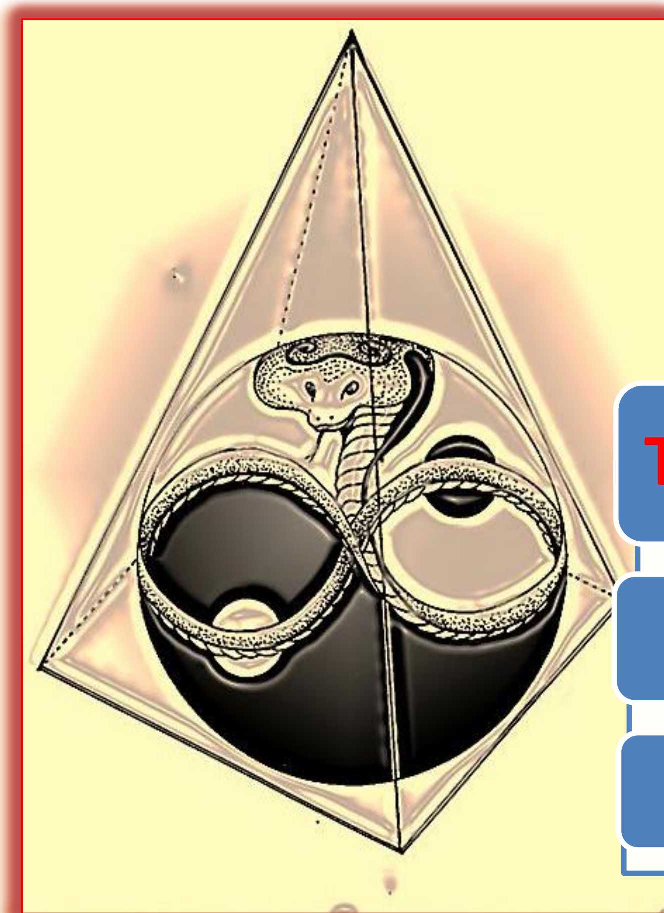
БАХАРЕВ

ЮРИЙ

ПАВЛОВИЧ



ТЕОРИЯ ЛЯПУНОВА:

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ

УСТОЙЧИВОСТЬ

ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ

Основным научным достижением Александра Михайловича Ляпунова, снискавшим ему мировую известность, было создание общего метода решения задачи об устойчивости движения – одной из важнейших проблем математической физики и механики. Решению этой проблемы он отдал всё своё замечательное математическое дарование, самоотверженный труд, энергию ума и сердца. Методы Ляпунова используются не только в математике и механике, но и в химии, термодинамике, синергетике и др. науках. Очень большую роль играет решение проблемы устойчивости движения в небесной механике и космологии. Ряд других известных работ Александра Михайловича Ляпунова относятся к области дифференциальных уравнений, теории вероятности и основ гидродинамики.

МОСКВА 2012

Проблема устойчивости движения искусственных спутников Земли приобрела в наши дни особую важность. Учёные, основываясь на результатах Ляпунова А.М., дали полное решение вопроса об устойчивости вращательных движений спутника вокруг его центра инерции, рассматривали вопросы о движении искусственного спутника в центральном поле тяготения. Эти и другие результаты позволили построить достаточно полную математическую теорию, на которой базируется современная наука о полете искусственных спутников Земли.

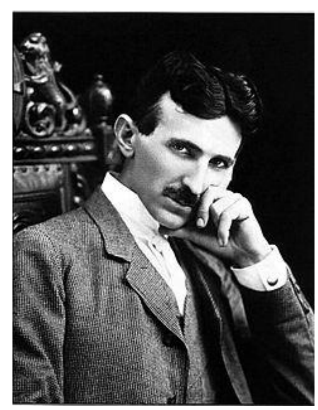
Гениальное творческое наследие Александра Михайловича Ляпунова принадлежит всему миру. Оно живёт и развивается в трудах все новых поколений ученых.

СОДЕРЖАНИЕ:

От АВТОРА

Нередко понимание природы уравнения
невозможно без детального понимания его решений.
Фримен Дайсон

Лишь недавно мы начали понимать, что инфраструктура ДНК, генетического кода, кода жизни, обладает волновыми характеристиками. Это означает, что клетки живого организма используют единую систему взаимосвязи, скорость работы которой изменяется от скорости звука до скорости света. Известно также, что код ДНК соответствует целочисленной последовательности шести первых степеней двойки — 2, 4, 8, 16, 32, 64, — из которой образуются 64 шестизначных двоичных кодовых слова, или кодона. Учение, основанное на принципе резонансных гармоник, способно переводить этот целочисленный математический код в волновые структуры различных частот и передавать эту информацию через ***Кушан СУУМ***[1]*. Любой волновой процесс, а сегодня и нелинейный, описывается системой дифференциальных уравнений. И далее, согласно Ляпунову А.М., мы можем исследовать его устойчивость, а по сути решить для себя: достаточно ли этот процесс проявился в нашем мире, чтобы мы его «заметили.» Наверное первым занялся этим вопросом* ***Анри Пуанкаре****. И иследования Ляпунова А.М. и исследования Пуанкаре А., возвращают нас ближе к тому состоянию природы, которое мы должны улавливать шестым чувством, имея осознанный математический аппарат созданный их гением. «Какими странными мы, должно быть, кажемся тем существам, которые свободно парят и играют течениями высоко над нашей головой, но что тогда сказать о тех, кто живет вне океана, за его поверхностью? Какими мы представляемся им? Чтобы жить, чтобы выжить на жестком, но хрупком дне электромагнитного океана, мы должны обладать биоэлектромагнитной структурой. В действительности, утонченный сенсорный радар позволяет человеку достичь гораздо более широкого понимания и восприятия управляющих импульсов электромагнитного поля, но сейчас он используется в недостаточной мере. На практике, мы пожертвовали всеми своими электромагнитными способностями, пользуясь услугами частных компаний или скверно управляемых государственных учреждений, которым мы вынуждены платить за то, что даровано нам самой природой. Однако еще* ***Никола Тесла***[i] *и его сотрудники из лаборатории в Колорадо Спрингс показали, что человеческий организм способен вырабатывать резонансное электромагнитное поле невероятного потенциала, оставаясь при этом в нормальном состоянии. Элементы единой цепи, связующей трехмерные физические структуры с четырехмерным световым телом, уже известны.*



---

[1] **КУШАН СУУМ [Kuxan Suum]. "Дорога к Небесам, Ведущая к Пуповине Вселенной". Незримые жизненные нити, "система кровообращения" Галактики, одним из узлов которых является КИН - Солнце.(Хосе Аргуэльес. –Фактор МАЙЯ, Гелиос, 2002г)**

[2] **ХУНАБ КУ [Hunab Ku]. "Единственный, Дарующий Движение и Меру". Принцип разумной энергии, пронизывающей всю**

Во-первых, существуют сенсорные рецепторы — пять органов чувств и "разум"; во-вторых, человеческое тело пронизано нервными каналами, переносящими электрические импульсы от органов чувств к центральному компьютеру, мозгу, для их обработки; наконец, существуют психофизические центры, тесно связанные с гормональной системой, — чакры и основанная на них сеть тонких энергопотоков. Эта цепь замыкается еще более тонкими потоками, проходящими в форме резонансных импульсов от системы чакр по галактическим волокнам Кушан Суум к основным течениям электромагнитного океана Вселенной, которые расходятся по плану Властелинов Солнца и высших наставников, то есть позволяют взаимодействовать с Солнцем и ядром Галактики, ***Хунаб Ку***[2]*». (цит. по: Хосе Аргуэльес., Фактор Майя))*

О соотношении изменчивости и устойчивости в научной картине мира.

Предположив, что в основе устройства природы лежат единые и всеобщие принципы, доступные нашему логическому мышлению, древнегреческие философы совершили, быть может, величайшее открытие в истории мысли. Если все мировые процессы управляются небольшим набором правил, которые могут быть поняты и явно сформулированы на человеческом языке, то мышление и единое начало бытия оказываются принципиально соизмеримыми, что и обусловливает возможность **познания**[3]. Однако, человеческий интеллект не ограничился этим фундаментальным предположением и подвергнул его критическому исследованию. Являются ли принципы, на которых основано устройство мира, вечными и неизменными? То есть, может ли быть так, чтобы весь мир эволюционировал, а правила, по которым эта эволюция осуществляется, оставались вне ее воздействия? Какую **онтологическую**[4] природу имеют в этом случае сами правила? Если, напротив, правила меняются, то доступен ли познанию сам акт их изменения? И в какой форме? В частности, представляет ли изменение фундаментальных основ мироздания также некий принцип в том смысле, как и сами эти основы? А если нет — то в чем состоит единство мира при условии изменчивости даже самых его основ? **Гегель** не раз замечал, что отрицание всякой глубокой истины тоже представляет собой истину. Но в данном случае дело обстоит, повидимому, сложнее. Идеи изменчивости и устойчивости можно было бы считать идеальными полюсами бинарной оппозиции, которые держат человеческую мысль в постоянном напряжении. В **античной философии**[5] сформировалось несколько

[2] ХУНАБ КУ [Hunab Ku]. "Единственный, Дарующий Движение и Меру". Принцип разумной энергии, пронизывающей всю Вселенную, одушевленную и неодушевленную. (Хосе Аргуэльес)

[3] Позна́ние — совокупность процессов, процедур и методов приобретения знаний о явлениях и закономерностях объективного мира. Познание является основным предметом гносеологии (теории познания).

[4] Онтоло́гия (новолат. ontologia от др.-греч. ὄν, род. п. ὄντος — сущее, то, что существует и λόγος — учение, наука) — раздел философии, изучающий бытие. «Онтология в своем классическом понимании есть знание о предельно общем»

[5] Античная философия — философия античности, подразделяется на древнегреческую и древнеримскую (конец VII в. до н. э. — VI в. н. э.), от раннеклассической философии до 529 г., когда указом императора Юстиниана была закрыта последняя философская школа в Афинах. Традиционно первым античным философом считается Фалес, а последним — Боэций. Античная философия сформировалась под влиянием и воздействием предфилософской греческой традиции, которую условно можно рассматривать как ранний этап самой античной философии, а также воззрений мудрецов Египта, Месопотамии, древневосточных стран.

таких оппозиций: дискретное-континуальное, конечное-бесконечное, мнение-знание и др. Им всем было суждено сыграть важные роли в последующем развитии не только философии, но и естествознания. Например, различие между мнением и знанием оказалось существенно для любой гносеологии. Различие между дискретным и континуальным было преодолено современной физикой. Значимое для науки понятие бесконечного было определено в терминах конечного.

Но изменчивость и устойчивость — категории, которые всегда присутствуют в единстве. Это — два разные лика бытия, постоянно проявляющиеся в своеобразных сочетаниях. Всякое изменение происходит, вообще говоря, на фоне некоего постоянства. А устойчивость имеет место только в присутствии изменчивости.

Поэтому полюса оппозиции здесь лучше обозначить иначе. Необходимо признать, что любой природный процесс характеризуется той или иной комбинацией (а иногда — более или менее строгой иерархией) изменчивости и постоянства. Тогда проблема заключается в том, какой из этих двух факторов фундаментальнее. В подавляющем большинстве случаев этот вопрос распадается на два: какой из указанных двух факторов онтологически фундаментальнее и какой из них фундаментальнее гносеологически? В большинстве случаев — но не во всех, поскольку различие между миром, данным сквозь призму человеческого знания, и миром самим по себе имеет неодинаковый смысл в разных философских и даже естественнонаучных системах. В одном случае речь идет о "портрете", имеющем определенную степень сходства с "оригиналом", с точностью до **изоморфизма**[6]. В другом случае предполагается точный изоморфизм (например, в античной натурфилософии или в механистической картине мира XVIII века). В кантианстве имеет смысл лишь вопрос о существовании или несуществовании мира "самого по себе", но не о его внутренней структуре. Наконец, в позитивистской традиции даже этот вопрос не имеет смысла. Но очевидно, что в любом философском контексте проблема установления приоритета между изменчивостью и устойчивостью является содержательной. Ведь независимо от того, как понимается отношение бытия и мышления, последнее может следовать разным канонам: оно может мыслить изменчивость в терминах устойчивости, либо — наоборот. Высказывалась, впрочем, крайняя позиция, в соответствии с которой изменчивость вообще немыслима ни в каких терминах (**элеаты**[7]). Но даже здесь неявно присутствуют оба полюса. Согласно воззрениям элейской школы, изменение, движение и множественность в некоторой ипостаси все же существуют, а именно — "во мнении".

Таким образом, есть все основания считать соотношение изменчивости и устойчивости сквозной темой истории мысли.

Наряду с оппозицией единое-многое, эта тема расколола античную натурфилософию на два направления.

Первое — диалектическое — отождествляет первооснову мироздания с изменением как таковым, борьбой между противоположностями и взаимной превращаемостью

[6] Изоморфизм (от др.-греч. ἴσος — «равный, одинаковый, подобный» и μορφή — «форма»). Общее определение изоморфизма — наличие сходства у разных объектов.

[7] Элеа́ты — древнегреческие философы, представители Элейской школы (конец VI — первая половина V вв. до н.э.).

природных стихий. Вечность Вселенной проявляется здесь в вечном динамической изменении качеств всех ее элементов.

Во втором — структурно-аналитическом направлении — единой основой бытия считается сама природная стихия, праматерия, которой приписываются определенные неизменные свойства или структура.

Для первого направления, персонифицированного в **Гераклите** [8], характерна, повидимому, готовность сжиться с противоречиями и парадоксами. Они возникают с необходимостью, поскольку допущение изменчивости на любом уровне бытия сочетается здесь с явным нежеланием “подставить” под нее некую неизменность на более фундаментальном уровне. Правда, все мировые процессы изменения охватываются, быть может, некоторым всеобщим принципом — логосом. Но это фактор совсем иной природы, нежели любой из текучих элементов бытия; он не может быть рядоположен таким элементам, например, в качестве следующего уровня их иерархии, для снятия противоречий в их системе. Напротив, все противоположности выступают въявь именно при “свете логоса”. Сказанное представляет, возможно, несколько вольную интерпретацию воззрений Гераклита. Но в интересующем нас плане наиболее существенным в них является признание формально непримиримых противоположностей неотъемлемой чертой миропонимания, что косвенно подтверждает **Аристотель**[9]**,** когда упоминает Гераклита в связи с изложением закона противоречия. Метафизика — это по сути философия отрицания противоречий в процессах и явлениях, что подразумевает абсолютизацию сложившихся форм и количественной стороны изменений. В этом аспекте гегелевское понимание термина “метафизика”, пожалуй, совпадает с классическим аристотелевским. “Невозможно, — замечает Аристотель, — чтобы одно и то же в одно и то же время было и не было присуще одному и тому же в одном и том же отношении”. Отрицание противоречий с неизбежностью требует положить в основу мироздания существенно неизменные элементы, свойства и отношения. Всякое изменение тогда представляет нечто производное от постоянства, а именно — “перегруппировку” этих истинно фундаментальных сущностей. В этом русле развивается второе — структурно-аналитическое — направление античной натурфилософии, объединяющее и атомизм, и концепцию элементов-носителей качеств, и “стихийную” милетскую школу, и даже в высшей степени оригинальное учение **Анаксагора** [10]. В такой философии

[8] Гераклúт Эфéсский (др.-греч. Ἡράκλειτος ὁ Ἐφέσιος, 544—483 гг. до н. э) — древнегреческий философ-досократик. Единственное его сочинение, от которого сохранилось только несколько десятков фрагментов-цитат, — книга «О природе», состоявшая из трех частей («О природе», «О государстве», «О боге»). Основатель первой исторической или первоначальной формы диалектики. Гераклит был известен как Мрачный или Тёмный, и его философская система контрастировала с идеями Демокрита, на что обратили внимание последующие поколения. Автор известной фразы «Всё течёт, всё меняется» (др.-греч. Πάντα ῥεῖ καὶ οὐδὲν μένει). Точная формулировка фразы «πάντα ῥεῖ καὶ κινεῖται, καὶ οὐδὲν μένει». Потому и перевод более правильный: «Все течет и движется, и ничего не пребывает».

[9] Аристóтель (др.-греч. Ἀριστοτέλης; 384 до н. э., Стагир — 322 до н. э., Халкида, остров Эвбея) — древнегреческий философ. Ученик Платона. С 343 до н. э. — воспитатель Александра Македонского. В 335/4 г. до н. э. основал Ликей (др.-греч. Λύκειο Лицей, или перипатетическую школу). Натуралист классического периода. Наиболее влиятельный из диалектиков древности; основоположник формальной логики. Создал понятийный аппарат, который до сих пор пронизывает философский лексикон и сам стиль научного мышления.

[10] Анаксагор из Клазомен (др.-греч. Ἀναξαγόρας, ок. 500 до н. э. — 428 до н. э.) — древнегреческий философ, математик и астроном, основоположник афинской философской школы.

метафизики[11] естественным образом возникает идея неизменности фундаментальных принципов (или законов) природы. Эмпирически фиксируемая на уровне макроопыта текучесть и множественность вещей существуют лишь "во мнении". В действительности же существуют постоянные, всегда равные себе сущности, вступающие в разнообразные сочетания. Они не могут изменять свою природу так, что это происходит с объектами микромира. Соображения такого рода с поразительной точностью воспроизведены **Ньютоном**: "*Если бы они (фундаментальные элементы. — Авт.) изнашивались или разбивались на куски, то природа вещей, зависящая от них, изменялась бы. Вода и земля, составленные из старых и изношенных частиц и их обломков, не имели бы той же природы и строения теперь, как вода и земля, составленные из целых частиц вначале. Поэтому природа их должна быть постоянной, изменения телесных вещей должны проявляться только в различных разделениях и новых сочетаниях и движениях таких постоянных частиц*". Как мы увидим, и досократики, и Ньютон ошибались. Фундаментальные элементы почти в буквальном смысле могут быть разбиты на части, и процессы такого рода, по всей вероятности, происходили на ранних стадиях космологической эволюции нашей Вселенной. Но на данном этапе важно подчеркнуть, что античную натурфилософию и ньютоновскую картину мира объединяет общая гносеологическая установка — убеждение в том, что создаваемая разумом модель Вселенной представляет собой не просто модель, но саму сущность Вселенной, окончательное и полное знание о ней, если только при его построении пользоваться правильными методами. Умозаключение от опыта к принципам — это основной канал получения такого знания. Как известно, эта точка зрения была опровергнута и развитием самого естествознания, и критическим поворотом в философской рефлексии. В результате этих концептуальных сдвигов в методологии науки возникли принципиально новые представления.

Во-первых, всякое человеческое знание о мире страдает неполнотой: наряду с моментом соответствия реальности в нем всегда присутствуют элементы несоответствия.

Во-вторых, метод принципов не является единственным и даже основным способом получения нового знания. Другой важный канал — фундаментальные онтологические допущения, не вытекающие из непосредственного опыта.

В-третьих, отношение знания к реальности всегда опосредовано языком как специфически человеческим изобретением.

В разработку этих проблем большой вклад внес **Дж. Вико**, которого до известной степени можно считать предшественником Канта в философии науки. По сути, Вико впервые осознал глубокое различие между миром самим по себе и картиной этого мира, создаваемой с помощью математических моделей, физических экспериментов и всего богатого инструментария, определяющего специфику естественнонаучного языка. Фундаментальное онтологическое допущение **Вико**[12] состояло в том, что природа как таковая лишена какого бы ни было "языка" и вообще любой знаковой

[11] **Метафи́зика (др.-греч. τὰ μετὰ τὰ φυσικά — «то, что после физики») — раздел философии, занимающийся исследованиями первоначальной природы реальности, мира и бытия как такового.**

[12] **Джамбаттиста Вико (итал. Giambattista Vico, 23 июня 1668, Неаполь — 21 января 1744, там же) — крупнейший итальянский философ эпохи Просвещения, творец современной философии истории, кроме того заложивший основы культурной антропологии и этнологии.**

структуры. О соотношении изменчивости и устойчивости в научной картине мира. Природа не есть книга, которую следует прочесть. Эта метафора только вводит в заблуждение. Скорее речь должна идти о некоем “неопределенном бытии”, на которое

субъект набрасывает сплетенную им концептуальную “сеть”. Все существо нашего познания зависит поэтому от того, насколько хитроумно мы сплетем эту сеть. Для того, чтобы получить удовлетворительный ответ, надо правильно задать вопрос. На глупый вопрос будет дан глупый ответ. Вообще, мы обречены сводить реальность к ее моделям, которые мы понимаем и находим осмысленными лишь по той причине, что сами их создаем. Обладая некоторым воображением, в идее “верум-фактум” можно усмотреть прообраз представления о трансцендентальной (в смысле Канта) природе научного языка. Язык науки может быть мощным инструментом добывания знания. Но он же является неизбежным источником присущих познанию ограничений на каждом его этапе. Ведь как бы искусно ни была сплетена “сеть”, размер ее “ячеек” всегда конечен, и, стало быть, “улов” всякий раз будет неполным. Значительная часть “неопределенного бытия” останется концептуально неосвоенной. И было бы большой ошибкой отождествлять содержание “улова” с содержанием всего “бытия”, точно так же как из отсутствия в улове рыбака мелкой рыбы было бы неправомерно заключать о том, что мелкая рыба в данном месте вообще не водится, если рыбак пользовался сетью с достаточно крупными ячейками. Существенно, что умозаключение о несовпадении объема “неопределенного бытия” с объемом научного знания выходит за пределы непосредственного опыта и представляет собой онтологическое суждение, опирающееся на критическое исследование природы научного языка. Строго говоря, лишь с учетом этих соображений всеобщие истины о мире можно называть законами. А предпринятое нами отступление от основной интересующей нас темы понадобилось для того, чтобы перевести проблему соотношения изменчивости и устойчивости в картине природы из спекулятивной сферы натурфилософии в конкретную область современной науки. При этом проблема очевидным образом конкретизируется в вопрос о возможности эволюции законов природы. И здесь прежде всего необходимо подчеркнуть, что полное научное представление о законах природы опирается не только на конкретные сведения об их структуре, почерпнутые из непосредственного опыта или его обобщения, но и на определенные допущения об онтологическом статусе законов, выходящие, вообще говоря, за пределы непосредственного опыта. Таким образом, мы возвращаемся к некоторым из вопросов, сформулированных в начале статьи: может ли быть так, чтобы мир эволюционировал, а законы, управляющие этой эволюцией, оставались неизменными? Не следует ли допустить, что изменению вещей неким образом сопутствует изменение их свойств и отношений, включая наиболее общие свойства и отношения, то есть-законы? Такому подходу к проблеме, а также вполне определенному ее решению мы во многом обязаны одной из последних работ А. Пуанкаре, выдержанной в характерной для него форме полемики с воображаемым оппонентом. Согласно Пуанкаре, представление о принципиальной неизменности законов настолько тесно связано с самим существом науки, что отказ от первого попросту подрывает возможность последней. Чтобы установить факт изменчивости законов, замечает **Пуанкаре**[13], надо располагать точными сведениями о далеком (геологическом) прошлом; получить же их можно лишь опираясь на существенно неизменные законы, связывающие прошлое с настоящим. “Если, стало быть, постоянство законов входит в предпосылки всех наших умозаключений, то мы не можем не найти его снова в выводе”. В то же время, с практической точки зрения, любое научное суждение о состоянии мира в далеком прошлом — результат экстраполяции известных законов; нельзя, конечно, заранее исключить, что она никогда не приведет к абсурдным следствиям; но отсюда следовало бы заключение не об изменчивости законов, а об их неточности, приближенности. Если нет других способов разрешить противоречия с опытом или со здравым смыслом, то возможно, в самом крайнем случае, сделать вывод о вероятной изменчивости “законов, открываемых наблюдением”. Но они всегда представляют собой совокупный результат действия фундаментальных, “истинных” законов и определенного “расположения” фундаментальных объектов, которое конечно, не остается неизменным, в силу чего меняются и “наблюдаемые” законы. Однако “истинные” законы не изменяются никогда. Более того, сам вывод о вариациях “наблюдаемых” закономерностей опирается на принцип неизменности фундаментальных законов, который в этом смысле представляет собой не что иное, как определение фундаментальности. “Всегда, когда закон низводится до степени временного закона, он заменяется другим, более общим и более универсальным; своим разжалованием всякий закон обязан именно воцарению нового закона, и, таким образом, не может наступить междуцарствие, и принципы остаются неприкосновенными, и сами перевороты служат лишь блестящим подтверждением принципов”. Этот вывод Пуанкаре, а также вся его аргументация действительно придает проблеме эволюции законов, а значит и вопросу о соотношении изменчивости и устойчивости в картине природы, наиболее принципиальную и полемически заостренную форму. Допускается, что от изменчивости не застрахованы даже самые фундаментальные законы. Но ее фактическое обнаружение считается “ратифицированным” лишь в том случае, если уже “готов” еще более фундаментальный закон, задающий изменчивость первого (который, тем самым, лишается фундаментального статуса и переходит в разряд “наблюдаемых”), но сам по себе неизменный. В противном случае, по Пуанкаре, рушатся сами основания науки. Согласно тезису, который можно назвать “**принципом Пуанкаре**”, фундаментальные законы природы неизменны по определению. Постоянство законов можно всегда спасти переходом на новый уровень фундаментальности. Пуанкаре проанализировал, по-видимому, все логические измерения проблемы и предвидел все возможные возражения. Его вывод выглядит как будто окончательным. Тем не менее, с ним, как представляется, можно и нужно полемизировать, ибо никакая сколько-нибудь серьезная теоретико-познавательная проблема не исчерпывается своими логическими

---

[13] **Жюль Анри́ Пуанкаре́ (фр. Jules Henri Poincaré; 29 апреля 1854, Нанси, Франция — 17 июля 1912, Париж) — французский математик, физик, астроном и философ. Глава Парижской академии наук (1906), член Французской академии (1908) и ещё более 30 академий мира, в том числе иностранный член-корреспондент Петербургской академии наук (1895). Историки причисляют Анри Пуанкаре к величайшим математикам всех времён[2]. Он считается, наряду с Гильбертом, последним математиком-универсалом, учёным, способным охватить все математические результаты своего времени[3]. Его перу принадлежат более 500 статей и книг. «Не будет преувеличением сказать, что не было такой области современной ему математики, „чистой“ или „прикладной“, которую бы он не обогатил замечательными методами и результатами»**

аспектами. В данном случае очень важно с самого начала специфицировать точный смысл употребляемых терминов. И прежде всего, определить само понятие закона природы. И здесь не обойтись без определенных онтологических допущений, выходящих за пределы наличного опыта. Каков же онтологический статус законов природы? В современной методологии науки существуют два принципиально различных понимания этого статуса. В соответствии с реалистической концепцией, законы природы имманентны самой природе и представляют собой сущностные и, по крайней мере, относительно устойчивые связи. Отношение между законами природы и закономерно происходящими явлениями есть умеренно-реалистически (то есть, скорее в аристотелевском, нежели в платоновском духе) истолкованное отношение общего и отдельного. Законы природы реально “живут” в объектах и процессах природы как общее в отдельном. В противоположность законам природы, законы науки “живут“в идеальном мире научного знания и более или менее точно воспроизводят в определенной знаковой системе различные стороны и уровни этого общего. В номиналистической концепции природа сама по себе считается лишенной каких бы то ни было общих качеств и свойств, а следовательно, и законов. Само различие между законами природы и законами науки не имеет смысла в этом контексте. Законы — это важнейшие элементы научного языка, необходимые для рационального описания и классификации явлений. В этом качестве они “живут“в научном сознании и могут служить инструментом концептуализации действительности. Совершенно очевидно, что смысл всех рассуждений о законах природы существенно зависит от принятых (онтологических и семантических) допущений относительно статуса законов. Присутствует ли этот “бэкграунд” в статье Пуанкаре? До некоторой степени — да. По мнению Пуанкаре, то, что мы называем законами природы, суть на самом деле закон науки. Понятие же закона природы как такового с этой точки зрения совершенно бессодержательно. Тем более не имеет смысла спорить о том, могут ли законы природы сами по себе изменяться или являются неизменными. “До сих пор, — замечает в этой связи Пуанкаре, — мы не задавали вопроса о том, изменяются ли законы в действительности, мы лишь спрашивали, могут ли люди считать, что законы изменяются. Но являются ли законы неизменными сами по себе, если рассматривать их как существующие вне разума, который их создал или наблюдал? Такой вопрос не только неразрешим, но и не имеет ни какого смысла. К чему нам задаваться вопросом, могут ли законы изменяться со временем в мире вещей в себе, если в таком мире само понятие времени, может быть, не имеет смысла? О том, что собой представляет этот мир, мы ничего не можем сказать, ни думать, мы можем только говорить о том, чем он представляется или может представляться уму, не слишком отличающемуся от нашего”. О законах “природы в себе”, таким образом, нельзя сказать ничего определенного. Поэтому, ведя дискуссии об эволюции фундаментальных законов природы, мы в действительности имеем в виду эволюцию фундаментальных законов науки. А этот последний вопрос решается, согласно Пуанкаре, вполне однозначно: фундаментальные законы науки неизменны по определению. В этом смысле вывод Пуанкаре имеет характер методологического решения. Вопрос, однако, в том, может ли это решение считаться окончательным и аподиктически необходимым. Прежде всего, на наш взгляд, даже в той плоскости, в которой трактовал проблему Пуанкаре, остается недоопределенным онтологический контекст рассуждений. В самом деле, следует согласиться с тем, что понятие закона природы как такового является малосодержательным в отличие от понятия закона науки. Затруднение возникает уже при попытке назвать хотя бы один закон природы как таковой. Подобная попытка, естественно, обречена на неудачу, ибо, называя нечто именем, мы “поселяем” это нечто в языке и мышлении, включаем его в уже имеющуюся грамматическую и синтаксическую структуру. В этом смысле все конкретные суждения о законах природы (их структуре, характере действия и т.д.) формулируются исключительно в терминах законов науки, то есть в некоторой языковой системе. Но единственное суждение, которое выносится о законах природы вне и помимо этого языка, есть суждение об объективном существовании или несуществовании в реальном мире в виде устойчивых, повторяющихся и (по крайней мере, относительно) неизменных связей и отношений — это и есть фундаментальное онтологическое допущение, выходящее за пределы непосредственного опыта. В одном, реалистическом, случае подразумевается, что в мире объектов наличествует не только отдельное, но и общее. Тогда познание вещей и познание их связей и отношений, в том числе — универсальных связей и отношений, то есть законов природы, имеет принципиально один и тот же характер. И о вещах, и об отношениях мы судим опосредованно, через их идеальное отображение. Никакого прямого контакта с ними вне и помимо форм чувственности и мышления у нас нет и быть не может. Если мы, несмотря на это, не сомневаемся в реальном существовании вещей, то, в соответствии с доктриной реализма, нет никаких оснований усомниться в реальности природных законов, В этом контексте вопрос о возможной эволюции фундаментальных законов природы как таковых, на наш взгляд, имеет смысл, хотя и является далеко не тривиальным. В другом, номиналистическом, случае этот вопрос по существу бессмыслен. Законы служат в данном случае лишь элементами “языковой игры”, в ходе которой физическая реальность становится интеллигибельной, принимает такие формальные “очертания”, которые делают возможной ее концептуализацию средствами языка науки. Тогда, конечно, есть все основания выбрать правила этой игры наиболее удобным образом. В частности, для целей описания удобнее всего договориться считать наиболее фундаментальные из всех известных законы науки неизменными (по определению) и придерживаться этого правила всякий раз, когда в нашем описании появляются все более фундаментальные законы. Сделать это можно именно потому, что законы природы, тождественные в этой “**витгенштейновской перспективе**[14]” законам науки, живут не в пригороде, а в языке, его грамматике и синтаксисе, а эти последние могут выбираться и корректироваться сугубо конвенционально. Таким образом, убеждение в бессодержательности любых понятий о внутренних свойствах и отношениях (в частности, законах) в природе самой по себе в качестве своей необходимой предпосылки требует более общего онтологического решения, по которому природа как таковая лишена законов, упорядоченностей и вообще — любых универсалий. Оговаривает ли такую предпосылку **Пуанкаре**? С одной стороны, вроде бы да. В **“Эволюции законов”** он замечает, что *“мир Бергсона не имеет законов, иметь их могут лишь более или менее искаженные картины мира, которые создают ученые”. Однако в другом месте он*

[14] **Лю́двиг Йо́зеф Иога́нн Витгенште́йн (нем. Ludwig Josef Johann Wittgenstein; 26 апреля 1889, Вена — 29 апреля 1951, Кембридж) — австрийский философ и логик, представитель аналитической философии и один из самых ярких мыслителей XX века. Выдвинул программу построения искусственного «идеального» языка, прообраз которого — язык математической логики. Философию понимал как «критику языка». Разработал доктрину логического атомизма, представляющую собой проекцию структуры знания на структуру мира[**

говорит, что связи между явлениями “не менее реальны, чем те, которые сообщают реальность внешним предметам”: “Эти предметы реальны, поскольку ощущения, которые они в нас вызывают, представляются нам соединенными, я не знаю, каким-то неразрушимым цементом, а не случаем дня. Так и наука открывает нам между явлениями другие связи, более тонкие, но не менее прочные; это — нити, столь тонкие, что на них долгое время не обращали внимания; но коль скоро они замечены, их нельзя уже не видеть”. Эта ссылка на “цемент” и “нити” была бы совершенно недопустимой в контексте последовательно номиналистического истолкования природы. Ибо здесь делается явное суждение о внутренних свойствах “неопределенного бытия” (в данном случае — о наличие у него связной внутренней структуры). По-видимому, сам Пуанкаре колебался в принятии однозначного онтологического решения по этому вопросу, либо не придавал такому решению значения, что, вообще говоря, вполне объяснимо (хотя, повторим, в статье “Эволюция законов” он как будто тяготеет к номиналистической позиции). Но такое решение, как мы видим, совершенно необходимо для однозначной трактовки исходной проблемы соотношения изменчивости и устойчивости. Таким образом, на данном этапе в нашем рассуждении обозначилась явная “**бифуркация**[15]”:

1) либо мы придерживаемся позиции номинализма и полагаем, что в самой природе никаких законов нет, а то, что именуется “законами природы”, суть в действительности не более чем законы науки, представляющие собой существенные элементы правил научной “языковой игры”. Тогда исходная проблема решается конвенционально. Наиболее простое и удобное ее решение, предложенное Пуанкаре, состоит в том, чтобы считать самые фундаментальные (из всех известных) законы принципиально неизменными,

2) либо мы встаем на почву (умеренного) реализма и принимаем, что в природе есть не только отдельное, но и общее.

Тогда это общее является объектом нашего познания в такой же мере, как и отдельное, и можно ставить вопрос о его внутренних свойствах. В частности, проблема эволюции фундаментальных законов природы как таковых имеет смысл и должна решаться не конвенционально, но по существу. Тогда (и только тогда) порядок вопросов меняется на обратный по сравнению с ситуацией, рассмотренной Пуанкаре: мы должны умозаключать не от “правил игры” к реальному положению вещей, а наоборот. Сначала необходимо выяснить, существуют ли независимые онтологические аргументы в пользу возможной изменчивости фундаментальных законов природы (то есть реальных референтов наиболее фундаментальных из всех известных законов науки). Затем, если такие аргументы существуют, следует проанализировать, каким образом эволюция фундаментальных законов природы можно адекватно выразить в научном языке. Иными словами, проблема соотношения изменчивости и устойчивости, как мы уже замечали в начале статьи, имеет два аспекта — онтологический и гносеологический. Какие же могут быть онтологические основания для суждения о возможной изменчивости фундаментальных законов природы? За время, прошедшее с 1911 года, когда была написана замечательная статья Пуанкаре об эволюции законов, в научной картине мира произошли грандиозные изменения. Мы имеем ввиду не только

---

[15] **Бифурка́ция — термин происходит от лат. bifurcus — «раздвоенный» и употребляется в широком смысле для обозначения всевозможных качественных перестроек или метаморфоз различных объектов при изменении параметров, от которых они зависят.**

создание релятивистской и квантовой физики, но и радикальный поворот “от бытия к становлению”, с которым связан принципиальный пересмотр роли изменчивости в природных процессах. Сам факт объективного существования динамической нестабильности и возможность самоорганизации неравновесных систем свидетельствуют, что наука не может быть отражением лишь “статичной рациональности”. Успехи структурно-ориентированного мышления вплотную подвели к тому пределу, когда на “дне” широкого класса явлений “проступает” становление. Существование таких явлений, в которых становление важнее “бытия”, не вызывает сомнений, например, в биологических процессах. О локальном аспекте этого нового взгляда на реальность сказано уже много. Гораздо меньше внимания уделяется его космологическому контексту, с которым, между тем, связан целый ряд существенных для процессуального миропонимания проблем, включая ту, которой посвящена данная статья. Рассмотрим поэтому более подробно космологические аргументы в пользу приоритета изменчивости в физической картине мира. Своеобразие космологии по сравнению с локально-физическими теориями (то есть с обычными теориями, изучающими ограниченные в пространстве и/или времени системы) состоит в уникальности ее объекта — физической Вселенной, включающей в себя все существующее и потому, по определению, “данной нам в единственном экземпляре”. Вселенная как объект космологии представляет собой определенную тотальность, и это обстоятельство, как полагают многие, делает ее физическое описание существенно отличным от описания локальных физических систем. Полное описание локальной системы включает спецификацию закона ее поведения и начальных (граничных) условий. Сами начальные условия, в свою очередь, продуцируют не только субстратную структуру универсума в ходе эволюции, но и его фундаментальную номическую структуру. Все дело, очевидно, в том, что в космологической перспективе законы природы являются коэкстенсивными объему детерминируемой ими системы. В самом деле, на “территории” эволюционирующей Вселенной “располагаются” не только элементы структуры вещества, но и закономерности их взаимодействия, не только фактуальные, но и номические аспекты реальности, которые в своей совокупности “покрывают” данную территорию целиком. Именно поэтому в мире, рассмотренном с точки зрения современной эволюционной космологии, может не найтись ничего абсолютно неизменного. С уверенностью можно говорить лишь о более устойчивых и менее устойчивых свойствах и отношениях, объединенных, однако, с первыми в сложную сеть взаимозависимостей. Не только субстратные свойства Вселенной подчиняются в своей эволюции определенным законам. Сами законы могут зависеть от результатов собственного действия, поскольку они полностью “прописаны” на “территории” изменяющейся Вселенной и потому не могут находиться вне воздействия ее физической структуры, например, плотности вещества, температуры, крупномасштабного распределения скоростей. Но глобальные свойства Вселенной претерпевают радикальные изменения, особенно в самые первые мгновения космологической эволюции. В этих условиях ничто не может гарантировать неизменности даже самых глубоких сущностных связей и отношений, погруженных в коэкстенсивный им мир явлений. Любая номическая характеристика может стать благодаря этому функцией эволюционного процесса. К примеру, (формально) номическое нсвойство нашего мира, выраженное в спонтанно нарушенной симметрии между фундаментальными взаимодействиями, является, возможно, следствием реального процесса (нарушения этой симметрии), совершившегося в далеком прошлом в результате фазового перехода, причем его ближайшей физической причиной могло быть падение температуры, выражающей вроде бы фактуальные свойства космического субстрата. Идея становления фундаментальных закономерностей в ходе эволюции представляется тем самым вполне правдоподобной. По-видимому, следует всерьез считаться с возможностью “самотрансценденции” даже самых глубоких свойств и отношений в экстремальных условиях ранней Вселенной. Но одно дело — невозможность выживания в экстремальных условиях реальных свойств и отношений природы, в частности, законов. Другое-отражение этих процессов в языке науки. Даже если в природе действительно может не быть ничего абсолютно неизменного, наше описание изменчивой природы всегда в некотором смысле абсолютно статично (именно, в том смысле, в каком статичен “текст” этого описания). Какими же концептуальными средствами мы располагаем для воспроизведения независимо обнаруженной эволюции наиболее фундаментальных законов природы в системе знания? Надо заметить, что в этом, гносеологическом плане (в отличие от рассмотренного выше онтологического) аргументы Пуанкаре обнаруживают свою работоспособность, хотя сам Пуанкаре, разумеется, не мог их использовать в космологическом контексте. Рассуждать можно, например, следующим образом. Развитие природы, в том числе — ее законов, — это процесс, идущий, быть может, на всех уровнях. Но развитие науки — это процесс ступенчатый, на каждом этапе которого мы достигаем знания лишь конечного числа уровней структурно-функциональной организации природы. Пусть мы способны с помощью существующих научных средств построить теоретическую модель природы на всех уровнях до n (включительно). И пусть теперь в свете, скажем, соображений, изложенных выше, для нас стала очевидной изменчивость фундаментальных законов природы науки уровня n. До сих пор отражающие их фундаментальные законы науки уровня n считались неизменными. Теперь придется признать неадекватность такого описания. Каким образом можно исправить его, учтя в нем фактически имеющую место изменчивость фундаментальных законов природы уровня n? Представим себе последователя Пуанкаре, признающего, однако, имманентность законов природы. Вполне можно предположить, что этот гипотетический исследователь действовал бы согласно прежней максиме и попытался бы привлечь еще более глубокую “охватывающую” связь на уровне n + 1, выведя ее (пусть — временно) из эволюционного контекста, и выделить в “охватываемую” часть все заведомо изменчивые связи. Эту операцию он был бы склонен повторять бесконечно, всякий раз описание будет приближенным, но иерархическому строению мироздания здесь как будто соответствует итеративный характер познания. Неважно, что вся иерархия структур целиком оказывается погруженной в “стихию времени”. От этого не перестает быть адекватной прежняя, статическая модель описания, в основании которой лежит новый неизменный фундаментальный закон науки. Следует признать, что эта стандартная схема объяснения превосходно работает в науке, и пока нет оснований от нее отказываться. Но можно поставить вопрос об ее аподиктической непогрешимости (тем более, что именно так ставил вопрос Пуанкаре и отвечал на него положительно). Всегда ли будет адекватным описание эволюционирующего мира, в котором, быть может, нет ничего абсолютно постоянного, посредством системы принципов, в котором устойчивость явно доминирует над изменчивостью? Нельзя ли представить себе альтернативную модель описания, в которой процессуальный характер реальности будет отражен более непосредственным образом? На наш взгляд, следует во всяком случае проанализировать логическую возможность такого описания. Оставляя детальное обсуждение этих вопросов на будущее, изложим лишь общую идею. Прежде всего, предметом такого альтернативного описания может быть только подлинное изменение, представляющее собой спонтанный акт и сопровождающееся возникновением нового качества. Детерминированное поведение в принципе не может привести к радикальным изменениям. Определенные основания в пользу реальности таких изменений дают единые калибровочные теории элементарных частиц. В них как правило существует выход к качественно различным возможным структурам фундаментальных взаимодействий. Но глобальная эволюция Вселенной придает отношению между такими структурами диахронное измерение. В истории ранней Вселенной происходит как бы обратная временная развертка объединительных механизмов, деунификация взаимодействий. Реализовавшееся в нашей Метагалактике устойчивое сочетание природных законов, возможно, не является единственным . В этом смысле известные нам фундаментальные законы науки это, быть может, лишь рациональное описание одного из “островов устойчивости” в “мировом океане изменений”. Тогда в чем может состоять единство всех систем (миров), обладающих разными структурами фундаментальных законов? И в чем заключалось бы существо связи между теориями, призванными описывать разные миры, определяемые разными законами на самом фундаментальном уровне? Обязательно ли эти миры-системы будут элементами другой, более сложной системы, а их описания станут подструктурами общего для них языка глобального описания? На наш взгляд, нет оснований возлагать все надежды на столь благополучный исход. Следует предусмотреть альтернативную возможность. Ключ к ее логическому представлению дает, как нам кажется, концепция онтологического релятивизма **У. Куайна**[16], в соответствии с которой объективную действительность можно рассматривать в виде “слоев” или отдельных фрагментов, каждый из которых описывается своей языковой структурой. Единственное, что объединяет эти языки требование внутренней согласованности каждого из них в отдельности. Очевидно, что этот базисный принцип вовсе не сводит альтернативные языки к некоей общей лингвистической же основе. В этом смысле языковая “деунификация” имеет нередуцируемый характер. Референтом подобной конструкции могла бы быть мультивселенная, расслоенная на отдельные пространственно-временные области с разными фундаментальными законами. В каждой области система законов должна определяться некоторым типом самосогласованности, но не иерархическим подчинением еще более общим принципам. Для такой картины была бы наиболее существенной именно невозможность трактовать всю совокупность таких доменов как единую систему, что и означало бы, с учетом диахронного аспекта такой картины, приоритет изменчивости над постоянством. Сам Куайн, впрочем, не был склонен чрезмерно онтологизировать свои идеи. Но не исключено, что

[16] **Уиллард Ван Орман Куайн (англ. Willard Van Orman Quine; 1908—2000) — американский философ, логик и математик. Профессор Гарвардского университета (с 1948), где в 1931 окончил докторантуру под руководством А. Н. Уайтхеда. На формирование концепции Куайна большое влияние оказали М. Шлик, Р. Карнап и в целом идеи неопозитивизма, с которыми он познакомился во время поездки по Европе (1933) и, в частности, при встречах с членами Венского кружка. С 1934 Куайн в течение многих лет работал над одной из центральных проблем Венского кружка — вопросом о роли логики в обосновании математики. Участвовал во Второй мировой войне в качестве добровольца морской пехоты. Основные работы Куайна в области логики посвящены построению аксиоматической системы, которая включала бы в себя логику классов и была бы непротиворечивой.**

утверждающаяся в современной физике процессуальная точка зрения рано или поздно сама предоставит необходимые для этого аргументы.

ВВЕДЕНИЕ

Устойчивость — *способность системы сохранять текущее состояние при наличии внешних воздействий.*

- *В **макроэкономике** устойчивость обозначает долгосрочное равновесие между эксплуатацией ресурсов и развитием человеческого общества.*
- *В **метеорологии** воздушная устойчивость относится к вертикальным перемещениям воздушных потоков.*
- *В **механике** устойчивость характеризуется ответом на малое возмущение системы, находящейся в механическом равновесии. Различают асимптотическую устойчивость, устойчивость по Ляпунову, экспоненциальную устойчивость, асимптотическую устойчивость в целом и др.*
- ***Гидродинамическая** устойчивость*
- *В **социологии** также существует термин социальная устойчивость.*
- *На **судах** устойчивость (профессиональный термин — остойчивость) связана с восстанавливающим моментом и противодействием опрокидыванию.*
- *В **теории автоматического управления** устойчивость характеризуется реакцией динамической системы на внешние воздействия.*
- *В **теории вероятностей** определяют статистическую устойчивость как сходимость частот значений результатов измерения физической величины.*
- *В **численном анализе** устойчивость показывает, каким образом алгоритм связан с ошибками в вычислениях (см. численная устойчивость).*
- *В **авиации** устойчивость характеризует способность самолета без вмешательства пилота сохранять заданный режим полета (см. устойчивость и управляемость)*
- *В **теории музыки** — свойство, придающее звуку или системе звуков их постоянство.*

Равновесие, *или баланс — состояние системы, описываемой в естественных и гуманитарных науках: система считается находящейся в состоянии равновесия, если одни воздействия на неё компенсируются другими или отсутствуют вообще. Смежное понятие — устойчивость; равновесие может быть устойчивым, неустойчивым или безразличным.*

Характерные примеры равновесий:

- *Механическое равновесие, также известно как статическое равновесие, — состояние тела, находящегося в покое, или движущегося равномерно, в котором сумма сил и моментов, действующих на него, равна нулю*

- *Химическое равновесие — положение, в котором химическая реакция протекает в той же степени, как и обратная реакция, и в результате не происходит изменения количества каждого компонента*
- *Физический баланс людей и животных, который поддерживается за счёт понимания его необходимости и в некоторых случаях — при помощи искусственного поддержания этого баланса*
- *Термодинамическое равновесие — состояние системы, в котором её внутренние процессы не изменяют макроскопических параметров (таких, как температура и давление)*
- *Равновесие в фэнтези — нейтральная позиция между магическими силами Порядка и Хаоса (иногда — Света и Тьмы), сводящаяся к недопущению победы любой из них*
- *Равновесие в экономике — ситуация, когда факторы, оказывающие влияние на экономическую переменную, уравновешивают друг друга таким образом, что переменная величина в результате не изменяется (например Равновесная цена, Рыночное равновесие)*

Гомеостаз *(др.-греч. ὁμοιοστάσις от ὅμοιος — одинаковый, подобный и στάσις — стояние, неподвижность) — саморегуляция, способность открытой системы сохранять постоянство своего внутреннего состояния посредством скоординированных реакций, направленных на поддержание динамического равновесия. Стремление системы воспроизводить себя, восстанавливать утраченное равновесие, преодолевать сопротивление внешней среды.*

Гомеостаз популяции *— способность популяции поддерживать определённую численность своих особей длительное время. Американский физиолог* ***Уолтер Кеннон*** *(Walter B. Cannon) в 1932 году в своей книге «The Wisdom of the Body» («Мудрость тела») предложил этот термин как название для «координированных физиологических процессов, которые поддерживают большинство устойчивых состояний организма». В дальнейшем этот термин распространился на способность динамически сохранять постоянство своего внутреннего состояния любой открытой системы. Однако представление о постоянстве внутренней среды было сформулировано ещё в 1878 году французским учёным* ***Клодом Бернаром****. Термин «гомеостаз» чаще всего применяется в биологии. Многоклеточным организмам для существования необходимо сохранять постоянство внутренней среды. Многие экологи убеждены, что этот принцип применим также и к внешней среде. Если система неспособна восстановить свой баланс, она может в итоге перестать функционировать.*

Комплексные системы *— например, организм человека — должны обладать гомеостазом, чтобы сохранять стабильность и существовать. Эти системы не только должны стремиться выжить, им также приходится адаптироваться к изменениям среды и развиваться.*

Свойства гомеостаза

Гомеостатические системы обладают следующими свойствами: Нестабильность системы: тестирует, каким образом ей лучше приспособиться. Стремление к равновесию: вся внутренняя, структурная и функциональная организация систем способствует сохранению баланса. Непредсказуемость: результирующий эффект от определённого действия зачастую может отличаться от того, который ожидался.

Примеры гомеостаза у млекопитающих: *Регуляция количества минеральных веществ и воды в теле — осморегуляция. Осуществляется в почках. Удаление отходов процесса обмена веществ — выделение. Осуществляется экзокринными органами — почками, лёгкими, потовыми железами и желудочно-кишечным трактом. Регуляция температуры тела. Понижение температуры через потоотделение, разнообразные терморегулирующие реакции. Регуляция уровня глюкозы в крови. В основном осуществляется печенью, инсулином и глюкагоном, выделяемыми поджелудочной железой. Важно отметить, что, хотя организм находится в равновесии, его физиологическое состояние может быть динамическим. Во многих организмах наблюдаются эндогенные изменения в форме циркадного, ультрадианного и инфрадианного ритмов. Так, даже находясь в гомеостазе, температура тела, кровяное давление, частота сердечных сокращений и большинство метаболических индикаторов не всегда находятся на постоянном уровне, но изменяются в течение времени.*

Механизмы гомеостаза: обратная связь

Когда происходит изменение в переменных, наблюдаются два основных типа обратной связи, на которые реагирует система: Отрицательная обратная связь, выражающаяся в реакции, при которой система отвечает так, чтобы изменить направление изменения на противоположное. Так как обратная связь служит сохранению постоянства системы, это позволяет соблюдать гомеостаз. Например, когда концентрация углекислого газа в организме человека увеличивается, лёгким приходит сигнал к увеличению их активности и выдыханию большего количество углекислого газа. Терморегуляция — другой пример отрицательной обратной связи. Когда температура тела повышается (или понижается) терморецепторы в коже и гипоталамусе регистрируют изменение, вызывая сигнал из мозга. Данный сигнал, в свою очередь, вызывает ответ — понижение температуры (или повышение). Положительная обратная связь, которая выражается в усилении изменения переменной. Она оказывает дестабилизирующий эффект, поэтому не приводит к гомеостазу. Положительная обратная связь реже встречается в естественных системах, но также имеет своё применение. Например, в нервах пороговый электрический потенциал вызывает генерацию намного большего потенциала действия. Свёртывание крови и события при рождении можно привести в качестве других примеров положительной обратной связи. Устойчивым системам необходимы комбинации из обоих типов обратной связи. Тогда как отрицательная обратная связь позволяет вернуться к гомеостатическому состоянию, положительная обратная связь используется для перехода к совершенно новому (и, вполне может быть, менее желанному) состоянию гомеостаза, — такая ситуация называется «метастабильность». Такие катастрофические изменения могут *происходить, например, с увеличением питательных веществ в реках с прозрачной водой, что приводит к гомеостатическому состоянию высокой эвтрофикации (зарастание русла водорослями) и замутнению.*

Экологический гомеостаз

Экологический гомеостаз наблюдается в климаксовых сообществах с максимально возможным биоразнообразием при благоприятных условиях среды. В нарушенных экосистемах, или субклимаксовых биологических сообществах — как, например, остров Кракатау, после сильного извержения вулкана в 1883 — состояние гомеостаза предыдущей лесной климаксовой экосистемы было уничтожено, как и вся жизнь на этом острове. Кракатау за годы после извержения прошёл цепь экологических изменений, в которых новые виды растений и животных сменяли друг друга, что привело к биологической вариативности и в результате климаксовому сообществу. Экологическая сукцессия на Кракатау осуществилась за несколько этапов. Полная цепь сукцессий, приведшая к климаксу, называется присерией. В примере с Кракатау на этом острове образовалось климаксовое сообщество с восемью тысячами различных видов, зарегистрированных в 1983, спустя сто лет с того времени, как извержение уничтожило на нём жизнь. Данные подтверждают, что положение сохраняется в гомеостазе в течение некоторого времени, при этом появление новых видов очень быстро приводит к быстрому исчезновению старых.

Случай с Кракатау и другими нарушенными или нетронутыми экосистемами показывает, что первоначальная колонизация пионерными видами осуществляется через стратегии воспроизведения, основанные на положительной обратной связи, при которых виды расселяются, производя на свет как можно больше потомства, но при этом практически не вкладываясь в успех каждого отдельного. В таких видах наблюдается стремительное развитие и столь же стремительный крах (например, через эпидемию). Когда экосистема приближается к климаксу, такие виды заменяются более сложными климаксовыми видами, которые через отрицательную обратную связь адаптируются к специфическим условиям окружающей их среды. Эти виды тщательно контролируются потенциальной ёмкостью экосистемы и следуют иной стратегии — произведению на свет меньшего потомства, в репродуктивный успех которого в условиях микросреды его специфической экологической ниши вкладывается больше энергии. Развитие начинается с пионер-сообщества и заканчивается на климаксовом сообществе. Это климаксовое сообщество образуется, когда флора и фауна пришла в баланс с местной средой. Подобные экосистемы формируют гетерархии, в которых гомеостаз на одном уровне способствует гомеостатическим процессам на другом комплексном уровне. К примеру, потеря листьев у зрелого тропического дерева даёт место для новой поросли и обогащает почву. В равной степени тропическое дерево уменьшает доступ света на низшие уровни и помогает предотвратить инвазию других видов. Но и деревья падают на землю и развитие леса зависит от постоянной смены деревьев, круговорота питательных веществ, осуществляемого бактериями, *насекомыми, грибами. Схожим образом такие леса способствуют экологическим процессам — таким, как регуляция микроклиматов или гидрологических циклов экосистемы, а несколько разных экосистем могут взаимодействовать для поддержания гомеостаза речного дренажа в рамках биологического региона. Вариативность биорегионов так же играет роль в гомеостатической стабильности биологического региона, или биома.*

Биологический гомеостаз

Гомеостаз выступает в роли фундаментальной характеристики живых организмов и понимается как поддержание внутренней среды в допустимых пределах. Внутренняя среда организма включает в себя организменные жидкости — плазму крови, лимфу, межклеточное вещество и цереброспинальную жидкость. Сохранение стабильности этих жидкостей жизненно важно для организмов, тогда как её отсутствие приводит к повреждению генетического материала. В отношении любого параметра организмы делятся на конформационные и регуляторные. Регуляторные организмы сохраняют параметр на постоянном уровне, независимо от того, что происходит в среде. Конформационные организмы позволяют окружающей среде определять параметр. Например, теплокровные животные сохраняют постоянную температуру тела, тогда как холоднокровные демонстрируют широкий диапазон температур. Речь не идёт о том, что конформационные организмы не обладают поведенческими приспособлениями, позволяющими им в некоторой степени регулировать взятый параметр. Рептилии, к примеру, часто сидят на нагретых камнях утром, чтобы повысить температуру тела. Преимущество гомеостатической регуляции состоит в том, что она позволяет организму функционировать более эффективно. Например, холоднокровные животные, как правило, становятся вялыми при низких температурах, тогда как теплокровные почти так же активны, как и всегда. С другой стороны, регуляция требует энергии. Причина, почему некоторые змеи могут есть только раз в неделю, состоит в том, что они тратят намного меньше энергии для поддержания гомеостаза, чем млекопитающие.

Клеточный гомеостаз

Регуляция химической деятельности клетки достигается с помощью ряда процессов, среди которых особое значение имеет изменение структуры самой цитоплазмы, а также структуры и активности ферментов. Авторегуляция зависит от температуры, степени кислотности, концентрации субстрата, присутствия некоторых макро-и микроэлементов.

Гомеостаз в организме человека

Разные факторы влияют на способность жидкостей организма поддерживать жизнь. В их числе такие параметры, как температура, солёность, кислотность и концентрация питательных веществ — глюкозы, различных ионов, кислорода, и отходов — углекислого газа и мочи. Так как эти параметры влияют на химические реакции, *которые сохраняют организм живым, существуют встроенные физиологические механизмы для поддержания их на необходимом уровне. Гомеостаз нельзя считать причиной процессов этих бессознательных адаптаций. Его следует воспринимать как общую характеристику многих нормальных процессов, действующих совместно, а не как их первопричину. Более того, существует множество биологических явлений, которые не подходят под эту модель — например, анаболизм.*

Понятие «гомеостаз» используется также и в других сферах.

Актуарий может говорить о рисковом гомеостазе, при котором, к примеру, люди, у которых на машине установлены незаклинивающие тормоза, не находятся в более безопасном положении по сравнению с теми, у кого они не установлены, потому что эти люди бессознательно компенсируют более безопасный автомобиль рискованной ездой. Это происходит потому, что некоторые удерживающие механизмы — например, страх — перестают действовать. Социологи и психологи могут говорить о стрессовом гомеостазе — стремлении популяции или индивида оставаться на определённом стрессовом уровне, зачастую искусственно вызывая стресс, если «естественного» уровня стресса недостаточно.

Мы с Вами, дорогой читатель, прошлись по понятиям устойчивости и изменчивости в окружающей нас природе. Цель этого единственная: понимать математику без отрыва от природы. Дальше мы перейдем к изучению математического инструментария математики для познания природы в этом аспекте. Итак, в путь!

1.Что такое – ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ

Введение

Основная образовательная цель изучения темы "Первообразная и интеграл" может быть сформулирована так:

- *ознакомить учащихся с операцией, которая является обратной по отношению к операции дифференцирования функций;*
- *познакомить с использованием метода интегрального исчисления для решения геометрических задач, некоторых задач практического содержания.*

В связи с этим развивающими целями будут:

а) введение нового метода решения задач (в частности нахождение площади объёма фигуры) показать известную универсальность математических методов;

б) показ учащимся основных этапов решения прикладных задач средствами математики.

1.1 Образовательные цели изучения первообразной функции и интеграла в школьном курсе математики

*Школьник должен знать или узнать сейчас, что в общеобразовательной программе Теме "**Первообразная и интеграл**" предшествует тема "**Производная и её применение**". Такая последовательность изучения материала создаёт предпосылки для:*

- *понимание учащимися взаимосвязи между операциями дифференцирования и интегрирования функций, а также основной идеи метода дифференциального и интегрального исчислений;*
- *осознание учащимися того факта, что аппарат производной и интеграла – основа метода **математического анализа**[17].*

[17] **Математи́ческий ана́лиз — совокупность разделов математики, посвящённых исследованию функций и их обобщений методами дифференциального и интегрального исчислений. При столь общей трактовке к анализу следует отнести и функциональный анализ вместе с теорией интеграла Лебега, комплексный анализ (ТФКП), изучающий функции, заданные на комплексной плоскости, нестандартный анализ, изучающий бесконечно малые и бесконечно большие числа, а также вариационное исчисление.**

С одной стороны, он выступает как язык, описывающий многие явления, процессы мира. С другой – как инструмент, с помощью которого с учётом особенностей языка исследуются эти явления и процессы.

Основу содержания темы составляют два типа вопросов, каждый из которых группируется около двух понятий: "Первообразная", "Интеграл".

Основное внимание при изучении уделяется:

- *нахождению первообразных и вычислению интегралов на базе таблиц первообразных и правил нахождения первообразных;*
- *вычислению площадей криволинейной трапеции.*

В качестве основных задач, решённых в процессе изучения темы, можно выделить следующие:

- *введение понятий первообразной и интеграла;*
- *ознакомление учащихся с основными свойствами первообразных и правилами нахождения первообразных;*
- *раскрытие смысла операции интегрирования как операции, обратной по отношению к операции дифференцирования заданной функции:*
- *провести классификацию типов задач (нахождение площади криволинейной трапеции, нахождение объёма тела, задачи с физическим содержанием), показать, каким образом реализуется метод интегрального исчисления. При этом обратить внимание на выделение в процессе их решения этапов, характеризующих процесс математического моделирования.*

Теоретический материал включает в себя:

- *понятия первообразной и её основное свойство;*
- *понятие интеграла функции;*
- *связь между понятиями "интеграл" и "первообразная", которая устанавливается с помощью формулы Ньютона-Лейбница;*
- *формула Ньютона-Лейбница как аппарат вычисления интеграла данной функции.*

Перечисленные понятия вводятся на ***дедуктивной*** [18] *основе, предлагается иллюстрация использования определения основного понятия, его свойств с помощью конкретных примеров.*

Обязательно рассмотрим Задачи, какая же математика без практических примеров. Использование задач предлагается как средство иллюстрации вводимого в рассмотрение теоретического материала, его закрепления, о чем свидетельствуют и их формулировки, например: "Найти такую первообразную функцию, график которой проходит через данную точку".

1.2 Методическая схема изучения первообразной функции

В школьном учебнике были "испытаны" различные варианты введения понятия интеграла. В первых изданиях учебного пособия (под ред. А.Н. Колмогорова) интеграл определяется с помощью формулы Ньютона-Лейбница (как приращение первообразной),

---

[18] **Дедукция (лат. deductio — выведение) — метод мышления, при котором частное положение логическим путем выводится из общего, вывод по правилам логики; цепь умозаключений (рассуждений), звенья которой (высказывания) связаны отношением логического следования.**

Началом (посылками) дедукции являются аксиомы, постулаты или просто гипотезы, имеющие характер общих утверждений («общее»), а концом — следствия из посылок, теоремы («частное»). Если посылки дедукции истинны, то истинны и ее следствия. Дедукция — основное средство доказательства. Противоположно индукции.

в более поздних изданиях применялось традиционное определение интеграла как предела интегральных сумм, что более естественно.

Методическая схема изучения первообразной:

1) *рассмотреть примеры взаимно обратных операций;*
2) *ввести интегрирование как операцию, обратную дифференцированию, а первообразную как результат операции интегрирования;*
3) *выполнить упражнения типа: "Доказать, что данная функция* $F(x)$ *есть первообразная другой данной функции* $f(x)$*", "Решить задачи на отыскание первообразной для данной функции* $f(x)$*";*
4) *ознакомить учащихся с основным свойством первообразной;*
5) *составить таблицу первообразных;*
6) *ознакомить учащихся с правилами нахождения первообразных;*
7) *решить физические задачи с применением первообразной.*

Определению первообразной предшествует задача из механики. Если в начальный момент времени $t=0$ *скорость тела равна* ***0****, т.е.* $\upsilon(0)=0$*, то при свободном падении тело к моменту времени* t *пройдёт путь:*

$$S(t)=\frac{gt^2}{2}$$

Продифференцировав S(t), получаем $S'(t)=\upsilon(t)=gt$ *;* $S''(t)=\upsilon'(t)=a(t)=g$ *где* ***g***[19] *- ускорение постоянно.*

Более типично для механики иное: известно ускорение точки $a(t)$*, требуется найти закон изменения скорости* $\upsilon(t)$ *и координату* $S(t)$*. Для решения таких задач служит операция интегрирования.*

При введении понятия первообразной пользуются аналогией с известными учащимся примерами взаимно обратных операций. *Например, операция сложения позволяет по двум данным числам найти третье число – их сумму. Если же известно первое слагаемое и сумма, то второе слагаемое может быть "восстановлено" выполнением операции вычитания. Следовательно, вычитание – операция, обратная сложению, приводящая к единственному результату. Однако такое бывает не всегда. Например, возведённое в квадрат число(*$3^2=3\times3$*) равно числу 9. Пусть теперь известно, что число 9 является квадратом некоторого числа:* $x^2=9$*. Выполнив обратную операцию – извлечение квадратного корня – получаем два значения:* ***3*** *и* ***-3****.*

---

[19] **Ускорéние свобóдного падéния g (обычно произносится как «Жэ»), — ускорение, придаваемое телу в вакууме силой тяжести, то есть геометрической суммой гравитационного притяжения планеты (или другого астрономического тела) и инерциальных сил, вызванных её вращением. В соответствии со вторым законом Ньютона, ускорение свободного падения равно силе тяжести, воздействующей на объект единичной массы.**

Значение ускорения свободного падения для Земли обычно принимают равным 9,8 или 10 м/с². Стандартное («нормальное») значение, принятое при построении систем единиц, g = 9,80665 м/с²[источник не указан 368 дней], а в технических расчетах обычно принимают g = 9,81 м/с².

Дифференцирование функции $F(x)=x^3$ *приводит к новой* $f(x)=3x^2$ *функции, которая является производной функции* $F(x)=x^3$

Пусть теперь известно, что производная некоторой функции $F(x)$ *равна* $3x^2$, *т.е.:* $f(x)=F'(x)=3x^2$; *требуется найти функцию* $F(x)$.

Операция нахождения функции $F(x)$ *по ее производной* $f(x)$ *называется интегрированием. Выполняя интегрирование, можем получать следующие результаты:* $F(x)=x^3$ $F(x)=x^3+1$ $F(x)=x^3-2$ *и т.д.*

Таким образом мы запишем функцию $F(x)=x^3+C$ *и она будет называется первообразной функции* $f(x)=3x^2$.

Таким образом, интегрирование является операцией, обратной дифференцированию; результат операции интегрирования называется первообразной. После этого сообщается определение первообразной:

функция $F(x)$ *называется первообразной для функции f(x) на заданном промежутке, если для всех **x** из этого промежутка* $F'(x)=f(x)$.

Перечисленные понятия вводятся на дедуктивной основе, дается иллюстрация использования определения основного понятия, его свойств с помощью конкретных примеров. Задачи, помимо использования их как средства иллюстрации вводимого в рассмотрение теоретического материала, служат средством его закрепления, о чем свидетельствуют и их формулировки.

Например: *найти такую первообразную функции, график которой проходит через данную точку.*

*Целесообразно обратить внимание учащихся на следующее: запись **F(x)+c** (общий вид первообразных для функции **f(x)** на заданном промежутке). Она связывает нас, с одной стороны, с произвольным значением постоянной **c**, а с другой стороны, в зависимости от условия предложенной для решения задачи – с конкретным. С этой целью можно вернуться к анализу решений уже рассмотренных задач. Чтобы показать, что учет конкретных условий задачи влечет обращение к вполне определенной первообразной, можно предложить учащимся найти уравнение пути, если за **2** секунды тело прошло **15 м**.(найти уравнение кривой, проходящей через фиксированную точку **A(1;2)**).*

Решение обеих задач связано с нахождением тех первообразных заданных функций, которые удовлетворяют указанным начальным условиям. Работа с задачами убедит Вас в том, что их решение связано с выделением из множества первообразных данной функции вполне определенных конкретных первообразных (именно с этим мы сталкиваемся при решении задач практического содержания).

Изучение вопроса о правилах отыскания первообразных естественно связывается с обращением к двум взаимообратным операциям:

- *дифференцированию и*
- *интегрированию.*

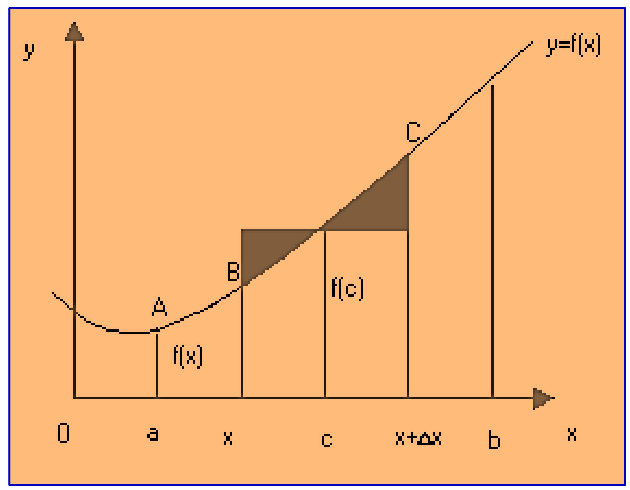
Рассмотрим иллюстрацию введения третьего правила (если ***F(x)****-первообразная для функции* ***f(x)****, а* ***k*** *(k≠0) и* ***b*** *– постоянные, то* ***(1/k)F(kx+b)*** *есть первообразная для функции* ***f(kx+b)*** *), в виде самостоятельного решения следующих задач:*

- *Найти производные функций:* ***sinx; sin4x; sin(4x+3)****;*
- *Найти хотя бы одну первообразную для функции:* ***cosx; cos4x; cos(4x+3)****.*

Анализ решений этих задач и приводит Вас к формулировке указанного правила нахождения первообразных, доказательство этого правила предлагаю учащимся провести самостоятельно.

1.3 Методическая схема изучения теоремы о площади криволинейной трапеции

Центральное место в изучении этой темы является теорема о площади криволинейной трапеции: "Пусть ***f*** *– непрерывная и неотрицательная на отрезке* ***[a, b]*** *функция,* ***S*** *– площадь соответствующей криволинейной трапеции. Если* ***F*** *есть первообразная для* ***f*** *на отрезке* ***[a, b]****, то* ***S=F(b)-F(a)****."*



С помощью этой теоремы можно обосновать формулу ***Ньютона-Лейбница****. Изучение доказательства проведем методом подготовительных задач.*

1. Приращение аргумента, приращение функции.

Задача: *"На рисунке площадь криволинейной трапеции представлена как функция от* ***x****. Укажем на этом рисунке S(x); S(x+Δx); ΔS=S(x+Δx) – S(x)".*

- *S(x) = a A B x*
- *S(x+Δx) = a A C* $\boxed{x+\Delta x}$
- *ΔS = x B C* $\boxed{x+\Delta x}$

Я поздравляю учащихся: они встретились с новой геометрической интерпретацией уже известных понятий !

2. Определение производной.

"Запишите определение производной функции применительно к функции S(x) ".
В результате получим запись:

$$S'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S(x)}{\Delta x}.$$

3. *<u>Понятие функции, непрерывной в точке.</u>*

*"Пусть f(x) – функция, непрерывная в точке **x**.(см. рисунок) . Отметим на оси абсцисс точки **x**, **x+Δx** и точку **c**, лежащую между ними. Пусть **Δx→0**. К чему стремится **f(c)**? "*

<u>Из графических соображений получаем ответ, что если Δx→0, то c→x, а f(c)→f(x).</u>

4. *<u>Утверждение о том, что площадь криволинейной трапеции с основанием Δx можно заменить равной площадью прямоугольника с тем же основанием Δx и высотой f(c), где c – некоторая точка отрезка [x; x+Δx].</u>*

*Существование точки **c** утверждается теоремой и может быть проиллюстрировано следующими заданиями: "На рисунке дана криволинейная трапеция с основанием **Δx**. Построить прямоугольник, у которого основание было бы равно **Δx**, а площадь равнялась бы площади криволинейной трапеции."*

Задание выполняется "на глаз", от руки – чем мы добьёмся интуитивного(на наглядно-геометрическом уровне) осознания рассматриваемого факта.

5. *<u>Определение первообразной</u>.*

"Пусть S(x) – первообразная f(x). Поясните, что это обозначает. Пусть S(x) – одна из первообразных для функции f(x). Запишите формулу для общего вида первообразных функции f(x)" – здесь привычное определение первообразной применяется в новых обозначениях.

Доказательство теоремы целесообразно разбить на три части:

1) *Введём функцию **S(x)**. Рассмотрим функцию **S(x)**, определенную на отрезке **[a,b]**, которая выражает зависимость площади криволинейной трапеции от аргумента **x**. Дадим аргументу **x** приращение **Δx**, такое, что* $a \le x + \Delta x \le b$.

Тогда приращение функции $S'(x)$ *в точке **x**:* $\Delta S(x) = S(x+\Delta x) - S(x)$

*(**Δx** полагаем положительным)*

2) *Докажем что функция **S(x)** является первообразной для функции* $f(x): S'(x) = f(x)$ *для всех* $x \in [a,b]$

Согласно определению производной, $S'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta S(x)}{\Delta x}$. *Так как* $\Delta S(x)$ *- площадь криволинейной трапеции с основанием* Δx*, то её можно заменить равной площадью прямоугольника с основанием* Δx *и высотой f(c), где* $c \in [x; x+\Delta x]$ $\Delta S(x) = f(c)\cdot\Delta x$

Тогда:

$$S'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c)\cdot\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(c)$$

*Поскольку **c** лежит между **x** и **x+Δx**, то при **Δx→0** точка **c** стремится к **x**, а **f(c)→f(x)**. Эти рассуждения можно записать в одну строчку следующим образом:*

$$S'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c)\cdot\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(c) = f(x)$$

Итак,

$S'(x) = f(x)$.

3) *Подведем итоги.*

Мы доказали , что ***S(x)****– первообразная для* ***f(x)*** *на* ***[a,b]****. Но по условию* ***F(x)*** *– также первообразная для* ***f(x)*** *на этом отрезке. Следовательно, функции* ***S(x)*** *и* ***F(x)*** *отличаются друг от друга на некоторую константу* ***C****:*

$$S(x) = F(x) + C \quad (1)$$

Пусть x=a, тогда равенство (1) примет вид: $\theta = F(a) + C$*, откуда C = -F(a). При* ***x=b*** *равенство (1) запишется в виде:* ***S=S(b)=F(b)+C=F(b)-F(a)****. Таким образом,* ***S= F(b)-F(a)***
Рассмотрим простейший случай криволинейной трапеции – обычную трапецию. Пусть также трапеция образована графиком функции ***y=x*** *и прямыми:* ***x=1 и x=2****.*

По формуле площади трапеции, известной из курса планиметрии, $S = \frac{1+2}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2}$

Первообразная данной функции $F(x) = \frac{x^2}{2}$ *, а разность* $F(b) - F(a) = \frac{2^2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

Таким образом, этот пример подтверждает, что площадь трапеции может быть найдена как приращение первообразной: $s = F(b) - F(a)$ *.*
Здесь учащийся пойми, что Методика использования рассмотренного примера при ознакомлении с теоремой была такой: вначале задали проблему о нахождении связи между площадью криволинейной трапеции и первообразной; далее привели пример, указывающий эту связь; затем сформулировали теорему(иногда будем сначала сообщать теорему), затем привели пример, подтверждающий эту теорему.

Уважаемый учащийся! Для закрепления предыдущего материала распишем далее схематично аспекты введения понятия интеграла в средней школе.

Методическая схема введения понятия интеграла.

- *привести подводящую задачу;*
- *сформулировать определение интеграла.*

1. *Задачи, подводящие к этому понятию.*

Задача№1*. На отрезке* ***[a,b]*** *задана непрерывная и неотрицательная функция* ***y=f(x)****. Укажите новый способ(не связанный с первообразной) нахождения площади* ***S*** *криволинейной трапеции, образованной графиком этой функции и прямых* ***x=a*** *и* ***x=b****.*
Этапы решения задачи:

1) *построение ступенчатой фигуры и вычисление её площади*

[a,b] *разбиваем на* ***n*** *равных частей:* $x_1 = a < x_2 < x_3 < \ldots < x_n < x_{n+1} = b$

Одна сторона прямоугольника - $[x_1, x_2]$*, вторая -* $f(x_1)$*, поэтому:*

$$S_n = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \ldots + f(x_n)\Delta x$$

2) *Выражение площади* S *криволинейной трапеции через* S_n.

Производим деление ***[a;b]*** *на более "мелкие" части и вычисляем следующее значение* S_n.

После сравнения получаем: $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

<u>Задача№2.</u> *Пусть материальная точка движется прямолинейно с некоторой мгновенной скоростью* $V = V(t)$*, где* $V = V(t)$*- непрерывная на отрезке* $[T_1, T_2]$ *функция. Требуется найти путь, который пройдет материальная точка за промежуток времени от* T_1 *до* T_2.

В простейшем случае, когда мгновенная скорость постоянна, путь, пройденный телом, равен произведению его скорости на время движения. В общем случае, когда мгновенная скорость непостоянна, поступают следующим образом:

$$[\mathrm{T}_1;\mathrm{T}_2] \Rightarrow t_1 = \mathrm{T}_1, t_2, t_3, \ldots, t_n, t_{n+1} = \mathrm{T}_2, \Delta t = \frac{\mathrm{T}_2 - \mathrm{T}_1}{n} \Rightarrow S_n = v(t_1)\Delta T + v(t_2)\Delta T + \ldots + v(t_n)\Delta t \Rightarrow S = \lim_{n\to\infty} S_n$$

Сравнивая результаты решения этих двух задач, формулируем общий метод решения: разбиение отрезка, на котором задана функция, на равные части; составление суммы вида $f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \ldots + f(x_n)\Delta x$*, которая принимается в качестве приближенного значения искомой величины; выполнение предельного перехода:* $\lim\limits_{n\to\infty}(f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \ldots + f(x_n)\Delta x)$*. Такие пределы встречаются при решении многих задач из разных областей науки и техники. Поэтому они получили специальное название "интеграл функции f(x) от a до b" и обозначение* $\int\limits_a^b f(x)dx$*. Таким образом, по определению:*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}(f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \ldots + f(x_n)\Delta x)$$

,

где ***f(x)*** *– непрерывная на* ***[a,b]*** *функция;* $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$*- точки, разбивающие отрезок* ***[a,b]*** *на равные части;* Δx*- длина каждой из этих частей.*

Запишем результаты решенных задач. Площадь криволинейной трапеции, заданной непрерывной функцией ***f(x)*** *на* ***[a,b]***, $\int_a^b f(x)dx.$

Путь, пройденный материальной точкой за промежуток времени от T_1 *до* T_2 *со скоростью* $v = v(t)$, *где* $v = v(t)$ *- непрерывная на отрезке* $[T_1;T_2]$ *функция,* $s = \int_{T_1}^{T_2} v(t)dt$.

Сравнивая формулы площади криволинейной трапеции

$S = F(b) - F(a)$ *и* $S = \int_a^b f(x)dx$, *получаем:* $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$,

где ***F*** *– первообразная для* ***f*** *на* ***[a,b]*** *– формула Ньютона-Лейбница, позволяющее вычислять интегралы.*

Анализ материала учебных пособий, связанных с введением понятия "интеграл" и получением способа вычисления интегралов, приводят к следующим важным в методическом отношении выводам:

1) *определение интеграла и формула* ***Ньютона-Лейбница*** *дают возможность доказать ряд часто применяемых свойств интеграла. В процессе доказательства этих свойств понятие интеграла и его геометрический смысл усваиваются глубже. Можно предложить, например, установить справедливость следующих утверждений:*

a) $\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx;$

b) *если функция* ***f*** *имеет на отрезке* ***[a,b]*** *первообразную, то* $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$,

где ***C*** *– некоторая постоянная;*

c) *доказать формулу вычисления производной от интеграла с переменным верхним пределом интегрирования:*

$$\left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x)$$

,

где ***f(x)*** *– функция, непрерывная на интервале, содержащем точки* ***a*** *и* ***x****.*

Предложенные упражнения полезны ещё и потому, что в процессе их решения мы установили (и использовали) связи между операциями дифференцирования и интегрирования, между понятиями "производная", "первообразная", "интеграл" и их свойствами.

2) *Понятие "интеграла" вводится для функции непрерывной на некотором отрезке (такая функция имеет на этом отрезке первообразную). Сознательному усвоению учащимися этого понятия (и понятия первообразной) будет способствовать специальное привлечение внимания школьников к этому факту. С этой целью могут быть использованы задачи, например, такие:*

Возможно ли вычислить $\int_{\pi/4}^{2\pi/3} \frac{dx}{\cos^2 x}$*? (подынтегральная функция имеет точку разрыва* $x = \frac{\pi}{2}$*), принадлежащую отрезку* $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{2\pi}{3}\right]$*). Как пример рассмотрим следующие задачи.*

Задача№1 *Найти ошибку в вычислении интеграла:*

$\int_{-1}^{2} \frac{dx}{(2x+1)^2} = -\frac{1}{2(2x+1)}\Big|_{-1}^{2} = -0{,}6.$ *(о том, что ошибка действительно допущена, свидетельствует результат: интеграл от положительной функции оказался отрицательным числом).*

Задача№2 *При каких значениях пределов интегрирования интеграл существует:* $\int_{a}^{b} \frac{dx}{25 - x^2}$*?*

В точках 5 и –5 подынтегральная функция терпит разрыв; поэтому можно говорить о следующих условиях, которым должны удовлетворять значения пределов интегрирования:

$a > -5, b < 5; a < b < -5; b > a > 5.$

Задача№3 *Вычислить:*

а) $\int_{-2}^{2} \frac{dx}{\sqrt{x+3}}$;

б) $\int_{-4}^{2} \frac{dx}{\sqrt{x+3}}$;

в) $\int_{-3}^{-2} (\sqrt{x+2})^2\, dx.$

(в двух последних случаях интегралы не могут быть вычислены, т.к. подынтегральная функция не определена в каждой точке отрезка, заданного проделами интегрирования).

3) *Установление связи понятий "интеграл" и "первообразная" происходит через обращения к площади соответствующей криволинейной трапеции. Уделяя внимание геометрическому смыслу интеграла, не следует ограничиваться только геометрической иллюстрацией в процессе решения задач на вычисление интегралов.*

Целесообразно специально подчеркнуть, что, опираясь на геометрический смысл интеграла, иногда получаем возможность: установить существование более простого по сравнению с рассмотренным способом вычисления интегралов (например, по симметричному относительно точки 0 промежутку от четной или нечетной функции). Сделать это можно, обратившись к задачам: не только вычислять площадь фигур, но и находить числовые значения интеграла, вычисление которых по известным учащимся формулам выполнить не удается.

Например: $\int_{-3}^{3} \left| |x| - 2 \right| dx$.

Задача№1 *Показать, что если* ***f*** *– непрерывная, четная на отрезке* ***[-a,a]*** *функция, то:*

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx.$$

Задача№2 *Показать, что если* ***f*** *– непрерывная, нечетная на отрезке* ***[-a,a]*** *функция, то:*

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$$

Вычислить:

$\int_{-a}^{a} x^4 dx$; $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 x dx$; $\int_{-\pi/7}^{\pi/7} \sin^3 x dx$.

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

Введение.

Теперь переходим к систематическому исследованию того, каким именно образом изменяется величина ***y*** *рассматриваемой функции* ***y=f(x)*** *при изменении аргумента* ***x****.*

Основная задача дифференциального исчисления состоит в планомерной оценке этого изменения численного значения функции. Указанная планомерная оценка изменения величины функции, происходящего по причине изменения величины аргумента, достигается сравнительной оценкой приращений функции и аргумента.

Приращение. *Вообще приращением какой-либо переменной величины, переходящей от прежнего численного значения к новому, называется тот прибавок, который надо придать к ее прежнему значению для того, чтобы получить ее новое значение. Значит, приращение переменной величины есть просто разность между новым значением и прежним, получаемая вычитанием прежнего значения из нового*

*Приращение переменной величины **x** обозначается символом **Δ** так что если прежнее значение этой переменной величины обозначено буквой **x** то новое (наращенное) ее значение будет:*

$$x + \Delta x.$$

*Символ **Δx** произносится «дельта x». Предупреждаю учащихся, что символ этот никоим образом нельзя читать «дельта, умноженная на x» или «дельта раз x», потому, что буква Δ неотделима от буквы x без которой она не имеет никакого смысла. Учащийся уже знаком с аналогичным явлением в элементарной алгебре, где lg A имеет определенный численный смысл, обозначая логарифм числа A, тогда как буквы l и g, оторванные от буквы A, не имеют в отдельности никакого численного смысла.*
Очевидно, что приращение переменной величины вовсе необязательно положительно: оно будет отрицательным, когда новое значение меньше прежнего; это будет, например, когда переменная величина убывает.
Аналогичным образом:
Δy - означает приращение y,
Δz - означает приращение z,
$\Delta\varphi$ - означает приращение переменного
$\Delta f(x)$ означает приращение функции f(x) и т. д.
Если в равенстве $y=f(x)$ независимое переменное x получит приращение Δx, то под Δy всегда разумеют соответствующее приращение функции f(x), т.е. приращение зависимого переменного y.
Следует приращение Δy отсчитывать всегда от определенного начального значения y, соответствующего тому произвольно взятому начальному значению x, от которого отсчитывается приращение Δx. Рассмотрим, например, функцию

$$y = x^2.$$

Взяв за начальное значение x=10, получаем начальное значение y =100.
Пусть x увеличено до x = 12, т.е. Δx =2; тогда y возросло до y=144, значит
Δy=144-100 = 44.
Пусть x уменьшено до x = 9. Δx =-1; тогда y убыло до y = 81, следовательно,
Δy = 81-100 = -19.

Вообще, если функция y=f(x) возрастающая, как, например, наша x2 в промежутке от 0 до ∞ {0<x<+∞}, то ясно, что если Δx положительно, то и Δy будет положительным, и если Δx отрицательно, то и Δy тоже будет отрицательным. Значит, оба приращения, Δx и Δy, в этом случае имеют всегда одинаковые знаки.

Если же функция y=f(x) убывающая, то положительному Δx отвечает, очевидно, отрицательное Δy, потому что новое значение y меньше прежнего, а отрицательному Δx отвечает уже положительное Δy, ибо теперь новое значение функции больше прежнего. Значит, Δx и Δy в этом случае всегда будут противоположных знаков.

Наконец, мы знаем, что если функция:

$$y = f(x)$$

непрерывна в точке x и если приращение Δx аргумента стремится к нулю:

$$\lim \Delta x = 0,$$

то и приращение Δy функции также будет стремиться к нулю:

$$\lim \Delta y = 0,$$

т. е. оба приращения, Δx и Δy, суть одновременно величины бесконечно малые.

Сравнение приращений.

Возьмем функцию

(1)

$$y = x^2.$$

Пусть начальное значение аргумента есть x, и пусть это начальное значение x получает приращение Δx. Значит, x есть начальное (прежнее) значение аргумента, а x+Δx есть новое (наращенное) значение аргумента. Если аргумент имеет прежнее значение, то и вся функция имеет тоже прежнее значение, поэтому обе части равенства

$$y = x^2$$

являются начальным (прежним) значением функции

Когда же аргумент делается новым (наращенным), то и соответственное значение функции становится точно так же новым (наращенным), поэтому обе части равенства

(2) $$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2$$

являются новым (наращенным) значением функции.

Чтобы найти приращение Δy функции, нам теперь достаточно просто вычесть из нового равенства (2) прежнее равенство (1), Это вычитание нам даст:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2,$$

или раскрыв скобку и сделав приведение подобных членов:

(3) $$\Delta y = 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2.$$

Мы теперь получили приращение Δy функции, выразив его через начальное значение x аргумента и через приращение Δx аргумента.

Если это приращение Δx аргумента начинает стремиться к нулю, т.е. делается бесконечно малым: $$\lim \Delta x = 0$$

тогда и соответственное приращение Δy функции также будет стремиться к нулю, lim Δy = 0, т.е. тоже будет бесконечно малым, как это обнаруживает найденная величина (3) приращения Δy функции. Таким образом, мы имеем два бесконечно малые:

$$\Delta x \text{ и } \Delta y.$$

Чтобы сравнить между собой эти два бесконечно малые, разделим второе, Δy на первое, Δx, т.е. составим отношение: $$\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Для вычисления величины этого отношения достаточно просто разделить обе части равенства (3) на Δx, что дает нам: $\Delta y/\Delta x = 2x + \Delta x$. (4)

Чтобы видеть, каким образом одновременно изменяются приращения Δx и Δy, возьмем определенное числовое начальное значение аргумента,

например, возьмем x = 4.

В этом случае предшествующая формула (4) нам даст:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 8.$$

Если мы хотим проследить тщательнее, каким образом изменяется отношение приращений Δy и Δx, когда приращение Δx начинает делаться все меньше и меньше, обратимся к табличке:

Начальное значение аргумента x	Новое значение аргумента x	Приращение аргумента Δx	Начальное значение функции y	Новое значение функции y	Приращение функции Δy	Δy/ Δx
4	6,0	1,0	16	25	9	9
4	4,8	0,8	16	23,04	7,04	8, 8
4	4,6	0,6	16	21,16	5,16	8,6
4	4,4	0,4	16	19,36	3,36	8,4
4	4,2	0,2	16	17,64	1,64	8,2
4	4,1	0,1	16	16,81	0,81	8,1
4	4,01	0,01	16	16,0801	0,0801	8,01

Мы видим, что по мере уменьшения приращения Δx аргумента уменьшается и приращение Δy функции, но их отношение равно последовательно числам
9; 8,8; 8,6; 8,4; 8,2; 8,1; 8,01;
Для вычисления величины этого отношения достаточно просто разделить обе части равенства (3) на Δx, что дает нам:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$

Мы видим здесь на деле, что отношение Δy/Δx постепенно приближается к числу 8.
И мы, действительно, теоретически уже знаем, что это отношение можно как угодно близко подвести к 8, сделав надлежаще малым приращение Δx аогумента, ибо

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 8$$

при начальном значении x = 4 аргумента.

Производная функция одного переменного.

Основное определение дифференциального исчисления таково:

Производная данной функции есть предел отношения приращения этой функции к приращению независимого переменного, когда это последнее приращение приближается к нулю как своему пределу.

Когда предел этого отношения существует и есть конечное число, тогда говорят, что данная функция дифференцируема, или что она имеет производную (обладает производной).

Выше приведенное словесное определение можно представить в более сжатой символической (математической) форме следующим образом.

Дана непрерывная функция

$$y = f(x). \quad (1)$$

Пусть аргумент x получает приращение Δx, Тогда величина функции получит приращение Δx и новым значением функции

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x). \quad (2)$$

Чтобы получить приращение Δy функции, достаточно вычесть из равенства (2) равенство (1); находим:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x). \quad (3)$$

Разделив обе части этого равенства на приращение Δx аргумента, имеем:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (4)$$

Так вот, предел этого отношения, когда приращение Δx аргумента приближается к пределу, равному нулю, по только что данному словесному определению, и есть — Производная!

Оказалось, по мере развития естествознания, что решение весьма многочисленных и крайне разнообразных задач сводится к вычислению пределов отношений вида (4). Поэтому предел отношения (4) получил особое имя «производная», и ему дано особенное стилизованное обозначение, такое, в котором как бы уцелели для нашей памяти следы самого происхождения этого предела. Именно производная обозначается символом:

$$\frac{dy}{dx}$$

так что мы имеем:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad (5)$$

или более подробно:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right) \qquad (6)$$

*Это равенство и определяет производную от функции **y** [или от **f(X)**] по переменному **x**.*

Процесс отыскания производной от функции называется дифференцированием ее.

Следует хорошо заметить, что производная есть предел отношения, но отнюдь не отношение пределов, ибо последнее отношение ввиду того, что Δx и Δy суть бесконечно малые, т.е. имеющие своим пределом нуль, должно написаться в виде 0/0, а это есть полная неопределенность.

Различные обозначения производной.

До перехода к своему пределу, значит, во всякий момент времени, приращения Δx и Δy всегда конечны и имеют определенные численные значения. При этом первое приращение Δx, т.е. приращение аргумента, как всецело находящееся в нашем распоряжении, всегда может быть взято отличным от нуля. Поэтому отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

до своего перехода к пределу есть самая настоящая дробь, ибо до перехода к пределу тут есть и числитель и знаменатель, причем этот последний отличен от нуля.

Когда же мы отыщем предел этого отношения, т.е. когда мы вычислим производную

$$\frac{dy}{dx},$$

то эта производная есть просто только отвлеченное число (как всякий вообще предел) и уже не дробь, ибо в этом отвлеченном конечном числе, вычисленном как предел, мы не в состоянии более различать ни числителя, ни знаменателя. Поэтому на символ

$$\frac{dy}{dx}$$

нельзя смотреть как на неизменную настоящую дробь, но его следует рассматривать лишь как предел некоторой переменной истинной дроби. Тот факт, что эта переменная истинная дробь ранее писалась нами в виде Δy/Δx, запечатлелся в несколько стилизованном обозначении предела этой истинной дроби в виде dy/dx. Но учащийся должен помнить, что символ производной

$$\frac{dy}{dx}$$

отнюдь не есть истинная дробь и что поэтому отдельные частицы этого символа

dy и dx

суть лишь символические (условные) числитель и знаменатель, не имеющие в отдельности пока ни малейшего числового смысла, если их брать порознь. Значит, все части символа ***d /dx*** *являются крепко связанными между собой одним общим смыслом и неотделимы друг от друга (вроде того, как неотделимы буквы l и g друг от друга в символе логарифма lgW). Поэтому мы должны рассматривать символ* ***d /dx*** *как нечто цельное. То обстоятельство, что символ производной* ***d /dx*** *не есть настоящая дробь, и позволяет нам так свободно обращаться с этим символом, как мы никогда не рискнули бы, если бы символ был истинной дробью, с настоящими числителем и знаменателем.*

Так, производная функци

$$y = f(x)$$

не только обозначается в виде

$\frac{dy}{dx}$ *или* $\frac{df(x)}{dx}$, *но даже так:* $\frac{d}{dx} f(x)$,

Итак, читатель должен отказаться от толкования символа ***d /dx*** *как дроби и должен рассматривать его как нечто цельное, без числителя и без знаменателя.*

Здесь на символ $\frac{d}{dx}$, *очевидно» надо смотреть лишь как на слово «производная», которое он и заменяет.*

Так, например, производная от функции $y = x^2$ *может быть написана в виде или* $y=(x^2)'$

Аналогично производная от функции $y = 3x^5 - 6x + \sqrt{x}$

может быть обозначена через: $\frac{d}{dx}\left(3x^5 - 6x + \sqrt{x}\right).$

Учащийся отметит, что отношение приращений $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

до своего перехода к пределу зависит от двух переменных величин:

- **от начального значения x аргумента и**
- **от величины приращения Δx аргумента.**

Так, например, когда рассматривают функцию $y = x^2$ *то, согласно сделанным выше вычислениям, имеют место отношения, представленные выражением:*

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$

Но когда ищут предел этого отношения приращений, заставив приращение Δx аргумента стремиться к нулю, т.е. делая $\lim \Delta x \to 0$, *тогда, разумеется, этот предел*

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ *перестает уже зависеть от исчезающего* ***Δ(x)*** *потому что во время отыскания указанного предела* $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ *начальное значение* ***x*** *аргумента предполагается постоянной величиной, а всякий вообще предел переменной величины есть величина постоянная. Поэтому предел* $\lim \Delta y/\Delta x_{\Delta x \to 0}$ *будучи величиной постоянной, может оказаться зависящим только от начального значения аргумента x. Значит, этот предел*

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, *т. е. сама производная* $\frac{dy}{dx}$, *окажется выражением, содержащим только букву* ***x*** *и значит, это будет некоторая новая функция аргумента* ***x****.*

Эта новая функция аргумента ***x****, будучи выведена из данной функции y=f(x) аргумента x или, иначе говоря, будучи произведенной данной функцией y=f(x) и получила по этой причине имя производной функции от данной функции y=f(x)*

То обстоятельство, что эта новая функция выведена из данной функции y=f(x) с помощью некоторого процесса или, еще иначе, что она произведена данной функцией y = f(x) с помощью некоторого процесса, часто ставят на вид, обозначая производную просто такими символами:

y' или $f'(x)$, *т, е. постановкой вверху функции ударения, или штриха* **(')**, *Таким образом, если данная функция есть* $y = f(x)$, *то ее производная пишется шестью способами:*

$$\frac{dy}{dx} \text{ или } \frac{df(x)}{dx},$$
$$\frac{d}{dx}y \text{ или } \frac{d}{dx}f(x),$$
$$y' \text{ или } f'(x).$$

Наиболее часто для производной от данной функции ***y=f(x)*** *пишут равенство:*

$$\frac{dy}{dx} = f'(x),$$

читая его вслух следующим образом: производная от у по х равна эф штрих от икс, Символ же $\frac{d}{dx}$, *рассматриваемый сам по себе, называется знаком дифференцирования и просто показывает, что функцию, за ним написанную, нужно продифференцировать по букве х,*

Пример. *Вычислить и изобразить производную от функции* ***у =х²***

Решение*. Согласно сделанным выше для этой функции вычислениям, имеем для отношения приращений выражение* $\Delta y = 2x\cdot\Delta x + (\Delta x)^2$. *Заставляя в этом равенстве приращение аргумента* Δx *стремиться к нулю, т.е. делая* $\lim \Delta y/\Delta x$ *при* $\Delta x \to 0$, *мы находим* $\lim \Delta y/\Delta x_{\Delta x \to 0} = 2x$, *ибо* Δx *есть бесконечно малое; значит, производная* dy / dx *от функции* $y = x^2$ *равна в точности* $2x$. *Найденный результат записывают, наконец, в виде одного из шести равенств:*

$$\frac{dy}{dx} = 2x; \quad \frac{d}{dx}y = 2x; \quad y' = 2x; \quad \frac{d(x^2)}{dx} = 2x; \quad \frac{d}{dx}(x^2) = 2x; \quad (x^2)' = 2x.$$

Дифференцируемые функции.

Легко видеть, что только ***непрерывные функции*** [ii] *y = f(x) могут обладать производными.*

Действительно, раз производная от функции y=f(x) существует при начальном значении ***x*** *аргумента, то это значит, что* ***Δy*** *есть величина бесконечно малая. Значит имеем:*

$$\lim \Delta y = 0.$$

отношение $\Delta y/\Delta x$ *есть переменная величина, стремящаяся к совершенно определенному конечному числовому пределу (к производной), когда приращение* Δx *стремится к нулю.*

Следовательно, тем самым это отношение есть ограниченная переменная величина. С другой стороны, величина Δx есть бесконечно малая, ибо по условию limΔx →0. А так как произведение ограниченной переменной величины на величину бесконечно малую есть опять величина бесконечно малая, то отсюда следует, что произведение

$$\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) \cdot \Delta x = \Delta y$$

А это и есть определение непрерывности функции y=f(x) в точке x.

Таким образом, разрывные функции заведомо не имеют никакой производной в точках разрывов.

Однако обратное заключение не всегда верно; в самом деле, в настоящее время известны функции, которые, будучи непрерывными, тем не менее не имеют производной. Но такие функции вообще не встречаются в прикладной математике, а в этой книге будут рассматриваться только дифференцируемые функции, т.е. функции, имеющие производную для всех значений независимого переменного, за исключением, разве, некоторых отдельных его значений.

Общее правило дифференцирования.

Из определения производной следует, что процесс дифференцирования функции y=f(x) распадается на следующие отдельные ступени.

Первый шаг. *В функцию вместо x подставляем (x+Δx), что дает новое значение функции, т.е.(y +Δy).*

Второй шаг. *Вычитаем данное значение функции из ее нового значения и таким образом находим излишек Δy (приращение функции).*

Третий шаг. *Делим излишек Δy (приращение функции) на Δx (на приращение независимого переменного).*

Четвертый шаг. *Находим предел частного, Δy/Δx когда Δx (приращение независимого переменного) приближается к пределу, равному нулю. Это и будет искомая производная.*

Учащийся должен самым основательным образом усвоить себе это правило, прилагая его к возможно большему числу примеров.

Три подобные примера приводим со всеми деталями вычислений. Следует принять во внимание, что в четвертом шаге пользуются теоремами о пределах, причем рассматривают букву x как постоянное.

Пример 1. Дифференцировать функцию: y=3x²+5,

прилагаем последовательные шаги, указанные в общем правиле.

Первый шаг.

$$y + \Delta y = 3(x + \Delta x)^2 + 5 = 3x^2 + 6x \cdot \Delta x + 3(\Delta x)^2 + 5.$$

Второй шаг.

$$\begin{array}{r} -\begin{array}{l} y+\Delta y=3x^2+6x\cdot\Delta x+3(\Delta x)^2+5 \\ y=3x^2+5 \end{array} \\ \hline \Delta y=6x\cdot\Delta x+3(\Delta x)^2 \end{array}.$$

Третий шаг.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=6x+3\cdot\Delta x.$$

Четвертый шаг.

$$\frac{dy}{dx}=6x.$$

Можно написать ответ еще так:

$$y'=\frac{d}{dx}(3x^2+5)=6x.$$

Пример 2. Дифференцировать x^3-2x+7.

Решение. Полагаем

$$y=x^3-2x+7.$$

Первый шаг.

$$y+\Delta y=(x+\Delta x)^3-2(x+\Delta x)+7=$$
$$=x^3+3x^2\cdot\Delta x+3x\cdot(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-2x-2\cdot\Delta x+7.$$

Второй шаг.

$$\begin{array}{r} -\begin{array}{l} y+\Delta y=x^3+3x^2\cdot\Delta x+3x\cdot(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-2x-2\cdot\Delta x+7 \\ y=x^3-2x+7 \end{array} \\ \hline \Delta y=3x^2\cdot\Delta x+3x\cdot(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-2\cdot\Delta x \end{array}.$$

Третий шаг.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=3x^2+3x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2-2.$$

Четвертый шаг.

$$\frac{dy}{dx}=3x^2-2$$

или

$$y'=\frac{d}{dx}(x^3-2x+7)=3x^2-2.$$

Пример 3. Дифференцировать $\frac{c}{x^2}$.

Решение. Полагаем

$$y=\frac{c}{x^2}.$$

Первый шаг.

$$y+\Delta y=\frac{c}{(x+\Delta x)^2}.$$

Второй шаг.

$$\Delta y=\frac{c}{(x+\Delta x)^2}-\frac{c}{x^2}=\frac{-c\cdot\Delta x(2x+\Delta x)}{x^2(x+\Delta x)^2}.$$

Третий шаг.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-c\cdot\frac{2x+\Delta x}{x^2(x+\Delta x)^2}.$$

Четвертый шаг.

$$\frac{dy}{dx} = -c \cdot \frac{2x}{x^2 \cdot x^2} = -\frac{2c}{x^3}$$

или

$$y' = \frac{d}{dx}\left(\frac{c}{x^2}\right) = -\frac{2c}{x^3}.$$

ЗАДАЧИ

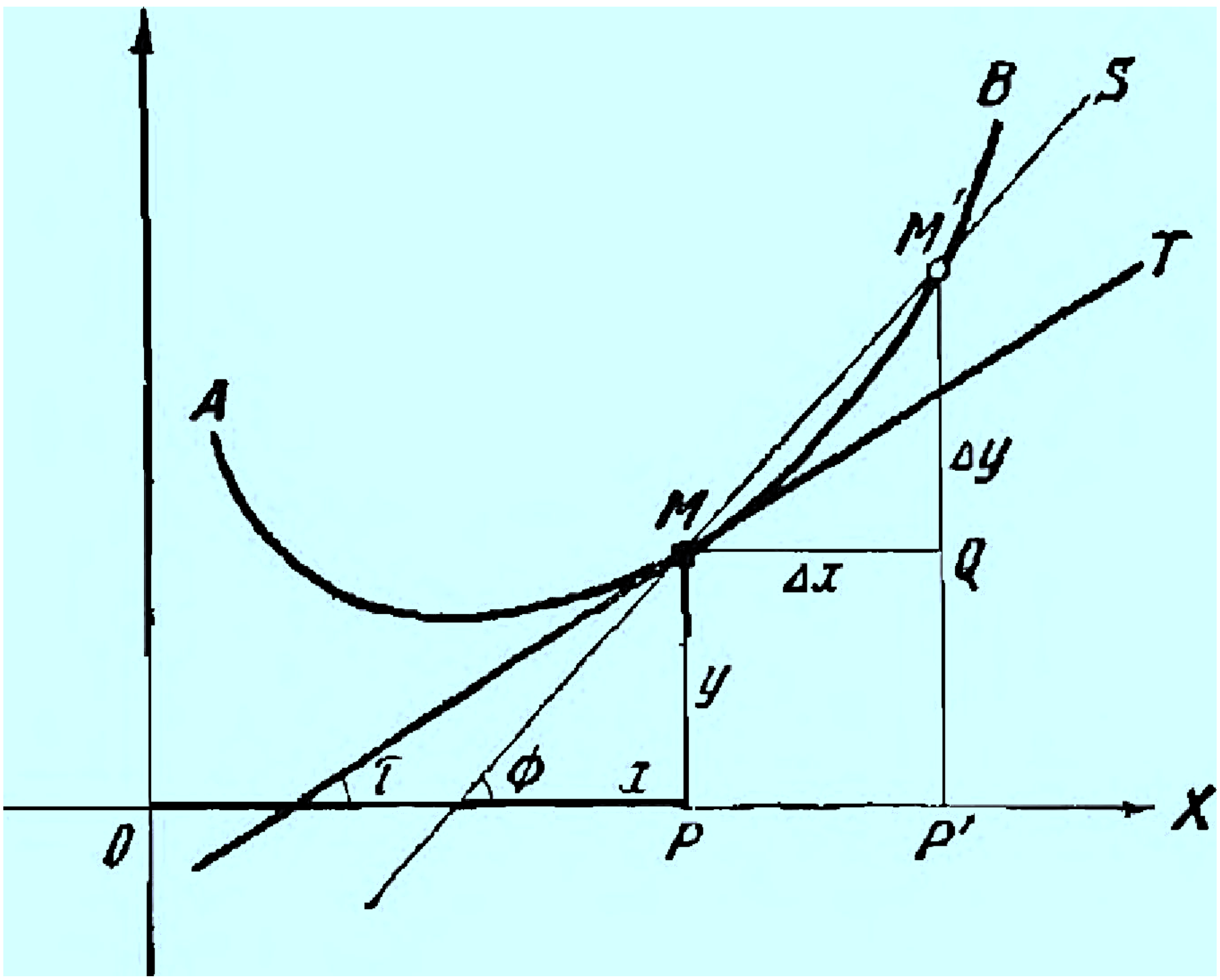
Дифференцировать следующие функции, пользуясь общим правилом.

1. $y = 4x^2$. Отв. $\frac{dy}{dx} = 8x$.
2. $y = 3 - x^2$. » $\frac{dy}{dx} = -2x$.
3. $s = 2 - 5t$. » $\frac{ds}{dt} = -5$.
4. $\rho = \theta^3 - 3\theta$. » $\frac{d\rho}{d\theta} = 3\theta^2 - 3$.
5. $y = mx + b$. » $\frac{dy}{dx} = m$.
6. $z = 3t^2 - 2t^3$. » $\frac{dz}{dt} = 6t - 6t^2$.
7. $y = \frac{2}{x^2}$. » $\frac{dy}{dx} = -\frac{4}{x^3}$.
8. $y = \frac{x^2}{2}$. » $\frac{dy}{dx} = x$.
9. $s = \frac{1}{2t+1}$. » $\frac{ds}{dt} = -\frac{2}{(2t+1)^2}$.
10. $\rho = \frac{1}{1-\theta}$. » $\rho' = \frac{1}{(1-\theta)^2}$.
11. $y = \frac{1}{3}x^3 - x$. » $y' = x^2 - 1$.
12. $y = \frac{1-x}{x}$. » $y' = -\frac{1}{x^2}$.
13. $y = \frac{x}{1-x}$. » $y' = \frac{1}{(1-x)^2}$.
14. $y = \frac{x+2}{x^2}$. Отв. $y' = -\frac{x+4}{x^3}$.
15. $y = \frac{1}{x^2+1}$. » $y' = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}$.
16. $u = \frac{v}{v^2+1}$. » $u' = \frac{1-v^2}{(v^2+1)^2}$.
17. $s = \frac{at+b}{ct+d}$. » $s' = \frac{ad-bc}{(ct+d)^2}$.
18. $y = (x+2)^2$. » $y' = 2x+4$.
19. $y = 5x^2 - 6x + 7$.
20. $s = 4 - t - 3t^2$.
21. $\rho = 9\theta - 3\theta^2$.
22. $y = (a-x)^2$.
23. $y = (x+1)(x+2)$.
24. $y = (3+x)(4-x)$.
25. $y = (b+x)^3$.
26. $y = \frac{x^3 - 2x}{2}$.
27. $y = \frac{x+2}{x-2}$.
28. $s = \frac{t}{1-t^2}$.
29. $y = \frac{x^2}{2x+1}$.
30. $y = \frac{x^2}{2-x}$.

Геометрический смысл производной.

Мы сейчас рассмотрим теорему, являющуюся самой основной во всех приложениях дифференциального исчисления к геометрии. Для этого необходимо напомнить определение касательной к кривой линии в какой-нибудь ее точке М.

*На рисунке секущая **S** проведена через данную неподвижную точку **M** кривой и через близкую к ней точку **M′** также лежащую на кривой. Пусть **M'** движется по кривой и безгранично приближается к **M**. Тогда секущая **S** поворачивается около **M** и ее предельное положение **T** и есть касательная прямая к кривой **AB** в точке **M**.*



*Пусть, действуя, например, приемами **аналитической геометрии**[20] на плоскости, нам удалось составить уравнение в декартовых координатах для кривой **AB**, и пусть это*

$$y = f(x).$$

[20] **Аналити́ческая геоме́трия — раздел геометрии, в котором геометрические фигуры и их свойства исследуются средствами алгебры. В основе этого метода лежит так называемый метод координат, впервые применённый Декартом. Каждому геометрическому соотношению этот метод ставит в соответствие некоторое уравнение, связывающее координаты фигуры или тела.**

уравнение, разрешенное относительно ординаты ***у*** *будет*

В этом случае эта кривая явится графиком функции f(x).

Будем теперь дифференцировать функцию $f(x)$ по общему правилу, причем мы будем истолковывать геометрически каждый шаг этого правила на рисунке.

Мы начали с того, что взяли на кривой точку $M(x, y)$ и еще другую точку $M'(x+\Delta x, y+\Delta y)$, близкую к M, тоже лежащую на кривой.

Первый шаг. $y+\Delta y=f(x+\Delta x) \qquad =P'M'.$

Второй шаг.
$$\begin{array}{rcll} & y+\Delta y & =f(x+\Delta x) & =P'M' \\ - & y & =f(x) & =PM=P'Q \\ \hline & \Delta y & =f(x+\Delta x)-f(x) & =QM'. \end{array}$$

Третий шаг. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\dfrac{QM'}{PP'}=\dfrac{QM'}{MQ}=$

$=\operatorname{tg} QMM'=\operatorname{tg}\Phi=$ тангенсу наклона секущей MS к горизонту (т. е. к оси OX абсцисс).

Значит, отношение приращения ***Δу*** *функции к приращению* ***Δх*** *аргумента есть не что иное, как* ***тангенс наклона секущей****, проведенной через точки*
M(x, y) *и* ***M'(x +Δx, y+ΔУ)*** *графика функции* ***f(x).***

Для геометрического истолкования четвертого шага мы рассматриваем ***x*** *как величину постоянную. Вследствие этого точка* ***M*** *на кривой неподвижна. Но Δх начинает изменяться и безгранично приближаться к нулю. Сообразно этому, точка* ***M'*** *приходит в движение и начинает, двигаясь по кривой безгранично приближаться к* ***M****, как к своему предельному положению. На рисунке*

$\Phi=$ наклону секущей MS;
$\tau=$ наклону касательной MT.

Значит, имеем ***φ≥τ.*** *Так как тангенс есть функция непрерывная для всех численных значений аргумента (кроме значений вида* ***my****, где* ***m*** *положительное или отрицательное нечетное число), то геометрический смысл четвертого шага будет следующий:*

Четвертый шаг. $\dfrac{dy}{dx}=f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\operatorname{tg}\Phi=\operatorname{tg}\tau=$

= тангенсу наклона касательной MT.

Таким обазом мы получили важное предложение:

Численное значение производной в какой-нибудь точке кривой равно тангенсу наклона касательной в этой точке кривой к горизонту (т. е. к оси абсцисс).

Именно эта задача: о проведении касательной, и привела Лейбница со своей стороны, к открытию дифференциального исчисления.

Пример.

Найти наклон касательной к параболе ***$y = x^2$*** *в ее вершине и в точке* ***M(1/2; 1/4)****.*

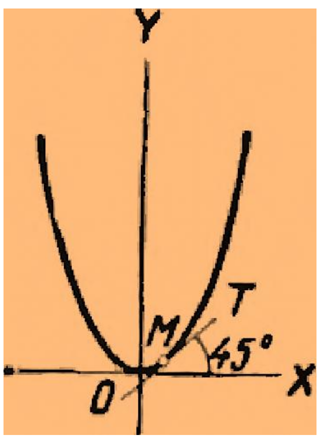
Решение.

Дифференцируя функцию по общему правилу, имеем ***$y' = 2x$,*** *что соответствует тангенсу наклона касательной в произвольно заданной точке* ***M(x; y)*** *кривой.*

Чтобы найти наклон касательной в вершине параболы, полагаем ***$x=0$*** *в выражении для* ***$y' = 2x$****. Это нам дает* ***$y' = 0$***

Значит, касательная в вершине, имея нулевой наклон, параллельна оси абсцисс (оси x), в нашем случае, просто совпадает с ней.

Чтобы найти наклон касательной в точке M(1/2;1/4), где мы полагаем x =1/2 в выражении ***$y' = 2x$*** *что нам дает:* $\frac{dy}{dx} = 1.$



Значит, касательная в точке M делает угол в 45° с осью абсцисс (см. рисунок).

ЗАДАЧИ

Найти дифференцированием наклон касательной к каждой из следующих кривых в указанной точке. Проверив результат, вычертить кривую и касательную прямую.

1. $y = 4 - x^2$, точка $x = 2$. Отв. -4; $104°2'$.
2. $y = 4x - x^2$. $x = 2$. » 0; $0°$.
3. $y = \frac{9}{x}$, $x = 3$. » -1; $135°$.
4. $y = x^3 - \frac{x}{2}$, $x = 0$. » $-\frac{1}{2}$; $153°26'$.
5. $y = x^3 - 3x$, $x = 1$. » 0; $0°$.
6. $y = 2x - x^3$, $x = -1$. » -1; $135°$.

В каждой из трех следующих задач найти: 1) точки пересечения данной пары кривых; 2) наклон касательной к той и к другой кривой; 3) угол между касательными в их точках пересечения.

7. $y = 2 - x^2$, $y = x^2$. Отв. Угол пересечения $= \operatorname{arc\,tg} \frac{4}{3} \approx 53°8'$.
8. $y = x^2 - 5$, $y = 3x - 5$. » $\operatorname{arc\,tg} 3 \approx 71°34'$ и $\operatorname{arc\,tg} \frac{3}{19} \approx 8°59'$.
9. $y = x^2 - 2x + 1$, $y = 7 + 2x - x^2$. » $\operatorname{arc\,tg} \frac{8}{15} \approx 28°4'$.
10. Найти угол пересечения двух кривых: $y = \frac{x^3}{4}$ и $y = 6 - x^2$ в точке (2,2).

СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

*Классический период развития теории дифференциальных уравнении, начавшейся с Ньютона и Лейбница и в основном завершившийся во 2-й половине XIX века работами **Софуса Ли**[iii], ставил с воей основной задачей нахождение общего решения возможно широких классов уравнений, в элементарных функциях или при помощи выражений, содержащих квадратуры от элементарных функций. Но очень скоро обнаружилось, что для подавляющего большинства уравнений и систем уравнений так поставленная задача неразрешима; таким образом, на этом пути оказалось невозможным построить общую* *теорию дифференциальных уравнений. Между тем задачи математического естествознания, главным образом механики и в особенности небесной механики, требовали разрешения часто весьма сложных систем уравнений. В связи с этими требованиями математической практики получили широкое развитие методы численного интегрирования дифференциальных уравнений, которые и до настоящего времени применяются каждый раз, когда для конкретной задачи нужно получить числовой ответ. Существенным дефектом этих методов является то, что они принципиально дают только одно частное решение; для нахождения другого частного решения нужно все вычисления производить заново. Поэтому численные методы не могут служить базой для создания общей теории дифференциальных уравнений. Классическое направление дало фундамент для общей теории, в основном, линейных дифференциальных уравнений: известные теоремы о характере зависимостиобщего решения от постоянных интеграции и от начальных данных, получение общего решения из частных (Лагранж) и т. д. Теория нелинейных дифференциальных уравнений ведет своё начало от Коши (первая половина XIX в.), который дал доказательство существования и единственности, при известных условиях, решения дифференциального уравнения, как методами теории функций комплексного переменного (применением мажорантных функций), так и методами анализа в действительной области (аппроксимация интегральных кривых полигональными линиями).* ***<u>Дальнейшие существенные результаты принадлежат</u>****:*

- *в направлении комплексного переменного* ***Пуанкаре*** *(исследование зависимости решения от параметра),*
- ***Пенлеве*** *(зависимость решения от начальных условий),*
- *а в действительной области-Пикару (метод последовательных приближений и его следствия) и*
- ***Линделёфу*** *(дифференцируемость по начальным данным).*

Следует отметить, что теоремы существования немедленно нашли и практическое применение в виде приближённых методов интегрирования дифференциальных уравнений. Степенные ряды и пикаровские приближения не только в пределе дают точное решение данных уравнений, но и позволяют приблизиться к нему с любой степенью точности, причём часто можно усмотреть из этих приближений характер зависимости от начальных значений и параметров. Наиболее важное место в общей теории дифференциальных уравнений занимает качественная теория, основателем которой является Пуанкаре. В своих работах Пуанкаре, начиная с 80-х годов XIX века, пришёл к разработке качественных методов в связи е вопросами небесной механики и космогонии, в которых важно не только определить характер решении в течение заданного конечного интервала времени, но ташке иметь сведения о поведении решения при неограниченном возрастании времени. Начиная с Пуанкаре исследования этого рода ведутся, главным образом, по отношению к системам уравнений, правые части которых не зависят явно от независимого переменного ***t*** *(времени) — эти системы впоследствии (Биркгоф) получили название* ***динамических систем****. При этом без ограничения общности можно ограничиться (при помощи введения вспомогательных зависимых переменных) случаем системы 1-го порядка вида*

(i)

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Переменные x_1, x_2 ..., x_n при этом рассматриваются как координаты точки n-мерного пространства (фазовое пространство), а решения системы (i) называются движениями. Пуанкаре дал достаточно полную качественную картину поведения интегральных кривых системы (i) на плоскости, т.е. в случае n=2; его исследования получили завершение в работе Бендиксона; Броуер провёл те же исследования для случая, когда в системе (i) на плоскости не выполняется условие единственности. Для случая n> 2 следует отметить исследования Пуанкаре об интегральных кривых на поверхности тора, дополненные в последние десятилетия исследованиями Данжуа и Х. Кнезера. Для общего случая системы (i) Пуанкаре получил только предварительные результаты.

Одновременно с Пуанкаре исследованием систем вида (i) и даже более общих, где правые части могут определённым образом зависеть от t, занимался А. М. Ляпунов. Основная проблема, которую изучал ***Ляпунов А.М.,*** *это устойчивость решения уравнения (i) (главным образом, решения, представляющего равновесие или периодическое движение) на бесконечном интервале временной оси при малых изменениях начальных условий, определяющих данное решение.*

Как для ***вопросов устойчивости****, так и для общего качественного анализа дифференциальных уравнений большое значение имеет исследование особых точек или точек покоя системы (i). Это те точки ($x_1^{(0)}$, $x_2^{(0)}$..... $x_n^{(0)}$), для которых X_i($x_1^{(0)}$, $x_2^{(0)}$..... $x_n^{(0)}$)=0, i=1,2,3,……….n. Изучение расположения интегральных кривых в окрестности особой точки, для случая n= 2. проведено Пуанкаре, Бендиксоном и другими авторами. Для общего случая исследование характера особых точек начато Пуанкаре и ещё далеко не закончено. Наиболее общие результаты здесь принадлежат Перрону и И. Г. Петровскому. Кроме того, в направлении устойчивости но Ляпунову исследование окрестности особой точки далеко продвинуто работами математиков Казанской школы (Н. Г. Чеботарев, И. Г. Малкин, Г. В. Каменков, К. П. Персидский). Теория динамических систем, намеченная Пуанкаре, получила дальнейшее широкое развитие в работах Биркгофа. Можно сказать, что Биркгоф положил основание общей теории динамических систем, выделив в них особенно интересные классы движенийцентральные и рекуррентные движения. Биркгоф также продолжил изыскания Пуанкаре о существовании периодических решений в окрестности данного периодического решения. Он ещё-больше, чем Пуанкаре, пользуется топологическими методами (принцип неподвижной точки и др.). Среди общих динамических систем большое развитие получила теория динамических систем, обладающих интегральным инвариантом; в частности к этому классу относятся системы уравнений Гамильтона в классической динамике. Важная роль этого класса динамических систем отмечена ещё Пуанкаре, который доказал для них «теорему возвращения». Дальнейший крупный успех этой теории опять связан с именем Биркгофа: с его знаменитой эргодической теоремой (1932 г.), имеющей большие приложения в области статистической механики. Получив таким образом экскурс в теорию устойчивости систем дифференциальных уравнений, перейдем к конкретному рассмотрению.*

Система дифференциальных уравнений 1-го порядка $\dot{u} = f(t, u)$ называется автономной, если вектор-функция f не имеет явной зависимости от t, т.е.

$$\dot{\mathbf{u}} = \boldsymbol{f}(\mathbf{u}). \quad (1)$$

*Здесь **u** это **n** — мерный вектор, **f** : $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ — известная вектор-функция.*

Пусть f(0) = 0. Тогда нулевая функция u(t) = 0 будет решением системы (1) и можно поставить вопрос об устойчивости этого решения. Как правило, в такого типа задачах не удастся найти общее решение системы (1) в явном аналитическом виде (ни в элементарных функциях, ни в квадратурах) и исследовать нулевое решение на устойчивость, исходя из определения:

$$\text{«}\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ \delta > 0\ \ldots\text{».}$$

*Поэтому задачи устойчивости относятся к т.н. **качественной теории дифференциальных уравнений**, а для получения ответа на вопрос приходится использовать всякого рода косвенные признаки. Один из подходов — это построение функции Ляпунова для системы (1) и применение какой-то из четырёх теорем Ляпунова и Четаева. Чтобы сформулировать эти теоремы необходимо понятие системной производной. Обычно, если некоторая скалярная функция **v** имеет в качестве аргумента вектор $u = (u_1, u_2, \ldots\ldots u_n)$, а сам вектор **u** зависит от скалярной переменной t, то производная **dv/dt** имеет вид:*

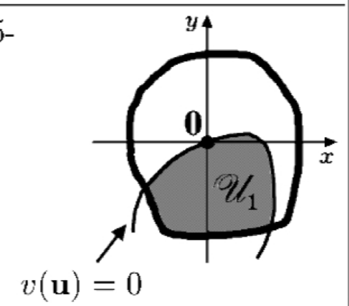
$$\frac{dv(\mathbf{u}(t))}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial u_k}\frac{du_k}{dt} = \nabla v \cdot \dot{\mathbf{u}}.$$

*Системная производная функции **v** отличается от этой общей формулы тем, что когда **u(t)** является решением системы (ii), то $\dot{\mathbf{u}}$ можно заменить на **f(u)**, т.е.*

$$(2) \qquad \left.\frac{dv(\mathbf{u}(t))}{dt}\right|_{(1)} = \nabla v \cdot \boldsymbol{f}(\mathbf{u}).$$

Теперь сами теоремы. Все они начинаются одинаково: пусть в окрестности нуля $\mathscr{U}(\mathbf{0}) \in \mathbb{R}^n$ задана непрерывно дифференцируемая функция $v(\mathbf{u})$, причём $v(\mathbf{0}) = 0$. Далее идут различия:

①	• если $v(\mathbf{u}) > 0$ для всех ненулевых $\mathbf{u} \in \mathscr{U}(\mathbf{0})$, • если $\left.\dfrac{dv(\mathbf{u}(t))}{dt}\right\|_{(1)} \leqslant 0$ для всех $\mathbf{u} \in \mathscr{U}(\mathbf{0})$, то нулевое решение системы (1) устойчиво по Ляпунову.
②	• если $v(\mathbf{u}) > 0$ для всех ненулевых $\mathbf{u} \in \mathscr{U}(\mathbf{0})$, • если $\left.\dfrac{dv(\mathbf{u}(t))}{dt}\right\|_{(1)} < 0$ для всех ненулевых $\mathbf{u} \in \mathscr{U}(\mathbf{0})$, то нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво по Ляпунову.
③	• если существуют сколь угодно близкие к нулю точки $\mathbf{u}$, в которых $v(\mathbf{u}) > 0$, • если $\left.\dfrac{dv(\mathbf{u}(t))}{dt}\right\|_{(1)} > 0$ для всех ненулевых $\mathbf{u} \in \mathscr{U}(\mathbf{0})$, то нулевое решение системы (1) неустойчиво.
④	• если в окрестности нуля $\mathscr{U}(\mathbf{0})$ можно выделить область $\mathscr{U}_1$, на границе которой лежит точка $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, • если $v(\mathbf{u}) > 0$ внутри самой области $\mathscr{U}_1$, • если $v(\mathbf{u}) = 0$ на границе области $\mathscr{U}_1$, • если $\left.\dfrac{dv(\mathbf{u}(t))}{dt}\right\|_{(1)} > 0$ внутри области $\mathscr{U}_1$, то нулевое решение системы (1) неустойчиво.



Первые три теоремы принадлежат Ляпунову, последняя — Четаеву.
Небольшой комментарий и примеры к теоремам.
У Филиппова рассматриваются только задачи на построение функции Ляпунова для дифференциальных систем на плоскости, т.е. n = 2, u = (x, y) и система (1) в координатной форме записи имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x, y), \\ \dot{y} = f_2(x, y), \end{cases}$$

где $f_1(0, 0) = f_2(0,0) = 0$. В этом случае функция Ляпунова $v(u) = v(x, y)$ имеет системную производную :

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(1)} = \frac{\partial v}{\partial x} f_1(x, y) + \frac{\partial v}{\partial y} f_2(x, y).$$

Общего метода построения функции Ляпунова нет. В качестве первых попыток выбора функции v(x. y) можно попробовать:

(3) $v(x,y) = ax^2 + by^2, \quad v(x,y) = ax^4 + by^4, \quad v(x,y) = ax^4 + by^2$ и т.д.

Параметры a, Ь выбираются надлежащим образом, чтобы удовлетворить условиям какой-либо из четырёх теорем:

- *положительными, если есть надежда на устойчивость нулевого решения с использованием теорем (1) и (2);*
- *положительными, если есть подозрение на неустойчивость нулевого решения и проверяется выполнимость условий теоремы (3);*
- *разных знаков, если делается попытка применить теорему (4) для доказательства неустойчивости нулевого решения.*

ПРИМЕР. *Исследовать устойчивость нулевого решения системы:*

$$\begin{cases} \dot{x} = x^3 - y, \\ \dot{y} = x + y^3. \end{cases}$$

Решение. Попробуем в качестве функции Ляпунова взять v (x, y) = ax² + by² с произвольными пока параметрами a, Ь. Тогда:

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(1)} = \frac{\partial v}{\partial x} f_1(x,y) + \frac{\partial v}{\partial y} f_2(x,y) = 2ax(x^3 - y) + 2by(x + y^3) = 2ax^4 + 2by^4 + 2xy(b-a).$$

Если a = b = 1, то функция Ляпунова будет положительна всюду, кроме нулевой точки x = y = 0, положительна также будет и её системная производная. Поэтому, применяя теорему (3), получаем неустойчивость нулевого решения.

Следует отметить нестрогий знак неравенства для системной производной в формулировке теоремы (1): бывают случаи, когда системная производная тождественно равна нулю. Это никак не сказывается па использовании данной теоремы.

Пример. *Исследовать устойчивость нулевого решения системы*

$$\begin{cases} \dot{x} = -xy^4, \\ \dot{y} = x^4 y. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ.

Если взять $v(x,y) = x^4 + y^4$, то

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(1)} = 4x^3(-xy^4) + 4y^3 \cdot x^4 y = 0.$$

Выполнены условия теоремы (1), поэтому нулевое решение устойчиво.

Кстати, в этой задаче проходит ещё один приём, который полезно взять на вооружение, хотя срабатывает он, к сожалению, довольно редко: если в исходной системе одно уравнение поделить на другое, то всё сводится к обыкновенному уравнению, которое легко решается.

$$\frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \frac{dx/dt}{dy/dt} = \frac{dx}{dy} = \frac{-xy^4}{x^4 y} = -\frac{y^3}{x^3} \quad \Rightarrow \quad x^3\,dx = -y^3\,dy \quad \Rightarrow$$

$$\tfrac{1}{4}x^4 = -\tfrac{1}{4}y^4 + C \quad \text{или} \quad x^4 + y^4 = 4C.$$

Полученные кривые на фазовой плоскости являются ограниченными, поэтому нулевое решение устойчиво.

*То, что решение исходной системы оказалось возможным записать через функцию Ляпунова в виде **v (x, y) = C**, не случайно. Если систему **u̇= f(u)** удаётся решить аналитически и получается что-то вида **F(x, y) = C**, то при выяснении вопроса об устойчивости/неустойчивости на роль функции Ляпунова надо первым делом пробовать функцию F(x, y). Впрочем, явный вид решения системы помогает для исследования устойчивости лучше любых косвенных методов.*

Пример. Пусть $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, $V(\mathbf{u})$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция в некоторой окрестности нуля $\mathscr{U}(\mathbf{0})$, положительная для всех ненулевых $\mathbf{u}$ и удовлетворяющая в нуле равенствам $V(\mathbf{0}) = 0$, $\nabla V(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Что можно сказать об устойчивости нулевого решения $\mathbf{u}(t) \equiv \mathbf{0}$ системы

$$\dot{\mathbf{u}} = \omega \nabla V(\mathbf{u}),$$

где ω — положительный или отрицательный параметр?

Решение.

*При **ω < 0** нулевое решение системы* $\nabla V(\mathbf{u}) \neq 0$ *устойчиво в силу теоремы (1), при **ω > 0** и дополнительном предположении, что для всех ненулевых **u**, нулевое решение неустойчиво в силу теоремы (3). В качестве функции Ляпунова подходит сама функция F(u). Действительно, в нуле она обращается в нуль, для ненулевых и она* *положительна, её системная производная равна:*

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial u_k}\,\frac{du_k}{dt} = \nabla V \cdot \dot{\mathbf{u}} = \omega|\nabla V|^2,$$

то есть

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(1)} \leqslant 0, \text{ если } \omega < 0, \text{ и } \left.\frac{dV}{dt}\right|_{(1)} > 0, \text{ если } \omega > 0.$$

Поэтому нулевое решение устойчиво или неустойчиво в зависимости от знака параметра ***ω****.*
Интересно отметить распределение ролей, которые играют равенства
V(0) = 0 и $\nabla V = 0$
Первое условие необходимо для применения теоремы (1) или теоремы (3), а второе условие нужно, чтобы u(t) = 0 было решением системы .

$$\dot{\mathbf{u}} = \omega \nabla V(\mathbf{u})$$

Мелкая иллюстрация.
Пусть V(x, y) = f (ax² + 2Ьxy + cy²) с коэффициентами a > 0, c > 0, ac > Ь². Тогда нулевое решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -ax - by, \\ \dot{y} = -bx - cy \end{cases}$$

устойчиво (даже асимптотически устойчиво, т.к. в силу строгого неравенства ac > Ь² срабатывает более сильное условие на системную производную из теоремы (2))
Мелкое обобщение. *Пусть выполняются все условия на функцию V(u) и константы uji, u>2., соп все одного знака. Тогда нулевое решение системы*

$$\dot{u}_k = \omega_k \frac{\partial V(\mathbf{u})}{\partial u_k} \quad (k = 1, \dots, n)$$

Неустойчиво, если знак + и устойчиво, если знак -

Задача. *Исследовать устойчивость нулевого решения системы:*

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -ay - x^3 - a^2 x \end{cases}$$

при всех значениях параметра ***a****.*

Решение.

Начнем с использования теоремы Ляпунова о первом приближении: строим матрицу Якоби нашей системыи находим её вид при x = y = 0 (то самое нулевое решение x(t) = 0, y(t) = 0 системы, которое надо исследовать).

$$J = \left.\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}\right|_{x=y=0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a^2 & -a \end{pmatrix}.$$

Находим собственные числа, полученной матрицы:

$$\det(J - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -a^2 & -a-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + a\lambda + a^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{-a \pm i|a|\sqrt{3}}{2}.$$

*Таким образом, при **a > 0** нулевое решение асимптотически устойчиво (вещественная часть обоих корней отрицательна), при a < 0 — неустойчиво, при a = 0 ничего сказать нельзя. Если бы в правой части системы были только линейные слагаемые, то в случае a = 0 была бы устойчивость, т.к. ,* $\operatorname{Re}\lambda_{1,2} = 0,$

но не асимптотическая устойчивость. Но поскольку в правой части присутствуют нелинейные слагаемые, то именно они начинают теперь оказывать влияние и решают в какую сторону склонить шаткую ситуацию на весах устойчивости/неустойчивости.

Итак, исследуем отдельно случай a = 0. Система тогда принимает вид

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x^3. \end{cases}$$

Как и в рассмотренном выше примере, её можно решить и найти первый интерал, поделив второе уравнение на первое :

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{dy}{dx} = -\frac{x^3}{y} \quad \Rightarrow \quad y\,dy + x^3\,dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \tfrac{1}{2}y^2 + \tfrac{1}{4}x^4 = C.$$

Фазовые кривые ограничены, поэтому a = 0 соответствует устойчивости нулевого решения. Если взять v(x,y) = 1\2y² + 1\4x⁴, то её системная производная будет тождественно равна нулю, сама функция v(x,y) обращается в нуль в точке (0,0) и положительна во всех остальных точках из окрестности нуля, поэтому для доказательства устойчивости достаточно сослаться на теорему (1).

Задача. *Исследовать устойчивость нулевого решения системы:*

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + y + (a+1)x^2, \\ \dot{y} = x + ay \end{cases}$$

при всех значениях параметра a.

Решение.

Опять начинаем с теоремы Ляпунова о первом приближении:

$$J = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix} \Rightarrow \det(J - \lambda E) = \begin{vmatrix} a-\lambda & 1 \\ 1 & a-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - a)^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = a \pm 1.$$

Если a < -1, то оба корня отрицательны, значит нулевое решение асимптотически устойчиво. Если a > -1, то корень A = a + 1 положителен, и нулевое решение неустойчиво. Случай a = -1 придётся рассмотреть отдельно, поскольку правая часть исходной системы нелинейна. Подставляем -1 вместо a и получаем систему

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y, \\ \dot{y} = x - y. \end{cases}$$

Редкий случай везения: ничего не надо исследовать, т.к. для данного значения параметра нелинейная система стала линейной! Для линейных систем корни λ_1= = 0 и λ_2 = -2 означают устойчивость нулевого решения. Простой вид полученной системы позволяет так же легко доказать устойчивость нулевого решения, используя другие методы:

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y, \\ \dot{y} = x - y. \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{-x+y} = -1 \quad \Rightarrow \quad dx + dy = 0 \quad \Rightarrow \quad x + y = C.$$

*Функция **x + y** как-то не тянет на роль функции Ляпунова, разве что для доказательства неустойчивости с использованием теоремы (3) или (4). Но явная связь между **x** и **y** позволяет исследовать вопрос устойчивости нулевого решения без попыток построения функции Ляпунова, достаточно зависимость y = C - x подставить в первое уравнение системы. Тогда*

$$\dot{x} = -2x + C \quad \Rightarrow \quad x(t) = \tfrac{1}{2}C + C_1 e^{-2t} \quad \Rightarrow \quad y(t) = C - x(t) = \tfrac{1}{2}C - C_1 e^{-2t}.$$

Поэтому нулевое решение исходной системы будет устойчиво (экспоненты при t → ∞ стремятся к нулю), но не асимптотически устойчиво (постоянные слагаемые1/2C не стремятся к нулю).

Если хочется доказать устойчивость с помощью функции Ляпунова, то в качестве подручных средств вполне сгодятся функция v (x, y) = x^2 + y^2 и теорема (1). Кстати, исходная система могла бы быть и потяжелее, например:

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + y + (a+1)f_1(x,y), \\ \dot{y} = x + ay + (a+1)f_2(x,y), \end{cases}$$

где функции $f_{1,2}(x, y)$ могут быть любыми, лишь бы в точке (0,0) обращались в нуль они сами и их первые производные: $f_{1,2}(0,0) = 0$, $\nabla f_{1,2}(0,0)= 0$.
Решение $x(t) = y(t) = 0$ при $a = -1$ по-прежнему осталось бы устойчивым.

***Задача.** Исследовать устойчивость нулевого решения системы при всех значениях параметра а.*

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x(1+x^4) - ay, \end{cases}$$

***Решение.** Строим матрицу Якоби в нуле для применения теоремы Ляпунова о первом приближении:*

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -a \end{pmatrix} \Rightarrow \det(J - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -a-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + a\lambda + 1 = 0.$$

Можно было бы найти корни получившегося уравнения:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2}$$

*и заняться их исследованием, но проще применить критерий **Льенара-Шипара**. В данной ситуации это напоминает стрельбу из пушки по воробьям, но зато приводит к цели за один шаг. Вспомним формулировку этого критерия. Чтобы все корни уравнения*

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \ldots + a_n = 0 \qquad (4)$$

имели отрицательные вещественные части , необходимо и достаточно выполнение двух условий:

1. $a_k > 0$ для всех $k = 1, \ldots, n;$

2. все главные диагональные миноры Δ_{n-1}, Δ_{n-3}, Δ_{n-5},…… определителя

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \cdots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

должны быть больше нуля[iv]*. Если* ***n*** $\leqq$ ***2****, то это условие можно не проверять В нашем случае* $\lambda^2 + a\lambda + 1 = 0$*, поэтому при* $a > 0$ *нулевое решение асимптотически устойчиво, при* $a < 0$ *нулевое решение неустойчиво, при* $a = 0$ *необходимо отдельное исследование. Опять деление одного уравнения системы на другое позволяет найти первый интеграл:*

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x(1+x^4)}{y} \quad \Rightarrow \quad y\,dy + x(1+x^4)\,dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \tfrac{1}{2}y^2 + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x^6 = C.$$

Ограниченность фазовых кривых означает устойчивость (обычную, не асимптотическую) нулевого решения. Левую часть последнего равенства можно взять в качестве функции Ляпунова v (x, y).

Ещё пара примеров на критерий Льенара-Шипара

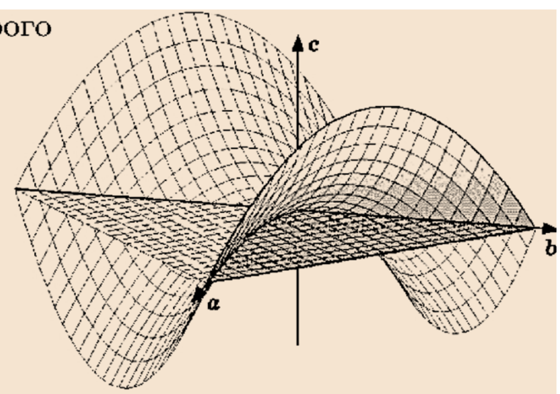
Арнольдовский «Тривиум», № 22.

Исследовать границу области устойчивости (max Re $\lambda_j < 0$*) в пространстве коэффициентов уравнения*

$$\dddot{x} + a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0.$$

Решение. *Характеристический полином в данном случае имеет вид*

$$\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c.$$



Все три корня этого полинома будут иметь строго отрицательные вещественные части, если:

1. $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, т.е. точка $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ расположена в первом октанте;
2. минор Δ_2 положителен.

Поскольку

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ c & b & a \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a & 1 \\ c & b \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = a,$$

то неравенства $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $ab - c > 0$ определяют в пространстве $\mathbb{R}^3$ область в первом октанте, ограниченную сверху параболическим гиперболоидом $ab = c$, а снизу плоскостью $c = 0$. □

Пример. *Определить область устойчивости в пространстве коэффициентов уравнения*

$$x^{\mathrm{IV}} + x''' + ax'' + bx' + cx = 0.$$

Решение. *Дифференциальное уравнение четвёртого порядка, n = 4, характеристический полином* $\lambda^4 + \lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c$ *имеет четыре корпя и зависит от трёх вещественных параметров.*

Первое условие, необходимое для выполнимости критерия Льенара-Шипара, — положительность каждого параметра: a>0, Ь> 0, c>0.

Второе условие — положительность миноров Δ_3 *и* Δ_1*. Горизонтальный шаблон в данном случае {c, b, a, 1,1}.*

Формируем определитель Δ4 и его миноры:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ b & a & 1 & 1 \\ 0 & c & b & a \\ 0 & 0 & 0 & c \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ b & a & 1 \\ 0 & c & b \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b & a \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = 1,$$

Таким образом, к неравенствам a>0, b>0, c>0 добавляется ещё одно: b(a — b)>c. Вместе они задают в пространстве $\boldsymbol{R^3}$ *область, аналогичную получившейся в предыдущей задаче: область лежит в первом октанте, сверху её ограничивает параболический гиперболоид b(a — b) = c, снизу — плоскость c = 0. Вся разница лишь в том, что прямыми пересечения гиперболоида с плоскостью в арнольдовской задаче были a = 0 и b = 0. я в данной задаче -b = 0 и a = b.*

Задача. *Исследовать устойчивость нулевого решения системы*

$$\begin{cases} \dot{x} = -ax + (a-1)y, \\ \dot{y} = x + ay^2 \end{cases}$$

Привсех значениях параметра ***a***

Решение. Матрица Якоби в нуле имеет вид:

$$J = \left.\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\big(-ax + (a-1)y\big)}{\partial x} & \dfrac{\partial\big(-ax + (a-1)y\big)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial\big(x + ay^2\big)}{\partial x} & \dfrac{\partial\big(x + ay^2\big)}{\partial y} \end{pmatrix}\right|_{x=y=0} = \begin{pmatrix} -a & a-1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Строим уравнение на собственные числа:

$$\det(J - \lambda E) = \begin{vmatrix} -a-\lambda & a-1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + a\lambda + 1 - a = 0.$$

Критерий Льенара—Шипара гарантирует отрицательность вещественных частей обоих корней этого уравнения, если выполнены неравенства $a > 0$ и $1 - a > 0$. Таким образом, при $a \in (0,\,1)$ нулевое решение устойчиво, при $a \in (-\infty,\,0) \cup (1,\,+\infty)$ — неустойчиво, случаи $a = 0$ и $a = 1$ надо исследовать дополнительно.

*Если a = 0, то исходная система становится линейной, а для таких систем собственные числа$\lambda = \pm i$ означают устойчивость нулевого решения. Можно было бы разделить в получившейся системе второе уравнение на первое и найти первый интеграл $x^2 + y^2 = C$, вид которого также говорит об устойчивости нулевого решения. Случай **a = 1** приводит к системе*

$$\begin{cases} \dot{x} = -x, \\ \dot{y} = x + y^2 \end{cases}$$

Первое уравнение не доставляет проблем: $x(t) = Ce^{-t}$. Проблемы доставляет второе уравнение, которое после подстановки x(t) принимает вид $\frac{dy}{dt} = y^2 + Ce^{-t}$, *относится по классификации уравнений первого порядка к уравнениям Риккати и, вообще говоря, без угадывания частного решения не имеет способа решения. Деление второго уравнения системы на первое тоже приводит к уравнению Риккати:*

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y^2}{x} - 1.$$

В справочнике Зайцева и Полянина по нелинейным ОДУ показано, что замена $y = \frac{x}{z}\frac{dz}{dx}$ *Сводит это уравнение к уравнению*

$$x\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{dz}{dx} + z = 0,$$

Которое после еще одной замены $x = \frac{1}{4}t^2$ *Превращается в уравнение **Бесселя:***

$$t^2\frac{d^2z}{dt^2} + t\frac{dz}{dt} + (t^2 - 0^2)z = 0.$$

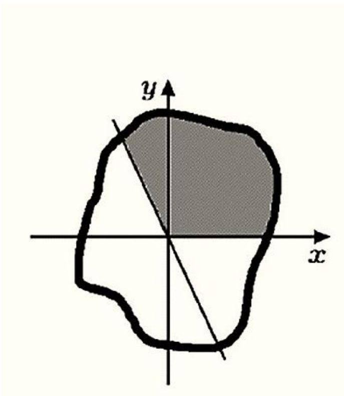
Его решение имеет вид:

$$z(x) = C_1 J_0(t) + C_2 Y_0(t) = C_1 J_0(2\sqrt{x}) + C_2 Y_0(2\sqrt{x}).$$

*Учитывая, что функция Бесселя J_0 (x) ограничена при всех $x \in$ **R**, функция Неймана $Y_0(x)$ имеет логарифмическую особенность в нуле, а **x(t) = Ce**$^{-t}$ при **t** $\to +\infty$ стремится к нулю, нетрудно подобрать такие константы C_1, C_2, что z(x), выйдя из какой-то точки z (x (0) = C) ≠ 0, из-за монотонного стремления x(t) к нулю, будет вынуждена в какой-то момент обратиться в нуль. При этом функция y = (x/z)·dz/dx обращается в* *бесконечность. Такой финал говорит о неустойчивости нулевого решения исходной системы. Можно пообсуждать вопрос «Когда такой момент наступит?» и привести конкретные аналитические оценки, но Филиппов, включая эту задачу в свою книгу, вряд ли на такое рассчитывал.*

Другой, не такой «лобовой» способ — это подобрать функцию Ляпунова для теоремы (3) или (4). Учитывая невысокий (квадратичный) порядок полиномов в правой части исходной системы, можно начать попытки с функции вида ***v(x, y) = ax² + 2Ьxy + cy².***

В качестве одной из возможных функций Ляпунова подойдёт



$$v(x, y) = y(y + 2x).$$

При этом область U1 — это серая часть сектора захватывающего весь первый квадрант и часть второго от оси ординат до прямой ***y= - 2x*** *. Тогда системная производная функции Ляпунова:*

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(1)} = 2y(-x) + (2x + 2y)(x + y^2) = 2x^2 + y^2(2x + y) + y^3$$

строго положительна внутри области U1 (каждое из трёх слагаемых неотрицательно, все вместе они обращаются в нуль только в центре координат). По теореме (4) получаем, что при ***a= 1*** *нулевое решение нашей системы неустойчиво.*

Предложенная на занятии функция v(x, y) = 1/2(x + y)² не годится на роль функции Ляпунова, т.к. её системная производная

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(1)} = y^2(x + y)$$

зануляется на прямой y= 0, которая находится внутри области U1, а по теореме Четаева требуется строгая положительность.

Задача. *Исследовать устойчивость нулевого решения системы*

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x + xy, \\ \dot{y} = x - y - x^2 - y^3. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. *Подобно решению предыдущей задачи, опять берём на пробу* ***v(x, y) = ax² + Ьy²*** *в качестве* ***функции Ляпунова****. Тогда*

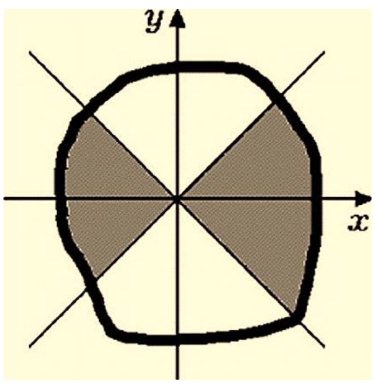
$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(1)} = 2ax(y - x + xy) + 2by(x - y - x^2 - y^3) =$$
$$= -2ax^2 - 2by^2 + 2xy(a + b) + 2x^2y(a - b) - 2by^4.$$

Два варианта в полученном выражении для системной производной могут представлять интерес: а+ Ь =0 и а- Ь =0 . В первом случае можно взять Ь = -а. Тогда ***v(x, y) = a(x² - y²)****. Функция* ***v*** *знакопеременная, она может быть функцией Ляпунова только для проверки условий теоремы (3) или теоремы (4) (т. е. проверки на неустойчивость). И там, и там требуется положительность системной производной, только для теоремы (3) положительность требуется во всей окрестности нуля, а для теоремы(4) достаточно некоторой её подобласти. Итак,*

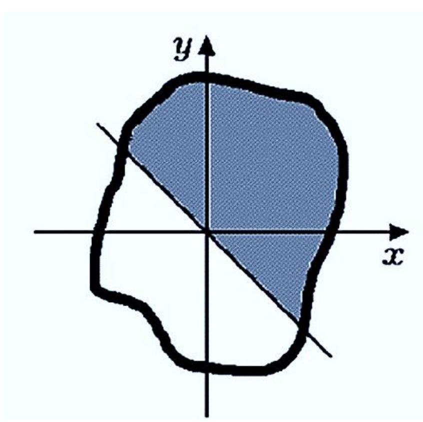
$$v(x,y)=a(x^2-y^2),\qquad \left.\frac{dv}{dt}\right|_{(1)}=2a(-x^2+y^2+2x^2y+y^4).$$

Сразу видно, что применить теорему (3) не удастся. Независимо от знака а, системная производная будет знакопеременна в любой окрестности нуля – достаточно выбрать последовательности ($x = \varepsilon_n \to 0$, $y = 0$) и ($x = 0$, $y = \varepsilon_n \to 0$) . Обе последовательности сходятся к (0, 0), но для первой из них скобка в системной производной отрицательна, а для второй - положительна .

Обратимся теперь к теореме (4). Здесь требуется выбрать область в которой функция ***v(x,y) = a (x² — y²)*** *положительна.*



Как видно из рисунка, при ***a > 0*** *можно выбрать любую из двух серых областей, а при* ***a < 0*** *— любую из двух белых областей. Можно было бы выбрать и всю серую область, если* ***a > 0****, но это не разумно — вдруг где-то системная производная будет отрицательна. Вообще, область U1 положительной определённости функции Ляпунова для использования теоремы (4) надо выбирать как можно меньше: чем меньше область U1, тем выше шансы па положительность функции* **(dv/dt)|** *(1)в этой области. Не надо только забывать, что на границе этой области U1 функция v (x, y) должна обращаться в нуль, и на этой границе должна лежать точка (0,0).*



Впрочем, в данной ситуации выбор мелкой области U1 не спасает: в каждой из четырёх областей, на которые разбивают окрестность нуля U(0) биссектрисы координатных углов, найдутся точки, в которых системная производная будет отрицательна. В серых областях (т.е. при а > 0) можно взять точки (±δ, 0), в белых областях (т.е. при а < 0) — точки (0, ±δ). Таким образом, попытки использовать теорему (4) для доказательства неустойчивости нулевого решения закончились крахом.

Вернёмся теперь к первоначальной функции ***v (x, y) = ax² + Ьy²*** *и рассмотрим случай* ***a- Ь = 0*** *=>* ***Ь = a*** *и* ***v(x, y) = a(x² + y²)****. Выбираем* ***a > 0*** *, тогда функция* ***v*** *положительна, и всё зависит от ответа на вопрос: «Будет ли её системная производная знакопостоянна?» . Если да, и знак положителен, то нулевое решение неустойчиво (в силу теоремы (3)); если да, и знак отрицателен, то нулевое решение устойчиво (в силу теоремы (1)) .*
Если ответ «нет», то выбор функции v(x, y) = ax² ++ Ьy² на роль функции Ляпунова оказался неудачным, и ни одна из четырёх теорем для v(x, y) не сработала. Начинаем проверку:

$$v(x,y) = a(x^2+y^2), \quad a>0,$$
$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(1)} = -2a(x^2+y^2-2xy+y^4) = -2a\big((x-y)^2+y^4\big).$$

Таким образом, достаточно взять v (x, y) = x² + y². Её системная производная отрицательна, поэтому нулевое решение x(t) = y (t) = 0 исходной системы дифференциальных уравнений асимптотически устойчиво, в силу теоремы (2).

Есть один эмпирический приём, который хоть и не даёт конструктивных рекомендаций по построению функции Ляпунова, но во многих случаях позволяет судить об устойчивости/неустойчивости нулевого решения и, тем самым, помогает в выборе функции Ляпунова. Заключается приём в следующем:

1. *Если в правой части имеется несколько слагаемых, зависящих только от одной переменной (т.е. только от* ***x*** *или только от* ***y****), то можно оставить слагаемое с минимальным показателем степени, отбросив все остальные.*
2. *Если в правой части есть слагаемое типа x^n или y^n, то можно отбросить все смешанные слагаемые, в которые эта переменная входит в той же или более высокой степени.*
3. *Если показатель степени слагаемых x^n или y^n нечётный, то его можно заменить на единицу. Это почти стопроцентные по надёжности советы. Единственное условие: выполнять их надо в указанном порядке. Если в результате всех манипуляций в правок части системы останется чисто линейная вектор-функция, то, применяя теорему Ляпунова о первом приближении, с большой долей вероятности получаем устойчивость нулевого решения исходной системы, если Re-части всех характеристические корней отрицательны, и неустойчивость, если какие-то из них положительны.*

Задача. *Исследовать устойчивость нулевого решения системы*

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^5 + 2y^3, \\ \dot{y} = -x - y^3 + y^5. \end{cases}$$

Решение. *Преобразуем вектор-функцию в правой части:.*

$$\begin{pmatrix} -x^5+2y^3 \\ -x-y^3+y^5 \end{pmatrix} \xrightarrow{1} \begin{pmatrix} -x^5+2y^3 \\ -x-y^3 \end{pmatrix} \xrightarrow{3} \begin{pmatrix} -x+2y \\ -x-y \end{pmatrix}.$$

Составляем уравнение на характеристические корни и решаем его:

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)^2+2=0 \quad \Rightarrow \quad \lambda=-1\pm i\sqrt{2}.$$

Нулевое решение, вроде бы, должно быть устойчивым. Попробуем взять в качестве функции Ляпунова функцию ***v (x, y) = Ax²ⁿ + By²ᵐ*** *с положительными коэффициентами* ***A, B****. Строим системную производную:*

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(1)} = 2nAx^{2n-1}(-x^5+2y^3)+2mBy^{2m-1}(-x-y^3+y^5) =$$
$$= -2nAx^{2n+4}-2mBy^{2m+2}(1-y^2)+4nAx^{2n-1}y^3-2mBxy^{2m-1}.$$

Первое слагаемое всюду отрицательно, кроме прямой ***x = 0****, где оно обращается в нуль. Для второго слагаемого выбираем ограничение* $|y| < 1$*. Тогда оно тоже отрицательно везде, кроме прямой* ***y =0****. Поэтому первые два слагаемых в сумме отрицательны в окрестности нуля U (0), если эта окрестность не вылазит за пределы полосы* $|y| < 1$*, и зануляются только в точке (0,0). Используем теперь параметры n, m, A, B для взаимного сокращения двух последних слагаемых.*

$$\begin{cases} 2n-1=1, \\ 2m-1=3, \\ 4nA=2mB. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n=1, \\ m=2, \\ A=B. \end{cases}$$

Таким образом, функция $v(x, y) = x^2 + y^4$ *удовлетворяет условиям теоремы (2), поэтому нулевое решение асимптотически устойчиво. Если в результате всех преобразований вектор-функции среди характеристических чисел получились такие, что имеют нулевую вещественную часть (остальные числа не должны иметь положительную* ***Re-часть****;* ***положительная часть — верный признак неустойчивости!!****), то можно предложить поправку к пункту 1:*

1'. Не отбрасывать члены более высоких степеней, а заменять их на малые постоянные слагаемые, скажем, x на δ, а y на ε.

Пример:

$$x + xy^2 + y^3 = x(1+y^2) + y^3 \xrightarrow{1'} x(1+\varepsilon^2) + y^3 \xrightarrow{3} x(1+\varepsilon^2) + y.$$

Еще один:

$$x - xy + x^2y^2 + y + y^5 = x(1 - y + xy^2) + y(1+y^4) \xrightarrow{1'}$$
$$\xrightarrow{1'} x(1 - \varepsilon + x\varepsilon^2) + y(1+\varepsilon^4) \xrightarrow{1} x(1-\varepsilon) + y(1+\varepsilon^4)$$

Задача. Исследовать устойчивость системы

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y - xy^2, \\ \dot{y} = 2x - y - y^3. \end{cases}$$

Решение. *Опять делаем серию упрощений вектор-функции:*

$$\begin{pmatrix} x - y - xy^2 \\ 2x - y - y^3 \end{pmatrix} \xrightarrow{1} \begin{pmatrix} x - y - xy^2 \\ 2x - y \end{pmatrix} \xrightarrow{2} \begin{pmatrix} x - y \\ 2x - y \end{pmatrix}.$$

Ищем характеристические числа:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm i.$$

Получилось слишком грубо - характеристические корни чисто мнимы, ничего сказать нельзя . Возвращаемся назад и сохраняем квадратичные члены:

$$\begin{pmatrix} x - y - xy^2 \\ 2x - y - y^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(1-y^2) - y \\ 2x - y(1+y^2) \end{pmatrix} \xrightarrow{1'} \begin{pmatrix} x(1-\varepsilon^2) - y \\ 2x - y(1+\varepsilon^2) \end{pmatrix}.$$

Снова ищем характеристические числа:

$$\begin{vmatrix} 1-\varepsilon^2-\lambda & -1 \\ 2 & -1-\varepsilon^2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+\varepsilon^2)^2 - 1 + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\varepsilon^2 \pm i.$$

Устойчивость!

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y - x - y^3, \\ \dot{y} = x - 2y. \end{cases}$$

*Следует отметить, что данные манипуляции не являются доказательством и могут использоваться только в качестве «совещательного голоса». Если бы всё было просто, и такой подход давал гарантированный успех, то за сто с лишним лет, прошедших с тех пор, как **А. М. Ляпунов** придумал свои теоремы об устойчивости, кто-нибудь бы наверняка строго обосновал законность этой процедуры. А так, даже зная ответ, необходимо привести конкретный пример функции Ляпунова.*

Поскольку надо доказать устойчивость, то рассмотрим в качестве функции Ляпунова следующую: $v(x, y) = Ax^{2n} + 2Bx^n y^m + Cy^{2m}$*, в которой коэффициенты и показатели степени должны обеспечивать положительность. Тогда*

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(1)} = (2nAx^{2n-1} + 2nBx^{n-1}y^m)(x-y-xy^2) + (2mBx^n y^{m-1} + 2mCy^{2m-1})(2x-y-y^3).$$

Если в окрестности нуля приближаться к точке **(0,0)** *по оси абсцисс, то все слагаемые, содержащие* ***y***, *исчезают, а сумма оставшихся должна быть* ***неположительна***.

Случай $m < 0$ *невозможен — функция* $v(x, y)$ *тогда не будет непрерывной в нуле.*

Если $m = 0$, *то* $v(x. y)$ *зависит только от* ***x***, *коэффициент* ***C*** *должен быть равен нулю для обеспечения равенства* $v(0,0) = 0$. *Но тогда* $v(0, y) = 0$, *а для устойчивости требуется положительность* ***v*** *во всех ненулевых точках. Значит, случай* $m = 0$ *не подходит.*

Если $m = 1$, *то системная производная в точках на оси абсцисс содержит два слагаемых:*

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(1)}(x, 0) = 2nAx^{2n} + 4Bx^{n+1}.$$

Попытаемся сделать это выражение отрицательным. Приравниваем показатели степеней: $2n = n + 1 \Rightarrow n = 1$, *и делаем отрицательным общий коэффициент при полученной квадратичной функции:* $2A + 4B < 0$. *Системная производная становится несколько проще:*

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(1)} = (2Ax + 2By)(x - y - xy^2) + (2Bx + 2Cy)(2x - y - y^3) =$$

$$= x^2(2A + 4B) + xy(2B - 2A + 4C - 2B) + y^2(-2B - 2C) - 2y^2(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2)$$

К уже имеющемуся неравенству $2A + 4B \leqslant 0$ теперь добавляется $-2B - 2C \leqslant 0$. $\Rightarrow$

$$\begin{cases} 2A + 4B = -a^2, \\ -2B - 2C = -b^2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -2B - \frac{1}{2}a^2, \\ C = -B + \frac{1}{2}b^2. \end{cases}$$

*Коэффициент при **xy** тогда будет равен -2A + 4C = a² + 2b². Если положить вспомогательные параметры a, b равными нулю, то получим A= -2B, C=-B. Тогда исходная функция **v (x, y)** и её системная производная примут вид (не нужно опять дифференцировать **v**, в предыдущем выражении для системной производной после подстановки **A** и **C** останется только последнее слагаемое):*

$$v(x,y) = -B(2x^2 - 2xy + y^2),$$
$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(1)} = 2By^2(2x^2 - 2xy + y^2) = 2By^2(x^2 + (x-y)^2).$$

Наконец, полагаем B = -1 и получаем устойчивость решения x(t) = y(t) = 0, благодаря теореме (1).

Ещё кратко три задачи (для первых двух функцию Ляпунова постройте сами) .

Задача1. *Исследовать устойчивость нулевого решения системы*

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y - x - y^3, \\ \dot{y} = x - 2y. \end{cases}$$

Угадывание ответа.

$$\begin{pmatrix} 2y - x - y^3 \\ x - 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + y(2 - y^2) \\ x - 2y \end{pmatrix} \overset{1'}{\to} \begin{pmatrix} -x + y(2 - \varepsilon^2) \\ x - 2y \end{pmatrix}. \Rightarrow \quad \lambda = \tfrac{1}{2}\left(-3 \pm \sqrt{9 - 4\varepsilon^2}\right) \text{ устойчивость.}$$

Задача2. *Исследовать устойчивость нулевого решения системы*

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - xy, \\ \dot{y} = y^3 - x^3. \end{cases}$$

Угадывание ответа.

$$\begin{pmatrix} -x-xy \\ -x^3+y^3 \end{pmatrix} \xrightarrow{2} \begin{pmatrix} -x \\ -x^3+y^3 \end{pmatrix} \xrightarrow{3} \begin{pmatrix} -x \\ -x+y \end{pmatrix}. \Rightarrow \begin{matrix} \lambda = \pm 1, \\ \text{неустойчивость.} \end{matrix}$$

Задача3. *Исследовать устойчивость нулевого решения системы*

$$\begin{cases} \dot{x} = -f_1(x) - f_2(y), \\ \dot{y} = f_3(x) - f_4(y), \end{cases}$$

где **sgn f_m (z) = sgn z,** *при* ***m = 1,2,3,4.***

Решение:

$$\begin{pmatrix} -f_1(x) - f_2(y) \\ f_3(x) - f_4(y) \end{pmatrix} \xrightarrow{1} \begin{pmatrix} -Ax^{2n+1} - By^{2m+1} \\ Cx^{2p+1} - Dy^{2q+1} \end{pmatrix} \xrightarrow{3} \begin{pmatrix} -Ax - By \\ Cx - Dy \end{pmatrix},$$

де ***A , B , C , D*** *- положительные константы .*

Строим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} -A-\lambda & -B \\ C & -D-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda + A)(\lambda + D) + BC = \lambda^2 + (A+D)\lambda + (AD+BC) = 0.$$

Легко видеть (благодаря критерию Льенара-Шипара), что оба корня имеют отрицательные вещественные части. => 0. Нулевое решение асимптотически устойчиво. На роль функции Ляпунова подходит

$$v(x,y) = \int_0^x f_3(t)\,dt + \int_0^y f_2(t)\,dt.$$

В нуле она равна нулю, а во всех других точках из U (0) положительна в силе равенства ***sgn f_m(z) = sgn z****.* *При этом*

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(1)} = -f_1(x)f_3(x) - f_2(y)f_4(y) = -|f_1(x)f_3(x)| - |f_2(y)f_4(y)| < 0.$$

В качестве функций $f_m(z)$ можно брать не только нечётные функции, но и, наример, $z + 2z^2$ или $z^3 + 100z^4 - 5z^6$, *поскольку их поведение в малой окрестности нуля удовлетворяет условию* ***sgn $f_m(z)$ = sgn z.***

Задача. Исследовать устойчивость нулевого решения системы

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x + xy, \\ \dot{y} = x - y - x^2 - y^3. \end{cases}$$

Ещё раз возвращаемся к уже решённой задаче, чтобы опробовать на ней предложенный набор трансформаций. Если действовать без использования преобразования 1′, то

$$\begin{pmatrix} -x + y + xy \\ x - y - x^2 - y^3 \end{pmatrix} \xrightarrow{1} \begin{pmatrix} -x + y + xy \\ x - y \end{pmatrix} \xrightarrow{2} \begin{pmatrix} -x + y \\ x - y \end{pmatrix}$$

И характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)^2 - 1 = \lambda(\lambda+2) = 0$$

Имеет корни, по которым ничего сказать нельзя. Возвращаемся к исходной вектор ункции и преобразуем её с помощью замены x -δ:

$$\begin{pmatrix} -x + y + xy \\ x - y - x^2 - y^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + y(1+x) \\ x(1-x) - y - y^3 \end{pmatrix} \xrightarrow{1'} \begin{pmatrix} -x + y(1+\delta) \\ x(1-\delta) - y - y^3 \end{pmatrix} \xrightarrow{1} \begin{pmatrix} -x + y(1+\delta) \\ x(1-\delta) - y \end{pmatrix}$$

Опять ищем корни характеристического уравнения:

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1+\delta \\ 1-\delta & -1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)^2 - (1-\delta^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -1 \pm \sqrt{1-\delta^2}.$$

Итак, корни отрицательны, решение устойчиво. Если бы проделать это всё чуть раньше, то при построении функции Ляпунова можно было бы сразу сосредоточиться на варианте a — b = 0 и не тратить столько времени на вариант a + b = 0. □

Теперь «ложка дёгтя»: преобразованию 1′ и заменам ***x→δ*** *и* ***y → ε*** *можно верить, только если они дают какой-то определённый ответ, не зависящий от знака малых величин ε, δ(которые могут быть и положительны, и отрицательны). Например, в только что рассмотренной задаче компоновка слагаемых в вектор-функции для замены y → ε. не помогает:*

$$\begin{pmatrix} -x(1-y)+y \\ x-x^2-y(1+y^2) \end{pmatrix} \overset{1'}{\to} \begin{pmatrix} -x(1-\varepsilon)+y \\ x-x^2-y(1+\varepsilon^2) \end{pmatrix} \overset{1}{\to} \begin{pmatrix} -x(1-\varepsilon)+y \\ x-y(1+\varepsilon^2) \end{pmatrix}.$$

Получаемые корни характеристического уравнения:

$$\begin{vmatrix} -(1-\varepsilon)-\lambda & 1 \\ 1 & -(1+\varepsilon^2)-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2+\lambda(2-\varepsilon+\varepsilon^2)-\varepsilon+\varepsilon^2-\varepsilon^3=0 \quad \Rightarrow$$

$$\lambda=-1+\tfrac{1}{2}\varepsilon(1-\varepsilon)\pm\sqrt{1+\tfrac{1}{4}\varepsilon^2(1+\varepsilon)^2}=-1\pm1+\tfrac{1}{2}\varepsilon+O(\varepsilon^2)\approx-2+\tfrac{1}{2}\varepsilon;\ \tfrac{1}{2}\varepsilon$$

зависят от знака г. и говорят об устойчивости при ε < 0, и о неустойчивости при ε > 0, т.е. фактически ни о чём не говорят.
И наконец, бывают ситуации, когда предлагаемые трансформации вообще не работают. Например, когда минимальные встречающиеся степени ***x***, ***y*** *чётные, или минимальное по степенным показателям слагаемое в какой-то из компонент вектор-функции f (x, y) смешанное —* $x^n y^m$ *(пример — задача (926)).*
В таких случаях, наряду с функциями вида (3), можно пробовать строить ***v (x, y)*** *в виде однородного полинома* ***P_n (x, y)*** *с неопределёнными коэффициентами и рассматривать поведение системной производной на прямых* ***y = кx*** *или* ***x = кy****, пытаясь из её знакопостоянства извлечь информацию о коэффициентах полинома (впрочем, и это помогает не всегда).*

Задача. Исследовать устойчивость пулевого решения системы

$$\begin{cases} \dot{x}=xy-x^3+y^3, \\ \dot{y}=x^2-y^3. \end{cases}$$

Решение.

Никаких упрощений вектор-функции сделать не удастся. Ничего не предполагая заранее об устойчивости/неустойчивости нулевого решения, возьмём

$$v(x,y)=Ax^2+2Bxy+Cy^2$$

и найдём её системную производную:

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(1)} = (2Ax+2By)(xy-x^3+y^3)+(2Bx+2Cy)(x^2-y^3).$$

Рассмотрим эту производную в точках (x, y), расположенных на координатных сях :

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(1)}(x,0) = -2Ax^4+2Bx^3 = \begin{cases} -2Ax^4, & \text{если } B=0; \\ 2Bx^3\left(1-\frac{A}{B}x\right), & \text{если } B\neq 0. \end{cases}$$ *(5a)* *(5Ь)*

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(1)}(0,y) = 2y^4(B-C).$$ *(6)*

*Из полученных выражений видно, что при **B = 0** можно надеяться на устойчивость нулевого решения, если **A** и **C** положительны (они не могут обращаться в нуль, поскольку тогда нарушается первое «если» в теоремах (1) — (2)).*
Если же B ≠ 0. то из равенства (5Ь) следует, что в малой окрестности нуля системная производная знакопеременна, поэтому возможен только вариант неустойчивости нулевого решения. Впрочем, не исключена ситуация, что выбор функции Ляпунова изначально ошибочен и не приведёт к доказательству ни того, ни другого случая.

Рассмотрим теперь поведение системной производной в точках прямой y = x (эта прямая выбрана из-за того, что в её точках скобка ($xy - x^3 + y^3$) сильно упрощается):

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(1)}(x,x) = 2x^3\Big(A+2B+C-(B+C)x\Big).$$

*Сразу видно, что надежды на устойчивость, связанные с выбором параметров **B = O, A > 0 и C > O,** не оправдались, т.к. при таких параметрах системная производная знакопеременна в точках прямой **y = x**.*

$$v(x,y) = Ax^2+Cy^2.$$

Сосредоточимся теперь на доказательстве неустойчивости.
*Можно ли выбрать такие **A, B, C**, чтобы функция **v (x, y)** удовлетворяла условиям теоремы (3)?*
Если B ≠ O, то нет, т.к. из (5Ь) следует знакопеременность системной производной в малой окрестности нуля, а требуется её положительность.
Если B = O, то из (5a) следует отрицательность параметра A, а из (6) — отрицательность параметра C.

Но тогда функция v(x,y) примет вид:

$$v(x,y) = -|A|x^2 - |C|y^2,$$

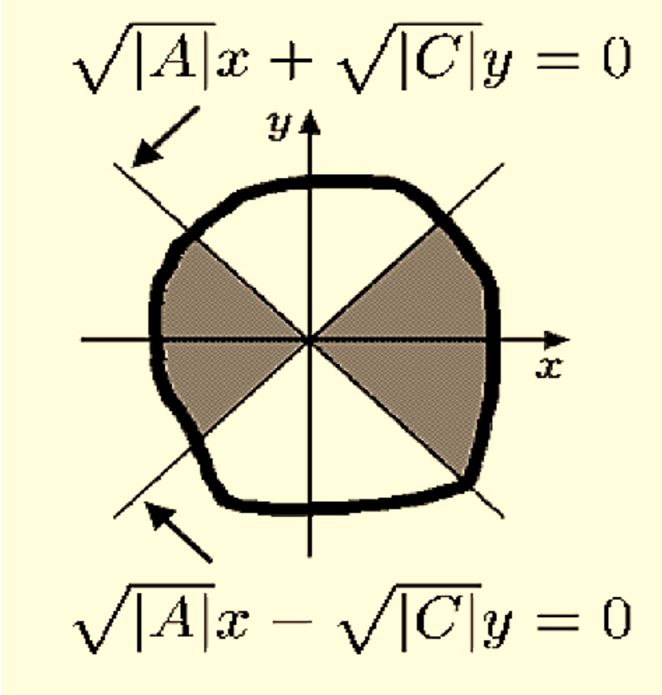
а значит нет таких сколь угодно близких к ***(0, 0)*** *точек, в которых функция* ***v(x, y)*** *будет положительна.*
Осталось только уповать на теорему (4).
Если ***B= 0****, то* ***v(x,y) = Ax² + Cy²*** *. Чтобы существовала линия* ***v(x,y) =0****, проходящая через начало координат, должен реализовываться один из трех вариантов:*

1. ***A = 0, C > 0.*** *Тогда линия v(x,y) = 0 это прямая y = 0, и область U1 это или U(0) ⋂ {y> 0}, или U(0) ⋂ {y< 0}. Но независимо от выбора области равенство (6) показывает, что системная производная там отрицательна.*

2. ***C = 0, A > 0.*** *Тогда линия v(x, y) = 0 это прямая x = 0, и область U1 это или U(0) ⋂ { x > 0}, или U (0) ⋂ { x < 0}. Но независимо от выбора области равенство (5а) показывает, что системная производная там отрицательна.*
3. *Оба параметра* ***A*** *и* ***C*** *отличны от нуля, но имеют разные знаки (чтобы существовала линия v(x, y) = 0). Тогда*

$$v(x,y) = \operatorname{sgn} A\left(|A|x^2 - |C|y^2\right) = \operatorname{sgn} A\left(\sqrt{|A|}x - \sqrt{|C|}y\right)\left(\sqrt{|A|}x + \sqrt{|C|}y\right).$$

Таким образом, ***U1*** *— это одна из серых областей, если* ***A > 0****, и одна из белых областей, если* ***A < 0*** *(поскольку* ***v (x, y)*** *должна быть больше нуля в области* ***U1****) Для серых областей системная производная отрицательна в точках оси абсцисс в силу (5а), для белых областей системная производная отрицательна в точках оси ординат в силу (6).*



Вывод: *при B = 0 ничего не получилось, условия теоремы (4) не выполняются*

Осталось рассмотреть случай $B \neq 0$. Возможны следующие варианты:

1. $A = C = 0$. Тогда $v(x,y) = 2Bxy$ и область $\mathscr{U}_1$ совпадает с частью какого-то из четырёх квадрантов, лежащих в окрестности нуля $\mathscr{U}(\mathbf{0})$.
2. $A = 0 \neq C$. Тогда $v(x,y) = y(2Bx + Cy)$. Нулевые линии функции v — это прямые $y = 0$ и $y = -\dfrac{2B}{C}x$. Поэтому в качестве области $\mathscr{U}_1$ надо выбирать один из четырёх секторов, на которые делят окрестность нуля эти прямые. Исследование системной производной на знак в каждом из секторов проще всего вести на лучах $y = kx$. Например, при $-\dfrac{2B}{C} > 0$ сектор, лежащий в первом квадранте определяется неравенствами $x > 0$, $0 < k < -\dfrac{2B}{C}$. Системная производная после подстановки $y = kx$ примет вид

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(1)}(x,kx) = 2x^3\Big(Ck + B(k^2+1) + O(x)\Big).$$

Если сумма Ск + В(к² + 1) будет положительна при всех 0 < к < -2В/С, то С и системная производная будет положительна в рассматриваемом секторе при достаточно малых х. Задача выбора параметров В и С. делающих выражение С к + В(к² + 1) положительным на интервале k ∈ (0, -2В/С) — не из трудных. Можно взять, например, В = 1 и С = - 1. В принципе, на этом можно и закончить: функция ***v (x, y) = y (2x - y)*** *положительна в секторе, лежащем в первом квадранте между прямыми у = 0 и у = 2х, а её системная производная*

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(1)}(x,y) = 2y(xy - x^3 + y^3) + (2x - 2y)(x^2 - y^3) =$$
$$= \frac{x(2y-x)^2}{2} + \frac{3x^3}{2}\left(1 - \frac{4x}{3}\left[\frac{y}{x} + \frac{y^3}{x^3} - 2\frac{y^4}{x^4}\right]\right)$$

положительна[21] в том же секторе при малых х, у, поэтому по теореме (4) нулевое решение неустойчиво, однако, для порядка перечислим остальные возможности (они могут пригодиться в других подобных задачах).

3. $A \neq 0 = C$. Тогда $v(x,y) = x(Ax + 2By)$ и, подобно случаю 2, $\mathscr{U}_1$ — это сектор, границами которого являются прямые $x = 0$ и $x = -\dfrac{2B}{A}y$. Рассмотрение этого случая аналогично предыдущему.
4. $A \neq 0 \neq C$. Тогда или $v(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = (\alpha x + \beta y)^2$ — случай вырожденной прямой (дискриминант квадратичной формы равен нулю, $B^2 = AC$), или $v(x,y) = (\alpha_1 x + \beta_1 y)(\alpha_2 x + \beta_2 y)$ — гиперболический случай (дискриминант квадратичной формы больше нуля, $B^2 > AC$). Эллиптический случай (когда дискриминант отрицателен) отбрасываем, т.к. тогда квадратичная форма всюду положительна и не существует линии $v(x,y) = 0$ для использования теоремы 4.

[21] **Поскольку y/x ∈ [O, 2], то квадратная скобка не превышает 2 + 2³ - O = 10, поэтому круглая скобка будет положительна, если окрестность нуля задать неравенствами lxl < 3/40, IYI < 3/20**

Неустойчивость нулевого решения можно было доказать проще, если бы случай А = С = 0 был доведён до конца. Легко проверить, что v(x, y) = xy является функцией Ляпунова, если в качестве области U1 взять тот кусок малой окрестности нуля U(0), что лежит в первом квадранте (т.е. x > 0 , y> 0). Тогда

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(1)}(x,y) = y(xy - x^3 + y^3) + x(x^2 - y^3) = x(x^2 + y^2)(1 - y) + y^4 > 0,$$

*если окрестность U(0) по **y** задана неравенством │**y**│ **< 1** (по x никаких ограничений не требуется). Это показывает, что функция Ляпунова может быть выбрана неединственным образом. Ещё всё вышеизложенное показывает, насколько сильно построение функции **v (x, y)** зависит от удачных предположений и везения.*
*Если бы в самом начале некий внутренний голос сказал: «**А не попробовать ли здесь функцию v (x, y) = xy в первом квадранте для доказательства неустойчивости?**», то всё решение уместилось бы в один абзац, а не растянулось бы на две страницы.* □

Хотел закончить эту тему одной историей, которая произошла с Бертраном Расселом и Альфредом Нортом Уайтхедом — авторами трёхтомного фундаментального труда по логике «Principia Mathematica».
Однажды один из них делал доклад, а другой был председателем. Скажем, Рассел был председателем, а Уайтхед — докладчиком. Доклад был посвящён основам квантовой механики. Не только слушатели были уже по горло сыты этим докладом, по и председатель. Всё было исключительно трудно, путанно и неясно. Когда доклад закончился, председатель почувствовал, что он должен как-то этот доклад прокомментировать. И вот он сказал только одну фразу, которая одновременно была и вежливой, и правдивой. Он просто сказал: «Мы должны быть благодарны докладчику за то, что он не затемняет далее этого и так уже достаточно запутанного предмета»[22].

*В заключение этой работы, для иллюстрации величия Ляпунова А.М. приведу материал по дальнейшему развитию его теории в Теории динамических систем и Астрономии при наблюдении космических тел в ближайшем космосе. Безусловно речь идет о **ДИНАМИЧЕСКИХ системах.***[23]

[22] **М.Кац . Несколько вероятностных задач физики и математики. М . , Наука 1967.**

[23] **Динамическая система — математическая абстракция, предназначенная для описания и изучения систем, эволюция во времени которых однозначно определяется начальным состоянием.**

Динамическая система

На рисунке перед Вами - Фазовая диаграмма ***странного аттрактора***[24] *Лоренца — популярный пример нелинейной динамической системы. Изучением подобных систем занимается* ***теория хаоса***[25].

Динамическая система *— математическая абстракция, предназначенная для описания и изучения систем, эволюция во времени которых однозначно определяется начальным состоянием. Динамическая система представляет собой математическую модель некоторого объекта, процесса или явления. Динамическая система также может быть представлена как система, обладающая состоянием. При таком подходе, динамическая система описывает (в целом) динамику некоторого процесса, а именно: процесс перехода системы из одного состояния в другое.*

Фазовое пространство системы — совокупность всех допустимых состояний динамической системы. Таким образом, динамическая система характеризуется своим начальным состоянием и законом, по которому система переходит из начального состояние в другое. Различают системы с дискретным временем и системы с непрерывным временем. В ***системах с дискретным временем****, которые традиционно называются* ***каскадами****, поведение системы (или, что то же самое, траектория системы в фазовом пространстве) описывается последовательностью состояний. В* ***системах с непрерывным временем****, которые традиционно называются* ***потоками****, состояние системы определено для каждого момента времени на вещественной или комплексной*

[24] Аттра́ктор (англ. attract — привлекать, притягивать) — компактное подмножество фазового пространства динамической системы, все траектории из некоторой окрестности которого стремятся к нему при времени, стремящемся к бесконечности. Аттрактором может являться притягивающая неподвижная точка (к примеру, в задаче о маятнике с трением о воздух), периодическая траектория (пример — самовозбуждающиеся колебания в контуре с положительной обратной связью), или некоторая ограниченная область с неустойчивыми траекториями внутри (как у странного аттрактора). Существуют различные формализации понятия стремления, что приводит к различным определениям аттрактора, задающим, соответственно, потенциально различные множества (зачастую — вложенные одно в другое).

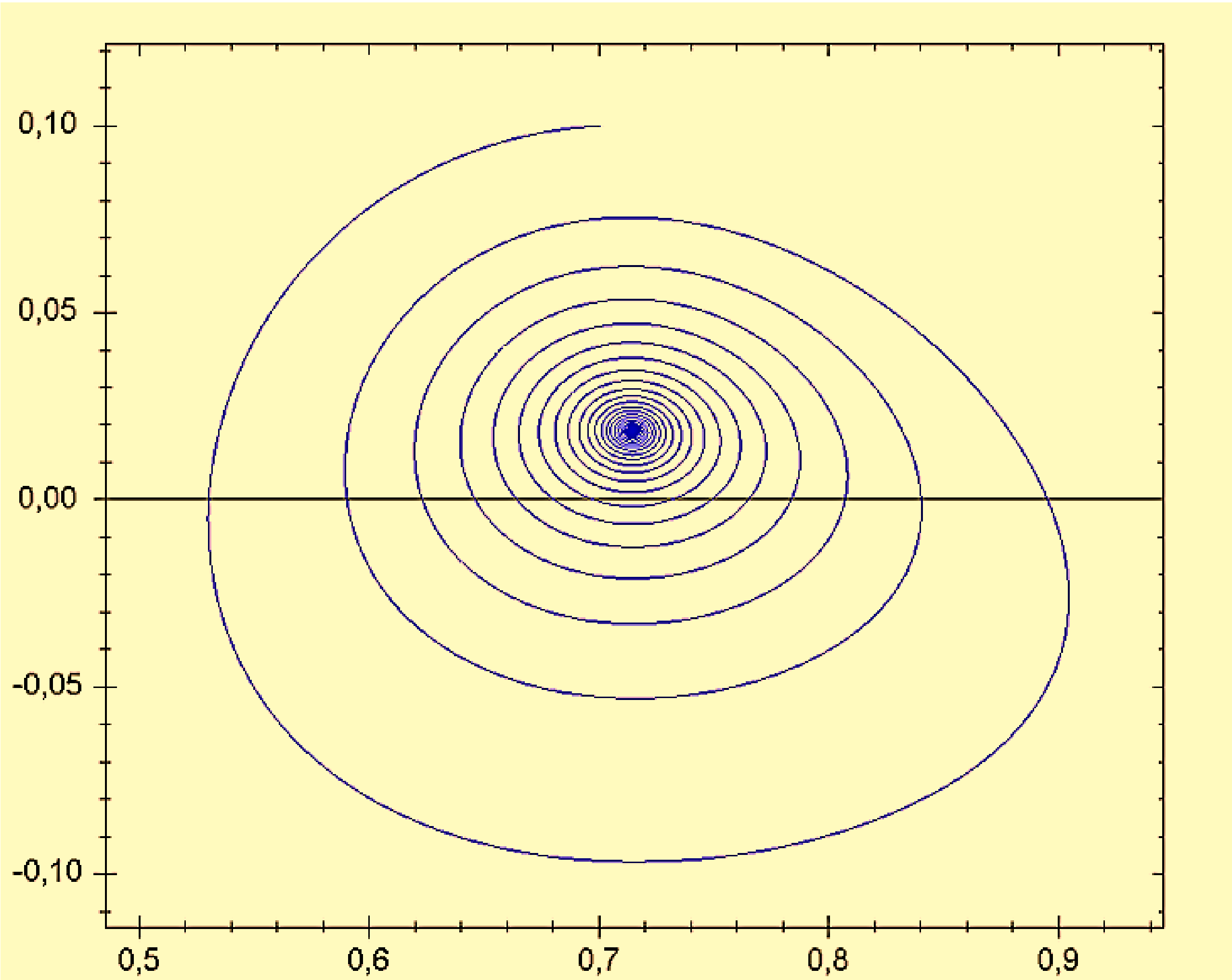
[25] Тео́рия ха́оса — математический аппарат, описывающий поведение некоторых нелинейных динамических систем, подверженных при определённых условиях явлению, известному как хаос. Поведение такой системы кажется случайным, даже если модель, описывающая систему, является детерминированной. Примерами подобных систем являются атмосфера, турбулентные потоки, биологические популяции, общество как система коммуникаций и его подсистемы: экономические, политические и другие социальные системы. Их изучение, наряду с аналитическим исследованием имеющихся рекуррентных соотношений, обычно сопровождается математическим моделированием. Теория хаоса — область исследований, связывающая математику и физику.

оси. Каскады и потоки являются основным предметом рассмотрения в символической и топологической динамике. Динамическая система (как с дискретным, так и с непрерывным временем) является по существу синонимом автономной системы дифференциальных уравнений, заданной в некоторой области и удовлетворяющей там условиям теоремы существования и единственности решения дифференциального уравнения. Положениям равновесия динамической системы соответствуют особые точки дифференциального уравнения, а замкнутые фазовые кривые — его периодическим решениям.

Основное содержание теории динамических систем — это исследование кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. Сюда входит разбиение фазового пространства на траектории и исследование предельного поведения этих траекторий: поиск и классификация положений равновесия, выделение притягивающих (аттракторы) и отталкивающих (репелеры) множеств (многообразий[26]).

Важнейшие понятие теории динамических систем — это ***устойчивость*** *(способность системы сколь угодно долго оставаться около положения равновесия или на заданном многообразии) и грубость (сохранение свойств при малых изменениях структуры динамической системы). Привлечение вероятностно-статистических представлений в эргодической теории динамических систем приводит к понятию динамической системы с инвариантной мерой. Современная теория динамических систем является собирательным названием для исследований, где широко используются и эффективным образом сочетаются методы из различных разделов математики: топологии и алгебры, алгебраической геометрии и теории меры, теории дифференциальных форм, теории особенностей и катастроф. Из дифференцируемости отображения следует, что график функции является дифференцируемой функцией времени и называется интегральной траекторией (кривой) динамической системы. Её проекция на пространство , которое в таком случае носит название фазового пространства, называется фазовой траекторией (кривой) динамической системы. Задание динамической системы, таким образом, эквивалентно разбиению фазового пространства на траектории.*

[26] **Многообра́зие — топологическое пространство, которое локально выглядит как «обычное» евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ Евклидово пространство является самым простым примером многообразия. Более сложным примером может служить поверхность Земли. Возможно сделать карту какой-либо области земной поверхности, например карту полушария, но невозможно составить единую (без разрывов) карту всей её поверхности. Исследования многообразий были начаты во второй половине XIX века, они естественно возникли при изучении дифференциальной геометрии и теории групп Ли. Тем не менее, первые точные определения были сделаны только в 30-х годах XX века. Обычно рассматриваются так называемые гладкие многообразия, то есть те, на которых есть выделенный класс «гладких» функций — в таких многообразиях можно говорить о касательных векторах и касательных пространствах. Для того, чтобы измерять длины кривых и углы, нужна ещё дополнительная структура — риманова метрика. В классической механике основным многообразием является фазовое пространство. В общей теории относительности четырёхмерное псевдориманово многообразие используются как модель для пространства-времени.**



ФАЗОВОЕ ПРОСТРАНСТВО

Способы задания динамических систем *Для задания динамической системы необходимо описать её* ***фазовое пространство***[27]*, множество моментов времени и некоторое правило, описывающее движение точек фазового пространства со временем. Множество моментов времени может быть как интервалом вещественной прямой (тогда говорят, что время непрерывно), так и множеством целых или натуральных чисел (дискретное время). Во втором случае «движение» точки фазового пространства*

[27] Фазовое пространство в математике и физике — пространство, на котором представлено множество всех состояний системы, так, что каждому возможному состоянию системы соответствует точка фазового пространства. Сущность понятия фазового пространства заключается в том, что состояние сколь угодно сложной системы представляется в нём одной единственной точкой, а эволюция этой системы — перемещением этой точки. Кроме того, в механике движение этой точки определяется сравнительно простыми уравнениями Гамильтона, анализ которых позволяет делать заключения о поведении сложных механических систем.
В классической механике гладкие многообразия служат как фазовые пространства.

больше напоминает мгновенные «скачки» из одной точки в другую: траектория такой системы является не гладкой кривой, а просто множеством точек, и называется обычно орбитой. Тем не менее, несмотря на внешнее различие, между системами с непрерывным и дискретным временем имеется тесная связь: многие свойства являются общими для этих классов систем или легко переносятся с одного на другой.

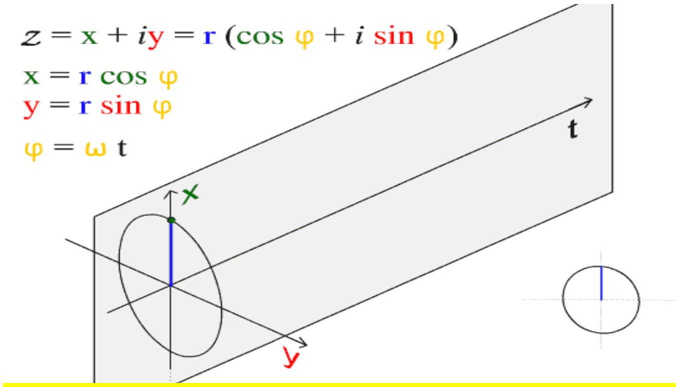
Фазовые потоки

Пусть фазовое пространство представляет собой многомерное пространство или область в нем, а время непрерывно. Допустим, что нам известно, с какой скоростью движется каждая точка фазового пространства. Иными словами, известна вектор-функция скорости. Тогда траектория точки будет решением автономного дифференциального уравнения с начальным условием. Заданная таким образом динамическая система называется фазовым потоком для автономного дифференциального уравнения.

Каскады

Пусть существует произвольное множество, и существует некоторое отображение множества на себя. Рассмотрим итерации этого отображения, то есть результаты его многократного применения к точкам фазового пространства. Они задают динамическую систему с фазовым пространством и множеством моментов времени. Действительно, будем считать, что произвольная точка за некоторое время переходит в другую точкусогласно траектории решения дифференциальных уравнений, отображающих динамическую систему. Тогда за время эта точка перейдет в следующую точку и т. д. Если отображение обратимо, можно определить и обратные итерации. Тем самым получаем систему с множеством моментов времени .

Примеры *Система дифференциальных уравнений задает динамическую систему с непрерывным временем, называемую «**гармоническим осциллятором**[28]».*



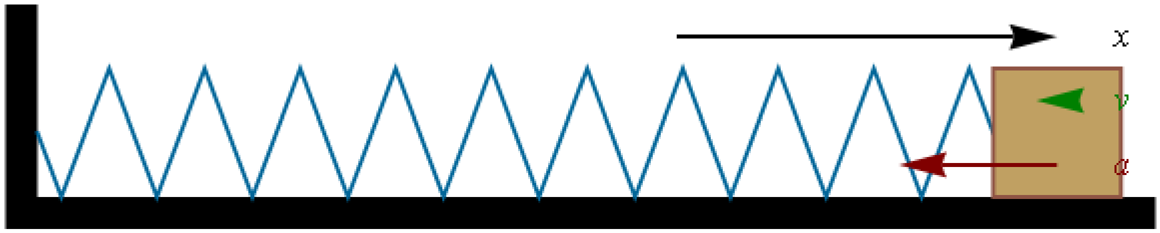
Движение по кругу и движение гармоническ ое

*Гармонический осциллятор (в классической механике) — это система, которая при смещении из положения равновесия испытывает действие возвращающей силы, пропорциональной смещению (согласно закону Гука): **F=-kx**, где k — положительная константа, описывающая жёсткость системы. Если **F** — единственная сила, действующая на систему, то систему называют простым или консервативным гармоническим осциллятором. Свободные колебания такой системы представляют собой периодическое движение около положения равновесия (гармонические колебания). Частота и амплитуда при этом постоянны, причём частота не зависит от амплитуды. Если имеется ещё и сила трения (затухание), пропорциональная скорости движения (вязкое трение), то такую систему называют затухающим или диссипативным осциллятором. Если трение не слишком велико, то система совершает почти периодическое движение — синусоидальные колебания с постоянной частотой и экспоненциально убывающей амплитудой. Частота свободных колебаний затухающего осциллятора оказывается несколько ниже, чем у аналогичного осциллятора без трения. Если осциллятор предоставлен сам себе, то говорят, что он*

---

[28] **Гармонический осциллятор - (в классической механике) — это система, которая при смещении из положения равновесия испытывает действие возвращающей силы F, пропорциональной смещению x (согласно закону Гука):**
F = —кх
где к — положительная константа, описывающая жёсткость системы.
Если F — единственная сила, действующая на систему, то систему называют простым или консервативным гармоническим осциллятором. Свободные колебания такой системы представляют собой периодическое движение около положения равновесия (гармонические колебания). Частота и амплитуда при этом постоянны, причём частота не зависит от амплитуды. Если имеется ещё и сила трения (затухание), пропорциональная скорости движения (вязкое трение), то такую систему называют затухающим или диссипативным осциллятором. Если трение не слишком велико, то система совершает почти периодическое движение — синусоидальные колебания с постоянной частотой и экспоненциально убывающей амплитудой. Частота свободных колебаний затухающего осциллятора оказывается несколько ниже, чем у аналогичного осциллятора без трения. Если осциллятор предоставлен сам себе, то говорят, что он совершает свободные колебания. Если же присутствует внешняя сила (зависящая от времени), то говорят, что осциллятор испытывает вынужденные колебания. Механическими примерами гармонического осциллятора являются математический маятник (с малыми углами отклонения), груз на пружине, торсионный маятник и акустические системы. Среди других аналогов гармонического осциллятора стоит выделить электрический гармонический осциллятор (см. LC-цепь).

совершает свободные колебания. Если же присутствует внешняя сила (зависящая от



Положение, скорость и ускорение гармонического осциллятора

времени), то говорят, что осциллятор испытывает вынужденные колебания. Механическими примерами гармонического осциллятора являются математический маятник (с малыми углами отклонения), груз на пружине, торсионный маятник и акустические системы. Среди других аналогов гармонического осциллятора стоит выделить электрический гармонический осциллятор (см. LC-цепь). Принцип её действия следующий. Пусть конденсатор ёмкостью C заряжен до напряжения U . Энергия, запасённая в конденсаторе составляет $E_c=CU^2/2$

Параллельный колебательный контур

При соединении конденсатора с катушкой индуктивности, в цепи потечёт ток I, что вызовет в катушке электродвижущую силу (ЭДС) самоиндукции, направленную на уменьшение тока в цепи. Ток, вызванный этой ЭДС (при отсутствии потерь в индуктивности) в начальный момент будет равен току разряда конденсатора, то есть результирующий ток будет равен нулю. Магнитная энергия катушки в этот (начальный) момент равна нулю. Затем результирующий ток в цепи будет возрастать, а энергия из конденсатора будет переходить в катушку до полного разряда конденсатора. В этот момент электрическая энергия конденсатора $E_c=0$*. Магнитная же энергия, сосредоточенная в катушке, напротив, максимальна и равна* $E_L=LI^2/2$*, где L— индуктивность катушки, I— максимальное значение тока. После этого начнётся перезарядка конденсатора, то есть заряд конденсатора напряжением другой полярности. Перезарядка будет проходить до тех пор, пока магнитная энергия катушки не перейдёт в электрическую энергию конденсатора. Конденсатор, в этом случае, снова будет заряжен до напряжения (-U). В результате в цепи возникают колебания, длительность которых будет обратно пропорциональна потерям энергии в контуре. В общем, описанные выше процессы в параллельном колебательном контуре называются резонанс токов, что означает, что через индуктивность и ёмкость протекают токи, больше тока проходящего через весь контур, причем эти токи больше в определённое число раз, которое называется добротностью. Эти большие токи не покидают пределов контура, так как они противофазны и сами себя компенсируют. Стоит также* *заметить, что сопротивление параллельного колебательного контура на резонансной частоте стремится к бесконечности (в отличие от последовательного колебательного контура, сопротивление которого на резонансной частоте стремится к нулю), а это делает его незаменимым фильтром. Стоит заметить, что помимо простого колебательного контура, есть ещё колебательные контуры первого, второго и третьего рода, что учитывают потери и имеют другие особенности. Гармонический осциллятор моделирует разнообразные колебательные процессы — например, поведение груза на пружине. Его фазовыми кривыми являются эллипсы с центром в нуле. Пусть φ —угол, задающий положение точки на единичной окружности. Отображение удвоения, задаёт динамическую систему с дискретным временем, фазовым пространством которой является окружность. Быстро-медленные системы описывают процессы, одновременно развивающиеся в нескольких масштабах времени. Динамические системы, чьи уравнения могут быть получены посредством принципа наименьшего действия для удобно выбранной функции Лагранжа, известны как "лагранжевы динамические системы".*

Вопросы теории динамических систем

Имея какое-то задание динамической системы, далеко не всегда можно найти и описать ее траектории в явном виде. Поэтому обычно рассматриваются более простые (но не менее содержательные) вопросы об общем поведении системы. Например:

- *Есть ли у системы замкнутые фазовые кривые, то есть может ли она вернуться в начальное состояние в ходе эволюции?*
- *Как устроены инвариантные многообразия системы (частным случаем которых являются замкнутые траектории)?*
- *Как устроен аттрактор системы, то есть множество в фазовом пространстве, к которому стремится «большинство» траекторий?*
- *Как ведут себя траектории, выпущенные из близких точек — остаются ли они близкими или уходят со временем на значительное расстояние?*
- *Что можно сказать о поведении «типичной» динамической системы из некоторого класса?*
- *Что можно сказать о поведении динамических систем, «близких» к данной?*

Переходим к обсуждению устойчивости/неустойчивости динамических ситем.

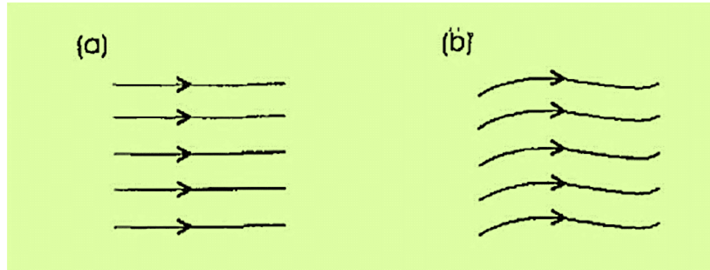


Рис.1

Устойчивость моделей. *Понятие устойчивости по Ляпунову относится к одной орбите и пучку решений, расположенных в непосредственной близости от нее. Все они являются решениями данного, неизменного дифференциального уравнения; отличаются только их начальные условия. Чтобы понять, обладает ли поток дифференциального уравнения в целом свойством устойчивости к внешним возмущениям функций, его определяющих, была необходима новая идея. Она возникла в 1930-х годах в работе двух других русских математиков,* ***А. А. Андронова***[29] ***и Л. С. Понтрягина***[30]*. Она называется структурной устойчивостью и является частью теории бифуркаций, которая своими корнями тоже уходит в изучение Пуанкаре ограниченной задачи трех тел. Для понимания таких концепций структурной устойчивости и бифуркации мы вновь обратимся к метафоре потока на поверхности реки На этот раз вообразим, что поток зависит от внешнего параметра некоторой величины, которая выражает изменение, происходящее извне самой системы. Можно, например, представить водопад в отдаленных горах, где берет начало наша река, или ветер, который дует перпендикулярно течению, оказывая влияние на его ход. Ради простоты возьмем в качестве единственного внешнего параметра скорость ветра. Грубо говоря, поток называют структурно устойчивым, если его структура остается качественно неизменной независимо от небольших изменений в скорости ветра. Если же структура меняется, то значения скорости ветра, при которых происходят эти изменения, называют бифуркационными значениями. Рассмотрим два примера. На рисунке выше (1а) поток (скажем, в отсутствие ветра) образован параллельными линиями. Когда появляется ветер, линии становятся слегка изогнутыми, но качественная структура рисунка не меняется (рис. 1б). Под этим мы подразумеваем, что не появляется никаких новых качественных характеристик, например, водоворота. Если такая ситуация продолжается для любого малого изменения параметра, то мы говорим, что поток структурно устойчив при начальном значении этого параметра —*

[29] **Алекса́ндр Алекса́ндрович Андро́нов (11 апреля 1901, Москва — 31 октября 1952, Горький) — советский учёный-физик, специалист в области электротехники, радиофизики и прикладной механики, создатель нового направления в теории колебаний и динамике систем, талантливый деятель высшей школы. Академик АН СССР с 30 ноября 1946 в отделении технических наук (механика, радиофизика, автоматическое регулирование). Профессор, заведовавший кафедрой «Теории колебаний и автоматического регулирования» радиофизического факультета Горьковского Государственного Университета им. Н. И. Лобачевского (ныне ННГУ).**

[30] **Лев Семёнович Понтря́гин (1908—1988) — советский математик, академик АН СССР (1958; член-корреспондент 1939). Герой Социалистического Труда (1969). Лауреат Ленинской премии (1962), Сталинской премии второй степени (1941) и Государственной премии СССР (1975).**

в нашем случае нулевой скорости ветра. Теперь мы можем представить любые

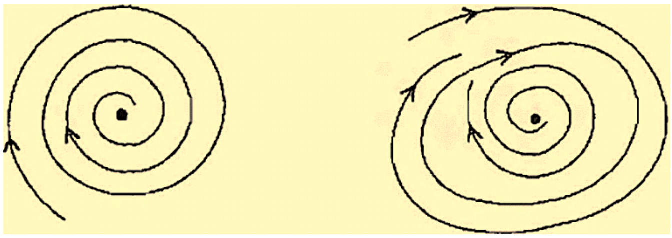


Рис.2

возможные картинки в фазовом пространстве. Например, предположим, что для отрицательных значений параметра поток содержит точку устойчивого равновесия, к которой все соседние орбиты сходятся спирально, как на рисунке 2а. Для положительных значений соседние траектории удаляются по спирали от точки равновесия к (небольшой) замкнутой кривой, окружающей теперь неустойчивое равновесие, как на рис. 2б Однако далекие орбиты по-прежнему закручиваются внутрь. В целом, картинка почти не изменилась; произошло местное изменение. Граничный случай, или точка бифуркации, разделяюшая два портрета, является структурно неустойчивой. Качественное изменение, которое произошло, понятно: в случае (а) рисунка 4.10 колебания затухают с течением времени; в случае (Ь) они выходят на малую периодическую орбиту. В точке бифуркации, соответствующей нулевому значению параметра, равновесие вырождается: нелинейные члены обуславливают слабо устойчивое движение по спирали. По мере изменения параметра размер периодической орбиты увеличивается. Эта частная бифуркация носит имя немецкого математика Эберхарла Хопфа. Вообще-то она входит в теорию, разработанную сначала Пуанкаре, а позднее Андроновым и его соратниками для двумерных систем. В 1942 году Хопф распространил эту теорию на дифференциальные уравнения с произвольно большим числом измерений. Бифуркации Хопфа происходят в моделях многих разновидностей систем. Двумя абсолютно разными примерами таких бифуркаций служат самопроизвольные колебания в электронных и акустических контурах, приводящие к неприятным шумам обратной связи в аудиоусилителях, а также «вибрация переднего колеса» в шасси самолета. Причины важности понятия структурной устойчивости имеют практический характер. Структурно устойчивые потоки отличаются силой; поэтому небольшие изменения внешних параметров не окажут на них надлежащего воздействия. Если некоторое явление описывается с помощью структурно устойчивого потока, значит, его поведение отличается упругостью и сопротивлением к изменениям окружающей среды. Перед лицом перемены все множество решений гибко приспосабливается к ней, демонстрируя только небольшие модификации, которые не изменяют его основного характера. Структурно устойчивые потоки придают определенную силу математическим моделям, в которых происходят. Измерения никогда не бывают абсолютно точными, поэтому всегда нужно помнить об ошибке измерения. Бели бифуркация происходит при каком-то значении, измеренном нами, мы не можем сказать, какому типу поведения соответствует данная *физическая ситуация. Если поток структурно устойчив, то мы можем гарантировать качественную точность в окрестности измеренных данных. Теория катастроф, достаточно молодая область математики, вызвавшая множество споров и чрезмерную активность журналистов в первые годы своею существования, приспособила понятие структурной устойчивости к своим собственным целям. В этом случае нас также интересует, каким образом качественные свойства функций зависят от внешних параметров. Структурная устойчивость и бифуркация остаются центральными моментами теории динамических систем и имеют важные следствия, выходящие за пределы математики. Они уже нашли применение в исследовании сердца, в эмбриологии, лингвистике, оптике, психологии, гидродинамике, экономике, физике элементарных частиц, геологии и многих других областях.*

ПЛАНЕТЫ В РАВНОВЕСИИ

С вопросами устойчивости в небесной механике связано важное понятие центральной конфигурации. В 1767 году шестидесятилетний ***Леонард Эйлер*** *опубликовал исследование задачи трех тел. В своей работе он в явном виде получил целый класс периодических решений. Он доказал, что если три частицы произвольных (конечных) масс изначально расположить на одной линии, как показано на рисунке 3, так что отношение AB/BC будет иметь некоторое значение, заданное сложной формулой, зависящей от масс, и если частицам задать подходящие начальные скорости, то они будут двигаться периодическим образом по эллипсам, постоянно сохраняя коллинеарную конфигурацию. Более того, отношение AB/BC расстояний, измеренных вдоль вращающейся линии AC, останется неизменным на протяжении всего движения. Это достаточно поразительно, поскольку, как мы уже отметили, добавление третьего тела в задачу двух тел обычно возмущает кеплеровы эллиптические орбиты и даже может вызвать хаос. В 1772 году*

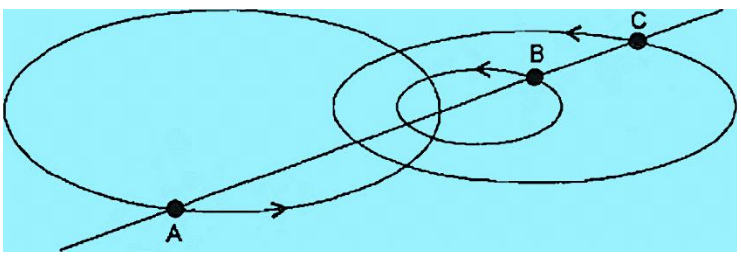


Рис.3 Эйлеровы решения задачи трех тел

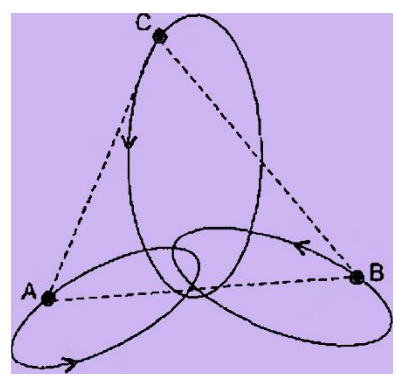


Рис. 4. Лагранжевы решения задачи трех тел

Лагранж переоткрыл эйлеровы решения задачи трех тел и нашел второй важный класс орбит. Он показал, что если в начальный момент времени три частицы расположены в вершинах равностороннего треугольника и если, опять-таки, взять подходящие начальные скорости, то материальные точки будут периодическим образом двигаться *по эллипсам, как на рисунке4, всегда сохраняя свою равностороннюю конфигурацию. Треугольник изменит свой размер и ориентацию в процессе движения частиц по орбитам, но все равно останется равносторонним. Неудивительно, что такие решения называются лагранжевыми. Существует три вида коллинеарных решений, которые соответствуют различным способам расположения трех точек на линии, и два вида решений треугольного типа, которые соответствуют двум разным ориентациям треугольника в пространстве. В обоих случаях, если тела расположить в виде коллинеарной или равносторонней конфигурации, а начальные скорости положить равными нулю, частицы будут двигаться к их обшему центру масс и одновременно достигнут в этой точке в консчнос время тройного столкновения. Это предельный случай, когда эллиптические орбиты вырождаются в линейные отрезки, а решение перестает быть периодическим. В этих особых решениях все материальные частицы исполняют тождественный танец, так что неизученными остаются все девять степеней свободы, которыми обладают наши три тела. Движения происходят на инвариантном подмногообразии более низкой размерности, типа, описанного в первой главе. Как мы уже отмечали, инвариантные многообразия могут образовать своего рода костяк, помогающий нам понять фазовое пространство целиком.*

Чтобы увидеть связь между устойчивостью и этими довольно специальными классами эйлеровых и лагранжевых решений задачи трех тел, предположим, что они двигаются по круговым орбитам и изучим эти орбипгы во вращающихся координатах. В данном случае мы привязаны к системе отсчета наблюдателя, вращающейся так же, как линия или треугольник, в которой мы не ошущаем движения частиц, что очень напоминает ситуацию, когда едешь в машине и наблюдаешь за поездом, который движется с такой же скоростью по железной дороге параллельно автомобилю. Мы видим три тела в стационарных положениях. В обоих случаях они представляют положения равновесия в новых координатах, а значит, мы можем исследовать устойчивость этих положений. Вообщс-то, для должным образом выбранных (и более сложных) координат, решения можно рассматривать как положения равновесия, даже если орбиты представить не эллипсами, а окружностями. В любом случае такие положения равновесия называют центральными конфигурациями. Существует еще один способ рассмотрения этих решений. Возьмем задачу двух тел (например, движение Земли по эллипсу вокруг Солнца) и предположим, что в гравитационном поле этих тел движется третье тело с меньшей массой (космический корабль). Малое тело не оказывает влияния на движение больших, но его движение определяется обоими большими телами. Это ограниченная задача трех тел того типа, с которым мы встречались уже несколько раз. Существует пять частных положений, которые малое тело может занимать в плоскости эллиптических орбит, описываемых крупными телами. Эти положения называются точками либрации и обозначаются L1, L2, L3, L4 и L5 (см. рис. 5). Это классическое *обозначение, в котором буква L была выбрана в честь Лагранжа. Термин «либрация» происходит от латинского слова libratio, означающего «равновесие». В астрономии это слово встречается в двух значениях. В данном случае имеется в виду, что когда частица пребывает в точке либрации, то она находится в равновесии, в состоянии покоя во вращающейся системе отсчета, причем центробежные силы и гравитационные силы притяжения двух больших тел взаимоуничтожаются От этого же корня происходит и слово «equilibrium[31]». Другое значение этого термина применяется в отношении либрации Лупы — колебательного движения, над которым также работал Лагранж. Как мы ранее упоминали в этой главе, либрация по долготе поочередно открывает и закрывает восточную и западную границы видимой стороны Луны. Если рассмотреть две большие массы, а малую поместить в одну из их точек либрации, то получатся эйлерова и лагранжева конфигурации. При этой новой расстановке проще изучать устойчивость точек либрации, нежели устойчивость решений Эйлера-Лагранжа, но*

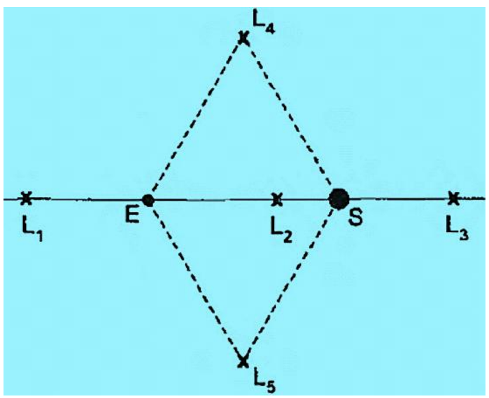


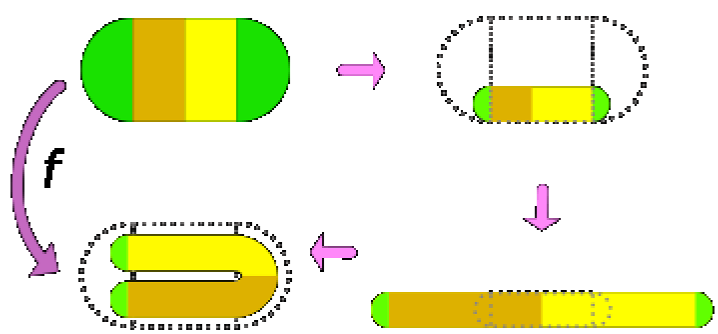
Рис. 5. Пять точек либрации

этот метод, безусловно, работает только для малой третьей массы. Сегодня нам известно при каких условиях точки либрации устойчивы; это свойство зависит от относительных величин масс больших тел. Примером устойчивой точки либрации в астрономии Солнечной системы служат троянцы — скопление астероидов, движущееся вокруг Солнца примерно по той же орбите, что и Юпитер, и образующее равносторонний треугольник с этими двумя гораздо более крупными небесными телами. Кроме того, в лагранжевых точках системы Земля-Луна астрономы обнаружили скопления космической пыли. Ученые предлагали использовать устойчивость этих точек для создания из окружающих их областей «парковок» для будущих космических станций или для постройки колоний в космосе.

Как мы видели на рисунке 5, существует пять классов центральных конфигураций для задачи трех тел: два равносторонних (одна на каждое возможное расположение равностороннего треугольника, в вершинах которого находятся частицы) и три коллинеарных (одна на каждое возможное расположение трех частиц на линии). Как ни странно, мы мало что знаем о числе классов центральных конфигураций для задачи n-тел при n> 3. Мы даже не знаем, конечно или бесконечно их число и должно ли их быть бесконечно много; мы не знаем, образуют ли они множество отдельных точек (т. е. точек, между которыми положительное расстояние) или континуум (т. е. непрерывную область фазового пространства). В этой области работали многие люди.

[31] **Равновесие**

*В 1912 году **Карл Зундман**[32] открыл интересное свойство задачи трех тел. Он показал, что если три частицы сталкиваются одновременно, то они непременно должны стремиться к образованию центральной конфигурации. Другими словами, перед столкновением частицы приближаются либо к равностороннему треугольнику, либо к коллинеарной конфигурации эйлерова типа. Таким образом, вышеупомянутые инвариантные множества являются своего рода скоростной автострадой к тройным столкновениям. Было доказано, что в задаче n-тел это свойство истиннов том смысле, что одновременное столкновение любого подмножества к частиц стремится к множеству центральных конфигураций, образованных этими к частицами. К сожалению, поскольку это множество центральных конфигураций может оказаться континуумом, мы не знаем, стремится ли столкновительная орбита к частной центральной конфигурации или совершает колебания между несколькими конфигурациями, не останавливаясь ни на одной из них. Более того, в 1983 году Дональд Саари доказал, что большой класс решений задачи n-тел, который рассеивается в бесконечность, делает это, стремясь к центральным конфигурациям по мере расхождения тел. (Например, если три неколлинеарные частицы рассеиваются в бесконечность, то, чем дальше они отойдут друг от друга, тем ближе они подойдут к углам равностороннего треугольника) Этот результат проливает некоторый свет на космологическую проблему движения галактик. Несмотря на его, на первый взгляд, частную природу, понятие центральных конфигураций остается важной темой в современной небесной механике. В этой и предыдущей главах мы проследили процесс зарождения и увидели некоторые ответвления двух фундаментальных понятий в теории динамических систем: хаоса и устойчивости. Мы увидели, как поиск устойчивости Пуанкаре привел его к открытию хаоса.*



*Анализ **Смейла** [33] на основе символической динамики, показал, что такой детерминистический хаос во многих отношениях невозможно отличить от действительно случайного процесса. Подкова Смейла (см.рисунок)— предложенный Стивом Смейлом пример динамической системы, имеющей бесконечное число*

---

[32] **Карл Зундман или Сундман (фин. Karl Frithiof Sundman; 1873 – 1949), — финский математик, нашедший общее аналитическое решение задачи трех тел в виде сходящихся рядов в 1906-1912. Эти исследования были отмечены премией Финской АН в 1913. В честь него назван кратер на луне, а также астероид 1424 Зундмания (1937 AJ).**

[33] **В теории динамических систем, Аксиома А — предложенное Стивом Смейлом условие на динамическую систему: Неблуждающее множество гиперболично, а периодические точки в нём плотны. Объединение этого условия с т. н. «сильным условием трансверсальности» является необходимым и достаточным условием для структурной устойчивости системы.**

периодических точек (и хаотическую динамику), причём это свойство не разрушается при малых возмущениях системы. Его отличительной особенностью является чувствительная зависимость от начальных условий: хаотические орбиты в долгосрочном периоде эффективно непредсказуемы. Устойчивость по Ляпунову, описанная выше, напротив, означает неизменное поведение или регулярное, предсказуемое повторение. К данному моменту читатель может подумать, что эти два свойства являются взаимоисключающими, если не в высшей степени противоположными. Почему же тогда мы связали их, если хаос возникает лишь случайно, в стремлении к устойчивости? Мы сделали это, чтобы показать, что на самом деле они тесно переплетаются совершенно неповторимым образом в некоторых динамических системах — почти интегрируемых гамильтоновых системах классической механики. Советую вдумчивому читателю познакомиться с триумвиратом ***Колмогорова, Арнольда и Мозера*** *— тремя математиками, создавшими теорию, которая связывает хаос и устойчивость, познакомиться детально и обстоятельно (поэтому нет сносок).*

Успехов и до встречи!

Литература

1. К.О. Ананченко "Общая методика преподавания математики в школе", Мн., "Універсітэцкае",1997г.

2.Н.М.Рогановский "Методика преподавания в средней школе", Мн., "Высшая школа", 1990г.

3.Г.Фройденталь "Математика как педагогическая задача",М., "Просвещение", 1998г.

4.Н.Н. "Математическая лаборатория", М., "Просвещение", 1997г.

5.Ю.М.Колягин "Методика преподавания математики в средней школе", М., "Просвещение", 1999г.

6.А.А.Столяр "Логические проблемы преподавания математики", Мн., "Высшая школа", 2000г.

7. Аристотель. Соч. в 4-х тт. — М.: Мысль, 1975. Т.1. С.20-30.

8. Ньютон И. Оптика. М.: Гостехтеориздат, 1954. С.303-304.

9. Пуанкаре А. О науке. М.: Наука, 1983. С.408-420.

10. Пригожин И. Стенгерс И. Порядок из хаоса. М.: Прогресс, 1986.

11. Линде А. Д. Физика элементарных частиц и инфляционная космология. М.: Наука, 1990.

12. Quine W.V.O. Ontological relativity and other essays. N.Y.; L., 1969.

13. Е. А. Барбашин. Функции Ляпунова. М., Наука, 1970.

14. Н. Рутн, П. Абетс, М. Лалуа. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М., Мир, 1980. [-3]

15. Б. П. Демидович. Лекции по математической теории устойчивости. М., МГУ, 1998.

16. Современная теория систем управления // под ред. К. Т. Леондеса. М., Наука, 1970.1

КОНЦЕВЫЕ СНОСКИ

---

[i] ***Нúкола Тéсла (серб. Никола Тесла; 10 июля 1856, Смилян, Австрийская империя, ныне в Хорватии — 7 января 1943, Широко известен благодаря своему научно-революционному вкладу в изучение свойств электричества и магнетизма в конце XIX — начале XX веков. Патенты и теоретические работы Теслы дали основу для изобретения и развития многих современных устройств, работающих на переменном токе, многофазных систем и электродвигателя, позволивших совершить так называемый второй этап промышленной революции.***
Также он известен как сторонник гипотезы существования эфира: известны многочисленные его опыты и эксперименты, имевшие целью показать наличие эфира как особой формы материи, поддающейся использованию в технике.
Именем Н. Теслы названа единица измерения плотности магнитного потока (магнитной индукции). Среди многих наград учёного — медали Э. Крессона, Дж. Скотта, Т. Эдисона.
Современники-биографы считали Теслу «человеком, который изобрёл XX век»[4] и «святым заступником» современного электричества[5]. После демонстрации радио и победы в «Войне токов» Тесла получил повсеместное признание как выдающийся инженер-электротехник и изобретатель.[6] Ранние работы Теслы проложили путь современной электротехнике, его открытия раннего периода имели инновационное значение. В США по известности Тесла мог конкурировать с любым изобретателем или учёным в истории или популярной культуре[7Ранние годы Семья Тесла[8] жила в селе Смилян в 6 км от города Госпич, главного города исторической провинции Лика, входившей в то время в состав Австро-Венгерской империи.[9] Отец — Милутин Тесла (1819—1879), священник Сремской епархии сербской православной церкви, серб. Мать — Георгина (Джука) Тесла (1822—1892), в девичестве Мандич, была дочерью священника. 28 июня (10 июля) 1856 года в семье появился четвёртый[10] ребёнок — Никола. Всего в семье было пять детей: три дочери — Милка, Ангелина и Марица и два сына — Никола и его старший брат Дане. Когда Николе было пять лет, его брат погиб, упав с коня.[11]
Первый класс начальной школы Никола закончил в Смилянах. В 1862 году, вскоре после гибели Дане, отец семейства получил повышение сана, и семья Тесла переехала в Госпич, где Никола завершил оставшиеся три класса начальной школы, а затем и трёхлетнюю нижнюю реальную гимназию, которую закончил в 1870 году. Осенью того же года Никола поступил в Высшее реальное училище в городе Карловац. Он жил в доме у своей тёти, двоюродной сестры отца, Станки Баранович.
Милутин Тесла, сербский священник, отец Николы
Книга рождения Никола Тесла (сербско-славянской кириллицей)
Дом, где родился Тесла. На данный момент является музеем
Карта Австро-Венгрии. Синим отмечены упоминаемые в статье населённые пункты
Первая страница паспорта Николы Теслы, выданного в Королевстве Хорватия и Славония в 1883 году
В июле 1873 года Никола получил аттестат зрелости. Несмотря на наказ отца, Никола вернулся к семье в Госпич, где была эпидемия холеры, и тут же заразился (правда, до конца не ясно[источник не указан 1063 дня], была ли это на самом деле холера). Врачи полагали, что дни его сочтены. На мгновения приходя в себя, Никола просил отца позволить ему продолжить обучение на инженера, обещая, что, если получит согласие, то «вылечит себя сам, потому что обретёт волю к жизни». Потерявший все надежды отец в конце концов согласился — и тогда, к удивлению врачей, действительно произошло неожиданное: Тесла выздоровел за несколько дней. Болезнь длилась 9 месяцев. Выздоровевшего Теслу должны были вскоре призвать на трёхлетнюю службу в Австро-Венгерской армии. Родственники сочли его недостаточно здоровым и спрятали в горах. Назад он вернулся лишь в начале лета 1875 года. В том же году Никола поступил в высшее техническое училище в Граце (в настоящее время — Грацский технический университет), где стал изучать электротехнику. Наблюдая за работой машины Грамма на лекциях по электротехнике, Тесла пришёл к мысли о несовершенстве машин постоянного тока, однако профессор Яков Пешль подверг его идеи резкой критике, перед всем курсом прочитав лекцию о неосуществимости использования переменного тока в электродвигателях. На третьем курсе Тесла увлёкся азартными играми, проигрывая большие суммы денег в карты. В своих воспоминаниях Тесла писал, что им двигало «не только желание развлечься, но и неудачи в достижении намеченной цели».[10] Выигрыши он всегда раздавал проигравшим, за что вскоре прослыл чудаком. В конце концов он настолько сильно проигрался, что его матери пришлось взять в долг у своей приятельницы. С тех пор он никогда больше не играл в карты.
17 (29) апреля 1879 умер отец Николы.
Тесла устроился преподавателем в реальную гимназию в Госпиче, ту, в которой он учился. Работа в Госпиче его не устраивала. У семьи было мало денег, и только благодаря финансовой помощи от двух своих дядей, Петара и Павла Мандич, молодой Тесла смог в январе 1880 года уехать в Прагу, где поступил на философский факультет Пражского университета.
Он проучился всего один семестр и был вынужден искать работу. [править] Австро-Венгрия, Германия и Франция До 1882 года Тесла работал инженером-электриком в правительственной телеграфной компании в Будапеште, которая в то время занималась проведением телефонных линий и строительством центральной телефонной

станции. В феврале 1882 года Тесла придумал, как можно было бы использовать в электродвигателе явление, позже получившее название вращающегося магнитного поля.
Работа в телеграфной компании не давала Тесле осуществить свои замыслы по созданию электродвигателя переменного тока. В конце 1882 года он устроился в Континентальную компанию Эдисона (Continental Edison Company) в Париже. Одной из наиболее крупных работ компании было сооружение электростанции для железнодорожного вокзала в Страсбурге. В начале 1883 года компания направила Николу в Страсбург для решения ряда рабочих проблем, возникших у компании при монтаже осветительного оборудования новой железнодорожной станции.[12] В свободное время Тесла работал над изготовлением модели асинхронного электродвигателя, а в 1883 году демонстрировал работу двигателя в мэрии г. Страсбурга.
23-летний Никола Тесла
К весне 1884 года работы на страсбургской ж/д станции были закончены, и Тесла вернулся в Париж, ожидая от компании премии в размере 25 тыс. долларов. Попробовав получить причитающиеся ему премиальные, он понял, что этих денег ему не получить и, оскорблённый, уволился[10].
Один из первых биографов изобретателя Б. Н. Ржонсницкий[13] утверждает: «Первая мысль его была поехать в Петербург, так как в России в те годы были сделаны многие важные для развития электротехники открытия и изобретения. Имена Павла Николаевича Яблочкова, Дмитрия Александровича Лачинова, Владимира Николаевича Чиколева и других были хорошо известны электрикам всех стран, статьи их печатались в наиболее распространенных электротехнических журналах мира и, несомненно, были известны и Тесле»[10]. Но в последний момент один из администраторов Континентальной компании, Чарлз Бечлор (англ. Charles Batchelor), уговорил Николу вместо России отправиться в США. Бечлор написал рекомендательное письмо Эдисону, своему другу: «Было бы непростительной ошибкой дать возможность уехать в Россию подобному таланту. Вы ещё будете мне благодарны, мистер Эдисон, за то, что я не пожалел нескольких часов для убеждения этого молодого человека отказаться от мысли ехать в Петербург. Я знаю двух великих людей — один из них вы, второй — этот молодой человек.»[10].
В биографиях Теслы других авторов о желании Теслы ехать в Россию ничего не сказано, а текст записки приводится лишь из одного (последнего) предложения. Впервые о записке упоминает первый крупный биограф Теслы Джон О'Нейл. Документально зафиксированного текста записки нет. Современный автор, доктор философии Марк Сейфер, полагает, что записки как таковой могло и не существовать. [править] Америка [править] Работа у Эдисона
Н. Тесла с «Теорией натуральной философии…» Руджера Бошковича на фоне катушки ВЧ трансформатора в своей лаборатори на Хаустон-стрит
6 июля 1884 года Тесла прибыл в Нью-Йорк.[14] Он устроился на работу в компанию Томаса Эдисона (Edison Machine Works) в качестве инженера по ремонту электродвигателей и генераторов постоянного тока.
Эдисон довольно холодно воспринимал новые идеи Теслы и всё более открыто высказывал неодобрение направлению личных изысканий изобретателя. Весной 1885 года Эдисон пообещал Тесле 50 тыс. долларов (по тем временам сумма, примерно эквивалентная 1 млн современных долларов[15р, если у него получится конструктивно улучшить электрические машины постоянного тока, придуманные Эдисоном.[16] Никола активно взялся за работу и вскоре представил 24 разновидности машины Эдисона, новый коммутатор и регулятор, значительно улучшающие эксплуатационные характеристики. Одобрив все усовершенствования, в ответ на вопрос о вознаграждении Эдисон отказал Тесле, заметив, что эмигрант пока плохо понимает американский юмор. Оскорблённый Тесла немедленно уволился.[17] [править] Лаборатория в Нью-Йорке
Проработав всего год в компании Эдисона, Тесла приобрёл известность в деловых кругах. Узнав о его увольнении, группа электротехников предложила Николе организовать свою компанию, связанную с вопросами электрического освещения. Проекты Теслы по использованию переменного тока их не воодушевили, и тогда они изменили первоначальное предложение, ограничившись лишь предложением разработать проект дуговой лампы для уличного освещения. Через год проект был готов. Вместо денег предприниматели предложили изобретателю часть акций компании, созданной для эксплуатации новой лампы. Такой вариант не устроил изобретателя, компания же в ответ постаралась избавиться от него, попытавшись оклеветать и опорочить Теслу [10].
С осени 1886 года и до весны молодой изобретатель вынужден был перебиваться на подсобных работах. Он занимался рытьём канав, «спал, где придётся, и ел, что найдёт». В этот период он подружился с находившимся в подобном же положении инженером Брауном, который смог уговорить нескольких своих знакомых оказать небольшую финансовую поддержку Тесле. В апреле 1887 года созданная на эти деньги «Тесла арк лайт компани» начала заниматься обустройством уличного освещения новыми дуговыми лампами. Вскоре перспективность компании была доказана большими заказами из многих городов США. Для самого изобретателя компания была лишь средством к достижению заветной цели [10].
Под офис своей компании в Нью-Йорке Тесла снял дом на Пятой авеню (англ. Fifth Avenue) неподалёку от здания, занимаемого компанией Эдисона. Между двумя компаниями развязалась острая конкурентная борьба, известная в Америке под названием «Война токов» (War of Currents).
В июле 1888 года известный американский промышленник Джордж Вестингауз выкупил у Теслы более 40 патентов, заплатив в среднем по 25 тысяч долларов за каждый. Вестингауз также пригласил изобретателя в роли консультанта на заводах в Питсбурге, где разрабатывались промышленные образцы машин переменного тока. Работа

не приносила изобретателю удовлетворения, мешая появлению новых идей. Несмотря на уговоры Вестингауза, через год Тесла вернулся в свою лабораторию в Нью-Йорке.

Вскоре после возвращения из Питсбурга Никола Тесла съездил в Европу, где посетил Всемирную выставку 1889 года, проходившую в Париже; навестил свою мать и сестру Марицу [10].

В 1888—1895 годах Тесла занимался исследованиями магнитных полей и высоких частот в своей лаборатории. Эти годы были наиболее плодотворными: он получил множество патентов. Руководство Американского института электроинженеров (American Institute of Electrical Engineers) пригласило Теслу прочитать лекцию о своих работах. 20 мая 1892 года он выступил перед аудиторией, включавшей выдающихся электротехников того времени, и имел большой успех.

13 марта 1895 года в лаборатории на Пятой авеню случился пожар. Здание сгорело до основания, уничтожив самые последние достижения изобретателя — механический осциллятор, новый метод электрического освещения, новый метод беспроводной передачи сообщений на далёкие расстояния и метод исследования природы электричества. Сам Тесла заявил, что по памяти может восстановить все свои открытия.

Финансовую помощь изобретателю оказала «Компания Ниагарских водопадов». Благодаря Эдварду Адамсу у Теслы появилось 100 000 долларов на обустройство новой лаборатории. Уже осенью исследования возобновились по новому адресу: Хаустон-стрит, 46. В конце 1896 года Тесла добился передачи радиосигнала на расстояние 30 миль (48 км) [10].

[править] Колорадо Спрингс

Никола Тесла в лаборатории в Колорадо-Спрингс. Начало 1900 годов (фотография получена путём двойной экспозиции)

Согласно предположению Теслы, наибольшей интенсивности стоячие волны из Колорадо Спрингс достигали возле острова Амстердам в Индийском океане.

Как видно по карте магнитного поля Земли в Колорадо, лаборатория Теслы располагалась в зоне наибольшей геомагнитной активности

В мае 1899 года по приглашению местной электрической компании Тесла переехал в курортный городок Колорадо Спрингс (англ. Colorado Springs) в штате Колорадо. Городок располагался на обширном плато на высоте 2000 м. Сильные грозы были нередки в этих местах [10].

В Колорадо Спрингс Тесла организовал небольшую лабораторию. Спонсором на этот раз был владелец отеля «Уолдорф-Астория», выделивший на исследования 30 000 долларов. Для изучения гроз Тесла сконструировал специальное устройство, представляющее собой трансформатор, один конец первичной обмотки которого был заземлён, а второй соединялся с металлическим шаром на выдвигающемся вверх стержне. Ко вторичной обмотке подключалось чувствительное самонастраивающееся устройство, соединённое с записывающим прибором. Это устройство позволило Николе Тесле изучать изменения потенциала Земли, в том числе и эффект стоячих электромагнитных волн, вызванный грозовыми разрядами в земной атмосфере (через пять с лишним десятилетий этот эффект был подробно исследован и позднее стал известен как «Резонанс Шумана»). Наблюдения навели изобретателя на мысль о возможности передачи электроэнергии без проводов на большие расстояния.

Следующий эксперимент Тесла направил на исследование возможности самостоятельного создания стоячей электромагнитной волны. Кроме множества индукционных катушек и прочего оборудования он спроектировал «усиливающий передатчик». На огромное основание трансформатора были намотаны витки первичной обмотки. Вторичная обмотка соединялась с 60-метровой мачтой и заканчивалась медным шаром метрового диаметра. При пропускании через первичную катушку переменного напряжения в несколько тысяч вольт во вторичной катушке возникал ток с напряжением в несколько миллионов вольт и частотой до 150 тысяч герц.

При проведении эксперимента были зафиксированы грозоподобные разряды, исходящие от металлического шара. Длина некоторых разрядов достигала почти 4,5 метров, а гром был слышен на расстоянии до 24 км. Первый запуск эксперимента прервался из-за сгоревшего генератора на электростанции в Колорадо Спрингс, который был источником тока для первичной обмотки «усиливающего передатчика». Тесла вынужден был прекратить эксперименты и самостоятельно заниматься ремонтом вышедшего из строя генератора. Через неделю эксперимент был продолжен.

На основании эксперимента Тесла сделал вывод о том, что устройство позволило ему генерировать стоячие волны, которые сферически распространялись от передатчика, а затем с возрастающей интенсивностью сходились в диаметрально противоположной точке земного шара, где-то около островов Амстердам и Св. Павла в Индийском океане.

Свои заметки и наблюдения от опытов в лаборатории в Колорадо Спрингс Никола Тесла заносил в дневник, который позднее был опубликован под названием «Colorado Springs Notes, 1899—1900».

Осенью 1899 года Тесла вернулся в Нью-Йорк.

Статуя Николы Теслы перед Святого Саввы Православной Церкви, Манхэттен, Нью-Йорк [править] Проект «Уондерклиф»

Финансировавший исследования Теслы промышленник Джон Пирпонт Морган, 1903 г.

В 60 км севернее Нью-Йорка на острове Лонг-Айленд Никола Тесла приобрёл участок земли, граничащий с владениями Чарльза Вардена. Участок площадью 0,8 км² находился на значительном удалении от поселений. Здесь Тесла планировал построить лабораторию и научный городок. По его заказу архитектором В. Гроу был разработан проект радиостанции — 47-метровой деревянной каркасной башни с медным полушарием наверху. Сооружение подобной *конструкции из дерева порождало множество сложностей: из-за массивного полушария центр тяжести здания сместился вверх, лишая конструкцию устойчивости. С трудом удалось найти строительную компанию, взявшуюся за реализацию проекта. Строительство башни завершилось в 1902 году. Тесла поселился в небольшом коттедже неподалёку.*

Изготовление необходимого оборудования затянулось, поскольку финансировавший его промышленник Джон Пирпонт Морган разорвал контракт после того, как узнал, что вместо практических целей по развитию электрического освещения Тесла планирует заниматься исследованиями беспроводной передачи электричества. Узнав о прекращении Морганом финансирования проектов изобретателя, другие промышленники также не захотели иметь с ним дела. Тесла вынужден был прекратить строительство, закрыть лабораторию и распустить штат сотрудников. Расплачиваясь с кредиторами, Тесла вынужден был продать земельный участок. Башня оказалась заброшенной и простояла до 1917 года, когда федеральные власти заподозрили, что немецкие шпионы используют её в своих целях. Недостроенный проект Теслы взорвали[18]. [править] После «Уондерклифа»

После 1900 года Тесла получил множество других патентов на изобретения в различных областях техники (электрический счётчик, частотомер, ряд усовершенствований в радиоаппаратуре, паровых турбинах и пр.)

Летом 1914 года Сербия оказалась в центре событий, повлекших начало Первой мировой войны. Оставаясь в Америке, Тесла принимал участие в сборе средств для сербской армии. Тогда же он начинает задумываться о создании супероружия: «Придет время, когда какой-нибудь научный гений придумает машину, способную одним действием уничтожить одну или несколько армий».[19]

В 1915 году в газетах писали, что Тесла был номинирован на Нобелевскую премию по физике. Одновременно был заявлен и Томас Эдисон. Изобретателям предлагалось разделить премию на двоих. По утверждениям некоторых источников, взаимная неприязнь изобретателей привела к тому, что оба отказались от неё, таким образом отвергнув любую возможность разделения премии.[20] В действительности Эдисону в 1915 не предлагали премии, хотя и номинировали на нее, а Теслу впервые номинировали в 1937 году.[21]

18 мая 1917 года Тесле была вручена медаль Эдисона, хотя сам он решительно отказывался от её получения.

В 1917 году Тесла предложил принцип действия устройства для радиообнаружения подводных лодок.

В 1917—1926 годах Никола Тесла работал в разных городах Америки. С лета 1917 до ноября 1918 года он работал на «Пайл Нэшнл» в Чикаго; в 1919—1922 годах был в Милуоки с Эллисом Чалмерсом; последние месяцы 1922 года прошли в Бостонской «Уолтем Уотч Компани», а в 1925—1926 годах в Филадельфии Тесла разрабатывал для «Бадд Компани» бензиновую турбину.

В 1934 году в журнале Scientific American была опубликована статья Теслы, вызвавшая широкий резонанс в научных кругах, в которой он подробно рассмотрел пределы возможности получения сверхвысоких напряжений путем зарядки шарообразных емкостей статическим электричеством от трущихся ремней и высказал сомнение в том, что разряды этого электростатического генератора смогут помочь в исследованиях строения атомного ядра. [править] Смерть

Музей имени Николы Теслы в Белграде (Имеются личные вещи Николы Теслы)

Бюст Теслы в Пуле

Уже в преклонном возрасте Теслу сбила легковая машина, он получил перелом рёбер. Болезнь вызвала острое воспаление лёгких, перешедшее в хроническую форму. Тесла оказался прикован к постели.

В Европе началась война. Тесла глубоко переживал за свою родину, оказавшуюся в оккупации, неоднократно обращаясь с горячими призывами в защиту мира ко всем славянам (в 1943 году, уже после его смерти, первой гвардейской дивизии народно-освободительной армии Югославии за проявленное мужество и героизм было присвоено имя Николы Теслы).

1 января 1943 года Элеонора Рузвельт, супруга президента США, выразила пожелание навестить больного Теслу. Посол Югославии в США Сава Косанович (приходившийся племянником Тесле), посетил его 5 января и договорился о встрече. Он был последним, кто общался с Теслой [10].

Тесла умер от сердечной недостаточности в ночь с 7 на 8 января 1943 года[22]. Тесла всегда требовал, чтобы ему никто не мешал, на дверях его гостиничного номера в Нью-Йорке даже висела специальная табличка. Тело было обнаружено горничной и директором отеля «Нью-Йоркер» лишь спустя 2 дня после смерти. 12 января тело кремировали, и урну с прахом установили на Фернклиффском кладбище в Нью-Йорке[23]. Позже она была перенесена в Музей Николы Теслы в Белграде. [править] Изобретения и научные работы [править] Переменный ток

С 1889 года Тесла приступил к исследованиям токов высокой частоты и высоких напряжений. Изобрёл первые образцы электромеханических генераторов ВЧ (в том числе индукторного типа) и высокочастотный трансформатор (трансформатор Теслы, 1891), создав тем самым предпосылки для развития новой отрасли электротехники — техники ВЧ.

В ходе исследований токов высокой частоты Тесла уделял внимание и вопросам безопасности. Экспериментируя на своём теле, он изучал влияние переменных токов различной частоты и силы на человеческий организм. Многие правила, впервые разработанные Теслой, вошли в современные основы техники безопасности при работе с ВЧ-токами. Он обнаружил, что при частоте тока свыше 700 Гц электрический ток протекает по поверхности тела, не нанося вреда тканям организма. Электротехнические аппараты, разработанные Теслой для медицинских исследований, получили широкое распространение в мире.

Эксперименты с высокочастотными токами большого напряжения привели изобретателя к открытию способа очистки загрязнённых поверхностей. Аналогичное воздействие токов на кожу показало, что таким образом

возможно удалять мелкую сыпь, очищать поры и убивать микробы. Данный метод используется в современной электротерапии. [править] Теория полей
12 октября 1887 года Тесла дал строгое научное описание сути явления вращающегося магнитного поля. 1 мая 1888 года Тесла получил свои основные патенты на изобретение многофазных электрических машин (в том числе асинхронного электродвигателя) и системы передачи электроэнергии посредством многофазного переменного тока. С использованием двухфазной системы, которую он считал наиболее экономичной, в США был пущен ряд промышленных электроустановок, в том числе Ниагарская ГЭС (1895), крупнейшая в те годы [10]. [править] Радио Тесла одним из первых запатентовал способ надёжного получения токов, которые могут быть использованы в радиосвязи. Патент U.S. Patent 447 920, выданный в США 10 марта 1891 года, описывал «Метод управления дуговыми лампами» («Method of Operating Arc-Lamps»), в котором генератор переменного тока производил высокочастотные (по меркам того времени) колебания тока порядка 10 000 Гц. Запатентованной инновацией стал метод подавления звука, производимого дуговой лампой под воздействием переменного или пульсирующего тока, для чего Тесла придумал использовать частоты, находящиеся за рамками восприятия человеческого слуха. По современной классификации генератор переменного тока работал в интервале очень низких радиочастот.
Тесла демонстрирует принципы радиосвязи, 1891 г.
В 1891 году на публичной лекции Тесла описал и продемонстрировал принципы радиосвязи. В 1893 году вплотную занялся вопросами беспроволочной связи и изобрёл мачтовую антенну. В 1893 году Тесла построил первый волновой радиопередатчик, опередив Маркони на несколько лет. В 1943 году Верховный суд США подтвердил первенство Теслы в этом изобретении. [править] Резонанс
Катушки Тесла до сих пор иногда используются именно для получения длинных искровых разрядов, напоминающих молнию. В 1998 году инженер из Стенфорда Грег Лей продемонстрировал публике эффект «молнии по заказу», стоя в металлической клетке под гигантским контуром Тесла и управляя молниями с помощью металлической «волшебной палочки». Недавно он развернул кампанию по сбору средств на строительство ещё двух «башен Тесла» на юго-западе США. Проект обойдётся в 6 миллионов долларов. Однако укротитель молний надеялся вернуть расходы, продав установку Федеральному управлению авиации. С помощью неё авиаторы смогут изучать, что происходит с самолётами, попавшими в грозу. В одном из научных журналов Тесла рассказывал об опытах с механическим осциллятором, настроив который на резонансную частоту любого предмета, его можно разрушить. В статье Тесла говорил, что он подсоединил прибор к одной из балок дома, через некоторое время дом стал трястись, началось небольшое землетрясение. Тесла взял молоток и разбил изобретение. Приехавшим пожарным и полицейским Тесла сказал, что это было природное землетрясение, своим помощникам он велел молчать об этом случае. [править] Увековечение памяти
Памятник Николе Тесле в аэропорту, Белград
Именем Теслы названа единица измерения магнитной индукции в системе СИ.
Юбилейная сербская монета к 150-летию Теслы, 2006
Памятник Тесле (за спиной катушка ВЧ трансформатора) на банкноте СФРЮ 1978 г.
В центре Загреба, столицы Хорватии, есть улица имени Николы Теслы, на которой установлен памятник великому учёному.
В Хорватии, в курортном городе Пореч (хорв. Poreč), расположенном на западном побережье полуострова Истрия, есть набережная имени Николы Теслы. Именем Теслы названы улицы в Шибенике, Сплите, Риеке, Вараждине.
Аэропорту в белградском пригороде Сурчин присвоено имя Николы Теслы.
Также памятник ему установлен около здания Белградского университета. [править] Тесла на деньгах Сербские банкноты 1000 динаров, 1992. Трансформатор Теслы
10 миллиардов динаров, 1993. Трансформатор Теслы
5 новых динаров, 1994. Музей Теслы в Белграде
100 новых динаров, 2000. Формула Теслы [править] Наследие [править] Призыв к изучению наследия Н. Теслы Экс-директор музея Н. Теслы в Белграде (Сербия), член Европейской Академии наук — Велимир Абрамович опубликовал своё письмо-обращение в журнале «Дельфис» № 68(4/2011) под названием «Наследие Н. Теслы — пришло время изучать», в котором указал, что «с 1952 года хранится около 60 тыс. ещё не изученных научных документов всемирно известного сербского учёного» и предложил создать Российско-сербское общество (институт) по изучению научного наследия Николы Теслы. [править] «Человек, опередивший время»? Этот раздел не завершён. Вы поможете проекту, исправив и дополнив его.
[править] Современное применение идей Теслы Переменный ток является основным способом передачи электроэнергии на большие расстояния Электрогенераторы являются основными элементами в генерации электроэнергии на ГЭС, АЭС, ТЭС и т. д. Электродвигатели используются во всех современных электропоездах, электроавтомобилях, трамваях, троллейбусах Радиоуправляемая робототехника получила широкое распространение не только в детских игрушках и беспроводных телевизионных и компьютерных устройствах (пульты управления), но и в военной сфере, в гражданской сфере, в вопросах военной, гражданской и внутренней, а также и внешней безопасности стран и т.п. Беспроводные заряжающие устройства начинают использоваться для зарядки мобильных телефонов или ноутбуков[24] [править] Музей в Белграде Этот раздел не завершён. Вы поможете проекту, исправив и дополнив его.

Музей Николы Тесла расположен в центральной части Белграда. [править] В массовой культуре [править] Художественные фильмы и телесериалы Биографии Теслы посвящен целый фильм «Tajna Nikole Tesle», снятый в Югославии. В фильме Джима Джармуша «Кофе и сигареты» один из эпизодов строится на демонстрации трансформатора Теслы. По сюжету, Джек Уайт, гитарист и вокалист группы «The White Stripes» рассказывает Мег Уайт, барабанщице группы, о том, что земля является проводником акустического резонанса (теория электромагнитного резонанса — идея, которая занимала ум Теслы многие годы), а затем «Джек демонстрирует Мэг машину Теслы». В фильме Кристофера Нолана «Престиж» (2006), снятому по одноимённой книге Кристофера Приста, роль Николы Теслы исполнил Дэвид Боуи. По сюжету Тесла создаёт для одного из героев машину, которая создает и телепортирует дубликат любого объекта, помещенного в неё. Что позволяет этому герою показывать невиданный трюк перемещения объектов. В сериале «Убежище» (2008—2010) роль Теслы исполняет Джонатон Янг. Особенность этого фильма в том, что Тесла в нём ещё и вампир. Никола Тесла упоминается в сериале «Склад 13» как один из создателей непосредственно самого Склада 13, а также изобретатель электрошокового пистолета, входящего в арсенал агентов Склада. [править] Компьютерные игры

В следующих компьютерных играх использован образ Николы Теслы: В Assassin's Creed 2 и Assassin's Creed: Brotherhood присутствует во многих головоломках Истины. В игре Dark Void Никола Тесла помогает главному герою и Выжившим победить Наблюдателей и выбраться из пустоты с остальными Выжившими. Как Тесла попал в параллельное измерение — неизвестно. В стратегии ParaWorld Никола Тесла, переименованный в Николая Таслова, является одним из героев. [править] Использование имени в торговых марках Nvidia Tesla — серия графических карт фирмы NVIDIA для высокопроизводительных вычислений по кластерной технологии. Графические ускорители на базе Tesla поддерживают технологию CUDA, позволяющую использовать для вычислений GPU, снимая нагрузку с центрального процессора. Эта серия графических ускорителей, поддерживающих CUDA, используется не только для работы с графикой, но и для моделирования физических процессов. Tesla Motors — американская автомобильная компания-стартап из Кремниевой долины. Ориентированная на производство электромобилей. Tesla Boy — российская независимая электропоп-группа с песнями на английском языке, созданная в августе 2008 года Антоном Севидовым и Димой Мидборном (с декабря 2008 до октября 2010 года в составе группы также был барабанщик Борис Лифшиц). Критики относят её творчество к волне восьмидесятнического возрождения, набравшей обороты в конце нулевых. [править] Личность Николы Теслы [править] Странности

Он панически боялся микробов, постоянно мыл руки и в отелях требовал до 18 полотенец в день. Если во время обеда на стол садилась муха, заставлял официанта принести новый заказ. Поселялся в отеле только в том случае, если номер его апартаментов был кратен трём. Фобии и навязчивые состояния сочетались у Теслы с поразительной энергией. Прогуливаясь по улице, он мог во внезапном порыве сделать сальто. Он часто гулял в парке и читал наизусть «Фауста» Гёте, и в эти моменты его осеняли блестящие технические идеи. С другой стороны, у него обнаруживался необъяснимый дар предвидения. Однажды, провожая друзей после вечеринки, он уговорил их не садиться в подходивший поезд и этим спас им жизнь — поезд действительно сошёл с рельсов, и многие пассажиры погибли или получили увечья…[25]

Эксцентричная натура Теслы стала причиной множества слухов. Сторонники теорий заговора считают, что ЦРУ засекретило большую часть его разработок и до сих пор скрывает их от мировой научной общественности. Опытам Теслы приписывали связь с проблемой Тунгусского метеорита, «эксперименту Филадельфия» — превращения большого военного корабля США со всей его командой в невидимый объект и т. п.

В своей автобиографии[12] Тесла описывает ряд «необычных пристрастий, предубеждений и привычек», приобретенных им в юности: Тесла почти профессионально играл в бильярд. Питал яростную антипатию к женским серьгам, особенно с жемчугом. Запах камфоры доставлял ему очень сильный дискомфорт. Если в процессе исследований он ронял небольшой квадратик бумаги в жидкость, это вызывало у него особо ужасный привкус во рту. Тесла подсчитывал шаги при ходьбе, объём тарелок с супом, чашек с кофе и кусков пищи. Если ему не удавалось это сделать, то пища не доставляла ему удовольствия, поэтому он предпочитал есть в одиночку. [править] Отношения к людям

По оценке Ржонсницкого, «Тесла по складу своего характера не мог и не умел работать в коллективе».

Тесла никогда не был женат. По его словам, невинность в значительной мере помогала его научным способностям[26]. Тем не менее, он пользовался большой популярностью среди женщин и многие были в него влюблены[источник не указан 128 дней]. [править] Мифы и легенды

Ореол, окружающий личность и открытия Теслы, способствовал распространению всевозможных утверждений, носящих, как правило, полумифический характер. Подобные утверждения не поддаются проверке по причине отсутствия документов, что не мешает, однако, приписывать Тесле прямое или косвенное отношение ко многим загадкам XX века[27]. [править] Бумаги Теслы Это статья о городской легенде. Пожалуйста, отредактируйте статью так, чтобы мифичность предмета статьи была ясна как из её первых предложений, так и из последующего текста.

По легенде, после смерти Теслы спецотдел ФБР, занимавшийся хранением собственности иностранных граждан (Alien Property Custodian), выслал сотрудников, которые изъяли все бумаги, найденные ими в номере. ФБР подозревало, что ещё за несколько лет до смерти Теслы некоторые бумаги были выкрадены германской разведкой и могли быть использованы для создания немецких летающих тарелок[28]. Желая предотвратить повторения этого инцидента, ФБР засекретило все обнаруженные ими бумаги.

В довольно маргинальной книге[28] писателя Тима Шварца упоминается, что в других отелях, где Тесла снимал номера, также оставались его личные вещи. Часть из них утеряны, более 12 ящиков с вещами были проданы для оплаты счетов Теслы. Также Тим Шварц уверяет, что в 1976 году четыре невзрачных коробки с бумагами были выставлены на аукционе неким Майклом Борнесом (Michael P. Bornes), книготорговцем из Манхеттена. Дейл Элфри (Dale Alfrey) приобрёл их за 25 долларов, не зная, что это за бумаги. Согласно автору книги, позже выяснилось, что это лабораторные журналы и бумаги Николы Теслы, в которых описывались враждебные инопланетные существа, способные контролировать человеческий мозг.[28]
Многие читатели подвергли сомнению утверждения Тима Шварца, воспринимая книгу как попытку устроить сенсацию[29]. [править] Филадельфийский эксперимент Основная статья: Филадельфийский эксперимент
Говорить о непосредственном участии Теслы в этом гипотетическом событии вряд ли возможно по причине несовпадения дат жизни Теслы и времени проведения предполагаемого эксперимента, поскольку сам Тесла умер ещё до его начала — 7 января 1943, в то время как предполагается, что эксперимент был проведён только 28 октября 1943 года. [править] Электромобиль Теслы
Согласно этому мифу, в 1931 году Никола Тесла продемонстрировал действующий прототип электромобиля, движущегося без каких-либо традиционных источников тока.
Никаких материальных свидетельств существования электроавтомобиля не существует. [править] Лучевое оружие Американское агентство DARPA в 1958 году якобы попыталось[30] создать легендарные «лучи смерти» Теслы в ходе проекта «Качели» (англ. Seesaw), который проводился в Ливерморской национальной лаборатории. В 1982 году проект был прерван в связи с рядом неудач и превышением бюджета[31]. [править] Тунгусский метеорит Основная статья: Тунгусский метеорит
Гипотеза о связи Николы Теслы с Тунгусским метеоритом. Её появление датируется концом XX — началом XXI века[32].
Согласно этой гипотезе, в день наблюдения Тунгусского феномена (30 июня 1908 года) Никола Тесла проводил опыт по передаче энергии «по воздуху». За несколько месяцев до взрыва Тесла утверждал, что сможет осветить дорогу к Северному полюсу экспедиции знаменитого путешественника Роберта Пири. Кроме того, сохранились записи в журнале библиотеки Конгресса США, что он запрашивал карты «наименее заселённых частей Сибири».
Его эксперименты по созданию стоячих волн, когда, как утверждается, мощный электрический импульс сконцентрировался за десятки тысяч километров в Индийском океане, вполне вписываются в эту «гипотезу». Если Тесле удалось накачать импульс энергией так называемого «эфира» (гипотетическая среда, которой, по научным представлениям прошлых столетий, приписывалась роль переносчика электромагнитных взаимодействий) и эффектом резонанса «раскачать» волну, то, согласно мифу, должен возникнуть разряд мощностью в несколько ядерных взрывов. [править] Награды Кавалер черногорского Ордена князя Данило I 2-й степени (1895). Кавалер Большого креста Ордена Белого льва (Чехословакия) (1891), Золотая медаль Эллиота Крессона (Elliott Cresson Gold Medal) (1894), Медаль Эдисона (Edison Medal) (AIEE, 1916), Медаль Джона Скотта (John Scott Medal) (1934) [править] Примечания
Медаль Югославского общества «Никола Тесла», которой был награждён Б. Н. Ржонсницкий. 1960
↑ Показывать компактно ↑ ученик Теслы Бернард Дж. Истлунд ↑ ТЕСЛА, НИКОЛА — статья из энциклопедии «Кругосвет» ↑ «Tesla, Nikola». Encyclopædia Britannica from Encyclopædia Britannica 2007 Ultimate Reference Suite. ↑ Title of a biography by Robert Lomas (seen) ↑ Seifer, «Wizard: The Life and Times of Nikola Tesla», book synopsis ↑ http://news.suc.org/people/tesla/index.html ↑ Harnessing the Wheelwork of Nature: Tesla's Science of Energy by Thomas Valone ↑ Тесла — по-сербски и на многих славянских языках — плотник ↑ Dommermuth-Costa, Carol, Nikola Tesla: A Spark of Genius, pp. 11-12. 1994. ISBN ↑ 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 Ржонсницкий Б. Н. Никола Тесла. М.: «Молодая гвардия». 1959. — См. список литературы ↑ Margaret Cheney, Robert Uth, and Jim Glenn, «Tesla, Master of Lightning». Barnes & Noble Publishing, 1999. ISBN 0-7607-1005-8. ↑ 1 2 Никола Тесла. Статьи ↑ Первую статью о Н. Тесле Б. Н. Ржонсницкий опубликовал в 1956 году. ↑ «Master of Lightning» by Public Broadcasting Service. Website. ↑ $50 000 (1885 г.) = $1 082 008 (2006 г.) The Inflation Calculator (англ.) ↑ Cheney, Margaret [1979] (2001). Tesla: Man Out of Time. Simon and Schuster. ISBN 0-7432-1536-2. ↑ «Tesla Says Edison was an Empiricist. Electrical Technician Declares Persistent Trials Attested Inventor's Vigor. 'His Method Inefficient' A Little Theory Would Have Saved Him 90% of Labor, Ex-Aide Asserts. Praises His Great Genius.», New York Times, October 19, 1931. «Nikola Tesla, one of the world's outstanding electrical technicians, who came to America in 1884 to work with Thomas A. Edison, specifically in the designing of motors and generators, recounted yesterday some of …» ↑ U. S. Blows Up Tesla Radio Tower // The Electrical Experimenter, September, 1917, page 293. (англ.) — текст заметки 1917 года о сносе башни Тесла ↑ Запись в дневнике Теслы, цитата по Б. Ржонсницкому ↑ По материалам статьи en: Nikola_Tesla#_ref-56 со ссылкой на O'Neill, «Prodigal Genius» pp228-229 ↑ Сойфер, Абсолютное оружие Америки ↑ Биография ↑ Валентина Богомолова, НИКОЛА ТЕСЛА (Nikola Tesla). ГЕНИЙ-ОДИНОЧКА ИЛИ БЕЗУМЕЦ ОПЕРЕДИВШИЙ СВОЁ ВРЕМЯ?, 03.11.2004 ↑ Первое серийное беспроводное зарядное устройство ↑ Голубев. А. Повелитель молний // Алфавит. 09.02.2003 ↑ Nikola Tesla. NNDB. Архивировано из первоисточника 24 августа 2011. Проверено 17 июня 2007. ↑ Краткую сводку таких мифов см. в статье: Образцов П. Гений электричества и пиара. Наука и жизнь, № 6 (2010), стр. 57-60. ↑ 1 2 3 Tim Swartz The Lost Journals of Nikola Tesla: Haarp — Chemtrails and Secret of Alternative 4 (англ.) — 2000. ISBN 1-892062-13-5 ↑ Читательские рецензии на книгу (англ.) ↑ Если бы. Изобретения и открытия Николы Теслы — Михаил Попов — МИР ФАНТАСТИКИ И ФЭНТЕЗИ ↑ Dr-Nikola-Tesla-aitrui (англ.) ↑ В статье «Тунгусский метеорит и время: 101-я гипотеза тайны века» временем появления этой гипотезы считается

1996 год (автором идеи называется предсказатель Манфред Димде), тогда как в статье ТУНГУСКА: ПРОБЛЕМА: ГИПОТЕЗЫ утверждается, что идея прозвучала в 2000 году в телепередаче Александра Гордона [править] Источники [править] Труды в русском переводе Никола Тесла. Статьи. Агни, 2008. ISBN 978-5-89850-078-8. Никола Тесла. Лекции. Агни, 2008. ISBN 978-5-89850-092-4. Никола Тесла. Колорадо-Спрингс. Дневники 1899—1900. Агни, 2008. ISBN 978-5-89850-100-6. Никола Тесла. Патенты. Агни, 2009. ISBN 978-5-89850-12-6. [править] Книги и журналы Желько Сарич. Посвящённый. Роман о Николе Тесле.-М: «Дельфис», 2010 Ржонсницкий Б. Н. Выдающийся электротехник Никола Тесла (1856—1943). — Вопросы естествознания и техники. Институт естествознания и техники АН СССР. Выпуск I. Москва. 1956. С. 192 Ржонсницкий Б. Н. Жизнь, отданная науке (Никола Тесла). — Огонёк. № 28. 1956. С. 29 Ржонсницкий Б. Н. Никола Тесла. Жизнь замечательных людей. Серия биографий. Выпуск 12. / Научная редакция и предисловие доктора технических наук проф. Г. И. Бабата. — М.: Молодая гвардия, 1959. (176 КБ) Ржонсницкий Б. Н. Никола Тесла (К 100-летию со дня рождения). — Вестник АН СССР. № 7. Памятные даты. 1956. С. 90 Марк Сейфер Абсолютное оружие Америки. — М.: Эксмо, 2005. — ISBN 5699081615 Марк Сейфер. Никола Тесла. Повелитель вселенной. Эксмо, Яуза, 2007 г. ISBN 978-5-699-23746-3. Подборка статей из журнала «Дельфис», 1999 г. — Российский общеобразовательный портал. Конструктор образовательных сайтов В. Поляков. Приемники Теслы Ю. В. Мазурин. Никола Тесла — славянский гений. В. Абрамович. Метафизика и космология учёного Николы Теслы. (297 КБ) В. Богомолова. Никола Тесла герой-одиночка или безумец опередивший свое время? — 03.11.2004 Глинка К. Снесла курочка яичко // Независимый Бостонский Альманах «Лебедь» № 355, 28 декабря 2003 г. Никола Тесла: Повелитель молний 26/01/2007 Цверава Г. К. Никола Тесла, 1856—1943. — Ленинград: Наука; Ленингр. отд-ние, 1974. (Шифр РНБ: 74-3/1062) Ржонсницки Б. Тесла. София. Държавно издательство «Техника». 1975 Пиштало В. Никола Тесла. Портрет среди масок. «Азбука-классика», 2010 Образцов П. Гений электричества и пиара. Наука и жизнь, № 6 (2010), стр. 57-60. [править] Документальные фильмы Никола Тесла. Человек из будущего — «Первый канал», 19 января 2005 г. (видео «Никола Тесла. Человек из будущего» на rutube.ru). Лучи смерти. Гиперболоид инженера Филиппова — Телеканал «Россия» Луч смерти — Никола Тесла — документальный фильм телеканала «RenTV» (на rutube.ru) [править] Ссылки
Никола Тесла в Викицитатнике?
Никола Тесла на Викискладе?
Никола Тесла в энциклопедии Кругосвет Никола Тесла в БСЭ Nikola Tesla Museum (англ.) NikolaTesla.fr — более 1000 документов по Tesla.

[ii] *Непрерывная функция — функция без «скачков», то есть такая, у которой сколь угодно малые изменения аргумента приводят к сколь угодно малым изменениям значения функции.*
Непрерывная функция, вообще говоря, синоним понятия непрерывное отображение, тем не менее чаще всего этот термин используется в более узком смысле — для отображений между числовыми пространствами, например, на вещественной прямой. Эта статья посвящена именно непрерывным функциям, определённым на подмножестве вещественных чисел и принимающим вещественные значения.

ε-δ определение [править]

Пусть $D \subset \mathbb{R}$ и $f : D \to \mathbb{R}$.

Функция f *непрерывна в точке* $x_0 \in D$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого

$$x \in D,\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Функция f *непрерывна на множестве* E, если она непрерывна в каждой точке данного множества.

В этом случае говорят, что функция f класса C^0 и пишут: $f \in C^0(E)$ или, подробнее, $f \in C^0(E, \mathbb{R})$.

Комментарии [править]

- Определение непрерывности фактически повторяет определение предела функции в данной точке. Другими словами, функция f *непрерывна в точке* x_0, *предельной для множества* E, если f *имеет предел* в точке x_0, и этот предел *совпадает со значением функции* $f(x_0)$.
- Функция непрерывна в точке, если её *колебание в данной точке* равно нулю.

Точки разрыва [править]

Если условие, входящее в определение непрерывности функции в некоторой точке, нарушается, то говорят, что рассматриваемая функция **терпит в данной точке разрыв**. Другими словами, если A — значение функции f в точке a, то предел такой функции (если он существует) не совпадает с A. На языке окрестностей условие разрывности функции f в точке a получается отрицанием условия непрерывности рассматриваемой функции в данной точке, а именно: существует такая окрестность точки A области значений функции f, что как бы мы близко не подходили к точке a области определения функции f, всегда найдутся такие точки, чьи образы будут за пределами окрестности точки A.

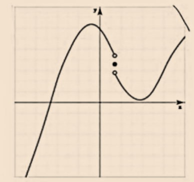
Если условие, входящее в определение непрерывности функции в некоторой точке, нарушается, то говорят, что рассматриваемая функция терпит в данной точке разрыв. Другими словами, если — значение функции в точке , то предел такой функции (если он существует) не совпадает с . На языке окрестностей условие разрывности функции в точке получается отрицанием условия непрерывности рассматриваемой функции в данной точке, а именно: существует такая окрестность точки области значений функции , что как бы мы близко не подходили к точке области определения функции , всегда найдутся такие точки, чьи образы будут за пределами окрестности точки .

Устранимые точки разрыва

Если предел функции *существует*, но он не совпадает со значением функции в данной точке:

$$\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a).$$

тогда точка a называется *точкой устранимого разрыва* функции f (в комплексном анализе — устранимая особая точка).



Если «поправить» функцию f в точке устранимого разрыва и положить $f(a) = \lim_{x\to a} f(x)$, то получится функция, непрерывная в данной точке. Такая операция над функцией называется *доопределением фукции до непрерывной* или *доопределением фукции по непрерывности*, что и обосновывает название точки, как точки *устранимого* разрыва.

Точки разрыва первого и второго рода

Если предел функции в данной точке отсутствует (и функцию нельзя доопределить до непрерывной), то для числовых функций возникает два возможных варианта, связанных с существованием у числовых функций *односторонних пределов*:

- если оба односторонних предела существуют и конечны, но хотя бы один из них отличен от значения функции в данной точке, то такую точку называют **точкой разрыва первого рода**;
- если хотя бы один из односторонних пределов не существует или не является конечной величиной, то такую точку называют **точкой разрыва второго рода**.

Точки разрыва первого и второго рода

Если предел функции в данной точке отсутствует (и функцию нельзя доопределить до непрерывной), то для числовых функций возникает два возможных варианта, связанных с существованием у числовых функций односторонних пределов:

- *если оба односторонних предела существуют и конечны, но хотя бы один из них отличен от значения функции в данной точке, то такую точку называют точкой разрыва первого рода;*
- *если хотя бы один из односторонних пределов не существует или не является конечной величиной, то такую точку называют точкой разрыва второго рода.*
- *Функция, непрерывная в точке а, является ограниченной в некоторой окрестности этой точки.*
- *Если функция f непрерывна в точке а и f(a) > 0 (или f(a) < 0), то f(x) > 0 (или f(x) < 0) для всех x, достаточно близких к а.*
- *Если функции f и g непрерывны в точке а, то функции f+ g и f · g тоже непрерывны в точке а.*
- *Если функции f и g непрерывны в точке а и при этом g(a) ≠ 0, то функция f /g тоже непрерывна в точке а.*
- *Если функция f непрерывна в точке а и функция g непрерывна в точке b = f(a), то их композиция h =g ∘ f непрерывна в точке а.*

Глобальные

- *Функция, непрерывная на отрезке (или любом другом компактном множестве), равномерно непрерывна на нём.*
- *Функция, непрерывная на отрезке (или любом другом компактном множестве), ограничена и достигает на нём свои максимальное и минимальное значения.*
- *Областью значений функции f, непрерывной на отрезке [a, b], является отрезок [min f. max f], где минимум и максимум берутся по отрезку [a, b].*
- *Если функция f непрерывна на отрезке [a, b] и f(a) • f(b) < 0, то существует точка ξ € (a, b), в которой f(ξ) = 0.*
- *Если функция f непрерывна на отрезке [a, b] и число φ удовлетворяет неравенству f(a)<φ< f(b) или неравенству f(a)>φ> f(b), то существует точка ξ € (a, b), в которой f(ξ) = <φ.*
- *Непрерывное отображение отрезка в вещественную прямую инъекгивно в том и только в том случае, когда данная функция на отрезке строго монотонна.*
- *Монотонная функция на отрезке [a, b] непрерывна в том и только в том случае, когда область ее значений является отрезком с концами f(a) и f(b).*
- *Если функции fи g непрерывны на отрезке [a, b], причем f(a) < g(a) и f(b) > g(b), то существует точка ξ € (a b), в которой f(ξ) = g(£). Отсюда, в частности, следует, что любое непрерывное отображение отрезка в себя имеет хотя бы одну неподвижную точку.*

[iii] *Мáриус Сóфус Ли (норв. Marius Sophus Lie; 17 декабря 1842, Нордфьордейд, Норвегия — 18 февраля 1899, Христиания, ныне Осло, Норвегия) — норвежский математик.*
Ли создал значительную часть теории непрерывной симметрии и использовал её в изучении геометрии и дифференциальных уравнений.
Получил Ph.D. в университете Осло в 1872 за работу О классах геометрических преобразований, стал почётным членом Лондонского математического общества в 1878 и членом Лондонского королевского общества (1895).
Основным инструментом Ли и его главным открытием было то, что непрерывные группы преобразований (называемые в честь него группами Ли) можно понять лучше, линеаризуя их и изучая образующиеся векторные поля (так называемые инфинитезимальные генераторы). Генераторы подчиняются линеаризованной версии группового умножения, называемой теперь коммутатором, и имеют структуру алгебры Ли.

Награждён Казанским физико-математическим обществом премией Лобачевского (1897).

iv

[1] Этот определитель $n \times n$ строится следующим образом: на главной диагонали расставляем $a_1, a_2, \ldots, a_n$; затем берём горизонтальный шаблон $\{a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, 1\}$ и, совмещая одинаковые элементы этого шаблона с элементами на главной диагонали, начинаем заполнять поочередно строки определителя. Что вылезает за рамки — обрезается, что остаётся пустым — заполняется нулями. Например, в первой строке находится число a_1. Накладываем на неё шаблон, совмещая по элементу a_1. Часть шаблона слева от a_1 отбрасывается, поскольку вылезает за рамки определителя. Справа от a_1 ставится **1**, все остальные элементы первой строки — нули.

Надо ещё отметить, что при таком подходе необходимо, чтобы коэффициент при старшем слагаемом характеристического полинома (4) был равен единице. Если в какой задаче исходно будет не так, то поделите на этот коэффициент весь полином, прежде чем строить Δ_n.