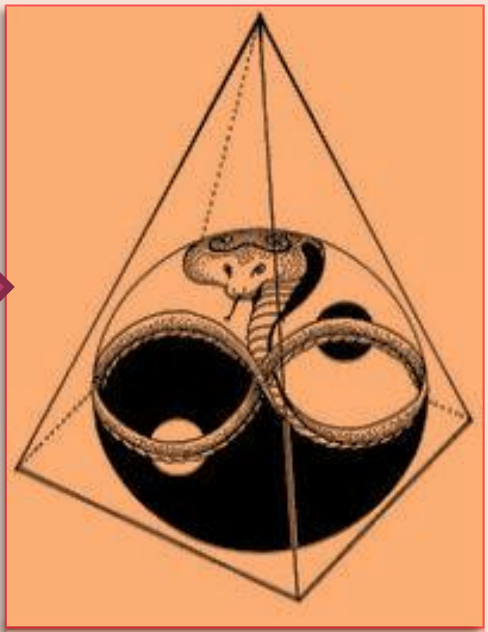
МОСКВА 2010

Бахарев Юрий Павлович



Теория поля для школьников

Жизнь людей, особенно у нас в России в последние десятилетия, становится — очевидно, для всех — новою, по формам, хотя основы, состоящие в господстве христианских и государственных начал, сохраняются, даже совершенствуются. Слово — было и осталось исходом, но дело стало иным, чем было. Все это доказывать и разъяснять считаю ненадобным для цели, которую назначил себе в прилагаемых заметках. Но тем, кто не согласен с вышеприведенными утверждениями, кто отрицает или не видит значения перемен, совершающихся на глазах современников, тем лучше не читать ничего дальнейшего, так как оно основано на завете: «Вино новое да не вливается в мехи ветхие». Многие формы жизни стали новыми, а формы обучения до того уже обветшали, что пришло время подумать об их усовершенствовании. Вот тема моих беглых заметок педагогического свойства. После немногих общих положений (об экзаменах, о цели обучения и т. п.), я, именно, полагаю в ряде статей высказать несколько мыслей о четырех отдельных предметах, касающихся обучения или педагогики, а именно: о подготовке обучающих, т.е. профессоров и учителей; о высших, или специальных, учебных заведениях; о средних, или подготовительных, учебных заведениях и, наконец, коснуться общенародного, или начального, обучения. В своем изложении хочу идти сверху вниз, а не наоборот, не только потому, что все у нас шло и пойти успешно может только этим путем, а не обратным, но и потому еще, что лестницы лучше мести этим способом, а не обратным. Мне надобно затем сказать, что предметы, излагаемые мною, по их значению для будущей жизни страны, требуют многотомного изложения, если все обставить в них с возможною полнотою и доказательностью. А у меня нет ни возможности, ни охоты писать такие тома; все, что могу сделать, — дать намеки, указания на тот род мыслей, который сложился в отношении к педагогическим вопросам в моей голове. Поэтому я должен ждать кривотолков и обещаю обращать мало на них внимания, поглощенного разными другими делами, которые еще желал бы успеть доделать. Пусть уж судят и даже осудят, а мне все же станет легче, когда выскажусь о деле, издавна меня занимающем.

Менделеев Д.И. **Заметки о народном просвещении,**

глава 3, М, ЭКСМО, стр.413, 2008г. «Познание России. Заветные мысли»

СОДЕРЖАНИЕ

- СОДЕРЖАНИЕ 3
- ВВЕДЕНИЕ 4
- ОСНОВЫ ВЕКТОРНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ 4
- ПРИЛОЖЕНИЕ ТЕОРИИ ПОЛЯ 43
- ПРАКТИЧЕСКИЕ ПРИМЕРЫ 53

Пример №1 54

Пример №2 54

Пример №3 54

Пример №4 55

Пример №5 55

Пример №6 55

Пример №7 56

Пример №8 57

Пример №10 59

ВВЕДЕНИЕ

Слова Д.И.Менделеева, взятые эпилогом для данного произведения, приведены со следующим умыслом: автором будет создана целая серия учебников и брошюр по естественно-научному циклу для учащихся учреждений среднего образования, с особым упором на интерактивное обучение. Учащиеся дошедшие в школьном обучении до 10-го класса, уже встречались с понятием электрического поля, магнитного поля и гравитационного поля. В учебниках физики это кардинальное понятие глубоко не раскрывается – и не может быть раскрыто по причине ограничения времени и не готовности, даже способных школьников, к освоению этого понятия. Только по прошествии времени, после напряженной мыслительной работы – и в рамках элективного курса можно пойти дальше в этом вопросе. Чем мы собственно и займемся в этой книге вместе с уважаемым читателем, замечу: не обязательно школьником!

Полем будем называть область пространства, каждой точке которого соответствует определенное значение некоторой физической величины. А вот «Теория поля» устанавливает и исследует связи между величинами, характеризующими поле. Многие физические явления и процессы станут яснее и понятнее учащимся в 10-11х классах.

ОСНОВЫ ВЕКТОРНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

1.1. Основные сведения о скалярных и векторных величинах*. Понятие скалярной и векторной величины. Линейная зависимость векторов. Разложение вектора по базису. Скалярное и векторное произведения. Произведения трех* *векторов. Основные правила матричной алгебры. Переменные векторы. Производная и дифференциал векторных функций. Интеграл от векторных функций.*

Что такое «поле» и что изучает «теория поля»?

Поле – область пространства, каждой точке которого соответствует определенное значение некоторой физической величины. По своему характеру физические величины могут быть скалярными или векторными. Соответственно поля этих величин также являются скалярными или векторными.

Теория поля устанавливает и исследует связи между величинами, характеризующими поле.

Приведите примеры скалярных и векторных величин. В чем состоит их отличие?

Такие величины, как плотность, удельное сопротивление пород, потенциал гравитационного и магнитного полей и др., определяются числом, при соответствующем выборе единицы измерения. В математике такие величины называются **скалярными***. Если физическое явление характеризуется скалярной величиной, то имеет место скалярное поле. Такие величины, как сила притяжения материальных тел, напряженность магнитного и электрического полей и многие другие, являются* **векторными** *величинами.*

Вектор *– величина, которая для своего определения требует указания на направление в пространстве и численное значение, геометрически он изображается прямолинейным отрезком определенного направления. Длина отрезка в выбранном масштабе характеризует численное значение вектора. Действия над скалярами подчиняются действиям над алгебраическими величинами.*

Численное значение вектора называется величиной, модулем или длиной вектора **(/A/ = A** *– модуль вектора). Принято различать вектора свободные, связанные и скользящие.*

Как записать вектор, используя его проекции в прямоугольной системе координат?

Пусть имеется вектор $\overline{AB} = \overline{a}$ *и ось S. Спроектировав вектор на ось, получим проекцию вектора* $\vec{a}$ *на ось S, т.е.*

$$A_1B_1 = /\,\overline{AB}\,/ \cdot COS\varphi = /\,\overline{a}\,/ \cdot COS\varphi = a_S$$

a_s *– проекция вектора* $\vec{a}$ *на ось S.*

Проекция a_s *является скаляром и иначе называется алгебраической проекцией.*

Обозначим $\overline{S}^0$ *единичный вектор или орт оси S. Он указывает направление оси. Произведение проекции вектора на единичный вектор называется компонентой вектора на эту ось:*

$$\overline{A_1B_1} = A_1B_1 \cdot \overline{S}^0 = /\,\overline{a}\,/ \cdot \cos\varphi \cdot \overline{S}^0 .$$

Компонента вектора является вектором и иначе называется геометрической проекцией вектора. Орты осей прямоугольных координат обозначаются i, j, k. Выразим вектор в правой системе прямоугольных координат через его проекции.

Для этого сложим компоненты вектора $\vec{a}$ по координатным осям и в результате получим сам вектор $\vec{a}$:

$$\overline{a} = a_x i + a_y j + a_z k.$$

Что такое радиус-вектор? Запишите его через проекции.

Радиус-вектор точки. Точка в пространстве может быть задана своими координатами или же вектором, начало которого совпадает с началом системы координат, а конец с данной точкой. Этот вектор и носит название радиуса-вектора точки.

$$\overline{r} = xi + yj + zk;$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$x = r_x; y = r_y; z = r_z.$$

Напишите скалярное и векторное произведение векторов через их проекции.

Скалярным произведением *двух векторов называется число, равное произведению их модулей на косинус угла между векторами*

$$\overline{A}\overline{B} = AB\cos(\overline{A}, \overline{B})$$

В зависимости от угла ($\overline{A}, \overline{B}$) скалярное произведение может быть положительной (угол $(\overline{A}, \overline{B})$ острый) или отрицательной (угол $(\overline{A}, \overline{B})$ тупой) величиной. Скалярное произведение записывается и таким образом

$$\bar{A}\cdot\bar{B}=A_B B \text{ или } \bar{A}\cdot\bar{B}=B_A A,$$

где A_B *– проекция вектора* $\vec{A}$ *на направление вектора* $\vec{B}$*, т.е.* $A_B=A\cdot COS\left(\bar{A},\bar{B}\right)$.

Аналогично B_A *– проекция вектора* $\vec{B}$ *на вектор* $\vec{A}$*, т.е.* $B_A=B\cos\left(\bar{A},\bar{B}\right)$.

Скалярное произведение ортов в прямоугольной системы координат:

$$i\cdot j=j\cdot i=j\cdot k=k\cdot j=k\cdot i=i\cdot k=0,$$
$$i\cdot i=j\cdot j=k\cdot k=1.$$

Выражение скалярного произведения векторов через их проекции имеет вид:

$$\bar{A}\bar{B}=\left(A_x i+A_y j+A_z k\right)\times\left(B_x i+B_y j+B_z k\right)=A_x B_x\left(i\cdot i\right)+$$
$$+A_x B_y\left(i\cdot j\right)+\ldots+A_z B_z\left(k\cdot k\right)=A_x B_x+A_y B_y+A_z B_z$$

Проекцию вектора на координатную ось можно рассматривать как число, полученное в результате скалярного произведения единичного вектора оси на вектор $i\cdot\bar{A}=\left|i\right|A_i=A_x.$

Векторным произведением *двух векторов* $\bar{A}$ *и* $\bar{B}$ *является вектор* $\bar{C}$*, направленный перпендикулярно к плоскости векторов* $\bar{A}$ *и* $\bar{B}$ *в ту сторону, чтобы вращение вектора* $\bar{A}$ *к вектору* $\bar{B}$ *вокруг вектора* $\bar{C}$ *по кратчайшему пути происходило против часовой стрелки (в правой системе координат) и по часовой стрелке (в левой системе координат). Модуль вектора* $\bar{c}$ *равен площади параллелограмма, построенного на векторах* $\bar{A}$ *и* $\bar{B}$.

Векторное произведение будем обозначать символом $\bar{A}\times\bar{B}$*. Модуль векторного произведения* $\left|\bar{A}\times\bar{B}\right|=ABSin(\bar{A},\bar{B}).$

Если поменять местами вектора, то получим

$$\overline{B}\times\overline{A}=-\overline{A}\times\overline{B},$$ *т.е.*

векторное произведение **не коммутативно**.

Согласно вышеизложенному для векторного произведения ортов правой прямоугольной системы координат имеем:

$$i\cdot j=k,\quad j\cdot k=i,\quad k\cdot i=j,$$

$$i\cdot i=j\cdot j=k\cdot k=0$$

Используя эти формулы, найдем выражение для векторного произведения векторов $\vec{A}$ и $\vec{B}$ *через проекции сомножителей:*

$$\overline{A}\times\overline{B}=\left(A_X i+A_Y j+A_Z k\right)\times\left(B_X i+B_Y j+B_Z k\right)=A_X B_X\left(i\cdot i\right)+A_X B_Y\left(i\cdot j\right)+\ldots$$
$$+A_Z B_Z\left(k\cdot k\right)=\left(A_Y B_Z-A_Z B_Y\right)i+\left(A_Z B_X-A_X B_Z\right)j+\left(A_X B_Y-A_Y B_X\right)k.$$

Очень удобно векторное произведение записывать в таком виде:

$$\overline{A}\times\overline{B}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ A_X & A_Y & A_Z \\ B_X & B_Y & B_Z \end{vmatrix}$$

Для векторного произведения справедлив распределительный закон:

$$\left(\overline{A}+\overline{B}\right)\times\left(\overline{c}+\overline{\rho}\right)=\overline{A}\times\overline{c}+\overline{A}\times\overline{\rho}+\overline{B}\times\overline{c}+\overline{B}\times\overline{\rho}.$$

Чему равно двойное векторное произведение?

Три вектора $\overline{A}$, $\overline{B}$ *и* $\overline{c}$ *можно различным образом перемножить. Одним из этих вариантов и является двойное векторное произведение, т.е. вектор* $\overline{A}\times\overline{B}$ *умножить векторно на* $\overline{c}$.

Двойное векторное произведение $\overline{A}\times\left(\overline{B}\times\overline{c}\right)$. *Векторное произведение вектора* $\overline{A}$ *на вектор* $\left(\overline{B}\times\overline{c}\right)$ *представляет собой вектор, компланарный с векторами* $\overline{B}$ *и* $\overline{c}$ *и перпендикулярный вектору* $\overline{A}$.

Найдем проекции вектора $\overline{A}\times\left(\overline{B}\times\overline{c}\right)=\overline{d}$ *на ось* x:

$$d_X=\begin{vmatrix} A_Y & A_Z \\ \left[\overline{B}\times\overline{C}\right]_Y & \left[\overline{B}\times\overline{C}\right]_Z \end{vmatrix}.$$

Раскрывая определитель, прибавим к правой части, а затем вычтем из нее $A_x\ B_x\ C_x$, *после преобразований получим:*

$$d_X=\left(\overline{A}\cdot\overline{C}\right)\cdot B_X-\left(\overline{A}\cdot\overline{B}\right)\cdot C_X.$$

Для двух других проекций находим:

$$d_y=\left(\overline{A}\cdot\overline{C}\right)B_y-\left(\overline{A}\cdot\overline{B}\right)C_y,$$
$$d_Z=\left(\overline{A}\cdot\overline{C}\right)B_Z-\left(\overline{A}\cdot\overline{B}\right)C_Z.$$

На основании этих формул запишем векторное равенство:

$$d_x = \left(\overline{A}\cdot\overline{C}\right)\cdot\overline{B} - \left(\overline{A}\cdot\overline{B}\right)\cdot\overline{C}.$$

Произведение четырех и более векторов можно свести к произведению трех векторов.

Прежде чем мы перейдем к дальнейшему материалу, необходимо уяснить: что такое дифференцирование.

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

Введение. *Теперь переходим к систематическому исследованию того, каким именно образом изменяется величина* ***y*** *рассматриваемой функции* ***y=f(x)*** *при изменении аргумента* ***x****.*

Основная задача ***дифференциального исчисления*** *состоит в планомерной оценке этого изменения численного значения функции.*

Указанная планомерная оценка изменения величины функции, происходящего по причине изменения величины аргумента, достигается сравнительной оценкой приращений функции и аргумента.

Приращение. *Вообще приращением какой-либо переменной величины, переходящей от прежнего численного значения к новому, называется тот прибавок, который надо придать к ее прежнему значению для того, чтобы получить ее новое значение. Значит, приращение переменной величины есть просто разность между новым значением и прежним, получаемая вычитанием прежнего значения из нового.*

Приращение переменной величины ***x*** *обозначается символом* ***Δ*** *так что если прежнее значение этой переменной величины обозначено буквой* ***x*** *то новое (наращенное) ее значение будет:*

$$x + \Delta x.$$

Символ ***Δx*** *произносится* ***«дельта x».*** *Предупреждаю учащихся, что символ этот никоим образом нельзя читать «дельта, умноженная на x» или «дельта раз x», потому, что буква* ***Δ*** *неотделима от буквы* ***x*** *без которой она не имеет никакого смысла. Учащийся уже знаком с аналогичным явлением в элементарной алгебре, где lgA имеет определенный численный смысл, обозначая логарифм числа A, тогда как буквы l и g, оторванные от буквы A, не имеют в отдельности никакого численного смысла.*

Очевидно, что приращение переменной величины вовсе необязательно положительно: оно будет отрицательным, когда новое значение меньше прежнего; это будет, например, когда переменная величина ***убывает****.*

Аналогичным образом:

Δx - означает приращение переменного ***x,***

Δy - означает приращение ***y****,*

Δz - означает приращение ***z****,*

Δf(x) означает приращение функции ***f(x)*** *и т. д.*

Если в равенстве y=f(x) независимое переменное x получит приращение Δx, то под Δy всегда разумеют соответствующее приращение функции f(x), т.е. приращение зависимого переменного ***y.***

Следует приращение Δy отсчитывать всегда от определенного начального значения y, соответствующего тому произвольно взятому начальному *значению x, от которого отсчитывается приращение Δx. Рассмотрим, например, функцию*

$$y = x^2.$$

Взяв за начальное значение x=10, получаем начальное значение y =100.

*Пусть **x** увеличено до x = 12, т.е. Δx =2; тогда **y** возросло до y=144, значит*

Δy=144-100 = 44.

Пусть x уменьшено до x = 9. Δx =-1; тогда y убыло до y = 81, следовательно,

Δy = 81-100 = -19.

Вообще, если функция y=f(x) возрастающая, как, например, наша x^2 *в промежутке от 0 до ∞ (0<x<+∞), то ясно, что если Δx положительно, то и Δy будет положительным, и если Δx отрицательно, то и Δy тоже будет отрицательным. Значит, оба приращения, Δx и Δy, в этом случае имеют всегда одинаковые знаки.*

Если же функция y=f(x) убывающая, то положительному Δx отвечает, очевидно, отрицательное Δy, потому что новое значение y меньше прежнего, а отрицательному Δx отвечает уже положительное Δy, ибо теперь новое значение функции больше прежнего. Значит, Δx и Δy в этом случае всегда будут противоположных знаков.

Наконец, мы знаем, что если функция:

$$y = f(x)$$

непрерывна в точке ***x*** *и если приращение Δx аргумента стремится к нулю:*

$$\lim \Delta x = 0,$$

то и приращение Δy функции также будет стремиться к нулю:

$$\lim \Delta y = 0,$$

т. е. оба приращения, Δx и Δy, суть одновременно величины бесконечно малые.

Сравнение приращений.

Возьмем функцию

$$y = x^2. \qquad (1)$$

Пусть начальное значение аргумента есть x, и пусть это начальное значение x получает приращение ***Δx****. Значит, x есть начальное (прежнее) значение аргумента, а* ***x+Δx*** *есть новое (наращенное) значение аргумента. Если аргумент имеет прежнее значение, то и вся функция имеет тоже прежнее значение, поэтому обе части равенства*

$$y = x^2$$

являются начальным (прежним) значением функции

Когда же аргумент делается новым (наращенным), то и соответственное значение функции становится точно так же новым (наращенным), поэтому обе части равенства

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 \quad (2)$$

являются новым (наращенным) значением функции.

Чтобы найти приращение Δу функции, нам теперь достаточно просто вычесть из нового равенства (2) прежнее равенство (1), Это вычитание нам даст:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2,$$

или раскрыв скобку и сделав приведение подобных членов:

$$\Delta y = 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2. \quad (3)$$

Мы теперь получили приращение Δу функции, выразив его через начальное значение х аргумента и через приращение Δх аргумента.

Если это приращение Δх аргумента начинает стремиться к нулю, т.е. делается бесконечно малым: $\lim \Delta x = 0$

тогда и соответственное приращение Δу функции также будет стремиться к нулю, lim Δу = 0, т.е. тоже будет бесконечно малым, как это обнаруживает найденная величина (3) приращения Δу функции. Таким образом, мы имеем два бесконечно малые: Δx и Δy.

Чтобы сравнить между собой эти два бесконечно малые, разделим второе, Δу на первое, Δх, т.е. составим отношение: $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Для вычисления величины этого отношения достаточно просто разделить обе части равенства (3) на Δх, что дает нам: **$\Delta y/\Delta x = 2x + \Delta x$**. ***(4)***

Чтобы видеть, каким образом одновременно изменяются приращения Δх и Δу, возьмем определенное числовое начальное значение аргумента,

например, ***возьмем х = 4****.*

В этом случае предшествующая формула (4) нам даст:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 8.$$

Если мы хотим проследить тщательнее, каким образом изменяется отношение приращений Δy и Δx, когда приращение Δx начинает делаться все меньше и меньше, обратимся к ***табличке****:*

Начальное значение аргумента x	Новое значение аргумента x	Приращение аргумента Δx	Начальное значение функции y	Новое значение функции y	Приращение функции Δy	Δy/ Δx
4	5,0	1,0	16	25	9	9
4	4,8	0,8	16	23,04	7,04	8, 8
4	4,6	0,6	16	21,16	5,16	8,6
4	4,4	0,4	16	19,36	3,36	8,4
4	4,2	0,2	16	17,64	1,64	8,2
4	4,1	0,1	16	16,81	0,81	8,1
4	4,01	0,01	16	16,0801	0,0801	8,0 1

Мы видим, что по мере уменьшения приращения Δx аргумента уменьшается и приращение Δy функции, но их отношение равно последовательно числам

9; 8,8; 8,6; 8,4; 8,2; 8,1; 8,01;

Для вычисления величины этого отношения достаточно просто разделить обе части равенства (3) на Δx, что дает нам:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$

Мы видим здесь на деле, что отношение **Δy/Δx** *постепенно приближается к числу* ***8****.*

И мы, действительно, теоретически уже знаем, что это отношение можно как угодно близко подвести к 8, сделав надлежаще малым приращение Δx аргумента, ибо

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 8$$

при начальном значении x = 4 аргумента.

Производная функция одного переменного.

<u>Основное определение дифференциального исчисления таково</u>*:*

Производная данной функции есть предел отношения приращения этой функции к приращению независимого переменного, когда это последнее приращение приближается к нулю как своему пределу.

Когда предел этого отношения существует и есть конечное число, тогда говорят, что данная функция дифференцируема, или что она имеет производную (обладает производной).

Выше приведенное словесное определение можно представить в более сжатой символической (математической) форме следующим образом.

Дана непрерывная функция

$$y = f(x). \qquad (1)$$

Пусть аргумент x получает приращение Δx, Тогда величина функции получит приращение Δx и новым значением функции

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x). \qquad (2)$$

Чтобы получить приращение Δy функции, достаточно вычесть из равенства (2) равенство (1); находим:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x). \qquad (3)$$

Разделив обе части этого равенства на приращение Δx аргумента, имеем:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (4)$$

Так вот, предел этого отношения, когда приращение ***Δx*** *аргумента приближается к пределу, равному нулю, по только что данному словесному определению, и есть —* ***Производная!***

Оказалось, по мере развития естествознания, что решение весьма многочисленных и крайне разнообразных задач сводится к вычислению пределов отношений вида (4). Поэтому предел отношения (4) получил особое имя «производная», и ему дано особенное стилизованное обозначение, такое, в котором как бы уцелели для нашей памяти следы самого происхождения этого предела. Именно производная обозначается символом

$$\frac{dy}{dx}$$

так что мы имеем:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (5)$$

или более подробно:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right) \quad (6)$$

Это равенство и определяет ***производную*** *от* ***функции у*** *[или от f(X)] по переменному x.*

Процесс отыскания производной от функции

называется **дифференцированием** *ее.*

Следует хорошо заметить, что производная есть предел отношения, но отнюдь не отношение пределов, ибо последнее отношение ввиду того, что Δx и

Δу ***суть*** *бесконечно малые,* ***т.е.*** *имеющие своим пределом нуль, должно написаться в виде 0/0, а*

это есть полная неопределенность.

Ознакомившись с общими понятиями о дифференцировании, продолжим изучение элементов теории поляю

Как дифференцируется векторная функция?

Дифференциал векторной функции $\overline{A}(t)$ *является векторной величиной:*

$$d\overline{A} = \frac{d\overline{A}(t)}{dt}dt$$.

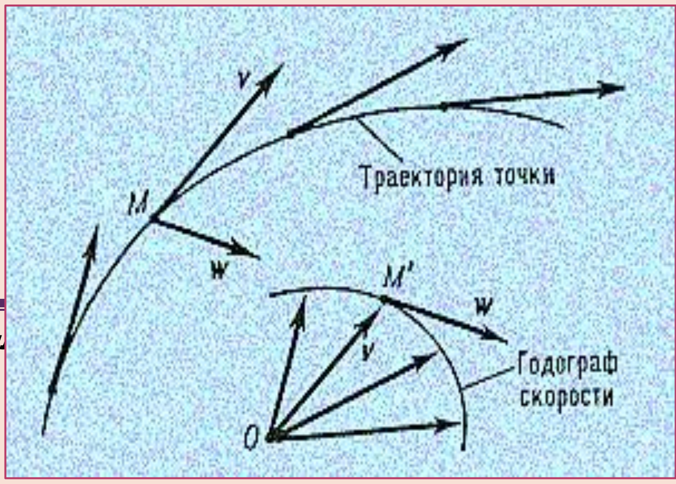
Значение дифференциала зависит от знака приращения независимой переменной dt . *При* $dt > 0$ *вектор* $d\overline{A}(t)$ *направлен по касательной к годографу в сторону возрастания аргумента t, при* dt*<0 направлен обратно.*

Что такое ГОДОГРАФ? Попробуем разобраться.

Годограф (от др.греч.— путь, движение, направление). В механике — кривая, представляющая собой геометрическое место концов переменного (изменяющегося со временем) вектора, значения которого в разные моменты времени отложены от общего начала O (см. рисунок) .

Понятие годографа было введено английским учёным
У. Гамильтоном.

Годограф даёт наглядное геометрическое представление о



том, как изменяется со временем физическая величина, изображаемая переменным вектором, и о скорости этого изменения, имеющей направление касательной к годографу. Например, скорость точки является величиной, изображаемой переменным вектором $\vec{v}$. Отложив значения, которые имеет вектор $\vec{v}$ в разные моменты времени, от начала O, получим годограф скорости; при этом величина, характеризующая быстроту изменения скорости в точке M, то есть ускорение (в этой точке), имеет для любого момента времени направление касательной к годографу скорости в соответствующей его точке M'.
Обстоятельно уяснив – что такое годограф. Продолжим наш путь изучения теории поля.

Пусть дан радиус-вектор $\bar{r}$ точки

$$\bar{r} = xi + yj + zk,$$

дифференциал его определяется формулой

$$d\bar{r} = dxi + dyj + dzk.$$

Модуль дифференциала описывается формулой:

$$|d\bar{r}| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}.$$

Сравнив модуль дифференциала радиуса-вектора точки с дифференциалом дуги кривой ds:

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2},$$

получим:

$$|d\bar{r}| = ds$$

Прежде чем переходить к следующему материалу, разберемся что такое ИНТЕГРАЛ?

Методическая схема и аспекты введения понятия интеграла для школьников

Методическая схема введения понятия интеграла.

Интеграл – понятие, появившееся в практической плоскости математических вычислений: при вычислении площадей сначала плоских геометрических фигур. Интегральное исчисление – это математическая наука применившая понятие и свойства интегралов в теоретической плоскости- с дальнейшим практическим приложением уже нового аппарата математических вычислений. Если сам интеграл это образ знака суммы $\sum_1^n a_i$, где показано суммирование большого числа элементов a_i(от 1 до n) – с последующим переходом в $S_1^n a_i$. Далее появился такой знак $\int_1^n a_i$. В практике вычислений пределы суммирования(оно же - интегрирование) стали от 1 до ∞, а вот a_i - это функция f(x)dx. К сегодняшнему дню мы имеем $\int_1^\infty f(x)dx$. Такой интеграл называется **ОПРЕДЕЛЕННЫМ**. Практически почти невозможно(попробуйте) вычислять интегралы впрямую суммированием, за редким исключением. Поэтому математики ввели понятие первообразной F(x), а интеграл без пределов интегрирования назвали **НЕОПРЕДЕЛЕННЫМ** – вот он $\int f(x)dx$. Одновременно в практике интегрирования появилась и обратная задача: по производной функции, вычислив ее интеграл, найти саму функцию – эта функция называется ***первообразной***? Затем вычислить эту функцию в пределах интегрирования – вот так $F(x)|_b^a$ =F(a) – F(b) и численный результат готов без вычисления суммы бесконечного числа элементов, на которые мы разбили бы фигуру. Для неопределенных интегралов существуют даже специальные таблицы готовых интегралов по функции под знаком интеграла.

Исходя из этого построим подход к ознакомлению школьников с представленным материалом следующим образом: от постановки задачи и ее решения — к практике вычислений и осмыслению.

Задача №1. На отрезке [a, b] задана непрерывная и неотрицательная функция y=f(x). Укажите новый способ (не связанный с первообразной) нахождения площади S криволинейной трапеции, образованной графиком этой функции и прямых **x=a** и **x=b.**

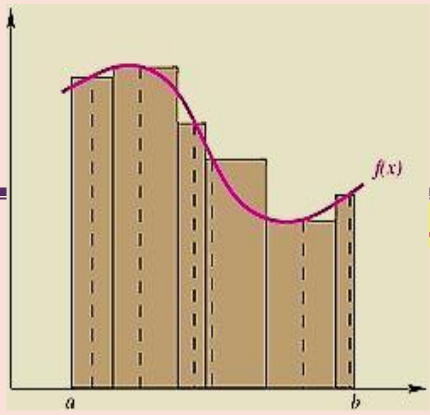
Этапы решения задачи:

1)Построим ступенчатую фигуру и вычислим её площадь [a, b] через суммирование разложенной на n равных частей этой фигуры, где прямоугольники будут иметь две стороны:

1)Одна сторона прямоугольника — Δx, вторая — f(a+Δx),

2)……………..Δx и f(a+2Δx),

3)……………..Δx и f(a+3Δx),



…………………………………. ,
n)…………..Δx и $f(a+n\Delta x)$

2) Выразим площадь криволинейной трапеции через сумму: $\{\sum_{i=1}^{i=n} f(a+i\Delta x)\cdot \Delta x\}$.
Отметим здесь, что сумма будет чуть больше искомой. Если начнем суммировать с первого прямоугольника $f(a)\cdot\Delta x$, и т.д., тогда сумма будет чуть меньше искомой и выглядеть будет так: $\{\sum_{i=0}^{i=n-1} f(a+i\Delta x)\cdot \Delta x\}$. Мы видим, что чем больше дробить фигуру, тем ближе будут сходиться суммы, в пределе при стремлении разбиения к бесконечности(∞) эти суммы сойдутся – это и есть основное понятие начал диффиренцирования. В дальнейшем пытливый школьник поймет, что не все суммы так просто сходятся, не все функции гладкие и непрерывные и т.д. Это в будущем – сейчас поймите только то, что я сказал.

Задача№2. Пусть материальная точка движется прямолинейно с некоторой мгновенной скоростью v, где v(t) - непрерывная на отрезке $[t_1, t_2]$ функция, зависящая от времени t. Требуется найти путь, который пройдет материальная точка за промежуток времени от t_1 до t_2 .
В простейшем случае, когда мгновенная скорость постоянна, путь(S), пройденный телом, равен произведению его скорости на время движения S=vt. В общем случае, когда мгновенная скорость непостоянна, поступают следующим образом: $S=\sum_{i=1}^{i=n} v(t1+i\Delta t)\,\Delta t$, где $t1+n\Delta t = t_2$ или при стремлении i к бесконечности (i→∞) $S=\int_{t1}^{t2} v(t)dt$, то есть интеграл, вот он как получается наш с вами любимый интеграл!
Сравнивая результаты решения этих двух задач, формулируем общий метод решения: разбиение отрезка, на котором задана функция, на равные части; составление суммы этих отрезков, которая принимается в качестве приближенного значения искомой величины - далее выполнение предельного перехода. Такие пределы встречаются при решении многих задач из разных областей науки и техники. Поэтому они получили специальное название "интеграл функции f(x) от a до b" и обозначение $\int_a^b f(x)dx$. Таким образом, по определению: $\int_a^b f(x)dx$,где f(x) — непрерывная на [a, b] функция; i- точки, разбивающие отрезок [a, b] на равные части; Δx(dx) - длина каждой из этих частей.
Запишем результаты решенных задач. Площадь криволинейной трапеции, заданной непрерывной функцией f(x) на [a, b], равна $S_{площади}=\int_a^b f(x)dx$
Путь, пройденный материальной точкой за промежуток времени от t_1 до t_2 со скоростью v , где v(x) - непрерывная на этом отрезке функция равен $S_{путь}=\int_{t1}^{t2} v(x)dx$.
Теперь перейдем к осмыслению. Вы помните, что мы ищем площадь трапеции, в первом случае, и пройденный путь, во втором случае. Кривые f(x) и v(t) это всего

лишь функции ограничивающие криволинейную трапецию, площади которых мы и ищем каждый раз. Площади этих криволинейных трапеций мы определяли суммой прямоугольничков которые имеют высоту и длину, то есть каждый раз от искомой площади и пути мы брали призводную – отношение приращения площади криволинейной трапеции к аргументу, а это и есть производная искомой площади криволинейной трапеции. Её принято называть первообразной. Таким образом взяв интеграл от f(x)·dx и от v(t)·dt, мы получаем первообразную, то есть искомую площадь криволинейной трапеции. Далее математики к суммированию не возвращаются, а вычисляют интегралы, многие из которых свели в таблицу интегралов.

Например: $\int_a^b x^2\,dx=(x^3/3)|_a^b=(b^3/3)-(a^3/3)=(b^3-a^3)/3$, здесь функция $F(x)=x^3/3$ называется первообразной, а (a и b)- называются пределами интегрирования. На этом прекратим краткий экскурс в дифференциальное исчисление, так как главное у нас сейчас – теория поля. Вернемся к оной – с большой нашей любовью и уважением.

Как находится неопределенный интеграл векторной функции? Определенный интеграл?

Неопределенный интеграл есть векторная функция $\overline{B}(t)$, *производная от которой равна подынтегральной функции:*

$$\overline{B}(t)=\int\overline{A}(t)dt,\quad \frac{d\overline{B}}{dt}=\overline{A}(t).$$

Определенный интеграл от векторной функции есть предел суммы векторов:

$$\int_{t_0}^{t_1} \overline{A}(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{k=n} \overline{A}(t_n)(t_{k+1}-t_k),$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \overline{A}(t)\,dt = \overline{B}(t_1)-\overline{B}(t_0).$$

1.2. Основные характеристики скалярных и векторных полей. *Графическое изображение полей. Уровенные поверхности, векторные линии и трубки. Градиент скалярного поля. Скорость изменения скалярного поля по заданному направлению. Выражение площади через вектор. Поток вектора через поверхность. Дивергенция вектора. Соленоидальные поля. Формула Остроградского-Гаусса. Циркуляция вектора. Ротор. Потенциальные поля. Формула Стокса. Оператор Гамильтона. Дифференциальные операции второго порядка, лапласиан.*

Как графически изображаются скалярные и векторные поля?

Скалярные и векторные поля удобно изображать графически. **Скалярное поле** *может быть изображено при помощи поверхностей уровня, т.е. поверхностей, во всех точках которых функция* $U(\overline{r})$ *или* $U(x,y,z)$ *сохраняет одинаковое значение.*

Уравнение поверхности уровня или изоповерхности имеет вид:

$$U(x,y,z)=const=c.$$

Различные значения c соответствуют различным уровенным поверхностям. Совокупность таких поверхностей позволяет наглядно представить скалярное поле.

Векторное поле *изображается при помощи векторных или силовых линий. Векторные линии имеют следующий физический смысл. В каждой точке линии вектор, характеризующий поле, направлен по касательной. О численной величине вектора в точке пространства судят по густоте силовых линий, проходящих через перпендикулярную к ним единицу площади.*

Изучение скалярного и векторного полей ведется при помощи использования специальных понятий и формул.

Что такое градиент скалярного поля?

Вектор, проекции которого на оси прямоугольных координат являются частными производными от скалярной функции по координатам точки, является градиентом скалярной функции в точке и обозначается $gradU$.

Проекции градиента на оси координат определяются формулой:

$$gradU = \frac{\partial U}{\partial x} i + \frac{\partial U}{\partial y} j + \frac{\partial U}{\partial z} k$$

Модуль gradU *вычисляется по формуле:*

$$\left| gradU \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial k} \right)^2}.$$

Для случая плоского поля U(x,y) *градиент*

$$gradU = \frac{\partial U}{\partial x} i + \frac{\partial U}{\partial y} j$$

есть вектор, лежащий в плоскости x, y и перпендикулярный к линии уровня поля в каждой точке.

Основные свойства градиента:

$$grad\left(U+\upsilon\right)=gradU+grad\upsilon,$$
$$grad\left(U\cdot\upsilon\right)=Ugrad\upsilon+\upsilon gradU.$$

Итак, скалярное поле характеризуется вектором, который является градиентом функции U(x, y, z).

Такие векторы называются **п о т е н ц и а ль н ы м и**, *а скалярная функция*

U(x, y, z) – потенциалом.

Потенциальное поле характеризуется векторными линиями, которые ортогональны к поверхности уровня в каждой точке пространства. В направлении этих линий происходят максимальные изменения функции U(x, y, z).

Как определяется скорость изменения скалярного поля по заданному направлению?

Определить скорость можно по формуле, представив в виде скалярного произведения:

$$\frac{\partial U}{\partial S}=gradU\cdot\overline{S}^{0}.$$

Скорость изменения скалярного поля по заданному направлению равна скалярному произведению градиента этого поля на единичный вектор направления.

Как определятся поток векторного поля?

Поток вектора $\overline{A}(x,y,z)$ *через поверхность* S *можно записать в следующем виде:*

$$\boxed{N = \iint\limits_S \overline{A}\cdot\overline{dS} = \iint\limits_S A_n dS,}$$

где A_n *– проекция вектора А на нормаль к поверхности S. Поток есть величина скалярная и зависящая от ориентации поверхности S. При изменении направления нормали, знак проекции, а следовательно, и потока изменится на противоположный.*

Как определятся дивергенция вектора?

Допустим, что векторные линии поля в рассматриваемом пространстве возникают повсюду. Определим в поле точку $\mathbf{P_0}$ *и образуем вокруг нее замкнутую поверхность* **S**, *ограничивающую объем* δ_τ. *Далее вычислим через эту поверхность поток вектора* $\overline{A}(x,y,z)$ *и разделим результат на объем. В итоге получим поток вектора на единицу объема. В пределе при стягивании* **S** *в точку частное будет характеризовать интенсивность (или плотность источника) истечения векторных линий из точки* $\mathbf{P_0}$, *т.е. из бесконечно малого* *объема. Этот предел называется* **дивергенцией** *вектора* $\overline{A}$ *в точке* P_0 *и*

обозначается $div\overline{A}$

$$div\overline{A} = \lim_{\delta_\tau \to P_0} \frac{\iint\limits_S \overline{A}\cdot\overline{dS}}{\delta_\tau},$$

$$div\overline{A} = \frac{dN}{d\tau},$$

Где $dN = div\overline{A}\cdot d\tau.$

Выразим дивергенцию в точке P_0 *через проекции вектора* $\overline{A}$ *в этой же точке.*

Поместим $P_0(x_0, y_0, z_0)$ *внутрь элементарного параллелепипеда с гранями, параллельными координатным плоскостям. Поскольку предел не зависит от форм поверхности* ***S*** *, то выбор такого вида объема не ограничивает общности вывода.*

Найдем поток вектора $\overline{A}(x, y, z)$ *через грани параллелепипеда, затем разделим его на* δ_τ *и перейдем к пределу.*

Поток вектора $\overline{A}(x, y, z)$ *через две параллельные грани, перпендикулярные оси Z, равен:*

$$\iint\limits_{BKMC} A_n dS + \iint\limits_{B_1K_1M_1C_1} A_n dS = \left(\frac{dAz}{dz}\right)_1 \delta x\cdot\delta y\cdot\delta z.$$

Для граней, перпендикулярных осям x и y, аналогично получим:

$$\iint\limits_{B_1K_1KB} A_n dS + \iint\limits_{C_1M_1MC} A_n dS = \left(\frac{dA_x}{dx}\right)_2 \delta x \delta y \delta z,$$

$$\iint\limits_{K_1M_1MK} A_n dS + \iint\limits_{B_1C_1CB} A_n dS = \left(\frac{dA_y}{dy}\right)_3 \delta x \delta y \delta z.$$

В этих выражениях значения производных берутся в точках, расположенных внутри параллелепипеда. Взяв суммарный поток, подставив его в формулу предела, получим:

$$\lim_{\delta\tau\to 0} \frac{\iint\limits_S \overline{A}\cdot\overline{dS}}{\delta\tau} = \frac{dA_X}{dx} + \frac{dA_Y}{dy} + \frac{dA_Z}{dz},$$

ИЛИ

$$div\,\overline{A} = \frac{dAx}{dx} + \frac{dAy}{dy} + \frac{dAz}{dz},$$

где A_x, A_y, A_z – проекции вектора в точке P_0. Производные также берутся по координатам точки P_0.

Дивергенция вектора $\overline{A}(x,y,z)$ *в точке P есть величина скалярная и характеризует интенсивность истечения векторных линий из области точки* P_0.

Рассмотрим дивергенции суммы векторов и произведения скаляра на вектор. Допустим, что имеем поля векторов A и B и скалярное поле U. Тогда:

$$div(\overline{A}+\overline{B}) = div\overline{A} + div\overline{B},$$
$$div(U\overline{A}) = Udiv\overline{A} + gradU \cdot \overline{A}$$

Каков основной смысл формулы Остроградского-Гаусса?

В 1828 г. известный русский математик Остроградский установил связь между потоком вектора и дивергенцией. Теорема, называемая также теоремой Остроградского-Гаусса, гласит: поток вектора $\overline{A}$ *через замкнутую поверхность* S *равен интегралу от дивергенции, взятому по объему* T, *ограниченному данной поверхностью.*

Формулу Остроградского можно записать в форме:

$$\iint_S A_n dS = \iiint_T div\overline{A} \cdot d\tau,$$

или

$$\iint_S (A_x dydz + A_y dxdz + A_z dxdy) = \iiint_T \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right) d\tau.$$

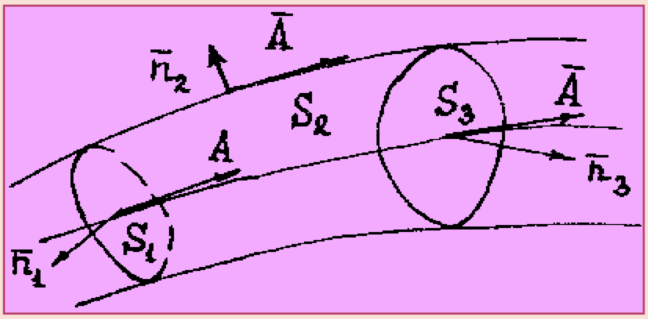
Формула широко применяется для преобразования интеграла, взятого по объему, ограниченному поверхностью, в интеграл, взятый по этой *поверхности. С помощью формулы бывает удобно также определять поток вектора, не проводя прямых вычислений.*

Какие поля называют соленоидальными и каковы их свойства?

Соленоидальным *называют векторное поле, не имеющее источников. Необходимым и достаточным условием для этого является* $div\overline{A} = 0.$

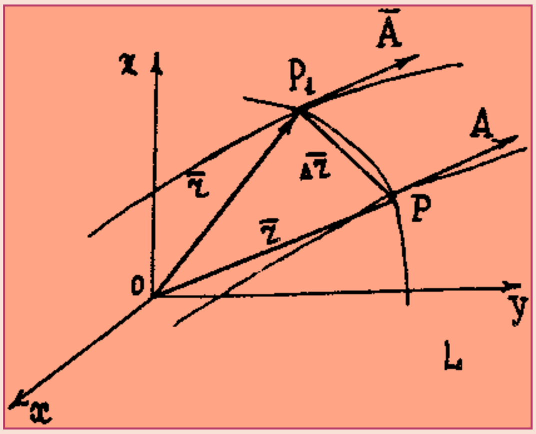
Соленоидальные поля обладают рядом общих свойств:

1. *Поскольку в соленоидальном поле нет источников, то векторные линии в таком поле не обрываются и не начинаются. Они могут быть только замкнутыми или уходящими в бесконечность.*



2. *Поток вектора через любое поперечное сечение векторной трубки есть величина постоянная. Векторной трубкой называют часть пространства, состоящую из векторных линий. Для доказательства этого свойства возьмем в векторной трубке поля* $\overline{A}$ *два сечения и вычислим поток вектора через замкнутую поверхность*

Как определяется циркуляция вектора и какой физический смысл она имеет?



Возьмем в поле вектора $\overline{A}$ некоторую кривую L, и найдем работу по перемещению материальной точки вдоль этой кривой из т. P в т. P_1 (см.рисунок). Ее можно определить в виде скалярного произведения $\Delta U = \overline{A}\cdot\overline{\Delta r}$. Работа вектора вдоль всей кривой L будет равна $U = \sum_{i\to 1}^{n} \overline{A}\cdot\overline{\Delta r_i}.$

Уменьшая длину $\overline{\Delta r}$ и переходя к пределу, получим криволинейный интеграл

$$U = \int_L \overline{A}\cdot\overline{dr} = \int_L (A_x dx + A_y dy + A_z dz).$$

Скалярному произведению можно придать другой вид : $U = \int_L A_\tau dr,$

где A_τ - проекция вектора $\overline{A}$ на касательную к кривой L.

Криволинейные интегралы записанные выше называют также линейным интегралом вектора $\overline{A}$ вдоль кривой. Если кривая L замкнутая, то криволинейный интеграл будет называться **циркуляцией.** *Таким образом,* *циркуляция имеет смысл работы векторного поля по перемещению точки вдоль замкнутой кривой, т.е.*

$$U = \oint_L \overline{A} \cdot \overline{dr} = \oint_L A_\tau dr = \oint_L (A_x dx + A_y dy + A_z dz).$$

При вычислении работы обход по контуру совершается против часовой стрелки (в правой системе координат).

Запишите выражение ротора через проекции вектора.

Ротор вектора удобно записать через определитель

$$rot\,\overline{A} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}.$$

После раскрытия определителя получаем формулу

$$rot\,\overline{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)i + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)j + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)k.$$

Поясним физический и аналитический смысл ротора. Для этого рассмотрим плоское векторное поле $\overline{V}$ *- линейной скорости частиц сплошной среды,* *перпендикулярное оси z. В этом случае проекция скорости на ось z и производные по этой оси равны нулю, поэтому*

$$rot\overline{V} = (\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y})k,$$

т.е. ротор в каждой точке поля направлен перпендикулярно плоскости заданного поля.

Дайте определение потенциального поля и перечислите его основные свойства.

Векторное поле называется потенциальным, если вектор $\overline{A}$, характеризующий поле, является градиентом скалярной функции u:

$$\overline{A} = grad\ u$$

Скалярная функция u называется потенциальной функцией или потенциалом вектора $\overline{A}$.

Если u - потенциальная функция, то $u + c(c = const)$ *также будет потенциальной.*

Потенциальное поле обладает следующими свойствами:

1. Потенциальное поле можно задать не только проекциями вектора, но и одной скалярной функцией - потенциалом.

2. Работа потенциального вектора вдоль некоторой кривой не зависит от формы этой кривой. Она зависит только от положения начальной и конечной точек и равна разности значений потенциала в этих точках.

Приведите примеры потенциальных полей.

Примерами потенциальных полей являются поле силы притяжения, электростатическое поле, электрическое поле постоянного тока и пр.

Запишите формулу Стокса.

Физический смысл формулы Стокса состоит в том, что циркуляция векторного поля по замкнутому контуру L равна потоку ротора поля через любую поверхность, ограниченную этим контуром:

$$\oint_L \overline{A}\cdot\overline{dr} = \iint_S rot\,\overline{A}\cdot\overline{dS}$$

В координатной форме формула Стокса имеет вид

$$\int_L (A_x dx + A_y dy + A_z dz) = \iint_S \left[\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) dy\cdot dz + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) dx\cdot dz + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) dx\cdot dy\right].$$

В чем состоит существенное различие операторов Гамильтона и Лапласа?

Основные характеристики полей -градиент скалярного поля, дивергенция и ротор векторного поля - определяются при помощи дифференцирования скалярных функций или проекций векторов.

Для более компактной записи этих характеристик английский математик Гамильтон (1805-1865) ввел символический, т.е. не имеющий физического смысла, вектор (набла), называемый также оператором Гамильтона

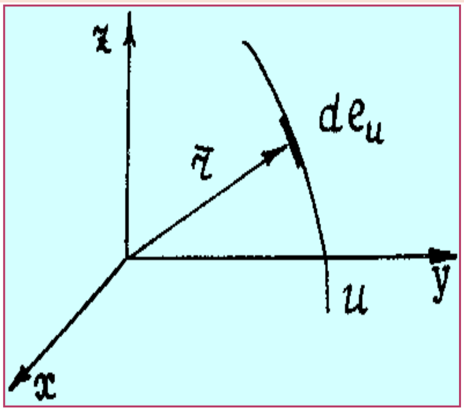
$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k.$$

1.3. Векторные операции в ортогональных криволинейных координатах. *Общая характеристика ортогональных криволинейных координат. Выражение элементов длины, площади и объема в криволинейных координатах через прямоугольные. Градиент, дивергенция, ротор в криволинейных координатах. Основные характеристики полей в цилиндрических и сферических координатах.*

Напишите выражение элементов длины, площади и объема в криволинейных координатах через координаты Ламе.

Выразим элементы длин координатных линий, площади и объема в криволинейных координатах, используя прямоугольные.

Возьмем координатную линию, расположенную в прямоугольной системе



координат. Радиус-вектор точки, расположенной на линии, имеет обычный вид $\bar{r} = xi + yj + zk$,

где $x = x(u)$; $y = y(u)$; $z = z(u)$. *Обозначим элемент дуги координатной линии* u *через* dl_u . *Поскольку* $dl_u = |\overline{dr}_u|$, *нахождение* dl_u *сведем к нахождению* $|\overline{dr}_u|$.

Известно, что

$$\overline{dr}_u = dxi + dyj + dzk,$$

где

$$dx = \frac{\partial x}{du}du; dy = \frac{\partial y}{du}du; dz = \frac{\partial z}{\partial u}du.$$

Отсюда находим

$$\left|\overline{dr}_u\right| = dl_u = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2} \cdot du = H_u \cdot du,$$

$$H_u = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2}.$$

Аналогично

$$dl_v = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2} \cdot dv = H_v \cdot dv,$$

$$dl_w = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^2} \cdot dw = H_w \cdot dw.$$

Коэффициенты H_u, H_v, H_w *называют коэффициентами Ламе или масштабными множителями криволинейной системы координат.*

Зная значения элементов длин координатных линий, запишем выражения для элементов площадей

$$dS_u = dl_v dl_w = H_v \cdot H_w \cdot dv \cdot dw,$$
$$dS_v = dl_u dl_w = H_u \cdot H_w \cdot du \cdot dw,$$
$$dS_w = dl_u dl_v = H_u \cdot H_v \cdot du \cdot dv,$$

и элемента объема

$$d\tau = dl_u dl_v dl_w = H_u \cdot H_v \cdot H_w \cdot du \cdot dv \cdot dw.$$

Напишите общие выражения градиента, дивергенции, ротора, лапласиана в криволинейных координатах.

Выражение градиента скалярной функции в криволинейных координатах

$$grad\ \varphi(u,v,w)=\frac{1}{H_u}\frac{\partial\varphi}{\partial u}e_u+\frac{1}{H_v}\frac{\partial\varphi}{\partial v}e_v+\frac{1}{H_w}\frac{\partial\varphi}{\partial w}e_w.$$

Как видим, градиент в криволинейных координатах зависит не только от значения функции φ в точке, но и от значения масштабных коэффициентов данной системы координат и направления единичных орт осей.

Принцип определения дивергенции вектора через его проекции, примененный в случае прямоугольных координат, сохраним и теперь, т.е.

$$div\overline{A}=\lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{\iint_S A_n dS}{\Delta\tau}.$$

Выражение лапласиана в криволинейных координатах:

$$\Delta\varphi=\frac{1}{H_uH_vH_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{H_vH_w}{Hu}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{H_uH_w}{Hv}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)+\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{H_uH_v}{Hw}\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right)\right].$$

Ротор будем искать обычным образом:

$$rot\overline{A}=rot_u\overline{A}\cdot e_u+rot_v\overline{A}\cdot e_v+rot_w\overline{A}\cdot e_w.$$

Теперь запишем выражение вектора $rot\overline{A}$:

$$rot\overline{A} = \frac{1}{H_v H_w}\left(\frac{\partial(A_w H_w)}{dv} - \frac{\partial(A_v H_v)}{\partial w}\right)e_u + \frac{1}{H_u H_w}\left(\frac{\partial(A_u H_u)}{dw} - \frac{\partial(A_w H_w)}{\partial u}\right)e_v + \frac{1}{H_u H_v}\left(\frac{\partial(A_v H_v)}{du} - \frac{\partial(A_u H_u)}{\partial v}\right)e_w.$$

Выражение удобно записать через определитель

$$rot\overline{A} = \begin{vmatrix} \frac{1}{H_v H_w} e_u & \frac{1}{H_u H_w} e_v & \frac{1}{H_u H_v} e_w \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ A_u H_u & A_v H_v & A_w H_w \end{vmatrix}$$

Чему равны коэффициенты Ламе в цилиндрических и сферических координатах?

Определим значения коэффициентов Ламе цилиндрических координат. Для этого запишем выражения для элементов длин координатных линий

$$dl_r = dr; dl_\varphi = rd\varphi; dl_z = dz.$$

С другой стороны, известно, что

$$dl_r = H_r dr; dl_\varphi = H_\varphi r d\varphi; dl_z = H_z dz.$$

Сопоставляя попарно эти равенства, приходим к выводу, что

$$H_r = 1; H_\varphi = 1; H_z = 1.$$

Связь сферических координат с прямоугольными определяется соотношениями

$$x = \rho \sin\theta \cos\varphi; y = \rho \sin\theta \sin\varphi; z = \rho \cos\theta.$$

Элементы длин координатных линий найдем, сопоставляя попарно выражения из двух систем

$$d\ell_\rho = d\rho; d\ell_\theta = \rho d\theta; d\ell_\varphi = \rho \sin\theta \, d\ell;$$

$$d\ell_\rho = H_\rho d\rho; d\ell_\theta = H_\theta d\theta; d\ell_\varphi = H_\varphi d\varphi;$$

Из этого имеем:

$$H_\rho = 1; H_\theta = \rho; H_\varphi = \rho \sin\theta.$$

Запишите выражения градиента, дивергенции, ротора, лапласиана в цилиндрических и сферических координатах.

ПРИЛОЖЕНИЕ ТЕОРИИ ПОЛЯ

2.1. Формулы Грина. *Задачи Дирихле и Неймана. Использование формул Грина, фундаментальная формула Грина. Гармонические функции, их свойства. Краевые задачи Дирихле и Неймана. Функция Грина. Решение задачи Дирихле для сферы.*

Объясните назначение фундаментальной формулы Грина.

$$\iint_S V\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)dS-\iint_S \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial n}dS+\iiint_T \frac{1}{r}\Delta V d\tau=-4\pi V\left(P_2\right).$$

Данная формула носит название фундаментальной формулы Грина. Она позволяет вычислять значение функции V, непрерывной вместе со своими производными, внутри области T, если известны ее значения и значения $\frac{\partial v}{\partial n}$ на поверхности S, а также значения ΔV во всех внутренних точках области. Использовать формулу на практике крайне сложно, т. к. требуются весьма подробные сведения об определяемой функции.

Дайте определение гармонической функции.

Функция $u(x,y,z)$ называется гармонической, если она непрерывна вместе со своими производными первого и второго порядков внутри конечной области T и в каждой точке области удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Сформулируйте теорему о среднем значении гармонической функции.

Теорема о среднем (теорема Гаусса). Значение гармонической функции во всякой внутренней точке P *равно интегральному среднему ее значений, взятых по поверхности любой сферы радиуса* R *с центром в т.* P, *лежащей целиком внутри области* T, *т.е.*

$$V(P) = \frac{1}{4\pi R^2} \iint_S V dS.$$

Напишите общий вид функции Грина. Поясните, в чем состоит сложность ее определения.

$$Y = \frac{1}{r} + h.$$

Нахождение функции Грина в конкретных случаях представляет весьма сложную задачу, т.к. она зависит не только от формы поверхности, но и от положения полюса внутри нее.

Напишите формулу, по которой решается внутренняя краевая задача Дирихле.

$$V(P) = -\frac{1}{4\pi} \iint_S V \frac{\partial Y}{\partial n} dS.$$

Это выражение дает решение уравнения Лапласа внутренней задачи Дирихле. Для этого решения должны быть заданы значения функции V на поверхности S и значения на ней нормальной производной функции Грина.

Даже в таком упрощенном виде формула сложна для применения, т. к. для каждой поверхности и для каждого положения точки P необходимо находить аналитическое выражение функции Грина. Задача решена лишь для некоторых поверхностей.

2.2. Гравитационное и магнитное поля. *Потенциал притяжения, три его вида. Свойства потенциала объемных масс и его производных. Потенциал магнитного диполя, намагниченного тела конечных размеров, однородно намагниченного шара. Формула Пуассона.*

Напишите, чему равен потенциал притяжения точечной массы.

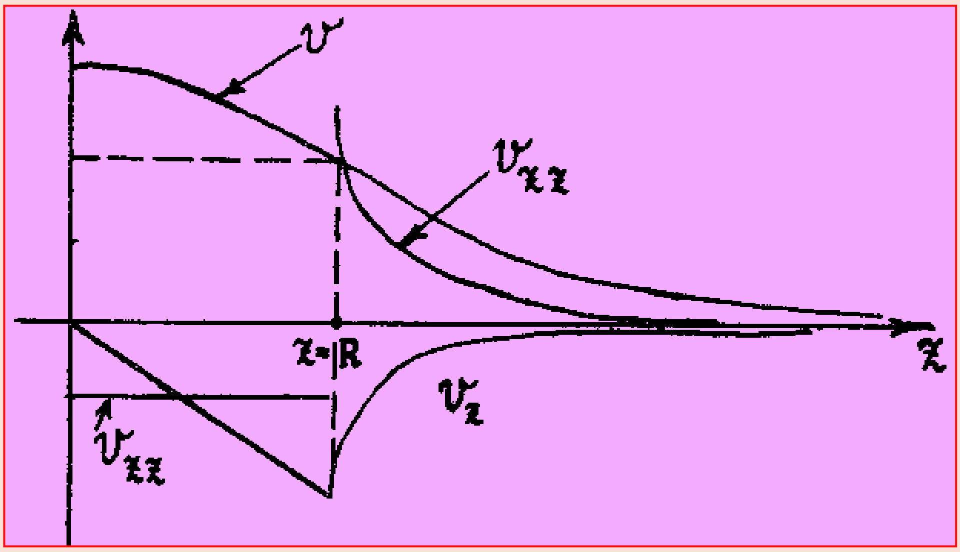
$$V = f\frac{m}{r}.$$

Эта функция носит название потенциала притяжения точечной массы.

Если массы распределены в объеме T непрерывно и имеют объемную плотность σ, то тело можно разбить на элементы $\delta\tau$, массы которых равны $\sigma\delta\tau$. Каждый такой элемент можно заменить действием материальной точки, расположенной внутри элемента и имеющей массу $\sigma\delta\tau$.

Поясните, как определяется потенциал объемных масс, простого и двойного слоя.

- ***Нарисуйте график изменения потенциала объемных масс.***



На графике изменения V_z изображенном на графике видно, что первая производная потенциала однородной сферы также является непрерывной и конечной функцией во всем пространстве. Однако на границе сферы V_z имеет точку излома.

Напишите, чему равен потенциал магнитного диполя.

$$u = e \cdot \ell \frac{\partial}{\partial \ell}(\frac{1}{r}) = m \frac{\partial}{\partial \ell}(\frac{1}{r}).$$

Произведение $e \cdot \ell = m$ *носит название магнитного момента диполя.*

Найдем производную $\frac{\partial}{\partial \ell}\left(\frac{1}{r}\right)$

$$\frac{\partial}{\partial \ell}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial r}{\partial \ell} = -\frac{\cos\left(r,\ell\right)}{r^2}.$$

Поэтому формулу (5.18) можно переписать в таком виде:

$$u = -\frac{m}{r^2}\cos\left(\ell, r\right).$$

Определите, чему равен потенциал однородного намагниченного тела конечных размеров.

Как связаны с напряженностью магнитного поля вертикальная и горизонтальная составляющая поля?

Проекция напряженности магнитного поля на ось ρ, т.е. H_ρ, обозначается через H_z и носит название вертикальной составляющей

$$H_z = \frac{2M}{R^3}\cos\theta.$$

Проекция напряженности на ось θ, т.е. H_θ обозначается через H_H и носит название горизонтальной составляющей

$$H_H = \frac{M}{R^3}\sin\theta.$$

При $\theta = 0$, *т.е. на магнитном полюсе,* $H_z = \frac{2M}{R^3}; H_H = 0$. *При* $\theta = 90^\circ$, *т.е. на магнитном экваторе* $H_z = 0; H_H = \frac{M}{R^3}$. *Таким образом, максимальное значение вертикальной составляющей напряженности магнитного поля в два раза больше максимального значения горизонтальной составляющей.*

Напишите и объясните формулу Пуассона.

$$U = -\frac{I}{f\varsigma}\frac{\partial v}{\partial z}.$$

Полученное выражение носит название формулы Пуассона. Она связывает магнитный потенциал однородно намагниченного объема с потенциалом притяжения объемных масс постоянной плотности, находящихся в том же объеме. Формула показывает, что магнитное поле по сравнению с гравитационным является более дифференцированным. Это свойство полей наглядно проявляется на магнитных и гравиметрических картах: на первых изолинии поля изрезаны, образуют много локальных аномалий, на вторых - ведут себя более плавне.

2.3. Электрическое поле. *Электростатическое поле в вакууме и поляризующейся среде; его потенциал. Электрическое поле постоянного тока. Закон Ома. Закон Кирхгофа. Магнитное поле постоянного тока. Закон Био-Савара. Вектор-потенциал магнитного поля. Дифференциальные уравнения магнитного поля. Электромагнитное поле переменного тока. Фундаментальная система уравнений Максвелла.*

Почему электростатическое поле является потенциальным?

Напряженность определяется по закону Кулона

$$\overline{E} = \frac{e}{r^3}\overline{r} = -grad\, U,$$

где $\overline{r}$ *- вектор, направленный вдоль расстояния* r *между точкой и зарядом;* u *- потенциал поля.*

Равенство показывает, что электростатическое поле является потенциальным. Поэтому работа по замкнутому контуру равна нулю, и она не зависит от формы пути, а зависит от положения начальной и конечной точек.

Потенциал поля точечного источника определяется по формуле

$$U = \frac{e}{r}.$$

Нетрудно доказать, что $-grad\ u = \frac{e}{r^3}\overline{r}$ *. Если заряды непрерывно распределены по поверхности с плотностью* μ *или в некотором объеме с плотностью* σ *, то соответственно имеем*

$$г = \iint_S \frac{\mu dS}{к}; u = \iiint_T \frac{\sigma \cdot d\tau}{r}.$$

Потенциал электрического диполя определяется по аналогии с магнитным диполем

$$u = -\frac{\overline{P}\cdot\overline{r}}{r^3} = \overline{P}\cdot grad\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{P\cdot\cos\theta}{r^2},$$

где $\overline{P} = e \cdot \overline{\ell}$ - электрический момент диполя; $\overline{\ell}$ - вектор, направленный от отрицательного заряда к положительному; θ - угол между векторами $\overline{P}$ и $\overline{r}$.

Во всех точках, где нет зарядов, электростатическое поле соленоидально.

Является ли электрическое поле постоянного тока потенциальным?

Обеспечить постоянный ток можно только при наличии замкнутой цепи, включающей какой-либо источник поля неэлектрической природы, например химической. Такой источник называют сторонним - $\overline{E}_{стр.}$ Сумма падений напряжений в замкнутой цепи равна сумме сторонних сил, т.е. алгебраическая сумма падений напряжений равна нулю:

$$\oint_L \overline{E} \cdot \overline{dl} = 0.$$

Это выражение носит название второго закона Кирхгофа в интегральной форме.

Переходя к дифференциальной форме записи этого закона, имеем

$$rot\,\overline{E} = 0,$$

т.е. электрическое поле постоянного тока является потенциальным.

Назовите физические величины, между которыми устанавливает связь закон Био-Савара.

Зависимость между напряженностью магнитного поля тока в вакууме и силой тока I элемента проводника в точке.

Напишите формулу для вектора-потенциала магнитного поля постоянного тока.

В ряде случаев напряженность определяют с помощью следующего вектора $\overline{A}$:

$$\overline{A} = \frac{\mu_a}{4\pi} \iiint_T \frac{\overline{j}}{r} d\tau.$$

Этот вектор не имеет реального физического смысла и называется по аналогии со скалярным потенциалом вектор-потенциалом магнитного поля.

Запишите уравнения Максвелла.

$$\oint_L \overline{H} \cdot \overline{dl} = \frac{4\pi}{c} \iint_S \overline{j} \cdot \overline{dS} + \frac{1}{c} \iint_S \frac{\partial \overline{D}}{\partial t} \cdot \overline{dS},$$

$$\oint_L \overline{E} \cdot \overline{dl} = -\frac{1}{c} \iint_S \frac{\partial \overline{B}}{\partial t} \cdot \overline{dS},$$

$$\oiint_S \overline{B} \cdot \overline{dS} = 0,$$

$$\oiint_S \overline{D} \cdot \overline{dS} = \iiint_T \sigma \cdot d\tau,$$

где $\overline{D}$ *- вектор электрической индукции.*

Эти уравнения являются основными в теории электромагнитных полей. Они устанавливают закономерности между величинами электрического и магнитного полей.

ПРАКТИЧЕСКИЕ ПРИМЕРЫ

Пример №1

Найти проекцию вектора a=2i + 3j – k на направление вектора b=-3i – j + k.

$$a_b = a\cdot COS\varphi = a\frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{a\cdot b} = \frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{a} = \frac{-6-3-1}{\sqrt{9+1+1}} = \frac{10}{\sqrt{11}}$$

Пример №2

. Найти вектор, лежащий в плоскости _YOZ, имеющий длину, равную 10, и перпендикулярный вектору a = 2i – 4j + 3k.

$$\overline{b} = 0\cdot i + by\cdot j + bz\cdot k$$
$$by^2 + bz^2 = 100$$
$$\overline{a}\cdot\overline{b} = 0 = -4by + 3bz$$

$$\begin{cases} -4by + 3bz = 0 \\ by^2 + bz^2 = 100 \end{cases}$$

$$\begin{cases} by = \frac{3bz}{4} \\ \frac{9bz^2}{16} + bz^2 = 100 \end{cases}$$

$$\frac{25bz^2}{16} = 100$$
$$bz^2 = \frac{100\cdot 16}{25}$$

$$bz = \frac{10\cdot 4}{5} = 8$$
$$by = \frac{3\cdot 8}{4} = 6$$

$$\overline{b} = 0\cdot i + 6i + 8k$$

Пример №3

Определить площадь параллелограмма, построенного на векторах

a = 2i + 3j – k   и   b =- 3i – j + k.

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=\left(ay\cdot bz-az\cdot by\right)i+\left(az\cdot bx-ax\cdot bz\right)j+\left(ax\cdot by-ay\cdot bx\right)k$$
$$\bar{a}\cdot\bar{b}=\left(3\cdot1-(-1)\cdot(-1)\right)i+\left((-1)\cdot(-3)-2\cdot1\right)j+\left(2\cdot(-1)-3\cdot(-3)\right)k=2i+1j+7k$$
$$S=\sqrt{4+1+49}=\sqrt{54}$$

Пример №4

Найти grad (1/r).

$$grad\left(\frac{1}{r^2}\right)=\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x}i+\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y}j+\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z}k=\left(-\frac{1}{r}\right)\cdot\frac{\partial r}{\partial x}i+\left(-\frac{1}{r^2}\right)\cdot\frac{\partial r}{\partial y}j+\left(-\frac{1}{r^2}\right)\cdot\frac{\partial r}{\partial z}k=$$
$$=\left(-\frac{1}{r^2}\right)\cdot grad\ r$$

Пример №5

Определить наибольшую скорость возрастания поля u=ln (x^2+4y^2) в точке M(6;4;0).

$$grad\ u=\frac{2x}{x^2+4y^2}i+\frac{8y}{x^2+4y^2}j+0\cdot k=\frac{2\cdot6}{36+64}i+\frac{8\cdot4}{36+64}j+0\cdot k=\frac{3}{25}i+\frac{8}{25}j+0\cdot k$$
$$\left|grad\ u\right|=\sqrt{\left(\frac{3}{25}\right)^2+\left(\frac{8}{25}\right)^2+0^2}=\sqrt{\frac{73}{25^2}}=\frac{\sqrt{73}}{25}$$

Пример №6

С помощью формулы Остроградского-Гаусса определить поток вектора $\bar{E}=e\dfrac{\bar{r}}{r^3}$ ***напряженности поля точечного электрического заряда через замкнутую поверхность, не охватывающую заряд.***

Согласно формуле Остраградского-Гауса нахождение потока сводится к решению интеграла: $\iiint\limits_T div\left(e\frac{\bar{r}}{r^3}\right)dr$

Для нахождения дивергенции вначале найдем $\frac{\partial Ex}{\partial x}$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e\cdot x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right)=e\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot 2x^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}=e\frac{r^3-3rx^2}{r^6}=e\frac{r^2-3zx^2}{r^5}$$

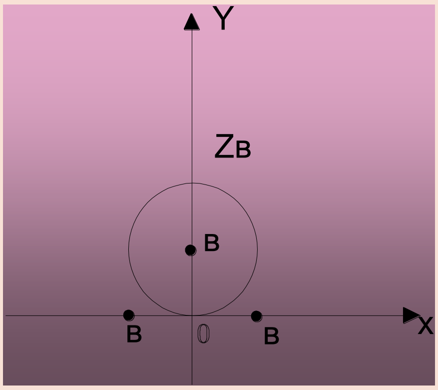
Аналогично: $\frac{\partial Ey}{\partial y}=e\frac{r^2-3y^2}{r^5}; \qquad \frac{\partial Ez}{\partial z}=e\frac{r^2-3z^2}{r^5}.$

Теперь находим $div\overline{E}$:

$$div\overline{E}=e\frac{r^2-3x^2+r^2-3y^2+r^2-3z^2}{r^5}=\frac{3r^2-3\left(x^2+y^2+z^2\right)}{r^5}=0.$$

Пример №7

Найти циркуляцию вектора $\overline{A}=yi$ ***по контуру окружности x=bcost; y=b+bsint, лежащей в плоскости XOY.***



Окружность $\begin{cases} x = b\,COS\,t \\ y = b + b\,Sin\,t \end{cases} \rightarrow$

Будем искать циркуляцию в направлении от 0 до 2π по формуле.

$$\oint (Ax\cdot dx + Ay\cdot dy)$$

$$Ax = y; \qquad Ay = 0$$

$$dx = -b\,Sin\,t\,\partial t, \quad \text{тогда}$$

$$-\int_0^{2\pi}(b+b\,Sin\,t)b\,Sin\,t\partial t = -b^2\int_0^{2\pi}\left(Sin\,t+Sin^2t\right)\partial t = -b^2\left(\int_0^{2\pi}Sin\,t\,\partial t+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}dt-\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}COS2t\,d2t\right)=$$

$$=-b^2\left(-\cancel{COS\,t}\Big|_0^{2\pi}+\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi}-\frac{1}{4}Sin2t\Big|_0^{2\pi}\right)=-b^2\pi$$

$$\text{Ответ}:\ -b^2\pi$$

Пример №8

Показать, что поле $\overline{A} = grad(1/r)$ **является соленоидальным.**

Поле A является соленоидальным, если $div\overline{A} = 0.$

Нужно доказать, что $div\ grad\left(\frac{1}{r}\right) = 0;$

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$grad\,\frac{1}{r}=grad\left(\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right)=-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2xi-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2yj-$$

$$-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2zk=-x\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot i-y\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot j-z\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot k$$

$$div\left(-x\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot i-y\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot j-z\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot k\right)=$$

$$=-\frac{\partial}{\partial x}\left(x\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(y\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(z\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}\right)=$$

$$=-\left(\frac{\partial x}{\partial x}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}+x\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{5}{2}}\cdot 2x\right)-$$

$$-\left(\frac{\partial y}{\partial y}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}+y\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{5}{2}}\cdot 2y\right)-$$

$$-\left(\frac{\partial z}{\partial z}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}+z\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{5}{2}}\cdot 2z\right)=$$

$$=-\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}+3x^2\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{5}{2}}-$$

$$-\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}+3y^2\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{5}{2}}-\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}+3z^2\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{5}{2}}=$$

$$=-3\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}+3\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{5}{2}}\cdot\left(x^2+y^2+z^2\right)=-3\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}+3\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}=0$$

Ответ: значит после $\overline{A}=grad\left(\frac{1}{r}\right)$ *является соленоидальным.*

Пример №9.

Доказать, что поле вектора

$$\overline{A}=\frac{2\cos\theta}{\rho^3}\overline{e_\rho}+\frac{\sin\theta}{\rho^3}\overline{e_\theta}$$

потенциально.

Поле вектора $\overline{A}$ является потенциальным, если $rot\overline{A}=0$.

Формулы заданы в сферических координатах, тогда

$$rot\vec{A}=\frac{1}{\rho^2 Sin\,\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(A\varphi\cdot\rho Sin\,\theta)-\frac{\partial}{\partial\varphi}(A\theta\cdot\rho)\right]e\rho+\frac{1}{\rho Sin\,\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\varphi}(A\rho)-\frac{\partial}{\partial\rho}(A\varphi\cdot\rho Sin\,\theta)\right]e_\theta+$$
$$+\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(A\theta\cdot\rho)-\frac{\partial}{\partial\theta}(A\rho)\right]e\varphi$$

В нашем случае $A\rho=\dfrac{2COS\,\theta}{\rho^3}$ $\quad A\theta=\dfrac{Sin\,\theta}{\rho^3}$ $\quad A\varphi=0$

Т.к. $A\varphi$ и $A\rho$, $A\theta$ не зависят от φ, получаем формулу:

$$rot\,\vec{A}=\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(A\theta\cdot\rho)-\frac{\partial}{\partial\theta}(A\rho)\right]e\varphi=\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{Sin\,\theta}{\rho^2}\right)-\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{2COS\,\theta}{\rho^3}\right)\right]=$$
$$=\frac{1}{\rho}\left[-2\frac{Sin\,\theta}{\rho^3}+2\frac{Sin\,\theta}{\rho^3}\right]=0$$

Значит поле вектора $\vec{A}=\dfrac{2COS\,\theta}{\rho^3}\cdot\vec{e}\rho+\dfrac{Sin\,\theta}{\rho^3}\vec{e}_\theta$ *является потенциальным.*

Пример №10

Является ли гармонической функция $U=\dfrac{\cos\theta}{\rho}$ ***?***

Функция является гармонической, если она удовлетворяет уравнению Лапласа.

Уравнение Лапласа в сферических координатах:

$$\Delta U=\frac{2}{\rho}\cdot\frac{\partial u}{\partial\rho}+\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho^3 tg\,\theta}\cdot\frac{\partial u}{\partial\theta}+\frac{1}{\rho^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+\frac{1}{\rho^2 Sin^2\,\theta}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial\rho}=\frac{COS\,\theta}{\rho^2}\qquad\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}=2\frac{COS\,\theta}{\rho^3}\qquad\frac{\partial u}{\partial\theta}=-\frac{Sin\,\theta}{\rho}\qquad\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=\frac{COS\,\theta}{\rho}\qquad\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0,$$

Подставим в верхнюю формулу и получим:

$$\Delta U=\frac{2}{\rho}\cdot\left(-\frac{COS\,\theta}{\rho^2}\right)+2\frac{COS\,\theta}{\rho^3}+\frac{1}{\rho^2 tg\,\theta}\cdot\left(-\frac{Sin\,\theta}{\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\left(-\frac{COS\,\theta}{\rho}\right)=$$

$$=\frac{2COS\,\theta}{\rho^3}+\frac{2COS\,\theta}{\rho^3}-\frac{COS\,\theta}{\rho^3}-\frac{COS\,\theta}{\rho^3}=-\frac{2COS\,\theta}{\rho^3}$$

Лопласиант не равен нулю, поэтому функция не гармоническая.