

А. В. Белинский

Квантовые измерения

БИНОМ

Лаборатория знаний



А. В. Белинский

Квантовые измерения

Учебное пособие

Д о п у щ е н о

УМО по классическому университетскому
образованию РФ в качестве учебного
пособия для студентов высших учебных
заведений, обучающихся по специальности
010701 (Физика)



Москва

БИНОМ. Лаборатория знаний

2008

УДК 530.145

ББК 22.343

Б43

Белинский А. В.

Б43 Квантовые измерения : учебное пособие / А. В. Белинский. — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. — 182 с. : ил.
ISBN 978-5-94774-725-6

В пособии освещены вопросы, связанные с основами квантовой теории, специфическими особенностями квантовых объектов и прецизионными измерениями в случае интерференции третьего порядка и самоиздействия света в средах с кубичной нелинейностью. Рассмотрены параметрическое рассеяние света в квантовых измерениях, теория фотодетектирования, принципы квантовой томографии.

Для студентов старших курсов и аспирантов, специализирующихся в области квантовой оптики, квантовой информатики, а также для специалистов соответствующего направления экспериментальной физики.

УДК 530.145
ББК 22.343

По вопросам приобретения обращаться:

БИНОМ. Лаборатория знаний

Телефон: (499) 157-5272

e-mail: Lbz@aha.ru, <http://www.Lbz.ru>

ISBN 978-5-94774-725-6

© Белинский А. В., 2008

© БИНОМ. Лаборатория знаний,

2008

Введение

*Посвящается светлой памяти
Давида Николаевича Клышико*

Что такое квантовые измерения? В чем их специфика по отношению к обычным измерениям, производимым в классической физике? Почему их надо выделять как отдельную дисциплину? Чтобы ответить на эти вопросы, разберем простой пример.

Плотник прикладывает линейку к дощечке и измеряет ее длину. У него нет сомнения в том, что длина дощечки имеет вполне определенное значение, которое сохраняется неизменным как в течение всего процесса измерения, так и после него. Иначе, зачем было бы измерять? Этот риторический вопрос, адресованный к квантовой теории, принимает особый смысл: там до момента взаимодействия квантового объекта с измерительным прибором, как правило, измеряемой величины просто не существует. Такая ситуация требует радикального пересмотра смысла измерений. Это сложная задача и подходы к ее разрешению мы будем искать постепенно на протяжении всей книги. Пока же отметим возможность появления в квантовом мире таких эффектов, которые необъяснимы с позиций классической физики. Они называются *квантовыми эффектами*.

Большой частью эти эффекты связаны с микромиром. Поэтому важным требованием к квантовым измерениям является высокая точность измерителя. Но каким бы прекрасным он ни был, существует фундаментальный предел для точности, сформулированный Гейзенбергом. Его невозможно превзойти. По какой причине? Если вследствие воздействия измерителя на объект, то выяснив механизм этого воздействия, можно было бы постараться скорректировать его с помощью последующей математической обработки и тем самым повысить точность. Но если определенного значения измеряемой величины *aприори* (до измерения) не существовало, то информативно лишь измерение статистических характеристик измеряемой величины в пределах ее интервала неопределенности. Однократное же измерение, с какой бы высокой точностью оно бы не было выполнено, малоинформационно.

Рассмотрим квантовую систему в чистом состоянии, т. е. в состоянии, когда полностью отсутствует классическая неопределенность. Такую систему исчерпывающе можно описать *волновой функцией* ψ . Ее квадрат модуля $|\psi|^2$ дает распределение вероятности измеряемой величины. Таким образом, самым информативным измерительным прибором является измеритель волновой функции. Одиночное измерение *редуцирует* исходную волновую функцию, которая описывала все возможные значения измеряемой величины, в волновую функцию, соответствующую лишь измеренному значению. Измерить же исходную волновую функцию можно только в результате серии многократных измерений ансамбля идентично приготовленных систем. Решением этой задачи увенчается наш курс теории квантовых измерений, а начнем мы его с краткого повторения основ квантовой теории, поясняемых простыми примерами реализации квантовых измерений.

ГЛАВА 1

Дираковская формулировка нерелятивистской квантовой механики

Одиночную элементарную частицу, движущуюся по прямой, с которой мы свяжем координатную ось q , будем описывать в координатном представлении волновой функцией $\psi(q, t)$. Вероятностная интерпретация $\psi(q, t)$ заключается в том, что величина $|\psi(q, t)|^2 dq$ дает вероятность нахождения частицы в интервале между q и $q + dq$ в момент времени t , когда измеряется местоположение частицы. Фурье-образ $\psi(p, t)$

$$\psi(p, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(q, t) \exp\left(-\frac{iqp}{\hbar}\right) dq \quad (1.1)$$

дает волновую функцию в импульсном представлении. Преобразование Фурье существует лишь тогда, когда существует интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(q, t)|^2 dq$, т. е. и функция $\psi(q, t)$, и функция $\psi(p, t)$ должны быть квадратично интегрируемы. Они однозначно связаны между собой, и каждая из них полностью представляет то же самое динамическое состояние системы. Величина $|\psi(p, t)|^2 dp$ дает вероятность нахождения импульса частицы в интервале $(p, p + dp)$ при измерении импульса в момент времени t .

Теорию можно развивать как в импульсном, так и в координатном представлении. Выбор представления аналогичен выбору системы координат в обычной геометрии. Но в обычной геометрии с помощью векторов можно обойтись без использования координатной системы. А можно ли квантовую механику построить так, чтобы формулировка не зависела от вида представления? В этом и заключается основная цель *дираковской формулировки*. При этом, разумеется, не должны быть потеряны очевидные преимущества конкретного представления. Проводя конкретные вычисления, всегда необходимо использовать удобное представление подобно тому, как при проведении конкретных вычислений в векторном анализе всегда может быть выбрана удобная система координат.

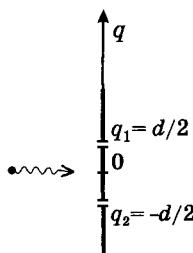


Рис. 1.1. Частица, движущаяся к непрозрачному экрану с двумя узкими щелями, расстояние между которыми d

Дирак предложил описывать динамические состояния квантовых объектов при помощи векторов. Попытаемся дать геометрическую интерпретацию его предложения [1].

Координата q может принимать значения q_1, q_2, q_3, \dots Мы можем представить пространство с конечным или бесконечным числом измерений, которое имеет систему взаимно перпендикулярных осей, каждая из которых обозначается одним из значений q : q_1, q_2, q_3, \dots , а величины $\psi(q_1, t), \psi(q_2, t), \psi(q_3, t), \dots$ представляют собой проекции некого вектора состояния соответственно на оси координат q_1, q_2, q_3, \dots Так как этот вектор комплексный, он не является обычным вектором, и для него надо ввести специальное обозначение $|\psi\rangle$. Дирак назвал его *кет-вектором*, или просто *кет* по следующей причине: английское слово «bracket» означает угловые скобки: $\langle \rangle$. Поместим в них это слово *(bracket)* и разделим на две части: *(bra|cket)*. Левая образует гильбертово пространство *бра-векторов*, а правая — *кет-векторов*. Эти пространства различны (*бра* — вектор-строка, *кет* — вектор-столбец), но имеют взаимно однозначное соответствие. Кет-вектор, компоненты которого равны $\psi(q_1, t), \psi(q_2, t), \psi(q_3, t), \dots$, обозначается $|\psi(t)\rangle$. Бесконечномерного пространства мы, к сожалению, изобразить не сможем. Поэтому проанализируем простой пример.

Рассмотрим одиночную частицу, движущуюся слева направо в направлении непрозрачного экрана с двумя узкими щелями, расположенными на расстоянии d друг от друга (рис. 1.1).

Сразу за экраном координата частицы q может принимать только два значения: q_1 и q_2 . Значения волновой функции, соответствующие обнаружению частицы сразу за первой щелью, отложим по оси абсцисс, а за второй — по оси ординат (рис. 1.2). По этим проекциям

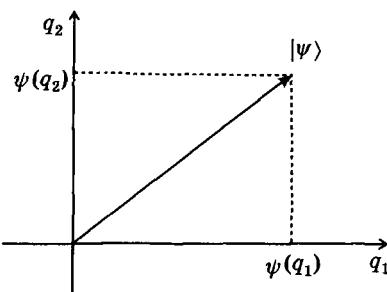


Рис. 1.2. Наглядная диаграмма кет-вектора в двумерном координатном представлении

образуем вектор $|\psi(t)\rangle$, который и есть кет-вектор квантового состояния системы. Сама же волновая функция представляет собой сумму: $\Psi(q) = \psi_1(q) + \psi_2(q)$. Вообще говоря, она комплексна, и приведенная интерпретация, строго говоря, некорректна. Однако она может помочь наглядному восприятию *векторного гильбертового пространства*, которое определяется как пространство квадратично интегрируемых функций.

Положим, в частности,

$$\Psi(q) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\delta\left(q - \frac{d}{2}\right) + \delta\left(q + \frac{d}{2}\right) \right]. \quad (1.2)$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака. При этом условия обнаружения частицы сразу за одной из щелей экрана идентичны.

Согласно (1.1), (1.2), в импульсном представлении

$$\psi(p) = \frac{1}{\sqrt{\pi\hbar}} \cos\left(\frac{pd}{2\hbar}\right). \quad (1.3)$$

Это значит, что хотя в координатном представлении вектор состояния $|\psi\rangle$ был двумерным, в импульсном представлении он бесконечномерный.

Переход к другому представлению соответствует тому же вектору $|\psi\rangle$, но в другой системе координат, например, p_1, p_2, p_3, \dots .

ГЛАВА 2

Квантовая нелокальность

Проанализируем полученный результат (1.3). Величина

$$|\psi(p)|^2 \propto \cos^2\left(\frac{pd}{2\hbar}\right) \quad (2.1)$$

определяет распределение вероятности поперечной составляющей импульса частицы после непрозрачного экрана, т. е. в направлении оси q (см. рис. 1.1). Таким образом, вероятность обнаружить частицу на расстоянии, существенно превышающем d (см. рис. 2.1), описывается гармонической зависимостью

$$P(p) \propto \frac{1}{2} \left[1 + \cos\left(\frac{pd}{\hbar}\right) \right]. \quad (2.2)$$

Если в поперечной плоскости, с которой связана ось x , поставить фотопластинку, чувствительную к частицам, и периодически посыпать одиночные частицы на экран так, чтобы следующая частица

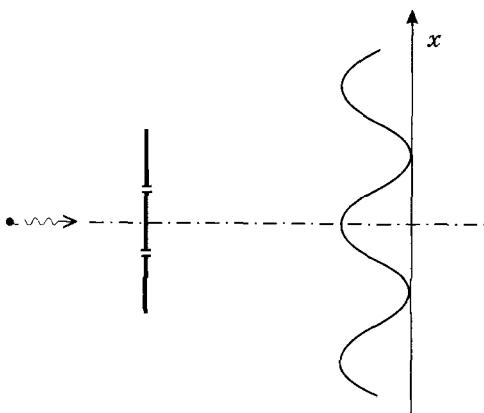


Рис. 2.1. Схема интерференции Юнга: вероятность обнаружения одиночной частицы за экраном с двумя узкими щелями описывается гармонической интерференционной зависимостью от поперечной координаты x , пропорциональной p

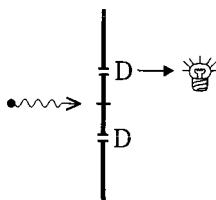


Рис. 2.2. Одиночную частицу, посыпанную на экран, регистрирует лишь один из двух детекторов

возникала не раньше, чем зарегистрирована предыдущая, то плотность покрнения фотопластиинки будет гармонически изменяться согласно (2.2). При этом x будет пропорционален p . Коэффициент пропорциональности определяется расстоянием от экрана до плоскости наблюдения, существенно превышающим d .

Такие эксперименты проводились многократно, в частности, с фотонами. Удивление вызывает тот факт, что частица, которая, казалось бы, не может разделиться и одновременно пройти через обе щели, тем не менее, ведет себя так, как будто она это сделала!

Поставим два счетчика частиц сразу за щелями (рис. 2.2). Если на экран посыпаются одиночные частицы, то срабатывать будет лишь один из двух детекторов.

Снова уберем детекторы и сдвинем щели вверх: верхнюю — на величину Δ_1 , а нижнюю — на Δ_2 , тогда волновая функция, аналогичная (1.2), равна

$$\Psi(q) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\delta \left(q - \frac{d}{2} - \Delta_1 \right) + \delta \left(q + \frac{d}{2} - \Delta_2 \right) \right]. \quad (2.3)$$

При этом вероятность обнаружить частицу на достаточно большом расстоянии от экрана (рис. 2.1) будет

$$P(p) \approx 1 + \cos \left[\frac{p}{\hbar} (d + \Delta_1 - \Delta_2) \right], \quad (2.4)$$

где $p \approx x$.

Если бы, согласно эксперименту с установкой детекторов (рис. 2.2), одиночные частицы проходили бы то через верхнюю, то через нижнюю щель, то эта вероятность складывалась бы из двух вероятностей $P_1(\Delta_1)$ и $P_2(\Delta_2)$. Но невозможно найти таких функций $P_1(\Delta_1)$ и $P_2(\Delta_2)$, чтобы $P(p)$, согласно (2.4), была бы суммой $P_1(\Delta_1) + P_2(\Delta_2)$. Это означает, что хотя квантовая частица

и не может разделиться, тем не менее, проникает как бы через обе щели сразу. Это свойство является проявлением так называемой *квантовой нелокальности*, характерной тем, что в ее присутствии наши привычные пространственные интуиции невозможно перенести в микромир. В дальнейшем мы еще не раз столкнемся с парадоксальным поведением квантовых частиц.

Квантовая нелокальность, по-видимому, является проявлением внутреннего единства сотворенного Богом материального мира, т. е. фундаментальным свойством вселенной, которую, строго говоря, нельзя разделить на отдельные локальные независимые области.

ГЛАВА 3

Принцип суперпозиции

С каждым состоянием изучаемой динамической системы вслед за Дираком мы связываем определенный кет-вектор. В квантовой теории постулируется *принцип суперпозиции состояний*, который состоит в следующем: линейная суперпозиция состояний системы также является одним из состояний той же системы. Это означает, что пространство кет-векторов должно быть линейным векторным пространством, т. е. таким, что если оно содержит кет-векторы $|\psi_1\rangle$ и $|\psi_2\rangle$, то оно содержит и любую их линейную комбинацию вида

$$|\Psi\rangle = C_1 |\psi_1\rangle + C_2 |\psi_2\rangle, \quad (3.1)$$

где C_1 и C_2 — произвольные комплексные числа. Это соотношение можно обобщить на случай непрерывного набора состояний:

$$|\Psi\rangle = \int_{\psi_1}^{\psi_2} c(\psi) |\psi\rangle d\psi, \quad (3.2)$$

где $c(\psi)$ — обычная комплекснозначная функция параметра ψ из $\psi_1 \leqslant \psi \leqslant \psi_2$. Если рассматривается суперпозиция состояния с самим собой:

$$C_1 |\psi\rangle + C_2 |\psi\rangle = (C_1 + C_2) |\psi\rangle, \quad (3.3)$$

то мы не получаем нового состояния, поскольку все векторы $C_2 |\psi\rangle$, $C_1 |\psi\rangle$ и $(C_1 + C_2) |\psi\rangle$ описывают одно и то же состояние системы, за исключением случая, когда $C_1 + C_2 = 0$, что соответствует отсутствию состояния вообще. Таким образом, состояние системы целиком определяется лишь направлением кет-вектора. Это утверждение не имеет аналогов в классической механике. Действительно, если в классической механике складываются два типа колебаний струны, отличающиеся друг от друга только амплитудой, то в результате образуется новый тип колебаний с другой амплитудой, т. е. в классической системе различные амплитуды соответствуют различным состояниям системы. Совсем по-другому в квантовой механике: все

три амплитуды соответствуют одному и тому же типу колебаний, так как в квантовой механике нет понятия, аналогичного классической амплитуде: существенным является только направление кет-вектора. Поэтому для удобства вводят нормировку: скалярное произведение $\langle \psi | \psi \rangle = 1$.

Кроме того, в квантовой механике вообще нет состояния, в котором полностью отсутствует движение (т. е. состояния с $C_1 + C_2 = 0$, как упоминалось выше): отсутствие какого-либо движения вообще ничему не соответствует в квантовой механике, в то время как в классике состояние покоя является одним из состояний системы. Правда частица с нулевым импульсом, казалось бы, является исключением. Но при этом, как мы убедимся в дальнейшем, пространственное расположение частицы абсолютно неопределенно, что противоречит современным данным о конечном размере вселенной.

Пространство кет-векторов может иметь конечное или бесконечное число измерений. Размерность (число измерений) пространства определяется количеством линейно независимых кет-векторов в этом пространстве. Так как независимые состояния квантовой системы изображаются независимыми кет-векторами, то размерность пространства определяется числом независимых состояний квантовой системы. В рассмотренном выше двуплечевом эксперименте (рис. 1.1) таких состояний два:

$$|\Psi\rangle = |\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle,$$

где $|\psi_1\rangle$ и $|\psi_2\rangle$ — ортогональные составляющие вектора $|\Psi\rangle$ (см. рис. 1.2). Эффект квантовой нелокальности связан с тем, что результирующая волновая функция является суммой волновых функций: $\Psi(q) = \psi(q_1) + \psi(q_2)$, а не суммой квадратов их модулей. Действительно, вероятность обнаружить частицу сразу за экраном $|\Psi(q)|^2$ равна сумме вероятностей прохождения ею нижней ($|\psi_2(q)|^2$) и верхней ($|\psi_1(q)|^2$) щелей, так как $\psi(q_1)\psi^*(q_2) = 0$, а $|\psi_1\rangle$ и $|\psi_2\rangle$ ортогональны, т. е. $\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = 0$. Этим объясняется результат эксперимента с двумя детекторами (рис. 2.2). Однако при удалении от экрана (рис. 2.1) надо перейти к p -представлению, которое является суммой фурье-образов от $\psi_1(q)$ и $\psi_2(q)$, а не суммой фурье-образов квадратов их модулей, т. е. вероятностей. Таким образом, складываются не вероятности событий, а так называемые *амплитуды вероятностей*, т. е. волновые функции. Поэтому и возникает интерференция, обуславливающая нелокальность:

$$|\Psi(p)|^2 = |\psi_1(p)|^2 + |\psi_2(p)|^2 + \psi_1^*(p)\psi_2(p) + \psi_1(p)\psi_2^*(p). \quad (3.4)$$

Интересно, что попытки выяснения, через какую щель прошла частица, приводят к исчезновению двух последних интерференционных слагаемых в (3.4). Например, если облучать экран одиночными фотонами, то, установив в щелях линейные поляризаторы с взаимно ортогональными направлениями поляризации, можно по состоянию поляризации регистрируемого фотона выяснить, через какую щель он прошел. Тогда ψ_1 и ψ_2^* описывают взаимно ортогональные состояния поляризации, и произведение их равно нулю. В промежуточном случае частичной поляризации фотонов в щелях снижается контраст интерференционной кривой (рис. 2.1), тем больше, чем выше вероятность определить, через какую щель прошел фотон.

Исчезновение интерференции и снижение контраста можно также объяснить исходя из *принципа неопределенностей Гейзенберга*. Перед тем, как перейти к его рассмотрению, отметим, что попытки обобщить квантовый принцип суперпозиции на классические объекты приводят к парадоксам типа шредингеровского кота. Он состоит в следующем: в темной комнате или закрытом ящике находится кот и ампула с летучим ядом. Еще имеется атом изотопа, который на определенной стадии своего распада, скажем, в момент времени полураспада, запускает детонатор, разбивающий ампулу. Кот умирает. Состояние атома изотопа описывается квантовой теорией, носит вероятностный характер и представляет собой суперпозицию нераспавшегося и распавшегося атома изотопа. Но для кота такая суперпозиция невозможна: он не может быть одновременно живым и мертвым.

ГЛАВА 4

Принцип неопределенностей Гейзенберга

Динамические переменные в квантовой механике описываются линейными операторами, которые, вообще говоря, комплексны. Однако физические величины, такие как импульс, координата и т. д., при измерении принимают только действительные значения. Следовательно, на их операторы должны быть наложены условия, обеспечивающие вещественность физических величин. Таким образом, мы приходим к представлению об *эрмитовом операторе*, который вводится следующим образом. Запишем бра-вектор $\langle q|$, связанный с кет-вектором $|q\rangle$ вида $|q\rangle = \hat{A}|p\rangle$, где \hat{A} – линейный оператор, следующим образом

$$\langle q| = \langle p| \hat{A}^+ = (\hat{A}|p\rangle)^+ = (|q\rangle)^+. \quad (4.1)$$

Здесь \hat{A}^+ – оператор, эрмитово сопряженный \hat{A} .

Эрмитовы операторы равны своим сопряженным ($\hat{A} = \hat{A}^+$) и имеют только действительные собственные значения. Поскольку наблюдаемые величины (или, кратко, *наблюдаемые*) могут принимать лишь собственные значения описывающих их операторов, физические величины соответствуют эрмитовым операторам.

Возьмем два эрмитовых оператора \hat{A} и \hat{B} и образуем новый оператор

$$\hat{M} = \hat{A} - i\lambda\hat{B}, \quad (4.2)$$

λ – действительное.

Оператор $\hat{M}^+\hat{M}$ положителен, т. е. для произвольного вектора $|\psi\rangle$

$$\langle\psi|\hat{M}^+\hat{M}|\psi\rangle \geq 0, \quad (4.3)$$

поскольку (4.3) представляет собой норму вектора $|\mu\rangle = \hat{M}|\psi\rangle$.

Выражение (4.3) дает среднее значение $\langle\hat{M}^+\hat{M}\rangle$ оператора $\hat{F} = \hat{M}^+\hat{M}$ в состоянии $|\psi\rangle$. Это легко показать, воспользовавшись

собственными векторами $|f\rangle$ и собственными значениями оператора \widehat{F} :

$$\widehat{F}|f\rangle = f|f\rangle. \quad (4.4)$$

Поскольку \widehat{F} эрмитов, векторы $|f\rangle$ образуют ортонормированный базис. Разложим по нему произвольный вектор

$$|\psi\rangle = \sum_f C_f |f\rangle, \quad (4.5)$$

где коэффициенты разложения

$$C_f = \langle f|\psi\rangle. \quad (4.6)$$

Подстановка (4.6) в (4.5) дает

$$|\psi\rangle = \sum_f |f\rangle \langle f|\psi\rangle, \quad (4.7)$$

следовательно,

$$\sum_f |f\rangle \langle f| = \widehat{I}. \quad (4.8)$$

Это разложение единичного оператора.

Теперь найдем среднее значение оператора \widehat{F} в состоянии $|\psi\rangle$. Поскольку вероятность того, что наблюдаемая, соответствующая оператору \widehat{F} , примет собственное значение f в состоянии $|\psi\rangle$, равна $|C_f|^2$, имеем

$$\begin{aligned} \langle \widehat{F} \rangle &= \sum_f f |\langle \psi | f \rangle|^2 = \sum_f \langle \psi | f | f \rangle \langle f | \psi \rangle \\ &= \sum_f \langle \psi | \widehat{F} | f \rangle \langle f | \psi \rangle = \langle \psi | \widehat{F} | \psi \rangle. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Здесь использовано (4.8).

Распишем $\widehat{M}^+ \widehat{M}$ с учетом (4.2):

$$\widehat{M}^+ \widehat{M} = \lambda^2 \widehat{B}^+ \widehat{B} + i\lambda(\widehat{B}^+ \widehat{A} - \widehat{A}^+ \widehat{B}) + \widehat{A}^2 = \lambda^2 \widehat{B}^2 + \lambda \widehat{C} + \widehat{A}^2, \quad (4.10)$$

где $\widehat{C} = -i [\widehat{A}, \widehat{B}]$, $[\widehat{A}, \widehat{B}] \triangleq \widehat{A}\widehat{B} - \widehat{B}\widehat{A}$ — коммутатор, а также учтена эрмитовость операторов.

В силу линейности операции усреднения

$$\langle \widehat{M}^+ \widehat{M} \rangle = \lambda^2 \langle \widehat{B}^2 \rangle + \lambda \langle \widehat{C} \rangle + \langle \widehat{A}^2 \rangle \geq 0. \quad (4.11)$$

Поскольку оператор \hat{C} эрмитов, его среднее значение $\langle \hat{C} \rangle$ действительно, и неравенство (4.11) при произвольном действительном λ будет выполняться в случае неположительного дискриминанта $\langle \hat{C} \rangle^2 - 4 \langle \hat{A}^2 \rangle \langle \hat{B}^2 \rangle \leq 0$. Следовательно,

$$\langle \hat{A}^2 \rangle \langle \hat{B}^2 \rangle \geq \frac{\langle \hat{C} \rangle^2}{4}. \quad (4.12)$$

Заметим, что коммутатор $[\hat{A}, \hat{B}]$, а, значит, и оператор \hat{C} не изменяется, если из \hat{A} и \hat{B} вычесть произвольные константы a и b . Таким образом,

$$\langle (\hat{A} - a)^2 \rangle \langle (\hat{B} - b)^2 \rangle \geq \frac{\langle \hat{C} \rangle^2}{4}. \quad (4.13)$$

Минимум функции $f(a) = \langle (\hat{A} - a)^2 \rangle = \langle \hat{A}^2 \rangle - 2a \langle \hat{A} \rangle + a^2$ достигается при $a = \langle \hat{A} \rangle$, в чем легко убедиться, продифференцировав $f(a)$ по a : $\frac{df(a)}{da} = 2a - 2 \langle \hat{A} \rangle$, откуда $a = \langle \hat{A} \rangle$, т. е. левая часть (4.13) минимальна, когда $a = \langle \hat{A} \rangle$, а $b = \langle \hat{B} \rangle$. Тогда

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} |\langle \hat{C} \rangle|, \quad (4.14)$$

где $\Delta A = \sqrt{\langle (\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle)^2 \rangle}$, $\Delta B = \sqrt{\langle (\hat{B} - \langle \hat{B} \rangle)^2 \rangle}$ — среднеквадратичные отклонения наблюдаемых, описываемых операторами \hat{A} и \hat{B} . Модуль в правой части возник вследствие того, что оператор \hat{C} — эрмитов, значит, $\langle \hat{C} \rangle$ — действительно.

Итоговое соотношение (4.14) и является математической формулировкой принципа неопределенностей Гейзенberга. Однако мы вывели его, используя средние значения (4.3), (4.9) по чистому состоянию системы, описываемому вектором квантового состояния $|\psi\rangle$. Обобщим этот вывод на случай смешанного состояния.

Усреднение оператора в случае чистого состояния, согласно (4.9), можно произвести двумя способами:

$$\langle \hat{F} \rangle = \langle \psi | \hat{F} | \psi \rangle \equiv \text{tr} (\hat{F} | \psi \rangle \langle \psi |). \quad (4.15)$$

Здесь использована возможность циклической перестановки сомножителей под знаком tr — следа матрицы.

Напомним, что вероятностный характер поведения системы в чистом состоянии обусловлен лишь ее квантовой неопределенностью. В смешанном же состоянии к квантовой неопределенности добавляется еще и классическая, которая связана с недостаточностью информации о системе. Например, на пути квантовой частицы можно установить непрозрачный экран с одной, в отличие от рис. 1.1, узкой щелью. Вектор состояния за щелью $|q\rangle$ при этом одномерный. Пусть далее экран может дискретно перемещаться в направлении оси q , т. е. перпендикулярно щели. Если нам известны лишь вероятности P_j того, что щель находится в том или ином положении j , то среднее значение некого оператора \hat{F} можно вычислить как

$$\langle \hat{F} \rangle = \sum_j P_j \langle q_j | \hat{F} | q_j \rangle \equiv \text{tr} \left(\hat{F} \sum_j P_j | q_j \rangle \langle q_j | \right) = \text{tr} \left(\hat{F} \hat{\rho} \right). \quad (4.16)$$

Здесь введен оператор или матрица плотности

$$\hat{\rho} \stackrel{\Delta}{=} \sum_j P_j | q_j \rangle \langle q_j |, \quad (4.17)$$

которая в случае чистого состояния (с неподвижным в известном нам положении экраном) просто равна $|q\rangle \langle q|$.

Итак, в смешанном состоянии среднее значение оператора $\hat{M}^+ \hat{M}$ будет равно

$$\langle \hat{M}^+ \hat{M} \rangle = \text{tr}(\hat{M}^+ \hat{M} \hat{\rho}) = \sum_j P_j \langle \hat{M}^+ \hat{M} \rangle_j \geq 0, \quad (4.18)$$

поскольку $P_j \geq 0$ и $\langle \hat{M}^+ \hat{M} \rangle_j \geq 0$. Соотношение (4.11) при этом сохраняет силу, и дальнейший вывод принципа неопределенностей остается справедливым.

Для операторов координаты \hat{q} и импульса \hat{p} квантовой частицы коммутационное соотношение постулируется в виде

$$[\hat{q}, \hat{p}] \stackrel{\Delta}{=} \hat{qp} - \hat{pq} = i\hbar, \quad (4.19)$$

поэтому

$$\Delta q \Delta p \geq \hbar/2, \quad (4.20)$$

следовательно, соотношение неопределенностей для координаты и импульса не зависит от состояния квантовой системы, так как в

правой части (4.19) стоит комплексное число, а не усредненный по состоянию оператор (см. (4.14)).

Неравенство (4.20) имеет важное следствие: квантовые частицы не имеют траекторий, поскольку они не обладают определенными значениями координаты и скорости. В лучшем случае можно говорить лишь о некой трубке, в пределах которой с определенной вероятностью можно обнаружить квантовую частицу.

Если координата q частицы измеряется с конечной точностью Dq , то импульс p получает дополнительную неопределенность, значит, до и после квантового измерения будут два различных состояния:

$$\{\Delta q, \Delta p\} \xrightarrow{Dq} \{\delta q, \delta p\}, \quad (4.21)$$

причем, как будет доказано ниже (в главе 8, см. (8.10)),

$$\delta p \geq \frac{1}{2} \frac{\hbar}{Dq}. \quad (4.22)$$

ГЛАВА 5

Проекционный постулат фон-Неймана

Что происходит с квантовым объектом при измерении? Впервые ответ на этот вопрос в строгой форме был сформулирован фон-Нейманом [2].

В самом простом случае точного измерения наблюдаемой a , оператор которой \hat{A} имеет дискретный спектр собственных значений a_n , которые предполагаются невырожденными, т. е. различными для разных собственных состояний $|a_n\rangle$, имеем

$$\hat{A}|a_n\rangle = a_n|a_n\rangle. \quad (5.1)$$

Тогда, согласно фон-Нейману,

- 1) результат измерения наблюдаемой a у квантового объекта, находящегося в состоянии с оператором плотности $\hat{\rho}$, будет одним из собственных значений a_n с вероятностью

$$w_n = \langle a_n | \hat{\rho} | a_n \rangle; \quad (5.2)$$

- 2) после измерения объект перейдет в состояние $|a_n\rangle$, соответствующее этому собственному значению.

Если интервал времени между измерениями достаточно мал, то повторные измерения наблюдаемой заведомо дадут тот же результат. Это *принцип повторяемости результатов измерений*. Действительно, если применить формулу (5.2) к состоянию после первого измерения $|a_n\rangle$, т. е. положить $\hat{\rho} = |a_n\rangle\langle a_n|$, то, в силу ортогональности набора собственных состояний эрмитова оператора \hat{A} , вероятность будет единичной для результата, совпадающего с первым измерением, и нулевой для остальных случаев.

В реальных измерениях конечное состояние объекта может существенно отличаться от $|a_n\rangle$, например, при измерении числа фотонов поглощающим их детектором, как на рис. 2.2. После измерения фотонов не стало: поле перешло в вакуумное (нулевое) состояние $|0\rangle$. Это связано с тем, что реальные измерители могут оказывать дополнительное обратное воздействие на объект, не имеющее



Рис. 5.1. Рождение электрон-позитронной пары из вакуума

принципиально неустранимого квантового характера. Постулат о редукции фон-Неймана относится к идеальному случаю, когда это дополнительное воздействие отсутствует, например, к измерению числа фотонов без их поглощения, что будет рассмотрено нами в дальнейшем.

Кроме того, приведенная формулировка постулата о редукции ограничивается измерениями в системах с одной степенью свободы. Наличие у квантового объекта двух или более степеней свободы может принципиально изменить картину [3]. Рассмотрим эксперимент, представляющий собой вариант удивительно взаимосвязанного поведения двух квантовых частиц в парадоксе Эйнштейна—Подольского—Розена [4], сокращенно ЭПР. Под действием интенсивных импульсов света может происходить рождение электрон-позитронной пары (см. рис. 5.1), которую можно разделить магнитным полем (см., напр., [5]), чтобы она тут же не аннигилировала.

Поскольку рождение частиц пары происходит из вакуума, в силу закона сохранения вращательного момента суммарный их спин должен быть равен нулю, т. е. с вероятностью 50% у электрона будет спин $-1/2$, а у позитрона $+1/2$, и с той же вероятностью — наоборот.

Если измерить спин одной из частиц, то она перейдет в состояние, соответствующее измеренному спину. Однако вопрос о состоянии второй частицы, если руководствоваться приведенной формулировкой постулата о редукции, остается открытым, в то время как вторая частица в момент измерения первой должна приобрести противоположный по знаку спин. Это означает, что измерение спина первой частицы редуцирует не только ее квантовое состояние, но и второй частицы тоже. Доказательство отсутствия априорных значений измеряемых величин будет дано позже. Здесь же мы дадим сформулированный Ф. Я. Халили постулат о редукции [3], который позволяет учесть вторую частицу:

- 1) результат измерения наблюдаемой a у квантового объекта, находящегося в состоянии с оператором плотности $\hat{\rho}$, будет одним из собственных значений a_n с вероятностью

$$w_n = \text{tr}(|a_n\rangle\langle a_n| \hat{\rho}); \quad (5.3)$$

2) после измерения объект перейдет в состояние

$$\hat{\rho}_n = \frac{1}{w_n} |a_n\rangle \langle a_n| \hat{\rho} |a_n\rangle \langle a_n|. \quad (5.4)$$

После рождения электрон-позитронной пары вектор состояния системы равен

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+-\rangle + |-+\rangle), \quad (5.5)$$

где через $|+-\rangle$ обозначено состояние спинов пары частиц: $+1/2$ у первой и $-1/2$ у второй, а через $|-+\rangle$ состояние с противоположно направленными спинами. Для каждой из частиц в отдельности вероятности обеих ориентаций спина одинаковы, т. е. спины полностью неопределенны.

После измерения спина первой частицы, в соответствии с (5.4), система перейдет либо в состояние $|+-\rangle$, либо в $|-+\rangle$, в зависимости от исхода измерения, т. е. обе частицы приобретут определенные значения спина.

Итак, в отличие от пункта (2) редукционного постулата фон-Неймана, выражение (5.4) требует в качестве $|a_n\rangle$ подставлять не просто $|+\rangle$ или $|-\rangle$ для измеряемой частицы, а $|+-\rangle$ или $|-+\rangle$, поскольку в (5.4) входит оператор плотности исходного состояния

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} (|+-\rangle + |-+\rangle) (\langle +-| + \langle -+|). \quad (5.6)$$

Вернемся к интерференционному двущелевому эксперименту (рис. 1.1). В случае абсолютно точного измерения координаты q' , согласно проекционному постулату фон-Неймана, волновая функция $\psi(q)$ становится δ -функцией: $\delta(q - q')$, и, в соответствии с принципом неопределенности Гейзенberга, неопределенность импульса частицы $\Delta p \rightarrow \infty$. Это означает, что если нам каким-либо образом удалось выяснить через какую из двух узких щелей прошла частица, все направления ее распространения после щели равновероятны, т. е. двущелевые интерференционные осцилляции исчезают.

ГЛАВА 6

Ортогональные и неортогональные измерения

Рассмотрим измерение величины q , например, координаты частицы, с конечным разрешением (точностью) Dq . Это можно сделать с помощью щели шириной $2Dq$, которая может дискретно перемещаться в направлении оси q (рис. 6.1).

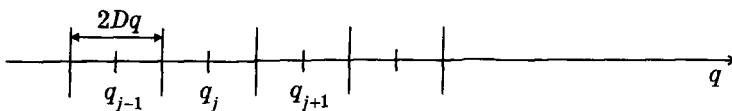


Рис. 6.1. Измерения координаты частицы при помощи дискретно перемещающейся щели шириной $2Dq = q_j - q_{j-1}$

Аппаратная функция $R(q)$ такого измерителя представляет собой прямоугольную функцию шириной $2Dq$. Напомним, что аппаратная функция описывает показания измерителя при точно известной измеряемой величине, т. е. отклик на δ -функцию. Если координата частицы равна q' , причем $q_j - Dq \leq q' < q_j + Dq$, то измеритель даст равновероятное значение координаты в полуотрезке $[q_j - Dq, q_j + Dq]$.

Волновая функция $\psi(q)$ в результате такого измерения перейдет в $R(q - q_j)\psi(q)$ [6], т. е.

$$\psi(q) \xrightarrow{J} R(q - q_j)\psi(q) = \begin{cases} \psi(q), & \text{если } q_j - Dq \leq q < q_j + Dq, \\ 0, & \text{если } q \text{ — другое.} \end{cases} \quad (6.1)$$

В пространстве кет-векторов это преобразование можно описать как проекцию:

$$|q\rangle \xrightarrow{J} \hat{R}_j |q\rangle, \quad (6.2)$$

где проектор

$$\hat{R}_j = \sum_{q_j - Dq \leq q < q_j + Dq} |q\rangle\langle q|. \quad (6.3)$$

Ясно, что, в соответствии с (4.8), он обладает условием полноты:

$$\sum_j \hat{R}_j = \hat{I}, \quad (6.4)$$

а также ортогональностью

$$\hat{R}_j \hat{R}_{j'} = \delta_{jj'}. \quad (6.5)$$

Здесь $\delta_{jj'}$ — символ Кронекера

$$\delta_{jj'} = \begin{cases} 1 & \text{при } j = j', \\ 0 & \text{при } j \neq j'. \end{cases}$$

Соответственно, и описываемое этим проектором измерение называется ортогональным (см. также [7]).

Естественно предположить, что вероятность получить j -й результат измерения равна сумме вероятностей получения значений q , попадающих в соответствующую область [3]:

$$w_j = \sum_{q_j - Dq \leq q \leq q_j + Dq} \operatorname{tr}(|q\rangle\langle q| \hat{\rho}) = \operatorname{tr}(\hat{R}_j \hat{\rho}). \quad (6.6)$$

Ортогональные измерения удобны тем, что для них, как и для абсолютно точных измерений, выполняется принцип повторяемости результатов измерений: после того, как прибор зафиксировал, что значение q лежит в интервале $q_j - Dq \leq q \leq q_j + Dq$, последующие измерения тем же прибором должны давать тот же результат с вероятностью единица, так как $\hat{R}_j^2 = \hat{R}_j$. Но свойство повторяемости противоречит обычному поведению состояния исследуемой системы при повторных приближенных измерениях. Если возмущение измеряемой величины отсутствует, то каждое последующее измерение дает дополнительное уточнение ее значения. Кроме того, аппаратная функция ортогонального измерения — негладкая прямоугольная функция, а результат измерения дискретен. Таким образом, ортогональные измерения являются лишь некой частной идеализацией и не могут рассматриваться как средство описания всего класса приближенных измерений.

В общем случае набор альтернатив результатов измерений логично положить непрерывным, а аппаратную функцию — гладкой. Последняя представляет собой условное распределение вероятностей показаний прибора q' при заданном значении измеряемой величины q :

$$|R(q', q)|^2 = w(q'|q). \quad (6.7)$$

Распределение вероятностей результатов измерения выражается обычной формулой теории вероятностей:

$$w(q') = \int_{\{q\}} w(q'|q) \rho(q) dq = \text{tr}(\hat{R}_{q'} \hat{\rho} \hat{R}_{q'}^+), \quad (6.8)$$

где априорное распределение вероятностей значений q равно

$$\rho(q) = \langle q | \hat{\rho} | q \rangle, \quad (6.9)$$

интеграл берется по диапазону значений q , а операторы $\hat{R}_{q'}$ удовлетворяют соотношению

$$\hat{R}_{q'}^+ \hat{R}_{q'} = \int_{\{q\}} |q\rangle |R(q', q)|^2 \langle q| dq. \quad (6.10)$$

В общем случае произведение $\hat{R}_{q'} \hat{R}_{q''}$ при $q' \neq q''$ может быть не равным нулю. Это означает, что различные результаты измерений могут вести к перекрывающимся состояниям. Такие измерения называют *неортогональными*, а М. Б. Менский ([6], с. 43) также называет их *нечеткими* (*fuzzy*).

Реалистичная черта непрерывного диапазона альтернатив особенно характерна для наблюдаемых с непрерывным спектром (таких, как координата).

С другой стороны, как и в случае ортогональных измерений (см. (6.4)),

$$\int_{\{q'\}} \hat{R}_{q'}^+ \hat{R}_{q'} dq' = \hat{I}, \quad (6.11)$$

а отдельные компоненты этого разложения коммутируют друг с другом:

$$\left[\hat{R}_{q'}^+ \hat{R}_{q'}, \hat{R}_{q''}^+ \hat{R}_{q''} \right] = 0 \quad (6.12)$$

при $q' \neq q''$.

Поскольку коммутативность следует также из условия ортогональности (6.5), ясно, что ортогональные измерения являются подклассом класса измерений, описываемых (6.8) и (6.10), когда $\hat{R}_{q'} \hat{R}_{q''} = 0$.

Приведем сводку основных формул:

Таблица 6.1

Ортогональные измерения	Неортогональные измерения
$ \psi\rangle \xrightarrow{J} \psi_J\rangle = \hat{R}_J \psi\rangle$	$ \psi\rangle \xrightarrow{q'} \psi_{q'}\rangle = \hat{R}_{q'} \psi\rangle$
$\hat{\rho} \rightarrow \hat{\rho}_J = \hat{R}_J \hat{\rho} \hat{R}_J^+$	$\hat{\rho} \rightarrow \hat{\rho}_{q'} = \hat{R}_{q'} \hat{\rho} \hat{R}_{q'}^+$
$w_J = \text{tr}(\hat{R}_J \hat{\rho}) = \text{tr}(\hat{R}_J \hat{\rho} \hat{R}_J^+)$	$w(q') = \text{tr}(\hat{R}_{q'} \hat{\rho} \hat{R}_{q'}^+)$
$\sum_J \hat{R}_J = \sum_J \hat{R}_J^2 = \sum_J \hat{R}_J^+ \hat{R}_J = \hat{I}$	$\int_{\{q'\}} \hat{R}_{q'}^+ \hat{R}_{q'} dq' = \hat{I}$

Из условия нормировки

$$\text{tr}(\hat{\rho}) = \text{tr}(\hat{R}_{q'} \hat{\rho} \hat{R}_{q'}^+) = \hat{I} \quad (6.13)$$

следует, что

$$\hat{R}_{q'}^+ \hat{R}_{q'} = \hat{I}, \quad (6.14)$$

что противоречит (6.11). Дело в том, что измерение в общем случае нарушает нормировку, и чтобы ее сохранить, нужно производить перенормировку. Однако иногда удобнее не перенормировать матрицу плотности.

Обычно измерения производятся в линейном режиме, когда аппаратная функция (6.7) не зависит от результата измерения. При этом $R(q, q') = R(q - q')$ с нормировкой

$$\int_{\{q\}} |R(q - q')|^2 dq = \int_{\{q'\}} |R(q - q')|^2 dq' = 1. \quad (6.15)$$

Ширина аппаратной функции $|R(q, q')|^2$ по q представляет собой разрешение измерителя.

Если операторы $\hat{R}_{q'}$ во всем множестве операторов $\{\hat{R}_{q'}\}$ всех возможных q' эрмитовы и положительно определены, т. е.

$$\langle \psi | \hat{R}_{q'} | \psi \rangle \geq 0 \quad (6.16)$$

для произвольного $|\psi\rangle$, то соответствующая C -числовая функция $R(q, q')$ действительна и неотрицательна, например,

$$R(q, q') \approx \exp \left[-\frac{(q - q')^2}{4(Dq)^2} \right] \quad (6.17)$$

описывает измерение координаты с разрешением Dq .

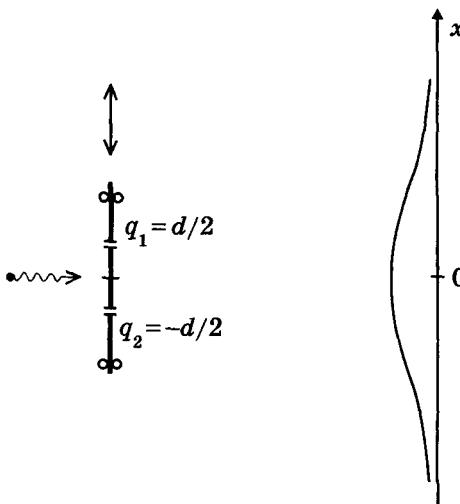


Рис. 6.2. Модификация двущелевого интерференционного эксперимента [10]. Экран может свободно передвигаться в вертикальном направлении

Реально такое измерение можно осуществить при помощи щелевой диафрагмы, коэффициент пропускания которой падает от центра к краям по гауссовскому закону. Это так называемая диафрагма с мягкими краями. Две такие диафрагмы могут быть использованы в интерференционном двущелевом эксперименте как на рис. 1.1. Подробное его описание будет дано ниже в главе 9. Здесь же мы отметим следующую возможность.

Для того чтобы определить, через какую щель прошла частица (А. Эйнштейн [8], см. также [9] и [10]), можно сделать экран подвижным (рис. 6.2). Если частица проходит нижнюю щель и попадает, например, в точку $x = 0$, то экран поедет вниз. Если верхнюю щель — то вверх. Однако от экрана частица получает дополнительный импульс p . Вместо (6.17) при этом следует писать (см. также (9.8))

$$R(q, q') \propto \exp \left[-\frac{(q - q')^2}{4(Dq)^2} + i \frac{pq}{\hbar} \right]. \quad (6.18)$$

Интерференционные осцилляции вероятности обнаружения частицы $P(x)$, конечно, исчезают хотя бы потому, что точное измерение импульса экрана, согласно принципу неопределеностей Гейзенberга, несовместимо с точным знанием его вертикального

положения. Распределение $P(x)$ размажется и получится что-то похожее на изображенное на рис. 6.2.

Аналогичная история произойдет и с использованием так называемого микроскопа Гейзенberга (см. [10], с. 18). Если щели подсвечивать снизу, то по рассеянному свету можно узнать, через какую щель прошла частица. Однако она приобретет при этом дополнительную составляющую импульса от фотонов подсветки, и интерференционный эффект исчезнет.

Не всякая наблюдаемая обладает непрерывным спектром значений. Если оператор \hat{A} описывает наблюдаемую с дискретным спектром значений $\{a_j\}$, который образуют всевозможные собственные значения a_j оператора \hat{A} , т. е. $\hat{A}|a_j\rangle = a_j|a_j\rangle$, то произвольный вектор состояния $|\psi\rangle$ можно разложить по ортогональному базису $|a_j\rangle$: $|\psi\rangle = \sum_j c_j |a_j\rangle$. Таким образом, роль волновой функции в \hat{A} -представлении играют комплексные коэффициенты c_j . Тогда, аналогично (6.1) и первой строке табл. 6.1, можно записать

$$|\psi\rangle \xrightarrow{a'} \hat{R}_{a'} |\psi\rangle = \sum_j R(a_j - a') c_j |a_j\rangle. \quad (6.19)$$

Итак, при измерении наблюдаемой a линейным прибором с аппаратной функцией $|R(a, a')|^2 = |R(a - a')|^2$ мы получим значение a' , а вектор состояния редуцируется в соответствии с (6.19). Следовательно, если ширина аппаратной функции превышает интервалы между собственными значениями a_j , то измерение может давать непрерывный набор результатов, даже если измеряемая наблюдаемая обладает дискретным спектром. Это следствие нечеткости, или, иными словами, неточности измерений.

ГЛАВА 7

Селективное и неселективное описание квантовых измерений

В зависимости от того, известен или неизвестен нам результат измерения, используется *селективное* или *неселективное* описание. Так, выражение (6.19) представляет собой селективное описание, поскольку результат измерения a' известен. При этом если исходное состояние системы было чистым, то и после измерения оно остается чистым, т. е. может быть описано вектором состояния или волновой функцией.

Когда же нам не известно, какой из результатов измерения реализовался в действительности, производится неселективное описание. В этом случае в описании конечного состояния системы принимаются в расчет все возможные результаты измерения. Переищем (6.19) в терминах матрицы плотности и просуммируем по всем альтернативам:

$$|\psi\rangle\langle\psi| \xrightarrow{\{j\}} \sum_j \hat{R}_j |\psi\rangle\langle\psi| \hat{R}_j^+. \quad (7.1)$$

Это неселективное описание квантового измерения с дискретными альтернативами. Чистое начальное состояние переходит в смешанное по причине отсутствия информации о результате эксперимента. Если же и исходное состояние смешанное, и его матрица плотности равна

$$\hat{\rho}_0 = \sum_m \rho_m |\psi_m\rangle\langle\psi_m|, \quad (7.2)$$

то есть система находится в одном из чистых состояний $|\psi_m\rangle$ с вероятностью ρ_m , то, применяя проектирование к каждому из чистых состояний, имеем

$$\hat{\rho}_0 \xrightarrow{\{j\}} \sum_j \hat{R}_j \hat{\rho}_0 \hat{R}_j^+. \quad (7.3)$$

В случае непрерывных альтернатив

$$\hat{\rho}_0 \xrightarrow{\{a'\}} \int_{\{a'\}} \hat{R}_{a'} \hat{\rho}_0 \hat{R}_{a'}^+ da'. \quad (7.4)$$

В промежуточной ситуации, когда мы точно не знаем результат измерения a' , но уверены, что он принадлежит некоторому множеству A , имеем так называемое *частично неселективное измерение*:

$$\hat{\rho}_0 \xrightarrow{A} \int_A \hat{R}_{a'} \hat{\rho}_0 \hat{R}_{a'}^+ da'. \quad (7.5)$$

ГЛАВА 8

Соотношение неопределенностей Гейзенберга для нечетких квантовых измерений

Вернемся к соотношению неопределенностей координаты и импульса частицы, в основном следуя [6]. Измерение координаты q с результатом q' опишем по схеме

$$\psi(q) \xrightarrow{q'} \psi_{q'}(q) = R(q - q')\psi(q). \quad (8.1)$$

После измерения распределение вероятности местонахождения частицы $|\psi_{q'}(q)|^2$ даже в случае линейного измерителя, когда $R(q, q') = R(q - q')$, зависит от результата q' . Это измерение иллюстрируется рисунком 8.1. Ясно, что редуцированная волновая функция $\psi_{q'}(q)$ зависит от результата измерения q' .

Среднеквадратичные отклонения координаты и импульса до измерения обозначим Δq и Δp , а после измерения — соответственно, δq и δp . Ширину аппаратной функции измерителя $|R(q)|^2$, определяющую точность измерения, обозначим $(Dq)^2$. Дисперсия неопределенности δq^2 представляет собой минимум по a (см. текст между формулами (4.13) и (4.14)):

$$\delta q^2 = \langle \psi_{q'}(q) | (\hat{q} - \langle q \rangle)^2 | \psi_{q'}(q) \rangle = \min_a \langle (q - a)^2 \rangle, \quad (8.2)$$

который достигается при $a = \langle q \rangle$, следовательно,

$$\delta q^2 \leq \langle (q - q')^2 \rangle, \quad (8.3)$$

поскольку результат измерения q' может отличаться от $\langle q \rangle$.

Распишем правую часть (8.3):

$$\langle (q - q')^2 \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} (q - q')^2 |R(q - q')\psi(q)|^2 dq}{\int_{-\infty}^{+\infty} |R(q - q')\psi(q)|^2 dq}. \quad (8.4)$$

Здесь числитель просто повторяет определение среднего значения функции, а знаменатель учитывает изменение нормировки вследствие перемножения аппаратной функции и квадрата модуля волновой функции.

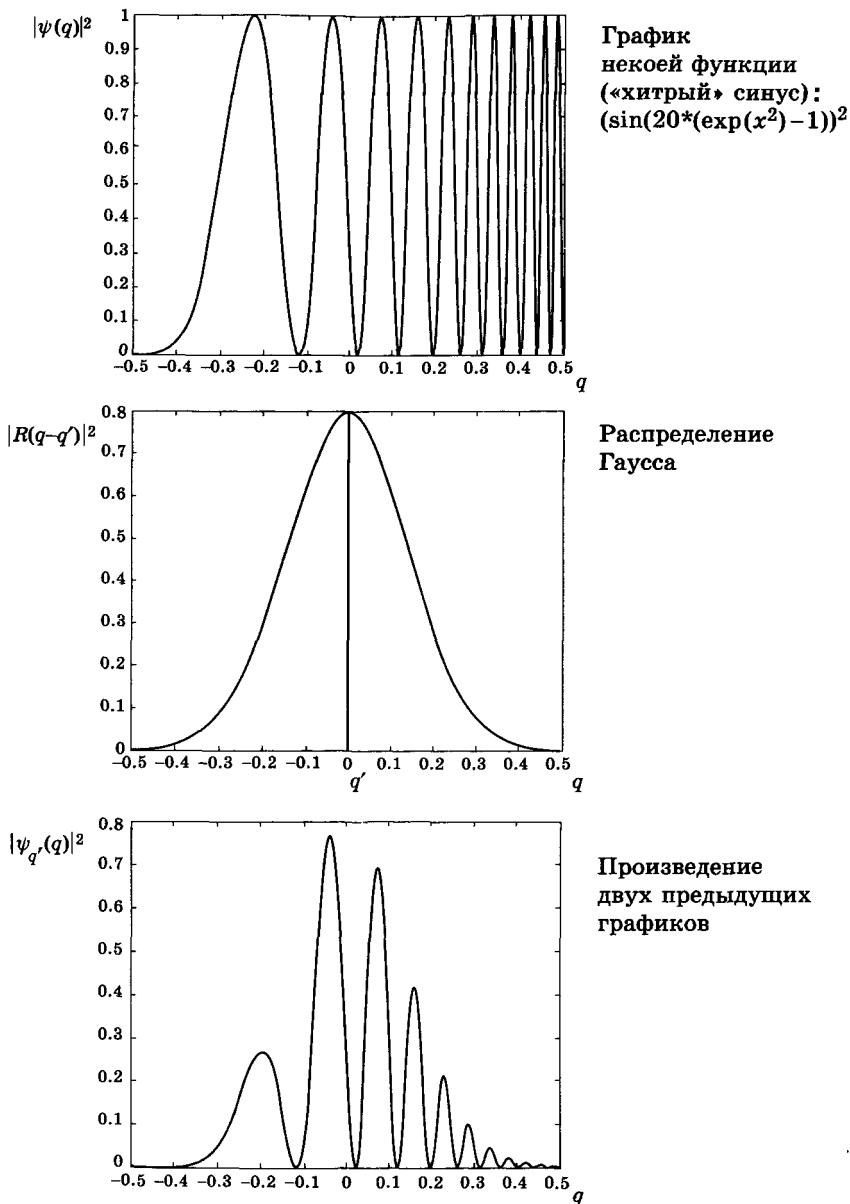


Рис. 8.1. Измерение координаты частицы с распределением вероятности ее местонахождения $|\psi(q)|^2$ прибором с аппаратной функцией $|R(q)|^2$ при получении результата измерений q'

Поскольку $\int_{-\infty}^{+\infty} |R(q)|^2 dq = 1$, определим ширину аппаратной функции $(Dq)^2$ из соотношения

$$(Dq)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} q^2 |R(q)|^2 dq. \quad (8.5)$$

Соотношение неопределенностей Гейзенберга после измерения для среднеквадратичных отклонений имеет вид

$$\delta q' \delta p_p' \geq \hbar/2, \quad (8.6)$$

откуда с учетом (8.3) можно записать

$$\frac{\hbar^2}{4\langle \delta p^2 \rangle} \leq \langle \delta q^2 \rangle \leq \langle (q - q')^2 \rangle. \quad (8.7)$$

Подставим в правую часть этого неравенства соотношение (8.4). Тогда

$$\frac{\hbar^2}{4\langle \delta p^2 \rangle} \int_{-\infty}^{+\infty} |R(q - q')|^2 |\psi(q)|^2 dq \leq \int_{-\infty}^{+\infty} (q - q')^2 |R(q - q')|^2 |\psi(q)|^2 dq. \quad (8.8)$$

Проинтегрируем обе части по q' . В силу условия нормировки волновой функции, а также (6.15) и (8.5), имеем

$$\frac{\hbar^2}{4\langle \delta p^2 \rangle} \leq (Dq)^2, \quad (8.9)$$

следовательно,

$$Dq \delta p \geq \frac{\hbar}{2}, \quad (8.10)$$

и соотношение неопределенностей для нечеткого измерения доказано. Его можно обобщить и на случай исходного смешанного состояния. Отметим также, что плотность вероятности получить результат измерения q' равна норме ненормированной волновой функции конечного состояния после измерения:

$$\rho(q') = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_{q'}(q)|^2 dq \stackrel{\Delta}{=} \|\psi_{q'}\|^2, \quad (8.11)$$

так что

$$\int_{\{q'\}} \rho(q') dq' = 1. \quad (8.12)$$

Если результат измерения неизвестен или известен с некоторой неопределенностью, описание системы после измерения должно быть частично неселективным. Конечное состояние при этом представляется матрицей плотности

$$\hat{\rho} = \int_{\{q'\}} \rho(q') \frac{|\psi_{q'}\rangle\langle\psi_{q'}|}{\|\psi_{q'}\|^2} dq'. \quad (8.13)$$

Здесь норма в знаменателе появляется для выполнения условия нормировки матрицы плотности ($\text{tr } \hat{\rho} = 1$). Если результат измерения неизвестен, то $\rho(q')$ определяется формулой (8.11), и (8.13) переходит в (7.4). Но если какая-то информация об исходе испытания имеется, то $\rho(q')$ будет более узкой функцией, чем (8.11). Апостериорная (после измерения) неопределенность импульса при этом удовлетворяет соотношению

$$\delta p \geq \frac{\hbar}{2\sqrt{(Dq)^2 + (Dq')^2}}, \quad (8.14)$$

где Dq' — полуширина распределения $\rho(q')$, обычно имеющего вид колоколообразной функции. При этом важно понимать, что отсутствие информации о результате измерения, определяемое Dq' , должно носить принципиальный характер, а не обуславливаться халатностью экспериментаторов. Иначе возникает абсурдная ситуация, когда просто закрыв глаза на показания измерителя можно получить уменьшение среднеквадратичного отклонения (8.14).

Рассмотренное соотношение неопределенностей для нечетких измерений непосредственно обобщается на случай произвольной пары A, B канонически сопряженных наблюдаемых. Например, при измерении импульса с разрешением Dp имеем

$$\{\Delta q, \Delta p\} \xrightarrow{Dp} \{\delta q, \delta p\}, \quad \delta q \geq \frac{\hbar}{2Dp}. \quad (8.15)$$

Начиная с общего соотношения неопределенностей (4.14), можно доказать и соотношение неопределенностей при измерении произвольной пары наблюдаемых, описываемых эрмитовыми операторами \hat{A} и \hat{B} с коммутатором $\hat{C} = [\hat{A}, \hat{B}]$:

$$\{\Delta A, \Delta B\} \xrightarrow{DA} \{\delta A, \delta B\}, \quad \delta B \geq \frac{|\langle \hat{C} \rangle|}{2DA}. \quad (8.16)$$

Здесь нужно подставить среднее значение \hat{C} в апостериорном состоянии. Поскольку оно зависит от результата измерения, соотношение (8.16) не так удобно, как в случае C -числового коммутатора.

ГЛАВА 9

Примеры размывания интерференционной картины в экспериментах типа «который путь»

Выше мы анализировали интерференционные двущелевые эксперименты, в которых интерференция исчезает при попытке узнать, через какую щель прошла частица. Углубим этот анализ на основании полученных в предыдущем параграфе соотношений неопределенностей. Рассмотрим вначале случай, когда измеряется координата частицы q , а начальная (априорная) неопределенность импульса Δp много меньше апостериорной неопределенности δp , приобретенной в результате измерения координаты. При этом, конечно, априорной неопределенностью можно пренебречь, и $\delta p \approx \frac{\hbar}{2Dq}$.

Что будет в противоположном случае, если $\Delta p \gg \delta p \approx \frac{\hbar}{2Dq}$? Будет ли влиять измерение координаты на импульс? Казалось бы, нет. Но это не так! (См. [6], с. 67.) В самом деле, если при измерении координаты линейным измерителем волновая функция перемножается с $R_{q'}(q)$: $\psi(q) \xrightarrow{q'} R_{q'}(q)\psi(q) = \psi_{q'}(q)$, $R_{q'} = R(q - q')$, то в импульсном представлении, являющемся фурье-образом координатного (см. (1.1)):

$$\psi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(q) \exp\left(-\frac{iqp}{\hbar}\right) dq,$$

произведение заменяется сверткой фурье-образов:

$$\psi(p) \xrightarrow{q'} \psi_{q'}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{q'}(p') \psi(p - p') dp' \equiv \int_{-\infty}^{\infty} R_{q'}(p - p') \psi(p') dp', \quad (9.1)$$

где, согласно (1.1),

$$R_{q'}(p) = e^{\frac{i}{\hbar}pq'} R(p), \quad (9.2)$$

а

$$R(p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} R(q) \exp\left(-\frac{iqp}{\hbar}\right) dq. \quad (9.3)$$

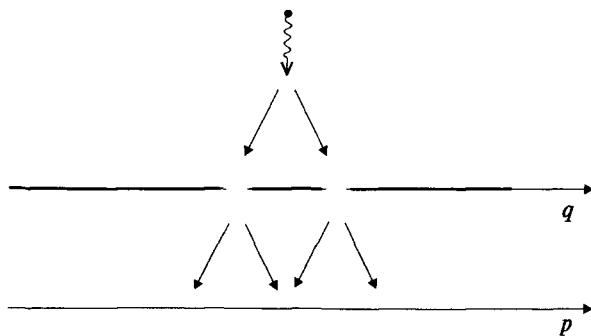


Рис. 9.1. Частица падает сверху на непрозрачный экран, в котором имеются две щелевые диафрагмы с мягкими краями. Их центры имеют координаты $q_1 = d/2$ и $q_2 = -d/2$. На достаточно большом расстоянии от экрана, существенно превышающем d , наблюдается интерференционная картина

Здесь числовой множитель перед интегралом отличается от $\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}$ в (1.1) в силу условия нормировки $\int_{-\infty}^{\infty} R(p)dp = 1$.

Интегральное преобразование свертки (9.1) имеет свойство сглаживать резкие перепады функции $\psi(p)$ так, что характерный масштаб изменения $\psi_{q'}(p)$ увеличивается по крайней мере до ширины δp функции $R(p)$. При этом тонкая периодическая структура начального распределения $\psi(p)$ в конечном распределении $\psi_{q'}(p)$ может размываться. В этом легко убедиться на примере уже рассмотренного нами двущелевого эксперимента, см. рис. 9.1.

Пусть щелевые диафрагмы имеют мягкие края с гауссовой функцией пропускания (6.17) (см. рис. 9.2), т. е.

$$\psi(q) \approx e^{-(q-\frac{d}{2})^2/4\Lambda^2} + e^{-(q+\frac{d}{2})^2/4\Lambda^2}, \quad (9.4)$$

где 2Λ — ширина щели.

В дальней зоне за экраном распределение вероятности обнаружения частицы будет определяться фурье-образом от (9.4):

$$\psi(p) \approx e^{-\left(\frac{\Lambda^2}{\hbar^2}\right)p^2} \cos \frac{pd}{2\hbar}, \quad (9.5)$$

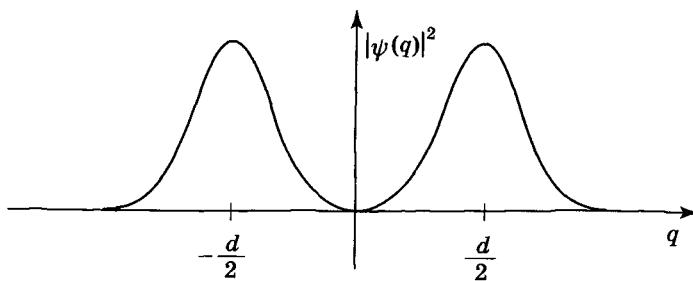


Рис. 9.2. Распределение коэффициента пропускания экрана на рис. 9.1

откуда само распределение вероятности в дальней зоне равно (см. рис. 9.3)

$$|\psi(p)|^2 \approx \frac{1}{2} e^{-2\left(\frac{\Lambda^2}{\hbar^2}\right)p^2} \left(1 + \cos \frac{pd}{\hbar}\right). \quad (9.6)$$

При уменьшении ширины щели 2Λ ширина интерференционной картины увеличивается, и в пределе при $\Lambda \rightarrow 0$ выражение (9.6) переходит в (2.2).

Теперь предположим, что нам каким-то образом удалось узнать, через какую щель прошла частица, тогда два пика функции $|\psi(q)|^2$ (см. (9.4) и рис. 9.2) редуцируются до одного, например, с $q \approx d/2$

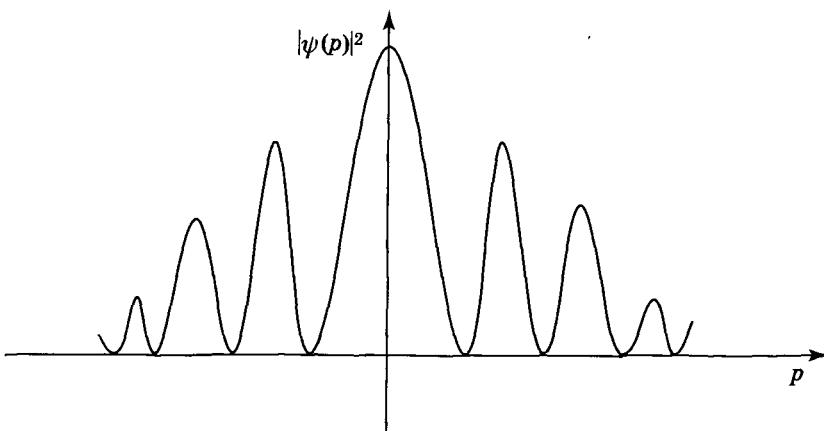


Рис. 9.3. Распределение вероятности обнаружить частицу на достаточно большом, по сравнению с d , расстоянии от экрана

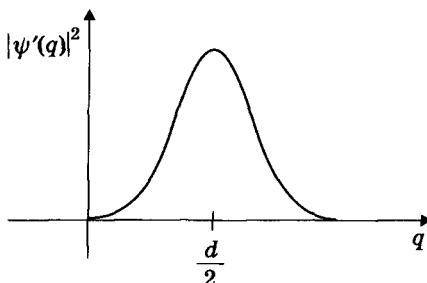


Рис. 9.4. Два пика функции на рис. 9.2 редуцируются до одного в случае, если нам удалось выяснить, через какую щель прошла частица

(см. рис. 9.4):

$$\psi'(q) \approx e^{-(q-d/2)^2/4\Lambda^2}, \quad (9.7)$$

следовательно,

$$\psi'(p) \approx e^{-\frac{\Lambda^2}{\hbar^2} p^2 + i \frac{pd}{\hbar}}, \quad (9.8)$$

интересно сравнить это выражение с (6.18). Итак,

$$|\psi'(p)|^2 \approx e^{-2\frac{\Lambda^2}{\hbar^2} p^2}. \quad (9.9)$$

Интерференция исчезла (см. рис. 9.5). При этом совершенно неважно, эйнштейновским ли экраном, испытывающим отдачу [8] (см. также [9] и [10]), гейзенберговским ли микроскопом, когда путь тяжелой частицы определяют по рассеянию на ней фотонов, или каким-либо иным способом удалось измерить, через какую щель прошла частица. Приведенные расчеты имеют общий характер, независимо от конкретных моделей: мы можем доказать исчезновение интерференции из общих соображений.

Далее мы рассмотрим конкретный интерференционный эксперимент [11] (см. также [12]) типа «который путь», интересный тем, что в нем в качестве квантовых частиц использовались тяжелые атомы рубидия ^{85}Rb . Поэтому их можно подсвечивать микроволновым излучением, практически не сообщая им дополнительного импульса, изменяющего их траекторию. Схема используемых в эксперименте электронных уровней атома рубидия с поясняющими надписями представлена на рис. 9.6.

Атомы ^{85}Rb , выходя из магнитооптической ловушки, падают под действием гравитации на первую стоячую волну (см. рис. 9.7). При

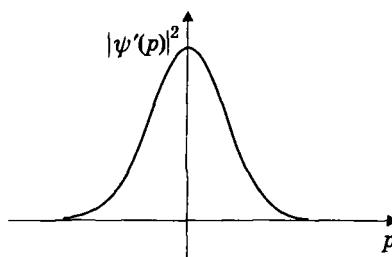


Рис. 9.5. Распределение вероятности обнаружить частицу за экраном в случае, если известно, через какую щель прошла частица. Интерференция исчезла

этом атомы движутся по траектории A и находятся в основном энергетическом состоянии $|2\rangle$.

Стоячая световая волна имеет световую частоту, соответствующую энергии, несколько меньшей энергии перехода $|e\rangle \leftrightarrow |2\rangle$. Атом рубидия может через нее пройти (траектория C) или отразиться (траектория B). Поскольку энергия фотонов светового пучка меньше энергии перехода $|e\rangle \leftrightarrow |2\rangle$ (частотная расстройка $\Delta_{e\leftrightarrow 2} < 0$), брэгговское отражение (по траектории B) происходит так, как будто от среды с отрицательным потенциалом, что эквивалентно «отражению» от оптически более плотной среды. При этом появляется дополнительный фазовый набег на π , т. е. знак амплитуды состояния

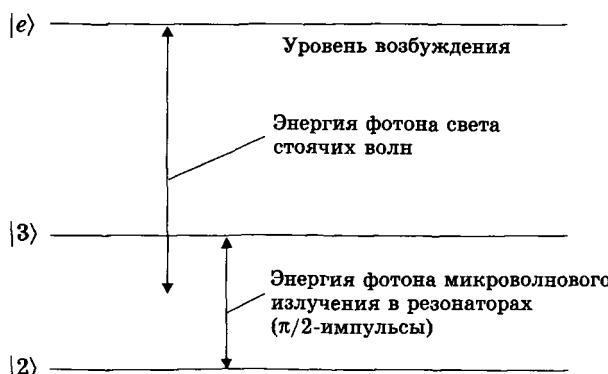


Рис. 9.6. Схема электронных уровней атома ^{85}Rb , используемых в эксперименте, с описанием электромагнитных воздействий

меняется на противоположный. Итак, после первой стоячей волны квантовое состояние атома описывается вектором

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (-|\psi_B\rangle|2\rangle + |\psi_C\rangle|2\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} (-|\psi_B\rangle + |\psi_C\rangle)|2\rangle, \quad (9.10)$$

где используется прямое произведение векторов, при котором размерность пространства произведения складывается из размерностей подпространств каждого из векторов.

Аналогично, после второй стоячей волны имеем

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{2} (-|\psi_D\rangle - |\psi_E\rangle + |\psi_F\rangle + |\psi_G\rangle)|2\rangle. \quad (9.11)$$

Плотность вероятности обнаружения атома в области пересечения траекторий D и E определяется как

$$\begin{aligned} P_2(q) &= \frac{1}{4} (-\langle\psi_D| - \langle\psi_E|)(-\langle\psi_D| - \langle\psi_E|) \\ &= \frac{1}{4} [|\psi_D(q)|^2 + |\psi_E(q)|^2 + \psi_D^*(q)\psi_E(q) + \psi_D(q)\psi_E^*(q)], \end{aligned} \quad (9.12)$$

где использовано координатное представление (q -представление) волновых функций. Последние два члена (9.12) и дают интерференцию. Внутреннее состояние атомов (на нижнем основном энергетическом уровне $|2\rangle$) одно и то же, поэтому, в силу $\langle 2|2\rangle = 1$, оно не входит в (9.12).

Теперь рассмотрим модификацию эксперимента (рис. 9.8), в которой удается выяснить по какой траектории (D или E) прошел атом рубидия без передачи ему механического импульса. Для этого рассмотрим вначале двухуровневый атом под действием резонансного излучения, энергия фотонов которого равна энергии перехода с одного уровня на другой. Если нижний и верхний уровни обозначить, соответственно, как $|2\rangle$ и $|3\rangle$, то вектор состояния

$$\psi(t) = C_2(t)|2\rangle + C_3(t)|3\rangle, \quad (9.13)$$

где $C_2(t)$ и $C_3(t)$ — C -числовые функции времени, такие, что

$$|C_2(t)|^2 + |C_3(t)|^2 = 1. \quad (9.14)$$

Квантовая теория утверждает (см. напр., [13], с. 77, 95), что при пренебрежимо малой вероятности спонтанного перехода $|3\rangle \rightarrow |2\rangle$ вектор состояния (9.13) гармонически осциллирует между уровнями

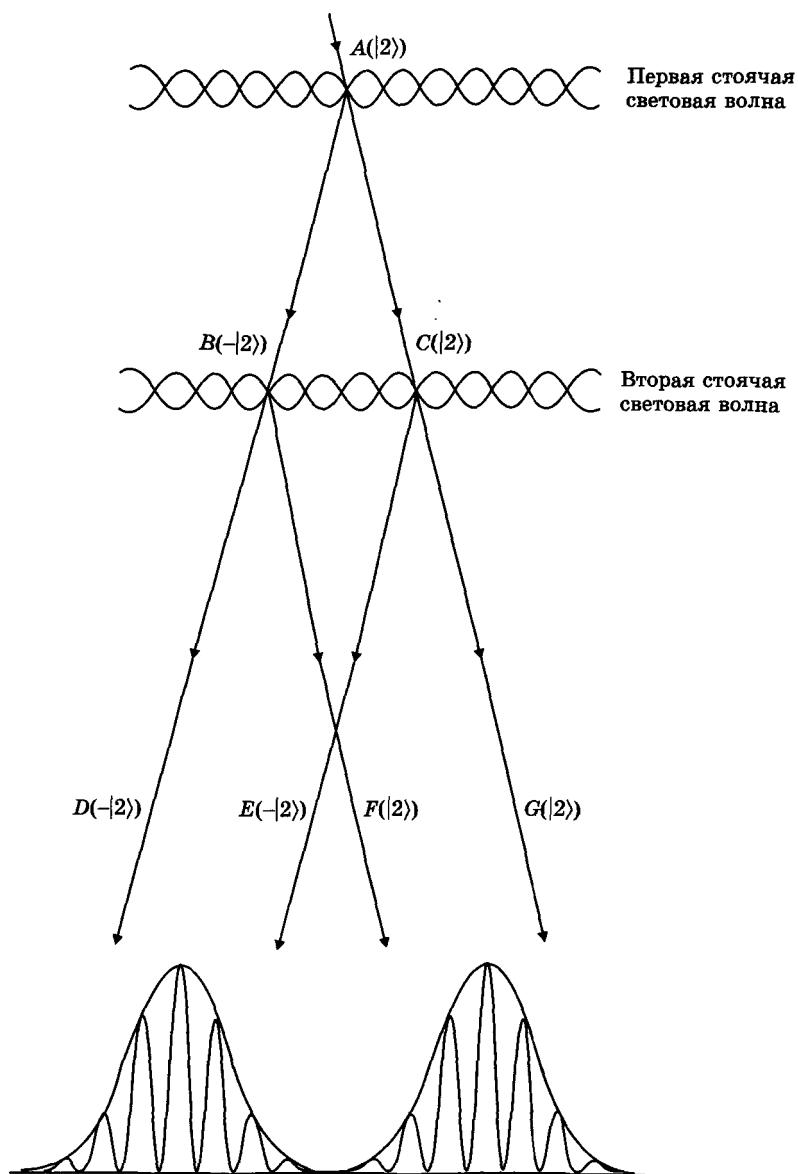


Рис. 9.7. Возникновение интерференции от траекторий D и E (слева внизу) и от траекторий F и G (справа внизу)

с частотой Раби Ω , пропорциональной амплитуде резонансного излучения. Если в начальный момент времени $t = 0$ атом находился в основном состоянии $|2\rangle$, то вероятность обнаружить его в возбужденном состоянии $|3\rangle$ равна

$$P_3(t) = |C_3(t)|^2 = \frac{1}{2} (1 - \cos \Omega t). \quad (9.15)$$

Следовательно, импульсом длиной $\Delta t = \pi/\Omega$ можно со 100%-ной вероятностью возбудить невозбужденный атом. Такой импульс называется π -импульсом. В свою очередь, $\pi/2$ -импульс возбуждает атом с 50%-ной вероятностью.

В атоме ^{85}Rb основной уровень расщеплен на два подуровня $|2\rangle$ и $|3\rangle$ сверхтонкой структуры, соответствующих полному угловому моменту $F = 2$ или 3, причем частота излучения стоячей световой волны подбирается так, что частотные расстройки $\Delta_{e \leftrightarrow 2}$ и $\Delta_{e \leftrightarrow 3}$ одинаковы по абсолютной величине: $\Delta_{e \leftrightarrow 2} = -\Delta_{e \leftrightarrow 3}$. И если для атомов в состоянии $|2\rangle$ световая волна представляет собой как бы среду с отрицательным потенциалом (расстройка $\Delta_{e \leftrightarrow 2} < 0$), при «отражении» от которой фаза состояния меняется на π , то для атомов в состоянии $|3\rangle$ — наоборот: фаза остается неизменной.

Подействуем на атом ^{85}Rb микроволновым излучением частоты ≈ 3 ГГц, резонансным переходу $|3\rangle \leftrightarrow |2\rangle$. $\pi/2$ -импульс переводит атом ^{85}Rb из основного состояния $|2\rangle$ в равновероятное состояние $\frac{1}{\sqrt{2}} (|3\rangle + |2\rangle)$, см. рис. 9.8. После стоячей световой волны атом, распространяющийся по траектории C , остается в том же состоянии, а «отраженный» (по траектории B) приобретает фазовый набег на π у составляющей $|2\rangle$, и его состояние становится $\frac{1}{\sqrt{2}} (|3\rangle - |2\rangle)$. Это эквивалентно тому, что мы как бы подействовали на атом $3\pi/2$ -импульсом.

После стоячей световой волны атомы подвергаются второму воздействию $\pi/2$ -импульса микроволнового излучения. Суммарное воздействие двух $\pi/2$ -импульсов на атом, движущийся в направлении C , эквивалентно одному π -импульсу, и со 100%-ной вероятностью он перейдет на уровень $|3\rangle$, а на атом, движущийся в направлении B , эквивалентно 2π -импульсу, т. е. он вернется в состояние $|2\rangle$. Таким образом, в отличие от (9.10), имеем

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\psi_B\rangle |2\rangle + |\psi_C\rangle |3\rangle). \quad (9.16)$$

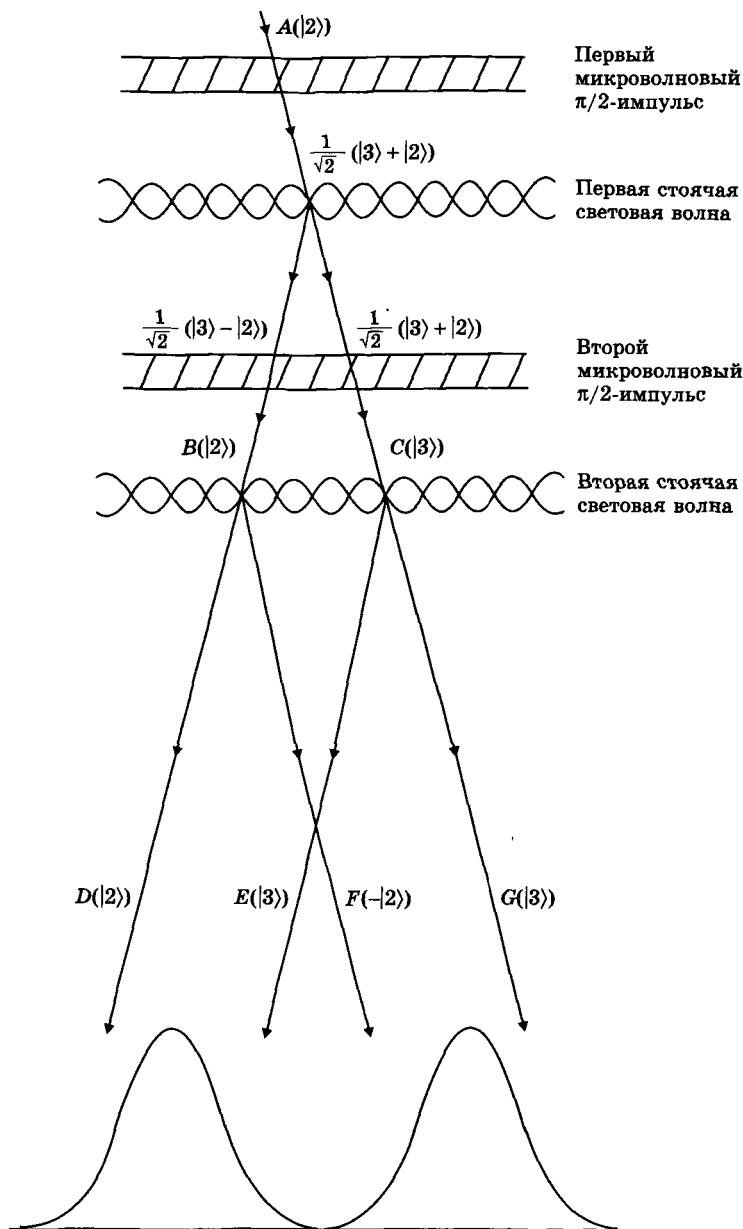


Рис. 9.8. Исчезновение интерференционной картины при выяснении траектории атома по внутреннему состоянию $|2\rangle$ или $|3\rangle$

Это так называемое *перепутанное* (*entangled*) состояние: внутреннее состояние атома ($|2\rangle$ или $|3\rangle$) «запуталось» или «переплелось» с внешним (направление движения B или C). Характерным свойством перепутанного состояния является невозможность его факторизовать:

$$|\psi_1\rangle \neq C(|2\rangle + |3\rangle)(|\psi_B\rangle + |\psi_C\rangle), \quad (9.17)$$

где C — произвольный коэффициент, т. е. внешнее и внутреннее состояния перестают быть независимыми. Другими словами, внутренним состоянием «помечена» траектория. Такого же рода состояния возникают в двущелевом эксперименте (рис. 1.1) при установке в щелях взаимно ортогональных линейных поляризаторов (см. текст после формулы (3.4)).

Интересно сопоставить интерференционные формулы (3.4) и (9.12): распределения по q и p в рассматриваемом и двущелевом экспериментах меняются местами. Микроволновыми импульсами помечаются направления распространения, т. е. p , а регистрация ведется по итоговой $|\psi_2(q)|^2 = P_2(q)$.

Что же будет в итоге? Согласно (9.16) и рис. 9.8,

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{2} (|\psi_D\rangle|2\rangle + |\psi_E\rangle|3\rangle - |\psi_F\rangle|2\rangle + |\psi_G\rangle|3\rangle), \quad (9.18)$$

и вероятность обнаружить атом в области пересечения траекторий D и E равна

$$P_2(q) = \frac{1}{4} [|\psi_D(q)|^2 + |\psi_E(q)|^2 + \psi_D^*(q)\psi_E(q)\langle 2|3\rangle + \psi_D(q)\psi_E^*(q)\langle 3|2\rangle]. \quad (9.19)$$

Поскольку внутренние состояния $|2\rangle$ и $|3\rangle$ ортогональны, т. е. $\langle 2|3\rangle = \langle 3|2\rangle = 0$, интерференционные члены исчезают.

Итак, хотя микроволновое излучение фотонов малой энергии практически не воздействует на механический импульс тяжелых атомов ^{85}Rb , в отличие, например, от микроскопа Гейзенберга или экрана Эйнштейна, интерференционная картина исчезает вследствие возможности определить по внутреннему состоянию атома ($|2\rangle$ или $|3\rangle$), по какой траектории он путешествовал. В этом фундаментальное значение рассмотренного эксперимента. Он доказывает, что исчезновение интерференционной картины при попытке измерения траектории квантовых объектов имеет более глубокую причину, нежели просто силовое воздействие измерителя.

ГЛАВА 10

Парадокс Зенона и непрерывные квантовые измерения

Классический парадокс Зенона, как известно, состоит в следующем. Если время состоит из отдельных моментов, то выпущенная из лука стрела не может лететь, так как в любой момент времени она локализована в определенной области пространства (связана с определенной точкой пространства, например, ее центром масс). Поскольку стрела не может разорваться при переходе к следующему моменту времени, она не может двигаться.

Квантовый парадокс Зенона [14] формулируется так: повторяющееся (в пределе — непрерывное) измерение квантовой системы препятствует ее переходу в другое состояние. Другое его название — *эффект сторожевой собаки*. Он выводится из квантовой теории измерений, в частности, из постулата фон-Неймана. Но и в обычной жизни мы знаем, что если напряженно, не отрывая глаз, ждать, когда закипит чайник, ожидание покажется бесконечным, как и сверление больного зуба, хотя, казалось бы, надо потерпеть чуть-чуть. В качестве простого примера рассмотрим вначале двухуровневый атом в поле резонансного излучения, см. рис. 10.1. Обозначая нижний и верхний уровни, соответственно, цифрами 1 и 2, согласно (9.13)–(9.15) имеем:

$$|\psi(t)\rangle = C_1(t)|1\rangle + C_2(t)|2\rangle, \quad (10.1)$$

$$P_2(t) = |C_2(t)|^2 = \frac{1}{2}(1 - \cos\Omega t), \quad (10.2)$$

и атом гармонически осциллирует между уровнями.

Теперь произведем измерение состояния атома. При этом редукция должна изменить эволюцию атома, описываемую выражением (10.2).

Пусть в результате измерения через небольшой промежуток времени Δt с момента $t = 0$ мы установим, что атом продолжает находиться в основном (нижнем) состоянии $|1\rangle$. Тогда эволюция начнется снова — уже не с момента времени $t = 0$, а с $t = \Delta t$, т. е. измерение приведет к задержке по времени на Δt . Если за

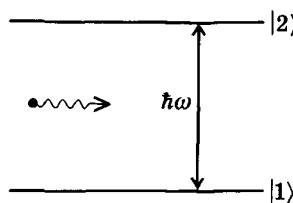


Рис. 10.1. Двухуровневый атом в поле резонансного излучения

атомом наблюдать непрерывно ($\Delta t \rightarrow 0$), то эволюция атома вообще прекратится, несмотря на наличие резонансного излучения [6].

Действительно, произведем N измерений через малые промежутки времени $\Delta t = T/N$, T — общее время наблюдения. Вероятность сохранения атома в основном состоянии

$$P_{1 \rightarrow 1} = (1 - P_2)^N. \quad (10.3)$$

Предположим, что $P_2 \propto \Delta t^2$, т. е. $P_2 = \alpha \Delta t^2$, как в (10.2), где при малых Δt вероятность $P_2 \cong \frac{(\Omega \Delta t)^2}{4}$. При этом

$$P_{1 \rightarrow 1} = (1 - \alpha \Delta t^2)^N = \left[1 - \alpha \left(\frac{T}{N} \right)^2 \right]^N \rightarrow 1 \quad (10.4)$$

при $\Delta t \rightarrow 0$ и $N \rightarrow \infty$.

Итак, непрерывные измерения прекращают эволюцию. Еще интереснее, казалось бы, должен быть случай, когда атом находится в верхнем неустойчивом состоянии в отсутствие внешнего поля. С течением времени вместо спонтанного перехода в основное состояние непрерывное наблюдение должно было бы «заморозить» его в верхнем неустойчивом состоянии. Но при линейной зависимости $P_2 \propto \Delta t$ эффекта «замораживания», согласно (10.4), не будет. Вот почему парадокса Зенона наблюдать при этом нельзя, так как вероятностный закон спонтанного перехода экспоненциален: $P = 1 - e^{-\alpha t}$. Действительно, возбудив атом π -импульсом и поставив детектор, ожидающий появления спонтанного фотона, никакой задержки его поступления, разумеется не будет. То же самое относится и к распаду атома нестабильного изотопа: наличие или отсутствие счетчика Гейгера на скорость распада влиять не будет.

Теперь перейдем к описанию реального эксперимента [15], в котором реализована идея Р. Кука [16] так называемой V -конфигурации уровней (рис. 10.2).

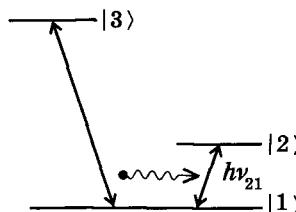


Рис. 10.2. Трехуровневая V -конфигурация уровней атомов в эксперименте по проверке парадокса Зенона. Повторяющиеся измерения перехода 1–2 при резонансном облучении на частоте ν_{31} делают переход менее вероятным. Вспомогательный уровень $|3\rangle$ нужен для такого измерения

По сравнению с просто двухуровневым атомом (рис. 10.1) для осуществления измерений переходов между уровнями $|1\rangle$ и $|2\rangle$ добавлен еще один уровень $|3\rangle$. Переходы с него на второй уровень $|2\rangle$ и обратно запрещены, а возможен только распад на первый уровень $|3\rangle \rightarrow |1\rangle$. Если на атом, который находится под действием резонансного излучения частоты $\nu_{21} = (E_2 - E_1)/\hbar$ на одном из двух уровней $|1\rangle$ или $|2\rangle$, направить π -импульс на частоте $\nu_{31} = (E_3 - E_1)/\hbar$, то по регистрации потом спонтанно рассеянного фотона на этой частоте можно заключить, что в момент освещения он находился в основном состоянии $|1\rangle$. Отсутствие же рассеянного фотона означает возбужденное состояние атома $|2\rangle$.

Вероятность спонтанного перехода $|2\rangle \rightarrow |1\rangle$ предполагается пренебрежимо малой (за счет высокой интенсивности резонансного излучения на радиочастоте $\nu_{21} = 320.7$ МГц), и эволюция хорошо описывается соотношениями (10.1), (10.2).

В эксперименте [15] 5000 ионов бериллия ${}^9\text{Be}^+$ находились в магнитной ловушке в основном состоянии $|1\rangle$. В него они переводились длительным (5-секундным) лазерным импульсом с длиной волны $\lambda_{31} = 313$ нм, резонансной переходу $|1\rangle \leftrightarrow |3\rangle$. В течение этого импульса все ионы, которые находились на уровне $|2\rangle$, успевали спонтанно перейти на уровень $|3\rangle$. После окончания импульса через время, достаточное для спонтанного перехода обратно на уровень $|1\rangle$, практически все ионы оказывались невозбужденными.

Затем включался π -импульс радиоизлучения на частоте ν_{21} длиной 256 мс. В течение этого радиочастотного импульса производилось от 1 до 64 коротких (2.4 мс) лазерных импульсов на частоте ν_{31} . Когда радиочастотный импульс заканчивался, подсчитывалось число рассеянных фотонов на частоте ν_{31} за первые 100 мс. Оно

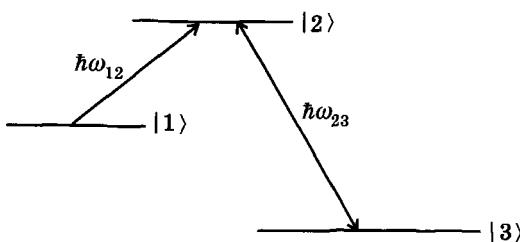


Рис. 10.3. Трехуровневая Л-конфигурация: уровень $|2\rangle$ нестабильный и может спонтанно распадаться на уровень $|3\rangle$, который никак более не участвует в динамике системы. Исходно атом приводится в состояние $|1\rangle$. Резонансное излучение на частоте перехода $|1\rangle \leftrightarrow |2\rangle$ может перевести атом в состояние $|2\rangle$, однако вероятность этого перехода уменьшается с ростом эффективности спонтанного перехода $|2\rangle \rightarrow |3\rangle$, который является измерением состояния атома по регистрации спонтанных фотонов на частоте ω_{23}

принималось пропорциональным числу ионов на основном уровне $|1\rangle$ к концу π -импульса.

Измеренное число фотонов и связанное с ним количество невозбужденных ионов в основном состоянии $|1\rangle$ сравнивалось с теорией. Согласие было почти полным: увеличение числа импульсов от 1 до 64 увеличивало число ионов на уровне $|1\rangle$ в конце π -импульса, т. е. индуцированный переход $|1\rangle \rightarrow |2\rangle$ замедлялся.

Измерение состояния атомов в рассмотренном эксперименте было активным — с помощью лазерных импульсов. Однако большее восхищение вызывает схема пассивного измерения, предложенная М. Б. Менским ([6], с. 180).

Расположение уровней атома, с которым можно наблюдать этот удивительно красивый эффект, представлено на рис. 10.3.

Атом в поле резонансного излучения на частоте ω_{12} осциллировал бы между уровнями $|1\rangle$ и $|2\rangle$ с частотой Раби, не будь третьего, измерительного уровня $|3\rangle$. Если атом достигает уровня $|2\rangle$, он быстро переходит на уровень $|3\rangle$, и испускается спонтанный фотон, на частоте ω_{23} . Если же фотон не зарегистрирован, то атом все еще находится на уровне $|1\rangle$. Казалось бы, под действием π -импульса ω_{12} должен совершиться переход $|1\rangle \rightarrow |2\rangle$ и затем быстро «свалиться» на уровень $|3\rangle$. На самом деле происходит прямо противоположное: переход $|1\rangle \rightarrow |2\rangle$ наличием измерительного уровня $|3\rangle$ подавляется и эффективность «замораживания» на начальном уровне $|1\rangle$ воз-

$$|2\rangle \xrightarrow{\omega_2 - i\gamma_{23}}$$

$$|1\rangle \xrightarrow{\omega_1}$$

Рис. 10.4. Двухуровневая схема с комплексной энергией уровня $|2\rangle$, эквивалентная трехуровневой Л-конфигурации ([6], с. 183)

растает с ростом вероятности перехода $|2\rangle \rightarrow |3\rangle$, характеризуемой коэффициентом релаксации γ_{23} . Парадоксально? Но в сущности так и должно быть потому, что фактически происходит непрерывное пассивное измерение состояния по возможности регистрации фотонов на частоте ω_{23} . А это и есть условие наблюдения эффекта Зенона.

Для формального описания можно вместо трехуровневого атома рассмотреть эквивалентную, согласно [6], с. 183, двухуровневую схему с энергиями уровней $\hbar\omega_1$, $\hbar\omega_2$ и мнимым членом $-i\gamma_{23}$, учитывающим нестабильность уровня $|2\rangle$, представленную на рис. 10.4.

Полный гамильтониан системы \hat{H} представим в виде суммы гамильтониана системы в отсутствие внешнего излучения \hat{H}_0 и оператора этого внешнего излучения \hat{V}

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}. \quad (10.5)$$

При этом

$$\hat{H}_0|1\rangle = \hbar\omega_1|1\rangle, \quad (10.6)$$

$$\hat{H}_0|2\rangle = \hbar(\omega_2 - i\gamma_{23})|2\rangle, \quad (10.7)$$

поскольку состояния с определенными энергиями $|1\rangle$ и $|2\rangle$ являются собственными состояниями оператора энергии — гамильтониана. Хотя, строго говоря, неэрмитова гамильтониана быть не может, однако корректное рассмотрение трехуровневого атома, по утверждению М. Б. Менского ([6], с. 185), приводит к тем же результатам. Вряд ли сюда можно вложить какой-то физический смысл, скорее это просто вычислительный прием, такой же, как использование отрицательных абсолютных температур при описании инверсной населенности активной среды лазера, см., напр., [17], с. 521.

Матричные элементы оператора внешнего облучения \hat{V} равны

$$\langle 1|\hat{V}|2\rangle = \langle 2|\hat{V}|1\rangle^* = \hbar\Omega e^{i(\omega_2 - \omega_1)t}, \quad (10.8)$$

а остальные — нули. Ω — частота Раби перехода $|1\rangle \leftrightarrow |2\rangle$.

Запишем уравнение Шрёдингера

$$i\hbar|\dot{\psi}(t)\rangle = (\hat{H}_0 + \hat{V})|\psi(t)\rangle. \quad (10.9)$$

Его решение будем искать в виде

$$|\psi(t)\rangle = \alpha_1(t)e^{-i\omega_1 t}|1\rangle + \alpha_2(t)e^{-i\omega_2 t}|2\rangle. \quad (10.10)$$

Подстановка (10.10) в (10.9) дает

$$\begin{aligned} i\hbar[(\dot{\alpha}_1 - i\omega_1\alpha_1)e^{-i\omega_1 t}|1\rangle + (\dot{\alpha}_2 - i\omega_2\alpha_2)e^{-i\omega_2 t}|2\rangle] &= \\ &= \alpha_1 e^{-i\omega_1 t}\hbar\omega_1|1\rangle + \alpha_2 e^{-i\omega_2 t}\hbar(\omega_2 - i\gamma_{23})|2\rangle + \\ &+ \hat{V}\alpha_1 e^{-i\omega_1 t}|1\rangle + \hat{V}\alpha_2 e^{-i\omega_2 t}|2\rangle. \end{aligned} \quad (10.11)$$

Умножим обе части (10.11) слева на $\langle 1 |$. Получим

$$\dot{\alpha}_1 = -i\Omega\alpha_2. \quad (10.12)$$

А теперь умножим (10.11) слева на $\langle 2 |$:

$$\dot{\alpha}_2 = -i\Omega\alpha_1 - \gamma_{23}\alpha_2. \quad (10.13)$$

Решение системы дифференциальных уравнений (10.12), (10.13) имеет вид:

$$\alpha_1(t) = e^{-\frac{\gamma_{23}}{2}t} \left[\alpha_1(0) \operatorname{ch} \Omega_\gamma t + \frac{1}{\Omega_\gamma} \left(\frac{\gamma_{23}}{2} \alpha_1(0) - i\Omega\alpha_2(0) \right) \operatorname{sh} \Omega_\gamma t \right], \quad (10.14)$$

$$\alpha_2(t) = e^{-\frac{\gamma_{23}}{2}t} \left[\alpha_2(0) \operatorname{ch} \Omega_\gamma t - \frac{1}{\Omega_\gamma} \left(\frac{\gamma_{23}}{2} \alpha_2(0) + i\Omega\alpha_1(0) \right) \operatorname{sh} \Omega_\gamma t \right], \quad (10.15)$$

где $\Omega_\gamma = \sqrt{\left(\frac{\gamma_{23}}{2}\right)^2 - \Omega^2}$.

Если атом находился на уровне $|1\rangle$ при $t = 0$, то

$$\alpha_1(t) = e^{-\frac{\gamma_{23}}{2}t} \left[\operatorname{ch} \Omega_\gamma t + \frac{\gamma_{23}}{2\Omega_\gamma} \operatorname{sh} \Omega_\gamma t \right], \quad (10.16)$$

$$\alpha_2(t) = -ie^{-\frac{\gamma_{23}}{2}t} \frac{\Omega}{\Omega_\gamma} \operatorname{sh} \Omega_\gamma t. \quad (10.17)$$

Пусть $\Omega \gg \gamma_{23}$, тогда

$$\alpha_1(t) \approx e^{-\frac{\gamma_{23}}{2}t} \cos \Omega t, \quad \alpha_2(t) \approx -ie^{-\frac{\gamma_{23}}{2}t} \sin \Omega t, \quad (10.18)$$

т. е. происходит просто постепенное затухание осцилляций Раби за счет перехода в конечном счете атома на уровень $|3\rangle$.

В противоположном случае $\Omega \ll \gamma_{23}$, когда вероятность измерительного перехода $|2\rangle \rightarrow |3\rangle$ значительно выше вероятности возбуждения атома $|1\rangle \rightarrow |2\rangle$, происходит почти полное подавление осцилляций Раби:

$$|\alpha_1(t)| \approx e^{\frac{-2\Omega^2 t}{\gamma_{23}}} \rightarrow 1. \quad (10.19)$$

Система «замораживается» на уровне $|1\rangle$ при наличии возможности ее моментального перехода (измерения) с уровня $|2\rangle$ на уровень $|3\rangle$. Это пример реализации парадокса Зенона при непрерывном измерении — слежении за испусканием спонтанных фотонов на частоте ω_{23} . Хотя самого слежения фактически может и не быть. Важно, что имеется потенциальная возможность такого слежения. Еще раз остановимся на необычности эффекта. Мы имеем возможность двух последовательных переходов: $|1\rangle \rightarrow |2\rangle \rightarrow |3\rangle$. Казалось бы, чем «легче» переход $|2\rangle \rightarrow |3\rangle$, тем лучше для всего каскада двух процессов. Но это не так: переход $|2\rangle \rightarrow |3\rangle$ тормозит переход $|1\rangle \rightarrow |2\rangle$, т. е. переходы не являются статистически независимыми. Здесь мы вновь сталкиваемся с парадоксальной с точки зрения житейского опыта ситуацией, когда возможность наблюдения за системой кардинально меняет ее поведение, а в последовательном каскаде двух, казалось бы, независимых процессов второй по времени может радикально влиять на первый. В этом необычном поведении системы во времени можно усмотреть и нарушение причинности.

ГЛАВА 11

Параметрическое рассеяние света в квантовых измерениях

Среди всего многообразия квантовых частиц особое место занимают фотоны. Свет окружает нас повсюду, и в первый же день творения сказал Бог: «Да будет свет». И стал свет (Бытие 1 : 3). Изучение его свойств давно уже волнует лучшие умы.

Мы уже сталкивались с парадоксальными свойствами света в интерференционных квантовых экспериментах, но еще удивительнее поведение коррелированных пар фотонов, рождающихся одновременно в нелинейно-оптическом процессе параметрического рассеяния. Определенным аналогом тут является рождение электрон-позитронных пар из вакуума (рис. 5.1), но экспериментировать с фотонами, конечно, и проще, и удобнее.

При высоких интенсивностях света, как правило, лазерного, прозрачные пьезокристаллы и ряд других материалов начинают проявлять нелинейные свойства, как детектор в радиоприемнике. При этом возможно преобразование частоты света. И первым нелинейно-оптическим экспериментом было удвоение частоты [18], когда в прозрачный кристалл кварца направляли красный луч рубинового лазера с длиной волны 694.2 нм, а из него выходил ультрафиолетовый (УФ) луч с длиной волны 347.1 нм. При этом пары красных фотонов превращались в одиночные УФ фотоны невидимого света:

$$\hbar\omega_{694.2} + \hbar\omega_{694.2} = \hbar\omega_{347.1}. \quad (11.1)$$

Это просто закон сохранения энергии.

Но возможен и обратный процесс, когда один фотон *накачки* (*pump*, с круговой частотой ω_p) распадается на пару так называемых *сигнального* (*signal*, с частотой ω_s) и *холостого* (*idler*, с частотой ω_i) фотонов (рис. 11.1):

$$\omega_p = \omega_s + \omega_i. \quad (11.2)$$

Помимо закона сохранения энергии (11.2), при этом должен сохраняться и импульс, следовательно, волновые векторы ($\vec{k} = \vec{p}/\hbar$) удовлетворяют соотношению

$$\vec{k}_s + \vec{k}_i = \vec{k}_p. \quad (11.3)$$

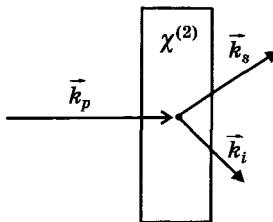


Рис. 11.1. В прозрачном нелинейном кристалле с квадратичной нелинейностью $\chi^{(2)}$ фотон накачки может распадаться на пару сигнального и холостого фотонов

Кроме того, существует и жесткая связь между поляризациями сигнального и холостого фотонов.

Перед тем, как перейти к формальному описанию параметрического рассеяния, дадим краткие сведения из квантовой оптики, необходимые для понимания изучаемого материала.

Комплексную амплитуду плоской монохроматической электромагнитной волны, так называемой *моды* поля, распространяющейся в направлении оси z , можно представить в виде:

$$u(z, t) = ae^{i(kz - \omega t)}, \quad (11.4)$$

где a — не меняющаяся со временем комплексная амплитуда. Напряженность электрического поля при этом

$$E(z, t) \rightsquigarrow ae^{i(kz - \omega t)} + a^*e^{-i(kz - \omega t)}. \quad (11.5)$$

В квантовой теории как напряженность, так и амплитуда, заменяются операторами:

$$\hat{E}(z, t) \rightsquigarrow \hat{a}e^{i(kz - \omega t)} + \hat{a}^+e^{-i(kz - \omega t)}, \quad (11.6)$$

такими, что коммутатор

$$[\hat{a}, \hat{a}^+] \stackrel{\Delta}{=} \hat{a}\hat{a}^+ - \hat{a}^+\hat{a} = \hat{I}, \quad (11.7)$$

где \hat{I} — операторная единица. Более подробно об этом можно посмотреть в любом учебнике, например, [1].

Число квантов в поле n также описывается оператором \hat{n} , представляющим собой как бы квадрат модуля амплитуды:

$$\hat{n} = \hat{a}^+\hat{a}. \quad (11.8)$$

Если мода имеет определенную энергию E_n , то ее квантовое состояние называется *энергетическим* или *фоковским* в честь В. А. Фока. Вектор такого состояния обозначается $|n\rangle$ и является собственным состоянием оператора $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ и гамильтониана гармонического осциллятора \hat{H} :

$$\begin{aligned}\hat{a}^\dagger \hat{a} |n\rangle &= n |n\rangle, \\ \hat{H} |n\rangle &= E_n |n\rangle,\end{aligned}\tag{11.9}$$

а сам гамильтониан гармонического осциллятора равен

$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega}{2} (\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^\dagger) \equiv \hbar\omega \left(\hat{n} + \frac{\hat{I}}{2} \right),\tag{11.10}$$

В такой форме гамильтониана отличающиеся друг от друга в силу (11.7) произведения $\hat{a}^\dagger \hat{a}$ и $\hat{a} \hat{a}^\dagger$ входят симметрично. Их сумму также называют *антиноммутатором*:

$$\{\hat{a}^\dagger \hat{a}\} \stackrel{\Delta}{=} \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^\dagger.\tag{11.11}$$

Поскольку оператор числа фотонов $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ эрмитов, спектр его собственных значений $\{n\}$ действителен, а векторы $|n\rangle$ ортогональны и образуют полную систему ортов (см. также (4.8)):

$$\sum_n |n\rangle \langle n| = \hat{I}.\tag{11.12}$$

Покажем, что

$$\hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle,\tag{11.13}$$

а n — целые числа ([19], с. 91).

В силу того, что оператор \hat{a}^\dagger линеен, его действие на вектор $|n\rangle$ приводит к однозначному состоянию. Предположим, что при этом снова получается фоковское состояние:

$$\hat{a}^\dagger |n\rangle = x |n'\rangle,\tag{11.14}$$

а x — действительное число. Если это предположение верно, то существуют такие x и n' , что (11.14) выполняется. Вычисление x и n' , таким образом, и будет доказательством справедливости (11.14).

По определению эрмитова сопряжения имеем соотношение

$$\langle n | \hat{a} = x \langle n' |.\tag{11.15}$$

Умножим теперь (11.15) на (11.14):

$$\langle n | \hat{a} \hat{a}^+ | n \rangle = x^2, \quad (11.16)$$

следовательно,

$$x^2 = n + 1, \quad (11.17)$$

поскольку

$$\langle n | \hat{a} \hat{a}^+ | n \rangle = \langle n | \hat{a}^+ \hat{a} + \hat{I} | n \rangle = n + 1. \quad (11.18)$$

Умножим теперь (11.14) слева на $\hat{a}^+ \hat{a}$:

$$\hat{a}^+ \hat{a} (\hat{a}^+ | n \rangle) = \hat{a}^+ \hat{a} (x | n' \rangle). \quad (11.19)$$

Поскольку $\hat{a}^+ \hat{a} \hat{a}^+ = \hat{a}^+ (\hat{a}^+ \hat{a} + \hat{I})$, левую часть (11.19) можно переписать в виде

$$\hat{a}^+ (\hat{a}^+ \hat{a} + \hat{I}) | n \rangle = (n + 1) \hat{a}^+ | n \rangle. \quad (11.20)$$

Здесь использовано следующее свойство: если система находится в собственном состоянии некоторого оператора, например \hat{n} , то этот оператор можно заменить его собственным значением, в данном случае, n .

Заметим, что в (11.19) на вектор $| n' \rangle$ мы действуем оператором числа фотонов $\hat{n} = \hat{a}^+ \hat{a}$, для которого вектор $| n' \rangle$ является собственным, следовательно,

$$\hat{a}^+ \hat{a} (\hat{a}^+ | n \rangle) = n' x | n' \rangle, \quad (11.21)$$

где n' — собственное значение вектора $\hat{a}^+ | n \rangle$.

В силу (11.20), (11.21) имеем

$$(n + 1) \hat{a}^+ | n \rangle = n' x | n' \rangle. \quad (11.22)$$

Сравнивая последний результат с исходным предположением (11.14), получим, что оно справедливо при

$$n' = n + 1, \quad (11.23)$$

откуда, с учетом (11.17), следует (11.13).

Аналогично доказывается

$$\hat{a} | n \rangle = \sqrt{n} | n - 1 \rangle. \quad (11.24)$$

Таким образом, если на поле с числом фотонов n подействовать оператором \hat{a}^+ , то получается поле с еще одним дополнительным

фотоном ($n + 1$). Поэтому \hat{a}^+ называется *оператором рождения фотона*, или, в более общем случае, *оператором рождения бозона*. Аналогично \hat{a} — *оператор уничтожения фотона (бозона)*.

Минимально возможное значение числа фотонов в поле $n_{\min} = 0$. Это состояние называется *вакуумным* и обозначается вектором $|0\rangle$. Все остальные фоковские состояния получаются однократным или многократным действием оператора рождения \hat{a}^+ на $|0\rangle$, например,

$$|1\rangle = \hat{a}^+ |0\rangle. \quad (11.25)$$

Следовательно, в фоковских состояниях $|n\rangle$ количество фотонов n всегда целое:

$$\{n\} = 0, 1, 2, \dots, \quad (11.26)$$

а уровни энергии гармонического осциллятора, согласно (11.10), дискретны:

$$E_n = \frac{1}{2} \hbar\omega, \quad \frac{3}{2} \hbar\omega, \quad \frac{5}{2} \hbar\omega, \dots \quad (11.27)$$

Оператор уничтожения \hat{a} не коммутирует с оператором числа фотонов $\hat{n} = \hat{a}^+ \hat{a}$:

$$[\hat{a}, \hat{a}^+ \hat{a}] = \hat{a} \hat{a}^+ \hat{a} - \hat{a}^+ \hat{a} \hat{a} = \hat{a} \neq 0, \quad (11.28)$$

следовательно, операторы \hat{a} и \hat{n} имеют разный набор собственных векторов. Собственные состояния $|z\rangle$ неэрмитова оператора уничтожения фотона \hat{a} называются *когерентными состояниями Глаубера* или просто *когерентными*:

$$\hat{a} |z\rangle = z |z\rangle. \quad (11.29)$$

Найдем матрицу преобразования $\langle n|z\rangle$, связывающую когерентный и энергетический базисы ([19], с. 91). Умножив слева (11.29) на $\langle n|$, получим рекуррентную связь между проекциями вектора $|z\rangle$ на направления векторов $\langle n|$ и $\langle n+1|$:

$$\langle n|\hat{a}|z\rangle \equiv \sqrt{n+1} \langle n+1|z\rangle \dots \langle n+1|z\rangle = z \langle n|z\rangle. \quad (11.30)$$

Здесь слева использована формула (11.13), а справа — (11.29).

Положив $n = 0$, имеем

$$\langle 1|z\rangle = z \langle 0|z\rangle. \quad (11.31)$$

В свою очередь,

$$\sqrt{2} \langle 2|z\rangle = z \langle 1|z\rangle = z^2 \langle 0|z\rangle, \quad (11.32)$$

и т. д., т. е.

$$\sqrt{n!} \langle n | z \rangle = z^n \langle 0 | z \rangle. \quad (11.33)$$

Используя разложение единицы (11.12), таким образом, можно записать:

$$|z\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n | z \rangle = \langle 0 | z \rangle \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (11.34)$$

Из условия нормировки

$$\langle z | z \rangle = 1 \quad (11.35)$$

можно найти $|\langle 0 | z \rangle|^2$:

$$\langle z | z \rangle = \langle z | 0 \rangle \langle 0 | z \rangle \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n'=0}^{\infty} \langle n' | n \rangle \frac{z^n z^{*n'}}{\sqrt{n! n'!}}. \quad (11.36)$$

В силу ортогональности базиса фоковских состояний

$$\langle n' | n \rangle = \delta_{nn'}, \quad (11.37)$$

где символ Кронекера

$$\delta_{nn'} = \begin{cases} 1 & \text{при } n = n', \\ 0 & \text{при } n \neq n', \end{cases} \quad (11.38)$$

имеем

$$|\langle 0 | z \rangle|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^{2n}}{n!} = 1, \quad (11.39)$$

откуда

$$|\langle 0 | z \rangle|^2 = e^{-|z|^2}. \quad (11.40)$$

Положив $\langle 0 | z \rangle$ действительным числом, окончательно получим

$$\langle n | z \rangle = \frac{z^n e^{-|z|^2/2}}{\sqrt{n!}}, \quad (11.41)$$

а

$$|z\rangle = e^{-|z|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} z^n \frac{|n\rangle}{\sqrt{n!}}. \quad (11.42)$$

Это и есть разложение когерентного состояния по фоковским ([13], с. 252).

Заметим, что когерентный и фоковский базисы имеют общий вектор $|z = 0\rangle = |n = 0\rangle = |0\rangle$ — вакуумный.

Спектр $\{z\}$ неэрмитова оператора \hat{a} комплексный и непрерывный, а его собственные векторы неортогональны. Действительно, используя разложение единицы (11.12) и соотношение (11.41), имеем

$$\begin{aligned} \langle z|z' \rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} \langle z|n\rangle \langle n|z' \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z^* z')^n e^{-(|z|^2 + |z'|^2)/2}}{n!} = \\ &= \exp \left[z^* z' - \frac{1}{2} (|z|^2 + |z'|^2) \right], \end{aligned} \quad (11.43)$$

откуда

$$|\langle z|z' \rangle|^2 = e^{-|z-z'|^2}. \quad (11.44)$$

Следовательно, когерентные состояния лишь приблизительно ортогональны при $|z - z'| \gg 1$. В то же время непрерывное множество векторов $\{|z\rangle\}$ полно, даже «сверхполно»:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |z\rangle \langle z| d(\text{Re } z) d(\text{Im } z) = \pi \hat{I}. \quad (11.45)$$

Таким образом, когерентные состояния образуют так называемый *переполненный базис*.

Соотношения полноты (11.12) и (11.45) означают, что две рассмотренные системы «координат» полностью перекрывают все гильбертово пространство возможных состояний моды поля (т. е. линейного осциллятора), причем когерентный базис даже с избыtkом (число «координат» больше числа измерений пространства). Таким образом, любой вектор этого пространства можно представить в виде суммы векторов $|n\rangle$ или $|z\rangle$:

$$| \rangle = \sum_0^{\infty} |n\rangle \langle n| \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |z\rangle \langle z| \rangle d(\text{Re } z) d(\text{Im } z). \quad (11.46)$$

Вернемся к соотношению (11.41). Величина

$$|\langle n|z \rangle|^2 = \frac{|z|^{2n} e^{-|z|^2}}{n!} \quad (11.47)$$

равна вероятности обнаружить n фотонов в когерентном состоянии $|z\rangle$. Это не что иное, как пуассоновское распределение по n со средним числом фотонов $\langle n \rangle = |z|^2$, см. также (13.16). Таким образом, z имеет смысл средней комплексной амплитуды моды, а если

измерять число фотонов в моде, то от реализации к реализации оно будет флюктуировать по пуссоновскому закону. Такая *фотонная статистика* – называется *пуассоновской*.

Вернемся к параметрическому рассеянию. С небольшой вероятностью (порядка 10^{-8}) фотон накачки («р») исчезает, что описывается оператором уничтожения фотона \hat{a}_p , а вместо него рождается сигнальный («с») и холостой («и») фотоны, описываемые, соответственно, операторами рождения \hat{a}_s^+ и \hat{a}_i^+ . Итак, если на оператор $\hat{a}_p \hat{a}_s^+ \hat{a}_i^+$ справа подействовать однофотонным состоянием накачки $|1\rangle_p$ и вакуумным состоянием сигнальной и холостой мод, получим

$$\hat{a}_p \hat{a}_s^+ \hat{a}_i^+ |1\rangle_p |0\rangle_s |0\rangle_i = |0\rangle_p |1\rangle_s |1\rangle_i. \quad (11.48)$$

Здесь имеются в виду три плоские монохроматические моды излучения.

Эти соображения поясняют структуру трехмодового гамильтониана взаимодействия процесса параметрического рассеяния

$$\hat{H} \approx \frac{i\hbar\chi^{(2)}}{2} \hat{a}_p \hat{a}_s^+ \hat{a}_i^+ + H.c., \quad (11.49)$$

где $\chi^{(2)}$ – квадратичная нелинейность, а эрмитово сопряженный оператор

$$H.c. = -\frac{i\hbar\chi^{(2)}}{2} \hat{a}_p^+ \hat{a}_s \hat{a}_i \quad (11.50)$$

описывает обратный параметрическому рассеянию процесс: рождение фотона накачки при одновременном исчезновении сигнального и холостого фотонов, который также возможен.

В представлении Шредингера вектор квантового состояния $|\psi(t)\rangle$ эволюционирует в соответствии с уравнением Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle, \quad (11.51)$$

а операторы неподвижны. При этом гамильтониан не зависит от времени, если в него помимо операторов не входят зависящие от времени C -числовые функции. Это условие соблюдается для гамильтониана (11.49).

Запишем решение уравнения Шредингера (11.51) в виде

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle, \quad (11.52)$$

где $\hat{U}(t, t_0)$ — оператор эволюции, удовлетворяющий уравнению

$$i\hbar \frac{d\hat{U}}{dt} = \hat{H}\hat{U} \quad (11.53)$$

с решением

$$\hat{U}(t - t_0) = \hat{I} \exp \left[- \frac{i(t - t_0)\hat{H}}{\hbar} \right] \quad (11.54)$$

при независящем от времени гамильтониане.

Согласно (11.54)

$$\hat{U}(t_0) = \hat{I}, \quad (11.55)$$

а

$$\hat{U}^+ \hat{U} = \hat{U} \hat{U}^+ = \hat{I}. \quad (11.56)$$

Последнее соотношение выражает условие *унитарности*, характерное для консервативных систем.

Вращение вектора состояния $|\psi(t)\rangle$ можно рассматривать в базисе, орты которого представляют собой состояния некого эрмитова оператора \hat{A} . Поскольку сам оператор \hat{A} в представлении Шредингера неподвижен, неподвижен и базис. В представлении Гейзенберга наоборот: вектор состояния неподвижен, а вращаются орты за счет динамики изменения $\hat{A}(t)$.

Представление Гейзенберга наиболее близко к классическому описанию. Если например, в уравнениях Максвелла динамические переменные заменить операторами, то классическая электродинамика станет квантовой.

Итак,

$$|\psi_S(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0) |\psi_H(t_0)\rangle. \quad (11.57)$$

где индексами « S » и « H » помечены векторы, соответственно, в шредингеровском и гейзенберговском представлениях, а оператор эволюции $\hat{U}(t, t_0)$ записан в самом общем виде произвольной зависимости от t и t_0 .

Поскольку среднее значение оператора не должно зависеть от представления, имеем

$$\langle \hat{A} \rangle = \langle \psi_S(t) | \hat{A}_S | \psi_S(t) \rangle = \langle \psi_H(t_0) | \hat{U}^+ \hat{A}_S \hat{U} | \psi_H(t_0) \rangle, \quad (11.58)$$

следовательно,

$$\hat{A}_H(t) = \hat{U}^+ \hat{A}_S \hat{U}. \quad (11.59)$$

Продифференцируем последнее равенство по времени и домножим обе части на $i\hbar$:

$$i\hbar \frac{d\hat{A}_H}{dt} = \left(\hat{U}^+ \hat{A}_S \frac{d\hat{U}}{dt} + \frac{d\hat{U}^+}{dt} \hat{A}_S \hat{U} \right) i\hbar. \quad (11.60)$$

Согласно (11.53), $i\hbar \frac{d\hat{U}}{dt}$ можно заменить на $\hat{H}\hat{U}$, и

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d\hat{A}_H}{dt} &= \hat{U}^+ \hat{A}_S \hat{H}_S \hat{U} - \hat{U}^+ \hat{H}_S \hat{A}_S \hat{U} = \hat{U}^+ \hat{A}_S \hat{U} \hat{U}^+ \hat{H}_S \hat{U} - \\ &- \hat{U}^+ \hat{H}_S \hat{U} \hat{U}^+ \hat{A}_S \hat{U} = \hat{A}_H \hat{H}_H - \hat{H}_H \hat{A}_H = [\hat{A}_H, \hat{H}_H]. \end{aligned} \quad (11.61)$$

Здесь во второй строке предполагается унитарность эволюции.

Полученное выражение

$$i\hbar \frac{d\hat{A}_H}{dt} = [\hat{A}_H, \hat{H}_H] \quad (11.62)$$

описывает динамику системы в представлении Гейзенберга.

Если $[\hat{A}_H, \hat{H}_H] = 0$, то оператор \hat{A}_H является интегралом движениия.

Если в качестве оператора \hat{A}_H подставить оператор уничтожения фотона \hat{a} , то

$$i\hbar \frac{d\hat{a}}{dt} = [\hat{a}, \hat{H}], \quad (11.63)$$

где все операторы записаны в представлении Гейзенберга. Это выражение поможет нам описать динамику параметрического рассеяния в так называемом приближении заданного поля классической накачки. Поскольку эффективность параметрического рассеяния мала (только один из приблизительно 10^8 фотонов накачки распадается на сигнальный и холостой) истощением накачки можно пренебречь, считая ее амплитуду постоянной. С учетом того, что для реального наблюдения параметрического рассеяния фотонов в накачке должно быть много (не меньше 10^8), ее можно описывать классически, заменив оператор \hat{a}_p в гамильтониане (11.49) на постоянную комплексную амплитуду E :

$$H \propto \frac{i\hbar\chi^{(2)}}{2} E \hat{a}_s^+(t) \hat{a}_i^+(t) + H.c. \quad (11.64)$$

Этот гамильтониан записан в представлении Гейзенберга, что выражается в появлении зависимости \hat{a}_s^+ и \hat{a}_i^+ от времени. Комплексная же амплитуда накачки E предполагается постоянной (имеет

неизменную амплитуду и фазу гармонических колебаний). Быстрые осцилляции накачки со световой частотой можно не учитывать, поскольку если понимать под операторами медленно меняющиеся во времени операторы и дописать к ним быстрые изменения, то получим

$$\begin{aligned} \hat{a}_p e^{-i(\omega_p t + \varphi_p)} \hat{a}_s^+ (t) e^{i(\omega_s t + \varphi_s)} \hat{a}_i^+ (t) e^{i(\omega_i t + \varphi_i)} = \\ = \hat{a}_p \hat{a}_s^+ (t) \hat{a}_i^+ (t) e^{-i(\varphi_p - \varphi_s - \varphi_i)} = E \hat{a}_s^+ (t) \hat{a}_i^+ (t) e^{i(\varphi_s + \varphi_i)}, \end{aligned} \quad (11.65)$$

т. е. в рассматриваемом произведении быстрые осцилляции исчезают в силу закона сохранения энергии фотонного превращения (11.2): $\omega_s + \omega_i = \omega_p$.

В представлении Шрёдингера гамильтониан (11.64) от времени не зависит, следовательно, условие унитарности эволюции системы соблюдено и можно воспользоваться уравнением (11.63), например, для сигнала. Для этого вычислим коммутатор

$$\left[\hat{a}_s, \hat{H} \right] = i\hbar (\chi \hat{a}_s \hat{a}_s^+ \hat{a}_i^+ - \chi^* \hat{a}_s \hat{a}_s \hat{a}_i - \chi \hat{a}_s^+ \hat{a}_i^+ \hat{a}_s + \chi^* \hat{a}_s \hat{a}_i \hat{a}_s) = i\hbar \chi \hat{a}_i^+ \quad (11.66)$$

в силу $[\hat{a}, \hat{a}^+] = \hat{I}$. Здесь $\chi = \frac{\chi^{(2)}}{2} E$.

Аналогично вычислив коммутатор $\left[\hat{a}_i, \hat{H} \right]$, получим систему линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{d\hat{a}_s(t)}{dt} = \chi \hat{a}_i^+(t), \\ \frac{d\hat{a}_i(t)}{dt} = \chi \hat{a}_s^+(t), \end{cases} \quad (11.67)$$

решение которой в операторной форме не отличается от решения для C -числовых функций в силу линейности системы:

$$\begin{aligned} \hat{a}_s(t) &= \hat{a}_s(t_0) \operatorname{ch}(|\chi|t) + e^{i\Phi} \hat{a}_i^+(t_0) \operatorname{sh}(|\chi|t), \\ \hat{a}_i(t) &= \hat{a}_i(t_0) \operatorname{ch}(|\chi|t) + e^{i\Phi} \hat{a}_s^+(t_0) \operatorname{sh}(|\chi|t), \end{aligned} \quad (11.68)$$

где $\Phi = \arg(\chi) = \varphi_p$ — фаза накачки.

Как и следовало ожидать, сигнальная и холостая моды описываются симметрично: для холостого пучка решение получается взаимозаменой индексов сигнальной и холостой мод. Они могут и полностью совпадать ($\hat{a}_s(t) \equiv \hat{a}_i(t)$) в случае *вырожденного параметрического взаимодействия*, тогда

$$\hat{a}(t) = \hat{a}(t_0) \operatorname{ch}(|\chi|t) + e^{i\Phi} \hat{a}^+(t_0) \operatorname{sh}(|\chi|t), \quad (11.69)$$

а частота света, на которой рождаются параметрически рассеянные фононы,

$$\omega = \frac{\omega_p}{2}. \quad (11.70)$$

Преобразование (11.69) является примером так называемого *преобразования Боголюбова*:

$$\hat{a} = \mu \hat{a}_0 + \nu \hat{a}_0^+, \quad (11.71)$$

в котором μ и ν — комплекснозначные функции, которые, в силу коммутационного соотношения $[\hat{a}, \hat{a}^+] = \hat{I}$, подчинены условию

$$|\mu|^2 - |\nu|^2 = 1. \quad (11.72)$$

ГЛАВА 12

Сжатые состояния света

Операторы рождения и уничтожения фотона вводились нами как аналоги классической комплексной амплитуды (см. (11.4)–(11.6)). Таким же образом можно ввести и операторы квадратурных компонент моды:

$$\hat{q} = \frac{\hat{a}^+ + \hat{a}}{\sqrt{2}}, \quad \hat{p} = i \frac{\hat{a}^+ - \hat{a}}{\sqrt{2}}, \quad (12.1)$$

так что

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i. \quad (12.2)$$

Напомним, что квадратурные компоненты классической гармонической волны представляют собой действительную и мнимую части комплексной амплитуды (см. рис. 12.1). Отличие их от (12.1), помимо операторной замены, — в нормировке: вместо двойки знаменатель (12.1) равен $\sqrt{2}$, чтобы получился коммутатор (12.2). При этом квадратурные компоненты \hat{q} и \hat{p} можно рассматривать как координату и импульс осциллятора в системе единиц с $\hbar = 1$. Конечно, они не имеют ничего общего с координатой и импульсом фотона, но являются наблюдаемыми величинами, поскольку описываются эрмитовыми операторами. Далее мы рассмотрим схему балансного гомодинного детектирования, в которой их можно измерить. Тем не менее, каноническое коммутационное соотношение $[\hat{q}, \hat{p}] = i$ при $\hbar = 1$ позволяет рассматривать \hat{q} и \hat{p} как координатно-и импульсно-подобные величины [20], р. 20.

Обратное преобразование к операторам рождения и уничтожения фотона легко получается из (12.1):

$$\hat{a}^+ = \frac{\hat{q} - i\hat{p}}{\sqrt{2}}, \quad \hat{a} = \frac{\hat{q} + i\hat{p}}{\sqrt{2}}. \quad (12.3)$$

Как изменить фазу сигнала Φ ? Введем оператор фазового сдвига

$$\hat{U}_\theta \stackrel{\Delta}{=} \exp(-i\theta\hat{n}), \quad (12.4)$$

где $\hat{n} = \hat{a}^+ \hat{a}$ — оператор числа фотонов в моде.

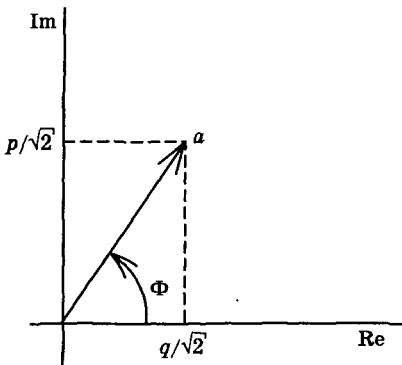


Рис. 12.1. Комплексная амплитуда гармонической волны a и ее квадратурные компоненты $\frac{q}{\sqrt{2}}$ и $\frac{p}{\sqrt{2}}$

Чтобы вычислить результат преобразования $F_\theta = \hat{U}_\theta^+ \hat{a} \hat{U}_\theta$, проинфериенцируем его по θ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} e^{i\theta \hat{a}^+ \hat{a}} \hat{a} e^{-i\theta \hat{a}^+ \hat{a}} &= i \hat{a}^+ \hat{a} e^{i\theta \hat{a}^+ \hat{a}} \hat{a} e^{-i\theta \hat{a}^+ \hat{a}} - i e^{i\theta \hat{a}^+ \hat{a}} \hat{a} \hat{a}^+ \hat{a} e^{-i\theta \hat{a}^+ \hat{a}} = \\ &= i e^{i\theta \hat{a}^+ \hat{a}} (\hat{a}^+ \hat{a} \hat{a} - \hat{a} \hat{a}^+ \hat{a}) e^{-i\theta \hat{a}^+ \hat{a}} = \\ &= i e^{i\theta \hat{a}^+ \hat{a}} [\hat{a}^+ \hat{a}, \hat{a}] e^{-i\theta \hat{a}^+ \hat{a}} = -i e^{i\theta \hat{a}^+ \hat{a}} \hat{a} \hat{a} e^{-i\theta \hat{a}^+ \hat{a}}, \end{aligned} \quad (12.5)$$

поскольку

$$\hat{a} \hat{a}^+ \hat{a} = (\hat{a}^+ \hat{a} + \hat{I}) \hat{a}. \quad (12.6)$$

Итак,

$$\frac{d}{d\theta} F_\theta = -i F_\theta. \quad (12.7)$$

Решение этого дифференциального уравнения очевидно:

$$F_\theta = \hat{F}_{\theta=0} e^{-i\theta}, \quad (12.8)$$

следовательно,

$$\hat{U}^+ \hat{a} \hat{U} = \hat{a} e^{-i\theta}, \quad (12.9)$$

т. е. к фазе Φ прибавляется еще θ (см. рис. 12.1).

Интересно также проанализировать преобразование

$$\hat{q}_\theta \stackrel{\Delta}{=} \hat{U}_\theta^+ \hat{q} \hat{U}_\theta = \hat{U}_\theta^+ \frac{\hat{a}^+ + \hat{a}}{\sqrt{2}} \hat{U}_\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{U}_\theta^+ \hat{a}^+ \hat{U}_\theta + \hat{a} e^{-i\theta}). \quad (12.10)$$

Заметим, что

$$\hat{U}_\theta^+ \hat{a}^+ \hat{U}_\theta = (\hat{a} \hat{U}_\theta)^+ \hat{U}_\theta = (\hat{U}_\theta^+ \hat{a} \hat{U}_\theta)^+ = \hat{a}^+ e^{i\theta}, \quad (12.11)$$

откуда имеем

$$\begin{aligned} \hat{q}_\theta &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}^+ e^{i\theta} + \hat{a} e^{-i\theta}) = \frac{\hat{a}^+ \cos \theta + i \hat{a}^+ \sin \theta + \hat{a} \cos \theta - i \hat{a} \sin \theta}{\sqrt{2}} = \\ &= \hat{q} \cos \theta + \hat{p} \sin \theta. \end{aligned} \quad (12.12)$$

Аналогично вычисляется

$$\hat{p}_\theta \stackrel{\Delta}{=} \hat{U}_\theta^+ \hat{p} \hat{U}_\theta = -\hat{q} \sin \theta + \hat{p} \cos \theta. \quad (12.13)$$

Это просто аналоги преобразования поворота системы координат на угол θ .

Вооружившись этими соотношениями, рассчитаем преобразование квадратурных компонент при вырожденном параметрическом рассеянии. Согласно (11.69), при $t_0 = 0$ имеем

$$\hat{q}(t) = \frac{\hat{a}^+(t) + \hat{a}(t)}{\sqrt{2}} = \frac{\hat{a}^+(0) + \hat{a}(0)}{\sqrt{2}} \operatorname{ch} |\chi|t + \frac{\hat{a}^+(0)e^{i\Phi} + \hat{a}(0)e^{-i\Phi}}{\sqrt{2}} \operatorname{sh} |\chi|t. \quad (12.14)$$

С учетом (12.12) окончательно получим

$$\hat{q}(t) = \hat{q}(0) \operatorname{ch} |\chi|t + \hat{q}(0) \cos \Phi \operatorname{sh} |\chi|t + \hat{p}(0) \sin \Phi \operatorname{sh} |\chi|t. \quad (12.15)$$

Аналогично

$$\begin{aligned} \hat{p}(t) &= \hat{p}(0) \operatorname{ch} |\chi|t + i \frac{-e^{i\Phi} a^+(0) + a(0)e^{-i\Phi}}{\sqrt{2}} \operatorname{sh} |\chi|t = \\ &= \hat{p}(0) \operatorname{ch} |\chi|t - \frac{i}{\sqrt{2}} [a^+(0) - a(0)] \frac{e^{i\Phi} + e^{-i\Phi}}{2} \operatorname{sh} |\chi|t + \\ &\quad + \frac{a^+(0) + a(0)}{\sqrt{2}} \frac{e^{i\Phi} - e^{-i\Phi}}{i2} \operatorname{sh} |\chi|t = \\ &= (\operatorname{ch} |\chi|t - \cos \Phi \operatorname{sh} |\chi|t) \hat{p}(0) + \hat{q}(0) \sin \Phi \operatorname{sh} |\chi|t. \end{aligned} \quad (12.16)$$

При $\Phi = 2\pi m$, m — целое, совсем просто:

$$\begin{aligned} \hat{q}(t) &= e^{|\chi|t} \hat{q}(0), \\ \hat{p}(t) &= e^{-|\chi|t} \hat{p}(0), \end{aligned} \quad (12.17)$$

т. е. одна квадратура экспоненциально усиливается, а другая — подавляется. Состояние света после такого преобразования называется *сжатым состоянием (squeezed state) света*. Почему?

Рассмотрим преобразование дисперсий квадратур при параметрическом рассеянии. Согласно (12.17),

$$\begin{aligned}\langle \Delta \hat{q}^2(t) \rangle &\stackrel{\Delta}{=} \langle \hat{q}^2 \rangle - \langle \hat{q} \rangle^2 = e^{2|\chi|t} \langle \Delta \hat{q}^2(0) \rangle, \\ \langle \Delta \hat{p}^2(t) \rangle &= e^{-2|\chi|t} \langle \Delta \hat{p}^2(0) \rangle.\end{aligned}\quad (12.18)$$

Если на входе нелинейного кристалла вакуумное состояние $|0\rangle$, т. е. кроме накачки кристалл ничем не освещается, то

$$\langle 0 | \Delta \hat{q}^2(0) | 0 \rangle = \frac{1}{2} \langle 0 | (\hat{a}^+ + \hat{a}) (\hat{a}^+ + \hat{a}) | 0 \rangle = \frac{1}{2} \langle 0 | \hat{a} \hat{a}^+ | 0 \rangle = \frac{1}{2}, \quad (12.19)$$

$$\langle 0 | \Delta \hat{p}^2(0) | 0 \rangle = \frac{1}{2}, \quad (12.20)$$

а на выходе

$$\langle \Delta \hat{q}^2(t) \rangle = \frac{1}{2} e^{2|\chi|t}, \quad (12.21)$$

$$\langle \Delta \hat{p}^2(t) \rangle = \frac{1}{2} e^{-2|\chi|t}. \quad (12.22)$$

Это означает, что мы уменьшим дисперсию одной из квадратур вакуума! Удивительно уже то, что вакуум флюктуирует, причем если просуммировать энергию вакуумных флюктуаций по бесконечному числу мод пространства, то получится бесконечность. Но как можно «упорядочить» вакуум, уменьшив дисперсию флюктуаций одной из его квадратур? Оказывается, это можно сделать в процессе параметрического рассеяния или, что то же самое, *параметрического усиления вакуумных флюктуаций*. Дело в том, что при параметрическом преобразовании увеличивается число фотонов в mode: для вакуума, естественно,

$$\langle 0 | \hat{n} | 0 \rangle = 0,$$

а на выходе кристалла, как легко показать,

$$\langle \hat{n}(t) \rangle > 0.$$

Однако средняя «амплитуда» излучения остается нулевой:

$$\langle 0 | \hat{a}(0) | 0 \rangle = \langle \hat{a}(t) \rangle = 0$$

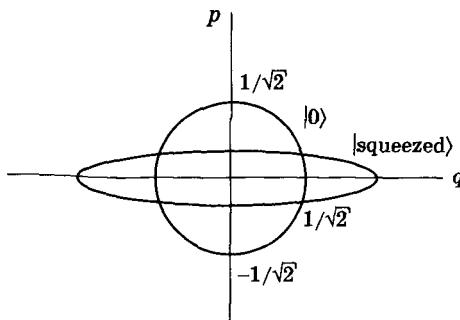


Рис. 12.2. Тело неопределенности вакуумных флюктуаций (круг радиуса $1/\sqrt{2}$) и сжатого состояния (эллипс)

в силу шумового характера излучения усиленных вакуумных флюктуаций. Легко показать, что поворот координатных осей q и p на фазовой плоскости не приводит к изменению дисперсии квадратуры флюктуаций вакуума, т. е. согласно (12.12),

$$\langle 0 | \Delta \hat{q}_\theta^2(0) | 0 \rangle = \frac{1}{2} = \langle 0 | \Delta \hat{p}_\theta^2(0) | 0 \rangle \quad (12.23)$$

при любом θ . Это означает, что на фазовой плоскости так называемое *тело неопределенности*, представляющее собой область, ограниченную среднеквадратическим отклонением квадратурных компонент при всевозможных фазовых задержках, для вакуума представляет собой круг (см. рис. 12.2).

Для параметрически рассеянного света тело неопределенности превращается в эллипс. Большая и малая его полуоси определяются соотношениями (12.21) и (12.22), а остальные точки — вычислением $\sqrt{\langle \Delta \hat{q}_\theta^2(t) \rangle}$ при различных θ .

Отметим, что согласно (4.20) при $\hbar = 1$

$$\langle \Delta \hat{q}^2 \rangle \langle \Delta \hat{p}^2 \rangle \geq \frac{1}{4}, \quad (12.24)$$

следовательно, в вакуумном и сжатом состоянии, описываемом (12.21), (12.22),

$$\langle \Delta \hat{q}^2(0) \rangle \langle \Delta \hat{p}^2(0) \rangle = \langle \Delta \hat{q}^2(t) \rangle \langle \Delta \hat{p}^2(t) \rangle = \frac{1}{4}, \quad (12.25)$$

т. е. произведение неопределенностей минимально. Такие состояния называются *минимально неопределенными состояниями*. К ним

относится и когерентное состояние $|z\rangle$. Тело неопределенности для него также представляет собой круг радиуса $\frac{1}{\sqrt{2}}$, но смещенный из центра координат (см. рис. 12.2) в конец вектора z — комплексной амплитуды когерентного состояния (см. (11.29), рис. 13.4 и текст после (11.47)). Если на вход параметрического преобразователя подать когерентный свет вместо вакуума, то на выходе также получится сжатое состояние, но смещенное на величину усиленной комплексной амплитуды $z(t)$. Вычисления, подтверждающие эти результаты, аналогичны приведенным выше, не представляют сложности и поэтому здесь не приводятся. Важно отметить следующее. В линейных системах, какой-то явления является параметрический усилитель в приближении заданной накачки, в представлении Гейзенберга нет разницы в классическом и квантовом описании. Действительно, различия могут возникать только вследствие некоммутативности операторов, но в линейных системах отсутствуют произведения операторов, следовательно, не может возникнуть и некоммутативности. Поле на выходе представляет собой линейное преобразование входного, значит, вся квантовая специфика может заключаться только в описании входного поля. Поэтому с операторами в линейных системах можно обращаться, как с C -числовыми функциями, чем мы и воспользовались при записи решения линейной операторной системы уравнений (11.67). Это полезное наблюдение в ряде случаев облегчает расчеты.

Перейдем теперь к описанию измерения квадратурных компонент поля, а именно, к схеме *балансного гомодинного детектирования*, представленной на рис. 12.3.

Измеряемый сигнал будем описывать операторами рождения \hat{a}^+ и уничтожения \hat{a} в представлении Гейзенберга, а гомодин — операторами \hat{a}_h^+ и \hat{a}_h . Предположим, что гомодин находится в когерентном состоянии $|z_h\rangle$.

Смешение пучков света двух плоских гармонических мод одной и той же частоты в силу линейности 50%-ного светоделителя можно описывать так же, как и в случае классических плоских монохроматических световых волн. В канале первого фотодетектора

$$\hat{a}_1 = \frac{\hat{a} + \hat{a}_h}{\sqrt{2}}, \quad (12.26)$$

а второго

$$\hat{a}_2 = \frac{-\hat{a} + \hat{a}_h}{\sqrt{2}}. \quad (12.27)$$

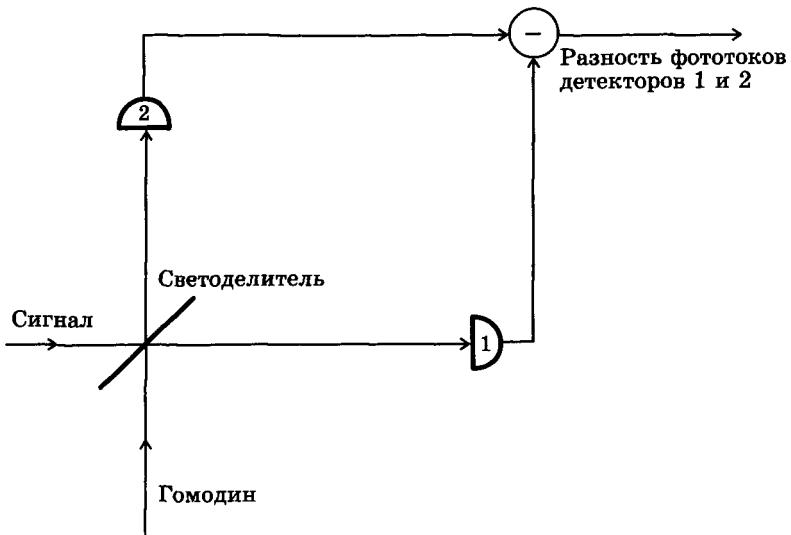


Рис. 12.3. Схема балансного гомодинного детектора. Сигнал на светоделителе смещивается с гомодином. Полученные световые пучки детектируются фотоприемниками 1 и 2, а разностная схема вырабатывает разностный фототок

Несимметрия знаков сигнала и гомодина связана с тем, что в светоделителе один из них отражается от более плотной, а другой — от менее плотной оптической среды.

Разность чисел фотонов в каналах равна

$$\hat{n}_1 - \hat{n}_2 = \hat{a}_1^+ \hat{a}_1 - \hat{a}_2^+ \hat{a}_2 = \hat{a}^+ \hat{a}_h + \hat{a} \hat{a}_h^+. \quad (12.28)$$

Отметим, что общее число фотонов после смещения на светоделителе без потерь, разумеется, остается неизменным:

$$\hat{n}_1 + \hat{n}_2 = \hat{n} + \hat{n}_h. \quad (12.29)$$

Сохранение энергии свидетельствует об унитарности преобразования. С другой стороны, известно, что светоделителей без потерь не бывает. Поэтому в квантовооптических экспериментах, где каждый фотон на счету, в качестве светоделителей можно использовать поляризационные призмы, например, типа Волластона ([21], с. 97–98). Эта призма направляет взаимноортогональные поляризации в разные стороны (см. рис. 12.4). Плоские моды сигнала и гомодина

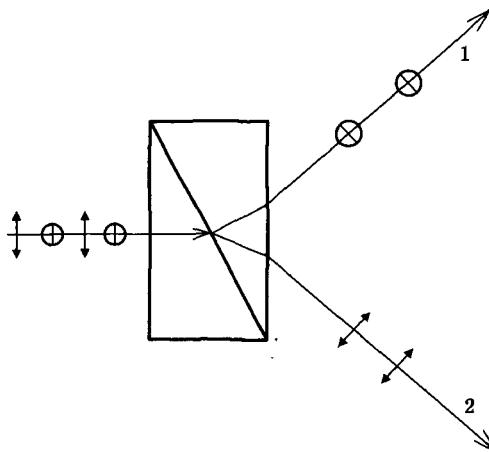


Рис. 12.4. Призма Волластона, пространственно разделяющая свет взаимноортогональных плоскополяризованных фотонов

предварительно плоскополяризуются во взаимно ортогональных направлениях так, чтобы они составляли 45° с плоскостями взаимноортогональных поляризаций, разделяемых призмой Волластона, как это показано на рис. 12.5. Поэтому, как легко видеть, в первом канале получается сумма амплитуд этих мод, деленная на $\sqrt{2}$, а во втором — разность — в соответствии с (12.26), (12.27). Хотя потери в поляризационной призме все же существуют, они существенно меньше, чем в полупрозрачной пластине или светофильтральном кубике с посеребренным покрытием, и могут быть доведены до долей процента. С другой стороны, если вместо серебряного покрытия использовать интерференционное, потери тоже будут малы.

После детектирования разностного фототока, который в случае идентичных фотодетекторов 1 и 2 (см. рис. 12.3) пропорционален разности числа фотонов в каналах, определяемой (12.28), можно найти дисперсию флуктуаций этой разности или любую другую ее характеристику. Поскольку при этом придется производить усреднение квадрата или другого функционала от $\hat{n}_1 - \hat{n}_2$ по когерентному состоянию гомодина $|z_h\rangle$, являющемуся собственным состоянием оператора \hat{a}_h , этот оператор можно заменить собственным значением z_h . Аналогично \hat{a}_h^+ можно заменить на z_h^* , поскольку $\langle z_h | \hat{a}^+ = z_h^* \langle z_h |$. Тогда оператор разности фототоков

$$\hat{i}_1 - \hat{i}_2 \approx z_h \hat{a}^+ + z_h^* \hat{a} = |z_h| (e^{-i\varphi_h} \hat{a}^+ + e^{i\varphi_h} \hat{a}) \approx |z_h| \hat{q}_{-\varphi_h}. \quad (12.30)$$

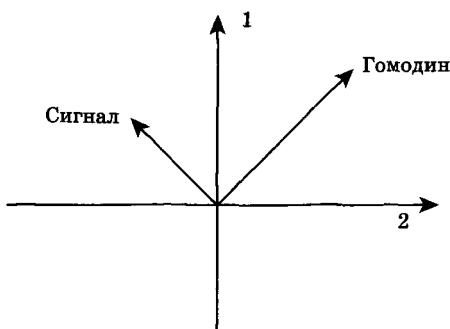


Рис. 12.5. Схема, поясняющая работу поляризационного светоделителя. Направления 1 и 2 — линии пересечения разделяющихся взаимноортогональных плоскостей поляризации призмы Волластона с плоскостью чертежа. Они соответствуют двум каналам фотодетектирования 1 и 2 на рис. 12.3. Показаны также направления поляризации смешиваемых пучков сигнала и гомодина. Плоскости поляризации всех четырех пучков перпендикулярны плоскости рисунка, а на нем показаны лишь линии пересечения

В итоговом выражении (12.30) использовано (12.12), а оператором $\hat{q}_{-\varphi_h}$ обозначен оператор квадратуры сигнала, сдвинутый на отрицательную фазу гетеродина.

Выражение (12.30) показывает, что в схеме балансного гомодинного детектирования можно измерять как саму квадратуру сигнала, так и ее дисперсию и другие всевозможные статистические характеристики при последующей электронной или компьютерной обработке разностного фототока.

Отметим важные особенности квантовых сжатых состояний.

Во-первых, если сигнал на балансный гомодинный детектор вообще не подавать, то дисперсия разности фототоков или фотоотсчетов при регистрации единичных фотонов в каналах 1 и 2 будет, согласно (12.30), определяться дисперсией флюктуаций квадратуры вакуума. С другой стороны, эта дисперсия в чистом виде является дисперсией флюктуаций, обусловленных дробовым шумом фотодетекторов, до последнего времени считавшимся принципиально неустранимым. Подробнее об этом поговорим в следующем разделе. Подав же в качестве сигнала сжатое состояние света с соответствующим поворотом эллипса неопределенности (см. рис. 12.2) путем правильного подбора фазы гетеродина φ_h , можно добиться сниже-

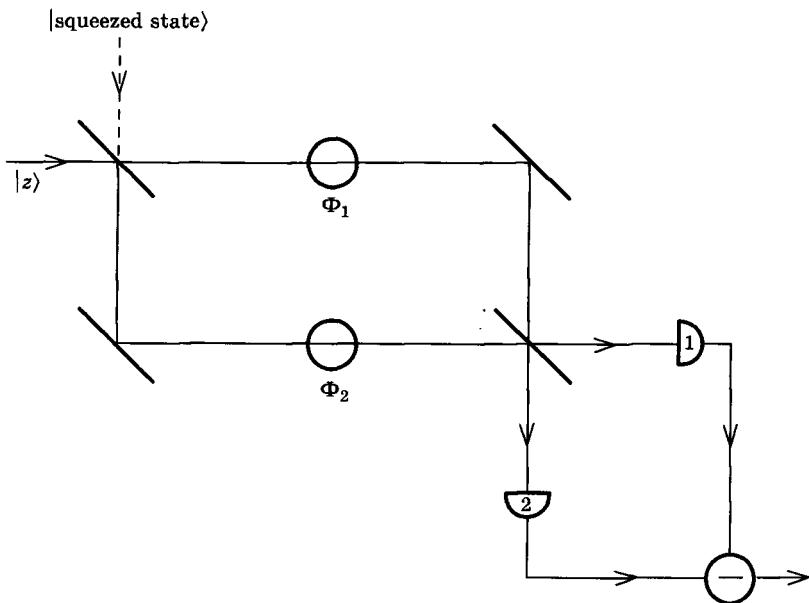


Рис. 12.6. Интерферометр Маха—Цендера, освещаемый когерентным светом в когерентном состоянии $|z\rangle$. Если вместо вакуума $|0\rangle$ второй вход осветить сжатым светом $|squeezed\ state\rangle$, то предельная точность измерения разности фаз ($\Phi_1 - \Phi_2$) может быть повышена

ния дисперсии, т. е. уровня дробового шума! Это поистине удивительный эффект, поскольку с полуклассических позиций дробовой шум обусловлен лишь конструкцией фотодетектора, и его уровень определяется при идеально постоянной интенсивности падающего света. Теперь же, подавая свет в виде, например, параметрически усиленного вакуумного шума, оказывается возможно подавить дробовой шум!

Легко также показать, что в интерференционных схемах, например, Маха—Цендера (рис. 12.6), измеряющих разность фаз в каналах Φ_1 и Φ_2 по разности фототоков детекторов 1 и 2, можно получить увеличение предельной точности измерений, если подать на второй вход интерферометра, обычно остающийся пустым (т. е. вакуумным), сжатый свет. Это происходит, опять же, за счет подавления флуктуаций разностного фототока при соответствующем подборе фазы осветителя, обычно находящегося в когерентном состоянии $|z\rangle$ (фактически подбирается не фаза осветителя, а разность фаз осветителя

и сжатого света, поскольку сохранить постоянной абсолютную фазу оптического сигнала технически очень трудно).

Во-вторых, выше мы указывали, что сжатое состояние можно получить, параметрически усиливая когерентное, а не только вакуумное состояние. При этом эффективность сжатия теоретически не зависит от числа фотонов сжатого света, т. е. от интенсивности осветителя. Это означает, что квантовый эффект сжатия может присутствовать и в пучке с произвольно большим числом фотонов. В этом смысле можно говорить о *макроскопическом квантовом эффекте*. К сожалению, этого нельзя отнести к эффекту подавления дробового шума, уровень которого сам зависит от интенсивности света, в чем мы убедимся в следующей главе.

ГЛАВА 13

Теория фотодетектирования

Современные фотоприемники настолько чувствительны, что способны регистрировать отдельные фотоны. При этом процесс фотодетектирования можно рассматривать как последовательность единичных фотоотсчетов, связанных с отрывом фотоэлектронов от фотокатода фотоэлектронного умножителя (ФЭУ) под действием света (рис. 13.1) — внешний фотоэффект.

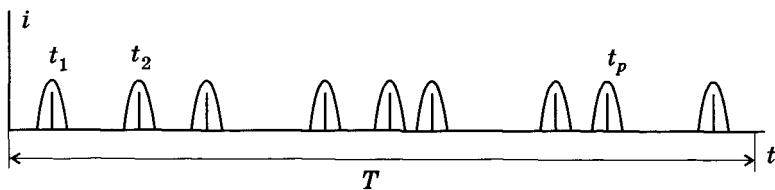


Рис. 13.1. Единичные фотоотсчеты в моменты времени $t_1, t_2 \dots, t_p \dots$ соответствуют импульсам фототока в течение интервала времени выборки T

Простейшее описание такого фотодетектирования — *полуклассическое*: в нем квантуется лишь фототок, а световое поле описывается классической волной. Если интенсивность света постоянна, а фотодетектор работает в линейном ненасыщенном режиме, т. е. отрыв фотоэлектрона не ведет к уменьшению вероятности отрыва следующего, то каждый импульс фототока возникает независимо от остальных. Интенсивность света считаем достаточно малой для того, чтобы отдельные импульсы не перекрывались (рис. 13.1). Многократный подсчет числа импульсов m за некоторый интервал времени выборки T позволяет найти закон распределения $P(m)$ числа первичных фотоэлектронов, вырываемых падающим светом из фотокатода. Под действием электрического поля, создаваемого высоким напряжением, первичный фотоэлектрон направляется на следующий электрод, от удара с которым вырывается несколько электронов. Они, в свою очередь, летят к следующему электроду, и после нескольких таких последовательных стадий в результате

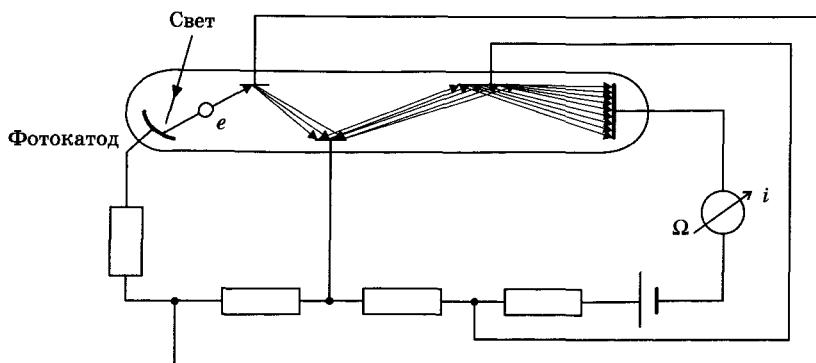


Рис. 13.2. Схема работы фотоэлектронного умножителя (ФЭУ). Под действием высоковольтного напряжения вырванный светом первый фотоэлектрон в результате последовательных падений на промежуточные электроды умножается до вполне ощущимого электронного пучка, созданного в цепи импульс фототока i

лавинообразного процесса на анод прибывает достаточно большая группа электронов, создающих ощущимый импульс фототока i в цепи (рис. 13.2).

Следуя [13], с. 225, введем время когерентности τ_{coh} и площадь когерентности S_{coh} светового поля как характеристические масштабы флуктуаций. При $T \ll \tau_{coh}$ и площади поверхности фотокатода $S \ll S_{coh}$ можно пренебречь изменением интенсивности поля за время выборки T и по поверхности фотокатода. При этом распределение $P(m)$ будет определяться только интенсивностью света I независимо от объема детектирования $V_{det} = cTS$, c — скорость света. Детектор в этом случае можно считать «точечным» или «одномодовым», т. е. измеряющим лишь одну степень свободы поля. Строго говоря, для этого надо также, чтобы он измерял только один тип поляризации.

Если интенсивность света I не изменяется от выборки к выборке, то даже в этом случае число фотоэлектронов в одной выборке, согласно принципам квантовой механики, является случайным и непредсказуемым. Можно определить лишь вероятность ионизации одного атома фотокатода w_1 за небольшой интервал времени $\Delta t = \frac{T}{M}$, где M — достаточно большое целое число, такое, что в течение интервала Δt появляется не более одного импульса фототока, или не появляется вообще ни одного. Вероятность ионизации одного

из N независимых атомов будет в N раз больше:

$$w = Nw_1 = \frac{\alpha}{T} I, \quad (13.1)$$

где коэффициент пропорциональности

$$\alpha = \frac{\eta V_{det}}{2\pi\hbar\bar{\omega}}. \quad (13.2)$$

Здесь $\bar{\omega}$ — средняя частота света, а квантовая эффективность фотоприемника, или квантовый выход тонкого фотокатода толщиной l равен

$$\eta = \sigma l N_0 = \frac{\sigma N}{S}, \quad (13.3)$$

где σ — сечение ионизации, а

$$N_0 = \frac{N}{Sl} \quad (13.4)$$

— концентрация атомов, при этом мы считаем, что сечение σ постоянно в пределах ширины спектра светового поля.

Напомним также, что квантовая эффективность детектора η представляет собой вероятность одного фотоотсчета при падении на фотокатод одного фотона.

Поскольку интенсивность света на фотокатоде $I = \text{const}$, все моменты времени в пределах T равновероятны для появления фотоотсчета. Следовательно, фотоэлектрон может оторваться от фотокатода в любом малом интервале Δt с одинаковой вероятностью

$$P = \frac{\alpha I}{T} \Delta t. \quad (13.5)$$

Фактически P от T не зависит, так как $\alpha \propto V_{det} \propto T$, см. (13.2).

Напомним, что в интервале Δt может появиться не более одного фотоэлектрона, или не появиться вообще ни одного с вероятностью $Q = 1 - P$.

Вероятность того, что за M интервалов появится m фотоотсчетов, равна

$$P(m) = P^m Q^{M-m} C_M^m. \quad (13.6)$$

Это формула Бернулли с биномиальными коэффициентами

$$C_M^m = \frac{M(M-1)(M-2)\dots(M-m+1)}{m!}, \quad (13.7)$$

равными единице при $m = 0$ и $m = M$ и являющимися коэффициентами суммы

$$\sum_{m=0}^M C_M^m a^m b^{M-m} = (a+b)^M. \quad (13.8)$$

При $m \neq 0$ и $m \neq M \gg 1$ коэффициент $C_M^m \gg 1$.

Поскольку $M\Delta t = T$, в пределе $\Delta t \rightarrow 0$ M устремляется в бесконечность, значит, $m \ll M$ и

$$C_M^m \cong \frac{M^m}{m!}. \quad (13.9)$$

Тогда

$$P(m) \cong \frac{(PM)^m Q^M}{m!} \propto \frac{C^m}{m!}, \quad (13.10)$$

где $C = PM$, поскольку Q^M от m не зависит. В силу того, что

$$\sum_{m=0}^{\infty} P(m) = 1, \quad (13.11)$$

т. е.

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{C^m}{m!} \equiv e^C = 1, \quad (13.12)$$

распределение

$$P(m) = \frac{e^{-C} C^m}{m!} \quad (13.13)$$

представляет собой распределение Пуассона.

Чтобы выразить коэффициент C через среднее число фотоотсчетов \bar{m} за время T , продифференцируем ряд (13.12) по C [17]:

$$e^C = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m C^{m-1}}{m!} = \frac{1}{C} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m C^m}{m!}, \quad (13.14)$$

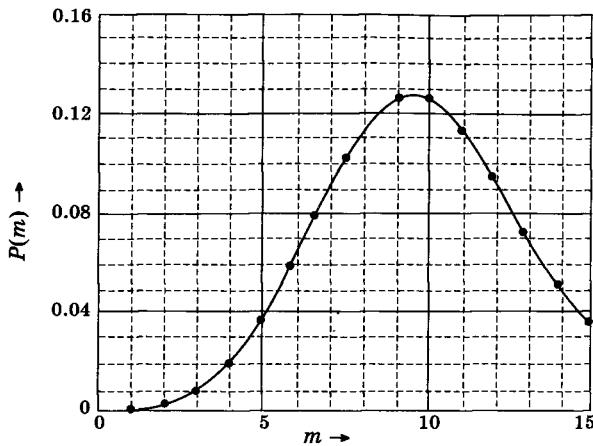
откуда

$$C = e^{-C} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m C^m}{m!} = \sum_{m=1}^{\infty} m P(m) = \bar{m}. \quad (13.15)$$

Таким образом, окончательно имеем

$$P(m) = \frac{e^{-\bar{m}} \bar{m}^m}{m!}. \quad (13.16)$$

Оно уже нам встречалось в (11.47).

Рис. 13.3. Распределение Пуассона при $\bar{m} = 10$

На рис. 13.3 приведен пример распределения Пуассона для $\bar{m} = 10$.

Можно показать, что при $\bar{m} \rightarrow \infty$ дискретное распределение Пуассона переходит в непрерывное гауссовское распределение. Фактически гауссовская аппроксимация огибающей пуассоновского распределения (тонкая сплошная линия на рис. 13.3) справедлива при $\bar{m} \gg 1$.

Второй момент пуассоновского распределения (13.16) можно найти повторным дифференцированием (13.14) по C , откуда

$$\langle m^2 \rangle \equiv \sum_{m=1}^{\infty} m^2 P(m) = \bar{m}(1 + \bar{m}), \quad (13.17)$$

так что дисперсия

$$\sigma_m^2 \stackrel{\Delta}{=} \langle m^2 \rangle - \langle m \rangle^2 = \bar{m}. \quad (13.18)$$

Аналогично вычисляются моменты высших порядков — дифференцируя по C еще и еще раз.

Заметим, что [17]

$$P(m+1) = \frac{e^{-\bar{m}} \bar{m}^{\bar{m}}}{(m+1)m!} = \frac{\bar{m}}{m+1} P(m). \quad (13.19)$$

Пусть теперь $\bar{m} = \tilde{m} + 1$, тогда

$$P(\tilde{m}) = P(\tilde{m} + 1), \quad (13.20)$$

что должно быть в пике пуассоновского распределения, значит, при целочисленных значениях \bar{m} максимум пуассоновского распределения достигается при $m = \bar{m}$ и $m = \bar{m} - 1$, что прекрасно видно на рис. 13.3. В случае же $\bar{m} = 1$,

$$P(m) = \frac{1}{em!}, \quad (13.21)$$

т. е.

$$\begin{aligned} P(0) &= P(1) \cong 0.37, \\ P(2) &\cong 0.18, \\ P(3) &\cong 0.06, \\ P(4) &\cong 0.01. \end{aligned} \quad (13.22)$$

Например, если детектировать излучение идеального лазера с постоянной интенсивностью и средним значением энергии за время T равным $\hbar\omega$, то получим один фотоотсчет лишь в 37 случаях из 100. Напомним, что статистика фотоотсчетов когерентного состояния $|z\rangle$, согласно (11.47), пуассоновская. Таким образом, рассмотренный нами в полуклассическом приближении процесс фотодетектирования света постоянной интенсивности, описываемый пуассоновским распределением, в точности соответствует фотонной статистике когерентного состояния. Если квантовая эффективность детектора равна единице, то каждый фотон превращается в фотоотсчет, и мы имеем полную тождественность полностью квантового описания фотонной статистики света идеального лазера и полуклассического описания детектирования света постоянной интенсивности. Случайность появления того или иного числа фотоотсчетов света постоянной интенсивности естественно воспринимать как шум фотодетектора, который и называется *дробовым*. Он кладет принципиальное ограничение точности измерения интенсивности света фотодетектором и носит название *стандартного квантового предела*. Например, шум разностного фототока на выходе схемы балансного гомодинного детектора (рис. 12.3) имеет нулевое среднее значение \bar{m} , если на сигнальном входе вакуум. Статистика фотоотсчетов при этом будет пуассоновской с $\bar{m} = 0$. Это соответствует описанию флюктуаций квадратуры вакуума. Но если на сигнальный вход подать шум параметрического рассеяния, то возможно подавление дисперсии дробового шума, т. е. будет $\sigma_m^2 < \bar{m}$ (см. (13.18)). Такую статистику, с распределением уже пуассоновского, называют *субпуассоновской*. Ее можно получить и в схеме прямого фотодетектирования, когда свет непосредственно направляется на фотодетектор. Эллипс

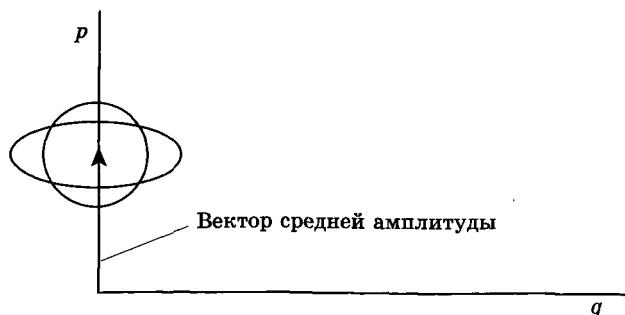


Рис. 13.4. Взаимная ориентация на фазовой плоскости вектора средней амплитуды и эллипса неопределенности у субпуассоновского света. Вектор не обязательно должен совпадать с осью *p*. Изображенный вариант дан для удобства сопоставления с рис. 12.2, где среднее значение амплитуды нулевое. В когерентном состоянии $|z\rangle$ тело неопределенности представляет собой круг, а комплексный вектор средней амплитуды упирается в комплексное значение *z*

неопределенности при этом должен быть ориентирован так, как показано на рис. 13.4, который хорошо сравнить с рис. 12.2. Такой свет называют *субпуассоновским*. Описание его детектирования невозможно в полуклассическом приближении, когда проквантован только фототок. Нужно квантовать и электромагнитное поле, т. е. производить полностью квантовое описание.

Удивительно, что субпуассоновский свет как бы вынуждает фотоэлектроны отрываться более регулярно, чем «им бы хотелось», т. е. когда все моменты времени отрыва были бы равновероятны, что приводило бы к пуассоновскому распределению. Казалось бы, трудно вмешаться во «внутреннюю кухню» фотодетектора, но субпуассоновский свет делает именно это! Стандартный квантовый предел при этом оказывается преодоленным. О том, как такой свет приготовить, подробно будет рассмотрено в следующих разделах, но об одном из простейших способов упомянем сейчас. Если вырожденный параметрический усилитель, т. е. нелинейный кристалл с накачкой осветить когерентным светом с вектором среднего значения амплитуды, направленным вдоль малой оси эллипса неопределенности (например, в случае фазы накачки $\Phi = 2\pi m$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ иллюстрируемом рисунком 12.2), то на выходе мы получим свет с несколько меньшей интенсивностью, но зато с ориентацией эллипса неопределенностей как на рис. 13.4. Дело в том, что вместе с модулем амплитуды света

при этом подавляется и дисперсия флуктуаций соответствующей квадратуры. А это и есть субпуассоновский свет.

Отметим важную особенность дробового шума. С ростом интенсивности света I пропорционально растет среднее число фотоотсчетов \bar{m} , а среднеквадратическое отклонение возрастает лишь пропорционально $\sqrt{\bar{m}}$. Поскольку $\bar{m} \gg \sqrt{\bar{m}}$ при $\bar{m} \gg 1$, с ростом интенсивности света I относительная погрешность ее измерения

$$\frac{\delta I}{I} = \frac{\sqrt{\bar{m}}}{\bar{m}} \quad (13.23)$$

уменьшается, и в очень интенсивных пучках ей вообще можно пренебречь. Это простейший способ борьбы с дробовым шумом детектора. К сожалению, он не всегда возможен: исследуемые в оптических измерениях объекты в ярком свете могут разрушаться, например, живые клетки, да и мощность лазеров не бесконечна.

В этом смысле чисто квантовый эффект подавления дробового шума субпуассоновским светом не является макроскопическим. Существенное значение он имеет лишь в слабых пучках с $\bar{m} \sim 1$. Но что означает случайный характер количества фотоотсчетов в случае рассмотренного выше примера прямого детектирования излучения идеального лазера со средней интенсивностью $\bar{m} = 1$ фотон за время T , т. е. $\frac{\hbar\omega}{T}$ (см. (13.22))؟ Значит ли это, что в 37% случаев в поле имеется один фотон или ни одного? А в 18% — два? Еще реже — три (в 6% случаев) и совсем редко — четыре (1%)? Другими словами, существует ли определенное значение измеряемой величины до момента измерения? Ортодоксальная интерпретация квантовой теории Нильса Бора утверждает, что в общем случае — нет, за исключением тех редких ситуаций, когда квантовая система находится в собственном состоянии оператора измеряемой величины, например, при измерении числа фотонов света в фоковском состоянии. Удивительный факт априорного несуществования значения наблюдаемой до момента ее регистрации можно доказать экспериментально, в чем мы убедимся прочитав следующую главу. Привычные нам макроскопические пространственно — временные интуиции при этом подвергаются серьезным испытаниям.

Интерференция 3-го порядка

В обычных двухлучевых интерферометрах, например, Маха—Цендера, как на рис. 12.6, гармоническая зависимость интенсивности света I на выходе от разности фаз в каналах $\Phi_2 - \Phi_1$ появляется в результате сложения комплексных амплитуд двух интерферирующих пучков:

$$\begin{aligned} I \propto |a_1 + a_2|^2 &= |a_1|^2 + |a_2|^2 + a_1 a_2^* + a_1^* a_2 = \\ &= |a_1|^2 + |a_2|^2 + 2|a_1 a_2| \cos(\Phi_2 - \Phi_1). \end{aligned} \quad (14.1)$$

Интерференционные слагаемые $a_1 a_2^*$ и $a_1^* a_2$ представляют собой произведение двух амплитуд (одна из которых комплексно-сопряженная). Такую интерференцию можно назвать интерференцией второго порядка (по амплитуде). В квантовом описании двумодовой интерференции эти слагаемые будут операторами $\hat{a}_1 \hat{a}_2^+$ и $\hat{a}_1^+ \hat{a}_2$ в силу того, что интерферометр представляет собой линейное устройство.

Бывают и интерферометры, в которых складывается множество пучков с различными амплитудами. Это, например, интерферометры или резонаторы Фабри—Перо: с плоскими параллельными зеркалами или многолучевые интерферометры с зеркалами другой формы. Их преимущество по отношению к двухлучевым состоит в том, что они более чувствительны к фазовым задержкам. В дальнейшем мы рассмотрим некоторые из них. Здесь же ограничимся интерферометром третьего порядка, представляющим не столько практический, сколько эвристический интерес, поскольку он позволяет проанализировать специфические и в то же время фундаментальные особенности квантовой теории вообще и теории квантовых измерений, в частности. Его схема представлена на рис. 14.1.

Пучок света с частотой ω_p в прозрачном нелинейном кристалле в ходе параметрического рассеяния порождает два пучка излучения — сигнальный (s) и холостой (i). Взаимодействие невырожденное: пучки неколлинеарны. Поскольку эффективность параметрического преобразования мала, порядка $10^{-8} \div 10^{-7}$, основная доля излучения проходит через прозрачный кристалл, на выходе которого три пучка,

в простейшем случае, три моды: p , s и i . Далее во все три компоненты поля вносятся регулируемые фазовые сдвиги Φ_p , Φ_s и Φ_i , после чего они вновь взаимодействуют во втором, точно таком же нелинейном кристалле. Он осуществляет обратное преобразование сигнального и холостого пучков в излучение на частоте накачки ω_p и прямое преобразование прошедшей первый кристалл накачки. Детекторы на выходе оптической схемы регистрируют интенсивности всех трех пучков.

Эффективный трехмодовый гамильтониан взаимодействия параметрического рассеяния (11.49) позволяет предположить, что в случае однофотонного состояния накачки, точное решение уравнения Шрёдингера (11.51) следует искать в виде [22]:

$$|\psi(t)\rangle = \alpha(t)|1\rangle_p|0\rangle_s|0\rangle_i + \beta(t)|0\rangle_p|1\rangle_s|1\rangle_i. \quad (14.2)$$

Действительно, если на входе кристалла один фотон накачки $|1\rangle_p$ и вакуум на сигнальной и холостой модах ($|0\rangle_s$ и $|0\rangle_i$), то либо этот фотон «развалится» на сигнальный и холостой ($|1\rangle_s$ и $|1\rangle_i$), а в накачке появится вакуум $|0\rangle_p$, либо все останется по-прежнему. Других альтернатив нет. При этом $\alpha(0) = 1$, а $\beta(0) = 0$. Те же соображения справедливы и для обратного преобразования во втором кристалле с той лишь разницей, что $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ в нем могут иметь другие начальные условия, но в любом случае

$$|\alpha(t)|^2 + |\beta(t)|^2 = 1, \quad (14.3)$$

иначе не будет выполняться условие нормировки для (14.2):

$$\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle = 1.$$

Обратим внимание на то, что состояние (14.2) не факторизуется:

$$|\psi(t)\rangle \neq |\psi(t)\rangle_p |\psi(t)\rangle_s |\psi(t)\rangle_i, \quad (14.4)$$

т. е. является типично перепутанным состоянием.

Чтобы убедиться в справедливости решения (14.2), подставим его в уравнение Шрёдингера (11.51):

$$i\hbar(\dot{\alpha}|100\rangle + \dot{\beta}|011\rangle) = i\hbar\frac{\chi^{(2)}}{2}(\alpha|011\rangle - \beta|100\rangle), \quad (14.5)$$

где $|100\rangle = |1\rangle_p|0\rangle_s|0\rangle_i$, а $|011\rangle = |0\rangle_p|1\rangle_s|1\rangle_i$, откуда

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = -\frac{\chi^{(2)}}{2}\beta, \\ \dot{\beta} = \frac{\chi^{(2)}}{2}\alpha. \end{cases} \quad (14.6)$$

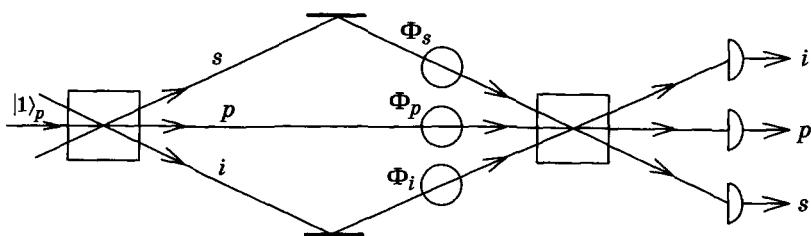


Рис. 14.1. Схема интерференционного эксперимента, доказывающего априорное несуществование определенного числа фотонов в поле между двумя нелинейными кристаллами, изображенными в виде квадратиков. На вход подаются единичные фотоны $|1\rangle_p$ на частоте ω_p . Вероятность фотоотсчетов на детекторе i пропорциональна $1 + \cos(\Phi_s + \Phi_i - \Phi_p)$, что свидетельствует об одновременном присутствии поля во всех трех каналах, т. е., как минимум, трех фотонов. Но энергии одного входного фотона достаточно лишь на половину энергии трех фотонов

Решение этой линейной системы дифференциальных уравнений удобно представить в матричной форме

$$\begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \Gamma & -\sin \Gamma \\ \sin \Gamma & \cos \Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha(0) \\ \beta(0) \end{pmatrix}, \quad (14.7)$$

где $\Gamma = \frac{\chi^{(2)}}{2} t$, а время взаимодействия t определяется временем проleta фотона через нелинейный кристалл. При этом предполагается, что для выбранных направлений распространения мод в кристалле выполняется условие фазового синхронизма, т. е. все три моды распространяются синхронно при выполнении закона сохранения импульса (11.3).

Матрица преобразования состояния поля в кристалле, таким образом, равна

$$D(\Gamma) = \begin{pmatrix} \cos \Gamma & -\sin \Gamma \\ \sin \Gamma & \cos \Gamma \end{pmatrix}. \quad (14.8)$$

Перейдем к описанию фазовых задержек в модах. Согласно (12.9), фазовая задержка θ приводит к тому, что оператор уничтожения \hat{a} домножается на $e^{-i\theta}$. Из двух компонент (14.2) иенулевой результат после действия оператора \hat{a}_p будет лишь для компоненты $|100\rangle$, следовательно, ее и нужно домножить на $e^{-i\Phi_p}$. Аналогично вторую компоненту $|011\rangle$ домножаем на $e^{-i(\Phi_s + \Phi_i)}$. Матрица преоб-

разования при этом будет диагональной

$$D(\Phi) = \begin{pmatrix} e^{-i\Phi_p} & 0 \\ 0 & e^{-i(\Phi_s + \Phi_i)} \end{pmatrix}. \quad (14.9)$$

Итак, общее действие оптической системы интерферометра на рис. 14.1 описывается матрицей

$$D = D(\Gamma_2)D(\Phi)D(\Gamma_1), \quad (14.10)$$

где индексы «1» и «2» относятся, соответственно, к первому и второму нелинейным кристаллам.

Поскольку в исходном состоянии

$$\begin{pmatrix} \alpha(0) \\ \beta(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (14.11)$$

на выходе второго нелинейного кристалла будет состояние (14.2) с

$$\alpha(t) = e^{-i\Phi_p} \cos \Gamma_1 \cos \Gamma_2 - e^{-i(\Phi_s + \Phi_i)} \sin \Gamma_1 \sin \Gamma_2, \quad (14.12)$$

$$\beta(t) = e^{-i\Phi_p} \cos \Gamma_1 \sin \Gamma_2 + e^{-i(\Phi_s + \Phi_i)} \sin \Gamma_1 \cos \Gamma_2. \quad (14.13)$$

Вероятности срабатывания детекторов в каналах равны

$$P_p = \langle \psi(t) | \hat{a}_p^+ \hat{a}_p | \psi(t) \rangle = \langle \psi(t) | \hat{n}_p | \psi(t) \rangle = |\alpha(t)|^2, \quad (14.14)$$

$$P_s = P_i = \langle \psi(t) | \hat{a}_s^+ \hat{a}_s | \psi(t) \rangle = \langle \psi(t) | \hat{a}_i^+ \hat{a}_i | \psi(t) \rangle = |\beta(t)|^2. \quad (14.15)$$

Итак, согласно (14.12), (14.13)

$$P_p = C_p (1 - v_p \cos \Phi), \quad (14.16)$$

$$P_s = P_i = C_s (1 + v_s \cos \Phi), \quad (14.17)$$

где так называемая *видность интерференции*

$$v_p = \frac{2 \sin \Gamma_1 \sin \Gamma_2 \cos \Gamma_1 \cos \Gamma_2}{\sin^2 \Gamma_1 \sin^2 \Gamma_2 + \cos^2 \Gamma_1 \cos^2 \Gamma_2} = \frac{2}{\operatorname{tg} \Gamma_1 \operatorname{tg} \Gamma_2 + \operatorname{ctg} \Gamma_1 \operatorname{ctg} \Gamma_2}, \quad (14.18)$$

$$v_s = \frac{2 \sin \Gamma_1 \sin \Gamma_2 \cos \Gamma_1 \cos \Gamma_2}{\sin^2 \Gamma_1 \cos^2 \Gamma_2 + \cos^2 \Gamma_1 \sin^2 \Gamma_2} = \frac{2}{\operatorname{tg} \Gamma_1 \operatorname{ctg} \Gamma_2 + \operatorname{ctg} \Gamma_1 \operatorname{tg} \Gamma_2}, \quad (14.19)$$

фаза интерференции

$$\Phi = \Phi_s + \Phi_i - \Phi_p, \quad (14.20)$$

а коэффициенты C_p и C_s равны

$$C_p = \sin^2 \Gamma_1 \sin^2 \Gamma_2 + \cos^2 \Gamma_1 \cos^2 \Gamma_2, \quad (14.21)$$

$$C_s = \sin^2 \Gamma_1 \cos^2 \Gamma_2 + \cos^2 \Gamma_1 \sin^2 \Gamma_2. \quad (14.22)$$

Итак, вероятности обнаружения фотонов в каналах описываются гармоническими зависимостями (14.16) и (14.17) от фазы (14.20), включающей фазовые задержки во всех трех каналах. Поэтому их можно назвать интерференционными зависимостями, а само явление — *интерференцией третьего порядка* [22] или *трехлучевой интерференцией*.

Максимальный контраст интерференционной картины, т. е. максимальный перепад между интерференционным минимумом и максимумом будет при единичной видности v . В каналах « s » и « i » это очень легко достижимо: достаточно взять одинаковые нелинейные кристаллы с $\Gamma_1 = \Gamma_2$. Тогда, согласно (14.19), $v_s = 1$. В канале накачки « p » — сложнее, ибо $v_p = 1$ при $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \frac{\pi}{4}$, что требует очень высокой эффективности параметрического взаимодействия, вряд ли возможной при однофотонной накачке.

Для наблюдения интерференционного эффекта достаточно и одного детектора, например, в канале « s ». При этом единичная видность будет и в случае малой эффективности параметрического преобразования, т. е. при любых $\Gamma_1 = \Gamma_2$, в том числе и $\Gamma_1 = \Gamma_2 \ll 1$. Следовательно, рассматриваемый эксперимент вполне реально осуществим. Правда нужно уметь приготавливать однофотонное состояние накачки. Идеальный лазер тут не поможет, поскольку даже при средней интенсивности в 1 фотон за время наблюдения T число зарегистрированных фотонов от реализации к реализации флюктуирует по пуассоновскому закону от нуля до четырех и выше, согласно (13.22).

Прекрасный способ приготовления однофотонного состояния предложил Д. Н. Клышико с использованием все того же параметрического рассеяния. Его схема представлена на рис. 14.2. Мощность лазера накачки подбирается небольшой, чтобы рождение фотонных пар в ходе параметрического рассеяния происходило достаточно редко, иначе они будут накладываться друг на друга. Оператор эволюции (11.54) в первом порядке разложения экспоненты при малом ее аргументе имеет вид

$$\hat{U}(t - t_0) = \hat{I} - \frac{i\hat{H}}{\hbar} (t - t_0). \quad (14.23)$$

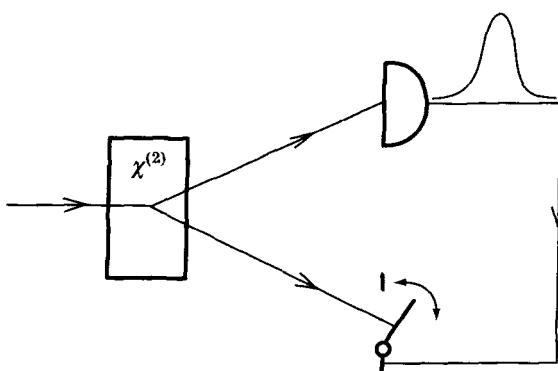


Рис. 14.2. Схема приготовления однофотонного состояния: один из фотонов коррелированной пары (верхний) регистрируется детектором, по электронному сигналу которого открывается затвор, пропускающий второй фотон коррелированной фотонной пары. Затем затвор снова быстро закрывается

Малость аргумента экспоненты связана с малостью множителя $\frac{i\chi^{(2)}}{2} E$ гамильтониана (11.64) в приближении заданной накачки. Если на входе нелинейного кристалла на сигнальной и холостой модах вакуум $|0\rangle_s |0\rangle_i$, то на выходе

$$|\psi(t - t_0)\rangle = \hat{U}(t - t_0)|0\rangle_s |0\rangle_i \approx |0\rangle_s |0\rangle_i + \Gamma E |1\rangle_s |1\rangle_i. \quad (14.24)$$

Напомним, что $\Gamma = \frac{\chi^{(2)}}{2} t$. Таким образом, имеем вакуум и фотонную пару $|1\rangle_s |1\rangle_i$. Сомножитель

$$\Gamma E \ll 1, \quad (14.25)$$

иначе фотонные пары будут рождаться слишком часто и будут перекрываться. С другой стороны, выполнение (14.25) гарантирует адекватность первого порядка теории возмущений, т. е. ограничение линейным членом (14.23) разложения экспоненты (11.54).

Поскольку квантовая эффективность η детектора на рис. 14.2 может быть меньше 100%, некоторые фотонные пары $|1\rangle_s |1\rangle_i$ он будет пропускать. Наличие вакуумной составляющей $|0\rangle_s |0\rangle_i$ в (14.24) на детектор не влияет, поскольку

$$\hat{n}_s |0\rangle = \hat{a}_s^\dagger \hat{a}_s |0\rangle = \hat{n}_i |0\rangle = \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i |0\rangle = 0. \quad (14.26)$$

Чтобы отсечь «пропущенные» детектором пары и всевозможные посторонние засветки, во втором канале схемы на рис. 14.2 ставится затвор, пропускающий лишь фотон зарегистрированной детектором пары. После затвора гарантированно имеем одиночный фотон в известный момент времени появления импульса фотоотсчета. Его и направляем на вход интерференционной схемы на рис. 14.1. Затем ждем появления следующего фотона.

Поскольку рождение фотонных пар происходит достаточно редко, а рождение вторичных пар в нелинейных кристаллах трехлучевого интерферометра на рис. 14.1 — еще реже, для регистрации интерференционной зависимости (14.17) придется запастись достаточным терпением. Но все же это принципиально возможно. Ведь первые эксперименты по наблюдению интерференции одиночных фотонов на двух щелях подчас длились по несколько лет, поскольку схемы, подобной рис. 14.2, еще не знали, и одиночные фотоны брали от очень слабого теплового источника, настолько слабого, чтобы вероятность появления вместо одного — двух фотонов — была ничтожной.

Указанные причины побудили экспериментаторов [23] к наблюдению трехлучевой интерференции не с одиночными фотонами на входе, а с обычным лазерным светом. Гармоническая интерференционная зависимость (14.17) была ими получена, правда с видностью $v_s = v_i$ несколько меньшей единицы. Дело в том, что очень трудно избежать всевозможных шумов в «нулях» интерференции, где $P_s = P_i = 0$. А именно эти «нули» и интересны с точки зрения интерпретации эксперимента. Но не будем забегать вперед.

Попытаемся интерпретировать этот результат в рамках наглядной модели с *a priori* определенным числом фотонов в трехмодовом поле между нелинейными кристаллами (рис. 14.1). Априори в данном случае означает — до момента срабатывания какого-либо из детекторов. Для простоты их квантовую эффективность η положим равной единице.

В первой серии испытаний убираем второй нелинейный кристалл, что соответствует $\Gamma_2 = 0$. При этом фазовые задержки в каналах не влияют на результаты детектирования и наблюдаются фотоотсчеты или одновременно в обоих каналах «*s*» и «*i*», либо одиночные отсчеты в канале «*p*». Последние, разумеется, гораздо чаще. Но никогда не будет одновременно трех фотоотсчетов во всех трех каналах, поскольку энергии фотона на входе на это вдвое не хватает. Эта картина согласуется с тривиальным предположением, что на выходе первого нелинейного кристалла имеется попеременно то один фотон

накачки $|1\rangle_p$, то пара сигнального и холостого фотонов $|1\rangle_s|1\rangle_i$. Квантовое состояние (14.2) при этом интересно тем, что трехмодовое поле имеет определенную энергию $\hbar\omega_p$, хотя общее число фотонов

$$n_{p+s+i} \stackrel{\Delta}{=} n_p + n_s + n_i \quad (14.27)$$

при $\alpha\beta \neq 0$ не имеет точно определенного значения:

$$\langle\psi(t)|\hat{n}_{p+s+i}|\psi(t)\rangle = |\alpha|^2 + 2|\beta|^2 = 1 + |\beta|^2, \quad (14.28)$$

$$\langle\psi(t)|\Delta\hat{n}_{p+s+i}^2|\psi(t)\rangle = |\alpha\beta|^2, \quad (14.29)$$

т. е. дисперсия флюктуаций общего числа фотонов ненулевая. Это пока вполне согласуется с простым предположением, что в поле одновременно появляются то по одному, то по два фотона. В следующем разделе мы проанализируем произведения квантовых неопределенностей $\Delta n_{p+s+i}, \Delta C_{psi}$, где C_{psi} — косинус фазы (14.20) $\Phi = \Phi_p - \Phi_s - \Phi_i$. Пока же перейдем к описанию второй серии испытаний.

Устанавливаем в схеме на рис. 14.1 второй нелинейный кристалл с $\Gamma_2 = \Gamma_1$. При этом все три фазы Φ_p, Φ_s и Φ_i влияют на вероятности фотоотсчетов согласно (14.16), (14.17) и (14.20).

Интерференция с единичной видностью $v_s = v_i = 1$, описываемая законом

$$P_s = P_i \approx 1 + \cos \Phi, \quad (14.30)$$

свидетельствует о том, что изменения фазовую задержку любой компоненты поля — Φ_p, Φ_s или Φ_i — можно полностью подавить фотоотсчеты при $\cos(\Phi_p - \Phi_s - \Phi_i) = -1$. Это и есть «нуль» интерференции или интерференционный минимум. В этом случае фотоотсчетов, например, в канале «*s*» не будет.

Перекроем свет в промежутке между нелинейными кристаллами в канале «*p*». Появляются фотоотсчеты в канале «*s*», так как их вероятность перестает быть нулевой. Следовательно, если бы хоть в одной реализации схемы со всеми тремя открытыми каналами отсутствовало поле в канале «*p*», вероятность фотоотсчетов в детекторе «*s*» была бы ненулевой. А она нулевая! Итак, поле в канале накачки «*p*» присутствует в *каждой* реализации. Аналогично, перекрывая свет в других каналах, доказывается одновременное присутствие светового поля в *каждой* реализации в каналах парных фотонов «*s*» и «*i*». Другими словами, если бы при всех открытых каналах в каких-либо реализациях, т. е. запусках одиночного фотона накачки на вход, поле отсутствовало бы, по крайней мере, в одном из

каналов, то вероятность фотоотсчетов на детекторе «*s*» была бы ненулевой. Значит, поле присутствует в *каждой* реализации во всех трех каналах «*p*», «*s*» и «*i*» между нелинейными кристаллами. Но это возможно лишь в случае одновременного присутствия *всех трех фотонов*, что противоречит закону сохранения энергии: ведь на вход интерферометра подавался один фотон накачки ($\beta(0) = 0$), энергия которого вдвое меньше суммарной энергии всех трех фотонов.

Приведенные соображения не оставляют места для тривиальной модели светового поля с априори определенным числом фотонов в состоянии (14.2) с определенной энергией и неопределенным числом фотонов (14.29) при $\alpha\beta \neq 0$. Итак, число фотонов, а в более общем случае — измеряемая величина вообще — до момента измерения не существует, за исключением ситуации, когда объект измерения находится в собственном состоянии измеряемой величины.

Как писал Д. Н. Клышко: «Фотон является фотоном, если это зарегистрированный фотон» [24]. Источник и приемник нужно рассматривать в комплексе, не отрывая один от другого ([25], с. 414). В квантовой теории это требование, как правило, выполняется автоматически: квантовая теория предсказывает лишь результаты измерений, а измерения предполагают наличие детекторов. Поэтому детекторы всегда присутствуют в задачах.

В изложенной аргументации есть, однако, слабое звено: в реальности, как и в упомянутом выше эксперименте [23], вряд ли возможно достичь единичной видности и отсутствия шумового фона. Значит, интерференционных «нuleй» нет. Тем не менее, об одновременном присутствии поля во всех трех каналах свидетельствует сама косинусная зависимость вероятности $P_s = P_i$ (14.30) от суперпозиции фаз (14.20), подтвержденная экспериментально [23]. Действительно, если бы поле между нелинейными кристаллами (рис. 14.1) содержало то один, то два фотона — от реализации к реализации — то $P_s = P_i$ можно было бы представить в виде суммы двух функций, одна из которых зависела бы только от Φ_p , а вторая — от Φ_s и Φ_i . Но $\cos(\Phi_p - \Phi_s - \Phi_i)$ не допускает такого представления.

Отметим, что в этом анализе мы пользовались традиционно понимаемыми пространством и временем, в которых реально существует световое поле. Эти посылки, однако, принимаются не всеми физиками. Например, в монографиях профессора Московского университета Ю. С. Владимирова [26, 27] развивается теория, согласно которой всеобщие пространство-время присущи только макрообъектам, а в микромире их не существует. А если нет времени, то нет и понятия априорности, которое являлось ключевым

в наших построениях. Отсутствие традиционно понимаемого пространства разрешает недоумения, связанные с квантовой нелокальностью, которая нами обсуждалась при анализе интерференции одиночных квантовых частиц на двух щелях (рис. 1.1). Профессор Ю. С. Владимиров использует концепцию дальнодействия, которая предполагает вообще отсутствие полей. Его подход, таким образом, снимает и вполне объясняет рассмотренные квантовые парадоксы, однако тщательная его проработка, как и изучение самого феномена пространства-времени, еще впереди.

К рассмотренным результатам можно подойти и с иных позиций. В работе [28] на с. 50, например, написано о необходимости «осознания относительности представления о мире как о множестве каких-то «тел» (или других «элементов» в любых пространствах реального физического опыта)», и сделан вывод о том, что «природа в конечном счете неразложима на множество каких-либо элементов и существует как нечто единое целое». Это вполне согласуется и с Библейским представлением о едином творении мира единосудящим Богом.

ГЛАВА 15

Соотношения неопределенностей Гейзенберга амплитудных и фазовых параметров поля

До сих пор мы исследовали соотношения неопределенностей лишь для координаты и импульса частицы или для квадратурных компонент моды электромагнитного поля. Интересно расширить этот круг, включив в него интенсивность или число фотонов в одной или нескольких модах. Для придания общности нашему рассмотрению ведем оператор [22]

$$\hat{E}_{1\dots m\dots M} = \hat{E}_1 \dots \hat{E}_m \hat{E}_{m+1}^+ \dots \hat{E}_M^+ \quad (15.1)$$

для M -модового поля, причем

$$\hat{E}_k \triangleq (\hat{n}_k + 1)^{-1/2} \hat{a}_k = \sum_{n=1}^{\infty} |n-1\rangle_{kk} \langle n|. \quad (15.2)$$

Здесь $1 \leq k \leq M$ — текущий номер моды поля.

Чтобы убедиться в правильности равенства (15.2), усредним обе части по произвольному состоянию $|\psi\rangle$, которое мы разложим по фоковским состояниям:

$$|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} f_n |n\rangle, \quad (15.3)$$

тогда

$$\langle\psi|(\hat{n}_k + 1)^{-1/2} \hat{a}_k |\psi\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} f_{n-1}^* f_n, \quad (15.4)$$

поскольку оператор $(\hat{n}_k + 1)^{-1/2}$ при усреднении по фоковским состояниям, например, по $|n\rangle$, можно заменить на $(n_k + 1)^{-1/2}$.

Точно такой же результат дает и усреднение

$$\langle\psi| \sum_{n=1}^{\infty} |n-1\rangle_{kk} \langle n| |\psi\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} f_{n-1}^* f_n. \quad (15.5)$$

Каков физический смысл оператора \hat{E}_k ? Согласно первой части соотношения (15.2), он представляет собой экспоненту одного из

вариантов оператора фазы $\hat{\Phi}$ ([29], с. 210–211):

$$\hat{E}_k = e^{-i\hat{\Phi}}. \quad (15.6)$$

Действительно, классическим аналогом оператора уничтожения фотона \hat{a} является комплексная амплитуда, а оператора $(\hat{n}_k + 1)^{-1/2}$ — ее модуль. Единица добавлена для удобства, чтобы не возникало неприятностей для состояний, разложение которых по фоковским (15.3) имеет $f_{n=0} \neq 0$.

Оператор фазы $\hat{\Phi}$, впрочем как и \hat{E}_k , — неэрмитовы. Это означает, что в квантовых экспериментах их невозможно измерить. Зато можно измерить косинус или синус фазы:

$$\hat{C} = \frac{\hat{E}_1 + \hat{E}_1^+}{2}, \quad \hat{S} = \frac{\hat{E}_1 - \hat{E}_1^+}{i2}, \quad (15.7)$$

поскольку они эрмитовы. Здесь оператор \hat{E}_1 представляет собой оператор (15.1) для одномодового поля, т. е. при $m = M = 1$:

$$\hat{E}_1 = (\hat{n} + 1)^{-1/2}\hat{a}. \quad (15.8)$$

Прежде, чем перейти к рассмотрению конкретных примеров, приведем общее коммутационное соотношение

$$[\hat{E}_{1..m..M}, \hat{n}_k] = \begin{cases} \hat{E}_{1..m..M} & \text{при } 1 \leq k \leq m, \\ -\hat{E}_{1..m..M} & \text{при } m < k \leq M, \end{cases} \quad (15.9)$$

поскольку

$$\sum_{n=1}^{\infty} |n-1\rangle_{kk} \langle n| \hat{n}_k = \sum_{n=1}^{\infty} n_k |n-1\rangle_{kk} \langle n|, \quad (15.10)$$

а

$$\sum_{n=1}^{\infty} \hat{n}_k |n-1\rangle_{kk} \langle n| = \sum_{n=1}^{\infty} (n_k - 1) |n-1\rangle_{kk} \langle n|, \quad (15.11)$$

в силу $\hat{n}|n\rangle = n|n\rangle$.

Теперь вернемся к одномодовому полю (15.8). Согласно (15.7), (15.9),

$$[\hat{C}, \hat{n}] = \frac{\hat{E}_1 - \hat{E}_1^+}{2} = i\hat{S}, \quad [\hat{S}, \hat{n}] = \frac{\hat{E}_1 + \hat{E}_1^+}{i2} = -i\hat{C}. \quad (15.12)$$

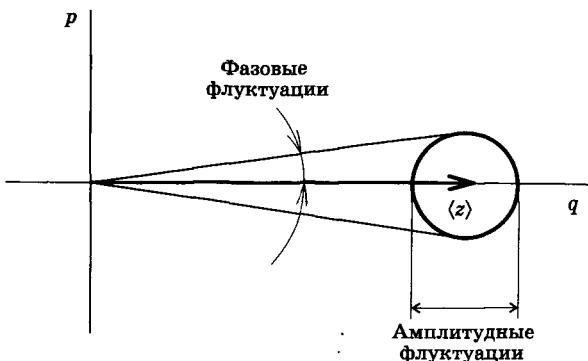


Рис. 15.1. Если средняя амплитуда когерентного состояния (комплексный вектор $\langle z \rangle$) направлена вдоль оси q , то амплитудные флюктуации определяются интервалом между точками пересечения тела неопределенности с осью q , т. е. флюктуациями квадратуры q , а фазовые, если они малы, так что $\Phi \approx \sin \Phi$, — приблизительно флюктуациями квадратуры p . Это, разумеется, остается справедливым и в случае произвольного — не только когерентного — состояния

Итак, операторы фазы не коммутируют с оператором числа частиц. Следовательно, в принципе невозможно найти состояния поля излучения, являющегося одновременно собственным состоянием этих операторов, а поэтому нельзя одновременно точно определить и измерить амплитуду и синус или косинус фазы электромагнитной моды. Это легко понять из следующего простого построения. Если взять среднюю фазу моды и средний ее синус $\langle \hat{S} \rangle = 0$, то средняя амплитуда, разумеется ненулевая, будет направлена по оси q на фазовой плоскости, что показано на рис. 15.1. Если среднеквадратические отклонения флюктуаций малы по сравнению со средней амплитудой, то амплитудные флюктуации будут определяться флюктуациями квадратуры q , а фазовые — квадратуры p . Но q и p подчиняются соотношению неопределенностей Гейзенberга (12.24) и не могут быть измерены одновременно точно. Аналогично и результаты измерений амплитуды и фазы подчиняются соотношениям неопределенностей, найденным обычным путем из (4.14):

$$\Delta C \Delta n \geq |\langle [\hat{C}, \hat{n}] \rangle|/2 = |\langle \hat{S} \rangle|/2,$$

$$\Delta S \Delta n \geq |\langle \hat{C} \rangle|/2. \quad (15.13)$$

Напомним, что Δ обозначает среднеквадратическое отклонение.

Итак, мы показали, что введение оператора фазы (15.6), по аналогии с фазой классической волны, приводит к соотношениям неопределенностей (15.13), характерным для моды квантового поля излучения [29], с. 213.

Перейдем теперь к рассмотрению наиболее интересных частных случаев. Например, в фоковском состоянии $|n\rangle$, разумеется $\Delta n = 0$. Однако и

$$\langle n | \hat{C} | n \rangle = \langle n | \hat{S} | n \rangle = 0, \quad (15.14)$$

поскольку

$$\langle n | \hat{E}_1 | n \rangle = 0 \quad (15.15)$$

согласно (15.8), так что соотношения неопределенностей (15.13) превращаются в тождество $0 = 0$. Каким же будет средний квадрат, например, косинуса фазы? В соответствии с (15.7),

$$\begin{aligned} \langle n | \hat{C}^2 | n \rangle &= \frac{1}{4} \langle n | (\hat{n} + 1)^{-1} \hat{a}^2 + \hat{a}^{+2} (\hat{n} + 1)^{-1} + \\ &+ (\hat{n} + 1)^{-1/2} \hat{a} \hat{a}^+ (\hat{n} + 1)^{-1/2} + \hat{a}^+ (\hat{n} + 1)^{-1} \hat{a} | n \rangle = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{4} \left(\frac{n+1}{n+1} + \frac{n}{n} \right) = \frac{1}{2} & \text{при } n > 0, \\ \frac{1}{4} \left(\frac{n+1}{n+1} \right) = \frac{1}{4} & \text{при } n = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (15.16)$$

Говорить о фазе вакуумного состояния $|0\rangle$ нет смысла. А что означает $\langle \hat{C}^2 \rangle = \frac{1}{2}$ в остальных случаях? Если усреднить $\cos^2 \Phi$ по Φ во всем возможном диапазоне фаз $[0, 2\pi]$, то получим:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 \Phi d\Phi = 1/2, \quad (15.17)$$

следовательно, фаза фоковского состояния имеет неопределенность, полностью перекрывающую весь диапазон возможных значений от 0 до 2π , т. е. *полностью неопределенна*, ведь все ее значения равновероятны.

Перейдем теперь к рассмотрению двух мод, когда (15.1) превращается в

$$\hat{E}_{12} = \hat{E}_1 \hat{E}_2^+ = e^{-i\hat{\Phi}_1} e^{i\hat{\Phi}_2} = e^{-i(\hat{\Phi}_1 - \hat{\Phi}_2)}. \quad (15.18)$$

Физический смысл этого оператора, таким образом, — экспонента разности фаз. Такая запись возможна в силу коммутативности

$$[\hat{\Phi}_1, \hat{\Phi}_2] = 0, \quad (15.19)$$

поскольку моды представляют собой независимые степени свободы поля. В общем случае следовало бы пользоваться формулой Бекера—Хаусдорфа при $[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] = [\hat{B}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0$:

$$e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} e^{-1/2[\hat{A}, \hat{B}]} = e^{\hat{B}} e^{\hat{A}} e^{+1/2[\hat{A}, \hat{B}]}.$$
 (15.20)

Итак,

$$\hat{C}_{12} = \frac{\hat{E}_{12} + \hat{E}_{12}^+}{2}, \quad \hat{S}_{12} = \frac{\hat{E}_{12} - \hat{E}_{12}^+}{i2}$$
 (15.21)

представляют собой операторы косинуса и синуса разности модовых фаз.

Согласно (15.9),

$$\begin{aligned} [\hat{E}_{12}, \hat{n}_1 + \hat{n}_2] &= [\hat{E}_{12}, \hat{n}_1] + [\hat{E}_{12}, \hat{n}_2] \\ &= \hat{E}_{12} - \hat{E}_{12} = 0, \end{aligned}$$
 (15.22)

т. е. суммарное число частиц в модах и разностно-фазовые характеристики можно измерить точно одновременно, поскольку

$$[\hat{C}_{12}, \hat{n}_1 + \hat{n}_2] = [\hat{S}_{12}, \hat{n}_1 + \hat{n}_2] = 0.$$
 (15.23)

Однако для разностного числа фотонов

$$[\hat{E}_{12}, \hat{n}_1 - \hat{n}_2] = 2\hat{E}_{12}$$
 (15.24)

и

$$\begin{aligned} [\hat{C}_{12}, \hat{n}_1 - \hat{n}_2] &= i2\hat{S}_{12}, \\ [\hat{S}_{12}, \hat{n}_1 - \hat{n}_2] &= -i2\hat{C}_{12}, \end{aligned}$$
 (15.25)

откуда легко записать соотношения неопределенностей

$$\begin{aligned} \Delta C_{12} \Delta n_{1-2} &\geq |\langle \hat{S}_{12} \rangle|, \\ \Delta S_{12} \Delta n_{1-2} &\geq |\langle \hat{C}_{12} \rangle|, \end{aligned}$$
 (15.26)

где

$$\Delta n_{1-2} \stackrel{\Delta}{=} \Delta(n_1 - n_2).$$
 (15.27)

Для придания конкретности этим вычислениям вернемся к схеме интерферометра Маха—Цендера на рис. 12.6. Придадим величинам n_1 и n_2 смысл чисел фотонов, соответственно, в первом и втором плечах интерферометра, там, где стоят непоглощающие фазовые

задержки Φ_1 и Φ_2 . Разность же фотоотсчетов детекторов 1 и 2, квантовую эффективность которых для простоты положим единичной, обозначим как

$$\hat{n}'_{1-2} \stackrel{\Delta}{=} \hat{n}'_1 - \hat{n}'_2. \quad (15.28)$$

Пусть выходное зеркало интерферометра имеет 50%-ное пропускание. Тогда, по аналогии с формулами (12.26), (12.27), можно записать

$$\begin{aligned}\hat{a}'_1 &= \frac{\hat{a}_1 + \hat{a}_2}{\sqrt{2}}, \\ \hat{a}'_2 &= \frac{\hat{a}_1 - \hat{a}_2}{\sqrt{2}},\end{aligned} \quad (15.29)$$

откуда

$$\hat{n}'_{1-2} = \hat{a}_1^+ \hat{a}_2 + \hat{a}_1 \hat{a}_2^+. \quad (15.30)$$

Если на вход интерферометра подать однофотонное состояние $|1\rangle$, то этот единственный фотон «размажется» по двум его плечам:

$$|\psi\rangle = \alpha |1\rangle_1 |0\rangle_2 + \beta |0\rangle_1 |1\rangle_2 \equiv \alpha |10\rangle + \beta |01\rangle. \quad (15.31)$$

Это выражение аналогично (14.2), а α и β определяются амплитудными коэффициентами пропускания и отражения входного светоделителя и фазовыми задержками в плечах интерферометра. При этом должно выполняться условие нормировки (14.3). Нетрудно убедиться, например, производя усреднения, в том, что в однофотонном состоянии (15.31) оператор (15.30) совпадает с

$$2\hat{C}_{12} = \hat{n}'_{1-2}, \quad (15.32)$$

т. е. измеряя разностный фотоотсчет на выходе интерференционной схемы на рис. 12.6, мы фактически измеряем косинус разности фаз плечевых мод перед выходным светоделителем.

Легко учесть и фазовые задержки Φ_1 и Φ_2 , ведь их наличие сдвигает разность фаз на $\Phi_1 - \Phi_2$, так что измерение n'_{1-2} будет означать измерение косинуса разности фаз $\Phi_1 - \Phi_2$. Например, в случае $\Phi_1 - \Phi_2 = -\frac{\pi}{2}$, фотоотсчет n'_{1-2} будет измерением синуса разности фаз в плечах сразу после входного светоделителя перед фазовыми задержками.

Заметим, что состояние $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle + |01\rangle)$ является собственным состоянием оператора \hat{C}_{12} с собственным значением $+1/2$:

$$\begin{aligned}\hat{C}_{12} |\psi\rangle &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}_1 \hat{a}_2^+ + \hat{a}_1^+ \hat{a}_2) (|10\rangle + |01\rangle) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} (|10\rangle + |01\rangle) = \frac{1}{2} |\psi\rangle.\end{aligned}\quad (15.33)$$

Таким образом, косинус разности фаз может принимать лишь значение $+1/2$. Фотоны при этом будут попадать только в детектор 1 на рис. 12.6 и никогда — в детектор 2, поскольку собственное значение оператора \hat{n}_{1-2}' равно при этом $+1$, что удивительно, ведь в классической теории интерференционные минимумы и максимумы невозможны при косинусе разности фаз $1/2$. Это особенность одиночного фотонного состояния (15.31) при $\alpha = \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Что же будет при этом с соотношениями неопределенностей (15.26)? Поскольку $|\langle \hat{S}_{12} \rangle| = 0$, первое из них не вносит каких-либо ограничений на $\Delta n_{1-2} = \sqrt{\Delta(n_1 - n_2)^2}$ в плечах интерферометра. Легко посчитать, что

$$\langle n_{1-2} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle 10 | + \langle 01 |) (\hat{n}_1 - \hat{n}_2) (\langle 01 | + \langle 10 |) \frac{1}{\sqrt{2}} = 0, \quad (15.34)$$

$$\langle \Delta n_{1-2}^2 \rangle = \langle \hat{n}_1^2 - 2\hat{n}_1\hat{n}_2 + \hat{n}_2^2 \rangle - \langle \hat{n}_1 - \hat{n}_2 \rangle^2 = 1 = \Delta n_{1-2}, \quad (15.35)$$

т. е. дисперсия флуктуаций в данном случае совпадает со среднеквадратическим отклонением (обе равны единице). Значит, фотон «размазан» по плечам интерферометра с равной вероятностью, чего и следовало ожидать при $|\alpha|^2 = |\beta|^2 = \frac{1}{2}$.

Проанализируем второе соотношение неопределенностей (15.26). Поскольку $|\langle \hat{C}_{12} \rangle| = \frac{1}{2}$ и $\Delta n_{1-2} = 1$, имеем $\Delta S_{12} \geq \frac{1}{2}$. И действительно, расчет дает

$$\Delta S_{12} = \frac{1}{2}. \quad (15.36)$$

Таким образом, состояние (15.31) при $\alpha = \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ является минимально неопределенным, поскольку знак \geq в соотношении неопределенностей (15.26) для него можно заменить на $=$. Неопределенность синуса связана с тем, что точное значение косинуса $1/2$ оставляет произвол для фазы ($\pm\pi/3$), а следовательно, и для синуса $\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Итак, если в одномодовом фоковском состоянии фаза была полностью неопределенна, то в двухмодовом однофотонном состоянии за счет неопределенности Δn_{1-2} появляется некоторая определенность фазы.

Интересно было бы проанализировать амплитудно-фазовые неопределенности однофотонного поля (15.31) и при произвольных α и β . Посчитаем вначале средний косинус

$$\begin{aligned} \langle \hat{C}_{12} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\beta^* \langle 01 | + \alpha^* \langle 10 |) [(\hat{n}_1 + 1)^{-1/2} \hat{a}_1 \hat{a}_2^+ (\hat{n}_2 + 1)^{-1/2} + \\ &+ \hat{a}_1^+ (\hat{n}_1 + 1)^{-1/2} (\hat{n}_2 + 1)^{-1/2} \hat{a}_2] (\alpha | 10 \rangle + \beta | 01 \rangle) \frac{1}{\sqrt{2}} = \\ &= \frac{1}{2} (\alpha^* \beta + \alpha \beta^*) = \operatorname{Re}(\alpha^* \beta), \end{aligned} \quad (15.37)$$

и средний синус

$$\langle \hat{S}_{12} \rangle = \frac{1}{i_2} (\alpha \beta^* - \alpha^* \beta) = \operatorname{Im}(\alpha \beta^*). \quad (15.38)$$

Среднее разностное число фотонов равно

$$\begin{aligned} \langle \hat{n}_{1-2} \rangle &= (\beta^* \langle 01 | + \alpha^* \langle 10 |) (\hat{a}_1^+ \hat{a}_1 - \hat{a}_2^+ \hat{a}_2) (\alpha | 10 \rangle + \beta | 01 \rangle) \\ &= |\alpha|^2 - |\beta|^2. \end{aligned} \quad (15.39)$$

Посчитаем вторые моменты:

$$\begin{aligned} \langle \hat{C}_{12}^2 \rangle &= \frac{1}{4} (\beta^* \langle 01 | + \alpha^* \langle 10 |) (\hat{n}_1 + 1)^{-1/2} \times \\ &\times \hat{a}_1 \hat{a}_2^+ (\hat{n}_2 + 1)^{-1/2} \hat{a}_1^+ (\hat{n}_1 + 1)^{-1/2} (\hat{n}_2 + 1)^{-1/2} \hat{a}_2 + \hat{a}_1^+ (\hat{n}_1 + 1)^{-1/2} \times \\ &\times (\hat{n}_2 + 1)^{-1/2} \hat{a}_2 (\hat{n}_1 + 1)^{-1/2} \hat{a}_1 \hat{a}_2^+ (\hat{n}_2 + 1)^{-1/2} (\alpha | 10 \rangle + \beta | 01 \rangle) = \\ &= \frac{1}{4} (|\alpha|^2 + |\beta|^2) = \frac{1}{4}. \end{aligned} \quad (15.40)$$

Здесь учтено условие нормировки (14.3), а также не выписаны квадратичные слагаемые, дающие при усреднении ноль.

Аналогично

$$\langle \hat{S}_{12}^2 \rangle = \frac{1}{4} (|\alpha|^2 + |\beta|^2) = \frac{1}{4}. \quad (15.41)$$

В свою очередь,

$$\langle \hat{n}_{1-2}^2 \rangle = |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1. \quad (15.42)$$

Дисперсии флуктуаций равны

$$\Delta C_{12}^2 = \frac{1}{4} - \operatorname{Re}^2(\alpha\beta^*), \quad (15.43)$$

$$\Delta S_{12}^2 = \frac{1}{4} - \operatorname{Im}^2(\alpha\beta^*), \quad (15.44)$$

$$\begin{aligned} \Delta n_{1-2}^2 &= 1 - (|\alpha|^2 - |\beta|^2)^2 = \\ &= 1 - (1 - 2|\alpha|^2)^2 = 4|\alpha|^2(1 - |\alpha|^2) = 4|\alpha\beta|^2. \end{aligned} \quad (15.45)$$

Дисперсия разностного числа фотонов в модах максимальна при $|\alpha|^2 = |\beta|^2 = \frac{1}{2}$, т. е. при 50%-ном входном светоделителе. При этом имеется возможность абсолютно точного измерения косинуса или синуса разности фаз, соответственно, при $\operatorname{Re}^2(\alpha\beta^*) = \frac{1}{4}$, как в рассмотренном выше примере, и при $\operatorname{Im}^2(\alpha\beta^*) = \frac{1}{4}$.

Обратим внимание на то, что во всех этих вычислениях операторные сомножители $(\hat{n}_1 + 1)^{-1/2}$ и $(\hat{n}_2 + 1)^{-1/2}$ никак не влияли на результаты. Это подтверждает правильность (15.32) для однофотонных состояний (15.31).

Перейдем теперь к рассмотрению трехмодового поля. Оператору

$$\hat{E}_{123} = \hat{E}_1 \hat{E}_2 \hat{E}_3^+ = e^{-i(\Phi_1 + \Phi_2 - \Phi_3)} \quad (15.46)$$

вида (15.1) соответствует экспонента суперпозиции разности фаз, аналогичной (14.20) для схемы трехлучевой интерференции на рис. 14.1.

С помощью (15.9) найдем коммутаторы

$$[\hat{C}_{123}, \hat{n}_{1+2+3}] = i\hat{S}_{123}, \quad (15.47)$$

$$[\hat{S}_{123}, \hat{n}_{1+2+3}] = -i\hat{C}_{123}, \quad (15.48)$$

$$[\hat{C}_{123}, \hat{n}_{1+2-3}] = i3\hat{S}_{123}, \quad (15.49)$$

$$[\hat{S}_{123}, \hat{n}_{1+2-3}] = -i3\hat{C}_{123}, \quad (15.50)$$

где

$$\hat{n}_{1+2\pm 3} \stackrel{\Delta}{=} \hat{n}_1 + \hat{n}_2 \pm \hat{n}_3. \quad (15.51)$$

Прежде всего, бросается в глаза то, что по сравнению со случаем двух мод оператор суммарного числа фотонов \hat{n}_{1+2+3} не коммутирует с фазовыми операторами. Это означает, что в соответствии

с соотношениями неопределенностей

$$\Delta C_{123} \Delta n_{1+2+3} \geq |\langle \hat{S}_{123} \rangle|/2, \quad (15.52)$$

$$\Delta S_{123} \Delta n_{1+2+3} \geq |\langle \hat{C}_{123} \rangle|/2, \quad (15.53)$$

суммарное число фотонов может не иметь определенного значения. Действительно, в состоянии

$$|\psi\rangle = \alpha|001\rangle + \beta|110\rangle, \quad (15.54)$$

аналогичном состоянию (14.2) в интерференционной трехмодовой схеме на рис. 14.1,

$$\begin{aligned} \langle \hat{S}_{123} \rangle &= \frac{1}{i2} (\beta^* \langle 110 | + \alpha^* \langle 001 |) (\hat{n}_1 + 1)^{-1/2} \hat{a}_1 (\hat{n}_2 + 1)^{-1/2} \hat{a}_2 \hat{a}_3^+ (\hat{n}_3 + 1)^{-1/2} - \\ &\quad - \hat{a}_1^+ (\hat{n}_1 + 1)^{-1/2} \hat{a}_2^+ (\hat{n}_2 + 1)^{-1/2} (\hat{n}_3 + 1)^{-1/2} \hat{a}_3 (\alpha |001\rangle + \beta |110\rangle) = \\ &= \frac{1}{i2} (-\alpha^* \beta + \alpha \beta^*) = \text{Im}(\alpha^* \beta), \end{aligned} \quad (15.55)$$

откуда

$$\Delta C_{123} \Delta n_{1+2+3} \geq \frac{1}{2} |\text{Im}(\alpha \beta^*)|, \quad (15.56)$$

причем

$$|\text{Im}(\alpha \beta^*)| \leq \frac{1}{2} \quad (15.57)$$

в силу условия нормировки

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1. \quad (15.58)$$

Максимальная неопределенность, таким образом, будет при $|\alpha|^2 = |\beta|^2 = \frac{1}{2}$ и чисто мнимом или действительном произведении $\alpha \beta^*$, поскольку, с учетом (15.53),

$$\langle \hat{C}_{123} \rangle = \text{Re}(\alpha^* \beta). \quad (15.59)$$

Действительно,

$$\langle \hat{n}_{1+2+3} \rangle = |\alpha|^2 + 2|\beta|^2 = 1 + |\beta|^2, \quad (15.60)$$

а дисперсия числа фотонов

$$\Delta n_{1+2+3}^2 = |\alpha|^2 + 4|\beta|^2 - (1 + |\beta|^2)^2 = |\beta|^2(1 - |\beta|^2) = |\alpha \beta|^2, \quad (15.61)$$

откуда среднеквадратическое отклонение

$$\Delta n_{1+2+3} = |\alpha\beta| \leq \frac{1}{2}, \quad (15.62)$$

причем максимум достигается при $|\alpha|^2 = |\beta|^2 = \frac{1}{2}$.

Напомним, что эта неопределенность связана не с тем, что от реализации к реализации число фотонов разное (то один, то два), а с отсутствием определенного числа фотонов в поле априори, т. е. до момента измерения.

ГЛАВА 16

Теорема Белла

Вернемся к парам коррелированных частиц, рождающихся в процессе параметрического рассеяния. В нелинейных кристаллах возможны два типа взаимодействия: *I* тип — так называемое *ooe*-взаимодействие, когда сигнальный и холостой лучи обыкновенные, т. е. имеют одинаковую линейную *o*-поляризацию, и второй тип (*II*) — *eoe*-взаимодействие, когда сигнальный луч необыкновенный (*e*), а холостой — обыкновенный (*o*), т. е. фотонные пары имеют взаимно ортогональные линейные поляризации. В обоих случаях накачка необыкновенная (*e*). Обычно кристалл ориентируют так, чтобы его оптическая ось была перпендикулярна оси «необыкновенной» накачки, когда отсутствует поперечный снос и пучок накачки не меняет своего направления в кристалле.

Но для нас важнее то, что как в первом (*I*), так и во втором (*II*) типе взаимодействия плоскости поляризации фотонных пар строго коррелированы: в первом — одинаковы, а во втором — ортогональны. При втором (*II*) типе взаимодействия ориентация плоскости поляризации одного из фотонов пары абсолютно случайна. Если на его пути поставить призму Волластона (рис. 12.4), то он будет попадать в один или другой из ее выходных каналов с равной (50%-ной) вероятностью от реализации к реализации независимо от того или иного угла поворота призмы вокруг направления распространения фотона. Здесь полная аналогия с естественным светом. А что будет с фотоном, имеющим вполне определенную плоскость поляризации? Так происходит в случае *I* типа параметрического взаимодействия. Если плоскость поляризации составляет угол φ с одним из направлений разделяющихся взаимно ортогональных поляризаций призмы Волластона (рис. 16.1), то с вероятностью $\cos^2 \varphi$ он попадет в первый выходной канал, а с вероятностью $\sin^2 \varphi$ — во второй. Это следует из простых операторных соотношений:

$$\begin{aligned}\hat{a}_1 &= \hat{a} \cos \varphi, \\ \hat{a}_2 &= \hat{a} \sin \varphi,\end{aligned}\tag{16.1}$$

где \hat{a} — оператор уничтожения фотона плоскополяризованного света на входе призмы, а \hat{a}_1 и \hat{a}_2 — на выходах. В частности, если на входе

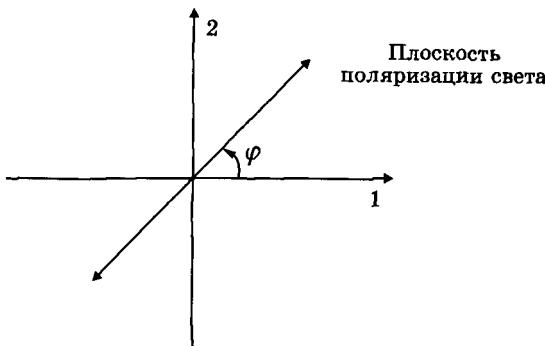


Рис. 16.1. Плоскополяризованный свет в призме Волластона разделяется на два канала с взаимно ортогональными направлениями поляризации 1 и 2 с вероятностями $\cos^2 \varphi$ и $\sin^2 \varphi$

однофотонное состояние $|1\rangle$, то вероятность попадания фотона в первый канал равна

$$\langle 1 | \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 | 1 \rangle = \langle 1 | \hat{a}^\dagger \hat{a} | 1 \rangle \cos^2 \varphi = \cos^2 \varphi. \quad (16.2)$$

Это квантовый аналог обычного закона Малюса, описывающего прохождение света через два скрещенных под углом φ поляризатора.

Вернемся к параметрическому рассеянию. Обозначим два взаимно ортогональных направления поляризации, которые возможны в нелинейном кристалле, как « x » и « y ». Пусть сигнальный фотон направляется к наблюдателю А, а холостой — к наблюдателю В (рис. 16.2). В случае I типа взаимодействия (*ooe*) их плоскости поляризации для одной фотонной пары одинаковы. Если последовательно поставить два одинаковых нелинейных кристалла, генерирующих фотоны с взаимно ортогональными плоскостями поляризации, то квантовое состояние фотонной пары описывается вектором

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|1\rangle_x^a |1\rangle_x^b |0\rangle_y^a |0\rangle_y^b + |0\rangle_x^a |0\rangle_x^b |1\rangle_y^a |1\rangle_y^b \right). \quad (16.3)$$

Структура этого вектора такова, что хотя направления поляризации одного из фотонов пары (« a » или « b ») равновероятны, между собой они строго коррелированы.

Это состояние не факторизуется:

$$|\psi\rangle \neq |\psi\rangle_a |\psi\rangle_b, \quad (16.4)$$

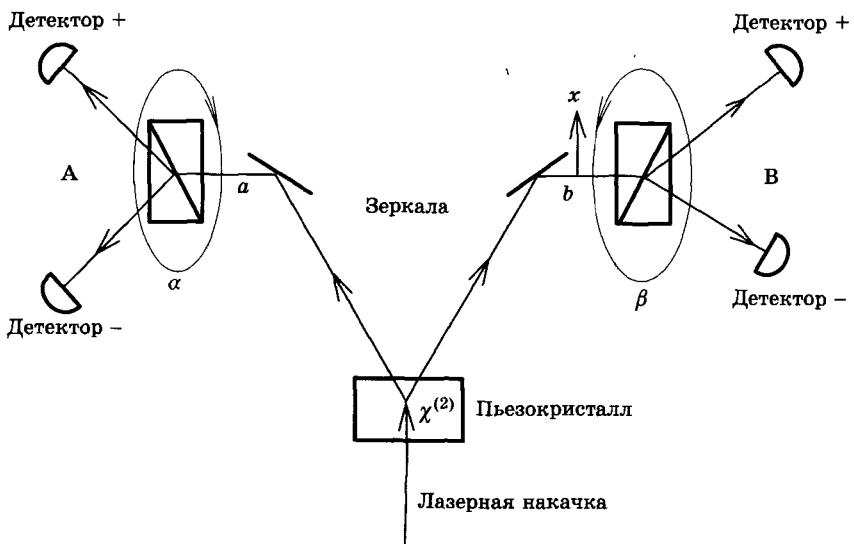


Рис. 16.2. Схема исследования коррелированных пар фотонов. Сигнальный (a) и холостой (b) фотоны имеют одинаковые плоскости поляризации. Они направляются, соответственно, к наблюдателям А и В, у каждого из которых есть призма Волластона и два детектора: «+» и «-». Угловая ориентация призм у наблюдателей определяется, соответственно, углами поворота α и β вокруг направления распространения фотонов

следовательно, оно является перепутанным: направления распространения особым образом «запутываются» с направлениями поляризации. При этом фотонная пара ведет себя удивительно. Казалось бы, если попадание одного фотона пары на детекторы «+» и «-» случайно и равновероятно у одного наблюдателя при произвольной угловой ориентации его призмы, то также случайно и независимо от результата первого наблюдателя поведение фотона будет и у второго. Тем не менее, при одинаковой ориентации этих призм (когда $\alpha = \beta$) наблюдается строгая корреляция их результатов: или у обоих «+», или у обоих «-» независимо от ориентации призм относительно кристаллографических осей нелинейного кристалла. Важна только взаимная ориентация призм, т. е. выполнение $\alpha = \beta$.

Действительно, действие призм Волластона, скажем, у наблюдателя А, описывается в представлении Гейзенберга следующими

операторными соотношениями:

$$\hat{a}_+ = t_a \hat{a}_x + r_a \hat{a}_y, \quad (16.5)$$

$$\hat{a}_- = -r_a \hat{a}_x + t_a \hat{a}_y, \quad (16.6)$$

где \hat{a}_+ и \hat{a}_- — операторы уничтожения фотона мод, направленных, соответственно, к детекторам «+» и «-»; операторы уничтожения \hat{a}_x и \hat{a}_y описывают поляризационные составляющие напряженности электрического поля, соответственно, на оси x и y ; а амплитудные коэффициенты t_a и r_a определяются углом поворота призмы относительно координатных осей x и y аналогично (16.1): $t_a = \cos \alpha$, $r_a = \sin \alpha$. Эти коэффициенты аналогичны амплитудным коэффициентам пропускания и отражения светоделителя, например, при $\alpha = \pi/4$ имеем (12.26), (12.27).

Оператор числа фотонов у наблюдателя А в канале детектора «+» равен

$$\hat{n}_+^a = \hat{a}_+^\dagger \hat{a}_+ = \Im_a \hat{n}_x^a + \Re_a \hat{n}_y^a + t_a r_a (\hat{a}_x^\dagger \hat{a}_y + \hat{a}_x \hat{a}_y^\dagger), \quad (16.7)$$

где введены коэффициенты по интенсивности $\Im_a = t_a^2$, $\Re_a = r_a^2$, а операторы чисел фотонов

$$\hat{n}_x^a = \hat{a}_x^\dagger \hat{a}_x, \quad n_y^a = \hat{a}_y^\dagger \hat{a}_y.$$

Аналогично для канала детектора «-»:

$$\hat{n}_-^a = \hat{a}_-^\dagger \hat{a}_- = \Re_a \hat{n}_x^a + \Im_a \hat{n}_y^a - t_a r_a (\hat{a}_x^\dagger \hat{a}_y + \hat{a}_x \hat{a}_y^\dagger). \quad (16.8)$$

Параметризуем результаты наблюдения так. Если фотон у наблюдателя А попадает в детектор «+», то $a = +1$, если в детектор «-», то $a = -1$. Оператор, описывающий такую наблюдаемую, равен

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \hat{n}_+^a - \hat{n}_-^a = (\Im_a - \Re_a) \hat{n}_x^a - \\ &\quad - (\Im_a - \Re_a) \hat{n}_y^a + 2t_a r_a (\hat{a}_x^\dagger \hat{a}_y + \hat{a}_x \hat{a}_y^\dagger) = \\ &= (\hat{n}_x^a - \hat{n}_y^a) \cos 2\alpha + (\hat{a}_x^\dagger \hat{a}_y + \hat{a}_x \hat{a}_y^\dagger) \sin 2\alpha. \end{aligned} \quad (16.9)$$

Здесь мы для простоты полагаем квантовую эффективность детекторов η равной единице.

Аналогичными соотношениями описываются измерения наблюдателя В. Нужно только всюду заменить a на b , \hat{a} на \hat{b} , α на β и \hat{A} на \hat{B} .

Будем фиксировать одновременные результаты измерений у обоих наблюдателей, т. е. неперекрывающиеся фотонные пары, которые для этого мы должны посыпать наблюдателям достаточно редко. Корреляция таких измерений определяется моментом

$$\langle \psi | \hat{A} \hat{B} | \psi \rangle = \cos 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\alpha \sin 2\beta = \cos [2(\alpha - \beta)]. \quad (16.10)$$

Здесь мы усреднили по состоянию (16.3).

Итак, при идентичных условиях регистрации фотонных пар наблюдателями А и В углы поворота призм одинаковы: $\alpha = \beta$, и наблюдается полная корреляция результатов: $\langle \psi | \hat{A} \hat{B} | \psi \rangle = 1$, т. е. либо у обоих наблюдателей одновременно срабатывают детекторы «+», либо детекторы «-», и всегда произведение $ab = +1$. Как это может быть, если каждый фотон в отдельности направляется случайным образом к детектору «+» или «-»? Ясно, что только в том случае, если фотонная пара представляет собой некое единое целое, хотя фотоны при этом могут разлететься на десятки километров. Поскольку нам не известны силы взаимодействия между разлетевшимися фотонами, которые бы синхронизировали их прохождение через поляризационные призмы, мы сталкиваемся с еще одной загадкой квантовой теории и проявлением квантовой нелокальности. Загадочно, собственно говоря, само перепутанное состояние (16.3). Если бы фотоны пары вели себя независимо, его можно было бы факторизовать, например,

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= |\psi\rangle^a |\psi\rangle^b = \\ &= \frac{1}{2} (|1\rangle_x^a |0\rangle_y^a + |0\rangle_x^a |1\rangle_y^a) \left(|1\rangle_x^b |0\rangle_y^b + |0\rangle_x^b |1\rangle_y^b \right). \end{aligned} \quad (16.11)$$

Вместо двух слагаемых (16.3) имеем четыре слагаемых при раскрытии скобок (16.11) и обычное независимое поведение разлетевшихся фотонов. Но параметрическое рассеяние дает именно перепутанное нефакторизующееся состояние (16.3).

Рассматриваемый удивительный эффект впервые заинтересовал еще А. Эйнштейна и впоследствии получил название *парадокса Эйнштейна–Подольского–Розена*, или кратко, *парадокса ЭПР* [30]. Долгое время он был объектом жаркой дискуссии Альберта Эйнштейна и Нильса Бора и многих других исследователей, в частности, Давида Бома [31], пока, наконец, Джон Белл не сформулировал своей знаменитой теоремы, дающей формальный критерий необычного поведения коррелированной пары квантовых частиц [32].

Фактически вопрос сводится к тому, можно ли свести квантовую теорию к одному из разделов классической статистической

физики, где случайность поведения объектов является результатом недостаточности сведений о них у экспериментаторов. Является ли принципиально неустранимая в квантовой теории случайность лишь проявлением неполноты этой теории, нуждающейся в дополнении ее неким множеством неизвестных наблюдателю скрытых параметров объектов? Или никакое дополнение не может эту случайность устраниить? Эти важные фундаментальные вопросы мы уже косвенно затрагивали ранее, в частности, при обсуждении интерференции третьего порядка (рис. 14.1). Скрытым параметром там могло быть число фотонов между нелинейными кристаллами – один или два. Но, как мы убедились, этого скрытого параметра существовать не может, иначе не было бы интерференционного эффекта. Таким образом, нам удалось «заглянуть» в недоступное наблюдателю пространство между двумя нелинейными кристаллами, где нет никаких измерительных приборов.

Аналогичная ситуация и с теоремой Белла, которая позволяет доказать невозможность существования скрытых параметров, несмотря на их недоступность наблюдателю, т. е. тоже «заглянуть» в невидимое. Джон Белл сделал это «на кончике пера» задолго до интерференционных экспериментов с фотонами и другими квантовыми частицами. Итак, вернемся к схеме на рис. 16.2. Исторически она появилась гораздо позже пионерской работы Джона Белла [32], но дидактически удобнее начинать рассмотрение именно с нее.

Будем проводить эксперимент в четыре стадии. На первой установим углы поворота призм у наблюдателей А и В, соответственно, равными α и β . На второй – изменим у наблюдателя А угол α на α' . На третьей – вернемся к углу α у наблюдателя А, но заменим угол β на β' у второго наблюдателя В. И в четвертой, наконец, у первого наблюдателя установим угол α' .

Из результатов измерений составим произведения одновременных фотоотсчетов, соответственно, ab , $a'b$, ab' и $a'b'$, которые равны, разумеется, ± 1 . Многократно повторяя эксперимент на каждой из стадий (чтобы получить представительную выборку) в результате усреднения найдем моменты

$$\begin{aligned} \langle AB \rangle &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (ab)_n, & \langle A'B \rangle &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (a'b)_n, \\ \langle AB' \rangle &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (ab')_n, & \langle A'B' \rangle &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (a'b')_n, \end{aligned} \quad (16.12)$$

где n — текущий номер реализации, общее количество которых в каждой из четырех серий эксперимента равно N .

Найдем вероятностную оценку величины

$$S = \frac{1}{2} (\langle AB \rangle + \langle A'B \rangle + \langle AB' \rangle - \langle A'B' \rangle), \quad (16.13)$$

называемой наблюдаемой Белла. Здесь и далее мы будем следовать работам [33], [34].

Предположим, что все четыре величины a , a' , b и b' определяются лишь свойствами источника фотонных пар в моменты их испускания, т. е. некой совокупностью параметров источника $\{\lambda\}$, которые могут быть неизвестны наблюдателю и поэтому называются *скрытыми*. В их число можно включить все, что так или иначе влияет на поляризационные свойства рождающихся фотонных пар.

Если бы все четыре величины можно было измерить одновременно, то можно было бы вычислить совместные четырехмерные вероятности

$$P_{AA'BB'}(a, a', b, b') = \frac{\sum_{n=1}^M \{a, a', b, b'\}_n}{N}, \quad (16.14)$$

где M — число реализаций, в которых зарегистрированы значения наблюдаемых $\{a, a', b, b'\}$ из общего числа испытаний N .

Поскольку результат измерения, согласно нашему предположению, однозначно определен в момент рождения фотонной пары свойствами ее источника, неважно, можно ли зафиксировать все четыре величины одновременно, или их надо измерять последовательно. Так или иначе, должны существовать совместные четырехмерные вероятности (16.14), поскольку потенциально все четыре измеряемые величины существуют одновременно уже в момент рождения фотонной пары, причем

$$P_{AA'BB'}(a, a', b, b') = \int_{\{\Lambda\}} P(\lambda) d\lambda, \quad (16.15)$$

где $\{\Lambda\}$ — совокупность скрытых параметров из множества $\{\lambda\}$, которые приводят к результату $\{a, a', b, b'\}$, а $P(\lambda)$ — вероятностное распределение скрытых параметров.

Поскольку каждая из четырех величин a, a', b и b' может принимать два значения: $+1$ и -1 , общее число комбинаций всевозможных исходов эксперимента будет $2^4 = 16$. Таким же будет,

разумеется, и общее число всевозможных совместных вероятностей $P_{AA'BB'}(a, a', b, b')$. Итак, функция $P_{AA'BB'}(a, a', b, b')$ определена на множестве из 16 возможных исходов одного «полного» испытания, т. е. параллельного или последовательного измерения всех четырех величин a, a', b и b' . Она задает *элементарные*, или *первичные* вероятности нашей вероятностной модели. Например, $P_{AA'BB'}(+1, +1, -1, +1)$ — вероятность наблюдения события $\{a = +1, a' = +1, b = -1, b' = +1\}$.

С помощью элементарных вероятностей по правилу сложения вероятностей несовместных событий можно найти вероятности всех других событий. Например, вероятность события $\{a = +1, b = +1\}$ определяется суммой четырех элементарных вероятностей:

$$P_{AB}(+, +) = \sum_{a', b'=\pm 1} \{+, a', +, b'\}. \quad (16.16)$$

Также и двумерные моменты, входящие в S (16.13), определяются через элементарные вероятности, например,

$$\langle AB \rangle = \sum_{a, b} ab P_{AB}(a, b) = \sum_1^{16} ab P_{AA'BB'}(a, a', b, b'). \quad (16.17)$$

Можно решить и обратную задачу — выразить элементарные вероятности $P_{AA'BB'}(a, a', b, b')$ через полный набор всевозможных моментов [34].

Выразим наблюдаемую Белла (16.13) через элементарные вероятности:

$$S = \sum_1^{16} s(a, a', b, b') P_{AA'BB'}(a, a', b, b'), \quad (16.18)$$

где

$$\begin{aligned} s(a, a', b, b') &\stackrel{\Delta}{=} \frac{1}{2} (ab + a'b + ab' - a'b') = \\ &= \frac{1}{2} [a(b + b') + a'(b - b')]. \end{aligned} \quad (16.19)$$

Здесь мы предполагаем эргодичность экспериментальной процедуры во всех четырех стадиях.

Четырехмерная функция $s(a, a', b, b')$ согласно (16.19) может принимать только два значения: ± 1 при $b = b'$, и ± 1 при $b = -b'$.

Поэтому

$$\begin{aligned} |S| &\leq \sum_1^{16} |s(a, a', b, b')| P_{AA'BB'}(a, a', b, b') = \\ &= \sum_1^{16} P_{AA'BB'}(a, a', b, b') = 1, \end{aligned} \quad (16.20)$$

поскольку любые вероятности, в том числе и элементарные, не могут быть отрицательными, а общая их сумма равна единице:

$$P_{AA'BB'}(a, a', b, b') \geq 0, \quad (16.21)$$

$$\sum_1^{16} P_{AA'BB'}(a, a', b, b') = 1. \quad (16.22)$$

Итак, не ограничивая себя какой-либо конкретной физической моделью, исходя лишь из предположения существования четырехмерных вероятностей, мы получим так называемое неравенство Белла в форме Клаузера—Хорна—Шимони—Хольта, сокращенно *КХШХ* [35]:

$$|\langle AB \rangle + \langle A'B \rangle + \langle AB' \rangle - \langle A'B' \rangle| \leq 2. \quad (16.23)$$

Посмотрим, не может ли оно нарушаться в экспериментальной схеме на рис. 16.2? Если в четырех сериях эксперимента установить значения углов поворота призм равными $\alpha = 0$, $\alpha' = \pi/4$, $\beta = \pi/8$, $\beta' = -\pi/8$, то, согласно (16.10),

$$\langle AB \rangle = \langle A'B \rangle = \langle AB' \rangle = -\langle A'B' \rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad (16.24)$$

и в левой части неравенства (16.23) имеем $2\sqrt{2}$.

Почему же наш элементарный вывод неравенства (16.23) теряет силу при квантовом описании? Вводя совместные вероятности $P_{AA'BB'}(a, a', b, b')$, мы допустили априорное существование всех четырех наблюдаемых a , a' , b и b' . Но в анализе интерференции третьего порядка (глава 14) мы убедились в том, что априорное существование наблюдаемой, имеющей определенное неизменное значение, невозможно, а уж тем более — одновременное априорное существование четырех наблюдаемых. Легко убедиться в некоммутативности операторов $\hat{A} = \hat{A}(\alpha)$ и $\hat{A}' \stackrel{\Delta}{=} \hat{A}(\alpha')$ согласно (16.9), а также

операторов $\hat{B} = \hat{B}(\beta)$ и $\hat{B}' \stackrel{\Delta}{=} \hat{B}(\beta')$ при $\alpha \neq \alpha'$ и $\beta \neq \beta'$, значит, на них распространяется действие принципа неопределенностей Гейзенberга, и они не могут быть одновременно точно измерены, или даже одновременно иметь априорные точные значения. Эта парадоксальная особенность квантовых измерений уже подробно обсуждалась и, в конечном счете, по-видимому, связана с принципом дополнительности Нильса Бора.

Кроме того, невозможность проведения одновременных измерений часто является характерной особенностью квантовых частиц, поскольку информация, переносимая, например, однофотонным световым полем, не может разветвляться («клонироваться») и направляться на два или несколько измерителей. Ведь один фотон не может быть поглощен двумя детекторами. В экспериментах с ферми-частицами, например, электрон-позитронными парами [5, 36], операторами \hat{A} и \hat{A}' описываются проекции спина на различные направления, которые измеряются при разных ориентациях магнитов. В результате значения a и a' , как и b и b' , нельзя измерить за одно испытание. Здесь опять же уместно вспомнить принцип дополнительности Нильса Бора.

Отметим также следующее. В нашем выводе неравенства Белла в форме КХШХ неявно присутствовало предположение о локальности: результат наблюдения $a(\alpha)$ мы считали независящим от состояния измерительной аппаратуры второго наблюдателя B , т. е. от угла β (или β'). Отказ от этого естественного предположения приводит к тому, что величина s становится функцией уже не четырех, а восьми переменных:

$$s(a, a', b, b') = \frac{1}{2} [a(\alpha, \beta)b(\alpha, \beta) + a(\alpha', \beta)b(\alpha', \beta) + a(\alpha, \beta')b(\alpha, \beta') - a(\alpha', \beta')b(\alpha', \beta')], \quad (16.25)$$

и кроме значений ± 1 может быть равной нулю или ± 2 , а при усреднении должны фигурировать другие — восьмимерные — элементарные вероятности, определяющие статистику всех восьми переменных. Ясно, что неравенство КХШХ при этом может «нарушаться», ведь все четыре слагаемые в (16.25) могут быть статистически независимы. При этом ограничение $|S| \leq 1$ не возникает, и, при отсутствии дополнительных условий, наблюдаемая Белла S оказывается ограниченной лишь естественными пределами: от -2 до $+2$.

Поскольку нам не известны силы, которые могли бы повлиять на результат у наблюдателя A в зависимости от состояния измеритель-

ной аппаратуры наблюдателя В (ведь А и В не сообщаются между собой), логичнее предположить, что мы здесь опять сталкиваемся с проявлением квантовой нелокальности, когда пара разлетевшихся фотонов ведет себя не как две независимые частицы, а как некое единое целое. Для него даже нашли философское понятие — *холон*, т. е. некий элементарный объект, разделение которого на более мелкие составляющие невозможно (без нарушения его основных свойств) [37, 38, 39].

Итак, нарушение неравенства Белла может означать как отсутствие априорных значений наблюдаемых величин до момента их измерения, так и проявление квантовой нелокальности. Но поскольку само по себе отсутствие априорных значений не может объяснить корреляции одновременно измеряемых наблюдаемых (ведь как может быть корреляция того, чего нет?), здесь, по-видимому, проявляются сразу оба эти фактора.

Какие же эксперименты проводились в этом направлении? Впервые нарушение неравенства Белла было экспериментально зафиксировано в 1981 году [40, 41] в схеме, аналогичной изображенной на рис. 16.2, правда источником фотонных пар был не параметрический рассеиватель. Однако результаты этих экспериментов не удовлетворили исследователей. Дело в том, что в доказательстве неравенства КХШХ предполагалась дихотомность наблюдаемых, т. е. величины a, a', b и b' могли иметь только два возможных значения: +1 и -1. Квантовая эффективность детекторов и всего приемного тракта при этом должна быть идеальной: $\eta = 1$, т. е. полное отсутствие потерь, иначе некоторые фотонны мы пропустим, и вместо двух одновременных фотоотсчетов получим одиночный, или вообще пропустим фотонную пару.

В реальном эксперименте полностью избежать потерь, конечно, нельзя. Вот и в упомянутых первых экспериментах [40, 41] квантовая эффективность детекторов не превышала 20%. Значит, вместо дихотомных наблюдаемых фактически присутствуют трихотомные, принимающие три возможных значения: +1, -1 и 0. Ноль соответствует пропуску фотона детектором. Приведенное нами доказательство неравенства КХШХ (16.23) теряет силу, хотя бы потому, что нам не известно точное число испущенных фотонных пар N и невозможно корректно произвести усреднения. Но самое главное в том, что вместо $2^4 = 16$ элементарных вероятностей в трихотомном варианте их оказывается $3^4 = 81$. Их комбинацию можно подобрать так, что неравенство (16.23) будет нарушаться (см., например, [42] и цитируемую там литературу).

Как же выйти из этого затруднения? Очевидный путь повышения квантовой эффективности детекторов и всего приемного тракта имеет свои естественные ограничения. Правда существует еще возможность проведения экспериментов не с фотонами, а с тяжелыми атомами, детектировать которые значительно легче, что и было реализовано в эксперименте [43].

Второй путь преодоления затруднения с фактической трихотомностью наблюдаемых состоит в изобретении таких статистических неравенств, которые были бы справедливы как для дихотомных, так и для трихотомных измеряемых величин. Этому посвящена значительная часть упомянутой выше работы [42], где рассмотрены варианты не только двух, но и большего количества наблюдателей. Здесь же мы остановимся на одном из несложных неравенств для двух наблюдателей, которое носит название *Клаузера—Хорна* (сокращенно КХ) по именам его первооткрывателей. Приведенный далее вывод следует приложению 3.2 диссертации [44], который с небольшим изменением приведен в статье [45], в свою очередь базировавшейся на более ранних работах [46, 47].

Пусть значения наблюдаемых измеряемых величин a , a' , b , b' принадлежат некоему числовому множеству \mathbb{N} , например, в случае трихотомных наблюдаемых элементами множества \mathbb{N} являются три числа: $+1$, 0 , -1 . Тильдой будем помечать дополнительные подмножества, например, объединение $a \cup \tilde{a} = \mathbb{N}$, т. е. если $a = +1$, то \tilde{a} может принимать значения 0 и -1 .

Предполагая существование элементарных четырехмерных совместных вероятностей $P_{AA'BB'}(a, a', b, b')$, воспользуемся так называемым условием соответствия, которое позволяет выразить вероятности низших размерностей через элементарные, аналогично (16.16):

$$P_{ABB'}(a, b, b') = P_{AA'BB'}(a, a', b, b') + P_{AA'BB'}(a, \tilde{a}', b, b'), \quad (16.26)$$

откуда имеем

$$\begin{aligned} P_{ABB'}(a, b, b') &\leq P_{A'B'}(a', b') + P_{A'B}(\tilde{a}', b) = \\ &= P_{A'B'}(a', b') + P_B(b) - P_{A'B}(a', b). \end{aligned} \quad (16.27)$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} 0 &\leq P_{ABB'}(a, \tilde{b}, \tilde{b}') = P_{AB}(a, \tilde{b}) - P_{ABB'}(a, \tilde{b}, b') = \\ &= P_A(a) - P_{AB}(a, b) - P_{AB'}(a, b') + P_{ABB'}(a, b, b'), \end{aligned} \quad (16.28)$$

откуда

$$-P_{ABB'}(a, b, b') \leq P_A(a) - P_{AB}(a, b) - P_{AB'}(a, b'). \quad (16.29)$$

Сложим последнее неравенство (16.29) с (16.27). Получим неравенство КХ:

$$\begin{aligned} P_{AB}(a, b) + P_{A'B'}(a', b) + P_{AB'}(a, b') - \\ - P_{A'B'}(a', b') \leq P_A(a) + P_B(b). \end{aligned} \quad (16.30)$$

Как его проверить экспериментально? Ведь в него входят не моменты, как в неравенство КХШХ (16.23), а вероятности. Конечно, моменты можно выразить через вероятности, но существует путь попроще [42, 44]. Будем учитывать в экспериментальной схеме на рис. 16.2 лишь только срабатывания детекторов «+», тогда

$$\begin{aligned} P_{AB}(+, +) + P_{A'B'}(+, +) + P_{AB'}(+, +) - \\ - P_{A'B'}(+, +) \leq P_A(+) + P_B(+). \end{aligned} \quad (16.31)$$

Входящие сюда вероятности представляют собой отношения количества описываемых ими событий к общему числу фотонных пар N , например,

$$P_{AB}(+, +) = \frac{\sum\{a = +1, b = +1\}}{N}, \quad (16.32)$$

или

$$P_A(+) = \frac{\sum(a = +1)}{N}, \quad (16.33)$$

т. е. в знаменателе выражений для всех вероятностей, входящих в неравенство (16.31), одно и то же N , которое можно сократить. При этом все четыре стадии эксперимента нужно производить в течение одного и того же промежутка времени, либо оперировать с так называемыми *скоростями фототочетствов*, т. е. количествами событий за единицу времени, что обычно и используется на практике.

К сожалению, как показывают расчеты [42, 44], нарушение неравенства КХ типа (16.31) возможно лишь в случае, когда суммарные потери в каналах наблюдателей не превышают 33%, что довольно трудно осуществить на практике, особенно в части наличия высокоеффективных малошумящих фотодетекторов.

Итак, хотя принципиальные возможности опровержения локальной теории скрытых параметров существуют, они сопряжены со значительными аппаратурными трудностями. Но нельзя ли попытаться обойтись существующими экспериментальными результатами? Хотя идеально строгого опровержения при этом скорее всего не будет, но определенная доля уверенности может быть достигнута.

Далее мы вновь проанализируем первые эксперименты [40, 41], но с учетом потерь, следя работам [48, 49].

Квантовые расчеты показывают [42, 44], что, если квантовая эффективность детекторов η_a у наблюдателя А (см. рис. 16.2) и η_b — у В с учетом всех потерь начиная от источника фотонных пар, не равна единице, то моменты $\langle AB \rangle$, $\langle A'B \rangle$, $\langle AB' \rangle$ и $\langle A'B' \rangle$ можно выразить через моменты системы без потерь, например,

$$\langle AB \rangle_{\eta<1} = \eta_a \eta_b \langle AB \rangle_{\eta=1}. \quad (16.34)$$

Здесь мы предполагаем, что квантовая эффективность оптических трактов детекторов «+» и «-» у каждого из наблюдателей одинакова, т. е.

$$\begin{cases} \eta_a^{(+)} &= \eta_a^{(-)}, \\ \eta_b^{(+)} &= \eta_b^{(-)}. \end{cases} \quad (16.35)$$

На практике это обычно реализуется так. Вместо двух детекторов у каждого из наблюдателей можно использовать по одному, например, в канале «+» и измерить скорость одновременных фотоотсчетов. Затем повернуть поляризационную призму у наблюдателя В на $\pi/2$ и вновь измерить скорость счета. На сей раз она будет соответствовать скорости одновременных фотоотсчетов $\{a = +1, b = -1\}$, т. е. у наблюдателя В произошло переключение канала на «-», и т. д. Таким образом, каждая из четырех стадий эксперимента (измерение моментов $\langle AB \rangle$, $\langle A'B \rangle$, $\langle AB' \rangle$ и $\langle A'B' \rangle$) разбивается еще на четыре серии: измерение скоростей парных фотоотсчетов $R(++)$, $R(+-)$, $R(-+)$, $R(--)$. Как теперь найти моменты? Выражение (16.34) позволяет выразить моменты системы с идеальными оптическими трактами без потерь через измеренные моменты реальной системы, например,

$$\begin{aligned} \langle AB \rangle_{\eta=1} &= \frac{\langle AB \rangle_{\eta<1}}{\eta_a \eta_b} = \\ &= \frac{R_{AB}(++) - R_{AB}(-+) - R_{AB}(+-) + R_{AB}(--)}{R_{AB}(++) + R_{AB}(-+) + R_{AB}(+-) + R_{AB}(--)}. \end{aligned} \quad (16.36)$$

Здесь мы использовали следующие очевидные соотношения:

$$\langle AB \rangle_{\eta<1} = \frac{R_{AB}(++) - R_{AB}(-+) - R_{AB}(+-) + R_{AB}(--)}{R}, \quad (16.37)$$

где R — скорость рождения фотонных пар. Далее, если брать одновременные фотоотсчеты без учета в каком из каналов «+» или «-» произведено детектирование, то, аналогично (16.34),

$$\langle |AB| \rangle_{\eta<1} = \eta_a \eta_b \langle |AB| \rangle_{\eta=1}, \quad (16.38)$$

но

$$\langle |AB| \rangle_{\eta < 1} = \frac{R_{AB}(++) + R_{AB}(-+) + R_{AB}(+-) + R_{AB}(--)}{R}, \quad (16.39)$$

а

$$\langle |AB| \rangle_{\eta=1} = 1, \quad (16.40)$$

так как рождение фотонной пары исчерпывает все возможные исходы эксперимента. Из (16.37)–(16.40) следует (16.36).

Соотношения, аналогичные (16.36), можно записать и для трех остальных моментов, заменяя нештрихованные A , B штрихованными.

Что означает статистическая обработка результатов эксперимента по формуле (16.36)? Прежде всего то, что в расчет принимаются только парные, т. е. одновременные фотоотсчеты у наблюдателей А и В. Одиночные фотоотсчеты, обусловленные потерями одного из фотонов пары, в расчет не принимаются. Реально это осуществляется с помощью электронной схемы совпадений, которая вычисляет произведения одновременных результатов наблюдений типа ab , равные нулю в случае нулевого одного из сомножителей.

Итак, если верны формулы (16.34), (16.38), из которых следует (16.36), то нарушение неравенства Белла типа КХШХ (16.23) в экспериментах [40, 41] и многочисленных последующих экспериментах (см., напр., список литературы в [48, 49]) можно считать достаточным основанием для опровержения локальной теории скрытых параметров и признания квантовой теории самостоятельного статуса дисциплины, не сводимой к классической статистической физике.

Но какие основания не доверять соотношениям (16.34) и (16.38)? Строго говоря, можно предположить некую весьма экзотическую возможность того, что квантовые эффективности детекторов не являются постоянными константами для данного конкретного приемного устройства, а зависят от скрытых параметров $\{\lambda\}$, т. е. от заранее предопределенного исхода регистрации фотонной пары. Действительно, если предположить, что приемные тракты наблюдателей более чувствительны к фотонным парам, которые «работают» на нарушение неравенства Белла, то, естественно, оно будет нарушено. Но, допустив такую экзотическую возможность, мы оказываемся перед еще более таинственной загадкой: каков механизм, обеспечивающий это странное «взаимное соглашение» фотонов с детекторами? Ведь если, согласно основному предположению локальной теории скрытых параметров исход каждой реализации заложен совокупностью скрытых параметров в момент рождения

фотонной пары, каждый фотон должен нести с собой практически бесконечную инструкцию о том, как вести себя с различными видами приемных устройств. Действительно, в локальной теории фотон «не знает» о том, как конкретно его будут детектировать, а конкретных конструкций приемных трактов — неограниченное множество. И вот фотон должен заранее предусмотреть эти всевозможные конструкции, чтобы вместе с одной из них проявить такую квантовую эффективность детектирования, которая после статистической обработки достаточно представительной выборки реализаций давала бы нарушение неравенства Белла. Конечно, все это выглядит достаточно вычурно и нереально.

Существуют и другие соображения, подтверждающие справедливость соотношений (16.34) и (16.38). В эксперименте по схеме на рис. 16.2 в приемных каналах можно установить устройства, вносящие контролируемые и известные нам потери, например, два скрещенных поляризатора, изменяя угол поворота между которыми, известным образом меняют потери. Измеряя моменты, например, $\langle AB \rangle$ или $\langle |AB| \rangle$ при разных потерях, т. е. η_a и η_b , легко проверить правильность формул (16.34) и (16.38), правда в ограниченном интервале изменения η_a и η_b , поскольку перекрыть весь диапазон возможных значений квантовой эффективности вплоть до единицы, конечно, не удастся.

Кроме того, формула (16.38) лежит в основе так называемого метода *безэталонной калибровки фотоприемников*, предложенного Д. Н. Клышко [50, 51]. Этот метод широко используется на практике уже многие годы, прекрасно себя зарекомендовал, никогда не давал «сбоев», которые подали бы основания усомниться в (16.38). В курсе квантовых измерений он интересен не только в связи с теоремой Белла, но и сам по себе, будучи очень красивым и оригинальным.

Как прокалибровать фотодетектор, т. е. измерить его квантовую эффективность к излучению определенной длины волны? Обычная стандартная методика состоит в следующем. Имея некий хорошо проверенный эталонный детектор, определяется его реакция на источник света. В режиме счета фотонов это будет число фотоотсчетов за определенный промежуток времени, или скорость фотоотсчетов R_e . Ясно, что скорость испускания фотонов при этом была равной

$$R = \frac{R_e}{\eta_e}, \quad (16.41)$$

где η_e — квантовая эффективность эталона.

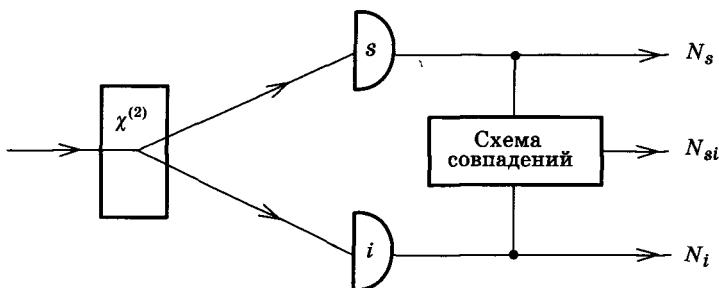


Рис. 16.3. Схема безэталонной калибровки детекторов. Фотонные пары неколлинеарного параметрического рассеяния направляются на детекторы сигнального (s) и холостого (i) каналов. Регистрируются количества их фотоотсчетов N_s и N_i , а также число одновременных фотоотсчетов N_{si} .

Квантовая эффективность детекторов вычисляется по формуле (16.46)

После измерения скорости счета испытуемого детектора R_d при освещении его тем же источником света, очевидно, его квантовая эффективность равна

$$\eta_d = \frac{R_d}{R} = \frac{R_d}{R_e} \eta_e. \quad (16.42)$$

Но где взять хорошо известный эталон, квантовая эффективность которого настолько стабильна, что практически не изменяется со временем и изменением внешних условий? Ведь погрешность нашего знания η_e , согласно (16.42), прямо переносится в погрешность измерения η_d .

Итак, желательно обойтись без эталона. Вспомним, что нам уже известен источник однофотонного света (см. рис. 14.2). Используя его многократно с испытуемым детектором, можно измерить вероятность регистрации им фотона, т. е. η_d . Но можно сделать еще проще. Обратимся к рис. 16.3. Свет неколлинеарного параметрического рассеивателя направляется на два детектора, установленные в сигнальном (s) и холостом (i) каналах. Пусть за время проведения измерений рождено N фотонных пар, тогда сигнальным фотодетектором будет произведено

$$N_s = \eta_s N \quad (16.43)$$

фотоотсчетов, холостым

$$N_i = \eta_i N \quad (16.44)$$

фотоотсчетов, а одновременных фотоотсчетов будет

$$N_{si} = \eta_s \eta_i N \quad (16.45)$$

согласно формуле (16.38).

Систему трех линейных уравнений легко разрешить относительно η_s и η_i :

$$\eta_s = \frac{N_{si}}{N_i}, \quad \eta_i = \frac{N_{si}}{N_s}. \quad (16.46)$$

Вот и все. И никаких дорогостоящих эталонных детекторов!

ГЛАВА 17

Квантовые невозмущающие измерения

Вернемся еще раз к первоосновам и, вместе с тем, подытожим и выделим основные моменты предыдущего изложения. Введем также некоторые формальные определения, в основном следуя [52], с. 16–17, 48.

Всякое измерение предполагает взаимодействие исследуемой системы с другой физической системой — измерительным прибором. Изменение показаний прибора означает изменение его состояния, вызванное взаимодействием с исследуемой системой. Меняется и состояние самой системы. Например, при измерении координаты меняется и сопряженный координате импульс, значит, если после измерения координаты в ансамбле систем будет произведено измерение импульса, распределение результатов измерения будет отличаться от соответствующего распределения в исходном состоянии, т. е. будет соответствовать другому состоянию системы. Итак, процесс измерения можно рассматривать как процесс приготовления нового состояния системы, которое описывается преобразованиями, приведенными в табл. 6.1. Новое состояние зависит от начального состояния системы и от состояния прибора во время измерения. Каждый элемент статистического ансамбля подвергается случайному воздействию со стороны измерительного прибора во время измерения. Поэтому, если не производить селекции (сортировки) систем по результатам измерения, то в образующемся после взаимодействия с прибором ансамбле систем к неопределеностям значений наблюдаемых в начальном состоянии добавляются неопределенности возмущения. После измерения ансамбль находится в смешанном состоянии. Однако эту смесь можно разделить на подансамбли по результатам измерения — это отличает взаимодействие системы с прибором от взаимодействия с другими объектами.

Квантовые измерения могут быть двух родов.

В измерениях первого рода сохраняется закон эволюции системы, например, свободный электрон остается свободным. Взаимодействие с прибором конечно по продолжительности.

В измерениях второго рода исследуемая система оказывается связанный с другими объектами (например, электрон оказывается связанным) или вообще недоступной измерению (например, поглощенный детектором фотон).

Первое звено измерителя называется квантовой считывающей системой или *квантовым датчиком* или *квантовым преобразователем*. Информация о системе выделяется из изменения его состояния. Значение наблюданной определяется косвенно.

Измерения первого рода подразделяются на *возмущающие* и *невозмущающие*. В невозмущающих измерениях независимо от начального состояния системы распределение измеряемой величины в смешанном состоянии, образующемся после взаимодействия системы с прибором, будет таким же, как и при свободной эволюции системы, т. е. воздействие измерительного прибора на систему не влияет на результаты измерения данной наблюдаемой. При этом непосредственно возмущаются наблюдаемые, не коммутирующие с измеряемой наблюдаемой. Например, при невозмущающем измерении координаты случайное воздействие оказывается на импульс системы. Лишь с течением времени возмущение импульса переходит в возмущение координаты, т. е. возмущение импульса передается на возмущение координаты косвенно.

В каждой системе есть такие наблюдаемые, эволюция которых не зависит от не коммутирующих с ними наблюдаемых. Например, импульс свободной частицы не зависит от координаты. Число квантов энергии гармонического осциллятора не зависит от синуса или косинуса фазы. Не зависят друг от друга и квадратурные компоненты осциллятора. Измерение этих наблюдаемых не приводит к их косвенному возмущению. Они называются *невозмущаемыми*. Их операторы в представлении Гейзенберга $\hat{A}(t)$ коммутируют сами с собой в разные моменты времени:

$$[\hat{A}(t), \hat{A}(t')] = 0. \quad (17.1)$$

Здесь $\hat{A}(t)$ – оператор системы, изолированной от измерителя. Невозмущаемыми являются все интегралы движения, поскольку, согласно (11.62), они не эволюционируют. Но не только интегралы движения удовлетворяют (17.1). Невозмущаемыми могут быть также наблюдаемые, зависящие от времени, если производная $d\hat{A}(t)/dt$ не зависит от не коммутирующих с $\hat{A}(t)$ операторов:

$$\frac{d\hat{A}}{dt} = F(\hat{A}, \hat{A}_j), \quad (17.2)$$

где \hat{A}_j – все коммутирующие с \hat{A} операторы, а F – произвольная их функция.

Перейдем теперь к конкретным примерам невозмущающих измерений.

17.1. Самовоздействие в прозрачных средах с кубичной нелинейностью

Оптические свойства прозрачных сред с кубичной нелинейностью, например, кварца, зависят от интенсивности света в них (см., напр., [53]). В результате происходит так называемое *четырехфотонное параметрическое взаимодействие*, когда два фотона накачки преобразуются в сигнальный фотон и холостой фотон (в отличие от трехфотонного параметрического рассеяния в средах с квадратичной нелинейностью, в котором участвует лишь один фотон накачки). Если четырехфотонный процесс полностью вырожден, т. е. все четыре фотона одинаковы и ни одного из них невозможно выделить по какому либо признаку или свойству, то единственным следствием такого нелинейного процесса может быть лишь нелинейное изменение фазы излучения, поскольку нелинейного преобразования частоты излучения быть не может в силу полного вырождения, также как и изменения интенсивности, поскольку среда предполагается полностью прозрачной.

Действительно, в кварце наблюдается изменение его показателя преломления, пропорциональное интенсивности света, которое и приводит к нелинейному набегу фазы волны и такому интересному эффекту, как *самофокусировка*. Если осветить кварц плоской волной с гауссовым распределением интенсивности (рис. 17.1), то максимальное нелинейное увеличение показателя преломления будет в центре пучка (там, где максимальна интенсивность света). В результате центральная часть пучка будет запаздывать по отношению к периферии, т. е. фронт волны приобретает кривизну как после фокусирующей линзы. Продолжая фокусироваться, излучение «схлопывается» в небольшой области пространства, после чего становится расходящимся. В достаточно длинной среде эта расходимость постепенно уменьшается и весь описанный процесс повторяется вновь.

В однородном кварце самофокусировка неустойчива, т. е. имеет случайный характер распределения интенсивности излучения в пространстве, особенно в точках «схлопывания». Иное дело — в кварцевых волокнах. Они вытягиваются таким образом, что показатель преломления от центра к краю волокна уменьшается. В результате вблизи краев волокна происходит полное внутреннее отражение и

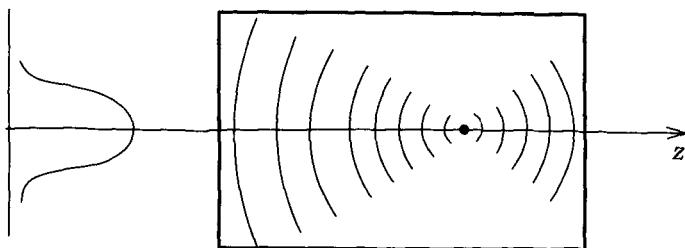


Рис. 17.1. Эффект самофокусировки в кварце

устанавливается устойчивый режим распространения света. Если бы потерять в волокне вообще не было, то излучение могло бы распространяться в волокне бесконечно долго с неизменным распределением интенсивности в пространстве. Устойчивое поперечное распределение интенсивности можно рассматривать как моду излучения, а сам четырехфотонный процесс описывать одномодовым гамильтонианом [54]

$$\hat{H} = \frac{\hbar}{2} \chi^{(3)} \hat{a}^+ \hat{a}^+ \hat{a} \hat{a}, \quad (17.3)$$

где $\chi^{(3)}$ — коэффициент кубичной нелинейности, пронормированный по числу фотонов. Нелинейный отклик полагаем мгновенным.

Соответствующий оператор эволюции квантового состояния в представлении Шрёдингера, согласно (11.54), равен

$$\hat{U} = \hat{I} \exp \left(-i \frac{\bar{\chi}}{2} \hat{a}^+ \hat{a}^+ \hat{a} \hat{a} \right) = \hat{I} \exp \left(-i \frac{\bar{\chi}}{2} \hat{n} (\hat{n} - 1) \right), \quad (17.4)$$

где $\bar{\chi} = \chi^{(3)} t$, а время эволюции t связано с длиной волокна $l = vt$, v — скорость распространения моды в волокне.

В представлении Гейзенberга оператор уничтожения фотона моды поля подчиняется уравнению (11.63) $i\hbar \frac{d\hat{a}}{dt} = [\hat{a}, \hat{H}]$. Вычислим коммутатор

$$\begin{aligned} [\hat{a}, \hat{a}^+ \hat{a}^+ \hat{a} \hat{a}] &= \hat{a} \hat{a}^+ \hat{a}^+ \hat{a} \hat{a} - \hat{a}^+ \hat{a}^+ \hat{a} \hat{a} \hat{a} = (\hat{a}^+ \hat{a} + \hat{I}) \hat{a}^+ \hat{a} \hat{a} - \hat{a}^+ \hat{a}^+ \hat{a} \hat{a} \hat{a} = \\ &= \hat{a}^+ (\hat{a}^+ \hat{a} + \hat{I}) \hat{a}^2 + \hat{a}^+ \hat{a}^2 - \hat{a}^+ 2\hat{a}^3 = 2\hat{a}^+ \hat{a}^2, \end{aligned} \quad (17.5)$$

значит, согласно (11.63),

$$i \frac{d\hat{a}}{dt} = \chi^{(3)} \hat{a}^+ \hat{a}^2, \quad (17.6)$$

откуда [54, 55, 56]:

$$\hat{a}(t) = e^{-i\bar{\chi}\hat{a}^+(0)\hat{a}(0)}\hat{a}(0), \quad (17.7)$$

в чем легко убедиться, вычислив из (17.7) производную

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{a}}{dt} &= -i\chi^{(3)}\hat{a}^+(0)\hat{a}(0)e^{-i\bar{\chi}\hat{a}^+(0)\hat{a}(0)}\hat{a}(0) = \\ &= -i\chi^{(3)}e^{-i\bar{\chi}\hat{a}^+(0)\hat{a}(0)}\hat{a}^+(0)\hat{a}^2(0). \end{aligned} \quad (17.8)$$

Подстановка (17.8) и (17.7) в (17.6) дает тождество:

$$\begin{aligned} \chi^{(3)}e^{-i\bar{\chi}\hat{a}^+(0)\hat{a}(0)}\hat{a}^+(0)\hat{a}^2(0) &= \\ &= \chi^{(3)}\hat{a}^+(0)e^{i\bar{\chi}\hat{a}^+(0)\hat{a}(0)}e^{-i\bar{\chi}\hat{a}^+(0)\hat{a}(0)}\hat{a}(0)e^{-i\bar{\chi}\hat{a}^+(0)\hat{a}(0)}\hat{a}(0). \end{aligned}$$

Итоговое соотношение (17.7) имеет ясный физический смысл: нелинейный набег фазы пропорционален интенсивности моды, т. е. числу фотонов $\hat{n}(0) = \hat{a}^+(0)\hat{a}(0)$. Этот эффект называется *нелинейной фазовой самомодуляцией* или сокращенно ФСМ.

Выражение (17.7) можно обобщить и на случай нелинейности произвольного порядка [57, 58]:

$$\begin{aligned} \hat{a}(t) &= \exp \left\{ -it \left[\chi^{(3)}\hat{a}^+(0)\hat{a}(0) + \chi^{(5)}\hat{a}^+(0)\hat{a}^+(0)\hat{a}(0)\hat{a}(0) + \dots \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \chi^{(m)}\hat{a}^+(0)^{\frac{(m-1)}{2}}\hat{a}(0)^{\frac{(m-1)}{2}} + \dots \right] \right\} \hat{a}(0). \end{aligned} \quad (17.9)$$

Обратим внимание на следующее важное свойство: фотонная статистика при ФСМ остается неизменной, поскольку

$$\hat{n}(t) = \hat{a}^+(t)\hat{a}(t) = \hat{a}^+(0)\hat{a}(0) = \hat{n}(0), \quad (17.10)$$

т. е. \hat{n} — инвариант. Однако квадратуры, разумеется, с течением времени изменяются, хотя бы в силу нелинейного фазового набега. При этом возникает интересный эффект. Пусть на вход волокна подается когерентная мода $|z\rangle$ с комплексной амплитудой z и поперечным профилем распределения амплитуды, соответствующим стабильному режиму распространения моды в кварцевом волокне, либо можно

считать, что плоскопараллельный слой кварца освещается плоской когерентной модой. Оператор квадратурной компоненты равен

$$\hat{q}(t) = \frac{\hat{a}^+(0)e^{i\bar{\chi}\hat{a}^+(0)\hat{a}(0)} + e^{-i\bar{\chi}\hat{a}^+(0)\hat{a}(0)}\hat{a}(0)}{\sqrt{2}}, \quad (17.11)$$

откуда легко вычислить среднее значение

$$\begin{aligned} \sqrt{2}\langle\hat{q}(t)\rangle &= \langle z|\hat{a}^+(0)e^{i\bar{\chi}\hat{a}^+(0)\hat{a}(0)} + e^{-i\bar{\chi}\hat{a}^+(0)\hat{a}(0)}\hat{a}(0)|z\rangle = \\ &= z^*\langle z|e^{i\bar{\chi}\hat{n}(0)}|z\rangle + z\langle z|e^{-i\bar{\chi}\hat{n}(0)}|z\rangle. \end{aligned} \quad (17.12)$$

Разложим когерентное состояние $|z\rangle$ по фоковским $|n\rangle$, тогда, согласно (11.42),

$$\begin{aligned} \sqrt{2}\langle\hat{q}(t)\rangle &= z^*e^{-|z|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}(z^*)^n\frac{\langle n|}{\sqrt{n!}}e^{i\bar{\chi}\hat{n}}e^{-|z|^2/2}\sum_{n'=0}^{\infty}z^{n'}\frac{|n'\rangle}{\sqrt{n'!}} + \text{k.c.} = \\ &= z^*e^{-|z|^2}\sum_{n=0}^{\infty}|z|^{2n}\frac{e^{i\bar{\chi}n}}{n!} + \text{k.c.} = z^*e^{-|z|^2}e^{|z|^2e^{i\bar{\chi}}} + \text{k.c.} = \\ &= ze^{|z|^2(e^{-i\bar{\chi}}-1)} + \text{k.c.} \end{aligned} \quad (17.13)$$

Обычно $\bar{\chi} \ll 1$, поэтому

$$\begin{aligned} \sqrt{2}\langle\hat{q}(t)\rangle &\approx ze^{-\bar{\chi}|z|^2(i+\bar{\chi}/2)} + \text{k.c.} = |z|e^{-\bar{\chi}^2|z|^2/2-i\theta} + \text{k.c.} = \\ &= 2|z|e^{-\bar{\chi}^2|z|^2/2}\cos\theta, \end{aligned} \quad (17.14)$$

где $\theta = \Psi - \arg(z)$, а

$$\Psi = \bar{\chi}|z|^2 \quad (17.15)$$

— нелинейный набег фазы.

При вычислении дисперсии флюктуаций квадратуры нам потребуется квадрат средней квадратуры

$$\langle q \rangle^2 = 2|z|^2e^{-\bar{\chi}^2|z|^2}\cos^2\theta \approx 2(|z|^2 - \Psi^2)\cos^2\theta. \quad (17.16)$$

В приближенной части этого соотношения предполагается $\bar{\chi}|z| \ll 1$.

Аналогично вычисляется второй момент квадратуры:

$$\begin{aligned}
 2\langle \hat{q}^2 \rangle &= \langle z|\hat{a}^+ e^{i\bar{\chi}\hat{n}} \hat{a}^+ e^{i\bar{\chi}\hat{n}} + \hat{a}^+ \hat{a} + e^{-i\bar{\chi}\hat{n}} \hat{a} \hat{a}^+ e^{i\bar{\chi}\hat{n}} + e^{-i\bar{\chi}\hat{n}} \hat{a} e^{-i\bar{\chi}\hat{n}} \hat{a}|z\rangle = \\
 &= z^* e^{-|z|^2} \sum_{n=0}^{\infty} z^{*n} e^{i\bar{\chi}n} \frac{\langle n |}{\sqrt{n!}} \hat{a}^+ + \sum_{n'=0}^{\infty} z^{n'} e^{i\bar{\chi}n'} \frac{|n'\rangle}{\sqrt{n!}} + 2|z|^2 + \\
 &\quad + 1 + ze^{-|z|^2} \sum_{n=0}^{\infty} z^{*n} e^{-i\bar{\chi}n} \sqrt{n+1} \frac{\langle n+1 |}{\sqrt{n!}} \sum_{n'=0}^{\infty} z^{n'} e^{-i\bar{\chi}n'} \frac{|n'\rangle}{\sqrt{n!}} = \\
 &= 1 + 2|z|^2 + ze^{-|z|^2} \sum_{n=0}^{\infty} z^{*n} e^{-i\bar{\chi}n} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n!}} z^{n+1} \frac{e^{-i\bar{\chi}(n+1)}}{\sqrt{(n+1)!}} + \\
 &\quad + z^{*2} e^{-|z|^2} \sum_{n=0}^{\infty} |z|^{2n} \frac{e^{i\bar{\chi}(2n+1)}}{n!} = \\
 &= 1 + 2|z|^2 + e^{-|z|^2} z^2 e^{|z|^2 e^{-i2\bar{\chi}}} e^{-i\bar{\chi}} + e^{-|z|^2} z^{*2} e^{|z|^2 e^{i2\bar{\chi}}} e^{i\bar{\chi}} \approx \\
 &\approx 1 + 2|z|^2 + |z|^2 \times \\
 &\times (e^{-i\bar{\chi}+2\arg z-i2\bar{\chi}}|z|^2-2|z|^2\bar{\chi}^2+e^{i\bar{\chi}-2\bar{\chi}^2}|z|^2+i2\bar{\chi}|z|^2-i2\arg z) = \\
 &= 1 + 4|z|^2 \cos^2 \theta - 2\Psi \sin 2\theta - 4\Psi^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta). \quad (17.17)
 \end{aligned}$$

Теперь можно посчитать дисперсию флюктуаций квадратуры [44]

$$\begin{aligned}
 \langle \Delta q^2 \rangle \stackrel{\Delta}{=} \langle \hat{q}^2 \rangle - \langle \hat{q} \rangle^2 &= \frac{1}{2} + 2\Psi^2 \sin^2 \theta - 2\Psi \sin \theta \cos \theta = \\
 &= \frac{1}{2} + 2\Psi \sin \theta (\Psi \sin \theta - \cos \theta). \quad (17.18)
 \end{aligned}$$

Найдем фазу моды, т. е. $\arg(z)$, когда дисперсия флюктуаций экстремальна, решив уравнение

$$\frac{d\langle \Delta q^2 \rangle}{d(\arg z)} = 0, \quad (17.19)$$

откуда

$$\arg z = \Psi - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \Psi^{-1}. \quad (17.20)$$

При этом

$$\langle \Delta q^2 \rangle_{\min} = \frac{1}{2} (\sqrt{1+\Psi^2} - \Psi)^2. \quad (17.21)$$

Легко видеть, что с ростом нелинейного фазового набега Ψ , пропорционального длине пробега света в волокне, дисперсия флюктуаций квадратуры (17.21) снижается: при $\Psi \ll 1$

$$\langle \Delta q^2 \rangle_{\min} \approx \frac{1}{2} \left(1 - \Psi + \frac{\Psi^2}{2} \right), \quad (17.22)$$

а при $\Psi \gg 1$

$$\langle \Delta q^2 \rangle_{\min} \approx \frac{1}{8\Psi^2}. \quad (17.23)$$

Так или иначе, зависимость (17.21) дает монотонное спадание дисперсии квадратуры с ростом Ψ , т. е. эффект сжатия.

Такие же результаты можно получить и в представлении Шрёдингера. При этом эволюция исходного когерентного состояния, согласно (17.4), описывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \hat{U}|z\rangle &= \exp\left(-i\frac{\bar{\chi}}{2}\hat{a}^+\hat{a}^+\hat{a}\hat{a}\right)|z\rangle = \\ &= \frac{|0\rangle}{\sqrt{e^{|z|^2}}} + \exp\left(-i\frac{\bar{\chi}}{2}\hat{n}(\hat{n}-\hat{I})\right) \sum_{n=1}^{\infty} |n\rangle \frac{z^n}{\sqrt{n!e^{|z|^2}}} = \\ &= \frac{|0\rangle}{\sqrt{e^{|z|^2}}} + \sum_{n=1}^{\infty} |n\rangle \frac{z^n}{\sqrt{n!e^{|z|^2}}} \exp\left(-i\frac{\bar{\chi}}{2}n(n-1)\right). \end{aligned} \quad (17.24)$$

Усредняя по этому состоянию операторы \hat{q} и \hat{q}^2 , получим ту же дисперсию флуктуаций квадратуры, что и в представлении Гейзенberга.

Наглядное описание квантового состояния света, претерпевшего ФСМ, можно получить из анализа тела неопределенности на фазовой плоскости. В исходном когерентном состоянии $|z\rangle$ оно представляло собой круг с центром в конце комплексного вектора z (см. рис. 13.4). Эволюцию тела неопределенности проследим с помощью так называемого Q -распределения (см., например, [59]). Оно является просто квадратом модуля скалярного произведения исследуемого состояния на когерентное в случае чистого состояния:

$$Q(z) \stackrel{\Delta}{=} |\langle z|\psi\rangle|^2, \quad (17.25)$$

или усреднением матрицы плотности по когерентным состояниям в произвольном случае:

$$Q(z) \stackrel{\Delta}{=} \langle z|\hat{\rho}|z\rangle. \quad (17.26)$$

Каков физический смысл Q -распределения? Для когерентного состояния $|\tilde{z}\rangle$, согласно (11.44),

$$Q(z) = e^{-|z-\tilde{z}|^2}, \quad (17.27)$$

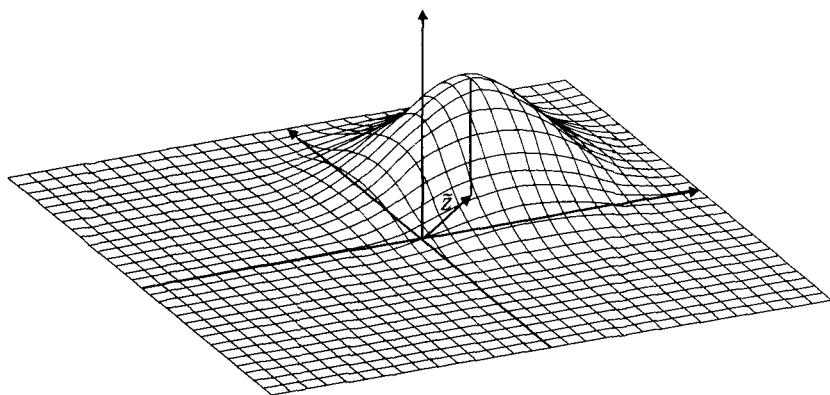


Рис. 17.2. Вид распределения $Q(z)$ для когерентного состояния

т. е. гауссова функция, смещенная из центра фазовой плоскости на величину \tilde{z} (см. рис. 17.2). Горизонтальные сечения $Q(z)$ представляют собой круги, т. е. тела неопределенности, построенные для различных уровней флуктуаций.

Чем хороша проекция именно на когерентные состояния? Тем, что эти состояния наиболее близки к классическим синусоидальным модам. Электрическое поле когерентного состояния изменяется во времени в пределах некоторого интервала неопределенности вокруг синусоиды (см. рис. 17.3 а). Сама синусоида при этом соответствует комплексному вектору \tilde{z} , а «трубка» неопределенности — одному из уровней тела неопределенности на рис. 17.2.

Сжатые, фоковские и другие состояния отличаются от классической синусоидальной моды более существенным образом (см., напр., рис. 17.3 б, в, а также [13] или [59]). Поэтому проекция на когерентные состояния вносит наименьшие искажения в тело неопределенности.

Вычислим Q -распределение моды, претерпевшей фазовую самомодуляцию. Согласно (17.24), при исходном состоянии на входе кварцевого волокна $|\tilde{z}\rangle$,

$$\begin{aligned} \langle z | \hat{U} | \tilde{z} \rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} \langle n | \frac{z^{*n}}{\sqrt{n!e^{|z|^2}}} \left\{ \frac{|0\rangle}{\sqrt{e^{|\tilde{z}|^2}}} + \sum_{\tilde{n}=1}^{\infty} |\tilde{n}\rangle \frac{\tilde{z}^n}{\sqrt{n!e^{|\tilde{z}|^2}}} \exp\left(-i \frac{\bar{x}}{2} n(n-1)\right) \right\} = \\ &= e^{-\frac{(|z|^2+|\tilde{z}|^2)}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z^* \tilde{z})^n}{\frac{(|z|^2+|\tilde{z}|^2)}{2}} \exp\left(-i \frac{\bar{x}}{2} n(n-1)\right). \quad (17.28) \end{aligned}$$

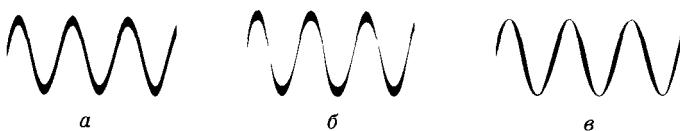


Рис. 17.3. Зависимость напряженности электрического поля монохроматической моды излучения в когерентном состоянии (*a*), сжатом состоянии с минимально неопределенной фазой (*b*) и в субкуассоновском состоянии (*c*). Толщина синусоиды соответствует интервалу неопределенности

График модуля этого выражения, т. е. Q -распределения, приведен на рис. 17.4 [59]. В отличие от эллипсовидного тела неопределенности в случае вырожденного параметрического взаимодействия (см. рис. 12.2), здесь оно серповидное. Поскольку фаза в процессе ФСМ с течением времени изменяется (все набегает), вся картина вращается вокруг центра координат. При этом неопределенность амплитуды (и интенсивности, т. е. числа фотонов) остается неизменной, поскольку $\hat{n}(t)$ — инвариант по t , что символически показано двумя концентрическими окружностями.

В отличие от приближенной зависимости дисперсии флуктуаций квадратуры (17.21), где она уменьшалась монотонно с течением времени (т. е. длины пробега в кварце), здесь мы видим, что с ростом «серповидности» снижение флуктуаций квадратуры сменяется их ростом. Ясно, что в пределе бесконечной длины волокна $l \rightarrow \infty$ серп превращается в кольцо, диаметром которого и будут определяться флуктуации квадратуры. При высокой интенсивности света очевидно, что этот диаметр существенно превысит круговое тело неопределенности исходного когерентного состояния $|\tilde{z}|$. Эти расхождения (17.21) с рис. 17.4 связаны с тем, что формула (17.21) выводилась в приближении $\bar{x} \ll 1$ и $\bar{x}|z| \ll 1$, т. е. она справедлива лишь на начальном этапе эволюции, как правило, и имеющем место на практике. Рисунок же 17.4 построен без использования этих приближений.

Итак, хотя сжатые состояния на начальном этапе возможны, снижения флуктуаций числа фотонов, т. е. $\langle \Delta n^2 \rangle$, не происходит в силу инвариантности $\hat{n}(t)$. Если бы удалось немножко повернуть вектор среднего значения комплексной амплитуды относительно серпа, то можно было бы, как видно из рис. 17.4 (игрические линии), получить субкуассоновское состояние света с подавленными флуктуациями числа фотонов $\langle \Delta n^2 \rangle$. Как это сделать?

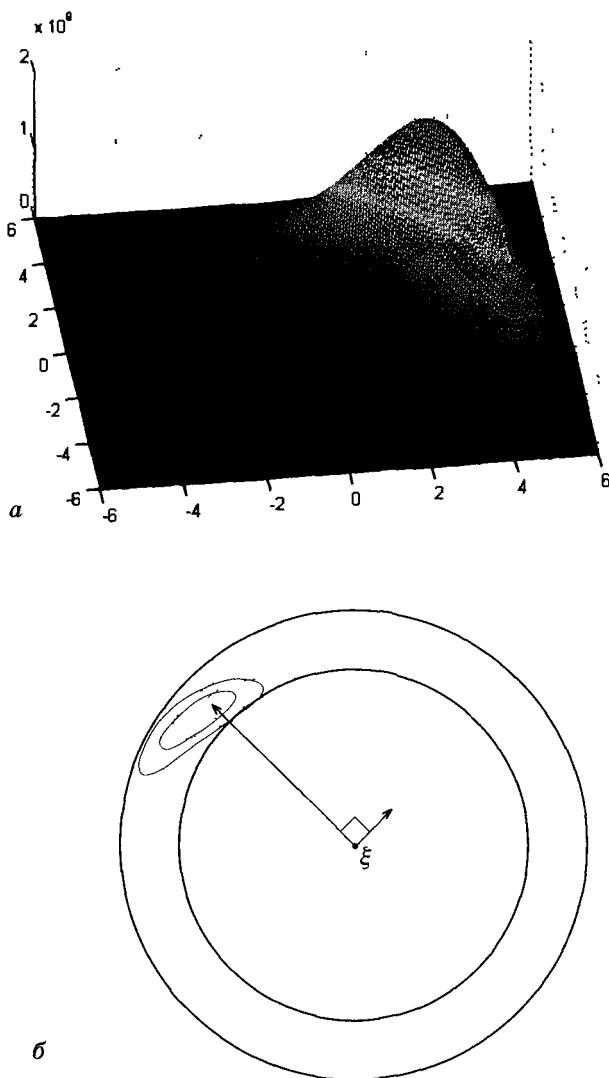


Рис. 17.4. Трехмерный график Q -распределения (а) при $|\tilde{z}| = 5$, $\bar{\chi} = 0.03$ и сечение Q -распределения — серповидное тело неопределенности (б). Пунктиром отмечено тело неопределенности с уменьшенными флуктуациями интенсивности, что достигается добавлением к вектору средней амплитуды небольшого комплексного вектора ξ , показанного на рисунке

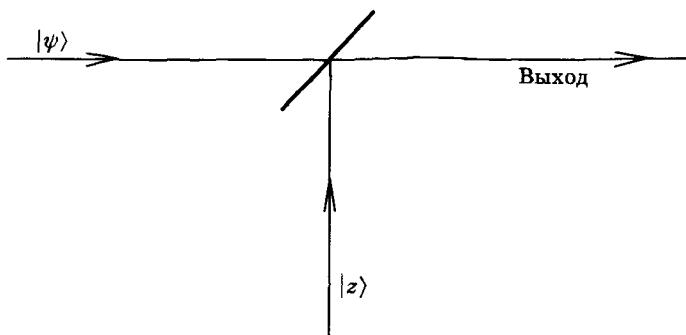


Рис. 17.5. Смещение на светоделителе сигнальной моды в состоянии $|\psi\rangle$ с мощной когерентной модой $|z\rangle$ при малом коэффициенте отражения светоделителя по амплитуде r и высоком коэффициенте пропускания приводит к смещению средней комплексной амплитуды сигнальной моды на величину $\xi = rz$

Рассмотрим светоделитель, на один из входов которого подается мощная когерентная мода, а на другой — например сигнал, претерпевший ФСМ (рис. 17.5). Если коэффициент пропускания близок к единице, то сигнал передается практически без изменения. Коэффициент же отражения при этом очень мал: $|r| \ll 1$, где r — коэффициент отражения по амплитуде. Флуктуации когерентной моды в этих условиях на выходе практически не передаются, зато передается существенно сниженная средняя амплитуда $\xi = rz$. В представлении Гейзенберга оператор уничтожения фотона выходной моды представляет собой сумму оператора уничтожения претерпевшего ФСМ сигнала и ξ :

$$\hat{a}_{out} \approx e^{-i\bar{x}\hat{a}^+(0)\hat{a}(0)}\hat{a}(0) + \xi. \quad (17.29)$$

Этот результат легко получить при помощи уже известного нам соотношения, описывающего действие светоделителя (16.5) при $|r| \ll 1$ и $|t| \approx 1$.

В представлении Шрёдингера подобную комплексную добавку к среднему значению комплексной амплитуды можно описать при помощи так называемого *оператора смещения*:

$$\hat{D}(\xi) \approx e^{\xi\hat{a}^+ - \xi^*\hat{a}}. \quad (17.30)$$

При этом состояние света на выходе светоделителя (рис. 17.5) определяется оператором эволюции [59]

$$\hat{U}_\Sigma = \hat{D}(\xi)\hat{U}, \quad (17.31)$$

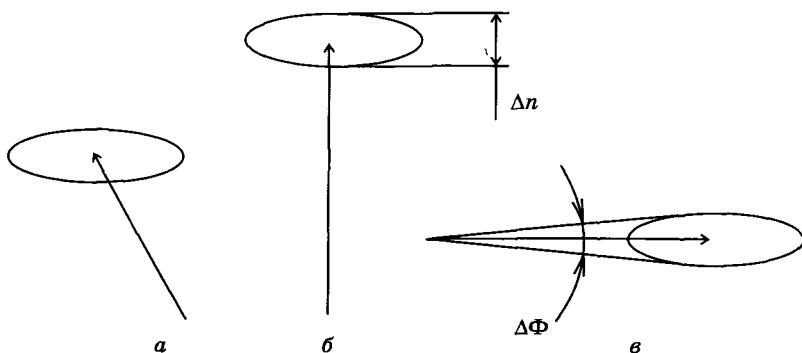


Рис. 17.6. Состояние с произвольной ориентацией эллипса неопределенности относительно средней амплитуды (a) при помощи светофильтра легко преобразовать в субпуассоновское (b), у которого $\langle \Delta n^2 \rangle < \langle \hat{n} \rangle$, или в состояние с подавленными квантовыми флюктуациями фазы $\Delta\Phi$ (c) по сравнению с когерентным состоянием

действие которого на вектор начального состояния света, поступающего на вход кварцевого волокна, дает конечное состояние на выходе светофильтра. Здесь оператор \hat{U} описывается (17.24). Можно проверить, что (17.29) получается как

$$\hat{a}_{out} = \hat{U}_\Sigma^+ \hat{a}(0) \hat{U}_\Sigma. \quad (17.32)$$

Итак, мы получили универсальный способ произвольного изменения среднего значения комплексной амплитуды сигнала, в частности, его поворота относительно тела неопределенности, при помощи слабоотражающего светофильтра. Того же эффекта, разумеется, можно добиться со слабопропускающим, но наоборот — сильноотражающим светофильтром, поменяв местами входные моды. Таким образом, если у нас имеется свет с произвольной ориентацией тела неопределенности (например, эллипса, как на рис. 17.6) относительно средней амплитуды, то посредством светофильтра, или — лучше — поляризационной призмы Волластона, его можно преобразовать как в субпуассоновский свет, так и в состояние с минимальной неопределенностью фазы, что часто бывает полезным в прецизионной интерферометрии.

Вернемся к рис. 17.4 с серповидным телом неопределенности. Немного повернуть вектор средней амплитуды можно прибавив к нему небольшой вектор ξ , перпендикулярный ему. При этом достигается субпуассоновская статистика света с подавленными флюк-

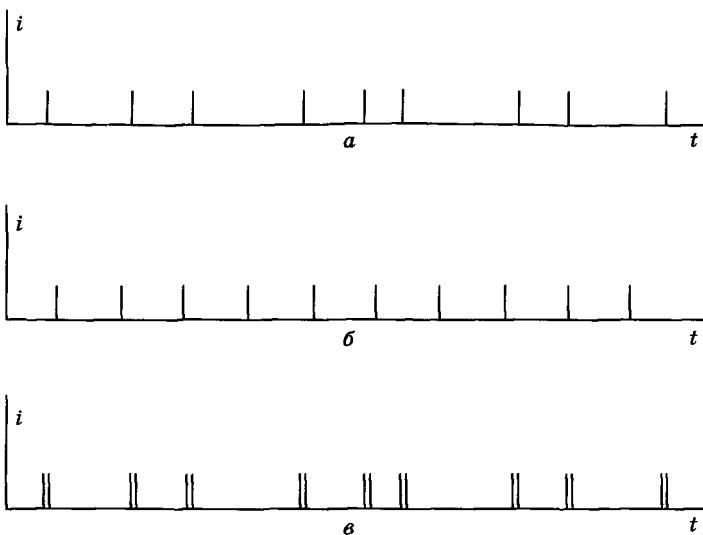


Рис. 17.7. Примеры следования фотоотсчетов во времени при пуассоновской (а), субпуассоновской (б) и суперпуассоновской (в) статистике фотонов. Пример суперпуассонового света соответствует вырожденному параметрическому рассеянию

туациями интенсивности. Эффективность этого подавления можно оценить при помощи так называемого *фактора Фано*, который представляет собой отношение

$$F = \frac{\langle \Delta n^2 \rangle}{\langle \hat{n} \rangle} \quad (17.33)$$

дисперсии флуктуаций числа фотонов к среднему числу фотонов в моде. Для когерентного света с пуассоновской статистикой фотонов $F = 1$. Для фокусного состояния $F = 0$. В промежуточных случаях: $0 < F < 1$ — состояние света субпуассоновское, а при $F > 1$ — *суперпуассоновское*. Суперпуассоновым будет, например, свет вырожденного параметрического рассеяния, поскольку рождающиеся фотонные пары в вырожденном случае принадлежат одной моде, т. е. имеют тенденцию группироваться друг к другу (рис. 17.7).

Итак, максимальное подавление фотонных флуктуаций, а, следовательно, и максимальное подавление дробового шума детектирования будет при достижении минимального значения фактора Фано F . Вектор ξ (рис. 17.4) при этом должен быть повернут на

угол $-\frac{\pi}{2}$ относительно среднего значения амплитуды моды, претерпевшей ФСМ, и иметь оптимальную длину. В этом случае с ростом нелинейного параметра $\bar{\chi}$ фактор Фано сначала уменьшается (рис. 17.8), а потом увеличивается [59]. Оптимальное значение $\bar{\chi}_{opt}$, соответствующее максимальной депрессии фотонных флюктуаций, примерно равно

$$\bar{\chi}_{opt} \approx \frac{\langle \hat{n}_{out} \rangle^{-\frac{2}{3}}}{2}, \quad (17.34)$$

при этом

$$\langle (\Delta n_{out})^2 \rangle_{min} = \sqrt[3]{\langle \hat{n}_{out}^2 \rangle}, \quad (17.35)$$

где $\langle \hat{n}_{out} \rangle = \langle \hat{n} \rangle + |\xi|^2$, а \hat{n} — инвариантное число фотонов в моде, претерпевшей ФСМ.

На рис. 17.8 также представлен график нормированных по $\langle \Delta \hat{n}_{out} \rangle$ фазовых флюктуаций $\langle \Delta \Phi_{out}^2 \rangle$. Для субпуассоновского света они, разумеется, растут. При этом произведение дисперсий $\langle \Delta \Phi_{out}^2 \rangle \langle (\Delta n_{out})^2 \rangle$ остается постоянным и минимально возможным (1/4) вплоть до значения $\bar{\chi} = \bar{\chi}_{opt}$, а затем резко увеличивается [59].

Вернемся к основной теме данного раздела — невозмущающим измерениям. Поскольку оператор $\hat{n}(t)$ при ФСМ является инвариантом во времени, он удовлетворяет условию (17.1). Следовательно, величина числа фотонов при ФСМ является невозмущаемой наблюдаемой и может быть невозмущающим образом измерена. Как это сделать? Подадим на вход нелинейной среды с кубичной нелинейностью (того же кварцевого волокна) помимо измеряемого сигнала «*a*» еще и слабую пробную моду «*b*», по измерению фазы которой попытаемся определить интенсивность сигнала «*a*» [59], см. рис. 17.9. Действительно, поскольку интенсивный сигнал «*a*» изменяет оптическую плотность и показатель преломления нелинейной среды, это изменение плотности можно «прощупать» обычным интерферометром, например, Маха—Цендера. Вспомним, что этим интерферометром можно измерить косинус разности фаз в плечах. Таким образом, если сигнальная мода исходно находилась в состоянии $|a\rangle_0$, а пробная — в когерентном состоянии $|z_0\rangle$, то после измерения она перейдет в собственное состояние $|C\rangle$ оператора косинуса разности фаз \hat{C} , согласно постулату о редукции фон-Неймана. Гамильтониан четырехфотонного взаимодействия такого процесса имеет вид

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \hbar \chi_{ab}^{(3)} \hat{n}_a \hat{n}_b = \frac{1}{2} \hbar \chi_{ab}^{(3)} \hat{a}_a^\dagger \hat{a}_a \hat{a}_b^\dagger \hat{a}_b = \frac{1}{2} \hbar \chi_{ab}^{(3)} \hat{a}_a^\dagger \hat{a}_b^\dagger \hat{a}_a \hat{a}_b. \quad (17.36)$$

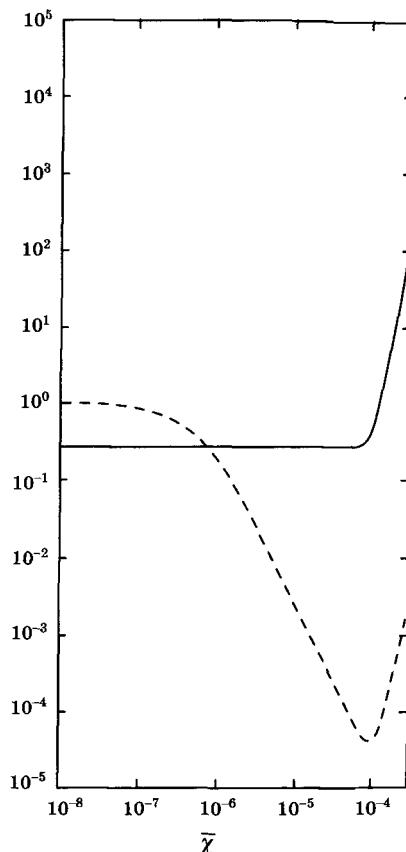


Рис. 17.8. Графики фактора Фано (штриховая кривая) и нормированных по $\langle \Delta \hat{n}_{out} \rangle$ фазовых флюктуаций $\langle \Delta \Phi_{out}^2 \rangle$ (сплошная кривая) в зависимости от нелинейного параметра $\bar{\chi}$

Он отличается от гамильтониана (17.3) степенью вырождения: там все операторы рождения и уничтожения принадлежали одной моде, а здесь — двум. Этот гамильтониан описывает процесс уничтожения одного фотона сигнала «*a*» и одного фотона пробной моды «*b*», а вместо них — одновременного рождения таких же фотонов в те же моды.

Оператор эволюции имеет вид

$$\hat{U} = e^{-i\bar{\chi}_{ab}\hat{n}_a\hat{n}_b/2}. \quad (17.37)$$

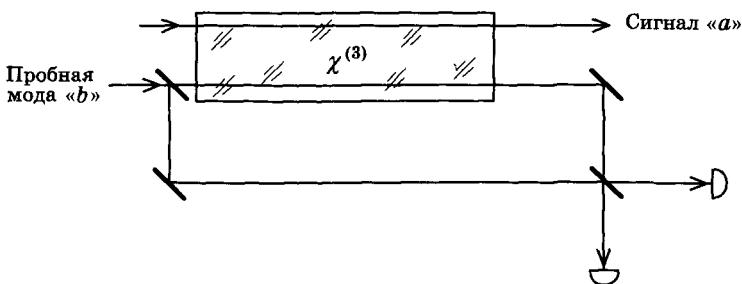


Рис. 17.9. Схема невозмущающих квантовых измерений числа фотонов сигнальной моды «*a*» в средах с кубической нелинейностью $\chi^{(3)}$. Наведенное сигналом «*a*» нелинейное изменение показателя преломления можно измерить пробной модой «*b*», например, другой частоты, в интерферометре Маха–Цендера, как показано на рисунке, или в схеме балансного гомодинного детектирования

Если сигнальная мода находилась в чистом состоянии $| \rangle_0$, то исходное состояние квантовой системы описывается вектором

$$|\psi\rangle_0 = | \rangle_0 |z_0\rangle_b, \quad (17.38)$$

или матрицей плотности

$$\hat{\rho}_0 = | \rangle_0 |z_0\rangle \langle z_0| \langle |. \quad (17.39)$$

В результате четырехфотонного взаимодействия матрица плотности преобразуется в

$$\hat{\rho}_{ab} = \hat{U} \hat{\rho}_0 \hat{U}^+, \quad (17.40)$$

где оператор \hat{U} определяется (17.37).

После измерения, как указывалось выше, пробная мода переходит в собственное состояние $|C\rangle$ оператора косинуса разности фаз \hat{C} , а матрица плотности редуцируется в

$$\hat{\rho}_a = N \text{tr}_b (|C\rangle \langle C| \hat{\rho}_{ab}), \quad (17.41)$$

где матрица $|C\rangle \langle C|$ представляет собой проекционный оператор, а нормировочная константа N определяется из условия

$$\text{tr}_a \hat{\rho}_a = 1. \quad (17.42)$$

В выражении (17.41) усреднение производится по всем возможным состояниям $|C\rangle$ пробной моды «*b*» после измерения.

Теперь можно вычислить плотность распределения числа фотонов сигнальной моды после измерения:

$$\begin{aligned} P(n_a) &= \langle n_a | \hat{\rho}_a | n_a \rangle = \\ &= N \langle n_a | tr_b \left(|C\rangle \langle C| e^{-i \frac{\bar{\chi}_{ab}}{2} \hat{n}_a \hat{n}_b} | \rangle_0 \right) \langle \langle z_0 | \langle z_0 | e^{i \frac{\bar{\chi}_{ab}}{2} \hat{n}_a \hat{n}_b} \right) | n_a \rangle = \\ &= N tr_b \left(|C\rangle \langle C| e^{-i \frac{\bar{\chi}_{ab}}{2} n_a \hat{n}_b} |\langle n_a | \rangle_0|^2 |z_0 \rangle \langle z_0 | e^{i \frac{\bar{\chi}_{ab}}{2} n_a \hat{n}_b} \right). \quad (17.43) \end{aligned}$$

Здесь $|\langle n_a | \rangle_0|^2$ представляет собой исходное распределение фотонов сигнальной моды $P_0(n_a)$, которое можно вынести за скобки как не зависящее от состояния пробной моды « b ». Тогда

$$P(n_a) = P_0(n_a) NG(n_a), \quad (17.44)$$

$$\begin{aligned} G(n_a) &= \left| \langle C | e^{-i \frac{\bar{\chi}_{ab}}{2} n_a \hat{n}_b} | z_0 \rangle \right|^2 = \\ &= \left| \langle C | \sum_{n_b=0}^{\infty} e^{-i \frac{\bar{\chi}_{ab}}{2} n_a n_b} \frac{e^{-\bar{n}_b/2} \bar{n}_b^n | n_b \rangle}{\sqrt{n_b!}} \right|^2. \quad (17.45) \end{aligned}$$

Если $\bar{\chi}_{ab} \rightarrow 0$, то фотонная статистика сигнальной моды остается неизменной. Таким образом, невозмущающие измерения интенсивности сигнальной моды возможны при отсутствии четырехфотонного взаимодействия, когда $\bar{\chi}_{ab} = 0$, что может быть достигнуто специальным подбором длины волны пробной моды с учетом спектральной характеристики кубичной нелинейности. Нелинейный набег фазы сигнала при этом может быть, конечно, ненулевым, поскольку $\chi_{ab}^{(3)} \neq \chi_a^{(3)}$, где $\chi_a^{(3)}$ — кубичная нелинейность ФСМ сигнала. Наоборот, чем больше $\chi_a^{(3)}$, тем большее изменение оптической плотности нелинейной среды и тем выше чувствительность измерений.

Кроме того, невозмущающие измерения, согласно второму равенству в (17.45), возможны при малой интенсивности пробной моды, когда $\bar{n}_b = \langle \hat{n}_b(0) \rangle = |z_0|^2 \ll 1$, поскольку $G(n_a)$ при этом остается практически константой, не зависящей от n_a .

Можно использовать и оба эти фактора: отсутствие нелинейного взаимодействия между модами « a » и « b », а также малую амплитуду пробной моды.

Как бы то ни было, фазовые флуктуации сигнальной моды при таких измерениях увеличиваются, хотя бы в силу ее ФСМ в соответствии с рис. 17.8.

На практике помимо кварцевого оптического волокна для реализации невозмущающих измерений можно использовать и высокодобротные сферические микрорезонаторы (см., например, [60]). Если

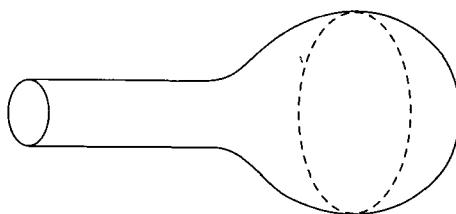


Рис. 17.10. Оплавленный кончик кварцевого волокна может быть высокодобротным сферическим резонатором, если в него запустить свет, распространяющийся в плоскости показанного штриховой линией экватора. Малые потери обусловлены полным внутренним отражением на границах сферической поверхности

в поле мощного ИК-лазера оплавить кончик кварцевого волокна, наблюдая за ним в микроскоп, то оплавленная капля представляет собой почти правильную часть сферы диаметром от 40 до 400 мкм, изображенную на рис. 17.10. В хорошо приготовленных образцах экваториальное сечение, выделенное на рисунке штриховой линией, представляет собой почти правильный круг. Свет, распространяющийся в этом круге при больших углах падения, близких к $\pi/2$, т. е. отражаясь полным внутренним отражением, будет циркулировать по ломаной линии, близкой к изображенной экваториальной окружности, достаточно долго в силу незначительности потерь. Такие устойчивые моды сферического резонатора получили название *шепчущих мод*. Они изменяют оптическую плотность кварца в силу его кубичной нелинейности, измерив показатель преломления которого можно вычислить интенсивность света внутри сферы. Ясно, что шарик можно просветить насеквоздь слабым пробным лучом и измерить нелинейное изменение его показателя преломления.

Но как запустить свет в шарик? Ведь шепчущая мода — «вещь в себе», изолированная от внешнего мира. Закрытый сферический резонатор можно «приоткрыть» следующим образом. Известно, что при полном внутреннем отражении свет выходит за отражающую поверхность на расстояние порядка его длины волны. Следовательно, принципиально возможно ввести внешнее излучение в микрорезонатор, например, посредством наклонного фокусирования светового пучка микрообъективом на внутреннюю поверхность оптической призмы с показателем преломления, превышающим показатель преломления кварца. Приблизив шарик на расстояние порядка долей длины волны к поверхности призмы в области фокусировки, можно

ввести излучение в него, как, впрочем, и вывести его из резонатора. Если такой ввод осуществляется непрерывно, то реализуется стационарный режим постоянного по мощности ввода-вывода аналогично тому, как это происходит в многолучевом интерферометре Фабри—Перо. При этом размеры микрорезонатора на несколько порядков меньше, чем у высокодобротного резонатора Фабри—Перо, что, помимо очевидного преимущества компактности, дает более яркое проявление нелинейных свойств заполняющей резонатор среды.

Но вернемся к обсуждению невозмущающих измерений. Выше, при анализе соотношения (17.45), мы установили условия, при которых фотонная статистика измеряемого светового пучка остается неизменной. Но всегда ли это целесообразно? Если, например, исходное среднеквадратическое отклонение флуктуаций интенсивности было большим, то оно останется таким и после измерения, причем точность измерения не может превышать этого среднеквадратического отклонения, иначе будет внесено возмущение в фотонную статистику измеряемого пучка.

С другой стороны, отказавшись от невозмущающих измерений, можно организовать эксперимент так, что точность измерения числа фотонов в моде будет достаточно высокой, вплоть до одного фотона. На это нет принципиальных ограничений, например, при использовании описанного выше кварцевого сферического микрорезонатора. Но если можно абсолютно точно измерить число фотонов в поле, не уничтожая их, как в обычном детекторе, то тем самым это световое поле редуцируется в фокуское состояние. Если же такой высокой точности достичь не удастся, то, по крайней мере, можно приготовить субпуассоновский свет, который также является весьма ценным приобретением с точки зрения его последующего использования в каких-то других прецизионных измерениях или в оптических линиях связи. С этой точки зрения даже не имеет принципиального значения произведено ли фактически измерение или нет. Важно, что оно может быть произведено. С аналогичной ситуацией мы уже сталкивались при обсуждении квантового эффекта Зенона. Действительно, можно получить субпуассоновский свет посредством ФСМ, согласно рис. 17.8, и без всякого измерения. Это наводит на мысль о том, что посредством многолучевого резонатора, заполненного нелинейной средой, например, квartzem, как в случае сферического микрорезонатора, можно приготавливать субпуассоновские состояния не производя измерений. Расчеты показали, что так оно и есть [44, 61]. При этом возникает еще один интересный эффект, если использовать большие по размерам

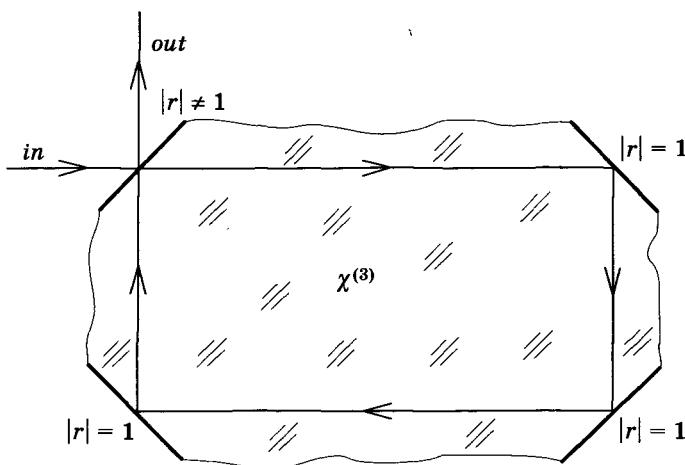


Рис. 17.11. Схема кольцевого интерферометра, заполненного нелинейной средой с кубичной нелинейностью. Входное зеркало частично пропускающее, а остальные — глухие с единичным коэффициентом отражения

резонаторы, например, кольцевые или Фабри—Перо. Дело в том, что до сих пор субпуассоновское упорядочение потока фотонов мы рассматривали в одномерном приближении — по времени или вдоль оптической оси распространения пучка. Оказывается, что подобное упорядочение может быть произведено и в объемном варианте — т. е. во всем трехмерном пространстве. Впервые этот эффект предсказали М. И. Колобов и И. В. Соколов [62]. Он открывает широкие перспективы в системах оптической обработки информации и высокоточных квантовых измерениях за счет создания малошумящих оптических изображений и осветителей, поскольку фотонные флуктуации в них подавляются не только во времени, но и в пространстве — поперечной плоскости распространения пучка. Так вот, в многолучевых интерферометрах и резонаторах, заполненных кубично-нелинейной средой, как раз и можно получить такие световые поля.

Рассмотрим этот вопрос более подробно. На рис. 17.11 представлена схема кольцевого интерферометра, возбуждаемого внешним излучением, внутри которого заключена среда с кубичной нелинейностью. Он производит своеобразную фильтрацию фотонных шумов когерентного осветителя в определенной области спектра, как временного, так и пространственного.

Электрическое поле в интерферометре будем описывать следующим уравнением

$$\frac{1}{v} \frac{\partial E(\vec{r}_\perp, t)}{\partial t} - \frac{i}{2k} \Delta_\perp E(\vec{r}_\perp, t) + \frac{1}{l} [(\alpha - i\varphi) E(\vec{r}_\perp, t) - \sqrt{2\alpha} E_{in}(\vec{r}_\perp, t)] = 0. \quad (17.46)$$

Здесь $E(\vec{r}_\perp, t)$ — комплексная амплитуда электрического поля, медленно меняющаяся в пространстве и во времени (т. е. огибающая без учета быстрых осцилляций со световой частотой), являющаяся классическим аналогом соответствующего оператора в представлении Гейзенберга, $\vec{r}_\perp = \{x, y\}$ — двумерный вектор поперечных координат, перпендикулярный оптической оси пучка и резонатора z (в случае кольцевого резонатора представляющей собой замкнутую ломаную линию, например, как на рис. 17.11, прямоугольник), $\Delta_\perp = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ — поперечный лапласиан, t — время, $v = c/n$ — скорость света в резонаторе с учетом нелинейной среды, $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v}$ — волновое число, ω — круговая частота излучения, которое предполагается монохроматическим, l — оптическая длина полного обхода интерферометра осевым лучом — так называемая *база интерферометра*, $\alpha = 1 - r$ — коэффициент потерь, r — амплитудный коэффициент отражения частично пропускающего выходного зеркала (остальные зеркала считаем глухими и не вносящими потерь, кроме того, все зеркала полагаем безграничными, т. е. существенно превышающими размер светового пучка), коэффициент α связан с добротностью резонатора Q как

$$2\alpha = \frac{\omega}{Q}, \quad (17.47)$$

$\varphi = (\varphi_l + \varphi_{nl}) \ll 1$ — фазовая расстройка интерферометра, определяемая дополнительным фазовым набегом света при полном обходе резонатора по отношению к условию резонанса, когда полный фазовый набег кратен 2π . Эта фазовая расстройка складывается из линейной и нелинейной частей. И последнее: индекс «*in*» соответствует внешнему облучению резонатора на входе.

Уравнение (17.46) похоже на обычное параболическое уравнение распространения излучения в свободном пространстве. Оно получается следующим образом. Волновое уравнение для напряженности электрического поля $e(\vec{r}, t)$ имеет вид

$$\nabla^2 e(\vec{r}, t) - \left(\frac{n}{c} \right)^2 \frac{\partial^2 e(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = 0.$$

В нелинейной среде с ФСМ показатель преломления n зависит от напряженности поля. Представим $e(\vec{r}, t)$ в виде

$$e(\vec{r}, t) = E(\vec{r}, t)e^{-i(\omega t - kz)}.$$

Тогда

$$\frac{\partial^2 e(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = \left[\frac{\partial^2 E(\vec{r}, t)}{\partial t^2} - i2\omega \frac{\partial E(\vec{r}, t)}{\partial t} - \omega^2 E(\vec{r}, t) \right] e^{-i(\omega t - kz)}.$$

В *квазимонохроматическом приближении* можно пренебречь второй производной по времени, поскольку

$$\left| \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \right| \ll \left| 2\omega \frac{\partial E}{\partial t} \right|.$$

Аналогично, для *квазиплоской* волны, распространяющейся в направлении оси z ,

$$\frac{\partial^2 e(\vec{r}, t)}{\partial z^2} \approx \left[i2k \frac{\partial E(\vec{r}, t)}{\partial z} - k^2 E(\vec{r}, t) \right] e^{-i(\omega t - kz)}.$$

Итак,

$$-\frac{i}{2k} \Delta_{\perp} E(\vec{r}, t) + \frac{\partial E(\vec{r}, t)}{\partial z} + \frac{1}{v} \frac{\partial E(\vec{r}, t)}{\partial t} = 0,$$

поскольку $k = \frac{n\omega}{c}$.

Пусть на длине полного обхода интерферометра l электрическое поле изменяется незначительно, тогда дифференциалы можно заменить конечными приращениями:

$$\frac{\partial E}{\partial z} \approx \frac{\Delta E}{\Delta z} \approx \frac{\Delta E}{l},$$

а

$$\begin{aligned} \Delta E(\vec{r}, t) \approx & \left[\frac{i}{2k} \Delta_{\perp} E(\vec{r}, t) - \frac{1}{v} \frac{\partial E(\vec{r}, t)}{\partial t} \right] l - \alpha E(\vec{r}, t) + \\ & + i\varphi E(\vec{r}, t) + \sqrt{2\alpha} E_{in}(\vec{r}, t). \end{aligned}$$

Отметим, что малое изменение поля за один проход обусловливает малые потери и высокий коэффициент отражения выходного зеркала $r^2 \approx 1$, так что амплитудный коэффициент пропускания равен

$$\tau = \sqrt{1 - r^2} = \sqrt{(1 - r)(1 + r)} \approx \sqrt{2\alpha}. \quad (17.48)$$

Он и стоит перед комплексной амплитудой внешнего входного поля E_{in} , так что произведение $\sqrt{2}\alpha E_{in}$ представляет собой небольшую часть поля, прошедшего извне в интерферометр.

Будем интересоваться установившимся режимом работы интерферометра, или так называемым *квазистационарным* случаем, когда масштабы изменения поля во времени существенно больше времени полного обхода резонатора $T = \frac{l}{v}$. При этом $\Delta E(\vec{r}, t) \approx 0$ и получим (17.46).

Без учета дисперсии скорость $v = c/n$ можно считать постоянной, поскольку в установившемся режиме нелинейные изменения показателя преломления n за счет флуктуационных изменений интенсивности светового поля существенно меньше среднего значения n .

Итак, уравнение (17.46) справедливо для высокодобротных резонаторов, искажения поля в которых за один проход малы: $\alpha \ll 1$. При этом и само поле в резонаторе практически не зависит от продольной координаты z , оставаясь примерно постоянным.

Запишем нелинейную фазу как

$$\varphi_{nl} = \chi l |E|^2, \quad (17.49)$$

где χ — коэффициент, определяемый кубичной нелинейностью среды $\chi^{(3)}$. В обычных для ФСМ обозначениях (см., например, [53]):

$$\chi = \frac{k\epsilon_2}{2\epsilon_0}, \quad (17.50)$$

где ϵ_0 — обычная линейная диэлектрическая проницаемость среды в слабом поле, а ϵ_2 — коэффициент нелинейности.

Предположим, что интерферометр освещается интенсивной коherентной плоской волной с круговой частотой несущей ω и распространяющейся в направлении оси z . Строго говоря, это противоречит сделанному выше предположению о том, что размеры светового пучка существенно меньше поперечных размеров зеркал. Но если зеркала слабо сферические и вогнутые, а внешнее поле соответствует низшей собственной моде резонатора, обычно гауссовой, то подобное описание вполне адекватно. Иметь же в виду плоскую моду и плоские безграничные зеркала проще чисто в методическом плане, чтобы не отвлекаться на мелочи.

Представим E_{in} в виде регулярной и флуктуационной составляющих:

$$E_{in}(\vec{r}_\perp, t) = \langle E_{in}(\vec{r}_\perp, t) \rangle + \Delta E_{in}(\vec{r}_\perp, t). \quad (17.51)$$

Здесь интересно, несколько забегая вперед, отметить следующий факт. В дальнейшем мы перейдем к квантовому описанию, и там входное поле будем считать находящимся в когерентном состоянии. Так вот, хорошо известно, что когерентную моду можно представить в виде суперпозиции средней комплексной амплитуды и вакуумного состояния. В этом можно убедиться на простых примерах: вычисления дисперсии флюктуаций квадратур когерентного состояния, которые окажутся такими же, как у вакуумного состояния; вычисления дисперсии фотонных флюктуаций $\langle \Delta n^2 \rangle$ при описании прохождения когерентным светом светофильтра, и т. п. В силу этого свойства любое когерентное состояние $|z\rangle$ можно представить как результат действия оператора смещения (17.30) на вакуум:

$$|z\rangle = \hat{D}(z)|0\rangle, \quad (17.52)$$

а оператор смещения, как известно, изменяет лишь среднюю амплитуду поля.

Итак, флюктуационной составляющей когерентного поля $\Delta E_{in}(\vec{r}, t)$ в дальнейшем мы припишем свойства вакуумных флюктуаций. Это не относится к флюктуационной составляющей внутреннего поля

$$\Delta E(\vec{r}_\perp, t) = E(\vec{r}_\perp, t) - \langle E(\vec{r}_\perp, t) \rangle, \quad (17.53)$$

вычисление свойств которой и является целью рассматриваемой задачи.

Интенсивность флюктуаций полагаем незначительной по сравнению с интенсивностью регулярной составляющей. При этом, преигнорировав флюктуациями для невозмущенного поля, в стационарном случае имеем

$$\sqrt{2\alpha}\langle E_{in} \rangle = [\alpha - i(\varphi_l + \chi l|\langle E \rangle|^2)]\langle E \rangle, \quad (17.54)$$

откуда следует связь между регулярными составляющими внешнего и внутренних полей.

Для средних интенсивностей $\bar{I} = |\langle E \rangle|^2$ и $\bar{I}_{in} = |\langle E_{in} \rangle|^2$ имеем

$$2\alpha\bar{I}_{in} = [\alpha^2 + (\varphi_l + \chi l\bar{I})^2]\bar{I}. \quad (17.55)$$

При условиях

$$\begin{cases} \varphi_l\varepsilon_2 > 0, \\ |\varphi_l| > \sqrt{3}\alpha, \end{cases} \quad (17.56)$$

передаточная функция, т. е. $\bar{I}(\bar{I}_{in})$, имеет S-образный вид, и мы имеем дело с так называемой *низкопороговой бистабильностью*, когда имеются две устойчивые (стабильные) области возбуждения интерферометра. Это самостоятельная очень интересная область исследований, более подробное рассмотрение которой уело бы нас, однако, далеко от рассматриваемой задачи. Ограничимся, поэтому, лишь ссылками, например, на [63] и цитируемую в [61] литературу. Приведем также простые качественные соображения, которые проясняют рассматриваемый нами эффект подавления флуктуаций $\Delta E_{in}(\vec{r}, t)$.

Амплитуда поля в резонаторе зависит от фазовой расстройки φ , которая, в свою очередь, сама зависит от интенсивности. Так вот, возможен такой нерезонансный режим, когда увеличение интенсивности как внутреннего, так и внешнего поля приводит за счет нелинейной фазы φ_{nl} к еще большему удалению от резонанса, так что интенсивность поля в резонаторе практически не увеличивается. И наоборот, флуктуационное уменьшение интенсивности сдвигает фазу в сторону приближения к резонансу, и интенсивность внутри интерферометра опять же остается практически неизменной. Это возможно на устойчивой области передаточной функции. Сейчас мы в этом убедимся формально.

Подставим разложение на среднюю и флуктуационную составляющие (17.51) и (17.53) в исходное уравнение (17.46) и произведем линеаризацию по флуктуациям, т. е. оставим только линейные по флуктуациям члены, пренебрегая квадратичными и более высоких порядков. Получим

$$\left(\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{i}{2k} \Delta_{\perp} \right) \Delta E(\vec{r}_{\perp}, t) - i\chi \left[\langle E \rangle^2 \Delta E^*(\vec{r}_{\perp}, t) + 2|\langle E \rangle|^2 \Delta E(\vec{r}_{\perp}, t) \right] + \\ + \frac{1}{l} \left[(\alpha - i\varphi_l) \Delta E(\vec{r}_{\perp}, t) - \sqrt{2\alpha} \Delta E_{in}(\vec{r}_{\perp}, t) \right] = 0. \quad (17.57)$$

Поскольку это уравнение линейно по флуктуациям, комплексные амплитуды можно заменить соответствующими операторами в представлении Гейзенberга:

$$\Delta E(\vec{r}_{\perp}, t) \rightarrow \Delta \hat{E}^{(+)}(\vec{r}_{\perp}, t), \\ \Delta E^*(\vec{r}_{\perp}, t) \rightarrow \Delta \hat{E}^{(-)}(\vec{r}_{\perp}, t). \quad (17.58)$$

Здесь $\Delta \hat{E}^{(+)}(\vec{r}_{\perp}, t)$ — так называемый *положительно-частотный оператор* электрического поля, а $\Delta \hat{E}^{(-)}(\vec{r}_{\perp}, t)$ — *отрицательно-частотный* (см., например, [13]). Их природа и свойства выявляются

из спектрального разложения по плоским модам, аналогичного интегралу Фурье:

$$\Delta \hat{E}^{(+)}(\vec{r}_\perp, t) = \aleph \int_{-\omega}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{a}(\vec{k}_\perp, \Omega) e^{-i(\vec{k}_\perp \cdot \vec{r}_\perp + \Omega t)} d^2 \vec{k}_\perp d\Omega, \quad (17.59)$$

$$\Delta \hat{E}^{(-)}(\vec{r}_\perp, t) = \aleph \int_{-\omega}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{a}^+(\vec{k}_\perp, \Omega) e^{i(\vec{k}_\perp \cdot \vec{r}_\perp + \Omega t)} d^2 \vec{k}_\perp d\Omega, \quad (17.60)$$

где $\hat{a}(\vec{k}_\perp, \Omega)$ и $\hat{a}^+(\vec{k}_\perp, \Omega)$ — уже известные нам операторы, соответственно, уничтожения и рождения фотона плоской моды, определяемой поперечной составляющей волнового вектора \vec{k}_\perp — новой переменной преобразования Фурье, и частотной отстройкой Ω от несущей ω , поскольку флуктуации, разумеется, немонокроматичны, в отличие от регулярной составляющей поля. Нормировочный коэффициент \aleph , строго говоря, слабо зависит от Ω , но мы этим пренебрегаем. Обратим внимание на изменение знака подынтегральной экспоненты (17.60) по сравнению с (17.59), что и объясняет название положительно- и отрицательно-частотных операторов.

Коммутационные соотношения для операторов уничтожения и рождения фотона в случае непрерывного по \vec{k}_\perp и Ω разложения (17.59), (17.60) имеют вид:

$$[\hat{a}(\vec{k}_\perp, \Omega), \hat{a}^+(\vec{k}'_\perp, \Omega')] = \delta(\vec{k}_\perp - \vec{k}'_\perp, \Omega - \Omega'), \quad (17.61)$$

$$[\hat{a}(\vec{k}_\perp, \Omega), \hat{a}(\vec{k}'_\perp, \Omega')] = [\hat{a}^+(\vec{k}_\perp, \Omega), \hat{a}^+(\vec{k}'_\perp, \Omega')] = 0, \quad (17.62)$$

где $\delta(\vec{k}_\perp - \vec{k}'_\perp, \Omega - \Omega') = \delta(\vec{k}_\perp - \vec{k}'_\perp) \delta(\Omega - \Omega')$ — трехмерная δ -функция Дирака.

Соотношение (17.61) показывает, что разные моды с несовпадающими \vec{k}_\perp и (или) Ω , будучи независимыми степенями свободы поля, разумеется, коммутируют.

Подстановка разложений (17.59), (17.60) в (17.57) с учетом замены (17.58) дает систему двух линейных уравнений, которую удобно представить в матричном виде:

$$M \begin{pmatrix} \hat{a}(\vec{k}_\perp, \Omega) \\ \hat{a}^+(-\vec{k}_\perp, -\Omega) \end{pmatrix} = \sqrt{2\alpha} \begin{pmatrix} \hat{a}_{in}(\vec{k}_\perp, \Omega) \\ \hat{a}_{in}^+(-\vec{k}_\perp, -\Omega) \end{pmatrix}, \quad (17.63)$$

где матрица

$$M = \begin{pmatrix} -i\Omega T + ik_{\perp}^2 l/2k - i(\varphi + \varphi_{nl}) + \alpha & -i\varphi_{nl}e^{-i2\theta} \\ i\varphi_{nl}e^{i2\theta} & -i\Omega T - ik_{\perp}^2 l/2k + i(\varphi + \varphi_{nl}) + \alpha \end{pmatrix}. \quad (17.64)$$

Здесь $T = \frac{l}{v}$ — время однократного полного обхода резонатора, $k_{\perp} = |\vec{k}_{\perp}|$ — длина вектора \vec{k}_{\perp} , а θ — фаза регулярной составляющей:

$$\langle \hat{E}^{(+)} \rangle = |\langle \hat{E}^{(+)} \rangle| e^{-i\theta}, \quad (17.65)$$

которую без ограничения общности рассмотрения можно положить равной нулю.

Прежде чем записать решение системы (17.63), перейдем к полю на выходе интерферометра:

$$\hat{E}_{out}^{(+)}(\vec{r}_{\perp}, t) = \sqrt{2\alpha} \hat{E}^{(+)}(\vec{r}_{\perp}, t) - \hat{E}_{in}^{(+)}(\vec{r}_{\perp}, t), \quad (17.66)$$

которое состоит из выходящего из интерферометра излучения (первое слагаемое) и отраженного от выходного зеркала падающего излучения («in») с практически единичным коэффициентом отражения и фазовым набегом π , изменяющим знак $\hat{E}_{in}^{(+)}$. Для регулярной и флуктуационной составляющих выходного поля соотношения аналогичны (17.66) в силу его линейности.

Обратим внимание на следующую тонкость. При отражении от плоского зеркала декартова система координат, образующая правую тройку, превращается в левую. В этом легко убедиться, построив изображение трех ортогональных ортов в плоском зеркале. Поэтому для того чтобы за один обход резонатора совершился полный цикл, зеркал в кольцевом резонаторе должно быть четное число, иначе после однократного обхода резонатора электрическое поле, описываемое правой тройкой, будет описываться левой. По этой причине на рис. 17.11 четыре отражающие поверхности. Кроме того, координатные орты отраженного от выходного зеркала излучения $-\hat{E}_{in}^{(+)}(\vec{r}_{\perp}, t)$ должны совпадать с ортами выходящего $\sqrt{2\alpha} \hat{E}^{(+)}(\vec{r}_{\perp}, t)$, что и выполняется в схеме на рис. 17.11: и в том, и другом случае они образуют левую тройку.

Итак, решение системы уравнений (17.63) с учетом (17.66) можно записать в виде:

$$\hat{a}_{out}(\vec{k}_{\perp}, \Omega) = \mu(\vec{k}_{\perp}, \Omega) \hat{a}_{in}(\vec{k}_{\perp}, \Omega) + \nu(\vec{k}_{\perp}, \Omega) \hat{a}_{in}^{+}(-\vec{k}_{\perp}, -\Omega), \quad (17.67)$$

где $\mu(\vec{k}_\perp, \Omega)$ и $\nu(\vec{k}_\perp, \Omega)$ — комплекснозначные функции:

$$\mu(\vec{k}_\perp, \Omega) = \frac{2\alpha[\alpha - i\Omega T - ik_\perp^2 l/2k + i(\varphi + \varphi_{nl})]}{(\alpha - i\Omega T)^2 + (k_\perp^2 l/2k - \varphi_l)^2 - 4\varphi_{nl}(k_\perp^2 l/2k - \varphi_l) + 3\varphi_{nl}^2} - 1, \quad (17.68)$$

$$\nu(\vec{k}_\perp, \Omega) = \frac{i2\alpha\varphi_{nl}e^{-i2\theta}}{(\alpha - i\Omega T)^2 + (k_\perp^2 l/2k - \varphi_l)^2 - 4\varphi_{nl}(k_\perp^2 l/2k - \varphi_l) + 3\varphi_{nl}^2}. \quad (17.69)$$

Преобразование входного поля (17.67) аналогично уже рассмотренному нами параметрическому преобразованию (11.69). В выходном поле происходит смещение различных компонент — плоских мод $\{\vec{k}_\perp, \Omega\}$ — с отраженным когерентным источником внешнего излучения, который можно рассматривать как когерентный гетеродин. Поскольку фаза выходящего из интерферометра излучения может отличаться от фазы этого отраженного излучения гетеродина, при оптимальном их сочетании можно надеяться на получение субпуассоновского света в некотором спектральном интервале частот Ω . Ведь сбивая излучение гетеродина на частоте ω с выходящим из интерферометра излучением, отстроенным от ω на величину $\pm\Omega$, получим биения на этой частоте Ω . Если детектировать выходное поле фотоприемником, то спектр фототока как раз и будет соответствовать этим биениям.

Аналогично две плоские моды с $\pm\vec{k}_\perp$ образуют неизменную в процессе распространения полосатую структуру, т. е. тоже «сбиваются» между собой (см., например, [64], с. 27).

Далее мы без вывода приведем выражение спектральной плотности шумов фототока при регистрации сформированного выходного поля, ограничившись лишь необходимыми ссылками [62, 65, 66]:

$$\langle \Delta i^2(\vec{k}_\perp, \Omega) \rangle = \langle i \rangle \{ 1 - \eta + \eta [(|\mu| + |\nu|)^2 \cos^2 \psi + (|\mu| - |\nu|)^2 \sin^2 \psi] \}, \quad (17.70)$$

$$\psi(\vec{k}_\perp, \Omega) = \frac{1}{2} \arg\{\mu(\vec{k}_\perp, \Omega)\nu(-\vec{k}_\perp, -\Omega)\} - \arg\{\langle \hat{a}_{out} \rangle\}. \quad (17.71)$$

Здесь $\langle i \rangle$ — средний фототок, определяемый регулярной составляющей, η — квантовая эффективность. Предполагается, что излучение детектируется под разными углами к оптической оси z , т. е. при разных значениях \vec{k}_\perp , в совокупности дающих угловой спектр фототока, и на разных частотах биений Ω .

Отметим две важные особенности (17.70).

Во-первых, в отсутствие ФСМ, когда $\nu = 0$, а $|\mu| = 1$, имеем $\langle \Delta i^2(\vec{k}_\perp, \Omega) \rangle = \langle i \rangle$, т. е. дробовой шум обычного когерентного источника света с пуассоновской статистикой фотонов и фотоотсчетов.

Во-вторых, максимальное подавление дробового шума, т. е. минимальная дисперсия $\langle \Delta i^2(\vec{k}_\perp, \Omega) \rangle$ достигается при $\eta = 1$. Снижение квантовой эффективности «портит» даже самый идеальный субпуассоновский свет. А при $\eta \rightarrow 0$ вновь приходим к пуассоновской статистике с $\langle \Delta i^2(\vec{k}_\perp, \Omega) \rangle \rightarrow \langle i \rangle$. Какой физический смысл этого эффекта? Вернемся к рис. 17.7б, где приведена регулярная последовательность равномерных фотоотсчетов при детектировании идеального субпуассоновского света с $\langle \Delta n^2 \rangle \rightarrow 0$ идеальным детектором с $\eta = 1$. Что произойдет при снижении квантовой эффективности η ? Детектор начнет пропускать некоторые фотоотсчеты, причем случайным непредсказуемым образом. Из правильной «гребенки» на рис. 17.7б случайно будут «выломаны» некоторые зубья и чем больше, тем менее она будет регулярной. В пределе $\eta \rightarrow 0$ статистика зубьев «щербатой» гребенки станет пуассоновской. В этом легко убедиться и чисто формально, подсчитав, например, дисперсию фотонных флуктуаций фокусного состояния света после того, как он пройдет светоделитель. Выбрав один из двух выходных каналов светоделителя и уменьшая коэффициент передачи света в этот канал от единицы до нуля, получим монотонный рост дисперсии $\langle \Delta n^2 \rangle$ от нуля до $\langle n \rangle$.

Итак, в идеальном субпуассоновском свете при идеальном детекторе, а лучше — матрице детекторов, чтобы можно было регистрировать двумерные изображения, $\langle \Delta i^2(\vec{k}_\perp, \Omega) \rangle$ должна быть нулевой во всем спектрально-угловом спектре $\{\vec{k}_\perp, \Omega\}$. Фактически же для рассматриваемого нелинейного интерферометра, согласно расчетам, проведенным по формулам (17.68)–(17.71), получается спектральная плотность фототока как на рис. 17.12. Он построен для $\varphi = -5\alpha$ и $\frac{d\bar{I}_{in}}{d\bar{I}} = \frac{d|\langle \hat{E}_{in}^+ \rangle|^2}{d|\langle \hat{E}^+ \rangle|^2} = 0.3\alpha$. Проанализируем его, предварительно отметив, что его можно получить и без использования формул (17.70) и (17.71), поскольку в случае $\eta = 1$ можно просто посчитать дисперсию флуктуаций числа фотонов $\langle \Delta n^2(\vec{k}_\perp, \Omega) \rangle$.

На низких частотах $\Omega \approx 0$ дробовой шум практически не подавляется. Но в этом и нет большой беды, так как в низкочастотной области обычно сосредоточены различные технические шумы, как правило, перекрывающие дробовой шум. Иное дело в среднечастотной области: фотонная статистика, особенно при малых \vec{k}_\perp , становится

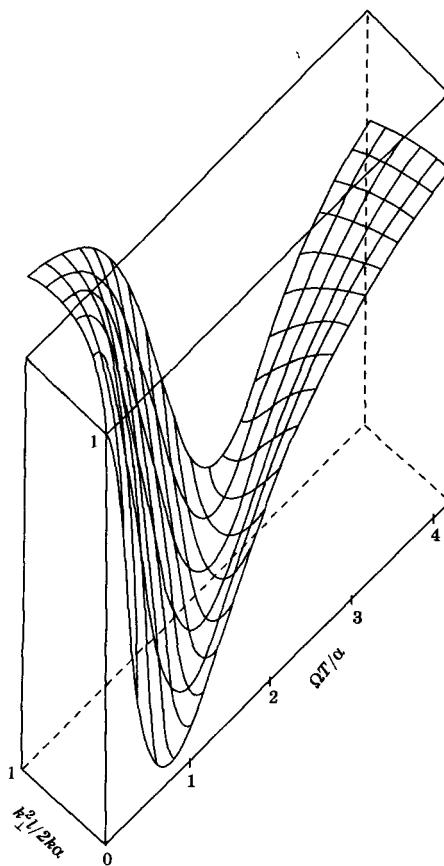


Рис. 17.12. График спектральной плотности шума фототока в режиме прямого детектирования излучения, выходящего из резонатора. Единице соответствует уровень дробового шума. $\eta = 1$

глубоко субпуассоновской. Эффективность подавления квантового шума может превышать один порядок. Однако на высоких частотах шум увеличивается. Почему?

Дело в том, что многолучевой интерферометр представляет собой инерционную систему с постоянной времени порядка T/α . Это так называемое *среднее время удержания фотона резонатором*. На быстрые шумовые осцилляции входного поля интерферометр не успевает среагировать, так как для стабилизации требуется мно-

гократное обхождение излучением резонатора. Этим и объясняется увеличение спектральной плотности шумов при $\Omega > T/\alpha$.

Отметим еще одну возможность снижения шумов фотодетектирования. В принципе можно выходное излучение интерферометра смешать с еще одним излучением гетеродина с таким пространственно-частотным спектром, что его фазовая характеристика, т. е. $\arg \{\langle \hat{a}_{out}(\vec{k}_\perp, \Omega) \rangle\}$ в (17.71), давала бы максимальное подавление шума, т. е. минимизацию $\langle \Delta i^2(\vec{k}_\perp, \Omega) \rangle$. Использованное нами линеаризованное описание приближенно дает тело неопределенности в виде эллипса. Для различных спектральных компонент $\{\vec{k}_\perp, \Omega\}$ этот эллипс различным образом ориентирован на фазовой плоскости, и оптимальный подбор фазы гетеродина позволяет минимизировать спектр шума $\langle \Delta i^2(\vec{k}_\perp, \Omega) \rangle$. Результат такой минимизации представлен на рис. 17.13. Фактически он иллюстрирует эффект приготовления квантового сжатого состояния света в пространстве и во времени с предельно возможной эффективностью для тех же значений параметров, что и на рис. 17.12. При этом почти полное подавление шума вблизи нуля является лишь издержкой линеаризованного приближения, которое в этой области теряет адекватность.

Отметим сравнительную простоту рассмотренного пассивного пространственно-временного фильтра квантовых шумов когерентного источника света и его потенциально высокую эффективность. Представленные на графиках 17.12 и 17.13 результаты являются лишь примером. Возможна их дальнейшая оптимизация как варьированием режимов работы, так и подбором наилучшей формы зеркал резонатора.

Интересно также следующее обстоятельство. Не только квантовые, но и классические флуктуации интенсивности можно подавлять в рассмотренном интерферометре в силу идентичности результатов квантового и классического описания линейных и линеаризованных систем в пределах адекватности такой линеаризации. При этом интерферометр работает в режиме насыщения, т. е. на пологом горизонтальном участке S-образной передаточной функции: приращение интенсивности на входе ведет к существенно меньшему приращению выходной интенсивности. Если же стабилизация классических шумов в нелинейных системах с насыщением может распространяться и на область квантовых флуктуаций, то целесообразно рассмотреть различные виды стабилизаторов на предмет использования их для приготовления субпуассоновских состояний. Действительно, при нелинейном двухфотонном поглощении, а также при генерации

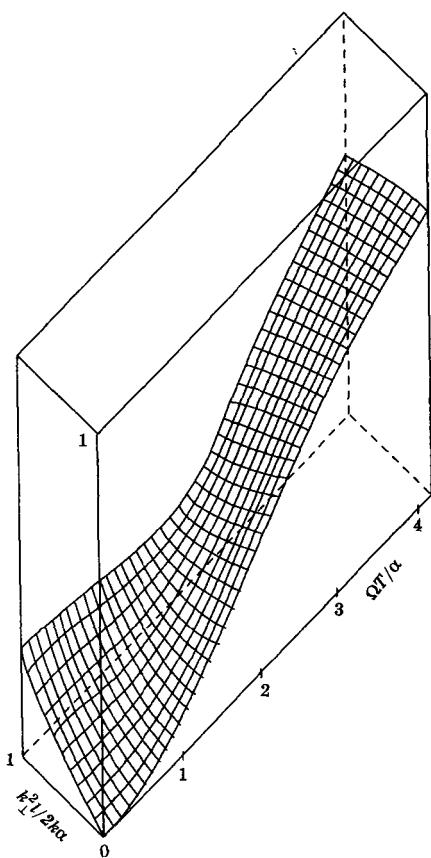


Рис. 17.13. График спектральной плотности шума фототока в режиме оптимального гетеродинирования излучения, выходящего из резонатора.
Единице соответствует уровень дробового шума. $\eta = 1$

второй и высших гармоник, сопровождаемой насыщением накачки, возможно снижение дисперсии фотонных флуктуаций $\langle \Delta n^2 \rangle$ (см., например, [67, 68, 69]). Дело в том, что в этих процессах изъятие фотонов из исходного пучка накачки происходит парами, тройками — при генерации третьей гармоники — и т. п. Прорежение пучка происходит в местах наибольшей концентрации фотонов, т. е. во флуктуационных всплесках интенсивности. В результате эти всплески сглаживаются и поток фотонов становится более регулярным, приближаясь к изображенному на рис. 17.7б. К сожалению, эффективность

подавления фотонных флуктуаций в этих нелинейных процессах невысока.

Еще один пример — абсорбционная оптическая бистабильность системы двухуровневых атомов в резонаторе [70], при которой нижней ветви гистерезисного цикла зависимости пропускания такого резонатора от интенсивности соответствует амплитудная стабилизация света. Механизм тут простой: вначале увеличение интенсивности света (начиная с нуля) на входе ведет к возбуждению двухуровневых атомов — переходу их с нижнего уровня на верхний. При этом и происходит стабилизация флуктуаций интенсивности. Субпуассоновский свет в таких системах получен экспериментально.

Насыщение, однако, не всегда сопровождается снижением фотонных флуктуаций $\langle \Delta n^2 \rangle$. Например, насыщение активной среды лазера при превышении порога генерации не приводит к амплитудной стабилизации квантовых флуктуаций: статистика фотонов в лучшем случае остается пуассоновской [71, 72, 73, 74]. Ведь когерентное состояние $|z\rangle$ генерируется лишь в идеальном одномодовом лазере, дающем когерентную моду с постоянной фазой, чего трудно достичь на практике (см., напр., [17]). Однако не диффузия фазы портит фотонную статистику, а то, что механизм насыщения активной среды аналогичен механизму однофотонных диссипативных потерь, губительно сказывающихся на эффективности подавления фотонных флуктуаций ниже уровня когерентного состояния с пуассоновской статистикой аналогично губительному действию на субпуассоновский свет потерь в фотодетекторе с квантовой эффективностью $\eta < 1$.

Итак, универсального правила, описывающего влияние насыщения на квантовые шумы, нет.

Вернемся к нелинейному самовоздействию. Рассмотрим еще одну систему с насыщением (рис. 17.14), представляющую собой границу раздела линейного и нелинейного диэлектриков. Последний обладает кубичной нелинейностью, обусловливающей зависимость показателя преломления от интенсивности излучения. Коэффициенты пропускания и отражения такой границы раздела изменяются с изменением интенсивности и возможны режимы насыщения. При этом совершенно неважно на какой длине происходит самовоздействие. Поэтому устройство может быть компактным и простым, но в то же время достаточно эффективным, что делает его интересным объектом исследования [44, 75, 76].

Рассмотрим вначале случай, когда линейный диэлектрик предшествует нелинейному. При этом показатель преломления второго

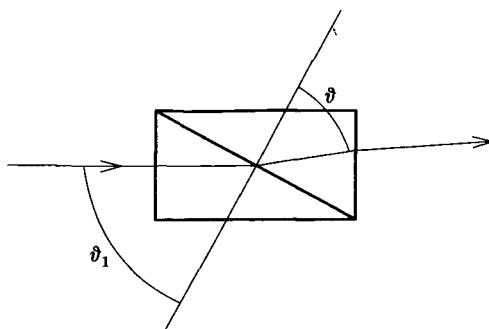


Рис. 17.14. Схема нелинейного насыщающегося элемента, преобразующего проходящий через него поток фотонов. Показаны углы падения и преломления луча на границе раздела диэлектриков, один из которых нелинейный

диэлектрика n_2 в рабочем режиме, т. е. с учетом нелинейной добавки, должен превышать показатель преломления первого n_1 :

$$n_2 > n_1. \quad (17.72)$$

При увеличении интенсивности излучения увеличивается и n_2 , следовательно, увеличивается коэффициент отражения границы раздела, а коэффициент пропускания снижается. Таким образом, происходит насыщение или «запирание» системы, приводящее к стабилизации интенсивности. Если амплитуда флюктуаций существенно меньше постоянной составляющей сигнала, как это имеет место в случае когерентного излучения одномодового лазера, эта стабилизация распространяется и на квантовые флюктуации, поскольку при этом адекватно линеаризованное по флюктуациям рассмотрение, и преобразование квантовых флюктуаций в представлении Гейзенберга можно описывать так же, как классических. Квантовая специфика при этом сводится лишь к использованию вектора квантового состояния на входе — когерентного состояния $|z_1\rangle$.

В этой задаче мы вновь возвращаемся к одномодовому рассмотрению, не учитывая пространственных эффектов. Пусть границу раздела, в идеале — безграничную — освещает когерентная мода с плоским волновым фронтом. В случае линейной ее поляризации с ориентацией вектора электрического поля перпендикулярно плоскости чертежа (рис. 17.14), амплитудный коэффициент отражения

(см., напр., [77]) равен

$$r = - \frac{\sin(\vartheta_1 - \vartheta)}{\sin(\vartheta_1 + \vartheta)}. \quad (17.73)$$

Пусть $|z_1|^2 \gg 1$, т. е. мода достаточно интенсивная, и среднее число фотонов в моде, прошедшей границу раздела, велико:

$$|z_1|^2 = \langle z_1 | \hat{n} | z_1 \rangle = \langle z_1 | \hat{a}^+ \hat{a} | z_1 \rangle \gg \sqrt{\langle z_1 | \Delta \hat{n}^2 | z_1 \rangle}, \quad (17.74)$$

где $\Delta \hat{n}^2 = \hat{a}^+ \hat{a} \hat{a}^+ \hat{a} - \langle z_1 | \hat{n} | z_1 \rangle^2$, тогда коэффициент пропускания границы раздела τ можно линеаризовать по флукутациям:

$$\tau \approx \langle \tau \rangle + \Delta n \frac{d\tau}{dn}. \quad (17.75)$$

Нелинейный отклик, как и всюду ранее, положим мгновенным, а под Δn будем понимать классический аналог оператора $\Delta \hat{n}$.

Заметим, что

$$\frac{d\tau}{dn} = \frac{d\tau}{dn_2} \frac{dn_2}{dn} = \chi \frac{d\tau}{dn_2}, \quad (17.76)$$

где χ — коэффициент, пропорциональный кубичной нелинейности второго диэлектрика.

Полагая амплитудный коэффициент пропускания действительным, согласно (17.73), имеем

$$\tau^2 = 1 - r^2 = \frac{\sin^2(\vartheta_1 + \vartheta) - \sin^2(\vartheta_1 - \vartheta)}{\sin^2(\vartheta_1 + \vartheta)} = \frac{\sin 2\vartheta \sin 2\vartheta_1}{\sin^2(\vartheta_1 + \vartheta)}. \quad (17.77)$$

Поскольку

$$\tau d\tau = -rdr, \quad (17.78)$$

запишем

$$\frac{d\tau}{\tau} = -\frac{r}{\tau^2} dr = -\frac{r}{1-r^2} dr = -\frac{\sin^2(\vartheta_1 + \vartheta)}{\sin 2\vartheta \sin 2\vartheta_1} rdr. \quad (17.79)$$

В соответствии с законом преломления

$$n_1 \sin \vartheta_1 = n_2 \sin \vartheta, \quad (17.80)$$

имеем

$$\frac{d\vartheta}{dn_2} = -\frac{\sin \vartheta}{n_2 \cos \vartheta}. \quad (17.81)$$

Теперь найдем

$$\frac{dr}{dn_2} = \frac{dr}{d\vartheta} \frac{d\vartheta}{dn_2}. \quad (17.82)$$

Поскольку, согласно (17.73),

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\vartheta} &= \frac{\sin(\vartheta_1 + \vartheta) \cos(\vartheta_1 - \vartheta) + \sin(\vartheta_1 - \vartheta) \cos(\vartheta_1 + \vartheta)}{\sin^2(\vartheta_1 + \vartheta)} = \\ &= \frac{\sin 2\vartheta_1}{\sin^2(\vartheta_1 + \vartheta)}, \end{aligned} \quad (17.83)$$

имеем

$$\frac{dr}{dn_2} = \frac{dr}{d\tau} \frac{d\tau}{dn_2} = - \frac{\sin \vartheta \sin 2\vartheta_1}{n_2 \cos \vartheta \sin^2(\vartheta_1 + \vartheta)}, \quad (17.84)$$

следовательно, с учетом (17.77),

$$\frac{2dr}{(1 - r^2)dn_2} = - \frac{1}{n_2 \cos^2 \vartheta}. \quad (17.85)$$

Теперь запишем

$$\frac{2}{\tau} \frac{d\tau}{dn_2} = - \frac{\sin(\vartheta_1 - \vartheta)}{n_2 \cos^2 \vartheta \sin(\vartheta_1 + \vartheta)}. \quad (17.86)$$

Здесь мы учли (17.79) и (17.85). Это выражение нам потребуется в дальнейшем.

Представим комплексную амплитуду моды прошедшего границу раздела излучения в виде

$$a = (\langle a \rangle + \Delta a) e^{-i\Delta\Phi}. \quad (17.87)$$

Здесь Δa и $\Delta\Phi$ представляют собой флюктуационные составляющие амплитуды и фазы. Фаза постоянной составляющей амплитуды взята равной нулю. Нормировку комплексной амплитуды можно произвести так, чтобы она соответствовала нормировке оператора уничтожения фотона, при которой $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{I}$. Для линеаризованного по флюктуациям приближения это, конечно, безразлично, но при такой нормировке дальнейший переход к квантовому описанию будет более органичным.

С другой стороны, комплексную амплитуду a можно представить как

$$a = \tau a_1 + r a_{vacuum}, \quad (17.88)$$

где a_{vacuum} — амплитуда излучения, поступающего на границу раздела «сверху» (см. рис. 17.14) и имитирующего флюктуации вакуума.

Приравняем правые части (17.87) и (17.88) с учетом (17.75):

$$(\langle a \rangle + \Delta a)e^{-i\Delta\Phi} = \left(\langle \tau \rangle + \Delta n \frac{d\tau}{dn} \right) (z_1 + \Delta a_1) + r a_{vacuum}. \quad (17.89)$$

Здесь $z_1 = \langle a_1 \rangle$, а

$$\Delta n \approx 2\langle a \rangle \Delta a, \quad (17.90)$$

поскольку фаза постоянной составляющей $\langle a \rangle$ взята равной нулю.

Выделим в (17.89) реальные части и удержим только линейные по флуктуациям слагаемые. Решим получившееся уравнение относительно Δa . В силу линейности задачи по флуктуациям, заменим в окончательном выражении комплексные амплитуды флукуационных составляющих соответствующими операторами:

$$\langle \hat{a} \rangle = \langle \tau \rangle z_1, \quad (17.91)$$

$$\Delta \hat{a} = \frac{\langle \tau \rangle (\Delta \hat{a}'_1 + \Delta \hat{a}'^+_1) + \langle r \rangle (\hat{a}'_{vacuum} + \hat{a}'^+_{vacuum})}{2 \left(1 - 2\chi \frac{\langle \hat{n} \rangle}{\langle \tau \rangle} \frac{d\tau}{dn_2} \right)}, \quad (17.92)$$

где $\Delta \hat{a}'_1$ и $\Delta \hat{a}'_{vacuum}$ отличаются от $\Delta \hat{a}_1$ и \hat{a}_{vacuum} фазовым сомножителем $e^{i\Delta\Phi}$, который на конечный результат не повлияет.

Теперь можно вычислить дисперсию флукуаций числа фотонов прошедшего границу раздела излучения:

$$\langle \Delta \hat{n}^2 \rangle \approx 4\langle \hat{n} \rangle \langle \Delta \hat{a}^2 \rangle = \frac{\langle \hat{n} \rangle}{\left(1 - 2\chi \frac{\langle \hat{n} \rangle}{\langle \tau \rangle} \frac{d\tau}{dn_2} \right)^2}. \quad (17.93)$$

Здесь мы используем формулу (17.86), заменив в ней τ на $\langle \tau \rangle$, поскольку мы рассматриваем линеаризованное по флукуациям приближение.

Итак, фактор Фано (17.33), характеризующий эффективность подавления квантовых флукуаций интенсивности по отношению к когерентному состоянию, равен

$$F \triangleq \frac{\langle \Delta \hat{n}^2 \rangle}{\langle \hat{n} \rangle} = \left[1 + \chi \langle \hat{n} \rangle \frac{\sin(\vartheta_1 - \vartheta)}{n_2 \cos^2 \vartheta \sin(\vartheta_1 + \vartheta)} \right]^{-2}. \quad (17.94)$$

Рассуждая строго, для вычисления дисперсии с самого начала необходимо было удерживать и квадратичные по флукуациям слагаемые, однако, как показывают расчеты, они не дают вклада в конечные результаты. Это связано опять же с линеаризацией.

Поскольку флуктуации на выходе линейно связаны с флуктуациями на входе без постоянной составляющей, при вычислении дисперсии флуктуаций (т. е. квадрата флуктуаций), квадратичные по флуктуациям слагаемые на входе домножаются на линейные по флуктуациям слагаемые и сами на себя, а кубичные и четвертого порядка по флуктуациям результирующие члены не учитываются.

В соответствии с (17.94) оптимальное подавление фотонного шума должно достигаться при небольшом отличии показателей преломления друг от друга и углах падения ϑ_1 , близких к углам скользящего режима. Например, при $n_1 = 1.5$, $\langle n_2 \rangle = 1.51$, $\vartheta_1 = 88^\circ$ и нелинейной добавке к показателю преломления $\chi \langle \hat{n} \rangle = 0.1$, что достижимо даже в непрерывном режиме работы освещдающего лазера, если в качестве нелинейного материала взять полупроводник, скажем, InSb или CdS, или жидкокристаллическую структуру [53], с. 70; [78], с 118; [79]. При этом $F \approx 0.08$. Если же режим более скользящий, и $\vartheta_1 = 89^\circ$, то при тех же остальных параметрах достигается выигрыш более чем в 20 раз.

Отметим, что конечность времени установления нелинейного отклика T_{nl} , что особенно заметно в случае жидкокристаллов, приведет к тому, что эффект подавления фотонных флуктуаций будет проявляться в полосе частот, ограниченной сверху частотой $1/T_{nl}$. Действие инерционности среды здесь аналогично влиянию резонатора при генерации в нем субпуассоновских полей. Роль T_{nl} при этом играет среднее время удержания фотона резонатором T/α (см. выше и [80]).

17.2. Другие примеры невозмущающих измерений и приготовления субпуассоновского света

Вернемся к параметрическому рассеянию (рис. 11.1). В невырожденном случае, когда мы можем разделить сигнальную и холостую моды в пространстве (при неколлинеарном взаимодействии) и (или) по частоте (когда $\omega_s \neq \omega_i = \omega_p - \omega_s$), они описываются операторами в представлении Гейзенберга (11.68). Пусть, далее, эффективность параметрического преобразования невысока: $|\chi|t \ll 1$, а на входе холостой моды — вакуум $|0\rangle$. Тогда можно невозмущающим образом измерить интенсивность сигнала, если она достаточно велика: $\langle \hat{n}_s \rangle \gg 1$. Это условие выполняется, например, для лазерного света. При этом согласно (11.68),

$$\langle \hat{n}_s(t) \rangle \approx \langle \hat{a}_s^+(t_0) \hat{a}_s(t_0) \rangle + (|\chi|t)^2 \approx \langle \hat{n}_s(t_0) \rangle, \quad (17.95)$$

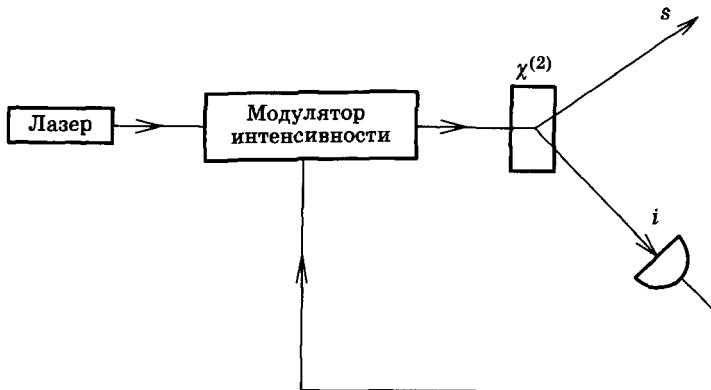


Рис. 17.15. Параметрический преобразователь — нелинейный кристалл с квадратичной нелинейностью $\chi^{(2)}$ — приготавливает сигнал в субпуассоновском состоянии, если управлять интенсивностью накачки в зависимости от интенсивности холостой моды

т. е. среднее число фотонов сигнала остается неизменным, а

$$\langle \hat{n}_i(t) \rangle \approx (|\chi|t)^2 (\langle \hat{n}_s \rangle + 1) \approx (|\chi|t)^2 \langle \hat{n}_s \rangle. \quad (17.96)$$

Итак, измеряя интенсивность холостой моды, например, детектором с квантовой эффективностью η , можно определить среднюю интенсивность сигнала:

$$\langle \hat{n}_s \rangle \approx \frac{\langle \hat{n}_i(t) \rangle}{\eta(|\chi|t)^2}, \quad (17.97)$$

не изменяя ее.

С параметрическим рассеянием можно придумать и другие схемы невозмущающих измерений, использующих связь между сигнальной и холостой модами, например, для измерения квадратурной компоненты сигнала. С некоторой натяжкой сюда можно отнести и эффект так называемой *квантовой телепортации*, когда состояние поляризации одного фотона переносится на другой (см., напр., [81] и цитируемую там литературу).

Интересна и возможность приготовления субпуассоновского света при помощи параметрического преобразователя и системы обратной связи [59], иллюстрируемая рисунком 17.15.

Если на входе нелинейного кристалла мощная лазерная накачка и вакуум, то, согласно (11.68), интенсивности сигнальной \hat{n}_s и

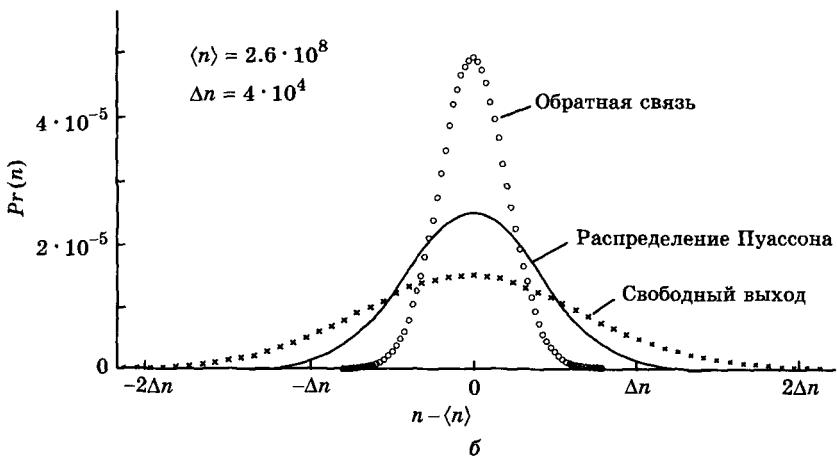
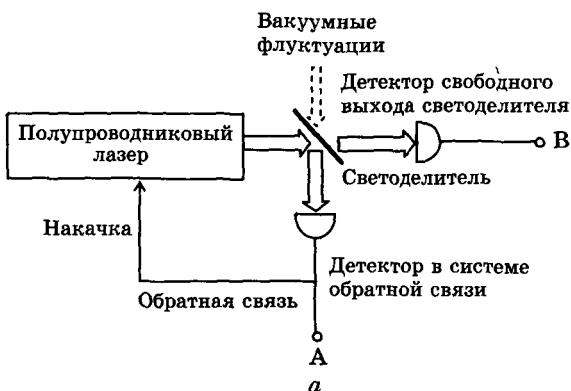


Рис. 17.16. Экспериментальная установка для снижения фотонных флуктуаций в системе с отрицательной обратной связью (a); фотопоток петли обратной связи (A) дает уменьшенный (субпуассоновский) шум, тогда как уровень шума на другом выходе светоделителя (B) увеличивается по отношению к пуассоновскому. Распределения плотностей вероятностей фотоотсчетов показаны на (б)

холостой \hat{n}_i мод равны. Измеряя интенсивность последней, можно воздействовать на накачку, уменьшая ее при всплеске \hat{n}_i и увеличивая в противоположном случае — провала \hat{n}_i . Сигнал при этом будет субпуассоновским, правда в полосе частот, ограниченной быстродействием петли обратной связи.

В этой связи интересно рассмотреть систему с обратной связью, использующую простой светоделитель вместо параметрического преобразователя (см. рис. 17.16) [59]. Интенсивность света полупроводникового лазера управляется за счет обратной связи, фототок в которой в результате приобретает субпуассоновскую статистику фотоотсчетов. Однако на другом, свободном выходе светоделителя, статистика фотоотсчетов при этом становится суперпуассоновской, т. е. флуктуации, как ни странно, увеличиваются. С одной стороны, это связано с тем, что фотон не может одновременно пойти по двум выходным каналам светоделителя, и если он пошел вниз, то направо будет дефицит фотонов. Система же с обратной связью этот дефицит еще более усугубит, поскольку уменьшит интенсивность лазерного света за счет вновь поступившего фотона.

С другой стороны, отраженные светоделителем вакуумные флуктуации никак не стабилизируются системой, препятствуя стабилизации интенсивности на свободном выходе (см. рис. 17.16).

В заключение рассмотрим простой и эффективный способ приготовления субпуассоновского света с использованием электронной стабилизации тока накачки полупроводникового лазера [59, 82].

В обычном ламповом диоде электроны, отталкиваясь друг от друга тем сильнее, чем они друг к другу ближе, выстраиваются в равномерную цепочку. Электрический ток, проходящий через диод, при этом становится субпуассоновским. Вот этот ток и является током накачки полупроводникового лазера, т. е. квантовое состояние электронов переходит в субпуассоновское состояние фотонов, разумеется, при достаточно высокой эффективности преобразования электронов в фотоны. При прямом детектировании авторами [59] достигнуто подавление мощности шума на 20 ÷ 30% по отношению к уровню дробового шума.

ГЛАВА 18

Представление Вигнера и квантовая томография

При рассмотрении теоремы Белла мы убедились в том, что квантовые эффекты не могут быть адекватно описаны никакой совокупностью скрытых параметров, предопределяющих исход эксперимента. Поэтому максимально информативным представлением квантовой системы является ее матрица или оператор плотности $\hat{\rho}$. Нет ли других альтернатив? Оказывается, есть: это двумерное совместное распределение координаты и импульса $W(q, p)$, называемое *представлением Вигнера* [83].

Интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} W(q, p) dp$ дает в случае чистого состояния волновую функцию в координатном представлении $\psi(q)$, а в более общем случае смешанного состояния

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(q, p) dp = \langle q | \hat{\rho} | q \rangle. \quad (18.1)$$

При повороте ортогональной системы координат $\{q, p\}$ на угол θ соответствующее координатное вероятностное распределение

$$\begin{aligned} pr(q, \theta) &\stackrel{\Delta}{=} \langle q | \hat{U}(\theta) \hat{\rho} \hat{U}^+(\theta) | q \rangle = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} W(q \cos \theta - p \sin \theta, q \sin \theta + p \cos \theta) dp. \end{aligned} \quad (18.2)$$

Здесь $\hat{U}(\theta) = e^{-i\theta \hat{n}}$ — уже известный нам оператор фазового сдвига (12.4). Интегральное преобразование функции Вигнера, описываемое правой частью соотношения (18.2), представляет собой переход от переменных q и p к переменным q и θ , т. е. переход от декартовой к полярной системе координат. Оно носит название преобразования Радона [84]. В частности, при $\theta = 0$ имеем (18.1), а при $\theta = \pi/2$

правая часть (18.2) равна

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} W(q \cos \theta - p \sin \theta, q \sin \theta + p \cos \theta) dp &= \int_{-\infty}^{\infty} W(-p, q) dp = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} W(-q, p) dq = \int_{-\infty}^{\infty} W(q, p) dq = \langle p | \hat{\rho} | p \rangle \quad (18.3) \end{aligned}$$

или $\psi(p)$ в случае чистого состояния.

Распределение $pr(q, \theta)$ можно измерить экспериментально, например, в схеме балансного гомодинного детектирования (рис. 12.3), изменяя фазу гомодина θ , если под q понимать квадратурную компоненту моды излучения [85]. Задачей *квантовой томографии* является вычисление $W(q, p)$ по результатам этих измерений, то есть по существу — обратное преобразование Радона. Решение этой задачи мы начнем с выяснения свойств функции Вигнера, следуя [20].

Введем *характеристическую функцию*

$$\widetilde{W}(u, v) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W(q, p) e^{-i(uq+vp)} dq dp, \quad (18.4)$$

являющуюся преобразованием Фурье функции Вигнера.

Рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} \widetilde{pr}(\xi, \theta) &\triangleq \int_{-\infty}^{\infty} pr(q, \theta) e^{-i\xi q} dq = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W(q \cos \theta - p \sin \theta, q \sin \theta + p \cos \theta) e^{-i\xi q} dq dp = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W(\underbrace{q \cos \theta - p \sin \theta}_{q'}, \underbrace{q \sin \theta + p \cos \theta}_{p'}) e^{-i\xi q} dq dp = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W(q', p') e^{-i\xi(q' \cos \theta + p' \sin \theta)} dq' dp' = \\ &= \widetilde{W}(\xi \cos \theta, \xi \sin \theta) = \widetilde{W}(u, v). \quad (18.5) \end{aligned}$$

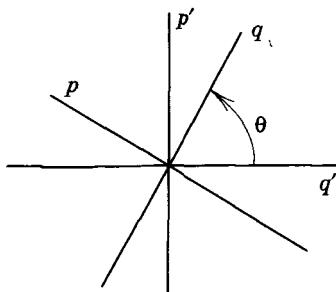


Рис. 18.1. Замена переменных в (18.5) соответствует повороту системы координат на угол θ

В нижней строке этого соотношения произведена замена переменных (см. рис. 18.1)

$$\begin{aligned} q &= q' \cos \theta + p' \sin \theta, \\ p &= -q' \sin \theta + p' \cos \theta, \end{aligned} \quad (18.6)$$

с единичным якобианом:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial q}{\partial q'} & \frac{\partial q}{\partial p'} \\ \frac{\partial p}{\partial q'} & \frac{\partial p}{\partial p'} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix} = 1. \quad (18.7)$$

Согласно (18.5), преобразование Фурье распределения координаты с учетом поворота системы координат на угол θ представляет собой характеристическую функцию в полярных координатах $u = \xi \cos \theta$, $v = \xi \sin \theta$. Таким образом, эти функции имеют взаимно однозначное между собой соответствие.

Если воспользоваться (18.2), то можно записать:

$$\begin{aligned} \tilde{pr}(\xi, \theta) &= \int_{-\infty}^{\infty} \langle q | \hat{U}(\theta) \hat{\rho} \hat{U}^+(\theta) | q \rangle e^{-i\xi q} dq = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \langle q | \hat{U}(\theta) \hat{\rho} \hat{U}^+(\theta) e^{-i\xi \hat{q}} | q \rangle dq = \\ &= \text{tr} \{ \hat{U}(\theta) \hat{\rho} \hat{U}^+(\theta) e^{-i\xi \hat{q}} \} = \\ &= \text{tr} \{ \hat{\rho} \hat{U}^+(\theta) e^{-i\xi \hat{q}} \hat{U}(\theta) \}. \end{aligned} \quad (18.8)$$

Здесь в начале экспонента введена в усредняемое выражение с заменой переменной q на ее оператор \hat{q} , поскольку усреднение производится как раз по координате q , а в нижней строке совершена циклическая перестановка под знаком tr .

Поскольку коммутатор

$$\begin{aligned} [\hat{q}, \hat{n}] &= \frac{[\hat{a} + \hat{a}^+, \hat{a}\hat{a}^+]}{\sqrt{2}} = \frac{(\hat{a}\hat{a}^+ + \hat{a}^+\hat{a}^+\hat{a} - \hat{a}^+\hat{a}\hat{a} - \hat{a}^+\hat{a}\hat{a}^+)}{\sqrt{2}} = \\ &= \frac{(\hat{a}^+\hat{a}\hat{a} + \hat{a} - \hat{a}^+\hat{a}\hat{a} - \hat{a}^+)}{\sqrt{2}} = i\hat{p} \end{aligned} \quad (18.9)$$

ненулевой, переставлять внутреннюю экспоненту в $\hat{U}^+(\theta)e^{-i\xi\hat{q}}\hat{U}(\theta)$ с оператором \hat{U}^+ или \hat{U} нельзя. Разложим ее в степенной ряд:

$$\hat{U}^+(\theta)e^{-i\xi\hat{q}}\hat{U}(\theta) = e^{i\theta\hat{n}} \left[\hat{I} - i\xi\hat{q} + \frac{(-i\xi q)^2}{2!} + \dots \right] e^{-i\theta\hat{n}}. \quad (18.10)$$

При вычислении $e^{i\theta\hat{n}}\hat{q}^m e^{-i\theta\hat{n}} = e^{i\theta\hat{n}}\hat{q}\hat{q}\dots\hat{q}e^{-i\theta\hat{n}}$ допишем между операторами \hat{q} экспоненты противоположных знаков:

$$e^{i\theta\hat{n}}\hat{q}^m e^{-i\theta\hat{n}} = e^{i\theta\hat{n}}\hat{q}e^{-i\theta\hat{n}}e^{i\theta\hat{n}}\hat{q}e^{-i\theta\hat{n}}\dots e^{i\theta\hat{n}}\hat{q}e^{-i\theta\hat{n}}, \quad (18.11)$$

тогда

$$\hat{U}^+(\theta)e^{-i\xi\hat{q}}\hat{U}(\theta) = \exp(-i\xi\hat{U} + \hat{q}\hat{U}) = \exp(-i\hat{q}\xi \cos \theta - i\hat{p}\xi \sin \theta). \quad (18.12)$$

Здесь мы воспользовались (12.12).

Заключительная экспонента (18.12) представляет собой *оператор Вейля*

$$\exp(-iu\hat{q} - iv\hat{p}) \quad (18.13)$$

в полярных координатах [86].

Итак, характеристическая функция

$$\tilde{pr}(\xi, \theta) = \tilde{W}(u, v) = tr(\hat{\rho} \exp(-iu\hat{q} - iv\hat{p})) \quad (18.14)$$

является своего рода «квантовым фурье-преобразованием» оператора плотности. Эта тесная взаимосвязь между матрицей плотности $\hat{\rho}$ и характеристической функцией $\tilde{W}(u, v)$, а следовательно, и самой функцией распределения Вигнера $W(q, p)$, как мы убедимся далее, является взаимно однозначной.

Для вычисления оператора Вейля воспользуемся уже встречавшейся нам операторной формулой Бекера–Хаусдорфа (15.20):

$$e^{\hat{A} + \hat{B}} = e^{-1/2[\hat{A}, \hat{B}]} e^{\hat{A}} e^{\hat{B}}. \quad (18.15)$$

Тогда, при нормировке квадратур, соответствующей $\hbar = 1$, имеем

$$e^{-\imath u\hat{q}-\imath v\hat{p}} = e^{-\imath uv/2} e^{-\imath u\hat{q}} e^{-\imath v\hat{p}}. \quad (18.16)$$

Поскольку

$$|q\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\imath qp} |p\rangle dp, \quad (18.17)$$

оператор $e^{-\imath v\hat{p}}$ сдвигает состояние $|q\rangle$ на величину v :

$$e^{-\imath v\hat{p}} |q\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\imath(q+v)p} |p\rangle dp = |q+v\rangle. \quad (18.18)$$

Итак,

$$\widetilde{W}(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \langle q | \hat{\rho} e^{-\imath u\hat{q}-\imath v\hat{p}} | q \rangle dq = e^{-\imath uv/2} \int_{-\infty}^{\infty} \langle q | \hat{\rho} e^{-\imath uq} | q+v \rangle dq. \quad (18.19)$$

Замена переменной

$$q = x - \frac{v}{2} \quad (18.20)$$

дает симметризацию:

$$\widetilde{W}(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\imath ux} \left\langle x - \frac{v}{2} \left| \hat{\rho} \right| x + \frac{v}{2} \right\rangle dx. \quad (18.21)$$

Итак, зная матрицу плотности $\hat{\rho}$, можно однозначно рассчитать функцию Вигнера

$$\begin{aligned} W(q, p) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \widetilde{W}(u, v) e^{\imath uq+\imath vp} du dv = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \left\langle q' - \frac{v}{2} \left| \hat{\rho} \right| q' + \frac{v}{2} \right\rangle e^{\imath u(q-q')+\imath vp} dq' du dv. \end{aligned} \quad (18.22)$$

Интегрируя по u , получим δ -функцию, умноженную на 2π :

$$W(q, p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(q - q') \left\langle q' - \frac{v}{2} \left| \hat{\rho} \right| q' + \frac{v}{2} \right\rangle e^{\imath vp} dq' dv, \quad (18.23)$$

благодаря фильтрующему свойству которой имеем

$$W(q, p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx} \left\langle q - \frac{x}{2} \left| \hat{\rho} \right| q + \frac{x}{2} \right\rangle dx. \quad (18.24)$$

Легко показать, что функция Вигнера действительна:

$$\begin{aligned} W^*(q, p) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx} \left\langle q + \frac{x}{2} \left| \hat{\rho}^\dagger \right| q - \frac{x}{2} \right\rangle dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx} \left\langle q + \frac{x}{2} \left| \hat{\rho} \right| q - \frac{x}{2} \right\rangle dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx} \left\langle q - \frac{x}{2} \left| \hat{\rho} \right| q + \frac{x}{2} \right\rangle dx = W(q, p) \end{aligned} \quad (18.25)$$

для эрмитова оператора плотности $\hat{\rho}$.

Проверим нормировку:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W(q, p) dq dp &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx} \left\langle q - \frac{x}{2} \left| \hat{\rho} \right| q + \frac{x}{2} \right\rangle dx dq dp = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \left\langle q - \frac{x}{2} \left| \hat{\rho} \right| q + \frac{x}{2} \right\rangle dx dq = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \langle q | \hat{\rho} | q \rangle dq = \text{tr} \hat{\rho} = 1. \end{aligned} \quad (18.26)$$

Таким образом, функция Вигнера формально соответствует поведению совместного распределения вероятностей.

Заменим оператор плотности $\hat{\rho}$ на произвольный оператор \hat{F} и перемножим две функции Вигнера W_1 и W_2 , соответствующие двум операторам \hat{F}_1 и \hat{F}_2 . Проинтегрируем полученное произведение

по q и p :

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ip(x_1+x_2)} \left\langle q - \frac{x_1}{2} \left| \hat{F}_1 \right| q + \frac{x_1}{2} \right\rangle \left\langle q - \frac{x_2}{2} \left| \hat{F}_2 \right| q + \frac{x_2}{2} \right\rangle dx_1 dx_2 dp dq = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle q - \frac{x}{2} \left| \hat{F}_1 \right| q + \frac{x}{2} \right\rangle \left\langle q + \frac{x}{2} \left| \hat{F}_2 \right| q - \frac{x}{2} \right\rangle dq dx = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \langle q' | \hat{F}_1 | q'' \rangle \langle q'' | \hat{F}_2 | q' \rangle dq' dq'' = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle q | \hat{F}_1 \hat{F}_2 | q \rangle dq = \frac{1}{2\pi} \text{tr}(\hat{F}_1 \hat{F}_2), \tag{18.27}
 \end{aligned}$$

откуда

$$\text{tr}(\hat{F}_1 \hat{F}_2) = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_1(q, p) W_2(q, p) dq dp. \tag{18.28}$$

Здесь операторы \hat{F}_1 и \hat{F}_2 в общем случае не обязаны быть эрмитовыми. Однако полагая $\hat{F}_1 = \hat{\rho}$, а $\hat{F}_2 = \hat{F}$, имеем

$$\text{tr}(\hat{\rho} \hat{F}) = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W(q, p) W_F(q, p) dq dp. \tag{18.29}$$

Чем замечательна эта формула? Если считать, что $W_F(q, p)$ описывает некоторую физическую величину, функция Вигнера играет роль функции совместного распределения вероятностей при усреднении как и в классической статистической физике.

Положим далее

$$\hat{F}_1 = \hat{\rho}_1 = |\psi_1\rangle \langle \psi_1|, \quad \hat{F}_2 = \hat{\rho}_2 = |\psi_2\rangle \langle \psi_2|, \tag{18.30}$$

т. е. найдем величину

$$\begin{aligned}
 \text{tr}(\hat{\rho}_1 \hat{\rho}_2) &= \text{tr}(|\psi_1\rangle \langle \psi_1| |\psi_2\rangle \langle \psi_2|) = \\
 &= |\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle|^2 = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_1(q, p) W_2(q, p) dq dp, \tag{18.31}
 \end{aligned}$$

представляющую собой вероятность, соответствующую проекции одного чистого состояния $|\psi_1\rangle$ на другое $|\psi_2\rangle$. Если они ортогональны, то

$$\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = 0. \tag{18.32}$$

Но интеграл в (18.31) не может обнуляться при нормированной согласно (18.26) функции Вигнера $W(q, p) \geq 0$. Это значит, что она должна иногда принимать отрицательные значения! Поэтому, строго говоря, ее следует называть *квазираспределением*, поскольку в классической физике совместная вероятность, конечно, не может быть отрицательной. Области отрицательных значений квазираспределения Вигнера определяют области *неклассического* поведения системы, аналогично элементарным четырехмерным вероятностям (16.14), встретившимся нам в теореме Белла. Ведь и там наблюдавшиеся в экспериментах нарушения неравенств Белла можно формально обосновать отрицательными совместными четырехмерными вероятностями $P_{AA'BB'}(a, a', b, b')$, см., например, [33, 34].

Интересно, что с помощью квазираспределения Вигнера можно количественно оценить «чистоту» состояния квантовой системы, вычислив величину

$$2\pi \iint_{-\infty}^{\infty} W^2(q, p) dq dp = \text{tr}(\hat{\rho}^2) \geq 0. \quad (18.33)$$

Действительно, в чистом состоянии $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$, и

$$\text{tr}(|\psi\rangle\langle\psi||\psi\rangle\langle\psi|) = 1, \quad (18.34)$$

а в смешанном состоянии

$$\hat{\rho} = \sum_m p_m |\psi_m\rangle\langle\psi_m| \quad (18.35)$$

и

$$\text{tr}(\hat{\rho}^2) = \sum_m p_m^2 \leq \sum_m p_m = 1, \quad (18.36)$$

т. е. чем меньше (18.33), тем дальше состояние системы от чистого.

Оценить «чистоту» состояния можно также посчитав *энтропию фон-Неймана*:

$$S \stackrel{\Delta}{=} -\text{tr}(\hat{\rho} \ln \hat{\rho}). \quad (18.37)$$

Она удобна тем, что если у нас есть две неперепутанные подсистемы, так что их общая матрица плотности факторизуется:

$$\hat{\rho} = \hat{\rho}_1 \hat{\rho}_2, \quad (18.38)$$

то их общая энтропия представляет собой сумму энтропий

$$S = S_1 + S_2, \quad (18.39)$$

поскольку

$$\begin{aligned} -\text{tr}[\hat{\rho}_1 \hat{\rho}_2 \ln(\hat{\rho}_1 \hat{\rho}_2)] &= -\text{tr}(\hat{\rho}_1 \hat{\rho}_2 \ln \hat{\rho}_1) - \text{tr}(\hat{\rho}_1 \hat{\rho}_2 \ln \hat{\rho}_2) = \\ &= -\text{tr}(\hat{\rho}_2) \text{tr}(\hat{\rho}_1 \ln \hat{\rho}_1) - \text{tr}(\hat{\rho}_1) \text{tr}(\hat{\rho}_2 \ln \hat{\rho}_2) = S_1 + S_2. \end{aligned} \quad (18.40)$$

Недостатком же энтропии фон-Неймана является то, что ее, как правило, очень трудно посчитать. Приходится использовать разложение логарифма в степенной ряд. Например, при $-1 < x \leq 1$:

$$\ln(1+x) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{x^m}{m} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \quad (18.41)$$

Аналогично

$$\ln \hat{\rho} = (\hat{\rho} - \hat{I}) - \frac{(\hat{\rho} - \hat{I})^2}{2} + \frac{(\hat{\rho} - \hat{I})^3}{3} - \dots, \quad (18.42)$$

или

$$-\ln \hat{\rho} = (\hat{I} - \hat{\rho}) + \frac{(\hat{I} - \hat{\rho})^2}{2} + \frac{(\hat{I} - \hat{\rho})^3}{3} + \dots, \quad (18.43)$$

откуда следует

$$-\text{tr}(\hat{\rho} \ln \hat{\rho}) \geq \text{tr}[\hat{\rho}(\hat{I} - \hat{\rho})] = 1 - \text{tr}(\hat{\rho}^2), \quad (18.44)$$

поскольку $\hat{\rho}$ можно разложить согласно (18.35) и для каждого p_m написать

$$\begin{aligned} -\ln p_m &= (1 - p_m) + \frac{(1 - p_m)^2}{2} + \frac{(1 - p_m)^3}{3} + \dots \\ &\dots \geq 1 - p_m \end{aligned} \quad (18.45)$$

при $0 \leq p_m \leq 1$, или

$$-p_m \ln p_m \geq p_m(1 - p_m). \quad (18.46)$$

Далее,

$$\begin{aligned} -\text{tr}(\hat{\rho} \ln \hat{\rho}) &= \\ &= \text{tr} \left\{ \sum_m p_m |\psi_m\rangle \langle \psi_m| \left[\left(\hat{I} - \sum_m p_m |\psi_m\rangle \langle \psi_m| \right) + \frac{\left(\hat{I} - \sum_m p_m |\psi_m\rangle \langle \psi_m| \right)^2}{2} + \dots \right] \right\} = \\ &= 1 - \text{tr}(\hat{\rho}^2) + \dots, \end{aligned} \quad (18.47)$$

откуда следует (18.44).

Для чистого состояния энтропия фон-Неймана

$$S^{pur} = 0, \quad (18.48)$$

в остальных случаях

$$S \geq 1 - \text{tr}(\hat{\rho}^2) = 1 - 2\pi \iint_{-\infty}^{\infty} W^2(q, p) dq dp. \quad (18.49)$$

Обратный переход от функции Вигнера к матрице плотности $\hat{\rho}$ осуществляется, например, вычислением ее матричных элементов:

$$\langle a' | \hat{\rho} | a \rangle = \text{tr}(\hat{\rho}|a\rangle\langle a'|) = 2\pi \iint_{-\infty}^{\infty} W(q, p) W_{aa'}(q, p) dq dp. \quad (18.50)$$

Здесь $W_{aa'}(q, p)$ — вигнеровское представление проектора $|a\rangle\langle a'|$, аналогичное (18.29), где вместо оператора \hat{F} подставляется этот проектор.

Формула (18.50) еще раз подтверждает взаимно однозначное соответствие между $\hat{\rho}$ и $W(q, p)$.

Чтобы оценить верхнюю границу квадрата модуля вигнеровского квазираспределения, воспользуемся неравенством Коши—Шварца:

$$\begin{aligned} |W(q, p)|^2 &= \frac{1}{(2\pi)^2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx} \left\langle q - \frac{x}{2} \left| \psi \right\rangle \left\langle \psi \middle| q + \frac{x}{2} \right\rangle \right| dx \right|^2 \leq \\ &\leq \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \left\langle q - \frac{x}{2} \left| \psi \right\rangle \left\langle \psi \middle| q + \frac{x}{2} \right\rangle \right|^2 dx = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle q - \frac{x}{2} \left| \psi \right\rangle \left\langle \psi \middle| q + \frac{x}{2} \right\rangle \right\langle q + \frac{x}{2} \left| \psi \right\rangle \left\langle \psi \middle| q - \frac{x}{2} \right\rangle dx \leq \\ &\leq \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle q - \frac{x}{2} \left| \psi \right\rangle \left\langle \psi \middle| q - \frac{x}{2} \right\rangle \right\langle q + \frac{x}{2} \left| \psi \right\rangle \left\langle \psi \middle| q + \frac{x}{2} \right\rangle dx = \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \langle \psi | q - x \rangle \langle q - x | \psi \rangle dx \int_{-\infty}^{\infty} \langle \psi | q + x \rangle \langle q + x | \psi \rangle dx = \frac{1}{\pi^2}. \end{aligned} \quad (18.51)$$

Это для чистого состояния $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$. В случае же смешанного состояния с помощью разложения (18.35) получим то же самое.

Итак,

$$|W(q, p)| \leq \frac{1}{\pi} . \quad (18.52)$$

Это очень важное ограничение, которое не позволяет, в частности, быть квазираспределению $W(q, p)$ δ -функцией, как было бы в случае точно известных квадратурных компонент, соответствующих координате и импульсу, что является следствием принципа неопределенности Гейзенберга.

Вернемся к задаче квантовой томографии — вычислению матрицы плотности $\hat{\rho}$ по результатам измерений квазираспределения $W(q, p)$.

Фундаментальным ограничением квантовой механики является невозможность одновременно увидеть квантовый объект во всей полноте. По существу это одна из формулировок принципа дополнительности Нильса Бора. Поэтому наиважнейшая задача квантовых измерений — выяснение матрицы плотности $\hat{\rho}$ — не может быть решена проведением однократного измерения, поскольку одно измерение является лишь проекцией квантового состояния на один из ортов базиса оператора измеренной наблюдаемой. В квантовом измерении происходит как бы материализация значения измеряемой величины, которого до измерения не существовало, из комплекснозначной, т. е. прямо не наблюдаемой, волновой функции (в случае чистого состояния системы). Это своего рода аналогия материализации образов мира духовного. В науке и технике такая материализация осуществляется по схеме: идея → конструкция → прибор [87].

Невозможность детального и полного, по информативности, однократного измерения не накладывает ограничений на всесторонние взаимодополняющие исследования ансамбля объектов, подготовленных в идентичных квантовых состояниях, или одного объекта, сохраняющего неизменными свои основные свойства в течение промежутка времени его изучения. Аналогичную ситуацию мы имеем в медицине: когда невозможно «покопаться» в органах живого организма, диагноз ставится на основании косвенных данных, например томографии. Тело просвечивается рентгеновскими или красными лазерными лучами в различных направлениях, и по этим проекциям с помощью компьютера строится объемное изображение внутренних органов тела. Такие же проекции или тени мы имеем, измеряя $pr(q, \theta)$ при различных θ (см. рис. 18.2). Греческое слово *то́мо́с* означает срез или тонкий ломтик. Вращая плоскость тени, имеем совокупность таких теней, интегральных по направлениям нормалей к плоскости вращения.

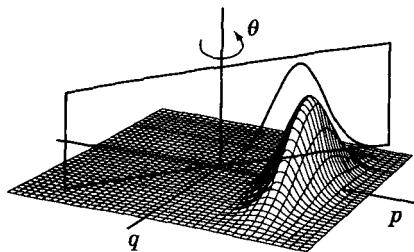


Рис. 18.2. Вращение плоскости дает различные проекции, по которым восстанавливается трехмерное распределение

Поскольку $\tilde{pr}(\xi, \theta) = \widetilde{W}(\xi \cos \theta, \xi \sin \theta)$, см. (18.5), имеем

$$\begin{aligned} W(q, p) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\pi} \widetilde{W}(\xi \cos \theta, \xi \sin \theta) |\xi| e^{i\xi(q \cos \theta + p \sin \theta)} d\xi d\theta = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} pr(x, \theta) |\xi| e^{i\xi(q \cos \theta + p \sin \theta - x)} dx d\theta d\xi. \quad (18.53) \end{aligned}$$

Это и есть основная формула квантовой томографии: по «теням» — распределениям квадратуры при различных θ — вычисляем функцию Вигнера, а по ней — матрицу плотности.

Для упрощения компьютерного расчета введем ядро

$$K(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |\xi| e^{i\xi x} d\xi, \quad (18.54)$$

тогда

$$W(q, p) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} pr(x, \theta) K(q \cos \theta + p \sin \theta - x) dx d\theta. \quad (18.55)$$

Ядро можно преобразовать так:

$$\begin{aligned} K(x) &= \frac{1}{2} \left(\int_0^{\infty} \xi e^{i\xi x} d\xi - \int_{-\infty}^0 \xi e^{i\xi x} d\xi \right) = \frac{1}{i2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^{\infty} e^{i\xi x} d\xi - \int_{-\infty}^0 e^{i\xi x} d\xi \right) = \\ &= \frac{1}{i2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^{\infty} e^{i\xi x} d\xi - \int_0^{\infty} e^{-i\xi x} d\xi \right) = \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{Im} \int_0^{\infty} e^{i\xi x} dx. \quad (18.56) \end{aligned}$$

Как и δ -функция Дирака, ядро $K(x)$ принадлежит классу *обобщенных функций*, т. е. имеет смысл лишь в виде интегрального ядра. Чтобы его вычислить, добавим к x малую чисто мнимую комплексную добавку $i\varepsilon$. Тогда

$$K(x) = \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{Im} \int_0^\infty e^{i\xi x - \xi\varepsilon} dx = \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{Re} \frac{1}{x + i\varepsilon}. \quad (18.57)$$

Бесконечно малая мнимая часть $i\varepsilon$ слегка смещает контур интегрирования ниже действительной оси. Эта регуляризация эквивалентна значению интеграла в смысле Коши. Обозначим это значение как \mathcal{P} и запишем

$$K(x) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\mathcal{P}}{x} = -\frac{\mathcal{P}}{x^2}. \quad (18.58)$$

При этом обратное преобразование Радона принимает компактный вид:

$$W(q, p) = -\frac{\mathcal{P}}{2\pi^2} \int_0^\pi \int_{-\infty}^\infty \frac{pr(x, \theta)}{(q \cos \theta + p \sin \theta - x)^2} dx d\theta. \quad (18.59)$$

Компьютерный расчет функции Вигнера возможен, разумеется, в конечных пределах интегрирования и требует определенной фильтрации нерегулярностей подынтегральной функции:

$$\begin{aligned} K(x) &= \frac{1}{2} \int_{-k_c}^{k_c} |\xi| e^{i\xi x} d\xi = \frac{1}{x^2} (\cos(k_c x) + k_c x \sin(k_c x) - 1) \approx \\ &\approx \frac{k_c^2}{2} \left[1 - \frac{(k_c x)^2}{4} + \frac{(k_c x)^4}{72} - \dots \right]. \end{aligned} \quad (18.60)$$

Индекс «*c*» обозначает обрезающие (*cut*) границы, которые мы накладываем на бесконечные пределы интегрирования. Приближенная часть (18.60) записана для того, чтобы избежать нерегулярности в точке $x = 0$. Это хорошее приближение в случае $|k_c x_c| = 1$, где x_c обозначает границы, в пределах которых производится регуляризация.

Выбор k_c зависит от тонкой структуры $W(q, p)$, которая должна быть без быстрых осцилляций, вносимых тригонометрическими функциями. Величина k_c должна быть ниже появления этих осцилляций.

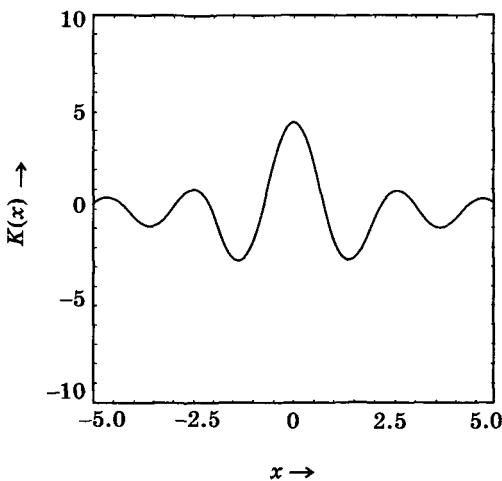


Рис. 18.3. График ядра $K(x)$ для $k_c = 3$

Выбрав k_c , строим $K(x)$, как на рис. 18.3. На нем вычисления произведены без использования приближенного разложения в правой части (18.60). Затем вычисляем $W(q, p)$ согласно (18.55) с ядром $K(q \cos \theta + p \sin \theta)$. Свертку по x при этом лучше посчитать через преобразование Фурье, где интегральное преобразование свертки превращается просто в произведение фурье-образов.

Если такая приближенная методика по каким-то причинам не подходит, придется вычислять исходный тройной интеграл (18.53).

Заключение

Предложенный вам курс «Квантовых измерений» мы начали с краткого напоминания основ квантовой теории и закончили наиболее общей и всеобъемлющей задачей квантовой томографии, позволяющей извлечь максимум информации о квантовом объекте.

Осознавая неисчерпаемую глубину затронутых нами вопросов, основной упор был сделан на изучение наиболее ярких и характерных примеров, позволяющих получить представление о необыкновенно красивом квантовом мире, непостижимом во всей своей полноте и свободном от наших привычных обычательских представлений «здравого смысла». Хотя ряд приложений уже сейчас приводит к реальным практическим результатам, например, в области обработки, передачи и кодировки информации методами квантовой оптики (см., напр., [88, 89] и цитируемую там литературу).

В той или иной степени нам часто приходилось возвращаться к первоосновам творения и все более убеждаться во фрагментарности наших знаний о нем. Что ж, тем более радостны перспективы новых открытий.

Чем больше человек, или, даже, животное, тем более крупный след они оставляют в этой жизни, как в прямом, так и переносном смысле. Величие Бога в том следе, который Он оставил нам — Его творении: неисчерпаемом по своей глубине материальном мире, подаренном нам для полнокровной жизни.

Я благодарен профессору Ю. П. Пытьеву, по инициативе которого был прочитан этот курс лекций, профессору С. П. Кулику, профессору Ф. Я. Халили и профессору А. С. Чиркину за конструктивные предложения и замечания, а также студентам А. А. Грановскому, Д. С. Дёмину, А. В. Исаевой, С. Г. Курбанову, В. В. Пестерову, В. А. Труханову, Е. А. Хилковой и Е. В. Ядрихинскому за помощь в работе и оформлении рукописи. Моя особая благодарность протоиереям Сергию Суздальцеву, Константину Георгиевскому и Иоанну Драгану, а также священнику Александру Катунину за молитвы и поддержку. Работа поддержана грантом INTAS номер 01-2097.

Литература

1. У. Люиселл. Излучение и шумы в квантовой электронике. — М.: Наука, 1972.
2. И. фон-Нейман. Математические основы квантовой механики. — М.: Наука, 1964.
3. Ф. Я. Халили. Пределенные чувствительности в линейных и нелинейных квантовых измерениях. Дис. на соискание уч. ст. д. ф.-м. наук. — М., МГУ им. М. В. Ломоносова, 1996.
4. A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen. Phys. Rev. **47** (1935) 777.
5. A. Sadbery. Quantum Mechanics and the Particles of Nature. Cambridge University Press. Cambridge, 1986; перевод: А. Садбери. Квантовая механика и физика элементарных частиц. — М.: Мир, 1989.
6. М. Б. Менский. Кvantovye izmereniya i dekogerenziya. — M.: Nauka, 2001.
7. V. B. Braginsky, F. Ya. Khalili. Quantum Measurements. Cambridge University Press, 1992.
8. Albert Einstein: Philosopher-Scientist, ed. Schilpp P. A. The Library of Living Philosophers, Evanston 1949. P. 200–241.
9. Н. Бор, в сб. «Атомная физика и человеческое познание». — М.: ИЛ, 1961. С. 51.
10. Р. Фейнман, А. Хибс. Квантовая механика и интеграл по траекториям. — М.: Мир, 1968. С. 22.
11. S. Dürr, T. Nonn, G. Rempe. Nature. **395** (1998) 33.
12. Ю. М. Ципенюк. Природа. № 5 (1999) 90.
13. Д. Н. Клышко. Физические основы квантовой электроники. — М.: Наука, 1986.
14. B. Misra, E. C. G. Sudarshan. J. Math. Phys., **18** (1977) 756.
15. W. M. Itano, D. J. Heinzen, J. J. Bollinger et al. Phys. Rev. **A41** (1990) 2295.
16. R. J. Cook, Phys. Scr. **T-21** (1988) 49.
17. С. А. Ахматов, Ю. Е. Дьяков, А. С. Чиркин. Введение в статистическую радиофизику и оптику. — М. Наука, 1981.

18. P. A. Franken, A. E. Hill, C. W. Peters, G. Weinreich. *Phys. Rev. Lett.* **7** (1961) 118.
19. Д. Н. Клышко. *Фотоны и нелинейная оптика*. — М.: Наука, 1980.
20. Ulf Leonhardt. *Measuring the Quantum State of Light*. Cambridge University Press, 1997.
21. У. Шерклифф. *Поляризованный свет*. — М.: Мир, 1965.
22. A. V. Belinsky, D. N. Klyshko. *Laser Physics*. **6** (1996) 1082.
23. A. V. Burlakov, M. V. Chekhova, D. N. Klyshko, S. P. Kulik et al. *Phys. Rev. A* **56** (1997) 3214.
24. Д. Н. Клышко. *УФН* **164** (1994) 1187.
25. А. Н. Матвеев. *Атомная физика*. — М.: Высшая школа, 1989.
26. Ю. С. Владимиров. *Реляционная теория пространства-времени и взаимодействий*. Ч. 1. Теория систем отношений. — М.: МГУ, 1996.
27. Ю. С. Владимиров. *Реляционная теория пространства-времени и взаимодействий*. Ч. 2. Теория физических взаимодействий. — М.: МГУ, 1998.
28. И. З. Цехмистро. О парадоксе Эйнштейна—Подольского—Розена. *Философия науки*. № 1 (1984) 46.
29. Р. Лоудон. *Квантовая теория света*. — М.: Мир, 1976.
30. A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen. *Phys. Rev.* **47** (1935) 777; перевод *УФН* **16** (1936) 440.
31. D. Bohm. *Quantum Theory*. Englewood Cliffs. N. Y.: Prentice Hall, 1951; перевод: Д. Бом. *Квантовая теория*. — М.: Физматгиз, 1961.
32. J. S. Bell. *Physics* **1** (1964) 195.
33. А. В. Белинский. *УФН* **164** № 4 (1994) 435.
34. Н. В. Евдокимов, Д. Н. Клышко, В. П. Комолов, В. А. Ярочкин. *УФН* **166** № 1 (1996) 91.
35. J. F. Clauser, M. A. Horn, A. Shimony, R. A. Holt. *Phys. Rev. Lett.* **23** (1969) 880.
36. А. В. Белинский, Д. Н. Клышко. *УФН* **163** № 8 (1993) 1.
37. Московский А. В. От метафизики к физике. В сб.: «Седьмые Международные Рождественские образовательные чтения. Христианство и наука. Сборник докладов Конференции». — М.: Просветитель, 2000, с. 196–204.
38. Московский А. В. Существует ли научная альтернатива дарвиновской концепции эволюции. В сб.: «Девятые Международные Рождественские образовательные чтения. Христианство и наука. Сборник докладов Конференции». — М.: Просветитель, 2001, с. 297–321.

39. Московский А. В. Квантовая телепортация. От физики к метафизике. В сб.: «Десятые Международные Рождественские образовательные чтения. Христианство и наука. Сборник докладов Конференции». — М.: Просветитель, 2003, с. 341–356.
40. A. Aspect, P. Grangier and G. Roger, Phys. Rev. Lett. **47** (1981) 460; **49** (1982) 91.
41. A. Aspect, J. Dalibar and G. Roger, Phys. Rev. Lett. **49** (1982) 1804.
42. А. В. Белинский. УФН **167** (1997) 323.
43. M. A. Rowe, D. Kielpinski, V. Meyer, C. A. Sackett, W. M. Itano, C. Monroe & D. J. Wineland. Experimental violation of a Bell's inequality with efficient detection. Nature **409** (2001) 791–794.
44. А. В. Белинский. Неклассические световые эффекты, проявляющиеся в интерференции, дифракции и распространении оптических солитонов. Дис. на соискание уч. ст. д. ф.-м. н. — М., МГУ им. М. В. Ломоносова, 2000.
45. А. В. Белинский. УФН **164** (1994) 231.
46. A. Fine. Phys. Rev. Lett. **48** (1982) 291.
47. W. M. De Muynck. Phys. Lett. **A114** (1986) 65.
48. А. В. Белинский. УФН **173** (2003) 905.
49. А. В. Белинский. Оптика и спектроскопия. **96** № 5 (2004) 732.
50. Д. Н. Клышко. ЖЭТФ **90** (1986) 1172.
51. Д. Н. Клышко, А. Н. Пенин. УФН **152** № 4 (1987) 653.
52. Ю. И. Воронцов. Теория и методы макроскопических измерений. — М.: Наука. 1989.
53. С. А. Ахманов, В. А. Выслоух, А. С. Чиркин. Оптика фемтосекундных лазерных импульсов. — М.: Наука. 1988.
54. S. Kielich, R. Tanas. Quantum optics. Ed. A. Kujawsky, M. Lewenstein. Warszawa: Ossolineum. Monographs in Physics. **7** (1979) 125.
55. H. H. Ritze, A. Bandilla. Opt. Commun. **29** (1979) 126.
56. H. H. Ritze, A. Bandilla. Opt. Commun. **30** (1979) 125.
57. А. В. Белинский. Квант. электрон. **17** (1990) 1182.
58. А. В. Белинский. Квант. электрон. **18** (1991) 399.
59. Y. Yamamoto, S. Machida, I. Imoto, M. Kitogawa, G. Bjork. J. Opt. Soc. Am. **B4** (1987) 1645.
60. В. Б. Брагинский, В. С. Ильченко. Доклады АН СССР. **293** № 6 (1987) 1358; Тез. докл. Всес. научно-техн. конф. «Проектирование радиоэлектронных устройств на диэлектрических волноводах и резонаторах». — Тбилиси, 1988.

61. А. В. Белинский, Н. Н. Розанов. Оптика и спектроскопия. **73** (1992) 153.
62. М. И. Колобов и И. В. Соколов. ЖЭТФ **96** (1989) 1945.
63. Н. М. Gibbs. Optical Bistability: Controlling Light with Light. Orlando, 1985.
64. Ю. А. Ананьев. Оптические резонаторы и лазерные пучки. — М.: Наука, 1990.
65. М. И. Колобов, И. В. Соколов. Изв. Академии СССР. Сер. Физическая **54** (1990) 2328.
66. M. I. Kolobov, I. V. Sokolov. Phys. Lett. **A140** (1989) 101.
67. Я. Перина. Квантовая статистика линейных и нелинейных оптических явлений. — М.: Мир, 1987.
68. Д. Ф. Смирнов, А. С. Трошин. УФН **153** (1987) 233.
69. А. В. Белинский, А. С. Чиркин. Оптика и спектроскопия. **66** (1989) 1190.
70. L. A. Orozko, M. G. Raizen, M. Xiao et al. J. Opt. Soc. Am. **B4** (1987) 1490.
71. Y. Yamamoto, I. Imoto, S. Machida. Phys. Rev. **A34** (1986) 3243.
72. H. A. Haus, Y. Yamamoto. Phys. Rev. **A34** (1986) 270.
73. Y. Yamamoto, S. Machida, O. Nilsson. Phys. Rev. **A34** (1986) 4025.
74. A. N. Oraevsky. J. Opt. Soc. Am. **B5** (1988) 933.
75. А. В. Белинский. Письма в ЖЭТФ **51** (1990) 341.
76. А. В. Белинский. Квант. электрон. **18** (1991) 84.
77. М. Борн, Э. Вольф. Основы оптики. — М.: Наука, 1970.
78. С. М. Аракоян, Ю. С. Чилингарян. Нелинейная оптика жидких кристаллов. — М.: Наука, 1984.
79. K. Watanabe, H. Nakano, A. Honold et al. Phys. Rev. Lett. **62** (1989) 2257.
80. Ю. М. Голубев, И. В. Соколов. ЖЭТФ **87** (1984) 408.
81. Д. Н. Клышко. УФН **168** № 9 (1998) 975.
82. С. А. Ахманов, Н. Н. Ахмедиев, А. В. Белинский и др. Новые физические принципы оптической обработки информации / Под. ред. С. А. Ахманова и М. А. Воронцова. — М.: Наука, 1990, с. 171.
83. E. P. Wigner. Phys. Rev. **40** (1932) 749.
84. J. Radon. Mathematisch-Physische Klasse **69** (1917) 262.
85. M. G. Raymer, J. Cooper, H. J. Carmichael et al. J. Opt. Soc. Am. **B12** (1995) 1801.

86. H. Weyl. *The Theory of Groups and Quantum Mechanics*. Dover. New York, 1950.
87. А. А. Гриб. Квантовая физика и культура. Сб. докладов 11–12 Международных Рождественских чтений по секции «Христианство и наука», 2004. Московский Патриархат. Москва. С. 221.
88. Физика квантовой информации / Под ред. Д. Боумейстера, А. Экерта и А. Цайлингера. — М.: Постмаркет, 2002.
89. С. П. Кулик, Г. А. Масленников, Е. В. Морева. *ЖЭТФ* **129** (2006) 814.

Оглавление

Введение	3
Глава 1. Дираковская формулировка нерелятивистской квантовой механики	5
Глава 2. Квантовая нелокальность	8
Глава 3. Принцип суперпозиции	11
Глава 4. Принцип неопределенностей Гейзенберга	14
Глава 5. Проекционный постулат фон-Неймана	19
Глава 6. Ортогональные и неортогональные измерения	22
Глава 7. Селективное и неселективное описание квантовых измерений	28
Глава 8. Соотношение неопределенностей Гейзенберга для нечетких квантовых измерений	29
Глава 9. Примеры размывания интерференционной картины в экспериментах типа «который путь»	33
Глава 10. Парадокс Зенона и непрерывные квантовые измерения	43
Глава 11. Параметрическое рассеяние света в квантовых измерениях	50
Глава 12. Сжатые состояния света	62
Глава 13. Теория фотодетектирования	73
Глава 14. Интерференция 3-го порядка	81
Глава 15. Соотношения неопределенностей Гейзенберга амплитудных и фазовых параметров поля	91
Глава 16. Теорема Белла	102
Глава 17. Квантовые невозмущающие измерения	120
17.1. Самовоздействие в прозрачных средах с кубичной нелинейностью	122
17.2. Другие примеры невозмущающих измерений и приготовления субпуассоновского света	158
Глава 18. Представление Вигнера и квантовая томография	162
Заключение	176
Литература	177

Учебное издание

Белинский Александр Витальевич

КВАНТОВЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ

Учебное пособие

Ведущий редактор *Б. И. Копылов*

Художник *Н. В. Зотова*

Художественный редактор *О. Г. Лапко*

Оригинал-макет подготовлен *С. А. Янковой* в пакете $\text{\LaTeX} 2\epsilon$
с использованием кириллических шрифтов семейства LH

Подписано в печать 06.03.08. Формат 60×90/16.
Гарнитура Computer Modern. Печать офсетная. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 11,5. Тираж 1000 экз. Заказ 1835

БИНОМ. Лаборатория знаний
125167, Москва, проезд Аэропорта, д. 3
Телефон: (499) 157-5272
e-mail: Lbz@aha.ru, <http://www.Lbz.ru>

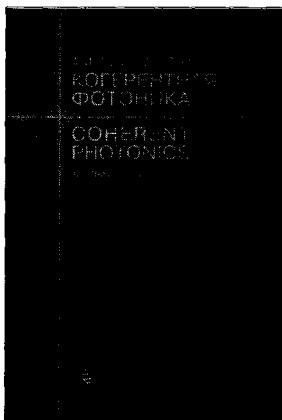
При участии ООО «ЭМПРЕЗА»

Отпечатано с готовых файлов заказчика в ОАО «ИПК
«Ульяновский Дом печати» 432980, г Ульяновск, ул Гончарова, 14

ЛИТЕРАТУРА ДЛЯ ВУЗОВ

■ ФИЗИКА

ИМЕЕТСЯ В ПРОДАЖЕ



Ларкин А. И. *Когерентная фотоника* / А. И. Ларкин, Ф. Т. С. Ю. — 2007. — 316 с. : ил.

Первый учебник по фотонике, подготовленный совместно российским и американским профессорами. Книга посвящена одному из наиболее перспективных направлений в информатике. Читатель получит физическое обоснование возможности и целесообразности замены в ряде задач информатики электрического тока потоком когерентных фотонов.

В книге содержится весь необходимый материал, тем не менее, она снабжена обширной библиографией, которую можно использовать для углубленного изучения отдельных разделов. В основу учебника положены лекционные курсы по информатике, квантовой электронике и фотонике, которые авторы читают студентам Пенсильванского университета и Государственного университета — МИФИ.

Для преподавателей и студентов физических специальностей (фотоника, квантовая электроника) высших учебных заведений.



ИЗДАТЕЛЬСТВО
«БИНОМ»
Лаборатория знаний®

125167, Москва, проезд Аэропорта, д. 3
Телефон: (499) 157-5272
e-mail: Lbz@aha.ru, <http://www.Lbz.ru>
Оптовые поставки:
(495) 174-7616, 171-1954, 170-6674



Александр Витальевич Белинский – доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник кафедры компьютерных методов физики физического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова.

Область научных интересов: квантовая оптика, измерительные системы и анализ изображений. Исследовал неклассические квантовые эффекты и парадоксы, появляющиеся при интерференции и дифракции света, а также при распространении оптических солитонов. При его участии заложены основы нового раздела лазерной физики – двухфотонной оптики.

А. В. Белинский опубликовал более 200 научных работ, является автором около 40 изобретений.

Данное учебное пособие позволяет читателю получить представление о необыкновенно красивом квантовом мире и о современных достижениях в этой быстро развивающейся области физики. В основу книги положен курс лекций, читаемых автором студентам физического факультета МГУ.

Для студентов старших курсов, специализирующихся в областях квантовой оптики и квантовой информатики.

ISBN 978-5-94774-725-6

9 785947 747256

ИНТЕРНЕТ-МАГАЗИН

OZON.ru



19101982