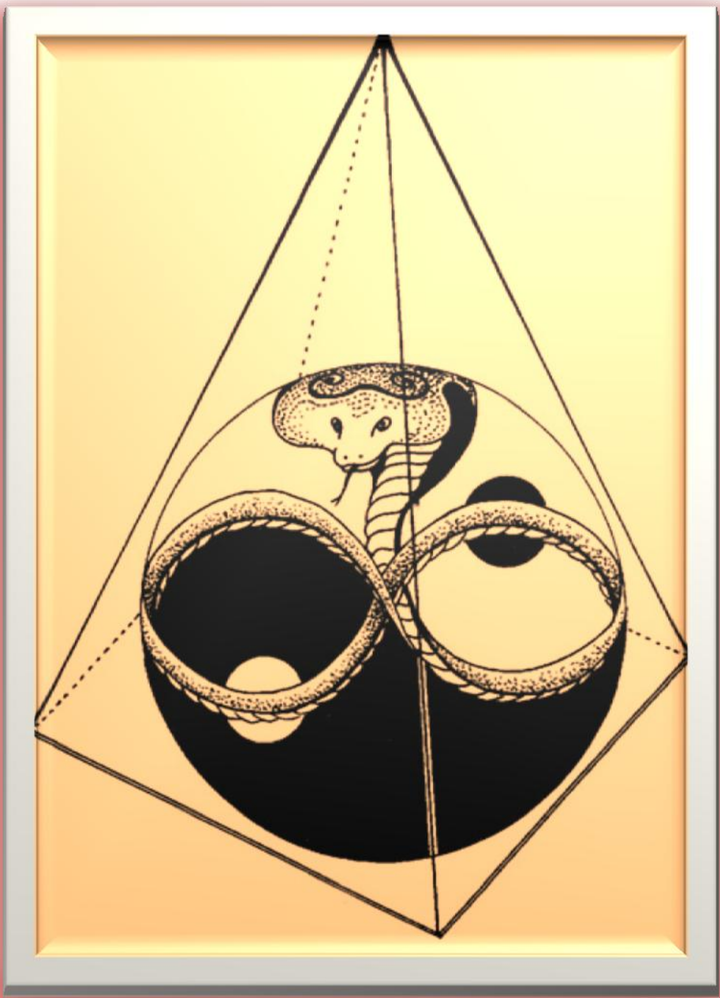


Бахарев

Юрий

Павлович

ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ

Курт Гёдель писал в 1973 году:

«Есть веские основания считать, что нестандартный анализ, в той или иной форме, станет анализом будущего».

Издание второе. Исправленное и дополненное

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

О Нестандартном анализе

МОСКВА 2012 г.

СОДЕРЖАНИЕ

От автора

Нестандартный анализ проявился в ***1960*** *году. В то время* ***Абрахам Робинсон***[1]*, специалист по теории моделей, понял каким образом методы математической логики позволяют оправдать классиков математического анализа XVII и XVIII вв., поставив на строгую основу их рассуждения, использующие «****бесконечно большие****» и «****бесконечно малые величины****». Здесь, читатель, пойми, что именно в эти Века «зародилось»* **ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ**, *отцами-основателями которого по праву считаются* ***Исаак Ньютон***[2] **и** ***Готфрид Вильгельм Лейбниц***[3]*. Они то первыми и начали дисскуссию о «флюксиях» и «истечении бесконечно малых». На очень солидной основе читатель найдет это в книге замечательного русского математика Лузина Николая Николаевича «Диффнренциальное исчисление» (см. на сайте: http://www.vixri.ru/). Таким образом, речь идет не о каких-то новых «нестандартных» методах, не имеющих ничего общего с традиционной математикой, а о развитии новых средств внутри стандартной (теоретико - множественной в первую очередь) математики.*

Абрахам Робинсон

---

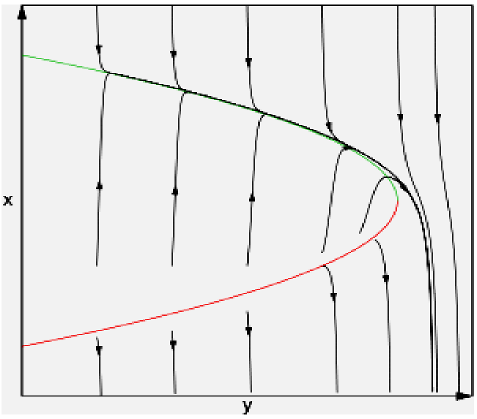
[1] *Абрахам Робинсон (англ. Abraham Robinson, 6 октября 1918 — 11 апреля 1974) — американский математик, создатель «нестандартного анализа». Робинсон доказал, что поле вещественных чисел может быть расширено до множества, содержащего бесконечно малые и бесконечно большие величины в том смысле, какой вкладывали в эти понятия Лейбниц и другие математики XVIII века.*

[2] *Сэр Исаáк Ньютон [1] (англ. Sir Isaac Newton, 25 декабря 1642 — 20 марта 1727 по юлианскому календарю, использовавшемуся в Англии в то время; или 4 января 1643 — 31 марта 1727 по григорианскому календарю) — великий английский физик, математик и астроном. Автор фундаментального труда «Математические начала натуральной философии» (лат. Philosophiae Naturalis Principia Mathematica), в котором он описал закон всемирного тяготения и так называемые Законы Ньютона, заложившие основы классической механики. Разработал дифференциальное и интегральное исчисление, теорию цветности и многие другие математические и физические теории.*

[3] *Готфрид Вильгельм фон Лейбниц (нем. Gottfried Wilhelm von Leibniz; 21 июня (1 июля) 1646, Лейпциг, Германия — 14 ноября 1716, Ганновер, Германия) — немецкий (саксонский) философ, математик, юрист, дипломат. Официальной датой рождения дифференциального исчисления можно считать май 1684, когда Лейбниц опубликовал первую статью «Новый метод максимумов и минимумов…»[3]. Эта статья в сжатой и малодоступной форме излагала принципы нового метода, названного дифференциальным исчислением.*

*Нестандартный анализ остался бы любопытным курьезом, если бы единственным его приложением было обоснование рассуждений классиков математического анализа. На деле он оказался полезным и даже не заменимым при развитии новых математических теорий; в этом случае Нестандартный анализ можно сравнить с мостом, переброшенным через реку, соединяющим, или более правильно объединяющим, разные научные дисциплины. Постройка моста не расширяет доступной нам территории, но сокращает путь с одного берега на другой. Происходит это по той простой причине, что он затрагивает теоретико-множественные проблемы, то есть основания математики. Сегодня не секрет, что в основе всех наук лежит математика. Подобным образом нестандартный анализ делает доказательства многих теорем короче. В математической литературе есть красочное название «**охота на уток**». Утки — это некоторые особые решения дифференциальных уравнений с малым параметром, изучаемые в теории релаксационных колебаний; впервые эти решения были обнаружены у уравнения* $\ddot{x} - (\lambda - x^2)\,x + \dot{x} = 0$ ***Ван-дер-Поля***, [4] *и по форме они напоминали летящую утку. Теория уток представляет собой, по мнению автора, наиболее яркое применение методов нестандартного анализа. Следует отметить, что все результаты могут быть сформулированы и доказаны без использования нестандартного анализа (это относится ко всем применениям нестандартного анализа вообще). Однако это сделало бы все формулировки более громоздкими, а все доказательства более длинными и менее интуитивно ясными. Не случайно утки были открыты именно с помощью нестандартного анализа и в связи с*

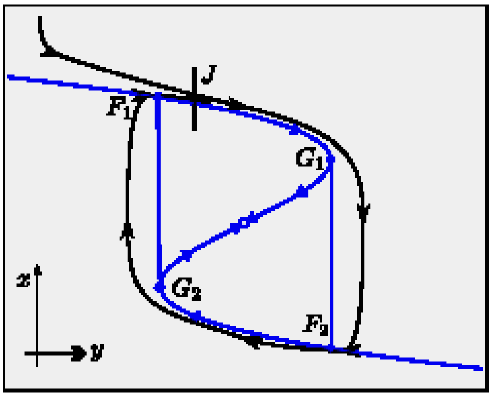
Готфрид Вильгельм фон Лейбниц



Фазовый портрет быстро-медленной системы зеленым показана устойчивая часть медленной поверхности, красным — неустойчивая - напоминает стаю летящих уток

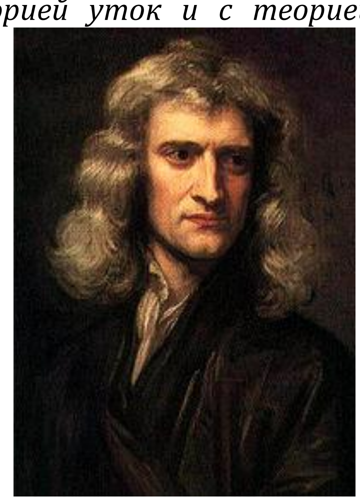
[4] *Уравнение Ван дер Поля* $\ddot{x} - (\lambda - x^2)x + \dot{x} = 0$ *. В связи с созданием различных радиотехнических устройств необходимо было создать генератор устойчивых колебаний постоянной амплитуды. Для решения этой задачи необходимо было перейти от линейного генератора колебаний к нелинейному. Ван-дер-Поль показал, что для этой цели можно использовать малые нелинейности, однако даже при малых нелинейностях получившаяся задача не допускала интегрирования колебаний в квадратурах. Ван-дер-Поль разработал приближенный асимптотический метод интегрирования дифференциальных уравнений второго порядка подобного рода.*

ним. Быстро-медленная система в математике — это динамическая система, в которой присутствуют процессы, происходящие в разных масштабах времени. Фазовые переменные такой системы делятся на два класса: «быстрые» и «медленные» переменные. Скорость изменения «быстрых» переменных почти во всех точках фазового пространства много быстрее скорости изменения «медленных» переменных. Траектории таких систем состоят из чередующихся участков медленного «дрейфа» и быстрых «срывов». Быстро-медленные системы описывают различные физические и иные явления, в которых постепенное эволюционное накопление малых изменений со временем приводит к скачкообразному переходу системы на новый динамический режим.



Релаксационный цикл в быстро-медленной системе типа осциллятора Ван дер Поля - по виду это РЕШЕНИЕ сходно с ЛЕТЯЩЕЙ УТКОЙ

Читатель пожелающий познакомиться ближе с решением подобных дифференциальных уравнений с малыми параметрами, убедится, что язык нестандартного анализа облегчит ему знакомство с теорией уток и с теорией релаксационных колебаний вообще. Рекламируя исчисление бесконечно малых, ***Лейбниц*** *писал: «Отличие от стиля Архимеда состоит только в выражениях, которые при нашем методе более прямые и более подходящие для искусства изобретать». То же самое можно сказать относительно нестандартного анализа (который, собственно говоря, и является настоящим исчислением бесконечно малых), заменив* ***Архимеда***[5] *на* ***Бурбаки***[6]*. Конечно, нестандартный анализ не дает такой экономии мышления, какую дало в свое время дифференциальное и интегральное исчисление. Однако*



Исаак Ньютон

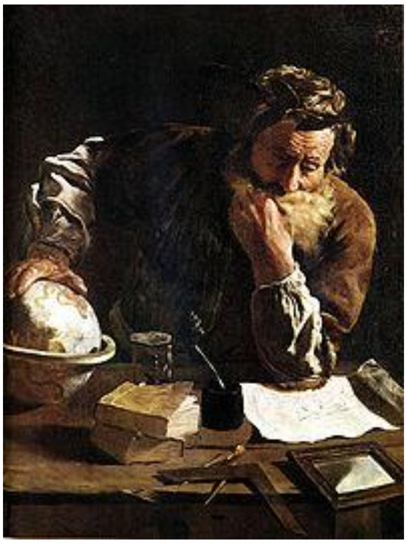
и та экономия, которую он дает, может оказаться существенной в трудных задачах теории сингулярных возмущений нелинейных уравнений. Однако, быть может главное, значение нестандартного анализа состоит в другом. И об этом мы с вами сейчас поговорим. Язык нестандартного анализа оказался удобным средством построения математических моделей физических явлений. Идеи и методы нестандартного анализа могут стать важной частью будущей физической

---

[5] Архиме́д (Ἀρχιμήδης; 287 до н. э. — 212 до н. э.) — древнегреческий математик, физик, механик и инженер из Сиракуз. Сделал множество открытий в геометрии. Заложил основы механики, гидростатики, автор ряда важных изобретений.

[6] Николя́ Бурбаки́ (фр. Nicolas Bourbaki) — коллективный псевдоним группы французских математиков (позднее в нее вошли несколько иностранцев), созданной в 1935 году.

*картины мира. Во всяком случае уже сейчас многие специалисты по математической физике и смежным дисциплинам активно используют нестандартный анализ в своей работе (например: **1.** Чернов В. М. МЕТОДЫ НЕСТАНДАРТНОГО АНАЛИЗА В РАСПОЗНАВАНИИ ОБРАЗОВ Институт систем обработки изображений РАН, Россия 443001, Самара, ул. Молодогвадейская, 151 e-mail: vche@smr.ru, **2.** В.Г. ДУБРО Вариант объединения наук Фонд "Достижения естествознания для решения проблем общества" Санкт-Петербург, (812)352-88-95, email: dubrovg@mail.ru , **3.** А. К. Звонкий, М. А. Шубин НЕСТАНДАРТНЫЙ АНАЛИЗ И СИНГУЛЯРНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, УДК 517.93).*



Архимед

В рамках программы создания устойчивого базиса и аксиоматизации математики, нестандартный анализ позволяет с новой точки зрения посмотреть на многие рассуждения классиков математического анализа, кажущиеся нестрогими, но приводящие к успеху, и, путем относительно небольших уточнений, сделать их удовлетворяющими современным критериям строгости. Сразу встает вопрос - о методах нестандартного анализа. Методы нестандартного анализа, в современном понимании, состоят в привлечении двух различных: «стандартной» и «нестандартной», моделей теории множеств для исследования конкретных математических объектов и проблем. Такие методы получили существенное развитие во второй половине XX века и сформировались в несколько направлений. Разберем, уважаемый читатель, что это за направления.

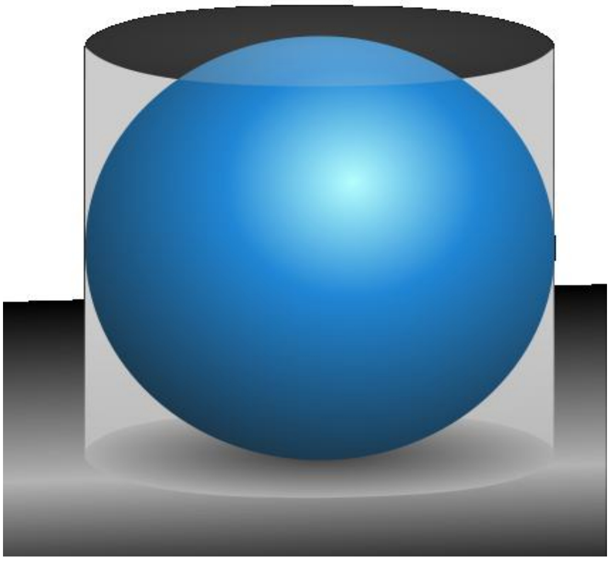
Во-первых *- это классический или* ***робинсоновский нестандартный анализ****. Робинсоновский нестандартный анализ характеризуется широким использованием давно известных в практике естествознания, но долгое время запрещенных в математике XX века концепций, связанных с представлениями об актуальных бесконечно больших и актуальных бесконечно малых величинах. В этой связи сейчас за ним закрепилось наименование* ***инфинитезимальный анализ***[i]*, (см. Гордон Е. И., Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Инфинитезимальный анализ. — 2-е изд., дополн. и испр. — Новосибирск, УДК 517.11+517.08, БВК 22.16 К94, 526 с., ISBN 5-86134-132-X.), в аннотации к этой работе сказано:* «Инфинитезимальный анализ — один из наиболее разработанных разделов, составляющих нестандартные методы анализа. В его рамках получили строгое обоснование метод неделимых и монадология, восходящие к глубокой древности. В монографии подробно излагаются теоретико-множественные формализмы, позволяющие использовать актуальные бесконечно большие и бесконечно малые величины, детально изучаются приложения инфинитезимальных методов в топологии, теории меры, оптимизации и гармоническом анализе. Книга ориентирована на широкий круг читателей, интересующихся современным состоянием и приложениями классического нестандартного анализа»*.*

Все это выразительно напоминает о классическом анализе бесконечно малых.

Бесконечно малая и бесконечно большая

Бесконечно малая (величина) — числовая функция или последовательность, которая стремится к нулю.

Бесконечно большая (величина) — числовая функция или последовательность, которая стремится к бесконечности определённого знака.



Исчисление бесконечно малых и больших

Исчисление бесконечно малых — вычисления, производимые с бесконечно малыми величинами, при которых производный результат рассматривается как бесконечная сумма бесконечно малых. Исчисление бесконечно малых величин является общим понятием для дифференциальных и интегральных исчислений, составляющих основу современной высшей математики. Понятие бесконечно малой величины тесно связано с понятием предела.

Бесконечно малая величина

Последовательность a_n называется *бесконечно малой*, если $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Например, последовательность чисел $a_n = \dfrac{1}{n}$ — бесконечно малая.

Функция называется *бесконечно малой в окрестности точки* x_0, если $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$.

Функция называется *бесконечно малой на бесконечности*, если $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ либо $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

Также бесконечно малой является функция, представляющая собой разность функции и её предела, то есть если $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a$, то $f(x) - a = \alpha(x)$, $\lim_{x\to+\infty} (f(x) - a) = 0$.

Бесконечно большая величина

Во всех приведённых ниже формулах бесконечность справа от равенства подразумевается определённого знака (либо «плюс», либо «минус»). То есть, например, функция $x \sin x$, неограниченная с обеих сторон, не является бесконечно большой при $x \to +\infty$.

Бесконечно большая величина

Во всех приведённых ниже формулах бесконечность справа от равенства подразумевается определённого знака (либо «плюс», либо «минус»). То есть, например, функция $x \sin x$, неограниченная с обеих сторон, не является бесконечно большой при $x \to +\infty$.

Последовательность a_n называется *бесконечно большой*, если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Функция называется *бесконечно большой в окрестности точки* x_0, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$.

Функция называется *бесконечно большой на бесконечности*, если $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \infty$ либо $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$.

Свойства бесконечно малых

- Сумма конечного числа бесконечно малых — бесконечно малая.
- Произведение бесконечно малых — бесконечно малая.
- Произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную — бесконечно малая. Как следствие, произведение бесконечно малой на константу — бесконечно малая.
- Если a_n — бесконечно малая последовательность, сохраняющая знак, то $b_n = \dfrac{1}{a_n}$ — бесконечно большая последовательность.

Сравнение бесконечно малых

Определения

Допустим, у нас есть бесконечно малые при одном и том же $x \to a$ величины $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ (либо, что не важно для определения, бесконечно малые последовательности).

- Если $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\beta}{\alpha} = 0$, то β — бесконечно малая *высшего порядка малости*, чем α. Обозначают $\beta = o(\alpha)$.
- Если $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\beta}{\alpha} = \infty$, то β — бесконечно малая *низшего порядка малости*, чем α. Соответственно $\alpha = o(\beta)$.
- Если $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\beta}{\alpha} = c$ (предел конечен и не равен 0), то α и β являются бесконечно малыми величинами *одного порядка малости*.

  Это обозначается как $\beta = O(\alpha)$ или $\alpha = O(\beta)$ (в силу симметричности данного отношения).

- Если $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\beta}{\alpha^m} = c$ (предел конечен и не равен 0), то бесконечно малая величина β имеет *m-й порядок малости* относительно бесконечно малой α.

Для вычисления подобных пределов удобно использовать правило Лопиталя.

Примеры сравнения

- При $x \to 0$ величина x^5 имеет высший порядок малости относительно x^3, так как $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^5}{x^3} = 0$. С другой стороны, x^3 имеет низший порядок малости относительно x^5, так как $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3}{x^5} = \infty$.

  С использованием O-символики полученные результаты могут быть записаны в следующем виде $x^5 = o(x^3)$.

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^2 + 6x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x + 6}{1} = \lim\limits_{x\to 0} (2x + 6) = 6$, то есть при $x \to 0$ функции $f(x) = 2x^2 + 6x$ и $g(x) = x$ являются бесконечно малыми величинами одного порядка.

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2+6x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x+6}{1}=\lim\limits_{x\to 0}(2x+6)=6$, то есть при $x\to 0$ функции $f(x)=2x^2+6x$ и $g(x)=x$ являются бесконечно малыми величинами одного порядка.

  В данном случае справедливы записи $2x^2+6x=O(x)$ и $x=O(2x^2+6x)$.

- При $x\to 0$ бесконечно малая величина $2x^3$ имеет третий порядок малости относительно x, поскольку $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^3}{x^3}=2$, бесконечно малая $0{,}7x^2$ — второй порядок, бесконечно малая $\sqrt{x}$ — порядок 0,5.

Эквивалентные величины

Определение

Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\beta}{\alpha}=1$, то бесконечно малые величины α и β называются *эквивалентными* ($\alpha\sim\beta$).

Очевидно, что эквивалентные величины являются частным случаем бесконечно малых величин одного порядка малости.

При $\alpha(x)\xrightarrow[x\to x0]{}0$ справедливы следующие соотношения эквивалентности (как следствия из так называемых замечательных пределов):

- $\sin\alpha(x)\sim\alpha(x)$;
- $\operatorname{tg}\alpha(x)\sim\alpha(x)$;
- $\arcsin\alpha(x)\sim\alpha(x)$;
- $\operatorname{arctg}\alpha(x)\sim\alpha(x)$;
- $\log_a(1+\alpha(x))\sim\alpha(x)\cdot\dfrac{1}{\ln a}$, где $a>0$;
- $\ln(1+\alpha(x))\sim\alpha(x)$;
- $a^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)\cdot\ln a$, где $a>0$;
- $e^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)$;
- $1-\cos\alpha(x)\sim\dfrac{\alpha^2(x)}{2}$;
- $(1+\alpha(x))^{\mu}-1\sim\mu\cdot\alpha(x),\quad \mu\in\mathbb{R}$, поэтому используют выражение:

  $\sqrt[n]{1+\alpha(x)}\approx\dfrac{\alpha(x)}{n}+1$, где $\alpha(x)\xrightarrow[x\to x0]{}0$.

Теорема

Предел частного (отношения) двух бесконечно малых величин не изменится, если одну из них (или обе) заменить эквивалентной величиной.

Данная теорема имеет прикладное значение при нахождении пределов (см. пример).

Примеры использования

- Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}$.

  Заменяя $\sin 2x$ эквивалентной величиной $2x$, получаем $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{x}=2$.

- Найти $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin(4\cos x)}{\cos x}$.

Так как $\sin(4\cos x) \sim 4\cos x$ при $x \to \frac{\pi}{2}$ получим

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(4\cos x)}{\cos x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{4\cos x}{\cos x} = 4.$$

- Вычислить $\sqrt{1,2}$.

  Используя формулу: $\sqrt{1,2} \approx 1 + \frac{0,2}{2} = 1,1$, тогда как, используя калькулятор (более точные вычисления), получили: $\sqrt{1,2} \approx 1,09544$, таким образом ошибка составила: 0,00455, то есть метод полезен, благодаря своей простоте, при грубой оценке арифметических корней близких к единице.

Исторический очерк

Понятие «бесконечно малое» обсуждалось ещё в античные времена в связи с концепцией неделимых атомов, однако в классическую математику не вошло. Вновь оно возродилось с появлением в XVI веке «метода неделимых» — разбиения исследуемой фигуры на бесконечно малые сечения.

В XVII веке произошла алгебраизация исчисления бесконечно малых. Они стали определяться как числовые величины, которые меньше всякой конечной (положительной) величины и всё же не равны нулю. Искусство анализа заключалось в составлении соотношения, содержащего бесконечно малые (дифференциалы), и затем — в его интегрировании.

Математики старой школы подвергли концепцию *бесконечно малых* резкой критике. Мишель Ролль писал, что новое исчисление есть «*набор гениальных ошибок*»; Вольтер ядовито заметил, что это исчисление представляет собой искусство вычислять и точно измерять вещи, существование которых не может быть доказано. Даже Гюйгенс признавался, что не понимает смысла дифференциалов высших порядков.

Споры в Парижской Академии наук по вопросам обоснования анализа приобрели настолько скандальный характер, что Академия однажды вообще запретила своим членам высказываться на эту тему (в основном это касалось Ролля и Вариньона). В 1706 году Ролль публично снял свои возражения, однако дискуссии продолжались.

В 1734 году известный английский философ, епископ Джордж Беркли выпустил нашумевший памфлет, известный под сокращённым названием «*Аналист*». Полное его название: «*Аналист или рассуждение, обращённое к неверующему математику, где исследуется, более ли ясно воспринимаются или более ли очевидно выводятся предмет, принципы и умозаключения современного анализа, чем религиозные таинства и догматы веры*».

«Аналист» содержал остроумную и во многом справедливую критику исчисления бесконечно малых. Метод анализа Беркли считал несогласным с логикой и писал, что, «*как бы он ни был полезен, его можно рассматривать только как некую догадку; ловкую сноровку, искусство или скорее ухищрение, но не как метод научного доказательства*». Цитируя фразу Ньютона о приращении текущих величин «в самом начале их зарождения или исчезновения», Беркли иронизирует: «*это ни конечные величины, ни бесконечно малые, ни даже ничто. Не могли ли бы мы их назвать призраками почивших величин?.. И как вообще можно говорить об отношении между вещами, не имеющими величины?.. Тот, кто может переварить вторую или третью флюксию [производную], вторую или третью разность, не должен, как мне кажется, придираться к чему-либо в богословии*».

Невозможно, пишет Беркли, представить себе мгновенную скорость, то есть скорость в данное мгновение и в данной точке, ибо понятие движения включает понятия о (конечных ненулевых) пространстве и времени.

Как же с помощью анализа получаются правильные результаты? Беркли пришёл к мысли, что это объясняется наличием в аналитических выводах взаимокомпенсации нескольких ошибок, и проиллюстрировал это на примере параболы. Как ни странно, некоторые крупные математики (например, Лагранж) согласились с ним.

Как же с помощью анализа получаются правильные результаты? Беркли пришёл к мысли, что это объясняется наличием в аналитических выводах взаимокомпенсации нескольких ошибок, и проиллюстрировал это на примере параболы. Как ни странно, некоторые крупные математики (например, Лагранж) согласились с ним.

Сложилась парадоксальная ситуация, когда строгость и плодотворность в математике мешали одна другой. Несмотря на использование незаконных действий с плохо определёнными понятиями, число прямых ошибок было на удивление малым — выручала интуиция. И всё же весь XVIII век математический анализ бурно развивался, не имея по существу никакого обоснования. Эффективность его была поразительна и говорила сама за себя, но смысл дифференциала по-прежнему был неясен. Особенно часто путали бесконечно малое приращение функции и его линейную часть.

В течение всего XVIII века предпринимались грандиозные усилия для исправления положения, причём в них участвовали лучшие математики столетия, однако убедительно построить фундамент анализа удалось только Коши в начале XIX века. Он строго определил базовые понятия — предел, сходимость, непрерывность, дифференциал и др., после чего актуальные бесконечно малые исчезли из науки. Некоторые оставшиеся тонкости разъяснил позднее Вейерштрасс. В настоящее время термин «бесконечно малая» математики в подавляющем большинстве случаев относят не к числам, а к функциям или последовательностям.

Как иронию судьбы можно рассматривать появление в середине XX века нестандартного анализа, который доказал, что первоначальная точка зрения — актуальные бесконечно малые — также непротиворечива и могла бы быть положена в основу анализа. С появлением нестандартного анализа стало ясно, почему математики XVIII века, выполняя незаконные с точки зрения классической теории действия, тем не менее получали верные результаты.

Инфинитезимальный анализ *бурно развивается и уже внес капитальные изменения в систему общематематических представлений. Прежде всего это связано с тем, что в нем предложено новое понимание* ***метода неделимых****, восходящего к глубокой древности, и осуществлен синтез подходов к дифференциальному и интегральному исчислению, предложенных его основоположниками. В наши дни инфинитезимальный анализ находит широкое распространение и проникает во все разделы современной математики. Наибольшие изменения происходят в этой связи в:*

- *негладком анализе,*
- *в теории вероятностей,*
- *теории меры,*
- *качественной теории дифференциальных уравнений,*
- *математической экономике,*
- *распознавании образов,*
- *теории множеств и т.д.*

Второе направление *— булевозначный анализ, который характеризуется широким использованием таких терминов, как:*

- *спуски и подъемы,*
- *циклические оболочки и миксинги,*
- *$\mathcal{B}$-множества,*
- *изображения обектов в моделях.*

Развитие и становление этого направления (второго по нашей классификации), связано со знаменитыми работами ***П. Дж. Коэна***[7] *по гипотезе континуума, тематика книги которого несомненно охватывает широкий круг математиков: в первую очередь специалистов по теории множеств, математической логике и основаниям математики. На мой взгляд, сегодня – в XXI веке, книга Коэна также полезна*

---

[7] *В книге Коэн П. Дж. «Теория множеств и континуум-гипотеза» излагается доказательство независимости гипотезы континуума от остальных аксиом теории множеств — один из самых интересных и ярких результатов, полученных в математике за последнее десятилетие. Именно за этот результат ее автор, профессор Станфордского университета П. Коэн, был удостоен медали Филдса на последнем Международном конгрессе. математиков (Москва, 1966).*

преподавателям, аспирантам и студентам старших курсов университетов и пединститутов, и даже должна быть у них на полке постоянно. Я так считаю, потому что сегодня идет переосмысление основ анализа и базиса дифференциального исчисления. Ставится вопрос о мере использования дифференциальных уравнений в естествознании. (см. **Револьт Пименов**[ii] ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ: НАСКОЛЬКО ОНИ ОПРАВДАНЫ? На сайте http://www.vixri.ru/*). Это настолько важно, что приведу выдержку из книги Револьта: —* ***Постановка вопроса. В последние десятилетия в физике и около физики много толкуют (см.*** **Акчурин И. А. Единство естественнонаучного знания. — М.: Наука, 1974; Зельдович Я. Б. и Михайлов А. С. Флуктуационная кинетика реакций /УФН, 1987, т. 153, №3, 469-486; Пригожий И. Самоорганизация в неравновесных системах. — М.: Мир, 1979; Хакен Г. Синергетика. — М.: Мир, 1980.*****) о смене парадигмы, о поисках по-настоящему сумасшедшей теории, словом, выражают неудовлетворение сложившимся экспликативным инструментарием. Особенно заметным стало это после того, как пригожинский подход к кинетике химических реакций стал рассматриваться как АЛЬТЕРНАТИВА каноническому физическому видению. После того, как проблема объяснения высокой организованности живой природы стала рассматриваться НА ФОНЕ энтропийной организации природы физической и, соответственно, превратилась в проблему объяснения самоорганизации живого из неживого. Мы не намерены входить ни в решение этой проблемы (или объяснять, что это псевдопроблема), ни в обзор решений этой проблемы. Мы хотим заняться более частным, можно даже сказать "узким" вопросом, который однако входит неотъемлемой составной частью в общую проблему, как знает каждый. Именно, мы займемся вопросом о ПРИМЕНИМОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ. Ведь уже подробностями мелкого порядка выглядят колебания: пользоваться ли дифференциальными уравнениями ЛИНЕЙНЫМИ (как обычно в физике) или же НЕЛИНЕЙНЫМИ, например, третьего порядка (как И.Пригожин). Это вроде как пользоваться попавшей в словари частью русского языка и не попавшей, но язык-то все равно русский! Использование дифференциальных уравнений с самого начала было сопряжено с идеей устойчивых законов природы, пользуясь знанием которых можно было бы ОДНОЗНАЧНО ПРЕДСКАЗЫВАТЬ БУДУЩЕЕ. Иными словами, с детерминацией настоящим будущего. Опять же мы не станем вдаваться в описание отличия такого математического предсказания от предсказаний астрологических, жреческих, индуктивных, идущих от тайного знания, нормативных и т.п. Соответствующая самая общая и законченная постановка вопроса была дана Лапласом и получила название "лапласовский детерминизм". Но о самой крайней и всеобъемлющей постановке мы тоже будем говорить мало, нас будет интересовать умеренная***

Леонид Витальевич Канторович

применимость идеи детерминации в более ограниченной форме. (конец цитаты)***Направление развития математики предложенное Коэном в его книге, привело к принципиально новым идеям и результатам в ряде направлений функционального анализа, прежде всего к теории пространств Канторовича***[8], ***в теории алгебр фон Неймана***[9], ***в выпуклом анализе и теории векторных мер. Читательский интерес и стремительное развитие самой дисциплины рождают задачу отразить современное состояние дел в этих и других областях, одной из них является теория вероятностей***(см. **Нельсон Э. Радикально элементарная теория вероятностей, УДК 519/2; Пер. с англ. — Новосибирск: институт математики СО РАН.**)

Джон фон Нейман в 1940-е

В этой книге выдающегося американского математика предлагается принципиально новый подход как к изложению основ, так и продвинутых тем теории вероятностей. Автору удалось предложить очень простую и в то же время весьма мощную «частотную» версию теории, использующую идеи современного инфинитезимального (нестандартного) анализа.

Элементарность изложения делает книги Коэна П. и Нельсона Э. доступными широкому кругу студентов, преподавателей и научных работников всех специальностей, интересующихся теорией нестандартного анализа или применяющих ее.

Одноко в данной работе мы затронем эти проблемы вскользь: как области применения нестандартного анализа. При работе над книгой, которая не является фундаментальным изложением теории нестандартного анализа, а является лишь

---

8 Исследования последней четверти прошлого века наглядно показали, что так называемые расширенные или универсально полные ***пространства Канторовича*** *суть не что иное, как изображения поля вещественных чисел в булевозначных моделях классической теории множеств Цермело — Френкеля. Таким образом, пространства Канторовича столь же неизбежны в математике, как и множество вещественных чисел. В качестве любопытной иллюстрации отметим, что в связи с развитием булевозначного анализа расширенные пространства Канторовича были заново переоткрыты в США под названием булевы линейные пространства спустя почти полвека после своего появления в работах Леонида Витальевича и его учеников.*

9 Алгебра фон Неймана это самосопряжённая алгебра, замкнутая в слабой операторной топологии. Оператор B называется сопряжённым оператору A, если (A f ◦ g) ~ (f ◦ Bg) для любых векторов f, g гильбертова пространства. Семейство операторов называется самосопряжённым, если вместе с каждым своим оператором оно содержит и сопряжённый оператор.

введением к нему, где автор ставит задачу побудить массового читателя к изучению и применению теории, выяснилось, что остаться в прежних рамках уже невозможно: надо говорить и о булевозначном анализе, и о приложениях нестандартных методов к теории векторных решеток, и о инфинитезимальном анализе, и о приложениях к топологии, оптимизации и гармоническому анализу.

Глава 1. Актуальные бесконечно малые величины

Нестандартный анализ — раздел математической логики,
посвященный приложению теории нестандартных моделей
к исследованиям в традиционных областях математики:
математическом анализе, теории функций,
теории дифференциальных уравнений, топологии и др.
ВикипедиЯ

(***http://ru.wikipedia.org/wiki/Нестандартный_анализ***)

Идея инфинитезимали — актуальной бесконечно малой величины — восходит к эпохе античности. В наше время после примерно полувекового перерыва инфинитезимальным понятиям уделяется все большее внимание внутри современной математики. Бесконечно большие и бесконечно малые числа, математические атомы — «неделимые» монады (см. С. С. Кутателадзе НЕКОТОРЫЕ ТЕНДЕНЦИИ В МОНАДОЛОГИИ, Труды конференции «Геометрия и приложения» 13 — 16 марта 2000 г., Новосибирск.*) .*

В монографии, в частности говорится: «Монадология рассматривается как арена взаимодействия современного нестандартного анализа в его булевозначном и инфинитезимальном вариантах. Нестандартные методы анализа в известном смысле распадаются на две основные дисциплины: инфинитезимальный анализ, известный также как робинсоновский нестандартный анализ, и булевозначный анализ. У названных дисциапин есть общая черта: каждая осуществляет сравнительное изучение двух интерпретаций математического утверждения или конструкций в двух различных моделях теории множеств, рассматриваемых как формальное символическое выражение одной — стандартной и другой — нестандартной».

Иногда представляется плодотворным комбинировать теоретические конструкции — эти методы все чаще фигурируют в различных публикациях, входят в математическую практику. Поворотный пункт в развитии инфинитезимальных концепций связан с выдающимся достижением ***А. Робинсона*** *— созданием нестандартного анализа. Около полувека нестандартный анализ рассматривали как довольно тонкую и даже экзотическую логическую технику, предназначенную для обоснования метода актуальных бесконечно больших и бесконечно малых чисел. Считалось также, что эта техника имеет ограниченную сферу применимости и в любом случае принципиально не* *может привести к серьезному пересмотру общематематических представлений В свете новых открытий нестандартные элементы стало возможно рассматривать не как «мнимые, глухие, идеальные сущности», добавляемые к обычным множествам из соображений формального удобства, а как неотъемлемые части любых привычных математических объектов. Возникла установка, состоящая в том, что каждое множество образовано стандартными и нестандартными элементами. В свою очередь, стандартные множества формируют своеобразную реперную сетку, плотно расположенную в совокупности всех предметов изучения математики. При этом обнаружилось, что фигурирующие в нестандартном математическом анализе объекты — монады фильтров, стандартные части чисел и векторов, тени операторов и т. п. — составляют «**канторовские**» множества (по имени знаменитого математика **Георга Кантора** [10] являющегося отцом теории множеств), не попадающие ни на одну из канонизированных картин, рисуемых известными формальными теориями множеств. **Универсум фон Неймана** не исчерпывает мир классической математики — вот одно из очевидных следствий новых воззрений. Таким образом, традиционные взгляды на нестандартный анализ нуждающиеся, по меньшей мере, в ревизии, потребовали переосмысления инфинитезимальных концепций. Важным достоинством возникших путей стал аксиоматический подход, дающий возможность овладеть аппаратом нестандартного математического анализа без предварительного изучения техники ультрапроизведений, булевозначных моделей или их аналогов. Выдвинутые в этом случае аксиомы просты в обращении и отчетливо мотивируются на содержательном уровне в рамках привычной для анализа «наивной» теоретико-множественной установки. В то же время они существенно расширяют круг математических объектов, создают возможности развития нового формального аппарата, позволяют*

Гедель Курт

Георг КАНТОР

[10] Гео́рг Ка́нтор (нем. Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor, 3 марта 1845, Санкт-Петербург — 6 января 1918, Галле (Заале)) — немецкий математик, родившийся в России. Он наиболее известен как создатель теории множеств, ставшей краеугольным камнем в математике. Кантор ввёл понятие взаимно-однозначного соответствия между элементами множеств, дал определения бесконечного и вполне-упорядоченного множеств и доказал, что действительных чисел «больше», чем натуральных. Теорема Кантора, фактически, утверждает существование «бесконечности бесконечностей». Он определил понятия кардинальных и порядковых чисел и их арифметику.

значительно уменьшить опасные разрывы между представлениями, методическими установками и уровнями строгости, принятыми в математике и ее приложениях к естественным и социальным наукам. Иначе говоря, аксиоматическое теоретико-множественное обоснование нестандартного математического анализа имеет общенаучное значение. Хочу предостеречь здесь читателя от излишней эйфории по поводу аксиом: раз непротиворечивая их система составлена, то дисциплина, для которой это сделано замкнута и истина нам гарантирована, это не так. Ничто не вечно под луной. И вот появляется знаменитый математик, логик, оригинальный человек – КУРТ ГЕДЕЛЬ.

В 1947 г. ***К. Гёдель*** *отметил: «Могут существовать аксиомы, столь богатые проверяемыми следствиями, проливающие такой яркий свет на всю дисциплину и доставляющие настолько сильные методы решения задач (даже, насколько это возможно, решающие их в каком-либо конструктивистском смысле), что совершенно безотносительно к их внутренней необходимости эти аксиомы придется принять хотя бы в том же смысле, в каком принимают любую основательную физическую теорию». Предсказание К. Гёделя сбывается на наших глазах. Цель данной работы — сделать более доступными появившиеся пути в нестандартный анализ. Для достижения этой цели мы начинаем с изложения содержательных качественных представлений о стандартных и нестандартных объектах, об аппарате нестандартного анализа на «наивном» уровне строгости, абсолютно достаточном для эффективных применений без апелляции к логическим формализмам. В настоящее время ученые решают также вопросы с современным аксиоматическим построениям нестандартного анализа в рамках канторовской установки. При этом прошу не забывать, что в данной работе мы сочли возможным значительное место уделить идейной и исторической стороне дела, что определило специфику изложения. Собранные в книге исторические сведения, качественные мотивировки принципов нестандартного анализа и обсуждение их простейших следствий для дифференциального и интегрального исчисления составляют «наивное» обоснование инфинитезимального анализа. Формальные детали соответствующего аппарата нестандартной теории множеств собраны в работе (Коэн П. ОБ ОСНОВАНИЯХ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ 1971 г. сентябрь—октябрь т. XXIX, вып. 5(179} успехи математических наук, УДК 519.5).*

Стефан Банах

Веским доводом в пользу известной концентричности изложения служат замечательные слова ***Н. Н. Лузина в работе «Интеграл и тригонометрический ряд»*** *—«Математический анализ вовсе не есть совершенно законченная наука, как иногда склонны себе его представлять, с раз навсегда найденными принципами, из которых только остается извлекать дальнейшие следствия...». В современной математике также представлены инфинитезимальные методы в общей топологии и субдифференциальном исчислении, в решении проблем приближения бесконечномерных* ***банаховых пространств***[11] ***(****названных в честь знаменитого математика* ***СТЕФАНА БАНАХА***[12] ***)****, и операторов в них, конечномерными пространствами и матрицами. Разумеется, размерность аппроксимирующего пространства является здесь бесконечно большим числом. Применяют нестандартный анализ и инфитиземалии в проблемах, относящихся к гармоническому анализу на группах, в нестандартной технике приближения локально компактных групп и соответствующих преобразований*[13] ***Фурье***[14]*.*

Лузин Н.Н. (1883 - 1950)

Как мы уже достаточно ясно поняли: идея ***инфинитезимали*** *— актуальной бесконечно малой величины — восходит к эпохе античности. Повторимся, но это важно: в наше время после примерно полувекового перерыва инфинитезимальным понятиям уделяется все большее внимание внутри современной математики. Бесконечно большие и бесконечно малые числа, математические атомы — «неделимые» монады — все чаще фигурируют в различных публикациях, входят в математическую практику. Поворотный пункт в развитии инфинитезимальных концепций связан с выдающимся достижением* ***А. Робинсона*** *— созданием нестандартного анализа.. В конце 70-х годов после опубликования теории внутренних множеств* ***Э. Нельсона*** *(и несколько позже теорий внешних множеств* ***К. Хрбачека*** *и* ***Т. Каваи****) взгляды на место*

---

11 Банаховым пространством называется нормированное линейное векторное пространство полное по метрике, порождённой нормой. Примером может служить векторное пространство V над некоторым полем, например вещественных или комплексных чисел, с определённой в нём нормой $\|.\|$ так, что любая фундаментальная последовательность в V имеет предел, который также принадлежит V.

12 Сте́фан Ба́нах (польск. Stefan Banach, укр. Степан Степанович Банах, 30 марта 1892, Краков — 31 августа 1945, Львов) — польский математик, профессор Львовского университета (1924), декан физико-математического факультета этого университета (1939). Член Польской АН и член-корреспондент АН УССР. Один из создателей современного функционального анализа и львовской математической школы.

13 Преобразование Фурье — операция, сопоставляющая функции вещественной переменной другую функцию вещественной переменной. Эта новая функция описывает коэффициенты («амплитуды») при разложении исходной функции на элементарные составляющие — гармонические колебания с разными частотами.

14 Жан Батист Жозеф Фурье (фр. Jean Baptiste Joseph Fourier; 21 марта 1768, Осер, Франция — 16 мая 1830, Париж), французский математик и физик.

и роль нестандартного анализа коренным образом обогатились и видоизменились. В свете новых открытий нестандартные элементы стало возможно рассматривать не как «мнимые, глухие, идеальные сущности», добавляемые к обычным множествам из соображений формального удобства, а как неотъемлемые части любых привычных математических объектов. Выше мы уже говорили о том, что каждое множество образовано стандартными и нестандартными элементами. Если учесть, что стандартные множества формируют своеобразную реперную сетку, плотно расположенную в совокупности всех предметов изучения математики, то напрашивается приложение к современным теориям построения мироздания, основанным на клеточных автоматах(см. **Пименов – Мы живем на экране сверхдисплея***) При этом обнаружилось, что фигурирующие в нестандартном математическом анализе объекты —- монады фильтров, стандартные части чисел и векторов, тени операторов и т. п. — не подпадают ни под одну из канонизированных картин, рисуемых известными формальными теориями множеств. Мир классической математики оказался более широким в своей адекватности отражения картины мироздания — вот одно из очевидных следствий рождения альтернативных классической физике теорий зарождения, развития и коллапса вселенных. Таким образом, традиционные взгляды на нестандартный анализ стали нуждаться, по меньшей мере, в ревизии, потребовали переосмысления инфинитезимальных концепций. Важным достоинством возникших путей стал аксиоматический подход, дающий возможность овладеть аппаратом нестандартного математического анализа без предварительного изучения техники ультрапроизведений, булевозначных моделей или их аналогов. Выдвинутые аксиомы просты в обращении и отчетливо мотивируются на содержательном уровне в рамках привычной для анализа «наивной» теоретико-множественной установки. В то же время они существенно расширяют круг математических объектов, создают возможности развития нового формального аппарата, позволяют значительно уменьшить опасные разрывы между представлениями, методическими установками и уровнями строгости, принятыми в математике и ее приложениях к естественным и социальным наукам. Иначе говоря, аксиоматическое теоретико-множественное обоснование нестандартного математического анализа имеет общенаучное значение. В 1947 г.* ***Курт Гёдель***[15] *утверждает, что никакая достаточно мощная формальная система не может быть совершенна — то есть способна представить любое истинное высказывание в виде теоремы — это кажется дефектом только тогда, когда мы предъявляем слишком высокие требования к возможностям формальных систем. Однако для математиков*

[15] *Курт Фри́дрих Гёдель (нем. Kurt Friedrich Gödel, 1906—1978) — австрийский логик, математик и философ математики, наиболее известный сформулированной и доказанной им теоремой о неполноте.*

начала столетия подобные завышенные требования были обычным делом; в то время во всемогуществе логических рассуждений никто не сомневался. Доказательство обратного было найдено в 1931 году. Тот факт, что в любой достаточно сложной формальной системе истинных утверждений больше, чем теорем, называется "неполнотой' этой системы. Удивительно то, что методы рассуждения, используемые Гёделем в его доказательстве, по-видимому, невозможно заключить в рамки формальных систем. На взгляд автора Гёделю впервые удалось выразить необычайно глубокую и важную разницу между человеческой логикой сознания и логикой ума. Последнюю мы представляем как машинный алгоритм, что не умаляет достижений Курта Геделя. Это загадочное несоответствие между мощью живых и неживых систем отражено в несоответствии между понятием "истинности" сознания и ума человека.(см. Амит Госвами. «Самосознающая вселенная», Открытый мир, ГАНГА, М., 2008)*

академик - Лузин Н.Н.

Теория К. Гёделя, выдвинутая им как чисто формальная математика, вернее математическая логика, теория моделей, работает и сбывается в окружающем нас мире на наших глазах[16]. Исходя из вышесказанного автор определил цель настоящего сочинения — сделать более доступными появившиеся пути в нестандартный анализ через наше сознание. Всем кого заинтересует это направление в математике, то для достижения этой цели мы начинаем с изложения содержательных качественных представлений о стандартных и нестандартных объектах, об аппарате нестандартного анализа на «наивном» уровне строгости, абсолютно достаточном для эффективных применений без апелляции к логическим формализмам. Затем приводится краткий справочный материал, относящийся к современным аксиоматическим построениям нестандартного анализа в рамках канторовской установки ***теории множеств***[17]*. При этом мы сочли возможным значительное место*

---

[16] *Гёдель был логиком и философом науки. Наиболее известное достижение Гёделя — это сформулированные и доказанные им теоремы о неполноте, опубликованные в 1931 г.. Одна из них гласит, что любой язык, достаточно сильный для определения натуральных чисел (например, логика второго порядка или русский язык), является неполным. То есть содержит высказывания, которые нельзя ни доказать, ни опровергнуть, исходя из аксиом языка. Доказанные Гёделем теоремы имеют широкие последствия как для математики, так и для философии (в частности, для онтологии и философии науки).*

[17] *Теория множеств Кантора. Во второй половине XIX века немецкий математик Георг Кантор разработал свою программу стандартизации математики, в рамках которой любой математический объект должен был оказываться тем или иным «множеством». Например, натуральное число, по Кантору, следовало рассматривать как множество, состоящее из единственного элемента другого множества, называемого «натуральным рядом» — который, в свою очередь, сам представляет собой множество, удовлетворяющее так называемым аксиомам Пеано. При этом общему понятию «множества», рассматривавшемуся им в качестве центрального для математики, Кантор давал мало что определяющие определения вроде «множество есть многое, мыслимое как единое», и т. д. Это вполне соответствовало умонастроению самого*

уделить идейной и исторической стороне дела, что определило специфику изложения. В этом же плане шел и подбор исторических сведений, которые влияли на качественные мотивировки принципов нестандартного анализа и использовались классиками математического анализа при обсуждении их простейших следствий для дифференциального и интегрального исчислений. Все приведенные высказывания составляют «наивное» обоснование инфинитезимального анализа. Веским доводом в пользу известной концентричности изложения служат замечательные слова ***Н. Н. Лузина***[18]*: «*Математический анализ ничем не отличается от всякой другой науки и имеет свой ход идей, движущийся не только поступательно, но и кругообразно, с возвращением к группе прежних идей, правда всегда в новом освещении[iii]*» У академика Лузина Н.Н. впервые просматривается философский аспект проблем инфинитиземального анализа. Достаточно ясно он выразился в предисловии к своему «Дифференциальному исчислению».*

То же мы видим и у классиков нестандартного анализа. ***П. Дж. К о э н:*** *«*Высказываться о философских проблемах теории множеств,— разумеется, не совсем то, что высказываться о самой теории множеств. Я, по крайней мере, в этом положении чувствую себя непривычно и неловко. Я остро ощущаю тщетность попыток сформулировать позицию, приемлемую для всех или хотя бы для многих, и одновременно сознаю непоследовательность и трудности моей собственной точки зрения. Конечно же, те, кто до меня совершали этот рискованный переход от математики к философии, обычно шли на это на более позднем этапе своей научной карьеры. Наконец, к довершению трудностей, почти немыслимо добавить что-нибудь новое к этому старому спору. В самом деле, я склонен думать, что на такие фундаментальные вопросы любые технические достижения почти не проливают света — хотя, конечно, они могут повлиять на распространение той или иной точки зрения. Но вот, невзирая на все эти оговорки, я чувствую некоторое воодушевление от возможности высказать свои мысли, надеюсь, не слишком догматично, и указать на обстоятельства, на которые, пожалуй, следует указать. Фундаментальные открытия в логике были сделаны так недавно, что мы еще в состоянии разделять глубокое волнение от этих поисков вслепую. Всплеск исследовательской активности в теории множеств, о котором свидетельствует нынешняя встреча, возможно, усиливает наш энтузиазм. Тон сегодняшних философских дискуссий, однако, как будто изменился. Возможно, математики полностью выложились в неистовых спорах прошлого, или их

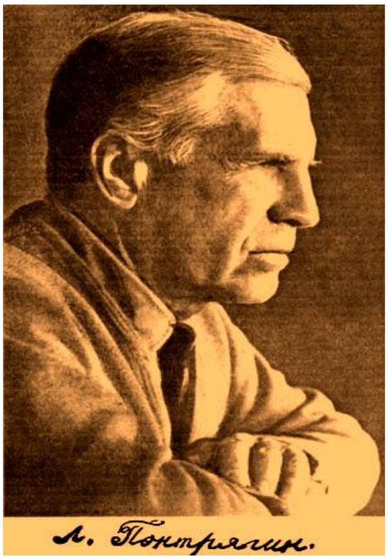
Кантора, подчёркнуто называвшего свою программу не «теорией множеств» (этот термин появился много позднее), а учением о множествах (Mengenlehre).

[18] Никола́й Никола́евич Лу́зин (9 декабря 1883, Иркутск, — 28 февраля 1950, Москва), советский математик, академик АН СССР (1929); член-корреспондент (1927). Профессор Московского университета (1917). Иностранный член Польской АН (1928), почетный член математических обществ Польши, Индии, Бельгии, Франции, Италии. Награждён орденом Трудового Красного Знамени (1945).

аудитория утомилась от полемики,— как бы то ни было, сейчас принято формулировать свою точку зрения, но не пытаться тут же обращать слушателя в собственную веру. В этом духе собираюсь выступить и я, чистосердечно уверив слушателей в своей терпимости к чужим взглядам. Хотя я не представляю себе, что можно было бы назвать «истинным» прогрессом в основаниях математики, очень интересно проследить с точки зрения историка, как высказывались на эту тему разные поколения, и попытаться угадать, как окрашивал их мнения дух времени» [***P. J. Cohen***, *Comments on the foundations of set theory, Proc. Sym. Pure Math... 13: 1 (1971), 9—15. Перевод с английского выполнен Ю. И. Маниным.*]

Теперь нам целесоообразно провести небольшой экскурс в историю математического анализа.

Глава 2. Экскурс в историю математического анализа



Идеи дифференциального и интегрального исчисления восходят к глубокой древности и связаны с наиболее фундаментальными математическими концепциями. Сколь-либо детальное изложение истории становления представлений о математических объектах, о процессах вычисления и измерения, определяющих нынешние взгляды на инфинитезимали, требует специальных сочинений, выходящих за рамки наших возможностей и намерений. Ситуация существенно осложнена тем, что математическая история подвержена широко известным негативным процессам, возникающим при постоянных попытках апологетизации тех или иных современных воззрений. Формирование аппарата математического анализа, в частности, далеко не всегда излагается достаточно полно и бесстрастно. Односторонние взгляды на сущность дифференциала и интеграла, гипертрофирование роли понятия предела, предание анафеме актуальных бесконечно больших и бесконечно малых чисел получили в течение пятидесяти лет двадцатого века столь широкое распространение, что не позволяют игнорировать их существование. Стало трюизмом воззрение, что «сами основания анализа были долго окружены таинственностью вследствие нежелания признать за понятием предела исключительного права быть источником новых методов» Между тем, как справедливо отметил ***Л. С. Понтрягин*** [19] *:* «Исторически интегральное и

[19] *Лев Семёнович Понтря́гин (21 августа (3 сентября) 1908, Москва — 3 мая 1988) — советский математик, академик АН СССР (1958; член-корреспондент 1939), Герой Социалистического Труда (1969)*

дифференциальное исчисление были уже хорошо развитыми областями математики до того, как появилась теория пределов. Последняя возникла как некоторая надстройка над существовавшей уже теорией. Многие физики считают, что так называемое строгое определение производных и интегралов вовсе не нужно для хорошего понимания дифференциального и интегрального исчисления. Я разделяю их точку зрения» *В связи с изложенным мы сочли необходимым в доступной нам краткой форме ознакомить читателя с некоторыми поворотными моментами в истории анализа и с положениями, высказанными классиками в процессе формирования современных взглядов. Отбор соответствующих фрагментов с неизбежностью субъективен. Надеемся, что тем не менее он достаточен для формирования критического отношения к односторонним искаженным картинам становления инфинитезимальных методов. Далее, уважаемый читатель, углубимся еще на один уровень в историю математики и подойдем, таким образом, к истокам и математического анализа и наших проблем нестандартного анализа. Итак первым на нашем пути будет Готфрид Вильгем Лейбниц.*

2.1 ЛЕЙБНИЦ И “ДРЕВНЯЯ ИСТОРИЯ” НЕСТАНДАРТНОГО АНАЛИЗА

Возраст нестандартного анализа колеблется (в зависимости от точки зрения) от двух с половиной десятков до трех сотен лет. Два с половиной десятка получится, если считать, что нестандартный анализ зародился осенью 1960 г., когда его основатель, Абрахам Робинсон, сделал доклад на одном нз семинаров Принстонского университета о возможности применения методов математической логики к обоснованию математического анализа. Триста лет получится, если считать началом нестандартного анлиза появление символов бесконечно малых ***dx*** *и* ***dy*** *в трактате Лейбница “Новый метод”. Трудно сказать с уверенностью, насколько в действительности Лейбниц был близок к идеям нестандартного анализа. Как пишет сам Робинсон “история предмета обычно пишется в свете его позднейшего развития. Уже более чем полвека все обзоры истории дифференциального и интегрального исчислений основывались на уверенности в том, что понятие бесконечно малых и бесконечно больших, если даже и непротиворечиво, бесполезно для развития анализа. В результате в работах этого периода заметно различие между строгостью, с которой рассматриваются идеи Лейбница и его последователей, и снисходительностью, проявляемой к провозвестникам идеи предела”. Характерно, например, следующее высказывание Анри Лебега от 3 декабря 1926 г. “Бесконечно малые были когда-то туманными сущностями, встречавшимися в неясных и неточных формулировках. Все разъяснилось впоследствии благодаря понятию предела”. Считая, что идеи Лейбница и идеи сторонников понятия предельного перехода мерились двойным стандартом при несправедливом склонении весов правосудия в пользу предела, Робинсон предлагает во многом пересмотреть общую картину возникновения и развития математического* *анализа от Ньютона и Лейбница до Коши и Вейерштрасса. Этот пересмотр приводит к более полному признанию заслуг Лейбница, и сам Лейбниц перемещается, таким образом, из разряда гениев третьего класса в разряд гениев второго класса (классификация, предложенная Станиславом Лемом: в этой классификации гении третьего класса получают прижизненное, а гении более высокого класса – лишь посмертное признание).*

Изложим историко-математические взгляды Робинсона. Робинсон резюмирует стандартный взгляд на историю развития математического анализа в следующих словах: "После длительного периода, в течение которого были определены площади, объемы и касательные в различных частных случаях, во второй половине семнадцатого столетия Ньютоном и (несколько позже, но независимо) Лейбницем была построена общая теория дифференцирования и интегрирования. Касаясь обоснования введенных им понятий, Ньютон обращался то к бесконечно малым, то к пределам, то непосредственно к физической интуиции; его непосредственные последователи предпочитали последнее. С другой стороны, Лейбниц и его последователи развивали теорию исходя из дифференциалов первого и следующих порядков. Технические удобства обозначений, использовавших дифференциалы, привели к быстрому развитию Анализа и его приложений в Европе, где они были приняты. Однако внутренние противоречия этой концепции привели к осознанию того, что необходимы какие-то другие основания. Лагранж считал, что ему удалось найти подходящий путь, взяв за основу тейлоровское разложение функции. Но первое строгое обоснование математического анализа было дано лишь Коши. Основой теории Коши было понятие предела, которое, будучи впервые выдвинуто Ньютоном, впоследствии поддерживалось Даламбером. Более формальное изложение методов Коши было дано Вейерштрассом (которого в некоторой степени предвосхитил Больцано). После создания теория пределов использование бесконечно больших и бесконечно малых превратилось в оборот речи, применяемый в выражениях типа "... стремится к бесконечности". Дальнейшее развитие теории неархимедовых полей было целиком предоставлено алгебре." Этот стандартный вгляд, но мнению Робинсона, в некоторых отношениях "должен быть дополнен или даже изменен". В доказательсто этого Робинсон приводит большое количество выдержек из сочинений Лейбница и других упомянутых выше авторов. Как считает Робинсон, "... отношение Лейбница к бесконечно большим и бесконечно малым величинам в Анализе в основном оставалось неизменным в течение двух последних десятилетий его жизни. Он полностью одобрял их введение, но считал их "идеальными элементами, подобными мнимым числа. Эти идеальные элементы подчиняются тем же законам, что и обычные числа. Тем не менее они представляют собой не более чем удобные фикции, необходимые для облегчения рассуждений и открытий. Всегда, при желании, можно исключить их использование и вернуться к стилю античных математиков, рассуждая в терминах величин, достаточно больших (или малых) для того, чтобы ошибка была меньше любой *наперед заданной. Все это отчетливо и неоднократно утверждается в сочинениях Лейбница". Для большей наглядности приведем теперь некоторые из высказываний **Лейбница**, цитируемых Робинсоном. "... Нужно воспринимать бесконечное подобно тому, как это делается в оптике, когда солнечные лучи считаются приходящими из бесконечно удаленной точки и поэтому параллельными... И когда имеются различные порядки бесконечного или бесконечно малых, то понимаются они в том же смысле, в каком земной шар считается точкой по сравнению с расстоянием до неподвижных звезд, а шарик в наших руках — точкой по сравнению с радиусом земного шара, так что расстояние до неподвижных звезд является бесконечно бесконечным или бесконечностью бесконечности по отношению к диаметру шарика. Вместо бесконечно большого или бесконечно малого количества можно взять количество настолько большое или малое, насколько это нужно, чтобы ошибка не превышала заданной. Отличие от архимедовского стиля рассуждений лишь в выражениях, которые у нас более непосредственные и лучше приспособлены для искусства изобретать".*

"...Если кто-то не желает рассматривать бесконечно большие и малые в строго метафизическом смысле, как реально существующие, он можег пользоваться ими как «идеальными понятиями», которые сокращают рассуждения, подобно мнимым корням в обычном анализе... Таким же образом представляют более трех измерений...— все это для установления идей, способных сокращать рассуждения и основывающихся на реальностях. Не следует все же воображать, что наука о бесконечном унижается этим объяснением и сводится к фикциям, ибо постоянно остается, говоря языком схоластики, синкатегорематическая бесконечность. Например, остается верным, что 2 равно 1/1+1/2+1/4+1/8+1/16+1/32 и т. д., что есть бесконечный ряд, в котором содержатся сразу все дроби с числителем 1 и со знаменателями, образующими удваивающуюся геометрическую прогрессию, хотя здесь употребляют все время лишь обыкновенные числа и хотя не вводят никакой бесконечно малой дроби или дроби с бесконечным знаменателем... Правила конечного сохраняют силу в бесконечном, как если бы существовали атомы..., хотя они вовсе не существуют, ибо материя в действительности делима без конца и, наоборот, правила бесконечного сохраняют силу в конечном, как если бы имелись метафизические бесконечно малые, хотя в них и нет нужды и хотя деление материи никогда не приходит к бесконечно малым частицам. Это объясняется тем, что все управляется разумом и что иначе совсем не было бы ни науки, ни правила, а это не согласовалось бы с природой верховного начала". (Это высказывание Лейбница можно при желании рассматривать как формулировку принципа переноса, что дает еще одно основание называть его также "принципом Лейбница".)

“...Несравнимыми величинами я называю такие, одна из которых никогда не сможет превзойти другую, на какое конечное число ее бы ни помножили, так же как это понимает Евклид...”.

Приведем еще несколько цитат (на этот раз отсутствующих в монографии Робинсона).

“...новый Анализ бесконечных рассматривает не линии и не числа, но величины вообще, как это делает обыкновенная Алгебра. Этот Анализ содержит новый алгоритм, т. е. новый способ складывать, вычитать, умножать, делить, извлекать корни, соответствующий несравнимым величинам, т. е. тем, которые бесконечно велики или бесконечно малы в сравнении с другими...”

Методы Лейбница господствовали в Европе в течение более чем 50 лет. Однако во второй половине XVIII столетия начались поиски альтернативных путей построения анализа. Лагранж предлагал рассматривать разложения функций в степенные ряды, предполагая, что любая или почти любая функция может быть разложена в такой ряд. Даламбер предлагал понятие предела в качестве исходного для построения математического анализа. Он писал:

“Говорят, что одна величина является пределом другой, если вторая может приблизиться к первой ближе, чем на любую заданную величину... Теория пределов является основанием подлинной Метафизики дифференциального исчисления... В дифференциальном исчислении речь идет не о бесконечно малых величинах, как это обычно утверждают; речь идет лишь о переделах конечных величин... Термином “бесконечно малая» пользуются лишь как сокращением ...»

Эти высказывания Даламбера выглядят как изложение современной точки зрения на пределы. Можно было бы предположить, что с этого времени понятие бесконечно малых будет полностью устранено. Это, однако, не так. Коши, рассматриваемый обычно как основатель современного подхода к построению анализа, использует понятие бесконечно малой величины. Пытаясь объяснить в современных терминах, что Коши называет “величиной”, можно предположить, что величина — это функция с действительными значениями, определенная на упорядоченном множестве без наибольшего элемента. Коши, однако, отнюдь не сводит величины к функциям. Наоборот, он говорит о функции как о соотношении, связывающем две величины. В его изложении бесконечно малые и пределы фигурируют как равноправные компоненты обоснования анализа. На этом драматическом пути для анализа скрестили шпаги два великих.

2.2 Готфрид Вильгельм Лейбниц и Исаак Ньютон

Дифференциальное и интегральное исчисление имеет давнее название «анализ бесконечно малых». Именно так был озаглавлен первый учебник математического анализа, вышедший в свет в 1696 г. Этот учебник был составлен Г. Лопиталем в результате контактов с И. Бернулли (старшим), одним из выдающихся последователей Г. В. Лейбница. Научное наследие, творчество и взаимоотношения основоположников математического анализа Г. В. Лейбница и И. Ньютона подвергнуты детальному, можно сказать, скрупулезному изучению. Стремление восстановить ход мысли гениальных людей, выявить пути, приведшие к открытию новых истин, оправдано и закономерно. Однако никогда не следует забывать имеющихся принципиальных различий между черновиками и набросками, частными письмами к коллегам и сочинениями, специально предназначенными для более широкого распространения. В этой связи необходимо прежде всего обратиться к «официальным» изложениям интересующих нас представлений Г. В. Лейбница и И. Ньютона о бесконечно малых. Первой опубликованной работой по дифференциальному исчислению является статья Г. В. Лейбница «Новый метод максимумов и минимумов, а также касательных, для которого не служат препятствием ни дробные, ни иррациональные величины, и особый для этого род исчисления». Эта работа вышла в свет в лейпцигском журнале «Acta Eruditorum триста лет назад в 1684 г.* ***Лейбниц дает следующее определение дифференциала.*** *Рассматривая кривую YY и отрезок касательной, проведенной в фиксированной точке кривой Y, отвечающей выбранной координате X на оси AX, и обозначая D точку пересечения касательной с указанной осью, он пишет: «Назовем произвольно взятую прямую dx, а другой отрезок, относящийся к dx так, как y относится к XD, назовем dy или же разностью (differentia)...y...».*

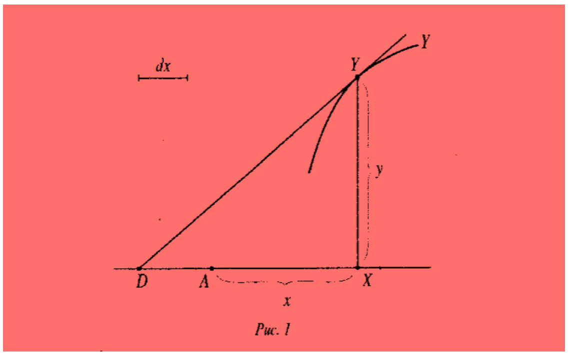


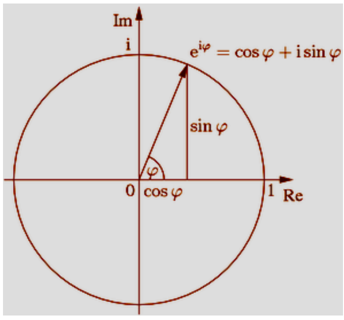
Рис. 1

К этому прилагается рисунок, существенные детали которого (с учетом письменных разъяснений Лейбница) воспроизводятся здесь (рис. 1).

Итак, по Лейбницу для функции x —› y(x) в точке x при произвольном dx мы имеем

dy:= $\frac{YX}{XD}$*dx. Иначе говоря, дифференциал определен как соответствующее линейное отображение, т.е. тем способом, над которым подпишется большинство теперешних специалистов. Г. В. Лейбниц — серьезный мыслитель, считавший, что «изобретение силлогистической формы есть одно из прекраснейших и даже важнейших открытий человеческого духа. Это своего рода универсальная математика, все значение которой еще недостаточно понято. Можно сказать, что в ней содержится искусство* *непогрешимости...» Безусловно понимая, что описание и обоснование изложенного им алгоритма дифференциального исчисления (так Г. В. Лейбниц называл правила дифференцирования) требует уточнения понятия касательной, он разъясняет: «...найти касательную — значит провести прямую, соединяющую две точки кривой, расстояние между которыми бесконечно мало, или же провести продолженную сторону бесконечноугольного многоугольника, который для нас равнозначен кривой». Иначе говоря, Г. В. Лейбниц базирует свое исчисление на апелляции к устройству кривых «в малом». На статут бесконечно малых в те времена имелись практически две точки зрения. В силу первой, по-видимому, более близкой Г. В. Лейбницу, бесконечно малое число мыслилось как меньшее любого «могущего быть заданным количества». Актуально существующие «неделимые» элементы, составляющие величины и фигуры — вот образы, сопутствующие приведенной концепции бесконечной малости. Для Г. В. Лейбница неоспоримо суждение о существовании «простых субстанций, входящих в состав сложных» — монад. «Эти то монады и суть истинные атомы природы, одним словом, элементы вещей» - говаривал он. Для другого родоначальника анализа И. Ньютона бесконечно малые были связаны с представлениями об исчезающих количествах . Неопределенные величины он рассматривал «не как состоящие из крайне малых частей, но как описываемые непрерывным движением», «...как возрастающие или убывающие в непрерывном движении, т.е. как притекающие или утекающие». Знаменитый «метод первых и последних отношений» в классическом трактате «Математические начала натуральной философии» (1687 г.) имеет следующую формулировку: «Количества, а также отношения количеств, которые в продолжение любого конечного времени постоянно стремятся к равенству и ранее конца этого времени приблизятся друг к другу ближе, нежели на любую заданную разность, будут напоследок равны» Проводя идеи, которые сейчас прочно ассоциируются с теорией пределов, И. Ньютон проявлял свойственную настоящим ученым проницательность, предусмотрительность и мудрость, оценивая конкурирующие воззрения. Он писал: «...построение анализа посредством конечных величин и исследование первых или последних отношений нарождающихся или исчезающих конечных величин согласно с геометрией древних, и я желал обнаружить, что в методе флюксий нет необходимости вводить в геометрию бесконечно малые фигуры. Можно, правда, провести анализ на каких угодно фигурах, и конечных и бесконечно малых, которые представляют себе подобными исчезающим, так же как и на фигурах, которые в методах неделимых обычно считаются бесконечно малыми, но только при этом следует действовать с должной осторожностью». Столь же гибких, глубоко диалектических взглядов придерживался Г. В. Лейбниц. В своем известном письме к* ***П. Вариньону*** *от 2 февраля 1702 г. подчеркивая, что «...нет нужды ставить математический анализ в зависимость от метафизических споров», он указывает на единство противоположных представлений об объектах нового аппарата: «...если какой-либо противник желает* *возражать против наших утверждений, то из нашего исчисления следует, что ошибка будет меньше, чем любая ошибка, какую он сможет указать, ибо в нашей власти взять несравнимо малое достаточно малым для этой цели, поскольку такую величину всегда можно взять сколь угодно малой. Быть может, Вы, сударь, это и имеете в виду, говоря о неисчерпаемом, и в этом, без сомнения, состоит строгое доказательство применяемого нами исчисления бесконечно малых... Также можно сказать, что бесконечные и бесконечно малые обоснованы так, что в геометрии и даже в природе все происходит, как если бы они представляли собой совершенные реальности. Об этом свидетельствует не только наш геометрический анализ трансцендентных, но еще мой закон непрерывности, в силу которого допустимо рассматривать покой как бесконечно малое движение (т. е. как равносильный роду своей противоположности), и совпадение — как бесконечно малое расстояние, и равенство — как последнее из неравенств и т. д.». Близкие положения высказывал Г. В. Лейбниц в следующем отрывке, выделенный конец которого часто цитируют в сочинениях по нестандартному анализу, следуя примеру А. Робинсона [455, с. 260- 261]: «...нет необходимости понимать здесь бесконечное в строгом смысле слова, но лишь в том смысле, в каком в оптике говорят, что солнечные лучи исходят из бесконечно удаленной точки и потому считаются параллельными. И когда имеются различные порядки бесконечного или бесконечно малых, то понимаются они в том же смысле, в каком земной шар считают точкой по сравнению с расстоянием до неподвижных звезд, а шарик в наших руках — точкой по сравнению с полудиаметром земного шара, так что расстояние от неподвижных звезд является бесконечно бесконечным или бесконечностью бесконечности по отношению к диаметру шарика. Дело в том, что вместо бесконечного или бесконечно малого берут настолько большие и настолько малые величины, насколько это нужно, чтобы ошибка оказалась менее данной ошибки и, таким образом, отличие от стиля Архимеда состоит лишь в выражениях, которые в нашем методе являются более прямыми и более пригодны для искусства изобретения» [144, с. 190].*

2.3 Леонард Эйлер



Восемнадцатое столетие в истории математического анализа по праву называют веком Л. Эйлера. Каждый, кто ознакомится с его сочинениями, будет потрясен виртуозной техникой, глубоким проникновением в суть дела. Можно вспомнить, что замечательный ученый-инженер А. Н. Крылов с восторгом видел в знаменитой формуле Эйлера:

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

И ее следствии при ***x=π***

$e^{i\pi} = -1$

символ единства всей математики, отмечая, что «в ней (— 1) — представляет арифметику, i — алгебру, π— геометрию и е — анализ». Для Л. Эйлера характерен многосторонний, как сейчас говорят «системный», подход к исследованию математических задач — он широко использует весь разработанный к тому времени аппарат. Существенно подчеркнуть постоянное, эффективное и эффектное применение инфинитезимальных концепций и, прежде всего, актуальных бесконечно больших и бесконечно малых чисел. Л. Эйлер достаточно подробно разъяснил методические основы своих представлений, названных «исчислением нулей». Имеется склонность искать (отличные от имеющихся) пятна на солнце и (аналогичные) слабости гениев. Долгие годы Л. Эйлеру инкриминировали «неверное» обращение с расходящимися рядами, пока не были поняты его взгляды. Сейчас кое-кто употребляет оборот «Эйлер в вопросе о ***расходящихся рядах*** *стоял на вполне современной точке зрения...»Ряд называется сходящимся если все его частичные суммы сходятся к одной конкретной величине, в противном случае он – расходится.* Ньютон и Лейбниц— первые математики, систематически пользовавшиеся бесконечными рядами, — не имели достаточных побуждений к употреблению расходящихся рядов (хотя Лейбниц изредка касался их). Такие побуждения стали умножаться с расширением анализа, и вскоре обнаружилось, что расходящиеся ряды полезны и что некритически выполняемые над ними действия часто приводят к важным результатам, справедливость которых может быть затем проверена независимым путем.(см. Г.Харди _РАСХОДЯЩИЕСЯ РЯДЫ).

Правильнее обернуть эту фразу и сказать, что современные математики, наконец, доросли до идей Эйлера. Как станет видно из дальнейшего (см. 2.2, 2.3), мнение, что «...мы не сможем восторгаться тем способом, которым Эйлер обосновывает анализ, вводя нули различных порядков» столь же самонадеянно, как и суждение о том, что «гиганты науки», главным образом, Эйлер и Лагранж, дали неверное обоснование анализа». Эйлер, и это стоит признать безоговорочно и навсегда, владел анализом и ведал, что творил.

2.4 Дж. Беркли

Идеи анализа в их общей форме оказали заметное воздействие на характер мировоззренческих представлений XVIII века. Отражением глубины проникновения понятий бесконечно больших и бесконечно малых количеств в культурную среду того времени служат, в частности, вышедшие в 1726 г. из-под пера Дж. Свифта «Путешествия Лемюэля Гулливера...» (Лилипутия и Бробдингнег) и знаменитый «Микромсгас 1752», написанный ярким, язвительным мыслителем Ф.-М. Аруэ —

Вольтером. Интересно, что А. Робинсон к своему классическому сочинению [455] в качестве эпиграфа избрал начало следующей речи Микромегаса: «Теперь я вижу яснее, чем когда-либо, что ни о чем нельзя судить по его видимой величине. О боже, даровавший разум существам, столь ничтожных размеров! Бесконечно малое равно перед лицом твоим бесконечно большому; если только возможны существа, еще меньшие чем эти, то и они могут обладать разумом, превосходящим ум тех великолепных творений твоих, виденных мною на небе, одна ступня которых покрыла бы эту планету». Представляется серьезным то воздействие на развитие математического анализа, которое оказало выступление в 1734 г. крупного деятеля церкви и теолога, епископа Дж. Беркли с памфлетом «Аналитик, или Рассуждение, адресованное неверующему математику, где исследуется, являются ли предмет, принципы и заключения современного анализа более отчетливо познаваемыми и с очевидностью выводимыми, чем религиозные таинства и положения веры». Клерикальная направленность сочинений Дж. Беркли сочетается с афористичностью, тонкостью наблюдений и убийственной точностью выражений. «... Ошибка может породить истину, хотя не может породить науку»— вот лейтмотив его критики анализа. Вызов Беркли]: «У меня нет разногласий с вами относительно ваших выводов, они у меня есть только относительно вашей логики и метода. Как вы проводите доказательство? С какими предметами вы хорошо знакомы и ясно ли вы их себе Представляете? На основе каких принципов вы действуете, насколько они правильны и как вы их применяете?» — был адресован всему естествознанию. Сочинение Дж. Беркли, завершенное 67 острыми вопросами, оспаривающими научность методов анализа того времени, не могло быть оставлено без ответа наиболее передовыми представителями научной мысли XVIII века — энциклопедистами.

2.4 Ж. Д'Аламбер и Л. Карно

Поворотный пункт в истории формирования основных понятий анализа связан с идеями и деятельностью Ж. Д'Аламбера. Один из организаторов и ведущих авторов бессмертного шедевра просветительской мысли «Энциклопедии или толкового словаря наук, искусств и ремесел» в статье «Дифференциал» заявил: «Ньютон никогда не считал дифференциальное исчисление исчислением бесконечно малых, а видел в нем метод первых и последних отношений» Д'Аламбер стал первым математиком, объявившим себя обладателем доказательства, что бесконечно малые «на самом деле не существуют ни в природе, ни в допущениях геометров» (из статьи «Бесконечно малое» 1759 г.). Позиция Ж. Д'Аламбера, отраженная «Энциклопедией...», в немалой степени способствовала оформлению в конце XVIII века представления о бесконечно малой как о величине, стремящейся к нулю. По-видимому, в этой связи следует упомянуть работу Л. Карно «Размышления о метафизике исчисления бесконечно малых», в которой отмечено «...понятие бесконечно малого количества не менее ясно, *чем понятие предела, потому что оно есть не что иное, как разность этого предела и количества, последним значением которого он является».*

2.5 Б. Больцано, О. Коши и К. Вейерштрасс

XIX век стал веком обоснования анализа с помощью теории пределов. Выдающийся вклад в этот процесс внесли Б. Больцано, О. Коши и К. Вейерштрасс. Достижения названных ученых отражены в любом традиционном курсе дифференциального и интегрального исчисления. Новый канон строгости, выдвинутый Б. Больцано, данное О. Коши определение бесконечно малого количества как переменной с нулевым пределом, наконец, ε-техника К. Вейерштрасса составляют неотъемлемую часть математических воззрений, став частью современной культуры. Стоит особо отметить что, давая словесную характеристику непрерывности, О. Коши и К. Вейерщтрасс прибегают к практически тождественным выражениям: «бесконечно малое приращение переменной порождает всегда бесконечно малое приращение самой функции» О. Коши; «бесконечно малым изменениям аргумента соответствуют бесконечно малые изменения функции» К. Вейерштрасс. Указанное совпадение подчеркивает достойную уважения потребность связать новые представления с позициями великих предшественников. Размышляя о значении пересмотра аналитических воззрений, происходившего в XIX веке, следует иметь в виду сделанное в этой связи важное наблюдение Ф. Севери: «Этот пересмотр, который приобрел в наши дни относительную завершенность, не имеет, однако, той определенной ценности, в которую верят многие ученые. В самом деле, строгость сама по себе есть функция совокупности знаний в каждый исторический период, соответствующий способу научной обработки истины».

2.6 Николай Николаевич Лузин

Начало XX века в математике отмечено дальнейшим ростом недоверия к концепции актуальных бесконечных величин. Эта тенденция особенно усилилась в связи с переустройством математики на основе теоретико-множественной установки, завоевавшей себе в 30-е годы прочные ключевые позиции. Н. Н. Лузин в первом издании Большой Советской Энциклопедии в 1934 г. писал: «Что же касается постоянного бесконечно малого количества, отличного от нуля, то современный математический анализ, не отрицая формальной возможности определить идею постоянного бесконечно малого (например, как соответствующего отрезка "неархимедовой" геометрии), рассматривает эту идею как совершенно бесплодную, так как ввести такое бесконечно малое в исчисление оказывается невозможным» [150, с. 293-294]. В те годы в России известным событием стал выход в свет учебника ***М. Я. Выгодского*** *«Основы исчисления бесконечно малых», вызвавший серьезную и острую критику. М. Я.*

Выгодский старался сохранить концепцию инфинитезималей, апеллируя к исторической практике. Он, в частности, отмечал: «Если бы дело шло только о создании логического аппарата, который работал бы сам по себе, то, устранив из рассмотрения бесконечно малые величины и изгнав дифференциалы из математики, можно было бы праздновать победу над теми затруднениями, которые доставляли столько хлопот математикам и философам в течение двух веков. Но исчисление бесконечно малых возникло из потребностей практики, и с течением времени его связь с естествознанием и техникой (а в позднейшее время и с социальными науками) все более и более укреплялась и становилась все более и более плодотворной. Между тем полное изгнание бесконечно малых величин сделало бы эту связь если не невозможной, то чрезвычайно затруднительной». Характеризуя учебник М. Я. Выгодского, Н. Н. Лузин в 40-е годы писал: «Этот курс внутренне цельный и освещенный большой идеей, которой он остается верным, не укладывается в рамки современного этапа математического анализа, длящегося 150 лет, и в настоящее время приходящего к своему завершению». На отношении Н. Н. Лузина к бесконечно малым стоит остановиться особо, как на важном свидетельстве того, обычно скрытого, драматизма, которым наполнена история каждой глубокой идеи, волнующей людей. Н. Н. Лузин отличался редкой способностью проникать в ядро самых изощренных математических проблем и, можно сказать, владел замечательным даром предвидения. Идея актуальных бесконечно малых при этом была чрезвычайно близка ему психологически. Он подчеркивал: «...мысль о них никогда не могла быть успешно изгнана из сознания. Имеются, очевидно, какие-то глубоко скрытые причины, еще до сих пор не выясненные полностью, которые заставляют наш ум быть расположенным всерьез считаться с ними». В другом месте с подлинной скорбью Н. Н. Лузин отмечал: «Когда ум начинает свое знакомство с анализом, словом, когда для него весна, он начинает именно с актуально малых, которые можно назвать "элементами" количества. Но постепенно, шаг за шагом, по мере накопления у него знаний, теорий, пресыщения к абстракции, усталости, ум начинает забывать свои первоначальные стремления, улыбаться их "ребячеству". Короче говоря, когда приходит осень ума, он дает себя убедить в единственности правильного обоснования при помощи пределов» . Последнюю точку зрения Н. Н. Лузин энергично развивал в учебнике «Дифференциальное исчисление», указывая, что «для правильного понимания самой сути дела учащийся должен хорошо усвоить, что бесконечно малое по самому своему определению есть всегда переменная величина и что поэтому никакое постоянное число, как бы мало оно ни было, никогда не есть бесконечно малое. Учащийся должен остерегаться пользоваться сравнениями или уподоблениями вроде, например, следующего: "Один сантиметр есть величина бесконечно малая по сравнению с диаметром солнца". Эта фраза совершенно неправильна. Обе величины — и сантиметр и диаметр солнца — суть величины постоянные и, значит, конечные, только, разумеется, одна значительно меньше другой.

Притом и сантиметр вовсе не представится маленькой величиной, если мы, например, сравним его с "толщиной волоса", а для движущегося микроба сантиметр явится пространством колоссальной величины. Чтобы избавиться от всяких рискованных сравнений и субъективных случайных уподоблений, учащийся твердо должен помнить, что никакая постоянная величина не является бесконечно малой, так же как никакое число, как бы мало оно ни было. Поэтому, в сущности говоря, было бы гораздо правильнее употреблять не термин "бесконечно малое", но термин "бесконечно умаляющееся" как более ярко выражающий идею переменности»

2.7 А. Робинсон

*Седьмое (посмертное) издание названного учебника Н. Н. Лузина увидело свет в том же 1961 г., в котором А. Робинсон опубликовал свой «Нестандартный анализ», содержащий современное обоснование метода актуальных бесконечно малых. А. Робинсон опирался на локальную теорему **А. И. Мальцева**, выделяя ее как результат «основополагающего значения для нашей теории» и прямо ссылаясь на работу А. И. Мальцева, относящуюся к 1936 г. Открытие А. Робинсона разъясняет идеи родоначальников дифференциального и интегрального исчисления, дает новое подтверждение Диалектического характера развития математики.*

2.8 Никола Тесла

Восприятие физики Теслы требует совершенно иного понимания математики, в сущности, до какой-то степени сакрального понимания в пифагорейском духе. Пифагор считал, что числа и предметы реально взаимосвязаны и в некоторых свойствах соответствуют друг другу из-за информационных, математических аспектов существования материи как одного из проявлений Божественного Логоса. Даже менее внимательный исследователь сразу заметит, что в трудах Теслы отсутствуют бесконечно малые величины.

Тесла был в состоянии создавать зрительные образы, конкурирующие с реально воспринимаемыми при помощи органов зрения.

Он как бы изменял обычное направление нервного импульса на противоположное - от мозга к сетчатке, убирал внешний образ и заменял его эйдетическим. Тесла свои импульсы будто посылал "изнутри". Он называл это умственной лабораторией. И это было его главным и основным методом экспериментирования. Он обладал способностью переводить математические, абстрактные понятия во внутренне зримые образы, давать им геометрическую интерпретацию, а затем переводить их в физически реализуемую форму рабочих моделей для аппаратурного воплощения.

В своём уме он "исправлял" и "подгонял" аппарат к работе. Когда же позднее такой аппарат изготовлялся из проволоки и другого материала, он всегда действовал. Как говорил Тесла, ни разу не случилось, чтобы подобное изобретение не соответствовало *природе, то есть не срабатывало в качестве физического прототипа.* **Его метод по сравнению с другими великими научными пророчествами совершенно уникален**.

- *Майкл Фарадей, например, как и Альберт Эйнштейн, в момент озарения испытывал кинестетическое предчувствие (давление и движение в области брюшины), причём с ним случалось нечто подобное психическому стрессу в момент возникновения идей.*
- *Дмитрию Менделееву, как известно, снилась периодическая система элементов, причём в трёх измерениях, окрашенная яркими, почти огненными красками, как это бывает во всех вещих снах.*

Однако такое происходит очень редко, лишь с некоторыми людьми и только в определённые моменты. А Тесла пребывал в подобном состоянии всю свою жизнь, десятилетиями упражнялся, чтобы постоянно поддерживать в себе духовную и творческую активность. Такую способность он приобрёл после той тяжёлой и странной болезни, которую едва пережил в детстве. Многие годы спустя он упорно тренировался в контроле над своими нервными путями не только в психологическом, но и физиологическом смысле. "Я верю в одного Бога, не описанного в религиях", - говорил он. В сущности, это бог философский - Логос, бог пифагорейский, единовременный творец и бесконечного, и абстрактного, и иноматериального, и внепространственного космического закона. Тесла был человеком, основная философия и аксиоматика которого вообще не принадлежали современному миру. Его, скорее, можно отнести к эпохе до Сократа, античной философии. Не случайно, что он рождён на Балканском полуострове, в южной части которого возникла античная цивилизация. Речь идёт об одинаковом геомагнитном информационном поле, или алгоритме, общем для эволюции невральных структур Пифагора, Платона, Зенона и Теслы.

Глава 3. НЕСТАНДАРТНЫЙ АНАЛИЗ ЧЕРЕЗ ПРИЗМУ ВЗГЛЯДОВ РОБИНСОНА

В 1961 г. появилась статья А. Робинсона «Нестандартный анализ» в Трудах Нидерландской академии наук. В статье намечены как основные положения нестандартного анализа, так и некоторые его приложения (например, к аналитической механике). В этой статье Робинсон, в частности, писал: “Наша главная цель – показать, что эти модели дают естественный подход к старой почтенной проблеме построения исчисления, включающего бесконечно большие и бесконечно малые количества. Как хорошо известно, использование бесконечно малых, настойчиво защищаемое Лейбницем и без колебании принимаемое Эйлером, было дезавуировано с появлением методов Кошн, поставивших математический анализ на твердую основу”.

Итак, до 1961 г. понятие бесконечно малой поятоянной величины, бесконечно малого числа, интерпретировалось как в лучшем случае нестрогое, а в худшем — бес-смысленное. Робинсон впервые обнаружил, что этому понятию можно придать точный математический смысл.

В течение последующих восьми лет вышли в свет три монографии, излагающие нестандартную теорию: в 1962 г.– книга У. Л. Дж. Люксембурга «Нестандартный анализ. Лекции о робинсоновой теории бесконечно малых и бесконечно больших чисел», в 1966 г.— книга самого А. Робинсона “Нестандартный анализ”, в 1969 г. — книга М. Маховера и Дж. Хиршфелда “Лекции о нестандартном анализе” (из 77 страниц этих “Лекций” действительной прямой отведено немногим болеее двух: «нестандартный анализ» понимается здесь в самом широком смысле).

Наибольший резонанс вызвала книга Робинсона. В девяти первых главах этой монографии содержалось как построение необходимого логико-математического аппарата, так и многочисленные приложения – к дифференциальному и интегральному исчислению, к общей топологии, к теории функций комплексного переменного, к теории групп Ли, к гидродинамике и теории упругости.

В 1966 г. появилась статья А.Р. Бернстейна и А. Робинсона, в которой впервые методами нестандартного анализа было получено решение проблемы инвариантных пространств для полиномиально компактных операторов. В очерке П.Р. Халмоша “Взгляд в гильбертово пространство” в качестве проблемы фигурирует поставленная ***Смитом К.Т.*** *задача о существовании инвариантного подпространства для таких операторов Т в гильбертовом пространстве* l^2*, для которых оператор* T^2 *компактен.* ***А.Р. Бернстейном и А. Робинсоном*** *методами нестандартного анализа было доказано, что любой полиномиально компактный оператор в гильбертовом пространстве имеет нетривиальное инвариантное замкнутое подпространство.*

Приложения нестандартного анализа в математике охватывают обширную область от топологии до теории дифференциальных уравнений, теории мер и вероятностей. Что касается внематематических приложений, то среди них мы встречаем даже приложения к математической экономике. Многообещающим выглядит использование нестандартного гильбертова пространства для построения квантовой механики. А в статистической механике становится возможным рассматривать системы из бесконечного числа частиц. Помимо применений к различным областям математики, исследования в области нестандартного анализа включают в себя и исследование самих нестандартных структур. В 1976 г. вышли сразу три книги по нестандартному анализу: “Элементарный анализ” и “Основания исчисления бесконечно малых” Г. Дж. Кейслера и “Введение в теорию бесконечно малых” К. Д. Стройана и В. А. Дж. Люксембурга. Быть может, наибольшую пользу нестандартые методы могут принести в области прикладной математики. В 1981 г. вышла книга Р. Лутца и М. Гозе “Нестандартный анализ: практическое руководство с приложениями”. В этой книге после изложения основных принципов нестандартного анализа рассматриваются вопросы теории возмущений.

В настоящее время нестандартный анализ завоёвывает всё большее признание. Состоялся ряд международных симпозиумов, специально посвященных нестандартному анализу и его приложениям. В течении последнего десятилетия нестандартный анализ (точнее, элементарный математический анализ, но основанный на нестандартном подходе) преподавался в ряде высших учебных заведений США.

Глава 4. БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Один из наиболее принципиальных моментов нестандартного анализа состоит в том, что бесконечно малые рассматриваются не как переменные величины (т. е. не как функции, стремящиеся к нулю, как учат современные учебники), а как величины постоянные. Такой подход хорошо согласуется как с интуицией естествоиспытателя, так и с реальной историей зарождения математического анализа. Что касается интуиции, то достаточно раскрыть любой учебник физики, чтобы натолкнуться на бесконечно малые приращения, бесконечно малые объемы и т.п. Все эти величины мыслятся, разумеется, не как переменные, а просто как очень маленькие, почти равные нулю. Было бы неправильно считать подобного рода интуицию присущей лишь авторам учебников физики. Вряд ли какой-то математик воспринимает (наглядно) элемент дуги ds иначе, чем "очень маленькую дугу". Любой математик, составляя соответствующее дифференциальное уравнение, скажет, что за бесконечно малое время dt точка прошла бесконечно малый путь dx, а количество радиоактивного вещества изменилось на бесконечно малую величину dN.

Что же касается истории математического анализа, то в наиболее явной форме излагаемый подход проявился у одного из основоположников этой науки — Лейбница. В мае 1984 г. исполнилось 300 лет с того дня, как символы dx и dy впервые появились на страницах математических публикаций, а именно в знаменитом мемуаре Лейбница "Новый метод...". Именно Лейбниц яснее других ощущал бесконечно малые величины постоянными (хотя и воображаемыми, идеальными) величинами особого рода, и именно Лейбниц сформулировал правила оперирования с бесконечно малыми в виде исчисления.

Какие положительные числа следует называть бесконечно малыми?

Первый ответ таков: положительное число ε называется бесконечно малым, если оно меньше всех положительных чисел. Однако бесконечно малых в этом смысле положительных чисел не бывает: ведь если число меньше всех положительных чисел и само положительно, оно должно быть меньше самого себя. Попытаемся исправить положение, потребовав, чтобы ε было меньше всех других положительных чисел, но больше нуля, т. е. чтобы ε было наименьшим в множестве положительных чисел. На числовой оси такое ε должно изобразиться самой левой точкой множества $(0, +\infty)$. К сожалению, числа ε с указанными свойствами тоже нет и не может быть: если ε положительно, то число $\varepsilon/2$ будет положительным числом, меньшим ε. (Согласно обычным свойствам неравенств для всякого $a > 0$ выполняются неравенства $0 < a/2 <$

а). Так что если мы не хотим отказываться от привычных нам свойств действительных чисел (например, от возможности разделить любое число на 2 или от возможности умножить любое неравенство на положительное число), но хотим иметь бесконечно малые числа, то приведенное определение бесконечной малости не годится.

Более изощренное определение бесконечной малости числа $\varepsilon > 0$, которое мы будем использовать в дальнейшем, таково: складываем число ε с самим собой, получая числа ε, $\varepsilon + \varepsilon$, $\varepsilon + \varepsilon + \varepsilon$, $\varepsilon + \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon$ и т. д., если все полученные числа окажутся меньше 1, то число ε и будет называться бесконечно малым. Другими словами, если ε бесконечно мало, то сколько раз ни откладывай отрезок длины ε вдоль отрезка длины 1, до конца не дойдешь – здесь очевидно не выполняется аксиома Архимеда, отсюда и название – неархимедов анализ. Наше требование к бесконечно малому ε можно переписать и в такой форме (поделив на ε): $1<1/\varepsilon$, $1+1<1/\varepsilon$, $1+1+1<1/\varepsilon$,…

Таким образом, если число число ε бесконечно мало, то число $1/\varepsilon$ бесконечно велико в том смысле, что оно больше любого из чисел 1, 1+1, 1+1+1, 1+1+1+1 и т. д. Так что если мы начнем измерять отрезок длиной $1/\varepsilon$ с помощью эталона длины (т.е. откладывая последовательно отрезки единичной длины), то процесса измерения никогда не закончим.

Из вышеизложенного следует, что существование бесконечно малых противоречит так называемой аксиоме Архимеда, которая утверждает, что для любых двух отрезков A и B можно отложить меньший из них (A) столько раз, чтобы в сумме получить отрезок, превосходящий по длине больший отрезок (B).

Приведенная формулировка касается отрезков; если считать (как это обычно делается), что длины отрезков являются числами, мы приходим к такой формулировке аксиомы Архимеда: для любых двух чисел a и b, для которых $0 < a < b$, одно из неравенств $a + a > b$, $a + a + a > b$, … обязательно выполнено. В дальнейшем, говоря об аксиоме Архимеда, мы будем иметь в виду именно эту формулировку. Из нее видно, что в множестве действительных чисел (где эта аксиома выполняется) бесконечно малых нет: чтобы убедиться в этом, достаточно положить $a=\varepsilon$, $b=1$. Мы увидим в дальнейшем, что на самом деле аксиома Архимеда равносильна утверждению об отсутствии бесконечно малых элементов, не равных нулю.

***Вывод** – если мы хотим рассматривать бесконечно малые, нужно расширить множество R действительных чисел до некоторого большего множества *R. Элементы этого нового множества будем называть **гипердействительными числами.** В нем аксиома Архимеда не выполняется и существуют бесконечно малые (в смысле последнего определения) числа — такие, что сколько их ни складывай с собой, сумма* *будет все время оставаться меньше 1. Подобно тому как обычный (или стандартный) математический анализ занимается изучением множества действительных чисел R, нестандартный анализ изучает множество гипердействительных чисел *R. Полученные при этом результаты используются для исследования свойств R. (Таким образом могут быть получены “нестандартные” доказательства свойств обыкновенных действительных чисел.)*

*Порядок на R архимедов, а на *R неархимедов: это значит, что в R аксиома Архимеда выполняется, а в *R не выполняется. По этой причине стандартный (обычный) анализ, изучающий R, называется еще архимедовым, а нестандартный анализ, изучающий *R, называют неархимедовым.*

Для построения нестандартного анализа необходимо расширить множество действительных чисел до более широкого множества ***гипердействительных чисел.*** *Но прежде поговорим о самих действительных числах и их происхождении.*

Глава 5. Немного о действителных числах

До сих пор мы предполагали известным понятие действительного числа. Понятие действительного числа имеет долгую историю, начавшуюся еще в древней Греции (о чем напоминает название “аксиома Архимеда”) и закончившуюся лишь в XIX веке. Самой первоначальной и основной числовой системой является, конечно, система натуральных чисел. Натуральных чисел, однако, оказывается мало: пытаясь решить уравнение 3 + x = 2 в натуральных числах, мы обнаруживаем, что оно не имеет решений и наше желание определить операцию вычитания оказывается неудовлетворенным. Поэтому мы расширяем множество натуральных чисел до множества целых чисел. В этой процедуре для нас сейчас важно следующее: каким образом мы определим сложение и умножение на целых числах? То, что 2 + 2 == 4, можно увидеть, сложив две кучи по два яблока в одну. Но почему мы считаем, что (-2)+(-2)=(-4)? Почему мы считаем, что (-1)(-1)=1?

Эти вопросы не так тривиальны, как может показаться. Найти правильный ответ будет легче, если сформулировать вопрос иначе: что плохого произойдет, если мы будем считать, например, что (-1)(-1)=(-1)? Ответ прост: в этом случае хорошо известные свойства сложения и умножения натуральных чисел (коммутативность, ассоциативность и др.) не будут выполняться для целых чисел. Можно показать, что обычное определение операций над отрицательными числами единственно возможное, если мы хотим сохранить привычные свойства операций сложения и умножения.

Тут следует остановиться: какие же именно свойства сложения и умножения мы хотим сохранить? Ведь если бы мы хотели сохранить все свойства, то введение отрицательных чисел было бы не только излишне, но и вредно: свойство “уравнение x+3=2 не имеет решений”, верное для натуральных чисел, становится неверным для целых! Если же мы ничего не хотим сохранить, то задача становится столь же легкой, сколь и пустой: можно определить операции с отрицательными числами как угодно.

Возвращаясь к истории развития понятия числа, мы видим, что введение отрицательных чисел не доставляет полного удовлетворения: уравнение 2x=3 по-прежнему не имеет решения. Это побуждает ввести рациональные (дробные) числа. Но и этого недостаточно: от рациональных чисел приходится перейти к действительным. В результате получается последовательность множеств $N\subset Z\subset Q\subset R$ *(натуральных, целых, рациональных и действительных чисел;* $A\subset B$ *означает, что всякий элемент множества A принадлежит множеству B. В этой последовательности каждое следующее множество включает в себя предыдущее, при этом имевшиеся в предыдущем операции продолжаются на следующее, более широкое, множество, сохраняя свои полезные свойства.*

Мы хотим продолжить эту последовательность еще на одни член, получив последовательность $N\subset Z\subset Q\subset R\subset {}^*R$*, где *R – множество гипердействительных чисел. Новый шаг расширения будет иметь много общего с предыдущими: мы продолжим на *R имеющиеся в R операции, сохранив их полезные свойства.*

Однако будут и 2 важных отличия.

***Во-первых**, если расширение (переход от R к *R) можно выполнить многими различными способами: можно построить существенно различные множества *R, ни одно из которых ничем не выделяется среди остальных. В то жо время, все предыдущие шаги нашего расширения числовой системы от N к R были в некотором смысле однозначны.*

*Во-вторых, есть различие в наших целях. Если прежде (двигаясь от N к R) мы строили новую числовую систему прежде всего для того, чтобы исследовать ее свойства и ее применения, то построенная система *R предназначается не столько для того, чтобы исследовать ее свойства, сколько для того, чтобы с ее помощью исследовать свойства R. Впрочем различие и не так велико: и раньше расширение числовой системы было одним из способов получения новых знаний о старых объектах. Кроме того, множество *R можно рассматривать, быть может, как соответствующее физической реальности в не меньшей (и даже в большей) степени, чем R.*

*Итак, необходимо расширить множество R действительных чисел до большего множества *R, содержащего бесконечно малые, сохранив при этом все полезные свойства R. Центральный вопрос состоит в том, какие именно свойства* *действительных чисел мы желаем сохранить. Ответим на этот вопрос не сразу, начав с наиболее простых свойств действительных чисел.*

Прежде всего, мы хотим, чтобы гипердействительные числа можно было складывать, умножать, вычитать и делить, чтобы эти операции обладали обычными свойствами, называемыми «аксиомами поля». Сформулируем их.

Среди гипердействительных чисел должны быть выделены числа 0 и 1; определены операции сложения, умножения взятия противоположного, а также операция взятия обратного. При этом должны выполняться такие свойства:

1) $a+b=b+a$
2) $a+(b+c)=(a+b)+c$
3) $a+0=a$
4) $a+(-a)=0$
5) $ab=ba$
6) $a(bc)=(ab)c$
7) $a*1=a$
8) $a(b+c)=ab+ac$
9) $a*(1/a)=1$ **при** $a<>0$.

Множество с операциями, обладающими этими свойствами, называется ***полем.*** *Требования (1-9) можно сформулировать так: *R должно быть полем.*

Кроме арифметических операций, зададим на гипердействительных числах порядок. Для любых двух различных гипердействительных чисел должно быть определено какое из них больше. При этои должны выполняться такие свойства:

10) **если** $a>b$, $b>c$, **то** $a>c$
11) **если** $a>b$, **то** $a+c>b+c$ **для любого** c
12) **если** $a>b$, $c>0$, **то** $ac>bc$
13) **если** $a>b$, $c<0$, **то** $ac<bc$

*Поле, в котором введен порядок с такими свойствами, называется упорядоченным полем. Требования (10-12) можно сформулировать так: *R должно быть упорядоченным полем.*

*Мы хотим, чтобы среди гипердействиетльных чисел были все действительные. При этом операции и порядок на R и на *R должны быть соглсованы. Это требование можно сформулировать так: упорядоченное поле *R должно быть расширением упорядоченного поля R.*

*Что же нового мы ожидаем от *R? Ответ однозначен - бесконечно малых.*

Определение. *Элемент ε >=0 упорядоченного поля называется бесконечно малым, если ε<1, ε+ε<1. ε+ε+ε<1 и т.д. Отрицательное ε называется бесконечно малым, если –ε бесконечно мало.*

Существование ненулевых бесконечно малх равносильно нарушению аксиомы Архимеда для гипердействительных чисел. Упорядоченные поля, в которых справедлива аксиома Архимеда и нет бесконечно малых, называют ***архимедово упорядоченными****. Те поля, в которых аксиома Архимеда невернаи есть бесконечно малые, называют неархимедово упорядоченными (неархимедовым).*

В этих терминах можно сформулировать так: система гипердействительных чисел должна быть неархимедово упорядоченным полем, являющимся расширением упорядоченного поля действительных чисел.

Глава 6. ГИПЕРДЕЙСТВИТЕЛЬНАЯ ПРЯМАЯ

Предположим, что неархимедово расширение упорядоченного поля действительных чисел существует. Исследуем его свойства.

*Пусть *R – неархимедово расширение R. Его элементы называются гипердействительными числами. Среди них содержатся и все действительные числа. Для отличия тех гипердействительных чисел, которые не являются действительными (элементы R) назовем их стандартными, а остальнгые гипердействительные (элементы *R\R) – нестандартными. Тогда бесконечно малые являются нестандартными, так как среди действительных чисел бесконечно малых нет. Бесконечно малые положительные числа меньше всех стандартных положительных чисел. Аналогичным образом отрицательные бесконечно малые числа больше всех стандартных отрицательных чисел. Таким образом, если пытаться изобразить бесконечно малые числа на числовой прямой, то пришлось бы втиснуть их настолько близко к нулю, чтобы все положительные стандартные числа оказались справа, а отрицательные – слева. Указанное свойство может служить определением бесконечной малости: если число ε>0 меньше всех стандартных положительных чисел, то оно бесконечно мало.*

Определение. *Гипердействительное число A>0 называется бесконечно большим, если A>1, A>1+1, A > 1+1+1, ….(Отрицательное число B называется бесконечно большим, если таков его модуль)*

Положительное бесконечно большое число A больше любого стандартного.

Аналогичным образом всякое отрицательное бесконечно большое гипердействительное число меньше любого стандартного.

Определение. *Гипердействительные числа, не являющиеся бесконечно большими, будут называться конечными.*

Утверждение. *Если s – конечное гипердействительное число, то найдутся стандратное v и бесконечно малое ε, для которых s=v+ε. Такое представление единственно.*

Определение. *Стандартной частью st(x) конечного гипердействительного числа x называется такое стандартное v, что x=v+ε для бесконечно малого ε.*

Гипердействительная прямая разбивается на 3 части (слева направо): отрицательные бесконечно большие, конечные, положительные бесконечно большие. Рассмотрим «конечную часть» гипердейсьвительной прямой. Рядом с каждым стандартным действительным числом a расположено множество бесконечно близких к нему гипердействительных чисел, для которых a является стандратной частью. Это множество называют монадой стандартного числа a. Множество конечных гипердействительных чисел разбито на непересекающиеся классы – монады, соответствующие стандартным действительным.

Сумма и разность бесконечно малых бесконечно малы, произведение бесконечно малого и конечного гипердействительных чисел бесконечно мало.

Определение. *Два гипердействительных числа называются бесконечно близкими, если их разность бесконечно мала.*

*Из приведенных выше свойств бесконечно малых следует, что отношение бесконечной близости есть отношение эквивалентности. Это означает, что отношение бесконечно близости рефлексивно (каждое x бесконечно близко самому себе), симметрично (если x бесконено близко к y, то y бесконечно близко к x) и транзитивно (если x бесконено близко к y, а y бесконечно близко к z, то x бесконечно близко к z). Всякое отношение эквивалентности разбивает множество, на котором оно определено на непересекающиеся классы, причем любые два элемента одного класса эквивалентны, а любые два элемента разных классов не эквивалентны. В частности, наше отношение разбивает *R на непересекающиеся классы, причем элементы одного класса бесконечно* *близки друг к другу, а элементы разных классов — нет. Классы, содержащие стандартные действительные числа, представляют собой упоминавшиеся выше «монады».*

Глава 7. ПРИМЕР НЕАРХИМЕДОВОЙ ЧИСЛОВОЙ СИСТЕМЫ

До сих пор речь шла о гипердействительной прямой (а точнее, любом неархимедовом расширении упорядоченного поля действительных чисел). Возникает вопрос – существует ли хотя бы одно такое распширение. Построим такое расширение.

Основная идея этого построения может быть описана в одной фразе так: у нас нет объектов, но есть имена для них; так объявим же имена объектами! Эта (часто применяемая в математической логике) идея конкретизируется в нашем случае следующим образом.

Мы знаем, что в нашем (пока еще не построенном и неизвестно существующем ли) расширении должно быть хотя бы одно бесконечно малое положительное гипердействительное число. Обозначим его через ε. Поскольку гипердействительные числа можно умножать друг на друга (и, в частности, на действительные числа), то наряду с ε в нашем расширении будут и числа 2ε, 0,5ε и вообще все числа вида aε, где a – произвольное стандартное действительное число. Более того, число ε можно умножать и на себя, поэтому в нашем расширении будут иметься ε2, ε3, 2ε2, 3ε2+2ε+1, ... и вообще все гипердействительные числа вида P(ε), где P – многочлен со стандартными действительными коэффициентами.

Множество чисел такого вида замкнуто относительно сложения, вычитания и умножения. Это значит, что, складывая, вычитая или перемножая два числа такого вида, мы вновь получим число такого же вида. Но для гипердействительных чисел определено еще и деление. Поэтому в расширении будут и числа вида P(ε)/Q(ε), где P и Q – многочлены со стандартными действительными коэффициентами. После этого мы получаем множество гипердействптельных чисел, замкнутое относительно всех арифметических операций: складывая, вычитая, умножая или деля две дроби указанного вида по обычным правилам, получаем дробь такого же вида.

Таким образом, не имея пока искомого расширения, мы уже смогли назвать некоторые его элементы, дать им имена. Этими именами являются записи вида P(ε)/Q(ε), где ε – некоторый символ. Более того, мы можем судить и о том, какая из двух записей обозначает большее число. В самом деле, достаточно уметь определять, обозначает ли данная запись положительное, отрицательное или нулевое число (поскольку a > b тогда и только тогда, когда a-b>0). Знак дроби можно определить по знакам числителя и знаменателя, следовательно достаточно уметь определять знак P(ε), где P –

многочлен. Это делается так. Легко видеть, что знак величины $a0+a1\varepsilon+\dots$ совпадает со знаком $a0$, если $a0<>0$. В самом деле, добавка $a1\varepsilon+\dots$ бесконечно мала, а складывая положительное (отрицательное) число с бесконечно малым, мы получаем положительное (соответственно отрицательное) число. Возможен, однако, случай $a0=0$. Будем считать для определенности, что ε – положительное бесконечно малое. Вынесем из нашего многочлена ε в наибольшей возможной степени, т. е. представим его в виде $\varepsilon k(ak+ak+1\varepsilon+\dots)$, где ak уже отлично от 0. Знак всего выражения определяется знаком выражения в скобках (при умножении на положительное число знак не меняется), а знак выражения в скобках (как мы уже видели) определяется знаком числа ak.. По существу, мы уже построили искомое неархимедово расширение. Нужно лишь посмотреть на наши рассуждения с другой позиции. До сих пор выражения $P(\varepsilon)/Q(\varepsilon)$ рассматривались нами как имена «настоящих» гипердействительных чисел (взятых неизвестно откуда). А теперь они станут самими гипердействительными числами. Рассмотрим формальные выражения вида $P(\varepsilon)/Q(\varepsilon)$, где ε – некоторый символ, P, Q – многочлены с действительными коэффициентами, причем $Q<>0$. Провозглашая, что объектами, а в данном случае гипердействительными числами, мы объявим имена, а в данном случае выражения, или записи вида $P(\varepsilon)/Q(\varepsilon)$, мы были не совсем точны. Дело в том, что, очевидно, две различные записи могут выражать одно и то же число (иными словами, быть двумя различными именами одного и того же числа): так, например, естественно считать, что запись $(\varepsilon2\text{-}1)/(\varepsilon\text{-}1)$ выражает то же самое число, что и $(\varepsilon+1)/1$. Будем называть два выражения $P(\varepsilon)/Q(\varepsilon)$ и $R(\varepsilon)/S(\varepsilon)$ эквивалентными, если $P(\varepsilon)*S(\varepsilon)=R(\varepsilon)*Q(\varepsilon)$ (равенство понимается как равенство многочленов, т. е. как равенство коэффициентов при одинаковых степенях). Легко проверить, что это определение действительно задает отношение эквивалентности, разбивающее все выражения вида $P(\varepsilon)/Q(\varepsilon)$ на классы. Эти классы мы и будем называть гипердействительными числами. Сложение, вычитание, умножение и деление гипер-действительных чисел определяются по обычным правилам. Так, например, если α – класс, содержащий P/Q, а β – класс, содержащий R/S, то их суммой называется класс, содержащий $(PS+RQ)/SQ$, а произведением — класс, содержащий PR/QS. Легко проверить, что это определение корректно, т. е. не зависит от выбора элементов P/Q в классе α и R/S в классе β (в результате получаются разные представители одного и того же класса). Аналогичным образом можно определить взятие обратного и противоположного, нуль и единицу. Нетрудно проверить, что все аксиомы поля при этом будут выполнены. Изложенная конструкция хорошо известна в алгебре: построенное поле называется полем рациональных функций с коэффициентами в R и обозначается $R(\varepsilon)$. Осталось определить только порядок, указав, как выбрать из двух различных гипердействительных чисел (т. е. из двух различных классов эквивалентных дробей) большее. Для этого нужно вычесть одно число из другого и определить, будет ли разность (отличная от нуля, поскольку числа различны) положительной или от-

рицательной. Чтобы определить, будет ли отличное от нуля число α положительным или отрицательным, возьмем его представитель P/Q. Здесь P, Q отличны от 0 (Q отлично от нуля по определению, P – потому что, по нашему предположению, разность не равна 0). Вынесем в числителе и в знаменателе ε в наибольшей возможной степени:

P=εk(ak+ak+1ε+...), Q=εl(bl+bl+1ε+...), ak, bl отличны от 0.

Число α будет положительным, если ak, bl имеют одинаковые знаки, и отрицательным, если они имеют разные знаки.

Построенное упорядоченное поле R(ε) можно рассматривать как расширение поля R: достаточно отождествить действительное число x с классом эквивалентных дробей, содержащим дробь x/1. Осталось лишь показать, что аксиома Архимеда не выполняется, предъявив бесконечно малый элемент. Этим элементом будет, конечно, ε (точнее, класс, содержащий ε/1). В самом деле, $\varepsilon+\varepsilon+$ ... $+\varepsilon <1$, так как разность 1-nε положительна (знак определяется свободным членном, а 1 > 0).

Искомое расширение построено.

Глава 8. НОВЫЕ ТРЕБОВАНИЯ К ГИПЕРДЕЙСТВИТЕЛЬНЫМ ЧИСЛАМ И ОСНОВНАЯ ГИПОТЕЗА

*Мы построили неархимедово расширение R(ε) поля действительных чисел. Новым требованием к гипердействительным числам яляется следующее. Нужно уметь вычислять «значения» стандартных функций (заданных первоначально как функции с действительными аргументами и значениями) на гипердействительных аргументах. Другими словами, для каждой функции f: R$\to$R необходимо иметь ее «гипердействпительный аналог» *f: R$\to$R. При этом, значения *f на стандартных числах должны совпадать с соответствующими значениями функции f. Другими словами, *f должно быть продолжением f. Такие аналоги были у нас для операций сложения, вычитания, умножения и деления. Но этого мало: нужны такие аналоги и для других функций. Итак, для каждой стандартной функции f (функции с действительными аргументами и значениями) нам нужно иметь ее гипердействительное продолжение *f. Если от *f ничего не требовать, то это тривиально: можно считать, что во всех действительных точках *f принимает те же значения, что и f, а в нестандартных точках *f имеет какие угодно значения (например, нули). Ясно, однако, что от такого продолжения никакого толку нет. Нужно выделить некоторый класс свойств — класс тех свойств, которые мы хотим сохранить. Правильный выбор этого класса имеет решающее значение для успеха нашего построения системы гипердействительных чисел. Если этот класс будет слишком узок, то от наличия продолжений *f не будет пользы. Если же, напротив, он будет слишком широк, то сама возможность построения* *системы гипердействительных чисел и определения продолжений окажется под угрозой. Наша главная задача – описать, какие свойства стандартных функций мы хотим сохранить при переходе от действительных чисел к гипердействительным. Есть две возможности это сделать.* ***Первая возможность состоит в применении методов математической логики.*** *Можно сказать, что при переходе от действительных чисел к гипердействительным сохраняются все свойства, которые можно выразить на «языке первого порядка». Вторая возможность позволяет обойтись более «кустарными» средствами и не прибегать к сведениям из логики. Конечно, при этом мы будем испытывать некоторые неудобства, использовать обходные маневры и т. п., но зато не потребуется знакомство с математической логикой. Мы предполагаем, что помимо поля R действительных чисел имеется более широкое упорядоченное поле *R гипердействительных чисел, включающее R как подмножество (еще раз подчеркнем, что существование *R с нужными свойствами является пока только гипотезой, а не доказанным фактом). Пусть для каждой функции f с действительными аргументами имеется ее естественное распространение, ее «гипердействительный аналог» — функция с гипердействительными аргументами и значениями. При этом функция f может быть функцией не только одного действительного аргумента, но и двух, трех и т. д.; функция *f, разумеется, должна иметь то же самое число аргументов. Для простоты мы пока не будем рассматривать частичных функций и будем считать, что f (соответственно *f) определена при всех действительных (соответственно гипердействительных) аргументах. Сформулируем теперь наше требование («аналоги обладают теми же свойствами, что и исходные функции») более точно. Будем рассматривать системы уравнений вида t=s и неравенств вида t≠s, левые и правые части которых содержат какие-то действительные функции действительных аргументов, действительные константы и переменные — что-нибудь вроде*

sin(cos(x))=y+exp(z), z≠y-2x, [z]=y

*Эта система содержит переменные x, y, z, одноместные функции sin,cos,exp [ ] (целая часть), двуместные функции (сложение, вычитание, умножение) и константу 2 (константы для единообразия мы будем считать функциями нуля аргументов). Все входящие в систему функции имеют по нашему предположению гипердействительные аналоги. Обозначим их *sin, *cos, *exp, *[ ], *+, *–, и напишем систему*

**sin(*cos(x))=y*+*exp(z), z≠y*–2*x, *[z]=y*

которую естественно назвать «гипердействительным аналогом исходной».

В качестве возможных значении переменных этой системы могут фигурировать любые гипердействительные числа. Тем самым приобретает смысл вопрос о наличии или *отсутствии гипердействительных решений этой системы. Поскольку мы предполагаем, что входящие в нее функции являются продолжениями соответствующих функций действительного аргумента, то всякое (действительное) решение исходной системы будет одновременно решением новой системы. Таким образом, если исходная система имеет решения, то и ее гипердействительный аналог имеет решения. Мы потребуем и обратного: всякая система уравнений и неравенств, гипердействительный аналог которой имеет (гипердействительные) решения, должна иметь действительные решения.*

Введем понятие терма*. Выберем счетный набор символов, элементы которого будем называть переменными. Будем называть термом любую переменную, любое действительное число, а также любое выражение вида f(t1, ..., tn), где f – функция n действительных аргументов, а t1, ..., tn – построенные ранее термы.*

Системой (точнее, системой уравнений и неравенств) назовем конечный набор записей вида t=s или t≠s, где t, s – термы. Определим теперь понятие решения системы. Еслп в терм подставить действительные числа вместо переменных, то он приобретет некоторое действительное значение. Решение системы – это такой набор значений переменных, при котором левая и правая части любою равенства I t=s, входящего в систему, приобретают одно и то же значение, а левая и правая части любого неравенства t≠s, входящего в систему,— разные.

*По нашему предположению всякая функция с действительными аргументами н значениями имеет гппердействительный аналог («естественное продолжение»). Понятие гипердействительного аналога легко распространяется на термы — чтобы получить аналог терма t, надо просто заменить все входящие в него функции на их гипердействительпые аналоги. Проделав эту операцию со всеми термами, входящими в какую-то систему S, мы получим систему *S, которую естественно также назвать гипердействительным аналогом системы S. Поскольку в нее входят функции с гипердействительными аргументами и значениями, вместо переменных можно подставлять произвольные гипердействительные числа. Гппердейст-вительным решением системы *S назовем такой набор гипердействительпых значений переменных, при которых выполнены все входящие в нее уравнения и неравенства. Теперь можно сформулировать наше требование к системе гипердействительных чисел и к гипердействительным аналогам следующим образом.*

*Пусть S — произвольная система уравнений и неравенств, *S – ее гипердействительный аналог. Если *S имеет (гипердействительные} решения, то S должна иметь действительные решения.*

*Возможность построения неархимедова упорядоченного расширения *R поля R и таких гипердействительных аналогов *f для всех действительных функций f, которые бы удовлетворяли сформулированному требованию, остается пока всего, лишь гипотезой. (Мы будем называть эту гипотезу Основной гипотезой.)*

Глава 9. СЛЕДСТВИЯ ОСНОВНОЙ ГИПОТЕЗЫ

Приведем несколько примеров, показывающих, какие следствия можно вывести из сформулированной Основной гипотезы. Оказывается, что несмотря на то, что сформулированное нами требование одновременной разрешимости систем уравнений и неравенств кажется весьма частным, оно имеет самые разнообразные следствия и достаточно для обоснований значительной части рассуждений с ги-пердействительными числами.

Пример 1. *Пусть f – функция одного действительного аргумента, принимающая только значения 0 и 1. Докажем, что функция *f принимает только значения 0 и 1. Для этого рассмотрим систему*

$f(x)\neq 0, f(x)\neq 1,$

которая по предположению не имеет действительных решений. Следовательно, не имеет (гипердействительных) решений и ее аналог — система

$*f(x)\neq 0, *f(x)\neq 1,$

Пример 2. *Пусть f и g – функции одного действительного аргумента, причем множества их нулей совпадают. (Множество нулей функции – множество тех значений аргумента, при которых значение функции равно 0) В этом случае и множества гипердействительных чисел, являющиеся множествами нулей функций *f и *g, совпадают. Докажем это. В самом деле, каждая из систем*

(1) $f(x)=0, g(x)\neq 0,$

(2) $g(x)=0, f(x)\neq 0,$

*не имеет действительных решений. Следовательно, не имеют гиигердействительных решений и их аналоги. Потому любой гипердействительный нуль функции *f обя-зан (чтобы не быть решением аналога системы (1)) быть нулем и для *g и наоборот.*

Этот пример позволяет определить гипердействительные аналоги не только для функций, но и для множеств.

Пусть A – произвольное множество действительных чисел. Рассмотрим произвольную функцию f, для которой A – множество нулей. (Такая есть: достаточно положить, *например, $f(x)=0$ при $x \in A$ и $f(x)=1$ при $x \notin A$). Рассмотрим теперь гипердействительный аналог *f функции f и множество *A его (гипердействительных) нулей. Как мы видим, множество *A не зависит от выбора функции f. Его мы и назовем гипердействительным аналогом множества A.*

Пример 3. *Мы можем теперь разрешить включать системы наряду с равенствами $t=s$ и неравенствами $t \neq s$ и записи вида $s \in A$, где s представляет собой терм, а A – множество действительных чисел. При этом решениями будут такие наборы (действительных или гипердействительных) значений переменных, при которых выполнены все равенства и неравенства, а значение s принадлежит множеству A. Гипердействительным аналогом $s \in A$ будет $*s \in *A$, где *s – гипердей-ствительный аналог терма s, а *A — аналог множества A (в указанном смысле). Таким образом, у всякой системы равенств, неравенств и включений (т. е. записей вида $s \in A$) появляется гипердействительный аналог. Для таких систем остается в силе свойство одновременной разрешимости: если гипердействительный аналог системы имеет (гипердействительные) решения, то исходная система имеет (действительные) решения. Чтобы увидеть это, достаточно заменить $s \in A$ на $a(s)=0$, где a – функция с действительными аргументами и значениями, множеством нулей которой является A. Аналогичным образом можно добавлять в систему и утверждения вида $s \notin A$ (что заменяется на $a(s) \neq 0$).*

Пример 4. *Пусть A – пустое множество. Докажем, что *A – пустое множество.*

В самом деле, система

$x \in A$

*не имеет действительных решений, поэтому и система $x \in *A$ не имеет (гипердействительных) решений. Рассмотрев систему $x \notin A$, получаем аналогичным образом, что если A содержит все действительные числа, то *A содержит все гипердействительные числа. Таким образом, гипердействительным аналогом множества R будет множество *R, так что наши обозначения согласованы.*

*Вдальнейшем, вместо того чтобы говорить о системе S и ее действительных решениях, а также о системе *S и ее гипердействительных решениях, будем говорить о действительных и гипердействительных решениях системы S (говоря о гипердойствительных решениях системы S, мы на самом деле будем иметь в виду гипердействительные решения системы *S).*

Пример 5. *Если $A=B \cap C$, то $*A=*B \cap *C$. В самом деле, каждая из систем*

$x \in B$, $x \in C$, $x \notin A$;

$x \in A$, $x \notin B$;

$x \in A$, $x \notin C$.

не имеет действительных, и, следовательно, гипердействительных решений. (Точнее, следовало бы говорить об аналогах этих систем) Отсюда получаем, что $*B \cap *C \subset *A$ (первая система), $*A \subset *C$ (вторая) и $*A \subset *C$ (третья), откуда вытекает, что $*A \subset *B \cap *C$.

*Наши требования к системе гипердействительных чисел состояли из двух частей. Во-первых, *R должно быть упорядоченным неархимедовым полем, расширяющим R. Во-вторых, должны существовать аналоги для всех действительных функций, удовлетворяющие требованию одновременной разрешимости систем уравнений. Эти требования оказываются избыточными:*

*тот факт, что гипердействительные аналоги сложения, умножения и т. п. превращают *R в поле, можно вывести из требования одновременной разрешимости систем уравнений.*

Глава 10. ПОСТРОЕНИЕ СИСТЕМЫ ГИПЕРДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Рассмотрим вопрос о существовании гипердействительных чисел. Точнее этот вопрос следует сформулировать так: можно ли построить расширение множества действительных чисел, для которого выполнялась бы Основная гипотеза. Основная гипотеза требует, чтобы:

(1) имелось некоторое множество R, для которого $R \subset *R$;

(2) для каждой функции f: $Rn \to R$ имелась некоторая функция $*f$: $*Rn \to *R$ являющаяся продолжением исходной;

(3) любая система уравнений и неравенств, гипердействительный аналог который имеет (гипердействительные) решения, имела действительные решения;

*(4) *R содержало бесконечно малые элементы, отличные от нуля.*

Покажем, каким образом этим требованиям можно удовлетворить. Рассмотрим один из возможных вариантов перехода от Q (множества рациональных чисел) к R (множеству действительных чисел). Рассматриваются всевозможные фундаментальные последовательности рациональных чисел, т. е. такие последовательности, что для любого $\varepsilon > 0$ существует отрезок длины ε, содержащий все члены последовательности, кроме конечного числа. Две такие последовательности xn и yn называют эквивалентными, если xn–yn стремится к 0 при $n \to \infty$. Это отношение *эквивалентности разбивает фундаментальные последовательности на классы, которые и называются действительными числами.*

Мы достигнем цели, если от последовательностей перейдем к классам последовательностей, считая, что две последовательности $x0,x1,x2,\ldots$. и $y0,y1,y2,\ldots$ задают одно и то же гипердействительное число, если $xn=yn$ "для большинства натуральных чисел n".

Для наглядности будем представлять себе, что проводится голосование по вопросу "считать ли последовательности xn и yn совпадающими". В нем голосующими являются натуральные числа, причем число n голосует "за", если

$xn = yn$, и "против", если $xn \neq yn$. Будем считать последовательности xnи yn совпадающими, если большинство натуральных чисел голосуют за это. Нужно объяснить лишь, какова система подсчета голосов, т. е. какие множества натуральных чисел мы считаем "большими" (содержащими "большинство" натуральных чисел), а какие "малыми" (содержащими "меньшинство" натуральных чисел). Перечислим те свойства, которым должна удовлетворять система подсчета голосов, т. с. деление множеств натуральных чисел на большие и малые.

1. Любое множество натуральных чисел является либо большим, либо малым. Ни одно множество не является большим и малым одновременно. (Голосование должно всегда давать ответ.)

2. Множество всех натуральных чисел большое, пустое множество малое. (Предложение, за которое голосуют все, принимается.)

3. Дополнение (до N) любого малого множества является большим, дополнение любого большого множества – малым. (Из двух противоположных законопроектов получает большинство голосов ровно одни.)

4. Любое подмножество малого множества является малым, любое надмножество большого множества – большим. (Утратив часть голосов, отвергнутый законопроект не может стать принятым.)

5. Объединение двух малых множеств является малым, пересечение двух больших множеств является большим. (Если каждая из двух групп голосующих не образует большинства, то они и вместе не образуют большинства ("невозможность коалиции"); если каждая из групп составляет большинство, то голосующие, входящие одновременно в обе группы, уже составляют большинство.)

Эти требования весьма сильны. Чтобы понять это, рассмотрим случай конечного множества голосующих (получающийся заменой N на некоторое конечное множество

M). Можно ли тогда удовлетворить этим требованиям? Один способ почти очевиден. Выберем одного из "голосующих" $m \in M$ и назовем большими все множества, содержащие m, а малыми – все множества, не содержащие m ("диктатура" m). При таком определении легко проверить все свойства 1–5. Оказывается, что этим исчерпываются все возможности удовлетворить требованиям 1–5 для случая конечного множества M. В самом деле, , пусть имеется разбиение всех множеств на большие и малые, удовлетворяющее требованиям 1–5. Рассмотрим тогда все большие множества и выберем из них множество M0, содержащее наименьшее возможное число элементов (среди больших множеств). Множество M0 непусто. Если оно содержит ровно один элемент m, то в силу свойства 4 все множества, содержащие m, будут большими, а в силу свойства 3 все множества, не содержащие m, будут малыми. Осталось показать, что M0 не может содержать более одного элемента. В самом деле, в этом случае его можно было бы разбить на две непустые непересекающиеся части M1 и M2. Эти части должны быть малыми (так как содержат меньше элементов, чем M0), а их объединение M0 является большим, что противоречит требованию 5.

Оказывается, однако, что при счетном числе голосующих возможны системы голосования, удовлетворяющие требованиям 1–5 и не сводящиеся к упомянутому тривиальному случаю. Другими словами, можно так разбить все подмножества натурального ряда на большие и малые, чтобы выполнялись свойства 1–5 и любое одноэлементное множество было малым. Тогда (в силу свойства 5) и любое конечное множество будет малым, а (в силу свойства 3) всякое множество с конечным дополнением (до N) – большим. Таким образом, к требованиям 1–5 можно без противоречия добавить и такое:

6. Всякое конечное множество является малым, всякое множество с конечным

дополнением — большим. (При голосовании мнение конечного числа голосующих несущественно.)

Разбиение всех подмножеств натурального ряда на большие и малые, удовлетворяющее требованиям 1–6, называется нетривиальным ультрафильтром на множестве натуральных чисел.

Покажем теперь, что такое разбиение позволяет построить систему гипердействительных чисел, удовлетворяющую требованиям Основной гипотезы. Итак, пусть фиксировано разбиение, удовлетворяющее требованиям 1–6. Назовем две последовательности xn и yn эквивалентными, если множество тех n, при которых xn =yn является большим. В силу требования 2 всякая последовательность эквивалентна самой себе.

Мы видим, что введенное отношение рефлексивно, симметрично (это очевидно из определения) и транзитивно и, следовательно, разбивает все последовательности действительных чисел на классы эквивалентности, т. е. такие классы, что любые две последовательности одного класса эквивалентны, а любые две последовательности из разных классов – нет. Эти классы мы и назовем гипердействительными числами. Что еще нам нужно? Нужно, чтобы множество действительных чисел было подмножеством множества гипердействительных. Нужно уметь для каждой функции с действительными аргументами и значениями строить ее гипердействительный аналог. Нужно проверить, что любая система уравнений и неравенств, гипердействительный аналог которой имеет гипердействительные решения, имеет действительные решения. И, наконец, нужно убедиться, что среди гипердействительных чисел (рассматриваемых как упорядоченное поле) существуют бесконечно малые, отличные от нуля.

*Чтобы сделать R подмножеством *R, отождествим каждое действительное число x с последовательностью x, x, x, ..., точнее, с содержащим ее классом. При этом разным действительным числам соответствуют разные классы: x,x,x ... не эквивалентно y,y,y ... (множество тех n, при которых n-е члены совпадают, пусто и, следовательно, является малым).*

*Пусть f: R→R – функция с действительными аргументами и значениями. Определим ее гипердействительный аналог *f: *R→ *R. Пусть x – произвольное гипердействительное число, т.е. класс эквивалентных последовательностей действительных чисел. Рассмотрим произвольную последовательность x0, x1, x2,... из этого класса и применим f ко всем ее членам. Класс, содержащий полученную последоваетльность f(x0), f(x1), f(x2), ... и будем считать значением f на x. Полученный класс не зависит от выбора последовательности x0, x1, x2,... в классе x (определение корректно).*

*Аналогично определяются и гипердействительные аналоги для функций нескольких аргументов. Пусть, например, f – функция двух действительных аргументов с действительными значениями. Определим ее гипердействительный аналог *f. Чтобы применить *f к двум гипердействительным числам x и y, возьмем последовательности x0, x1, x2,... и y0, y1, y2,... , им принадлежащие, и в качестве *f(x, y) рассмотрим класс последовательности f(x0,y0), f(x1,y1), f(x2,y2),... Определение корректно.*

Нужно проверить, что построенное гипердействительные аналоги будут продолжениями исходных функций с действительными аргументами и значениями. Это очевидно следует из определений. Проверим теперь, что всякая система уравнений и неравенств, имеющая гипердействительные решения, имеет и действительные решения. Пусть, например, система

$f(g(x,y),z)=z$, $h(x)\neq h(y)$

имеет гипердействительные решения x, y, z. Рассмотрим последовательности $x0,x1,x2,\ldots$; $y0,y1,y2,\ldots$; $z0,z1,z2,\ldots$, принадлежащие соответствующим классам эквивалентности. Тогда $g(x0,y0)$, $g(x1,y1),\ldots$ принадлежит классу $g(x,y)$, а $f(g(x0,y0),z0)$, $f(g(x1,y1),z1),\ldots$ – классу $f(g(x,y),z)$. Поскольку x,y,z по предположению являются решения-ми системы, то $f(g(xn,yn),zn)=zn$ для большинства n. Поскольку $h(x)\neq h(y)$, последовательности $h(x0),h(x1),\ldots$ и $h(y0),h(y1),\ldots$ не эквивалентны и множество тех n, при котором $h(xn)=h(yn)$ малое. Тогда множество тех n, при котором $h(xn)\neq h(yn)$ является большим. Так как пересечение двух больших множеств является большим, то множество тех n, при котором

$f(g(xn,yn),zn)=zn$, $h(xn)\neq h(yn)$

является большим. Значит, оно непусто. Таким образом, система имеет и действительные решения.

Осталось проверить, что среди гипердействительных чисел существуют бесконечно малые, отличные от нуля. Положительным бесконечно малым гипердействительным числом будет, например, класс последовательности 1, 1/2, 1/3, .,. (или любой другой последовательности положительных действительных чисел, сходящейся к 0). Нам нужно проверить, что это гипердействительное число (обозначим его через ε) положительно, но меньше любого стандартного положительного числа. Чтобы доказать это, мы должны вспомнить, как определяется порядок на множестве гипердействительных чисел. Он определяется в соответствии с общей схемой построения гипердействительного аналога для любого отношения на множестве действительных чисел. Нужно взять функцию f двух действительных аргументов, для которой свойства $f(x,y)=0$ и $x<y$ равносильны, и рассмотреть ее гипердействительный аналог $*f$. Гипердействительное число x называется меньшим гипердействительного числа y, если $*f(x,y)=0$. Посмотрим, что дает нам эта конструкция для построенной описанным способом системы гипердействительных чисел. Если x – класс последовательности $x0,x1,x2,\ldots$, а y – класс последовательности $y0,y1,y2,\ldots$, то $*f(x,y)$ есть класс последовательности $f(x0,y0)$, $f(x1,y1)$, $f(x2,y2)$, … Равенство этого класса нулю (т. е. классу последовательности 0, 0, 0, ...) означает, что $f(xn,yn)=0$ для большинства n, т. е. что $xn<yn$ для большинства n. Таким образом, чтобы выяснить, верно ли $x<y$ для гипердействительных чисел x и y, нужно взять последовательности $x0,x1,x2,\ldots$, и $y0,y1,y2,\ldots$ в классах x и y и выяснить, является ли множество тех n, при которых $xn<yn$ большим.

Нам нужно было проверить, что $0<\varepsilon$ и что $\varepsilon<p$ для любого стандартного положительного p (ε —класс последовательности 1, 1/2, 1/3, ...). Это просто:

$0<\varepsilon$, так как $0<1/n$ при всех n (а множество N большое), $\varepsilon<p$, так как $1/n<p$ для всех натуральных n, кроме конечного числа, а всякое множество с конечным дополнением малое (свойство 6 “системы подсчета голосов”). Отметим, что здесь мы впервые воспользовались свойством 6, до сих пор все наши рассуждения были справедливы и в случае “диктатуры” (когда большими считаются те и только те множества, которые содержат некоторое натуральное число N). В этом случае две последовательности эквивалентны, если совпадают их N-е члены, и все гипердействительные числа стандартны (класс последовательности $x0,x1,x2,\ldots$ совпадает со стандартным числом xN).

Глава 11. Наивные основы инфинитезимальных методов

Долгие годы несправедливой борьбы с актуальными бесконечно большими и бесконечно малыми величинами не прошли бесследно, породив обычные в таких случаях негативные последствия, в частности, массу предрассудков по отношению к понятиям и конструкциям, связанным с инфинитезималями. Один из них весьма широко распространен и состоит во мнении о сложности овладения аппаратом нестандартного анализа. При этом подчеркивается, что последний опирается на продвинутые разделы современной формализованной теории множеств и математической логики. На самом же деле наличие упомянутой связи, являясь безусловным и неоспоримым фактом, ни в коей мере не затрудняет ни понимания, ни методов работы с инфинитезималями. Цель текущей главы — обосновать высказанное положение с помощью изложения методологии нестандартного анализа на уровне строгости, принятом в нынешней системе математического образования, базирующемся на представлениях наивной теоретико-множественной установки, восходящей к Г. Кантору. Помимо разъяснения смысла концепций нестандартной теории множеств и принимаемых в ней принципов переноса, идеализации и стандартизации, определенное место мы уделяем проведению параллелей излагаемых достаточно свежих представлений о простейших объектах математического анализа с подходами классиков. Темсамым нам хотелось подтвердить преемственность в развитии идей дифференциального и интегрального исчисления, по-новому освещаемую нестандартным анализом.

11.1 Понятие множества в нестандартном анализе .

В этом параграфе мы приведем фрагмент обоснования нестандартных методов, близкий по уровню строгости к принятому при знакомстве с началами математического анализа. Нынешние курсы математического анализа часто строятся на понятии множества.

ПРИМЕРЫ.

***Л. Шварц** «Анализ»: «Множеством называется совокупность некоторых объектов. Примеры: Множество учащихся одного выпуска, множество точек плоскости, множество невырожденных поверхностей 2-го порядка в трехмерном пространстве, множество N неотрицательных целых чисел, множество Z произвольных целых чисел, множество Q рациональных чисел, множество Ш вещественных чисел, множество C комплексных чисел» [225, с. 9].*

***В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Бл. Х. Сендов** «Математический анализ»: «...при изучении вещественных чисел важным понятием являлось понятие множества. Подчеркнем, что множество мы рассматривали как начальное понятие, неопределенное через другие. В этом параграфе мы будем изучать множества произвольной природы или, как говорят, абстрактные множества. Это означает, что объекты, составляющие данное множество, или, как говорят, элементы данного множества уже не обязаны быть обязательно вещественными числами. Элементами абстрактного множества могут быть, например, функции, буквы алфавита, фигуры на плоскости и т. д.» [72, с. 69].*

***Ю. Г. Решетняк** «Курс математического анализа». «Для нас множество будет одним из первичных математических понятий, не выражаемым через другие математические понятия. Обычно, говоря слово "множество", мы будем под этим понимать совокупность объектов произвольного рода, рассматриваемую как единое целое. Вместе с термином множество будут употребляться и его синонимы типа набор, система, совокупность и т. п. Например, можно говорить о множестве решений некоторого уравнения, о коллекции картин, хранящихся в музее, совокупности точек круга и т. д. Объекты, составляющие то или иное множество, называются его элементами. Множество считается заданным, если для любого объекта можно установить, является он элементом данного множества или нет». [193, с. 12].*

***В. А. Зорич** «Математический анализ»: «Основные предпосылки канторовской (или, как условно говорят, "наивной") теории множеств сводятся к следующему: 1° множество может состоять из любых различных объектов; 2° множество однозначно определяется набором составляющих его объектов; 3° любое свойство определяет множество тех объектов, которые этим свойством обладают. Если x — объект, P — свойство, P{x) — обозначение того, что x обладает свойством P, то через {x: P(x)} обозначают весь класс объектов, обладающих свойством P. Объекты, составляющие класс или множество, называют элементами класса или множества. Слова "класс", "семейство", "совокупность", "набор" в наивной теории множеств употребляют как синонимы термина "множество". Следующие примеры демонстрируют применение этой терминологии: множество букв "а" в слове "я"; множество жен Адама; набор из* *десяти цифр; семейство бобовых; множество песчинок на Земле; совокупность точек плоскости, равноудаленных от двух данных ее точек; семейство множеств; множество всех множеств. Различие в степени определенности задания множеств наводит на мысль, что множество — не такое уж простое и безобидное понятие. И в самом деле, например, понятие множества всех множеств просто противоречиво [69, с. 17-18].*

11.1.2. Нестандартный анализ, или, более полно, нестандартный математический анализ, является разделом математического анализа.

В этой связи становится очевидным, что в нем принимаются изложенные взгляды на множества. Иными словами, в нестандартном анализе предполагаются множествами те и только те совокупности, которыми оперирует классическая — «стандартная» — теория. Стоит подчеркнуть, что справедлива и переформулировка приведенного утверждения: нестандартный анализ не считает множествами те и только те совокупности, которые не признает в качестве множеств обычная математика. В то же время нестандартный анализ связан с уточненными воззрениями на множества, т.е. как иногда говорят, строится в рамках нестандартной теории множеств.

11.1.3. Наивная теория множеств.

В основе наивной теории множеств лежат классические представления Г. Кантора: «Множество есть многое, мыслимое нами как единое» и множество — это «соединение в некое целое определенных хорошо различимых объектов нашего созерцания или нашего мышления» [77, с. 173]. Общеизвестно, что подобные концепции чересчур широки. Это обстоятельство обходится известной детализацией различий множеств и немножеств. Например, для обозначения неприемлемых — «слишком больших» — совокупностей множеств применяется термин «класс». При этом подразумевается, что класс не обязан быть множеством. Иными словами, при формализации понятий наивной теории множеств более полно и тщательно регламентируются процедуры, позволяющие вводить то или иное «канторовское» множество в математический обиход. Все допущенные в математику множества совершенно равноправны. Само собой, отсюда никак не следует, что все множества равны или не имеют отличий. Просто множества однотипны, обладают общим статусом — они элементы «класса всех множеств».

11.1.4. Решающий новый момент в нестандартной теории множеств.

Главная посылка, формирующая нестандартную теорию множеств, чрезвычайно проста - она состоит в привлечении двух различных — «стандартной» и «нестандартной» — моделей теории множеств для исследования конкретных математических объектов и проблем. Такие методы получили существенное развитие *во второй половине XX века и сформировались в несколько направлений.* ***Первое*** *из названных направлений вслед за его основоположником А. Робинсоном часто называют запоминающимся, хотя и отчасти эпатажным, термином — нестандартный анализ (теперь чаще говорят о классическом или робинсоновском нестандартном анализе). Робинсоновский нестандартный анализ характеризуется широким использованием давно известных в практике естествознания, но долгое время запрещенных в математике XX века концепций, связанных с представлениями об актуальных бесконечно больших и актуальных бесконечно малых величинах. В этой связи сейчас за ним закрепилось наименование инфинитезимальный анализ, выразительно напоминающее о классическом анализе бесконечно малых. Инфинитезимальный анализ бурно развивается и уже внес капитальные изменения в систему общематематических представлений. Прежде всего это связано с тем, что в нем предложено новое понимание метода неделимых, восходящего к глубокой древности, и осуществлен синтез подходов к дифференциальному и интегральному исчислению, предложенных его основоположниками. В наши дни инфинитезимальный анализ находит широкое распространение и проникает во все разделы современной математики. Наибольшие изменения происходят в этой связи в* **негладком анализе**, *в* **теории вероятностей** *и* **теории меры**, *в* **качественной теории дифференциальных уравнений** *и в* **математической экономике**.

Второе *направление —* **булевозначный анализ** *— характеризуется широким использованием таких терминов, как спуски и подъемы, циклические оболочки и миксинги, B-множества и изображения объектов в моделях. Развитие этого направления, становление которого связано со знаменитыми работами* ***П. Дж. Коэна*** *по гипотезе континуума, привело к принципиально новым идеям и результатам в ряде направлений функционального анализа, прежде всего в теории пространств Канторовича, в теории алгебр фон Неймана, в выпуклом анализе и теории векторных мер. Читательский интерес и стремительное развитие самой дисциплины поставили задачу отразить современное состояние дел, изложив новые темы и результаты. Наряду с систематическим изложением соответствующего формального аппарата, большое место уделяется приложениям к топологии, оптимизации и гармоническому анализу.*

Глава12. Техника гиперприближений

Многие важные приложения инфинитезимального анализа к исследованию непрерывных и других бесконечных объектов основаны на «дискретном» моделировании последних. Речь идет о поиске конечномерных или конечных объектов, в той или иной форме бесконечно близких к исходным. Аналогия с хорошо известными секвенциальными *схемами теории приближений подсказывает, что конечность в таких случаях подразумевает актуальные бесконечно большие величины. Среди новых конструкций такого рода в первую очередь следует отметить нестандартные оболочки, введенные Люксембургом, и меры, введенные Лёбом и носящие теперь его имя. Первая позволяет моделировать бесконечномерные банаховы пространства с помощью гиперконечномерных пространств. Вторая — пространства со счетно-аддитивной мерой с помощью мер на гиперконечных множествах. Мы объединяем эти идеи термином «гиперприближение». В этой главе рассмотрены конструкции нестандартной оболочки и меры Лёба, а также их приложения к изучению дискретного приближения в банаховых пространствах и построению гиперприближений интегральных и псевдоинтегральных операторов. На протяжении всей главы мы работаем в рамках классической или даже радикальной установок инфинитезимального анализа, поскольку используемые нами конструкции часто оперируют со всеми типами канторовских множеств, доступных инфинитезимальному анализу. Это подразумевает, в частности, необходимость несколько утяжелять язык изложения приставкой «гипер», терминологически.*

Глава 13. Методы нестандартного анализа в современной экономике

Решающий шаг в современной экономике был сделан в основополагающей работе Кеннета Эрроу и Жерара Дебре [Arrow K.J., Debreij G. Existence of equilibrium for a competitive economy // Econometrica. 22 (1954). p. 265-290.], заложившей основы современных математических моделей замкнутой децентрализованной экономической системы. Развитая в их рамках теория экономического равновесия является, по-видимому, одним из наиболее выдающихся достижений математической ветви экономической теории второй половины 20-го века.(см. УДК 510-8 ББК В.т.1/2 Маракулин В. М+ Равновесный анализ математических моделей экономики с нестандартными ценами.: Учебное пособие к курсу «Теория Игр»: часть Ш/ Новоенб. гос. унт. Новосибирск, 2001. 125 с.) Последние 40 лет были отмечены обширным потоком работ, обобщающих результаты Эрроу-Дебре в самых различных направлениях. В частности, многими исследователями ослаблялись предположения, гарантирующие существование равновесий. Большая часть этих предположений, усилиями многих авторов (таких как А. Мас-Колелл, Р. Ауманн, В. Хильденбранд, Д. Гейл и многие другие), была доведена до математического совершенства и, по-видимому, не может быть принципиально ослаблена в дальнейшем (во всяком случае для конечномерных моделей). Однако все эти результаты в той или иной мере основываются на одном весьма ограничительном модельном предположении, так называемом условии выживаемости (survival) потребителей. Обычно это условие формулируется как "ресурсная связность" или "нередуцируемость" экономической модели, а фактически оно играет роль "условия Слейтера" в задаче потребителя. Хотя *это предположение и является интерпретируемым свойством, однако вызывает ощущение дискомфорта и, главное, не является безусловно необходимым требованием. Основной теоретической целью современной экономики (наряду с учебной — демонстрацией современных методов теории общего равновесия) является устранение "предположения выживаемости" из условий, гарантирующих существование экономических равновесий. Эта проблема не может быть разрешена в традиционных модельных рамках, ибо, как показывают многие примеры (см. основной текст и [Макаров В. Л. Экономическое равновесие: существование и экстремальные свойства // Итоги науки и техники: Современные проблемы математики. М: ВИНИТИ АН СССР. Т. 19 (1982). с. 23-58.]), при отсутствии какого-либо аналога условию Слейтера и при прочих обычных посылках (причем гораздо более сильных по сравнению с имеющимися в современной теории существования) равновесия могут не существовать. Мы преодолеваем эту трудность, ревизуя собственно понятие цены. А именно, вместо обычных "стандартных" цен мы предлагаем использовать "нестандартные" (в смысле нестандартного анализа). Другими словами, цены на продукты могут быть не только обычными числами, но и нестандартными, т.е. выбранными из нестандартного расширения числовой прямой *R (о нестандартном анализе см., напр. [Robinson A. Non-standard analysis, studies in logic and foundation of mathematics. Amsterdam: North Holland, 1966.], [Девис М. Прикладной нестандартный анализ / Пер. с англ. М.:Мир, 1980. 236 с.]. С математической точки зрения мы заменяем обычное понятие "решения" на обобщенное, которое существует уже при более слабых предпосылках, — типичный для математики прием, эффективно работающий в ряде других областей математики (таких как теория обычных и частных дифференциальных уравнений, вариационный анализ и др.). С экономической точки зрения представляется, что этот подход не должен вызывать серьезных возражений, ибо фактически он всего лишь означает, что шкала измерений для цен на разного рода продукты должна быть мельче (в достаточной мере) шкалы, используемой для исчисления физических благ, не изменяя методологической концепции равновесия2. Фактически же мы предлагаем определенную асимметрию — продукты измеряются в стандартных величинах, а цены — нестандартных. Таким способом мы явным образом вводим в модель более тонкий, по сравнению с традиционным, механизм стоимостного регулирования, что и позволяет достичь намеченной цели. В литературе известны и другие способы "разрешения проблемы Слейтера". Например, Данилов и Сотсков в [Daniloy V.I., Sotskoy A.I. A generalized economic equilibrium // Journal of Mathematical Economics. 19 (1990). p. 341-356.] предложили подход, основанный на понятии меновых стоимостей (работа выполнена в чисто стандартных терминах). В рамках классической модели обмена таким образом получаются результаты, близкие к нижеизложенным. Однако в отличие от [4], где постулируется надлежащая конструкция бюджетных множеств* *(агентов), мы доказываем, что бюджетные множества при нестандартных ценах могут быть представлены в форме, близкой к данной (см. § 3.1).*

Следующим по значимости *вопросом общей теории равновесия является проблема оптимальности, или эффективности, равновесного распределения (ресурсов). Под эффективными распределениями в экономике принято понимать оптимальные по Парето — не существует другого распределения, в котором, по сравнению с данным, часть агентов улучшила бы свое положение, не ухудшая положения прочих участников экономики. Первая теорема благосостояния утверждает, что в классической модели Эрроу-Дебре (без внешних влияний) равновесие по Вальрасу оптимально по Парето и является формальным доказательством известного высказывания Адама Смита о "невидимой руке": [Каждый индивидуум] стремится к собственной выгоде. При этом, ведомый невидимой рукой [рынка], он приходит к итогу, к которому он [осознанно] не стремился. Преследуя свой собственный интерес, он часто способствует эффективной деятельности сообщества более, нежели бы он действительно стремился к этому. Вильфредо Парето (1909) уточнил формальное понятие оптимальности и, более того, впервые установил, что с каждым эффективным распределением можно ассоциировать такую систему цен, что распределение обращается в равновесное относительно некоторого исходного распределения ресурсов. Сейчас это составляет содержание второй теоремы благосостояния. В пособии также рассматривается проблема эффективности распределения и отвечающих ему цен, но в более широком контексте. Именно, известно, что теоремы благосостояния имеют место, только если экономические агенты полностью эгоистичны, т.е. если их "полезность" зависит только от объёмов потребляемых ими лично благ. Однако если допустить возможность зависимости полезности от потребительских планов других агентов — в таком случае говорят о наличии внешних влияний (в потреблении), то конкурентное равновесие генерически (почти всегда) теряет свойство эффективности (см. Маракулин В. М. Неэффективность равновесия в гладких экономиках с функциями полезности общего вида // Оптимизация. 1981.). В пособии показано, что проблему эффективности при внешних влияниях можно разрешить если допустить индивидуализированные цены, достаточно гибко изменяющиеся, совокупность которых должна удовлетворять некоторому дополнительному требованию, связывающему индивидуальные цены с рыночными. С помощью индивидуальных цен можно определить и соответствующее понятие (эффективного) равновесия. Однако здесь мы опять сталкиваемся с "проблемой условия Слейтера", которую можно разрешить переходом к нестандартным ценам. Пособие основано, в основном, на авторских результатах, опубликованных в работах [Маракулин В. М. Равновесие с нестандартными ценами и его свойства в математических моделях экономики / Ин-т математики СО АН СССР, Новосибирск. Препринт. 1988. № 18. 52 с.], [Marakijlin V.M. Equilibrium with nonstandard individual prices in economies with externalities / Ин-т математики СО АН СССР, Новосибирск. Препринт.*

1990. № 31. 36 с. (in English).] и в совместной с Коноваловым [Коновалов А. В., Маракулин В. М. О конечности экономических равновесий с нестандартными ценами / Ин-т математики СО]. Содержание этих работ существенно переработано и изложено здесь с единых позиций "абстрактной модели экономики" (с тотальными внешними влияниями). Первая глава вводит читателя в мир нестандартной математики (анализа) и содержит сводку наиболее употребительных в приложениях фактов и результатов нестандартного анализа. Во второй главе последовательно развивается теория экономического равновесия с нестандартными ценами в абстрактной экономике. Пособие завершает третья глава, в которой рассматриваются приложения полученных результатов к основным неоклассическим моделям экономики — модели рынка, модели Эрроу-Дебре (с производственным сектором) и, наконец, модели экономики с общественными благами. В завершающем разделе формулируется (без доказательства) теорема о конечности числа равновесий с нестандартными ценами в модели рынка.

ЛИТЕРАТУРА

1. Успенский В.А. Что такое нестандартный анализ? – М., Наука, 1987. – 128с.

2. Девис М. Прикладной нестандартный анализ. – М., Мир, 1980.

3. Успенский В.А. Нестандартный, или неархимедов, анализ. – М., Знание, 1983. 61 с. (Новое в жизни, науке, технике. Сер. "Математика, кибернетика" № 8).

4. Успенский В.А. Нестандартный анализ // Наука и жизнь, 1984. – №1. – с. 45-50.

5. Робинсон А. Введение в теорию моделей и математику алгебры. пер. с англ. – М., Наука, 1967.

КОНЦЕВЫЕ СНОСКИ

---

[i] У этого термина существуют и другие значения, см. Бесконечно малая и бесконечно большая.

Идея бесконечно малого восходит к греческой античности (в русской литературе часто используется эквивалентный термин инфинитезималь). Архимед пользовался бесконечно малыми в своей книге «Метод механических теорем» (Послание к Эратосфену о методе) для вычисления площади фигур и объёма тел. Классические авторы стремились подменять инфинитезимальные вычисления методом исчерпывания, считая его более строгим. 15-й век увидел новаторскую работу Николая Кузанского, развитую дальше Иоганном Кеплером, в частности расчет площади круга, представляя последний в виде бесконечно-угольника. Симон Стевин разработал континуум десятичных дробей в 16 веке. Метод неделимых Бонавентура Кавальери привёл к расширению результатов классических авторов. Метод неделимых рассматривал геометрические фигуры, как состоящие из объектов коразмерности 1. Бесконечно малые Джона Уоллиса отличалась от неделимых в том, что он разлагал геометрические фигуры на бесконечно тонкие составные части той же размерности, что и фигура, готовя почву для общих методов интегрального исчисления. Он пользовался инфинитезималем обозначаемым в вычислении объёмов.Пьер Ферма, вдохновленный Диофантом, ввел понятие adequality, то есть «адекватное» или примерное равенство (с точностъю до бесконечно малой ошибки), которое в конечном счете сыграло ключевую роль в современной математической реализации инфинитезимального определения производной и интеграла. Использование инфинитезималей у Лейбница опиралось на эвристический принцип, называемый законом непрерывности: что успешно для конечных чисел, успешно также и для бесконечных чисел, и наоборот. Мир 18-го века увидел рутинное использование инфинитезималей такими великими авторами, как Леонард Эйлер и Жозеф Лагранж. Огюстен Луи Коши использовал инфинитезимали в своем определении непрерывности, а также ранней формы дельта-функции Дирака. В то время, как Георг Кантор и Рихард Дедекинд развивали более абстрактные версии континуума Стевина, Павел Дю Буа-Реймон пишет ряд работ об инфинитезимально-обогащенных континуумах, основанных на темпах роста функций. Работы Дю Буа-Реймона вдохновили как Эмиль Бореля так и Тхоралф Сколема. Сколем разработал первые нестандартные модели арифметики в 1934 году. Математическое осуществление как закона непрерывности, так и инфинитезималей, было достигнуто Авраамом Робинсоном в 1961 году. Его нестандартный анализ был основан на более ранних работах Эдвин Хьюитта в 1948 году, и Ежи Лос в 1955 году. Гипервещественные числа реализуют инфинитезимально-обогащенный континуум, тогда как принцип переноса реализует закон непрерывности Лейбница.

[ii] Рево́льт Ива́нович Пи́менов (16 мая 1931, Новочеркасск — 19 декабря 1990, Берлин) — советский математик, историк, участник диссидентского и правозащитного движения в СССР, народный депутат РСФСР (1990). Окончил ленинградскую среднюю школу №321 (бывшая 1-я С.-Петербургская гимназия), математико-механический факультет Ленинградского государственного университета по кафедре геометрии (1954). За время учёбы изучил, помимо математики и физики, ещё философию, историю, языки (европейские, китайский, арабский, древние). Кандидат физико-математических наук (1965, тема диссертации: «Тензорная теория полуэвклидовых и полуримановых пространств»). В 1969 защитил докторскую диссертацию по теме

«Пространства кинематического типа» (в связи с арестом докторский диплом был им получен только в конце 1988).

Преподавал в вечерней школе.

В 1955 — инвентаризатор в Библиотеке академии наук.

В 1955—1957 — ассистент кафедры математики в Ленинградском технологическом институте пищевой промышленности. Участник III Всесоюзного математического съезда (1956), где доложил о своих научных открытиях в неэвклидовой геометрии и космологии.

В 1963—1970 — научный сотрудник Ленинградского отделения Математического института им. Стеклова АН СССР, где вёл научный семинар по математическим проблемам теории пространства-времени, читал лекции по геометрии студентам математико-механического факультета ЛГУ. Являлся членом Гравитационного комитета, автором книги «Пространства кинематического типа» и многих математических статей.

В 1972—1990 — сослан в Коми, работал в Коми филиале АН СССР (затем — Коми научный центр Уральского отделения АН СССР, занимал должности от младшего до ведущего научного сотрудника.

В 1974—1975 приглашался Абердинским университетом (Шотландия) читать лекции в течение года, но получил отказ от МВД СССР.

В конце 1980-х годов преподавал в Сыктывкарском государственном университете, читал курсы теории вероятностей и «История русской революции». Его ученик Н. А. Громов дал следующую оценку вклада Р. И. Пименова в математическую науку: Уже первый цикл его работ (1956—1964) содержал единое аксиоматическое построение системы неевклидовых геометрий. Здесь ему удалось определить работы целого ряда других геометров и развить новые плодотворные подходы к этим теориям, оказавшиеся эффективными также и в теории групп. Второй цикл работ Р. И. Пименова (1964—1966) содержит исследование аналогов римановых пространств, представляющих собой метризованные гладкие многообразия, у которых в касательных пространствах имеет место та или иная однородная неевклидова геометрия. В этом направлении он, в частности, обеспечил приоритет отечественной науки в развитии тензорного исчисления, согласованного с расслоением пространства. В терминах этих понятий Р. И. Пименовым был развит один из вариантов единой общей теории относительности и электромагнетизма, не потерявший своей актуальности до настоящего времени. Третий цикл работ Р. И. Пименова (1966—1990) связан с развитием идеи академика А. Д. Александрова о первичности каузального отношения в рамках программы: построить теорию относительности исходя из отношения порядка. Здесь он построил теорию неоднородных пространств, значительно расширивших систему математических моделей пространства-времени, которые используются учеными в различных областях науки, он решил проблему построения нерегулярных пространств со знакопеременной метрикой, а также проблему выведения пространственно-временных структур из отношения порядка. Суть его подхода состоит в том, что в основу всех пространственно-временных конструкций кладутся отношения порядка (линейной или частичной упорядоченности) и далее тщательно анализируется, как и другие аксиомы и отношения (топологические, метрические и т. д.) и каким образом должны быть добавлены к свойствам отношения порядка, чтобы получить используемые в физике многообразия. Именно в таком ключе Р. И. Пименов построил теорию анизотропного пространства-времени, в котором скорость света различна по разным направлениям, то есть световой конус не круговой, а «гранёный». Дальнейшее допущение, что этот конус меняется от точки к точке

приводит к финслерову обобщению общей теории относительности. По его убеждению, «изучение структур порядка есть в физическом аспекте разработка самых базисных априорных моделей для укладывания в них последующего физического материала». В последней книге, подготовленной к печати незадолго до кончины, продолжил исследование возможных пространственно-временных конструкций, названных «темпоральным универсумом».

Диссидент

В 1949 написал заявление о выходе из комсомола, после чего на некоторое время был помещён в психиатрическую больницу. В 1953 был исключён из комсомола и университета за конфликт с ректором по политическим мотивам (официально — за шум на лекции и пропуски занятий), затем восстановлен в университете. В марте 1956 размножил на машинке доклад Н. С. Хрущёва на закрытом заседании XX съезда КПСС «О культе личности И. В. Сталина» со своими примечаниями. В ноябре 1956 написал «Венгерские тезисы», посвящённые подавлению советскими войсками восстания в Венгрии. После венгерских событий создал и возглавил подпольную организацию для борьбы с советским правительством, которая занималась написанием и размножением самиздата и листовок, а также самообразованием. Пименов составлял информационные бюллетени «Информация». В состав организации входили ближайшие друзья Пименова — Э. С. Орловский, И. С. Вербловская, И. Д. Заславский, группа из Библиотечного института (руководитель Б. Б. Вайль, он же руководил группой в Курске), марксистская группа И. В. Кудровой — В. Л. Шейниса. В этот период был марксистом (отошёл от марксизма в 1959). Арестован 25 марта 1957 по обвинению в преступной деятельности, предусмотренной статьями 58 (10-11) УК РСФСР. 6 сентября 1957 приговорён Ленинградским городским судом к 6 годам лишения свободы. Некоторые члены организации также были осуждены одновременно с ним. Также 25 сентября 1957 в Москве был осужден на 3 года его отец Иван Гаврилович Щербаков (1902—1982), выходец из богатой купеческой семьи, в годы Гражданской войны был красноармейцем и сотрудником ЧК, затем — ветеринар и врач-микробиолог. Приговор в отношении Пименова и его товарищей был отменен Коллегией Верховного суда РСФСР «за мягкостью». 4 февраля 1958 Ленинградский городской суд вынесен новый приговор Пименов получил — 10 лет и поражение в правах на три года, Вайль — 6 лет (ранее — три года), Вербловская и Заславский по 5 лет (ранее — по два года, позднее срок Заславскому был снижен до двух лет), член группы из Курска Данилов — 4 года (ранее — два года).

В 1958—1960 отбывал наказание в Воркутлаге и Озёрлаге (Иркутская область). Уже в ноябре 1958 переведён на специальный строгий (камерный) режим в лагере. С декабря 1960 находился во Владимирской тюрьме, где отбывал наказание вместе с бывшими сотрудниками МВД СССР — сотрудниками Л. П. Берии. За время отбытия наказания написал ряд работ по космологии и лингвистике; заинтересовавших видных ученых. По ходатайству некоторых из них — в первую очередь академика М. В. Келдыша, а также поэта А. Т. Твардовского постановлением Президиума Верховного Совета РСФСР Пименов был 26 июля 1963 освобожден условно с испытательным сроком в три года. Во второй половине 1960-х написал большое количество самиздатских статей. За диссидентскую деятельность 23 июля 1970 был арестован в Ленинграде и 22 октября 1970 осуждён (вместе с Б. Б. Вайлем и В.Зиновьевой) Калужским областным судом по 190-1 УК РСФСР к 5 годам ссылки за распространение самиздата. Процесс сопровождался демонстрацией сочувствия к подсудимым со стороны нескольких десятков съехавшихся в Калугу из Москвы и Ленинграда друзей, знакомых и просто свободомыслящих (в том числе академика А. Д. Сахарова и Елены Боннэр), а также некоторых рядовых калужан. Ссылку отбывал в посёлке Краснозатонский близ Сыктывкара (где работал в каменном карьере, электромонтёром), затем в самом Сыктывкаре. В 1970—1980-е годы принимал активное участие в правозащитной деятельности, собирал и передавал материалы в бюллетени «Хроника текущих

событий» и «Вести из СССР». Писал рецензии для самиздатского реферативного журнала «Сумма» (в том числе под псевдонимом Л. Нестор). В конце 70-х — начале 80-х годов активно сотрудничал с редакцией неподцензурного исторического альманаха «Память» (составлялся в СССР и издавался во Франции) в котором, в частности, были опубликованы фрагменты его воспоминаний.

Историк и литератор

В 1950-е годы написал цикл пьес по истории революции в России («Дегаев», «Желябов», «Карийская трагедия», «Гапон»). Автор цикла исследований «Происхождение современной власти», посвящённого политической истории России XIX—XX вв. Также написал работу «Как я искал английского шпиона Сиднея Рейли», в которой высказал версии судьбы известного авантюриста первой четверти XX в.

Один из первых переводчиков на русский язык книги Дж. Толкина «Властелин колец».

Политик

В 1989 был доверенным лицом А. Д. Сахарова на выборах народных депутатов СССР, одновременно пытался баллотироваться сам, но из-за противодействия местных властей потерпел неудачу. В 1989 — председатель правления Сыктывкарского общества «Мемориал», член правления Всесоюзного общества «Мемориал». Заместитель председателя Сыктывкарского общественного центра «Инициатива».

В 1990 — народный депутат РСФСР от Коми АССР (территориальный избирательный округ № 825). Член Конституционной комиссии съезда народных депутатов РСФСР; член Комитета по законодательству Верховного Совета РСФСР.

Умер от осложнений в результате онкологической операции.

Некоторые труды

Геометрические работы Единая аксиоматика пространств с максимальной группой движений // Литовский математический сборник. 1965. Т.5. № 3.

Полуриманова геометрия // Труды семинара по векторному и тензорному анализу. — Вып.14. М., 1968.

Пространства кинематического типа (математическая теория пространства-времени). Л., 1968.

Kinematic spaces. Consultants Bureau, New-York & London, 1970.

Хроногеометрия: достижения, препятствия, структуры. Сыктывкар 1987.

Изотропное финслерово обобщение теории относительности как структуры порядка. Сыктывкар. 1987. 2-е издание — 2006.

Основы теории темпорального универсума. Сыктывкар, 1991. 2-е издание — 2006.

Исторические работы

Как я искал шпиона Рейли. СПб, 1996.

Происхождение современной власти: Кн. 1. Борьба за конституцию. Кн. 2. Россия конституционная. М., 1996.

Происхождение современной власти: Кн. 3. Россия без центральной власти. СПб — Сыктывкар, 1998.

Мемуары

Воспоминания. Том 1. 1996.

Воспоминания. Том 2. 1996.

Ссылки

Сайт, посвящённый Револьту Пименову в архиве интернета

Биография

Отщепенцы // Петербург — 5 канал о Пименове

Revolt I. Pimenov. — Сайт о Р. И. Пименове (Полный фотоархив. Краткая биография. Избранные произведения. Разные ссылки. Доступные видео).

[iii] ЛУЗИН Н.Н.

Образование

Когда Н. Н. Лузин достиг гимназического возраста, семья переехала в Томск, чтобы он поступил в Томскую гимназию. Обучался в Томской гимназии (в 1894—1901 годах), где поначалу обнаружил полную неспособность к математике в той форме, в которой она преподавалась (заучивание правил и действия по шаблонам). Положение спас студент-репетитор, который обнаружил и развил у Н. Н. Лузина способность к самостоятельному решению сложных задач и страсть к этому занятию. После окончания Н. Н. Лузиным гимназии в 1901 г. отец продал своё дело и семья переехала в Москву, чтобы он продолжил образование. Он поступил на физико-математический факультет Московского университета для подготовки к карьере инженера. Изучал теорию функций под руководством Николая Васильевича Бугаева, был избран секретарем студенческого математического кружка, председателем которого был знаменитый механик Николай Егорович Жуковский. Но главным его учителем становится Дмитрий Фёдорович Егоров. По окончании курса в 1905 году, Д. Ф. Егоров оставил Н. Н. Лузина при университете для подготовки к профессорскому званию. В это время (1905—1907 годы) Н. Н. Лузин испытывал тяжёлый душевный кризис, сомневался в сделанном выборе профессии и, по его собственным словам, помышлял о самоубийстве. В начале 1906 года Д. Ф. Егоров командирует Н. Н. Лузина (вместе с В. В. Голубевым) в Париж, чтобы помочь ему преодолеть кризис[2], однако контрасты парижской жизни угнетали молодого математика. Большую духовную помощь оказал ему близкий друг — религиозный философ Павел Александрович Флоренский, с которым они вместе учились на физико-математическом факультете Московского университета (отделение математических наук), и который тоже прошёл через кризис разочарования в науке[3]. Сохранились также письма Д. Ф. Егорова, в которых он убеждает Н. Н. Лузина не оставлять математику. Постепенно Н. Н. Лузин возвращается к избранной науке, с присущей ему страстностью увлекшись задачами теории чисел (1908 год). Но всё же, вернувшись в Россию, наряду с математикой он изучает медицину и теологию. В 1908 году он сдал магистерские экзамены по математике и получил право преподавания в университете. Был принят на должность приват-доцента Московского университета и год занимался совместными исследованиями с Д. Ф. Егоровым. В результате появилась совместная статья, положившая начало Московской школе теории функций. В 1910 году Н. Н. Лузин отправляется в Гёттинген, где работал под влиянием Эдмунда Ландау. Посещает Париж, в 1912 году участвует в работе семинара Жака Адамара, близко знакомится с Эмилем Борелем, Анри Лебегом и другими выдающимися учеными. Вернулся в Москву в 1914 году. В 1915 году Н. Н. Лузин закончил магистерскую диссертацию. Это сочинение, «Интеграл и тригонометрический ряд»[4], разительно отличалось от обычных диссертаций и по уровню результатов, и по стилю: в каждом разделе книги содержались новые проблемы и новые подходы к классическим задачам. Ставились задачи с наброском доказательств, использовались утверждения: «мне кажется», «я уверен». Академик В. А. Стеклов сделал на полях много иронических пометок: «ему кажется, а мне не кажется», «геттингенская болтовня» и т. п. Однако, по словам М. А. Лаврентьева: «она стала нашей настольной книгой. При формировании школы Н. Н. Лузина книга сыграла огромную роль.»[5] Д. Ф. Егоров представил магистерскую диссертацию Н. Н. Лузина на ученый совет Московского университета как докторскую диссертацию по чистой математике. Защита прошла удачно. С 1917 года Н. Н. Лузин — профессор Московского университета.

Научные достижения

Первый значительный результат Лузина (1912) состоял в построении тригонометрического ряда, коэффициенты которого монотонно убывают и стремятся к нулю, но сам ряд почти всюду расходится. Этот пример опровергал предположение Пьера Фату (1906) и был совершенно неожиданным для большинства математиков. Диссертация Лузина «Интеграл и тригонометрический ряд» (1915) определила дальнейшее развитие метрической теории функций. В ней Н. Н. Лузин привел список нерешенных проблем. Десятки лет эти проблемы служили источником вдохновения для математиков. Например, первая проблема касается сходимости ряда Фурье квадратично интегрируемой функции. Спустя пятьдесят один год она была решена Л.Карлесоном[6].

Н. Н. Лузин — один из основных создателей дескриптивной теории множеств и функций. Его вклад чрезвычайно высоко оценивал Анри Лебег (создатель теории меры и интеграла Лебега), написавший предисловие к монографии Н. Н. Лузина «Лекции об аналитических множествах и их применения», вышедшей в Париже в 1930[7]. В предисловии Лебег с юмором отмечает, что отправной точкой исследований, представленных в книге, послужила … серьёзная ошибка, допущенная самим Лебегом в 1905 году. В своём мемуаре Лебег утверждал, что проекция борелевского множества всегда является борелевским множеством. А Лузин с Суслиным показали, что это не так. Лебег выразил удовольствие, что его ошибка оказалась столь плодотворной. Вклад Н. Н. Лузина в в дескриптивную теорию множеств и функций кратко обрисован в трёх обзорных статьях в журнале «Успехи математических наук»: в статье ученицы Н. Н. Лузина, Людмилы Всеволодовны Келдыш[8], в статье научного «внука» Н. Н. Лузина, ученика А. Н. Колмогорова, профессора МГУ Владимира Андреевича Успенского[9] и в статье Владимира Григорьевича Кановея[10], доктора физ-мат наук, профессора, продолжающего развивать дескриптивную теорию множеств и функций. Отдельные обзоры в «Успехах математических наук» посвящены трудам Н. Н. Лузина по теории функций комплексного переменного[11] и его работам по дифференциальным уравнениям и вычислительным методам[12]. В 1928 году Н. Н. Лузин выступает с пленарным докладом о своих результатах на VIII Всемирном математическом конгрессе. В математике есть много именных результатов и понятий, связанных с именем Н. Н. Лузина: Пространство Лузина, Теорема Лузина (и не одна), теоремы отделимости Лузина [13], теорема Суслина — Лузина о существовании борелевского множества на плоскости с неборелевской проекцией, теорема Лузина о категории множества точек абсолютной сходимости тригонометрических рядов[14], теорема Данжуа — Лузина, теорема единственности Лузина — Привалова в теории функций комплексного переменного, и многие другие. Регулярно появляются новые обобщения этих результатов. Например, в 2008 году опубликована «многомерная теорема Лузина»[15]:

Каждое измеримое отображение открытого множества в почти всюду равно градиенту непрерывной почти всюду дифференцируемой в функции, которая обращается в нуль вместе со своим градиентом вне U. Доказаны «некоммутативные теоремы Лузина»[16], теоремы Лузина для мультифункций[17] и многие другие обобщения. Кроме фундаментальных теорем в области дескриптивной теории множеств, в теории функций действительного и комплексного переменного, Н. Н. Лузин получил важные и в определённом смысле неулучшаемые результаты в теории изгибания поверхностей[18]. Последнее место работы Н. Н. Лузина с 1939 года до последних дней жизни — это Институт автоматики и телемеханики АН СССР (ныне Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН). Здесь Н. Н. Лузин получает новые фундаментальные результаты по матричной теории дифференциальных уравнений, непосредственно связанные с теорией автоматического управления[19].

Гениальный педагог

Научных результатов Н. Н. Лузина достаточно, чтобы быть навсегда вписанным в историю математики. Но его педагогические результаты по своему масштабу фантастичны. Это редчайший случай в истории науки, когда выдающийся ученый воспитал более десяти выдающихся же ученых, где-то не уступающих ему, а где-то, вероятно, и превосходящих. Достаточно взглянуть на список его учеников: А. Н. Колмогоров и П. С. Александров, М. А. Айзерман и А. С. Кронрод,… — все такие яркие, и такие разные. Многие ученики Н. Н. Лузина продолжили его и как педагоги. Школа А. Н. Колмогорова дала В. И. Арнольда и И. М. Гельфанда, Е. Б. Дынкина и А. И. Мальцева, Я. Г. Синая и А. Н. Ширяева (и многих других), школа П. С. Александрова дала Л. С. Понтрягина, А. Н. Тихонова, А. Г. Куроша и не только; а ещё были школы М. А. Лаврентьева (М. В. Келдыш, А. И. Маркушевич, Б. В. Шабат и др.), и А. А. Ляпунова (А. П. Ершов, Ю. И. Журавлев, О. Б. Лупанов и др.), П. С. Новикова (С. И. Адян, А. Д. Тайманов, С. В. Яблонский и др.) и многие другие [20]. В базе данных «Mathematics Genealogy Project» («Математическая генеалогия») Н. Н. Лузин имеет (на 27.06.2009) 2805 научных потомков. Школа Н. Н. Лузина — это была школа развития самостоятельного мышления, способности по-новому ставить проблемы, разбивать их на новые задачи, искать обходные пути. Интересная деталь: было негласно установлено такое правило: если у аспиранта по теме экзамена есть самостоятельный результат, то спрашивают только по этому результату. «Мы все стремились, вместо изучения толстой монографии 200—300 стр. (как правило, на иностранном языке), придумать новую постановку (обобщение) задачи», — вспоминает М. А. Лаврентьев. Атмосфера творчества, мышления «здесь и сейчас», когда промежуточные ходы мысли не скрываются, а сам процесс мышления становится публичным и явленным для всех — такова была атмосфера «Лузитании» (так стала называться школа Лузина) в её лучшие годы. Атмосфера, смешанная с шуткой, элементами интеллектуального карнавала, научного театра, в котором все были актёрами, а первым из них был учитель. В своих воспоминаниях Л. А. Люстерник называет это «интеллектуальным озорством»[21]. Глубокое и неформальное уважение охраняло отношения к учителю от панибратства.

Сохранялась и важная роль Д. Ф. Егорова. Н. Н. Лузин новичкам — лузитанцам говорил: «главный в нашем коллективе Егоров, окончательная оценка работы, открытия принадлежит Егорову». В 1915 году в Москве оказался польский математик Вацлав Серпинский, интернированный из-за своего немецкого гражданства. Д. Ф. Егоров и Н. Н. Лузин помогли ему выхлопотать разрешение на свободное проживание в Москве. В.

Серпинский активно участвовал в создании Московской математической школы. Тесные контакты школ Лузина и Серпинского продолжались до середины 30-х годов. Первыми участниками Лузитании стали П. С. Александров, М. Я. Суслин, Д. Е. Меньшов, А. Я. Хинчин; несколько позже появились В. Н. Вениаминов, П. С. Урысон, А. Н. Колмогоров, В. В. Немыцкий, Н. К. Бари, С. С. Ковнер, В. И. Гливенко, Л. А. Люстерник, Л. Г. Шнирельман. Через несколько лет (1923—1924 годы) прибавилось третье поколение — П. С. Новиков, Л. В. Келдыш, Е. А. Селивановский. Одним последних к школе Лузина присоединился А. А. Ляпунов (1932 год). В это время Лузитании уже практически не было. Карнавал Лузитании был омрачен двумя неожиданными смертями: 21 октября 1919 года от сыпного тифа в родном селе Красавка умер М. Я. Суслин, 17 августа 1924 года утонул П. С. Урысон — «хранитель тайн Лузитании». В 1931 году в ссылке в Казани умер Д. Ф. Егоров и «бога-отца» Лузитании не стало.

Дело Лузина

В сентябре 1930 года Д. Ф. Егоров поплатился за духовную независимость и религиозные убеждения. Он был арестован по делу «катакомбной церкви», по которому оказался среди главных обвиняемых. Перед этим Д. Ф. Егоров подвергся атакам идеологов «пролетарского студенчества», был смещен с поста председателя Предметной комиссии по математике и с поста директора Института математики и механики Московского университета. После этого Н. Н. Лузин уклонился от руководства Московским математическим обществом и покинул университет, чтобы не сталкиваться с «пролетарским студенчеством». Председателем Московского математического общества после Д. Ф. Егорова стал Эрнест Яромирович Кольман. Н. Н. Лузина приютил академик Сергей Алексеевич Чаплыгин в ЦАГИ, кроме того, Н. Н. Лузин оставался руководителем отдела теории функций в Физико-математическом институте им. В. А. Стеклова (Ленинград). Был он также председателем Математической группы Академии наук. Серьёзные конфликты внутри Лузитании начались в 1919 году. Смерть М. Я. Суслина произошла в период его ссоры с учителем. Далее постепенно усиливались споры о авторстве результатов, опубликованных в совместных работах, о продвижении в Академию и др. (эти конфликты нашли подробное отражение в документах «дела Лузина»[22]). После отставки и ареста Егорова в Московской математической школе произошла «культурная революция»[23]. Молодые математики (П. С. Александров, Л. А. Люстерник, Л. Г. Шнирельман, А. О. Гельфонд, Л. С. Понтрягин и др.) с помощью Э. Я. Кольмана захватили власть в Московском математическом обществе, они провозгласили программу реорганизации математики и «сближения с задачами социалистического строительства». Конфликт перерос академические границы, когда Кольман и антилузинская группа математиков использовали друг друга в борьбе за свои цели. Критика Лузина становилась всё острее. Эти нападки были крайне негативно оценены А. Лебегом, В. Серпинским, А. Данжуа и другими зарубежными учеными. 5 июня 1931 года в Москве состоялась I Всероссийская конференция по планированию математики. По докладу Э. Я. Кольмана конференция приняла резолюцию «О кризисе буржуазной математики и о реконструкции математики в СССР». В докладе и резолюции Н. Н. Лузин обвиняется в идеализме, приводящем к «кризису основ математики».[24] В 1933 году по сфабрикованному делу «Национал-фашистского центра» был арестован и осужден друг Н. Н. Лузина — П. А. Флоренский. Принужденный оговорить Н. Н. Лузина, П. А. Флоренский свидетельствует, что Н. Н. Лузин руководил внешнеполитической деятельностью «Национал-фашистского центра», и получал инструкции непосредственно от Гитлера[25] (сам Н. Н. Лузин проходит по документам дела, но пока ещё не привлекается[26]). «Дело Лузина»[22] — это политическая травля Н. Н. Лузина и разбор персонального дела Н. Н. Лузина Комиссией Президиума АН СССР, продолжавшиеся со 2 июля по 5 августа 1936 года. Первый документ в папке «Дела Лузина» — это донос Э. Я. Кольмана, датированный 22 февраля 1931 года. Чего добивался Э. Я. Кольман, бывший архитектором «Дела Лузина»? В

1931 году он опубликовал своё кредо — программную статью «Вредительство в науке». Он рассматривает вредительство в науке как неизбежное и всеобщее проявление классовой борьбы: «какой бы абстрактной и „безобидной" на первый взгляд ни казалась та или другая ветвь знания, вредители протянули к ней свои липкие щупальцы»[27]. После возмущения вредителями, а затем низким уровнем научного и технического просвещения, Э. Я. Кольман представляет своё видение правильной организации науки: «Разве не менее возмутительно, что Коммунистическая Академия[28] до сих пор не превратила свою Техническую секцию в активный, руководящий всей технической мыслью страны орган, что её Ассоциация естественно-научных институтов, секций и обществ далеко не является тем бдительным стражем на идеологическом фронте и активным строителем партийной, коммунистической науки, которым она должна быть?». Эта идея — отдать руководство наукой в руки воинствующих идеологически правильных дилетантов (каковым был сам Кольман) — не была реализована до конца. Публичная политическая травля Лузина была начата статьями в газете «Правда»: 2 июля 1936 года «Ответ академику Н. Лузину» и 3 июля 1936 года «О врагах в советской маске»[29]. Несмотря на анонимность статей, различные эксперты сходятся в том, что их автор — Э. Я. Кольман[22]. Очевидно также обилие деталей, исходящих из ближайшего окружения Лузина. Кое-кто из Лузитанцев консультировал Кольмана. В тот же день, 3 июля, главный редактор «Правды» Л. З. Мехлис пишет письмо в ЦК партии о том, что собранные редакцией «Правды» материалы, связанные «с делом академика Н. Лузина, выявили … один серьёзного значения недостаток в работе научных организаций. Сводится этот недостаток к тому, что большинство учёных наиболее интересные свои работы считают нужным публиковать главным образом и раньше всего не в СССР, а в заграничной печати.» Мехлис просит «ЦК ВКП(б) санкционировать развернутое выступление по этому вопросу на страницах „Правды"». Сталин накладывает резолюцию: «Кажется, можно разрешить»[22]. По научным и партийным организациям страны прокатилась волна собраний с решениями в поддержку критики Лузина. Была создана Комиссия Президиума АН СССР по делу академика Н. Н. Лузина в составе: вице-президента Академии Г. М. Кржижановского (председатель), академиков А. Е. Ферсмана, С. Н. Бернштейна, О. Ю. Шмидта, И. М. Виноградова, А. Н. Баха, Н. П. Горбунова, членов-корреспондентов Л. Г. Шнирельмана, С. Л. Соболева, П. С. Александрова и проф. А. Я. Хинчина. На заседаниях Комиссии присутствовал Э. Я. Кольман, бывший в то время зав. Отделом науки МК ВКП (б). Позиции членов комиссии и других ученых, привлеченных к обсуждению «Дела» были чрезвычайно неоднородны. Если старшие участники, далекие от жизни математического сообщества Г. М. Кржижановский, и А. Е. Ферсман отрабатывали заказ власти на ограничение зарубежных публикаций и контроль зарубежных связей, но не стремились строго «покарать» Н. Н. Лузина, то часть учеников Лузина (П. С. Александров, А. Н. Колмогоров, А. Я. Хинчин) использовала ситуацию для сведения счётов по застарелым семейным Лузитанским обидам и для борьбы за власть и влияние в математическом сообществе. В своих нападках на учителя они настолько увлекались внутрицеховыми претензиями и отходили от генеральной линии обвинения в раболепии перед Западом, что и им досталось во втором залпе «Правды» — в статье «Традиции раболепия» от 9 июля 1936 года. К чести Лузитании, нападали на учителя не все его ученики. Например, М. А. Лаврентьев и П. С. Новиков уклонились от участия в работе комиссии, хотя их имена назывались П. С. Александровым среди тех, кого ограбил Лузин. Активно защищали Лузина член Комиссии академик С. Н. Бернштейн и академик А. Н. Крылов, выступили в защиту также влиятельные члены Академии В. И. Вернадский, Н. С. Курнаков и Н. В. Насонов. Академик П. Л. Капица уже 6 июля 1936 года направил В. М. Молотову гневное письмо: «Статья в „Правде" меня озадачила, поразила и возмутила». Для многих было очевидно, что Комиссия должна осудить поведение Лузина, но вопрос был в том, признает ли она его вредителем, или просто постановит, что его поведение было недостойным. Все остальные детали: кто у кого заимствовал идеи, какие отзывы писал Лузин, а какие не

писал, где он печатал свои работы, а где не печатал, — не были существенны для дальнейшей жизни или смерти ученого и учителя.

Одна из первых версий решения, прозвучавшая 11 июля, характеризовала Лузина, как врага, «своей деятельностью за последние годы принесшего вред советской науке и Советскому Союзу». С подавляющей вероятностью это означало смертный приговор или длительное заключение. Неожиданно, после пропитанного ненавистью заседания в его итоговой формулировке решение-приговор «приносил вред советской науке и Советскому Союзу» было сокращено руководителем Комиссии (без публичного обсуждения) до «принёс вред советской науке». Это уже был шаг к спасению. На следующем заседании Комиссии 13 июля Г. М. Кржижановский предложил ещё более мягкую формулировку: «…поступок Лузина является недостойным советского ученого…», — с фантастическим обоснованием — чтобы избежать плагиата из «Правды» — и с намеками на высочайшее одобрение. Это означало шанс на жизнь. Решение комиссии оказалось неожиданно мягким (по непроверенным данным, Сталин разрешил это Кржижановскому при личной встрече[22]): Н. Н. Лузин не был признан вредителем, несмотря на массу критических замечаний остался членом Академии (ему «давали возможность исправиться»), дело не переросло в судебное, он остался жив и на свободе. Но схватка продолжалась: на следующий день, 14 июля, «Правда» публикует статью «Враг, с которого сорвана маска». Там Лузин назван «классовым врагом», который «рассчитывает на мягкотелость научной среды». Л. З. Мехлис жаловался наверх на мягкость Г. М. Кржижановского и Комиссии, но своего не добился. Итоговое («мягкое») заключение Комиссии было опубликовано 6 августа 1936 года в «Правде». Там же было опубликовано и «Постановление Президиума Академии наук об академике Н. Н. Лузине», где говорилось: «Президиум считает возможным ограничиться предупреждением Н. Н. Лузина…». Публикацию этих документов предваряла передовая статья «Достоинство Советской науки», громящая Лузина и лузинщину, полная грозных намёков: «…предостережение получил не только академик Лузин. Ему принадлежит, быть может, первое место среди врагов советской науки и советской страны, — первое, но не единственное. Лузинщина ещё гнездится кое-где в советской научной общественности.» Официальное заключение комиссии АН СССР было опубликовано в «Правде» 6 августа 1936. Кончалось это заключение словами: «Все изложенное выше, резюмирующее многочисленный фактический материал, имеющийся в Академии Наук, тщательно разобранный, полностью подтверждает характеристику, данную Н. Н. Лузину в газете „Правда“». Решения Академии наук и Московского математического общества по делу Лузина никак не дезавуированы. Клеймо врага в советской маске сильно осложнило последние четырнадцать лет жизни Лузина. Он оказался без работы и без средств к существованию. Однако 1939 г. Виктор Сергеевич Кулебакин[30] принял Н. Н. Лузина на работу в Институт автоматики и телемеханики АН СССР (ныне Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН). И здесь, когда травили другого исследователя, Георгия Владимировича Щипанова, Лузин (вместе с Кулебакиным) поднял голос в его защиту. Председательствовал Комиссией по оценке работы Г. В. Щипанова академик О. Ю. Шмидт (он же был одним из обвинителей Лузина). Комиссия признала работы Щипанова абсурдными, несмотря на зафиксированное особое мнение В. С. Кулебакина и Н. Н. Лузина, считавших, что необходимы дальнейшие исследования. Позднее «условия компенсации Щипанова» были признаны выдающимся открытием. После «Дела Лузина» советские ученые сократили публикации за границей. Зарубежные контакты были взяты под котроль — этой цели власти достигли. На этот раз — малой кровью. Однако детальные исследования показывают, что тенденция к изоляции началась раньше — и Дело Лузина только окончательно оформило эту тенденцию в официальную политику. Санаторий «Узкое» (1934 год).

Слева направо: сидят Н.Д. Зелинский, И.А. Каблуков, Н.М. Кижнери, А.Н. Северцов; стоят Н.Н. Лузин, М.Н. Розанов и В. И. Вернадский. Травля Лузина не была ни первым, ни изолированным случаем. В Ленинграде на месяц раньше (4 июня) началась аналогичная кампания по обвинению Пулковской обсерватории в преклонении перед Западом. А 18 июля 1936 года в «Ленинградской правде» вышла статья «Рыцари раболепия», где ученые Пулковской обсерватории обвинялись в публикации результатов в первую очередь в иностранных изданиях. Набирало обороты Пулковское дело. По стране прошла волна региональных кампаний и дел. Например, в Томске был разгромлен набиравший международную известность журнал «Известия НИИ математи-ки и механики», издаваемый на немецком языке эмигрантами-антифашистами Стефаном Бергманом и Фрицем Нётером (братом Эмми Нётер)[33]. В Харькове было принято решение издавать известный советский журнал «Physikalische Zeitschrift der Sowjet Union» … на украинском языке! Правда, это решение было сразу отменено центральной властью[23]. Были созданы предметные подкомиссии по борьбе с лузинщиной. Председателем такой подкомиссии по лузинщине в физике был назначен академик А. Ф. Иоффе (не проявивший в этой борьбе заметной активности), а её членом был директор Пулковской обсерватории профессор Б. П. Герасимович (уже обвинённый в раболепии перед Западом). Вскоре после этого Б. П. Герасимович был осуждён и расстрелян по «Пулковскому делу».За Делом Лузина последовали гонения на генетику, арест Н. И. Вавилова, и т. д. Умер Лузин в Москве 28 февраля 1950 г. Его именем назван Кратер Лузина на Марсе.]

Литература о ЛУЗИНЕ Н.Н.

1. Николай Николаевич Лузин
2. Nikolai Nikolaevich Luzin, In: The MacTutor History of Mathematics archive
3. Ford C. E., The influence of P. A. Florensky on N. N. Luzin, Historia Mathematica 25 (1998), 332—339.
4. Лузин Н. Н., Интеграл и тригонометрический ряд. Изд. 2е. — М.: Гостехиздат, 1951.
5. М. А. Лаврентьев, Николай Николаевич Лузин, УМН, т.29, вып.5 (179) (1974, сентябрь-октябрь), 177—183.
6. Carleson L. On convergence and growth of partial sums of Fourier series. — Acta Math. 116 (1966), 135—157.
7. Lusin Nicolas, Leçons sur les Ensembles Analytiques et leurs Applications. With a preface by Henri Lebesgue and a note by Waclaw Sierpinski. Paris, Gauthier-Villars, 1930. xvi+328 pages.
8. Келдыш Л. В., Идеи Н. Н. Лузина в дескриптивной теории множеств, УМН, 1974, 29 (5), 183—196
9. Успенский В. А., Вклад Н. Н. Лузина в дескриптивную теорию множеств и функций: понятия, проблемы, предсказания, УМН, 1985, 40 (3) (243), 85-116.
10. Кановей В. Г., Развитие дескриптивной теории множеств под влиянием трудов Н. Н. Лузина УМН, 1985, 40 (3) (243), 117—155.
11. Фёдоров В. С., Труды Н. Н. Лузина по теории функций комплексного переменного, УМН, 1952, 7:2(48), 7-16.

12. Гольцман В. К., Кузнецов П. И., Работы Н. Н. Лузина по дифференциальным уравнениям и по вычислительным методам, УМН, 1952, 7:2(48), 17-30.

13. См., например, Kechris A. S., Classical descriptive set theory. Springer-Verlag, New York, 1995

14. См., например, Бари Н. К., Тригонометрические ряды. — М.: Физматгиз, 1961. — 514 с.

15. Moonens L., Pfeffer W. F., The multidimensional Luzin theorem, J. Math. Anal. Appl. 339 (1), March 2008, 746—752.

16. Saitô Kazuyuki, Non-commutative extension of Lusin's theorem, Tohoku Math. J. (2) Volume 19, Number 3 (1967), 332—340.

17. Averna D., Lusin type theorems for multifunctions, Scorza Dragoni's property and Carathéodory selections, Boll. Un. Mat. Ital. A (7), 8 (1994), 193—202.

18. Лузин Н. Н., Доказательство одной теоремы теории изгибания, Изв. АН СССР, ОТН.—1939. — № 2. — С. 81—106; № 7. — С. 115—132; № 10. — С. 65—84.

19. Николай Николаевич Лузин на сайте ИПУ РАН

20. Дерево Лузина на сайте История математики

21. Н. Н. Лузин (к столетию со дня рождения), Квант № 12, 1983

22. 1 2 3 4 5 Демидов С. С., Левшин Б. В. (отв. редакторы), Дело академика Николая Николаевича Лузина Институт истории естествознания и техники им С. И. Вавилова РАН, Архив Российской Академии Наук.

23. 1 2 3 Александров Д. А., Почему советские учёные перестали печататься за рубежом: становление самодостаточности и изолированности отечественной науки. 1914—1940 // Вопросы истории естествознания и техники. 1996. № 3. С. 4.

24. Математический сборник, 1931, № 3-4, С. 5.

25. Токарева Т. А., Хроника социальной истории отечественной математики

26. Существует труднопроверяемая легенда об этих показаниях П. А. Флоренского. В ней говорится, что доведённый до крайности он начал давать показания, но так, чтобы построенные на них обвинения рассыпались при малейшей проверке. Например, могло утверждаться, что Лузин встречался с Гитлером тогда, когда он заведомо не выезжал из СССР, и т. п.

27. Кольман Э. Я., Вредительство в науке «Большевик». 1931. № 2. С. 71-81.

28. Коммунистическая Академия — сеть высших учебных и научно-исследовательских учреждений, существовала с 1918 по 1936 годы (первоначальное название — Социалистическая академия общественных наук). Включала научные институты философии, истории, литературы, искусства и языка, советского строительства и права, мирового хозяйства и мировой политики, экономики, аграрный, естествознания, ряд секций, комиссий и обществ (в том числе, общества биологов-

марксистов, врачей-марксистов-ленинцев, математиков-марксистов). В 1936 году для объединения руководства наукой в одном центре — АН СССР — Коммунистическая Академия была ликвидирована.

29. «О врагах в советской маске» Опубликовано в газете «Правда» 3 июля 1936 года.

30. Виктор Сергеевич Кулебакин на сайте ИПУ РАН

31. Щипанов Георгий Владимирович на сайте ИПУ РАН.

32. Васильев С. Н., Труды Научного семинара «70 лет теории инвариантности»: Москва, 2 июня 2008 г. — М.: URSS, 2008. — 256 с.

33. Кликушин М. В., Красильников С. А., Анатомия одной идеологической кампании 1936 г.: «лузинщина» в Сибири // Советская история: проблемы и уроки. Новосибирск, 1992.