А.Барут, Р.Рончка

ТЕОРИЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУПП И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ. т.2

Монография известных американского и польского физиков-теоретиков посвящена изложению современных методов и результатов теории представлений групп и алгебр Ли, а также их разнообразным физическим приложениям.

В русском переводе книга выходит в двух томах. Второй том (главы 12—21) охватывает вопросы, связанные с гармоническим анализом на группах Ли и на однородных пространствах, теорию индуцированных представлений групп и многочисленные приложения различных аспектов теории представлений групп и алгебр Ли к квантовой теории. Большинство из этих приложений до сих пор было описано лишь в журнальных статьях.

Книга будет полезна научным работникам, аспирантам и студеитам старших курсов физических и математических специальностей, интересующимся теорией представлений групп и алгебр, а также их приложениями.

Оглавление

Глава 12

Квантоводинамические применения представлений алгебры Ли

В этой главе мы рассмотрим непосредственные применения представлений алгебры Ли к решению кинематических и динамических задач квантовой теории. Мы покажем, как эти представления возникают и как они используются, причем от читателя здесь не требуется предварительного знакомства со всеми тонкостями формализма квантовой теории. Предполагается лишь знакомство с уравнением Шредингера. Более подробное обсуждение схемы квантовой механики, понятия симметрии и представлений групп выносится в гл. 13, а релятивистских задач — в гл. 20 и 21.

§ 1. Алгебры симметрии в гамильтоновой формулировке

Начнем с теории нерелятивистских квантовых систем, описываемых уравнением Шредингера ($\hbar = 1$)

$$i\partial_t\psi(q, t) = H\psi(q, t), \tag{1}$$

где ψ — волновая функция системы, q — набор динамических координат и H — оператор Гамильтона для системы — дифференциальный оператор, являющийся функцией от q и $\partial/\partial q$. Альтернативно мы могли бы рассматривать алгебру Гейзенберга $[p_i, q_j] = -i\delta_{ij}I$, и оператор H был бы тогда функцией от p и q. Эквивалентность картины Гейзенберга и картины Шредингера обсуждается в гл. 20. Как отмечено в начале гл. 11, большинство операторов квантовой механики являются неограниченными операторами, и при строгом подходе следует использовать теорию, развитую в гл. 11.

Для стационарных решений уравнения (1) вида $\psi(t, q) = \exp(-iEt)\,u(q)$ получаем уравнение на собственные значения

$$Hu = Eu. \tag{2}$$

Симметрия гамильтониана H квантовой системы порождается теми операторами, которые коммутируют с H и вместе с H обладают общей плотной инвариантной областью определения D в несущем пространстве. Если соотношения

$$[H, X_1] = 0 \quad \text{и} \quad [H, X_2] = 0$$

выполняются на D, то на D также выполняется соотношение

$$[H, [X_1, X_2]] = 0$$

в силу того факта, что для линейных операторов справедливо тождество Якоби. Следовательно, подмножество операторов, удовлетворяющих записанному условию, образует алгебру Ли. Представления алгебр Ли, встречающиеся в простой задаче, как правило, являются интегрируемыми, и алгебры Ли симметрии и группы Ли симметрии в физической литературе используют обычно, не делая между ними различия.

Это понятие группы симметрии в узком смысле следовало бы в действительности называть «группой вырождения энергии», поскольку собственное для H пространство с фиксированным значением энергии E является пространством представления алгебры Ли, коммутирующей с H. Сначала на примерах рассмотрим это более простое понятие симметрии, а в § 2 значительно его обобщим. Следует заметить, что в нерелятивистской квантовой механике мы приходим непосредственно к представлениям алгебр Ли, представления же соответствующих групп симметрии появляются в конечном итоге, поскольку некоторые важные глобальные концепции принадлежат уровню групп, а не алгебр.

Наибольшую группу (или алгебру) Ли, элементы которой коммутируют с H, будем называть *максимальной группой симметрии*. Во многих случаях она является более широкой, чем кинематическая группа симметрии.

Пример 1. Обычный квантовый ротатор с гамильтонианом $H = \frac{1}{2I} \boldsymbol{J}^2$, где I — момент инерции, а $\boldsymbol{J}^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2$ — оператор Казимира алгебры Ли группы SO (3), дает простой пример квантовой системы с группой симметрии, в данном случае группой вращений. В несущем пространстве $H = L^2(R^3)$ квантовой механики этот гамильтониан имеет собственные функции $u_\lambda(q)$, задаваемые при помощи сферических гармоник $Y_M^J(\theta, \varphi)$ с собственными значениями $\lambda = (2I)^{-1}J(J+1)$, $J = 0, 1, 2, \ldots$. Таким образом, собственное пространство $H^\lambda \subset H$ является пространством, в котором реализовано $(2J+1)$-мерное неприводимое представление группы SO (3).

В соответствии с основными постулатами квантовой механики, мы должны реализовать H и J как самосопряженные операторы, следовательно, по теореме Нельсона, мы ограничиваемся интегрируемыми представлениями алгебры Ли, т. е. квантовомеханическими представлениями группы вращений SO (3). В отсутствие этого ограничения алгебра Ли группы SO (3) допускает широкий класс неприводимых представлений, которые, однако, не все являются интегрируемыми (см. 11.10.5.1).

Отметим также, что гамильтониан не говорит нам о кратности каждого представления группы симметрии, т. е. о том, сколько раз встречается заданное значение J. Ответ на этот вопрос можно дать, как мы увидим, в рамках более широких групп, а именно, пользуясь существованием других операторов, различающих состояния с одинаковым J.

Пример 2. *Квантовомеханический жесткий ротатор.* Здесь мы имеем два набора коммутирующих операторов момента импульса $\boldsymbol{J}_s$ и $\boldsymbol{J}_b$, а именно момента импульса относительно оси, связанной с пространством, и относительно оси, связанной с телом. Для полностью симметричного вращающегося твердого тела гамильтониан $H = (2I)^{-1}(\boldsymbol{J}_s^2 + \boldsymbol{J}_b^2)$. Однако операторы Казимира двух алгебр по определению жесткого ротатора равны: $\boldsymbol{J}_s^2 = \boldsymbol{J}_b^2 = \boldsymbol{J}^2$, и гамильтониан снова пропорционален $\boldsymbol{J}^2$.

Так как мы имеем две алгебры SO(3), алгеброй Ли симметрии оператора H теперь является $\mathrm{SO}(3) \times \mathrm{SO}(3) \sim \mathrm{SO}(4)$. Соотношение $\boldsymbol{J}_s^2 = \boldsymbol{J}_b^2$ указывает на то, что встречаются только специальные представления группы SO(4) размерности $(2J+1)^2 = n^2$. Если определить генераторы SO(4) как $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{J}_s + \boldsymbol{J}_b$, $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{J}_s - \boldsymbol{J}_b$, то имеем $\boldsymbol{K}^2 = 0$, $\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{L} = 0$ и для каждого J L принимает значения от 0 до $2J$. Отметим, что в рассмотренном случае алгебра Ли симметрии шире, чем геометрическая симметрия SO(3).

Пример 3. *Трехмерный гармонический осциллятор.* Динамическими сопряженными переменными являются три оператора координат q_i и три импульса p_i (представляемые в картине Шредингера посредством $\frac{\partial}{\mathrm{i}\,\partial q_i}$). Гамильтониан задается (в подходящих единицах) в виде

$$H = \frac{1}{2}(\boldsymbol{p}^2 + \boldsymbol{q}^2). \tag{3}$$

Рассмотрим снова стационарные состояния, заданные согласно (2).

Один путь выявления группы вырождения гамильтониана (3) состоит во введении операторов рождения и уничтожения a_l^*, a_l, $l = 1, 2, 3$, [см. (10.4.1), (10.4.2)] по формулам $a_l = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_l + \mathrm{i}p_l)$, $a_l^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_l - \mathrm{i}p_l)$ и записи (3) в виде

$$H = \sum_{l=1}^{3} a_l^* a_l + \frac{3}{2}. \tag{4}$$

Легко видеть, что операторы $X_{ij} = a_i^* a_j + \frac{1}{2}\delta_{ij}$ коммутируют с H. Ввиду (10.4.12), X_{ij} образуют базисные элементы алгебры Ли $u(n)$. Действительно, $H = \sum_{i=1}^{3} X_{ii} = \mathrm{Tr}\,(X) = C_1$. Следовательно, остальные элементы из $u(3)$ образуют алгебру Ли su(3). Вычисление инвариантных операторов su(3) показывает, что инвариантные операторы высших порядков C_2, C_3 и т. д. являются функциями гамильтониана. Следовательно, в данном примере реализуются только наиболее вырожденные представления алгебры $u(3)$ размерности 1, 6, 10, 15, ...

Важной чертой этого примера является тот факт, что гамильтониан (3) обладает более широкой группой симметрии, чем непосредственная геометрическая симметрия задачи (вращательная инвариантность). Генераторы группы вращений $J_1 = \frac{1}{2}(a_1^* a_2 + a_2^* a_1)$, $J_2 = -\frac{i}{2}(a_1^* a_2 - a_2^* a_1)$, $J_3 = \frac{1}{2}(a_1^* a_1 - a_2^* a_2)$ [см. (10.4.16)] находятся среди элементов алгебры симметрии su(3), но последняя содержит, кроме того, и другие элементы. Поэтому ее называют *динамической симметрией оператора* H (в отличие от геометрической симметрии оператора H). В неприводимое представление su(3) представления группы вращений входят более чем однократно, однако кратность представлений группы динамической симметрии равна единице. Это обусловлено тем, что значения энергии и квантовые числа представлений максимальной группы симметрии составляют полный набор параметров, характеризующих все состояния.

Пример 4. *Нерелятивистская задача Кеплера.* Здесь динамические переменные такие же, как и в примере 3: p_i, q_i. Гамильтониан задан (снова в подходящих единицах) в виде

$$H = \frac{1}{2} p^2 - \frac{\alpha}{r}, \quad r \equiv |q|, \quad \alpha > 0. \tag{5}$$

Очевидная геометрическая симметрия задачи — это по-прежнему вращательная симметрия: $[H, \boldsymbol{L}] = 0$, $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$. Легко проверить, однако, что еще один векторный оператор

$$A = \frac{1}{\sqrt{-2E}} \left\{ \frac{1}{2} [\boldsymbol{J} \times \boldsymbol{p} - \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{J}] + \frac{\alpha \boldsymbol{r}}{r} \right\} \tag{6}$$

коммутирует с H на пространстве собственных для H функций, соответствующих фиксированному собственному значению E. Легко убедиться, что операторы $\boldsymbol{A}$ (называемый по историческим соображениям *вектором Рунге — Ленца*) и $\boldsymbol{L}$ образуют базис алгебры Ли so(4). Для $E < 0$ (связанные состояния) группой динамической симметрии задачи (5) является SO(4). Для представления (6) один из операторов Казимира группы SO(4) обращается в нуль:

$$\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{A} = 0. \tag{7}$$

Поэтому реализуются только специальные представления SO(4). При $\boldsymbol{J}_1 = \frac{1}{2}(\boldsymbol{L} + \boldsymbol{A})$, $\boldsymbol{J}_2 = \frac{1}{2}(\boldsymbol{L} - \boldsymbol{A})$, $\boldsymbol{J}_1^2 = \boldsymbol{J}_2^2 = \boldsymbol{J}^2$ вырождение дискретных уровней равно $(2J+1)^2 = n^2$, $J = 0, 1/2, 1, \ldots$ (такое же, как и в примере 2). Состояния можно характеризовать посредством $|n, J, M\rangle$, где n эквивалентно энергетическому параметру или оставшемуся оператору Казимира группы SO(4). Следовательно, представления алгебры динамической симметрии имеют кратность один.

Для $E > 0$ ввиду появления множителя i в равенстве (6) мы видим, что действительной алгеброй Ли динамической симметрии является теперь so(3, 1) и по-прежнему справедливо (7). Физически эти состояния соответствуют состояниям рассеяния частицы на потенциале Кеплера. Унитарные представления SO(3, 1) бесконечномерны; это означает, что в эксперименте по рассеянию при фиксированной энергии имеется бесконечно много парциальных волн момента импульса, каждая с кратностью один, равной кратности неприводимого представления T^L группы SO(3) в представлении группы SO(3, 1).

Замечание. Понятие симметрии можно применять помимо энергии к любой другой наблюдаемой, например к моменту импульса, спину и т. п. Если A — наблюдаемая и мы рассматриваем задачу на собственные значения

$$Af = af,$$

то операторы, коммутирующие с A, порождают алгебру Ли, представления которой определяют вырождение состояний с одним и тем же значением a.

§ 2. Динамические алгебры Ли

В § 1 мы рассмотрели группу вырождения гамильтонианов. Представления группы максимальной симметрии дают размерность собственного пространства оператора H для заданной энергии E. Чтобы полностью решить квантовомеханическую задачу (1.2), мы должны еще определить спектр оператора H. Решим эту задачу в рамках следующего общего формализма.

Пусть W — дифференциальный оператор; рассмотрим (волновое) уравнение

$$W\psi = 0. \qquad (*)$$

Если существуют операторы L_i, $i = 1, \ldots, r$, образующие алгебру Ли L и удовлетворяющие на пространстве решений $(*)$ соотношению

$$[W, L_i]\,\psi = 0, \quad i = 1, \ldots, r,$$

то на все решения волнового уравнения $(*)$ натягивается пространство представления алгебры Ли L. Ясно, что если ψ — решение $(*)$, то $L_i\psi$ также является решением, и мы имеем $[W, L_i] = f(W)$, где f — произвольный полином с коэффициентами, зависящими от координат, удовлетворяющий уравнению $f(0) = 0$. В частности, если $W = \mathrm{i}\partial_t - H$, или $W = (\partial_\mu - A_\mu)^2$, то алгебра Ли L называется *динамической алгеброй Ли* квантовой системы. В общем случае она содержит зависящие от времени операторы $L(t)$, которые на пространстве решений ψ уравнения $W\psi = 0$ удовлетворяют уравнению Гейзенберга:

$$[\mathrm{i}\partial_t, L_k(t)] = [H, L_k(t)].$$

Подалгебра $L' \subset L$, состоящая из коммутирующих с W операторов, представляет собой более узкое определение симметрии; как L', так и L действуют в одном и том же гильбертовом пространстве. Наконец, подалгебра $L'' \subset L'$ независящих от времени операторов удовлетворяет $[H, L] = 0$ и является *алгеброй симметрии для* H, обсуждавшейся в § 1.

Уравнение Гейзенберга имеет решение $L_k(t)$, задаваемое в виде

$$L_k(t) = \exp[\mathrm{i}tH]\, L_k(0) \exp[-\mathrm{i}tH].$$

Так как оператор энергии H коммутирует с эволюционным оператором $\exp[\mathrm{i}tH]$, зависящая от времени динамическая алгебра Ли $\{H, L_k(t)\}$ и независящая от времени динамическая алгебра Ли $\{H, L_k(0)\}$ унитарно эквивалентны. В конкретных задачах это позволяет нам ограничиться анализом независящих от времени динамических алгебр Ли.

Решим теперь явно некоторые важные квантоводинамические задачи при помощи метода представлений алгебр Ли. Начнем с изложения в виде лемм некоторых дополнительных результатов. Доказательство этих лемм не составляет труда и предоставляется читателю в качестве упражнений.

Лемма 1. *Следующие три оператора* ($[p, q] = -\mathrm{i}$):

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= \frac{1}{4}(p^2 + q^2), \\ T &= \frac{1}{4}(pq + qp), \\ \Gamma_4 &= \Gamma_0 - \frac{1}{2}q^2 \end{aligned} \tag{1}$$

удовлетворяют коммутационным соотношениям алгебры Ли $o(2, 1)$ $(su(1, 1))$

$$[\Gamma_0, \Gamma_4] = \mathrm{i}T, \quad [\Gamma_4, T] = -\mathrm{i}\Gamma_0, \quad [T, \Gamma_0] = \mathrm{i}\Gamma_4. \tag{2}$$

Для оператора Казимира

$$C_2 = \Gamma_0^2 - \Gamma_4^2 - T^2 \tag{3}$$

вычисление дает

$$C_2 = -\frac{3}{16} = \varphi(\varphi + 1), \quad \varphi = -\frac{3}{4}, \quad -\frac{1}{4}.$$

Таким образом, соотношения (1) являются реализацией представления D^+ алгебры su(1, 1) (упражнение 11.10.7.6.1). Равенства (1) и (3) немедленно дают решение динамического уравнения для линейного осциллятора со стационарным уравнением

$$Hu = \frac{\hbar\omega}{2}\left(p^2 + \frac{\omega m}{\hbar}x^2\right)u = Eu, \tag{4}$$

так как после подстановки $q = (m\omega/\hbar)^{1/2}x$ и $2\Gamma_0 = \frac{1}{\hbar\omega}H$ уравнение (4) может быть записано в виде

$$(2\Gamma_0 - E/\hbar\omega)\,u = 0.$$

Таким образом, собственные состояния $|\,n\,\rangle$ оператора Γ_0 ввиду 11.10.7.6.1 имеют дискретные собственные значения $n + {}^1/_2$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, и образуют пространство решений

$$H\,|\,n\rangle = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)|\,n\rangle.$$

В качестве второго типичного примера используем лемму.

Лемма 2. *Операторы*

$$\Gamma_0 = \frac{1}{2}(rp^2 + r),$$
$$\Gamma_4 = \frac{1}{2}(rp^2 - r), \tag{5}$$
$$T = \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p} - \mathrm{i},$$

где $r = \sqrt{\boldsymbol{r}^2}$, $p = \sqrt{\boldsymbol{p}^2}$, *также удовлетворяют коммутационным соотношениям* (2) *алгебры Ли* $o\,(2, 1)$. *Оператор Казимира* (3) *имеет значение*

$$C_2 = \boldsymbol{J}^2 = (\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p})^2 = j\,(j+1), \quad \text{т. е.} \quad \varphi = -j - 1 \quad \text{или} \quad \varphi = j.$$

Рассмотрим теперь стационарное уравнение

$$Hu = \left(\frac{p^2}{2m} - \frac{\alpha}{r}\right)u = Eu \tag{6}$$

для стационарных решений движения частицы в кулоновском поле. Вводим связанное с последним уравнение

$$\Theta\psi = [r\,(H - E)]\,\psi = 0. \tag{7}$$

Оператор (6) можно выразить в виде линейной комбинации генераторов (4):

$$\Theta = \left(\frac{1}{2m} - E\right)\Gamma_0 + \left(\frac{1}{2m} + E\right)\Gamma_4 - \alpha. \tag{8}$$

Чтобы решить уравнение (7), сначала диагонализируем Γ_0. Определяя

$$\tilde{\psi} \equiv \exp(-\mathrm{i}\theta T)\,\psi, \tag{9}$$

где T задано в (5), и используя коммутационные соотношения (2), имеем

$$\left[\left(-E+\frac{1}{2m}\right)(\Gamma_0 \operatorname{ch}\theta+\Gamma_4 \operatorname{sh}\theta)+\right.$$

$$\left.+\left(E+\frac{1}{2m}\right)(\Gamma_4 \operatorname{ch}\theta+\Gamma_0 \operatorname{sh}\theta)-\alpha\right]\tilde{\psi}=0. \qquad (10)$$

Следовательно, если выбрать

$$\operatorname{th}\theta=\left(E+\frac{1}{2m}\right)\Big/\left(E-\frac{1}{2m}\right), \qquad (11)$$

то из (10) немедленно получаем простое уравнение

$$[(-2E/m)^{1/2}\,\Gamma_0-\alpha]\,\tilde{\psi}=0. \qquad (12)$$

Спектром оператора Γ_0 в дискретном представлении $o\,(2,\,1)$, определяемом посредством 11.10.7.6.1, являются значения $n=s+$ $+j+1$, $s=0,\,1,\,2,\,\ldots$. Таким образом, уравнение (12) дает

$$E_n=-\frac{\alpha^2 m}{2n^2}, \qquad (13)$$

т. е. хорошо известный спектр атома водорода. Решения $\tilde{\psi}$ нормируются теперь следующим образом:

$$\int \bar{\tilde{\psi}}\tilde{\psi} r^{-1}\,d^3x=1. \qquad (14)$$

Чтобы найти непрерывный спектр нашей задачи, выберем параметр θ в уравнении (10) по-другому, а именно

$$\operatorname{th}\theta=\left(E-\frac{1}{2m}\right)\Big/\left(E+\frac{1}{2m}\right), \qquad (15)$$

и получим вместо (12)

$$[(2E/m)^{1/2}\,\Gamma_4-\alpha]\,\psi=0. \qquad (16)$$

Обозначив обобщенные (ненормируемые) собственные векторы оператора Γ_4 через

$$\Gamma_4\,|\,Q,\,\lambda\rangle=\lambda\,|\,Q,\,\lambda\rangle, \qquad (17)$$

получаем

$$E_\lambda=\frac{\alpha^2 m}{2\lambda^2}, \qquad \lambda\in R. \qquad (18)$$

Динамическая алгебра (5) не решает полностью вырождения уровней гамильтониана (6), поскольку мы еще не изучили моменты импульсов уровней. Следующая лемма решает эту задачу.

Лемма 3. *Операторы* (5) *вместе с*

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} \tag{19}$$

и

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} &= \frac{1}{2}\boldsymbol{r}p^2 - \boldsymbol{p}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}) - \frac{1}{2}\boldsymbol{r}, \\ \boldsymbol{M} &= \frac{1}{2}\boldsymbol{r}p^2 - \boldsymbol{p}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}) + \frac{1}{2}\boldsymbol{r}, \\ \Gamma &= r\boldsymbol{p} \end{aligned} \tag{20}$$

удовлетворяют коммутационным соотношениям алгебры Ли so(4, 2). *Инвариантные операторы второго, третьего и четвертого порядков имеют значения*

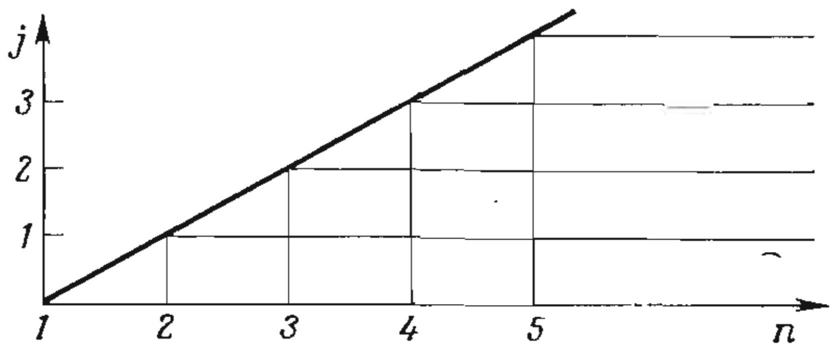
$$C_2 = -3, \quad C_3 = 0, \quad C_4 = -12, \tag{21}$$

где $C_2 = \frac{1}{2}L_{ab}L^{ab}$, $C_3 = \varepsilon_{abcdef}L^{ab}L^{cd}L^{ef}$, $C_4 = L_{ab}L^{bc}L_{cd}L^{da}$, $a, b = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

Примечание. $L_{ij} = \varepsilon_{ijk}J_k$, $L_{i4} = A_i$, $L_{i0} = M_i$, $L_{i5} = \Gamma_i$, $L_{05} = \Gamma_0$, $L_{45} = \Gamma_4$, $L_{04} = T$.

Следующая лемма дает вырождение состояний гамильтониана (6).

Лемма 4. *Представление* so(4, 2), *заданное при помощи* (5), (19), (20) *и* (21) *в базисе, в котором* Γ_0, $\boldsymbol{J}^2$ и J_3 *диагонализованы с собственными значениями* n, $j(j+1)$ *и* m *соответственно, имеет весовую диаграмму, т. е. состояния* $|n, j, m\rangle$, *задаваемые фиг. 1.*



Фиг 1.

Доказательство. Элементы Γ_0, Γ_4, T образуют алгебру su(1, 1). Оператор Казимира $C_2(o(2, 1)) = \Gamma_0^2 - \Gamma_4^2 - T^2 = \boldsymbol{J}^2$. Пусть собственные значения оператора Γ_0 обозначаются через n. Поскольку $\boldsymbol{J}^2$ имеет собственные значения $j(j+1)$ при фиксированном j, n изменяется в пределах $j + 1 \leqslant n < \infty$. Это дает горизонтальные линии на фиг. 1.

Для более общих задач мы можем пользоваться следующим обобщением леммы 3.

Лемма 5. *Операторы*

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{J} = \boldsymbol{r} \times \pi - \mu\hat{\boldsymbol{r}},\\
&\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}\boldsymbol{r}\pi^2 - \pi(\boldsymbol{r}\cdot\pi) + \frac{\mu}{r}\boldsymbol{J} + \frac{\mu^2}{2r^2}\boldsymbol{r} - \frac{1}{2}\boldsymbol{r},\\
&\boldsymbol{M} = \frac{1}{2}\boldsymbol{r}\pi^2 - \pi(\boldsymbol{r}\cdot\pi) + \frac{\mu}{r}\boldsymbol{J} + \frac{\mu^2}{2r^2}\boldsymbol{r} + \frac{1}{2}\boldsymbol{r},\\
&\boldsymbol{\Gamma} = r\pi,\\
&\Gamma_0 = \frac{1}{2}(r\pi^2 + r + \mu^2/r),\\
&\Gamma_4 = \frac{1}{2}(r\pi^2 - r + \mu^2/r),\\
&T = \boldsymbol{r}\cdot\pi - \mathrm{i},
\end{aligned} \tag{22}$$

где

$$\hat{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r}/r, \quad \pi = \boldsymbol{p} - \mu\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}), \quad \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \frac{\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{n}\,(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n})}{r\,[r^2 - (\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n})^2]}$$

($\boldsymbol{n}$ — *произвольный постоянный единичный вектор*), *также удовлетворяют коммутационным соотношениям алгебры* so(4, 2), *для которой вместо* (21) *мы теперь имеем*

$$C_2 = -3(1-\mu^2), \quad C_3 = 0, \quad C_4 = 0. \tag{23}$$

Для каждого значения $\mu = 0, \pm{}^1/_2, \pm 1, \ldots$ *равенства* (22) *задают неприводимое представление* so(4, 2) *в дискретной серии. Представления* (22) *можно характеризовать при помощи так называемого соотношения представления*

$$\{L_{AB}, L^A_C\} = -2ag_{BC}, \tag{24}$$

где L_{AB} — *генераторы* so(4, 2) *и* $a = 1 - \mu^2$.

Более общая теория симметрий в квантовой механике излагается в гл. 13 и 21.

§ 3. Упражнения

§ 2.1. Рассмотрите момент импульса заданной в (22) системы заряд — монополь, т. е.

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{r}\times\pi - \mu\hat{\boldsymbol{r}},$$

$$\pi = \boldsymbol{p} - \mu\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}), \quad \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \frac{\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{n}\,(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n})}{r\,(r^2 - (\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n})^2)}.$$

Покажите, что

а) при фиксированном $\boldsymbol{n}$ $\boldsymbol{D}$ сингулярен; $\boldsymbol{J}$ может быть представлен на пространстве функций, быстро стремящихся к нулю вдоль линии особенностей $\hat{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{n}$; он имеет индекс дефекта (1, 1) и, следовательно, может быть расширен до самосопряженного оператора. Условия интегрируемости на представления приводят к так называемому условию квантования заряда: $\mu = 0, \pm^1/_2, \pm 1, \ldots$;

б) если $\boldsymbol{n}$ вращается вместе с $\boldsymbol{r}$, то $\boldsymbol{D}$ является вращательно инвариантным, и мы имеем конфигурационное пространство $R^3 \otimes \otimes S^2$. Однако два различных выбора $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{n}_2$ можно связать посредством калибровочного преобразования при условии, что используется групповое пространство S^3 группы SU(2). Следовательно, мы можем представить $\boldsymbol{J}$ на $L^2(S^3)$, и поэтому допускаются как целочисленные, так и полуцелочисленные значения спина.

(См. [423] и [63].)

§ 2.2. Рассмотрите дифференциальное уравнение

$$(H - W)\,u = \left(-\frac{d^2}{dq^2} + q^2 + \frac{K}{q^2} - W\right) u = 0, \quad 0 < q < \infty.$$

Положите

$$\Gamma_0 = \frac{1}{4}\left(p^2 + q^2 + \frac{K}{q^2}\right), \quad T = \frac{1}{4}(pq + qp), \quad \Gamma_4 = \frac{1}{4}(H - 2q^2)$$

и вычислите спектр оператора H с помощью представлений алгебры o(2, 1) [§ 2, соотношения (1)].

Указание. $C_2 = \Gamma_0^2 - \Gamma_4^2 - T^2 = \frac{1}{4}\left(K - \frac{3}{4}\right)$.

§ 2.3. Покажите, что радиальное волновое уравнение Шредингера для N-мерного осциллятора с добавочным потенциалом a/r^2 может быть приведено к виду, заданному в предыдущем упражнении.

§ 2.4. Покажите, что радиальное волновое уравнение для нерелятивистской задачи Кеплера также можно привести к виду, заданному в упражнении 2.2, при помощи подходящих подстановок, и получите формулу Бальмера.

Указание. $\left[-\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{2me^2}{\hbar r} - \frac{2mE}{\hbar^2}\right] u_l(r) = 0.$
Положите $\varepsilon = 2mE/\hbar^2$, $q = (2r\sqrt{-\varepsilon})^{1/2}$, $u_l(r) = (2r\sqrt{-\varepsilon})^{1/4}\,\tilde{u}_l(q)$, $K = \frac{3}{4} + 4l(l+1)$, $W = \frac{4me^2}{\sqrt{-2E}}$.

§ 2.5. Рассмотрите уравнение

$$[(1 + b)\,\Gamma_0 + (1 - b)\,\Gamma_4 + c]\,\tilde{\psi} = 0,$$

где Γ_0, Γ_4 и T — те же генераторы группы SO(2, 1), что и выше. Многие из уравнений квантовой теории могут быть записаны в этом виде. Дайте полную классификацию решений этого уравнения как функции параметров b, c и собственных значений оператора Казимира $C_2 = \Gamma_0^2 - \Gamma_4^2 - T^2 = \varphi(\varphi + 1)$ (см. 11.10.7.6).

а) Пусть $\tilde{\psi} = e^{i\theta T}\psi$, $\operatorname{th}\theta = \frac{b-1}{b+1}$; тогда $\left[b^{1/2}\Gamma_4 + \frac{c}{2}\right]\psi = 0$. Найдите область значений спектра для дискретной, основной и дополнительной серий представлений so(2, 1).

б) Пусть $\tilde{\psi} = e^{i\theta T}\psi$, $\operatorname{th}\theta = \frac{b+1}{b-1}$, тогда $\left[(-b)^{1/2}\Gamma_4 + \frac{c}{2}\right]\psi = 0$. Определите сущность и область значений спектров (заметим, что Γ_0 имеет дискретный, а Γ_4 — непрерывный спектр).

(См. [61].)

§ 2.6. *Появление основной и дополнительной серий* $o\,(2, 1)$ *и самосопряженное расширение гамильтонианов.* Рассмотрите представление алгебры $o\,(2, 1)$, заданное согласно

$$\Gamma_0 = \frac{1}{2}\left(r\pi^2 - \frac{a}{r} + r\right), \quad \Gamma_4 = \frac{1}{2}\left(r\pi^2 - \frac{a}{r} - r\right), \quad T = r\cdot\pi - i$$

(π определено в лемме 5, § 2).

Покажите, что в этом представлении оператор Казимира C_2 имеет значение $J^2 - \mu^2 - a$. Покажите, что, как и в леммах 3, 4, мы можем решить уравнение с гамильтонианом $H = \pi^2 + a/r^2 + b + c/r$. Для больших положительных a H уже не является самосопряженным [449]. Пусть $C_2 = \varphi\,(\varphi + 1)$ и для простоты $\mu = 0$. Покажите, что при $a < j\,(j+1)$, $C_2 > 0$, мы должны использовать дискретные серии представлений $o\,(2, 1)$. При $j\,(j+1) < a < j\,(j+1) + \frac{1}{4}$, $-\frac{1}{4} < C_2 < 0$, мы должны использовать дополнительную серию представлений, а при $a > j\,(j+1) + \frac{1}{4}$, $C_2 < -\frac{1}{4}$, т. е. $\varphi = -\frac{1}{2} + i\lambda$, мы должны использовать основную серию унитарных представлений группы $O\,(2, 1)$. Примечательно, что в физических задачах появляются все *три* серии представлений $O\,(2, 1)$ и что динамическая группа дает метод самосопряженного расширения для класса гамильтонианов, который включает релятивистский гамильтониан Дирака для кулоновской задачи [61].

§ 2.7. *Тензорный метод для алгебры* so (4, 2); *подалгебры* so (4), su (2), su (1, 1), *коэффициенты Клебша — Гордана.* Рассмотрите две алгебры su (2) с генераторами

$$(J_1)_{ij} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}(a^*\sigma_k a), \quad (J_2)_{ij} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}(b^*\sigma_k b), \tag{1}$$

где $a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ — два бозонных оператора уничтожения, $[a, a^*] = 1$, $[b, b^*] = 1$, и σ_k — матрицы Паули.

Покажите, что в su (2) $\otimes$ su (2)-базисе с векторами

$$\begin{gathered} |j_1m_1j_2m_2\rangle = N^{j_1j_2}_{m_1m_2} a_1^{*\,j_1-m_1} a_2^{*\,j_1+m_1} b_1^{*\,j_2+m_2} b_2^{*\,j_2-m_2}\,|0\rangle, \\ \left(N^{j_1j_2}_{m_1m_2}\right)^{-2} = [(j_1+m_1)!\,(j_1-m_1)!\,(j_2+m_2)!\,(j_2-m_2)!] \end{gathered} \tag{2}$$

базисные элементы алгебры su (2, 2) представляются в виде

$$
\begin{aligned}
L_{ij} &= \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}[a^*\sigma_k a + b^*\sigma_k b] = (J_1)_{ij} + (J_2)_{ij} = J_{ij},\\
L_{i4} &= -\frac{1}{2}(a^*\sigma_i a - b^*\sigma_i b) = A_i,\\
L_{i5} &= -\frac{1}{2}(a^*\sigma_i Cb^* - aC\sigma_i b) = M_i,\\
L_{i6} &= \frac{1}{2i}(a^*\sigma_i Cb^* + aC\sigma_i b) = \Gamma_i,\\
L_{46} &= \frac{1}{2}(a^*Cb^* + aCb) = T,\\
L_{45} &= \frac{1}{2i}(a^*Cb^* - aCb) = \Gamma_4,\\
L_{56} &= \frac{1}{2}(a^*a + b^*b + 2) = \Gamma_0, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Докажите, что наиболее вырожденные дискретные самосопряженные неприводимые представления характеризуются собственным значением $\mu = j_1 - j_2$ оператора

$$K = \frac{1}{2}(a^*a - b^*b), \quad [K, L_{ab}] = 0 \quad \text{для всех} \quad a, b. \tag{4}$$

и что это в точности соответствует представлению, заданному в (2.22) посредством дифференциальных операторов с операторами Казимира $C_2 = -3(1-\mu^2)$, $C_3 = 0$, $C_4 = 0$. Базис $|\mu, m, n, \alpha\rangle$, где параметры являются собственными значениями K, L_{12}, L_{56} и L_{34} соответственно, мы называем параболическими состояниями. Прямым вычислением найдите

$$\mu = j_1 - j_2, \quad m = m_1 + m_2, \quad n = j_1 + j_2 + 1, \quad \alpha = m_2 - m_1$$

и покажите, что серии представлений удовлетворяют соотношению представления

$$\{L_{AB}, L^A_C\} = L_{AB}L^A_C + L^A_C L_{AB} = 2(\mu^2 - 1)g_{BC}, \quad A, B, C = 1, 2, \ldots, 6.$$

Рассмотрите сужение ($J_k = \varepsilon_{klm}J_{lm}$)

$$\mathrm{su}(2) \otimes \mathrm{su}(2) \supset \mathrm{su}(2) \supset u(1), \quad \text{где} \quad \boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}_1 + \boldsymbol{J}_2.$$

Сферический базис $|\mu, m; n; j(j+1)\rangle$ (собственные векторы для K, L_{12}, L_{56}, $\boldsymbol{J}^2$) определяем согласно

$$|(j_1 j_2)\, jm\rangle = \sum_{m_1 m_2} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | (j_1 j_2)\, jm\rangle \, | j_1 m_1 j_2 m_2\rangle \, \delta_{m_1+m_2,\, m}. \tag{5}$$

Это разложение можно рассматривать как выражение сферических состояний через параболические состояния.

Затем рассмотрите подгруппу $O(2, 1) \times O(2, 1) \subset O(4, 2)$, порождаемую при помощи

$$N_1^{(r)} = \frac{1}{2}(L_{46} + (3 - 2r) L_{35}),$$
$$N_2^{(r)} = \frac{1}{2}(L_{45} - (3 - 2r) L_{36}), \tag{6}$$
$$N_3^{(r)} = \frac{1}{2}(L_{56} + (3 - 2r) L_{34}), \quad r = 1, 2,$$

и состояния

$$\begin{gathered} |\varphi_1 n_1 \varphi_2 n_2\rangle = N b_1^{*n_1+\varphi_1-1} a_2^{*n_1-\varphi_1} a_1^{*n_2+\varphi_2-1} b_2^{*n_2-\varphi_2} |0\rangle, \\ N^{-2} = [(n_1 + \varphi_1 - 1)!\,(n_1 - \varphi_1)!\,(n_2 + \varphi_2 - 1)!\,(n_2 - \varphi_2)!], \end{gathered} \tag{7}$$

где

$$\begin{gathered} N_3^{(r)} |\varphi_1 n_1 \varphi_2 n_2\rangle = n_r |\varphi_1 n_1 \varphi_2 n_2\rangle, \quad r = 1, 2, \\ \boldsymbol{N}^{(r)2} |\varphi_1 n_1 \varphi_2 n_2\rangle = \varphi_r(\varphi_r - 1) |\varphi_1 n_1 \varphi_2 n_2\rangle, \quad r = 1, 2, \\ \boldsymbol{N}^{(r)2} = N_3^{(r)2} - N_1^{(r)2} - N_2^{(r)2}, \quad r = 1, 2. \end{gathered} \tag{8}$$

Затем в редукции

$$\mathrm{su}(1, 1) \otimes \mathrm{su}(1, 1) \supset \mathrm{su}(1, 1) \supset u(1)$$

с $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{N}^{(1)} + \boldsymbol{N}^{(2)}$ покажите, что

$$|(\varphi_1\varphi_2)\varphi n\rangle = \sum_{n_1 n_2} \langle \varphi_1 n_1 \varphi_2 n_2 | (\varphi_1\varphi_2)\varphi n\rangle | \varphi_1 n_1 \varphi_2 n_2\rangle \delta_{n_1+n_2,\, n}. \tag{9}$$

Докажите, что дискретная вырожденная серия представлений $O(4, 2)$ имеет свойство

$$\boldsymbol{J}^2 = \boldsymbol{N}^2. \tag{10}$$

Значит, в базисе $|(\varphi_1\varphi_2)\varphi n\rangle$ набор K, $\boldsymbol{J}^2$, L_{56}, L_{12} также диагонален с $\mu = \varphi_2 - \varphi_1$, $m = \varphi_1 + \varphi_2 - 1$, $n = n_1 + n_2$. С другой стороны, в состояниях $|\varphi_1 n_1 \varphi_2 n_2\rangle$ набор K, L_{12}, L_{56}, L_{34} диагонален с $\alpha = n_1 - n_2$.

Таким образом, (5) и (9) представляют собой разложения $O(4, 2)$-состояний по таким же состояниям; следовательно, покажите, что при подходящем сопоставлении индексов коэффициенты Клебша — Гордана группы SU(2) совпадают с коэффициентами Клебша — Гордана группы SU(1, 1) для связывания дискретных серий представлений, а именно

$$\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | (j_1 j_2) jm\rangle = \langle \varphi_1 n_1 \varphi_2 n_2 | (\varphi_1\varphi_2)\varphi n\rangle,$$

где

$$j_1 = \frac{1}{2}(n_1 + n_2 + \varphi_2 - \varphi_1 - 1),$$

$$j_2 = \frac{1}{2}(n_1 + n_2 + \varphi_1 - \varphi_2 - 1),$$

$$m_1 = \frac{1}{2}(n_2 - n_1 + \varphi_2 + \varphi_1 - 1),$$

$$m_2 = \frac{1}{2}(n_1 - n_2 + \varphi_2 + \varphi_1 - 1),$$

$$j = \varphi - 1, \quad m = \varphi_1 + \varphi_2 - 1$$

и

$$\mu = j_1 - j_2 = \varphi_2 - \varphi_1.$$

§ 2.8. *Когерентные состояния для* SU(1, 1). Для алгебры Гейзенберга $\{1, a, a^*\}$ с $[a, a^*] = 1$ когерентные состояния $|z\rangle$ являются собственными состояниями оператора a:

$$a|z\rangle = z|z\rangle,$$

и могут быть записаны в виде

$$|z\rangle = e^{-\frac{1}{2}|z|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle = e^{|z|^2/2} e^{za^*} |0\rangle$$

через собственные состояния $|n\rangle$ оператора числа a^*a. Они удовлетворяют $\langle z|z\rangle = 1$, $\langle z'|z\rangle = \exp\left[-\frac{1}{2}|z|^2 - \frac{1}{2}|z'|^2 + \bar{z}'z\right]$,

$$\frac{1}{\pi}\int |z\rangle\langle z|\, d^2z = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n| = 1.$$

Для алгебры su(1, 1), $\{L^+, L^-, L_3\}$ с

$$[L^+, L^-] = -L_3, \quad [L_3, L\pm] = \pm L\pm$$

определите аналогичные когерентные состояния согласно

$$L^-|z\rangle = z|z\rangle.$$

Покажите, что для представлений дискретной серии $D(\varphi)$,

$$|z\rangle = [\Gamma(-2\varphi)]^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{2}z)^n}{[n!\,\Gamma(-2\varphi + n)]^{1/2}} |\varphi, n\rangle,$$

разложение единицы равно

$$\frac{4}{\pi\Gamma(-2\varphi)} \int r\, dr\, d\theta\, (\sqrt{2}r)^{-2\varphi-1} K_{\varphi+1/2}(2\sqrt{2}r)|z\rangle\langle z| = 1,$$

$$z = re^{i\theta},$$

и мы получаем семейство гильбертовых пространств целых функций степени роста (1, 1) [76].

Глава 13

Теория групп и представления групп в квантовой теории

§ 1. Представления групп в физике

Дискретные и непрерывные группы в классической физике встречаются как группы преобразований, выражая обычно симметрию динамических уравнений частиц или полей; таковы симметрия кристалла, группы Галилея, Пуанкаре или Эйнштейна преобразований пространства-времени, группа канонических преобразований, действующих на фазовом пространстве, группа калибровочных преобразований, или конформных преобразований электромагнитных потенциалов, симплектическое преобразование термодинамической функции и т. п. Мы дали даже структуру алгебры Ли в скобках Пуассона классической механики и классической теории поля, для которых канонические преобразования действуют как группа автоморфизмов. Однако во всех этих случаях встречается только определяющее представление (самопредставление) групп. Для теории представлений групп в линейных пространствах, которая является предметом данной книги, сферой приложения в действительности является квантовая физика. Особая приспособленность теории представлений групп к квантовой физике обусловлена следующей основной кинематической разницей между классической и квантовой теориями. Как в классической, так и в квантовой теории физическая система может быть описана при помощи понятия «состояние», и в обоих случаях система имеет континуально бесконечное множество состояний. В квантовой теории благодаря линейности уравнений движения состояния представляются в виде линейных комбинаций выделенных ортогональных наборов состояний, зачастую множества, состоящего из счетного числа элементов; т. е. состояния образуют линейное векторное пространство. Напротив, в классическом случае динамические уравнения, записанные через координаты и импульсы, нелинейны; следовательно, такого множества базисных состояний не существует.

Групповую структуру физических теорий можно изучать, используя следующие два различных подхода.

А. *Теории, основанные на динамических уравнениях*

В большинстве физических теорий постулируется некоторая совокупность динамических уравнений, например уравнения механики частицы, динамики жидкости или газа, электродинамики, статистической и квантовой механики. Эти уравнения определяют поведение функций ψ от координат частицы или поля и могут быть записаны в виде

$$L\psi = 0. \tag{1}$$

Эти уравнения могут быть линейными или нелинейными, дифференциальными или интегральными уравнениями или же более общими операторными уравнениями. Роль теории групп в этом подходе — облегчить решение уравнения (1) и помочь лучше узнать структуру лежащей в его основе динамики. Если исходить из этой точки зрения, то мы приходим к изучению пространства Φ решений уравнения (1). Для того чтобы охарактеризовать это пространство, мы можем сначала искать совокупность операторов $\{X_i\}$, для которых

$$X_i\psi \in \Phi, \quad \text{если} \quad \psi \in \Omega \subset \Phi, \quad j = 1, 2, \ldots .$$

Для класса операторов X_i имеем тогда свойство $[L, X_i]\psi = 0$ и $[L, [X_i, X_j]]\psi = 0$; затем мы можем наделить это множество структурой алгебры Ли. Заметим, что X_i являются общими операторами, преобразующими в общем случае как аргументы ψ, так и вид самой ψ. В более общей постановке мы можем иметь $[L, X_i]\psi = \lambda L\psi$, т. е. справа — кратное уравнения (1), что снова приводит к структуре алгебры Ли на пространстве решений.

Если такая формулировка возможна, множество $\{X_i\}$ содержит не только обычные операции симметрии, но также более общие преобразования динамической симметрии.

В частности, пусть Y — оператор, удовлетворяющий уравнению на собственные значения

$$Y\psi_n = y_n\psi_n, \quad \psi_n \in \Omega.$$

Для максимального подмножества C операторов, таких, что

$$[C_i, Y] = 0, \quad C_i \in C,$$

имеем

$$Y(C_i\psi_n) = y_n(C_i\psi_n),$$

т. е. «значение» оператора Y «сохраняется» в результате операции C_i. Множество C является алгеброй симметрии по отношению к величине Y. В частности, если Y — гамильтониан системы в классической или квантовой механике, то C называется *алгеброй симметрии*, или *алгеброй вырождения энергии*.

Формально этот подход для классической и квантовой теорий одинаков и приводит непосредственно к алгебрам Ли, а не к группам Ли, при условии, что мы умеем определять произведение операторов. Эти рассуждения могут основываться также и на вариационном принципе, взятом вместо уравнения (1).

Напротив, в следующем подходе понятие групп играет фундаментальную роль.

Б. Теории, основанные на предписанных симметриях

Если динамические уравнения системы неизвестны, то для того, чтобы установить или угадать уравнения, можно руководствоваться общими принципами симметрии либо можно исследовать общие свойства системы, которые следуют из предписанных симметрий. Типичными примерами являются общий принцип ковариантности Эйнштейна в общей теории относительности или свойства S-матрицы взаимодействия элементарных частиц.

В. Понятие об относительности

В евклидовой геометрии все точки являются неразличимыми и существуют объективно, тогда как координаты вводятся искусственно. Все декартовы координаты равноправны. Таким образом, объективные свойства точек должны быть независимыми от выбора системы координат. Координаты точки в различных системах связываются при помощи группы преобразований, либо же преобразование из группы переводит одну точку в другую (пассивная и активная точки зрения соответственно). Таким образом, имеем группу автоморфизмов нашей геометрии. Обратно, любая группа преобразований может служить в качестве группы автоморфизмов некоторой геометрии. Характеристика геометрии при помощи ее группы автоморфизмов является основной идеей в Эрлангенской программе Клейна [463]. Это понятие об относительности систем координат с точек распространяется на линии, площади, ...и на физические величины, такие, как силы, скорости, поля... . Вообще, физические процессы, происходящие в некоторый момент времени в некотором месте, являются независимыми от наблюдателя (систем отсчета). Все наблюдатели в классе равноправны. Наблюдатели связаны друг с другом посредством группы преобразований или преобразование переводит одного наблюдателя в другого. Эта группа преобразований является группой автоморфизмов физической теории или физического закона. Класс наблюдателей, связанных при помощи этой группы преобразований, физики называют также инерциальными системами отсчета. Это понятие является основным для большинства кинематических применений теории групп в физике.

Начнем с общей кинематической схемы квантовой теории, которая существенна для формулировки принципов симметрии и для использования группы симметрии и динамической группы.

§ 2. Кинематические постулаты квантовой теории

Принцип суперпозиции и вероятностная интерпретация

Свое начало квантовая теория берет из волновых свойств материи. Наиболее важное свойство волнового явления — это свойство суперпозиции, или интерференции: линейные комбинации решений также являются решениями волнового уравнения, так как уравнение линейно. Кроме того, волны материи описывают скорее амплитуды вероятности, чем амплитуды для некоторых плотностей частиц или полей. В совокупности две эти фундаментальные физические идеи дают нам общую схему, в которой физические состояния ψ, φ, ... описываются при помощи элементов линейного пространства, а наблюдаемые положительно определенные условные вероятности представляются квадратом полубилинейных форм $|(\psi, \varphi)|^2$. Исторически сложилось так, что, поскольку в простых случаях пространство решений волновых уравнений (например, уравнения Шредингера) можно вложить в гильбертово пространство, теория традиционно формулировалась в рамках гильбертова пространства вплоть до ее аксиоматизации фон Нейманом. Однако две основные физические идеи допускают более общие пространства физических состояний. Требование, чтобы включались предельные точки последовательностей состояний ψ_n, дает общее топологическое векторное пространство V и сопряженное ему пространство V', так что полубилинейные формы (амплитуды вероятности) могут быть взяты в виде

$$(\psi, \varphi), \quad \varphi \in V \quad \text{и} \quad \psi \in V'.$$

Даже в рамках формализма гильбертова пространства часто оказывается удобным пользоваться более общим формализмом и использовать гельфандов триплет

$$\Phi \subset H \subset \Phi',$$

где Φ — плотное ядерное подпространство в гильбертовом пространстве H, а Φ' — пространство, сопряженное с Φ, чтобы охватить операторы с непрерывным спектром и их обобщенные собственные векторы в Φ', которые не являются нормируемыми (см. приложение Б).

Помимо этих математических обобщений схемы квантовой теории в использовании более общих пространств в будущем могут также рассматриваться физические обобщения теории, например можно ослабить универсальность выполнения линейности состояний, т. е. принципа суперпозиции. Имея в виду эти моменты, в этом параграфе мы опишем стандартную форму квантовых постулатов и роль представлений групп.

Состояния и лучи

Основной структурой описания физической системы в квантовой теории является линейное пространство H, единичные лучи которого находятся во взаимно-однозначном соответствии с состояниями системы, называемыми *чистыми состояниями*. *Единичный* *луч* Ψ — это совокупность векторов $\{\lambda\psi\}$, $\|\psi\| = 1$, $\lambda = \exp(i\alpha)$, $\psi \in H$. Причина того, что введение лучей предпочитается самим векторам, заключается а) в использовании пространства над комплексными числами и б) в основной вероятностной интерпретации квантовой теории. Величины, связанные с наблюдаемыми эффектами, являются абсолютными значениями полубилинейной формы $|(\psi, \varphi)|^2$, не зависящими от параметров λ, λ', характеризующих луч. Следовательно, пространство лучей есть фактор-пространство $H = H/S^1$, т. е. проективное пространство одномерных подпространств из H.

Основное соответствие между физическими состояниями и элементами пространства H включает в себя *принцип суперпозиции* квантовой теории, а именно существование набора базисных состояний, таких, что произвольные состояния могут быть построены из них при помощи линейных суперпозиций. Таким образом, если лучи $\{\lambda\psi_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, описывают физические состояния, то $\psi'_\alpha = \sum_n a_n\psi_n$ — другой вектор в H, так что луч $\{\lambda\psi'_\alpha\}$ соответствует другому возможному состоянию системы. Отметим, что $\psi'_\alpha = \sum_n a_n\psi_n$ и $\lambda\psi'_\alpha$ представляют одно и то же состояние, но $\sum_n a_n(\lambda_n\psi_n)$ в общем случае является другим состоянием, хотя ψ_n и $(\lambda_n\psi_n)$ представляют одно состояние. В этом и заключается проблема относительных фаз в квантовой теории.

Состояния, которые могут быть получены одно из другого при помощи линейных суперпозиций, называются чистыми «когерентными» состояниями.

Правила суперотбора

Вообще говоря, существуют физические ограничения на выполнимость принципа суперпозиции. Чистые состояния нельзя реализовать в виде суперпозиции некоторых состояний: например, нельзя образовать чистое состояние, состоящее из положительно и отрицательно заряженной частицы, или чистое состояние, состоящее из фермиона и бозона. Это не означает, что два таких состояния не могут взаимодействовать; это лишь означает, что их формальная линейная комбинация не является физически реализуемым чистым состоянием (правило суперотбора). Существование правил суперотбора связано с измеримостью относительной фазы такой суперпозиции и зависит от остальных свойств системы, таких, как заряд, барионное число и т. п. Правило суперотбора на фермионы (т. е. разделение состояний с целым числом фермионов и состояний с полуцелым числом фермионов) вытекает из вращательной инвариантности (см. ниже). Во всех таких случаях мы разделяем линейное пространство H на подмножества таким образом, что принцип суперпозиции выполняется в каждом подмножестве. Эти подмножества называются *когерентными подпространствами*. В каждом подпространстве $\sum \alpha_n \psi_n$ и $\lambda \sum \alpha_n \psi_n$ соответствуют одному и тому же состоянию, но $\sum \alpha_n \psi_n$ и $\sum \alpha'_n \psi_n$ в общем случае соответствуют различным состояниям. К этой проблеме мы вернемся в конце данного параграфа.

Вероятностная интерпретация

Физические эксперименты состоят в приготовлении определенных состояний, в приведении их во взаимодействие и в наблюдении частоты появления других хорошо определенных состояний. Вероятность перехода между двумя состояниями ψ и φ определяется квадратом полубилинейной формы $|(\psi, \varphi)|^2$. Мы можем также говорить о вероятности перехода между двумя лучами Ψ и Φ, так как эта величина одинакова для всех векторов лучей; полные фазы несущественны. Однако если ψ и φ сами являются линейными комбинациями некоторых базисных векторов, то вероятность перехода зависит от относительных фаз их компонент. Величину $|(\psi, \varphi)|^2$ можно связать, умножая ее на определенные кинематические множители, с экспериментально наблюдаемыми величинами, такими, как сечения реакций и времена жизни нестабильных состояний.

Динамическая задача

Чтобы вычислять величины вроде $|(\psi, \varphi)|^2$, мы должны иметь определенную реализацию линейного пространства H и должны получать *число*, которое можно сравнивать с экспериментом. Таким образом, мы нуждаемся в определенном обозначении состояний $\psi, \varphi, \ldots$ и в определенном выражении для полубилинейного произведения. Эту реализацию будем называть *конкретным линейным пространством*. Это наиболее важная и наиболее трудная часть теории. Хотя все гильбертовы пространства одинаковой размерности изоморфны и можно преобразовать одну реализацию в другую, необходима некоторая вполне определенная явная реализация с физическим соответствием.

Если структура линейного или гильбертова пространства дает *кинематический принцип* квантовой теории, то явное вычисление состояний $\psi, \varphi, \ldots$ или полубилинейных (или скалярных) произведений (ψ, φ) является *динамической* частью квантовой теории.

В простых случаях динамические задачи решаются постулированием дифференциального уравнения для состояний $\psi, \varphi, \ldots$, представляемых, например, как элементы из $H = L^2(R^3)$, и отождествлением всех решений уравнения со всеми состояниями физической системы. Это имеет место в теории Шредингера. Для более сложных систем либо для неизвестных новых систем это невозможно. Даже если мы знаем все состояния изолированной системы, измерения над системой производятся с помощью добавочных внешних взаимодействий, которые изменяют систему.

При отсутствии полного вычисления полубилинейных произведений (ψ, φ) некоторые весьма общие принципы позволяют вывести ряд важных свойств симметрии этих величин. Именно в этом направлении было развито традиционное использование представлений групп в квантовой теории. Впоследствии гильбертово пространство квантовой теории было отождествлено с явным пространством реализации представлений более общих групп и алгебр. В этом смысле представления групп также решают динамическую задачу. Мы будем развивать оба эти аспекта. Для определенности в дальнейшем пространство состояний мы будем считать гильбертовым пространством.

Эквивалентное описание, или операции симметрии

Как и при всяком соответствии сначала следует рассмотреть эквивалентные отображения между физическими состояниями и лучами в гильбертовом пространстве, так как знание физически эквивалентных описаний системы уже отражает, как мы увидим, существенные свойства самой системы.

Если одна и та же физическая система может быть описана двумя различными способами в одном и том же когерентном подпространстве гильбертова пространства H один раз лучами Ψ_1, Φ_1, ... и другой раз лучами Ψ_2, Φ_2, ... (например двумя различными наблюдателями) таким образом, что одно и то же физическое состояние в первом случае описывается при помощи Ψ_1, а во втором — при помощи Ψ_2, так что эквивалентно можно говорить об операции симметрии системы, то вероятности переходов должны быть одинаковыми по определению физической эквивалентности.

Имеем тогда сохраняющее норму отображение $\hat{T}$ между лучами Ψ_1 и Ψ_2. С математической точки зрения более удобно отыскать соответствующее отображение $H \to H$ между векторами ψ, φ, ... в гильбертовом пространстве. Так как инвариантны только абсолютные значения, преобразование в гильбертовом пространстве может быть либо унитарным, либо антиунитарным. Действительно, можно доказать, что если даны два описания системы в пространстве лучей, то *можно выбрать* единичные векторы ψ_1, φ_1, ... из лучей Ψ_1, Φ_1, ... в первом описании и единичные векторы ψ_2, φ_2, ... из лучей Ψ_2, Φ_2, ... во втором описании, такие, что соответствие $\psi_1 \leftrightarrow \psi_2$, $\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2$, ... либо *унитарно*, либо *антиунитарно*. Это означает, что можно *построить* унитарное или антиунитарное соответствие $H \leftrightarrow H$. Точнее имеет место следующая теорема.

Теорема 1 (Вигнер). *Пусть* $\Psi_2 = \hat{T}\Psi_1$ — *отображение лучей гильбертова пространства* H, *сохраняющее внутреннее произведение лучей. Тогда существует отображение* $\psi_2 = T\psi_1$ *всех векторов из* H, *такое, что* $T\psi$ *принадлежит лучу* $\hat{T}\Psi$, *если* ψ *принадлежит лучу* Ψ, *и, кроме того,* 1° $T(\psi + \varphi) = T\psi + T\varphi$, 2° $T(\lambda\psi) = \chi(\lambda)\, T(\psi)$, 3° $(T\psi, T\varphi) = \chi[(\psi, \varphi)]$, *где либо* $\chi(\lambda) = \lambda$ (*унитарный случай*), *либо* $\chi(\lambda) = \bar{\lambda}$ (*антиунитарный случай*) *для всех* λ.

Доказательство. Пусть $\psi_1, \varphi_1, \ldots$ и $\psi_2, \varphi_2, \ldots$ — два набора ортонормированных базисов, выбранных из первой и второй совокупностей лучей соответственно. Нам дано преобразование, которое сохраняет абсолютные значения. Задача состоит в том, чтобы *построить* соответствующее преобразование T, действующее на векторы, при помощи подходящего выбора фаз. Априори могло бы быть, что $T\psi_1 = c_1\psi_2$, $T\varphi_1 = c_2\varphi_2, \ldots$ и что между числами c нельзя установить никаких соотношений; в этом случае T даже не линейный оператор. Фактически мы хотим показать, что T может быть определен таким образом, что он является унитарным или антиунитарным оператором.

Выделим единичный вектор ψ_1, выберем ψ_2 и определим $T\psi_1 = \psi_2$. Это единственный произвольный выбор; покажем, что все остальные фазы однозначно определены. Таким образом, T определен с точностью до общего фазового множителя.

Рассмотрим вектор $\psi_1 + \varphi_1$, где φ_1 ортогонален ψ_1. Легко показать, что вектор — представитель соответствующего луча во втором описании — равен $a\psi_2 + b\varphi_2$. Имеем тогда

$$T(\psi_1 + \varphi_1) = c(a\psi_2 + b\varphi_2) = \psi_2 + b'\varphi_2,$$

где мы должны иметь $c = 1/a$ согласно предыдущему выбору и положим $cb = b' = b/a$. Теперь *определим* $T\varphi_1$ через $T(\psi_1 + \varphi_1) - \psi_2$ или просто через $b'\varphi_2$. Следовательно, мы можем положить

$$T(\psi_1 + \varphi_1) = T\psi_1 + T\varphi_1.$$

Аналогично, для общего $f_1 = a_\psi\psi_1 + a_\varphi\varphi_1 + \ldots$ выбираем представитель $f_2 = \hat{a}_\psi\psi_2 + \hat{a}_\varphi\varphi_2 + \ldots$, записываем $Tf_1 = cf_2$ с $c\hat{a}_\psi = a_\psi$, так что

$$\begin{aligned} T(a_\psi\psi_1 + a_\varphi\varphi_1 + \ldots) &= a_\psi\psi_2 + c\hat{a}_\varphi\varphi_2 + \ldots \\ &= a_\psi T\psi_1 + a'_\varphi T\varphi_1 + \ldots \end{aligned}$$

Теперь возьмем абсолютные значения скалярных произведений

$$|(\psi_1 + \varphi_1, f_1)| = |a_\psi + a_\varphi|$$

и

$$|(T\psi_1 + T\varphi_1, Tf_1)| = |a_\psi + a'_\varphi|.$$

Эти два числа должны быть равными. Это плюс тот факт, что $|a'_\varphi| = |a_\varphi|$, позволяет нам вычислить a'_φ через a_φ и a_ψ. Получаются два решения:

$$a'_\varphi = a_\varphi \quad \text{и} \quad a'_\varphi = \bar{a}_\varphi \frac{a_\psi}{\bar{a}_\psi}.$$

Ясно, что для первого решения T линейно и унитарно. Для второго решения находим $Tf_1 = (a_\psi/\bar{a}_\psi)[\bar{a}_\psi T\psi_1 + \bar{a}_\varphi T\varphi_1 + \ldots]$. Общий фазовый множитель является несущественным, и при помощи новой нормировки T, которая не меняет выбора $T\psi_1 = \psi_2$, получаем *антиунитарный* оператор.

Замечания. 1. Две возможности в теореме 1 происходят от того факта, что комплексное поле обладает двумя (и только двумя) автоморфизмами, сохраняющими абсолютные значения: тождественным автоморфизмом и комплексным сопряжением. В случае гильбертова пространства над вещественным полем теорема Вигнера дает только унитарные преобразования (с точностью до фазы), поскольку единственным автоморфизмом вещественного поля является тождественный автоморфизм. Фактически теорема Вигнера тесно связана с фундаментальной теоремой проективной геометрии.

2. В заданной ситуации встречается один из двух случаев. Является ли преобразование унитарным или антиунитарным, зависит от других свойств двух эквивалентных описаний системы. Это не зависит, однако, от выбора векторов ψ, φ, ... из лучей; если преобразование, например, унитарно для выбора ψ_1, φ_1, ..., то не существует другого выбора $\lambda\psi_1$, $\lambda'\varphi_1$, ..., такого, что оно становится антиунитарным, и наоборот. Более того, как только вектор ψ_2 выбран, остальные векторы φ_2, χ_2, ... определяются однозначно из требования, чтобы соответствие было унитарным (или антиунитарным).

Преобразования симметрии

Описание *свойств симметрии* системы в стандартном смысле относится к ситуации, охарактеризованной в предыдущей теореме, так как если при преобразовании симметрии измеряемые вероятности остаются без изменения, мы автоматически получаем два эквивалентных описания в H — одно, соответствующее исходной, и другое, соответствующее преобразованной системам отсчета. Эти два описания должны быть связаны одно с другим посредством унитарных (или антиунитарных) преобразований. Обратно (и это является, с нашей точки зрения, более важным), *гильбертово пространство состояний должно быть изоморфным пространству унитарных (или антиунитарных) представлений пре-*

образований симметрии (они могут образовывать группу или алгебру и т. п.). Заметим, что мы хотим получить конкретное гильбертово пространство, чтобы вычислять вероятности переходов. Таким образом, если мы знаем преобразования симметрии системы, для построения гильбертова пространства H мы можем исходить из произвольного *набора* пространств неприводимых унитарных (или антиунитарных) представлений. Это решает задачу частично, но не полностью, поскольку мы не знаем, *какой* набор неприводимых представлений мы имеем. Явный вид операций симметрии рассматривается в § 3.

Единственность операторов

Мы говорили, что векторы-представители из лучей двух эквивалентных описаний могут быть выбраны таким образом, что отображение векторов $\psi_1 \leftrightarrow \psi_2$ является либо унитарным, либо антиунитарным. В квантовой теории есть еще и другая важная проблема — проблема фаз, и она касается *единственности* унитарного (или антиунитарного) соответствия $\psi_1 \leftrightarrow \psi_2$. Из доказательства теоремы Вигнера следует, что это соответствие является единственным *с точностью до общего фазового множителя.*

Представления лучей или проективные представления

Если имеется два эквивалентных описания с лучами $\Psi_1, \Phi_1, \ldots$ и $\Psi_2, \Phi_2, \ldots$ соответственно, отвечающие одним и тем же физическим состояниям, видимым двумя различными наблюдателями (пассивная точка зрения), или с лучами $\Psi_1, \Phi_1, \ldots$, отвечающими состояниям $\{s\}$ в первом описании и преобразованным состояниям $\{gs\}$ во втором описании (активная точка зрения), то мы знаем, что можно выбрать векторы $\psi_1 \in \Psi_1$, $\psi_2 \in \Psi_2, \ldots$, такие, что

$$\psi_2 = T_g\psi_1, \quad \varphi_2 = T_g\varphi_1, \ldots . \tag{1}$$

Это значит, что если ψ_1 — вектор, ассоциированный с лучом Ψ_1, то $T_g\psi_1$ — вектор, ассоциированный с лучом Ψ_2. Если же существуют два оператора T_g и $T_{g'}$ со свойством (1), то они могут отличаться только постоянным множителем, по модулю равным единице. Этот результат проявляется в групповом законе умножения преобразований, поскольку произведение двух преобразований $T_gT_{g'}$ дает тот же результат, что и преобразование $T_{gg'}$. Следовательно,

$$T_{gg'} = \omega(g, g')\, T_gT_{g'}, \tag{2}$$

где $\omega(g, g')$ — фазовый множитель. Поскольку T_g — представление группы симметрии, групповой закон для представлений является более общим, чем сам групповой закон $g(g's) = (gg')s$. Представления типа (2) называются «лучевыми представлениями», или «представлениями с точностью до множителя», или «проективными представлениями». Это также является проявлением того факта, что мы имеем соответствие между физическими состояниями и лучами в гильбертовом пространстве, а не векторами.

Определение. *Лучевое* (или проективное) *представление* T топологической группы G — это непрерывный гомоморфизм T: $G \to L(\hat{H})$, множество линейных операторов в проективном пространстве $\hat{H}$ с фактор-топологией относительно отображения $\hat{H} \to H$, т. е. $\psi \to \Psi$.

Хотя представление T определяется с точностью до произвольного множителя, фаза $\omega(g, g')$ в равенстве (2) не является произвольной. Прежде всего две системы фаз $\omega(g, g')$ и $\omega'(g, g')$ можно определить как эквивалентные, если

$$\omega'(g, g') = \omega(g, g')\frac{c(gg')}{c(g)\,c(g')}, \qquad g, g' \in G, \tag{2a}$$

где $c(g)$ — произвольная непрерывная функция, поскольку тогда соответствующие T_g и $T'_g = c(g)\,T_g$ имеют одинаковую фазу $\omega'(g, g')$. Кроме того, закон ассоциативности группового умножения налагает другое ограничение на систему фаз $\omega(g, g')$, а именно

$$\omega(g, g')\,\omega(gg', g'') = \omega(g', g'')\,\omega(g, g'g''). \tag{2б}$$

Отметим, что $\omega'(g, g')$, определенное в (2а), удовлетворяет (2б), если этому ограничению удовлетворяет $\omega(g, g')$.

Взяв весьма простые примеры, легко видеть, что равенство (2б) даже с точностью до определенной, согласно (2а), эквивалентности не определяет однозначно фазы $\omega(g, g')$, так что мы имеем в общем случае ряд новых неэквивалентных лучевых представлений для заданной группы G помимо обычных представлений с $\omega = 1$.

Пусть $g \to T_g$ — проективное представление группы G, $g \in G$, в H. Пусть v_i — компоненты некоторого $v \in H$ в некотором базисе. Луч может быть представлен величинами $\bar{v}_i \equiv v_i/v_l$, где v_l — любая из компонент вектора v, поскольку, очевидно, все векторы в луче $\{\lambda v\}$ индуцируют один и тот же $\bar{v}$. Выбрав специальный вектор v с $v_1 = 1$, мы видим, что индуцированные посредством T преобразования на $\bar{v}$ имеют вид

$$\bar{v}'_1 = v_1,$$

$$\bar{v}'_i = \left[\sum_{k=2}^{\infty} D_{ik}(g)\,\bar{v}_k + D_{i1}(g)\right] \Big/ \left(\sum_{k=2}^{\infty} D_{1k}(g)\,\bar{v}_k + D_{11}(g)\right),$$

$$i = 2, 3, \ldots .$$

Эти преобразования нелинейны и называются *проективными преобразованиями*. Нетрудно проверить, что представления T_g и $c(g)\,T_g$, так же как и неэквивалентные лучевые представления $\omega(g, g') \neq 1$, индуцируют одно и то же проективное представление. Неоднозначность фазы в этой формулировке полностью исчезла, но она лишь стала скрытой, так как обратная задача отыскания всех неэквивалентных проективных представлений эквивалентна отысканию всех неэквивалентных фаз.

Проективные представления и центральное расширение

Остающаяся неоднозначность фаз мешает применению математической теории обычных представлений, когда $\omega(g, g') \neq 1$. В этом случае можно попытаться построить более широкую (или расширенную) группу $\mathscr{E}$, обычные представления которой дают *все* неэквивалентные лучевые представления (2) группы G. Это задача *подъема* проективных представлений группы G в обычные представления группы $\mathscr{E}$, и она может быть просто решена следующим образом. Пусть K — абелева группа, порождаемая умножением неэквивалентных фаз $\omega(x, y)$, удовлетворяющих (2б). Рассмотрим пары (ω, x), $\omega \in K$, $x \in G$. В частности, $K = \{(\omega, e)\}$ и $G = \{(e, x)\}$. Пары (ω, x) образуют группу с законом умножения типа полупрямого произведения:

$$(\omega_1, x_1)(\omega_2, x_2) = (\omega_1\omega(x_1, x_2)\,\omega_2,\ x_1x_2).$$

В данном случае мы можем в качестве (ω, x) принять ωx. Группа $\mathscr{E} = \{(\omega, x)\}$ называется *центральным расширением* группы G посредством группы K (гл. 21, § 4), и мы видим, что векторные представления группы $\mathscr{E}$ содержат все лучевые представления группы G. Таким образом, расширенную группу $\mathscr{E}$ можно рассматривать как правильную *квантовомеханическую группу*. Теория и приложения расширений групп рассматриваются в гл. 21. Здесь мы приведем лишь следующее утверждение.

Утверждение 2. *Конечномерные проективные представления односвязных непрерывных групп эквивалентны обычным представлениям.*

Доказательство. Сначала, не нарушая общности, возьмем детерминант от обеих частей равенства (2): $\det T(x) \det T(y) = \omega^n(x, y) \det T(x, y)$, где n — размерность представлений. Новое представление $T'(x) = T(x)/[\det T(x)]^{1/n}$ формально удовлетворяет соотношению $T'(x)\,T'(y) = T'(xy)$: имеются различные значения величины $[\det T]^{1/n}$, и мы можем перейти к эквивалентной системе фаз, такой, что $T'(x)\,T'(y) = \omega'(x, y)\,T'(xy)$ с $\omega'^n = 1$. Если групповое пространство односвязно, $[x']^{1/n}$ может быть определено однозначно и является одинаковым для всех x ввиду непрерывности. Следовательно, мы приходим к обычным представлениям.

Аналогично, лучевые представления однопараметрических подгрупп Ли всегда эквивалентны обычным представлениям (гл. 21, § 4).

Во многих физических примерах, таких, как группа вращения, группы Лоренца и Пуанкаре, проективные представления группы могут быть сведены к истинно унитарным представлениям их универсальной накрывающей группы [38]. Заметным исключением является группа Галилея, где «квантовомеханическая группа» — это действительно одиннадцатипараметрическая группа, центральное расширение универсальной накрывающей группы Галилея. Случаи, когда центральное расширение не является необходимым, охватывает следующий критерий.

Критерий подъема. *Пусть G — связная односвязная группа Ли с алгеброй Ли L. Предположим, что для всякой кососимметрической вещественнозначной билинейной формы $\theta(x, y)$ на L, удовлетворяющей*

$$\theta([x, y], z) + \theta([y, z], x) + \theta([z, x], y) = 0,$$

существует линейная форма f на L, такая, что

$$\theta(x, y) = f([x, y])$$

для всех x, y в L. Тогда каждое сильно непрерывное проективное представление группы G индуцируется сильно непрерывным унитарным представлением на соответствующем гильбертовом пространстве.

(Доказательство см. в [38] или [764].)

Замечание. Это условие часто выражают при помощи утверждения, что вторая группа когомологий $H^2(G, R)$ тривиальна (гл. 21, § 4).

Получаем следующий вывод. Группа симметрии G физической системы *индуцирует* представление T обратимых отображений пространства H на себя, которое является унитарным или антиунитарным и является представлением центрального расширения $\mathscr{E}$ группы G либо группы, накрывающей группу G. В унитарном случае мы доказали, что H является некоторым прямым интегралом неприводимых пространств представления T в силу теоремы Маутнера (теорема 5.6.1).

Непрерывность

Математическая теория представлений топологических групп требует предположения непрерывности представлений. Физически это означает непрерывность вероятностей $|(\varphi, T_g\psi)|^2$ как функции от g, т. е. когда мы сравниваем вероятности нахождения двух состояний $T_g\psi$ и $T_{g'}\psi$ в фиксированном состоянии φ.

Унитарные и антиунитарные операторы

Групповое свойство преобразований (2) и непрерывность позволяют определить унитарный или антиунитарный характер представления T группы симметрии G.

Если для всякого элемента g из G имеем

$$g = h^2,$$

где h — также элемент группы, то мы имеем

$$T_g = \omega(g) T_h^2,$$

где $\omega(g)$ — фазовый множитель.

Квадрат антиунитарного или унитарного оператора унитарен. Таким образом, T унитарно. Для компоненты единицы любой группы Ли G равенство (3) выполняется. Действительно, пусть $g(t)$ — однопараметрическая подгруппа в G, такая, что $g(t_0) = g$. Тогда для $h = g(t_0/2)$ равенство (3) выполняется. Следовательно, связные группы Ли симметрии представляются унитарными операторами. Для антиунитарного случая (3) должно нарушаться. Если равенство (3) не выполняется, как в случае расширенной группы Пуанкаре с пространственными и временными отражениями, необходимы дальнейшие физические рассуждения, чтобы решить, унитарного или антиунитарного типа представление T.

Можно также видеть, что инвариантность относительно преобразования симметрии состояния, которое является суперпозицией двух стационарных состояний с различными энергиями, в момент времени t также исключает антиунитарное представление, так как тогда оператор, соответствующий второму решению в теореме Вигнера и обозначаемый через A, давал бы

$$A(\psi_1 \exp(-iE_1t) + \varphi_1 \exp(-iE_2t)) = \exp(iE_1t) A\psi_1 + \exp(iE_2t) A\varphi_1,$$

тогда как правильная эволюция состояния, получаемая из уравнения Шредингера, есть

$$\exp(-iE_1t) A\psi_1 + \exp(-iE_2t) A\varphi_1.$$

Утверждение 3. *Симметрия, соответствующая «обращению направления движения» (обращению времени) должна представляться антиунитарными операторами A.*

Доказательство. Произвольное состояние $\psi(t)$ можно представить в виде суперпозиции стационарных состояний ψ_n.

Состояние $\psi(t)$ и состояние с обращенным временем $(A\psi)(t)$ эволюционируют как

$$\psi(t) = \sum_n \exp(-\mathrm{i}E_n t)\,\psi_n, \quad (A\psi)(t) = \sum_n \exp(-\mathrm{i}E_n t)\,A\psi_n.$$

Это последнее состояние должно быть также в силу инвариантности относительно обращения времени преобразованием состояния $\psi(-t)$, т. е.

$$A\psi(-t) = A\sum_n \exp(\mathrm{i}E_n t)\,\psi_n.$$

Таким образом, A должен быть антиунитарным, чтобы оба состояния были одинаковыми.

В унитарном случае можно определить нормированный оператор T_g, такой, что $T_{g^{-1}} = T_g^{-1}$. Тогда $T_{gg^{-1}} = \omega(g, g^{-1})\,I$ ввиду равенства (2). Для двух коммутирующих преобразований из (2) имеем

$$T_g T_{g'} = c(g, g')\,T_{g'} T_g, \quad c(g, g') = \frac{\omega(g', g)}{\omega(g, g')},$$

и находим, что $c(g, g') = +1$ только в том случае, если T_g и $T_{g'}$ также коммутируют. В общем случае, если коммутатор $T_g T_{g'} T_g^{-1} T_{g'}^{-1}$ (который не зависит от нормировок T_g и $T_{g'}$ и однозначно определяется через T_g и $T_{g'}$) кратен I, т. е. $C = gg'g^{-1}g'^{-1} = I$, тогда $T_C = c(g, g')\,I$. Множитель $c(g, g')$ является характеристикой только когерентного подпространства, т. е. он имеет единственное значение в каждом когерентном подпространстве. В частности, если $T_{g'}$ и T_g принадлежат одной и той же однопараметрической подгруппе, то $c(g, g') = 1$.

Правила суперотбора и симметрия

В § 1 мы видели, что векторы $\sum_n \alpha_n \psi_n$ и $\sum_n \alpha_n (\lambda_n \psi_n)$ принадлежат различным лучам (состояниям), хотя ψ_n и $\lambda_n \psi_n$ принадлежат одному и тому же лучу. Но если преобразование физической симметрии системы переводит ψ_n в $\lambda_n \psi_n$, то, поскольку состояние системы не изменилось, суперпозиция вида $\sum_n \alpha_n \psi_n$ невозможна без выполнения равенства $\lambda_n = 1$. Относительная фаза λ_n между векторами в различных когерентных секторах не является наблюдаемой, поскольку физика не изменилась от преобразования симметрии. Если это так, никакое физическое измерение не сможет отличить состояние $\sum_n \alpha_n \psi_n$ от состояния $\sum_n \alpha_n (\lambda_n \psi_n)$. Таким образом, чтобы показать существование правила суперотбора, нам нужно иметь преобразование симметрии (физический постулат) и векторы ψ_n, которые переходят в $\lambda_n \psi_n$ при этом преобразовании и которые представляют собой собственные состояния измеримой физической величины, например заряда.

Пример 1. *Вращательная инвариантность и правило суперотбора фермионов.* Рассмотрим для конкретности состояние $\psi_1 = \left| \frac{j}{2}, m \right\rangle$, принадлежащее представлению $D^{j/2}$ группы вращений SO(3), и состояние $\psi_2 = | j, m' \rangle$, принадлежащее представлению D^j, j — целое. Рассмотрим вращение $\hat{n}\omega$ на угол ω в направлении $\hat{n}$. Состояния преобразуются по формуле

$$| JM \rangle' = D^J_{M', M} (\hat{n}\omega) | JM' \rangle.$$

Из упражнения 5.8.3.1 следует, что матрицы D^J удовлетворяют условию

$$D^J (\hat{n}\omega + 2\pi n) = (-1)^{2nJ} D^J (\hat{n}\omega).$$

Значит, для вращения $\hat{n}_y 2\pi$, $\hat{n}_y = (0, 1, 0)$ мы, в частности, имеем

$$| JM \rangle' = D^J_{M', M} (\hat{n}_y 2\pi) | JM' \rangle = (-1)^{2J} | JM \rangle.$$

Таким образом, получаем лишнюю относительную фазу $(-1)^{2J}$ в линейной комбинации двух состояний ψ_1 и ψ_2. Следовательно, если выполняется вращательная инвариантность, то в соответствии с нашими предыдущими рассуждениями имеет место правило суперотбора между состояниями с целочисленными J и состояниями с полуцелочисленными значениями J; в физически реализуемых состояниях они не могут смешиваться.

Пример 2. *Группа* SU(2) *изоспина и правила суперотбора.* Дадим здесь пример приближенной группы симметрии. В гл. 7, § 4, В, упоминалось, что частицы одинакового спина и четности и приблизительно равных масс с сильными взаимодействиями могут быть сгруппированы в мультиплеты, соответствующие неприводимым представлениям группы SU(2) (аналогично спину). Соответствующие новые квантовые числа I и I_3 называются *изоспином.*

Если бы группа $SU(2)_I$, описывающая изоспиновые мультиплеты частиц, была группой точной симметрии природы таким же образом как группа спина SU(2), то в соответствии с выводом в примере 1 должно было существовать правило суперотбора между состояниями с целыми и полуцелыми значениями I-спина. Так для сильных взаимодействий, которые не зависят от электрического заряда, $SU(2)_I$ является хорошей группой симметрии. Это означает, что нет *чистых* состояний вида $| I = 1 \rangle + | I = {}^1/_2 \rangle$

{например, $|\Sigma\rangle + |\Lambda\rangle$} [1]). Существуют, однако, чистые состояния вида $|I = {}^1/_2\rangle + |I = {}^1/_2\rangle$, например $|n\rangle + |p\rangle$, для одних только сильных взаимодействий. Но эти суперпозиции нарушают правило суперотбора для заряда (см. пример 3 ниже); следовательно, *для одних сильных взаимодействий* не существует правила суперотбора для заряда. В присутствии электромагнитных и слабых взаимодействий $SU(2)_I$ не является группой симметрии, но в этом случае правило суперотбора для заряда выполняется точно; теперь существует чистое состояние $|\Sigma^0\rangle + |\Lambda^0\rangle$, но не существует состояния $|n\rangle + |p\rangle$. Действительно, вращение из SU(2), переводя n в p, не оставляет систему без изменения, а соответствует процессу слабого взаимодействия: $n \to p + e + \bar{\nu}$.

Аналогично, если бы гипотетическое «сверхслабое взаимодействие» нарушало вращательную инвариантность, то мы могли бы иметь чистые состояния вида $|j = {}^1/_2\rangle + |j = 0\rangle$, например $|N\rangle + |\pi\rangle$.

Пример 3. *Правила суперотбора для калибровочных групп.* Два эквивалентных описания, получаемых одно из другого при помощи коммутативной однопараметрической непрерывной группы (не связанной очевидным образом с пространственно-временными преобразованиями) предполагают существование аддитивного квантового числа a, и собственные состояния преобразуются как

$$|q'\rangle = \exp(i\lambda q)\,|q\rangle.$$

Для двух состояний с различными значениями q, например $+1$ и -1, получаем две различные фазы $\exp(i\lambda)$ и $\exp(-i\lambda)$, следовательно правило суперотбора для q. *Физической* основой всех таких правил суперотбора, как, например, электрический заряд, барионное число, лептонное число, является, повторяем, требование, чтобы умножение всех состояний на $\exp(i\lambda q)$ не вызывало наблюдаемого изменения в системе, следовательно, эквивалентные описания и калибровочные группы.

Вместо чистых состояний можно образовать *смешанные* состояния из векторов различных когерентных подпространств. Однако мы здесь этим заниматься не будем.

Правила суперотбора в случае четности и других групповых расширений

Внутри когерентного подпространства четность каждого состояния (по отношению к одному из них) хорошо определена. Действительно, используем лучевые представления полной орто-

[1]) Через $|n\rangle$, $|p\rangle$, $|\Lambda\rangle$, $|\Sigma\rangle$, $|\pi\rangle$, ... обозначают состояния частиц с определенными значениями изотопического спина I, т. е. нейтрон, протон, λ-частицу сигма-частицу, пион и т. д.

гональной группы O(3), или полной группы Лоренца, включая отражения. В этом случае четность определяется либо в том же пространстве представления, что и SO(3) (или собственная однородная группа Лоренца), либо в удвоенном гильбертовом пространстве. Таким образом, относительные четности хорошо определены, например, для уровней атома водорода и для пары частица — античастица в теории Дирака. Однако для состояний в различных когерентных подпространствах относительная четность не определена, поскольку мы не можем взять линейную комбинацию двух таких состояний и увидеть, как она преобразуется относительно четности.

Аналогичные рассуждения применяются к другим групповым расширениям, например, при помощи зарядового сопряжения.

Расширение группы SU(2) изотопического спина посредством оператора отражения предполагает удвоение состояний с $I = n/2$, но не обязательно состояний с $I = n$ (n целое). Это расширение осуществляется посредством зарядового сопряжения C или изоспиновой четности $G = Ce^{i\pi}$, называемой также G-четностью (использование C или G соответственно отвечает в группе вращения для спина использованию оператора отражения Σ или четности P; G коммутирует со всеми изоспиновыми вращениями, так же как P коммутирует со всеми пространственными вращениями). G указывает нам, имеем ли мы дело с полярными или с аксиальными векторами в I-пространстве (например, π-мезон является полярным вектором). Таким образом, удвоение при помощи G приводит нас к античастицам. Следовательно, среди других имеем тот результат, что мультиплеты бозонов с $I = n/2$ не могут содержать античастицы; последние должны лежать в другой половине двойного пространства. В пределе точной $SU(2)_I$ относительная G-четность (изоспиновая четность) между мультиплетами $I = n/2$ и $I = n$ не определена; не определена она и между состояниями с различными зарядами или барионными числами. Но она определена, например, между ($I = 1$)-мультиплетом (π) и двумя ($I = 1/2$)-мультиплетами с $N = 0$ (например, $N\bar{N}$) (гл. 21, § 4).

Другой пример правила суперотбора — массовое правило суперотбора в нерелятивистской квантовой механике, см. в § 4.

§ 3. Симметрии физических систем

Понятие симметрии связано со следующими положениями, которые все являются различными выражениями одного и того же фундаментального явления.

1. Невозможно узнать или измерить некоторые величины, например абсолютные координаты, направления, абсолютное левое или правое.

2. Невозможно различить ситуации внутри класса, например две тождественные частицы.

3. Физические уравнения (или законы) не зависят от некоторых координат, например уравнения могут содержать только относительные координаты, не завися от абсолютных координат:

4. Инвариантность уравнений физики относительно некоторой группы преобразований, например вращательная инвариантность уравнений Ньютона для задачи Кеплера.

5. Существование некоторых неизменных величин, присущих системе, несмотря на постоянное изменение ее движения или состояния.

6. Эквивалентные описания одной и той же физической системы двумя наблюдателями, находящимися в различных состояниях.

Если мы имеем установленную теорию, мы можем точным образом изучить ее свойства симметрии. С другой стороны, поскольку симметрии и постоянные величины легче узнать, мы можем воспользоваться этими свойствами в качестве требований при установлении новых теорий физических явлений. Как появляются при рассмотрении симметрии физических систем представления групп?

Операция симметрии переводит одно состояние в другое возможное состояние, которое лежит в том же классе эквивалентности по отношению к группе симметрии G. Узнав соотношение эквивалентности между явлениями, мы можем классифицировать их на классы эквивалентности. Таким образом, объект $\check{G}$, дуальный к G, т. е. множество всех неприводимых представлений группы G, действительно нумерует различные физические объекты. Например, с точки зрения релятивистской инвариантности различными объектами являются возможные значения массы и спина.

А. *Геометрические принципы симметрии*

Геометрические инвариантные принципы относятся к описанию физических явлений в пространстве и во времени.

Событие — это точка P в пространственно-временном многообразии M с масштабом единиц λ в P (M, λ); т. е. мы производим *измерение* в пространственно-временной точке x в момент времени t и с масштабом $\lambda(t, x)$, например измерение координаты относительно начала координат при некотором выборе масштаба.

Многообразие может быть наделено структурой пространства Минковского в релятивистских теориях или же структурой пространства $R^1(t) \times R^3(x)$ в нерелятивистских теориях при фиксированном масштабе.

Наблюдатель — это локальная система координат (*карта*) на M. Пространственно-временной *интервал* — это безразмерное расстояние между двумя событиями, измеренное в некоторых единицах $\mathrm{d}l = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}x)^{1/2}\lambda$. В случае структуры Минковского расстояние задается при помощи индефинитного скалярного произведения $(x, x) = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$ по отношению к наблюдателю.

Эквивалентное описание другим наблюдателем соответствует, согласно принципу относительности, отображению пространственно-временного масштабного многообразия в себя же, сохраняющему интервал $\mathrm{d}l$. При фиксированном масштабе в пространстве Минковского группа преобразований, сохраняющих расстояние $\mathrm{d}(x, y) = (x - y, x - y)^{1/2}$, изоморфна полупрямому произведению $T^{3,1} \rtimes O(3, 1)$ группы трансляций и полной однородной группы преобразований Лоренца на пространстве Минковского M относительно естественного действия $O(3, 1)$ на M.

Частичное упорядочение событий может быть введено при помощи соотношения

$$x > y \quad \text{тогда и только тогда, когда } x^0 > y^0 \text{ и } (x - y, x - y) > 0, \tag{1}$$

т. е. событие x является «более поздним», чем событие y, и относительный вектор $(x - y)$ времениподобен. Преобразование в пространственно-временном многообразии φ: $M \to M$, для которого соотношение (1) означает

$$\varphi(x) > \varphi(y) \tag{2}$$

и наоборот, называется *причинным* автоморфизмом пространства-времени относительно локальной системы координат. Причинные автоморфизмы образуют группу (*группу причинности*). Справедлива следующая теорема.

Теорема 1 (Зееман). *При фиксированном масштабе единиц полной группой причинных автоморфизмов пространства Минковского является полупрямое произведение* $T^{3,1} \rtimes (\Lambda^{\uparrow} \times D)$, *где* $\Lambda^{\uparrow}$ — *группа ортохронных преобразований Лоренца, а* D — *группа дилатаций* $x \to \rho x$, $x \in M$, ρ *принадлежит мультипликативной группе отличных от нуля вещественных чисел.*

Укажем основные этапы доказательства. Если задан причинный автоморфизм $\varphi : M \to M$, оставляющий начало координат в M на месте (без потери общности), мы выбираем четыре линейно независимых светоподобных вектора l_i, $i = 1, 2, 3, 4$, в качестве базиса в M, т. е. $x = x^i l_i$ для всех $x \in M$. Пусть g — *линейное* отображение в M, заданное согласно $gx = x^i\varphi(l_i)$. Тогда можно доказать, что φ линейно, показав, что $\varphi = g$ по индукции на подпространствах M_i, натянутых на векторы l_j, $1 \leqslant j \leqslant i$, для каждого i. Тогда, поскольку φ сохраняет световой конус, отсюда следует, что φ принадлежит $T^{3,1} \rtimes (\Lambda^{\uparrow} \times D)$.

Замечание. Таким образом, группа причинных автоморфизмов пространства M изоморфна группе автоморфизмов алгебры Ли группы Пуанкаре. Последняя равна $T^{3,1} \rtimes (\Lambda\uparrow \times D)$ (упражнение 1.10.1.11). Другое доказательство теоремы Зеемана можно дать при помощи этого автоморфизма.

Полная релятивистская инвариантность предполагает *полную* неоднородную группу Лоренца и, таким образом, включает дискретные преобразования пространственного отражения, равно как и обращения времени. Связной компонентой единицы в неоднородной группе Лоренца является собственная ортохронная группа Лоренца $\Lambda_+^\uparrow$, где $+$ отвечает условию $\det \Lambda = +1$.

Согласно сказанному в § 2, нас интересуют проективные представления группы относительности либо представления расширенных групп. Односвязной накрывающей группой для $T^{3,1} \rtimes SO(3, 1)$ является группа $T^{3,1} \rtimes SL(2, C)$, называемая также *группой Пуанкаре.*

В нерелятивистских теориях полную неоднородную группу Лоренца заменяет полная *группа Галилея.* Последняя является *контракцией* группы Пуанкаре, как было показано в примере 3.4.2.

Если допустить изменение единиц измерения интервалов событий, а затем изменение единиц от точки к точке в пространстве-времени, то мы приходим к *группе конформных преобразований* пространства Минковского, которая, таким образом, содержит в дополнение к неоднородным преобразованиям Лоренца дилатации

$$D_1{:}\quad x'^{\mu} = \rho x^{\mu} \tag{3}$$

и специальные конформные преобразования обозначаемые согласно

$$\begin{aligned} C_4{:}\quad x'^{\mu} &= (x^{\mu} + c^{\mu} x^2)/\sigma(x), \\ \sigma(x) &= 1 + 2c^{\nu}x_{\nu} + c^2x^2. \end{aligned} \tag{4}$$

Преобразования (4) являются *нелинейными.* 15-параметрическая конформная группа реализуется нелинейным образом как группа преобразований в пространстве Минковского, хотя подгруппа Пуанкаре линейна. Благодаря изоморфизму между конформной группой и группой $O(4, 2)$ можно ввести шестимерное пространство и линейную реализацию в нем. Естественно поэтому использовать шестимерное многообразие в качестве базисного пространства-времени-масштаба для описания физических систем, причем две дополнительные координаты можно рассматривать как представляющие собой масштаб и изменение масштаба от точки к точке. Как таковое это пространство является наибольшей возможной геометрической структурой, а ее группой движений будет неоднородная конформная группа с накрывающей группой

$$T^{4,2} \rtimes SU(2, 2). \tag{5}$$

Группа (5) является, по-видимому, наибольшей *кинематической* группой (исключая искривленное пространство общей теории относительности). При $m = 0$ обычные волновые уравнения в точности инвариантны относительно (5) (§ 4). Мы увидим, однако, что в квантовой теории встречаются более широкие группы, но они представляют не геометрические симметрии, а динамику.

Представления групп геометрической симметрии

Согласно результатам § 2, нам нужны унитарные представления групп, накрывающих группы геометрической симметрии, а также унитарные представления большинства групп дискретной симметрии, за исключением тех, которые содержат операцию обращения времени T. Дискретные операции вводить лучше всего после того, как определены представления связной части групп Ли симметрии (например, группы Пуанкаре) (гл. 21, § 2).

Поскольку группы геометрической симметрии в общем случае некомпактны, пространство состояний квантовой теории, даже для одной частицы, бесконечномерно; в общем случае мы будем иметь прямой интеграл бесконечномерных представлений.

Мы уже отмечали, что элементы алгебры Ли группы симметрии имеют непосредственное физическое значение в том смысле, что мы приготавливаем квантовые системы таким образом, чтобы они первоначально были в собственных состояниях полного набора коммутирующих операторов, включая элементы подалгебры Картана и элементы из обертывающей алгебры. А эти операторы носят физические названия, например импульс, момент импульса, спин, спиральность и т. п. В квантовой теории мы фактически начнем с представлений алгебры Ли. Однако, как показывают многие результаты, физика в действительности использует глобальные представления группы, т. е. те представления алгебры Ли, которые являются интегрируемыми.

Мы знаем, что некоторые из генераторов некомпактных групп симметрии являются неограниченными и имеют непрерывные спектры. Поскольку мы хотим характеризовать физические состояния при помощи этих непрерывных собственных значений (вместо того, чтобы всегда пользоваться волновыми пакетами) и поскольку такие состояния лежат вне гильбертова пространства, мы видим, что удобнее основывать квантовую теорию на более общей схеме, чем та, которую дает гильбертово пространство. Использованию таких обобщенных собственных векторов, их нормировке при помощи δ-функций Дирака и т. п., в настоящее время придана математическая строгость благодаря использованию обобщенных функций и ядерной спектральной теории (приложение Б.3).

Представления дискретных операций геометрической симметрии, таких, как четность и обращение времени, приводят к понятию центральных расширений групп и представлениям расширенных групп (гл. 21, § 4).

Законы сохранения или постоянные движения тесно связаны с понятием симметрии. Физически важные величины, такие, как энергия, импульс, момент импульса, являются генераторами преобразований симметрии. В квантовой теории их собственные значения нумеруют представления групп симметрии, следовательно, характеризуют физические состояния.

Б. *Преобразования симметрии негеометрического происхождения*

Подобно преобразованиям геометрической симметрии преобразования негеометрической симметрии связаны с невозможностью провести некоторые абсолютные измерения:

а. Невозможность узнать абсолютное различие между тождественными частицами приводит к свойствам симметрии общей волновой функции системы N тождественных частиц. Группой симметрии здесь является группа перестановок S_N, а физическим требованием является требование, чтобы два состояния, отличающиеся в своем описании заменой тождественных частиц, представляли одинаковую физику и поэтому принадлежали пространству представления группы S_N. Из этой симметрии следует, например, что два электрона не могут быть одновременно в одном и том же квантовом состоянии. Следствия из перестановочной симметрии имеют силу динамических законов, так как, если бы мы не знали постулата неразличимости тождественных частиц, нам пришлось бы вводить фиктивные силы, действующие между электронами, не дающие им занимать одно и то же состояние. Это является наглядным примером того, как некоторая динамика лучше всего выражается на языке симметрии.

б. Невозможность узнать абсолютный *знак* электрического заряда во взаимодействиях совокупности заряженных частиц. Физические явления зависят только от относительных знаков зарядов; они не изменятся, если все заряды поменять на противоположные. Эта симметрия называется *зарядовым сопряжением*. Во взаимодействиях элементарных частиц мы должны интерпретировать эту симметрию более общим образом как *сопряжение частица—античастица;* при этом каждая частица, где бы она ни была, заменяется на ее античастицу, обладающую противоположными значениями *всех* аддитивных квантовых чисел.

в. Невозможность узнать относительные фазы между некоторыми состояниями. Из § 2 мы знаем, что абсолютные значения фаз состояния $\psi \in H$ несущественны. Здесь мы добавим, что даже *относительную* фазу иногда невозможно измерить. Мы уже подробно обсудили эту симметрию в § 2 под названием правил суперотбора. Как отмечено там, правила суперотбора связаны с абсолютными аддитивными квантовыми числами, такими, как заряд Q, барионное число B, лептонное число L (и $\tilde{L}$ — мюонное лептонное число). Все они в свою очередь могут быть представлены как генераторы однопараметрических групп преобразований (абелевых калибровочных групп).

В табл. 1 дана сводка принципов симметрии в физике. Группы приближенных симметрий и динамические группы рассматриваются в следующей главе.

Таблица 1

Физические симметрии и дииамические группы

	Сохраняющиеся генераторы или физический смысл
А. Группы геометрической симметрии	
Трансляции	P_μ
Вращения	J_i
Преобразования Лоренца или Галилея	N_i
Четность P	P
Обращение времени T	Антиунитарный оператор
Б. Группа масштабных преобразований	
Дилатации	D
Специальные конформные преобразования	K_μ
В. Негеометрические симметрии	
Тождественные частицы	Типы симметрии волновых функций
Калибровочные группы (неизмеримость относительных фаз)	Заряд Q Барионное число B Лептонные числа L
Сопряжение частица—античастица	C
Г. Общая ковариантность	Принцип эквивалентности Уравнения движения источников и полей
Д. Приближенные динамические симметрии, например SU(2), SU(3), SU(6), O(4)	Мультиплеты
Е. Динамические группы O(3, 1), O(4, 2)	Бесконечные мультиплеты
Ж. Группы диффеоморфизмов	
Бесконечнопараметрические группы	Геометризация динамик

§ 4. Динамические симметрии релятивистских и нерелятивистских систем [1])

Согасно нашему обсуждению в § 2, динамическая задача в квантовой теории сводится к явному построению конкретного линейного пространства, идентификации состояний и обозначению их при помощи физических наблюдаемых с целью вычисления вероят-

[1]) Подробный обзор по динамическим симметриям в физике можно найти в статье [885]. — *Прим. перев.*

ностей переходов. Кинематические симметрии, такие, как Пуанкаре- или конформная инвариантность, позволяют нам характеризовать эти состояния посредством глобальных квантовых чисел, например полного импульса и момента импульса. Следовательно, чтобы, с одной стороны, обеспечить релятивистскую инвариантность, а с другой — отчасти определить конкретное линейное пространство, следует всегда определить, какие классы представлений группы симметрии реализуются для заданной квантовой системы. Для нерелятивистских задач пуанкаре-инвариантность переходит в галилееву инвариантность (см. гл. 1, § 8 относительно контракции алгебры Ли группы Пуанкаре в галилееву алгебру Ли). Как мы увидим, однако, даже для нерелятивистских задач оказывается более удобным исходить из конформной инвариантности.

Начнем с 15-параметрической конформной группы пространства Минковского, изоморфной введенной в § 3 группе SO (4, 2).

Утверждение 1. *Базисные элементы алгебры Ли конформной группы в пространстве скалярных функций на пространстве Минковского представляются следующими дифференциальными операторами:*

$$\left.\begin{aligned} M_{\mu\nu} &= x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu, \\ P_\mu &= \partial_\mu, \\ K_\mu &= 2x_\mu x^\nu \partial_\nu - x^2 \partial_\mu, \\ D &= x^\nu \partial_\nu, \end{aligned}\right\} \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3, \tag{1}$$

где $M_{\mu\nu}$, P_μ — базисные элементы подалгебры Пуанкаре, K_μ — генераторы так называемых специальных конформных преобразований, а D генерирует дилатации.

Доказательство следует из определения конформной группы, которое дано в (3.3), (3.4).

Модификации для случаев спинорных или векторнозначных функций легко могут быть найдены (упражнение 4.1).

Замечание. Строго говоря, конформная группа не является хорошо определенной глобально в пространстве Минковского. Для правильного определения требуется компактифицированная форма пространства Минковского. Однако что касается свойств алгебры Ли, то для них пространство Минковского может использоваться без затруднений.

Коммутационные соотношения конформной алгебры Ли легко получаются из (1) и совпадают с коммутационными соотношениями алгебры Ли Пуанкаре плюс следующие дополнительные соотношения:

$$\begin{aligned} [M_{\mu\nu}, K_\lambda] &= g_{\nu\lambda} K_\mu - g_{\mu\lambda} K_\nu, \\ [M_{\mu\nu}, D] &= 0, \\ [P_\mu, K_\nu] &= 2(g_{\mu\nu} D - M_{\mu\nu}), \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} [P_\mu, D] &= P_\mu, \\ [K_\mu, K_\nu] &= 0, \\ [K_\mu, D] &= -K_\mu. \end{aligned} \tag{2}$$

Важное с физической точки зрения свойство конформной группы заключено в следующем наблюдении.

Утверждение 2. *Релятивистские волновые уравнения для безмассовых частиц спина 0 и спина ½ инвариантны относительно конформной группы пространства Минковского.*

Утверждение означает, что если

$$W\varphi = 0 \tag{3}$$

есть волновое уравнение, то генераторы L_i конформной алгебры Ли можно реализовать на пространстве решений таким образом, что, в общем случае

$$[W, L_i] = \lambda W. \tag{4}$$

Следовательно, L_i, действуя на пространстве решений волнового уравнения, переводит одно решение в другое.

Доказательство. Рассмотрим сначала уравнение для бесспиновой безмассовой частицы, т. е. обычное волновое уравнение

$$\Box\varphi \equiv \left(\partial_t^2 - \partial_i\partial_i\right)\varphi = 0. \tag{5}$$

Легко проверить, что для K_μ и D, заданных согласно (1), справедливо

$$\begin{aligned} [\Box, K_\mu] &= 4x_\mu\Box, \\ [\Box, D] &= 2\Box. \end{aligned} \tag{6}$$

Волновое уравнение для частиц спина ½ может быть рассмотрено аналогично (упражнение 6.4.2).

Утверждение 3. *Волновые уравнения для массивных частиц, например*

$$(\Box - m^2c^2/\hbar^2)\varphi = 0, \tag{7}$$

являются формально инвариантными относительно конформной группы при условии, что масса m преобразуется следующим образом:

относительно дилатаций

$$m^2 \to e^{2\alpha}m^2, \tag{8}$$

относительно специальных конформных преобразований

$$m^2 \to \sigma(x)^2 m^2, \quad \sigma(x) = 1 + 2c^\mu x_\mu + c^2x^2,$$

или же альтернативно, m^2 рассматривается как оператор, имеющий такие же коммутационные соотношения, как и $\Box$ в (6).

Доказательство проводится прямым вычислением и является непосредственным.

Замечание. Инвариантность в утверждении 3 не является симметрией в обычном смысле для отдельной заданной частицы массы m, поскольку она связывает состояния частиц массы m с состояниями другой частицы массы m'. Однако преобразования (8) имеют некоторые важные физические применения. Кроме того, если конформная симметрия интерпретируется как изменение масштаба (§ 3), соотношение (8) можно интерпретировать как изменение за счет размерности массы.

Рассмотрим теперь нерелятивистский предел волнового уравнения (7). В этом пределе энергия измеряется после исключения массы покоя. Следовательно, полагаем

$$\partial_0 \to mc + \frac{1}{c}\partial_t. \tag{9}$$

Тогда генераторы конформной группы принимают вид

$$\begin{aligned}
P_0 &= mc + \frac{1}{c}\partial_t, \\
P_i &= \partial_i \\
M_{ij} &= x_i\partial_j - x_j\partial_i, \\
M_{0i} &= c\,(t\partial_i - mx_i) - \frac{1}{c}x_i\partial_t, \\
D &= c^2mt + (t\partial_t - x_k\partial_k), \\
K_0 &= c^3mt^2 + c\,(t^2\partial_t - 2tx_k\partial_k + m\boldsymbol{x}^2) + \frac{1}{c}\boldsymbol{x}^2\partial_t, \\
K_i &= c^2(2x_imt - t^2\partial_i) + (2x_it\partial_t - 2x_ix_k\partial_k + \boldsymbol{x}^2\partial_i).
\end{aligned} \tag{10}$$

В то же время волновой оператор становится равным

$$\Box - m^2c^2 \to (2m\partial_t - \partial_i\partial_i) + \frac{1}{c^2}\partial_t\partial_t, \tag{11}$$

т. е. равным оператору Шредингера плюс добавочное слагаемое порядка $1/c^2$.

Утверждение 4. *Операторы*

$$\begin{aligned}
\overline{P}_0 &= \partial_t, \\
P_i &= \partial_i, \\
M_{ij} &= x_i\partial_j - x_j\partial_i, \\
\overline{M}_{0i} &= (t\partial_i - mx_i)
\end{aligned} \tag{12}$$

коммутируют с оператором Шредингера $S = (2m\partial_t - \partial_i\partial_i)$ *и генерируют алгебру Ли группы Галилея (гл. 1, § 8), за исключением следующего коммутатора*

$$[P_i, \overline{M}_{0j}] = -m\delta_{ij}, \qquad (13)$$

для которого правая часть равнялась нулю в чисто геометрическом определении группы Галилея.

Доказательство этого и последующих утверждений также проводится непосредственным вычислением и предоставляется читателю.

Отмеченное в утверждении 4 различие обусловлено заменой (9) и выражает тот факт, что масса m действительно является оператором, коммутирующим со всеми десятью генераторами группы Галилея. Таким образом, решения уравнения Шредингера реализуют несколько иное представление группы Галилея, а именно проективное представление, заданное при помощи (12). Эквивалентно мы может сказать, что соотношения (12) являются расширением галилеевой алгебры Ли, или ее квантовомеханическим представлением (гл. 21, § 4).

Действительно, при переходе к глобальной форме представления (12) мы получаем пример представления с точностью до множителя, обсуждавшийся в § 2, и пример правила суперотбора.

Правило суперотбора масс (Баргманн). *Для двух элементов группы Галилея*

$$g = (b, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}, R), \quad g' = (b', \boldsymbol{a}', \boldsymbol{v}', R')$$

мы имеем глобальное представление

$$U(g')\,U(g) = \omega(g', g)\,U(g'g), \qquad (14)$$

где фаза $\omega(g', g)$ *дана согласно*

$$\omega(g', g) = \exp\left[\mathrm{i}\,\frac{m}{2}(\boldsymbol{a}'\cdot R'\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}'\cdot R\boldsymbol{a} + b\boldsymbol{v}'\cdot R'\boldsymbol{v}\right]. \qquad (14')$$

Это правило суперотбора обусловлено тем, что следующий *тождественный* элемент группы

$$(0, 0, -\boldsymbol{v}, I)(0, -\boldsymbol{a}, 0, I)(0, 0, \boldsymbol{v}, 1)(0, \boldsymbol{a}, 0, I) = (0, 0, 0, I)$$

представляется не посредством $U = I$, а фазовым множителем

$$\exp(-\mathrm{i}m\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v}). \qquad (15)$$

Следовательно, суперпозиция двух состояний с различными массами m_1 и m_2 преобразуется в

$$\psi(m_1) + \psi(m_2) \to \exp(-\mathrm{i}m_1\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v})\,\psi(m_1) + \exp(-\mathrm{i}m_2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v})\,\psi(m_2). \qquad (16)$$

Это означает, что относительная фаза ненаблюдаема, а следовательно, в соответствии с нашим общим рассмотрением суперпозиция $|m_1\rangle + |m_2\rangle$ не является реализуемым состоянием.

Утверждение 5. *Оператор Шредингера* $S = (2m\partial_t - \partial_i\partial_i$ *инвариантен также относительно модифицированного оператора дилатации* $\tilde{D}$ *и модифицированного специального конформного преобразования с генератором* $\tilde{K}_0$ (17), *которые вместе с галилеевой алгеброй Ли образуют 12-параметрическую алгебру Ли, называемую алгеброй Ли Шредингера.*

Модификация нужна, поскольку, как мы видели, операторы D и K_0 как инвариантные операторы волнового оператора ($\Box$ — — m^2c^2) преобразуют также массу m. Но в оператор Шредингера $(2m\partial_t - \partial_i\partial_i)$ масса m входит как множитель перед ∂_t. Следовательно, если мы желаем определить инвариантность оператора Шредингера при фиксированной m, мы может перенести свойство трансформации m на ∂_t или на $\partial_i\partial_i$. Этот процесс немедленно дает следующие выражения для модифицированных генераторов:

$$\begin{aligned}\tilde{D} &= 2t\partial_t + x_k\partial_k + 3/2,\\ \tilde{K}_0 &= t^2\partial_t + tx_k\partial_k + \frac{3}{2}t - \frac{m}{2}x^2.\end{aligned} \tag{17}$$

Утверждение 6. *Генераторы группы Шредингера в импульсном пространстве* (в картине Шредингера квантовой механики) представляются в виде

$$\begin{aligned}H_0 &= \frac{1}{2m}p^2,\\ \boldsymbol{P} &= \boldsymbol{p},\\ \boldsymbol{J} &= \boldsymbol{q}\times\boldsymbol{p},\\ \boldsymbol{M} &= -t\boldsymbol{p} + m\boldsymbol{q},\\ \tilde{D} &= \frac{t}{m}\boldsymbol{p}^2 + \frac{1}{2}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q} + \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{p}),\\ \tilde{K}_0 &= -\frac{t^2}{2m}\boldsymbol{p}^2 + \frac{1}{2}t(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q} + \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{p}) - \frac{m}{2}\boldsymbol{q}^2.\end{aligned} \tag{18}$$

Утверждение 7. *Все генераторы в предыдущем утверждении, включая и зависящие от времени, удовлетворяют уравнению*

$$[H_0, L_A] + \frac{\partial L_A}{\partial t} \equiv \dot{L}_A = 0, \tag{19}$$

а явная зависимость их от времени дается согласно

$$L_A(t) = \exp(-\mathrm{i}tH_0)\,L_A(0)\exp(\mathrm{i}tH_0). \tag{20}$$

В частности, не зависящие от времени генераторы коммутируют с гамильтонианом и генерируют то, что принято называть группой вырождения гамильтониана. Все операторы, удовлетворяющие (19), генерируют группу симметрии в широком смысле, но не гамильтониана, а зависящего от времени оператора $(i\partial_t - H)$, следовательно, и *самой* квантовомеханической системы.

Утверждение 8. *Группа Шредингера содержит в качестве подгруппы динамическую группу* SU (1, 1), *порождаемую посредством* $\tilde{D}$, $\tilde{K}_0$, H, *или*

$$L_1(t) = \frac{1}{2}(\tilde{K}_0 + H_0),$$
$$L_2(t) = -\frac{1}{2}D, \tag{21}$$
$$L_3(t) = -\frac{1}{2}(\tilde{K}_0 - H_0).$$

Здесь L_3 — *компактный генератор группы* SU (1, 1) *с дискретным спектром.*

В частности, алгеброй при $t=0$ *является*

$$L_1(0) = \frac{1}{2}\left(\frac{p^2}{2m} - \frac{m}{2}q^2\right),$$
$$L_2(0) = -\frac{1}{2}(p\cdot q + q\cdot p), \tag{22}$$
$$L_3(0) = -\frac{1}{2}\left(\frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2}q^2\right).$$

Утверждение 9. *Алгебра Ли* (22) *утверждения 8 решает динамическую задачу для трехмерного квантового осциллятора с гамильтонианом*

$$H = \frac{p^2}{2m} + \lambda q^2 \tag{23}$$

и для свободной частицы с гамильтонианом $H = L_1 - L_3 = \dfrac{p^2}{2m}$.

Доказательство состоит в наблюдении, что в подходящих единицах гамильтониан (23) совпадает с компактным генератором алгебры su (1, 1) (22). Оператор Казимира

$$C_2 = L_3^2 - L_1^2 - L_2^2$$

может быть вычислен в представлении (22):

$$C_2 = \frac{1}{4}(\boldsymbol{q} \times \boldsymbol{p}) - \frac{3}{16}.$$

Таким образом, мы знаем представление алгебры Ли и, значит, спектр оператора H, а также состояния осциллятора.

Замечание. Отметим, что свободная частица и квантовомеханический осциллятор реализуются на одном и том же пространстве представления группы SU (1, 1). Различие в том, что собственные состояния энергии получаются при помощи диагонализации компактного генератора L_3 в случае осциллятора и некомпактного генератора (L_1 — L_3) в случае свободной частицы. Последний оператор имеет, конечно же, непрерывный спектр. Но даже для свободной частицы существует оператор с дискретным спектром. Этот факт иллюстрирует важный момент в квантовой теории: в квантовой теории существенна физическая идентификация элементов алгебры Ли; мы используем не абстрактные группы, но предпочтительно группы с определенными идентификациями.

§ 5. Комментарии и дополнения

Исторические замечания

Квантовая теория, разработанная Гейзенбергом, Шредингером, Дираком, Паули, Борном, Йорданом и другими, своей первой математической формулировкой обязана фон Нейману, который дал аксиоматическую формулировку гильбертова пространства и доказал единственность и эквивалентность формализмов Гейзенберга и Шредингера. Эта эквивалентность была доказана также Паули и Ланчосом. Начало применению представлений групп в квантовой теории положил Вигнер. Формулировка релятивистской инвариантности в квантовой теории принадлежит Дираку и Вигнеру; последний впервые провел полное рассмотрение представлений группы Пуанкаре [852]. Теоретико-групповое обсуждение волновых уравнений принадлежит Баргманну и Вигнеру [45] (гл. 16—21).

Понятие правил суперотбора было введено Виком, Вайтманом и Вигнером [847]. Представления групп симметрии унитарными или антиунитарными операторами в гильбертовом пространстве (теорема Вигнера) были разработаны Вигнером, Баргманном [41], а также в более общем виде в работах Эмха и Пиррона [249] и Ульхорна [815].

Инвариантность классических уравнений Максвелла относительно конформной группы восходит к Бейтмену [98] и Каннингэму [201]. Теория конформно инвариантных волновых уравнений восходит к Дираку [210]. Динамические группы были введены Барутом [46].

§ 6. Упражнения

§ 3.1. Покажите, что дилатации и нелинейные специальные конформные преобразования (3.3), (3.4) могут быть записаны в виде линейных преобразований в шестимерном пространстве

$$D_1: \quad \eta'^{\mu} = \eta^{\mu}, \quad k' = \rho^{-1}k, \quad \lambda' = \rho\lambda,$$

$$C_4: \quad \eta'^{\mu} = \eta^{\mu} + c^{\mu}\lambda,$$

$$k' = -2c_{\nu}\eta^{\nu} + k + c^2\lambda,$$

$$\lambda' = \lambda,$$

где $\eta^\mu = kx^\mu$, k и $\lambda = kx^2$ взяты в качестве шести новых координат.

§ 3.2. Покажите, что уравнения Максвелла

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E}(x) = \rho(x),$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{H}(x) = 0,$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H}(x) - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}(x)}{\partial t} = \frac{1}{c}\rho(x)\boldsymbol{u}(x) = \frac{1}{c}\boldsymbol{j}(x),$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E}(x) + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}(x)}{\partial t} = 0,$$

где $x = (t, \boldsymbol{x})$, не являются инвариантными относительно преобразований Галилея

$$t' = t,$$

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} - vt.$$

§ 3.3. Покажите, что в пространстве Минковского M^2 (с одной пространственной и одной временной размерностями) группа причинности гораздо шире, чем $T^{1,1} \rtimes (SO(1, 1) \otimes D)$. В частности, разрешены нелинейные преобразования, отображающие прямые линии пространства-времени в кривые линии.

§ 3.4. На пространстве Минковского M^4 определим соотношение xLy, если $(x - y)$ — ориентированный светоподобный вектор: $x^0 > y^0$, $(x - y)^2 = 0$. Пусть φ: $M \to M$ — взаимно-однозначное отображение. Покажите, что φ сохраняет частичное упорядочение $x > y$ тогда и только тогда, когда оно сохраняет соотношение xLy. Заметим, что соотношение xLy не является частичным упорядочением, так как оно не транзитивно. Покажите также, что причинный автоморфизм отображает световые лучи в световые лучи.

§ 4.1. Покажите, что для частицы Дирака генераторы конформной группы [соответствующие формулам (4.1)] равны

$$M_{\mu\nu} = \overset{\circ}{M}_{\mu\nu} + \frac{i}{2}\gamma_\mu\gamma_\nu, \quad \mu < \nu,$$

$$P_\mu = \overset{\circ}{P}_\mu - \frac{1}{2}\gamma_\mu(1 + \gamma_5),$$

$$K_\mu = \overset{\circ}{K}_\mu - \frac{1}{2}\gamma_\mu(1 - \gamma_5),$$

$$D = \overset{\circ}{D} - \frac{1}{2}\gamma_5,$$

где $\overset{\circ}{M}_{\mu\nu}$, $\overset{\circ}{P}$, ... заданы в (4.1).

§ 4.2. Волновой оператор для безмассовой частицы Дирака равен $\gamma^\mu\partial_\mu$. Покажите, что волновое уравнение $\gamma^\mu\partial_\mu\psi = 0$ инвариантно относительно конформных преобразований в смысле равенства (4.4), пользуясь представлением, которое дано в предыдущем упражнении.

§ 4.3. Рассмотрите конформную группу в двумерном пространстве-времени M^2.

§ 4.4. Покажите конформную инвариантность безмассовых волновых уравнений для спина 1, фактически всех безмассовых волновых уравнений.

§ 4.5. Пусть M^n, $n = 2, 3, \ldots$ — пространство Минковского. Покажите, что конформная инвариантность сводит член взаимодействия $F(\varphi)$ нелинейного релятивистского уравнения

$$\Box\varphi = F(\varphi)$$

к виду $F(\varphi) = \lambda\varphi^{(n+2)/(n-2)}$. Отметим, что получаемое в итоге взаимодействие является на вторично квантованном уровне перенормируемым, но не суперперенормируемым.

§ 4.6. Выведите аналогичный результат для нелинейного уравнения Дирака

$$\partial_\mu\gamma^\mu\psi = F(\bar{\psi}, \psi).$$

Глава 14

Гармонический анализ на группах Ли. Специальные функции и представления групп

Кроме существенной роли теории представлений групп в формулировке основных уравнений физики следует упомянуть также важный метод *гармонического анализа* в решении динамических задач.

Во многих физических задачах мы имеем дело с функциями на однородных или симметрических пространствах, в частности на групповых пространствах. Например, функции на так называемом массовом гиперболоиде в импульсном пространстве $\varphi(p_\mu)$, $p_\mu^2 = m^2$. Аргументом в этом случае является элемент однородного пространства SO (3, 1)/SO (3). Эти функции могут быть разложены по множеству собственных функций операторов Казимира. Такие разложения очень важны и имеют физическую интерпретацию. Они также составляют основу для аппроксимаций, если в подходящих случаях важны только несколько членов разложения. Разложения в терминах специальных функций математической физики могут быть переформулированы в терминах гармонического анализа на однородных пространствах. Эти задачи подробно рассматриваются в гл. 14 и 15.

Пусть G — унимодулярная группа Ли с мерой Хаара μ, и пусть $H = L^2(G, \mu)$. Мы ограничиваем наш анализ только группами типа I. Основной целью гармонического анализа на H является решение следующих задач.

1. Определение базиса[1] $\{e_k(\lambda, g)\}$ в H и плотного подпространства $\Phi \subset H$, такого, что если обобщенное преобразование Фурье функции $\varphi \in \Phi$ задается формулой

$$\hat{\varphi}_k(\lambda) = (\varphi, e_k(\lambda)), \tag{1}$$

то формула спектрального синтеза для φ имеет вид

$$\varphi(g) = \int\limits_{\Lambda} d\rho(\lambda) \sum_k \hat{\varphi}_k(\lambda)\, e_k(\lambda, g). \tag{2}$$

[1]) Мы предполагаем, что индекс λ соответствует множеству собственных значений инвариантных операторов группы G, а k соответствует множеству собственных значений остальных операторов, которые вместе с инвариантными операторами образуют максимальное множество коммутирующих операторов в H. Для удобства мы используем это обозначение, как если бы $\{\lambda\}$ было непрерывным множеством, а $\{k\}$ — дискретным. Однако в общем случае оба множества могут быть дискретными, непрерывными или смешанными.

2. Установление равенства Планшереля [1])

$$(\varphi, \psi) = \int\limits_{\Lambda} d\rho(\lambda) \sum_{k} \hat{\varphi}_k(\lambda) \overline{\hat{\psi}_k(\lambda)}. \tag{3}$$

3. Явное построение меры $d\rho(\lambda)$ (меры Планшереля).

Основная трудность в гармоническом анализе на группах Ли связана с тем фактом, что в большинстве случаев максимальное множество коммутирующих операторов в H, которое определяет базис $e_k(\lambda, g)$, содержит неограниченные операторы с непрерывными спектрами, и поэтому собственные векторы $e_k(\lambda, g)$ являются распределениями. Следовательно, чтобы дать подходящую интерпретацию функциям $e_k(\lambda, g)$ и разложению (2) по собственным функциям, нужно использовать так называемый *триплет Гельфанда* $\Phi \subset H \subset \Phi'$, а не гильбертово пространство H. В этом триплете Φ — определенное ядерное пространство гладких функций, плотное в H, а Φ' — дуальное пространство к Φ. Следовательно, естественная формулировка гармонического анализа на группах Ли состоит в использовании ядерной спектральной теории. Эта теория позволяет ясно и изящно формулировать гармонический анализ на группах. В то же время теория дает обобщение классического анализа Фурье, и полезна для приложений в квантовой физике, где понятия собственных функций и разложений по собственным функциям играют центральную роль.

§ 1. Гармонический анализ на абелевых и компактных группах Ли

Дадим сначала распространение обычного анализа Фурье на R^n на произвольную абелеву группу Ли.

Теорема 1. *Пусть G — произвольная абелева группа Ли, и пусть $H = L^2(G, \mu)$, где μ — мера Хаара на G. Пусть $g \to T_g$ — регулярное представление группы G в H, заданное формулой*

$$T_g u(\tilde{g}) = u(\tilde{g} + g). \tag{1}$$

Тогда

1. *Существует обобщенное преобразование Фурье, такое, что*

$$\begin{aligned} F:\quad & H \to FH \equiv \hat{H} = \int\limits_{\Lambda} \hat{H}(\lambda)\, d\rho(\lambda), \\ F:\quad & T_g \to FT_gF^{-1} \equiv \hat{T}_g = \int\limits_{\Lambda} \hat{T}_g(\lambda)\, d\rho(\lambda), \end{aligned} \tag{2}$$

---

[1]) Мы следуем соглашению, принятому в математической литературе, и обозначаем скалярное произведение так, что оно линейно по первому множителю и антилинейно по второму.

где $\hat{H}(\lambda)$ *и* $\hat{T}_g(\lambda)$ относительно ρ *почти всюду неприводимы и* $\dim \hat{H}(\lambda) = 1$. *Спектр* Λ *совпадает с группой характеров* $\hat{G}$ *для* G.

2. *Существует триплет Гельфанда* $\Phi \subset H \subset \Phi'$ *и базис* $e(\lambda, g)$ *в* $\hat{H}(\lambda)$, *такие, что для каждого элемента* X *из обертывающей алгебры* E *для почти всех* λ *относительно* ρ *имеем* [1])

$$\langle \overline{T(X)}\varphi, e(\lambda)\rangle = \hat{X}(\lambda)\langle \varphi, e(\lambda)\rangle, \tag{3}$$

где $\hat{X}(\lambda)$ — *вещественное число. Базисные элементы* $e(\lambda, g)$ *являются регулярными функциями на* G.

3. *Формула спектрального синтеза имеет вид*

$$\varphi(g) = \int d\rho(\lambda)\,\hat{\varphi}(\lambda)\,e(\lambda, g), \quad \varphi \in \Phi, \tag{4}$$

где

$$\hat{\varphi}(\lambda) = \int \varphi(g)\,\overline{e(\lambda, g)}\,d\mu(g), \quad \hat{\varphi}(\lambda) \in \hat{H}(\lambda). \tag{5}$$

4. *Для* $\varphi, \psi \in \Phi$ *равенство Планшереля имеет вид*

$$\int_G \varphi(g)\,\overline{\psi(g)}\,d\mu(g) = \int_\Lambda \hat{\varphi}(\lambda)\,\overline{\hat{\psi}(\lambda)}\,d\rho(\lambda). \tag{6}$$

Доказательство. 1. Абелева группа Ли принадлежит к типу I. Поэтому разложение (2) следует из теоремы 5.6.3. В силу утверждения 6.1.1 каждая неприводимая компонента $\hat{T}_g(\lambda)$ одномерна.

2—4. Пусть $D_G \subset H$ — область Гординга для обертывающей алгебры E группы G. Поскольку эллиптический оператор $T(\Delta) = \sum_{i=1}^{\dim G} T(X_i)^2$ коммутирует со всеми элементами $T(X)$, $X \in E$, то в силу теоремы 11.2.3 замыкание $\overline{T(X)}$ представителя $T(X)$ симметрического элемента $X^+ = X \in E$ является самосопряженным оператором. В силу теоремы 11.5.3 все операторы $\overline{T(X)}$, $X \in E$, попарно коммутируют и также коммутируют со всеми T_g, $g \in G$. Пусть $\{X_i\}_{i=1}^{\dim G}$ — базис в алгебре Ли L группы G. Тогда самосопряженные операторы $\overline{T(X_i)}$ дают максимальное множество коммутирующих операторов в H и эллиптический оператор Нельсона $T(\Delta)$ также диагонален. Следовательно, все утверждения из 2—4 следуют из ядерной спектральной теоремы.

Мера $d\rho(\lambda)$ на спектральном множестве $\Lambda = G$ в (2) называется *мерой Планшереля*.

---

[1]) Определение триплета Гельфанда, формулировку ядерной спектральной теоремы и обозначения см. в приложении Б.3.

Замечание 1. В силу формулы (27) приложения Б. 3 формула (3) может быть записана в виде

$$\overline{T(X)'}\, e(\lambda, g) = \hat{X}(\lambda)\, e(\lambda, g), \quad X \in L, \tag{7}$$

где $\overline{T(X)'}$ — расширение оператора $\overline{T(X)}$, полученное расширением области определения $D(\overline{T(X)})$ теми элементами φ' из Φ', для которых выполняется равенство

$$\langle \overline{T(X)}\varphi, \varphi' \rangle = \langle \varphi, \overline{T(X)'}\varphi' \rangle, \quad \varphi \in \Phi, \quad \varphi' \in \Phi'. \tag{8}$$

Замечание 2. Так как мера Планшереля на спектральном множестве $\Lambda = \hat{G}$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега $d\lambda$ (т. е. $d\rho(\lambda) = \rho(\lambda)\, d\lambda$, $\rho(\lambda)$ непрерывна на Λ), то в силу формулы (29) приложения Б. 3 получаем следующее соотношение ортогональности для обобщенных собственных векторов:

$$\int_G e(\lambda, g)\, \overline{e(\lambda', g)}\, d\mu(g) = \rho^{-1}(\lambda)\, \delta(\lambda - \lambda'). \tag{9}$$

Это обобщение хорошо известного соотношения ортогональности в обычном анализе Фурье на R^n:

$$\int_{R^n} \exp(i\lambda x)\, \overline{\exp(i\lambda' x)}\, d^n x = (2\pi)^n\, \delta^{(n)}(\lambda - \lambda'). \tag{10}$$

В обоих случаях эти интегралы понимаются как слабые интегралы от регулярных распределений $e(\lambda, g)\, \overline{e(\lambda', g)}$ на G.

Таким образом, мы видим, что ядерная спектральная теорема дает прямое распространение гармонического анализа на R^n на произвольные абелевы группы Ли.

В случае компактных групп гармонический анализ в гильбертовом пространстве $H = L^2(G, \mu)$, где μ — нормированная мера Хаара на G, по существу дается теоремой Петера—Вейля 7.2.1, которая утверждает, что произвольная функция $u(g) \in H$ может быть представлена в виде

$$u(g) = \sum_{\lambda, p, q} \hat{u}_{pq}(\lambda)\, D^{\lambda}_{pq}(g), \tag{11}$$

где $\Lambda = \{\lambda\}$ — дуальный объект $\hat{G}$ к G, а $D^{\lambda}_{pq}(g)$ — матричные элементы неприводимого представления T^{λ} группы G. Обобщенное преобразование Фурье $\hat{u}_{pq}(\lambda)$ функции $u \in H$ задается формулой (7.2.6):

$$\hat{u}_{pq}(\lambda) = d^{\lambda} \int_G u(g)\, \overline{D^{\lambda}_{pq}(g)}\, d\mu(g), \tag{12}$$

где d^λ — размерность представления T^λ группы G. Матричные элементы $D^\lambda_{pq}(g)$ удовлетворяют следующим соотношениям ортогональности и полноты:

$$\int_G D^\lambda_{pq}(g)\overline{D^{\lambda'}_{p'q'}(g)}\,d\mu(g) = \frac{1}{d^\lambda}\delta^{\lambda\lambda'}\delta_{pp'}\delta_{qq'}, \tag{13}$$

$$\sum_{\lambda,\,p,\,q} d^\lambda D^\lambda_{pq}(g)\overline{D^\lambda_{pq}(g)} = \delta(g-g') \tag{14}$$

[см. формулы (7.1.9) и (7.2.20)].

§ 2. Гармонический анализ на унимодулярных группах Ли

Простота гармонического анализа на компактных группах связана с тем фактом, что коммутант T' произвольного представления T группы G порождается компактным самосопряженным оператором K_u, заданным формулой (7.1.4). Поскольку каждый компактный оператор имеет только дискретный спектр, разложение произвольной функции дается в виде дискретной суммы (1.11). В дополнение базисные функции $D^\lambda_{pq}(g)$, которые дают разложение произвольной функции $u \in L^2(G, \mu)$, были матричными элементами неприводимых представлений T^λ группы G и удовлетворяли соотношениям ортогональности и полноты (1.13) и (1.14).

В случае произвольной группы Ли коммутант T' регулярного представления T группы G может содержать операторы с непрерывными спектрами. Поэтому в общем случае получаем разложение в прямой интеграл как представлений в $H = L^2(G, \mu)$, так и функций $u \in H$. Это типичная особенность некомпактных групп. Кроме того, соотношения ортогональности и полноты (1.13) и (1.14) имеют место только в частных случаях и нуждаются в дополнительной интерпретации как произведения распределений. Поскольку собственные функции операторов с непрерывными спектрами являются не элементами из $L^2(G, \mu)$, а лишь линейными функционалами на плотном множестве $\Phi \subset H$ гладких функций, мы имеем дело с триплетом $\Phi \subset H \subset \Phi'$, а не с одним пространством $H = L^2(G, \mu)$. Изящный и эффективный формализм для рассмотрения непрерывных спектров самосопряженных операторов дается ядерной спектральной теорией, представленной в приложении Б.1. Эта теория дает удовлетворительную формулировку для распространения гармонического анализа от абелевых и компактных групп до случая некомпактных групп Ли.

Пусть G — унимодулярная группа Ли. Дадим сначала описание инвариантных операторов, которые порождают центр коммутанта T' регулярного представления T в гильбертовом пространстве $H = L^2(G, \mu)$.

Пусть $g \to T_g^L$ и $g \to T_g^R$ — левое и правое регулярные представления группы G в H, т. е.

$$T_g^L u(\tilde{g}) = u(g^{-1}\tilde{g}), \quad T_g^R u(\tilde{g}) = u(\tilde{g}g), \quad u \in H. \tag{1}$$

Обозначим через $\mathcal{R}_L$ (или $\mathcal{R}_R$) замыкание в слабой операторной топологии пространства $L(H)$ множества всех линейных комбинаций операторов T_g^L (или T_g^R). Тогда в силу теоремы Сигала 9.6.3 имеем

$$\mathcal{R}_L' = \mathcal{R}_R, \quad \mathcal{R}_R' = \mathcal{R}_L \tag{2}$$

и

$$(\mathcal{R}_L \cup \mathcal{R}_R)' = \mathcal{R}_L' \cap \mathcal{R}_R', \tag{3}$$

т. е. коммутант алгебры $\mathcal{R}_L \cup \mathcal{R}_R$ является пересечением центра алгебры $\mathcal{R}_L'$ и центра алгебры $\mathcal{R}_R'$. Теорема Сигала показывает тот важный факт, что в пространстве $L^2(G, \mu)$ мы не имеем других инвариантных операторов, кроме тех, которые сопоставляются с алгеброй спектральных разложений двусторонних инвариантных операторов.

Чтобы определить обобщенное разложение Фурье для некомпактных групп по аналогии с компактным случаем, введем дополнительное множество неинвариантных операторов в пространстве представления H. Чтобы сделать это, построим сначала область Гординга D_G для элементов обертывающих алгебр E^L и E^R группы G.

Пусть $\{g_1, g_2\} \to T_{\{g_1, g_2\}}$ — унитарное представление группы $G \times G$ в $H = L^2(G, \mu)$, заданное формулой

$$T_{\{g_1, g_2\}} u(g) = u(g_1^{-1} g g_2). \tag{4}$$

Очевидно, что $T_g^L = T_{\{g, e\}}$ и $T_g^R = T_{\{e, g\}}$. (5)

Область Гординга D_G, соответствующая представлению $T_{\{g_1, g_2\}}$, состоит из элементов $u(\varphi)$, $\varphi \in C_0^\infty(G \times G)$, вида

$$u(\varphi) = \int\limits_{G \times G} \varphi(g_1, g_2) T_{\{g_1, g_2\}} u \, d\mu(g_1) \, d\mu(g_2), \quad u \in H. \tag{6}$$

Она дает общую плотную линейную инвариантную область определения для всех операторов в обертывающей алгебре для $G \times G$. Таким образом, в силу (4) она дает также общую плотную линейную инвариантную область определения для левоинвариантной и правоинвариантной обертывающих алгебр E^L и E^R для G.

Пусть $\{A_j\}_{j=1}^m$ — максимальное множество самосопряженных попарно коммутирующих операторов в правоинвариантной обертывающей алгебре E^L группы G. Ясно, что все операторы A_j коммутируют с двусторонне инвариантными операторами C_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Пусть $\{B_k\}_{k=1}^m$ — соответствующее максимальное множество самосопряженных попарно коммутирующих операторов в левоинвариантной обертывающей алгебре E^R группы G. Операторы B_k коммутируют как со всеми C_i, так и со всеми A_j. Ясно, что мы можем выбрать операторы B_k таким образом, что алгебраическая форма операторов B_k будет такая же, как и операторов A_k, $k = 1, 2, \ldots, m$. Тогда B_k и A_k связаны унитарным преобразованием. В самом деле, пусть J обозначает инволютивный оператор в H, определенный формулой

$$(Ju)(g) \equiv u(g^{-1}). \tag{7}$$

Этот оператор унитарен в силу инвариантности меры Хаара. Более того,

$$JT_g^L J^{-1} = T_g^R. \tag{8}$$

Из соотношения (8) следует, что

$$JX_i J^{-1} = Y_i, \tag{9}$$

где X_i и Y_i — генераторы однопараметрических подгрупп $T^L_{g(t_i)}$ и $T^R_{g(t_i)}$ соответственно. Далее, если

$$M^R \equiv \sum a_{\alpha_1 \ldots \alpha_k} X_{\alpha_1} \ldots X_{\alpha_k} \in E^R$$

и

$$M^L \equiv \sum a_{\alpha_1 \ldots \alpha_k} Y_{\alpha_1} \ldots Y_{\alpha_k} \in E^L,$$

то мы имеем также

$$JM^L J^{-1} = M^R. \tag{10}$$

Это равенство предполагает, что спектр p_i оператора A_i и спектр q_i соответствующего оператора B_i совпадают. Следовательно, области значений множества $p = \{p_1, \ldots, p_{l(s)}\}$ и множества $q = \{q_1, \ldots, q_{l(s)}\}$ совпадают. Кроме того, если операторы A_j связаны с компактными подгруппами группы G, то все индексы p и q дискретны.

Множества $\{A_j\}_1^m$ и $\{B_k\}_1^m$ могут часто сопоставляться с определенной последовательностью следующих одна за другой максимальных подгрупп в G. Например, если $G = SO(p, 1)$, то множества $\{A_j\}_1^m$ и $\{B_k\}_1^m$ могут сопоставляться с множеством операторов Казимира последовательных максимальных подгрупп $SO(p) \supset SO(p-1) \supset \ldots \supset SO(2)$. Если мы добавим к нашей системе коммутирующих операторов $C_2(SO(p, 1))$ и $C_2(SO(p))$, то в силу следствия 2 теоремы 11.2.3 замыкания всех операторов $\{C_i\}_1^{[p/2]}$, $\{A_j\}_1^m$ и $\{B_k\}_1^m$ самосопряжены.

Поскольку в дополнение к множеству $\{C_i\}_1^n$ двусторонне инвариантных операторов мы имеем два множества операторов $\{A_j\}_1^m$ и $\{B_k\}_1^m$, обозначим собственные векторы символом $e_{pq}(\lambda, g)$, где мультииндекс $\lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ соответствует спектру двусторонне инвариантных операторов, мультииндекс $p = \{p_1, \ldots, p_m\}$

— множеству собственных значений операторов $A_1, \ldots, A_m$, а $q = \{q_1, \ldots, q_m\}$ — множеству собственных значений операторов $B_1, \ldots, B_m$. Например, в случае группы $G = \mathrm{SL}(2, C)$ мы могли бы взять $G_1 = \mathrm{SU}(2)$, $G_2 = U(1)$. В этом случае $\lambda = (\rho, m)$ — собственные значения двусторонне инвариантных операторов C_2 и C_2' группы $\mathrm{SL}(2, C)$, $p = \{J, M\}$ и $q = \{J', M'\}$.

В дальнейшем ради простоты мы используем обозначения непрерывной прямой суммы для разложения в прямой интеграл, соответствующего инвариантным операторам $\overline{C}_i$, и прямой суммы для разложений, соответствующих операторам A_i и B_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, хотя в общем случае эти операторы могут иметь непрерывный, дискретный или смешанный спектры.

Следующая теорема представляет собой обобщение теоремы Петера—Вейля для некомпактных групп.

Теорема 1. *Пусть G — унимодулярная группа Ли, $H = L^2(G, \mu)$, и пусть $g \to T_g$ — регулярное представление группы G в H, заданное формулой (4). Пусть $\{C_i\}_1^n$ — максимальное множество алгебраически независимых «+»-симметрических двусторонне инвариантных операторов в центре Z обертывающей алгебры E, а $\{A_i\}_1^m$ и $\{B_i\}_1^m$ — максимальные множества правоинвариантных и левоинвариантных соответственно самосопряженных коммутирующих операторов в $E^L \oplus E^R$. Тогда*

1. *Существует разложение в прямой интеграл*

$$H \to \hat{H} = \int_\Lambda \hat{H}(\lambda)\, d\rho(\lambda), \quad T_g \to \hat{T}_g = \int_\Lambda \hat{T}_g(\lambda)\, d\rho(\lambda) \tag{11}$$

пространства H и представления T_g, такое, что $(\hat{H}(\lambda), \hat{T}_g(\lambda))$ относительно ρ почти всюду неприводимо.

2. *Существует триплет Гельфанда $\Phi \supset H \supset \Phi'$ и базис $e_{pq}(\lambda, g)$ в $H(\lambda)$, такие, что для $\varphi \in \Phi$ имеем*

$$\langle C_i\varphi, e_{pq}(\lambda)\rangle = \hat{C}_i(\lambda_i)\langle\varphi, e_{pq}(\lambda)\rangle, \tag{12}$$

$$\langle A_j\varphi, e_{pq}(\lambda)\rangle = \hat{A}_j(p_j)\langle\varphi, e_{pq}(\lambda)\rangle, \tag{13}$$

$$\langle B_k\varphi, e_{pq}(\lambda)\rangle = \hat{B}_k(q_k)\langle\varphi, e_{pq}(\lambda)\rangle. \tag{14}$$

3. *Для $\varphi \in \Phi$ формула спектрального синтеза имеет вид*

$$\varphi(g) = \int_\Lambda d\rho(\lambda) \sum_{p,\, q=1}^{\dim \hat{H}(\lambda)} \hat{\varphi}_{pq}(\lambda)\, e_{pq}(\lambda, g), \tag{15}$$

где

$$\hat{\varphi}_{pq}(\lambda) = \langle\varphi, e_{pq}(\lambda)\rangle. \tag{16}$$

4. *Для φ, $\psi \in \Phi$ равенство Планшереля имеет вид*

$$\int_G \varphi(g)\overline{\psi(g)}\,d\mu(g) = \int_\Lambda d\rho(\lambda) \sum_{p,\,q=1}^{\dim \widehat{H}(\lambda)} \widehat{\varphi}_{pq}(\lambda)\overline{\widehat{\psi}_{pq}(\lambda)}. \tag{17}$$

Доказательство. Пусть $D_G \subset H$ — область Гординга для операторов C_i, A_j и B_k, элементы которой задаются формулой (6).

В силу теоремы 11.2.3 мы заключаем, что замыкания $\overline{C}_i$ операторов C_i являются самосопряженными операторами на D_G. Используя затем теорему 11.5.3, мы заключаем, что все C_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, попарно сильно коммутируют и коммутируют со всеми T_g, $g \in G$.

Пусть теперь A — максимальная «*»-алгебра в коммутанте T' представления T, которая содержит все спектральные разложения операторов $\overline{C}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Тогда, используя теорему Маутнера, мы получаем разложение (11).

Утверждения 2—4 следуют из ядерной спектральной теоремы.

Мера $d\rho(\lambda)$ на спектральном множестве Λ в (11) называется *мерой Планшереля* и определяется спектральной мерой операторов Казимира C_i.

Замечание 1. В силу формулы (27) приложения Б.3 формулы (12)—(14) могут быть записаны в виде

$$\overline{C}'_i e_{pq}(\lambda, g) = \widehat{C}_i(\lambda_i) e_{pq}(\lambda, g), \tag{18}$$

$$A'_j e_{pq}(\lambda, g) = \widehat{A}_j(p_j) e_{pq}(\lambda, g), \tag{19}$$

$$B'_k e_{pq}(\lambda, g) = \widehat{B}_k(q_k) e_{pq}(\lambda, g), \tag{20}$$

где, например, $\overline{C}'_i$ — расширение оператора $\overline{C}_i$, полученное расширением области определения $D(\overline{C}_i)$ теми элементами φ' из Φ', для которых выполняется равенство

$$\langle \overline{C}_i\varphi, \varphi'\rangle = \langle \varphi, \overline{C}'_i\varphi'\rangle, \quad \varphi \in \Phi.$$

Замечание 2. В многих случаях множество Λ совпадает с R^n или является его регулярным подмножеством, где определима мера Лебега.

Если спектральная мера $d\rho(\lambda)$ в разложении (11) абсолютно непрерывна относительно меры Лебега $d\lambda$ (т. е. $d\rho(\lambda) = \rho(\lambda)\,d\lambda$, $\rho(\lambda)$ непрерывна на Λ), то формула (29) приложения Б.3 даёт следующее соотношение ортогональности для обобщенных собственных векторов $e_{pq}(\lambda, g)$:

$$\int_G e_{pq}(\lambda, q)\overline{e_{p'q'}(\lambda', g)}\,d\mu(g) = \rho^{-1}(\lambda)\,\delta(\lambda - \lambda')\,\delta_{pp'}\delta_{qq'}. \tag{21}$$

Эти формулы представляют собой альтернативную запись равенства Планшереля (17) и понимаются как слабые интегралы распределений

$$e_{pq}(\lambda, g)\overline{e_{p'q'}(\lambda', g)},$$

определенных на G.

Заметим, что обобщенная компонента Фурье $\hat{\varphi}_{pq}(\lambda)$ элемента $\varphi \in \Phi$, заданная формулой (16), в общем случае не может быть представлена как интеграл вида (1.5). Однако имеет место следующее утверждение.

Утверждение 2. *Пусть множество* $\{C_i\}_1^n$, $\{A_j\}_1^m$, $\{B_k\}_1^m$ *дифференциальных операторов содержит эллиптический оператор. Тогда все собственные векторы являются регулярными функциями на* G. *Для* $\varphi \in \Phi$ *имеем*

$$\hat{\varphi}_{pq}(\lambda) = \int_G \varphi(g)\overline{e_{pq}(\lambda, g)}\,d\mu(g). \tag{22}$$

Мы имеем также следующее соотношение полноты:

$$\int \left(\sum_{pq} e_{pq}(\lambda, g)\overline{e_{pq}(\lambda, g')}\right) d\mu(\lambda) = \delta(gg'^{-1}). \tag{23}$$

Доказательство. Соотношения (22) и (23) следуют из утверждений (3.22) и (3.24) соответственно ядерной спектральной теоремы приложения Б. Интеграл (23) понимается в смысле слабого интеграла регулярных распределений.

Замечание 1. Если G — полупростая группа Ли, которая содержит среди максимальных подгрупп максимальную компактную подгруппу K [такая, как, например, SO $(n, 1)$, SU $(n, 1)$, Sp $(n, 1)$], то предположение утверждения 2 может быть легко удовлетворено. В самом деле, в этом случае достаточно принять, что множества $\{A_j\}_1^m$ и $\{B_k\}_1^m$ являются операторами, сопоставляемыми с операторами Казимира последовательных максимальных подгрупп $G_1 \supset G_2 \supset \ldots \supset G_s$, где $G_1 = K$. Тогда, поскольку эллиптический оператор Нельсона Δ удовлетворяет равенству

$$\Delta(G) = \sum_{i=1}^{\dim G} X_i^2 = C_2(G) + 2C_2(K),$$

он диагонализируется одновременно с операторами $C_2(G)$ и $C_2(K)$, которые входят в максимальное множество коммутирующих операторов в $L^2(G, \mu)$. Поэтому для этого класса групп преобразование Фурье $\hat{\varphi}_{pq}(\lambda)$ и соотношение полноты имеют явный вид (22) и (23) соответственно.

В дальнейшем мы предполагаем, что собственные функции $e_{pq}(\lambda, g)$ регулярны (см. утверждение 2), и нормируем их следующим образом:

$$e_{pq}(\lambda, e) = \delta_{pq}, \tag{24}$$

где e — единица в G. Следующее утверждение показывает, что собственные функции $e_{pq}(\lambda, g)$ являются фактически матричными элементами неприводимых представлений.

Утверждение 3. *Собственные функции* $e_{pq}(\lambda, g)$ *удовлетворяют следующим соотношениям:*

$$e_{pq}(\lambda, g^{-1}) = \overline{e_{qp}(\lambda, g)}, \tag{25}$$

$$e_{pq}(\lambda, g_1 g_2) = e_{pr}(\lambda, g_1) e_{rq}(\lambda, g_2). \tag{26}$$

Доказательство. Выполним в пространстве $H = L^2(G, \mu)$ «вращение» посредством оператора T_g^R. Поскольку операторы $\overline{T(C_i)}$ двусторонне инвариантны, а операторы $\overline{T(A_j)}$ правоинвариантны, то мы имеем

$$T_g^R \overline{C}_i T_{g^{-1}}^R = \overline{C}_i, \qquad T_g^R A_j T_{g^{-1}}^R = A_j,$$
$$T_g^R B_k T_{g^{-1}}^R = \check{B}_k. \tag{27}$$

Новые собственные функции в «повернутой» системе совпадают с

$$e_{pq}^{(g)}(\lambda, \tilde{g}) \equiv (T_g^R e)_{pq}(\lambda, \tilde{g}) = e_{pq}(\lambda, \tilde{g}g). \tag{28}$$

С другой стороны, поскольку операторы A_j неизменны, мы имеем

$$(T_g^R e)_{pq}(\lambda, \tilde{g}) = D_{q'q}^{\lambda}(g) e_{pq'}(\lambda, \tilde{g}), \tag{29}$$

где $D_{q'q}^{\lambda}(g)$ — матричные элементы оператора T_g^R в подпространстве $\hat{H}(\lambda)$. Ясно, что поскольку $T_{g_1 g_2}^R = T_{g_1}^R T_{g_2}^R$ и $T_{g^{-1}}^R = (T_g^R)^*$, то функции $D_{q'q}^{\lambda}(g)$ удовлетворяют условиям

$$D_{q'q}^{\lambda}(g_1 g_2) = D_{q'r}^{\lambda}(g_1) D_{rq}^{\lambda}(g_2), \tag{30}$$

$$D_{q'q}^{\lambda}(g^{-1}) = \overline{D_{qq'}^{\lambda}(g)}. \tag{31}$$

Из соотношений (28) и (29) следует

$$e_{pq}(\lambda, \tilde{g}g) = D_{q'q}^{\lambda}(g) e_{pq'}(\lambda, \tilde{g}). \tag{32}$$

Положив $\tilde{g} = e$ и использовав условие нормировки (24), получаем

$$e_{pq}(\lambda, g) = D_{pq}^{\lambda}(g). \tag{33}$$

Утверждение 3 следует теперь из формул (30) и (31).

Следуя принятому соглашению, для обобщенных собственных векторов $e_{pq}(\lambda, g)$ мы будем использовать символ $D_{pq}^{\lambda}(g)$. Если множество $\{\overline{T(C_i)}\}$, $\{\overline{T(A_j)}\}$ и $\{\overline{T(B_k)}\}$ коммутирующих операторов в $H = L^2(G, \mu)$ удовлетворяет предположениям замечания 2 и утверждения 2, то мы имеем

$$\int_G D^{\lambda}_{pq}(g)\, D^{\lambda'}_{p'q'}(g)\, d\mu(g) = \rho^{-1}(\lambda)\, \delta(\lambda - \lambda')\delta_{pp'}\delta_{qq'}, \tag{34}$$

$$\int_\Lambda d\rho(\lambda) \sum_{pq} D^{\lambda}_{pq}(g)\overline{D^{\lambda}_{pq}(g')} = \delta(gg'^{-1}) \tag{35}$$

и

$$\varphi(g) = \int_\Lambda \sum_{pq} \hat{\varphi}_{pq}(\lambda)\, D^{\lambda}_{pq}(g)\, d\rho(\lambda), \tag{36}$$

где

$$\hat{\varphi}_{pq}(\lambda) = \int_G \varphi(g)\, \overline{D^{\lambda}_{pq}(g)}\, d\mu(g). \tag{37}$$

Формулы (34)—(37) дают обобщение соответствующих формул для компактных групп, приведенных в § 1, на случай унимодулярных групп Ли (удовлетворяющих предположению замечания 2 и утверждения 2)

Интересен и очень полезен для приложений тот факт, что спектральный синтез (15) и равенство Планшереля (17) могут быть записаны в операторном виде. В самом деле, пусть $\varphi \in \Phi(G)$. Положим

$$F(\lambda) \equiv \int_G \varphi(g)\, T_{g^{-1}}(\lambda)\, d\mu(g), \tag{38}$$

где $\hat{T}_g(\lambda)$ — неприводимая компонента представления $\hat{T}^R_g$ в пространстве $\hat{H}(\lambda)$. Так как $\hat{T}^R$ — фактор-представление в $\hat{H}(\lambda)$, то все его неприводимые компоненты эквивалентны. Имеет место следующее утверждение.

Утверждение 4. *Пусть* $D^{\lambda}_{pq}(g)$ — *собственные функции в* $L^2(G)$, *которые удовлетворяют выводам утверждения 2. Тогда имеем*

1. *Оператор* $F(\lambda)$ *является оператором Гильберта—Шмидта в* $\hat{H}(\lambda)$ *для почти всех* λ *относительно* ρ.

2. *Формула спектрального синтеза* (15) *имеет вид*

$$\varphi(g) = \int_\Lambda d\rho(\lambda) \operatorname{Tr}[F(\lambda)\, T_g(\lambda)]. \tag{39}$$

3. *Равенство Планшереля* (17) *имеет вид*

$$(\varphi, \psi)_H = \int_\Lambda d\rho(\lambda) \operatorname{Tr}(F(\lambda)\, G^*(\lambda)), \quad \varphi, \psi \in \Phi,$$

где $G(\lambda)$ — $\hat{T}(\lambda)$-*преобразование функции* ψ, *заданное формулой* (38).

Доказательство. Пусть $\{\hat{e}_s(\lambda)\}$ — ортонормированный базис в $\hat{H}(\lambda)$. Тогда, согласно (38),

$$F(\lambda)\hat{e}_s(\lambda) = \int_G \varphi(g) D^\lambda_{qs}(g^{-1})\hat{e}_q(\lambda)\,d\mu(g) =$$

$$= \int_G \varphi(g)\overline{D^\lambda_{sq}(g)}\hat{e}_q(\lambda)\,d\mu(g) = \hat{\varphi}_{sq}(\lambda)\hat{e}_q(\lambda).$$

Поэтому квадрат нормы Гильберта—Шмидта $|F(\lambda)|$ оператора $F(\lambda)$ имеет вид

$$|F(\lambda)|^2 = \sum_{p=1}^{\dim \hat{H}(\lambda)} \|F(\lambda)\hat{e}_p(\lambda)\|^2_{\hat{H}(\lambda)} =$$

$$= \sum_{p,\,q,\,q'=1}^{\dim \hat{H}(\lambda)} \hat{\varphi}_{pq}(\lambda)\overline{\hat{\varphi}_{pq'}(\lambda)}(\hat{e}_q(\lambda), \hat{e}_{q'}(\lambda))_{\hat{H}(\lambda)} =$$

$$= \sum_{p,\,q=1}^{\dim \hat{H}(\lambda)} \hat{\varphi}_{pq}(\lambda)\overline{\hat{\varphi}_{pq}(\lambda)} = \|\hat{\varphi}(\lambda)\|^2_{\hat{H}(\lambda)}.$$

Так как $\{\hat{\varphi}(\lambda)\} \in L^2(\Lambda)$, то норма Гильберта—Шмидта $|F(\lambda)|$ относительно ρ почти всюду ограничена и, следовательно, $F(\lambda)$ относительно ρ является почти всюду оператором Гильберта—Шмидта.

Матричные элементы оператора $F(\lambda)$ имеют вид

$$F_{pq}(\lambda) = (F(\lambda)\hat{e}_q(\lambda), \hat{e}_p(\lambda))_{\hat{H}(\lambda)} =$$

$$= \int_G \varphi(g)((T_g(\lambda))^{-1}\hat{e}_q(\lambda), \hat{e}_p(\lambda))_{\hat{H}(\lambda)}\,d\mu(g) =$$

$$= \int_G \varphi(g)\overline{(T_g(\lambda)\hat{e}_p(\lambda), \hat{e}_q(\lambda))_{\hat{H}(\lambda)}}\,d\mu(g) =$$

$$= \int_G \varphi(g)\overline{D^\lambda_{pq}(g)}\,d\mu(g). \tag{40}$$

Поэтому $F_{pq}(\lambda) = \hat{\varphi}_{qp}(\lambda)$ и, следовательно, спектральный синтез (15) функции φ из $\Phi(G)$ может быть записан в виде

$$\varphi(g) = \int_\Lambda \sum_{p,\,q=1}^{\dim \hat{H}(\lambda)} F_{qp}(\lambda) D^\lambda_{pq}(g)\,d\rho(\lambda) =$$

$$= \int_\Lambda \operatorname{Tr}(F(\lambda)T_g(\lambda))\,d\rho(\lambda). \tag{41}$$

Здесь интегрирование ведется по множеству унитарных неприводимых представлений, на которых мера Планшереля $\rho(\cdot)$ не обращается в нуль.

Равенство Планшереля (17) может быть записано в виде

$$(\varphi, \psi)_H = (\hat{\varphi}, \hat{\psi})_{\hat{H}} = \int\limits_{\Lambda} \sum_{p,\,q} F_{qp}(\lambda) \overline{G_{qp}(\lambda)}\, d\rho(\lambda) = \\ = \int\limits_{\Lambda} \operatorname{Tr}\{F(\lambda) G^*(\lambda)\}\, d\rho(\lambda). \tag{42}$$

§ 3. Гармонический анализ на полупрямом произведении групп

Общая теория гармонического анализа на унимодулярных группах Ли охватывает также унимодулярные полупрямые произведения $G = N \rtimes G_A$, где G_A — группа автоморфизмов группы N. Мы ограничиваемся в этом параграфе описанием общей теории для двух наиболее важных полупрямых произведений, а именно для евклидовых групп $E_n = T^n \rtimes SO(n)$ и для обобщенных групп Пуанкаре $\Pi_n = T^n \rtimes SO(n-1, 1)$, $n = 2, 3, \ldots$. Используя теорему 3.10.5, легко проверить, что все группы E_n и Π_n унимодулярны.

Опишем сначала явно максимальное множество коммутирующих дифференциальных операторов в пространстве $H = L^2(G, \mu)$. Мы знаем, что множество $\{C_i\}$ алгебраически независимых инвариантных операторов для E_n или для Π_n состоит из $\{n/2\}$ операторов (упражнение 9.7.3.1). Определим теперь дополнительные операторы, которые вместе с множеством $\{C_i\}$ дают максимальное множество алгебраически независимых коммутирующих операторов.

Пусть

$$SO(n) \supset SO(n-1) \ldots \supset SO(2), \tag{1}$$

$$SO(n-1, 1) \supset SO(n-1) \supset \ldots \supset SO(2) \tag{2}$$

— последовательности последовательных максимальных подгрупп в $SO(n)$ и $SO(n-1, 1)$ соответственно. Пусть $\{A_j\}_1^m$ — максимальное множество «+»-симметрических алгебраически независимых операторов Казимира в обертывающей алгебре E^L для G, соответствующих последовательным подгруппам в последовательности (1) или (2). Пусть $\{B_k\}_1^m$ — соответствующее максимальное множество «+»-симметрических алгебраически независимых операторов в обертывающей алгебре E^R для G.

Легко проверить, что

$$m = \frac{1}{2}\left(\left[\frac{n}{2}\right] + \dim G_A\right).$$

Поскольку

$$\left[\frac{n+1}{2}\right]+2m=\dim G,$$

множества $\{C_i\}_1^{[(n+1)/2]}$, $\{A_j\}_1^m$ и $\{B_k\}_1^m$ дают максимальное множество независимых коммутирующих операторов в пространстве представления $H = L^2(G, \mu)$.

Основные особенности гармонического анализа на E_n или Π_n описываются следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть G_n — одна из групп E_n или Π_n, $n = 2, 3, \ldots$, и пусть $g \to T_g$ — регулярное представление группы G_n в гильбертовом пространстве $H = L^2(G, \mu)$, заданное формулой* (2.4).

Пусть $\{C_i\}_1^{[(n+1)/2]}$ — последовательность двусторонне инвариантных операторов группы G_n в H, и пусть $\{A_j\}_1^m$ и $\{B_k\}_1^m$ — максимальные множества независимых «+»-симметрических операторов Казимира, соответствующих последовательностям подгрупп (1) *или* (2) *соответственно. Тогда*

1. *Существует разложение в прямой интеграл*

$$H \to \hat{H} = \int\limits_{\Lambda} \hat{H}(\lambda)\, d\rho(\lambda), \quad T_g \to \hat{T}_g = \int \hat{T}_g(\lambda)\, d\rho(\lambda) \tag{3}$$

пространства H и представления T_g, такое, что $(\hat{H}(\lambda), T_g(\lambda))$ почти всюду неприводимо относительно ρ.

2. *Существует триплет Гельфанда $\Phi \subset H \subset \Phi'$ и базис $e_{pq}(\lambda, g)$, такие, что имеют место соотношения* (2.12)—(2.14).

3. *Для $\varphi \in \Phi$ формула спектрального синтеза имеет вид*

$$\varphi(g) = \int\limits_{\Lambda} d\rho(\lambda) \sum_{p,q=1}^{\dim \hat{H}(\lambda)} \hat{\varphi}_{pq}(\lambda)\, e_{pq}(\lambda, g), \tag{4}$$

где

$$\hat{\varphi}_{pq}(\lambda) = \int\limits_{G} \varphi(g)\overline{e_{pq}(\lambda, g)}\, d\mu(g). \tag{5}$$

4. *Для $\varphi, \psi \in \Phi$ равенство Планшереля имеет вид* (2.17).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательства всех утверждений теоремы 1, за исключением формулы (5), параллельны доказательствам подобных утверждений теоремы 2.1, и мы их опускаем. Формула (5) вытекает из того факта, что, например, для E_n оператор Нельсона $\Delta = P_\mu P^\mu + C_2(SO(n))$ диагонализируется вместе с операторами $C_2(SO(n))$ и $M^2 = P_\mu P^\mu$. Поскольку Δ эллиптичен, формула (5) следует из утверждения 2.2.

Ясно, что утверждения 2.3 и 2.4 также справедливы для групп E_n и Π_n.

Рассмотрим теперь пример, который ясно иллюстрирует основные особенности гармонического анализа на некомпактных некоммутативных группах Ли.

Пример 1. Пусть $G = E_2 = T^2 \rtimes SO(2)$. Если $x = (x_1, x_2) \in T^2$ и $\alpha \in SO(2)$, $0 \leqslant \alpha < 2\pi$, то закон композиции в G задается формулой

$$(x, \alpha)(x', \alpha') = (x + x'_\alpha, \alpha + \alpha'), \tag{6}$$

где

$$x'_\alpha = (x'_1 \cos\alpha - x'_2 \sin\alpha,\ x'_1 \sin\alpha + x'_2 \cos\alpha).$$

Из закона композиции (6) следует

$$(x, \alpha)^{-1} = (-x_{-\alpha}, 2\pi - \alpha). \tag{7}$$

Легко проверить, что инвариантная мера на G имеет вид

$$d\mu[(x, \alpha)] = dx_1\, dx_2\, d\alpha. \tag{8}$$

Пусть $H = L^2(G, \mu)$. Правое и левое регулярные представления T^R и T^L группы G в H задаются формулами

$$\left(T^R_{(x', \alpha')}u\right)[(x, \alpha)] = u\,[(x, \alpha)(x', \alpha')] = u\,[(x + x'_\alpha, \alpha + \alpha')], \tag{9}$$

$$\left(T^L_{(x', \alpha')}u\right)[(x, \alpha)] =$$

$$= u[(x', \alpha')^{-1}(x, \alpha)] = u\,[(-x'_{-\alpha'} + x_{2\pi-\alpha'}, 2\pi - \alpha' + \alpha)]. \tag{10}$$

Генераторы X_i, $i = 1, 2, 3$, однопараметрических подгрупп $g(t_i)$, соответствующих левому регулярному представлению (т. е. принадлежащие правой инвариантной алгебре Ли), задаются формулой

$$X_i u = \lim_{t_i \to 0}\left(\frac{T^L_{g(t_i)} - I}{t_i}\, u\right), \tag{11}$$

где u — элемент области Гординга. Используя (10) и (11), получаем

$$X_1 = -\frac{\partial}{\partial x_1}, \qquad X_2 = -\frac{\partial}{\partial x_2}, \qquad X_3 = x_2\frac{\partial}{\partial x_1} - x_1\frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial \alpha}. \tag{12}$$

Аналогично, используя формулу

$$Y_i u = \lim_{t_i \to 0}\left(\frac{T^R_{g(t_i)} - I}{t_i}\, u\right) \tag{13}$$

и формулу (9), получаем следующие выражения для генераторов левоинвариантной алгебры Ли группы G:

$$\begin{aligned} Y_1 &= \cos\alpha \frac{\partial}{\partial x_1} + \sin\alpha \frac{\partial}{\partial x_2}, \\ Y_2 &= -\sin\alpha \frac{\partial}{\partial x_1} + \cos\alpha \frac{\partial}{\partial x_2}, \\ Y_3 &= \frac{\partial}{\partial \alpha}. \end{aligned} \tag{14}$$

Ясно, что каждый оператор X_i коммутирует со всеми операторами Y_k, i, $k = 1, 2, 3$. Левоинвариантная и правоинвариантная алгебры Ли удовлетворяют коммутационным соотношениям вида

$$[Z_1, Z_2] = 0, \quad [Z_2, Z_3] = Z_1, \quad [Z_3, Z_1] = Z_2. \tag{15}$$

Легко проверить, что инвариантный оператор имеет вид

$$C_1 = Z_1^2 + Z_2^2. \tag{16}$$

Поэтому

$$C_1 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \tag{17}$$

или в сферических координатах

$$x_1 = r\cos\varphi, \quad x_2 = r\sin\varphi,$$

$$C_1 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \tag{18}$$

Используя описанный в теореме 1 общий метод для выбора максимального множества коммутирующих операторов, получаем

$$C_1, \quad A_1 = X_3 = -\frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial \alpha}, \quad B_1 = Y_3 = \frac{\partial}{\partial \alpha}. \tag{19}$$

Это максимальное множество независимых коммутирующих дифференциальных операторов, поскольку размерность группы G равна трем.

Найдем теперь явный вид собственных функций $e_{pq}(\lambda, g) \equiv D^{\lambda}_{pq}(g)$. Выражения (18) и (19) показывают, что общие собственные функции операторов C_1, A_1 и B_1 следует искать в виде

$$D^{\lambda}_{pq}(\varphi, r, \alpha) = \exp(\mathrm{i}\, p\varphi)\, d^{\lambda}_{pq}(r) \exp[-\mathrm{i}q(\alpha + \varphi)]. \tag{20}$$

Выражения (20) являются собственными функциями операторов X_3 и Y_3, тогда как $C_1 D^{\lambda}_{pq} = \widehat{C}_1(\lambda)\, D^{\lambda}_{pq}$ дает следующее уравнение для $d^{\lambda}_{pq}(r)$:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{(p-q)^2}{r^2}\right) d^{\lambda}_{pq}(r) = \widehat{C}_1(\lambda)\, d^{\lambda}_{pq}(r). \tag{21}$$

Это классическая форма уравнения Бесселя, (регулярные) решения которого имеют вид

$$d^{\lambda}_{pq}(r) = i^{p-q} J_{p-q}\left(-i\sqrt{\hat{C}_1(\lambda)}\, r\right). \tag{22}$$

Оператор C_1 кососопряжен (по теореме Нельсона—Стайнспринга) и в силу (17) отрицательно определен. Поэтому собственные значения $\hat{C}_1(\lambda)$ оператора C_1 отрицательны. Положив $\hat{C}_1(\lambda) = -\lambda^2$, $\lambda \in R$, из (22) и (20) получаем

$$D^{\lambda}_{pq}(\varphi, r, \alpha) = i^{p-q} \exp[i(p-q)\varphi]\, J_{p-q}(\lambda r) \exp[iq\alpha]. \tag{23}$$

Известно, что спектральная мера $d\rho(\lambda)$ для уравнения Бесселя имеет вид $d\rho(\lambda) = \lambda d\lambda$. Поэтому соотношения ортогональности и полноты для функций $D^{\lambda}_{pq}(\varphi, r, \alpha)$ имеют вид

$$\int D^{\lambda}_{pq}(\varphi, r, \alpha)\, \overline{D^{\lambda'}_{p'q'}(\varphi, r, \alpha)}\, r\, dr\, d\varphi\, d\alpha = \delta_{p'p}\delta_{q'q} \frac{\delta(\lambda - \lambda')}{\lambda}, \tag{24}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \sum_{p,\, q} D^{\lambda}_{pq}(\varphi, r, \alpha)\, \overline{D^{\lambda}_{pq}(\varphi', r', \alpha')} =$$

$$= \delta(\varphi - \varphi') \frac{1}{r} \delta(r - r')\, \delta(\alpha - \alpha'). \tag{25}$$

Поскольку $J_{p-q}(0) = \delta_{pq}$, функции $D^{\lambda}_{pq}(e)$ удовлетворяют условию нормировки (2.24), т. е. $D^{\lambda}_{pq}(e) = \delta_{pq}$, где $e = (0, 0, 0)$ — единица группы G. Следовательно, функции $D^{\lambda}_{pq}(g)$ удовлетворяют условию унитарности

$$D^{\lambda}_{pq}(g^{-1}) = \overline{D^{\lambda}_{qp}(g)} \tag{26}$$

и закону композиции

$$\sum_{s} D^{\lambda}_{ps}(g_1)\, D^{\lambda}_{sq}(g_2) = D^{\lambda}_{pq}(g_1 g_2). \tag{27}$$

Заметим, что последняя формула позволяет вывести различные законы сложения для функций Бесселя. Легко проверить, что если $g_1 = (0, r_1, 0)$ и $g_2 = (\varphi_2, r_2, 0)$, то $g_1 g_2 = (\varphi, r, \alpha)$ задается соотношениями

$$r = [r_1^2 + r_2^2 + 2 r_1 r_2 \cos\varphi_2]^{1/2}, \quad \exp(i\varphi) = \frac{r_1 + r_2 \exp(i\varphi_2)}{r}, \quad \alpha = 0. \tag{28}$$

Тогда при $\lambda = 1$ соотношение (27) дает

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp(ik\varphi_2)\, J_{n-k}(r_1)\, J_k(r_2) = \exp(in\varphi)\, J_n(r). \tag{29}$$

В частности, при $\varphi_2 = 0$ имеем $r = r_1 + r_2$, и соотношение (29) дает

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} J_{n-k}(r_1) J_k(r_2) = J_n(r_1 + r_2), \tag{30}$$

а при $\varphi_2 = \pi$, $r_1 \geqslant r_2$, имеем $r = r_1 - r_2$ и $\varphi = 0$. Поэтому соотношение (29) дает

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k J_{n-k}(r_1) J_k(r_2) = J_n(r_1 - r_2). \tag{31}$$

§ 4. Комментарии и дополнения

А. *Мера Планшереля*

Первый существенный общий результат в гармоническом анализе на сепарабельных унимодулярных группах был получен Сигалом [746]. С каждым $\varphi \in H = L^2(G, \mu)$ он сопоставлял оператор

$$T(\varphi) = \int \varphi(g) T_g \, d\mu(g), \tag{1}$$

где T_g — унитарное представление группы G.

Согласно теореме Маутнера, $T(\varphi)$ имеет следующее разложение в прямой интеграл:

$$T(\varphi) \to \widehat{T}(\varphi) = \int \widehat{F}(\lambda) \, d\rho(\lambda).$$

Сигнал называет $\{\widehat{F}(\lambda)\}$ преобразованием Фурье функции φ и доказывает следующую теорему Планшереля:

$$\int_G |\varphi(g)|^2 \, d\mu(g) = \int_\Lambda \langle \widehat{F}(\lambda), \quad \widehat{F}(\lambda) \rangle_\lambda \, a(\lambda) \, d\rho(\lambda), \tag{2}$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle_\lambda$ обозначает внутреннее произведение в банаховом пространстве ограниченных операторов в пространстве $\widehat{H}(\lambda)$, а $a(\lambda)$ — положительная ρ-измеримая функция.

(Доказательство см. в [746], теорема 3.)

Для приложений важно знать явный вид меры Планшереля. Эта задача была решена для классических комплексных групп Ли Гельфандом и Наймарком [315] (упрощенный вывод см. в [303]). Например, в случае группы SL (n, C) неприводимые унитарные представления $\widehat{T}(\lambda)$ обозначаются мультииндексом $\lambda = (m_2, \ldots, m_n, \rho_2, \ldots, \rho_n)$, где m_i — целые числа, а ρ_i — вещественные числа (гл. 19, § 3).

Явный вид меры Планшереля в этих переменных таков:

$$d\rho(\lambda) = c \prod_{1 \leqslant p \leqslant q \leqslant n} [(\rho_p - \rho_q)^2 + (m_p - m_q)^2], \quad \rho_1 = m_1 = 0, \tag{3}$$

где $c = 2^{n(n-1)} [n! \, (2\pi)^{(n-1)(n+2)}]^{-1}$, а m_i, ρ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, — инвариантные числа, которые характеризуют неприводимое унитарное представление группы SL (n, C). Равенство Планшереля имеет вид

$$\int \varphi(g) \overline{\psi(g)} \, d\mu(g) = \int \operatorname{Tr}(\hat{F}(\lambda) \hat{G}^*(\lambda)) \, d\rho(\lambda),$$

где

$$\hat{F}(\lambda) = \int \varphi(g) \hat{T}_g(\lambda) \, d\mu(g).$$

Мера Планшереля равна нулю на дополнительной серии группы SL (n, C). Обобщение результатов Гельфанда—Наймарка на произвольные связные полупростые группы Ли дано Хариш-Чандрой в ряде работ [370, 384].

Явный вид меры Планшереля для некоторых вещественных групп был найден недавно. В частности, Хираи нашел явный вид меры Планшереля для обобщенных групп Лоренца SO $(n, 1)$ [411] и для групп SU (p, q) [414]. Ромм нашел меру Планшереля для группы SL (n, R) [716]. Недавно Лезнов и Савельев дали явный вид меры Планшереля для всех вещественных форм комплексных классических групп [517]. (См. также [518] о группах SU (p, q).) Однако их вывод содержит некоторые предположения, справедливость которых не проверена.

Б. *Комментарии*

Представленный в § 2 и 3 гармонический анализ на унимодулярных группах основан на лекциях Рончки [698]. Это рассмотрение базируется на ядерной спектральной теории, которая дает наиболее естественное распространение на некомпактные некоммутативные группы классической теории Фурье для абелевых групп и теории Петера—Вейля для компактных групп. Она дает также удобное описание для применений в квантовой механике, где понятие обобщенных собственных функций играет центральную роль. Ряд фундаментальных задач гармонического анализа для полупростых групп Ли решен Хариш-Чандрой [369, 370, 378—382, 384]. Монументальные работы Хариш-Чандры рассмотрены в двухтомной монографии Уорнера [828]. Интересная трактовка различных задач гармонического анализа на полупростых комплексных группах Ли дана в недавней монографии Желобенко [883]. Она содержит, в частности, прекрасный обзор достижений советских математиков в этой области.

Пример 3.1 демонстрирует пользу гармонического анализа на группах для анализа свойств специальных функций. Этот предмет подробно обсуждается в монографиях Виленкина [819], Миллера [593] и в лекциях Вигнера, записанных Тальманом [801].

Гармонический анализ на группе Лоренца SL $(2, C)$ подробно обсуждается в монографии Гельфанда, Граева и Виленкина [308] и в недавней книге Рюля [722], которая также содержит интересные приложения в физике частиц. Гармонический анализ на группе Пуанкаре рассмотрен Ридо [706] и Нгием Зуан Хай в докторской диссертации [634].

Очень изящная и общая трактовка гармонического анализа на локально компактных группах, основанная на теории C^*-алгебр, представлена в монографии Диксмье [222] (см. также [622]).

Глава 15

Гармонический анализ на однородных пространствах

Гармонический анализ на однородных пространствах представляет собой другую очень важную, но трудную часть теории представлений групп. Степень трудности хорошо иллюстрируется классическим трактатом по абстрактному гармоническому анализу Хьюитта и Росса [405, 406], в котором понятие гармонического анализа появляется только после 1065 страниц «вводного материала».

Мы сначала сформулируем основные задачи гармонического анализа.

Пусть X — однородное пространство, G — локально компактная группа преобразований на X, а K — стационарная подгруппа в G. Пусть $d\mu(x)$ — квазиинвариантная мера на X, заданная теоремой Макки (гл. 4, § 3.1), и пусть $H = L^2(X, \mu)$. Отображение $g \to T_g$, заданное формулой

$$T_g u(x) = \sqrt{\frac{d\mu(xg)}{d\mu(x)}}\, u(xg), \tag{1}$$

дает унитарное представление T группы G в H.

Две основные задачи гармонического анализа состоят в следующем.

1. *Спектральный анализ.* Разложение представления (1) и пространства представления H в прямые интегралы

$$T_g \to \hat{T}_g = \int_\Lambda \hat{T}_g(\lambda)\, d\rho(\lambda), \quad H \to \hat{H} = \int_\Lambda \hat{H}(\lambda)\, d\rho(\lambda) \tag{2}$$

неприводимых представлений $\hat{T}_g(\lambda)$ группы G в $\hat{H}(\lambda)$ и определение спектра.

2. *Спектральный синтез.* Определение плотного подпространства $\Phi \subset H$, такого, что для каждого $\varphi \in \Phi$

$$\varphi(x) = \int_\Lambda d\rho(\lambda) \sum_{k=1}^{\dim \hat{H}(\lambda)} \hat{\varphi}_k(\lambda)\, e_k(\lambda, x)\, d\rho(\lambda), \tag{3}$$

где $\{e_k(\lambda, x)\}_{k=1}^{\dim H'(\lambda)}$ — базис в $H'(\lambda)$ [1]), а

$$\widehat{\varphi}_k(\lambda) = \langle \varphi, e_k(\lambda) \rangle \tag{4}$$

— компонента функции $\varphi \in H$ в $\widehat{H}(\lambda)$.

§ 1. Инвариантные операторы на однородных пространствах

С задачей спектрального анализа связана задача поиска максимального множества $\{C_i\}_1^n$ независимых инвариантных коммутирующих операторов. В противоположность мнению, распространенному среди физиков, множество $\{C_i\}_1^n$ может содержать больше инвариантных операторов, чем можно получить из центра Z обертывающей алгебры E группы G. В самом деле, пусть $N(K)$ — нетривиальный нормализатор в G стационарной подгруппы K точки из X, т. е. множество всех $n \in G$, таких, что $nKn^{-1} \subset K$. Тогда, используя соответствие $x_g \to K_g$ между элементами пространства X и классами смежных элементов Kg, получаем

$$nx_g \sim nKg = Kng = x_{ng}.$$

Отсюда следует, что левые сдвиги X элементами из N и правые сдвиги X элементами из G коммутируют. Поэтому

$$(T_n^L T_g u)(x) = (T_g T_n^L u)(x). \tag{5}$$

Следовательно, если фактор-группа $N(K)/K$ нетривиальна, то максимальное множество операторов, сопоставляемых с группой $N(K)/K$, дает дополнительное множество инвариантных операторов, кроме полученных из центра Z обертывающей алгебры E группы G. Если $N(K)/K$ некоммутативна, то дополнительное множество инвариантных дифференциальных операторов, сопоставляемых с $N(K)/K$, также некоммутативно.

Заметим, что группа Ли может иметь инвариантные операторы, которые не являются элементами обертывающей алгебры и даже не являются дифференциальными операторами. Например, в случае группы Пуанкаре в дополнение к оператору квадрата массы $P_\mu P^\mu$ $(\sim m^2 = p_\mu p^\mu)$ и оператору квадрата спина $W_\mu W^\mu$ $(\sim m^2 J \times J(J+1))$, которые являются дифференциальными операторами из центра $Z(E)$, мы имеем инвариантный оператор $Q = \operatorname{sign} p_0$, где p_0 — собственное значение генератора P_0 в пространстве представления. Оператор Q не является ни элементом из $Z(E)$, ни дифференциальным оператором.

---

[1]) Заметим, что $\widehat{H}(\lambda)$ и $H'(\lambda) \subset \Phi'$ изоморфны, но различны; см. формулу (30) в приложеиии Б.3.

ПРИМЕР 1. Пусть G — группа Пуанкаре $T^4 \rtimes \mathrm{SL}(2, C)$, и пусть

$$K = T^4 \rtimes Z, \tag{6}$$

где Z — двумерная нильпотентная группа, состоящая из комплексных матриц вида

$$z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{bmatrix}, \quad z \in C^1. \tag{7}$$

Поэтому $X = G/K$ — четырехмерное однородное пространство. В силу разложения Гаусса (3.6.3) для $\mathrm{SL}(2, C)$ подгруппа $S = ZD$, где

$$D = \left\{ \begin{bmatrix} \delta^{-1} & 0 \\ 0 & \delta \end{bmatrix}, \quad \delta \in C^1 \right\},$$

имеет Z в качестве нормальной подгруппы. Поэтому нормализатор $N(K)$ подгруппы K является группой

$$N(K) = T^4 \rtimes S. \tag{8}$$

Таким образом,

$$N(K)/K = D. \tag{9}$$

Следовательно, в дополнение к операторам квадрата массы $P_\mu P^\mu$ и квадрата спина $W_\mu W^\mu$, которые являются генераторами центра Z обертывающей алгебры E группы Пуанкаре в пространстве $H = L^2(X, \mu)$, $X = G/K$, имеются два дополнительных инвариантных оператора, сопоставляемых с генераторами подгруппы D.

В случае произвольных групп Ли G и $K \subset G$ задача поиска нормализатора $N(K)$ подгруппы К в G не решена. Поэтому мы не имеем общей характеристики множества $\{C_i\}_1^n$ независимых инвариантных операторов в пространстве $H = L^2(X, \mu)$, $X = G/K$. Однако для многих частных групп G и K существует более конкретная характеристика множества $\{C_i\}_1^n$. Например, если G — полупростая связная группа Ли, а K — максимальная компактная подгруппа в G, то из разложения Картана группы G: $G = KP$ следует, что между G и K не существует никакой подгруппы G_0 большей размерности, чем размерность подгруппы K. Поэтому $N(K)/K$ не более чем дискретная группа. Отсюда следует, что не существует никаких дополнительных инвариантных дифференциальных операторов в $\{C_i\}_1^n$, которые исходят из $N(K)/K$.

Нужно также отметить следующую связь между свойствами однородных пространств и свойствами множества $\{C_i\}_1^n$ инвариантных операторов: если стационарная группа K точки в X мала, то число инвариантных операторов в $\{C_i\}$ большое и $\{C_i\}$ может даже содержать инвариантные операторы, не принадлежащие обертывающей алгебре. Обратно, если стационарная подгруппа K

становится большей, то существует больше связей в X и число инвариантных операторов уменьшается. В этом случае даже те инвариантные операторы, которые были алгебраически независимы в центре Z алгебры E, становятся зависимыми дифференциальными операторами на пространстве $H = L^2(X, \mu)$. Следующий пример иллюстрирует этот факт.

Пример 2. Пусть G — евклидова группа $T^n \rtimes SO(n)$. В общем случае G имеет $[(n+1)/2]$ алгебраически независимых операторов из центра Z алгебры E и $X = G/K \sim R^n$. Мы покажем, что центр Z алгебры E в $L^2(X, dx)$ порождается единственным оператором. В самом деле, пусть $C_i(x_k, \partial/\partial x_l)$ — дифференциальные операторы из Z. Поскольку C_i должны быть инвариантны для всех сдвигов $t \in T^n$, то дифференциальные операторы $C_i(x_k, \partial/\partial x_l)$ имеют постоянные коэффициенты. Следовательно, $C_i = P_i(\partial_1, \ldots, \partial_n)$, где P_i — полиномы. Единственной инвариантной относительно вращений величиной в R^n является радиус $r = |x| = \sqrt{\sum x_i^2}$. Поэтому полиномы P_i должны быть функциями от $\partial_1^2 + \cdots + \partial_n^2 \equiv \Delta$. Тогда произвольный инвариантный дифференциальный оператор в $L^2(X, dx)$ из обертывающей алгебры E группы G имеет вид

$$C = \sum_{l=1}^{s} C_l \Delta^l. \tag{10}$$

Ясно, что если $G = T^n \rtimes SO(p, q)$, $p + q = n$, то произвольный инвариантный оператор из обертывающей алгебры E в $L^2(X, dx)$ также имеет вид (10), где

$$\Delta = \partial_1^2 + \ldots + \partial_p^2 - \partial_{p+1}^2 - \ldots - \partial_{p+q}^2. \tag{11}$$

Следующая теорема дает описание множества инвариантных операторов для симметрического пространства $X = G/K$.

Теорема 1. *Пусть $X = G/K$ — симметрическое пространство ранга l. Тогда алгебра всех G-инвариантных дифференциальных операторов в пространстве $H = L^2(X, \mu)$ является коммутативной алгеброй с l алгебраически независимыми генераторами.*

Если X имеет ранг один, то каждый инвариантный дифференциальный оператор C является полиномом от оператора Казимира второго порядка группы G, который в подходящей системе координат на X совпадает с оператором Лапласа—Бельтрами

$$\Delta = \bar{q}^{-1/2} \partial_\alpha g^{\alpha\beta} \sqrt{\bar{g}}\, \partial_\beta, \tag{12}$$

где $g^{\alpha\beta}(x)$ — *инвариантный метрический тензор на пространстве X и $\bar{g} \equiv |\det g|$.*

(Доказательство см. в [390], гл. 10.)

§ 2. Гармонический анализ на однородных пространствах

Теперь мы рассмотрим гармонический анализ на общих однородных пространствах $X = G/K$, где G — связная группа Ли, а K — замкнутая подгруппа в G. Следующая теорема дает общее решение основных задач гармонического анализа на однородных пространствах.

Теорема 1. *Пусть* $H = L^2(X, \mu)$, где μ — *квазиинвариантная мера на* X, *и пусть* $g \to T_g$ — *унитарное представление группы* G *в* $H = L^2(X, \mu)$, *заданное формулой* (1.1).

Пусть $\{T(C_i)\}_1^n$ — *максимальное множество независимых* G-*инвариантных операторов в представлении* $T(E)$ *обертывающей алгебры* E *группы* G. *Пусть* $Q = \{A_j\}_1^m$ — *максимальное множество коммутирующих самосопряженных* (*неинвариантных*) *операторов в* $T(E)$. *Тогда*

1. *Существует разложение в прямой интеграл*

$$H \to \hat{H} = \int_\Lambda \hat{H}(\lambda)\, d\rho(\lambda), \quad T_g \to \hat{T}_g = \int \hat{T}_g(\lambda)\, d\rho(\lambda) \tag{1}$$

пространства H *и представления* T_g, *такое, что* $\hat{H}(\lambda)$ *и* $\hat{T}_g(\lambda)$ *относительно* ρ *почти всюду неприводимы.*

2. *Существуют триплет Гельфанда* $\Phi \subset H \subset \Phi'$ *и базис* $\{e_k(\lambda, x)\}$ *в* $H(\lambda)$, *такие, что*

$$\langle \overline{T(C_i)}\varphi, e_k(\lambda)\rangle = \hat{C}_i(\lambda)\langle \varphi, e_k(\lambda)\rangle, \quad i = 1, \ldots, r, \tag{2}$$

$$\langle A_j\varphi, e_k(\lambda)\rangle = \hat{A}_j(k)\langle \varphi, e_k(\lambda)\rangle, \quad j = 1, \ldots, m. \tag{3}$$

3. *Для* $\varphi \in \Phi(X)$ *формула спектрального синтеза имеет вид*

$$\varphi(x) = \int_\Lambda d\rho(\lambda) \sum_{k=1}^{\dim \hat{H}(\lambda)} \hat{\varphi}_k(\lambda)\, e_k(\lambda, x), \tag{4}$$

где

$$\hat{\varphi}_k(\lambda) = \langle \varphi, e_k(\lambda)\rangle. \tag{5}$$

4. *Для* $\varphi, \psi \in \Phi(X)$ *равенство Парсеваля задается формулой*

$$\int \varphi(x)\overline{\psi(x)}\, d\mu(x) = \int_\Lambda d\rho(\lambda) \sum_{k=1}^{\dim \hat{H}(\lambda)} \overline{\hat{\varphi}_k(\lambda)\, \hat{\psi}_k(\lambda)}. \tag{6}$$

Доказательство. Построим сначала триплет Гельфанда $\Phi(X) \subset H \subset \Phi'(X)$. Пусть $u \in H$, и пусть $A_{u_1} \equiv \{\psi \in D(G)\colon T(\psi)u = 0\}$, где $T(\psi) = \int_G \psi(g)\, T_g\, dg$. Если $\psi_n \to \psi$ в $D(G)$, то $T(\psi_n)\,u \to T(\psi)\,u$. Таким образом, если $\psi_n \in A_{u_1}$, то $\lim \psi_n = \psi \in A_{u_1}$, т. е. A_{u_1} замкнуто в $D(G)$. Поэтому фактор-пространство $\tilde{D}(G) \equiv D(G)/A_{u_1}$ ядерно. Возьмем $u_1 \in H$, положим $H_{u_1} \equiv \{T(\psi)\,u_1, \psi \in D(G)\}$ и снабдим H_{u_1} ядерной топологией пространства $\tilde{D}(G)$. Если пространство H_{u_1} не плотно в H, то мы берем $u_2 \perp H_{u_1}$ и образуем топологическую прямую сумму $H_{u_1} \oplus H_{u_2}$ и т. д. вплоть до тех пор, пока не достигнем плотного пространства $\bigoplus\limits_k H_{u_k}$ в H. Поскольку H сепарабельно, то это всегда возможно. Пространство $\Phi \equiv \bigoplus\limits_k H_{u_k}$ является счетной суммой ядерных пространств, и оно, следовательно, само ядерно. Естественное вложение H_{u_k} в H непрерывно. В самом деле,

$$\| T(\psi)\,u_k \| = \left\| \int \psi(g)\,T_g u_k\,dg \right\| \leqslant |[\psi]_p|\,\|u_k\|,$$

где $|[\psi]_p|$ — полунорма в $D(G)$, индуцированная нормой Шварца p в $D(G)$. Следовательно, вложение $I\colon \Phi \to H$ также непрерывно. Для элемента M из обертывающей алгебры E группы G в силу (11.1.17) получаем, что $T(M)\,\Phi \subset \Phi$. В силу того же соотношения для каждого $M \in E$ $T(M)$ является непрерывным оператором в Φ.

Докажем теперь разложение (1) в прямой интеграл. Пусть C_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, — множество алгебраически независимых симметрических элементов из центра $Z(E)$ алгебры E (т. е. $C_i^\dagger = C_i$). В силу следствия 3 теоремы 11.2.3 мы заключаем, что замыкания $\overline{T(C_i)}$ операторов $T(C_i)$ являются самосопряженными операторами. Используя затем теорему 11.5.3, мы заключаем, что все $\overline{T(C_i)}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, попарно сильно коммутируют и также коммутируют со всеми T_g, $g \in G$.

Пусть A — максимальная «*»-алгебра в коммутанте T' представления T, которая содержит все спектральные разложения операторов $\overline{T(C_i)}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Тогда, используя теорему Маутнера 5.6.1, мы получаем разложение (1). Спектральное множество Λ содержит в роли подмножества спектры Λ_{C_i} самосопряженных операторов $\overline{T(C_i)}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Пусть $\{e_k(\lambda, x)\}$ — общие обобщенные собственные векторы операторов $\overline{T(C_i)}$ и $\{A_j\}_1^m$, заданные ядерной спектральной теоремой. Тогда формулы (2) и (3), формула спектрального синтеза (4) и равенство Парсеваля (5) следуют из утверждений (3.23), (3.25) и (3.24) приложения Б.

Замечание 1. В силу формулы (27) приложения Б. 3 формулы (2) и (3) могут быть записаны в виде

$$\overline{T(C_i)}' e_k(\lambda, x) = \widehat{C}_i(\lambda) e_k(\lambda, x), \tag{7}$$

$$A'_j e_k(\lambda, x) = \widehat{A}_j(\lambda) e_k(\lambda, x), \tag{8}$$

где, например, A'_j обозначает расширение оператора A_j, полученное расширением области определения $D(A_j)$ теми элементами $\varphi' \in \Phi'$, для которых выполняется равенство

$$\langle A_j\varphi, \varphi'\rangle = \langle \varphi, A'_j\varphi'\rangle, \quad \varphi \in \Phi, \quad \varphi' \in \Phi'.$$

Ради простоты мы будем использовать такие обозначения, как будто все операторы Казимира имеют чисто непрерывный спектр, а все неинвариантные операторы A_j — чисто дискретный спектр.

Утверждение 2. *Пусть множество* $\{T(C_i)\}_1^n$ *или* $\{A_j\}_1^m$ *содержит эллиптический дифференциальный оператор. Тогда все собственные векторы* $e_k(\lambda, x)$ *являются регулярными функциями на* X. *Для* $\varphi \in \Phi$ *имеем*

$$\widehat{\varphi}_k(\lambda) = \int_X \varphi(x) \overline{e_k(\lambda, x)}\, d\mu(x). \tag{9}$$

Мы имеем также следующее соотношение полноты:

$$\int_\Lambda d\rho(\lambda) \sum_{k=1}^{\dim \widehat{H}(\lambda)} e_k(\lambda, x) \overline{e_k(\lambda, x')} = \delta(x - x'). \tag{10}$$

Доказательство утверждения 2 подобно доказательству утверждения 14.2.2, и мы его опускаем. Интеграл (10) понимается как слабый интеграл регулярных распределений $e_k(\lambda, x)\overline{e_k(\lambda, x')}$ на $X \times X$ и по существу эквивалентен равенству Парсеваля.

Наконец, если, кроме того, все операторы из $\{T(C_i)\}_1^n$ имеют спектры, которые абсолютно непрерывны относительно меры Лебега (т. е. $d\rho(\lambda) = \rho(\lambda)\, d\lambda$), то мы имеем следующее соотношение ортогональности:

$$\int_X e_k(\lambda, x) \overline{e_{k'}(\lambda', x)}\, d\mu(x) = \rho(\lambda)^{-1} \delta(\lambda - \lambda') \delta_{kk'}. \tag{11}$$

Требование утверждения 2, чтобы максимальное множество коммутирующих операторов в $L^2(X, \mu)$ содержало эллиптический оператор, и требование, чтобы все операторы в $\{T(C_i)\}_1^n$ и $\{A_j\}_1^m$ имели абсолютно непрерывные спектры и чисто дискретные спектры соответственно, часто выполняются в приложениях. В частности, эти требования выполняются для группы $SO(p, q)$ в случае, рассмотренном в следующем параграфе (§ 3), где X — симметрическое пространство ранга один.

Интересно, что собственные векторы $e_k(\lambda, x)$ являются линейными комбинациями матричных элементов $D^{\lambda}_{pq}(g)$ представления $\widehat{T}_g(\lambda)$. В самом деле, пусть $\{e_k(\lambda, x)\}$ — базис в $\widehat{H}(\lambda)$, элементы которого удовлетворяют утверждению 2. Тогда

$$\widehat{T}_g(\lambda)\, e_k(\lambda, x) = e_k(\lambda, xg) = D^{\lambda}_{lk}(g)\, e_l(\lambda, x). \tag{11'}$$

Но в силу однородности пространства X любая точка из X может быть записана в виде og_x, где o — начальная точка в X (o соответствует классу смежных элементов K). Поэтому из формулы (11) следует

$$e_k(\lambda, x) = e_k(\lambda, og_x) = D^{\lambda}_{lk}(g_x)\, e_l(\lambda, o), \tag{12}$$

где g_x — элемент борелева множества $S \subset G$, определенного разложением Макки $G = KS$ группы G. Формула (12) указывает на тот важный факт, что собственные векторы $e_k(\lambda, x)$ из пространства $L^2(X, \mu)$, $X = K \diagdown G$, могут быть получены редукцией матричных элементов $D^{\lambda}_{pq}(g)$ на G до борелева множества S. Эта процедура хорошо известна физикам для случая группы SO(3), где собственные векторы $Y^J_M(\theta, \varphi)$ на сфере S^2 могут быть получены из матричных элементов $D^J_{MN}(\varphi, \theta, \psi)$ с помощью формулы

$$Y^J_M(\theta, \varphi) = (-1)^M \left(\frac{4\pi}{(2J+1)}\right)^{1/2} D^J_{-M,0}(\varphi, \theta, 0).$$

Пример 1. Пусть G — группа Лоренца SO(3, 1), и пусть

$$x = \mathrm{SO}(3, 1)/\mathrm{SO}(3).$$

Согласно табл. 1 из гл. 4, X — симметрическое пространство Картана ранга один. Оно может быть реализовано в виде трехмерного гиперболоида

$$(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = 1. \tag{13}$$

Поскольку SO(3, 1) и SO(3) — унимодулярные группы, согласно следствию 1 теоремы 4.3.1, существует инвариантная мера $d\mu(x)$ на X. Эта мера имеет вид $d\mu(x) = d^3x/x^0$ (упражнение 4.3.2). Мы найдем явный вид гармонических функций на X, которые дают формулу (4) спектрального синтеза, соотношение полноты (10) и соотношение ортогональности (11), а также разложение (1) в прямой интеграл пространства $H = L^2(X, d\mu)$ и представления T_g: $u(x) \to u(g^{-1}x)$ на неприводимые компоненты.

Из теоремы 1.1 мы знаем, что в пространстве $L^2(X, \mu)$ кольцо инвариантных дифференциальных операторов порождается оператором Лапласа—Бельтрами Δ, заданным формулой (1.12). Мы найдем сначала явный вид Δ. Введя полярные координаты

$$\begin{aligned} x^1 &= \sin\theta_1 \cos\varphi \operatorname{sh}\theta, \quad && \varphi \in [0, 2\pi), \\ x^2 &= \sin\theta_1 \sin\varphi \operatorname{sh}\theta, && \theta_1 \in [0, \pi/2], \\ x^3 &= \cos\theta_1 \operatorname{sh}\theta, && \\ x^0 &= \operatorname{ch}\theta, && \theta \in [0, \infty), \end{aligned} \tag{14}$$

и используя выражение (1.12) для оператора Лапласа—Бельтрами, находим

$$\Delta(X) = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\operatorname{sh}^2\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\boldsymbol{J}^2}{\operatorname{sh}^2\theta}, \tag{15}$$

где $\boldsymbol{J}^2$ — инвариантный оператор группы SO(3). Положив

$$e_k(\lambda, x) = V_J^\lambda(\theta)\, Y_M^J(\theta_1, \varphi), \tag{16}$$

где $Y_M^J(\theta_1, \varphi)$ — гармонические функции на сфере S^2, сводим уравнение на собственные значения

$$\Delta(x)\, e_k(\lambda, x) = \hat{\Delta}(\lambda)\, e_k(\lambda, x) \tag{17}$$

к решению обычного дифференциального уравнения второго порядка вида

$$\left[-\frac{1}{\operatorname{sh}^2\theta}\frac{d}{d\theta}\operatorname{sh}^2\theta\frac{d}{d\theta} + \frac{J(J+1)}{\operatorname{sh}^2\theta}\right] V_J^\lambda(\theta) = \hat{\Delta}(\lambda)\, V_J^\lambda(\theta). \tag{18}$$

Спектр Λ этого оператора и спектральная мера $d\rho(\lambda)$ могут быть найдены или сведением этого уравнения к уравнению Шредингера, или используя стандартную технику Титчмарша—Кодаиры. При этом получим

$$\hat{\Delta}(\lambda) = -\Lambda^2 - 1, \quad \lambda \in \Lambda = [0, \infty), \tag{19}$$

и спектральная мера $d\rho(\lambda)$ равна $d\lambda$ [526]. Уравнение (17) является гипергеометрическим уравнением, регулярное в $\xi = 0$ решение которого

$$V_J^\lambda(\theta) = N^{-1/2} \operatorname{th}^J\theta \operatorname{ch}^{[i\lambda-1]}\theta\, {}_2F_1\left\{\frac{1}{2}(J - i\lambda + 1), \right.$$
$$\left. \frac{1}{2}(J - i\lambda + 2); \quad J + \frac{3}{2}, \quad \operatorname{th}^2\theta\right\}, \tag{20}$$

где

$$N = \left| \frac{(2\pi)^{1/2}\,\Gamma(i\lambda)\,\Gamma(J + 3/2)}{\Gamma\left[\frac{1}{2}(i\lambda + 1 + J)\right]\Gamma\left[\frac{1}{2}(i\lambda + 2 + J)\right]} \right|^2. \tag{21}$$

Следовательно, прямой интеграл (2.1) для $H = L^2(X, \mu)$, соответствующий Δ, имеет вид

$$\widehat{H} = \int_0^\infty \widehat{H}(\lambda)\, d\lambda.$$

Поскольку операторы Казимира второго порядка группы SO (3, 1) и максимальной компактной подгруппы $K = SO(3)$ диагональны, эллиптический оператор Нельсона

$$\Delta_N = \sum_1^{\dim G} X_i^2 = C_2(SO(3,1)) + 2C_2(SO(3))$$

также диагонален. Отсюда и из утверждения 2 имеем:

1. *Спектральный синтез.* В качестве ядерного пространства $\Phi(X)$ может быть взято пространство Шварца $S(X)$. Для $\varphi \in S(x)$ спектральный синтез (3) имеет вид

$$\varphi(\theta, \theta_1, \varphi) = \int_0^\infty d\lambda \sum_{J=0}^\infty \sum_{M=-J}^{J} \widehat{\varphi}_{JM}(\lambda) V_J^\lambda(\theta) Y_M^J(\theta_1, \varphi), \tag{22}$$

где

$$\widehat{\varphi}_{JM}(\lambda) = \int_X d\mu(x) \varphi(\theta, \theta_1, \varphi) V_J^\lambda(\theta) Y_M^J(\theta_1, \varphi). \tag{23}$$

2. Равенство Парсеваля

$$\int_X \varphi(x)\overline{\psi(x)}\, d\mu(x) = \int_0^\infty d\lambda \sum_{J=0}^\infty \sum_{M=-J}^{J} \widehat{\varphi}_{JM}(\lambda) \overline{\widehat{\psi}_{JM}(\lambda)}. \tag{24}$$

В (23) и (24)

$$d\mu(x') = \operatorname{ch}^2\theta\, d\theta \sin\theta_1\, d\theta_1\, d\varphi. \tag{25}$$

3. Соотношение полноты (10)

$$\int_0^\infty d\lambda \sum_{J=0}^\infty \sum_{M=-J}^{J} V_J^\lambda(\theta) Y_M^J(\theta_1, \varphi) V_J^\lambda(\theta') Y_M^J(\theta_1', \varphi') =$$
$$= \operatorname{ch}^{-2}\theta\delta(\theta - \theta')\delta(\cos\theta_1 - \cos\theta_1')\delta(\varphi - \varphi'). \tag{26}$$

4. Соотношение ортогональности (11) принимает вид

$$\int_X V_{J'}^{\lambda'}(\theta) Y_{M'}^{J'}(\theta_1, \varphi) V_J^\lambda(\theta) Y_M^J(\theta_1, \varphi)\, d\mu(x) = \delta(\lambda - \lambda')\delta_{JJ'}\delta_{MM'}. \tag{27}$$

Каждый генератор Y группы SO (3, 1) коммутирует с оператором Δ. Поэтому каждое гильбертово пространство $\widehat{H}(\lambda)$ инвариантно относительно действия представления T_g группы SO (3, 1). Используя критерий Брюа, приведенный в теореме

19.1.2, можно проверить, что почти каждое представление $\widehat{T}_g(\lambda)$ в $\widehat{H}(\lambda)$, полученное ограничением представления $\widehat{T}_g$ на $\widehat{H}(\lambda)$, неприводимо. Поэтому из разложения (1) пространства H следует разложение

$$T_g \to \widehat{T}_g = \int_0^\infty \widehat{T}_g(\lambda)\,d\lambda \tag{28}$$

представления T_g на неприводимые компоненты.

§ 3. Гармонический анализ на симметрических пространствах, соответствующих псевдоортогональным группам SO (p, q)

Псевдоортогональные группы играют важную роль в теоретической физике. Наиболее важная из них — группа Лоренца SO (3, 1) специальной теории относительности.

Группа SO (4, 1), известная как группа де Ситтера, появляется в общей теории относительности, как динамическая группа в теории атома водорода, в периодической таблице элементов, а также в моделях адронов. Конформная группа SO (4, 2) является группой симметрий уравнений Максвелла и появляется в роли группы симметрий или динамической группы в теории элементарных частиц. Другие группы, такие, как SO (2, 1) или SO (4, 3), также часто появляются в приложениях. Поэтому полезно дать детальное описание свойств гармонического анализа на симметрических пространствах, соответствующих группам SO (p, q), и соответствующих представлений групп SO (p, q) на симметрических пространствах.

Полная классификация симметрических пространств, соответствующих группам SO (p, q), дана в табл. 1 и 2 гл. 4. Наиболее важными для приложений являются следующие симметрические пространства.

1. Симметрические пространства Картана

$$X = SO_0(p, q)/SO(p) \otimes SO(q). \tag{1}$$

Ранг k этих пространств равен $k = \min(p, q)$, а размерность равна pq.

2. Симметрические пространства с некомпактными полупростыми стационарными группами

$$X_{r,s} = SO_0(p, q)/SO_0(r, s) \otimes SO_0(p-r, q-s), \tag{2}$$
$$0 \leqslant r \leqslant p, \quad 0 \leqslant s \leqslant q.$$

3. Симметрические пространства с некомпактными неполупростыми стационарными группами

$$X_0 = SO_0(p, q)/T^{p-1, q-1} \rtimes SO_0(p-1, q-1). \tag{3}$$

Здесь $T^{n,m}$ — группа трансляций пространства Минковского $M^{n,m}$.

В этом параграфе мы рассмотрим гармонический анализ на симметрических пространствах (1)—(3) ранга один:

$$\begin{aligned} X_{+}^{p+q-1} &\equiv \mathrm{SO}_0(p, q)/\mathrm{SO}_0(p-1, q), \\ X_{-}^{p+q-1} &\equiv \mathrm{SO}_0(p, q)/\mathrm{SO}_0(p, q-1) \end{aligned} \tag{4}$$

и X_0, заданное в (3).

Группы $\mathrm{SO}_0(p, q)$ и стационарные подгруппы пространств X_+, X_- и X_0 все унимодулярны. Поэтому, согласно следствию 1 теоремы 4.3.1, на этих пространствах X_+, X_- и X_0 существует инвариантная мера $d\mu(x)$. Поэтому унитарное представление $g \to T_g$ группы $\mathrm{SO}_0(p, q)$ задается в пространстве $H = L^2(X, \mu)$ формулой

$$T_g u(x) = u(g^{-1}x). \tag{5}$$

Из теоремы 1.1 мы знаем, что в пространствах $H(X_+)$, $H(X_-)$ и $H(X_0)$ кольцо инвариантных дифференциальных операторов порождается оператором Казимира второго порядка C_2, который на пространствах $H(X_+)$ и $H(X_-)$ совпадает с оператором Лапласа—Бельтрами.

Мы всегда можем выбрать такую систему координат на X_+, X_- или X_0, что операторы Казимира второго порядка групп $\mathrm{SO}(p)$ и $\mathrm{SO}(q)$ будут диагональны. Поэтому эллиптический оператор Нельсона

$$\Delta_N = \sum_{i=1}^{\dim G} X_i^2 = C_2(\mathrm{SO}(p, q)) - 2C_2(\mathrm{SO}(p)) - 2C_2(\mathrm{SO}(q))$$

также диагонален. Следовательно, все предположения теоремы 2.1 выполняются, и мы получаем:

1. Пространство H и представление T_g, заданное формулой (5), могут быть представлены как прямые интегралы

$$H \to \hat{H} = \int_{\Lambda} \hat{H}(\lambda)\, d\mu(\lambda), \quad T_g \to \hat{T}_g = \int_{\Lambda} \hat{T}_g(\lambda)\, d\mu(\lambda)$$

компонент $\hat{H}(\lambda)$ и $\hat{T}_g(\lambda)$ соответственно.

2. Существует триплет Гельфанда $\Phi \subset H \subset \Phi'$, такой, что все элементы $e(\lambda)$ из $H'(\lambda)$ удовлетворяют соотношению (2.7) на собственные значения.

3. Имеет место спектральный синтез (2.4) для функций $\varphi(x) \in \Phi$ и равенство Парсеваля (2.6).

Чтобы выполнить в явном виде разложение пространства H и представления T_g на неприводимые компоненты и получить спектральный синтез для функций $\varphi(x) \in \Phi$ в явном виде, следует найти максимальную абелеву алгебру A в коммутанте T'

представления T и ее спектр Λ. Мы решаем эти задачи следующими этапами.

1. Строим удобную систему координат на X, для которой метрический тензор $g_{\alpha\beta}(x)$ диагонален.

2. Решаем задачу на собственные значения для оператора Лапласа—Бельтрами:

$$\Delta(X)\, e(\lambda, x) = \widehat{\Delta}(\lambda)\, e(\lambda, x).$$

(Поскольку $[\Delta, Y] = 0$ для всех Y из алгебры Ли L группы G, то пространство $H'(\lambda)$ при фиксированном λ, натянутое на все $e(\lambda, x)$, инвариантно.)

3. Находим дополнительные инвариантные операторы, которые разлагают пространство $\widehat{\mathrm{H}}(\lambda)$ на неприводимые компоненты.

Подчеркнем, что, согласно теореме 1.1, кольцо инвариантных дифференциальных операторов порождается оператором Лапласа—Бельтрами. Однако это ничего не говорит о других инвариантных операторах в H. Мы найдем, что в случае симметрических пространств ранга один эти дополнительные инвариантные операторы являются операторами отражений в $H(X)$.

А. Гармонический анализ на симметрических пространствах, соответствующих группам $\mathrm{SO}_0(p, q)$, $p \geqslant q > 2$

Чтобы выбрать подходящую систему координат, нам следует ввести некоторую удобную модель для пространства $X_{\pm}^{p+q-1}$ из (4). Это означает, что мы должны ввести многообразие той же размерности и с той же стационарной группой, что и для $X_{\pm}^{p+q-1}$, на котором группа $\mathrm{SO}_0(p, q)$ действует транзитивно.

Рассуждениями, подобными рассуждениям для случая группы $\mathrm{SO}(p)$ (гл. 4, § 2, пример 1), можно показать, что моделью для пространства X_{+}^{p+q-1} может служить гиперболоид $H^{p,q}$, определенный уравнением

$$(x^1)^2 + \ldots + (x^p)^2 - (x^{p+1})^2 - \ldots - (x^{p+q})^2 = 1. \tag{6}$$

Моделью для пространства X_{-}^{p+q-1} мы берем гиперболоид $H^{q,p}$, определенный уравнением

$$(x^1)^2 + \ldots + (x^q)^2 - (x^{q-1})^2 - \ldots - (x^{p+q})^2 = 1. \tag{7}$$

Если мы введем внутренние координаты $\Omega = \{\eta^1, \ldots, \eta^{p+q-1}\}$ на пространстве $H^{p,q}$ (которое вложено в плоское пространство Минковского $M^{p,q}$), то метрический тензор $g_{\alpha\beta}(H^{p,q})$ на гиперболоиде $H^{p,q}$, индуцированный метрическим тензором $g_{ab}(M^{p,q})$ на пространстве Минковского $M^{p,q}$, будет задаваться формулой

$$g_{\alpha\beta}(H^{p,q}) = g_{ab}(M^{p,q})\, \partial_\alpha x^a(\Omega)\, \partial_\beta x^b(\Omega), \tag{8}$$

где $a, b = 1, 2, \ldots, p+q$, $\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, p+q-1$ и x^a — декартовы координаты на гиперболоиде Ω.

В общем случае мы можем выбрать большое число различных систем координат на гиперболоиде $H^{p,q}$, таких, что оператор Лапласа—Бельтрами допускает разделение переменных. Однако наиболее удобной системой координат является бигармоническая система, так как в этой системе генераторы максимальной абелевой компактной подалгебры алгебры Ли группы $SO_0(p, q)$ автоматически содержатся в максимальном множестве коммутирующих операторов.

Бигармоническая система координат на сфере S^n введена в (10.3.5а).

Бигармоническая система координат на гиперболоиде $H^{p,q}$, заданном формулой (6), строится следующим образом:

$$\begin{aligned} &x^k = x'^k \operatorname{ch}\theta, \quad k = 1, 2, \ldots, p, \\ &x^{p+l} = \tilde{x}^l \operatorname{sh}\theta, \quad l = 1, 2, \ldots, q, \quad \theta \in [0, \infty), \end{aligned} \tag{9}$$

где вид x'^k и $\tilde{x}^l$ зависит от того, четными или нечетными являются p и q. Мы должны различать четыре случая:

$$\begin{array}{llll} 1) & p = 2r, & q = 2s, & \\ 2) & p = 2r, & q = 2s+1, & r, s = 1, 2, \ldots. \\ 3) & p = 2r+1, & q = 2s, & \\ 4) & p = 2r+1, & q = 2s+1, & \end{array} \tag{10}$$

Если p четно ($p = 2r$), то соответствующие x'^k ($k = 1, 2, \ldots, 2r$) задаются рекурсивными формулами:

$$\begin{array}{llll} \text{для} \quad r = 1 & x'^1 = \cos\varphi^1, & & \\ & x'^2 = \sin\varphi^1, & \varphi^1 \in [0, 2\pi), & \\ \text{для} \quad r > 1 & x'^i = x^{*i}\sin\theta^r, & i = 1, 2, \ldots, 2r-2, & \\ & x'^{2r-1} = \cos\varphi^r\cos\theta^r, & \varphi^j \in [0, 2\pi), & j = 2, 3, \ldots, r, \\ & x'^{2r} = \sin\varphi^r\cos\theta^r, & \theta^k \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], & k = 2, 3, \ldots, r, \end{array} \tag{11}$$

где x^{*i} — координаты для $p = 2(r-1)$.

Если p нечетно ($p = 2r+1$), то мы раньше строим x^{*i}, $i = 1, 2, \ldots, 2r$, используя вышеупомянутый метод для $p = 2r$. Затем получаем соответствующие x'^k, $k = 1, 2, \ldots, 2r+1$:

$$\begin{aligned} &x'^i = x^{*i}\sin\theta^{r+1}, \quad i = 1, 2, \ldots, 2r, \\ &x'^{2r+1} = \cos\theta^{r+1}, \quad \theta^{r+1} \in [0, \pi). \end{aligned} \tag{12}$$

Рекурсивные формулы для $\tilde{x}^l$ при четных или нечетных q те же, что и для x'^k при четных или нечетных p соответственно, за исключением того, что углы φ^i, θ^j в x'^k заменяются на $\tilde{\varphi}^i$, $\tilde{\theta}^j$.

Выбрав параметризацию $\Omega \equiv \{\omega, \tilde{\omega}, \theta\}$ на гиперболоиде $H^{p,q}$ в виде

$$\begin{aligned} \omega &\equiv \{\varphi^1, \ldots, \varphi^{[p/2]}, \theta^2, \ldots, \theta^{\{p/2\}}\}, \\ \tilde{\omega} &\equiv \{\tilde{\varphi}^1, \ldots, \tilde{\varphi}^{[q/2]}, \tilde{\theta}^2, \ldots, \tilde{\theta}^{\{q/2\}}\} \end{aligned} \tag{13}$$

и введя обозначение

$$\{\partial_\gamma\} \equiv \left\{\frac{\partial}{\partial\varphi^1}, \frac{\partial}{\partial\theta^2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial\varphi^{[p/2]}}, \frac{\partial}{\partial\theta^{\{p/2\}}}, \frac{\partial}{\partial\tilde{\varphi}^1}, \frac{\partial}{\partial\tilde{\theta}^2}, \ldots \right.$$
$$\left. \ldots, \frac{\partial}{\partial\tilde{\varphi}^{[q/2]}}, \frac{\partial}{\partial\tilde{\theta}^{\{q/2\}}}, \frac{\partial}{\partial\theta}\right\}, \quad \gamma = 1, 2, \ldots, p+q-1, \tag{14}$$

мы можем вычислить метрический тензор $g_{\alpha\beta}(H^{p,q})$, а также оператор Лапласа—Бельтрами $\Delta(H^{p,q})$.

Так как во всех четырех случаях, показанных в (10), в силу свойств метрического тензора (8) переменные в операторе Лапласа—Бельтрами разделяются одинаковым образом, мы можем записать оператор $\Delta(H^{p,q})$ в виде

$$\Delta(H^{p,q}) = -(\operatorname{ch}^{p-1}\theta\operatorname{sh}^{q-1}\theta)^{-1}\frac{\partial}{\partial\theta}\operatorname{ch}^{p-1}\theta\operatorname{sh}^{q-1}\theta\frac{\partial}{\partial\theta} +$$
$$+\frac{\Delta(S^{p-1})}{\operatorname{ch}^2\theta} - \frac{\Delta(S^{q-1})}{\operatorname{sh}^2\theta}, \tag{15}$$

где $\Delta(S^{p-1})$ $[\Delta(S^{q-1})]$ — оператор Лапласа—Бельтрами группы вращений $SO(p)$ $[SO(q)]$ (гл. 10, § 3). Если мы представим собственные функции оператора $\Delta(H^{p,q})$ в виде произведения собственных функций операторов $\Delta(S^{p-1})$, $\Delta(S^{q-1})$ и функции $\psi^\lambda_{l_{\{p/2\}}, \tilde{l}_{\{q/2\}}}(\theta)$, то получим следующее уравнение:

$$\left[-(\operatorname{ch}^{p-1}\theta\operatorname{sh}^{q-1}\theta)^{-1}\frac{d}{d\theta}\operatorname{ch}^{p-1}\theta\operatorname{sh}^{q-1}\theta\frac{d}{d\theta} - \frac{l_{\{p/2\}}(l_{\{p/2\}}+p-2)}{\operatorname{ch}^2\theta} + \right.$$
$$\left. + \frac{\tilde{l}_{\{q/2\}}(\tilde{l}_{\{q/2\}}+q-2)}{\operatorname{sh}^2\theta} - \hat{\Delta}(\lambda)\right]\psi^\lambda_{l_{\{p/2\}}, \tilde{l}_{\{q/2\}}}(\theta) = 0, \tag{16}$$

где $l_{\{p/2\}}(l_{\{p/2\}}+p-2)$ $[\tilde{l}_{\{q/2\}}(\tilde{l}_{\{q/2\}}+q-2)]$ — собственные значения оператора $\Delta(s^{p-1})$ $[\Delta(S^{q-1})]$ $(l_{\{p/2\}}$ $[\tilde{l}_{\{q/2\}}]$ —определенные неотрицательные целые числа для $p > 2$ $[q > 2])$.

Дискретная серия представлений существует, если существуют решения уравнения (16), которые являются квадратично интегрируемыми функциями $\psi^{\lambda}_{l_{\{p/2\}},\tilde{l}_{\{q/2\}}}(\theta)$, $\theta \in [0, \infty]$, относительно меры

$$d\mu(\theta) = \mathrm{ch}^{p-1}\theta\,\mathrm{sh}^{q-1}\theta\,d\theta, \tag{17}$$

индуцируемой мерой $d\mu(x)$ на гиперболоиде $H^{p,q}$, которая в бигармонических координатах имеет вид [1])

$$d\mu(\Omega) = \bar{g}(H^{p,q})^{1/2}\,d\Omega = d\mu(\omega)\,d\mu(\tilde{\omega})\,\mathrm{ch}^{p-1}\theta\,\mathrm{sh}^{q-1}\theta\,d\theta. \tag{18}$$

Левоинвариантная мера $d\mu(\omega)$ (относительно $SO(p)$) определяется формулой (10.3.14). Так как дифференциальное уравнение (16) имеет мероморфные коэффициенты, которые регулярны в интервале $(0, \infty)$, любые два линейно независимых решения также являются регулярными аналитическими в этом интервале. Поскольку в начальной точке и на бесконечности коэффициенты сингулярны, решения в общем не являются регулярными в этих точках; легко можно найти два существенно различных поведения решений в начальной точке:

$$\psi_1^0 \sim \theta^{\tilde{l}_{\{q/2\}}}, \qquad \psi_2^0 \sim \theta^{-\tilde{l}_{\{q/2\}}-q+2}$$

и на бесконечности:

$$\psi_{1,2}^{\infty} \sim \exp\left\{-\frac{1}{2}(p+q-2) \pm \left[\frac{1}{2}(p+q-2)^2 - \hat{\Delta}(\lambda)\right]^{1/2}\right\}\theta.$$

Единственным удовлетворительным решением, т. е. решением, квадратично интегрируемым относительно нашей меры $d\mu(\theta)$, заданной формулой (17), является решение, которое ведет себя в начальной точке как $\psi_1^0(\theta)$ и на бесконечности как $\psi_2^{\infty}(\theta)$. Мы получаем решение уравнения (16) с этими свойствами, превратив (16) в гипергеометрическое уравнение, решением которого является

$$\psi^{\lambda}_{l_{\{p/2\}},\tilde{l}_{\{q/2\}}}(\theta) = \mathrm{th}^{\tilde{l}_{\{q/2\}}}\theta\,\mathrm{ch}^{-\{(p+q-2)/2+[(p+q-2)^2/2+\hat{\Delta}(\lambda)]^{1/2}\}}\theta \times$$
$$\times {}_2F_1\left(-n + l_{\{p/2\}} + \frac{p-2}{2},\ -n;\ \tilde{l}_{\{q/2\}} + \frac{q}{2};\ \mathrm{th}^2\theta\right),$$

где неотрицательное целое число n связано с $l_{\{p/2\}}$, $\tilde{l}_{\{q/2\}}$ и $\hat{\Delta}(\lambda)$ тем условием, что ${}_2F_1$ — полином, т. е.

$$l_{\{p/2\}} - \tilde{l}_{\{q/2\}} - 2n = \frac{1}{2}(p+q-2) + \left\{\left[\frac{1}{2}(p+q-2)\right]^2 - \right.$$
$$\left. - \hat{\Delta}(\lambda)\right\}^{1/2} - p + 2, \quad n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{19}$$

---

[1]) Мера $d\mu(x) = [\bar{g}(H^{p,q})]^{1/2}\,d\Omega$ является римановой мерой, которая левоинвариантна при действии группы $SO_0(p, q)$. См. гл. 4, § 3.

Из этого ограничительного условия мы можем найти, что дискретный спектр оператора $\Delta(H^{p,q})$ имеет вид

$$\widehat{\Delta}(\lambda) = -L(L+p+q-2), \quad L = -\left\{\frac{1}{2}(p+q-4)\right\}, \\ -\left\{\frac{1}{2}(p+q-4)\right\}+1, \ldots \tag{20}$$

и

$$L = l_{\{p/2\}} - \tilde{l}_{\{q/2\}} - q - 2n. \tag{21}$$

Таким образом, ортонормированные собственные функции инвариантного оператора $\Delta(H^{p,q})$ имеют вид

$$Y^{L,\, l_2,\, \ldots,\, l_{\{p/2\}},\, \tilde{l}_2,\, \ldots,\, \tilde{l}_{\{q/2\}}}_{m_1,\, \ldots,\, m_{[p/2]},\, \tilde{m}_1,\, \ldots,\, \tilde{m}_{[q/2]}}(\omega, \tilde{\omega}, \theta) = \\ = Y^{l_2,\, \ldots,\, l_{\{p/2\}}}_{m_1,\, \ldots,\, m_{[p/2]}}(\omega) \cdot Y^{\tilde{l}_2,\, \ldots,\, \tilde{l}_{\{q/2\}}}_{\tilde{m}_1,\, \ldots,\, \tilde{m}_{[q/2]}}(\tilde{\omega}) \cdot V^L_{l_{\{p/2\}},\, \tilde{l}_{\{q/2\}}}(\theta), \tag{22}$$

где

$$Y^{l_2,\, \ldots,\, l_{\{p/2\}}}_{m_1,\, \ldots,\, m_{[p/2]}}(\omega) \equiv \\ \equiv \begin{cases} Y^{l_2,\, \ldots,\, l_r}_{m_1,\, \ldots,\, m_r}(\omega) = (N_r^{-1/2}) \prod\limits_{k=2}^{r} \sin^{2-k}(\theta^k)\, d^{J_k}_{M_k, M'_k}(2\theta^k) \prod\limits_{k=1}^{r} \exp i m_k \varphi^k, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{если} \quad p = 2r, \\ Y^{l_2,\, \ldots,\, l_{r+1}}_{m_1,\, \ldots,\, m_r}(\omega) = (N_{r+1}^{-1/2}) \sin^{1-r}(\theta^{r+1})\, d^{J_{r+1}}_{M_{r+1},\, 0}(\theta^{r+1}) \times \\ \times \prod\limits_{k=2}^{r} \sin^{2-k}(\theta^k)\, d^{J_k}_{M_k,\, M'_k}(2\theta^k) \prod\limits_{k=1}^{r} \exp i m_k \varphi^k, \quad \text{если} \ p = 2r+1, \end{cases} \tag{23}$$

— собственные функции оператора $\Delta(S^{p-1})$, полученные в гл. 10, § 3 [выражения (19) и (20)], и $Y^{\tilde{l}_2,\ldots,\, \tilde{l}_{\{q/2\}}}_{\tilde{m}_1,\, \ldots,\, m_{[q/2]}}(\tilde{\omega})$ — собственные функции оператора $\Delta(S^{q-1})$, выраженные в виде произведения обычных d-функций угловых моментов и экспоненциальных функций точно так, как в (23), но с переменными $\tilde{\varphi}^i$, $\tilde{\theta}^i$ и $\tilde{l}_k$, $\tilde{m}_l$ вместо φ^i, θ^i и l_k, m_l. Функция $V^L_{l_{\{p/2\}},\, \tilde{l}_{\{q/2\}}}(\theta)$ является решение уравнения (16), заданным формулой

$$V^L_{l_{\{p/2\}},\, \tilde{l}_{\{q/2\}}}(\theta) = (N^{-1/2})\, \operatorname{th}^{\tilde{l}_{\{q/2\}}}(\theta)\, \operatorname{ch}^{-(L+p+q-2)}(\theta) \times \\ \times {}_2F_1\Big[\frac{1}{2}(p+q-2+l_{\{p/2\}}+\tilde{l}_{\{q/2\}}+L), \\ \frac{1}{2}(L+q+\tilde{l}_{\{q/2\}}-l_{\{p/2\}}); \quad \tilde{l}_{\{q/2\}}+\frac{q}{2}; \quad \operatorname{th}^2\theta\Big], \tag{24}$$

где для заданного представления L фиксировано, а $l_{\{p/2\}}$, $\tilde{l}_{\{q/2\}}$ ограничены тем условием, что ${}_2F_1$ — полином, т. е.

$$l_{\{p/2\}} - \tilde{l}_{\{q/2\}} = L + q + 2, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{25}$$

В формуле (24) N — нормировочный множитель, заданный формулой

$$N = \frac{\Gamma\left[\frac{1}{2}\left(l_{\{p/2\}} - \tilde{l}_{\{q/2\}} - L - q + 2\right)\right] \Gamma\left(\tilde{l}_{\{q/2\}} + q/2\right) \Gamma\left[\frac{1}{2}\left(L - \tilde{l}_{\{q/2\}} + l_{\{p/2\}} + p\right)\right]}{2\left[L + \frac{1}{2}(p + q - 2)\right] \Gamma\left[\frac{1}{2}\left(l_{\{p/2\}} + \tilde{l}_{\{q/2\}} + L + p + q - 2\right)\right] \Gamma\left[\frac{1}{2}\left(l_{\{p/2\}} + \tilde{l}_{\{q/2\}} - L\right)\right]}. \tag{26}$$

Пусть $\hat{H}(L)$, где L фиксировано, обозначает подпространство в $H = L^2(H^{p,q}, \mu)$, натянутое на гармонические функции (23). Поскольку

$$[\Delta(H^{p,q}), Z_{ij}] = 0, \quad i, j = 1, 2, \ldots, p + q,$$

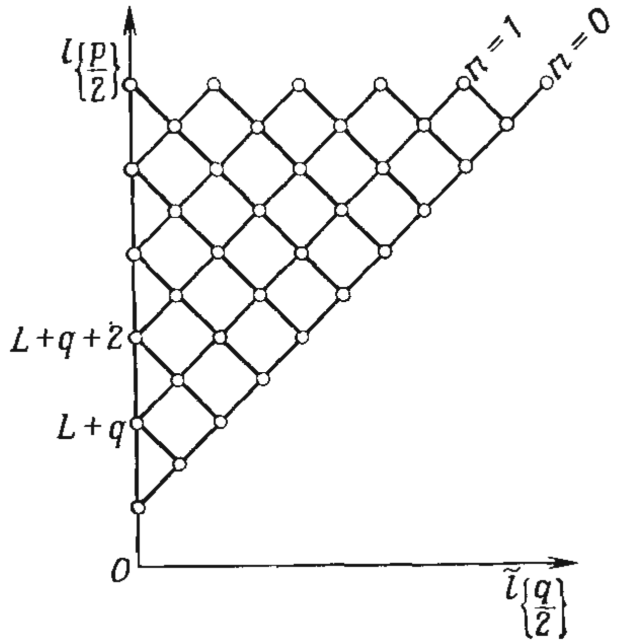
для любого генератора $Z_{ij} \in \mathrm{so}(p, q)$, пространство $\hat{H}(L)$ является инвариантным пространством для квазирегулярного представления (1.1). Унитарное представление (1.1), ограниченное на $\hat{H}(L)$, мы обозначим через $\hat{T}(L)$.

Структура пространства представления $\hat{H}(L)$ может быть проиллюстрирована графически решеткой в плоскости $(l_{\{p/2\}}, \tilde{l}_{\{q/2\}})$. Используя соотношение (25), мы получаем диаграмму, показанную на фиг. 1. Каждый узел решетки на фиг. 1 представляет собой конечномерное подпространство $\tilde{H}^{(L)}_{l_{\{p/2\}}, \tilde{l}_{\{q/2\}}}$ неприводимого представления максимальной компактной подгруппы $SO(p) \otimes SO(q)$, которое определяется парой целых чисел $l_{\{p/2\}}$ и $\tilde{l}_{\{q/2\}}$. Генераторы $L_{ij} \in SO(p) \otimes SO(q)$ действуют внутри $\hat{H}^{(L)}_{l_{\{p/2\}}, \tilde{l}_{\{q/2\}}}$. С другой стороны, генераторы B_{ij} некомпактного типа отображают подпространство $\hat{H}^{(L)}_{l_{\{p/2\}}, \tilde{l}_{\{q/2\}}}$ в четыре соседних подпространства $\hat{H}^{(L)}_{l_{\{p/2\}} \pm 1, \tilde{l}_{\{q/2\}} \pm 1}$. Интересно, что структура всего пространства представления определяется наинизшим значением $l_{\{p/2\}}$.

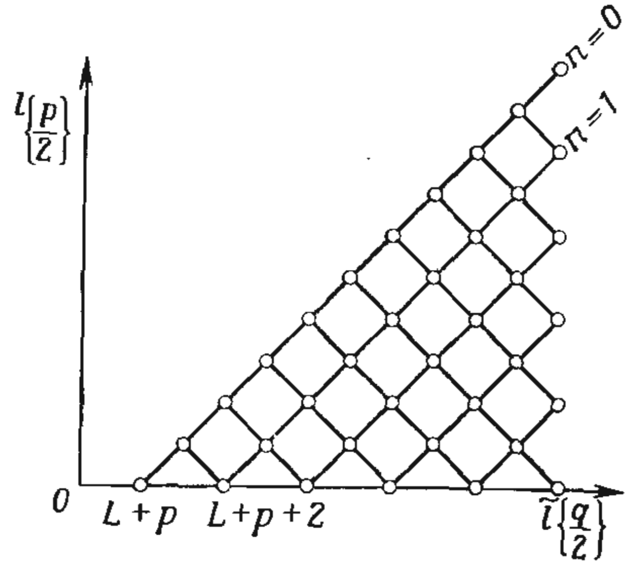
Множество всех представлений

$$\hat{T}(L), \quad L = -\left\{\frac{1}{2}(p + q) - 4\right\}, \quad -\left\{\frac{1}{2}(p + q) - 4\right\} + 1, \ldots,$$

составляет дискретную серию наиболее вырожденных унитарных представлений группы $SO_0(p, q)$, которые реализуются в гильбертовых пространствах $L^2(H^{p,q}, \mu)$. Пусть $\tilde{H} = L^2(H^{q,p}, \mu)$. Существует также дискретная серия представлений $\tilde{T}(L)$ на гильбертовом пространстве $\tilde{H}(L) \subset \tilde{H}$, натянутом на гармонические функции, полученные перестановкой в (22) p и $l_{\{p/2\}}$ с q и $\tilde{l}_{\{q/2\}}$ соответственно. Представления $\hat{\tilde{T}}(L)$ группы $SO_0(p, q)$,



Фиг. 1. Представления $\hat{T}(L)$ в $L^2(H^{p,q}, \mu)$ при $p \geqslant q > 2$.



Фиг. 2. Представления $\hat{T}(L)$ в $L^2(H^{p,q}, \mu)$ при $p \geqslant q > 2$.

реализованные в $\tilde{H}(L)$, не являются унитарно эквивалентными представлениям $\tilde{T}(L)$ в $\hat{H}(L)$, за исключением случая $p = q$, в котором оба гильбертовы пространства совпадают. Структура пространства представления $\hat{\tilde{T}}(L)$ иллюстрируется графически на фиг. 2.

Дифференциальный оператор (16) и, следовательно, оператор Лапласа—Бельтрами (1) в случае группы $SO_0(p, q)$ имеет дискретный спектр, заданный формулой (20), а также непрерывный спектр. Последний имеет вид [525]

$$\hat{\Delta}(\lambda) = +\lambda^2 + \left(\frac{p+q-2}{2}\right)^2, \quad \lambda \in [0, \infty]. \tag{27}$$

Для непрерывного спектра регулярное в начальной точке решение уравнения (16) задается функцией

$$V^{\lambda}_{l_{\{p/2\}},\, \tilde{l}_{\{q/2\}}}(\theta) = (N^{-1/2})\, \mathrm{th}^{|\tilde{l}_{\{q/2\}}|}\theta\, \mathrm{ch}^{[-(p+q-2)/2+i\lambda]}\theta \times$$
$$\times {}_2F_1\left\{\frac{1}{2}\left[\left|\tilde{l}_{\{q/2\}}\right| + \left|l_{\{p/2\}}\right| - i\lambda + \frac{1}{2}(p+q-2)\right],\right.$$

$$\frac{1}{2}\left[\left|\tilde{l}_{\{q/2\}}\right|-\left|l_{\{p/2\}}\right|-i\lambda+\frac{1}{2}(q-p+2)\right];$$

$$\left.\left|l_{\{q/2\}}\right|+\frac{1}{2}q;\ \mathrm{th}^2\theta\right\} \qquad (28)$$

где

$$N=\left|\frac{\sqrt{2\pi}\,\Gamma\left(\left|\tilde{l}_{\{q/2\}}+\frac{1}{2}q\right|\right)\Gamma(i\lambda)}{\Gamma\left\{\frac{1}{2}\left[i\lambda+\left|l_{\{p/2\}}\right|+\left|\tilde{l}_{\{q/2\}}\right|+\frac{1}{2}(p+q-2)\right]\right\}\times \\ \times\Gamma\left\{\frac{1}{2}\left[i\lambda+\left|\tilde{l}_{\{q/2\}}\right|-\left|l_{\{p/2\}}\right|+\frac{1}{2}(q-p+2)\right]\right\}}\right|^2.$$

Эти функции удовлетворяют следующему условию ортогональности:

$$\int V^{\lambda}_{l_{\{p/2\}},\ \tilde{l}_{\{q/2\}}}(\theta)\overline{V^{\lambda'}_{l_{\{p/2\}},\ \tilde{l}_{\{q/2\}}}}(\theta)\,d\mu(\theta)=\delta(\lambda-\lambda'), \qquad (29)$$

где $d\mu(\theta)$ задается формулой (17).

Ортогональные собственные функции оператора Лапласа—Бельтрами $\Delta(H^{p,q})$ являются гармоническими функциями вида

$$Y^{\lambda,\ l_2,\ \dots,\ l_{\{p/2\}},\ \tilde{l}_2,\ \dots,\ \tilde{l}_{\{q/2\}}}_{m_1,\ \dots,\ m_{[p/2]},\ \tilde{m}_1,\ \dots,\ \tilde{m}_{[q/2]}}(\theta,\omega,\tilde{\omega})=$$

$$=V^{\lambda}_{l_{\{p/2\}},\ \tilde{l}_{\{q/2\}}}(\theta)\,Y^{l_2,\ \dots,\ l_{\{p/2\}}}_{m_1,\ \dots,\ m_{[p/2]}}(\omega)\,Y^{\tilde{l}_2,\ \dots,\ \tilde{l}_{\{q/2\}}}_{\tilde{m}_1,\ \dots,\ \tilde{m}_{[q/2]}}(\tilde{\omega}), \qquad (30)$$

где $V^{\lambda}_{l_{\{p/2\}},\ \tilde{l}_{\{q/2\}}}(\theta)$ приведены в (28), а

$$Y^{l_2,\ \dots,\ l_{\{p/2\}}}_{m_1,\ \dots,\ m_{[p/2]}}(\omega) \quad \text{и} \quad Y^{\tilde{l}_2,\ \dots,\ \tilde{l}_{\{q/2\}}}_{\tilde{m}_1,\ \dots,\ \tilde{m}_{[q/2]}}(\tilde{\omega})$$

— собственные функции операторов $\Delta(S^{p-1})$ и $\Delta(S^{q-1})$ соответственно. В силу свойства ортогональности (29) на множество собственных функций (30), сопоставляемых с определенной точкой λ непрерывной части спектра, натягивается не гильбертово подпространство[1]) $\hat{H}(\lambda)$ пространства $\hat{H}$, а изоморфное ему пространство $H'(\lambda)\subset\Phi'(H^{p,q})$.

Оказывается, что множество инвариантных операторов алгебры so (p, q) на H содержит инвариантный оператор, который не содержится в обертывающей алгебре алгебры so (p, q). А именно, оператор отражения R, определенный формулой

$$Rf(x)=f(-x), \quad f(x)\in H, \qquad (31)$$

[1]) В нашем случае $\hat{H}(\lambda)$ представляет собой l^2, т. е. гильбертово пространство последовательностей. Векторы $\hat{e}_k(\lambda)$ являются последовательностями типа $(0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ с единицей на k-м месте и нулями на других местах.

коммутирует со всеми генераторами алгебры so (p, q) и, следовательно, представляет собой инвариантный оператор [1]). В случае дискретной серии представлений $\hat{T}^L$ собственное значение p оператора отражения R определяется инвариантным числом L, т. е.[2])

$$\begin{aligned} RY^{L,\,l,\,\tilde{l}}_{m,\,\tilde{m}} &= (-1)^{L+q}\,Y^{L,\,l,\,\tilde{l}}_{m,\,\tilde{m}} \quad \text{при} \quad Y^{L,\,l,\,\tilde{l}}_{m,\,\tilde{m}} \in H(H^{p,\,q},\,\mu), \\ RY^{L,\,l,\,\tilde{l}}_{m,\,\tilde{m}} &= (-1)^{L+p}\,Y^{L,\,l,\,\tilde{l}}_{m,\,\tilde{m}} \quad \text{при} \quad Y^{L,\,l,\,\tilde{l}}_{m,\,\tilde{m}} \in H(H^{q,\,p},\,\mu). \end{aligned} \tag{32}$$

Однако в случае непрерывной серии представлений собственные функции (30) оператора $\Delta\,(H^{p,\,q})$, принадлежащие определенному собственному значению λ, являются собственными векторами оператора R с собственными значениями

$$r = (-1)^{l\{p/2\}+\tilde{l}\{q/2\}}. \tag{33}$$

Следовательно, множество функций $\left\{Y^{\lambda,\,l,\,\tilde{l}}_{m,\,\tilde{m}}\right\}$ разбивается на два подмножества

$$\left\{Y^{\lambda,\,+,\,l,\,\tilde{l}}_{m,\,\tilde{m}}\right\} \quad \text{и} \quad \left\{Y^{\lambda,\,-,\,l,\,\tilde{l}}_{m,\,\tilde{m}}\right\},$$

на которые натягиваются инвариантные линейные подпространства для алгебры so (p, q).

Дадим теперь общий вид гармонического анализа на однородных пространствах для рассматриваемого частного случая (см. теорему 2.1). В нашем случае разложение (2.1) пространства $H = L^2\,(H^{p,\,q},\,\mu)$ в прямой интеграл $\hat{H}$ определяется множеством инвариантных операторов $\{\Delta,\,R\}$ и имеет вид

$$H \xrightarrow{F} \hat{H} = \sum_{L=-\left\{\frac{1}{2}(p+q-4)\right\}}^{\infty} \hat{H}\,(L,\,(-1)^{L+q}) + \sum_{\pm}\int_0^{\infty} \hat{H}\,(\lambda,\,\pm)\,d\lambda. \tag{34}$$

В качестве ядерного пространства $\Phi \subset H$ можно взять пространство Шварца S на X. Пространство Φ является плотной инвариантной областью определения инвариантных операторов Δ $[SO_0(p, q)]$ и R, а также всех генераторов компактного и некомпактного типа.

Изоморфизм F из (34) задается с помощью обобщенного преобразования Фурье относительно собственных функций (22) и (30),

---

[1]) Существование инвариантного оператора R не противоречит теореме Хелгасона, которая утверждает, что кольцо инвариантных операторов в обертывающей алгебре алгебры so (p, q) на симметрическом пространстве ранга один порождается оператором Лапласа—Бельтрами.

[2]) Ниже для гармонических функций (22) и (30) мы используем сокращенные обозначения $Y^{L,\,l,\,\tilde{l}}_{m,\,\tilde{m}}$, $Y^{\lambda,\,l,\,\tilde{l}}_{m,\,\tilde{m}}$.

соответствующих дискретной и непрерывной частям спектра инвариантных операторов Δ $[SO_0(p, q)]$ и R:

$$H \supset \Phi \ni \psi(x) \xrightarrow{F} \{(F\psi)(\lambda, r)\} = \{\widehat{\psi}(\lambda, r)\}, \tag{35}$$

где $\lambda = L$ или λ и r равны ± 1. Для заданного λ вектор $\widehat{\psi}(\lambda, r)$ является элементом гильбертова пространства l^2, компоненты $\widehat{\psi}^{\lambda, r, l, \tilde{l}}_{m, \tilde{m}}$ которого задаются формулой

$$\widehat{\psi}^{\lambda, r, l, \tilde{l}}_{m, \tilde{m}} = \left\langle \psi, Y^{\lambda, r, l, \tilde{l}}_{m, \tilde{m}} \right\rangle = \int\limits_{H^{p, q}} \psi(\theta, \omega, \tilde{\omega}) \overline{Y^{\lambda, r, l, \tilde{l}}_{m, \tilde{m}}} d\mu(\theta, \omega, \tilde{\omega}). \tag{36}$$

Используя (2.4)—(2.6), легко получить формулу спектрального синтеза и равенство Парсеваля для рассматриваемого случая.

Действие любого генератора $Z_{ij} \in so(p, q)$ в гильбертовом пространстве $H(\lambda, r)$ задается формулой

$$Z_{ij}\widehat{\psi}^{\lambda, r} \equiv \left\{\left\langle Z_{ij}\psi, Y^{\lambda, r}_{m, \tilde{m}}\right\rangle\right\}, \quad \psi \in \Phi. \tag{37}$$

Доказательство неприводимости пространств $H(L, \pm)$ и $\widehat{H}(L, \pm)$ относительно действия (37) алгебры Ли $so(p, q)$ простое, и мы его опускаем. (Детали см. в [525].)

Гармонические функции на гиперболоиде $H^{q, p}$ могут быть получены заменой в (22) и (30) p и $l_{\{p/2\}}$ на q и $\tilde{l}_{\{q/2\}}$ соответственно и наоборот.

Непрерывная серия неприводимых унитарных представлений $\widehat{T}(\lambda)$ группы $SO_0(p, q)$, $p \geqslant q > 1$, на $H = L^2(H^{q, p}, \mu)$ может быть построена тем же методом, что и в описанном случае.

Б. *Разложение относительно максимальной компактной и максимальной некомпактной подгрупп*

Разложение неприводимого представления группы $SO_0(p, q)$ на неприводимые представления максимальной компактной подгруппы $SO(p) \otimes SO(q)$ легко получается из фиг. 1 и 2. Например, для дискретных представлений $\widehat{T}(L)$ пространство $\widehat{H}(L)$ представляется в виде прямой суммы

$$\widehat{H}(L) = \sum_{l_{\{p/2\}}, \tilde{l}_{\{q/2\}}} \oplus \widehat{H}^{(L)}_{l_{\{p/2\}}, \tilde{l}_{\{q/2\}}}, \tag{38}$$

где суммирование ведется по всем $l_{\{p/2\}}$ и $\tilde{l}_{\{q/2\}}$, удовлетворяющим условию

$$l_{\{p/2\}} - \tilde{l}_{\{q/2\}} = L + 2n + q, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

и каждое конечномерное пространство $H^{(L)}_{l_{\{p/2\}},\, \tilde{l}_{\{q/2\}}}$ содержится с единичной кратностью. Таким образом, для $g \in SO(p) \otimes SO(q)$ имеем

$$\hat{T}_g(L) = \sum_{l_{\{p/2\}},\, \tilde{l}_{\{q/2\}}} \oplus \hat{T}_g^{l_{\{p/2\}}} \otimes T_g^{\tilde{l}_{\{q/2\}}}, \tag{39}$$

где $T_g^{l_{\{p/2\}}}\left(T_g^{\tilde{l}_{\{q/2\}}}\right)$ — симметрические конечномерные представления группы $SO(p)$ $[SO(q)]$, определенные старшим весом m вида [см. (10.3.29)]

$$m = (l_{\{p/2\}},\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0). \tag{40}$$

Каждое представление $\hat{T}_g^{l_{\{p/2\}}} \otimes \hat{T}_g^{\tilde{l}_{\{q/2\}}}$ содержится в разложении (40) с единичной кратностью.

Разложение представлений $\hat{T}(\lambda, +)$ и $\hat{T}(\lambda, -)$ непрерывной серии имеет тот же вид, что и в случае дискретной серии $\hat{T}(L)$, только суммирование в (39) и (40) ведется по всем $l_{\{p/2\}} + \tilde{l}_{\{q/2\}}$, четным или нечетным соответственно.

В физических задачах, в которых существует некомпактная группа высших симметрий, нас также интересует разложение заданного неприводимого представления некомпактной группы на неприводимые представления максимальной некомпактной подгруппы. В случае группы $SO_0(p, q)$ мы можем выполнить это разложение, если на многообразии $H^{p,q}$ введем бигармоническую систему координат, в которой оператор Лапласа — Бельтрами $\Delta\,[SO_0(p,\ q-1)]$ диагонален. Такая бигармоническая система координат задается в виде

$$\begin{aligned} x^i &= x'^i \operatorname{ch}\eta, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ p+q-1, \quad p \geqslant q > 2, \\ x^{p+q} &= \operatorname{sh}\eta, \quad \eta \in (-\infty,\ \infty), \end{aligned} \tag{41}$$

где x'^i — бигармонические координаты на гиперболоиде $H^{p,\,q-1}$, заданном формулой (9). Используя формулу (1.12), находим, что в системе координат (41) оператор Лапласа—Бельтрами имеет вид

$$\Delta(H^{p,q}) = \frac{-1}{\operatorname{ch}^{p+q-2}\eta}\,\frac{\partial}{\partial\eta}\operatorname{ch}^{p+q-2}\eta\,\frac{\partial}{\partial\eta} + \frac{\Delta(H^{p,\,q-1})}{\operatorname{ch}^2\eta}. \tag{42}$$

Здесь $\Delta(H^{p,\,q-1})$ — оператор Лапласа—Бельтрами группы $SO_0(p,\ q-1)$, связанный с гиперболоидом $H^{p,\,q-1}$. Ясно, что дискретные и непрерывные части спектров операторов $\Delta(H^{p,q})$ и $\Delta(H^{p,\,q-1})$ являются такими же, как и в разделе А. Если мы представим собственные функции оператора $\Delta(H^{p,q})$ в виде произведения собственной функции оператора $\Delta\,(H^{p,\,q-1})$ и функции $V_{\tilde{L}}^{L}(\eta)$, то получим следующее дифференциальное уравнение для последней функции:

$$\left[\frac{-1}{\operatorname{ch}^{p+q-2}\eta}\frac{d}{d\eta}\operatorname{ch}^{p+q-2}\eta\frac{d}{d\eta}-\frac{\tilde{L}(\tilde{L}+p+q-3)}{\operatorname{ch}^{2}\eta}+L(L+p+q-2)\right]\times$$
$$\times V_{\tilde{L}}^{L}(\eta)=0. \tag{43}$$

Используя замену $V_{\tilde{L}}^{L}(\eta)=\operatorname{ch}^{(2-p+q)/2}\eta\cdot\psi_{\tilde{L}}^{L}(\eta)$, получим для $\psi_{\tilde{L}}^{L}(\eta)$ дифференциальное уравнение того типа, которое рассматривалось Титчмаршем ([807], § 4, 19). Следовательно, мы знаем, что оба независимые решения ${}_{(\alpha)}V_{\tilde{L}}^{L}(\eta)$, $\alpha=1,\ 2$, входят в разложение по собственным функциям, соответствующим дифференциальному оператору (43). Конечное решение уравнения (43) для того случая, когда спектры операторов $\Delta\,(H^{p,\,q})$ и $\Delta\,(H^{p,\,q-1})$ дискретны, записываются в виде

$${}_{(\alpha)}Y_{m\tilde{m}\Omega}^{L\tilde{L}l\tilde{l}}={}_{\alpha}V_{\tilde{L}}^{L}(\eta)\,Y_{m\tilde{m}}^{\tilde{L}l\tilde{l}}(\theta,\ \omega,\ \tilde{\omega}),\quad \alpha=1,\ 2, \tag{44}$$

где

$$\begin{gathered} L=L+(2n+3-\alpha),\quad n=0,\ 1,\ 3,\ \ldots,\\ \tilde{L}=-\left\{\frac{1}{2}(p+q-4)\right\}+k,\quad k=1,\ 2,\ \ldots. \end{gathered} \tag{45}$$

Функции ${}_{(\alpha)}V_{\tilde{L}}^{L}(\eta)$ могут быть выражены через полиномы Гегенбауэра:

$${}_{\alpha}V_{\tilde{L}}^{L}(\eta)=\frac{(-1)^{(\tilde{L}-L+1-\alpha)}}{\sqrt{{}_{\alpha}M}}\operatorname{ch}^{-(L+p-1)}\eta\,C_{\tilde{L}-L-1}^{L+p/2}(\eta),\quad \alpha=1,\ 2, \tag{46}$$

где

$${}_{(1)}M=\frac{{}_{(1)}N\cdot\Gamma^{2}\left[\frac{1}{2}(L+L+p)\right]}{\Gamma^{2}\left(L+\frac{1}{2}p\right)\Gamma^{2}\left[\frac{1}{2}p(\tilde{L}-L)\right]},$$

$${}_{(2)}M=\frac{{}_{(2)}N\cdot 4\cdot\Gamma^{2}\left[\frac{1}{2}(L+\tilde{L}+p+1)\right]}{(L+\tilde{L}+p-1)^{2}\,\Gamma^{2}\left(L+\frac{1}{2}p\right)\Gamma^{2}\left[\frac{1}{2}(\tilde{L}-L+1)\right]},$$

$${}_{(\alpha)}N=\frac{2\pi\Gamma\left[\frac{1}{2}(\tilde{L}-L+\alpha-1)\right]\Gamma\left[\frac{1}{2}(\tilde{L}+L+p+q+\alpha-3)\right]}{(2L+p+q-2)\,\Gamma\left[\frac{1}{2}(\tilde{L}+L+p+q-\alpha)\right]\Gamma\left[\frac{1}{2}(\tilde{L}-L-\alpha+2)\right]}.$$

Решения, соответствующие непрерывным частям спектров инвариантных операторов $\Delta\,(H^{p,\,q})$ и $\Delta\,(H^{p,\,q-1})$, находятся подобным же образом (см. [524]).

Форма (44) гармонических функций для группы $SO_0(p, q)$ предполагает, что пространство представления $\hat{H}(L)$ имеет следующую структуру:

$$H(L) = \sum_{\tilde{L}=L+1}^{\infty} \oplus H(L, \tilde{L}), \tag{47}$$

где $\hat{H}(L, \tilde{L})$ — бесконечномерное пространство, на котором реализуется неприводимое представление $\hat{T}(L, \tilde{L})$ группы $SO_0(p, q-1)$. Пространство $\hat{H}(L, \tilde{L})$ натягивается на гармонические функции (22) с фиксированными L и $\tilde{L}$. Разложение представления $\hat{T}(L)$ имеет вид

$$g \in SO_0(p, q-1), \quad \hat{T}_g(L) = \sum_{\tilde{L}=L+1}^{\infty} \oplus \hat{T}_g(L, \tilde{L}).$$

В. *Максимальное множество коммутирующих операторов и их спектры*

Наиболее вырожденные представления $\hat{T}(L)$, $\tilde{T}(L)$ и $\hat{T}(L, \pm)$, $\tilde{T}(\Lambda, \pm)$ дискретной и непрерывной серий группы $SO_0(p, q)$ особенно удобны для приложений в физических задачах. Причина кроется в следующих фактах.

1. Для этих представлений групп $SO_0(p, q)$ максимальное множество коммутирующих операторов максимально уменьшено, т. е. для дискретных наиболее вырожденных представлений группы $SO_0(p, q)$ максимальное множество независимых коммутирующих операторов обертывающей алгебры состоит из

$$\Delta[SO(p, q)], \; R,$$

$$C_p \equiv \left\{ \begin{array}{ll} \Delta[SO(p)], \Delta[SO(p-2)], \ldots, \Delta[SO(4)] & \text{для } p \text{ четных} \\ \Delta[SO(p)], \Delta[SO(p-1)], \Delta[SO(p-3)], \ldots, \Delta[SO(4)] & \\ & \text{для } p \text{ нечетных} \end{array} \right\}, \tag{48}$$

$$\tilde{C}_q \equiv \left\{ \begin{array}{ll} \Delta[SO(q)], \Delta[SO(q-2)], \ldots, \Delta[SO(4)] & \text{для } q \text{ четных} \\ \Delta[SO(q)], \Delta[SO(q-1)], \Delta[SO(q-3)], \ldots, \Delta[SO(4)] & \\ & \text{для } q \text{ нечетных} \end{array} \right\},$$

$$H = \left\{ -\frac{\partial}{\partial\varphi^k}, \; \frac{\partial}{\partial\tilde{\varphi}^l}, \quad \begin{array}{l} k = 1, 2, \ldots, \left[\frac{1}{2}p\right] \\ l = 1, 2, \ldots, \left[\frac{1}{2}q\right] \end{array} \right\},$$

где $\Delta[SO(p, q)]$ представляет собой оператор Казимира второго порядка группы $SO(p, q)$, а C_p и $\tilde{C}_q$ — последовательность соответствующих операторов Казимира для максимальной компактной подгруппы $SO(p) \otimes SO(q)$. Множество H состоит из операторов подалгебры Картана, за исключением случая, когда p и q нечетные; в последнем случае H представляет собой максимальную абелеву компактную подалгебру алгебры $SO_0(p, q)$. Следует заметить, что оператор отражения R, который не лежит в обертывающей алгебре для $SO_0(p, q)$, необходим для характеристики неприводимых представлений непрерывной серии.

Число операторов, содержащихся в максимальном множестве коммутирующих операторов обертывающей алгебры для дискретных наиболее вырожденных представлений группы $SO_0(p, q)$, равно

$$N = p + q - 1, \tag{49}$$

а соответствующее число для основных невырожденных представлений равно

$$N' = \frac{1}{2}(r + l) = \frac{1}{4}[N(N+1) + 2l],$$

где r и l — размерность и ранг группы $SO_0(p, q)$ соответственно.

2. Дополнительные квантовые числа можно связать с собственными значениями операторов из H. Оказывается, что множество H наибольшее в использованной нами бигармонической системе координат.

3. Собственные функции максимального коммутирующего множества операторов задаются в явном виде формулами (22) и (30); область значений чисел $L, l_2, \ldots, l_{\{p/2\}}, \tilde{l}_2, \ldots, \tilde{l}_{\{q/2\}}, m_1, \ldots$ $\ldots, m_{[p/2]}, \tilde{m}_1, \ldots, \tilde{m}_{[q/2]}$, которые могут играть роль квантовых чисел, определяется формулами (19), (21) и (10.3.22) соответственно.

Основной заслугой этого метода является перевод некоторых трудных задач теории представлений локально компактных групп Ли на язык сравнительно простой теории дифференциальных уравнений второго порядка. Этот метод также может быть применен для явного построения менее вырожденных представлений, которые определяются двумя, тремя, ..., k ($k \leqslant n$, где n — ранг группы $SO_0(p, q)$) инвариантными числами.

§ 4. Обобщенные проективные операторы

В гл. 7, § 3 мы рассмотрели формализм проективных операторов P^{λ}_{pq}, которые использовались для эффективного решения различных задач теории представлений компактных групп и физики частиц. Операторы P^{λ}_{pq} определялись формулами

$$P^{\lambda}_{pq} = d_{\lambda} \int\limits_{G} \overline{D^{\lambda}_{pq}(x)}\, T_x\, d\mu(x). \tag{1}$$

При попытке распространить формулу (1) на некомпактные группы встречаются следующие трудности:

1) матричные элементы $D^{\lambda}_{pq}(x)$ являются распределениями из $\Phi'(G)$,

2) объем $\int\limits_G \mathrm{d}x$ бесконечен.

Поэтому должен быть выяснен смысл интеграла (1). Как иллюстрацию рассмотрим сначала случай абелевой векторной группы G. В этом случае $D^{\lambda}_{pq}(X)$ сводится к $\exp(\mathrm{i}px)$ и интеграл (1) принимает вид

$$P^{\lambda} = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_G \exp(-\mathrm{i}\lambda x)\, T_x\, \mathrm{d}x, \tag{2}$$

где $x \to T_x$ — регулярное представление группы G. Для $\varphi(x) \in \Phi(G)$ имеем

$$\begin{aligned}(P^{\lambda}\varphi)(x) &= (2\pi)^{-n/2} \int\limits_G \exp(-\mathrm{i}\lambda x')\, \varphi(x+x')\, \mathrm{d}x' = \\ &= (2\pi)^{-n/2} \exp(\mathrm{i}\lambda x) \int\limits_G \exp(-\mathrm{i}\lambda y)\, \varphi(y)\, \mathrm{d}y = \\ &= \exp(\mathrm{i}\lambda x)\, \hat{\varphi}(\lambda) \in H(\lambda) \subset \Phi'.\end{aligned}$$

Таким образом, P^{λ} представляет собой отображение из $\Phi(G)$ в $\Phi'(G)$, т. е. он является операторнозначным распределением. Чтобы быть точным, необходимо сначала рассмотреть величину

$$P^{\lambda}_N = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{G_N} \exp(-\mathrm{i}\lambda x)\, T_x\, \mathrm{d}x, \tag{3}$$

где G_N — компактное подмножество в G и $\lim\limits_{N\to\infty} G_N = G$. Так как $\exp(-\mathrm{i}\lambda x)\, T_x$ — непрерывная функция на G и G_N имеет конечную меру Хаара, то интеграл (3) определен. Более того, мы имеем

$$(P^{\lambda}\varphi)(x) \overset{\mathrm{def}}{=} \lim_{N\to\infty} (P^{\lambda}_N\varphi)(x) = \exp(\mathrm{i}\lambda x)\, \hat{\varphi}(\lambda),$$

где предел взят в топологии пространства $\Phi'(G)$. Следовательно, мы видим, что величина P^{λ}, заданная формулой (2), определена для некомпактных абелевых векторных групп как слабый предел операторов, заданных формулой (3), т. е.

$$P^{\lambda} = \lim_{N\to\infty} (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{G_N} \exp(-\mathrm{i}\lambda x)\, T_x\, \mathrm{d}x.$$

Если G — векторная группа, то пространство Λ индексов λ, определяющих неприводимые представления группы G, также является векторной группой. Рассмотрим пространство Шварца $D(\Lambda)$ функций с носителем в Λ. Тогда для $f \in D(\Lambda)$ можно определить «сглаженный» оператор $P(f)$ вида

$$P(f) = \int_{\Lambda} f(\lambda) P^{\lambda} d\lambda. \tag{4}$$

Для $u \in \Phi(G)$ имеем

$$\|P(f)u\| \leqslant \max_{\lambda \in \hat{G}} |f(\lambda)| \|u\|_{H}.$$

Это означает, что $P(f)$ — плотно определенный ограниченный оператор в $H(G)$.

Легко проверить, что

$$P(f_1) P(f_2) = P(f_1 f_2).$$

Это равенство можно записать в виде произведения операторнозначных распределений:

$$P^{\lambda} P^{\lambda'} = \delta(\lambda - \lambda') P^{\lambda}.$$

Это обобщение на некомпактные группы соотношений ортогональности (7.3.3).

Следовательно, мы видим, что для удобного описания проективных операторов для некомпактных групп нам следует использовать технику операторнозначных распределений. Поэтому мы начинаем с обзора основных понятий, касающихся операторнозначных распределений в гильбертовом пространстве.

Пусть $H = L^2(\Lambda)$, где Λ — подмножество n-мерного пространства R^n Евклида или Минковского. Пусть $K(\Lambda)$ — пространство пробных функций (т. е. пространство Шварца $D(\Lambda)$ или $S(\Lambda)$).

Определение 1. *Операторнозначное распределение* P — это отображение $f \to P(f)$, $f \in K(\Lambda)$, со значениями в множестве линейных операторов на H, удовлетворяющее следующим условиям:

1° Операторы $P(f)$ и $P(f)^*$, $f \in K(\Lambda)$, имеют общую плотную область определения D, которая является линейным подмножеством в H, таким, что

$$P(f) D \subset D, \quad P(f)^* D \subset D. \tag{5}$$

2° На области D $P(f)$ удовлетворяет условиям

$$P(\alpha f) = \alpha P(f),$$
$$P(f_1 + f_2) = P(f_1) + P(f_2),$$

где $\alpha \in C^1$ и $f_1, f_2 \in K(\Lambda)$.

3° $P(f)$ слабо непрерывно на $K(\Lambda)$, т. е. если $u, v \in D$ и $f \to 0$, то

$$(P(f)u, v) \to 0. \tag{6}$$

Операторнозначное распределение $f \to P(f)$ иногда может быть записано в виде интеграла

$$P(f) = \int_{\Lambda} f(\lambda) P(\lambda) d\lambda. \tag{7}$$

Символ $P(\lambda)$ часто имеет прямое значение и также называется *операторнозначным распределением.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Сопряжение* $P^*(\lambda)$ *операторнозначного распределения* $P(\lambda)$ — это такое операторнозначное распределение, которое пробной функции $f(\lambda)$ из $K(\Lambda)$ предписывает оператор $[P(\bar{f})]^*$, т. е.

$$P^*(f) \equiv \int_{\Lambda} f(\lambda) P^*(\lambda) d\lambda \equiv [P(\bar{f})]^* = \left[\int_{\Lambda} \overline{f(\lambda)} P(\lambda) d\lambda\right]^*. \tag{8}$$

Операторнозначное распределение *вещественно*, если $P(\lambda)^* = P(\lambda)$.

Пусть G — локально компактная группа Ли, для которой справедливы условия теоремы 14.2.1, т. е. G — полупростая группа Ли, группа движений пространства Евклида или Минковского и т. д. Пусть $C_1, \ldots, C_n$ — «+»-симметрические генераторы центра $Z(E)$ обертывающей алгебры E группы G, и пусть $\bar{C}_1, \ldots, \bar{C}_n$ — соответствующие самосопряженные инвариантные операторы. Пусть $H = L^2(G)$, и пусть $\Phi(G) \subset H \subset \Phi'(G)$ — триплет Гельфанда, такой, что все $\bar{C}_i$ непрерывно отображают Φ в Φ. Пусть $\{D^{\lambda}_{pq}(x)\}$ — множество обобщенных собственных функций операторов $\bar{C}_1, \ldots, \bar{C}_n$, заданных теоремой 14.2.1, которые удовлетворяют соотношениям полноты (14.2.35) и ортогональности (14.2.34) и дают разложение (14.2.36) любого элемента φ из $\Phi(G)$.

Введем величину

$$P^{\lambda}_{pq} = \rho(\lambda) \int_{G} \overline{D^{\lambda}_{pq}(x)}\, T_x dx, \tag{9}$$

где T_x — правое регулярное представление, т. е.

$$(T_x\varphi)(y) = \varphi(yx), \tag{10}$$

и $\rho(\lambda)$ — спектральная мера, соответствующая инвариантным операторам $\bar{C}_1, \ldots, \bar{C}_n$ группы G.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Величина* P^{λ}_{pq}, *заданная формулой* (9), *представляет собой операторнозначное распределение на пространстве* $H = L^2(G)$ *и отображает* $\Phi(G)$ *в* $\Phi'(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$P^{\lambda}_{pqN} = \rho(\lambda) \int_{G_N} \overline{D^{\lambda}_{pq}(x)}\, T_x dx, \tag{11}$$

где G_N — компактное подмножество в G и $\lim\limits_{N\to\infty} G_N = G$. Так как $\overline{D^\lambda_{pq}(x)}\, T_x$ непрерывна на G, то интеграл (11) определяет оператор в H. При $\varphi \in \Phi(G)$ имеем

$$\left(P^\lambda_{pqN}\varphi\right)(y) = \rho(\lambda) \int\limits_{G_N} \mathrm{d}x \overline{D^\lambda_{pq}(x)}\,(T_x\varphi)(y) = \rho(\lambda) \int\limits_{yG_N} \mathrm{d}z \overline{D^\lambda_{pq}\left(y^{-1}z\right)}\,\varphi(z) =$$

$$= \rho(\lambda) \sum_r \overline{D^\lambda_{pr}\left(y^{-1}\right)} \int\limits_{yG_N} \mathrm{d}z\, \overline{D^\lambda_{rq}(z)}\,\varphi(z) \to$$

$$\underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \rho(\lambda) \sum_r D^\lambda_{rp}(y)\,\hat{\varphi}_{rq}(\lambda). \qquad (12)$$

Перестановка интегрирования и суммирования в (12) оправдана теоремой Фубини—Тонелли, если $\varphi \in L^1(G)$. В самом деле,

$$\left|\sum_r \overline{D^\lambda_{pr}\left(y^{-1}\right) D^\lambda_{rq}(z)}\,\varphi(z)\right|^2 \leqslant |\varphi(z)|^2 \sum_r \left|\overline{D^\lambda_{pr}\left(y^{-1}\right)}\right|^2 \sum_{r'} \left|\overline{D^\lambda_{rq}(z)}\right|^2 = |\varphi(z)|^2,$$

так как, например,

$$\sum_r \left|\overline{D^\lambda_{pr}(z)}\right|^2 = \sum_r \langle e_p, T^\lambda_z e_r\rangle_{\hat{H}(\lambda)} \langle T^\lambda_z e_r, e_p\rangle_{\hat{H}(\lambda)} = 1.$$

Мы видим, что, так же как и для абелевых векторных групп, имеем

$$P^\lambda_{pq} = \lim_{N\to\infty} \rho(\lambda) \int\limits_{G_N} \mathrm{d}x \overline{D^\lambda_{pq}(x)}\, T_x \qquad (13)$$

в смысле слабого предела операторов $(P^\lambda_{pq})_N$. Выражение (4.12) показывает, что для любого $\varphi(y)$ из $\Phi(G)$ величина $\left(P^\lambda_{pq}\varphi\right)(y)$ является элементом $\varphi(\lambda, y) \in H(\lambda) \subset \Phi'(G)$. Следовательно, согласно формуле (3) приложения Б, $P^\lambda_{pq}\varphi$ является обобщенным собственным вектором инвариантных операторов $C_1, \ldots, C_n$. Таким образом, область определения $D\left(P^\lambda_{pq}\right)$ оператора P^λ_{pq} в $H = L^2(G)$ состоит только из нулевого вектора и, следовательно, P^λ_{pq} не может рассматриваться как оператор в H. Однако, если $f(\lambda)$ является элементом пространства $C_0(\Lambda)$ непрерывных функций на Λ, то сглаженный оператор

$$P_{pq}(f) = \int\limits_{\Lambda} f(\lambda)\, P^\lambda_{pq}\, \mathrm{d}\lambda \qquad (14)$$

представляет собой ограниченный линейный оператор. В самом деле, для $\varphi \in \Phi(G)$ из (12) получаем

$$P_{pq}(f)\,\varphi(y) = \int\limits_{\Lambda} \mathrm{d}\lambda f(\lambda)\,\rho(\lambda) \sum_r D^\lambda_{rp}(y)\,\hat{\varphi}_{rq}(\lambda).$$

Используя равенство Планшереля (14.2.17), получаем

$$\| P_{pq}(f)\varphi \|^2 = \int\limits_{\Lambda} | f(\lambda) |^2 \sum_r \hat{\varphi}_{rq}(\lambda) \overline{\hat{\varphi}_{rq}(\lambda)} \rho(\lambda)\, d\lambda \leqslant \max_{\lambda \in \Lambda} | f(\lambda) |^2 \| \varphi \|^2,$$

т. е.

$$\| P_{pq}(f)\varphi \| \leqslant \max_{\lambda \in \Lambda} | f(\lambda) | \, \| \varphi \|. \tag{15}$$

Так как операторы $P_{pq}(f)$ ограничены для любых $f \in C_0(\Lambda)$, то в роли общей плотной области определения D в определении 1 можно взять все пространство H. Тогда видно, что $P_{pq}(f)$ удовлетворяет условиям 1° и 2° определения 1. Условие 3° следует из (15). В самом деле,

$$| (P_{pq}(f)\varphi, \psi) |^2 \leqslant \| P(f)\varphi \|^2 \| \psi \|^2 \leqslant \max_{\lambda \in \Lambda} | f(\lambda) |^2 \| \varphi \|^2 \, \| \psi \|^2.$$

Поэтому $(P_{pq}(f)\varphi, \psi) \to 0$, когда $f \to 0$ в $C_0(\Lambda)$. Следовательно, мы видим, что отображения $P^{\lambda}_{pq} : \Phi(G) \to H(\lambda) \subset \Phi'(G)$, заданные формулой (13), представляют собой операторнозначные распределения на гильбертовом пространстве $H = L^2(G)$.

Замечание. Если T_x — оператор левого сдвига в $L^2(G)$, то операторное распределение P^{λ}_{pq} следует брать в виде

$$P^{\lambda}_{pq} = \rho(\lambda) \int \overline{D^{\lambda}_{pq}(x)}\, T_{x^{-1}}\, dx. \tag{16}$$

Только при таком определении $(P^{\lambda}_{pq}\varphi)(y)$ представляет собой элемент $\varphi(\lambda, y)$ из $H(\lambda)$ [см. (12)].

Операторнозначное распределение P^{λ}_{pq} удовлетворяет определенным соотношениям эрмитовости и ортогональности, которые очень полезны для приложений. Действительно, мы имеем

Утверждение 2. *Пусть* P^{λ}_{pq} — *операторнозначное распределение, заданное формулой* (9). *Тогда*

$$(P^{\lambda}_{pq})^* = P^{\lambda}_{qp} \tag{17}$$

и

$$P^{\lambda}_{pq} P^{\lambda'}_{p'q'} = \delta(\lambda - \lambda')\, \delta_{qp'} P^{\lambda}_{pq'}. \tag{18}$$

Доказательство. Оператор $P^{\lambda}_{pq}(f)$ ограничен. Поэтому, согласно (7), (8), (12) и равенству Планшереля (14.2.17), для любых φ, ψ из $\Phi(G)$ получаем

$$(\varphi, P^{*\lambda}_{pq}(f)\psi) = (P^{\lambda}_{pq}(\bar{f})\varphi, \psi) = \left(\int d\lambda \overline{f(\lambda)}\, P^{\lambda}_{pq}\varphi, \psi \right) =$$

$$= \int d\lambda \overline{f(\lambda)}\, \rho(\lambda)\, \hat{\varphi}_{rq}(\lambda)\, \overline{\hat{\psi}_{rp}(\lambda)}.$$

Используя те же формулы, получаем, что последнее выражение равно $(\varphi,\ P^{\lambda}_{pq}(f)\psi)$. Поэтому

$$P^{*\lambda}_{pq}(f)=P^{\lambda}_{qp}(f), \tag{19}$$

и соотношение (17) следует из определения 1 и формулы (7).

Докажем теперь соотношение (18). Для любых f, g из $C_0(\Lambda)$ и φ, ψ из $L^2(G)$ формулы (19), (12) и равенство Планшереля (14.2.17) дают

$$\begin{aligned}\left(P^{\lambda}_{pq}(f)\,P^{\lambda}_{p'q'}(g)\varphi,\ \psi\right)&=\left(P^{\lambda}_{p'q'}(g)\varphi,\ P^{\lambda}_{qp}(\bar f)\psi\right)=\\&=\delta_{p'q}\int d\lambda f(\lambda)\,g(\lambda)\,\rho(\lambda)\,\hat\varphi_{rq'}(\lambda)\,\overline{\hat\psi_{rp}(\lambda)}.\end{aligned} \tag{20}$$

Легко проверить, что последнее выражение можно записать в виде

$$\left(\left\{\int\limits_{\Lambda} f(\lambda')\,d\lambda'\int\limits_{\Lambda} g(\lambda)\,d\lambda\,\delta(\lambda-\lambda')\,\delta_{p'q}P^{\lambda}_{pq'}\right\}\varphi,\ \psi\right).$$

Сравнивая его с первым выражением в (20), из утверждения 1 и формулы (7) получаем (18).

Операторнозначные распределения P^{λ}_{pq} имеют простые трансформационные свойства относительно действия группы G.

Утверждение 3. *Пусть* P^{λ}_{pq} — *операторнозначное распределение, заданное формулой* (9), *и пусть* $x\in G$. *Тогда*

$$T_xP^{\lambda}_{pq}=\sum_r D^{\lambda}_{rp}(x)\,P^{\lambda}_{rq}, \tag{21}$$

$$P^{\lambda}_{pq}T_x=\sum_r D^{\lambda}_{rq}(x)\,P^{\lambda}_{pr}. \tag{22}$$

Доказательство. Так как T_x непрерывно, то произведение $T_xP^{\lambda}_{pq}$ является операторнозначным распределением и $T_xP_{pq}(f)$ — ограниченный оператор в H (согласно утверждению 1). Используя формулу (9) и равенство Планшереля, получаем

$$\begin{aligned}\left(T_xP^{\lambda}_{pq}(f)\varphi,\ \psi\right)&=\int\limits_G dy\left(P^{\lambda}_{pq}(f)\varphi\right)(yx)\,\overline{\psi(y)}=\\&=\int\limits_{\Lambda} d\lambda f(\lambda)\,\rho(\lambda)\,D^{\lambda}_{q'p}(x)\,\hat\varphi_{p'q}(\lambda)\,\overline{\hat\psi_{p'q'}(\lambda)}=\\&=\left(\int\limits_{\Lambda} d\lambda f(\lambda)\,D^{\lambda}_{q'p}(x')\,P^{\lambda}_{q'q}\varphi,\ \psi\right).\end{aligned}$$

Сравнивая первое и последнее выражения этой цепочки равенств и используя определение 1 и формулу (7), получаем (21). Подобным же образом доказывается (22).

Из (21) и (22) также получаем

$$T_x P^{\lambda}_{pq} T_x^{-1} = D^{\lambda}_{rp}(x) \overline{D^{\lambda}_{sq}(x)} P^{\lambda}_{rs}. \quad (23)$$

Формула (23) означает, что P^{λ}_{pq} преобразуется как тензорный оператор, соответствующий тензорному произведению базисного вектора $e_p(\lambda)$ и вектора, сопряженного $e_q(\lambda)$ (т. е. как произведение $|\lambda : p\rangle\langle\lambda : q|$ в обозначении Дирака).

В некоторых случаях (например, в случае полупростых групп или группы Пуанкаре) характер $\chi^{\lambda}(x) = \operatorname{Tr} T_x(\lambda)$ является хорошо определенным распределением на G. В этом случае можно определить следующие операторнозначные распределения на $H = L^2(G)$:

$$P^{\lambda} = \rho(\lambda) \int_G dx \overline{\chi^{\lambda}(x)} T_x. \quad (24)$$

Так же как в утверждениях 2 и 3, можно проверить, что

$$(P^{\lambda})^* = P^{\lambda}, \quad (25)$$

$$P^{\lambda} P^{\lambda'} = \delta(\lambda - \lambda') P^{\lambda}, \quad (26)$$

$$T_x P^{\lambda} = P^{\lambda} T_x. \quad (27)$$

Операторнозначные распределения P^{λ} полезны в приложениях. Если $H(X)$ — гильбертово пространство унитарного представления T группы G и $\Phi \subset H \subset \Phi'$ — триплет Гельфанда, то P^{λ} проектирует Φ на обобщенное собственное пространство $H(\lambda) \subset \Phi'$. Пространство $P^{\lambda}\Phi$ (изоморфное $H(\lambda)$) инвариантно относительно T и по формуле (3.30) приложения Б изоморфно гильбертову пространству $\hat{H}(\lambda)$.

До сих пор мы рассматривали формализм операторнозначных распределений на гильбертовом пространстве $H = L^2(G)$. Однако все наши результаты могут быть распространены на пространство $H = L^2(X)$, где $X = G/G_0$ — однородное пространство правых классов смежных элементов $\{G_0 g\}$ (G — связная группа Ли, а G_0 — замкнутая подгруппа в G). Группа G действует на элементы $\varphi \in \Phi(X) \subset L^2(X)$ посредством правых сдвигов

$$(T_g \varphi)(x) = \varphi(xg),$$

т. е. отображение $g \to T_g$ задает унитарное квазирегулярное представление группы G в $L^2(X)$.

Предположим, что все предположения теоремы 2.1 удовлетворены. Тогда обобщенное разложение Фурье элемента $\varphi \in \Phi(X) \subset$

$\subset L^2(X)$ задается формулой (1.4). Используя формулу (9) для P^{λ}_{pq} и формулы (1.4), (2.12), получаем

$$(P^{\lambda}_{pq}\varphi)(x) = \rho(\lambda)\int dg D^{\lambda}_{pq}(g)\varphi(xg) =$$

$$= \tilde{\rho}(\lambda)\int_G dg\overline{D^{\lambda}_{pq}(g)}\int_{\tilde{\Lambda}}\sum_{r,s} D^{\lambda'}_{sr}(g)\hat{\varphi}_r(\lambda')e_s(\lambda', x)d\tilde{\rho}(\lambda') =$$

$$= \tilde{\rho}(\lambda)\hat{\varphi}_g(\lambda)e_p(\lambda, x) \in H(\lambda) \subset \Phi'(X) \tag{28}$$

при условии, что $\hat{\varphi}_r(\lambda)$ и $e_s(\lambda, x)$ — непрерывные функции от λ; это условие удовлетворяется в большинстве практически интересных случаев. Следовательно, как и в случае пространства $L^2(G)$ величина P^{λ}_{pq} представляет собой отображение из $\Phi(X)$ в $H(\lambda) \subset \Phi'(X)$, т. е. она определяет операторнозначное распределение. Доказательство утверждений 2 и 3 для операторнозначных распределений P^{λ}_{pq} на $L^2(X)$ проводится аналогично, и мы его опускаем.

Как мы показали, пространства $H(\lambda)$, натянутые на обобщенные собственные векторы $e_k(\lambda)$, играют важную роль в приложениях. Операторнозначные распределения P^{λ}_{pq} и P^{λ} дают естественный инструмент для выделения этих пространств из пространства $H(G)$ или $H(X)$.

Операторнозначные распределения P^{λ}_{pq} дают удобный метод решения различных практических задач, которые встречаются в теории представлений групп и квантовой физике. Например, можно вывести общую формулу для коэффициентов Клебша—Гордана для некомпактных групп. В самом деле, пусть $\tilde{H} = H(\lambda_1) \otimes H(\lambda_2)$ — пространство тензорного произведения $T = T^{\lambda_1} \otimes T^{\lambda_2}$ неприводимых представлений T^{λ_1} и T^{λ_2} группы G, и пусть $\{e_k(\lambda_i)\}_{k=1}^{\infty}$ — базис в $H(\lambda_i)$ $i = 1, 2$. Тогда в силу формулы (21) элемент

$$e_p(\lambda) = P^{\lambda}_{pq}e_r(\lambda_1)e_s(\lambda_2), \tag{29}$$

при фиксированных q, r и s имеет следующие трансформационные свойства:

$$T_x e_p(\lambda) = \sum_r D^{\lambda}_{rp}(x)e_r(\lambda),$$

т. е. он преобразуется по неприводимому унитарному представлению T^{λ} группы G. Следовательно, выражение

$$\langle\lambda, p\,|\,\lambda_1, p_1; \lambda_2, p_2\rangle \equiv N^{-1}\langle e_p(\lambda), e_{p_1}(\lambda_1)e_{p_2}(\lambda_2)\rangle \equiv$$

$$\equiv N^{-1}\langle P^{\lambda}_{pq}e_r(\lambda_1)e_s(\lambda_2), e_{p_1}(\lambda_1)e_{p_2}(\lambda_2)\rangle \tag{30}$$

является проектором базисного вектора $e_p(\lambda)$ на базисный вектор $e_{p_1}(\lambda_1)\, e_{p_2}(\lambda_2)$ и представляет собой коэффициент Клебша—Гордана. Константа N представляет собой нормировочный множитель для вектора (29). Мы видим, что коэффициент Клебша—Гордана (30) является фактически матричным элементом операторнозначного распределения P^{λ}_{pq} в тензорном базисе пространства $\tilde{H}$. Используя формулу (9) для P^{λ}_{pq} и соотношение

$$T_x e_r(\lambda_1)\, e_s(\lambda_2) = T_x^{\lambda_1} e_r(\lambda_1) \cdot T_x^{\lambda_2} e_s(\lambda_2) = \\ = \sum_{r_1} D^{\lambda}_{r_1 r}(x)\, e_{r_1}(\lambda_1) \sum_{s_2} D^{\lambda_2}_{s_2 s}(x)\, e_{s_2}(\lambda_2),$$

получаем

$$\langle \lambda,\ p \,|\, \lambda_1,\ p_1;\ \lambda_2,\ p_2 \rangle = N^{-1} \int_G \mathrm{d}x\, \overline{D^{\lambda}_{pq}(x)}\, D^{\lambda_1}_{p_1 r}(x)\, D^{\lambda_2}_{p_2 s}(x). \tag{31}$$

§ 5. Комментарии и дополнения

А. *Теория Хариш-Чандры и Хелгасона*

Опишем теперь очень интересный подход к гармоническому анализу на симметрических пространствах G/K, который основывается на геометрических идеях. Эта теория была начата Гельфандом и Хариш-Чандрой и завершена Хелгасоном [394, 397—399].

В случае обычного анализа Фурье имеем

$$\hat{\varphi}(p) = \int_{R^n} \varphi(x) \exp[\mathrm{i}(x,\ p)]\, \mathrm{d}x,$$

где $(x,\ p) = x_\mu p^\mu$ и

$$\varphi(x) = (2\pi)^{-n} \int_{R^n} \hat{\varphi}(p) \exp[\mathrm{i}(x,\ p)]\, \mathrm{d}p,$$

или в полярных координатах $p = \lambda\omega$ ($\lambda \geqslant 0$ и ω — единичный вектор)

$$\hat{\varphi}(\lambda\omega) = \int_{R^n} \varphi(x) \exp[\mathrm{i}\lambda(x,\ \omega)]\, \mathrm{d}x, \tag{1}$$

$$\varphi(x) = (2\pi)^{-n} \int_{R^+} \int_{S^{n-1}} \hat{\varphi}(\lambda\omega) \exp[\mathrm{i}\lambda(x,\ \omega)]\, \lambda^{n-1}\, \mathrm{d}\lambda\, \mathrm{d}\omega, \tag{2}$$

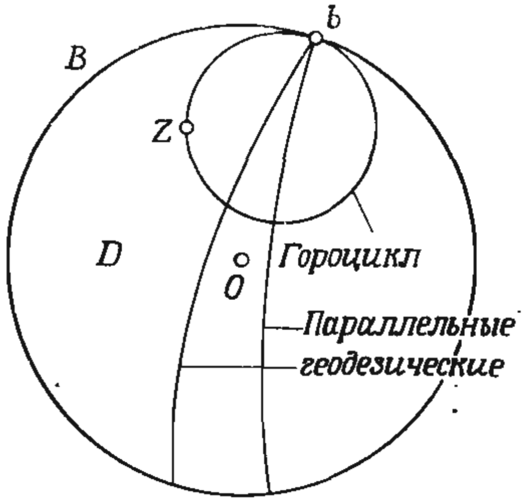
где $R^+ = \{\lambda \in R,\ \lambda \geqslant 0\}$ и $\mathrm{d}\omega$ — элемент объема на единичной сфере S^{n-1}. Функция e_p: $x \to \exp[\mathrm{i}(x,\ p)]$ имеет следующие свойства:

1) e_p — собственная функция оператора Лапласа на R^n,

2) e_p — константа для каждой гиперплоскости, перпендикулярной p (т. е. e_p — плоская волна с нормалью p).

Чтобы распространить гармонический анализ из R^n на симметрические пространства $X = G/K$, необходимы обобщенные «плоские волны» e_p на X, которые удовлетворяли бы свойствам 1) и 2) и давали бы разложение функций из $L^2(X, \mu)$.

Простейшим нетривиальным случаем, для которого это распространение может быть сделано, является симметрическое пространство $x = SU(1, 1)/U(1)$, которое изоморфно диску $D = \{z \in C: |z| < 1\}$ (см. гл. 4, упражнение 5.2.4). Обобщим геометрические свойства плоских волн на кривое пространство D. Пусть B — граница диска D, т. е. $B = \{z \in C: |z| = 1\}$. Параллельными геодезическими в D по определению являются геодезические, выходящие из одной и той же точки на границе B диска D (фиг. 3).



Фиг. 3.

По определению гороциклом с нормалью $b \in B$ является траектория, ортогональная к семейству всех параллельных геодезических, соответствующих точке b (фиг. 3). Следовательно, гороцикл в D является неевклидовым аналогом гиперплоскости в R^n. Внутреннее произведение (x, ω) в формуле (1) есть расстояние от начала до гиперплоскости с нормалью ω, проходящей через x. По аналогии $\langle z, b\rangle$ для $z \in D$, $b \in B$ определяем как риманово расстояние от O до гороцикла $\xi(z, b)$ с нормалью b, проходящего через z. Функция

$$e_{p,b}\colon z \to \exp(p\langle z, b\rangle), \quad b \in B, \quad p \in C, \quad z \in D, \tag{3}$$

имеет свойства плоских волн на R^n. В самом деле,

1) $e_{p,b}$ — собственная функция оператора Лапласа—Бельтрами Δ на D ($\Delta = [1 - (x^2 + y^2)]^2 (\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2)$, см. упражнение 4.5.2.5);

2) $e_{p,b}$ — константа для каждого гороцикла $\xi(z, b)$ с нормалью b.

Следующая теорема показывает, что собственные функции $e_{p,b}(z)$ на D фактически являются естественным расширением понятия плоских волн e_p на R^n.

Теорема 1. *Пусть* $\varphi \in C_0(D)$. *Положим*

$$\hat{\varphi}(p, b) = \int_D \varphi(z) \exp[(-ip + 1)\langle z, b\rangle], dz, \quad p \in R, \quad b \in B, \tag{4}$$

где $dz = (1 - |z|^2)^{-2}\, dx\, dy$ — *элемент объема на* D. *Тогда*

$$\varphi(z) = (2\pi)^{-2} \int\limits_R \int\limits_B \hat{\varphi}(p, b) \exp[(ip + 1)\langle z, b\rangle]\, p\, \mathrm{th}\left(\frac{1}{2}\pi p\right) dp\, db, \tag{5}$$

где db — *обычная угловая мера на* B $(=S^1)$.

(Доказательство см. в [394].)

Чтобы распространить эту теорему на произвольное симметрическое пространство, мы нуждаемся в обобщении понятий границы B, гороцикла ξ и комплексного расстояния $\langle z, b\rangle$.

Пусть K — максимальная компактная подгруппа полупростой группы Ли G, и пусть L — алгебра Ли группы G. Пусть $L = K \oplus H_p \oplus N_0$ — разложение Ивасавы алгебры L. Обозначим через M централизатор подалгебры H_p в K:

$$M = \{k \in K: (\mathrm{Ad}\, k) Y = Y \quad \text{для всех} \quad Y \in H_p\}. \tag{6}$$

Оказывается, что обобщение границы B на произвольное симметрическое пространство задается пространством смежных классов $B = K/M$.

Теоретико-групповой анализ гороцикла на диске D обнаруживает, что гороциклами являются орбиты в D всех групп вида $g\mathcal{N}g^{-1}$, где $\mathcal{N}$ — нильпотентная группа, соответствующая подалгебре N_0 алгебры su (1, 1). Отсюда следует, что для произвольного симметрического пространства $X = G/K$ гороцикл можно определить как орбиту в X подгруппы группы G вида $g\mathcal{N}g^{-1}$, где $\mathcal{N}$ — нильпотентная группа в разложении Ивасавы $G = K\mathcal{A}_p\mathcal{N}$. Легко проверить следующие свойства гороциклов.

Лемма 2. 1. *Группа G переставляет гороциклы транзитивно.*

2. *Каждый гороцикл ξ может быть записан в виде*

$$\xi = ka\xi_0, \tag{7}$$

где a — однозначно определенный элемент подгруппы $\mathcal{A}_p$.

3. *Для заданных $x \in X$, $b \in B$ существует точно один гороцикл, проходящий через x, с нормалью b.*

(Доказательство см. в [394].)

Элемент $a \in \mathcal{A}_p$ в (7) называется *комплексным расстоянием* от смежного класса $K = 0$ до ξ. Обозначим комплексное расстояние $a \in \mathcal{A}_p$ от 0 до гороцикла, определенного леммой 2.3, символом $\exp A(x, p)$, $A(x, p) \in H_p$.

Дадим теперь обобщение плоских волн на произвольные симметрические пространства. Пусть $b \in B$ и пусть p — комплексный линейный функционал на H_p. Положим

$$e_{p,b}\colon x \to \exp[p(A(x, b))], \quad x \in X.$$

Очевидно, что $\exp[p(A(x, b))]$ — константа на каждом орицикле.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть $X = G/K$ — симметрическое пространство Картана. Тогда*

1. *Функции $e_{p,b}$ являются собственными функциями всех инвариантных операторов C из центра Z обертывающей алгебры E группы G, представленных дифференциальными операторами на $L^2(X, \mu)$.*

2. *Для $\varphi \in C_0^\infty(X)$ определяем обобщенное преобразование Фурье формулой*

$$\hat{\varphi}(p, b) = \int_X \varphi(x) \exp[(-\mathrm{i}p + \rho) A(x, b)]\, \mathrm{d}\mu(x), \tag{8}$$

где p — элемент вещественного пространства H_p^*, дуального к H_p, $b \in B$ и $\rho = \sum\limits_{\alpha>0} \alpha$. Тогда формула спектрального синтеза для $\varphi(x)$ имеет вид

$$\varphi(x) = \int_{H_p^*} \int_B \hat{\varphi}(p, b) \exp[(\mathrm{i}p + \rho) A(x, b)] \, |c(p)|^{-2}\, \mathrm{d}p\, \mathrm{d}b \tag{9}$$

при условии, что евклидова мера $\mathrm{d}p$ на H_p^* нормализована подходящим образом. Спектральная плотность $|c(p)|^{-2}$ определяется формулой

$$c(p) = \int_{\overline{\mathcal{N}}} \exp[(-\mathrm{i}p - \rho) Y(\bar{n})]\, \mathrm{d}\bar{n}, \tag{10}$$

где $\overline{\mathcal{N}}$ — аналитическая подгруппа, соответствующая алгебре Ли $\overline{N} = \sum\limits_{\alpha<0} L_\alpha$, и $Y(\bar{n})$, $\bar{n} \in \overline{\mathcal{N}}$, определяется разложением Ивасавы $\bar{n} = k(\bar{n}) \exp[Y(\bar{n})]\, n(\bar{n})$.

Кроме того, мы имеем формулу Парсеваля

$$\int |\varphi(x)|^2 \mathrm{d}\mu(x) = \int_{H_p^*} \int_B \hat{\varphi}(p, b) \, |c(p)|^{-2} \mathrm{d}p\, \mathrm{d}b, \tag{11}$$

и разложение в прямой интеграл пространства $H = L^2(X, \mu)$ и представления T_g: $\varphi(x) \to \varphi(g^{-1}x)$ задается формулами

$$H \to \hat{H} = \int \hat{H}(p)\, |c(p)|^{-2} \mathrm{d}p, \quad T_g = \int \hat{T}_g(p)\, |c(p)|^{-2} \mathrm{d}p, \tag{12}$$

где p пробегает H_p^* по модулю группы Вейля. Все функции $u_p(x) \in H(p)$, заданные формулой

$$u_p(x) = \int_B \exp[\mathrm{i}(p + \rho) A(x, b)]\, u(b)\, \mathrm{d}b, \quad u(b) \in L^2(B, \mathrm{d}b), \tag{13}$$

являются собственными функциями всех инвариантных дифференциальных операторов центра Z обертывающей алгебры E группы G.

(Доказательство см. в [394].)

Теорема 3 представляет собой один из замечательнейших результатов гармонического анализа на однородных пространствах. Подчеркнем, что доказательство теоремы существенно геометрично и не использует спектрального анализа самосопряженных операторов и аппарата функционального анализа; несмотря на это, оно дает спектральную меру в явном виде.

Б. *Комментарии*

1. Первая работа, имеющая отношение к гармоническому анализу на однородном пространстве, была выполнена Хеке в 1918 г. В ней классифицированы конечномерные пространства непрерывных функций на сфере S^2, инвариантных относительно вращений. Позже (в 1929 г.) Картан распространил гармонический анализ Петера—Вейля на компактных группах до гармонического анализа на компактных римановых пространствах с транзитивной компактной группой Ли изометрий. Однако широкомасштабная активность в этой области исследований началась лишь после 1950 г. Наиболее важный вклад сделан в работах Гельфанда [301], Годемана [334], Березина и Гельфанда [108], Гельфанда и Граева [307], Хариш-Чандры [374, 375], Березина [107], Гиндикина и Карпелевича [329], Хелгасона [389, 390, 393, 394, 396—399] и Виленкина [818, 819].

Гармонический анализ на произвольных симметрических пространствах, представленный в § 2, разработан К. Мореном и Л. Морен ([574], гл. 7). Он дает изящное решение основных задач гармонического анализа на однородных пространствах, основанное на ядерной спектральной теореме. Гармонический анализ на симметрических пространствах ранга один с псевдоортогональной группой преобразований разработан Лимичем, Нидерле и Рончкой [525, 526]. Гармонический анализ на однородных пространствах ранга один для групп $SO_0(p, q)$ с некомпактной стационарной группой разработан Нидерле [638] и Лимичем и Нидерле [524]. Распространение этой теории на симметрические пространства, соответствующие псевдоунитарным группам $U(p, q)$ и симплектическим группам $Sp(n)$, разработан Фишером и Рончкой [260, 261] и Паясом и Рончкой [658] соответственно.

Геометрический подход к гармоническому анализу на симметрических пространствах, представленный в § 4, А, был начат Хариш-Чандрой [374, 375] и завершен Хелгасоном [394, 396—399].

2. В § 3 мы рассмотрели гармонический анализ на симметрических пространствах ранга один, соответствующий псевдоорто-

гональным группам $SO_0(p, q)$, $p \geqslant q > 2$. Такой же анализ может быть проведен для конформных групп $SO_0(p, 2)$ и обобщенных групп Лоренца $SO_0(p, 1)$. Детальный анализ можно найти в ряде работ Лимича, Нидерле и Рончки [525, 526]. В этих работах также рассматривается случай, когда стационарная группа непроста, например случай симметрических пространств X_0, заданных в (3.3).

3. Обобщенные проективные операторы P^{λ}_{pq} для некомпактных групп введены Рончкой [698]. Применение этих операторов к явному построению коэффициентов Клебша—Гордана группы Лоренца дано в [14, 15].

§ 6. Упражнения

§ 1.1. Покажите, что оператор Лапласа—Бельтрами на конусе

$$(x^1)^2 + \ldots + (x^p)^2 - (x^{p+1})^2 - \ldots - (x^{p+q})^2 = 0 \tag{1}$$

не существует.

Указание. Покажите, что метрический тензор (3.3) сингулярен.

§ 1.2. Покажите, что на симметрических пространствах $X^{p,q}_{+} = U(p, q)/U(p-1, q)$, заданных формулой

$$|z^1|^2 + \ldots + |z^p|^2 - |z^{p+1}|^2 - \ldots - |z^{p+q}|^2 = 1, \tag{2}$$

кольцо инвариантных операторов порождается оператором Лапласа—Бельтрами и оператором $C_1 = \sum_{i=1}^{p+q} X_i$, где X_i — генераторы группы $U(p, q)$.

§ 2.1. Найдите матричные элементы неприводимых наиболее вырожденных представлений группы $\mathrm{Sp}(n)$.

Указание. Представьте каждый элемент x из $\mathrm{Sp}(n)$ в виде произведения однопараметрических подгрупп и используйте метод Паяса и Рончки [658] явного построения пространства представления.

§ 3.1. Пусть $G = SO(2, 2)$, и пусть $H = L^2(X, \mu)$, где $X = SO(2, 2)/SO(1, 2)$, реализовано как гиперболоид

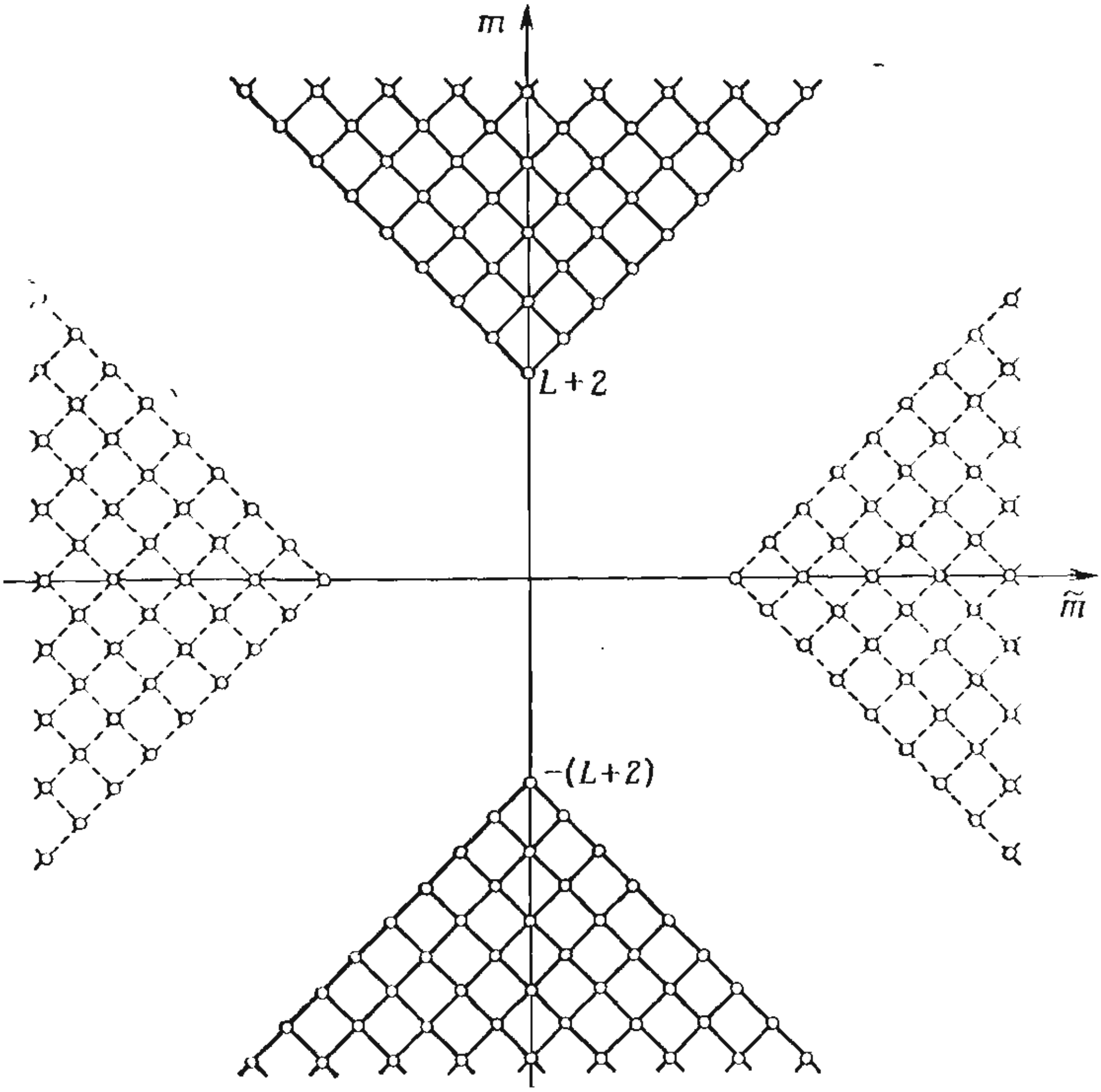
$$(x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 - (x^4)^2 = 1. \tag{3}$$

Покажите, что в H существует дискретная серия представлений группы G, характеризуемая собственными значениями

$$\lambda = -L(L+2), \quad L = 0, 1, 2, \ldots, \tag{4}$$

оператора Лапласа—Бельтрами и собственными значениями оператора отражения $Ru(x) = u(-x)$.

§ 3.2. Покажите, что пространства $H_{\pm}(L)$ неприводимых представлений дискретной серии предыдущего упражнения имеют структуру, показанную на фиг. 4, где m и $\tilde{m}$ — инвариантные числа, характеризующие представление подгруппы $SO(2) \otimes \otimes SO(2)$ и удовлетворяющие условию $|m| - |\tilde{m}| = \pm(L + 2 + + 2n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.



Фиг. 4.

Представления, полученные после перестановки m и $\tilde{m}$, эквивалентны двум предыдущим представлениям (на фиг. 4 они обозначены пунктирными прямыми).

Указание. Используйте редукцию оператора Лапласа—Бельтрами для SO (2, 2) на подгруппу $SO(2) \otimes SO(2)$.

§ 3.3. Пусть $G = U(2, 2)$, и пусть $H = L^2(X, \mu)$, где $X = U(2, 2)/U(1, 2)$ представлено следующей гиперсферой в C^4:

$$|z^1|^2 + |z^2|^2 - |z^3|^2 - |z^4|^2 = 1. \tag{5}$$

Покажите, что на H реализуется дискретная серия представлений группы G, которая характеризуется собственными значениями

$$\lambda = -L(L+6), \quad L = -2, -1, 0, 1, 2, \ldots,$$

оператора Лапласа—Бельтрами и собственными значениями оператора $C_1 = \sum_{i=1}^{4} X_i$, где X_i — генераторы подалгебры Картана группы G.

Указание. Введите бигармоническую систему координат на X и сведите $\Delta(X)$ к одномерному оператору Шредингера.

§ 3.4. Пусть $G = \mathrm{Sp}(p, q)$. Постройте вырожденную серию неприводимых представлений группы G на пространствах $H = L^2(X^{\pm}, \mu)$, где $X^+ = \mathrm{Sp}(p, q)/\mathrm{Sp}(p-1, q)$ и $X^- = \mathrm{Sp}(p, q)/\mathrm{Sp}(p, q-1)$.

Указание. Используйте метод Паяса и Рончки [658], который применен ими для построения вырожденной серии неприводимых представлений группы $\mathrm{Sp}(n)$.

Глава 16

Индуцированные представления

§ 1. Понятие индуцированных представлений

Используя технику индуцированных представлений, в гл. 7 мы построили все неприводимые конечномерные представления произвольной связной группы Ли. В этой главе мы даем метод построения индуцированных унитарных представлений *любой* топологической локально компактной сепарабельной группы G. Мы начнем с построения пространства представления, которое является обобщением построения, данного в гл. 8, § 2, для конечномерного случая.

А. *Построение*

Пусть K — замкнутая подгруппа группы G, и пусть $k \to L_k$ — унитарное представление подгруппы K в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Пусть μ — любая квазиинвариантная мера на однородном пространстве $X = K\backslash G = \{Kg,\ g \in G\}$ правых смежных классов. Рассмотрим множество H^L всех функций u, определенных на G со значениями в H, удовлетворяющих следующим условиям:

$$
\begin{aligned}
&1^\circ \qquad (u(g), v) \quad \text{измерима (относительно } dg) \text{ для всех } v \in H, \\
&2^\circ \qquad u(kg) = L_k u(g) \quad \text{для всех } k \in K \text{ и всех } g \in G, \qquad (1)\\
&3^\circ \qquad \int_X \| u(g) \|^2 \, d\mu(\dot{g}) < \infty, \qquad \dot{g} = Kg,
\end{aligned}
$$

где $\|u(g)\|$ — норма в пространстве H.

Условие 3° требует дальнейшего объяснения. Прежде всего заметим, что

$$\| u(kg) \| = \| L_k u(g) \| = \| u(g) \|,$$

поскольку L_k унитарно. Поэтому $\| u(g) \|$ определяет функцию на правых смежных классах по K (т. е. на пространстве $X = K\backslash G$).

Замечание. Каждая точка $x = Kg$ из $K\backslash G$ остается фиксированной при действии справа подгруппы $g^{-1}Kg \cong K$. Поэтому подгруппа K называется *стационарной* (изотропной, малой) группой пространства X (гл. 4, § 1).

ЛЕММА 1. *Пространство* H^L, *определенное в* (1), *изоморфно гильбертову пространству* $L^2(X, \mu, H)$ *квадратично интегрируемых векторных функций, определенных на* $X = K\backslash G$ *со значениями в гильбертовом пространстве* H. *Этот изоморфизм задается формулой*

$$u(g) = L_{k_g}\tilde{u}(\dot{g}),$$

где k_g — *множитель в разложении Макки* $g = k_g s_g$ [*см.* (2.4.1)].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию (1) 1° вектор $u(g)$ играет роль линейного непрерывного функционала на H. Норма $\|u(g)\|$ этого функционала по определению задается формулой

$$\|u(g)\| = \sup_{\|v\|\leqslant 1} |(u(g), v)|.$$

Поскольку H сепарабельно, существует последовательность v_n элементов из H с $\|v_n\| \leqslant 1$, которая плотна в единичном шаре в H. Поэтому $\|u(g)\| = \sup_n |(u(g), v_n)|$. Поскольку, согласно условию (1) 1°, все функции $(u(g), v_n)$ измеримы и верхний предел последовательности измеримых функций измерим, $\|u(g)\|$ — измеримая функция от g, и следовательно, также от $\dot{g}$ (приложение А.5).

Поэтому интеграл в (1) 3° имеет смысл. Если $u \in H^L$, $\lambda \in C^1$, то $\lambda u \in H^L$. Более того, если u_1 и u_2 удовлетворяют условиям 1, 2 и 3° из (1), то очевидно, что $u_1 + u_2$ удовлетворяет 1 и 2°. В силу неравенства

$$\|u_1(g) + u_2(g)\|^2 \leqslant 2(\|u_1(g)\|^2 + \|u_2(g)\|^2) \tag{2}$$

$u_1 + u_2$ также удовлетворяет условию 3°. Таким образом, функции, удовлетворяющие 1—3°, образуют векторное пространство. Используя тождество

$$(u_1(g), u_2(g)) = \|u_1(g) + u_2(g)\|^2 - \|u_1(g) - u_2(g)\|^2 + \\ + i\|u_1(g) + iu_2(g)\|^2 - i\|u_1(g) - iu_2(g)\|^2, \tag{3}$$

выводим, что функция $g \to (u_1(g), u_2(g))$ измерима. Из условия 2° следует, что $(u_1(kg), u_2(kg)) = (L_k u_1(g), L_k u_2(g)) = (u_1(g), u_2(g))$. Поэтому функция $(u_1(g), u_2(g))$ является измеримой функцией от $\dot{g}$. Эта функция также суммируема относительно меры $\mu(\cdot)$ на X. В самом деле, по неравенству Шварца

$$|(u_1(g), u_2(g))| \leqslant \|u_1(g)\| \|u_2(g)\|.$$

По условию 3° функции $\|u_i(g)\|^2$, $i = 1, 2$, суммируемы. Кроме того, по неравенству Гельдера произведение $\|u_1(g)\|\ \|u_2(g)\|$ также суммируемо [1]. Следовательно, функция $(u_1(g), u_2(g))$ суммируема относительно $d\mu(\dot{g})$.

Приведенные свойства функции $g \to (u_1(g), u_2(g))$ позволяют ввести положительную эрмитову форму в пространстве H^L формулой

$$[(u_1, u_2)]_{H^L} \equiv \int_X (u_1(g), u_2(g))_H \, d\mu(\dot{g}). \tag{4}$$

Отождествляя в H^L две функции, которые равны почти всюду, и используя последнее равенство для скалярного произведения в H^L, можно превратить пространство H^L в пространство со скалярным произведением. Чтобы показать изометрию H^L и $L^2(X, \mu; H)$ для $\tilde{u}(g) \in L^2(X, \mu; H)$, положим [2]

$$u(g) = L_{k_g}\tilde{u}(\dot{g}). \tag{5а}$$

Функции (5а) лежат в пространстве H^L. В самом деле, из измеримости отображения $g \to kg$ и непрерывности L_k следует, что для любого $v \in H$ функция $g \to (u(g), v)$ измерима. Поскольку $kg = kk_g s_g$, то $k_{kg} = kk_g$ и мы имеем $u(kg) = L_{kk_g}u(g) = L_k u(g)$. Наконец, из унитарности L_{k_g} следует

$$\int_X \|u(g)\|^2 d\mu(g) = \int_X \|\tilde{u}(\dot{g})\|^2 d\mu(\dot{g}) < \infty.$$

Отображение $\tilde{u}(\dot{g}) \to u(g)$, заданное формулой (5а), является, таким образом, изометрией $L^2(X, \mu; H)$ в H^L. Обратно, если $u(g) \in H^L$, то функция

$$\tilde{u}(\dot{g}) = L_{k_g}^{-1}u(g) \tag{5б}$$

удовлетворяет условию $\tilde{u}(k\dot{g}) = L_{kk_g}^{-1}u(kg) = L_{kk_g}^{-1}L_k u(g) = \tilde{u}(\dot{g})$ и принадлежит $L^2(X, \mu; H)$. Следовательно, отображение (5а) представляет собой изоморфизм из $L^2(X, \mu; H)$ на H^L.

---

[1] Если $f(x) \in L^p(\Omega)$ и $g(x) \in L^q(\Omega)$, где

$$1 < p < \infty, \quad 1 < q < \infty, \quad 1/p + 1/q = 1,$$

то произведение $f(x)\, g(x)$ интегрируемо и

$$\left| \int f(x)\, g(x)\, dx \right| \leqslant \|f\|_p \|g\|_q.$$

[2] Ради простоты здесь и в некоторых дальнейших формулах мы опускаем стандартную проверку того, что равенство не зависит от выбора элемента u из класса эквивалентности.

Построим теперь унитарное представление группы G в гильбертовом пространстве H^L.

Лемма 2. *Отображение* $g_0 \to U^L_{g_0}$, *заданное формулой*

$$U^L_{g_0} u(g) \equiv (\rho_{g_0}(g))^{1/2} u(gg_0), \tag{6}$$

где $\rho_{g_0}(g) = d\mu(\dot{g}g_0)/d\mu(\dot{g})$ — *производная Радона—Никодима квазиинвариантной меры* $d\mu$ *на* X, *определяет унитарное представление группы* G *в* H^L.

Доказательство. Ясно, что функция $v(g) = [\rho_{g_0}(g)]^{1/2} \times \times u(gg_0)$ удовлетворяет условию (1) 1°. Кроме того, поскольку

$$\int_X \|v(g)\|^2 d\mu(\dot{g}) = \int_X \rho_{g_0}(g) \|u(gg_0)\|^2 d\mu(\dot{g}) = \\ = \int_X \|u(g)\|^2 d\mu(\dot{g}) < \infty, \tag{7}$$

то $v(g) \in H^L$. Оператор U^L_g изометричен и обладает обратным $(U^L_g)^{-1}$. Следовательно, отображение $g \to U^L_g$ унитарно. Используя (6) и закон композиции для $\rho_{g_0}(g)$, получаем

$$[U^L_{g_1} U^L_{g_2} u](g) = (\rho_{g_1}(g))^{1/2} (\rho_{g_2}(gg_1))^{1/2} u(gg_1g_2) = \\ = (\rho_{g_1g_2}(g))^{1/2} u(gg_1g_2) = U^L_{g_1g_2} u(g).$$

Следовательно,

$$U^L_{g_1} U^L_{g_2} = U^L_{g_1g_2}. \tag{8}$$

Остается показать, что отображение $g \to U^L_g$ сильно непрерывно. Для этого заметим, что в формуле

$$(U^L_g u, v) = \int_X (\rho_g(g_1))^{1/2} (u(g_1g), v(g_1)) d\mu(\dot{g}_1) \tag{9}$$

подынтегральная функция является измеримой функцией обеих переменных [согласно теореме 4.3.1 и формуле (3)]. Поэтому $(U^L_g u, v)$ — измеримая функция от g. По утверждению 5.7.2.а (слабо) измеримое унитарное представление сильно непрерывно. Таким образом, отображение $g \to U^L_g$ из формулы (6) определяет сильно непрерывное унитарное представление группы G в гильбертовом пространстве H^L, называемое *представлением группы* G, *индуцированным представлением* L или просто *индуцированным представлением*.

Если L — одномерное представление замкнутой подгруппы $K \subset G$, то U^L называется *мономиальным представлением*. Если L — одномерное тождественное представление подгруппы K, то U^L называется *квазирегулярным представлением* группы G. В этом случае $H^L = L^2(X, \mu)$. Если K — тождественная подгруппа, то U^L — правое регулярное представление группы G. Мономиальные индуцированные представления играют существенную роль в теории представлений комплексных классических групп Ли (гл. 19) и нильпотентных групп.

Пример 1. Пусть $G = N \rtimes M$ — двумерная группа Пуанкаре. Действие группы G в двумерном пространстве-времени задается формулой

$$\begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix} \to [n, \Lambda]\begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{ch}\alpha & \operatorname{sh}\alpha \\ \operatorname{sh}\alpha & \operatorname{ch}\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_x \\ n_t \end{bmatrix}, \quad -\infty < \alpha < \infty.$$

Это предполагает следующий закон композиции

$$(n, \Lambda)(n_0, \Lambda_0) = (n + \Lambda n_0, \Lambda\Lambda_0).$$

Рассмотрим представления группы G, индуцированные одномерными характерами $n \to L_n = \langle n, \hat{n}\rangle = \exp[i(n, \hat{n})]$ подгруппы N, где $(n, \hat{n}) = n_\mu \hat{n}^\mu$. Поскольку N нормальна в G, пространство $X = N\setminus G$ изоморфно групповому пространству подгруппы M. Мера Хаара $d\mu$ на M, рассматриваемая как мера на X, инвариантна относительно G. В самом деле, из закона композиции для G следует

$$xg \simeq (0, \Lambda_x)(n, \Lambda) = (\Lambda_x n, \Lambda_x\Lambda) \simeq (0, \Lambda_x\Lambda) \in X.$$

Поэтому $d\mu(xg) = d\mu(\Lambda_x \Lambda) = d\mu(x)$. Отсюда следует

$$d\mu(xg)/d\mu(x) \equiv 1.$$

Пространство H^L представления U^L состоит из функций $u(g)$ на G, удовлетворяющих условию (1) 2°, т. е.

$$u((n', I)(n, \Lambda)) = \langle n', \hat{n}\rangle u((n, \Lambda)).$$

Действие $U^L_{g_0}$ в H^L задается формулой (6) с $\rho \equiv 1$:

$$U^L_{g_0} u(g) = u(gg_0).$$

Согласно лемме 1, мы можем представить U^L в пространстве $L^2(X, d\mu(x))$. Формула (5б), унитарно отображающая H^L на $L^2(X, d\mu(x))$, становится операцией ограничения

$$H^L \ni u \to u|_M \in L^2(M, d\mu) \cong L^2(X, d\mu).$$

Действие группы G в последнем пространстве задается формулой [$g_0 = (n_0, \Lambda_0)$, см. (15)]

$$U^L_{g_0} u(\Lambda) = \langle \Lambda n_0, \hat{n}\rangle u(\Lambda\Lambda_0).$$

В гл. 17, § 1 мы покажем, что каждое такое индуцированное представление неприводимо.

Возникают следующие естественные вопросы.

1. Существуют ли неравные тождественно нулю функции, удовлетворяющие условиям 1°, 2° и 3° из (1)?

2. Как связаны между собой представления ${}^{\mu}U^{L}$ и ${}^{\nu}U^{L}$ группы G, соответствующие двум различным квазиинвариантным мерам μ и ν на $K\diagdown G$?

3. Можно ли определить представление $g \to U_g^L$, индуцированное представлением L подгруппы K, прямо на пространстве $L^2(X, \mu; H)$, где $X = K\diagdown G$?

Ответ на первый вопрос, а также ясное описание структуры пространства H^L дается следующим утверждением.

Утверждение 3. *Пусть $w(g)$ — произвольная определенная на G непрерывная функция со значениями в H и с компактным носителем. Положим*

$$\widehat{w}(g) \equiv \int_k L_k^{-1} w(kg)\, dk, \tag{10}$$

где dk — правоинвариантная мера Хаара на K. Тогда 1° $\widehat{w}(g)$ — непрерывная функция на G с компактным носителем [1]) на $K\diagdown G$.

2° $\widehat{w}(g)$ принадлежит H^L.

3° Множество $C_0^L = \{\widehat{w}(g)\colon w(g) = \lambda(g)v,\ \ \lambda(g) \in C_0(G),$ $v \in H\}$ образует плотное множество в H^L.

Доказательство. 1°. Каждая непрерывная функция $w(g)$ на G с компактным носителем D равномерно непрерывна (см. утверждение 2.2.4), т. е. для каждого $\varepsilon > 0$ существует компактная окрестность V единицы, такая, что

$$g_1^{-1}g_2 \in V \Rightarrow \|w(g_1) - w(g_2)\| < \varepsilon.$$

Пусть $g_0 \in G$ и $g \in g_0V$. Тогда

$$\widehat{w}(g) - \widehat{w}(g_0) = \int_K (L_k^{-1}w(kg) - L_k^{-1}w(kg_0))\, dk =$$

$$= \int_{K \cap DV^{-1}g_0^{-1}} L_k^{-1}(w(kg) - w(kg_0))\, dk.$$

Поэтому

$$\|\widehat{w}(g) - \widehat{w}(g_0)\| \leqslant \int_{K \cap DV^{-1}g_0^{-1}} \|w(kg) - w(kg_0)\|\, dk < \varepsilon \operatorname*{mes}_K (K \cap DV^{-1}g_0^{-1}),$$

т. е. $\widehat{w}(g)$ — непрерывная функция на G.

---

[1]) Т. е. $\pi(\operatorname{supp} \widehat{w})$ компактно в $X = K\diagdown G$, где π — каноническая проекция π: $G \to X$.

2°. Для любого $k_0 \in K$ имеем

$$\hat{w}(k_0 g) = \int_K L_k^{-1} w(kk_0 g)\,dk = \int_K L_{\tilde{k}k_0^{-1}}^{-1} w(\tilde{k}g)\,d\tilde{k} = L_{k_0}\hat{w}(g).$$

Кроме того, из (10) следует, что $\hat{w}(g) = 0$, если $g \notin KD$. Таким образом, $\| w(g) \|$ — непрерывная функция от $\dot{g}$ с носителем $\pi(D)$. Следовательно, все условия (1) 1°—3° выполняются, и поэтому $\hat{w} \in H^L$.

3°. Пусть u — элемент из H^L, такой, что $(u, \hat{w})_{H^L} = 0$ для произвольной определенной на G непрерывной функции w со значениями в H, которая имеет компактный носитель. В силу (1) 2° имеем

$$(u(g), \hat{w}(g))_H = \int_K (u(g), L_k^{-1} w(kg))_H\,dk = \int_K (u(kg), w(kg))_H\,dk.$$

Положим теперь $w(g) = \lambda(g)\,v$, где $\lambda \in C_0(G)$. Тогда

$$(u(g), \hat{w}(g))_H = \int_K \lambda(kg)\,(u(kg), v)_H\,dk,$$

и, согласно (4),

$$(u, \hat{w})_{H^L} = \int_{K\setminus G} \left[\int_K \lambda(kg)\,(u(kg), v)_H\,dk \right] d\mu(\dot{g}).$$

Используя равенство (4.3.8), получаем

$$(u, \hat{w})_{H^L} = \int_G \lambda(g)\,(u(g), v)\,\rho(g)\,dg = 0.$$

Поскольку λ произвольно, из этого равенства следует, что $(u(g), v) = 0$ всюду, за исключением, возможно, множества $N_v \subset G$ меры нуль. Пусть теперь $\{v_n\}$ — всюду плотная последовательность в H, и пусть $N = \bigcup_n N_{v_n}$. Поскольку N имеет меру нуль, то при $g \notin N$ для каждого n $(u(g), v_n)_H = 0$. Следовательно $u(g) = 0$.

Ответим теперь на второй вопрос.

Пусть μ и ν — две квазиинвариантные меры на $X = K\setminus G$. Обозначим через ${}^{\mu}H^L$ и ${}^{\nu}H^L$ соответствующие пространства, а через ${}^{\mu}U^L$ и ${}^{\nu}U^L$ — унитарные представления группы G в ${}^{\mu}H^L$ и ${}^{\nu}H^L$ соответственно.

Утверждение 4. *Существует унитарное преобразование V из ${}^{\mu}H^L$ на ${}^{\nu}H^L$, такое, что*

$$V({}^{\mu}U_g^L)\,V^{-1} = {}^{\nu}U_g^L \tag{11}$$

для всех g из G.

Доказательство. Согласно теореме 4.3.1, меры μ и ν на X эквивалентны. Пусть ψ обозначает производную Радона—Никодима от μ относительно ν. Согласно теореме 4.3.1, это измеримая функция. Пусть π обозначает каноническое проектирование из G на $K\diagdown G$, т. е. π: $g \to Kg$. Тогда для каждой u из ${}^{\mu}H^L$ функция $\sqrt{(\psi \circ \pi)}\, u$ лежит в ${}^{\nu}H^L$ и норма функции u в ${}^{\mu}H^L$ равна норме функции $\sqrt{(\psi \circ \pi)}\, u$ в ${}^{\nu}H^L$. Очевидно, что каждая v из ${}^{\nu}H^L$ имеет вид $\sqrt{(\psi \circ \pi)}\, u$ для некоторой u из ${}^{\mu}H^L$. Через V обозначим оператор умножения на $\sqrt{\psi \circ \pi}$. Тогда V определяет унитарное отображение из ${}^{\mu}H^L$ на ${}^{\nu}H^L$. В самом деле, пусть $v = \sqrt{(\psi \circ \pi)}\, u \in {}^{\nu}H^L$. Тогда, поскольку $d\mu = \psi d\nu$, получаем

$$\rho^{\mu}_{g_0}(g) \equiv \frac{d\mu(\dot{g}g_0)}{d\mu(\dot{g})} = \frac{d\nu(\dot{g}g_0)}{d\nu(\dot{g})}\,\frac{\psi(\dot{g}g_0)}{\psi(\dot{g})} = \rho^{\nu}_{g_0}(g)\,\frac{\psi(\dot{g}g_0)}{\psi(\dot{g})},$$

и, следовательно, по формуле (6)

$$V{}^{\mu}U^L_{g_0}V^{-1}(u) = V(\rho^{\mu}_{g_0}(g))^{1/2}u(gg_0) = (\psi \circ \pi)^{1/2}(g)(\rho^{\mu}_{g_0}(g))^{1/2}u(gg_0) =$$
$$= (\psi \circ \pi)^{1/2}(gg_0)(\rho^{\nu}_{g_0}(g))^{1/2}u(gg_0) = {}^{\nu}U^L_{g_0}u(g),$$

откуда следует (11).

Ответим теперь на третий вопрос. Знание представления $g \to U^L_g$ прямо на пространстве $L^2(X, \mu; H)$ существенно для многих приложений. Например, в физике частиц важно знать свойства представлений группы Пуанкаре Π в пространстве функций на массовом гиперболоиде $p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 = m^2 > 0$, который является фактор-пространством Π/K, где K — полупрямое произведение $T^4 \rtimes SO(3)$.

Пусть $g \to B_g$ — операторная функция из G в множество унитарных операторов в H, которая удовлетворяет следующим условиям.

$$\begin{array}{ll} 1^\circ & B_{k_g} = L_k B_g \text{ для всех } k \in K \text{ и всех } g \in G. \\ 2^\circ & \text{Отображение } g \to B_g \text{ слабо измеримо.} \end{array} \tag{12}$$

Последнее условие означает, что для каждой пары u, v из H функция

$$g \to (B_g u, v) \tag{13}$$

dg-измерима.

Обозначим через s_g единственный элемент из G, характеризующий смежный класс $Kg = Kk_g s_g = Ks_g$, а через $k_{s_g g_0} \in K$ — множитель в разложении Макки (2.4.1) элемента $s_q g_0$. Мы имеем

Утверждение 5. *Пусть K — замкнутая подгруппа в G, и пусть $k \to L_k$ — унитарное представление подгруппы K в H.*

Если $g \to B_g$ — операторная функция, удовлетворяющая условиям (12), *то отображение $g_0 \to U^L_{g_0}$, заданное формулой* [1])

$$U^L_{g_0} u(\dot{g}) = \rho^{1/2}_{g_0}(g) B_g^{-1} B_{gg_0} u(\dot{g g_0}), \tag{14}$$

определяет унитарное представление группы G в $L^2(X, \mu; H)$. Если положить $B_g = L_{k_g}$ и $\dot{g} \equiv x$, то

$$U^L_{g_0} u(x) = [d\mu(xg_0)/d\mu(x)]^{1/2} L_{k_{s_g g_0}} u(xg_0). \tag{15}$$

Доказательство. Пусть $\tilde{u}(\dot{g}) \in L^2(X, \mu; H)$. Положим

$$u(g) = B_g \tilde{u}(\dot{g}). \tag{16a}$$

Функции (16а) лежат в пространстве H^L. В самом деле, по условию (12) 2° при любом $v \in H$ функция $g \to (u(g), v)$ измерима. Согласно условию (12) 1° и соотношению $\widehat{kg} = Kkg = Kg = \dot{g}$, имеем $u(kg) = L_k u(g)$. Наконец, из унитарности оператора B_g следует

$$\int_X \| u(g) \|^2 d\mu(\dot{g}) = \int_X \| \tilde{u}(\dot{g}) \|^2 d\mu(\dot{g}) < \infty.$$

Таким образом, отображение $u(g) \to \tilde{u}(\dot{g})$, заданное формулой (16а), является изометрией из $L^2(\mu, X; H)$ в H^L. Обратно, если $u \in H^L$, то функция

$$\tilde{u}(\dot{g}) = B_g^{-1} u(g) \tag{16б}$$

удовлетворяет условию $\tilde{u}(k\dot{g}) = B_{kg}^{-1} L_k u(g) = B_g^{-1} u(g) = \tilde{u}(\dot{g})$ и принадлежит $L^2(X, \mu; H)$. Следовательно, отображение (16а) представляет собой изоморфизм из $L^2(X, \mu; H)$ на H^L.

Следующая диаграмма иллюстрирует преобразования операторов $\tilde{U}^L_g$ при изоморфизме (16):

$$\begin{array}{ccc}
\tilde{u}(\dot{g}) & \xrightarrow{\quad B_g \quad} & u(g) = B_g \tilde{u}(\dot{g}) \in H^L \\
\Big\downarrow \tilde{U}^L_{g_0} & & \Big\downarrow U^L_{g_0} \\
\rho^{1/2}_{g_0}(g) B_g^{-1} B_{gg_0} \tilde{u}(\dot{g g_0}) & \xleftarrow{\quad B_g^{-1} \quad} & \rho^{1/2}_{g_0}(g) B_{gg_0} \tilde{u}(\dot{g g_0})
\end{array}$$

Она доказывает соотношение (14).

Чтобы завершить решение задачи, следует показать, что всегда существует операторная функция $g \to B_g$, удовлетворяющая условиям (12). Это может быть сделано посредством теоремы 2.4.1. В самом деле, пусть S — такое борелево множество, что

---

[1]) Для простоты мы используем один и тот же символ U^L_g для представлений (6) и (15) и опускаем волнистую черту над $u(\dot{g})$.

любое $g \in G$ может быть однозначно записано в виде $g = k_g s_g$, $k_g \in K$ и $s_g \in S$. Тогда положив

$$B_g = L_{k_g}, \tag{17}$$

где $k \to L_k$ — унитарное представление подгруппы K, получаем операторную функцию $g \to B_g$, удовлетворяющую условиям (12) 1° и 2°.

Поскольку $gg_0 = k_g s_g g_0 = k_g k_{s_g g_0} s_{s_g g_0}$, мы получаем $k_{gg_0} = k_g k_{s_g g_0}$. Поэтому

$$B_g^{-1} B_{gg_0} = L_{k_{s_g g_0}}, \tag{18}$$

что доказывает формулу (15).

В дальнейшем пространство $L^2(X, \mu; H)$ будем также обозначать символом H^L, если их различие не будет иметь значения.

Пример 2. Пусть G — множество всех вещественных унимодулярных 2×2-матриц

$$g = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

т. е. $G = SL(2, R)$.

В качестве подгруппы K возьмем множество всех элементов $k \in G$ вида

$$k = \begin{bmatrix} \lambda & \nu \\ 0 & \lambda^{-1} \end{bmatrix}, \quad \lambda \neq 0. \tag{19}$$

Фактически $K = R \rtimes \Lambda$, где

$$R = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & \nu \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

— инвариантная подгруппа в K и

$$\Lambda = \left\{ \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{bmatrix} \right\}.$$

Мы хотим найти унитарные представления U^L группы G, индуцированные одномерными представлениями (характерами) подгруппы K, имеющими вид

$$k \to L_k \equiv L_{(\nu, \lambda)} = I \cdot L_\lambda = |\lambda|^{i\sigma} \left(\frac{\lambda}{|\lambda|} \right)^{\varepsilon}, \tag{20}$$

где $\sigma \in (-\infty, \infty)$ и $\varepsilon = 0$ или 1. Поскольку пространством H представления L является C^1, пространством представления U^L является $H^L = L^2(X, \mu)$, где $X = K \diagdown G$ и μ— квазиинвариантная мера на X. В силу (15) действие представления $U^L_{g_0}$ в H^L задается формулой

$$U^L_{g_0} u(x) = (d\mu(xg_0)/d\mu(x))^{1/2} L_{k_{s_g g_0}} u(xg_0). \tag{21}$$

Чтобы получить явный вид оператора $U^L_{g_0}$, следует найти явную реализацию

1) однородного пространства X и действия группы G на X,

2) меры $d\mu(x)$ и

3) функции $L_{k_{s_g}g_0}$.

Дадим решение этих задач.

1) Чтобы найти явную реализацию пространства X, мы используем разложение Макки (2.4.1), т. е. $g = k_g s_g$. Заметим сначала, что каждая матрица g, для которой $\delta \neq 0$, может быть представлена в виде

$$g = \begin{bmatrix} \delta^{-1} & \beta \\ 0 & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \gamma/\delta & 1 \end{bmatrix}. \tag{22}$$

Остальные элементы из G вида $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$, $\gamma = -\beta^{-1}$, могут быть представлены в виде

$$g = \begin{bmatrix} \beta & -\alpha \\ 0 & \beta^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{23}$$

Таким образом, любой элемент $g \in G$ представляется в виде

$$g = k_g s_g, \tag{24}$$

где $k_g \in K$ и

$$s_g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{bmatrix}, \quad x \in (-\infty, \infty), \quad \text{или} \quad s_g = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \equiv S_0 \tag{25}$$

соответственно.

Множество S всех точек (25) дает множество Макки из теоремы 2.4.1. Так как KS_0 имеет меру нуль в $X = K\setminus G$, то им можно пренебречь в последующих рассуждениях. Тогда

$$X \ni x \equiv \dot{g} = Kg = Kk_g s_g = Ks_g. \tag{26}$$

Следовательно, каждый элемент однородного пространства $X = K\setminus G$ может быть однозначно определен параметром x матрицы s_g. Поэтому в силу (25) мы имеем взаимно-однозначное соответствие между точками в X и точками вещественной прямой R^1.

Чтобы найти точку x, соответствующую смежному классу Kg, разложим g по формуле (22) и положим $x = \gamma/\delta$.

Мы получаем действие элементов $g_0 \in G$ в X на характеристическом элементе $s_g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{bmatrix}$ заданного смежного класса Kg в следующем виде:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 & \beta_0 \\ \gamma_0 & \delta_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \beta_0 \\ \alpha_0 x + \gamma_0 & \beta_0 x + \delta_0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (\beta_0 x + \delta_0)^{-1} & \beta_0 \\ 0 & \beta_0 x + \delta_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{\alpha_0 x + \gamma_0}{\beta_0 x + \delta_0} & 1 \end{bmatrix}. \quad (27)$$

Отсюда следует

$$x \to x g_0 = \frac{\alpha_0 x + \gamma_0}{\beta_0 x + \delta_0}, \quad (28)$$

т. е. действие группы G в X задается дробно-линейным преобразованием (28).

2) Найдем теперь квазиинвариантную меру $\mathrm{d}\mu(x)$ на X. Дифференциал выражения (28)

$$\mathrm{d}(x g_0) = (\beta_0 x + \delta_0)^{-2}\, \mathrm{d}x \quad (29)$$

показывает, что в качестве квазиинвариантной меры на X можно взять меру Лебега $\mathrm{d}x$. В силу (29) производная Радона—Никодима $\rho_{g_0}(q)$ имеет вид

$$\rho_{g_0}(g) = \frac{\mathrm{d}(x g_0)}{\mathrm{d}x} = (\beta_0 x + \delta_0)^{-2}. \quad (30)$$

3) Из (27) мы сразу получаем

$$k_{s_g g_0} = \begin{bmatrix} (\beta_0 x + \delta_0)^{-1} & \beta_0 \\ 0 & \beta_0 x + \delta_0 \end{bmatrix}. \quad (31)$$

Таким образом, в силу (20)

$$L_{k_{s_g} g_0} = |\beta_0 x + \delta_0|^{-i\sigma} \left(\frac{\beta_0 x + \delta_0}{|\beta_0 x + \delta_0|} \right)^{\varepsilon}. \quad (32)$$

Используя (21), (30) и (32), мы получаем явный вид индуцированных представлений

$$\left(U_g^L u\right)(x) = |\beta x + \delta|^{-i\sigma - 1} \left(\frac{\beta x + \delta}{|\beta x + \delta|} \right)^{\varepsilon} u\left(\frac{\alpha x + \gamma}{\beta x + \delta} \right). \quad (33)$$

В гл. 19 мы докажем, что все эти представления неприводимы, за исключением того, которое соответствует $\varepsilon = 1$, $\sigma = 0$.

Замечание о выборе квазиинвариантной меры

Для построения представления U^L группы G можно использовать пространство $H^L = L^2(X, \nu; H)$ с любой квазиинвариантной мерой $\nu(\cdot)$ на X. Вообще требование квазиинвариантности меры налагает только условие $\mathrm{d}\nu(x) = \varphi(x)\, \mathrm{d}x$, $\varphi \geqslant 0$. Функция $\varphi(x)$ может быть однозначно определена, например, требованием инварианточности $\nu(\cdot)$ относительно действия подгруппы вращений $\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, для которой

$$x \to \frac{x\cos\theta - \sin\theta}{x\sin\theta + \cos\theta}. \tag{34}$$

Из этого условия следует, что $\varphi(x) = (1+x^2)^{-1}$. Очевидно, что полученная мера $d\nu(x) = \varphi(x)\,dx$ также квазиинвариантна относительно остающейся подгруппы, состоящей из элементов вида $g = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{bmatrix}$ или $g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \gamma & 1 \end{bmatrix}$. В настоящем случае производная Радона—Никодима имеет вид

$$\tilde{\rho}_{\rho_0}(g) = \frac{d\nu(xg_0)}{d\nu(x)} = \frac{1+x^2}{(\alpha_0 x + \gamma_0)^2 + (\beta_0 x + \delta_0)^2}. \tag{35}$$

Теперь пространство $H^L = L^2(X, \nu)$ состоит из всех функций, удовлетворяющих условию

$$\int\limits_X |\tilde{u}(x)|^2 \frac{dx}{1+x^2} < \infty. \tag{36}$$

Представление U^L, индуцированное одномерным представлением (20) подгруппы K, теперь имеет вид

$$(U_g^L \tilde{u})(x) = (1+x^2)^{1/2}[(\alpha x+\gamma)^2 + (\beta x+\delta)^2]^{-1/2} \times \\ \times |\beta x+\delta|^{-i\sigma}\left(\frac{\beta x+\delta}{|\beta x+\delta|}\right)^{\varepsilon} \tilde{u}\left(\frac{\alpha x+\gamma}{\beta x+\delta}\right). \tag{37}$$

По утверждению 4 это представление унитарно эквивалентно представлению (33). Оператор V, осуществляющий эквивалентность, имеет вид

$$\tilde{u} \xrightarrow{V} u(x) = \tilde{u}(x)/(1+x^2)^{1/2}.$$

Хотя представления с различными мерами математически эквивалентны, они могут не быть эквивалентными в физических приложениях.

Б. *Индуцированные и мультипликативные представления*

Исторически большинство неприводимых представлений различных групп было впервые получено в виде так называемых мультипликативных представлений, определенных ниже. Следующее за определением утверждение описывает взаимно-однозначное соответствие между индуцированными и мультипликативными представлениями.

Определение 1. Представление $g \to U_g$ группы G в $L^2(X, \mu; H)$, определенное формулой

$$U_g u(x) = [d\mu(xg)/d\mu(x)]^{1/2} \sigma(x, g) u(xg), \tag{38}$$

где $\sigma(x, g)$ — измеримая операторная функция на $X \times G$, удовлетворяющая функциональному уравнению

$$\sigma(x, g_0 g_1) = \sigma(x, g_0) \sigma(x g_0, g_1), \tag{39}$$

называется *мультипликативным представлением*. Функция $\sigma(x, g)$ называется *мультипликатором*.

Утверждение 6. *Представление $g \to U_g^L$ группы G, индуцированное представлением $k \to L_k$ подгруппы K, задает мультипликатор* (18), *т. е.*

$$\sigma(\dot{g}, g_0) = B_g^{-1} B_{gg_0}, \quad \dot{g} \equiv Kg = x. \tag{40}$$

Обратно, для каждого мультипликатора $\sigma(x, g_0)$ со значениями в множестве унитарных операторов в гильбертовом пространстве H соответствующее мультипликативное представление (38) *является унитарным представлением в $L^2(X, \mu; H)$ группы G, которое эквивалентно представлению U^L, индуцированному представлением $k \to L_k$ подгруппы K, определенным формулой*

$$K \ni k \to L_k = \sigma(K, k). \tag{41}$$

Доказательство. Операторнозначная функция

$$G \times G \ni (g, g_0) \to B_g^{-1} B_{gg_0} \in L(H)$$

K-инвариантна слева по первой переменной:

$$(kg, g_0) \to B_{kg}^{-1} B_{kgg_0} = (L_k B_g)^{-1} L_k B_{gg_0} = B_g^{-1} B_{gg_0}.$$

Следовательно, на $X \times G$ определено отображение

$$(\dot{g}, g_0) \to \sigma(\dot{g}, g_0) \equiv B_g^{-1} B_{gg_0}.$$

Отображение σ удовлетворяет функциональному уравнению (39) (называемому также мультипликативным уравнением). В самом деле,

$$\sigma(\dot{g}, g_0 g_1) = B_g^{-1} B_{gg_0 g_1} = B_g^{-1} B_{gg_0} B_{gg_0}^{-1} B_{gg_0 g_1} = \sigma(\dot{g}, g_0) \sigma(\dot{g}g_0, g_1).$$

Легко видеть, что функция $\rho_{g_0}^{1/2}(g)$ также удовлетворяет этому уравнению.

Мы получили соответствие между индуцированными представлениями U^L, заданными формулой (14), и мультипликаторами. Теперь нам следует доказать, что это соответствие взаимно-однозначно. В самом деле, из мультипликативного уравнения следует, что $k \to L_k \equiv \sigma(K, k)$ определяет унитарное представление подгруппы K. Функция

$$B_g = \sigma(K, g)$$

удовлетворяет условию (12). Поэтому соответствующее мультипликативное представление (38) унитарно эквивалентно представлению U^L, определенному формулой (14). В самом деле,

$$B_g^{-1} B_{gg_0} = \sigma(K, g)^{-1} \sigma(K, gg_0) = \sigma(\dot{g}, g_0)$$

и доказательство завершено.

В. *Реализация индуцированных представлений с помощью левых классов смежных элементов*

До сих пор мы рассматривали свойства индуцированных представлений, реализованных в пространстве $H^L = L^2(X, \mu; H)$, где X — фактор-пространство $K \diagdown G$ правых классов смежных элементов Kg, $g \in G$. Однако во многих приложениях обычно возникает пространство $\hat{X} = G/K$ левых классов смежных элементов gK, $g \in G$. Поэтому мы даем формулировку полученных результатов в пространстве левых классов смежных элементов.

Пространство $\hat{H}^L$ индуцированных представлений $\hat{U}^L$ теперь определяется условиями (1) 1°, 3°, а вместо (1) 2° мы имеем

$$u(gk) = L_k^{-1} u(g). \tag{42}$$

Действие представления $\hat{U}^L$ в пространстве $\hat{H}^L$ определяется формулой [см. (6)]

$$\hat{U}^L_{g_0} u(g) = \hat{\rho}^{1/2}_{g_0}(g)\, u(g_0^{-1} g),$$

где теперь $\hat{\rho}_{g_0}(g) = d\mu(g_0^{-1}\dot{g})/d\mu(\dot{g})$. Как и раньше, мы вводим операторную функцию $g \to \hat{B}_g$ из G в множество унитарных операторов на H, которая удовлетворяет условиям [см. (12)]

$$\left.\begin{array}{ll} 1^\circ & \hat{B}_{gk} = L_{k^{-1}} \hat{B}_g, \\ 2^\circ & \text{отображение } g \to \hat{B}_g \text{ слабо измеримо.} \end{array}\right. \tag{43}$$

Как и раньше, легко проверить, что отображение

$$u(g) = \hat{B}_g u(\dot{g}). \tag{44}$$

определяет взаимно-однозначный изоморфизм пространств $\hat{H}^L$ и $L^2(\hat{X}, \mu; H)$ [см. (16а) и (16б)]. Отсюда следует, что действие оператора $\hat{U}^L_{g_0}$ в пространстве $L^2(\hat{X}, \mu; H)$ задается формулой (см. утверждение 5)

$$\hat{U}^L_{g_0} u(\dot{g}) = \hat{\rho}^{1/2}_{g_0}(g) \hat{B}^{-1}_g \hat{B}_{g_0^{-1}g} u(g_0^{-1}\dot{g}). \tag{45}$$

Положив

$$\hat{B}_g = L^{-1}_{k_g}, \tag{46}$$

можем проверить, что оба условия (43) выполняются.

Элемент g в формуле (45) может быть любым элементом из левого класса смежных элементов $\dot{g} = gK = s_g k_g K = s_g K$. Поэтому в (45) мы можем взять s_g вместо g. Поскольку $\hat{B}_{s_g} = I$, формула (45) может быть записана в виде

$$\hat{U}_{g_0} u(x) = (d\mu(g_0^{-1}x)/d\mu(x))^{1/2} L^{-1}_{k_{g_0^{-1}s_g}} u(g_0^{-1}x), \tag{47}$$

где $g_0, g \in G$, $x \equiv \dot{g} = gK$, $s_g \in S$ (т. е. $g = s_g k_g$) и $\hat{\rho}_{g_0}(g)$ — производная Радона—Никодима $d\mu(g_0^{-1}x)/d\mu(x)$.

Это завершает построение индуцированных унитарных представлений группы G, сопоставляемых с пространством $\hat{X}$ левых классов смежных элементов $\dot{g} = gK$.

Утверждение 7. *Если G унимодулярна, то представления U^L и $\hat{U}^L$ группы G, заданные формулами* (15) *и* (47) *соответственно, и индуцированные одним и тем же унитарным представлением L подгруппы K, унитарно эквивалентны, т. е.*

$$J\hat{U}^L J^{-1} = U^L, \tag{48}$$

где J обозначает инволюцию, заданную формулой

$$(Ju)(g) = u(g^{-1}). \tag{49}$$

Доказательство. Если $u(g) \in H^L$ [т. е. $u(kg) = L_k u(g)$], то

$$Ju(gk) = u(k^{-1}g^{-1}) = L_{k^{-1}} u(g^{-1}) = L^{-1}_k (Ju)(g).$$

Поэтому $Ju(g) \in \hat{H}^L$.

Задав квазиинвариантную меру $d\mu$ на $K \diagdown G$, формулой

$$\int_{G/K} f(\dot{g})\, d\hat{\mu}(\dot{g}) = \int_{K \diagdown G} I(f \circ \pi)(\dot{g})\, d\mu(\dot{g})$$

определяем меру $d\hat{\mu}$ на G/K. Поскольку $J(f \circ \pi)$ — K-инвариантная слева функция на G, то правая часть этой формулы имеет смысл.

Мера $d\hat{\mu}$ квазиинвариантна относительно G, и простым вычислением находим

$$\hat{\rho}_{g_0}(g) \equiv \frac{d\hat{\mu}(g_0^{-1}\dot{g})}{d\hat{\mu}(\dot{g})} = \frac{d\hat{\mu}(g_0^{-1}gK)}{d\hat{\mu}(gK)} = \frac{d\mu(Kg^{-1}g_0)}{d\mu(Kg^{-1})} = \rho_{g_0}(g^{-1}).$$

Тогда

$$J\hat{U}^L_{g_0}u(g) = (\hat{U}^L_{g_0}u)(g^{-1}) = \hat{\rho}_{g_0}(g^{-1})\,u(g_0^{-1}g^{-1}) =$$

$$= \rho_{g_0}(g)(Ju)(gg_0) = (U^L_{g_0}Ju)(g).$$

Поскольку $J = J^{-1}$, мы получаем

$$J\hat{U}^L J^{-1} = U^L,$$

что совпадает с (48).

Следующий пример показывает красоту и эффективность теории индуцированных представлений.

Пример 3. Пусть G — группа Пуанкаре $T^4 \rtimes SO(3, 1)$ и $K = T^4 \rtimes SO(3)$. Пусть $k \to L_k$, $k = (a, r)$, $a \in T^4$, $r \in SO(3)$, задано формулой

$$L_k = L_{(a, r)} = \exp[i(\overset{0}{p}, a)]\,D^J(r), \tag{50}$$

где $\overset{0}{p} = (m, 0, 0, 0)$, а $D^J(r)$ — неприводимое представление группы $SO(3)$. Используя (47), построим представление U^L группы G. Найдем сначала явную реализацию пространства $X = G/K$. В силу разложения Картана группы $SO(3, 1)$ имеем

$$SO(3, 1) = \mathscr{P}SO(3), \tag{51}$$

где $\mathscr{P}$ — множество чисто лоренцевых преобразований, которые параметризуются скоростями $v = \{v_\mu\}$, $v_\mu v^\mu = 1$, или импульсами $p = \{p_\mu\}$, $p_\mu = mv_\mu$. Поэтому

$$X = T^4 \rtimes SO(3, 1)/T^4 \rtimes SO(3) \sim \mathscr{P}$$

и X может быть реализовано в виде массового гиперболоида

$$\{p_\mu\colon\ p_\mu p^\mu = m^2\}.$$

Но, согласно примеру 4.3.2, мера $d\mu$ на массовом гиперболоиде имеет вид $d\mu(p) = d^3\boldsymbol{p}/p_0$. Эта мера инвариантна относительно действия G на X. Поэтому производная Радона—Никодима в (47) равна единице.

Чтобы завершить построение представления U^L, следует найти оператор $L^{-1}_{k_{g_0^{-1}s_g}}$. Заметим сначала, что в силу (51) элемент $\boldsymbol{g}$

из SO (3, 1) записывается в виде $g = \Lambda_p r$, где $\Lambda_p \in \mathscr{P}$ и $r \in \mathrm{SO}(3)$. Учитывая, что $\Lambda_p = s_g$, получаем

$$g_0^{-1}g = (a_0, \Lambda_0)^{-1}(0, \Lambda_p) = (-\Lambda_0^{-1}a, \Lambda_0^{-1})(0, \Lambda_p) =$$
$$= (-\Lambda_0^{-1}a_0, \Lambda_0^{-1}\Lambda_p) = \left(0, \Lambda_{\Lambda_0^{-1}p}\right)\left(-\Lambda^{-1}_{\Lambda_0^{-1}p}a_0, \Lambda^{-1}_{\Lambda_0^{-1}p}\Lambda_0^{-1}\Lambda_p\right). \quad (52)$$

Поэтому

$$k_{g_0^{-1}s_g} = \left(-\Lambda^{-1}_{\Lambda_0^{-1}p}\Lambda_0^{-1}a_0, \Lambda^{-1}_{\Lambda_0^{-1}p}\Lambda_0^{-1}\Lambda_p\right). \quad (53)$$

Учитывая, что $\Lambda_p \overset{0}{p} = p$ и $(\Lambda p, \Lambda a) = (p, a)$, согласно (50), получаем

$$L^{-1}_{k_{g_0^{-1}s_g}} = \exp\left[i\left(\overset{0}{p}, \Lambda_p^{-1}a\right)\right]\left[D^J\left(\Lambda^{-1}_{\Lambda_p^{-1}}\Lambda_0^{-1}\Lambda_p\right)\right]^{-1} =$$
$$= \exp[i(p, a)]\, D^J\left(\Lambda_p^{-1}\Lambda_0\Lambda_{\Lambda_p^{-1}}\right).$$

Положив $r_\Lambda \equiv \Lambda_p^{-1}\Lambda\Lambda_{\Lambda_p^{-1}}$, находим $[(p, a) \equiv pa]$

$$U^L_{(a, \Lambda)}u(p) = \exp[ipa]\, D^J(r_\Lambda)\, u(\Lambda^{-1}p). \quad (54)$$

В гл. 17 мы покажем, что при произвольных $m > 0$ и J представления (54) неприводимы.

§ 2. Основные свойства индуцированных представлений

Теперь мы докажем ряд важных свойств индуцированных представлений.

А. *Сопряженные представления* [1])

Прежде всего покажем эквивалентность представления $\overline{U^L}$, сопряженного U^L, и представления $U^{\bar{L}}$, индуцированного представлением $\bar{L}$, которое может быть записано в виде

$$\bar{L}_k = CL_kC,$$

где C — сопряжение (5.1.14) в пространстве H представления L. Если мы образуем представление $U^{\bar{L}}$, индуцированное $\bar{L}$, то каждая вектор-функция $\bar{u}(g)$ из $H^{\bar{L}}$ удовлетворяет условию

$$\bar{u}(kg) = \bar{L}_k\bar{u}(g) = CL_kCu(g). \quad (1)$$

В силу утверждения 3.1.3° сопряжение C может быть поднято до пространства $H^{\bar{L}}$, т. е. $\bar{u}(g) = Cu(g)$. Тогда из (1) и (1.6) следует

$$U^{\bar{L}}_{g_0}\bar{u}(g) = (\rho_{g_0}(g))^{1/2}\bar{u}(gg_0) = CU^L_{g_0}u(g) = \overline{U^L_{g_0}}\bar{u}(g),$$

---

[1]) Заметим, что для унитарных представлений сопряженные и контраградиентные представления совпадают [см. (5.1.14)].

т. е.

$$U_g^{\overline{L}} = \overline{U_g^L}. \qquad (2)$$

Б. *Представления, индуцированные прямой суммой представлений*

Пусть $\overset{1}{L}$ и $\overset{2}{L}$ — два унитарных представления замкнутой подгруппы K группы G в гильбертовых пространствах $\overset{1}{H}$ и $\overset{2}{H}$ соответственно. Прямая сумма $\overset{1}{L} \oplus \overset{2}{L}$ этих представлений действует в гильбертовом пространстве $\overset{1}{H} \oplus \overset{2}{H}$ согласно формуле

$$\left(\bigoplus_{i=1}^{2} \overset{i}{L}_g\right) \{\overset{1}{u}, \overset{2}{u}\} = \{\overset{1}{L}_g \overset{1}{u}, \overset{2}{L}_g \overset{2}{u}\}$$

(см. определение 5.3.3). Пространство $H^{\overset{1}{L}\oplus\overset{2}{L}}$ индуцированного представления $U^{\overset{1}{L}\oplus\overset{2}{L}}$ состоит из всех вектор-функций $\{\overset{1}{u}(g), \overset{2}{u}(g)\}$ со значениями в $\overset{1}{H} \oplus \overset{2}{H}$, причем каждое $\overset{i}{u}(g)$ удовлетворяет условиям 1°, 2° и 3° из (1.1).

Отсюда следует

$$H^{\overset{1}{L}\oplus\overset{2}{L}} = H^{\overset{1}{L}} \oplus H^{\overset{2}{L}} \qquad (3)$$

и поэтому

$$U^{\overset{1}{L}\oplus\overset{2}{L}} = U^{\overset{1}{L}} \oplus U^{\overset{2}{L}}.$$

Таким образом, операции индуцирования и взятия прямой суммы перестановочны. Этот результат может быть распространен на любую дискретную сумму. В общем случае имеем следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть K — замкнутая подгруппа локально компактной сепарабельной группы G. Пусть L — унитарное представление подгруппы K, которое разлагается в прямой интеграл унитарных представлений $\overset{s}{L}$ подгруппы K, т. е.*

$$L = \int \overset{s}{L}\, d\mu(s). \qquad (4)$$

Пусть H — пространство представления L

$$H = \int \overset{s}{H}\, d\mu(s),$$

где каждое $\overset{s}{H}$ является сепарабельным гильбертовым пространством. Тогда представление U^L группы G, индуцированное представлением L, унитарно эквивалентно представлению $\int U^{\overset{s}{L}}\, d\mu(s)$.

Набросок доказательства. Представление U^L группы G реализуется в пространстве H^L вектор-функций на G со значениями в H. Заключение теоремы существенно следует из того факта, что, как и в случае конечной суммы (3), разложению $H = \int \overset{s}{H}\, d\mu(s)$ соответствует разложение $H^L = \int \overset{s}{H^L}\, d\mu(s)$, где $\overset{s}{H^L}$ — гильбертово пространство вектор-функций на G со значениями в $\overset{s}{H}$. Теоретико-множественные детали доказательства см. в [552], теорема 10.1.

Следствие. *Если представление U^L группы G, индуцированное представлением L подгруппы K, неприводимо, то представление L неприводимо.*

Доказательство. В самом деле, если L приводимо, то оно может быть записано в виде прямой суммы $L = \overset{1}{L} \oplus \overset{2}{L}$. Согласно теореме 1, отсюда следует, что $U^L = U^{\overset{1}{L}} \oplus U^{\overset{2}{L}}$. Это противоречит неприводимости U^L.

Замечание. Обратное заключение неверно: L может быть неприводимым, а U^L приводимым. Например, пусть G — любая группа, $K = \{e\}$ и пусть L — одномерное тождественное представление подгруппы K в $H = C^1$. Тогда U^L — регулярное представление, которое приводимо.

B. *Индуцирование по стадиям*

Пусть N и K — две замкнутые подгруппы в G, такие, что $N \subset K$, и пусть L — представление подгруппы N. Индуцированное представление группы G можно получить или прямо, образуя ${}_GU^L$, или по стадиям, т. е. образуя сначала индуцированное представление ${}_KU^L \equiv V$, а затем ${}_GU^V$. Следующая теорема утверждает, что оба метода приводят к эквивалентным результатам.

Теорема 2. *Пусть N, K, $N \subset K$, — замкнутые подгруппы сепарабельной локально компактной группы G. Пусть L — представление подгруппы N, и пусть $V \equiv {}_KU^L$. Тогда ${}_GU^L$ и ${}_GU^V$ — унитарно эквивалентные представления группы G.*

Доказательство этой важной теоремы длинное и трудное (см. [552], теорема 4.1). Чтобы дать представление о ходе доказательства, рассмотрим частный случай, когда однородные пространства $N \diagdown K$ и $K \diagdown G$ обладают инвариантными мерами.

Доказательство. Начнем с построения пространств ${}_GH^L$ и ${}_GH^V$ индуцированных представлений ${}_GU^L$ и ${}_GU^V$ соответственно. Пусть H — пространство представления L. Тогда представление $V = {}_K U^L$ подгруппы K реализуется в гильбертовом пространстве ${}_K H^L$ функций на K со значениями в H, удовлетворяющих условию [см. (1.1)]

$$u(nk) = L_n u(k), \quad n \in N, \quad k \in K. \tag{5}$$

Представление $k \to {}_K U^L = V_k$ подгруппы K в ${}_K H^L$ задается формулой

$$V_{k_0} u(k) = u(kk_0). \tag{6}$$

С другой стороны, пространство ${}_G H^V$, в котором реализуется представление ${}_G U^V$, состоит из функций на G со значениями в ${}_K H^L$, удовлетворяющих условию

$$v(kg) = V_k v(g), \quad k \in K, \quad g \in G. \tag{7}$$

Поскольку значения функции $v(g) \in {}_G H^V$ лежат в ${}_K H^L$, элементы из ${}_G H^V$ можно рассматривать как вектор-функции $F(g, k)$ на $G \times K$ со значениями в H. Формулы (5) и (7) при этом соглашении принимают вид

$$F(g, nk) = L_n F(g, k), \tag{5'}$$

$$F(k_0 g, k) = V_{k_0} F(g, k) = F(g, kk_0). \tag{7'}$$

Положив в (7′) $k = e$, получаем

$$F(g, k_0) = F(k_0 g, e) \equiv \Phi(k_0 g). \tag{8}$$

Покажем теперь, что отображение $S : F \to \Phi$ задает изоморфизм между пространствами ${}_G H^L$ и ${}_G H^V$ и изоморфизм операторов ${}_G U_g^V$ и ${}_G U_g^L$. В самом деле, из (5′) следует

$$\Phi(ng) = L_n \Phi(g), \quad n \in N, \tag{5''}$$

т. е. $\Phi(g) \in {}_G H^L$. Обратно, каждой функции $\Phi \in {}_G H^L$ соответствует по формуле (8) функция $F(g, k)$, удовлетворяющая (5′) и (7′). Более того, ${}_G U_{g_0}^V F(g, k) = F(gg_0, k)$ предполагает, что $\Phi(gg_0) = {}_G U_{g_0}^L \Phi(g)$. Следовательно,

$$S_G U^V S^{-1} = {}_G U^L.$$

Таким образом, чтобы доказать теорему, теперь достаточно показать, что отображение $S : F \to \Phi$ унитарно. Обозначим через X, Y и Z однородные пространства $N \diagdown G$, $K \diagdown G$ и $N \diagdown K$ соответственно. Норма функции Φ из ${}_G H^L$ задается формулой

$$\| \Phi \|^2_{{}_G H^L} = \int_X \| \Phi(g_x) \|^2_H \, d\mu(x), \tag{9}$$

где g_x — любой элемент правого класса смежных элементов Ng, соответствующего точке $x \in X$, а $d\mu(x)$ — инвариантная мера на X. Подобным же образом

$$\|F\|^2_{{}_G H^V} = \int_Y \|F(g_y, k)\|_{{}_K H^L} d\sigma(y), \tag{10}$$

$$\|v\|^2_{{}_K H^L} = \int_Z \|v(k_z)\|^2_H d\rho(z). \tag{11}$$

В (10) g_y — любой элемент правого класса смежных элементов Kg, соответствующего точке y из Y (торема 2.4.1), а $d\sigma(y)$ — инвариантная мера на Y. В (11) обозначения аналогичны. Заметим, что после выбора g_y и k_z, соответствующих точкам $y \in Y$ и $z \in Z$, элемент g_x, соответствующий $x \in X$, может быть выбран в виде $k_z g_y$. Поэтому, подставляя (11) в (10), получаем

$$\|F\|^2_{{}_G H^V} = \int_Y \left(\int_Z (\|F(g_y, k_z)\|^2_H d\rho(z) \right) d\sigma(y) =$$

$$= \int_{Y \times Z} \|\Phi(k_z g_y)\|^2_H d\rho(z)\, d\sigma(y) = \int_X \|\Phi(g_x)\|^2_H d\tilde{\mu}(x), \tag{12}$$

где $d\tilde{\mu}(x) = d\sigma(y)\, d\rho(z)$. Теперь покажем, что $d\tilde{\mu}(x)$ — инвариантная мера на X, равная $d\mu(x)$. В самом деле, если $g_x = k_z g_y$, то по теореме 2.4.1 для каждого $g \in G$ получаем

$$g_x g = k_z g_y g = k_z k_{(y,\, g)} g_{yg} = n_{(z,\, y,\, g)} k_{zk\,(y,\, g)} g_{yg}, \tag{13}$$

где $n_{(z,\, y,\, g)} \in N$.

Поскольку мы предположили, что $d\rho$ и $d\sigma$ — инвариантные меры, то отсюда следует

$$d\tilde{\mu}(xg) = d\rho(zk_{(y,\, g)})\, d\sigma(yg) = d\rho(z)\, d\sigma(y) = d\tilde{\mu}(x). \tag{14}$$

Поскольку инвариантные меры $d\mu$, $d\sigma$ и $d\rho$ определяются с точностью до постоянного множителя, то их можно нормировать таким образом, что $d\mu = d\rho d\sigma$. Таким образом, обратимое и изометрическое отображение $S: F \to \Phi$ унитарно.

Г. *Представления, индуцированные тензорным произведением представлений*

Пусть $\overset{1}{T}_{g_1}$ и $\overset{2}{T}_{g_2}$ — представления групп G_1 и G_2 в гильбертовых пространствах H_1 и H_2 соответственно. Согласно определению 5.5.2, *внешнее тензорное произведение* $\overset{1}{T}_{g_1} \otimes \overset{2}{T}_{g_2}$ прямого произведения $G_1 \otimes G_2$ в пространстве $H_1 \otimes H_2$ задается формулой

$$(\overset{1}{T} \otimes \overset{2}{T})_{(g_1,\, g_2)} (u_1 \otimes u_2) = (\overset{1}{T}_{g_1} \otimes \overset{2}{T}_{g_2})(u_1 \otimes u_2) =$$

$$= \overset{1}{T}_{g_1} u_1 \otimes \overset{2}{T}_{g_2} u_2. \tag{15}$$

Следующая теорема описывает связь между представлением произведения $G_1 \times G_2$, индуцированным внешним тензорным произведением $L_1 \otimes L_2$ представлений замкнутых подгрупп K_1 и K_2, и внешним тензорным произведением индуцированных представлений.

Теорема 3. *Пусть L_1 и L_2 — унитарные представления замкнутых подгрупп K_1 и K_2 сепарабельных локально компактных групп G_1 и G_2 соответственно. Тогда два представления*

$$_{G_1 \otimes G_2}U^{L_1 \otimes L_2}, \quad {}_{G_1}U^{L_1} \otimes {}_{G_2}U^{L_2}$$

группы $G_1 \otimes G_2$ унитарно эквивалентны.

Доказательство. Пусть H_1 (соответственно H_2) обозначает пространство представления L_1 (L_2) подгруппы K_1 (K_2). Для доказательства следует показать существование унитарного оператора S из $H_1^{L_1} \otimes H_2^{L_2}$ на $(H_1 \otimes H_2)^{L_1 \otimes L_2}$, такого, что

$$S\left({}_{G_1}U_{g_1}^{L_1} \otimes {}_{G_2}U_{g_2}^{L_2}\right) = {}_{(G_1 \otimes G_2)}U_{(g_1,\, g_2)}^{L_1 \otimes L_2} S. \tag{16}$$

Чтобы показать это, с каждой парой

$$\{u_1(g_1),\ u_2(g_2)\}, \quad u_1(g_1) \in H_1^{L_1}, \quad u_2(g_2) \in H_2^{L_2},$$

сопоставим функцию

$$G_1 \otimes G_2 \ni (g_1,\ g_2) \dashrightarrow u_1(g_1) \otimes u_2(g_2). \tag{17}$$

Легко проверить, что таким образом определяется линейное отображение S из $H_1^{L_1} \otimes H_2^{L_2}$ в $(H_1 \otimes H_2)^{L_1 \otimes L_2}$. В самом деле, условия (1.1) 1° и 2° выполнены. Например, если $(k_1,\ k_2) \in K_1 \times K_2$, то

$$u_1(k_1 g_1) \otimes u_2(k_2 g_2) = L_{1k_1} \otimes L_{2k_2}(u_1(g_1) \otimes u_2(g_2)) =$$
$$= (L_1 \otimes L_2)_{(k_1,\, k_2)}(u_1(g_1) \otimes u_2(g_2)).$$

Условие (1.1) 3° также выполняется. В самом деле, если $d\mu_1$ (соответственно $d\mu_2$) — квазиинвариантная мера на $X_1 = K_1 \diagdown G_1$ ($X_2 = K_2 \diagdown G_2$) и $\rho_{g_1}(x_1)$ $[\rho_{g_2}(x_2)]$ — соответствующая производная Радона—Никодима, то $d\mu_1 d\mu_2$ — квазиинвариантная мера на $X_1 \otimes X_2 \cong K_1 \otimes K_2 \diagdown G_1 \otimes G_2$ с производной Радона—Никодима $\rho_{g_1}(x_1)\, \rho_{g_2}(x_2)$. Тогда мы имеем

$$\int\limits_{X_1 \otimes X_2} \| u_1(g_1) \otimes u_2(g_2) \|^2_{H_1 \otimes H_2} d\mu_1(\dot{g}_1)\, d\mu_2(\dot{g}_2) =$$
$$= \int\limits_{X_1 \otimes X_2} \| u_1(g_1) \|^2_{H_1} \| u_2(g_2) \|^2_{H_2} d\mu_1(\dot{g}_1)\, d\mu_2(\dot{g}_2) =$$
$$= \| u_1 \|^2_{H_1^{L_1}} \| u_2 \|^2_{H_2^{L_2}} < \infty.$$

Следовательно, $u_1(g_1) \otimes u_2(g_2) \in (H_1 \otimes H_2)^{L_1 \otimes L_2}$.

Таким образом, существует плотно определенное линейное отображение S тензорного произведения $H_1^{L_1} \otimes H_2^{L_2}$ в $(H_1 \otimes \otimes H_2)^{L_1 \otimes L_2}$. Это отображение изометрично. В самом деле, если

$$w = \sum_{i=1}^{n} u_i(g_1) \otimes v_i(g_2),$$

где

$$u_i(g_1) \in H_1^{L_1}, \quad v_i(g_2) \in H_2^{L_2},$$

то

$$\|S(w)\|^2_{(H_1 \otimes H_2)^{L_1 \otimes L_2}} = \int\limits_{X_1 \otimes X_2} \left\| \sum_{i=1}^{n} u_i(g_1) \otimes u_i(g_2) \right\|^2_{H_1 \otimes H_2} d\mu_1(\dot{g}_1)\, d\mu_2(\dot{g}_2) =$$

$$= \int\limits_{X_1 \otimes X_2} \sum_{i,\, j=1}^{n} (u_i(g_1),\ u_j(g_1))_{H_1} (v_i(g_2),\ v_j(g_2))_{H_2}\, d\mu_1(\dot{g}_1)\, d\mu_2(\dot{g}_2) =$$

$$= \sum_{i,\, j=1}^{n} (u_i,\ u_j)_{H_1^{L_1}} (v_i,\ v_j)_{H_2^{L_2}} =$$

$$= \left\| \sum_{i=1}^{n} u_i \otimes v_i \right\|^2_{H_1^{L_1} \otimes H_2^{L_2}} = \|w\|^2_{H_1^{L_1} \otimes H_2^{L_2}}.$$

Следовательно, отображение S расширяется до унитарного оператора всего пространства $H_1^{L_1} \otimes H_2^{L_2}$ в $(H_1 \otimes H_2)^{L_1 \otimes L_2}$. Чтобы закончить доказательство, достаточно показать, что образ отображения S образует общее множество[1]) в $(H_1 \otimes H_2)^{L_1 \otimes L_2}$.

В самом деле, по утверждению 1.3 элементы $\widehat{\Phi}(g_1, g_2)$, заданные формулой (1.10), где

$$\Phi(g_1,\ g_2) = \varphi(g_1,\ g_2)(u \otimes v),$$

$\varphi \in C_0(G_1 \otimes G_2)$, $u \in H_1$ и $v \in H_2$, образуют общее множество в пространстве $(H_1 \otimes H_2)^{L_1 \otimes L_2}$. Поскольку функции

$$\varphi(g_1,\ g_2) = \psi(g_1)\, \eta(g_2), \qquad \psi \in C_0(G_1), \qquad \eta \in C_0(G_2),$$

образуют общее множество в $C_0(G_1 \otimes G_2)$, то образы $\widehat{\Phi}$ функций $\Phi = \psi(g_1)\, u \otimes \eta(q_2)\, v = u_\psi \otimes v_\eta$ все еще образуют общее множество в $(H_1 \otimes H_2)^{L_1 \otimes L_2}$. Используя формулу (1.10), легко проверить, что

$$\widehat{\Phi} = S(\widehat{u}_\psi \otimes \widehat{v}_\eta).$$

Следовательно, заключение теоремы 3 справедливо.

[1]) Подмножество Q в гильбертовом пространстве H называется *общим множеством*, если линейная оболочка элементов из Q образует плотное множество в H.

§ 3. Системы импримитивности

А. Теорема об импримитивности

Пусть K — замкнутая подгруппа локально компактной сепарабельной группы G, L — унитарное представление подгруппы K в H, а U^L — индуцированное представление группы G в H^L. Пусть Z — борелево подмножество в $X = K\diagdown G$, а χ_Z — характеристическая функция множества Z. Для любого $u \in H^L$ пусть

$$(E(Z)u)(g) \equiv \chi_Z(\dot{g})\,u(g), \quad \dot{g} = Kg. \tag{1}$$

Эта функция слабо измерима (см. (1.1) 1°). Более того, при $k \in K$ имеем

$$E(Z)u(kg) = \chi_Z(\dot{g})\,u(kg) = L_k(\chi_Z(\dot{g})\,u(g)) = L_kE(Z)u(g).$$

Мы имеем также

$$\int_X \|\chi_Z(\dot{g})\,u(g)\|^2 d\mu(\dot{g}) = \int_X \chi_Z(\dot{g})\,\|u(g)\|^2 d\mu(\dot{g}) =$$
$$= \int_Z \|u(g)\|^2 d\mu(\dot{g}) < \infty.$$

Поэтому функция (1) удовлетворяет условиям (1.1) 1°, 2° и 3° и, следовательно, она лежит в H^L. Более того, из (1) следует, что операторная функция $Z \to E(Z)$ имеет такие свойства:

$$\begin{gathered} E(X) = I, \quad E(\varnothing) = 0, \\ E(Z_1 \cap Z_2) = E(Z_1)E(Z_2), \\ E^*(Z) = E(Z), \end{gathered} \tag{2}$$

и $E(\cdot)$ счетно аддитивна в сильной операторной топологии пространства $\mathscr{L}(H^L)$. Поэтому отображение

$$X \supset Z \to E(Z) \in \mathscr{L}(H^L)$$

определяет на пространстве X спектральную меру (приложение Б.3). Эта мера имеет определенные трансформационные свойства относительно представлений U^L группы G. В самом деле,

$$(U^L_{g_0}E(Z)U^L_{g_0^{-1}}u)(g) = [\rho_{g_0}(g)]^{1/2}(E(Z)U^L_{g_0^{-1}}u)(gg_0) =$$
$$= [\rho_{g_0}(g)]^{1/2}\chi_Z(\widehat{gg_0})(U^L_{g_0^{-1}}u)(gg_0) =$$
$$= [\rho_{g_0}(g)]^{1/2}[\rho_{g_0^{-1}}(gg_0)]^{1/2}\chi_Z(\widehat{gg_0})\,u(g) = E(Z_{g_0^{-1}})\,u(g). \tag{3}$$

Последний шаг следует из очевидного равенства $\chi_Z(\widehat{\dot{g}g_0}) = \chi_{Zg_0^{-1}}(\dot{g})$ и из закона композиции для производных Радона—Никодима. Таким образом,

$$U_g^L E(Z) U_{g^{-1}}^L = E(Zg^{-1}). \tag{4}$$

Следовательно, мы видим, что каждому неприводимому представлению U^L группы G соответствует спектральная мера $E(Z)$, имеющая трансформационное свойство (4).

Вообще пусть X — G-пространство и пусть U — унитарное представление группы G в гильбертовом пространстве H. Если $E(Z)$, $Z \subset X$, — спектральная мера со значениями в $\mathscr{L}(H)$, которая преобразуется относительно U_g согласно (4), то $E(Z)$ называется *системой импримитивности* для U с базой X. Если база X транзитивна относительно G, то $E(Z)$ называется *транзитивной системой импримитивности*. Представление, имеющее по крайней мере одну систему импримитивности, называется *импримитивным*. Система импримитивности, заданная спектральной функцией (1), называется *канонической системой импримитивности*.

Пример 1. Пусть P_μ — оператор импульса единственной релятивистской частицы, и пусть $\Lambda \to U_\Lambda$ — унитарное представление группы Лоренца в гильбертовом пространстве H волновых функций. Спектральное разложение для P_μ имеет вид (пример 6.2.1)

$$P_\mu = \int\limits_{p^2=m^2} p_\mu \, \mathrm{d}E(p),$$

где $E(p)$ — спектральная мера, соответствующая импульсам P_μ. Поскольку P_μ — тензорный оператор, имеем [см. (9.1.11)]

$$U_\Lambda^{-1} P_\mu U_\Lambda = \Lambda_\mu^{-1\nu} P_\nu.$$

Таким образом,

$$U_\Lambda^{-1} P_\mu U_\Lambda = \int\limits_{p^2=m^2} \Lambda_\mu^{-1\nu} p_\nu \, \mathrm{d}E(p) = \int\limits_{p'^2=m^2} p'_\mu \, \mathrm{d}E(\Lambda p').$$

С другой стороны, мы имеем

$$U_\Lambda^{-1} P_\mu U_\Lambda = \int p_\mu \mathrm{d}(U_\Lambda^{-1} E(p) U_\Lambda).$$

Следовательно, для борелева множества Z на массовом гиперболоиде имеем [1])

$$U_\Lambda^{-1} E(Z) U_\Lambda = E(\Lambda Z).$$

[1]) Здесь G действует слева в импульсном пространстве, так как в физике мы реализуем импульсное пространство посредством левых классов смежных элементов: $p \sim \Lambda_p \, \mathrm{SU}(2)$.

Таким образом, спектральная мера оператора импульса является системой импримитивности для U, базой которого является импульсное пространство. Поскольку действие трансляций в импульсном пространстве тривиально, то $E(Z)$ также является системой импримитивности для группы Пуанкаре.

Подобным образом можно показать, что каждый самосопряженный тензорный оператор, действующий в пространстве физических состояний, задает систему импримитивности для представления U, базой которой является импульсное пространство.

Введем обозначение $E(\psi) = \int \psi(z)\, dE(z)$.

Формулы (1)—(4) показывают, что каждому индуцированному представлению U^L можно сопоставить транзитивную каноническую систему импримитивности. Обратно, унитарное представление, обладающее транзитивной системой импримитивности, унитарно эквивалентно индуцированному представлению. Этот существенный результат описывается следующей теоремой.

Теорема. *Пусть U — унитарное непрерывное представление группы G в гильбертовом пространстве H, $X = K\setminus G$, и $E: C_0(X) \to L(H)$ — $*$-гомоморфизм, для которого $E[C_0(X)]H$ плотно в H, и*

$$U_g E(\psi) U_{g^{-1}} = E(T_g^R \psi), \quad g \in G, \quad \psi \in C_0(X). \tag{5}$$

Тогда существует единственное (с точностью до эквивалентности) непрерывное унитарное представление L подгруппы K в гильбертовом пространстве H^L, такое, что пара (U, E) унитарно эквивалентна паре (U^L, E^L), т. е. существует унитарный оператор $V: H \to H^L$, такой, что

$$VU_g = U_g^L V, \quad g \in G, \tag{6}$$

и

$$VE(\psi) = E^L(\psi) V, \quad \psi \in C_0(X). \tag{7}$$

Доказательство. Так как ядро отображения E является трансляционно инвариантным идеалом, мы видим, что $\| E(\psi) \| = \| \psi \|_\infty$ (норма функции ψ по супремуму). Рассмотрим теперь область Гординга D_G:

$$D_G = \operatorname{span} \left\{ u(\varphi) = \int \varphi(g) U_g u\, dg,\ u \in H,\ \varphi \in C_0(G) \right\}, \tag{8}$$

и меру Радона $\varphi \to (E(\tau\varphi)u, v)$, где $\tau\varphi(x) = \int\limits_K \varphi(kx)\, dx$, для $u, v \in H$. Обозначим эту меру через $d\mu_{u,v}$, так что

$$(E(\tau\varphi)u, v) = \int\limits_G \varphi(g)\, d\mu_{u,v}(g), \quad \varphi \in C_0(G).$$

Мы заявляем, что при $u, v \in D_G$ $d\mu_{u,v}$ — непрерывная функция. Чтобы убедиться в этом, положим $u, v \in H$ и $\psi_1, \varphi \in C_0(G)$. Тогда

$$|(E(\tau\varphi)u(\psi_1), v)| \leqslant \|\tau\varphi\|_\infty \|\psi_1\|_\infty \operatorname{vol}(\operatorname{supp}\psi_1)\|u\|\|v\| \leqslant$$
$$\leqslant C\operatorname{vol}(\operatorname{supp}\psi_1)\|u\|\|v\|\|\varphi\|_\infty\|\psi_1\|_\infty,$$

где C — константа, зависящая от носителя функции φ, так что $(E(\tau, \varphi)u(\psi_1), v)$ определяет меру Радона $d\lambda(g_1, g_2)$ на $G \times G$.

Согласно теореме Фубини, имеем

$$\int_G \varphi(g)\, d\mu_{u(\psi_1), v(\psi_2)}(g) = (E(\tau\varphi)u(\psi_1), v(\psi_2)) =$$
$$= \int_G \overline{\psi_2(g)}(E(\tau\varphi)u(\psi_1), U_g v)\, dg =$$
$$= \int_G \overline{\psi_2(g)}(E\tau(T^R_{g^{-1}}\varphi)u(T^R_{g^{-1}}\psi_1), v)\, dg =$$
$$= \int_G \overline{\psi_2(g)} \iint_{G\times G} \varphi(g_1g^{-1})\psi_1(g_2g^{-1})\, d\lambda(g_1, g_2)\, dg =$$
$$= \int_G \varphi(g) \iint_{G\times G} \overline{\psi_2(g_1^{-1}g^{-1})}\psi_1(g_2g_1^{-1}g^{-1})\, d\lambda(g_1, g_2)\, dg,$$

где сделана замена переменных в интеграле по g. Поэтому, согласно стандартным рассуждениям,

$$d\mu_{u(\psi_1), v(\psi_2)}(g) = h_{u(\psi_1), v(\psi_2)}(g),$$

где

$$h_{u(\psi_1), v(\psi_2)}(g) = \iint_{G\times G} \overline{\psi_2(g_1^{-1}g^{-1})}\psi_1(g_2g_1^{-1}g^{-1})\, d\lambda(g_1, g_2)$$

—непрерывная функция на G. Заметим также, что $h_{U_g u(\psi_1), v(\psi_2)}(g_1)$ —непрерывная функция от (g, g_1) и в более общем случае при $u, v \in D_G$ $h_{U_{g_1}u, U_{g_2}v}$ — непрерывная функция от (g_1, g_2, g).

С помощью соотношения $\beta(u, v) = h_{u,v}(e)$ мы определяем полубилинейную форму на $D_G \times D_G$ и проверяем, что

1) $\beta(u, u) \geqslant 0, \quad u \in D_G,$

2) $\beta(U_k u, U_k v) = \beta(u, v),$

3) $(E(\tau\varphi)u, v) = \int_G \varphi(g)\beta(U_g u, U_g v)\, dg.$

Теперь завершение доказательства проводится стандартным методом. Пусть

$$H^L = \{[u \in D_G \mid \beta(u, u) < \infty]/[u \in D_G \mid \beta(u, u) = 0]\}$$

(образование гильбертова пространства) и $L_k[u] = [U_k u]$ (класс, определенный $U_k u$). Тогда $(L_k[u], [v]) = \beta(U_k u, v)$ непрерывна и L — унитарное непрерывное представление подгруппы K в H^L. Для $u \in D_G$ $w_u(g) = [U_g u]$ — непрерывная H^L-значная функция на G, удовлетворяющая условиям $w_u(kg) = L_k w_u(g)$, $k \in K$, $g \in G$. Фактически $V: u \to w_u$ расширяется до изометрии из H на H^L, переплетая (u, E) и (U^L, E^L), как и требовалось. Единственность L следует из того, что $(U^L, E^L) \simeq (U^{L'}, E^{L'})$ (унитарная эквивалентность) тогда и только тогда, когда $L = L'$.

Эта фундаментальная теорема является отправной точкой для многих приложений в физике; в частности, классификация неприводимых представлений евклидовой группы, групп Галилея и Пуанкаре, построение релятивистских операторов положения, а также доказательство эквивалентности формулировок Шредингера и Гейзенберга квантовой механики могут быть получены с помощью теоремы об импримитивности (см. гл. 17, § 2, гл. 20, § 1 и 2).

Б. *Неприводимость и эквивалентность индуцированных представлений*

Остальная часть этого параграфа посвящена разработке удобного критерия неприводимости индуцированного представления U^L и эквивалентности двух индуцированных представлений в терминах системы импримитивности.

Пусть $g \to U_g^L$ — индуцированное унитарное представление топологической локально компактной группы G в гильбертовом пространстве H^L. Линейная оболочка множества векторов вида

$$\int_G \varphi(g)\, U_g^L v\, dg \quad \text{для всех} \quad \varphi \in C_0(G) \quad \text{и} \quad v \in H^L$$

называется *пространством Гординга* D_G представления U^L. Так же как и в случае групп Ли, легко проверить, что D_G — линейное и плотное подмножество в H^L, инвариантное относительно U_g (теорема 11.1.1).

Вектор $v \in H^L$ называют *непрерывным*, если он может быть представлен в виде непрерывной вектор-функции на G.

Лемма 1. *Пусть $\mu(\cdot)$ — квазиинвариантная мера на $K \diagdown G$; возьмем ее непрерывную производную Радона—Никодима. Тогда каждый вектор $v \in D_G$ является непрерывной вектор-функцией на G.*

Мы оставляем доказательство читателю в виде упражнения, В последующем мы представляем элементы $v \in D_G$ непрерывными вектор-функциями на G. Построим теперь плотное множество элементов в пространстве H.

Лемма 2. *Множество*

$$\{v(e),\ v \in D_G\} \tag{9}$$

плотно в пространстве H представления L подгруппы K.

Доказательство почти сразу следует из утверждения 16.1.3.

Пусть T и T' — представления группы G в $H(T)$ и $H(T')$ соответственно. Пусть $R(T, T')$ — множество всех переплетающих операторов (гл. 5, § 2). Тогда $R(T, T')$ — векторное пространство. В случае когда $T = T'$, $R(T, T)$ — замкнутая подалгебра в $\mathscr{L}(H)$. В самом деле, если для последовательности $R_n \in R(T, T)$ $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = R \in \mathscr{L}(H(T))$, то при произвольном u из $H(T)$

$$T_g R u = T_g \lim_n R_n u = \lim_n T_g R_n u = \lim_n R_n T_g u = R T_g u. \tag{10}$$

Алгебра $R(T, T)$ называется *коммутирующей алгеброй* представления T. Если $R(T, T')$ содержит унитарный оператор $\tilde{V}$, то $\tilde{V} T_g \tilde{V}^{-1} = T'_g$ для любых $g \in G$ и, следовательно, T и T' унитарно эквивалентны.

Теорема 3. *Пусть U^L и $U^{L'}$ — представления группы G в гильбертовых пространствах H^L и $H^{L'}$ соответственно, индуцированные представлениями L и L' замкнутой подгруппы $K \subset G$. Пусть $E(Z)$ (соответственно $E'(Z)$) обозначает соответствующую каноническую систему импримитивности, где Z — борелево множество в $K \diagdown G$. Тогда множество $R(L, L')$ изоморфно множеству S всех операторов $V \in \mathscr{L}(H^L \to H^{L'})$, таких, что*

$$\begin{array}{lll} 1^\circ & U_g^{L'} V = V U_g^L & \text{для всех } g \in G, \\ & & \text{т. е. } V \in R(U^L, U^{L'}), \\ 2^\circ & E'(Z) V = V E(Z) & \text{для всех борелевых множеств} \\ & & Z \subset K \diagdown G. \end{array} \tag{11}$$

Доказательство. Доказательство состоит в построении изоморфизма φ векторного пространства $R(L, L')$ на векторное пространство S операторов, которые удовлетворяют условиям (11). Пусть $R \in R(L, L')$ и $v \in H^L$. Положим

$$(\tilde{R} v)(g) \underset{g \in G}{\equiv} R v(g). \tag{12}$$

Покажем сначала, что $\tilde{R}v$ лежит в $H^{L'}$. В самом деле, очевидно, что $\tilde{R}v\ (g)$ слабо измерима [см. (1.1) 1°]. Более того, для любых $k \in K$

$$(\tilde{R}v)(kg) = Rv(kg) = RL_k v(g) = L'_k Rv(g) = L'_k(\tilde{R}v)(g).$$

Наконец, из неравенства

$$\int_X (\tilde{R}v(g),\ \tilde{R}v(g))\, d\mu(\dot{g}) = \int_X (Rv(g),\ Rv(g))\, d\mu(\dot{g}) \leqslant$$
$$\leqslant \|R\|^2 \int_X (v(g),\ v(g))\, d\mu(g) = \|R\|^2 (v,\ v) \quad (13)$$

следует, что $\tilde{R}v$ удовлетворяет условию (1.1) 3°. Поэтому $\tilde{R}v \in H^{L'}$. Из определения (12) видно, что оператор $\tilde{R}$ линеен. Более того, из (13) следует

$$\|\tilde{R}v\| \leqslant \|R\|\,\|v\|, \quad \text{т. е.} \quad \|\tilde{R}\| \leqslant \|R\|.$$

Таким образом, $\tilde{R} \in \mathscr{L}(H^L \to H^{L'})$. Покажем теперь, что $\tilde{R} \in S$. В самом деле,

$$(U^{L'}_{g_0}\tilde{R}v)(g) = \rho^{1/2}_{g_0}(g)(\tilde{R}v)(gg_0) = \rho^{1/2}_{g_0}(g)\, Rv(gg_0) =$$
$$= R(U^L_{g_0}v)(g) = (\tilde{R}U^L_{g_0}v)(g).$$

Более того, для любого борелева множества Z из $K\diagdown G$ получаем

$$(E'(Z)\tilde{R}v)(g) = \chi_Z(\dot{g})(\tilde{R}v)(g) = \chi_Z(\dot{g})\, Rv(g) =$$
$$= R(E(Z)v)(g) = (\tilde{R}E(Z)v)(g).$$

Обозначим через φ отображение $R(L,\ L') \ni R \to \tilde{R} \in S$, заданное формулой (12). Чтобы завершить доказательство теоремы 3, теперь достаточно доказать, что φ — отображение из $R(L,\ L')$ на S, т. е. что для каждого V из S существует R из $R(L,\ L')$, такое, что $\varphi(R) = V$.

Пусть D_G и D'_G — подпространства Гординга для U^L и $U^{L'}$ соответственно, и пусть $V \in S$. Тогда в силу (11) 1° $VD_G \subset D'_G$. Пусть $v \in D_G$, и пусть Z — произвольное борелево подмножество в X. Тогда, используя (11) 2°, получаем

$$\int_Z ((Vv)(g),\ Vv(g))\, d\mu(\dot{g}) = \|E'(Z)\, Vv\|^2 =$$
$$= \|VE(Z)v\|^2 \leqslant \|V\|^2 \|E(Z)v\|^2 = \|V\|^2 \int (v(g),\ v(g))\, d\mu(\dot{g}).$$

Поскольку функции под интегралом непрерывны (согласно лемме 1), то

$$((Vv)(g),\ Vv(g)) \leqslant \|V\|^2 (v(g),\ v(g))$$

для всех g из G. В частности,

$$\|(Vv)(e)\| \leqslant \|V\| \, \|v(e)\|.$$

Из леммы 2 тогда следует, что существует линейное отображение $\tilde{R} \in \mathscr{L}(H \to H')$, такое, что

$$Vv(e) = \tilde{R}v(e).$$

Теперь покажем, что $\tilde{R} \in R(L, L')$. В самом деле, для любого $g \in G$ имеем

$$\begin{aligned}(Vv)(g) &= \rho_g^{-1/2}(k)\,[U_g^{L'}Vv](e) = \rho_g^{-1/2}(k)\,[VU_g^L v](e) = \\ &= \rho_g^{-1/2}(k)\,\tilde{R}\,[U_g^L v](e) = \tilde{R}v(g).\end{aligned} \tag{14}$$

Пусть теперь $k \in K$. Поскольку v (соответственно Vv) удовлетворяет условию (1.1) 2° относительно представления L_k (соответственно L'_k), то, согласно (14),

$$L'_k\tilde{R}v(e) = L'_k(Vv)(e) = (Vv)(k) = \tilde{R}v(k) = \tilde{R}L_k v(e).$$

Следовательно, согласно лемме 1,

$$L'_k\tilde{R} = \tilde{R}L_k \quad \text{для всех} \quad k \in K,$$

т. е. $\tilde{R} \in R(L, L')$. Поэтому из (14) и из определения отображения φ для произвольного $v \in D_G$ получаем

$$Vv = \varphi(\tilde{R})\,v.$$

Поскольку D_G плотно в H^L, то $V = \varphi(\tilde{R})$.

Замечание 1. Неприводимость представления L не гарантирует, вообще говоря, неприводимости представления U^L (см. замечание и контрпример после следствия теоремы 2.1). Однако в многих важных случаях, например в случае полупрямых произведений, неприводимость представления L предполагает неприводимость представления U^L (теорема 17.1.5).

Докажем теперь теорему, которая во многих важных случаях дает удобный критерий неприводимости индуцированного представления U^L группы G.

Пусть U^L — индуцированное представление в H^L, и пусть $E(Z)$ — соответствующая система импримитивности. Пару (U^L, E) называем *неприводимой*, если для произвольных $V \in \mathscr{L}(H^L)$, $g \in G$, и борелева подмножества $Z \subset X$

$$\begin{pmatrix} VU_g^L = U_g^L V \\ VE(Z) = E(Z)V \end{pmatrix} \to (V = \lambda I). \tag{15}$$

Следующая теорема дает простой критерий неприводимости пары (U^L, E).

Теорема 4. *Пусть U^L — представление локально компактной сепарабельной группы G, индуцированное представлением L замкнутой подгруппы $K \subset G$. Тогда*

$$\begin{pmatrix} \textit{пара } (U^L, E) \\ \textit{неприводима} \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \textit{представление } L \\ \textit{неприводимо} \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Мы применяем частный случай теоремы 3, в котором $L = L'$. Тогда из определения неприводимости следует

$$\begin{pmatrix} \text{пара } (U^L, E) \\ \text{неприводима} \end{pmatrix} \leftrightarrow (S = \{\lambda I, \ \lambda \in C^1\}),$$

$$\begin{pmatrix} \text{представление } L \\ \text{неприводимо} \end{pmatrix} \leftrightarrow (R(L, L) = \{\lambda I, \ \lambda \in C^1\}).$$

Заключение теоремы следует из того факта, что отображение φ, определенное формулой (12), устанавливает взаимно-однозначное соответствие между $R(L, L)$ и S.

Пусть теперь U^L (соответственно $U^{L'}$) — представление группы G в H^L (соответственно в $H^{L'}$), индуцированное представлением L (соответственно L') замкнутой подгруппы $K \subset G$, и пусть $E(Z)$ (соответственно $E'(Z)$) — соответствующая система импримитивности. Пара (U^L, E) *эквивалентна* паре $(U^{L'}, E')$ [что мы записываем в виде $(U^L, E) \simeq (U^{L'}, E')$], если существует унитарный оператор $V : H^L \to H^{L'}$, такой, что

$$VU_g^L V^{-1} = U_g^{L'} \quad \text{для всех } g \text{ из } G,$$

$$VE(Z)V^{-1} = E'(Z) \quad \text{для всех борелевых подмножеств } Z \subset X. \tag{16}$$

Следующая теорема дает критерий эквивалентности пар (U^L, E) и $(U^{L'}, E')$.

Теорема 5.

$$[(U^L, E) \simeq (U^{L'}, E')] \Longleftrightarrow (L \simeq L').$$

Доказательство. Из определения эквивалентности следует, что $(U^L, E) \simeq (U^{L'}, E')$ тогда и только тогда, когда существует унитарный оператор V, удовлетворяющий условиям (16). С другой стороны, $L \simeq L'$ тогда и только тогда, когда существует унитарный переплетающий оператор $R \in R(L, L')$. В силу (13) R унитарен тогда и только тогда, когда соответствующий оператор $V = \varphi(R)$ унитарен. Таким образом, заключение теоремы следует из теоремы 3, которая фактически утверждает, что отображение $\varphi : R(L, L') \ni R \to V$ взаимно-однозначно.

Замечание 2. Из теоремы 5 и формулы (16) следует, что если $L \simeq L'$, то индуцированное представление U^L эквивалентно индуцированному представлению $U^{L'}$.

Теоремы 3—5 не дают, вообще говоря, прямого критерия неприводимости представления U^L группы G, индуцированного неприводимым представлением L подгруппы $K \subset G$. Однако в случае, когда система импримитивности $E(Z)$ сопоставляется со спектральной мерой представления инвариантной коммутативной подгруппы N группы G (например, в случае полупрямого произведения $G = N \rtimes M$), теорема 4 дает неприводимость представления U^L (см. теорему 17.1.5).

Прямой критерий неприводимости для индуцированных представлений полупростых групп Ли дается в гл. 19, § 1.

§ 4. Комментарии и дополнения

Теория индуцированных представлений была начата Фробениусом в 1898 г. [284]. Он дал основную конструкцию индуцирования, представленную в § 1, в случае конечных групп. Интересно, что этот простой метод мог бы быть сразу распространен на многие группы. Но он был использован для непрерывных групп только через сорок лет. Это было сделано Вигнером в 1939 г. в его классической статье [852] по классификации неприводимых унитарных представлений группы Пуанкаре. Позднее этот метод был применен Баргманом [37] и Гельфандом и Наймарком [314] для построения представлений группы Лоренца. Вскоре Гельфанд и Наймарк поняли общность и силу техники индуцированных представлений и в фундаментальной работе [315] в 1950 г. дали конструкцию «почти всех» неприводимых унитарных представлений всех комплексных классических простых групп Ли.

Систематический анализ общих свойств индуцированных представлений провел Макки. Он дал общую конструкцию индуцированных представлений для произвольной локально компактной топологической группы, доказал в общем случае теорему об импримитивности, теорему индуцирования по стадиям, теорему взаимности Фробениуса, теорему о тензорном произведении и другие. Работа Макки, Гельфанда и Наймарка стимулировала развитие теории представлений групп и их приложений в квантовой физике. В частности, метод индуцированных представлений был применен к различным конкретным группам, таким, как группы движений n-мерных пространств Минковского и Евклида, SL (n, R), SU (p, q) и т. д. Систематический анализ свойств индуцированных представлений вещественных полупростых групп Ли выполнил Брюа

[150]. В частности, он вывел важный критерий неприводимости индуцированных представлений.

Обобщение техники индуцированного представления на построение так называемых голоморфных и частично голоморфных индуцированных представлений, а также упрощенный вывод некоторых результатов Макки даны Блаттнером [124, 125].

Представленная в § 3 идея доказательства теоремы об импримитивности принадлежит Поулсену (не опубликовано) и в настоящей форме была сообщена нам Орстедом.

§ 5. Упражнения

§ 1.1. Пусть G — трехмерная вещественная нильпотентная группа с законом композиции

$$(x_1, y_1, z_1)(x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2,\ z_1 + z_2 + x_1 y_2), \qquad x, y, z \in R^1.$$

Группа G является полупрямым произведением $G = N \rtimes S$ абелевой нормальной подгруппы $N = \{(0, y, z)\}$ и $S = \{(x, 0, 0)\}$. Пусть $(0, y, z) \to L_{(0,\, y,\, z)} = \exp(i\hat{z}z)$, $\hat{z} \in R$, — одномерное представление подгруппы N. Покажите, что представление U_g^L имеет вид

$$U^L_{(x,\, y,\, z)} u(\xi) = \exp i\,[\hat{z}(z + \xi y)]\, u(\xi + x). \tag{1}$$

§ 1.2. Пусть $G = \mathrm{SO}(3)$. Покажите, что любое представление группы G, индуцированное неприводимым представлением любой подгруппы K группы G, приводимо.

§ 1.3. Пусть G — евклидова группа $T^n \rtimes \mathrm{SO}(n)$, и пусть $K = T^n \rtimes \mathrm{SO}(n-1)$. Возьмите

$$k \to L_k = L_{(a,\, r)} = \exp(i\overset{0}{p}a)\, D^m(r), \tag{2}$$

где $\overset{0}{p} = (M, 0, \ldots, 0)$ и $D^m(r)$ — неприводимое представление подгруппы $\mathrm{SO}(n-1)$, характеризуемое старшим весом m. Покажите, что

1° пространство $X = G/K$ изоморфно сфере $p_\mu p^\mu = M^2$;

2° действие неприводимого представления U^L группы G в $H = L^2(X, \mu)$, где $d\mu(p)$ — инвариантная мера на сфере, задается формулой

$$\left(U^L_{(a,\, R)} u\right)(p) = \exp(ipa)\, D^J(r_R)\, u\left(R^{-1}p\right), \tag{3}$$

где $r_R = R_p^{-1} R R_{R^{-1}p}$ и R_p — вращение, определенное формулой

$$p = R_p \overset{0}{p}.$$

Указание. Используйте формулу (1.47) и метод примера 1.3.

§ 2.1. Пусть $k \to L_k$ — неразложимое представление замкнутой подгруппы K топологической группы G. Покажите, что индуцированное представление U^L группы G также неразложимо.

§ 1.4. Пусть $G = \mathrm{SO}(3)$ и $K = \mathrm{SO}(2)$. Возьмите неприводимое представление L подгруппы K (заданное характером) и найдите индуцированное представление U^L группы G в $H = L^2(X, \mu)$, $X = K \diagdown G \simeq S^2$. Покажите, что полученное представление приводимо. Покажите, что каждое представление группы G, индуцированное любой подгруппой K, приводимо.

§ 1.5. Покажите, что группа SL $(2, R)$ имеет также дополнительную серию представлений, заданную формулой

$$T_g u(x) = |\beta x + \delta|^{\rho - 1} u\left(\frac{\alpha x + \gamma}{\beta x + \delta}\right), \quad g = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}, \tag{4}$$

которые реализуются в гильбертовом пространстве со скалярным произведением $(\cdot\ ,\ \cdot)$, заданным формулой

$$(u, v) = \Gamma^{-1}(-\rho) \int |x_1 - x_2|^{-1-\rho}\, u(x_1)\, \overline{u(x_2)}\, \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2$$

с $-1 < \rho < 1$, $\rho \neq 0$. Найдите малую группу для представления (4).

Глава 17

Индуцированные представления полупрямых произведений

Метод индуцированных представлений наиболее эффективен в случае регулярных полупрямых произведений $G = N \rtimes S$, в которых подгруппа N абелева. Мы покажем, что в этом случае *каждое* неприводимое унитарное представление группы G индуцируется нетривиальной подгруппой в G. Дальше мы дадим полную классификацию всех индуцированных неприводимых унитарных представлений группы G. Классификация дается с помощью параметров, которые характеризуют орбиту $\widehat{O}$ подгруппы S в дуальном множестве $\widehat{N}$ группы N, и дополнительных параметров, характеризующих представление стационарной подгруппы $K_{\widehat{O}} \subset S$ орбиты $\widehat{O}$. Если G — группа физической симметрии, то эти параметры имеют прямое физическое значение.

После установления общей теории построение всех неприводимых унитарных представлений любого конкретного полупрямого произведения становится легким упражнением. Мы представляем детали вывода для групп Евклида и Пуанкаре. В случае группы Пуанкаре параметр, характеризующий орбиту $\widehat{O}$, имеет значение массы, а параметр, характеризующий представление стационарной группы, имеет значение спина частицы. Остальные квантовые числа, частицы, такие, как компоненты импульса и проекция спина, также возникают естественным образом. Эти примеры ясно показывают силу, изящество и пользу метода индуцированных представлений в физике.

§ 1. Теория представлений полупрямых произведений

Пусть G — полупрямое произведение $N \rtimes S$ сепарабельных локально компактных групп N и S, и пусть N абелева. Напомним, что закон композиции в G задается формулой (гл. 3, § 4, определение 2)

$$(n_1, s_1)(n_2, s_2) = (n_1 s_1(n_2), s_1 s_2), \quad s_1(n_2) \in N. \tag{1}$$

Поскольку группа N абелева, можно также записать $n_1 s_1(n_2) = n_1 + s_1(n_2)$. Пусть o и e — единичные элементы в N и S соответственно. Множества

$$\{(n, e),\ n \in N\}, \quad \{(o, s),\ s \in S\} \tag{2}$$

являются замкнутыми подгруппами в G, естественным образом изоморфными подгруппам N и S соответственно. Мы отождествим N и S с этими подгруппами. Подгруппа S действует как группа автоморфизмов N согласно формуле

$$sns^{-1} = (o,\ s)(n,\ e)(o,\ s^{-1}) = (s(n),\ e).$$

Обозначим этот автоморфизм символом α_s, т. е.

$$\alpha_s(n) \equiv s(n). \tag{3}$$

Пусть T — унитарное представление группы G, и пусть U и V — его ограничения на N и S соответственно, т. е.

$$U_n \equiv T_{(n,\ e)}, \quad V_s \equiv T_{(o,\ s)}.$$

Поскольку для всех $n \in N$ и $s \in S$ $(n,\ s) = (n,\ e)(o,\ s)$, то

$$T_{(n,\ s)} = U_n V_s. \tag{4}$$

Таким образом, представление T группы G полностью определяется своими ограничениями U и V на подгруппы N и S соответственно. Представления U подгруппы N и V подгруппы S не могут выбираться произвольно. В самом деле, из закона композиции в G

$$(n_1,\ s_1)(n_2,\ s_2) = (n_1 + s_1(n_2),\ s_1 s_2) \tag{5}$$

следует, что представления U и V должны удовлетворять операторному уравнению

$$U_{n_1} V_{s_1} U_{n_2} V_{s_2} = U_{n_1} U_{\alpha_{s_1}(n_2)} V_{s_1} V_{s_2}, \tag{6}$$

которое сводится к следующему уравнению:

$$V_s U_n V_s^{-1} = U_{\alpha_s(n)} = U_{s(n)}. \tag{7}$$

Покажем теперь, что если T — унитарное представление, то это уравнение эквивалентно системе импримитивности для T. В самом деле, пусть $\widehat{N}$ — дуальное пространство (характеров) для N (см. гл. 16). Если $\hat{n}(n) = \langle n,\ \hat{n}\rangle$ — характер, а α — автоморфизм N, то $\hat{n}(\alpha(n))$ — также характер, который мы будем обозначать $\hat{n}\alpha$. Используя соотношение (6.1.6′)

$$\langle n,\ \hat{n}_1\rangle \langle n,\ \hat{n}_2\rangle = \langle n,\ \hat{n}_1 \hat{n}_2\rangle, \tag{8}$$

легко проверить, что отображение $\hat{n} \to \hat{n}\alpha$ является автоморфизмом группы характеров $\widehat{N}$, т. е.

$$(\hat{n}_1 \hat{n}_2)\alpha = (\hat{n}_1\alpha)(\hat{n}_2\alpha), \quad \hat{n}_i\alpha \in \widehat{N}.$$

В частности, автоморфизм (3) подгруппы N влечет автоморфизм $\hat{n} \to \hat{n}s$ группы $\widehat{N}$.

Используя теорему СНАГ (гл. 6, § 2) и равенство

$$\langle s(n),\ \hat{n}\rangle = \langle n,\ \hat{n}s\rangle,$$

получаем

$$U_n = \int_{\hat{N}} \langle n,\ \hat{n}\rangle \, \mathrm{d}E(\hat{n})$$

и, согласно (7),

$$V_s U_n V_{s^{-1}} = U_{s(n)} = \int_{\hat{N}} \langle s(n),\ \hat{n}\rangle \, \mathrm{d}E(\hat{n}) = \int_{\hat{N}} \langle n,\ \hat{n}\rangle \, \mathrm{d}E(\hat{n}s^{-1}). \qquad (9)$$

С другой стороны, левая часть (7) совпадает с

$$\int_{\hat{N}} \langle n,\ \hat{n}\rangle \, \mathrm{d}(V_s E(\hat{n}) V_{s^{-1}}). \qquad (9')$$

Поскольку характеры разделяют точки в G, из (9) и (9′) следует, что для всех борелевых множеств $Z \subset \hat{N}$

$$V_s E(Z) V_{s^{-1}} = E(Zs^{-1}). \qquad (10)$$

Таким образом, $E(Z)$ — система импримитивности для представления V, базой которого служит дуальное пространство $\hat{N}$. Поскольку

$$U_n E(Z) U_n^{-1} = E(Z),$$

проекция $E(Z)$ также является системой импримитивности для представления T группы G. Следовательно, каждое унитарное представление полупрямого произведения импримитивно.

Множество всех $\hat{n}s$ для заданного $\hat{n} \in N$ и всех $s \in S$ называется *орбитой характера* $\hat{n}$ и обозначается символом $\hat{O}_{\hat{n}}$. Мы предполагаем, что топология на орбите $\hat{O}_{\hat{n}}$ выбирается таким образом, что она представляет собой локально компактное пространство. Очевидно, что две орбиты $\hat{O}_{\hat{n}_1}$ и $\hat{O}_{\hat{n}_2}$ или совпадают, или не пересекаются. Следовательно, дуальное пространство $\hat{N}$ разбивается на непересекающиеся множества $\hat{O}_{\hat{n}}$.

Любые две точки $\hat{n}s_1$ и $\hat{n}s_2$ из $\hat{O}_{\hat{n}}$ могут быть связаны преобразованием $s_1^{-1}s_2 \in S$. Поэтому орбита $\hat{O}_{\hat{n}}$ является однородным G-пространством. В силу теоремы 4.1.1 это пространство гомеоморфно однородному пространству $X = K_{\hat{n}} \diagdown S$, где $K_{\hat{n}}$ — замкнутая подгруппа, состоящая из всех элементов $s \in S$, для которых $\hat{n}s = \hat{n}$.

Из теоремы 4.3.1 мы знаем, что на однородном пространстве $X = K_{\hat{n}} \diagdown S$ существует квазиинвариантная относительно S мера $d\mu(x)$. Однако может оказаться, что на $\hat{N}$ существуют квазиинвариантные меры, которые не сосредоточены на любой орбите $\hat{O}_{\hat{n}}$ группы $\hat{N}$. Чтобы видеть это, рассмотрим следующий пример.

Пример 1. Пусть G — полупрямое произведение, состоящее из всех пар (z, m), $z \in C^1$, m — целое число, в котором закон композиции задается формулой

$$(z_1, m_1)(z_2, m_2) = (z_1 + \exp(im_1\pi\alpha) z_2, m_1 + m_2), \tag{11}$$

где α — иррациональное число.

Здесь абелева инвариантная подгруппа N состоит из всех элементов вида $u = (z, 0)$ и $S = \{(0, m)\}$. Поскольку N — некомпактная векторная группа, дуальная группа $\hat{N}$ изоморфна N (см. пример 6.1.1). Группа S действует на $\hat{N}$ по формуле

$$\hat{N} \ni \hat{n} \to (\hat{n}) s = \exp(im\pi\alpha) \hat{n}, \tag{12}$$

где $s = (0, m) \in S$.

Следовательно, каждая орбита $\hat{O}_{\hat{n}}$ состоит из счетного числа точек, лежащих на окружности радиуса $r = |\hat{n}|$.

Для каждого $r > 0$ пусть $\mu_r(Z)$ обозначает линейную меру Лебега пересечения борелева множества $Z \subset N$ и окружности $|\hat{n}| = r$. Поскольку, согласно (12), действие группы S соответствует вращению, то ясно, что каждая мера $\mu_r(Z)$ инвариантна. Однако, так как каждая орбита $\hat{O}_{\hat{n}}$ является счетным множеством, то $\mu_r(\hat{O}_{\hat{n}}) = 0$ для каждого $\hat{O}_{\hat{n}} \subset \hat{N}$. Таким образом, ни одна из мер $\mu_r(\cdot)$ не сосредоточена на орбите $\hat{O}_{\hat{n}}$.

Чтобы избежать таких патологических случаев, мы налагаем на полупрямое произведение $G = N \rtimes S$ некоторые условия регулярности. Мы говорим, что G — *регулярное полупрямое произведение* N и S, если $\hat{N}$ содержит счетное семейство $Z_1, Z_2, \ldots$ борелевых подмножеств, являющихся объединением G-орбит и таких, что каждая орбита в $\hat{N}$ представляет собой пересечение подмножеств $Z_{n_1}, Z_{n_2}, \ldots$, содержащих эту орбиту. Без потери общности мы можем предположить, что пересечение конечного числа Z_i является элементом семейства $\{Z_i\}_1^\infty$. Это эквивалентно следующему предположению: любая орбита является пределом уменьшающейся последовательности $\{Z_{n_i}^{\hat{n}}\} \subset \{Z_i\}_1^\infty$, т. е. $Z_{n_i}^{\hat{n}} \searrow O_{\hat{n}}$.

Мы увидим, что большинство полупрямых произведений, которые встречаются в физических приложениях, регулярно. Однако легко проверить, что полупрямое произведение примера 1 нерегулярно.

Утверждение 1. *Пусть T — унитарное представление регулярного полупрямого произведения $G = N \rtimes S$, и пусть $E(\cdot)$ — проекторнозначная мера, соответствующая ограничению U представления T на N. Тогда если T неприводимо, то существует орбита $\hat{O}_{\hat{n}}$, такая, что $E(\hat{O}_{\hat{n}}) = 1$ и $E(\hat{N} - \hat{O}_{\hat{n}}) = 0$.*

Доказательство. Поскольку каждое множество Z_i является объединением орбит, то $Z_i g = Z_i$ для любого $g \in G$. Поэтому, согласно (10) и лемме Шура, из неприводимости T следует, что $E(Z_i)$ равно 0 или 1. Подобным образом, для каждой орбиты $\hat{O}_{\hat{n}} \subset \hat{N}$ $E(\hat{O}_{\hat{n}})$ равно 0 или 1. Предположим, что $E(\hat{O}_{\hat{n}}) = 0$ для всех орбит $\hat{O}_{\hat{n}}$. Поскольку орбита является пределом

$$Z^{\hat{n}}_{n_i} \searrow \hat{Q}_{\hat{n}}$$

и поскольку счетно аддитивная мера $E(\cdot)$ удовлетворяет условию

$$E\left(\bigcap_i Z^{\hat{n}}_{n_i}\right) = \prod_i E\left(Z^{\hat{n}}_{n_i}\right) = \lim_{i\to\infty} E\left(Z^{\hat{n}}_{n_i}\right),$$

мы имеем

$$\lim_{i\to\infty} E\left(Z^{\hat{n}}_{n_i}\right) = E(\hat{O}_{\hat{n}}) = 0.$$

Таким образом, для любой орбиты $\hat{O}_{\hat{n}}$ существует элемент $Z^{\hat{n}}_{n_i} \supset \hat{O}_{\hat{n}}$ меры нуль. Поскольку множество таких $Z^{\hat{n}}_{n_i}$ покрывает $\hat{N}$, мы получаем $E(\hat{N}) = 0$, что является противоречием. Поэтому существует по крайней мере одна орбита $\hat{O}_{\hat{n}}$, такая, что $E(\hat{O}_{\hat{n}}) = 1$. Если существовали бы две орбиты $\hat{O}_{\hat{n}_1}$ и $\hat{O}_{\hat{n}_2}$, удовлетворяющие условию $E\left(\hat{O}_{\hat{n}_i}\right) = I$, $i = 1, 2$, то

$$E(\hat{O}_{\hat{n}_1} \cup \hat{O}_{\hat{n}_2}) = E(\hat{O}_{\hat{n}_1}) + E(\hat{O}_{\hat{n}_2}) = 2I.$$

Но $E(\hat{N}) = I$. Поэтому спектральная мера $E(\cdot)$ сосредоточена только на одной орбите $\hat{O}_{\hat{n}}$.

Пусть $\hat{O}$ обозначает орбиту, которая является носителем спектральной меры $E(\cdot)$. Мы показали, что орбита $\hat{O}$ гомеоморфна транзитивному пространству $S_{\hat{O}} \diagdown S$, где $S_{\hat{O}}$ — стационарная подгруппа точки $\hat{n}_0$ орбиты $\hat{O}$. Поскольку для любых $n \in N$ и $\hat{n} \in \hat{O}$ $\hat{n}n = \hat{n}$, то орбита $\hat{O}$ может также рассматриваться как гомеоморфная транзитивному многообразию $N \rtimes S_{\hat{O}} \backslash G$. Тогда из (10) следует

$$T_{(n,\,s)} E(Z) T^{-1}_{(n,\,s)} = E\left(Z(n,\, s)^{-1}\right), \tag{13}$$

где Z — борелево подмножество в $\hat{N}$.

Таким образом, по теореме об импримитивности (гл. 16, § 3) каждое неприводимое представление T регулярного полупрямого произведения унитарно эквивалентно представлению $U^{\hat{L}}$ группы G, индуцированному представлением $\hat{L}$ подгруппы $N \rtimes S_{\hat{O}}$. Согласно следствию теоремы 16.2.1, представление $\hat{L}$ неприводимо. Представление $U^{\hat{L}}$ реализуется в гильбертовом пространстве $H^{\hat{L}} = L^2(\hat{O}, \mu; H)$, где μ — квазиинвариантная мера на $\hat{O}$ и H — пространство представления $\hat{L}$ подгруппы $N \rtimes S_{\hat{O}}$.

Теперь мы докажем важное свойство представления $\hat{L}$ стационарной подгруппы $N \rtimes S_{\hat{O}}$ орбиты $\hat{O}$.

Лемма 2. *Ограничение $\hat{L}_n$ неприводимого индуцирующего представления $\hat{L}$ подгруппы $N \rtimes S_{\hat{O}}$ на подгруппу N является одномерным представлением, т. е.*

$$\hat{L}_n u = \langle n,\, \hat{n}_0 \rangle u, \tag{14}$$

где $u \in H$, а $\hat{n}_0$ — тот элемент из $\hat{O}$, который имеет стационарную подгруппу $N \rtimes S_{\hat{O}}$.

Доказательство. Как мы только что показали, неприводимое представление U группы $N \rtimes S$ унитарно эквивалентно индуцированному представлению $U^{\hat{L}}$. В силу (16.1.15) действие $U^{\hat{L}}_g|_N$ задается в $H^{\hat{L}} = L^2(\hat{O}, \mu; H)$ формулой

$$U^{\hat{L}}_n u(\hat{n}) = \hat{L}_{sns^{-1}} u(\hat{n}), \tag{15}$$

где $\hat{n}_0 s = \hat{n}$ и $\hat{n}_0$ — элемент из $\hat{O}$, стационарная подгруппа которого $N \rtimes S_{\hat{O}}$. С другой стороны, в силу теоремы СНАГ для $u, v \in H^{\hat{L}}$ мы имеем

$$(U^{\hat{L}}_n u,\, v) = \int\limits_{\hat{N}} \langle n,\, \hat{n} \rangle \, d\mu_{u,\,v}(\hat{n}) = \int\limits_{\hat{O}} \langle n,\, \hat{n} \rangle (u(\hat{n}),\, v(\hat{n}))_H \, d\mu(\hat{n}). \tag{16}$$

Согласно утверждению 16.1.3, мы можем положить $u(\hat{n}) = \alpha(\hat{n})\, u$, $v(\hat{n}) = \beta(\hat{n})\, v$, $\alpha,\ \beta \in L^2(\hat{O}, \mu)$, $u,\ v \in H$. Тогда из (15) и (16) следует

$$\int\limits_{\hat{O}} \langle n, \hat{n}\rangle \alpha(\hat{n}) \bar{\beta}(\hat{n}) (u, v)_H \, d\mu(\hat{n}) = \int\limits_{\hat{O}} \alpha(\hat{n}) \bar{\beta}(\hat{n}) (L_{sns^{-1}} u, v)_H \, d\mu(\hat{n}). \quad (17)$$

Поэтому для всех $n \in N$, $u \in H$ и почти всех $\hat{n} \in \hat{O}$

$$\hat{L}_{sns^{-1}} u = \langle n, \hat{n}\rangle u. \quad (18)$$

Если $\hat{n} = \hat{n}_0 s$ такое, что последняя формула верна, то, припоминая, что $\langle n, \hat{n}_0 s\rangle = \langle sns^{-1}, \hat{n}_0\rangle$, получаем

$$\hat{L}_n u = \langle n, \hat{n}_0\rangle u.$$

Следующая лемма дает удобную характеристику неприводимых представлений $\hat{L}$ стационарной подгруппы $N \rtimes S_{\hat{O}}$ в терминах неприводимых представлений L подгруппы $S_{\hat{O}}$.

Лемма 3. *Каждое неприводимое унитарное представление L стационарной группы $N \rtimes S_{\hat{O}}$ определяется неприводимым унитарным представлением L подгруппы $S_{\hat{O}}$ и наоборот.*

Доказательство. Пусть L — унитарное представление подгруппы $S_{\hat{O}}$. Для

$$g_{\hat{O}} = (n, s_{\hat{O}}), \quad g_{\hat{O}} \in N \rtimes S_{\hat{O}}, \quad n \in N, \quad s_{\hat{O}} \in S_{\hat{O}}$$

положим

$$\hat{L}_{(n,\, s_{\hat{O}})} = \langle n, \hat{n}_0\rangle L_{s_{\hat{O}}}, \quad (19)$$

где

$$\hat{n}_0 s_{\hat{O}} = \hat{n}_0 \quad \text{для всех} \quad s_{\hat{O}} \in S_{\hat{O}}.$$

Отображение $(n, s_{\hat{O}}) \to L_{(n,\, s_{\hat{O}})}$ определяет унитарное представление группы $N \rtimes S_{\hat{O}}$. В самом деле,

$$\hat{L}_{(n,\, s_{\hat{O}})\, (n',\, s'_{\hat{O}})} = \hat{L}_{(n (s_{\hat{O}} n'),\, s_{\hat{O}} s'_{\hat{O}})} = \langle n (s_{\hat{O}} n'), \hat{n}_0\rangle L_{s_{\hat{O}} s'_{\hat{O}}} =$$
$$= \langle n, \hat{n}_0\rangle \langle s_{\hat{O}} n', \hat{n}_0\rangle L_{s_{\hat{O}}} L_{s'_{\hat{O}}} = \hat{L}_{(n,\, s_{\hat{O}})} \hat{L}_{(n',\, s'_{\hat{O}})}$$

и

$$\hat{L}^*_{(n,\, s_{\hat{O}})} = \overline{\langle n, \hat{n}_0\rangle}\, L^*_{s_{\hat{O}}} = \langle n^{-1}, \hat{n}_0\rangle L^{-1}_{s_{\hat{O}}} = \hat{L}^{-1}_{(n,\, s_{\hat{O}})}.$$

Если L неприводимо, то $\widehat{L}$ также неприводимо. Обратно, согласно (4) и (19), каждое неприводимое представление $\widehat{L}$ группы $N \rtimes S_{\widehat{O}}$ определяет неприводимое унитарное представление подгруппы $S_{\widehat{O}}$.

В последующем мы обозначаем описанное в лемме 3 представление $\widehat{L}$ группы $N \rtimes S_{\widehat{O}}$ символом $\widehat{n}L$, где $\widehat{n} \in \widehat{O}$ и L — представление подгруппы $S_{\widehat{O}}$. Следующая теорема дает удобную характеристику неприводимых унитарных представлений полупрямых произведений.

Теорема 4. *Пусть G — регулярное полупрямое произведение $N \rtimes S$ сепарабельных локально компактных групп N и S, и пусть N абелева. Пусть T — неприводимое унитарное представление группы G. Тогда*

1° С T сопоставляется орбита $\widehat{O}$ в $\widehat{N}$.

2° Представление T унитарно эквивалентно индуцированному представлению $U^{\widehat{n}L}$, где L — неприводимое унитарное представление подгруппы $S_{\widehat{O}}$ в гильбертовом пространстве H. Представление $U^{\widehat{n}L}$ реализуется в гильбертовом пространстве $H^{\widehat{n}L} = L^2(\widehat{O}, \mu; H)$.

Доказательство. По утверждению 1 спектральная мера $E(\cdot)$, соответствующая ограничению представления T на N, сосредоточена на орбите $\widehat{O}$. Согласно (13) и теореме об импримитивности 16.3.1, T унитарно эквивалентно представлению $U^{\widehat{L}}$, индуцированному представлением $\widehat{L}$ стационарной подгруппы $N \rtimes S_{\widehat{O}}$. Наконец, по леммам 2 и 3 $\widehat{L}$ имеет вид $\widehat{n}L$, где L — неприводимое унитарное представление подгруппы $S_{\widehat{O}}$.

Следующая теорема утверждает, обратно, что представление $U^{\widehat{L}}$, индуцированное неприводимым унитарным представлением $\widehat{L}$ стационарной подгруппы $N \rtimes S_{\widehat{O}}$ орбиты $\widehat{O}$, неприводимо.

Теорема 5. *Пусть G такая же, как в теореме 4. Тогда*

1° С каждой орбитой $\widehat{O}$ в $\widehat{N}$ и с каждым неприводимым унитарным представлением $\widehat{n}L$ стационарной подгруппы $N \rtimes S_{\widehat{O}}$ сопоставляется неприводимое индуцированное представление $U^{\widehat{n}L}$.

2° Спектральная мера $E(\cdot)$, определенная ограничением $U^{\widehat{n}L}$ на N, сосредоточена на орбите $\widehat{O}$.

3° Представление $U^{\widehat{n}L}$ реализуется в гильбертовом пространстве $H^{\widehat{n}L} = L^2(\widehat{O}, \mu; H)$, где H — пространство представления L и μ — квазиинвариантная мера на $\widehat{O}$. Мы имеем

$$U^{\widehat{n}L}_{(n,\, s)} u(\widehat{n}) = \langle n, \widehat{n}\rangle_S\, U^L_s u(\widehat{n}), \tag{20}$$

где ${}_SU^L$ — заданное формулой (16.1.15) представление подгруппы S, которое индуцируется представлением L стационарной подгруппы $S_{\widehat{O}} \subset S$.

Доказательство. Пусть $\widehat{O}$ — орбита в $\widehat{N}$, и пусть $S_{\widehat{O}} \subset \subset S$ — стационарная подгруппа точки $\widehat{n}_0 \in \widehat{O}$. Поскольку N действует в $\widehat{N}$ как единица, мы имеем

$$\widehat{O} \cong S_{\widehat{O}} \diagdown S \cong N \rtimes S_{\widehat{O}} \diagdown N \rtimes S = N \rtimes S_{\widehat{O}} \diagdown G. \tag{21}$$

Более того, квазиинвариантная относительно S мера μ на $\widehat{O}$ остается квазиинвариантной относительно G.

Найдем теперь явный вид индуцированного представления $U^{\widehat{n}L}$. Пусть ρ обозначает производную Радона — Никодима меры μ на $\widehat{O}$, а B_g — операторная функция на S, удовлетворяющая условиям (16.1.12) относительно $S_{\widehat{O}}$. Пусть L — неприводимое унитарное представление подгруппы $S_{\widehat{O}}$, и пусть H — пространство представления L. Тогда представление ${}_SU^L$ группы S, индуцированное представлением L, имеет вид

$${}_SU^L_s u(\widehat{n}) = \rho_s(\gamma)\, B_\gamma^{-1} B_{\gamma s} u(\widehat{n}s),$$

где $u \in L^2(\widehat{O}, \mu; H)$ и $\gamma \in S$ такое, что $\widehat{n} = n_0\gamma$.

Найдем функции $\widetilde{\rho}$ и $\widetilde{B}$, которые позволяют образовать представление ${}_GU^{\widehat{n}L}$, индуцированное представлением $\widehat{n}L$ подгруппы $N \rtimes S_{\widehat{O}}$. Поскольку N действует в $\widehat{N}$ как единица, мы имеем $(g = (n, s))$

$$\widetilde{\rho}_g(\gamma) = \frac{d\mu(\widehat{n}g)}{d\mu(\widehat{n})} = \frac{d\mu(\widehat{n}s)}{d\mu(\widehat{n})} = \rho_s(\gamma), \quad \widehat{n} = \widehat{n}_0\gamma.$$

Далее, положив

$$\widehat{B}_g = \langle n, \widehat{n}_0\rangle\, B_s, \tag{22}$$

легко проверить, что оба условия из (16.1.12) относительно подгруппы $N \rtimes S_{\hat{O}}$ удовлетворяются. Следовательно, согласно (16.1.15) и (22), мы имеем

$$\begin{aligned}{}_G U_g^L u(\hat{n}) &= \tilde{\rho}_g^{1/2}(\gamma)\, \tilde{B}_\gamma^{-1} \tilde{B}_{\gamma g} u(\hat{n} g) = \\ &= \rho_s^{1/2}(\gamma)\, \tilde{B}_\gamma^{-1} \tilde{B}_{\gamma n \gamma^{-1} s} u(\hat{n}(n, s)) = \\ &= \rho_s^{1/2}(\gamma)\, B_\gamma^{-1} \langle \gamma n \gamma^{-1}, \hat{n}_0 \rangle B_{\gamma s} u(\hat{n} s) = \\ &= \langle n, \hat{n} \rangle_S\, U_s^L u(\hat{n}).\end{aligned}$$

В силу (18) ограничение $U^{\hat{n}L}$ на подгруппу N дает

$${}_G U_n^{\hat{n}L} u(\hat{n}) = \langle n, \hat{n} \rangle u(\hat{n}).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}({}_G U_n^{\hat{n}L} u, v) &= \int_{\hat{O}} \langle n, \hat{n} \rangle (u(\hat{n}),\ v(\hat{n}))\, d\mu(\hat{n}) = \\ &= \int_{\hat{O}} \langle n, \hat{n} \rangle\, d\mu_{u, v}(\hat{n}).\end{aligned}$$

Сравнивая это с выражением, следующим из теоремы СНАГ:

$$({}_G U_n^{\hat{n}L} u, v) = \int_{\hat{N}} \langle n, \hat{n} \rangle\, d\mu_{u, v}(\hat{n}),$$

видим, что спектральная мера $E(\cdot)$, соответствующая унитарным операторам $n \to U_n^{\hat{n}L}$, сосредоточена на орбите $\hat{O}$.

Если оператор A коммутирует со всеми операторами ${}_G U_g^{\hat{n}L}$ (т. е. $A \in R(U^{\hat{n}L}, U^{\hat{n}L})$), то он также коммутирует со всеми ${}_G U_n^{\hat{n}L}$, $n \in N$, и следовательно, со спектральной мерой $E(\cdot)$. Поэтому, согласно теореме 16.3.3, мы заключаем, что размерность алгебры операторов, коммутирующих со всеми ${}_G U_g^{\hat{n}L}$, равно $\dim R(\hat{n}L, \hat{n}L)$. Согласно утверждению 3, если L неприводимо, то $\hat{n}L$ также неприводимо. Следовательно, $\dim R(\hat{n}L, \hat{n}L) = 1$. Поэтому ${}_G U^{\hat{n}L}$ неприводимо.

Согласно теоремам 4 и 5, классификация всех неприводимых унитарных представлений регулярного полупрямого произведения $N \rtimes S$ может быть выполнена следующими этапами:

1° Определение множества $\hat{N}$ всех характеров подгруппы N.

2° Классификация всех орбит $\hat{O}$ в $\hat{N}$ для подгруппы S.

3° Выбор элемента $\hat{n}_0$ заданной орбиты $\hat{O}$ и определение стационарной подгруппы $S_{\hat{O}} \subset S$.

4° Образование неприводимого унитарного представления ${}_S U^L$, индуцированного неприводимым представлением L подгруппы $S_{\hat{O}}$, и, наконец, образование по формуле (20) ${}_G U^{\hat{n}L}$.

Пример 2. Пусть G — полупрямое произведение $N \rtimes S$ группы трансляций N в евклидовом пространстве R^3 и группы вращений $S = SO(3)$. Поскольку N — некомпактная векторная группа, дуальное пространство $\hat{N}$ изоморфно N, т. е. $\hat{N} \simeq R^3$. Если $n = (n_1, n_2, n_3) \in N$ и $\hat{n} = (\hat{n}_1, \hat{n}_2, \hat{n}_3) \in \hat{N}$, то любой унитарный характер имеет вид

$$\langle n, \hat{n} \rangle = \exp i\,(n_1\hat{n}_1 + n_2\hat{n}_2 + n_3\hat{n}_3).$$

Множество всех $\hat{n}_0 s$ для заданного $\hat{n}_0 \in \hat{N}$ и всех $s \in SO(3)$ образует орбиту $\hat{O}$, соответствующую характеру $\hat{n}_0$. Очевидно, что в настоящем случае орбитами являются сферы с центром в (0, 0, 0) $\in R^3$ радиуса $r \geqslant 0$. Проверим теперь, что евклидова группа $R^3 \rtimes SO(3)$ является регулярным полупрямым произведением. В самом деле, пусть Z — счетное семейство борелевых подмножеств дуального пространства $\hat{N}$, состоящее из следующих множеств:

1) Z_{00} — орбита с $r = 0$,

2) $Z_{r_1 r_2}$ — объединение всех орбит с $r > 0$, таких, что $r_1 < r < r_2$, где r_1, r_2 $(r_1 < r_2)$ — любые положительные рациональные числа.

Видим, что $Z_{r_1 r_2} g = Z_{r_1 r_2}$ для всех $Z_{r_1 r_2} \in Z$ и всех g из $R^3 \rtimes SO(3)$. Более того, каждая орбита является пересечением элементов из Z, содержащих эту орбиту. Таким образом, $R^3 \rtimes SO(3)$ — регулярное полупрямое произведение. Следовательно, согласно теоремам 4 и 5, каждое неприводимое унитарное представление этой группы является представлением, индуцированным неприводимым унитарным представлением стационарной подгруппы, соответствующей орбите $r = 0$ или $r > 0$. Рассмотрим случаи $r > 0$ и $r = 0$ отдельно.

1° $r > 0$. Возьмем $\hat{n}_0 = (0, 0, r)$. Стационарная подгруппа $S_{\hat{O}} \subset S$ точки $\hat{n}_0$ изоморфна SO(2). Неприводимые представления L подгруппы $S_{\hat{O}}$ имеют вид

$$\varphi \to \exp(il\varphi), \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

Пространство H представления L совпадает с C^1. Мера μ на орбите $\hat{O} = S_{\hat{O}} \diagdown S = \mathrm{SO}(2)\diagdown \mathrm{SO}(3) \cong S^2$ — это обычная инвариантная относительно вращений сферы S^2 мера на сфере. Поэтому гильбертово пространство $H^{\hat{n}L}(\hat{O}, \mu; H)$ состоит из всех комплексных квадратично интегрируемых относительно меры $\mu(\cdot)$ функций на сфере. Каждое неприводимое представление L приводит к неприводимому представлению $U^{\hat{n}L}$ группы G. Согласно (20), действие представления $U_g^{\hat{n}L}$ на пространстве $H^{\hat{n}L}(\hat{O}, \mu; H)$ задается формулой

$$U^{\hat{n}L}_{(n,\,s)} u(\hat{n}) = \exp\left[\mathrm{i}\left(n_1\hat{n}_1 + n_2\hat{n}_2 + n_3\hat{n}_3\right)\right] {}_S U^L_s u(\hat{n}), \tag{23}$$

$$n \in N, \quad s \in S, \quad \hat{n} \in S^2.$$

Здесь ${}_S U^L$ — представление подгруппы SO(3), индуцированное представлением L подгруппы SO(2); ${}_S U^L$ строятся в упражнении 16.5.1.4.

2° $r = 0$. Взяв $\hat{n}_0 = (0, 0, 0)$, видим, что стационарная подгруппа $S_{\hat{O}}$ равна $S = \mathrm{SO}(3)$. Неприводимые индуцированные представления группы G, соответствующие этой орбите, совпадают со всеми конечномерными неприводимыми унитарными представлениями подгруппы SO(3), «поднятыми» до группы G. В силу теорем 4 и 5 это все неприводимые унитарные представления группы $R^3 \rtimes \mathrm{SO}(3)$.

Теорема 5 дает метод построения неприводимых представлений $U^{\hat{n}L}$ группы $N \rtimes S$, используя специальные свойства полупрямых произведений. Можно также строить унитарное представление $U^{\hat{n}L}$, индуцированное представлением $\hat{n}L$ подгруппы $N \rtimes S_{\hat{O}}$, прямо, используя общий метод, описанный в гл. 16, § 1. Напомним, что в этом методе представление $U^{\hat{n}L}$ строится в гильбертовом пространстве функций $u(g)$ на G, удовлетворяющих условию

$$u(kg) = \hat{L}_k u(g), \quad k \in K \equiv N \rtimes S_{\hat{O}}.$$

В нашем случае это условие имеет вид

$$u\left(\left(n, s_{\hat{O}}\right) g\right) = \left(\hat{n}L\right)_{\left(n,\, s_{\hat{O}}\right)} u(g) = \langle n, \hat{n}_0\rangle L_{s_{\hat{O}}} u(g). \tag{24}$$

Множество функций $u(g)$ на G, удовлетворяющих соотношению (24), легко может быть найдено. В самом деле, пусть $u(s)$ — функции на S, удовлетворяющие при всех $s_{\hat{O}} \in S_{\hat{O}}$ условию

$u(s_{\hat{O}}s) = L_{s_{\hat{O}}}u(s)$, т. е. $u(s) \in H^L$, где H^L — пространство представления ${}_SU^L$. Тогда, положив

$$u(g) = \langle n, \hat{n}_0\rangle u(s), \quad g = (n, s), \quad n \in N, \quad s \in S, \tag{25}$$

и использовав (1), (25), (8) и (24), получаем

$$\begin{aligned} u((n', s_{\hat{O}})\, g) &= u((n's_{\hat{O}}n,\ s_{\hat{O}}s)) = \langle n's_{\hat{O}}n, \hat{n}_0\rangle u(s_{\hat{O}}s) = \\ &= \langle n', \hat{n}_0\rangle \langle s_{\hat{O}}n, \hat{n}_0\rangle L_{s_{\hat{O}}}u(s) = \langle n', \hat{n}_0\rangle L_{s_{\hat{O}}}u(g) = \\ &= \hat{n}L_{(n'\, s_{\hat{O}})}u(g). \end{aligned}$$

Используя (25), проверим, что представление $U^{\hat{n}L}$ группы G, индуцированное представлением $\hat{n}L$ подгруппы $N \rtimes S_{\hat{O}}$, имеет вид

$$U^{\hat{n}L}_{g'}u(g) = \rho_{g'}^{1/2}(g)\, u(g(n's')) = \rho_{g'}^{1/2}(g) \langle n', \hat{n}_0\rangle \langle n', \hat{n}_0 s\rangle u(ss'). \tag{26}$$

Кроме того, если используем равенство

$$\rho_{g'}(g) = \frac{d\mu\,(\widehat{ng'})}{d\mu\,(\hat{n})} = \frac{d\mu\,(\widehat{ns'})}{d\mu\,(\hat{n})} = \rho_{s'}(s)$$

и сократим обе части (26) на множитель $\langle n, \hat{n}_0\rangle$, то получим

$$U^{\hat{n}L}_{(n', s')}u(s) = \rho_{s'}^{1/2}(s) \langle n', \hat{n}_0 s\rangle u(ss') = \langle n', \hat{n}\rangle\, {}_SU^L_s u(s). \tag{27}$$

Таким образом, мы видим, что представление $U^{\hat{n}L}$ группы G реализуется в пространстве функций на группе S, которое является пространством представления ${}_SU^L$, индуцированного представлением L подгруппы $S_{\hat{O}}$. Этот метод построения индуцированных представлений $U^{\hat{n}L}$ группы $N \rtimes S$ часто оказывается удобным в приложениях. Представление ${}_SU^L_{s'}$ в (27) получается применением формулы (16.1.6). Если мы реализуем его в пространстве $H^L(\hat{O}, \mu; H)$, используя формулу (16.1.15), то получим в точности формулу (20).

§ 2. Индуцированные унитарные представления группы Пуанкаре

A. *Группы Лоренца и Пуанкаре*

В этом параграфе мы даем полную классификацию неприводимых унитарных представлений группы Пуанкаре, используя развитый в § 1 общий формализм индуцированных представлений.

Начинаем с обсуждения некоторых свойств групп Лоренца и Пуанкаре. Пусть $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$ — диагональный метрический тензор в четырехмерном пространстве Минковского M с $g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = 1$. Для

$$x = \{x^0, x^1, x^2, x^3\} = \{x^\mu\} \quad \text{и} \quad y = \{y^\mu\}$$

пусть

$$x \cdot y = x^0 y^0 - \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = x^\mu y_\mu, \quad y_\mu = g_{\mu\nu} y^\nu \tag{1}$$

— (индефинитное) скалярное произведение в M.

Группа Лоренца — это множество всех линейных преобразований L из M в M, которые сохраняют скалярное произведение (1), т. е.

$$(Lx) \cdot (Ly) = xy. \tag{2}$$

Из (2) получаем

$$L^\alpha_\mu L_{\alpha\nu} = g_{\mu\nu}, \quad \text{или} \quad L^T g L = g, \tag{3}$$

где

$$L_{\alpha\nu} = g_{\alpha\beta} L^\beta_\nu = (gL)_{\alpha\nu} \quad \text{и} \quad (L^T)^\alpha_\mu = L^\alpha_\mu. \tag{4}$$

Из (3) ясно, что

$$L^T = gL^{-1}g, \quad \text{или} \quad L^{T\alpha}_\mu = g_{\mu\tau} (L^{-1})^\tau_\rho g^{\rho\alpha} = L^{-1\alpha}_\mu. \tag{5}$$

Из уравнения (3) также следует, что $\det L = \pm 1$. Кроме того, при $\mu = 0$, $\nu = 0$ из (3) имеем

$$(L^0_0)^2 - \sum_{k=1}^{3} (L^k_0)^2 = 1.$$

Таким образом, $|L^0_0| \geqslant 1$; следовательно, $\det L$ и $(\operatorname{sign} L^0_0)$ являются непрерывными функциями переменных L^μ_ν, поэтому они должны быть константами на каждой компоненте группы Лоренца. Таким образом, каждое преобразование Лоренца содержится в одном из четырех кусков:

$$\begin{aligned}
&\text{I.} \ L^\uparrow_+ : \det L = +1, && \operatorname{sign} L^0_0 = +1,\\
&\text{II.} \ L^\uparrow_- : \det L = -1, && \operatorname{sign} L^0_0 = +1,\\
&\text{III.} \ L^\downarrow_+ : \det L = +1, && \operatorname{sign} L^0_0 = -1,\\
&\text{IV.} \ L^\downarrow_- : \det L = -1, && \operatorname{sign} L^0_0 = -1.
\end{aligned} \tag{6}$$

Преобразования $L \in L^\uparrow_+$ образуют подгруппу, которая называется *собственной ортохронной группой Лоренца.* Она является связной компонентой единицы (т. е. она состоит из всех преобразований Лоренца, которые могут быть достигнуты непрерывным образом из единичного элемента). Остальные компоненты не образуют подгрупп группы Лоренца.

Установим теперь связь между $L_+^\uparrow$ и группой SL(2, C) всех комплексных 2×2-матриц с единичным детерминантом. Пусть $\sigma = \{\sigma^\mu\}$ — множество четырех эрмитовых матриц вида

$$\sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \qquad (7)$$

Каждому четыре-вектору $x = (x^\mu) \in M$ сопоставляем эрмитову 2×2-матрицу X:

$$X = \sum_{\mu=0}^{3} x^\mu \sigma_\mu = \begin{bmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{bmatrix}. \qquad (8)$$

Отображение $x \to X$ линейно и взаимно-однозначно. В самом деле, используя формулу ($\tilde{\sigma}^\mu \equiv \sigma_\mu$)

$$\operatorname{Tr}(\tilde{\sigma}^\mu \sigma_\nu) = 2g^\mu_\nu,$$

каждой эрмитовой матрице X можем сопоставить вещественный четыре-вектор

$$x^\mu = \frac{1}{2} \operatorname{Tr}(X\sigma^\mu),$$

такой, что $X = x^\mu \sigma_\mu$.

Используя (8), получаем

$$\det X = x^\mu x_\mu, \qquad \frac{1}{2}[\det(X+Y) - \det X - \det Y] = x^\mu y_\mu. \qquad (9)$$

Теперь положим

$$\hat{X} = \Lambda X \Lambda^*, \qquad \Lambda \in \mathrm{SL}(2, C). \qquad (10)$$

Матрица $\hat{X}$ эрмитова. Поэтому соответствующий вектор $\hat{x}$ лежит в M. Следовательно, (10) определяет вещественное линейное отображение $\Lambda \to L_\Lambda$ из M в себя. Согласно (10), мы имеем $\Lambda_1\Lambda_2 \to L_{\Lambda_1\Lambda_2} = L_{\Lambda_1} L_{\Lambda_2}$. Более того, поскольку $\det \Lambda = 1$, то, согласно (8) и (10), мы получаем

$$\hat{x}_\mu \hat{x}_\mu = \det \hat{X} = \det X = x^\mu x_\mu.$$

Поэтому, согласно (9), преобразования L_Λ сохраняют скалярное произведение (1) и, следовательно, представляют собой преобразования Лоренца в M. В силу (3) $\det L_\Lambda$ равен $+1$ или -1. Если существовали бы элементы L_Λ как с детерминантом $+1$, так и с детерминантом -1, то множество всех элементов L_Λ было бы несвязным. Однако это невозможно, так как SL(2, C) связна и отображение $\Lambda \to L_\Lambda$ непрерывно. Следовательно, отображение λ: $\Lambda \to L_\Lambda$ является гомоморфизмом из SL(2, C) в $L_+^\uparrow$.

Покажем теперь, что гомоморфизм λ является отображением «два в один». Чтобы убедиться в этом, найдем ядро Z гомоморфизма λ. Оно состоит из всех Λ из SL(2, C), которые для любой эрмитовой матрицы X удовлетворяют равенству

$$X = \Lambda X \Lambda^*. \tag{11}$$

В частности, взяв $X = e = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, видим, что элементы $\Lambda \in Z$ удовлетворяют условию $\Lambda\Lambda^* = e$, т. е. $\Lambda = \Lambda^{-1}$. Таким образом, (11) приводит к соотношению

$$X\Lambda - \Lambda X = 0,$$

которое должно удовлетворяться для любого эрмитового X. Отсюда следует, что $\Lambda = \lambda I$. В силу условия $\det \Lambda = 1$ получаем, что $\Lambda = \pm I$. Следовательно, $L_{\Lambda_1} = L_{\Lambda_2}$ тогда и только тогда, когда $\Lambda_1 = \pm \Lambda_2$.

Группа SL(2, C) односвязна (теорема 3.7.1). Поэтому она является универсальной накрывающей группой для собственной группы Лоренца $L_+^\uparrow$. Обозначая инвариантную подгруппу в SL(2, C), состоящую из элементов I и $-I$, через Z, мы имеем

$$L_+^\uparrow = \mathrm{SL}(2, C)/Z. \tag{12}$$

В SL(2, C) существуют два автоморфизма, важные для приложений:

$$\Lambda \to (\Lambda^T)^{-1} \quad \text{и} \quad \Lambda \to \overline{\Lambda}. \tag{13}$$

Интересно, что первый автоморфизм имеет явную реализацию. В самом деле, если $\Lambda = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$, то матрица $\sigma_2 \Lambda (\sigma_2)^{-1} = \begin{bmatrix} \delta & -\gamma \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$ обратна $\Lambda^T = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix}$. Поэтому

$$(\Lambda^T)^{-1} = \sigma_2 \Lambda (\sigma_2)^{-1}. \tag{14}$$

Группа Пуанкаре

Заметим, что группа Лоренца оставляет инвариантным расстояние $(x - y)^2$ в пространстве Минковского. С другой стороны, трансляции $x^\mu \to x^\mu + a^\mu$, где a^μ — постоянный четыре-вектор, также оставляют инвариантным $(x - y)^2$. Это приводит к определению группы Пуанкаре Π как группы всех вещественных преобразований

$$x^\mu \to L^\mu_\nu x^\nu + a^\mu \tag{15}$$

в пространстве Минковского M, оставляющих инвариантным расстояние $(x - y)^2$.

Определение (15) дает следующий закон композиции для элементов группы Пуанкаре:

$$\{n_1, L_1\}\{n_2, L_2\} = \{n_1 + L_1 n_2, L_1 L_2\}. \tag{16}$$

Таким образом, Π является полупрямым произведением $N \rtimes L$ группы трансляций N и группы Лоренца L. Так же как и для группы Лоренца, Π имеет четыре куска, различаемых значениями $\det L$ и $\operatorname{sign} L_0^0$, а именно $\Pi_+^\uparrow$, $\Pi_-^\uparrow$, $\Pi_+^\downarrow$, $\Pi_-^\downarrow$.

Ниже мы рассматриваем неоднородную группу $\tilde{\Pi}$, соответствующую группе $\mathrm{SL}(2, C)$. Это полупрямое произведение $N \rtimes \mathrm{SL}(2, C)$, определенное следующим законом композиции:

$$\{n_1, \Lambda_1\}\{n_2, \Lambda_2\} = \{n_1 + L_{\Lambda_1} n_2, \Lambda_1 \Lambda_2\}. \tag{17}$$

Напомним, что в полупрямом произведении $N \rtimes S$ топология определяется топологией декартового произведения $N \times S$ групповых пространств N и S (гл. 3, § 4). Таким образом, поскольку N и $\mathrm{SL}(2, C)$ односвязны, полупрямое произведение $\tilde{\Pi} = N \rtimes \mathrm{SL}(2, C)$ также односвязно. В силу связи между $\mathrm{SL}(2, C)$ и собственной ортохронной группой Лоренца $L_+^\uparrow$ видим, что $\tilde{\Pi}$ — универсальная накрывающая группа группы $\Pi_+^\uparrow$. Более того, поскольку N и $\mathrm{SL}(2, C)$ действуют в N посредством унимодулярных преобразований, то в силу теоремы 3.10.5 группа $\tilde{\Pi}$ также унимодулярна. В дополнение в силу (3.10.16) произведение инвариантных мер на N и $\mathrm{SL}(2, C)$ дает инвариантную меру $\mu(\cdot)$ на $\tilde{\Pi}$, т. е.

$$d\mu(\{n, \Lambda\}) = d\sigma(n)\, d\nu(\Lambda) =$$
$$= d^4 n \frac{d\beta d\gamma d\delta d\bar{\beta} d\bar{\gamma} d\bar{\delta}}{|\delta|^2}, \quad n \in N, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \in \mathrm{SL}(2, C)$$

[см. (2.3.9)]. (18)

Б. *Классификация орбит*

Подгруппа трансляций $N = \{(n, I)\}$ является некомпактной векторной группой. Поэтому соответствующая дуальная группа $\hat{N}$ может быть отождествлена с N. Каждому $\hat{n} = (\hat{n}_0, \hat{n}_1, \hat{n}_2, \hat{n}_3) \in \hat{N}$ соответствует характер, задаваемый формулой

$$\langle n, \hat{n} \rangle = \exp[i(n_0 \hat{n}_0 - n_1 \hat{n}_1 - n_2 \hat{n}_2 - n_3 \hat{n}_3)] = \exp(i n^\mu \hat{n}_\mu). \tag{19}$$

Действие SL(2, C) в $\widehat{N}$ по формулам (17) и (5) следует из равенства

$$\langle L_\Lambda n, \widehat{n}\rangle = \exp\left(\mathrm{i} L^{\mu}_{\Lambda\nu} n^{\nu} \widehat{n}_{\mu}\right) = \exp\left[\mathrm{i} n^{\nu} (L^T_\Lambda)^{\mu}_{\nu} \widehat{n}_{\mu}\right] = \langle n, L^{-1}_\Lambda \widehat{n}\rangle, \tag{20}$$

т. е.

$$\widehat{n} \to L^{-1}_\Lambda \widehat{n}, \tag{21}$$

где $\Lambda \in$ SL(2, C) и $L^{-1}_\Lambda \in L^{\uparrow}_{+}$. Таким образом, группа SL(2, C) действует в дуальном пространстве $\widehat{N}$ таким же образом, как и в N. Следовательно, множество всех $L_\Lambda \widehat{n}_0$ для заданного $\widehat{n}_0 \in \widehat{N}$ и всех $L_\Lambda \in L^{\uparrow}_{+}$ образует орбиту $\widehat{O}$, соответствующую характеру $\widehat{n}_0$. Это означает, что каждая орбита содержится в одном из гиперболоидов

$$\widehat{n}_0^2 - \widehat{n}_1^2 - \widehat{n}_2^2 - \widehat{n}_3^2 = m^2, \tag{22}$$

где m^2 — любое вещественное число.

Если $m^2 > 0$, то (22) описывает двухполостный гиперболоид (фиг. 1, *а*). Верхняя пола $\widehat{O}^{+}_{m}$ и нижняя пола $\widehat{O}^{-}_{m}$ в отдельности представляют орбиты относительно $L^{\uparrow}_{+}$. Если $m^2 < 0$, то (22) определяет однополостный гиперболоид в $\widehat{N}$ (фиг. 1, *б*).

Наконец, если $m^2 = 0$, то (22) описывает конус, который состоит из трех орбит: $\widehat{O}^{+}_{0}$ — верхний конус, $\widehat{O}^{0}_{0}$ состоит только из точки (0, 0, 0, 0) и $\widehat{O}^{-}_{0}$ — нижний конус (фиг. 1, *в*).

Таким образом, мы имеем шесть типов орбит

1° $\widehat{O}^{+}_{m}: \widehat{n}_0^2 - \widehat{n}_1^2 - \widehat{n}_2^2 - \widehat{n}_3^2 = m^2, \quad m > 0,\ \widehat{n}_0 > 0,$

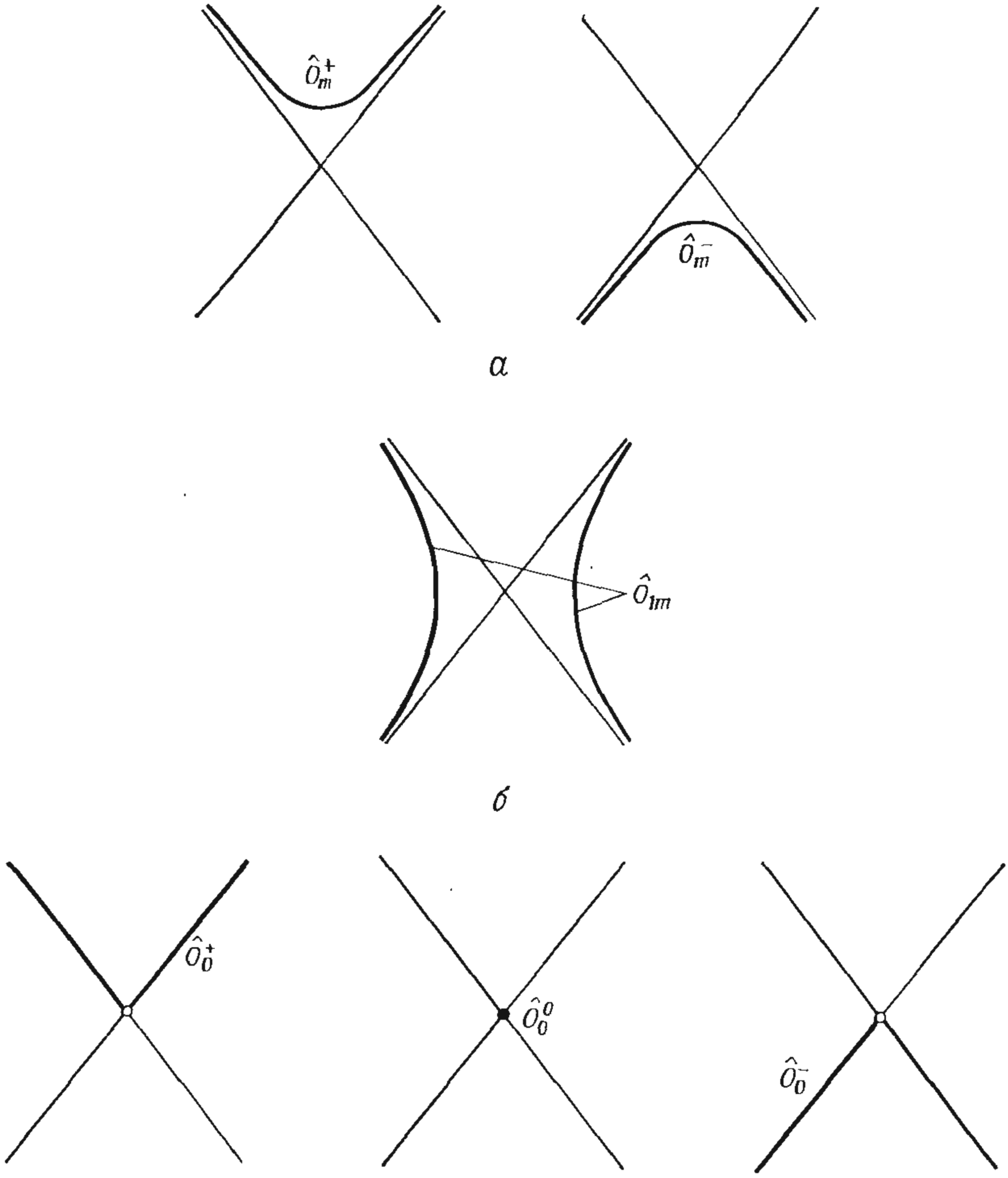
2° $\widehat{O}^{-}_{m}: \widehat{n}_0^2 - \widehat{n}_1^2 - \widehat{n}_2^2 - \widehat{n}_3^2 = m^2, \quad m > 0,\ \widehat{n}_0 < 0,$

3° $\widehat{O}_{im}: \widehat{n}_0^2 - \widehat{n}_1^2 - \widehat{n}_2^2 - \widehat{n}_3^2 = -m^2, \quad m > 0,$

4° $\widehat{O}^{+}_{0}: \widehat{n}_0^2 - \widehat{n}_1^2 - \widehat{n}_2^2 - \widehat{n}_3^2 = 0, \quad m = 0,\ \widehat{n}_0 > 0,$

5° $\widehat{O}^{-}_{0}: \widehat{n}_0^2 - \widehat{n}_1^2 - \widehat{n}_2^2 - \widehat{n}_3^2 = 0, \quad m = 0,\ \widehat{n}_0 < 0,$

6° $\widehat{O}^{0}_{0}$: точка $0 = (0, 0, 0, 0), \quad m = 0.$



Фиг. 1.

В. *Классификация неприводимых унитарных представлений*

Прежде всего проверим, что группа Пуанкаре $\widetilde{\Pi} = N \rtimes SL(2, C)$ в самом деле является регулярным полупрямым произведением, которое определено выше, т. е. что существует счетное семейство Z борелевых подмножеств $Z_1, Z_2, \ldots$ в $\widehat{N}$, являющихся объединениями орбит, таких, что каждая орбита в $\widehat{N}$ представляет собой пересечение подсемейства $Z_{n_1}, Z_{n_2}, \ldots$ множеств, содержащих эту орбиту. Используя классификацию орбит из раздела Б, мы легко можем построить семейство Z. В самом деле, рассмотрим семейство подмножеств дуального пространства $\widehat{N}$, состоящее из следующих множеств:

1) $\widehat{O}_0^0$, $\widehat{O}_0^+$ и $\widehat{O}_0^-$;

2) $Z_m^+(r_1, r_2)$ — объединение всех орбит $\widehat{O}_m^+$ с $r_1 < m < r_2$, где r_1, r_2 $(r_1 < r_2)$ — любые положительные рациональные числа;

3) множества $Z_m^-(r_1, r_2)$ и $Z_{im}(r_1, r_2)$, определенные таким же образом, как $Z_m^+(r_1, r_2)$.

Счетное семейство множеств (1), (2) и (3) удовлетворяет всем условиям, наложенным на семейство Z. Таким образом, группа Пуанкаре $\widetilde{\Pi}$ является регулярным полупрямым произведением. Следовательно, для классификации неприводимых унитарных представлений группы $\widetilde{\Pi}$ мы можем непосредственно применить общий формализм индуцированных представлений, развитый в § 1 для регулярных полупрямых произведений. Перечислим теперь классы неприводимых унитарных представлений группы Пуанкаре $\widetilde{\Pi}$, соответствующие каждому типу орбит.

1° $\widehat{O}_m^+$. Представителем этой орбиты является характер $\widehat{n}_0 = (m, 0, 0, 0)$, $m > 0$. Стационарной подгруппой $S_{\widehat{O}_m^+}$ точки $\widehat{n}_0$ является унитарная группа SU(2). Группа SU(2) имеет неприводимые унитарные представления $L^j \equiv D^j$ размерности $2j + 1$, $j = 0, {}^1/_2, 1, {}^3/_2, \ldots$. Поэтому соответствующие представления $U^{\widehat{n}L^j}$ группы $\widetilde{\Pi}$, индуцированные этими неприводимыми представлениями D^j подгруппы SU(2), будут обозначаться двумя параметрами m и j. В физике частиц эти параметры могут отождествляться с общей массой и общим спином стабильной свободной системы (раздел Г). Неприводимые индуцированные представления $U^{\widehat{n}L}$ мы обозначим символом $U^{m,+,j}$.

2° $\widehat{O}_m^-$. Возьмем $\widehat{n}_0 = (-m, 0, 0, 0)$. Тогда стационарной подгруппой характера $\widehat{n}_0$ снова является SU(2). Таким образом, мы снова получаем серию индуцированных неприводимых унитарных представлений $U^{m,-,j}$ группы $\widetilde{\Pi}$, обозначенных массой m и спином $j = 0, {}^1/_2, 1, {}^3/_2, \ldots$. В физической идентификации $U^{m,\pm,j}$ знак $\pm$ соответствует знаку энергии.

3° $\widehat{O}_{im}$. Мы можем выбрать характер $\widehat{n}_0 = (0, m, 0, 0)$. Соответствующая $\widehat{n}_0$ эрмитова 2×2-матрица (8) имеет вид

$$\widehat{n}_0 = m \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = mi\sigma_2.$$

Таким образом, стационарная подгруппа $S_{\hat{O}}$ состоит из всех матриц $g \in \mathrm{SL}(2, C)$, удовлетворяющих условию

$$\sigma^2 = \Lambda\sigma_2\Lambda^* \quad \text{или} \quad (\sigma_2)^{-1}\Lambda\sigma_2 = (\Lambda^*)^{-1}. \tag{23}$$

Поскольку $(\sigma_2)^{-1} = \sigma_2$, (14) и (23) означают, что $(\Lambda^T)^{-1} = (\Lambda^*)^{-1}$, т. е. $\Lambda = \overline{\Lambda}$. Следовательно, стационарная подгруппа любой орбиты $\hat{O}_{im}$ является группой вещественных унимодулярных 2×2-матриц, т. е. $\mathrm{SL}(2, R)$.

Группа $\mathrm{SL}(2, R)$ имеет три серии унитарных неприводимых представлений.

1. Основная серия $D^{i\sigma, \varepsilon}$, σ вещественно, ε равно 0 или 1. Мы явно построили эту серию представлений в примере 16.1.2. Представления $D^{i\sigma, \varepsilon}$ и $D^{-i\sigma, \varepsilon}$ эквивалентны.

2. Дискретная серия D^n, $n = 0, 1, 2, \dots$. Эти представления можно реализовать в гильбертовом пространстве H^n комплексных функций, определенных на верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$. Скалярное произведение в H^n задается формулой [1])

$$(u, v) = \frac{i}{2\pi\Gamma(n)} \int\limits_{\operatorname{Im} x > 0} u(z)\overline{v(z)}(\operatorname{Im} z)^{n-1}\, dz d\overline{z}, \quad n = 0, 1, 2, \dots . \tag{24}$$

Если $g = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \in \mathrm{SL}(2, R)$, то

$$(D_g^n u)(z) = (\beta z + \delta)^{-n-1} u\left(\frac{\alpha z + \gamma}{\beta z + \delta}\right). \tag{25}$$

Эта дискретная серия имеет представления двух типов $D^{n,+}$ и $D^{n,-}$, в которых спектр компактного генератора ограничен снизу и сверху соответственно (упражнение 11.10.7.6).

3. Дополнительная серия представлений D^ρ, $-1 < \rho < 1$, $\rho \neq 0$. Они могут быть реализованы в гильбертовом пространстве H^ρ функций, определенных на вещественной прямой, со скалярным произведением

$$(u, v) = \frac{\Gamma}{\Gamma(-\rho)} \int\limits_{R^1 \times R^1} |x_1 - x_2|^{-1-\rho} u(x_1) v(x_2)\, dx_1\, dx_2. \tag{26}$$

Действие D^ρ в H^ρ задается формулой

$$(L_g^\rho u)(x) = |\beta x + \delta|^{\rho-1} u\left(\frac{\alpha x + \gamma}{\beta x + \delta}\right) \tag{27}$$

(упражнение 16.4.1.5).

---

[1]) При $n = 0$ мы имеем $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} y_+^{\varepsilon-1}/\Gamma(\varepsilon) = \delta(y)$. Поэтому скалярное произведение (24) принимает вид $(u, v) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(x)\overline{v(x)}\, dx$. Заметим, что D^0 приводимо.

Каждой серии этих неприводимых представлений $D^{\mathrm{i}\sigma,\,\varepsilon}$, $D^{n,\,\pm}$ и D^{ρ} группы SL(2, R) и заданной орбите $\hat{O}_{\mathrm{i}m}$ соответствуют неприводимые унитарные представления $U^{\mathrm{i}m,\,\mathrm{i}\sigma,\,\varepsilon}$, $U^{\mathrm{i}m,\,n,\,\pm}$ и $U^{\mathrm{i}m,\,\rho}$ группы Пуанкаре $\widetilde{\Pi}$. Изолированные свободные квантовые системы с мнимыми массами не известны, но могут быть построены двухчастичные состояния с общей мнимой массой, если одна из частиц имеет пространственноподобный импульс. Эти представления находят некоторые приложения в гармоническом анализе амплитуд рассеяния (гл. 21, § 6).

4° $\hat{O}_0^+$. Мы можем выбрать характер $\hat{n}_0 = (^1/_2,\ 0,\ 0,\ ^1/_2)$. Тогда соответствующей 2×2-матрицей является $n_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Условие $\Lambda\hat{n}_0\Lambda^* = \hat{n}_0$ означает

$$\begin{bmatrix} \alpha\bar{\alpha} & \alpha\bar{\gamma} \\ \bar{\alpha}\gamma & \gamma\bar{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

что дает $a = \exp(\mathrm{i}\theta)$, $\gamma = 0$ и β — произвольное комплексное число. Таким образом, стационарная подгруппа $S_{\hat{O}_0^+}$ точки $\hat{n}_0$ состоит из всех 2×2-матриц вида

$$\begin{bmatrix} \exp(\mathrm{i}\theta) & z \\ 0 & \exp(-\mathrm{i}\theta) \end{bmatrix}, \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad z \in C^1. \tag{28}$$

Группа $S_{\hat{O}_0^+}$ фактически изоморфна полупрямому произведению. Чтобы убедиться в этом, запишем произвольный элемент $k \in S_{\hat{O}_0^+}$ в виде

$$k = \begin{bmatrix} \exp\left(\mathrm{i}\,\frac{\theta}{2}\right) & \exp\left(-\frac{\mathrm{i}\theta}{2}\right) z \\ 0 & \exp\left(-\frac{\mathrm{i}\theta}{2}\right) \end{bmatrix}, \quad \theta \in [0, 4\pi]. \tag{29}$$

Тогда произведение $k_1 \cdot k_2$, $k_1, k_2 \in S_{\hat{O}_0^+}$, задается формулой

$$k_1k_2 = \begin{bmatrix} \exp\left[\frac{\mathrm{i}\,(\theta_1+\theta_2)}{2}\right] & \exp\left[-\frac{\mathrm{i}\,(\theta_1+\theta_2)}{2}\right](z_1 + \exp(\mathrm{i}\theta_1)\,z_2) \\ 0 & \exp\left[-\frac{\mathrm{i}\,(\theta_1+\theta_2)}{2}\right] \end{bmatrix}.$$

Если положить $k = (z, \theta)$, то закон композиции будет иметь вид

$$(z_1, \theta_1)(z_2, \theta_2) = (z_1 + \exp(\mathrm{i}\theta_1)\,z_2,\ \theta_1 + \theta_2). \tag{30}$$

Это показывает, что $S_{\hat{O}_0^+}$ в действительности является полупрямым произведением $T^2 \rtimes S^1$ двумерной группы трансляций $T_2 =$

$=\{(z, 0)\}$ и группы вращений $S^1=\{(0, \theta)\}$. Заметим, что закон композиции (30) в полупрямом произведении $T^2 \rtimes S^1$ такой же, как и в группе движений двумерной евклидовой плоскости, т. е. в $T^2 \rtimes O(2)$. Однако в настоящем случае $(0, 2\pi) \neq (0, 0)$ и только $(0, 4\pi)=0$ (т. е. $T^2 \rtimes S^1$ дважды накрывает евклидову группу).

Поскольку T^2 — некомпактная векторная группа, дуальная группа $\widehat{T}^2$ может быть отождествлена с T^2. Каждый характер $\widehat{z} \in \widehat{T}^2$ задается формулой

$$\langle z, \widehat{z}\rangle = \exp[\mathrm{i}(x\widehat{x}+y\widehat{y})], \quad z=(x, y), \quad \widehat{z}=(\widehat{x}, \widehat{y}). \tag{31}$$

Действие S^1 в T^2 такое:

$$(0, \theta)(z, 0)(0, -\theta)=(\exp(\mathrm{i}\theta)z, 0),$$

т. е. оно порождает вращение в T^2 на угол θ. Поэтому, согласно (31), действие S^1 в дуальном пространстве имеет вид $\widehat{z} \to \exp(\mathrm{i}\theta)\,\widehat{z}$. Орбитами служат окружности в комплексной плоскости $\widehat{T}^2$ с центром $0=(0, 0)$ радиуса $r \geqslant 0$. Следовательно, мы можем различать два вида орбит.

1) $r=0$. В этом случае стационарная подгруппа совпадает с S^1. Неприводимые представления подгруппы S^1 одномерны: $\theta \to \exp(\mathrm{i}j\theta)$, $j=0, \pm{}^1/_2, \pm 1, \ldots$. Представления $\theta \to \exp(\mathrm{i}j\theta)$ и $\theta \to \exp(-\mathrm{i}j\theta)$ эквивалентны, но не унитарно эквивалентны. Эквивалентность задается антиунитарным преобразованием V: $u \to \bar{u}$ пространства $H=C^1$. Неприводимые представления группы $S_{\widehat{O}_0^+}=T^2 \rtimes S^1$, индуцированные одномерными представлениями подгруппы S^1, обозначим символами L^j и L^{-j} соответственно. Представления L^j, $j=0, \pm{}^1/_2, \pm 1, \ldots$, приводят к серии неприводимых унитарных индуцированных представлений группы $\widetilde{\Pi}$. Обозначим их символом $U^{0, +; j}$.

2) $r>0$. Выберем $\widehat{z}_0=(r, 0)$. Стационарная подгруппа точки $\widehat{z}_0$ совпадает с центром $Z=\{I, -I\}$ группы $SL(2, C)$. Эта группа имеет два неприводимых унитарных представления. Поэтому получаем две серии $L^{r, \varepsilon}$, $r>0$, ε равно 0 или 1, неприводимых унитарных представлений группы $S_{\widehat{O}_0^+}$, индуцированных одномерными неприводимыми представлениями подгруппы Z. Следовательно, мы получили две серии неприводимых представлений группы $\widetilde{\Pi}$, индуцированных представлениями $L^{r, \varepsilon}$ подгруппы $S_{\widehat{O}_0^+}$. Обозначим их символами $U^{0, +; r, \varepsilon}$, $r>0$, $\varepsilon=0,1$.

5° $\widehat{O}_0^-$. Классификация неприводимых унитарных представлений группы $\widetilde{\Pi}$, соответствующих этой орбите, производится параллельно классификации в случае 4°. Мы получаем три новых серии неприводимых унитарных представлений группы $\tilde{\Pi}$, которые обозначим символами $U^{0,-;\,j}$, $U^{0,-;\,r,\,\varepsilon}$, $r > 0$, $\varepsilon = 0{,}1$.

6° $\hat{O}_0^0$. В этом случае стационарная подгруппа орбиты $\hat{O}_0^0 = (0, 0, 0, 0)$ совпадает со всей группой $\mathrm{SL}(2, C)$. Неприводимые унитарные представления группы $\tilde{\Pi}$, соответствующие этой орбите, совпадают со всеми неприводимыми унитарными представлениями подгруппы $\mathrm{SL}(2, C)$, *«поднятыми»* до группы $\tilde{\Pi}$. Полная классификация этих представлений дана в гл. 19, § 1 и 2. Группа $\mathrm{SL}(2, C)$ имеет основную и дополнительную серии неприводимых унитарных представлений. Представления основной серии обозначаются двумя числами $i\rho$ и j, $\rho \geqslant 0$, $j = 0, {}^1/_2, 1, {}^3/_2, \ldots$. Представления дополнительной серии обозначаются одним вещественным числом ρ, $-1 < \rho < 1$, $\rho \neq 0$. Соответствующие представления группы $\tilde{\Pi}$, индуцированные неприводимыми представлениями основной и дополнительной серий, обозначаются символами $U^{0,\,i\rho,\,j}$ и $U^{0,\,\rho}$ соответственно.

Таким образом, мы имеем следующие серии неприводимых унитарных представлений группы Пуанкаре $\tilde{\Pi}$, сопоставляемых с орбитами 1° — 6° (первый верхний индекс характеризует орбиту $\hat{O}$, т. е. массу и знак энергии, а второй характеризует неприводимые унитарные представления стационарной подгруппы орбиты $\hat{O}$):

1° $\quad U^{m,+;\,j}$, $m > 0$, $\hat{n}_0 > 0$, $j = 0, {}^1/_2, 1, \ldots$,

2° $\quad U^{m,-;\,j}$, $m > 0$, $\hat{n}_0 < 0$, $j = 0, {}^1/_2, 1, \ldots$,

3° $\quad U^{im;\,i\sigma\,\varepsilon}$, $m > 0$, $\sigma \geqslant 0$, $\varepsilon = 0, 1$,

$\quad U^{im;\,n,\,\pm}$, $m > 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$,

$\quad U^{im;\,\rho}$, $m > 0$, $-1 < \rho < 1$, $\rho \neq 0$,

4° $\quad U^{0,+;\,j}$, $m = 0$, $\hat{n}_0 > 0$, $j = 0, \pm{}^1/_2, \pm 1, \ldots$,

$\quad U^{0,+;\,r,\,\varepsilon}$, $m = 0$, $\hat{n}_0 > 0$, $r > 0$, $\varepsilon = 0, 1$,

5° $\quad U^{0,-;\,j}$, $m = 0$, $\hat{n}_0 < 0$, $j = 0, \pm{}^1/_2, \pm 1, \ldots$,

$\quad U^{0,-;\,r,\,\varepsilon}$, $m = 0$, $\hat{n}_0 < 0$, $r > 0$, $\varepsilon = 0, 1$,

6° $\quad U^{0,0;\,i\rho,\,j}$, $m = 0$, $\hat{n}_0 = 0$, $\rho \geqslant 0$, $j = 0, {}^1/_2, 1, \ldots$,

$\quad U^{0,0;\,\rho}$, $m = 0$, $\hat{n}_0 = 0$, $-1 < \rho < 1$, $\rho \neq 0$.

Г. *Явная реализация неприводимых представлений* ($m > 0$)

Выведем теперь явные формулы для унитарных операторов $U_g^{m,+;j}$, $g \in \tilde{\Pi}$, и рассмотрим физическую идентификацию этих представлений.

Стационарной подгруппой орбиты $\hat{O}_m^+$ является группа $K = T^4 \rtimes SU(2)$. Согласно леммам 1.2 и 1.3, неприводимые унитарные представления подгруппы $T^4 \rtimes SU(2)$ имеют вид

$$k = (a, r) \to L_k^j = L_{(a, r)}^j = \exp(i\overset{\circ}{p}a) D^j (r), \tag{31}$$

где $\overset{\circ}{p} = (m, 0, 0, 0)$, а D^j — унитарное неприводимое представление подгруппы SU(2), полученное в упражнении 5.8.1. Действие $U_g^{m,+;j}$ в пространстве $H^{m,+;j}$ задается формулой (16.1.47). Поэтому для завершения построения операторов $U_g^{m,+;j}$ нам следует найти оператор $L_{k_{g_0^{-1}s_g}}^{-1}$. Заметим прежде всего, что в силу разложения Картана (3.6.17) каждый элемент из SL(2, C) имеет разложение

$$\Lambda = \Lambda_p r, \tag{32}$$

где

$$\Lambda_p = \begin{bmatrix} \lambda & z \\ 0 & \lambda^{-1} \end{bmatrix}, \quad \lambda \in R, \quad z \in C, \quad r \in SU(2), \tag{33}$$

(упражнение 3). В силу (10) мы имеем

$$\hat{p} = \begin{bmatrix} p_0 - p_3 & p_2 + ip_1 \\ p_2 - ip_1 & p_0 + p_3 \end{bmatrix} = \Lambda\hat{\overset{\circ}{p}}\Lambda^* = \Lambda_p\hat{\overset{\circ}{p}}\Lambda_p^*. \tag{34}$$

Поэтому Λ_p имеет смысл чисто лоренцевых преобразований, которые преобразуют $\overset{\circ}{p}$ в p. Используя отображение $\Lambda \to L_\Lambda$ из SL(2, C) на группу Лоренца SO(3, 1), мы можем записать (34) в виде

$$p = L_\Lambda \overset{\circ}{p} = L_{\Lambda_p} L_r \overset{\circ}{p} = L_{\Lambda_p}\overset{\circ}{p}. \tag{35}$$

Используя (34) и (33), находим, что явное соответствие между элементами Λ_p и p задается уравнениями

$$\begin{aligned} p_0 &= \frac{m}{2}(\lambda^{-2} + \lambda^2 + |z|^2), \\ p_3 &= \frac{m}{2}(\lambda^{-2} - \lambda^2 - |z|^2), \\ p_2 - ip_1 &= \frac{m}{2}\lambda^{-1}\bar{z}. \end{aligned} \tag{36}$$

Эти уравнения дают явное соответствие между элементами множества S из разложения Макки $G = SK$ и однородного пространства $\dot{O}_m^+$. Учитывая, что $\Lambda_p = s_g$, получаем

$$g_0^{-1}s_g = (a_0, \Lambda_0)^{-1}(0, \Lambda_p) = (-L_{\Lambda_0}^{-1}a_0, \Lambda_0^{-1})(0, \Lambda_p) =$$
$$= (-L_{\Lambda_0}^{-1}a, \Lambda_0^{-1}\Lambda_p) = (0, \Lambda_{L_{\Lambda_0}^{-1}p})(-L_{L_{\Lambda_0}^{-1}p}^{-1}L_{\Lambda_0}^{-1}a_0, \Lambda_{L_{\Lambda_0}^{-1}p}^{-1}\Lambda_0^{-1}\Lambda_p).$$

Поэтому

$$k_{g_0^{-1}s_g} = (-L_{L_{\Lambda_0}^{-1}p}^{-1}L_{\Lambda_0}^{-1}a_0, \Lambda_{L_{\Lambda_0}^{-1}p}^{-1}\Lambda_0^{-1}\Lambda_p). \tag{37}$$

Учитывая, что $L_{\Lambda_p}\overset{\circ}{p} = p$ и $(L_\Lambda p, L_\Lambda a) = (p, a)$, для представления (31) получаем

$$L_{k_{g_0^{-1}s_g}}^{-1} = \exp[ipa]\, D^j(\Lambda_p^{-1}\Lambda_0\Lambda_{L_{\Lambda_0}^{-1}p}). \tag{38}$$

Положив $r_{\Lambda_0} = \Lambda_p^{-1}\Lambda_0\Lambda_{L_{\Lambda_0}^{-1}p}$ и заметив, что производная Радона — Никодима равна единице, в силу (16.1.47) мы, наконец, получаем формулу

$$U_{(a,\Lambda)}^{m,+;j}u(p) = \exp[ipa]\, D^j(r_\Lambda)\, u(L_\Lambda^{-1}p). \tag{39}$$

Напомним, что $u(p)$ является векторнозначной функцией из $\hat{O}_m^+$ в $(2j+1)$-мерное векторное пространство H представления D^j подгруппы SU(2): $u(p) = \{u_n(p)\}$, $n = -j, -j+1, \ldots$ $\ldots, j-1, j$. В компонентах формула (39) может быть записана в виде

$$(U_{(a,\Lambda)}^{m,+;j}u)_n(p) = \exp(ipa)\, D_{nn'}^j\left(\Lambda_p^{-1}\Lambda\Lambda_{L_\Lambda^{-1}p}\right)u_{n'}(L_\Lambda^{-1}p). \tag{40}$$

Представление D^j подгруппы SU(2) может быть расширено до представления $D^{(j,0)}$ группы SL(2, C). Используя мультипликативные свойства матриц $D^{(j,0)}$ и введя так называемый спинорный базис $v_l(p) = D_{ll'}^{(j,0)}(\Lambda_p)\, u_{l'}(p)$, формулу (40) можем также записать в более простом виде

$$(U_{(a,\Lambda)}^{m,+;j}v)_l(p) = \exp(ipa)\, D_{ll'}^{(j,0)}(\Lambda)\, v_{l'}(L_\Lambda^{-1}p). \tag{41}$$

Функции $\{u_n(p)\}_{n=-j}^{j} \in H^{m,+;j}$ можно отождествить с волновыми функциями свободной физической системы со спином j и массой m. В самом деле, в системе покоя $(p = \overset{\circ}{p})$ при вращениях $(0, r) \in$ SU(2) формула (40) дает

$$(U_{(0,r)}^{m,+;j}u_n)(\overset{\circ}{p}) = D_{nn'}^j(r)\, u_{n'}(\overset{\circ}{p}), \tag{42}$$

т. е. множество $\{u_n(\overset{\circ}{p})\}$ преобразуется в системе покоя по спинорным представлениям D^j. Конечно, это свойство свободной физической системы, имеющей полный спин j. Число n, $n = -j$,

$-j+1, \ldots, j-1, j$ в системе покоя представляет проекцию спина на заданную ось квантования.

Далее, беря однопараметрические подгруппы вида $a_\mu(t) = (a_\mu(t), I)$, $\mu = 0, 1, 2, 3$, и используя (40), рассмотрим генераторы трансляций. Находим

$$(P_\mu u)_n(p) = p_\mu u_n(p). \tag{43}$$

Таким образом, для массового оператора $M = \sqrt{P_\mu P^\mu}$ получаем

$$M u_n(p) = \sqrt{(p_0^2 - \boldsymbol{p}^2)}\, u_n(p) = m u_n(p). \tag{44}$$

Уравнения (42) и (44) показывают, что множество $\{u_n(p)\}$ описывает физическую систему с массой покоя m и спином j.

Если j — целое число, то представление $U^{m,+;j}$ группы $\tilde{\Pi}$ также является представлением собственной группы Пуанкаре $\Pi_+^\uparrow$. Однако если j — половина нечетного целого числа, то представление (40) становится двузначным представлением группы $\Pi_+^\uparrow$. Это следует из того факта, что для таких j представление $\tilde{D}^j$ группы SO(3) становится двузначным. (См. групповое расширение с помощью четности, гл. 21, § 4).

Для полноты заметим, что утверждение 16.1.3 дает полное описание структуры элементов $u(p) = \{u_n(p)\}$ пространства $H^{m,+;j}$. В самом деле, пространство $H^{m,+;j}$ натягивается на векторы вида

$$u(p) = \sum_{n=-j}^{j} u_n(p) Y_n^j, \quad u_n(p) \in C_0(\hat{O}_m^+), \tag{45}$$

где Y_n^j — базисные векторы пространства H^j представления D^j стационарной подгруппы SU(2). Мы показали, что Y_n^j представляются однородными полиномами порядка $2j$ в виде

$$Y_n^j(\xi_1, \xi_2) = \frac{\xi_1^{j+n}\xi_2^{j-n}}{\sqrt{[(j+n)!\,(j-n)!]}}, \tag{46}$$

где $\xi_1, \xi_2 \in C^1$ (упражнение 8.9.2.1). Функции $\{Y_n^j\}$, $n = -j, -j+1, \ldots, j-1, j$, называются спинорами порядка $2j$. Действие неприводимого представления D^j группы SU(2) в пространстве H^j задается формулой

$$(D^j(r) Y^j)_n(\xi_1, \xi_2) = D^j_{n'n}(r) Y^j_{n'}(\xi_1, \xi_2). \tag{47}$$

Элементарные системы

Рассмотрим наибольшие группы симметрий, соответствующие геометрическим преобразованиям пространства-времени (с фиксированными масштабами): группу Галилея или группу Пуанкаре. Все преобразования этих групп имеют физическую геометрическую интерпретацию:

а) пространственные и временные сдвиги (перемещения системы координат);

б) вращения и отражения;

в) преобразования, которые дают системе скорость («бусты»).

Изолированная система должна допускать эквивалентные описания при преобразованиях из группы Пуанкаре. Следовательно, мы можем определить *элементарные системы*, конкретное гильбертово пространство которых является пространством одного неприводимого представления полной группы Пуанкаре П. Элементарная система характеризуется инвариантами группы П: массой (m^2) и спином ($j\,(j+1)$) или спиральностью. Собственные значения перемещений обозначаются через $|\,p_\mu;\ \sigma\rangle$, $\sigma\equiv\{j,\,n\}$. Состояния в системе покоя $|\,p_0,\ \boldsymbol{p}=0,\,\sigma\rangle$ инвариантны относительно вращений, и передача скорости производится преобразованием

$$|\,p_\mu;\ \sigma\rangle=\exp(\mathrm{i}\xi\boldsymbol{M})\,|\,p_0,\ \boldsymbol{p}=0,\ \sigma\rangle$$

для каждого фиксированного ξ. Здесь $\boldsymbol{M}$ — генераторы чисто лоренцевых преобразований в системе покоя, и для массивных частиц

$$\xi=\hat{\boldsymbol{p}}\,\mathrm{ch}^{-1}\frac{p_0}{m}=\hat{\boldsymbol{p}}\,\mathrm{sh}^{-1}\frac{p}{m},\qquad p=\sqrt{\boldsymbol{p}^2},\qquad \hat{\boldsymbol{p}}=\frac{\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{p}|}.$$

Под внешним воздействием элементарная система может раскрыть более сложную внутреннюю структуру. Мы можем дать рабочее определение элементарной частицы. Для этого сначала скажем, что элементарные системы являются *связанными*, если физические взаимодействия могут связать гильбертовы пространства $H^{m_1,\,+;\,j_1}$ и $H^{m_2,\,+;\,j_2}$ двух систем. Например, связь состояний $1s$ и $2p$ атома водорода фотопоглощением или связь состояний нейтрона и протона β-распадом.

Определение. *Элементарная частица* — это элементарная система, состояния которой никаким образом не могут быть физически связаны с состояниями других систем. Ее гильбертово пространство изолировано, т. е. состояния одной элементарной частицы $|\,1\rangle$ не образуют линейного пространства с состояниями другой системы $|\,2\rangle$, т. е. суперпозиция $|\,1\rangle+|\,2\rangle$ физически бессмысленна. Единственным эффектом, оказываемым внешними взаимодействиями на элементарную частицу, является изменение состояния *внутри* неприводимого представления, т. е. изменение импульса и проекции спина.

Отсюда следует, что элементарная частица может иметь только те внутренние квантовые числа, для которых существуют абсолютные правила суперотбора.

Такое рабочее определение элементарной частицы отражает зависимость понятия элементарности от природы взаимодействий, как это и должно быть. Ясно, что в кинетической теории газов, например, молекулы являются элементарными частицами, если при рассматриваемых процессах внутренняя структура молекулы не возбуждается и не существует никакой связи с другими частями гильбертова пространства. Подобным образом, ядра являются элементарными частицами в атомных явлениях и т. д.

Как мы делали в предыдущем параграфе, «измерение» на элементарной частице будет описываться с помощью вершины взаимодействия с константной связи λ:

$$M = \lambda \langle p', \sigma' | T | p, \sigma \rangle = \lambda \langle \overset{0}{p} \sigma' | \exp(-\mathrm{i}\xi' \cdot \boldsymbol{M}) T \exp(\mathrm{i}\xi \cdot \boldsymbol{M}) | \overset{0}{p} \sigma \rangle.$$

Здесь m и j фиксированы в обеих сторонах, а T — общий тензорный оператор, который представляет внешний фактор.

Использование группы Пуанкаре в определении элементарной системы включает в себя плоское пространство Минковского в качестве физического пространства. Если мы изменим топологию пространства или его метрику, или и то и другое, то группа движений также изменится. Например, асимптотически плоское пространство общей теории относительности приводит к группе Бонди — Мелцнера — Сакса, которая является полупрямым произведением бесконечной абелевой группы с $SL(2, C)$, и можно было бы основывать понятие элементарной частицы на представлениях этой группы.

§ 3. Представление расширенной группы Пуанкаре

Проанализируем теперь свойства представлений группы Пуанкаре, включающей пространственные и временное отражения. Пусть I обозначает оператор обращения пространства P или времени T в гильбертовом пространстве H унитарного представления U группы Пуанкаре, и пусть $\hat{I}$, $\hat{P}$ и $\hat{T}$ обозначают соответствующие операторы в пространственно-временном или импульсном пространстве. По определению мы имеем

$$\hat{P}a \equiv a_{\hat{P}} = (a_0, -a), \quad \hat{T}a \equiv a_{\hat{T}} = (-a_0, a). \tag{1}$$

Предположим, что действие преобразований P и T на $T_{(a, \Lambda)}$ задается формулой

$$I^{-1} U_{(a, \Lambda)} I = U_{\left(a_{\hat{I}}, \Lambda_{\hat{I}}\right)}. \tag{2}$$

Вектор импульса $\hat{p}$ должен преобразовываться при преобразованиях Лоренца подобно $\hat{a}$ и быть линейным по p. Поэтому он должен иметь вид

$$p_{\hat{I}} = \lambda (p_0, -p),$$

где $\lambda \in C^1$. Поскольку $\widehat{I}\widehat{I}p = p$, то мы имеем $\lambda^2 = 1$, т. е. $\lambda = \pm 1$. Чтобы определить знак λ, наложим дополнительное условие, а именно определенность энергии. Это дает $\lambda = \pm 1$ и

$$p_{\widehat{I}} = (p_0, \ -p).$$

Следовательно,

$$(\widehat{P}a, \ \widehat{P}p) = (a, \ p), \quad (\widehat{T}a, \ \widehat{T}p) = -(a, \ p). \tag{3}$$

В силу (2) мы имеем

$$(I^{-1}T_{(a,\ e)}I)\,\psi(p) = T_{(\widehat{I}a,\ e)}\psi(p) = \exp[\mathrm{i}\,(\widehat{I}ap)]\,\psi(p). \tag{4}$$

Согласно (3), это означает, что P должно быть линейным, а T — антилинейным преобразованием в гильбертовом пространстве H, т. е.

$$P\psi(p) = \eta\psi(p), \quad T\psi(p) = C\psi^*(p), \tag{5}$$

где η и C — матрицы.

Покажем теперь, что

$$\Lambda_{\widehat{I}} = \widehat{I}^{-1}\Lambda\widehat{I} = \Lambda^{*-1}. \tag{6}$$

В самом деле, например, из вида генераторов $M_{\mu\nu} = x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu$ группы Лоренца следует, что отражения пространства и времени коммутируют с группой вращений и антикоммутируют с чисто лоренцевыми преобразованиями. В силу 3.11.6.8 мы имеем

$$\Lambda = u_1\varepsilon u_2, \quad u_1, \ u_2 \in \mathrm{SU}(2), \tag{7}$$

где $\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{bmatrix}$ — чисто лоренцево преобразование; поэтому мы получаем

$$\Lambda_{\widehat{I}} = u_1\varepsilon^{-1}u_2 = \Lambda^{*-1}. \tag{8}$$

Лемма 1. *Матрица η в (5) должна удовлетворять условию*

$$D^*(\Lambda)\,\eta D(\Lambda) = \eta, \tag{9}$$

а матрица C задается формулой

$$C = \lambda D(\mathrm{i}\sigma_2), \quad |\lambda| = 1, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Если η существует, то это — оператор четности для представления $D(\Lambda)$.

Доказательство. Поскольку

$$T_{(0,\ \Lambda)}\psi(p) = D(\Lambda)\,\psi(L_\Lambda^{-1}p), \tag{11}$$

в силу (5) получаем

$$D(\Lambda_{\hat{P}}) = \eta D(\Lambda)\eta^{-1}, \quad D(\Lambda_{\hat{T}}) = C\overline{D}(\Lambda)C^{-1}. \tag{12}$$

Но из соотношения (8) следует

$$D(\Lambda_{\hat{T}}) = D(\Lambda^{*-1}) = D^{*-1}(\Lambda). \tag{13}$$

Используя (2.14), видим, что условие (12) для T может всегда удовлетворяться, если $C = \lambda D(\sigma_2)$, $|\lambda| = 1$. Чтобы доказать последнее утверждение, заметим, что по теореме 8.1.4 каждое представление $D(\Lambda)$ группы SL(2, C) является прямой суммой неприводимых представлений $D^{(j_1, j_2)}$. В SU(2) $\times$ SU(2)-базисе представления $D^{(j_1, j_2)}$ все генераторы подгруппы SU(2) эрмитовы, а все генераторы чисто лоренцевых преобразований антиэрмитовы. Поэтому в силу (9) для $r \in$ SU(2) имеем

$$D^*(r)\eta \cdot D(r) = D^{-1}(r)\eta D(r) = \eta, \tag{14}$$

а для чисто лоренцевых преобразований Λ_p

$$D^*(\Lambda)\eta D(\Lambda) = \exp[i\theta_k N_k]\,\eta\,\exp[i\theta_k N_k] = \eta. \tag{15}$$

Соотношения (14) и (15) показывают, что η должно коммутировать с J_k и антикоммутировать с N_k, т. е. η — оператор четности для $D(\Lambda)$.

Определим теперь, какие представления группы SL(2, C) удовлетворяют условию (9). Из (1) следует, что P коммутирует с генераторами J группы SL(2, C) и антикоммутирует с генераторами $N = (M_{01}, M_{02}, M_{03})$ чисто лоренцевых преобразований. Неприводимое представление $D^{(j_1, j_2)}$ группы SL(2, C) относится к SU(2) $\times$ SU(2)-базису, где SU(2) $\times$ SU(2) относится к генераторам $\boldsymbol{J}_1 = \frac{1}{2}(\boldsymbol{J} + i\boldsymbol{N})$ и $\boldsymbol{J}_2 = \frac{1}{2}i(\boldsymbol{J} - i\boldsymbol{N})$. Следовательно, j_1 и j_2 под действием четности переставляются. Поэтому среди неприводимых представлений группы SL(2, C) только $D^{(j_1, j_2)}$ допускает определение четности в пространстве представления. Если волновая функция $\psi(p)$ преобразуется по представлению $D^{(j_1, j_2)}$, $j_1 \neq j_2$, группы SL(2, C), то для определения оператора четности P нам следует по крайней мере удвоить пространство рассматриваемого представления:

$$D = D^{(j_1, j_2)} \oplus D^{(j_2, j_1)}.$$

Характерные примеры этого процесса и общая теория расширений группы Пуанкаре рассматриваются в гл. 21.

§ 4. Неразложимые представления группы Пуанкаре

В этом параграфе мы представляем построение неразложимых представлений группы Пуанкаре, индуцированных неразложимыми представлениями стационарной подгруппы $T^4 \rtimes \mathrm{SU}(2)$. Мы даем также приложение этих представлений для описания нестабильных частиц произвольного спина.

А. *ПБС-представления топологических групп*

Полубилинейная система (ПБС) — это пара $\langle \overset{1}{\Phi}, \overset{2}{\Phi} \rangle \equiv \Phi$ комплексных линейных пространств $\overset{1}{\Phi}$ и $\overset{2}{\Phi}$ вместе с полубилинейной (линейно-антилинейной) формой $(\cdot, \cdot)$ на $\overset{1}{\Phi} \times \overset{2}{\Phi}$, т. е.

$$(\alpha_i u_i, \beta_k w_k) = \alpha_i \bar{\beta}_k (u_i, w_k)$$

и

$$\begin{cases} (u, \overset{2}{\Phi}) = 0 & \text{тогда и только тогда, когда } u = 0, \\ (\overset{1}{\Phi}, w) = 0 & \text{тогда и только тогда, когда } w = 0. \end{cases}$$

Изоморфизм F между двумя ПБС Φ и $\tilde{\Phi}$ — это пара $\langle F_1, F_2 \rangle$, где F_i — линейный изоморфизм $\overset{i}{\Phi}$ на $\overset{i}{\tilde{\Phi}}$, $i = 1, 2$, и $(F_1 u, F_2 w) = (u, w)$ для всех $u \in \overset{1}{\Phi}$, $w \in \overset{2}{\Phi}$.

Используя полубилинейную форму $(\cdot, \cdot)$ на $\overset{1}{\Phi} \times \overset{2}{\Phi}$, можно определить локально выпуклую топологию $\tau(\overset{1}{\Phi})$ на $\overset{1}{\Phi}$, порожденную функционалами $u \to (u, w)$, $u \in \overset{1}{\Phi}$, где w пробегает $\overset{2}{\Phi}$. Подобным образом можно определить топологию на $\overset{2}{\Phi}$.

ПБС-представление T локально компактной группы G на ПБС $\Phi(T) = \langle \overset{1}{\Phi}, \overset{2}{\Phi} \rangle$ — это пара $\langle \overset{1}{T}, \overset{2}{T} \rangle$, удовлетворяющая следующим условиям.

1. $\overset{1}{T}$ (соответственно $\overset{2}{T}$) — гомоморфизм из G в группу обратимых линейных эндоморфизмов $\overset{1}{\Phi}$ (соответственно $\overset{2}{\Phi}$).

2. Для всех $g \in G$, $u \in \overset{1}{\Phi}$, $w \in \overset{2}{\Phi}$ $(\overset{1}{T}_g u, \overset{2}{T}_g w) = (u, w)$.

3. Для каждых $u \in \overset{1}{\Phi}$ и $w \in \overset{2}{\Phi}$ отображение $g \to (\overset{1}{T}_g u, w)$ непрерывно на G.

Если X — ограниченный линейный оператор в $\overset{1}{\Phi}$, то сопряжение X^* определяется равенством

$$(X^* u, w) = (u, Xw).$$

Условие 2 означает, что

$$\overset{1}{T}_g = (\overset{2}{T}{}_g^{-1})^*,$$

т. е. представление $g \to \overset{1}{T}_g$ в $\overset{1}{\Phi}$ контраградиентно к $g \to \overset{2}{T}_g$. Ясно, что $\overset{1}{T} = \overset{2}{T}$, если $\overset{2}{T}$ унитарно и полубилинейная форма является скалярным произведением.

Представление T (топологически) неприводимо, если $\overset{1}{\Phi}$ не имеет нетривиальных $\tau(\overset{1}{\Phi})$-замкнутых $\overset{1}{T}$-стабильных подпространств. (Очевидно, это означает, что $\overset{2}{\Phi}$ не имеет нетривиальных $\tau(\overset{2}{\Phi})$-замкнутых $\overset{2}{T}$-стабильных подпространств.)

Б. *Индуцированные ПБС-представления группы Пуанкаре*

Построим теперь класс неунитарных представлений группы Пуанкаре, которые могут соответствовать нестабильным частицам. Пусть G — группа Пуанкаре: $G = \Pi = T^4 \rtimes SL(2, C)$, и пусть K — замкнутая подгруппа в P, такая, что G/K имеет инвариантную меру. Пусть $k \to L_k = \langle \overset{1}{L}_k, \overset{2}{L}_k \rangle$ — конечномерное ПБС-представление подгруппы K в векторном пространстве $\tilde{\Phi} = \langle \overset{1}{\tilde{\Phi}}, \overset{2}{\tilde{\Phi}} \rangle$.

Если $\langle u, w \rangle \in \tilde{\Phi}$, то полубилинейная форма $(\cdot, \cdot)$ может быть записана в виде

$$(u, w) = u_s \overline{w}_s \quad (s = 1, 2, \ldots, \dim \overset{1}{L}), \tag{1}$$

и по определению ПБС-представление L_k удовлетворяет условию

$$(\overset{1}{L}_k u, \overset{2}{L}_k w) = (u, w) \quad \text{для всех} \quad \langle u, w \rangle \in \tilde{\Phi} \quad \text{и} \quad k \in K. \tag{2}$$

Пусть теперь $D(G)$ — векторное пространство функций $\langle u(g), w(g) \rangle$ на Π со значениями в $\tilde{\Phi}$, таких, что каждая компонента $u_i(g)$ или $w_s(g)$, $i, s = 1, 2, \ldots, \dim \overset{1}{L}$, является элементом пространства Шварца бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем. Через $\Phi = \langle \overset{1}{\Phi}, \overset{2}{\Phi} \rangle$ обозначим векторное пространство всех функций $\langle u(g), w(g) \rangle \in D(G)$, таких, что

$$w(gk) = \overset{2}{L}{}_k^{-1} w(g) \tag{3}$$

и

$$u(gk) = (\overset{1}{L}{}_k^{-1})^C u(g). \tag{4}$$

Символ C обозначает операцию взятия контраградиентного оператора (т. е. для ограниченного оператора X в $\overset{2}{\Phi}$: $X^C \equiv (X^*)^{-1}$). Векторное пространство функций, удовлетворяющих условиям (3) и (4), строится легко. В самом деле, если $\langle u(g), w(g)\rangle \in D(G)$, то

$$\hat{w}(g) = \int_K L_k w(gk)\,\mathrm{d}k \tag{5}$$

и

$$\hat{u}(g) = \int_K L_k^C u(gk)\,\mathrm{d}k \tag{6}$$

удовлетворяют условиям (3) и (4) соответственно. Из (5) [соответственно (6)] видно, что $\hat{w}(g) = 0$ (соответственно $\hat{u}(g) = 0$), если $g \notin SK$, где S — компактный носитель функции $w(g)$ (соответственно $u(g)$). Поэтому, если

$$\langle u(g),\ w(g)\rangle \in D(G), \quad \text{то} \quad \langle \hat{u}(g), \hat{w}(g)\rangle$$

имеет компактный носитель на G/K. Следовательно, полубилинейная форма

$$(\hat{u},\ \hat{w}) \equiv \int_{G/K} \overline{\hat{u}}_s(\dot{g})\, \hat{w}_s(\dot{g})\,\mathrm{d}\mu(\dot{g}), \quad \dot{g} \equiv gK, \tag{7}$$

имеет смысл.

Действие ПБС-представления $T^L = \langle \overset{1}{T}{}^L, \overset{2}{T}{}^L\rangle$ группы П в пространстве $\Phi = \langle \overset{1}{\Phi}, \overset{2}{\Phi}\rangle$ задается левым сдвигом

$$\overset{2}{T}{}^L_{g_0} w(g) = w(g_0^{-1}g), \tag{8}$$

$$\overset{1}{T}{}^L_{g_0} u(g) = u(g_0^{-1}g). \tag{9}$$

Полубилинейная форма (7) сохраняется представлением $g \to T_g^L$. В самом деле, используя разложение Макки $g = s_g k$, где s_g лежит в борелевом множестве $S \subset G\ (S \sim G/K)$ и $k \in K$, получаем ($\dot{g} \equiv x_g$, $G/K \equiv X$):

$$\begin{aligned}
(\overset{1}{T}_{g_0}u,\ \overset{2}{T}_{g_0}w) &= \int_K u_s(g_0^{-1}g)\,\overline{w}_s(g_0^{-1}g)\,\mathrm{d}\mu(\dot{g}) = \\
&= \int_X u_s(s_{g_0^{-1}g}k)\,\overline{w}_s(s_{g_0^{-1}g}k)\,\mathrm{d}\mu(x_g) = \quad \text{(в силу (3) и (4))} \\
&= \int_X u_s(g_0^{-1}x_g)\,\overline{w}_s(g_0^{-1}x_g)\,\mathrm{d}\mu(x_g) = \\
&= \int_X u(x')\,\overline{w}_s(x')\,\mathrm{d}\mu(x') = (u,\ w).
\end{aligned} \tag{10}$$

Поскольку $u(g),\ w(g) \in C_0(G/K)$, отображение $g \to (u,\ T_g^L w)$ непрерывно. Следовательно, отображение $g \to T_g^L = \langle \overset{1}{T}{}^L_g, \overset{2}{T}{}^L_g\rangle$

является ПБС-представлением группы П в пространстве $\Phi = \langle \overset{1}{\Phi}, \overset{2}{\Phi} \rangle$, индуцированным ПБС-представлением $k \to L_k = \langle \overset{1}{L}_k, \overset{2}{L}_k \rangle$.

Формулы (8) и (9) задают действие индуцированного представления $\langle \overset{1}{T}, \overset{2}{T} \rangle$ в пространстве $\langle \overset{1}{\Phi}, \overset{2}{\Phi} \rangle$ функций, определенных на групповом многообразии. Во многих приложениях более удобно иметь реализацию прямо на функциональном пространстве на однородном пространстве $X = G/K$. Она может быть легко построена. В самом деле, используя разложение Макки $g = s_g k_g$ и условие (3), получаем отображение $w(g) = L_{k_g} w(g)$ из пространства функций, определенных на групповом многообразии, на пространство функций, определенных на пространстве $X = G/K$. Преобразованная функция $(\overset{2}{T}{}^L_{g_0} w)(g)$ отображается на

$$L_{k_g}(\overset{2}{T}_{g_0} w)(g) = L_{k_g} L^{-1}_{k_{g_0^{-1}g}} w(x_{g_0^{-1}g}) = L^{-1}_{k_{g_0^{-1}s_g}} w(g_0^{-1}x_g).$$

Поэтому

$$\overset{2}{T}{}^L_{g_0} w(x_g) = L^{-1}_{k_{g_0^{-1}s_g}} w(g_0^{-1}x_g). \tag{11}$$

Следовательно, выбирая определенную стационарную подгруппу K группы G и ее произвольное представление $k \to L_k$, получаем явную реализацию индуцированного представления $\overset{2}{T}{}^L$ группы G формулой (11). Подобным образом имеем

$$\overset{1}{T}{}^L_{g_0} u(x_g) = \left(L^{-1}_{k_{g_0^{-1}s_g}}\right)^C u(g_0^{-1}x), \quad u \in \overset{1}{\Phi}(X). \tag{12}$$

Следовательно, ПБС-представление $g \to T^L_g = \langle \overset{1}{T}{}^{LC}_g, \overset{2}{T}{}^L_g \rangle$ группы G, индуцированное представлением $k \to L_k$ замкнутой подгруппы K группы П, реализуется в пространстве $\Phi(X) = \langle \overset{1}{\Phi}(X), \overset{2}{\Phi}(X) \rangle$ формулами (11) и (12). Полубилинейная форма $(\cdot\,,\,\cdot)$ на $\overset{1}{\Phi}(X) \times \overset{2}{\Phi}(X)$ задается формулой

$$(u, w) = \int_X u_s(x)\,\overline{w}_s(x)\,d\mu(x), \quad X = \Pi/K, \tag{13}$$

где $u \in \overset{1}{\Phi}(X)$, $w \in \overset{2}{\Phi}(X)$ и $d\mu(x)$ — инвариантная мера на $X = \Pi/K$.

Весь формализм может быть непосредственно применен к произвольной локально компактной топологической группе G. В общем случае перед формулами (11) и (12) необходимо лишь поставить множитель $(d\mu(g_0^{-1}x)/d\mu(x))^{1/2}$, представляющий собой квадратный корень из производной Радона — Никодима от меры $d\mu$ на X.

В. *Применение неразложимых ПБС-представлений группы Пуанкаре к описанию нестабильных частиц*

До настоящего времени не существует удовлетворительного определения нестабильных частиц. Поэтому кажется наиболее разумным руководствоваться феноменологическим описанием. Нестабильная частица экспериментально определяется как объект со следующими свойствами.

1. Он имеет определенный спин J и определенную пространственную четность P.

2. Он имеет распределение массы, или, что эквивалентно, определенный закон распада.

Для большинства частиц закон распада экспоненциален, т. е. $p(t) \sim e^{-\Gamma t}$. Однако в некоторых случаях было предположено (как, например, для мезона A_2), что закон распада может быть алгебраически-экспоненциальным, т. е. вида $p(t) = (a + bt + ct^2)\, e^{-\Gamma t}$. В последующем под изолированной нестабильной частицей мы понимаем частицу, которая находится только под влиянием силы, приводящей к распаду.

В этом параграфе мы построим класс неразложимых представлений группы Пуанкаре П, посредством которых можно воспроизвести все свойства, которыми обладает феноменологическая нестабильная частица.

Мы начинаем с определения стационарной подгруппы K группы Пуанкаре.

Вообще принимается, что нестабильная частица имеет комплексную массу M. Комплексная масса определяет комплексную орбиту $\mathcal{O}$ в пространстве комплексных импульсов $p = k - \mathrm{i}q$, для которых $p^2 = M^2$. Стационарная подгруппа G_p вектора $p \in \mathcal{O}$ является подгруппой $T^4 \rtimes G_k \cap G_q$. Приведя k в систему покоя и положив $q = (q_0, 0, 0, q_3)$ (используя собственное вращение), заключаем, что в общем случае $G_p = T^4 \rtimes U(1)$. Так как мы хотим иметь определенный спин J как квантовое число, характеризующее нестабильную частицу, то мы должны иметь $G_k \cap G_q = \mathrm{SU}(2)$, а это возможно только в случае $q = \lambda k$. Поэтому $p = \lambda q + \mathrm{i}q$. Удобно записать $p = Mv$, где $M = M_0 - \mathrm{i}\,(\Gamma/2)$ и $v = (v_0, \boldsymbol{v})$ — релятивистская четыре-скорость ($v_\mu v^\mu = 1$).

Обычно в физике частиц мы рассматриваем неприводимые представления группы П. Однако для описания нестабильной частицы или сложной системы более подходящим, по-видимому, является приводимое представление группы П. Поэтому теперь мы дадим общее построение неунитарных представлений T^L

группы П, индуцированных произвольным неунитарным приводимым представлением L подгруппы $K = T^4 \rtimes \mathrm{SU}(2)$.

Пусть $k \to L_k = \langle \overset{1}{L}_k, \overset{2}{L}_k \rangle$ — ПБС-представление подгруппы K в $\tilde{\Phi} = \langle \overset{1}{\Phi}, \overset{2}{\Phi} \rangle$:

$$k = (a, r) \to \overset{2}{L}_k = N_a D^J(r), \quad \overset{1}{L} = \overset{2}{L}{}^C, \quad a \in T^4, \quad r \in \mathrm{SU}(2), \tag{14}$$

где $a \to N_a$ — приводимое представление группы трансляций T^4, а $r \to D^J(r)$ — неприводимое представление подгруппы SU(2), определяемое целым или полуцелым числом J. Из закона композиции в K

$$(a, r)(a', r') = (a + ra', rr') \tag{15}$$

следует, что N_a должно иметь вид $N_{(a, \overset{\circ}{v})}$, где $\overset{\circ}{v} = (v_0, 0, 0, 0)$ — времениподобный вектор, а $(a, \overset{\circ}{v})$ — скалярное произведение Минковского. Полубилинейная форма $(u, w)_L$ в $\tilde{\Phi} = \langle \overset{1}{\Phi}, \overset{2}{\Phi} \rangle$ теперь имеет вид

$$(u, w)_L = u_{i\mu} \bar{w}_{i\mu}, \tag{16}$$

где $i = 1, 2, \ldots, \dim N_{(a, \overset{\circ}{v})}$, а $\mu = -J, -J + 1, \ldots, J - 1, J,$ — спиновый индекс.

В этом случае неразложимые представления $a \to N_{(a, v)}$ подгруппы T_4 играют важную роль. Простейший пример такого представления дается формулой

$$T^4 \ni a \to N_{(a, v)} = e^{-iM(a, v)} \begin{bmatrix} 1 & \gamma(a, v) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \gamma \in C^1. \tag{17}$$

Используя метод индукции, можно найти, что n-мерное неразложимое представление группы T^4 может быть взято в виде $T^4 \ni a \to N_{(a, v)} = e^{-iM(a, v)} \times$

$$\times \begin{bmatrix} 1 & \gamma_{n-1}(a, v) & \gamma_{n-2}\gamma_{n-1}(a, v)^2/2 & \cdots & \dfrac{\gamma_1 \cdots \gamma_{n-1}}{(n-1)!}(a, v)^{n-1} \\ 0 & 1 & \gamma_{n-2}(a, v) & \cdots & \dfrac{\gamma_1 \cdots \gamma_{n-2}}{(n-2)!}(a, v)^{n-2} \\ & \ddots & & \cdots\cdots\cdots & \\ 0 & & 1 & \gamma_2(a, v) & \dfrac{\gamma_1\gamma_2}{2}(a, v)^2 \\ & & & 1 & \gamma_1(a, v) \\ & & & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{18}$$

Можно построить также другие классы неразложимых представлений группы T^4. Однако представления (18) наиболее важны для нас, так как они дают алгебраически-экспоненциальный закон распада [см. (32)].

Дадим теперь явный вид представления T_g^L группы П, индуцированного, вообще говоря, приводимым представлением $k \to L_k$ подгруппы $K = T^4 \rtimes SU(2)$.

Утверждение 1. *Пусть* $k \to L_k$ — *представление подгруппы* $K = T^4 \rtimes SU(2)$, *заданное формулой* (14), *и пусть* $\overset{i}{\Phi}(X)$, $i = 1, 2$, — *пространство Шварца* $D(X)$, *где* $X = \Pi/K$. *Тогда ПБС-представление*

$$g \to T_g^L = \langle \overset{1}{T}{}_g^L, \ \overset{2}{T}{}_g^L \rangle$$

группы Пуанкаре П *в пространстве*

$$\Phi(X) = \langle \overset{1}{\Phi}(X), \ \overset{2}{\Phi}(X) \rangle$$

задается формулами

$$\overset{2}{T}{}^L_{\{a,\Lambda\}} w(v) = N_{(a,v)} D^J(r_\Lambda) w(L_\Lambda^{-1} v), \quad w \in \overset{2}{\Phi}(X), \tag{19}$$

$$\overset{1}{T}{}^L_{\{a,\Lambda\}} u(v) = N^C_{(a,v)} (D^J)^C (r_\Lambda) u(L_\Lambda^{-1} v), \ u \in \overset{1}{\Phi}(x). \tag{20}$$

Здесь $X = \Pi/K$ — *гиперболоид скоростей* ($X \ni x \sim \{v_\mu\}$, $v_\mu v^\mu = 1$, $v_0 > 0$), $r_\Lambda = \Lambda_v \Lambda \Lambda_{L_\Lambda^{-1} v}$ — *вращение Вигнера, где* Λ_v — *преобразование Лоренца из разложения Макки*

$$\Lambda = \Lambda_v r, \quad \Lambda_v = \begin{bmatrix} \lambda & z \\ 0 & \lambda^{-1} \end{bmatrix}, \quad \lambda \in R^1, \quad z \in C^1, \quad r \in SU(2), \tag{21}$$

группы $SL(2, C)$, *а* $L_v \in SO(3, 1)$ — *чисто лоренцово преобразование в* T^4, *определяемое элементом* $\Lambda_v \in SL(2, C)$.

Полубилинейная форма $(\cdot, \cdot)$ *в* $\Phi(X)$ *задается формулой*

$$(u, v) = \int \frac{d_3 v}{v_0} u_{i\mu}(v) \overline{w}_{i\mu}(v), \tag{22}$$

где $i = 1, 2, \ldots, \dim N_{(a,v)}$ *и* $\mu = -J, -J+1, \ldots, J-1, J$.

Доказательство. Используя (2.36), находим, что однородное пространство $X = \Pi/K$ может быть реализовано в виде гиперболоида скоростей. Соответствие $\Lambda_v \to v$ задается формулой

$$\Lambda_v = \begin{bmatrix} \lambda & z \\ 0 & \lambda^{-1} \end{bmatrix} \to v = \begin{bmatrix} v_0 - v_3 & v_2 + iv_1 \\ v_2 - iv_1 & v_0 + v_3 \end{bmatrix} = \Lambda_v \hat{\mathring{v}} \Lambda_v^*, \quad \hat{\mathring{v}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{23}$$

Явное действие $\overset{2}{T}{}_g^L$ в $\overset{2}{\Phi}(X)$ может быть вычислено следующим образом:

$$\begin{aligned}(\overset{2}{T}\{a, \Lambda\}w)(0, \Lambda_v) &= w\left((a, \Lambda)^{-1}(0, \Lambda_v)\right) = \\ &= w\left((-L_\Lambda^{-1}a, \Lambda^{-1})(0, \Lambda_v)\right) = w\left((-L_\Lambda^{-1}a, \Lambda^{-1}\Lambda_v)\right) = \\ &= w\left(\left(0, \Lambda_{L_{\Lambda_v}^{-1}}\right)\left(-L^{-1}_{\Lambda_{L_{\Lambda_v}^{-1}}}L_\Lambda^{-1}a, \Lambda^{-1}_{L_{\Lambda_v}^{-1}}\Lambda^{-1}\Lambda_v\right)\right) = \\ &= N_{(a, v)}D^J\left(\Lambda_v^{-1}\Lambda\Lambda_{L_{\Lambda_v}^{-1}}\right)w\left(0, L_\Lambda^{-1}v\right).\end{aligned} \tag{24}$$

Элемент $\Lambda_v^{-1}\Lambda\Lambda_{L_{\Lambda_v}^{-1}}$ переводит $\overset{\circ}{v}$ в $\overset{\circ}{v}$. Следовательно, он представляет вращение $r_\Lambda \in SU(2)$ (вращение Вигнера). Используя соответствие $\Lambda_v \to v$, заданное формулой (23), формулу (24) можно записать в виде

$$(T\{a, \Lambda\}w)(v) = N_{(a, v)}D^J(r_\Lambda)\, w\left(L_\Lambda^{-1}v\right).$$

Подобным же образом получаем формулу (20).

Найдем теперь физическую интерпретацию пары пространств $\langle\overset{1}{\Phi}, \overset{2}{\Phi}\rangle$. Согласно основной концепции квантовой механики, измерение представляет собой операцию, которая предписывает каждой волновой функции w некоторое число. Следовательно, измерение фактически является функционалом на пространстве волновых функций. В нашем случае это означает: рассматривать в качестве пространства $\overset{2}{\Phi}$ пространство волновых функций, а в качестве $\overset{1}{\Phi}$ — пространство измеряющих приборов. Амплитуда вероятности при измерении состояния $w \in \overset{2}{\Phi}$ измеряющим прибором, находящимся в состоянии $u \in \overset{1}{\Phi}$, задается полубилинейной формой (22). В силу (10) очевидно, что амплитуда вероятности инвариантна при одновременных преобразованиях состояния w и измеряющего прибора u.

Рассмотрим теперь различные частные случаи.

B_1. *Скалярная нестабильная частица*

Рассмотрим сначала случай одномерного неунитарного представления группы трансляций

$$a \to N_{(a, \overset{\circ}{v})} = e^{-iM(a, \overset{\circ}{v})}, \quad M = M_0 - \frac{i\Gamma}{2}.$$

Пусть $u(v) \in \overset{1}{\Phi}$ и $w(v) \in \overset{2}{\Phi}$ — состояния измеряющего прибора и нестабильной частицы соответственно при $t = 0$. Временная инволюция волновой функции задается формулой (19), т. е. $w(t; v) = N_{tv_0} w(v)$. В силу (22) вероятность измерения состояния $w(t; v)$ измеряющим прибором в состоянии u задается формулой

$$p(t) = |(u(t=0,\ w(t))|^2. \tag{25}$$

Это вероятность того, что нестабильная частица не распадается до момента времени t. Чтобы получить выражение для $p(t)$ в системе покоя нестабильной частицы, представляем измеряющий прибор в состоянии $u(t=0, v)$ в виде $u(t=0; v) = \delta_\varepsilon(v)$, где $\delta_\varepsilon(v)$ — ε-модель с компактным носителем для δ-функции Дирака. В силу (22) получаем следующую формулу для $p(t)$:

$$p(t) = |(u(t=0),\ w(t))|^2 = \left| \int \frac{d_3 v}{v_0} \delta_\varepsilon(v)\, w(v)\, e^{-iM_{v_0}t} \right|^2 \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} |w(0)|^2 e^{-\Gamma t}. \tag{26}$$

Эта формула согласуется с общепринятым выражением для временной зависимости вероятности, полученным в формализме Вайскопфа — Вигнера.

Рассмотрим теперь случай скалярной частицы ($J = 0$), волновая функция $w_i(v)$, $i = 1, 2, \ldots, \dim N_{(a, \overset{\circ}{v})}$, которой преобразуется по приводимому представлению $a \to N_{(a, \overset{\circ}{v})}$, $\dim N_{(a, \overset{\circ}{v})} > 1$, группы трансляций. Представляя теперь состояние измеряющего прибора в виде $u_i(v) = \delta_\varepsilon(v)\, \alpha_i$, где $\{\alpha_i\}$ — вектор в $\overset{1}{\tilde{\Phi}}$, получаем следующее выражение для амплитуды вероятности:

$$(u(t=0),\ w(t)) = \int \frac{d_3 v}{v_0} \delta_\varepsilon(v)\, \overline{\alpha_i\, (N_{tv_0})_{ik}\, w_k(v)}. \tag{27}$$

В пределе $\varepsilon \to 0$ это дает

$$p(t) = |(u(t=0),\ w(t)|^2 \to |(\alpha,\ N_{tv_0}\beta)|^2, \quad \beta \equiv w \quad (t=0; v=0). \tag{28}$$

Явный вид временной зависимости $p(t)$ зависит теперь от вида представления группы трансляций. В частности, если возьмем двумерное представление (17), то получим следующее выражение:

$$p(t) = (a + bt + ct^2)\, e^{-\Gamma t}, \tag{29}$$

где

$$\begin{aligned} a &= |(\alpha, \beta)|^2, \\ b &= 2\mathrm{Re}\,[(\alpha, \beta)\, \gamma \alpha_1 \overline{\beta_2}], \\ c &= |\gamma \overline{\alpha_1} \beta_2|^2. \end{aligned} \tag{30}$$

Интересно, что этот тип временной зависимости иногда предлагается на основе экспериментальных результатов по распаду мезона A_2.

Заметим, что состояния вида

$$w(v)=\begin{bmatrix} w_1(v) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{31}$$

образуют инвариантное подпространство $\breve{\Phi}$ в $\overset{2}{\Phi}$ относительно представления $\overset{2}{T}{}^L$; в силу (30) вероятность $p(t)$ для $w\in\breve{\Phi}$ имеет вид $p(t)=ae^{-\Gamma t}$. Это дает иллюстрацию того явления, когда закон распада $p(t)$ зависит от расположения производящих и регистрирующих приборов [см. (28) и (30)].

В общем случае беря n-мерное представление $a\to N_{(a,v)}$ группы трансляций T^4, заданное формулой (18), получаем закон распада $p(t)$ в виде

$$p(t)=e^{-\Gamma t}\sum_{k=0}^{2(n-1)} a_k t^k, \tag{32}$$

где a_k, $k=0, 1, \ldots, 2(n-1)$, в формуле (32) зависит от расположения регистрирующих и производящих приборов [см. (28)].

B_2. *Нестабильные частицы со спином*

Волновой функцией нестабильной частицы со спином J является векторная функция $w_{i\mu}(v)$, $i=1, 2, \ldots, \dim N_{(a,\overset{\circ}{v})}$, $\mu=-J, -J+1, \ldots, J-1, J$, на гиперболоиде скоростей. Используя те же рассуждения, что и выше, получаем следующее выражение для амплитуды вероятности:

$$(u(t=0),\ N_{tv_0}w(t=0))=\int\frac{d_3v}{v_0}\delta_\varepsilon(v)\,\overline{\alpha_{i\mu}(N_{tv_0})_{ik}w_{k\mu}(v)}. \tag{33}$$

В пределе $\varepsilon\to 0$ это дает

$$p(t)=|(u, w(t))|^2=|\alpha_\mu N_{tv_0}\beta_\mu|^2, \quad \beta_{i\mu}\equiv w_{i\mu} \quad (t=0; v=0). \tag{34}$$

Это показывает, что закон распада для нестабильной частицы с произвольным спином J фактически определяется представлением $a\to N_{(a,v)}$ группы трансляций T^4.

Физическую интерпретацию настоящей теории и дальнейшие результаты см. в [699].

§ 5. Комментарии и дополнения

А. *Нерегулярные полупрямые произведения*

Представленная в § 1 теория дает полное описание всех неприводимых унитарных представлений в случае регулярных полупрямых произведений $N \rtimes S$. Если $N\rtimes S$ не регулярно, то формализм § 1 все еще может быть применен и мы получаем обширный класс неприводимых индуцированных унитарных представлений. Разница состоит в том, что в этом случае мы не можем доказать, что каждое неприводимое унитарное представление является индуцированным. Поэтому класс полученных таким образом неприводимых унитарных представлений может быть неполным.

Б. *Полупрямые произведения типа I*

В приложениях важно знать, является ли данное полупрямое произведение группой типа I. Следующая теорема дает удобный критерий для решения этой задачи.

Теорема 1 (Макки). *Регулярное полупрямое произведение $N \rtimes S$ является группой типа I тогда и только тогда, когда для каждого $\hat{n} \in \hat{N}$ стационарная подгруппа $K_{\hat{0}_{\hat{n}}}$ является группой типа I.*

Группы Евклида и Пуанкаре принадлежат к типу I. В самом деле, пусть $G = E^3 \rtimes SO(3)$ — группа Евклида. В примере 1.2 мы показали, что стационарные подгруппы изоморфны SO(2) в случае $r > 0$ и SO(3) в случае $r = 0$. Поскольку каждая компактная группа является группой типа I, из теоремы 1 следует, что евклидова группа также является группой типа I.

Для группы Пуанкаре $\tilde{\Pi}$ стационарная подгруппа любого характера $\hat{n} \in \hat{N}$ является или простой группой Ли [т. е. SU(2), SL(2, R), SL(2, C)], или полупрямым произведением $T^2 \rtimes S^1$. Простые группы принадлежат к группам типа I. Полупрямое произведение $T^2 \rtimes S^1$ имеет в свою очередь только компактные стационарные подгруппы. Поэтому это группа типа I. Таким образом, $\tilde{\Pi}$ имеет стационарные подгруппы только типа I, и, следовательно, в силу теоремы 1 $\tilde{\Pi}$ — группа типа I.

В. *Комментарии*

Представления $U^{m, j}$, $m \geqslant 0$, $j = 0, 1/2, 1, \ldots$, обычно используются для описания релятивистских элементарных свободных частиц с массой m и спином j. Представления с мнимой массой ($m^2 < 0$) не имеют прямой интерпретации. Однако они появляются при описании взаимодействий релятивистских двухчастичных систем, в частности эти представления интенсивно использовались в гармоническом анализе амплитуд рассеяния (гл. 21, § 6).

§ 6. Упражнения

§ 1.1. Пусть G — топологическая группа, а $g \to T_g$ — представление группы G в топологическом векторном пространстве Φ. Покажите, что множество $\{\Phi, G\}$ образует полупрямое произведение $\Phi \rtimes G$ с законом композиции

$$(\varphi, g)(\varphi', g') = (\varphi + T_g\varphi', gg'). \tag{1}$$

§ 1.2. Покажите, что $G = T^n \rtimes \mathrm{SO}(n)$ имеет только два различных класса неприводимых представлений.

§ 1.3. Дайте классификацию неприводимых представлений групп типа группы Лоренца $T^{n+1} \rtimes \mathrm{SO}_0(n, 1)$.

§ 1.4. Пусть G — аффинная группа вещественной прямой:

$$x \to ax + b, \quad a > 0, \quad b \in R,$$

т. е. $G = N \rtimes K$, где $N = \{(b, 1)\}$. Покажите, что G имеет только три различных неприводимых представления U^+, U^- и U^s, причем $U^\pm$ задаются формулой

$$U^{\pm}_{(a,\, b)} u(x) = \exp(\pm\, \mathrm{i}e^* b)\, u(x + \log a), \quad u \in L^2(R), \tag{2}$$

а U^s является характером, заданным формулой

$$U^s_{(a,\, b)} = \exp(\mathrm{i}s \log a)\, I, \quad s \in R. \tag{3}$$

§ 1.5. Покажите, что группа $\mathrm{K}(2)$, состоящая из всех верхних треугольных матриц вида

$$\begin{bmatrix} \delta & \zeta \\ 0 & \delta^{-1} \end{bmatrix}, \quad \delta, \zeta \in C,$$

является полупрямым произведением $\mathfrak{Z} \rtimes D$ двух абелевых подгрупп $\mathfrak{Z}$ и D. Покажите, что $\mathrm{K}(2)$ имеет два различных неприводимых бесконечномерных представления.

§ 2.1. Пусть $g \to U_g$ — унитарное представление группы Пуанкаре в пространстве H. Покажите, что оператор

$$Z = P_0 (P_0^2)^{-1/2}, \tag{4}$$

где P_0 — генератор временных трансляций, лежит в переплетающей алгебре $R(U, U)$.

Является ли Z элементом обертывающего поля алгебры Ли группы Пуанкаре?

§ 2.2. Покажите, что операторы

$$\lambda_i,\ M,\ S_\mu S^\mu,\ P_\mu \quad (i = 1, 2), \quad P_\mu = P_{(1)\,\mu} + P_{(2)\,\mu} \tag{5}$$

двухчастичной системы, где

$$M = (P^\mu P_\mu)^{1/2}, \quad S_\mu = \varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda} J^{\nu\rho} P^\lambda, \quad J^{\nu\rho} = J^{\nu\rho}_{(1)} + J^{\nu\rho}_{(2)}, \tag{6}$$

$$\lambda_i = \left[(P_i^\mu P_\mu)^2 - m_i^2 M^2\right]^{-1/2} S_i^\mu P_\mu,$$

образуют максимальное множество коммутирующих операторов в тензорном произведении $H = H^{m_1 J_1} \otimes H^{m_2 J_2}$.

§ 2.3. Пусть $|p_i \lambda_i \ [m_i J_i]\rangle$ — базисные векторы в пространствах $H^{m_i J_i}$, $i = 1, 2$, нормированные следующим образом:

$$\langle p_i \lambda_i [m_i J_i] | p_i \lambda_i [m_i J_i]\rangle = \varepsilon_i \delta^{(3)} (\boldsymbol{p}_i - \boldsymbol{p}_i'), \quad \varepsilon_i = \sqrt{p_i^2 + m_i^2}.$$

Положим $p = (p_1 - p_2)/2$ и $p = p_1 + p_2$. Поскольку $p^2 = (4M^2)^{-1} (M^4 + m_1^4 + m_2^4 - 2M^2 m_1^2 - 2M^2 m_2^2 - 2m_1^2 m_2^2)$, мы можем представить P с помощью M и углов φ и θ. Покажите, что векторы $|p, \Lambda \ [M, J, \lambda_{(1)}, \lambda_{(2)}]\rangle =$

$$= \left(\frac{2J+1}{4\pi}\right)^{1/2} \int \mathrm{d} (\cos \theta) \, \mathrm{d}\varphi D^J_{\Lambda\lambda} (\varphi, \theta, 0) | pM\varphi\theta\lambda_{(1)}\lambda_{(2)}\rangle, \tag{7}$$

где $\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$, являются общими собственными векторами операторов (6) и нормированы следующим образом:

$$\langle p' \Lambda' [M' J' \lambda_1' \lambda_2'] | p\Lambda [MJ\lambda_1\lambda_2]\rangle = \delta^{(4)} (p - p') \delta_{JJ'} \delta_{\lambda_1\lambda_1'} \delta_{\lambda_2\lambda_2'}. \tag{8}$$

§ 2.4. Пусть $g \to U_g^{(m, j)}$ — неприводимое представление группы Пуанкаре, характеризуемое положительной массой m и спином j. Найдите множество аналитических векторов для $U^{(m, j)}$.

§ 2.5. Найдите вид спектра инвариантных операторов группы Пуанкаре n-мерного пространства-времени.

Указание. Используйте тот факт, что неприводимые представления характеризуются орбитами и инвариантными числами неприводимого представления стационарной подгруппы.

§ 2.6. Дайте явные реализации представлений $U^{im, n, \pm}$, $U^{im, \rho}$, $U^{0, \pm, j}$, $U^{0, \pm, r, \varepsilon}$ группы Пуанкаре так, как дано в тексте для представления $U^{m, j}$.

§ 2.7. *Представления группы Пуанкаре в различных базисах.* В некоторых физических приложениях удобно использовать не явный вид индуцированных представлений, а реализации, в которых диагонализируются другие операторы. Рассмотрите: 1) базис общего углового момента: P_0, $\boldsymbol{P}^2$, $\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{J}$, J_3, 2) базис подгруппы Лоренца: $\boldsymbol{J}^2 - \boldsymbol{N}^2$, $\boldsymbol{J} - \boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{J}^2$, J_3. Эта реализация также решает задачу разложения представлений группы Пуанкаре по отношению к группе Лоренца.

§ 3.1. Пусть $G = \mathrm{SL}(2, C)$ и $\Lambda \to D(\Lambda)$ — конечномерное представление группы G. Покажите, что сопряжение по четности представления $D(\Lambda_p)$ совпадает с $D^{*-1}(\Lambda_p)$.

§ 4.1. Пусть $G = T^2 \rtimes \mathrm{SO}(2)$. Покажите, что представление U^L, индуцированное характером χ подгруппы T^2, неприводимо.

Указание. Используйте теорему 3.4.

§ 4.2. Рассмотрите и классифицируйте индуцированные представления неоднородной конформной группы $T^6 \rtimes \mathrm{SO}_0(4, 2)$.

Глава 18

Фундаментальные теоремы об индуцированных представлениях

Пусть U^L — представление группы G, индуцированное представлением L подгруппы K. Пусть U_N^L обозначает сужение U^L на другую подгруппу N группы G. В § 1 мы выводим так называемую индукционно-редукционную теорему (ИР-теорему), которая дает изящный и эффективный метод разложения U_N^L на неприводимые представления подгруппы N. Решение этой задачи является ключевым для многих приложений теории представлений групп в физике частиц.

В § 2 мы излагаем теорему о тензорном произведении, которая фактически является прямым следствием ИР-теоремы. Теорема о тензорном произведении позволяет эффективно разлагать тензорное произведение $U^{L_1} \otimes U^{L_2}$ двух произвольных индуцированных представлений G. В частности, мы даем специальный вид обеих теорем в случае полупрямых произведений, для которого мы имеем полное решение задачи о разложении на неприводимые компоненты.

В § 3 представлен «непрерывный» вариант классической теоремы взаимности Фробениуса. Эта теорема находит много приложений, особенно в теории представлений комплексных классических групп Ли.

§ 1. Индукционно-редукционная теорема

Пусть G — локально компактная группа, а K и N — любые две замкнутые ее подгруппы. Пусть U^L — представление G, индуцированное унитарным представлением L подгруппы K, и пусть U_N^L — его сужение на подгруппу N. Во многих приложениях чрезвычайно важно знать кратность неприводимого представления M подгруппы N в представлении U_N^L. Мы покажем, что теория индуцированных представлений дает удовлетворительное решение этой задачи.

Пусть $X = K\diagdown G$ — пространство правых смежных классов по подгруппе K. Группа G действует транзитивно в X. Подгруппа N, однако, в общем случае не действует транзитивно в X. Пусть

X_1 и X_2 — два любых N-инвариантных борелевых подмножества в X, таких, что $X = X_1 \cup X_2$ и $X_1 \cap X_2 = 0$. Пусть $H(X_1)$ и $H(X_2)$ — замкнутые подпространства пространства H^L представления U^L, состоящие из функций $u(x) \in H^L$, обращающихся в нуль вне X_1 и X_2 соответственно. Пространства $H(X_1)$ и $H(X_2)$ инвариантны относительно действия представления U_N^L и являются ортогональными дополнениями друг друга. Таким образом, имеем

$$H^L = H(X_1) \oplus H(X_2) \quad \text{и} \quad U_N^L(H^L) = U^1(H(X_1)) \oplus U^2(H(X_2)). \tag{1}$$

Пространство X_1 (или X_2) инвариантно по отношению к N, но в общем случае нетранзитивно. Таким образом, их можно дальше расщеплять до получения орбит относительно N. Если X_i, $i = 1, 2, \ldots,$ — счетное множество орбит в X относительно N, то при помощи описанной процедуры получаются следующие разложения:

$$H^L = \sum_i \oplus H(X_i), \quad U_N^L(H^L) = \sum_i \oplus U_N^i(H(X_i)). \tag{2}$$

Заметим, что каждая орбита X_i пространства X относительно N представляет собой двойной смежный класс группы G, т. е. множество элементов вида Kg_iN, $g_i \in G$. Ясно, что два двойных смежных класса либо являются непересекающимися, либо совпадают. Таким образом, суммирование в формулах (2) распространяется на различные двойные смежные классы $K:N$ группы G относительно подгрупп K и N. Это представляет собой фактически сущность индукционно-редукционной теоремы. Единственный вопрос, который остается, состоит в том, чтобы определить, какие представления U^i подгруппы N связаны с каждым двойным смежным классом X_i. Мы покажем, что U^i также является некоторым индуцированным представлением N.

Сформулируем индукционно-редукционную теорему в наиболее общем случае, включающем и случай, когда все орбиты являются множествами меры нуль. В этом случае прямая сумма (2) становится прямым интегралом по двойным смежным классам.

Мера ν_D на множестве $\mathscr{D}$ двойных смежных классов определяется следующим образом: пусть $s(g)$, $g \in G$, обозначает двойной смежный класс KgN, ассоциированный с g, и пусть $\tilde{\nu}$ — любая конечная мера в G с теми же множествами меры нуль, что и мера Хаара. Тогда если $E \subset \mathscr{D}$, мы определим $\nu = \tilde{\nu}(s^{-1}(E))$. Такую меру называют *допустимой мерой*. Наконец, примем, как и в случае полупрямых произведений, некоторые условия регулярности для подгрупп K и N. Именно, мы говорим, что K и N действуют в G регулярно (посредством $g(k, n) = k^{-1}gn$), если в G существует последовательность борелевых множеств Z_i, таких, что

1) $\tilde{\nu}(Z_0) = 0$, $Z_i(k, n) = Z_i$, для каждой пары $(k, n) \in K \times N$ и для всех i;

2) всякая орбита $\hat{O}$, не содержащаяся в Z_0 относительно действия $K \otimes N$, является пересечением множеств Z_i, содержащих орбиту $\hat{O}$.

Теперь мы можем сформулировать индукционно-редукционную теорему.

Индукционно-редукционная теорема. *Пусть G — сепарабельная локально компактная группа, и пусть K и N — замкнутые подгруппы в G, действующие регулярно в G. Пусть U^L — представление группы G, индуцированное представлением L подгруппы K, и пусть U^L_N обозначает его сужение на подгруппу N. Тогда*

1°
$$U^L_N \simeq \int_{\mathscr{D}} U_N(D)\, d\nu(D), \tag{3}$$

где $\mathscr{D}$ — множество двойных смежных классов $K\diagdown G/N$, $U_N(D)$ — унитарное представление N, а $\nu(\cdot)$ — любая допустимая мера на $\mathscr{D}$

2° Представление $N \ni n \to U_n(D)$ в разложении (3) определяется с точностью до эквивалентности двойным смежным классом D. Для каждого $g \in G$ подгруппа $N \cap g^{-1}Kg$ зависит только от двойного смежного класса D; представления ее, определяемые как $\gamma \to L_{g\gamma g^{-1}}$, эквивалентны для всех $g \in G$; поэтому индуцированные с их помощью представления подгруппы N также эквивалентны, и в качестве $U_N(D)$ можно взять любое из них.

Доказательство. 1°. Пусть ν — допустимая мера в $\mathscr{D}$, а $\tilde{\nu}$ — соответствующая конечная мера в G. Определим конечную квазиинвариантную меру μ в $X = K\diagdown G$ по формуле $\mu(E) = \tilde{\nu}(\pi^{-1}(E))$, где π — каноническая проекция из G на X. Пусть r— отношение эквивалентности в X, определяемое по формуле $x_1 \approx x_2$ тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2 n$, $n \in N$. Тогда, поскольку K и N регулярно действуют в G, r является регулярным отношением эквивалентности. Значит, мы можем воспользоваться теоремой о разложении меры 4.3.2 для меры μ на X. Таким образом, для всякого $D \in K\diagdown G/N \equiv \mathscr{D}$ получаем меру μ_D в X такую, что $d\mu(x) = d\nu(D)\, d\mu_D(x)$. Каждая мера μ_D в X сосредоточена на орбите пространства X относительно N, т. е. $\mu_D(X - r^{-1}(D)) = 0$, и эта мера является квазиинвариантной по отношению к действию N в X для почти всех D относительно меры $d\nu(D)$.

Представление U^L группы G, индуцированное унитарным представлением L подгруппы K, реализуется в гильбертовом пространстве $H^L = L^2(X, \mu, H(L))$ по стандартной формуле [см. равенство (16.1.14)]

$$U^L_{g_0} u(\dot{g}) = \rho^{1/2}_{g_0}(g) B^{-1}_g B_{gg_0} u(\dot{g}g_0), \tag{4}$$

где в силу (4.3.9)

$$\rho_{g_0}(g) = \rho^{-1}(g)\rho(gg_0), \tag{5}$$

$\dot{g} = x = x_0 g$, $x_0 = \dot{e} = K$, а $u(\dot{g})$ — функция в X со значениями в пространстве $H(L)$ представления L стационарной подгруппы K.

Пусть $H(\mathscr{D})$ — гильбертово пространство $L^2(X, \mu, H(L))$. Тогда разложение меры $d\mu(x) = d\nu(D)\, d\mu_D(x)$ и лемма 3.1 приложения Б приводят к тому, что гильбертово пространство $H^L = L^2(X, \mu, H(L))$ может быть записано в виде

$$H^L = \int_{\mathscr{D}} H(D)\, d\nu(D). \tag{6}$$

Отсюда, в частности, следует

$$\| u \|^2_{H^L} = \int_{\mathscr{D}} d\nu(D) \int_X d\mu_D(x) \| u(x) \|^2_{H^L} = \int_{\mathscr{D}} d\nu(D) \| u \|^2_{H(\mathscr{D})}. \tag{7}$$

Анализ формулы (4) показывает, что U^L_N разложимо относительно разложения (6). Следовательно,

$$U^L_N = \int_{\mathscr{D}} U_N(D)\, d\nu(D). \tag{8}$$

2°. Определим представления $U(D)$, входящие в разложение (8).

Пусть $x_D \in D$. Тогда $x_D = x_0 g_D$, где $g_D \in G$ и $x_0 = \dot{e} = K$. Стабилизатором x_D в N является подгруппа $N \cap g_D^{-1} K g_D$. В силу теоремы о разложении меры мы знаем, что если мера μ квазиинвариантна относительно группы G, то мера μ_D также квазиинвариантна относительно N. Точнее, если $n, n' \in N$, и $x = x_D n = x_0 g_D n$, имеем

$$d\mu_D(xn') = \frac{\rho(g_D n n')}{\rho(g_D n)}\, d\mu_D(x). \tag{9}$$

Следовательно, функция $\rho_D(\cdot)$, соответствующая мере μ_D, для почти всех D относительно $d\nu$ равна

$$\rho_D(\dot{n}) = \rho(g_D n).$$

Положим $B_n(D) = B_{g_D n}$. Тогда равенства (4) и (5) влекут за собой ($g = g_D n$, $x = x_D n$)

$$U_{n'}(D) u(x) = \rho_D^{-1/2}(n) \rho_D(\dot{n}n') B^{-1}_n(D) B_{nn'}(D) u(xn').$$

Но если $\dot{n} \in N$ и $y \in N \cap g_D^{-1}Kg_D$, то

$$B_{yn}(D) \equiv B_{g_D yn} = B_{g_D y g_D^{-1} g_D n}.$$

Так как $g_D y g_D^{-1} \in K$ и $B_{kg} = L_k B_g^{\cdot}$ для $k \in K$ и $g \in G$, с учетом (16.1.14) получаем

$$B_{yn}(D) = L_{g_D y g_D^{-1}} B_{g_D n} = L_{g_D y g_D^{-1}} B_n(D). \tag{10}$$

Это показывает, что представление $n \to U_n(D)$ в гильбертовом пространстве $H(D)$ индуцируется представлением $y \to L_{g_D y g_D^{-1}}$ подгруппы $N \cap g_D^{-1}Kg_D$.

Пример 1. Пусть G — группа Пуанкаре (т. е. $G = T^4 \rtimes SO(3, 1)$), и пусть $K = T^4 \rtimes SO(3)$. Пусть L — неприводимое представление K, определенное по формуле $k = (a, R) \to L_k = \exp(\mathrm{i}pa) I$, где $p^2 = m^2 > 0$. Представление U^L группы G, индуцированное этим представлением L подгруппы K, неприводимо (гл. 17, § 2, В) и соответствует частице с положительной массой m и спином нуль.

Рассмотрим сначала сужение U^L на подгруппу $N = T^4 \rtimes \{e\}$. Пространство $X = K \diagdown G \simeq SO(3) \diagdown SO(3, 1)$ изоморфно гиперболоиду $H^{(1, 3)}$, задаваемому уравнением $p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 = m^2$. Подгруппа N ввиду равенства (17.1.20) оставляет каждую точку гиперболоида на месте. Значит, каждая точка гиперболоида представляет собой орбиту для N, и, следовательно, пространство $\mathscr{D}$ двойных смежных классов $K \diagdown G/N$ изоморфно множеству точек гиперболоида $H^{(1,3)}$. Применив теперь индукционно-редукционную теорему, получим

$$U_{T^4}^L = \int_{H^{(1,3)}} U_{T^4}(p)\, \mathrm{d}\nu(p), \qquad H^{(1,3)} = \{p : p^2 = m^2\}. \tag{11}$$

Представления $U(p)$ подгруппы T^4, появляющиеся в (11), индуцированы представлением $y \to L_{gyg^{-1}}$ подгруппы $T^4 \cap g^{-1}(T^4 \rtimes SO(3))\, g = T^4$. Значит, $T^4 \ni a \to U_a(p) = \exp(\mathrm{i}\, pa) I$, $p^2 = m^2$. Следовательно, $U_{T_4}^L$ является прямым интегралом неприводимых одномерных представлений $U(p)$ подгруппы T^4.

Возьмем затем $N = SO(3, 1)$. Эта подгруппа действует транзитивно на гиперболоид $H^{(1,3)}$, изоморфный $X = K \diagdown G$. Следовательно, в этом случае мы имеем только один двойной смежный класс $K : N$. Таким образом, в силу индукционно-редукционной теоремы получаем

$$U_{SO(3,1)}^L = U(D) = U(H^{(1,3)}). \tag{12}$$

Представление $U(H^{1,3})$, входящее в (12), является представлением группы $SO(3, 1)$, которое индуцировано представлением

$y \to L_{gyg^{-1}}$ подгруппы $SO(3, 1) \cap g^{-1}T^4 \rtimes SO(3)\, g \cong SO(3)$. Полагая $g = e$, получаем $SO(3) \ni y \to L_y = I$. Таким образом, $U(H^{(1,3)})$ является представлением группы $SO(3, 1)$, которое индуцировано тождественным представлением $SO(3)$. Оно может быть реализовано как квазирегулярное представление

$$U_n u(p) = u(pn), \quad p \in H^{(1,3)}, \quad n \in \dot{SO}(3, 1). \tag{13}$$

Мы показали (гл. 15, § 3), что $U_N(H^{(1,3)})$ имеет следующее разложение по так называемым вырожденным представлениям U_N^Λ, $\Lambda \in [0, \infty)$:

$$U_N(H^{(1,3)}) = \int_0^\infty U_N^\Lambda(H^{(1,3)})\, d\Lambda, \tag{14}$$

где $U^\Lambda(H^{(1,3)})$ неприводимо.

Следовательно, неприводимое представление U^L группы Пуанкаре при сужении на группу Лоренца есть прямой интеграл (14) неприводимых представлений U^Λ.

Получим теперь частный случай индукционно-редукционной теоремы, когда группа G является полупрямым произведением $N \rtimes M$, где N и M сепарабельны и локально компактны, а N коммутативна. Этот класс групп содержит группы Евклида, Галилея и Пуанкаре, которые играют фундаментальную роль в физике. Мы покажем, что в этих случаях можно получить эффективное разложение представлений $U(D)$ в равенстве (3), ассоциированных с двойными смежными классами D, на их неприводимые компоненты.

Пусть $G = N \rtimes M$, и пусть $W = N_0 \rtimes M_0$, где N_0 и M_0 — любые замкнутые подгруппы в N и M соответственно. Пусть $\hat{n}$ — произвольный элемент дуальной группы $\hat{N}$ (характеров) группы N, и пусть $M_{\hat{n}}$ — подгруппа всех $m \in M$, таких, что $\hat{n}m = \hat{n}$. Пусть L — любое неприводимое представление $M_{\hat{n}}$, и пусть $U^{\hat{n}L}$ обозначает (неприводимое) представление G, индуцированное представлением $(n, m) \to \hat{n}(n) L_m$ подгруппы $K = N \rtimes M_{\hat{n}}$. Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть $G = N \rtimes M$ — полупрямое произведение, и пусть M_0 и $M_{\hat{n}}$ — регулярно связанные подгруппы группы M. Тогда*

1° $$U_W^{\hat{n}L} \cong \int_{\mathscr{D}} U_W(D)\, d\nu(D), \tag{15}$$

где $\mathscr{D}$ — пространство двойных смежных классов $K : W$, а $U_W(D)$ — унитарное представление W.

2° Подынтегральное выражение $U(D)$, соответствующее двойному смежному классу D, содержащему элемент $m \in M$, может быть вычислено следующим образом. Пусть $L^{(m)}$ обозначает представление группы $M_{\hat{n}m} \equiv m^{-1}M_{\hat{n}}m$, которое переводит $m^{-1}ym$ в Ly. Сузим $L^{(m)}$ на $M_{\hat{n}m} \cap M_0$, а затем индуцируем до $M_{0,\chi}$, где χ — ограничение $\hat{n}m$ на N_0 и $M_{0,\chi}$ — подгруппа всех $m \in M_0$ с $\chi m = \chi$. Пусть $\int L^{\lambda}\,d\rho(\lambda)$ обозначает разложение этого индуцированного представления на неприводимые компоненты. Тогда

$$U_W(D) \cong \int U_W^{\chi L^{\lambda}}\,d\rho(\lambda), \tag{16}$$

где $U^{\chi L^{\lambda}}$ — неприводимые представления W, индуцированные представлением $(n, m) \to \chi(n) L_m^{\lambda}$ группы $N_0 \rtimes M_{0,\chi}$.

Доказательство. 1° и первая часть 2° следуют непосредственно из ИР-теоремы, и уточнение деталей мы оставляем читателю. Соотношение (16) следует из теоремы о разложении представления, индуцированного при помощи прямого интеграла представлений (теорема 16.2.1). Неприводимость $U_W^{\chi L^{\lambda}}$ вытекает из теоремы 17.1.5.

Заметим, что теорема 2 не обеспечивает явного решения задачи разложения представления $U^{\hat{n}L}$ на неприводимые компоненты. Однако она сводит эту задачу к задаче разложения представления подгруппы $M_{0,\chi} \subset M_0$. Во всех известных случаях этого достаточно для эффективного решения задачи разложения представления $U_W^{\hat{n}L}$ на неприводимые компоненты.

Пример 2. Пусть $G = N \rtimes M$ — евклидова группа в E^3, т. е. $N = T^3$, $M = SO(3)$. Пусть $U^{\hat{n}L}$, $\hat{n} = (1, 0, 0)$, — (неприводимое) представление G, индуцированное представлением $(n, m) \to \hat{n}(n) L_m$ подгруппы $K = T^3 \rtimes SO(2)_z$, где $SO(2)_z$ — группа вращения вокруг оси z. Находим сужение представления $U^{\hat{n}L}$ на подгруппу $W = T^2 \rtimes SO(2)_x$. В данном случае $K \diagdown G$ — двумерная сфера S^2. Таким образом, пространство двойных смежных классов $K \diagdown G / W$ совпадает с множеством одномерных окружностей на S^2. Пусть D — двойной смежный класс, содержащий элемент $m \in SO(3)$; $m \notin SO(2)_z$. Тогда по теореме 2 характер $\chi \neq 0$ и, следовательно, $M_{0,\chi} = \{e\}$. Таким образом, индуцированное представление группы $M_{0,\chi}$ является тождественным представлением. Следовательно, ввиду (16) имеем

$$U_W(D) \cong U^{\chi L}, \tag{17}$$

где $U^{\chi L}$ — представление W, индуцированное представлением $n \to \chi(n) I$ подгруппы $T^2 \rtimes M_{0,\chi}$.

Если $m \in SO(2)_z$, то

$$D = KmW = KW$$

имеет нулевую меру Хаара (относительно G). Значит, оно не дает вклада в разложение (15). Следовательно, представление $U^{\widehat{nL}}$ евклидовой группы $T^3 \rtimes SO(3)$ при сужении на подгруппу $T^2 \rtimes SO(2)_x$ является прямым интегралом (15) по неприводимым представлениям (17).

Индукционно-редукционная теорема оказывается весьма полезной при явном решении различных задач, возникающих в теории представлений групп. В последующих параграфах этой главы и в теории представлений классических групп Ли мы будем ее широко использовать.

§ 2. Теорема о тензорном произведении

Пусть U^1 и U^2 — неприводимые унитарные представления группы G. Одной из центральных задач в теории представлений групп и приложениях является задача о редукции тензорного произведения $U^1 \otimes U^2$ на его неприводимые составляющие. Мы покажем здесь, что индукционно-редукционная теорема дает эффективный метод для разложения тензорного произведения любых двух индуцированных представлений сепарабельной локально компактной группы G. Действительно, пусть K_1 и K_2 — две замкнутые подгруппы в G, и пусть L и M — представления K_1 и K_2 соответственно. Пусть далее U^L и U^M — представления G, индуцированные представлениями L подгруппы K_1 и M подгруппы K_2 соответственно. Пусть

$$\mathscr{G} \equiv G \times G = \{(g_1, g_2);\ g_1, g_2 \in G\}, \quad \tilde{G} \equiv \{(g, g);\ g \in G\}$$

и $K = K_1 \times K_2$. Ясно, что $\tilde{G}$ изоморфна G. Пусть $U^L \otimes U^M$ — представление группы $\mathscr{G}$, заданное при помощи внешнего тензорного произведения. Это представление эквивалентно представлению $U^{L \otimes M}$ группы $\mathscr{G}$ ввиду теоремы 16.2.3. С другой стороны, $U^L \otimes U^M$ при сужении на $\tilde{G}$ эквивалентно (внутреннему) тензорному произведению $U^L \otimes U^M$. Имеем поэтому

$$U^L \otimes U^M \cong U^{L \otimes M}_{\tilde{G}}. \tag{1}$$

Таким образом, задача редукции (внутреннего) тензорного произведения $U^L \otimes U^M$ группы G является фактически задачей разложения индуцированных представлений $U^{L \otimes M}$ группы $G \otimes G$, суженных на подгруппу $\tilde{G} \simeq G$. Эта задача в свою очередь решается при помощи индукционно-редукционной теоремы. Справедлива

Теорема о тензорном произведении. *Пусть G — сепарабельная локально компактная группа, и пусть K_1 и K_2 — две регулярно связанные замкнутые подгруппы в G. Пусть L и M — представления K_1 и K_2 соответственно, и пусть U^L и U^M — представления группы G, индуцированные представлениями L и M соответственно. Тогда*

1° $$U^L \otimes U^M \cong \int_{\mathscr{D}} U(D)\, d\nu(D), \tag{2}$$

где D — множество двойных смежных классов $K_1 \diagdown G/K_2$, $U(D)$ — унитарное представление группы G, а ν — произвольная допустимая мера в $\mathscr{D}$.

2° *Представление $G \ni g \to U_g(D)$ в разложении (2) определяется с точностью до эквивалентности двойным смежным классом D. Если $L\colon y \to \tilde{L}_{\gamma y \gamma^{-1}}$ и $M\colon y \to \tilde{M}_{\gamma y \gamma^{-1}}$, $g, \gamma \in G$, $g\gamma^{-1} \in D$, являются представлениями подгруппы $g^{-1}K_1 g \cap \gamma^{-1}K_2\gamma$, а $\tilde{L} \otimes \tilde{M}$ обозначают их тензорное произведение, то $U(D)$ унитарно эквивалентно представлению $U^{\tilde{L}\otimes\tilde{M}}$.*

Доказательство. Доказательство с помощью соотношения (1) сводится к ИР-теореме. Определим сначала множество $K \diagdown \mathscr{G}/\tilde{G}$ двойных смежных классов.

Два элемента (g, γ) и (g_1, γ_1) из $\mathscr{G}$ принадлежат одному и тому же двойному смежному классу в $K : \tilde{G}$ тогда и только тогда, когда для некоторых $k_i \in K_i$ и $\tilde{g} \in G$ справедлива формула

$$(k_1, k_2)(g, \gamma)(\tilde{g}, \tilde{g}) = (g_1, \gamma_1).$$

Это условие эквивалентно равенству

$$k_1 g \gamma^{-1} k_2^{-1} = g_1 \gamma_1^{-1}$$

для некоторых $k_i \in K_i$, т. е. равенству

$$\pi(g\gamma^{-1}) = \pi(g_1\gamma_1^{-1}),$$

где π обозначает каноническую проекцию G в $K_1 \diagdown G/K_2$. Значит, отображение $\theta(g, \gamma) \equiv \pi(g\gamma^{-1})$ определяет взаимно-однозначное отображение между (борелевыми) пространствами $K \diagdown \mathscr{G}/\tilde{G}$ и $K_1 \diagdown G/K_2$, в котором $K(g, \gamma)\tilde{G}$ соответствует $K_1 g \gamma^{-1} K_2$. Воспользовавшись тем фактом, что K_1 и K_2 регулярно связаны, убеждаемся, что θ является изоморфизмом Бореля. Таким образом, K и $\tilde{G}$ регулярно связаны в $G \times G$, и все гипотезы ИР-теоремы удовлетворяются.

Эта теорема утверждает, что $U^{L\otimes M}$ при сужении на $\tilde{G}$ является прямым интегралом по множеству двойных смежных классов $\mathscr{D} = K(g, \gamma)\tilde{G}$ вида

$$U_{\tilde{G}}^{L\times M} \simeq \int_{\mathscr{D}} U_{\tilde{G}}(D)\, d\nu(D).$$

Каждое слагаемое $U_{\tilde{G}}(D)$ под знаком интеграла является представлением группы $\tilde{G}$, которое индуцировано представлением $(y, y) \to (L \times M)_{(g,\gamma)(y,y)(g,\gamma)^{-1}}$ подгруппы

$$\tilde{G} \cap (g, \gamma)^{-1}(K_1 \times K_2)(g, \gamma).$$

Но подгруппа $\tilde{G} \cap (g, \gamma)^{-1}(K_1 \times K_2)(g, \gamma)$, поднятая до G при помощи изоморфизма $(g, g) \to g$, является подгруппой $g^{-1}K_1 g \cap \cap \gamma K_2 \gamma^{-1}$. Наконец, представление $(y, y) \to (L \otimes M)_{(g,\gamma)(y,y)(g,\gamma)^{-1}}$ становится представлением $\tilde{L} \otimes \tilde{M}$, где L: $y \to L_{gyg^{-1}}$ и $M: y \to \to M_{\gamma y \gamma^{-1}}$ — представления подгруппы $g^{-1}K_1 g \cap \gamma^{-1}K_2\gamma$.

Теорема о тензорном произведении дает изящный метод редукции тензорных произведений унитарных представлений различных групп физических симметрий, таких, как группа Лоренца, евклидова группа, группа Галилея или группа Пуанкаре.

Последние три группы имеют вид полупрямого произведения $N \rtimes M$, где N и M сепарабельны и локально компактны, а N коммутативна. Следовательно, мы получаем теперь частный случай теоремы ТП для этого класса групп.

Пусть $\hat{n}_1$ и $\hat{n}_2$ — два характера группы N. Пусть $M_{\hat{n}_i}$ — замкнутая подгруппа в M, состоящая из всех $m \in M$ с $\hat{n}_i m = \hat{n}_i$, $i = 1, 2$. Пусть L^i — неприводимое представление $M_{\hat{n}_i}$, и пусть $\hat{n}_i L_i$ — представление $(n, m) \to \hat{n}_i(n) L_m^i$ группы $N \rtimes M_{\hat{n}_i}$, $i = = 1, 2$. Тогда в силу теоремы 17.1.5 представления $U^{\hat{n}_i L_i}$, индуцированные посредством $\hat{n}_i L_i$, $i = 1, 2$, неприводимы. Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть $G = N \rtimes M$ — полупрямое произведение сепарабельных локально компактных групп N и M, N коммутативна, и пусть $M_{\hat{n}_1}$ и $M_{\hat{n}_2}$ — регулярно связанные подгруппы в M. Тогда*

$$1^\circ \qquad U^{\hat{n}_1 L_1} \otimes U^{\hat{n}_2 L_2} \cong \int_{\mathscr{D}} U_G(D)\, d\nu(D), \tag{3}$$

где $\mathscr{D}$ — пространство двойных смежных классов $M_{\hat{n}_1} \backslash M / M_{\hat{n}_2}$ в M, а $U(D)$ — унитарное представление группы G.

2° *Представления* $U(D)$ *группы* G, *входящие в* (3) *и соответствующие двойному смежному классу* D, *который содержит элемент* $m \in M$, могут быть вычислены следующим образом: пусть $\chi_1 = \hat{n}_1 m$ и пусть $\chi = \hat{n}_2\chi_1$. *Пусть* $\tilde{L}^i$ — *ограничение* L^i *на* $M_{\chi_1} \cap \cap M_{\hat{n}_2} \subseteq M_\chi$. *Образуем внутреннее тензорное произведение* $\tilde{L}^1 \otimes \tilde{L}^2$, *затем образуем представление* $U^{\tilde{L}^1 \otimes \tilde{L}^2}$ *группы* M_χ, *индуцированное посредством* $\tilde{L}^1 \otimes \tilde{L}^2$. *Пусть* $\int L^\lambda \, d\rho(\lambda)$ — *разложение* $U^{\tilde{L}^1 \otimes \tilde{L}^2}$ *в прямой интеграл неприводимых представлений. Тогда*

$$U_G(D) \simeq \int U_G^{\chi L^\lambda} \, d\rho(\lambda), \tag{4}$$

где $U^{\chi L^\lambda}$ *являются неприводимыми представлениями группы* $N \rtimes M$, *индуцированными представлением* $(n, m) \to \chi(n) L_m^\lambda$ *группы* $N \rtimes M_\chi$.

Доказательство. 1° и первая часть 2° вытекают из теоремы 1.2. Остается только заметить очевидное взаимно-однозначное соответствие пространства $N \rtimes M_{\hat{n}_1} \diagdown G/N \rtimes M_{\hat{n}_2}$ пространству $D = M_{\hat{n}_1} \diagdown M/M_{\hat{n}_2}$, поскольку N нормальна в G; уточнение деталей мы предоставляем читателю. Соотношение (4) следует из теоремы 16.2.1. Неприводимость $U^{\chi L^\lambda}$ следует из теоремы 17.1.5.

Теорема 2 дает, таким образом, метод разложения тензорного произведения неприводимых представлений на неприводимые компоненты. Продемонстрируем теперь эффективность теоремы 2 на случае редукции тензорного произведения для двумерной группы Пуанкаре.

Пример 1. Пусть $G = N \rtimes M$ — двумерная группа Пуанкаре. Действие G в двумерном пространстве-времени задается формулой

$$\begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \operatorname{ch}\alpha, & \operatorname{sh}\alpha \\ \operatorname{sh}\alpha, & \operatorname{ch}\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_x \\ n_t \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Дуальный объект $\hat{N}$ по отношению к группе N состоит из векторов «импульса» $\hat{n} = (\hat{n}_x, \hat{n}_t) = p$ с «массой» в квадрате $p^2 = \hat{n}_t^2 - \hat{n}_x^2$. Всякое ненулевое $\hat{n} \in \hat{N}$ имеет стационарную группу $M_{\hat{n}} = \{e\}$. Для $\hat{n} = (0, 0)$, $M_{\hat{o}} = M$. Значит, каждое неприводимое представление группы G является представлением $U^{\hat{n}I}$, которое индуцировано представлением $n \to \hat{n}(n) \cdot I$ стационарной подгруппы $N \rtimes \{e\}$ при $\hat{n} \neq \hat{o}$, либо представлением группы Лоренца M, поднятым до G при $\hat{n} = \hat{o}$. Мы хотим разложить тензорное произведение $U^{\hat{n}_1 I} \otimes U^{\hat{n}_2 I}$ на неприводимые компоненты. Так как стационарная группа $M_{\hat{n}}$ всякого ненулевого характера n тождественна, получаем $M_\chi = \{e\}$. Следовательно, $U^{\tilde{L}^1 \otimes \tilde{L}^2}$ — тождественное представление. Таким образом,

$$\int U^{\chi L^\lambda} \mathrm{d}\rho(\lambda) = U^{\chi I} \tag{6}$$

является вкладом в $U^{\hat{n}_1 I} \otimes U^{\hat{n}_2 I}$ двойного смежного класса, содержащего $m \in M$ (т. е. $U(D) = U^{\chi I}$). Разложение (3) тензорного произведения $U^{\hat{n}_1 I} \otimes U^{\hat{n}_2 I}$ будет прямым интегралом представлений (6) по допустимым характерам χ. Так как по теореме 2.2°

$$\chi(n) = \hat{n}_2(n)\chi_1(n) = \langle n, \hat{n}_2 + \chi_1\rangle = \exp[\mathrm{i}(\hat{n}_2 + \chi_1)n],$$

где $\chi_1 = \hat{n}_1 m$, мы получаем

$$\chi^2 = \chi_1^2 + 2\chi_1\hat{n}_2 + \hat{n}_2^2 = p_1^2 + 2|p_1||p_2|\operatorname{ch}\alpha + p_2^2, \qquad |p_i| = \sqrt{p_i^2}, \tag{7}$$

т. е.

$$|p_1| + |p_2| \leqslant |\chi| < \infty.$$

Это влечет за собой

$$U^{\hat{n}_1 I} \otimes U^{\hat{n}_2 I} \cong \int\limits_{|p_1|+|p_2|}^{\infty} U^{\chi I}\,\mathrm{d}|\chi|. \tag{8}$$

Формула (8) показывает, что абстрактное разложение (3) в двойные смежные классы имеет интересную физическую интерпретацию. Действительно, соотношение (8) представляет собой разложение системы из двух частиц «с массами» $|p_1|$ и $|p_2|$ на подсистемы с инвариантной массой $|p| = |\chi|$.

Таким же образом теорему 2 без затруднений можно применить и в случае четырехмерной группы Пуанкаре. В этом случае подгруппа M_χ нетривиальна, и мы получаем дополнительные инвариантные числа λ_1, λ_2, которые снимают вырождение представления $U(D)$. Эти дополнительные инвариантные числа отвечают спиральностям первой и второй частиц. Это снова показывает, что абстрактное разложение (3) в применении к физическим задачам дает результаты, имеющие интересную физическую интерпретацию (см. упражнения 5.2.2).

§ 3. Теорема взаимности Фробениуса

Рассмотрим сначала случай конечных групп. Классическая теорема взаимности Фробениуса утверждает следующее.

Теорема 1. *Пусть G — конечная группа, и K — подгруппа в G. Пусть U^{L^i} — представление G, индуцированное неприводимым представлением L^i подгруппы K. Тогда кратность неприводимого представления U^j группы G в U^{L^i} равна кратности представления L^i в сужении представления U^j на K.*

Эта теорема играет важную роль в теории представлений конечных групп и ее приложениях. Дадим теперь принадлежащее Макки обобщение теоремы взаимности на индуцированные представления локально компактных топологических групп. Начнем с переформулирования теоремы 1.

Рассмотрим схему

$$\begin{bmatrix} n(1,\ 1) & \dots & n(1,\ s) \\ n(2,\ 1) & \dots & n(2,\ s) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ n(r,\ 1) & \dots & n(r,\ s) \end{bmatrix},$$

где строки нумеруются числом i, характеризующим неприводимые представления L^i подгруппы K, столбцы нумеруются числом j, характеризующим неприводимые представления U^j группы G, а на месте $(i,\ j)$ стоит кратность $n\ (i,\ j)$ представления U^j в представлении U^{L^i}. Кратность $n\ (i,\ j)$ представляет собой функцию на дуальной группе $\widehat{K} \times \widehat{G}$ со значениями в множестве неотрицательных целых чисел. Классическую теорему взаимности Фробениуса можно теперь переформулировать в следующем виде.

Теорема 1′. *Существует функция $n\ (\cdot\ ,\ \cdot)$ на группе $\widehat{K} \times \widehat{G}$ со значениями в множестве неотрицательных целых чисел, такая, что*

$$U_G^{L^i} = \sum_{j \in \widehat{G}} n(i,\ j)\, U^j \quad \text{и} \quad U_K^j = \sum_{h \in \widehat{K}} n(h,\ j)\, L^h. \tag{1}$$

Оказывается, что теорему взаимности в этой формулировке можно обобщить на случай, когда G и K не обязательно компактны.

Рассмотрим сначала некоторые свойства мер на $\widehat{K} \times \widehat{G}$. Пусть Z_1 и Z_2 — пространства Бореля, и пусть α — конечная мера на $Z_1 \times Z_2$. Пусть α_1 и α_2 — проекции меры α на Z_1 и Z_2 соответственно, т. е. для борелевых множеств $E_1 \subset Z_1$ и $E_2 \subset Z_2$ мы имеем

$$\alpha_1(E_1) = \alpha(E_1 \times Z_2), \quad \alpha_2(E_2) = \alpha(Z_1 \times E_2). \tag{2}$$

Теорема о разложении меры (см. 4.3.2) утверждает, что существует конечная мера Бореля β_x в Z_2, такая, что

$$\alpha = \int_{Z_1} \beta_x\, d\alpha_1(x).$$

Это означает, что для всех борелевых множеств $E \subset Z_1 \times Z_2$ мы имеем

$$\alpha(E) = \int_{Z_1} \beta_x \{y : (x, y) \in E\} \, d\alpha_1(x).$$

Мера β_x в Z_2 называется *x-срезом* меры α. Аналогично вводится конечная мера Бореля γ_y на Z_1, такая, что

$$\alpha = \int_{Z_2} \gamma_y \, d\alpha_2(y).$$

Мера γ_y называется y-срезом меры α.

Теперь мы можем сформулировать принадлежащее Макки обобщение теоремы взаимности Фробениуса.

Теорема 2. *Пусть K — замкнутая подгруппа сепарабельной локально компактной группы G. Пусть G и K являются группами типа I и имеют гладкие дуальные объекты $\hat{G}$ и $\hat{K}$ соответственно. Пусть U^{L^x} — представление группы G, индуцированное унитарным неприводимым представлением L^x подгруппы K. Тогда существует конечная мера Бореля α в $\hat{K} \times \hat{G}$ и измеримая функция $n(\cdot, \cdot)$ из $\hat{K} \times \hat{G}$ в множество неотрицательных целых чисел, включающее $+\infty$, такие, что*

1° *Проекции α_1 и α_2 меры α на $\hat{K}$ и $\hat{G}$ эквивалентны мерам, определяемым при помощи регулярных представлений групп K и G соответственно.*

2° *Для почти всех x в $\hat{K}$ относительно α_1*

$$U^{L^x} \simeq \int_{\hat{G}} n(x, y) \, U^y \, d\beta_x(y), \tag{3}$$

где U^y — неприводимые представления G, а β_x является x-срезом меры α.

3° *Для почти всех y в $\hat{G}$ относительно α_2*

$$U_K^y \simeq \int_{\hat{K}} n(x, y) \, L^x \, d\gamma_y(x), \tag{4}$$

где γ_y является y-срезом меры α.

Доказательство приведено в работе Макки [552]. Упрощенное доказательство приведено в чикагских лекциях Макки [554].

Замечание 1. Теорема Макки дает двойное обобщение теоремы взаимности. Действительно, она дает единую функцию $n(x, y)$, из которой получаются кратности как представления U^y в представлении U^{L^x}, так и L^x в U_K^y соответственно, а также единую меру α, из которой получаются семейства мер $\beta_x(\cdot)$ и $\gamma_y(\cdot)$.

Если G компактна, то прямые интегралы (3) и (4) сводятся к прямым суммам, и мы имеем

$$U_G^{L^i} \cong \sum_{j \in \widehat{G}} n(i, j) U_G^j \quad \text{и} \quad U_K^j = \sum_{n \in \widehat{K}} n(h, j) L_K^h, \tag{5}$$

где $n(i, j)$ — функция из $\widehat{K} \times \widehat{G}$ в множество неотрицательных целых чисел. Этот результат является распространением на компактные группы теоремы 1 для конечных групп.

Дадим теперь два интересных приложения теоремы взаимности.

Пример 1. Пусть G — компактная группа, и пусть $g \to U_g$ — регулярное представление группы G в гильбертовом пространстве $H = L^2(G)$. Это представление может рассматриваться как представление U^L группы G, индуцированное тождественным представлением $L = I$ подгруппы $K = \{e\}$, где e — единичный элемент в G. Так как кратность представления L в неприводимом представлении U^j группы G при сужении на K равна $\dim U^j$, то в силу теоремы 2 имеем

$$\text{кратность } n_j \text{ представления } U^j \text{ в } U^L = \dim U^j.$$

Пусть теперь G — некомпактная простая группа Ли. Мы знаем, что всякое нетривиальное унитарное представление группы G бесконечномерно. Следовательно, пользуясь теми же аргументами, заключаем, что каждое нетривиальное унитарное неприводимое представление G, входящее в регулярное представление, содержится бесконечное число раз.

Рассмотрим теперь пример, когда K некомпактна.

Пример 2. Пусть $G = T_4 \rtimes SO(3, 1)$ — группа Пуанкаре, и пусть $K = T_4 \rtimes SO(3)$. Нас интересует кратность представления $\widehat{n}^1 L^1$: $(a, r) \to \widehat{n}^1(a) L_r^1$ подгруппы K в представлении $U^{\widehat{n}L}$ группы G, индуцированном представлением $\widehat{n}L$ подгруппы K. Мы знаем, что $U^{\widehat{n}L}$ неприводимо [теорема (17.1.5)]. Значит, представление $U^{\widehat{n}L}$ при сужении на K содержит $\widehat{n}^1 L^1$ не более чем один раз.

§ 4. Комментарии и дополнения

А. Предположение в теореме 2, что G и K обе являются группами типа I, оказывается существенным, когда K некомпактна. Действительно, Макки показал, что если G — дискретная группа преобразований вещественной прямой

$$x \to ax + b,$$

$a > 0$, a, b — рациональные числа, а K соответствует, например, некомпактной подгруппе $(\{1, b\})$, то теорема взаимности Фробениуса не выполняется ([551], стр. 216)[1]). Однако Маутнер доказал, что если K компактна, то теорема взаимности справедлива даже для групп, которые не являются группами типа I.

Б. Интересно, что классическую теорему взаимности Фробениуса можно переформулировать еще и в другой, более симметричной форме. Действительно, пусть K_1 и K_2 — подгруппы конечной группы G, и пусть U^{L^i} и U^{M^j} — представления G, индуцированные неприводимыми представлениями L^i и M^j подгрупп K_1 и K_2 соответственно. Тогда можно сформулировать обобщенную теорему взаимности в следующем виде.

Теорема 3. *Существует функция $n(\cdot, \cdot)$ из дуальной группы $\hat{K}_1 \times \hat{K}_2$ в множество неотрицательных целых чисел, такая, что*

$$U^{L^i}_{K_2} = \sum_{l \in \hat{K}_2} n(i, l) M^l$$

и

$$U^{M^j}_{K_1} = \sum_{h \in \hat{K}_1} n(h, j) L^h. \tag{6}$$

Заметим, что при $K_2 = G$ эта теорема совпадает с теоремой 1′. Аналогично теорему 2 также можно сформулировать для некомпактных групп в виде, аналогичном теореме 3 ([552], § 7).

В. Техника индуцированных представлений дает полную классификацию неприводимых унитарных представлений регулярных полупрямых произведений (гл. 17). Диксмье [213] показал, что каждое неприводимое унитарное представление связной нильпотентной группы G индуцируется одномерным представлением некоторой подгруппы в G. Эти два примера иллюстрируют эффективность теории индуцированных представлений.

Кириллов предложил вариант теории индуцированных представлений для нильпотентных групп, основанный на методе орбит в пространстве, дуальном к векторному пространству алгебры Ли [455]. Этот метод был затем распространен на другие классы групп. В частности, Ауслендер и Мур [26] дали классификацию индуцированных представлений некоторых разрешимых групп Ли.

Существует интересная связь метода орбит с проблемой квантования квантовой механики. Эта проблема анализировалась Костантом [487], Кирилловым [457] и Симмсом [763].

---

[1]) Заметим, что это — классический пример фон Неймана группы, фактор-представления которой типа II (см., например, [625], с. 558).

Г. Обобщение теории индуцированных представлений на расширения групп также было проведено Макки [555].

§ 5. Упражнения

§ 1.1. Найдите формулировку индукционно-редукционной теоремы для неунитарных, например неразложимых индуцированных представлений.

§ 2.1. Пусть $G = T^n \rtimes SO(3, 1)$ и $K = T^n \rtimes SO(2)$. Покажите, что представление U^L, индуцированное неприводимым представлением L_k подгруппы K вида

$$k = (a, \varphi) \to L_k = \exp[i\overset{\circ}{p}a] \exp[iM\varphi], \tag{1}$$

где $\overset{\circ}{p} = (m, 0, 0, 0)$ и $M = 0, \pm 1, \pm 2$, приводимо и имеет следующее разложение:

$$U^L = \sum_{J \geqslant |M|}^{\infty} \oplus U^{m, J}. \tag{2}$$

§ 2.2. Пусть $U^{M_1 J_1}$ и $U^{M_2 J_2}$, M_1, $M_2 \in (0, \infty)$, J_1, $J_2 = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots,$ — два неприводимых представления группы Пуанкаре. Покажите, что

а) для M_1, $M_2 > 0$ мы имеем

$$U^{M_1, J_1} \otimes U^{M_2, J_2} \cong \int_{M_1+M_2}^{\infty} dM \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{s=|J_1-J_2|}^{J_1+J_2} \sum_{J=|s-l|}^{s+l} \oplus U^{M, J}, \tag{3}$$

б)

$$U^{M_1, J_1} \otimes U^{0, J_2} \cong \int_{M_1}^{\infty} dM \sum_{l=|J_2|}^{\infty} \sum_{J=|l-J_1|}^{l+J_1} \oplus U^{M, J}, \tag{4}$$

в)

$$U^{0, J_1} \otimes U^{0, J_2} \cong \int_{0}^{\infty} dM \sum_{J=|J_1-J_2|}^{\infty} \oplus U^{M, J}. \tag{5}$$

Указание: воспользуйтесь теоремой 2.2.

§ 2.3. Пусть $U^{(J_1, J_2)}$ — конечномерное представление группы Пуанкаре, получаемое посредством подъема представления $D^{(J_1, J_2)}$ группы SL (2, C) до группы Пуанкаре. Является ли тензорное произведение

$$U^{(J_1, J_2)} \otimes U^{M, J}$$

приводимым?

§ 2.4. Пусть $H = H^{M_1, J_1} \otimes H^{M_2, J_2}$ — несущее пространство тензорного произведения $U^{M_1, J_1} \otimes U^{M_2, J_2}$. Покажите, что операторы

$$\lambda_i = [(P_i^\mu P_\mu)^2 - m_i^2 M^2]^{-1/2} \zeta_i^\mu P_\mu, \quad i = 1, 2,$$

где

$$P^\mu = P_1^\mu + P_2^\mu, \quad M^2 = P^\mu P_\mu, \quad m_i^2 = P_i^\mu P_{i\mu}$$

и

$$\zeta_i^\mu = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda} M_{i\nu\rho} P_{i\lambda},$$

являются инвариантными операторами в H. Покажите, что в системе центра масс мы имеем

$$\lambda_i = \boldsymbol{P}_i \boldsymbol{J}_i / |\boldsymbol{P}_i|, \quad i = 1, 2,$$

т. е. операторы λ_i являются операторами спиральности.

Глава 19

Индуцированные представления полупростых групп Ли

Построим теперь отдельные серии унитарных неприводимых представлений полупростых классических групп Ли, пользуясь методом индуцированных представлений. Множество унитарных представлений полупростых некомпактных групп в отличие от множества конечномерных представлений является весьма богатым. Обычно мы различаем четыре серии унитарных представлений: основная невырожденная, основная вырожденная, дополнительная невырожденная и дополнительная вырожденная серии. Соответствующие серии определяются различными наборами инвариантных чисел: например, в случае группы SL (n, C) основная невырожденная серия определяется при помощи $2n-2$ инвариантных чисел, а последовательные вырожденные серии — при помощи $2n-2k$, $k=2, 3, \ldots, n-1$, инвариантных чисел.

В § 1 мы излагаем общую теорию индуцированных представлений полупростых групп Ли. Построение индуцированных представлений основывается на индуцировании представления с неприводимых представлений минимальной параболической подгруппы группы G. Мы анализируем также вопросы неприводимости и неэквивалентности получающихся индуцированных представлений. Затем мы подробно анализируем построение индуцированных представлений основной, дополнительной и вырожденных серий для групп SL (n, C) и GL (n, C), которые часто рассматриваются в качестве групп симметрии различных физических систем. Наконец, в § 6 мы даем краткое обсуждение свойств индуцированных представлений других классических групп Ли.

Примечательно, что та же самая техника индуцированных представлений, которая использовалась нами в гл. 8 для построения всех неприводимых конечномерных представлений классических групп Ли, позволяет нам в данном случае строить неприводимые бесконечномерные унитарные представления классических групп. Соответствующие формулы, которые дают реализацию конечно- и бесконечномерных представлений, почти тождественны [см. (8.3.4) и (3.16)].

§ 1. Индуцированные представления полупростых групп Ли

В этом параграфе мы даем построение индуцированных представлений для полупростых классических групп Ли и приводим некоторые недавно полученные результаты, касающиеся неприводимости.

Пусть G — связная полупростая группа Ли с конечным центром, $G = KAN$ — разложение Ивасавы для G, $P = MAN$ — соответствующая минимальная параболическая подгруппа в G (определения см. в гл. 3, § 6, Г). Пусть L — конечномерное представление подгруппы P. Следующая лемма описывает строение L.

Лемма 1. *Конечномерное непрерывное неприводимое представление L подгруппы P в пространстве H имеет вид*

$$L_{man} = \chi(a) L_m, \quad m \in M, \quad a \in A, \quad n \in N, \tag{1}$$

где χ — характер подгруппы A, а $m \to L_m$ — непрерывное неприводимое представление M в H.

Доказательство. По теореме Ивасавы AN связна и разрешима. Следовательно, в силу теоремы Ли существует ненулевой вектор $u_0 \in H$, такой, что $L_{an}u_0 = \chi(an) u_0$, где χ — одномерное непрерывное представление подгруппы AN, так как N является производной группой группы AN, $\chi(n) = 1$ для всех $n \in N$. Поскольку $L_{an}L_m u_0 = \chi(a) L_m u_0$, линейная оболочка $L_m u_0$ является L-стабильной; неприводимость L означает, что эта линейная оболочка должна совпадать с H. Поэтому $L_{an}u = \chi(a) u$ для всех $a \in A$, $n \in N$ и $u \in H$.

Пусть χL — конечномерное неприводимое унитарное представление подгруппы P, $X = G/P$ или $X = P \diagdown G$, и $\mu(\cdot)$ — квазиинвариантная мера на X. Действие индуцированного представления $U^{\chi L}$ группы G в пространстве $H^{\chi L} = L^2(X, \mu)$ задается по формуле (16.1.15), если пользоваться правым сдвигом $x \to xg$, или по формуле (16.1.47), если пользоваться левым сдвигом $x \to g^{-1}x$.

Унитарные представления $U^{\chi L}$ группы G, индуцированные посредством конечномерных неприводимых представлений χL подгруппы P, называются *основной P-серией* унитарных представлений группы G.

Заметим, что описанная конструкция индуцированного представления может быть использована как для комплексных, так и для вещественных полупростых групп Ли. Если G комплексна, то, согласно гл. 3, § 6, В, K является компактной формой группы G, M есть максимальный тор в K, а MA — подгруппа Картана группы G. Таким образом, представления основной P-серии группы G являются унитарными представлениями G, индуцированными с подгруппы Картана группы G; следовательно, инвариантные числа, характеризующие представления основной P-серии группы G, — это пары, состоящие из одного целого числа и одного вещественного, которые задают характеры подгруппы MA.

Пример 1. Пусть $G = \mathrm{SL}(2, R)$. Подгруппы K, A, N и M были даны в примере 3.6.4. Поскольку $M = \{e, -e\}$, она имеет только два неприводимых неэквивалентных представления, задаваемые согласно

$$L_m^+ = 1, \quad m \in M, \quad \text{и} \quad L_m^- = m_1, \quad m = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \in M. \tag{2}$$

Следовательно, в силу леммы 1 неприводимые конечномерные унитарные представления подгруппы $P = MAN$ одномерны и имеют вид

$$man = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{bmatrix} \to \chi(a) L_m^{\pm}, \tag{3}$$

где $\chi(a) = |a|^{ir}$, $r \in R$. Поэтому основная P-серия унитарных представлений $U^{\chi L}$ группы $\mathrm{SL}(2, R)$ состоит из двух серий $U^{r,+}$ и $U^{r,-}$. Явная реализация этих представлений дана в примере 16.1.2.

Одной из основных проблем в теории представлений является определение неприводимости и эквивалентности представлений $U^{\chi L}$ основной P-серии. Чтобы сформулировать соответствующие теоремы, мы должны ввести действие группы Вейля на представления χL подгруппы MA и понятие расширяемых представлений. Пусть $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{a}$ — алгебры Ли групп G и A соответственно и W — группа Вейля пары $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$; пусть χL — неприводимое конечномерное представление MA и $w \in W$. Тогда $w\chi L$ обозначает представление MA, задаваемое согласно

$$ma \to \chi(m_w^{*-1} a m_w^*) L_{m_w^{*-1} m m_w^*}, \quad m \in M, \quad a \in A, \tag{4}$$

где m_w^* — произвольный элемент нормализатора M^* подгруппы A в K, ассоциированный с w (относительно свойств M^* см. гл. 3, § 6, Г).

Предположим, что нильпотентная подгруппа N в разложении Ивасавы отвечает корневым пространствам положительных ограниченных корней алгебры Ли $\mathfrak{a}$, и пусть N^- — нильпотентная подгруппа в G, отвечающая корневым пространствам отрицательных ограниченных корней. Пусть L — унитарное неприводимое представление M в гильбертовом пространстве H. Мы говорим, что пара (L, H) расширяема, если существует неприводимый конечномерный комплексный G-модуль V, такой что M-модуль

$$V^{N^-} = \{u \in V;\ nu = u \text{ для всех } n \in N^-\} \tag{5}$$

эквивалентен (L, H). Мы называем V расширением представления L.

Теорема 2. *Пусть χL — конечномерное представление P. Тогда*

1) *если $\chi L \nsim w\chi L$ для всякого $w \neq I$ из W, то $U^{\chi L}$ неприводимо;*

2) *$U^{\chi' L'} \sim U^{\chi'' L''}$ тогда и только тогда, когда существует $w \in W$, такой, что $\chi' L' \sim w\chi'' L''$;*

3) *если $U^{\chi L}$ приводимо, то*

$$U^{\chi L} = \sum_{i=1}^{r} U^i,$$

где U^i — неприводимое унитарное подпредставление представления $U^{\chi L}$, $U^i \nsim U^{\chi' L'}$ при любом представлении $\chi' L'$ подгруппы P, а $r \leqslant m$ — кратность представления L в V, как в M-модуле.

(Доказательство этих результатов было в основном дано Брюа [150]. Верхний предел на r, указанный в п. 3, был получен Уоллачем [827].)

Теорема 2 дает эффективное средство при проверке неприводимости унитарных представлений основной P-серии. Проиллюстрируем ее силу на двух классах групп.

Теорема 3. *Пусть G — связная комплексная полупростая группа Ли. Тогда каждое представление основной P-серии неприводимо.*

Доказательство. В этом случае MA является подгруппой Картана в G, а W действует на MA как группа Вейля группы G относительно MA. Пусть χ — характер подгруппы A и L — характер M. Пусть V — конечномерное неприводимое (индуцированное) представление группы G с младшим целочисленным весом L, построенное в гл. 8, § 2. Подгруппу N^- можно отождествить с подгруппой Z разложения Гаусса. Значит, M-модуль V^{N^-}, определенный согласно (5), ввиду следствия 1 теоремы 8.2.2 является одномерным, а в силу соотношения (8.2.18) эквивалентен (L, H). Следовательно, V является расширением L. Но из следствия 1 теоремы 8.2.2 вытекает, что кратность L в V, как в M-модуле, равна единице. Следовательно, согласно утверждению (3) теоремы 2, представление $U^{\chi L}$ неприводимо.

Второе приложение касается групп $\mathrm{SL}(n, R)$. В этом случае $K = \mathrm{SO}(n)$, а в качестве A можно взять множество всех диагональных матриц из G с положительными элементами. N — группа всех верхних треугольных матриц с единицами на диагонали. Централизатором M является группа всех диагональных элементов из G с числами ± 1 на диагонали. Пусть $m = \mathrm{diag}(m_1, \ldots$ $\ldots, m_n)$ — элемент из M; положим $\varepsilon_0(m) = 1$ и $\varepsilon_i(m) = m_i$, $i = 1, \ldots$

..., $n-1$. Тогда всякий нетривиальный унитарный характер группы M имеет вид $\varepsilon_{i_1} \dots \varepsilon_{i_r}$, $1 \leqslant i_1 < \dots < i_r \leqslant n-1$. Положим $\varepsilon_n = \varepsilon_1 \dots \varepsilon_{n-1}$. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть* $G = \mathrm{SL}(n, R)$. 1) *Если n нечетное, то каждый элемент основной P-серии неприводим.* 2) *Если n четное, χ — характер A и*

$$L = \varepsilon_{i_1} \cdots \varepsilon_{i_j}, \quad 1 \leqslant i_1 < \cdots < n-1, \quad j \neq \frac{n}{2}, \tag{6}$$

то представление $U^{\chi L}$ неприводимо. Если $j = n/2$ и $U^{\chi L}$ приводимо, то

$$U^{\chi L} = U^1 \oplus U^2$$

является прямой суммой неприводимых унитарных представлений.

Доказательство. Группа Вейля W действует на M, переставляя величины на диагонали; значит, W также переставляет $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$. Рассмотрим теперь представления V^i, $i = 0, \dots$ ..., $n-1$, где V^0 — тривиальное представление группы G, V^1 — стандартное (матричное) действие группы G на C^n, а $V^i = V^1 \wedge \wedge V^1 \wedge \dots \wedge V^1$ (i раз) является поливекторным представлением группы G, которое определяется старшим весом $(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ (гл. 8, § 3). Пусть $e_1, \dots, e_n$ — стандартный базис в C^n. Тогда, если $m \in M$, то $me_i = \varepsilon_i(m) e_i$. Значит, в общем случае V^k как M-модуль разлагается в прямую сумму:

$$V^0 = 1, \quad V^k = \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k < n-1} \oplus\, \varepsilon_{i_1} \cdots \varepsilon_{i_k} +$$

$$+ \sum_{1 \leqslant j_1 < \cdots < j_{n-k} \leqslant n-1} \oplus\, \varepsilon_{j_1} \cdots \varepsilon_{j_{n-k}}, \quad n-1 \geqslant k > 0. \tag{7}$$

Пусть χ — характер подгруппы A, а L — характер M, который может быть взят в виде $L = \varepsilon_0 \varepsilon_1 \dots \varepsilon_r$, $r = 0, \dots, n-1$. Если $r = 0$, то ε_0 является действием M на $(V^0)^{N^-}$; значит, V^0 является расширением L. Аналогично, если $L = \varepsilon_0 \varepsilon_1 \dots \varepsilon_r$, то V^{n-r} является расширением L; действительно, M-модуль $(V^{n-r})^{N^-}$ ввиду следствия 1 теоремы 8.2 является одномерным с младшим целочисленным весом L. Но если n нечетное, в силу соотношения (7) каждое представление M появляется в точности один раз; согласно теореме 2 (3), отсюда следует утверждение (1) теоремы 4. Аналогично с помощью (7) и теоремы 2 проверяется утверждение (2).

Пример 2. Пусть $G = \mathrm{SL}(2, R)$. Группа Вейля $W = M^*/M$ для $\mathrm{SL}(2, R)$ вычислена в примере 3.6.4, $W = \left\{ w_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \right.$ $\left. w_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$.

Поскольку действие W на подгруппу A имеет вид

$$w_1^{-1}aw_1 = a, \quad w_2^{-1}aw_2 = a^{-1}, \tag{8}$$

а действие W на M тривиально, представления $L^{r,\pm}$ и $L^{-r,\pm}$ группы MA удовлетворяют соотношению

$$w_2L^{r,\pm} = L^{-r,\pm}.$$

Следовательно, по теореме 2 (2) индуцированные представления $U^{r_1,\pm}$ и $U^{r_2,\pm}$ являются эквивалентными, если $r_2 = -r_1$. Если теперь $r = 0$, то представление $L^- = \varepsilon_1$ подгруппы M содержится дважды в представлении V^1 группы SL $(2, R)$, рассматриваемом как M-модуль. Следовательно, в силу теоремы 2 (3) представление $U^{0,-}$ является прямой суммой двух неприводимых представлений. Аналогично с помощью теорем 2 и 3 проверяется, что $U^{r,+}$ при $r \neq 0$ и $U^{r,-}$ неприводимы.

§ 2. Свойства группы SL(n, C) и ее подгрупп

В случае $G = \mathrm{SL}(n, C)$ K является компактной формой G, M — максимальный тор в K, а MA — подгруппа Картана D группы G, состоящая из всех унимодулярных диагональных $n \times n$-матриц. Параболическая подгруппа $P = MAN$ состоит из всех верхних треугольных унимодулярных матриц. Сравнение с разложением Гаусса группы SL (n, C)

$$\mathrm{SL}(n, C) = \overline{\mathfrak{Z}DZ},$$

которое дано в гл. 3, § 6, А, показывает, что параболическая группа P совпадает с подгруппой $\mathfrak{Z}D$ группы SL (n, C). Этот факт означает, что разложение Гаусса играет важную роль в явном построении унитарных представлений, индуцированных с подгруппы P.

Напомним теперь основные свойства разложения Гаусса для SL (n, C). Подгруппа $P = \mathfrak{Z}D$ состоит из верхних треугольных матриц, диагональные элементы которых удовлетворяют условию

$$\prod_{i=1}^{n} k_{ii} = 1, \tag{1}$$

и является разрешимой. Коммутативная (картановская) подгруппа D состоит из диагональных матриц, также удовлетворяющих условию (1). Подгруппа $\mathfrak{Z}$ состоит из верхних треугольных матриц с равными единице диагональными элементами. Подгруппа Z состоит из нижних треугольных матриц с равными единице диагональными элементами и также является нильпотентной. Подгруппа $\mathfrak{Z}$ является нормальной подгруппой группы P, а P является полупрямым произведением $\mathfrak{Z} \rtimes D$.

Напомним, что разложение Гаусса SL $(n, C) = \overline{\mathfrak{Z}DZ}$ означает, что почти каждый элемент $g \in$ SL (n, C) может быть однозначно разложен в виде

$$g = \zeta\delta z, \quad \zeta \in \mathfrak{Z}, \quad \delta \in D, \quad z \in Z, \tag{2а}$$

или

$$g = kz, \tag{2б}$$

где

$$k = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ 0 & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix} \in P = \mathfrak{Z}D, \tag{3}$$

$$z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ z_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ z_{31} & z_{32} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ z_{n1} & z_{n2} & \cdots & z_{n,\, n-1} & 1 \end{bmatrix} \in Z. \tag{4}$$

Матричные элементы z_{pq}, $n \geqslant p > q > 0$, элемента группы $z \in Z$ являются произвольными комплексными числами. Значит, мы можем представить их в виде $z_{pq} = x_{pq} + \mathrm{i}y_{pq}$. Мы знаем, благодаря результатам гл. 3, § 11 [соотношение (38)], что группа треугольных матриц с равными единице диагональными элементами обладает инвариантной мерой, которую можно взять в виде

$$\mathrm{d}\mu(z) = \prod_{p,\, q=1} \mathrm{d}x_{pq}\,\mathrm{d}y_{pq}, \quad n \geqslant p > q > 0. \tag{5}$$

В дальнейшем эту меру на группе Z мы используем для построения пространства $L^2(Z, \mu)$, в котором реализуются неприводимые унитарные представления SL (n, C).

§ 3. Основная невырожденная серия унитарных представлений группы SL (n, C)

Применим теперь общий формализм индуцированных представлений с целью построить класс неприводимых унитарных представлений SL (n, C). Напомним основные стадии построения индуцированных представлений. Пусть P — замкнутая подгруппа группы G, $X = P \diagdown G$, и μ — квазиинвариантная мера на X. Пусть $k \to L_k$ — унитарное представление P в гильбертовом пространстве H. Тогда пространство H^L представления U^L, индуцированного представлением L подгруппы P, состоит из функций, удовлетворяющих

$$u(kg) = L_k u(g), \quad k \in P, \tag{1}$$

и

$$\int_X \| u(g) \|_H^2 \, d\mu(x) < \infty. \tag{2}$$

В реализации представления U^L в $H^L = L^2(X, \mu)$ действие $U^L_{g_0}$ задается по формуле (16.1.15), т. е.

$$U^L_{g_0} u(x) = \sqrt{\frac{d\mu(xg_0)}{d\mu(x)}} L_{k_{x_{gg_0}}} u(xg_0), \tag{3}$$

где $\frac{d\mu(xg_0)}{d\mu(x)}$ — производная Радона—Никодима, $x = \dot{g} = Pg = Pk_g x_g = Px_g$, а $k_{x_{gg_0}}$ определяется из разложения Макки (2.4.1) для $x_g g_0$, т. е. $x_g g_0 = k_{x_{gg_0}} x'$ с $x' \in S$, $k_{x_{gg_0}} \in P$.

В случае SL (n, C) мы имеем $P = \mathfrak{Z}D$. Поскольку D коммутативна, она имеет только одномерные неприводимые представления, а поскольку $\mathfrak{Z}$ нормальна в P, это представление расширяется до P, ввиду (3). Таким образом, построение индуцированных представлений SL (n, C) сводится к простому вычислению производной Радона—Никодима $d\mu(xg)/d\mu(x)$ и элемента $k_{x_{gg_0}} \in P$, соответствующего $x_g g_0 \in G$.

А. *Определение фактора* $k_{x_{gg_0}}$

Пусть D — диагональная (картановская) подгруппа группы SL (n, C), и пусть

$$\delta \to L_\delta = \chi(\delta) = \prod_{s=2}^{n} |\delta_{ss}|^{m_s + i\rho_s} \delta_{ss}^{-m_s}, \tag{4}$$

где m_s — целые, а ρ_s — вещественные числа, $s = 2, 3, \ldots, n$ — одномерное представление подгруппы D, задаваемое характером χ. Подгруппа P является полупрямым произведением $\mathfrak{Z} \rtimes D$, и $\mathfrak{Z}$ нормальна в P. Значит, отображение $L : (\zeta, \delta) \to I \cdot \chi(\delta)$ является наиболее общим унитарным одномерным представлением L подгруппы P:

$$k = (\zeta, \delta) \to L_k = I\chi(\delta) = \prod_{s=2}^{n} |k_{ss}|^{m_s + i\rho_s} k_{ss}^{-m_s}, \quad k_{ss} = \delta_{ss}. \tag{5}$$

Используем L для построения индуцированного представления U^L группы SL (n, C).

Функция $u(x)$ из пространства H^L определяется в пространстве $X = P \diagdown G$. Более удобным оказывается, однако, рассматривать ее как функцию на групповом пространстве подгруппы Z. Это возможно благодаря следующей лемме.

Лемма 1. *Множество $X = P\diagdown G$ совпадает с групповым пространством подгруппы Z с точностью до подмножества меры нуль относительно любой квазиинвариантной меры μ на X.*

Доказательство. Из разложения Гаусса следует, что множество $G—KZ$ является множеством меры нуль относительно меры Хаара dg на G. Каноническая проекция π: $G \to P\diagdown G$ отображает dg-нулевые множества в $d\mu$-нулевые множества в X. Значит, $X—Z$ является $d\mu$-нулевым множеством, и лемма доказана.

Эта лемма позволяет нам почти с каждым смежным классом $Pg = x \in X$ однозначно ассоциировать элемент $z_g \in Z$, определяемый из равенства $g = k_g z_g$. Сравнивая разложение $g = k_g z_g$ с разложением Макки (2.4.1), $g = k_g x_g$, мы заключаем, что элементы $z_g \in Z$ играют роль элементов $x_g \in S$.

Пусть теперь разложение элемента $z_g g_0$ определяется согласно

$$\tilde{g} \equiv z_g g_0 = k_{\tilde{g}} z_{\tilde{g}}. \tag{6}$$

Ради простоты обозначений положим $z_{\tilde{g}} = \tilde{z}$, $k_{\tilde{g}} = \tilde{k}$. Элемент $\tilde{z}$ отвечает преобразованной точке xg_0 в равенстве (3). Явные формулы для матричных элементов $\tilde{k}$ и $\tilde{z}$ могут быть получены при помощи разложения Гаусса. Действительно, применяя формулу (3.11.18) для элемента группы

$$\tilde{g} = z_g g_0 = \tilde{k}\tilde{z} \qquad \left(\tilde{g}_{pq} = \sum_{s=1}^{p-1} z_{ps} g_{sq} \mid g_{pq}\right),$$

мы получаем

$$(\tilde{z})_{pq} = \frac{\begin{vmatrix} \tilde{g}_{pq} & \tilde{g}_{p,\,p+1} & \cdots & \tilde{g}_{p,\,n} \\ \tilde{g}_{p+1,\,q} & \tilde{g}_{p+1,\,p+1} & \cdots & \tilde{g}_{p+1,\,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \tilde{g}_{nq} & \tilde{g}_{n,\,p+1} & \cdots & \tilde{g}_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \tilde{g}_{pp} & \tilde{g}_{p,\,p+1} & \cdots & \tilde{g}_{pn} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \tilde{g}_{np} & \tilde{g}_{n,\,p+1} & \cdots & \tilde{g}_{nn} \end{vmatrix}},$$

$$\tilde{k}_{pp} = \frac{\begin{vmatrix} \tilde{g}_{pp} & \tilde{g}_{p,\,p+1} & \cdots & \tilde{g}_{pn} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \tilde{g}_{np} & \tilde{g}_{n,\,p+1} & \cdots & \tilde{g}_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \tilde{g}_{p+1,\,p+1} & \tilde{g}_{p+1,\,p+2} & \cdots & \tilde{g}_{pn} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \tilde{g}_{n,\,p+1} & \tilde{g}_{n,\,p+2} & \cdots & \tilde{g}_{nn} \end{vmatrix}}. \tag{7}$$

В частности, в случае SL (2, C) получаем

$$(\tilde{z})_{21} = \frac{g_{11}z + g_{21}}{g_{12}z + g_{22}}, \quad z \in G, \tag{8}$$

$$\tilde{k}_{11} = (g_{12}z + g_{22})^{-1}, \quad \tilde{k}_{12} = g_{12}, \quad \tilde{k}_{22} = g_{12}z + g_{22}. \tag{9}$$

Мы видим, что действие SL (2, C) на Z, которая в этом случае изоморфна аддитивной группе C комплексных чисел, задается дробно-линейным преобразованием (8). В случае SL (n, C), $n > 2$, отображение $z \to \tilde{z}$ является естественным обобщением дробно-линейного преобразования (8).

Б. *Определение производной Радона—Никодима* $\frac{d\mu(\tilde{z})}{d\mu(z)}$

Инвариантная мера $d\mu(z)$ на нильпотентной подгруппе Z дается формулой (2.5). Следовательно, производная Радона—Никодима $d\mu(\tilde{z})/d\mu(z)$ представляет собой фактически якобиан преобразования $z \to \tilde{z}$. Он компенсирует множитель, который появляется за счет неинвариантности меры $d\mu(z)$ на Z по отношению к действию группы SL (n, C) на Z. Имеет место следующая лемма.

Лемма 2. *Производная Радона—Никодима дается формулой*

$$\frac{d\mu(\tilde{z})}{d\mu(z)} = \prod_{s=2}^{n} |\tilde{k}_{ss}|^{-4(s-1)}, \tag{10}$$

где $\tilde{k}_{ss}$ *дано согласно* (7).

Доказательство. Пусть $(\tilde{z})_{pq}$ и z_{pq} — матричные элементы $\tilde{z}$ и z соответственно ($g = zg_0 = \tilde{k}\tilde{z}$). Введем для простоты некоторое упорядочение в переменных $(\tilde{z})_{pq}$ и $(z)_{pq}$, $n \geqslant p > q \geqslant 1$, полагая

$$(\tilde{z})_{pq} = w_l = u_l + iv_l, \tag{11}$$

$$(z)_{pq} = z_l = x_l + iy_l \quad \left(l = 1, 2, \ldots, \frac{n(n-1)}{2} = N\right). \tag{12}$$

Заметим, что ввиду (7) переменные (11) являются аналитическими функциями переменных (12).

Из равенства (2.5) вытекает, что производная Радона—Никодима задается при помощи якобиана

$$\frac{D(u_1, v_1, \ldots, u_n, v_n)}{D(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)}.$$

При вычислении этого якобиана мы пользуемся следующим хорошо известным фактом: если $w_l = u_l + iv_l$, $l = 1, 2, \ldots, r$, — аналитические функции переменных $z_k = x_k + iy_k$, $k = 1, 2, \ldots, r$, то

$$\frac{D(u_1, v_1, \ldots, v_r, v_r)}{D(x_1, y_1, \ldots, x_r, y_r)} = \left| \frac{D(w_1, w_2, \ldots, w_r)}{D(z_1, z_2, \ldots, z_r)} \right|^2. \tag{13}$$

Докажем это методом индукции. При $r = 1$, воспользовавшись уравнениями Коши—Римана и соотношениями (8) и (9), мы получаем

$$\frac{D(u, v)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 = \left| \frac{d\tilde{z}}{dz} \right|^2.$$

Предположив, что равенство (13) справедливо при $s = m - 1$, находим для $s = m$

$$\frac{D(u_1, v_1, u_2, v_2, \ldots, u_m, v_m)}{D(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_m, y_m)} = \frac{D(u_1, v_1, u_2, v_2, \ldots, u_m, v_m)}{D(x_1, y_1, u_2, v_2, \ldots, u_m, v_m)} \times$$

$$\times \frac{D(x_1, y_1, u_2, v_2, \ldots, u_m, v_m)}{D(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_m, y_m)} = \frac{D(u_1, v_1)}{D(x_1, y_1)} \cdot \frac{D(u_2, v_2, \ldots, u_m, v_m)}{D(x_2, y_2, \ldots, x_m, y_m)} =$$

$$= \left| \frac{D(w_1)}{D(z_1)} \right|^2 \cdot \left| \frac{D(w_2, \ldots, w_m)}{D(z_2, \ldots, z_m)} \right|^2 = \left| \frac{D(w_1, w_2, \ldots, w_m)}{D(z_1, z_2, \ldots, z_m)} \right|^2.$$

Воспользовавшись теперь соотношениями (11) и (7), получаем

$$\frac{D(w_1, w_2, \ldots, w_n)}{D(z_1, z_2, \ldots, z_n)} = \prod_{s=2}^{n} (\tilde{k}_{ss})^{-2(s-1)}, \tag{14}$$

где $\tilde{k} \in K$ определяется из разложения $\tilde{g} = zg_0 = \tilde{k}\tilde{z}$, а явные выражения для матричных элементов $\tilde{k}_{ss}$ даны в (7).

В. *Основная серия представлений*

В силу равенств (1)—(3) пространство H^L представления U^L, индуцированного одномерным представлением L подгруппы K, состоит из всех измеримых функций $\varphi(z) = \varphi(\ldots, z_{pq}, \ldots)$, $0 < q < p \leqslant n$, удовлетворяющих условию

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(\ldots, z_{pq}, \ldots)|^2 dx_{pq} dy_{pq} < \infty, \quad z_{pq} = x_{pq} + iy_{pq}. \tag{15}$$

Оператор U_g^L ввиду соотношений (3), (5) и (10) задается согласно

$$U_{g_0}^L \varphi(z) = \sqrt{\frac{d\mu(\tilde{z})}{d\mu(z)}} L_{\tilde{k}} \varphi(\tilde{z}) = \prod_{s=2}^{n} |\tilde{k}_{ss}|^{m_s + i\rho_s - 2(s-1)} \tilde{k}_{ss}^{-m_s} \varphi(\tilde{z}), \tag{16}$$

где

$$\tilde{g} = zg_0 = \tilde{k}\tilde{z}$$

а параметры $\tilde{k}_{ss}$ и компоненты $(\tilde{z})_{pq}$ элемента $\tilde{z}$ выписаны в (7).

Эта серия представлений называется *основной невырожденной серией*. Она характеризуется двумя наборами инвариантных чисел: целыми числами $m_2, m_3, \ldots, m_n$ и вещественными числами $\rho_2, \rho_3, \ldots, \rho_n$, определяющими характеры (2.4) подгруппы D.

ПРИМЕР 1. Пусть $G = \mathrm{SL}(2, C)$, т. е. G — универсальная накрывающая группа группы Лоренца SO (3, 1). Подгруппа Z, согласно примеру 3.6.1, состоит из матриц z вида

$$z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{bmatrix}, \quad z = x + \mathrm{i}y, \quad x, y \in R^1, \tag{17}$$

где мы обозначили матричный элемент z_{21} той же буквой z, что и матрицу $z \in Z$.

Подгруппа P состоит из матриц вида

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ 0 & k_{22} \end{bmatrix}, \quad k_{11}k_{22} = 1. \tag{18}$$

Несущее пространство $H^L = L_1^2(Z, \mu)$ состоит из классов эквивалентности измеримых функций, для которых

$$\int |\varphi(z)|^2 \, \mathrm{d}\mu(z) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(z)|^2 \, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y < \infty. \tag{19}$$

Пусть

$$\mathrm{SL}(2, C) \ni g = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Тогда с учетом соотношений (5), (8), (9) и (10) получаем

$$L_{\tilde{k}} = |\tilde{k}_{22}|^{m_2 + \mathrm{i}\rho_2} \tilde{k}_{22}^{-m_2}, \quad \tilde{z} = \frac{\alpha z + \gamma}{\beta z + \delta}, \quad \tilde{k}_{22} = \beta z + \delta, \tag{20}$$

и

$$\frac{\mathrm{d}\mu(\tilde{z})}{\mathrm{d}\mu(z)} = |\tilde{k}_{22}|^{-4}.$$

Значит, представление U^L, заданное в (16), принимает вид

$$U_g^L\varphi(z) = \sqrt{\frac{\mathrm{d}\mu(\tilde{z})}{\mathrm{d}\mu(z)}} \cdot L_{\tilde{k}}\varphi(\tilde{z}) = |\beta z + \delta|^{m_2 + \mathrm{i}\rho_2 - 2} \times$$
$$\times (\beta z + \delta)^{-m_2} \varphi\left(\frac{\alpha z + \gamma}{\beta z + \delta}\right). \tag{21}$$

Заметим, что при помощи аналитического продолжения множителя формулу (21) можно привести к виду, совпадающему с формулой (8.2.24) для конечномерных индуцированных представлений группы SL (2, C) (см. упражнение 8.2.1).

Теорема 1.3 показывает, что каждое представление U^L основной серии неприводимо.

Чтобы установить свойства эквивалентности неприводимых представлений SL (n, C), удобно ввести другую нормировку инвариантных чисел m_i и ρ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Поскольку $\prod_{s=1}^{n} k_{ss} = 1$, мы можем либо положить $m_1 = \rho_1 = 0$ (как мы и сделали), либо можем сохранить элемент k_{11} в

$$\chi(\delta) = \prod_{s=1}^{n} (k_{ss})^{m_s + i\rho_s} k_{ss}^{-m_s}$$

и ввести более «симметричную» нормировку

$$\begin{aligned} m_1 + m_2 + \cdots + m_n &= 0, \\ \rho_1 + \rho_2 + \cdots + \rho_n &= 0. \end{aligned} \tag{22}$$

Задача об эквивалентности неприводимых представлений решается следующим образом.

Теорема 3. *Два неприводимых представления основной невырожденной серии эквивалентны тогда и только тогда, когда наборы пар удовлетворяющих* (22) *инвариантных чисел*

$$(m_1, \rho_1), (m_2, \rho_2), \ldots, (m_n, \rho_n)$$

и

$$(m_1', \rho_1'), (m_2', \rho_2'), \ldots, (m_n', \rho_n'),$$

которые определяют эти неприводимые представления, могут быть получены одни из других при помощи перестановки.

Доказательство. Группа Вейля W переставляет характеры; значит, теорема следует из теоремы 1.2 (3).

Г. *Редукция основной серии представлений при сужении на подгруппу* SU (n)

Рассмотрим теперь задачу о нахождении неприводимых представлений SU (n), которые входят в сужение представления U^L основной серии SL (n, C) на подгруппу SU (n). Эта задача возникает во многих приложениях теории групп в физике частиц. Следующая теорема дает полный ответ на этот вопрос. Доказательство теоремы вновь демонстрирует мощь ИР-теоремы.

Теорема 4. *Пусть* U^L — *неприводимое представление группы* SL (n, C), *индуцированное одномерным представлением* L *минимальной параболической подгруппы* P, *и пусть* T — *неприводимое представление* SU (n). *Пусть* M — *подгруппа* $M =$ $=$ SU (n) $\cap$ P. *Тогда кратность представления* T *в представле-*

нии $U^L_{\mathrm{SU}(n)}$ *равна кратности одномерного представления* L_M *в представлении* T_M [1]).

Доказательство. Теорема представляет собой частный случай ИР-теоремы. Поскольку всякий элемент $g \in \mathrm{SL}(n, C)$ может быть записан в виде $g = ku$ [см. (2.2a)], существует только один двойной смежный класс $P:\mathrm{SU}(n)$. Применяя ИР-теорему, мы находим, что U^L, суженное на $\mathrm{SU}(n)$, является представлением группы $\mathrm{SU}(n)$, которое индуцировано представлением L, ограниченным на подгруппу $\mathrm{SU}(n) \cap P = M$. Применяя теперь теорему взаимности Фробениуса, мы получаем утверждение теоремы 4.

Замечание 1. Представление L подгруппы P при сужении на M имеет вид

$$M \ni \gamma = \begin{bmatrix} \exp(i\varphi_1) & \cdots & 0 \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & \exp(i\varphi_n) \end{bmatrix} \to L_\gamma = \exp[i(m_2\varphi_2 + \cdots + m_n\varphi_n)].$$

Всякое неприводимое представление T группы $\mathrm{SU}(n)$ однозначно определяется своим старшим весом m, а со старшим весом m ассоциируется весовая диаграмма. В теореме 4 фактически утверждается, что кратность представления T в представлении $U^L_{\mathrm{SU}(n)}$ равна кратности веса $m_L = (m_2, m_3, \ldots, m_n)$ в весовой диаграмме, ассоциированной со старшим весом m.

Замечание 2. Сужение представления L группы P на подгруппу M не зависит от инвариантных чисел $\rho_2, \ldots, \rho_n$, поскольку L является фактически характером D [см. соотношение (4)]. Следовательно, неэквивалентные представления основной серии с одинаковыми инвариантными числами $m_2, \ldots, m_n$, но различными $\rho_2, \ldots, \rho_n$, имеют одно и то же содержание относительно $\mathrm{SU}(n)$.

Из теоремы 4 можно получить следующий полезный вывод.

Следствие. *Неприводимое представление T группы* $\mathrm{SU}(n)$, *отвечающее наинизшему возможному старшему весу, содержится в* $U^L_{\mathrm{SU}(n)}$ *только один раз. Этот наинизший старший вес равен весу* m_L.

Доказательство. Действительно, представление T, старший вес m которого равен m_L, удовлетворяет условию теоремы 5 и поэтому содержится в $U^L_{\mathrm{SU}(n)}$. Оно содержится только один раз, так как старший вес в любом неприводимом представлении невы-

[1]) L_M и T_M обозначают сужение на подгруппу M представления L группы P и представления T группы $\mathrm{SU}(n)$.

рожден. Любое другое представление T', в котором m_L не является старшим весом, определяется старшим весом m', который старше, чем m_L.

Следующий пример иллюстрирует содержание теоремы 4.

Пример 2. Пусть $G = \mathrm{SL}(2, C)$, и пусть U^L — представление основной серии, индуцированное представлением L подгруппы P. Представление L определяется характером $\chi(\delta) = |\delta|^{m_2+i\rho_2}\delta^{-m_2}$, $\delta = \begin{bmatrix}\delta^{-1} & 0\\ 0 & \delta\end{bmatrix} \in D$. Неприводимое представление T^J группы SU (2) определяется при помощи J, $J = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \ldots$. Пусть Y_m^J, $m = -J, -J+1, \ldots, J-1, J$, — базис пространства представления T^J. Хорошо известно, что элемент $\gamma \in M$,

$$\gamma = \begin{bmatrix}\exp(-i\varphi) & 0\\ 0 & \exp(i\varphi)\end{bmatrix},$$

соответствует вращению вокруг оси z на угол 2φ. Значит, $T_\gamma^J Y_m^J = \exp(2im\varphi)\, Y_m^J$, и каждое представление $\varphi \to \exp(2im\varphi)$ подгруппы M появляется с кратностью один. Следовательно, T^J при сужении на M (т. е. T_M^J) содержит L_M тогда и только тогда, когда $m_2/2$ является одним из чисел $J, J-1, \ldots, -J$. Таким образом, если $J \geqslant m_2/2$, представление T^J входит в $U_{\mathrm{SU}(2)}^L$ с кратностью один, т. е.

$$U_{\mathrm{SU}(2)}^L = \sum_{J=\left|\frac{m_2}{2}\right|}^{\infty} \oplus\, T^J(\mathrm{SU}(2)). \tag{24}$$

Заметим, что два неэквивалентных представления U^L и $U^{L'}$, для которых $\rho_2 \neq \rho_2'$, а $m_2 = m_2'$, имеют одинаковое разложение (24).

§ 4. Основные вырожденные серии группы SL (n, C)

Опишем теперь так называемые *основные вырожденные серии*. Эти серии обладают различной степенью вырожденности и описываются при помощи $2n-2k$, $k = 2, 3, \ldots, n-1$, инвариантных чисел соответственно.

Пусть

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_r, \quad r \geqslant 2, \quad r \neq n, \tag{1}$$

— разбиение целого числа n на положительные целые числа, и пусть

$$g=\begin{bmatrix} g_{11} \cdots g_{1r} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ g_{r1} \cdots g_{rr} \end{bmatrix} \tag{2}$$

— разложение элемента $g \in \mathrm{SL}(n, C)$ на матрицы g_{pq}, $p, q = 1, 2, \ldots, r$, с n_p строками и n_q столбцами. Матричные блоки g_{pq} выбираем таким образом, чтобы, будучи подставленными в (2), они давали в точности матрицу $g \in \mathrm{SL}(n, C)$. Введем, кроме того, матрицы k и z, k, $z \in \mathrm{SL}(n, C)$, вида

$$k=\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \cdots k_{1r} \\ 0 & k_{22} \cdots k_{2r} \\ & \vdots \\ 0 \;.\;.\;. & .\; k_{rr} \end{bmatrix}, \quad z=\begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 & \cdots 0 \\ z_{21} & I_{n_2} & 0 \cdots 0 \\ \vdots & & \\ z_{r1} & z_{r2} & \cdots I_{n_r} \end{bmatrix}, \tag{3}$$

где k_{pq} и z_{pq} — произвольные матрицы размерности $n_p \times n_q$, а I_{n_k}, $k = 1, 2, \ldots, r$, — квадратные единичные матрицы порядка n_k. Множества всех матриц k и z, задаваемых согласно (3), являются подгруппами в $\mathrm{SL}(n, C)$, которые обозначим через $P_{n_1, n_2, \ldots, n_r}$ и $Z_{n_1, n_2, \ldots, n_r}$ соответственно.

Следующая лемма дает разложение элемента $g \in \mathrm{SL}(n, C)$, аналогичное разложению (2.2б).

Лемма 1. *Почти каждый элемент $g \in \mathrm{SL}(n, C)$ может быть однозначно представлен в виде*

$$g = k_g z_g, \tag{4}$$

где $k_g \in P_{n_1, n_2, \ldots, n_r}$ и $z_g \in Z_{n_1, n_2, \ldots, n_r}$.

Доказательство проводится непосредственно, и мы его опускаем.

Унитарные вырожденные представления группы $\mathrm{SL}(n, C)$ строятся аналогично тому, как строились невырожденные. Поэтому ограничимся обсуждением только основных шагов.

Построим унитарные представления U^L группы $\mathrm{SL}(n, C)$, индуцированные одномерными представлениями $k \to L_k$ подгруппы $P_{n_1, n_2, \ldots, n_r}$. Пусть $\Lambda_i = \det k_{ii}$, где k_{ii} — $n_i \times n_i$-матрицы, выписанные в (3). Тогда отображение

$$L: k \to \chi(k) = \prod_{s=2}^{r} |\Lambda_s|^{m_s + i\rho_s} \Lambda_s^{-m_s}, \tag{5}$$

где $\rho_2, \ldots, \rho_r$ — произвольные вещественные числа, а $m_2, \ldots, m_r$ — произвольные целые числа, задает одномерное представление подгруппы $D_{n_1,\ldots,n_r}$, состоящей из всех матриц вида $\begin{bmatrix} k_{11} & \cdots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & k_{rr} \end{bmatrix}$. Подгруппа $\mathfrak{Z}_{n_1 n_2,\ldots,n_r}$, состоящая из всех матриц вида

$$\begin{bmatrix} I_{n_1} & k_{12} & \cdots & \cdots & k_{1r} \\ & I_{n_2} & k_{23} & \cdots & k_{2r} \\ & & \ddots & & \vdots \\ & 0 & & \ddots & \vdots \\ & & & & I_{n_k} \end{bmatrix}, \tag{6}$$

является нормальной подгруппой в $P_{n_1,\ldots,n_r}$ и $P_{n_1,\ldots,n_r} = \mathfrak{Z}_{n_1,\ldots,n_r} \rtimes D_{n_1,\ldots,n_r}$. Значит, представление (5) подгруппы $D_{n_1,\ldots,n_r}$ можно поднять до одномерного представления L подгруппы $P_{n_1,\ldots,n_r}$. Представление U^L группы SL (n, C), индуцированное представлением L подгруппы $P_{n_1,\ldots,n_r}$, реализуется в гильбертовом пространстве $L^2(X, \mu)$, где $X = P_{n_1,\ldots,n_r} \setminus G$, а μ — квазиинвариантная мера в X. Однако, воспользовавшись разложением (4), можно показать, что групповое пространство группы $Z_{n_1,\ldots,n_r}$ совпадает с X с точностью до подмножества меньшей размерности в X (см. лемму 3.1). Следовательно, мы можем взять в качестве меры μ инвариантную меру на подгруппе $Z_{n_1,\ldots,n_r}$. Эта мера индуцируется мерой (2.5) на Z и задается формулой

$$d\tilde{\mu}(z) = \prod dx_{pq}\, dy_{pq}, \tag{7}$$

где появляются только те множители $dx_{pq}\, dy_{pq}$, которые соответствуют матричным элементам z_{ij}, $i > j$, матрицы $z \in Z_{n_1,\ldots,n_r}$.

Пространство $L^2(Z_{n_1,\ldots,n_r}, \tilde{\mu})$ вырожденного представления U^L состоит из всех функций $\varphi(z)$, измеримых в $Z_{n_1,\ldots,n_r}$, которые удовлетворяют условию

$$\int |\varphi(z)|^2\, d\tilde{\mu}(z) < \infty. \tag{8}$$

Представление U^L группы SL (n, C) задается явно в пространстве $L^2(Z_{n_1,\ldots,n_r}, \tilde{\mu})$ формулой (3.3), т. е.

$$U_g^L \varphi(z) = \sqrt{\frac{d\tilde{\mu}(\tilde{z})}{d\tilde{\mu}(z)}}\, L_{\tilde{k}}\, \varphi(\tilde{z}), \tag{9}$$

где $\tilde{k}$ и $\tilde{z}$ — факторы из разложения (4) элемента $\tilde{g} \equiv zg$, т. е. $zg = \tilde{k}\tilde{z}$. Чтобы завершить построение U^L, необходимо еще вычислить производную Радона—Никодима $d\tilde{\mu}(\tilde{z})/d\tilde{\mu}(z)$. Вычисления, аналогичные тем, которые проводились в лемме 3.2, дают

$$\frac{d\tilde{\mu}(\tilde{z})}{d\tilde{\mu}(z)} = |\Lambda_2|^{-2(n_1+n_2)} |\Lambda_3|^{-2(n_1+2n_2+n_3)} |\Lambda \quad|^{-2(n_1+2n_2+\dots+2n_{r-1}+2n_r)}, \tag{10}$$

где Λ_s, $s = 2, \dots, r$, обозначают детерминанты соответствующих блочно-диагональных элементов элемента $\tilde{k}$.

Заметим, что количество инвариантных чисел ρ_s, m_s зависит от разбиения n на n_i, выписанного в (1). В случае $r = 2$ мы получаем *так называемую наиболее вырожденную серию* SL (n, C).

Пример 1. Рассмотрим наиболее вырожденные представления SL (n, C), которые определяются следующим разбиением числа n:

$$n \equiv n_1 + n_2 = (n-1) + 1. \tag{11}$$

В этом случае подгруппы $Z_{n-1,1}$ и $P_{n-1,1}$ состоят из матриц вида

$$z = \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ z & 1 \end{bmatrix}, \quad k = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ 0 & k_{22} \end{bmatrix}. \tag{12}$$

Здесь I_{n_1} — единичная $(n-1) \times (n-1)$-матрица,

$$z = (z_{n,1}, z_{n,2}, \dots, z_{n,n-1}) \equiv (z_1, z_2, \dots, z_{n-1})$$

— $1 \times (n-1)$-матрица, k_{11} является $(n-1) \times (n-1)$-матрицей, k_{12} является $(n-1) \times 1$-матрицей, а k_{22} — комплексное число. Заметим, что в рассматриваемом случае $\Lambda_2 = \det k_{22} = k_{22}$.

Следовательно, из соотношений (10) и (5) мы имеем

$$\sqrt{\frac{d\tilde{\mu}(\tilde{z})}{d\tilde{\mu}(z)}} = |\Lambda_2|^{m_2+i\rho_2-(n_1+n_2)} \Lambda_2^{-m_2} = |\tilde{k}_{22}|^{m_2+i\rho_2-n} \tilde{k}_{22}^{-m_2}.$$

Поэтому, чтобы явно определить действие оператора U_g^L, мы должны найти вид $\tilde{k}_{22}$ и $\tilde{z}$. Сравнивая матричные элементы матрицы $\tilde{g} = zg$ с матричными элементами произведения $\tilde{k}\tilde{z}$, получаем

$$(\tilde{z})_{np} \equiv (\tilde{z})_p = \left(\sum_{j=1}^{n-1} g_{jp} z_j + g_{np}\right) \Big/ \left(\sum_{j=1}^{n-1} g_{jn} z_j + g_{nn}\right) \tag{13}$$

и

$$\tilde{k}_{22} = \left(\sum_{j=1}^{n-1} g_{jn} z_j + g_{nn}\right). \tag{14}$$

Поэтому явный вид действия оператора U_g^L в пространстве $L^2(Z_{n-1,1},\ \tilde{\mu})$ задается формулой

$$U_g^L\varphi(\ldots, z_p, \ldots) = \left|\sum_{j=1}^{n-1} g_{jn}z_j + g_{nn}\right|^{m_2+i\rho_2-n} \left(\sum_{j=1}^{n-1} g_{jn}z_j + g_{nn}\right)^{-m} \times$$
$$\times \varphi\left(\ldots, \left(\sum_{j=1}^{n-1} g_{jp}z_j + g_{np}\right) \Big/ \left(\sum_{j=1}^{n-1} g_{jn}z_j + g_{nn}\right), \ldots\right). \quad (15)$$

Равенство (13) показывает, что SL (n, C) действует на многообразии $Z_{n-1,1}$ как группа проективных преобразований, т. е. $Z_{n-1,1}$ является $(n-1)$-мерным проективным пространством.

Применяя ИР-теорему, легко показать, что всякое представление основной вырожденной серии также является неприводимым. Можно также получить аналоги теорем 3.3 и 3.4 для вырожденных серий (см. [315], гл. 3.4).

§ 5. Дополнительные невырожденная и вырожденные серии

До сих пор мы рассматривали унитарные представления U^L группы G, индуцированные *унитарными* представлениями $k \to L_k$ подгруппы $P \subset G$. Эти представления были реализованы при помощи функций на G, удовлетворяющих условию

$$u(kg) = L_k u(g). \quad (1)$$

Действие представления U_g^L в пространстве H^L задавалось формулой (3.3), а скалярное произведение было определено согласно (3.2).

Можно было бы попытаться получить унитарное индуцированное представление U^L группы G из *неунитарного* представления L подгруппы P. Укажем теперь точное построение таких представлений. Новый класс представлений G, индуцированных с помощью неунитарных представлений подгруппы P, — это класс дополнительных серий представлений.

Ясно, что скалярное произведение (3.2) для неунитарного представления L подгруппы P не может быть инвариантным относительно U^L. Оказывается, однако, что достаточно заменить (3.2) скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ вида

$$(\varphi, \psi)_{H^L} = \int_{X\times X} K(x_1, x_2)(\varphi(x_1), \psi(x_2))_H \, d\mu(x_1)\, d\mu(x_2),$$
$$x \in X = P\diagdown G. \quad (2)$$

Ядро $K(x_1, x_2)$ выбирается таким образом, что оно компенсирует добавочный множитель, появляющийся за счет неунитарности представления L подгруппы P.

A. *Дополнительная серия для* SL (2, *C*)

Прежде всего построим дополнительную серию представлений для SL (2, *C*) (см. пример 3.1). В этом случае подгруппа *P* состоит из матриц вида

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ 0 & k_{22} \end{bmatrix}, \quad k_{11}k_{22} = 1.$$

Находим унитарные представления U^L группы SL (2, *C*), индуцированные одномерными неунитарными представлениями *P*, задаваемыми по формуле

$$k \to L_k = |k_{22}|^{m+i\rho} k_{22}^{-m}, \tag{3}$$

где ρ теперь не является вещественным.

Воспользовавшись формулой (3.21), получаем

$$U_g^L \varphi(z) = \sqrt{\frac{d\mu(\tilde{z})}{d\mu(z)}}\, L_{\tilde{k}} \varphi(\tilde{z}) = |\beta z + \delta|^{m+i\rho-2} (\beta z + \delta)^{-m} \varphi\left(\frac{\alpha z + \gamma}{\beta z + \delta}\right), \tag{4}$$

т. е. действие представления U^L в пространстве H^L фактически такое же, как и в случае основной серии. Однако скалярное произведение в *H* будет другим. Найдем его, пользуясь требованиями инвариантности и положительной определенности:

$$(U_g^L \varphi,\ U_g^L \psi) = (\varphi,\ \psi) \equiv \int K(z_1',\ z_2') \varphi(z_1') \overline{\psi}(z_2')\, dz_1'\, dz_2', \tag{5}$$

где мы положили $d\mu(z) = dz \equiv dx\, dy$.

Лемма 1. *Ядро* $K(z_1, z_2)$ *имеет вид*

$$K(z_1,\ z_2) = |z_1 - z_2|^{-2+\sigma}, \tag{6}$$

где $\sigma = -i\rho$ *и* $0 < \sigma < 2$.

Доказательство. Положим $z_1' = \tilde{z}_1 = \dfrac{\alpha z_1 + \gamma}{\beta z_1 + \delta}$ и $z_2' = \tilde{z}_2$ в правой части равенства (5). С помощью формулы $d\tilde{z}/dz = |\beta z + \delta|^{-4}$ мы тогда получаем

$$(\varphi,\ \psi) = \int K(\tilde{z}_1,\ \tilde{z}_2) \varphi(\tilde{z}_1) \overline{\psi(\tilde{z}_2)}\, |\beta z_1 + \delta|^{-4} |\beta z_2 + \delta|^{-4}\, dz_1\, dz_2.$$

Далее, подставляя выражение (4) в левую часть равенства (5), с учетом произвольности $\varphi(\tilde{z}_1)$ и $\psi(\tilde{z}_2)$ получаем

$$K(z_1,\ z_2) |\beta z_1 + \delta|^{m+i\rho-2} (\beta z_1 + \delta)^{-m} |\beta z_2 + \delta|^{m-i\bar{\rho}-2} \overline{(\beta z_2 + \delta)}^{-m} =$$
$$= K\left(\frac{\alpha z_1 + \gamma}{\beta z_1 + \delta},\ \frac{\alpha z_2 + \gamma}{\beta z_2 + \delta}\right) |\beta z_1 + \delta|^{-4} |\beta z_2 + \delta|^{-4}.$$

Следовательно,

$$K\left(\frac{\alpha z_1+\gamma}{\beta z_1+\delta},\ \frac{\alpha z_2+\gamma}{\beta z_2+\delta}\right)=$$

$$=K(z_1,\ z_2)\,|\beta z_1+\delta|^{m+i\rho+2}(\beta z_1+\delta)^{-m}\,|\beta z_2+\delta|^{m-i\bar\rho+2}(\overline{\beta z_2+\delta})^{-m}. \quad (7)$$

Для частного значения $g=z_0=\begin{bmatrix}1 & 0\\ z_0 & 1\end{bmatrix}$ элемента g имеем

$$K(z_1+z_0,\ z_2+z_0)=K(z_1,\ z_2),$$

а при $z_0=-z_2$

$$K(z_1,\ z_2)=K(z_1-z_2,\ 0)\equiv K_1(z_1-z_2). \quad (8)$$

С помощью равенств (8) и (7) получаем

$$K_1\left(\frac{z_1-z_2}{(\beta z_1+\delta)(\beta z_2+\delta)}\right)=K_1(z_1-z_2)\,|\beta z_1+\delta|^{m+i\rho+2}\times$$
$$\times(\beta z_1+\delta)^{-m}\,|\beta z_2+\delta|^{m-i\bar\rho+2}(\overline{\beta z_2+\delta})^{-m}. \quad (9)$$

Отсюда, положив $z_2=0$ и $\beta=\dfrac{1-\delta}{z_1}$, находим

$$K_1\left(\frac{z_1}{\delta}\right)=K_1(z_1)\,|\delta|^{m-i\bar\rho+2}\,\bar\delta^{-m}. \quad (10)$$

Полагая теперь в равенстве (9) $z_1=0$ и $\beta=\dfrac{1-\delta}{z_2}$, получаем

$$K_1\left(-\frac{z_2}{\delta}\right)=K_1(-z_1)\,|\delta|^{m+i\rho+2}\,\delta^{m}. \quad (11)$$

Соотношения (10) и (11) в силу произвольности z_1 и z_2 означают, что

$$|\delta|^{-i\rho}\,\bar\delta^{-m}=|\delta|^{i\rho}\,\delta^{-m}. \quad (12)$$

Положив здесь $\delta=\exp(i\theta)$, θ вещественное, получим

$$\exp(im\theta)=\exp(-im\theta),\quad \text{т. е.}\quad m=0. \quad (13)$$

Ввиду этого из равенства (12) имеем $\rho=-\bar\rho$, т. е. ρ — чисто мнимое число, $\rho=i\sigma$, σ вещественное. Положив в формуле (10) $\delta=z_1=z$, мы получим

$$K_1(z)=C(z)^{-2+\sigma}$$

и

$$K(z_1,\ z_2)=C(z_1-z_2)^{-2+\sigma},$$

где $C=K_1(1)$ — произвольная константа.

Применение обычного анализа Фурье функций от одной комплексной переменной показывает, что скалярное произведение (5) с ядром (6) является положительно определенным только при $0<\sigma<2$ (см. [620], гл. III, § 12).

Из формул (13) и (4) вытекает следующее выражение для U_g^L:

$$U_g^L\varphi(z)=|\beta z+\delta|^{-2-\sigma}\,\varphi\left(\frac{\alpha z+\gamma}{\beta z+\delta}\right). \quad (14)$$

Эта формула определяет унитарные представления группы SL $(2, C)$, когда $0 < \sigma < 2$. Поучителен анализ того, какие представления получаются при $\sigma \geqslant 2$. В случае $\sigma = 2$ скалярное произведение (5) принимает вид

$$(\varphi, \psi) = \int\int \varphi(z_1)\,\overline{\psi}(z_2)\,dz_1\,dz_2. \tag{15}$$

В частности,

$$(\varphi, \varphi) = \left|\int \varphi(z)\,dz\right|^2 \geqslant 0$$

и

$$(\varphi, \varphi) = 0, \quad \text{если} \quad \int \varphi(z)\,dz = 0. \tag{16}$$

Представляется естественным рассматривать множество функций $\varphi(z)$ на многообразии $Z = C^1$, как множество элементов гильбертова пространства H', получаемых посредством отождествления функций с одним и тем же значением интеграла $\int \varphi(z)\,dz$. Скалярное произведение в H' индуцируется при помощи формы (15); фактически H' является одномерным. Действительно, если $\int \varphi_2(z)\,dz \neq 0$, то полагая

$$c = \frac{\int \varphi_1(z)\,dz}{\int \varphi_2(z)\,dz}, \qquad \varphi = \varphi_1 - c\varphi_2,$$

получим

$$\int \varphi(z)\,dz = 0 \Rightarrow \varphi_1 = c\varphi_2,$$

т. е. любые два элемента из $H'(z)$ линейно зависимы. Воспользовавшись формулой (14) и положив $\sigma = 2$, находим

$$\int U_g^L \varphi(z)\,dz = \int |\beta z + \delta|^{-4}\,\varphi\left(\frac{\alpha z + \gamma}{\beta z + \delta}\right) dz.$$

Переходя к переменной $\tilde{z} = (\alpha z + \gamma)/(\beta z + \delta)$ и используя якобиан перехода $z \to \tilde{z}$ [равенства (3.20) и ниже], мы получаем

$$\int U_g^L \varphi(z)\,dz = \int \varphi(\tilde{z})\,d\tilde{z} = \int \varphi(z)\,dz,$$

т. е.

$$U_g^L \varphi(z) = |\beta z + \delta|^{-4}\,\varphi\left(\frac{\alpha z + \gamma}{\beta z + \delta}\right) = \varphi(z) \text{ для каждого } \varphi \in H'(z), \tag{17}$$

или

$$U_g^L = 1.$$

Следует заметить, что это единственное представление группы Лоренца, которое унитарно и конечномерно.

Если же положить $\sigma > 2$, мы получим гильбертово пространство с индефинитной метрикой, которая содержит конечное число отрицательных квадратов. Это так называемые *пространства Понтрягина*. Начало теории представлений в пространствах Понтрягина было положено Гельфандом и Наймарком в [314]; свое систематическое развитие она получила в недавних работах Наймарка и сотрудников (см. превосходный обзор Наймарка и Исмагилова [625]).

Б. *Дополнительные серии для* SL (n, C)

Получение явного вида представлений дополнительных серий для SL (n, C) подобно выводу в случае SL $(2, C)$. Снова исходим из класса функций на SL (n, C), удовлетворяющих условию $\varphi(kg) = L_k \varphi(g)$, где представление $k \to L_k$ подгруппы K теперь уже не является унитарным. Записываем элемент $k \in K$ в виде

$$k = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & & & & & & & & & k_{1n} \\ & k_{22} & & & & & & & & & & k_{2n} \\ & & \ddots & & & & & & & & & \vdots \\ & & & k_{n-2\tau,\, n-2\tau} & & & & & & & & \vdots \\ & & & & \lambda_1 & & & & & & & \vdots \\ & & & & & \mu_1 & & & & & & \vdots \\ & & & & & & \lambda_2 & & & & & \vdots \\ & 0 & & & & & & \mu_2 & & & & \vdots \\ & & & & & & & & \ddots & & & \vdots \\ & & & & & & & & & & \lambda_\tau & k_{n-1,\, n} \\ & & & & & & & & & & & \mu_\tau \end{bmatrix} \in P, \qquad (18)$$

$$\tau = 1,\ 2,\ \ldots,\ \left[\frac{n}{2}\right],$$

и берем неунитарное одномерное представление $k \to L_k$ подгруппы K вида

$$L_k = \prod_{p=2}^{n-2\tau} |k_{pp}|^{m_p + i\rho_p} k_{pp}^{-m_p} \prod_{q=1}^{\tau} |\lambda_q|^{m'_q + i\sigma'_q + \sigma''_q} \lambda^{-m'_q} |\mu_q|^{m'_q + i\sigma'_q - \sigma''_q} \mu_q^{-m'_q}, \qquad (19)$$

$$\rho_p,\ \sigma'_q,\ \sigma''_q \text{ вещественны.}$$

Ясно, что если $\sigma''_q = 0$ для $q = 1, 2, \ldots, \tau$, то L_k становится унитарным представлением. Очевидно также, что число τ представляет «степень неунитарности» представления $k \to L_k$: при $\tau = 0$ мы получаем унитарное представление подгруппы P, при $\tau = \left[\frac{n}{2}\right]$ имеем «максимально» неунитарное представление.

Действие представления $g \to U_g^L$ для дополнительных серий задается стандартной формулой (3.3). Остается только найти вид инвариантного скалярного произведения (2); этот вывод аналогичен выводу, проделанному для SL $(2, C)$, но довольно длинен (см. [315], гл. IV). Поэтому ограничимся тем, что приведем конечные результаты.

Теорема 2. *Представление $g \to U_g^L$ дополнительной невырожденной серии* SL (n, C), *индуцированное представлением $k \to L_k$ подгруппы P, заданным согласно* (19), *определяется формулой*

$$U_g^L \varphi(z) = \sqrt{\frac{d\mu(\tilde{z})}{d\mu(z)}}\, L_{\tilde{k}}\, \varphi(\tilde{z}), \tag{20}$$

где $\tilde{k} \in P$ и $\tilde{z} \in Z$ выписаны в (3.7), *а производная Радона—Никодима — в* (3.10).

Инвариантное скалярное произведение для представления (20) *задается формулой*

$$(\varphi, \psi) = \int K(\dot{z})\, \varphi(z)\, \overline{\psi(\dot{z}z)}\, d\mu(\dot{z})\, d\mu(z), \tag{21}$$

где $\dot{z}$ — элемент из Z вида

$$\dot{z} = \left[\begin{array}{c:cccc} \underbrace{\left.\begin{matrix} 1 & 0\ldots0 \\ 0 & 1\ldots0 \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ 0\ldots & \ldots1 \end{matrix}\right\}}_{n-2\tau}{\scriptstyle n-2\tau} & & & & 0 \\ \hdashline & \begin{matrix} 1 & 0 \\ z_1 & 1 \end{matrix} & & & 0 \\ 0 & & \begin{matrix} 1 & 0 \\ z_2 & 1 \end{matrix} & & 0 \\ & & & \ddots & \\ & & & & \begin{matrix} 1 & 0 \\ z_\tau & 1 \end{matrix} \end{array}\right] \tag{22}$$

и

$$K(\dot{z}) = \prod_{j=1}^{\tau} |z_j|^{2(\sigma_j'' - 1)},$$
$$0 < \sigma_j'' < 1, \quad d\mu(\dot{z}) = \prod_{p=1}^{\tau} dx_p\, dy_p. \tag{23}$$

Инвариантными числами, определяющими данное представление дополнительной невырожденной серии, являются целые числа $m_1, m_2, \ldots, m_{n-2\tau}, m'_1, m'_2, \ldots, m'_\tau$ и вещественные числа $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{n-2\tau}, \sigma'_1, \sigma'_2, \ldots, \sigma'_\tau, \sigma''_1, \sigma''_2, \ldots, \sigma''_\tau, 0 < \sigma''_p < 1, p = 1, 2, \ldots \ldots, \tau$. Легко проверить, что при $n = 2$ формула (20) совпадает с (14), а инвариантное скалярное произведение (21) после замены переменных совпадает с (5).

B. *Дополнительные вырожденные серии группы* SL (n, C)

Дополнительные вырожденные серии представлений строятся аналогичным образом. Рассмотрим класс функций на SL (n, C), удовлетворяющих условию

$$\varphi(kg) = L_k \varphi(g), \quad k \in P_{n_1, n_2, \ldots, n_r}, \tag{24}$$

где представление $k \to L_k$ подгруппы $P_{n_1, n_2, \ldots, n_r}$ является неунитарным. Записываем его в виде [см. соотношение (4.5)]

$$L_k = \prod_{p=2}^{r-2\tau} |\Lambda_p|^{m_p + i\rho_p} \Lambda_p^{-m_p} \prod_{q=1}^{\tau} |\lambda_q|^{m'_q + i\sigma'_q + \sigma''_q} \lambda_q^{-m'_q} |\mu_q|^{m'_q + i\sigma'_q - \sigma''_q} \mu_q^{-m'_q}, \tag{25}$$

где $p = \det k_{pp}$, $p = 2, 3, \ldots, r - 2\tau$, а λ_q, μ_q, $q = 1, 2, \ldots \ldots, \tau$ — комплексные числа, представляющие собой последние 2τ диагональных элементов матрицы $k \in P_{n_1, n_2, \ldots, n_r}$ [см. (4.3)]. Число τ, как и выше, представляет «степень неунитарности» представления L_k.

Теорема 3. *Представление* $g \to U_g^L$ *дополнительной вырожденной серии группы* SL (n, C), *индуцированное представлением* $k \to L_k$ *подгруппы* $K_{n_1, n_2, \ldots, n_r}$, *заданным согласно* (25), *определяется формулой*

$$U_g^L \varphi(z) = \sqrt{\frac{d\tilde{\mu}(\tilde{z})}{d\tilde{\mu}(z)}} L_{\tilde{k}} \varphi(\tilde{z}), \tag{26}$$

где $\tilde{k} \in P_{n_1, n_2, \ldots, n_r}$ *и* $\tilde{z} \in Z_{n_1, n_2, \ldots, n_r}$ — *факторы в каноническом разложении* (4.4) *элемента* $\tilde{g} = zg$, *т. е.* $\tilde{g} = zg = \tilde{k}\tilde{z}$, *а* $d\tilde{\mu}(\tilde{z})/d\tilde{\mu}(z)$ *дана в* (4.10).

Выражения для инвариантного скалярного произведения для представления (26) и для переменной $\dot{z}$ те же, что и для дополнительной невырожденной серии, но элемент z должен быть взят из $Z_{n_1, n_2, \ldots, n_r}$.

§ 6. Комментарии и дополнения

1. Построение неприводимых унитарных представлений других полупростых групп Ли можно проделать так же, как в случае группы SL (n, C), исходя из общей конструкции, изложенной в § 1. В частности, конструкция основной, дополнительной и вырожденных серий для SO (n, C) и Sp (n, C) дана Гельфандом и Наймарком [315]. Свойства индуцированных неприводимых представлений групп SO $(n, 1)$ рассматривались Хираи [409]. Задача о построении всех неприводимых представлений групп SO (p, q), SU (p, q) и Sp (p, q) в настоящее время еще не завершена; частичные результаты получены Граевым [354], Лезновым и Федосеевым [516], Лезновым и Савельевым [519]. Конструкция различных серий представлений полупростых групп Ли, например основной, индуцированной с каспидальной параболической подгруппы, обсуждалась Липсманом [532].

2. Проблема классификации неприводимых унитарных представлений полупростых групп Ли является в общем открытой. Наймарк опубликовал две работы [617], в которых писал, что он даст полное описание всех унитарных неприводимых представлений комплексных классических групп; однако последующие работы до сих пор не появились. Тем временем Стейн [775] показал, что методом аналитического продолжения можно построить новые неприводимые унитарные представления, которые не содержались в классификации Гельфанда и Наймарка [315].

Полная классификация всех неприводимых унитарных представлений известна только для отдельных групп низкой размерности, таких, как SL $(2, R)$ и SL $(2, C)$ (см. [308]). Диксмье [218] опубликовал полную классификацию для случая группы де Ситтера SO $(4, 1)$.

3. Существование и свойства неприводимых представлений так называемых дискретных серий в последние годы привлекли значительное внимание. Неприводимое представление $g \to U_g$ группы G в H называется *дискретным*, если в H существует ненулевой вектор u, такой, что матричный элемент $(u, U_g u)$ является квадратично интегрируемым на G. Совокупность G_d всех дискретных неэквивалентных неприводимых представлений группы G называется *дискретной серией*. Хариш-Чандра в двух больших статьях [380, 381] дал описание дискретных серий для полупростых групп Ли (см. также [828]). Он, в частности, показал, что G обладает дискретной серией тогда и только тогда, когда $\operatorname{rank} G = \operatorname{rank} K$; отсюда вытекает, в частности, что группы $U(p, q)$ имеют дискретные серии. Специальный класс представлений дискретной серии для групп $U_i^r(p, q)$ был построен Граевым [354]. Представления наиболее вырожденных дискретных серий для $U(p, q)$ и SO (p, q) были построены Рончкой и Фише-

ром [700] и Рончкой, Лимичем и Нидерле [701] соответственно.

4. Свойства неприводимости представлений полупростых групп Ли, индуцированных с параболической подгруппы, обсуждались в фундаментальной работе Брюа [150]. Обобщения этих результатов были получены в серии работ Уоллака [825—827].

5. Приведем теперь важные результаты Скалла [741], относящиеся к спектрам генераторов алгебры Ли L простой группы Ли G. Пусть $\int \lambda \, dE(\lambda)$ — спектральное разложение для $-iU(X)$, $X \in L$, и пусть проекторнозначная мера $E(\cdot)$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега $\mu(\cdot)$ на R. Тогда мы говорим, что $-iU(X)$ имеет *двухсторонний спектр*, если $\operatorname{supp} \mu$ равен $(-\infty, \infty)$, и *односторонний спектр*, если $\operatorname{supp} \mu$ равен либо $(-\infty, 0)$, либо $(0, \infty)$. Оказывается, что спектр некомпактного генератора $-iU(X)$ зависит от G, но не от X или U. Действительно, имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть U — непрерывное неприводимое унитарное представление связной простой группы Ли G, такой, что G не является группой автоморфизмов неприводимого эрмитова симметрического пространства. Тогда если $X \in L$ порождает некомпактную однопараметрическую подгруппу* $\exp(tX)$, *то $-iU(X)$ имеет двухсторонний спектр.*

Напомним, что неприводимое симметрическое пространство X эрмитово, если оно вида $X = K \diagdown G$, где G — некомпактная простая группа Ли с тривиальным центром и K — максимальная компактная подгруппа с недискретным нетривиальным центром. Анализ табл. 4.2.1 показывает, что среди классических групп Ли группами автоморфизмов неприводимых эрмитовых симметрических пространств являются следующие: $SL(2, R)$, $SU(p, q)$, $SO_0(p, 2)$, $Sp(n, R)$ и $SO^*(2n)$. Соответствующие некомпактные генераторы имеют двухсторонний спектр.

В некоторых весьма исключительных случаях некомпактный генератор может иметь односторонний спектр. Действительно, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть G — связная простая группа Ли автоморфизмов неприводимого эрмитова симметрического пространства. Существует $X \in L$, такой, что $-iU(X)$ имеет односторонний спектр для любого представления U голоморфной дискретной серии.*

Различные обобщения этих результатов см. в [741]. Детальный анализ представлений голоморфных дискретных серий дан в работе Росси и Верна [719].

§ 7. Упражнения

§ 1.1. Проанализируйте свойства неприводимости представлений U^{χ^L} групп SO (p, q) и SU (p, q), индуцированных с минимальных параболических подгрупп.

Указание: воспользуйтесь теоремой 1.4.

§ 1.2. Классифицируйте неприводимые унитарные представления конформной группы SO (4, 2).

Указание: воспользуйтесь результатами § 1 и распространите технику Диксмье [218].

§ 3.1. Покажите, что операторы Казимира группы SL $(2, C)$ в пространстве неприводимого представления $[m, \rho]$ имеют собственные значения

$$C_2\psi = -\frac{1}{2}(m^2 - \rho^2 - 4)\psi,$$

$$C_2'\psi = m\rho\psi,$$

где

$$C_2 = \frac{1}{2} M_{\mu\nu}M^{\mu\nu} = \boldsymbol{J}^2 - \boldsymbol{N}^2,$$

$$C_2' = -\frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}M^{\alpha\beta}M^{\gamma\delta} = \boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{N}$$

и

$$\boldsymbol{J} = (M_{32},\ M_{13},\ M_{21}), \qquad \boldsymbol{N} = (M_{01},\ M_{02},\ M_{03}).$$

§ 3.2. Покажите, что два неприводимых представления $[m, \rho]$ и $[-m, -\rho]$ группы SL $(2, C)$ эквивалентны.

§ 3.3. Покажите, что представление $U^*_{g^{-1}}$, сопряженно-контраградиентное к неприводимому представлению $U_g^{[m,\rho]}$ группы SL $(2, C)$, неприводимо и определяется параметрами $[m, -\rho]$.

Примечание: поскольку представления $[m, \rho]$ и $[-m, -\rho]$ эквивалентны, сопряженно-контраградиентное представление $(U_g^{[m,\rho]})^*$ эквивалентно представлению $U^{[m,\rho]}$ тогда и только тогда, когда либо $m = 0$, либо $\rho = 0$.

§ 3.4. Пусть $U^{(j_0, j_1)}$ — неприводимое представление SL $(2, C)$, и пусть $|j_0j_1 : JM > \equiv e_{JM}$ — канонический базис, ассоциированный с набором C_2, C_2', J_2 и J_3 коммутирующих операторов SL $(2, C)$ [1]). Покажите, что матричные элементы генераторов

---

[1]) Параметры j_0 и j_1, характеризующие неприводимые унитарные представления SL $(2, C)$, связаны с m, ρ формулами

$$j_0 = \left|\frac{m}{2}\right|, \qquad j_1 = -\mathrm{i}\,(\operatorname{sign} m)\,\frac{\rho}{2} \qquad \text{при} \qquad m \neq 0,$$

$$j_0 = 0, \qquad j_1 = \pm\mathrm{i}\,\frac{\rho}{2} \qquad \text{при} \qquad m = 0.$$

$J_\pm = J_1 \pm \mathrm{i}J_2$, J_3, $N_\pm = N_1 \pm \mathrm{i}N_2$ и N_3 имеют вид

$$J_3 e_{JM} = M e_{JM},$$
$$J_- e_{JM} = \sqrt{(J+M)(J-M+1)}\, e_{J,\, M-1},$$
$$J_+ e_{JM} = \sqrt{(J+M+1)(J-M)}\, e_{J,\, M+1},$$
$$M = -J,\ -J+1,\ \ldots,\ J-1,\ J.$$

$$N_3 e_{JM} = C_J \sqrt{J^2 - M^2}\, e_{J-1,\, M} - A_J M e_{JM} - C_{J+1} \sqrt{(J+1)^2 - M^2}\, e_{J+1,\, M},$$

$$N_+ e_{JM} = C_J \sqrt{(J-M)(J-M-1)}\, e_{J-1,\, M+1} -$$
$$- A_J \sqrt{(J-M)(J+M+1)}\, e_{J,\, M+1} +$$
$$+ C_{J+1} \sqrt{(J+M+1)(J+M+2)}\, e_{J+1,\, M+1},$$
$$N_- e_{JM} = -C_J \sqrt{(J+M)(J+M-1)}\, e_{J-1,\, M-1} -$$
$$- A_J \sqrt{(J+M)(J-M+1)}\, e_{J,\, M-1} -$$
$$- C_{J+1} \sqrt{(J-M+1)(J-M+2)}\, e_{J+1,\, M-1},$$

где

$$A_J = \frac{\mathrm{i} j_0 j_1}{J(J+1)}, \qquad C_J = \frac{\mathrm{i}}{J} \sqrt{\frac{(J^2 - j_0^2)(J^2 - j_1^2)}{4J^2 - 1}},$$
$$M = -J,\ -J+1,\ \ldots,\ J-1,\ J, \qquad J = j_0,\ j_0+1,\ \ldots,$$
$$e_{JM} \in H^J, \qquad H = \bigoplus_{J=j_0}^{\infty} H^{(J)}.$$

Далее покажите, что а) при j_1 чисто мнимом, j_0 неотрицательном полуцелочисленном мы имеем основную серию, б) при j_1 вещественном, $0 \leqslant j_1 \leqslant 1$, $j_0 = 0$, — дополнительную серию, в) при $j_1^2 = (j_0 + n)^2$ (n — некоторое целое число) мы имеем конечномерные представления.

§ 5.1. Пусть $U^{(0,\, j_1)} \otimes U^{(0,\, j_1')}$ — тензорное произведение неприводимых представлений дополнительной серии SL (2, C). Найдите коэффициенты Клебша—Гордана.

Указание: воспользуйтесь техникой обобщенных проекционных операторов, развитой в гл. 15, § 4; см. также [14] относительно решения аналогичной задачи для представлений основной серии.

Глава 20

Применения индуцированных представлений

Мы приводим здесь два интересных применения общей теории индуцированных представлений. В § 1 мы обсуждаем понятие локализуемости в релятивистской квантовой механике. Выводится также явный вид релятивистского оператора координаты. В § 2 обсуждается задача о представлениях канонических коммутационных соотношений Гейзенберга для конечного числа степеней свободы. Мы показываем здесь единственность представления Шредингера канонических коммутационных соотношений в глобальной форме Вейля. Обсуждается также проблема эквивалентности формулировок Гейзенберга и Шредингера квантовой механики.

§ 1. Релятивистский оператор координаты

В этом параграфе мы рассмотрим два основных понятия релятивистской квантовой механики: локализуемость и операторы координат релятивистских систем. Пользуясь понятием системы импримитивности для евклидовой группы, мы вводим в разделе А понятие локализуемости. В разделе Б выводится явный вид операторов координат для релятивистской системы, которая преобразуется в соответствии с неприводимым представлением группы Пуанкаре.

А. *Локализуемые релятивистские системы*

Начнем с обзора свойств нерелятивистского оператора координаты. В нерелятивистской квантовой механике наблюдаемые координат определяются согласно формуле

$$(q_k\psi)(x) = x_k\psi(x), \quad k = 1, 2, 3, \tag{1}$$

где ψ — волновая функция частицы в гильбертовом пространстве $H = L^2(R^3, d^3\boldsymbol{x})$. Преобразованием Фурье оператора q_k является

$$Fq_kF^{-1} = i\frac{\partial}{\partial p_k}. \tag{2}$$

Этот оператор эрмитов относительно скалярного произведения

$$(\varphi, \psi) = \int \varphi(p)\,\overline{\psi}(p)\,d^3\boldsymbol{p}.$$

С другой стороны, для релятивистской частицы массы m инвариантное скалярное произведение в гильбертовом пространстве $L^2(h^m, \mu)$, $\mathrm{d}\mu^{(p)} = \mathrm{d}^3p/p_0$, h^m — массовый гиперболоид $p^2 = m^2$, задается в виде

$$(\varphi, \psi) = \int\limits_{h^m} \varphi(p)\,\bar{\psi}(p)\,\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{p_0}. \tag{3}$$

Поэтому q_k из (1) не является эрмитовым относительно этого скалярного произведения, так как

$$(q_k\varphi, \psi) = \mathrm{i}\int\left(\frac{\partial}{\partial p^k}\varphi\right)(p)\,\bar{\psi}(p)\,\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{p_0} =$$

$$= \int \varphi(p)\left[\left(-\mathrm{i}\,\frac{\partial}{\partial p^k} + \mathrm{i}\,\frac{p_k}{p^2+m^2}\right)\bar{\psi}\right](p)\,\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{p_0} \neq$$

$$\neq (\varphi, q_k\psi).$$

Следовательно, оператор $q_k = \mathrm{i}\,\dfrac{\partial}{\partial p^k}$ не может представлять собой оператор координаты для релятивистской частицы.

Таким образом, для волновых функций, определенных на гиперболоиде, оператор координаты нельзя получить простым преобразованием Фурье на R^3.

Распространим теперь понятие оператора координаты на релятивистские системы, пользуясь теоремой об импримитивности. Действительно, предположим, что мы нашли набор из трех коммутирующих самосопряженных операторов Q_1, Q_2, Q_3, представляющих операторы координат релятивистской частицы массы m и спина J. Тогда, согласно спектральной теореме, существует общая спектральная мера $E(S)$, $S \subset R^3$, такая, что каждый оператор Q_i имеет представление

$$Q_i = \int\limits_{R^3} x_i\,\mathrm{d}E(x). \tag{4}$$

Если $S \subset R^3$ и $\psi(x)$ представляет состояние частицы в гильбертовом пространстве H, то выражение

$$p(S) = \frac{\|E(S)\,\psi\|^2}{\|\psi\|^2}$$

представляет собой вероятность того, что при измерении координат частицы, находящейся в состоянии ψ, она окажется внутри области S. Требование евклидовой инвариантности сильно ограничивает определяющую операторы Q_i спектральную меру $E(S)$. Действительно, пусть $\mathscr{E}^3$ обозначает евклидову группу в R^3, и пусть $\mathscr{E}^3 \ni g \to U_g$ — унитарное представление $\mathscr{E}^3$ в гильбертовом пространстве H. Тогда из евклидовой инвариантности вероятности $p(S) \to p(gS)$ следует

$$U_g E(S) U_g^{-1} = E(gS), \quad g \in \mathscr{E}^3. \tag{5}$$

Так как пространство R^3 транзитивно относительно группы $\mathscr{E}^3$, равенство (5) означает, что спектральная функция $E(\cdot)$ представляет собой транзитивную систему импримитивности, основанную на пространстве R^3.

Таким образом, существование оператора координаты $\boldsymbol{Q}$ предполагает существование транзитивной системы импримитивности для унитарного представления евклидовой подгруппы. Отсюда напрашивается следующее определение локализуемости релятивистской системы.

Определение 1. Представление U группы Пуанкаре Π определяет *локализуемую систему* тогда и только тогда, когда сужение $U_{\mathscr{E}}$ представления U на евклидову группу $\mathscr{E}^3$ обладает транзитивной системой импримитивности $E(S)$, основанной на пространстве R^3.

Заметим, что условие (5) будет выполняться, если представление $U_{\mathscr{E}}$ подгруппы $\mathscr{E}^3$ индуцировано с SO(3): в этом случае $X = \mathscr{E}^3/\mathrm{SO}(3) \simeq R^3$ и в качестве $E(S)$ можно взять каноническую спектральную меру (16.3.1). Поэтому остается проверить, дает ли редукция представления U группы Пуанкаре на $\mathscr{E}^3$ такое представление $U_{\mathscr{E}^3}$ группы Евклида, которое индуцируется с некоторого представления L подгруппы SO(3). Следующее утверждение показывает, что это действительно имеет место для неприводимых представлений группы Π, связанных с массивными частицами произвольного спина.

Утверждение 1. *Пусть* $(a, \Lambda) \to U^{m, J}_{(a, \Lambda)}$ — *унитарное неприводимое представление группы Пуанкаре, соответствующее частице массы m с произвольным спином J. Пусть χD^J обозначает неприводимое представление* $K = T^4 \rtimes \mathrm{SO}(3)$, *используемое для индукции представления $U^{m, J}$. Сужение $U^{m, J}_{\mathscr{E}^3}$ представления $U^{m, J}$ на $\mathscr{E}^3$ унитарно эквивалентно представлению, которое индуцируется представлением группы* SO(3), *задаваемым при помощи прямого интеграла неприводимых представлений L^J группы* SO(3) *с* $L^J \simeq D^J$.

Доказательство. Возьмем в теореме 18.1.2 в качестве $G = N \rtimes M$ группу Пуанкаре, а в качестве $W = N_0 \rtimes M_0$ — группу $\mathscr{E}^3 = T^3 \rtimes \mathrm{SO}(3)$.

Тогда $K = T^4 \rtimes SO(3)$, и в силу (18.1.15) сужение $U^{m,J}_{\mathscr{E}^3}$ представления $U^{m,J}$ является прямым интегралом

$$U^{m,J}_{\mathscr{E}^3} \cong \int_{\mathscr{D}} U^J_{\mathscr{E}^3}(D)\, d\nu(D), \tag{6}$$

где $\mathscr{D}$ — пространство двойных смежных классов $K : \mathscr{E}^3$.

Чтобы определить содержание представления $U^{m,J}_{\mathscr{E}^3}$, воспользуемся рецептом, указанным в пункте 2° теоремы 18.1.2. В нашем случае $M_{\hat{n}} = SO(3)$, $M_{\hat{n}m} = m^{-1}M_{\hat{n}}m \sim SO(3)$ и $M_0 = SO(3)$; значит, $M_{\hat{n}m} \cap M_0 \sim SO(3)$. Из определения следует, что представление $L_r^{(m)} = D^J(m)\, D^J(r)\, D^J(m^{-1})$. Характер, являющийся ограничением $\hat{n} = (m, 0, 0, 0)$ на N_0, равен тождественно нулю. Следовательно, $\chi L^{(m)}$ эквивалентно представлению D^J; по этой причине представление $\int L^\lambda\, d\rho(\lambda)$ в теореме 18.1.2.2° неприводимо и эквивалентно D^J; отсюда вытекает, что представление $U_{\mathscr{E}^3}(D)$, заданное согласно (18.1.16), эквивалентно представлению группы $\mathscr{E}^3$, индуцированному представлением D^J группы SO (3). В силу (18.1.15) представление $U^{m,J}_{\mathscr{E}^3}$ является прямым интегралом по пространству двойных смежных классов $K : W$ указанных выше (эквивалентных) представлений $U_{\mathscr{E}^3}(D)$ группы $\mathscr{E}^3$.

Наконец, из теоремы 16.2.1 вытекает, что представление (6) группы $\mathscr{E}^3$ унитарно эквивалентно представлению $\mathscr{E}^3$, которое индуцировано представлением подгруппы SO (3), задаваемым при помощи прямого интеграла по множеству двойных смежных классов $K : W$ представлений, эквивалентных D^J.

Следовательно, массивные частицы локализуемы в смысле определения 1.

Теорема 18.1.2 позволяет нам увидеть, каково точное содержание редукции $U^{m,J}_{\mathscr{E}^3}$ при сужении на $\mathscr{E}^3$ также и для других представлений $U^{m,J}$ группы Пуанкаре ($m^2 \leqslant 0$ или $m^2 < 0$). В этих случаях $U^{m,J}_{\mathscr{E}^3}$ не является представлением, индуцированным с SO (3), поэтому оно не является локализуемым в смысле определения 1, за исключением случая $m = 0$, $J = 0$, когда представление группы SO (3) тривиально.

В случаях $m^2 = 0$, $m^2 < 0$ определение 1 локализуемости можно и необходимо изменить. С физической точки зрения эти системы не могут быть локализованы в $\mathscr{E}^3/SO(3) \sim R^3$, но локализуемы в $\mathscr{E}^3/\mathscr{E}^2$ или $\mathscr{E}^3/SO(2, 1)$; значит, соответствующая система импримитивности должна основываться на этих пространствах (см. упражнение 1.3).

Наконец, неоднозначность меры E обусловливается существованием унитарных операторов V, коммутирующих с $U^{m,J}_{\mathscr{E}^3}$, но не коммутирующих с $E(S)$. Тогда все другие системы импримитивности задаются соотношением $F(S) = VE(S)V^{-1}$. Оператор координаты будет единственным лишь с привлечением дальнейших предположений об инвариантности относительно обращения времени и регулярности $E(S)$.

Из евклидовой ковариантности, из соотношений (6) и (4) немедленно следует, что свойство преобразования операторов координат Q_i имеет вид

$$U_{\{a,R\}} Q_i U^{-1}_{\{a,R\}} = D^1_{ij}(R)[Q_j - a_j]. \tag{7}$$

Инфинитезимально равенство (7) дает соотношения

$$[Q_i,\ P_j] = i\delta_{ij} \tag{8}$$

и

$$[Q_j,\ J_k] = i\varepsilon_{jkl} Q_l, \tag{9}$$

совпадающие с теми, которых требует физика. Таким образом, коммутационные соотношения Гейзенберга (7) могут рассматриваться как одно из проявлений существования транзитивной системы импримитивности для $\mathscr{E}^3$.

Б. *Построение релятивистских операторов координат*

Найдем теперь явный вид операторов координат Q_i, $i = 1, 2, 3$, для релятивистской частицы с массой $m > 0$ и спином J. Будем работать в импульсном представлении. Действие оператора $U^{m,J}_{\{a,\Lambda\}}$, $a \in T^4$, $\Lambda \in \mathrm{SL}(2, C)$, в пространстве $H^{m,J}$ частицы $[m, J]$ дается формулой [см. (17.2.39)]

$$\left(U^{m,J}_{\{a,\Lambda\}}\psi\right)(p) = \exp(i\,pa)\, D^J\left(\Lambda_p^{-1}\Lambda\Lambda_{L^{-1}_\Lambda p}\right)\psi\left(L^{-1}_\Lambda p\right). \tag{10}$$

Здесь $\psi(p) = \{\psi_k(p)\}_1^{2J+1}$ является $(2J+1)$-компонентной векторной функцией на гиперболоиде положительной массы h^m, $p^2 = m^2$, квадратично интегрируемой относительно инвариантной меры $d\mu(p) = d^3\boldsymbol{p}/p_0$. Элемент $\Lambda_p \in \mathrm{SL}(2, C)$ определяется из разложения Макки группы $\mathrm{SL}(2, C)$ [см. (17.2.33)]

$$\Lambda = \Lambda_p r, \quad \Lambda_p = \begin{bmatrix} \lambda & z \\ 0 & \lambda^{-1} \end{bmatrix}, \quad \lambda \in R^1, \quad z \in C^1, \quad r \in \mathrm{SU}(2). \tag{11}$$

Поэтому если $\Lambda \in \mathrm{SU}(2)$, то $\Lambda_p = I$. Следовательно, сужение $U^{m,J}_{\mathscr{E}^3}$ представления $U^{m,J}_{\{a,\Lambda\}}$ группы Пуанкаре Π на евклидову группу (точнее ее накрывающую) дает

$$\left(U^{m,J}_{(a,r)}\psi\right)(p) = \exp(ip\cdot a)\, D^J(r)\, \psi\left(R_r^{-1}p\right), \tag{12}$$

где $R_r \in SO(3)$ — вращение, соответствующее элементу $r \in \in SU(2)$.

Введем теперь координаты x_k следующим образом.

Рассмотрим оператор V, определяемый согласно

$$(V\psi)(x) \equiv (2\pi)^{-3/2} \int p_0^{1/2} \exp(ipx)\psi(p)\frac{d^3p}{p_0}. \tag{13}$$

Отметим, что интеграл (13) не является обычным трехмерным преобразованием Фурье. Оператор V унитарен. Покажем это явно для $J = 0$. Обратное преобразование имеет вид

$$(V^{-1}\varphi)(p) = (2\pi)^{-3/2} \int p_0^{1/2} \exp(-ipx)\varphi(x)\, d^3x. \tag{14}$$

Пусть F обозначает обычное трехмерное преобразование Фурье. Тогда

$$\|V\psi\|^2 = \int |V\psi|^2 d^3x =$$
$$= \int \left|F(p_0^{-1/2}\psi)\right|^2 d^3x = \int \left|p_0^{-1/2}\psi\right|^2 d^3p = \int |\psi|^2 \frac{d^3p}{p_0} = \|\psi\|^2.$$

Таким образом, V является изометрическим преобразованием из $L^2(h^m, d\mu(p))$ в $L^2(R^3, d^3\boldsymbol{x})$. Совокупность функций $\{p_0^{1/2}H_l(p_1) \times \times H_k(p_2) H_n(p_3)\}$ образует базис для пространства $L^2(h^m, d\mu)$, где H_i — i-я функция Эрмита одной переменной. Пользуясь равенством (13), получаем

$$\left(Vp_0^{1/2}H_lH_kH_n\right)(x) = (2\pi)^{-3/2} \int \exp(ipx)\, p_0 H_lH_kH_n\, d^3p/p_0$$
$$= i^{l+k+n} H_l(x_1) H_k(x_2) H_n(x_3), \tag{15}$$

т. е. V имеет множество значений, плотное в $L^2(R^3, d^3x)$. Следовательно, V является унитарным отображением $L^2(h^m, d\mu)$ на $L^2(R^3, d^3x)$.

Для произвольного $J > 0$ доказательство проводится аналогично. Таким образом, скалярное произведение для $(V\psi)(x)$ такое же, как и в нерелятивистской квантовой механике.

Положим теперь

$$U^L_{(a,r)} \equiv VU_{(a,r)}V^{-1}. \tag{16}$$

С помощью равенств (13), (12) и (14) получаем

$$\left(U^L_{(a,r)}\psi\right)(x) = D^J(r)\,\psi\left(R_r^{-1}(x-a)\right). \tag{17}$$

Построим теперь явно транзитивную систему импримитивности $E^L(S)$, основанную на R^3. С этой целью определим каноническую спектральную меру $R^3 \supset S \to E^L(S)$ по формуле

$$(E^L(S)\psi)(x) \equiv \chi_S(x)\psi(x), \tag{18}$$

где χ_S — характеристическая функция множества S.

С учетом (17) и (18) имеем

$$U_g^L E^L(S) U_g^{L-1} = E^L(gS), \quad g = (a, r). \tag{19}$$

Действительно,

$$\begin{aligned}(U_g^L E^L(S) U_{g^{-1}}^L \psi)(x) &= (D^J(r) E^L(S) U_{g^{-1}}^L \psi)(R_r^{-1}(x-a)) = \\ &= D^J(r) \chi_S(R_r^{-1}(x-a)) U_{g^{-1}}^L \psi(R_r^{-1}(x-a)) = \\ &= E^L(gS)\psi(x).\end{aligned}$$

Операторы координат Q_i определяются теперь при помощи равенства (4) со спектральной мерой (18) и, следовательно, удовлетворяют соотношению

$$(VQ_k\psi)(x) = x_k(V\psi)(x). \tag{20}$$

Значит, в импульсном пространстве

$$\begin{aligned}(Q_k\psi)(p) &= (V^{-1}x_k V\psi)(p) = \\ &= (2\pi)^{-3}\int \exp(-\mathrm{i}px)\, x_k p_0^{1/2}\, \mathrm{d}^3x \exp(\mathrm{i}xp')\, \psi(p') \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}'}{p_0'^{1/2}} = \\ &= \mathrm{i}\left(\frac{\partial}{\partial p^k} - \frac{p_k}{2p_0^2}\right)\psi(p).\end{aligned} \tag{21}$$

Этот оператор самосопряжен относительно скалярного произведения (3).

Из равенств (12) и (21) следует, что трансформационные свойства операторов координат Q_k относительно евклидовой группы $\mathscr{E}^3$ следующие:

$$U_{(a,0)}^L Q_k U_{(a,0)}^{L-1} = Q_k - a_k,$$

$$U_{(0,r)}^L Q_k U_{(0,r)}^{L-1} = D_{k'k}^1(R_r) Q_{k'}.$$

Более того, имеем

$$[Q_i, Q_k] = 0,$$

$$[Q_k, P_j] = \mathrm{i}\delta_{kj}.$$

Производная по времени от операторов координат (21) в представлении Гейзенберга определяется согласно

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} Q_k = \mathrm{i}[H, Q_k] = \mathrm{i}[p_0, Q_k] = \frac{p_k}{p_0}, \tag{22}$$

т. е. представляет собой оператор скорости частицы. Отсюда видно, что задаваемые по формуле (21) операторы Q_k удовлетворяют всем *физическим требованиям*, которые могут налагаться на операторы координат.

Рассмотрим теперь более подробно оператор координаты для скалярной частицы. Собственные функции операторов Q_k в импульсном представлении, локализованные в точке $x \in R^3$, имеют в этом случае вид

$$\psi_x(p) = p_0^{1/2} \exp(-\mathrm{i}px). \tag{23}$$

Действительно,

$$Q_k\psi_x(p) = \mathrm{i}\left(\frac{\partial}{\partial p^k} - \frac{p_k}{2p_0^2}\right)\psi_x(p) = x_k\psi_x(p).$$

Заметим также, что ввиду (23) формулу (13) можно интерпретировать как амплитуду вероятности обнаружения скалярной частицы в состоянии $\psi(p)$ в точке x при $t = 0$.

Теперь сделаем другое «фурье»-преобразование собственной функции (23) операторов координат Q_i. Заметим, что полученные при помощи этого фурье-преобразования координаты отличаются от x-координаты в V-преобразовании (13):

$$\psi_x(\xi, t=0) = (2\pi)^{-3/2}\frac{1}{\sqrt{2}}\int p_0^{1/2}\exp[-\mathrm{i}p(x-\xi)]\frac{d^3p}{p_0} =$$

$$= \mathrm{const}\left(\frac{m}{r}\right)^{5/4} H^{(1)}_{5/4}(\mathrm{i}mr), \tag{24}$$

где $r = |x - \xi|$, а $H^{(1)}_{5/4}$ обозначает функцию Ганкеля первого рода порядка $^5/_4$. Пространственная протяженность этой функции порядка $1/m$, а при больших r она убывает как $\exp(-mr)/r^{7/4}$. Заметим однако, что, согласно (13),

$$(V\psi_x)(y) = (2\pi)^{-3/2}\int p_0^{1/2}\exp(-\mathrm{i}p\cdot x)\,p_0^{1/2}\exp(\mathrm{i}p\cdot y)\frac{d^3p}{p_0} = \delta^3(x-y)$$

снова, как в нерелятивистском случае.

Релятивистские операторы координат можно записать и в пространстве, определяемом при помощи этого преобразования Фурье. Действительно, взяв обратное преобразование Фурье равенства (21), получаем

$$(Q_k\psi)(\xi) = \xi_k\psi(\xi) + \frac{1}{8\pi}\int\frac{\exp(-m|\xi-\eta|)}{|\xi-\eta|}\frac{\partial\psi(\eta)}{\partial\eta^k}d^3\eta. \tag{25}$$

Мы видим, что операторы Q_i в этом пространстве представлены нелокальными операторами.

Заметим, что заданные, согласно (4), операторы координат Q_k локализованы в момент времени t в плоскости, которая определяется нормальным вектором $n = (1, 0, 0, 0)$; стационарная группа этого вектора есть как раз $\mathscr{E}^3$. Это объясняет, почему мы взяли $\mathscr{E}^3$ в качестве группы ковариантности для операторов координат. В случае же безмассовых частиц $p_\mu p^\mu = 0$, $p^\mu \neq 0$, и стационарной подгруппой произвольной точки на конусе является $T^4 \rtimes \mathscr{E}^2$: подгруппа $\mathscr{E}^2$, действуя на M^4, оставляет инвариантной нуль-гиперплоскость $\mathring{H}$, которую задает нормальный вектор $n =$

$=(1, 0, 0, 1)$. Именно эта гиперплоскость является единственной, на которой должна быть локализуема любая безмассовая частица (вспомним локализацию фотона на фотографической пластинке). Следовательно, в качестве группы ковариантности оператора координаты безмассовой частицы вместо $\mathscr{E}^3$ мы должны взять подгруппу $G_0 = T^3 \rtimes \mathscr{E}^2$. Если представление $U^{0,J}$ группы Пуанкаре при сужении на $T^3 \rtimes \mathscr{E}^2$ является представлением, которое индуцировано представлением L группы $\mathscr{E}^2$, то будет существовать система импримитивности $(E(S)_v\, U^{0,J}_{G_0})$, $S \subset T^3 \rtimes \mathscr{E}^2/\mathscr{E}^2 \sim R^3$, основанная на R^3, и, согласно формуле (4), мы будем иметь для фотона три оператора координат. Достаточно неожиданным является следующее утверждение.

Утверждение 2. *Пусть $U^{0,J}$ — неприводимое представление группы Пуанкаре, соответствующее безмассовой частице спина J. Сужение $U^{0,J}_{T^3 \rtimes \mathscr{E}}$ унитарно эквивалентно представлению группы $T^3 \rtimes \mathscr{E}^2$, индуцированному приводимым представлением подгруппы $R^1 \rtimes \mathscr{E}^2$.*

Доказательство проводится с помощью индукционно-редукционной теоремы 18.2.1, как и в утверждении 1. Другое доказательство было дано Ангелопулосом, Байеном и Флато [19].

Утверждение 2 означает, что из чисто групповых соображений безмассовая частица имеет только два оператора координат и может быть локализуемой в плоскости, перпендикулярной направлению движения. Этот математический результат совпадает с интуитивным представлением о фотоне, который ударяется о фотографическую пластинку и реагирует с ионом.

§ 2. Представления коммутационных соотношений Гейзенберга

В этом параграфе мы рассмотрим задачу о представлениях (канонических) коммутационных соотношений Гейзенберга

$$[q_j, p_k] = i\delta_{jk} I, \quad j, k = 1, 2, \ldots, n. \tag{1}$$

Величина q_j в нерелятивистской квантовой механике имеет смысл оператора координаты, а p_k — оператора импульса частицы. Поэтому очень важно знать число неэквивалентных неприводимых представлений алгебры (1). Наиболее известным представлением является представление Шредингера

$$\begin{aligned} q_j &: u(x) \to x_j u(x), \\ p_k &: u(x) \to \frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial x^k}, \end{aligned} \tag{2}$$

или в глобальной форме

$$\begin{aligned} \exp(i\beta_j q_j) &: u(x) \to \exp(i\beta_j x_j)\, u(x), \\ \exp(i\alpha_k p_k) &: u(x) \to u(x+\alpha), \end{aligned} \tag{3}$$

которое реализуется в гильбертовом пространстве $H = L^2(R^n)$. Покажем, что любое другое представление канонических коммутационных соотношений (1), интегрируемое до глобального представления соответствующей группы, эквивалентно представлению Шредингера. Чтобы показать это, сначала приведем соотношения Гейзенберга (1) к так называемой *форме Вейля*.

Это осуществляется путем применения формулы Бэйкера—Хаусдорфа

$$\exp A \exp B = \exp\left(A + B + \frac{1}{2}[A, B]\right) = \exp([A, B]) \exp B \exp A, \tag{4}$$

справедливой для операторов A и B, коммутатор которых равен c-числу. Так как мы предполагаем интегрируемость представления соотношений (1), эта формула выполняется на инвариантном плотном множестве аналитических векторов Нельсона—Гординга для глобального представления (3) (гл. 11, § 7).

Положив $A = i\alpha_k p_k$ и $B = i\beta_k q_k$, где α_k и β_k вещественные числа, получим

$$\exp(i\alpha p) \exp(i\beta q) = \exp(i\alpha\beta) \exp(i\beta q) \exp(i\alpha p), \tag{5}$$

где

$$\alpha\beta = \alpha_k \beta_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Формула Бэйкера—Хаусдорфа позволяет также найти закон композиции для группы, ассоциированной с алгеброй Ли (1). Связывая с генераторами p_k, q_k и I параметры группы α_k, β_k и γ_k соответственно, получаем

$$\begin{aligned} &\exp[i(\alpha p + \beta q + \gamma I)] \exp[i(\alpha' p + \beta' q + \gamma' I)] = \\ &= \exp\left[i\left\{(\alpha + \alpha') p + (\beta + \beta') q + \left(\frac{1}{2}(\alpha\beta' - \alpha'\beta) + \gamma + \gamma'\right) I\right\}\right]. \end{aligned} \tag{6}$$

Это дает следующий закон композиции для элементов группы:

$$\begin{aligned} &(\alpha, \beta, \exp(i\gamma))(\alpha', \beta', \exp(i\gamma')) = \\ &\quad = \left(\alpha + \alpha', \beta + \beta', \exp\left[i\left(\frac{1}{2}(\alpha\beta' - \alpha'\beta) + \gamma + \gamma'\right)\right]\right). \end{aligned} \tag{7}$$

Заметим, что определяемая при помощи (1) алгебра Ли L нильпотентна. Действительно,

$$L_{(1)} = [L, L] = \{I\}, \quad L_{(2)} = [L_{(1)}, L_{(1)}] = \{0\}.$$

Следовательно, глобальная группа (7) также нильпотентна. Это свойство на уровне группы легко проверяется, если воспользоваться определением нильпотентных групп, данным в гл. 3, § 5.

Заметим, что из соотношений Вейля (5) вытекают соотношения Гейзенберга (1). Действительно, взяв производные $\partial^2/\partial\alpha_k\partial\beta_j$ от обеих частей равенства (5), мы возвращаемся к соотношениям (1). Однако обратное утверждение неверно. Вывод соотношений Вейля (5) опирался на тот факт, что представление Шредингера (3) является интегрируемым. Если же представление алгебры Ли (1) не является интегрируемым, то с ним нельзя ассоциировать соответствующую формулу Вейля (5). Следовательно, соотношения Гейзенберга и Вейля фактически не эквивалентны.

Теперь, пользуясь теоремой об импримитивности, покажем, что всякое интегрируемое представление соотношений (1) унитарно эквивалентно представлению Шредингера (3). Положим

$$V_\alpha \equiv \exp(\mathrm{i}\alpha p), \quad U_\beta \equiv \exp(\mathrm{i}\beta q), \quad \langle\alpha, \beta\rangle \equiv \exp(\mathrm{i}\alpha\beta). \tag{8}$$

При этом равенство (5) приобретает вид

$$V_\alpha U_\beta = \langle\alpha, \beta\rangle U_\beta V_\alpha. \tag{9}$$

Здесь $\langle\alpha, \beta\rangle$ играет роль характера $\beta(\alpha)$ абелевой группы $G = R^n$. Кроме того,

$$V_\alpha V_{\alpha'} = V_{\alpha+\alpha'}, \quad U_\beta U_{\beta'} = U_{\beta+\beta'},$$

т. е. отображения $\alpha \to V_\alpha$ и $\beta \to U_\beta$ задают представления абелевых групп, изоморфных R^n. Это наблюдение служит отправной точкой следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть G — сепарабельная локально компактная абелева группа, $\hat{G}$ — ее дуальная группа характеров. Пусть $\alpha \to V_\alpha$ и $\beta \to U_\beta$ — унитарные представления групп G и $\hat{G}$ соответственно в одном и том же гильбертовом пространстве H, удовлетворяющие условиям*

1) $$V_\alpha U_\beta = \langle\alpha, \beta\rangle U_\beta V_\alpha \text{ для всех } \alpha \in G,\ \beta \in \hat{G}, \tag{10}$$

2) *множество $\{V_\alpha,\ \alpha \in G,\ V_\beta,\ \beta \in \hat{G}\}$ неприводимо.*

Тогда существует унитарный изоморфизм S: $H \to L^2(G)$, такой, что

$$SV_\alpha S^{-1}\varphi(x) = \varphi(x+\alpha), \quad SU_\beta S^{-1}\varphi(x) = \langle x, \beta\rangle \varphi(x), \quad x \in G. \tag{11}$$

Доказательство. По теореме СНАГ имеем

$$(U_\beta\varphi, \psi) = \int_G \langle\alpha, \beta\rangle \,\mathrm{d}(E(\alpha)\varphi, \psi). \tag{12}$$

Здесь символ $\mathrm{d}(E(\alpha)\varphi, \psi)$ означает, что характер $\langle\alpha, \beta\rangle$ подлежит интегрированию как функция α по отношению к функции множеств $G \supset A \to (E(A)\varphi, \psi)$. Заменим U_β в равенстве (12) на $V_{\alpha'} U_\beta V_{\alpha'}^{-1}$. Тогда, воспользовавшись тем фактом, что

$$V_{\alpha'} U_\beta V_{\alpha'}^{-1} = \langle \alpha', \beta \rangle U_\beta$$

[по предположению (10)], мы заключаем, что

$$\int_G \langle \alpha, \beta \rangle \langle \alpha', \beta \rangle \, d(E(\alpha)\varphi, \psi) = \int_G \langle \alpha + \alpha', \beta \rangle \, d(E(\alpha)\varphi, \psi) =$$

$$= \int_G \langle \alpha'', \beta \rangle \, d(E(\alpha'' - \alpha')\varphi, \psi) = \int_G \langle \alpha'', \beta \rangle \, d\left(V_{\alpha'} E(\alpha'') V_{\alpha'}^{-1}\varphi, \psi\right). \quad (13)$$

Характеры разделяют точки группы G. Значит, меры в (13) равны. Отсюда следует

$$E(A\alpha^{-1}) = V_\alpha E(A) V_\alpha^{-1} \quad (14)$$

для всех $A \subset G$ и $\alpha \in G$. Таким образом, $E(A)$ представляет собой систему импримитивности, основанную на G.

Второе предположение означает, что пара (V, E) неприводима. В свою очередь из теоремы об импримитивности следует, что существует унитарное отображение S, такое, что

$$\begin{aligned} SV_\alpha S^{-1} &= V_\alpha^L \quad \text{для всех} \quad \alpha \in G, \\ SE(A) S^{-1} &= E^L(A) \ \text{для всех борелевых множеств} \ A \subset G, \end{aligned} \quad (15)$$

где V^L — представление, индуцированное стационарной подгруппой K, а $E^L(A)$ — каноническое множество проекций, основанное на G, т. е.

$$E^L(A)\varphi(\alpha) = \chi_A(\alpha)\varphi(\alpha). \quad (16)$$

Так как $K = \{e\}$ и L неприводимы, представление V^L является правым регулярным представлением, т. е.

$$\left(V_{\alpha_0}^L \varphi\right)(\alpha) = \varphi(\alpha\alpha_0) = \varphi(\alpha + \alpha_0). \quad (17)$$

Наконец, из (12) и (16) следует, что

$$(SU_\beta S^{-1}\varphi)(\alpha) = \int_G \langle \alpha', \beta \rangle \, d(SE(\alpha') S^{-1}\varphi)(\alpha) =$$

$$= \int_G \langle \alpha', \beta \rangle \, d\left(E^L(\alpha')\varphi\right)(\alpha) = \langle \alpha, \beta \rangle \varphi(\alpha).$$

Этим завершается доказательство теоремы 1.

Если в теореме 1 положить $G = R^n$, то закон композиции (10) будет такой же, как и закон композиции (9) для группы Вейля. Значит, формула (11) задает неприводимое унитарное представление группы Вейля. Очевидно, что генераторы для U_β имеют тот же вид, что и q_j из (2), а генераторы для V_α имеют тот же вид, что и p_k. Таким образом, каждое неприводимое интегрируемое представление кононических коммутационных соотношений эквивалентно представлению Шредингера.

Набор $\{V, U\}$ из (10) мог быть, вообще говоря, приводимым. В этом случае, однако, можно показать, что несущее гильбертово пространство H может быть разложено в ортогональную прямую сумму $\bigoplus\limits_s H_s$ подпространств, каждое из которых инвариантно и неприводимо относительно набора $\{V, U\}$. Следовательно, мы приходим к выводу, что любое интегрируемое представление канонических коммутационных соотношений (1) унитарно эквивалентно по крайней мере счетному множеству экземпляров представления Шредингера. Это фактически показывает эквивалентность формулировок Гейзенберга и Шредингера квантовой механики в случае интегрируемых представлений.

§ 3. Комментарии и дополнения

А. Построение релятивистского оператора координаты и доказательство эквивалентности формулировок Шредингера и Гейзенберга в квантовой механике, приведенные в этой главе, основывались фактически на теореме об импримитивности. Это еще раз демонстрирует важность и эффективность этой теоремы. Фактически изложение квантовой механики — нерелятивистской, а также и релятивистской — могло бы базироваться на этой теореме [1]).

В историческом плане, эквивалентность представлений Гейзенберга и Шредингера была доказана Ланчосом, Шредингером [735] и Паули [663].

Понятие релятивистского оператора координаты было впервые введено в фундаментальной работе Ньютона и Вигнера [633]. Вывод, основанный на теореме об импримитивности, дали Вайтман [850] и Макки [556].

Представленное в § 1, Б построение операторов координат было разработано Лунном [548]. Для безмассовых частиц операторы координат рассматривались Бертраном. Новая, физически удовлетворительная теория оператора координаты для безмассовых частиц была представлена в превосходной работе Ангелопулоса, Байена и Флато [19].

---

[1]) Попытке осуществить такую программу посвящена монография Меиского [886], где на основе концепции импримитивности и техники индуцирования строится, помимо релятивистской и нерелятивистской кваитовых теорий свободных и взаимодействующих частиц, также аналогичная кваитовая теория в пространстве де Ситтера. — *Прим. перев.*

Задачу о представлениях канонических коммутационных соотношений подробно исследовали Стоун [786] и фон Нейман [630]. Доказательство эквивалентности любого неприводимого представления представлению Шредингера, основанное на теореме об импримитивности, принадлежит Макки. Здесь мы по существу следовали выводу Макки.

Группа Вейля, по-видимому, не имеет непосредственного значения, как, например, группа Галилея или Пуанкаре. Поэтому неинтегрируемые или частично интегрируемые представления канонических коммутационных соотношений (2.1) также могли бы представлять определенный интерес. Пример такого представления (которое не эквивалентно представлению Шредингера) был построен Добнером и Мелсгеймером [227]. Физический смысл этого представления, однако, пока неясен. Было бы весьма интересно построить явно пример частично интегрируемого (относительно p_j) представления канонических коммутационных соотношений и выяснить его физический смысл.

Б. *Алгебраическое определение операторов координат*

Дадим теперь ради полноты изложения два других определения операторов координат, которые часто рассматриваются как более физические, чем определение, которое дано в § 1. Вообще говоря, эти определения не эквивалентны определению 1.1. Пусть нам задано неприводимое представление генераторов P_μ и $M_{\mu\nu}$ группы Пуанкаре П для массивной частицы, и мы хотим определить операторы координат $\mathbf{Q}_j$ в обертывающем поле алгебры Ли группы П.

1. Из физических предположений трансляционной и вращательной инвариантности мы, как и в (1.8)—(1.9), имеем

$$[Q^j, P^k] = i\delta^{jk},\qquad [Q^j, J^k] = i\varepsilon^{jkl}Q_l. \tag{1}$$

Далее, трансляции во времени и чисто лоренцевы преобразования (бусты) дают условия

$$[Q^j, P^0] = iP^jP_0^{-1},\qquad [Q^j, M^{0k}] = -i\delta^{jk}Q_0 + iQ^jP^kP_0^{-1}, \tag{2}$$

где предполагается, что $Q_0 = t$ — число в несущем пространстве. Заметим, что ввиду спектрального условия P_0^{-1} хорошо определен.

Операторы Q_μ, удовлетворяющие этим требованиям, имеют следующий вид:

$$Q_\mu = tP_\mu P_0^{-1} + \frac{1}{m^2} M_{\mu\nu}P^\nu + \frac{1}{m^2} M^{\nu 0}P_\mu P_\nu P_0^{-1}. \tag{3}$$

Действительно, у нас $Q_0 = t$ и в системе покоя $(P_0, 0)$

$$\overset{\circ}{Q}_i \doteq \frac{1}{m} M_{i0}, \tag{4}$$

что является корректным соотношением. Заметим, что Q_μ в (3) не является 4-вектором.

Однако вопреки использованному в § 1 условию мы имеем

$$[Q^j, Q^k] = \frac{1}{m^2} \mathrm{i}\varepsilon^{jkl} S_l, \tag{5}$$

где S_l — оператор спина. Для бесспиновых частиц операторы координат коммутируют, а частицы со спином не могут быть локализованы точнее, чем их комптоновская длина волны. Заметим, что для спина $J = 0$ оператор координаты (3) в импульсном пространстве равен

$$Q_j = \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial p^j} - \mathrm{i}\frac{p_j}{p_0^2}, \tag{6}$$

тогда как эрмитов оператор координаты Ньютона—Вигнера имеет вид

$$Q_j^{(NW)} = \mathrm{i}\partial/\partial p^j - \frac{1}{2}\mathrm{i} p_j/p_0^2. \tag{7}$$

2. Часто вводится другой оператор координаты, а именно 4-вектор X_μ, при помощи коммутационных соотношений

$$[X^\mu, P^\nu] = -\mathrm{i}g^{\mu\nu}. \tag{8}$$

Через X^μ и P^μ мы можем записать

$$M_{\mu\nu} = X_\mu P_\nu - X_\nu P_\mu + S_{\mu\nu}, \tag{9}$$

где $S_{\mu\nu}$ — спиновая часть в $M_{\mu\nu}$: $S_{\mu\nu}P^\nu = 0$. Ясно, что X_0 играет иную роль, чем Q_0 в (3).

Если ввести $D = Q_\mu P^\mu$, то из (9) легко получается

$$X_\mu = [\{D, P_\mu\} + \{M_{\mu\nu}, P^\nu\}]/2P^2. \tag{10}$$

В 11-параметрической алгебре Ли P^μ, $M^{\mu\nu}$, D эти операторы в дополнение к (8) удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$\begin{aligned} &[M^{\mu\nu}, X^\lambda] = -\mathrm{i}(g^{\nu\lambda}X^\mu - g^{\mu\lambda}X^\nu), \\ &[X^\mu, D] = -\mathrm{i}X^\mu, \\ &[X^\mu, X^\nu] = -\mathrm{i}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}P_\lambda W_\sigma/P^4, \end{aligned} \tag{11}$$

где $W_\mu = {}^1/_2\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}M^{\nu\lambda}P^\sigma$. Этот оператор координаты формально ковариантен, но не удовлетворяет физическим требованиям (2).

§ 4. Упражнения

§ 1.1. Покажите, что заданная, согласно (17.1.10), система импримитивности $U_{\mathscr{E}^3}$, $E(\cdot)$ не является подходящей для построения операторов координат Q_i, $i = 1, 2, 3$.

§ 1.2. Покажите, что оператор координаты Q_k, $k = 1, 2, 3$, в пространстве H решений уравнения Дирака $(\gamma_\mu p^\mu - m)\psi(p) = 0$ с положительной энергией имеет вид

$$Q_k = \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial p_k} + \mathrm{i}\frac{\gamma_k}{2p_0} - \frac{\mathrm{i}(\gamma p)p_k + (\Sigma\times\boldsymbol{p})_k p_0}{2p_0^2(p_0+m)} - \frac{\mathrm{i}p_k}{p_0^2}. \tag{1}$$

Указание: воспользуйтесь индукционно-редукционной теоремой 18.1.1.

§ 1.3. Постройте операторы координат для безмассовой частицы с произвольным спином J.

Указание: воспользуйтесь индукционно-редукционной теоремой 18.1.1 для представления $U^{0,J}$ группы Пуанкаре и найдите базу $X = \Pi/K$ спектральной меры $E(S)$, $S \subset X$. Отсюда выведите, что физические величины для безмассовой частицы могут быть локализованы.

§ 1.4. Постройте операторы координат для тахионов $m^2 < 0$ произвольного спина.

Указание: воспользуйтесь тем же методом, что и в предыдущем упражнении.

§ 1.5. Покажите, что для оператора координаты (1) дираковской частицы

$$\frac{\mathrm{d}Q_k}{\mathrm{d}t} = \mathrm{i}[H, Q_k] = \frac{p_k}{p_0}\,\frac{\gamma_0 m + \gamma_0\gamma\boldsymbol{p}}{p_0}, \tag{2}$$

что в H равно p_k/p_0, тогда как

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial p^k}\right) = \mathrm{i}\left[H, \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial p^k}\right] = \gamma_0\gamma_k, \tag{3}$$

что равно скорости света, поскольку $(\gamma_0\gamma_k)^2 = I$.

§ 1.6. Покажите, что всякая галилеевски инвариантная система с массой $m > 0$ локализуема.

§ 1.7. Покажите, что элементарная галилеевская система с $m = 0$, описываемая неприводимым представлением группы Галилея, не является локализуемой.

§ 1.8. Постройте оператор координаты для массивной частицы с произвольным спином.

Указание: воспользуйтесь индукционно-редукционной теоремой 18.1.1.

§ 1.9. Дополните заданные, согласно (1.21), операторы координат Q_k, $k = 1, 2, 3$, до ковариантного оператора координаты $Q = (Q_0, Q_1, Q_2, Q_3)$, $Q_0 = t$. Покажите, что этот оператор, ассицированный с гиперплоскостью H, которую определяет нормальный вектор $n = (1, 0, 0, 0)$, преобразуется ковариантно следующим образом:

$$Q_\mu(H) \xrightarrow[(a,\,\Lambda)]{} Q'_\mu(H') = \Lambda^\nu_\mu Q_\nu(H) + a_\mu,$$

где

$$H = (n, \tau), \quad Q_\mu n^\mu = \tau$$

и

$$H' = (n', \tau'), \quad n'_\mu = \Lambda^\nu_\mu n_\nu, \quad \tau' = \tau + n'_\mu a^\mu.$$

§ 1.10. Покажите, что оператор $Q'_\mu(H')$ определяется системой импримитивности $(E'(\cdot), U'^{m,J})$, где

$$U'^{m,J}_{(a,\,\Lambda)}\psi(p) = e^{ipa}D^J(r')\,\psi(\Lambda^{-1}p),$$

$r' = \Lambda_\omega^{-1} r \Lambda_\omega$, Λ_ω^{-1} — преобразование Лоренца, которое переводит H в H', а $E'(\cdot)$ — спектральная мера, ассоциированная с U', как в утверждении 1, и основанная на $SO(3)'\diagdown T^3 \rtimes SO(3)' \sim \sim H'$. Здесь $SO(3)' = \Lambda_\omega^{-1} SO(3)\,\Lambda_\omega$.

§ 1.11. Покажите, что классический вектор Пойнтинга $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$ и плотность энергии $U = {}^1/_2\,(\boldsymbol{E}^2 + \boldsymbol{H}^2)$ являются инвариантами группы $E(2)$.

Указание: введите комплексный вектор $\boldsymbol{E} + i\boldsymbol{H}$ и покажите, что при $A \in \mathscr{E}^2$, $A = \begin{bmatrix} \alpha & \bar{\alpha} z \\ 0 & \bar{\alpha} \end{bmatrix}$, $|\alpha| = 1$, $z \in C$ имеет место $\boldsymbol{E} + i\boldsymbol{H} \xrightarrow{A} \alpha^2(\boldsymbol{E} + i\boldsymbol{H})$.

§ 2.1. Постройте простейшие неразложимые представления канонических коммутационных соотношений (2.1).

Указание: воспользуйтесь неразложимыми представлениями гл. 6, § 3, Г для абелевой подгруппы группы Вейля и индуцируйте их до всей группы.

§ 2.2. Найдите все неинтегрируемые представления канонических коммутационных соотношений (2.1). Могут ли они иметь физический смысл?

§ 2.3. Найдите все частично интегрируемые представления (относительно импульсов P_j) канонических коммутационных соотношений (2.1). Дайте физическую интерпретацию этих представлений.

Глава 21

Представления групп в релятивистской квантовой теории

В этой главе обсуждается ряд избранных основных приложений представлений групп, которые лежат в основе многих подходов релятивистской квантовой теории. Мы не имеем законченной замкнутой релятивистской квантовой теории на таком же уровне развития, как нерелятивистская квантовая механика. По этой причине теоретико-групповая схема релятивистской теории играет основную и путеводную роль в установлении моделей и теорий для релятивистских процессов.

§ 1. Релятивистские волновые уравнения и индуцированные представления

Волновые уравнения для квантовых систем строятся по образцу волновых уравнений классической физики — для электромагнитных, звуковых волн, волн на поверхности воды и т. п., но с другой интерпретацией волновой функции. В квантовой физике волновая функция представляет собой амплитуду вероятности.

В релятивистских волновых уравнениях индуцированные представления группы Пуанкаре находят свое эффективное практическое применение. В решениях волновых уравнений — волновых функциях системы — содержится вся информация о спине и импульсах системы, которую несет группа Пуанкаре. Кроме того, волновая функция дает сохраняющуюся плотность тока для квантовой системы, а через так называемую минимальную связь с электромагнитным полем также дает весьма простое и естественное ковариантное описание взаимодействия квантовой системы с внешним электромагнитным полем или радиацией. Последние два свойства волновых уравнений выходят далеко за рамки теории индуцированных представлений. Реальное значение волновых уравнений состоит в ковариантном описании взаимодействий.

Уравнение Клейна—Гордона и уравнение Дирака являются наиболее известными примерами релятивистских волновых уравнений. Однако существует бесконечное множество других возможных релятивистских волновых уравнений. Действительно, в этом параграфе мы не только показываем связь волновых уравнений с индуцированными представлениями, но также даем единообразное описание волновых уравнений, соответствующих всем индуцированным представлениям группы Пуанкаре.

Кроме того, мы рассматриваем так называемые бесконечнокомпонентные волновые уравнения, в которых используются представления группы Пуанкаре, индуцированные с бесконечномерных представлений однородной группы Лоренца или даже более общих групп. Эти волновые уравнения, как мы увидим, описывают составные квантовые системы с внутренними степенями свободы.

А. *От индуцированных представлений к волновым уравнениям*

Начнем вообще с группы G и ее унитарного представления U^L, индуцированного представлением $k \to L_k$ замкнутой подгруппы K группы G. Для простоты предполагаем, что в пространстве $X = K\diagdown G$ имеется инвариантная мера.

Как нам известно из гл. 8 и 16, «волновые функции» Макки $f(g)$, $g \in G$, преобразуются по формуле

$$[U^L_{g_0}f](g) = f(gg_0), \quad g_0, g \in G, \tag{1}$$

и удовлетворяют дополнительному условию

$$f(kg) = L_k f(g), \quad k \in K, \tag{2}$$

где K — замкнутая индуцирующая подгруппа группы G, а $k \to L_k$ — непрерывное унитарное представление подгруппы K. Скалярное произведение в пространстве H представления L определяет скалярное произведение для U^L [см. (16.1.1.3°)]

$$(f_1, f_2) = \int_X d\mu(\dot{g})(f_1, f_2)_H, \quad \dot{g} \in K\diagdown G = X, \tag{3}$$

где

$$d\mu(\dot{g}g) = d\mu(\dot{g}), \quad \dot{g} \in X, \quad g \in G.$$

Дополнительное условие (2) показывает, что подынтегральное выражение в (3) зависит только от $\dot{g} \in X$. Чтобы не иметь все время дело с дополнительным условием, удобнее иметь его включенным автоматически в формализм. Один способ достижения этого уже был детально обсужден, он заключается в рассмотрении (1) на пространстве смежных классов $X = K\diagdown G$ путем введения волновых функций над пространством смежных классов. Эти волновые функции в случае группы Пуанкаре называются *вигнеровскими состояниями*.

Согласно второму способу, записываются ковариантные волновые функции: вместо индуцирования с представления L подгруппы K, исходим из представления $\tilde{L}$ группы G, содержащего L в качестве своего сужения, редуцируем его по отношению к K и затем индуцируем до получения другого представления $U^{\tilde{L}}$

группы G. Пусть $f(g)$ удовлетворяет равенствам (1) и (2). Определим

$$h(g) \equiv \tilde{L}^{-1} f(g). \tag{4}$$

Тогда

$$h(kg) = h(g), \quad k \in K, \quad g \in G, \tag{5}$$

т. е. $h(g)$ зависит только от смежных классов $\dot{g} = Kg$:

$$h(g) \equiv \psi(\dot{g}), \quad \dot{g} \in X = K \diagdown G. \tag{6}$$

Затем в силу соотношений (16.1.14) и (16.1.12) ($\dot{g} \equiv x$, $\tilde{L}_g \equiv Bg$) имеем

$$[U_g^L \psi](x) = \tilde{L}_g \psi(xg), \tag{7}$$

что является простым «ковариантным» законом преобразования без дополнительных условий; в случае группы Пуанкаре $\psi(x)$ называется *спинорной волновой функцией.*

Скалярное произведение (3) переходит в

$$(\psi_1, \psi_2) = \int d\mu(x) (\tilde{L}_g \psi_1(x), \tilde{L}_g \psi_2(x))_H, \quad x = \dot{g}. \tag{8}$$

Если сужение L представления $\tilde{L}$ на K является унитарным, то индуцированное представление U^L группы G также унитарно.

Если мы желаем получить только частное представление U^{L^j}, то этот метод усложняется, когда сужение представления $\tilde{L}_g$ на K содержит многие представления подгруппы K, отличные от L^j. Пусть $L = \sum \oplus L^j$ — разложение представления $\tilde{L}$ группы G при сужении на K. Тогда в силу теоремы 16.2.1 индуцированное представление U^L группы G имеет вид

$$U^L = \sum_j \oplus U^{L^j} \quad \text{и} \quad H^L = \sum_j \oplus H^{L^j}. \tag{9}$$

Если нас интересует отдельное представление U^{L^j} и соответствующее пространство представления H^{L^j}, то мы можем избавиться от нежелательных представлений путем наложения дополнительного условия

$$\pi f(g) = f(g), \quad \text{или} \quad \pi f(e) = f(e), \quad f \in H^L, \tag{10}$$

где π — проектор для представления $L^j \subset L$. Эквивалентность выписанных соотношений следует из того факта, что для произвольного f из H^L $f(g) = (U_g^L) f(e)$ ввиду равенства (1). Так как с учетом (6) и (4) $f(g) = \tilde{L}_g \psi(x)$, то равенство (10) дает

$$\tilde{L}_g^{-1} \pi \tilde{L}_g \psi(x) = \psi(x). \tag{11}$$

Заметим, что проектор $\tilde{L}_g^{-1}\pi\tilde{L}_g$ зависит только от смежного класса x. Действительно, из определения π имеем

$$\tilde{L}_{kg}^{-1}\pi\tilde{L}_{kg}=\tilde{L}_g^{-1}L_k^{-1}\pi L_k\tilde{L}_g=\tilde{L}_g^{-1}\pi\tilde{L}_g.$$

Таким образом, полагая $\pi(x)=\tilde{L}_g^{-1}\pi\tilde{L}_g$, $x=\dot{g}$, получим

$$\pi(x)\psi(x)=\psi(x). \tag{12}$$

Это общее «волновое уравнение» для функции в приводимом пространстве H^L, преобразующейся по представлению U^{Lj}. Если в L входит только одно представление подгруппы K, то $\pi=I$; поэтому $\pi(x)=I$, и мы не имеем волнового уравнения.

Заметим, что если в формуле (1) пользоваться левыми сдвигами, то в равенствах (4), (8) и (11) [см. (16.1.44) и (16.1.46)] следует заменить $\tilde{L}$ на $\tilde{L}^{-1}$. С помощью соотношения (16.1.45) мы находим, что закон преобразования волновой функции имеет вид

$$[\hat{U}_g\psi](x)=\tilde{L}_g\psi(g^{-1}x)$$

[см. (17.2.41)].

Б. *Общие волновые уравнения для группы Пуанкаре*

Выведем теперь общее волновое уравнение для массивной частицы произвольного спина. В этом случае стационарная подгруппа есть $K=T^4 \rtimes \mathrm{SU}(2)$ (гл. 17, § 2) и фактор-пространство $X=G/K$ удобнее реализовать как массовый гиперболоид $p^2=m^2$, $p=(p_0, p_1, p_2, p_3)$.

Неприводимые представления группы Пуанкаре построены в гл. 17, § 2. Соответствующая массивной частице со спином j волновая функция $\psi(p)$ в спинорном базисе (17.2.41) преобразуется следующим образом:

$$U_{(a\Lambda)}^{mj}\psi(p)=\exp[\mathrm{i}pa]\,D^{(j,\,0)}(\Lambda)\,\psi(L_\Lambda^{-1}p). \tag{13}$$

Волновая функция $\psi(p)$ не удовлетворяет никакому волновому уравнению кроме тривиального уравнения

$$(p^2-m^2)\,\psi(p)=0, \tag{14}$$

которое выражает условие неприводимости массы.

Однако ввиду того факта, что оператор четности преобразует $D^{(j,\,0)}$ в представление $D^{(0,\,j)}$ (гл. 17, § 3), волновая функция $P\psi$ будет преобразовываться согласно представлению $D^{(0,\,j)}$, а потому не будет принадлежать пространству H^{mj}. Поэтому, если мы хотим построить несущее пространство для массивной частицы спина j, которое допускает оператор четности, мы должны исходить из приводимого представления $D(\Lambda)$ группы SL (2, C), например $D(\Lambda)=(D^{(j,\,0)}+D^{(0,\,j)})(\Lambda)$, ограничить его на SU (2) и затем индуцировать до группы Пуанкаре. Элементы $\psi(p)$ в этом пространстве будут преобразовываться согласно

$$U^m_{(a,\,\Lambda)}\psi(p)=\exp(\mathrm{i}pa)\,D(\Lambda)\,\psi(L_\Lambda^{-1}p). \tag{15}$$

Однако теперь мы имеем вдвое больше компонент волновой функции $\psi(p)$, чем требуется для описания частицы со спином j. Значит, мы должны избавиться от лишних компонент. Покажем теперь, что условием, которое устраняет лишние компоненты, является как раз волновое уравнение.

Из развитой в гл. 17, § 2 теории вытекает, что волновая функция $\psi(p)$, определенная на одиночной орбите $p^2=m^2$, преобразуется по неприводимому представлению U^{mj} тогда и только тогда, когда волновая функция $\psi(\mathring{p})$, $\mathring{p}=(m,0,0,0)$, в системе покоя преобразуется по одному представлению D^j группы SU (2). Волновая функция $\psi(\mathring{p})$, удовлетворяющая этому требованию, выбирается с помощью требования

$$\pi\psi(\mathring{p})=\psi(\mathring{p}), \tag{16}$$

где π — проектор для представления $D^j\subset D$ группы SU(2). Воспользовавшись этим равенством для функции $\varphi(\mathring{p})=(U_{(0,\,\Lambda)}\psi)(\mathring{p})$ и используя закон преобразования (15), получаем

$$\pi D(\Lambda)\,\psi(p)=D(\Lambda)\,\psi(p),\qquad p=L_\Lambda^{-1}\mathring{p},$$

или

$$\pi(p)\,\psi(p)=\psi(p), \tag{17}$$

где

$$\pi(p)=D^{-1}(\Lambda)\,\pi D(\Lambda). \tag{18}$$

С помощью разложения Макки $\Lambda=\Lambda_p r$ группы SL (2, C) [ср. (17.2.32)] и того факта, что проектирующий оператор π коммутирует с преобразованиями $D(r)$, $r\in$ SU (2), мы получаем

$$\pi(p)=D^{-1}(\Lambda_p)\,\pi D(\Lambda_p). \tag{19}$$

Снова воспользовавшись разложением Макки для SL (2, C), находим

$$D^{-1}(\Lambda')\,\pi(p)\,D(\Lambda')=D^{-1}(\Lambda_{\Lambda'^{-1}p})\,\pi D(\Lambda_{\Lambda'^{-1}p})=\pi(L_{\Lambda'}^{-1}p). \tag{20}$$

Таким образом, $\pi(p)$ является ковариантным матричным оператором. Так как $D(\Lambda)$ конечномерно, ранг тензорных коэффициентов в степенях p в $\pi(p)$ ограничен. Следовательно, $\pi(p)$ является ковариантным полиномом по p. Если отождествить $p_\mu=\mathrm{i}\partial_\mu$, то соотношение (17) становится ковариантным дифференциальным уравнением конечного порядка.

Отметим, что всякое ковариантное релятивистское волновое уравнение для массивной частицы с произвольным спином есть частный случай уравнения (17). Действительно, каждой паре $\{D(\Lambda), \pi\}$ соответствует единственное ковариантное волновое уравнение для массивной частицы со спином j, и обратно, каждому ковариантному волновому уравнению соответствует единственная пара $\{D(\Lambda), \pi\}$. Таким образом, уравнение (17) представляет собой наиболее общее ковариантное релятивистское волновое уравнение.

Найдем теперь вид скалярного произведения в спинорном базисе. С помощью формулы (8) и замечания в конце раздела А находим

$$(\psi_1, \psi_2) = \int (D^{-1}(\Lambda_p)\psi_1(p), D^{-1}(\Lambda_p)\psi_2(p))_H \frac{d^3\boldsymbol{p}}{p_0}. \tag{21}$$

В последней формуле учтен тот факт, что, согласно (17.2.32), $\Lambda = \Lambda_p r$ и $(D^{-1}(r)\psi_1(p), D^{-1}(r)\psi_2(p))_H = (\psi_1(p), \psi_2(p))_H$.

Воспользовавшись теперь соотношением $\Lambda_p\sigma\cdot\overset{\circ}{p}\Lambda_p^* = \sigma\cdot p$, $\sigma\overset{\circ}{p} = m$, мы получаем

$$D^{-1*}(\Lambda_p)D^{-1}(\Lambda_p) = D((\Lambda_p\Lambda_p^*)^{-1}) = D\left(\left(\frac{\sigma\cdot p}{m}\right)^{-1}\right) = D\left(\frac{\sigma\cdot p}{m}\right). \tag{22}$$

Следовательно,

$$(\psi_1, \psi_2) = \int \left(\psi_1(p), D\left(\frac{\sigma\cdot p}{m}\right)\psi_2(p)\right)_H \frac{d^3\boldsymbol{p}}{p_0}. \tag{23}$$

Формула (23) упрощается, если состояния в системе покоя $\psi(\overset{\circ}{p})$ являются собственными состояниями оператора четности η для $D(\Lambda)$, например

$$\eta\psi(\overset{\circ}{p}) = \psi(\overset{\circ}{p}). \tag{24а}$$

Пользуясь этой формулой для $\varphi(\overset{\circ}{p}) = (U_{(0,\Lambda)}\psi)(\overset{\circ}{p}) = D(\Lambda)\psi(p)$, получаем

$$\eta D(\Lambda)\psi(p) = D(\Lambda)\psi(p) \tag{24б}$$

для произвольной $\psi(p)$ из несущего пространства и произвольного $\Lambda \in SL(2, C)$. Заменяя теперь $D(\Lambda_p)\psi_2(p)$ в равенстве (21) на $\eta D(\Lambda_p)\psi_2(p)$ и используя (17.3.9), окончательно получаем

$$(\psi_1, \psi_2) = \int (\psi_1(p), \eta\psi_2(p))_H \frac{d^3\boldsymbol{p}}{p_0}. \tag{25}$$

Это наиболее удобная форма скалярного произведения, которую мы будем часто использовать.

§ 2. Конечнокомпонентные релятивистские волновые уравнения [1])

Получим теперь все общепринятые релятивистские волновые уравнения для массивной частицы со спином j, подставляя в общее волновое уравнение (1.17) частный вид представления $D(\Lambda)$ и проектора π.

А. *Уравнение Дирака*

Мы хотим получить волновое уравнение для частицы с положительной массой m и спином $^1/_2$. Волновые функции $\psi(p)$ из пространства $H^{m,\,^1/_2}$ неприводимых представлений $U^{m,\,^1/_2}$ в силу (17.2.41) преобразуются в спинорном базисе следующим образом:

$$U^{m,\,^1/_2}_{(a,\,\Lambda)}\psi(p) = \exp[\mathrm{i}pa]\,D^{(^1/_2,\,0)}(\Lambda)\,\psi\left(L_\Lambda^{-1}p\right). \tag{1}$$

Однако оператор четности P не может быть определен в $H^{m,\,^1/_2}$, так как $PD^{(^1/_2,\,0)}P^{-1} = D^{(0,\,^1/_2)}$. Минимальным расширением H^m пространства $H^{m,\,^1/_2}$, в котором определен оператор четности, является пространство волновых функций, преобразующихся согласно представлению $D^{(^1/_2,\,0)} \oplus D^{(0,\,^1/_2)}$, т. е.

$$U^{m}_{(a,\,\Lambda)}\psi(p) = \exp[\mathrm{i}pa]\left(D^{(^1/_2,\,0)} \oplus D^{(0,\,^1/_2)}\right)(\Lambda)\,\psi\left(L_\Lambda^{-1}p\right). \tag{2}$$

Но теперь мы имеем четыре компоненты волновой функции вместо двух, необходимых для описания частицы с двумя проекциями спина. Проектирующий оператор π, который удаляет нежелательные компоненты, в данном случае имеет вид

$$\pi = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}(\gamma_0 + I), \quad \text{где} \quad \gamma_0 = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Используя формулы (8.9.14), (8.9.15) для представления $D^{(^1/_2,\,0)} \oplus D^{(0,\,^1/_2)}$ и матрицы γ_μ, легко проверить, что

$$\left(D^{(^1/_2,\,0)} \oplus D^{(0,\,^1/_2)}\right)^{-1}(\Lambda)\,\gamma_\mu\left(D^{(^1/_2,\,0)} \oplus D^{(0,\,^1/_2)}\right)(\Lambda) = \left(L_\Lambda^{-1}\right)_\mu^{\nu}\gamma_\nu. \tag{4}$$

---

[1]) В соответствии с принятыми в физической литературе обозначениями в этом параграфе мы используем скалярное произведение, антилинейное по первому сомножителю и линейное по второму.

Отсюда в силу равенства (1.18) мы получаем

$$\left(D^{(1/2,\,0)} \oplus D^{(0,\,1/2)}\right)^{-1}(\Lambda_p)\,\pi\left(D^{(1/2,\,0)} \oplus D^{(0,\,1/2)}\right)(\Lambda_p) = \\ = \frac{1}{2m}\left(\gamma_\mu p^\mu + m\right), \tag{5}$$

где $p = L_\Lambda \overset{\circ}{p}$, $\overset{\circ}{p} = (m,\ 0,\ 0,\ 0)$.

Следовательно, из общего волнового уравнения (1.17) получаем уравнение

$$\left(\gamma_\mu p^\mu - m\right)\psi(p) = 0, \tag{6}$$

которое является уравнением Дирака. Этот пример ясно показывает, что дополнительное условие для спиновой неприводимости представляет собой волновое уравнение.

Используя явный вид представления $D^{(1/2,\,0)} \oplus D^{(0,\,1/2)}$, который дан в (8.9.14), и формулу (17.3.9), заключаем, что в случае представления $D^{(1/2,\,0)} \oplus D^{(0,\,1/2)}$ оператор четности η должен удовлетворять следующим условиям:

$$\eta\gamma_k\eta = -\gamma_k \quad \text{и} \quad \eta\gamma_0\eta = \gamma_0. \tag{7}$$

Эти условия выполняются при $\eta = \gamma_0$. Значит, скалярное произведение (1.26) принимает вид

$$(\psi_1,\ \psi_2) = \int \frac{d^3p}{p_0}\left(\psi_1(p),\ \gamma_0\psi_2(p)\right)_H = \int \overline{\psi}_{1\alpha}(p)\,\psi_\alpha(p)\frac{d^3p}{p_0}, \tag{8}$$

где

$$\overline{\psi}(p) = \psi^*(p)\,\gamma_0.$$

Б. *Уравнения Прока*

Получим теперь волновое уравнение для частицы с положительной массой и спином 1. Из соображений релятивистской ковариантности такую частицу можно было бы описывать при помощи трехкомпонентной волновой функции $\tilde{\Phi}(p) = \{\tilde{\Phi}_k(p)\}_{k=1}^{3}$ (где каждая компонента соответствует проекции спина), преобразующейся согласно (17.2.41)

$$U^{m,\,1}_{(a,\,\Lambda)}\tilde{\Phi}(p) = \exp(ipa)\,D^{(1,\,0)}(\Lambda)\,\tilde{\Phi}\left(L_\Lambda^{-1}p\right). \tag{9}$$

Однако представление $D^{(1,\,0)}$ не допускает оператора четности P в пространстве $H^{m,\,1}$. Значит, мы должны либо удвоить пространство и рассматривать представление $D^{(1,\,0)} \oplus D^{(0,\,1)}$, либо исходить из 4-векторной функции $\Phi(p) = \{\Phi_\mu(p)\}_{\mu=0}^{3}$, которая преобразуется по представлению $D^{(1/2,\,1/2)}$. Так как $D^{(1/2,\,1/2)}\big|_{SU(2)} \simeq \simeq D^1 + D^0$, в последнем случае в дополнение к частице спина 1 мы имеем другую скалярную частицу. Поскольку представление

$D^{(1/2,\, 1/2)}$ дает волновую функцию с меньшим числом компонент, чем $D^{(1,\,0)} \oplus D^{(0,\,1)}$, будем пользоваться им для описания частиц спина 1. Проектор π на 3-векторное пространство можно записать в виде

$$\pi = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\,[\delta_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}]. \tag{10}$$

Представление $D^{(1/2,\, 1/2)}$ — это регулярное четырехмерное представление L группы Лоренца, заданное при помощи (17.2.2). Таким образом, в силу равенства (10) получаем

$$\pi(p) = \left(D^{(1/2,\, 1/2)}\right)^{-1}(\Lambda)\,\pi D^{(1/2,\, 1/2)}(\Lambda) = \frac{1}{2}\left[\frac{p_\mu p_\nu}{m^2} - g_{\mu\nu}\right].$$

Отсюда с учетом (1.17) получаем

$$\frac{1}{2}\left(\frac{p_\nu p_\mu}{m^2} - g_{\mu\nu}\right)\Phi^\mu(p) = \Phi_\nu(p).$$

Умножая обе части на p^ν, имеем

$$p^\nu \Phi_\nu(p) = 0, \tag{11}$$

что является уравнением Прока. Понятно, что поскольку $p^2 = m^2$, каждая компонента $\Phi_\mu(p)$ удовлетворяет также уравнению Клейна—Гордона

$$(p^2 - m^2)\,\Phi_\mu(p) = 0. \tag{12}$$

Так как $D^{(1/2,\, 1/2)}(\Lambda) = L_\Lambda$, то оператор четности η для $D^{(1/2,\, 1/2)}(\Lambda)$, удовлетворяющий равенству (17.3.9), задается ввиду (17.2.5) посредством метрического тензора $g = \|g_{\mu\nu}\|$. Поэтому в силу (1.26) скалярное произведение имеет вид

$$(\Phi,\ \Phi) = \int \Phi^*(p)\, g\Phi(p)\, \frac{d^3p}{p_0} = \int \Phi_\mu^*(p)\,\Phi^\mu(p)\,\frac{d^3p}{p_0}. \tag{13}$$

Уравнения Прока (11) и (12) в координатном пространстве имеют вид

$$\partial^\mu \Phi_\mu(x) = 0 \quad \text{и} \quad (\Box - m^2)\,\Phi_\mu(x) = 0. \tag{14}$$

Эти уравнения можно записать в виде набора уравнений первого порядка. Действительно, полагая

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu \Phi_\nu - \partial_\nu \Phi_\mu, \tag{15}$$

получаем

$$\partial^\mu B_{\mu\nu} - m^2 \Phi_\nu = 0. \tag{16}$$

Дифференцированием легко проверить, что первоначальные уравнения Прока (11) и (12) эквивалентны уравнениям (15) и (16).

В. *Уравнения для массивных тензорных полей*

Рассмотрим массивное поле спина 2. Для описания этого поля мы можем использовать либо представление $D^{(1,1)}$, либо $D^{(2,0)} \oplus \oplus D^{(0,2)}$. Мы знаем, что представление $D^{(1,1)}$ можно реализовать в пространстве бесследовых симметрических тензоров $\Phi_{\mu_1\mu_2}$ ранга два. Так как $D^{(1,1)}|_{SU(2)} \simeq D^2 \oplus D^1 \oplus D^0$, мы должны обрезать нежелательные компоненты спина 1 и спина 0. Следуя векторному случаю, мы приводим проектор π к виду

$$\pi = \bigotimes_{r=1}^{2} \frac{1}{2} \| \overset{r}{\delta} - \overset{r}{g} \|. \tag{17}$$

Поскольку тензор $\Phi_{\mu_1\mu_2}$ преобразуется согласно представлению $L \otimes L$, проектор $\pi(p)$ ввиду (1.18) имеет вид

$$\pi(p) = \bigotimes_{r=1}^{2} \frac{1}{2} \left\| g^{\mu_r}_{\nu_r} - \frac{p^{\mu_r} p_{\nu_r}}{m^2} \right\|. \tag{18}$$

Волновая функция $\Phi_{\mu_1\mu_2}(p)$ в импульсном пространстве в силу (1.17) удовлетворяет условию

$$\pi(p)\Phi = \Phi. \tag{19}$$

Умножая обе части на p^μ, получаем

$$p^\mu \Phi_{\mu, \mu_2}(p) = 0. \tag{20}$$

Решая это уравнение относительно $\Phi_{0,\mu}$, получим

$$\Phi_{0,\mu}(p) = \frac{p_k \Phi_{k\mu}}{p_0}. \tag{21}$$

Таким образом, волновые уравнения (20) позволяют нам выразить компоненту $\Phi_{0,0}(p)$ (частица спина 0) и компоненты $\Phi_{0,k}(p)$ (частица спина 1) через пять независимых компонент $\Phi_{k,l}(p)$, соответствующих частице спина 2. Ясно, что ввиду массового условия мы также имеем

$$(p^2 - m^2)\Phi_{\mu_1, \mu_2}(p) = 0. \tag{22}$$

Проделанную в этом примере процедуру можно непосредственно применить к представлениям $D^{(j,j)}$ симметрических бесследовых тензоров $\Phi_{\mu_1, \ldots, \mu_{2j}}$. Получаемые в итоге волновые уравнения имеют вид

$$p^\mu \Phi_{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{2j}}(p) = 0, \quad (p^2 - m^2)\Phi_{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{2j}} = 0. \tag{23}$$

Г. *Уравнения Рариты—Швингера*

Примеры дираковской и тензорной частиц наводят на мысль использовать для описания массивных частиц с произвольным полуцелым спином тензорное произведение представления Дирака и тензорного представления группы SL (2, C), т. е.

$$D = \left(D^{(1/2,\,0)} \oplus D^{(0,\,1/2)}\right) \otimes D^{(j,\,j)}. \tag{24}$$

В этом случае волновая функция $\psi(p)$ несет как спинорный индекс, так и индексы симметрического бесследового тензора: $\psi_{\alpha;\,\mu_1,\,\dots,\,\mu_{2j}}(p)$. Проектор π на высший спин $2j + 1/2$ представления (24) является тензорным произведением дираковского (3) и соответствующего симметрическому тензору (18) проекторов, т. е.

$$\pi = \frac{1}{2}(\gamma_0 + I)^2 \bigotimes_{r=1}^{2j} \frac{1}{2}(\overset{r}{I} - \overset{r}{g}). \tag{25}$$

Поэтому с учетом равенства (1.18) мы получаем

$$\pi(p) = \frac{1}{2m}(\gamma p + m) \bigotimes_{r=1}^{2j} \left\| g^{\mu_r}_{\nu_r} - \frac{p^{\mu_r} p_{\nu_r}}{m^2} \right\|. \tag{26}$$

Умножение обеих частей (26) на $(\gamma p - m)$ и p^μ соответственно дает

$$(\gamma p - m)\,\psi_{\mu_1,\,\dots,\,\mu_{2j}}(p) = 0, \tag{27}$$

$$p^\mu \psi_{\mu,\,\mu_2,\,\dots,\,\mu_{2j}}(p) = 0. \tag{28}$$

Имеем также

$$(p^2 - m^2)\,\psi_{\mu_1,\,\dots,\,\mu_{2j}}(p) = 0. \tag{29}$$

Уравнения (27)—(29) называются *уравнениями Рариты—Швингера*. Предоставляем в качестве упражнения читателю проверить, что спин-тензорная волновая функция $\psi_{\alpha;\,\mu_1,\,\dots,\,\mu_{2j}}(p)$, удовлетворяющая (27)—(29), имеет $4j + 1$ независимых компонент.

Д. *Уравнения Баргманна—Вигнера*

Выведем теперь волновое уравнение для массивной частицы с произвольным целочисленным спином j. Ясно, что частицу со спином j можно построить с помощью тензорного произведения дираковских частиц; соответствующее представление $D(\Lambda)$ группы SL (2, C) имеет вид

$$D = \bigotimes_{r=1}^{j} \left(\overset{r}{D}{}^{(1/2,\,0)} \oplus \overset{r}{D}{}^{(0,\,1/2)}\right). \tag{30}$$

Ввиду соотношения (3) проектор на высший спин имеет вид

$$\pi = \bigotimes_{r=1}^{j} \frac{1}{2}(\overset{r}{\gamma_0} + \overset{r}{I}). \tag{31}$$

С учетом равенств (1.18) и (5) проектор $\pi(p)$ приобретает вид

$$\pi(p) = \overset{2j}{\underset{r=1}{\otimes}} \frac{1}{2m} (\overset{r}{\gamma} p + m). \tag{32}$$

Умножая равенство (1.17)

$$\pi(p)\psi(p) = \psi(p) \tag{33}$$

на $\overset{i}{\gamma} p - m$, $i = 1, 2, \ldots, j$, и используя массовое условие $p^2 = m^2$, мы приходим к серии спинорных уравнений

$$(\overset{i}{\gamma} p - m)_{\alpha_i \beta_i} \psi_{\beta_1, \ldots, \beta_i, \ldots, \beta_{2j}}(p) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, 2j. \tag{34}$$

Эти уравнения являются волновыми уравнениями Баргманна—Вигнера. Они представляют собой прямое обобщение уравнения Дирака на частицы с произвольным целочисленным спином.

Е. $2(2j+1)$-*компонентные волновые уравнения*

Для описания массивной частицы с произвольным спином можно также использовать представление $D = D^{(j,0)} \oplus D^{(0,j)}$, которое является другим непосредственным обобщением представления Дирака. Возьмем проектор π в виде

$$\pi = \frac{1}{2}(\eta + I), \tag{35}$$

где аналогично дираковскому случаю оператор η является оператором четности для представления D, $\eta = \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix}$, $\eta D^{(j,0)} \eta = D^{(0,j)}$. С помощью соотношений (1.17), (1.18) и (22) мы получаем следующее волновое уравнение:

$$\psi(p) = \pi(p)\psi(p) = \frac{1}{2} D^{-1}(\Lambda)(\eta + I) D(\Lambda)\psi(p) =$$

$$= \frac{1}{2}(\eta D^*(\Lambda) D(\Lambda) + I)\psi(p) = \frac{1}{2}\left[\eta D\left(\frac{\sigma p}{m}\right) + I\right]\psi(p) =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} I & D^{(j,0)}\left(\frac{\sigma p}{m}\right) \\ D^{(0,j)}\left(\frac{\sigma p}{m}\right) & I \end{bmatrix}\psi(p). \tag{36}$$

Спинор $\psi(p)$ имеет вид

$$\psi(p) = \begin{bmatrix} \psi_{\alpha_1, \ldots, \alpha_j}(p) \\ \psi_{\dot\beta_1, \ldots, \dot\beta_j}(p) \end{bmatrix},$$

где первая строка преобразуется по представлению $D^{(j,0)}$, а вторая — по представлению $D^{(0,j)}$. Мы условились компоненты спинора, преобразующегося по представлению $D^{(0,\, j)}$, обозначать индексами с точкой сверху. Пользуясь равенствами

$$D^{(j,\,0)}\left(\frac{\sigma p}{m}\right)=\left(\frac{\sigma p}{m}\right)\otimes\cdots\otimes\left(\frac{\sigma p}{m}\right)\quad (2j\ \text{раз}) \tag{37}$$

и

$$D^{(0,\,j)}\left(\frac{\sigma p}{m}\right)=\left(\frac{\tilde{\sigma} p}{m}\right)\otimes\cdots\otimes\left(\frac{\tilde{\sigma} p}{m}\right)\quad (2j\ \text{раз}), \tag{38}$$

мы можем записать формулу (36) в спинорной форме:

$$\begin{gathered}(\sigma\cdot p)_{\alpha_1\beta_1}(\sigma\cdot p)_{\alpha_2\beta_2}\cdots(\sigma\cdot p)_{\alpha_j\dot{\beta}_j}\psi^{\dot{\beta}_1\cdots\dot{\beta}_j}=m^{2j}\psi_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_j},\\ (\tilde{\sigma}\cdot p)^{\beta_1\alpha_1}(\tilde{\sigma}\cdot p)^{\beta_2\alpha_2}\cdots(\tilde{\sigma}p)^{\beta_j\alpha_j}\psi_{\alpha_1\cdots\alpha_j}=m^{2j}\psi^{\dot{\beta}_1\cdots\dot{\beta}_j}.\end{gathered} \tag{39}$$

Операторы проектирования этого типа были рассмотрены в работах Йооса [436], Барута, Музинича и Вильямса [88] и Вайнберга [832].

Ж. *Волновые уравнения для безмассовых частиц*

Если для безмассовой частицы мы используем волновые функции, преобразующиеся ковариантно относительно представлений $D(\Lambda)$ группы Лоренца согласно формуле (1.15), то мы должны спроектировать ее на неприводимые представления подгруппы $\tilde{E}_2$ группы SL (2, C), которая является малой группой для безмассовых частиц. Эта малая группа, отличная от группы для массивных частиц, некомпактна и неполупроста; она имеет важные следствия для физики безмассовых частиц. Конечномерные представления SL (2, C) при редукции на подгруппу $\tilde{E}_2$ являются неразложимыми и, следовательно, неунитарными представлениями последней, за исключением случая, когда они одномерны. $\tilde{E}^2$ имеет структуру $\tilde{E}^2\simeq T^2 \rtimes U(1)$, и сужение представления D группы SL (2, C) на $\tilde{E}$ (2) имеет вид $D(T^2)\exp(\mathrm{i}j\Phi)$, где $D(T^2)$ в общем случае неразложимо. В гл. 17, § 2, В рассмотрены орбиты представлений $\tilde{E}_2$. Таким образом, для волнового уравнения с положительным скалярным произведением мы должны убедиться, что представления $D(T^2)$ подгруппы T^2 тривиальны, т. е.

$$D(T^2)\,\psi(\mathring{p})=\psi(\mathring{p}),\qquad \mathring{p}=(1,\ 0,\ 0,\ 1).$$

Пусть J_k и N_k, $k=1,\ 2,\ 3$, — генераторы группы SL (2, C); тогда J_1-N_2 и J_2+N_1 являются коммутирующими генераторами подгруппы T_2. Но тогда для тривиального представления T_2 волновая функция должна удовлетворять условиям

$$(J_1-N_2)\,\psi(\mathring{p})=0\quad \text{и}\quad (J_2+N_1)\,\psi(\mathring{p})=0. \tag{40}$$

Возьмем представление $D^{(j_1, j_2)}(\Lambda)$ группы SL (2, C) в SU (2) $\times$ $\times$ SU (2)-базисе с $\boldsymbol{J}_1 = \boldsymbol{J} + \mathrm{i}\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{J}_2 = \boldsymbol{J} - \mathrm{i}\boldsymbol{N}$. Элементарные вычисления показывают, что, согласно уравнениям (40), $\psi(\overset{\circ}{p})$ является вектором старшего веса для $\boldsymbol{J}_1$ и вектором младшего веса для $\boldsymbol{J}_2$, т. е.

$$J_1^{(+)}\psi(\overset{\circ}{p}) = 0, \quad J_2^{(-)}\psi(\overset{\circ}{p}) = 0, \tag{41}$$

где

$$J_k^{(\pm)} = (J_k)_1 \pm \mathrm{i}(J_k)_2, \quad k = 1,\ 2,$$

или

$$(J_1)_3\psi(\overset{\circ}{p}) = j_1\psi(\overset{\circ}{p}) \quad \text{и} \quad (J_2)_3\psi(\overset{\circ}{p}) = -j_2\psi(\overset{\circ}{p}). \tag{42}$$

В произвольной лоренцевой системе отсчета эти уравнения принимают вид

$$(\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{p})\,\psi(p) = p_0(j_1 - j_2)\,\psi(p), \tag{43а}$$

или, что эквивалентно,

$$(\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{p})\,\psi(p) = \mathrm{i}p_0(j_1 + j_2)\,\psi(p). \tag{43б}$$

Волновые уравнения (43) можно также переписать в виде

$$W_0\psi(p) = p_0(j_1 - j_2)\,\psi(p), \tag{44}$$

где $W_\mu = \varepsilon_{\mu\lambda\sigma\nu}M^{\lambda\sigma}p^\nu$ — оператор спина. Таким образом, равенство (44) показывает, что $\psi(p)$ имеет лишь одну компоненту, а именно со спиральностью $\lambda = j_1 - j_2$, как это известно вообще из теории представлений. Инвариантность относительно четности снова делает необходимым удваивать пространство, так что безмассовые частицы, когда четность определена, имеют два состояния поляризации. Скалярное произведение (1.23) сводится в этом случае к

$$(\psi_1,\ \psi_2) = \int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{p_0}\,\psi_1^*(p)\,p_0^{-2(j_1+j_2)}\psi_2(p), \quad p_0 = |\boldsymbol{p}|. \tag{45}$$

Пример 1. $D(\Lambda) = D^{(1/2,\,0)}(\Lambda)$. Тогда $\boldsymbol{J} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}$, и любое из уравнений (43) дает

$$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})\,\psi(p) = p_0\psi(p), \tag{46}$$

что является уравнением Вейля для нейтрино.

Пример 2. Возьмем $D(\Lambda) = (D^{(1,\,0)} \oplus D^{(0,\,1)})(\Lambda)$. Тогда $\psi = \psi_1 \oplus \psi_2$, $\boldsymbol{J}^{(1,\,0)} = \boldsymbol{J}^{(0,\,1)}$ с $(J_a^{(1,\,0)})_{bc} = \mathrm{i}\varepsilon_{abc}$; следовательно, $(\boldsymbol{J}^{(1,\,0)}\boldsymbol{p})_{bc} = \mathrm{i}\varepsilon_{abc}p_a = (\boldsymbol{J}^{(0,\,1)}\boldsymbol{p})_{bc}$, и из (43а) получаем

$$\boldsymbol{p}\times\psi_1(p) = -\mathrm{i}\omega\psi_1(p), \quad \boldsymbol{p}\times\psi_2(p) = \mathrm{i}\omega\psi_2(p).$$

Полагая $\psi_1 = \boldsymbol{B} + i\boldsymbol{E}$ и $\psi_2 = \boldsymbol{B} - i\boldsymbol{E}$, мы в итоге получаем следующие уравнения в импульсном пространстве:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{E} = \omega \boldsymbol{B}, \quad \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{B} = 0,\\ \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E} = 0, \quad \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{B} = -\omega \boldsymbol{E}, \end{aligned} \tag{47}$$

которые являются уравнениями Максвелла.

3. *Общие замечания*

1. Примечательно, что все существующие конечномерные волновые уравнения являются частными случаями общего волнового уравнения (1.17)

$$\pi(p)\,\psi(p) = \psi(p),$$

полученного на основе теории индуцированных представлений. Отдельные волновые уравнения мы получили выбирая конкретные представления $D(\Lambda)$ группы SL $(2, C)$ и вычисляя соответствующие проектирующие операторы $\pi(p)$. Эти результаты еще раз демонстрируют эффективность и изящество теории индуцированных представлений.

2. В общем случае волновое уравнение (1.17) представляет собой условие неприводимости для спина. Уравнение Клейна—Гордона

$$(p^2 - m^2)\,\psi(p) = 0, \tag{48}$$

которому удовлетворяют все волновые функции, представляет собой условие неприводимости для массы. В случае уравнения Дирака массовая неприводимость следует из спиновой неприводимости. Действительно, умножая уравнение Дирака

$$(\gamma_\mu p^\mu - m)\,\psi(p) = 0$$

на оператор $(\gamma_\mu p^\mu + m)$, мы приходим к уравнению (48). Но в случае уравнения Прока неприводимость массы (48) нельзя вывести из условия неприводимости спина $p^\nu \Phi_\nu(p) = 0$. Можно однако записать волновое уравнение в виде, из которого следует неприводимость массы и спина: например, соответствующее уравнение для массивной частицы спина 1 имеет вид

$$(m^2 g^\mu_\nu + p_\nu p^\mu)\,\Phi_\mu(p) = p^2 \Phi_\nu(p);$$

обратно, уравнение Дирака можно записать в виде

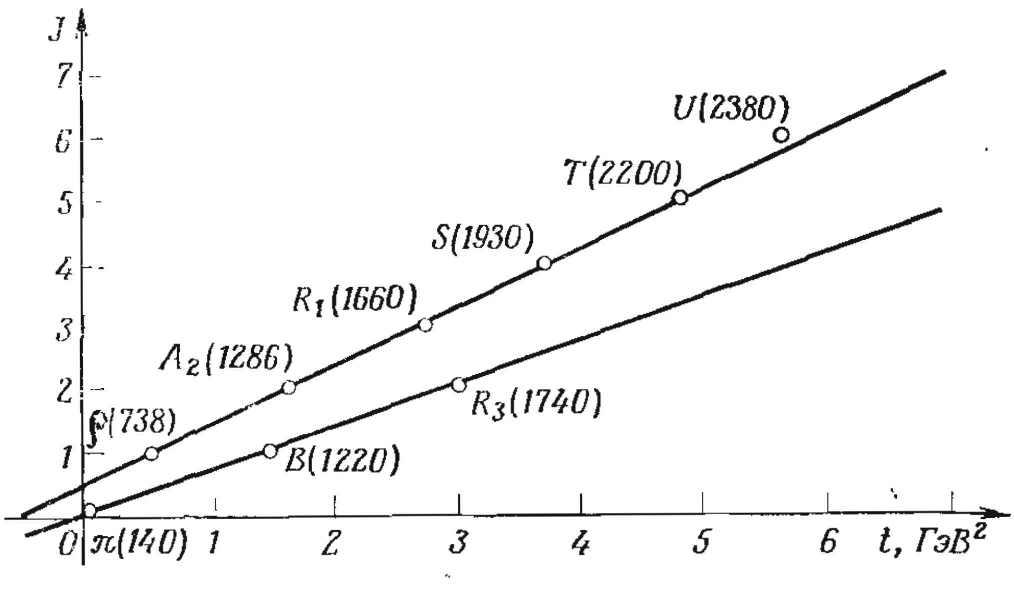
$$(\gamma_\mu p^\mu - (p^2)^{1/2})\,\psi(p) = 0,$$

откуда неприводимость массы не вытекает. Эти два примера иллюстрируют тот факт, что условия неприводимости массы и спина имеют под собой одинаковые основания, и то, представим ли мы их одним или же двумя отдельными уравнениями, является лишь вопросом удобства.

§ 3. Бесконечнокомпонентные волновые уравнения

А. *Уравнения Гельфанда—Яглома*

В § 1 было показано, что любое представление группы Лоренца, сужение которого на SU (2) является приводимым, может быть использовано для построения явно ковариантного волнового уравнения. В § 2 мы использовали конечномерные приводимые представления группы SL (2, *C*) для получения общепринятых



Фиг 1.

конечнокомпонентных релятивистских волновых уравнений. Но эксперименты показывают, что элементарные частицы и резонансы могут быть сгруппированы в возможные бесконечные семейства частиц. На фиг. 1 показан пример зависимости между массой и спином для мультиплета мезонов (так называемые ρ- и π-траектории Редже).

Весьма привлекательной представляется поэтому идея рассмотреть бесконечнокомпонентные волновые уравнения, описывающие свойства целого семейства частиц. Простейшим уравнением такого типа является обобщение уравнения Дирака

$$(\Gamma_\mu p^\mu - \varkappa)\,\psi(p) = 0, \tag{1}$$

где Γ_μ — векторный оператор в несущем пространстве, а $\varkappa$ — скаляр. Но возникает вопрос: существует ли и при каких условиях в любом бесконечномерном пространстве векторный оператор, который должен удовлетворять условию ковариантности

$$U_g^{-1}\Gamma_\mu U_g = \Lambda^\mu_\nu \Gamma_\nu. \tag{2}$$

Эту проблему исследовали Гельфанд и Яглом, которые доказали следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть неприводимое представление группы* SL (2, *C*) *характеризуется парой чисел* $[j_0, j_1]$, *где* j_0 — *наименьший спин в представлении, принимающий целые или полуцелые значения, а* j_1 — *произвольное комплексное число (гл. 19). В прямой сумме* $H = \bigoplus_s H^{[j_0^s, j_1^s]}$ *неприводимых пространств существует 4-векторный оператор* Γ^μ, *если для всякой неприводимой компоненты* $H^{[j_0, j_1]}$ *в* H *существует неприводимая компонента* $H^{[j_0', j_1']}$ *в* H, *инвариантные числа которых связаны друг с другом соотношениями*

$$\begin{aligned}[j_0', j_1'] &= [j_0 + 1, j_1]\\ &= [j_0 - 1, j_1]\\ &= [j_0, j_1 + 1]\\ &= [j_0, j_1 - 1].\end{aligned} \tag{3}$$

Доказательство. В силу равенства (2) получаем

$$[\Gamma_\mu, M_{\lambda\rho}] = i(g_{\mu\lambda}\Gamma_\rho - g_{\mu\rho}\Gamma_\lambda), \tag{4}$$

где $M_{\lambda\rho}$ — генераторы SL (2, *C*). Полагая $\boldsymbol{J} = (M_{32}, M_{13}, M_{21})$ и $\boldsymbol{N} = (M_{01}, M_{02}, M_{03})$, получаем, в частности,

$$i\Gamma_k = [\Gamma_0, N_k], \tag{5}$$

$$[\Gamma_0, J_k] = 0, \quad [\Gamma_3, N_3] = i\Gamma_0 = -i\,[[\Gamma_0, N_3], N_3]. \tag{6}$$

Ввиду равенства (5) достаточно найти Γ_0, чтобы получить $\{\Gamma_\mu\}_{\mu\neq 0}^3$. Поэтому достаточно проверить, когда существует определенный при помощи (6) оператор Γ_0. Пусть H — приводимое пространство представления $g \to U_g$ группы SL (2, *C*), и пусть $\sum_\tau \oplus H^\tau$ — его разложение на неприводимые подпространства H^τ, $\tau \equiv [j_0, j_1]$. Пусть $|\tau, JM\rangle$ — канонический базис в H^τ. Пусть $[c_{JM,J'M'}^{\tau\tau'}]$ — матричные элементы оператора Γ_0 в этом базисе в пространстве представления H. Тогда в силу соотношений (6) имеем

$$c_{JM,J'M'}^{\tau\tau'} = c_J^{\tau\tau'}\delta_{JJ'}\delta_{MM'}. \tag{7}$$

Действие генератора N_3 на элементы канонического базиса дано в упражнении 19.7.3.4. Взяв теперь матричный элемент равенства $\Gamma_0 = [[\Gamma_0, N_3], N_3]$ в каноническом базисе между базисными элементами $|\tau JM\rangle$ и $|\tau (J \pm 1)\ M\rangle$, мы получим шесть линейных уравнений для трех неизвестных $c_J^{\tau\tau'}$, $c_{J-1}^{\tau\tau'}$ и $c_{J+1}^{\tau\tau'}$. Предоставляем в качестве упражнения читателю выписать явно эти уравнения. Решая первые три уравнения относительно этих неизвестных и подставляя полученные выражения в остальные три уравнения, нетрудно убедиться, что $c_J^{\tau\tau'}$ может быть отличным от нуля лишь в том случае, когда τ $(j_0 j_1)$ и τ' $(j'_1 j'_0)$ таковы, что

$$[j'_0,\ j'_1] = [j_0 \pm 1,\ j_1] \tag{8}$$

или

$$[j'_0,\ j'_1] = [j_0,\ j_1 \pm 1]. \tag{8'}$$

Замечание 1. Заметим, что условиям (3) удовлетворяют также и конечномерные представления. Действительно, воспользовавшись соответствием между индексами $[j_0 j_1]$ и $(J_1,\ J_2)$, характеризующими конечномерное представление $D^{(J_1,\ J_2)}$, которое задается формулами

$$J_1 = \frac{j_0 + j_1 - 1}{2}, \quad J_2 = \frac{j_1 - j_0 - 1}{2},$$

находим, что, например, прямые суммы

$$D(\Lambda) = D^{(0,\ 0)} \oplus D^{(1/2,\ 1/2)},$$

$$D(\Lambda) = D^{(1,\ 0)} \oplus D^{(0,\ 1)} \oplus D^{(1/2,\ 1/2)}$$

удовлетворяют условию (3). Значит, в этих случаях существует конечномерное уравнение Гельфанда—Яглома типа (1).

Замечание 2. Собственные значения операторов Казимира $C_2 = \boldsymbol{J}^2 - \boldsymbol{N}^2$ и $C'_2 = \boldsymbol{J}\boldsymbol{N}$ для представления $[j_0 j_1]$ равны $j_0^2 + j_1^2 - 1$ и $2i j_0 j_1$ (упражнение 19.7.3.1). Действие оператора четности имеет вид $\boldsymbol{P} : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{J}$ и $\boldsymbol{N} \to -\boldsymbol{N}$. Поэтому преобразованием четности для $[j_0 j_1]$ является $[j_0,\ -j_1]$. Следовательно, ввиду соотношений (3) Γ_μ существует на прямой сумме пространств представлений

$$\text{а)} \quad [0,\ j_1] \text{ с } [1,\ j_1],\quad [0,\ j_1 + 1],\quad [0,\ j_1 - 1] \tag{9}$$

и

$$[j_0,\ 0] \text{ с } [j_0 + 1,\ 0],\quad [j_0 - 1,\ 0],\quad [j_0,\ 1],\ [j_0,\ -1], \tag{10}$$

$$\text{б)} \quad [j_0,\ j_1]\,(j_0 \neq 0,\ j_1 \neq 0) \text{ с набором } [j'_0,\ j'_1], \tag{11}$$

как в (3), и с таким же набором, соответствующим $[j'_0,\ -j'_1]$.

Б. *Волновое уравнение Майораны*

Теорема Гельфанда—Яглома показывает, что в общем случае требуется по крайней мере два неприводимых представления, чтобы можно было определить векторный оператор Γ_μ в несущем пространстве H. Однако если взять унитарное неприводимое представление группы SL $(2, C)$ в виде $[j_0,\ j_1] = \left[0,\ \frac{1}{2}\right]$, то в силу теоремы 1 $[j'_0,\ j'_1] = \left[0, -\frac{1}{2}\right]$ есть второе представление, которое вместе с $\left[0,\ \frac{1}{2}\right]$ определяет оператор Γ_μ. Но, как следует из упражнения 19.7.3.2, $\left[0, -\frac{1}{2}\right]$ эквивалентно $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. Значит, в этом случае векторный оператор может быть определен в пространстве $H^{[0, 1/2]}$ неприводимого представления $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. Аналогичная ситуация имеет место для представления $\left[\frac{1}{2}, 0\right]$. Соответствующее волновое уравнение

$$(\Gamma_\mu p^\mu - \varkappa)\,\psi(p) = 0, \tag{12}$$

ассоциированное с представлением $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ или $\left[\frac{1}{2}, 0\right]$, называется уравнением Майораны. Эти уравнения были введены Майораной [566] в качестве возможного способа избавления от состояний с «отрицательной энергией» в теории Дирака, что вызывало в то время серьезные затруднения.

Найдем теперь спектр уравнения Майораны, ассоциированного с представлением $\left[\frac{1}{2}, 0\right]$. Полагая, что p является времениподобным импульсом, и переходя в систему покоя $\overset{\circ}{p} = (m, 0, 0, 0)$, мы получаем

$$(\Gamma_0 m - \varkappa)\,\psi(\overset{\circ}{p}) = 0. \tag{13}$$

Для получения спектра оператора Γ_0 возьмем специальную реализацию представления $\left[\frac{1}{2}, 0\right]$. Пусть a_i и a_i^*, $i = 1, 2$, — операторы рождения и уничтожения. Тогда векторы $\left|\left[\frac{1}{2}, 0\right]; JM\right\rangle$ в пространстве $H^{[1/2, 0]}$ можно реализовать при помощи формулы

$$\left|\left[\frac{1}{2}, 0\right]; JM\right\rangle = N a_1^{*J+M} a_2^{*J-M} \left|0\right\rangle, \tag{14}$$

где N — нормировочный множитель. Генераторы $\boldsymbol{J}$ и $\boldsymbol{N}$ группы SL $(2, C)$ в реализации (14) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{J} &= \frac{1}{2} a^* \boldsymbol{\sigma} a, \\ \boldsymbol{N} &= \frac{i}{4}\left(a^* \boldsymbol{\sigma} C a^* + a C \boldsymbol{\sigma} a\right), \end{aligned} \tag{15}$$

где σ — матрицы Паули и C равно $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Ввиду соотношений (6) оператор Γ_0 должен коммутировать с $\boldsymbol{J}$ и удовлетворять равенству $[[\Gamma_0, N_3], N_3] = -\Gamma_0$. Легко проверить, что оператор второго порядка по a и a^*, удовлетворяющий этим условиям, имеет вид оператора числа частиц

$$\Gamma_0 = \frac{1}{2}(a^* a + 1). \tag{16}$$

С учетом формулы (5) получаем

$$\mathbf{\Gamma} = -\frac{i}{4}(a^*\boldsymbol{\sigma} C a^* - aC\boldsymbol{\sigma} a). \tag{17}$$

Действие Γ_0 на состояния (14) дает

$$\Gamma_0 \left| \left[\frac{1}{2}, 0\right]; JM \right\rangle = \left(J + \frac{1}{2}\right) \left| \left[\frac{1}{2}, 0\right]; JM \right\rangle. \tag{18}$$

Воспользовавшись затем соотношением (13), получаем массовую формулу для уравнения Майораны

$$m_J = \frac{\varkappa}{J + \frac{1}{2}}, \quad J = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots \tag{19}$$

Такая же массовая формула получается для уравнения Майораны, ассоциированного с представлением $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ (с $J = 0$, 1, 2, ... в этом случае).

Интересно, что набор операторов $\boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{N}$ и Γ_μ замыкается до алгебры Ли so (2, 3). Следовательно, пространства $H^{[1/2, 0]}$ или $H^{[0, 1/2]}$ являются в то же время пространствами неприводимых представлений группы SO (2, 3).

Уравнения Майораны (12) имеют также решения для пространственноподобных импульсов $p^2 = m^2 < 0$. В этом случае в системе покоя $\overset{\circ}{p} = (0, 0, 0, m)$ получаемое уравнение имеет вид

$$(\Gamma_3 m - \varkappa)\, \psi(\overset{\circ}{p}) = 0. \tag{20}$$

Диагонализируя теперь Γ_3, находим непрерывный спектр масс для этого случая. Это следует также и непосредственно из наблюдения, что Γ_3 является генератором некомпактной подгруппы в SO (3, 2), и из того факта, что все такие генераторы имеют непрерывные спектры.

Минимальная связь

Важность линейных уравнений типа уравнения Дирака (2.6) или уравнения Майораны (12) заключается в том, что поведение частиц во внешнем электромагнитном поле с потенциалом $A_\mu(x)$ описывается при помощи подстановки

$$P_\mu \to P_\mu - eA_\mu(x), \tag{21}$$

где e—электрический заряд. Таким образом, мы имеем уравнение

$$(\Gamma_\mu p^\mu - e\Gamma_\mu A^\mu(x) - \varkappa)\, \psi = 0. \tag{22}$$

По сравнению с уравнением для свободной частицы второй член $e\Gamma_\mu A^\mu(x)$ появляется в качестве члена взаимодействия. Эта процедура, получаемая по правилу (21), называется *минимальной* *связью*. Таким образом, оператор $e\Gamma_\mu$ является оператором тока квантовой системы. Сами потенциалы $A_\mu(x)$ в свою очередь продуцируются токами. Следовательно, в общем случае мы имеем систему связанных уравнений (22) и

$$\Box A_\mu(x) = j_\mu(x). \tag{23}$$

Но для заданных внешних полей $A_\mu(x)$ можно ограничиться уравнением (22).

В. *Обобщения уравнений Гельфанда—Яглома*

Спектр масс (19) весьма нефизичен, так как масса уменьшается при возрастании спина. Этот вид спектра типичен для общего уравнения Гельфанда—Яглома (1). К тому же выводимый из уравнения (23) магнитный момент оказывается с неправильным знаком. Естественно поэтому искать более общее релятивистское волновое уравнение вида

$$(\Gamma_\mu p^\mu - K)\psi(p) = 0, \tag{24}$$

где K — инвариантный оператор группы Лоренца. Для $K = \alpha p_\mu p^\mu + \varkappa$ получаем

$$(\Gamma_\mu p^\mu - \alpha p_\mu p^\mu - \varkappa)\psi = 0. \tag{25}$$

Это уравнение также можно точно решить, переходя в систему покоя. Поступая так же, как в случае простого уравнения Майораны, находим

$$m_J = \frac{J + \frac{1}{2}}{2\alpha}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\varkappa\alpha}{\left(J + \frac{1}{2}\right)^2}}\right). \tag{26}$$

В частности, при $\varkappa = 0$ мы имеем линейный по спину спектр

$$m_J = \frac{1}{2\alpha}\left(J + \frac{1}{2}\right).$$

Другая интересная модель обобщенного уравнения (24) получается, если взять волновую функцию $\psi(p)$, которая преобразуется согласно представлению $(D^{(1/2,\,0)} \oplus D^{(0,\,1/2)}) \otimes U^{[j_0,\,0]}$. Полагая в этом случае $K = -(M_0 + M_1\sigma_{\mu\nu}M^{\mu\nu})$, где $M^{\mu\nu}$ — генераторы представления $U^{[j_0,\,0]}$, а M_0 и M_1 — скаляры, мы получаем следующее волновое уравнение:

$$(\gamma_\mu p^\mu + M_0 + M_1\sigma_{\mu\nu}M^{\mu\nu})\psi(p) = 0. \tag{27}$$

Переходя к системе покоя и проводя выкладки, аналогичные случаю уравнений Майораны, получаем следующую массовую формулу:

$$\pm m_J = M_1\left(J+\frac{1}{2}\right) \pm \Big\{(M_0 - M_1)^2 + + M_1^2\left[J(J+1) - j_0(j_0+1) - \frac{3}{4}\right]\Big\}. \qquad (28)$$

Уравнение (27) называют уравнением Аберса, Гродски и Нортона [2].

Г. *Применение бесконечнокомпонентных волновых уравнений*

В § 1 мы вложили индуцирующее представление подгруппы K группы G в представление $D(G)$ группы G, чтобы иметь явно ковариантные волновые уравнения. Мы можем также вложить $D(G)$ в представление $D(\breve{G})$ более широкой группы $\breve{G}$, содержащей G (а значит, и К). Кратность представления $D(K)$ в $D(\breve{G})$ теперь будет, вообще говоря, гораздо большей. Физически эти кратности будут отождествляться с дополнительными внутренними степенями свободы системы.

Приведем теперь важный пример применения этого метода. Пусть $\breve{G} = SO(4, 2)$. Алгебра Ли группы $SO(4, 2)$ имеет базис $L_{ab} = -L_{ba}$, $a, b = 0, 1, 2, \ldots, 5$, содержащий генераторы $M_{\mu\nu} = L_{\mu\nu}$, $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$, подгруппы $SO(3, 1)$. По отношению к $M_{\mu\nu}$ элементы $L_{\mu 5} = \Gamma_\mu$ являются компонентами 4-векторного оператора, а $L_{45} = S$ — скалярным оператором. Поэтому наиболее общим лоренц-ковариантным волновым уравнением, линейным по элементам алгебры Ли, является уравнение

$$(\Gamma_\mu p^\mu + \beta S + \gamma)\,\psi(p) = 0. \qquad (29)$$

Уравнение (29) также может быть решено путем преобразования его в систему покоя $\overset{\circ}{p} = (p_0, 0, 0, 0)$:

$$(\Gamma_0 p^0 + \beta S + \gamma)\,\psi(0) = 0. \qquad (30)$$

Здесь мы можем диагонализовать либо Γ_0, имеющий дискретный спектр как генератор компактной подгруппы, либо S, спектр которого как генератора некомпактной подгруппы непрерывен.

Выберем, например, наиболее вырожденный дискретный класс представлений группы $SO(4, 2)$, рассмотренный в гл. 15, и выберем в качестве базиса собственные векторы операторов Γ_0, J^2, J_3, обозначаемые $|n, J, J_3\rangle$. В этом представлении инвариантные операторы группы SO (4, 2) имеют значения

$$C_2 = \frac{1}{2} L_{ab}L^{ab} = -3,$$
$$C_3 = \varepsilon_{abcdef}L^{cd}L^{ef}L^{ab} = 0, \tag{31}$$
$$C_4 = L_{ab}L^{bc}L_{cd}L^{da} = -12.$$

Благодаря тому факту, что Γ_0, S и $L_{04} \equiv T$ генерируют подгруппу SU (1, 1), мы можем решить (30), определяя $\tilde{\psi}(\mathring{p})$ при помощи

$$\psi(\mathring{p}) \equiv \exp(i\bar{\theta}_n L_{04})\,\tilde{\psi}(\mathring{p}), \quad \Gamma_0\,|\,\tilde{\psi}_n(\mathring{p})\rangle = n\,|\,\tilde{\psi}_n(\mathring{p})\rangle \tag{32}$$

и подходящим образом выбирая θ_n. Тогда

$$[(m^2-\beta^2)^{1/2}\Gamma_0+\gamma]\,\tilde{\psi}(\mathring{p}) = 0, \tag{33}$$

или

$$m^2 = (\beta^2-\gamma^2/n^2). \tag{34}$$

Рассмотрим интересный с физической точки зрения случай, когда β и γ являются функциями полной массы m системы. Ясно, что в этом случае спектр масс может отличаться от задаваемого формулой (34). Положим

$$\beta = m\,\frac{\omega^2 - m_1^2 + (m-m_2)^2}{\omega^2 + m_1^2 - (m-m_2)^2}, \quad \gamma = \frac{-2\alpha\omega m\,(m+m_1-m_2)}{\omega^2+m_1^2-(m-m_2)^2}. \tag{35}$$

Решая (34) относительно m, получаем

$$m = m_2 + m_1\,\frac{1-\alpha^2/n^2}{1+\alpha^2/n^2}. \tag{36}$$

Разложение по α^2/n^2 дает

$$m = m_1 + m_2 - 2m_1\alpha^2/n^2,$$

что совпадает со спектром масс нерелятивистского атома водорода. Покажем теперь, что, выбирая подходящим образом представление опараторов Γ_0 и S, мы получим, что уравнение (30) с заданными в (35) β и γ может интерпретироваться как уравнение Клейна—Гордона со скалярным и векторным потенциалом типа $1/r$ и равными константами связи при обоих взаимодействиях. Действительно, возьмем представление алгебры so (4, 2) через дифференциальные операторы в $L^2(R^3)$ (гл. 12, § 2). Генераторы подалгебры su (1, 1) в этом случае имеют вид [см. соотношение (12.2.5)]

$$\Gamma_0 = \frac{1}{2\omega}(-r\nabla^2 + \omega^2 r),$$
$$S = \frac{1}{2\omega}(-r\nabla^2 - \omega^2 r), \tag{37}$$
$$T = -i\boldsymbol{r}\boldsymbol{\nabla} - i.$$

Подставляя эти генераторы в уравнение (30), определяя $E_1 \equiv m - m_2$ и используя выражения (35) для β и γ, получаем

$$\left[\frac{1}{2\omega}(\omega^2 + m_1^2 - E_1^2)(-r\nabla^2 + \omega^2 r) + \frac{1}{2\omega}(\omega^2 - m_1^2 + E_1^2)(-r\nabla^2 - \omega^2 r)\right]\psi = 2\alpha\omega(E_1 + m_1)\psi.$$

После элементарных вычислений получаем

$$\left[-\nabla^2 - \left(E_1 + \frac{\alpha}{r}\right)^2 + \left(m_1 - \frac{\alpha}{r}\right)^2\right]\psi = 0, \tag{38}$$

т. е. уравнение Клейна—Гордона со скалярным потенциалом $\varphi(r) = -\alpha/r$ и векторным потенциалом $V(r) = -\alpha/r$. Из равенства (36) приходим к следующему спектру для E_1:

$$E_1 = m_1 \frac{1 - \alpha^2/n^2}{1 + \alpha^2/n^2}. \tag{39}$$

Разлагая по α^2/n^2, получаем

$$E_1 = m_1 - 2m_1\alpha^2/n^2.$$

Это соответствует спектру уравнения Шредингера с потенциалом $U(r) = -2\alpha/r$, что неудивительно, поскольку в нерелятивистском приближении скалярный и векторный потенциалы складываются.

Таким образом, представляется замечательным, что уравнения типа (29) описывают релятивистским образом составные квантовые системы, такие, как атом водорода. Заметим, что обозначение состояний $|nJJ_3\rangle$ находится в согласии с квантовыми числами атома водорода. При помощи ковариантных уравнений (29) мы, таким образом, установили контакт с формализмом динамической группы квантовой механики, рассмотренным в гл. 12.

Другое представление алгебры su (1, 1) (37), именно

$$\begin{aligned} \Gamma_0' &= \frac{1}{2}\left[-r\nabla^2 + r + \frac{1}{r}(-\alpha^2 - i\alpha\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\boldsymbol{r}})\right], \\ S' &= \frac{1}{2}\left[-r\nabla^2 - r + \frac{1}{r}(-\alpha^2 - i\alpha\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\boldsymbol{r}})\right], \\ T' &= T = -ir\nabla - i, \quad \hat{r} = r/|r|, \end{aligned} \tag{40}$$

где α — матрицы Дирака, приводит при подходящем выборе параметров к уравнению

$$[\Gamma_0' + S' - (E^2 - m^2)(\Gamma_0' - S') - 2\alpha E]\psi = 0$$

или

$$\left[p^2 - (E^2 - m^2) - \frac{2\alpha E}{r} - \frac{1}{r^2}(\alpha^2 + i\alpha\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\boldsymbol{r}})\right]\psi = 0, \tag{41}$$

что является уравнением Дирака второго порядка для кулоновского потенциала.

Наконец, пользуясь представлением, заданным в (12.2.22), мы получаем уравнение для диониума (dyonium), который является атомом, состоящим из двух дионов — частиц, обладающих как электрическим, так и магнитным зарядами. Алгебра Ли, которая решает уравнение для диониума, та же, что и в (37) или (40), если учесть замены

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p} &\to \pi = \boldsymbol{p} - \mu \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}), \\ \mathrm{i}\alpha\alpha \cdot \hat{\boldsymbol{r}} &\to (\mu\sigma + \mathrm{i}\alpha\alpha) \cdot \hat{\boldsymbol{r}}, \end{aligned} \tag{42}$$

где $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})$ и μ определены в лемме 12.2.5.

Д. *Интерпретация волновых уравнений с точки зрения динамической группы*

В предыдущих разделах ковариантные волновые уравнения были интерпретированы как проекции на определенные подпространства приводимых представлений группы Пуанкаре, индуцированных с представлений группы SL (2, C) [соотношение (1.12)].

Вторая интерпретация (которая объединяется с обсуждением в гл. 13, § 2) состоит в указании пространства состояний в системе покоя системы при помощи неприводимого представления U динамической группы $\mathcal{G} \supset$ SL (2, C). Тогда состояния импульса P_μ получаются с помощью преобразования Лоренца (т. е. буста). Этот метод особенно полезен для бесконечнокомпонентных волновых уравнений, но он применим также и к конечнокомпонентным уравнениям.

Пример 1. Пусть $\mathcal{G} = O(4, 2)$. В качестве U возьмем 4-мерное неунитарное представление, в котором генераторы группы $\mathcal{G}$ заданы через 16 элементов алгебры матриц Дирака, как в упражнении 13.6.4.1.

Поскольку $\frac{1}{2} L_{56} = \gamma_0$ имеет собственные значения $n = \pm 1$, то, взяв простейшее массовое соотношение $mn = \varkappa$, мы можем записать

$$(m\gamma_0 - \varkappa)\,\psi(\mathring{p}) = 0, \tag{43}$$

где $\varkappa$ — фиксированная постоянная.

Действуя на это уравнение преобразованием Лоренца с параметром ξ

$$\begin{aligned} \psi(p) &= \exp(\mathrm{i}\xi N)\,\psi(p), \\ N &= \frac{1}{2}\gamma_0\gamma, \end{aligned} \tag{44}$$

получаем

$$(\gamma^\mu p_\mu - \varkappa)\,\psi(p) = 0,$$

что является уравнением Дирака (2.6).

ПРИМЕР 2. Пусть $\mathcal{G} = O(4, 2)$. Пусть U — бесконечномерное унитарное представление $\mathcal{G}$ наиболее вырожденной серии; $\frac{1}{2} L_{56} = \Gamma_0$ имеет спектр $n = \mu + 1, \mu + 2, \ldots$. Простейшим линейным по генераторам группы массовым соотношением является

$$(M\Gamma_0 - \varkappa)\,\psi(\mathring{p}) = 0,$$

соответствующее массам $M_n = \varkappa/n$, $n = \mu + 1, \ldots$. Преобразуя это уравнение посредством $\exp(i\xi N)$ (преобразования Лоренца), мы получаем

$$(\Gamma_\mu p_\mu - \varkappa)\,\psi(p) = 0,$$

т. е. уравнение Майораны (3.12). Или, взяв более общее массовое соотношение

$$(M\Gamma_0 + \alpha M^2 - \varkappa)\,\psi(\mathring{p}) = 0,$$

мы получаем обобщенное уравнение Майораны (3.25).

Как показывают эти примеры, мы снова имеем процедуру индуцирования. Состояния в системе покоя $\psi(\mathring{p})$ преобразуются согласно представлению L подгруппы K в H: $\psi_k(\mathring{p}) = L_k\psi(\mathring{p})$, $k \in K$, и затем мы переходим к индуцированным представлениям группы Пуанкаре Π при помощи (44).

Редукция U на группу SL $(2, C)$ дает приводимое представление $\tilde{L}$ последней. Поэтому спинорные волновые функции $\psi(p)$ преобразуются по приводимому в общем случае представлению $\tilde{L}$ группы SL $(2, C)$:

$$(U_{(a,\,\Lambda)}\psi)(p) = \exp(ip\tilde{a})\,L(\Lambda^{-1}p).$$

Общая процедура такова:

1. Выбор динамической группы $\mathcal{G}$ и ее представления U зависит от внутренней динамики и степеней свободы системы (т. е. спина или орбитальных и радиальных возбуждений). Это отражается в ряде квантовых чисел и состояний. На фиг. 2 и 3 изображены две весовые диаграммы для $\mathcal{G} = O(4, 2)$, где j и n — собственные значения операторов L^2 и $L_{56} = \Gamma_0$ соответственно (см. также гл. 12, фиг. 1).

2. Пусть Γ_μ — векторный оператор в U, а S — скалярный оператор. Берем любое соотношение, включающее в себя величины $P_0\Gamma^0$, $P_\mu P^\mu$, S, ..., на пространстве H представления U:

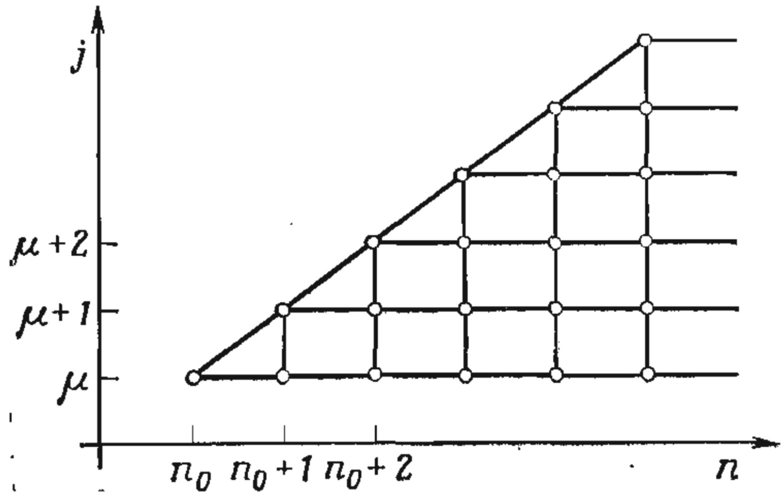
$$f(\Gamma_0 P^0, P^2, S)\,\psi(\mathring{p}) = 0, \quad \psi(\mathring{p}) \in H, \tag{45}$$

и преобразуем его при помощи преобразования Лоренца типа (44):

$$f(\Gamma_\mu P^\mu, P^2, S)\,\psi(p) = 0. \tag{46}$$

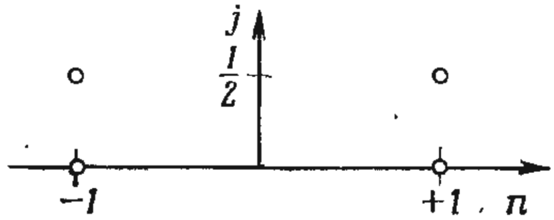
Это — ковариантное уравнение, которое заключает в себе постулированное массовое соотношение (45).

Роль динамической группы $\mathscr{G}$ в таком рассмотрении заключается в том, что она несет информацию о внутренней динамике системы, а потому диктует, какое представление группы SL (2, C) следует выбрать для построения ковариантного волнового уравнения.



Фиг. 2.

Фиг. 3.



Упомянутый выбор был до сих пор в нашем обсуждении в § 1 произвольным. Уравнения (45) и (46) можно обобщить на зависящие от спина массовые формулы.

Е. *Физические приложения матричных элементов представлений полупростых некомпактных групп Ли*

Пусть G — группа Ли, а U_g — ее представление в H. Определенные элементы группы могут быть параметризованы в виде

$$\exp(\mathrm{i}\theta^k X_k),$$

где θ^k — групповые параметры, а X_k — генераторы алгебры Ли группы G. Пусть $u_m \in H$ — базис в пространстве представления U_g. Матричные элементы будем обозначать через

$$D_{mn}(\theta) = \langle m \,|\exp(\mathrm{i}\theta \cdot X)|\, n\rangle \tag{47}$$

относительно скалярного произведения в H. Понятно, что эти функции обобщают функции D^j_{mn} группы SU (2).

Для компактных полупростых групп SO (n) выражения для D (θ) были даны [1]) Виленкиным [819]. Для некомпактного случая SO (2, 1) эти функции были впервые получены Баргманном [37]. В физической литературе известно много других результатов для SO (3, 1) и для некоторых представлений групп SO (4, 1), SO (4, 2), ...

---

[1]) Для так называемых представлений класса 1 относительно подгруппы SO (n — 1), или сферических представлений (см. по этому поводу также [887]). Относительно матричных элементов D (θ) для общих представлений группы SO (n) см. [888, 890]. — *Прим. перев.*

Рассмотрим волновое уравнение типа (12), (25) или (29).

Электромагнитная связь системы описывается с помощью процедуры минимальной связи [ср. (21)].

Физическая амплитуда вероятности перехода задается при помощи матричных элементов оператора тока Γ_μ между двумя состояниями импульсов p_1 и p_2 [см. (12)]

$$A_\mu = \langle \psi_m (p_1) \,|\, \Gamma_\mu \,|\, \psi_n (p_2) \rangle.$$

С помощью преобразования Лоренца получаем

$$A_\mu = \langle \psi_m (\mathring{p}) \,|\, \exp(-i\xi \cdot N)\, \Gamma_\mu \exp(i\xi \cdot N) \,|\, \psi_n (\mathring{p}) \rangle.$$

Эти матричные элементы следует в общем случае вычислять в бесконечномерном представлении U динамической группы $\mathcal{G}$, например SO(4, 2). Таким образом, амплитуды переходов могут быть сведены к матричным элементам $D_{mn}(\theta)$ типа (47). В физической литературе появляются и более общие матричные элементы [96].

§ 4. Расширения групп и приложения

А. *Расширение группы*

Расширение группы играет важную роль во многих разделах квантовой теории. Рассмотрим здесь связь расширения группы с когомологией.

Рассмотрим следующую последовательность групп и гомоморфизмов:

$$\to G_n \xrightarrow{f_n} G_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} G_{n+2} \to. \tag{1}$$

Напомним, что если ядро $\operatorname{Ker} f_n = I$, то f_n называется инъективным (в этом случае образ $f_n \cong G_n$), если же образ $f_n = G_{n+1}$, то f_n называется сюръективным.

Определение 1. Последовательность (1) является *точной последовательностью*, если образ $f_n = \operatorname{Ker} f_{n+1}$ для всех n.

Примеры:

$$1)\quad 1 \to \operatorname{Ker} f \to G \xrightarrow{f} \operatorname{Im} f \to 1, \tag{2}$$

$$2)\quad 1 \to C(G) \to G \xrightarrow{f} J(G) \to 1, \tag{3}$$

где $C(G)$ — центр группы G, а $J(G)$ — группа нетривиальных внутренних автоморфизмов. Ясно, что $G/\operatorname{Ker} f \cong \operatorname{Im} f$ и $G/C(G) \cong J(G)$.

$$3)\quad 1 \to J(G) \to \operatorname{Aut} G \to A(G) \to 1, \tag{4}$$

где $A(G)$ представляет собой классы автоморфизмов группы G по модулю подгруппы внутренних автоморфизмов, $A(G) \cong \operatorname{Aut} G/J(G)$.

Определение 2. Группа E называется *расширением группы* G *посредством* K, если она удовлетворяет точной последовательности

$$1 \to K \to E \to G \to 1. \tag{5}$$

Мы имеем тогда, что K является инвариантной (нормальной) подгруппой в E, и $E/K = G$; таким образом, E можно считать состоящей из смежных классов kG, $k \in K$ (записанных мультипликативно). Важной математической задачей является нахождение всех групп E, таких, что $E/K = G$ и K — инвариантная подгруппа в E.

$$\begin{tikzcd} & 1 \arrow[d] & & & \\ & C(K) \arrow[d] & & & \\ 1 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[r] & G \arrow[r] & 1 \\ 1 \arrow[r] & J(K) \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Aut} K \arrow[r] & A(K) \arrow[r] & 1 \\ & 1 & & & \end{tikzcd} \tag{6}$$

Заметив, что элементы из E индуцируют автоморфизмы подгруппы K при помощи $k \to x^{-1}kx$ при любом $x \in E$, мы получаем гомоморфизмы $E \to \operatorname{Aut} K$ и $G \to A(K)$. В общем случае, однако, последний гомоморфизм не вытекает из гомоморфизма $G \to \operatorname{Aut} K$.

Б. *Расширения группы Пуанкаре*

Полная релятивистская инвариантность включает также дискретные операции симметрии пространственного отражения Σ и отражения времени Θ.

Введем две операции отражения Σ и Θ. Их отождествление с четностью P и отражением времени T или их комбинациями, например PC, PT, ..., зависит от правил суперотбора. Тогда полная группа Лоренца состоит из смежных классов

$$\boldsymbol{L} = (\Lambda,\ \Lambda\Sigma,\ \Lambda\Theta,\ \Lambda\Sigma\Theta), \tag{7}$$

где Λ — собственная группа Лоренца. $\boldsymbol{L}$ является расширением группы Λ посредством группы отражений. Снова пользуемся группой SL $(2, C)$, накрывающей группы Λ, и записываем элементы группы Пуанкаре в виде

$$(a,\ \Lambda) \to (a \cdot \sigma,\ A), \quad A \in \mathrm{SL}\,(2,\ C), \tag{8}$$

где $a \cdot \sigma = a^{\mu}\sigma_{\mu}$ (гл. 17, § 2). Введем обозначения

$U(a \cdot \sigma, A)$ — унитарные представления собственной группы Пуанкаре;

$$\begin{aligned} U(\Sigma) &\text{ — операторы, отвечающие } \Sigma, \text{ предполагаемые унитарными;} \\ U(\Theta),\ U(\Theta\Sigma) &\text{ — операторы, отвечающие } \Theta \text{ и } \Theta\Sigma, \text{ предполагаемые антиунитарными.} \end{aligned} \tag{8}$$

В гл. 13 мы обсуждали квантовомеханические унитарные и антиунитарные операторы. Соотношение между собственными группами, полными группами и накрывающими группами можно представить в виде следующих последовательностей:

1. Группа трансляций T^4, собственная группа Пуанкаре Π_0, собственная группа Лоренца Λ, полная группа Пуанкаре Π и полная группа Лоренца L удовлетворяют

$$\begin{tikzcd} & & 1 \arrow[d] & 1 \arrow[d] & \\ 1 \arrow[r] & T^4 \arrow[r] & \Pi_0 \arrow[r] \arrow[d] & \Lambda \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\ 1 \arrow[r] & T^4 \arrow[r] & \Pi \arrow[r] \arrow[d] & L \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\ & & C_2 \oplus C_2 \arrow[d] & C_2 \oplus C_2 \arrow[d] & \\ & & 1 & 1 & \end{tikzcd} \tag{9}$$

2. Квантовомеханическими накрывающими группами для (9) являются

$$\begin{tikzcd} & & 1 \arrow[d] & 1 \arrow[d] & \\ & & Z_2 \arrow[d] & Z_2 \arrow[d] & \\ 1 \arrow[r] & T_4 \arrow[r] & \overline{\Pi}_0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{SL}(2, C) \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\ 1 \arrow[r] & T_4 \arrow[r] & \Pi \arrow[r] \arrow[d] & \Lambda \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\ & & 1 & 1 & \end{tikzcd} \tag{10}$$

Здесь Z_2 — первая группа гомотопий группы Λ, т. е. $\mathrm{SL}(2, C)/Z_2 = \Lambda$.

Установим теперь представления расширенной группы. С помощью выбора эквивалентных фазовых множителей мы можем положить $U(\Sigma) = I$ (гл. 13). Пусть $\overset{*}{U}(\Theta)^2 = \varepsilon_\theta$ и $\overset{*}{U}(\Theta\Sigma)^2 = \varepsilon_{\theta\Sigma}$. Из закона ассоциативности $\overset{*}{U}\overset{*}{U}{}^2 = \overset{*}{U}{}^2\overset{*}{U}$ следует, что для обеих величин ε справедливо $\varepsilon^2 = \pm 1$. Соответственно мы имеем четыре типа представлений в зависимости от $\varepsilon_\theta = \pm 1$, $\varepsilon_{\theta\Sigma} = \pm 1$. Тогда $\overset{*}{U}(\Theta)$ и $\overset{*}{U}(\Theta\Sigma)$ определяются с точностью до множителя $e^{i\alpha}$. Затем определяем фазы между произведениями операторов $U(\Sigma)$,

$\overset{*}{U}(\Theta)$ и $\overset{*}{U}(\Theta\Sigma)$, и получаем из группового закона следующую таблицу умножения:

$$\begin{array}{c|ccc}
 & U(\Sigma) & \overset{*}{U}(\Theta) & \overset{*}{U}(\Theta\Sigma) \\
\hline
U(\Sigma) & 1 & \overset{*}{U}(\Theta\Sigma) & \overset{*}{U}(\Theta) \\
\overset{*}{U}(\Theta) & \varepsilon_\theta\varepsilon_{\theta\Sigma}\overset{*}{U}(\Theta\Sigma) & \varepsilon_\theta & \varepsilon_\theta U(\Sigma) \\
\overset{*}{U}(\Theta\Sigma) & \varepsilon_\theta\varepsilon_{\theta\Sigma}\overset{*}{U}(\Theta) & \varepsilon_\theta U(\Sigma) & \varepsilon_{\theta\Sigma}
\end{array} \tag{11}$$

Это таблица умножения для конечной группы (гл. 7).

Следующим вопросом должно быть определение фаз между $U(\Sigma)$, $\overset{*}{U}(\Theta)$, $\overset{*}{U}(\Theta\Sigma)$ и представлениями $U(a, \Lambda)$ собственной группы. Записываем групповой закон в виде

$$U(\Sigma)\,U(a, \Lambda)\,U(\Sigma^{-1}) = \omega(a,\Lambda)\,U(\Sigma a, \Sigma\Lambda\Sigma^{-1}).$$

Если рассмотреть произведение двух таких преобразований, получим для фазы уравнение

$$\omega(a + \Lambda(a)\,b, AB) = \omega(a, A)\,\omega(b, B). \tag{12}$$

Таким образом, ω является одномерным представлением группы Пуанкаре П. Но П не имеет инвариантной подгруппы с абелевой фактор-группой; следовательно, $\omega = 1$.

Аналогично фаза ω' между $\overset{*}{U}(\Theta)$ и $\overset{*}{U}(\Theta\Sigma)$ должна равняться единице.

Следовательно, новые возможности не вводятся, и мы имеем четыре возможные квантовомеханические полные группы Пуанкаре, соответствующие (8), в зависимости от множителей в таблице умножения:

$$U(a, \Lambda) = (U(a, \pm A), \quad U(a, \pm A)\,U(\Sigma), \quad U(a, \pm A)\,\overset{*}{U}(\Theta),$$

$$U(a, \pm A)\,\overset{*}{U}(\Theta\Sigma)). \tag{13}$$

Заметим, что использование элемента $\pm A \in \mathrm{SL}(2, C)$ в квантовомеханическом представлении $\Lambda \in \mathrm{SO}(3, 1)$, конечно, уже есть расширение группы с математической точки зрения. Группа Пуанкаре может быть далее расширена посредством других операторов отражения, как, например, оператора зарядового сопряжения C.

Пусть $\{|p, \sigma\rangle\}$ — векторы из пространства представления $U(a, \Lambda)$ собственной группы Пуанкаре, где p^2 определяет орбиту (гл. 17, § 2). Рассмотрим теперь векторы $U(\Sigma)\,|\tilde{p}, \sigma\rangle$, где $\tilde{p}_\mu = (p_0, -\boldsymbol{p})$ и где мы отождествили Σ с оператором четности. Как векторы $|p, \xi\rangle$, так и $U(\Sigma)\,|\tilde{p}, \sigma\rangle$ преобразуются одинаковым образом относительно собственной группы Пуанкаре. Поэтому мы можем определить собственные состояния четности согласно

$$|p, \sigma, \pm\rangle = |p, \sigma\rangle \pm U(\Sigma)|p, \sigma\rangle.$$

Если ни одно из этих состояний не исчезает, мы имеем новое квантовое число — четность — с собственными значениями ± 1 и, следовательно, удвоение пространства представления. Являются ли оба эти пространства наблюдаемыми, зависит от существования правил суперотбора (гл. 13).

В. *Классификация расширений*

Определение 3. Если K абелева и $K \subset C$ (C — центр группы E), то E называют *центральным расширением*. Имеем тогда $C(K) = K$, $J(K) = 1$, $\mathrm{Aut}\, K = A(K)$.

Предположим, что нам задан гомоморфизм σ: $G \to \mathrm{Aut}\, K$; часто это описывают словами так: G действует посредством σ на K или K является G-модулем (по отношению к σ). Будем исследовать проблему описания групповых расширений

$$1 \to K \xrightarrow{f} E \xrightarrow{h} G \to 1,$$

таких, что внутренние автоморфизмы группы E при сужении на K совпадают с $\sigma \circ h$. Отметим, что такое расширение всегда существует, именно полупрямое произведение $E = K \rtimes G$ с умножением, определенным согласно

$$(\alpha, a)(\beta, b) = (\alpha + \sigma_a\beta, ab), \quad \alpha, \beta \in K, \quad a, b \in G, \tag{14}$$

является таким расширением; оно называется *тривиальным расширением*. Заметим, что для тривиальных расширений

$$1 \to K \xrightarrow{f} E \xrightarrow{h} G \to 1$$

существует гомоморфизм групп D: $G \to E$, такой что $h \circ D = 1$ (D называется *сечением* или *разбиением*). Охарактеризуем нетривиальные расширения при помощи не обязательно гомоморфных сечений, т. е. расширения

$$1 \to K \xrightarrow{f} E \underset{\xleftarrow[D]{}}{\xrightarrow{h}} G \to 1,$$

где D: $G \to E$ удовлетворяет $h \circ D = 1$. Мы будем иметь дело исключительно со случаем абелевой группы K. Рассмотрим $f(\alpha) D(a)$, $\alpha \in K$, $a \in G$. При фиксированном a, варьируя α, мы получаем слои расслоения E с базой G (т. е. смежные классы для $f(K)$). При фиксированном α, варьируя a, мы имеем сечения. В частности, $f(1) D(G) \cong G$. $D(a) D(b)$ и $D(ab)$ лежат в одном и том же смежном классе (слое) относительно $f(K)$, так как оба они при гомоморфизме h отображаются в ab. Значит, они могут отличаться лишь «фазой»

$$D(a)D(b) = \omega(a, b)D(ab). \tag{15}$$

Из ассоциативности группового закона умножения следует

$$\omega(a, b) + \omega(ab, c) - \sigma_a\omega(b, c) - \omega(a, bc) = 0. \tag{16}$$

Такое отображение ω: $G \times G$ в K (отождествляющее K с $f(K)$) называется *фактор-системой*. Мы желаем, однако, пренебречь различием, возникающим при замене отображения D другим отображением D', таким, что $D'(a) = \varphi(a)D(a)$, где $\varphi(a) \in K$. D' приводит к другой фактор-системе ω', такой, что

$$\omega'(a, b) = \omega(a, b) + \theta(a, b), \tag{17}$$

где $\theta(a, b)$ задана согласно

$$\theta(a, b) = \varphi(a) + \sigma_a\varphi(b) - \varphi(ab)$$

и называется тривиальной фактор-системой.

Нормированная фактор-система по определению удовлетворяет

$$D(1) = 1, \quad \text{или} \quad \omega(a, 1) = \omega(1, b) = \omega(1, 1) = 0. \tag{18}$$

Обратно, если нам задан гомоморфизм σ: $G \to \mathrm{Aut}\, K$ и нормированная фактор-система $\omega(a, b) \in K$, мы можем построить расширение E группы G посредством K с элементами (α, a), $\alpha \in K$, $a \in G$, и с законом композиции

$$(\alpha, a)(\beta, b) = (\alpha, +\sigma_a\beta + \omega(a, b), ab), \tag{19}$$

где $\omega(a, b)$ удовлетворяет (18). Единичным элементом в E является $(0, 1)$, а элементом, обратным к (α, a), является

$$(\alpha, a)^{-1} = (\sigma_{a^{-1}}\alpha\omega(a^{-1}, a), a^{-1}). \tag{20}$$

Две фактор-системы, отличающиеся тривиальной фактор-системой, дают изоморфные, или эквивалентные, расширения. Кроме того, внутренний автоморфизм на E индуцирует на K автоморфизм σ, поскольку

$$(\alpha, a)(\alpha', 1)(\alpha, a)^{-1} = (\sigma_a\alpha', 1). \tag{21}$$

Математическая проблема состоит теперь в том, чтобы найти все нормированные фактор-системы с точностью до тривиальной. Результат может быть сформулирован как следующее утверждение.

Утверждение 1. *Двумерная группа когомологии $H^2(G, K)$ есть в точности группа всех (эквивалентных классов) тех расширений E группы G посредством K, которые реализуют заданное действие σ группы G на K.*

Чтобы пояснить это утверждение, рассмотрим теперь связь расширений группы с гомологией и когомологией.

«Гомология» алгебры Ли или группы (или ассоциативной алгебры) восходит к гомологии топологических пространств (т. е. связности, см. гл. 2). Группы гомологий вполне общим образом описываются на языке цепей и их границ. n-Мерной цепью является формальная линейная комбинация n-симплексов в пространстве. Все n-цепи образуют свободную абелеву группу C_n. Комплекс цепей C — это последовательность

$$C_0 \leftarrow C_1 \leftarrow \cdots \leftarrow C_{n-1} \xleftarrow{\partial_n} C_n \xleftarrow{\partial_{n+1}} C_{n+1} \leftarrow \ldots,$$

где граничные гомоморфизмы ∂ удовлетворяют $\partial\partial = 0$. Его группой гомологии в размерности n является

$$H_n(C) = \frac{\operatorname{Ker} \partial_n}{\operatorname{Im} \partial_{n+1}}. \tag{22}$$

Опишем теперь соответствующие группы когомологий. n-Мерной коцепью является гомоморфизм $f: C_n \to K$ (абелева группа), кограничным оператором δ_n является отображение δ: $\operatorname{Hom}(C_n, K) \to \operatorname{Hom}(C_{n+1}, K)$, определяемое (однозначно) условием

$$\delta_n f = f\partial.$$

Поэтому мы получаем комплекс коцепей

$$\to C_n \equiv \operatorname{Hom}(C_n, K) \xrightarrow{\delta_n} C^{n+1} = \operatorname{Hom}(C_{n+1}, K) \to.$$

Ядра отображения δ являются коциклами (ядра отображения ∂ — циклами), а образы δ являются кограницами (образы ∂ — границами). Следовательно, n-мерная когомология комплекса C (или лежащего в основе пространства) с коэффициентами в K есть

$$H^n(C, K) = \frac{\operatorname{Ker} \delta_n}{\operatorname{Im} \delta_{n-1}}. \tag{23}$$

Когомология групп имеет дело с действием группы G на абелевой группе K:

$$\alpha \to \sigma_a \alpha, \quad \alpha \in K, \quad a \in G, \quad \sigma: G \to \operatorname{Aut} K,$$

и определяется, размерность за размерностью, при помощи следующих коциклов.

В размерности один коциклы являются «скрещенными гомоморфизмами» ϕ: $G \to K$, такими, что $\phi(ab) = \sigma_a \phi(b) + \phi(a)$ для всех $a, b \in G$. Все такие гомоморфизмы образуют группу. «Главные скрещенные гомоморфизмы», т. е. кограницы, — это $k_\alpha a = \sigma_a \alpha - \alpha$, $a \in G$, для каждого α. Определяем тогда

$$H^1(G, K) = \frac{\{\text{скрещенные гомоморфизмы}\}}{\{\text{главные скрещенные гомоморфизмы}\}}. \tag{24}$$

В размерности два коциклы определяются как фактор-системы, введенные в равенстве (15), т. е. отображения θ: $G\times G \to K$, такие, что

$$\sigma_a\theta\,(b,\ c) + \theta\,(a,\ bc) = \theta\,(ab,\ c) + \theta\,(a,\ b). \qquad (25)$$

Все решения этого уравнения образуют группу. Тривиальные фактор-системы, удовлетворяющие $\theta_\phi\,(a,\ b) = \sigma_a\phi\,(b) - \phi\,(ab) + \phi\,(a)$, объявляются кограницами, и двумерная группа когомологии определяется согласно

$$H^2\,(G,\ K) = \frac{\{\theta : G\times G \to A\}}{\{\theta = \theta_\phi\}},$$

т. е. все решения уравнения фактор-системы (25) по модулю тривиальные решения. Это доказывает утверждение 1.

В общем случае мы определяем α_n: $G\times G\times\cdots\times G \to K$ и последовательность абелевых групп

$$C^n\,(G,\ K)\colon \{\alpha_n\,(a_1\ldots a_n),\ a_i \in G,\ \alpha_n \in K\,|\,\alpha_n = 0,$$
$$\text{если хотя бы одно } \alpha_i = 1\}$$

с гомоморфизмами (граничным оператором)

$$\begin{aligned}\delta_n\,[\alpha_n\,(a_1,\ \ldots,\ a_n)] \equiv (\delta_n\alpha_n)\,(a_1,\ \ldots,\ a_{n+1}) &\equiv \\ \equiv a_1\alpha_n\,(a_2,\ \ldots,\ a_{n+1}) &+ \\ + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k\,\alpha_n\,(a_1,\ \ldots,\ a_{k-1}, a_{k+1},\ \ldots,\ a_{n+1}) &+ \\ + (n-1)^{n+1}\,\alpha_n\,(a_1,\ \ldots,\ a_n)&\end{aligned}$$

таким образом, что n-мерная группа когомологий $H^n\,(G,\ K)$ может быть определена, как выше.

Действительно, имеем немедленно $C^0\,(G,\ K) = K$, $(\delta_0\alpha_0)\,a = a\alpha_0 - \alpha_0$. Пусть $\sigma_aK = aK = aC^0\cdot\operatorname{Ker}\delta_0 = K^G$ есть фиксированная точка в K относительно G. В этом случае имеем $B^0 = 0$ по определению; следовательно, $H^0\,(G,\ K) = K^G$.

Если обратимся к δ_1 и δ_2, то найдем

$$\delta_1\,[\alpha_1\,(a)] \equiv (\delta_1\alpha_1)\,(a,\ b) = a\alpha_1\,(b) - \alpha_1\,(ab) + \alpha_1\,(a), \qquad (26)$$

$$\begin{aligned}\delta_2\,[\alpha_2\,(a,\ b)] \equiv (\delta_2\alpha_2)\,(a,\ b,\ c) = a\alpha_2\,(b,\ c) &- \\ - \alpha_2\,(ab,\ c) + \alpha_2\,(a,\ bc) - \alpha_2\,(a,\ b)&, \qquad (27)\end{aligned}$$

т. е. это совпадает с данными выше определениями.

В качестве частного случая проблема фазовых представлений группы Ли G становится просто расширением группы G при помощи одномерной абелевой группы K (гл. 13), и имеет место следующая теорема.

Теорема 2 (Баргманн). *Пусть G — связная односвязная группа Ли с тривиальной второй группой когомологий $H^2\,(G,\ K)$,* *где K — одномерная абелева группа. Тогда любое проективное представление G допускает подъем до представления G.*

(Доказательство см. в [38, 764].)

Г. *Примеры: некоторые дальнейшие приложения расширений групп в физике*

1. Расширения группы U_1: $\{e^{i\theta}, -\pi \leqslant \theta \leqslant \pi\}$.

Единственным внутренним автоморфизмом является тождественный автоморфизм, а единственным внешним автоморфизмом является $e^{i\theta} \to e^{-i\theta}$. Если представим U_1 через $e^{i\theta Q}$ (например, Q — оператор заряда), а автоморфизмы — через $\rho e^{i\theta Q}\rho^{-1} = e^{\pm i\theta Q}$, то

$$[\rho, Q] = 0, \quad \rho^2 = 1, \text{ для внутреннего автоморфизма,}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} [\rho, Q]_+ = 0, & \rho^2 = 1, \text{ или} \\ [\rho, Q]_+ = 0, & \rho^2 = e^{i\pi Q} = (-1)^Q \end{array} \right\} \text{ для внешних автоморфизмов.}$$

2. Расширение группы U_2.

Записывая $U_2 = (U_1 \otimes \mathrm{SU}(2))/C_2$, где C_2 имеет два элемента $(1, 1)$ и $(-1, -1)$, мы интерпретируем в сильных взаимодействиях SU (2) как группу изоспина, а U_1 — как гиперзаряд Y. Коммутационные соотношения изоспина с обычным электрическим зарядом Q равны

$$[I_3, Q] = 0, \quad [I_\pm, Q] = \pm I_\pm.$$

Следовательно, определяя $Y = Q - I_3$, мы имеем

$$[\boldsymbol{I}, Y] = 0,$$

и, таким образом, прямое произведение $U_1 \otimes \mathrm{SU}(2)$. Представлениями группы U_2 являются $D^I(u)\, e^{i\alpha Y}$ с обоими элементами C_2, представленными единицей. Таким образом, $D^I(-1)\, e^{i\pi Y} = 1$, или

$$(-1)^{2I} = (-1)^Y.$$

Это соотношение выполняется эмпирически для всех известных частиц.

Пусть теперь C — оператор зарядового сопряжения, который обращает собственные значения оператора Q. Мы можем расширить U_2 при помощи C, $C^2 = I$, или, что более удобно, при помощи $G = Ce^{i\pi I} = G$-четность. Получаем $[G, \boldsymbol{I}] = 0$. Это расширение соответствует автоморфизму $e^{i\alpha} \to e^{-i\alpha}$, откуда мы получаем (как в примере 1)

$$GY + YG = 0.$$

Оператор G есть не что иное, как оператор четности в изоспиновом пространстве, различающий аксиальные и полярные векторы или тензоры в изоспиновом пространстве.

3. Физически значимыми представлениями группы Галилея (в пространстве решений уравнения Шредингера) являются проективные унитарные представления универсальной накрывающей группы (гл. 13). Пусть $g = (b, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}, R)$ — элемент группы Галилея. Проективные представления удовлетворяют

$$U(g')\,U(g) = \omega(g', g)\,U(g'g),$$

а фактор-система $\omega(g', g)$ дается явно в виде

$$\omega(g', g) = \exp\left[\mathrm{i}\,\frac{m}{2}\,(\boldsymbol{a}'(\boldsymbol{R}'\boldsymbol{v})) - \boldsymbol{v}'(\boldsymbol{R}\boldsymbol{a}) + b\boldsymbol{v}'(\boldsymbol{R}'\boldsymbol{v})\right].$$

Эта процедура эквивалентна нахождению центрального расширения E группы Галилея G посредством одномерной абелевой группы $K \equiv R$. Эта 11-параметрическая группа E имеет оператор массы m в качестве одного из своих инвариантов и приводит к правилу суперотбора на массу, как было отмечено в гл. 13, § 4. Точной последовательностью в этом случае является

$$1 \to R_1 \to E \to G \to 1.$$

Группа Галилея G не удовлетворяет критерию Баргманна. Проективные унитарные представления группы G индуцируются унитарными представлениями не группы G, но ее расширения E.

§ 5. Пространственно-временные и внутренние симметрии

В гл. 1, § 7 мы рассмотрели возможное объединение пространственно-временных симметрий и внутренних симметрий фундаментальных частиц физики на алгебраическом уровне. Теоремы 1 и 2 дают ограничения на попытки объединить эти два типа симметрий в более широкую конечномерную алгебру Ли. В этом параграфе мы развиваем ту же проблему на групповом уровне. Следующие теорема, следствие и контрпримеры описывают полученные результаты и область действия. В заключение мы установим, как с физической точки зрения эта проблема решается на практике.

Теорема (Йост). *Пусть G — конечномерная связная группа Ли, содержащая группу Пуанкаре в качестве аналитической подгруппы. Пусть U — непрерывное унитарное представление G и P_μ — вектор энергии-импульса. Пусть спектр P_μ содержится в $\{0\} \cup V_+$, V_+ — конус будущего в пространстве Минковского M^4. Если оператор массы $M = (P_\mu P^\mu)^{1/2}$ имеет изолированное собственное значение $m_1 > 0$, то соответствующее собственное пространство H_1 инвариантно относительно G.*

Доказательство. Пусть спектральное разложение непрерывной абелевой группы трансляций есть

$$e^{-\mathrm{i}a^\mu P_\mu} = \int e^{-\mathrm{i}a^\mu p_\mu}\,\mathrm{d}E(p). \qquad (1)$$

Если оператор массы $M = \int \sqrt{p^2}\, dE(p)$ имеет изолированные собственные значения, например $m_1 > 0$ и остальные, его спектр состоит из массового гиперболоида $M_1 = \{p\colon\ p^0 > 0;\quad p^2 = m_1^2\}$ и остальных M_2, которые являются O_M-разделенными: два замкнутых множества $M_\alpha \subset M^4$, $\alpha = 1, 2$, называются *O_M-разделенными*, если существуют функции $h_\alpha \in O_M$, такие, что

$$1)\ 0 \leqslant h_\alpha(p) \leqslant 1,$$

$$2)\ h_\alpha(p) = 1, \text{ если } p \in M_\alpha,$$

$$3)\ \operatorname{supp} h_1 \cap \operatorname{supp} h_2 = \varnothing.$$

Пусть

$$E_\alpha = \int\limits_{M_\alpha} \mathrm{d}E(p) = \int\limits_{M_\alpha} h_\alpha(p)\, \mathrm{d}E(p), \quad \alpha = 1, 2. \tag{2}$$

Теорема будет доказана, если мы сможем показать, что

$$E_\alpha U_g = U_g E_\alpha \tag{3}$$

для всякого $g \in G$, поскольку тогда $U_g \varphi_1 \in H_1$ вместе с $\varphi_1 \in H_1$. Мы должны показать, что поскольку G связна,

$$E_\alpha e^{itX} = e^{itX} E_\alpha, \quad t \in R^1, \tag{4}$$

$$X = U(x), \quad x \in L, \text{ алгебре Ли группы } G,$$

или

$$E_1 X \psi = X E_1 \psi,$$

$$\psi \in \Delta(X), \text{ т. е. области определения оператора } X. \tag{5}$$

Это последнее утверждение следует из леммы.

Лемма. *Пусть $h_\alpha \in O_M$ и ограничена, $\alpha = 1,2$, и пусть $\varphi \in D$ (области Гординга). Тогда $h_\alpha(p)\varphi \in \Delta(X)$ для всякого X. Далее, если $\operatorname{supp} h_1 \cap \operatorname{supp} h_2 = \varnothing$, то*

$$h_1(p) X h_2(p) \varphi = h_2(p) X h_1(p) \varphi = 0. \tag{6}$$

Используя затем (2), получаем

$$E_1 X E_2 \varphi = E_2 X E_1 \varphi = 0, \tag{7}$$

а поскольку $E_1 + E_2 = I$, $E_1 X \varphi = X E_1 \varphi$. И если имеется последовательность φ_k, $\varphi_k \in D$, для которой $\varphi_k \to \psi$, то $X\varphi_k \to X\psi$, а также $E_1 X \varphi_k \to E_1 X \psi$, откуда $X E_1 \varphi_k \to E_1 X \psi$. Следовательно, $E_1 \psi \in \Delta(X)$ и $E_1 X \psi = X E_1 \psi$, или $E_1 X \subset X E_1$.

Осталось лишь доказательство леммы. Для $\varphi \in D$ из $\operatorname{Ad} g\colon x \to g x g^{-1}$ мы имеем

$$U_g X U_{g^{-1}} \varphi = \operatorname{Ad} g X \varphi. \tag{8}$$

В частности,

$$e^{ia^\mu P_\mu} X e^{-ia^\mu P_\mu} \varphi = C(a) X \varphi, \tag{9}$$

где $C(a)$ — вещественный полином по a_μ (последнее утверждение следует из того факта, что $\mathrm{ad}\,(a^\mu P_\mu)$ нильпотентно, т. е. существует N, такое, что $[\mathrm{ad}\,(a^\mu P_\mu)]^N = 0$). Следовательно,

$$Xe^{-\mathrm{i}a^\mu P_\mu}\varphi = e^{-\mathrm{i}a^\mu P_\mu}C(a)\,X\varphi. \tag{10}$$

Мы можем применить это равенство к конечным суммам $c_k e^{-\mathrm{i}a_k^\mu P_\mu}$ и, наконец, к пределам

$$X\int \tilde f(a)\,e^{-\mathrm{i}a^\mu P_\mu}\,\mathrm{d}^4a\varphi = \int \tilde f(a)\,C(a)\,e^{-\mathrm{i}a^\mu P_\mu}\,\mathrm{d}^4a\,X\varphi,$$

или с учетом (1) и $f(p) = \int \tilde f(a)\,e^{-\mathrm{i}a^\mu P_\mu}\,\mathrm{d}^4a$, $f \in S(R^4)$,

$$X\int f(p)\,\mathrm{d}E(p)\,\varphi = \int (C(\nabla)f)(p)\,\mathrm{d}E(p)\,X\varphi,$$

где $\nabla = \mathrm{i}\,\partial/\partial\boldsymbol{p}$. Или в операторной форме

$$Xf(p)\,\varphi = [C(\nabla)f](p)\,X\varphi, \quad f \in S(R^4), \quad \varphi \in D.$$

Если $g \in O_M$ и g ограничена вместе со всеми своими производными вплоть до порядка $N-1$, то

$$Xg(p)\,\varphi = [C(\nabla)\,g](p)\,X\varphi. \tag{11}$$

Область Гординга D инвариантна относительно U_g: $XD \subset D$. Пусть

$$\|P\|^2 = P_0^2 + P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 = \int \|p\|^2\,\mathrm{d}E(p).$$

Для всякого $\varphi_1 \in D$ и $n \in Z_+$ $(1 + \|P\|^2)^n\varphi_1 \in D$, значит,

$$Xg(p)\,(1+\|p\|^2)^n\varphi_1 = [C(\nabla)\,g](p)\,X(1+\|p\|^2)^n\varphi_1.$$

Наконец, пусть $h \in O_M$. Существует $n \in Z_+$, такое, что

$$g = \frac{h}{(1+\|p\|^2)^n}$$

ограничена вместе со всеми своими производными вплоть до порядка $N-1$. Следовательно,

$$Xh(p)\varphi_1 = [C(\nabla)\,g](p)\,X(1+\|p\|^2)^n\varphi_1$$

и $\operatorname{supp} h = \operatorname{supp} g$.

Но при $h_\alpha \in O_M$, $\operatorname{supp} h_1 \cap \operatorname{supp} h_2 = \varnothing$, очевидно, $\operatorname{supp} h_1 \cap \operatorname{supp} C(\nabla)\,g_2 = \varnothing$.

Тогда $h_1C(\nabla)\,g_2 = 0$, или

$$h_1(p)\,Xh_2(p)\,\varphi = (h_1C(\nabla)\,g_2)(p)\,X(1+\|p\|^2)^n\varphi = 0,$$

и лемма доказана.

Следствие. *В неприводимом представлении группы G не может быть расщепления масс.*

Другими словами, в неприводимом представлении изолированное значение массы является целым спектром; либо спектр должен быть связным множеством.

Это не относится к приводимым представлениям или неинтегрируемым неприводимым представлениям алгебры Ли L группы G, для которых дискретный спектр масс возможен.

Пример 1 (Флато, Стернгеймер). Этот пример основан на простом наблюдении, что гамильтониан $H = \mathbf{p}^2/2m$ нерелятивистской свободной частицы имеет непрерывный спектр, будучи представлен в виде самосопряженного оператора в $L^2(-\infty, \infty)$, но дискретный спектр, когда он представлен как самосопряженный оператор в $L^2(a, b)$, в ящике с подходящими граничными условиями.

Рассмотрим теперь алгебру su (2, 2), которая содержит алгебру Пуанкаре П [см. (13.4.2)]. Рассмотрим $H = L^2(Q)$, где Q — «ящик» в пространстве Минковского, Q: $\{0 \leqslant x_\mu \leqslant a\}$, $x_\mu \in M^4$. Генераторы группы SU (2, 2) определяют эрмитовы операторы в пространстве абсолютно непрерывных функций с L^2-производными, исчезающих на границе ∂Q; $-\partial^2_\mu$ самосопряжен на $D(P^2_\mu)$ функций $f \in L^2(Q)$, а $\partial_\mu f$ абсолютно непрерывна относительно x_μ, $\partial^2_\mu f \in L^2(Q)$ и с периодическими граничными условиями на f и $\partial_\mu f$. Оператор массы $\square = -\partial_\mu \partial^\mu$ определен на общей области $\bigcap\limits_{\mu=1}^{3} D(P^2_\mu)$, существенно самосопряжен и имеет спектральное разложение

$$M^2 = \left(\frac{2\pi}{a}\right)^2 \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} mE(m),$$

где $E(m)$ — проектирующий оператор на подпространство H_m посредством $\exp\left[\left(\mathrm{i}\,\frac{2\pi}{a}\right) n^\mu x_\mu\right]$. Это представление является частично интегрируемым на подалгебре трансляции, однако эта область интегрируемости не совпадает с инвариантной областью всей su (2,2).

В заключение переформулируем теорему 1 и следствие 2 в гл. 1, § 7 на уровне группы в несколько более сильной форме.

Лемма 2. *Пусть G — произвольная группа, а S и $\Pi = T^4 \rtimes SO(3, 1) = T \rtimes \Lambda$ (группа Пуанкаре) — подгруппы группы G, такие, что любой $g \in G$ имеет единственное разложение в произведение $g = s\pi$, $s \in S$, $\pi \in \Pi$. Если существует один элемент $g \in \Pi$, $g \notin T$, такой, что $s^{-1}gs \in \Pi$ для всех $s \in S$, то $G = S \otimes \Pi$.*

Лемма 3. *Пусть S и Π — подгруппы группы G, такие, что $G = S\Pi = \Pi S$ и $S \cap \Pi = \{1\}$. Если существует один элемент $s \in S$, такой, что $\pi s \pi^{-1} \in S$ для всех $\pi \in \Pi$, и если ни одна соб-*

ственная инвариантная подгруппа в S *не содержит* s, *то* $G = S \otimes \otimes \Pi$.

(Доказательства проводятся непосредственно, см. [588].)

Решение проблемы спектра масс

С физической точки зрения не существует причин, вынуждающих рассматривать неприводимые представления конечномерных групп Ли G, содержащих П. Происхождение идеи более широких динамических групп G восходит к описанию спектра масс составных систем, подобных атому водорода, *в состоянии покоя* при помощи некомпактных групп (гл. 12). Релятивистское обобщение этой идеи на *движущиеся системы*, т. е. включение импульсов P_μ, также возможно. Изящное решение этой задачи получается при помощи бесконечнокомпонентных волновых уравнений (§ 3), которые ковариантным образом описывают системы с внутренними степенями свободы и дают *дискретный* спектр масс. Здесь неприводимое представление динамической группы G используется снова для генерирования состояний системы в покое, а волновое уравнение определяет бустированные до импульса p_μ состояния. Это оказывается правильным релятивистским обобщением динамических групп, а не конечномерная группа Ли, содержащая G. Алгебраическая структура бесконечнокомпонентных волновых уравнений предполагает бесконечнопараметрическую алгебру Ли, следовательно, противоречий с предыдущими теоремами не возникает.

§ 6. Комментарии и дополнения

Еще раз подчеркнем, что изложенный в § 1 общий формализм может применяться для получения волновых уравнений, ковариантных относительно произвольной топологической группы. Можно, в частности, получить волновые уравнения, ковариантные относительно SO (3), SO (4), SO (4,2), $T^3 \rtimes$ SO (3) или обобщенной группы Пуанкаре $T^n \rtimes$ SO $(n - 1,1)$; в каждом случае волновые уравнения будут представлять собой условия неприводимости по отношению к инвариантным величинам, характеризующим неприводимые представления данной группы, например условия спиновой и массовой неприводимости в случае группы Пуанкаре.

Для полноты охарактеризуем теперь вкратце другие общепринятые конечнокомпонентные волновые уравнения, которые не рассмотрены в § 2. Они являются частными случаями уравнения (1.17) или уравнения Гельфанда—Яглома (3.1).

А. *Уравнения Фирца—Паули*

Эти уравнения были постулированы Фирцем и Паули [257] в виде $(\partial_{\alpha\beta} \equiv (\sigma_\mu \partial^\mu)_{\alpha\beta})$

$$\partial_{\alpha\dot\beta}\varphi^{\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_l}_{\dot\beta_1, \ldots, \dot\beta_k}(x) = i\varkappa\chi^{\alpha_1, \ldots, \alpha_l}_{\dot\beta, \dot\beta_1, \ldots, \dot\beta_k}(x), \tag{1}$$

$$\partial^{\alpha\dot\beta}\chi^{\alpha_1, \ldots, \alpha_l}_{\dot\beta, \dot\beta_1, \ldots, \dot\beta_k}(x) = i\varkappa\varphi^{\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_l}_{\dot\beta_1, \ldots, \dot\beta_k}(x). \tag{2}$$

Оба спинора здесь симметрические, поэтому они преобразуются в соответствии со следующим представлением группы SL $(2, C)$:

$$D(\Lambda) = D^{[(l+1)/2,\, k/2]} \oplus D^{[l/2,\, (k+1)/2]}. \tag{3}$$

Следовательно, наибольший спин равен $j = \frac{1}{2}\,(l + k + 1)$. Таким образом, уравнение Фирца—Паули характеризуется парой $(D(\Lambda), \pi)$, где $D(\Lambda)$ дано в (3), а π есть проектор на наибольший спин. Уравнение Фирца—Паули не допускает оператора четности, если не выполняется $l = k$. Ясно, что при $l = k = 0$ мы получаем уравнение Дирака.

Б. *Уравнения Даффина—Кеммера—Петио*

Как было отмечено, условие Гельфанда—Яглома, даваемое теоремой 3.1, может выполняться также и для прямой суммы конечномерных представлений. В частности, представления

$$D(\Lambda) = D^{(0,\, 0)} \oplus D^{(1/2,\, 1/2)} \tag{4}$$

или

$$D(\Lambda) = D^{(1,\, 0)} \oplus D^{(0,\, 1)} \oplus D^{(1/2,\, 1/2)} \tag{5}$$

удовлетворяют условию (3.3).

Соответствующим волновым уравнением является

$$(\beta_\mu p^\mu + m)\,\psi(p) = 0, \tag{6}$$

где в рассматриваемом случае $\{\beta_\mu\}_{\mu=0}^{3}$ есть набор 5×5 или 10×10 матриц соответственно. Явный вид этих матриц может быть найден с помощью соотношений (3.6) и (3.5). Уравнение (6) представляет собой волновое уравнение для частиц спина нуль и спина один соответственно и проявляет условие спиновой неприводимости (1.17). Уравнения (6) с $D(\Lambda)$, заданным согласно (4) или (5), называются *уравнениями Даффина—Кеммера—Петио*. Они эквивалентны уравнению Прока; действительно, полагая

$$\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4, \psi_5, \psi_6, \psi_7, \psi_8, \psi_9, \psi_{10}) =$$
$$= \Big(-\frac{1}{m}B_{14}, -\frac{1}{m}B_{24}, -\frac{1}{m}B_{34}, -\frac{1}{m}B_{23}, -\frac{1}{m}B_{31},$$
$$-\frac{1}{m}B_{12}, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4\Big), \tag{7}$$

мы находим, что уравнения Прока (2.15) и (2.16)

$$P_\mu \Phi_\nu - p_\nu \Phi_\mu = B_{\mu\nu} \quad \text{и} \quad p^\mu B_{\mu\nu} = m^2 \Phi_\nu \tag{8}$$

могут быть записаны в форме уравнения (6).

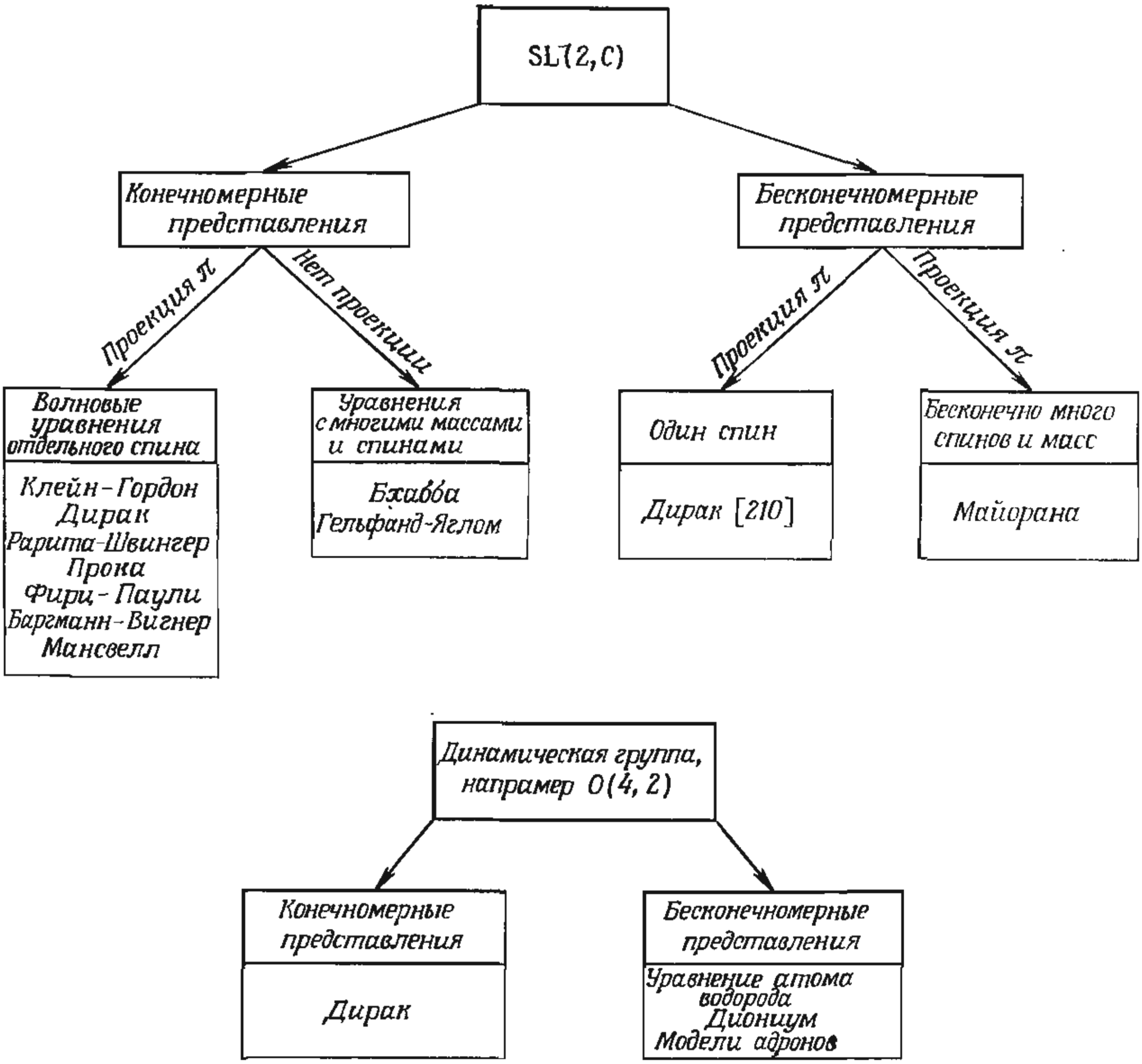
B. *Уравнения Бхаббы*

Ковариантные волновые уравнения, подобные (6) в случае, когда $\psi(p)$ преобразуется по конечномерному представлению $D(\Lambda)$ группы SL (2, C), часто называются *уравнениями типа Бхаббы*. Теорема Гельфанда—Яглома дает общий метод построения таких уравнений. Нетривиальный пример дает следующее представление $D(\Lambda)$ группы SL (2, C):

$$D(\Lambda) = (D^{(1/2,\,0)} \oplus D^{(0,\,1/2)} \oplus D^{(1,\,1/2)} \oplus D^{(1/2,\,1)})(\Lambda), \tag{9}$$

удовлетворяющее условиям (3.3). Ясно, что это уравнение описывает частицы со спином 3/2 и 1/2. Решая уравнение (3.6) для пред-

Таблица 1



ставления (9), мы получаем матрицу β_0. Переходя к системе покоя и решая уравнение на собственные значения $\beta_0 p_0 \psi = -m\psi$, находим, что массы соответствующих частиц равны

$$m_{3/2} = m, \quad m^{(1)}_{1/2} = \lambda_1^{-1}, \quad m^{(2)}_{1/2} = \lambda_2^{-1}, \tag{10}$$

где λ_1 и λ_2 — характеристические корни матрицы β_0. Значит, мы имеем спектр масс как и в случае общих уравнений Гельфанда—Яглома (3.1). Эта ситуация типична для общих уравнений типа Бхаббы; они содержат конечное число масс и спинов.

В табл. 1 показана групповая структура различных релятивистских волновых уравнений.

Г. *Применение представлений с мнимой массой* ($m^2 < 0$) *группы Пуанкаре*

Хотя представления группы Пуанкаре с $m^2 < 0$ не могут интерпретироваться физически как изолированные квантовые системы с измеримой массой, они появляются в релятивистских системах двух частиц следующим образом.

Рассмотрим процесс рассеяния двух частиц a и b с получением двух таких же или других частиц c и d:

$$a + b \to c + d. \tag{11}$$

Энергия-импульс для векторов удовлетворяет закону сохранения

$$p_a + p_b = p_c + p_d. \tag{12}$$

Для бесспиновых частиц амплитуды для процесса рассеяния зависят только от инвариантных произведений импульсов, которые можно взять, например, в виде

$$s = (p_a + p_b)^2 \quad \text{и} \quad t = (p_a - p_c)^2. \tag{13}$$

При фиксированном значении s состояния двухчастичной системы (a, b) принадлежат неприводимым представлениям группы Пуанкаре, генераторами которых являются $P^\mu = P^\mu_a + P^\mu_b$ и $J^{\mu\nu} = J^{\mu\nu}_a + J^{\mu\nu}_b$.

В физической области процесса (11)

$$s > (m_a + m_b)^2 > 0, \tag{14}$$

а это обычное представление группы Пуанкаре в пространстве, являющемся тензорным произведением пространств двух частиц.

С другой стороны, при каждом фиксированном значении t мы можем рассматривать другую группу Пуанкаре с генераторами

$$P'^\mu = P^\mu_a - P^\mu_c \quad \text{и} \quad J^{\mu\nu} = J^{\mu\nu}_a + J^{\mu\nu}_c, \tag{15}$$

так что мы имеем снова в физической области процесса (11) представления группы Пуанкаре, но с $p'_\mu p'^\mu = (p^\mu_a - p^\mu_c)^2 < 0$. Значение этих замечаний можно видеть из парциальноволновых разложений (т. е. гармонического анализа) амплитуды рассеяния [1]).

Для реакции (11) амплитуду рассеяния можно записать в виде матричного элемента

$$T^{S_c S_d S_a S_b}_{\lambda_c \lambda_d \lambda_a \lambda_b}(p) = \langle m_c S_c \boldsymbol{p}_c \lambda_c;\ m_d S_d \boldsymbol{p}_d \lambda_d \,|\, T \,|\, m_a S_a \boldsymbol{p}_a \lambda_a;\ m_b S_b \boldsymbol{p}_b \lambda_b \rangle, \quad (16)$$

где m, S, p, λ обозначают массу, спин, импульс и спиральность каждой частицы. Из релятивистской инвариантности следует, что эти матричные элементы преобразуются согласно тензорным произведениям представлений группы Пуанкаре, к которым принадлежат частицы, обозначаемых символически $U^*(c)$, $U^*(d)$, $U(a)$ и $U(b)$.

Произведение $U(a) \otimes U(b)$ и аналогично произведение $U^*(c) \otimes U^*(d)$ мы можем разложить в прямой интеграл представлений группы Пуанкаре. Тогда получим разложение T-матрицы (16) по двухчастичным состояниям (a, b) или (c, d). Физически последние являются состояниями, образованными из частиц a и b, например резонансами или составными состояниями частиц a и b. Подходящей алгеброй Пуанкаре является тогда (14). В частности, если в разложении воспользоваться для (14) базисом, состоящим из P^2, J^2, J_3, мы получим так называемое парциальноволновое (или прямого канала) разложение T-матрицы, сумму по всем возможным полным моментам импульсов промежуточных состояний, образованных из a и b, которые затем распадаются на частицы c и d.

Мы можем также разложить прямые произведения

$$U(a)\,U^*(c) \quad \text{или} \quad U(a)\,U^*(d) \quad (17)$$

в прямые интегралы представлений группы Пуанкаре. В этом случае мы, однако, видим непосредственно, что следует использовать группу Пуанкаре, генерируемую при помощи (15). Малой группой в этом случае является $O(2, 1)$, и мы, таким образом, приходим к представлениям группы Пуанкаре с $m^2 = t < 0$. Физически импульсы $p_a - p_c$ в (15) соответствуют импульсу «обменной частицы» (фиг. 1, б), и разложение называется кросс-канальным разложением T-матрицы по возможным двухчастичным состояниям в кросс-канале.

Эти разложения приобретают дальнейшее значение благодаря свойствам аналитического продолжения элементов T-матрицы по импульсам, или аналитическим свойствам представлений группы Пуанкаре. Если аналитически продолжить p_c в $-p'_c$ и p_b в $-p'_b$, соотношение (12) переходит в

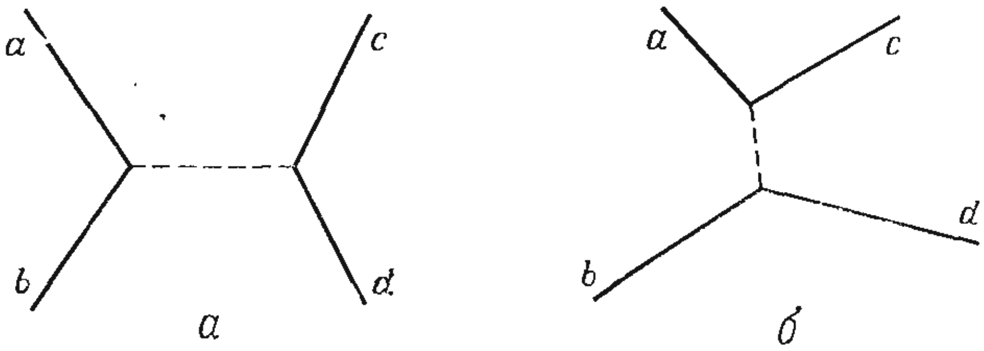
$$p_a + p'_c \to p'_b + p_d \quad (18)$$

[1]) См. в этой связи также [891, 892]. — *Прим. перев.*

и описывает баланс физического импульса в реакции

$$a + c \to b + d. \tag{19}$$

Взглянув на фиг. 1, б, мы видим, что «обменные» частицы для процесса (11) являются не чем иным, как двухчастичными состояниями реакции (19). В физике элементарных частиц предполагается, что единая аналитическая функция описывает как процессы (11), так и (19) (и другие) в соответствующей им физической области импульсов, удовлетворяющих (12) или (18).



Фиг. 1.

Существует множество других форм разложения T-матрицы в зависимости от того, на каких однородных или симметрических пространствах мы представляем T.

Д. *Библиографические замечания*

Релятивистское волновое уравнение для массивной частицы спина 1/2 было предложено Дираком [208]. В то время были известны только тензорные представления группы Лоренца, и возник вопрос, может ли уравнение Дирака вообще быть ковариантным, поскольку оно не преобразуется ни по одному из тензорных представлений. Выяснение этой проблемы привело к появлению нового класса представлений группы Лоренца, т. е. спинорных представлений. Затем обнаружилось, что уравнение Дирака допускает решения с отрицательной энергией, что представляло трудность в физической интерпретации уравнения. С целью преодоления этой трудности Майорана [566] предложил бесконечнокомпонентное волновое уравнение, которое не содержало состояний с отрицательной энергией. Однако вскоре было осознано, что уравнение Майораны имеет также решения $\psi(p)$ с $p^2 = m^2 \leqslant 0$.

Впоследствии было признано, что состояния с отрицательной энергией уравнения Дирака имеют естественную интерпретацию в квантовополевой теории как античастицы, а в 1931 г. античастицы были обнаружены экспериментально. Волновое уравнение для безмассовой частицы спина 1/2 впервые было предложено Вейлем в 1932 г. Это уравнение рассматривал затем Паули, однако оно было отклонено из-за его неинвариантности относительно пространственных инверсий. Когда было экспериментально установлено, что в реакциях с участием нейтрино четность нарушается, Ландау, Салам, а также Ли и Янг, предложили уравнение Вейля для описания состояний нейтрино.

Волновое уравнение для массивной частицы спина 1 предложили Прока в 1936 г. и Петио в своей диссертации в том же году. Общие аспекты этих уравнений рассмотрели Даффин [234] и Кеммер [450].

Общие волновые уравнения (1) и (2) для частиц с произвольным спином впервые были рассмотрены Фирцом и Паули [257] на языке спиноров. Другая возможная формулировка на языке спин-тензоров была дана Раритой и Швингером [697]. Интересное описание тензорных частиц при помощи симметрических тензорных волновых функций дали Баргманн и Вигнер [45].

Относительно простой вид ковариантных волновых уравнений для массивных и безмассовых частиц с произвольным спином был предложен Йоосом [436], Барутом, Музиничем и Вильямсом [88] и Вайнбергом [832].

Вывод конечнокомпонентных релятивистских волновых уравнений, представленный в этой главе, основан на теории индуцированных представлений и дает возможность единым образом получать все конечнокомпонентные ковариантные волновые уравнения, исходя из одного уравнения (1.17) (см. также [637]).

Все эти уравнения относятся к массивным частицам с определенной массой. Бхабба [112] предложил аналог уравнения Дирака для описания системы с многими массами и спинами (см. также [113]). Гельфанд и Яглом [324] развили общую теорию таких уравнений, которая включает также бесконечнокомпонентные волновые уравнения типа Майораны. Уравнения Гельфанда—Яглома в общем случае дают спектр масс, убывающих с возрастанием спина. Многие другие уравнения были недавно предложены и рассмотрены в работах [2, 83, 289, 626] и других. Эти уравнения модифицируют форму уравнений Гельфанда—Яглома с целью получения спектра с возрастающей массой.

Подробное обсуждение уравнений типа Бхаббы и некоторых других ковариантных волновых уравнений дано в книге Умезавы.

Применения бесконечнокомпонентных волновых уравнений для описания свойств реалистических квантовых систем разрабатывались в основном Барутом и его сотрудниками. На основе объединения этого подхода с симметрией SO (4, 2) квантовых систем им удалось получить не только спектр водородоподобного атома, но они также смогли учесть поправку на отдачу, найти форм-факторы и описать другие характерные черты квантовых систем (см. работы Барута и др. 1968—1975 гг., а также [81—83]). Применение этого подхода к описанию внутренней структуры адронов также было успешным [56].

§ 7. Упражнения

§ 1.1. Можно ли вывести общее пуанкаре-инвариантное волновое уравнение (1.17) из общего волнового уравнения (1.12)?

Указание: группа Пуанкаре не обладает иными конечномерными представлениями, кроме представлений SL (2, C), поднятых до П (см. пример 8.7.1).

§ 2.1. Выведите волновое уравнение для массивной частицы спина 1, воспользовавшись представлением $D^{(1,0)} \oplus D^{(0,1)}$ группы SL (2, C).

Указание: следуйте выводу уравнения Дирака.

§ 2.2. «Группа Максвелла»: рассмотрите волновое уравнение частицы в фиксированном заданном внешнем поле, например уравнение Шредингера

$$\mathrm{i}\,\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left[\frac{1}{2m}(\boldsymbol{p} - e\boldsymbol{A})^2 + eA_0\right]\psi$$

или уравнение Дирака

$$[\gamma^\mu (p_\mu - eA_\mu) - m]\,\psi = 0.$$

Группы симметрии этих уравнений являются теперь всего лишь подгруппами группы Галилея или группы Пуанкаре соответственно (или подгруппой конформной группы, если либо m преобразуется, либо $m = 0$). В силу калибровочной инвариантности эта подгруппа задается теми преобразованиями, которые оставляют $F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}$ инвариантным. В частности, определите группу симметрии для случая постоянного $F_{\mu\nu}$ и изучите индуцированные проективные представления этой группы (см. [28, 705, 732]). Если поля также преобразуются, мы снова получаем полную инвариантность. См. также следующее упражнение.

§ 3.1. Рассмотрите светоподобные решения уравнения Майораны.

§ 4.1. Изучите расширение пространственно-временной группы П (группы Пуанкаре или группы Галилея) при помощи электромагнитной калибровочной группы K, т. е. абелевой группы всех вещественнозначных функций из C^ν или C^∞ на пространстве Минковского M^4 (см. [177] и цитированную там литературу).

§ 4.2. Покажите, что группа автоморфизмов группы Пуанкаре П есть

$$\mathrm{Aut}\,\Pi = \Pi \rtimes (C_2 \times C_2 \times D),$$

где D — мультипликативная группа вещественных чисел $\rho > 0$, появляющихся в $(a, \Lambda) \to (\rho a, \Lambda)$, а $C_2 \times C_2$ — группа, порождаемая отражением пространства и времени. Что является группой автоморфизмов группы Галилея (сравните с упражнением 1.10.1.11)?

Приложение А

Алгебра, топология, теория меры и интегрирования

1. *Лемма Цорна*

Отношение R в множестве X называется *рефлексивным*, если имеет место xRx для $\forall x \in X$, *симметрическим*, если из xRy следует yRx, *антисимметрическим*, если из xRy и yRx следует $x = y$ для $\forall x, y \in X$, и *транзитивным*, если из xRy и yRz следует xRz для $\forall x, y, z \in X$.

Отношение R на множестве X называется *отношением эквивалентности*, если оно рефлексивно, транзитивно и симметрично.

Отношение R на множестве X называется *частично упорядоченным*, если оно рефлексивно, транзитивно и антисимметрично. Если R частично упорядочено, то мы пишем $x \prec y$ вместо xRy.

Если для всех x, y из X $x \prec y$ или $y \prec x$, то говорят, что X *линейно упорядочено*.

Элемент $u \in X$ называется *верхней гранью* для подмножества $Y \in X$, если $y \prec u$ для всех $y \in Y$. Элемент $m \in X$ называется максимальным элементом в X, если $m \prec x$ предполагает $x = m$.

Лемма Цорна. *Каждое непустое частично упорядоченное множество X с тем свойством, что каждое линейно упорядоченное подмножество имеет верхнюю грань в X, обладает максимальным элементом.*

2. *Кольца*

Утверждение 1. *Пусть R — кольцо. Если $\operatorname{gr} R$ — (левое) нётерово кольцо без делителей нуля, то R — также (левое) нётерово кольцо без делителей нуля.*

(Доказательство см. в [189], утверждение 13.)

Утверждение 2. *(Левое) нётерово кольцо без делителей нуля удовлетворяет (левому) условию Оре.*

(Доказательство см. в [189], утверждение 14.)

3. *Полугруппы*

Полугруппа G — это непустое множество S и отображение $(x, y) \to xy$ из $G \times G$ в G, такое, что

$$x(yz) = (xy)z \quad \text{для всех} \quad x, y, z \quad \text{из} \quad G.$$

Пусть X — любое непустое множество. *Свободная* полугруппа S — это множество всех конечных формальных произведений

$$x_1 \cdot x_2 \ldots x_n,$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$, $n \geqslant 1$, с законом умножения

$$(x_1 \cdot x_2 \ldots x_n)(y_1 \cdot y_2 \ldots y_n) = x_1 \cdot x_2 \ldots x_n \cdot y_1 \cdot y_2 \ldots y_n.$$

4. *Принцип равномерной ограниченности*

Полное метрическое векторное пространство над полем K называется *F-пространством*, если

1) $d(x, y) = d(x - y, 0)$ для всех $x, y \in X$,

2) отображение $(\lambda, x) \to \lambda x$ из $K \times X$ в X непрерывно по λ для каждого x и непрерывно по x для каждого λ.

ПРИНЦИП РАВНОМЕРНОЙ ОГРАНИЧЕННОСТИ. *Пусть для каждого элемента a из множества A T_a—непрерывное линейное отображение из F-пространства X в F-пространство Y. Если для каждого $x \in X$ множество $\{T_a x | a \in A\}$ ограничено, то $\lim\limits_{x \to 0} T_a x = 0$ равномерно относительно $a \in A$.*

(Доказательство см. в [236], гл. I.)

5. *Меры и интегрирование*

Борелева структура на множестве X — это семейство B подмножеств множества X, таких, что

1) $\varnothing, X \in B$,

2) если $X_j \in B$, то $X - X_j$, $\bigcap\limits_{j=1}^{\infty} X_j$ и $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} X_j$ лежат в B.

Пара (X, B) называется *борелевым пространством*. Элементы из B называются *борелевыми подмножествами* в X.

Каждое множество X имеет по крайней мере одну борелеву структуру. В самом деле, если F — любое семейство подмножеств множества X, то существует наименьшая борелева структура на X, которая содержит F.

Если X и Y — борелевы пространства, то отображение F: $X \to Y$ называется *борелевым отображением*, если $f^{-1}(Y_i)$ — борелево подмножество в X для каждого борелева подмножества Y_i из Y. Борелево отображение называется *борелевым изоморфизмом*, если f взаимно однозначно и является «отображением на» и если f^{-1} — борелево отображение.

Борелево пространство называется *стандартным*, если оно изоморфно по Борелю борелеву пространству, сопоставляемому с борелевым подмножеством полного сепарабельного метрического пространства.

Борелева мера — это отображение μ: $B \to [0, \infty)$, такое, что

1) $\mu(X_i) \geqslant 0$ для $X_i \in B$, $\mu(\varnothing) = 0$,

2) если $X_i \in X$ — непересекающиеся элементы из B, то

$$\mu\left(\bigcup_i X_i\right) = \sum_i \mu(X_i),$$

3) существуют $X_k \in B$, $k = 1, 2, \ldots$, такие, что

$$\mu(X_j) < \infty, \quad X = \bigcup_j X_j.$$

Борелева мера на X называется *стандартной*, если существует борелево подмножество N, такое, что $\mu(N) = 0$ и $X - N$ — стандартное борелево пространство.

Вещественнозначная неотрицательная функция на борелевом пространстве X называется *измеримой*, если для любого $a > 0$ множество $\{x: f(x) > a\}$ измеримо. Комплекснозначная функция f измерима, если она может быть записана в виде $f = f_1 - f_2 + i(f_3 - f_4)$ с f_i вещественными неотрицательными и измеримыми. Функции, полученные из измеримых функций путем алгебраических операций или переходом к пределу, измеримы.

Предел сумм Лебега относительно меры μ называется *интегралом* $\int_X f(x)\, d\mu(x)$ функции f. Если $\int_X |f(x)|\, d\mu(x)$ конечен, то f называется *интегрируемой*.

Задав меру μ на измеримом пространстве X, мы можем определить множество интегрируемых функций на X и образовать пространства $L^p(X, \mu)$ (как и в случае $X = R$).

Мера ν *абсолютно непрерывна* относительно меры μ тогда и только тогда, когда $\mu(A) = 0$ влечет $\nu(A) = 0$. Имеет место следующая теорема.

Теорема Радона—Никодима. *Мера ν абсолютно непрерывна относительно μ тогда и только тогда, когда существует измеримая функция ρ, такая, что*

$$\nu(A) = \int \rho(x)\, \chi_A\, d\mu(x)$$

для любого измеримого множества A, где χ_A — характеристическая функция множества A.

Эту теорему часто используют в дифференциальной форме:

$$\frac{d\nu}{d\mu}(x) = \rho(x).$$

6. *Теоремы Лебега*

Теорема о мажорированной сходимости. *Если $\{u_n\}_1^\infty$ — последовательность интегрируемых функций, сходящихся почти всюду* *к функции u, и если почти всюду $|u_n(x)| \leqslant v(x)$, где v интегрируема, то функция u также интегрируема и*

$$\int_X u(x)\,d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int_X u_n(x)\,d\mu(x).$$

Предположения последней теоремы удовлетворяются, в частности, тогда, когда $\mu(X) < \infty$ и почти всюду $|u_n(x)| \leqslant M$, где M — константа. В этом случае имеет место следующая теорема.

Теорема об ограниченной сходимости. *Если $\{u_n\}_1^\infty$ — неубывающая последовательность интегрируемых функций, почти всюду сходящихся к функции u, то*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X u_n(x)\,d\mu(x) = \int_X u(x)\,d\mu(x).$$

Пусть X_1 и X_2 — два локально компактных пространства с мерами μ_1 и μ_2 соответственно. Тогда на пространстве $X = X_1 \times X_2$ существует мера ν, такая, что

$$\nu(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\,\mu_2(A_2)$$

для всех измеримых множеств $A_i \subset X_i$. Мера ν называется *тензорным произведением* мер μ_1 и μ_2 и обозначается через $\mu_1 \otimes \mu_2$.

7. Теорема Фубини

Вариант I. *Если f: $X_1 \times X_2 \to R$ (или C) $\mu_1 \otimes \mu_2$-интегрируема, то интегралы*

$$I_{12} = \int_{X_1} d\mu_1(x_1) \int_{X_2} f(x_1, x_2)\,d\mu_2(x_2)$$

и

$$I_{21} = \int_{X_2} d\mu_2(x_2) \int_{X_1} f(x_1, x_2)\,d\mu_1(x_1)$$

существуют и

$$\int_{X_1 \times X_2} f(x_1, x_2)\,d(\mu_1 \otimes \mu_2) = I_{12} = I_{21}.$$

Вариант II. *Если f $\mu_1 \otimes \mu_2$-измерима и $f \geqslant 0$, то все три приведенных интеграла существуют (конечны или бесконечны) и равны.*

Из теоремы Фубини вытекает следующая теорема.

Теорема об интегрировании ряда. *Пусть X — борелево пространство с борелевой мерой μ. Пусть $\{f_n(x)\}_1^\infty$ — последовательность μ-измеримых функций. Если*

$$\int_X \sum_{n=1}^\infty |f_n|\,d\mu(x) \quad \text{или} \quad \sum_{n=1}^\infty \int_X |f_n(x)|\,d\mu(x)$$

существует, то

$$\int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,d\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n(x)\,d\mu(x).$$

8. *Различные результаты*

ТЕОРЕМА ФРЕШЕ И РИССА. *Каждому линейному непрерывному функционалу L на гильбертовом пространстве H соответствует вектор $l \in H$, такой, что*

$$L(u) = (u, l) \quad \text{для всех} \quad u \in H.$$

(Доказательство см. в [574], гл. I.)

Приложение Б

Функциональный анализ

§ 1. Замкнутые, симметрические и самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве

Мы начнем с некоторых основных свойств операторов в гильбертовом пространстве.

Оператор A с областью определения $D(A) \subset H$ называется *непрерывным* в точке u_0 ($u_0 \in D(A)$), если для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$, такое, что

$$\|u - u_0\| \leqslant \delta, \quad u \in D(A) \Rightarrow \|Au - Au_0\| < \varepsilon.$$

Оператор A называется *ограниченным*, если существует константа C, такая, что

$$\|Au\| \leqslant C\|u\| \quad \text{для всех} \quad u \in D(A).$$

Ограниченный линейный оператор (равномерно) непрерывен. В самом деле,

$$\|Au - Au_0\| = \|A(u - u_0)\| \leqslant C\|u - u_0\|. \tag{1а}$$

Поэтому если $\|u - u_0\| \to 0$, то $\|Au - Au_0\| \to 0$, т. е. $Au \to Au_0$. Следовательно, если линейный оператор A непрерывен в точке u_0 (например, $u_0 = 0$), то A ограничен. Действительно, пусть $\|Au - Au_0\| < \varepsilon$ при $\|u - u_0\| < \delta(\varepsilon)$. Тогда, согласно линейности оператора A, $\|Av\| < \varepsilon$ при $\|v\| \leqslant \delta(\varepsilon)$. Поскольку для каждого $w \in H$ имеем $\left\| \frac{w}{\|w\|}\delta(\varepsilon) \right\| = \delta(\varepsilon)$, то

$$\|Aw\| = \left\| A\frac{w}{\|w\|}\delta(\varepsilon) \right\| \frac{\|w\|}{\delta(\varepsilon)} < \varepsilon \frac{\|w\|}{\delta(\varepsilon)}. \tag{1б}$$

Положив $C = \varepsilon/\delta(\varepsilon)$, получаем

$$\|Aw\| < C\|w\|$$

для каждого $w \in D(A)$. Поэтому A ограничен. Таким образом, мы видим, что для линейных операторов в гильбертовом пространстве непрерывность и ограниченность эквивалентны.

Оператор A называется *положительно определенным*, если

$$(Au, u) \geqslant m\|u\|^2$$

для некоторого $m > 0$ и всех $u \in D(A)$, и *положительным*, если $(Au, u) \geqslant 0$ для всех $u \in D(A)$. Оператор A называется *замкнутым*, если из

$$u_m \in D(A), \quad \lim u_m = u, \quad \lim Au_m = v$$

следует

$$u \in D(A), \quad v = Au.$$

Отметим существенную разницу между непрерывными и замкнутыми операторами: если A непрерывен, то существование предела

$$\lim_{n\to\infty} u_n \to u \in D(A)$$

предполагает существование предела $\lim\limits_{n\to\infty} Au_n$; с другой стороны, если A только замкнут, то из сходимости последовательности

$$u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_m,\ \ldots \in D(A) \tag{2}$$

не следует, что последовательность

$$Au_1,\ Au_2,\ \ldots,\ Au_m,\ \ldots \tag{3}$$

также сходится.

Если A не замкнут, то мы определяем *замыкание* $\overline{A}$ оператора A как оператор со следующими свойствами.

1° Область определения $D(\overline{A})$ оператора $\overline{A}$ состоит из всех векторов $u \in H$, для которых существует по крайней мере одна последовательность (2), порождающая сходящую последовательность (3).

2° Действие оператора $\overline{A}$ определяется равенством

$$\overline{A}u = \lim_{n\to\infty} Au_n, \quad u \in D(\overline{A}).$$

Из определения замыкания следует, что оператор A допускает замыкание $\overline{A}$ тогда и только тогда, когда из соотношений

$$u_n \to 0, \quad Au_n \to v$$

следует, что $v = 0$.

Пусть A — линейный оператор в H (ограниченный или нет). Существуют пары $v,\ v' \in H$, такие, что равенство

$$(Au,\ v) = (u,\ v') \tag{4}$$

выполняется для каждого $u \in D(A)$. В самом деле, равенство (4) удовлетворяется по крайней мере для $v = v' = 0$. Кажется естественным положить $v' = A^*v$ и назвать оператор A^* оператором, *сопряженным* A. Однако это определение сопряженного оператора A^* будет иметь смысл только тогда, когда элемент v' однозначно определен элементом v. Это условие выполняется тогда и только тогда, когда $D(A)$ плотно в H. Действительно, если $D(A)$ не плотно в H и $w \neq 0$ ортогонально к $D(A)$, то для каждого $u \in D(A)$ наряду с (4) имеем

$$(Au,\ v) = (u,\ v' + w),$$

т. е. символ A^*v не имеет смысла. Обратно, если $D(A)$ плотно в H и если для любого $u \in D(A)$

$$(Au, v) = (u, v'_1),$$

$$(Au, v) = (u, v'_2),$$

то для произвольного $u \in D(A)$ имеем

$$(u, v'_1 - v'_2) = 0,$$

что невозможно, если $v'_1 \neq v'_2$. Следовательно, если $D(A)$ плотно в H, то оператор A имеет сопряженный оператор A^*. Область определения $D(A^*)$ оператора A^* — это множество всех $v \in H$, для которых существует $v' \in H$, удовлетворяющее (4) для произвольного $u \in D(A)$. Действие оператора A^* на $D(A^*)$ задается формулой

$$A^*v = v'. \tag{5}$$

Заметим, что $v \in D(A^*)$ тогда и только тогда, когда (Au, v) — линейный непрерывный функционал на $D(A)$. Сопряженный оператор A^* имеет ряд интересных свойств:

Лемма 1. 1° *Оператор A^* линеен.*

2° *Оператор A^* замкнут даже тогда, когда A не замкнут.*

3° *Если оператор A имеет замыкание $\bar{A}$, то $(\bar{A})^* = A^*$.*

Все эти свойства прямо следуют из определения сопряженного оператора A^*. Более того, можно доказать, что

$$A^{**} = \bar{A} \tag{6}$$

(см. [788], теорема 2.9).

Пусть A, B — операторы в H с $D(B) \supset D(A)$ и пусть

$$Bu = Au \quad \text{для} \quad u \in D(A);$$

тогда говорят, что оператор B является *расширением* оператора A, а A — *сужением* оператора B. Мы будем писать $B \supset A$. В частности, замыкание $\bar{A}$ является расширением оператора A. Заметим, что

$$A \subset B \Rightarrow A^* \supset B^*. \tag{7}$$

В самом деле, если $v \in D(B^*)$, то существует $v' \in H$, такое, что $(Bu, v) = (u, v')$ для всех $u \in D(B)$. Если $A \subset B$, то также $(Au, v) = (u, v')$ для всех $u \in D(B)$, поскольку $Au = Bu$. Следовательно, $v' \in D(A^*)$ и $A^*v = v' = B^*v$. Поэтому $A^* \supset B^*$.

Оператор A называют *симметрическим*, если $A^* \supset A$. Другими словами, плотно определенный оператор A симметричен, если

$$(Au, v) = (u, Av) \quad \text{для всех} \quad u, v \in D(A). \tag{8}$$

Оператор A называют *самосопряженным*, если $A^* = A$. Поскольку A^* замкнут (см. лемму 1), то самосопряженный оператор замкнут.

Лемма 2. *Пусть A — линейный симметрический оператор и $D(A) = H$. Тогда*

1° $A^* = A$,

2° A — *ограниченный оператор.*

Доказательство. 1°. Поскольку $A^* \supset A$, то $D(A^*) \supset \supset D(A) = H$. Поэтому $D(A^*) = H$ и, следовательно, $A^* = A$.

2°. Поскольку A симметричен, то мы имеем

$$(Au, v) = (u, Av), \quad u, v \in H.$$

Пусть $u_n \to u_0$ и $Au_n \to v_0$. Для любого $v \in H$ имеем

$$(v_0, v) = \lim (Au_n, v) = \lim (u_n, Av) = (u_0, Av) = (Au_0, v).$$

Поэтому $Au_0 = v_0$, т. е. A непрерывен и, следовательно, ограничен.

Эта лемма показывает, что неограниченный самосопряженный оператор не может быть определен на всем гильбертовом пространстве H. Поэтому мы можем определить его только на некоторой плотной области в H. Выбор подходящей плотной области определения для неограниченного оператора — одна из наиболее трудных задач функционального анализа и, следовательно, также квантовой физики.

Рассмотрим теперь свойства симметрических операторов и самосопряженных расширений операторов. Имеет место следующая лемма.

Лемма 3. *Оператор A, имеющий симметрическое расширение $\tilde{A}$, сам симметричен. Каждое симметрическое расширение $\tilde{A}$ оператора A является сужением оператора A^*.*

Доказательство. По предположению $\tilde{A} \supset A$ и $\tilde{A} \subset \tilde{A}^*$. Поэтому, согласно (7), $\tilde{A}^* \subset A^*$ и, следовательно,

$$A \subset \tilde{A} \subset \tilde{A}^* \subset A^*. \tag{9}$$

Легко также проверить, используя определение замкнутого и симметрического оператора и свойства их областей определения, что замыкание $\bar{A}$ симметрического оператора A является симметрическим оператором, т. е.

$$(\bar{A})^* \supset \bar{A}. \tag{10}$$

Мы знаем, что только самосопряженные операторы являются подходящими кандидатами для физических наблюдаемых. С другой стороны, очень часто в квантовой физике появляются симметрические операторы. Поэтому возникает важный вопрос: когда симметрический оператор допускает самосопряженное расширение? Эта задача может быть решена с помощью понятия *индексов дефекта.*

Пусть A — линейный плотно определенный оператор в гильбертовом пространстве H, и пусть A^* сопряжен A. Положим

$$D_+ = \{u \in D(A^*) : A^*u = \mathrm{i}u\}, \quad D_- = \{u \in D(A^*) : A^*u = -\mathrm{i}u\}. \quad (11)$$

Пространства D_+ и D_- называются пространствами положительного и отрицательного дефектов оператора A соответственно. Их размерности (конечные или бесконечные числа), обозначаемые через n_+ и n_- соответственно, называются *индексами дефекта оператора* A.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть A — симметрический оператор. Тогда*

1° A имеет самосопряженное расширение тогда и только тогда, когда $n_+ = n_-$;

2° если $n_+ = n_- = 0$, то единственным самосопряженным расширением оператора A является его замыкание $\bar{A} = A^*$.

Эта теорема полностью решает задачу существования самосопряженных расширений симметрического оператора.

Заметим, что с заданным физическим симметрическим оператором можно сопоставлять много самосопряженных расширений и, следовательно, много физических наблюдаемых. Очевидно, что выбор подходящего представителя для физической наблюдаемой — это физическая задача. В самом деле, различные самосопряженные расширения могут иметь (в одном и том же пространстве H) различные собственные значения и различные полные множества ортогональных собственных функций. Например, рассмотрим оператор $\mathrm{d}_\theta = \mathrm{i}^{-1}\mathrm{d}/\mathrm{d}\varphi$ в $L^2(0, 2\pi)$, собственные функции u которого

$$\mathrm{d}_\theta u = \lambda u \quad (12)$$

удовлетворяют граничному условию

$$u(2\pi) = \theta u(0), \quad \theta = \exp(\mathrm{i}\omega), \quad \omega = \mathrm{const} \in R. \quad (13$$

Решение имеет вид

$$u_n(\varphi) = \exp\left[\mathrm{i}\left(n + \frac{\omega}{2\pi}\right)\varphi\right], \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots . \quad (14)$$

Поэтому собственными значениями оператора d_θ являются числа $\lambda_n = n + \omega/2\pi$. Из спектральной теоремы следует, что каждое множество функций (14) при фиксированном θ $\{u_n\}$ образует полное ортонормированное множество функций в $L^2(0, 2\pi)$. Заметим, что в квантовой механике, исходя из требования однозначности волновой функции, мы выбираем расширение d_θ с $\theta = 1$. Это требование, однако, не универсально, так как, например, для полуцелых спинов мы допускаем двузначные волновые функции и некоторые авторы даже рассматривают бесконечнозначные волновые функции.

§ 2. Интегрирование векторных и операторных функций

Пусть $u(t)$ — функция, определенная на интервале $[a, b] \subset R$, со значениями в гильбертовом пространстве H. Интеграл Римана функции $u(t)$ определяется таким же образом, как и интеграл Римана обычных функций.

Подразбиение Δ^i интервала $[a, b]$ — это система n_i точек

$$a = t_0^{(i)} < t_{n_1}^{(i)} < \dots < t_{n_i}^{(i)} = b. \tag{1}$$

Последовательность $\{\Delta^i\}$ подразбиений называют нормальной, если

$$\lim_{i\to\infty} \sup_{1\leqslant k\leqslant n_i} \left| t_k^{(i)} - t_{k+1}^{(i)} \right| = 0. \tag{2}$$

Положим

$$S(u(t), \Delta^i, t_k^i) = \sum_{k=1}^{n} u(t_k)\left(t_k^{(i)} - t_{k-1}^{(i)}\right), \tag{3}$$

где t_k — произвольная точка, удовлетворяющая неравенствам $t_{k-1}^{(i)} \leqslant t_k \leqslant t_k^{(i)}$. Если предел

$$\lim_{t\to\infty} S(u(t), \Delta^i, t_k^i) \tag{4}$$

существует для произвольной нормальной последовательности подразбиений и для произвольного выбора точек t_k, то этот предел называется *интегралом Римана* функции $u(t)$ и обозначается через

$$\int\limits_{[a, b]} u(t)\,dt. \tag{5}$$

Как и в случае обычных функций можно показать, что этот предел не зависит от выбора нормальных последовательностей подразбиений и от выбора свойств точек t_k.

Интеграл Римана (5) векторной функции $u(t)$ имеет все свойства римановых интегралов от обычных функций. В частности, имеет место следующая лемма.

Лемма 1. *Если векторная функция $u(t)$ в H непрерывна на интервале $[a, b] \subset R$, то она интегрируема на $[a, b]$.*

Доказательство. Ограниченный интервал $[a, b]$ в R компактен. Мы знаем, что непрерывное отображение $t \to u(t)$ компактного множества равномерно непрерывно. Поэтому для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое, что

$$\| u(t_1) - u(t_2) \| < \varepsilon, \quad \text{если} \quad |t_1 - t_2| < \delta. \tag{6}$$

Возьмем подразбиение Δ^i интервала $[a, b]$ с диаметром, меньшим δ. Для каждого Δ^l, $l > i$, такого, что Δ^i— подразбиение для Δ^l, из (6) имеем

$$S(u(t), \Delta^l, \tau_k^l) - S(u(t), \Delta^i, t_k^i)\| =$$

$$= \left\| \sum_{k=1}^{n_l} u(\tau_k)(\tau_k^{(l)} - \tau_{k-1}^{(l)}) - \sum_{k=1}^{n_i} u(t_k)(t_k^{(i)} - t_{k-1}^{(i)}) \right\| =$$

$$= \left\| \sum_{k=1}^{n_l} (u(\tau_k) - u(t_k')(\tau_k^{(l)} - \tau_{k-1}^{(l)})) \right\| \leqslant |b-a|\varepsilon,$$

где $|\tau_k - \tau_k'| < \delta$. Следовательно, для любых подразбиений Δ^l, Δ^s, l, $s > i$, таких, что Δ^i — подразбиение для Δ^l и Δ^s, имеем

$$\|S(u(t), \Delta^l, t_k^l) - S(u(t), \Delta^s, \tau_k^s)\| \leqslant \|S(u(t), \Delta^l, \tau_k^l) -$$

$$- S(u(t), \Delta^i, t_k^i)\| + \|S(u(t), \Delta^s, \tau_k^s) - S(u(t), \Delta^i, t_k^i)\| \leqslant 2|b-a|\varepsilon.$$

Поэтому последовательность $\Delta^i \to S(u(t), \Delta^i, \tau_k^i)$ является последовательностью Коши. Полнота H предполагает существование элемента v в H, такого, что

$$\lim_{i\to\infty} S(u(t), \Delta^i, \tau_k^i) = v.$$

Лемма 2. *Интеграл Римана векторной функции $u(t)$, $t \in [a, b] \subset R$, имеет следующие свойства:*

1° *Линейность: если $u_1(t)$ и $u_2(t)$ интегрируемы на $[a, b]$, то для α, $\beta \in R$ векторная функция $\alpha u_1(t) + \beta u_2(t)$ интегрируема и*

$$\int\limits_{[a,b]} (\alpha u_1(t) + \beta u_2(t))\,dt = \alpha \int\limits_{[a,b]} u_1(t)\,dt + \beta \int\limits_{[a,b]} u_2(t)\,dt. \tag{7}$$

2° *Если $u(t)$ непрерывна на $[a, b]$, то $\|u(t)\|$ интегрируема и*

$$\left\| \int\limits_{[a,b]} u(t)\,dt \right\| \leqslant \int\limits_{[a,b]} \|u(t)\|\,dt \leqslant C|a-b|, \tag{8}$$

где

$$C = \sup_{t\in[a,b]} \|u(t)\|.$$

3° *Если A — ограниченный линейный оператор в H и $u(t)$ интегрируема на $[a, b] \subset R^1$, то $Au(t)$ также интегрируема и*

$$\int\limits_{[a,b]} Au(t)\,dt = A \int\limits_{[a,b]} u(t)\,dt. \tag{9}$$

Доказательство. Свойство 1° следует прямо из определения интеграла Римана векторной функции. Первая часть (8) следует также из определения интеграла. Вторая часть следует из того факта, что отображение $u \to \|u\|$ непрерывно. Поэтому числовая непрерывная функция $\|u(t)\|$ ограничена на ограниченном интервале $[a, b]$.

3°. Ограниченный линейный оператор непрерывен согласно (1.1a). Поэтому, согласно (4) и (3), мы имеем

$$A \int_{[a,b]} u(t)\,dt = A \lim_{i\to\infty} S(u(t), \Delta^{(i)}, t_k) = \lim_{i\to\infty} S(Au(t), \Delta^{(i)}, t_k) =$$

$$= \int_{[a,b]} Au(t)\,dt. \tag{10}$$

Замечание. Пусть D — замкнутая ограниченная область в R^n и $u(t)$, $t \in D$, — вектор-функция на D со значениями в H. Тогда, так же как в случае обычных функций, легко проверить, что все предыдущие результаты остаются справедливыми для $u(t)$, $t \in D$. В частности,

$$\left\| \int_D u(t)\,dt \right\| \leqslant \int_D \|u(t)\|\,dt \leqslant CV_D, \tag{11}$$

где $C = \sup\limits_{t\in D} \|u(t)\|$ и V_D — объем области D.

Пусть A_t — сильно непрерывная операторная функция в замкнутой ограниченной области $D \subset R^n$. По определению вектор-функция $u(t) = A_t u$ непрерывна для любых u из H. Положим

$$\tilde{A}u = \int_D A_t u\,dt. \tag{12}$$

Ясно, что оператор $\tilde{A}$ линеен. Он также ограничен. В самом деле, поскольку отображение Φ: $A \to \|A\|$ непрерывно, числовая функция $\|A_t\|$ непрерывна в замкнутой ограниченной области D. Следовательно, $\sup\limits_{t\in D} \|A_t\| = C < \infty$. Поэтому

$$\|\tilde{A}u\| \leqslant \int_D \|A_t u\|\,dt \leqslant \|u\| \int_D \|A_t\|\,dt \leqslant CV_D\|u\|. \tag{13}$$

Ограниченный линейный оператор $\tilde{A}$ называется *интегралом* операторной функции A_t по области D. Мы обозначаем его следующим образом:

$$\tilde{A} = \int_D A_t\,dt. \tag{14}$$

Из формулы (12) для любого u из H имеем

$$\left(\int_D A_t\,dt\right) u = \int_D A_t u\,dt. \tag{15}$$

Более того, согласно (13),

$$\left\| \int_D A_t\, dt \right\| \leqslant CV_D. \tag{16}$$

Если B — ограниченный оператор, то, согласно (9), мы имеем

$$B \int A_t\, dt = \int BA_t\, dt. \tag{17}$$

Подобным образом можно определить несобственные интегралы по неограниченным областям векторного пространства.

Пример. Пусть $G = SO(2)$ и $H = L^2(G)$. Пусть T — правое регулярное представление группы G в H, т. е. $T_x u(\varphi) = u(\varphi + x)$. Операторная функция

$$A_t = \frac{1}{2\pi} \exp(-imt)\, T_t, \quad t \in [0, 2\pi], \quad m \in Z, \tag{18}$$

непрерывна, поскольку T непрерывно. Поэтому интеграл

$$\tilde{A} = \frac{1}{2\pi} \int_G \exp(-imt)\, T_t\, dt \tag{19}$$

определен. Действие оператора $\tilde{A}$ на любой элемент $u(\varphi)$ из H дает m-ю компоненту Фурье функции u. В самом деле,

$$\tilde{A}u = \frac{1}{2\pi} \int_G \exp(-imt)\, T_t u(\varphi)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_G \exp(-imt)\, u(\varphi + t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \exp(im\varphi) \int_G \exp(-im\psi)\, u(\psi)\, d\psi = \exp(im\varphi)\, \hat{u}(m).$$

Аналогично все проективные операторы

$$P_{ij}^{\lambda} = \frac{\dim T^{\lambda}}{\operatorname{vol} G} \int_G \bar{D}_{ij}^{\lambda}(x)\, T_x\, dx,$$

рассмотренные в гл. 7, § 3, являются интегралами по G непрерывных операторных функций вида

$$A_x = \bar{D}_{ij}^{\lambda}(x)\, T_x,$$

где $x \in G$, а $D_{ij}^{\lambda}(x)$ — матричные элементы неприводимого представления T^{λ} группы G, которые непрерывны на G. Если $G = R^1$, то операторная функция

$$A_t = \exp(-i\lambda t)\, T_t \tag{20}$$

все еще непрерывна на G. Однако интеграл

$$\tilde{A} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\lambda t)\, T_t\, dx \tag{21}$$

не дает оператора в H, поскольку числовая функция $\alpha(t) = \|A_t\| = 1$ не интегрируема на вещественной прямой. В действительности величина (21) представляет собой операторнозначное распределение (см. гл. 15, § 4).

Заметим однако, что неограниченность пути интегрирования не является препятствием для построения интегрируемых операторных функций. В самом деле, операторная функция

$$A_t = \exp(-t^2) T_t$$

непрерывна и $\alpha(t) = \|A_t\| = \exp(-t^2)$. Поэтому интеграл

$$\tilde{A} = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-t^2) T_t \, dt \tag{22}$$

определен. Аналитические векторы для представлений групп строятся с помощью операторов вида (22) (гл. 11, § 4).

§ 3. Спектральная теория операторов

A. *Спектральная теорема*

Теория спектрального разложения самосопряженных операторов развита главным образом Гильбертом и фон Нейманом. Она дает очень полезный инструмент для разработки теории представлений групп и алгебр Ли.

Пусть $[a, b]$ — конечный или бесконечный интервал вещественной прямой R. Операторная функция E_λ, $\lambda \in [a, b]$, называется *разложением единицы* (или спектральной функцией), если она удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{aligned} &1^\circ \quad E(\lambda)^* = E(\lambda). \\ &2^\circ \quad E(\lambda) E(\mu) = E(\min(\lambda, \mu)). \\ &3^\circ \quad E(\lambda + 0) = E(\lambda). \\ &4^\circ \quad E(-\infty) = 0, \quad E(\infty) = I. \end{aligned} \tag{1}$$

Условия 1° и 2° означают, что $E(\lambda)$, $\lambda \in [a, b]$, — ограниченные эрмитовы операторы ортогонального проектирования (гл. 7, § 3). Для интервала $\Delta = [\lambda_1, \lambda_2] \subset [a, b]$ разность $E(\lambda_2) - E(\lambda_1)$ будет обозначаться через $E(\Delta)$. Если Δ_1 и Δ_2 — два таких интервала, то по условию 2° мы имеем

$$E(\Delta_1) E(\Delta_2) = E(\Delta_1 \cap \Delta_2). \tag{2}$$

В частности, если Δ_1 и Δ_2 не имеют общих точек, то

$$E(\Delta_1) E(\Delta_2) = 0, \tag{3}$$

т. е. подпространства $H_1 = E(\Delta_1) H$ и $H_2 = E(\Delta_2) H$ ортогональны.

Условие 3° означает, что операторная функция $E(\lambda)$ сильно непрерывна справа. Сходимость в 4° понимается в сильном смысле, т. е.

$$\lim_{\lambda\to-\infty} E(\lambda)\,u = 0, \quad \lim_{\lambda\to\infty} E(\lambda)\,u = u \tag{4}$$

для каждого u из H.

Пример 1. Пусть G — группа трансляций вещественной прямой R и $H = L^2(R^1)$. Пусть T — правое регулярное представление группы G, т. е. $T_a u(x) = u(x+a)$. Операторная функция

$$E(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\lambda} \mathrm{d}\lambda \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\mathrm{i}\lambda a)\,T_a\,\mathrm{d}a \tag{5}$$

представляет собой разложение единицы. Теперь мы можем легко проверить свойства (1) 1° — 4°. Для любого $u(x)$ из H имеем

$$E(\lambda)\,u(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\lambda} \mathrm{d}\lambda \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\mathrm{i}\lambda a)\,u(x+a)\,\mathrm{d}a =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\lambda} \mathrm{d}\lambda \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-\mathrm{i}\lambda(y-x)]\,u(y)\,\mathrm{d}y =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\lambda} \exp(\mathrm{i}\lambda x)\,\widehat{u}(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda. \tag{6}$$

Здесь

$$\widehat{u}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\mathrm{i}\lambda y)\,u(y)\,\mathrm{d}y \tag{7}$$

— преобразование Фурье элемента u из H. Таким образом,

$$E(-\infty)\,u = 0 \quad \text{и} \quad E(\infty)\,u = u$$

для любого u из H. Следовательно, $E_{-\infty} = 0$ и $E_\infty = I$.

3°. Согласно (6), для любого u из H мы имеем

$$\lim_{\Delta\lambda\to 0} E(\lambda+\Delta\lambda)\,u = E(\lambda)\,u + \lim_{\Delta\lambda\to 0}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\lambda}^{\lambda+\Delta\lambda} \exp(\mathrm{i}\lambda x)\,\widehat{u}(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda = E(\lambda)\,u.$$

Поэтому $E(\lambda+0) = E(\lambda)$.

2°. Для любого u из $L^2(R)$ имеем

$$E(\lambda)\,E(\mu)\,u = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\lambda} \mathrm{d}\lambda \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\mathrm{i}\lambda a)\,T_a\,\mathrm{d}a \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\mu} \mathrm{d}\mu \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\mathrm{i}\mu b)\,T_b u(x)\,\mathrm{d}b.$$

Мы можем перенести ограниченный оператор T_a под знак последнего интеграла. Тогда $T_a T_b u(x) = T_{a+b} u(x) = u(x + a + b)$. Положив $y = x + a + b$, получаем

$$E(\lambda) E(\mu) u = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\lambda} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\lambda a)\, da \int_{-\infty}^{\mu} \exp[i\mu(x + a)]\, d\mu \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\mu y)\, u(y)\, dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\lambda} d\lambda \int_{-\infty}^{\mu} \exp(i\mu x)\, \delta(\lambda - \mu)\, \hat{u}(\mu)\, d\mu =$$

$$= \int_{-\infty}^{\min(\lambda,\ \mu)} \exp(i\mu x)\, \hat{u}(\mu)\, d\mu = E(\min(\lambda,\ \mu))\, u. \tag{8}$$

Перестановка интегралов по a и μ оправдана согласно теореме Фубини (приложение А). Используя (5), имеем

$$E^*(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\lambda} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\lambda a)\, T_a^*\, da =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\lambda} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\lambda b)\, T_b\, db = E(\lambda).$$

Здесь мы использовали тот факт, что T унитарно, т. е. $T_a^* = T_{a^{-1}} = T_{-a}$, и положили $b = -a$.

Из формулы (1) следует, что для любого u из H

$$\sigma_u(\lambda) \equiv (E(\lambda) u,\ u) \tag{9}$$

— непрерывная справа неубывающая функция ограниченной вариации, для которой

$$\sigma_u(-\infty) = 0, \quad \sigma_u(\infty) = \|u\|^2.$$

Действительно, для $\mu < \lambda$

$$(E(\mu) u,\ u) = \|E(\mu) u\|^2 = \|E(\mu) E(\lambda) u\|^2 \leqslant \|E(\lambda) u\|^2 = (E(\lambda) u,\ u). \tag{10}$$

Функция $\sigma_u(\lambda)$ определяет другую функцию $\sigma_u(\Delta) = (E(\Delta) u,\ u)$, которая определена для любого интервала $\Delta \subset [a,\ b]$ и может быть расширена до всех борелевых подмножеств интервала $[a,\ b]$. Согласно (10), функция $\sigma_u(\Delta)$ положительна. Более того, она счетно аддитивна. Действительно, если

$$\Delta = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n \quad \text{и} \quad \Delta_n \cap \Delta_m = 0 \quad \text{для} \quad n \neq m,$$

то

$$E(\Delta)=\sum_{n=1}^{\infty} E(\Delta_n) \quad \text{и} \quad \sigma_u(\Delta)=\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_u(\Delta_n). \tag{11}$$

Функция $\sigma_u(\Delta)$ называется *спектральной мерой.*

Пусть A — самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H. Теперь мы сформулируем основную теорему теории спектрального разложения.

Теорема 1. *Каждый самосопряженный оператор в H имеет разложение*

$$A=\int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, \mathrm{d}E(\lambda), \tag{12}$$

где $E(\lambda)$ — спектральное семейство, которое однозначно определяется оператором A.

Поскольку это классический результат функционального анализа, мы не приводим здесь доказательства. В (12) ни область интегрирования, ни операторная функция не являются ограниченными. Следовательно, нужно дать точное определение интеграла этого типа. Область определения $D(A)$ оператора A состоит из всех векторов u, для которых

$$(Au, Au)=\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 \, \mathrm{d}\sigma_u(\lambda)<\infty. \tag{13}$$

Для u из $D(A)$ оператор (12) определяется формулой

$$Au=\int_{-\infty}^{\infty} \lambda \mathrm{d}(E(\lambda)u), \tag{14}$$

где равенство понимается в слабом смысле, т. е.

$$(Au, v)=\int_{-\infty}^{\infty} \lambda \mathrm{d}(E(\lambda)u, v)$$

для любых v из H.

Следствие 1. *Если Δ — любой интервал из $[a, b]$, то*

$$E(\Delta)A=AE(\Delta)=\int_{\Delta} \lambda \, \mathrm{d}E(\lambda), \tag{15}$$

т. е. спектральная функция $E(\Delta)$ перестановочна с A.

Доказательство. В силу (12)

$$E(\Delta)A=\int_{-\infty}^{\infty} \lambda E(\Delta)\, \mathrm{d}E(\lambda).$$

Согласно (2), $E(\Delta)\,\mathrm{d}E(\lambda) = 0$, если $\lambda \notin \Delta$, и $E(\Delta)\,\mathrm{d}E(\lambda) = \mathrm{d}E(\lambda)$, если $\lambda \in \Delta$. Следовательно,

$$E(\Delta)\,A = \int_{\Delta} \lambda\,\mathrm{d}E(\lambda).$$

Аналогично

$$AE(\Delta) = \int_{\Delta} \lambda\,\mathrm{d}E(\lambda),$$

и поэтому формула (15) справедлива.

Заметим, что если $u \in H_{\Delta} \equiv E(\Delta)\,H$, где $\Delta = [\lambda, \mu]$, то, согласно (15),

$$\|Au - \lambda u\| \leqslant (\mu - \lambda)\,\|u\|. \tag{16}$$

Поэтому, если $\mu - \lambda$ мало, то u является «почти собственным вектором» оператора A. Если

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} \Delta_i = [a, b]$$

и $\Delta_i \cap \Delta_k = 0$ при $i \neq k$, то пространство H может быть реализовано в виде ортогональной прямой суммы подпространств $H_{\Delta_n} = E(\Delta_n)\,H$, в которых оператор A «почти» сводится к оператору умножения.

Ясно, что если A имеет только непрерывный спектр, то все собственные векторы лежат вне гильбертова пространства.

Следствие 2. *Множество $D = \{E(\Delta_i)\,u\}$, где Δ_i пробегает все конечные интервалы в $[a, b]$, а u пробегает H, плотно в H. Все степени A^n, $n = 1, 2, \ldots$, определены на D.*

Доказательство. Пусть $\{\widetilde{\Delta}_i\}_{i=1}^{\infty}$ — набор конечных интервалов, таких, что

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} \widetilde{\Delta}_i = [a, b] \quad \text{и} \quad \widetilde{\Delta}_i \cap \widetilde{\Delta}_k = 0 \quad \text{для} \quad i \neq k. \tag{17}$$

Тогда для любого v из H имеем

$$v = \lim_{N \to \infty} \sum_{i=1}^{N} E(\widetilde{\Delta}_i)\,v.$$

Поэтому множество $\{E(\widetilde{\Delta}_i)\,u\}$, $u \in H$, плотно в H. Но, согласно (15), для любого u из H имеем

$$v = A^n E(\Delta)\,u = A^{n-1} \int_{\Delta} \lambda\,\mathrm{d}E(\lambda)\,u = A^{n-2} \int_{\Delta} \lambda^2\,\mathrm{d}E(\lambda)\,u = \int_{\Delta} \lambda^n\,\mathrm{d}E(\lambda)\,u. \tag{18}$$

Так как

$$\|v\| \leqslant \int\limits_{\Delta} |\lambda|^{2n} \| \mathrm{d}E(\lambda)\, u\|^2 \leqslant \max_{\lambda \in \Delta} |\lambda|^{2n} |\Delta| \|u\|^2, \tag{19}$$

то мы получаем, что любой вектор $E(\Delta_i)\,u$ лежит в области определения оператора A^n.

В заданном гильбертовом пространстве имеется много разложений единицы, сопоставляемых с различными самосопряженными операторами. В приложениях важно знать, когда разложение единицы $E(\lambda)$ сопоставимо самосопряженному оператору A в H. Эта задача решается следующей теоремой.

Теорема 2. *Разложение единицы $E(\lambda)$ представляет собой спектральную функцию оператора A тогда и только тогда, когда*

1° *$E(A)$ приводит A для любого интервала $\Delta \subset [-\infty, \infty]$,*

2° *условие $u \in (E(\lambda) - E(\mu))\,H$, $-\infty \leqslant \mu < \lambda \leqslant \infty$, предполагает неравенство*

$$\mu \|u\|^2 \leqslant (Au, u) \leqslant \lambda \|u\|^2. \tag{20}$$

(Доказательство см., например, в [6], § 75.)

Пример 2. Пусть $H = L^2(R)$. Пусть $A = \mathrm{i}^{-1}\mathrm{d}/\mathrm{d}x$, и пусть $D(A)$ состоит из всех функций $u(x)$ из $L^2(R)$, таких, что

1° $u(x)$ абсолютно непрерывно в каждом конечном интервале

$$\Delta \subset [-\infty, \infty],$$

2° $u'(x) = \mathrm{d}u/\mathrm{d}x \in L^2(R)$.

Функции u из $D(A)$ автоматически удовлетворяют граничному условию, т. е.

$$\lim_{x \to -\infty} u(x) = \lim_{x \to \infty} u(x) = 0.$$

Легко проверить, что A самосопряженный оператор на $D(A)$.

Покажем теперь, что разложение единицы

$$E(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\lambda} \mathrm{d}\lambda \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(-\mathrm{i}\lambda a)\, T_a\, \mathrm{d}a,$$

заданное формулой (5), является спектральной функцией для A. В самом деле, так как $T_a u(x) = u(x + a) = \exp[a\,(\mathrm{d}/\mathrm{d}x)]\,u(x)$, то операторы A и T_a коммутируют. Поэтому $E(\Delta)$ приводит A для любого интервала $\Delta \subset [-\infty, \infty]$. Более того, по (6)

$$(AE(\Delta)\,u, u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda \exp(\mathrm{i}\lambda x)\, \hat{u}(\lambda)\, u(x)\, \mathrm{d}\lambda\, \mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_{\Delta} \lambda u(\lambda)\, \overline{u(\lambda)}\, \mathrm{d}\lambda \leqslant \max_{\lambda \in \Delta} \lambda \|u\|^2.$$

Поэтому условие 2° теоремы 2 также выполнено. Следовательно, $E(\lambda)$ — спектральная функция для A.

Б. *Спектральная теория компактных операторов и операторов Гильберта—Шмидта*

Линейный оператор $X\colon H_1 \to H_2$ из гильбертова пространства H_1 в гильбертово пространство H_2 называется компактным, если он отображает единичный шар из H_1 в предкомпактное множество в H_2.

Теорема Реллиха—Гильберта—Шмидта. *Пусть X — линейный ограниченный самосопряженный (или нормальный) оператор в гильбертовом пространстве H. Тогда X компактен тогда и только тогда, когда имеют место следующие условия:*

1) $X = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k E_k$, *где E_k — попарно ортогональные проекторы на конечномерные подпространства $H_k = E_k H$ и $|\lambda_k| \to 0$ при $k \to \infty$,*

2) *для каждого $u_k \in H_k$ имеем $Xu_k = \lambda_k u_k$,*

3) $H = \oplus H_k + H_0$, *где $H_0 = X^{-1}(0)$.*

(Доказательство см. в [574], гл. I.)

Теперь мы вводим важный класс так называемых операторов Гильберта—Шмидта. Пусть H — гильбертово пространство, и пусть $\{e_i\}_1^{\infty}$ — ортонормированный базис в H. Линейный ограниченный оператор X в H называется *оператором Гильберта—Шмидта*, если

$$|X| \equiv \sqrt{\sum_i \|Xe_i\|^2} < \infty.$$

Теорема Гильберта—Шмидта. *Линейный ограниченный самосопряженный оператор X является оператором Гильберта—Шмидта тогда и только тогда, когда*

$$X = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k E_k,$$

где проекторы E_k конечномерны и

$$\sum_k (|\lambda_k|^2 \dim E_k) < \infty.$$

(Доказательство см. в [574], гл. I.)

В. *Ядерный вариант спектральной теоремы*

Чтобы получить удобную интерпретацию собственных векторов в случае непрерывных спектров, мы представляем в этом разделе так называемый ядерный вариант спектральной теоремы (см. [574], гл. II). Начнем с основных фактов, касающихся ядерной спектральной теоремы. Напомним сначала понятие прямого интеграла гильбертовых пространств.

Пусть (Λ, μ) — пространство с мерой. Рассмотрим семейство $\{H(\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ гильбертовых пространств $H(\lambda)$ со скалярными произведениями $(.,.)_\lambda$ и образуем декартово произведение

$$\bigtimes_{\lambda \in \Lambda} H(\lambda).$$

Элементы $u, v \in \bigtimes_{\lambda \in \Lambda} H(\lambda)$ будем называть *векторными полями.*

Мы называем $\Gamma = \{\overset{i}{e}\}_{i \in J}$ *фундаментальным семейством* μ-*измеримых векторных полей*, если

1° для произвольных $i, j \in J$ функция $\Lambda \to \lambda \to (\overset{i}{e}(\lambda), \overset{i}{e}(\lambda))_\lambda \in \in C$ μ-измерима,

2° для каждого $\lambda \in \Lambda$ на векторы $\{\overset{i}{e}(\lambda)\}_{i \in J}$ натягивается пространство $H(\lambda)$.

Поле $u \in \bigtimes_{\lambda \in \Lambda} H(\lambda)$ называется *измеримым*, если функция $\lambda \to (u(\lambda), \overset{i}{e}(\lambda))_\lambda$ μ-измерима. Очевидно, что μ-измеримые поля образуют векторное подпространство пространства $\bigtimes_{\lambda \in \Lambda} H(\lambda)$.

Измеримое поле u называется квадратично интегрируемым, если

$$\int \| u(\lambda) \|_\lambda^2 \, d\mu(\lambda) < \infty.$$

Два измеримых поля называются эквивалентными, если они на Λ равны почти всюду относительно μ.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Прямой интеграл H* гильбертовых пространств $H(\lambda)$ — это пространство эквивалентных классов измеримых и интегрируемых векторных полей $\{u(\lambda)\}$, наделенное скалярным произведением

$$(u, v) = \int (u(\lambda), v(\lambda))_{H(\lambda)} \, d\mu(\lambda).$$

Используя те же рассуждения, что и в доказательстве классической теоремы Рисса—Фишера, можно показать, что H полно. Следовательно, H — гильбертово пространство. Мы обозначаем его символом

$$H = \int_\Lambda H(\lambda) \, d\mu(\lambda).$$

Примеры. 3′. Пусть $\Lambda = N$—множество натуральных чисел, и пусть $\mu(n) = 1$. Тогда

$$H = \int_{\Lambda} H(\lambda)\, \mathrm{d}\mu(\lambda) = \bigoplus_{\lambda \in N} H(\lambda),$$

т. е. в этом случае прямой интеграл сводится к прямой сумме.

3″. Пусть $H(\lambda) = \hat{H}$ для всех $\lambda \in \Lambda$, где $\hat{H}$ — гильбертово пространство. Тогда

$$H = \int \hat{H}(\lambda)\, \mathrm{d}\mu(\lambda) = L^2(\hat{H}, \mu).$$

В частности, если $\hat{H} = C$, то $H = L^2(\mu)$.

Теперь мы дадим полезную лемму, которая выводится из теоремы 4.3.2 о разложении меры и из понятия прямого интеграла гильбертовых пространств. Пусть X, Y, r, μ, $\tilde{\mu}$ и μ_y такие, как в формулировке теоремы 4.3.2. Тогда имеет место следующая лемма.

Лемма 3. *Положим* $H = L^2(X, \mu; \tilde{H})$, $H(y) = L^2(X, \mu_y, \tilde{H})$, *где* $\tilde{H}$ — *гильбертово пространство. Тогда мы можем наделить поля* $y \to H(y)$ *структурой* μ*-измеримых полей гильбертовых пространств, так что*

$$H = \int_{Y} H(y)\, \mathrm{d}\tilde{\mu}(y).$$

(Доказательство см. в [552], § 12.)

Диагональные и разложимые операторы

Пусть t — измеримая существенно ограниченная функция, $t \in L^{\infty}(\Lambda, \mu)$, и пусть $I(\lambda)$ — единичный оператор в $H(\lambda)$. Операторное поле

$$\lambda \to t(\lambda)\, I(\lambda) \in L(H(\lambda), H(\lambda))$$

называется *диагональным оператором в гильбертовом пространстве* $H = \int H(\lambda)\, \mathrm{d}\mu(\lambda)$. Диагональное операторное поле $\{t(\lambda)\, I(\lambda)\}$ определяет оператор T в H:

$$(Tu)(\lambda) = t(\lambda)\, u(\lambda), \quad u \in H.$$

Легко проверить, что $\|T\| = \|t\|_{\infty}$.

Операторное поле $T(\cdot)$: $\Lambda \ni \lambda \to T(\lambda) \in L(\underset{i}{H}(\lambda), \underset{j}{H}(\lambda))$ называют *измеримым*, если все функции $\lambda \to (T(\lambda)\, \underset{i}{e}(\lambda), \underset{j}{e}(\lambda))_{\lambda}$, где $\{\underset{i}{e}\}$ — фундаментальное семейство векторных полей, измеримы.

Если $u(\cdot)$ и $T(\cdot)$ измеримы, то $\lambda \to T(\lambda)\,u(\lambda) \in H(\lambda)$ — измеримое векторное поле. В самом деле, так как $(\overset{i}{e}(\lambda),\ T(\lambda)\overset{i}{e}(\lambda))_\lambda = (T^*(\lambda)\overset{i}{e}(\lambda),\ \overset{j}{e}(\lambda))_\lambda$, то векторное поле $\lambda \to T^*(\lambda)\overset{i}{e}(\lambda)$ измеримо. Поэтому $(T(\lambda)\,u(\lambda), \overset{i}{e}(\lambda))_\lambda = (u(\lambda), T^*(\lambda)\overset{i}{e}(\lambda))_\lambda$ измеримо. Отсюда следует, что $\lambda \to T(\lambda)\,u(\lambda)$ измеримо.

Теперь мы введем важное понятие разложимого оператора. Возьмем $T(\lambda) \in L(H(\lambda), H(\lambda))$, так что числовая функция $\|T(\cdot)\| = (\lambda \to \|T(\lambda)\|_\lambda) \in L^\infty(\Lambda, \mu)$. Положим $N = \operatorname*{ess\,sup}_{\lambda \in \Lambda} \|T(\lambda)\|_\lambda$. Для каждого $u(\cdot) \in H$ векторное поле $\lambda \to T(\lambda)\,u(\lambda)$ измеримо, и мы имеем $\|T(\lambda)\,u(\lambda)\|_\lambda = N\,\|u(\lambda)\|_\lambda$ почти всюду.

Следовательно,

$$\int \|T(\lambda)\,u(\lambda)\|_\lambda^2\, d\mu(\lambda) \leqslant N \int \|u(\lambda)\|_\lambda^2\, d\mu(\lambda) = N^2\,\|u\|^2.$$

Обозначив векторное поле $\{(Tu)(\lambda)\}$ через Tu, мы имеем $Tu \in H$ и $\|Tu\| \leqslant N\|u\|$. Таким образом, $T = \{T(\lambda)\}$ является ограниченным оператором в H. Этот оператор называется *разложимым оператором* и обозначается символом

$$T = \int_\Lambda T(\lambda)\, d\mu(\lambda).$$

Ясно, что $\|T\| = \operatorname*{ess\,sup}_{\lambda \in \Lambda} \|T(\lambda)\|_\lambda = N$.

Легко проверить, что разложимые операторы имеют следующие свойства:

$$\int (T(\lambda) + U(\lambda))\, d\mu(\lambda) = \int T(\lambda)\, d\mu(\lambda) + \int U(\lambda)\, d\mu(\lambda),$$

$$\int T^*(\lambda)\, d\mu(\lambda) = \left(\int T(\lambda)\, d\mu(\lambda)\right)^*,$$

$$\int T(\lambda)\, d\mu(\lambda) \int U(\lambda)\, d\mu(\lambda) = \int T(\lambda) U(\lambda)\, d\mu(\lambda).$$

Если $U(\lambda)$ унитарно почти всюду, то $\int U(\lambda)\, d\mu(\lambda)$ — унитарный оператор в H.

Из вышеприведенных свойств видно, что множество разложимых операторов образует $*$-алгебру в H.

$*$-Алгебра $\mathscr{A}$ в $L(H, H)$ называется *алгеброй фон Неймана*, если она удовлетворяет одному из следующих (эквивалентных) условий:

1) $\mathscr{A}$ замкнута в слабой операторной топологии пространства H.

2) $\mathscr{A}$ замкнута в сильной операторной топологии пространства H.

3) $\mathscr{A}$ совпадает со своим бикоммутантом $\mathscr{A}''$.

Теорема фон Неймана

1) *Алгебра $\mathscr{D}$ диагональных операторов является коммутативной алгеброй фон Неймана.*

2) *Коммутант $\mathscr{D}'$ алгебры $\mathscr{D}$ является алгеброй фон Неймана $\mathscr{R}$ разложимых операторов в H, т. е.*

$$\mathscr{D}' = \mathscr{R}, \quad \mathscr{R}' = \mathscr{D}.$$

(Доказательство см. в [574], гл. I, § 6.)

Пусть $H(X)$ — гильбертово пространство функций с областью определения X, и пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — множество самосопряженных сильно коммутирующих операторов в $H(X)$, которое содержит эллиптический дифференциальный оператор.

Пусть Φ — плотное линейное подмножество в H, наделенное ядерной топологией, которая сильнее топологии, индуцированной из H. Это означает, в частности, что естественное вложение j: $\Phi \to H$ непрерывно. Предположим, что пространство Φ выбрано так, что отображение A_i: $\Phi \to \Phi$ непрерывно. Пусть Φ' — сопряженное пространство линейных непрерывных функционалов на пространстве Φ. Тогда триплет (Φ, H, Φ') называется *триплетом Гельфанда*. Пусть Λ — подмножество в E^n. Тогда имеет место следующая теорема.

Ядерная спектральная теорема

1° *Существует прямой интеграл* $\hat{H} = \int\limits_{\Lambda} \hat{H}(\lambda)\, d\rho(\lambda)$ *и обобщенное преобразование Фурье F:*

$$F: H \to F H \equiv \hat{H} = \int\limits_{\Lambda} \hat{H}(\lambda)\, d\rho(\lambda), \tag{21}$$

которое задается формулой

$$\Phi \ni \varphi(x) \to \hat{\varphi}_k(\lambda) = (F\hat{\varphi})_k(\lambda) = \langle \varphi, e_k(\lambda) \rangle = \int\limits_{X} \varphi(x)\, \overline{e_k(\lambda, x)}\, dx, \tag{22}$$

где $k = 1, 2, \ldots, \dim \hat{H}(\lambda)$ *и* $e_k(\lambda) \in \Phi'$ — *обобщенные собственные векторы. Если* $A_i\varphi \in \Phi$, $i = 1, 2, \ldots, n$, *то*

$$(A_i\varphi, e_k(\lambda)) = \hat{A}_i(\lambda) \langle \varphi, e_k(\lambda) \rangle \tag{23}$$

для почти всех $\lambda \in \Lambda$ относительно ρ, где $\widehat{A}_i(\lambda)$ — спектр оператора A_i. Собственные векторы $e_k(\lambda, x)$ являются регулярными функциями [1]).

2° *Для каждых φ, ψ из Φ выполняется так называемое равенство Парсеваля:*

$$(\varphi, \psi)_H = \int_\Lambda d\rho(\lambda) \sum_{k=1}^{\dim \widehat{H}(\lambda)} \widehat{\varphi}_k(\lambda) \overline{\widehat{\psi}_k(\lambda)} = (\varphi, \psi)_{\widehat{H}}. \tag{24}$$

3° *Обобщенная обратная формула Фурье (спектральный синтез) элемента $\varphi(x)$ из Φ имеет вид*

$$\varphi(x) = \int_\Lambda \sum_{k=1}^{\dim \widehat{H}(\lambda)} \widehat{\varphi}_k(\lambda)\, e_k(\lambda, x)\, d\rho(\lambda). \tag{25}$$

(Доказательство см. в [574], гл. II.)

Замечание 1. Если мы отбросим условие, что множество $\{A_i\}_1^n$ содержит эллиптический оператор, то ядерная спектральная теорема все еще будет иметь место. Однако обобщенные собственные векторы $e_k(\lambda, x)$ не будут в общем регулярными функциями, и мы не будем иметь представления $\widehat{\varphi}_k(\lambda)$ в виде интеграла по x-пространству, как в (22).

Замечание 2. Так называемая «полная спектральная теорема фон Неймана» для множества $\{A_i\}_1^n$ самосопряженных сильно коммутирующих операторов утверждает, что отображение F: $H \to \widehat{H} = \int \widehat{H}(\lambda)\, d\rho(\lambda)$ унитарно. Следовательно, равенство Парсеваля (24) имеет место для любых φ, ψ из H. Однако мы будем иметь представление $\widehat{\varphi}_k(\lambda) = \int \varphi(x) \overline{e_k(\lambda, x)}\, dx$ только для элементов φ из $\Phi(X)$.

Формула (23) требует некоторых дополнительных комментариев. Пусть A_i' — естественное расширение оператора A, заданное тождеством

$$\langle A_i^*\varphi, \psi' \rangle = \langle \varphi, A_i'\psi' \rangle, \tag{26}$$

где φ пробегает Φ, а ψ' — элемент из Φ'. Соотношение (26) означает, что область определения $D(A_i')$ является расширением области определения $D(A_i)$ оператора A_i теми элементами ψ' из Φ', для которых выполняется тождество (26), т. е. $A_i' \supset A_i^* = A_i$. Уравнение (23) теперь может быть записано кратко в виде

$$A_i' e_k(\lambda, x) = \widehat{A}_i(\lambda)\, e_k(\lambda, x), \quad k = 1, 2, \ldots, \dim \widehat{H}(\lambda), \tag{27}$$

[1]) Напомним, что функция $f(x)$ из $H(X)$ называется регулярной, если $\varphi f \in \mathscr{D}(X)$ ($\mathscr{D}(X)$ — пространство Шварца) для каждого $\varphi \in \mathscr{D}(X)$.

где $\hat{A}_i(\lambda)$ — спектр оператора A_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Формула (25) для спектрального синтеза позволяет записать следующее соотношение полноты, которое часто используется в физике:

$$\int d\rho(\lambda) \sum_{k=1}^{\dim \hat{H}(\lambda)} e_k(\lambda, x)\overline{e_k(\lambda, y)} = \delta(x - y). \tag{28}$$

Этот интеграл понимается в смысле слабого интеграла от регулярных распределений $e_k(\lambda, x)\overline{e_k(\lambda, y)}$ на $X \times X$. Слабый интеграл (28), примененный к функции $\varphi(y) \in \Phi(X)$, дает спектральный синтез (25) для φ, а примененный к функции $\varphi(y)\overline{\psi(x)} \in \Phi(X) \times \times \Phi(X)$ — дает равенство Парсеваля (24).

Заметим, что спектральная теорема ничего не говорит об ортогональности обобщенных собственных векторов. Однако во многих случаях спектральная функция $d\rho(\lambda)$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега $d\lambda$ на множестве Λ. Согласно теореме Радона—Никодима это предполагает, что $d\rho(\lambda) = \rho(\lambda)\, d\lambda$. Обратная формула (22) позволяет записать следующее соотношение ортогональности:

$$\int_X e_k(\lambda, x)\overline{e_{k'}(\lambda', x)}\, dx = \rho^{-1}(\lambda)\,\delta(\lambda - \lambda')\,\delta_{k,k'}. \tag{29}$$

Это обобщение хорошо известного соотношения ортогональности из обычного анализа Фурье

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\lambda x)\overline{\exp(i\lambda' x)}\, dx = 2\pi\delta(\lambda - \lambda').$$

В обоих случаях эти интегралы понимаются как слабые интегралы распределений $e_k(\lambda, x)$, $e_k(\lambda', x)$, определенных на подпространстве $\hat{\Phi}(\Lambda) = F(\Phi(X))$.

Спектральный синтез (25) элемента $\varphi(x)$ из Φ показывает, что было бы полезно вводить пространство $H'(\lambda) \subset \Phi'$, изоморфное $\hat{H}(\lambda)$, т. е.

$$\hat{H}(\lambda) \ni \{\hat{\varphi}_k(\lambda)\} \to \hat{\varphi}(\lambda) = \sum_{k=1}^{\dim \hat{H}(\lambda)} \hat{\varphi}_k(\lambda)\,\hat{e}_k(\lambda) \to$$

$$\to \varphi(\lambda, x) = \sum_{k=1}^{\dim \hat{H}(\lambda)} \hat{\varphi}_k(\lambda)\, e_k(\lambda, x) \in H'(\lambda) \subset \Phi'. \tag{30}$$

Здесь $\hat{e}_k(\lambda)$ — ортонормированные базисные векторы из $\hat{H}(\lambda)$, т. е. $(\hat{e}_k(\lambda), \hat{e}_{k'}(\lambda))_{\hat{H}(\lambda)} = \delta_{kk'}$, и $e_k(\lambda, x) \in \Phi'(X)$. Формула

(30) показывает, что каждое $H'(\lambda)$ является линейным подпространством в Φ', и по (27) и (30)

$$A'_i\varphi(\lambda, x) = \widehat{A}_i(\lambda)\,\varphi(\lambda, x), \tag{31}$$

т. е. любой элемент $\varphi(\lambda, x)$ из $H'(\lambda)$ является обобщенным собственным вектором всех A'_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Формула (25) теперь кратко может быть записана в виде

$$\varphi(x) = \int_\Lambda \varphi(\lambda, x)\, d\rho(\lambda). \tag{32}$$

Интересно, что изоморфизм, заданный формулой (30), между пространствами $\widehat{H}(\lambda)$ и $H'(\lambda)$ порождает конечное скалярное произведение в пространствах $H(\lambda) \subset \Phi'$. Мы проиллюстрируем это двумя примерами.

Пример 4. Пусть $H = L^2(R^4)$, где R^4 — четырехмерное пространство Минковского. Пусть $A = \square = -\nabla^2 + \partial^2/\partial t^2$ — волновой оператор в H. Пусть Φ — S-пространство Шварца и $\Phi' = S'(R^4)$. Тогда все предположения ядерной спектральной теоремы выполнены. Обобщенные собственные векторы

$$\square\, e(\lambda, x) = \widehat{\square}(\lambda)\, e(\lambda, x) \quad (k = 1) \tag{33}$$

являются плоскими волнами

$$e(\lambda, x) = (2\pi)^{-2}\exp(ipx), \quad p^2 = \lambda^2 = \widehat{\square}(\lambda), \tag{34}$$

где параметр λ играет роль массы скалярной частицы.

Пространство $\widehat{H}(\lambda)$, где

$$\lambda^2 = p_0^2 - \boldsymbol{p}^2, \tag{35}$$

является импульсным пространством, в котором скалярное произведение (для положительных масс) совпадает с

$$(\widehat{\varphi}, \widehat{\psi})_{\widehat{H}(\lambda)} = \int\limits_{p_0=[\boldsymbol{p}^2+\lambda^2]^{1/2}} p_0^{-1}\, d^3\boldsymbol{p}\,\widehat{\varphi}(\boldsymbol{p})\overline{\widehat{\psi}(\boldsymbol{p})}. \tag{36}$$

Это скалярное произведение порождает следующую формулу в $H'(\lambda)$:

$$(\varphi, \psi)_{H'(\lambda)} = i\int_t d^3x\,[\varphi(\lambda, x)\,\partial_t\overline{\psi(\lambda, x)} - (\partial_t\varphi(\lambda, x))\,\overline{\psi(\lambda, x)}] \equiv$$

$$\equiv i\int_t d^3x\,\varphi(\lambda, x)\overleftrightarrow{\partial_t}\,\overline{\psi(\lambda, x)}, \tag{37}$$

где индекс t при интеграле означает, что все функции под знаком интеграла взяты в один и тот же момент времени t. Легко проверить, что формула (37) обладает всеми свойствами, требуемыми от скалярного произведения, и сохраняется во времени. Обобщенное разложение Фурье (25) в этом случае в точности совпадает с обычным разложением Фурье

$$\varphi(\lambda, x) = 2^{1/2}[2\pi]^{-3/2} \int d^4p \exp(-ipx)\,\delta(p^2 - \lambda^2)\,\theta(p_0)\,\varphi(\boldsymbol{p}). \quad (38)$$

Пример 5. Мы имеем подобный результат для уравнения Дирака в пространстве $(L^2)^4(R^4)$. В самом деле, пусть

$$\gamma^\mu \partial_\mu \psi(\lambda, x) = \lambda\psi(\lambda, x), \quad (39)$$

где $\lambda = m$ и

$$\psi(\lambda, x) = \exp(-ipx)\begin{bmatrix} \psi_1(p) \\ \psi_2(p) \\ \psi_3(p) \\ \psi_4(p) \end{bmatrix}, \quad p_\mu p^\mu = m^2 = \lambda^2.$$

Скалярное произведение¹) в $\hat{H}(\lambda)$

$$(\varphi, \psi)_{\hat{H}(\lambda)} = \int\limits_{p_0=[\boldsymbol{p}^2+\lambda^2]^{1/2}} p_0^{-1}\, d^3\boldsymbol{p} \sum_{\alpha=1}^{4} \hat{\varphi}_\alpha(\boldsymbol{p})\,\overline{\hat{\psi}_\alpha(\boldsymbol{p})} \quad (40)$$

индуцирует следующее инвариантное относительно конечного времени скалярное произведение в $H'(\lambda)$:

$$(\varphi, \psi)_{H'(\lambda)} = \int\limits_t d^3x \sum_{\alpha=1}^{4} \varphi_\alpha(\lambda, x)\,\overline{\psi_\alpha(\lambda, x)} = \int\limits_{\sigma(t)} d\sigma^\mu \varphi(x)\,\gamma^\mu \overline{\psi(x)}. \quad (41)$$

Подчеркнем, что в квантовой физике чаще интересуются пространствами $H'(\lambda) \subset \Phi'$, чем гильбертовыми пространствами $\hat{H}(\lambda)$.

§ 4. Функции от самосопряженных операторов

Пусть A — самосопряженный оператор, а $E(\lambda)$ — разложение единицы, сопоставляемое с A. Мы хотим определить функцию $f(A)$ от оператора A и разработать операторное исчисление для множества функций от A.

Пусть $f(\lambda)$ — комплексная непрерывная функция, определенная на вещественной прямой. Тогда для любого u из H множество векторов $v(\lambda) = f(\lambda)E(\lambda)u$ представляет собой однопараметрическую (сильно) непрерывную кривую в H. Таким образом,

¹) В физической литературе для волновых функций Дирака используют скалярное произведение, которое антилинейно по первому множителю.

для любых α и β, удовлетворяющих условию $-\infty < \alpha < \beta < \infty$, может быть определен интеграл

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\lambda)\,\mathrm{d}E(\lambda)\,u$$

в смысле интеграла Римана, рассмотренного в § 2, т. е.

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\lambda)\,\mathrm{d}E(\lambda)\,u = \lim_{i\to\infty} \sum_{i} f(\lambda_i')\,[E(\lambda_{i+1}) - E(\lambda_i)]\,u, \tag{1}$$

где

$$\alpha = \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n = \beta, \quad \lambda_i' \in (\lambda_i, \lambda_{i+1}],$$

и

$$\max|\lambda_{i+1} - \lambda_i| \to 0 \quad \text{при} \quad i \to \infty.$$

Согласно результатам § 2, интеграл (1) всегда существует.

Мы можем также определить несобственный интеграл следующей формулой:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\,\mathrm{d}E(\lambda)\,u = \lim_{\substack{\alpha\to-\infty\\ \beta\to\infty}} \int_{\alpha}^{\beta} f(\lambda)\,\mathrm{d}E(\lambda)\,u, \tag{2}$$

если такой предел интегралов Римана существует. Вопрос существования интеграла (2) решается следующей теоремой.

Теорема 1. *Пусть $E(\lambda)$ — разложение единицы. Тогда для заданного u из H следующие условия эквивалентны:*

1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\,\mathrm{d}E(\lambda)\,u$ *существует,* (3)

2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda)|\,\mathrm{d}\,\|E(\lambda)\,u\|^2 < \infty,$ (4)

3) $F(v) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\,\mathrm{d}\,(E(\lambda)\,v,\,u)$ — *ограниченный линейный функционал.* (5)

(Доказательство см. в [869], гл. 11.)

Теперь мы покажем, что самосопряженный оператор $f(A)$ может сопоставляться с каждой вещественной непрерывной функцией $f(\lambda)$, $\lambda \in (-\infty, \infty)$. В самом деле, имеет место теорема.

Теорема 2. *Пусть $E(\lambda)$ — разложение единицы, соответствующее самосопряженному оператору A, и пусть $f(\lambda)$ — вещественная непрерывная функция. Равенство*

$$(f(A)u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\,\mathrm{d}(E(\lambda)u, v), \tag{6}$$

где

$$u \in D = \left\{ u \in H\colon \int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda)|^2 \,\mathrm{d}\,\|E(\lambda)u\|^2 < \infty \right\}, \tag{7}$$

а v — любой элемент из H, определяет самосопряженный оператор $f(A)$ в H с $D(f(A)) = D$. Более того, $f(A)E(\lambda) \supset E(\lambda)$, т. е. операторы $f(A)$ и $E(\lambda)$ коммутируют.

(Доказательство см. в [869], гл. 11.)

§ 5. Существенно самосопряженные операторы

Мы знаем, что спектр самосопряженного оператора вещественен и соответствующие собственные функции образуют полное ортогональное множество функций. Поэтому самосопряженные операторы, определенные в гильбертовом пространстве векторов физических состояний, являются подходящими кандидатами для физических наблюдаемых. Однако в теории представлений алгебр Ли самосопряженные операторы не являются наиболее удобными объектами для формулировки ряда интересных теорем. Поэтому необходимо ввести более широкий класс операторов, которые, с одной стороны, все еще имеют хорошие спектральные свойства и, с другой стороны, позволяют формулировать определенные фундаментальные математические результаты теории представлений.

Рассмотрим сначала симметрические операторы. Спектр симметрического оператора также веществен, и любые два собственных вектора, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны (см. [6], стр. 136). Однако симметрический оператор A, определенный в гильбертовом пространстве H векторов физических состояний, не является подходящим кандидатом для наблюдаемой, поскольку множество всех собственных векторов симметрического оператора A не образует полного множества, т. е. существуют векторы состояний в H, которые ортогональны всем собственным векторам оператора A. На таких векторах наблюдаемая A не дает собственного значения.

Если мы захотим заменить симметрический оператор его самосопряженным расширением, то увидим, что во многих случаях заданный симметрический оператор имеет много, или даже бесконечно много, самосопряженных расширений. Поэтому в общем симметрические операторы не являются подходящими кандидатами для наблюдаемых. Однако отдельные симметрические операторы, которые имеют единственные самосопряженные расширения, могли бы быть использованы в физике. Такие операторы называются существенно самосопряженными.

Симметрический оператор A называют *существенно самосопряженным* (с. с. с.), если его замыкание $\bar{A}$ самосопряжено, т. е. $(\bar{A})^* = \bar{A}$. Эти операторы, с одной стороны, допускают с помощью замыкания физическую интерпретацию как наблюдаемые и, с другой стороны, являются удобными объектами для формулировки ряда интересных теорем теории представлений алгебр Ли.

Выведем теперь простейшие свойства существенно самосопряженных операторов.

Лемма 1. *Оператор A существенно самосопряжен тогда и только тогда, когда $\bar{A} = A^*$.*

Доказательство. Пусть A с. с. с. Тогда по лемме 1 из § 1 $\bar{A} = (\bar{A})^* = A^*$. Обратно, если $\bar{A} = A^*$, то по (6) $(\bar{A})^* = A^{**} = \bar{A}$.

Заметим, что по теореме 4 из § 1 симметрический оператор существенно самосопряжен, если его индексы дефекта равны нулю.

Лемма 2. *Пусть $A_k^* = A_k$, $k = 1, 2$, и пусть спектральные семейства этих операторов взаимно коммутируют. Тогда $A_1 \pm \pm A_2$ существенно самосопряжен.*

Доказательство. Доказательство следует прямо из спектральной теоремы.

Полезный критерий существенной самосопряженности дается следующей леммой.

Лемма 3. *Пусть A — симметрический оператор, и пусть $(A + I)^{-1}$ ограничен и плотно определен. Тогда A существенно самосопряжен.*

Доказательство. По (1.1) ограниченный линейный оператор непрерывен. Поэтому замкнутый оператор $(A + I)^{-1} = (\bar{A} + I)^{-1}$ определен на всем пространстве. Следовательно, $R(\bar{A} + I) = H$. По (1.16) оператор $\bar{A} + I$ симметричен. Следовательно, по лемме 1.2 $\bar{A} + I$ самосопряжен. Поэтому по лемме 2 $\bar{A} = (\bar{A} + I) - I$ существенно самосопряжен.

Докажем другой полезный результат.

Лемма 4. *Пусть D — плотное линейное многообразие в гильбертовом пространстве H. Пусть A и A' — линейные преобразования, области определения которых совпадают с D и области значений которых содержатся в D, такие, что A' содержится в операторе, сопряженном к A. Если $A'A$ существенно самосопряжен, то замыкание оператора A' сопряжено A.*

Доказательство. Мы должны показать, что граф оператора A^* не содержит ненулевых элементов, ортогональных к графу оператора A'. Предположим, что $\{a, b\}$ — элемент графа оператора A^*, ортогональный к графу оператора A'. Другими словами, $b = A^*a$, но $(y, a) + (A'y, b) = 0$ для всех y из D. Если x лежит в D, то Ax лежит в D и поэтому $(Ax, a) + (A'Ax, b) = 0$, т. е. $(x, b) + (A'Ax, b) = 0$. Но $1 + A'A$ имеет плотную область значений. Следовательно, $b = 0$. Поэтому $(y, a) = 0$ для всех y из D. Следовательно, $a = 0$.

Заметим, наконец, что свойствами заданного оператора, как показывают следующие два примера, мы можем в некоторой мере управлять.

1° Теорема 1.4 утверждает, что симметрический оператор с различными индексами дефекта не имеет самосопряженного расширения. Однако если мы вложим первоначальное гильбертово пространство H в большее пространство $\tilde{H}$, то будем иметь такую теорему.

Теорема 5. *Каждый симметрический оператор A в H с произвольными индексами дефекта (n_+, n_-) может быть расширен до самосопряженного оператора A, действующего в большем гильбертовом пространстве $\tilde{H} \supseteq H$.*

(Доказательство см. в [616].)

Следовательно, если элементы большего гильбертова пространства $\tilde{H}$ допускают физическую интерпретацию в виде векторов состояний, то мы можем в принципе взять любой симметрический оператор в H в роли физической наблюдаемой.

2° Дифференциальный оператор $\mathrm{d} = \mathrm{i}^{-1}\mathrm{d}/\mathrm{d}\varphi$ неограничен в $H = L^2(0, 2\pi)$ и поэтому разрывен. Однако это верно только в том случае, если мы рассматриваем непрерывность относительно сильной топологии гильбертова пространства. В пространстве распределений дифференциальный оператор d непрерывен. Чтобы показать это, напомним, что последовательность $\{F_n\}$ распределений *сходится* к распределению F, если для произвольной пробной функции ψ имеем

$$\lim_{n\to\infty} (F_n, \psi) = (F, \psi).$$

Пусть $\psi \in C^\infty(0, 2\pi)$, и пусть $F_n \to F$. Тогда

$$\left(\frac{\partial F_n}{\partial\varphi}, \psi\right) = \left(F_n, -\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right) \to \left(F, -\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right) = \left(\frac{\partial F}{\partial\varphi}, \psi\right).$$

Поэтому если $F_n \to 0$, то $\mathrm{i}^{-1}\,\mathrm{d}F_n/\mathrm{d}\varphi \to 0$, т. е. оператор d непрерывен.

Эти два примера указывают на то, что мы можем значительно улучшить свойства операторов, если введем подходящим образом выбранную структуру в пространстве, где эти операторы действуют.

Литература

1. *Abellanas L., Alonso L. M.*, J. Math. Phys., **16**, 1580 (1975).
Общая постановка для инвариантов Казимира.
2. *Abers E., Grodsky I. T., Norton R. E.*, Phys. Rev. Lett., **19**, 50 (1967).
Недостатки теорий бесконечнокомпонентных полей.
3. *Adler S. Z., Dashen R. F.*, Current Algebras and Applications to Particle Physics, Benjamin, New York, 1968. [Имеется перевод: *Адлер С., Дашен Р.* Алгебры токов и их применение в физике частиц. — М.: Мир, 1970.]
4. *Адо И. Д.*, Представление алгебр Ли матрицами, — Усп. матем. наук, **2**, вып. 6, 159 (1947).
5. *Ado I. D.*, Am. Math. Soc. Translations, Series **1**, **9**, 308 (1962).
Группы Ли.
6. *Ахиезер Н. И., Глазман И. М.*, Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, — М.: Наука, 1966.
7. *Аллилуев С. П.* О связи между «случайным» вырождением и «скрытой» симметрией системы. — ЖЭТФ, **33**, 200 (1957).
8. *Altmann S. L.*, Rev. Mod. Phys., **35**, 641 (1963).
Полупрямые произведения и точечные группы.
9. *Altshul M. S.*, J. Math. Phys., **15**, 851 (1974).
Представления группы преобразований координат.
10. *Ambrose W.*, Duke Math. J., **11**, 589 (1944).
Спектральное разложение групп унитарных операторов.
11. *Ambrose W., Singer J. M.*, Duke Math. J., **25**, 647 (1958).
Об однородных римановых многообразиях.
12. *Anderson R. L., Fisher J., Rączka R.*, Proc. Roy. Soc. London, **A302**, 491 (1968).
Задача о связывании лестничных представлений групп $U(p, q)$, I.
13. *Anderson R. L., Rączka R.*, Proc. Roy. Soc. London, **A302**, 501 (1968).
Задача о связывании лестничных представлений групп $U(p, q)$, II.
Ограничение на связь $U(p, q)$-лестниц.
14. *Anderson R. L. et al.*, J. Math. Phys., **11**, 1050 (1970).
Коэффициенты Клебша—Гордана для связывания представлений основной серии SL $(2, C)$.
15. *Anderson R. L. et al.*, J. Math. Phys., **11**, 1059 (1970).
Рекуррентные соотношения и соотношения симметрии для коэффициентов Клебша—Гордана однородной группы Лоренца.
16. *Andrews M., Gunson J.*, J. Math. Phys., **5**, 1391 (1964).
Комплексные угловые моменты и многочастичные состояния, I. Свойства локальных представлений группы вращений.
17. *Angelopoulos. E.*, Ann. Inst. H. Poincaré, Sect. **A**, **18**, 39 (1973).
Об унитарных неприводимых представлениях полупрямых произведений с нильпотентной нормальной подгруппой.
18. *Angelopoulos E.*, J. Math. Phys., **15**, 155 (1974).
Сужение на подгруппу Лоренца унитарных неприводимых представлений группы Пуанкаре, индуцированных при помощи полупростой малой группы.
19. *Angelopoulos E., Bayen F., Flato M.*, Phys. Scr., **9**, 173 (1974).
О локализуемости безмассовых частиц.

20. *Araki S.*, J. Math. Osaka City Univ., **13**, 1 (1962).
О корневых системах и инфинитезимальной классификации неприводимых симметрических пространств.
21. *Araki H.*, *Woods E. J.*, J. Math. Phys., **4**, 637 (1963).
Представление канонических коммутационных соотношений, описывающих нерелятивистский свободный газ Бозе.
22. *Armstrong L., Jr.*, J. Math. Phys., **12**, 953 (1971).
Группа O (2, 1) и радиальные функции гармонического осциллятора.
23. *Arnal D.*, *Pinczon G.*, J. Math. Phys., **15**, 350 (1974).
Об алгебраически неприводимых представлениях алгебры Ли sl (2).
24. *Auslander L.*, *Kostant B.*, Bull. Am. Math. Soc., **73**, 692 (1967).
Квантование и представления разрешимых групп Ли.
25. *Auslander L.*, *Kostant B.*, Inv. Math., **14**, 255 (1971).
Поляризация и унитарные представления разрешимых групп Ли.
26. *Auslander L.*, *Moor C. C.*, Memoirs Am. Math. Soc., **62**, 1 (1966).
Унитарные представления разрешимых групп Ли.
27. *Bacry H.*, Leçons sur la théorie des groupes et les symétries des particles élémentaires, Gordon & Breach, New York, 1967.
Лекции по теории групп и симметриям элементарных частиц.
28. *Bacry H.*, *Combe Ph.*, *Richard J. L.*, Nuovo Cim., **67A**, 267 (1970); **70A**, 289 (1970).
Теоретико-групповой анализ элементарной частицы во внешнем электромагнитном поле.
29. *Bacry H.*, *Richard J. L.*, J. Math. Phys., **8**, 2230 (1967).
Частичное теоретико-групповое рассмотрение для атома водорода.
30. *Baggett L.*, Proc. Am. Math. Soc., **21**, 502 (1969).
Представления Гильберта—Шмидта групп.
31. *Baiquni A.*, *Barut A. O.*, Phys. Rev., **D9**, 1084 (1974).
Теория электромагнитных структурных функций протона.
32. *Baird G. E.*, *Biedenharn L. C.*, J. Math. Phys., 4, 1449 (1963); **5**, 1723, 1730 (1964).
О представлениях полупростых групп Ли, II, III, IV.
33. *Balaban T.*, *Jezuita K.*, *Rączka R.*, J. Math. Phys., **16**, 1475 (1975).
Вторичное квантование классической нелинейной релятивистской полевой теории, I. Канонический формализм.
34. *Balaban T.*, *Jezuita K.*, *Rączka R.*, Comm. of Math. Phys., **48**, 291 (1976).
Вторичное квантование классической нелинейной релятивистской полевой теории, II. Построение релятивистского взаимодействующего локального квантового поля.
35. *Bander M.*, *Itzykson C.*, Rev. Mod. Phys., **38**, 330; 346 (1966).
Теория групп и атом водорода, I, II.
36. *Bargmann V*, Z. Phys., **99**, 576 (1936).
К теории атома водорода.
37. *Bargmann V.*, Ann. of Math., **48**, 568 (1947).
Неприводимые унитарные представления группы Лоренца.
38. *Bargmann V.*, Ann. of Math., **59**, 1 (1954).
Об унитарных лучевых представлениях непрерывных групп.
39. *Bargmann V.*, Comm. Pure Appl. Math., **14**, 187 (1961).
О гильбертовом пространстве аналитических функций и ассоциированном интегральном преобразовании.
40. *Bargmann V.*, Rev. Mod. Phys., **34**, 829 (1962).
О представлениях группы вращений.
41. *Bargmann V.*, J. Math. Phys., **5**, 862 (1964).
Замечание по теореме Вигнера об операциях симметрии.
42. *Bargmann V.*, Group Representations on Hilbert Spaces of Analytic Functions, в кн.: Analytic Methods in Mathematical Physics, Gordon & Breach, New York, 1970.

Представления групп в гильбертовых пространствах аналитических функций.
43. *Bargmann V.* (ed.), Group Representations in Mathematics and Physics, Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York, 1970.
Представления групп в математике и физике.
44. *Bargmann V., Moshinsky M.*, Nucl. Phys., **18**, 697 (1960); 23, 177 (1961).
Теория групп и гармонический осциллятор, I, II.
45. *Bargmann V., Wigner E. P.*, Proc. Nat. Acad. USA, **34**, 211 (1948).
Теоретико-групповое рассмотрение релятивистских волновых уравнеиий.
46. *Barut A. O.*, Phys. Rev., **135B**, 839 (1964).
Группа динамической симметрии, основанная на уравнении Дирака, и ее обобщение в теории элементарных частиц.
47. *Barut A. O.*, J. Math. Phys., **5**, 1652 (1964).
Комплексная группа Лоренца с вещественной метрикой: групповая структура.
48. *Barut A. O.*, Analyticity, Complex and Quaternionic Lorentz Groups and Internal Quantum Numbers, Lectures in Theor. Phys., **7a**, Boulder, Colorado, 1965.
Аналитичность, комплексная и кватернионная группы Лоренца и внутренние квантовые числа.
49. *Barut A. O.*, Phys. Rev., **139B**, 1433 (1965).
Днnámика нарушенной SU (*N*)-симметрии для осциллятора.
50. *Barut A. O.*, Mass Spectrum from Noncompact Groups, в кн.: Lect. Seminar on High Energy Physics and Elementary Particles, IAEA, Vienna, 1965.
Спектр масс на основе некомпактных групп.
51. *Barut A. O.*, J. Math. Phys., **7**, 1908 (1966).
О неприводимых представленнях некоторого класса алгебр и связанных с ними проективных представлениях.
52. *Barut A. O.*, The Two Uses of Non-Compact Groups in Particle Physics and Their Relations, в кн.: Proc. Conf. on Non-Compact Groups in Particle Physics, Benjamin, New York, 1966.
Два применения некомпактных групп в физике частиц и их связь.
53. *Barut A. O.*, Phys. Rev., **156**, 1538 (1967).
Вычисление амплитуд переходов с помощью некомпактных динамических групп.
54. *Barut A. O.*, Unified Algebraic Construction of Compact and Non-Compact Lie Algebras and Lie Groups, Lectures in Theoretical Physics **9A**, Gordon & Breach, New York, 1967.
Единая алгебраическая конструкция представлений компактных и некомпактных алгебр Ли и групп Ли.
55. *Barut A. O.*, Applications of the Dynamical Group Theory to the Structure of Hadrons, Lect. in Theor. Physics **9**, Gordon & Breach, New York, 1968.
Применение теории динамических групп к изучению структуры адронов.
56. *Barut A. O.*, Dynamical Groups and Their Currents: A Model for Strong Interactions, Springer Tracts in Modern Physics, **50**, 1969.
Динамические группы и их токи: модель для сильных взаимодействий.
57. *Barut A. O.*, Introduction to de Sitter and Conformal Groups and Their Physical Applications, Lect. in Theor. Physics, **13**, Univ. of Colorado Press, 1971.
Введение в группы де Ситтера и конформную и их физические применения.
58. *Barut A. O.*, Representations of the Dynamical Group *O* (4, 2) Realized in the Dyonium-Atom, Lect. in Theor. Physics, **13**, Univ. of Colorado Press, 1971.
Представления динамической группы *O* (4, 2), реализованные в атоме диония.
59. *Barut A. O.*, On the Group Structure of the Periodic System of Elements, в кн.: Structure of Matter (ed. by B. Wybourne), Univ. of Canterbury Press, 1972.
О групповой структуре периодической системы элементов.
60. *Barut A. O.*, Dynamical Groups and Generalized Symmetries in Quantum Theory, Lecture Notes, Univ. of Canterbury Press, Christchurch, 1972.
Динамические группы и обобщенные симметрии в квантовой теории.

61. *Barut A. O.*, SIAM Applied Mathematics, **25**, 247 (1973).
Некоторые необычные применения представлений алгебр Ли в квантовой теории.
62. *Barut A. O.*, Helv. Phys. Acta, **46**, 496 (1973).
Конформная группа, группа Шредингера, динамическая группа, максимальная кинематическая группа массивной шредингеровской частицы.
63. *Barut A. O.*, Phys. Rev., **D10**, 2709 (1974).
Связь спин—статистика для диония.
64. *Barut A. O.*, Phys. Rev., **184**, 1342 (1969).
Теория релятивистского Н-атома и позитрония.
65. *Barut A. O., Bornzin G.*, J. Math. Phys., **12**, 841 (1971).
SO (4, 2)-формулировка нарушения симметрии в релятивистских задачах Кеплера с магнитными зарядами либо без них.
66. *Barut A. O., Bornzin G.*, Lett. Nuovo Cim., **6**, 177 (1973).
Алгебраическое решение уравнения Шредингера для класса потенциалов, зависящих от скорости.
67. *Barut A. O., Bornzin G.*, Phys. Rev., **D7**, 3018 (1973).
Новый релятивистский кулоновский гамильтониан с *O* (4)-симметрией и спинорная реализация динамической группы *O* (4, 2).
68. *Barut A. O., Bornzin G.*, J. Math. Phys., **15**, 1000 (1974).
Объединение внешней конформной группы симметрии и внутренней конформной динамической группы.
69. *Barut A. O., Böhm A.*, Phys. Rev., **139B**, 1107 (1965).
Динамические группы и массовая формула.
70. *Barut A. O., Böhm A.*, J. Math. Phys., **11**, 2938 (1970).
Сужение одного класса представлений группы *O* (4, 2) на SO (4, 1) и SO (3, 2).
71. *Barut A. O., Brittin W.* (eds.), De Sitter and Conformal Groups and Their Applications, Lect. in Theor. Phys. **XII**, Univ. of Colorado Press, 1971.
Группы де Ситтера и конформная и их применения.
72. *Barut A. O., Budini P., Fronsdal C.*, Proc. Roy. Soc. London, **291**, 106 (1966).
Два примера ковариантных теорий с внутренними симметриями, включающими спин.
73. *Barut A. O., Corrigan D., Kleinert H.*, Phys. Rev. Lett., **20**, 167 (1968).
Магнитные моменты, форм-факторы и спектр масс барионов.
74. *Barut A. O., Corrigan D., Kleinert H.*, Phys. Rev., **167**, 1527 (1968).
Получение спектра масс и магнитных моментов из сохранения тока в релятивистских *O* (3, 2)- и *O* (4, 2)-теориях.
75. *Barut A. O., Fronsdal C.*, Proc. Roy. Soc. London, **A287**, 532 (1965).
О некомпактных группах, II. Представления 2 + 1-группы Лоренца.
76. *Barut A. O., Girardello L.*, Comm. Math. Phys., **21**, 41 (1971).
Новые «когерентные» состояния, ассоциированные с некомпактными группами.
77. *Barut A. O., Girardello L., Wyss W.*, Lett. Nuovo Cim., **4**, 100 (1972).
Бесконечномерная алгебра Ли, общая для дуальных моделей, алгебры токов, динамических групп и калибровочных групп.
78. *Barut A. O., Girardello L., Wyss W.*, Helv. Phys. Acta, **49**, 807 (1976).
Нелинейные *O* $(n+1)$-симметричные полевые теории, нарушение симметрии и конечноэнергетические решения.
79. *Barut A. O., Haugen R.*, Ann. of Phys., **71**, 519 (1970).
Теория конформно инвариантной массы.
80. *Barut A. O., Haugen R.*, Nuovo Cim., **18A**, 495, 511 (1973).
Конформно инвариантные массивные спинорные уравнения, I, II.
81. *Barut A. O., Kleinert H.*, Phys. Rev., **156**, 1546 (1967).
Вычисление релятивистских вероятностей переходов и форм-факторов на основе некомпактных групп.
82. *Barut A. O., Kleinert H.*, Phys. Rev., **157**, 1180 (1967).

Операторы токов и уравнения Майорана для атома водорода в схеме динамических групп.
83. *Barut A. O., Kleinert H.*, в кн.: «Symmetry Principles at High Energies», Fourth Coral Gables Conference (W. H. Freeman, S. Francisco), 1967.
Решение релятивистской проблемы дискретных масс с внутренними степенями свободы и дальнейшее развитие.
84. *Barut A. O., Komen G.*, Phys. Rev., **D1**, 418 (1970).
Реализация коммутационных соотношений алгебры токов в пространстве решений конечно- или бесконечнокомпонентных волновых уравнений.
85. *Barut A. O., Komy S.*, J. Math. Phys., 7, 1903 (1966).
Унитарные и антиунитарные лучевые представления произведения коммутирующих операторов четности.
86. *Barut A. O., Malin S.*, Rev. Mod. Phys., **40**, 632 (1968).
Операторы координат и локализуемость квантовых систем, описываемых конечно- и бесконечномерными волновыми уравнениями.
87. *Barut A. O., Malin S., Carmeli M.*, Ann. Phys., **77**, 454 (1973).
Рассеяние электромагнитного излучения на языке функций на группе SU (2).
88. *Barut A. O., Muzinich J., Williams D.*, Phys. Rev., **130**, 442 (1963).
Построение инвариантных амплитуд рассеяния для произвольных спинов и аналитическое продолжение по полному угловому моменту.
89. *Barut A. O., Phillips E. S.*, Comm. Math. Phys., **8**, 52 (1968).
Матричные элементы представлений некомпактных групп в непрерывном базисе.
90. *Barut A. O., Rasmussen W.*, Phys. Rev., **D3**, 956 (1971).
Нерелятивистская и релятивистская кулоновская амплитуда как матричный элемент вращения в O (4, 2).
91. *Barut A. O., Rasmussen W.*, J. Phys., **B6**, 1695, 1713 (1973).
Атом водорода как релятивистская элементарная частица, I, II.
92. *Barut A. O., Rasmussen W., Salamò S.*, Phys. Rev., **10D**, 622, 630 (1974).
Релятивистские амплитуды переходов в классе бесконечных мультиплетов O (4, 2), I, II.
93. *Barut A. O., Rączka R.*, Proc. Roy. Soc. London, **A287**, 519 (1965).
О некомпактных группах, I. Классификация некомпактных вещественных простых групп и групп, содержащих группу Лоренца.
94. *Barut A. O., Rączka R.*, Ann. Inst. H. Poincaré, **A17**, 111 (1972).
Свойства неунитарных индуцированных представлений массы нуль группы Пуанкаре в пространстве тензорнозначных функций.
95. *Barut A. O., Rączka R.*, Nuovo Cim., **31B**, 19 (1976); Lett. Math. Phys., **1**, 315 (1976).
Квантованные возбуждения релятивистских протяженных частиц.
96. *Barut A. O., Wilson R.*, J. Math. Phys., **17**, 900 (1976).
Некоторые новые тождества для коэффициентов Клебша—Гордана и функции представлений групп SO (2, 1) и SO (4).
97. *Barut A. O., Wilson R.*, Phys. Rev., **D13**, 2629; 2647 (1976).
Бесконечнокомпонентные поля, I, II.
98. *Bateman H.*, Proc. Lond. Math. Soc., **8**, 223 (1910).
99. *Baumslag G.*, Lecture Notes on Nilpotent Groups, Providence, Rhode Island, 1971.
Конспекты лекций по нильпотентным группам.
100. *Baz E. El, Castel B.*, Graphical Methods of Spin Algebras in Atomic, Nuclear and Particle Physics, M. Dekker, New York, 1972. [Имеется перевод: *Эль-Баз Э., Кастель Б.* Графические методы алгебры спинов в физике атома, ядра и элементарных частиц. — М.: Мир, 1974.]
101. *Beg M. A., Ruegg H.*, J. Math. Phys., **6**, 677 (1965).
Множество гармонических функций для группы SU (3).
102. *Behrends R. E. et al.*, Rev. Mod. Phys., **34**, 1 (1962).
Простые группы и симметрии сильных взаимодействий.

103. *Belifante J. F. G., Kolman B.*, A Survey of Lie Groups and Lie Algebras with Applications and Comput. Methods, SIAM, Philadelphia, 1972.
Обзор по группам Ли и алгебрам Ли с приложениями и вычислительными методами.
104. *Белоногов В. А., Фомин А. Н.* Матричные представления в теории конечных групп. — М.: Наука, 1976.
105. *Beltrametti E. G., Luzatto G.*, Nuovo Cim., **A51**, 147 (1967).
Общее рассмотрение представлений SU (2) с комплексным угловым моментом.
106. *Березин Ф. А.* Представления комплексных полупростых групп Ли в банаховом пространстве. — ДАН СССР, **110**, 897 (1956).
107. *Березин Ф. А.* Операторы Лапласа на полупростых группах Ли. — Труды Моск. матем. общ., **6**, 371 (1957).
108. *Березин Ф. А., Гельфанд И. М.* Несколько замечаний к теории сферических функций на симметрических римановых многообразиях. — Труды Моск. матем. общ., **5**, 311 (1956).
109. *Березин Ф. А. и др* Представления групп. — Усп. матем. наук, **11**, вып. 6, 13 (1956).
110. *Berger M.*, Ann. Sci. École Norm. Sup., **74**, 85 (1957).
Некомпактные симметрические пространства.
111. *Bernat F. N., Conzé et al.*, Representations des groupes de Lie resolubles, Monographies de la Soc. Math. France, Dunod, Paris, 1972.
Представления разрешимых групп Ли.
112. *Bhabba H.J.*, Rev. Mod. Phys., **17**, 200 (1945).
Релятивистские волновые уравнения для элементарных частиц.
113. *Bhabba H. J.*, Rev. Mod. Phys.. **21**, 451 (1949).
Аксиоматические основы теории элементарных частиц.
114. *Бхану Мурти Т. С.*, Мера Планшереля для фактор-пространства SL (n, R)/SO (n, R). — ДАН СССР, **133**, 503 (1960).
115. *Bichteler K.*, Invent. Math., **6**, 159 (1968).
О существовании представлений локально компактной группы, не являющихся непрерывными.
116. *Biedenharn L. C.*, J. Math. Phys., 4, 436 (1963).
О представлениях полупростых групп Ли.
117. *Biedenharn L. C., Louck I. D.*, Comm. Math. Phys., **8**, 89 (1968).
Диаграммное исчисление для тензорных операторов в унитарных группах.
118. *Biedenharn L. C., Van Dam H.* (eds.), Quantum Theory of Angular Momentum, Acad. Press, New York—London, 1965.
Квантовая теория углового момента.
119. *Biedenharn L. C., Nuyts J., Straumann N.*, Ann. Inst. H. Poincare, 3, 13 (1965).
Об унитарных представлениях групп SU (1, 1) и SU (2, 1).
120. *Biedenharn L. C., Swamy N. V. V. J.*, Phys. Rev., **B133**, 1353 (1964).
Замечания к релятивистской задаче Кеплера, II.
121. *Bingen F.* (ed), Summer School on Representations of Lie Groups (Namur, Sept. 1969), Dept. of Mathematics, Univ. of Brussels, Brussels, 1969.
Летняя школа по представлениям групп Ли (Намур, сентябрь, 1969).
122. *Birkhoff G.*, Bull. Am. Math. Soc., 42, 883 (1936).
Группы Ли, не изоморфные просто ни одной линейной группе.
123. *Birkhoff G.*, Ann. of Math., 38, 526 (1937).
Представимость алгебр Ли и групп Ли матрицами.
124. *Blattner R. J.*, Am. J. Math., 83, 79 (1961).
Об индуцированных представлениях.
125. *Blattner R. J.*, Am. J. Math., **83**, 499 (1961).
Об индуцированных представлениях, II. Инфинитезимальная индукция.
126. *Blattner R. J.*, Proc. Am. Math. Soc., **14**, 423 (1963).
Положительно определенные меры.

127. *Blattner R. J.*, Trans. Am. Math. Soc., **144**, 457 (1969).
Индуцированные и продуцированные представления алгебр Ли.
128. *Blattner R. J.*, в кн.: Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces, Proc. Symp. Pure Math., Am. Math. Soc., Providence, **26**, 147 (1973).
Квантование и теория представлений.
129. *Bochner S., Montgomery D.*, Ann. Math., **47**, 639 (1946).
Локально компактные группы дифференцируемых преобразований.
130. *Bochner S., Montgomery D.*, Ann. Math., **48**, 659 (1947).
Группы на аналитических многообразиях.
131. *Boerner H.*, Representations of Groups with Special Considerations for the Needs of Modern Physics, North-Holl. Publ. Co., Amsterdam, 1963.
Представления групп со специальным рассмотрением ввиду потребностей современной физики.
132. *Borel A.*, Linear Algebraic Groups, Benjamin, New York, 1969. [Имеется перевод: *Борель А.* Линейные алгебраические группы — М.: Мир, 1972.]
133. *Borel A., Mostow G. D.*, Ann. of Math., **61**, 389 (1955).
О полупростых автоморфизмах алгебр Ли.
134. *Bourbaki N.*, Élements de mathématique, Fasc. 26, Groupes et algêbres de Lie, Ch. 1, Hermann, Paris, 1960. [Имеется перевод: *Бурбаки Н.* Группы и алгебры Ли. — М.: Мир, 1976, гл. I—III.]
135. *Bourbaki N.*, Élements de mathematique, Fasc. 34, Groupes et algêbres de Lie, Ch. 4, 5, 6, Hermann, Paris, 1968. [Имеется перевод: *Бурбаки Н.* Группы и алгебры Ли. — М.: Мир, 1972, гл. IV—VI.]
136. *Bouwer I. Z.*, Can. J. Math., **20**, 344 (1968).
Стандартные представления простых алгебр Ли.
137. *Böhm A.*, Nuovo Cim., **43A**, 665 (1966).
Динамические группы и простые нерелятивистские модели.
138. *Böhm A.*, Phys. Rev., **145**, 1212 (1966).
Динамическая группа и спектр масс.
139. *Böhm A.*, Rigged Hilbert Space and Mathematical Description of Physical Systems, Lect. in Theor. Physics, **9A**, 255 (1967).
Оснащенное гильбертово пространство и математическое описание физических систем.
140. *Böhm A.*, J. Math. Phys., **8**, 1551 (1967).
Ассоциативная алгебра в проблеме массовой формулы.
141. *Böhm A.*, Phys. Rev., **D3**, 377 (1971).
Нарушение симметрии в представлениях релятивистской симметрии.
142. *Böhm A.*, в кн.: Studies in Mathematical Physics (ed. A. O. Barut), D. Reidel, Dordrecht, 1973. Обобщенные собственные векторы и представления групп — связь между представлениями SO (4, 1) и группы Пуанкаре.
143. *Böhm A., Mainland G. B.*, Fortschr. Physik, **18**, 285 (1970).
Представление Дирака релятивистских симметрий.
144. *Böhm A, O'Raifeartaigh L.*, Phys. Rev., **171**, 1698 (1968).
Теорема о расщеплении масс в случае общих определений массы.
145. *Biedenharn L. C.*, On Racah Coefficients as Coupling Coefficients for the Vector Space of Wigner Operators, North Holl. Publ. Co., Amsterdam, 1968.
О коэффициентах Рака как коэффициентах связывания для векторного пространства операторов Вигнера.
146. *Bracken A. J., Green H. S.*, J. Math. Phys., **12**, 2099 (1971).
Векторные операторы и полиномиальное тождество для SO (n).
147. *Bradley C. J., Cracknell A. P.*, The Mathematical Theory of Symmetry in Solids Representation Theory for Point Groups and Space Groups, Oxford University Press, London, 1972.
Математическая теория симметрии в твердом теле: теория представлений точечных и пространственных групп.
148. *Brauer R., Weyl H.*, Am. J. Math., **57**, 425 (1935).
Спиноры в случае размерности n.

149. *Brezin J.*, Memoirs Am. Math. Soc., **79**, 122 (1968).
Теория унитарных представлений разрешимых групп Ли.
150. *Bruhat F.*, Bull. Soc. Math. France, **84**, 97 (1956).
Об индуцированных представлениях групп Ли.
151. *Bruhat F.*, Lectures on Lie Groups and Representations of Locally Compact Groups, Tata Inst. of Fundamental Research, Bombay, 1958.
Лекции по группам Ли и представлениям локально компактных групп.
152. *Budini P.*, Nuovo Cim., **44A**, 363 (1966).
Некомпактные расширения групп симметрии.
153. *Butzer P. L.*, *Berens H.*, Semi-Groups of Operators and Approximations, Springer-Verlag, Berlin, New York, 1967.
Полугруппы операторов и аппроксимация.
154. *Cantoni V.*, Ann. Mat. Pura Appl., **89**, 363 (1971).
Построение представлений алгебры Ли группы Пуанкаре при помощи расширения дираковских интегралов представлений SL (2, *C*), I.
155. *Cantoni V.*, *Ianiro N.*, *Maffei C.*, Ann. Mat. Pura Appl., **94**, 387 (1972).
Построение представлений алгебры Ли группы Пуанкаре при помощи расширения дираковских интегралов представлений SL (2, *C*), II.
156. *Carmeli M.*, *Malin S.*, Fortschr. Physik, **21**. 397 (1973).
Конечно- и бесконечномерные представления группы Лоренца.
157. *Carmona J.*, *Dixmier J.*, *Vergne M.* (eds.), Actes du Colloque d'Analyse Harmonique Non-Commutative, Marseille-Luminy, 1—5 Juillet 1974, Lecture Notes in Mathematics, **466**, Springer-Verlag, Berlin—New York, 1975.
Некоммутативный гармонический анализ. — Труды коллоквиума по некоммутативному гармоническому анализу.
158. *Cartan E.*, Sur la structure des groupes de transformations finis et continues, Thése, Paris, Nony (2nd ed. Vuibert 1933), 1894.
О структуре групп конечных и непрерывных преобразований.
159. *Cartan E.*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., **31**, 263 (1914).
Вещественные простые конечные и непрерывные группы.
160. *Cartan E.*, Bull. Sci. Math., **49**, 130 (1925).
Неприводимые тензоры и линейные простые и полупростые группы.
161. *Cartan E.*, Bull. Soc. Math. France, **54**, 214 (1926).
Об одном замечательном классе римановых пространств.
162. *Cartan E.*, Bull. Soc. Math. France, **55**, 114 (1927).
Об одном замечательном классе римановых пространств.
163. *Cartan E.*, J. Math. Pures Appl., **6**, 1 (1927).
Геометрия групп преобразований.
164. *Cartan E.*, Ann. Math. Pura Appl., **4**, 209 (1927).
Геометрия простых групп.
165. *Cartan E.*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., **44**, 345 (1927).
О некоторых замечательных римановых формах геометрий с простой фундаментальной группой.
166. *Cartan E.*, Ann. Math. Pura Appl., **5**, 253 (1928).
Дополнение к мемуару по геометрии простых групп.
167. *Cartan E.*, Rend. Circ. Mat. Palermo, **53**, 217 (1929).
Об определении одной полной ортогональной системы на замкнутом симметрическом римановом пространстве.
168. *Cartan E.*, J. Math. Pures Appl., **8**, 1 (1929).
Простые замкнутые и открытые группы и риманова геометрия.
169. *Cartan E.*, Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann, 2nd ed., Gauthier-Villars, Paris, 1951.
Лекции по геометрии пространств Римана.
170. *Cartan E.*, The Theory of Spinors, Hermann, Paris, 1966. [Имеется перевод: *Картан Э.* Теория спиноров. — М.: ИЛ, 1947.]
171. *Carter R. W.*, Simple Groups of Lie Type, J. Wiley & Sons, London—New York—Sydney—Toronto, 1972.

Простые группы типа Ли.
172. *Cartier P.*, Bull. Am. Math. Soc., **67**, 228 (1961).
О формуле Г. Вейля для характеров.
173. *Cartier P.*, Proc. of Symp. Pure Math., **9**, 361 (1966).
Квантовомеханические коммутационные соотношения и тета-функции.
174. *Cartier F.*, *Dixmier J.*, Am. J. Math., **80**, 131 (1958).
Аналитические векторы для представлений групп Ли.
175. *Casimir H.*, Proceedings Roy. Acad. Amsterd., **34**, 844 (1931).
О построении единицы в неприводимых представлениях полупростой непрерывной группы, связанной с дифференциальным уравнением.
176. *Casimir H. B. G.*, Rotation of a Rigid Body in Quantum Mechanics, Thesis, Leyden, Groningen, 1931.
Вращение твердого тела в квантовой механике.
177. *Cattaneo U.*, *Janner A.*, J. Math. Phys., **15**, 1166 (1974).
Связь пространственно-временных и электромагнитных калибровочных преобразований.
178. *Cerulus F.*, Nuovo Cim., **19**, 523 (1961).
Замкнутая формула для статистических весов.
179. *Chakrabarti A.*, J. Math. Phys., **9**, 2087 (1968).
Класс представлений алгебр IU (n) и IO (n) и соответствующие деформации в $U(n, 1)$ и $O(n, 1)$.
180. *Chakrabarti A.*, *Levy-Nahas M.*, *Seneor R.*, J. Math. Phys., **9**, 1274 (1968).
«Лоренцевы базисы» группы Пуанкаре.
181. *Chesnut D. B.*, Finite Groups and Quantum Theory, J. Wiley & Sons, New York 1974.
Конечные группы и квантовая теория.
182. *Chevalley C.*, Theory of Lie Groups, v. 1, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1946. [Имеется перевод: *Шевалле К.* Теория групп Ли. т. 1. — М.: ИЛ, 1948.]
183. *Chevalley C.*, Am. J. Math., **77**, 778 (1955).
Инварианты конечных групп, порожденных отражениями.
184. *Chevalley C.*, Theory of Lie Groups, v. 2, Hermann, Paris, 1955. [Имеется перевод: *Шевалле К.* Теория групп Ли. Т. 2. Алгебраические группы. — М.: ИЛ, 1958.]
185. *Chevalley C.*, Théorie des groupes de Lie, T. 3, Hermann, Paris, 1955. [Имеется перевод: *Шевалле К.* Теория групп Ли, Т. 3. Общая теория алгебр Ли. — М.: ИЛ, 1958.]
186. *Chevalley C.*, Théorie des groupes de Lie groupes algébriques, Hermann, Paris, 1968.
187. *Chevalley C.*, *Schafer R. D.*, Proc. Nat. Acad. Sci. (USA), **36**, 137 (1950).
Исключительные простые алгебры Ли F_4 и E_6.
188. *Chow Y.* (ed.), Non-Compact Groups In Particle Physics, Proc. of 1966 Conference held at the Univ. of Wisconsin — Milwaukee, Benjamin, New York, 1966.
Некомпактные группы в физике элементарных частиц.
189. *Chow Y.*, J. Math. Phys., **10**, 975 (1969).
Гипотеза Гельфанда — Кириллова о поле Ли алгебраической алгебры Ли.
190. *Coester F.*, *Hamermesh M.*, *McGlinn W. D.*, Phys. Rew., **135B**, 451 (1964).
Внутренняя симметрия и лоренц-инвариантность.
191. *Cohn P. M.*, Lie Groups, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1967.
Группы Ли.
192. *Coifman R. R.*, *Weiss G.*, L'Enseignement Math., **14**, 121 (1969).
Представления компактных групп и сферические гармоники.
193. *Coleman S.*, J. Math. Phys., **5**, 1343 (1964).
Коэффициенты Клебша—Гордана для SU (3).

194. *Coleman A. J.*, Induced Representations with Application to S_n and GL (n), Queen's Papers in Pure and Applied Math., 4, Queen's Univ., Kingston, 1966.
Индуцированные представления с применением их к S_n и GL (n).
195. *Coleman A. J.*, в кн.: Group Theory and Its Applications. E. M. Loebl (ed.), Academic Press, New York, 1968.
Индуцированные и субдуцированные представления.
196. *Corben H. C.*, Classical and Quantum Theories of Spinning Particles, Holden-Day, San Francisco, 1968.
Классическая и квантовая теории частиц со спином.
197. *Cornwell J. F.*, J. Math. Phys., **16**, 1992 (1975).
Непосредственное определение разложения Ивасавы для некомпактных полупростых алгебр Ли.
198. *Cotton F.*, Chemical Applications of Group Theory, 2nd ed., Wiley—Interscience, New York, 1971.
Приложения теории групп к химии.
199. *Coxeter H. S. M.*, *Moser W.*, Generators and Relations for Discrete Groups, Springer-Verlag, Berlin, 1965.
Генераторы и соотношения для дискретных групп.
200. *Cronström C.*, *Klink W. H.*, Ann. of Phys., **68**, 218 (1972).
Обобщенные O (2, 1)-разложения многочастичных амплитуд.
201. *Cunningham E.*, Proc. Lond. Math. Soc., **8**, 77 (1909).
202. *Curtis C.*, *Reiner I.*, Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras, Interscience Publ., New York, 1962. [Имеется перевод: *Кэртис Ч.*, *Райнер И.* Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. — М.: Наука 1969.]
203. *Dao Vong Duc*, *Nguyen Van Hieu*, Ann. Inst. H. Poincaré, **6**, 17 (1967).
К теории унитарных представлений группы SL $(2, C)$.
204. *Демков Ю. Н.* Определение группы симметрии квантовой системы. Анизотропный осциллятор. — ЖЭТФ, **44**, 2007 (1963).
205. *De Witt B. S.*, Dynamical Theory of Groups and Fields, Gordon & Breach, New York—London, 1965.
Динамическая теория групп и полей.
206. *Dieudonnè J.*, Sur les groupes classiques, Hermann, Paris, 1967.
О классических группах.
207. *van Dijk G.*, Math. Ann., **179**, 219 (1969).
О симметрии групповых алгебр групп движения.
208. *Dirac P. A. M.*, Principles of Quantum Mechanics, Oxford, 1928. [Имеется перевод: *Дирак П. А.* Принципы квантовой механики. — М.: Физматгиз, 1960.]
209. *Dirac P. A. M.*, Ann. of Math., **36**, 657 (1935).
Волновое уравнение для электрона в пространстве де Ситтера.
210. *Dirac P. A. M.*, Proc. Roy. Soc. London, *A* **155**, 447 (1936).
Релятивистские волновые уравнения.
211. *Dirac P. A. M.*, Proc. Roy. Soc. London. *A* **183**, 284 (1945).
Унитарные представления группы Лоренца.
212. *Dirac P. A. M.*, J. Math. Phys., **4**, 901 (1963).
Замечательное представление группы де Ситтера $3+2$.
213. *Dixmier J.*, Bull. Soc. Math. France, **85**, 325 (1957).
Об унитарных представлениях нильпотентных групп Ли, II.
214. *Dixmier J.*, Canad. J. Math., **10**, 321 (1958).
Об унитарных представлениях нильпотентных групп Ли, III.
215. *Dixmier J.*, Canad. J. Math., **11**, 321 (1959).
Об унитарных представлениях нильпотентных групп Ли, IV.
216. *Dixmier J.*, Bull. Soc. Math. France, **87**, 65 (1959).
Об унитарных представлениях нильпотентных групп Ли, V.
217. *Dixmier J.*, Canad. J. Math., **12**, 324 (1960).
Об унитарных представлениях нильпотентных групп Ли, VI.

218. *Dixmier J.*, Bull. Soc. Math. France, **89**, 9 (1961).
Интегрируемые представления группы де Ситтера.
219. *Dixmier J.*, Les *C*-algèbres et leurs représentations, Gauthier-Villars, Paris, 1964.
C-алгебры и их представления.
220. *Dixmier J.*, J. Math. Pures et Appl., **45**, 1 (1966).
Неприводимые представления разрешимых алгебр Ли.
221. *Dixmier J.*, Bull. Soc. Math. France, **94**, 181 (1966).
Голоморфные индуцированные представления разрешимых алгебраических групп.
222. *Dixmier J.*, Les C^x-algèbres et leurs représentations, Gauthier—Villars, Paris, 1969. [Имеется перевод: *Диксмье Ж.* C^x-алгебры и их представления. — М.: Наука, 1974.]
223. *Dixmier J.*, Am. J. Math., **81**, 160 (1969).
Об унитарных представлениях нильпотентных групп Ли.
224. *Dixmier J.*, Les algebres d'operateurs dans l'espace hilbertien, Gauthier-Villars, Paris, 1969.
Алгебры операторов в гильбертовом пространстве.
225. *Dixmier J.*, L'Enseignement Math., **16**, 169 (1970).
Индуцированные представления алгебр Ли.
226. *Dixmier J.*, Algebres enveloppantes, Gauthier—Villars, Paris, 1974. [Имеется перевод: *Диксмье Ж.* Универсальные обертывающие алгебры. — М.: Мир, 1978.]
227. *Doebner H. D.*, *Melsheimer O.*, J. Math. Phys., **9**, 1638 (1968).
Ограничимые динамические группы в квантовой механике, I.
228. *Doebner H. D.*, *Melsheimer O.*, J. Math. Phys., **11**, 1463 (1970).
Ограничимые динамические группы в квантовой механике, II.
229. *Долгинов А. З.* Релятивистские сферические функции. — ЖЭТФ, **30**, 746 (1956).
230. *Долгинов А. З.*, *Москалев А. Н.* Релятивистские сферические функции, III.— ЖЭТФ, **37**, 1697 (1959).
231. *Долгинов А. З. Топтыгин И. Н.* Релятивистские сферические функции, II. — ЖЭТФ, **37**, 1441 (1959).
232. *Doplicher S.*, *Kastler D.*, *Robinson D.*, Comm. Math. Phys., **3**, 1 (1966).
Алгебры ковариантности в теории поля и статистической механике.
233. *Dothan Y.*, *Gell-Mann M.*, *Ne'eman Y.*, Phys. Lett., **17**, 148 (1965).
Серии энергетических уровней адронов как представления некомпактных групп.
234. *Duffin R. G.*, Phys. Rev., **54**, 1114 (1938).
О характеристических матрицах ковариантных систем.
235. *Дюфло М.* Представления основной серии полупростой группы Ли. — Функц. анализ, **4**, вып. 2, 38 (1970).
236. *Dunford N.*, *Schwartz J. T.*, Linear Operators, Part I: General Theory, Interscience, New York, London, 1958. [Имеется перевод: *Данфорд Н.*, *Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Общая теория. — М.: ИЛ, 1962.]
237. *Дынкин Е. Б.* Структура полупростых алгебр. — Усп. матем. наук. **2**, 59 (1947).
238. *Дынкин Е. Б.*, *Онищик А. Л.* Компактные группы Ли в целом. — Усп. матем. наук. **10**, вып. 4, 3 (1955).
239. *Dyson F. J.* (ed.), Symmetry Groups in Nuclear and Particle Physics, Benjamin, New York, 1968.
Группы симметрии в физике ядра и элементарных частиц.
240. *Eckart C.*, Rev. Mod. Phys., **2**, 305 (1930).
Применение теории групп к квантовой динамике одноатомных систем.
241. *Edmonds A. R.*, Angular Momentum in Quantum Mechanics, Princeton Univ. Press, 1957. [Имеется перевод: *Эдмондс А.* Угловые моменты в квантовой механике. — В сб. «Деформация атомных ядер». — М.: ИЛ, 1958.]

242. *Edwards R. E.*, Integration and Harmonic Analysis on Compact Groups, Cambridge Univ. Press, 1972.
Интегрирование и гармонический анализ на компактных группах.
243. *Ehrenpreis L.*, The Use of Partial Differential Equations for the Study of Group Representations, Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces (Proc. Sympos. Pure Math. XXVI, Williams Coll., Williamstown, Mass., 1972), Am. Math. Soc., Providence, R. I., 1973.
Использование уравнений в частных производных для изучения представлений групп.
244. *Ehrenpreis L.*, *Mautner F. I.*, Ann. Math., **61**, 406 (1955).
Некоторые свойства преобразования Фурье на полупростых группах Ли, I.
245. *Ehrenpreis L.*, *Mautner F. I.*, Trans. Am. Math. Soc., **84**, 1 (1957).
Некоторые свойства преобразования Фурье на полупростых группах Ли, II.
246. *Ehrenpreis L.*, *Mautner F. I.*, Trans. Am. Math. Soc., **90**, 431 (1959).
Некоторые свойства преобразования Фурье на полупростых группах Ли, III.
247. *Ehrman J. B.*, Proc. Cambridge Philos. Soc., **53**, 290 (1957).
Об унитарных неприводимых представлениях универсальной накрывающей группы группы де Ситтера 3 + 2.
248. *Eisenhart L. P.*, Continuous Groups of Transformation, Princeton, N. J., Dover, New York, 1961.
[Имеется перевод: *Эйзенхарт Л. П.* Непрерывные группы преобразований. — М.: ИЛ, 1947.]
249. *Emch G.*, *Piron C.*, J. Math. Phys., **4**, 469 (1963).
Симметрия в квантовой теории.
250. *Englefied M.*, Group Theory and Coulomb Problem, Wiley, New York, 1972.
Теория групп и кулоновская проблема.
251. *Esteve A.*, *Sona P.*, Nuovo Cim., **32**, 473 (1964).
Конформная группа в пространстве Минковского, унитарные неприводимые представления.
252. *Evans N. T.*, J. Math. Phys., **8**, 170 (1967).
Дискретная серия для универсальной накрывающей группы группы де Ситтера 3 + 2.
253. *Феденко А. С.* Симметрические пространства с простой некомпактной фундаментальной группой. — ДАН СССР, **108**, 1026 (1956).
254. *Feit W.*, Proc. Am. Math. Soc., **4**, 740 (1953).
Формула степени для косого представления симметрической группы.
255. *Fell J. M. G.*, Acta Math., **114**, 267 (1965).
Неунитарные дуальные пространства групп.
256. *Fell J. M. G.*, Memoirs Am. Math. Soc. **90**, 1969.
Распространение метода Макки на банаховы $*$-алгебраические расслоенные пространства.
257. *Fierz M.*, *Pauli W.*, Proc. Roy. Soc., **A173**, 211 (1939).
О релятивистских уравнениях для частиц с произвольным спином в электромагнитном поле.
258. *Finkelstein D.*, *Jauch J. M.*, *Speiser D.*, J. Math. Phys., **4**, 136 (1963).
Кватернионные представления компактных групп.
259. *Fischer J.*, *Niederle J.*, *Rączka R.*, J. Math. Phys., **7**, 816 (1966).
Обобщенные сферические функции для некомпактных групп вращения.
260. *Fischer J.*, *Rączka R.*, Trieste Preprint IC/66/101, 1966 (unpublished).
Бесконечномерные неприводимые представления алгебр Ли компактных унитарных групп.
261. *Fischer J.*, *Rączka R.*, Comm. Math. Phys., **4**, 8 (1967).
Вырожденные представления некомпактных унитарных групп, II.
262. *Flach G.*, *Reif R.*, Gruppentheoretische Methoden in dem Schalenmodel der Kerne, I, Akademie-Verlag, Berlin, 1964.
Теоретико-групповые методы в оболочечной модели ядра, I.

263. *Flato M.*, в кн.: Mathematical Physics and Physical Mathematics, K. Maurin and R. Raczka (eds.), Reidel-PWN, Dordrecht-Warsaw, 1976.
Теория аналитических векторов и приложения.
264. *Flato M.*, *Hillion P.*, Phys. Rev., **1**, 1667 (1970).
Пуанкаре-подобная группа, ассоциированная с физикой нейтрино и некоторые приложения.
265. *Flato M.*, *Piard A.*, J. Math. Phys., **15**, 1288 (1974).
Обобщенные принципы ковариантности и физика нейтрино.
266. *Flato M.*, *Simon J.*, J. Func. Anal., **13**, 268 (1973).
Раздельная и объединенная аналитичность в представлениях групп Ли.
267. *Flato M.*, *Simon J.*, *Sternheimer D.*, Ann. of Phys. (N. Y.), **61**, 78 (1970).
Конформная ковариантность полевых уравнений.
268. *Flato M.*, *Simon J.*, *Sternheimer D.*, C. R. Acad. Sc. Paris, **277**, 939 (1973).
Об интегрируемости антисимметричных представлений компактных алгебр Ли.
269. *Flato M. et al.*, Ann. Scient. de l'Ecole Norm. Sup., **5**, 423 (1972).
Простые факты об аналитических векторах и интегрируемости.
270. *Flato M.*, *Sternheimer D.*, J. Math. Phys., **7**, 1932 (1966).
О связи между внешними и внутренними симметриями сильно взаимодействующих частиц.
271. *Flato M.*, *Sternheimer D.*, Phys. Rev. Lett., **16**, 1185 (1966).
Локальные представления и спектр масс.
272. *Flato M.*, *Sternheimer D.*, Comm. Math. Phys., **12**, 296 (1969).
Частично интегрируемые в смысле Пуанкаре локальные представления и спектр масс.
273. *Flato M.*, *Sternheimer D.*, Comm. Math. Phys., **14**, 5 (1969).
О бесконечномерной группе.
274. *Flato M.*, *Sternheimer D.*, Proceedings of the third Gunnar Källen Colloquium, Göteborg, June 1971.
Труды третьего коллоквиума, посвященного Гуннару Челлену.
275. *Fleming G. N.*, Phys. Rev., **137B**, 188 (1965).
Ковариантные операторы координат, спин и локальность.
276. *Фок В. А.* Атом водорода и неевклидова геометрия, — Изв. АН СССР, сер. матем., **7**, 169 (1935).
277. *Fock V.*, Z. Phys., **98**, 145 (1935).
К теории атома водорода.
278. *Foldy L. L.*, *Wouthuysen S. A.*, Phys. Rev., **78**, 29 (1950).
О теории Дирака для частицы со спином $^1/_2$ и ее нерелятивистском пределе.
279. *Фомин А. И.*, *Шаповалов Н. Н.* Об одном свойстве характеров неприводимых представлений вещественных полупростых групп Ли.—Функц. анализ, **8**, 87 (1974).
280. *Fonda L.*, *Ghirardi G. C.*, Symmetry Principles in Quantum Physics, Marcel Dekker Inc., New York, 1970.
Принципы симметрии в квантовой физике.
281. *Frame J. S.*, *Robinson G. de B.*, *Thrall R. M.*, Canad. J. Math., **6**, 316 (1954).
Угловые графы симметрической группы.
282. *Freudenthal H.*, Advances in Math., **1**, 145 (1964).
Группы Ли в основаниях геометрии.
283. *Freudenthal H.*, *De Vries H.*, Linear Lie Groups, Acad. Press, New York, (1969).
Линейные группы Ли.
284. *Frobenius G.*, Sitz. Preuss. Akad. Wiss. Berlin, 501 (1898).
О связи между характерами групп и ее подгрупп.
285. *Fronsdal C.*, Nuovo Cim. Suppl., **9**, 416 (1958).
К теории полей с высшим спином.
286. *Fronsdal C.*, Phys. Rev., **113**, 1367 (1959).
Унитарные неприводимые представления группы Лоренца.

287. *Fronsdal C.*, Proc. Roy. Soc. London, **A288**, 98 (1965).
О некомпактных группах, III. Линейные представления группы SU (3).
288. *Fronsdal C.*, Proc. Roy. Soc. London, **A288**, 113 (1965).
О некомпактных группах, IV. Некоторые представления группы SU (4)(NU_4^2).
289. *Fronsdal C.*, Phys. Rev., **156**, 1653 (1967).
Бесконечные мультиплеты и локальные поля.
290. *Fronsdal C.*, Phys. Rev., **156**, 1665 (1967).
Бесконечные мультиплеты и атом водорода.
291. *Fulling S. A.*, J. Math. Phys., **15**, 1567 (1974).
Отсутствие тривиальных подпредставлений в тензорных произведениях унитарных представлений псевдоортогональных групп.
292. *Gaffney M.*, Comm. Pure and Applied Math., **12**, **1** (1959).
Свойство сохранения уравиения теплопроводности на римановых многообразиях.
293. *Gaffney M. P.*, The Conservation Property of the Heat Equation on Riemannian Manifolds (to appear).
Свойство сохранения уравнения теплопроводности на римановых многообразиях.
294. *Gangolli R.*, Ann. of Math., **93**, 150 (1971).
О формуле Планшереля и теореме Пэли—Винера для сферических функций на полупростых группах Ли.
295. *Гантмахер Ф. Р.* О классификации вещественных простых групп Ли. — Матем. сб., **5**, 217 (1939).
296. *Гантмахер Ф. Р.* Каноническое представление автоморфизмов комплексной полупростой группы Лн. — *Матем. сб.* **5**, 101 (1939).
297. *Gårding L.*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **33**, 331 (1947).
Замечание о непрерывных представлениях групп Ли.
298. *Gårding L.*, Bull. Soc. Math. France, **88**, 73 (1960).
Аналитические векторы в представлеииях групп Ли.
299. *Gelbart S.*, Fourier Analysis on Matrix Space, Memoirs Amer. Math. Soc. **108**, Providence, Rhode Island, 1971.
Анализ Фурье на пространстве матриц.
300. *Гельфанд И. М.* Об однопараметрических группах операторов в нормированном пространстве, — ДАН СССР, **25**, 711 (1939).
301. *Гельфанд И. М.* Сферические функции на симметрических римановых пространствах. — ДАН СССР, **70**, 5 (1950).
302. *Гельфанд И. М.* Центр инфинитезимального группового кольца. — Матем. сб., **26**, 103 (1950).
303. *Гельфанд И. М.* Автоморфные функции и теория представлений. — Тр. Моск. матем. общ., **12**, 389 (1963).
304. *Gel'fand I. M.* (ed.), Lie Groups and Their Representations, Summer School of the Bolyai János Math. Society (Budapest, August 16—September 3, 1970), Academiai Kiadó, Budapest & A. Hilger Ltd., London, 1975.
Группы Ли и их представления.
305. *Гельфанд И. М., Граев М. И.* Аналог формулы Планшереля для вещественных полупростых групп Ли. — ДАН СССР, **92**, 461 (1952).
306. *Гельфанд И. М., Граев М. И.* Аналог формулы Планшереля для классических групп. — Тр. Моск. матем. общ., **4**, 375 (1955).
307. *Гельфанд И. М., Граев М. И.* Геометрия однородных пространств, представления групп в однородных пространствах и связанные с ними вопросы интегральной геометрии, I.—Тр. Моск. матем. общ., **8**, 321 (1959).
308. *Гельфанд И. М., Граев М. И., Виленкин Н. Я.* Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений («Обобщенные функции», вып. 5).—М.: Физматгиз, 1962.
309. *Гельфанд И. М., Граев М. И., Пятецкий-Шапиро И. И.* Представления групп аделей. — ДАН СССР, **156**, 487 (1964).

310. *Гельфанд И. М., Граев М. И., Пятецкий-Шапиро И. И.* Теория представлений и автоморфные функции («Обобщенные функции», вып. 6). — М.: Наука, 1966).
311. *Гельфанд И. М., Кириллов А. А.* О телах, связанных с обертывающими алгебрами алгебр Ли. — ДАН СССР, **167**, 503 (1966).
312. *Gel'fand I. M., Kirillov A. A.*, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math., **31**, 5 (1966).
О телах Ли в обертывающих алгебрах алгебр Ли.
313. *Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Шапиро З. Я.* Представления группы вращений и группы Лоренца. — М.: Физматгиз, 1958.
314. *Гельфанд И. М., Наймарк М. А.* Унитарные представления группы Лоренца. — Изв. АН СССР, сер. матем., **11**, 411 (1947).
315. *Гельфанд И. М., Наймарк М. А.* Унитарные представления классических групп. — Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, **36**, 1 (1950).
316. *Гельфанд И. М., Наймарк М. А.* Унитарные представления унимодулярной группы, содержащие единичное представлеиие унитарной подгруппы. — Тр. Моск. матем. общ., **1**, 423 (1952).
317. *Gel'fand I. M., Naimark M. A.*, Unitäre Darstellungen der Klassischen Gruppen, Akademie Verlag, Berlin, 1957.
Унитарные представлеиия классических групп.
318. *Гельфанд И. М., Пономарев В. А.* Неразложимые представления группы Лоренца. — Усп. матем. наук, **23**, 3 (1968).
319. *Гельфанд И. М., Пономарев В. А.* Замечания о классификации пары коммутирующих линейных преобразований в конечномерном пространстве. — Функц. анализ, **3**, вып. 3, 81 (1969).
320. *Гельфанд И. М., Райков Д. А.* Неприводимые унитарные представлеиия локально бикомпактных групп, Матем. сб., **13**, 301 (1943).
321. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции и действия над ними («Обобщенные функции», вып. 1). — М.: Физматгиз, 1959.
322. *Гельфанд И. М., Цейтлин М. Л.* Конечномерные представления группы унимодулярных матриц. — ДАН СССР, **71**, 825 (1950).
323. *Гельфанд И. М. Цейтлин М. Л.* Конечномерные представления группы ортогональных матриц. — ДАН СССР, **71**, 1017 (1950).
324. *Гельфанд И. М., Яглом А. М.* Общие релятивистски инвариантные уравнения и бесконечномерные представления группы Лоренца. — ЖЭТФ, **18**, 703 (1948).
325. *Gell-Mann M., Ne'eman Y. (eds.)*, The Eightfold Way, Benjamin, New York, 1964.
Восьмеричный путь.
326. *Gilmore R.*, J. Math. Phys., **11**, 513 (1970).
Построение пространств весов для неприводимых представлений A_n, B_n, C_n, D_n.
327. *Gilmore R.*, J. Math. Phys., **11**, 1855 (1970).
Спектр инвариантов Казимира для простых классических групп Ли.
328. *Gilmore R.*, Lie Groups, Lie Algebras and Their Applications, Wiley, New York, 1974.
Группы Ли, алгебры Ли и некоторые из их применений.
329. *Гиндикин С. Г., Карпелевич Ф. И.* Мера Планшереля для римановых симметрических пространств неположительной кривизны. — ДАН СССР, **145**, 252 (1962).
330. *Ginibre J.*, J. Math. Phys., **4**, 720 (1963).
Теорема Вигнера—Эккарта и простые группы Ли.
331. *Glimm J.*, Trans. Am. Math. Soc., **101**, 124 (1961).
Локально компактные группы преобразований.
332. *Godement R.*, Trans. Am. Math. Soc., **63**, 1 (1948).
Функции положительного типа и теория групп.

333. *Godement R.*, C. R. Acad. Sci. Paris, **228**, 627 (1949).
О преобразовании Фурье на дискретных группах.
334. *Godement R.*, Trans. Am. Math. Soc., **73**, 496 (1952).
Теория сферических функций, I.
335. *Goodman R.*, J. Functional Analysis, **3**, 246 (1969).
Аналитическое преобладание дробных степеней оператора.
336. *Goodman R.*, Trans. Am. Math. Soc., **143**, 55 (1969).
Аналитические и целые векторы для представлений групп Ли.
337. *Goodman R.*, J. Math. Mech., **19**, 879 (1970).
Дифференциальные операторы бесконечного порядка на группе Ли, I.
338. *Goodman R.*, J. Functional Analysis, **6**, 218 (1970).
Однопараметрические группы, порождаемые операторами в обертывающей алгебре.
339. *Goodman R.*, J. Differential Equations, **10**, 448 (1971).
Некоторые теоремы регулярности для операторов в обертывающей алгебре.
340. *Goodman R.*, Differential Operators of Infinite Order on a Lie Group, II (to appear).
Дифференциальные операторы бесконечного порядка на группе Ли, II.
341. *Goodman R.*, Complex Fourier Analysis on Nilpotent Lie Groups (to appear).
Комплексный анализ Фурье на нильпотентных группах Ли.
342. *Goodman R. W.*, Nilpotent Lie Groups: Structure and Applications to Analysis, Springer-Verlag, Berlin, Lecture Notes in Mathematics **562**, 1976.
Нильпотентные группы Ли: структура и применение к анализу.
343. *Gourdin M.*, Unitary Symmetries and Their Applications to High Energy Physics, North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 1967.
Унитарные симметрии и их применение в физике высоких энергий.
344. *Граев М. И.* Основная серия унитарных представлений вещественных форм комплексной унимодулярной группы. — ДАН СССР, **98**, 517 (1954).
345. *Граев М. И.* Унитарные представления вещественных простых групп Ли. — Усп. матем. наук, **12**, 179 (1957).
346. *Granzow K. D.*, J. Math. Phys., **4**, 897 (1963).
Оператор N-мерного полного орбитального углового момента.
347. *Granzow K. D.*, J. Math. Phys., **5**, 1474 (1964).
Оператор N-мерного полного орбитального углового момента, II. Точные представления.
348. *Green H. S.*, J. Math. Phys., **12**, 2106 (1971).
Характеристические тождества для генераторов групп GL (n), O (n) и Sp (n).
349. *Gross K.*, *Kunze R. A.*, Fourier Decompositions of Certain Representations (to appear).
Разложения Фурье некоторых представлений.
350. *Gruber B.*, Ann. Inst. Henri Poincaré, **A8**, 43 (1968).
Соотношения между «внутренними» и «внешними» кратностями для классических групп.
351. *Gruber B.*, J. Math. Phys., **11**, 1783 (1970).
Рекуррентные соотношения для кратностей в классических группах.
352. *Gruber B.*, SIAM J. Appl. Math., **25**, 269 (1973).
Свойства линейных представлений полупростых алгебр Ли.
353. *Gruber B.*, *Klimyk A. U.*, J. Math. Phys., **16**, 1816 (1975).
Свойства линейных представлений со старшим весом для полупростых алгебр Ли.
354. *Gruber B.*, *O'Raifeartaigh L.*, J. Math. Phys., **5**, 1796 (1964).
S-теорема и построение инвариантов полупростых компактных алгебр Ли.
355. *Gulmanelli P.*, Phys. Lett., **5**, 320 (1963).
Классические представления собственной группы Пуанкаре.
356. *Gupta H.*, Tables of Partitions Initiated and Computed by Royal Math. Soc. Tables, **4**, Cambridge Univ. Press, 1958.
Таблицы разбиений.

357. *Гуревич А.* Унитарное представление в гильбертовом пространстве компактной топологической группы. — Матем. сб., **13**, 79 (1943).
358. *Гуткин Е. А.* Представление основной серии комплексной полупростой группы Ли. — Функц. анализ, **4**, вып. 2, 32 (1970).
359. *Gürsey F. (ed.)*, Group Theoretical Concepts and Methods in Elementary Particle Physics, Gordon & Breach, New York, 1964.
Теоретико-групповые понятия и методы в физике элементарных частиц.
360. *Haar A.*, Ann. of Math., **34**, 147 (1933).
Понятие меры в теории непрерывных групп.
361. *Хаджиев Дж.* Некоторые вопросы теории векторных инвариантов. — ДАН СССР, **171**, 1045 (1966).
362. *Hamel G.*, Math. Ann., **60**, 459 (1905).
Базис всех чисел и дискретные решения функционального уравнения $f(x+y) = f(x) + f(y)$.
363. *Hamermesh M.*, Group Theory and Its Application to Physical Problems, Addison-Wesley, 1962. [Имеется перевод: *Хамермеш М.* Теория групп и ее применение к физическим проблемам. — М.: Мир. 1966.]
364. *Harari H.*, J. Math. Phys., **7**, 283 (1966).
О редукции прямых произведений неприводимых представлений SU (n).
365. *Harish-Chandra*, Trans. Am. Math. Soc., **70**, 28 (1951).
О некоторых применениях универсальной обертывающей алгебры Ли.
366. *Harish-Chandra*, Proc. Nat. Acad. USA, **38**, 337 (1952).
Формула Планшереля для вещественной унимодулярной группы 2×2.
367. *Harish-Chandra*, Trans. Am. Math. Soc., **75**, 185 (1953).
Представления полупростых групп Ли в банаховом пространстве, I.
368. *Harish-Chandra*, Trans. Am. Math. Soc., **76**, 26 (1954).
Представления полупростых групп Ли, II.
369. *Harish-Chandra*, Trans. Am. Math. Soc., **76**, 234 (1954).
Представления полупростых групп Ли, III.
370. *Harish-Chandra*, Trans. Am. Math. Soc., **76**, 485 (1954).
Формула Планшереля для комплексных полупростых групп Ли.
371. *Harish-Chandra*, Am. J. Math., **77**, 743 (1955).
Представления полупростых групп Ли, IV.
372. *Harish-Chandra*, Am. J. Math., **78**, 1 (1956).
Представления полупростых групп Ли, V.
373. *Harish-Chandra*, Am. J. Math., **78**, 564 (1956).
Представления полупростых групп Ли, VI.
374. *Harish-Chandra*, Am. J. Math., **80**, 241 (1958).
Сферические функции на полупростой группе Ли, I.
375. *Harish-Chandra*, Am. J. Math., **80**, 553 (1958).
Сферические функции на полупростой группе Ли, II.
376. *Harish-Chandra*, Am. J. Math., **86**, 271 (1964).
Инвариантные обобщенные функции на алгебрах Ли.
377. *Harish-Chandra*, Am. J. Math., **86**, 534 (1964).
Инвариантные дифференциальные операторы и обобщенные функции на полупростой алгебре Ли.
378. *Harish-Chandra*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., **27**, 5 (1965).
Инвариантные собственные обобщенные функции на полупростой алгебре Ли.
379. *Harish-Chandra*, Trans. Am. Math. Soc., **119**, 457 (1965).
Инвариантные собственные обобщенные функции на полупростой группе Ли.
380. *Harish-Chandra*, Acta Math., **113**, 241 (1965).
Дискретные серии для полупростых групп Ли, I.
381. *Harish-Chandra*, Acta Math., **116**, 1 (1966).
Дискретные серии для полупростых групп Ли, II.
382. *Harish-Chandra*, Ann. of Math., **83**, 74 (1966).
Две теоремы относительно полупростых групп.

383. *Harish-Chandra*, в кн.: Lectures in Modern Analysis and Applications, II, Lecture Notes in Mathematics **140**, Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York, 1970.
Некоторые применения пространства Шварца полупростой группы Ли.
384. *Harish-Chandra*, Bull. Am. Math. Soc., **76**, 529 (1970).
Гармонический анализ на полупростых группах Ли.
385. *Hausner M.*, *Schwartz J.*, Lie Groups; Lie Algebras, Gordon & Breach, New York—London—Paris, 1968.
Группы Ли; алгебры Ли.
386. *Hegerfeldt G. C.*, *Henning J.*, Fortschr. Physik, **16**, 491 (1968).
Связывание пространственно-временной и внутренней симметрии.
387. *Hegerfeldt G. C.*, *Kraus K.*, *Wigner E. P.*, J. Math. Phys., **9**, 2029 (1968).
Доказательство фермионного правила суперотбора без предположения инвариантности при обращении времени.
388. *Heine V.*, Group Theory in Quantum Mechanics: An Introduction to Its Present Usage, Pergamon Press, New York—London—Oxford, 1960. [Имеется перевод: *Хейне В.* Теория групп в квантовой механике. — М.: ИЛ, 1963.]
389. *Helgason S.*, Acta Math., **102**, 239 (1959).
Дифференциальные операторы на однородных пространствах.
390. *Helgason S.*, Differential Geometry and Symmetric Spaces, Academic Press, New York, 1962. [Имеется перевод: *Хелгасон С.* Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. — М.: Мир, 1964.]
391. *Helgason S.*, Acta Math., **109**, 241 (1963).
Инварианты и фундаментальные функции.
392. *Helgason S.*, Am. J. Math., **86**, 565 (1964).
Фундаментальные решения инвариантных дифференциальных операторов на симметрических пространствах.
393. *Helgason S.*, Bull. Am. Math. Soc., **71**, 757 (1965).
Преобразования Радона—Фурье на симметрических пространствах и связанные с ними представления групп.
394. *Helgason S.*, Lie Groups and Symmetric Spaces, Battelle Rencontres (eds. C. M. DeWitt, J. A. Wheeler), Benjamin, New York, 1968.
Группы Ли и симметрические пространства.
395. *Helgason S.*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **63**, 643 (1969).
Применение преобразования Радона к представлениям полупростых групп Ли.
396. *Helgason S.*, Advances in Mathematics, **5**, 1 (1970).
Дуальность для симметрических пространств с приложением к представлениям групп.
397. *Helgason S.*, Analysis on Lie Groups and Homogeneous Spaces, Regional Conference Series in Mathematics **14**, Am. Math. Soc., Providence, 1972.
Анализ на группах Ли и однородных пространствах.
398. *Helgason S.*, в кн.: Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces, Amer. Math. Soc. Providence, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics XXVI, 1973.
Функции на симметрических пространствах.
399. *Helgason S.*, J. Func. Anal., **17**, 328 (1974).
Собственные пространства лапласиана; интегральные представления и неприводимость.
400. *Hellwig G.*, Differential Operators of Mathematical Physics, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1967.
Дифференциальные операторы математической физики.
401. *Hermann J.*, Physical Aspects of Lie Group Theory, Univ. of Montreal Press, 1974.
Физические аспекты теории групп Ли.
402. *Hermann R.*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **51**, 456 (1964).
Компактификации однородных пространств и контракции групп Ли.

403. *Herman R.*, Lie Groups for Physicists, Benjamin, New York, 1966.
Группы Ли для физиков.
404. *Herman R.*, Fourier Analysis on Groups and Partial Wave Analysis, Benjamin, Inc., New York, 1969.
Анализ Фурье на группах и парциально-волновой анализ.
405. *Hewitt E.*, *Ross K. A.*, Abstract Harmonic Analysis, I, Sringer—Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1963. [Имеется перевод: *Хьюитт Э.*, *Росс К.* Абстрактный гармонический анализ, I. — М.: Мир, 1974.]
406. *Hewitt E.*, *Ross K. A.*, Abstract Harmonic Analysis, II, Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York, 1970. [Имеется перевод: *Хьюитт Э.*, *Росс К.* Абстрактный гармонический анализ, II. — М.: Мир, 1974.]
407. *Higgins P. J.* Introduction to Topological Groups, London Mathem. Soc. Lecture Note Series, No. 15, Cambridge Univ. Press, London—New York, 1974.
Введение в топологические группы.
408. *Hioe F. T.*, J. Math. Phys., **15**, 1174 (1974).
Когерентные состояния и алгебры Ли.
409. *Hirai T.*, Proc. Japan Acad., **38**, 83 (1962).
Об инфинитезимальных операторах неприводимых представлений группы Лоренца n-го порядка.
410. *Hirai T.*, Proc. Japan Acad., **41**, 526 (1965).
Характеры неприводимых представлений группы Лоренца n-го порядка.
411. *Hirai T.*, Proc. Japan Acad., **42**, 323 (1966).
Формула Планшереля для группы Лоренца n-го порядка.
412. *Hirai T.*, Proc. Japan Acad., **42**, 907 (1966).
Классификация и характеры неприводимых представлений группы SU $(p, 1)$.
413. *Hirai T.*, J. Math. Kyoto Univ., **8**, 313 (1968).
Характеры некоторых индуцированных представлений полупростых групп Ли.
414. *Hirai T.*, J. Math. Soc. Japan, **22**, 134 (1970).
Формула Планшереля для SU (p, q).
415. *Hirai T.*, Structure of Induced Representations and Characters of Irreducible Representations of Complex Semisimple Lie Groups, Lecture Notes in Math. **266**, Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg, 1972.
Структура индуцированных представлений и характеры неприводимых представлений комплексных полупростых групп Ли.
416. *Hirai T.*, Invariant Eigendistributions of Laplace Operators on Real Simple Lie Groups, I (to appear).
Инвариантные собственные обобщенные функции операторов Лапласа на вещественных простых группах Ли, I.
417. *Hochschild G.*, The Structure of Lie Groups, Holden-Day Inc., San Francisco, 1965.
Структура групп Ли.
418. *Holman W. J.*, *Biedenharn L. C.*, Ann. of Physics, **47**, 205 (1968).
Общий анализ коэффициентов Вигнера группы SU (1, 1).
419. *Holman W. J.*, *Biedenharn L. C.*, The Representations and Tensor Operators of the Unitary Groups $U(n)$, в кн.: Group Theory and Its Applications, vol. II, Loebl E. M. (ed.), Academic Press, New York—London, 1971.
Представления и тензорные операторы унитарных групп $U(n)$.
420. *Hotta R.*, J. Math. Soc. Japan, **23**, 384 (1971).
О реализации дискретных серий для полупростых групп Ли.
421. *Houtappel R. M. F.*, *van Dam H.*, *Wigner E. P.*, Rev. Mod. Phys., **37**, 595 (1965).
Концептуальный базис и применение геометрических принципов инвариантности.
422. *Hua L. K.*, Harmonic Analysis of Functions of Several Complex Variables in Classical Domains, Am. Math. Soc., Providence, R. I., 1963. [Имеется перевод: *Хуа Ло-кен.* Гармонический анализ функций многих комплексных переменных в классических областях. — М.: ИЛ, 1969.]

423. *Hurst C. A.*, Ann. Phys., **50**, 51 (1968).
Неинтегрируемые алгебры Ли квантования заряда.
424. *Inoue T.*, *Okamato K.*, *Tanaka M.*, Hiroshima Math. J., **4**, 413 (1974).
Интегральное представление собственной функции инвариантных дифференциальных операторов на симметрическом пространстве.
425. *Inönü E.*, *Wigner E. P.*, Nuovo Cim., 9, 705 (1952).
Представления группы Галилея.
426. *Inönü E.*, *Wigner E. P.*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **39**, 510 (1956).
О контракции групп и их представлений.
427. *Itzykson C.*, *Nauenberg M.*, Rev. Modern Phys., **38**, 95 (1966).
Унитарные группы: представления и разложения.
428. *Iwahori N.*, Nagoya Math. J., **14**, 59 (1959).
О вещественных неприводимых представлениях алгебр Ли.
429. *Iwasawa K.*, Ann. of Math., **50**, 507 (1949).
О некоторых типах топологических групп.
430. *Jacobson N.*, Lie Algebras, Interscience Publ., New York, 1962. [Имеется перевод: *Джекобсон Н.* Алгебры Ли. — М.: Мир, 1964.]
431. *Jacobson N.*, Esceptional Lie Algebras, M. Dekker, New York, 1971.
Исключительные алгебры Ли.
432. *Jacquet H.*, *Langlands R. P.*, Automorphic Forms on GL (2), Lecture Notes in Math. **114**, Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York, 1970. [Имеется перевод: *Жаке Э.*, *Ленгленде Р.* Автоморфные формы на GL (2). — М.: Мир, 1973.]
433. *Jaffe H. H.*, *Orchin M.*, Symmetry in Chemistry, Wiley, New York, 1965. [Имеется перевод: *Джаффе Г.*, *Орчин М.* Симметрия в химии. — М.: Мир, 1967.]
434. *Janner A.*, *Janssen T.*, *Boon M.* (*eds.*), Group Theoretical Methods in Physics, Fourth International Colloquium, Nijmegen 1975, Lecture Notes in Physics **50**, Springer-Verlag, Berlin, 1976.
Теоретико-групповые методы в физике. — Четвертый международный коллоквиум.
435. *John F.*, General Properties of Solutions of Linear Elliptic Partial Differential Equations, Proceedings of The Symposium on Spectral Theory and Differential Problems, Stillwater, Oklahoma, 1951.
Общие свойства решений линейных эллиптических дифференциальных уравнений в частных производных.
436. *Joos H.*, Forschr. Phys., **10**, 65 (1962).
К теории представлений неоднородной группы Лоренца как основе квантово-механической кинематики.
437. *Joos H.*, *Schrader R.*, Matrix Elements of the Unitary Representations of the Homogeneous Lorentz Group, DESY **68**, 2, 1968 (preprint).
Матричные элементы унитарных представлений однородной группы Лоренца.
438. *Jordan T. F.*, *Mucunda N.*, Phys. Rev., **132**, 1842 (1963).
Лоренц-ковариантные операторы координат для частиц со спином.
439. *Jost R.*, Helv. Phys. Acta, **39**, 369 (1966).
Замечание по поводу одного письма О'Рэферти и ответа М. Флато и Д. Стернгеймера.
440. *Юцис А. П.*, *Бандзайтис А. А.* Теория момента количества движения в квантовой механике. — Вильнюс: Минтис, 1965.
441. *Judd B.*, Operator Techniques in Atomic Spectroscopy, McGraw-Hill, New York, 1963.
Операторная техника в атомной спектроскопии.
442. *Judd B.*, Group Theory in Atomic Spectroscopy, в кн.: Group Theory and Its Applications, E. M. Loebl (ed.), 1968.
Теория групп в атомной спектроскопии.

443. *Kahan T.*, Theory of Groups in Classical and Quantum Physics, I, American Elsevier Publ. Co., New York, 1966.
Теория групп в классической и квантовой физике, I.
444. *Kaplansky I. et. al.*, Operator Theory and Group Representations, Nat. Acad. of Sciences—National Research Counsil, Publ. 387, Washington, D. C., 1955.
Теория операторов и представления групп.
445. *Kaplansky I.*, Lie Algebras and Locally Compact Groups, Univ. of Chicago Press, Chicago—London, 1971. [Имеется перевод: *Капланский И.* Алгебры Ли и локально компактные группы. — М.: Мир. 1974.]
446. *Карпелевич Ф. И.* Простые подалгебры вещественных алгебр Ли. — Тр. Моск. матем. общ., **4**, 3 (1955).
447. *Карпелевич Ф. И.* Геометрия геодезических и собственные функции оператора Бельтрами—Лапласа на симметрических пространствах. — Тр. Моск. матем. общ., **14**, 48 (1965).
448. *Kastler D., et al.*, Comm. Math. Phys., **27**, 195 (1972).
Центральное разложение инвариантных состояний. Приложение к группам трансляций во времени и евклидовых преобразований в алгебраической полевой теории.
449. *Kato T.*, Perturbation Theory for Linear Operators, Springer—Verlag, Berlin—New York, 1966. [Имеется перевод: *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972.]
450. *Kemmer N.*, Proc. Roy. Soc., **A173**, 91 (1939).
Корпускулярный аспект мезонной теории.
451. *Keown R.*, An Introduction to Group Representation Theory, Academic Press, New York, 1975.
Введение в теорию представлений групп.
452. *Kihlberg A.*, *Strom S.*, Ark. Fys., **31**, 491 (1966).
Об унитарных неприводимых представлениях группы де Ситтера (1 + 4).
453. *Killing W.*, Math. Ann., **31**, 252 (1888); **33**, 1 (1889); **34**, 57 (1889); **36**, 161 (1890).
Строение непрерывных конечных групп преобразований.
454. *Kimura H.*, Nagoya Math. J., **25**, 211 (1965).
О некоторых бесконечномерных представлениях полупростых алгебр Ли.
455. *Кириллов А. А.* Унитарные представления нильпотентных групп Ли. — Усп. матем. наук, **17**, вып. 4, 57 (1962).
456. *Кириллов А. А.* О мере Планшереля для нильпотентных групп. Ли.—Функц. анализ, **1**, вып. 4, 84 (1967).
457. *Кириллов А. А.* Динамические системы, факторы и представления групп. — Усп. матем. наук, 22, вып. 5, 67 (1967).
458. *Кириллов А. А.* Метод орбит в теории унитарных представлений групп Ли. — Функц. анализ, **2**, 96 (1968).
459. *Кириллов А. А.* Характеры унитарных представлений групп Ли.—Функц. анализ, **2**, 40 (1968).
460. *Кириллов А. А.* Представления бесконечномерной унитарной группы. — ДАН СССР, **212**, 288 (1973).
461. *Кириллов А. А.* Унитарные представления группы диффеоморфизмов и некоторых из ее подгрупп. М.: препринт МГУ, 1976.
462. *Kisyński J.*, Preprint of the Univ. of Warsaw, 1973.
Об интегрируемости представлений алгебр Ли в банаховом пространстве.
463. *Klein F.*, Vergleichende Betrachtungen über neuere Geometrische Forschungen, A. Deichert, Erlangen, 1872.
Сравнительные рассмотрения новых геометрических исследований.
464. *Kleppner A.*, Am. J. Math., **88**, 544 (1966).
Представления, индуцированные с компактных подгрупп.
465. *Kleppner A.*, *Lipsman R. L.*, Ann. Sci. École Norm. Sup., **5**, 459 (1972); **6**, 103 (1973).
Формула Планшереля для расширений групп, I,II.

466. *Климык А. У.* Разложение прямого произведения неприводимых представлений полупростой алгебры Ли на неприводимые представления. — Укр. матем. журн., 5, 19 (1966).
467. *Климык А. У.* Рекуррентные соотношения для кратностей весов и для кратностей представлений комплексной полупростой алгебры Ли. — Укр. матем. журн., 18, 19 (1966).
468. *Климык А. У.* Кратности весов представлений и кратности представлений полупростых алгебр Ли. — ДАН СССР, **177**, **1001** (1967).
469. *Klimyk A. U.*, Rep. on Math. Phys., 7, 153 (1975).
Матричные элементы тензорных операторов.
470. *Klink W. H.*, J. Math. Phys., **11**, 3210 (1970).
D-функции и коэффициенты Клебша—Гордана в смешанном базисе некомпактных групп.
471. *Klink W. H.*, J. Math. Phys., **16**, **1247** (1975).
Два применения коэффициентов Рака группы Пуанкаре.
472. *Knapp A. W. Stein E. M.*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **66**, 13 (1970).
Сингулярные интегралы и основная серия, II.
473. *Knapp A. W.*, *Stein E. M.*, Ann. of Math., **93**, 489 (1971).
Переплетающие операторы для полупростых групп.
474. *Knapp A. W.*, Stein E. M., The Existence of Complementary Series, Problems in Analysis, в кн.: Symposium in Honor of Salomon Bochner 1969, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1971.
Существование дополнительных серий, проблемы в анализе.
475. *Knapp A. W.*, *Stein E. M.*, Irreducibility Theorems for the Principal Series, Lecture Notes in Math. **266**, Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg, 1971.
Теоремы неприводимости для основных серий.
476. *Knapp A. W.*, *Stein E. M.*, Proc. Nat. Acad Sci. USA, **71**, 4622 (1974).
Сингулярные интегралы и основная серия, III.
477. *Kohari A.*, Proc. Japan Acad. **37**, 250 (1961).
Гармонический авализ на группе линейных преобразований прямой линии.
478. *Konuma M.*, *Shima K.*, *Wada M.*, Progr. Theor. Phys., Suppl., **28**, 1 (1963).
Простые алгебры Ли ранга 3 и симметрии элементарных частиц в сильном взаимодействии.
479. *Koosis P.*, Proc. Am. Math. Soc., **8**, 712 (1957).
Неприводимое унитарное представление компактной группы конечномерно.
480. *Kostant B.*, Duke Math. J., **25**, 107 (1958).
Характеристика классических групп.
481. *Kostant B.*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **44**, 588 (1958).
Формула для кратности веса.
482. *Kostant B.*, Trans. Am. Math. Soc., **93**, 53 (1959).
Формула для кратности веса.
483. *Kostant B.*, Am. J. Math., **81**, 973 (1959).
Основная трехмерная подгруппа и числа Бетти комплексной простой группы Ли.
484. *Kostant B.*, Am. J. Math., **85**, 327 (1963).
Представления группы Ли на кольцах полиномов.
485. *Kostant B.*, Trans. Am. Math. Soc., **93**, 53 (1965).
Формула для кратности веса.
486. *Kostant B.*, Bull. Am. Math. Soc., **75**, 627 (1969).
О существовании и неприводимости некоторых серий представлений.
487. *Kostant B.*, Quantzation and Unitary Representations, Part I, Prequantization Lectures in Modern Analysis and Applications, Lecture Notes in Mathematics, **170**, Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York, 1970.
Квантование и унитарные представления, часть I.
488. *Kostant B.*, Ann. Sci. École Norm. Sup., **6**, 413 (1973).
О выпуклости, группе Вейля и разложении Ивасавы.

489. *Kostant B.* On the Existence and Irreducibility of Certain Series of Representations, в кн.: Lie Groups and Their Representations, I. Gel'fand (ed.), Akad. Kiado, Budapest—Hilger—London, 1975.
О существовании и неприводимости некоторых серий представлений.
490. *Kostant B.*, J. Funct. Anal., **20**, 257 (1975).
О тензорном произведении конечномерного и бесконечномерного представлений.
491. *Kostant B.*, *Rallis S.*, Am. J. Math., **93**, 753 (1971).
Орбиты и представления, ассоциированные с симметрическими пространствами.
492. *Kostant B.*, Symplectic Spinors (to appear in Symposia Math.).
Симплектические спиноры.
493. *Kotecky R.*, Rep. Math. Phys., **7**, 95 (1975).
Об интегрируемости дискретного представления алгебры Ли $u(p, q)$.
494. *Kotecký R.*, Niederle J., Czech. J. Phys. **B25**, 123 (1975).
Конформно инвариантное полевое уравнение, I, Уравнения первого порядка с неисчезающей массой.
495. *Kummer M.*, J. Math. Phys., **7**, 997 (1966).
Наиболее общие коэффициенты Клебша—Гордана универсальной накрывающей группы неоднородной группы Лоренца.
496. *Kunze R. A.*, Positive Definite Operator-Valued Kernels and Unitary Representations, в кн.: Functional Analysis, Proc. Conf., Irvine, Calif., 1966, Acad. Press, London, Thompson Book Co., Washington, D. C., 1967.
Положительно определенные операторнозначные ядра и унитарные представления.
497. *Kunze R. A.*, J. Functional Analysis, **6**, 454 (1970).
Заметка о квадратично интегрируемых представлениях.
498. *Kunze R. A.*, Pacific J. Math., **53**, 465 (1974).
О теореме взаимности Фробениуса для квадратично интегрируемых представлений.
499. *Kunze R. A.*, Analytic Continuation of Intertwining Operators (to appear).
Аналитическое продолжение переплетающих операторов.
500. *Kunze R. A.*, *Stein E. M.*, Am. J. Math., **82**, 1 (1960).
Равномерно ограниченные представления и гармонический анализ на вещественных унимодулярных 2×2-группах.
501. *Kunze R. A.*, *Stein E. M.*, Am. J. Math., **83**, 723 (1961).
Равномерно ограниченные представления, II. Аналитическое продолжение основной серии представлений комплексной унимодулярной $n \times n$-группы.
502. *Kunze R. A.*, *Stein E. M.*, Am. J. Math., **89**, 385 (1967).
Равномерно ограниченные представления, III. Переплетающие операторы для основной серии на полупростых группах.
503. *Kunze R. A.*, *Stein E. M.* Uniformly Bounded Representations, IV. Analytic Continuation of the Principal Series for Complex Classical Groups of Types *B*, *C*, *D* (to appear).
Равномерно ограниченные представления, IV. Аналитическое продолжение основной серии для комплексных классических групп типов *B*, *C*, *D*.
504. *Kurian I. G.*, *Mukunda N.*, *Sudarshan E. C. C.*, Comm. Math. Phys., **8**, 204 (1969).
Главные аналитические представления и единая теория представлений некоторых ортогональных и псевдоортогональных групп.
505. *Kuratowski K.*, Introduction to Set Theory and Topology, PWN—Pergamon Press, Oxford—Warsaw, 1972.
Введение в теорию множеств и топологию.
506. *Kyriakopoulos E.*, Phys. Rev., **174**, 1846 (1968).
Динамические группы и уравнение Бете—Салпетера.
507. *Kyriakopoulos E.*, Phys. Rev., **177**, 2442 (1969).

Спектр масс бозонов и пионный форм-фактор на основе SO (5, 2), обобщение на SO (m, 2).
508. *Lang S.*, SL_2 (R), Addison-Wesley Publ. Co., 1975. [Имеется перевод: *Ленг С.* SL_2 (R). — М.: Мир, 1977.]
509. *Leeuw K. de, Glicksberg I.*, J. d'Analyse Math., **15**, 135 (1965). Разложение некоторых представлений групп.
510. *Leja F.*, Fund. Math., **9**, 37 (1927). О понятии абстрактной топологической группы.
511. *Lepowsky J.*, Trans. Am. Math. Soc., **176**, 1 (1973). Алгебраические результаты по представлениям полупростых групп Ли.
512. *Lepowsky J., Wallach N. R.*, Trans. Am. Math. Soc., **184**, 223 (1973). Конечномерные и бесконечномерные представления линейных полупростых групп Ли.
513. *Levy-Leblond J.-M.*, J. Math. Phys., **4**, 776 (1963). Группа Галилея и нерелятивистская квантовая механика.
514. *Lèvy-Leblond J.*, Galilei Group and Galilean Invariance, в кн.: Group Theory and Its Applications, M. Loebl (ed.), v. 2, Acad. Press Inc., New York and London, 1971. Группа Галилея и галилеева инвариантность.
515. *Lèvy-Nahas M.*, J. Math. Phys., **8**, 1211 (1967). Деформация и контракция алгебр Ли.
516. *Лезнов А. Н., Федосеев И. А.* Представления некомпактных симплектических групп. — ТМФ, **7**, 298 (1971).
517. *Leznov A. N., Savel'ev M. V.*, Analog of the Plancherel Formula for Semi-Simple Lie Group, Proc. of 15th Int. Conf. on High Energy Physics, Kiev, 1970 (Naukowa Dumka, Kiev, 1972) (Paper submitted to the Conference). Аналог формулы Планшереля для полупростых групп Ли.
518. *Лезнов А. Н., Савельев М. В.* Мера Планшереля основной непрерывной серии унитарных представлений U (p, q). — ТМФ, **8**, 161 (1971).
519. *Лезнов А. Н., Савельев М. В.* Вопросы теории представлений полупростых групп Ли. — ЭЧАЯ, **7**, 55 (1976).
520. *Lichnerowicz A.*, Théorie globale des connections et des groupes d'holonomie, Dunod, Paris, 1955. [Имеется перевод: *Лихнерович А.* Теория связностей в целом и группы голономии. — М.: ИЛ, 1960.]
521. *Lichnerowicz A.*, Géometrie des groupes de transformations, Dunod, Paris, 1958. Геометрия групп преобразований.
522. *Lie S.*, Vorlesungen über Continuierlichen Gruppen mit geometrischen und anderen Anwendungen, G. Sheffers (ed.), Teubner, Leipzig, 1893. Лекции по непрерывным группам с геометрическими и другими приложениями.
523. *Lie S., Engel F.*, Theorie der Transformationgruppen, I, 1888; II, 1890; III, 1893, Teubner, Leipzig. Теория групп преобразований, I; II; III.
524. *Limić N., Niederle J.*, Ann. Inst. H. Poincaré, **9**, 327 (1968). Редукция наиболее вырожденных унитарных неприводимых представлений групп SO_0 (m, n) при сужении на некомпактную подгруппу вращения.
525. *Limić N., Niederle J., Raczka R.*, J. Math. Phys., **7**, 2026 (1966). Непрерывные вырожденные представления некомпактных групп вращения, II.
526. *Limić N., Niederle J., Raczka R.*, J. Math. Phys., **8**, 1079 (1967). Разложения по собственным функциям, связанные с инвариантным оператором второго порядка на гиперболоидах и конусах, III.
527. *Lindblad G.*, Physica Scr., **1**, 208 (1970). Разложение тензорного произведения двух представлений с мнимой массой группы Пуанкаре.

528. *Lindblad G.*, *Nagel B.*, Ann. Inst. H. Poincaré, **A13**, 27 (1970).
Непрерывные базисы для унитарных неприводимых представлений группы SU (1, 1).
529. *Lipkin H.*, Lie Groups for Pedestrians, North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 1965. Группы Ли для пешеходов.
530. *Lipsman R.*, J. of Functional Analysis, 3, 126 (1969).
Гармонический анализ на SL (n, C).
531. *Lipsman R.*, Am. J. Math., **91**, 938 (1969).
Равномерно ограниченные представления групп Лоренца.
532. *Lipsman R.*, Group Representations, A Survey of Some Current Topics, Lecture Notes in Mathematics **388**, Springer-Verlag, Berlin—New York, 1974.
Представления групп, обзор некоторых актуальных вопросов.
532′ *Lipsman R.*, An Explicit Realization of Kostant's Complementary Series with Applications to Uniformly Bounded Representations (to appear).
Точная реализация дополнительных серий Костанта с приложением к равномерно ограниченным представлениям.
533. *Lipsman R.*, On the Characters and Equivalence of Continuous Series Representations (to appear).
О характерах и эквивалентности представлений непрерывной серии.
534. *Littlewood D. E.*, Phil. Trans. Roy. Soc. London, **A239**, 305 (1944).
Теория инвариантов, тензоры и характеры групп.
535. *Littlewood D. E.*, The Theory of Group Characters and Matrix Representations of Groups, 2nd edition, Oxford at the Clarendon Press, 1958.
Теория характеров групп и матричные представления групп.
536. *Любарский Г. Я.* Теория групп и ее применение в физике. — М.: Гостехиздат, 1957.
537. *Loebl E.* (*ed.*), Group Theory and Its Applications, I, Acad. Press, New York, 1968.
Теория групп и ее приложения, I.
538. *Loebl E.* (*ed.*), Group Theory and Its Applications, II, Acad. Press, New York, 1971.
Теория групп и ее приложения, II.
539. *Loewner C.*, Theory of Continuous Groups, M. I. T. Press, Cambridge, 1971.
Теория непрерывных групп.
540. *Lomont J.*, Applications of Finite Groups, Academic Press, New York, 1959.
Применение конечных групп.
541. *Lomont J. S.*, *Mendelson P.*, Ann. of Math., **78**, 548 (1963).
Теорема унитарности—антиунитарности Вигнера.
542. *Lomont J. S.*, *Moses H. E.*, J. Math. Phys., **5**, 1438 (1964).
Представления неоднородной группы Лоренца в терминах базиса углового момента: вывод для случаев ненулевой массы и массы нуль, дискретного спина.
543. *Loomis L. H.*, An Introduction to Abstract Harmonic Analysis, Van Nostrand, New York, 1953. [Имеется перевод: *Люмис Л.* Введение в абстрактный гармонический анализ. — М.: ИЛ, 1956.]
544. *Loomis L. H.*, Duke Math. J., **27**, 569 (1960).
Положительно определенные функции и индуцированные представления.
545. *Loos O.*, Symmetric Spaces, vols. I, II, Benjamin, New York, 1969.
Симметрические пространства, т. I, II.
546. *Louck J. D.*, Am. J. Phys., **38**, 3 (1970).
Недавние достижения в теории тензорных операторов в унитарных группах.
547. *Lugarini G.*, *Pauri M.*, Ann. of Phys., **44**, 266 (1967).
«Канонические» представления неоднородной группы Лоренца.
548. *Lunn M.*, J. Phys., **A2**, 17 (1969).
Наблюдаемые координаты для релятивистских систем.
549. *Macfarlane A. J.*, *O'Raifeartaigh*, *Rao P. S.*, J. Math. Phys., **8**, 536 (1967).
Связь структуры внутренней и внешней кратностей простых компактных групп Ли.

550. *Mack G., Salam A.*, Ann. of Phys., **53**, 174 (1969).
Конечнокомпонентные полевые представления конформной группы.
551. *Mackey G. W.*, Am. J. Math., **73**, 576 (1951).
Об индуцированных представлениях групп.
552. *Mackey G. W.*, Ann. of Math., **55**, 101 (1952).
Индуцированные представления локально компактных групп, I.
553. *Mackey G. W.*, Ann. of Math., **58**, 193 (1953).
Индуцированные представления локально компактных групп, II.
554. *Mackey G. W.*, The Theory of Group Representations, Lecture Notes (Summer, 1955), Dept. of Math., Univ. of Chicago, v. 1—3, 1956 (Mimeographed Notes).
Теория представлений групп, конспекты лекций.
555. *Mackey G. W.*, Acta Math., **99**, 265 (1958).
Унитарные представления расширений групп, I.
556. *Mackey G. W.*, Bull. Am. Math. Soc., **69**, 628 (1963).
Бесконечномерные представления групп.
557. *Mackey G. W.*, Group Representations and Non-Commutative Harmonic Analysis (Mimeographed Notes), Univ. of California, Berkeley, 1965.
Представления групп и некоммутативный гармонический анализ.
558. *Mackey G. W.*, Math. Ann., **166**, 187 (1966).
Эргодическая теория и виртуальные группы.
559. *Mackey G. W.*, Induced Representations of Groups and Quantum Mechanics, Benjamin, New York—Amsterdam, 1968.
Индуцнрованные представления групп н квантовая механнка.
560. *Mackey G. W.*, Induced Representations of Locally Compact Groups and Applications, в кн.: Functional Analysis and Related Field, ed. by Browder F. E., Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg, 1970.
Индуцированные представления локально компактных групп и приложения.
561. *Mackey G. W.*, Ergodicity in the Theory of Group Representations, Actes Cong. Int. Math. Nice 1970, Gauthier-Villars, Paris, 1970, v. 2.
Эргодичность в теории представлений групп.
562. *Mackey G. W.*, Products of Subgroups and Projective Multipliers, в кн.: Coll. Math. Societatis J. Bolya 5, Hilbert Space Operators, Tihany, Hungary, 1970, North-Holland Publ., 1972.
Произведения подгрупп и проективные мультипликаторы.
563. *Mackey G. W.*, On the Analogy between Semisimple Lie Groups and Certain Related Semi Direct Product Groups, в кн.: Lie Groups and Their Representations, I, I. Gel'fand (ed.), Hilgar, London, 1975.
Об аналогии между полупростымн группами Ли и связанными с ними полупрямыми произведениями групп.
564. *Maekawa T.*, J. Math. Phys., **16**, 334 (1975).
Формула для вычисления матричных элементов представления группы SO (n).
565. *Magnus W., Karrass A., Solitar D.*, Combinatorial Group Theory, Presentation of Groups in Terms of Generators and Relations, Interscience Publ., J. Wiley Sons, New York—London—Sydney, 1966. [Имеется перевод: *Магнус В., Каррас А., Солитэр Д.* Представление групп в терминах образующих и соотношений. — М.: Наука, 1974.]
566. *Majorana E.*, Nuovo Cim., **9**, 335 (1932).
Релятивистская теория частиц с произвольным внутренним импульсом.
567. *Мальцев А. И.* Разрешимые алгебры Ли. — Изв. АН СССР, сер. матем., **9**, 329 (1945).
568. *Мальцев А. И.* О классе однородных пространств. — Изв. АН СССР, сер. матем., **13**, 9 (1949).
569. *Малкин И. А., Манько В. И.* Симметрия атома водорода. — Письма в ЖЭТФ 2, 230 (1965).

570. *Malkin I. A., Man'ko V. I., Trifonov D. A.*, Nuovo Cim., **4A**, 773 (1971).
Динамическая симметрия нестационарных систем.
571. *Martin R. P.*, Trans. Am. Math. Soc., **201**, 177 (1975).
О разложении тензорных произведений представлений основной серии для полупростых групп действительного ранга один.
572. *Masson D., McClary W. K.*, J. of Funct. Analysis, **10**, 19 (1972).
Классы векторов из C^∞ и существенная самосопряженность.
573. *Mathews P. M., Seetharaman M., Simon M. T.*, J. Math. Phys., **15**, 899 (1974).
О неразложимых представлениях с нулевой массой группы Пуанкаре.
574. *Maurin K.*, General Eigenfunction Expansions and Unitary Representations of Topological Groups, PWN—Polish Scien. Publ., Warsaw, 1968.
Общие разложения по собственным функциям и унитарные представления топологических групп.
575. *Maurin K., Maurin L.*, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys., **11**, 525 (1963).
Обертывающая алгебра локально компактной группы и ее самосопряженные представления.
576. *Mautner F. I.*, Ann. of Math., **51**, 1 (1950).
Унитарные представления локально компактных групп, I.
577. *Mautner F. I.*, Ann. of Math., **52**, 528 (1950).
Унитарные представления локально компактных групп, II.
578. *Mautner F. I.*, Proc. Am. Math. Soc., **2**, 490 (1951).
О разложении унитарных представлений группы Ли.
579. *Mautner F. I.*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **37**, 529 (1951).
Анализ Фурье и симметрические пространства.
580. *Mautner F. I.*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **37**, 431 (1951).
Обобщение теоремы взаимности Фробениуса.
581. *Mautner F. I.*, Am. J. Math. **74**, 737 (1952).
Индуцированные представления.
582. *McCarthy P. J.*, Proc. Roy. Soc. London, **A330**, 517; **A333**, 317; **A351**, 55 (1972—76).
Представления группы Бонди—Мецнера—Сака, I, II, IV.
583. *McCarthy P. J.*, Proc. Roy. Soc. London, **A343**, 489 (1975).
Группа Бонди—Мецнера—Сака в ядерной топологии.
584. *McCarthy P. J., Crampin M.*, Proc. Roy. Soc. London, **A335**, 301 (1973).
Представления группы Бонди—Мецнера—Сака, III.
585. *McGlinn W. D.*, Phys. Rev. Lett., **12**, 467 (1964).
Проблема объединения симметрии взаимодействия с релятивистской инвариантностью.
586. *Mehta M. L.*, J. Math. Phys., **7**, 1824 (1966).
Классификация неприводимых унитарных представлений компактных простых групп Ли, I.
587. *Messiah A.*, Quantum Mechanics, v. 1, transl. from French, North—Holland Publ. Co., Amsterdam, 1961. [Имеется перевод: *Мессиа А.* Квантовая механика. Т. 1. — М.: Наука, 1978.]
588. *Michel L.*, Invariance in Quantum Mechanics and Group Extension, Lectures Istambul Summer School Theoret. Phys. 1962 (ed. by F. Gürsey) Gordon & Breach, New York, 1964.
Инвариантность в квантовой механике и расширение группы.
589. *Michel L.*, Phys. Rev., **137B**, 405 (1965).
Соотношение между внутренней симметрией и релятивистской инвариантностью.
590. *Michel L.*, Applications of Group Theory to Quantum Physics, Algebraic Aspects, Lecture Notes in Phys. 6, Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York, 1970.
Применение теории групп к квантовой физике.

591. *Michelson J., Niederle J.*, Ann. Inst. H. Poincaré, **A19**, 171 (1973).
Об интегрируемости дискретных представлений алгебры Ли $u(p, q)$.
592. *Mielnik B., Plebanski J.*, Ann. Inst. H. Poincaré, **A12**, 215 (1960).
Комбинаторный подход к экспонентам Бейкера—Кэмпбелла—Хаусдорфа.
593. *Miller W., Jr.*, Lie Theory and Special Fuctions, Acad. Press, New York, 1968.
Теория Ли и специальные функции.
594. *Miller W.*, J. Math. Phys., **9**, 1163; 1175; 1434 (1968).
Специальные функции и комплексные евклидовы группы в 3-пространстве, I, II, III.
595. *Miller W.*, Symmetry Groups and Their Applications, Acad. Press. New York, 1973.
Группы симметрий и их приложения.
596. *Miller W., Jr.*, SIAM J. Appl. Math., **25**, 226 (1973).
Теория Ли и обобщения гипергеометрических функций.
597. *Montgomery D., Zippin L.*, Topological Transformation Groups, Interscience, New York, 1955.
Топологические группы преобразований.
598. *Moore C. C.*, Pacific J. Math., **12**, 359 (1962).
О теореме взаимности Фробениуса для локально компактных групп.
599. *Moore C. C. (ed.)*, Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces, Proceed. of Symposia in Pure Mathematics, Am. Math. Soc., vol. XXVI, 1973.
Гармонический анализ на однородных пространствах.
600. *Moore C. C., Wolf J. A.*, Trans. Am. Math. Soc., **185**, 445 (1976).
Квадратично интегрируемые представления нильпотентных групп.
601. *Moore R. T.*, Bull. Am. Math. Soc., **71**, 903 (1965).
Экспоненциация операторных алгебр Ли на банаховых пространствах.
602. *Moore R. T.*, Measurable, Continuous and Smooth Vectors for Semigroups and Group Representations, Memoirs Am. Math. Soc., 78, Providence, R. I, 1968.
Измеримые, непрерывные и гладкие векторы для полугрупп и представлений групп.
603. *Morita K.*, Sci. Report Tokyo Kyoiku Daigaku Sect., **A5**, 190 (1956).
О керн-функциях для симметрических областей.
604. *Moshinsky M.*, Group Theory and the Many-Body Problem, в кн.: Physics of Many Particle Systems (ed. E. Meeron), Gordon & Breach, New York, 1968.
Теория групп и задача многих тел.
605. *Moshinsky M., Patera J.*, J. Math. Phys., **16**, 1866 (1975).
Канонические преобразования и случайное вырождение, IV.
606. *Moussa P., Stora R.*, Some Remarks on the Product of Ireducible Representations of the Inhomogeneous Lorentz Group, Lectures in Theoret. Phys. VIIA, Univ. Colorado Press, Boulder, 1965.
Несколько замечаний о произведении неприводимых представлений неоднородной группы Лоренца.
607. *Mueller-Roemer P. R.*, Bull. Am. Math. Soc., **77**, 1089 (1971).
Замечание по теореме Макки об импримитивности.
608. *Mukunda N.*, J. Math. Phys., **10**, 2086; 2092 (1969).
Матрицы конечных преобразований Лоренца в некомпактном базисе, I, II.
609. *Mukunda N.*, J. Math. Phys., **14**, 2005 (1973).
Матрицы конечных преобразований Лоренца в некомпактном базисе, III.
610. *Murnagan F. D.*, The Unitary and Rotation Groups, Spartan Books, Wasington, D. C., 1962.
Унитарные группы и группы вращений.
611. *Murai Y.*, Progr. Theor. Phys., **9**, 147 (1953); 441 (1954).
О группе преобразований в шестимерном пространстве, I, II.
612. *Nachbin L.*, Proc. Am. Math. Soc., **12**, 11 (1961).
О конечномерности всякого неприводимого унитарного представления компактной группы.

613. *Nachbin L.*, The Haar Integral, Van Nostrand Co., Inc., Princeton, New York, 1965.
Интеграл Хаара.
614. *Nagel B.*, Lie Algebras, Lie Groups, Group Representations and Some Applications to Problems in Elementary Particle Physics, Seminar Notes, Spring 1969, Royal Inst. of Technology, Stockholm, 1969.
Алгебры Ли, группы Ли, представления групп и некоторые применения к проблемам физики элементарных частиц.
615. *Nagel B., Snellman H.*, J. Math. Phys., **15**, 245 (1974).
Аналитические векторы для группы Пуанкаре в квантовой теории поля.
616. *Nagy B. Sz.*, Prolongements de transformations de l'espace de Hilbert qui Sortent de cet espace, Appendice au livre «Leçons d'analyse fonctionnelle» par F. Riesz et B. Sz. Nagy, Akademiai Kiadó, Budapest, 1955.
Продолжение преобразований гильбертова пространства, которые выходят из этого пространства. Приложение к книге «Лекции по функциональному анализу».
617. *Наймарк М. А.* Об описании всех унитарных представлений комплексных классических групп, I — Матем. сб., **35**, 317 (1954); II, **37**, 121 (1955).
618. *Наймарк М. А.* Линейные представлеиия группы Лоренца. — Усп. матем. наук, **9**, вып. 4, 19 (1954).
619. *Наймарк М. А.* О разложении на фактор-представления унитарного представления локально компактной группы. — Сиб. матем. журн., **2**, 89 (1961).
620. *Наймарк М. А.* Линейные представления группы Лоренца— М.: Физматгиз, 1958.
621. *Наймарк М. А.* Унитарные представления группы Лоренца в пространствах с индефинитной метрикой. — Матем. сб., **65**, 198 (1964).
622. *Наймарк М. А.* Нормированные кольца. — М.: Наука, 1968.
623. *Naimark M. A.*, Acta Ssi. Math. Szeged, **26**, 201 (1965).
Об унитарных представлениях группы в пространствах с индефинитной метрикой.
624. *Наймарк М. А.* Теория представлений групп. — М.: Наука, 1976.
625. *Наймарк М. А., Исмагилов П. С.* Представления группы и алгебры в пространствах с индефинитной метрикой. В сб.: Итоги науки. Матем. анализ, М., 1969.
626. *Nambu Y.*, Progr. Theor. Phys. Kyoto, Suppl., **37—38**, 368 (1966).
Релятивистские волновые уравнения для частиц с внутренней структурой и спектром масс.
627. *Nambu Y.*, Phys. Rev., **160**, 1171 (1961).
Бесконечнокомпонентное волновое уравнение с водородоподобным спектром масс.
628. *Nelson E.*, Ann. of Math., **70**, 572 (1959).
Аналитические векторы.
629. *Nelson E., Stinespring W. F.*, Am. J. Math., **81**, 547 (1959).
Представления эллиптических операторов в обертывающей алгебре.
630. *Von Neumann J.*, Math. Ann., **104**, 570 (1931).
Одиозначность операторов Шредингера.
631. *Von Neumann J.*, Mathematische Grundlagen der Quantenmechanic, Springer, Berlin, 1932; English Transl. by R. T. Beyer, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1955. [Имеется перевод: *фон Нейман И.* Математические основы квантовой механики. — М.: Наука, 1964.]
632. *Newton T. D.*, Ann. of Math., **51**, 730 (1950).
Заметка о представлениях группы де Ситтера.
633. *Newton T. D., Wigner E. P.*, Rev. Mod. Phys., **21**, 400 (1949).
Локализованные состояния элементарных систем.
634. *Nghiem Xuan Hai*, Comm. Math. Phys., **12**, 331 (1969).
Гармонический анализ на группе Пуанкаре, I. Обобщенные матричные элементы.

635. *Niederer U. H.*, Helv. Phys. Acta, **45**, 802 (1972).
Максимальная кинематическая группа инвариантности свободного уравнения Шредингера.
636. *Niederer U. H.*, Helv. Phys. Acta, **47**, 167 (1974).
Максимальные кинематические группы инвариантности уравнений Шредингера с произвольными потенциалами.
637. *Niederer U. H., O'Raifeartaigh*, Fortschr. Physik, **22**, 111; 131 (1974).
Реализации унитарных представлений неоднородных пространственно-временных групп, I; II.
638. *Niederle J.*, J. Math. Phys., **8**, 1921 (1967).
Разложение дискретных наиболее вырожденных представлений групп $SO_0(p, q)$ при сужении до представлений подгруппы $SO_0(p, q-1)$ или $SO_0(p-1, q)$.
639. *Niederle J.*, Mickelsson, Preprint of the Inst. of Physics, Prague, 1973.
Об интегрируемости дискретных представлений алгебры Ли $u(p, q)$.
640. *Николов А. В.* Операторы Казимира для группы $O(n)$. Препринт ОИЯИ Р2-3334, Дубна, 1967; Болг. АН, отдел. матем. и физ. наук. — Изв. физ. инст., **18**, 17 (1967).
641. *Николов А. В.* Дискретная серия унитарных представлений алгебры Ли группы $O(p, q)$. Препринт ОИЯИ Р5-3140, Дубна, 1967; Функц. анализ, **2**, вып. 1, 99 (1967).
642. *Николов А. В.* О полунепрерывных сериях унитарных представлений алгебры Ли группы $O(p, 1)$. Препринт ОИЯИ Р2-3535. Дубна, 1967.
643. *Николов А. В., Рерих К. В.* Дискретная серия унитарных представлений алгебры Ли группы $U(p, q)$. Препринт ОИЯИ Р5-2962. Дубна, 1967.
644. *Николов А. В., Рерих К. В.* О полном наборе коммутирующих операторов для группы $O(n)$. Препринт ОИЯИ Р2-3536. Дубна, 1966.
645. *Nomizu Katsumi*, Lie Groups and Differential Geometry, The Math. Soc. of Japan, Tokyo, 1956. [Имеется перевод: *Номидзу К.* Группы Ли и дифференциальная геометрия. — М.: ИЛ, 1960.]
646. *Nussbaum A.*, Applied Group Theory for Chemists, Physicists and Engineers, Englewood Cliffs, Prentice-Hall Inc., New Jersey, 1971.
Прикладная теория групп для химиков, физиков и инженеров.
647. *Okamoto K.*, Osaka J. Math., **4**, 85 (1967).
Об индуцированных представлениях.
648. *Okubo S.*, J. Math. Phys., **16**, 528 (1975).
Алгебраические тождества среди инфинитезимальных генераторов группы $U(n)$.
649. *O'Raifeartaigh L.*, Phys. Rev., **139B**, 1052 (1965).
Лоренц-инвариантность и внутренняя симметрия.
650. *O'Raifeartaigh L.*, Broken Symmetry, в кн.: Group Theory and Its Applications, E. M. Loebl (ed.), 1968.
Нарушенная симметрия.
651. *O'Raifeartaigh L.*, Unitary Representations of Lie Groups in Quantum Mechanics, Lecture Notes in Phys. (Springer, Berlin—Heidelberg—New York, 1970.)
Унитарные представления групп Ли в квантовой механике.
652. *Osima M.*, Proc. Imperial Acad. Tokyo, **17**, 411 (1941).
Замечание о кронекеровском произведении представлений группы.
653. *Ottoson U.*, Comm. Math. Phys., **8**, 228 (1968).
Классификация унитарных неприводимых представлений группы $SO(N, 1)$.
654. *Ottoson U.*, Comm. Math. Phys., **10**, 114 (1968).
Классификация унитарных неприводимых представлений группы $SU(N, 1)$.
655. *Овсянников Л. В.* Групповые свойства дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978.
656. *Oxtoby J. C.*, Trans. Am. Math. Soc., **60**, 215 (1946).
Инвариантные меры в группах, не являющихся локально компактными.

657. *Pajas P.*, ICTP Preprint IC/67/5, Trieste, 1967.
Таблицы рядов Клебша — Гордана для групп Ли A_2, B_2, G_2, A_3, B_3 и C_3.
658. *Pajas P.*, *Rączka R.*, J. Math. Phys., **9**, 1188 (1968).
Вырожденные представления симплектических групп, I.
659. *Paley R.*, *Wiener N.*, Fourier Transform in the Complex Domain, Amer. Math. Soc., New York, 1934. [Имеется перевод: *Винер Н.*, *Пэли Р.* Преобразование Фурье в комплексной плоскости. — М.: Наука, 1964.]
660. *Parthasarathy K. R.*, Multipliers on Locally Compact Groups, Lecture Notes in Mathematics **93**, Springer, Berlin—Heidelberg—New York, 1969.
Мультипликаторы на локально компактных группах.
661. *Parthasarathy K. R.*, Ann. of Math., **96**, 1 (1972).
Оператор Дирака и дискретные серии.
662. *Parthasarathy K. R.*, *Rao Ranga R.*, *Varadarajan V. S.*, Ann. of Math., **85**, 383 (1967).
Представления комплексных полупростых групп и алгебр Ли.
663. *Pauli W.*, Ergebn. Exact. Naturwiss., 37, 85 (1965).
Непрерывные группы в квантовой механике.
664. *Pauri M.*, *Prosperi G. M.*, J. Math. Phys., **9**, 1146 (1968).
Канонические релизации группы Галилея.
665. *Pauri M.*, *Prosperi G. M.*, J. Math. Phys., **16**, 1503 (1975).
Канонические реализации группы Пуанкаре, I. Общая теория.
666. *Penney R.*, Trans. Am. Math. Soc., **198**, 107; **191**; 195 (1974).
Целые векторы и голоморфное расширение представлений, I.
667. *Perelomov A. M.*, Comm. Math. Phys., **26**, 222 (1971).
Когерентные состояния для произвольной группы Ли.
668. *Переломов А. М.*, *Попов В. С.* Разложение прямого произведения представлеиий SU (3) на неприводимые представления. — ЯФ, **2**, 294 (1966).
669. *Переломов А. М.*, *Попов В. С.* Операторы Казимира для ортогональных и симплектических групп. — ЯФ, **3**, 1127 (1966).
670. *Переломов А. М.*, *Попов В. С.* Операторы Казимира для групп $U(n)$ и SU (n). — ЯФ, **3**, 924 (1966).
671. *Переломов А. М.*, *Попов В. С.* О собственных значениях операторов Казимира. — ЯФ, 7, 460 (1968).
672. *Переломов А. М.*, *Попов В. С.* Операторы Казимира для полупростых групп Ли. — Изв. АН СССР, сер. матем., **32**, 1368 (1968).
673. *Peter F.*, *Weyl H.*, Math. Ann., **97**, 737 (1927).
Полнота неприводимых представлений замкнутой непрерывной группы.
674. *Petiau G.*, Thesis, Masson, 1936.
Диссертация.
675. *Петрашень М. И.*, *Трифонов Е. Д.* Применение теории групп в квантовой механике. — Наука, 1964.
676. *Pirrung B.*, Non Continuous Representations of Lie Groups, Lectures in Theor. Physics, vol. 13, U. Colorado Press, 1971.
Представления групп Ли, которые не являются непрерывными.
677. *Понтрягин Л. С.* Непрерывные группы. — М.: Гостехиздат, 1954.
678. *Понтрягин Л. С.* Непрерывные группы. — М.: Наука, 1974.
679. *Poulsen N. S.*, Regularity Aspects of the Theory of Infinite Dimensional Representations of Lie Groups, Ph. D. Thesis, Massachussets Inst. of Technology, 1970.
Регулярностные аспекты теории бесконечномерных представлений групп Ли.
680. *Poulsen N. S.*, J. of Functional Analysis, **9**, 87 (1972).
О C^∞-векторах и переплетающих билинейных формах для представлений групп Ли.
681. *Poulsen N. S.*, On C^∞-Vectors and Interwining Bilinear Forms for Representations of Lie Groups (to appear).

О C^∞-векторах и переплетающих билинейных формах для представлений групп Ли.
682. *Pozzi G. A.*, Suppl. Nuovo Cim., Serie 1, **4**, 37 (1966).
Непрерывные унитарные представления локально компактных групп, Применение к квантовой динамике. Часть I. Теория разложения.
683. *Proca A.*, J. de Physique et le Radium, **1** (July), 235 (1930).
Уравнение Дирака.
684. *Pukánszky L.*, Math. Ann., **156**, 96 (1964).
Формула Планшереля для универсальиой накрывающей группы группы SL (2, *R*).
685. *Pukánszky L.*, Leçons sur les representations des groupes, Dunod, Paris, 1967.
Лекции по представлениям групп.
686. *Pukánszky L.*, J. Functional Analysis, **1**, 255 (1967).
О характерах и формуле Планшереля нильпотентных групп.
687. *Pukánszky L.*, Trans. Am. Math. Soc., **126**, 487 (1967).
О теории экспоненциальных групп.
688. *Pukánszky L.*, J. Functional Analysis, **2**, 73 (1968).
Об унитарных представлениях экспоненциальных групп.
689. *Pukánszky L.*, J. Functional Analysis, **3**, 435 (1969).
Характеры алгебраических разрешимых групп.
690. *Pukánszky L.*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup., **4**, 457 (1971).
Унитарные представления разрешимых групп Ли.
691. *Racah G.*, Group Theory and Nuclear Spectroscopy, Lecture Notes, Princeton, 1951. Preprint no. 61—68, CERN, 1961, and JINR no. R-1864.
Теория групп и ядерная спектроскопия.
692. *Racah G.*, Nuovo Cim. Suppl., **14**, 67 (1959).
Теория групп Ли.
693. *Racah G.*, Ergebn. der Exakten Naturwiss., **37**, 28 (1965).
Теория групп и спектроскопия.
694. *Rademacher H.*, Proc. London Math. Soc., **43**, 241 (1937).
О функции разбиения.
695. *Radhakrishnan B.*, *Mukunda N.*, J. Math. Phys., **15**, 477 (1974).
Пространственноподобные представления неоднородной группы Лоренца в лоренц-базисе.
696. *Rafique M.*, *Tahir Shah K.*, Ann. Inst. H. Poincaré, Sect. A (N. S.), **21**, 341 (1974).
Инвариантные операторы неоднородной унитарной группы.
697. *Rarita W.*, *Schwinger J.*, Phys. Rev., **60**, 61 (1941).
О теории частиц с полуцелым спином.
698. *Rączka R.*, Operator-Valued Distributions in Group Representation Theory and Their Applications, Lecture Notes, Chalmers Technical University, 1969.
Операторнозначные обобщенные функции в теории представлений групп и их применение, конспекты лекций.
699. *Rączka R.*, Ann. Inst. H. Poincaré, **19**, 341 (1973).
Теория релятивистских нестабильных частиц.
700. *Rączka R.*, *Fischer J.*, Comm. Math. Phys., **3**, 233 (1966).
Дискретные вырожденные представления некомпактных унитарных групп.
701. *Rączka R.*, *Limić N.*, *Niederle J.*, J. Math. Phys., **7**, 1861 (1966).
Дискретные вырожденные представления некомпактиых групп вращений.
702. *Redei L. B.*, J. Math. Phys., **6**, 322 (1965).
Уравнение Дирака и унитарные представления неоднородной группы Лоренца.
703. *Reiter H.*, Classical Harmonic analysis on Locally Compact Groups, Clarendon Press, Oxford, 1968.
Классический гармонический анализ на локально компактных группах.
704. *Rhie Y.*, Illinois J. Math., **10**, 147 (1966).
Теорема плотности для спектров дискретных подгрупп полупростых групп Ли.

705. *Richard J. L.*, Nuovo Cim., 8A, 485 (1972).
Теоретико-групповой анализ элементарных частиц во внешнем электромагнитном поле, III.
706. *Rideau G.*, Comm. Math. Phys., 3, 218 (1966).
О редукции регулярного представления группы Пуанкаре.
707. *Rieffel M. A.*, J. Functional Analysis, 1, 443 (1967).
Индуцированные банаховы представления банаховых алгебр и локально компактные группы.
708. *Rieffel M. A.*, J. Functional Analysis, 3, 265 (1969).
Квадратично интегрируемые представления гильбертовых алгебр.
709. *Rieffel M. A.*, Adv. in Math., 13, 176 (1974).
Индуцированные представления C^*-алгебр.
710. *Riesz F.*, *Sz-Nagy B.*, Functional Analysis, Blackie & Son, Ltd., London, 1956.
Функциональный анализ.
711. *Ridelhof R.*, Acta Math., 125, 155 (1970).
Индуцированные представления локально компактных групп.
712. *Robinson G. de B.*, Representation Theory of the Symmetric Group, Mathematical Expositions, Univ. of Toronto Press, Toronto, 1961.
Теория представлений симметрической группы.
713. *Roffman E. C.*, Comm. Math. Phys., 4, 237 (1967).
Унитарные и неунитарные представления комплексной неоднородной группы Лоренца.
714. *Ромм Б. Д.* Разложение на неприводимые представления сужения представлений основной серии собственной группы Лоренца на вещественную группу Лоренца. — ДАН СССР, **152**, 59 (1963).
715. *Ромм Б. Д.* Разложение на неприводимые представления тензорного произведения двух неприводимых представлений вещественной группы Лоренца (случай двух дискретных серий). — Изв. АН СССР, сер. матем., **28**, 855 (1964).
716. *Ромм Б. Д.* Аналог формулы Планшереля для вещественной унимодулярной группы n-го порядка. — Изв. АН СССР, сер. матем., **29**, 1147 (1965).
717. *Ромм Б. Д.* Сужение на вещественные подгруппы дополнительной серии комплексной унимодулярной группы второго порядка. — ДАН СССР, **168**, 1015 (1966).
718. *Ромм Б. Д.* Вполне приводимые представления полупростой алгебры Ли. — ДАН СССР, **175**, 300 (1967).
719. *Rossi H.*, *Vergne M.*, J. Functional Analysis, 13, 324 (1973).
Представления некоторых разрешимых групп Ли в гильбертовых пространствах голоморфных функций и приложение к голоморфным дискретным сериям полупростой группы Ли.
720. *Rotelli P.*, *Suttorp L. G.*, Phys. Lett., 40B, 579 (1972).
Изоспиновые правила сумм для инклюзивных кросс-сечений.
721. *Розенфельд Б. А.* Геометрическая интерпретация симметрических пространств с простой фундаментальной группой. — ДАН СССР, **110**, 23 (1956).
722. *Rühl W.*, The Lorentz Group and Harmonic Analysis, Benjamin, New York, 1970.
Группа Лоренца и гармонический анализ.
723. *Румер Ю. Б.*, *Фет А. И.* Теория унитарной симметрии.—М.: Наука, 1970.
724. *Sagle A.*, *Walde R.*, Introduction to Lie Groups and Lie Algebras, Academic Press, New York, 1973.
Введение в группы и алгебры Ли.
725. *Sakai S.*, Proc. Japan Acad., 30, 14 (1954).
О представлениях полупростых групп Ли.
726. *Sakai S.*, Proc. Japan Acad., 30, 305 (1954).
О бесконечномерных представлениях полупростых алгебр Ли и некоторых функционалах на универсальных обертывающих алгебрах.

727. *Saletan E. J.*, J. Math. Phys., 2, 1 (1961).
Контракция групп Ли.
728. *Санников С. С.* Представления группы вращений с комплексным спином.— ЯФ, 2, 570 (1965).
729. *Санников С. С.* Комплексные импульсы и представления группы Пуанкаре. — ЯФ, 4, 587 (1966).
730. *Санников С. С.* Состояния с комплексным угловым моментом в квантовой механике. — ЯФ, 4, 896 (1966).
731. *Санников С. С.* Бесконечномерные представления группы вращений. — ЯФ, 6, 788 (1967).
732. *Schrader R.*, Fortschr. Phys., 20, 701 (1972).
Группа Максвелла и квантовая теория частиц в классических однородных электромагнитных полях.
733. *Schaaf M.*, The Reduction of the Product of Two Irreducible Unitary Representations of the Proper Orthochronous Poincare Group, Lecture Notes in Physics 5, Springer-Verlag, Berlin, 1970. [Имеется перевод: *Шааф М.* Редукция произведения двух неприводимых унитарных представлений группы Пуанкаре. В сб.: Симметрия в квантовой физике. — М.: Мир, 1974.]
734. *Schouten J. A.*, Rev. Mod. Phys., 21, 421 (1949).
О мезонных полях и конформных преобразованиях.
735. *Schrödinger E.*, Ann. Phys., 79, 361, 489 (1926).
Квантование как задача на собственные значения, I; II.
736. *Schwartz L.*, Théorie des distributions, vol. 1 (2nd ed.), Hermann, Paris, 1950; vol. 2, 1951.
Теория распределений.
737. *Scwartz L.*, Ann. Inst. Fourier, 7, 1 (1957).
Теория векторнозначных распределений.
738. *Schwartz L.*, Théorie des distributions, vol. I, Hermann, Paris, 1957.
Теория распределений, т. I.
739. *Schwartz L.*, Théorie des distributions, vol. II, Hermann, Paris, 1957.
Теория распределений, т. II.
740. *Schwartz F.*, J. Math. Phys., 12, 131 (1971).
Унитарные неприводимые представления групп SO $(n, 1)$.
741. *Scull S. C.*, Rep. Math. Phys., 10, 1 (1976).
Положительные операторы и группы автоморфизмов ограниченных симметрических областей.
742. *Segal I. E.*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 27, 348 (1941).
Групповое кольцо локально компактной группы, I.
743. *Segal I. E.*, Bull. Am. Math. Soc., 53, 73 (1947).
Неприводимые представления операторных алгебр.
744. *Segal I. E.*, Trans. Am. Math. Soc., 61, 69 (1947).
Групповая алгебра локально компактной группы.
745. *Segal I. E.*, Ann. Math., 51, 293 (1950).
Двустороннее регулярное представление унимодулярной локально компактной группы.
746. *Segal I. E.*, Ann. Math., 52, 272 (1950).
Распространение формулы Планшереля на сепарабельные унимодулярные группы.
747. *Segal I. E.*, Decomposition of Operator Algebras, I, II. Memoirs Am. Math. Soc. 9, 1951.
Разложение операторных алгебр.
748. *Segal I. E.*, Duke Math. J., 18, 221 (1951).
Класс операторных алгебр, которые определяются группами.
749. *Segal I. E.*, Proc. Am. Math. Soc., 3, 13 (1952).
Гипермаксимальность некоторых операторов на группах Ли.
750. *Segal I. E.*, Ann. of Math. 57, 401 (1953).
Некоммутативное расширение абстрактного интегрирования.

751. *Segal I. E.*, Bull. Am. Math. Soc., **70**, 155 (1964).
Бесконечномерные неприводимые представления компактных полупростых групп.
752. *Segal I. E.*, J. Functional Analysis, **1**, 1 (1967).
Обобщение теоремы О'Рэферти.
753. *Segal I. E.*, *Kunze R. A.*, Integrals and Operators, McGraw Hill, N. Y., 1968.
Интегралы и операторы.
754. *Segal I. E.*, *von Neumann J.*, Ann. of Math., **52**, 509 (1950).
Теорема об унитарных представлениях полупростых групп Ли.
755. *Selberg A.*, J. Indian Math. Soc., **20**, 47 (1956).
Гармонический анализ и разрывные группы в слабо симметрических римановых пространствах с приложением к рядам Дирихле.
756. *Serre J. P.*, Lie Algebras and Lie Groups, Benjamin, New York, 1965.
[Имеется перевод: *Серр Ж.-П.* Алгебры Ли и группы Ли. — М.: Мир, 1969.]
757. *Serre J. P.*, Algêbres de Lie semisimple complex, Benjamin, New York, 1966.
[Имеется перевод: *Серр Ж.-П.* Алгебры Ли и группы Ли, часть III. — М.: Мир, 1969.]
758. *Sharp R. T.*, Am. J. Phys., **28**, 116 (1960).
Простой вывод коэффициентов Клебша—Гордана.
759. *Шелепин Л. А.* Симметрия SU_n в теории коэффициентов Клебша—Гордана. — ЖЭТФ, **48**, 360 (1965).
760. *Sherman T.*, Canad. J. Math., **18**, 159 (1966).
Теория весов для унитарных представлений.
761. *Shiga K.*, J. Math. Soc. Japan, **7**, 224 (1955).
Представления компактной группы в банаховом пространстве.
762. *Shoda K.*, Proc. Phys. Math. Soc. Japan, **15**, 249 (1933).
О мономиальных представлениях конечной группы.
763. *Simms D. J.*, Lie Groups and Quantum Mechanics, Lecture Notes in Mathematics 52, Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg, 1968.
Группы Ли и квантовая механика.
764. *Simms D. J.*, Rep. Math. Phys., **2**, 283 (1971).
Краткое доказательство критерия Баргманна для подъема проективных представлений групп Ли.
765. *Simon J.*, Comm. Math. Phys., **28**, 39 (1972).
Об интегрируемости представлений конечномерных вещественных алгебр Ли.
766. *Simoni A.*, *Zaccaria F.*, *Vitale B.*, Nuovo Cim., **51A**, 448 (1967).
Динамические симметрии как группы функций на динамических пространствах.
767. *Широков Ю. М.* Теоретико-групповое рассмотрение основ релятивистской квантовой механики, I—IV. — ЖЭТФ, **33**, 861; 1196; 1208; **34**, 717 (1958).
768. *Širokov Yu. M.*, Nucl. Phys., **15**, 1 (1960).
Пространственное и временное отражения в релятивистской теории.
769. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. Т. 5. — М.: Физматгиз, 1960.
770. *Смирнов В. И.* Linear Algebra and Group Theory, McGraw-Hill, New York, 1961.
Линейная алгебра и теория групп.
771. *Snellman H.*, J. Math. Phys., **15**, 1054 (1974).
Аналитические векторы Пуанкаре в аксиоматической квантовой теории поля.
772. *Souriau J. M.*, Structure des systèms dynamiques, Maitrises de Mathématiques, Dunod, Paris, 1970.
Структура динамических систем.
773. *Speiser D.*, *Antoine J. P.*, J. Math. Phys., **5**, 1226 and 1560 (1964).
Характеры неприводимых представлений простых групп.
774. *Stein E. M.*, A Survey of Representations of Non-Compact Groups, Lect. Sem. on High Energy Physics and Elementary Particles, Trieste-1965, International Atomic Energy Agency, Vienna, 1965.

Обзор по представлениям некомпактных групп.
775. *Stein E. M.*, Ann. of Math., **86**, 461 (1967).
Анализ в матричных пространствах и некоторые новые представления группы SL (N, C).
776. *Stein E. M.*, Advances in Math., **4**, 172 (1970).
Аналитическое продолжение представлений групп.
777. *Stein E. M.*, *Wainger S.*, Arkiv för Mathematik, **5**, 553 (1965).
Аналитические свойства разложений и некоторые варианты формул Парсеваля—Планшереля.
778. *Stein E. M.*, *Weiss G.*, Am. J. Math., **90**, 163 (1968).
Обобщение уравнений Коши—Римана и представлении группы вращений.
779. *Steinberg R.*, Bull. Am. Math. Soc., **67**, 406 (1961).
Общая теорема Клебша—Гордана.
780. *Steinberg R.*, Trans. Am. Math. Soc., **112**, 392 (1964).
Дифференциальные уравнения, инвариантные относительно конечных групп отражений.
781. *Sternheimer D.*, J. de Math. Pures et Appliques, **47**, 289 (1968).
Спектральные свойства представлений групп Ли.
782. *Stiefel E.*, Comment. Math. Helv., **14**, 350 (1942).
О связи между замкнутыми группами Ли и дискретными группами движений евклидова пространства и ее применении к классификации простых групп Ли.
783. *Stiefel E.*, Comment. Math. Helv., **17**, 165 (1945).
Кристаллографическое определение характеров замкнутых групп Ли.
784. *Stinespring W. F.*, Proc. Am. Math. Soc., **9**, 965 (1958).
Полупростая матричная группа является группой типа I.
785. *Stinespring W. F.*, Duke Math, J., **26**, 123(1959).
Интегрируемость преобразования Фурье для унимодулярных групп Ли.
786. *Stone M. H.*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **16**, 172 (1930).
Линейные преобразования в гильбертовом пространстве, III. Операционные методы и теория групп.
787. *Stone M. H.*, Ann. of Math., **33**, 643 (1932).
Об однопараметрических унитарных группах в гильбертовом пространстве.
788. *Stone M. H.*, Linear Transformations in Hilbert Space and Their Application to Analysis, Am. Math. Soc. Colloquium Publication **15**, New York, 1932. Линейные преобразования в гильбертовом пространстве и их приложение к анализу.
789. *Stoyanow D. T.*, *Todorov I. T.*, J. Math. Phys., **9**, 2146 (1968).
Представления Майораны группы Лоренца и бесконечнокомпонентные поля.
790. *Straumann N.*, Helvet. Phys. Acta, **38**, 481 (1965).
Правила ветвления и ряды Клебша—Гордана полупростых алгебр Ли.
791. *Streater R. F.*, Comm. Math. Phys., **4**, 217 (1967).
Представления группы осциллятора.
792. *Ström S.*, Ark. Fysik, **29**, 467 (1965).
О матричных элементах унитарных представлений однородной группы Лоренца.
793. *Ström S.*, Ark. Fysik, **30**, 455 (1965).
Построение представлений неоднородной группы Лоренца при помощи контракции представлений группы де Ситтера 1 + 4.
794. *Ström S.*, Ark. Fysik, **30**, 267 (1965).
О контракции представлений группы Лоренца до представлений евклидовой группы.
795. *Ström S.*, Ark. Fysik, **33**, 465 (1967).
Замечание о матричных элементах унитарных представлений однородной группы Лоренца.
796. *Ström S.*, Ark. Fysik, **38**, 373 (1968).
Матричные элементы унитарных представлений дополнительной серии группы SL (2, C).

797. *Suprunenko D. A.*, Solvable and Nilpotent Linear Groups, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1963.
Резрешимые и нильпотентные линейные группы.
798. *Suguira M.*, Unitary Representations and Harmonic Analysis — An Introduction, Kodansha, Tokyo, 1975.
Унитарные представления и гармонический анализ — введение.
799. *de Swart J. J.*, The Octet Model and Its Clebsch—Gordan Coefficients, Rev. Mod. Phys., **35**, 916 (1963). [Имеется перевод: *Де Сварт.* Октетная модель элементарных частиц. — УФН, **84**, 651 (1964).]
800. *Takabayasi T.*, Progr. Theor. Phys. (Kyoto) Suppl., **41**, 130 (1968).
Группа релятивистского внутреннего движения, ее унитарные представления и волновое уравнение.
801. *Talman J.*, Special Functions: Group Theoretic Approach, Benjamin, New York, 1968.
Специальные функции: теоретико-групповой подход.
802. *Taylor M.*, Proc. Am. Math. Soc., **19**, 1103 (1968).
Ряды Фурье на компактных группах Ли.
803. *Tengstrand A.*, Math. Scand., **8**, 201 (1960).
Обобщенные функции, инвариантные относительно ортогональной группы произвольной сигнатуры.
804. *Thomas L. H.*, Ann. of Math., **42**, 113 (1941).
Об унитарных представлениях группы пространства де Ситтера.
805. *Tinkham M.*, Group Theory and Quantum Mechanics, McGraw-Hill, New York, 1964.
Теория групп и квантовая механика.
806. *Tirao J. A.*, Trans. Am. Math. Soc., **190**, 57 (1974).
Квадратично интегрируемые представления полупростых групп Ли.
807. *Titchmarsh E. C.*, Eigenfunction Expansions, Part I, Clarendon Press, Oxford, 1962.
Разложения по собственным функциям.
808. *Tits J.*, Tabellen zu den einfachen Lie Gruppen und ihren Darstellungen, Springer, Berlin—Heidelberg (1967).
Таблица простых групп Ли и их представлений.
809. *Tits J.*, *Waelbroeck L.*, Pacific J. of Math., **26**, 595 (1968).
Интегрирование представления алгебры Ли.
810. *Todorov I. T.*, Discrete Series of Hermitian Representations of the Lie Algebra of $U(p, q)$, ICTP, Trieste, Preprint IC/66/71, 1966.
Дискретные серии эрмитовых представлений алгебры Ли $U(p, q)$.
811. *Todorov I. T.*, Derivation and Solution of an Infinite—Component Wave Eguation for the Relativistic Coulomb Problem, в кн.: Group Representations in Mathematics and Physics, V. Bargmann (ed.), 1970.
Вывод и решение бесконечнокомпонентного волнового уравнения для релятивистской кулоновской задачи.
812. *Tondeur P.*, Introduction to Lie Groups and Transformation Groups, Lecture Notes in Mathematics **7**, Springer, Berlin, 1969.
Введение в группы Ли и группы преобразований.
813. *Trombi P. C.*, *Varadarajan V. S.*, Ann. of Math., **94**, 246 (1971).
Сферические преобразования на полупростой группе Ли.
814. *Trombi P. C.*, *Varadarajan V. S.*, Asymptotic Behaviour of Eigenfunctions on Semisimple Lie Group: The Discrete Spectrum (to appear).
Асимптотическое поведение собственных функций на полупростой группе Ли: дискретный спектр.
815. *Uhlhorn U.*, Ark. Fysik, **23**, 307 (1963).
Представление преобразований симметрии в квантовой механике.
816. *Varadarajan V. S.*, Am. J. Math., **90**, 308 (1968).
О кольце инвариантных полиномов в полупростой алгебре Ли.

817. *Varadarajan V. S.*, The Theory of Characters and the Discrete Series for Semisimple Lie Groups, Proc. Symp. Pure Math. **26**, Amer. Math. Soc., Providence, 1973.
Теория характеров и дискретные серии для полупростых групп Ли.
818. *Виленкин Н. Я.* К теории присоединенных сферических функций на группах Ли. — Матем. сб., **42**, 485 (1957).
819. *Виленкин Н. Я.* Специальные функции и теория представлений групп. — М.: Наука, 1965.
820. *Виленкин Н. Я., Смородинский Я. А.* Инвариантные разложения релятивистских амплитуд. — ЖЭТФ, **46**, 1793 (1964).
821. *Voisin J.*, J. Math. Phys., **6**, 1519 (1965).
О некоторых унитарных представлениях группы Галилея, I. Неприводимые представления.
822. *Voisin J.*, J. Math. Phys., **6**, 1822 (1965).
Об унитарных представлениях группы Галилея, II. Двухчастичные системы.
823. *Van der Waerden B. L.*, Math. Z., **37**, 446 (1933).
Классификация простых групп Ли.
824. *Van der Waerden B. L.*, Die Gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik, J. W. Edwards, Ann Arbor, 1944. [Имеется перевод: *Ван дер Верден.* Методы теории групп в квантовой механике. — Харьков: ГНТИ, 1938].
825. *Wallach N.*, Proc. Am. Math. Soc., **21**, 161 (1969).
Индуцированные представления алгебр Ли, II.
826. *Wallach N.*, Trans. Am. Math. Soc., **136**, 181 (1969).
Индуцированные представления алгебр Ли и теорема Бореля—Вейля.
827. *Wallach N.*, Trans. Am. Math. Soc., **158**, 107 (1971); **164**, 389 (1972).
Циклические векторы и неприводимость представлений основной серии.
828. *Warner G.*, Harmonic Analysis on Semisimple Lie Groups, Springer, Berlin, vols. I, II, 1972.
Гармонический анализ на полупростых группах Ли, I, II.
829. *Weil A.*, L'integration dans les groupes topologiques et ses applications, Hermann, Paris, A. S. I., 1940. [Имеется перевод: *Вейль А.* Интегрирование в топологических группах и его применения. — М.: ИЛ, 1950.]
830. *Weil A.*, Ann. Math., **72**, 369 (1960).
О дискретных подгруппах групп Ли, I.
831. *Weil A.*, Ann. Math., **75**, 578 (1962).
О дискретных подгруппах групп Ли, II.
832. *Weinberg S.*, Phys. Rev., **133B**, 1318 (1964).
Правила Фейнмана для любого спина.
833. *Weinstein A.*, Advances in Math., **6**, 329 (1971).
Симплектические многообразия и их лагранжевы подмногоообразия.
834. *Weisskopf V. F., Wigner E. P.*, Z. Physik, **63**, 54 (1930).
Вычисление естественной ширины спектральных линий на основе теории Дирака.
835. *Weisskopf V. F., Wigner E. P.*, Z. Physik, **65**, 18 (1930).
Естественная ширина спектральных линий в излучении гармонического осциллятора.
836. *Werle J.*, Nuclear Phys., **57**, 245 (1964).
Релятивистская инвариантность в многочастичных реакциях.
837. *Werle J.*, Relativisctic Theory of Reactions, North-Holland, Amterdam and PWN, Warsaw, 1966. [Имеется перевод: *Верле Ю.* Релятивистская теория реакций. — М.: Атомиздат, 1969.]
838. *Werle J.*, On a Symmetry Scheme Described by a Non Lie Algebra, ICTP Report No. 65/48, 1965 (unpublished).
О схеме симметрии, описываемой посредством алгебры, которая не является алгеброй Ли.

839. *Weyl H.*, Math. Z., **23**, 271 (1925); **24**, 328, 377; 789 (1926).
Теория представлений непрерывных полупростых групп линейными преобразованиями.
840. *Weyl H.*, Ann. Math., **35**, 486 (1934).
Гармоники на однородных многоообразиях.
841. *Weyl H.*, The Structure and Representations of Continuous Groups, Lecture Notes, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1935.
Структура и представления непрерывных групп.
842. *Weyl H.*, The Classical Groups, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1939.
Классические группы.
843. *Weyl H.*, The Classical Groups. Their Invariants and Representations, Princeton Univ. Press, 1946. [Имеется перевод: *Вейль Г.* Классические группы, их инварианты и представления. — М.: ИЛ, 1947.]
844. *Weyl H.*, The Theory of Groups and Quantum Mechanics, New York, Dover, 1950.
Теория групп и квантовая механика.
845. *Whippman M. L.*, J. Math. Phys., **6**, 1534 (1965).
Правила ветвления для простых групп Ли.
846. *Whitney H.*, Ann. of Math., **37**, 645 (1936).
Дифференцируемые многообразия.
847. *Wick G. C.*, *Wightman A. S.*, *Wigner E. P.*, Phys. Rev., 88, 101 (1952).
Внутренняя четность элементарных частиц.
848. *Wightman A. S.*, Suppl. Nuovo Cim., **14**, 81 (1959).
Релятивистская инвариантность и квантовая механика.
849. *Wightman A. S.*, Invariance in Relativistic Quantum Mechanics, Relations de dispersion et particules èlèmentaires, Lecture at Summer School (Grenoble-1960), Hermann, Paris, 1960.
Инвариантность в релятивистской квантовой механике. Дисперсионные соотношения и элементарные частицы.
850. *Wightman A. S.*, Rev. Mod. Phys., **34**, 845 (1962).
О локализуемости квантовомеханических систем.
851. *Wigner E. P.*, Gruppentheorie und ihre Anwendung auf die Quantenmechanik der Atomspektren, Friedr. Vieweg, Braunschweig, 1931. [Имеется перевод: *Вигнер Е.* Теория групп и ее приложения к квантовомеханической теории атомных спектров. — М.: ИЛ, 1961.]
852. *Wigner E. P.*, Ann. Math., **40**, 149 (1939).
Об унитарных представлениях неоднородной группы Лоренца.
853. *Wigner E. P.*, Rev. Mod. Phys., **29**, 255 (1957).
[Имеется перевод: *Вигнер Е.* Релятивистская инвариантность и квантовые явления, в кн.: Этюды о симметрии. — М.: Мир, 1971.]
854. *Wigner E. P.*, Group Theory and Its Applications to the Quantum Mechanics of Atomic Spectra, Academic Press, New York, 1959. [Имеется перевод: *Вигнер Е.* Теория групп и ее приложения к квантовомеханической теории атомных спектров. — М.: ИЛ, 1961.]
855. *Wigner E. P.*, Unitary Representations of the Inhomogeneous Lorentz Group Including Reflections, Lectures of the Istanbul Summer School of Theor. Physics 1962 (ed. by F. Gürsey), Gordon & Breach, 1964.
Унитарные представления неоднородной группы Лоренца, включающей отражения.
856. *Wigner E. P.*, *Newton T. D.*, Rev. Mod. Phys., **21**, 400 (1949).
[Имеется перевод: *Вигнер Е.*, *Ньютон Т.* Локализованные состояния элементарных систем. В книге: Этюды о симметрии. — М.: Мир, 1971.]
857. *Williams F. L.*, Tensor Products of Principal Series Representations, Reduction of Tensor Products of Principal Series Representations of Complex Semisimple Lie Groups, Lecture Notes in Mathematics **358**, Springer-Verlag, Berlin—New York, 1973.

Тензорные произведения представлений основной серии, редукция тензорных произведений представлений основной серии комплексных полупростых групп Ли.
858. *Williams G.*, Proc. Cambridge Phil. Soc., **76**, 503 (1974).
Точные топологии для пространства Минковского.
859. *Wolf J. A.*, Spaces of Constant Curvature, McGraw-Hill, New York, 1967.
Пространства постоянной кривизны.
860. *Wolf J. A.*, Memoirs Am. Math. Soc., **8**, No. 180, 1976.
Унитарные представления максимальных параболических подгрупп классических групп.
861. *Wong M. K. F.*, J. Math. Phys., **15**, 25 (1974).
Унитарные представления группы SO $(n, 1)$.
862. *Wong M. K. F.*, *Yeh Hsin Yang*, J. Math. Phys., **16**, 800 (1975).
Матричные элементы генераторов группы IU (n) и IO (n) и соответствующие деформации в группы $U(n, 1)$ и $O(n, 1)$.
863. *Wong M. K. F.*, *Yeh Hsin Yang*, J. Math. Phys., **16**, 1239 (1975).
Собственные значения инвариантных операторов ортогональных и симплектических групп.
864. *Woronowicz S.*, Studia Math., **24**, 101 (1964).
О теореме Макки, Стоуна и фон Неймана.
865. *Wulfman C. E.*, Dynamical Groups in Atomic and Molecular Physics, in: Group Theory and Its Applications, E. M. Loebl (ed.), vol. 2, 1971.
Динамические группы в атомной и молекулярной физике.
866. *Wybourne B. G.*, Symmetry Principles in Atomic Sprectroscopy, Wiley, New York, 1970. [Имеется перевод: *Вайборн Б.* Теоретико-групповые методы в атомной спектроскопии. В кн.: Теория сложных атомных спектров. — М.: Мир, 1973.]
867. *Wybourne B. G.*, Classical Groups for Physicists, Wiley, New York, 1974.
Классические группы для физиков.
868. *Yao T.*, J. Math. Phys., **8**, 1931 (1967); **9**, 1615 (1968); **12**, 315 (1971).
Унитарные представления группы SU (2, 2), I, II, III.
869. *Yosida K.*, Functional Analysis, 4th ed., Springer, Berlin—New York, 1964. [Имеется перевод: *Йосида К.* Функциональный анализ. — М.: Мир, 1967.]
870. *Zassenhaus H.*, The Theory of Groups, 2nd ed., Chelsea, New York, 1958.
Теория групп.
871. *Zeeman E. C.*, J. Math., Phys., **5**, 490 (1964).
Причинность предполагает группу Лоренца.
872. *Zeeman E. C.*, Topology, **6**, 161 (1966).
Топология пространства Минковского.
873. *Zeitlin J.*, Correspondence Between Lie Algebra Invariant Subspace and Lie Group Invariant Subspaces of Representations of Lie Groups. Ph. D. Thesis, University of California, Los Angeles, 1969.
Соответствие между инвариантным подпространством алгебры Ли и инвариантными подпространствами представлений групп Ли.
874. *Желобенко Д. П.* Описание всех неприводимых представлений произвольной связной группы Ли. — ДАН СССР, **139**, 1291 (1961).
875. *Желобенко Д. П.* Гармонический анализ функций на полупростых группах Ли, I. — Изв. АН СССР, сер. матем., **27**, 1343 (1963).
876. *Желобенко Д. П.* О бесконечно дифференцируемых векторах в теории представлений. — Вестник МГУ, сер. I матем. и мех., **1**, 3 (1965).
877. *Желобенко Д. П.* Аналог теории Картана—Вейля бесконечномерных представлений комплексной полупростой группы Ли. — ДАН СССР, **175**, 24 (1967).
878. *Желобенко Д. П.* Анализ неприводимости в классе элементарных представлений комплексной полупростой группы Ли. — Изв. АН СССР, сер. матем., **32**, 108 (1968).

879. *Желобенко Д. П.* Операционное исчисление на комплексной полупростой группе Ли. — Изв. АН СССР, сер. матем., **33**, 931 (1969).
880. *Желобенко Д. П.* Гармонический анализ функций на полупростых группах Ли, II. — Изв. АН СССР, сер. матем., **33**, 1255 (1969).
881. *Желобенко Д. П.* Неприводимые представления класса O полупростой комплексной группы Ли. — Функц. анализ и прилож., **4**, вып. 2, 85 (1970).
882. *Желобенко Д. П.* Компактные группы Ли и их представления. — М.: Наука, 1970.
883. *Желобенко Д. П.*, Гармонический анализ на полупростых комплексных группах Ли. — М.: Наука, 1974.
884. *Желобенко Д. П.*, *Наймарк М. А.* Описание вполне неприводимых представлений полупростой комплексной группы Ли. — Изв. АН СССР, сер. матем., **34**, 57 (1970).
885* *Аронсон Э. Б.*, *Малкин И. А.*, *Манько В. И.* Динамические симметрии в квантовой теории. — ЭЧАЯ, **5**, 122 (1974).
886* *Менский М. Б.* Метод индуцированных представлений: пространство-время и концепция частиц. — М.: Наука, 1976.
887* *Виленкин Н. Я.* Специальные функции, связанные с представлениями класса 1 групп движений пространств постоянной кривизны. — Труды Моск. матем. общ., **12**, 185 (1963).
888* *Ališauskas S. J.*, *Jucys A. P.*, Rep. on Math. Phys., **5**, 7 (1974).
О представлении конечных преобразований подгруппы O_2 в каноническом базисе группы O_n.
889* *Vilenkin N. Ya.*, *Kildyushov M. S.*, Rep. on Math. Phys., **8**, 133 (1975).
Матричные элементы неприводимых представлений группы SO $(n, 1)$ в интегральной форме.
890* *Gavrilik A. M.*, *Klimyk A. U.*, Preprint ITP-77-26E, Kiev, 1977.
Матричные элементы представлений и коэффициенты Клебша—Гордана группы вращений SO (n).
891* *Смородинский Я. А.* Кинематика и геометрия Лобачевского. — Атомная энергия, **14**, 110 (1963).
892* *Кузнецов Г. И.*, *Смородинский Я. А.* Интегральные представления релятивистских амплитуд и асимптотические теоремы. — ЯФ, **6**, 1308 (1967).

* Звездочкой отмечена литература, добавленная переводчиками.

Указатель наиболее важных символов

Предметный указатель