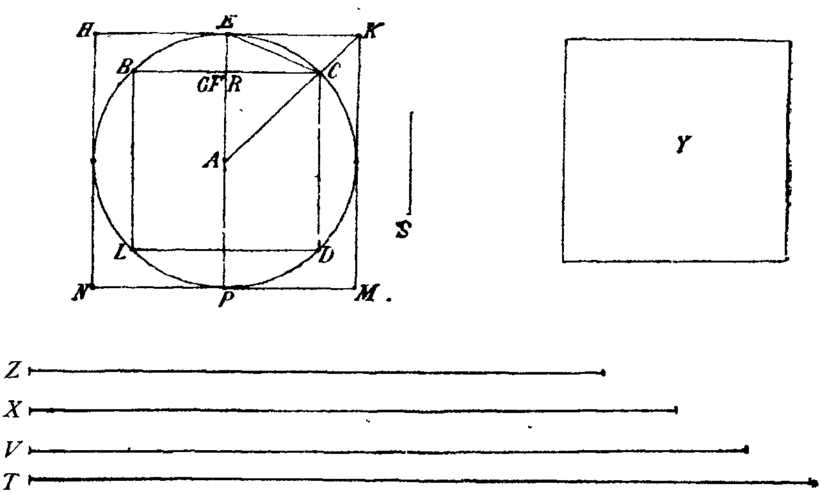
Фиг. 13.

равнымъ суммѣ BC и CR. Въ такомъ случаѣ я утверждаю, что отношеніе RB къ BF больше третьей степени отношенія OB къ BM.

Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ отрѣзки ML и LP равными OM. Такъ какъ MO, согласно построенію, равно FR, то PO втрое болѣе FR. Но BM также втрое болѣе BR. Слѣдовательно, BR относится къ BM, какъ FR къ PO, а потому также BR относится къ FR, какъ BM къ PO. Но BO больше BM. Поэтому отношеніе BO къ OP больше, чѣмъ отношеніе BR къ FR, откуда преобразованіе даетъ, что отношеніе OB къ BP меньше, чѣмъ отношеніе BR къ BF. Далѣе, такъ какъ OM и ML равны между собою, то отношеніе BO къ OM будетъ больше, чѣмъ отношеніе BM къ ML, откуда опять преобразованіе даетъ, что отношеніе OB къ BM меньше, чѣмъ отношеніе BM къ BL. Такимъ же точно образомъ обнаруживается, что отношеніе BM къ BL меньше, чѣмъ отношеніе BL къ BP. Поэтому ясно, что третья степень отношенія OB къ BM, меньше произведенія отношеній OB къ BM, BM къ BL и BL къ BP т. е. меньше отношенія OB къ BP. Но отношеніе RB къ BF было больше, чѣмъ отношеніе OB къ BP. Поэтому отношеніе RB къ BF будетъ навѣрное больше третьей степени отношенія OB къ BM, что и требовалось доказать.

§ 14. **Теорема XI.**

Длина окружности меньше, чѣмъ меньшая изъ двухъ среднихъ пропорціональныхъ между периметрами двухъ подобныхъ правильныхъ многоугольниковъ, изъ которыхъ одинъ вписанъ въ кругъ, а другой описанъ около него. Кругъ же меньше, чѣмъ многоугольникъ, подобный даннымъ и имѣющій периметръ, равный большей изъ двухъ среднихъ пропорціональныхъ.



Фиг. 14. *)

Пусть будетъ данъ кругъ BD съ центромъ A (фиг. 14). Пусть будетъ вписанъ въ него равносторонній многоугольникъ $BCDL$ и описанъ около него подобный этому многоугольнику многоугольникъ $HKMN$, стороны котораго параллельны сторонамъ перваго.

*) Отрѣзки Z, X, V, T по недостатку мѣста начерчены укороченными.

Пусть периметръ многоугольника $HKMN$ будетъ равенъ отрѣзку T, а периметръ $BCDL$ — отрѣзку Z. Пусть будутъ построены для Z и T двѣ среднихъ пропорціональныхъ †) X и V, при чемъ X меньше V. Я утверждаю, что периметръ круга меньше отрѣзка X. Далѣе, пусть будетъ построенъ многоугольникъ Y, котораго периметръ равенъ отрѣзку V и который, сверхъ того, подобенъ многоугольнику $BCDL$ или $HKMN$. Тогда я утверждаю, что площадь круга BD меньше площади многоугольника Y.

Въ самомъ дѣлѣ, проведемъ діаметръ PE, который дѣлитъ пополамъ параллельныя стороны BC и HK вписаннаго и описаннаго многоугольниковъ въ точкахъ R и E; въ такомъ случаѣ E будетъ точкой касанія стороны HK и BC будетъ пересѣчена въ точкѣ R подъ прямымъ угломъ. Кромѣ того, изъ центра проведемъ прямую ACK, которая дѣлитъ углы C и K обоихъ многоугольниковъ пополамъ, что, какъ извѣстно, выполняется одной и той же прямою, и соединимъ C съ E. Возьмемъ CF равнымъ CE и построимъ третью пропорціональную CG къ CR и CF. Тогда (§ 13) CG будетъ стороной описаннаго многоугольника, который подобенъ вписанному многоугольнику, имѣющему сторону CE или CF. Поэтому двѣ трети CF, увеличенныя на одну треть CG, будутъ больше дуги EC (§ 9). Пусть теперь двѣ трети CF, увеличенныя на треть CG, составятъ отрѣзокъ S; тогда этотъ отрѣзокъ будетъ также больше дуги EC.

Изъ равенства отношеній CR къ CF и CF къ CG, выводимъ, что два CR, увеличенныхъ на CF, относятся къ тремъ CR, — т. е. сумма BC и CF относится къ суммѣ BC и CR, — какъ два CF, увеличенныхъ на CG, относятся къ тремъ CF, или, если взять треть этого, какъ сумма $\frac{2}{3}CF$ и $\frac{1}{3}CG$ относится къ CF, т. е. какъ S относится къ CF. Поэтому и третья степень отношенія суммы BC и CF къ суммѣ BC и CR равна третьей степени отношенія S къ CF. Но отношеніе RB къ BF больше третьей степени отношенія суммы BC и CF къ суммѣ BC и CR (на основаніи леммы § 13). Поэтому отношеніе RB къ BF также больше третьей степени отношенія S къ CF, т. е. больше отношенія куба S къ кубу

†) X и V называются двумя средними пропорціональными между Z и T, если онѣ опредѣляются пропорціями $\frac{Z}{X}=\frac{X}{V}=\frac{V}{T}$.

Прим. ред.

CF. Отношеніе же RB къ BF то же, что отношеніе куба RB къ *произведенію* BF *на* квадратъ RB. Поэтому отношеніе куба RB къ произведенію BF на квадратъ RB больше отношенія куба S къ кубу CF. Но произведеніе BF на квадратъ RB больше, чѣмъ *умноженный на* FC прямоугольникъ изъ RB и BG, что доказывается слѣдующимъ образомъ. Такъ какъ отрѣзки RC, CF и CG образуютъ пропорцію, то разность между наибольшимъ и *среднимъ*, т. е. FG, *больше*, чѣмъ разность между среднимъ и меньшимъ, т. е. FR. Но FC больше FB. Поэтому отношеніе FC къ FR будетъ навѣрное больше, чѣмъ отношеніе FB къ FG, откуда преобразованіе показываетъ, что отношеніе FC къ CR меньше, чѣмъ отношеніе FB къ BG. Поэтому также отношеніе FC къ FB меньше, чѣмъ отношеніе CR или RB къ BG, т. е. (если принять BR за общую высоту) меньше, чѣмъ отношеніе квадрата RB къ прямоугольнику, образованному RB и BG. Поэтому умноженный на FC прямоугольникъ изъ RB и BG *меньше умноженнаго на* FB квадрата RB, что мы и утверждали.

Но такъ какъ было доказано, что отношеніе куба RB къ произведенію BF на квадратъ RB больше отношенія куба S къ кубу CF, то отношеніе куба RB къ произведенію на FC прямоугольника изъ RB и BG будетъ также навѣрное больше отношенія куба S къ кубу CF. Слѣдовательно, отношеніе куба RB къ кубу S также *будетъ больше*, чѣмъ отношеніе произведенія FC на прямоугольникъ изъ RB и BG къ кубу CF, т. е. больше отношенія произведенія RB и BG къ квадрату CF. Но квадратъ CF равенъ прямоугольнику изъ GC и CR, или равенъ прямоугольнику изъ GC и RB, такъ какъ отрѣзки CR, CF, CG образуютъ пропорцію. Поэтому отношеніе куба RB къ кубу S будетъ также больше, чѣмъ отношеніе прямоугольника изъ RB и BG къ прямоугольнику изъ GC и RB, т. е. больше отношенія BG къ GC. Но BG относится къ GC, какъ RC относится къ EK. Дѣйствительно, такъ какъ CR относится къ CG, какъ квадратъ CR къ квадрату CF или къ квадрату CE, и такъ какъ, далѣе, квадратъ CR относится къ квадрату CE, какъ PR къ діаметру PE то CR относится къ CG, какъ PR къ PE. Поэтому удвоенное CR т. е. CB относится къ CG, какъ удвоенное PR къ PE, т. е. какъ PR къ PA, а отсюда слѣдуетъ, что BG относится къ CG, какъ RA къ AP или къ AE, т. е. какъ RC къ EK, что мы и утверждали. Слѣдовательно, отношеніе куба RB къ кубу S, т. е. третья степень отношенія RB къ S, будетъ больше отношенія RC къ EK.

Но доказано, что S больше дуги EC. Поэтому ясно, что кубъ отношенія RB или RC къ длинѣ дуги EC больше отношенія RC къ EK. Отношеніе же RC къ дугѣ EC то же, что отношеніе периметра многоугольника $BCDL$, т. е. отрѣзка Z къ окружности круга BD; съ другой стороны, отношенію RC къ EK равно отношеніе периметра многоугольника $BCDL$ къ периметру многоугольника $HKMN$, т. е. Z къ T. Поэтому кубъ отношенія Z къ цѣлой окружности BD будетъ больше отношенія Z къ T. Но отношеніе Z къ T равно кубу отношенія Z къ X. Поэтому отношеніе Z къ названной окружности больше отношенія Z къ X. А отсюда слѣдуетъ, что окружность круга меньше отрѣзка X, что и требовалось доказать.

Слѣдуетъ, между прочимъ, замѣтить, что X меньше двухъ третей Z, увеличенныхъ на одну треть T, т. е. меньше, чѣмъ двѣ трети периметра вписаннаго многоугольника, увеличенныя на одну треть периметра описаннаго; то, что окружность круга меньше этой суммы, мы раньше уже доказали. Именно, сумма $\frac{2}{3}Z$ и $\frac{1}{3}T$ равняется меньшей изъ двухъ среднихъ ариѳметически пропорціональныхъ между Z и T, которая больше меньшей изъ двухъ среднихъ геометрически пропорціональныхъ.

Но теперь мы еще покажемъ относительно многоугольника Y, что онъ больше круга BD. Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ многоугольникъ Y имѣетъ къ подобному ему многоугольнику $HKMN$ отношеніе, которое равно квадрату отношенія ихъ периметровъ, и такъ какъ периметръ многоугольника Y равенъ отрѣзку V, а периметръ $HKMN$ равенъ T, то отношеніе многоугольника Y къ многоугольнику $HKMN$ будетъ равно квадрату отношенія V къ T, т. е. равно отношенію X къ T. Но многоугольникъ $HKMN$ такъ относится къ кругу BD, какъ периметръ этого многоугольника, т. е. T, относится къ окружности круга BD; дѣйствительно, многоугольникъ равенъ треугольнику, имѣющему основаніемъ периметръ этого многоугольника, а высотой радіусъ AE, кругъ же равенъ треугольнику, имѣющему ту же высоту, а основаніе, равное длинѣ окружности. Изъ этихъ двухъ соотношеній вытекаетъ, что многоугольникъ Y относится къ кругу BD, какъ X къ окружности BD. Но раньше было показано, что X больше окружности BD. Слѣдовательно, многоугольникъ Y больше круга BD, что и требовалось доказать.

Эти теоремы ясно обнаруживаютъ ошибку Оронтія Финейскаго, *) который утверждалъ, что четверть окружности равна

*) Ср. относительно Оронтія Финейскаго стран. 28.

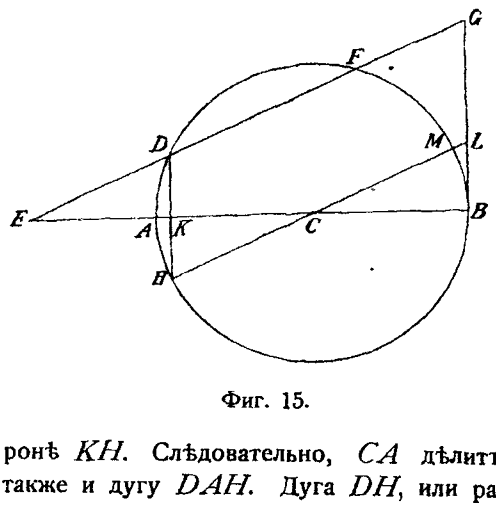
меньшей изъ двухъ среднихъ пропорціональныхъ между сторонами вписаннаго и описаннаго квадрата, самъ же кругъ равенъ квадрату большей изъ нихъ.

§ 15. Теорема XII.

Если между продолженіемъ діаметра круга и его окружностью вставимъ равный радіусу отрѣзокъ, продолженіе котораго пересѣкаетъ окружность и встрѣчаетъ касательную, проведенную въ другомъ концѣ діаметра, то эта линія отсѣкаетъ часть касательной, которая больше, чѣмъ прилежащая отсѣченная на кругѣ дуга.

Пусть будетъ описанъ кругъ, имѣющій центромъ C и діаметромъ AB (фиг. 15). Продолжимъ этотъ послѣдній за точку A и вставимъ между этимъ продолженіемъ и окружностью круга равный радіусу AC отрѣзокъ ED. Продолженіе его пусть пересѣчетъ окружность въ точкѣ F и встрѣтитъ въ точкѣ G касательную, именно ту, которая касается круга въ концѣ B діаметра. Тогда я утверждаю, что часть BG касательной больше, чѣмъ дуга BF.

Дѣйствительно, проведемъ черезъ центръ параллельно EG прямую HL, которая пересѣчетъ окружность въ точкахъ H и M, а касательную BG въ точкѣ L. Затѣмъ проведемъ прямую DH, которая пересѣчетъ діаметръ въ точкѣ K. Тогда треугольники EDK и CHK будутъ подобны, такъ какъ углы при K у нихъ равны и уголъ E равенъ углу C. Но также сторона ED равна сторонѣ HC, и эти стороны отвѣчаютъ равнымъ угламъ. Поэтому и сторона DK равна сторонѣ KH. Слѣдовательно, CA дѣлитъ пополамъ линію DH, а также и дугу DAH. Дуга DH, или равная ей FM, такимъ обра-



Фиг. 15.

зомъ, будетъ вдвое больше дуги AH. Послѣдняя же равна дугѣ MB. Поэтому дуга FB будетъ въ три раза больше дуги AH. Такъ какъ, съ другой стороны, HK есть синусъ дуги HA, а LB есть тангенсъ той же дуги, то двѣ трети HK, увеличенныя на одну треть LB, будутъ больше дуги AH (§ 9). Если поэтому утроимъ все, то окажется, что два HK, т. е. HD или GL, увеличенныя на BL, будутъ больше утроенной дуги AH, т. е. больше дуги FB. Слѣдовательно, весь отрѣзокъ GB, очевидно, больше дуги FB, что и требовалось доказать.

Это одна изъ двухъ теоремъ, на которыхъ построена вся циклометрія Виллеброрда Снеллія *) и которыя онъ желалъ представить, какъ доказанныя, между тѣмъ какъ пользовался такимъ разсужденіемъ, которое содержитъ лишь постановку вопроса. Но мы приведемъ также и другую теорему, такъ какъ она необыкновенно полезна и въ высокой степени достойна вниманія.

§ 16. Теорема XIII.

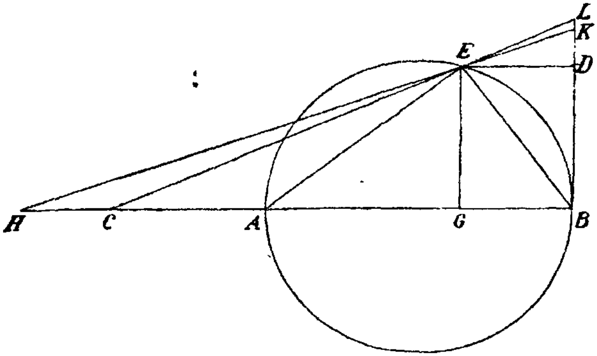
Если продолжить діаметръ круга на радіусъ и изъ полученной конечной точки провести прямую, которая пересѣкаетъ кругъ и встрѣчаетъ касательную, проведенную въ противоположномъ концѣ діаметра, то эта прямая отсѣкаетъ часть касательной, которая меньше прилежащей отсѣченной на кругѣ дуги.

Пусть будетъ данъ кругъ (фиг. 16) діаметра AB; пусть діаметръ будетъ продолженъ и пусть AC будетъ равно радіусу. Проводимъ прямую CL, которая пересѣкаетъ окружность во второй разъ въ точкѣ E, и въ точкѣ L встрѣчаетъ касательную, именно — ту, которая касается круга въ концѣ B діаметра. Тогда я утверждаю, что отрѣзокъ BL меньше дуги BE.

Въ самомъ дѣлѣ, проведемъ линіи AE и EB, возьмемъ AH равнымъ AE, и проведемъ прямую HE, которой продолженіе пересѣкаетъ касательную въ точкѣ K. Наконецъ, опустимъ на діаметръ AB перпендикуляръ EG и на касательную BL — перпендикуляръ ED. Такъ какъ треугольникъ HAE является равнобедреннымъ, то углы H и HEA равны между собой. Но такъ какъ уголъ AEB—

*) Ср. стран. 35.

прямой, то углы HEA и KEB вмѣстѣ также равны прямому. Но и углы HKB и H вмѣстѣ равны прямому, такъ какъ въ треугольникѣ HKB уголъ B—прямой. Если отнимемъ отъ обѣихъ суммъ поровну, именно, въ одномъ случаѣ уголъ H, въ другомъ HEA, то останутся равные между собой углы KEB и HKB. Слѣдовательно, треугольникъ KEB есть равнобедренный, и равныя стороны его суть EB и BK. Но BD равно EG. Такимъ образомъ, DK равно разности между EB и EG. Такъ какъ, далѣе, AG относится къ AE, какъ AE относится къ AB, то AB и AG вмѣстѣ больше



Фиг. 16.

двухъ AE (Euklid V, 25). Итакъ AE, или AH, меньше полусуммы AG и AB, т. е. меньше AC и половины AG. Если отнять отъ обѣихъ сторонъ по CA, то CH будетъ меньше половины AG. Но CA больше половины AG. Поэтому, прибавляя AC къ AG, находимъ, что весь отрѣзокъ CG больше утроеннаго CH. Но такъ какъ HG относится къ GE, какъ ED къ DK, и далѣе, GE относится къ GC, какъ LD къ DE, то изъ этихъ двухъ пропорцій выводимъ, что HG относится къ GC, какъ LD къ DK, откуда преобразованіе даетъ, что GC относится къ CH, какъ DK къ KL. Слѣдовательно, DK также больше утроеннаго KL. Но DK было равно разности между EB и EG. Поэтому KL меньше трети этой разности. Но KB равно хордѣ EB. Поэтому сумма KB и KL, т. е. весь отрѣзокъ LB будетъ навѣрное меньше (§ 7) дуги BE, что и требовалось доказать.

При тщательномъ разсмотрѣніи предыдущей теоремы обнаруживается, что на продолженіи діаметра AB нельзя найти менѣе удаленной отъ круга точки, чѣмъ C, которая обладала бы тѣмъ же свойствомъ, а именно, чтобы всякій разъ, когда будетъ проведена CL, часть касательной BL оказывалась меньше, чѣмъ отсѣченная дуга BE.

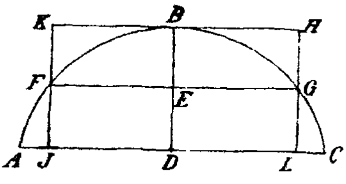
Примѣненія этого предложенія весьма разнообразны; напримѣръ, съ его помощью можно опредѣлять углы треугольниковъ, стороны которыхъ извѣстны, и притомъ безъ помощи таблицъ, или по даннымъ угламъ находить стороны или вообще опредѣлять хорду для какой нибудь дуги круга. Все это тщательно разсмотрѣно Снелліемъ въъ его Циклометріи.

§ 17. Теорема XIV.

Центръ тяжести кругового сегмента дѣлитъ діаметръ его такъ, что прилежащій къ вершинѣ отрѣзокъ больше остального, но меньше, чѣмъ $\frac{3}{2}$ его.

Пусть ABC (фиг. 17) будетъ круговой сегментъ (который по предположенію, меньше полукруга, такъ какъ на другіе сегменты предложеніе не распространяется), и пусть BD будетъ діаметръ сегмента, который дѣлится точкой E пополамъ. Въ такомъ случаѣ, *нужно сначала доказать, что центръ тяжести сегмента* ABC дальше отстоитъ отъ вершины B, чѣмъ точка E, ибо въ другомъ мѣстѣ было показано, что онъ находится на діаметрѣ. *)

Проведемъ черезъ E параллельно основанію прямую, которая пересѣчетъ окружность въ точкахъ F и G. Черезъ нихъ перпендикулярно къ основанію AC проведемъ прямыя KJ и HL, которыя вмѣстѣ съ касательной въ вершинѣ сегмента опредѣляютъ прямоугольникъ KL. Вслѣдствіе того, что сегментъ меньше полукруга, половина FL названнаго прямоугольника содержится въ сегментѣ $AFGC$, и остаются еще нѣкоторыя площади AFJ и LGC. Напротивъ того, другая половина KG прямоугольника KL вмѣ-



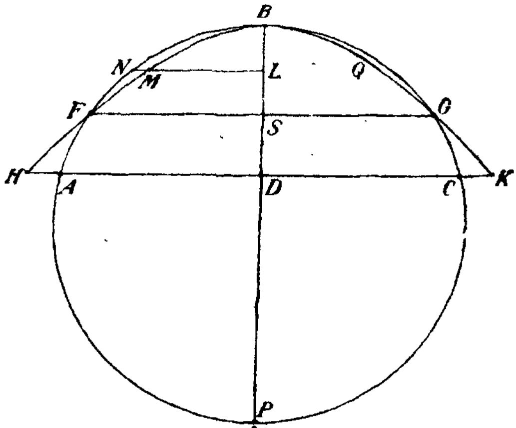
Фиг. 17.

---

*) Здѣсь, какъ и въ слѣдующихъ параграфахъ, Гюйгенсъ ссылается на свою статью; „Theoremata de quadratura hyperboles, ellipsis et circuli ex dato portionum gravitatis centro“ (Opera varia I, стр. 309 — 328). Очевидное на основаніи симметріи предложеніе, что центръ тяжести гиперболическаго, эллиптическаго или кругового сегмента всегда лежитъ на діаметрѣ, составляетъ содержаніе теоремы IV (стр. 318).

щаетъ сегментъ FBG и еще площади FKB и GHB. Такъ какъ эти послѣднія площади находятся цѣликомъ выше прямой FG, то и ихъ общій центръ тяжести будетъ лежать также выше этой же прямой. Но точка E этой прямой FG служитъ центромъ тяжести всего прямоугольника KL. Поэтому центръ тяжести остальной площади $BFJLGB$ будетъ находиться ниже прямой FG. Но центръ тяжести площадей AFJ и LGC также лежитъ ниже той же прямой FG. Поэтому центръ тяжести площади, составленной изъ этихъ двухъ площадей и площади $BFJLGB$ — а это составляетъ сегментъ ABC — непремѣнно долженъ находиться ниже прямой FG и, слѣдовательно, ниже точки E.

Тотъ же діаметръ BD (фиг. 18) пусть будетъ теперь раздѣленъ въ точкѣ S такъ, чтобы BS было въ полтора раза больше



Фиг. 18.

остальной части SD. Утверждаю, что центръ тяжести сегмента ABC отстоитъ отъ вершины B меньше, чѣмъ точка S.

Въ самомъ дѣлѣ пусть BDP будетъ діаметръ всего круга, и пусть черезъ S будетъ проведена параллельно основанію прямая, которая пересѣчетъ окружность въ точкахъ F и G. Вообразимъ себѣ затѣмъ параболу, съ вершиной въ B, осью BD и параметромъ *) SP. Положимъ, что она пересѣкаетъ основаніе сегмента въ точкахъ H и K. Кромѣ того, такъ какъ квадратъ FS равенъ

*) Выраженіе „параметръ" вмѣсто latus rectum было введено Дезаргомъ (Desargues) въ 1639 году.

прямоугольнику изъ BS и SP, т. е. тому прямоугольнику, который образуется изъ BS и параметра †) параболы, то послѣдняя пройдетъ черезъ точки F и G. Но части BF и BG параболической линіи лежатъ внутри круга, тогда какъ другія лежатъ внѣ его. Это будетъ доказано тѣмъ, что проведемъ между B и S ординату NL, которая пересѣчетъ окружность въ N, а параболу въ M. Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ квадратъ NL равенъ прямоугольнику изъ BL и LP, а квадратъ ML равенъ прямоугольнику изъ BL и SP, и такъ какъ прямоугольникъ изъ BL и LP больше прямоугольника изъ BL и SP, то квадратъ NL будетъ больше квадрата ML, а слѣдовательно, и само NL больше ML. То же самое будетъ имѣть мѣсто, гдѣ бы между S и B мы ни провели ординату. Поэтому часть BF окружности непремѣнно должна лежать внѣ параболы, и по той же причинѣ дуга BG также должна лежать внѣ параболы. Такъ какъ, съ другой стороны, прямоугольникъ изъ BD и DP равенъ квадрату DA, а прямоугольникъ изъ BD и SP равенъ квадрату DH, то отсюда будетъ слѣдовать, что квадратъ DH больше, чѣмъ квадратъ AD, а слѣдовательно, и DH больше, чѣмъ AD. Это будетъ имѣть мѣсто, гдѣ бы между S и B ни была проведена ордината. Поэтому части окружности FA и GC падаютъ внутрь параболы. Такимъ образомъ, получаются нѣкоторыя площади $FNBM$ и BQC и также другія—HFA и GCK. Такъ какъ обѣ послѣднія площади находятся цѣликомъ ниже прямой FG, то ихъ общій центръ тяжести будетъ также лежать ниже ея. Но центръ тяжести параболическаго сегмента HBK находится въ точкѣ S (Архимедъ: О равновѣсіи плоскостей; 2-я книга, теорема 8-я) *). Поэтому центръ тяжести остальной части $AFMBQGC$ долженъ лежать выше прямой FG. Выше той же прямой лежитъ, очевидно, и общій центръ тяжести площадей $FMBN$ и BQG, находящихся выше FG. Поэтому центръ тяжести площади, составленной изъ этихъ двухъ площадей и площади $AFMBQGC$, т. е. кругового сегмента ABC,

---

†) Параметръ въ смыслѣ Гюйгенса вдвое больше параметра въ современномъ смыслѣ, такъ что, если обозначить черезъ P параметръ Гюйгенса, уравненіе параболы будетъ имѣть видъ: $y^2 - P \cdot x = 0$.

Прим. ред.

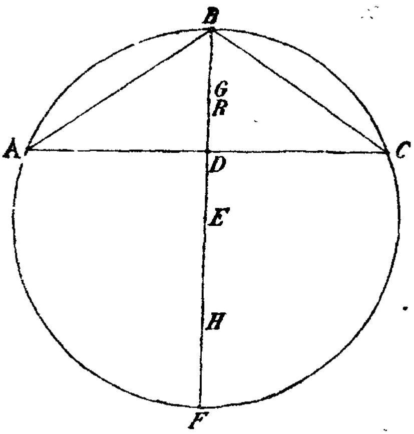
*) См. Т. II, стр. 212—216, изданія Гейберга. Теорема Архимеда гласитъ, что центръ тяжести параболическаго сегмента дѣлитъ діаметръ такъ, что прилежащая къ вершинѣ часть въ полтора раза больше части, прилежащей къ основанію.

слѣдуетъ искать выше прямой FG, и такъ какъ онъ находится на діаметрѣ BD, то онъ будетъ отстоять отъ вершины B меньше, чѣмъ точка S, что и требовалось доказать.

§ 18. Теорема XV.

Круговой сегментъ, меньшій, чѣмъ полукругъ, имѣетъ къ наибольшему вписанному въ него треугольнику отношеніе, большее, чѣмъ отношеніе 4 къ 3, и меньшее, чѣмъ отношеніе $3\frac{1}{3}$ діаметра остального кругового сегмента къ діаметру круга, увеличенному на утроенное разстояніе центра круга отъ основанія сегмента.

Пусть будетъ данъ круговой сегментъ, меньшій, чѣмъ полукругъ, и вписанный въ него наибольшій треугольникъ ABC (фиг. 19).



Фиг. 19.

Пусть BD будетъ діаметръ сегмента, BF—діаметръ круга, отъ котораго отсѣченъ сегментъ, и E центръ. Нужно сначала показать, что отношеніе сегмента ABC къ вписанному треугольнику больше $\frac{4}{3}$.

Пусть G будетъ центръ тяжести сегмента ABC, и пусть точка H дѣлитъ отрѣзокъ DF такъ, что HD вдвое больше остатка HF. Такъ какъ FB вдвое больше EB, а DB меньше удвоеннаго GB, то отношеніе FB къ DB больше, чѣмъ отношеніе EB къ BG. Отсюда съ помощью преобразованія выводится, что отношеніе FB къ FD меньше, чѣмъ отношеніе EB къ EG, слѣдовательно, и отношеніе FB къ EB (равное $2:1$) меньше отношенія FD къ EG. Такимъ образомъ, FD больше удвоеннаго EG. Но HD равно $\frac{2}{3}FD$. Слѣдовательно, отрѣзокъ HD больше $\frac{4}{3}$ EG. Но въ такомъ же отношеніи, какъ HD къ EG, находится сегментъ ABC къ вписанному въ него треугольнику — это мы доказали раньше, именно, въ теоремахъ о квадратурѣ гиперболы, эллипса и круга *). Слѣдовательно, отношеніе сегмента къ вписанному треугольнику ABC больше $\frac{4}{3}$.

Что сегментъ имѣетъ къ треугольнику ABC отношеніе, меньшее, чѣмъ отношеніе $3\frac{1}{3}$ DF къ діаметру BF, увеличенному на утроенное ED — это будетъ теперь доказано слѣдующимъ образомъ. Раздѣлимъ діаметръ сегмента въ точкѣ R такъ, чтобы BR было втрое больше половины остатка RD. Тогда точка R (на основаніи предыдущаго параграфа) упадетъ между G и D, такъ какъ G есть центръ тяжести сегмента ABC. Такъ какъ, теперь, сегментъ имѣетъ такое же отношеніе къ вписанному треугольнику, какъ HD къ EG, какъ это только что было указано, а отношеніе HD къ EG меньше, чѣмъ отношеніе HD къ ER, то отношеніе сегмента къ вписанному треугольнику будетъ также меньше, чѣмъ отношеніе HD къ ER или чѣмъ отношеніе пятикратнаго HD къ пятикратному ER. Но HD (равное двумъ третямъ DF), взятое пять разъ, даетъ десять третей или три и одну треть DF. Съ другой стороны, ER, которое состоитъ изъ ED и двухъ пятыхъ BD, будучи умножено на пять, даетъ двойное BD и пятикратное ED, т. е. двойное EB и тройное ED. Поэтому ясно, что сегментъ ABC имѣетъ къ вписанному треугольнику отношеніе, меньшее, чѣмъ отношеніе трехъ и одной трети DF къ двойному EB, т. е. къ діаметру BF, увеличенному на утроенное ED, что и требовалось доказать.

§ 19. Теорема XVI.

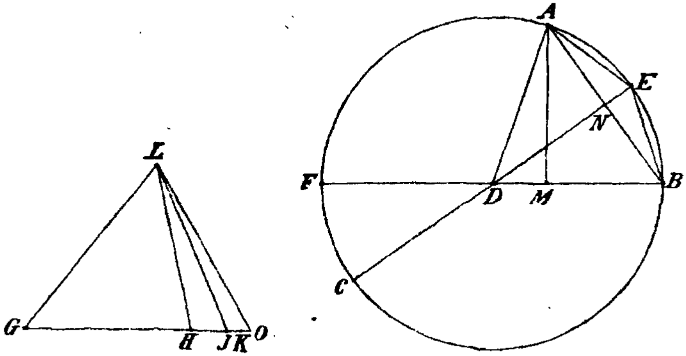
Всякая дуга круга, которая меньше полуокружности, больше своей хорды, увеличенной на одну треть разности между хордой и синусомъ. Она меньше, однако, хорды, увеличенной на величину, которая относится къ упомянутой трети, какъ учетверенная хорда, увеличенная на синусъ, относится къ двойной хордѣ, увеличенной на утроенный синусъ.

---

*) Именно, въ теоремѣ VII на стр. 118 названныхъ „Theoremata"... Предложеніе, о которомъ идетъ рѣчь, непосредственно выводится съ помощью простыхъ планиметрическихъ соображеній изъ извѣстной формулы, по которой разстояніе центра тяжести кругового сегмента отъ центра круга равно $\frac{s^3}{12S}$, гдѣ s означаетъ основаніе, а S — площадь сегмента.

Пусть будетъ данъ кругъ съ центромъ въ D (фиг. 20) и діаметромъ FB. Дуга BA пусть будетъ меньше полуокружности; тогда проводимъ хорду AB и синусъ AM, который, какъ извѣстно, перпендикуляренъ къ діаметру FB. Далѣе, положимъ, что отрѣзокъ GH равенъ AM, a GJ равенъ хордѣ AB. Поэтому HJ представляетъ разность, которой третья часть JK прилагается къ GJ. Тогда нужно сначала показать, что дуга AB больше, чѣмъ весь отрѣзокъ GK. Но это уже доказано въ теоремѣ VII. Поэтому прибавимъ теперь къ отрѣзку GJ отрѣзокъ JO, который относится къ JK, т. е. къ трети HJ, какъ учетверенное GJ, увеличенное на GH, относится къ удвоенному GJ, увеличенному на утроенное GH. Тогда я утверждаю, что отрѣзокъ GO больше дуги AB.

Въ самомъ дѣлѣ, построимъ на отрѣзкахъ GH, HJ, JO треугольники, съ общей вершиной L и высотой, равной радіусу DB.



Фиг. 20.

Соединимъ D съ A и проведемъ діаметръ круга CE, дѣлящій пополамъ хорду AB въ точкѣ N и дугу AB въ точкѣ E. Затѣмъ, E соединимъ съ A и B.

Такъ какъ, теперь, OJ относится къ JK, какъ учетверенное GJ, увеличенное на GH, къ удвоенному GJ, увеличенному на утроенное GH, то, если утроимъ вторые члены, OJ будетъ относиться къ JH (это и есть именно тройное JK), какъ учетверенное GJ, увеличенное на GH, къ ушестеренному GJ, увеличенному на удевятеренное GH. Преобразовывая эту пропорцію, получаемъ, что OH относится къ HJ, какъ удесятеренная сумма GJ и GH къ ушестеренному GJ, увеличенному на удевятеренное GH, или, если взять треть этихъ величинъ, какъ десять третей суммы GJ и GH относятся къ удвоенному GJ, увеличенному на утроенное GH. Отношеніе GJ къ GH, т. е. BA къ AM, равно, вслѣдствіе подобія треугольниковъ BAM и BDN, отношенію BD къ DN. Поэтому также отношеніе OH къ HJ равно отношенію десяти третей суммы BD и DN къ удвоенному BD, увеличенному на утроенное DN, т. е. равно отношенію десяти третей NC къ діаметру EC, увеличенному на утроенное DN. Но отношеніе сегмента AEB къ треугольнику AEB, по предыдущему, меньше послѣдняго отношенія. Поэтому это отношеніе сегмента къ треугольнику также меньше, чѣмъ отношеніе OH къ HJ, т. е. меньше, чѣмъ отношеніе треугольника OHL къ треугольнику JHL. Но треугольникъ JHL равенъ треугольнику AEB, что доказывается слѣдующимъ образомъ. Треугольникъ GHL равенъ треугольнику DAB, такъ какъ высота одного равна основанію другого, и наоборотъ. Подобнымъ же образомъ, а именно потому, что GJ равно AB, треугольникъ GJL равенъ суммѣ двухъ треугольниковъ DAE и DBE, т. е. равенъ четыреугольнику $DAEB$. Поэтому треугольникъ HJL долженъ быть равенъ треугольнику AEB, какъ мы и утверждали. Такимъ образомъ, сегментъ AEB, будетъ имѣть къ вписанному въ него треугольнику AEB меньшее отношеніе, чѣмъ треугольникъ OHL къ тому же треугольнику AEB. Слѣдовательно, треугольникъ OHL больше сегмента AEB, а потому весь треугольникъ OGL больше сектора $DAEB$. Высота же треугольника GLO равна радіусу DB. Слѣдовательно, основаніе GO больше дуги AB, что и требовалось доказать.

Отсюда получается, что относительно всей окружности можетъ быть высказана слѣдующая теорема:

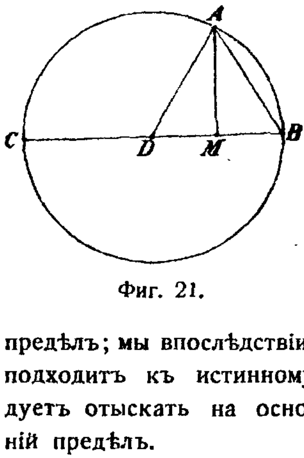
Если въ кругъ будутъ вписаны два правильныхъ многоугольника, изъ которыхъ одинъ имѣетъ вдвое больше сторонъ, чѣмъ другой, и если третью часть разности периметровъ прибавимъ къ периметру бóльшаго многоугольника, то полученная такимъ образомъ сумма будетъ меньше, чѣмъ окружность круга. Если же къ этому самому большему периметру прибавимъ отрѣзокъ, который относится къ упомянутой третьей части разности, какъ четыре раза взятый большій периметръ, увеличенный на меньшій периметръ, къ двойному большему, увеличенному на тройной меньшій, то эта сумма будетъ больше окружности круга.

§ 20. Задача IV.

Опредѣлить отношеніе окружности къ діаметру, и построить по даннымъ отрѣзкамъ, которые вписаны въ данный кругъ, длины дугъ, стягиваемыхъ ими.

Пусть будетъ данъ кругъ съ центромъ въ D и діаметръ CB и пусть дуга BA будетъ равна шестой части окружности; проведемъ ея хорду AB и синусъ AM (фиг. 21).

Если положимъ радіусъ DB равнымъ 100 000 частей, то столько же будетъ содержать и хорда AB. Но AM будетъ равно 86 603 такихъ частей безъ правильной дроби, т. е. если отнять отъ 86 603 одну часть, то получимъ меньше истинной длины, а именно меньше, чѣмъ половину стороны равносторонняго вписаннаго въ кругъ треугольника.



Фиг. 21.

Поэтому избытокъ AB надъ AM, выраженный числомъ 13 397, будетъ меньше истиннаго. Прибавляя треть этого числа, а именно $4\,465\frac{2}{3}$ къ AB, т. е. къ 100 000, получаемъ число $104\,465\frac{2}{3}$, что составитъ меньше, чѣмъ AB. Это первый нижній предѣлъ; мы впослѣдствіи найдемъ, впрочемъ, другой, который ближе подходитъ къ истинному значенію, чѣмъ этотъ. Но раньше слѣдуетъ отыскать на основаніи предыдущей теоремы также и верхній предѣлъ.

Здѣсь есть, какъ помнимъ, три величины, по которымъ нужно найти четвертую пропорціональную. Первая равна удвоенному числу частей AB, увеличенному на утроенное число частей AM, такъ что число 459 807 частей будетъ для нея меньше, чѣмъ истинное (нужно обратить вниманіе на то, что названное число дѣйствительно меньше, и то же справедливо для слѣдующихъ чиселъ), вторая равна учетверенному AB, увеличенному на однажды взятое AM, такъ что число 486 603 будетъ для нея больше, чѣмъ истинное; третья же равна одной трети разности между AB и AM, и слѣдовательно число 4 466 будетъ для нея больше, чѣмъ истинное. Поэтому для четвертой пропорціональной число 4 727 будетъ больше истиннаго. Это число, будучи сложено съ AB, т. е. съ 100 000, даетъ 104 727, что составляетъ больше, чѣмъ число частей, которыя содержитъ дуга AB, шестая часть окружности. Такимъ образомъ, мы нашли теперь для длины дуги AB нижній и верхній предѣлъ, изъ которыхъ послѣдній, во всякомъ случаѣ, значительно ближе къ истинному значенію, ибо по отношенію къ истинному значенію ближайшее меньшее число есть 104 719.

Но изъ этихъ двухъ предѣловъ можно вывести новый нижній предѣлъ, болѣе точный, чѣмъ первый, если пользоваться слѣдующимъ правиломъ, которое основано на болѣе глубокомъ изслѣдованіи центровъ тяжести.

Нужно придать четыре трети разности между найденными границами къ двойной хордѣ, увеличенной на утроенный синусъ; пусть теперь отношеніе, которое составленная такимъ образомъ сумма имѣетъ къ $3\frac{1}{3}$ или $\frac{10}{3}$ суммы синуса и хорды, равно отношенію разности между хордой и синусомъ къ нѣкоторой другой величинѣ. Эта послѣдняя, будучи прибавлена къ синусу, даетъ отрѣзокъ, меньшій, чѣмъ дуга *).

Нижняя граница была 104 $465\frac{2}{3}$, верхняя—104 727; ихъ разность есть $261\frac{1}{3}$. Теперь опять къ тремъ числамъ нужно найти четвертую пропорціональную. Первое равно удвоенному числу частей AB, увеличенному на утроенное число частей AM и на $\frac{4}{3}$ разности двухъ предѣловъ и, слѣдовательно, число 460 158 будетъ для него больше, чѣмъ истинное. Второе есть $\frac{10}{3}$ суммы AB и AM, и слѣдовательно, число 622 008 будетъ для него меньше, чѣмъ истинное. Наконецъ, для третьяго, т. е. разности между AB и AM, число 13 397 будетъ меньше, чѣмъ истинное. Поэтому для четвертой пропорціональной къ этимъ тремъ числамъ значеніе 18 109 будетъ меньше, чѣмъ истинное. Это число, будучи прибавлено къ числу частей AM, для котораго значеніе 86 $602\frac{1}{2}$ меньше, чѣмъ истинное, даетъ 104 $711\frac{1}{2}$, что составляетъ меньше, чѣмъ число частей дуги AB. Это число, умноженное на шесть, т. е. 628 269 части, будетъ поэтому меньше всей окружности. Но такъ какъ было найдено, что 104 727 частей составляютъ больше, чѣмъ дуга AB, то это число, умноженное на 6, т. е. 628 362 части, будетъ больше,

*) См. Klügel, Mathematisches Wörterbuch, Cyclotechnie, стр. 653—654.

чѣмъ вся окружность. Поэтому отношеніе окружности къ діаметру меньше отношенія 628 362 къ 200 000 и больше отношенія 628 269 къ 200 000, т. е. меньше, чѣмъ отношеніе 314 181 къ 100 000, и больше, чѣмъ отношеніе 314 135 къ 100 000. Отсюда слѣдуетъ, что оно навѣрное меньше $3\frac{1}{7}$ и больше $3\frac{10}{71}$. Такимъ образомъ, между прочимъ, опровергается ошибочное утвержденіе Лонгомонтана *), будто бы окружность больше чѣмъ 314 185 такихъ частей, какихъ діаметръ содержитъ 100 000.

Пусть дуга AB будетъ восьмой частью окружности; тогда AM будетъ половиной стороны вписаннаго въ кругъ квадрата, содержащей 7 071 068 частей, безъ нѣкоторой правильной дроби, если радіусъ DB содержитъ ихъ 10 000 000. Но AB, какъ сторона вписаннаго восьмиугольника, будетъ содержать 7 653 668 частей съ дробью. На основаніи этихъ данныхъ, подобно предыдущему, находимъ для длины дуги AB, какъ первый нижній предѣлъ, число 7 847 868, затѣмъ, какъ верхній предѣлъ, 7 854 066, изъ этихъ двухъ вмѣстѣ опять, какъ болѣе точный нижній предѣлъ — 7 853 885. Отсюда видимъ, что окружность имѣетъ къ діаметру отношеніе, меньшее, чѣмъ $31\,416\frac{1}{3}$ къ 10 000, и большее, чѣмъ 31 415 къ 10 000.

Такъ какъ *верхній предѣлъ 7 854 066 отличается отъ истинной длины дуги* AB меньше, чѣмъ на 85 частей (именно, дуга AB, какъ раньше показано, больше, чѣмъ 7 853 981), а 85 частей составляютъ меньше двухъ секундъ, т. е. меньше, чѣмъ $\frac{2}{1\,296\,000}$ окружности, ибо она занимаетъ вѣдь больше, чѣмъ 60 000 000 такихъ частей, то ясно, что если мы ищемъ углы прямоугольнаго треугольника по даннымъ *сторонамъ при помощи того-же метода*, съ помощью котораго мы только что опредѣлили верхній предѣлъ, мы никогда не сдѣлаемъ ошибки въ двѣ секунды, даже если бы стороны, заключающія прямой уголъ, оказались равными между собою, какъ это было здѣсь въ треугольникѣ DAM.

Но если отношеніе стороны DM къ MA таково, что уголъ ADM не превышаетъ четверти прямого угла, то ошибка не составитъ и шестидесятой доли секунды. Дѣйствительно, если дугу AB

*) Лонгомонтанъ (настоящее имя — Христіанъ Северинъ) родился въ 1562 году въ Даніи. Долголѣтній сотрудникъ Тихо Браге, онъ пріобрѣлъ большія знанія въ астрономіи. Онъ умеръ въ 1647 г. профессоромъ математики и астрономіи въ Копенгагенѣ.

возьмемъ равной $\frac{1}{16}$ окружности, то AM, какъ половина стороны вписаннаго въ кругъ равносторонняго восьмиугольника, будетъ содержать 382 683 433 части безъ нѣкоторой дроби, а AB, какъ сторона шестнадцатиугольника, будетъ содержать 390 180 644 части съ дробью, если радіусъ DB содержитъ ихъ 1 000 000 000. Отсюда для длины дуги AB находимъ первый нижній предѣлъ 392 679 714 частей, верхній предѣлъ 392 699 148, и при помощи нихъ опять нижній предѣлъ — 392 699 010. Но послѣ того, что мы показали раньше, является установленнымъ, что дуга AB, какъ шестнадцатая часть окружности, больше, чѣмъ 392 699 081, — число, которое верхній предѣлъ превосходитъ на 67 частей. Но это составляетъ меньше, чѣмъ одну шестидесятую долю секунды, т. е. меньше $\frac{1}{77\,760\,000}$ всей окружности, такъ какъ эта послѣдняя содержитъ явно больше, чѣмъ 6 000 000 000 частей.

Изъ найденныхъ только что предѣловъ, кромѣ того, обнаруживается, что отношеніе окружности къ діаметру меньше, чѣмъ отношеніе $3\,141\,593\frac{1}{5}$ къ 1 000 000, и больше, чѣмъ отношеніе 3 141 592 къ 1 000 000.

Но если теперь дуга AB будетъ положена равной $\frac{1}{60}$ окружности, т. е. 6 такимъ частямъ, какихъ вся окружность содержитъ 360, то AM, какъ половина стороны вписаннаго въ кругъ тридцатиугольника, будетъ равна 10 452 846 326 766 частей безъ дроби, если радіусъ содержитъ ихъ 100 000 000 000 000. AB, какъ сторона вписаннаго шестидесятиугольника, будетъ содержать 10 467 191 248 588 частей съ дробью. Отсюда находимъ для длины дуги AB первый нижній предѣлъ 10 471 972 889 195, верхній предѣлъ 10 471 975 512 584, и при помощи нихъ второй нижній предѣлъ — 10 471 975 511 302. Отсюда получается, что окружность къ діаметру имѣетъ отношеніе, меньшее, чѣмъ 31 415 926 538 къ 10 000 000 000, и большее, чѣмъ 31 415 926 533 къ 10 000 000 000.

Если бы мы хотѣли опредѣлить тѣ же предѣлы при помощи сложенія сторонъ вписанныхъ и описанныхъ многоугольниковъ, то пришлось бы дойти до многоугольниковъ, имѣющихъ около 400 000 сторонъ. Въ самомъ дѣлѣ, изъ вписаннаго и описаннаго шестидесятиугольниковъ мы узнали только то, что отношеніе окружности къ діаметру меньше, чѣмъ отношеніе 3 145 къ 1 000 и больше, чѣмъ отношеніе 3 140 къ 1 000. Такимъ образомъ, видно, что по нашему способу получается больше, чѣмъ тройное число правильныхъ знаковъ. Что то же самое имѣетъ мѣсто для какихъ угодно многоугольниковъ, увидитъ всякій, кто займется изслѣдованіемъ этого; причина этого намъ небезызвѣстна, но она потребовала бы болѣе длиннаго изложенія.

Какимъ образомъ дальше можно съ помощью развитыхъ здѣсь методовъ находить, въ случаѣ какихъ либо другихъ вписанныхъ линій, длины дугъ, стягиваемыхъ ими — это, по моему мнѣнію, должно быть теперь достаточно яснымъ. Если эти линіи больше стороны вписаннаго квадрата, то слѣдуетъ опредѣлить длину дуги, дополняющей до полуокружности данную дугу, хорда которой также дана. Нужно однако знать, какъ находятся хорды половинныхъ дугъ, когда дана хорда цѣлой дуги. Такимъ образомъ, если желаемъ примѣнять дѣленіе на двѣ части, мы можемъ легко получить для каждой хорды длину отвѣчающей ей дуги съ любою точностью. Это важно для провѣрки таблицъ синусовъ. Но это важно также и для составленія ихъ: въ самомъ дѣлѣ, если хорда нѣкоторой дуги извѣстна, то можно съ достаточной точностью опредѣлить хорду дуги, которая лишь немного больше или меньше.

IV

ІОАННЪ ГЕНРИХЪ ЛАМБЕРТЪ

(1728—1777)

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЯ СВѢДѢНІЯ ДЛЯ ИЩУЩИХЪ КВАДРАТУРУ И СПРЯМЛЕНІЕ КРУГА

(VORLÄUFIGE KENNTNISSE FÜR DIE, SO DIE QUADRATUR UND RECTIFICATION DES CIRCULS SUCHEN)

---

§ 1.

Я имѣю нѣкоторое основаніе сомнѣваться, что настоящая статья будетъ прочитана и понята тѣми, для кого это было бы особенно полезно, тѣми, которые затрачиваютъ столько времени и труда для отысканія квадратуры круга. Такихъ искателей всегда будетъ достаточно, и если судить о будущихъ по ихъ предшественникамъ, то это будутъ по большей части люди мало смыслящіе въ геометріи и лишенные возможности правильно оцѣнивать свои силы. Тамъ, гдѣ имъ не хватаетъ знанія и пониманія, гдѣ они не могутъ ничего сдѣлать съ помощью правильныхъ послѣдовательныхъ выводовъ, тамъ жажда славы и денегъ создаетъ софизмы, которые чаще всего не отличаются ни особенной тонкостью, ни особенной замысловатостью. Были также случаи, когда эти люди твердо вѣрили, что ихъ мнимыя доказательства не встрѣчали одобренія только отъ зависти и недоброжелательства. Среди нихъ ходитъ между прочимъ легенда, будто бы въ Англіи и Голландіи назначены столь же высокія преміи и награды за квадратуру круга, какъ за опредѣленіе географической долготы на морѣ. Я не буду настаивать на томъ, что въ началѣ прошлаго (17-го) столѣтія, или раньше, думали, что опредѣленіе долготы находится въ зависимости отъ квадратуры круга, такъ что рѣшеніе послѣдней задачи влечетъ за собой рѣшеніе первой. Во всякомъ случаѣ несомнѣнно, что въ то время вѣрили въ связь между истинами, которыя еще гораздо меньше подходили одна къ другой. Но если бъ на самомъ дѣлѣ по поводу долготы была назначена награда за квадратуру круга, то думаю, что англійскій парламентъ сдѣлалъ бы доброе дѣло, если бъ онъ, такъ какъ награды за опредѣленіе долготы теперь уже розданы, опубликовалъ во всѣхъ газетахъ, что нельзя разсчитывать ни на какую премію за квадратуру круга. Дѣйствительно, нельзя на это разсчитывать, потому что въ настоящее время слишкомъ хорошо извѣстно, что долгота на морѣ не зависитъ отъ квадратуры круга.

§ 2.

Открытіе вещей, которыхъ долго напрасно искали, либо вовсе невозможно, либо зависитъ отъ счастливой случайности. Пусть примѣръ разъяснитъ это. Не подлежитъ сомнѣнію, что древніе финикійскіе мореплаватели, а за ними греческіе и римскіе, стремились найти средство, столь же хорошо опредѣляющее путь судна въ непогоду, какъ это позволяетъ сдѣлать положеніе звѣздъ при ясномъ небѣ. Какъ могло прійти имъ въ голову, что это средство слѣдуетъ искать въ магнитной рудѣ? Безспорно, что это открытіе произошло благодаря просто непредвидѣнному стеченію многихъ обстоятельствъ, котораго нельзя было осуществить, не зная его раньше, и которое должно было поэтому само представиться. Подобнымъ образомъ, можно полагать, что если бы когда либо квадратура круга оказалась возможной, то на нее натолкнется, быть можетъ, какой-нибудь землемѣръ, который менѣе всего будетъ думать объ открытіи ея. Но также возможно, что такимъ-же случайнымъ образомъ получится и ложная квадратура. Подходящій примѣръ въ этомъ отношеніи представляютъ числа 1 225 и 961. Они имѣютъ двойное свойство. Во-первыхъ, они являются соотвѣтственно квадратами чиселъ 35 и 31. Съ другой стороны, отношеніе между ними равно, приблизительно, отношенію квадрата діаметра къ площади круга. Отсюда получается, что діаметръ круга относится къ сторонѣ равновеликаго съ нимъ квадрата приблизительно, какъ 35 къ 31. Кромѣ того, умножая 961 на четыре, получаемъ 3 844, тоже квадратное число, и діаметръ относится къ окружности, приблизительно, какъ 1 225 къ 3 844. Но это п р и б л и з и т е л ь н о не въ очень строгомъ смыслѣ. Дѣйствительно, дѣля 3 844 на 1 225 получаемъ 3,138.... И тогда легко видѣть, что это отношеніе отклоняется отъ истиннаго, 3,141 592 6..., уже въ третьемъ десятичномъ знакѣ, и, слѣдовательно, далеко не такъ точно, какъ Архимедово 22 : 7, которое даетъ число 3,142 857 1..., превышающее истинное лишь на 0,001 264 5..., и слѣдовательно, почти втрое болѣе точное.

§ 3.

Тѣмъ не менѣе числа 1 225 и 961, или 1 225 и 3 844, представляютъ извѣстный интересъ, такъ какъ они являются точными квадратами цѣлыхъ чиселъ. Въ теченіе нынѣшняго столѣтія, насколько мнѣ извѣстно, ихъ находили трижды. Это обстоятельство мнѣ кажется весьма замѣчательнымъ. Дѣйствительно, такъ какъ существуетъ много подобныхъ квадратныхъ чиселъ, то нужно было бы скорѣе ожидать, что каждый изъ трехъ изобрѣтателей найдетъ другія числа. Первымъ былъ ротмистръ фонъ Лейстнеръ. Онъ нашелъ числа 1 225 и 3 844, но особая придворная императорская комиссія признала ихъ неправильными, противъ чего авторъ протестовалъ въ 1740 г. въ сочиненіи: Nodus gordius etc. Вторымъ былъ г. Меркель, священникъ изъ Равенбурга въ Швабіи. Его сочиненіе появилось въ 1751 году. Но онъ говоритъ, что гораздо раньше г. Лейстнера случайнымъ образомъ нашелъ свои числа 1 225 и 961, но только подъ вліяніемъ „Nodi gordii" рѣшилъ выставить ихъ на всѣ испытанія; особенно же побудила его опубликовать эти числа статья въ утрехтской газетѣ, авторъ которой оповѣщаетъ объ открытіи квадратуры круга и изъявляетъ притязаніе на назначенную будто бы за это премію; это извѣстіе тѣмъ болѣе заставило его поторопиться съ печатаніемъ, что предыдущей зимой онъ сообщилъ свои вычисленія одному французу, который дѣйствительно, послѣ этого уѣхалъ въ Нидерланды, такъ что у него было полное основаніе опасаться, что этотъ геометръ хочетъ воспользоваться его трудами и т. д. Что было дальше, мнѣ неизвѣстно. Но въ 1765 году сочиненіе Меркеля было переиздано Штеттинскимъ профессоромъ Бишофомъ съ примѣчаніями и многочисленными повѣрками, и числа 1 225 и 961 объявлялись правильными. Вскорѣ послѣ этого, въ началѣ 1766 года появились они опять въ газетахъ съ торжественнымъ заявленіемъ, что отнынѣ безполезно искать квадратуру круга, такъ какъ она уже найдена и даже въ третій разъ. Было бы именно недурно, если бъ тѣ многіе, которые еще въ будущемъ станутъ заниматься этимъ дѣломъ, совершенно твердо увѣровали въ это, потому что такимъ образомъ они освободились бы отъ потери труда, времени и силъ, которые можно разсматривать, какъ совершенно безполезно затраченные, такъ какъ по большей части эти люди едва ли способны найти и рѣшить самую простую геометрическую задачу. Врядъ-ли можно сомнѣваться, что и числа Меркеля и Лейстнера еще появятся на сценѣ. Главное доказательство ихъ неправильности заключается въ томъ, что частное отъ дѣленія 3 844 на 1 225 должно было бы дать Лудольфово число. Профес. Бишофъ беретъ и Лудольфово число и даже число Шервина (Sherwin) съ двойнымъ числомъ знаковъ, но онъ не смотритъ на нихъ, какъ на пробные камни, а говоритъ, что они даютъ довольно хорошее приближеніе, но не вполнѣ точно опредѣляютъ площадь круга, вслѣдствіе чего нужно искать другихъ способовъ провѣрки. Такихъ способовъ г. Бишофъ приводитъ 8, и такимъ образомъ дѣлаетъ результатъ правдоподобнымъ. Не подлежитъ спору, что если бы дѣленіе 3 844 на 1 225 давало 32 десятичныхъ знака Лудольфова числа, то съ одной стороны этимъ можно было бы быть конечно довольнымъ, но съ другой стороны слѣдовало бы еще посмотрѣть получается ли 72 знака Шервина, а затѣмъ 100 знаковъ Машина и, наконецъ, 127 знаковъ Ланьи. Тогда отношеніемъ 3 844 : 1 225 можно было бы быть еще болѣе довольнымъ. Однако когда мы выполняемъ указанное дѣленіе, то частное 3,138... уже въ третьемъ десятичномъ знакѣ начинаетъ отклоняться отъ Лудольфова числа. Затѣмъ всѣ эти 8 способовъ провѣрки таковы, что ихъ выдерживаетъ любая пара квадратныхъ чиселъ. Я не буду останавливаться здѣсь на доказательствѣ этого, но предпочитаю показать, какъ при помощи нѣкотораго общаго правила можно находить такія квадратныя числа, которыя даютъ съ тѣмъ большею точностью отношеніе квадрата діаметра къ площади круга, чѣмъ они сами больше. Это между прочимъ можетъ послужить для того, чтобъ въ будущемъ не попадать на эти квадратныя числа случайно и не выдавать ихъ за точныя рѣшенія квадратуры круга.

§ 4.

Возьмемъ два квадратныхъ числа aa, bb такъ, что если a — діаметръ круга, поэтому aa — его квадратъ, тогда bb представляетъ площадь квадрата, равновеликаго кругу, и поэтому b — его сторону. Такимъ образомъ, aa будетъ относиться къ $4bb$, какъ діаметръ къ окружности или какъ 1 къ

3,14159 26535 89793 23846 26433 83279
50288 41971 69399 37510 58209 74944
59230 78164 06286 20899 86280 34825
34211 70679 82148 08651 32723 06647
09384 46 . . . $= 1 : \pi$ *).

Согласно съ этимъ $aa : 4bb = 1 : \pi$, откуда слѣдуетъ

$$a : b = 2 : \sqrt{\pi}.$$

*) Число съ 127 знаками, указываемое Ламбертомъ, дано впервые Ланьи. Какъ замѣтилъ Вега, на 113 мѣстѣ вмѣсто 7 должно стоять 8.

Но $$\sqrt{\pi} = 1{,}772\,453\,850\,75\ldots$$

Отсюда находимъ

$$a:b = \frac{2{,}00000000000}{1{,}77245385075} = 1 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{26 + \ldots}}}}}}}$$

Это даетъ послѣдовательно

$$\begin{aligned} b:a &= 7 : 8 + \ldots \\ &= 8 : 9 - \ldots \\ &= 31 : 35 + \ldots \\ &= 39 : 44 - \ldots \\ &= 109 : 123 + \ldots \\ &= 148 : 167 - \ldots \\ &= 3\,848 : 4\,343 + \ldots \quad \text{и т. д.} \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} bb:aa &= 49 : 64 + \ldots \\ &= 64 : 81 - \ldots \\ &= 961 : 1\,225 + \ldots \\ &= 1\,521 : 1\,936 - \ldots \\ &= 11\,881 : 15\,129 + \ldots \\ &= 21\,904 : 27\,889 - \ldots \\ &= 14\,807\,104 : 18\,852\,964 + \ldots \quad \text{и т. д.} \end{aligned}$$

Эти дроби даютъ послѣдовательно все бóльшія и бóльшія приближенія; отсюда видно, что гг. Лейстнеръ, Меркель, Бишофъ и др. лишь случайнымъ образомъ набрели на числа 961, 1 225. Въ самомъ дѣлѣ, вычисленія были бы все же гораздо легче и короче для 49 : 64 или 64 : 81; для 1 521 : 1 936 или 11 881 : 15 129 и т. д. они были бы хотя и сложнѣе, но зато точнѣе.

§ 5.

Но вообще можно посовѣтовать пользоваться лишь первыми изъ этихъ отношеній, именно, отношеніями $b:a$. Дѣйствительно, для $bb:aa$ имѣются другія дроби, которыя не будучи точными квадратами много проще и много точнѣе; именно, поступая по указанному выше способу, находимъ:

$$\begin{aligned} bb : aa = \pi : 4 &= 11 : 14 \\ &= 172 : 219 \\ &= 355 : 452 \quad \text{и т. д.} \end{aligned}$$

Но дроби $\frac{7}{8}$, $\frac{8}{9}$, $\frac{31}{35}$, $\frac{39}{44}$, $\frac{109}{123}$, $\frac{148}{167}$, $\frac{3\,848}{4\,342}$ и т. д. выражаютъ (приближенно) сторону квадрата, равновеликаго кругу, діаметръ котораго равенъ единицѣ. А обратныя дроби, т. е. $\frac{8}{7}$, $\frac{9}{8}$, $\frac{35}{31}$, $\frac{44}{39}$, $\frac{123}{109}$, $\frac{167}{148}$, $\frac{4\,342}{3\,848}$ и т. д. представляютъ діаметръ круга, площадь котораго равна единицѣ. Въ виду этого можно употреблять ихъ при измѣреніи цилиндровъ и изготовленіи цилиндрическихъ визиръ-штабовъ. Въ особенности удобно число $\frac{167}{148}$, такъ какъ оно изъ всѣхъ меньшихъ дробей является самымъ точнымъ и начинаетъ уклоняться отъ истиннаго значенія лишь на седьмомъ десятичномъ знакѣ. Дѣйствительно, если произвести вычисленіе, то діаметръ круга, площадь котораго $= 1$, съ помощью Лудольфова числа $= 1{,}1283790\ldots$ Но $\frac{167}{148} = 1{,}1283784\ldots$, такъ что разница равна $0{,}000\,000\,6\ldots$ Рѣдко случается на практикѣ, чтобъ діаметръ нужно было знать съ большей точностью.

§ 6.

Такъ какъ при сравненіи діаметра шара съ ребромъ равновеликаго ему куба можно точно также набрести на такія кубическія числа, и вообразить на основаніи этого, что квадратура круга или кубатура шара осуществлена, то будетъ небезполезно предупредить такіе случаи въ будущемъ и опредѣлить по указанному выше способу такія кубическія числа, тѣмъ болѣе, что ими можно удобно пользоваться при приготовленіи калиберъ-штабовъ. Итакъ, пусть діаметръ шара равенъ a, сторона равновеликаго куба b, число Лудольфа $\pi = 3{,}141\,592\,6\ldots$ Въ такомъ случаѣ на основаніи извѣстной формулы Архимеда

$$b^3 : a^3 = \pi : 6,$$

или

$$b : a = \sqrt[3]{\frac{\pi}{6}}\,.$$

Но

$$\pi = 3{,}14159\,26535\,89793\,23846\,2\ldots.$$

$$\frac{1}{6}\pi = 0{,}52359\,87755\,98298\,87307\,7\ldots.$$

отсюда кубическій корень

$$b:a = 0{,}80599\,59770\,08234\,820\ldots,$$

что по разложеніи въ непрерывную дробь даетъ:

$$b:a = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{6+\ldots}}}}}}}$$

Отсюда получаемъ

$$\begin{array}{rrl} b:a = & 4: & 5+ \\ = & 25: & 31- \\ = & 54: & 67+ \\ = & 457: & 567- \\ = & 2\,796: & 3\,469+ \\ = & 17\,233: & 21\,381- \quad \text{и т. д.} \end{array}$$

Итакъ, если діаметръ шара равенъ единицѣ, то сторона равновеликаго куба будетъ представлена каждою изъ дробей $\frac{4}{5}$, $\frac{25}{31}$, $\frac{54}{67}$, $\frac{457}{567}$, $\frac{2\,796}{3\,469}$, $\frac{17\,233}{21\,381}$ и т. д., тѣмъ точнѣе, чѣмъ она †) больше. Если-же положимъ объемъ шара равнымъ единицѣ, то обратныя дроби $\frac{5}{4}$, $\frac{31}{25}$, $\frac{67}{54}$, $\frac{567}{457}$, $\frac{3\,469}{2\,796}$, $\frac{21\,381}{17\,233}$ будутъ представлять діаметръ шара. Въ большинствѣ случаевъ можно ограничиться дробью $\frac{567}{457}$, такъ какъ эта дробь, если произвести вычисленіе, даетъ діаметръ шара съ такою же точностью, съ какою можно найти его помощью логариѳмическихъ таблицъ.

---

†) Должно быть „чѣмъ знаменатель больше". Прим. ред.

§ 7.

Я вычислилъ такимъ образомъ корень кубическій изъ $\frac{1}{6}\pi$ съ точностью до 18-го десятичнаго знака. Такъ какъ было бы очень непріятной и продолжительной работой искать это число съ такой точностью по обычнымъ правиламъ, то будетъ не безполезно, если я еще скажу, какъ я нашелъ этотъ корень съ помощью нѣкотораго **тройного правила** и вмѣстѣ съ тѣмъ, какъ я убѣдился, что найденное число вѣрно до 18-го десятичнаго знака.

§ 8.

На основаніи формулы бинома **Ньютона** вообще имѣемъ:

$$x = (a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2}b^2 + \ldots$$

Умножимъ этотъ рядъ на $1 + \frac{zb}{a}$ и въ произведеніи

$$x\left(1 + z\frac{b}{a}\right) = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} a^{n-3}b^3 + \ldots$$
$$+ za^{n-1}b + nza^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)}{2} za^{n-3}b^3 + \ldots$$

для опредѣленія z положимъ третій членъ

$$\frac{n(n-1)}{2} a^{n-2}b^2 + nza^{n-2}b^2 = 0,$$

откуда

$$z = -\frac{n-1}{2}.$$

Если подставить это значеніе z въ произведеніе, то получится:

$$x\left(1 - \frac{n-1}{2}\frac{b}{a}\right) = a^n + \frac{n+1}{2} a^{n-1}b - n\frac{n-1}{2} \cdot \frac{n+1}{6} a^{n-3}b^3 - \ldots$$

а отсюда

$$x = (a + b)^n = \frac{2a + (n+1)b}{2a - (n-1)b} a^n - \frac{n(n-1)(n+1)\, a^{n-2}b^3}{6\,[2a - (n-1)b]} - \ldots$$

Въ этомъ ряду первый членъ служитъ для приближеннаго вычисленія корня, а второй — для оцѣнки совершаемой при этомъ погрѣшности.

§ 9 *).

Для кубическаго корня $n = \frac{1}{3}$. Подставляя это значеніе, получаемъ, послѣ надлежащихъ упрощеній, формулу:

$$x = \sqrt[3]{a+b} = \frac{3a+2b}{3a+b}\sqrt[3]{a} + \frac{2b^3\sqrt[3]{a}}{81a^3+27a^2b} + \ldots$$

Эту формулу я примѣнялъ для извлеченія кубическаго корня изъ

$$a + b = \frac{1}{6}\pi = 0{,}52359\,87755\,98298\,87307\,7$$

слѣдующимъ образомъ. Во-первыхъ, посредствомъ логариѳмовъ я нашелъ первые шесть десятичныхъ знаковъ этого корня, а именно:

$$0{,}805\,995 = \sqrt[3]{a}.$$

Такъ какъ $805\,995 = 806\,000 - 5$, то отсюда легко найти кубъ. Я положилъ поэтому

$$0{,}52359\,68715\,20449\,875 = a$$

и отсюда получилъ

$$b = 0{,}00000\,19040\,77848\,99807\,7107.$$

Далѣе, если удержать только первый членъ ряда

$$x = \sqrt[3]{a+b} = \frac{3a+2b}{3a+b}\sqrt[3]{a},$$

то онъ даетъ тройное правило †)

$$(3a+b):(3a+2b) = \sqrt[3]{a}:x$$

или

$$\left(a+\frac{1}{3}b\right):\left(a+\frac{2}{3}b\right) = \sqrt[3]{a}:x,$$

*) Въ оригиналѣ параграфы, начиная отсюда, обозначены номеромъ, на единицу меньшимъ, чѣмъ слѣдуетъ.

†) Т. е. пропорцію. Прим. ред.

такъ что мнѣ нужно было только подставить значенія a и b, чтобы получить значеніе

$$x = \sqrt[3]{a+b} = \sqrt[3]{\frac{\pi}{6}} = 0{,}80599\,59770\,08234\,820\ldots$$

Что это число правильно до 18-го десятичнаго знака, я нашелъ изъ разсмотрѣнія второго члена ряда

$$\frac{2b^3\sqrt[3]{a}}{81a^3+27a^2b}$$

съ помощью легкаго вычисленія. Такъ какъ b въ 275 000 разъ меньше чѣмъ a, то я могъ положить этотъ членъ равнымъ

$$\frac{2b^3\sqrt[3]{a}}{81a^3}.$$

Но

$$3\log\frac{b}{a} = 0{,}682\,063\,1 - 17$$

$$\log\frac{2}{81} = \underline{0{,}392\,545\,0 - 2.}$$

Поэтому

$$\log\frac{2b^3}{81a^3} = 0{,}074\,608\,1 - 18.$$

Далѣе,

$$\frac{1}{3}\log a = \underline{0{,}906\,342\,3 - 1,}$$

слѣдовательно,

$$\log\frac{2b^3}{81a^3}\sqrt[3]{a} = 0{,}980\,940\,3 - 19.$$

Такъ какъ характеристика равна -19, то ясно, что

$$\frac{2b^3}{81a^3}\sqrt[3]{a}$$

представляетъ собой десятичную дробь, первая значащая десятичная цифра которой занимаетъ 19-ое мѣсто. Такимъ образомъ, значеніе, полученное изъ формулы

$$x = \frac{3a+2b}{3a+b}\sqrt[3]{a}$$

правильно до 18-го знака *).

---

*) Численное опредѣленіе $\log\frac{2b^3}{81a^3}$ содержитъ въ оригиналѣ и притомъ не только въ текстѣ, но также въ поправкахъ, сообщенныхъ въ предисловіи, нѣкоторыя ошибки, которыя я исправилъ, сдѣлавъ вмѣстѣ съ тѣмъ несущественныя измѣненія въ текстѣ. Выводы отъ этого не мѣняются.

§ 10

Насколько мнѣ извѣстно, до сихъ поръ не изслѣдовано, можетъ ли отношеніе діаметра къ окружности быть выражено раціональной дробью. Штурмъ *), правда, пытался дать отрицательный отвѣтъ на этотъ вопросъ, но его доказательство неудовлетворительно, такъ какъ безусловно существуютъ безконечные ряды, сумма которыхъ раціональна, не смотря на то, что всѣ члены ирраціональны. Такъ какъ поэтому, предметъ подлежитъ еще изслѣдованію, то все еще могутъ найтись люди, которые станутъ тратить время на отысканіе такихъ раціональныхъ дробей и пускать ихъ въ ходъ съ помощью ложныхъ заключеній. Конечно, въ каждомъ частномъ случаѣ, легко сдѣлать провѣрку посредствомъ чиселъ Лудольфа. Но, если такимъ образомъ обнаружена непригодность одной дроби, все же можетъ оставаться охота искать новыя дроби. Можно однако эту охоту сдѣлать столь малой, что разысканіе такихъ дробей легко можетъ быть оставлено. Дѣйствительно, если даже отношеніе діаметра къ окружности точно выражается раціональной дробью, то изъ указанныхъ выше (§ 4) приближеній Ланьи или даже Лудольфа видно, что это должна быть очень большая дробь †). Именно, эти числа можно обратить въ дроби, которыя будутъ послѣдовательно все больше ††) и все точнѣе. Методъ и примѣняемыя при этомъ

---

*) Здѣсь имѣется въ виду Іоаннъ Христофоръ Штурмъ (Iohann Christoph Sturm; род. въ 1635 г.; былъ сначала пасторомъ въ Дейнингенѣ, потомъ профессоромъ математики и физики въ Альтдорфѣ, гдѣ и умеръ въ 1703 г.). Онъ пріобрѣлъ извѣстность главнымъ образомъ отличными еще и до сихъ поръ дѣйствительно достойными вниманія учебниками по математикѣ и астрономіи. Упоминаемое Ламбертомъ изслѣдованіе находится въ очень интересномъ компендіумѣ „Ioh. Chr. Sturmii Mathesis enucleata“ (Norimbergae 1689), гдѣ на стран. 181, Prop. XLIII (въ первый разъ въ этой точной формѣ), высказывается предложеніе: „Area circuli est quadrato diametri incommensurabilis“ (площадь круга несоизмѣрима съ квадратомъ діаметра). Прибавимъ, что Штурмъ былъ (что равнымъ образомъ насъ здѣсь интересуетъ) также первымъ переводчикомъ Архимеда на нѣмецкій языкъ. Въ 1667 г. опубликовалъ онъ „Des unvergleichlichen Archimedis Sandrechnung“ и въ 1670 году „Des unvergleichlichen Archimedis Kunstbücher“. Оба перевода появились въ Нюренбергѣ. Во второмъ находится также измѣреніе круга Архимеда. См. цитир. на стр. 25 сочиненіе J. G. Doppelmayr'a (стр. 114—122).

†) Т. е. съ весьма большимъ знаменателемъ. Прим. ред.

††) См. предыдущее примѣчаніе. Прим. ред.

предосторожности указаны мною въ § 17 статьи *) о преобразованіи дробей и разъяснены *примѣрами. При помощи этого метода* я нашелъ для отношенія діаметра къ окружности слѣдующія раціональныя дроби

$$
\begin{array}{r@{\,:\,}l}
1 & 3 \\
7 & 22 \\
106 & 333 \\
113 & 355 \\
33\,102 & 103\,993 \\
33\,215 & 104\,348 \\
66\,317 & 208\,341 \\
99\,532 & 312\,689 \\
265\,381 & 833\,719 \\
364\,913 & 1\,146\,408 \\
1\,360\,120 & 4\,272\,943 \\
1\,725\,033 & 5\,419\,351 \\
25\,510\,582 & 80\,143\,857 \\
52\,746\,197 & 165\,707\,065 \\
78\,256\,779 & 245\,850\,922 \\
131\,002\,976 & 411\,557\,987 \\
340\,262\,731 & 1\,068\,966\,896 \\
811\,528\,438 & 2\,549\,491\,779 \\
1\,963\,319\,607 & 6\,167\,950\,454 \\
4\,738\,167\,652 & 14\,885\,392\,687 \\
6\,701\,487\,259 & 21\,053\,343\,141 \\
567\,663\,097\,408 & 1\,783\,366\,216\,531 \\
1\,142\,027\,682\,075 & 3\,587\,785\,776\,203 \\
1\,709\,690\,779\,483 & 5\,371\,151\,992\,734 \\
2\,851\,718\,461\,558 & 8\,958\,937\,768\,937 \\
107\,223\,273\,857\,129 & 336\,851\,849\,443\,403 \\
324\,521\,540\,032\,945 & 1\,019\,514\,486\,099\,146 \quad \text{и т. д.}
\end{array}
$$

Изъ этихъ отношеній каждое послѣдующее точнѣе предыдущаго и между ними не содержится никакое *раціональное отношеніе*, которое было бы точнѣе ближайшаго большаго †) изъ нихъ. По-

*) Статья, на которую Ламбертъ ссылается здѣсь и въ слѣдующихъ параграфахъ помѣщается въ томъ же II томѣ (стр. 54—132) его „Beyträge“, что и предлагаемая здѣсь статья. Въ ней идетъ рѣчь о преобразованіи дробей въ непрерывныя дроби.

†) См. прим. пред. стр. Прим. ред.

этому, если бы отношеніе діаметра къ окружности выражалось точно посредствомъ цѣлыхъ чиселъ, то эти числа необходимо должны были бы быть больше послѣднихъ изъ указанныхъ здѣсь

$$324\,521\,540\,032\,945 : 101\,951\,4486\,099\,146.$$

Эти два числа даютъ число Лудольфа до 25-го десятичнаго знака. Даже если бъ они были вполнѣ точны, то легко видѣть, что было бы слишкомъ длинно и затруднительно пользоваться ими при вычисленіяхъ. Всѣ эти отношенія получаются, впрочемъ, изъ непрерывной дроби

$$\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{292+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\alpha}}}}}}}}},$$

гдѣ

$$\alpha=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{14+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\beta}}}}}}}}},$$

гдѣ

$$\beta=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{84+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{37+\cfrac{1}{3+\ldots}}}}}}}}}$$

Дальше я не продолжалъ вычисленія этой непрерывной дроби. Поэтому я не могу также сказать прервется ли она когда либо при продолженіи вычисленій. Если бы это было такъ, то отношеніе діаметра къ окружности можно было бы выразить посредствомъ цѣлыхъ хотя и чрезвычайно большихъ чиселъ. Но въ указанной выше статьѣ „о преобразованіи дробей" (§ 23) я далъ другую непрерывную дробь, которая по извѣстному закону продолжается до безконечности и совершенно уничтожаетъ надежду опредѣлить отношеніе діаметра къ окружности посредствомъ цѣлыхъ чиселъ.

§ 11.

Въ математикѣ есть еще другія величины, относительно которыхъ было бы столь же достойно труда изслѣдовать, не выражаются ли они посредствомъ раціональныхъ дробей или другимъ какимъ нибудь болѣе удобнымъ способомъ, чѣмъ десятичными дробями. Къ нимъ въ особенности можно отнести число

$$2{,}71828\,18284\,59045\,23536\,028\ldots,$$

котораго гиперболическій логариѳмъ равенъ единицѣ. Это число по отношенію къ логариѳмамъ играетъ ту же роль, что число Лудольфа по отношенію къ кругу и потому столь же важно для тригонометрическихъ и другихъ вычисленій. Если спросить въ виду этого, почему же только вокругъ Лудольфова числа поднимаютъ столько шума, то отвѣтъ на это отчасти даетъ исторія математики, отчасти же отвѣтъ дается тѣмъ, что понятія кругъ, четыреугольникъ, величина, равный извѣстны всякому, но нельзя сказать того же о гиперболическомъ логариѳмѣ, такъ какъ это понятіе дѣлается извѣстнымъ лишь при посредствѣ исчисленія безконечно малыхъ и не можетъ быть сдѣлано отчетливымъ безъ изученія этого исчисленія. Если бъ передъ большинствомъ изъ тѣхъ, которые ищутъ квадратуры круга не стояла бы эта преграда, то, по всѣмъ вѣроятіямъ, по поводу числа

$$2{,}71828\,18284\,59045\,23536\,028\ldots$$

появилось бы также много напрасныхъ усилій и неудачныхъ попытокъ, какъ и по поводу Лудольфова числа. Но это число не можетъ быть выражено точно раціональной дробью. *Ибо, если для* краткости, мы обозначимъ его черезъ e, то

$$e = 1 + \cfrac{2}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{14 + \cfrac{1}{18 + \cfrac{1}{22 + \cfrac{1}{26 + \ldots}}}}}}}$$

или

$$\frac{e-1}{e+1} = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{14 + \cfrac{1}{18 + \ldots}}}}}$$

или

$$\frac{ee-1}{ee+1} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{1}{11 + \ldots}}}}}}$$

и вообще

$$\frac{e^x-1}{e^x+1} = \cfrac{1}{\frac{2}{x} + \cfrac{1}{\frac{6}{x} + \cfrac{1}{\frac{10}{x} + \cfrac{1}{\frac{14}{x} + \ldots}}}}$$

Такъ какъ эти дроби продолжаются безконечно, то ни e, ни e^x, если x раціональное число или дробь, не можетъ быть точно выражено раціональною дробью. Эти формулы я нашелъ при помощи метода, изложеннаго въ цитированной выше статьѣ „о преобразованіи дробей“ § 19 и *слѣд. Мысль же искать* эти формулы у меня явилась подъ вліяніемъ „Analysis infinitorum“ Эйлера, гдѣ въ видѣ примѣра вычисляется выраженіе

$$\frac{e-1}{2}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{14+\cfrac{1}{18+\ldots}}}}}$$

§ 12.

По тому же побужденію я пошелъ дальше, и по отношенію къ дугѣ круга нашелъ выраженіе

$$\operatorname{tang} v=\cfrac{1}{\cfrac{1}{v}-\cfrac{1}{\cfrac{3}{v}-\cfrac{1}{\cfrac{5}{v}-\cfrac{1}{\cfrac{7}{v}-\cfrac{1}{\cfrac{9}{v}-\ldots}}}}}$$

Изъ этой безконечной непрерывной дроби можно вывести различныя заключенія, касающіяся неопредѣленной квадратуры круга. Положимъ $v=1:n$, гдѣ n цѣлое число, тогда

$$\operatorname{tang} v=\cfrac{1}{n-\cfrac{1}{3n-\cfrac{1}{5n-\cfrac{1}{7n-\cfrac{1}{9n-\cfrac{1}{11n-\ldots}}}}}}$$

Изъ того, что эта дробь безконечна, слѣдуетъ, что если дуга круга содержится цѣлое число разъ въ его радіусѣ, то тангенсъ ея есть необходимо ирраціональное число. Такъ какъ если бъ этотъ тангенсъ былъ раціональнымъ, то дробь не могла бы продолжаться безконечно и должна была бы прерваться. Для разъясненія этого возьмемъ, напримѣръ, $v = 1$. Въ такомъ случаѣ также $u = 1$, поэтому

$$\operatorname{tang} 1 = \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{3 - \cfrac{1}{5 - \cfrac{1}{7 - \cfrac{1}{9 - \ldots}}}}}$$

И на основаніи (§ 10) цитированной раньше статьи *)

	$+1$	$+0$
$+1$	$+0$	$+1$
-3	$+1$	$+1$
$+5$	-3	-2
-7	-14	-9
$+9$	$+95$	$+61$
-11	$+841$	$+540$
$+13$	-9156	-5879
и т. д.	и т. д.	и т. д.

Такимъ образомъ тангенсъ дуги, равной радіусу, выражается по порядку дробями

$$\frac{3}{2}, \frac{14}{9}, \frac{95}{61}, \frac{841}{540}, \frac{9\,156}{5\,879} \text{ и т. д.}$$

и притомъ каждой слѣдующей дробью точнѣе, такимъ образомъ, что каждая меньшая дробь †) является менѣе точной. Такъ какъ этотъ рядъ дробей никогда не прерывается и продолжается такъ, что числители и знаменатели, не имѣя общихъ дѣлителей, возрастаютъ безконечно, то тангенсъ дуги, равной радіусу, не можетъ быть выраженъ никакой конечной или раціональной дробью. То-же самое можно сказать *о тангенсѣ всякой дуги*, составляющей $\frac{1}{n}$ часть радіуса.

*) Эта маленькая таблица построена по извѣстному правилу, по которому составляются числители (числа второго столбца) и знаменатели (числа третьяго столбца) подходящихъ дробей непрерывной дроби.

†) То же замѣчаніе, что и прежде. Прим. ред.

§ 13.

Вычитая найденныя дроби по порядку каждую изъ слѣдующей, мы увидимъ, какъ близко онѣ подходятъ къ истинному значенію. Дѣйствительно,

$$\frac{14}{9}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2\,.\,9}$$

$$\frac{95}{61}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2\,.\,9}+\frac{1}{9\,.\,61}$$

$$\frac{841}{540}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2\,.\,9}+\frac{1}{9\,.\,61}+\frac{1}{61\,.\,540}$$

$$\frac{9\,156}{5\,879}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2\,.\,9}+\frac{1}{9\,.\,61}+\frac{1}{61\,.\,540}+\frac{1}{540\,.\,5\,879}$$

Продолжая дальше такимъ образомъ, можно представить тангенсъ дуги, равной радіусу, въ видѣ безконечнаго ряда

$$\frac{3}{2}+\frac{1}{2\,.\,9}+\frac{1}{9\,.\,61}+\frac{1}{61\,.\,540}+\frac{1}{540\,.\,5\,879}+\frac{1}{5879\,.\,76887}+\cdots,$$

который сходится быстрѣе всякой геометрической прогрессіи и имѣетъ, какъ видимъ, ирраціональную сумму.

§ 14.

Точно такимъ же образомъ обнаруживается, что не только тангенсъ дуги $\frac{1}{n}$, но вообще тангенсъ каждой дуги $\frac{m}{n}$, имѣющей раціональное отношеніе къ радіусу, является ирраціональнымъ числомъ. Пусть, напримѣръ, $v=\frac{2}{3}$; тогда тангенсъ этой дуги выражается дробью

$$\cfrac{1}{\cfrac{3}{2}-\cfrac{1}{\cfrac{9}{2}-\cfrac{1}{\cfrac{15}{2}-\cfrac{1}{\cfrac{21}{2}-\cdots}}}}$$

Поэтому

	1	0	
$+\frac{3}{2}$	0	1	$\frac{0}{1}$
$-\frac{9}{2}$	$+1$	$+\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$
$+\frac{15}{2}$	$-\frac{9}{2}$	$-\frac{23}{4}$	$\frac{18}{23}$
$-\frac{21}{2}$	$-\frac{131}{4}$	$-\frac{333}{8}$	$\frac{262}{333}$
$+\frac{27}{2}$	$+\frac{2\,715}{8}$	$+\frac{6\,901}{16}$	$\frac{5\,430}{6\,901}$
и т. д.	и т. д.	и т. д.	и т. д.

Итакъ, тангенсъ дуги $v = \frac{2}{3}$ выражается каждой изъ дробей $\frac{2}{3}$, $\frac{18}{23}$, $\frac{262}{333}$, $\frac{5\,430}{6\,901}$ и т. д., и притомъ каждою слѣдующей точнѣе, такъ что каждая меньшая дробь является менѣе точной. Такъ какъ рядъ этихъ дробей никогда не прерывается и продолжается такъ, что числители и знаменатели, не имѣя общихъ дѣлителей, становятся наконецъ больше всякаго даннаго числа, то отсюда слѣдуетъ, что тангенсъ дуги $v = \frac{2}{3}$ есть число ирраціональное. То же самое справедливо для тангенса всякой изъ дугъ, которыя $= \frac{m}{n}$, т. е. имѣютъ раціональное отношеніе къ радіусу. Вычитая только что найденныя дроби одну изъ другой получаемъ для тангенса дуги $v = \frac{2}{3}$ рядъ

$$\frac{2}{3} + \frac{8}{3\,.\,23} + \frac{32}{23\,.\,333} + \frac{128}{333\,.\,6\,901} + \ldots,$$

который сходится также быстрѣе всякой геометрической прогрессіи и имѣетъ ирраціональную сумму.

§ 15.

Такъ какъ поэтому тангенсъ каждой раціональной дуги есть число ирраціональное, то, наоборотъ, также каждая дуга, имѣющая раціональный тангенсъ, является ирраціональной. Въ самомъ дѣлѣ, допустимъ, что дуга раціональна, тогда по только что доказанному тангенсъ долженъ быть числомъ ирраціональнымъ, что противно предположенію.

§ 16.

Въ тригонометрическихъ таблицахъ мы имѣемъ одинъ раціональный тангенсъ, соотвѣтствующій углу въ 45°, равный радіусу т. е. единицѣ. Такимъ образомъ, дуга въ 45°, а слѣдовательно, также дуги въ 90°, 180° и 360° являются ирраціональными, т. е. эти дуги не имѣютъ раціональнаго отношенія къ радіусу круга.

§ 17.

Изъ предыдущаго, такимъ образомъ, видно, что дуга и ея тангенсъ не могутъ вмѣстѣ имѣть раціональное отношеніе къ радіусу. Но есть безчисленное множество дугъ, имѣющихъ раціональное отношеніе къ своему тангенсу. Однако можно также доказать, что во всѣхъ этихъ случаяхъ какъ тангенсъ, такъ и дуга несоизмѣримы съ радіусомъ. Дѣйствительно, на основаніи выше доказаннаго, оба не могутъ вмѣстѣ имѣть раціональное отношеніе къ радіусу. Допустимъ поэтому, что это имѣетъ мѣсто только для тангенса или только для дуги. Въ первомъ случаѣ тангенсъ долженъ быть соизмѣримъ съ радіусомъ и съ дугой. Поэтому и дуга должна быть соизмѣрима съ радіусомъ, потому что сумма или разность †) раціональныхъ отношеній есть также раціональное отношеніе. Во второмъ случаѣ дуга была бы соизмѣрима, какъ съ тангенсомъ, такъ и со своимъ радіусомъ, поэтому и тангенсъ имѣлъ бы раціональное отношеніе къ радіусу. Но такъ какъ на основаніи раньше доказаннаго радіусъ, дуга и тангенсъ не могутъ быть соизмѣримы, то оба разсматриваемыхъ случая должны быть исключены; итакъ, если тангенсъ и дуга имѣютъ между собой раціональное отношеніе, то они оба несоизмѣримы съ радіусомъ.

§ 18.

Я коснусь вкратцѣ еще двухъ обстоятельствъ, которыя какъ будто имѣютъ отношеніе къ квадратурѣ круга. Первое — это слѣдующее предложеніе: если около круга описанъ правильный или

---

†) Должно быть: „произведеніе или частное". Прим. ред.

неправильный многоугольникъ, такъ что каждая сторона его касается круга, то периметръ многоугольника такъ относится къ его площади, какъ окружность круга къ его площади. Я пропускаю доказательство, потому что оно очень легкое. Другое обстоятельство есть феноменъ, проявляющійся слѣдующимъ образомъ. Если 1 раздѣлить на четверть Лудольфова числа, т. е. на 0,785 398 163 3..., то получится 1 и въ остаткѣ 0,214 601 8366.... Если раздѣлить предыдущаго дѣлителя, т. е. 0,785 398 163 3... на полученный остатокъ, то новымъ частнымъ будетъ 3 и въ остаткѣ получится 0,141 592 653 5.... Приписывая впереди къ этому послѣднему остатку 3, получимъ 3,141 592 653 5..., т. е. какъ разъ Лудольфово число. Объ этомъ я скажу только то, что это простой феноменъ, изъ котораго не вытекаетъ никакихъ заключеній относительно квадратуры круга. Нетрудно *найти причину этого.*

V

АДРІАНЪ-МАРІЯ ЛЕЖАНДРЪ

(1752—1833)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТОГО, ЧТО ОТНОШЕНІЕ ДЛИНЫ ОКРУЖНОСТИ КЪ ДІАМЕТРУ И КВАДРАТЪ ЕГО СУТЬ ИРРАЦІОНАЛЬНЫЯ ЧИСЛА

(ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE. NOTE IV, OÙ L'ON DÉMONTRE QUE LE RAPPORT DE LA CIRCONFÉRENCE AU DIAMETRE ET SON QUARRÉ SONT DES NOMBRES IRRATIONNELS)

Разсмотримъ безконечный рядъ

$$1+\frac{a}{z}+\frac{1}{2}\frac{a^2}{z(z+1)}+\frac{1}{2\,.\,3}\frac{a^3}{z(z+1)(z+2)}+\cdots,$$

общій членъ котораго есть $\frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\ldots n}\frac{a^n}{z(z+1)(z+2)\ldots(z+n-1)}$, и обозначимъ черезъ $\varphi(z)$ его сумму. Если подставимъ $z+1$ на мѣсто z, то $\varphi(z+1)$ будетъ также суммою ряда:

$$1+\frac{a}{z+1}+\frac{1}{2}\frac{a^2}{(z+1)(z+2)}+\frac{1}{2\,.\,3}\frac{a^3}{(z+1)(z+2)(z+3)}+\cdots.$$

Вычитая почленно второй рядъ изъ перваго, находимъ, что $\varphi(z)-\varphi(z+1)$ представляетъ сумму ряда

$$\frac{a}{z(z+1)}+\frac{a^2}{z(z+1)(z+2)}+\frac{1}{2}\frac{a^3}{z(z+1)(z+2)(z+3)}+\cdots.$$

Но этотъ рядъ можетъ быть преобразованъ въ рядъ:

$$\frac{a}{z(z+1)}\left(1+\frac{a}{z+2}+\frac{1}{2}\frac{a^2}{(z+2)(z+3)}+\ldots\right),$$

т. е. имѣетъ сумму, равную $\frac{a}{z(z+1)}\varphi(z+2)$. Отсюда слѣдуетъ, что

$$\varphi(z)-\varphi(z+1)=\frac{a}{z(z+1)}\varphi(z+2).$$

Раздѣлимъ это равенство на $\varphi(z+1)$ и, для упрощенія результата, введемъ новую функцію $\psi(z)$, связанную съ функціей $\varphi(z)$ равенствомъ $\psi(z)=\frac{a}{z}\frac{\varphi(z+1)}{\varphi(z)}$; въ такомъ случаѣ, вмѣсто $\frac{\varphi(z)}{\varphi(z+1)}$ можно написать $\frac{a}{z\psi(z)}$, и вмѣсто $\frac{\varphi(z+2)}{\varphi(z+1)}$ имѣемъ $\frac{(z+1)\psi(z+1)}{a}$. Выполняя эту подстановку, находимъ

$$\psi(z)=\frac{a}{z+\psi(z+1)}.$$

Подставляя вмѣсто z послѣдовательно $z+1$, $z+2$ и т. д., получаемъ

$$\psi(z+1)=\frac{a}{z+1+\psi(z+2)};$$

$$\psi(z+2)=\frac{a}{z+2+\psi(z+3)} \quad \text{и т. д.}$$

Отсюда слѣдуетъ, что $\psi(z)$ можетъ быть представлено въ видѣ непрерывной дроби

$$\psi(z)=\cfrac{a}{z+\cfrac{a}{z+1+\cfrac{a}{z+2+\ldots}}}$$

Наоборотъ, если дана эта безконечная непрерывная дробь, то ея значенiе равно $\psi(z)$, т. е. $\frac{a}{z}\frac{\varphi(z+1)}{\varphi(z)}$, другими словами, равно выраженiю:

$$\frac{a}{z}\,\frac{1+\frac{a}{z+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{(z+1)(z+2)}+\ldots}{1+\frac{a}{z}+\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{z(z+1)}+\ldots}.$$

Если положить теперь $z=\frac{1}{2}$, то наша непрерывная дробь приметъ видъ:

$$\cfrac{2a}{1+\cfrac{4a}{3+\cfrac{4a}{5+\ldots}}}$$

Въ этой непрерывной дроби всѣ числители за исключенiемъ перваго равны $4a$, между тѣмъ какъ знаменатели представляютъ собой рядъ послѣдовательныхъ нечетныхъ чиселъ 1, 3, 5, 7 и т. д. Итакъ, значеніе этой непрерывной дроби можетъ быть также выражено черезъ

$$2a\frac{1+\frac{4a}{2.3}+\frac{16a^2}{2.3.4.5}+\frac{64a^3}{2.3.4.5.6.7}+\cdots}{1+\frac{4a}{2}+\frac{16a^2}{2.3.4}+\frac{64a^3}{2.3.4.5.6}+\cdots}.$$

Но обозначая черезъ e число, гиперболическій логариѳмъ котораго равенъ единицѣ, полученное выраженіе преобразуемъ въ слѣдующее:

$$\frac{e^{2\sqrt{a}}-e^{-2\sqrt{a}}}{e^{2\sqrt{a}}+e^{-2\sqrt{a}}}\cdot\sqrt{a},$$

такъ что вообще

$$\frac{e^{2\sqrt{a}}-e^{-2\sqrt{a}}}{e^{2\sqrt{a}}+e^{-2\sqrt{a}}}\cdot 2\sqrt{a}=\cfrac{4a}{1+\cfrac{4a}{4+\cfrac{4a}{5+\ldots}}}$$

Отсюда выводятся двѣ основныя формулы въ зависимости отъ того, *будетъ ли число a положительнымъ* или отрицательнымъ. Полагая сначала $4a=x^2$, находимъ:

$$\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\cfrac{x}{1+\cfrac{x^2}{3+\cfrac{x^2}{5+\ldots}}}$$

Полагая затѣмъ $4a=-x^2$, и пользуясь извѣстной формулой

$$\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{e^{ix}+e^{-ix}}=i\ \mathrm{tg}\ x,$$

получаемъ:

$$\mathrm{tg}\ x=\cfrac{x}{1-\cfrac{x^2}{3-\cfrac{x^2}{5-\cfrac{x^2}{7-\ldots}}}}$$

Эта послѣдняя формула послужитъ исходнымъ пунктомъ нашего доказательства. Но *прежде всего мы должны* еще доказать слѣдующія двѣ леммы.

Лемма I.

Если въ безконечной непрерывной дроби

$$\cfrac{m}{n+\cfrac{m'}{n'+\cfrac{m''}{n''+\ldots}}}$$

m, n, m', n', m'', n'' и т. д. суть положительныя или отрицательныя цѣлыя числа, если, кромѣ того, каждая изъ дробей $\frac{m}{n}$, $\frac{m'}{n'}$, $\frac{m''}{n''}$ и т. д. менѣе единицы †), то значеніе непрерывной дроби есть ирраціональное число.

Во-первыхъ, я утверждаю, что это значеніе меньше единицы. Дѣйствительно, не нарушая общности, можно допустить, что всѣ знаменатели n, n', n'' и т. д. суть положительныя числа. Если возьмемъ теперь только первое звено данной дроби, то, по предположенію, $\frac{m}{n} < 1$. Беря еще одно звено и замѣчая, что $\frac{m'}{n'} < 1$, заключаемъ, что $n + \frac{m'}{n'}$ больше, чѣмъ $n - 1$; и такъ какъ m меньше n, и оба они цѣлыя числа, то m также меньше, чѣмъ $n + \frac{m'}{n'}$. Такимъ образомъ, дробь

$$\cfrac{m}{n+\cfrac{m'}{n'}},$$

составленная изъ первыхъ двухъ звеньевъ, будетъ меньше, чѣмъ единица.

Возьмемъ затѣмъ еще третье звено и замѣтимъ предварительно, что, на основаніи только что доказаннаго, значеніе дроби, $\cfrac{m'}{n'+\cfrac{m''}{n''}}$, составленной изъ второго и третьяго звена, меньше единицы. Обозначая это послѣднее значеніе черезъ ω, видимъ что

†) Здѣсь, какъ и въ дальнѣйшемъ, подразумѣваются абсолютныя значенія, т. е. $\left|\frac{m}{n}\right| < 1$. Прим. ред.

$\frac{m}{n+\omega}$ также меньше единицы; слѣдовательно, дробь, составленная изъ трехъ звеньевъ:

$$\cfrac{m}{n+\cfrac{m'}{n'+\cfrac{m''}{n''}}}$$

также меньше единицы. Продолжая разсуждать такимъ же образомъ, видимъ, что сколько бы мы ни брали звеньевъ данной дроби, полученное значеніе всегда меньше единицы; отсюда слѣдуетъ, что и вся дробь, продолженная до безконечности, меньше единицы. Она можетъ быть равна единицѣ лишь въ единственномъ случаѣ, когда имѣетъ видъ

$$\cfrac{m}{m+1-\cfrac{m'}{m'+1-\cfrac{m''}{m''+1-\ldots}}}$$

Замѣтивъ это, допустимъ, что значеніе нашей непрерывной дроби не ирраціонально, а равно нѣкоторому раціональному числу $\frac{B}{A}$, гдѣ A и B суть цѣлыя числа. Въ такомъ случаѣ

$$\frac{B}{A}=\cfrac{m}{n+\cfrac{m'}{n'+\cfrac{m''}{n''+\ldots}}}$$

Далѣе, пусть числа C, D, E, и т. д. опредѣляются послѣдовательно изъ равенствъ

$$\frac{C}{B}=\cfrac{m'}{n'+\cfrac{m''}{n''+\cfrac{m'''}{n'''+\ldots}}},$$

$$\frac{D}{C}=\cfrac{m''}{n''+\cfrac{m'''}{n'''+\cfrac{m^{IV}}{n^{IV}+\ldots}}},$$

и такъ до безконечности. Такъ какъ всѣ члены этихъ различныхъ непрерывныхъ дробей меньше единицы, то на основаніи выше доказаннаго, значенія этихъ дробей $\frac{B}{A}$, $\frac{C}{B}$, $\frac{D}{C}$, $\frac{E}{D}$, и т. д. также меньше единицы, т. е. $B<A$, $C<B$, $D<C$ и т. д. Отсюда слѣдуетъ, что числа ряда A, B, C, D, E, и т. д. послѣдовательно убываютъ. Но зависимости между непрерывными дробями, о которыхъ идетъ рѣчь, даютъ

$$\frac{B}{A}=\cfrac{m}{n+\cfrac{C}{B}}, \text{ откуда } C=mA-nB,$$

$$\frac{C}{B}=\cfrac{m'}{n'+\cfrac{D}{C}}, \text{ откуда } D=m'B-n'C,$$

$$\frac{D}{C}=\cfrac{m''}{n''+\cfrac{E}{D}}, \text{ откуда } E=m''C-n''D, \text{ и т. д.}$$

Такъ какъ мы допустили, что первыя два числа A и B цѣлыя, то отсюда слѣдуетъ, что всѣ остальныя числа C, D, E и т. д. тоже суть цѣлыя числа. Такимъ образомъ, мы приходимъ къ противорѣчію, что безконечный рядъ постоянно убывающихъ чиселъ A, B, C, D, E и т. д. долженъ состоять только изъ цѣлыхъ чиселъ; при этомъ ни одно изъ чиселъ A, B, C, D, E и т. д. не можетъ быть нулемъ, потому что наша дробь продолжается до безконечности, и выраженія $\frac{B}{A}$, $\frac{C}{B}$, $\frac{D}{C}$ и т. д. должны все время имѣть опредѣленное значеніе. Поэтому наше допущеніе, что значеніе данной непрерывной дроби равно раціональному числу $\frac{B}{A}$, ложно; это значеніе непремѣнно ирраціонально.

Лемма II.

Если при тѣхъ же предположеніяхъ начальныя дроби $\frac{m}{n}$, $\frac{m'}{n'}$, $\frac{m''}{n''}$ и т. д. имѣютъ произвольныя значенія, всѣ же послѣдующія менѣе единицы, то разсматриваемая непрерывная дробь равна ирраціональному числу, въ предположеніи, что она безконечна.

Дѣствительно, допустимъ, что, начиная отъ дроби $\frac{m'''}{n'''}$ всѣ слѣдующія дроби $\frac{m'''}{n'''}$, $\frac{m^{IV}}{n^{IV}}$, $\frac{m^{V}}{n^{V}}$ и т. д. — до безконечности — менѣе единицы. Въ такомъ случаѣ, на основаніи первой леммы, значеніе непрерывной дроби:

$$\cfrac{m'''}{n''' + \cfrac{m^{IV}}{n^{IV} + \cfrac{m^{V}}{n^{V} + \cdots}}}$$

есть ирраціональное число. Обозначимъ его черезъ ω, тогда данная непрерывная дробь приметъ видъ:

$$\cfrac{m}{n + \cfrac{m'}{n' + \cfrac{m''}{n'' + \omega.}}}$$

Полагая послѣдовательно

$$\frac{m''}{n'' + \omega} = \omega', \quad \frac{m'}{n' + \omega'} = \omega'', \quad \frac{m}{n + \omega''} = \omega''',$$

видимъ, что, если ω есть ирраціональное число, то каждая изъ величинъ ω', ω'', ω''' также должна быть ирраціональной. Но послѣдняя изъ нихъ ω''' представляетъ значеніе данной непрерывной дроби; такимъ образомъ, это значеніе есть ирраціональное число.

Возвращаясь теперь къ нашей первоначальной задачѣ, мы можемъ доказать слѣдующую теорему:

Теорема.

Если нѣкоторая дуга соизмѣрима съ радіусомъ, то ея тангенсъ несоизмѣримъ съ радіусомъ.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть радіусъ равенъ единицѣ, а дуга $x = \frac{m}{n}$, гдѣ m и n цѣлыя числа; тогда на основаніи найденной выше формулы

$$\operatorname{tg} \frac{m}{n} = \cfrac{m}{n - \cfrac{m^2}{3n - \cfrac{m^2}{5n - \cfrac{m^2}{7n - \cdots}}}}$$

Но эта непрерывная дробь относится къ виду, разсмотрѣнному во второй леммѣ, такъ какъ знаменатели $3n$, $5n$, $7n$ и т. д. возрастаютъ, между тѣмъ какъ числители m^2 остаются неизмѣнными, такъ что отдѣльныя дроби скоро становятся меньше единицы. Поэтому значенiе $\operatorname{tg}\frac{m}{n}$ ирраціонально, т. е. если дуга соизмѣрима съ радiусомъ, то тангенсъ ея съ нимъ несоизмѣримъ.

Отсюда, какъ слѣдствiе, непосредственно вытекаетъ теорема, соотвѣтствующая цѣли настоящей статьи. Обозначая черезъ π длину полуокружности радiуса, равнаго единицѣ, замѣчаемъ, что, если бъ π было раціонально, то и дуга $\frac{\pi}{4}$ была бы раціональна, и слѣдовательно, ея тангенсъ былъ бы ирраціоналенъ. А между тѣмъ извѣстно, что тангенсъ дуги $\frac{\pi}{4}$ равенъ единицѣ; слѣдовательно, π не можетъ быть раціональнымъ числомъ. Поэтому отношенiе длины окружности къ дiаметру есть ирраціональное число *).

Представляется вѣроятнымъ, что число π даже не принадлежитъ къ классу алгебраическихъ ирраціональностей, т. е., что оно не можетъ быть корнемъ никакого алгебраическаго уравненiя съ конечнымъ числомъ членовъ, коэффицiенты котораго раціональны. Но эту теорему, повидимому, очень трудно строго доказать. Мы можемъ только показать, что и квадратъ π есть ирраціональное число.

Въ самомъ дѣлѣ, если въ безконечной непрерывной дроби, выражающей $\operatorname{tang} x$, положить $x = \pi$, то получимъ:

$$0 = 3 - \cfrac{\pi^2}{5 - \cfrac{\pi^2}{7 - \cfrac{\pi^2}{9 - \ldots}}}$$

*) Эта теорема впервые была доказана Ламбертомъ въ Берлинскихъ мемуарахъ въ 1761 г. [Что это предложенiе было доказано Ламбертомъ не въ 1761 г., а въ 1766 году и притомъ впервые не въ Берлинскихъ мемуарахъ, а въ „Beyträgen" — объ этомъ замѣчено уже на стр. 54. Ошибка произошла оттого, что читанный академiи докладъ 1767 года находится въ томѣ мемуаровъ Берлинской Академiи Наукъ за 1761 годъ. Этотъ томъ былъ напечатанъ лишь въ 1768 году и содержитъ въ перемежку статьи 1749, 1758, 1760, 1763 и 1767 годовъ. Рудiо.]

Если бы число π^2 было раціональнымъ и равнялось $\frac{m}{n}$, гдѣ m и n суть цѣлыя числа, то отсюда вытекало бы, что

$$3 = \cfrac{m}{5n - \cfrac{m}{7 - \cfrac{m}{9n - \cfrac{m}{11 - \dots}}}}$$

Но эта непрерывная дробь, очевидно, удовлетворяетъ условію второй леммы, такъ что ея значеніе есть ирраціональное число и не можетъ быть равнымъ числу 3. Слѣдовательно, квадратъ отношенія окружности круга къ его діаметру есть ирраціональное число.

Архимед, Гюйгенс, Лежандр, Ламберт

О КВАДРАТУРЕ КРУГА

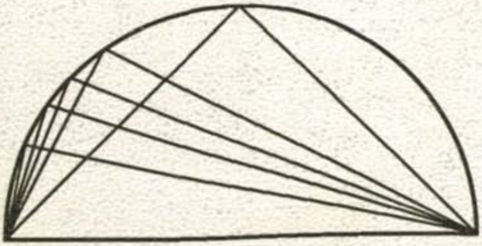
Издательство «Едиториал УРСС». 117312, г. Москва, пр-т 60-летия Октября, 9.
Лицензия ИД №05175 от 25.06.2001 г. Подписано к печати 03.03.2003 г
Формат 60×90/16. Тираж 960 экз. Печ. л. 10,5. Зак. № 2-913/119.

Отпечатано в типографии ООО «Рохос». 117312, г. Москва, пр-т 60-летия Октября, 9.

Изъ всѣхъ математическихъ задачъ, которыя въ теченіе вѣковъ занимали человѣчество, ни одна не пользовалась такой извѣстностью, какъ задача о квадратурѣ круга.

Исканіе квадратуры круга стало синонимомъ въ высшей степени труднаго, невыполнимаго, а потому и безнадежнаго предпріятія. Это самая древняя изъ всѣхъ математическихъ задачъ, ибо исторія ея охватываетъ четыре тысячелѣтія, столько же сколько исторія человѣческой культуры.

Вполнѣ удовлетворительный отвѣтъ на вопросъ, чѣмъ объясняется исключительная извѣстность именно этой отдѣльной математической задачи, можетъ быть полученъ только на основаніи ея исторіи.



ИЗДАТЕЛЬСТВО УРСС
НАУЧНОЙ И УЧЕБНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
E-mail: URSS@URSS.ru
Каталог изданий
в Internet: http://URSS.ru
Тел./факс: 7 (095) 135-44-23
Тел./факс: 7 (095) 135-42-46

1591 ID 6328
9 785354 002184