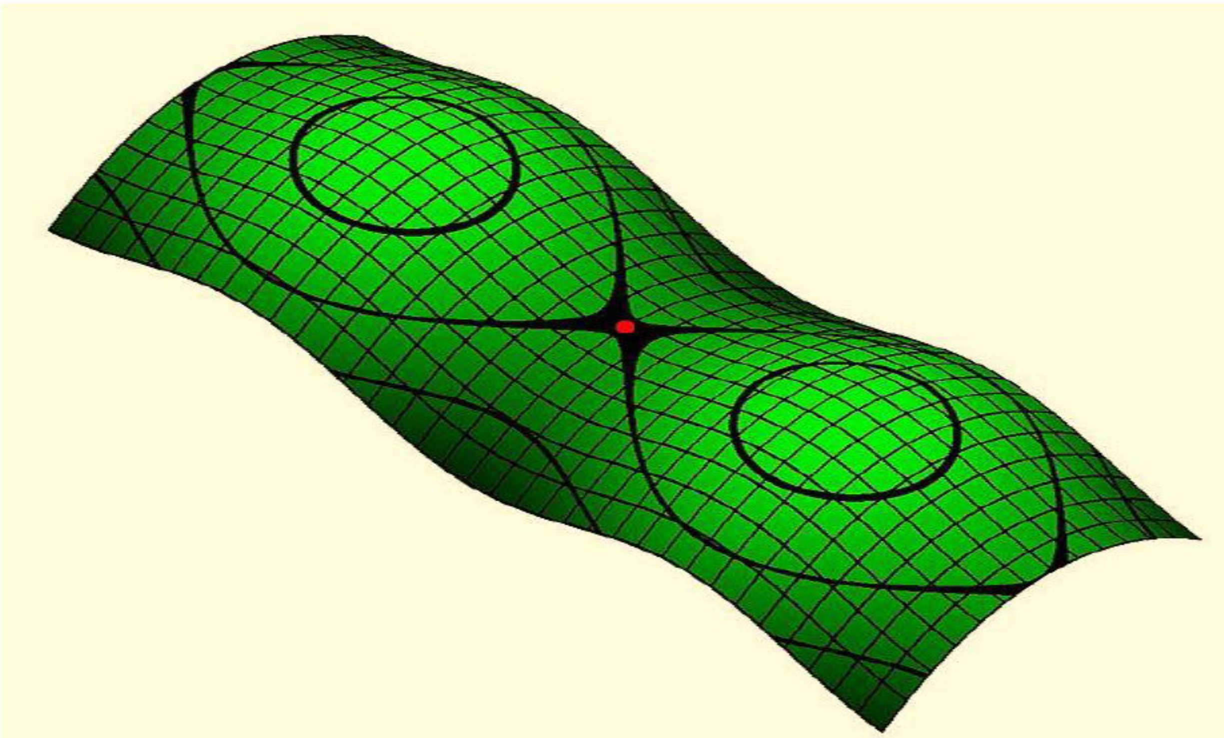
Бахарев Юрий Павлович

Поверхность *МЁБИУСА* для ШКОЛЬНИКОВ



МОСКВА 2011

Пове́рхность — *традиционное название для двумерного многообразия в пространстве*.

Содержание:

1. Способы задания поверхностей

Поверхности определяется как множество точек, координаты которых удовлетворяют определённому виду уравнений:

$$F(x, y, z) = 0 \qquad (1)$$

Если функция непрерывна в некоторой точке и имеет в ней непрерывные частные производные, по крайней мере одна из которых не обращается в нуль, то в окрестности этой точки поверхность, заданная уравнением (1), будет правильной поверхностью.
Помимо указанного выше неявного способа задания поверхность может быть определена явно, если одну из переменных, например z, можно выразить через остальные:

$$z = f(x, y) \qquad (1')$$

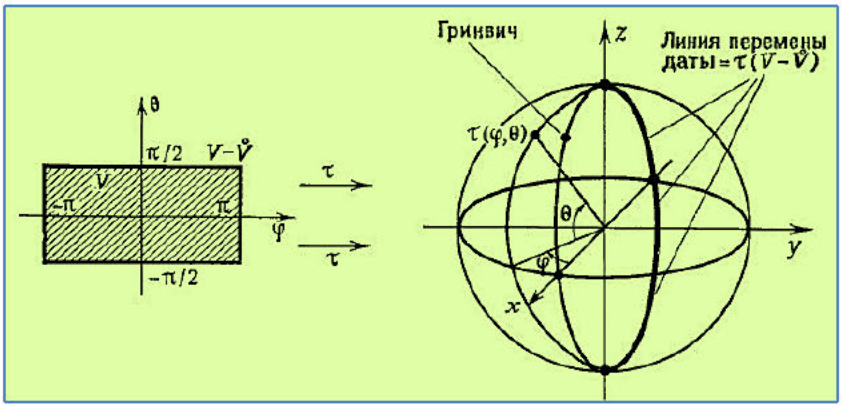
Также существует параметрический способ задания. В этом случае поверхность определяется системой уравнений:

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases} \qquad (1'')$$

2. Понятие о простой поверхности

Что такое - простая поверхность? Основным является понятие простой поверхности, которую можно представить как кусок плоскости, подвергнутый непрерывным деформациям (растяжениям, сжатиям и изгибаниям).

__**Более точно**__, ***простой поверхностью*** называется образ гомеоморфного[1] отображения (то есть взаимно однозначного и взаимно непрерывного отображения) внутренности единичного квадрата. Этому определению можно дать аналитическое выражение.



Смотрим на рисунок, показанный ниже. Отображаем квадрат, заданный в координатах углов φ и Θ.

Пусть на плоскости с прямоугольной системой координат φ и Θ задан квадрат, координаты внутренних точек которого

[1] Гомеоморфизм (от гомео... и греч. morphe — вид, форма), одно из основных понятий топологии. Две фигуры (точнее, два топологических пространства) называются гомеоморфными, если существует взаимно однозначное непрерывное отображение любой из них на другую, для которого обратное отображение тоже непрерывно; при этом само отображение называется гомеоморфизмом. Например, любой круг гомеоморфен любому квадрату, любые два отрезка гомеоморфны, но отрезок не гомеоморфен ни окружности, ни прямой. Прямая гомеоморфна любому интервалу (то есть отрезку с удалёнными концами). На основе понятия Г. определяется важнейшее понятие топологического свойства как такого, которое, будучи присуще какой-либо фигуре, присуще и любой фигуре, ей гомеоморфной.

удовлетворяют неравенствам $-\pi < \varphi < +\pi$, $-\pi/2 < \Theta < +\pi/2$. Гомеоморфный образ квадрата в пространстве с прямоугольной системой координат x, y, z задаётся при помощи формул $x = x(\varphi, \Theta)$, $y = y(\varphi, \Theta)$, $z = z(\varphi, \Theta)$ (параметрическое задание поверхности). При этом от функций $x(\varphi, \Theta)$, $y(\varphi, \Theta)$ и $z(\varphi, \Theta)$ требуется, чтобы они были непрерывными и чтобы для различных точек (φ, Θ) и (φ', Θ') были различными соответствующие точки (x, y, z) и (x', y', z').Примером простой поверхности является полусфера. Вся же сфера не является простой поверхностью. Это вызывает необходимость дальнейшего обобщения понятия поверхности. Подмножество пространства, у каждой точки которого есть окрестность, являющаяся простой поверхностью, называется правильной поверхностью.

3. Поверхность в дифференциальной геометрии

В дифференциальной геометрии[2] поверхность задается функцией:

$$F(x,\ y,\ z)$$

сследуемые поверхности обычно подчинены условиям, связанным с возможностью применения методов дифференциального исчисления. Как правило, это — условия гладкости поверхности, то есть существования в каждой точке поверхности определённой касательной плоскости, кривизны и т. д. Эти требования сводятся к тому, что функции, задающие поверхность, предполагаются однократно, дважды, трижды, а в некоторых вопросах — неограниченное число раз дифференцируемыми или даже аналитическими функциями[3]. При этом дополнительно накладывается условие регулярности.

(2)

$$F(x, y, z) = 0,\ F : \Omega \to \mathbb{R}^3$$

Случай неявного задания. Поверхность, заданная уравнением

[2] **Дифференциа́льная геоме́трия и дифференциальная тополо́гия** — два смежных раздела математики, которые изучают гладкие многообразия (обычно с дополнительными структурами). Эти два раздела математики почти неразделимы, при этом часто оба раздела называют дифференциальной геометрией. Они находят множество применений в физике, особенно в общей теории относительности. Дифференциальная геометрия возникла и развивалась в тесной связи с математическим анализом, который сам в значительной степени вырос из задач геометрии. Многие геометрические понятия предшествовали соответствующим понятиям анализа. Так, например, понятие касательной предшествовало понятию производной, понятие площади и объема — понятию интеграла.

Возникновение дифференциальной геометрии относится к XVIII веку и связано с именами Эйлера и Монжа. Первое сводное сочинение по теории поверхностей написано Монжем («Приложение анализа к геометрии», 1795). В 1827 Гаусс опубликовал работу «Общее исследование о кривых поверхностях», в которой заложил основы теории поверхностей в её современном виде. С тех пор дифференциальная геометрия перестала быть только приложением анализа и заняла самостоятельное место в математике

[3] **Аналитические функции** (А.ф.), функции, которые могут быть представлены степенными рядами. Исключительная важность класса А. ф. определяется следующим. Во-первых, этот класс достаточно широк; он охватывает большинство функций, встречающихся в основных вопросах математики и её приложений к естествознанию и технике. Аналитическими являются элементарные функции — многочлены, рациональные функции, показательная и логарифмическая, степенная, тригонометрические и обратные тригонометрические, гиперболические и им обратные, алгебраические функции, и специальные функции — эллиптические, цилиндрические и др. Во-вторых, класс А. ф. замкнут относительно основных операций арифметики, алгебры и анализа; применение арифметических действий к функциям этого класса, решение алгебраических уравнений с аналитическими коэффициентами, дифференцирование и интегрирование А. ф. приводят снова к А. ф. Наконец, А. ф. обладают важным свойством единственности; каждая А. ф. образует одно "органически связанное целое", представляет собой "единую" функцию во всей своей естественной области существования. Это свойство, которое в 18 в. считалось неотделимым от самого понятия функции, приобрело принципиальное значение после установления в 1-й половине 19 в. общей точки зрения на функцию как на произвольное соответствие.

Теория А. ф. создана в 19 в., в первую очередь благодаря работам О. Коши, Б. Римана и К. Вейерштрасса.

(3)

$$\exists P_0(x_0,\,y_0,\,z_0):\;F(x_0,\,y_0,\,z_0)=0$$

является гладкой регулярной поверхностью, если функция F непрерывно дифференцируема в своей области определения Ω, а её частные производные одновременно не обращаются в нуль (условие правильности) на всём множестве Ω:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2>0 \qquad (4)$$

Случай параметрического задания. Зададим поверхность векторным уравнением

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,\;v) \qquad (5)$$

Эта система уравнений задаёт гладкую регулярную поверхность, если выполнены условия:

(6)

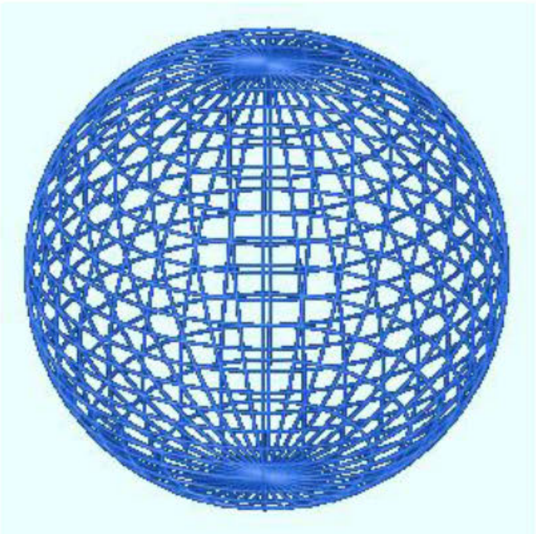
$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \qquad (u,\,v)\in\Omega \\ z = z(u,v) \end{cases}$$

система устанавливает взаимно однозначное соответствие между образом и прообразом Ω;

функции $x(u,v),\,y(u,v),\,z(u,v)$ при этом формула 4 будет выглядеть:

$$\begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} y'_u & y'_v \\ z'_u & z'_v \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z'_u & z'_v \\ x'_u & x'_v \end{vmatrix}^2>0 \qquad (7)$$

Геометрически последнее условие означает, что векторы $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u},\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$



нигде не параллельны. Параметры u, v можно рассматривать как внутренние координаты точек поверхности. Фиксируя одну из координат, мы получаем два семейства координатных кривых, покрывающих поверхность координатной сеткой.

Случай явного задания.

Поверхность S может быть определена как график функции z = f(x,y); тогда S является гладкой регулярной поверхностью, если функция f дифференцируема. Этот вариант можно рассматривать как частный случай параметрического задания:

$$x=u;\;y=v;\;z=f(u,v)$$

3.1 Касательная плоскость

Касательная плоскость в точке гладкой поверхности — это плоскость, имеющая максимальный порядок соприкосновения с поверхностью в этой точке. Эквивалентный вариант определения: касательная плоскость есть плоскость, содержащая касательные ко всем гладким кривым, проходящим через эту точку.

Пусть гладкая кривая на параметрически заданной поверхности $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,\ v)$ задана в виде: $u = u(t);\ v = v(t)$ Направление касательной к такой кривой даёт вектор:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\frac{dv}{dt}$$

Отсюда видно, что все касательные ко всем кривым в данной точке лежат в одной плоскости, содержащей векторы

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$$

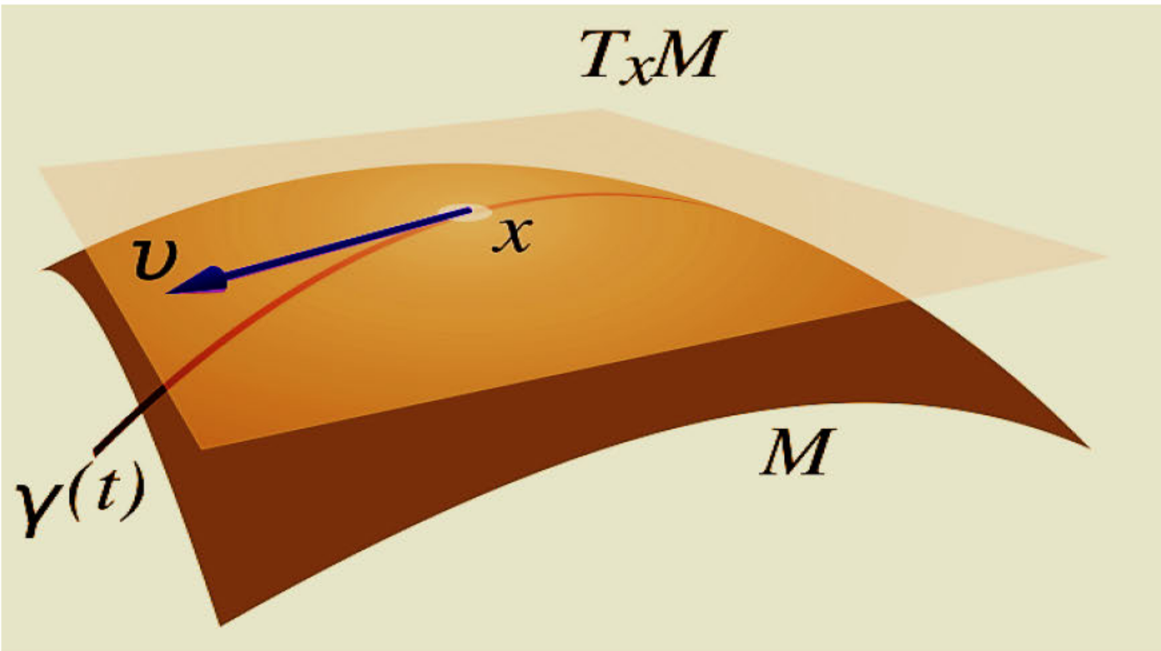
которые мы выше предположили независимыми.

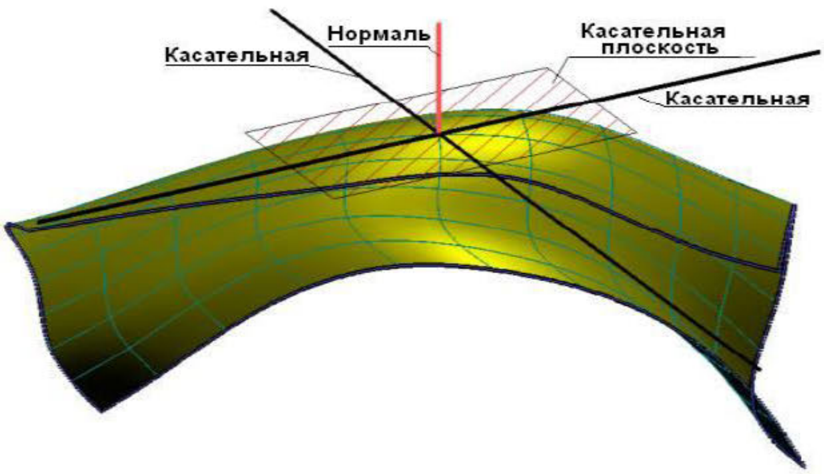
Уравнение касательной плоскости в точке $\mathbf{r_0} = \left\{x_0;\ y_0;\ z_0\right\}$ имеет вид:

$$\left(\mathbf{r} - \mathbf{r_0}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right) = 0$$

(смешанное произведение векторов).

Касательная плоскость в точке поверхности будет выглядеть следующим образом:





На этом рисунке мы еще видим нормаль – отрезок перпендикулярный к плоскости касания и проведенный в точку касания. Единичная нормаль – это вектор, который обозначают $\overrightarrow{n_0}$ его длина, или как в математике говорят - **модуль**, равна удинице и обозначается так:

$$|\overrightarrow{n_0}|$$

В координатах уравнения касательной плоскости для разных способов задания поверхности приведены в таблице:

	касательная плоскость к поверхности в точке $\{x_0,\ y_0,\ z_0\}$
неявное задание	$\frac{\partial F}{\partial x}_{(x_0,y_0,z_0)}(x-x_0)+\frac{\partial F}{\partial y}_{(x_0,y_0,z_0)}(y-y_0)+\frac{\partial F}{\partial z}_{(x_0,y_0,z_0)}(z-z_0)=0$
явное задание	$\frac{\partial f}{\partial x}_{(x_0,y_0,z_0)}(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}_{(x_0,y_0,z_0)}(y-y_0)=(z-z_0)$
параметрическое задание	$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix}=0$

Все производные берутся в точке (x_0,y_0,z_0).

3.2 Метрика и внутренняя геометрия.

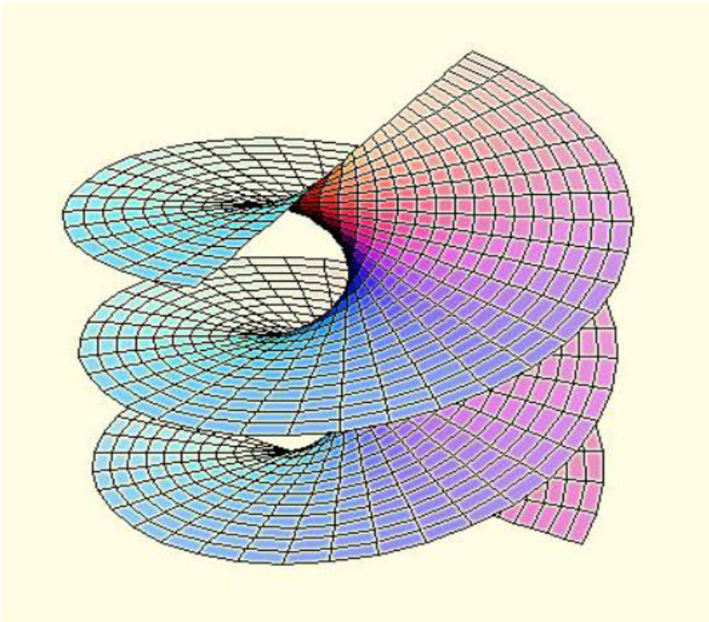
Вновь рассмотрим гладкую кривую: $u=u(t);\ v=v(t)$

Элемент её длины определяется из соотношения:

$$ds^2=|d\mathrm{r}|^2=(\frac{\partial \mathrm{r}}{\partial u}du+\frac{\partial \mathrm{r}}{\partial v}dv)^2=E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2$$

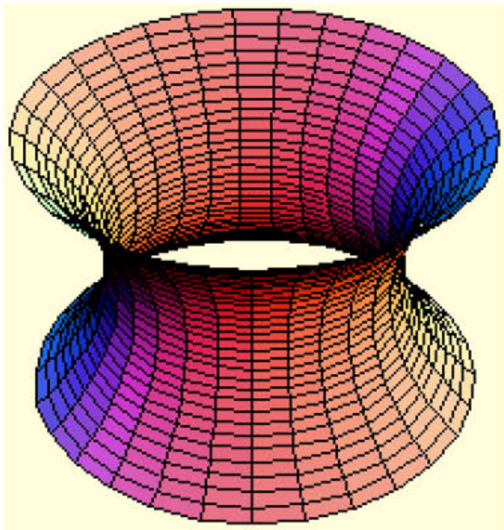
где $E=\mathbf{r}'_\mathbf{u}\mathbf{r}'_\mathbf{u};\ F=\mathbf{r}'_\mathbf{u}\mathbf{r}'_\mathbf{v};\ G=\mathbf{r}'_\mathbf{v}\mathbf{r}'_\mathbf{v}$

Эта квадратичная форма[4] называется первой квадратичной формой и представляет собой двумерный вариант метрики поверхности. Для регулярной поверхности её дискриминант $EG - F^2 > 0$ во всех точках. Коэффициент $F = 0$ в точке поверхности тогда и только тогда, когда в этой точке координатные кривые ортогональны. В частности, на плоскости с декартовыми координатами $u, \ v$ получается метрика $ds^2 = du^2 + dv^2$ (теорема Пифагора).



ГЕЛИКОИД

Метрика не определяет однозначно форму поверхности. Например, метрика геликоида и катеноида, параметризованных соответствующим образом, совпадает, то есть между их областями существует соответствие, сохраняющее все длины (изометрия). Свойства, сохраняющиеся при изометрических преобразованиях, называются внутренней геометрией поверхности. Внутренняя геометрия не зависит от положения поверхности в пространстве и не меняется при её изгибании без растяжения и сжатия (например, при изгибании цилиндра в конус).



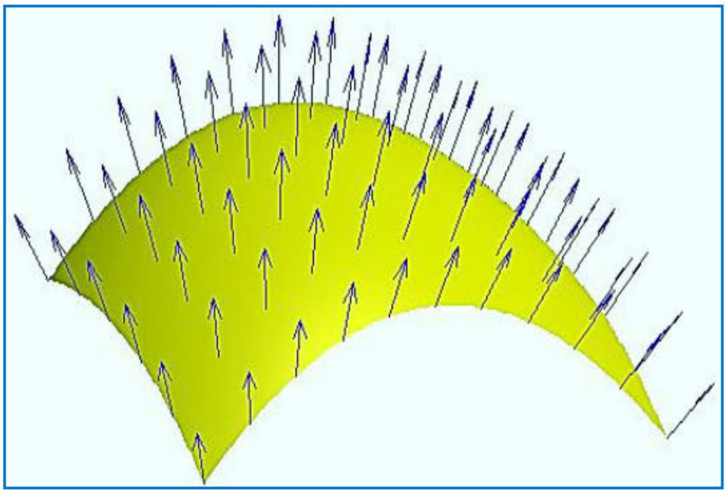
КАТЕНОИД

Метрические коэффициенты $E, \ F, \ G$ определяют не только длины всех кривых, но и вообще результаты всех измерений внутри поверхности (углы, площади, кривизна и др.). Поэтому всё, что зависит только от метрики, относится к внутренней геометрии.

3.3 Нормаль и нормальное сечение

Одной из основных характеристик поверхности является её нормаль — единичный вектор, перпендикулярный касательной плоскости в заданной точке: $$\mathbf{m} = \frac{[\mathbf{r}'_\mathbf{u}, \mathbf{r}'_\mathbf{v}]}{|[\mathbf{r}'_\mathbf{u}, \mathbf{r}'_\mathbf{v}]|}$$

[4] **Квадратичная форма (К.ф.), форма 2-й степени от n переменных x1, x2,..., x_n, т.е. многочлен от этих переменных, каждый член которого содержит либо квадрат одного из переменных, либо произведение двух различных переменных. Общий вид К. ф. при n = 2:** $ax_1^2 + bx_2^2 + cx_1x_2$ **при n = 3:** $ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2 + dx_1x_2 + ex_1x_3 + fx_2x_3$



Знак нормали зависит от выбора координат.

3.4 ВЕКТОРЫ НОРМАЛИ В ТОЧКАХ ПОВЕРХНОСТИ

Сечение поверхности плоскостью, содержащей нормаль (в данной точке), образует некоторую кривую на поверхности, которая называется нормальным сечением поверхности. Главная нормаль для нормального сечения совпадает с нормалью к поверхности (с точностью до знака). Если же кривая на поверхности не является нормальным сечением, то её главная нормаль образует с нормалью поверхности некоторый угол θ. Тогда кривизна k кривой связана с кривизной k_n нормального сечения (с той же касательной) формулой Менье: $k_n = \pm k \cos\theta$

	Координаты нормали в точке поверхности
неявное задание	$\dfrac{\left(\frac{\partial F}{\partial x};\ \frac{\partial F}{\partial y};\ \frac{\partial F}{\partial z}\right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}$
явное задание	$\dfrac{\left(-\frac{\partial f}{\partial x};\ -\frac{\partial f}{\partial y};\ 1\right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+1}}$
параметрическое задание	$\dfrac{\left(\frac{D(y,z)}{D(u,v)};\ \frac{D(z,x)}{D(u,v)};\ \frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right)}{\sqrt{\left(\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\right)^2+\left(\frac{D(z,x)}{D(u,v)}\right)^2+\left(\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right)^2}}$

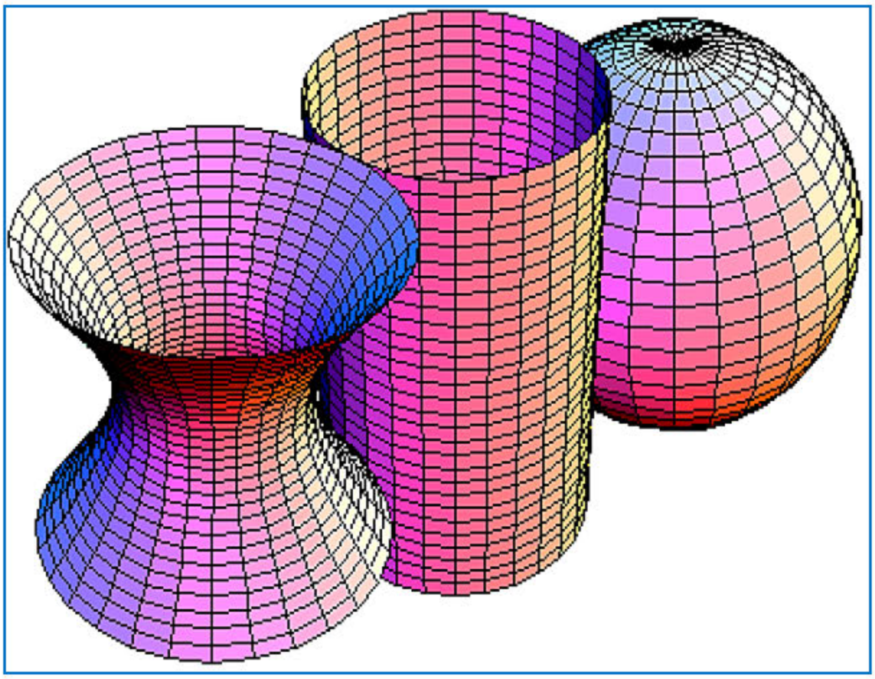
здесь

$$\frac{D(y,z)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} y'_u & y'_v \\ z'_u & z'_v \end{vmatrix},\quad \frac{D(z,x)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} z'_u & z'_v \\ x'_u & x'_v \end{vmatrix},\quad \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}$$

Все производные берутся в точке (x_0,y_0,z_0).

3.5 КРИВИЗНА

Для разных направлений в заданной точке поверхности получается разная кривизна нормального сечения, которая называется нормальной кривизной; ей приписывается знак плюс, если главная нормаль кривой идёт в том же направлении, что и нормаль к поверхности, или минус, если направления нормалей противоположны.
Вообще говоря, в каждой точке поверхности существуют два перпендикулярных направления e_1 и e_2, в которых нормальная кривизна принимает минимальное и максимальное значения; эти направления называются главными. Исключение составляет случай, когда нормальная кривизна по всем направлениям одинакова (например, у сферы или на торце эллипсоида вращения), тогда все направления в точке — главные.



Поверхности с :

отрицательной (слева),

нулевой (в центре) и

положительной (справа)

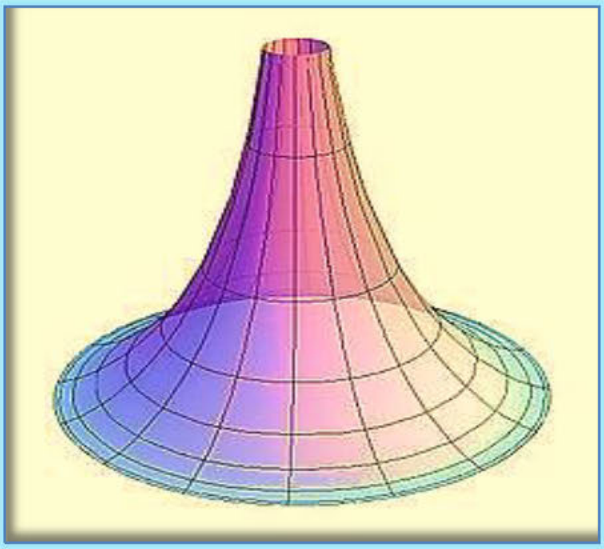
кривизной.

Нормальные кривизны в главных направлениях называются главными кривизнами;

обозначим их κ_1 и κ_2. Величина: $\mathbf{K = \kappa_1\kappa_2}$

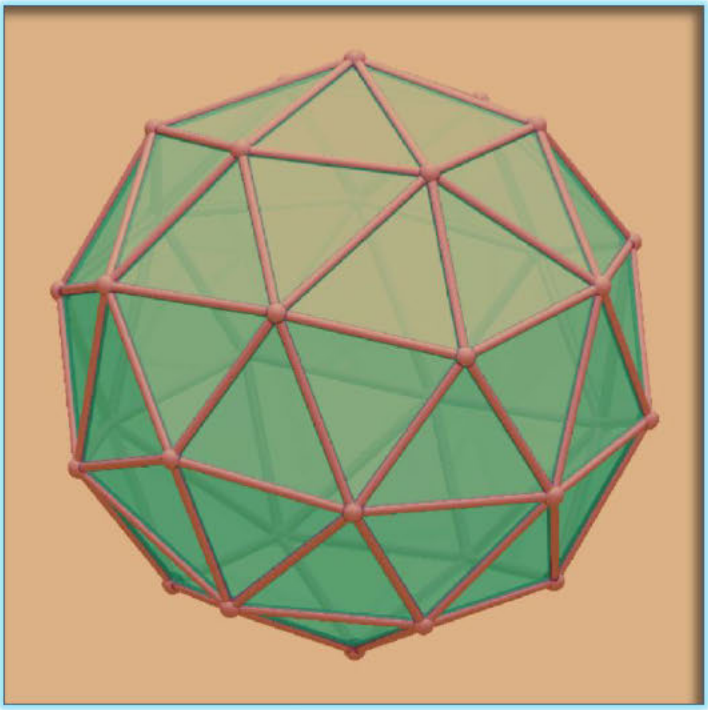
называется гауссовой кривизной, полной кривизной или просто кривизной поверхности. Встречается также термин скаляр кривизны, который подразумевает результат свёртки тензора кривизны; при этом скаляр кривизны вдвое больше, чем гауссова кривизна. Гауссова кривизна может быть вычислена через метрику, и поэтому она является объектом внутренней геометрии поверхностей (отметим, что главные кривизны к внутренней геометрии не относятся). По знаку кривизны можно классифицировать точки поверхности (см. рисунок). Кривизна плоскости равна нулю. Кривизна сферы радиуса R всюду равна .

$$\frac{1}{R^2}$$



Существует и поверхность постоянной отрицательной кривизны — **псевдосфера**.(см. рисунок)

Псевдосфера(П.), поверхность постоянной отрицательной кривизны, образуемая вращением особой кривой, т. н. трактрисы (см. Линия), около её асимптоты (см. рис.). Название подчёркивает сходство и различие со сферой, которая является примером поверхности с кривизной, также постоянной, но положительной. Интерес к изучению П. обусловлен тем, что фигуры, начерченные на гладких частях этой поверхности, подчиняются законам неевклидовой геометрии Лобачевского. Этот факт, установленный в 1868 Э. Бельтрами, сыграл существенную роль в споре о реальности Лобачевского геометрии.



3.6 Геодезические линии, геодезическая кривизна

На кривой поверхности геодезические линии, заменяя прямые, позволяют строить геометрию так, как это делается на плоскости. (см. рисунок)

Кривая на поверхности называется геодезической линией, или просто геодезической, если во всех её точках главная нормаль к кривой совпадает с нормалью к поверхности.

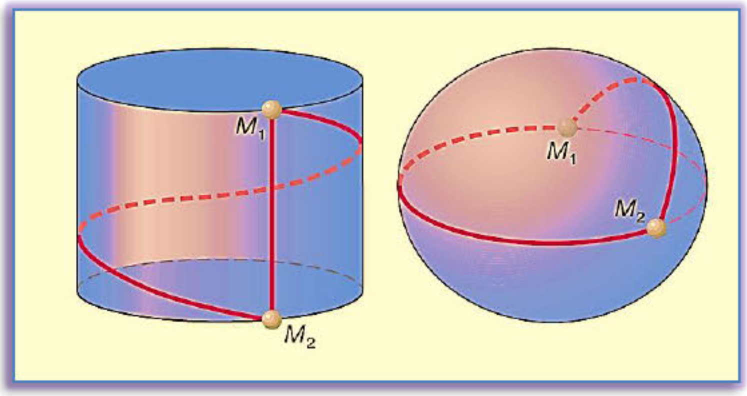
Пример: на плоскости геодезическими будут прямые и отрезки прямых, на сфере - большие круги и их отрезки.

Эквивалентное определение: у геодезической линии проекция её главной нормали на соприкасающуюся плоскость есть нулевой вектор. Если кривая не является геодезической, то указанная проекция ненулевая; её длина называется геодезической кривизной k_g кривой на поверхности. Имеет место соотношение:

$$k^2 = k_g^2 + k_n^2$$

где k - кривизна данной кривой, k_n - кривизна её нормального сечения с той же касательной.

Геодези́ческие ли́нии (геодези́ческие) — линии в многообразии, достаточно малые дуги которых являются в некотором смысле кратчайшими путями между их концами. В римановом многообразии без кручения совпадают с автопараллелями, т. е. с линиями, касательный вектор к которым переносится вдоль линии параллельно самому себе.



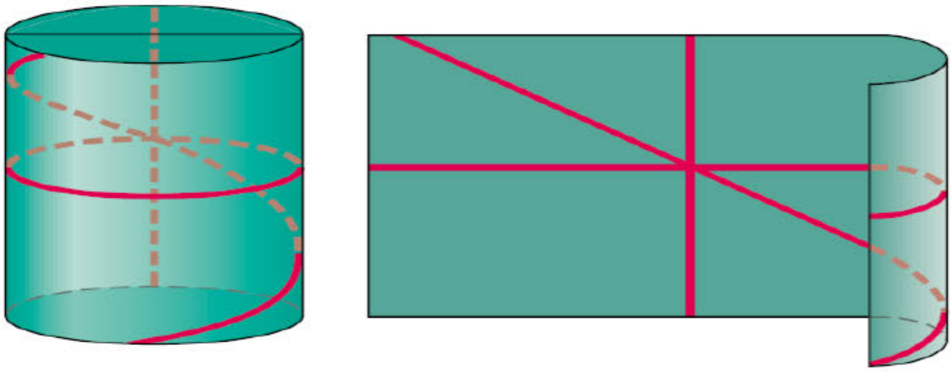
На рисунке у сферы радиуса R, кроме дуги M, M2 окружности большого радиуса, если ее длина превосходит k_R, найдутся и более короткие дуги. На цилиндре, кроме отрезка винтовой кривой, соединяющей точки M_1 и M_2, имеются и более короткие. Например, отрезок M_1M_2 прямолинейной образующей

Геодезические линии относятся к внутренней геометрии. Перечислим их главные свойства.

Через данную точку поверхности в заданном направлении проходит одна и только одна геодезическая.

На достаточно малом участке поверхности две точки всегда можно соединить геодезической, и притом только одной.

Пояснение: на сфере противоположные полюса соединяет бесконечное количество меридианов, а две близкие точки можно соединить не только отрезком большого круга, но и его дополнением до полной окружности, так что однозначность соблюдается только в малом.



Внимательно посмотрев на рисунок мы заметим, что если развернуть цилиндр на плоскость, то отрезками прямых линий станут отрезки его прямолинейных образующих, параллели и дуги винтовых кривых

Геодезическая является кратчайшей.

Более строго: на малом куске поверхности кратчайший путь между заданными точками лежит по геодезической.

3.7 Площадь

Ещё один важный атрибут поверхности — её площадь, которая вычисляется по формуле:

$$S = \iint |[\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v]| \, \mathrm{d}\, u \, \mathrm{d}\, v$$

Здесь $\mathbf{r}'_u = \left\{ \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right\}, \ \mathbf{r}'_v = \left\{ \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right\}$

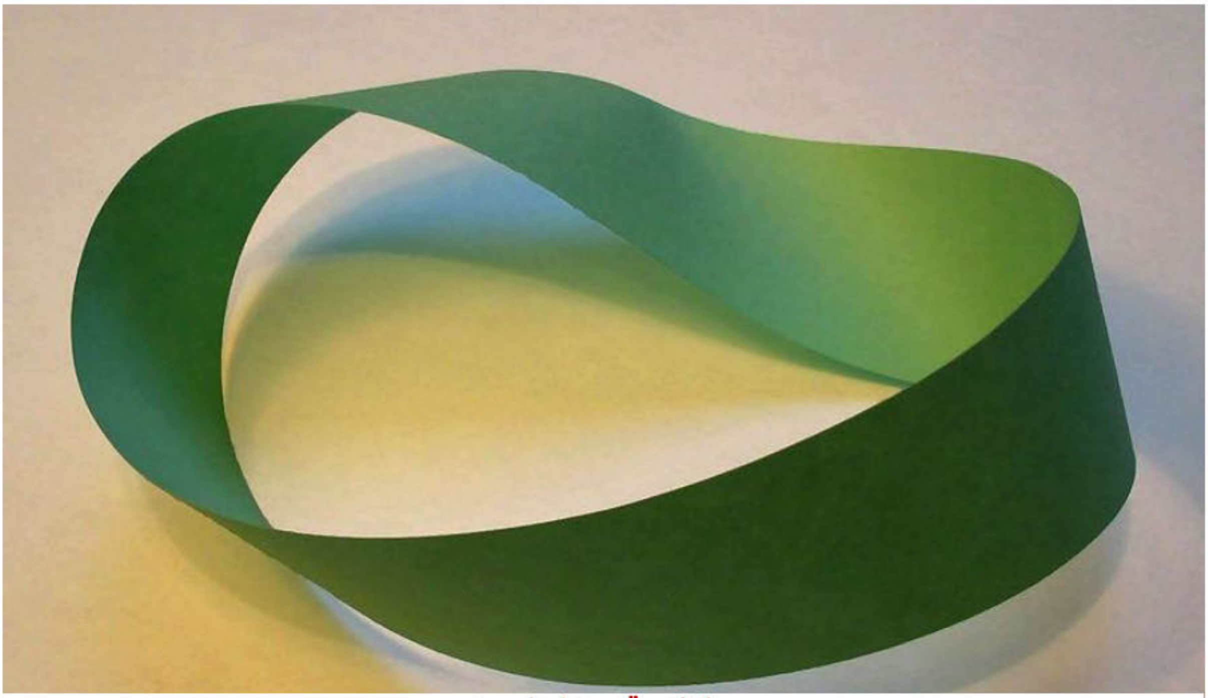
В координатах получаем:

	явное задание	**параметрическое задание**
выражение для площади	$\iint \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1} \, \mathrm{d}\, x \, \mathrm{d}\, y$	$\iint \sqrt{\left(\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{D(z,x)}{D(u,v)}\right)^2} \, \mathrm{d}\, u \, \mathrm{d}\, v$

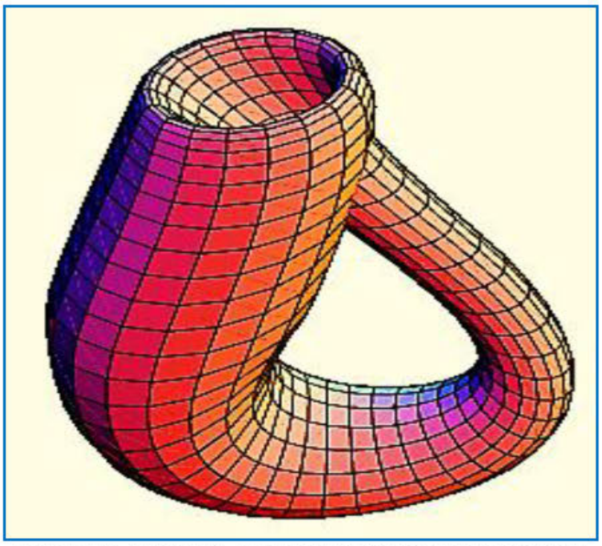
4. Поверхность в топологии

4.1 Ориентация

Также важной характеристикой поверхности является её ориентация.
Поверхность называется двусторонней, если на всей её протяжённости она обладает непрерывным вектором нормали. В противном случае поверхность называют односторонней. На рисунке ниже я вам показал как раз пример односторонней поверхности.



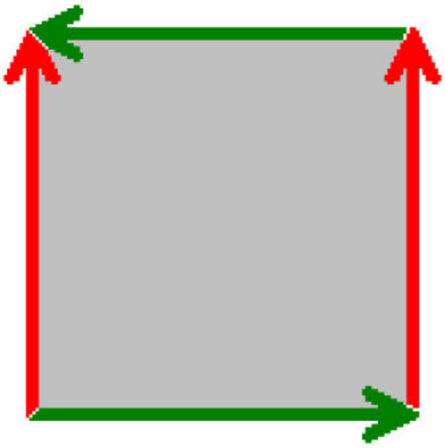
ЛЕНТА МЁБИУСА



БУТЫЛКА КЛЕЙНА, ПОГРУЖЁННАЯ В ТРЁХМЕРНОЕ ПРОСТРАНСТВО

Ориентированной называется двусторонняя поверхность относительно нормали к ней.
Примерами односторонних поверхностей с выбранным направлением, а следовательно и неориентируемых поверхностей являются **бутылка Клейна -** смотри на рисунке слева.
Также **лента Мёбиуса** является неориентируемой односторонней поверхностью – смотри на рисунке выше.
Бутылка Клейна — это определённая неориентируемая поверхность (то есть двумерное многообразие). Бутылка Клейна впервые была описана в 1882 г. немецким математиком **Ф. Клейном**. Она тесно связана с лентой Мёбиуса и проективной плоскостью. Название, по-видимому, происходит от неправильного перевода немецкого слова Fläche (поверхность), которое в немецком языке близко по написанию к слову Flasche (бутылка).

Чтобы построить модель бутылки Клейна, необходимо взять бутылку с двумя отверстиями: в донышке и в стенке, вытянуть горлышко, изогнуть его вниз, и продев его через отверстие в стенке бутылки (для настоящей бутылки Клейна в четырёхмерном пространстве это отверстие не нужно, но без него нельзя обойтись в трёхмерном евклидовом пространстве), присоединить к отверстию на дне бутылки. В отличие от обыкновенного стакана у этого объекта нет «края», где бы поверхность резко заканчивалась. В отличие от воздушного шара можно пройти путь изнутри наружу не пересекая поверхность (то есть на самом деле у этого объекта нет «внутри» и нет «снаружи»).



Более формально, бутылку Клейна можно получить склеиванием квадрата $[0,1]\times[0,1]$ идентифицируя точки (0,y) ~ (1,y) при $0\leqslant y\leqslant 1$ и (x,0) ~ (1-x,1) при $0\leqslant x\leqslant 1$ как показано на диаграмме слева.

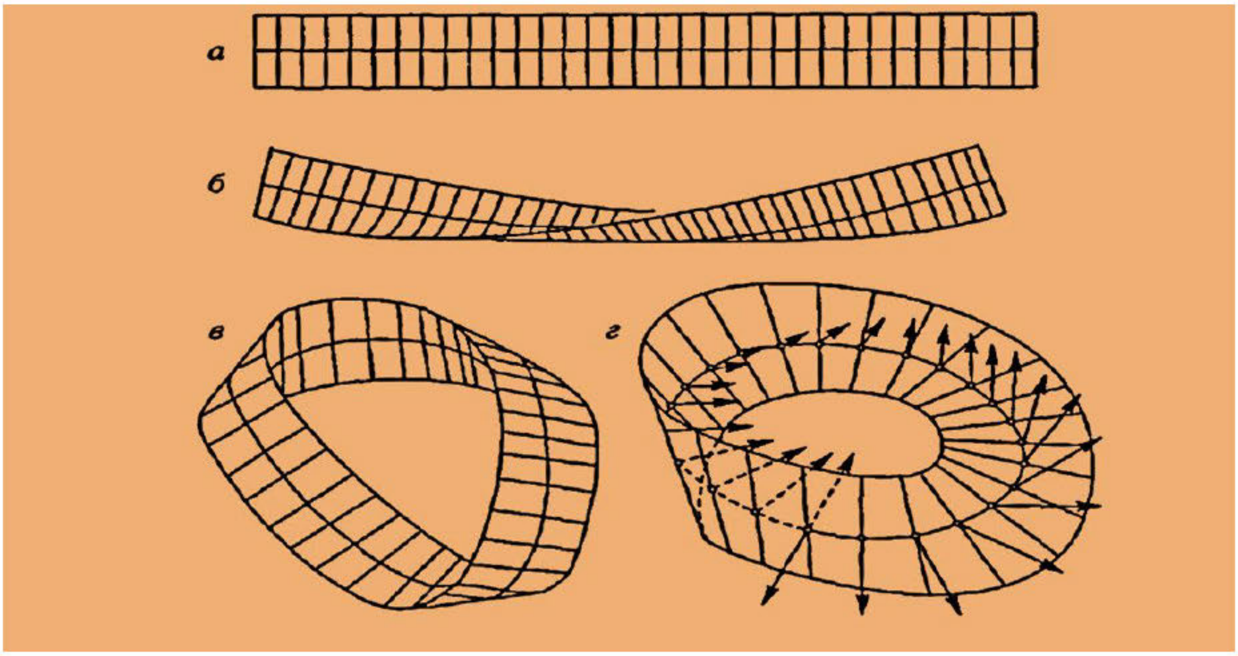
4.2 Топологические типы поверхностей

С точки зрения топологического строения, поверхности как двумерные многообразия бывают: замкнутые и открытые, ориентируемые и неориентируемые и т. д.

4.3 Односторонние поверхности.

ПОВЕРХНОСТЬ МЁБИУСА

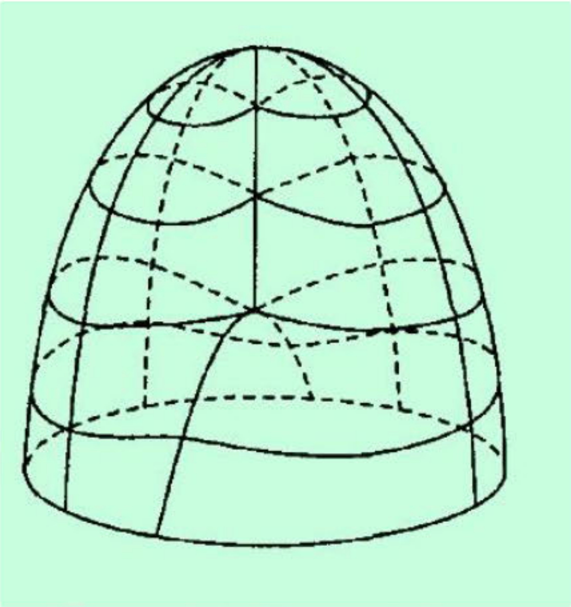
У каждой из обыкновенных поверхностей имеется по две стороны. Это относится и к замкнутым поверхностям вроде сферы или тора, и к поверхностям, имеющим



КАК СКЛЕИТЬ ЛИСТ МЁБИУСА

границы, каковы, например, диск или тор, из которого удален кусок поверхности. Чтобы легко различать две стороны одной и той же поверхности, их можно было бы раскрасить разными красками. Если поверхность — замкнутая, две краски нигде не встретятся. Если поверхность имеет граничные кривые, то разные краски встречаются по этим кривым. Предположим, что по таким поверхностям ползал бы клоп и что-нибудь мешало бы ему пересекать граничные кривые; тогда он оставался бы всегда на одной стороне поверхности.

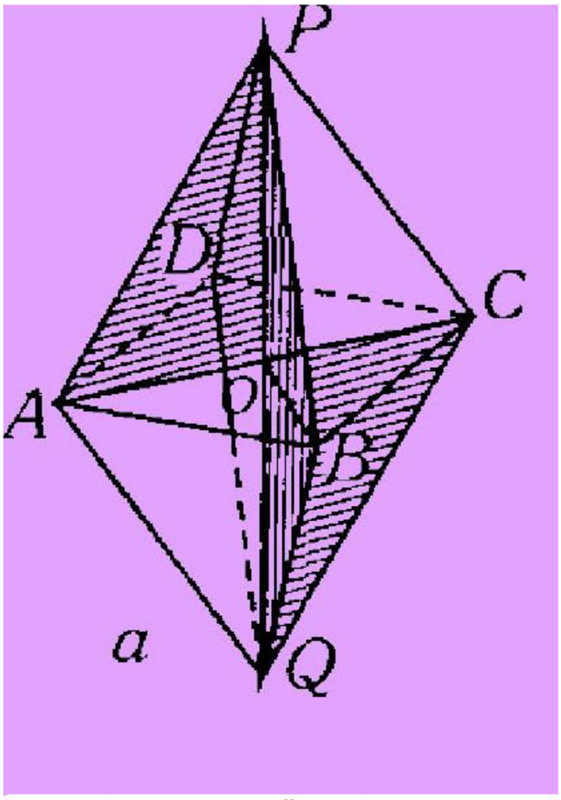
Мебиусу принадлежит честь ошеломляющего открытия: существуют поверхности, у которых имеется только одна сторона. Простейшая из таких поверхностей есть так называемая **лента (или лист) Мебиуса.** Чтобы ее построить, нужно взять лист бумаги, имеющий форму очень вытянутого прямоугольника, и склеить его концы после полуповорота, как показано на рис. ниже. Клоп, который будет ползти по этой поверхности, держась все время середины «ленты», вернувшись в исходную точку, окажется в перевернутом положении (рис. «**Как склеить лист МЁБИУСА**»). Если кто-нибудь вздумает раскрасить «только одну» сторону поверхности мебиусовой ленты, пусть лучше сразу погрузит ее всю в ведро с краской. Другое замечательное свойство поверхности Мебиуса заключается в том, что у нее только один край: вся граница состоит из одной замкнутой кривой. Обыкновенная двусторонняя поверхность, получающаяся при склеивании концов ленты без всякого поворота, явственно имеет две различные граничные кривые. Если эту последнюю поверхность разрезать по центральной линии, она распадется на две поверхности того же типа. Но если разрезать таким же образом по центральной линии ленту Мебиуса (см. рис. «**Как склеить лист МЁБИУСА**»), то мы увидим, что распадения на две части не будет. Тому, кто не упражнялся с лентой Мебиуса, трудно предсказать это обстоятельство, столь противоречащее нашим интуитивным представлениям о том, что «должно» случиться. Но если поверхность, полученную после описанного выше разрезания ленты Мебиуса, снова разрезать по ее центральной линии, то у нас в руках окажутся две не связанные, но переплетенные между собой ленты!



CROSS-CAP — ПЕРЕКРЕЩИВАЮЩАЯСЯ ШЛЯПА

Очень интересно разрезать по линиям, параллельным границе и отстоящим от нее на 1/2 и 1/3 и т. д. ширины ленты. Поверхность Мебиуса, без сомнения, заслуживает упоминания и в школьном курсе.

Граница поверхности Мебиуса представляет собой простую «незаузленную» замкнутую кривую и ее можно деформировать в окружность. Но придется допустить, что в процессе деформации поверхность будет сама себя пересекать. Получающаяся при этом самопересекающаяся односторонняя поверхность известна под названием **«кросс-кэп»** [5] (см. рисунок) Линию пересечения здесь следует считать дважды, один раз относя к одному из пересекающихся листов поверхности, другой раз — к другому. Кросс-кэп, как и всякую одностороннюю поверхность, нельзя непрерывно деформировать в двустороннюю (топологическое свойство). Любопытно, что ленту Мебиуса можно, оказывается, так деформировать, что ее граница будет плоской ломаной, — а именно, треугольником, — причем лента останется несамопересекающейся.



ЛЕНТА МЁБИУСА С ПРЯМОЛИНЕЙНЫМ КРАЕМ

Такая модель, найденная доктором Б. Туккерманом, показана на рисунке справа называется **«Лента Мёбиуса с прямоугольным краем»,** границей ленты служит треугольник ABC, ограничивающий половину диагонального квадратного сечения октаэдра (симметричного относительно этого сечения).

Сама лента состоит при этом из шести граней октаэдра и четырех прямоугольных треугольников — четвертей вертикальных диагональных плоскостей октаэдра[6].

- Другой любопытный пример односторонней поверхности — так называемая **«бутылка Клейна».** Это — замкнутая поверхность, но она, в противоположность известным нам замкнутым поверхностям, не делит пространства на «внутреннюю» и «внешнюю» части.(см рисунок выше) Топологически она эквивалентна паре кросс-кэпов со склеенными между собой граничными кривыми.

Можно доказать, что всякая замкнутая односторонняя поверхность рода p = 1, 2,... топологически эквивалентна сфере, из которой вынуты p дисков и заменены кросс-кэпами. Отсюда легко выводится, что **эйлерова характеристика V-E+F** такой поверхности связана с родом p соотношением **V-E+F=2-p.** Доказательство этого предложения такое же, как и для двусторонних поверхностей. Прежде всего убедимся, что эйлерова характеристика кросс-кэпа или ленты Мебиуса равна 0.

[5] Cross-cap – «перекрещивающаяся шляпа» (англ.)

[6] Из поверхности октаэдра вырезаются грани ABP и BCQ. К оставшимся шести граням приклеиваются четыре треугольника OAP, OBP, OCQ и OBQ. На рис. «ЛЕНТА МЁБИУСА С ПРЯМОЛИНЕЙНЫМ КРАЕМ» приведена развертка описанной поверхности. По линии, соединяющей точку O с точкой, помеченной двумя буквами Л и С, надо сделать разрез, а потом склеить соответствующие отрезки края развертки. Жирными отрезками обозначен край ленты (периметр треугольника ABC).

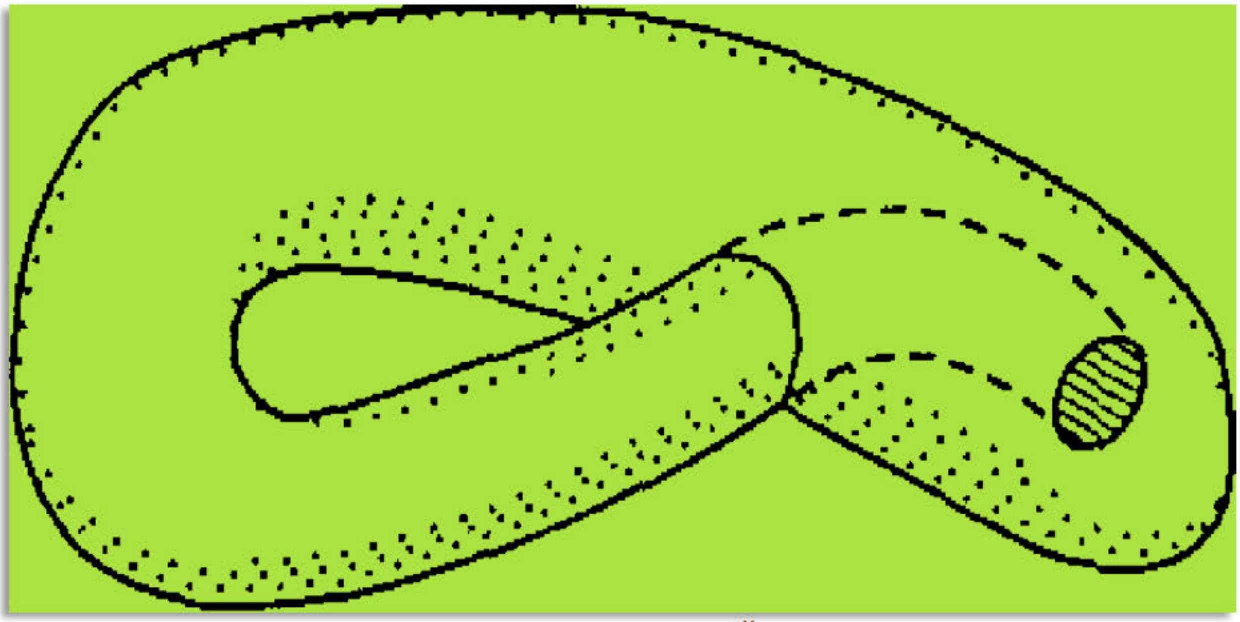


РИС. БУТЫЛКА КЛЕЙНА

Для этого заметим, что, перерезая поперек ленту Мебиуса, предварительно подразделенную на области, мы получим прямоугольник, у которого будут все лишнее вершины и одна лишняя дуга, число же областей останется то же самое, что и для ленты Мебиуса.

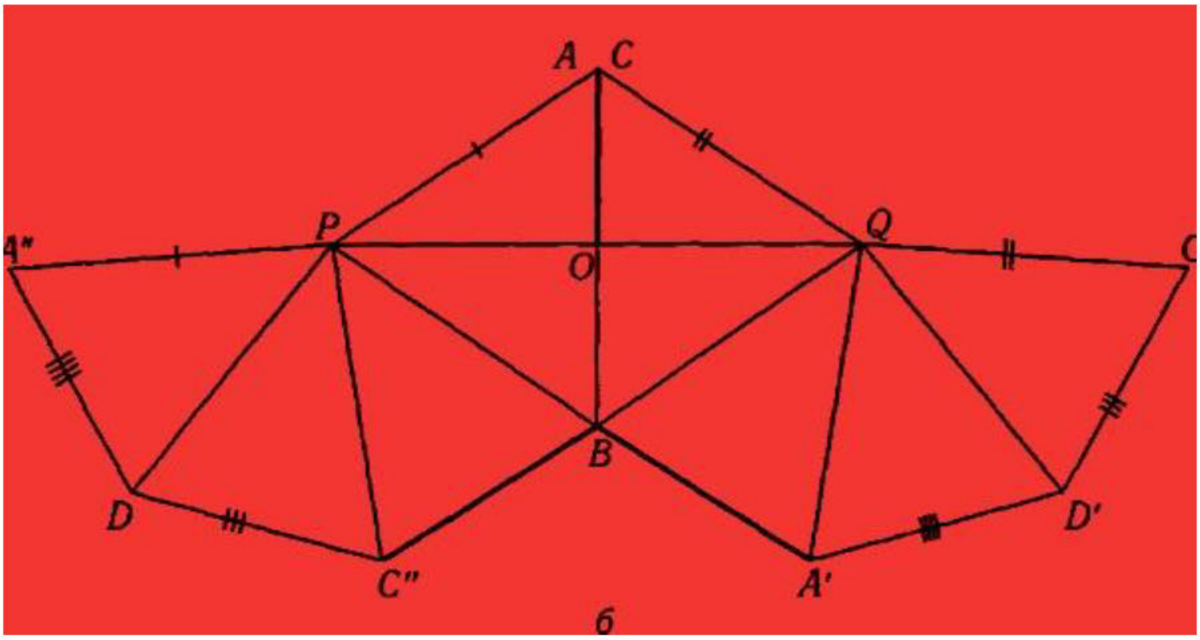
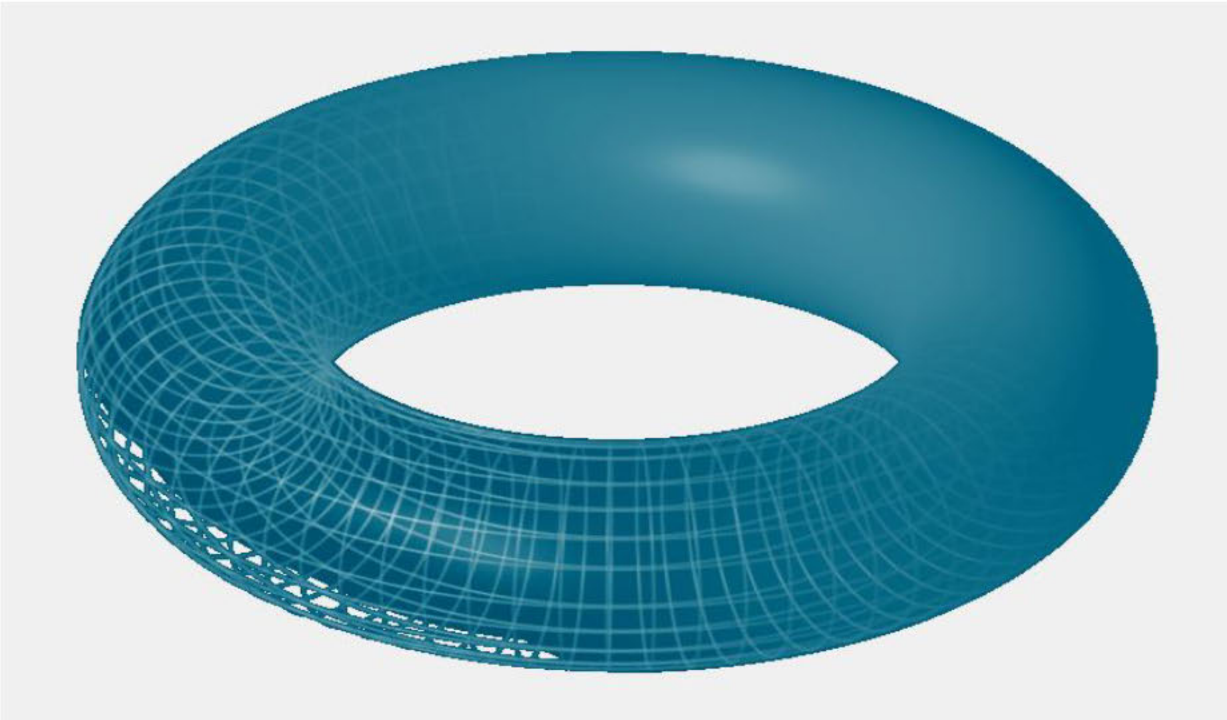


РИС. РАЗВЕРТКА ЛЕНТЫ МЁБИУСА



ТОР

Мы знаем, что для прямоугольника V — E + F = 1. Следовательно, для ленты Мебиуса V — E + F = 0. Предлагаем читателю в качестве упражнения восстановить это доказательство во всех подробностях. Изучение топологической структуры поверхностей, подобных тем, которые только что были описаны, проводится более удобно, если воспользоваться плоскими многоугольниками с попарно идентифицированными сторонами.

Так, на схемах **рис. «Замкнутые поверхности, определенные посредством идентификации сторон квадрата»** стрелки показывают, какие из параллельных сторон и в каком направлении должны быть идентифицированы: если возможно, то физически, если невозможно, то хотя бы мысленно, абстрактно.

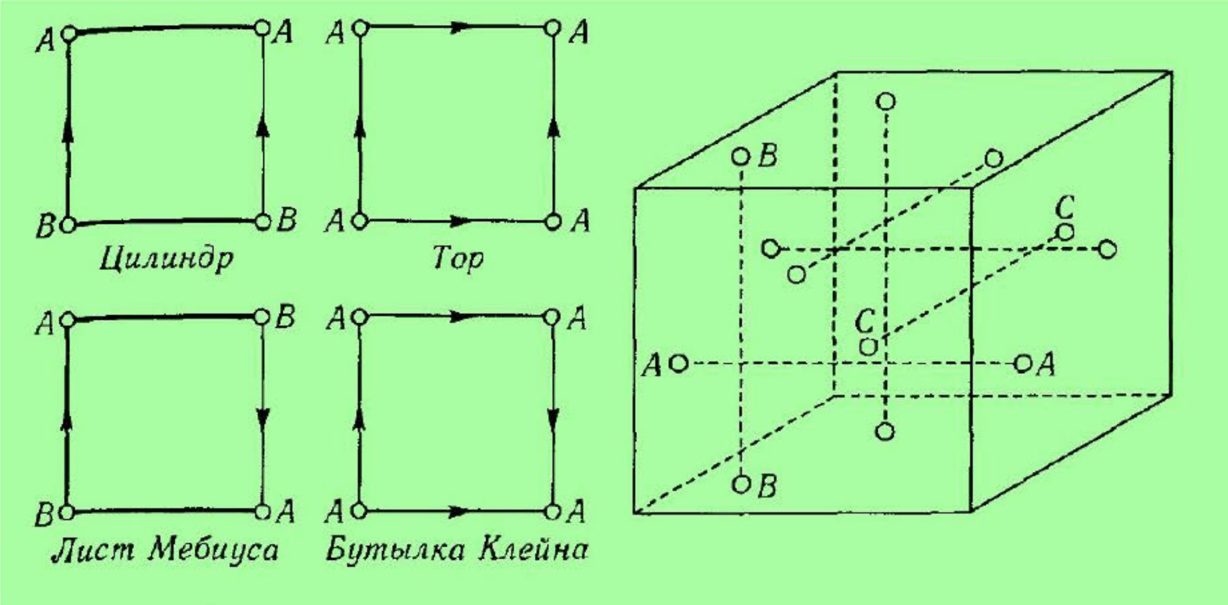


РИС. ПОВЕРХНОСТИ ОПРЕДЕЛЕННЫЕ ПОСРЕДСТВОМ ИДЕНТИФИКАЦИИ

С правой стороны рисунка показано: **«Определение ТРЕХМЕРНОГО ТОРА посредством идентификации граней куба»** Метод идентификации можно применить и для определения трех-мерных замкнутых многообразий, аналогичных двумерным замкнутым поверхностям. Например, отождествляя соответствующие точки взаимно противоположных граней куба мы получаем замкнутое трехмерное многообразие, называемое **трехмерным тором.**

Тор — поверхность вращения(см. рисунок), получаемая вращением образующей окружности вокруг оси, лежащей в плоскости этой окружности. Ось тора может лежать вне образующей окружности либо касаться её.

Уравнение тора с расстоянием от центра образующей окружности до оси вращения R и с радиусом образующей окружности r может быть задано параметрически.

Параметрическое Уравнение тора с расстоянием от центра образующей окружности до оси вращения R и с радиусом образующей окружности r может быть задано параметрически в виде:

$$\begin{cases} x(\varphi,\psi) = & (R + r\cos\varphi)\cos\psi \\ y(\varphi,\psi) = & (R + r\cos\varphi)\sin\psi \qquad \varphi,\psi \in [0, 2\pi) \\ z(\varphi,\psi) = & r\sin\varphi \end{cases}$$

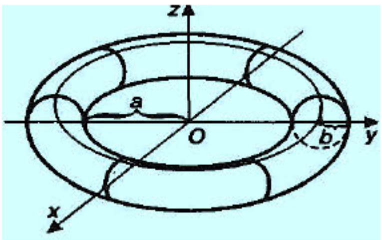
Алгебраическое Непараметрическое уравнение в тех же координатах и с теми же радиусами имеет четвёртую степень:

$$\left(x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2\right)^2 - 4R^2\left(x^2 + y^2\right) = 0$$

В частности, тор является поверхностью четвёртого порядка.

Уравнение и график тора

Тор — поверхность, полученная вращением окружности вокруг оси, лежащей в плоскости данной окружности и не пересекающей ее. Эта поверхность напоминает спасательный круг, камеру автомобильной шины.



Рассмотрим тор, полученный вращением вокруг оси Oz окружности, заданной **параметрическими уравнениями**

$$x = a + b\cos u,\ \ y = 0,\ \ z = b\sin u\ \ (b < a)$$

Эта окружность лежит в плоскости Oxz (y = 0) и определяется уравнениями вида

$$x = f(u), z = \varphi(u),\ \ f(u) = a + b\cos u,\ \ \varphi(u) = b\sin u$$

В соответствии с **параметрическим уравнением поверхности вращения**

$$x = f(u)\cos v,\ \ y = f(u)\sin v,\ \ z = \varphi(u)$$

получаем ***параметрическое уравнения тора***

$$x = a\sin u\cos v,\ \ y = a\sin u\sin v,\ \ z = a(\ln tg(u/2) + \cos u)$$

Таким образом мы увидели, что, частности, тор является поверхностью четвёртого порядка. При сечении тора бикасательной плоскостью, получающаяся кривая четвёртого порядка оказывается вырожденной: пересечение является объединением двух окружностей Вилларсо[7].

Тороидальная поверхность впервые была рассмотрена древнегреческим математиком Архитом при решении задачи об удвоении куба. Другой древнегреческий математик, Персей, написал книгу о спирических линиях — сечениях тора плоскостью, параллельной его оси.

В топологии тор определяется как произведение двух окружностей, обобщением этого понятия является n-мерный тор

$$T^n = \underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_{n \text{ times}} = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n.$$

[7] В геометрии, окружности Вилларсо — названные в честь французского астронома и математика Ивона Вилларсо (1813-1883) — пара окружностей, получаемых при сечении тора вращения «диагональной» касательной плоскостью, проходящей через центр тора (эта плоскость автоматически получается бикасательной).

Такое многообразие топологически эквивалентно пространственной области, заключенной между двумя концентрическими поверхностями тора (одна внутри

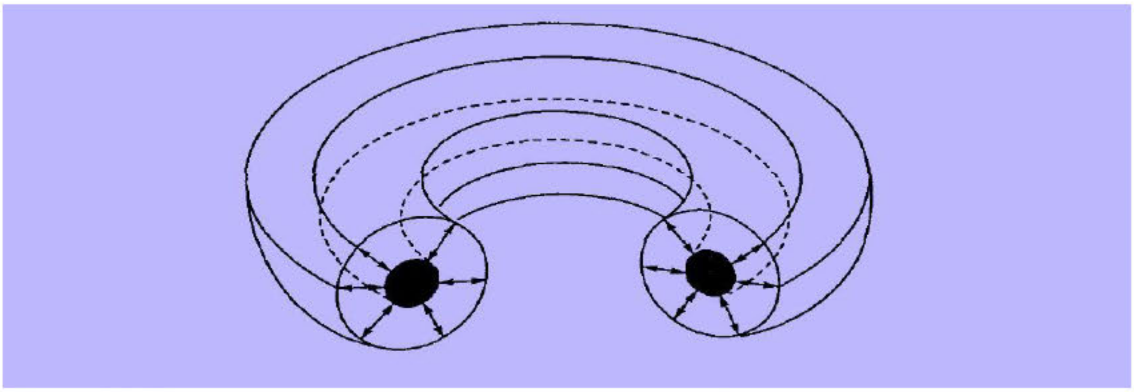


РИС. ДРУГОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ТРЕХМЕРНОГО ТОРА (РАЗРЕЗЫ ПОКАЗЫВАЮТ ИДЕНТИФИКАЦИЮ)

другой), с идентификацией соответствующих точек (см. рис.). Действительно, это последнее многообразие получается из куба, если привести в «физическое» совпадение две пары «мысленно отождествленных» взаимно противоположных граней.

Литература

Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. — 240 с.

Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. — М.: Дрофа. — 570 с.

Погорелов А. И. Дифференциальная геометрия. — 6-е издание. — М.: Наука, 1974.

Рашевский П. К. Курс дифференциальной геометрии. — 3-е издание. — М.: ГИТТЛ, 1950.

С. Е. СТЕПАНОВ ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ЛИНИИ

Яндекс. Словари›Большая советская энциклопедия

ВикипедиЯ
Свободная энциклопедия