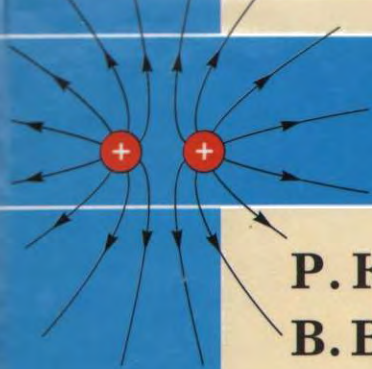
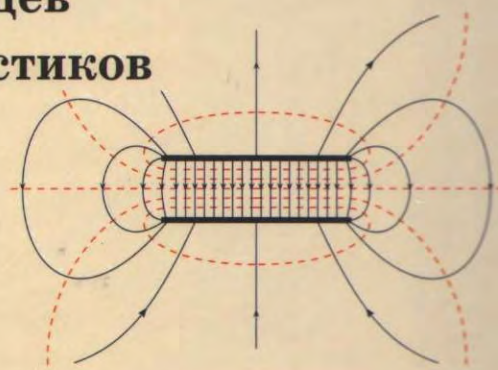
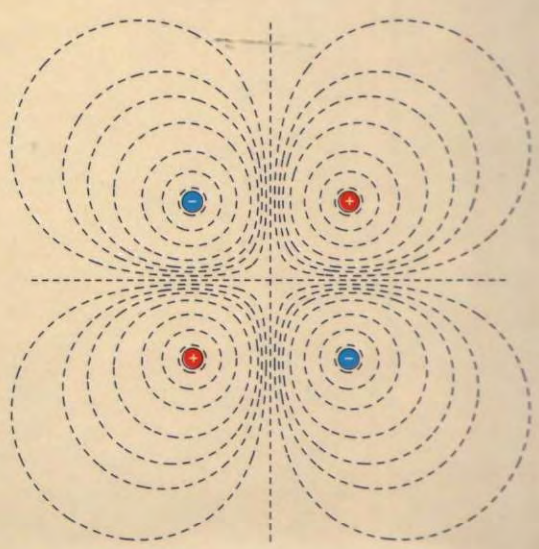
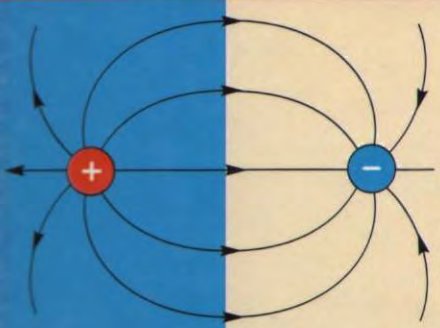




Р. К. Бега
В. В. Лебедев
И. Н. Хлюстиков



ЭЛЕКТРОСТАТИКА



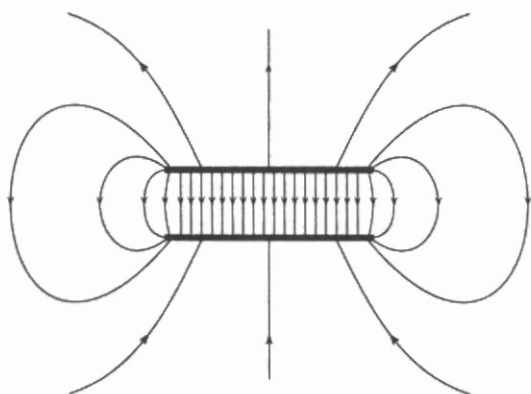


Рудольф Карлович Бега

Р. К. Бега
В. В. Лебедев
И. Н. Хлюстиков

ЭЛЕКТРОСТАТИКА

*Учебное пособие
для старших классов
средней школы*



Москва
Издательство МЦНМО
2008

УДК 53(075.8)

ББК 22.3

Б37

Бега Р. К., Лебедев В. В., Хлюстиков И. Н.

**Б37 Электростатика. — М.: МЦНМО, 2008. — 320 с.: ил.
ISBN 978-5-94057-408-8**

Пособие посвящено изложению основ электростатики, а также их выводу методами, принятыми в школьном курсе физики. При подаче материала широко используется понятие физического поля, соответствующее его пониманию в современной науке. В тексте приводится значительное количество вопросов и задач, а также иллюстраций. Пособие предназначено для школьников, желающих углубить свое понимание физики, и для преподавателей естественнонаучных дисциплин.

ББК 22.3

:

ISBN 978-5-94057-408-8

© Р. И. Бега, В. В. Лебедев,
И. Н. Хлюстиков, 2008

© МЦНМО, 2008

Посвящение

Где-то в конце восьмидесятых годов к нам подошел Рудольф Карлович и предложил написать учебник по физике для физико-математических школ...

Здесь требуется пояснение, кто есть кто. Рудольф Карлович Бега — заслуженный учитель России, преподаватель физики, проработавший во второй школе Москвы (ныне — Лицей Вторая Школа) почти сорок лет. За это время он выпустил огромное количество учеников, которые работают ныне по всему миру. Рудольф Карлович был Учителем с большой буквы. Просто поразительно, насколько прочной оказалась та основа, которую он вкладывал в учеников на уроках физики и которая позволяла им потом самостоятельно ориентироваться, работая в различных областях науки и техники. Рудольф Карлович был чрезвычайно ярким человеком, его отношение к жизни, разнообразные способности как магнитом привлекали к себе ребят. Мы — это Владимир Валентинович Лебедев и Иван Николаевич Хлюстиков — ученики Рудольфа Карловича, на момент упомянутого разговора кандидаты физико-математических наук. В семидесятые—восьмидесятые годы мы вели семинары по физике в старших классах второй школы.

На вопрос о том, с чего же надо начать, Рудольф Карлович заявил, что начать надо с электростатики, поскольку именно ее преподавание вызывало у него наименьшие проблемы. И мы начали писать. Очень быстро выяснилось, что занятие это многотрудное. Прежде всего, Рудольф Карлович «попал в яблочко»: мы понимаем сейчас, что электростатика является, пожалуй, самым сложным разделом школьной программы, поскольку опирается, с одной стороны, на механику и термодинамику, а с другой стороны — является основой, без которой невозможно изложение магнитных и электромагнитных явлений. Кроме того, мы поставили перед собой задачу написать текст мотивированный и основанный на понятии поля.

УДК 53(075.8)

ББК 22.3

Б37

Бега Р. К., Лебедев В. В., Хлюстиков И. Н.

Б37 Электростатика. — М.: МЦНМО, 2008. — 320 с.: ил.

ISBN 978-5-94057-408-8

Пособие посвящено изложению основ электростатики, а также их выводу методами, принятыми в школьном курсе физики. При подаче материала широко используется понятие физического поля, соответствующее его пониманию в современной науке. В тексте приводится значительное количество вопросов и задач, а также иллюстраций. Пособие предназначено для школьников, желающих углубить свое понимание физики, и для преподавателей естественнонаучных дисциплин.

ББК 22.3

:

© Р. И. Бега, В. В. Лебедев,
И. Н. Хлюстиков, 2008

ISBN 978-5-94057-408-8

© МЦНМО, 2008

Посвящение

Где-то в конце восьмидесятых годов к нам подошел Рудольф Карлович и предложил написать учебник по физике для физико-математических школ...

Здесь требуется пояснение, кто есть кто. Рудольф Карлович Бега — заслуженный учитель России, преподаватель физики, проработавший во второй школе Москвы (ныне — Лицей Вторая Школа) почти сорок лет. За это время он выпустил огромное количество учеников, которые работают ныне по всему миру. Рудольф Карлович был Учителем с большой буквы. Просто поразительно, насколько прочной оказалась та основа, которую он вкладывал в учеников на уроках физики и которая позволяла им потом самостоятельно ориентироваться, работая в различных областях науки и техники. Рудольф Карлович был чрезвычайно ярким человеком, его отношение к жизни, разнообразные способности как магнитом привлекали к себе ребят. Мы — это Владимир Валентинович Лебедев и Иван Николаевич Хлюстиков — ученики Рудольфа Карловича, на момент упомянутого разговора кандидаты физико-математических наук. В семидесятые—восьмидесятые годы мы вели семинары по физике в старших классах второй школы.

На вопрос о том, с чего же надо начать, Рудольф Карлович заявил, что начать надо с электростатики, поскольку именно ее преподавание вызывало у него наименьшие проблемы. И мы начали писать. Очень быстро выяснилось, что занятие это многотрудное. Прежде всего, Рудольф Карлович «попал в яблочко»: мы понимаем сейчас, что электростатика является, пожалуй, самым сложным разделом школьной программы, поскольку опирается, с одной стороны, на механику и термодинамику, а с другой стороны — является основой, без которой невозможно изложение магнитных и электромагнитных явлений. Кроме того, мы поставили перед собой задачу написать текст мотивированный и основанный на понятии поля.

Поэтому после первого штурма, когда более-менее определился тот материал, который мы собирались включить в наш текст, работа перешла в «тлеющий режим». Мы постепенно улучшали изложение, добавляли материал, необходимый для латания логических «дыр», и искали правильный порядок изложения, позволяющий сделать его последовательным и мотивированным. Работа эта продвигалась не слишком быстро. Каждый из нас был занят своим делом: Рудольф Карлович продолжал преподавание в школе, мы (ВЛ и ИХ) работали в академических институтах, стали докторами наук, а один из нас (ВЛ) был избран членом-корреспондентом Академии наук. Да и обстановка в стране не слишком способствовала нашему писательству...

И вот Рудольф Карлович ушел от нас. Почти невозможно представить без него Вторую Школу, да и вообще нашу жизнь. Он продолжает жить в памяти его учеников и близких. И мы посчитали своей обязанностью завершить тот труд, который мы начали вместе с Рудольфом Карловичем.

То, что получилось в результате, трудно назвать учебником для школы. Несмотря на то что мы старались ограничиваться результатами, которые можно получить элементарными методами, материала набралось достаточно много для того, чтобы его невозможно было изложить за время, отведенное на электростатику школьной программой. Тем не менее мы считаем, что наш текст окажется полезным для школьников, углубленно изучающих физику. Другой частью нашей аудитории мы считаем учителей физики, которые, как мы надеемся, смогут почерпнуть из нашего текста идеи и заготовки для своих уроков.

ВЛ и ИХ

§ 1. Электрическое взаимодействие

Еще в древности люди обратили внимание на то, что потертый о шерсть янтарь собирает на себя окружающие его ворсинки и прочие мелкие предметы. В античное время греки называли это явление *электричеством*, от слова «электрон» (*ηλεκτρον*), что на греческом языке означает янтарь. А в окрестностях города Магнесия, который был расположен в Малой Азии, находили куски какой-то горной породы, стремящиеся «соединиться» друг с другом. Это их свойство те же греки называли *магнетизмом*. В обоих случаях тела обнаруживают весьма необычное поведение. Неудивительно поэтому, что на протяжении столетий электричество и магнетизм считали чем-то исключительным и окружали мистическим ореолом. И лишь в последние четыре столетия было осуществлено систематическое изучение этих явлений, приведшее к созданию науки, в которой термины «электричество» и «магнетизм» сохранились, но понимаются гораздо шире, чем в античности и в средние века.

Дело в том, что янтарь отнюдь не является каким-то исключением, «янтарные», то есть электрические, свойства наблюдаются и у других тел. Например, иной раз трудно аккуратно причесаться из-за притяжения волос к пластмассовой расческе. Хорошо известно, что телевизор активно притягивает к себе пыль, а некоторые ткани (особенно синтетические) прилипают к телу. (Имеются даже специальные вещества — антистатика, обработка которыми призвана снизить этот эффект.) Перечисленные явления родственны притяжению ворсинок к янтарю. Подробные измерения продемонстрировали всеобщность «янтарного синдрома»: оказалось, что все, без каких-либо исключений, тела (любого химического состава, формы, размеров и так далее) в определенной ситуации ведут себя так же, как и потертый о шерсть янтарь.

Итак, любые тела участвуют во взаимодействии, получившем название *электрического*. Однако обычно элек-

трические силы, действующие между телами, очень малы, и требуется некоторое воздействие на тела, чтобы сделать эти силы наблюдаемыми (вспомним, что янтарь начинает притягивать к себе ворсинки только после трения его о шерсть). Тело, проявляющее способность к заметному электрическому взаимодействию, называется *наэлектризованным*, а процесс, приводящий тело в это состояние, — *электризацией*. Простейшим способом электризации является механический контакт тел, именно при механическом контакте янтаря с шерстью и происходит их электризация. Трение же янтаря о шерсть является лишь вспомогательным действием, призванным улучшить контакт между телами.

Всеобщность, присущая электрическому взаимодействию, характерна и для взаимодействия, обнаруженного у камней из Магнесии (которые на поверку оказались железной рудой): все тела в той или иной мере проявляют способность к взаимодействию, называемому *магнитным*. Так же как необходима электризация тел, чтобы сделать заметным их электрическое взаимодействие, тела необходимо *намагнитить*, чтобы силы магнитного взаимодействия между ними стали заметными. Например, намагничивается кусок железа, помещенный рядом с магнитом (то есть предметом, уже обладающим заметной намагниченностью), что и приводит к их взаимному притяжению. Степень намагниченности того или иного тела практически не сказывается на его электрических свойствах, то есть степень наэлектризованности и степень намагниченности являются разными характеристиками тела. Таким образом, электрическое и магнитное взаимодействия являются независимыми типами взаимодействия.

Оговоримся, что в таких процессах, как распространение света или радиоволн, электрические и магнитные явления тесно связаны между собой и не могут поэтому изучаться раздельно. Вот почему часто употребляют термин *электромагнетизм*, относящийся к разделу науки, где изучаются электрические и магнитные явления и их взаимосвязь.

Однако при изучении относительно медленно протекающих процессов электрическое взаимодействие можно отделить от магнитного (и других типов взаимодействия). В настоящем пособии мы будем изучать именно такие случаи.

Опишем простой лабораторный опыт, который демонстрирует некоторые особенности электрического взаимодействия. Подвесим на длинных нитях недалеко друг от друга кусочек пенопласта и картонку. Подождем, пока система придет в равновесие, то есть прекратится движение (раскачивание) тел. Тогда обе нити примут вертикальное

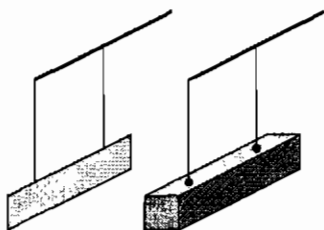


Рис. 1. Картонка и пенопласт, подвешенные на нитях

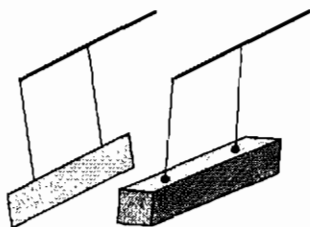


Рис. 2. Отклонение нитей, свидетельствующее о появлении притяжения между картонкой и пенопластом

положение (рис. 1). Вертикальность нитей говорит об отсутствии сколько-нибудь заметных сил взаимодействия между подвешенными телами (или, точнее, о том, что силы взаимодействия между ними гораздо меньше сил притяжения этих тел к Земле). Но если потереть пенопласт и картонку друг о друга, то равновесные положения нитей изменятся — они окажутся отклоненными от вертикали навстречу друг другу (рис. 2), свидетельствуя о притяжении между телами, возникшем вследствие их электризации.

Обратим внимание на то, что картонка не касается пенопласта, что, однако, не мешает взаимному притяжению этих тел. Таким образом, электрические силы действуют даже между телами, находящимися на некотором расстоянии друг от друга. Это отличает их, скажем, от упругих сил,

которые возникают только при механическом контакте тел. Тем же свойством — действовать на расстоянии — обладают силы магнитные и гравитационные: достаточно вспомнить о поведении стрелки компаса вблизи магнита или о притяжении Земли к Солнцу. По ходу дальнейшего изложения мы будем неоднократно сравнивать магнитное и гравитационное взаимодействия с электрическим, подчеркивая черты сходства или различия между ними.

Сразу бросается в глаза одно существенное отличие сил тяготения от сил электрических или магнитных: в то время как электризация или намагничивание тел существенно влияет на их способность к электрическому или магнитному взаимодействию, никакие манипуляции с телами не сказываются на их способности к гравитационному взаимодействию, поскольку силы тяготения определяются исключительно массами тел. Имеются также различия между электрическими и магнитными свойствами тел. Например, при нагревании железо перестает быть магнитом, в то время как его электрические свойства мало зависят от температуры.

Электризация тел, приводящая к их притяжению, наблюдается при взаимном касании любой пары тел, имеющих различный химический состав. Картонка и пенопласт были выбраны нами лишь из-за легкости, с которой обнаруживаются действующие между ними электрические силы, поскольку они оказываются сравнимыми с весом этих тел. Если же взять два тела, сделанных из одинакового материала, то при их соприкосновении друг с другом никакой электризации не произойдет. Это можно проверить, например, подвесив две картонки на нитях и наблюдая их положение после того, как картонки будут потерты друг о друга. Однако небольшая модификация этого эксперимента позволяет наблюдать электрическое взаимодействие и между картонками, то есть телами одинакового химического состава. Для этого картонки надо независимо наэлектризовать, скажем, тем же способом, что и раньше, то есть потерев каждую из них своим кусочком пенопласта. После этого между

картонками возникнут заметные электрические силы, о чем скажет нам отклонение нитей от вертикали. Однако направление этого отклонения окажется иным, нежели раньше: нити разойдутся друг от друга, свидетельствуя о появлении отталкивания между картонками (рис. 3). Та же картина повторится, если на нитях вместо картонок подвесить два кусочка пенопласта, а электризовать их с помощью картонок.

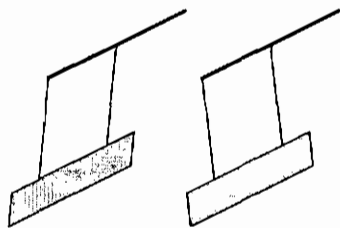


Рис. 3. Отталкивание между двумя наэлектризованными картонками

Приведенные примеры показывают, что электрическое взаимодействие может проявляться как в притяжении, так и в отталкивании между телами. Аналогичным характером обладает и магнитное взаимодействие. Например, в зависимости от взаимной ориентации двух магнитов можно наблюдать как притяжение, так и отталкивание между ними. Это еще одно существенное отличие электрических и магнитных сил от гравитационных, которые всегда приводят к притяжению между телами.

Предположим теперь, что мы будем наблюдать за наэлектризованными телами, подвешенными на нитях, в течение некоторого времени. Тогда мы заметим, что отклонение нитей от вертикали постепенно уменьшается, свидетельствуя об ослаблении взаимодействия между телами. Это является отражением общего явления: после электризации тело постепенно релаксирует (возвращается) к обычному (ненаэлектризованному) состоянию, когда оно очень слабо участвует в электрическом взаимодействии. Именно поэтому янтарь приходится каждый раз заново тереть тряпочкой, чтобы проявились его электрические свойства.

Обратимся еще раз к опыту с картонкой и пенопластом, несколько видоизменив наши действия. А именно: наэлектризуем картонку, ничего не делая с пенопластом. Можно предположить, что пенопласт при этом останется

ненаэлектризованным и никакого взаимодействия между телами не возникнет. Однако эксперимент показывает иное: есть притяжение между телами (хотя и более слабое, чем в исходной постановке опыта). Это говорит об электризации пенопласта, хотя он и не входил в соприкосновение с другими телами. Приведенный факт является отражением общего свойства: предмет, находящийся вблизи от наэлектризованного тела, также электризуется.

Аналогичным свойством обладает и магнитное взаимодействие: в той или иной мере намагничивается любой предмет, помещенный вблизи намагниченного тела. Достаточно вспомнить о железе, которое намагничивается вблизи магнита, даже не касаясь его. Электризация предмета, помещенного вблизи наэлектризованного тела, называется обычно *электризацией через влияние*. Именно электризация через влияние приводит к притяжению мелких предметов к наэлектризованному янтарию. Притяжение вообще типично для взаимодействия, связанного с электризацией через влияние. Отметим, что, в отличие от электризации, намагничивание может приводить как к притяжению, так и к отталкиванию тел.

Электризацию тела можно осуществить различными способами. Мы уже упомянули два из них: механический контакт и электризацию через влияние. Существуют и другие методы электризации. Например, она может возникнуть под воздействием луча лазера или за счет движения магнита около данного тела. Однако, каким бы способом мы ни осуществили электризацию тела, по характеру его электрического взаимодействия невозможно установить, какой именно способ использовался. Вспомним в этой связи, что точно так же невозможно по состоянию нагретого тела определить, как оно было нагрето — за счет совершенной над ним работы или за счет теплопередачи. Заметим также, что и характер взаимодействия намагниченных тел не зависит от способа их намагничивания.

До сих пор речь шла о взаимодействии обычных (макроскопических) тел. Но распространяются ли сделанные нами

заклучения на микроскопические объекты, например на атомы? Установлено, что атомы, а также ядра и электроны, из которых они состоят, участвуют в электрическом, магнитном и гравитационном взаимодействиях. Хотя движение микрочастиц и не подчиняется законам классической механики, они взаимодействуют между собой по тем же законам, что и макроскопические тела. Частицы внутри ядра связывает так называемое сильное взаимодействие, но оно практически не сказывается на взаимодействии ядер с электронами.

Главную же роль в атомном мире играет взаимодействие электрическое. Оно в основном определяет силы, действующие между электронами и ядрами, а также силы, действующие между атомами. Именно за счет этих электрических сил электроны удерживаются вблизи ядер атомов, а атомы, в свою очередь, взаимодействуют друг с другом, образуя молекулы. Взаимодействие молекул также в основном связано с электрическими силами. Поэтому можно сказать, что макроскопические тела образуются вследствие электрического взаимодействия микрочастиц (атомов и молекул). Магнитное же взаимодействие между микрочастицами приводит обычно лишь к малым поправкам к электрическим силам, а гравитационное взаимодействие микрочастиц всегда пренебрежимо мало.

В дальнейшем, говоря о телах или их частях, мы всегда будем иметь в виду макроскопические объекты, которые содержат большое количество атомов. При изучении электрических свойств тел мы постоянно будем обращаться к взаимодействию составляющих их атомов, что позволит пояснить происхождение многих электрических явлений. При этом надо быть аккуратными. Дело в том, что всякое взаимодействие между телами сводится к силам, действующим между составляющими эти тела атомами, то есть в основном — к силам электрическим. Можно даже сказать, что упругие силы или силы трения имеют электрическое происхождение. Тем не менее то же упругое взаимодействие между телами ясно отличается от их электрического взаи-

модействия. Поэтому надо четко различать два уровня (два этажа) — микроскопический и макроскопический. На микроуровне мы имеем дело с отдельными атомами и молекулами или даже с отдельными ядрами и электронами. На макроскопическом же уровне мы имеем дело не с индивидуальными микроскопическими объектами, а с коллективными явлениями, в которые вовлекается огромное число микрочастиц. Например, при распространении звука по твердому телу в движении участвуют практически все его атомы. При макроскопическом описании тела отдельные атомы оказываются «скрытыми», а тело рассматривается как сплошное.

Нашей задачей является как качественное, так и количественное рассмотрение электрического взаимодействия тел, которое оказывается весьма богатым по своим проявлениям и важным с точки зрения приложений.

§ 2. Физические поля

Прежде чем приступить к изучению собственно электрического взаимодействия, мы напомним некоторые факты, касающиеся роли среды, окружающей тела, в их взаимодействии между собой. Вообще говоря, эта среда может находиться в различных агрегатных состояниях. Мы будем иметь в виду в основном газы и жидкости, физические свойства которых подробно изучаются в курсах механики, гидродинамики и термодинамики. Но общие соображения, приведенные далее, относятся и к другим (скажем, твердым или жидкокристаллическим) средам.

Мы начнем с хорошо известного явления выталкивания тела, погруженного в воду (или любую другую жидкость). Чтобы найти величину выталкивающей силы, надо просуммировать силы давления, приложенные к различным участкам поверхности тела. Поскольку давление воды растет с глубиной, снизу от тела его значение больше, чем сверху, и поэтому равнодействующая сил давления отлична от нуля. Суммирование сил давления приводит к закону Архимеда, в соответствии с которым выталкивающая сила равна весу вытесненной телом жидкости. Несколько сложнее определить подъемную силу, действующую на запущенный в воздух воздушный змей. Величина этой силы зависит от скорости ветра, угла наклона змея и так далее. Подъемную силу можно найти, если известно распределение давления и скорости воздуха вблизи от змея.

Приведенные примеры иллюстрируют общее положение, согласно которому для определения действующей на тело силы необходимо знать состояние окружающей его среды. Из курса термодинамики известно, что состояние газа или жидкости характеризуется различными параметрами: давлением P , температурой T , плотностью массы ρ , и так далее. В атмосфере значения всех этих величин, так же как и скорость ветра $\vec{v}$, зависят от широты и долготы и меняются с высотой. Другими словами: все эти величины, которые и определяют состояние атмосферы, являются

функциями координат. Подобным образом может быть задано состояние любой среды: жидкой, твердой, жидкокристаллической. В общем случае состояние среды изменяется со временем, то есть характеризующие ее величины являются функциями не только координат, но и времени.

Если некоторая физическая величина задана как функция времени и координат, то говорят, что задано *поле* этой величины. Можно изучать поле температуры, поле давления, поле скорости, а также другие поля. Они могут быть скалярными или векторными. Например, поле давления или поле температуры являются скалярными, а поле скорости является векторным. Обратим внимание на то, что можно определить поле плотности массы, в то время как поля массы не существует. Дело в том, что масса характеризует состояние среды в целом (или отдельных ее частей), в то время как плотность массы (так же как температура или давление) характеризует состояние среды вблизи той или иной точки.

Поле какой-либо величины бывает полезно представлять себе наглядно. Иногда это не составляет труда. Например, волнение морской поверхности видно невооруженным глазом. В других случаях, чтобы «проявить» поле, следует использовать специальные методы. Например, мы знаем, что различные звуки доносятся до нас благодаря изменению давления воздуха, но мы не видим этого поля. Его можно сделать «видимым», применив, например, метод теневой фотографии. На рис. 4 приведена сделанная таким способом фотография, на которой зафиксировано поле давления вокруг летящей пули. Поле температур также можно «увидеть», используя специальные жидкокристаллические пленки, оптические свойства которых зависят от температуры.

Для описания состояния среды можно использовать самые разнообразные параметры, и каждому из них будет соответствовать свое собственное поле. Однако отнюдь не все эти поля являются независимыми. Например, состояние газа (в системе отсчета, где он покоится) однозначно

определяется двумя параметрами, скажем давлением P , и температурой T . Все же остальные физические величины, характеризующие состояние газа, могут быть выражены через P и T . То же справедливо и для произвольной среды: чтобы задать ее состояние, достаточно знать лишь небольшое число полей. В выборе полей, задающих состояние среды, имеется произвол. Например, для газа вместо давления P и температуры T можно использовать плотность массы ρ и плотность внутренней энергии u или любую другую характеризующую газ пару величин. Тот или иной выбор полей определяется конкретными условиями рассматриваемой задачи.

Так как все эти различные способы описания относятся к одному и тому же состоянию среды, имеет смысл несколько обобщить понятие поля. Например, можно говорить о тепловом поле, которое может быть задано как через поле температуры, так и через поле плотности внутренней энергии или через поле плотности потока тепла. Аналогично можно ввести акустическое (звуковое) поле, которое можно описывать в терминах давления, плотности массы или скорости.

Поскольку сила, действующая на тело, определяется состоянием среды вокруг него, эта сила может быть выражена через поля, характеризующие окружающее тело среду. Как

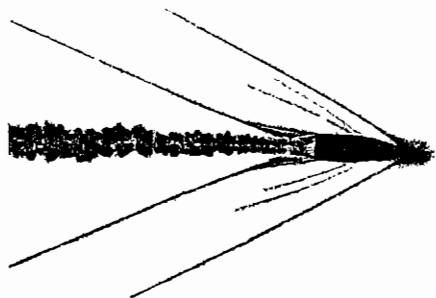


Рис. 4. Распределение давления газа вокруг летящей пули

правило, действующую на тело силу можно разбить на несколько составляющих, каждая из которых связана с одним из полей. Для краткости мы будем иногда говорить о каждой из этих составляющих как о силе, действующей на тело со стороны данного поля. Заметим, что эти силы определяются значением переменных поля вблизи от тела, подобно тому как сила Архимеда определяется значением давления у поверхности тела.

Говоря, что параметры среды задаются в каждой точке пространства, мы рассматриваем среду как сплошную, то есть игнорируем ее микроскопическое устройство. Стоящая за этим физическая картина заключается в следующем. Можно мысленно разбить среду на небольшие части, каждая из которых имеет свою собственную температуру, давление и так далее, которые изменяются от одной части к другой. В пределе, когда размеры частей стремятся к нулю, мы и приходим к непрерывным функциям координат. В то же время имеется физическое ограничение на размеры обсуждаемых частей. А именно, они должны содержать большое число атомов, так как бессмысленно обсуждать температуру или давление отдельного атома. Другими словами, говоря о тепловом или акустическом полях, мы должны оставаться в рамках макроскопического подхода. Поэтому расстояния, на которых существенно изменяются соответствующие параметры (например, длина волны звука), должны намного превосходить атомные размеры (а для газов — длину свободного пробега).

Как мы уже отметили, любую среду можно рассматривать как совокупность отдельных частей. Состояние каждой из них может измениться только вследствие воздействия на нее со стороны других частей рассматриваемой среды, непосредственно с ней граничащих. Другими словами,

изменение параметров среды в данной точке определяется только состоянием среды в малой окрестности этой точки.

Это утверждение называется *принципом близкодействия*. Принцип близкодействия приводит к следующей динамической картине. Движение тела или изменение его внутреннего состояния (например, температуры) влечет за собой изменение состояния среды в небольшой окрестности этого тела. Это, в свою очередь, вызывает изменения в более удаленных от тела точках, и так далее. Например, включение нагревателя не приводит к нагреву воздуха сразу во всей комнате. Сначала прогревается воздух в непосредственной близости от нагревателя, а затем, по мере распространения производимого им тепла, повышается температура и в отдаленных от нагревателя частях комнаты.

Перейдем теперь к системе взаимодействующих тел, находящихся друг от друга на некотором расстоянии. Поскольку действующие на тела силы определяются состоянием среды вблизи них, мы можем утверждать, что именно разделяющая тела среда «передает» воздействие одного тела на другое. Это утверждение можно пояснить на примере гидравлического привода, который представляет собой длинный заполненный жидкостью цилиндр, закрытый с обеих сторон поршнями. Если на один из поршней подействовать силой, то на второй поршень также начнет действовать сила за счет изменения давления жидкости в цилиндре.

Принцип близкодействия приводит нас к выводу, что в системе разнесенных на некоторые расстояния взаимодействующих тел изменение состояния одного из них скажется на силах, действующих на другие тела, не мгновенно, а с некоторой временной задержкой. Дело в том, что изменение состояния тела порождает возмущение среды, распространяющееся во все стороны подобно кругам, расходящимся от брошенного в воду камня. Поэтому другие тела «узнают» об изменении состояния данного тела по прошествии времени, необходимого для того, чтобы возмущение «докатилось» до этих тел.

Проиллюстрируем сказанное на примере лодки и корабля на поверхности моря. Движение корабля вызывает

волнение, раскачивающее лодку. Поскольку порожденное кораблем волнение распространяется с некоторой скоростью по поверхности воды, амплитуда раскачивания лодки будет зависеть не от того, где корабль находится в данный момент времени, а от того, где он находился (и с какой скоростью двигался) тогда, когда было возбуждено волнение, в данный момент достигшее лодки.

Несмотря на то что изменение состояния среды порождается движением тел или происходящими в этих телах внутренними процессами, среда эволюционирует по своим собственным законам, не зависящим от того, каким именно способом она возбуждается. Можно сказать, что среда «живет своей собственной жизнью», которая определяется ее внутренними свойствами. Например, глядя на волнение ограниченного участка поверхности воды, невозможно сказать, чем оно было вызвано — прошедшим кораблем или порывом ветра. Поэтому точнее говорить даже не о взаимодействии тел через среду, а о взаимодействии тел со средой. В ходе этого взаимодействия тела обмениваются со средой энергией и импульсом.

Поскольку среду можно рассматривать как совокупность отдельных небольших частей, каждая из которых несет свои собственные энергию и импульс, состояние среды следует характеризовать их плотностями, то есть отношениями энергии и импульса части тела к объему этой части. Эти плотности определяются состоянием среды, то есть зависят от параметров физических полей. Например, плотность тепловой энергии газа пропорциональна его абсолютной температуре.

До сих пор мы говорили в основном о механическом взаимодействии тел. Однако сделанные нами общие выводы оказываются справедливыми для произвольных взаимодействий, включая гравитационное, электрическое и магнитное. Прежде всего необходимо упомянуть временную задержку. Эксперимент показывает, что смещение одного наэлектризованного тела приводит к изменению сил, действующих на окружающие его наэлектризованные тела, не

мгновенно, а через некоторое время, причем это время оказывается тем больше, чем больше расстояние между телами. То же справедливо и для намагниченных тел.

Обычно время задержки для электрического или магнитного взаимодействий очень мало, однако оно надежно фиксируется современными приборами. Это означает, что смещение наэлектризованного или намагниченного тела приводит к некоторому процессу, развивающемуся в окружающей его среде. Речь идет о распространении электромагнитных волн (радиоволн, инфракрасного излучения, света, рентгеновских лучей и так далее). Именно с конечностью скорости распространения электромагнитных волн связана временная задержка в передаче электрического или магнитного взаимодействия.

Свойства среды, «отвечающие» за гравитационные, электрические и магнитные силы, описываются в терминах *гравитационного, электрического и магнитного полей*. Последние два тесно связаны между собой, поэтому их часто объединяют, говоря о едином *электромагнитном поле*. Как и со всякими другими полями, с электромагнитным полем связаны некоторые энергия и импульс. С энергией этого поля каждый знаком по тепловому воздействию солнечных лучей. Импульс же этого поля обнаруживается, например, в силе, которая действует со стороны света на отражающую его поверхность.

В приведенных примерах (взаимодействие корабля с лодкой или передача тепла от одного тела к другому) поля, отвечающие за взаимодействие тел, возникают в воде, воздухе или в какой-то другой вещественной среде, которая выполняет роль посредника между телами. Стоит, например, будильник поместить в вакуум, как никакого звонка мы от него уже не услышим, поскольку звуковая волна, как коллективное движение атомов, не может быть возбуждена в их отсутствие. В то же время гравитационное и электромагнитные поля «живут» и на атомных масштабах, и даже внутри атомных ядер, размеры которых гораздо меньше размеров атома. Другими словами, эти поля существуют не только

на макроуровне, но и на микроуровне, приводя к взаимодействию микрочастиц между собой. Это свойство дало основание называть гравитационное и электромагнитное взаимодействия *фундаментальными*. Фундаментальными также называют «сильное» и «слабое» взаимодействия. Сильное взаимодействие связывает между собой частицы внутри ядра (которое состоит из протонов и нейтронов), а слабое взаимодействие ответственно за различного рода распады частиц, например за распад нейтрона.

Для существования фундаментальных полей (то есть полей, связанных с фундаментальными взаимодействиями) не требуется никакой вещественной среды. Например, наэлектризованные тела взаимодействуют, даже будучи помещены в вакуум, в котором отсутствуют обычные долгоживущие частицы (атомы, или, подробнее, ядра и электроны). Однако в вакууме присутствуют частицы виртуальные, то есть частицы, возникающие на очень короткое время и затем вновь исчезающие. Таким образом, вакуум можно рассматривать как специальную среду, состояние которой и описывают фундаментальные поля. Чтобы подчеркнуть это значение слова вакуум, иногда вводят понятие *физического вакуума*, в отличие от технического термина, означающего ту или иную степень разрежения газа. В вакууме распространяются и электромагнитные волны. В этом случае скорость их распространения равна $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

В дальнейшем, рассматривая электрическое взаимодействие тел, мы (если не оговорено обратное) будем считать, что они разделены вакуумом. В то же время газы в силу их малой (по сравнению с жидкостями и твердыми телами) плотности по своим электрическим свойствам близки к вакууму. Поэтому большинство утверждений, сделанных для тел, помещенных в вакуум, можно отнести и к телам, помещенным в газовую среду. Тем самым эти утверждения оказываются справедливыми и для тел, окруженных атмосферой, то есть для большинства тел, с которыми мы имеем дело в повседневной жизни.

§ 3. Особенности статических полей

Установлено, что любая предоставленная самой себе физическая система приходит в состояние равновесия. В этом состоянии все тела остаются неподвижными. Кроме того, в равновесии не меняется внутреннее состояние любого тела, то есть остается неизменной его температура, не происходит никаких фазовых переходов, не идут химические реакции и так далее. Вокруг пришедших в равновесие тел постепенно достигает равновесия и окружающая их среда. Другими словами, перестают изменяться со временем поля, в терминах которых описывается состояние этой среды. Таким образом, равновесное состояние среды описывается в терминах *статических полей*:

поля, которые не меняются со временем, называются статическими.

В настоящем пособии мы излагаем основные свойства статических электрических полей, или, иначе, полей *электростатических*. Раздел физики, в котором изучаются электростатические поля, называется *электростатикой*. Аналогичным образом раздел, в котором изучаются статические магнитные поля, называется *магнитостатикой*.

Заметим, что всякое нарушение равновесия тел немедленно нарушит также и равновесие окружающей их среды. Действительно, любое движение тел или изменение их внутреннего состояния (например, температуры) неизбежно приведет к изменению полей вокруг них. В то же время даже вокруг системы уже пришедших в равновесие тел среда еще некоторое время остается неравновесной. Для иллюстрации этого утверждения достаточно вспомнить о волнах, которые расходятся от брошенного в воду камня даже тогда, когда он уже покоится на дне водоема. Для того чтобы поле вокруг системы тел, пришедших в равновесие, стало статическим, надо подождать некоторое время, причем это время будет тем больше, чем больше размер области, в которой рассматривается поле.

Мы уже знаем, что наличие тех или иных полей приводит к возникновению сил, действующих на тела, и, следовательно, к их ускорению. В статических же условиях тела покоятся, то есть сила, действующая на любое тело, должна быть равна нулю. Однако это вовсе не означает, что в статических условиях должны быть равны нулю силы, действующие на тело со стороны произвольного поля. Должна быть равна нулю только равнодействующая приложенных к телу сил. Подобная компенсация наблюдается, например, в опыте с картонкой и пенопластом, когда силы, действующие на эти тела со стороны электрического поля, уравниваются суммой сил тяжести и натяжения нитей.

Приведем в качестве иллюстрации следующую простую модель. Представим себе горизонтально натянутую резиновую пленку, на которую положен тяжелый шар. Наличие шара вызовет прогиб пленки, который максимален вблизи шара и уменьшается по мере удаления от него (рис. 5). Если теперь поместить на пленку другой шар, то пленка



Рис. 5. Прогиб упругой пленки, вызванный лежащим на ней шаром

под ним прогнется подобным же образом. Из-за деформации пленки возникнет взаимодействие между шарами (их притяжение). Сила, которая действует на один из шаров, определяется наклоном пленки (в том месте, куда он помещается), вызванным прогибом пленки другим шаром. Пленку в данной модели можно рассматривать как среду, через которую передается взаимодействие тел, а полем, которое определяет действующие на тела силы, является поле деформации пленки, характеризующее ее прогибом.

Приведенная модель позволяет продемонстрировать некоторые свойства произвольных статических полей. Скажем, статическая (равновесная) деформация пленки опре-

деляется размерами и массами положенных на нее шаров. Аналогичное утверждение справедливо для любого статического поля: его параметры однозначно связаны с расположением тел и их характеристиками, «отвечающими» за взаимодействие с этим полем. Поэтому в статике и силы взаимодействия между телами, связанные с тем или иным полем, определяются только взаимным расположением этих тел и характеризующими их параметрами. Например, закон всемирного тяготения позволяет находить действующие на тела гравитационные силы, если известны массы этих тел и расстояния между ними.

В динамике же действующие на тела силы определяются не только расположением и состоянием тел в данный момент времени, но и предысторией системы. Для иллюстрации этого утверждения можно снова вспомнить о раскачивании лодки волнением, вызванным прошедшим мимо нее кораблем. Тем не менее закон всемирного тяготения, как известно, с успехом применяется к гравитационному взаимодействию планет, то есть тел движущихся. То же относится и к электрическому взаимодействию: при некоторых условиях взаимодействие движущихся наэлектризованных тел можно описывать при помощи электростатических законов. Попробуем понять, в чем заключаются эти условия.

Как уже было сказано, возмущения электромагнитного поля (то есть электромагнитные волны, в частности свет и радиоволны) распространяются в вакууме со скоростью $c = 3 \cdot 10^8$ м/с. Той же величиной оценивается скорость распространения электромагнитных волн и в вещественных средах. Скорости же окружающих нас тел обычно гораздо меньше c . Другими словами, электромагнитное поле обладает гораздо более быстрой внутренней динамикой, чем рассматриваемые тела. Поэтому по мере перемещения наэлектризованных или намагниченных тел поле вокруг них успевает «подстраиваться» под новые положения тел. Вследствие этого электрическое или магнитное поле системы медленно (по сравнению со скоростью света c) движущихся тел слабо отличается от поля системы таких же, но

неподвижных тел. Такая ситуация называется *квазистатической*.

В квазистатическом случае для вычисления действующих на тела сил можно использовать формулы, справедливые в статике, поскольку поправки к силам, возникающие из-за ненулевой скорости движения тел, малы. Квазистатическое приближение неплохо работает и при описании взаимодействия электронов с ядром в атоме, так как электроны движутся вокруг ядра со скоростями «всего лишь» около 10^6 м/с, которые на пару порядков меньше скорости света. Та же относительная медленность оправдывает и использование закона всемирного тяготения при изучении движения планет (по современным представлениям скорость распространения гравитационных волн, как и волн электромагнитных, равна c).

Задача 3.1. Сравните скорость света и скорость обращения Земли вокруг Солнца (расстояние между ними равно $R = 150$ млн км).

Еще раз подчеркнем, что электрическое и магнитное поля можно раздельно изучать только в статическом (или, точнее, квазистатическом) случае. В динамике же (при распространении электромагнитных волн) электрическое и магнитное поля «зацепляются» друг за друга и их невозможно разделить.

Квазистатическая ситуация может реализоваться не только для гравитационного, электрического и магнитного полей, но и для полей другой природы. При этом критерий, который позволяет считать то или иное поле квазистатическим, зависит от физической природы этого поля. Например, упругое поле кристалла можно считать квазистатическим, если скорость деформации кристалла гораздо меньше, чем скорость звука, поскольку с этой скоростью распространяются возмущения упругого поля (ведь звук как раз и является такими возмущениями в определенном диапазоне частот).

При изучении тех или иных физических явлений полезно бывает мысленно разбить изучаемый объект на отдельные, относительно простые системы, а затем уже анализировать взаимодействие между ними. Но сначала надо охарактеризовать свойства каждой такой системы, в частности ее поля. Для этого представим себе, что интересующая нас система находится достаточно далеко от остальных тел, так что их влиянием (точнее, влиянием их полей) на выбранную нами систему можно пренебречь. Тогда поля около нее в статическом случае определяются только взаимным расположением и состоянием тел данной системы. Мы будем называть такие поля *собственными* полями системы. Сформулируем их некоторые общие свойства.

Мы начнем со случая, когда систему составляют два тела, находящиеся на некотором расстоянии друг от друга. Тогда силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, действующие на них со стороны любого их собственного поля, равны по величине и противоположны по направлению. Это утверждение (справедливое, как хорошо известно, для гравитационного взаимодействия) кажется простым повторением третьего закона Ньютона. Но это не так, поскольку помимо тел во взаимодействии участвует также разделяющая их среда, и потому, строго говоря, третий закон Ньютона должен выполняться только для сил взаимодействия тел со средой. Тем не менее в статическом случае среда, передающая взаимодействие между телами, не нарушает баланса сил, действующих на тела.

Поясним происхождение этого свойства на примере двух грузиков, связанных пружиной (имеющей конечную массу), которая в данном случае играет роль среды, передающей взаимодействие между телами (грузиками). В динамической ситуации из-за инерции пружинки силы, с которыми пружинка действует на тела, отличаются друг от друга. Однако когда пружинка неподвижна, ее инерционность оказывается несущественной и действующие с ее стороны на грузики силы будут равны по величине и противоположны по направлению.

Приведем формальное доказательство равенства величин $\vec{F}_1$ и $-\vec{F}_2$. Для этого представим себе, что рассматриваемые тела квазистатически перемещаются без изменения их взаимного расположения. Вместе с ними будет смещаться и собственное поле тел. Так как различные точки нашего пространства ничем не отличаются друг от друга (это свойство называется *однородностью пространства*), то смещение собственного поля не будет сопровождаться его искажением, то есть оно как единое целое будет смещаться вместе с телами. Поэтому энергия поля будет оставаться неизменной, то есть оно не будет совершать над телами работу, что возможно лишь тогда, когда сумма сил, действующих на тела со стороны поля, равна нулю. Это приводит к условию $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$, что эквивалентно сформулированному утверждению.

При смещении же тел относительно друг друга даже в квазистатических условиях энергия их собственного поля будет, вообще говоря, изменяться, так как изменяется само это поле. Действительно, работа ΔA , которую в квазистатическом случае совершает поле при перемещении тел на небольшие расстояния, равна

$$\Delta A = \vec{F}_1 \cdot \Delta \vec{r}_1 + \vec{F}_2 \cdot \Delta \vec{r}_2 = \vec{F}_1 \cdot (\Delta \vec{r}_1 - \Delta \vec{r}_2),$$

где $\Delta \vec{r}_1$ и $\Delta \vec{r}_2$ — перемещения тел. Мы видим, что ΔA определяется как раз относительным смещением тел $\Delta \vec{r}_1 - \Delta \vec{r}_2$. Отметим, что работа ΔA равна (со знаком минус) изменению энергии поля.

Поясним, зачем в приведенных рассуждениях нам понадобилось условие медленности сдвига тел. Если тело быстро переместить с одного места на другое, то оно будет совершать работу, которая пойдет не только на изменение энергии собственного поля системы, но и на создание дополнительных возмущений поля, причем вторая часть будет тем больше, чем быстрее перемещается тело. Это явление подобно возрастанию сопротивления движению корабля за счет возникающей у его носа волны при увеличении его скорости. Таким образом, при быстром смещении

тела действующая на него сила будет отличаться от силы, действующей на то же тело при его медленном смещении. Поэтому при быстром перемещении тел равенства $\vec{F}_1$ и $-\vec{F}_2$ ожидать уже не приходится.

Перейдем теперь к произвольной системе (покоящихся) тел. Опять будем считать, что она находится достаточно далеко от всех остальных тел, так что можно принимать во внимание только собственные поля системы. Применим тот же прием, что и для двух тел, то есть предположим, что система сдвигается как целое, и запишем условие неизменности энергии некоторого поля. Это условие имеет вид $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots = 0$, то есть в статических условиях сумма сил, действующих на тела системы со стороны любого поля, равна нулю. То же справедливо и для системы тел, движущихся достаточно медленно. Напомним, что сумма действующих на тела сил $\vec{F}$ равна скорости изменения их суммарного импульса (количества движения) $\vec{p}$, $\vec{p} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \dots$. Поэтому из условия $\vec{F} = 0$ следует, что в квазистатических условиях сохраняется импульс (количество движения) тел, хотя они и взаимодействуют с полями. Таким образом, в квазистатических условиях импульс среды можно не учитывать. В то же время энергией поля даже в квазистатических условиях пренебрегать никак нельзя, так как именно эта величина изменяется при относительных смещениях тел.

Известно, что наше пространство не только однородно, но и *изотропно*, то есть *все направления в пространстве эквивалентны между собой*. Отсюда следует, что не только сумма действующих на тела сил, связанных с любым их собственным полем, равна нулю, но равен нулю и суммарный момент этих сил. Для доказательства этого утверждения представим себе, что система как целое квазистатически (то есть достаточно медленно) поворачивается. Из курса механики известно, что изменение энергии системы тел в данном случае равно произведению угла поворота на приложенный к системе момент сил. При медленном повороте будет как целое поворачиваться и собственное

поле системы, так что его энергия в силу изотропии пространства меняться не будет. Поэтому момент сил должен быть равен нулю. Для системы двух точечных тел равенство нулю момента означает, что силы их взаимодействия должны быть направлены по проходящей через них прямой. Разумеется, использованная нами формулировка закона всемирного тяготения отражает свойства нашего пространства.

Частным случаем рассмотренной нами системы является отдельно взятое тело. Для него найденные выше соотношения приобретают особенно простой вид. Во-первых, сила взаимодействия тела с его собственным полем равна нулю. Во-вторых, равен нулю момент сил, действующий на тело со стороны его собственного поля. Как мы уже объяснили, собственное поле существует вокруг неподвижного *уединенного тела*, то есть тела, удаленного на большое расстояние от всех остальных тел. Поэтому мы можем переформулировать сделанные выводы: сила и момент сил, действующие на уединенное тело со стороны любого поля, в статике равны нулю.

В общем же случае сила и момент сил, действующие на тело со стороны того или иного поля, нулю не равны. Это связано с тем, что в присутствии других тел поле вокруг данного тела уже не совпадает с его собственным полем. (Здесь опять можно вспомнить о характере прогиба резиновой пленки двумя шарами в нашей модели.) Можно сказать, что сила и момент сил, действующие на тело, являются мерой искажения его собственного поля за счет соседних тел. Сказанное имеет и другую сторону. Присутствие соседних тел (точнее, их полей) делает для данного тела неэквивалентными различные его положения в пространстве и различные его ориентации. Отсюда и возникновение ненулевых силы и момента сил.

Сформулированные выше общие свойства статических полей справедливы и для полей электростатических. В то же время последние обладают рядом специфических особенностей, к изучению которых мы и приступаем.

§ 4. Электрический заряд

Мы начинаем количественное описание способности того или иного тела взаимодействовать с электрическим полем. В общем случае для этого требуется большое число параметров, относящихся к различным частям тела. Однако при определенных условиях способность тела к его взаимодействию с электрическим полем определяется всего одной величиной. Речь идет о точечных телах. Напомним, что возможность рассматривать то или иное тело как точечное определяется не его абсолютными размерами, а конкретной ситуацией, которую мы изучаем.

Тело можно считать точечным, если его размеры много меньше характерного масштаба задачи.

Например, Землю можно считать точечным телом при изучении ее движения вокруг Солнца, так как диаметр Земли гораздо меньше радиуса ее орбиты. Но, скажем, при рассмотрении падения метеорита на Землю считать ее точечным телом уже никак нельзя.

Способность точечного тела к взаимодействию с электрическим полем характеризуется его *электрическим зарядом*. По отношению к электрическому полю заряд тела играет такую же роль, как масса тела по отношению к полю гравитационному. Как известно, сила тяжести, то есть сила, действующая на точечное тело в гравитационном поле, равна $m\vec{g}$, будучи прямо пропорциональна массе тела m . Точно так же сила, действующая на точечное тело в электрическом поле, прямо пропорциональна величине электрического заряда этого тела. Заряд, как и масса, является скалярной величиной. Для обозначения величины заряда тела обычно используются буквы q или Q . Мы будем говорить, что тело *заряджено*, если его заряд не равен нулю. Величину заряда можно ввести и для микроскопических частиц. Отметим, что электроны и ядра атомов обладают ненулевым зарядом, то есть они являются заряженными частицами.

Здесь следует сделать следующую оговорку. Мы выяснили, что сила, приложенная к телу со стороны его собственного поля, равна нулю. Поэтому сила, действующая на тело, определяется только *внешним* по отношению к нему полем, которое получается исключением из «полного» поля собственного поля тела. Именно об этом внешнем поле и идет речь в определении заряда. Вспоминая сказанное в предыдущем параграфе, мы заключаем, что в статических (и в квазистатических) условиях внешнее по отношению к данному телу электрическое поле однозначно задается расположением и характером наэлектризованности окружающих его тел.

Процедура измерения величины заряда тождественна процедуре взвешивания. Для того чтобы установить значение заряда данного тела, его надо поместить в поле некоторого наэлектризованного предмета, измерить действующую на тело силу и сравнить ее с силой, действующей на помещенный в ту же точку эталон (величина заряда которого предполагается известной). Отношение этих сил будет равно отношению зарядов данного тела и эталона. Измерение должно быть произведено при условиях, когда и исследуемое тело, и эталон можно считать точечными телами. Например, можно использовать поле наэлектризованного предмета, удаленного от исследуемого тела, то есть находящегося от него на расстоянии, намного превышающем размеры измеряемого тела. Другой способ основан на использовании наэлектризованного предмета, по размерам намного превышающего размеры исследуемого тела. Этот второй способ аналогичен процедуре взвешивания тел в поле тяжести Земли.

Конечно, силы, действующие на тело в разных электрических полях, будут различными, как, например, будут различны силы тяжести, действующие на одно и то же тело, на разных планетах. Однако, так же как масса тела не зависит от того, в поле тяжести какой планеты ее определяли, величина заряда тела, измеренная указанным способом в разных полях, оказывается одной и той же. Именно это

обстоятельство, надежно установленное экспериментально, и позволяет считать заряд характеристикой тела.

Заметим, что все сказанное выше относительно заряда отдельных тел относится и к произвольной системе тел. Заряд системы тел измеряется так же, как и заряд тела. А именно, систему следует поместить в условия, когда ее можно считать точечной (то есть можно пренебречь ее размерами), и найти отношение сил, действующих на систему и на эталон со стороны внешнего поля. Можно так же определить заряд отдельной части тела, сравнивая силу, действующую на эту часть во внешнем поле, и силу, действующую в том же поле на эталон.

Эксперимент показывает, что все заряженные тела можно разделить на две группы, которые отличаются направлением силы, действующей на них в поле одного и того же удаленного предмета: это направление противоположно для тел из разных групп. Вспоминая о правилах обращения с векторами и определение заряда, мы заключаем, что зарядам тел в этих группах следует приписать противоположные знаки. Например, противоположными знаками обладают заряды электронов и ядер атомов. Таким образом, в отличие от массы, которая всегда положительна, заряд может быть как положительным, так и отрицательным. Знак «+» приписывают заряду ядер, а также телам или частицам, проявляющим аналогичный характер взаимодействия с электрическим полем, а знак «-» относят к электронам и телам или частицам, заряженным так же, как электроны. Подчеркнем, что физический смысл имеет только относительный знак заряда тел, приписывание же именно ядрам положительного знака заряда сложилось исторически.

Мы уже отмечали возможность как отталкивания, так и притяжения тел за счет электрического взаимодействия при обсуждении опыта с картонкой и пенопластом. Теперь мы можем уточнить условия, при которых происходит это притяжение или отталкивание. А именно, отталкиваются одноименно заряженные тела (вспомним о том, как в описанном нами опыте отталкивались две одинаково на-

электризованные картонки). В то же время разноименно заряженные тела притягиваются. Например, притягиваются картонка и пенопласт, которые обладают противоположными зарядами. По той же причине существуют силы притяжения между ядрами и электронами, которые удерживают электроны у ядра, связывая их в атомы. При этом электроны отталкиваются друг от друга, так как они имеют одинаковый заряд. Таким образом мы установили еще одно качественное различие между гравитационным взаимодействием и взаимодействием электрическим: в то время как одноименно заряженные тела отталкиваются, гравитация приводит к притяжению между телами, имеющими одинаковый (положительный) знак массы (которая, как мы уже пояснили, играет для гравитационного взаимодействия ту же роль, что и заряд для взаимодействия электрического).

Как известно, масса тела равна сумме масс составляющих его частей, а масса системы тел равна сумме масс составляющих ее тел. Тем же свойством *аддитивности* обладает и заряд:

заряд тела равен сумме зарядов составляющих его частей, а заряд системы тел равен сумме зарядов составляющих его тел.

При этом величины зарядов частей тела следует складывать алгебраически, с учетом их знаков. Отсюда следует, что заряд состоящего из заряженных частей тела или системы заряженных тел может оказаться положительным, отрицательным и даже равным нулю, в зависимости от соотношений между зарядами частей. Примером системы, состоящей из заряженных частиц (ядер и электронов), но обладающей нулевым зарядом, является любой атом.

Поясним происхождение правила сложения зарядов на примере тела, состоящего из двух заряженных частей. Если эти части заряжены одноименно (их заряды имеют один и тот же знак), то силы, действующие на них в поле удаленного заряженного предмета, будут направлены, как показано на рис. 6, в одну и ту же сторону. Если же заряды

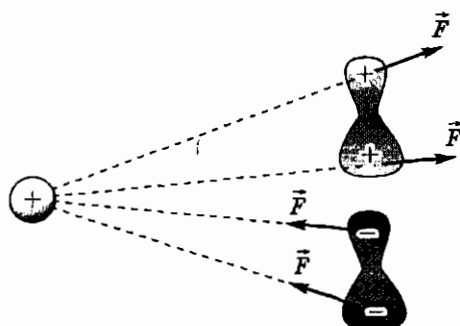


Рис. 6. Силы, действующие на части заряженных тел

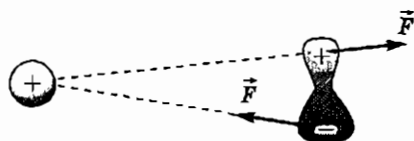


Рис. 7. Силы, действующие на разноименно заряженные части тела

частей имеют различные знаки, то силы будут направлены в противоположные стороны (рис. 7). Вектор равнодействующей (силы, действующей на тело в целом) в первом случае равен сумме сил, действующих на части тела, а во втором — их разности. С другой стороны, равнодействующая определяется суммарным зарядом тела, то есть абсолютная величина заряда тела равна сумме абсолютных величин зарядов его частей в первом случае и разности во втором. Это и означает, что суммарный заряд тела равен алгебраической сумме зарядов его частей.

Вопрос 4.1. Силы, показанные на рис. 6 и 7, непараллельны. Означает ли это нарушение аддитивности заряда?

Понятно, что даже если суммарный заряд тела равен нулю, оно будет наэлектризованным (то есть взаимодействовать с электрическим полем), если заряды некоторых

его частей отличны от нуля. Поэтому понятие «заряженное тело» не тождественно понятию «тело наэлектризованное». Надо соблюдать определенную аккуратность, имея дело с таким наэлектризованным, но незаряженным телом, поскольку сила, действующая на него со стороны внешнего поля, вообще говоря, не равна нулю даже в условиях, когда его можно считать точечным. Установить, что данное тело, которое можно считать точечным, обладает нулевым зарядом, можно, например, поворачивая его во внешнем поле (то есть в поле некоторого наэлектризованного тела) и измеряя действующую на него силу. Для заряженного точечного тела такой поворот практически не сказывается на величине этой силы, в то время как действующая на незаряженное тело сила будет существенно зависеть от этой ориентации. Причина этого заключается в том, что при повороте по-разному изменяются расстояния от заряженных частей взятого тела до тела — источника внешнего поля. В дальнейшем мы установим и другие отличия в характере взаимодействия заряженных и незаряженных (но наэлектризованных) тел с электрическим полем.

Все имеющиеся в настоящее время данные свидетельствуют о том, что

величина заряда электрически замкнутой системы (то есть системы, через границу которой отсутствует движение каких-либо тел или микрочастиц) со временем не изменяется.

Это утверждение называется *законом сохранения заряда*, который является таким же фундаментальным законом природы, как законы сохранения энергии и импульса, он справедлив как для макроскопических тел, так и для микроскопических частиц. Одним из проявлений закона сохранения заряда является неизменность со временем зарядов ядер атомов и электронов. Если же происходит ядерная реакция, то есть превращение одних ядер в другие, то суммарный заряд частиц, вовлеченных в реакцию, оказывается

в точности равным суммарному заряду частиц, возникших в результате ядерной реакции.

Вопрос 4.2. Может ли незаряженная частица распасться на заряженные?

Установлено, что любые два электрона тождественны по своим физическим свойствам, то есть их невозможно отличить друг от друга. В частности, все электроны обладают одинаковым электрическим зарядом q_e . Заряды же ядер разных элементов Периодической таблицы различны, но обязательно кратны заряду электрона. Именно поэтому заряд ядра атома может полностью компенсироваться зарядом принадлежащих этому атому электронов, так что атомы являются незаряженными частицами. По той же причине кратны заряду электрона и заряды ионов, которые получаются, если незаряженному атому добавить или отобрать у него один или несколько электронов.

Точно так же число недостающих или избыточных по сравнению с незаряженным состоянием электронов определяет заряд тела. Если тело имеет N избыточных электронов, то заряд тела Q будет отрицательным и равным $N \cdot q_e$. При недостатке же N электронов заряд тела Q будет положительным и равным $N \cdot (-q_e)$. Число N избыточных или недостающих электронов в заряженных телах обычно столь велико, что позволяет пренебрегать дискретностью заряда тела (или его макроскопических частей) и считать, что этот заряд может принимать непрерывный ряд значений. Подобным же образом мы считаем, что непрерывный ряд значений принимает масса тела, отвлекаясь от того, что любое тело состоит из отдельных атомов.

В широко используемой системе единиц измерения СИ величина заряда, взятая за единицу измерения, называется *кулоном* (обозначается 1 Кл) в честь французского физика Кулона.

Зарядом в один кулон обладает положительно заряженное тело, у которого недостает $6,25 \cdot 10^{18}$ электронов до его незаряженного состояния.

Отсюда, используя аддитивность заряда, находим, что заряд одного электрона в системе СИ равен:

$$q_e = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл.}$$

Столь «странное» соотношение между зарядом электрона и кулоном связано с тем, что единица измерения заряда была принята раньше, чем был открыт электрон, и поэтому величина этой единицы не была «привязана» к заряду электрона.

Задача 4.1. Найдите заряд одного моля электронов (в кулонах).

Напомним, что электроны намного легче ядер, вследствие чего они гораздо чувствительнее к внешнему воздействию, чем ядра. Поэтому именно с движением электронов связано большинство электрических явлений в (макроскопических) телах. В частности, изменение заряда тел связано обычно с потерей или приобретением электронов, которые уходят через границу тел в окружающую среду (например, в атмосферу) или поступают из нее.

Отметим, что электрическое взаимодействие препятствует созданию значительного дисбаланса между электронами и ядрами в реальных телах. Действительно, для увеличения положительного заряда тела у него надо отбирать электроны, чему препятствует их притяжение к телу. Точно так же для увеличения (по абсолютной величине) отрицательного заряда тела ему необходимо передать дополнительные электроны, чему препятствует их отталкивание от тела. Другими словами, в заряженном теле и вблизи от него возникает электрическое поле, которое препятствует дальнейшей зарядке этого тела. Как следствие, заряд любого реального тела по своей абсолютной величине оказывается много меньше, чем суммарный заряд ядер составляющих

это тело атомов. То же поле, возникающее вблизи заряженного тела, приводит и к другому эффекту. Это поле стремится вытолкнуть «лишние» электроны из отрицательно заряженного тела и стремится притянуть электроны к положительно заряженному телу из окружающей его среды. Таким образом, имеется тенденция к разрядке заряженного тела.

В то же время заряженные тела, как мы знаем, могут довольно долго сохранять свой заряд. В связи с этим возникает вопрос: что же препятствует быстрой разрядке тела? Для объяснения этого явления вспомним, что электроны в атоме связаны с ядром (теми же электрическими силами) и требуется конечная энергия, чтобы оторвать электрон от атома. Тем же свойством обладает и состоящее из атомов макроскопическое тело: необходима некоторая энергия, чтобы оторвать электрон от тела. Именно поэтому даже избыточные электроны не покидают отрицательно заряженное тело, и оно остается заряженным.

По той же причине остается заряженным и тело с положительным зарядом, поскольку для его разрядки ему должно быть передано некоторое количество электронов из окружающей тело среды, где электроны связаны со своими атомами. Постепенная же разрядка заряженных тел связана с тепловым движением микрочастиц. За счет него некоторые электроны могут приобрести скорость, достаточную для того, чтобы покинуть тело, обеспечивая тем самым уменьшение заряда отрицательно заряженного тела. Тепловое же движение приводит к тому, что часть электронов отрывается от своих ядер. Такие электроны могут быть «поглощены» положительно заряженным телом из окружающей его среды, что ведет к уменьшению заряда положительно заряженного тела. Однако такие события весьма редки, поэтому заряженные тела сохраняют свой заряд достаточно долго для того, чтобы можно было наблюдать их электрическое взаимодействие.

§ 5. Напряженность. Закон Кулона

Перейдем к количественному описанию электрического поля, которое (в соответствии с общими свойствами полей) должно характеризоваться некоторой физической величиной, заданной в каждой точке пространства. Для введения такой величины мы воспользуемся тем, что наличие электрического поля проявляется в существовании сил, действующих на наэлектризованные тела. Помещая такое тело, которое называется *пробным телом* или *пробным зарядом* (если оно заряжено), в интересующую нас область пространства и измеряя действующую на него силу, мы можем исследовать поле в этой области. Характеристики поля можно отнести к той или иной точке, если воспользоваться как пробным телом *точечным зарядом*, то есть заряженным телом (или системой тел), геометрическими размерами которого (которой) мы можем пренебречь.

Напомним, что сила $\vec{F}$, действующая на точечное тело в данном электрическом поле, пропорциональна заряду этого тела q . Другими словами, отношение силы $\vec{F}$ к величине пробного заряда q будет одним и тем же для любого пробного тела, помещенного в выбранную нами точку. Следовательно, отношение $\vec{F}/q$ характеризует уже исследуемое поле. Эту векторную величину называют *напряженностью электрического поля* и обозначают, как правило, $\vec{E}$:

$$\vec{E} = \vec{F}/q.$$

Отметим, что в силу определения вектор напряженности $\vec{E}$ совпадает по направлению с силой, действующей на положительный точечный заряд. Как следует из приведенного определения, единицей измерения напряженности в системе СИ является Н/Кл.

Аналогичным образом вводится и *напряженность гравитационного поля*. Только вместо величины заряда точечного тела следует брать его массу. Отношение силы, действующей со стороны гравитационного поля на тело малых размеров, к его массе равно, как известно, ускорению

свободного падения. Именно ускорение свободного падения $\vec{g}$ и является напряженностью гравитационного поля.

При измерении напряженности поля при помощи пробного заряда мы сталкиваемся с двумя проблемами. Во-первых, пробный заряд, как и всякое наэлектризованное тело, обладает собственным полем. Поэтому, оказавшись в поле, напряженность которого мы хотим измерить, пробный заряд неминуемо исказит его. Во-вторых, поле пробного заряда, действуя на тела, поле которых мы исследуем, обязательно вызовет их смещение и/или перераспределение в них заряда, то есть в процессе измерения мы поневоле изменяем систему тел, поле которой мы изучаем.

Первая из этих проблем является лишь кажущейся, поскольку собственное поле не вызывает действующей на тело силы, и, следовательно, по силе, действующей на пробный заряд, мы определяем напряженность поля в данной точке до помещения в нее пробного заряда, то есть напряженность, относящуюся к исследуемому полю. Вторая же проблема вполне реальна. Для того чтобы результаты измерений можно было бы относить к состоянию поля до внесения в него пробного заряда, он не должен существенно влиять на расположение тел, вокруг которых мы исследуем поле, а также на заряды частей этих тел, то есть величина пробного заряда должна быть достаточно малой.

В общем случае напряженность поля наэлектризованного тела или системы таких тел является сложной функцией координат. Тем не менее все электрические поля обладают некоторыми общими свойствами.

Во-первых, напряженность любого поля плавно меняется от точки к точке. Это означает, что в небольшой области пространства значение напряженности мало отличается в разных точках, то есть поле в этой области можно считать *однородным*. По определению

однородным называется поле, напряженность которого во всех точках является одной и той же.

Например, гравитационное поле Земли можно считать однородным в пределах области пространства, размеры которой намного меньше ее расстояния до центра Земли. Именно поэтому в задачах по механике, где речь идет о перемещении тел вблизи поверхности Земли, значение свободного ускорения $\vec{g}$ считается постоянным.

Вопрос 5.1. По какой траектории будет двигаться точечный заряд в однородном электрическом поле (при отсутствии других воздействий на это тело)?

Во-вторых, поля наэлектризованных тел самой разной формы устроены однотипно на расстояниях, намного превышающих размеры тела. В этом случае напряженность поля определяется небольшим числом параметров. То же относится и к системе наэлектризованных тел. Объясняется это тем, что на больших расстояниях детали расположения тел системы и распределения заряда в них слабо сказываются на величине напряженности. Вспоминая, что при значительном превышении характерного масштаба задачи над размерами тела последнее можно считать точечным, мы заключаем, что поля точечных тел обладают универсальными свойствами.

Изучим устройство собственного поля точечного заряда. Для этого надо поместить его в условия, когда влиянием на поле других наэлектризованных тел можно пренебречь. Например, можно взять *уединенный точечный заряд*, то есть заряд, расположенный достаточно далеко от других тел. Тогда в некоторой окрестности точечного заряда, где мы и будем исследовать его поле, влиянием других наэлектризованных тел на поле можно пренебречь. Как уже было сказано, при измерении напряженности надо использовать пробный точечный заряд. Заметим, что в данном случае ограничение на величину пробного заряда отсутствует, поскольку мы с его помощью хотим измерить поле точечного заряда, носитель которого является телом малых размеров, и, следовательно, перераспределение в нем заряда (вызванное полем пробного тела) слабо сказывается на его поле.

Таким образом, мы приходим к задаче о взаимодействии двух произвольных точечных зарядов.

В соответствии с общими свойствами статических полей, векторы сил, действующих на точечные тела, параллельны соединяющей их прямой, направлены в противоположные стороны и равны по абсолютной величине. При этом, как мы уже говорили, одноименные заряды отталкиваются, а разноименные притягиваются (рис. 8). Для величины же силы оказывается справедливым следующее утверждение:

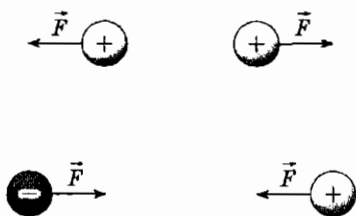


Рис. 8. Силы Кулона для одноименных и разноименных точечных зарядов

сила взаимодействия двух точечных зарядов прямо пропорциональна произведению величин этих зарядов и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними.

Это утверждение, похожее на закон всемирного тяготения, называется *законом Кулона* в честь французского физика, установившего его экспериментально.

Закон Кулона можно записать следующей формулой:

$$F = k \frac{qQ}{r^2}.$$

Здесь q и Q — величины зарядов тел, r — расстояние между ними, а k — коэффициент пропорциональности. Обратим внимание на то, что величины зарядов q и Q входят в закон Кулона симметрично. Это является следствием того, что силы, действующие на заряды q и Q , должны быть равны по величине (мы отмечали это свойство ранее). Запишем закон Кулона и, для сравнения, закон всемирного тяготения в векторной форме:

$$\vec{F} = k \frac{qQ\vec{r}}{r^3}, \quad \vec{F} = -G \frac{mM\vec{r}}{r^3}.$$

В этой формуле $\vec{r} = \overrightarrow{AB}$, а A и B — точки, где расположены точечные тела, причем приведенные выражения задают силу, действующую на тело, расположенное в точке B . Знак минус в законе всемирного тяготения показывает, что за счет гравитации тела притягиваются друг к другу.

Константа k в законе Кулона зависит от единиц измерения. В системе единиц СИ коэффициент k равен $9 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{Кл}^2$. В силу исторических причин при использовании этой системы единиц вместо коэффициента k употребляется обычно так называемая *электрическая постоянная* ϵ_0 :

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Кл}^2 / \text{Н} \cdot \text{м}^2.$$

Подставляя в закон Кулона вместо k его выражение через ϵ_0 , находим следующее выражение для силы, записанное в скалярной и векторной формах:

$$F = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \text{или} \quad \vec{F} = \frac{qQ\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (\text{система СИ}).$$

Задача 5.1. Сравните гравитационную и электрическую силу взаимодействия двух электронов. Масса электрона равна $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$.

В другой, также широко используемой в физике, системе единиц СГСЕ, в которой основными единицами являются сантиметр, грамм и секунда, единица измерения заряда вводится таким образом, чтобы коэффициент k в законе Кулона был равен единице. Поэтому в системе СГСЕ выражение для силы взаимодействия двух точечных зарядов имеет следующий вид:

$$F = \frac{qQ}{r^2} \quad \text{или} \quad \vec{F} = \frac{qQ\vec{r}}{r^3} \quad (\text{система СГСЕ}).$$

В соответствии с определением в системе СГСЕ величина Q^2/r^2 является силой, то есть ее размерностью является дина. Отсюда следует, что единица заряда в системе СГСЕ может быть выражена через основные единицы этой системы, а именно ед. СГСЕ_q = $\text{г}^{1/2} \text{ см}^{3/2} \text{ с}^{-1}$. Размерность же

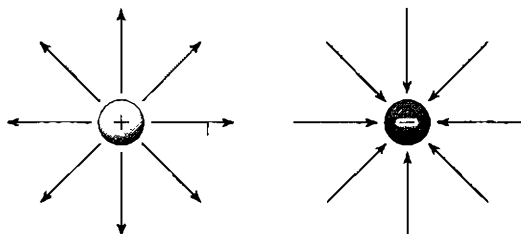


Рис. 9. Направления напряженности полей положительного и отрицательного точечных зарядов

напряженности поля в системе СГСЕ оказывается равной ед. СГСЕ $E = r^{1/2} \text{см}^{-1/2} \text{с}^{-1}$.

|| **Задача 5.2.** Покажите, что в системе единиц СГСЕ заряд электрона q_e равен $-4,8 \cdot 10^{-10}$ ед. СГСЕ q .

Вспоминая теперь определение напряженности, мы находим следующие выражения для напряженности собственного поля точечного заряда Q в системах СИ и СГСЕ:

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \text{или} \quad \vec{E} = \frac{Q\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (\text{система СИ}),$$

$$E = \frac{Q}{r^2} \quad \text{или} \quad \vec{E} = \frac{Q\vec{r}}{r^3} \quad (\text{система СГСЕ}).$$

Здесь $\vec{r} = \overrightarrow{OA}$, где O — это точка, где расположен точечный заряд, а A — точка наблюдения. Напомним, что при $Q > 0$ вектор $Q \cdot \vec{r}$ направлен так же, как и вектор $\vec{r}$, а при $Q < 0$ — в противоположном направлении. Это означает, что вектор напряженности поля точечного заряда направлен радиально, причем для положительного точечного заряда он «смотрит» от заряда, а для отрицательного — к заряду (рис. 9).

|| **Задача 5.3.** Запишите в векторной форме напряженность гравитационного поля точечного тела, масса которого равна M .

Задача 5.4. Найдите напряженность поля ядра атома водорода (заряд которого равен $-q_e$) на расстоянии $r = 10^{-8}$ см от него (то есть на расстоянии порядка размера атома) в обеих системах единиц.

Заметим, что приведенное выражение для напряженности находится в соответствии с изотропией пространства. Действительно, представим себе, что мы повернули точечный заряд вокруг какой-то проходящей через него оси. Тогда и его поле будет поворачиваться вместе с ним. Но в силу пренебрежимо малых размеров точечного тела при его повороте не происходит существенного перераспределения его заряда в пространстве, то есть поле должно остаться прежним. Этому свойству и соответствует вектор напряженности, направленный вдоль вектора $\vec{r}$ и по абсолютной величине зависящий только от расстояния до точечного заряда.

В соответствии с приведенными выражениями значение напряженности стремится к нулю при увеличении расстояния от точки наблюдения до тела. При уменьшении же этого расстояния напряженность поля точечного заряда неограниченно возрастает. Конечно, для реальных тел такое возрастание будет наблюдаться только до тех пор, пока тело можно считать точечным, то есть пока расстояние от точки наблюдения до тела будет гораздо больше его размера. Когда же мы приблизимся к телу на расстояние, сравнимое с его размерами, значение напряженности будет зависеть уже от формы тела и соотношения зарядов различных его частей. Во всяком случае, напряженность поля не обращается в бесконечность ни в одной точке.

Используя понятие напряженности, мы можем изобразить поле графически. Для этого выберем в интересующей нас области пространства некоторое количество точек и определим в них направление и абсолютную величину напряженности. После этого построим векторы, пропорциональные значениям напряженности, поместив начала этих векторов в соответствующие точки (рис. 10). В ре-

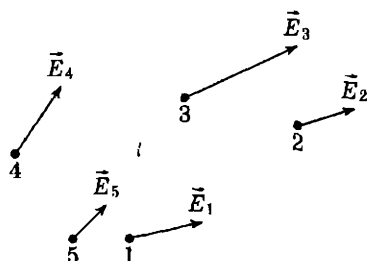


Рис. 10. Карта напряженности некоторого поля

зультате получается своеобразная «карта напряженности», показывающая, как меняется напряженность поля от точки к точке, то есть позволяющая представить себе распределение напряженности в пространстве. В качестве примеров на рис. 11 и 12 представлены карты напряженности однородного поля, а также положительного и отрицательного точечных зарядов.

Обратим внимание на то, что точечные заряды на рис. 12 изображены шариками. Это сделано для того, чтобы подчеркнуть, что, говоря о точечном заряде, мы всегда имеем в виду некоторое заряженное тело конечных размеров, поле которого близко к кулоновскому полю на больших расстояниях от тела. Поверхности шариков (сферы) представляют собой условную границу, вне которой работает приближение поля точечного заряда для данного тела. Устройство же поля внутри сферы зависит от геометрической формы тела и распределения заряда по нему, то есть может быть самым разным. Поэтому на рис. 12 отсутствуют векторы напря-

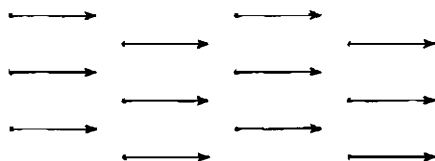


Рис. 11. Карта напряженности однородного поля

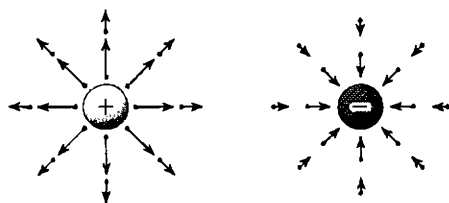


Рис. 12. Карты напряженности полей положительного и отрицательного точечных зарядов

женности внутри сфер. На дальнейших рисунках точечные заряды также будут изображаться шариками, имеющими тот же самый смысл.

§ 6. Принцип суперпозиции

Важной проблемой электростатики является вычисление напряженности поля наэлектризованного тела или системы таких тел. Один из способов решения этой проблемы дает *принцип суперпозиции* (наложения), который гласит, что

напряженность поля системы тел равна векторной сумме напряженностей собственных полей этих тел.

Это означает, что если в некоторой точке пространства напряженности полей тел, взятых по отдельности, равны $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \dots$, то поле системы тел в той же точке имеет напряженность

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots$$

Принцип суперпозиции является экспериментальным фактом, установленным для электрического поля. Он применим не только к разным телам, но и к разным частям одного и того же тела.

В зависимости от взаимной ориентации двух векторов их векторная сумма по абсолютной величине может быть как больше, так и меньше абсолютных величин слагаемых (рис. 13). Отсюда следует, что напряженность поля системы тел в данной точке может быть по абсолютной величине как больше, так и меньше величины напряженности поля одного из тел системы. В частности, напряженность поля системы тел может в некоторой точке обращаться в нуль, несмотря на то что напряженность поля каждого из тел в этой точке нулю не равна. Например, будет равна нулю напряженность поля двух одинаковых точечных зарядов в точке, расположенной посередине между ними.

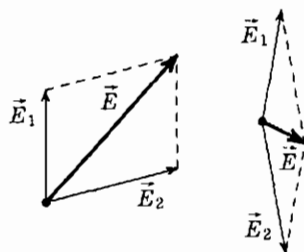


Рис. 13. Результирующая напряженность $\vec{E}$ поля двух наэлектризованных тел для разных случаев их взаимного расположения

Вопрос 6.1. Существует ли точка с нулевой напряженностью в поле двух произвольных точечных зарядов?

Принцип суперпозиции дает нам возможность представить поле любого наэлектризованного тела как результат наложения полей точечных зарядов. Для этого следует мысленно разбить тело на части, достаточно малые для того, чтобы можно было считать их точечными. Так как поле тела является суперпозицией полей его частей, это разбиение сводит поле тела к наложению полей точечных зарядов. Такое же разбиение сводит поле произвольной системы наэлектризованных тел к наложению полей точечных зарядов.

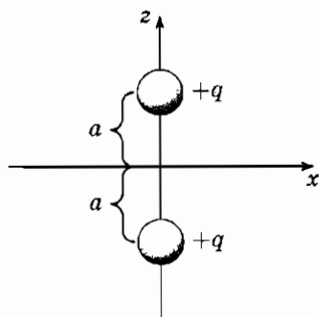


Рис. 14. Расположение зарядов относительно осей координат. К задаче 6.1

Задача 6.1. Найдите направление и величину напряженности поля двух одинаковых точечных зарядов q , расположенных на оси z на равных расстояниях a от начала координат, в точках, принадлежащих оси x ; оси z (рис. 14).

Вблизи от тела напряженность поля может меняться самым причудливым образом, в то время как вдали от тела напряженность его поля должна быть близкой к полю точечного заряда. Покажем, что принцип суперпозиции обеспечивает это свойство. Возьмем некоторую точку вне тела, и будем вычислять в ней напряженность в соответствии с предложенной процедурой, разбив тело мысленно на части, которые можно считать точечными зарядами. Если выбранная точка удалена от тела, то в ней векторы напряженности полей отдельных частей тела практически параллельны (коллинеарны), а их величины пропорциональны зарядам этих частей. Поэтому суммирование напряженностей частей тела и дает результат, который определяется

суммарным зарядом тела и расстоянием от тела до точки наблюдения.

Задача 6.2. Убедитесь, что в условиях предыдущей задачи на расстояниях $r \gg a$ (r много больше a) от начала координат напряженность ведет себя как напряженность поля точечного заряда $2q$.

Особого подхода требует случай, когда наэлектризованное тело обладает нулевым зарядом. Конечно, напряженность его поля $\vec{E}$ отлична от нуля, поскольку части такого тела заряжены. Однако в этом случае поведение напряженности $\vec{E}$ на больших расстояниях от тела существенно отличается от поля точечного заряда. Рассмотрим в качестве простейшего примера *электрический диполь*.

Электрическим диполем называется система двух точечных зарядов с величинами $+q$ и $-q$, расположенных на фиксированном расстоянии друг от друга (рис. 15).

Удобно считать, что эти заряды жестко закреплены на концах стержня длины l . Поскольку диполь состоит из двух точечных зарядов, то, используя принцип суперпозиции, можно найти напряженность его поля в любой точке пространства, если известны величины зарядов диполя $\pm q$.

В качестве примера найдем значение напряженности в плоскости, проходящей посередине между зарядами диполя. Выберем систему координат так, чтобы заряды лежали на оси z , на одинаковых расстояниях $l/2$ от начала координат O . Мы хотим найти напряженность поля в плоскости $(x; y)$.

Обозначим расстояние от начала координат O до точки наблюдения через r . Тогда расстояние от точки наблюдения до каждого из зарядов диполя будет равно $\sqrt{r^2 + l^2/4}$. Поэтому по абсолютной величине напряженность поля каждого за-

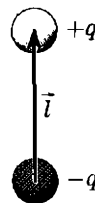


Рис. 15. Электрический диполь

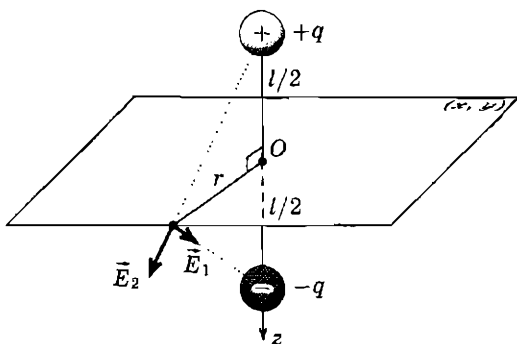


Рис. 16. Построение напряженности поля диполя в плоскости $(x; y)$

ряда диполя в точке наблюдения равна

$$E_1 = E_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0(r^2 + l^2/4)}.$$

Векторы напряженности $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ полей зарядов диполя направлены под углом друг к другу (рис. 16). Сумма этих векторов, то есть напряженность поля диполя $\vec{E}$, будет направлена вдоль оси z . К этому выводу можно прийти, если учесть, что составляющие векторов $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ в плоскости $(x; y)$ равны по модулю, но противоположны по направлению, а составляющие вдоль оси z равны по модулю и сонаправлены (то есть направлены в одну сторону). Абсолютная же величина E равна удвоенной проекции вектора $\vec{E}_1$ на ось z

$$E = 2 \cdot E_1 \cdot \cos \alpha = \frac{|q| \cdot l}{4\pi\epsilon_0(r^2 + l^2/4)^{3/2}},$$

где α — угол между вектором $\vec{E}_1$ и осью z . На расстояниях r , намного превышающих размер диполя l , величиной $l^2/4$ по сравнению с r^2 можно пренебречь, и мы получаем:

$$E = \frac{|q| \cdot l}{4\pi\epsilon_0 r^3}.$$

Таким образом, на больших расстояниях от диполя напряженность его поля оказывается обратно пропорциональной

кубу расстояния до точки наблюдения, то есть по мере ее удаления от диполя напряженность его поля убывает быстрее, чем напряженность поля точечного заряда.

Проделявая аналогичный анализ для точек, лежащих на произвольной прямой, проходящей через середину диполя O , можно показать, что на больших расстояниях от диполя (то есть на расстояниях, намного превышающих размер диполя l) для напряженности будет выполняться тот же закон обратной пропорциональности расстоянию r от точки наблюдения до точки O в третьей степени. Однако коэффициент пропорциональности между E и r^{-3} для разных направлений будет отличаться. Например, при равных r абсолютная величина напряженности поля на оси z будет вдвое больше абсолютной величины напряженности в плоскости $(x; y)$.

Можно убедиться, что для любого направления заряд q и длина стержня l входят в коэффициент пропорциональности между E и r^{-3} , как и для рассмотренного выше случая, только в виде произведения $|q| \cdot l$. Таким образом, поле диполя на больших расстояниях от него определяется только его *дипольным моментом* $\vec{d}$.

Дипольный момент является вектором, по абсолютной величине равным произведению $|q| \cdot l$ и параллельным вектору $\vec{l}$, идущему от точечного заряда $-q$ к заряду $+q$.

Ориентацию вектора $\vec{l}$ поясняет рис. 15. Определение дипольного момента можно записать в виде векторного соотношения $\vec{d} = q\vec{l}$. Направление вектора напряженности $\vec{E}$ поля диполя в точке A зависит от угла между дипольным моментом $\vec{d}$ и радиус-вектором $\vec{r} = \vec{OA}$. Для точек плоскости $(x; y)$ и оси z вектор $\vec{E}$ коллинеарен дипольному моменту $\vec{d}$. В общем же случае $\vec{E}$ не будет совпадать по направлению ни с дипольным моментом $\vec{d}$, ни с радиус-вектором $\vec{r}$. Координатная зависимость напряженности поля диполя отражена на карте напряженности, приведенной на рис. 17.

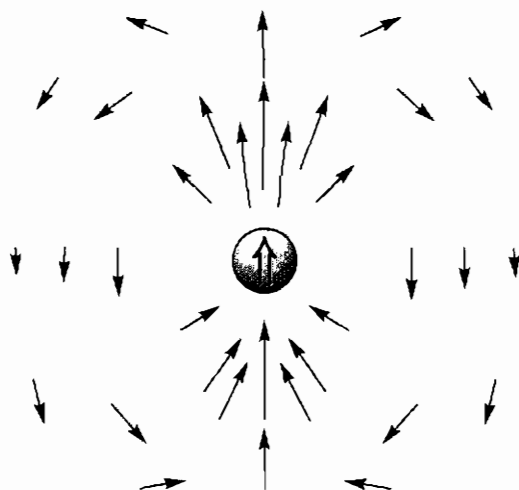


Рис. 17. Карта напряженности поля диполя

Координатная зависимость проекций вектора напряженности поля диполя $\vec{E}$ на радиус-вектор $\vec{r}$ и на направление, перпендикулярное радиус-вектору $\vec{r}$, (то есть радиальная и тангенциальная компоненты вектора напряженности) определяются выражениями

$$E_r = \frac{2d \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \quad E_\theta = \frac{d \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3},$$

которые справедливы на расстояниях r , много бóльших l . Здесь θ — угол между дипольным моментом $\vec{d}$ и радиус-вектором $\vec{r}$. Определение компонент поля E_r , E_θ и угла θ поясняет рис. 18.

|| **Задача 6.3.** Выведите приведенные в тексте выражения для компонент напряженности поля диполя.

Поле произвольного наэлектризованного, но незаряженного тела можно представить в виде суперпозиции полей диполей. Для этого разобьем мысленно незаряженное тело на пары малых (точечных) кусочков так, чтобы заряды

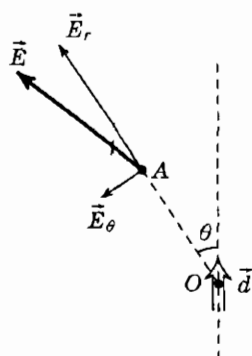


Рис. 18. Радиальная и тангенциальная компоненты напряженности $\vec{E}_r$ и $\vec{E}_\theta$ поля диполя

кусочков в каждой паре были бы равны по абсолютной величине, но противоположны по знаку.

Вопрос 6.2. Возможно ли подобное разбиение на диполи для заряженного тела?

Каждая пара представляет собой электрический диполь, а поле тела будет суперпозицией полей этих диполей. На расстояниях, намного превышающих размеры тела, эта суперпозиция будет совпадать с полем диполя, дипольный момент которого равен векторной сумме дипольных моментов отдельных пар. Таким образом, исследованное нами поле диполя представляет поле любого тела или системы тел с нулевым суммарным зарядом, но ненулевым дипольным моментом $\vec{d}$ на больших расстояниях от системы. Попутно мы показали, что дипольный момент (как и заряд) обладает свойством *аддитивности*, то есть

дипольный момент тела или системы тел равен сумме дипольных моментов отдельных ее (незаряженных) частей.

Задача 6.4. Найдите дипольный момент системы трех точечных зарядов q , q и $-2q$, расположенных в вершинах правильного треугольника, сторона которого равна l .

Мы условились называть точечным зарядом заряженное тело, размерами которого в условиях данной задачи можно пренебречь. Точно так же можно определить *точечный диполь*:

точечным диполем называется незаряженное, но обладающее ненулевым дипольным моментом тело, размерами которого в условиях данной задачи можно пренебречь.

Проведенный выше анализ показывает, что, в полной аналогии с точечным зарядом, поле которого определяется величиной его заряда q , поле точечного диполя определяется только его дипольным моментом $\vec{d}$. Заметим, что на рис. 17 приведена карта напряженности именно точечного диполя. Точечный диполь на этом рисунке изображен шариком, который имеет такой же смысл, как и для точечного заряда, то есть его поверхность представляет собой условную границу, вне которой работает приближение поля точечного диполя.

Представим теперь себе систему, состоящую из точечного заряда и точечного диполя. Напряженность этого поля можно найти по принципу суперпозиции. Конечно, на самых больших расстояниях от системы ее напряженность будет определяться в основном полем точечного заряда, так как его напряженность спадает при увеличении расстояния от системы медленнее, чем напряженность поля диполя. В то же время, если величина точечного заряда достаточно мала, то имеется промежуточная область, в которой напряженность в основном определяется полем диполя. То же относится и к произвольному наэлектризованному телу, если его заряд достаточно мал: его поле на расстояниях, превышающих размеры тела, аппроксимируется (может быть приблизительно представлено) суперпозицией поля точечного заряда и поля диполя. При этом на умеренных

расстояниях от тела его поле определяется дипольным моментом тела, в то время как на самых больших расстояниях поле определяется зарядом тела.

Может оказаться, что не только заряд тела или системы тел, но и ее дипольный момент равен нулю. Примером может служить изображенная на рис. 19 система четырех одинаковых по абсолютной величине разноименных зарядов, расположенных в шахматном порядке в вершинах квадрата. Напряженность поля подобной системы на больших расстояниях от нее спадает еще быстрее, чем поле диполя, а именно: пропорционально r^{-4} , где r — расстояние от точки наблюдения до системы. Коэффициент пропорциональности между E и r^{-4} определяется величиной, которая называется квадрупольным моментом системы.

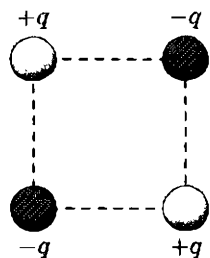


Рис. 19. Система точечных зарядов, обладающая нулевыми зарядом и дипольным моментом

Задача 6.5. Вычислите напряженность поля системы четырех точечных зарядов, представленных на рис. 19, в точках прямой, проходящей через два одноименных (лежащих на диагонали) заряда. Убедитесь, что вдали от этой системы напряженность ведет себя пропорционально r^{-4} .

Вопрос 6.3. Напряженность поля системы четырех точечных зарядов, расположенных в шахматном порядке в вершинах квадрата (рис. 19), равна нулю вдоль прямой, проходящей через центр квадрата, и перпендикулярной плоскости, в которой лежит квадрат. Как это обосновать?

Если же и квадрупольный момент наэлектризованного тела или системы таких тел равен нулю, то напряженность поля будет спадать с расстоянием еще быстрее.

На больших расстояниях от наэлектризованного тела главный вклад в напряженность его поля определяется полем точечного заряда, величина которого совпадает с суммарным зарядом тела. К этой напряженности имеются поправки, определяемые полями точечного диполя, точечного квадруполья, и так далее. Итак, поле любого наэлектризованного тела на больших расстояниях от него представляется в виде суперпозиции полей точечного заряда, точечного диполя, и так далее. Это представление называется разложением по мультиполям или *мультипольным разложением*. В большинстве практических задач достаточно учитывать только первый отличный от нуля вклад. Заметим, что в любом случае напряженность поля стремится к нулю при удалении точки наблюдения от тела.

§ 7. Теорема Гаусса

При решении ряда задач электростатики полезной оказывается теорема, доказанная немецким математиком Гауссом. Для того чтобы сформулировать эту теорему, необходимо использовать понятие *потока вектора напряженности* через заданную поверхность. В этом названии отражена аналогия между вводимым понятием и потоком жидкости, причем роль скорости жидкости в электростатике играет напряженность поля.

Для однородного течения жидкости, когда ее скорость не меняется от точки к точке, поток жидкости через плоскую площадку (например, сечение водопроводной трубы) равен произведению $v \cdot S \cdot \cos \theta$, где v — скорость жидкости, S — площадь площадки, а θ — угол между направлением движения жидкости и перпендикуляром к площадке (чтобы получить поток массы, приведенное выражение надо домножить на плотность массы жидкости). Точно так же определяется поток Φ вектора напряженности $\vec{E}$ однородного поля через плоскую площадку:

$$\Phi = E \cdot S \cdot \cos \theta.$$

Здесь E — напряженность поля, S — площадь площадки, а θ — угол между направлением напряженности и перпендикуляром к площадке (рис. 20). При заданной величине площади S поток Φ принимает максимальное значение в том случае, когда площадка перпендикулярна направлению напряженности $\vec{E}$.

Часто плоскую площадку бывает удобно характеризовать векторной величиной $\vec{S}$, которая перпендикулярна площадке, а по абсолютной величине совпадает с ее площадью S . В этом случае угол θ — это угол между векторами $\vec{E}$ и $\vec{S}$, а поток Φ , соответственно, записывается в виде скалярного

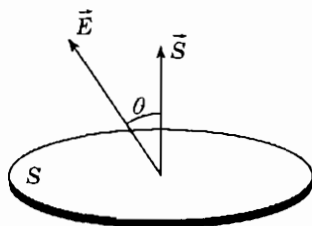


Рис. 20. Поток вектора $\vec{E}$ через площадку зависит от угла θ между $\vec{E}$ и перпендикуляром к площадке

произведения:

$$\Phi = \vec{E} \cdot \vec{S}.$$

В зависимости от взаимного направления $\vec{E}$ и $\vec{S}$ скалярное произведение $\vec{E} \cdot \vec{S}$ может быть как положительным, так и отрицательным. Нам будет удобно использовать именно такое определение, предполагающее наличие знака у потока Φ . Заметим, что и в гидродинамике используется точно такое же определение потока жидкости. Знак потока жидкости отражает направление, в котором течет жидкость через данную площадку (например, он зависит от того, втекает вода в бассейн через данную трубу или вытекает из нее).

Теперь обобщим понятие потока напряженности на случай неоднородного поля и произвольной поверхности. Чтобы пояснить лежащую в основе этого обобщения идею, снова обратимся к течению жидкости. Предположим, что мы хотим измерить поток воды в русле реки, скорость в которой меняется от берега к берегу. Возьмем рыбацкую сеть и натянем ее между берегами. Тогда, если размеры ячеек сети достаточно малы, в пределах каждой из них скорость будет в разных точках практически одной и той же. Поток воды через такую ячейку может быть найден по формуле для однородного потока, а общий поток — суммированием по ячейкам.

Точно так же можно вычислить поток вектора напряженности любого поля через произвольную поверхность. Для этого надо мысленно разбить поверхность на кусочки (элементы), достаточно малые для того, чтобы можно было считать каждый из них плоским, а поле вблизи него однородным. Тогда поток вектора напряженности через каждый такой элемент можно найти по формуле:

$$\Delta\Phi = \vec{E} \cdot \Delta\vec{S} = E \cdot \Delta S \cdot \cos \theta,$$

а поток через всю поверхность — суммированием этих величин. В приведенной формуле $\vec{E}$ — напряженность поля вблизи выбранного элемента, а $\Delta\vec{S}$ — вектор, по величине

равный площади элемента поверхности и перпендикулярный ему.

Вообще говоря, для данной площадки вектор $\Delta \vec{S}$ может быть направлен в одну из двух противоположных сторон. Для отдельно взятой площадки выбор направления $\Delta \vec{S}$ является произвольным. Однако направления векторов $\Delta \vec{S}$ для элементов некоторой поверхности должны быть согласованы между собой. А именно, векторы $\Delta \vec{S}$ для соседних элементов должны быть направлены в одну и ту же сторону. Применительно к замкнутой поверхности это означает, что все векторы $\Delta \vec{S}$ должны быть направлены либо внутрь, либо наружу по отношению к охватываемой этой поверхностью области пространства. Мы всегда будем использовать второй способ, проиллюстрированный на рис. 21.

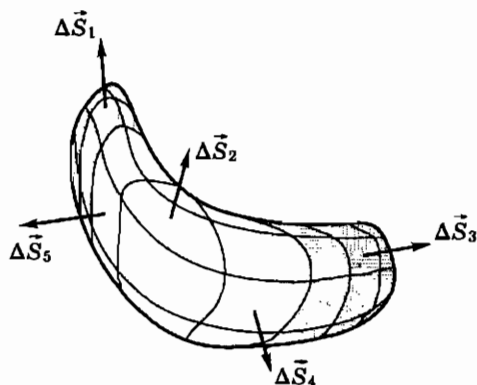


Рис. 21. Направления векторов площадей элементов замкнутой поверхности

Подчеркнем, что суммирование величин $\Delta \Phi$ мы производим алгебраически, с учетом знаков потоков. Точно так же при вычислении суммарного потока жидкости в реке следует суммировать потоки жидкости через ячейки сети с учетом знаков, чтобы учесть со знаком «-» потоки через те ячейки, через которые, как это иногда бывает около берега, вода течет в сторону, противоположную общему

направлению движения реки. Обратим внимание на то, что поток напряженности однородного поля через любую замкнутую поверхность равен нулю (что на гидродинамическом языке можно выразить как равенство втекающего и вытекающего через замкнутую поверхность потоков).

|| **Вопрос 7.1.** Как обосновать это утверждение?

Вспомним теперь расположение векторов на картах напряженности для положительного и отрицательного точечных зарядов (рис. 12). Если бы они были картами скорости, то положительный точечный заряд был бы источником жидкости, а отрицательный — ее стоком. Продолжая эту аналогию, можно сказать, что в электростатике заряженные тела являются аналогами источников и стоков жидкости в гидродинамике. Известно, что поток жидкости через произвольную поверхность, охватывающую источник, равен количеству жидкости, поставляемой источником в единицу времени, то есть является одним и тем же для любой из таких поверхностей. Покажем, что аналогичное утверждение справедливо и в электростатике: поток вектора напряженности через любую поверхность, охватывающую уединенное заряженное тело, будет одним и тем же.

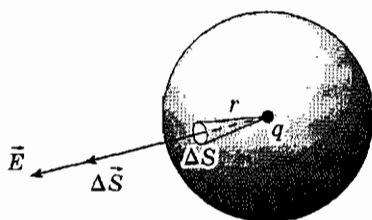


Рис. 22. Сфера, охватывающая точечный заряд

Снова начинаем с поля точечного заряда. Возьмем сначала наиболее удобную для подсчета потока вектора $\vec{E}$ поверхность — сферу радиуса r с центром в точке, где расположен точечный заряд (рис. 22). Вычислим поток $\vec{E}$ через эту

сферу в соответствии с приведенным «рецептом», разбивая ее на элементы и суммируя потоки через эти элементы. Напряженность поля $\vec{E}$ во всех точках сферы перпендикулярна ей, поэтому угол θ между напряженностью $\vec{E}$ и $\Delta\vec{S}$ для всех элементов поверхности равен нулю, то есть $\cos\theta=1$. Кроме того, напряженность во всех точках сферы одинакова по абсолютной величине, поэтому суммирование величин $\Delta\Phi=E\cdot\Delta S$ сводится к умножению E на площадь поверхности сферы $4\pi r^2$. Используя выражение для напряженности поля точечного заряда, находим (в системе СИ):

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot (4\pi r^2) = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

Это соотношение справедливо как для положительного, так и для отрицательного точечных зарядов, если учитывать знаки зарядов и потоков. Мы видим, что поток Φ не зависит от радиуса сферы.

Теперь мы обобщим это свойство, то есть докажем, что поток вектора $\vec{E}$ поля точечного заряда через произвольную замкнутую поверхность, охватывающую точечный заряд, будет одним и тем же. Для доказательства этого утверждения можно воспользоваться тем фактом, что поток вектора $\vec{E}$ через элемент поверхности, высекаемой конусом малого раствора с вершиной в точке, где расположен точечный заряд, равен $\Delta\Phi=q\Delta\Omega/(4\pi\epsilon_0)$, где $\Delta\Omega$ — телесный угол конуса (это утверждение обосновано ниже). Разобьем пространство вокруг точечного заряда на такие малые конусы и просуммируем потоки $\Delta\Phi$ через элементы поверхности, высекаемые этими конусами. В результате мы получим тот же результат q/ϵ_0 , что и для сферы, поскольку суммирование по конусам сводится просто к замене $\Delta\Omega$ на полный телесный угол 4π .

Обоснуем приведенное утверждение о величине $\Delta\Phi$. Для конуса малого раствора высекаемый им элемент поверхности можно считать плоским (рис. 23). Поток вектора $\vec{E}$ через этот элемент равен $\Delta\Phi=E\Delta S\cos\theta$, где θ — угол между перпендикуляром к элементу поверхности и проведенным

к этому элементу радиус-вектором $\vec{r}$ (с началом в точке, где находится точечный заряд), так как $\vec{E}$ и $\vec{r}$ коллинеарны. Произведение $\Delta S \cos \theta$ равно площади элемента, высекаемого конусом из плоскости, перпендикулярной радиус-вектору. Поэтому $\Delta S \cos \theta = r^2 \Delta \Omega$, где $\Delta \Omega$ — телесный угол конуса. Подставляя также $E = q / (4\pi\epsilon_0 r^2)$, мы и находим поток через взятый элемент поверхности: $\Delta \Phi = \Delta \Omega q / (4\pi\epsilon_0)$, который оказывается независимым от r .

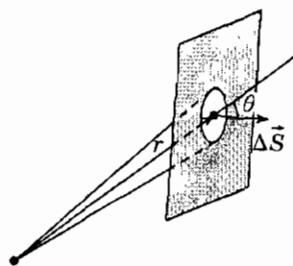


Рис. 23. Конус малого раствора и высекаемый им элемент поверхности

Вопрос 7.2. Будет ли справедливо это утверждение для замкнутой поверхности, несколько раз пересекаемой конусом (рис. 24)?

Вопрос 7.3. Чему равен поток вектора напряженности поля точечного заряда через плоскую поверхность?

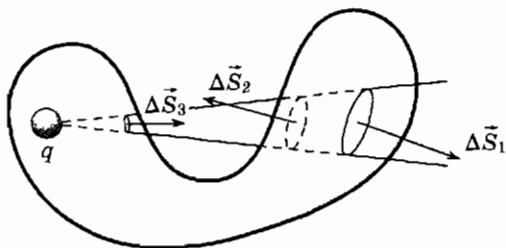


Рис. 24. Многократное пересечение конуса малого раствора с замкнутой поверхностью. К вопросу 7.2

Найдем теперь поток вектора $\vec{E}$ через замкнутую поверхность, охватывающую произвольную систему точечных зарядов. Вследствие принципа суперпозиции поток вектора $\vec{E}$ через любой элемент поверхности будет равен сумме

потоков напряженностей полей всех зарядов:

$$\Delta\Phi = \vec{E} \cdot \Delta\vec{S} = (\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots) \Delta\vec{S} = \Delta\Phi_1 + \Delta\Phi_2 + \dots$$

Отсюда следует, что поток Φ через всю поверхность будет равен:

$$\Phi = q_1/\varepsilon_0 + q_2/\varepsilon_0 + \dots = (q_1 + q_2 + \dots)/\varepsilon_0 = Q/\varepsilon_0.$$

Здесь Q — заряд системы, заключенный внутри поверхности.

Поскольку поле любого наэлектризованного тела или системы таких тел может быть представлено в виде суперпозиции полей точечных зарядов, соотношение

$$\Phi = Q/\varepsilon_0$$

выполняется и для поля произвольной системы тел, если Q — алгебраическая сумма зарядов системы, а Φ — поток вектора $\vec{E}$ через охватывающую эту систему поверхность. Таким образом,

поток вектора $\vec{E}$ через произвольную замкнутую поверхность пропорционален суммарному заряду Q , заключенному в области, охватываемой этой поверхностью.

Это утверждение и носит название *теоремы Гаусса*. Отметим, что в соответствии с теоремой Гаусса равен нулю поток вектора $\vec{E}$ через произвольную замкнутую поверхность, внутри которой отсутствуют заряды.

Вопрос 7.4. Чему равен поток вектора $\vec{E}$ через поверхность, охватывающую электрический диполь?

Сам факт пропорциональности потока и заряда справедлив и в системе СГСЕ. Однако коэффициент пропорциональности в этой системе единиц оказывается иным. Чтобы найти этот коэффициент, мы воспользуемся наиболее удобным для нас случаем. А именно, снова возьмем уединенный точечный заряд q и найдем поток $\vec{E}$ через

сферу радиуса r с центром в точке, где находится этот заряд. Тогда $\vec{E}$ во всех точках перпендикулярен поверхности, а его абсолютная величина равна $E = q/r^2$. Поэтому поток равен $\Phi = E \cdot 4\pi r^2 = 4\pi q$. Это и дает нам искомое соотношение

$$\Phi = 4\pi Q,$$

справедливое в системе СГСЕ для произвольной системы наэлектризованных тел и любой охватывающей их поверхности.

Теорема Гаусса позволяет по известной напряженности поля данной системы наэлектризованных тел восстановить распределение заряда в них (то есть найти заряды их произвольных частей). Действительно, зная напряженность поля, мы можем найти заряд, заключенный в произвольной области пространства, вычислив поток вектора $\vec{E}$ через охватывающую эту область поверхность и разделив результат на ϵ_0 (в системе СИ).

Вопрос 7.5. Если напряженность поля в некоторой области пространства имеет компоненты $E_x = \beta x$, $E_y = -\beta y$, $E_z = 0$, то в этой области отсутствуют наэлектризованные тела. Как это обосновать?

Заметим, что в области однородности поля зарядов быть не может, поскольку поток напряженности однородного поля через любую замкнутую поверхность равен нулю. Во избежание недоразумений подчеркнем, что из возможности приблизить любое поле в малых областях пространства однородным еще не следует, что в произвольном поле нет зарядов, поскольку именно отклонения поля от однородности и определяют заряд в той или иной малой области.

§ 8. Силовые линии

Электрическое поле можно изобразить наглядно, если использовать графические способы его представления, с одним из которых (карты напряженности) мы уже познакомились. Здесь мы обсудим другой способ, идея которого заимствована из гидродинамики. Поэтому по ходу изложения мы, как и в предыдущем параграфе, будем привлекать понятия и образы, используемые при анализе движения жидкости или газа.

Известно, что течение жидкости можно представить графически, если построить *линии тока*.

Линиями тока называют траектории, вдоль которых движутся частицы жидкости.

Из этого определения следует, что вектор скорости касателен к линии тока в любой ее точке. В качестве иллюстрации на рис. 25 показана картина линий тока для движения жидкости по трубе переменного сечения, где стрелки показывают направление движения.

По аналогии с линиями тока, характеризующими поле скорости, для поля напряженности вводятся *силовые линии*.

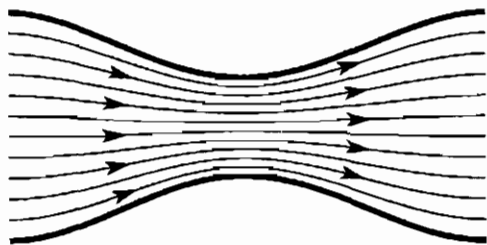


Рис. 25. Линии тока для движения жидкости по трубе переменного сечения

Силовой называется линия, в каждой точке которой вектор напряженности направлен по касательной к этой линии.

Это определение поясняет рис. 26, где изображена силовая линия некоторого электрического поля и нарисованы векторы напряженности, относящиеся к точкам 1 и 2 этой силовой линии.

|| Вопрос 8.1. Могут ли силовые линии пересекаться?

Линии тока имеют направление, в котором смещаются частицы жидкости при их движении. Силовой же линии поля приписывают направление, в котором действует сила, приложенная со стороны поля к положительному точечному заряду, «сидящему» на силовой линии. На рисунках направление силовой линии изображается стрелкой, как это и сделано на рис. 26.

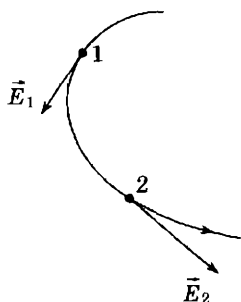


Рис. 26. Силовая линия и векторы напряженности

Если взять точечное тело и привести его в движение, принудительно смещая его в каждый момент времени в направлении вектора напряженности, то оно будет двигаться вдоль силовой линии, то есть силовая линия будет траекторией его движения. Поэтому силовая линия

будет «прочерчена», если это тело будет, подобно летящему самолету, оставлять за собой след.

|| Вопрос 8.2. Будет ли траектория движения точечного заряда во внешнем электрическом поле совпадать с силовой линией этого поля?

Однако при такой процедуре силовая линия будет «прочерчена» не полностью. Чтобы завершить ее построение, точечное тело необходимо поместить в исходную точку и повторить операцию, сдвигая его теперь против вектора напряженности. Таким образом, силовую линию можно про-

вести через любую точку пространства, неограниченно продолжая ее в обе стороны. Исключение представляют собой силовые линии, «попадающие» в точку с нулевой напряженностью. Дальше их продолжить нельзя, так как в точке, где $\vec{E}=0$, не определено направление, в котором надо смещать «рисующее» силовую линию точечное тело.

Напомним, что такая точка (с нулевой напряженностью) имеется в поле двух одноименных точечных зарядов. Поведение силовых линий вблизи этой точки O показано на рис. 27. Мы видим, что только отдельные силовые линии попадают в точку с нулевой напряженностью, а все соседние «промахиваются». Конечно, на листе бумаги невозможно отобразить полную пространственную картину, и мы изобразили только те линии, которые проходят в плоскости рисунка. В дальнейшем при построении картины силовых линий того или иного поля мы будем придерживаться того же правила. Картина силовых линий, представленная на рис. 27, является типичной для *изолированной* точки с нулевой напряженностью, то есть точки, в некоторой окрестности которой $\vec{E}$ в нуль не обращается. В некоторых (исключительных) случаях картина силовых линий вблизи изолированной точки с нулевой напряженностью может быть и сложнее.

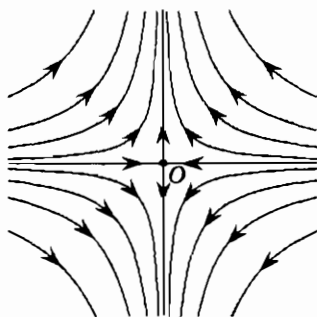


Рис. 27. Картина силовых линий электрического поля вблизи точки O с нулевой напряженностью

Построим силовые линии полей уединенных точечных зарядов. Поскольку вектор напряженности данных полей во всех точках направлен вдоль радиус-вектора, силовые линии являются радиальными. Они направлены от точки расположения положительного заряда и, наоборот, к точке расположения отрицательного. Результат построения таких силовых линий представлен на рис. 28. Силовые линии здесь оборваны на условной границе (сфере), вне которой

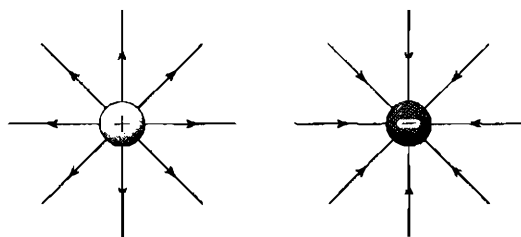


Рис. 28. Силовые линии полей уединенных положительного и отрицательного точечных зарядов

работает приближение поля точечного заряда для данного тела.

Обратим внимание на то, что при приближении к точечному заряду соседние силовые линии сближаются. С другой стороны, как мы уже установили, при уменьшении расстояния до точечного заряда возрастает напряженность его поля. Таким образом, уменьшению расстояния между соседними силовыми линиями сопутствует увеличение напряженности поля E . Оказывается, такая связь имеет место не только для поля точечного заряда, но и для произвольного поля вне наэлектризованных тел.

Чтобы понять происхождение этого свойства, снова обратимся к гидродинамике. Хорошо известно, что линии тока жидкости сближаются при увеличении скорости жидкости. Например, линии тока сближаются вблизи узкого места на рис. 25, где скорость жидкости максимальна. Причиной этого является постоянство потока жидкости через любое сечение трубы, вследствие чего скорость обратно пропорциональна площади сечения. Для сложного течения то же рассуждение применимо к *трубкам тока*, поверхность которых «состоит» из линий тока. Течение жидкости происходит как раз вдоль трубок

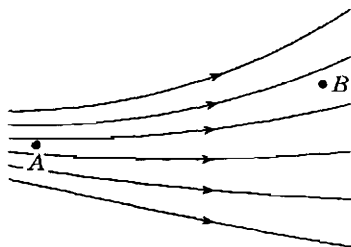


Рис. 29. Картина силовых линий некоторого поля

тока, и для каждой из них поток жидкости постоянен. Поэтому сечение трубки тока уменьшается при увеличении скорости жидкости, что соответствует сближению линий тока.

Вопрос 8.3. В какой из точек (A или B) будет больше напряженность поля, изображенного на рис. 29?

Та же схема работает и для электрического поля, где аналогом трубок тока являются *силовые трубки*, поверхность которых «состоит» из силовых линий. Точнее говоря,

силовая трубка ограничена замкнутой поверхностью, которая содержит всю силовую линию, если содержит хотя бы одну точку этой линии.

Имеется также аналогия между лучами и световыми пучками в геометрической оптике, с одной стороны, и силовыми линиями и силовыми трубками — с другой стороны.

Чтобы начертить силовую трубку, можно выполнить следующее построение. Возьмем произвольный замкнутый

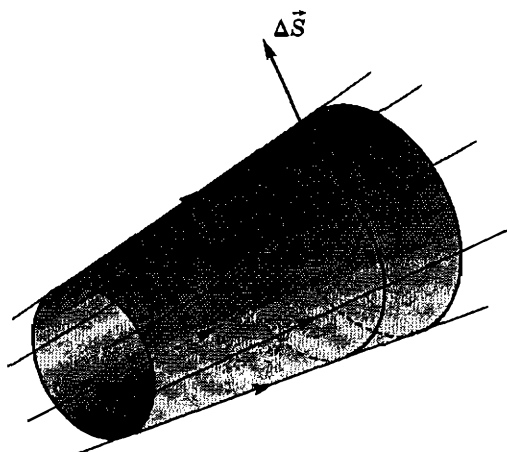


Рис. 30. Силовая трубка и способ ее построения

контур и будем смещать все его точки вдоль соответствующих силовых линий. При этом движении контур будет «заметать» (образовывать) поверхность некоторой силовой трубки (рис. 30). Выполняя это построение для полей точечных зарядов, мы находим, что силовыми трубками являются конусы с вершинами в точках расположения зарядов. Весьма своеобразно ведет себя силовая трубка, «нацеленная» в точку с нулевой напряженностью (см. рис. 27): вблизи этой точки силовая трубка расширяется наподобие воронки, края которой уходят в бесконечность. А навстречу ей «раскрывается» другая воронка.

Так же как одинаковым является поток жидкости через любое сечение трубки тока или поток энергии через любое сечение светового пучка,

поток напряженности электрического поля через любое сечение силовой трубки будет одинаковым в области пространства, где отсутствуют наэлектризованные тела.

Для доказательства этого утверждения рассмотрим кусок трубки, ограниченный какими-либо двумя ее сечениями. Такой кусок трубки фактически изображен на рис. 30, где нарисованные контуры ограничивают два сечения трубки. Так как внутри трубки зарядов нет, то поток напряженности через поверхность взятого куска по теореме Гаусса равен нулю. Далее, поток напряженности через его боковую поверхность отсутствует, так как по построению вектор напряженности $\vec{E}$ в любой точке боковой поверхности касателен к ней, то есть перпендикулярен к элементу поверхности $\Delta\vec{S}$ (рис. 30). Поэтому потоки напряженности через выбранные сечения равны по абсолютной величине, что и означает постоянство потока вдоль трубки.

Выберем силовую трубку, достаточно тонкую для того, чтобы электрическое поле в любом ее сечении можно было считать однородным. Тогда любое сечение, перпендикулярное трубке, будет перпендикулярно и вектору напряженности. Поэтому поток напряженности через сечение трубки

площади ΔS равен $\Delta\Phi = E\Delta S$. Так как поток напряженности $\Delta\Phi$ является одним и тем же для любого сечения, то

площадь поперечного сечения тонкой силовой трубки обратно пропорциональна напряженности поля.

Это и объясняет сближение силовых линий при увеличении напряженности поля.

По построению, силовые линии не выходят через боковую поверхность силовой трубки. Поэтому является одним и тем же число силовых линий, проходящих через любое сечение силовой трубки. Отсюда следует, что

отношение числа силовых линий, проходящих через тонкую силовую трубку, к площади ее поперечного сечения пропорционально напряженности поля.

Другими словами, плотность силовых линий вдоль тонкой силовой трубки пропорциональна напряженности поля.

Плотностью силовых линий называется отношение ΔN — числа силовых линий, проходящих через элемент поверхности, перпендикулярный силовым линиям, к площади этого элемента ΔS .

Конечно, для того чтобы можно было ввести понятие плотности силовых линий, они должны проводиться достаточно часто для того, чтобы их дискретность была несущественной.

Задача 8.1. Проверьте, что для поля точечного заряда плотность силовых линий вдоль тонкой силовой трубки пропорциональна напряженности поля.

Мы установили пропорциональность плотности силовых линий напряженности только для отдельной силовой трубки. Спрашивается, остается ли она в силе, если сравнивать разные силовые трубки? Вообще говоря, нет. Это утверждение поясняет рис. 31, где построены силовые линии

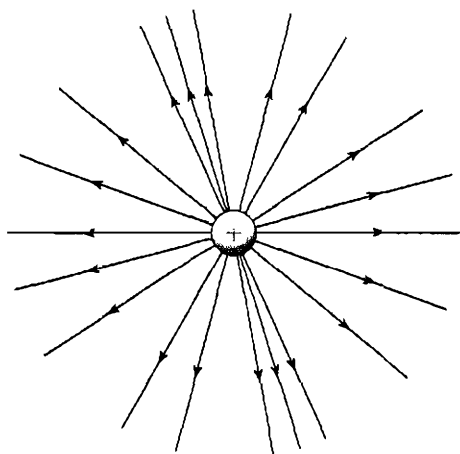


Рис. 31. Силовые линии поля точечного заряда, нарисованные в произвольных направлениях

поля точечного заряда, неоднородно распределенные по направлениям. Вследствие этого плотности силовых линий на равных расстояниях от заряда, но для разных направлений будут различными. В то же время напряженность поля, как мы уже знаем, является одной и той же в точках, равноудаленных от заряда.

Будем теперь строить картину силовых линий так, чтобы

отношение числа силовых линий ΔN к потоку напряженности $\Delta\Phi$ было одним и тем же для всех силовых трубок.

Как следствие, напряженность $E = \Delta\Phi/\Delta S$ будет пропорциональна плотности силовых линий $\Delta N/\Delta S$ во всем пространстве. Тогда картина силовых линий будет нести в себе полную информацию о напряженности поля, поскольку направление силовых линий совпадает с направлением вектора напряженности $\vec{E}$, а их плотность задает его абсолютную величину.

|| Вопрос 8.4. Могут ли силовые линии касаться?

Принятое нами правило приводит к закону пропорциональности N и Φ для произвольной поверхности, где N — число проходящих через нее силовых линий, а Φ — поток вектора напряженности через эту поверхность. Необходимо только подсчитывать силовые линии с учетом знака, который зависит от взаимной ориентации силовой линии и элемента поверхности $\Delta\vec{S}$: это «плюс», если силовая линия пересекает элемент поверхности в направлении $\Delta\vec{S}$, и «минус» в противоположном случае. Например, для замкнутой поверхности, охватывающей некоторую область, силовые линии, выходящие из области, следует засчитывать со знаком «+», а силовые линии, входящие в область — со знаком «-». Тогда даже силовая линия, несколько раз пересекающая поверхность (что, например, возможно для поверхности, содержащей «карман», как показано на рис. 32) будет подсчитана только один раз.

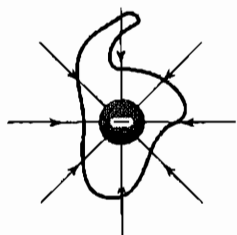


Рис. 32. К правилу подсчета числа силовых линий

Установленное свойство позволяет переформулировать теорему Гаусса в терминах силовых линий. А именно,

число силовых линий, проходящих через любую замкнутую поверхность, пропорционально суммарному заряду Q , заключенному в области пространства, охватываемой этой поверхностью.

Отсюда следует, что число силовых линий, начинающихся (или заканчивающихся) на заряженном теле, пропорционально величине его заряда. Если же на данном теле силовые линии и начинаются, и заканчиваются, то его заряд пропорционален разности чисел первых и вторых.

Приведем в качестве примеров картины силовых линий полей систем точечных зарядов, построенных в соответствии с принятыми правилами.

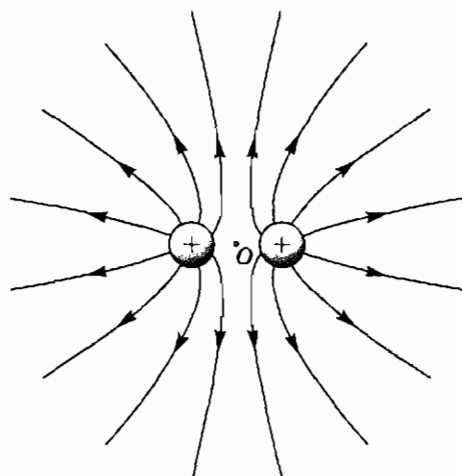


Рис. 33. Картина силовых линий полей двух одинаковых положительных зарядов

Прежде всего, поле точечного заряда характеризуется картиной силовых линий, равномерно распределенных по всем направлениям (как это и было показано на рис. 28).

|| **Вопрос 8.5.** Откуда следует это утверждение?

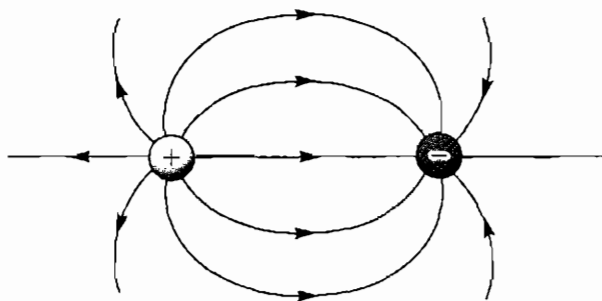


Рис. 34. Картина силовых линий поля двух одинаковых по абсолютной величине разноименных зарядов

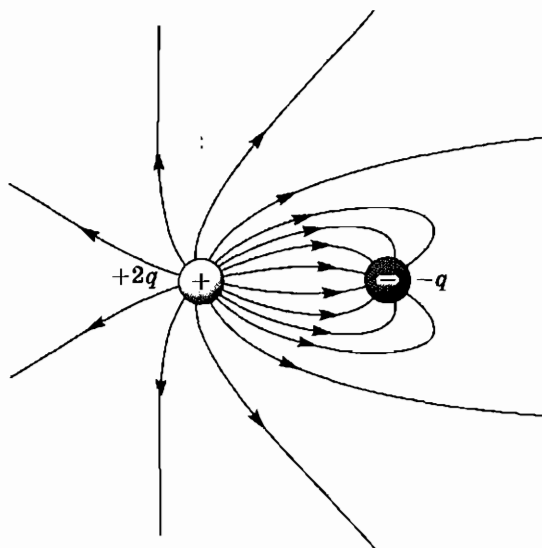


Рис. 35. Картина силовых линий поля двух разноименных зарядов, отличающихся вдвое по абсолютной величине

На рис. 33 приведены силовые линии поля двух одинаковых положительных точечных зарядов, на рис. 34 — поля разноименных зарядов $+q$ и $-q$, и на рис. 35 — поля точечных зарядов $+2q$ и $-q$. Вблизи каждого точечного заряда силовые линии радиальны, по мере же удаления от зарядов силовые линии искривляются. На рис. 33 имеется точка O с нулевой напряженностью, она расположена посередине между зарядами. Приведенный нами ранее рис. 27 представляет окрестность этой точки, рассмотренную «под микроскопом». Точка O лежит в плоскости симметрии, проходящей посередине между зарядами и перпендикулярной соединяющей их прямой. Если мы будем двигаться по этой плоскости вдоль луча, исходящего из точки O , то напряженность возрастает от нуля до некоторого максимального значения, а затем убывает (поскольку она стремится к нулю на больших расстояниях от зарядов). Соответственно, на рис. 33 силовые линии, проходящие вблизи плоскости

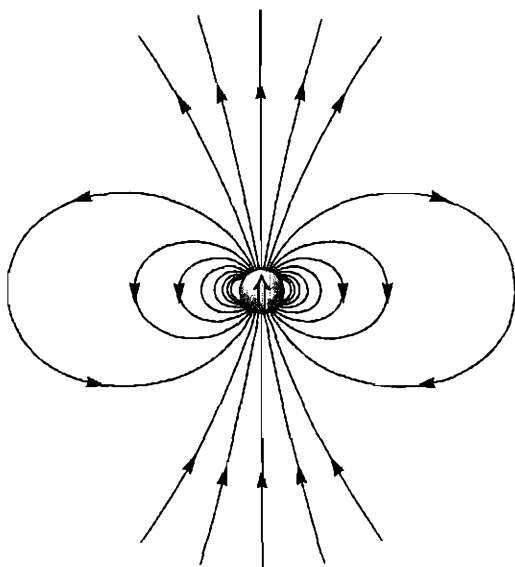


Рис. 36. Картина силовых линий поля точечного диполя

симметрии, сначала сближаются, а затем расходятся. Точка с нулевой напряженностью имеется и на рис. 35, она расположена справа от заряда $-q$.

На рис. 33, 34 и 35 показаны картины силовых линий в области пространства с размерами порядка расстояния между зарядами. На больших же расстояниях поле двух зарядов $+q$ близко к полю точечного заряда $+2q$, а поле зарядов $+2q$ и $-q$ — к полю точечного заряда $+q$. В этой области пространства силовые линии ведут себя так же, как на рис. 28. Что же касается системы зарядов $+q$ и $-q$, то ее поле на больших расстояниях аппроксимируется полем точечного диполя, картина силовых линий которого приведена на рис. 36. Обратим внимание на то, что все силовые линии поля точечного диполя исходят из его «северного полюса» и приходят к «южному полюсу». Таким образом ни одна силовая линия не уходит на бесконечность, как и должно быть для незаряженного тела.

§ 9. Поля пленок и нитей

Существуют тела — нити и пленки — у которых продольные размеры много больше их толщины. Электрическое поле таких (наэлектризованных) тел обладает рядом особенностей, которые мы и рассмотрим. Мы изучим поле в областях, удаленных от нити или пленки на расстояние, намного превышающее их толщину, где поле мало чувствительно к тому, как именно заряд распределен поперек тела, но «знает», как он распределен вдоль тела. Поэтому при исследовании поля в таких областях можно считать толщину нити или пленки пренебрежимо малой. Чтобы подчеркнуть это обстоятельство, мы будем иногда употреблять термины *тонкая пленка* и *тонкая нить*, которые аналогичны термину «точечное тело».

Введем величины, характеризующие распределение заряда по тонкой нити или по тонкой пленке. В общем случае заряд вдоль нити или пленки распределен неравномерно. Однако если мы берем достаточно малый кусочек, то естественно ожидать, что для нити его заряд Δq будет пропорционален длине кусочка Δl , а для пленки — площади кусочка ΔS . Поэтому распределение заряда удобно характеризовать соответствующими отношениями. Для нити вводится *линейная плотность заряда* λ , которая равна отношению заряда Δq , сосредоточенного на отрезке нити, к длине этого отрезка Δl :

$$\lambda = \Delta q / \Delta l.$$

Аналогично для пленки вводится *поверхностная плотность заряда* σ , равная отношению заряда Δq кусочка пленки, к площади этого кусочка ΔS :

$$\sigma = \Delta q / \Delta S.$$

Сам же факт пропорциональности заряда кусочка его длине или площади записывается теперь в следующем виде:

$$\Delta q = \lambda \Delta l \quad \text{или} \quad \Delta q = \sigma \Delta S.$$

Следует подчеркнуть, что размеры кусочков, фигурирующие в данных выше определениях, должны существенно превышать толщину тела, но в то же время быть много меньше его продольных размеров.

Мы будем говорить, что нить или пленка заряжена *однородно*, если соответствующая плотность не зависит от координат, то есть если $\lambda = \text{const}$ для нити и $\sigma = \text{const}$ для пленки. Для однородно заряженных тел заряд равен произведению λl для нити (l — ее длина) и σS для пленки (S — ее площадь).

Задача 9.1. Найдите заряд однородно заряженной кольцевой нити радиуса R , если ее линейная плотность заряда равна λ .

Задача 9.2. Найдите заряд однородно заряженной сферы радиуса R , если ее поверхностная плотность заряда равна σ .

В общем случае плотности зарядов λ и σ являются функциями координат, отсчитываемых вдоль нити или пленки. Если координатная зависимость λ или σ известна, то мы можем найти заряд тела или любой его части. Для этого тело (или его часть) надо мысленно разбить на малые кусочки, найти заряд каждого такого кусочка по формуле $\Delta q = \lambda \Delta l$ или $\Delta q = \sigma \Delta S$ и просуммировать.

Напряженность поля назлектризованной нити или пленки можно найти в соответствии с принципом суперпозиции. Для этого сначала надо воспользоваться все тем же приемом, мысленно разбив нить или пленку на небольшие кусочки, вычислять заряд которых мы уже умеем. Если размер этих кусочков много меньше расстояния от них до точки наблюдения, то напряженность поля каждого кусочка в этой точке находится по формуле для точечного заряда. Далее надо векторно просуммировать напряженности полей отдельных кусочков.

Задача 9.3. Найдите напряженность поля однородно заряженной кольцевой нити радиуса R в точках прямой, проходящей через центр кольца перпендикулярно его плоскости. Проверьте, что на расстояниях, намного превышающих радиус кольца, найденное выражение переходит в выражение для напряженности поля точечного заряда.

Сформулированный способ действий универсален, то есть годится для любого тела. Однако, как правило, его применение приводит к громоздким вычислениям. В то же время для ряда случаев можно довольно просто найти поле, воспользовавшись геометрическими соображениями. Рассмотрим в качестве примера поле бесконечно длинной однородно заряженной прямой тонкой нити.

Прежде всего заметим, что вектор напряженности $\vec{E}$ в любой точке A будет направлен радиально, то есть он будет параллелен перпендикулярному нити отрезку OA , где точка O лежит на нити (рис. 37а). Доказательство этого утверждения сводится к следующему. Повернем нить на 180° градусов вокруг оси OA . При этом вокруг той же оси повернется и вектор напряженности $\vec{E}$. После поворота нить займет прежнее положение, то есть распределение заряда не изменится, поэтому останется прежним и электрическое поле. Отсюда следует, что вектор напряженности $\vec{E}$ в точке A параллелен OA , так как только при этом условии он не изменится при повороте. Кроме того, в точках, равноотстоящих от нити, абсолютная величина напряженности будет одной и той же. Это следует из неизменности поля относительно поворотов нити вокруг проходящей через нее оси и сдвигов нити вдоль той же оси,

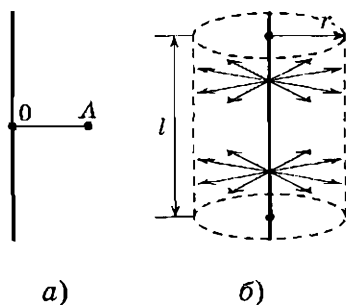


Рис. 37. Поле положительно заряженной нити

поскольку эти преобразования не меняют распределение заряда.

Силовые линии поля нити являются лучами, направленными от нити при $\lambda > 0$ и направленными к нити при $\lambda < 0$. Используя пропорциональность потока и числа силовых линий, для положительно заряженной нити мы приходим к картине силовых линий, приведенной на рис. 376. Силовые линии равномерно распределены по направлениям в плоскости, перпендикулярной нити, а их плотность на данном расстоянии от нити не зависит от координаты, отсчитываемой вдоль нити.

Величину напряженности E поля нити в точке наблюдения, удаленной от нити на расстояние r , можно найти, применив теорему Гаусса к цилиндру с радиусом r и высотой l , ось которого совпадает с нитью (рис. 376). Поток вектора напряженности через торцы цилиндра равен нулю, поскольку вектор напряженности $\vec{E}$ перпендикулярен элементам $\Delta\vec{S}$ торца. Это видно и из картины силовых линий, которые выходят только через боковую поверхность (напомним, что число силовых линий, проходящих через данную поверхность, пропорционально потоку напряженности через эту поверхность). Чтобы вычислить поток вектора напряженности Φ через боковую поверхность цилиндра, надо просто умножить E на ее площадь, поскольку вектор $\vec{E}$ во всех точках перпендикулярен этой поверхности и одинаков по абсолютной величине, то есть $\Phi = 2\pi r l E$. Заряд же внутри цилиндра равен $q = \lambda \cdot l$. Приравнивая теперь Φ к q/ϵ_0 , мы находим

$$E = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0}.$$

Полученное выражение показывает, что величина напряженности поля тонкой нити обратно пропорциональна первой степени расстояния до нее, в то время как для точечного заряда она была обратно пропорциональна квадрату расстояния до заряда.

По аналогии с электрическим диполем можно рассмотреть поле двух параллельных прямых нитей с линейными

зарядами $\pm\lambda$, которые представляют собой наэлектризованную, но незаряженную протяженную систему. На больших расстояниях r от нитей (то есть намного превышающих расстояние между нитями) напряженность их поля спадает обратно пропорционально второй степени r . При этом поле оказывается анизотропным, то есть напряженность $\vec{E}$ зависит от угла θ между отрезком, соединяющим нити, и направлением луча, идущего в точку наблюдения.

Задача 9.4. Найдите угловую зависимость напряженности поля двух параллельных прямых нитей с линейными зарядами $\pm\lambda$ на расстояниях r , намного превышающих расстояние между нитями l .

Аналогичным образом, с использованием геометрических соображений, может быть найдено поле бесконечной плоской однородно заряженной тонкой пленки. Вектор напряженности поля пленки в любой точке пространства A направлен перпендикулярно пленке, это единственное выделенное направление в данной геометрии. Обосновать это можно так же, как и для нити, рассматривая вращения пленки относительно оси, перпендикулярной пленке. Для положительно заряженной пленки векторы напряженности «смотрят» от пленки, а для отрицательно заряженной пленки — к пленке, в обоих случаях направление векторов $\vec{E}$ по разные стороны пленки противоположно. Абсолютные же величины векторов напряженности по разные стороны от пленки равны, что отражает эквивалентность этих сторон. Поэтому силовые линии должны поровну распределяться на обе стороны пленки. Соответствующая картина силовых линий приведена на рис. 38.

Величину напряженности поля пленки можно найти, применяя теорему Гаусса к цилиндру, ось которого перпендикулярна пленке (рис. 38). На этот раз равен нулю поток напряженности через боковую поверхность цилиндра. Соответственно, силовые линии выходят из цилиндра только через его торцы. Только для этих поверхностей и надо вычислять поток Φ , который оказывается равным $2ES$, где

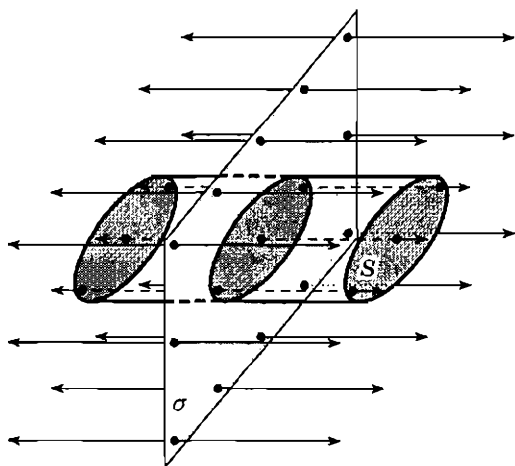


Рис. 38. Картина силовых линий поля положительно заряженной пленки

S — площадь торца цилиндра. Приравнявая величину Φ к заключенному внутри цилиндра заряду $q = \sigma \cdot S$, деленному на ϵ_0 , находим:

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$$

Здесь, как и раньше, σ — поверхностная плотность заряда пленки.

Мы видим, что по каждую сторону от пленки напряженность поля не зависит от координат, то есть поле является однородным. Поэтому при приближении к пленке напряженность остается ограниченной, а не возрастает, как для точечного заряда или тонкой нити. Кроме того, напряженность поля не стремится к нулю при удалении точки наблюдения от тела. Это находится в кажущемся противоречии с общим свойством, согласно которому напряженность поля любого тела должна стремиться к нулю на больших расстояниях от него. На самом деле никакого противоречия нет, так как мы считаем пленку неограниченной, то есть рассматриваем поле на расстояниях от пленки, много

меньших, чем ее продольные размеры. На расстояниях же, превышающие эти размеры, напряженность поля будет, разумеется, стремиться к нулю при удалении от тела.

Задача 9.5. Постройте график зависимости напряженности поля $E(x)$ однородно заряженной пленки (x — ось координат, перпендикулярная пленке).

Рассмотрим теперь поле двух параллельных плоских пленок с поверхностными плотностями заряда $\pm\sigma$, которые представляют собой пример наэлектризованной, но незаряженной системы. Поле каждой такой пленки нам уже известно. Их суперпозиция будет представлять собой однородное поле с напряженностью $E = \sigma/\epsilon_0$ между пленками и иметь равную нулю напряженность вне пленок (рис. 39).

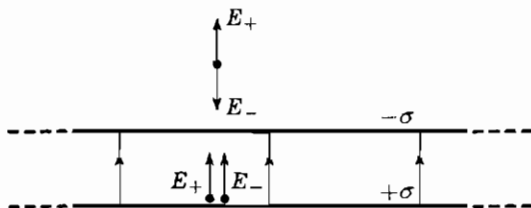


Рис. 39. Картина силовых линий поля двух параллельных плоских пленок с поверхностными плотностями заряда $\pm\sigma$

Задача 9.6. Рассмотрим систему двух однородно заряженных пленок с поверхностными плотностями заряда $\pm\sigma$, имеющих форму параллельных полуплоскостей с краями, лежащими в плоскости, перпендикулярной этим полуплоскостям. Найдите значение напряженности в точке A этой плоскости, лежащей посередине между пленками (рис. 40).

Вернемся теперь к произвольной нити или пленке. Будем считать, что такое тело имеет гладкую (без изломов) форму. Выберем некоторую точку, расстояние h от которой до нити или пленки гораздо меньше, чем радиус (радиусы)

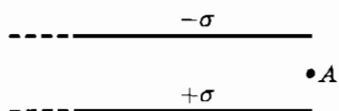


Рис. 40. Параллельные пленки в форме полуплоскостей

кривизны этого тела. Тогда около выбранной точки можно выделить часть тела, по размерам намного превосходящую h , но в то же время остающуюся приблизительно прямой для нити и плоской для пленки. Если h

достаточно мало, то эту часть тела можно считать заряженной однородно. Все остальные части тела удалены от точки наблюдения на расстояние, намного превышающее h и создают, следовательно, в окрестности этой точки однородное поле. Однородным вблизи тонкой нити или пленки можно считать и внешнее поле (если оно присутствует), поскольку оно порождается телами, удаленными от нити или пленки на расстояние, много большее ее толщины (иначе ее нельзя считать тонкой). Поэтому поле вблизи любой тонкой нити можно представить в виде суперпозиции поля прямой однородно заряженной нити и однородного поля, а поле вблизи любой пленки сводится к суперпозиции поля плоской однородно заряженной пленки и однородного поля. Поскольку напряженность поля тонкой нити возрастает при приближении к ней, однородной составляющей поля вблизи нити можно пренебречь. Напряженность же поля тонкой пленки остается вблизи нее конечной и поэтому однородная составляющая существенно влияет на поле вблизи пленки.

Рассмотрим подробнее поле вблизи пленки, которое в соответствии со сказанным является однородным по каждой сторону от пленки. Пусть $\vec{E}'_1$ и $\vec{E}'_2$ — напряженности поля, создаваемого близким участком пленки по разные стороны от нее. Они перпендикулярны пленке, по величине равны $\sigma/(2\epsilon_0)$ и противоположны по направлению. Напряженность же «дополнительного» однородного поля $\vec{E}_0$ (внешнего по отношению к данному участку пленки) будет одинаковой по обе стороны от пленки. Суммарные напряженности поля, как показано на рис. 41а, равны соответственно $\vec{E}_1 = \vec{E}_0 + \vec{E}'_1$ и $\vec{E}_2 = \vec{E}_0 + \vec{E}'_2$. Обратим внимание на то, что напряженность внешнего поля $\vec{E}_0$ равна

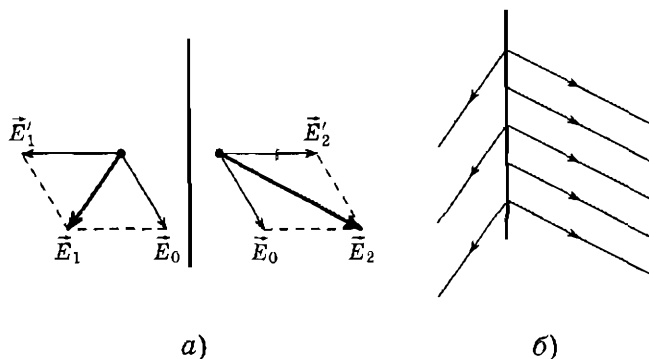


Рис. 41. Напряженность поля и картина силовых линий вблизи заряженной пленки

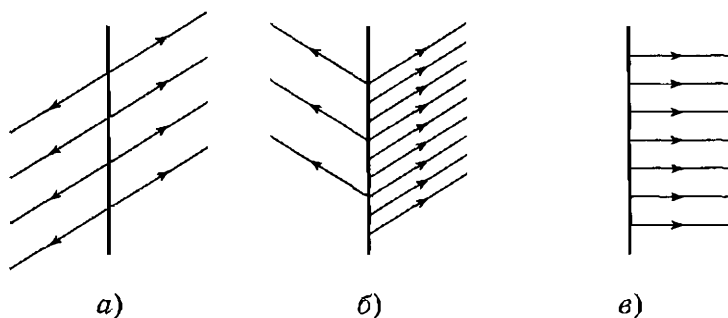


Рис. 42. Реальны ли такие картины силовых линий вблизи заряженной тонкой пленки? К вопросу 9.1

полусумме напряженностей $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$. Касательные (параллельные пленке) компоненты векторов $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ равны друг другу и равны проекции вектора $\vec{E}_0$ на плоскость пленки. Разность же нормальных компонент векторов $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ (их проекций на ось, перпендикулярную пленке), взятая с учетом знаков, равна σ/ϵ_0 . Этому соответствует картина силовых линий, приведенная на рис. 41б. На пленке силовые линии поля испытывают излом. Кроме того, из-за

разницы в абсолютной величине напряженности различна плотность силовых линий по разные стороны от пленки.

|| **Вопрос 9.1.** Могут ли соответствовать реальным полям вблизи пленки картины силовых линий, представленные на рис. 42?

§ 10. Электрические силы

Определение силы, действующей на наэлектризованное тело в электрическом поле, является одной из основных задач электростатики. Рассмотрим эту задачу, предполагая, что известно как внешнее поле, в которое помещено тело, так и распределение заряда по нему.

Мы начнем со случая, когда тело можно считать точечным зарядом. Тогда поставленная задача решается весьма просто. Из определения напряженности электрического поля следует, что сила $\vec{F}$, действующая на точечный заряд q , помещенный в электрическое поле с напряженностью $\vec{E}$, равна

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E}.$$

Использованная нами векторная форма записи позволяет «автоматически» учитывать тот факт, что на заряды разных знаков силы со стороны одного и того же поля действуют в разные стороны: в направлении $\vec{E}$ при $q > 0$ и в противоположную сторону при $q < 0$.

Выражение $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$ аналогично выражению для силы тяжести $m \cdot \vec{g}$, действующей на точечное тело в гравитационном поле. Тем самым мы еще раз убеждаемся в том, что $\vec{g}$ является напряженностью гравитационного поля, а масса тела m играет роль, аналогичную роли заряда тела для электрического взаимодействия.

Задача 10.1. Найдите силу, которая действует на точечный заряд q в поле точечного диполя, если расстояние между ними равно r и дипольный момент диполя $\vec{d}$ коллинеарен прямой, проходящей через эти тела.

Задача 10.2. Найдите силу, которая действует на точечный заряд q в поле однородно заряженной с линейной плотностью λ кольцевой нити радиуса R , если он помещен на прямой, проходящей через центр кольца перпендикулярно плоскости, в которой лежит кольцо, на расстоянии z от этой плоскости.

Задача о вычислении силы, действующей на произвольное наэлектризованное тело, помещенное во внешнее электрическое поле, может быть сведена к задаче о точечных зарядах. Для этого надо использовать уже знакомый нам прием. А именно, тело необходимо мысленно разбить на части (кусочки), достаточно малые для того, чтобы считать их точечными, найти силу, действующую на каждый такой кусочек со стороны внешнего поля, и (векторно) сложить эти силы. Таким образом, мы приходим к выражению

$$\vec{F} = q_1 \vec{E}_1 + q_2 \vec{E}_2 + \dots,$$

где $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \dots$ — значения напряженности внешнего поля в тех точках, где расположены первый, второй и так далее кусочки, а $q_1, q_2, \dots$ — заряды этих кусочков.

Отметим, что $q_i \vec{E}_i$ не является электрической силой, которая действует на i -й кусочек тела, поскольку тело предполагается наэлектризованным, то есть обладает собственным полем, которое накладывается на поле внешнее. Соответственно, сила, которая действует на i -й кусочек, равна сумме сил, действующих на него со стороны внешнего и собственного полей. Однако при суммировании по кусочкам силы, которые действуют на них со стороны собственного поля тела, дают нуль (так как собственное поле тела не может производить действующую на него силу). Поэтому в приведенной формуле и присутствуют только силы, связанные с внешним полем.

Задача 10.3. Найдите приходящуюся на единицу длины силу, с которой отталкиваются две параллельные прямые однородно заряженные нити, расположенные на расстоянии r друг от друга, если линейная плотность заряда в них одинакова и равна λ .

Задача 10.4. Найдите приходящуюся на единицу площади силу, с которой отталкиваются две параллельные плоские однородно заряженные пленки, если поверхностная плотность заряда в них одинакова и равна σ .

Алгоритм, связанный с выражением $\vec{F} = q_1 \vec{E}_1 + q_2 \vec{E}_2 + \dots$, дает принципиальный способ вычисления силы, которая действует на произвольное наэлектризованное тело во внешнем поле, хотя использование этого способа для конкретных случаев может порождать значительные вычислительные трудности. Задача существенно упрощается, если напряженность внешнего поля мало отличается в разных точках тела. Тогда действующая на тело сила равна $\vec{F} = q_1 \vec{E} + q_2 \vec{E} + \dots = (q_1 + q_2 + \dots) \vec{E}$. В силу аддитивности заряда стоящая в скобках величина равняется суммарному заряду тела q , то есть $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$. Таким образом, мы возвращаемся к выражению для силы, действующей на точечный заряд. Это естественно, так как именно малость размера тела по сравнению с масштабами, на которых меняется внешнее поле, позволяет считать это тело точечным.

Однако выражение $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$ неприменимо для вычисления силы, действующей на незаряженное, но наэлектризованное тело малых размеров (например, точечный диполь). Действительно, сила, действующая на наэлектризованное тело во внешнем поле, нулю, вообще говоря, не равна, а произведение $q \cdot \vec{E}$ для незаряженного тела равно нулю. Поэтому, чтобы найти силу, которая действует на такое тело, надо учитывать неоднородность поля. Внутри тела малых размеров (и вблизи от него) поле можно представить в виде суперпозиции однородного поля и поля, напряженность которого линейно зависит от координат. Именно последняя составляющая и приводит к ненулевой силе, действующей на точечный диполь.

Проиллюстрируем сказанное на примере электрического диполя. В неоднородном внешнем поле силы, действующие на заряды диполя, будут иметь разные величины, поскольку значения напряженности поля в точках расположения зарядов диполя будут различными. Соответственно, будет отлична от нуля и равнодействующая этих сил, которая равна $\vec{F} = q(\vec{E}_1 - \vec{E}_2)$. Здесь $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ — напряженности внешнего поля в точках, где расположены заряды диполя $\pm q$. Линейная зависимость напряженности поля от координат

приводит к тому, что действующая на диполь сила, определяемая разностью $\vec{E}_1 - \vec{E}_2$, пропорциональна его длине l . Поскольку эта сила пропорциональна также заряду q , то мы приходим к выводу, что сила, действующая на диполь во внешнем слабо неоднородном поле, пропорциональна дипольному моменту диполя $d = ql$. С другой стороны, сила, действующая на диполь, пропорциональна скорости изменения напряженности поля. В результате мы приходим к выводу, что действующая на диполь сила равна произведению его дипольного момента d на скорость изменения напряженности поля вдоль направления дипольного момента диполя $\vec{d}$.

Задача 10.5. Найдите x -компоненту силы, действующей на электрический диполь, ориентированный вдоль оси x , во внешнем поле с напряженностью, x -компонента которой меняется по закону $E_x = \beta \cdot x$, где β — некоторая константа.

Все сказанное выше об электрическом диполе справедливо и для произвольного точечного диполя.

Действующая на точечный диполь сила $\vec{F}$ равна произведению его дипольного момента d на скорость изменения напряженности поля $\vec{E}$ вдоль вектора $\vec{d}$.

Этот закон надо понимать покомпонентно (покоординатно): чтобы найти x -компоненту силы $\vec{F}$, надо перемножить d и скорость изменения x -компоненты напряженности поля $\vec{E}$ вдоль направления $\vec{d}$. Приведенное правило можно обосновать стандартным образом, разбив мысленно точечный диполь на пары точечных зарядов с противоположными зарядами (как это делалось в предыдущем параграфе). Отметим аналогию найденного закона с выражением для силы, действующей на точечный заряд: в обоих случаях сила определяется произведением характеристики тела (величины заряда или дипольного момента) на определенную характеристику поля (его напряженность или скорость ее изменения вдоль определенного направления).

Рассмотрим в качестве примера точечный диполь в поле точечного заряда. Сила, действующая на точечный диполь, зависит как от расстояния r между этими телами, так и от ориентации дипольного момента, то есть от угла θ между дипольным моментом $\vec{d}$ и радиус-вектором $\vec{r}$, идущим из точки расположения точечного заряда в точку расположения диполя (рис. 43). Скорость изменения напряженности поля точечного заряда обратно пропорциональна r^3 (поскольку сама напряженность обратно пропорциональна r^2), по тому же закону будет зависеть от r и сила, действующая на диполь (при фиксированном значении $\vec{d}$). Если заряд q положителен, то при $\theta < \pi/2$ будет наблюдаться притяжение диполя к точечному заряду, а при $\theta > \pi/2$ — отталкивание. При $q < 0$ области притяжения и отталкивания поменяются местами.

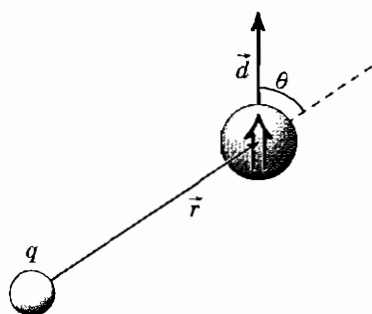


Рис. 43. Ориентация дипольного момента $\vec{d}$ точечного диполя относительно радиус-вектора $\vec{r}$, идущего из точки расположения точечного заряда в точку расположения диполя

Вопрос 10.1. Как обосновать приведенные утверждения относительно ориентационной зависимости взаимодействия?

Можно и иначе решать поставленную задачу, воспользовавшись тем, что силы взаимодействия тел равны по величине и противоположны по знаку. Поэтому можно найти силу, действующую на точечный заряд в поле диполя, которое мы уже изучили. Разумеется, при этом получатся те же самые результаты.

Вопрос 10.2. Как зависит сила взаимодействия двух точечных диполей от расстояния r между ними при фикс-

сированных значениях их дипольных моментов (как по направлению, так и по величине)?

Вопрос 10.3. Притягиваются или отталкиваются два точечных диполя, дипольные моменты которых коллинеарны соединяющей диполи прямой? Рассмотреть два случая: когда дипольные моменты направлены в одну и ту же сторону или в противоположные стороны.

Можно поставить вопрос не только о силе, действующей на наэлектризованное тело во внешнем поле, но и о действующем на него моменте сил. Опять-таки, простые формулы можно получить для точечного тела. При этом момент сил оказывается нечувствительным к величине заряда точечного тела, поскольку она не меняется при поворотах тела, а момент сил как раз и определяет воздействие на тело со стороны внешнего поля при поворотах тела. Поэтому момент сил связан с дипольным моментом точечного тела, который изменяется при его поворотах. При этом неоднородность поля оказывается несущественной.

Для иллюстрации сказанного обратимся к электрическому диполю в однородном внешнем поле. В этом случае силы, действующие на заряды диполя, равны по величине, противоположны по направлению и имеют разные точки приложения. Поэтому на диполь будет действовать пара сил (рис. 44), которая и создает момент, приложен-

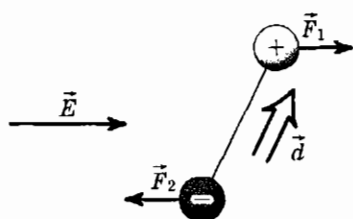


Рис. 44. Пара сил, действующая на электрический диполь в однородном электрическом поле

ный к телу. Вычислим этот момент, используя в качестве оси прямую, проходящую через один из зарядов диполя (и перпендикулярную плоскости рис. 44). Тогда момент будет определяться только силой $F = q \cdot E$, действующей на второй заряд. Плечо в данном случае равно $l \sin \theta$ (где θ — угол между векторами $\vec{d}$ и $\vec{E}$),

так что момент равен $M = qEl \sin \theta = dE \sin \theta$. Используя теперь

стандартные аргументы, связанные с мысленным разбиением тела, мы заключаем, что то же выражение $M = dE \sin \theta$ дает момент сил, приложенный со стороны внешнего поля к произвольному точечному телу, вне зависимости от величины его заряда.

Обратим внимание на то, что момент сил равен нулю для двух ориентаций дипольного момента: когда он направлен вдоль вектора напряженности или навстречу ему. Первая ориентация соответствует устойчивому положению равновесия (устойчивой ориентации точечного диполя), а вторая — неустойчивому положению равновесия. Действительно, при малом отклонения диполя от ориентации, соответствующей направлению дипольного момента вдоль вектора напряженности, момент сил будет поворачивать его обратно, что означает устойчивость положения равновесия. При малом же отклонении диполя от ориентации, соответствующей направлению дипольного момента навстречу вектору напряженности, момент сил будет поворачивать его дальше, что означает неустойчивость положения равновесия. Таким образом, внешнее поле стремится повернуть точечный диполь так, чтобы его дипольный момент $\vec{d}$ «смотрел» вдоль вектора напряженности $\vec{E}$.

Вопрос 10.4. Как будет стремиться повернуться точечный диполь в поле положительного точечного заряда (рис. 43)?

Можно также поставить задачу о силах взаимодействия в произвольной системе назлектризованных тел. Вследствие принципа суперпозиции сила, действующая на данное тело системы, равна сумме сил, действующих на него со стороны полей остальных тел системы. Таким образом, задачу можно свести к вычислению парных сил взаимодействия тел системы. И если они известны, то силу, действующую на произвольное тело, можно вычислять как векторную сумму сил, вызываемых всеми остальными те-

лами. Этот прием хорошо работает, например, для системы точечных зарядов, где парные силы взаимодействия определяются законом Кулона.

Задача 10.6. Найдите силы, действующие на каждый из трех одинаковых точечных зарядов величины q , расположенных на одной прямой, если расстояния от среднего заряда до крайних одинаковы и равны r .

Задача 10.7. Найдите силы, действующие на каждый из трех одинаковых точечных зарядов величины q , расположенных в вершинах правильного треугольника со стороной r .

Тот же прием можно применить и к системе протяженных наэлектризованных тел, если мысленно разбить их на части (кусочки), которые можно считать точечными, и свести тем самым задачу о взаимодействии протяженных тел к задаче о взаимодействии точечных зарядов. При вычислении силы, действующей на данное тело, можно принимать во внимание только силы, действующие на его части со стороны других тел (так как силы взаимодействия отдельных частей данного тела взаимно компенсируют друг друга).

В общем случае вычисление сил взаимодействия протяженных наэлектризованных тел можно произвести только численно, с привлечением компьютера. Тем не менее замена протяженных тел на точечные заряды (а наэлектризованных, но незаряженных тел — на диполи) позволяет обычно оценить электрические силы в системе произвольных наэлектризованных тел.

§ 11. Работа электростатического поля

Мы уже убедились, что пробный заряд является весьма удобным инструментом для исследования поля. В этом параграфе мы исследуем особенности работы, которую совершает поле при перемещении в нем пробного заряда. Работа, которую совершает поле над пробным телом, пропорциональна величине его заряда. Вследствие предполагаемой малости заряда пробного тела эта работа всегда много меньше энергии поля, что означает малость ее изменения. Именно поэтому влиянием пробного заряда на поле, в которое он помещен, можно пренебречь.

Мы будем считать пробный заряд точечным, что позволяет использовать понятие траектории его движения. Способ вычисления работы в подобном случае известен из курса механики.

В однородном поле сила $\vec{F}$, действующая на пробное тело, не зависит от точки, в которую оно помещается. Работа A постоянной силы равна скалярному произведению силы $\vec{F}$ и вектора перемещения тела $\vec{l}$, то есть работа однородного электрического поля при перемещении пробного заряда равна

$$A = \vec{F} \cdot \vec{l} = q \cdot \vec{E} \cdot \vec{l} = q \cdot E \cdot l \cdot \cos \theta.$$

Здесь θ — угол между направлениями векторов $\vec{E}$ и $\vec{l}$. Задача о вычислении работы по перемещению пробного заряда в произвольном поле может быть сведена к предыдущей. Чтобы найти эту работу, траекторию пробного заряда следует разбить на маленькие отрезки, при перемещении вдоль которых поле можно считать однородным, вычислить работу ΔA на каждом таком отрезке по формуле для однородного поля, и сложить получившиеся величины. Выражение для работы ΔA имеет вид:

$$\Delta A = q \cdot \vec{E} \cdot \Delta \vec{l} = q \cdot E \cdot \Delta l \cdot \cos \theta,$$

где θ — угол между направлениями векторов $\vec{E}$ и $\Delta \vec{l}$.

Поскольку вектор $\vec{E}$ по направлению совпадает с касательной к силовой линии, в приведенном выражении θ

является углом между траекторией пробного заряда и силовой линией поля. В частности, при перемещении пробного заряда перпендикулярно силовым линиям работа поля равняется нулю, поскольку в этом случае $\cos \theta = 0$. Предположим теперь, что пробный заряд перемещается «по стрелке» вдоль силовой линии. Тогда $\cos \theta = 1$, то есть $\Delta A = q \cdot E \cdot \Delta l$, откуда $\Delta A > 0$, если $q > 0$. Мы заключаем, что работа поля по перемещению положительного пробного заряда «по стрелке» вдоль силовой линии будет положительной. Соответственно, будет отрицательной работа поля по перемещению отрицательного пробного заряда «по стрелке» вдоль силовой линии или работа поля по перемещению положительного пробного заряда «против стрелки».

Представим теперь себе, что пробный заряд, помещенный в электростатическое поле, перемещается по замкнутому контуру. После этого поле возвратится в свое исходное состояние. Поэтому и энергия поля после перемещения будет точно такой же, как и в начале. Следовательно,

работа статического поля при перемещении пробного заряда по замкнутому контуру равна нулю.

Вспоминая теперь определение, даваемое в курсе механики, мы заключаем, что силы, действующие на пробный заряд в электростатическом поле, являются *консервативными*. Данное выше обоснование консервативности можно выразить и несколько иначе. Если работа поля по перемещению пробного тела по замкнутому контуру нулю не равна, то можно черпать энергию из поля, «гоняя» это тело по замкнутому контуру, что противоречит закону сохранения энергии.

Заметим, что в приведенных рассуждениях мы использовали не конкретные свойства электростатического поля, а только его статичность. Поэтому полученные выводы применимы к любому статическому полю. Например, консервативными являются силы гравитационные — факт, хорошо известный из курса механики. Оттуда же можно почерпнуть и пример неконсервативных сил, а именно сил трения.

Их неконсервативность связана с тем, что работа сил трения уходит в тепло, что приводит к необратимому изменению состояния окружающей тело среды (увеличивается ее температура). Поэтому после перемещения по замкнутому контуру пробного тела, на которое действует сила трения, поля не возвращаются в свое исходное состояние, а потому и работа поля оказывается не равной нулю.

Свойство консервативности поля можно переформулировать и иначе. А именно,

работа консервативного поля по перемещению пробного заряда из одной точки в другую не зависит от формы траектории, по которой оно перемещается,

то есть работа определяется только координатами начальной и конечной точек траектории. Для доказательства этого утверждения рассмотрим различные траектории, начинающиеся в точке M и заканчивающиеся в точке N . Выберем две из них. Пусть работа поля при перемещении тела по первой траектории равна A_1 , а для второй равна A_2 . Предположим теперь, что пробное тело перемещается по первой траектории из M в N , а затем возвращается в точку M вдоль второй. Тогда суммарная работа поля будет равна $A_1 - A_2$. С другой стороны, она должна равняться нулю (поскольку тело возвращается в исходную точку). Отсюда следует $A_1 = A_2$. Поскольку пара траекторий была выбрана произвольно, это равенство и означает независимость работы поля от формы траектории, идущей из M в N .

Возвращаясь теперь к выражению для работы однородного поля, мы замечаем, что вектор $\vec{l}$ «знает» только про начальную и конечную точки траектории. Таким образом, любое однородное поле является консервативным. Здесь, однако, надо быть аккуратными. Из того, что любое поле в малых областях может быть приближено однородным полем, еще не следует, что произвольное поле является консервативным. Возможная его неконсервативность связана как раз с отклонениями поля от однородности, которые,

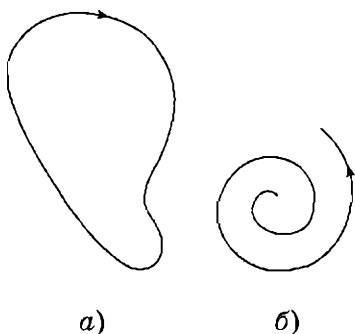


Рис. 45. Силовые линии в виде замкнутой кривой и спирали

хотя и являются небольшими для малых частей траектории, но могут накапливаться вдоль нее.

Консервативность электростатического поля накладывает некоторые ограничения на геометрические свойства его силовых линий. Например, силовые линии электростатического поля не могут замыкаться сами на себя. Для доказательства предположим противное: пусть

в электростатическом поле существует замкнутая на себя силовая линия (рис. 45а). Переместим вдоль этой силовой линии положительный пробный заряд таким образом, чтобы он вернулся в исходную точку. Мы уже установили, что работа поля по перемещению положительного пробного заряда вдоль силовой линии положительна. В то же время работа поля по перемещению пробного тела вдоль замкнутого контура должна быть равна нулю. Мы пришли к противоречию, которое и доказывает невозможность существования замкнутых на себя силовых линий электростатического поля. Аналогичным образом можно проверять на консервативность и другие картины силовых линий.

Вопрос 11.1. Может ли силовая линия электростатического поля иметь форму спирали (рис. 45б)?

Вопрос 11.2. Может ли электростатическое поле иметь картину силовых линий, показанную на рис. 46?

Вопрос 11.3. Может ли картина силовых линий, представленная на рис. 31, соответствовать электростатическому полю?

Вопрос 11.4. Мы уже установили, что на заряженной пленке силовые линии испытывают излом. Верно ли обратное утверждение?

Выше мы обосновали факт консервативности электростатического поля исходя из энергетических соображений. Поучительно, однако, получить «лобовое» доказательство того, что электростатическое поле является консервативным, исходящее из уравнений этого поля. Прежде всего вспомним, что любое электростатическое поле может быть представлено как суперпозиция полей точечных зарядов. Поскольку сила, действующая со стороны данного поля на пробный заряд, равна сумме сил, действующих на него со стороны полей точечных зарядов (суперпозицией которых данное поле является), работа, которую совершает данное поле при перемещении точечного заряда, будет равна сумме работ полей этих точечных зарядов. Таким образом, для доказательства консервативности произвольного электростатического поля достаточно проверить консервативность поля точечного заряда, чем мы и займемся.

Рассмотрим перемещение пробного заряда q по некоторой траектории, ведущей из точки M в точку N , в поле точечного заряда Q , расположенного в точке O . Любую траекторию перемещения заряда q из точки M в точку N мы можем приблизить ломаной линией, состоящей из малых участков, которые являются либо радиальными отрезками (лежащими на прямых, проходящих через точку O), либо являются дугами окружностей с центром в точке O (рис. 47). Работа будет совершаться только на радиальных участках, а на дугах работа будет равна нулю, поскольку радиальные участки идут вдоль силовых линий, а дуги перпендикулярны силовым линиям. Поэтому работа по перемещению пробного заряда q в поле точечного за-

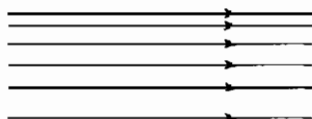


Рис. 46. Гипотетическая картина силовых линий.
К вопросу 11.2

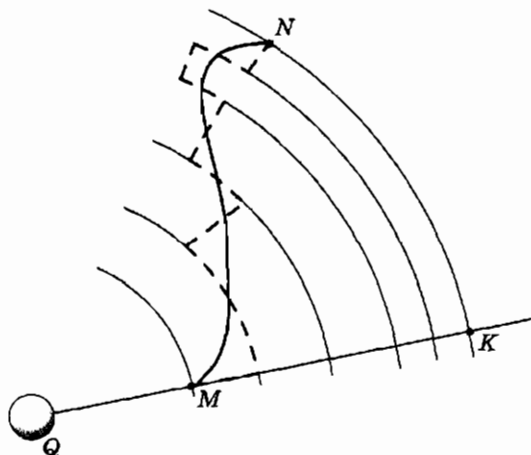


Рис. 47. Различные траектории движения пробного заряда в поле точечного заряда Q

ряда Q будет определяться суммой работ на радиальных отрезках. Эта сумма равна работе поля на радиальном отрезке MK , ограниченном точкой K , лежащей на дуге, проходящей через точку N (рис. 47). Действительно, отрезок MK можно разбить на маленькие отрезки, начала и концы которых лежат на тех же расстояниях от точки O , что и радиальные участки ломаной линии (рис. 47). Работы на соответствующих отрезках равны между собой, откуда и следует сделанное утверждение. Таким образом, работа поля по перемещению пробного заряда из точки M в точку N по произвольной траектории равна работе поля на отрезке MK , то есть не зависит от формы этой траектории. Это и свидетельствует о консервативности поля точечного заряда.

Заметим, что использованные выше соображения не опирались на конкретный вид зависимости напряженности поля от расстояния r от точки O до точки наблюдения. Поэтому приведенное доказательство консервативности спра-

ведливо для произвольного поля, обладающего сферической симметрией, то есть поля, у которого

напряженность не меняется при произвольных поворотах поля вокруг точки O , которая называется центром симметрии.

Напряженность такого поля по абсолютной величине зависит только от расстояния r от точки наблюдения до центра симметрии O , а направлена радиально, к центру симметрии или от него.

Найдем теперь явно величину работы поля при перемещении пробного заряда из точки M в точку N . Для этого мы опять воспользуемся траекторией, состоящей из отрезка MK и дуги KN . Фактически мы должны вычислить только работу на отрезке MK , так как на дуге KN работа равна нулю. Пусть точки M и K лежат на расстояниях r и R от точки O . Чтобы найти работу на отрезке MK , его надо разбить на n маленьких отрезков, расстояния от концов которых до точки O равны $r_1, r_2, \dots, r_{n-1}, R$. На каждом таком отрезке поле можно приблизить однородным. Поэтому работа ΔA_i , которую поле совершает при перемещении пробного заряда из точки r_i в точку r_{i+1} , может быть вычислена как произведение $\Delta A_i = F_i \cdot \Delta r = F_i \cdot (r_{i+1} - r_i)$, где F_i — значение силы в некоторой точке рассматриваемого отрезка. В качестве F_i можно взять силу в любой точке отрезка, так как конечный результат, получающийся в пределе, когда длина отрезков стремится к нулю, от этого выбора не зависит. Подставляя значение силы $F_i = \frac{q \cdot Q}{4\pi\epsilon_0 r_i^2}$ на границе отрезка, мы находим

$$\Delta A_i \approx F_i \cdot (r_{i+1} - r_i) \approx \frac{q \cdot Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_{i+1}} \right).$$

Суммируя эти величины для всех отрезков, получаем:

$$A = \frac{q \cdot Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} \right) + \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \dots \right. \\ \left. \dots + \left(\frac{1}{r_{n-1}} - \frac{1}{R} \right) \right] = \frac{q \cdot Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right).$$

Полученное выражение не содержит зависимости от длины отрезков, на которые мы разбили $МК$, и, следовательно, совпадает с результатом, который получается в пределе, когда длина отрезков стремится к нулю.

Задача 11.1. Покажите, что средняя сила, действующая на пробный заряд на радиальном отрезке $МК$, равна среднему геометрическому сил на концах этого отрезка.

Приведенное выражение для A определяет работу поля точечного заряда Q по перемещению в нем пробного заряда q , при котором расстояние между ними изменяется от r до R , каким бы ни был маршрут пробного заряда. Подчеркнем, что оно справедливо для зарядов Q и q произвольных знаков. Поскольку для поля точечного заряда Q пробным может служить любой точечный заряд q , мы нашли фактически работу поля, которую оно совершает при разнесении двух произвольных точечных зарядов, если расстояние между ними изменяется от r до R . При этом перемещаться может любой из этих зарядов или оба одновременно. Действительно, при фиксированном расстоянии между зарядами энергия их поля будет одной и той же, где бы эта пара ни была расположена (что является следствием однородности пространства). Поэтому и работа поля, которая равна разности энергий поля, будет зависеть только от начального и конечного расстояния между зарядами, по каким бы траекториям они ни перемещались.

В соответствии с определением, которое дается в курсе механики, потенциальная энергия взаимодействия тел равняется работе, которая совершается при их разнесении на бесконечность, то есть на очень большое расстояние друг от друга. Устремляя в найденном нами выражении для работы поля A по разнесению двух точечных зарядов конечное расстояние между ними R к бесконечности, получаем для энергии их взаимодействия

$$U = \frac{q \cdot Q}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Значение U положительно для одноименных зарядов и отрицательно для разноименных, в соответствии с тем, что первые отталкиваются друг от друга, а вторые взаимно притягиваются. Отметим, что если в приведенной формуле заменить заряды на массы, а электрическую постоянную — на гравитационную, то получится известное выражение для потенциальной энергии гравитационного взаимодействия двух точечных тел:

$$U_{\text{гр}} = -G \frac{m \cdot M}{r}.$$

Вопрос 11.5. Почему выражения для энергии гравитационного и электростатического взаимодействий отличаются знаками?

Можно получить и выражение для энергии взаимодействия произвольной системы точечных зарядов. Вычисляя работу, которое совершает поле при их разнесении на большое расстояние, мы находим, что

энергия U взаимодействия системы точечных зарядов равняется сумме энергий взаимодействия всех пар точечных зарядов.

Вопрос 11.6. Сколько таких пар в системе n точечных зарядов?

Задача 11.2. Докажите, что энергия U взаимодействия системы точечных зарядов равняется сумме энергий взаимодействия всех пар точечных зарядов.

Задача 11.3. Найдите энергию взаимодействия трех одинаковых точечных зарядов, расположенных в вершинах правильного треугольника со стороной a , если величина каждого заряда равна q .

Для того чтобы найти энергию взаимодействия наэлектризованных тел конечных размеров, которая измеряется

работой поля при их разнесении на бесконечность, необходимо учитывать распределение зарядов по этим телам. Это весьма трудная задача, которую в общем случае можно решить только численно. Тем не менее заменяя тела конечных размеров на точечные заряды, мы можем получить грубую оценку энергии их взаимодействия в соответствии с найденными выражениями.

§ 12. Проводники и диэлектрики

Мы уже отмечали, что несмотря на тенденцию к разрядке, заряженные тела могут довольно долго сохранять свой заряд, так как имеются силы, препятствующие отрыву электрона от тела. Ситуация меняется, когда тела приводятся в соприкосновение друг с другом. В области контакта силы, удерживающие электроны у тел, компенсируют (частично) друг друга, в результате чего электроны получают возможность переходить от одного тела к другому. Поэтому при соприкосновении, скажем, отрицательно заряженного тела с незаряженным избыточные электроны распределятся между ними. Положительно же заряженное тело захватит часть электронов из незаряженного. Таким образом, при соприкосновении заряженного тела с незаряженным последнее приобретет некоторый заряд того же знака, что и у заряженного.

Используя это явление, можно весьма простым способом узнать, заряжено данное тело или нет: достаточно коснуться его каким-нибудь другим подвешенным на нити незаряженным телом. В качестве такого тела-индикатора можно взять просто кусочек бумажки. Если исследуемое тело заряжено, то бумажка сначала притянется к нему (за счет электризации через влияние), а затем, коснувшись заряженного тела и зарядившись в результате касания, бумажка начнет отталкиваться от него. Это приведет к отклонению нити от вертикали (рис. 48).

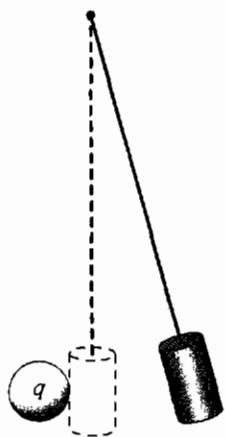


Рис. 48. Отталкивание, возникшее в результате касания бумажной гильзой заряженного тела

При контакте тел (разного химического состава) имеет место еще одно явление, которое не связано с величиной их

заряда. Из-за разницы в силах, удерживающих электроны, одно из тел «перетягивает» на себя часть электронов из другого, поэтому с одной стороны границы возникает область, обедненная электронами, а с другой — пересыщенная электронами. В результате формируется так называемый *двойной электрический слой*. Другими словами, соприкосновение незаряженных тел ведет к появлению на них заряда. Поэтому если взять два незаряженных тела, привести их в соприкосновение, а затем оторвать их друг от друга, то они окажутся заряженными. Это явление называется *разделением заряда*. Именно на разделении заряда за счет механического контакта тел основана электризация картонки и пенопласта в описанном нами ранее опыте.

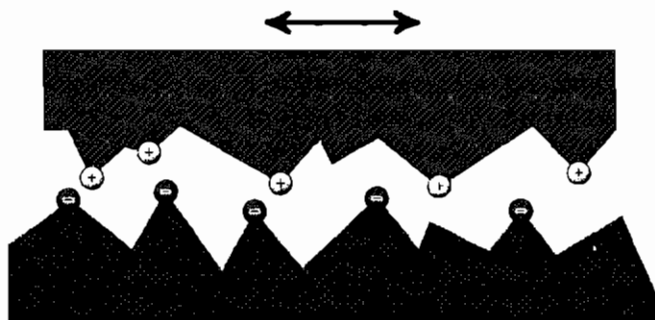


Рис. 49. Соприкосновение двух тел на микроуровне

Заметим, что на микроскопическом уровне поверхность тел довольно «шершава», то есть напоминает горный пейзаж, где чередуются впадины и возвышения (рис. 49). При соприкосновении тел только высокие пики, имеющиеся на поверхности одного тела, оказываются на атомном расстоянии от другого. Иначе говоря, при соприкосновении тел возникает ряд микроконтактов, общая площадь которых существенно меньше, чем макроскопическая площадь соприкосновения контактирующих тел. Именно поэтому для заметного разделения заряда в описанных нами в § 1 опы-

тах использовалось потирание тел друг о друга, которое ведет к непрерывному возникновению и исчезновению микроконтактов, при каждом из этих процессов происходит разделение заряда. Можно сказать, что потирание увеличивает эффективную площадь соприкосновения тел.

Предположим теперь, что требуется перенести заряд с одного тела на другое, когда оба они закреплены, и не могут поэтому соприкасаться. В этом случае для переноса заряда можно использовать вспомогательное тело, попеременно касаясь им первых двух: вспомогательное тело сначала принимает заряд от тела — источника заряда, перемещается и отдает перенесенный заряд второму телу. Такой способ переноса заряда напоминает действия лифта, который перевозит пассажиров с одного этажа на другой. Можно действовать и иначе: использовать вспомогательное тело, которое может одновременно касаться и источника заряда и тела, на которое переносится заряд. Это вспомогательное тело можно сравнить с эскалатором, который перемещает пассажиров с одного уровня на другой.

Однако способность к пропусканию заряда (эффективность работы «эскалатора») существенно зависит от материала, из которого изготовлено вспомогательное тело. Например, если соединить при помощи металлической линейки (или любого другого металлического предмета) заряженный металлический шар с незаряженным, то незаряженный шар очень быстро зарядится от заряженного. Если же повторить этот опыт, но соединить шары деревянной линейкой, то ничего подобного не произойдет: даже по прошествии значительного времени второй шар так и останется незаряженным. Различие материалов по их способности пропускать через себя заряд позволило разделить все вещества на два больших класса: *проводники* и *диэлектрики* (последние называют также *изоляторами*). Проводники хорошо пропускают через себя заряд, а диэлектрики делают это плохо. Попробуем выяснить причину столь большой разницы, обратившись к микроскопическому устройству этих веществ.

Типичными широко распространенными проводниками являются металлы, то есть, как известно из курса химии, элементы первых групп Периодической таблицы. Внешняя оболочка атомов этих элементов содержит небольшое число электронов, обычно один или два. При объединении таких атомов в единое макроскопическое тело их внешние оболочки перекрываются, и электроны, находящиеся на этих оболочках, получают возможность переходить от одного атома к другому, то есть перемещаться по телу. Металлы являются хорошими проводниками именно потому, что в них имеется много таких свободных электронов, не связанных с каким-либо конкретным атомом. За счет движения свободных электронов (которые называют также электронами проводимости) и осуществляется перенос заряда через металл.

Задача 12.1. Найдите число электронов проводимости в 1 г натрия. Атом натрия имеет один электрон на внешней оболочке.

Заряд через проводник могут переносить не только электроны, но и другие заряженные частицы. Например, в жидких проводниках, к которым относятся многие расплавы и электролиты (проводящие растворы), заряд переносится ионами, причем как положительными, так и отрицательными. Таким образом,

проводниками являются материалы, в которых присутствуют заряженные частицы, имеющие возможность свободно передвигаться по телу.

Такие частицы называются *свободными носителями заряда*, или просто носителями заряда.

В противоположность проводникам в диэлектриках свободных носителей заряда нет (точнее, их очень мало). Диэлектриками обычно являются газы, поскольку они состоят из незаряженных молекул. В частности, диэлектриком является воздух. Именно поэтому окруженные им заряженные тела имеют возможность довольно долго сохранять

свой заряд. Твердыми или жидкими диэлектриками являются вещества, атомы или молекулы которых при их объединении в жидкость или кристалл удерживают свои электроны вблизи себя. Примерами таких диэлектриков могут служить бумага, дерево, пластмассы, масло, чистая вода, керосин.

Диэлектриком другого типа является поваренная соль. При образовании соли атомы хлора забирают себе электроны внешней оболочки атомов натрия. Поэтому соль фактически состоит из ионов натрия и хлора, то есть заряженных частиц. Тем не менее кристалл соли является диэлектриком, так как все составляющие его ионы жестко закреплены на своих местах в кристаллической решетке и не могут поэтому переносить заряд. Расположение атомов натрия и хлора в кристаллической решетке приведено на рис. 50, где шарики с плюсами представляют ионы натрия, а шарики с минусом — ионы хлора.

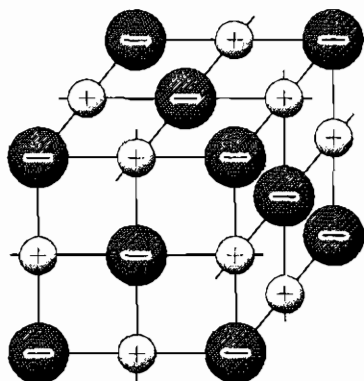


Рис. 50. Строение кристалла соли

Строго говоря, в диэлектриках все-таки имеется некоторое (небольшое) количество свободных носителей заряда. Причина этого состоит в том, что вследствие хаотического теплового движения некоторые электроны отрываются от своих атомов и становятся свободными, то есть получают возможность переносить заряд. Атом, потерявший свой электрон, становится положительно заряженным ионом. В газе или жидкости ионы наряду с электронами являются свободными носителями заряда. При этом наряду с положительными ионами в них встречаются и отрицательные ионы, которые образуются в результате захвата некоторыми атомами свободных электронов. В кристалле же атомы не могут захватывать свободные электроны, то есть за счет

теплового движения образуются только положительные ионы. Такой ион жестко закреплен на своем месте в кристаллической решетке, то есть не может сам по себе переносить заряд. Однако ион может отобрать электрон у соседнего атома, в результате чего он становится нейтральным атомом, а соседний атом превращается в положительный ион. Многократное повторение этого процесса приводит к изменению положения иона в пространстве (которое не сопровождается реальным движением атомов). О таком изменении положения положительного иона говорят обычно как о движении *дырки*, которую можно рассматривать как свободный носитель заряда, поскольку ее перемещение ведет к переносу заряда. По абсолютной величине заряд дырки совпадает с зарядом электрона, будучи противоположен ему по знаку.

Поясним различие в электрических свойствах между проводниками и диэлектриками, обратившись к уже использовавшейся нами аналогии с эскалатором, роль пассажиров на котором играют, как мы теперь понимаем, свободные носители заряда. Движение носителей заряда (перемещение пассажиров эскалатором в нашем примере) как раз означает на макроскопическом уровне перенос заряда. «Эскалатор» приходит в движение, если проводник или диэлектрик соединяет заряженное тело с незаряженным. Скорость движения нашего эскалатора определяется величиной заряда заряженного тела — она тем больше, чем больше напряженность его поля. По мере прохождения заряда напряженность поля падает, и движение заряда прекращается. Можно сказать, что эскалатор включается только после того, как поезд метро доставит пассажиров на перрон, и отключается, когда перрон освободится.

Проводник подобен эскалатору, плотно набитому пассажирами. Если он начинает двигаться (что соответствует наличию поля), то с него сразу же начинают сходить пассажиры, хотя и совсем не те, которые входят на него с перрона, а те, которые уже почти доехали до конца. Диэлектрики же подобны пустому эскалатору. В этом случае включение эскалатора (приложение поля) не приводит

к немедленному появлению пассажиров на верхней площадке, так как для этого пассажиры, вошедшие на эскалатор, должны проехать его целиком. Таким образом, для этих двух случаев имеется большая разница во времени, которое требуется, чтобы эскалатор наполнил верхний перрон. Для реальных проводников и диэлектриков разница во времени переноса заряда огромна. Проводники пропускают через себя заряд за малые доли секунды, в то время как для диэлектриков это время может достигать недель и месяцев. Поэтому, говоря о процессах, которые мы обычно наблюдаем, можно считать, что проводники пропускают через себя заряд мгновенно, а диэлектрики не пропускают его через себя совсем.

Тем не менее непроходимой пропасти между проводниками и диэлектриками нет, они различаются только количественно — по времени пропускания через них заряда. Отсутствие качественного отличия подтверждается наличием широкого класса веществ — *полупроводников*, которые по их способности пропускать через себя электрический заряд занимают промежуточное положение между проводниками и диэлектриками. Как правило, полупроводниками являются элементы средних групп Периодической таблицы и их соединения. Это кристаллы, в которых свободные электроны и дырки относительно легко возникают за счет теплового движения. Их можно также «закачать» в полупроводник, добавляя в него примеси, атомы которых способны отдавать кристаллу электроны со своих внешних оболочек или, наоборот, захватывать электроны, порождая дырки. Продолжая нашу аналогию, полупроводники можно сравнить с полупустым эскалатором.

При повышении температуры количество свободных носителей заряда в диэлектриках возрастает. Поэтому, например, любой газ при высоких температурах становится проводником, поскольку он состоит из свободных электронов и положительных ионов с некоторой примесью нейтральных атомов. Такое состояние вещества называют *плазмой*. Аналогичные превращения возможны и в твердом или жид-

ком состоянии. Например, если расплавить поваренную соль (для этого ее надо нагреть до температуры около 800°C), то ионы натрия и хлора получают возможность свободно передвигаться в пространстве и соль из диэлектрика станет проводником. То же самое происходит при растворении соли в воде, поэтому раствор соли также является проводником.

|| **Задача 12.2.** Найдите число свободных носителей заряда в стакане воды, если в воде растворено 20 г соли.

Заметим, что из-за большой скорости процессов перераспределения заряда в проводнике его практически невозможно зарядить за счет разделения заряда (именно поэтому для нашего лабораторного опыта, демонстрирующего разделение заряда, были выбраны диэлектрики, которыми являются картонка и пенопласт). Поясним причину этого явления. При отрыве одного тела от другого в зазоре между ними (за счет их зарядов) возникает поле, которое стремится ликвидировать разделение заряда. В диэлектриках, где подвижность зарядов мала, это не приводит к сколько-нибудь заметным эффектам. При отрыве же проводника от другого тела заряд проводника, возникший при образовании двойного слоя, успевает стечь через микроконтакты, остающиеся перед окончательным разрывом тел (поскольку микроконтакты между ними исчезают не одновременно, а один за другим).

Как мы уже знаем, чтобы зарядить тело, ему надо передать некоторое количество электронов или отнять их у него. При этом в проводнике уменьшается или увеличивается количество носителей заряда, скажем, электронов проводимости в металлах. В диэлектриках же при такой операции появляются свободные носители: электроны, дырки или ионы. Однако поведение проводников и диэлектриков после передачи им заряда будет сильно отличаться. В проводнике произойдет быстрое перераспределение носителей заряда, в результате которого избыточные носители заряда будут вытеснены к поверхности тела (а в случае недоста-

чи носителей заряда вблизи поверхности образуется слой, обедненный ими). Физическая причина этого заключается во взаимном отталкивании избыточных носителей заряда, которые расходятся настолько далеко друг от друга, насколько им это позволяет поверхность тела. В диэлектриках же процессы перераспределения носителей заряда происходят медленно. Поэтому заряд, помещенный на диэлектрик, будет долгое время оставаться вблизи от того места на поверхности диэлектрика, на которое заряд был помещен, скажем, в результате касания диэлектрика заряженным телом.

Быстрое перераспределение избыточных (или недостающих) носителей заряда по проводнику можно использовать для накопления на нем заряда. Для этого следует использовать полый проводник (например, полый металлический шар), помещая заряд на его внутреннюю поверхность. Это можно сделать, скажем, касаясь этой внутренней поверхности заряженной палочкой через специально приготовленное отверстие. Переданный палочкой заряд быстро уходит на внешнюю поверхность тела, так что его внутренняя поверхность освобождается и оказывается опять готовой к приему заряда. Поэтому если снова коснуться внутренней поверхности проводника (заново) заряженной палочкой, то проводник примет еще одну порцию заряда. Повторяя эту процедуру многократно, можно накопить заряд, который намного превышает ту порцию, которую проводник получает за один цикл. Именно этот принцип лежит в основе действия генератора ван дер Граафа, позволяющего достигать рекордных величин заряда.

§ 13. Электрическое поле внутри тел

Еще раз повторим, что с микроскопической точки зрения любое тело представляет собой совокупность ядер и электронов, то есть заряженных частиц. Существуют и связанные с ними электрические поля, которые сравнительно сильны внутри атома и вблизи него.

Задача 13.1. Найдите напряженность электростатического поля ядра атома гелия на расстоянии 1 ангстрем ($1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ м}$) от ядра.

Однако напряженность поля атома довольно быстро спадает при удалении точки наблюдения от атома, так как атомы в целом нейтральны и, как правило, не обладают дипольным моментом. То же относится и к молекулам. Поэтому, например, в газе напряженность электрического поля в пространстве между молекулами незначительна.

В твердом же теле или жидкости атомы расположены «вплотную» друг к другу. Из-за этого суперпозиция полей отдельных ядер и электронов представляет собой довольно сложную картину: вблизи ядер поле близко к полю точечного заряда, а на «стыках» атомов напряженность имеет нетривиальную координатную зависимость, связанную с переходом от поля одного атома к полю другого.

Как мы уже объясняли, поле можно исследовать при помощи пробного заряда. Роль такого пробного заряда может играть просто свободный носитель заряда, который достаточно мал для того, чтобы при его помощи исследовать микроскопическое поле внутри тела. В соответствии с картиной поля, описанной выше, при перемещении пробного заряда внутри тела действующая на него сила значительно меняется от точки к точке как по величине, так и по направлению. Однако при изучении макроскопических электрических свойств тела нас интересуют перемещения пробного заряда на расстояния, большие по сравнению с атомным. Для характеристики подобных перемещений достаточно знать среднюю силу, действующую на пробный

заряд, которая определяется равнодействующей сил, действующих на него в разных точках траектории.

Среднюю силу, действующую на пробный заряд, можно записать в виде $q \cdot \vec{E}$, где q — заряд носителя, а $\vec{E}$ — средняя напряженность поля. Величина $\vec{E}$ получается из микроскопической напряженности усреднением по областям, содержащим много атомов. Процедура вычисления усредненной напряженности заключается в следующем: мы должны взять значения микроскопической напряженности во многих точках, векторно сложить эти величины и разделить результат на число точек. В силу того, что микроскопическая напряженность сильно меняется в пространстве по абсолютной величине и направлению, различные слагаемые в упомянутой сумме будут компенсировать (гасить) друг друга, и результат по абсолютной величине окажется гораздо меньше, чем типичное значение отдельных слагаемых. Таким образом, усреднение приводит к «устранению» поля, порожденного ядрами атомов и электронами, и в реальных телах всегда дает величину напряженности, намного меньшую, чем напряженность поля внутри атома. Области, по которым производится усреднение микроскопической напряженности, следует выбирать хотя и содержащими много атомов, но по размерам гораздо меньше размеров тела. В этом случае усредненная напряженность будет плавно изменяться внутри тела, как, например, плавно меняется с высотой давление атмосферы.

В дальнейшем, говоря о напряженности электрического поля внутри тела, мы всегда будем иметь в виду усредненную напряженность, так как именно она характеризует макроскопические электрические свойства тел.

Усредненная напряженность определяется двумя факторами. Во-первых, это внешнее по отношению к рассматриваемому телу поле. Во-вторых, это его собственное поле. Суперпозиция этих полей и определяет величину напряженности внутри тела (и вблизи от него). Собственное поле тела возникает за счет его электризации, которая может

быть вызвана помещением на него заряда и/или воздействием внешнего поля.

До сих пор мы изображали при помощи силовых линий электрическое поле в вакууме. Теперь мы будем изображать его также и внутри тел, используя те же правила, что и раньше (§ 8). Это означает, в частности, что касательные к силовым линиям будут определять направление усредненной (макроскопической) напряженности, а ее абсолютная величина будет пропорциональна плотности силовых линий.

Поскольку электрические свойства проводников и диэлектриков существенно различны, мы рассмотрим их по отдельности. Мы начнем с проводников, а затем перейдем к диэлектрикам.

Если поместить проводник во внешнее электрическое поле, то в нем возникнет ненулевая (макроскопическая) напряженность $\vec{E}$ и, следовательно, на носители заряда будет действовать средняя сила, пропорциональная $\vec{E}$. Под действием этой силы начнется дрейф (перемещение) носителей заряда, направление которого определяется вектором напряженности. Поверхность проводника остановит этот дрейф. В результате на одной стороне проводящего тела возникнет избыток носителей заряда, а на другой — их недостаток. Поэтому во внешнем поле даже в незаряженном в целом проводнике появляются приповерхностные области, имеющие заряды разного знака (см. рис. 51). Такой процесс пространственного разделения заряда в теле под действием внешнего поля получил название *электростатической индукции*, а заряды, возникшие вследствие этого процесса, называют *индуцированными*.

Электростатическая индукция является причиной электризации проводника через влияние, в результате которой незаряженный проводник притягивается к заряженному телу — эффект, который мы уже упоминали. Поясним его происхождение. Предположим, что к проводнику поднесено положительно заряженное тело. На ближнем к телу краю проводника возникнет индуцированный отрицательный за-

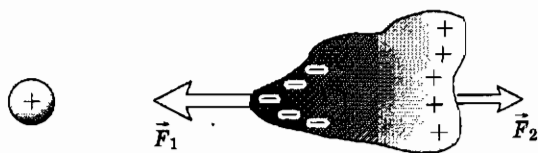


Рис. 51. Заряды, индуцированные в проводнике за счет внешнего поля

ряд, а на дальнем — равный ему по абсолютной величине положительный заряд (рис. 51). Поскольку отрицательный индуцированный заряд находится ближе к заряженному телу, то действующая на него сила притяжения F_1 будет больше силы отталкивания положительного заряда F_2 , то есть проводник будет притягиваться к поднесенному телу. Тот же результат мы получим, если поднесем к проводнику отрицательно заряженное тело: индуцированные заряды просто поменяются местами, но эффект притяжения сохранится.

Несложно сообразить (скажем, глядя на тот же рис. 51), что напряженность поля индуцированных зарядов внутри тела направлена навстречу напряженности внешнего поля. Поэтому в результате возникновения индуцированных зарядов напряженность поля внутри проводника уменьшается. Это уменьшение будет происходить до тех пор, пока макроскопическая напряженность поля во всех точках внутри проводника не обратится в нуль, так как только в этом случае исчезнет причина, вызывающая перемещение носителей заряда. Те же соображения относятся и к заряженному проводнику, поскольку носители заряда «чувствуют» напряженность поля вне зависимости от того, чем оно было вызвано: внешним источником или собственным зарядом тела. Поэтому

в статических условиях напряженность электрического поля внутри проводника равна нулю.

Это справедливо, каким бы ни было внешнее поле и каким бы ни был собственный заряд проводника.

При достаточно медленном перемещении проводника во внешнем поле или достаточно медленном его изменении (то есть в квазистатической ситуации) напряженность поля внутри проводника остается равной нулю, так как индуцированные заряды успевают «подстраиваться» под изменяющееся внешнее поле. «Медленность» в данном случае не накладывает сколько-нибудь существенных ограничений на скорость тела или темп изменения внешнего поля, так как перераспределение заряда в проводнике, как мы уже объясняли, происходит очень быстро.

Отсутствие напряженности поля внутри проводника означает, что силовые линии поля не могут «проникнуть» вглубь проводника, так как нулевое значение напряженности приводит к нулевой плотности силовых линий. Поэтому силовые линии, «достигающие» поверхности проводника, на ней и заканчиваются. Силовые линии могут также начинаться на поверхности проводника.

В диэлектриках ролью свободных носителей заряда можно пренебречь. Поэтому в диэлектрике, к которому приложено внешнее поле, макроскопическая напряженность нулю не равна. Однако ее значение будет отличаться от напряженности внешнего поля, что свидетельствует о возникновении собственного поля диэлектрика. Чтобы понять причину этого явления, опять обратимся к микроскопическому строению вещества. При наложении на атом внешнего поля возникают силы, растягивающие ядро атома и окружающее его электронное облако в разные стороны. Вследствие этого атом *поляризуется*, то есть «центры

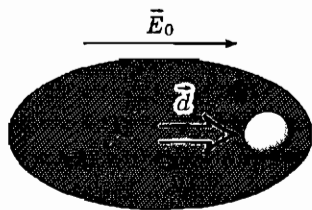


Рис. 52. Атом во внешнем поле

тяжести» положительного и отрицательного зарядов атома смещаются друг относительно друга, в результате чего атом приобретает ненулевой дипольный момент (рис. 52). Поэтому поляризованный атом обладает полем, которое на больших расстояниях от атома ведет себя как поле точечного диполя. Поля

поляризованных атомов складываются в собственное поле тела. Описанный процесс, приводящий к появлению в диэлектрике, помещенном во внешнее поле, собственного поля, называют *поляризацией диэлектрика*. Подчеркнем, что в отличие от перемещения носителей заряда, которое в диэлектрике происходит весьма медленно, поляризация диэлектрика происходит очень быстро, так как она связана с *внутриатомным движением*.

Именно поляризация диэлектрика, приводящая к появлению у него дипольного момента, является причиной электризации через влияние для диэлектриков. Как мы уже отмечали, электризация через влияние приводит к притяжению незаряженного тела к заряженному. Пример подобного поведения для диэлектриков мы уже приводили, говоря о налипании на наэлектризованный янтарь мелких предметов, которые обычно являются именно диэлектриками.

Продемонстрируем возникновение этого притяжения на примере точечного заряда. Предположим, что он имеет знак плюс. Тогда поляризация любого атома диэлектрика будет происходить так, как это показано на рис. 52, если точечный заряд находится слева от диэлектрика. Как видно из того же рисунка, атом приобретает дипольный момент, направленный от заряда. Такое же направление будет иметь и дипольный момент $\vec{d}$ диэлектрика (равный сумме дипольных моментов его атомов). Теперь мы должны вспомнить, что сила, действующая на точечный диполь, определяется скоростью изменения напряженности вдоль дипольного момента $\vec{d}$. Поскольку напряженность поля точечного заряда уменьшается в направлении $\vec{d}$, сила, действующая на диэлектрик, будет по направлению противоположна $\vec{d}$, что соответствует притяжению диэлектрика к точечному заряду. Тот же результат получается и для отрицательного точечного заряда. Как и для проводников, эффект притяжения незаряженного диэлектрика к заряженному телу обычно имеет место для произвольных расстояний между ними.

Как известно, у некоторых молекул «центр тяжести» электронного облака смещен относительно «центра тяже-

сти» положительного заряда ядер их атомов даже в отсутствие внешнего поля. Такие молекулы называются *полярными*. Примером полярной молекулы является молекула воды, где атом кислорода частично «перетягивает» на себя электроны атомов водорода, которые смещены относительно центра молекулы (рис. 53). Полярные молекулы обладают ненулевым собственным дипольным моментом.

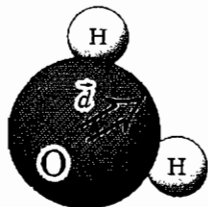


Рис. 53. Расположение атомов кислорода и водорода в молекуле воды

Тем не менее в отсутствие внешнего поля жидкость или газ, состоящие из полярных молекул, не являются поляризованными. Дело в том, что их молекулы могут вращаться, и за счет теплового движения они ориентированы хаотически. Поэтому связанная с их дипольными моментами сглаженная напряженность оказывается равной нулю. Во

внешнем же поле на полярную молекулу действует момент сил, стремящийся повернуть ее так, чтобы дипольный момент молекулы «смотрел» вдоль вектора напряженности. Поэтому на фоне хаотического вращения молекул возникает *преимущественная* ориентация полярных молекул, что и приводит к поляризации жидкости или газа. Как правило, ориентационный механизм поляризации диэлектрика оказывается гораздо более эффективным (то есть в данном поле приводит к большему значению дипольного момента), чем прямая поляризация атомов.

Если увеличивать напряженность электрического поля, в которое помещено диэлектрическое тело, то при некоторой критической напряженности оно потеряет свои диэлектрические свойства. Причиной этого являются свободные электроны, всегда в небольшом количестве имеющиеся в диэлектрике. Эти электроны разгоняются под действием электрического поля и приобретают скорость тем большую, чем больше напряженность поля. Начиная с некоторой его величины, эти электроны становятся настолько быстрыми,

что приобретают способность «вышибать» электроны из атомов, которые оказываются на их пути, то есть производить новые свободные электроны. Последние в свою очередь разгоняются и порождают новое поколение свободных электронов и так далее. В результате развивается лавинообразный процесс, называемый *электрическим пробоем*. Пробой приводит к потере телом диэлектрических свойств, а зачастую и к его механическому разрушению.

Электрический пробой происходит в полях, которые лишь незначительно сдвигают центр тяжести электронного облака относительно ядра, то есть атомы никогда не бывают столь сильно деформированными, как это в целях наглядности изображено на рис. 52. При малом значении относительного сдвига положительного и отрицательного зарядов атома сдвиг центра тяжести оказывается пропорционален напряженности поля, как пропорционально приложенной силе растяжение пружинки. Другими словами, дипольный момент атомов диэлектрика пропорционален (макроскопической) напряженности поля внутри него. Еще раз подчеркнем, что речь здесь идет о результирующей напряженности поля, которое является суперпозицией внешнего поля и собственного поля диэлектрика, так как именно эту величину «чувствуют» атомы диэлектрика.

§ 14. Непрерывное распределение заряда

При изучении макроскопических свойств любого тела его можно считать сплошным, то есть игнорировать тот факт, что оно состоит из атомов. Например, любое тело характеризуется плотностью массы, которая плавно меняется в пространстве, хотя на микроскопическом уровне масса распределена крайне неравномерно, будучи сосредоточена в основном в ядрах атомов. Можно сказать, что при макроскопическом рассмотрении масса ядер предполагается равномерно «размазанной» по всей области, которую мы рассматриваем. Точно так же при изучении электрических свойств тел оказывается несущественным тот факт, что на атомных масштабах заряд распределен весьма неравномерно. С макроскопической точки зрения заряд ядер и заряд электронов можно считать «размазанными» по областям, содержащим большое число атомов. При этом положительный заряд ядер и отрицательный заряд электронов оказываются как бы вложенными друг в друга. Если тело не наэлектризовано, то эти заряды полностью компенсируют друг друга в любой его части и все эти части оказываются незаряженными. Если же тело наэлектризовано, то в некоторых его частях заряд электронов не полностью компенсируется зарядом ядер и такая часть тела оказывается заряженной.

Как мы уже знаем, внутри проводящего тела в статических условиях (макроскопическая) напряженность электрического поля равна нулю. Поэтому равен нулю и поток этой напряженности через любую поверхность, проходящую внутри этого тела. Отсюда по теореме Гаусса мы делаем вывод, что заряд, заключенный внутри этой поверхности, равен нулю. Другими словами,

| *в статических условиях в объеме проводника заряд отсутствует.*

Это означает, что весь заряд проводящего тела, а также и заряды, индуцированные в нем внешним полем, сосредоточены на поверхности этого тела (см. рис. 54).

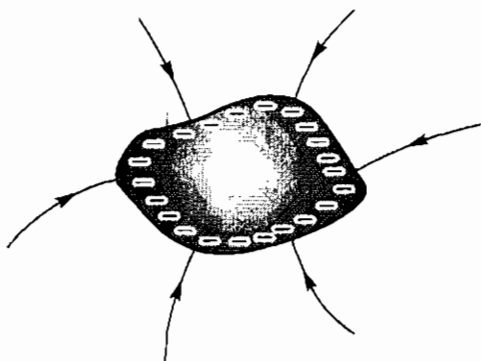


Рис. 54. Избыточные заряды сосредоточены
вблизи поверхности проводника

Поверхностный заряд проводников связан с избыточными (или недостающими) носителями заряда, которые распределяются в некотором приповерхностном слое. В металлах толщина этого слоя обычно порядка размеров атома, а, скажем, в электролитах может на пару порядков превосходить атомный размер. Однако в любом проводнике приповерхностный слой является бесконечно тонким с макроскопической точки зрения. Таким образом, для описания взаимодействия проводника с электрическим полем мы должны научиться характеризовать распределение заряда по его поверхности, пренебрегая толщиной слоя, в котором сконцентрирован этот заряд. Формально эта задача эквивалентна задаче о тонкой (проводящей) пленке, геометрическая форма которой совпадает с поверхностью проводника. Количественно распределение заряда по поверхности тела, как и для заряженной пленки, задается поверхностной плотностью заряда σ , которая зависит от координат точки, к которой она относится.

Мы уже отмечали, что силовые линии не проникают вглубь проводника. Следовательно, силовые линии поля вне проводника начинаются или заканчиваются на его поверхностном заряде. Можно сказать, что поверхностный

заряд служит «затычкой» для силовых трубок, которые прикреплены к поверхности проводника.

Теперь мы переходим к диэлектрикам. Предположим, что диэлектрическое тело помещено во внешнее поле. Тогда, как уже было сказано, происходит поляризация диэлектрика. С макроскопической точки зрения этот процесс можно представить себе как смещение друг относительно друга размазанных по объему тела положительного заряда ядер и отрицательного заряда электронов (или зарядов ионов

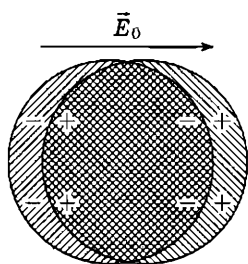


Рис. 55. Сдвиг положительного и отрицательного зарядов диэлектрика во внешнем поле

противоположного знака). Такой сдвиг, вызванный внешним однородным полем с напряженностью $\vec{E}_0$, схематически показан на рис. 55, где заряды различного знака выделены разной штриховкой. Мы видим, что при сдвиге возникают заряженные приповерхностные области (где штриховка идет только в одном направлении), то есть появляется поверхностный заряд.

Еще раз подчеркнем, что никаких свободных зарядов в диэлектрике при его поляризации не возникает, так что, в отличие от проводников, в диэлектриках поверхностный заряд формируется за счет связанных зарядов. Это утверждение иллюстрирует рис. 56, где схематически (в виде диполей) представлены поляризованные атомы диэлектрика. Пунктиром на том же рисунке отмечены области, где сосредоточен поверхностный заряд диэлектрика.

Мы уже отмечали, что взаимное смещение положительного и отрицательного зарядов атома диэлектрика пропорционально напряженности электрического поля в нем. Отсюда следует, что и макроскопические (размазанные) заряды диэлектрика смещаются на величину, пропорциональную той же напряженности. Оказывается, эта пропорциональность приводит к тому, что за счет поляризации во внешнем поле объемный заряд в диэлектрике появиться не может.

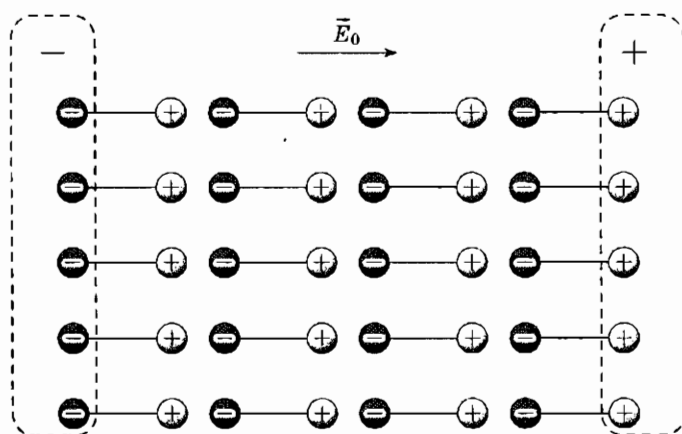


Рис. 56. Ориентация дипольных моментов атомов диэлектрика во внешнем поле

Для доказательства этого свойства мы снова обратимся к силовым трубкам, теперь уже внутри диэлектрика. Можно рассматривать сдвиг положительного и отрицательного зарядов отдельно внутри каждой трубки, так как это смещение направлено вдоль трубки и заряды не «проходят» через ее стенки. Смещение, скажем, положительного заряда от исходного положения пропорционально напряженности поля, которая, как мы знаем, обратно пропорциональна площади сечения трубки. Поэтому положительный заряд, который «продавливается» полем через некоторое сечение силовой трубки, оказывается одним и тем же для любого сечения. То же справедливо и для отрицательного заряда. Отсюда следует, что в любой части силовой трубки, ограниченной двумя сечениями, проходящими внутри диэлектрика, никакого нескомпенсированного заряда появиться не может. Таким образом, в диэлектрике, помещенном во внешнее поле, может возникать только поверхностный заряд.

Во избежание недоразумений отметим, что доказательство этого утверждения неявно опиралось на однородность

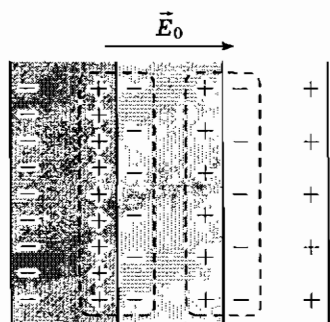


Рис. 57. Объемный заряд, возникающий в слоистом диэлектрике во внешнем поле

диэлектрика (то есть на эквивалентность его различных точек) и на изотропию его диэлектрических свойств (то есть на их независимость от направления). При нарушении этих условий объемный заряд в диэлектрике возникнуть может. Например, это произойдет в помещенном во внешнее поле диэлектрике, химический состав которого изменяется от точки к точке. Такой диэлектрик можно представить себе как «слоеный пирог» из ди-

электриков, имеющих разную поляризуемость (рис. 57). На поверхности каждого такого слоя во внешнем поле появляется поверхностный заряд (как на рис. 56), и, как следствие нескомпенсированности зарядов на поверхностях этих слоев, возникает заряд внутри диэлектрика (рис. 57).

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением однородных и изотропных диэлектриков. Объемный заряд такому диэлектрику можно навязать, только разместив в нем *сторонний заряд*:

сторонний заряд несут распределенные по объему тела заряженные частицы.

Например, сторонний заряд возникнет в твердом диэлектрике, если внедрить в его кристаллическую решетку положительные или отрицательные ионы. Обратим внимание на то, что в проводнике подобным способом создать объемный заряд невозможно, так как внедрение ионов в проводник вызовет перераспределение свободных носителей заряда, которое полностью скомпенсирует объемный заряд. При помещении, скажем, положительных ионов в металл к каждому из них притянутся свободные электроны (их число определяется зарядом иона), которые свяжутся с ионом в нейтральный комплекс, в результате заряд ионов будет

«вытеснен» на поверхность. Заметим, что в диэлектрике роль стороннего заряда могут играть и свободные носители заряда, которые проникают в него, например, при его зарядке.

Сравним заряды различных кусочков диэлектрика, по которому распределен сторонний заряд. Подобно поверхностному заряду заряды Δq небольших близко расположенных кусочков будут пропорциональны объемам этих кусочков ΔV . Коэффициент пропорциональности между Δq и ΔV называется *объемной плотностью заряда* и обозначается обычно буквой ρ . Другими словами,

объемной плотностью заряда ρ называется отношение заряда Δq , сосредоточенного в области малых размеров, к объему этой области ΔV :

$$\rho = \Delta q / \Delta V.$$

Части тела, фигурирующие в этом определении, должны, тем не менее, содержать большое число заряженных частиц.

Введенная нами величина ρ аналогична плотности массы, которая используется для описания распределения массы по объему тела. Однако в отличие от плотности массы, которая всегда является положительной величиной, плотность заряда может быть как положительной, так и отрицательной — в зависимости от знака заряда Δq , содержащегося в интересующей нас части тела. Значение плотности заряда ρ плавно меняется от одной части тела к другой, то есть является гладкой функцией координат. То же утверждение относится и к плотности массы. Например, плотность атмосферы плавно падает с увеличением высоты над поверхностью Земли.

Заметим, что плотность заряда ρ диэлектрика не совпадает с плотностью стороннего заряда $\rho_{\text{ст}}$, которая определяется как отношение заряда сторонних частиц, сосредоточенных в данном кусочке тела, к его объему $\rho_{\text{ст}} = \Delta q_{\text{ст}} / \Delta V$. Причиной этого несовпадения является поляризация диэлектрика.

Действительно, скажем, положительный ион, вставленный в диэлектрик, притягивает к себе электронный заряд и отталкивает заряд ядер. В результате они сдвигаются друг относительно друга так, что появляется поверхностный заряд (того же знака, что и заряд иона) и заряд вблизи иона (противоположного знака). Если произвести теперь усреднение по областям, содержащим много ионов, то мы обнаружим, что их заряд будет частично скомпенсирован за счет поляризации диэлектрика, так что $\rho < \rho_{\text{ст}}$. Другими словами, в присутствии стороннего заряда в диэлектрике возникает собственный («поляризационный») объемный заряд, и наблюдаемая плотность заряда ρ определяется алгебраической суммой плотностей стороннего и поляризационного зарядов. Разумеется, объемный поляризационный заряд компенсируется поляризационным же поверхностным зарядом, так что суммарный заряд диэлектрического тела определяется только величиной стороннего заряда.

Уточним правила изображения при помощи силовых линий электрического поля внутри тела с ненулевой объемной плотностью заряда. Мы уже установили, что число силовых линий, начинающихся или кончающихся на данном теле, пропорционально величине его заряда. Мы можем рассматривать часть диэлектрика, заключенную в области объема ΔV , как отдельное тело, обладающее зарядом $\rho \cdot \Delta V$. Поэтому силовые линии следует начинать или заканчивать в объеме тела. Силовые линии начинаются в областях с положительным значением ρ , а кончаются в областях с отрицательным ρ , причем число силовых линий, начинающихся или заканчивающихся в области данного объема ΔV , должно быть пропорционально абсолютной величине ρ . В качестве иллюстрации на рис. 58 приведена картина силовых линий поля однородно заряженного шара. Подчеркнем, что на этом рисунке отсутствует поверхностный заряд, то есть мы считаем эффекты, связанные с поляризацией диэлектрика, пренебрежимо малыми.

Если известна плотность заряда во всех точках данного тела, то можно найти и его объемный заряд q . В про-

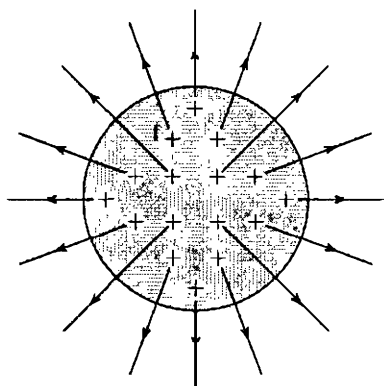


Рис. 58. Картина силовых линий поля однородно заряженного шара (изображено диаметрально сечение)

стейшем случае, когда тело заряжено однородно, то есть плотность заряда одинакова во всех его точках, заряд q будет равен произведению плотности заряда ρ на объем тела V :

$$q = \rho \cdot V.$$

Для вычисления же объемного заряда неоднородно заряженного тела его, как обычно, следует мысленно разбить на кусочки, размер которых достаточно мал для того, чтобы их можно было считать заряженными однородно. Заряд каждого такого кусочка будет равен $\rho \cdot \Delta V$, а полный объемный заряд находится суммированием зарядов кусочков. Точно так же можно найти объемный заряд любой части тела. В частности, может быть найдена поверхностная плотность заряда пленки σ или линейная плотность заряда λ нити, если известно распределение заряда внутри них.

Задача 14.1. Найдите заряд однородно заряженного шара радиуса R , если объемная плотность заряда в нем равна ρ , а поверхностная плотность заряда равна σ . Чему равна плотность стороннего заряда в этом теле?

Задача 14.2. Найдите заряд σ , приходящийся на единицу поверхности однородно заряженной по объему плоской пластины толщины h , если объемная плотность заряда в ней равна ρ , а заряд на ее поверхностях пренебрежимо мал.

Задача 14.3. Найдите заряд λ , приходящийся на единицу длины однородно заряженного по объему цилиндра радиуса R , если объемная плотность заряда в нем равна ρ , а поверхностная плотность заряда равна σ .

Плотность заряда любого тела можно представить как алгебраическую сумму плотностей зарядов составляющих его ядер и электронов. По отдельности эти плотности весьма значительны. Однако в реальных диэлектриках их сумма (то есть наблюдаемая плотность заряда) всегда много меньше, чем абсолютная величина каждого из двух слагаемых. Это связано с тем, что попытка создания плотности заряда, сравнимой с плотностью заряда ядер, породило бы внутри тела поле, приводящее к электрическому пробое.

Задача 14.4. Найдите плотность электронного заряда воды.

Задача 14.5. Найдите плотность поверхностного заряда кристалла поваренной соли кубической формы, если подрешетки ионов хлора и натрия смещены друг относительно друга вдоль одного из ребер куба на расстояние $l = 10^{-10}$ см (то есть на два порядка меньше, чем размер атома). Плотность соли равна $\rho = 2,16$ г/см³.

§ 15. Электрическое поле проводника

Так как в объеме проводника заряды отсутствуют, поле наэлектризованного проводника определяется только его поверхностным зарядом, сосредоточенным в тонком приповерхностном слое, который можно рассматривать как заряженную тонкую пленку. Воспользуемся этим обстоятельством и используем результаты, полученные для заряженных тонких пленок (§ 9), для анализа поля вблизи проводника. Это поле может быть вызвано как собственным зарядом проводника, так и внешним полем (тогда на проводнике имеются индуцированные заряды), или тем и другим вместе. Для последующего рассмотрения это несущественно.

Внутри проводника, как мы уже установили, напряженность поля равна нулю. Поскольку касательные к пленке компоненты напряженности по обе стороны от нее равны между собой, должна быть равна нулю касательная компонента напряженности снаружи от проводника вблизи его поверхности. Другими словами, вектор напряженности поля вблизи поверхности проводника перпендикулярен ей. Это свойство имеет простой физический смысл. Если бы вектор напряженности поля $\vec{E}$ имел составляющую, касательную к поверхности проводника, то на расположенные вблизи нее носители заряда действовала бы сила, которая вызвала бы их перераспределение вдоль поверхности, то есть статические условия были бы нарушены. Перпендикулярность вектора напряженности $\vec{E}$ к поверхности проводника можно выразить и иначе: должны быть перпендикулярными к поверхности проводника силовые линии поля. В качестве иллюстрации на рис. 59 представлена картина силовых линий вокруг незаряженного проводника эллипсоидальной формы, помещенного во внешнее однородное поле.

Отметим, что никакая силовая линия не может начаться и закончиться на поверхности одного и того же проводника (картина силовых линий, приведенная на рис. 59, оче-

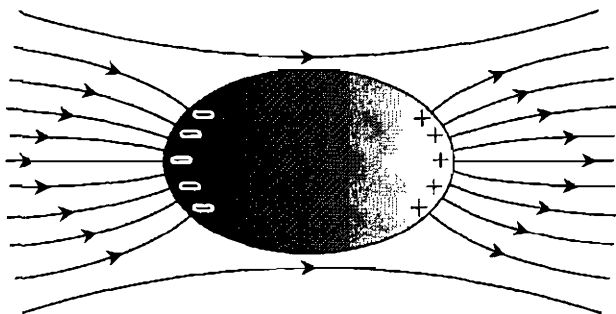


Рис. 59. Силовые линии вокруг незаряженного проводника эллипсоидальной формы, помещенного во внешнее однородное поле

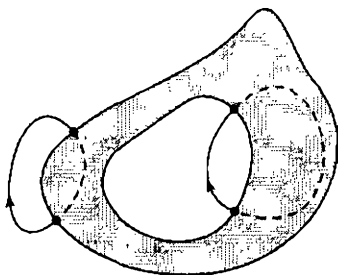


Рис. 60. Проводник и невозможные силовые линии

видно, удовлетворяет этому условию). Для доказательства данного утверждения предположим противное — что такая силовая линия существует (рис. 60). Переместим точечный пробный заряд по замкнутому контуру, образованному силовой линией и кривой, проходящей в объеме проводника (на рис. 60 такие кривые показаны штриховыми линиями).

Работа поля по перемещению заряда в проводнике равна нулю, а работа по перемещению вдоль силовой линии нулю не равна (§ 11). Поэтому итог будет ненулевым, что противоречит консервативности поля. На этом доказательство заканчивается.

Перейдем теперь к *теореме единственности*, которая гласит, что

условие ортогональности (перпендикулярности) $\vec{E}$ поверхности проводника однозначно определяет распределение заряда по его поверхности и, соответственно, собственное поле проводника.

При этом считается, что вне проводника поле потенциально и удовлетворяет теореме Гаусса для любой замкнутой поверхности. Сформулированная теорема справедлива для проводника в произвольном внешнем поле, при этом проводник может иметь любой заряд.

Обоснуем сделанное утверждение. Предположим противное: пусть имеется два различных поля с напряженностями $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$, удовлетворяющие условию ортогональности. Рассмотрим поле с напряженностью $\vec{E}_1 - \vec{E}_2$. Это поле соответствует некоторому распределению заряда по поверхности проводника с нулевым суммарным зарядом, поскольку в силу теоремы Гаусса поток поля $\vec{E}_1 - \vec{E}_2$ через замкнутую поверхность, охватывающую проводник, равен нулю. Кроме того, из этого поля исключено поле внешнее, то есть разность $\vec{E}_1 - \vec{E}_2$ стремится к нулю при удалении от проводника. Поэтому силовые линии поля $\vec{E}_1 - \vec{E}_2$ не могут уходить в бесконечность, то есть должны начинаться и заканчиваться на поверхности проводника. Но такое поведение силовых линий, как мы уже установили, невозможно. Полученное противоречие и доказывает теорему единственности.

В силу теоремы единственности реальное поле вблизи проводника совпадает с «искусственно» сконструированным полем, если последнее консервативно, а также удовлетворяет теореме Гаусса и условию ортогональности. Например, поле заряженного уединенного проводящего шара вне его совпадает с полем точечного заряда, помещенного в центр шара и равного по величине заряду шара, поскольку такое поле удовлетворяет всем сформулированным условиям.

Рассмотрим теперь задачу о незаряженном проводящем шаре, помещенном во внешнее однородное поле, которая допускает полное решение. Во внешнем поле на шаре возникают индуцированные заряды, порождающие его собственное поле, которое накладывается на внешнее поле. Оказывается, поле шара (вне его) совпадает с полем точечного диполя определенной величины, зависящей от напряженности внешнего поля и радиуса шара. Для доказательства это-

го утверждения надо проверить выполнение необходимых условий. Очевидно, поле диполя является консервативным и удовлетворяет теореме Гаусса. Поэтому надо проверить только выполнение условия ортогональности.

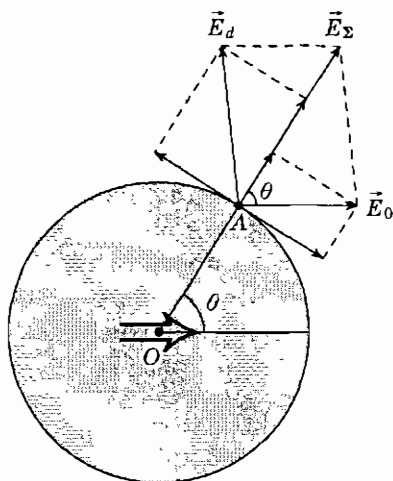


Рис. 61. Напряженность поля проводящего шара во внешнем однородном поле

Возьмем некоторую точку A на поверхности шара. Обозначим через θ угол между вектором напряженности внешнего поля $\vec{E}_0$ и радиус-вектором $\vec{OA}$, проведенным в выбранную точку из центра шара O (рис. 61). Как мы установили в § 6, радиальная и тангенциальная компоненты напряженности поля диполя $\vec{E}_d$ в точке A равны $\frac{2d \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 R^3}$ и $\frac{d \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 R^3}$, где R — радиус шара. Радиальная же и тангенциальная компоненты $\vec{E}_0$ равны $E_0 \cos \theta$ и $-E_0 \sin \theta$. Поэтому суперпозиция внешнего поля и поля диполя $\vec{E}_\Sigma = \vec{E}_0 + \vec{E}_d$ имеет в точке A следующие радиальную и тангенциальную компоненты:

$$E_0 \cos \theta + \frac{2d \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 R^3}, \quad -E_0 \sin \theta + \frac{d \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 R^3}.$$

Разложение упомянутых векторов на компоненты поясняет рис. 61. Тангенциальная компонента вектора напряженности суперпозиции полей диполя и однородного поля будет вне зависимости от величины угла θ равна нулю, если

$$d = 4\pi\epsilon_0 R^3 E_0.$$

Это соотношение можно записать и в векторной форме, учитывая, что дипольный момент шара параллелен вектору напряженности внешнего поля:

$$\vec{d} = 4\pi\epsilon_0 R^3 \vec{E}_0.$$

При этом условии построенное нами поле имеет напряженность, перпендикулярную поверхности шара во всех точках его поверхности. На этом заканчивается доказательство того, что поле проводящего шара вне его совпадает с полем точечного диполя с дипольным моментом $d = 4\pi\epsilon_0 R^3 E_0$.

Вопрос 15.1. Каким будет поле проводящего заряженного шара радиуса R , помещенного во внешнее однородное поле?

Вблизи пленки перпендикулярная к поверхности компонента напряженности испытывает скачок, равный σ/ϵ_0 . Поскольку внутри проводника напряженность равна нулю, а вне его она перпендикулярна поверхности, величина этого скачка совпадает со значением напряженности вблизи поверхности проводника:

$$E = \sigma/\epsilon_0.$$

Другими словами, плотность силовых линий, начинающихся (заканчивающихся) на поверхности проводника, пропорциональна его поверхностной плотности заряда.

Задача 15.1. Найдите поверхностную плотность заряда незаряженного проводящего шара радиуса R , помещенного в однородное внешнее поле E_0 .

Поскольку объемный заряд в проводнике отсутствует, сила, действующая на него со стороны внешнего поля,

определяется только поверхностным зарядом проводника. Чтобы найти эту силу, надо, как обычно, разбить поверхность проводника на малые элементы, вычислить силу, действующую на каждый элемент, и векторно просуммировать эти силы. Поэтому в качестве первого шага необходимо определить силу, действующую на произвольный элемент поверхности проводника.

Как показано при анализе наэлектризованных пленок (§ 9), напряженность поля, внешнего по отношению к некоторому элементу пленки, равна полусумме напряженностей по разные стороны от нее. То же самое относится и к поверхностному слою, то есть напряженность поля, внешнего по отношению к некоторому элементу поверхности проводника, равна $E/2$, где $E = \sigma/\epsilon_0$ — напряженность поля вблизи поверхности проводника. Обратим внимание на то, что $E/2$ является напряженностью суперпозиции внешнего по отношению к проводнику поля и поля всех остальных элементов поверхности проводника, за исключением данного. Заряд элемента поверхности определяется произведением $\Delta q = \sigma \cdot \Delta S$, где ΔS — площадь элемента. Поэтому действующая на него сила равна

$$\Delta F = \frac{E}{2} \cdot \Delta q = \frac{1}{2\epsilon_0} \sigma^2 \Delta S = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \Delta S.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\Delta F}{\Delta S} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2\epsilon_0} \sigma^2.$$

Направление силы $\Delta \vec{F}$, действующей на элемент поверхности, задается направлением напряженности поля вблизи границы проводника. Следовательно, $\Delta \vec{F}$ перпендикулярна поверхности тела. Легко сообразить, что сила $\Delta \vec{F}$ вне зависимости от знака σ направлена наружу.

Мы видим, что сила, действующая на данный элемент поверхности, определяется только величиной напряженности поля вблизи от него. При этом совершенно неважно, чем это поле вызвано: внешним источником или зарядом самого проводника. В соответствии с принципом близкодей-

ствия, существенным оказывается только устройство поля в непосредственной окрестности выбранного нами элемента поверхности.

Приложенная к поверхностному заряду сила вызывает деформацию проводника. Поскольку эта сила всегда направлена наружу, проводник «распухает» как при приложении внешнего поля, так и при помещении на него заряда. Обычно этот эффект незначителен. Поэтому при рассмотрении поля проводящего шара мы пренебрегали его деформацией.

Представим теперь себе, что в проводнике имеется замкнутая полость. Как и снаружи, внутри этой полости не может быть силовых линий, начинающихся и заканчивающихся на ее поверхности. Это можно доказать точно так же, как и для силовой линии вне проводника, соответствующее построение приведено на рис. 60. Отсюда следует, в частности, что напряженность поля в полости проводника, в которой отсутствуют наэлектризованные тела, равна нулю. Действительно, наличие ненулевой напряженности означало бы присутствие в полости силовых линий. Поскольку они не могут замыкаться на себя (§ 11), то они обязаны начинаться и заканчиваться на поверхности полости, что, как мы выяснили, также невозможно. Отсюда и следует, что напряженность поля в полости проводника равна нулю.

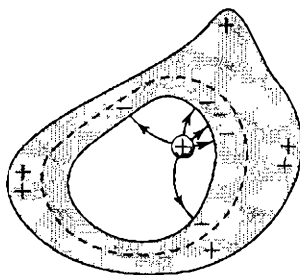


Рис. 62. Заряженное тело в полости проводника

Теперь представим себе, что мы поместили заряженное тело в полость (незаряженного) проводника (рис. 62). Тогда в проводнике произойдет разделение заряда: индуцированные заряды появятся как на внутренней, так и на внешней поверхностях проводника. При этом заряд на внутренней стороне проводника будет в точности равен по величине и противоположен по знаку заряду заряженного тела.

Для доказательства этого свойства можно применить теорему Гаусса к замкнутой поверхности, охватывающей полость и проходящей по объему проводника (рис. 62). Так как напряженность поля на этой поверхности равна нулю, равен нулю и поток напряженности через нее, то есть равен нулю суммарный заряд внутри выбранной поверхности, что эквивалентно сделанному утверждению. Соответственно, заряд, индуцированный на внешней поверхности проводника, будет равен заряду тела, помещенного в полость (так как суммарный заряд проводника равен нулю). Распределение заряда по внешней поверхности проводника диктуется условием перпендикулярности силовых линий к его поверхности и, следовательно, никак не связано с геометрической формой и размерами полости. Поэтому перемещение заряженного тела внутри полости вызовет перераспределение заряда по ее поверхности, но никак не отразится на поле вне проводника и распределении заряда по его внешней поверхности.

Задача 15.2. Найдите плотность поверхностного заряда на внешней поверхности уединенного проводящего шара радиуса R , если в нем имеется полость, в которую помещен заряд q .

Теперь мы можем поместить проводник во внешнее поле или разместить на нем некоторый заряд. При этом в полости проводника ничего не произойдет, так как напряженность поля в нем также определяется условием, что напряженность ортогональна поверхности, на этот раз поверхности полости. Таким образом, мы приходим к выводу, что ни внешнее поле, ни заряд проводника не влияют

на поле и распределение заряда внутри его полостей. Это свойство проводников называется *экранировкой*.

Экранировку можно использовать для защиты какого-либо объекта от электростатического поля. Например, приборы, чувствительные к наличию электрического поля, обычно помещают в металлический корпус. Обратим внимание на то, что экранировка является взаимной, так как никакие перемещения заряженных тел внутри полости не сказываются на поле вне проводника. Единственным параметром помещенных в полость тел, о котором «знает» поле вне проводника, является их суммарный заряд. Подчеркнем, что сказанное справедливо как для массивного проводника с небольшой полостью внутри него, так и для проводящей пленки замкнутой формы (например, для закрытого пакета из алюминиевой фольги). Особым является случай неограниченного проводника (то есть проводника больших размеров) типа металлического листа. Тогда поле по каждую сторону от проводника будет совершенно нечувствительным к тому, что происходит с другой ее стороны, что также можно считать проявлением экранировки.

Заметим, что полная экранировка имеет место только в статических условиях, если же поле изменяется со временем, то экранировка становится неполной, хотя и не исчезает совсем.

§ 16. Поле диэлектрика

Как мы уже объяснили, за счет поляризации диэлектрика во внешнем поле возникает его собственное поле, которое накладывается на поле внешнее. Установим основные количественные соотношения для этой суперпозиции.

Сначала мы будем считать, что диэлектрик однороден и изотропен и в нем отсутствует сторонний заряд. В этом случае, как мы показали в § 14, объемного заряда в диэлектрике не возникает, то есть собственное поле диэлектрика связано с его поверхностным зарядом. Поэтому мы, как и для проводников, можем использовать результаты, полученные в § 9 для наэлектризованных пленок.

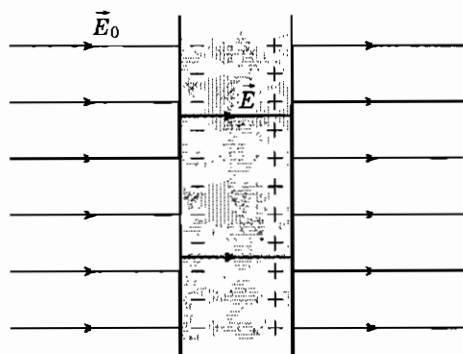


Рис. 63. Диэлектрическая пластина во внешнем однородном поле

Проанализируем простейший случай, когда бесконечная плоская незаряженная диэлектрическая пластина помещена во внешнее однородное поле с напряженностью $\vec{E}_0$, перпендикулярной поверхности пластины (рис. 63). В этом случае индуцированные заряды будут равномерно распределены по поверхностям пластины. Плотности поверхностных зарядов на них будут равны по величине и противоположны по знаку (так как суммарный заряд пластины равен нулю). Отсюда следует, что собственное

поле диэлектрика будет совпадать с полем двух плоских параллельных однородно заряженных пленок, рассмотренным в § 9 (рис. 39). Поэтому напряженность собственного поля диэлектрика отлична от нуля только внутри пластины, где поле однородно, а его вектор напряженности направлен навстречу напряженности внешнего поля. Результат суперпозиции внешнего и собственного полей для рассматриваемого случая показан на рис. 63.

Мы уже знаем, что относительное смещение положительного заряда ядер и отрицательного заряда электронов во внешнем электрическом поле пропорционально E_0 . Так как поверхностный заряд в диэлектрике возникает как раз за счет этого смещения, то его плотность σ , а с ней и напряженность собственного поля диэлектрика, пропорциональны E_0 . Вследствие этого будет пропорциональна E_0 и напряженность поля E внутри диэлектрика, то есть отношение E_0/E не зависит от величины напряженности. Это отношение называется *относительной диэлектрической проницаемостью* диэлектрика, оно обозначается ϵ_r :

$$\epsilon_r = E_0/E.$$

То же самое соотношение можно записать и иначе:

$$E = E_0/\epsilon_r.$$

Поскольку напряженность поля внутри пластины должна быть меньше напряженности внешнего поля, $\epsilon_r > 1$ для любого диэлектрика. Слабой поляризуемости диэлектрика, когда σ мала, соответствует значение ϵ_r , близкое к единице. Сильной же поляризуемости соответствует малое отношение E/E_0 , то есть большое значение ϵ_r . Таким образом, безразмерная константа ϵ_r характеризует способность диэлектрика поляризоваться. Значения ϵ_r для диэлектриков, состоящих из неполярных молекул, обычно мало отличаются от единицы. (Именно такая ситуация, когда отличием ϵ_r от единицы можно пренебречь, имеется в виду в задачах, в условиях которых предлагается считать ϵ_r равной единице.) Для веществ же, которые состоят из полярных

молекул, ϵ_r может достигать весьма значительных величин (например, для воды $\epsilon_r = 81$). Во избежание недоразумений подчеркнем, что это относится к жидкой фазе. В твердой же фазе, где ориентация полярных молекул фиксированна, ϵ_r также обычно близко к единице (как это имеет место для льда).

Вопрос 16.1. Как связаны между собой относительные диэлектрические проницаемости слоев на рис. 57?

Предположим теперь, что мы наложили на пластину еще одно однородное поле, вектор напряженности которого направлен вдоль нее, то есть параллелен поверхностям пластины. Это приведет к дополнительной поляризации диэлектрика, однако соответствующие индуцированные заряды возникнут на бесконечно удаленных гранях пластины, и, следовательно, их полем можно пренебречь. Поэтому появление продольной компоненты напряженности не изменит соотношения между компонентами, перпендикулярными к поверхности. Картина силовых линий поля для этого случая представлена на рис. 64.

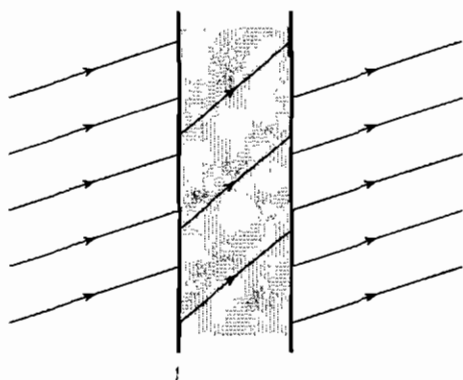


Рис. 64. Силовые линии поля, возникающего при поляризации диэлектрической пластины во внешнем однородном поле

Обратимся теперь к диэлектрическому телу произвольной формы. На расстояниях, много меньших размеров тела,

его поверхность можно считать плоской, и поэтому поле вблизи нее будет устроено точно так же, как и вблизи поверхности плоской пластины. А именно, касательные к поверхности диэлектрика компоненты напряженности внутри и снаружи диэлектрика равны между собой (как это имеет место для любой заряженной пленки), а перпендикулярные к поверхности компоненты напряженности внутри и снаружи отличаются в ϵ_r раз.

Как и для проводников, для диэлектриков справедлива *теорема единственности*. А именно,

приведенные соотношения, связывающие напряженность поля вне и внутри диэлектрика, однозначно определяют поляризацию диэлектрика, помещенного во внешнее поле, а следовательно, и собственное поле диэлектрика.

При этом поле внутри и вне диэлектрика предполагается консервативным и удовлетворяющим теореме Гаусса.

Данная теорема доказывается аналогично тому, как это мы сделали для проводника в § 15. А именно, предположим, что существует два различных поля с напряженностями $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$, удовлетворяющие сформулированным условиям. Рассмотрим поле с напряженностью $\vec{E}_1 - \vec{E}_2$. Это поле соответствует некоторому распределению заряда по поверхности диэлектрика (с нулевым суммарным зарядом). Кроме того, из этого поля исключено поле внешнее, то есть $\vec{E}_1 - \vec{E}_2$ стремится к нулю при удалении от нашего диэлектрика.

Построим некоторую силовую линию поля $\vec{E}_1 - \vec{E}_2$, проходящую внутри диэлектрика. Поскольку она не может замкнуться на себя, эта силовая линия выходит на поверхность диэлектрика. Продолжим ее за пределы диэлектрика. Поскольку перпендикулярные к поверхности компоненты напряженности снаружи от диэлектрика и внутри него имеют один и тот же знак, направление силовой линии не меняется на поверхности диэлектрика. Переместим теперь вдоль этой силовой линии пробный заряд, замкнув его

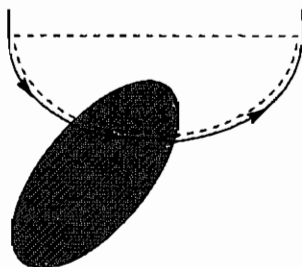


Рис. 65. Траектория перемещения пробного заряда

траекторию достаточно далеко от тела, где напряженность $\vec{E}_1 - \vec{E}_2$ пренебрежимо мала (см. рис. 65, траектория перемещения пробного заряда показана на нем пунктиром). Тогда работа поля по перемещению пробного заряда по замкнутому контуру будет отлична от нуля, что противоречит консервативности поля. Полученное противоречие и доказывает теорему единственности.

Как и для проводников, сформулированная теорема единственности означает, что реальное поле совпадает с «искусственно» сконструированным полем, если последнее консервативно, а также удовлетворяет теореме Гаусса и условиям на поверхности диэлектрика. Рассмотрим в качестве примера диэлектрический шар во внешнем однородном поле. Оказывается, что в этом случае он поляризуется однородно, то есть внутри шара поле также будет однородным (хотя его напряженность и отлична от напряженности внешнего поля). Снаружи же поле шара будет совпадать с полем точечного диполя определенной величины, как и для проводящего шара в однородном поле, см. § 15.

Приведем доказательство приведенных утверждений. Прежде всего, наше поле консервативно и для него выполняется теорема Гаусса. Поэтому остается только проверить, что поле, описанное выше, удовлетворяет необходимым условиям на его поверхности. Возьмем на поверхности шара некоторую точку A . Пусть радиус-вектор $\vec{OA}$, про-

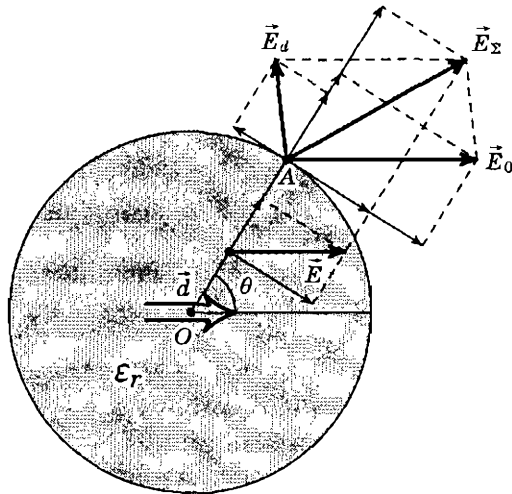


Рис. 66. Вектор напряженности внутри и вне диэлектрического шара

веденный в эту точку из центра шара O , составляет угол θ с направлением напряженности внешнего поля $\vec{E}_0$, или, что то же самое, с направлением напряженности $\vec{E}$ внутри шара. Суперпозиция $\vec{E}_\Sigma$ однородного внешнего поля $\vec{E}_0$ и поля диполя $\vec{E}_d$ в точке A имеет следующие радиальную и тангенциальную компоненты (см. § 15):

$$E_r = E_0 \cos \theta + \frac{2d \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 R^3}, \quad E_\theta = -E_0 \sin \theta + \frac{d \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 R^3},$$

где R — радиус шара. Раскладывая вектор напряженности $\vec{E}$ поля внутри шара на радиальную и тангенциальную компоненты, мы находим их значения $E \cos \theta$ и $-E \sin \theta$. Сказанное иллюстрируется рис. 66. В соответствии с граничным условием радиальная и тангенциальная компоненты напряженности вне шара должны быть равны $\epsilon_r E \cos \theta$ и $-E \sin \theta$. Эти соотношения справедливы для любого угла, если

$$E_0 + \frac{2d}{4\pi\epsilon_0 R^3} = \epsilon_r E, \quad E_0 - \frac{d}{4\pi\epsilon_0 R^3} = E.$$

Решая получившуюся систему уравнений, находим

$$E = \frac{3}{\varepsilon_r + 2} E_0, \quad d = 4\pi \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} \varepsilon_0 R^3 E_0.$$

Как и следует, при $\varepsilon_r = 1$ (то есть в отсутствие поляризуемости) $d = 0$ и напряженность поля внутри диэлектрика E совпадает с напряженностью внешнего поля E_0 .

Вопрос 16.2. Какому примерно значению ε_r соответствуют величины векторов напряженности, приведенные на рис. 66?

Отметим, что рассмотренное нами в § 15 поле проводящего шара во внешнем однородном поле получается из поля диэлектрического шара при формальном предельном переходе, когда ε_r стремится к бесконечности. Это объясняется тем, что в этом пределе в силу большой поляризуемости диэлектрика напряженность поля внутри него оказывается пренебрежимо малой, как и в проводнике.

Используя результат, полученный для заряженных пленок в § 9, мы заключаем, что поверхностная плотность заряда диэлектрика равна

$$\sigma = \varepsilon_0 \cdot E_{\perp} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right) = \varepsilon_0 \cdot E'_{\perp} (\varepsilon_r - 1),$$

где $E_{\perp}$ и $E'_{\perp}$ — перпендикулярные к поверхности компоненты напряженности снаружи от диэлектрика и внутри него.

Задача 16.1. Найдите поверхностную плотность заряда σ , индуцированную на поверхности диэлектрического шара радиуса R с относительной диэлектрической проницаемостью ε_r в однородном внешнем поле с напряженностью E_0 .

Задача 16.2. Найдите дипольный момент плоской незаряженной диэлектрической пластины, помещенной во внешнее однородное поле с напряженностью $\vec{E}_0$, перпендикулярной поверхности пластины.

Как и для всякой заряженной пленки, сила, действующая на элемент поверхности диэлектрика площадью ΔS , равна произведению заряда $\sigma \Delta S$ и напряженности внешнего по отношению к элементу поверхности поля, которое равно полусумме векторов напряженности по разные стороны от пленки (§ 9), в данном случае — полусумме векторов напряженности внутри и вне диэлектрика. В отличие от проводника, для диэлектрика эта сила не обязана быть перпендикулярной поверхности.

Задача 16.3. Диэлектрическая пластина с относительной диэлектрической проницаемостью ϵ_r помещена во внешнее однородное поле с напряженностью E_0 , направленной под углом θ к прямой, перпендикулярной поверхности пластины. Найдите силу, действующую на единицу площади этой пластины.

На практике довольно часто встречается ситуация, когда проводник, на который помещают заряд, покрыт слоем диэлектрика. В этом случае возникает вопрос о том, что происходит на границе «заряженный проводник — диэлектрик». Внутри проводника напряженность поля равна нулю. Поэтому проблема сводится к определению напряженности поля в диэлектрике вблизи границы раздела. Для ее решения представим себе, что имеется узкий зазор между проводником и диэлектриком. Как мы уже установили в § 15, вектор напряженности поля в этом зазоре перпендикулярен поверхности проводника, а по абсолютной величине он равен σ/ϵ_0 , где σ — плотность поверхностного заряда проводника. Так как вектор напряженности поля вне диэлектрика вблизи от его поверхности перпендикулярен ей, то вектор напряженности внутри диэлектрика также будет перпендикулярен этой поверхности, а по абсолютной величине будет в ϵ_r раз меньше, чем снаружи. Таким образом, мы получаем соотношение

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_r \epsilon_0},$$

связывающее напряженность поля в диэлектрике (вблизи от проводника) с плотностью поверхностного заряда проводника. Хотя для вывода этого соотношения мы использовали наличие зазора между проводником и диэлектриком, оно справедливо и в отсутствие этого зазора. Для обоснования этого утверждения мы можем представить себе уменьшение зазора до нулевого значения, которое не приводит к изменению напряженности, поскольку найденное значение напряженности не зависит от величины зазора.

Представим теперь себе, что заряженное тело окружено слоем диэлектрика. Иными словами, заряженное тело оказывается в полости диэлектрического тела. Поток напряженности через поверхность, проходящую вблизи границы полости внутри нее, по теореме Гаусса равен q/ϵ_0 . Поскольку поток определяется только компонентой напряженности, перпендикулярной к поверхности, а внутри диэлектрика эта компонента в ϵ_r меньше, то поток напряженности через поверхность, проходящую вблизи границы полости, но уже внутри диэлектрика, будет равен $q/(\epsilon_0 \epsilon_r)$. Отличие этого выражения от случая, когда проводник находится в вакууме, связано с тем, что на поверхности диэлектрика возникает индуцированный поверхностный заряд.

Задача 16.4. Найдите заряд, индуцированный на поверхности полости диэлектрика с относительной диэлектрической проницаемостью ϵ_r , если в этой полости помещено тело с зарядом q .

Вспоминая теперь, что (в отсутствие стороннего заряда) объемный заряд в диэлектрике отсутствует, мы заключаем, что тот же поток напряженности будет проходить через любую поверхность, проходящую внутри диэлектрика и охватывающую заряженное тело. Таким образом, для поля внутри диэлектрика справедлива *обобщенная теорема Гаусса*:

поток напряженности через замкнутую поверхность, проходящую внутри диэлектрика, равен $q/(\epsilon_0 \epsilon_r)$, где q — заряд тел, заключенных внутри этой поверхности.

При наличии стороннего заряда, распределенного внутри диэлектрика, его величину внутри замкнутой поверхности также следует включить в заряд q . Тогда обобщенную теорему Гаусса можно применять и к случаю, когда по объему диэлектрика распределен сторонний заряд.

§ 17. Симметричные поля

Типичной задачей электростатики является определение напряженности поля некоторого наэлектризованного тела. Для произвольного случая сделать это весьма сложно. Дело значительно упрощается, если распределение заряда в данном теле обладает той или иной симметрией. Тогда многие заключения о направлении и величине напряженности можно сделать безо всяких вычислений, исходя только из геометрических соображений. Это существенно облегчает нахождение координатной зависимости напряженности.

Мы начнем изучение подобных случаев с поля уединенного однородно заряженного шара. Как мы уже отмечали, объемный заряд может присутствовать только в диэлектрике, если ему навязан сторонний заряд. Мы будем считать, что сторонний заряд равномерно распределен по шару с объемной плотностью ρ . Сначала мы рассмотрим случай, когда можно не учитывать эффекты, связанные с поляризацией диэлектрика. Для этого, как мы объясняли ранее, отличие его относительной диэлектрической проницаемости ϵ_r от единицы должно быть пренебрежимо малым.

Для поля шара справедливы следующие утверждения:

— Вектор напряженности $\vec{E}$ в любой точке A будет направлен вдоль вектора $\vec{OA}$, соединяющего центр шара O с выбранной точкой A , поскольку этот вектор задает единственное выделенное направление в точке A (рис. 67). Таким образом, векторы напряженности поля заряженного шара будут радиальными, причем как вне шара, так и внутри него. Обратим внимание на то, что в центре шара напряженность поля должна быть равна нулю, поскольку здесь отсутствует

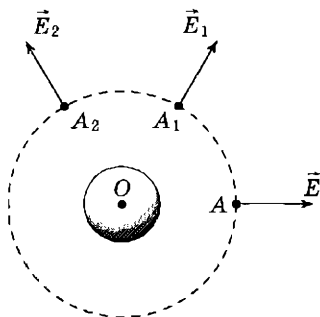


Рис. 67. Напряженность поля однородно заряженного шара

выделенное направление, вдоль которого можно было бы направить вектор $\vec{E}$.

— В точках, равноудаленных от центра шара O (например, в точках A, A_1, A_2 на рис. 67), абсолютные величины векторов напряженности будут одинаковыми, поскольку все такие точки эквивалентны друг другу. Другими словами, абсолютная величина напряженности поля заряженного шара зависит только от расстояния r между точкой наблюдения и центром шара.

Количественно координатная зависимость $E(r)$ может быть найдена с помощью теоремы Гаусса. Для этого применим ее к сферической поверхности радиуса r с центром в точке O . Вектор $\vec{E}$ направлен перпендикулярно поверхности сферы и одинаков по модулю во всех ее точках (рис. 67). Поэтому поток вектора $\vec{E}$ через сферу будет равен

$$\Phi = S \cdot E = 4\pi r^2 \cdot E.$$

Приравнивая теперь поток Φ к q/ϵ_0 , где q — заряд внутри сферы, находим

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Для сферы с радиусом r , большим радиуса шара R , заряд внутри сферы равен полному заряду шара $Q = (4\pi/3)R^3\rho$. Поэтому при $r > R$, то есть для точек вне шара,

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Полученное выражение совпадает с выражением для напряженности поля точечного заряда. Обратим внимание на то, что такое совпадение имеет место для всех точек вне шара, а не только для удаленных от шара точек, как это имело бы место для тела произвольной формы.

При $r < R$ сфера радиуса r охватывает только часть шара, объем которой равен $V = 4\pi r^3/3$. Поэтому заряд q , заключенный внутри сферы, зависит от ее радиуса r . Величину $q(r)$ можно найти, умножив объемную плотность заряда ρ на объем области $V = 4\pi r^3/3$:

$$q(r) = 4\pi\rho r^3/3.$$

Подставляя функцию $q(r)$ в выражение для напряженности поля, находим, что при $r < R$, то есть для точек внутри шара,

$$E = \frac{q(r)}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\rho \cdot r}{3\epsilon_0} = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3}.$$

Эта величина, в полном соответствии со сказанным ранее, обращается в нуль при $r=0$, то есть в центре шара.

Поскольку в рассматриваемом нами случае поляризационные эффекты являются пренебрежимо малыми, отсутствует и связанный с ними поверхностный заряд. Поэтому напряженность поля не должна испытывать на поверхности шара никакого скачка. Действительно, легко проверить, что значения напряженности на поверхности шара (то есть при $r=R$), найденные по формуле для напряженности поля внутри шара и по формуле для напряженности вне его, совпадают между собой.

График зависимости напряженности электрического поля E от расстояния r до центра приведен на рис. 68. Мы видим, что по мере роста r напряженность поля сначала линейно растет, достигает своего максимального значения на поверхности шара, а затем убывает обратно пропорционально квадрату r . Хотя при $r=R$ график зависимости E от r остается непрерывным, на нем наблюдается излом. Этот излом связан со скачкообразным изменением плотности заряда на поверхности шара.

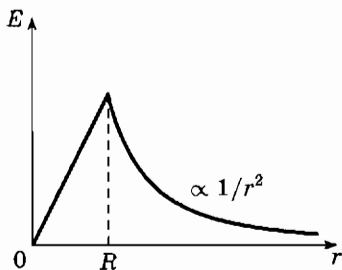


Рис. 68. Зависимость E от r для поля однородно заряженного шара при $\epsilon_r=1$ (значок $\propto$ обозначает пропорциональность)

Теперь мы рассмотрим ту же самую задачу, то есть поле дипольного электрического шара радиуса R , по которому равномерно с плотностью $\rho = 3Q/(4\pi R^3)$ распределен сторонний заряд, но примем во внимание эффекты поляризации. Как и в предыдущем случае, вне шара его

поле будет совпадать с полем точечного заряда, величина которого Q определяется сторонним зарядом. Напряженность же поля внутри шара можно найти, как и выше, пользуясь теоремой Гаусса. Внутри сферы радиуса $r < R$ сторонний заряд равен $q = 4\pi\rho r^3/3$. Применяя к этой сфере обобщенную теорему Гаусса, мы находим величину напряженности на расстоянии r :

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2} = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r R^3}.$$

Таким образом за счет поляризации диэлектрика напряженность поля стороннего заряда уменьшается в ϵ_r раз. Это связано с появлением в диэлектрике поляризационного объемного заряда.

В отличие от предыдущего случая, на поверхности шара напряженность испытывает скачок, равный $\frac{(1-1/\epsilon_r)Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$, что свидетельствует о наличии поверхностного заряда с плотностью $\sigma = \frac{(1-1/\epsilon_r)Q}{4\pi R^2}$. Суммарный поверхностный заряд шара равен $\sigma \cdot 4\pi R^2 = (1-1/\epsilon_r)Q$. Он в точности компенсируется объемным поляризационным зарядом диэлектрика, поскольку за счет поляризации диэлектрик приобрести заряд не может. Мы видим, что, действительно, поляризацией диэлектрика можно пренебречь, только если относительная диэлектрическая проницаемость ϵ_r близка к единице.

Задача 17.1. Проверьте, что поляризационный объемный и поверхностный заряды однородно заряженного диэлектрического шара в сумме дают нуль.

Задача 17.2. Постройте график зависимости E от r для шара, однородно заряженного по объему, если $\epsilon_r \neq 1$.

Практически все сказанное выше относительно поля шара может быть отнесено и к полю любого тела со *сферически-симметричным* распределением заряда. По определению,

при вращении такого тела вокруг любой оси, проходящей через некоторую точку O , которая называется центром симметрии, распределение заряда в пространстве не меняется.

Не будет меняться при таких поворотах и напряженность поля, то есть оно также будет сферически-симметричным. В разобранном нами частном случае центром симметрии является, очевидно, центр шара. Как и для шара, вектор напряженности $\vec{E}$ поля тела со сферически-симметричным распределением заряда будет во всех точках направлен вдоль радиус-вектора, проведенного в точку наблюдения из центра симметрии O , а величина $\vec{E}$ будет одной и той же в точках, расположенных на одинаковом расстоянии от O . Более того, зависимость E от r определяется той же формулой

$$E(r) = \frac{q(r)}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2}.$$

Здесь $q(r)$ — сторонний заряд, заключенный внутри сферы радиуса r с центром в точке O , а ϵ_r — относительная диэлектрическая проницаемость на расстоянии r от центра симметрии.

Задача 17.3. Найдите напряженность поля сферического слоя, по которому равномерно с плотностью ρ распределен сторонний заряд, считая $\epsilon_r \neq 1$. Внутренний радиус слоя равен R_1 , а внешний равен R_2 . Постройте график зависимости E от r .

Вопрос 17.1. Имеется ли поверхностная плотность заряда на внутренней границе этого сферического слоя?

Как и для однородно заряженного шара, поле произвольного тела со сферически-симметричным распределением заряда вне тела совпадает с полем точечного заряда. Это означает, что дипольный, квадрупольный и так далее моменты равны нулю. Причина этого, скажем, для дипольного момента заключается в том, что отсутствует выделенное

направление, вдоль которого он мог бы быть направлен. Подобные соображения справедливы и для высших моментов.

Обсудим теперь физические условия, при которых можно реализовать сферически-симметричное распределение заряда. Если речь идет о диэлектриках, то должно быть сферически-симметричным распределение стороннего заряда. Однако этого недостаточно. Должно быть сферически-симметричным (то есть не менять своей формы при вращениях вокруг осей, проходящих через центр симметрии O) и само тело. Примером таких тел и являются рассмотренный выше шар или шаровой слой. Если тело не обладает нужной симметрией, то его поляризация разрушит симметрию поля. То же требование сферически-симметричной формы относится и к проводящему телу. Заряд, помещенный, например, на проводящий шар, сам по себе однородно распределится по его поверхности, то есть распределение заряда будет сферически-симметричным. Поэтому снаружи от шара его поле будет совпадать с полем точечного заряда, величина которого определяется зарядом шара (а внутри шара напряженность равна нулю). Распределение же заряда по поверхности проводящего тела неправильной формы уже не может быть сферически-симметричным. Другой причиной, нарушающей сферическую симметрию задачи, является внешнее поле. Поэтому мы и рассматривали только уединенные тела.

Задача 17.4. Убедитесь, что на поверхности заряженного проводящего шара напряженность испытывает скачок, равный σ/ϵ_0 .

Соображения симметрии применимы также к полям таких тел, как однородно заряженные бесконечный цилиндр или бесконечная плоская пластина. Они являются примерами тел с цилиндрически-симметричным и с плоско-симметричным распределениями заряда. В первом случае распределение заряда в пространстве не меняется при поворотах тела вокруг некоторой прямой, которая называется осью симметрии, и при сдвигах вдоль этой прямой. Во втором

случае это распределение не меняется при сдвигах тела вдоль некоторой плоскости и при отражениях относительно нее. Такие распределения реализуются только в телах, обладающих той же симметрией, примерами которых и являются цилиндр и пластина. Это следует из тех же соображений, как и для сферически-симметричного случая.

Исследование полей цилиндрически-симметричного и плоско-симметричного распределений заряда практически повторяет анализ, сделанный в § 9 для полей бесконечных однородно заряженных прямой нити и плоской пленки. Поэтому мы приведем только результаты, не останавливаясь подробно на их выводе. Вектор напряженности поля тела с цилиндрически-симметричным распределением заряда направлен в любой точке вдоль вектора, соединяющего ось симметрии с точкой наблюдения и перпендикулярного этой оси. В точках, равноотстоящих от оси, величина напряженности будет одной и той же. Напряженность поля тела с плоско-симметричным распределением заряда будет перпендикулярна плоскости симметрии. Причем в точках, лежащих по разные стороны от плоскости симметрии на одинаковом расстоянии от нее, векторы напряженности будут равны по величине и направлены в противоположные стороны.

Количественно напряженность рассматриваемых полей находим при помощи (обобщенной) теоремы Гаусса так же, как и для полей нити и пленки. Повторяя анализ, сделанный в § 9, мы находим, что напряженность поля тела с цилиндрически-симметричным распределением заряда на расстоянии r от оси равна

$$E = \frac{\lambda(r)}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r r}.$$

Здесь $\lambda(r)$ — сторонний заряд, заключенный внутри цилиндра единичной высоты и радиуса r , ось которого совпадает с осью симметрии, а ϵ_r — относительная диэлектрическая проницаемость на расстоянии r от оси симметрии. Абсолютная величина напряженности поля тела с плоско-симмет-

ричным распределением заряда на расстоянии z от плоскости симметрии равна

$$E = \frac{\sigma(z)}{2\varepsilon_0\varepsilon_r},$$

где $\sigma(z)$ — заряд, заключенный внутри цилиндра с единичной площадью сечения, торцы которого параллельны плоскости симметрии и находятся на расстоянии z от нее, а ε_r — относительная диэлектрическая проницаемость на расстоянии z от плоскости симметрии.

Задача 17.5. Найдите координатную зависимость напряженности поля бесконечного диэлектрического цилиндра радиуса R , по которому однородно с плотностью ρ распределен сторонний заряд. Постройте график зависимости E от расстояния r от точки наблюдения до оси цилиндра. Считайте ε_r отличной от единицы.

Задача 17.6. Найдите координатную зависимость напряженности поля однородно заряженной бесконечной пластины толщиной L , по которой однородно с плотностью ρ распределен сторонний заряд. Постройте график зависимости E от z — расстояния от точки наблюдения до плоскости симметрии (которая параллельна боковым поверхностям пластины и расположена посередине между ними). Считайте ε_r отличной от единицы.

§ 18. Плотность энергии поля

В электрическом поле запасена некоторая энергия W , которая расходуется, например, когда поле совершает работу над заряженным телом. Как мы объяснили (см. § 2), энергия поля не сосредоточена в каких-либо отдельных точках, а непрерывно распределена в пространстве. Поэтому ее следует характеризовать *объемной плотностью энергии*:

объемной плотностью энергии w называется отношение энергии ΔW , заключенной в малой области пространства, к ее объему ΔV , то есть $w = \Delta W / \Delta V$.

Размеры этой области следует выбирать достаточно малыми для того, чтобы поле внутри нее можно было считать однородным.

Выражение для плотности энергии w электрического поля можно найти, воспользовавшись тем, что при перемещении наэлектризованных тел происходит изменение энергии их поля, которое равно работе поля над телами, взятой со знаком минус. Рассмотрим простейшую ситуацию, когда поле является однородным. Мы уже установили (§ 9), что однородное поле возникает между двумя параллельными бесконечными плоскими однородно заряженными пленками, причем напряженность поля снаружи от них равна нулю, если поверхностные плотности заряда пленок равны по абсолютной величине и противоположны по знаку (рис. 39). Конечно, любые реальные пленки имеют конечные размеры. Тем не менее если продольные размеры пленок (которые мы считаем плоскими и одинаковыми по форме и размерам) намного превышают расстояние l между ними, то можно считать, что поле между пленками однородно, а вне этой области его напряженность пренебрежимо мала. Поэтому энергию поля можно записать в виде $W = w l S$, где S — площадь пленки.

Найдем работу, которую совершает поле при изменении расстояния l между пленками. Как мы уже установили ранее (§ 9), напряженность поля E одной из пленок равна

$\sigma/(2\epsilon_0)$ (где $\pm\sigma$ — поверхностные плотности заряда пленок), то есть на единицу площади другой пленки действует сила $\sigma E/2$. Поэтому при смещении одной из пленок на расстояние Δl в сторону другой поле совершит работу

$$A = (\sigma E/2) \Delta S \Delta l = \epsilon_0 E^2 \Delta S \Delta l / 2.$$

Эта работа совершается за счет энергии поля, изменение которой ΔW равно $-w \Delta S \Delta l$. Приравнявая ΔW к $-A$, находим выражение для плотности энергии

$$w = \epsilon_0 E^2 / 2.$$

Как и следовало ожидать, плотность энергии определяется только характеристикой поля — его напряженностью, в то время как характеристики заряженных тел, поле которых мы изучаем, в выражение для плотности энергии в явном виде не входят.

В общем случае напряженность поля меняется от точки к точке и, следовательно, энергия поля распределена в пространстве неоднородно. Тем не менее выражение для плотности энергии электрического поля w , полученное нами для случая однородного поля, справедливо и для поля неоднородного. Это следует из того, что в малых областях поле всегда можно считать однородным, а плотность энергии как раз и является отношением энергии поля, заключенной в малой области пространства, к ее объему.

Вопрос 18.1. Почему найденное нами выражение для плотности энергии поля совпадает со значением силы, действующей на единицу поверхности проводника со стороны электрического поля (§ 15)?

Задача 18.1. Найдите выражение для плотности энергии электрического поля в системе единиц СГСЕ.

Поясним смысл энергии взаимодействия U точечных зарядов, найденной нами в § 11, на языке плотности энергии поля. В соответствии с принципом суперпозиции напряженность поля двух точечных зарядов равна $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$.

Плотность же энергии имеет вид:

$$w = \frac{(\vec{E}_1 + \vec{E}_2)^2}{4\pi\epsilon_0} = \frac{E_1^2}{4\pi\epsilon_0} + \frac{E_2^2}{4\pi\epsilon_0} + 2 \frac{\vec{E}_1 \vec{E}_2}{4\pi\epsilon_0}.$$

Здесь первое и второе слагаемые являются плотностями энергии поля первого и второго тела. Третье же (перекрестное) слагаемое определяет энергию их взаимодействия U . Заметим, что если заряды находятся далеко друг от друга, то перекрестный член пренебрежимо мал, так как в любой точке пространства пренебрежимо мало либо E_1 , либо E_2 , либо малыми являются обе эти величины. Это свойство соответствует стремлению U к нулю при увеличении расстояния между зарядами.

До сих пор мы рассматривали электрическое поле в вакууме. Внутри проводника напряженность поля равна нулю и, следовательно, равна нулю плотность энергии поля. Точнее говоря, в проводнике равна нулю макроскопическая напряженность поля, то есть величина, усредненная по объемам, превосходящим межатомное расстояние. Микроскопическая же напряженность нулю не равна, и с ней связана некоторая энергия, которая является составляющей внутренней энергии тела. Однако эта составляющая не меняется при изменении внешнего поля и/или заряда проводника и, следовательно, не сказывается на его электрических свойствах. Поэтому мы будем ее игнорировать.

В диэлектрике же и макроскопическая напряженность поля может быть отличной от нуля, то есть возникает вопрос о плотности энергии поля в диэлектрике. Выражение для этой плотности отличается от найденного нами выше. Поясним причину этого отличия. Как мы уже говорили, наличие макроскопической напряженности приводит к поляризации атомов диэлектрика, то есть к изменению микроскопического поля, а следовательно, и к изменению его энергии. Таким образом, в диэлектрике надо учитывать два вклада в энергию поля — макроскопический и микроскопический. Разделить эти два вклада невозможно, поскольку они синхронно меняются при любом внешнем воздействии

на диэлектрик. Поэтому следует говорить об общей электрической энергии диэлектрика, которая измеряется работой, необходимой для создания в диэлектрике поля с данной макроскопической напряженностью.

Выражение для плотности электрической энергии диэлектрика можно найти так же, как и для вакуума. Представим себе, что пространство между пленками, о которых шла речь выше, заполнено диэлектриком, например жидкостью. В этом случае напряженность поля E внутри диэлектрика будет отлична от напряженности поля пленок $E_0 = \sigma/\epsilon_0$, эти величины связаны соотношением $E = E_0/\epsilon_r$. На поверхности диэлектрика вблизи пленок возникнут индуцированные заряды с поверхностной плотностью $\sigma_1 = \epsilon_0 \cdot (E - E_0)$.

При смещении одной из пленок на Δl поверхностный заряд диэлектрика (сосредоточенный вблизи пластины) также смещается на Δl , то есть работа совершается над «объединенным» поверхностным зарядом с плотностью $\sigma + \sigma_1$. Внутренние силы диэлектрика никакой работы не совершают, так как поляризация диэлектрика как раз и определяется из условия равновесия, когда эти силы компенсируют друг друга. Поэтому следует принимать во внимание только работу поля неподвижной пленки. Эта работа равна

$$A = \frac{E_0}{2} \cdot (\sigma + \sigma_1) S \Delta l = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r E^2}{2} S \Delta l.$$

Так как найденная работа равна энергии поля ΔW , сосредоточенной внутри объема $\Delta V = S \Delta l$, мы находим для плотности энергии $w = \Delta W / \Delta V$ следующее выражение:

$$w = \epsilon_0 \epsilon_r \cdot E^2 / 2.$$

Используя те же аргументы, что и раньше, мы заключаем, что, хотя эта формула и была нами получена для однородного поля, она определяет значение плотности электрической энергии диэлектрика в произвольном случае. Более того, хотя наш вывод был сделан для жидкого диэлектрика, само конечное выражение справедливо и для диэлектрика твердого (хотя его вывод для твердого ди-

электрика и осложняется необходимостью учета упругих напряжений).

Задача 18.2. Найдите зависимость плотности энергии поля точечного заряда q , помещенного в центре диэлектрического шара радиуса R , от расстояния r от точки наблюдения до заряда.

Поскольку в диэлектрике работа, идущая на создание поля, расходуется как на макроскопическое поле, так и на поляризацию атомов, плотность энергии в диэлектрике должна быть больше, чем в вакууме (при том же значении напряженности E). Это выполняется, если $\epsilon_r > 1$. Таким образом, мы получили уже установленное нами ранее неравенство еще одним способом, на этот раз из энергетических соображений.

Задача 18.3. Найдите работу, которую совершит поле двух параллельных плоских пленок с поверхностными зарядами $\pm\sigma$ (площадь каждой пленки равна S , а расстояние между пленками h много меньше их продольных размеров), если с большого расстояния в пространство между пленками вдвигается диэлектрическая пластина с диэлектрической проницаемостью ϵ_r , которая занимает все это пространство.

Если напряженность некоторого поля известна, то установленные нами выражения для плотности энергии позволяют найти энергию поля в целом. Для этого можно воспользоваться стандартным приемом. А именно, пространство следует разбить на малые области, в каждой из которых поле можно считать однородным. Энергия поля в каждой такой области будет равна $w \cdot \Delta V$, где ΔV — объем области, а w определяется значением напряженности внутри этой области. Общая же энергия поля получается суммированием по всем областям.

На больших расстояниях от заряженного тела напряженность его поля обратно пропорциональна r^2 , где r —

расстояние от точки наблюдения до тела. Вследствие этого плотность энергии поля w довольно быстро (обратно пропорционально r^4) спадает при увеличении этого расстояния. Поэтому основная энергия поля любого заряженного тела сосредоточена на расстояниях порядка его размеров, а далекие области содержат лишь малую часть энергии поля. Это означает, в частности, что энергию поля точечного заряда определить нельзя. Действительно, считая то или иное тело точечным, мы ограничиваемся рассмотрением его поля на больших расстояниях от тела, то есть на расстояниях, много больших, чем его размеры. Но в этой области, в соответствии со сказанным выше, содержится только малая часть энергии поля тела. Вблизи же от заряженного тела поле существенно зависит от его размеров и формы, а также от деталей распределения заряда по телу. Поэтому и энергия его поля чувствительна ко всем этим параметрам. Тем не менее эту энергию можно грубо оценить, заменив тело на проводящий шар, диаметр которого определяется размером тела, несущий такой же заряд, что и тело. Поэтому представляет интерес нахождение энергии поля заряженного шара. Эта задача решается явно, так как поле шара обладает сферической симметрией.

Возьмем уединенный шар радиуса R , обладающий зарядом q . Поле такого шара нам уже известно. Чтобы найти энергию поля, будем следовать общему правилу. Разобьем пространство вокруг шара сферами с радиусами $R, r_1, r_2, \dots$ на концентрические шаровые слои так, чтобы толщина каждого слоя была много меньше его радиусов. Тогда энергию поля, сосредоточенную в шаровом слое с радиусами r_i и r_{i+1} , можно записать следующим образом:

$$\Delta W \approx w \cdot 4\pi r_i^2 (r_{i+1} - r_i) \approx \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 r_i^2} (r_{i+1} - r_i) \approx \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_{i+1}} \right).$$

Суммируя вклады от всех шаровых слоев, мы находим интересующую нас энергию

$$W = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \left[\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r_1} \right) + \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \dots \right] = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R}.$$

Мы видим, что энергия поля шара обратно пропорциональна его радиусу, то есть (при данном заряде) тем больше, чем меньше его размеры. То же справедливо и для произвольно заряженного тела.

Вспомним теперь, что статическое поле возникает в результате релаксации (приближения к равновесию), в ходе которой вся излишняя энергия поля «сбрасывается» в излучение. Поэтому статическое состояние электрического поля соответствует минимуму энергии, вычисленной в соответствии с установленными выражениями для плотности энергии. Разумеется, при этом должна соблюдаться связь между напряженностью и распределением заряда, то есть должна выполняться теорема Гаусса.

Если жестко задано распределение заряда в пространстве (например, в случае стороннего заряда в диэлектрике), то условие минимальности энергии поля однозначно связывает его напряженность с распределением заряда. Если же распределение заряда может изменяться (например, речь может идти о поверхностном заряде проводника), то и само это распределение будет определяться условием минимальности энергии поля. Отсюда немедленно следует, например, равенство нулю напряженности поля в пустой полости проводника, которое из других соображений было установлено нами в § 11.

Наглядная интерпретация приведенных соображений может быть дана в терминах модели, предложенной английским физиком Фарадеем. Представим себе, что все поле разбито на силовые трубки, каждая из которых несет определенный поток напряженности. Каждая такая трубка «хочет» уменьшить свою длину и увеличить площадь своего сечения (чтобы уменьшить напряженность поля внутри трубки), так как то и другое ведет к уменьшению ее энергии. Таким образом, каждой силовой трубке следует приписать «упругие» свойства, аналогичные свойствам растянутого резинового жгута, который стремится сжаться в продольном направлении и расшириться в поперечном направлении. Распределение же силовых трубок в про-

странстве будет определяться «расталкиванием» соседних силовых трубок между собой.

Модель Фарадея позволяет дать наглядное объяснение уже известных нам фактов. Например, силовые трубки, прикрепленные к поверхности проводника, из-за их тенденции к сжатию производят силу, действующую наружу. Используя выражение для силы на единицу поверхности проводника, приведенное в § 15, мы можем найти силу F , действующую на проводник со стороны данной силовой трубки:

$$F = \frac{\epsilon_0}{2} \frac{(\Delta\Phi)^2}{\Delta S}.$$

Здесь $\Delta\Phi$ — поток, который несет трубка, а ΔS — площадь ее поперечного сечения в том месте, где она прикрепляется к проводнику.

Из-за взаимного расталкивания силовых трубок поля точечного заряда его силовые линии равномерно распределяются по всем направлениям. Силовые же трубки соседних одноименных зарядов «выгибаются», не имея возможности свободно расходиться по всем направлениям (рис. 33), что соответствует отталкиванию этих зарядов. Для разноименных зарядов силовые трубки «натянуты» между ними (рис. 34), и стремление трубок сжаться соответствует притяжению этих зарядов. Аналогичным образом можно проанализировать и более сложные ситуации. Таким образом, модель Фарадея позволяет представить себе «устройство» электрического поля даже в тех случаях, когда невозможно найти для него явное решение.

§ 19. Потенциал. Разность потенциалов

Мы определили напряженность как величину, связанную с силой, действующей на заряженное тело. Но электрическое поле можно характеризовать и величинами, связанными с потенциальной энергией помещенного в это поле заряженного тела. Именно о таком способе описания поля и пойдет речь далее.

Как известно, при изучении гравитационного взаимодействия используется понятие *потенциальной энергии* Π пробного тела в гравитационном поле, которое оказывается весьма полезным при решении ряда задач. То же понятие можно ввести для любого консервативного поля, в том числе и для поля электростатического.

Потенциальная энергия точечного пробного тела измеряется работой, которую совершает поле при перемещении пробного тела из данной точки в точку, потенциальная энергия в которой принята за нуль.

В силу консервативности поля эта работа не зависит от траектории, по которой перемещается пробное тело, то есть Π является некоторой функцией координат. Точка, где потенциальная энергия пробного тела равна нулю, может быть выбрана произвольно. Обычно эту точку помещают достаточно далеко от тел, поле которых исследуется, или, другими словами, в бесконечности. В дальнейшем, если не оговорено обратное, подразумевается именно такой стандартный выбор.

При сделанном выборе потенциальная энергия пробного точечного заряда q в поле точечного заряда Q оказывается равной

$$\Pi = \frac{q \cdot Q}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Здесь r — расстояние между зарядами. Этот результат получается из найденного нами ранее выражения для работы поля точечного заряда Q по перемещению точечного заряда

q (см. § 11). Формально Π совпадает с энергией взаимодействия точечных зарядов q и Q .

В общем случае Π является сложной функцией координат, однако в любом поле значение Π в данной точке пропорционально величине пробного заряда q , так как пропорциональна q действующая на пробный заряд сила. Поэтому отношение Π/q не зависит от величины пробного заряда и является характеристикой поля (так же как и напряженность поля $\vec{E}$, которая равна отношению $\vec{F}/q$). Величина Π/q называется *потенциалом электростатического поля* и обозначается обычно греческой буквой φ :

$$\varphi = \frac{\Pi}{q}.$$

Аналогичным образом вводится и потенциал гравитационного поля, который равен отношению потенциальной энергии Π пробного тела в гравитационном поле к массе m этого тела.

Из определения потенциала следует, что единицей измерения потенциала в системе СИ является Дж/Кл, которая называется Вольт и обозначается В. Аналогичным образом вводится и потенциал гравитационного поля, который равен отношению Π/m , где Π — потенциальная энергия пробного тела в гравитационном поле.

Задача 19.1. Выразите единицу потенциала электростатического поля в системе СГСЕ через основные единицы этой системы. Найдите размерность гравитационного потенциала в системах СИ и СГСЕ.

Воспользовавшись выражением для потенциальной энергии пробного заряда в поле точечного заряда, можно найти зависимость потенциала этого поля от координат:

$$\varphi = \frac{\Pi}{q} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Здесь Q — величина точечного заряда, а r — расстояние от точки наблюдения до заряда. Потенциал поля положительного заряда будет положительным, потенциал же поля

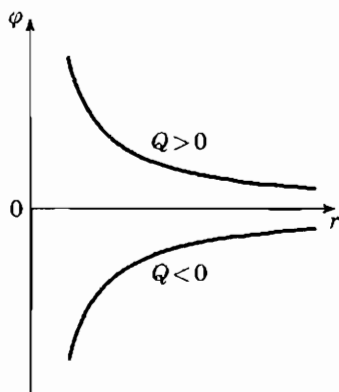


Рис. 69. Графики зависимости от r потенциалов полей точечных зарядов Q

отрицательного заряда Q будет отрицательным. Графики зависимости потенциалов полей точечных зарядов от r приведены на рис. 69.

Для потенциала электрического поля, так же как и для его напряженности, справедлив принцип суперпозиции, то есть потенциал поля системы заряженных тел равен сумме потенциалов полей каждого из них, взятого в отдельности:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \dots$$

Это следует из определения потенциала и того, что работа суперпозиции полей по перемещению пробного заряда равна сумме работ каждого из полей.

Задача 19.2. Найдите потенциал поля в точке, расположенной посередине между одинаковыми точечными зарядами Q , если расстояние между этими зарядами равно R . То же для зарядов $+Q$ и $-Q$.

Принцип суперпозиции дает принципиальный метод вычисления потенциала поля произвольного заряженного тела, если известно распределение заряда в нем. Как и при вычислении напряженности поля, тело следует разбить на малые кусочки, потенциал поля которых можно найти по формуле для потенциала точечного заряда, а затем просуммировать все эти потенциалы. Например, таким способом можно найти потенциал поля точечного диполя:

$$\varphi = \frac{\vec{d} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3},$$

где $\vec{d}$ — дипольный момент, а $\vec{r}$ — радиус-вектор с началом в точке нахождения диполя и с концом в точке наблюдения.

Задача 19.3. Выведите приведенное выражение для потенциала поля точечного диполя.

Задача 19.4. Найдите значение потенциала в точках оси кольца радиуса R , однородно заряженного с линейной плотностью заряда λ .

Часто бывает, что напряженность поля известна только в ограниченной области пространства. Тогда потенциал поля, измеряемый работой по перемещению пробного заряда на бесконечность, для точек этой области определить нельзя. В этом случае точку с нулевым потенциалом O разумно выбрать внутри упомянутой области. Рассмотрим в качестве примера потенциал однородного поля, которое, как мы уже отмечали, можно создать только в ограниченной области пространства. Воспользуемся выражением для работы однородного поля по перемещению пробного заряда, приведенным в предыдущем параграфе: $A = q\vec{E} \cdot \vec{l}$, где $\vec{l}$ — вектор перемещения пробного заряда. Чтобы найти потенциал поля в некоторой точке M (точке наблюдения), надо найти работу поля по перемещению пробного заряда из этой точки в точку O и разделить это выражение на q . Вектор перемещения в этом случае равен $\vec{l} = -\vec{r}$, где $\vec{r}$ — радиус-вектор с началом в точке O и с концом в точке наблюдения M : $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$. Поэтому потенциал однородного поля в точке M равен

$$\varphi = -\vec{E} \cdot \vec{r}.$$

Если ввести систему координат, начало отсчета которой находится в точке O , а ось x направлена вдоль вектора напряженности $\vec{E}$, то полученное выражение переписется в виде $\varphi = -E \cdot x$, где x — координата точки наблюдения M .

Потенциал характеризует поле как вне тел, так и внутри них. Заметим, что потенциал, в отличие от напряженности, не может испытывать скачка на поверхности тела, так как потенциал связан с работой над пробным зарядом, которая плавно меняется при смещении конечной точки его траектории. Другими словами, потенциал является непрерывной

функцией координат. Мы уже установили, что напряженность поля внутри проводника равна нулю. Поэтому равна нулю работа поля над пробным зарядом внутри проводника. Другими словами, все точки проводника имеют один и тот же потенциал, который мы будем называть *потенциалом проводника*.

В различного рода задачи входит *разность потенциалов* $\Delta\varphi$ между двумя точками: $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$, где φ_1 и φ_2 — потенциалы в интересующих нас точках. Разность потенциалов $\Delta\varphi$ равна $(A_2 - A_1)/q$, где A_1 — работа поля по перемещению пробного заряда q из точки 1 в точку нулевого потенциала, а A_2 — работа поля по перемещению пробного заряда q из точки 2 в точку нулевого потенциала. Разность же $A_2 - A_1$ равна работе поля по перемещению пробного заряда из точки 2 в точку 1 по траектории, проходящей через точку нулевого потенциала O . Но мы уже знаем, что работа поля по перемещению пробного заряда из одной точки в другую не зависит от формы траектории пробного тела. Поэтому

разность потенциалов $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ между точками 1 и 2 равна отношению работы, совершаемой полем при перемещении пробного заряда из точки 2 в точку 1 по произвольной траектории, к величине пробного заряда.

Отсюда следует, что разность потенциалов, в отличие от самого потенциала, не зависит от выбора точки нулевого потенциала O . Заметим также, что потенциал φ в данной точке M равен разности потенциалов между этой точкой M и точкой O . На соотношении между работой поля над пробным зарядом и разностью потенциалов можно основывать экспериментальный способ измерения этой разности. А именно: измеряя работу по перемещению пробного заряда и находя отношение этой работы к величине пробного заряда, можно определить разность потенциалов между данными точками.

Воспользовавшись найденным выражением для потенциала однородного поля, мы находим разность потенциалов

между двумя точками в однородном поле:

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = -\vec{E} \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = -\vec{E} \cdot \Delta\vec{l},$$

где $\Delta\vec{l}$ — вектор смещения из точки 1 в точку 2.

В малых областях поле всегда можно считать однородным. Поэтому приведенное выражение можно применять при вычислении разности потенциалов между близкими точками для произвольного поля, а именно:

$$\Delta\varphi = -\vec{E} \cdot \Delta\vec{l},$$

где $\vec{E}$ — вектор напряженности, а $\Delta\vec{l}$ — вектор с концами в выбранных точках. Если $\Delta\vec{l}$ направлен вдоль силовой линии, то $\Delta\varphi = -E \cdot \Delta l$, то есть

$$E = -\frac{\Delta\varphi}{\Delta l}.$$

Полученное соотношение говорит нам, что напряженность электростатического поля определяет «скорость» убывания потенциала вдоль силовой линии. Из приведенного выражения следует, что напряженность в системе СИ измеряется в В/м. Разумеется, эта единица измерения совпадает с Н/Кл.

|| **Вопрос 19.1.** Как показать, что В/м совпадает с Н/Кл?

Приведенная выше формула позволяет найти напряженность поля, если задан его потенциал как функция координат. С другой стороны, если известна напряженность поля, то можно найти его работу над пробным телом, а затем и потенциал. Мы приходим к выводу, что электростатическое поле может быть задано как через его напряженность, так и через потенциал: и тот, и другой способ несет полную информацию о поле. Эта ситуация вполне аналогична тому, что тепловое поле может быть задано как через координатную зависимость температуры, так и через координатную зависимость потока тепла.

Несколько слов о потенциале симметричных полей. Потенциал φ сферически-симметричного поля зависит только

от расстояния r от точки наблюдения до центра симметрии. Подобно напряженности, потенциал φ совпадает с потенциалом поля точечного заряда вне тела — источника поля. Действительно, потенциал в некоторой лежащей в этой области точке M определяется работой поля над пробным зарядом по траектории, идущей из точки M в бесконечность, вдоль которой напряженность поля совпадает с напряженностью поля точечного заряда. Отсюда следует, например, что потенциал уединенного заряженного проводящего шара равен

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R},$$

где R — радиус шара, а Q — его заряд. Внутри же тела зависимость потенциала от радиуса зависит от распределения заряда, эта зависимость должна определяться в каждом конкретном случае путем вычисления работы поля по перемещению пробного заряда вдоль некоторого радиального луча.

Задача 19.5. Найдите координатную зависимость потенциала φ поля диэлектрического шара радиуса R , по которому равномерно распределен сторонний заряд Q .

Указание: при вычислении работы поля по перемещению пробного заряда внутри шара воспользуйтесь аналогией с работой сжатой пружины. Постройте график зависимости φ от r (r — расстояние от точки наблюдения до центра шара), учитывая отличие ϵ_r от единицы.

Задача 19.6. Найдите координатную зависимость потенциала φ поля точечного заряда Q , помещенного в центр (незаряженного) проводящего шарового слоя с внутренним радиусом R_1 и внешним радиусом R_2 . Постройте график зависимости $\varphi(r)$ (r — расстояние от точки наблюдения до заряда).

Аналогичные соображения применимы к цилиндрически-симметричному и плоско-симметричному полям. Следует только иметь в виду, что потенциалы этих полей

(относительно бесконечности) не определены, так как они существенно зависят от работы поля над пробным зарядом на расстояниях порядка продольных размеров заряженных тел, которые считаются бесконечно большими при рассмотрении распределения заряда как цилиндрически-симметричного, так и плоско-симметричного. Поэтому речь должна идти о разности потенциалов, которая зависит только от расстояния до оси симметрии или расстояния до плоскости симметрии соответственно.

Задача 19.7. Найдите разность потенциалов между поверхностью плоской пластины толщиной l и ее плоскостью симметрии, если по объему пластины равномерно распределен сторонний заряд с плотностью ρ .

Указание: при вычислении работы поля по перемещению пробного заряда внутри пластины воспользуйтесь аналогией с работой сжатой пружины.

Если потенциал некоторого поля известен, то можно найти и потенциальную энергию пробного тела в данном поле. Если это тело можно считать точечным, то его потенциальная энергия равна $\Pi = q\varphi$. Если же тело нельзя считать точечным, то его надо мысленно разбить на кусочки, которые можно считать точечными, найти энергию каждого кусочка по формуле $\Pi_i = q_i\varphi_i$ (где q_i — заряд кусочка, а φ_i — потенциал данного поля в той точке, где этот кусочек расположен), а затем сложить полученные величины. Например, потенциальная энергия диполя, состоящего из двух точечных зарядов $\pm q$, равна $\Pi = q(\varphi_1 - \varphi_2)$, где 1 и 2 соответствуют точкам, в которых находятся заряды диполя. Это выражение можно использовать, чтобы найти энергию точечного диполя во внешнем поле. Поскольку размеры диполя предполагаются малыми, поле вблизи него можно считать однородным. Поэтому разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ можно найти по приведенной выше формуле $\varphi_1 - \varphi_2 = -\vec{E} \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$. Вспоминая теперь, что произведение

$q(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ есть дипольный момент диполя $\vec{d}$, мы получаем

$$\Pi = -\vec{E} \cdot \vec{d}.$$

Хотя этот ответ и был получен нами для диполя, состоящего из двух точечных зарядов, он справедлив и для произвольного точечного диполя, то есть для незаряженного, но наэлектризованного тела с дипольным моментом $\vec{d}$, если размеры этого тела много меньше расстояния, на котором существенно меняется напряженность поля.

Вопрос 19.2. Почему ответ, полученный для диполя, состоящего из двух зарядов, справедлив и для произвольного точечного диполя?

Задача 19.8. Найдите потенциальную энергию Π точечного диполя с дипольным моментом $\vec{d}$ в поле точечного заряда Q .

§ 20. Эквипотенциальные поверхности

Наряду с картами напряженности и картинами силовых линий существует еще один способ наглядного представления электростатических полей — при помощи *эквипотенциальных поверхностей*.

Эквипотенциальной называется поверхность, во всех точках которой потенциал поля имеет одно и то же значение.

Такое же определение можно использовать для введения эквипотенциальных поверхностей любого консервативного поля, которое характеризуется своим потенциалом. Например, можно определить эквипотенциальные поверхности статического гравитационного поля. Для иллюстрации рассмотрим эквипотенциальные поверхности гравитационного поля Земли. Поскольку потенциал этого поля зависит только от расстояния до центра Земли, эквипотенциальными являются поверхности равной высоты. Например, эквипотенциальной является поверхность моря во время штиля. Можно сказать, что человек, поднимаясь по ступеням лестницы, переходит с одной эквипотенциальной поверхности на другую.

В дальнейшем эквипотенциальные поверхности будут изображаться на рисунках при помощи штриховых линий, которые являются пересечением эквипотенциальных поверхностей с плоскостью рисунка. В качестве примера на рис. 70 приведены картины эквипотенциальных поверхностей поля точечного заряда и однородного поля. Для сравнения на том же рисунке сплошными линиями показаны уже знакомые нам картины силовых линий соответствующих полей. Потенциал поля уединенного точечного заряда Q задается выражением $\varphi = Q/(4\pi\epsilon_0 R)$. Отсюда следует, что все точки пространства, равноудаленные от заряда Q , имеют одинаковый потенциал, то есть эквипотенциальными поверхностями являются сферы с центрами в точке расположения точечного заряда. Их пересечениями

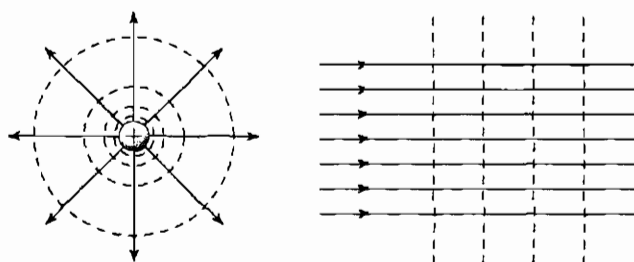


Рис. 70. Силовые линии и эквипотенциальные поверхности поля точечного заряда и однородного поля

с плоскостью, проходящей через заряд, являются окружности, изображенные на рис. 70. Потенциал однородного поля зависит только от координаты вдоль вектора напряженности $\vec{E}$, поэтому его эквипотенциальными поверхностями являются плоскости, перпендикулярные вектору $\vec{E}$.

Сферами будут и эквипотенциальные поверхности поля произвольного сферически-симметричного распределения заряда. Аналогичным образом, поле бесконечной прямой однородно заряженной нити имеет цилиндрические эквипотенциальные поверхности с осью, совпадающей с положением нити. Их сечение плоскостью, перпендикулярной нити, выглядит так же, как и картина поля точечного заряда, приведенная на рис. 70. Цилиндрами будут и эквипотенциальные поверхности поля произвольного цилиндрически-симметричного распределения заряда. Вспоминая координатную зависимость потенциала плоско-симметричного распределения заряда (например, бесконечной плоской однородно заряженной пленки), мы приходим к выводу, что его эквипотенциальными поверхностями будут плоскости, параллельные плоскости симметрии. Сказанное иллюстрируется рис. 71.

Работа электростатического поля по перемещению пробного заряда из одной точки в другую равна $q \cdot \Delta\varphi$, поэтому при перемещении заряда вдоль эквипотенциальной поверхности поле работы не совершает. В то же время работа

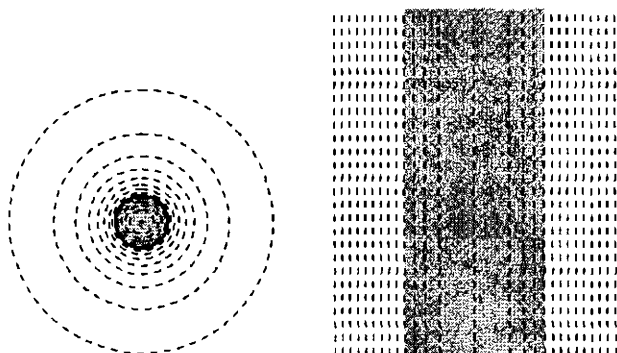


Рис. 71. Картины экипотенциальных поверхностей полей однородно заряженного шара и плоского слоя

равна нулю, если направление перемещения тела перпендикулярно направлению вектора действующей на него силы. Так как сила, действующая на пробный заряд, пропорциональна вектору напряженности, вектор $\vec{E}$ в любой точке пространства перпендикулярен проходящей через эту точку экипотенциальной поверхности. Направлен же вектор $\vec{E}$ от поверхности с большим потенциалом к поверхности с меньшим потенциалом. Это следует из выражения $\Delta\varphi = -\vec{E} \cdot \Delta\vec{r}$ для разности потенциалов между близкими точками, установленного в § 19. Так как вектор напряженности $\vec{E}$ касателен к силовой линии,

силовые линии поля во всех точках перпендикулярны экипотенциальным поверхностям.

Очевидно, что силовые линии и экипотенциальные поверхности, изображенные на рис. 70, удовлетворяют этому условию.

В проводнике все точки имеют один и тот же потенциал, то есть любая поверхность внутри проводника является экипотенциальной. Однако ее форма не несет никакой информации о поле. Поэтому мы будем рассматривать экипотенциальные поверхности только вне проводящих тел,

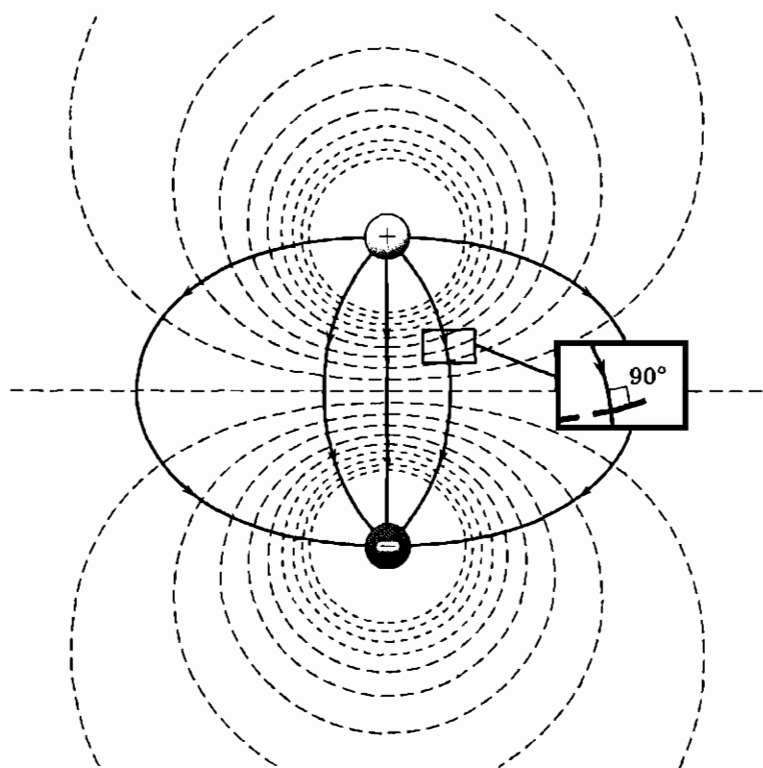


Рис. 72. Система эквипотенциальных поверхностей поля двух точечных разноименных зарядов, величины которых одинаковы по абсолютной величине

где по форме эквипотенциальных поверхностей можно судить о координатной зависимости потенциала. В то же время существенную роль играет форма поверхности проводника, которая является, очевидно, эквипотенциальной. Перпендикулярность силовых линий эквипотенциальным поверхностям означает, что условие эквипотенциальности поверхности проводника эквивалентно условию перпендикулярности силовых линий его поверхности.

Пользуясь этим свойством, можно построить картину силовых линий электростатического поля, если известна система его экипотенциальных поверхностей, и наоборот: построить систему экипотенциальных поверхностей, если известна картина его силовых линий. В качестве иллюстрации на рис. 72 приведена система экипотенциальных поверхностей поля двух точечных разноименных зарядов, величины которых одинаковы по модулю. На том же рисунке изображены и силовые линии этого поля.

Картина экипотенциальных поверхностей поля двух одинаковых точечных зарядов приведена на рис. 73.

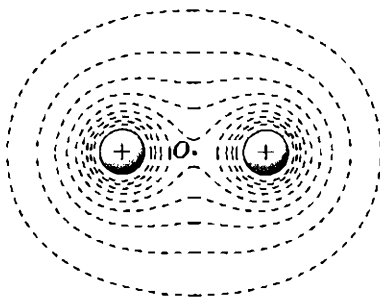


Рис. 73. Экипотенциальные поверхности поля двух точечных одноименных зарядов

Вопрос 20.1. Какую форму имеет и где расположена экипотенциальная поверхность, соответствующая $\varphi=0$, для поля двух точечных разноименных зарядов, величины которых одинаковы по модулю?

Отметим, что в поле разноименных точечных зарядов $+Q$ и $-q$ ($Q \neq q$) имеется экипотенциальная поверхность простой формы, которая соответствует нулевому потенциалу. Это сфера с центром, расположенным на прямой, проходящей через заряды. Радиус сферы равен $R = qQr/|Q^2 - q^2|$, где r — расстояние между точечными зарядами. Расстояния же от этих тел до центра сферы пропорциональны квадра-

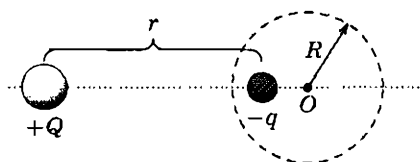


Рис. 74. Расположение экипотенциальной поверхности $\varphi=0$ относительно точечных зарядов, $Q > q$

там их зарядов. Тело с меньшим зарядом находится внутри сферы, а тело с бóльшим зарядом — вне ее (рис. 74).

Задача 20.1. Докажите приведенные выше утверждения о форме и расположении экипотенциальной поверхности, соответствующей потенциалу $\varphi=0$, поля двух разноименных зарядов $+Q$ и $-q$ ($Q \neq q$).

Любая экипотенциальная поверхность не имеет границ. Другими словами: либо экипотенциальная поверхность является замкнутой, либо тянется до бесконечности. Все рассмотренные нами до сих пор экипотенциальные поверхности, очевидно, подпадают под эти два случая. Например, экипотенциальные поверхности поля точечного заряда являются замкнутыми, а экипотенциальные поверхности однородного поля тянутся до бесконечности. Заметим, что любая экипотенциальная поверхность делит пространство на отдельные, не связанные между собой области. Например, экипотенциальная поверхность поля точечного заряда отделяет от остального пространства шаровую область, а экипотенциальная поверхность однородного поля делит пространство на два полупространства.

Так же как и силовые линии, экипотенциальные поверхности не могут пересекаться. Действительно, если бы существовала точка пересечения двух экипотенциальных поверхностей, то проходящая через эту точку силовая линия была бы перпендикулярной к двум разным поверхностям, чего быть не может. Исключением, как и для силовых линий, являются точки, где напряженность $\vec{E}$ обращается

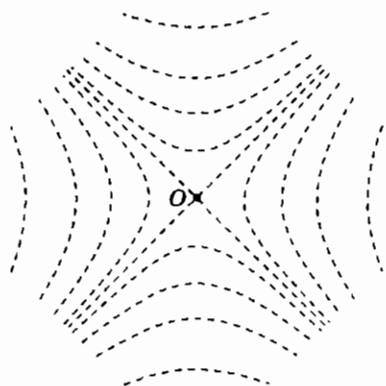


Рис. 75. Эквипотенциальные поверхности
вблизи точки с нулевой напряженностью

в нуль, так как направление силовой линии в такой точке не определено.

Как мы знаем, точка O с нулевой напряженностью имеется в поле двух одинаковых точечных зарядов, картина эквипотенциальных поверхностей которого приведена на рис. 73. На рис. 75 крупным планом показано устройство эквипотенциальных поверхностей около точки O . Обратим внимание, что точка O принадлежит сразу двум эквипотенциальным поверхностям, охватывающим разные заряды. Вблизи точки O они представляют собой два конуса с вершинами в точке O , разделяющие системы эквипотенциальных поверхностей, расположенных внутри этих конусов и снаружи от них.

Это устройство типично для окрестности изолированной точки с нулевой напряженностью. Однако возможны и более сложные случаи. Примером может служить уже обсуждавшееся в § 6 и в § 8 поле системы четырех точечных зарядов, расположенных в шахматном порядке в вершинах квадрата. Сечение эквипотенциальных поверхностей этого поля плоскостью, проходящей через заряды, изображено на рис. 76. В этом поле имеется целая прямая (перпендику-

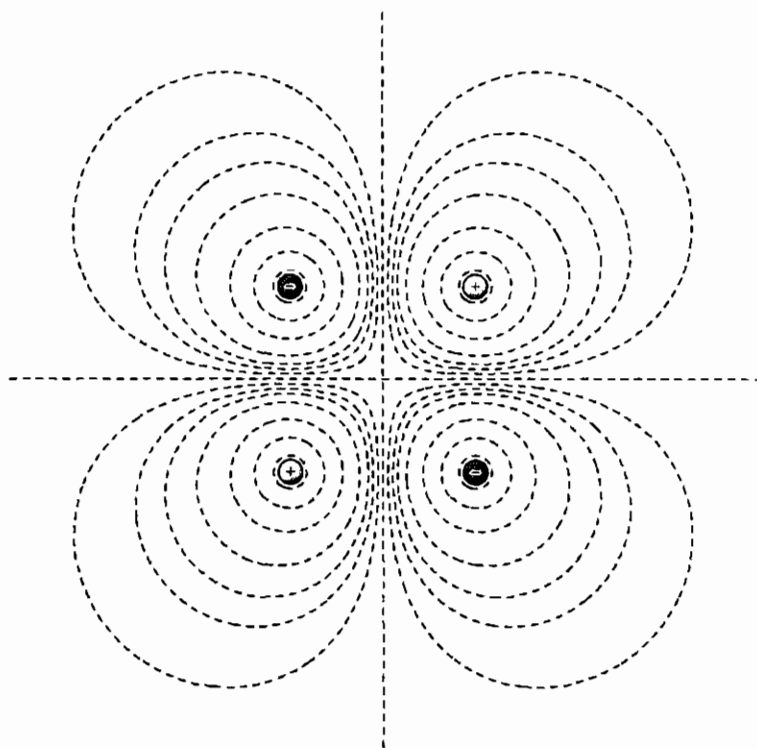


Рис. 76. Сечение эквипотенциальных поверхностей поля четырех точечных зарядов, расположенных в шахматном порядке в вершинах квадрата

лярная плоскости рисунка и проходящая через центр квадрата), где напряженность обращается в нуль. Эта прямая является пересечением эквипотенциальных поверхностей, которые являются плоскостями, перпендикулярными плоскости рис. 76 (на этом рисунке видны прямые, которые представляют собой пересечение этих эквипотенциальных поверхностей плоскостью рисунка).

Вопрос 20.2. Почему эти плоскости являются эквипотенциальными поверхностями? Какому значению потенциала они соответствуют?

Докажем теперь, что потенциал электростатического поля не может достигать минимума или максимума в области пространства, где отсутствуют заряженные тела. Для доказательства предположим противное — что в интересующей нас области пространства нашлась точка A , в которой потенциал φ имеет минимум. Тогда поверхность, соответствующая потенциалу, несколько большему минимального, будет охватывать точку A . Это означает, что эквипотенциальные поверхности вблизи точки A должны располагаться концентрически вокруг нее.

Выстраивая теперь картину силовых линий, перпендикулярных эквипотенциальным поверхностям (рис. 77), мы убеждаемся, что они сходятся в точку A , откуда в силу теоремы Гаусса следует, что в точке A должен быть расположен заряд. Те же рассуждения применимы и к точке максимума потенциала. Мы пришли к противоречию, что и обосновывает сформулированное нами утверждение. Заметим, что попутно мы доказали, что внутри замкнутой эквипотенциальной поверхности обязательно заключен некоторый заряд.

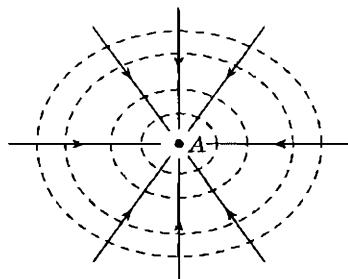


Рис. 77. Эквипотенциальные поверхности и силовые линии вблизи гипотетического минимума потенциала

Доказанная теорема приводит нас к выводу, что вне заряженных тел пробный заряд не может находиться в положении устойчивого равновесия, если на него не действуют никакие силы, помимо электрических. Действительно, в точке устойчивого равновесия потенциальная энергия пробного заряда $\Pi = q \cdot \varphi$ должна иметь минимум, то есть в этой точке потенциал φ рассматриваемого поля должен иметь минимум или максимум (в зависимости от знака пробного заряда), что невозможно. В частности, никакая система точечных зарядов не может находиться в состоянии устойчивого равновесия, поскольку любой из этих зарядов

можно рассматривать как пробный в поле остальных точечных зарядов.

Можно установить связь между величиной напряженности и расстоянием между двумя соседними эквипотенциальными поверхностями. Для этого выберем на близких эквипотенциальных поверхностях две точки таким образом, чтобы вектор $\Delta \vec{l}$ с концами в этих точках был перпендикулярен выбранным поверхностям. Тогда длина $\Delta \vec{l}$ совпадает с расстоянием между поверхностями Δl , а направление — с направлением $\vec{E}$. Поэтому будет справедливо соотношение $\Delta \varphi = -E \cdot \Delta l$, откуда $E = -\Delta \varphi / \Delta l$. Таким образом, величина напряженности поля равна отношению разности потенциалов между эквипотенциальными поверхностями, проходящими вблизи рассматриваемой точки поля, к расстоянию между этими поверхностями.

Установленное соотношение позволяет утверждать, что эквипотенциальные поверхности не могут не только пересекаться, но и касаться друг друга. Действительно, в точке касания расстояние между эквипотенциальными поверхностями равно нулю, то есть напряженность поля в этой точке обратилась бы в бесконечность, чего быть не может.

Так же как и для силовых линий, картину эквипотенциальных поверхностей электростатического поля можно построить так, чтобы их плотность была пропорциональна напряженности. Для этого достаточно, чтобы потенциалы любых соседних поверхностей отличались бы на одну и ту же величину $\Delta \varphi$. При фиксированной разности потенциалов $\Delta \varphi$ следствием соотношения $E = -\Delta \varphi / \Delta l$ является обратная пропорциональность E расстоянию Δl между поверхностями. Это как раз и означает, что величина E пропорциональна плотности эквипотенциальных поверхностей. Мы приходим к выводу, что при фиксированной разности потенциалов $\Delta \varphi$ система эквипотенциальных поверхностей несет в себе полную информацию о поле, так как она позволяет определить как направление, так и абсолютную величину вектора напряженности в любой точке.

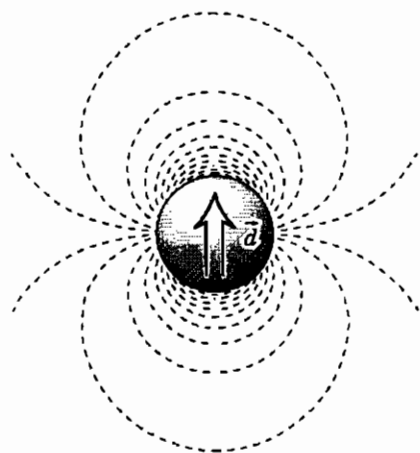


Рис. 78. Картина эквипотенциальных поверхностей поля точечного диполя

В дальнейшем при изображении картины эквипотенциальных поверхностей электростатического поля мы будем следовать сформулированному правилу. В качестве иллюстрации на рис. 71 приведены построенные этим способом картины эквипотенциальных поверхностей полей однородно заряженных шара и плоского слоя, а на рис. 78 — эквипотенциальные поверхности поля точечного диполя.

Вопрос 20.3. Рассмотрим эквипотенциальные поверхности поля однородно заряженного цилиндра. Сечение их плоскостями, перпендикулярными цилиндру и проходящими через его ось, будет напоминать приведенные на рис. 71 картины эквипотенциальных поверхностей полей однородно заряженных шара и плоского слоя. В чем будут заключаться отличия?

§ 21. Поле в присутствии проводников

Мы уже выяснили, что на поверхности проводника во внешнем поле возникают индуцированные заряды, распределение которых диктуется условием перпендикулярности вектора напряженности поверхности проводника, или, что то же самое, условием эквипотенциальности этой поверхности. Анализ возникающего в результате собственного поля проводника довольно сложен. Мы рассмотрим здесь случаи, когда это поле можно найти явно.

Наше построение основано на следующем мысленном эксперименте. Предположим, что нам известно некоторое поле, скажем, поле системы точечных зарядов. Вдвинем на место некоторой эквипотенциальной поверхности этого поля тонкую незаряженную проводящую пленку. Вектор напряженности вблизи пленки перпендикулярен ей (так как она совпадает по форме с эквипотенциальной поверхностью), поэтому никакого перераспределения заряда вдоль пленки не происходит. Таким образом, исходное поле после вдвигания пленки не изменится.

Как мы уже объясняли (§ 15), вдвинутая пленка разделит пространство на две области, заэкранированные друг от друга. Поэтому если мы захотим каким-то образом изменить поле в одной из этих областей (например, изменить расположение или величину создающих поле зарядов), то во второй области поле останется неизменным. В частности, мы можем передвинуть все заряды, находящиеся в одной из областей, к пленке и разрядить на нее. Таким способом мы получим систему «точечные заряды + проводящая пленка», поле которой мы знаем. А можно «залить» (заполнить) вторую область проводящим составом, в результате чего мы получим систему «точечные заряды + сплошной проводник», обладающую тем же полем.¹

Проиллюстрируем сказанное на простейшем примере — рассмотрим поле уединенного точечного заряда. Вдвигая проводящую пленку на место сферической эквипотенциальной поверхности поля уединенного точечного заряда, мы

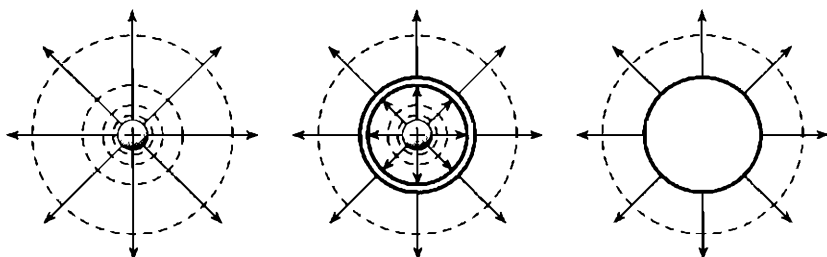


Рис. 79. Превращение поля точечного заряда в поле заряженной сферической пленки

отделяем шаровую область. Разряжая затем точечный заряд на пленку, мы получаем поле заряженной сферической пленки, которое совпадает (вне пленки) с полем точечного заряда. Те же соображения относятся и к заряженному проводящему шару: его поле вне шара совпадает с полем точечного заряда. Этот результат нам уже известен. Описанный процесс иллюстрируется рис. 79, где изображено вдвигание пленки на место сферической эквипотенциальной поверхности, а затем результат разрядки точечного заряда на пленку.

В качестве следующего шага мы можем рассмотреть систему двух разноименных одинаковых по абсолютной величине точечных зарядов, расположенных на расстоянии $2h$. Как несложно сообразить, одной из эквипотенциальных поверхностей их поля является плоскость, перпендикулярная отрезку, соединяющему заряды, и лежащая посередине между ними. Вдвинем на ее место плоскую проводящую пленку, которая станет экраном между двумя полупространствами. Разрядим затем один из зарядов на пленку. В результате напряженность поля с одной стороны пленки обратится в нуль (в силу отсутствия зарядов — источников поля), а с другой — не изменится (рис. 80).

Мы приходим к выводу, что поле системы «плоская проводящая пленка + точечный заряд q » в полупространстве, где расположен заряд q , совпадает с полем системы двух

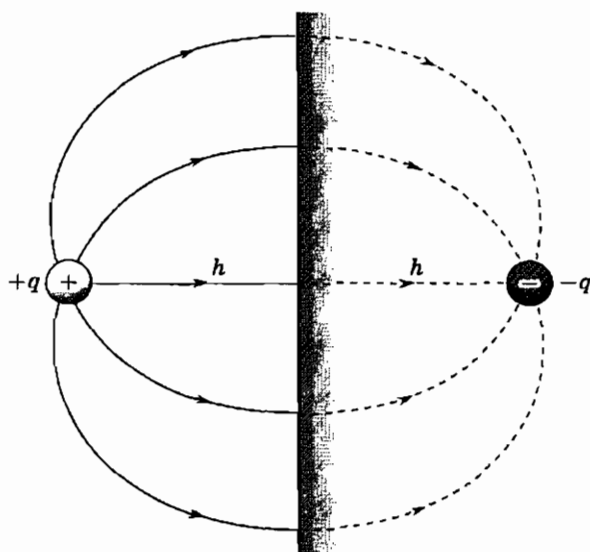


Рис. 80. Поле точечного заряда в присутствии плоской проводящей пленки

точечных зарядов q и $-q$. В другом же полупространстве напряженность поля в силу экранировки равна нулю. Это полупространство можно заполнить проводником без изменения напряженности поля. Поэтому сказанное относится и к системе «сплошной проводник с плоской поверхностью + точечный заряд q ». Заряд $-q$, который моделирует поле пленки, расположен зеркально симметрично реальному заряду q относительно пленки. Поэтому этот фиктивный заряд $-q$ называют обычно «зарядом-отражением».

|| **Задача 21.1.** Найдите поверхностную плотность заряда σ неограниченной плоской проводящей пленки, если на расстоянии l от нее находится точечный заряд q .

Рассмотренное поле, силовые линии которого представлены на рис. 80, является суперпозицией полей точечного заряда q и заряда, индуцированного на пленке. Изучим

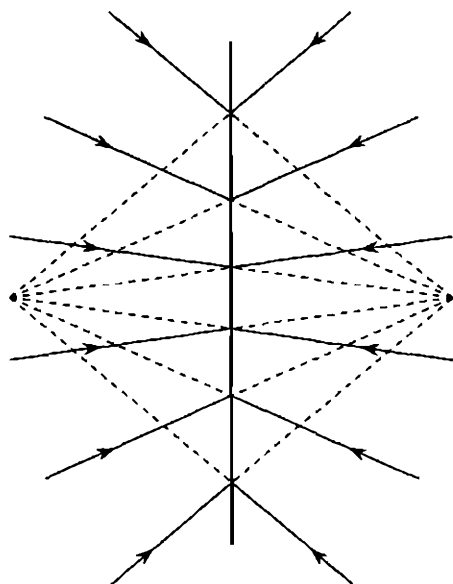


Рис. 81. Силовые линии поля заряда, индуцированного на плоской бесконечной проводящей пленке с точечным зарядом q

отдельно поле последнего. Картина силовых линий этого поля, представленная на рис. 81, симметрична относительно пленки. Эта симметрия, как и для однородно заряженной пленки, следует из неизменности поля при отражении относительно пленки. По каждую сторону от пленки поле индуцированного на ней заряда совпадает с полем точечного заряда $-q$, находящегося «за плоскостью». Суперпозиция поля индуцированного заряда с полем точечного заряда q слева от пленки (где расположен заряд q) дает картину силовых линий, приведенную на рис. 80. Справа же от пленки суперпозиция полей поверхностного заряда и заряда q сводится к суперпозиции полей точечных зарядов q и $-q$, расположенных в одной и той же точке, то есть имеет нулевую напряженность, как и должно быть в силу экранировки.

Задача 21.2. Найдите силу, действующую на точечный заряд q , расположенный на расстоянии r от плоской бесконечной проводящей пленки.

Задача 21.3. Найдите энергию взаимодействия точечного заряда q с проводящей плоской пленкой, если расстояние между ними равно l .

Суммарный заряд, собирающийся на проводящей пленке напротив заряда q , равен $-q$. Чтобы доказать это, рассмотрим сферу большого радиуса с центром посередине между зарядом q и зарядом-отражением $-q$. Пленка делит сферу на две полусферы, на одной из которых напряженность равна нулю, а на другой определяется суперпозицией полей заряда q и заряда-отражения $-q$. Если радиус сферы гораздо больше расстояния от заряда до проводника, то потоки напряженности через сферу, которые определяются полями зарядов q и $-q$, почти полностью компенсируют друг друга. Таким образом, при стремлении радиуса сферы к бесконечности стремится к нулю проходящий через нее поток. Отсюда в силу теоремы Гаусса следует, что заряд внутри сферы равен нулю. Поскольку этот заряд равен сумме заряда q и заряда пленки, последний равен $-q$.

Заметим, что все приведенные выше утверждения о поле пленки не зависят от того, равен ли ее заряд $-q$ (как это было бы при разрядке на нее точечного заряда $-q$) или она является незаряженной. Дело в том, что для незаряженной пленки заряд $-q$, который собирается на ее поверхности около поднесенного к ней заряда $+q$, компенсируется зарядом, распределенным далеко от рассматриваемой области пространства или, как обычно говорят, на бесконечности. Точно так же при рассмотрении поверхностного заряда произвольного проводника большого размера можно не заботиться об общем балансе заряда, так как он будет обеспечен зарядом, присутствующим на бесконечности.

Аналогичным образом можно проанализировать поле однородно заряженной прямой нити в присутствии плоской

проводящей пленки. Будем считать, что нить параллельна пленке. Тогда в полупространстве, где находится нить, поле пленки будет совпадать с полем (фиктивной) нити, расположенной симметрично реальной относительно пленки и противоположно заряженной. По аналогии с зарядом ее можно назвать «нитью-отражением».

Задача 21.4. Найдите силу, приходящуюся на единицу длины, с которой однородно заряженная прямая нить с линейной плотностью заряда λ притягивается к плоской проводящей пленке, параллельной нити и удаленной от нее на расстояние R .

Можно значительно расширить число случаев, когда удается явно найти поле заряженных тел в присутствии проводников. Во-первых, проводящая пленка может быть «вдвинута» на место произвольной эквипотенциальной поверхности известного поля. Например, для поля двух точечных зарядов можно использовать любую эквипотенциальную поверхность, приведенную на рис. 72. Разряжая затем один из зарядов на пленку, мы получим поле точечного заряда в присутствии проводящей пленки весьма нетривиальной формы. Конечно, вместо пленки можно взять сплошной проводник с поверхностью той же формы. Во-вторых, можно взять более сложное исходное поле. Например, стартуя с набора нескольких точечных зарядов, можно найти поле для ряда систем «точечные заряды + проводник». В-третьих, мы можем вдвигать пленки на место нескольких эквипотенциальных поверхностей. В результате в системе тел появится несколько проводников.

Сформулируем условия, при которых возможно найти явное выражение для поля заряженного тела в присутствии проводника. А именно, задача решается, если удастся мысленно построить систему фиктивных заряженных тел таким образом, чтобы поверхность проводника совпадала бы с некоторой эквипотенциальной поверхностью системы «заряженное тело + фиктивные заряды». Тогда в силу теоремы единственности (§ 15) поле проводника будет совпадать

с полем системы этих фиктивных зарядов. При этом последние обязательно будут располагаться в области, которая заэкранирована проводником от реального заряда (как было заэкранировано проводящей пленкой полупространство, где располагался фиктивный заряд в разобранный нами случае). Например, фиктивные заряды могут помещаться внутри (сплошного) проводника. Подчеркнем, что фиктивные заряды моделируют поле проводника только в той области пространства, которая им не заэкранирована. Другие же области (например, полости проводника) «живут своей собственной жизнью».

Рассмотрим еще несколько примеров, допускающих явное решение в соответствии с приведенными соображениями.

В разобранный нами случае фиктивный заряд, моделирующий поле проводника, был расположен зеркально симметрично реальному заряду относительно поверхности проводника. Та же идея об «отражении» заряда относительно поверхности проводника позволяет решить и задачу о поле точечного заряда вблизи расположенных под углом друг к другу плоских проводящих пленок (или сплошного проводника с соответствующей поверхностью) при некоторых значениях этого угла. Например, поле двух плоских

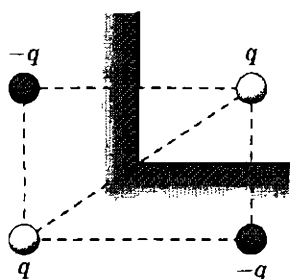


Рис. 82. Заряды-отражения для точечного заряда, расположенного вблизи двух проводников с плоскими поверхностями, перпендикулярными друг другу

проводящих пленок, которые расположены под прямым углом друг к другу, в квадрате, где находится точечный заряд q , является суперпозицией полей трех зарядов-отражений: двух зарядов $-q$, которые расположены симметрично заряду q относительно плоскостей пленок, и заряда $+q$, который получается из заряда q последовательными отражениями в двух плоскостях (рис. 82). Сделан-

ное утверждение следует из того, что плоскости пленок являются эквипотенциальными поверхностями поля этих расположенных в шахматном порядке четырех зарядов (одного реального и трех зарядов-отражений). Действительно, на плоскости потенциал поля каждой пары зарядов, симметричных относительно этой плоскости, равен нулю, то есть плоскости являются эквипотенциальными поверхностями, соответствующими $\varphi=0$.

Задача 21.5. Найдите силу, действующую на точечный заряд q в присутствии двух плоских проводящих пленок, которые расположены под прямым углом друг к другу, если заряд находится на расстояниях h_1 и h_2 от этих пленок.

Задача 21.6. Найдите энергию взаимодействия U точечного заряда q с двумя плоскими проводящими пленками, которые расположены под прямым углом друг к другу, если заряд находится на равных расстояниях h от этих пленок.

Вопрос 21.1. При каких значениях угла между плоскими проводящими пленками задача о поле точечного заряда допускает явное решение?

Другим примером является поле точечного заряда Q , расположенного около незаряженного проводящего шара. Будем считать, что радиус шара равен R , а точечный заряд расположен на расстоянии $r > R$ от центра шара. Чтобы найти поле в этом случае, необходимо вспомнить, что сферой является одна из эквипотенциальных поверхностей поля двух точечных разноименных и не равных друг другу по абсолютной величине зарядов (см. § 20). Эта сфера совпадет с поверхностью шара, если заряд Q дополнить точечным зарядом $-q$ (где $q = RQ/r$), расположенным на прямой, проходящей через заряд Q и центр шара, на расстоянии $r' = R^2/r$ от центра шара. Однако поле шара не может моделироваться полем заряда $-q$. Дело в том, что



Рис. 83. Точечные заряды q и $-q$, моделирующие поле шара

потенциал точек сферы, как было показано в § 20, равен нулю, шар же обладает ненулевым потенциалом. Действительно, имеются силовые линии, идущие с поверхности шара на бесконечность, и следовательно, работа поля по перемещению пробного заряда вдоль этих линий нулю не равна. Чтобы исправить конструкцию, мы должны ввести еще один фиктивный заряд, поместив его в центр шара (что не испортит эквипотенциальности его поверхности). Спрашивается, чему равна величина этого добавочного заряда?

Чтобы ответить на этот вопрос, обратимся к теореме Гаусса. Так как шар незаряжен, то поток напряженности через любую охватывающую его поверхность равен нулю. Это значит, что должен быть равным нулю и поток напряженности поля зарядов, моделирующих поле шара, то есть должна быть равной нулю сумма их величин. (Обобщая это рассуждение, мы приходим к выводу, что сумма величин фиктивных зарядов, моделирующих поле проводника, должна равняться заряду этого тела.) Поэтому в центре шара следует расположить фиктивный заряд q . Моделирующие поле шара точечные заряды показаны на рис. 83.

Задача 21.7. Найдите силу, действующую на точечный заряд Q со стороны незаряженного проводящего шара радиуса R , если заряд расположен на расстоянии $r > R$ от центра шара.

Задача 21.8. Найдите энергию взаимодействия точечного заряда Q с незаряженным проводящим шаром радиуса R ,

если заряд расположен на расстоянии $r > R$ от центра шара.

Если r намного превосходит R , то поле точечного заряда вблизи от шара можно считать однородным, а его напряженность — равной $E = Q/(4\pi\epsilon_0 r^2)$. Заряды же q и $-q$ в этом случае расположены очень близко друг от друга, то есть их поле является полем точечного диполя с дипольным моментом, равным

$$d = qr' = \frac{QR^3}{r^2} = 4\pi R^3 \epsilon_0 E.$$

Таким образом, мы воспроизводим решение задачи о проводящем шаре во внешнем однородном поле, которая была рассмотрена в § 15.

В обратном предельном случае, когда величины r и R близки, мы возвращаемся к задаче о поле точечного заряда вблизи проводника с плоской поверхностью. Действительно, в этом случае $q \approx Q$, и располагается заряд $-q$ почти на том же расстоянии от поверхности шара, что и заряд Q . Заряд же q удален от зарядов Q и $-q$ на расстояние, намного превышающее расстояние между последними. Таким образом заряд q играет роль бесконечно удаленного заряда (обеспечивающего общий баланс), о котором шла речь выше.

Во избежание недоразумений подчеркнем, что приведенное утверждение о совпадении суммы величин фиктивных зарядов с зарядом проводника относится только к полю проводника снаружи от него, но не работает для фиктивных зарядов, моделирующих поле в его полостях.

Задача 21.9. Найдите силу, действующую на точечный заряд q , помещенный в сферическую полость проводника радиуса R , если расстояние от центра полости до заряда q равно $r < R$.

Конечно, рассмотренные нами примеры отнюдь не исчерпывают проблему исследования поля заряженных тел

в присутствии проводников. Тем не менее они иллюстрируют устройство такого поля и в общем случае, не допускающем явного решения. Например, все результаты, которые мы получили на примере системы «точечный заряд + проводящая плоскость», годятся и для случая заряженного тела, расположенного вблизи поверхности проводника, если размеры тела гораздо меньше, чем расстояние до проводника, а это расстояние, в свою очередь, много меньше радиусов кривизны поверхности проводника. Найденное решение можно использовать, например, для исследования поведения электрона вблизи поверхности металла.

Сам факт притяжения заряженного тела к незаряженному проводнику носит всеобщий характер, а зависимость силы этого притяжения от кривизны проводника иллюстрирует задача с проводящим шаром, которая показывает, что сила притяжения к выпуклой поверхности меньше, чем к плоской. Решение задачи о заряде вблизи проводящих пленок, расположенных под углом друг к другу, показывает, что сила притяжения к вогнутой поверхности будет больше, чем к плоской. Та же задача иллюстрирует тот факт, что даже вблизи изломов поверхности проводника напряженность поля остается гладкой функцией координат.

§ 22. Электрическая емкость

Поле заряженного проводника зависит от его заряда, формы и размеров проводника, а также от формы, размеров и расположения окружающих проводник тел, то есть обладает сложной пространственной структурой. Тем не менее для поля проводника можно установить ряд общих закономерностей, к изучению которых мы и приступаем.

Рассмотрим сначала уединенный заряженный проводник. Как мы уже установили, силовые линии поля перпендикулярны его поверхности. Кроме того, вне заряженного тела силовые линии не имеют изломов. Попробуем теперь представить себе картину эквипотенциальных поверхностей, используя их перпендикулярность силовым линиям. Сама поверхность проводника является эквипотенциальной. Вблизи проводника эквипотенциальные поверхности будут по форме напоминать его поверхность, но по мере удаления от него их форма будет приближаться к сферической, поскольку на больших расстояниях поле любого заряженного тела похоже на поле точечного заряда. В качестве иллюстрации на рис. 84 приведена система эквипотенциальных поверхностей заряженного проводника вытянутой формы.

Предположим, что на заряженном проводящем теле имеется острый выступ. Построим картину эквипотенциальных поверхностей, близких к проводнику. Они будут повторять форму проводника везде, кроме окрестности выступа, где они будут «скруглены» (рис. 85). Силовые линии, проходящие через эти скругления, будут «собираться» к острию. В результате их плотность вблизи острия будет больше, чем вдали от него. Таким образом, напряженность поля будет достигать максимума вблизи острия. Вместе с напряженностью на острие будет достигать максимума и плотность поверхностного заряда проводника, которая связана с напряженностью уже известным нам соотношением $E = \sigma / \epsilon_0$. Так как плотность эквипотенциальных поверхностей про-

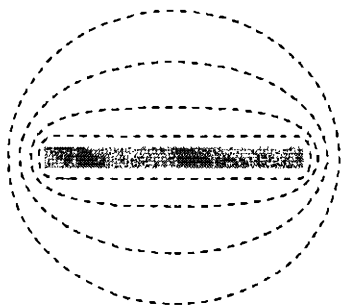


Рис. 84. Картина эквипотенциальных поверхностей поля заряженного проводника вытянутой формы

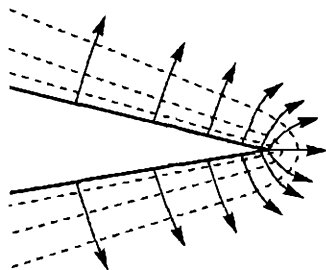


Рис. 85. Электрическое поле вблизи острого выступа на поверхности проводника

порциональна напряженности поля, она также будет возрастать при приближении к острию.

Исследуем, как будет изменяться потенциал проводника φ при изменении его заряда q . Нам уже известен пример такой зависимости: для уединенного проводящего шара $\varphi = q/(4\pi\epsilon_0 R)$. Мы видим, что потенциал шара прямо пропорционален величине его заряда q . Тот же закон пропорциональности справедлив не только для шара, но и для уединенного проводника произвольной формы. Обоснуем это утверждение.

При увеличении заряда проводника q напряженность поля в каждой точке пространства также возрастает пропорционально q , так как при этом выполняются все необходимые условия, которым должно подчиняться поле (см. § 15). Во-первых, выполняется теорема Гаусса для произвольной замкнутой поверхности. Во-вторых, поле остается консервативным. В-третьих, вектор напряженности перпендикулярен поверхности проводника вблизи нее. Так как напряженность поля E связана с расстоянием между эквипотенциальными поверхностями Δl и разностью потенциалов между ними $\Delta\varphi$ соотношением $E = -\Delta\varphi/\Delta l$, то можно сказать, что при увеличении q система эквипотенциальных поверхностей поля проводника остается неизменной, но разность

потенциалов $\Delta\varphi$ между соседними поверхностями растет пропорционально q . Поскольку потенциал в любой точке может быть найден как разность потенциалов с бесконечностью, то и потенциал поля в каждой точке пространства пропорционален q . В частности, оказывается пропорциональным q и потенциал самого проводника φ .

Коэффициент пропорциональности между q и φ называется *электрической емкостью проводника* и обозначается буквой C :

$$C = q/\varphi.$$

Электрическая емкость C не зависит от величины заряда проводника q , она определяется размерами проводника и его геометрической формой. В системе единиц СИ электрическая емкость, как это следует из ее определения, измеряется в Кл/В. Эта единица измерения называется *фарад* и обозначается Ф.

Проводник обладает емкостью в один фарад, если при сообщении ему заряда в 1 кулон он приобретет потенциал, равный 1 вольту.

Используя приведенное выражение для потенциала проводящего шара, находим его емкость

$$C = 4\pi\epsilon_0 R.$$

Задача 22.1. Найдите радиус проводящего шара, имеющего емкость 1 фарад. Сравните результат с радиусом Земли, равным 6400 км.

Мы видим, что емкость шара пропорциональна его радиусу. Такая же пропорциональность емкости размеру имеет место для проводников, формы которых подобны друг другу (например, для кубов различных размеров).

Для доказательства этого утверждения представим себе, что размеры проводника увеличиваются в n раз без изменения его формы и заряда. Так как площадь поверхности проводника увеличится в n^2 раз, то плотность заряда на

его поверхности уменьшится в n^2 раз. В силу соотношения $E = \sigma/\varepsilon_0$ также в n^2 раз уменьшится напряженность E вблизи поверхности проводника. То же происходит и вблизи любой эквипотенциальной поверхности, система которых «раздувается» при увеличении размеров проводника. Вспоминая теперь соотношение $E = -\Delta\varphi/\Delta l$ и учитывая, что расстояние Δl между соседними эквипотенциальными поверхностями увеличилось в n раз, мы заключаем, что $\Delta\varphi$ уменьшается в n раз. Поэтому и потенциал проводника φ уменьшится в n раз. Следовательно, емкость проводника возрастет в n раз, что и означает пропорциональность емкости размерам.

До сих пор мы говорили о поле заряженного уединенного проводника, то есть проводника, удаленного от других тел. Если же вблизи заряженного проводника поместить другие тела — проводники и/или диэлектрики, то поле станет иным. Действительно, поле проводника вызывает перераспределение заряда в близлежащих телах, что ведет к появлению их собственных полей. Однако и в присутствии других тел, если они не несут заряда, потенциал проводника φ будет пропорционален его заряду q . Это следует из того же рассуждения о напряженности и системе эквипотенциальных поверхностей. Поэтому можно говорить о емкости проводника C в присутствии других тел, которая по-прежнему определяется отношением заряда проводника q к его потенциалу φ и не зависит от величины заряда проводника. Величина емкости определяется как размерами и формой самого проводника, так и формой, размерами, диэлектрической проницаемостью и расположением других тел относительно проводника. При увеличении расстояния от данного проводника до других тел его емкость стремится к емкости уединенного проводника.

Сравним теперь емкость уединенного проводника и емкость того же проводника, но окруженного со всех сторон бесконечным диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε_r . При одном и том же заряде q проводника напряженность его поля в этих двух случаях отличается в ε_r раз,

причем распределение заряда по поверхности проводника будет одним и тем же.

Чтобы обосновать это утверждение, надо, как и выше, проверить необходимые условия, то есть выполнение обобщенной теоремы Гаусса, консервативность поля и перпендикулярность вектора напряженности поверхности проводника вблизи нее. Все эти условия, очевидно, выполнены. Отличие в ϵ_r раз напряженности означает, что и потенциал проводника в присутствии диэлектрика будет в ϵ_r раз меньше, чем для уединенного проводника. Следовательно, емкость C будет в ϵ_r раз больше, чем емкость уединенного проводника. Например, емкость погруженного в диэлектрик проводящего шара равна $C = 4\pi\epsilon_0\epsilon_r R$.

В общем случае явно найти емкость проводника невозможно. Это удастся сделать, если задача обладает той или иной симметрией, допускающей явное решение для поля проводника.

Задача 22.2. Найдите емкость проводящего шара радиуса R_1 , окруженного сферическим диэлектрическим слоем с внешним радиусом $R_2 > R_1$ (рис. 86), если относительная диэлектрическая проницаемость слоя равна ϵ_r .

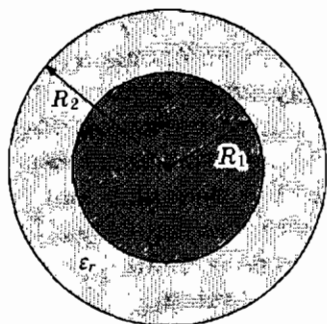


Рис. 86. Проводящий шар, окруженный сферическим диэлектрическим слоем. К задаче 22.2

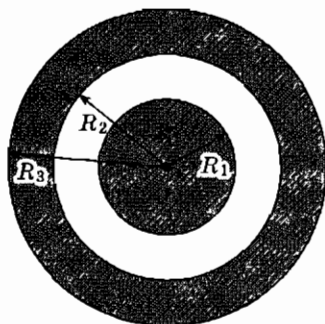


Рис. 87. Проводящий шар, окруженный шаровым проводящим слоем. К задаче 22.3

Задача 22.3. Найдите емкость проводящего шара радиуса R_1 , если около него имеется шаровой проводящий слой, ограниченный концентрическими проводнику сферами с радиусами $R_2 < R_3$ (рис. 87).

Найденное выражение для емкости шара позволяет оценить емкость проводящего тела, если у него размеры во всех направлениях одного порядка (например, если тело имеет форму куба). Но мы уже знаем, что имеются тела — нити и пленки, — продольные размеры которых много больше их толщины.

Спрашивается, как оценить емкость подобного тела? Ответ на этот вопрос можно получить, если вспомнить, что вдали от тела его поле аппроксимируется (приближается) полем точечного заряда, то есть его потенциал не может быть меньше, чем потенциал шара с радиусом, равным максимальным размерам тела. Эта оценка несколько изменяется за счет областей, близких к нити или пленке (причем для нити эта поправка более существенна, чем для пленки), но остается тем не менее справедливой и с учетом этих областей. Это иллюстрируется картиной эквипотенциальных поверхностей поля нити, приведенной на рис. 84. Обратим внимание на то, что в качестве максимального размера нити или пленки надо брать не длину этого тела, а его максимальный габаритный размер. Например, для пружины (проволоки, свернутой в спираль) в оценку ее емкости входит расстояние между концами проволоки, которое может быть много меньше длины проволоки.

Из соотношения $\varphi = q/C$ следует, что чем больше емкость тела, тем больший заряд требуется ему сообщить для того, чтобы изменить его потенциал на данную величину. Поэтому при изменении заряда тела очень большой емкости его потенциал остается практически неизменным.

Это свойство можно использовать для стабилизации потенциала проводников, входящих в состав тех или иных электрических приборов. Чтобы стабилизировать потенциал какого-либо проводника, необходимо обеспечить его

электрический контакт с проводником большой емкости, то есть соединить с ним посредством проводящей проволоки. Самым доступным телом, которое можно использовать как стабилизатор, является Земля, поверхность которой (почва) обладает достаточной проводимостью. Действительно, емкость Земли всегда намного превосходит емкость проводника, потенциал которого нужно стабилизировать (так как размеры Земли гораздо больше размеров любого прибора). Поэтому для фиксации потенциала проводника его достаточно *заземлить*, то есть соединить проводящей проволокой с почвой. Вместо Земли для той же цели (стабилизации потенциала) можно использовать и другие проводящие тела большой емкости.

Стабилизация потенциала проводника посредством соединения его с проводящим телом большой емкости в электротехнической литературе также называется заземлением, само же стабилизирующее тело именуется обычно «землей» (с маленькой буквы). Как правило, в электротехнических схемах именно потенциал «земли» принимается за нуль. В реальных приборах «землей» служит обычно проводник, размеры которого близки к габаритам прибора, вследствие чего емкость «земли» превосходит емкость других проводников, входящих в состав этого прибора.

Определим энергию поля заряженного проводника. Воспользуемся тем, что эта энергия равна работе, которую совершает поле при разрядке проводника, то есть при удалении с него заряда на бесконечность. Будем разряжать проводник малыми порциями, чтобы поле проводника при переносе каждой такой порции можно было считать неизменным. При переносе заряда Δq поле будет совершать работу, которая в соответствии с определением потенциала будет равна

$$\Delta A = \Delta q \cdot \varphi.$$

Здесь φ — потенциал проводника, падающий по мере уменьшения заряда проводника q . Чтобы найти полную работу поля, необходимо просуммировать величины работ ΔA , совершаемых при уменьшении заряда q от Q до нуля.

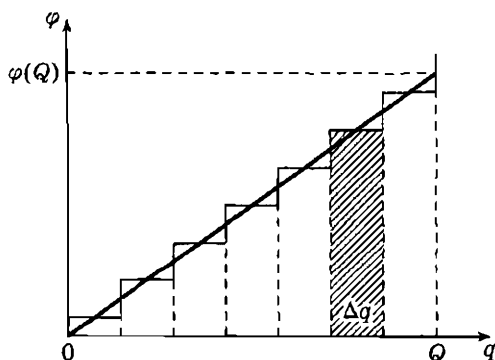


Рис. 88. Графическое представление работы поля при разрядке проводника

Используя понятие емкости, можно выразить потенциал проводника φ через его заряд: $\varphi = q/C$. Представим эту зависимость графически (см. рис. 88). Суммарная работа по разрядке проводника равна площади под графиком зависимости φ от q на интервале от нуля до Q . Вычисляя эту площадь, находим:

$$A = \frac{Q^2}{2C}.$$

Вычисленная работа и равна энергии поля заряженного проводника W . Учитывая соотношение $Q = C \cdot \varphi$, мы можем записать выражение для этой энергии в различных формах:

$$W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q \cdot \varphi}{2} = \frac{C \cdot \varphi^2}{2}.$$

Подставляя сюда выражение $C = 4\pi\epsilon_0 R$ для емкости уединенного шара, мы находим для энергии его поля выражение

$$W = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R},$$

воспроизводящее полученный нами ранее другим способом ответ (см. § 17).

Опираясь на выражение для энергии заряженного проводника, мы можем доказать, что емкость проводника в

присутствии других тел всегда больше, чем емкость того же, но уединенного проводника. Для этого представим себе, что к уединенному заряженному проводнику подносят незаряженное тело (проводящее или диэлектрическое). Поле проводника вызовет электризацию этого тела, то есть разделение заряда в нем. В результате, как мы показали в § 13, незаряженное тело будет взаимодействовать с проводником, притягиваясь к нему. Поэтому при приближении этого тела к проводнику поле будет совершать работу, знак которой положителен, то есть энергия поля будет уменьшаться. Другими словами: энергия поля заряженного проводника в присутствии других тел будет всегда меньше, чем энергия поля того же, но уединенного проводника. Вспоминая теперь выражение для энергии поля проводника $Q^2/2C$, мы и приходим к сформулированному выше выводу.

§ 23. Поле нескольких заряженных проводников

Если мы рассматриваем сложную систему наэлектризованных тел, то среди них может оказаться целый ряд заряженных проводников. Как и для одного заряженного проводника, поле произвольного числа заряженных проводников однозначно задается их зарядами, поскольку в силу теоремы единственности (§ 15) распределение зарядов по поверхностям проводников однозначно определяется условием перпендикулярности силовых линий поверхностям этих тел (или, что то же самое, условием их эквипотенциальности).

Исследование поля нескольких заряженных проводников (с зарядами $q_1, q_2, \dots$) может быть сведено к решению задачи о поле одного из них (при том же расположении тел нашей системы). А именно, напряженность $\vec{E}$ поля нескольких заряженных проводников в любой точке равна

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots,$$

где $\vec{E}_i$ — напряженность поля в той же точке в случае, если заряжен только один проводник номер i (несущий свой заряд q_i).

Приведенное соотношение можно считать одним из проявлений принципа суперпозиции. Заметим, однако, что в данном случае его применимость отнюдь не является самоочевидной, поскольку, скажем, изменение заряда q_1 первого проводника влечет за собой перераспределение заряда и по поверхностям всех остальных проводников, так что напряженность $\vec{E}_1$ определяется не только зарядом первого проводника, но и зарядами, индуцированными на поверхности других проводников. Поэтому приведенное правило требует отдельного обоснования, которое заключается в проверке соотношений, которым обязано удовлетворять электростатическое поле. А именно, надо проверить консервативность, выполнение теоремы Гаусса и условие перпендикулярности напряженности поверхности проводников (§ 15).

Проведем эту проверку. Во-первых, поле с напряженностью $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots$ является консервативным, поскольку консервативными являются каждое из полей в этой сумме. Во-вторых, для поля $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots$ выполняется теорема Гаусса для любой замкнутой поверхности, что следует из аддитивности потока напряженности. И наконец, вектор $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots$ перпендикулярен поверхности любого проводника, поскольку этим свойством обладает каждое слагаемое в сумме. На этом проверка заканчивается.

Выше мы игнорировали возможное присутствие в системе диэлектриков, которые за счет их поляризации также участвуют в формировании поля системы. Поэтому при наличии диэлектриков проведенную выше проверку надо расширить, включив в рассмотрение условия на поверхности диэлектриков: равенство компонент напряженности, касательных к поверхности, и пропорциональность с коэффициентом ϵ_r компонент, перпендикулярных поверхности (§ 16). Поскольку эти соотношения выполняются для каждого из полей $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \dots$, выполняются они и для суммы $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots$. Таким образом, и наличие диэлектриков не нарушает наш обобщенный принцип суперпозиции.

Как мы установили в § 22, напряженность поля заряженного проводника пропорциональна его заряду (в том числе и в присутствии других незаряженных тел). Поэтому значение $\vec{E}_1$ в произвольной точке пропорционально q_1 , значение $\vec{E}_2$ пропорционально q_2 , и так далее. Поэтому, вычисляя работу поля с напряженностью $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots$ по перемещению пробного заряда, мы получим сумму слагаемых, каждое из которых пропорционально заряду соответствующего проводника. Вспоминая теперь определение потенциала, мы заключаем, что потенциал каждого из проводников будет представляться линейной комбинацией величин, пропорциональных зарядам $q_1, q_2, \dots$

Задача 23.1. Найдите потенциалы двух концентрических проводящих сферических пленок с радиусами $R_1 < R_2$, если их заряды равны q_1 и q_2 .

При погружении системы заряженных проводников (первоначально находившихся в вакууме) в диэлектрическую среду с относительной диэлектрической проницаемостью ϵ_r , напряженность поля во всех точках пространства уменьшается в ϵ_r раз. Это доказывается точно так же, как и для одиночного проводника (см. § 22). Поэтому если проводники окружены диэлектриком, то (при тех же зарядах) их потенциалы будут в ϵ_r раз меньше, чем в вакууме.

Обратимся теперь к энергии поля системы заряженных проводников. Мы используем представление электростатического поля как совокупности силовых трубок, «прикрепленных» к поверхностям проводников. Напомним, что некоторые трубки уходят в бесконечность, а другие «натянуты» между проводниками. Сначала мы найдем энергию поля, заключенную в каждой трубке, а затем энергию поля как сумму по всем трубкам.

Рассмотрим тонкую силовую трубку. Возьмем сначала небольшой ее отрезок длины Δl , вблизи которого поле можно считать однородным. Сосредоточенная внутри этого отрезка энергия ΔW равна произведению плотности энергии поля w на объем куска трубки $S\Delta l$ (S — площадь поперечного сечения трубки), то есть

$$\Delta W = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 S \Delta l = \frac{\epsilon_0}{2} \Phi \Delta \varphi.$$

Здесь Φ — поток напряженности, который несет трубка, а $\Delta \varphi$ — разность потенциалов между концами отрезка. Выражение $\Delta W = \epsilon_0 \Phi \Delta \varphi / 2$ справедливо и для произвольного (не обязательно малого) отрезка трубки. Действительно, искомую энергию можно найти, разбив данный отрезок на малые, и просуммировав энергии малых отрезков. Во всех слагаемых Φ одинаково, а разности потенциалов суммируются в разность потенциалов между концами взятого отрезка. Справедливо полученное выражение и для трубки в целом, тогда $\Delta \varphi$ надо понимать как разность потенциалов между тем ее концом, где силовые линии начинаются, и тем, где они заканчиваются.

Перепишем найденное выражение для энергии трубки в виде $\varepsilon_0(\Phi_1\varphi_1 + \Phi_2\varphi_2)/2$, где φ_1 и φ_2 — потенциалы концов трубки, а поток равен Φ , если он «исходит» из проводника, и равен $-\Phi$, если он «втекает» в проводник. На бесконечности $\varphi=0$, поэтому проблем со знаком потока на конце трубок, уходящих в бесконечность, не возникает. Просуммируем энергии силовых трубок, используя приведенное выражение. Тогда коэффициенты при потенциалах проводников соберутся в полные потоки напряженности, которые выражаются через заряды проводников в силу теоремы Гаусса. В результате мы находим следующее выражение для энергии поля

$$W = (q_1\varphi_1 + q_2\varphi_2 + \dots)/2,$$

которое напрямую обобщает выражение для энергии поля одиночного проводника $q\varphi/2$. Таким образом, если известны заряды и потенциалы проводников, то можно найти и энергию их поля.

Предположим теперь, что среди проводников присутствует «земля», то есть проводник очень большой емкости, что обеспечивается значительными размерами этого проводника. Тогда его потенциал будет пренебрежимо мал по сравнению с потенциалами других проводников (если только заряд земли не превосходит значительно заряды остальных проводников, такой случай надо рассматривать отдельно). Поэтому в приведенном выше выражении для энергии поля можно опустить слагаемое, связанное с проводником-землей, то есть величина заряда земли не входит в выражение для энергии поля. Это связано с тем, что заряд земли, распределяясь по большой поверхности этого проводника, порождает напряженность, которая мала по сравнению с напряженностью полей других проводников. С другой стороны, конечно, присутствие земли сильно влияет на величину энергии поля, поскольку значения потенциалов других проводников зависят от размеров и формы проводника-земли.

Соотношение между зарядами и потенциалами проводников в общем случае найти затруднительно. Можно лишь сказать, что оно определяется размерами проводников и их формой. Более определенные выводы можно сделать для двух предельных случаев.

Во-первых, это случай удаленных друг от друга проводников, когда они разделены расстояниями, много большими, чем их размеры. В этом случае проводники слабо влияют друг на друга (индуцированными зарядами можно пренебречь) и потенциалы связаны с зарядами точно так же, как и для уединенных проводников. Во-вторых, это случай близких друг к другу проводников, когда они разделены зазором, ширина которого намного меньше, чем размеры проводников. Далее мы сосредоточимся на рассмотрении этого случая, ограничившись двумя проводниками, так как на этом примере видны все особенности поля близких заряженных проводников.

Мы будем предполагать, что оба проводника заряжены, то есть на них помещены заряды q_1 и q_2 . В силу малости зазора разность потенциалов между проводниками будет мала, то есть можно считать, что оба проводника имеют один и тот же потенциал. Поэтому суммарный заряд системы $q_1 + q_2$ распределится по внешней поверхности проводников так, как будто никакого зазора между ними нет и они являются единым проводником, ибо эта поверхность является эквипотенциальной. Отметим, что заряды на внешних поверхностях проводников не будут в общем случае совпадать с q_1 и q_2 , «излишки» же распределяются вдоль щели, разделяющей проводники. Сказанное иллюстрируется рис. 89, где представлено распределение зарядов и картина силовых линий для двух проводящих полушаров, разделенных узким зазором. Потенциал проводников можно найти по формуле $\varphi = (q_1 + q_2)/\tilde{C}$, где $\tilde{C}$ — емкость «составного» проводника, который получится, если щель между проводниками заполнить проводящим составом. Энергия же поля будет равна $\frac{\varphi(q_1 + q_2)}{2} = \frac{(q_1 + q_2)^2}{2\tilde{C}}$.

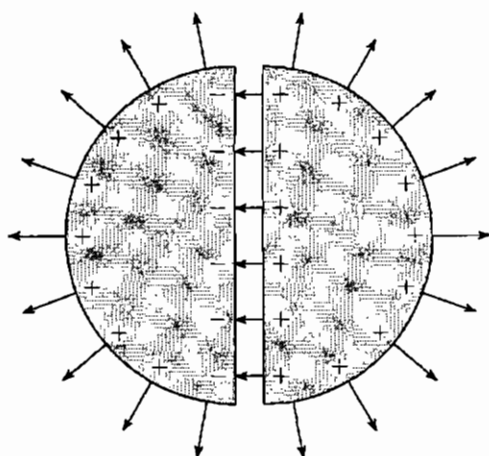


Рис. 89. Картина силовых линий поля двух заряженных проводящих полушаров, разделенных узким зазором

Обратим внимание на то, что заряды на противоположных краях зазора равны по величине и противоположны по знаку. Действительно, рассмотрим поверхность, охватывающую щель и проходящую по объему проводников (см. рис. 90). Поток напряженности через эту поверхность

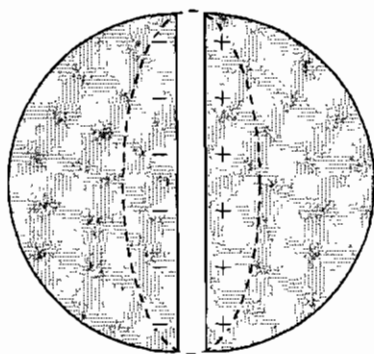


Рис. 90. Поверхность, охватывающая заряды, сосредоточенные на краях узкого зазора между проводниками

пренебрежимо мал, так как напряженность поля на ней отлична от нуля только на малом поясе, лежащем в промежутке между проводниками. Поэтому в силу теоремы Гаусса заряд внутри этой поверхности должен быть равен нулю, что эквивалентно сделанному утверждению.

Задача 23.2. Найдите заряды на поверхностях узкой щели между двумя проводящими полушарами радиуса R , если их заряды равны q_1 и q_2 .

Задача 23.3. Найдите разность потенциалов между двумя проводящими полушарами радиуса R , на которые помещены заряды q_1 и q_2 , если толщина зазора между полушарами равна h , $h \ll R$ (h много меньше R). Сравните ее с потенциалами полушаров.

Задача 23.4. Найдите силу взаимодействия разделенных узкой плоской щелью проводящих полушаров радиуса R , если их заряды равны q_1 и q_2 .

До сих пор мы неявно предполагали, что сумма зарядов проводников $q_1 + q_2$ не является слишком малой. В то же время в электротехнических приборах довольно часто встречается ситуация, когда суммарный заряд проводников равен нулю в силу конструктивных особенностей прибора. Например, заряды на первоначально незаряженных проводниках могут появиться за счет разделения заряда, в результате которого суммарный заряд системы не меняется. При условии $q_1 = -q_2$ заряды обоих проводников распределятся вдоль разделяющего их зазора. Физически это связано с притяжением противоположных зарядов, которые стремятся сблизиться на минимально возможное расстояние. Формально же это можно объяснить следующим образом. В силу условия $q_1 = -q_2$ все силовые линии поля проводников идут от одного проводника к другому (так как они не могут уходить на бесконечность). Сравним две силовые линии, идущие от одного проводника к другому в зазоре и вне его. Работа по перемещению пробного за-

ряда вдоль обеих линий одинакова, в то время как длина силовой линии, идущей в зазоре, гораздо меньше. Поэтому напряженность поля вне зазора будет гораздо меньше, чем в зазоре. Соответственно, и поверхностная плотность заряда вдоль зазора будет гораздо больше, чем на внешних поверхностях проводников, что следует из соотношения $E = \sigma/\epsilon_0$.

Отметим еще две особенности случая $q_1 = -q_2$. Во-первых, разность потенциалов между проводниками $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ сравнима с самими потенциалами φ_1 и φ_2 , в то время как в общем случае $\Delta\varphi$ гораздо меньше φ_1 или φ_2 . Во-вторых, проводники обязательно притягиваются друг к другу, поскольку заряды на поверхностях зазора между близкими проводниками имеют противоположный знак.

Задача 23.5. Найдите силу, с которой притягиваются два проводящих полушара радиуса R , разделённые зазором постоянной толщины h , $h \ll R$, если $q_1 = -q_2 = q$.

В рассматриваемом случае основная энергия поля будет сосредоточена в промежутке между проводниками (и ее нельзя найти по приведенной выше формуле с емкостью составного проводника $\tilde{C}$, учитывающей только энергию поля вне проводников). Действительно, хотя объем этого промежутка и мал (он пропорционален ширине зазора h), там велика плотность энергии поля (которая пропорциональна квадрату напряженности, то есть обратно пропорциональна h^2). Обратим внимание на то, что описанное нами распределение энергии поля весьма просто объясняется принципом ее минимума. С целью минимизации своей энергии поле «запикивает» максимальное число силовых трубок в узкий зазор между проводниками (где они короткие, и потому несут относительно небольшую энергию), что удастся осуществить полностью при условии $q_1 + q_2 = 0$.

Воспользуемся теперь установленной выше формулой $W = \frac{q_1\varphi_1 + q_2\varphi_2}{2}$ для энергии поля проводников. Поскольку заряд q_1 равен $-q_2$, выражение для энергии поля перепи-

сывается в виде $W = q_1 \Delta \varphi / 2$, где $\Delta \varphi$ — разность потенциалов между первым и вторым проводниками.

Отметим еще один важный случай, когда применим приведенный выше анализ. А именно, предположим, что узким зазором отделяется проводник от земли, которая по определению намного превосходит этот проводник своими размерами. Тогда весь заряд проводника q будет сосредоточен на поверхности этого зазора, напротив него на поверхности земли будет сосредоточен заряд $-q$. Оставшийся же заряд земли распределится по всей его большой поверхности. Именно такое распределение заряда обеспечивает минимальность энергии поля, которая будет сосредоточена в основном в узком зазоре между проводником и землей. Те же результаты получаются для случая узкого зазора между проводниками, один из которых заземлен.

§ 24. Конденсатор

Большинство технических приборов содержит элементы конструкции, служащие для накопления энергии, которая при необходимости может быть (частично или полностью) востребована обратно. Например, имеющийся у любого двигателя внутреннего сгорания маховик, раскручиваясь во время рабочего хода, запасает кинетическую энергию, которую он возвращает при подготовительных тактах. Еще одним примером является «заводная» пружина часов, которая запасает энергию упругой деформации. Можно накапливать энергию и в другой форме. Скажем, при зарядке аккумулятора за счет идущих в нем химических реакций увеличивается энергия химической связи. Широко распространены также устройства, называемые *конденсаторами*, в которых *накапливается энергия электрического поля*. Конденсаторы имеются в любом радиоприемнике, телевизоре или магнитофоне, а также в большинстве других электроприборов.

Конденсаторы, в зависимости от их конкретного назначения, имеют разное конструктивное решение. В этом смысле можно провести аналогию с применением пружин: пружина может закрывать двери, обеспечивать работу механических часов, амортизировать (смягчать) соударение тел и так далее. Хотя во всех этих случаях используется одно и то же свойство — способность пружины к упругой деформации, пружина в часах совершенно не похожа на пружину, закрывающую двери.

В принципе в качестве конденсатора можно использовать произвольное тело, если обеспечить возможность его зарядки и разрядки. При увеличении заряда тела возрастает напряженность его электрического поля, то есть энергия поля запасается, а при уменьшении заряда энергия поля высвобождается. Эта идея используется иногда в радиоприборах, когда конденсатором служит отдельный проводник, возможность зарядки и разрядки которого обеспечивается

за счет соединения его проводящей проволокой с другими частями прибора.

Однако такая схема обладает большим недостатком, так как поле вокруг заряженного тела зависит не только от величины его заряда, но и от зарядов и расположения близлежащих тел. Поэтому, чтобы избежать непредсказуемых изменений энергии поля, служащее конденсатором тело необходимо помещать достаточно далеко от других рабочих частей прибора, что накладывает обременительные ограничения на его конструкцию. Ту же проблему можно решить иначе, если тело, которое заряжается и разряжается в ходе работы конденсатора, поместить внутрь заземленного экрана. Тогда поле этого тела, сосредоточенное внутри экрана, окажется полностью защищенным от внешних воздействий.

Еще одно, самое распространенное решение проблемы реализовано при помощи схемы, в основе которой лежит зарядка-разрядка пары тел, называемых *обкладками* конденсатора, разделенных узким зазором, который много меньше продольных размеров обкладок. Как правило, обкладки конденсатора заключены в корпус, а для удобства включения конденсатора в электрическую цепь к его обкладкам присоединяются небольшие отрезки проводов, через которые происходит зарядка обкладок.

Если потенциалы обкладок (посчитанные относительно земли) не превышают существенно разность потенциалов $\Delta\varphi$ между обкладками, то напряженность поля между обкладками намного превышает напряженность поля вне их, так как зазор между обкладками много меньше расстояния от них до других частей прибора. Этот случай был рассмотрен нами в конце § 23. Полученные там результаты приводят к выводу, что основная энергия поля будет заключена между обкладками, где ее плотность намного больше, чем вне их. Именно такой режим работы конденсатора обычно обеспечивается конструктивно, и далее мы будем иметь его в виду.

В этом режиме заряды обкладок конденсатора можно считать равными по абсолютной величине и противополож-

ными по знаку. Величина заряда q на одной из обкладок называется *зарядом конденсатора*, он линейно связан с разностью потенциалов между обкладками:

$$\Delta\varphi = q/C.$$

Коэффициент C называется *емкостью конденсатора*. Также как и емкость проводника, емкость конденсатора измеряется в фарадах. Повторяя схему рассуждений, позволяющую найти энергию проводника (см. § 22), мы получаем выражение для энергии поля, запасенной в конденсаторе:

$$W = \frac{C}{2}(\Delta\varphi)^2 = \frac{1}{2}q\Delta\varphi = \frac{1}{2C}q^2.$$

Заметим, что приведенные выше соотношения остаются в силе также и для конденсаторов, выполненных в виде заэкранированного тела или даже отдельного тела, обсуждавшихся ранее. Тогда q является зарядом этого тела, $\Delta\varphi$ является разностью потенциалов между ним и землей, а C совпадает с емкостью тела (с учетом окружающих его проводников). Обе эти конструкции также можно считать включающими две обкладки, одной из которых является заряжаемое тело, а второй — земля (отметим в этой связи, что заземленный экран фактически является частью земли).

Задача 24.1. Найдите емкость сферического конденсатора, у которого обкладками являются проводящие сферы с радиусами R_1 и R_2 ($R_2 > R_1$), причем вторая сфера заземлена, то есть служит экраном.

Как правило, обкладки конденсатора изготавливают из металлов, обладающих хорошей проводимостью, вследствие чего их легко заряжать и разряжать, и удобных в обработке. Однако в некоторых случаях выгоднее использовать проводники другого типа или даже полупроводники.

Найдем емкость *плоского конденсатора*:

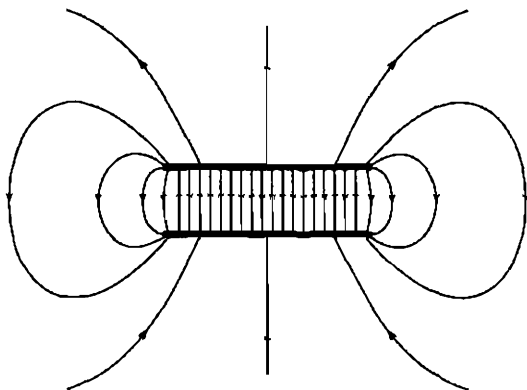


Рис. 91. Силовые линии поля плоского конденсатора

плоским называется конденсатор, обкладками которого являются одинаковые по размерам плоские пластины, зазор между которыми много меньше их продольных размеров.

Поле между обкладками плоского конденсатора будет однородным везде, кроме областей малых размеров вблизи их краев. Картина силовых линий этого поля представлена на рис. 91.

|| **Вопрос 24.1.** Как обосновать приведенные утверждения?

|| **Вопрос 24.2.** Поверхностная плотность заряда вблизи краев пластин плоского конденсатора отличается от плотности вблизи их середины. Где она больше?

Как мы уже знаем, плотность заряда на поверхности проводника равна $\sigma = \epsilon_0 E$, где E — напряженность поля вблизи его поверхности. Поэтому заряд q , сосредоточенный на обкладке, будет равен

$$q = \sigma \cdot S = \epsilon_0 E \cdot S,$$

где E — напряженность поля в конденсаторе, а S — площадь пластины. Разность же потенциалов между обкладками

будет равна

$$\Delta\varphi = E \cdot d = \sigma \cdot d / \varepsilon_0 = Q S d / \varepsilon_0.$$

Здесь d — расстояние между пластинами. Используя найденное выражение для заряда, получаем значение емкости:

$$C = \frac{q}{\Delta\varphi} = \frac{\varepsilon_0 \cdot S}{d}.$$

Задача 24.2. Выведите выражение для емкости плоского конденсатора исходя из выражения для энергии конденсатора.

Если пространство между обкладками конденсатора заполнить диэлектриком с относительной диэлектрической проницаемостью ε_r , то напряженность поля в конденсаторе станет в ε_r раз меньше. Соответственно, емкость конденсатора возрастет в ε_r раз. Отсюда получается следующее выражение для емкости плоского конденсатора, пространство между обкладками которого заполнено диэлектриком с относительной диэлектрической проницаемостью ε_r :

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{d}.$$

Рассмотренный эффект является частным случаем общего явления: емкость конденсатора увеличивается при введении между его обкладками произвольного тела. Это объясняется возникновением на теле индуцированных зарядов, поле которых приводит к уменьшению разности потенциалов между обкладками (при заданной величине заряда конденсатора q).

Условия эксплуатации конденсатора предполагают обычно, что разность потенциалов между его обкладками не превосходит некоторой величины, которая определяется параметрами электрической схемы. При заданной разности потенциалов энергия конденсатора $W = C(\Delta\varphi)^2/2$ будет тем больше, чем больше его емкость. Поэтому для накопления больших количеств энергии требуются конденсаторы большой емкости. Емкость плоского конденсатора будет тем

больше, чем больше площадь пластин и чем меньше расстояние между ними. Аналогичное утверждение справедливо и для конденсатора произвольной формы — его емкость будет тем больше, чем меньше расстояние между обкладками и чем больше площадь этих обкладок.

Расстояние между обкладками нельзя уменьшать неограниченно во избежание электрического пробоя. Поэтому для увеличения емкости приходится увеличивать площадь обкладок. Чтобы это не приводило к чрезвычайному увеличению размеров конденсатора, его обкладки изготавливают в виде тонкой фольги, а затем сворачивают в рулон, или изготавливают обкладки в виде двух «гребенок», вложенных друг в друга (рис. 92). Между обкладками прокладывается диэлектрическая пленка, которая предохраняет обкладки от касания и служит для увеличения емкости конденсатора.

Иногда требуется изменять емкость конденсатора (например, при настройке радиоприемника на нужную станцию). В этом случае используют конденсатор переменной емкости. Простейшее его устройство заключается в том, что посредством вращения ручки изменяется площадь зацепления двух «гребенок», являющихся обкладками конденсатора.

Конечно, удобно иметь дело с конденсаторами небольших размеров. Однако размер конденсатора, предназначенного для накопления данной энергии W , не может быть меньше некоторой величины вне зависимости от его конструкции. Действительно, напряженность поля внутри конденсатора не может превышать поле пробоя E_0 . Поэтому запасенная в нем энергия не может превышать $VE_0^2/(2\epsilon_0\epsilon_r)$, где V — объем конденсатора. Отсюда мы выводим неравенство

$$V > 2\epsilon_0\epsilon_r W/E_0^2.$$

Как мы объяснили, реальные конденсаторы имеют сложную форму обкладок. Спрашивается, как определить емкость подобного конденсатора? Глядя на рис. 92, мы видим, что конденсатор можно мысленно разделить на несколько

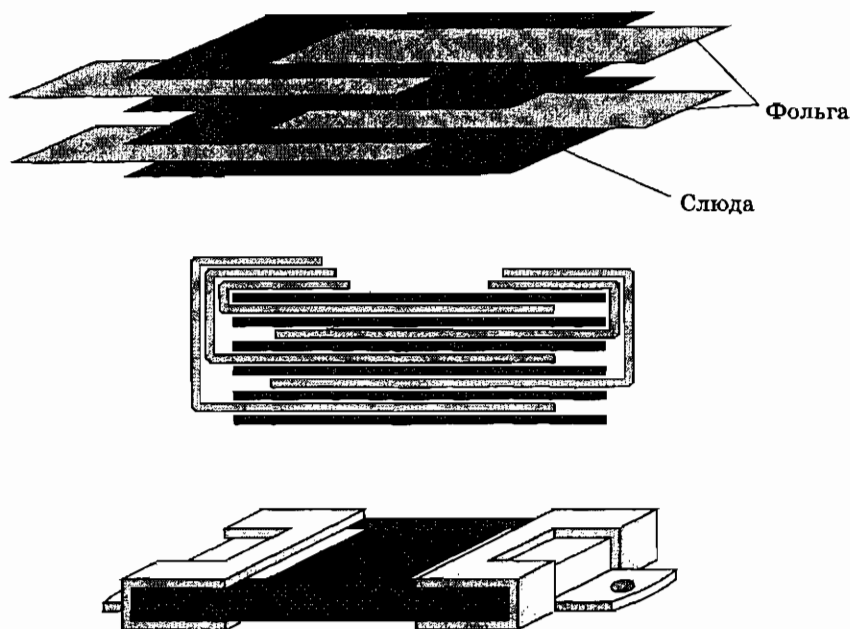


Рис. 92. Слюдяной конденсатор

плоских конденсаторов, емкости которых мы уже умеем определять. Та же идея работает и для произвольного конденсатора, если расстояние между его обкладками намного меньше их продольных размеров. Для этого конденсатор надо мысленно разбить на кусочки, каждый из которых можно считать плоским конденсатором, найти емкость каждого такого кусочка и просуммировать. Аддитивность емкости следует из аддитивности энергии, выражения $W = C(\Delta\varphi)^2/2$ для энергии конденсатора и того факта, что разность потенциалов $\Delta\varphi$ будет одной и той же для всех кусочков.

В качестве примера можно рассмотреть конденсатор с изогнутыми обкладками, расстояние между которыми d не меняется от точки к точке. Поскольку такой конденсатор можно мысленно разбить на плоские конденсаторы с фиксированным расстоянием между обкладками, то по-

сле суммирования их емкостей мы получим тот же ответ $C = \varepsilon_0 S/d$, что и для плоского конденсатора, где S — суммарная площадь обкладок.

Задача 24.3. Проверьте это утверждение для сферических обкладок (расстояние между которыми гораздо меньше их радиусов).

Если же пространство между обкладками заполнено диэлектриком с относительной диэлектрической проницаемостью ε_r , то его емкость будет равна $C = \varepsilon_r \varepsilon_0 S/d$, как и для плоского конденсатора.

Иногда в пространстве между обкладками имеется сложная «набивка», состоящая из чередующихся слоев различных материалов. Емкость такого конденсатора можно найти, если вычислить разность потенциалов между пластинами при данном их заряде и найти отношение $q/\Delta\varphi$. Для этого необходимо решить задачу о пространственном устройстве электрического поля между обкладками.

Задача 24.4. Найдите емкость плоского конденсатора, площадь обкладок которого S и расстояние между ними d , если в пространство между обкладками введена плоская проводящая пластина толщиной $d_1 < d$.

Задача 24.5. Найдите емкость плоского конденсатора, в который введена диэлектрическая пластина с относительной диэлектрической проницаемостью ε_r , если она по толщине совпадает с расстоянием между обкладками и занимает половину объема между ними.

Задача 24.6. Найдите емкость плоского конденсатора, в который помещена диэлектрическая пластина с относительной диэлектрической проницаемостью ε_r , толщина которой в два раза меньше расстояния между обкладками. Сравните результат с ответом к задаче 24.5.

Задача 24.7. Найдите емкость сферического конденсатора, если внутренняя сфера радиуса R_1 окружена диэлектрическим слоем с диэлектрической проницаемостью ε_r и с внешним радиусом $R_3 < R_2$.

§ 25. Электрические цепи, содержащие конденсаторы

Конденсаторы широко используются в различных электрических приборах. При этом, как правило, они включаются в состав довольно сложных электрических цепей. В настоящем параграфе мы рассмотрим электростатические цепи, то есть цепи, в которых отсутствует движение зарядов. Наша задача заключается в том, чтобы научиться определять разности потенциалов между различными точками цепи, а также заряд на обкладках того или иного конденсатора.

В состав цепей, которые мы рассмотрим, входят, помимо конденсаторов, источники *электродвижущей силы* (ЭДС).

Источник ЭДС является прибором, который при прохождении через него электрического заряда совершает работу, пропорциональную величине этого заряда.

Коэффициент пропорциональности между работой и зарядом и называется ЭДС, обычно она обозначается $\mathcal{E}$. Тогда работа, которую совершит источник ЭДС при прохождении через него заряда q , равна $q\mathcal{E}$. Источниками ЭДС служат электрические батарейки, аккумуляторы и другие источники питания различной конструкции.

Источники ЭДС и конденсаторы в цепи соединены между собой проводами, то есть проводниками вытянутой формы (как правило, это металлические проволоки). Способ этого соединения определяет свойства цепи.

Мы будем предполагать, что включенные в цепь конденсаторы имеют конструкцию, рассмотренную нами в предыдущем параграфе: конденсатор имеет две обкладки, размеры которых намного превышают расстояние между ними. Мы будем считать, что до соединения с источником ЭДС обкладки конденсаторов являются незаряженными. Тогда после подсоединения их к источникам ЭДС заряды на обкладках любого конденсатора будут равны по величине и противоположны по знаку. Зарядами же подводящих про-

водов можно пренебречь в силу большой величины емкости конденсатора (которая обеспечивается большой площадью его обкладок и малым расстоянием между ними). Кроме того, основная энергия поля в этом случае будет сосредоточена в пространстве между обкладками конденсаторов, и можно пренебречь эффектами, связанными со взаимным влиянием полей конденсаторов.

Устройство электрических цепей отображается на схемах, где соединяющие провода изображаются линиями, а конденсаторы — двойными линиями (которые символизируют обкладки конденсатора). В качестве иллюстрации на рис. 93 приведена простая электрическая схема, содержащая всего один конденсатор. На ней имеется также источник ЭДС, который изображается двумя параллельными не равными между собой линиями, и провод, соединенный с землей, который изображается одной жирной линией. Считается, что источник ЭДС совершает положительную работу при перемещении через него заряда от короткой линии к длинной, что соответствует перемещению заряда во внешней по отношению к источнику ЭДС цепи от длинной линии к короткой. Другими словами, длинная линия соответствует положительной клемме аккумулятора (или иного источника питания), а короткая линия соответствует его отрицательной клемме.

Обратим внимание на то, что в цепи, представленной на рис. 93, конденсатор подсоединен к источнику ЭДС таким образом, что исключено движение заряда по этой цепи, что и делает возможным ее статическое рассмотрение. Для приведенной цепи разность потенциалов между обкладками конденсатора равна $\mathcal{E}$. Чтобы обосновать это утверждение, переместим пробный заряд q по замкнутому контуру, проходящему через источник ЭДС, соединяющие провода,

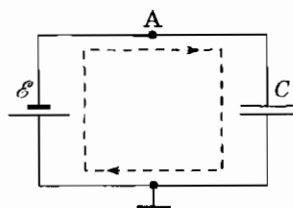


Рис. 93. Схема, содержащая конденсатор, источник ЭДС и заземление

обкладки конденсатора и пространство между обкладками (на рис. 93 траектория перемещения пробного заряда изображена пунктирной линией). В статических условиях работа, которая совершается над пробным зарядом при перемещении по замкнутому контуру, должна быть равна нулю. Работа будет совершаться только на двух участках выбранного контура: внутри источника ЭДС, где она равна $q\mathcal{E}$, и между обкладками, где она равна $-q\Delta\varphi$ (где $\Delta\varphi$ — разность потенциалов между верхней и нижней обкладками конденсатора). Приравнявая к нулю сумму этих работ, мы и получаем $\Delta\varphi = \mathcal{E}$. Далее мы будем считать, что потенциал

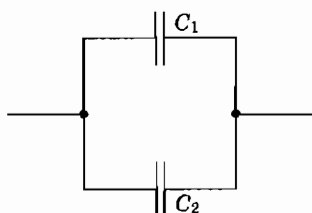


Рис. 94. Параллельное соединение конденсаторов

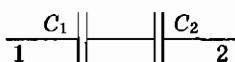


Рис. 95. Последовательное соединение конденсаторов

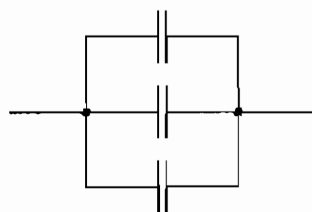


Рис. 96. Параллельное соединение нескольких конденсаторов

земли принят за нуль. Тогда потенциал точки A на рис. 93 является положительным.

При сборке той или иной цепи конденсаторы часто соединяют в блоки, которые можно рассматривать как сложные конденсаторы. Простейшими примерами таких блоков являются соединения двух конденсаторов, которые могут быть *параллельными* и *последовательными*. При первом способе обкладки конденсаторов соединяются попарно (рис. 94), а соединяющие их провода используются для включения блока в цепь. При втором способе соединяются две обкладки конденсаторов (рис. 95), а две другие подключаются к цепи.

Найдем емкость блока, состоящего из двух параллельно соединенных конденсаторов (рис. 94), имеющих емкости C_1 и C_2 . Заметим, что разности потенциалов на обоих параллельно соединенных конденсаторах одинаковы. Поэтому заряды на

их обкладках равны $q_1 = C_1 \Delta \varphi$ и $q_2 = C_2 \Delta \varphi$. Заряд же блока конденсаторов равен $q = q_1 + q_2$. Таким образом, емкость параллельно соединенных конденсаторов равна

$$C = q / \Delta \varphi = C_1 + C_2.$$

Можно рассмотреть и блок, состоящий из произвольного числа параллельно соединенных конденсаторов (рис. 96). Аналогичным образом мы находим емкость этого блока

$$C = C_1 + C_2 + C_3 \dots,$$

где $C_1, C_2, C_3, \dots$ — емкости составляющих блок конденсаторов. Таким образом,

Емкость системы параллельно соединенных конденсаторов равна сумме их емкостей.

Задача 25.1. Получите этот результат из энергетических соображений.

Найдем емкость блока, состоящего из двух последовательно соединенных конденсаторов (рис. 95), имеющих емкости C_1 и C_2 . Заряды на обкладках конденсатора появляются за счет их подсоединения к источнику ЭДС, а до этого они равны нулю. Поэтому суммарный заряд на обкладках конденсаторов, соединенных проводом, равен нулю, потому что эти обкладки вместе с проводом составляют замкнутую систему (единый проводник), на которую никакой дополнительный заряд при подсоединении источника ЭДС не попадает. Другими словами, абсолютные значения зарядов на обкладках обоих конденсаторов одинаковы. Обозначая эту величину через q , мы находим разность потенциалов на блоке как сумму разностей потенциалов на конденсаторах: $\Delta \varphi = q / C_1 + q / C_2$. Таким образом, емкость последовательно соединенных конденсаторов равна

$$C = q / \Delta \varphi = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}.$$

Это соотношение можно переписать в виде $1/C = 1/C_1 + 1/C_2$, которое легко обобщается на блок, состоящий из произ-

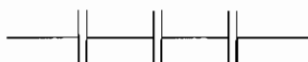


Рис. 97. Последовательное соединение нескольких конденсаторов

вольного числа последовательно соединенных конденсаторов (рис. 97)

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots,$$

где $C_1, C_2, C_3, \dots$ — емкости составляющих блок конденсаторов. Таким образом,

обратная емкость системы последовательно соединенных конденсаторов равна сумме их обратных емкостей.

Задача 25.2. Получите этот результат из энергетических соображений.

Параллельное соединение используется обычно, чтобы набрать из имеющихся в наличии конденсаторов сложный конденсатор необходимой емкости. Последовательное же соединение позволяет предотвратить возможность электрического пробоя, так как разность потенциалов на каждом из последовательно соединенных конденсаторов будет меньше, чем на блоке. Кроме того, последовательное соединение конденсаторов является одной из конструктивных реализаций делителя напряжения, так как потенциал провода, соединяющего конденсаторы, лежит между потенциалами двух подходящих к блоку проводов, являясь их определенной линейной комбинацией.

Задача 25.3. Найдите потенциал провода, находящегося между двумя последовательно соединенными конденсаторами, если потенциалы на подводящих проводах равны φ_1 и φ_2 , а емкости конденсаторов равны C_1 и C_2 (см. рис. 95, где потенциалы φ_1 и φ_2 относятся к точкам 1 и 2).

Рассмотрим теперь так называемую мостовую схему, приведенную на рис. 98. Такая схема часто применяется для измерения емкости. Скажем, требуется определить емкость четвертого конденсатора. Тогда можно использовать мостовую схему, где емкости первого и второго конденсатора предполагаются известными, а третий конденсатор является переменным. Подбирая его емкость C_3 такой, чтобы разность потенциалов на пятом конденсаторе стала равной нулю, мы приходим к соотношению

$$C_1 \cdot C_4 = C_2 \cdot C_3,$$

при помощи которого и можно определить C_4 .

Обоснуем приведенное соотношение. Поскольку разность потенциалов на пятом конденсаторе равна нулю, равны разности потенциалов на первом и втором конденсаторах: $\Delta\varphi_1 = \Delta\varphi_2$, а также на третьем и четвертом конденсаторах: $\Delta\varphi_3 = \Delta\varphi_4$. Далее, заряды на обкладках пятого конденсатора равны нулю, то есть суммарный заряд на соединенных между собой обкладках первого и третьего конденсатора равен нулю. Таким образом, заряды на первом и третьем конденсаторах совпадают по абсолютной величине. Обозначая ее через Q , мы находим $\Delta\varphi_1 = Q/C_1$, $\Delta\varphi_3 = Q/C_3$. Аналогичным образом совпадают заряды второго и четвертого конденсаторов, которые мы обозначим q . Тогда $\Delta\varphi_2 = q/C_2$, $\Delta\varphi_4 = q/C_4$. Подставляя эти выражения для разностей потенциалов в приведенные выше равенства и исключая из получившихся соотношений заряды, мы и приходим к искомому соотношению для емкостей.

Если некоторая состоящая из конденсаторов электрическая цепь может быть посредством последовательного «укрупнения» (то есть замены блоков параллельно и по-

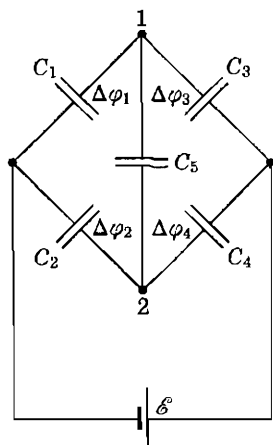


Рис. 98. Мостовая схема

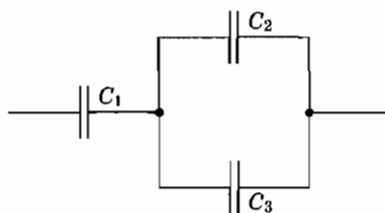


Рис. 99. Схема с последовательными и параллельными соединениями конденсаторов

следовательно соединенных конденсаторов на единые эквивалентные конденсаторы) сведена к единому конденсатору, то приведенных выше соотношений достаточно для того, чтобы найти заряды всех конденсаторов и разности потенциалов на них. Например, достаточно просто анализируется схема, приведенная на рис. 99, которая в два шага сводится к единому конденсатору.

Задача 25.4. Найдите заряды всех конденсаторов и разности потенциалов на них для схемы, приведенной на рис. 99, если разность потенциалов на ее концах равна $\Delta\varphi$.

Однако не всякая схема допускает процедуру последовательного «укрупнения». Примером может служить уже рассмотренная нами мостовая схема (рис. 98), когда разность потенциалов между обкладками пятого конденсатора не равна нулю. В этом случае заряды и разности потенциалов следует определять из системы линейных уравнений, которые являются выражением двух типов соотношений, которые мы уже фактически использовали выше. Во-первых, сумма разностей потенциалов по любому замкнутому контуру, проходящему через конденсаторы и соединяющие их провода, должна быть равна нулю, а сумма по контуру, проходящему также и через источники ЭДС, равна сумме их ЭДС. Обоснование этого соотношения подобно тому, которое было приведено выше для простей-

шей схемы, изображенной на рис. 93. Во-вторых, должна быть равна нулю сумма зарядов на обкладках конденсаторов, соединенных проводами (которые не имеют выхода к источнику ЭДС). Пример такого соотношения также был рассмотрен нами выше при анализе последовательно соединенных конденсаторов. Следует только иметь в виду, что как заряды, так и разности потенциалов и ЭДС надо брать с учетом их знаков. Этих соотношений (для разностей потенциалов и зарядов) достаточно для того, чтобы проанализировать произвольную электростатическую цепь.

Задача 25.5. Найдите заряд пятого конденсатора и разность потенциалов на нем для мостовой схемы, приведенной на рис. 98. Величины емкостей конденсаторов предполагаются известными.

Заключение

В представленном курсе мы рассмотрели основные свойства электрического взаимодействия, которое лежит в основе огромного количества явлений. Знакомство с электростатикой позволяет не только углубить понимание окружающей нас действительности, но и понять принцип работы многих электрических приборов, а также логику, приведшую к их созданию.

Изучение электрического взаимодействия привело нас к понятию электрического поля и, более широко, к понятию физического поля, которое необходимо для описания состояния непрерывной среды. На примере электростатического поля мы установили многие закономерности, которые справедливы для любых статических полей. Поэтому на изложенный материал можно опираться при рассмотрении свойств статических магнитных полей, которое является следующим необходимым звеном в раскрытии картины мира.

Дальнейшим шагом является изучение динамики физических полей, в которой наиболее ярко проявляются их свойства. Например, изменяющееся электрическое поле порождает поле магнитное, и наоборот: изменяющееся магнитное поле порождает поле электрическое. Таким образом, при рассмотрении динамических явлений мы должны иметь дело с единым электромагнитным полем. Тем не менее способ описания поля и интуиция, выработанные в электростатике, помогут нам и в этом случае.

Ответы на вопросы

Вопрос 4.1. Нет, это означает только то, что тело, которое является источником поля, находится на конечном расстоянии от исследуемого тела, что ограничивает точность, с которой измеряется величина заряда. Чтобы улучшить эту точность, надо источник поля поместить на большем расстоянии от исследуемого тела.

Вопрос 4.2. Да, конечно, если суммарный заряд продуктов реакции равен нулю. Например, нейтрон (заряд которого равен нулю) распадается на нейтрино, протон и электрон, последние две частицы заряжены. Их заряды равны по абсолютной величине и противоположны по знаку.

Вопрос 5.1. Поскольку сила, действующая на тело в однородном поле, не зависит от времени, не будет зависеть от времени и его ускорение. Это значит, что оно будет двигаться по параболе.

Вопрос 6.1. Нет, не обязательно. Например, нет точки с нулевой напряженностью в поле двух точечных разноименных зарядов, одинаковых по абсолютной величине. Такая точка могла бы лежать только на прямой, проходящей через заряды, где ее отсутствие легко проверяется непосредственно.

Вопрос 6.2. Нет, это невозможно. Подобное разбиение означало бы, что равен нулю суммарный заряд, так как он равен нулю для каждой пары.

Вопрос 6.3. В любой точке прямой, проходящей через центр квадрата и перпендикулярной плоскости, в которой лежит квадрат, напряженность поля положительных зарядов равна по абсолютной величине напряженности поля отрицательных зарядов, направлены же эти векторы вдоль той же прямой, но в противоположные стороны. Отсюда и следует утверждение о нулевом значении напряженности.

Вопрос 7.1. Для доказательства рассмотрим разбиение поверхности на элементы, которые «нарезает» из нее система взаимно пересекающихся плоскостей, параллельных

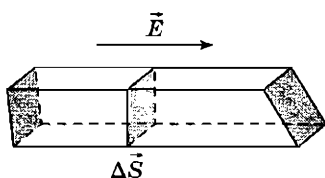


Рис. 100. Один из «ломтиков». К вопросу 7.1

элементы равны по величине (они равны $E \cdot \Delta S$, где ΔS — площадь сечения ломтика плоскостью, перпендикулярной $\vec{E}$), но противоположны по знаку. Поскольку поверхность разбивается на пары элементов, поток через каждую из которых равен нулю, равен нулю и поток через поверхность в целом.

Вопрос 7.2. В этом случае потоки через соседние элементы поверхности, высекаемые конусом, равны по величине, но противоположны по знаку, то есть они взаимно сокращаются. Например, на рис. 24 взаимно сокращаются потоки, проходящие через элементы поверхности $\vec{S}_2$ и $\vec{S}_3$. Поэтому даже при наличии нескольких пересечений конуса

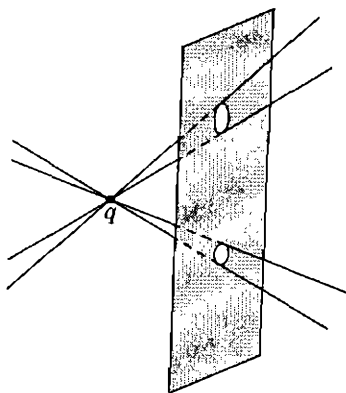


Рис. 101. Конусы, пересекающие плоскую поверхность. К вопросу 7.3

с поверхностью суммарный поток $\vec{E}$ через эти элементы определяется только одним (скажем, последним) элементом ($\vec{S}_1$ на рис. 24), и мы приходим к тому же результату, что и для конуса, который один раз пересекает поверхность.

Вопрос 7.3. Снова воспользуемся формулой $\Delta\Phi = \frac{q\Delta\Omega}{4\pi\epsilon_0}$. Суммируя по конусам, проходящим через плоскую поверхность (рис. 101), мы находим суммарный телесный угол 2π (половину полного телесного угла). Таким образом, поток вектора напря-

женности $\vec{E}$ через эту поверхность равен $\Phi = \frac{q}{2\epsilon_0}$. Если поверхность замкнута, то суммарный телесный угол равен 4π , и поток равен $\Phi = \frac{q}{\epsilon_0}$.

женности поля точечного заряда через плоскую поверхность равен $\Phi = \frac{q}{2\varepsilon_0}$.

Вопрос 7.4. Этот поток равен нулю, поскольку равен нулю заряд диполя.

Вопрос 7.5. Найдем поток вектора напряженности через поверхность куба, ребра которого параллельны осям координат, а по длине равны l . Поток напряженности через грани, параллельные плоскости $(x; y)$, равен нулю. Поток напряженности через грани, параллельные плоскости $(x; z)$, равен $-\beta l^3$. Поток напряженности через грани, параллельные плоскости $(y; z)$, равен βl^3 . Таким образом, поток напряженности заданного поля через поверхность произвольного куба равен нулю, и, следовательно, равен нулю заключенный внутри этого куба заряд. Отсюда и следует, что в рассматриваемой области отсутствуют назлектризованные тела.

Вопрос 8.1. Нет, не могут. Если бы в какой-то точке силовые линии пересекались, то в этой точке вектор $\vec{E}$ имел бы два разных направления, чего быть не может. Оговоримся здесь, что сказанное не относится к особым точкам, где напряженность обращается в нуль.

Вопрос 8.2. Нет, не будет. Вектором, касательным к траектории движения точечного тела в любой ее точке, является скорость тела $\vec{v}$, в то время как при движении точечного заряда, скажем, в вакууме напряженность поля определяет его ускорение $\vec{a} = q\vec{E}/m$. В то же время при движении точечного заряда, например, в вязкой среде, когда приложенная к нему электрическая сила $q\vec{E}$ компенсируется в основном силой сопротивления $-k\vec{v}$, траектория точечного заряда будет близка к силовой линии.

Вопрос 8.3. В точке A , поскольку вблизи нее расстояние между соседними силовыми линиями меньше.

Вопрос 8.4. Нет, не могут. Если бы силовые линии касались в некоторой точке M , то расстояние между ними при приближении к этой точке стремилось бы к нулю. Значит, сечение силовой трубки в точке M стремилось бы к нулю,

а напряженность поля обращалась бы в бесконечность, чего быть не может.

Вопрос 8.5. При равномерном распределении силовых линий их плотность на произвольной сфере с центром в точке расположения точечного заряда будет одной и той же в любом направлении. То же справедливо и для напряженности. Это и обеспечивает пропорциональность числа силовых линий и потока для разных силовых трубок.

Вопрос 9.1. На первой картинке касательные пленке компоненты напряженности не совпадают, так как направлены в противоположные стороны. На второй картинке касательные пленке компоненты напряженности не совпадают, так как густота силовых линий, а следовательно, и величина напряженности, различны с разных сторон пленки, а углы между направлением вектора напряженности и пленкой одинаковы. Третья же картинка удовлетворяет всем необходимым критериям и, следовательно, может быть реализована: такая картинка соответствует суперпозиции поля бесконечной однородно заряженной плоской пленки и однородного поля, полностью компенсирующего поле пленки с одной стороны от нее.

Вопрос 10.1. Внешним по отношению к диполю является поле точечного заряда. Будем считать, что его заряд положителен. Тогда напряженность его поля $\vec{E}$ вблизи диполя направлена вдоль радиус-вектора $\vec{r}$, идущего из точки расположения точечного заряда в точку расположения диполя, и убывает по абсолютной величине вдоль того же направления.

Нас интересует компонента силы F_r , действующей на диполь вдоль $\vec{r}$, которая определяется скоростью изменения E вдоль дипольного момента диполя $\vec{d}$. Знак F_r зависит от угла θ между $\vec{r}$ и $\vec{d}$ (рис. 43). Если этот угол меньше $\pi/2$ (то есть проекция $\vec{d}$ на направление радиус-вектора $\vec{r}$ положительна), то E убывает вдоль $\vec{d}$ и F_r отрицательна, что соответствует притяжению диполя к точечному заряду. Если угол θ больше $\pi/2$ (то есть проекция $\vec{d}$ на направление радиус-вектора $\vec{r}$ отрицательна), то E возрастает вдоль $\vec{d}$

и F_r положительна, что соответствует отталкиванию диполя от точечного заряда. Для отрицательного точечного заряда знак силы взаимодействия будет отличаться знаком от силы, действующей на диполь со стороны поля точечного заряда. Поэтому при $\theta < \pi/2$ будет наблюдаться притяжение, а при $\theta > \pi/2$ — отталкивание.

Вопрос 10.2. Напряженность поля диполя обратно пропорциональна r^3 , то есть скорость ее изменения обратно пропорциональна r^4 . Соответственно, будет обратно пропорциональной r^4 и сила взаимодействия между диполями.

Вопрос 10.3. Предположим, что дипольный момент одного из диполей «смотрит» в сторону другого. Напряженность его поля вблизи второго диполя совпадает по направлению с радиус-вектором $\vec{r}$ с началом в точке, где находится первый диполь, и с концом в точке наблюдения, причем абсолютная величина напряженности этого поля уменьшается с ростом r . В этой ситуации знак скалярного произведения дипольного момента второго диполя $\vec{d}$ и действующей на него силы $\vec{F}$ (который определяется тем, возрастает или убывает $\vec{d} \cdot \vec{E}$ вдоль направления $\vec{d}$) будет отрицательным вне зависимости от направления $\vec{d}$. Другими словами, второй диполь будет притягиваться к первому, если его дипольный момент $\vec{d}$ совпадает по направлению с $\vec{r}$, и отталкиваться в обратном случае.

Аналогичный анализ можно проделать и для случая, когда диполи «смотрят» друг от друга. В результате мы приходим к выводу, что диполи, дипольные моменты которых направлены в одну сторону, притягиваются, а диполи с противоположно направленными дипольными моментами отталкиваются. Во избежание недоразумений подчеркнем, что эти выводы справедливы только для случая, когда дипольные моменты диполей коллинеарны соединяющей эти диполи прямой.

Вопрос 10.4. Он будет стремиться повернуться так, чтобы дипольный момент $\vec{d}$ был направлен вдоль радиус-вектора $\vec{r}$, идущего из точки расположения точечного заряда в точку расположения диполя (рис. 43).

Вопрос 11.1. Нет, не может. Для доказательства рассмотрим замкнутую траекторию, состоящую из одного витка

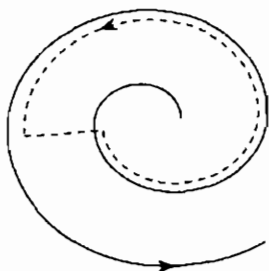


Рис. 102. Траектория перемещения пробного заряда.
К вопросу 11.1

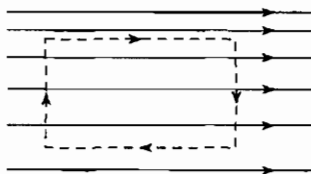


Рис. 103. Траектория перемещения пробного заряда.
К вопросу 11.2

спирали и соединяющего концы этого витка отрезка, перпендикулярного силовым линиям (рис. 102). Переместим вдоль этой траектории положительный пробный заряд. При перемещении вдоль силовой линии работа поля будет положительной, при перемещении же вдоль отрезка, перпендикулярного силовым линиям, работа будет равна нулю. Таким образом, мы приходим к противоречию, так как работа поля при перемещении пробного тела по замкнутой траектории оказалась не равной нулю.

Вопрос 11.2. Нет, не может. Для доказательства рассмотрим замкнутую траекторию в виде прямоугольника, стороны которого параллельны и перпендикулярны силовым линиям (см. рис. 103). Переместим вдоль этой траектории пробный заряд. Работа поля на от-

резках, перпендикулярных силовым линиям, равна нулю. Работы же поля на остальных двух отрезках различны по абсолютной величине, поскольку длины этих отрезков одинаковы, а абсолютные значения напряженности различны, так как различна плотность силовых линий вблизи этих отрезков. Таким образом мы приходим к противоречию, так как работа поля при перемещении пробного тела по замкнутой траектории оказывается не равной нулю.

Вопрос 11.3. Прежде всего заметим, что вектор напряженности представленного поля во всех точках радиален, но абсолютные величины напряженности на одинаковых расстояниях от тела, но для разных направлений, отлича-

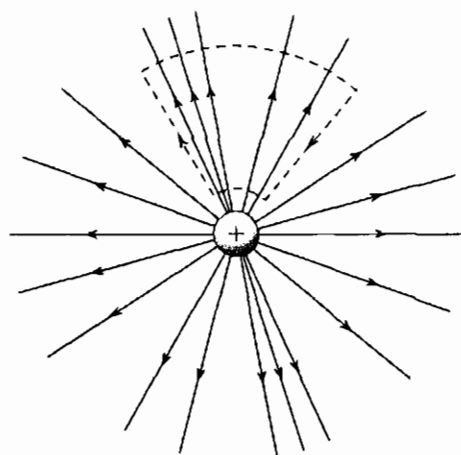


Рис. 104. Траектория перемещения пробного заряда. К вопросу 11.3

ются, так как силовые линии неравномерно распределены по разным направлениям.

Рассмотрим замкнутую траекторию, состоящую из двух радиальных участков, соединенных дугами окружностей (рис. 104). Переместим вдоль этой траектории пробный заряд. Работа поля на дугах будет равна нулю, так как на этих участках направление перемещения перпендикулярно вектору напряженности. На радиальных же участках направление перемещения параллельно или антипараллельно напряженности. Так как абсолютные величины напряженности на этих участках не совпадают, суммарная работа поля по замкнутому контуру будет отлична от нуля, что и доказывает неконсервативность изображенного поля.

Вопрос 11.4. Да, справедливо и обратное утверждение: если на некоторой поверхности силовые линии испытывают излом, то в этом месте находится наэлектризованная пленка. Докажем это утверждение.

Выберем замкнутую траекторию, состоящую из двух параллельных отрезков, идущих вдоль поверхности, на которой силовые линии испытывают излом, по разные стороны

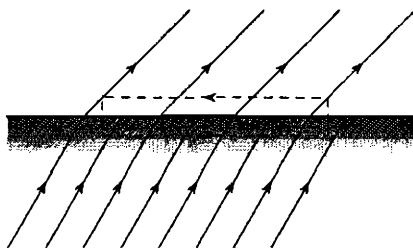


Рис. 105. Траектория пробного заряда вблизи поверхности, на которой силовые линии испытывают излом. К вопросу 11.4

от этой поверхности и двух отрезков, замыкающих траекторию (рис. 105). Переместим по этой замкнутой траектории пробный заряд. Работой поля на коротких отрезках можно пренебречь, а работа поля на длинных определяется касательной компонентой напряженности (то есть компонентой, направленной вдоль поверхности). Поэтому условие равенства нулю работы поля по перемещению пробного заряда приводит нас к выводу, что касательные компоненты напряженности по разные стороны от поверхности излома равны между собой. Так как силовые линии испытывают излом, на поверхности меняется направление вектора напряженности. Поэтому компоненты напряженности, перпендикулярные к поверхности излома, не равны между собой. Применяя теперь теорему Гаусса к поверхности диска, содержащему внутри себя часть этой поверхности, мы приходим к выводу, что на ней имеется ненулевая плотность заряда, что и соответствует заряженной пленке. Заметим, что доказанное означает невозможность изломов силовых линий в области, свободной от зарядов.

Вопрос 11.5. Потому что одноименные заряды отталкиваются, а (всегда одноименные) массы притягиваются.

Вопрос 11.6. Таких пар в системе $n(n-1)/2$. Этот результат получается, если учесть, что каждый из n зарядов взаимодействует с $n-1$ зарядами. Перемножая эти числа,

мы получаем удвоенное число пар, так как каждая пара при таком способе подсчета учитывается дважды.

Вопрос 15.1. Как и раньше, напряженность поля внутри шара будет равна нулю. Что же касается напряженности поля вне шара, то к полю диполя, найденному в тексте параграфа, надо добавить поле точечного заряда с величиной, равной заряду шара. Суперпозиция этих полей удовлетворяет, очевидно, всем необходимым условиям.

Вопрос 16.1. Относительная диэлектрическая проницаемость убывает слева направо, она максимальна для левого слоя.

Вопрос 16.2. Величина ε_r равна отношению радиальных компонент напряженности снаружи и внутри диэлектрического шара. На рис. 66 это отношение несколько больше двух.

Вопрос 17.1. Эта плотность равна нулю, так как на внутренней границе отсутствует причина его появления — напряженность электрического поля. Это подтверждает решение задачи 17.3.

Вопрос 18.1. При смещении проводника поле «съедается» в области, куда он движется. Если проводник смещается на $\Delta \vec{l}$, то элемент его поверхности $\vec{S}$ «заметает» объем $\vec{S} \cdot \Delta \vec{l}$, то есть энергия поля уменьшается на $w \vec{S} \cdot \Delta \vec{l}$. Это уменьшение равно работе силы $P \vec{S}$, действующей на элемент поверхности (P — сила на единицу поверхности), то есть $P \vec{S} \cdot \Delta \vec{l}$. Отсюда следует совпадение P и w .

Вопрос 19.1. Чтобы установить тождественность единиц измерения, их следует выразить через основные единицы измерения. Обе приведенные единицы измерения напряженности сводятся к $\frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2 \cdot \text{Кл}}$.

Вопрос 19.2. Это следует из уже знакомого нам мысленного разбиения произвольного незаряженного, но наэлектризованного тела на пары точечных зарядов (с противоположными зарядами) и из того, что дипольный момент тела равен сумме дипольных моментов этих пар.

Вопрос 20.1. Это плоскость, относительно которой точки расположения зарядов симметричны. Поскольку расстоя-

ния от зарядов до любой точки этой плоскости одинаковы, потенциалы полей точечных зарядов на плоскости равны по величине и противоположны по знаку, то есть в сумме дают нуль.

Вопрос 20.2. Поскольку каждая из них является плоскостью симметрии для двух пар точечных зарядов, равных по величине и противоположных по знаку, то значение потенциала на этих плоскостях равно нулю, то есть они являются эквипотенциальными.

Вопрос 20.3. Сначала о сечении плоскостью, перпендикулярной цилиндру. Внутри цилиндра картина будет такой же, как и внутри шара, а вне цилиндра расстояния между соседними эквипотенциальными поверхностями будут увеличиваться медленнее, чем для шара. Теперь о сечении плоскостью, проходящей через ось цилиндра. Внутри цилиндра картина будет такой же, как и внутри слоя, а вне цилиндра расстояния между соседними эквипотенциальными поверхностями будут увеличиваться, в то время как для слоя они остаются постоянными.

Вопрос 21.1. При угле, равном $\frac{\pi}{n}$, где n — целое число. Тогда поле между пленками будет определяться суперпозицией полей $2n$ точечных зарядов $\pm q$ (включающих один реальный и $2n - 1$ фиктивных), расположенных на окружности, центр которой лежит на пересечении пленок. Знаки упомянутых $2n$ зарядов чередуются при обходе вдоль этой окружности.

Вопрос 24.1. Нужно действовать стандартным образом, то есть проверить условие консервативности, выполнение теоремы Гаусса и условия перпендикулярности напряженности поверхности проводника. Все эти условия, очевидно, выполняются для поля, описанного в тексте.

Вопрос 24.2. Вблизи краев пластин силовые линии «выпучиваются» наружу, а эквипотенциальные поверхности соответственно отклоняются от плоскости симметрии конденсатора (рис. 106). Поэтому вблизи обкладок плотность эквипотенциальных поверхностей, а с ними и напряженность поля, будет больше у их краев. Вспоминая теперь

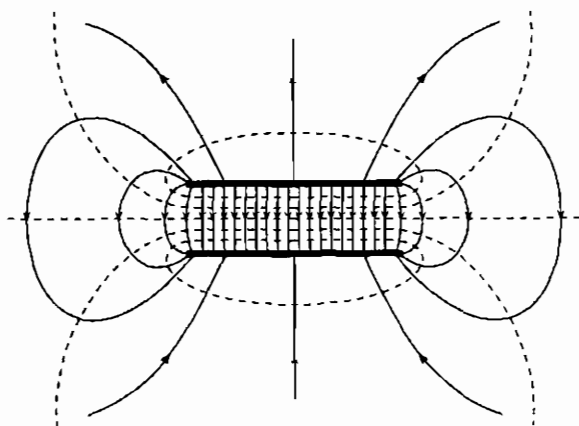


Рис. 106. Эквипотенциальные поверхности поля плоского конденсатора.
К вопросу 24.2

соотношение $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$, мы заключаем, что плотность заряда на краях конденсатора будет несколько больше, чем в середине. Этот вывод находится в соответствии с общим свойством: при приближении к острию плотность поверхностного заряда проводника возрастает.

Решения задач

Задача 3.1. Время обращения T Земли вокруг Солнца равно 1 году, то есть $T = 3,16 \cdot 10^7$ с. Отсюда мы находим скорость движения Земли $v = 2\pi \frac{R}{T} \approx 3 \cdot 10^4$ м/с. Таким образом, $\frac{v}{c} \approx 10^{-4}$.

Задача 4.1. Заряд одного моля электронов $Q = q_e \cdot N_A$, где $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ моль $^{-1}$ — число Авогадро. Перемножая эти два числа, находим $|Q| \approx 10^5$ Кл/моль.

Задача 5.1. В соответствии с законом всемирного тяготения сила взаимодействия электронов равна $\frac{Gm_e^2}{r^2}$, где r — расстояние между электронами, а G — гравитационная постоянная: $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ м ^{3} кг $^{-1}$ с $^{-2}$. Отношение силы электрического взаимодействия двух электронов к силе их гравитационного взаимодействия не зависит от расстояния r между ними и равно $k \frac{q_e^2}{Gm_e^2}$. Подставляя сюда численные значения всех величин, мы находим, что это отношение равно $4,2 \cdot 10^{42}$!

Задача 5.2. Предположим, что два электрона расположены на расстоянии 1 см друг от друга. Силу взаимодействия между ними можно найти, используя систему СИ: $F = k \cdot q_e^2 \cdot 10^4 \text{ м}^{-2} = 9 \cdot 10^{18} \cdot (1,6 \cdot 10^{-19})^2$ дин. Это число равно квадрату заряда электрона, выраженного в единицах СГСЕ, поскольку электроны находятся на расстоянии 1 см, а сила их взаимодействия выражена в динах. Извлекая квадратный корень из найденного числа, мы и находим величину заряда электрона в системе единиц СГСЕ.

Задача 5.3. Исходя из определения и закона всемирного тяготения находим $\vec{g} = -G \frac{M\vec{r}}{r^3}$.

Задача 5.4. В системе СИ $E = -\frac{q_e}{4\pi\epsilon_0 r^2} = 1,44 \cdot 10^{11}$ Н/Кл. В системе СГСЕ $E = -\frac{q_e}{r^2} = 4,8 \cdot 10^6$ ед. СГСЕ.

Задача 6.1. Расположение зарядов относительно осей показано на рис. 14. Сначала найдем напряженность на

оси z . Предположим, что мы ищем напряженность в точке с координатой $|z| > a$. Расстояния от этой точки до точечных зарядов равны $z \pm a$ и напряженности их полей совпадают по направлению. Поэтому напряженность суперпозиции полей точечных зарядов равна

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0(z+a)^2} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0(z-a)^2},$$

то есть

$$E = \frac{q(z^2 + a^2)}{2\pi\epsilon_0(z^2 - a^2)^2}.$$

Если $|z| < a$, то напряженности полей точечных зарядов противоположны по направлению и напряженность равна

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0(z+a)^2} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0(z-a)^2},$$

то есть

$$E = -\frac{qaz}{\pi\epsilon_0(a^2 - z^2)^2}.$$

При вычислении напряженности поля на оси x мы должны иметь в виду, что напряженности полей точечных зарядов хотя и совпадают по абсолютной величине, но неколлинеарны. Поэтому в точке с координатой x напряженность равна $E = 2E_1 \cos \theta$, где $E_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0(x^2 + a^2)}$ — абсолютная величина напряженности поля одного из зарядов, а $\cos \theta = \frac{x}{(x^2 + a^2)^{1/2}}$. Собирая все вместе, получаем ответ

$$E = \frac{qx}{2\pi\epsilon_0(x^2 + a^2)^{3/2}}.$$

Таким образом, при возрастании x от нуля до бесконечности напряженность возрастает от нуля до некоторого максимального значения, а затем убывает.

Задача 6.2. На больших расстояниях $|z| \gg a$ или $|x| \gg a$. Пренебрегая поэтому a в приведенных в решении задачи 6.1 формулах, мы находим $E = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 z^2}$ или $E = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 x^2}$, что совпадает с выражением для напряженности поля точечного заряда $2q$. Несложно также проверить, что на осях x и z

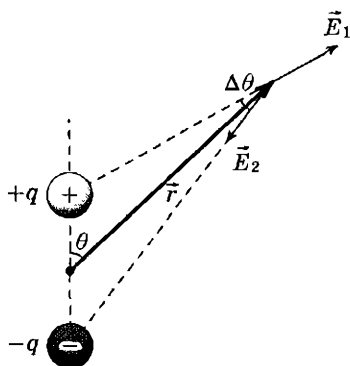


Рис. 107. Сложение векторов напряженности зарядов диполя. К задаче 6.3

направление напряженности совпадает с направлением поля точечного заряда $2q$, помещенного в начало координат: напряженность направлена от начала координат для $q > 0$ и к началу координат для $q < 0$.

Задача 6.3. Искомая напряженность поля $\vec{E}$ равна сумме напряженностей $\vec{E}_1 + \vec{E}_2$ точечных зарядов диполя. Нам надо вычислить эту сумму в условиях, когда $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ почти компенсируют друг друга и почти коллинеарны радиус-вектору $\vec{r}$. В этой ситуации проекция $\vec{E}$ на радиус-вектор $\vec{r}$ равна

$$E_r \approx |\vec{E}_1| - |\vec{E}_2| = \frac{q}{4\pi\epsilon_0(r^2 - rl \cos \theta)} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0(r^2 + rl \cos \theta)} \approx \frac{2d \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}.$$

Проекция же на направление, перпендикулярное радиус-вектору $\vec{r}$, определяется углом $\Delta\theta$ между $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$:

$$|E_\theta| \approx |\vec{E}_1| \Delta\theta \approx \frac{d}{4\pi\epsilon_0 r^3} |\sin \theta|.$$

Вычисления поясняет рис. 107.:

Задача 6.4. Разделяя мысленно заряд $-2q$ пополам, мы приходим к разбиению системы на две пары диполей с точечными зарядами $\pm q$ и расстоянием l между ними. Дипольный момент каждого диполя равен ql по абсолютной

величине, а угол между ними равен $\frac{\pi}{3}$, так как заряды расположены в вершинах правильного треугольника. Складывая векторно дипольные моменты этих диполей, мы находим суммарный дипольный момент, направленный вдоль медианы треугольника, идущей от заряда $-2q$. Абсолютная величина дипольного момента равна $\sqrt{3}ql$.

Задача 6.5. Пусть r — расстояние от точки диагонали, где мы ищем напряженность, до центра квадрата, в вершинах которого расположены заряды. Тогда абсолютные значения напряженностей полей точечных зарядов равны

$$E_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0(r-l)^2}, \quad E_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0(r+l)^2}, \quad E_3 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0(r^2+l^2)},$$

где l — размер половины диагонали квадрата (см. рис. 19). Суммарная же напряженность в рассматриваемой точке направлена вдоль диагонали, а ее абсолютная величина равна

$$E = E_1 + E_2 - 2E_3 \cos \theta = \frac{2q(r^2+l^2)}{4\pi\epsilon_0(r^2-l^2)^2} - \frac{2qr}{4\pi\epsilon_0(r^2+l^2)^{3/2}}.$$

Главные (не зависящие от l) члены в этой разности взаимно сокращаются. Первый отличный от нуля член разложения напряженности по $\frac{l}{r}$ равен $E = \frac{9ql^2}{4\pi\epsilon_0 r^4}$, он действительно ведет себя обратно пропорционально четвертой степени расстояния.

Задача 8.1. Для поля точечного заряда тонкой силовой трубкой является конус малого раствора с вершиной в точке расположения заряда. Площади поперечных сечений ΔS такого конуса пропорциональны квадрату расстояния r до заряда. Поэтому плотность силовых линий $\frac{\Delta N}{\Delta S}$ обратно пропорциональна квадрату расстояния r . Мы получили тот же закон пропорциональности, что и для напряженности, в соответствии со сформулированным утверждением.

Задача 9.1. Длина нити равна $2\pi R$, поэтому ее заряд равен $2\pi R\lambda$.

Задача 9.2. Площадь сферы равна $4\pi R^2$, поэтому ее заряд равен $4\pi R^2\sigma$.

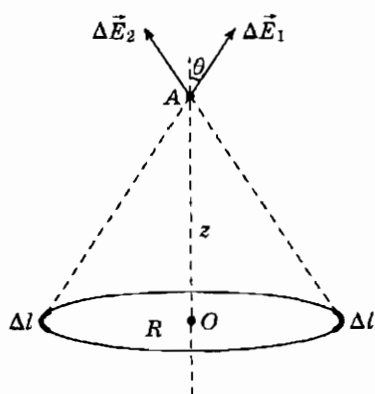


Рис. 108. Пара кусочков кольца. К задаче 9.3

Задача 9.3. Представим поле кольца как суперпозицию полей кусочков одинаковой длины Δl . Вычислим значение напряженности поля кольца на его оси, то есть на прямой, проходящей через центр кольца O перпендикулярно его плоскости. Выберем на оси точку A , находящуюся от точки O на расстоянии z (рис. 108). Вектор напряженности поля каждого кусочка кольца в точке A по модулю будет равен

$$\Delta E = \frac{\Delta q}{4\pi\epsilon_0(R^2 + z^2)},$$

а по направлению для полей разных кусочков эти векторы различны. Чтобы просуммировать их, разобьем все кусочки на пары, лежащие на концах какого-либо диаметра кольца (рис. 108). Компоненты векторов напряженности полей этих кусочков, параллельные плоскости кольца, равны по величине и противоположны по направлению, то есть в сумме дают нуль. Поэтому напряженность поля каждой пары кусочков направлена вдоль оси кольца, а напряженность поля кольца будет равна сумме проекций напряженности полей всех кусочков на ось кольца. Для каждого кусочка эта проекция равна:

$$\Delta E_z = \Delta E \cdot \cos \theta = \frac{\lambda \cdot \Delta l \cdot z}{4\pi\epsilon_0(R^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Суммирование значений проекций сводится в данном случае к замене длины кусочка Δl на длину кольца $2\pi R$, после чего получается окончательный результат:

$$E = \frac{\lambda \cdot R \cdot z}{2\epsilon_0(R^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Мы видим, что $E=0$ при $z=0$. Если z гораздо больше R , то величиной R в знаменателе этого выражения можно пренебречь и оно переходит, как и следует, в выражение для напряженности поля точечного заряда, величина которого равна заряду кольца $2\pi R\lambda$ и расстояние от которого до точки наблюдения равно z .

Задача 9.4. Поле двух нитей является суперпозицией их полей. Нам надо найти сумму их напряженностей $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ в условиях, когда $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ почти компенсируют друг друга и почти коллинеарны радиус-вектору $\vec{r}$. В этой ситуации проекция $\vec{E}$ на радиус-вектор $\vec{r}$ равна

$$E_r \approx |\vec{E}_1| - |\vec{E}_2| = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0[r - (l \cos \theta)/2]} - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0[r + (l \cos \theta)/2]} \approx \frac{\lambda l \cos \theta}{2\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Проекция же на направление, перпендикулярное радиус-вектору $\vec{r}$, определяется углом $\Delta\theta$ между $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$:

$$|E_\theta| \approx |\vec{E}_1| \Delta\theta \approx \frac{\lambda l}{2\pi\epsilon_0 r^2} |\sin \theta|.$$

Вычисления поясняет тот же рис. 107, который теперь имеет смысл построения в плоскости, перпендикулярной нитям.

Задача 9.5. График зависимости приведен на рис. 109.

Задача 9.6. Вектор напряженности в точке A перпендикулярен пленкам, так как он является суперпозицией полей пленок, напряженности полей которых в точке A имеют равные по величине и противоположные по знаку компоненты вдоль пленок. Построим теперь пленки до полных плоскостей, имеющих тот же поверхностный заряд $\pm\sigma$. При этом напряженность поля в точке A удвоится. Так

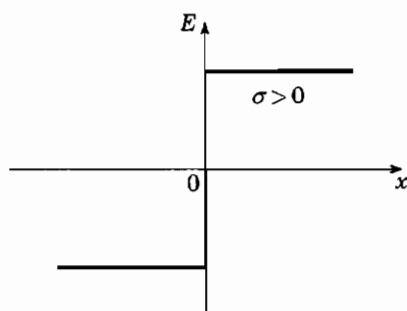


Рис. 109. Зависимость напряженности поля однородно заряженной пленки от координаты x . К задаче 9.5

как после этой процедуры напряженность поля будет равна σ/ϵ_0 , следовательно, до этого она равнялась $\sigma/(2\epsilon_0)$.

Задача 10.1. Напряженность поля диполя вблизи точечного заряда равна $E = d/(2\pi\epsilon_0 r^3)$. Поэтому сила равна $F = qd/(2\pi\epsilon_0 r^3)$.

Задача 10.2. Как следует из решения задачи 9.3, напряженность поля кольца вблизи точечного заряда равна $E = \frac{\lambda R \cdot z}{2\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{3/2}}$. Поэтому сила равна $F = \frac{q\lambda R \cdot z}{2\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{3/2}}$.

Задача 10.3. Напряженность поля одной из нитей вблизи второй нити равна $E = \lambda/(2\pi\epsilon_0 r)$. Выделим кусочек этой нити длины Δl . Сила, действующая на этот кусочек со стороны поля первой нити, равна $\Delta F = E\Delta q = \Delta l \cdot \lambda^2/(2\pi\epsilon_0 r)$. Поэтому сила, приходящаяся на единицу длины, равна $\Delta F/\Delta l = \lambda^2/(2\pi\epsilon_0 r)$.

Задача 10.4. Напряженность поля одной из пленок вблизи второй пленки равна $E = \sigma/(2\epsilon_0)$. Выделим кусочек этой второй пленки с площадью ΔS . Сила, действующая на этот кусочек со стороны поля первой пленки, равна $\Delta F = E\Delta q = \Delta S \sigma^2/(2\epsilon_0)$. Поэтому сила, приходящаяся на единицу площади, равна

$$\Delta F/\Delta S = \sigma^2/(2\epsilon_0).$$

Обратим внимание на то, что эта величина не зависит от расстояния между пленками.

Задача 10.5. Предположим, что x -координата отрицательного заряда диполя равна x_1 . Тогда x -координата положительного заряда диполя равна $x_1 + l$. Проекция же на ось x равнодействующей сил, действующих на диполь, равна $F_x = -\beta x_1 q + \beta(x_1 + l)q = \beta l q = \beta d$. Мы видим, что знак F_x определяется знаком β . Это можно выразить в форме, не предполагающей какого-либо выбора системы координат: скалярное произведение $\vec{d} \cdot \vec{F}$ положительно, если $\vec{d} \cdot \vec{E}$ возрастает в направлении $\vec{d}$, и отрицательно в противоположном случае.

Задача 10.6. Сумма сил, действующих на средний заряд, равна нулю. Силы, действующие на крайние заряды, направлены от среднего заряда и равны по абсолютной величине, которая в данном случае равна сумме абсолютных величин сил, действующих со стороны двух других зарядов:

$$F = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} + \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{5q^2}{16\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Задача 10.7. В этом случае силы будут направлены от центра треугольника. Каждая из них есть векторная сумма (равнодействующая) двух сил, по абсолютной величине равных $q^2/(4\pi\epsilon_0 r^2)$ и направленных под углом $\pi/6$ к этой равнодействующей. Поэтому величина равнодействующей будет равна

$$F = 2 \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos(\pi/6) = \frac{q^2 \sqrt{3}}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Задача 11.1. По определению средняя сила равна отношению работы к длине отрезка, на котором она была произведена. Беря отношение $A/(R-r)$, мы находим среднюю силу:

$$\frac{q \cdot Q}{4\pi\epsilon_0 Rr},$$

что как раз и является средней геометрической сил на концах отрезка MK .

Задача 11.2. Вычислим работу поля по разнесению точечных зарядов, считая, что $q_1, q_2, q_3, \dots$ один за другим удаляются со своих мест на бесконечность. Поскольку сила, действующая на данный заряд, равна векторной сумме сил, действующих на него со стороны полей других зарядов, работа поля по перемещению каждого заряда будет равна сумме работ полей остальных зарядов. Таким образом, работа поля по перемещению заряда q_1 на бесконечность определяется суммой

$$\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{13}} + \dots$$

Здесь r_{12} — расстояние между зарядами q_1 и q_2 , r_{13} — между зарядами q_1 и q_3 , и так далее. После удаления заряда q_1 работа поля по перемещению заряда q_2 будет равна:

$$\frac{q_2 q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{23}} + \frac{q_2 q_4}{4\pi\epsilon_0 r_{24}} + \dots$$

Аналогичным образом можно вычислить величины работ по перемещению остальных зарядов. Суммируя все эти величины, мы и приходим к результату, сформулированному в тексте.

Задача 11.3. В системе три пары зарядов, причем энергия взаимодействия каждой пары равна $q^2/(4\pi\epsilon_0 r)$. Поэтому энергия взаимодействия системы оказывается равной $U = 3q^2/(4\pi\epsilon_0 r)$.

Задача 12.1. Атомный вес натрия равен $\mu = 23$ г/моль. Поскольку на внешней оболочке натрия имеется всего один электрон, число электронов проводимости в металлическом натрии совпадает с числом атомов. Это же число в $m = 1$ г натрия равно $N = (m/\mu) \cdot N_A = 2,7 \cdot 10^{22}$, где $N_A = 6,02 \times 10^{23}$ моль⁻¹ — число Авогадро.

Задача 12.2. Атомный вес натрия равен 23 г/моль, а атомный вес хлора равен 35,5 г/моль. Суммируя эти величины, мы находим молекулярный вес соли $\mu = 58,5$ г/моль. Число молекул в $m = 20$ г соли равно $(m/\mu)N_A$, где $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ моль⁻¹ — число Авогадро. Поскольку каждая молекула распадается на два иона, общее число носителей заряда (то есть ионов) в стакане равно $2(m/\mu)N_A = 4,23 \cdot 10^{23}$.

Задача 13.1. Заряд ядра атома He равен $-2q_e$. Абсолютная величина напряженности его поля равна $E = \frac{2|q_e|}{4\pi\epsilon_0 r^2} = 2,88 \cdot 10^7$ Н/Кл.

Задача 14.1. Заряд тела равен $Q = 4\pi R^3/3 + 4\pi R^2\sigma$. Он совпадает со сторонним зарядом, плотность которого равна $3Q/(4\pi R^2) = \rho + 3\sigma/R$.

Задача 14.2. Искомая поверхностная плотность заряда σ равна ρh . Этот ответ получается, если разделить заряд $\rho \Delta S h$ кусочка с площадью ΔS на эту площадь.

Задача 14.3. Заряд кусочка длины Δl равен $\pi R^2 \Delta l \rho + 2\pi R \Delta l \sigma$. Разделив эту величину на длину кусочка, мы находим $\lambda = \pi R^2 \rho + 2\pi R \sigma$.

Задача 14.4. Молекулярный вес воды равен $\mu = 18$ г/моль, а ее плотность равна $\rho = 1$ г/см³. Поэтому плотность молекул воды равна $n = N_A \cdot \rho / \mu = 3,35 \cdot 10^{22}$ см⁻³, где $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ моль⁻¹ — число Авогадро. Каждая молекула воды содержит 10 электронов, поэтому плотность электронного заряда равна $q_e \cdot n_e = 10 q_e \cdot n = 5,4 \cdot 10^3$ Кл/см⁻³.

Задача 14.5. Молекулярный вес соли равен $\mu = 58,5$ г/моль (см. решение задачи 12.2). Это значит, что плотность ионов хлора или натрия равна $\nu = \rho / \mu = 0,037$ моль/см³, то есть число ионов натрия в единице объема равно $n = \nu N_A = 2,2 \cdot 10^{22}$ см⁻³. Плотность же заряда ионов натрия равна $\rho = |q_e| n = 4,18 \cdot 10^3$ Кл/см³. При сдвиге подрешеток ионов хлора и натрия на $l = 10^{-10}$ см образуется два нескомпенсированных слоя с поверхностными зарядами $\pm \sigma$, где $\sigma = \rho l = 4,18 \cdot 10^{-3}$ Кл/м².

Задача 15.1. Используя найденное значение дипольного момента шара d , мы получаем, что перпендикулярная к поверхности компонента напряженности поля вблизи поверхности проводника (которая определяется суперпозицией поля диполя и однородного поля) равна $E = 3E_0 \cos \theta$. Поэтому поверхностная плотность заряда равна $\sigma = 3\epsilon_0 E_0 \cos \theta$.

Задача 15.2. На внешней поверхности шара индуцируется заряд q . Он распределится по поверхности точно так же, как и заряд по поверхности сплошного шара, то есть

равномерно. Поэтому его поверхностная плотность будет равна $\sigma = q/(4\pi R^2)$.

Задача 16.1. Используя соотношение между плотностью поверхностного заряда диэлектрика и компонентой напряженности, перпендикулярной к его поверхности (в данном случае радиальной компонентой напряженности), мы найдем

$$\sigma = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)E \cos \theta = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1) \frac{3}{\varepsilon_r + 2} E_0 \cos \theta.$$

Задача 16.2. Заряды на поверхностях пластины равны $q = \sigma S = E_0(1 - 1/\varepsilon_r)S$, где S — площадь пластины. Дипольный же момент равен $d = q \cdot l = E_0(1 - 1/\varepsilon_r)Sl = E_0(1 - 1/\varepsilon_r)V$, где l — толщина пластины, а V — ее объем.

Задача 16.3. Поверхностная плотность заряда пластины равна $\sigma = E_0 \cos \theta (1 - 1/\varepsilon_r) \varepsilon_0$. Умножая эту величину на E_0 , мы находим силу на единицу поверхности: $\varepsilon_0(1 - 1/\varepsilon_r) \times (\cos \theta) E_0^2/2$.

Задача 16.4. Поток вектора напряженности через поверхность, проходящую в полости вблизи ее границы равен, в силу теоремы Гаусса, q/ε_0 . Поток же вектора напряженности через поверхность, проходящую в диэлектрике вблизи границы полости, равен $q/(\varepsilon_0 \varepsilon_r)$. Таким образом, поток вектора напряженности через поверхность, охватывающую границу полости, равен $-q/\varepsilon_0 + q/(\varepsilon_0 \varepsilon_r)$, а заряд, сосредоточенный на этой границе, в силу теоремы Гаусса равен $-q + q/\varepsilon_r$.

Задача 17.1. Применим (не модифицированную) теорему Гаусса к сфере, лежащей внутри шара, но с радиусом, близким к R . Так как напряженность поля вблизи этой сферы равна $E = Q/(4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r R^2)$, то суммарный заряд внутри сферы равен $E \cdot 4\pi R^2 \cdot \varepsilon_0 = Q/\varepsilon_r$. Этот заряд состоит из стороннего заряда Q и поляризационного объемного заряда шара (так как поверхностный заряд шара находится вне сферы). Поэтому величина объемного заряда шара равна $Q/\varepsilon_r - Q$, что и дает нуль в сумме с его поверхностным зарядом.

Задача 17.2. График зависимости E от r для диэлектрического шара с $\epsilon_r \neq 1$, однородно заряженного по объему, приведен на рис. 110.

Задача 17.3. Внутри полости радиуса R_1 напряженность поля равна нулю, так как заряда там нет. Теперь предположим, что $R_1 < r < R_2$. Объем, занятый зарядом внутри сферы радиуса r , равен $4\pi r^3/3 - 4\pi R_1^3/3$, то есть величина стороннего заряда внутри сферы равна $q(r) = 4\pi\rho(r^3 - R_1^3)/3$. Поэтому напряженность внутри слоя равна $E = q(r)/(4\pi\epsilon_r\epsilon_0 r^2) = \rho(r^3 - R_1^3)/(3\epsilon_r\epsilon_0 r^2)$. Вне сферического слоя его поле совпадает с полем точечного заряда, величина которого Q определяется зарядом слоя: $Q = 4\pi\rho(R_2^3 - R_1^3)/3$. График зависимости $E(r)$ приведен на рис. 111.

Задача 17.4. Внутри шара напряженность равна нулю, а вне шара совпадает с напряженностью поля точечного заряда Q , где Q — заряд шара. Поэтому скачок напряженности на поверхности шара равен $Q/(4\pi\epsilon_0 R^2)$. Сравнивая эту величину с поверхностной плотностью заряда $\sigma = Q/(4\pi R^2)$, мы заключаем, что скачок напряженности действительно равен σ/ϵ_0 .

Задача 17.5. Вне цилиндра напряженность поля совпадает с полем прямой однородно заряженной нити с линейной плотностью заряда $\lambda = \pi R^2 \rho$. Внутри цилиндра для стороннего заряда $\lambda(r) = \pi r^2 \rho$. Поэтому напряженность поля равна $E = \lambda(r)/(2\pi\epsilon_0 r) = r\rho/(2\epsilon_0\epsilon_r)$. Как и внутри шара, напряженность линейно растет с радиусом. На поверхности цилиндра

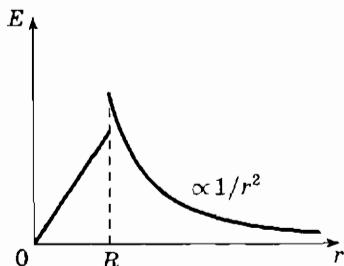


Рис. 110. Зависимость напряженности от радиуса при $\epsilon_r \neq 1$. К задаче 17.2

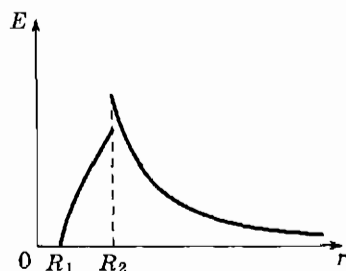


Рис. 111. Зависимость напряженности от радиуса. К задаче 17.3

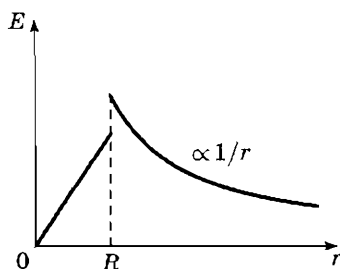


Рис. 112. Зависимость напряженности от радиуса при $\epsilon_r \neq 1$. К задаче 17.5

напряженность поля испытывает скачок, связанный с присутствием поверхностного заряда. График зависимости $E(r)$ приведен на рис. 112. Он отличается от графика зависимости $E(r)$ для шара (рис. 110) более медленным убыванием E при росте r (вне цилиндра).

Задача 17.6. Вне пластины ее поле совпадает с полем плоской однородно заряженной пленки с $\sigma = \rho L$. Внутри пластины, то есть при $|z| < L/2$, для стороннего заряда $\sigma(z) = 2\rho|z|$. Отсюда находим напряженность, линейно зависящую от z : $E = \rho z / (\epsilon_0 \epsilon_r)$. На поверхности пластины напряженность поля испытывает скачок, связанный с присутствием поверхностного заряда. График зависимости $E(z)$ приведен на рис. 113.

Задача 18.1. Используя формулировку теоремы Гаусса в системе единиц СГСЕ, мы находим напряженность поля между пленками: $E = 4\pi\sigma$. Повторяя рассуждения, приведенные в тексте, мы находим, что $w = E^2/8\pi$ в системе СГСЕ.

Задача 18.2. Подставляя выражения для напряженности поля внутри и вне шара в формулу для плотности энергии, мы находим, что внутри шара она равна $w = q^2 / (32\pi^2 \epsilon_0 \epsilon_r r^4)$, а вне шара $w = q^2 / (32\pi^2 \epsilon_0 r^4)$.

Задача 18.3. Из-за появления пластины напряженность поля между пленками уменьшится с $E_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ до $E_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r}$,

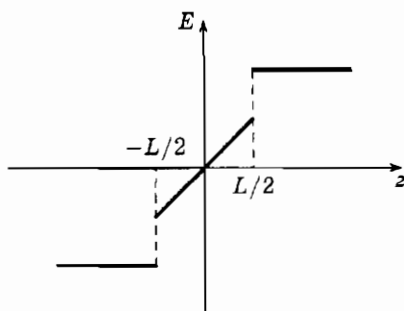


Рис. 113. Зависимость напряженности от поперечной координаты при $\epsilon_r > 1$. К задаче 17.6

плотность же энергии уменьшится с $w_1 = \frac{\epsilon_0 E_1^2}{2} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$ до $w_2 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r E_1^2}{2} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0 \epsilon_r}$. Работа поля будет равна уменьшению его энергии между пленками

$$A = (w_1 - w_2)Sh = Sh \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right).$$

Задача 19.1. Энергия в системе СГС измеряется в эрг $= \text{г} \cdot \text{см}^2 \text{с}^{-2}$, а единица измерения заряда равна $\text{г}^{1/2} \text{см}^{3/2} \text{с}^{-1}$. Разделив первую из этих величин на вторую, находим единицу измерения потенциала $\text{г}^{1/2} \text{см}^{1/2} \text{с}^{-1}$. Размерность гравитационного потенциала в обеих системах единиц совпадают с размерностью квадрата скорости, то есть гравитационный потенциал измеряется в $\text{м}^2/\text{с}^2$ в системе СИ и $\text{см}^2/\text{с}^2$ в системе СГС.

Задача 19.2. Расстояние от точки наблюдения до каждого из зарядов равно $R/2$. На этом расстоянии потенциал заряда Q равен $Q/(2\pi\epsilon_0 R)$. Для двух одинаковых зарядов величина потенциала будет вдвое больше, то есть $\varphi = Q/(\pi\epsilon_0 R)$. Для зарядов $+Q$ и $-Q$ потенциал $\varphi = 0$, так как потенциалы их полей равны по абсолютной величине, но противоположны по знаку.

Задача 19.3. Будем считать, что диполь состоит из пары точечных зарядов $\pm q$, находящихся в точках $\pm l/2$, то есть

расположенных симметрично относительно начала координат. Потенциал поля этой пары зарядов равен

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0|\vec{r} - \vec{l}/2|} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0|\vec{r} + \vec{l}/2|} \approx \frac{q\vec{l} \cdot \vec{r}}{r^3},$$

где $\vec{r}$ — радиус-вектор, относящийся к точке наблюдения. Поскольку произведение $q\vec{l}$ является дипольным моментом диполя $\vec{d}$, мы получаем формулу, приведенную в тексте. Хотя она и была нами получена для частного устройства диполя, результат справедлив для произвольного точечного диполя. Это следует из уже знакомого нам мысленного разбиения произвольного незаряженного, но наэлектризованного тела на пары точечных зарядов (с противоположными зарядами), и из того, что дипольный момент тела равен сумме дипольных моментов этих пар.

Задача 19.4. Предположим, что точка, в которой мы хотим найти напряженность, находится на расстоянии z от плоскости кольца. В соответствии с общим правилом мы должны разбить кольцо на малые части и просуммировать их потенциалы $\Delta q/(4\pi\epsilon_0 r)$ в интересующей нас точке. Поскольку расстояние r от выбранной точки до любой точки кольца одинаково, это суммирование дает просто $\varphi = q/(4\pi\epsilon_0 r)$, где $q = 2\pi\lambda R$ — заряд кольца, а $r = \sqrt{R^2 + z^2}$. Подставляя эти величины, находим окончательно $\varphi = \lambda/(2\sqrt{R^2 + z^2})$. При $z \gg R$ корень квадратный можно заменить просто на z , и мы приходим, как и следовало ожидать, к потенциалу точечного заряда. Заметим, что приведенное решение проще, чем решение аналогичной задачи 9.3 для напряженности. Причина этого состоит в том, что при вычислении потенциала суммируются скалярные величины, в то время как при вычислении напряженности суммировать приходится величины векторные.

Задача 19.5. Вне шара его поле совпадает с полем точечного заряда и, следовательно, потенциал поля равен $\varphi = Q/(4\pi\epsilon_0 r)$, где r — расстояние от точки наблюдения до центра шара. Потенциал точек, лежащих на поверхности шара, равен $\varphi_R = Q/(4\pi\epsilon_0 R)$. Внутри шара напряженность

линейно зависит от r : $E = Qr/(4\pi\epsilon_0\epsilon_r R^3)$. Поэтому работа по перемещению пробного заряда q из точки, расположенной на расстоянии $r_1 < R$, до точки, расположенной на расстоянии $r_2 < R$ от центра шара, равна $A = qQ(r_2^2 - r_1^2)/(8\pi\epsilon_0\epsilon_r R^3)$ (эта работа может быть найдена по аналогии с работой пружинки при перемещении грузика). Теперь мы можем определить разность потенциалов между точкой, находящейся на расстоянии $r < R$ от центра шара, и его поверхностью: $\varphi_r - \varphi_R = \Delta\varphi = A/q = Q(R^2 - r^2)/(8\pi\epsilon_0\epsilon_r R^3)$. Поэтому потенциал в выбранной точке будет равен

$$\varphi(r) = \Delta\varphi + \varphi_R = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{Q(R^2 - r^2)}{8\pi\epsilon_0\epsilon_r R^3}.$$

График зависимости потенциала от r приведен на рис. 114. Обратите внимание на излом графика в точке $r = R$, связанный с поверхностным зарядом.

Задача 19.6. Вне шарового слоя поле системы совпадает с полем точечного заряда Q и его потенциал равен $\varphi = Q/(4\pi\epsilon_0 r)$. В шаровом слое потенциал постоянен и равен $\varphi = Q/(4\pi\epsilon_0 R_2)$. Внутри шарового слоя (в его полости) напряженность опять совпадает с напряженностью поля точечного заряда Q . Находя разность потенциалов между любой точкой полости и шаровым слоем и прибавляя потенциал слоя, мы получаем:

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2}.$$

График зависимости потенциала от r приведен на рис. 115.

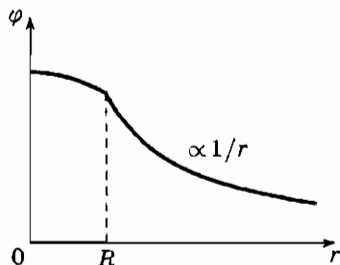


Рис. 114. Зависимость потенциала от радиуса.
К задаче 19.5

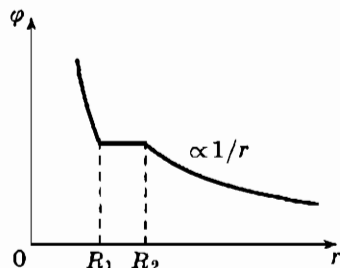


Рис. 115. Зависимость потенциала от радиуса.
К задаче 19.6

Задача 19.7. Напряженность поля внутри пластины равна $E = \rho x / (\epsilon_0 \epsilon_r)$, где x — расстояние от оси симметрии до точки наблюдения. Поэтому сила, действующая на пробный заряд, будет пропорциональна x , как и для пружинки. Отсюда находим работу по перемещению пробного заряда q от плоскости симметрии: $A = \rho q x^2 / (2 \epsilon_0 \epsilon_r)$, а затем и искомую разность потенциалов $\Delta \varphi = \rho l^2 / (8 \epsilon_0 \epsilon_r)$.

Задача 19.8. Перемножая напряженность поля точечного заряда и дипольный момент, мы находим

$$\Pi = -\vec{E} \cdot \vec{d} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r} \cdot \vec{d},$$

где $\vec{r}$ — радиус-вектор, проведенный из точки расположения точечного заряда в точку расположения диполя.

Задача 20.1. Потенциал системы двух точечных зарядов равен $\varphi = \frac{Q}{4\pi r_1} - \frac{q}{4\pi r_2}$, где r_1 и r_2 — расстояния от точки наблюдения до зарядов. Поэтому условие $\varphi = 0$ переписывается в виде $Qr_2 = qr_1$. Предположим, что заряд Q находится в начале координат, а заряд $-q$ находится на оси x на расстоянии r от начала координат. Тогда после возведения в квадрат обеих частей соотношения $Qr_2 = qr_1$ и подстановки выражений для r_1^2 и r_2^2 мы получаем

$$(Q^2 - q^2)(x^2 + y^2 + z^2) - 2Q^2 rx + Q^2 r^2 = 0.$$

Это уравнение сферы радиуса $R = \frac{qQr}{|Q^2 - q^2|}$ с центром, расположенным на оси x в точке с координатой $x_R = \frac{Q^2 r}{Q^2 - q^2}$. Расстояния от центра сферы до зарядов равны $R_1 = |x_R| = \frac{Q^2 r}{|Q^2 - q^2|}$, $R_2 = |x_R - r| = \frac{q^2 r}{|Q^2 - q^2|}$. Отсюда находим $R_1 \cdot R_2 = R^2$ и $\frac{R_1}{R_2} = \frac{Q^2}{q^2}$, и далее: $\frac{R_1}{R} = \frac{Q}{q}$, $\frac{R_2}{R} = \frac{q}{Q}$. Эти соотношения определяют положение сферы относительно зарядов вне зависимости от какой-либо системы координат.

Задача 21.1. Вблизи пленки напряженность $\vec{E}_1$ поля точечного заряда q и напряженность $\vec{E}_2$ поля его заряда-отражения совпадают по абсолютной величине и равны

$E_1 = E_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0(l^2 + r^2)}$, где r — расстояние от точки наблюдения до проекции точечного заряда q на поверхность проводника. Компоненты векторов $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$, направленные вдоль поверхности, в сумме дают нуль. Поэтому напряженность $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ перпендикулярна, как и следует, поверхности, а по абсолютной величине равна удвоенной компоненте $\vec{E}_1$, перпендикулярной поверхности: $E = 2E_1 \cos \theta$, где θ — угол между $\vec{E}_1$ и перпендикуляром к поверхности. Легко сообразить, что $\cos \theta = l/\sqrt{l^2 + r^2}$, откуда следует, что

$$E = \frac{ql}{2\pi\epsilon_0(l^2 + r^2)^{3/2}}.$$

Используя теперь связь между напряженностью и поверхностной плотностью заряда, мы находим

$$\sigma = \epsilon_0 E = \frac{ql}{2\pi(l^2 + r^2)^{3/2}}.$$

Задача 21.2. Так как в полупространстве, где расположен заряд q , поле пленки совпадает с полем заряда-отражения, действующая на заряд q сила может быть найдена по закону Кулона. Поскольку расстояние между зарядом q и зарядом-отражением равно $2r$, сила Кулона равна $F = q^2/(16\pi\epsilon_0 r^2)$.

Задача 21.3. Эта энергия U равна работе поля при перемещении заряда q на бесконечность. Мы установили, что сила, действующая на заряд, равна $F = q^2/(16\pi\epsilon_0 r^2)$, где r — расстояние от заряда до пленки. Работу, которое совершает поле при изменении r от l до бесконечности, можно найти точно так же, как и работу поля по разнесению двух точечных зарядов. В результате мы находим следующее выражение для энергии

$$U = -\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 l}.$$

Задача 21.4. Поле проводящей пленки моделируется полем прямой нити с линейным зарядом $-\lambda$, которая параллельна реальной и находится на расстоянии $2R$ от нее. Напряженность поля такой нити по абсолютной величине

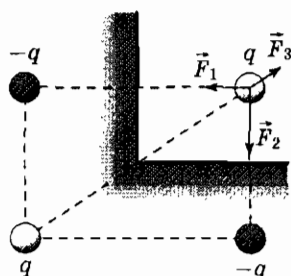


Рис. 116. Силы, действующие на точечный заряд, расположенный вблизи двух проводников с плоскими поверхностями, перпендикулярными друг другу. К задаче 21.5

равна $|\lambda|/(2\pi\epsilon_0 r)$, где r — расстояние до точки наблюдения. Подставляя сюда $r=2R$, мы находим напряженность поля индуцированного заряда вблизи реальной нити. Умножая эту величину на линейную плотность заряда λ , мы находим следующую силу на единицу длины:

$$F/L = \lambda^2/(4\pi\epsilon_0 R).$$

Задача 21.5. Сила $\vec{F}$, действующая на заряд q , может быть найдена как векторная сумма кулоновских сил зарядов-отражений. По абсолютной величине они равны $F_1 = q^2/(16\pi\epsilon_0 h_1^2)$ и $F_2 = q^2/(16\pi\epsilon_0 h_2^2)$ для фиктивных зарядов $-q$ и $F_3 = q^2/[16\pi\epsilon_0(h_1^2 + h_2^2)]$ для фиктивного заряда $+q$ (см. рис. 116). Проекции суммарной силы на оси x и y равны

$$F_x = -\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 h_1^2} + \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 (h_1^2 + h_2^2)^{3/2}} h_1,$$

$$F_y = -\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 h_2^2} + \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 (h_1^2 + h_2^2)^{3/2}} h_2.$$

Задача 21.6. Энергию U можно найти как сумму энергий взаимодействия точечного заряда q с зарядами-отражениями (см. задачу 21.3). В результате получаем

$$U = -\frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 h} \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right).$$

Задача 21.7. Сила, действующая на заряд Q , может быть найдена как сумма кулоновских сил, действующих на заряд Q со стороны зарядов q и $-q$:

$$F = -\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0(r-R^2/r)^2} + \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r^2},$$

что дает

$$F = -\frac{Q^2 R^3}{4\pi\epsilon_0 r^3} \cdot \frac{2r^2 - R^2}{(r^2 - R^2)^2}.$$

Знак минус здесь соответствует притяжению заряда к шару.

Задача 21.8. Эта энергия U равна работе поля при удалении заряда Q на бесконечность. Обратим внимание на то, что U нельзя вычислить просто как сумму энергий взаимодействия точечного заряда Q с зарядами q и $-q$. Дело в том, что при удалении заряда Q на бесконечность величины зарядов q и $-q$ (и расположение заряда $-q$) будут меняться. Поэтому надо исходить из силы, действующей на заряд Q со стороны шара, вычисленной в задаче 21.7. Сила, действующая со стороны заряда q на заряд Q , равна $Q^2 R / (4\pi\epsilon_0 r^3)$, то есть зависит от расстояния так же, как сила взаимодействия точечного заряда с точечным диполем. Используя эту формальную аналогию, мы можем сразу написать вклад в U , связанный с зарядом q :

$$U_1 = \frac{Q^2 R}{8\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Сила же, действующая со стороны заряда $-q$ на заряд Q , равна $-Q^2 r R / [4\pi\epsilon_0 (r^2 - R^2)^2]$. Соответствующий вклад в U равен

$$U_2 = -\frac{Q^2 R}{8\pi\epsilon_0 (r^2 - R^2)}.$$

Суммируя эти величины, находим

$$U = -\frac{Q^2 R^3}{8\pi\epsilon_0 r^2 (r^2 - R^2)}.$$

Знак минус здесь соответствует притяжению заряда к шару.

Задача 21.9. Как мы уже знаем, сфера радиуса R является эквипотенциальной поверхностью поля заряда q и заряда

$q' = -Rq/r$, расположенного на прямой, проходящей через заряд q и центр сферы O , на расстоянии $r' = R^2/r$ от точки O (см. задачу 20.1). Так как заряд q расположен внутри полости, то $r < R$ и $r' > R$. Поле заряда, индуцированного на поверхности полости, будет (внутри полости) совпадать с полем заряда q' . В данном случае можно не заботиться о том, что заряд на поверхности полости равен $-q$, то есть не совпадает с q' . Дело в том, что недостающий заряд однородно распределен по поверхности полости, не создавая никакой дополнительной напряженности внутри нее. Таким образом, сила, действующая на заряд q , равна

$$F = \frac{q^2 R r}{4\pi\epsilon_0 (R^2 - r^2)^2}.$$

Сила $\vec{F}$ коллинеарна прямой, проходящей через заряд q и центр сферы O и направлена от O .

Задача 22.1. Радиус шара, имеющий емкость C , равен $R = C/(4\pi\epsilon_0)$. Подставляя сюда $C = 1$ Ф и значение ϵ_0 , находим $R = 9 \cdot 10^9$ м $= 9 \cdot 10^6$ км, что существенно больше радиуса Земли.

Задача 22.2. Пусть заряд шара равен q . Тогда, применяя обобщенную теорему Гаусса, мы заключаем, что напряженность поля внутри диэлектрика равна $E = q/(4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2)$, а разность потенциалов между внутренней и внешней поверхностями диэлектрика равна $\frac{q}{(4\pi\epsilon_0\epsilon_r)} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$. Вне диэлектрика поле совпадает с полем точечного заряда q и потому потенциал внешней поверхности диэлектрика равен $q/(4\pi\epsilon_0 R_2)$. Складывая эти две величины, мы находим потенциал шара φ , а затем и его емкость, как отношение $C' = q/\varphi$. В результате получаем

$$C' = 4\pi\epsilon_0 \left(\frac{1}{\epsilon_r R_1} + \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r R_2} \right)^{-1}.$$

Задача 22.3. Внутри слоя напряженность поля равна нулю, а вне его поле совпадает с полем точечного заряда q (равного заряду шара). Потенциал же шара равен сумме разности потенциалов между шаром и проводящим слоем

и потенциала этого слоя:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right).$$

Отсюда находим емкость

$$C' = q/\Delta\varphi = 4\pi\epsilon_0 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)^{-1}.$$

Задача 23.1. Вне внешней сферы поле будет совпадать с полем точечного заряда $q_1 + q_2$, поэтому ее потенциал равен $\varphi_2 = (q_1 + q_2)/(4\pi\epsilon_0 R_2)$. Чтобы найти потенциал внутренней сферы, к φ_2 надо добавить разность потенциалов между сферами, которая определяется полем точечного заряда q_1 :

$$\varphi_1 = \varphi_2 + \Delta\varphi = \frac{q_1 + q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \left(\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} - \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_2} \right) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2}.$$

Задача 23.2. Заряд, распределенный по внешней (полусферической) поверхности каждого полушара равен $(q_1 + q_2)/2$. Поэтому на поверхностях щели окажется заряд $\pm(q_1 - q_2)/2$.

Задача 23.3. Как мы уже выяснили, на поверхностях щели сосредоточены заряды $\pm(q_1 - q_2)/2$. В данном случае они распределены однородно, то есть поверхностные плотности заряда равны $\sigma = \pm(q_1 - q_2)/(2\pi R^2)$, а напряженность поля в щели равна $E = (q_1 - q_2)/(2\epsilon_0 \pi R^2)$. Отсюда мы находим разность потенциалов

$$\Delta\varphi = \frac{(q_1 - q_2)h}{2\epsilon_0 \pi R^2}.$$

Потенциал же проводников определяется суммарным зарядом:

$$\varphi = \frac{q_1 + q_2}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

Мы видим, что при условии $R \gg h$ разность потенциалов $\Delta\varphi$ много меньше φ , если только суммарный заряд $q_1 + q_2$ не слишком мал.

Задача 23.4. Сила $\vec{F}$, действующая на половинку шара, может быть найдена как сумма сил $\Delta\vec{F}$, действующих на

элементы ее поверхности. Найдем отдельно силу $\vec{F}_1$, действующую на полусферическую поверхность, и силу $\vec{F}_2$, действующую на плоскую поверхность. В силу симметрии задачи сила $\vec{F}_1$ направлена перпендикулярно плоскости, разделяющей половинки шара. Поэтому достаточно просуммировать проекции сил $\Delta\vec{F}$ на это направление. Величина проекции $\Delta\vec{F}$ равна произведению $(1/2)\varepsilon_0 E^2$ (где E — напряженность вблизи полусферы) и проекции элемента поверхности $\Delta\vec{S}$ на ту же ось. Величина $(1/2)\varepsilon_0 E^2$ во всех точках полусферы одинакова, а сумма проекций элементов полусферы равна просто площади ее проекции на плоскость, разделяющей половинки шара. Проекция полусферы есть круг радиуса R , площадь которого равна πR^2 . Напряженность же поля вблизи полусферы равна $E = \frac{q_1 + q_2}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$. Собирая все вместе, получаем

$$F_1 = \frac{(q_1 + q_2)^2}{32\pi\varepsilon_0 R^2}.$$

Сила же F_2 равна произведению $(1/2)\varepsilon_0 E_1^2$ (где E_1 — напряженность поля в зазоре) на ту же площадь πR^2 . Поскольку $E_1 = (q_1 - q_2)/(2\pi\varepsilon_0 R^2)$, мы получаем

$$F_2 = \frac{(q_1 - q_2)^2}{8\pi\varepsilon_0 R^2}.$$

Силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ имеют противоположное направление. Поэтому сила взаимодействия шаров равна $F_1 - F_2$. Если эта разность положительна, то полушары отталкиваются, а если она отрицательна, то притягиваются.

Задача 23.5. Заряд на поверхностях зазора распределен однородно, что диктуется условием постоянства разности потенциалов между полушарами вдоль зазора. Плотность поверхностного заряда в зазоре равна $\sigma = \pm q/(\pi R^2)$. Поверхностные заряды притягиваются с силой, которая определяется как сила притяжения двух параллельных однородно заряженных пленок:

$$F = \pi R^2 \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} = \frac{q^2}{2\pi\varepsilon_0 R^2}.$$

Задача 24.1. Поле между сферами совпадает с полем точечного заряда q , по величине равного заряду внутренней сферы. Поэтому разность потенциалов между сферами равна

$$\Delta\varphi = q \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0 R_1} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R_2} \right).$$

Поскольку внешняя сфера заземлена, ее потенциал равен нулю, то есть $\Delta\varphi = \varphi$. Отсюда находим выражение для емкости:

$$C = \frac{q}{\varphi} = \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}.$$

В пределе, когда R_2 намного превышает R_1 , это выражение, как и следует, дает емкость уединенного шара.

Задача 24.2. Для плоского конденсатора значение его энергии W совпадает с произведением $\epsilon_0 E^2/2$ (плотности энергии поля между обкладками) на объем Sd , которое оно занимает: $W = \epsilon_0 E^2 Sd/2$. Подставляя сюда $E = \Delta\varphi/d$ и сравнивая результат с $C\Delta\varphi^2/2$, мы и получаем выведенное в основном тексте выражение для емкости плоского конденсатора C .

Задача 24.3. Заменяя разность $R_2 - R_1$ на расстояние d между обкладками и полагая затем $R_1 \approx R_2 \approx R$, мы находим из выражения для емкости сферического конденсатора (см. задачу 24.1) $C = 4\pi\epsilon_0 R^2/d$. Заметим теперь, что $4\pi R^2$ есть площадь сферы, то есть $4\pi R^2$ можно заменить на площадь обкладки S . После этого мы и получаем выражение для емкости плоского конденсатора.

Задача 24.4. Взаимное расположение обкладок конденсатора и введенной в него пластины поясняет рис. 117, где изображено поле конденсатора до и после введения в него пластины. Напряженность поля в зазорах между обкладками и пластиной (рис. 117б) будет (при фиксированном заряде) той же, что и в конденсаторе без пластины (рис. 117а). Поэтому разность потенциалов между обкладками равна $\Delta\varphi = (d - d_1)\sigma/\epsilon_0$, где σ — плотность поверхностного заряда обкладки. Отсюда, подставляя $\sigma = q/S$, мы находим ответ $C = q/\Delta\varphi = \epsilon_0 S/(d - d_1)$. Тот же ответ можно получить и из

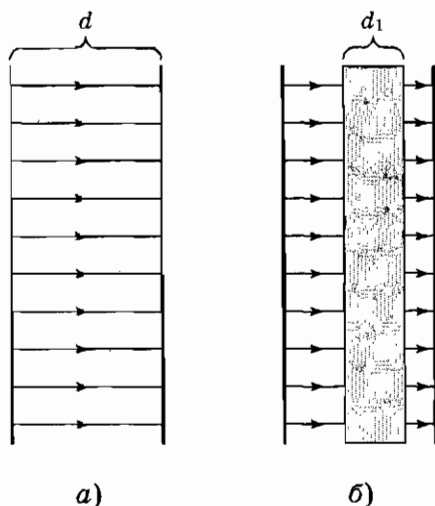


Рис. 117. Поле плоского конденсатора и поле того же конденсатора с вдвинутой в него проводящей пластиной. К задаче 24.4

энергетических соображений, если учесть, что вдвигание пластины приводит просто к тому, что уменьшается объем, в котором сосредоточена энергия поля. Поэтому в выражении для емкости плоского конденсатора d заменяется на $d - d_1$, что дает то же выражение для емкости.

Задача 24.5. Конденсатор можно мысленно разбить на два плоских конденсатора, один из которых заполнен диэлектриком, а другой — нет. Емкости этих конденсаторов равны $C_1 = \epsilon_0 \epsilon_r S / (2d)$ и $C_2 = \epsilon_0 S / (2d)$. Складывая эти величины, мы находим

$$C = C_1 + C_2 = \frac{\epsilon_0(\epsilon_r + 1)S}{2d}.$$

Задача 24.6. В этом случае напряженность поля в вакууме (газе) будет равна $E = \sigma / \epsilon_0$, а напряженность поля в диэлектрике $E = \sigma / (\epsilon_0 \epsilon_r)$. Поэтому разность потенциалов между обкладками будет равна $\Delta\varphi = \sigma d / (2\epsilon_0) + \sigma d / (2\epsilon_0 \epsilon_r)$.

Отсюда, подставляя $\sigma = q/S$, мы находим ответ:

$$C = \frac{2\varepsilon_0\varepsilon_r S}{d(1 + \varepsilon_r)}.$$

Эта величина всегда меньше, чем ответ к задаче 24.5.

Задача 24.7. Очевидно, что поле в данном случае обладает сферической симметрией и поверхность диэлектрической сферы является эквипотенциальной поверхностью. Разности потенциалов между ней и обкладками конденсатора равны

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R_1} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R_3}, \quad \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_3} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}.$$

Разность потенциалов между обкладками $\Delta\varphi$ является суммой этих величин. Вычисляя отношение $q/\Delta\varphi$, мы находим ответ:

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \left[\frac{1}{\varepsilon_r R_1} - \frac{1}{\varepsilon_r R_3} + \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_2} \right]^{-1}.$$

Задача 25.1. Поскольку при параллельном соединении разности потенциалов на конденсаторах одинаковы, то их энергии равны $W_1 = C_1(\Delta\varphi)^2/2$, $W_2 = C_2(\Delta\varphi)^2/2$, и так далее. С другой стороны, энергия составного конденсатора равна $W = C(\Delta\varphi)^2/2$, где C — его емкость. Воспользовавшись тем, что энергия составного конденсатора равна сумме энергий отдельных конденсаторов: $W = W_1 + W_2 + \dots$, мы и приходим к выводу, что емкость параллельно соединенных конденсаторов равна сумме их емкостей.

Задача 25.2. Поскольку при последовательном соединении заряды конденсаторов одинаковы, то их энергии равны $W_1 = q^2/(2C_1)$, $W_2 = q^2/(2C_2)$, и так далее. С другой стороны, энергия составного конденсатора равна $W = q^2/(2C)$, где C — его емкость. Воспользовавшись тем, что энергия составного конденсатора равна сумме энергий отдельных конденсаторов, $W = W_1 + W_2 + \dots$, мы и приходим к выводу, что обратная емкость последовательно соединенных конденсаторов равна сумме их обратных емкостей.

Задача 25.3. Заряды на конденсаторах одинаковы и равны

$$q = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} (\varphi_2 - \varphi_1).$$

Поэтому разность потенциалов на первом конденсаторе равна

$$\frac{q}{C_1} = \frac{C_2}{C_1 + C_2} (\varphi_2 - \varphi_1).$$

Прибавляя эту разность к потенциалу φ_1 , мы находим искомый потенциал:

$$\varphi = \frac{C_1}{C_1 + C_2} \varphi_1 + \frac{C_2}{C_1 + C_2} \varphi_2.$$

Задача 25.4. Емкость параллельно соединенных конденсаторов равна $C_4 = C_2 + C_3$, а емкость блока равна, в соответствии с формулой для последовательно соединенных конденсаторов, $C = C_1 C_4 / (C_1 + C_4)$. Заряд же рассматриваемого сложного конденсатора равен $q = C \Delta \varphi$. Именно такой заряд будет сосредоточен на первом конденсаторе, а разность потенциалов на нем равна $\Delta \varphi_1 = q / C_1$. Поэтому разность потенциалов на параллельно соединенных конденсаторах равна

$$\Delta \varphi_2 = \Delta \varphi_3 = \Delta \varphi - \Delta \varphi_1 = \frac{C_1}{C_1 + C_4} \Delta \varphi.$$

Заряды же на этих конденсаторах могут быть теперь вычислены по формулам $q_2 = C_2 \Delta \varphi_2$ и $q_3 = C_3 \Delta \varphi_3$.

Задача 25.5. Обозначим заряды обкладок первого, второго, третьего и четвертого конденсаторов через q_1, q_2, q_3, q_4 (рис. 98). Тогда заряды на обкладках пятого конденсатора равны $-q_1 - q_3$ и $-q_2 - q_4$. Поскольку они должны быть равны по величине и противоположны по знаку, мы находим

$$q = -q_1 - q_3, \quad q = q_2 + q_4,$$

где q — искомый заряд пятого конденсатора (рис. 98). Далее, вычисляя разности потенциалов для контуров, проходящих через первый и третий конденсаторы, а также через второй и четвертый конденсаторы, мы находим

$$q_1 / C_1 - q_3 / C_3 = \mathcal{E}, \quad q_2 / C_2 - q_4 / C_4 = \mathcal{E}.$$

К этим соотношениям можно добавить условие равенства нулю суммы разностей потенциалов по контуру, содержащему первый, второй и пятый конденсаторы:

$$q_1/C_1 - q/C_5 - q_2/C_2 = 0.$$

Исключая из полученной системы уравнений заряды q_1 , q_2 , q_3 , q_4 , мы находим соотношение

$$(C_2 C_3 - C_1 C_4) \mathcal{E} = \left[\frac{(C_1 + C_3)(C_2 + C_4)}{C_5} + C_1 + C_2 + C_3 + C_4 \right] q,$$

из которого определяется q . Как и следует, q обращается в нуль при условии баланса моста $C_1 C_4 = C_2 C_3$.

ДОПОЛНЕНИЕ

**ТЕОРИЯ
ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ**

;

§ 1. Принцип относительности

В настоящей главе мы познакомимся с теорией относительности, созданной Эйнштейном в начале XX века. В основном мы будем говорить о так называемой специальной теории относительности. О ее обобщении — общей теории относительности — мы скажем несколько слов в заключительном параграфе главы.

В основании теории относительности лежат два принципа — *принцип близкодействия* и *принцип относительности*.

С принципом близкодействия мы познакомились при изучении физических полей. Согласно этому принципу *изменение со временем характеристик поля в данной точке определяется только значением характеристик полей в близлежащих точках*. Отсюда вытекает, в частности, что возмущения поля постепенно, от точки к точке, распространяются в пространстве. Следовательно, любые сигналы могут распространяться только с конечной скоростью, поскольку поле является их физическим носителем.

Сформулируем теперь принцип относительности. Разумеется, он не имеет никакого отношения к житейской мудрости о том, что все на свете относительно. Наоборот, принцип относительности является положительным утверждением: он гласит, что *все инерциальные системы отсчета эквивалентны друг другу*. Это означает, что результаты любого эксперимента, поставленного в различных инерциальных системах отсчета, будут одинаковыми. Как известно, *инерциальной системой отсчета называется система, в которой тело, на которое не действуют другие тела, движется прямолинейно и равномерно или покоится*. Поскольку взаимодействие между телами осуществляется через поля, точнее было бы сказать, что в инерциальной системе отсчета прямолинейно и равномерно будет двигаться тело в отсутствие внешних полей.

Принцип относительности был фактически открыт Галилеем, который постулировал равноправность состояний

покоя и равномерного прямолинейного движения. Принцип близкодействия был впервые сформулирован Декартом. Таким образом, оба основополагающих принципа теории относительности были введены в научный оборот еще в XVII веке. Тем не менее теория относительности была создана только в XX веке. Дело в том, что совместное применение этих принципов приводит к следствиям, на первый взгляд кажущимся абсурдными. Приведем пример такого следствия.

Согласно принципу близкодействия должна существовать предельная скорость распространения сигналов. Оказывается, эта скорость совпадает со скоростью распространения возмущений электромагнитного поля в вакууме, то есть электромагнитных волн. Поэтому она является не чем иным, как скоростью света в вакууме c , поскольку свет состоит из электромагнитных волн определенной частоты. Применение же принципа относительности приводит нас к выводу, что скорость света c должна быть одной и той же во всех инерциальных системах отсчета, поскольку предельная скорость распространения сигнала не должна зависеть от выбора системы отсчета. Это означает, например, что скорость распространения одной и той же электромагнитной волны, измеренной двумя наблюдателями, один из которых находится на поверхности Земли, а другой летит на самолете над ее поверхностью, должна быть одной и той же.

Парадоксальность вывода о независимости максимальной скорости распространения сигналов от системы отсчета приводила всех физиков до Эйнштейна к отказу от одного из двух упомянутых принципов. В XVIII веке считался неверным принцип близкодействия. Вместо него принимался принцип далекодействия, согласно которому взаимодействие между телами может распространяться с неограниченно большой скоростью. Принципу далекодействия подчиняется, например, закон всемирного тяготения или закон Кулона, формулируемые в курсах механики и электростатики. Эти законы естественно вписывались в ньютоновскую картину мира.

Однако с развитием физики в XIX веке, в частности в связи с интенсивным исследованием электромагнитных явлений, принцип близкодействия был реабилитирован. Это означает, например, что закон Кулона был признан приближением, которое работает только при достаточно малых скоростях движения тел. В то же время физики фактически отказались от принципа относительности. Дело в том, что в физической картине XIX столетия появился эфир — гипотетическая среда, по которой распространяются электромагнитные волны. Система отсчета, связанная с эфиром, выделена среди всех прочих, что вступают в противоречие с принципом относительности.

Представление об эфире побуждало физиков поставить эксперимент по определению скорости движения Земли относительно эфира, основанный на измерении разницы скоростей движения света в направлении движения Земли и в противоположном направлении. Впервые эксперимент такого рода поставил в конце XIX века американский физик Майкельсон, который не обнаружил никаких отличий в скорости распространения света в различных направлениях. Этот результат явился первым экспериментальным свидетельством независимости скорости света от системы отсчета. В дальнейшем эта независимость была подтверждена разнообразными измерениями и является в настоящее время твердо установленным опытным фактом. Значение c , установленное экспериментально, равно $3 \cdot 10^5$ км/с.

Итак, совместное применение принципов близкодействия и относительности привело нас к удивительному выводу о независимости скорости света от системы отсчета, который, однако, подтвержден многочисленными опытами. Попробуем и дальше строить теорию, основываясь на этих принципах. На этом пути мы получим и другие неожиданные следствия. Например, окажется, что время в различных системах отсчета течет по-разному и разными будут размеры одних и тех же предметов, а масса тела будет зависеть от его скорости. Но все эти выводы находят свое экспе-

риментальное подтверждение. Вообще говоря, специальная теория относительности, о которой в основном пойдет речь в настоящей главе, имеет один из самых надежных опытных фундаментов среди известных к настоящему времени физических теорий.

Наиболее ярко *релятивистские* эффекты, то есть отличие наблюдаемых явлений от предсказаний ньютоновской теории, проявляются для объектов, движущихся со скоростями, сравнимыми со скоростью света. Если же движение тел происходит со скоростями, много меньшими скорости света c , то предсказания теории Ньютона и теории Эйнштейна практически совпадают. Можно сказать, что для таких медленных движений скорость света неотличима от бесконечности, и мы вместо принципа принципа близкодействия можем пользоваться принципом дальнегодействия. Именно так и поступают, например, при изучении движения электронов в атомах.

Отметим интересный эффект, связанный с конечностью скорости света: наблюдаемая при оптических измерениях форма движущегося тела не совпадает с его «истинной» формой. Поясним это утверждение на примере движущегося со скоростью v прямоугольного параллелепипеда, рис. 118. Предположим, что этот параллелепипед наблюдается в телескоп со стороны «нижней» грани, параллельной скорости движения. Его изображение формируется лучами света, одновременно достигающими линзы телескопа. Одновременно к линзе телескопа, как показано на рисунке, придут лучи от всех точек «нижней» грани. Кроме того, одновременно с ними придут лучи от точек «задней» грани, которые были испущены несколько раньше. Таким образом, в случае ненулевой скорости движения параллелепипеда на мгновенной фотографии мы увидим не только его «нижнюю» грань, но и «заднюю», которая будет наклонена под углом α к своей истинной ориентации. Этот угол определяется из соотношения $\operatorname{tg} \alpha = v/c$. Очевидно, что этот эффект пренебрежим при малых значениях v/c .

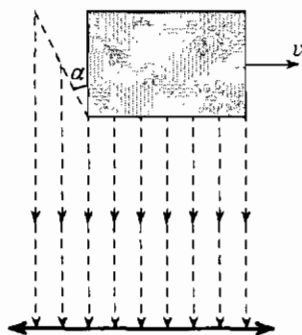


Рис. 118. Оптическое изображение движущегося тела, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда

Теория относительности необычайностью своих выводов вызвала к жизни множество попыток доказать ее противоречивость. На этом пути был сформулирован ряд парадоксов, важнейшие из которых мы разберем в дальнейшем. Их внимательный анализ приводит к выводу о том, что никаких внутренних противоречий в теории относительности нет. Парадоксальность же выводов теории связана с тем, что они противоречат нашему здравому смыслу. Однако не надо забывать, что этот «здравый смысл» наработан при наблюдении медленных движений и поэтому отказывает при рассмотрении движений со скоростями, сравнимыми со скоростью света c .

Скажем несколько слов о том, что же из изучаемого в школьной программе физики является справедливым и в рамках теории относительности, а что требует пересмотра. Остаются в силе все выводы, касающиеся электромагнитного поля. Дело в том, что возмущения этого поля распространяются со скоростью света, и поэтому электромагнитное поле в силу своей природы является релятивистским объектом. В неприкосновенности остается и выражение для силы Лоренца:

$$\vec{F} = q \cdot (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}),$$

действующей на точечный заряд в электромагнитном поле. Подчеркнем, что заряд тела q и с учетом релятивистских эффектов остается величиной, не зависящей от системы отсчета.

Отметим, что в рамках теории относительности вообще нельзя говорить об отдельных электрическом и магнитном полях. Поясним это утверждение на следующем примере. Вокруг уединенного покоящегося заряженного тела напряженность электрического поля E отлична от нуля, в то время как напряженность магнитного поля B равна нулю. Но в системе отсчета, где это заряженное тело движется, напряженность B уже будет отлична от нуля, как и всегда вокруг движущегося заряда. Аналогичным образом и в общем случае соотношение между напряженностями E и B меняется при переходе от одной системы отсчета к другой. Этот эффект отражает единство электрического и магнитного полей, которые являются разными сторонами единого объекта — электромагнитного поля, по-разному проявляющему себя в разных системах отсчета.

В теории относительности пересмотра требуют кинематические соотношения, касающиеся перехода от одной системы отсчета к другой. Необходимо также уточнить формулировку основных законов механики. Что же касается термодинамики, то ее основные положения остаются справедливыми и в теории относительности, хотя, например, уравнение состояния газа частиц, движущихся со скоростями, сравнимыми со скоростью света, будет отличаться от уравнения состояния идеального газа, рассматриваемого в курсе молекулярной физики.

§ 2. Лоренцевское замедление и сокращение

В настоящем параграфе мы установим связь между кинематическими характеристиками того или иного процесса в разных системах отсчета. Так же как и в механике, удобно использовать понятие точечного тела, в кинематике удобно использовать понятие *события*. Событием мы будем называть процесс, происходящий за пренебрежимо малый промежуток времени и в пренебрежимо малой области пространства. В силу своего определения событие в любой системе отсчета характеризуется определенными координатами и временем.

Выясним сначала, как преобразуется промежуток времени между двумя событиями при переходе из одной инерциальной системы отсчета в другую. Для этого нам понадобится ввести две различные системы отсчета. Для наглядности мы будем связывать одну из этих систем отсчета с Землей, а другую — с космическим кораблем, который пролетает мимо Земли со скоростью v . Будем считать, что корабль ориентирован вдоль вектора скорости $\vec{v}$, то есть движется носом вперед.

Чтобы связать между собой промежутки времени в этих системах отсчета, мы используем уже установленную нами ранее независимость скорости света от системы отсчета. Проведем мысленный эксперимент, связанный с распространением света. Представим себе, что лазер, стоящий у одного из бортов корабля, посылает сигнал (световой импульс) к другому борту, где свет отражается от зеркала и возвращается обратно к лазеру, возле которого стоят часы, фиксирующие время путешествия светового сигнала (рис. 119). Очевидно, что по корабельным часам время пробега туда и обратно будет равно $t_0 = 2h/c$, где h — расстояние между бортами, а c — скорость света.

Теперь посмотрим, как будет выглядеть этот же процесс с точки зрения земного наблюдателя. В системе отсчета, связанной с Землей, космический корабль движется, поэтому за время путешествия сигнала от одного борта до другого



Рис. 119. Траектория светового сигнала, движущегося в поперечном направлении, в системах отсчета, связанных с Землей и космическим кораблем

укрепленное на нем зеркало сдвинется. Это означает, что в системе отсчета, связанной с Землей, световой импульс будет двигаться не перпендикулярно к скорости движения корабля, а наклонно. Так же наклонно, причем под тем же углом к зеркалу, световой импульс будет двигаться и после отражения от него (рис. 119). Понятно, что проекция скорости светового импульса на ось, направленную вдоль скорости движения корабля $\vec{v}$, будет равна величине этой скорости v . Поэтому проекция его скорости на ось, перпендикулярную $\vec{v}$, будет равна $\sqrt{c^2 - v^2}$. Отсюда следует, что свет пройдет путь от одного борта до другого и обратно за время

$$t = \frac{2h}{\sqrt{c^2 - v^2}}.$$

Таким образом, время t_0 , прошедшее между моментами отправления и прибытия луча, измеренное космонавтом, не будет равно времени t , прошедшему между теми же событиями по часам земного наблюдателя. Сравнивая между собой выражения для t и t_0 , мы заключаем, что

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Точно такое же соотношение будет справедливо для промежутков времени между любыми двумя событиями, произошедшими на космическом корабле. В соответствии с приведенным соотношением, t всегда больше, чем t_0 , то есть промежуток времени на часах земного наблюдателя будет больше, чем на часах космонавта. Другими словами, ход физических процессов, идущих на космическом корабле, бу-

дет казаться земному наблюдателю замедленным. Об этом явлении говорят как о *лоренцевском замедлении*.

Задача Д2.1. С какой скоростью должен двигаться космический корабль от Солнца до звезды, отстоящей от Солнца на четыре световых года, чтобы по корабельным часам путешествие заняло три года? Считать, что корабль движется равномерно. Световой год — расстояние, которое свет проходит в течение одного года.

Уже здесь можно сформулировать первый парадокс, связанный с теорией относительности. Поскольку все инерциальные системы отсчета эквивалентны между собой, мы можем утверждать, что ход физических процессов на Земле с точки зрения космонавта также будет замедлен. Отсюда, казалось бы, вытекает соотношение $t_0 = t/\sqrt{1-v^2/c^2}$, обратное приведенному выше, и мы приходим к противоречию.

Разрешение этого парадокса заключается в том, что соотношение $t = t_0/\sqrt{1-v^2/c^2}$ относится к событиям, происшедшим в одной и той же точке в системе отсчета, связанной с космическим кораблем, но не в системе отсчета, связанной с Землей. Действительно, точка, из которой световой импульс отправился в путешествие в описанном мысленном эксперименте, и точка, в которую он возвратился, совпадают с точки зрения космонавта, но вовсе не совпадают с точки зрения земного наблюдателя. Эта неравноправность, связанная с условиями наблюдения, и отражается в несовпадении t и t_0 .

Указанную неравноправность можно попробовать обойти, несколько усовершенствовав условия мысленного эксперимента с тем, чтобы сравнивать промежутки времени между событиями, происходящими в одной и той же точке в обеих системах отсчета. В результате мы приходим к формулировке так называемого *парадокса близнецов*, суть которого заключается в следующем. Предположим, что на Земле живут два близнеца, один из которых отправляется в полет на космическом корабле. Спрашивается, какой из близнецов будет старше по возвращении космического

корабля? С точки зрения близнеца, оставшегося на Земле, ход физических процессов на космическом корабле будет казаться замедленным, но, с другой стороны, с точки зрения близнеца, летящего на корабле, будет замедлен ход процессов, идущих на Земле. Поэтому кажется, что на поставленный вопрос имеется два противоречивых ответа.

Разрешение этого парадокса заключается в следующем. В описанном мысленном эксперименте оба события — расставание и встреча близнецов — действительно происходят в одной и той же точке как в системе отсчета, связанной с Землей, так и в системе отсчета, связанной с кораблем. Однако равноправность этих систем отсчета нарушена в другом: связанная с космическим кораблем система отсчета не является инерциальной, поскольку он должен двигаться с ускорением, разворачиваясь к Земле. Поэтому правильным является рассуждение о замедлении времени только с точки зрения близнеца, оставшегося на Земле, с которой связана инерциальная система отсчета. Таким образом, моложе после возвращения будет близнец, летавший на космическом корабле.

Опишем теперь происходящее с точки зрения близнеца, летящего на корабле. Пока связанная с кораблем система отсчета инерциальна, корабль равномерно движется от Земли или к Земле, все события на ней действительно кажутся летящему на корабле близнецу замедленными. Однако, в процессе разворота корабля, инерциальность его системы отсчета нарушится. Все события на Земле с точки зрения космонавта чрезвычайно ускорятся. Этого ускорения оказывается достаточно, чтобы оставшийся на Земле брат в момент встречи оказался старше, несмотря на замедление процессов по дороге туда и обратно. Фактически описанная картина не может быть обоснована в рамках специальной теории относительности, которая рассматривает только инерциальные системы отсчета. Она вытекает из анализа, сделанного с привлечением общей теории относительности, основные идеи которой кратко обсуждаются в последнем параграфе этого Дополнения.

Установим теперь, как связаны между собой линейные размеры предметов в разных системах отсчета. Вернемся к системам отсчета, связанным с Землей и космическим кораблем. Прежде всего, можно утверждать, что поперечные по отношению к направлению движения корабля размеры любого предмета, измеренные космонавтом и земным наблюдателем, будут равны между собой. Мы фактически использовали это свойство при выводе закона лоренцевского замедления, так как считали, что расстояние h между бортами космического корабля является одним и тем же в обеих системах отсчета.

Равенство поперечных размеров предметов следует из принципа относительности, так как процесс их измерения, скажем, при помощи линейки, выглядит совершенно одинаково в обеих системах отсчета. В то же время для продольных размеров это рассуждение неверно. Дело в том, что земной наблюдатель при измерении, например, длины космического корабля, приложит к нему линейку так, чтобы она одновременно коснулась носа и кормы корабля, в то время как для космонавта моменты касания линейкой носа и кормы будут разными. Таким образом, процесс измерения длины космического корабля в связанной с ним системе отсчета и в системе отсчета, связанной с Землей, выглядит по-разному и дает вследствие этого разные результаты.

Найдем связь между длиной корабля l_0 , измеренной космонавтом, и его длиной l , измеренной земным наблюдателем. Воспользуемся уже известным нам приемом, поставив мысленный эксперимент с распространением светового сигнала. А именно, предположим, что лазер, стоя на корме корабля, генерирует световой импульс, который движется к носу корабля, где он отражается от зеркала и возвращается обратно (рис. 120). На это путешествие свету понадобится время $t_0 = 2l_0/c$.

В системе же отсчета, связанной с Землей, путешествие светового сигнала будет выглядеть иначе (рис. 120). Пока свет путешествует от кормы к носу, последний смещается со скоростью v . Отсюда следует, что $c \cdot t_1 = l + v \cdot t_1$, где

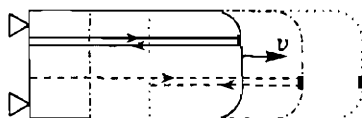


Рис. 120. Траектория светового сигнала, движущегося в продольном направлении, в системах отсчета, связанных с Землей и космическим кораблем

t_1 — время распространения света от кормы к носу, а l — длина космического корабля в системе отсчета, связанной с Землей. Аналогичным образом для обратного путешествия находим $c \cdot t_2 = l - v \cdot t_2$, где t_2 — время путешествия от носа к корме. Выражая отсюда t_1 и t_2 и складывая эти величины, находим следующее выражение для общего времени путешествия сигнала:

$$t = t_1 + t_2 = \frac{2lc}{c^2 - v^2}.$$

Поскольку в системе отсчета, связанной с кораблем, сигнал отправляется в путешествие из той же точки, в которой он финиширует, величины t и t_0 связаны между собой соотношением Лоренца $t = t_0 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$. Используя его, находим окончательно

$$l = l_0 \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

Таким образом, с точки зрения земного наблюдателя корабль будет выглядеть короче, чем тот же корабль с точки зрения космонавта. Этот эффект является всеобщим, он наблюдается для продольных размеров любого тела вне зависимости от его формы и состава. Об этом явлении говорят, как о *лоренцевском сокращении*.

Вопрос Д2.1. Предположим, что земной наблюдатель измеряет длину космического корабля линейкой, одновременно касаясь кормы и носа. Какое из этих касаний с точки зрения космонавта произойдет раньше?

Задача Д2.2. Найдите плотность заряда ρ однородно заряженного стержня, движущегося со скоростью v , если в системе отсчета, где он покоится, плотность заряда равна ρ_0 .

Указание: используйте независимость заряда стержня от системы отсчета.

Лоренцевское сокращение приводит к тому, что пропорции и ориентация тел зависят от системы отсчета, поскольку продольные размеры тела меняются при переходе от одной системы отсчета к другой, а поперечные размеры тела остаются неизменными. Рассмотрим в качестве примера ориентацию иголки (тела пренебрежимо малых поперечных размеров) в разных системах отсчета. На рис. 121 показана иголка в двух системах отсчета: она наклонена под углом α к оси x в системе отсчета, где иголка покоится, и под

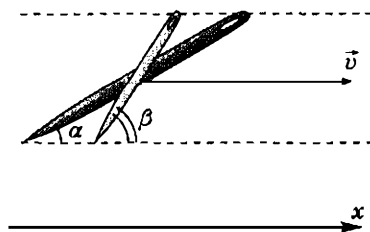


Рис. 121. Ориентация иголки в двух системах отсчета

углом β в системе отсчета, где она движется со скоростью v в направлении оси x . Размер иголки в направлении, перпендикулярном вектору скорости, будет одним и тем же, а продольный размер в системе отсчета, где иголка движется, будет меньше, поэтому угол β будет больше, чем α .

Задача Д2.3. Иголка имеет длину l_0 и направлена под углом α к оси x в системе отсчета, где она покоится. Найдите длину иголки и ее ориентацию в системе отсчета, где она движется в направлении оси x со скоростью v .

удаляющемся от Земли корабле, периодически посылает на Землю световые сигналы. Если земному наблюдателю известно время T_0 , которое проходит по часам космонавта между моментами отправления световых сигналов, то он сможет вычислить скорость космического корабля v , измерив время T между моментами прихода световых сигналов на Землю. Для этого надо знать связь между T_0 , T и v . Установим эту связь, выразив T через T_0 .

Прежде всего, по часам земного наблюдателя между моментами отправления световых сигналов пройдет время

$$t = \frac{T_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

За это время космический корабль сместится на расстояние $\Delta x = v \cdot t$ (см. рис. 123). Таким образом, путь, который

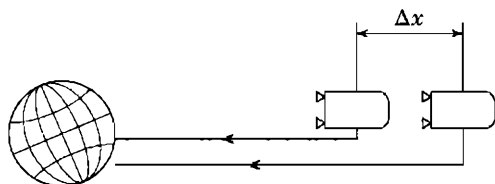


Рис. 123. Пути, которые проходят два последовательных световых сигнала, посланных на Землю с космического корабля

необходимо будет пройти очередному сигналу до Земли, будет на Δx больше, чем путь предыдущего сигнала. Поэтому время запаздывания каждого приходящего на Землю сигнала по отношению к предыдущему будет складываться из двух частей: времени t между моментами отправления сигналов и времени $\Delta x/c$ прохождения дополнительного отрезка пути. Итак $T = t + \Delta x/c$. Подставляя сюда значения для величин t и Δx , находим окончательно

$$T = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} T_0.$$

Это соотношение справедливо как для космического корабля, удаляющегося от Земли, так и для корабля, прибли-

жающегося к Земле. Только в первом случае скорость v в приведенной формуле надо считать положительной, а во втором — отрицательной. Поэтому промежуток времени T будет больше времени T_0 для удаляющегося от Земли корабля и меньше времени T_0 для корабля, приближающегося к ней.

Полученная выше формула устанавливает связь между периодом T_0 произвольного периодического движения, происходящего на космическом корабле, и периодом T поступающих на Землю сигналов об этом движении, приносимых электромагнитными волнами. Например, если космонавт посылает на Землю радиоволны с периодом T_0 , то на Земле они будут восприниматься как радиоволны с периодом T . Частоты же этих радиоволн будут соотноситься следующим образом:

$$\omega = \sqrt{\frac{c-v}{c+v}} \omega_0.$$

Частота ω будет меньше ω_0 , если космический корабль удаляется от Земли, и больше ω_0 для приближающегося к ней корабля. Приведенное соотношение справедливо для произвольных тел.

Итак, частота волны ω , испускаемая движущимся источником, не будет равна частоте той же волны, которая будет измерена неподвижным наблюдателем, причем соотношение между этими частотами будет определяться скоростью движения источника относительно наблюдателя. Зависимость частоты принимаемой волны от скорости ее источника называется *эффектом Доплера*. Эффект Доплера имеет место для любого волнового движения. Приведенное же соотношение справедливо для волн, распространяющихся со скоростью света, в частности для произвольных электромагнитных волн. Изменение частоты световой волны означает изменение ее цвета. Если тело, с которого испускается свет, удаляется от Земли, то цвет принимаемой на Земле волны будет сдвинут по сравнению с цветом испускаемой волны в красную сторону спектра, а если приближается к ней — то в фиолетовую. Более того, если скорость тела достаточно

велика, то испускаемая им световая волна может восприниматься на Земле в ультрафиолетовом или инфракрасном диапазоне.

Задача Д3.1. Найдите скорость космического корабля, с которой он должен удаляться от Земли, чтобы испускаемый с него фиолетовый световой луч казался земному наблюдателю красным.

Приведенное соотношение между ω и ω_0 справедливо только в том случае, когда скорость излучающего тела направлена прямо к Земле или от нее. В случае произвольного направления скорости связь между ω и ω_0 становится сложнее. Тем не менее и в этом случае ее можно найти способом, подобным описанному.

Задача Д3.2. Найдите связь между частотами световых сигналов, испускаемого с космического корабля и принимаемого на Земле, если корабль движется относительно Земли со скоростью $\vec{v}$, перпендикулярной проходящей через них прямой.

Эффект Доплера может быть использован для определения относительной скорости движения излучающего тела и Земли. Обращая соотношение между ω и ω_0 , мы находим

$$v = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega_0^2 + \omega^2} c.$$

Эта формула позволяет вычислить скорость тела относительно Земли, если известна частота ω_0 испускаемых им электромагнитных волн и измерена частота ω тех же волн, принятых на Земле. Положительное значение v , полученное по приведенной формуле, соответствует удалению тела от Земли, а отрицательное — приближению его к Земле. Отметим, что именно на основе эффекта Доплера астрономы определяют скорость движения отдельных звезд и целых галактик относительно Земли.

Теперь мы уже можем найти релятивистский закон преобразования скорости из одной системы отсчета в другую.

Для наглядности рассмотрим случай, когда с космического корабля, движущегося со скоростью v_1 от Земли, в том же направлении стартует ракета, которая движется со скоростью v_2 относительно космического корабля. Определим скорость, с которой ракета будет двигаться относительно Земли.

Для этого предположим, что с ракеты в сторону космического корабля испускается электромагнитная волна с частотой ω_0 , а на корабле стоит ретранслятор, который усиливает принимаемый сигнал и отправляет волну дальше в сторону Земли. Частота волны ω_1 , которая будет усиливаться ретранслятором, будет равна

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{c - v_2}{c + v_2}} \omega_0.$$

На Земле же частота принимаемой волны будет равна

$$\omega = \sqrt{\frac{c - v_1}{c + v_1}} \omega_1 = \sqrt{\frac{c - v_1}{c + v_1}} \sqrt{\frac{c - v_2}{c + v_2}} \omega_0.$$

Это соотношение связывает между собой частоту волны ω_0 , испускаемую с ракеты, и частоту волны ω , воспринимаемую на Земле.

Теперь мы можем воспользоваться полученной нами выше формулой для скорости v , выраженной через ω и ω_0 . В результате простых вычислений мы получаем окончательный результат:

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2 / c^2}.$$

Приведенное выражение имеет смысл релятивистского закона преобразования скорости тела из одной инерциальной системы отсчета в другую, причем v_2 и v — скорости движения тела в различных системах отсчета, а v_1 — относительная скорость движения систем отсчета. Этот закон справедлив для скоростей v_1 и v_2 , направленных вдоль одной прямой. При этом знаки v_1 и v_2 могут быть как положительными, так и отрицательными — в зависимости от направлений v_1 и v_2 . Для неколлинеарных скоростей

закон сложения скоростей имеет более сложный вид, мы не будем приводить его здесь.

Для скоростей, гораздо меньших скорости света, можно пренебречь членом $v_1 v_2 / c^2$ в знаменателе релятивистского закона сложения скоростей, и мы возвращаемся к нерелятивистскому выражению $v = v_1 + v_2$, приведенному в начале параграфа. Несложно проверить, что для произвольных скоростей $v_1 < c$ и $v_2 < c$ всегда будет также и $v < c$. Другими словами, если в одной инерциальной системе отсчета тело движется со скоростью, меньшей скорости света, то оно будет двигаться медленнее света и в любой другой инерциальной системе отсчета.

Задача Д3.3. Найдите скорость движения ракеты относительно Земли, если скорость ракеты относительно космического корабля равна $3c/4$, а скорость корабля относительно Земли равна $c/2$.

Подставляя в закон сложения скоростей $v_2 = c$, мы находим, что и $v = c$. Другими словами, если скорость какой-либо частицы в одной системе отсчета равна c , то и в любой другой системе отсчета она также будет равна c . Такие частицы реально существуют. Это фотоны — кванты электромагнитного поля, которое как раз и распространяется со скоростью света в любой системе отсчета.

§ 4. Релятивистская динамика

Сделаем теперь обещанное уточнение законов механики с учетом релятивистских эффектов. Это позволит нам перейти к исследованию особенностей движения тел со скоростями, сравнимыми со скоростью света c .

Фактически следует уточнить только второй закон Ньютона. В рамках теории относительности остается справедливой следующая его формулировка:

$$\vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t},$$

где $\vec{F}$ — сила, действующая на тело, а $\Delta \vec{p}$ — изменение его импульса за малое время Δt . Универсальность приведенной формулировки связана с тем, что она не содержит никаких конкретных характеристик тела, а означает только, что его импульс изменяется под действием внешней силы.

Импульс тела равен, как известно, произведению его массы на скорость:

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}.$$

При постоянной массе m соотношение $\vec{F} = \Delta \vec{p} / \Delta t$ эквивалентно обычной формулировке второго закона Ньютона: $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$. Дело, однако, заключается в том, что масса тела m , как мы покажем в настоящем параграфе, зависит от скорости его движения v . Поэтому соотношение $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ справедливо только для скоростей движения тела, много меньших скорости света, когда его массу можно считать константой, не зависящей от скорости.

Никаких изменений не требует и выражение для мощности $\vec{F} \cdot \vec{v}$, которую развивает действующая на тело сила $\vec{F}$. Дело в том, что оно прямо следует из выражения для работы силы $\Delta A = \vec{F} \cdot \Delta \vec{l}$, справедливого вне зависимости от величины скорости тела.

Также без изменений остается и третий закон Ньютона. Следует только помнить, что в рамках теории относительности никоим образом нельзя игнорировать собственную динамику полей. В этой ситуации третий закон Ньютона

применим к взаимодействию поля с телом или к взаимодействию двух полей.

Попробуем теперь разобраться с релятивистскими законами движения частиц. Вначале мы обратимся к простейшему с точки зрения теории относительности случаю — частицам, движущимся со скоростью света. Для определенности мы будем говорить о фотоне.

Предположим, что на фотон в направлении его движения действует постоянная сила $\vec{F}$. Его скорость под действием приложенной силы меняться не будет (она всегда равна c), но его импульс $\vec{p}$ и энергия U изменяться, конечно, будут. В соответствии со вторым законом Ньютона изменение импульса фотона за время Δt будет равно $\Delta p = F \cdot \Delta t$. Та же сила будет развивать постоянную мощность, равную $F \cdot c$. Поэтому изменение энергии фотона будет равно $\Delta U = F \cdot c \cdot \Delta t$. Отсюда следует, что эти изменения следующим образом связаны между собой: $\Delta U = c \cdot \Delta p$. Конечно, при нулевом импульсе и энергия фотона будет равна нулю, поэтому энергия и импульс фотона будут связаны между собой точно так же, как и их вариации:

$$U = c \cdot p$$

Это соотношение справедливо не только для фотона, но и для любой частицы, движущейся со скоростью света.

Задача Д4.1. Фотон двигается по круговой траектории радиуса r . Найдите величину действующей на него силы, если импульс фотона остается постоянным по величине и равным p .

Предположим теперь, что два фотона сталкиваются и слипаются друг с другом. В результате возникнет частица, которая будет двигаться со скоростью, меньшей скорости света. Рассмотрим на примере такой частицы соотношение между энергией U , импульсом p и скоростью v тела в теории относительности.

Будем считать, что слипаются фотоны, имевшие до столкновения одинаковые значения энергии $U/2$ и двигавшиеся

под углом θ к оси x (рис. 124). Энергия частицы, которая возникает в результате слипания, будет вследствие закона сохранения энергии равна U . Помимо энергии при столкновении будет сохраняться также и импульс. Сумма проекций импульсов фотонов на ось y будет равна нулю. Поэтому получившаяся в результате слипания частица будет иметь импульс p , направленный вдоль оси x . Его можно найти, складывая x -компоненты импульсов фотонов:

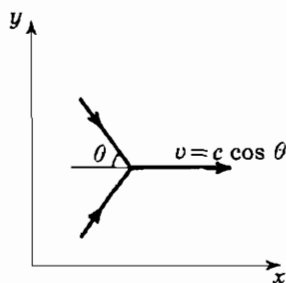


Рис. 124. Два фотона, сталкивающиеся друг с другом

$$p = \frac{U}{2c} \cos \theta + \frac{U}{2c} \cos \theta = \frac{U}{c} \cos \theta$$

До столкновения проекции скоростей фотонов на ось x были равны $v_x = c \cdot \cos \theta$. Очевидно, с такой же скоростью будет двигаться и частица, возникшая при их слипании. Сравнивая эту скорость с выражением для импульса частицы, мы приходим к выводу, что

$$p = \frac{U}{c^2} v.$$

Вспоминая теперь, что коэффициент пропорциональности между импульсом тела и его скоростью является его массой, мы находим

$$U = m \cdot c^2.$$

Итак, мы получили знаменитое соотношение Эйнштейна между энергией частицы и его массой. Оно справедливо для любого тела. Это соотношение показывает, что масса тела и его энергия не являются независимыми величинами, а однозначно связаны между собой. Разумеется, приведенная формула справедлива и для фотона, так как его масса, то есть коэффициент пропорциональности между его импульсом p и скоростью c , будет равен как раз $p/c = U/c^2$.

Соотношение $U = m \cdot c^2$ справедливо как для движущегося, так и для покоящегося тела. Отсюда следует, что

и покоящееся тело обладает энергией $m_0 \cdot c^2$, которая называется энергией покоя. Здесь m_0 — масса покоящейся частицы, или, как ее еще называют, *масса покоя*. Из-за большого значения скорости света энергия покоя тела обычно намного превышает, например, его тепловую энергию.

Задача Д4.2. Найти энергию покоя тела массой 0,1 кг. Сравнить эту энергию с тепловой энергией гелия той же массы при нормальных условиях.

Однако энергия покоя тела может переходить в другие формы энергии только при процессах, ведущих к изменению массы покоя. Это происходит, например, при развале ядра на осколки, суммарная масса покоя которых меньше массы ядра. Именно такой процесс, сопровождающийся выделением огромной энергии, идет при взрыве ядерной бомбы.

Теперь мы найдем зависимость массы тела от его скорости. Для этого возвратимся к опыту со слипанием фотонов. Выясним, чему будет равна энергия частицы, возникающей в результате слипания, в той системе отсчета, где она покоится. Очевидно, такая система, которую мы будем называть системой покоя, движется относительно первоначально выбранный со скоростью $v = c \cdot \cos \theta$, равной скорости частицы. В этой системе столкновение фотонов выглядит как лобовой удар, в результате которого фотоны, слипшись, образуют неподвижную частицу.

В системе покоя импульсы фотонов направлены вдоль оси y . Их величины будут равны $p \sin \theta$, то есть y -компонентам импульса фотонов в первоначальной системе отсчета (рис. 124). Дело в том, что вследствие принципа относительности поперечная компонента импульса любого тела, как и его поперечные размеры, не меняются при переходе от одной системы отсчета к другой. Таким образом, в системе покоя энергия каждого из фотонов, равная произведению величины его импульса на скорость света, равна $(U/2) \cdot \sin \theta$.

В силу закона сохранения энергии суммарная энергия фотонов в системе покоя должна равняться $m_0 c^2$, где m_0 —

масса покоя. Поэтому $m = (U/c^2) \cdot \sin \theta$. Вспоминая теперь, что скорость частицы в исходной системе отсчета равна $c \cdot \cos \theta$, а масса равна U/c^2 , и воспользовавшись соотношением $\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta}$, находим окончательно

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Это и есть закон, по которому масса тела зависит от его скорости. Обратим внимание на то, что масса движущегося тела больше массы покоя. Зависимость импульса тела от скорости можно теперь найти по формуле $p = m \cdot v$, а энергию тела — по формуле $U = m \cdot c^2$. Исходя из этих выражений легко проверить, что энергия и импульс тела связаны между собой следующим образом:

$$U = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4}.$$

При $m_0 = 0$ эта формула дает соотношение $U = p \cdot c$, справедливое для фотона. Отсюда следует, что масса покоя фотона равна нулю.

При скоростях v , малых по сравнению со скоростью света c , приведенные соотношения должны переходить в соотношения, которые выводятся в рамках ньютоновской динамики. Для импульса это вполне очевидно, так как при малых v масса тела мало отличается от массы покоя m_0 , и мы возвращаемся к выражению $p = m_0 v$. Покажем, каким образом из релятивистского выражения для энергии тела $m \cdot c^2$ получается нерелятивистское (Ньютоновское) выражение для кинетической энергии.

Для этого воспользуемся известным соотношением

$$(1 - a)^n \approx 1 - a \cdot n,$$

справедливым при малых a . Заменяя в соответствии с этим соотношением $1/\sqrt{1 - v^2/c^2} = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ на $1 + v^2/(2c^2)$ в формуле, дающей зависимость массы от скорости, находим

$$U \approx m_0 \cdot c^2 + m_0 \cdot v^2/2.$$

Первое слагаемое здесь представляет собой энергию покоя, а второе слагаемое является хорошо известным выражением для кинетической энергии тела, которая как раз и дает отличие энергии движущегося тела от энергии того же, но покоящегося тела.

В заключение несколько слов об энергии и импульсе поля. Полученные в соответствующих разделах курса физики выражения для плотности энергии электромагнитного поля и плотности его импульса

$$\frac{E^2}{2\varepsilon_0} + \frac{\mu_0 B^2}{2}, \quad \vec{E} \times \vec{B} / \varepsilon_0$$

справедливы и в теории относительности. Причина этого уже отмечалась нами — поскольку электромагнитные волны, то есть возмущения электромагнитного поля, распространяются со скоростью света, описывающие это поле соотношения с самого начала носят релятивистский характер. В дополнение к этому мы можем теперь сказать, что вследствие соотношения $m = U/c^2$ поле наряду с энергией обладает также и массой.

|| **Вопрос Д4.1.** Будет ли электромагнитное поле притягивать к себе тела в соответствии с законом всемирного тяготения?

§ 5. Релятивистское движение заряженного тела

В этом параграфе мы рассмотрим движение заряженного тела во внешнем электрическом или магнитном поле со скоростями, сравнимыми со скоростью света. Мы разберем несколько примеров, демонстрирующих особенности такого движения.

Мы начнем с рассмотрения движения заряженного тела в однородном электрическом поле, законы которого легко исследовать до конца. Уже этот пример позволяет продемонстрировать основные особенности релятивистского движения тела во внешнем поле. Отметим, что полученные выражения будут описывать движение точечного заряда в произвольных достаточно сильных электрических полях, так как в этом случае события будут развиваться быстро, то есть в небольших областях пространства, где поле можно считать однородным.

Предположим, что в начальный момент времени тело покоится. Сила $\vec{F}$, действующая на заряженное тело со стороны электрического поля, будет равна $q \cdot \vec{E}$, где q — заряд тела, а $\vec{E}$ — напряженность поля. Поэтому изменение импульса тела за время Δt будет равно $\Delta \vec{p} = \vec{F} \cdot \Delta t = q \cdot \vec{E} \cdot \Delta t$. Поскольку в однородном поле действующая на тело сила не зависит от времени, это выражение справедливо для произвольного промежутка времени. Отсюда следует, что в момент времени t он будет равен

$$p = q \cdot E \cdot t.$$

Теперь мы можем получить выражение для энергии тела, используя полученную в предыдущем параграфе формулу:

$$U = \sqrt{p^2 \cdot c^2 + m_0^2 \cdot c^4} = \sqrt{q^2 E^2 t^2 c^2 + m_0^2 c^4}.$$

Обратим внимание на то, что энергия тела, так же как и его импульс, будет неограниченно возрастать со временем.

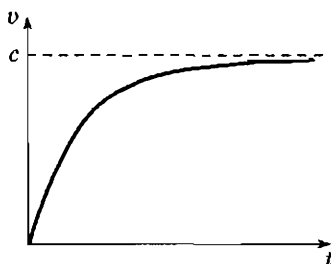


Рис. 125. Зависимость от времени скорости заряженной частицы в однородном электрическом поле

Скорость же тела можно найти, воспользовавшись соотношениями $m = U/c^2$, $v = p/m$. В результате получаем

$$v = \frac{qEt c}{\sqrt{q^2 E^2 t^2 + m_0^2 c^2}}.$$

Зависимость скорости от времени представлена на графике (рис. 125). Сначала скорость в соответствии с нерелятивистской теорией линейно растет со временем, а затем начинает возрастать все медленнее и медленнее, постепенно приближаясь к скорости света, но никогда не достигая ее.

Обобщая это наблюдение, можно сделать вывод, что даже неограниченно долго ускоряя тело, его нельзя разогнать до скорости, превышающей скорость света.

Предположим теперь, что скорость тела в начальный момент времени не равна нулю. Если она направлена вдоль вектора напряженности $\vec{E}$, то она в любой момент времени будет иметь то же направление. Следовательно, задача сведется к предыдущей, если сдвинуть начало отсчета времени. Рассмотрим теперь общий случай. Сдвигая начало отсчета времени, мы всегда можем добиться того, чтобы компонента скорости вдоль $\vec{E}$ равнялась бы нулю. Тогда в начальный момент времени тело будет иметь только перпендикулярную к $\vec{E}$ составляющую скорости и, соответственно, ненулевую компоненту $p_{\perp}$ импульса. Эта составляющая импульса со временем меняться не будет, так как

сила действует на тело вдоль $\vec{E}$. Что же касается составляющей импульса вдоль $\vec{E}$, то она будет меняться по тому же закону, что и раньше: $p_{\parallel} = qEt$. Энергия же тела будет равна

$$U = \sqrt{q^2 E^2 t^2 c^2 + p_{\perp}^2 c^2 + m_0^2 c^4}.$$

Как и выше, энергия и импульс тела неограниченно возрастают со временем.

Далее, мы находим две составляющие скорости — вдоль $\vec{E}$ и перпендикулярную к этому направлению:

$$v_{\parallel} = \frac{qEtc}{\sqrt{q^2 E^2 t^2 + p_{\perp}^2 + m_0^2 c^2}}, \quad v_{\perp} = \frac{p_{\perp} c}{\sqrt{q^2 E^2 t^2 + p_{\perp}^2 + m_0^2 c^2}}.$$

Обратим внимание на то, что компонента $v_{\perp}$ уменьшается со временем. Это связано с тем, что с ростом t абсолютная величина скорости приближается к скорости света c , одновременно поворачиваясь так, что ее направление стремится к направлению $\vec{E}$.

Предположим теперь, что заряженное тело движется во внешнем статическом электрическом поле с потенциалом φ . В этом случае имеет место закон сохранения энергии

$$\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + q\varphi = \text{const.}$$

Здесь первое слагаемое — собственная энергия тела (включающая энергию покоя и кинетическую энергию), а второе слагаемое — его потенциальная энергия во внешнем электрическом поле. Закон сохранения энергии налагает важное ограничение на возможный вид траекторий заряженного тела и помогает в решении ряда задач.

Задача Д5.1. Предположим, что заряженное тело с массой покоя m_0 в начальный момент времени имеет нулевую скорость и находится в начале координат. Найти зависимость скорости тела v от координаты x , если оно движется в однородном электрическом поле с напряженностью E , направленной вдоль оси X .

Обратимся к важной задаче о движении точечного заряда с массой покоя m_0 и зарядом q в поле другого точечного заряда Q , который предполагается достаточно массивным для того, чтобы можно было считать его неподвижным. Тогда заряд q будет двигаться в поле с потенциалом $\varphi = Q/(4\pi\epsilon_0 r)$, где r — расстояние между телами. Закон же сохранения энергии приобретает следующий вид

$$\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \Pi = \text{const}, \quad \Pi = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Здесь Π — потенциальная энергия взаимодействия зарядов.

Задача Д5.2. Предположим, что заряд q движется прямо к заряду Q . Если эти тела заряжены одноименно, то есть $qQ > 0$, то заряд q приблизится к заряду Q на некоторое минимальное расстояние r_0 , а затем начнет двигаться в обратном направлении. Найдите величину r_0 , считая, что скорость заряда q на бесконечности равна v .

Если заряды q и Q разноименны, то они притягиваются друг к другу. Мы знаем, что подобное притяжение приводит к вращению планет вокруг Солнца. Аналогично при некоторых условиях заряд q будет вращаться вокруг заряда Q . Мы изучим это движение, считая, что заряд q движется вокруг заряда Q по круговой траектории радиуса r . Найдём скорость этого движения.

Импульс тела p , двигающегося по окружности, вращается с той же угловой скоростью ω , что и само тело. Отсюда следует, что абсолютная величина вектора $\Delta \vec{p}/\Delta t$ при малых значениях промежутка времени Δt будет равна $\omega \cdot p = pv/r$. В соответствии со вторым законом Ньютона отношение $\Delta \vec{p}/\Delta t$ должно быть равно силе, действующей на тело. В данном случае на тело действует кулоновская сила $F = qQ/(4\pi\epsilon_0 r^2)$. Приравнивая pvr и F друг к другу, находим

$$\frac{m_0 v^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = |\Pi|.$$

Здесь мы использовали выражение для импульса тела через его скорость и обозначение для потенциальной энергии взаимодействия зарядов. Решая соответствующее квадратное уравнение, находим:

$$v^2 = \frac{\Pi}{m_0} \left(\sqrt{1 + \frac{\Pi^2}{4m_0^2 c^4}} - \frac{\Pi}{2m_0 c^2} \right).$$

В нерелятивистском пределе $\Pi \ll m_0 c^2$ это выражение дает известный ответ $v^2 = \Pi/m_0$, а в обратном пределе $\Pi \gg m_0 c^2$ оно приводит к скорости движения, близкой к скорости света.

|| **Задача Д5.3.** Найдите выражение для полной энергии точечного заряда q , движущегося вокруг заряда Q по круговой траектории радиуса r .

Теперь мы рассмотрим релятивистское движение заряженной частицы в однородном магнитном поле с напряженностью B , анализ которого в значительной степени аналогичен анализу кругового движения точечного заряда, изложенному выше.

Сначала мы будем считать, что составляющая скорости тела вдоль напряженности поля равна нулю. Как мы знаем, при этих условиях в нерелятивистском случае тело будет двигаться по окружности. То же относится и к релятивистскому случаю. Найдем период движения T тела по этой окружности. В соответствии со вторым законом Ньютона отношение $\Delta \vec{p}/\Delta t$ должно быть равно силе, действующей на тело. В данном случае на тело действует сила Лоренца, абсолютная величина которой равна qvB , поскольку направление движения тела перпендикулярно B . Абсолютная же величина $\Delta \vec{p}/\Delta t$, как мы уже отмечали, равна $\omega \cdot p$. Приравнявая эту величину к qvB , находим

$$\omega = \frac{q \cdot B}{m}.$$

Соответственно, период будет равен $T = 2\pi/\omega = 2\pi m/(qB)$.

Формально найденные выражения для ω и T совпадают с выражениями для частоты и периода вращения нерелятивистского заряженного тела в магнитном поле. Однако следует помнить, что в релятивистском случае масса m зависит от скорости тела v . Поэтому в отличие от нерелятивистского случая, когда T является константой, определяемой массой и зарядом тела, но не его скоростью, в релятивистском случае T будет зависеть также и от скорости тела v . Поскольку тело «тяжелее» с возрастанием v , с ростом скорости период обращения тела T в магнитном поле будет расти.

Если тело имеет составляющую скорости вдоль $\vec{B}$, то оно, как и в нерелятивистском пределе, в однородном поле будет двигаться по спирали. Несложно сообразить, что найденная величина T будет определять время движения тела по одному витку спирали.

|| **Задача Д5.4.** Докажите это утверждение. Выразите шаг спирали через T и параллельную $\vec{B}$ составляющую скорости $v_{||}$.

С зависимостью периода обращения заряженной частицы в магнитном поле физики вплотную столкнулись при создании *циклотронов*. Циклотроном называют ускоритель заряженных частиц, например протонов или электронов, которые движутся в вакууме в магнитном поле. Несогласованность периодов обращения частиц в магнитном поле, связанная с зависимостью этого периода от скорости, чрезвычайно осложняет проблему ускорения этих частиц до больших энергий. Отметим также, что именно наблюдения за частицами, движущимися в ускорителях со скоростями, сравнимыми со скоростью света, являются в настоящее время наиболее убедительными свидетельствами правильности теории относительности.

§ 6. Принцип эквивалентности

В заключение этого раздела мы скажем несколько слов об *общей теории относительности*, которая является обобщением специальной теории относительности. Количественный анализ эффектов, связанных с общей теорией относительности, требует математического аппарата, выходящего за пределы нашего пособия. Поэтому приведенное ниже рассмотрение по необходимости носит полукачественный характер.

Предметом общей теории относительности являются свойства *гравитационного поля* (поля тяготения), которое отвечает за гравитационное взаимодействие между телами. Прежде всего, гравитационное поле, как и поле электромагнитное, подчиняется принципу близкодействия. Это означает, в частности, что возмущения гравитационного поля должны распространяться с конечной скоростью, не превышающей предельную скорость распространения сигналов, которая, как мы уже отмечали, совпадает со скоростью света в вакууме c . Из общей теории относительности следует, что такие возмущения — *гравитационные волны* — должны распространяться в точности с той же скоростью c . И хотя гравитационные волны до сих пор экспериментально не наблюдались (в силу недостаточной чувствительности аппаратуры), мало кто сомневается в их существовании. В настоящее время разрабатывается несколько методик фиксирования гравитационных волн, которые должны испускать те или иные астрофизические объекты.

Таким образом, *закон всемирного тяготения*, который был сформулирован Ньютоном, работает только при скоростях, малых по сравнению со скоростью света. В частности, требует уточнения выражение для силы взаимодействия двух точечных тел

$$F = -\frac{GMm}{R^2},$$

где M и m — массы тел, R — расстояние между ними, а $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \text{ с}^{-2} \text{ кг}^{-1}$ — гравитационная постоянная.

Закон Ньютона работает, строго говоря, только для неподвижных тел. Однако приведенное выражение требует уточнения даже в этом (статическом) случае: оно справедливо только для тел достаточно малой массы. Ниже мы сформулируем критерий применимости формулы Ньютона.

Общая теории относительности является развитием специальной теории относительности, поскольку гравитационное поле оказывается тесно связанным с законами преобразования времени и координат при переходе от одной системы отсчета к другой. Мы уже изложили эти законы в применении к инерциальным системам отсчета, которые являются предметом изучения в специальной теории относительности. Теперь мы переходим к рассмотрению тех же явлений в неинерциальных системах отсчета, которые являются мостиком, ведущим к теории гравитации, то есть к общей теории относительности.

Исходным толчком для ее построения послужила аналогия между поведением тела в гравитационном поле и в неинерциальной системе отсчета. Сила, действующая на точечное тело со стороны гравитационного поля, равна mg , где g — ускорение свободного падения. В неинерциальной системе отсчета также возникают дополнительные силы, действующие на тело. Например, во вращающейся системе отсчета на тело действует центробежная сила, равная $m\omega^2 r$, где ω — угловая скорость, а r — расстояние от тела до оси вращения. В обоих случаях — в гравитационном поле и в неинерциальной системе отсчета — действующая на тело сила пропорциональна его массе m .

Обобщая это наблюдение, Эйнштейн сформулировал принцип эквивалентности, согласно которому неинерциальность системы отсчета эквивалентна наличию гравитационного поля. Конечно, затруднительно представить себе гравитационное поле, по своему действию эквивалентное переходу во вращающуюся систему отсчета во всем пространстве. Однако в любой ограниченной области пространства такое гравитационное поле создать, несомненно, можно. Например, находясь в замкнутом

лифте, невозможно отличить изменение условий, связанных с его ускорением, от изменения ускорения свободного ускорения. Если специальный принцип относительности утверждает равноправность всех инерциальных систем отсчета, то принцип эквивалентности уравнивает с ними в правах также и неинерциальные системы отсчета.

Мы обсудим здесь одно из следствий принципа эквивалентности, связанное с замедлением времени в гравитационном поле.

Снова обратимся к вращающейся системе отсчета, в которой на точечное тело действует центробежная сила $F = mr\omega^2$. Наличие этой силы означает, что тело, расположенное на расстоянии r от оси вращения, будет иметь центробежную энергию $\Pi = -mr^2\omega^2/2$, выражение для которой может быть найдено по аналогии с выражением для упругой энергии пружины. Знак минус в выражении для центробежной энергии возникает из-за того, что центробежная сила действует от оси, в то время как упругая сила, действующая на грузик со стороны пружины при отклонении его от равновесного положения, стремится вернуть его в это положение.

Заметим, что если тело покоится во вращающейся системе отсчета, то произведение $r\omega$ является его скоростью в соответствующей инерциальной системе отсчета. Поэтому с точки зрения наблюдателя, находящегося в этой инерциальной системе отсчета, все процессы в рассматриваемом теле будут замедлены. Количественно это замедление, как нам уже известно, будет определяться величиной $\sqrt{1 - v^2/c^2} = \sqrt{1 + 2\Pi/(mc^2)}$. В соответствии с принципом эквивалентности мы можем теперь утверждать, что процессы в покоящемся теле, помещенном в гравитационное поле, также будут замедлены с точки зрения наблюдателя, удаленного от источников гравитационного поля. Это замедление будет определяться той же величиной $\sqrt{1 + 2\Pi/(mc^2)}$, где теперь Π — потенциальная энергия тела массы m в гравитационном поле.

Отношение Π/m по аналогии с электрическим полем обычно называют потенциалом гравитационного поля и обо-

значают той же буквой φ . Для поля точечного тела массы M гравитационный потенциал равен

$$\varphi = -\frac{GM}{R},$$

где R — расстояние от точки наблюдения до тела, G — гравитационная постоянная, а знак минус связан с притягивающим характером взаимодействия. Гравитационный потенциал отрицателен в любом гравитационном поле, в теории Ньютона его можно найти по принципу суперпозиции. Сама же эта теория верна, если гравитационный потенциал φ гораздо меньше c^2 .

Итак, справедливо соотношение

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1 + 2\varphi/c^2}}.$$

Здесь t_0 — время между двумя событиями, измеренное по часам неподвижного наблюдателя, находящегося в гравитационном поле, φ — потенциал этого поля в той точке, где находится наблюдатель, а t — время между теми же событиями по часам покоящегося наблюдателя, удаленного от источников гравитационного поля, то есть находящегося там, где $\varphi = 0$. Время t будет больше, чем t_0 , поскольку потенциал гравитационного поля φ всегда меньше нуля. Это и означает, что наличие гравитационного поля приводит к замедлению всех процессов.

Соотношение между t и t_0 позволяет связать между собой показания часов неподвижных наблюдателей, расположенных в разных точках. Предположим, что по часам удаленного наблюдателя между двумя событиями прошло время t . Тогда по часам наблюдателей, расположенных в точках 1 и 2, времена между теми же событиями будут равны

$$t_1 = \sqrt{1 + 2\varphi_1/c^2} t, \quad t_2 = \sqrt{1 + 2\varphi_2/c^2} t,$$

то есть

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{\sqrt{1 + 2\varphi_1/c^2}}{\sqrt{1 + 2\varphi_2/c^2}}.$$

Таким образом, время оказывается тем меньше, чем больше φ по абсолютной величине. Это значит, например, что часы на последнем этаже здания идут за счет гравитации несколько быстрее, чем в подвале, поскольку потенциал φ гравитационного поля Земли с высотой убывает по абсолютной величине.

Если применима теория тяготения Ньютона, то есть если потенциал φ гравитационного поля гораздо меньше c^2 , то отношение φ/c^2 является малой величиной. Поэтому отношение t_1/t_2 будет приблизительно равно $t_1/t_2 \approx 1 + (\varphi_1 - \varphi_2)/c^2$. Это соотношение справедливо, в частности, для гравитационного поля Земли, потенциал которого по абсолютной величине во всех точках много меньше c^2 . Например, на ее поверхности $|\varphi|/c^2 = gR/c^2 \approx 7 \cdot 10^{-10}$, где $R = 6400$ км — радиус Земли, а $g = 9,8$ м/с² — ускорение свободного падения на ее поверхности.

Задача Д6.1. Найти, на какое время часы космонавтов, летающих над поверхностью Земли на высоте $h = 100$ км, будут убежать за год за счет рассматриваемого эффекта по сравнению с часами остальных жителей Земли. Сравните это время со временем, на которое они будут отставать за счет лоренцевского замедления.

Указание: поскольку h гораздо меньше радиуса Земли, разность $\varphi_1 - \varphi_2$ между потенциалом поля Земли на высоте h и на ее поверхности можно вычислить просто по формуле gh .

В гравитационном поле достаточно массивных и компактных тел $|\varphi|/c^2$ может достигать значений, сравнимых с единицей. В частности, φ/c^2 может достигнуть величины $-1/2$. В этом случае в пространстве возникнет поверхность, на которой $\varphi = -c^2/2$. На этой поверхности, которая в общей теории относительности называется *горизонтом*, время с точки зрения наружного наблюдателя остановится, так как для любого показания часов удаленного наблюдателя t промежуток времени между событиями в некоторой точке горизонта будет равен $t_0 = \sqrt{1 + 2\varphi/c^2} \cdot t = 0$. Поэтому

никакая информация о процессах, происходящих внутри горизонта, не сможет достигнуть внешнего наблюдателя.

По-видимому, гравитационное поле с горизонтом возникает у звезды с массой, в несколько раз превосходящей массу Солнца, в результате ее коллапса — сжатия до размеров в несколько километров — который происходит в конце ее жизненного пути. Такое образование астрономы называют *черной дырой*, поскольку из нее не могут выйти никакие сигналы, в том числе и световые волны. В то же время черная дыра обладает гравитационным полем, которое и позволяет обнаружить ее наличие во Вселенной.

На этом мы заканчиваем наше знакомство с основными идеями теории относительности.

Ответы на вопросы

Вопрос Д2.1. Положим, что длина линейки оказалась равной длине корабля. Измеренная земным наблюдателем длина корабля меньше его длины, измеренным космонавтом. Размер же линейки с точки зрения космонавта будет меньше, чем с точки зрения земного наблюдателя. Итак, в системе отсчета, связанной с кораблем, линейка короче корабля. Поэтому в этой системе отсчета линейка сначала коснется носа корабля, а затем уже его кормы. Время, которое пройдет между этими касаниями, необходимо, чтобы линейка сдвинулась относительно корабля на разность их длин.

Вопрос Д2.2. Иголка, проскакивающая через отверстие в мембране, имеет скорость, направленную под некоторым углом к мембране (рис. 122). Поэтому при переходе в систему отсчета, связанную с иголкой, и иголка, и мембрана повернутся (см. задачу Д2.3), причем иголка повернется по часовой стрелке, а мембрана — против часовой стрелки. Это и сделает возможным проскакивание иголки через отверстие в мембране, хотя в этой системе отсчета (связанной с иголкой) длина иголки будет больше размеров отверстия.

Вопрос Д4.1. Да, поскольку оно обладает энергией, а следовательно, и массой. Заметим, однако, что это утверждение предполагает совпадение инерционной и гравитационной масс, то есть свойство, которое обосновывается уже в рамках общей теории относительности.

Решения задач

Задача Д2.1. В системе отсчета, связанной с Землей, расстояние до звезды равно cT , где $T = 4$ года. Время движения корабля в той же системе отсчета равно $t = cT/v$, где v — скорость корабля. По корабельным же часам путешествие займет время $t_0 = \sqrt{1 - v^2/c^2}t$, что должно быть равно $t_0 = 3$ года. Отсюда находим

$$v = \frac{c}{\sqrt{1 + t_0^2/T^2}} = \frac{4}{5}c.$$

Задача Д2.2. Предположим, что длина стержня в системе, где он покоится, равна l_0 . Тогда его заряд равен $q = \rho_0 l_0 S$, где S — площадь его сечения. То же соотношение можно записать и в системе отсчета, где он движется со скоростью v : $q = \rho l S$. Поскольку $l = l_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}$, мы заключаем, что

$$\rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

то есть плотность заряда движущегося стержня будет больше, чем у покоящегося.

Задача Д2.3. На рисунке 121 показана иголка в двух системах отсчета: она наклонена под углом α к оси в системе отсчета, где иголка покоится, и под углом β в системе отсчета, где она движется со скоростью v . Размер иголки в направлении, перпендикулярном вектору скорости, будет одним и тем же, то есть $l \sin \beta = l_0 \sin \alpha$, где l_0 и l — длины иголки в упомянутых системах отсчета. Параллельный же оси x (вектору скорости) размер движущейся иголки в силу лоренцевского сокращения будет равен $l \cos \beta = \sqrt{1 - v^2/c^2} l_0 \cos \alpha$. Таким образом, длина движущейся иголки будет равна

$$l = l_0 \sqrt{\sin^2 \alpha + (1 - v^2/c^2) \cos^2 \alpha},$$

а угол ее наклона β определяется из соотношения

$$\cos \beta = \left[1 + \frac{\sin^2 \alpha}{(1 - v^2/c^2) \cos^2 \alpha} \right]^{-1/2}.$$

Задача Д3.1. Отношение частот фиолетового и красного цветов приблизительно равно 2:1. Подставляя это отношение в формулу для эффекта Доплера, то есть считая $\omega_0/\omega = 2$, находим $v = 3c/5$.

Задача Д3.2. В этом случае расстояние от корабля до Земли не меняется со временем и эффект целиком связан с лоренцевским замедлением. Поэтому соотношение между ω и ω_0 имеет вид $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}$.

Задача Д3.3. Подставляя эти значения в закон сложения

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2 / c^2},$$

находим $v = 10c/11$.

Задача Д4.1. Импульс тела p , движущегося по окружности, вращается с той же угловой скоростью ω , что и само тело. Отсюда следует, что абсолютная величина вектора $\Delta \vec{p} / \Delta t$ при малых значениях промежутка времени Δt будет равна $\omega \cdot p = pv/r = pc/r$. Именно эта величина pc/r должна быть равна силе, действующей на фотон.

Задача Д4.2. Масса покоя тела равна $m_0 c^2 = 9 \cdot 10^{15}$ Дж. Гелий при нормальных условиях является газом, причем газом одноатомным. Поэтому его тепловая энергия равняется

$$U_T \approx \frac{3}{2} \frac{m_0}{\mu} RT,$$

где $T = 293$ К — температура, $R = 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{К} \cdot \text{моль}}$ — газовая постоянная, а $\mu = 4 \cdot 10^{-3}$ кг/моль — молярная масса гелия. Подставляя эти значения, находим $U_T = 9,13 \cdot 10^4$ Дж. Таким образом, $m_0 c^2 / U_T \approx 10^{11}$.

Задача Д5.1. Потенциал однородного электрического поля равен $\varphi = -Ex$. В начальный момент времени энергия точечного заряда равняется его энергии покоя $m_0 c^2$. Поэто-

му закон сохранения энергии приводит к соотношению

$$\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - qEx = m_0 c^2.$$

Решая это уравнение, находим

$$v = c \sqrt{\frac{2m_0 c^2 qEx + q^2 E^2 x^2}{m_0^2 c^4 + 2m_0 c^2 qEx + q^2 E^2 x^2}}.$$

Конечно, при малых x , когда скорость тела еще не очень велика, этот ответ сводится к известному нерелятивистскому выражению. При больших же значениях x скорость v стремится, как и следует, к скорости света c .

Задача Д5.2. На бесконечности энергия заряда q равна $m_0 c^2 / \sqrt{1-v^2/c^2}$. Его скорость в точке поворота (когда он находится на расстоянии r_0 от заряда Q) равна нулю, то есть энергия будет равна $m_0 c^2 + Qq / (4\pi\epsilon_0 r_0)$. Приравнявая эти две величины и решая получившееся уравнение относительно r_0 , находим

$$r_0 = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 m_0 c^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1 \right)^{-1}.$$

Задача Д5.3. Полная энергия точечного заряда равна

$$\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \Pi.$$

Используя выражение для $|\Pi|$, приведенное в тексте (и учитывая, что Π отрицательна), находим следующее выражение для полной энергии:

$$m_0 c^2 \sqrt{1-v^2/c^2}.$$

Задача Д5.4. Поскольку сила, действующая на заряд в магнитном поле, перпендикулярна его скорости, то ни импульс тела, ни его скорость не меняются по абсолютной величине. Равна нулю и составляющая силы вдоль направления напряженности магнитного поля. Поэтому вдоль этого направления заряд движется равномерно и прямолинейно (со скоростью $v_{\parallel}$). Приведенный в тексте анализ прямо относится к движению заряда в проекции на

плоскость, перпендикулярную напряженности магнитного поля $\vec{B}$ (за исключением того, что масса m определяется полной скоростью движения заряда, включающую и $v_{\parallel}$). Поэтому $T = 2\pi m / (qB)$ есть период движения в проекции на эту плоскость, то есть время, за которое заряд проходит один виток спирали. Поэтому шаг спирали будет равен $v_{\parallel} T$.

Задача Д6.1. Время Δt , на которое будут убежать часы в соответствии с приведенным в тексте выражением, равно $\Delta t = \Delta\varphi \cdot t / c^2 \approx g h t / c^2$, где $t \approx 3,2 \cdot 10^7$ с соответствует году. Подставляя значения всех величин в выражение для Δt , находим $\Delta t \approx 3,5 \cdot 10^{-2}$ с. лоренцевское замедление за время t приводит к отставанию часов на $\Delta_L t \approx v^2 t / (2c^2) \approx g R t / (2c^2)$, где $R = 6400$ км — радиус Земли. Вычисляя отношение поправок, находим $\Delta t / \Delta_L t = 2h / R \approx 1/32$, то есть эффект лоренцевского замедления в данном случае более существен.

Оглавление

Посвящение	3
§ 1. Электрическое взаимодействие	5
§ 2. Физические поля	13
§ 3. Особенности статических полей	21
§ 4. Электрический заряд	29
§ 5. Напряженность. Закон Кулона	38
§ 6. Принцип суперпозиции	47
§ 7. Теорема Гаусса	57
§ 8. Силовые линии	65
§ 9. Поля пленок и нитей	77
§ 10. Электрические силы	87
§ 11. Работа электростатического поля	95
§ 12. Проводники и диэлектрики	105
§ 13. Электрическое поле внутри тел	114
§ 14. Непрерывное распределение заряда	122
§ 15. Электрическое поле проводника	131
§ 16. Поле диэлектрика	140
§ 17. Симметричные поля	150
§ 18. Плотность энергии поля	158
§ 19. Потенциал. Разность потенциалов	166
§ 20. Эквипотенциальные поверхности	175
§ 21. Поле в присутствии проводников	186
§ 22. Электрическая емкость	197
§ 23. Поле нескольких заряженных проводников	206
§ 24. Конденсатор	215
§ 25. Электрические цепи, содержащие конденсаторы	224
Заключение	232
Ответы на вопросы	233
Решения задач	244

Дополнение: теория относительности

§ 1. Принцип относительности	273
§ 2. Лоренцевское замедление и сокращение	279
§ 3. Эффект Доплера. Закон сложения скоростей	287
§ 4. Релятивистская динамика	293

§ 5. Релятивистское движение заряженного тела . .	299
§ 6. Принцип эквивалентности	305
Ответы на вопросы	311
Решения задач	312

В книге использованы шрифты
Школьной гарнитуры фирмы Paratype.

Бега Рудольф Карлович
Лебедев Владимир Валентинович
Хлюстиков Иван Николаевич

ЭЛЕКТРОСТАТИКА

Редакторы *М. Г. Быкова, А. К. Кулыгин*
Техн. редактор *Д. Е. Щербаков*

Подписано в печать 15/IX 2008 года. Формат $60 \times 90 \frac{1}{16}$.
Бумага офсетная № 1. Печать офсетная. Объем 20 печ. л.
Тираж 1500 экз. Заказ № 1662

Издательство Московского центра непрерывного
математического образования. ;
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11.
Тел. (495) 241 74 83.

Отпечатано с готовых диапозитивов в ИПП «Типография „Наука“».
119099, Москва, Шубинский пер., 6.

**Издательство МЦНМО представляет книги по математике
для школьников и учителей**

- Акопян А. В., Заславский А. А. Геометрические свойства кривых второго порядка. 2007
- Алфутова Н. Б., Устинов А. В. Алгебра и теория чисел. Сборник задач. 2005
- Аносов Д. В. Дифференциальные уравнения: то решаем, то рисуем. 2008
- Аносов Д. В. От Ньютона к Кеплеру. 2006.
- Бобров С. П. Волшебный дворог. 2006
- Бутиков Е. И., Быков А. А., Кондратьев А. С. Физика в примерах и задачах. 2008
- Вавилов В. В., Устинов А. В. Многоугольники на плоскости. 2006
- Варламов С. Д. и др. Задачи Московских городских олимпиад по физике. 2007
- Васильев Н. Б., Гутенмахер В. Л. Прямые и кривые. 2007
- Виленкин Н. Я. Рассказы о множествах. 2007
- Виленкин Н. Я., Виленкин А. Н., Виленкин П. А. Комбинаторика. 2007
- Гашков С. Б. Современная элементарная алгебра в задачах и упражнениях. 2006
- Гельфанд И. М., Глаголева Е. Г., Кириллов А. А. Метод координат. 2007
- Гельфанд И. М., Глаголева Е. Г., Шноль Э. Э. Функции и графики. 2006
- Гельфанд И. М., Львовский С. М., Тоом А. Л. Тригонометрия. 2008
- Геометрические олимпиады им. И. Ф. Шарыгина. 2007
- Гиндикин С. Г. Рассказы о физиках и математиках. 2006
- Горбачёв Н. В. Сборник олимпиадных задач по математике. 2008
- Гордин Р. К. Геометрия. Планиметрия. 7—9 классы. 2006
- Гордин Р. К. Это должен знать каждый матшкольник. 2008
- Готман Э. Г. Стереометрические задачи и методы их решения. 2006
- Григорьев Ю. М., Муравьев В. М., Потапов В. Ф. Олимпиадные задачи по физике. Международная олимпиада «Туймаада». 2007
- Екимова М. А., Кукин Г. П. Задачи на разрезание. 2007
- Еремин В. В. Теоретическая и математическая химия для школьников. Подготовка к химическим олимпиадам. 2007
- Задачи лингвистических олимпиад. 2007
- Звонкин А. К. Малыши и математика. Домашний кружок для дошкольников. 2007
- Зубов А. Ю. и др. Олимпиады по криптографии и математике для школьников. 2006
- Канель-Белов А. Я., Ковальджи А. К. Как решают нестандартные задачи? 2008
- Курант Р., Роббинс Г. Что такое математика? 2007
- Летняя математическая олимпиадная школа СУНЦ МГУ 2005. 2006

- Московские математические олимпиады. 2006
- Московские математические регаты. 2007
- Московские олимпиады по информатике. 2006
- Понарин Я. П. Элементарная геометрия. Т. 1, 2, 3. 2008
- Прасолов В. В. Задачи по алгебре, арифметике и анализу. 2007
- Прасолов В. В. Задачи по планиметрии. 2007
- Прасолов В. В. Наглядная топология. 2006
- Прасолов В. В., Тихомиров В. М. Геометрия. 2007
- Семёнов П. В. Как нам подготовиться к ЕГЭ? Математика 2008. Вып. 1–4. 2008
- Сосинский А. Б. Узлы. Хронология одной математической теории. 2005
- Творческие конкурсы учителей математики. 2008
- Тихомиров В. М. Рассказы о максимумах и минимумах. 2006
- Ткачук В. В. Математика — абитуриенту. 2008
- Толпыго А. К. Десятью шестью нестандартных задач. Из запасников математических олимпиад. 2008
- Тюрин А. Н. и др. Теория вероятностей и статистика. 2008
- Тюрин А. Н. и др. Теория вероятностей и статистика. Методическое пособие для учителя. 2008
- Шаповалов А. В. Принцип узких мест. 2008
- Шень А. Вероятность: примеры и задачи. 2007
- Шень А. Игры и стратегии с точки зрения математики. 2007
- Шень А. Логарифм и экспонента. 2005
- Шень А. Простые и составные числа. 2005
- Шень А. Математическая индукция. 2007
- Шень А. Программирование: теоремы и задачи. 2007
- Шестаков С. А. Векторы на экзаменах. Векторный метод в стереометрии. 2005
- Яценко И. В. Приглашение на математический праздник. 2005
- XXIX Турнир им. Ломоносова. 2007
- XXX Турнир им. Ломоносова. 2008
- XI Турнир математических боёв им. А. П. Савина. 2006
- XII Турнир математических боев им. А. П. Савина. 2007

Получить более подробную информацию об этих и других книгах издательства МЦНМО, а также заказать их можно через Интернет на сайте <http://www.mcsme.ru/publications/>.

Книги можно купить в магазине «Математическая книга» в здании Московского центра непрерывного математического образования.

Адрес магазина: 119002, Москва, Бол. Власьевский пер., 11. Проезд до станции метро «Смоленская» или «Кропоткинская», далее пешком. Телефон для справок: (495) 241–72–85. E-mail: biblio@mcsme.ru.

Магазин работает ежедневно кроме воскресенья с 11³⁰ до 20⁰⁰.

Учебное пособие по физике
«Электростатика» авторского
коллектива Бега Р. К. (заслуженный
учитель РФ), Лебедев В. В.
(доктор ф.-м. наук) и Хлюстиков И. Н.
(доктор ф.-м. наук) предназначено для
классов с углубленным изучением
физики. Пособие содержит достаточно
полное и последовательное изложение
основ электростатики, а также их вывод
методами, принятыми в школьном
курсе физики. При подаче материала
широко используется понятие
физического поля, соответствующее его
пониманию в современной науке, что
позволяет устанавливать связи
электрических явлений с другими
разделами физики и обеспечивает
преемственность между школьным и
вузовским курсами. В тексте
приводится значительное количество
вопросов и задач, решение которых
позволяет читателю углубить
понимание излагаемого материала.
Пособие содержит более сотни
рисунков. В приложении
рассказывается об основных идеях
теории относительности.

ISBN 978-5-94057-408-8



9 785940 574088 >