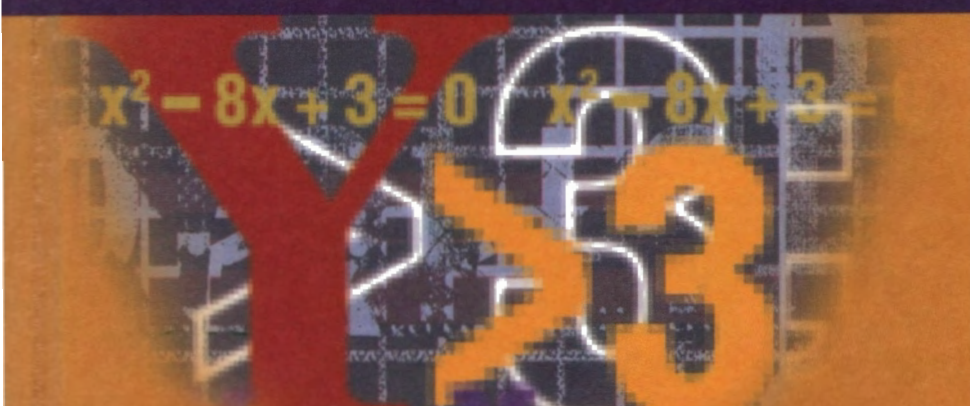
выпускной (ЭКЗАМЕН) вступительный

МАТЕМАТИКА

Э. С. Беляева, А. С. Потапов,
С. А. Титоренко

УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С ПАРАМЕТРОМ

Часть 1



дрофа

выпускной ЭКЗАМЕН вступительный

МАТЕМАТИКА

Э. С. Беляева, А. С. Потапов,
С. А. Титоренко

УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С ПАРАМЕТРОМ

Часть 1

Учебное пособие

Москва

дрофа

2009

УДК 512.1(075.8)
ББК 22.141я73
Б44

Серия основана в 2007 году

Беляева, Э. С.

Б44 Математика. Уравнения и неравенства с параметром. В 2 ч. Ч. 1 : учебное пособие / Э. С. Беляева, А. С. Потапов, С. А. Титоренко. — М. : Дрофа, 2009. — 480 с. — (Выпускной/вступительный экзамен).

ISBN 978-5-358-02062-7 (ч. 1)
ISBN 978-5-358-02064-1

Учебный комплект (сборник задач в двух частях с электронным приложением на CD-ROM) в полном объеме раскрывает тему «Уравнения и неравенства с параметром». В части 1 разбираются линейные, квадратные и тригонометрические уравнения с параметром. Детально рассмотрен широкий спектр задач разных уровней сложности, доступно и наглядно изложены методы решения. Прилагаемый к книге компакт-диск является необходимым компонентом для легкого восприятия и эффективного тренинга. Комплект станет незаменимым помощником не только для учеников, но и для учителей.

Для учащихся старших классов, преподавателей математики, абитуриентов, студентов математических специальностей.

УДК 512.1(075.8)
ББК 22.141я73

Учебное издание

Беляева Эмма Степановна, **Потапов** Александр Сергеевич, **Титоренко** Светлана Алексеевна

МАТЕМАТИКА. УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С ПАРАМЕТРОМ

В двух частях. Часть 1

Учебное пособие

Зав. редакцией *Т. Д. Гамбурцева.* Ответственный редактор *Г. А. Лонцова.* Художественный редактор *А. В. Пряхин* Технический редактор *И. В. Грибкова.* Компьютерная верстка *Т. В. Максимова.* Корректор *Г. И. Мосякина*

Санитарно-эпидемиологическое заключение
№ 77.99.60.953.Д.010105.09.08 от 22.09.2008.

Подписано к печати 06.10.08. Формат 84×108 $^1/_{32}$.
Бумага типографская. Гарнитура «Школьная». Печать офсетная.
Усл. печ. л. 25,2. Тираж 3000 экз. Заказ № 5663.
ООО «Дрофа». 127018, Москва, Сущевский вал, 49.

Предложения и замечания по содержанию и оформлению книги просим направлять в редакцию общего образования издательства «Дрофа»: 127018, Москва, а/я 79. Тел.: (495) 795-05-41. E-mail: chief@drofa.ru

По вопросам приобретения продукции издательства «Дрофа» обращаться по адресу: 127018, Москва, Сущевский вал, 49.
Тел.: (495) 795-05-50, 795-05-51. Факс: (495) 795-05-52.

Торговый дом «Школьник». 109172, Москва, ул. Малые Каменщики, д. 6, стр. 1А. Тел.: (495) 911-70-24, 912-15-16, 912-45-76.

Сеть магазинов «Переплетные птицы». Тел.: (495) 912-45-76.

Интернет-магазин: http://www.drofa.ru

Отпечатано в полном соответствии с качеством предоставленных диапозитивов в ОАО «Можайский полиграфический комбинат». 143200, г. Можайск, ул. Мира, 93.

ISBN 978-5-358-02062-7 (ч. 1)
ISBN 978-5-358-02064-1

Предисловие

Дорогой читатель!

Вы держите в руках первую часть двухтомника «Уравнения и неравенства с параметром». Это не обыкновенный учебник математики и не стандартное учебное пособие для поступающих в вузы. Это — новое яркое явление в мире математики — *обучающий сборник задач.*

Задачи с параметром представляют собой богатейший материал для полноценной математической деятельности учащихся. С их помощью можно проверить глубину знания математики средней школы, выявить склонности к исследовательской деятельности, нестандартность мышления. Отсутствие этой темы в программе средней школы значительно обедняет курс математики. Между тем задания с параметром предлагаются на вступительных экзаменах по математике почти во всех вузах, на выпускных экзаменах в средней школе, а также входят в материалы ЕГЭ по математике.

За последние годы появилось немало литературы, посвященной задачам с параметром. Но читать эти пособия нередко под силу только специалистам в этой области. Во-первых, даже в справочной литературе нет четкой трактовки основных понятий темы. Во-вторых, при написании этих книг почти не соблюдаются основные дидактические принципы (доступности, наглядности, от простого к сложному и др.). В-третьих, нет системы в изложении материала.

Учитывая все вышесказанное, авторы разработали теорию и методику решения уравнений и неравенств с параметром, аналога которой нет в имеющейся литературе. Поэтому выпуск данных книг актуален и своевременен. Вы получаете умные и полезные методические пособия, по которым можно не только учиться, но и учить.

Особенность разработанной методики — использование координатной прямой, которая служит не просто для иллюстрации аналитического решения, но является непременным инструментом работы. Снимается проблема записи ответа, вызывающая трудности у учащихся. Завершение заполнения координатной прямой обычно означает окончание процесса решения, после чего ответ без труда списывается с оси. При этом широко используется геометрическая интерпретация множества решений, что позволяет проводить наглядный анализ.

Каждый раздел начинается с четких определений основных понятий, что устраняет существующую путаницу их трактовки.

Рассмотрению задач предшествует справочный материал теоретического характера по соответствующей теме, в котором особое внимание уделяется вопросам, недостаточно изложенным в школьном курсе математики.

Решение задач начинается с подготовительных упражнений, которые служат «переходными мостиками» к выполнению более сложных заданий. После разбора базисных задач предлагается для закрепления решить ряд упражнений самостоятельно. Условия некоторых более сложных уравнений и неравенств заимствованы из книг, указанных в приведенном списке литературы.

Особо ценно, что в рассмотрение включен ряд заданий, предлагавшихся на вступительных экзаменах по математике в ведущих вузах, а также на ЕГЭ в группе C (2001—2005 гг.), требующих оригинальных подходов с обоснованием.

Тщательно продуманная система упражнений отвечает основным дидактическим принципам: доступности, последовательности, наглядности, научности. Следует особо отметить, что в ряде случаев приведены несколько способов решения. Значительное внимание уделено ликвидации «белых пятен» в школьной программе по математике.

Пособие написано четким, понятным языком без ущерба строгости и логичности изложения. При этом традиционная сухость математического языка смягчается многочисленными и удачными образными пояснениями.

Материалы книг прошли многолетнюю апробацию в учебных заведениях различных типов. Использующие их учителя отмечают, что решение задач с параметром по данной методике не только позволяет школьникам успешно справляться с разноуровневыми заданиями, но и развивает у них наглядно-образное и абстрактно-логическое мышление.

Первая книга двухтомника включает три раздела. Первый посвящен линейным уравнениям и неравенствам с параметром. Второй раздел обучает решению квадратных уравнений и неравенств. В третьем всесторонне рассматриваются тригонометрические уравнения и неравенства с параметром.

Надеемся, что данное пособие удовлетворит познавательные интересы и математиков, и гуманитариев, позволит оценить красоту и интеллектуальную глубину приведенных в них задач.

Желаем успехов на пути постижения тайн и глубин параметра!

О работе с мультимедийным приложением к книге

К книге прилагается компакт-диск, на котором подробно, пошагово проиллюстрирован ход решения многих задач с дополнительными объяснениями некоторых наиболее сложных моментов. Таким образом, диск в некотором смысле заменяет объяснение преподавателя на школьной доске. Кроме того, с его помощью можно проверить правильность самостоятельного решения предлагаемых упражнений.

При установке диска в дисковод он запускается автоматически (если в системе включена функция автозапуска). В первую очередь пользователю предоставляется возможность автоматической инсталляции программы *Macromedia Flash Player* 7 (если на вашем компьютере уже установлена более поздняя версия, нажмите на кнопку «Пропустить»), а также копирования содержания компакт-диска на жесткий диск компьютера. Далее на экране появляется «Содержание», в котором мышью можно выбрать нужный раздел и пункт, а затем — нужный номер задачи или упражнения.

В тексте книги задачи, разобранные на диске, сопровождаются значками (▶1), (▶2), (▶3) ....

При первом появлении в тексте задачи значка (▶1) необходимо выбрать соответствующую задачу на диске. На экране появится ее условие и первый шаг решения, обозначенный, как и в тексте, значком ▶1. Следующий шаг решения обозначен значком ▶2. Дойдя до него в тексте, нужно кликнуть левой кнопкой мыши по кнопке «далее» на экране и таким образом вывести на экран второй шаг решения. При появлении в тексте следующих значков ▶3 , ▶4 , ... следует каждый раз кликать по кнопке «далее».

Основные понятия

▶ *Определение 1.* Параметр (от греч. παραμετρων — отмеривающий) — величина, значения которой служат для различения элементов некоторого множества между собой.

Например, в декартовых координатах уравнение $y = ax^2$, $a \neq 0$, задает множество всех парабол с вершинами в начале координат. При конкретном значении $a \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ мы получаем одну из парабол этого семейства.

Дадим еще одно определение параметра.

▶ *Определение 2.* Неизвестные величины, значения которых мы задаем сами, называются параметрами.

Какие неизвестные следует выбрать в качестве параметров, обычно определяется уже самим подходом к исследованию выражения.

Приведем пример. Пусть нужно решить уравнение

$$x^4 + x^3 - (1 + 2a)x^2 - (a + 1)x + a^2 + a = 0.$$

Легко видеть, что в роли параметра лучше сначала выбрать x и решить квадратное относительно a уравнение: $a^2 - (2x^2 + x - 1)a + x^4 + x^3 - x^2 - x = 0$.

Получим совокупность уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} a = x^2 - 1, \\ a = x^2 + x. \end{array}\right.$$

Затем считаем a параметром и решаем два квадратных относительно x уравнения

$$\left[\begin{array}{l} x^2 = a + 1, \\ x^2 + x - a = 0. \end{array}\right.$$

Из приведенных выше двух определений следует, что параметр является переменной величиной и имеет при этом двойственную природу: 1) параметр — число; 2) параметр — неизвестное число.

Вторая функция параметра создает дополнительные трудности в работе с ним, ограничивая свободу общения его неизвестностью.

▶ ***Определение 3.*** Пусть дано равенство с переменными x и a: $f(x, a) = 0$. Если ставится задача для каждого действительного значения a решить это уравнение относительно x, то уравнение $f(x; a) = 0$ называется уравнением с переменной x и параметром a.

Параметр обычно обозначается первыми буквами латинского алфавита: $a, b, c, d, \ldots$.

Переменная, относительно которой решается уравнение, — последними буквами алфавита: $x, y, z, t, u, \ldots$.

❑ Примеры.

1. $2x - a = x + 1$. **2.** $x/a + x^2 = \sqrt{x}$. **3.** $\sqrt{x - a} = 2x + 1$.

4. $\sin x = \dfrac{a-1}{a+2}$. **5.** $\dfrac{x-b}{b(x-1)} = 0$. **6.** $\dfrac{x-2c+1}{cx-3} = 0$.

7. $ax^2 - \sqrt{a}x + 5 = 0$. **8.** $\log_{(a-1)}(x^2 - a^2) = 3$.

9. $\log_{\sqrt{x}} a \cdot \log_{a^2} \dfrac{a^2-4}{2a-x} = 1$.

▶ ***Определение 4.*** Под областью определения уравнения $f(x; a) = 0$ с параметром a будем понимать все такие системы значений x и a, при которых $f(x; a)$ имеет смысл.

Заметим, что иногда область определения уравнения устанавливается довольно легко, а иногда в явном виде это сделать трудно. Тогда ограничиваемся только системой неравенств, множество решений которой и является областью определения уравнения. Этого бывает, как правило, достаточно для решения уравнения.

Установим область определения каждого из приведенных выше уравнений:

1. $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} a \neq 0, \\ x \geqslant 0. \end{cases}$ 3. $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \geqslant a. \end{cases}$ 4. $\begin{cases} a \neq -2, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

5. $\begin{cases} b \neq 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$ 6. $\begin{cases} c \in \mathrm{R}, \\ cx \neq 3. \end{cases}$ 7. $\begin{cases} a \geqslant 0, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

8. $\begin{cases} a > 1, \\ a \neq 2, \\ x^2 - a^2 > 0. \end{cases}$ 9. $\begin{cases} a > 0, a \neq 1, \\ x > 0, x \neq 1, \\ \dfrac{a^2 - 4}{2a - x} > 0, \end{cases}$

где R — множество всех действительных чисел.

<u>*З а м е ч а н и е*</u>

В дальнейшем для краткости будем использовать сокращения:

ООУ вместо слов «область определения уравнения»;

ООН вместо слов «область определения неравенства»;

ООС вместо слов «область определения системы».

▶ ***Определение 5.*** Под решением уравнения $f(x; a) = 0$ с параметром a будем понимать систему значений x и a из области определения уравнения, обращающую его в верное числовое равенство.

❑ П р и м е р ы.

1. Пусть дано уравнение $\dfrac{x - 2a}{x + 1} = 0.$

Установим область определения уравнения:

ООУ: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \neq -1. \end{cases}$

Найдем несколько частных решений этого уравнения:

$\begin{cases} a = 1, \\ x = 2; \end{cases}$ $\begin{cases} a = 2, \\ x = 4; \end{cases}$ $\begin{cases} a = 0, \\ x = 0. \end{cases}$

Эти решения можно записать и так:
Если $a = 1$, то $x = 2$.
Если $a = 2$, то $x = 4$.
Если $a = 0$, то $x = 0$.
Найдем общее решение:

1) $\begin{cases} a \neq -1/2, \\ x = 2a. \end{cases}$

2) Если $a = -1/2$, то решений нет.

Ответ. 1) Если $a \neq -1/2$, то $x = 2a$.
2) Если $a = -1/2$, то решений нет.

Замечание
Далее для кратости вместо слов «общее решение» будем писать «решение».

2. Решим уравнение $(b + 1)x = (b + 1)(b - 5)$.
Решение.
Установим область определения уравнения:

ООУ: $\begin{cases} b \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

1) Пусть $b = -1$. Уравнение примет вид $0 \cdot x = 0$. Значит, x — любое действительное число.
2) Если $b \neq -1$, то $x = b - 5$.

Ответ. 1) Если $b \neq -1$, то $x = b - 5$.
2) Если $b = -1$, то $x \in \mathrm{R}$.

▶ ***Определение 6.*** Решить уравнение $f(x; a) = 0$ с параметром a — это значит для каждого действительного значения a найти все решения данного уравнения или установить, что их нет.

Договоримся все значения параметра a, при которых $f(x; a)$ не имеет смысла, включать в число значений параметра, при которых уравнение не имеет решений.

❑ Пример. Решить уравнение $a/(a-1) = x + 1$.

Решение.

Установим область определения уравнения:

$$\text{ООУ: } \begin{cases} a \neq 1, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$$

Выразим неизвестное x через параметр a.

$x = a/(a-1) - 1$, $x = 1/(a-1)$.

Ответ. 1) Если $a \neq 1$, то $x = 1/(a-1)$.
2) Если $a = 1$, то решений нет.

▶ ***Определение 7.*** Уравнения $f(x; a) = 0$ и $\varphi(x; a) = 0$ равносильны при фиксированном значении $a = a_0$, если уравнения $f(x; a_0) = 0$ и $\varphi(x; a_0) = 0$ равносильны.

❑ Пример. Найдите все значения параметра a, при которых уравнения $(a-1)x = a - 2$ и $(a-1)x = 3a - 8$ равносильны.

Решение.

1) При $a = 1$ оба уравнения решений не имеют, а потому равносильны.
2) Если $a \neq 1$, то $x = (a-2)/(a-1)$ — решение первого уравнения, $x = (3a-8)/(a-1)$ — решение второго уравнения.

Найдем значения a, при которых эти решения равны.

$(a-2)/(a-1) = (3a-8)/(a-1)$, $a = 3$.

При $a = 3$ $x = 1/2$.

Ответ. 1; 3.

▶ ***Определение 8.*** Уравнение $f(x; a) = 0$ является следствием уравнения $\varphi(x; a) = 0$ при некотором значении $a = a_0$, если множество решений уравнения $\varphi(x; a_0) = 0$ содержится среди множества решений уравнения $f(x; a_0) = 0$.

Аналогичные определения легко сформулировать для неравенств с параметром, заменив в вышеперечисленных определениях термин «уравнение» на термин «неравенство».

Рассмотрим пример, иллюстрирующий определение 8 для неравенств с параметром.

❑ Пример. При каких значениях a неравенство

$$2x > a \qquad (1)$$

является следствием неравенства

$$3x + 2 \geqslant 2a? \qquad (2)$$

Решение.

Решаем каждое из неравенств:

$\begin{cases} a \in \mathbf{R}, \\ x > a/2. \end{cases}$ (1) $\qquad \begin{cases} a \in \mathbf{R}, \\ x \geqslant (2a-2)/3. \end{cases}$ (2)

А теперь достаточно решить неравенство

$(2a-2)/3 > a/2$; $4a - 4 > 3a$; $a > 4$.

Ответ. $(4; +\infty)$.

Все задачи, приведенные далее в нашем пособии, рассматриваются на множестве действительных (вещественных) чисел.

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С ПАРАМЕТРОМ И К НИМ СВОДИМЫЕ

1. Линейные уравнения с параметром и к ним сводимые

Сформулируем определение линейного уравнения с одной переменной (неизвестным).

▶ *Определение 1.* Линейным уравнением с одной переменной (неизвестным) x назовем уравнения вида $Ax + B = Cx + D$, где коэффициенты A и C, а также свободные члены B и D являются действительными числами (или некоторыми функциями параметра a).

❑ Примеры линейных уравнений:

$$3x - 1 = 0, \tag{1}$$
$$6x + 1 = x - 7, \tag{2}$$
$$2x = 8; \tag{3}$$
$$ax + 2 = x + 2a, \tag{4}$$
$$(a - 10)x = x + 5, \tag{5}$$
$$a^2x - 2a = ax + (a - 1). \tag{6}$$

Уравнения (2—6) легко привести к виду уравнения (1), если перенести все члены в левую часть, а затем привести подобные слагаемые.

Получим

$$5x + 8 = 0,$$
$$2x - 8 = 0,$$
$$(a - 1)x + 2 - 2a = 0,$$
$$(a - 11)x - 5 = 0,$$
$$a(a - 1)x - 3a + 1 = 0.$$

В общем виде линейное уравнение с переменной x запишется так: $Kx + P = 0$, где K называется коэффициентом при переменной x, а P — свободным членом уравнения.

Определение 2. Линейное уравнение $Kx + P = 0$, где $K \neq 0$, называется уравнением первой степени с переменной x.

❑ Примеры уравнений первой степени:

$15x - 7 = 0$,

$3{,}5x + 4a = 0$,

$3x = 0$,

$(a^2 + 1)x - 3 = 0$.

Всякое уравнение первой степени общего вида является линейным, а обратное не всегда верно. Так, линейное уравнение $2x - 3(x - 1) = -x + 2$ приводится к виду $0 \cdot x + 1 = 0$, из которого видно, что оно не является уравнением первой степени.

Рассмотрим теперь линейное уравнение $(a - 3)x + 7 = 0$. Оно только при $a \neq 3$ является уравнением первой степени: если $a = 4$, то получим $x + 7 = 0$; если $a = 10$, то $7x + 7 = 0$ и т. д.

Итак, уравнение первой степени общего вида с переменной x является частным случаем линейного уравнения с одной переменной.

Решим линейное уравнение $Kx + P = 0$, (I)

где K и P — некоторые действительные числа.

1) Если $K \neq 0$, то $x = -P/K$ — единственный корень уравнения.

2) Пусть $K = 0$. Тогда данное уравнение примет вид $0 \cdot x + P = 0$.

Если $P \neq 0$, то уравнение (I) не имеет корней.

Если $P = 0$, то любое действительное число является корнем как уравнения $0 \cdot x + 0 = 0$, так и уравнения (I).

❑ Примеры.

1) $3x - 6 = 0$; $3x = 6$, $x = 2$.

2) $2x - 1 = 2x + 3$; $0 \cdot x - 4 = 0$. Корней нет.

3) $3(x + 2) = x + 2x + 6$; $0 \cdot x + 0 = 0$, x — любое действительное число.

Линейные уравнения с параметром мы научимся решать дальше.

Аналогично можно дать определение линейного уравнения с переменными x, y, ..., z.

▶ ***Определение 3.*** Линейным уравнением с переменными x, y, ..., z называется уравнение вида $Ax + By + ... + Cz + D = 0$, где коэффициенты A, B, ..., C и свободный член D являются действительными числами (или некоторыми функциями параметра a).

❑ Примеры.

$2x + 3y + 5 = 0$,

$x - 8y + a = 0$,

$(a - 1)x + 2y - z - 10 = 0$,

$x - (a^2 - 4)y - 8a + 3 = 0$.

■ 1.1. Уравнения первой степени с параметром (без «ветвлений»)

№ 1. Решите уравнение $2x = a$.

Решение.

Будем рассматривать параметр a как число, которое может быть любым. Тогда уравнение $2x = a$ «порождает» бесчисленное множество уравнений без параметра: $2x = 1/2$, $2x = 7$, $2x = -5$ и т. д.

Но для любого значения a уравнение $2x = a$ имеет единственное решение: если $a = 1$, то $x = 1/2$; если $a = 1/2$, то $x = 1/4$ и т. д.

В общем виде решение данного уравнения запишется так: $x = a/2$.

Пары соответствующих значений x и a можно изобразить на координатной прямой параметра a

(рис. 1). Под осью пишем значения a, над осью — соответствующие значения x.

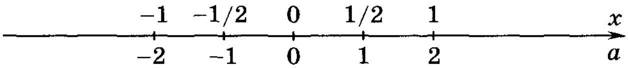


Рис. 1

Связь между x и a можно показать и путем построения графика функции $x = a/2$ в системе координат (aOx) (рис. 2).

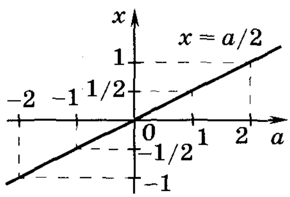


Рис. 2

Для нахождения значения x, соответствующего некоторому значению a, достаточно найти ординату точки графика функции $x = a/2$, абсцисса которой равна a.

Вопросы и задания

1) Найдите решение уравнения при $a = 0; 1; 2; 4; -2; -6$.
2) При каком значении a уравнение имеет решение $x = -1; -2; 0; 1/2; 3$?
3) Может ли данное уравнение иметь более одного решения при некотором значении a?
4) Можно ли указать два значения параметра a, при которых соответствующие значения x равны?

Решая последующие уравнения с параметром, полезно для иллюстрации решения обращаться к координатной прямой или системе координат.

№ 2. Решите уравнение $x - a = 2x + 3a - 1$.

Р е ш е н и е.

Установим область определения уравнения.

ООУ: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

Отметим, что вместо записи $a \in \mathrm{R}$ может быть и одна из таких: a — любое число; $a \in (-\infty; +\infty)$.

Решая данное уравнение, члены, содержащие x, переносим в одну часть уравнения, а не содержащие x — в другую.

$2x - x = -a - 3a + 1,$
$x = 1 - 4a.$

О т в е т. $x = 1 - 4a$ при любом значении a.

№ 3. Решите уравнение $(x - 3a)/2 = (x + a)/3$.

Р е ш е н и е.

Установим область определения уравнения.

ООУ: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

Умножим обе части уравнения на 6.

$3x - 9a = 2x + 2a,$
$x = 11a.$

О т в е т. $x = 11a$ при $a \in \mathrm{R}$.

№ 4. Решите уравнение $bx - b = 2x + (b - 1)x + 3b - 2$.

Р е ш е н и е.

Установим ООУ: $\begin{cases} b \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

Раскрываем скобки:

$bx - b = 2x + bx - x + 3b - 2.$

Перенесем члены, содержащие x, влево, не содержащие x, — вправо. Приведя подобные члены, получим

$x = 2 - 4b.$

О т в е т. $x = 2 - 4b$ при $b \in \mathrm{R}$.

№ 5. Решите уравнение
$m(2x-1)-m=2m(x-1)+x-3.$

Решение.

Установим ООУ: $\begin{cases} m \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

$2mx-m-m=2mx-2m+x-3,$
$x=3.$

Ответ. $x=3$ при любом значении $m \in \mathrm{R}$.

Проиллюстрируем ответ в системе координат (mOx) (рис. 3).

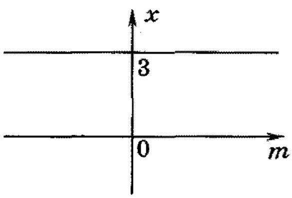


Рис. 3

№ 6. Решите уравнение
$b-(5-x)/6=(2x+b)/2-3b/4.$

Решение.

Установим ООУ: $\begin{cases} b \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

$12b-10+2x=12x+6b-9b,$
$10x=15b-10,$
$x=(3b-2)/2.$

Ответ. $x=(3b-2)/2$ при любом $b \in \mathrm{R}$.

№ 7. Решите уравнение $3x-2a=8(x-1)+5(a+2)-$
$-7a-5x.$

Решение.

ООУ: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

$3x - 2a = 8x - 8 + 5a + 10 - 7a - 5x$,
$0 \cdot x = 0 \cdot a + 2$.

Уравнение решений не имеет ни при каком значении a.

Ответ. Решений нет при любом $a \in \mathrm{R}$.

№ 8. Решите уравнение $2(x - a) - 3x = -2a - x$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

$2x - 2a - 3x = -2a - x$.
$0 \cdot x = 0 \cdot a$.

Любая пара значений x и a удовлетворяет уравнению.

Ответ. x — любое число при любом значении $a \in \mathrm{R}$.

№ 9. Решите уравнение $2(x - m)/m = 3/2$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} m \neq 0, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

$4x - 4m = 3m$,
$x = 7m/4$.

Ответ. 1) Если $m \neq 0$, то $x = 7m/4$.
2) Если $m = 0$, то решений нет.

№ 10. Решите уравнение $\dfrac{a}{x + 2} = 3$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \neq -2. \end{cases}$

Освободившись от знаменателя, получим уравнение-следствие:
$a = 3x + 6$, откуда $x = (a - 6)/3$.
Ответ записывать еще рано, так как мы не уверены, что при любом $a \in \mathrm{R}$ выражение $(a - 6)/3$ не

принимает значения -2. Поэтому появляется новый этап решения уравнения — исследование.

<u>Исследование</u>.

1) $\begin{cases} x = (a-6)/3, \\ (a-6)/3 \neq -2, \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} x = (a-6)/3, \\ a \neq 0. \end{cases}$

2) Пусть $a = 0$. Уравнение примет вид $0/(x+2) = 3$. Оно решений не имеет.

<u>Ответ</u>. 1) Если $a \neq 0$, то $x = (a-6)/3$.
2) Если $a = 0$, то решений нет.

Проиллюстрируем ответ в системе координат (aOx) (рис. 4).

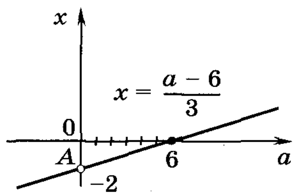


Рис. 4

При $a = 0$ соответствующая точка графика функции $x = (a-6)/3$ имеет ординату x, равную -2. А это число для x не является допустимым. Поэтому точка A графика «выкалывается».

№ 11. Решите уравнение $2/(x-3) = 1/(x+a)$.

<u>Решение</u>.

ООУ: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \neq -a, \\ x \neq 3. \end{cases}$

Переходим к уравнению-следствию
$2x + 2a = x - 3$,
$x = -2a - 3$.

<u>Исследование</u>.

1) $\begin{cases} x = -2a-3, \\ -2a-3 \neq 3, \\ -2a-3 \neq -a; \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} x = -2a-3, \\ a \neq -3. \end{cases}$

2) Если $a = -3$, то $x = 3$.

Эта пара значений x и a не удовлетворяет ООУ. Поэтому в этом случае решений нет.

А теперь представим результаты решения на координатной прямой параметра a (рис. 5). Напомним, что значения параметра пишем под прямой, а значения x — над прямой.

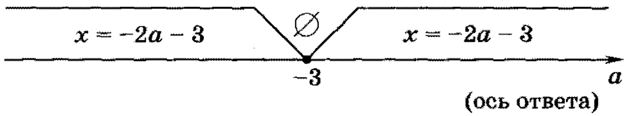


Рис. 5

Обычно прямая параметра заготавливается сразу после установления ООУ и заполняется постепенно по мере получения результатов решения. А затем уже с нее легко «считать» ответ. Попробуйте это сделать сами.

В дальнейшем мы будем часто пользоваться прямой параметра, которая служит не только для иллюстрации аналитического решения, но является инструментом работы. Завершение заполнения координатной прямой параметра часто служит сигналом окончания решения (если задание не содержит дополнительных условий). Деление оси параметра при решении уравнений с параметром на промежутки позволяет проследить качественные изменения структуры множества решений, а в более сложных упражнениях — облегчает проведение анализа множества решений. Заметим, что в некоторых случаях приходится применять несколько осей параметра, а потом уже заполняется ось ответа, на которой сводятся результаты промежуточных этапов решения.

Например, в 2004 г. на ЕГЭ по математике было предложено такое задание:

найдите все положительные значения параметра a, при которых для любого числа из отрезка $[-3;\ 3]$ верно неравенство $|2x + a|x| - 13| \geqslant 1$.

Мы его выполним позднее, а сейчас только заметим, что для решения неравенства нам понадобится заполнить 7 осей параметра. Но это не вызывает трудностей. Использование осей параметра делает решение наглядным, алгоритмизированным, логически стройным.

№ 12. Решите уравнение $\dfrac{3}{b-1} = \dfrac{b}{x-b}$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} b \neq 1, \\ x \neq b. \end{cases}$ ▶1

Сразу на оси параметра отмечаем, что при $b = 1$ решений нет. ▶2

Теперь перейдем к уравнению-следствию

$3x - 3b = b^2 - b$; откуда $x = (b^2 + 2b)/3$.

Исследование.

1) $\begin{cases} x = (b^2 + 2b)/3, \\ b \neq 1, \\ (b^2 + 2b)/3 \neq b, \end{cases}$ $\begin{cases} x = (b^2 + 2b)/3, \\ b \neq 1, \\ b^2 - b \neq 0, \end{cases}$

$\begin{cases} x = (b^2 + 2b)/3, \\ b \neq 1, \\ b \neq 0. \end{cases}$ ▶3 ▶4

2) Если $b = 0$, то решений нет.

Ответ попробуйте записать сами по рисунку 6.

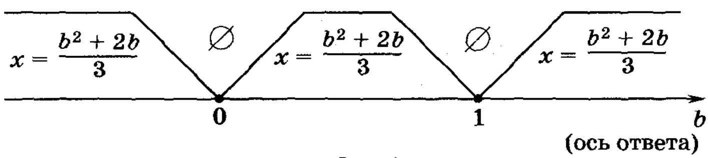


Рис. 6

Уравнения для самостоятельного решения

1) $7a - x = 0$. ▶1
2) $3a - 3x = x - 4a + 5$. ▶2
3) $(x - 2a)/5 = (a - 6x)/4$. ▶3
4) $b(3x - 1) - 6b = 3x(b - 1) + 2b - 2$. ▶4

5) $2b(x + 1) = x(2b - 3) + 4(b - 3)$. ▶5
6) $5x(b - 1) - 3x + 2b = 8(2 - x) + b(5x + 2)$. ▶6
7) $(2p - 3x)/4 = (1{,}5p - 2{,}25x)/3$. ▶7
8) $m/3 + 2x - 3m = x/5 - 2(x - m)$. ▶8
9) $a^2(x - 3) = x(a^2 - 5) - 3a$. ▶9
10) $(a - 2)(x + 3) = (5 - x)(3 - a) - 21 + 8a - x$. ▶10
11) $(b - 1)/(x - 3) = 4$. ▶11
12) $5/(x - 2a) = 3/(2x - 1)$. ▶12
13) $4/(x - 2k) = 1/(k - 3)$. ▶13

1.2. Простейшие линейные уравнения с параметром (с «ветвлениями»)

№ 1. Решите уравнение $(a - 1)x = 3$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

Рассмотрим два случая:

1) $a = 1$. Тогда уравнение примет вид
$0 \cdot x = 3$. Решений нет.

2) $a \neq 1$. Тогда $x = 3/(a - 1)$.

Покажем эти два вывода на оси параметра a (рис. 7).

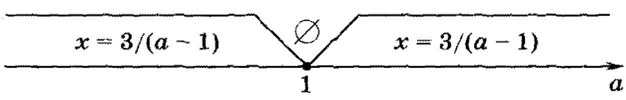


Рис. 7

Ответ. 1) Если $a \neq 1$, то единственное решение $x = 3/(a - 1)$.
2) Если $a = 1$, то уравнение решений не имеет.

При решении следующих уравнений ответ, если он отсутствует, предлагаем записать самим или сформулировать его устно, пользуясь координатной прямой параметра.

№ 2. Решите уравнение $(b-3)x=b^2-9$.

Решение (рис. 8).

ООУ: $\begin{cases} b \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

1) $b=3$, тогда $x \cdot 0 = 0$, $x \in \mathrm{R}$.

2) $b \neq 3$, тогда $x = b+3$.

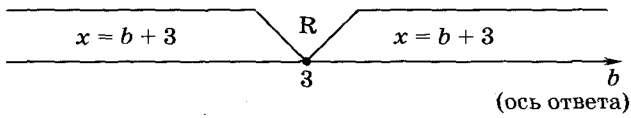


Рис. 8

Проиллюстрируем ответ в системе координат (bOx) (рис. 9).

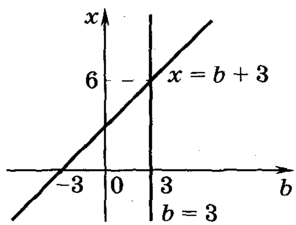


Рис. 9

Решениями уравнения являются две прямые: $x=b+3$ и $b=3$.

Графическая интерпретация ответа, особенно в начале работы с параметром, помогает лучше увидеть связь переменной и параметра в уравнении (неравенстве), а также глубже понять природу параметра.

Вопросы по рисунку 9

1) Назовите несколько решений уравнения при $b=3$.
2) При каких значениях b пары чисел $(b; x)$ являются решениями уравнения, если $x = 0; -1; 1; 6$?

№ 3. Решите уравнение $a^2x - a = x - 1$.

<u>Решение</u> (рис. 10).

ООУ: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

Приведем данное уравнение к виду

$(a^2 - 1)x = a - 1$.

Рассмотрим следующие возможные случаи:

1) $a = 1$, тогда $0 \cdot x = 0$, где x — любое число ($x \in \mathrm{R}$); ▶1

2) $a = -1$, тогда $0 \cdot x = -2$. Решений нет ($\varnothing$); ▶2

3) $a \neq \pm 1$, тогда $x = 1/(a + 1)$. ▶3

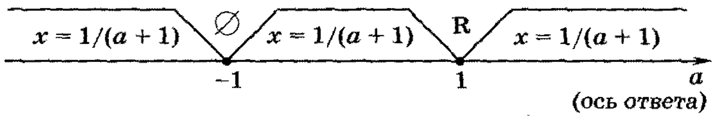


Рис. 10

№ 4. Решите уравнение $\dfrac{3x}{a} - 3 = a - x$.

<u>Решение</u> (рис. 11).

ООУ: $\begin{cases} a \neq 0, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$ ▶1

Перейдем от данного уравнения к уравнению

$3x - 3a = a^2 - ax$.

Решаем его:

$(3 + a)x = a(a + 3)$

1) $a = -3$; тогда $0 \cdot x = 0$, $x \in \mathrm{R}$; ▶2

2) $\begin{cases} a \neq -3, \\ a \neq 0, \end{cases}$ ▶3

тогда $x = a$.

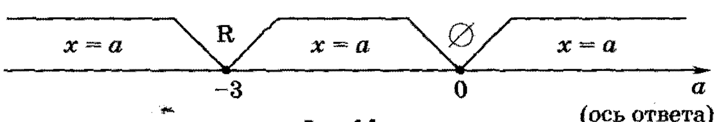


Рис. 11

Проиллюстрируйте ответ в системе координат (aOx) и ответьте на следующие вопросы.

1) При каком значении a пара чисел (a; 0) является решением уравнения? (Ответ: -3.)
2) При каких значениях a любое число x из отрезка $[2; 4]$ удовлетворяет данному уравнению? (Ответ: $[2; 4] \cup \{-3\}$.)

№ 5. Решите уравнение $\dfrac{2-x}{a+1} = 3 - x$.

<u>Решение</u> (рис. 12).

ООУ: $\begin{cases} a \neq -1, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$ ▶1

$2 - x = 3a + 3 - x(a + 1)$,
$xa = 3a + 1$.

1) $a = 0$; $0 \cdot x = 1$. Решений нет. ▶2

2) $\begin{cases} a \neq 0, \\ a \neq -1; \end{cases}$ ▶3

тогда $x = (3a + 1)/a$.

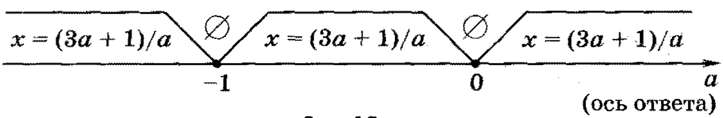


Рис. 12

№ 6. Решите уравнение $3x(a - 2) + 6a = 2a(x + 3)$.

<u>Решение</u> (рис. 13).

ООУ: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

$3ax - 6x + 6a = 2ax + 6a$,
$x(a - 6) = 0$.

1) $a = 6$; $x \in \mathrm{R}$; ▶1
2) $a \neq 6$; $x = 0$. ▶2

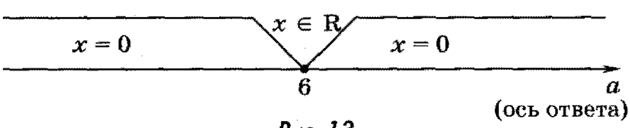


Рис. 13

№ 7. Решите уравнение $(x-2)(b^2-9)=0$.

Решение (рис. 14).

ООУ: $\begin{cases} b \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

1) $b = 3$ или $b = -3$, тогда $x \in \mathrm{R}$. ▶1

2) $b \neq \pm 3$; $x = 2$. ▶2

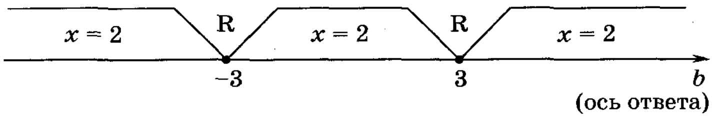


Рис. 14

Интерпретируем результат решения в системе координат (bOx) (рис. 15). Ответьте на вопросы.

1) При каких значениях b данное уравнение имеет решения: 4; 0; −1; −2?
2) Сколько решений имеет уравнение при $b = 0$?

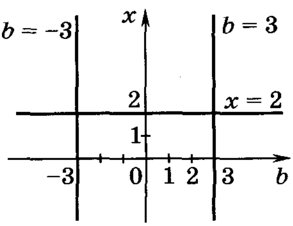


Рис. 15

Ответ. 1) Если $b \neq \pm 3$, то $x = 2$.
2) Если $b = 3$ или $b = -3$, то $x \in \mathrm{R}$.

Уравнения для самостоятельного решения

1) $(b+1)x = 3$. ▶1
2) $a - a^2x = 5 - 25x$. ▶2
3) $(3-m)x = m^2 - 9$. ▶3
4) $mx - 3x/m - m = 7 - 8/m - 2x$. ▶4
5) $2(a+1)x/a = 3(x+1) + 7/a$. ▶5
6) $5x/m - 5 = x - m$. ▶6
7) $3 + 3x/n = n + x$. ▶7

8) $(x-3)/(a-1)=(2+3x)/a$. ▶8

9) $2a(x-3)-4a=x(a-1)-2x+3a+39$. ▶9

10) $(x-1)(a^2-4)=0$. ▶10

1.3. Дробно-рациональные уравнения с параметром

№ 1. Решите уравнение $\dfrac{x+a}{x-3}=0$.

Решение (рис. 16).

ООУ: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \neq 3. \end{cases}$

Приравняем к нулю числитель дроби:

$x+a=0$, тогда $x=-a$.

Исследование.

1) $x=-a$ является допустимым при следующих значениях параметра a: $-a \neq 3$, $a \neq -3$.

2) При $a=-3$ уравнение примет вид $(x-3)/(x-3)=0$.

Решений в этом случае нет.

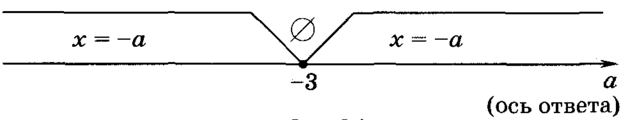


Рис. 16

Ответ. 1) Если $a \neq -3$, то единственное решение $x=-a$.

2) Если $a=-3$, то решений нет.

Воспользуемся опять системой координат для иллюстрации ответа (рис. 17).

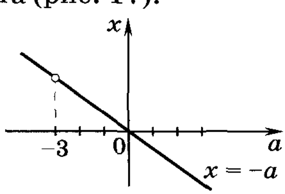


Рис. 17

№ 2. Решите уравнение $\dfrac{x-m}{(x-1)(x-2)}=0.$

Решение.

ООУ: $\begin{cases} m \in \mathrm{R}, \\ x \neq 1, \\ x \neq 2. \end{cases}$

$x - m = 0,\ x = m.$

Исследование.

1) $\begin{cases} x = m, \\ m \neq 1, \\ m \neq 2. \end{cases}$ ▶1

2) $m = 1$ или $m = 2$; тогда решений нет. ▶2

Ответ запишите самостоятельно по рисунку 18.

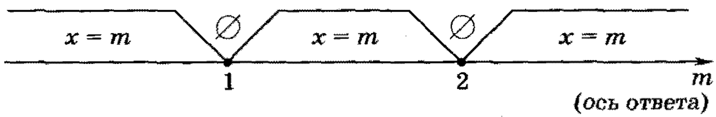


Рис. 18

№ 3. Решите уравнение $\dfrac{m}{x+3}=5.$

Решение (рис. 19).

ООУ: $\begin{cases} m \in \mathrm{R}, \\ x \neq -3. \end{cases}$

$m = 5x + 15,$
$x = m/5 - 3.$

Исследование.

1) $\begin{cases} x = m/5 - 3, \\ m/5 - 3 \neq -3, \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x = m/5 - 3, \\ m \neq 0. \end{cases}$

2) $m = 0$; в этом случае решений нет.

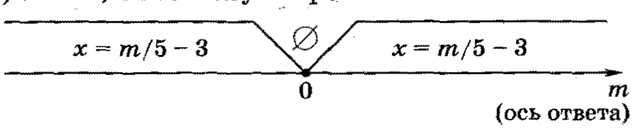


Рис. 19

№ 4. Решите уравнение $\dfrac{x}{x+1} = a$.

Решение (рис. 20).

ООУ: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \neq -1. \end{cases}$

$x = ax + a$,

$x(1 - a) = a$.

1) $a = 1$; тогда $0 \cdot x = 1$. Решений нет. ▶1

2) $a \neq 1$; тогда $x = a/(1 - a)$. ▶2

Исследование.

$\begin{cases} x = a/(1 - a), \\ a \neq 1, \\ a/(1 - a) \neq -1; \end{cases}$ $\begin{cases} x = a/(1 - a), \\ a \neq 1, \\ a \neq -1 + a; \end{cases}$ $\begin{cases} x = a/(1 - a), \\ a \neq 1. \end{cases}$

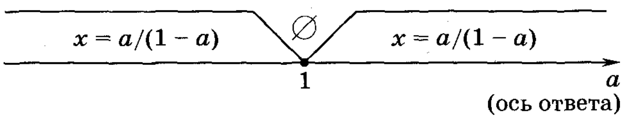


Рис. 20

№ 5. Решите уравнение $\dfrac{ax+1}{x+2} = 2a + 1$.

Решение (рис. 21).

ООУ: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \neq -2. \end{cases}$

$ax + 1 = 2ax + x + 4a + 2$,

$x(a + 1) = -1 - 4a$.

1) $a = -1$; тогда $x \cdot 0 = 3$. Решений нет. ▶1

2) $a \neq -1$; в этом случае $x = -(1 + 4a)/(a + 1)$.

Исследование.

1) $\begin{cases} x = -(1 + 4a)/(a + 1), \\ a \neq -1, \\ -(1 + 4a)/(a + 1) \neq -2; \end{cases}$ $\begin{cases} x = -(1 + 4a)/(a + 1), \\ a \neq -1, \\ -1 - 4a \neq -2a - 2; \end{cases}$

$$\begin{cases} x = -(1+4a)/(a+1), \\ a \neq -1, \\ a \neq 1/2. \end{cases}$$ ▶2

2) Если $a = 1/2$, то $x = -(1+4a)/(a+1)$ становится недопустимым. Поэтому решений нет. ▶3

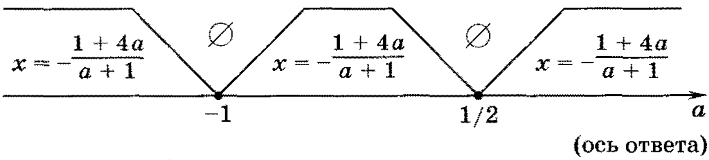


Рис. 21

№ 6. Решите уравнение $\dfrac{a^2x-1}{x-1} = a$.

<u>Решение</u> (рис. 22).

ООУ: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \neq 1. \end{cases}$

$a^2x - 1 = ax - a,$

$a(a-1)x = 1 - a.$

1) $a = 0$; тогда $0 \cdot x = 1$. Решений нет. ▶1

2) $a = 1$; тогда $x \cdot 0 = 0$, x — любое число, неравное 1. ▶2

3) $a \neq 0$, $a \neq 1$; тогда $x = -1/a$.

<u>Исследование</u>.

1) $\begin{cases} x = -1/a, \\ a \neq 0, \\ a \neq 1, \\ -1/a \neq 1. \end{cases}$ $\begin{cases} x = -1/a, \\ a \neq 0, \\ a \neq 1, \\ a \neq -1. \end{cases}$ ▶3

2) Если $a = -1$, то решений нет. ▶4

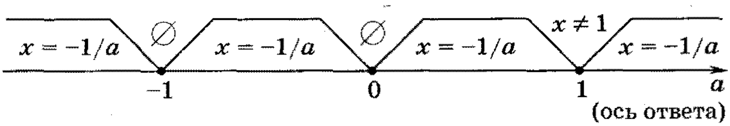


Рис. 22

№ 7. Решите уравнение $\dfrac{a-2}{ax+1}=1$.

<u>Решение</u> (рис. 23).

ООУ: $\begin{cases} a\in \mathrm{R}, \\ ax\neq -1. \end{cases}$

$a-2=ax+1,$

$ax=a-3.$

1) $a=0$; тогда $x\cdot 0=-3$. Решений нет. ▶1

2) $a\neq 0$; тогда $x=(a-3)/a$.

<u>Исследование.</u>

1) $\begin{cases} x=(a-3)/a, \\ a\neq 0, \\ (a-3)a/a\neq -1; \end{cases}$ $\quad\begin{cases} x=(a-3)/a, \\ a\neq 0, \\ a\neq 2. \end{cases}$ ▶2

2) Если $a=2$, то $x=(a-3)/a$ станет недопустимым. ▶3

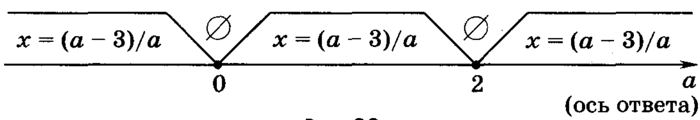


Рис. 23

№ 8. Решите уравнение $\dfrac{1}{2a}+\dfrac{2}{x-a}=\dfrac{3x-2}{2(x-a)}$.

<u>Решение</u> (рис. 24).

ООУ: $\begin{cases} a\neq 0, \\ x\neq a. \end{cases}$ ▶1

$x-a+4a=3ax-2a,$

$x(1-3a)=-5a.$

1) $a=1/3$; тогда $x\cdot 0=-5/3$. Решений нет. ▶2

2) $a\neq 1/3$; тогда $x=5a/(3a-1)$.

<u>Исследование.</u>

1) $\begin{cases} x=5a/(3a-1), \\ a\neq 1/3, \\ 5a/(3a-1)\neq a, \\ a\neq 0. \end{cases}$ $\quad\begin{cases} x=5a/(3a-1), \\ a\neq 1/3, \\ a\neq 0, \\ 5\neq 3a-1. \end{cases}$

$$\begin{cases} x = 5a/(3a-1), \\ a \neq 1/3, \\ a \neq 0, \\ a \neq 2. \end{cases}$$ ▶3

2) При $a = 2$ решений нет. ▶4

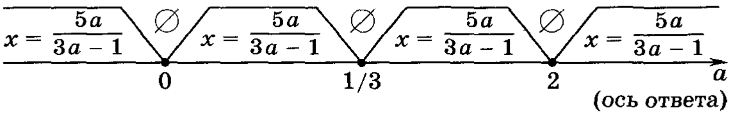


Рис. 24

<u>Ответ</u>. 1) Если $a \neq 0$, $a \neq 1/3$, $a \neq 2$, то единственное решение $x = 5a/(3a-1)$.
2) Если $a = 0$, или $a = 1/3$, или $a = 2$, то решений нет.

Уравнения для самостоятельного решения

1) $(x + m)/(2x - 1) = 0.$ ▶1

2) $\dfrac{x + a}{(x+3)(x-4)} = 0.$ ▶2

3) $\dfrac{3x - c}{(x-4)(x-c)} = 0.$ ▶3

4) $4k/(x - 1) = 5.$ ▶4

5) $a/(x - 2) = 1.$ ▶5

6) $2a/(1 - x) = 3.$ ▶6

7) $2x/(x - 4) = b.$ ▶7

8) $(2bx - 3)/(x - 3) = b + 1.$ ▶8

9) $(mx - 1)/(x + 2) = 3m - 1.$ ▶9

10) $(1 - 4cx)/(1 - x) = 2c + 4.$ ▶10

11) $(a^2x - 4)/(x - 1) = 2a.$ ▶11

12) $(b^2x - 8)/(x - 2) = 2b.$ ▶12

13) $(3x - 2b)/(bx - 1) = 3.$ ▶13

14) $2/(x + b) - (2x - 4)/(x^2 - b^2) = \dfrac{b - 2}{b(x - b)}.$ ▶14

15) $(2 - 3a)/(2 - ax) = 4/(x - 2).$ ▶15

16) $(a+3)/(a+2) = 2/x - \dfrac{5}{(a+2)x}$. ▶16

17) $(x-4)/(x+1) + 2/k = \dfrac{1}{k(x+1)}$. ▶17

1.4. Более сложные дробно-рациональные уравнения с параметром, сводимые к линейным

№ 1. Решите уравнение $\dfrac{2ax}{x+3} - \dfrac{x+4a}{2x-6} = \dfrac{x(4a-1)}{2x+6}$.

Решение (рис. 25).

$$\text{ООУ: } \begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \neq -3, \\ x \neq 3. \end{cases}$$

$2ax(2x-6) - (x+4a)(x+3) = x(4a-1)(x-3)$,
$x(3+2a) = -6a$.
1) $a = -3/2$; тогда $x \cdot 0 = 9$. Решений нет. ▶1
2) $a \neq -3/2$; тогда $x_1 = -6a/(3+2a)$.

Исследование.

$$1) \begin{cases} x_1 = -6a/(3+2a), \\ a \neq -3/2, \\ -6a/(3+2a) \neq 3, \\ -6a/(3+2a) \neq -3; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -6a/(3+2a), \\ a \neq -3/2, \\ -6a \neq 9 + 6a, \\ -6a \neq -9 - 6a; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -6a/(3+2a), \\ a \neq -3/2, \\ a \neq -3/4. \end{cases}$$ ▶2

2) Если $a = -3/4$, то решений нет. ▶3

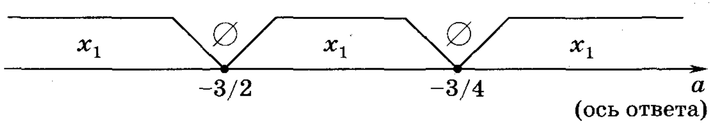


Рис. 25

№ 2. Решите уравнение $\dfrac{3mx-5}{(m-1)(x+3)}+\dfrac{3m-11}{m-1}=$

$=\dfrac{2x+7}{x+3}.$

<u>Решение</u> (рис. 26).

ООУ: $\begin{cases} m \neq 1, \\ x \neq -3. \end{cases}$ ▶1

Приводим данное уравнение к виду
$(4m-9)x=31-2m$.
1) $m=9/4$; $x \cdot 0=31-9/2$. Решений нет. ▶2
2) $m \neq 9/4$; $x_1=(31-2m)/(4m-9)$.

<u>Исследование.</u>

1) $\begin{cases} x_1=(31-2m)/(4m-9), \\ m \neq 9/4, \\ (31-2m)/(4m-9) \neq -3, \\ m \neq 1; \end{cases}$

$\begin{cases} x_1=(31-2m)/(4m-9), \\ m \neq 9/4, \\ m \neq -2/5, \\ m \neq 1. \end{cases}$ ▶3

2) Если $m=-2/5$, то решений нет. ▶4

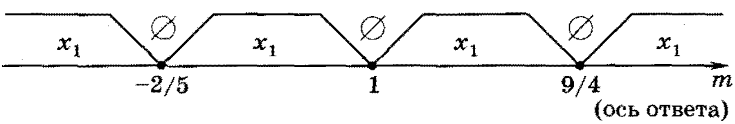


Рис. 26

№ 3. Решите уравнение $\dfrac{5}{2x-k}=\dfrac{3}{4-kx}$.

<u>Решение</u> (рис. 27).

ООУ: $\begin{cases} k \in \mathrm{R}, \\ x \neq k/2, \\ kx \neq 4. \end{cases}$

$5(4-kx)=3(2x-k)$,
$x(6+5k)=20+3k$.

1) $k = -6/5$; тогда $0 \cdot x = 20 - 18/5$. Решений нет. ▶1

2) $k \neq -6/5$; $x_1 = (20 + 3k)/(6 + 5k)$.

<u>Исследование.</u>

1) $\begin{cases} x_1 = (20 + 3k)/(6 + 5k), \\ k \neq -6/5, \\ (20 + 3k)/(6 + 5k) \neq k/2, \\ k \cdot (20 + 3k)/(6 + 5k) \neq 4; \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 = (20 + 3k)/(6 + 5k), \\ k \neq -6/5, \\ k \neq 2\sqrt{2}, \\ k \neq -2\sqrt{2}. \end{cases}$ ▶2

2) Если $k = 2\sqrt{2}$ или $k = -2\sqrt{2}$, то решений нет. ▶3

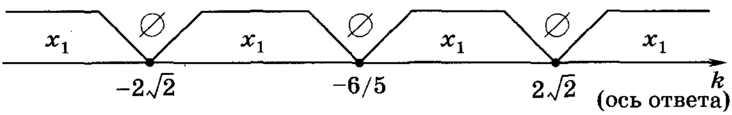


Рис. 27

№ 4. Решите уравнение $m = \dfrac{1}{m} + \dfrac{m-1}{m(x-1)}$.

<u>Решение</u> (рис. 28).

ООУ: $\begin{cases} m \neq 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$ ▶1

$x(m^2 - 1) = (m - 1)(m + 2)$.

1) $m = 1$; тогда $x \cdot 0 = 0$, x — любое число, кроме 1. ▶2

2) $m = -1$; тогда $x \cdot 0 = -2$. Решений нет. ▶3

3) $m \neq \pm 1$; тогда $x_1 = (m + 2)/(m + 1)$.

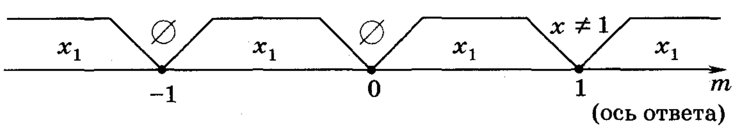


Рис. 28

Исследование.

$$\begin{cases} x_1 = (m+2)/(m+1), \\ m \neq \pm 1, \\ (m+2)/(m+1) \neq 1, \\ m \neq 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = (m+2)/(m+1), \\ m \neq 0, \\ m \neq \pm 1. \end{cases}$$ ▶4

Уравнения для самостоятельного решения

1) $\dfrac{2}{a(x-3)} + \dfrac{3}{(a-1)(x+1)} = \dfrac{x-5}{a(x-3)(x+1)}$. ▶1

2) $\dfrac{3mx}{(m+2)(x^2-9)} = \dfrac{2m+1}{(m+2)(x-3)} - \dfrac{5}{x+3}$. ▶2

3) $\dfrac{ax}{x+2} - \dfrac{2a+x}{2x-4} = \dfrac{x(2a-1)}{2x+4}$. ▶3

4) $\dfrac{1}{a(x-4)} + \dfrac{4}{(a+1)(x+4)} = \dfrac{x-1}{a(x^2-16)}$. ▶4

5) $\dfrac{1}{b(x+3)} - \dfrac{2}{(1-b)(x-2)} = \dfrac{3-x}{b(x+3)(x-2)}$. ▶5

1.5. Уравнения с дополнительными условиями

№ 1. При каких значениях параметра a уравнение $(a-1)x = 2a-3$ имеет только положительные решения?

Решение.

ООУ: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

Рассмотрим возможные случаи:

1) $a = 1$; тогда $x \cdot 0 = -1$. Решений нет.

2) $a \neq 1$; тогда $x = (2a-3)/(a-1)$.

Решаем неравенство $(2a-3)/(a-1) > 0$ методом интервалов: находим значения a, при которых дробь равна 0 или не существует; отмечаем эти точки на оси a и определяем знак дроби в каждом из полученных интервалов (рис. 29).

Рис. 29

В дальнейшем, если дана дробно-рациональная функция $y = \dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$, то договоримся нули этой функции, а также точки, в которых она не определена, называть «граничными точками интервалов».

Неравенство строгое, поэтому точка $a = 1$ — выколотая; $a = 3/2$ тоже выколотая, так как это недопустимое значение.

<u>Ответ</u>. $(-\infty; 1) \cup (3/2; +\infty)$.

№ 2. Найдите те значения параметра a, при которых все решения уравнения $(a^2 - 1)x = (a - 1)(3a - 1)$ удовлетворяют условию $|x| \leqslant 2$.

<u>Решение</u> (рис. 30).

ООУ: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

1) $a = 1$; тогда $x \cdot 0 = 0$, $x \in \mathrm{R}$.
2) $a = -1$; тогда $x \cdot 0 = 8$. Решений нет.
3) $a \neq \pm 1$; тогда $x = (3a - 1)/(a + 1)$.

Достаточно решить систему неравенств

$$\begin{cases} (3a - 1)/(a + 1) \leqslant 2, \\ (3a - 1)/(a + 1) \geqslant -2, \\ a \neq \pm 1; \end{cases} \quad ▶1$$

$$\begin{cases} (a - 3)/(a + 1) \leqslant 0, \\ (5a + 1)/(a + 1) \geqslant 0, \\ a \neq \pm 1. \end{cases} \quad ▶2$$

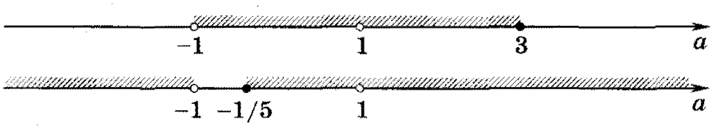


Рис. 30

<u>Ответ</u>. $[-1/5; 1) \cup (1; 3]$.

№ 3. При каких значениях параметра b хотя бы один корень уравнения $(b - 4)x = (b^2 - 16)(b - 2)$ удовлетворяет условию $|x| \geqslant 27$?

Решение.

ООУ: $\begin{cases} b \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

1) $b = 4$; тогда $0 \cdot x = 0$, $x \in \mathrm{R}$.

2) $b \neq 4$; тогда $x = (b + 4)(b - 2)$ (рис. 31).

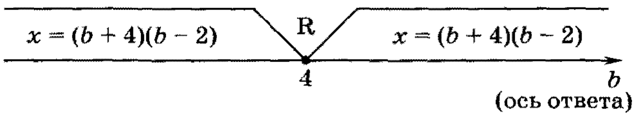


Рис. 31

Значение $b = 4$ удовлетворяет условию задания. Остается решить систему неравенств:

$\begin{cases} |(b + 4)(b - 2)| \geqslant 27, \\ b \neq 4, \end{cases}$ $\quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} b^2 + 2b - 35 \geqslant 0, \\ b^2 + 2b + 19 \leqslant 0, \end{array}\right. \\ b \neq 4. \end{cases}$

Неравенство $b^2 + 2b + 19 \leqslant 0$ решений не имеет.

$\begin{cases} b^2 + 2b - 35 \geqslant 0, \\ b \neq 4, \end{cases}$ $\quad \left[\begin{array}{l} b \geqslant 5, \\ b \leqslant -7. \end{array}\right.$

Ответ. $(-\infty; -7] \cup \{4\} \cup [5; +\infty)$.

№ 4. Решите систему

$\begin{cases} (x - 2)(a + 1) = 0, \\ x \geqslant 0. \end{cases}$

Решение.

1) $a = -1$; тогда $(x - 2) \cdot 0 = 0$, $x \in \mathrm{R}$. Учитывая, что $x \geqslant 0$, получаем $x \in [0; +\infty)$.

2) $a \neq -1$; тогда $x = 2$.

Ответ. 1) Если $a = -1$, то $x \in [0; +\infty)$.
2) Если $a \neq -1$, то $x = 2$.

№ 5. При каких значениях a уравнения $\dfrac{a - 2}{ax + 1} = 1$ и

$\dfrac{1}{2a} + \dfrac{2}{x - a} = \dfrac{3x - 2}{2(x - a)}$ равносильны?

Р е ш е н и е.

Эти уравнения решались ранее (см. № 7 и № 8 пункта 1.3).

Воспользуемся рисунками 23 и 24, поместив их один под другим (рис. 32).

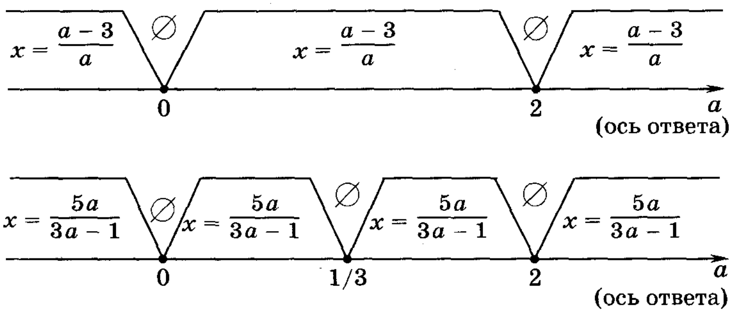


Рис. 32

Сравнение рисунков показывает, что при $a = 0$ или $a = 2$ оба уравнения не имеют корней, а потому равносильны.

Узнаем, при каких значениях a имеет место равенство $(a - 3)/a = 5a/(3a - 1)$:

$3a^2 - a - 9a + 3 = 5a^2$,

$2a^2 + 10a - 3 = 0$.

$D/4 = 31$; $a_1 = (-5 + \sqrt{31})/2$; $a_2 = (-5 - \sqrt{31})/2$.

О т в е т. Уравнения равносильны, если

$$a \in \{(-5 -- \sqrt{31})/2;\ 0;\ (-5 + \sqrt{31})/2;\ 2\}.$$

№ 6. Найдите значения a, при которых уравнение $\dfrac{a-1}{x+4} = \dfrac{2x+3}{x^2 - x - 20}$ имеет корни, удовлетворяющие неравенству $x \leqslant 2$.

Р е ш е н и е.

$$\text{ООУ: } \begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \neq -4, \\ x \neq 5. \end{cases}$$

Многочлен второй степени, стоящий в знаменателе в правой части уравнения, легко раскладывается на множители: $x^2 - x - 20 = (x - 5)(x + 4)$.
Тогда $(a - 1)(x - 5) = 2x + 3$, $(a - 3)x = 5a - 2$.
1) $a = 3$; тогда $a \cdot 0 = 13$. Решений нет. ▶1
2) $a \neq 3$; тогда $x_1 = (5a - 2)/(a - 3)$.

<u>Исследование.</u>

$$1)\begin{cases} x_1 = (5a-2)/(a-3), \\ (5a-2)/(a-3) \neq -4, \\ (5a-3)/(a-3) \neq 5, \\ a \neq 3; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = (5a-2)/(a-3), \\ a \neq 3, \ \text{▶2} \\ a \neq 14/9. \end{cases}$$

2) Если $a = 14/9$, то решений нет (рис. 33). ▶3

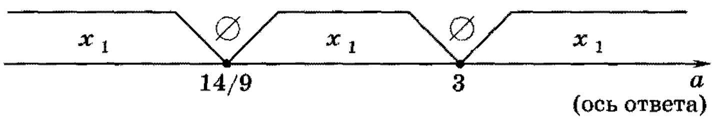


Рис. 33

Найдем a, при которых $x_1 \leqslant 2$:
$(5a - 2)/(a - 3) \leqslant 2$,
$(3a + 4)/(a - 3) \leqslant 0$, $a \in [-4/3; 3)$.
Учтем, что при $a = 14/9$ уравнение решений не имеет.

<u>Ответ</u>. $[-4/3; 14/9) \cup (14/9; 3)$.

Задания для самостоятельного решения

1) При каких значениях параметра a уравнение $ax - 3a = 2x + 1$ имеет только отрицательные решения? ▶1
2) Найдите значения параметра a, при которых все решения уравнения $(a^2 - 3a + 2)x = (a - 1)(2a - 5)$ удовлетворяют условию $|x| \geqslant 2$. ▶2
3) При каких значениях параметра b все $x \in [-4; 8]$ удовлетворяют уравнению
$(2 - b)x = (b^2 - 4)(b - 1)$? ▶3

4) При каких значениях a все решения уравнения $\dfrac{a-1}{x+6}=\dfrac{2x+7}{(x+2)^2-x-22}$ неположительны? ▶4

5) Решите систему:
$$\begin{cases}(b-2)(x+1)=0,\\ x\geqslant 0.\end{cases}$$ ▶5

6) Решите систему:
$$\begin{cases}x=a/(3a-8),\\ x=a,\\ x\geqslant 1.\end{cases}$$ ▶6

7) Решите систему:
$$\begin{cases}bx=x-b+2,\\ x-2b=-b-1/2,\\ x<0.\end{cases}$$ ▶7

8) Решите систему:
$$\begin{cases}(b-2)x=b^2-4,\\ (b-1)x=2b.\end{cases}$$ ▶8

1.6. Уравнения, содержащие переменную под знаком модуля

№ 1. Решите уравнение $|x|=a-2$.

Решение (рис. 34).

ООУ: $\begin{cases}a\in \mathrm{R},\\ x\in \mathrm{R}.\end{cases}$

Учитывая, что $|x|\geqslant 0$, заметим, что данное уравнение имеет корни, если $a-2\geqslant 0$.

1) $a=2$; тогда $|x|=0$, $x=0$. ▶1

2) $a>2$; тогда $\left[\begin{array}{l}x_1=a-2,\\ x_2=-a+2.\end{array}\right.$ ▶2

3) $a<2$; решений нет. ▶3

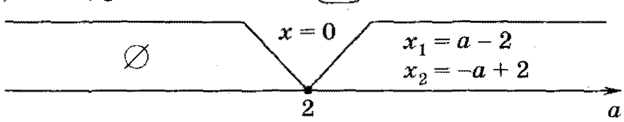


Рис. 34

№ 2. Решите уравнение $|3 - 2x| = 2a - 1$.

Решение (рис. 35).

ООУ: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

1) $a = 1/2$; тогда $|3 - 2x| = 0$, $x = 3/2$. ▶1

2) $a > 1/2$; тогда

$$\left[\begin{array}{l} 3 - 2x = 2a - 1, \\ 3 - 2x = 1 - 2a; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x_1 = 2 - a, \\ x_2 = 1 + a. \end{array}\right.$$ ▶2

3) $a < 1/2$ решений нет. ▶3

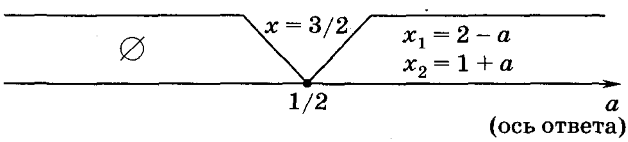


Рис. 35

Проиллюстрируем ответ в системе координат (aOx) (рис. 36).

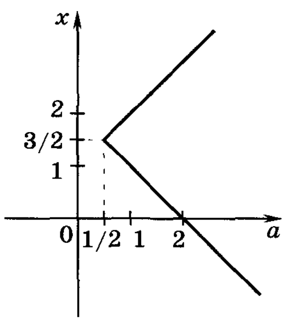


Рис. 36

№ 3. Решите уравнение $|2x - 1| = -a^2 + 2a - 1$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

$|2x - 1| = -(a - 1)^2$.

Видим, что $-(a-1)^2 \leqslant 0$, а потому данное уравнение имеет решения только при $a=1$.
$|2x-1|=0$, $x=1/2$.

Ответ. 1) Если $a=1$, то $x=1/2$.
2) Если $a \neq 1$, то решений нет.

№ 4. При каких значениях параметра b уравнение $|bx-2b-2|+|(1-b)x-3b|=0$ имеет решения?

Решение.

ООУ: $\begin{cases} b \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

Уравнение сводится к системе

$$\begin{cases} bx-2b-2=0, \\ (1-b)x-3b=0. \end{cases}$$

Решаем сначала первое уравнение: $bx=2b+2$.

1) $b=0$; тогда $0 \cdot x=2$. Решений нет.
2) $b \neq 0$; тогда $x=2(b+1)/b$.

А теперь полученное значение x подставим во второе уравнение системы

$$\begin{cases} 2(1-b^2)/b-3b=0, \\ b \neq 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} b^2=0{,}4, \\ b \neq 0, \end{cases}$$

$b=\pm\sqrt{0{,}4}$.

Ответ. $\pm\sqrt{0{,}4}$.

№ 5. Решите уравнение

$$|ax-2a-2|+|(1-a)x-3a|=0.$$

Решение.

ООУ: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

Данное уравнение равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} ax-2a-2=0, \\ (1-a)x-3a=0. \end{cases}$$

Решаем сначала каждое уравнение отдельно.

1) $ax = 2(a + 1)$.

Если $a = 0$, то решений нет.

Если $a \neq 0$, то $x = 2(a + 1)/a$.

2) $(1 - a)x = 3a$.

Если $a = 1$, то решений нет.

Если $a \neq 1$, то $x = 3a/(1 - a)$.

А теперь достаточно решить систему:

$$\begin{cases} x = 3a/(1 - a), \\ 2(a + 1)/a = 3a/(1 - a), \\ a \neq 0,\ a \neq 1. \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 3a/(1 - a), \\ 3a^2 = 2 - 2a^2, \\ a \neq 0,\ a \neq 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3a/(1 - a), \\ \left[\begin{array}{l} a = \sqrt{0,4}, \\ a = -\sqrt{0,4}. \end{array} \right. \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = \sqrt{0,4}, \\ x = 2 + \sqrt{10}, \end{cases} \\ \begin{cases} a = -\sqrt{0,4}, \\ x = 2 - \sqrt{10}. \end{cases} \end{array} \right.$$

<u>Ответ</u>. 1) Если $a = \sqrt{0,4}$, то $x = 2 + \sqrt{10}$.

2) Если $a = -\sqrt{0,4}$, то $x = 2 - \sqrt{10}$.

3) Если $a \neq \pm\sqrt{0,4}$, то решений нет.

№ 6. При каких значениях a уравнение

$$\left|\frac{ax - 2a - 1}{x - 2}\right| + |x - 3a - 3| = 0$$

имеет только положительные решения? Найдите их.

<u>Решение</u>.

ООУ: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \neq 2. \end{cases}$

Для ответа на вопрос задания достаточно решить систему

$$\begin{cases} (ax - 2a - 1)/(x - 2) = 0, \\ x - 3a - 3 = 0, \\ x > 0. \end{cases}$$

Решаем первое уравнение системы
$(ax - 2a - 1)/(x - 2) = 0$,
$ax = 2a + 1$.
1) $a = 0$; тогда $0 \cdot x = 1$. Решений нет.
2) $a \neq 0$; тогда $x = (2a + 1)/a$.

<u>Исследование</u>.
$$\begin{cases} x = (2a+1)/a, \\ (2a+1)/a \neq 2, \\ a \neq 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = (2a+1)/a, \\ a \neq 0. \end{cases}$$

Перейдем к системе
$$\begin{cases} x = (2a+1)/a, \\ x = 3a+3, \\ a \neq 0, \\ x > 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 3a+3, \\ (2a+1)/a = 3a+3, \\ a \neq 0, \\ 3a+3 > 0; \end{cases}$$
$$\begin{cases} x = 3a+3, \\ 2a+1 = 3a^2+3a, \\ a \neq 0, \\ a > -1; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 3a+3, \\ 3a^2+a-1 = 0, \\ a \neq 0, \\ a > -1; \end{cases}$$
$$\begin{cases} x = 3a+3, \\ a = (-1 \pm \sqrt{13})/6, \\ a \neq 0, \\ a > -1; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 3a+3, \\ a = (-1 \pm \sqrt{13})/6, \end{cases}$$
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = (-1 - \sqrt{13})/6, \\ x = (5 - \sqrt{13})/2, \end{cases} \\ \begin{cases} a = (-1 + \sqrt{13})/6, \\ x = (5 + \sqrt{13})/2. \end{cases} \end{array}\right.$$

<u>Ответ</u>. 1) Уравнение имеет только положительные решения при $a = (-1 \pm \sqrt{13})/6$.

2) Если $a = (-1 - \sqrt{13})/6$, то $x = (5 - \sqrt{13})/2$.

3) Если $a = (-1 + \sqrt{13})/6$, то $x = (5 + \sqrt{13})/2$.

№ 7. Решите уравнение $|x-1| = ax+1$.

<u>Решение</u>.

ООУ: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

Данное уравнение равносильно совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{ll} \begin{cases} x \geqslant 1, \\ x-1 = ax+1; \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} x < 1, \\ 1-x = ax+1. \end{cases} & (2) \end{array}\right.$$

Решаем каждую из систем (1) и (2), результаты решения отметим на осях (1) и (2) соответственно (рис. 37). А затем заполним ось ответа.

(1): $x(1-a) = 2$.

1) $a = 1$; тогда $x \cdot 0 = 2$. Решений нет. (▶1)
2) $a \neq 1$; тогда $x = 2/(1-a)$.
   $2/(1-a) \geqslant 1$, $(a+1)/(1-a) \geqslant 0$, $a \in [-1; 1)$. (▶2)
3) $a = -1$, то $x = 1$. (▶3)
4) При $a < -1$ или $a > 1$ система (1) решений не имеет. (▶4)

(2): $x(a+1) = 0$.

1) Если $a = -1$, то $x \in \mathrm{R}$. Но учитываем, что $x < 1$. (▶5)
2) Если $a \neq -1$, то $x = 0$. (▶6)

Заполним ось ответа. (▶7)

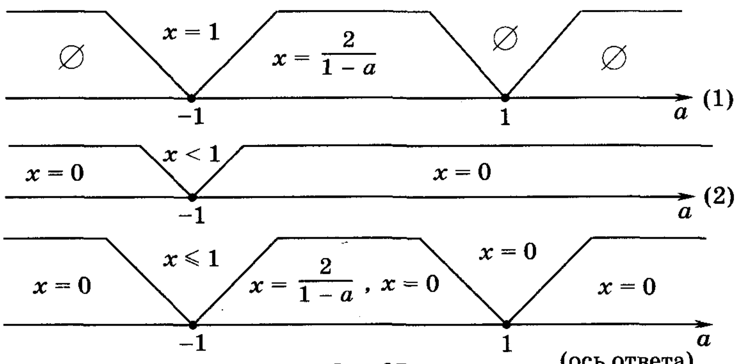


Рис. 37

Ответ. 1) Если $a \in (-\infty; -1) \cup [1, \infty)$; то $x = 0$.
2) Если $a = -1$, то $x \in (-\infty; 1]$.
3) Если $a \in (-1; 1)$, то $x = 2/(1 - a)$ и $x = 0$.

№ 8. Решите уравнение $|3x + 3| = ax + 4$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

Данное уравнение равносильно совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant -1, \\ 3x + 3 = ax + 4; \end{cases} \quad (1) \\ \begin{cases} x < -1, \\ -3x - 3 = ax + 4. \end{cases} \quad (2) \end{array}\right.$$

Откуда

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant -1, \\ x(3 - a) = 1; \end{cases} \quad (1) \\ \begin{cases} x < -1, \\ x(a + 3) = -7. \end{cases} \quad (2) \end{array}\right.$$

Решение системы (1) отметим на оси (1) рисунка 38. Решение системы (2) на оси (2), а для записи ответа воспользуемся третьей осью, на которой будут сведены решения систем (1) и (2) (рис. 38).

Решим сначала систему (1):

$x(3 - a) = 1$.

1) $a = 3$; тогда $0 \cdot x = 1$. Решений нет. (▶1)
2) $a \neq 3$; тогда $x_1 = 1/(3 - a)$.
$1/(3 - a) \geqslant -1$, $(4 - a) / (3 - a) \geqslant 0$,
$a \in (-\infty; 3) \cup [4; +\infty)$. (▶2)
3) Если $a \in [3; 4)$, то система (1) решений не имеет. (▶3)
4) $a = 4$, то $x = -1$. (▶4)

Аналогично решается система (2):

$x(a + 3) = -7$.

1) $a = -3$; тогда $0 \cdot x = -7$. Решений нет. (▶5)
2) $a \neq -3$; тогда $x_2 = -7/(a + 3)$.
$-7/(a + 3) < -1$, $(4 - a)/(3 + a) > 0$, $a \in (-3; 4)$.

Система (2) имеет решения $x_2 = -7/(a+3)$ только при $a \in (-3; 4)$. ▶6

По рисунку 38 внимательно рассмотрите, как заполнялась ось ответа. Для каждого действительного значения a ищется объединение множеств решений систем (1) и (2) при этом значении a. ▶7

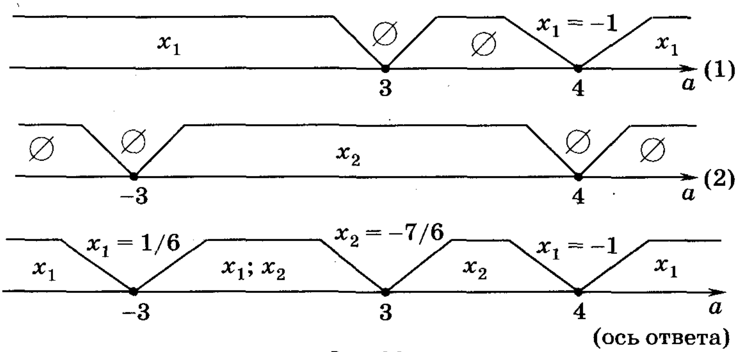


Рис. 38

№ 9. Решите уравнение $|x| = ax$.

<u>Решение</u> (рис. 39).

ООУ: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

Решаем совокупность систем:

$$\left[\begin{array}{ll} \begin{cases} x \geqslant 0, \\ x = ax; \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} x < 0, \\ x = -ax. \end{cases} & (2) \end{array}\right.$$

Сначала найдем решение системы (1):

$\begin{cases} x \geqslant 0, \\ x = ax; \end{cases}$ $\quad\begin{cases} x \geqslant 0, \\ x(1-a) = 0. \end{cases}$

1) Если $a = 1$, то $x \geqslant 0$.

2) Если $a \neq 1$, то $x = 0$.

Решим систему (2):

$\begin{cases} x < 0, \\ x(1+a) = 0. \end{cases}$

1) Если $a = -1$, то $x < 0$.

2) Если $a \neq -1$, то решений нет.

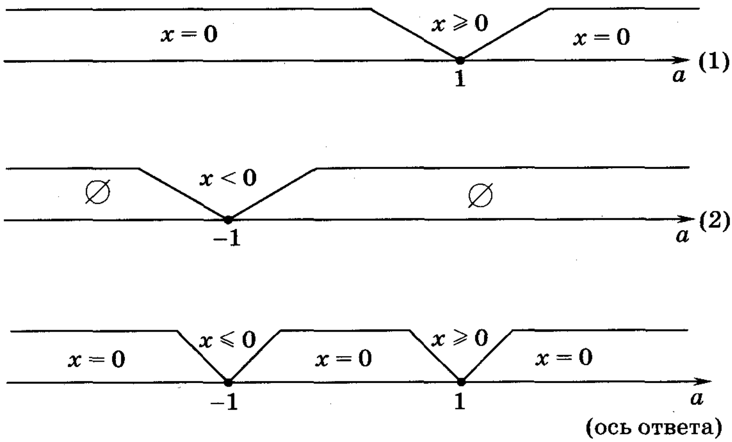


Рис. 39

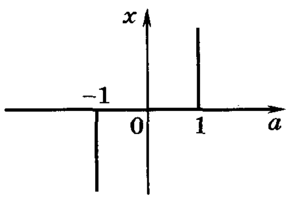


Рис. 40

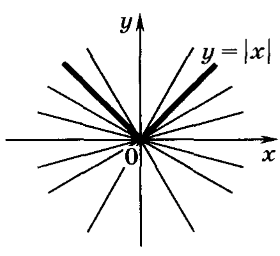


Рис. 41

Проиллюстрируем ответ в системе координат (aOx) (рис. 40).

Уравнение $|x| = ax$ можно решить и графически в системе координат (xOy) (рис. 41).

Строим сначала график функции $y = |x|$. Уравнение $y = ax$ задает пучок прямых с центром в начале координат.

Легко видеть, что при любом значении a уравнение $|x| = ax$ имеет решением $x = 0$. И это решение будет единственным, если $a \neq \pm 1$.

Если же $a = 1$, то $x \geqslant 0$.

А если $a = -1$, то $x \leqslant 0$.

№ 10. Найдите все значения параметра a, при которых графики функций $y = \frac{|x-7|}{x-7}$ и $y = |x+a|$ имеют только одну общую точку (ЕГЭ).

Решение.

1 способ (аналитический).

Достаточно узнать, при каких значениях a уравнение $\frac{|x-7|}{x-7} = |x+a|$ имеет единственное решение.

ООУ: $\begin{cases} a \in R, \\ x \neq 7. \end{cases}$

Полученное уравнение равносильно системе

$\begin{cases} |x+a| = 1, \\ x > 7; \end{cases}$ $\quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x+a=1, \\ x+a=-1, \end{array}\right. \\ x > 7, \end{cases}$ $\quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-a+1, \\ x=-a-1, \end{array}\right. \\ x > 7. \end{cases}$

Заметим, что $-a+1 > -a-1$ при $a \in R$. Поэтому система имеет единственное решение, если

$\begin{cases} -a+1 > 7, \\ -a-1 \leqslant 7; \end{cases}$ $\quad \begin{cases} a < -6, \\ a \geqslant -8. \end{cases}$

Ответ. $[-8; -6)$.

2 способ (графический).

Строим сначала график функции

$y = \begin{cases} 1, \text{ если } x > 7, \\ -1, \text{ если } x < 7. \end{cases}$

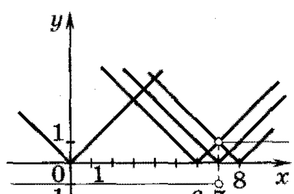


Рис. 42

Уравнение $y = |x+a|$, где $a \in R$, задает семейство «уголков», получающихся из графика функции $y = |x|$ параллельным переносом на вектор $\vec{m}(-a; 0)$ (рис. 42).

Если $-a \leqslant 6$, т. е. $a \geqslant -6$, то графики не пересекаются.

Если $-8 \leqslant a < -6$, то графики данных функций имеют только одну общую точку.

№ 11. Решите уравнение $|x-5| = 2ax - 3 + a$.

Р е ш е н и е.

ООУ: $\begin{cases} a \in R, \\ x \in R. \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 5, \\ x - 5 = 2ax - 3 + a; \end{cases} \\ \begin{cases} x < 5, \\ 5 - x = 2ax - 3 + a; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} x \geqslant 5, \\ x(1-2a) = a + 2, \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} x < 5, \\ x(2a+1) = 8 - a. \end{cases} & (2) \end{array}\right.$$

Решим систему (1):

$x(1-2a) = a + 2$.

1) $a = 1/2$; тогда $0 \cdot x = 2{,}5$. Решений нет. (▶1)

2) $a \neq 1/2$; тогда $x_1 = (a+2)/(1-2a)$.

$(a+2)/(1-2a) \geqslant 5$, $(11a-3)/(1-2a) \geqslant 0$,

$a \in [3/11; 1/2)$. (▶2)

3) Если $a < 3/11$ или $a > 1/2$, решений нет. (▶3)

(Первая ось на рис. 43.)

Решаем систему (2):

$x(2a+1) = 8 - a$.

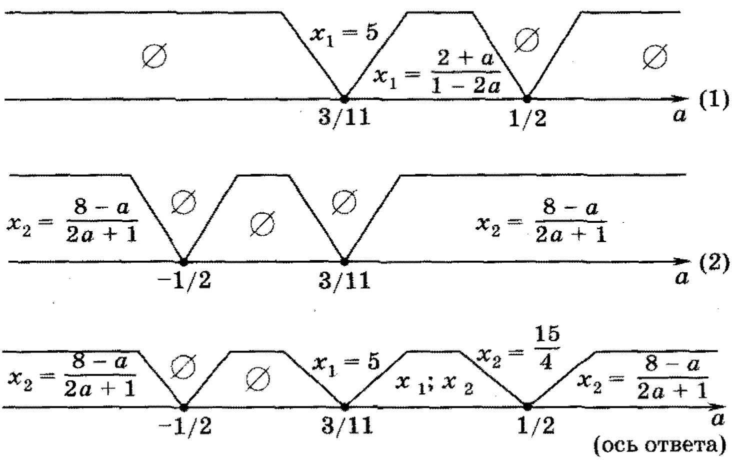


Рис. 43

1) $a = -1/2$; тогда $x \cdot 0 = 8{,}5$. Решений нет. ▶4

2) $a \neq -1/2$; тогда $x_2 = (8 - a)/(2a + 1)$.

$(8 - a)/(2a + 1) < 5$, $(3 - 11a)/(2a + 1) < 0$,

$a \in (-\infty; -1/2) \cup (3/11; +\infty)$. ▶5

3) $a \in (-1/2; 3/11)$. Решений нет. ▶6

(Вторая ось на рис. 43.)

Отметим решения систем (1) и (2) на осях (1) и (2) параметра a (см. рис. 43). ▶7

Ответ. 1) Если $a \in (3/11; 1/2)$, то два корня $x_1 = (a + 2)/(1 - 2a)$ и $x_2 = (8 - a)/(2a + 1)$.

2) Если $a \in (-\infty; -1/2) \cup [1/2; +\infty)$, то один корень $x_2 = (8 - a)/(2a + 1)$.

3) Если $a = 3/11$, то $x_1 = 5$.

4) Если $a \in [-1/2; 3/11)$, то решений нет.

№ 12. Решите уравнение $|x + 3| - a|x - 1| = 4$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} a \in \mathbb{R}, \\ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$

Данное уравнение равносильно совокупности трех систем:

$$\left[\begin{array}{ll} \begin{cases} x \geqslant 1, \\ x(1 - a) = 1 - a, \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} -3 \leqslant x < 1, \\ x(a + 1) = 1 + a, \end{cases} & (2) \\ \begin{cases} x < -3, \\ x(a - 1) = 7 + a. \end{cases} & (3) \end{array}\right.$$

Систему (1) перепишем в виде

$$\begin{cases} x \geqslant 1, \\ (1 - a)(x - 1) = 0. \end{cases}$$

1) Если $a = 1$, то $x \geqslant 1$. ▶1

2) Если $a \neq 1$, то $x = 1$. ▶2

(Ось (1) на рис. 44.)

Система (2) сводится к системе

$$\begin{cases} -3 \leqslant x < 1, \\ (1 + a)(x - 1) = 0. \end{cases}$$

1) Если $a = -1$, то $-3 \leqslant x < 1$. ▶3
2) Если $a \neq -1$, то решений нет. ▶4
(Ось (2) на рис. 44.)

Решим систему (3):

$x(a - 1) = 7 + a.$

1) $a = 1$; тогда $x \cdot 0 = 8$. Решений нет. ▶5
2) $a \neq 1$; тогда $x = (7 + a)/(a - 1)$,
$(7 + a)/(a - 1) < -3$, $(a + 1)/(a - 1) < 0$,
$a \in (-1; 1)$. ▶6
3) При $a > 1$ и $a < -1$ система (3) решений не имеет. ▶7
(Ось (3) на рис. 44.)

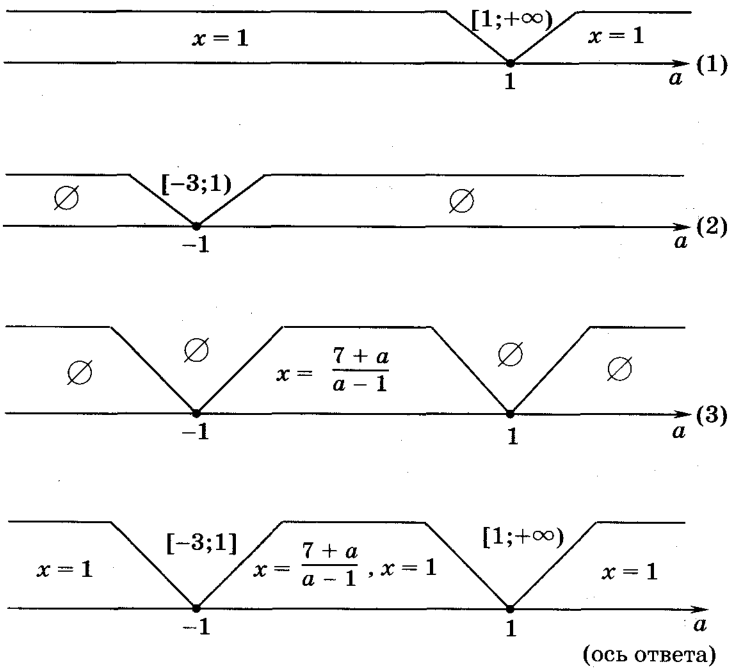


Рис. 44

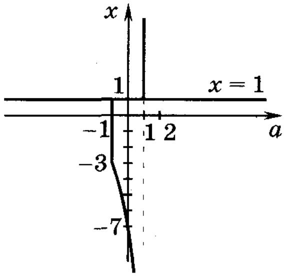


Рис. 45

Обратимся снова к системе координат (aOx) (рис. 45). Для построения графика функции

$$x = (7 + a)/(a - 1)$$

мы представили ее в виде

$$x = 1 + 8/(a - 1).$$

№ 13. При каких значениях параметра b уравнение $|x + 2| = b(x - 1)$ имеет единственное решение? Найдите эти решения.

<u>Решение.</u>

ООУ: $\begin{cases} b \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

Раскрывая модуль, получим совокупность двух систем:

$$\left[\begin{array}{ll} \begin{cases} x \geqslant -2, \\ (b-1)x = 2 + b. \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} x < -2, \\ x(b+1) = b - 2. \end{cases} & (2) \end{array}\right.$$

Решаем каждую из систем.

(1): $(b - 1)x = 2 + b$.

1) $b = 1$; тогда $0 \cdot x = 3$. Решений нет. (▶1)

2) $b \neq 1$; тогда $x_1 = (2 + b)/(b - 1)$;

$(2 + b)/(b - 1) \geqslant -2$, $b/(b - 1) \geqslant 0$,

$b \in (-\infty; 0] \cup (1; +\infty)$. (▶2)

3) $b \in (0; 1)$; система (1) решений не имеет. (▶3) (Ось (1) на рис. 46.)

(2): $(b + 1)x = b - 2$.

1) $b = -1$; тогда $x \cdot 0 = -3$. Решений нет. (▶4)

2) $b \neq -1$; тогда $x_2 = (b - 2)/(b + 1)$;

$(b - 2)/(b + 1) < -2$, $b/(b + 1) < 0$, $b \in (-1; 0)$. (▶5)

3) $b < -1$ или $b > 0$, система (2) решений не имеет. (▶6)

(Ось (2) на рис. 46.)

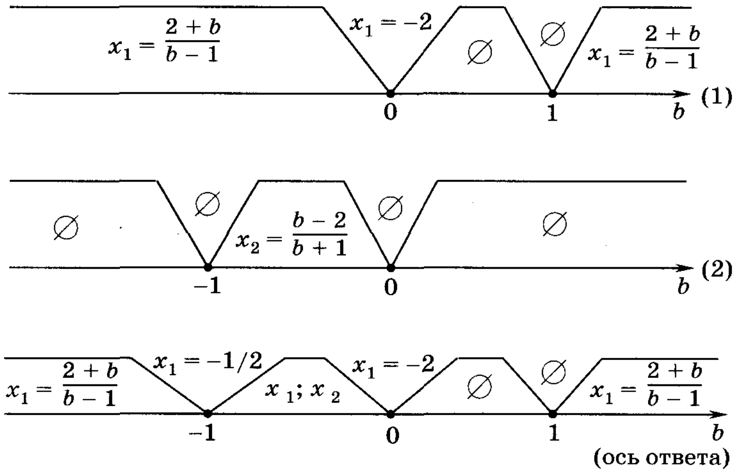


Рис. 46

Ответ (ось ответа на рис. 46).
1) Если $b \in (-\infty; -1] \cup (1; +\infty)$,
то $x_1 = (2+b)/(b-1)$.
2) Если $b = 0$, то $x_1 = -2$.

№ 14. Решите уравнение $|a - 2x| + 1 = |x + 3|$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} a \in \mathbb{R}, \\ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$

Для раскрытия модулей найдем значения x, обращающие подмодульные выражения в нуль:

$x = a/2$; $x = -3$.

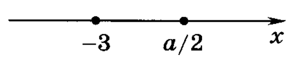


Рис. 47

Возможны три случая:
1) $a/2 = -3$;
2) $a/2 > -3$ (рис. 47);
3) $a/2 < -3$ (рис. 48).

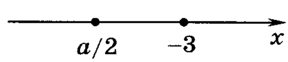


Рис. 48

Рассмотрим каждый из них.

1) $a = -6$. Тогда данное уравнение приводится к уравнению $|3 + x| + 1 = 0$. Оно решений не имеет. ▶1

2) $a > -6$.

Решаем совокупность трех систем.

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x \geqslant a/2, \\ -a + 2x + 1 = x + 3, \\ a > -6; \end{cases} \\ \begin{cases} -3 \leqslant x < a/2, \\ a - 2x + 1 = x + 3, \\ a > -6; \end{cases} \\ \begin{cases} x < -3, \\ a - 2x + 1 = -x - 3, \\ a > -6; \end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x \geqslant a/2, \\ x = 2 + a, \\ a > -6; \end{cases} \\ \begin{cases} -3 \leqslant x < a/2, \\ x = (a-2)/3, \\ a > -6; \end{cases} \\ \begin{cases} x < -3, \\ x = a + 4, \\ a > -6; \end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x = 2 + a, \\ 2 + a \geqslant a/2, \\ a > -6; \end{cases} \\ \begin{cases} x = (a-2)/3, \\ -3 \leqslant (a-2)/3 < a/2, \\ a > -6, \end{cases} \\ \begin{cases} x = a + 4, \\ a + 4 < -3, \\ a > -6; \end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x = a + 2, \\ a \geqslant -4, \\ a > -6; \end{cases} \\ \begin{cases} x = (a-2)/3, \\ a > -4, \\ a > -6, \\ a \geqslant -7; \end{cases} \\ \begin{cases} x = a + 4, \\ a < -7, \\ a > -6; \end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x = a + 2, \\ a \geqslant -4; \end{cases} \\ \begin{cases} x = (a-2)/3, \\ a > -4; \end{cases}\end{array}\right. \qquad \begin{cases} a \geqslant -4, \\ \left[\begin{array}{l} x = a + 2, \\ x = (a-2)/3. \end{array}\right. \end{cases}$$ ▶2

3) $a < -6$.

Опять получаем совокупность трех систем.

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x \geqslant -3, \\ -a + 2x + 1 = x + 3, \\ a < -6; \end{cases} \\ \begin{cases} a/2 \leqslant x < -3, \\ -a + 2x + 1 = -x - 3, \\ a < -6; \end{cases} \\ \begin{cases} x < a/2, \\ a - 2x + 1 = -x - 3, \\ a < -6; \end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x = 2 + a, \\ 2 + a \geqslant -3, \\ a < -6; \end{cases} \\ \begin{cases} x = (a-4)/3, \\ a/2 \leqslant (a-4)/3 < -3, \\ a < -6; \end{cases} \\ \begin{cases} x = a + 4, \\ a + 4 < a/2, \\ a < -6; \end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x = 2 + a,\\ a \geqslant -5,\\ a < -6,\end{cases}\\ \begin{cases}x = (a-4)/3,\\ a \leqslant -8,\\ a < -5,\\ a < -6;\end{cases}\\ \begin{cases}x = a + 4,\\ a < -8,\\ a < -6;\end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x = (a-4)/3,\\ a \leqslant -8,\end{cases}\\ \begin{cases}x = a + 4,\\ a < -8;\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\begin{cases}a \leqslant -8,\\ \left[\begin{array}{l}x = (a-4)/3,\\ x = a + 4.\end{array}\right.\end{cases} \quad (\blacktriangleright 3)$$

Представим результаты решений в случаях 1–3 на координатной прямой параметра a (рис. 49), а также в системе координат (aOx) (рис. 50). $(\blacktriangleright 4)$

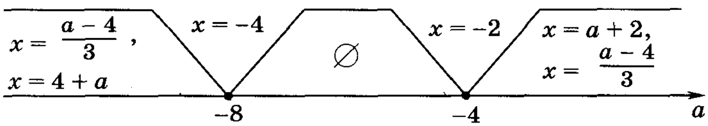


Рис. 49

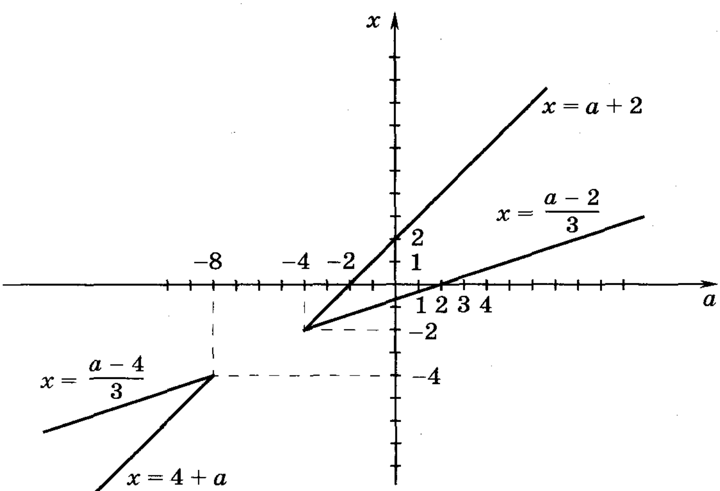


Рис. 50

Ответ. 1) Если $a \geqslant -4$, то $x = a + 2$; $x = (a - 2)/3$.
2) Если $a \leqslant -8$, то $x = a + 4$; $x = (a - 4)/3$.
3) Если $-8 < a < -4$, то решений нет.

№ 15. Найдите значения a, при которых все решения уравнения $2|x - a| + a - 4 + x = 0$ удовлетворяют неравенству $0 \leqslant x \leqslant 4$.

Решение.
Для ответа на вопрос задания достаточно решить совокупность двух систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x \geqslant a, \\ 2x - 2a + a - 4 + x = 0, \\ 0 \leqslant x \leqslant 4; \end{cases} \\ \begin{cases} x < a, \\ -2x + 2a + a - 4 + x = 0, \\ 0 \leqslant x \leqslant 4; \end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x = (a + 4)/3, \\ (a + 4)/3 \geqslant a, \\ 0 \leqslant (a + 4)/3 \leqslant 4; \end{cases} \\ \begin{cases} x = 3a - 4, \\ 3a - 4 < a, \\ 0 \leqslant 3a - 4 \leqslant 4; \end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x = (a + 4)/3, \\ a \leqslant 2, \\ -4 \leqslant a \leqslant 8; \end{cases} \\ \begin{cases} x = 3a - 4, \\ 4/3 \leqslant a < 2; \end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x = (a + 4)/3, \\ -4 \leqslant a \leqslant 2; \end{cases} \\ \begin{cases} x = 3a - 4, \\ 4/3 \leqslant a < 2. \end{cases}\end{array}\right.$$

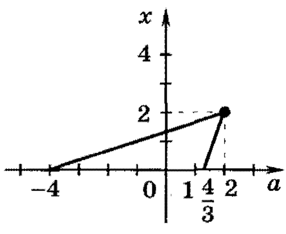


Рис. 51

Изобразим результаты решения в системе координат (aOx) (рис. 51).

Ответ. $a \in [-4; 2]$.

Уравнения для самостоятельного решения

1) $|x - 2| = a - 1$. ▶1
2) $|x - 3| = ax + 1$. ▶2
3) $|x - 5| = 2ax - 3 + a$. ▶3
4) $2|x| + |x - 1| = a$. ▶4
5) $|x + 1| + a|1 - 2x| = 3/2$. ▶5

6) $|x| + |x - a| = 0$. ▶6
7) $|x^2 - 1| + |a(x - 1)| = 0$. ▶7
8) $|x - 2a| + 3a = |x - 4|$. ▶8
9) $|x - a| + |x - 2a| = 32$. ▶9
10) При каких значениях a уравнение $\left|\dfrac{(a-1)x-(2a-1)}{x-1}\right| + \left|x - |1-a| + \dfrac{1}{2}\right| = 0$ имеет только положительные решения? ▶10
11) При каких значениях a уравнение $|x - a| - |2x + 2| = 3$ имеет единственное решение? ▶11

2. Линейные неравенства с параметром и к ним сводимые

2.1. Подготовительные неравенства и их системы

Следующие ниже неравенства решите устно.

№ 1. $2x > 6$; $-2x < 8$; $0 \cdot x < 2$; $0 \cdot x < 0$; $0 \cdot x \leqslant 0$; $0 \cdot x < -3$; $0 \cdot x > 3$; $0 \cdot x > 0$; $0 \cdot x \geqslant 0$; $0 \cdot x > -3$.

№ 2. $0 \cdot x > -2a^2 - 5$; $0 \cdot x < 5p^2 + 1$; $0 \cdot y < (b-1)^2$; $0 \cdot z \leqslant (a-1)^2$; $0 \cdot x > 1 - 2m + m^2$; $0 \cdot x \geqslant (p-2)^2$; $0 \cdot x \geqslant -(a-1)^2$; $0 \cdot x \leqslant -p^2$; $0 \cdot x < a - 3$; $0 \cdot y \leqslant 2a + 3$; $0 \cdot z > a - 5$; $0 \cdot z \geqslant b - 3$; $0 \cdot x \geqslant n^2 - 1$.

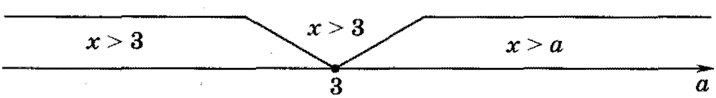
№ 3. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} x > a, \\ x > 3. \end{cases}$$

<u>Решение</u> (рис. 52).

Рассмотрим ряд случаев.

1) Если $a = 3$, то $x > 3$. ▶1
2) Если $a > 3$, то $x > a$. ▶2
3) Если $a < 3$, то $x > 3$. ▶3



(ось ответа)

Рис. 52

№ 4. При каких значениях a промежуток $[8; +\infty)$ принадлежит множеству решений системы $\begin{cases} x > 5, \\ x \geqslant a? \end{cases}$

Решение (рис. 53).

ООС: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

1) Если $a \leqslant 5$, то $x \in (5; +\infty)$.
2) Если $a > 5$, то $x \in [a; +\infty)$.

Проведем анализ множества решений данной системы:

1) если $a \leqslant 5$, то $[8; +\infty) \subset (5; +\infty)$;
2) если $a > 5$, то $[8; +\infty] \subset [a; +\infty)$ только в случае $5 < a \leqslant 8$.

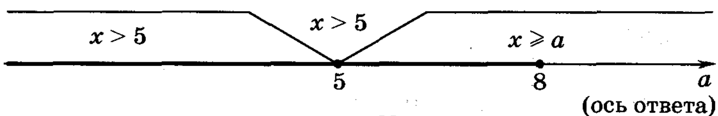


Рис. 53

Ответ. $a \in [-\infty; 8]$.

№ 5. Решите систему неравенств $\begin{cases} x \leqslant a, \\ x < 2. \end{cases}$

Решение.

1) Если $a = 2$, то $x < 2$.
2) Если $a > 2$, то $x < 2$.
3) Если $a < 2$, то $x \leqslant a$.

№ 6. Решите систему неравенств $\begin{cases} x > 3, \\ x < a. \end{cases}$

Решение.

1) Если $a \leqslant 3$, то решений нет.
2) Если $a > 3$, то $x \in (3; a)$.

№ 7. Решите систему неравенств $\begin{cases} x \geqslant 3, \\ x \leqslant 2 - b. \end{cases}$

Решение.

Узнаем сначала, при каких значениях b выражение $2 - b$ равно 3. Получаем $b = -1$.

А теперь рассмотрим следующие случаи.

1) $b = -1$; тогда $\begin{cases} x \geqslant 3, \\ x \leqslant 3, \end{cases}$ $x = 3$. ▶1

2) $b > -1$; тогда $2 - b < 3$.

Система решений не имеет. ▶2

3) $b < -1$; тогда $2 - b > 3$; $x \in [3; 2 - b]$. ▶3

<u>Ответ.</u> 1) Если $b = -1$, то $x = 3$.
2) Если $b < -1$, то $x \in [3; 2 - b]$.
3) Если $b > -1$, то решений нет.

№ 8. Решите систему неравенств $\begin{cases} x > a - 2, \\ x > 3a + 1. \end{cases}$

<u>Решение.</u>

ООС: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

Приравняем выражения $a - 2$ и $3a + 1$:

$a - 2 = 3a + 1,$

$a = -3/2.$

Рассматриваем три случая (рис. 54).

1) $a = -3/2$: $\begin{cases} x > -7/2, \\ x > -7/2, \end{cases}$ $x > -7/2,$

т. е. $x \in (-7/2; +\infty)$.

2) $a < -3/2$; тогда $a - 2 > 3a + 1$; $x \in (a - 2; +\infty)$.

3) $a > -3/2$; $3a + 1 > a - 2$; $x \in (3a + 1; +\infty)$.

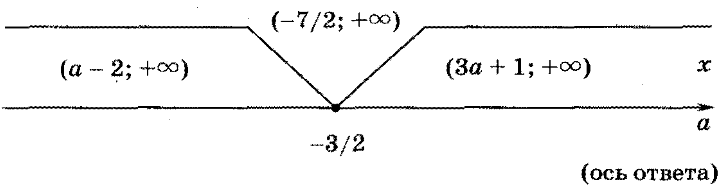


Рис. 54

Проиллюстрируем ответ в системе координат (aOx) (рис. 55). (▶1)

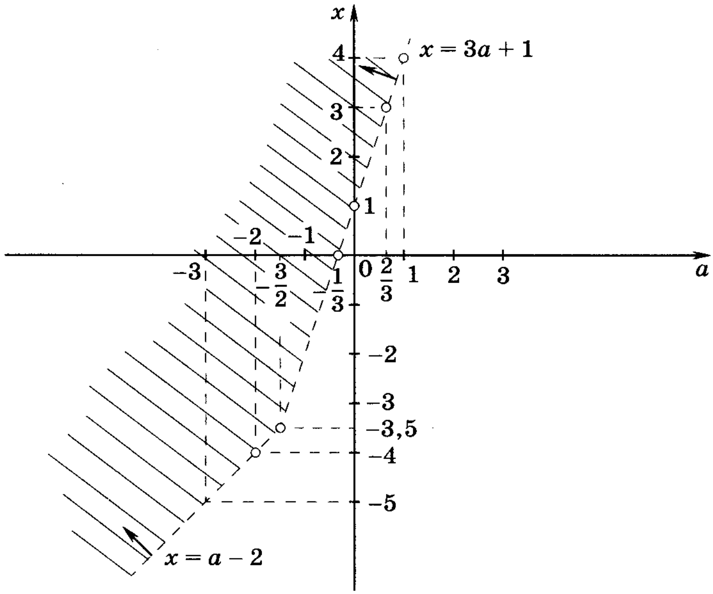


Рис. 55

А теперь, пользуясь осью ответа и графической интерпретацией ответа, проанализируем множество решений системы.

1. Какие из приведенных ниже пар чисел (a; x) удовлетворяют данной системе неравенств:

1) (–1; 0); 2) (0; 0); 3) (–1/3; 0); 4) (–2; 2); 5) (1; 2); 6) (–3,5; –1,5)? (▶2)

2. Какие значения может принимать x в паре чисел (0; x), если она является решением системы неравенств? (▶3)

(Ответ. $x > 1$.)

3. Пара (a; x) является решением системы неравенств.

а) Какие значения может принимать a, если x принимает только положительные значения? (▶4) б) Найдите несколько пар, являющихся решениями неравенства, если $a = -1/3$. ▶5

в) При каких значениях a переменная x принимает значения только большие 1? ▶6

г) При каких значениях a любое $x \in [3; 4]$ удовлетворяет системе неравенств? ▶7

д) При каких значениях a любое $x \in [-5; -4]$ удовлетворяет системе неравенств? ▶8

(Ответы. а) $a \geqslant -1/3$. б) $(-1/3; 1/2)$; $(-1/3; 3)$. в) $a \geqslant 0$. г) $a < 2/3$. д) $a < -3$.)

4. При каких значениях a ни одно из чисел $x \in [2; 3]$ не удовлетворяет системе неравенств? ▶9

(Ответ. $a \geqslant 2/3$.)

№ 9. Решите систему неравенств $\begin{cases} 2 < x < 5, \\ x \geqslant a - 3. \end{cases}$

Решение (рис. 56).

Если $a - 3 = 2$, то $a = 5$.

Если $a - 3 = 5$, то $a = 8$.

Рассмотрим 5 случаев.

1) $a = 5$; тогда $\begin{cases} 2 < x < 5, \\ x \geqslant 2, \end{cases}$ $x \in (2; 5)$. ▶1

2) $a = 8$; тогда $\begin{cases} 2 < x < 5, \\ x \geqslant 5. \end{cases}$ Решений нет. ▶2

3) $a < 5$; тогда $a - 3 < 2$. Решением системы неравенств в этом случае будет интервал $(2; 5)$. ▶3

4) $5 < a < 8$; тогда $2 < a - 3 < 5$. Получим интервал $[a - 3; 5)$. ▶4

5) $a > 8$; тогда $a - 5 > 5$. Решений нет. ▶5

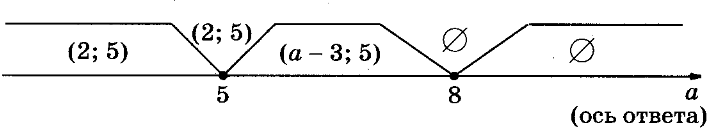


Рис. 56

3 – 5663

№ 10. Решите систему неравенств $\begin{cases} a - 2 \leqslant x < 5, \\ x > 2a + 2. \end{cases}$

<u>Решение</u> (рис. 57).

Заметим, что $a - 2 < 5$, т. е. $a < 7$. Поэтому, если $a \geqslant 7$, то решений нет. ▶1

Теперь узнаем, при каких значениях a выражение $a - 2$ равно $2a + 2$: $a - 2 = 2a + 2$, $a = -4$. Если же $2a + 2 = 5$, то $a = 3/2$.

Рассмотрим ряд случаев.

1) $a = -4$: $\begin{cases} -6 \leqslant x < 5, \\ x > -6. \end{cases}$ $x \in (-6; 5)$. ▶2

2) $a = 3/2$: $\begin{cases} -1/2 \leqslant x \leqslant 5, \\ x > 5. \end{cases}$ Решений нет. ▶3

3) $a < -4$; тогда $a - 2 > 2a + 2$.
Поэтому $x \in [a - 2; 5)$. ▶4

4) $-4 < a < 3/2$: $x \in (2a + 2; 5)$. ▶5

5) $3/2 < a < 7$. Решений нет. ▶6

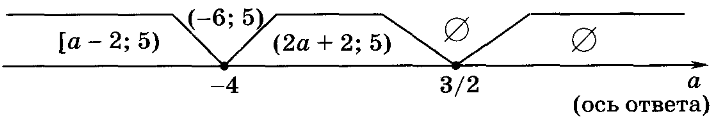


Рис. 57

<u>Ответ</u>. 1) Если $a < -4$, то $x \in [a - 2; 5)$.
2) Если $-4 \leqslant a < 3/2$, то $x \in (2a + 2; 5)$.
3) Если $a \geqslant 3/2$, то решений нет.

№ 11. При каких значениях a неравенство $3x - 2 > a - x + 4$ является следствием неравенства $2x + a > 0$?

<u>Решение</u>.

Сначала решим каждое неравенство.

1) $3x - 2 > a - x + 4$; $4x > a + 6$; $x > (a + 6)/4$;
$x \in ((a + 6)/4; +\infty)$.

2) $2x + a > 0$; $x > -a/2$; $x \in (-a/2; +\infty)$.

Множество решений второго неравенства должно содержаться в множестве решений первого неравенства. А это возможно, если $-a/2 \geqslant (a+6)/4$, т. е. $-2a \geqslant a+6$, $a \leqslant -2$.

Ответ. $a \in (-\infty; -2]$.

№ 12. При каких значениях a неравенства $2x+1 < x+2a$ и $x-2a-3 < 2a$ равносильны?

Решение.

1) $2x+1 < x+2a$; $x < 2a-1$; $x \in (-\infty; 2a-1)$.

2) $x-2a-3 < 2a$; $x < 4a+3$; $x \in (-\infty; 4a+3)$.

У равносильных неравенств множества их решений совпадают.

Найдем a, решив уравнение

$2a-1 = 4a+3$; $a=-2$.

Ответ. $a=-2$.

№ 13. Решите систему неравенств $\begin{cases} -2 < x < 4a+1, \\ x < 2a+6. \end{cases}$

Решение.

Решим систему графически в системе координат (aOx).

Строим графики функций $x=-2$, $x=4a+1$, $x=2a+6$. Прямые на рисунке — пунктирные, поскольку неравенства данной системы строгие (рис. 58). Каждая из прямых делит плоскость на две полуплоскости. Стрелками указаны полуплоскости, координаты каждой из которых удовлетворяют соответствующему неравенству ($x > -2$, $x < 4a+1$, $x < 2a+6$).

Пересечение данных полуплоскостей (заштриховано) удовлетворяет данной системе неравенств.

Найдем координаты точки A (точка пересечения прямых $x=-2$ и $x=4a+1$) и точки B (точка пересечения прямых $x=4a+1$ и $x=2a+6$):

$\begin{cases} x=-2, \\ x=4a+1, \end{cases}$ $\begin{cases} x=-2, \\ a=-3/4, \end{cases}$ $A(-3/4; -2)$.

$\begin{cases} x=4a+1, \\ x=2a+6, \end{cases}$ $\begin{cases} a=5/2, \\ x=11, \end{cases}$ $B(5/2; 11)$.

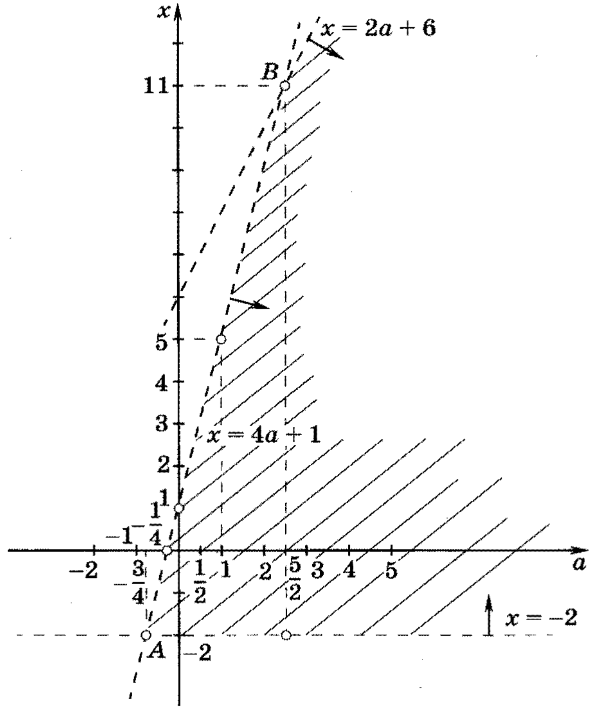


Рис. 58

Теперь можно заполнить ось ответа (рис. 59).

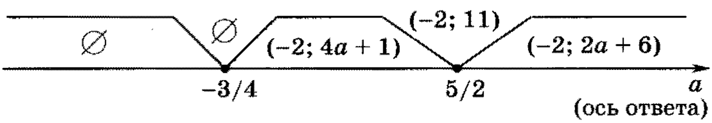


Рис. 59

Вопросы и задания к данному примеру

1. Пусть $(a; x)$ — решение системы.
   а) Укажите наименьшее целое значение a.
   б) Укажите наименьшее целое значение x.
   в) Пусть $a = 1$. Найдите число точек с целыми координатами.
   г) Найдите наименьшее целое значение a, если $x = 5$.

д) При каких значениях a любое значение $x \in [0; 5]$ удовлетворяет системе?

е) При каких значениях a соответствующее множество значений x содержит два некоторых отрезка длиной 4 и 5, не имеющих общих точек, а само множество значений x содержится в некотором отрезке длиной 10?

(Ответы. а) $a = 0$; б) $x = -1$; в) 6; г) $a = 2$; д) $a > 1$; е) $3/2 < a \leqslant 7/4$.)

Решение.

При ответе на поставленные вопросы можно пользоваться как рисунком 58, так и осью ответа. На вопросы а) и б) легко ответить по рисунку 58:

а) $a = 0$; б) $x = -1$.

в) Пусть $a = 1$. Тогда с оси ответа списываем, что $x \in (-2; 5)$, откуда видно, что целых значений — шесть: -1; 0; 1; 2; 3; 4.

Затем на рисунке 58 проводим прямую $a = 1$ и считаем число полученных точек (рис. 60 — фрагмент рис. 58).

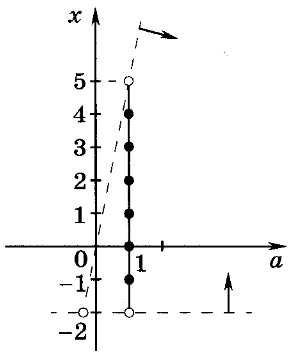


Рис. 60

г) Из рисунка 58 $a = 2$.

д) Решаем двумя способами.

1 способ (аналитический — по оси ответа).

1) Если $a = 5/2$, то $x \in (-2; 11)$, $[0; 5] \subset (-2; 11)$, следовательно, $a = 5/2$ принадлежит искомому множеству значений a.

2) Если $a > 5/2$, то $2a + 6 > 11$, а значит, все значения $a > 5/2$ подходят.

3) Значения $a \leqslant -3/4$ не подходят.

4) $-3/4 < a < 5/2$. Тогда $x \in (-2; 4a + 1)$ (рис. 61).

Рис. 61

Должно выполняться неравенство $4a + 1 > 5$, т. е. $a > 1$. Тогда $a \in (1; 5/2)$.

Объединяя все полученные множества значений a, получим $a \in (1; +\infty)$.

2 способ (графический).

Покажем сначала множество точек, координаты которых удовлетворяют условиям задания д) (рис. 62 — фрагмент рис. 58).

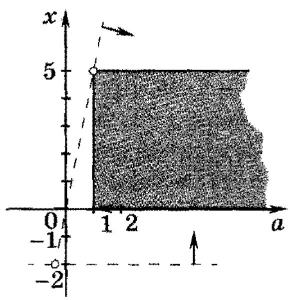


Рис. 62

По рисунку видно, что при $a = 1$ нельзя взять $x = 5$. Поэтому $a > 1$.

е) Решаем двумя способами.

1 способ (аналитический).

1) $-3/4 < a < 5/2$. Изобразим соответствующее множество значений x (рис. 63).

Рис. 63

На этом интервале должны расположиться два отрезка длиной 4 и 5, не имеющие общих точек, а сам интервал $(-2; 4a + 1)$ должен содержаться в некотором отрезке длиной 10. Таким образом, должны выполняться условия следующей системы:

$$\begin{cases} -3/4 < a < 5/2, \\ (4a+1) + 2 > 9, \\ (4a+1) + 2 \leqslant 10; \end{cases} \quad \begin{cases} -3/4 < a < 5/2, \\ a > 3/2, \\ a \leqslant 7/4, \end{cases} \quad 3/2 < a \leqslant 7/4.$$

2) $a = 5/2$ — не подходит, так как множество $(-2;\ 11)$ не содержится ни в каком отрезке длиной 10.
3) $a \leqslant -3/4$ — не подходит.
4) Если $a > 5/2$, то $2a + 6 > 11$, значит, $a \in (5/2;\ +\infty)$ не подходит.

Ответ. $3/2 < a \leqslant 7/4$.

2 способ (графический).
Выберем на оси Ox множество точек, расстояние каждой из которых до прямой $x = -2$ больше 9, но меньше или равно 10 (рис. 64 — фрагмент рис. 58).

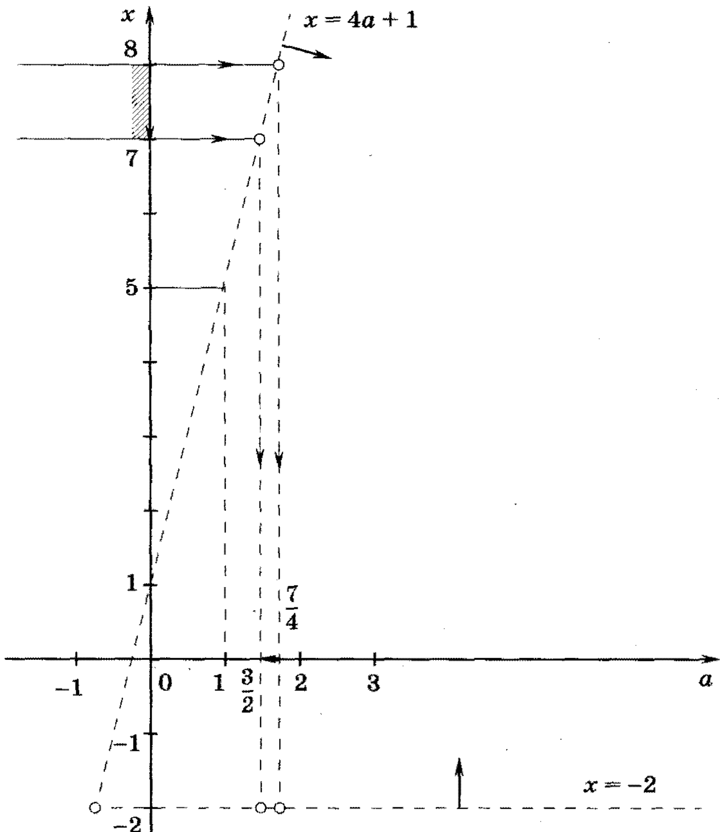


Рис. 64

Эти значения $x \in (7; 8]$.

Находим соответствующие им значения a:

$3/2 < a \leqslant 7/4$.

2. При каких значениях a ни одно значение $x \in [3; 4]$ не удовлетворяет данной системе?

(Ответ. $a \leqslant 1/2$.)

Решение.

1 способ (аналитический).

1) Значения $a \geqslant 5/2$ — не подходят.

2) Пусть $-3/4 < a < 5/2$.

Изобразим соответствующие значения x (рис. 65).

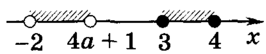


Рис. 65

Должны выполняться условия: $\begin{cases} 3 \geqslant 4a + 1, \\ -3/4 < a < 5/2, \end{cases}$

$\begin{cases} a \leqslant 1/2, \\ -3/4 < a < 5/2, \end{cases}$ $\quad -3/4 < a \leqslant 1/2$.

3) $a \leqslant -3/4$ — подходят.

Ответ. $a \leqslant 1/2$.

2 способ (графический).

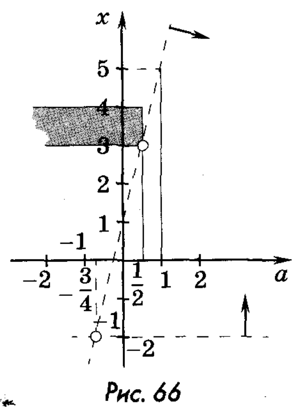


Рис. 66

Покажем на графике искомое множество точек, а затем определим соответствующие значения a (рис. 66 — фрагмент рис. 58).

Ответ. $a \leqslant 1/2$.

Неравенства для самостоятельного решения

1) Решите устно: $0 \cdot x < |b|$; $0 \cdot y \leqslant |b - 1|$;

$0 \cdot z \geqslant -|b - 2|$; $0 \cdot z > -|p + 3|$; $0 \cdot x \geqslant \dfrac{a^2}{|x|}$;

$0 \cdot x\, \dfrac{(a - 1)^2}{|x - 1|}$; $0 \cdot y \leqslant \left|\dfrac{a}{y}\right|$; $0 \cdot x < \dfrac{|b| + 3}{x^2}$.

2) Решите системы неравенств:

а) $\begin{cases} x \geqslant 2a - 1, \\ x > a - 5; \end{cases}$ ▶1 б) $\begin{cases} x < 3a, \\ x < 2a + 6; \end{cases}$ ▶2

в) $\begin{cases} -2 < x \leqslant 4, \\ x < 2a - 2; \end{cases}$ ▶3 г) $\begin{cases} -2 < x < 4a + 1, \\ x < 2a + 6. \end{cases}$ ▶4

3) При каких значениях b данное неравенство $(x - 2b)/4 - x > b + 1$ является следствием неравенства $2x - b/2 < x/4 + b - 1$? ▶5

■ 2.2. Простейшие линейные неравенства с параметром

№ 1. Решите неравенство $3x - a > x + 3a + 4$.

Решение.

Данное неравенство приводится к равносильному неравенству $x > 2a + 2$. Решаем его графически (рис. 67).

По рисунку 67 легко установить зависимость между x и a. Прямая с уравнением $x = 2a + 2$ разбивает плоскость на две полуплоскости. Неравенство $x > 2a + 2$ определяет одну из них (заштрихованную). Координаты любой точки этой полуплоскости, не лежащие на ее границе, удовлетворяют неравенству $x > 2a + 2$. Если же мы возьмем фиксированное значение a, то ему будут

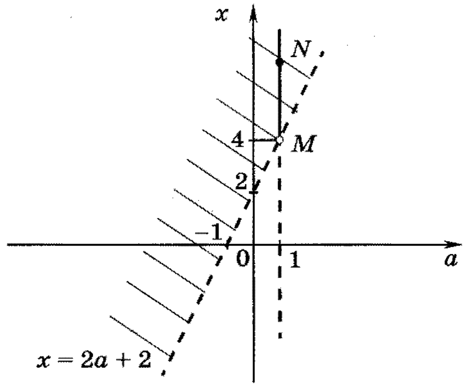


Рис. 67

соответствовать ординаты точек целого луча. Например, если $a = 1$, то $x > 4$, т. е. имеем множество ординат точек луча MN, кроме точки M.

Ответ. $x \in (2a + 2; +\infty)$.

№ 2. Решите неравенство $a(x - 2) \geqslant (a - 1)x + x - 2$.

Решение.

Раскроем скобки: $ax - 2a \geqslant ax - x + x - 2$;

$0 \cdot x \geqslant 2a - 2$.

1) Если $a \leqslant 1$, то $x \in \mathbb{R}$. (▶1)

2) Если $a > 1$, то решений нет. (▶2)

Ответ. 1) Если $a \leqslant 1$, то $x \in (-\infty; +\infty)$.

2) Если $a > 1$, то решений нет.

№ 3. Решите неравенство $2(x - 1) > a^2 + 2(x - 3)$.

Решение.

$2x - 2 > a^2 + 2x - 6$; $0 \cdot x > a^2 - 4$.

Рассмотрим ряд случаев:

1) $a = \pm 2$; тогда $0 \cdot x > 0$. Решений нет. (▶1)

2) $|a| > 2$; тогда решений нет. (▶2)

3) $|a| < 2$; тогда $x \in \mathbb{R}$. (▶3)

Ответ. 1) Если $|a| \geqslant 2$, то решений нет.

2) Если $|a| < 2$, то $x \in \mathbb{R}$.

№ 4. При каких значениях a неравенство $2x - a + 4 < 0$ верно при всех значениях x, удовлетворяющих условию $3 \leqslant x \leqslant 5$?

Решение.
$2x < a - 4$; $x < a/2 - 2$; $x \in (-\infty; a/2 - 2)$.
А теперь узнаем, при каких значениях a отрезок $[3; 5]$ принадлежит промежутку $(-\infty; a/2 - 2)$. Это произойдет, если $a/2 - 2 > 5$, т. е. $a > 14$.

Ответ. $a \in (14; +\infty)$.

№ 5. При каких значениях a неравенство $x \leqslant 2a + 3$ верно при всех значениях x, удовлетворяющих условию $-3 \leqslant x \leqslant -a - 2$?

Решение.
Достаточно решить систему $\begin{cases} 2a + 3 \geqslant -a - 2, \\ -a - 2 > -3. \end{cases}$

$\begin{cases} a \geqslant -5/3, \\ a < 1, \end{cases}$ $\quad a \in [-5/3; 1)$.

Ответ. $a \in [-5/3; 1)$.

№ 6. Решите систему неравенств $\begin{cases} x - 2a + 1 < 2x - 1, \\ 3x < a + 6. \end{cases}$

Решение.
Данную систему приводим к виду $\begin{cases} x > 2 - 2a, \\ x < a/3 + 2. \end{cases}$

Определим, при каких значениях a $2 - 2a = a/3 + 2$: при $a = 0$.

А теперь рассмотрим три случая.

1) $a = 0$; тогда $\begin{cases} x > 2, \\ x < 2. \end{cases}$ Решений нет. ▶1

2) $a > 0$; тогда $a/3 + 2 > 2 - 2a$,
$x \in (2 - 2a; a/3 + 2)$. ▶2

3) $a < 0$; тогда $2 - 2a > a/3 + 2$. Решений нет. ▶3

Ответ. 1) Если $a > 0$, то $x \in (2 - 2a; a/3 + 2)$.
2) Если $a \leqslant 0$, то решений нет.

Проиллюстрируем ответ в системе координат (aOx) (рис. 68).

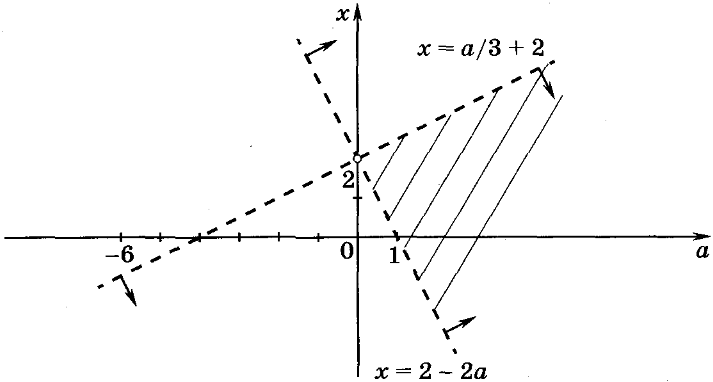


Рис. 68

№ 7. Следующие неравенства решите устно:

1) $(a^2 + 1)x > 0$;
2) $(p^2 + 7)x < 1$;
3) $-(b^2 + 2)z < 0$;
4) $(-a^2 - 3)x > a^2 + 3$;
5) $(a - 1)x \geqslant 0$;
6) $(b + 2)y > 0$;
7) $(2 - p)x < 0$;
8) $p \cdot x \leqslant 0$;
9) $|a - 3| \cdot x \geqslant 0$;
10) $-|a^2 - 1| \cdot y < 0$.

№ 8. Решите неравенство $ax > 2$.

Решение.
1) $a = 0$; тогда $0 \cdot x > 2$. Решений нет. (▸1)
2) $a < 0$; тогда $x < 2/a$. (▸2)
3) $a > 0$; тогда $x > 2/a$. (▸3)

Ответ. 1) Если $a > 0$, то $x > 2/a$.
2) Если $a < 0$, то $x < 2/a$.
3) Если $a = 0$, то решений нет.

№ 9. Решите неравенство $(a - 1)\,x \leqslant a^2 - 1$.

Решение.
1) Пусть $a = 1$; тогда $0 \cdot x \leqslant 0$, $x \in \mathrm{R}$. (▸1)
2) Если $a > 1$, то $x \leqslant a + 1$. (▸2)
3) Если $a < 1$, то $x \geqslant a + 1$. (▸3)
Ответ запишите сами.

№ 10. Решите неравенство $(a^2 - 4)x < a + 2$.

Решение (рис. 69).

1) $a = 2$; тогда $0 \cdot x < 4$, $x \in \mathrm{R}$. ▶1

2) $a = -2$; тогда $0 \cdot x < 0$. Решений нет. ▶2

3) $|a| > 2$; тогда $x < 1/(a - 2)$. ▶3

4) $|a| < 2$; тогда $x > 1/(a - 2)$. ▶4

Представим результаты решения на оси параметра a (рис. 69).

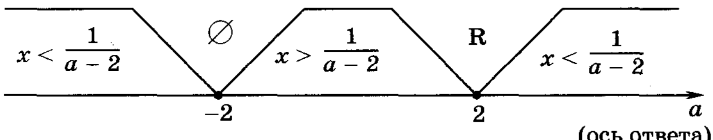


Рис. 69

№ 11. Решите неравенство $2x - 3 \geqslant a + x/a$.

Решение (рис. 70).

Установим область определения неравенства:

$$\text{ООН: } \begin{cases} a \neq 0, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$$ ▶1

Приведем данное неравенство к равносильному неравенству

$$\frac{(2a - 1)}{a} x \geqslant 3 + a.$$

1) $a = 1/2$; тогда $0 \cdot x \geqslant 3{,}5$. Решений нет. ▶2

2) $a \in (-\infty; 0) \cup (1/2; +\infty)$; тогда $(2a - 1)/a > 0$, а поэтому $x \geqslant (3a + a^2)/(2a - 1)$. ▶3

3) $a \in (0; 1/2)$; тогда $(2a - 1)/a < 0$, $x \leqslant (3a + a^2)/(2a - 1)$. ▶4

Нанесем результаты на ось параметра (рис. 70).

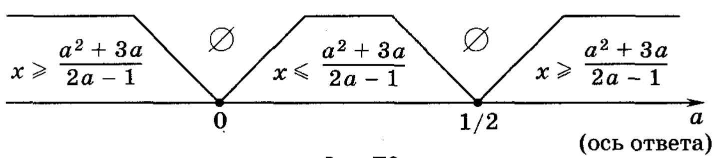


Рис. 70

Ответ запишите сами.

№ 12. Решите неравенство $\dfrac{(a-1)x-2a+3}{a+1}>0.$

Решение.

Установим ООН: $\begin{cases} a \neq -1, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$ ▶1

Данное неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a>-1, \\ (a-1)x>2a-3; \end{cases} \quad (1) \\ \begin{cases} a<-1, \\ (a-1)x<2a-3. \end{cases} \quad (2) \end{array}\right.$$

Решаем систему (1).

1) Если $a=1$, то $x \in \mathrm{R}$. ▶2

2) Если $a \in (-1;\ 1)$, то $x<(2a-3)/(a-1)$. ▶3

3) Если $a>1$, то $x>(2a-3)/(a-1)$. ▶4

Решая систему (2), учтем, что $a-1<0$, если $a<-1$. Поэтому $x>(2a-3)/(a-1)$. ▶5

Ответ легко списать с оси ответа (рис. 71). ▶6

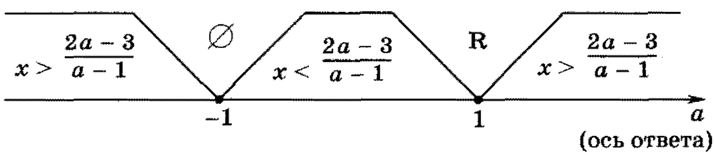


Рис. 71

№ 13. При каких значениях k неравенство $(k-1)x+2k+1>0$ верно при всех x, удовлетворяющих условию $|x| \leqslant 3$?

Решение.

Решим сначала неравенство $(k-1)x>-2k-1$.

Возможны следующие случаи:

1) $k=1$; тогда $0 \cdot x>-3$, $x \in \mathrm{R}$;

2) $k>1$; тогда $x>(2k+1)/(1-k)$,

$$x \in \left(\frac{2k+1}{1-k};+\infty\right);$$

3) $k < 1$; тогда $x < (2k + 1)/(1 - k)$,

$$x \in \left(-\infty; \frac{2k+1}{1-k}\right).$$

При $k = 1$ множество решений данного неравенства включает в себя отрезок $[-3; 3]$. Для того чтобы отрезок $[-3; 3]$ принадлежал множеству $((2k + 1)/(1 - k); +\infty)$, где $k > 1$, достаточно, чтобы выполнялось неравенство $(2k + 1)/(1 - k) < -3$. Решаем это неравенство:

$(2k + 1)/(1 - k) + 3 < 0$,
$(4 - k)/(1 - k) < 0$, $k \in (1; 4)$.

Аналогично найдем, при каких значениях $k < 1$ отрезок $[-3; 3]$ принадлежит множеству

$(-\infty; (2k + 1)/(1 - k))$.
$(2k + 1)/(1 - k) > 3$; $(2k + 1)/(1 - k) - 3 > 0$,
$(5k - 2)/(1-k) > 0$, $k \in (0{,}4; 1)$.

Ответ. $k \in (0{,}4; 4)$.

Данное неравенство можно решить и графически в системе координат (xOy) (рис. 72).

Пусть $y = (k - 1)x + 2k + 1$. Имеем линейную функцию при любом $k \in \mathrm{R}$.

Рисунок 72, *а* соответствует случаю $k > 1$; рисунок 72, *б* — случаю $k < 1$ и рисунок 72, *в* относится к случаю $k = 1$.

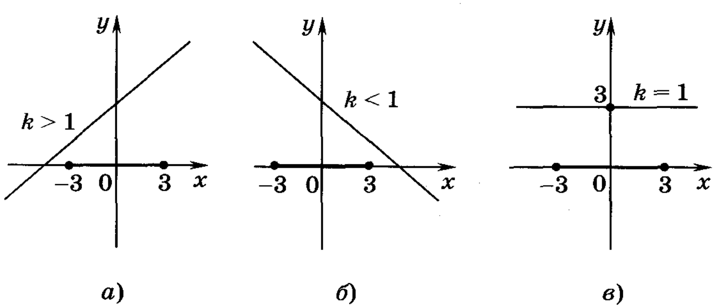


Рис. 72

Для того чтобы неравенство $(k - 1)x + 2k + 1 > 0$ выполнялось при любом значении $x \in [-3; 3]$, достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

$$\begin{cases} y(-3) > 0, \\ y(3) > 0. \end{cases}$$

Получим систему неравенств:

$$\begin{cases} 4 - k > 0, \\ 5k - 2 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} k < 4, \\ k > 0{,}4; \end{cases} \quad \text{т. е. } k \in (0{,}4; 4).$$

№ 14. Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} 5ax - 5 < 6 - ax, \\ 2 - (a + 2)x < 5 - (3a + 2)x. \end{cases}$$

<u>Решение</u>.

$$\begin{cases} 6ax < 11, \\ 2 - ax - 2x < 5 - 3ax - 2x; \end{cases} \quad \begin{cases} ax < 11/6, \\ ax < 3/2; \end{cases}$$

$ax < 3/2$.

1) Если $a = 0$, то $x \in \mathbf{R}$. ▶1

2) Если $a > 0$, то $x < \dfrac{3}{2a}$. ▶2

3) Если $a < 0$, то $x > \dfrac{3}{2a}$. ▶3

Ответ запишите сами.

№ 15. Решите систему неравенств $\begin{cases} (a - 1)x > a^2 - 1, (1) \\ (a + 2)x \leqslant a^2 - 4. (2) \end{cases}$

<u>Решение</u>.

Решаем сначала каждое неравенство отдельно:

$(a - 1)x > a^2 - 1$.

1) $a = 1$; тогда $0 \cdot x > 0$. Решений нет.

2) $a > 1$; тогда $x > a + 1$.

3) $a < 1$; тогда $x < a + 1$.

$(a + 2)x \leqslant a^2 - 4$.

1) $a = -2$; тогда $0 \cdot x \leqslant 0$, $x \in \mathbf{R}$.

2) $a > -2$; тогда $x \leqslant a - 2$.

3) $a < -2$; тогда $x \geqslant a - 2$.

Отметим результаты решения на координатных прямых параметра, а затем воспользуемся осью ответа (рис. 73).

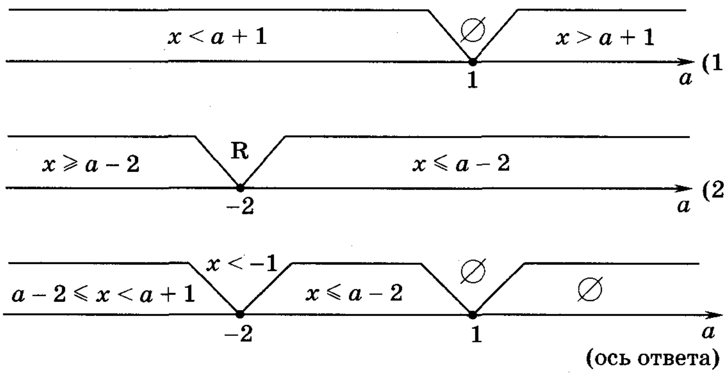


Рис. 73

<u>Ответ</u>. 1) Если $a < -2$, то $x \in [a - 2; a + 1)$.
2) Если $a = -2$, то $x \in (-\infty; -1)$.
3) Если $-2 < a < 1$, то $x \in (-\infty; a - 2]$.
4) Если $a \geqslant 1$, то решений нет.

Неравенства для самостоятельного решения

1) $7x + 2a \leqslant 4x - a + 3$. (▶1)
2) $2(a - 1)x > 2a(x + 1) - 2x + 3$. (▶2)
3) $b^2 + x - 3 \geqslant 2(x - 1)$. (▶3)
4) При каких значениях c неравенство $2x + c - 5 \geqslant 0$ верно при всех значениях x, удовлетворяющих условию $-3 \leqslant x \leqslant 1$? (▶4)
5) При каких значениях p неравенство $x > 3p - 18$ верно при всех значениях x, удовлетворяющих условию $p + 2 < x \leqslant 2p - 1$? (▶5)
6) $(a - 5)x > 2$. (▶6)
7) $(2b - 1)y < 4$. (▶7)
8) $(a - 1)x > 5a + 1$. (▶8)
9) $(a + 1)x + 3 \leqslant 5a + 1$. (▶9)
10) $ax + 3 > x - 1$. (▶10)
11) $(m + 1)x + 4 < (1 - 2m)x + 3$. (▶11)

12) $3(2a - x) < ax + 1$. ▶12

13) $\dfrac{5mx}{4(m-3)} - \dfrac{2x+1}{2} < \dfrac{x+3}{4}$. ▶13

14) $2a(a - 2)x > a - 2$. ▶14

15) $(a + 1)(a + 5)x < a + 1$. ▶15

16) $a^3x + a < a^3 + x$. ▶16

17) $\dfrac{3a+1}{a-1}x > a + 1$. ▶17

18) $\dfrac{3p - (p+2)x}{p-1} \leqslant 0$. ▶18

19) При каких значениях m неравенство $(m - 2)x + 2m - 5 < 0$ верно при всех x, удовлетворяющих условию $|x| \geqslant 5$? ▶19

20) Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} x \geqslant 2a - 3, \\ x < a - 7. \end{cases}$ ▶20а

б) $\begin{cases} 3a - 1 \leqslant x < -4a - 8, \\ x > 3. \end{cases}$ ▶20б

в) $\begin{cases} 3ax - 5 < 6 - ax, \\ (a + 1)x - 3 < (1 - 2a)x + 5. \end{cases}$ ▶20в

г) $\begin{cases} (3a + 1)x - 2 < x + 3, \\ 2 + 3ax > 14. \end{cases}$ ▶20г

2.3. Дробно-рациональные неравенства с параметром

№ 1. Решите неравенство $\dfrac{x - 2b}{x - 2} > 0$.

Решение.

Воспользуемся условием, когда дробь больше нуля. Получим совокупность двух систем.

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 2b, \\ x > 2; \end{cases} \\ \begin{cases} x < 2b, \\ x < 2. \end{cases} \end{array}\right.$$

$2b = 2$ при $b = 1$.

Теперь рассмотрим три возможных случая:

1) $b = 1$; $\dfrac{x-2}{x-2} > 0$, $x \in (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$. ▶1

2) $b > 1$; тогда $2b > 2$: $\left[\begin{array}{l} x > 2b, \\ x < 2, \end{array}\right.$

т. е. $x \in (-\infty; 2) \cup (2b; +\infty)$. ▶2

3) $b < 1$; тогда $2b < 2$: $\left[\begin{array}{l} x > 2, \\ x < 2b, \end{array}\right.$

т. е. $x \in (-\infty; 2b) \cup (2; +\infty)$. ▶3

Ответ. 1) Если $b \geqslant 1$, то $x \in (-\infty; 2) \cup (2b; +\infty)$.
2) Если $b < 1$, то $x \in (-\infty; 2b)$ и $(2; +\infty)$.

Неравенства такого вида удобно решать и методом интервалов: на оси x отмечаются точки, разделяющие числовую прямую на интервалы, в каждом из которых функция $y = \dfrac{x-2b}{x-2}$ сохраняет знак. Нас в данном примере интересует случай, когда $y > 0$. Штрихуем эти области (рис. 74).

1) $b = 1$; тогда $x \in (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$.
2) $b > 1$; $x \in (-\infty; 2) \cup (2b; +\infty)$ (рис. 74, *а*).
3) $b < 1$; $x \in (-\infty; 2b) \cup (2; +\infty)$ (рис. 74, *б*).

а) *б*)

Рис. 74

№ 2. При каких значениях a неравенство $\dfrac{x-(a/4)}{x-2a} < 0$ выполняется при всех значениях x, удовлетворяющих условию $2 \leqslant x \leqslant 4$?

Решение.

Решим данное неравенство.

1) $a = 0$; тогда $\dfrac{x}{x} < 0$. Решений нет.

2) $a > 0$; тогда $x \in (a/4; 2a)$ (рис. 75, *а*).

3) $a < 0$; тогда $x \in (2a; a/4)$ (рис. 75, *б*).

а) *б*)

Рис. 75

Для того чтобы отрезок [2; 4] был подмножеством интервала $(a/4; 2a)$, достаточно, чтобы выполнялась система неравенств:

$\begin{cases} a > 0, \\ a/4 < 2, \\ 2a > 4. \end{cases}$ Откуда $a \in (2; 8)$.

Аналогично составим систему для случая 3.

$\begin{cases} a < 0, \\ 2a < 2. \\ a/4 > 4. \end{cases}$ Система решений не имеет.

Ответ. $a \in (2; 8)$.

№ 3. Решите неравенство $(a - 1)(x - 3a)/(x - 9) \leqslant 0$.

Решение.

Приравняем $3a$ и 9: $a = 3$. Рассмотрим пять случаев, отмеченных на оси параметра a (рис. 76).

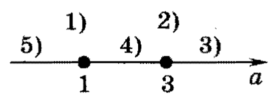
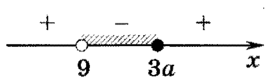


Рис. 76

1) $a = 1$; тогда $0 \cdot (x - 3)/(x - 9) \leqslant 0$, $x \in (-\infty; 9) \cup (9; +\infty)$. (▶1)

2) $a = 3$; тогда $2(x - 9)/(x - 9) \leqslant 0$. Решений нет. (▶2)

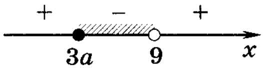
3) $a > 3$; тогда $a - 1 > 0$, $3a > 9$. Достаточно решить неравенство $(x - 3a)/(x - 9) \leqslant 0$ (рис. 77).



$x \in (9; 3a]$. (▶3)

Рис. 77

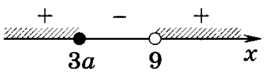
4) $1 < a < 3$; тогда $a - 1 > 0$, $3a < 9$.
Решаем опять неравенство $(x - 3a)/(x - 9) \leqslant 0$ (рис. 78).



$x \in [3a; 9)$. ▶4

Рис. 78

5) $a < 1$; тогда $a - 1 < 0$, $3a < 9$.
Решим неравенство $(x - 3a)/(x - 9) \geqslant 0$ (рис. 79).



$x \in (-\infty; 3a] \cup (9; +\infty)$. ▶5

Рис. 79

Ответ. 1) Если $a = 1$, то $x \in (-\infty; 9) \cup (9; +\infty)$.
2) Если $a = 3$, то решений нет.
3) Если $a > 3$, то $x \in (9; 3a]$.
4) Если $1 < a < 3$, то $x \in [3a; 9)$.
5) Если $a < 1$, то $x \in (-\infty; 3a] \cup (9; +\infty)$.

№ 4. Решите неравенство $\dfrac{(b-1)x - (2b+1)}{(b-1)(x-3)} > 0$.

Решение.

ООН: $\begin{cases} b \neq 1, \\ x \neq 3. \end{cases}$ ▶1

Разделим числитель и знаменатель дроби, стоящей в левой части неравенства, на $b - 1 \neq 0$.

$$\frac{x - (2b+1)/(b-1)}{x - 3} > 0. \qquad (1)$$

Приравняем выражение $(2b + 1)/(b - 1)$ и число 3:

$(2b + 1)/(b - 1) = 3$, $b = 4$.

Возможны следующие случаи (рис. 80).

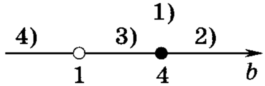
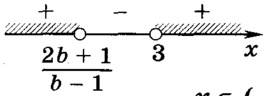


Рис. 80

1) $b = 4$; тогда $(x - 3)/(x - 3) > 0$,
$x \in (-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$. ▶2

2) $b > 4$; тогда $(2b + 1)/(b - 1) < 3$. Решаем неравенство (1) (рис. 81).



$x \in (-\infty; (2b + 1)/(b - 1)) \cup (3; +\infty)$. ▶3

Рис. 81

3) $1 < b < 4$; тогда $(2b + 1)/(b - 1) > 3$.
Решаем (1) (рис. 82).

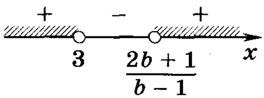
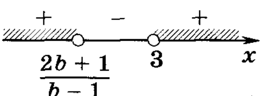


Рис. 82

$x \in (-\infty; 3) \cup ((2b + 1)/(b - 1); +\infty)$. ▶4

4) $b < 1$; тогда $(2b + 1)/(b - 1) < 3$ (рис. 83).



$x \in (-\infty; (2b + 1)/(b - 1)) \cup (3; +\infty)$. ▶5

Рис. 83

Нанесем результаты на ось параметра (рис. 84).

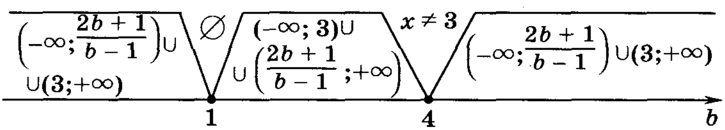


Рис. 84

№ 5. Решите неравенство $\dfrac{x}{x-2} < \dfrac{2b+1}{(b-3)(x-2)}$.

Решение.

ООН: $\begin{cases} b \neq 3, \\ x \neq 2. \end{cases}$ ▶1

Приводим данное неравенство к виду $\dfrac{(b-3)x-(2b+1)}{(x-2)(b-3)}<0$. И далее:

$$\frac{x-(2b+1)/(b-3)}{x-2}<0. \qquad (1)$$

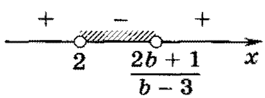
Решаем уравнение $\dfrac{2b+1}{b-3}=2$. Оно решений не имеет. Поэтому рассмотрим только два случая:

1) $\dfrac{2b+1}{b-3}>2$;

2) $\dfrac{2b+1}{b-3}<2$.

Решаем неравенство (1) в каждом из случаев:

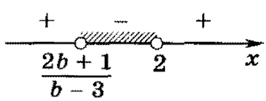
1) $\dfrac{2b+1}{b-3}-2>0$; $\dfrac{7}{b-3}>0$; $b>3$ (рис. 85).



$x\in\left(2;\ \dfrac{2b+1}{b-3}\right)$. ▶2

Рис. 85

2) $b<3$; (рис. 86).



$x\in\left(\dfrac{2b+1}{b-3};\ 2\right)$. ▶3

Рис. 86

Окончательный ответ нанесем на ось параметра (рис. 87).

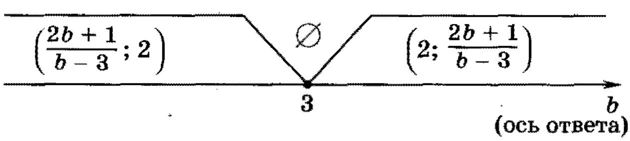


Рис. 87

№ 6. Решите неравенство $\dfrac{ax - 3a - 2}{x - 6} \geqslant 0$.

<u>Решение.</u>

ООН: $\begin{cases} a \in R, \\ x \neq 6. \end{cases}$

Коэффициент при x в числителе может быть больше 0, меньше 0, равен 0.

1) Пусть $a = 0$; тогда $\dfrac{0 \cdot x - 2}{x - 6} \geqslant 0$; $x < 6$;

$x \in (-\infty; 6)$. (▶1)

2) Если $a > 0$, то данное неравенство приводится к такому:

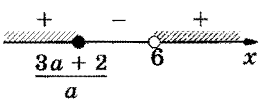
$\dfrac{x - (3a + 2)/a}{x - 6} \geqslant 0$; $\dfrac{3a + 2}{a} = 6$; $a = 2/3$.

Решаем полученное неравенство для каждой из трех возможностей:

а) $a = 2/3$; б) $a > 2/3$; в) $0 < a < 2/3$.

а) $a = 2/3$; тогда $\dfrac{x - 6}{x - 6} \geqslant 0$, $x \in (-\infty; 6) \cup (6; +\infty)$; (▶2)

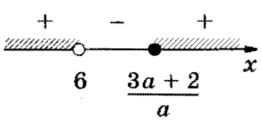
б) $a > 2/3$ (рис. 88);



$x \in \left(-\infty; \dfrac{3a + 2}{a}\right] \cup (6; +\infty)$; (▶3)

Рис. 88

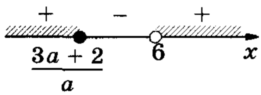
в) $0 < a < 2/3$ (рис. 89);



$x \in (-\infty; 6) \cup \left[\dfrac{3a + 2}{a}; +\infty\right)$. (▶4)

Рис. 89

3) Пусть $a < 0$ (рис. 90), тогда $\dfrac{x - (3a + 2)/a}{x - 6} \leqslant 0$.



$x \in \left[\frac{3a+2}{a};\, 6\right).$ ▶5

Рис. 90

Ответ — на оси параметра (рис. 91).

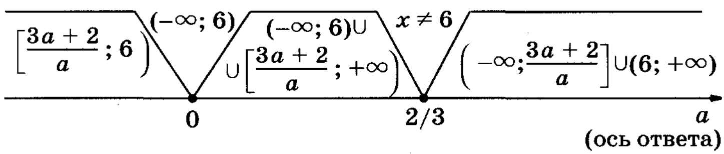


Рис. 91

№ 7. Решите неравенство $\dfrac{3ax+4}{3a+9} < \dfrac{x}{a+3} + \dfrac{3a-5}{3a-9}$.

Решение (рис. 92).

ООН: $\begin{cases} a \neq \pm 3, \\ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$ ▶1

Переносим все члены из правой части в левую и приводим к общему знаменателю.

$$\frac{x(a^2-4a+3)-(a^2-1)}{(a-3)(a+3)} < 0;$$

$$\frac{x(a-1)(a-3)-(a^2-1)}{(a-3)(a+3)} < 0.$$

Рассмотрим пять возможных случаев.

1) $a = 1$; решений нет. ▶2

2) $a > 3$; $x < \dfrac{a+1}{a-3}$, $x \in \left(-\infty;\, \dfrac{a+1}{a-3}\right)$. ▶3

3) $1 < a < 3$; $x < \dfrac{a+1}{a-3}$, $x \in \left(-\infty;\, \dfrac{a+1}{a-3}\right)$. ▶4

4) $-3 < a < 1$; $x > \dfrac{a+1}{a-3}$, $x \in \left(\dfrac{a+1}{a-3},\, +\infty\right)$. ▶5

5) $a < -3$; $x < \dfrac{a+1}{a-3}$, $x \in \left(-\infty; \dfrac{a+1}{a-3}\right)$. ▶6

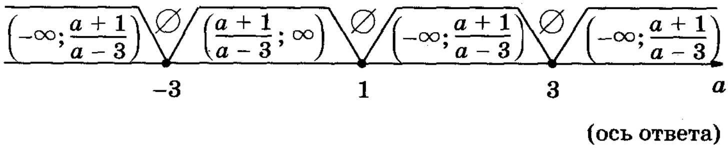


Рис. 92

Неравенства для самостоятельного решения

1) $\dfrac{2x-3a}{x+1} \geqslant 0$. ▶1

2) $\dfrac{x+2b}{(b-2)(x-4)} > 0$. ▶2

3) $\dfrac{x(a+3)-2a}{(a+3)(x-3)} < 0$. ▶3

4) $\dfrac{(a-1)x-3a}{x-2a} \geqslant 0$. ▶4

5) $\dfrac{2ax+3}{5x-4} < 16$. ▶5

6) $\dfrac{ax-1}{x-a} > 1$. ▶6

7) $\dfrac{x}{x-2} < \dfrac{2b+1}{(b-3)(x-2)}$. ▶7

8) $\dfrac{2x-m}{(m-2)(x+3)} - \dfrac{m}{m-2} < \dfrac{3}{x+3}$. ▶8

9) $\dfrac{ax-3}{x-3} - \dfrac{a}{2} < a-1$. ▶9

10) $\dfrac{2ax+3}{5x-4a} < 4$. ▶10

2.4. Неравенства, содержащие переменную под знаком модуля

№ 1. Следующие неравенства решите устно.

$|2x + 3a| > -1$; $|x - 4| \leqslant -(b - 1)^2$; $|x + 5| > -c^2$;
$|x - 2a| < -3$; $|x - b| > 8$; $|3a - x| \leqslant 1$; $|-x - a| \geqslant 6$.

№ 2. Решите неравенство $|x + 3| \cdot (a - 1) > 0$.

Решение.
1) $a = 1$; тогда $|x + 3| \cdot 0 > 0$; решений нет.
2) $a > 1$; тогда $x \in (-\infty; -3) \cup (-3; +\infty)$.
3) $a < 1$; решений нет.

Ответ. 1) Если $a > 1$, то $x \in (-\infty; -3) \cup (-3; \infty)$.
2) Если $a \leqslant 1$, то решений нет.

№ 3. Решите неравенство $(a + 1)(a - 3) \cdot |x| < 0$.

Решение.
1) Если $a = -1$ или $a = 3$, то решений нет.
2) Если $a \in (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$, то решений нет.
3) Если $a \in (-1; 3)$, то $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

На рисунке 93 мы отметили промежутки знакопостоянства произведения $(a + 1) \cdot (a - 3)$.

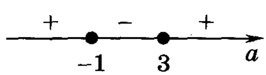


Рис. 93

Ответ. 1) Если $a \in (-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$, то решений нет.
2) Если $a \in (-1; 3)$, то $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

№ 4. Решите неравенство $|x - 1| > a - 1$.

Решение.
1) Пусть $a = 1$; тогда $|x - 1| > 0$,
$x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$. ▶1

2) Если $a > 1$, то $a - 1 > 0$; $\left[\begin{array}{l} x - 1 > a - 1, \\ x - 1 < -a + 1; \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x > a, \\ x < 2 - a, \end{array}\right.$ т. е. $x \in (-\infty;\ 2 - a) \cup (a;\ +\infty)$. ▶2

3) Если $a < 1$, то $a - 1 < 0$; тогда $x \in (-\infty;\ +\infty)$. ▶3

Ответ запишите сами.

№ 5. Решите неравенство $|2 - x| \leqslant b + 2$.

Решение.

Перепишем данное неравенство в виде ему равносильного неравенства

$|x - 2| \leqslant b + 2$.

1) $b = -2$; тогда $|x - 2| \leqslant 0$, $x = 2$. ▶1

2) $b > -2$; тогда $\begin{cases} x - 2 \leqslant b + 2, \\ x - 2 \geqslant -b - 2; \end{cases}$

$\begin{cases} x \leqslant b + 4, \\ x \geqslant -b; \end{cases}$ $x \in [-b;\ b + 4]$. ▶2

3) $b < -2$; решений нет. ▶3

Ответ. 1) Если $b = -2$, то $x = 2$.
2) Если $b > -2$, то $x \in [-b;\ b + 4]$.
3) Если $b < -2$, то решений нет.

№ 6. Решите неравенство $|ax - 1| < 3$.

Решение (рис. 94).

Данное неравенство равносильно системе неравенств:

$\begin{cases} ax - 1 < 3, \\ ax - 1 > -3. \end{cases}$ Решаем эту систему: $\begin{cases} ax < 4, \\ ax > -2. \end{cases}$

1) $a = 0$; тогда $\begin{cases} 0 \cdot x < 4, \\ 0 \cdot x > -2, \end{cases}$ $x \in (-\infty;\ +\infty)$. ▶1

2) $a > 0$; тогда $\begin{cases} x < 4/a, \\ x > -2/a, \end{cases}$ $x \in (-2/a;\ 4/a)$. ▶2

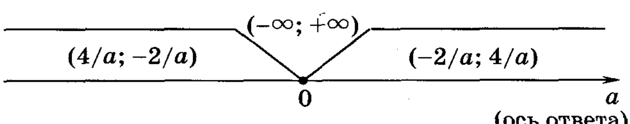


Рис. 94

3) $a < 0$; тогда $\begin{cases} x > 4/a, \\ x < -2/a, \end{cases}$ $x \in (4/a; -2/a)$. ▶3

<u>Ответ</u>. 1) Если $a > 0$, то $x \in (-2/a; 4/a)$.
2) Если $a = 0$, то $x \in (-\infty; +\infty)$.
3) Если $a < 0$, то $x \in (4/a; -2/a)$.

№ 7. Решите неравенство $|(a-1)x-3| > 1$.

<u>Решение</u>.

Решаем совокупность неравенств, равносильную данному неравенству:

$\left[\begin{array}{l} (a-1)x-3 > 1, \\ (a-1)x-3 < -1; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} (a-1)x > 4, \\ (a-1)x < 2. \end{array}\right.$

1) Пусть $a = 1$; тогда $\left[\begin{array}{l} 0 \cdot x > 4, \\ 0 \cdot x < 2, \end{array}\right.$ $x \in (-\infty; +\infty)$. ▶1

2) Пусть $a > 1$; тогда $\left[\begin{array}{l} x > 4/(a-1), \\ x < 2/(a-1), \end{array}\right.$

$x \in (-\infty; 2/(a-1)) \cup (4/(a-1); +\infty)$. ▶2

3) $a < 1$; тогда $\left[\begin{array}{l} x < 4/(a-1), \\ x > 2/(a-1), \end{array}\right.$

$x \in (-\infty; 4/(a-1)) \cup (2/(a-1); +\infty)$.

<u>Ответ</u>. 1) Если $a > 1$,
то $x \in (-\infty; 2/(a-1)) \cup (4/(a-1); +\infty)$.
2) Если $a = 1$, то $x \in (-\infty; +\infty)$.
3) Если $a < 1$,
то $x \in (-\infty; 4/(a-1)) \cup (2/(a-1); +\infty)$.

№ 8. Решите неравенство $|x+3| > ax-2$.

<u>Решение</u>.

Раскроем модуль:

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant -3, \\ x+3 > ax-2; \end{cases} \\ \begin{cases} x < -3, \\ -x-3 > ax-2; \end{cases} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{ll} \begin{cases} x \geqslant -3, \\ x(1-a) > -5; \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} x < -3, \\ x(1+a) < -1. \end{cases} & (2) \end{array}\right.$

Найдем решения системы (1) (ось (1) на рис. 95):

1) $a = 1$; тогда $\begin{cases} x \geqslant -3, \\ x \cdot 0 > -5, \end{cases}$ $x \geqslant -3$, $x \in [-3; +\infty)$. ▶1

2) $a > 1$; тогда $\begin{cases} x \geqslant -3, \\ x < 5/(a-1). \end{cases}$ ▶2

Если $a > 1$, то $5/(a-1) > -3$, $x \in [-3; 5/(a-1))$.

3) $a < 1$; $\begin{cases} x \geqslant -3, \\ x > 5/(a-1), \end{cases}$ $-3 = 5/(a-1)$; $a = -2/3$.

Рассмотрим возможные случаи.

а) Пусть $-2/3 < a < 1$; тогда $5/(a-1) < -3$; $x \geqslant -3$; $x \in [-3; +\infty)$. ▶3

б) Пусть $a < -2/3$, то $5/(a-1) > -3$; $x > 5/(a-1)$; $x \in (5/(a-1); +\infty)$. ▶4

в) $a = -2/3$; тогда $x > -3$; $x \in (-3; +\infty)$. ▶5

Аналогично решаем систему (2) (ось (2) на рис. 95):

1) $a = -1$; тогда $\begin{cases} x < -3, \\ 0 \cdot x < -1. \end{cases}$ Решений нет. ▶6

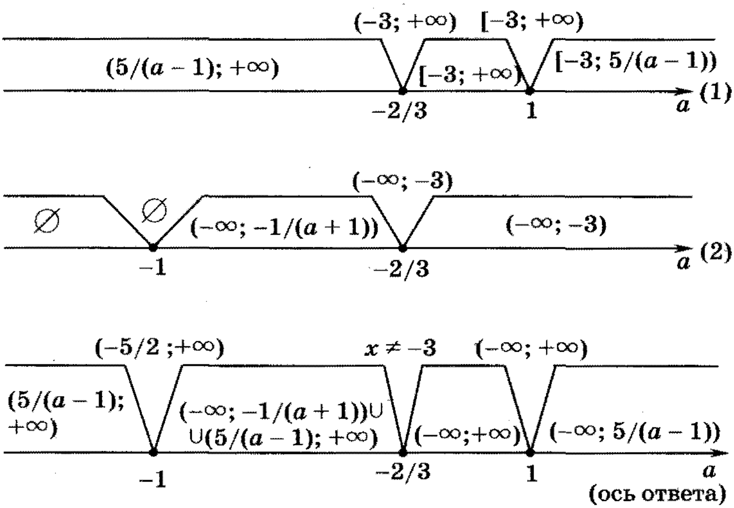


Рис. 95

2) $a > -1$; тогда $\begin{cases} x < -3, \\ x < -1/(a+1), \end{cases}$

$-1/(a+1) = -3$, $a = -2/3$.

а) $-1 < a < -2/3$; тогда $x < -1/(a+1)$,
$x \in (-\infty; -1/(a+1))$. ▶7

б) $a > -2/3$; тогда $x < -3$, $x \in (-\infty; -3)$. ▶8

в) $a = -2/3$; тогда $x < -3$. ▶9

3) $a < -1$; тогда $\begin{cases} x < -3, \\ x > -1/(a+1). \end{cases}$

Заметим, что $-1/(a+1) > 0$ при $a < -1$, а потому система решений не имеет. ▶10

А теперь заполняем ось ответа (см. рис. 95). ▶11

Ответ. 1) Если $a \leqslant -1$, то $x \in (5/(a-1); +\infty)$.
2) Если $-1 < a < -2/3$,
то $x \in (-\infty; -1/(a+1)) \cup (5/(a-1); +\infty)$.
3) Если $a = -2/3$,
то $x \in (-\infty; -3) \cup (-3; +\infty)$.
4) Если $-2/3 < a \leqslant 1$, то $x \in (-\infty; +\infty)$.
5) Если $a > 1$, то $x \in (-\infty; 5/(a-1))$.

№ 9. Найдите значения a, при которых неравенство $|x+2| - |2x+8| \geqslant a$ имеет единственное решение.

Решение.

Будем решать графически в системе координат (xOy).

Для построения графика функции
$y = |x+2| - |2x+8|$ раскроем модули:

$$y = \begin{cases} -x - 6, \text{ если } x \geqslant -2, \\ -3x - 10, \text{ если } -4 \leqslant x < -2, \\ x + 6, \text{ если } x < -4. \end{cases}$$

Анализируя рисунок 96, можно заключить, что только при $a = 2$ данное неравенство имеет единственное решение $x = -4$.

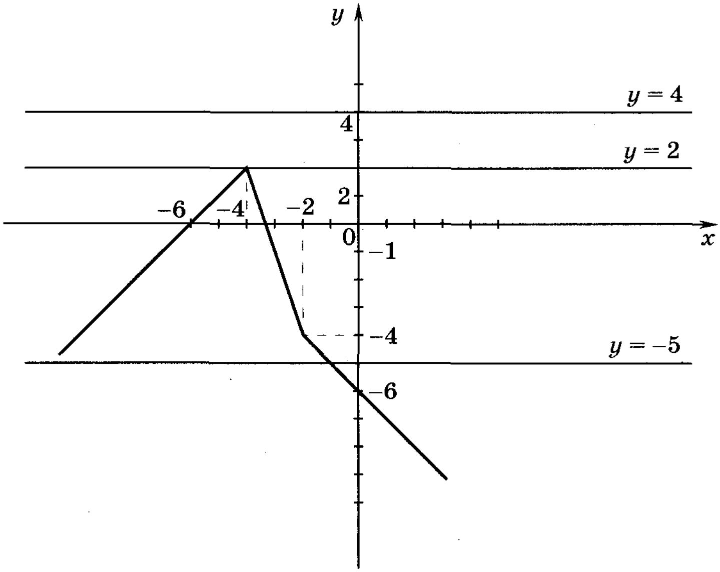


Рис. 96

Ответ. $a = 2$.

№ 10. Решите неравенство $x \cdot |x - 5| < |x + 1| - a$.

Решение.

Перепишем данное неравенство в виде

$|x + 1| - |x - 5| > a$.

Пусть $y = |x + 1| - |x - 5|$, тогда

$$y = \begin{cases} 6, \text{ если } x \geqslant 5, \\ 2x - 4, \text{ если } -1 \leqslant x < 5, \\ -6, \text{ если } x < -1 \text{ (рис. 97)}. \end{cases}$$

Рассмотрим ряд случаев:

1) $a < -6$; тогда $x \in (-\infty; +\infty)$.

2) $a = -6$; тогда $x \in (-1; +\infty)$.

3) $-6 < a < 6$; тогда $2x - 4 = a$, $x = 2 + a/2$.

И тогда интервал $(2 + a/2; +\infty)$ — множество решений неравенства при $a \in (-6; 6)$.

4) $a \geqslant 6$; решений нет.

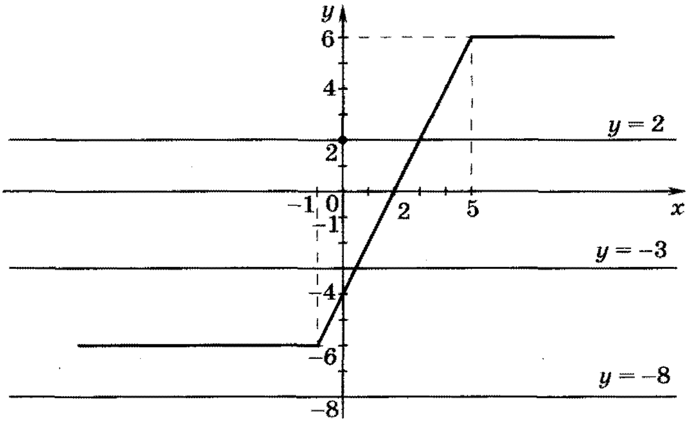


Рис. 97

<u>Ответ</u>. 1) Если $a < -6$, то $x \in (-\infty; +\infty)$.
2) Если $a = -6$, то $x \in (-1; +\infty)$.
3) Если $-6 < a < 6$, то $x \in (2 + a/2; +\infty)$.
4) Если $a \geqslant 6$, то решений нет.

№ 11. Решите неравенство $|x - 3a| < |x - a| - 2a$.

<u>Решение</u>.

Рис. 98

Рассмотрим три случая:
$a = 0$; $a > 0$; $a < 0$.

1) $a = 0$; $|x| < |x|$, решений нет.
2) $a > 0$; в этом случае $a < 3a$ (рис. 98).

Рассматривая каждый из трех промежутков значений x на прямой x (см. рис. 98), получим совокупность трех систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 3a, \\ x - 3a < x - a - 2a; \end{cases} \\ \begin{cases} a \leqslant x < 3a, \\ 3a - x < x - a - 2a; \end{cases} \\ \begin{cases} x < a, \\ 3a - x < a - x - 2a; \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 3a, \\ 0 \cdot x < 0; \end{cases} \\ \begin{cases} a \leqslant x < 3a, \\ x > 3a; \end{cases} \\ \begin{cases} x < a, \\ 0 \cdot x > 4a. \end{cases} \end{array}\right.$$

Все системы совокупности несовместны.

3) $a < 0$; тогда $3a < a$ (рис. 99). Решаем еще одну совокупность трех систем для трех интервалов значений x:

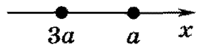


Рис. 99

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \geqslant a,\\ x-3a < x-a-2a;\end{cases}\\ \begin{cases}3a \leqslant x < a,\\ x-3a < a-x-2a;\end{cases}\\ \begin{cases}x < 3a,\\ 3a-x < a-x-2a;\end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \geqslant a,\\ 0\cdot x < 0;\end{cases}\\ \begin{cases}3a \leqslant x < a,\\ x < a;\end{cases}\\ \begin{cases}x < 3a,\\ 0\cdot x > 4a.\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}3a \leqslant x < a,\\ x < 3a,\end{array}\right. \qquad x < a.$$

<u>Ответ</u>. 1) Если $a \geqslant 0$, то решений нет.
2) Если $a < 0$, то $x \in (-\infty; a)$.

№ 12. Решите неравенство $\dfrac{|x-2a|}{x-a+1} \geqslant 0$.

<u>Решение</u>.

Решаем уравнения $x - 2a = 0$ и $x - a + 1 = 0$.
Тогда $x = 2a$ и $x = a - 1$.
Приравняем выражения $2a$ и $a - 1$:
$2a = a - 1$, $a = -1$.
Точка $a = -1$ делит ось параметра на два интервала. Остановимся на трех случаях.

1) $a = -1$; тогда $\dfrac{|x+2|}{x+2} \geqslant 0$; $x > -2$;
$x \in (-2; +\infty)$. ▶1
2) $a > -1$; тогда $2a > a - 1$; $x > a - 1$;
$x \in (a - 1; +\infty)$. ▶2
3) $a < -1$; тогда $2a < a - 1$;
$x \in (a - 1; +\infty) \cup \{2a\}$. ▶3

<u>Ответ</u>. 1) Если $a = -1$, то $x \in (-2; +\infty)$.
2) Если $a > -1$, то $x \in (a - 1; +\infty)$.
3) Если $a < -1$, то $x \in (a - 1; +\infty) \cup \{2a\}$.

№ 13. Решите неравенство $\dfrac{x+3b}{|x+b-2|} > 0$.

Решение.
Решаем уравнения $x + 3b = 0$ и $x + b - 2 = 0$.
Тогда $x = -3b$ и $x = -b + 2$.
Теперь решаем уравнение $-3b = -b + 2$; $b = -1$.
Рассмотрим случаи:

1) $b = -1$; тогда $\dfrac{x-2}{|x-2|} > 0$, $x \in (2; +\infty)$. ▶1
2) $b < -1$; тогда $-3b > -b + 2$, $x \in (-3b; +\infty)$. ▶2
3) $b > -1$; тогда $-3b < 2 - b$, $x > -3b$, $x \neq 2 - b$, т. е. $x \in (-3b; 2 - b) \cup (2 - b; +\infty)$. ▶3

Ответ запишите сами.

№ 14. Решите неравенство $|x - 2b| - |2x - 1| > b - 1$.

Решение.
$x - 2b = 0$, $2x - 1 = 0$. Тогда $x = 2b$ и $x = 1/2$.
Приравняем $2b$ и $1/2$: $b = 1/4$.
Рассмотрим три случая.

1) $b = 1/4$; тогда $|x - 1/2| - |2x - 1| > -3/4$,
$-|x - 1/2| > -3/4$, $|x - 1/2| < 3/4$,
$-3/4 < x - 1/2 < 3/4$, $-1/4 < x < 5/4$,
$x \in (-1/4; 5/4)$.
2) $b > 1/4$; тогда $2b > 1/2$ (рис. 100).

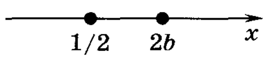


Рис. 100

Рассматривая каждый из трех промежутков, получим

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 2b, \\ x - 2b - 2x + 1 > b - 1; \end{cases} \\ \begin{cases} 1/2 \leqslant x < 2b, \\ -x + 2b - 2x + 1 > b - 1; \end{cases} \\ \begin{cases} x < 1/2, \\ -x + 2b + 2x - 1 > b - 1; \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} x \geqslant 2b, \\ x < 2 - 3b; \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} 1/2 \leqslant x < 2b, \\ x < (b + 2)/3; \end{cases} & (2) \\ \begin{cases} x < 1/2, \\ x > -b. \end{cases} & (3) \end{array}\right.$$

Решаем каждую из систем (1)—(3).

(1) $\begin{cases} x \geqslant 2b, \\ x < 2 - 3b. \end{cases}$ $\quad 2b = 2 - 3b, \quad b = 2/5.$

а) $b = 2/5$; в этом случае $\begin{cases} x \geqslant 4/5, \\ x < 4/5. \end{cases}$

Решений нет. ▶1

б) $b > 2/5$; тогда $2b > 2 - 3b$; решений нет. ▶2

в) $1/4 < b < 2/5$; тогда $2 - 3b > 2b$, ▶3
$x \in [2b; 2 - 3b)$.

(2) $\begin{cases} 1/2 \leqslant x < 2b, \\ x < (b + 2)/3. \end{cases}$ $\quad 2b = (b + 2)/3, \quad b = 2/5.$

а) $b = 2/5$; $\begin{cases} 1/2 \leqslant x < 4/5, \\ x < 4/5, \end{cases}$ $\quad x \in [1/2; 4/5).$ ▶4

б) $b > 2/5$; $2b > (b + 2)/3$, $1/2 \leqslant x < (b + 2)/3$,
$x \in [1/2; (b + 2)/3)$. ▶5

в) $1/4 < b < 2/5$; $2b < (b + 2)/3$, $1/2 \leqslant x < 2b$,
$x \in [1/2; 2b)$. ▶6

(3) $\begin{cases} x < 1/2, \\ x > -b. \end{cases}$ $\quad -b < x < 1/2$, $x \in (-b; 1/2)$. ▶7

Объединим все решения систем (1)—(3), воспользовавшись координатными прямыми параметра (рис. 101). ▶8

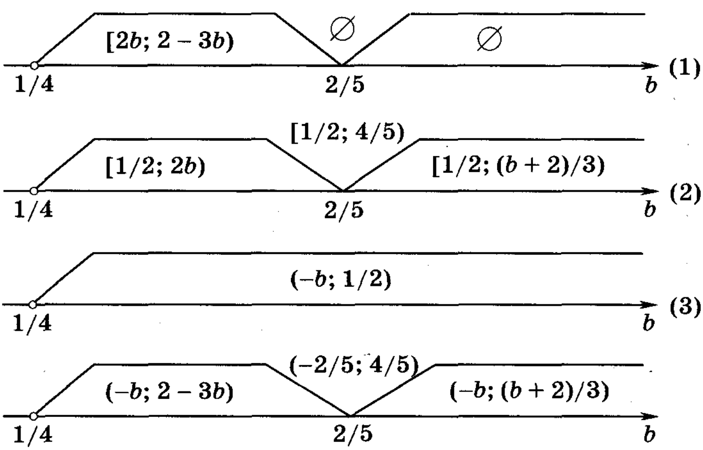


Рис. 101

3) $b < 1/4$; тогда $2b < 1/2$ (рис. 102).

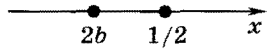


Рис. 102

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \geqslant 1/2,\\ x - 2b - 2x + 1 > b - 1;\end{cases}\\ \begin{cases}2b \leqslant x < 1/2,\\ x - 2b + 2x - 1 > b - 1;\end{cases}\\ \begin{cases}x < 2b,\\ 2b - x + 2x - 1 > b - 1.\end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{ll}\begin{cases}x \geqslant 1/2,\\ x < 2 - 3b;\end{cases} & (1)\\ \begin{cases}2b \leqslant x < 1/2,\\ x > b;\end{cases} & (2)\\ \begin{cases}x < 2b,\\ x > -b.\end{cases} & (3)\end{array}\right.$$

(1): $\begin{cases}x \geqslant 1/2,\\ x < 2 - 3b.\end{cases}$

Если $b < 1/4$, то $2 - 3b > 1/2$.

$x \in [1/2; 2 - 3b)$. ▶9

(2): $\begin{cases}2b \leqslant x < 1/2,\\ x > b.\end{cases}$

а) $b = 0$; $\begin{cases}0 \leqslant x < 1/2,\\ x > 0,\end{cases}$ $0 < x < 1/2$, $x \in (0; 1/2)$. ▶10

б) $0 < b < 1/4$; $2b \leqslant x < 1/2$, $x \in [2b; 1/2)$. ▶11

в) $b < 0$; $b < x < 1/2$, $x \in (b; 1/2)$. ▶12

(3): $\begin{cases}x < 2b,\\ x > -b.\end{cases}$

а) Если $b = 0$, то решений у системы нет. ▶13

б) Если $0 < b < 1/4$, то $x \in (-b; 2b)$. ▶14

в) Если $b < 0$, то система несовместна. ▶15

Объединим все решения последних трех систем (рис. 103). ▶16

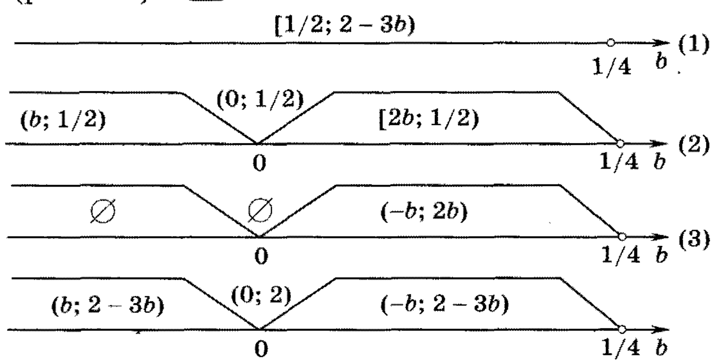


Рис. 103

А теперь покажем множество решений данного неравенства на оси ответа (рис. 104).

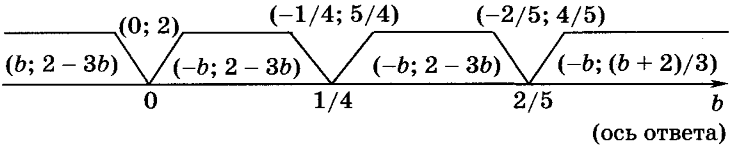


Рис. 104

<u>Ответ</u>. 1) Если $b < 0$, то $x \in (b;\ 2 - 3b)$.
2) Если $0 \leqslant b < 2/5$, то $x \in (-b;\ 2 - 3b)$.
3) Если $b \geqslant 2/5$, то $x \in (-b;\ (b + 2)/3)$.

№ 15. Найдите все положительные значения параметра a, при которых для любого числа из отрезка $[-3;\ 3]$ верно неравенство $|2x + a|x| - 13| \geqslant 1$.

(ЕГЭ, 2004 г.)

<u>Решение</u>. Приведем один из возможных способов решения данной задачи.

ООН: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

При решении учтем, что по условию $a > 0$.

Данное неравенство равносильно совокупности неравенств

$$\left[\begin{array}{l} 2x + a|x| - 13 \geqslant 1, \\ 2x + ax - 13 \leqslant -1, \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{ll} 2x + a|x| \geqslant 14, & (1) \\ 2x + a|x| \leqslant 12. & (2) \end{array}\right.$$

Решаем неравенство (1):

$$\left[\begin{array}{ll} \begin{cases} x \geqslant 0, \\ x(a + 2) \geqslant 14, \end{cases} & (3) \\ \begin{cases} x < 0, \\ x(2 - a) \geqslant 14. \end{cases} & (4) \end{array}\right.$$

Решаем системы (3) и (4).

(3): Если $a > 0$, то $x \geqslant 14/(a + 2)$ (рис. 105).

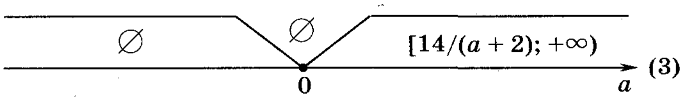


Рис. 105

(4): Если $a > 2$, то $x \leqslant 14/(2-a)$.
Если $a = 2$, то решений нет.
Если $0 < a < 2$, то $\begin{cases} x < 0, \\ x \geqslant 14/(2-a). \end{cases}$
Решений нет (рис. 106).

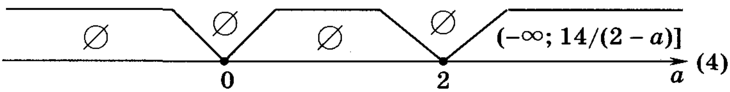


Рис. 106

Результаты решений систем (3) и (4) сводим на оси a (рис. 109, ось (1)).
Переходим к неравенству (2):

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 0, \\ x(a+2) \leqslant 12; \end{cases} \qquad (5) \\ \begin{cases} x < 0, \\ x(2-a) \leqslant 12. \end{cases} \qquad (6) \end{array}\right.$$

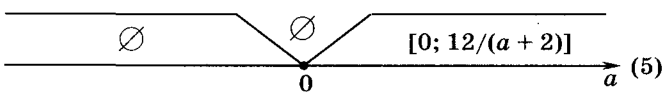


Рис. 107

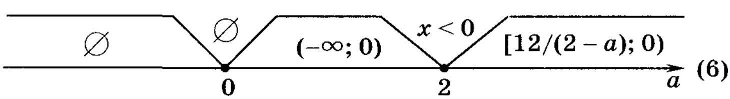


Рис. 108

(5): $0 \leqslant x \leqslant 12/(a+2)$ (рис. 107).
(6): Если $a > 2$, то $12/(2-a) \leqslant x < 0$.
Если $a = 2$, то $x < 0$.
Если $0 < a < 2$, то $x < 0$ (рис. 108).

Результаты решений систем (5) и (6) сводим на оси a (рис. 109 ось (2)). А затем заполняем ось ответа, объединив множества решений неравенств (1) и (2).

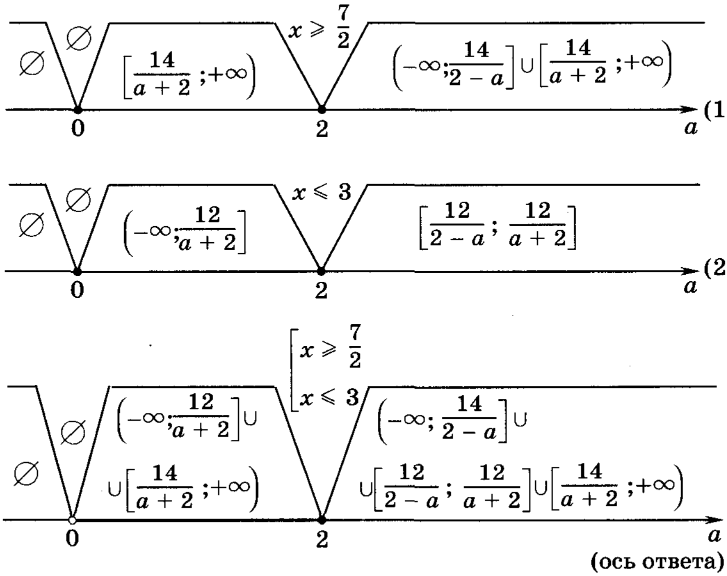


Рис. 109

Анализ множества решений:

1) $0 < a \leqslant 2$:

$$\begin{cases} 12/(a+2) \geqslant 3, \\ 0 < a \leqslant 2, \end{cases}$$

$0 < a \leqslant 2$ (рис. 110).

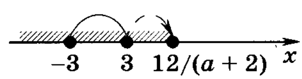


Рис. 110

Пунктирной стрелкой на рисунке показано крайнее положение правого конца отрезка.

2) $a > 2$:

$$\begin{cases} 12/(2-a) \leqslant -3, \\ 12/(a+2) \geqslant 3, \\ a > 2, \end{cases} \qquad \begin{cases} a \leqslant 6, \\ a \leqslant 2, \\ a > 2. \end{cases}$$

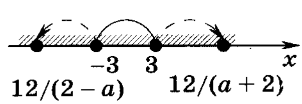


Рис. 111

Решений нет (рис. 111).

Ответ. (0; 2].

Неравенства для самостоятельного решения

1) $|x-5|\cdot(b-3)\leqslant 0.$ (▸1)
2) $(a^2-3a+2)\cdot|x+1|>0.$ (▸2)
3) $|3x-5|<b+1.$ (▸3)
4) $|2-x|\geqslant b-3.$ (▸4)
5) $|2x-a|<2.$ (▸5)
6) $|3x-2a|\geqslant 6.$ (▸6)
7) $|(a-2)x+3|\geqslant 1.$ (▸7)
8) $|5-(b+3)x|\leqslant 5.$ (▸8)
9) $\left|\dfrac{ax-5}{3}+x\right|<3.$ (▸9)
10) $|x-2|<bx+2x-1.$ (▸10)
11) $|3x-a|-|a+x|<2a.$ (▸11)
12) $|3x-1|>|x-2|+2a.$ (▸12)
13) $|x+b|>|2x+4|+b.$ (▸13)
14) $\dfrac{|c-2x|}{x+c-2}\leqslant 0.$ (▸14)
15) $\dfrac{2x-b}{|x-3b+1|}>0.$ (▸15)

Раздел II

КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С ПАРАМЕТРОМ И К НИМ СВОДИМЫЕ

1. Справочный материал

1.1. Квадратные уравнения

▶ ***Определение.*** Уравнение вида $ax^2 + bx + c$, где x — переменная, a, b, c — некоторые числа, причем $a \neq 0$, называется *квадратным*.

▶ ***Определение.*** Коэффициент a называют *первым коэффициентом*, коэффициент b — *вторым коэффициентом*, c — *свободным членом*.

▶ ***Определение.*** Выражение $b^2 - 4ac$ называется *дискриминантом* квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ и обозначается буквой D.

Если D $= 0$, то квадратное уравнение имеет два равных корня: $x_{1,2} = -\dfrac{b}{2a}$. Иногда говорят, что в этом случае уравнение имеет один корень кратности два или просто один корень. С алгебраической точки зрения первый подход предпочтительнее. Однако при решении задач с дополнительными условиями будем считать, что при D $= 0$ квадратное уравнение имеет единственный корень.

Если D < 0, то квадратное уравнение не имеет действительных корней.

Если D > 0, то квадратное уравнение имеет два различных действительных корня, которые можно найти по формуле

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

▶ ***Определение.*** Квадратное уравнение, первый коэффициент которого равен 1, называется *приведенным.* В случае $D \geqslant 0$ формула корней приведенного квадратного уравнения имеет вид

$$x_{1,2} = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4c})/2 \ (a = 1).$$

Если $b = 2k$, то формула корней квадратного уравнения примет вид

$$x_{1,2} = (-k \pm \sqrt{k^2 - ac})/a, \text{ где } k = b/2.$$

▶ ***Определение.*** Уравнения вида $ax^2 + bx = 0$ $(c = 0)$, $ax^2 + c = 0$ $(b = 0)$ и $ax^2 = 0$ $(b = 0,\ c = 0)$ называются *неполными квадратными уравнениями.*

Теоремы Виета

▶ ***Прямая теорема***: сумма корней приведенного квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену, т. е. $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 \cdot x_2 = q$.

В случае неприведенного квадратного уравнения
$(a \neq 0,\ a \neq 1)$
$ax^2 + bx + c = 0$: $x_1 + x_2 = -b/a$, $x_1 \cdot x_2 = c/a$.

▶ ***Обратная теорема***: если p, q, x_1, x_2 таковы, что $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 \cdot x_2 = q$, то x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + px + q = 0$.

▶ ***Определение.*** Выражение вида $ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$, называется *квадратным трехчленом.*

Корнями квадратного трехчлена называются корни соответствующего квадратного уравнения: $ax^2 + bx + c = 0$.

Если $D > 0$, то квадратный трехчлен можно представить в виде $ax^2 + bx + c = a(x - x_1) \cdot (x - x_2)$, где x_1 и x_2 — корни трехчлена. Если $D = 0$, то $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$, где x_1 — корень трехчлена.

Квадратные уравнения, содержащие параметр

Рассмотрим несколько уравнений:

$$(a+1)x^2 + 3x - 7 = 0, \quad (1)$$

$$x^2 - 2ax + 3 = 0, \quad (2)$$

$$ax^2 + x + a^2 - 1 = 0, \quad (3)$$

$$(a^2 - 4)x^2 + 2ax + 4a = 0, \quad (4)$$

$$(a-1)x^2 + \sqrt{a}x - a = 0. \quad (5)$$

Эти уравнения являются квадратными уравнениями с параметром a.

Воспользуемся определением квадратного уравнения, содержащего параметры α, β, ..., γ, и дадим определение квадратного уравнения с одним параметром.

▶ ***Определение.*** Квадратным уравнением с параметром a называется уравнение вида $A(a)x^2 + B(a)x + C(a) = 0$ (I), где $A(a)$, $B(a)$, $C(a)$ — данные функции от параметра a, рассматриваемые в общей части их областей определения.

В частности, некоторые из коэффициентов или свободный член могут быть числами (например, в уравнениях (1), (2) и (3)).

Если $A(a) \neq 0$, то уравнение (I) является *квадратным* в традиционном смысле, т. е. второй степени.

Если же $A(a) = 0$, то уравнение (I) становится *линейным*.

При всех допустимых значениях параметра a, при которых $A(a) \neq 0$ и $D(a) = B^2(a) - 4A(a) \cdot C(a) \geqslant 0$, по известным формулам получаем выражения корней уравнения (I) через параметр.

Те значения a, при которых $A(a) = 0$, следует рассматривать отдельно в качестве особых случаев.

Так, например, уравнение (5) при $a = 1$ примет вид $x - 1 = 0$, откуда $x = 1$.

1.2. Квадратичная функция

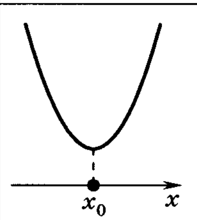
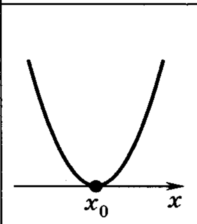
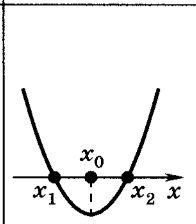
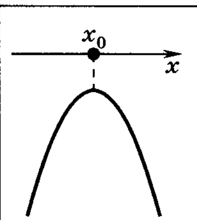
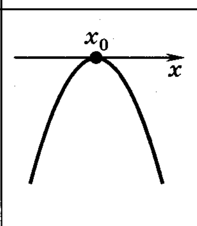
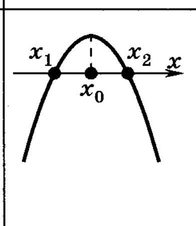
▶ ***Определение.*** Функция, заданная формулой $y = ax^2 + bx + c$, где x и y — переменные, a, b, c — некоторые числа, причем $a \neq 0$, называется *квадратичной*.

Графиком квадратичной функции является парабола. Если $a > 0$, то ветви параболы направлены вверх, если $a < 0$, то вниз.

Координаты вершины параболы: $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$, $y_0 = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$.

Все наиболее важные свойства квадратичной функции определяются таблицей 1.

Таблица 1

a/D	D < 0	D = 0	D > 0
$a > 0$			
$a < 0$			

Приведенная схема достаточно ясно показывает, что дискриминант D, старший коэффициент a квадратного трехчлена, абсцисса x_0 вершины параболы конструируют «каркас», на котором строится теория квадратичной функции.

1.3. Расположение корней квадратного трехчлена относительно заданных точек

▶ ***Теорема 1*** (рис. 112).

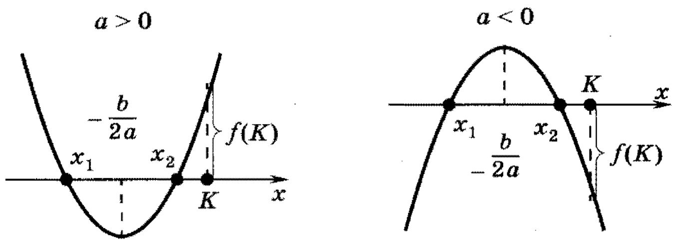


Рис. 112

Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$ — квадратичная функция, x_1, x_2 — действительные корни, K — какое-нибудь действительное число. Для того чтобы оба корня квадратного трехчлена были *меньше*, чем число K, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись *условия*:

$$\begin{cases} D \geqslant 0, \\ -\dfrac{b}{2a} < K, \\ af(K) > 0. \end{cases}$$

▶ ***Теорема 2*** (рис. 113).

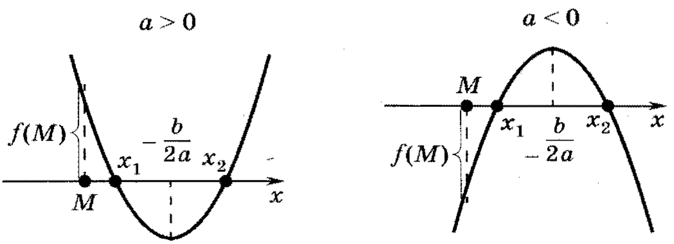


Рис. 113

Для того чтобы оба корня квадратного трехчлена были *больше*, чем число M, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись *условия*:

$$\begin{cases} D \geqslant 0, \\ -\dfrac{b}{2a} > M, \\ af(M) > 0. \end{cases}$$

▶ ***Теорема 3*** (рис. 114).

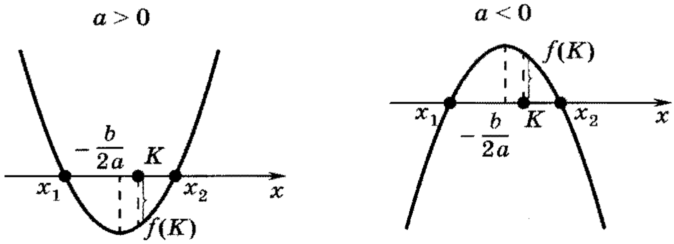


Рис. 114

Для того чтобы *один из корней* квадратного трехчлена был *меньше*, чем число K, а *другой больше* числа K (т. е. точка K лежала бы между x_1, и x_2), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось *условие*

$$a \cdot f(K) < 0.$$

▶ ***Теорема 4*** (рис. 115).

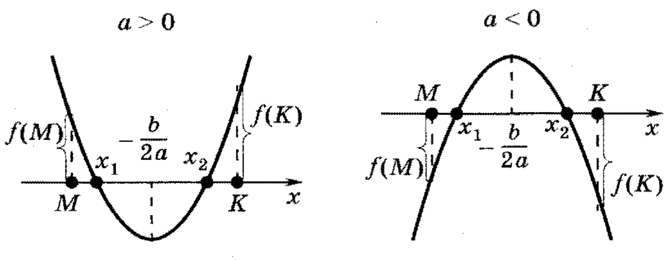


Рис. 115

Для того чтобы *оба корня* квадратного трехчлена были *больше*, чем число M, *но меньше*, чем число K ($M < K$) (т. е. лежали в интервале между M и K), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись *условия*

$$\begin{cases} D \geqslant 0, \\ a \cdot f(M) > 0, \\ a \cdot f(K) > 0, \\ M < -\dfrac{b}{2a} < K. \end{cases}$$

▶ ***Теорема 5*** (рис. 116).

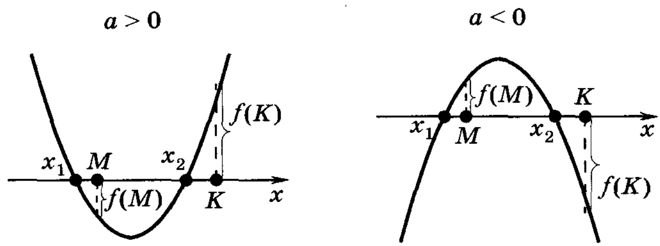


Рис. 116

Для того чтобы *только больший* корень квадратного трехчлена лежал в интервале MK ($M < K$), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись *условия*

$$\begin{cases} a \cdot f(M) < 0, \\ a \cdot f(K) > 0. \end{cases}$$

▶ ***Теорема 6*** (рис. 117).

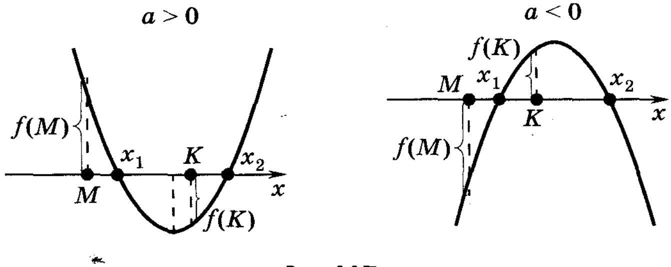


Рис. 117

Для того чтобы *только меньший* корень квадратного трехчлена лежал в интервале MK ($M < K$), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись *условия*

$$\begin{cases} a \cdot f(M) > 0, \\ a \cdot f(K) < 0. \end{cases}$$

▶ ***Теорема 7*** (рис. 118).

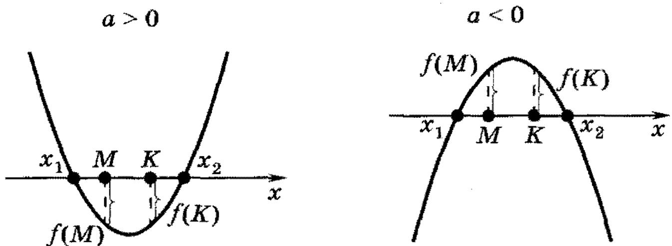


Рис. 118

Для того чтобы один корень квадратного трехчлена был меньше, чем M, а другой больше, чем K ($M < K$), т. е. отрезок MK целиком лежал *внутри интервала между корнями*, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись *условия*

$$\begin{cases} a \cdot f(M) < 0, \\ a \cdot f(K) < 0. \end{cases}$$

Заметим, что приведенные в теоремах 1—7 условия могут быть получены при использовании наглядного (графического) представления задачи, что и иллюстрируют данные рисунки.

2. Квадратные уравнения с параметром и к ним сводимые

2.1. Неполные квадратные уравнения с параметром

№ 1. Решите устно уравнения:

а) $(a^2 + 1)x^2 = 0$; ▶1а

б) $(|b| + 2)x^2 = 0$; ▶1б

в) $(a-1)x^2=0$; ▶1в

г) $(\sqrt{c}-1)x^2=0$; ▶1г

д) $\dfrac{x^2}{|b|-1}=0$; ▶1д

е) $(b^2-4)y^2=0$; ▶1е

ж) $x^2=-a^2+4a-4$; ▶1ж

з) $(y^2-a^4)/\sqrt{y}=0$; ▶1з

и) $ax^2=a^2$; ▶1и

к) $y^2+(a-3)^2=0$; ▶1к

л) $\sqrt{b}\cdot y(y-3)=0$; ▶1л

м) $y(y+2a-2)/(a-1)=0$. ▶1м

н) $x(x-2b)=0$. При каких значениях b число 4 расположено между корнями этого уравнения? ▶1н

о) $y(3a-y)=0$. При каких значениях a число $2a$ расположено между корнями данного уравнения? ▶1о

№ 2. Решите уравнение $x^2-a^2=0$.

<u>Решение.</u>

Установим ООУ: $\begin{cases} a\in \mathrm{R}, \\ x\in \mathrm{R}. \end{cases}$

$(x-a)(x+a)=0;\quad \left[\begin{array}{l} x-a=0, \\ x+a=0; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x_1=a, \\ x_2=-a. \end{array}\right.$

Выясним, существуют ли значения параметра a, при которых найденные корни совпадают:

$a=-a$, $2a=0$, $a=0$.

При $a=0$ $x_1=x_2=0$ (рис. 119).

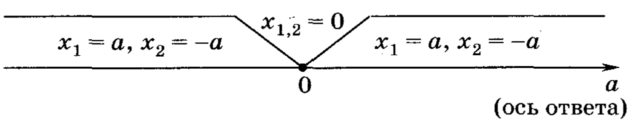


Рис. 119

Ответ. 1) Если $a = 0$, то $x_{1,2} = 0$.

2) Если $a \neq 0$, то $x_1 = a$, $x_2 = -a$.

Графическая иллюстрация ответа в системе координат (aOx) представлена на рисунке 120.

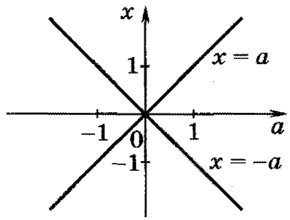


Рис. 120

Вопросы и задания по рисунку 120

1) Существуют ли такие значения параметра a, при которых данное уравнение имеет единственное решение?
2) Найдите корни уравнения, если $a = -1$, $a = 3 / 7$, $a = 5$.
3) При каких значениях a $x = 4$ — корень данного уравнения?

№ 3. Решите уравнение $y^2 - b^2 + 4 = 0$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} b \in R, \\ y \in R. \end{cases}$

$y^2 = b^2 - 4$.

1) Если $b^2 - 4 < 0$, т. е. $b \in (-2; 2)$, то уравнение не имеет действительных корней. (▶1)
2) Если $b^2 - 4 = 0$, т. е. $b = -2$ или $b = 2$, то уравнение примет вид $y^2 = 0$, откуда $y_{1,2} = 0$. (▶2)
3) Если $b^2 - 4 > 0$, т. е. $b \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$, то $y_1 = -\sqrt{b^2 - 4}$, $y_2 = \sqrt{b^2 - 4}$. (▶3)

Ответ запишите самостоятельно по рисунку 121.

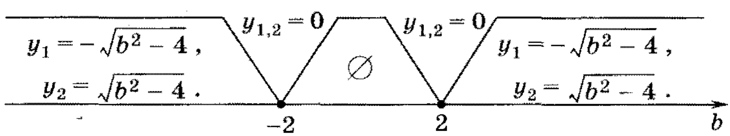


Рис. 121

№ 4. Решите уравнение $(c + 1)x^2 - 3c = 0$.

Решение (рис. 123).

ООУ: $\begin{cases} c \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

1) Если $c + 1 = 0$, т. е. $c = -1$, то уравнение примет вид $0 \cdot x^2 = -3$. Решений нет.

2) Если $c + 1 \neq 0$, т. е. $c \neq -1$, то $x^2 = 3c/(c + 1)$.

Рассмотрим три случая (рис. 122).

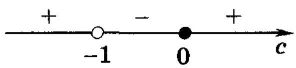


Рис. 122

а) $c = 0$; тогда $x^2 = 0$, $x_{1,2} = 0$;

б) $3c/(c + 1) > 0$, $c(c + 1) > 0$,
$c \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$;
тогда $x_1 = -\sqrt{3c/(c+1)}$, $x_2 = \sqrt{3c/(c+1)}$;

в) $3c/(c + 1) < 0$, $c \in (-1; 0)$. Уравнение не имеет действительных корней.

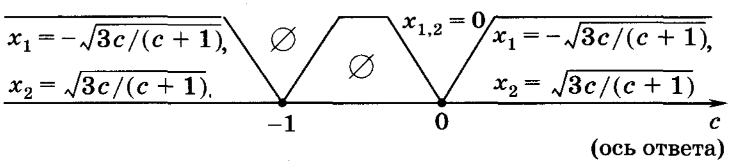


Рис. 123

Ответ. 1) Если $c \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$, то $x_1 = -\sqrt{3c/(c+1)}$, $x_2 = \sqrt{3c/(c+1)}$.

2) Если $c = 0$, то $x_{1,2} = 0$.

3) Если $c \in [-1; 0)$, то действительных корней нет.

№ 5. Решите уравнение $(m^2 - 9)y^2 - m^2 + 4m - 3 = 0$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} m \in \mathrm{R}, \\ y \in \mathrm{R}. \end{cases}$

$(m^2 - 9)y^2 = m^2 - 4m + 3,$

$(m - 3)(m + 3)y^2 = (m - 1)(m - 3).$

1) Если $m - 3 = 0$, т. е. $m = 3$, то уравнение примет вид $0 \cdot y^2 = 0$, откуда $y \in \mathrm{R}$. (▶1)
   Если $m + 3 = 0$, т. е. $m = -3$, то уравнение примет вид $0 \cdot y^2 = 24$. Решений нет. (▶2)

2) Пусть $m \neq -3$ и $m \neq 3$. Тогда $y^2 = (m - 1)/(m + 3)$. Рассмотрим три случая (рис. 124).

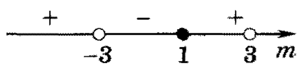


Рис. 124

а) Если $(m - 1)/(m + 3) = 0$, т. е. $m = 1$, то $y^2 = 0$, $y_{1,\,2} = 0$. (▶3)

б) Если $(m - 1)/(m + 3) > 0$, т. е. $m \in (-\infty; -3) \cup (1; 3) \cup (3; +\infty)$, то $y_1 = -\sqrt{(m-1)/(m+3)}$, $y_2 = \sqrt{(m-1)/(m+3)}$. (▶4)

в) Если $(m - 1)/(m + 3) < 0$, т. е. $m \in (-3; 1)$, то уравнение не имеет действительных корней. (▶5)

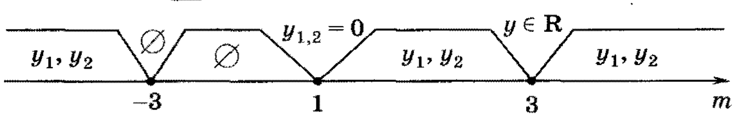


Рис. 125

Ответ запишите самостоятельно по рисунку 125.

№ 6. Решите уравнение $3x^2 + (a - 2)x = 0$.

<u>Решение</u> (рис. 126).

ООУ: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

$x(3x + a - 2) = 0;\quad \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ 3x + a - 2 = 0; \end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l} x_1 = 0, \\ x_2 = (2 - a)/3. \end{array}\right.$

Если $2 - a = 0$, т. е. $a = 2$, то $x_{1,2} = 0$.

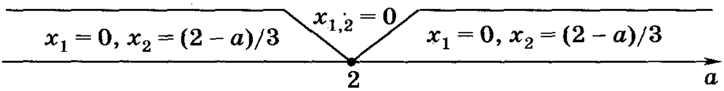


Рис. 126

Ответ. 1) Если $a = 2$, то $x_{1,2} = 0$.
2) Если $a \neq 2$, то $x_1 = 0$, $x_2 = (2 - a)/3$.

Проиллюстрируем полученные результаты графически (рис. 127).

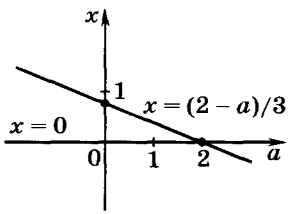


Рис. 127

№ 7. Решите уравнение $2x^2 + (4b^2 - 1)x = 0$.

Решение (рис. 128).

ООУ: $\begin{cases} b \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

$x(2x + 4b^2 - 1) = 0$; $\left[\begin{array}{l} x_1 = 0, \\ x_2 = (1 - 4b^2)/2. \end{array}\right.$

Если $1 - 4b^2 = 0$, т. е. $b = -1/2$ или $b = 1/2$, то $x_{1,2} = 0$.

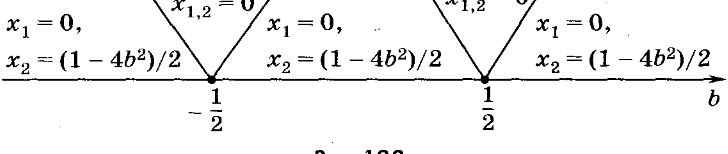


Рис. 128

Ответ. 1) Если $b = -1/2$ или $b = 1/2$, то $x_{1,2} = 0$.
2) Если $b \neq -1/2$ и $b \neq 1/2$, то $x_1 = 0$, $x_2 = (1 - 4b^2)/2$.

Графическая иллюстрация ответа в системе координат (bOx) приводится на рисунке 129.

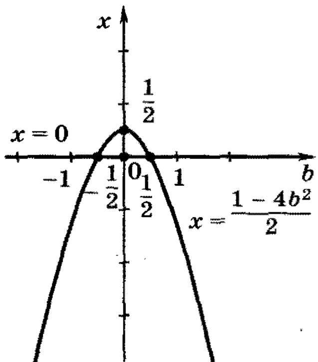


Рис. 129

Вопросы и задания по рисунку 129

1) При каких значениях b уравнение имеет отрицательные (положительные) корни?
2) Чему равен самый большой корень уравнения? При каком значении b он получается?
3) Укажите множество значений функции $x(b) = (1 - 4b^2)/2$.

№ 8. Решите уравнение $mx^2 + (m + 1)x = 0$.

Решение (рис. 130).

ООУ: $\begin{cases} m \in R, \\ x \in R. \end{cases}$

$x(mx + m + 1) = 0$; $\left[\begin{array}{l} x = 0, \\ mx = -m - 1. \end{array}\right.$

1) Если $m = 0$, то второе уравнение примет вид $0 \cdot x = -1$. Поэтому $x = 0$ — единственное решение совокупности при $m = 0$. ▸1
2) Если $m \neq 0$, то $x_1 = 0$, $x_2 = -(m + 1)/m$. ▸2
3) Если $m = -1$, то $x_{1,2} = 0$. ▸3

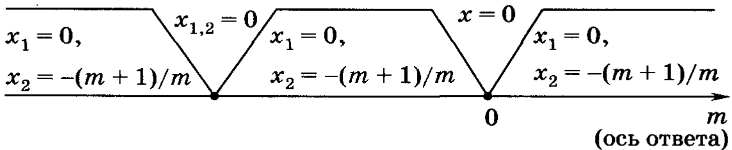


Рис. 130

Ответ. 1) Если $m = 0$, то $x = 0$.
2) Если $m \neq 0$, то $x_1 = 0$, $x_2 = -(m+1)/m$.
3) Если $m = -1$, то $x_{1,2} = 0$.

№ 9. Решите уравнение $(p-1)\,y\,(py-4) = 0$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} p \in \mathrm{R}, \\ y \in \mathrm{R}. \end{cases}$

1) Если $p = 1$, то $y \in \mathrm{R}$. (▶1)
2) Если $p \neq 1$, то $y(py-4) = 0$ и тогда $\left[\begin{array}{l} y = 0, \\ py = 4. \end{array}\right.$
   а) При $p = 0$ второе уравнение не имеет корней. Поэтому $y = 0$ — единственное решение совокупности. (▶2)
   б) При $p \neq 0$ $y_1 = 0$, $y_2 = 4/p$. (▶3)

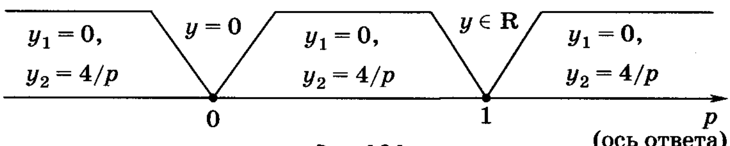


Рис. 131

Ответ запишите самостоятельно по рисунку 131.

Уравнения для самостоятельного решения

1) $8x^2 - a - 2 = 0$. (▶1)
2) $(10 - a)x^2 - 1 = 0$. (▶2)
3) $(m-1)x^2 - 2m + 1 = 0$. (▶3)
4) $4x^2 - 5bx = 0$. (▶4)
5) $(m+9)x^2 - mx - 3x = 0$. (▶5)
6) $x(ax + 2) = 0$. (▶6)
7) При каких значениях b число 2 расположено между корнями уравнения $x \cdot ((b-1)x - 3) = 0$? (▶7)

2.2. Приведенные квадратные уравнения с параметром

№ 1. Решите уравнение $x^2 + ax - 3 = 0$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

$\mathrm{D} = a^2 + 12$; $\mathrm{D} > 0$ при любых значениях $a \in \mathrm{R}$. Поэтому уравнение имеет два различных корня:

$x_{1,2} = (-a \pm \sqrt{a^2 + 12})/2$.

Ответ. При любых значениях $a \in \mathrm{R}$ уравнение имеет два различных корня

$x_{1,2} = (-a \pm \sqrt{a^2 + 12})/2$.

№ 2. Решите уравнение $x^2 - 2ax + a^2 - 4 = 0$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

$\mathrm{D}_1 = a^2 - (a^2 - 4) = 4$, $\mathrm{D}_1 > 0$ при любых значениях $a \in \mathrm{R}$; тогда $x_{1,2} = a \pm 2$.

Для иллюстрации ответа воспользуемся системой координат (aOx) (рис. 132).

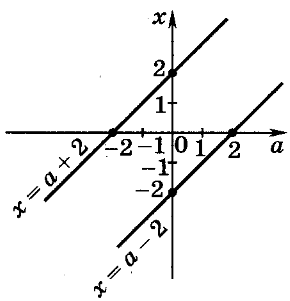


Рис. 132

Вопросы и задания по рисунку 132

1) Найдите корни уравнения, если $a = 0$; $a = 1$; $a = -2$; $a = 3$.

2) При каких значениях параметра a один из корней уравнения равен 2?
3) При каких значениях параметра a один из корней уравнения равен нулю?
4) При каком значении параметра a уравнение имеет корнями противоположные числа?
5) При каких значениях a оба корня уравнения — положительные (отрицательные) числа?
6) При каких значениях a уравнение имеет корни разных знаков?

№ 3. Решите уравнение $x^2 - 2ax + a^2 + 3 = 0$.

<u>Решение</u>.

ООУ: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

$\mathrm{D}_1 = a^2 - (a^2 + 3) = -3; -3 < 0$.

<u>Ответ</u>. Уравнение не имеет действительных корней.

№ 4. Решите уравнение $y^2 + 3my + 2m^2 = 0$.

<u>Решение</u> (рис. 133).

ООУ: $\begin{cases} m \in \mathrm{R}, \\ y \in \mathrm{R}. \end{cases}$

$\mathrm{D} = (3m)^2 - 4 \cdot 2m^2 = m^2$; $m^2 \geqslant 0$ при любых значениях $m \in \mathrm{R}$.

Рассмотрим два случая.

1) Пусть $\mathrm{D} = 0$, т. е. $m = 0$: $y_{1,2} = 0$.

2) Пусть $\mathrm{D} > 0$, т. е. $m \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Уравнение имеет два различных действительных корня:

$y_{1,2} = (-3m \pm m)/2$; $y_1 = -2m$, $y_2 = -m$.

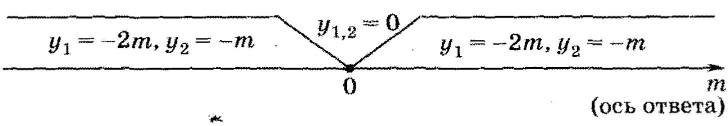


Рис. 133

<u>Ответ.</u> 1) Если $m = 0$, то $y_{1,2} = 0$.
2) Если $m \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$,
то $y_1 = -2m$, $y_2 = -m$.

Проиллюстрируем полученные результаты в системе координат (mOy) (рис.134).

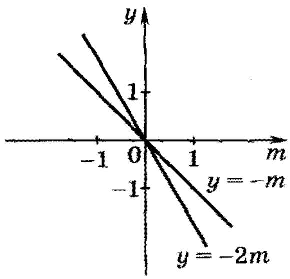


Рис. 134

<u>Вопросы и задания по рисунку 134</u>

1) Существуют ли такие значения параметра m, при которых уравнение не имеет действительных корней?
2) При каких значениях параметра m уравнение имеет единственное решение?
3) При каких значениях m уравнение имеет два различных действительных корня?
4) При каких m один из корней уравнения равен 2?
5) Верно ли, что при $m = 3$ уравнение имеет только корень $y = -3$?

№ 5. Решите уравнение $x^2 + 2bx + 5b^2 = 0$.

<u>Решение.</u>

ООУ: $\begin{cases} b \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

$D_1 = -4b^2$; $-4b^2 \leqslant 0$.

1) Если $b = 0$, то $D_1 = 0$; $x_{1,2} = 0$.
2) Если $b \neq 0$, то $D_1 < 0$. Уравнение не имеет действительных корней.

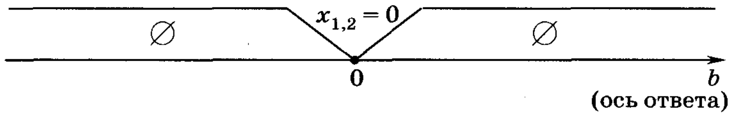


Рис. 135

Ответ запишите самостоятельно по рисунку 135.

№ 6. Решите уравнение $x^2 + mx + m^2 + 1 = 0$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} m \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

$\mathrm{D} = m^2 - 4(m^2 + 1) = -3m^2 - 4$; $-3m^2 - 4 < 0$ при любых значениях $m \in \mathrm{R}$.

Ответ. Уравнение не имеет действительных корней.

№ 7. Решите уравнение $y^2 - (a + 2)y + a^2 + 2 = 0$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ y \in \mathrm{R}. \end{cases}$

$\mathrm{D} = (a + 2)^2 - 4(a^2 + 2) = -3a^2 + 4a - 4$.

Дискриминант данного квадратного уравнения является квадратичной функцией параметра a:
$f(a) = -3a^2 + 4a - 4$.

Эта функция при любых значениях a принимает отрицательные значения. Поэтому $\mathrm{D} < 0$.

Ответ. Уравнение не имеет действительных корней.

№ 8. Решите уравнение $y^2 + by + 5y + b - 4 = 0$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} b \in \mathrm{R}, \\ y \in \mathrm{R}. \end{cases}$

Приведем данное уравнение к виду
$y^2 + (b + 5)y + b - 4 = 0$.
$\mathrm{D} = (b + 5)^2 - 4(b - 4) = b^2 + 6b + 41$.

Квадратичная функция $f(b) = b^2 + 6b + 41$ при любых значениях b принимает положительные значения. Поэтому $D > 0$.

Уравнение имеет два различных корня:

$y_{1,2} = (-(b+5) \pm \sqrt{b^2 + 6b + 41})/2$.

Ответ. При любых значениях параметра b уравнение имеет два различных корня

$y_{1,2} = (-(b+5) \pm \sqrt{b^2 + 6b + 41})/2$.

№ 9. Решите уравнение $x^2 - 2x - a = 0$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} a \in R, \\ x \in R. \end{cases}$

Для упрощения вычисления корней используем $D_1 = D/4$. $D_1 = 1 + a$.

Рассмотрим три случая.

1) $D_1 > 0$, т. е. $a > -1$; $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+a}$. ▶1
2) $D_1 = 0$, т. е. $a = -1$; $x_{1,2} = 1$. ▶2
3) $D_1 < 0$, т. е. $a < -1$. Уравнение не имеет действительных корней. ▶3

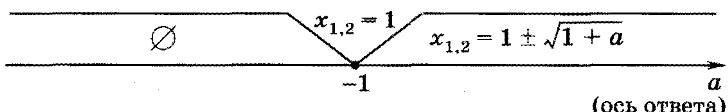


Рис. 136

Ответ запишите самостоятельно по рисунку 136.

Проиллюстрируем полученные результаты в системе координат (aOx) (рис. 137).

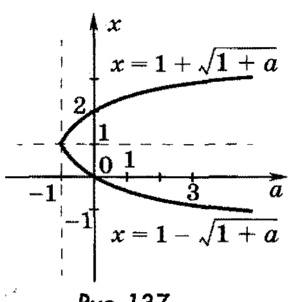


Рис. 137

Вопросы и задания по рисунку 137

При каких значениях параметра a:

1) уравнение имеет различные корни, принадлежащие отрезку $[-1; 3]$;
2) оба корня уравнения не принадлежат $[-1; 3]$;
3) разность между корнями превышает 6?

(Ответы. 1) $a \in (-1; 3]$; 2) $a \in (3; +\infty)$; 3) $a \in (8; +\infty)$.)

Решения.

1) Выделим на рисунке часть плоскости, содержащую все точки с ординатами из $[-1; 3]$ (рис. 138), а затем найдем соответствующие значения параметра: $a \in (-1; 3]$.

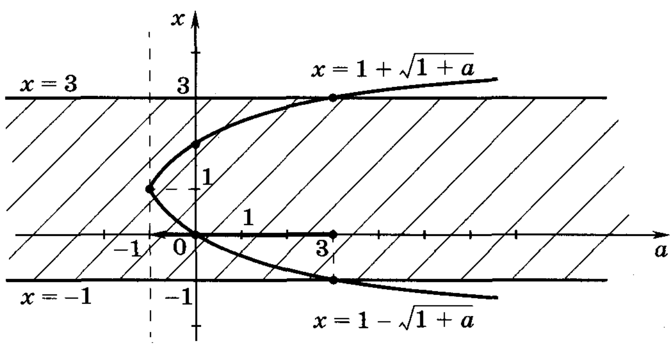


Рис. 138

2) Уравнение имеет два различных корня при $a > -1$.
Если $a \in (-1; 3]$, то оба корня принадлежат $[-1; 3]$. Поэтому $a \in (3; +\infty)$.

3) Очевидно, что $1 + \sqrt{1+a} > 1 - \sqrt{1+a}$ при всех $a > -1$. Так как разность между корнями превышает 6, то график функции $x = 1 + \sqrt{1+a}$ должен быть выше, чем график функции $x = 1 - \sqrt{1+a}$ на 6 единиц (рис. 139).

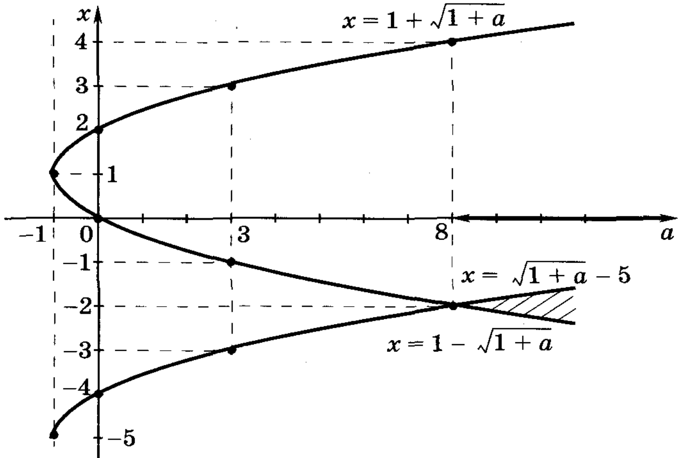


Рис. 139

Построим график функции $x = 1 + \sqrt{1+a} - 6$, т. е. $x = \sqrt{1+a} - 5$, и найдем абсциссу точки его пересечения с графиком функции $x = 1 - \sqrt{1+a}$; $a = 8$. Условию задачи удовлетворяют $a > 8$.

З а м е ч а н и е.
Ответить на данные вопросы можно, используя ось ответа.

№ 10. Решите уравнение $y^2 - ty + 2t = 0$.

Р е ш е н и е.

ООУ: $\begin{cases} t \in \mathrm{R}, \\ y \in \mathrm{R}. \end{cases}$

$\mathrm{D} = t^2 - 8t = t(t-8)$.

Рассмотрим три случая (рис. 140).

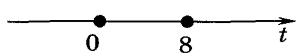


Рис. 140

1) $\mathrm{D} > 0$, т. е. $t(t-8) > 0$; $t \in (-\infty; 0) \cup (8; +\infty)$.

Тогда $y_{1,2} = (t \pm \sqrt{t^2 - 8t})/2$. ▶1

2) $D = 0$, т. е. $t = 0$ или $t = 8$; тогда $y_{1,2} = t/2$.
Если $t = 0$, то $y_{1,2} = 0$.
Если $t = 8$, то $y_{1,2} = 4$. ▶2

3) $D < 0$, т. е. $t \in (0; 8)$. Уравнение не имеет действительных корней. ▶3

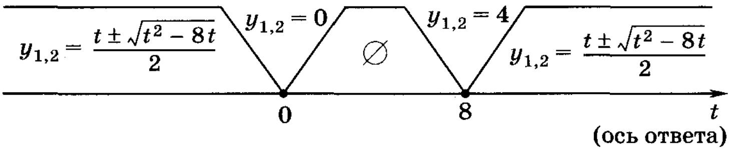


Рис. 141

Ответ запишите самостоятельно по рисунку 141.

№ 11. Решите уравнение $x^2 - m^2x + 1 = 0$.

Решение (рис. 143).

ООУ: $\begin{cases} m \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

$D = m^4 - 4 = (m - \sqrt{2})(m + \sqrt{2})(m^2 + 2)$.

Рассмотрим три случая (рис. 142).

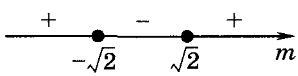


Рис. 142

1) $D > 0$, т. е. $(m - \sqrt{2})(m + \sqrt{2})(m^2 + 2) > 0$;
$m \in (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$. Тогда $x_1 = (m^2 + \sqrt{m^4 - 4})/2$; $x_2 = (m^2 - \sqrt{m^4 - 4})/2$. ▶1

2) $D = 0$, $m = \pm\sqrt{2}$; $x_{1,2} = 1$. ▶2

3) $D < 0$, $m \in (-\sqrt{2}; \sqrt{2})$. Уравнение не имеет действительных корней. ▶3

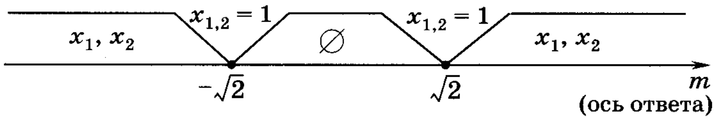


Рис. 143

Ответ. 1) Если $m \in (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$, то $x_{1,2} = (m^2 \pm \sqrt{m^4 - 4})/2$.

2) Если $m = \pm\sqrt{2}$, то $x_{1,2} = 1$.

3) Если $m \in (-\sqrt{2}; \sqrt{2})$, то уравнение не имеет действительных корней.

№ 12. Решите уравнение $x^2 + x - \sqrt{m} = 0$.

Решение (рис. 144).

ООУ: $\begin{cases} m \geqslant 0, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

$\mathrm{D} = 1 + 4\sqrt{m}$; $\mathrm{D} > 0$ при любом значении $m \geqslant 0$.

$x_{1,2} = (-1 \pm \sqrt{1 + 4\sqrt{m}})/2$. ▶1

Если $m = 0$, то $x_1 = -1$, $x_2 = 0$. ▶2

При $m < 0$ уравнение не имеет решений. ▶3

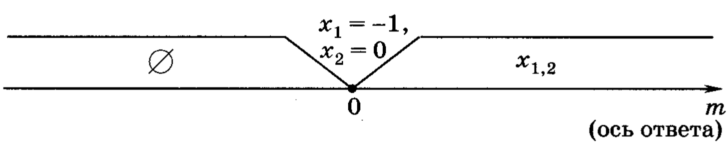


Рис. 144

Ответ. 1) Если $m \geqslant 0$,

то $x_{1,2} = (-1 \pm \sqrt{1 + 4\sqrt{m}})/2$.

2) Если $m < 0$, то уравнение не имеет действительных корней.

№ 13. Решите уравнение $y^2 - \sqrt{a}\,y + a - 1 = 0$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} a \geqslant 0, \\ y \in \mathrm{R}. \end{cases}$

$\mathrm{D} = a - 4(a - 1) = -3a + 4$.

1) $\mathrm{D} > 0$, $-3a + 4 > 0$, $a < 4/3$.
С учетом ООУ: $a \in [0; 4/3)$.
$y_{1,2} = (\sqrt{a} \pm \sqrt{4 - 3a})/2$. ▶1
Если $a = 0$, то $y_1 = 1$, $y_2 = -1$. ▶2

2) $\mathrm{D} = 0$, $a = 4/3$; $y_{1,2} = \sqrt{3}/3$. ▶3

3) $\mathrm{D} < 0$, $a > 4/3$. Уравнение не имеет действительных корней. ▶4
$a < 0$: действительных решений нет. ▶5

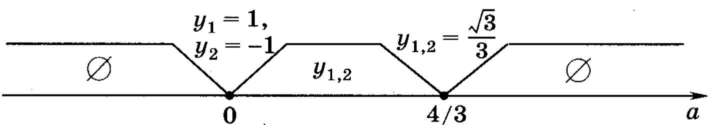


Рис. 145

Ответ «снимите» с координатной прямой параметра (рис. 145).

№ 14. Решите уравнение $x^2 + \sqrt{1 - 2a}\,x + a - 2 = 0$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} a \leqslant 1/2, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

$\mathrm{D} = 1 - 2a - 4(a - 2) = 9 - 6a$.

Оценим знак выражения $(9 - 6a)$ с учетом ООУ (рис. 146).

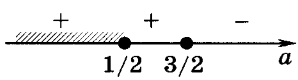


Рис. 146

Итак, если $a \leqslant 1/2$, то $D > 0$;

$x_{1,2} = (-\sqrt{1-2a} \pm \sqrt{9-6a})/2$.

Ответ. 1) Если $a \leqslant 1/2$, то

$x_{1,2} = (-\sqrt{1-2a} \pm \sqrt{9-6a})/2$.

2) Если $a > 1/2$, то уравнение не имеет действительных корней.

№ 15. Решите уравнение $y^2 - y/\sqrt{m} + m = 0$.

Решение (рис. 148).

ООУ: $\begin{cases} m > 0, \\ y \in \mathrm{R}. \end{cases}$

$D = 1/m - 4m = (1 - 4m^2)/m = (1 - 2m)(1 + 2m)/m$.

Рассмотрим три случая (рис. 147).

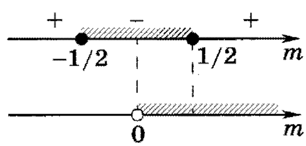


Рис. 147

1) $D > 0$: $\begin{cases} (1-2m)(1+2m)/m > 0, \\ m > 0; \end{cases}$

$\begin{cases} (2m-1)(2m+1) < 0, \\ m > 0. \end{cases}$

$m \in (0; 1/2)$. Тогда $y_1 = \dfrac{1 + \sqrt{1-4m^2}}{2\sqrt{m}}$;

$y_2 = \dfrac{1 - \sqrt{1-4m^2}}{2\sqrt{m}}$. (▶1)

2) $D = 0$, $m = 1/2$; $y_{1,2} = \sqrt{2}/2$. (▶2)

3) $D < 0$, $m > 1/2$. Уравнение не имеет действительных корней. (▶3)

В соответствии с ООУ при $m \leqslant 0$ уравнение также не имеет решений. ▶4

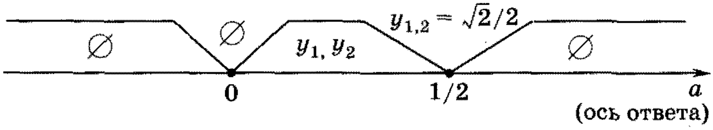


Рис. 148

<u>Ответ.</u> 1) Если $m \leqslant 0$ или $m > 1/2$, то уравнение не имеет действительных корней.

2) Если $m = 1/2$, то $y_{1,\,2} = \sqrt{2}\,/2$.

3) Если $m \in (0;\, 1/2)$,

то $y_{1,\,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 - 4m^2}}{2\sqrt{m}}$.

Уравнения для самостоятельного решения

1) $x^2 + (m+1)x - m^2 - 2 = 0.$ ▶1
2) $x^2 + 5ax + a^2 = 0.$ ▶2
3) $y^2 + 2(b+2)y + b^2 + 4b + 4 = 0.$ ▶3
4) $x^2 - 2ax + a^2 + 3 = 0.$ ▶4
5) $y^2 - (3m-1)y - m - 5 = 0.$ ▶5
6) $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 2m - 3 = 0.$ ▶6
7) $x^2 - 2x + 1 + a^2 = 0.$ ▶7
8) $x^2 - 4bx + 3b^2 - 4b - 4 = 0.$ ▶8
9) $x^2 - (3a-2)x + 2a^2 - a - 3 = 0.$ ▶9
10) $x^2 - bx - 2b = 0.$ ▶10
11) $x^2 - 2\sqrt{a}\,x + 2a = 0.$ ▶11
12) $x^2 + \sqrt{-m}\,x + 2m = 0.$ ▶12
13) $y^2 + \sqrt{n^2 - 4}\,y + n^2 = 0.$ ▶13
14) $x^2 - x/\sqrt{p} - 1 = 0.$ ▶14
15) $x^2 - 2x/\sqrt{1-t} + 3 = 0.$ ▶15

2.3. Квадратные уравнения с параметром

№ 1. Решите уравнение $3x^2 + 2bx - 16b^2 = 0$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} b \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

$D_1 = b^2 + 48b^2 = 49b^2$; $D_1 \geqslant 0$ для любого значения $b \in \mathrm{R}$.

1) $D_1 > 0$, $b \neq 0$; $x_{1,2} = (-b \pm 7b)/3$; $x_1 = -8b/3$; $x_2 = 2b$.

2) $D_1 = 0$, $b = 0$; $x_{1,2} = 0$.

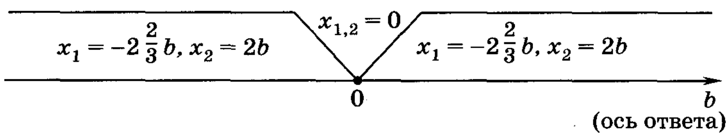


Рис. 149

Ответ запишите самостоятельно по рисунку 149.

№ 2. Решите уравнение $(m^2 + 1)y^2 + 2my - 1 = 0$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} m \in \mathrm{R}, \\ y \in \mathrm{R}. \end{cases}$

Так как $m^2 + 1 \neq 0$, то данное уравнение является уравнением второй степени.

$D_1 = m^2 + m^2 + 1 = 2m^2 + 1$; $D_1 > 0$ при любых значениях $m \in \mathrm{R}$.

$y_{1,2} = (-m \pm \sqrt{2m^2 + 1})/(m^2 + 1)$.

Ответ. При любых значениях параметра m уравнение имеет два различных действительных корня

$y_{1,2} = (-m \pm \sqrt{2m^2 + 1})/(m^2 + 1)$.

№ 3. Решите уравнение $(b^2 + 2)x^2 + 2\sqrt{3}\,x + b^2 = 0$.

Решение (рис. 151).

ООУ: $\begin{cases} b \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

Так как $b^2 + 2 \neq 0$, то данное уравнение является уравнением второй степени.

$D_1 = (\sqrt{3})^2 - b^2(b^2 + 2) = -b^4 - 2b^2 + 3 = -(b^2 - 1)(b^2 + 3) = (1 - b)(1 + b)(b^2 + 3)$.

Возможны три случая.

1) $D_1 > 0$; тогда $(1 - b)(1 + b)(b^2 + 3) > 0$.

Так как $b^2 + 3 > 0$, то данное неравенство равносильно следующему: $(b - 1)(b + 1) < 0$ (рис. 150). Тогда $b \in (-1; 1)$.

Рис. 150

В этом случае

$x_{1,2} = (-\sqrt{3} \pm \sqrt{-b^4 - 2b^2 + 3})/(b^2 + 2)$. ▶1

2) $D_1 = 0$, $b = \pm 1$; $x_{1,2} = -\sqrt{3}/3$. ▶2

3) $D_1 < 0$, $b \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$. ▶3

Уравнение не имеет действительных корней.

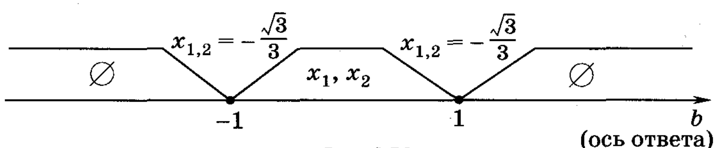


Рис. 151

<u>Ответ</u>. 1) Если $b \in (-1; 1)$, то $x_{1,2} = (-\sqrt{3} \pm \sqrt{-b^4 - 2b^2 + 3})/(b^2 + 2)$.

2) Если $b = \pm 1$, то $x_{1,2} = -\sqrt{3}/3$.

3) Если $b \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$, то уравнение не имеет действительных корней.

№ 4. Решите уравнение $bx^2 - 2x + 1 = 0$.

<u>Решение</u> (рис. 152).

ООУ: $\begin{cases} b \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

Так как $b \in \mathrm{R}$, то первый коэффициент, в частности, может быть равен нулю. Тогда уравнение станет линейным. Этот случай выделяется как особый.

1) Пусть $b = 0$. Тогда уравнение примет вид
   $-2x + 1 = 0.$
   Оно имеет единственный корень $x = 1/2$. ▶1
2) Пусть $b \neq 0$. Тогда уравнение становится уравнением второй степени.
   $D_1 = 1 - b.$

Рассмотрим три случая.

а) $D_1 > 0$, $b < 1$ $(b \neq 0)$; $x_1 = (1 + \sqrt{1-b})/b$;
   $x_2 = (1 - \sqrt{1-b})/b$. ▶2

б) $D_1 = 0$, $b = 1$; $x_{1,2} = 1$. ▶3

в) $D_1 < 0$, $b > 1$. Уравнение не имеет действительных корней. ▶4

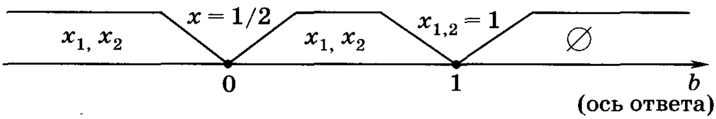


Рис. 152

<u>Ответ.</u> 1) Если $b = 0$, то $x = 1/2$.
2) Если $b = 1$, то $x_{1,2} = 1$.
3) Если $b \in (-\infty; 0) \cup (0; 1)$, то $x_{1,2} = (1 \pm \sqrt{1-b})/b$.
4) Если $b \in (1; +\infty)$, то уравнение не имеет действительных корней.

№ 5. Решите уравнение $mx^2 + 3mx - (m + 2) = 0$.

<u>Решение.</u>

ООУ: $\begin{cases} m \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

1) $m = 0$. Уравнение примет вид $0 \cdot x - 2 = 0$. Решений нет. ▶1
2) $m \neq 0$. Уравнение второй степени.
   $D = 9m^2 + 4m(m + 2) = 13m^2 + 8m = m(13m + 8).$

а) $D > 0$, $m(13m + 8) > 0$ (рис. 153).

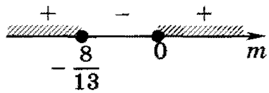


Рис. 153

$m \in (-\infty; -8/13) \cup (0; +\infty)$;

$$x_{1,2} = \frac{-3m \pm \sqrt{13m^2 + 8m}}{2m}.$$ ▶2

б) $D = 0$. Так как $m \neq 0$, то $m = -8/13$. Если $m = -8/13$, то $x_{1,2} = -3/2$. ▶3

в) $D < 0$, $m \in (-8/13; 0)$. Действительных корней нет. ▶4

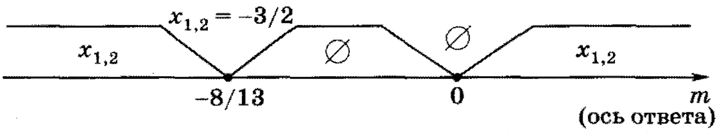


Рис. 154

Ответ запишите самостоятельно по рисунку 154.

№ 6. Решите уравнение $(n + 1)x^2 + 2nx + n = 0$.

Решение (рис. 155).

ООУ: $\begin{cases} n \in R, \\ x \in R. \end{cases}$

1) $n + 1 = 0$, $n = -1$; тогда $-2x - 1 = 0$; $x = -1/2$. ▶1
2) $n + 1 \neq 0$, $n \neq -1$. Тогда уравнение является уравнением второй степени.
   $D_1 = n^2 - n(n + 1) = -n$.

а) $D_1 > 0$, $n < 0$ $(n \neq -1)$; тогда

$x_{1,2} = (-n \pm \sqrt{-n})/(n + 1)$. ▶2

б) $D_1 = 0$, $n = 0$; $x_{1,2} = 0$. ▶3

в) $D_1 < 0$, $n > 0$. Действительных корней нет. ▶4

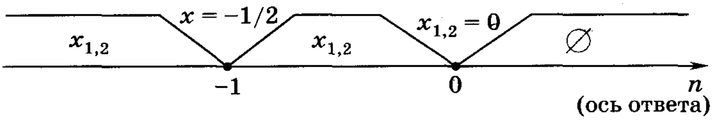


Рис. 155

Ответ. 1) Если $n \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0)$, то $x_{1,2} = (-n \pm \sqrt{-n})/(n+1)$.
2) Если $n = -1$, то $x = -1/2$.
3) Если $n = 0$, то $x_{1,2} = 0$.
4) Если $n > 0$, то уравнение не имеет действительных корней.

№ 7. Решите уравнение $(a+3)x^2 + (3a+2)x - 2a = 0$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

1) $a + 3 = 0$, $a = -3$; тогда $-7x + 6 = 0$; $x = 6/7$. ▶1

2) $a \neq -3$. Уравнение второй степени.

$D = (3a+2)^2 + 8a \cdot (a+3) = 17a^2 + 36a + 4$.

а) $D > 0$, $17a^2 + 36a + 4 > 0$,

$17(a+2)(a+2/17) > 0$ (рис. 156).

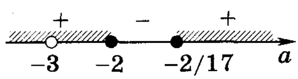


Рис. 156

$a \in (-\infty; -3) \cup (-3; -2) \cup (-2/17; +\infty)$. Тогда

$$x_{1,2} = \frac{-(3a+2) \pm \sqrt{17a^2 + 36a + 4}}{2(a+3)}.$$ ▶2

б) $D = 0$, $a = -2$ или $a = -2/17$; тогда

$$x_{1,2} = \frac{-(3a+2)}{2(a+3)}.$$

Если $a = -2$, то $x_{1,2} = 2$.

Если $a = -2/17$, то $x_{1,2} = -2/7$. ▶3 в) $D < 0$, $a \in (-2; -2/17)$. Действительных корней нет. ▶4

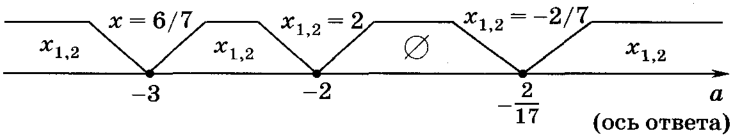


Рис. 157

Ответ запишите самостоятельно по рисунку 157.

№ 8. Решите уравнение $(a^2 - 4)y^2 + 2ay + 1 = 0$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ y \in \mathrm{R}. \end{cases}$

Преобразуем левую часть уравнения, выделив квадрат двучлена:

$a^2y^2 - 4y^2 + 2ay + 1 = 0,$
$(ay + 1)^2 - 4y^2 = 0,$
$(ay + 1 - 2y)(ay + 1 + 2y) = 0.$

Переходим к совокупности уравнений:

$\left[\begin{array}{l} (a - 2)y + 1 = 0, \\ (a + 2)y + 1 = 0. \end{array}\right.$

Решаем сначала каждое уравнение отдельно.

1) $(a - 2)y + 1 = 0$, $(a - 2)y = -1$.
   Если $a = 2$, то решений нет. ▶1
   Если $a \neq 2$, то $y_1 = 1/(2 - a)$. ▶2
2) $(a + 2)y + 1 = 0$, $(a + 2)y = -1$.
   Если $a = -2$, то решений нет. ▶3
   Если $a \neq -2$, то $y_2 = -1/(a + 2)$. ▶4

Теперь сводим решения на координатной прямой параметра a (рис. 158).

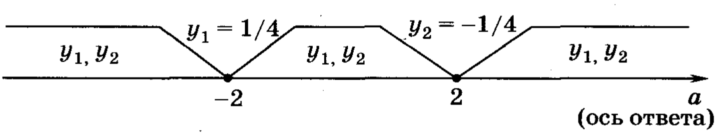


Рис. 158

Проиллюстрируем полученный результат в системе координат (aOy) (рис. 159).

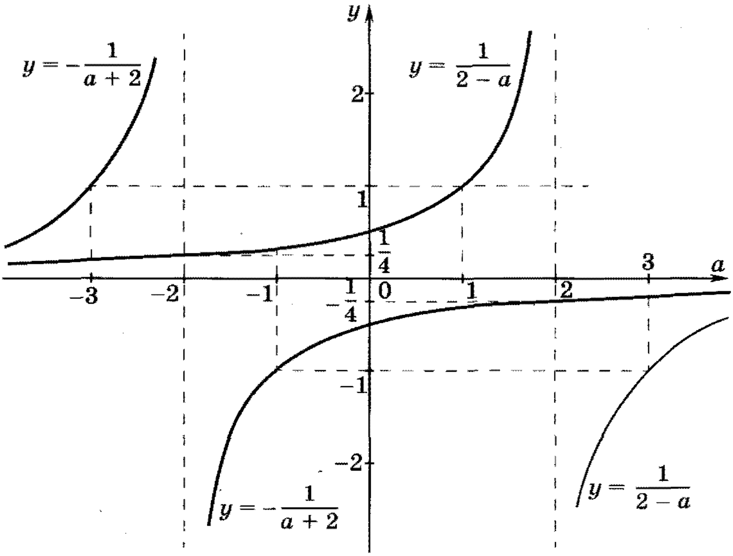


Рис. 159

Вопросы и задания по рисунку 159

1) При каких значениях параметра a уравнение имеет единственное решение?
2) При каких значениях параметра a уравнение имеет два различных действительных корня?
3) Найдите корни уравнения при $a = 0$, $a = 1$, $a = -3$.
4) Известно, что при некотором значении параметра a числа -1 и $1/3$ являются корнями данного уравнения. Найдите это значение параметра.
5) Известно, что один из корней данного уравнения равен 1. Найдите соответствующие значения параметра a.

№ 9. Решите уравнение $(kx + 2)(x - 3) = 0$.

Решение (рис. 160).

ООУ: $\begin{cases} k \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

$\left[\begin{array}{l} kx + 2 = 0, \\ x - 3 = 0; \end{array}\right.$ $\qquad$ $\left[\begin{array}{l} kx = -2, \\ x = 3. \end{array}\right.$

Если $k = 0$, то первое уравнение не имеет решений. Поэтому $x = 3$ — единственное решение совокупности при $k = 0$. ▶1

Если $k \neq 0$, то имеем

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1 = 3, \\ x_2 = -2/k, \end{array}\right. \\ k \neq 0. \end{cases}$$

Узнаем, при каких значениях k корни равны.

$-2/k = 3$, $k = -2/3$. Если $k = -2/3$, то $x_{1,\,2} = 3$. ▶2

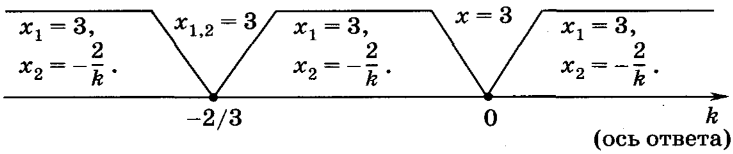


Рис. 160

Ответ. 1) Если $k = 0$, то $x = 3$.
2) Если $k = -2/3$, то $x_{1,\,2} = 3$.
3) Если $k \neq 0$ и $k \neq -2/3$, то $x_1 = 3$, $x_2 = -2/k$.

Замечание

Раскрыв скобки и упростив полученное выражение, мы получили бы уравнение $kx^2 + x(2 - 3k) - 6 = 0$, которое при $k = 0$ является линейным, а при $k \neq 0$ — второй степени.

Уравнения для самостоятельного решения

1) $2x^2 + 3ax - 4a^2 = 0$. ▶1
2) $(t^2 + 2)x^2 + 2tx + 1 = 0$. ▶2
3) $(n + 1)y^2 - 2y + 1 - n = 0$. ▶3
4) $bx^2 - (b + 1)x + 1 = 0$. ▶4
5) $(a + 3)x^2 + 6x + 2 = 0$. ▶5
6) $c(x + 1)(x - 2) = 0$. ▶6
7) $(ax - 5)(x - 4) = 0$. ▶7

2.4. Уравнения с дополнительными условиями

№ 1. При каких значениях параметра c уравнение $(c+1)x^2+x-1=0$ имеет единственное решение?

Решение.

ООУ: $\begin{cases} c \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

Достаточно рассмотреть два случая.

1) $c+1=0$, $c=-1$. Уравнение является линейным:
   $x-1=0$, $x=1$ — единственное решение.
2) $c \neq -1$. Уравнение второй степени.
   Потребуем выполнимость условия $\mathrm{D}=0$:
   $1+4(c+1)=0$, $c=-5/4$.

Ответ. $c=-1$ или $c=-5/4$.

№ 2. При каких значениях параметра b уравнение $bx^2-bx+2=0$ имеет единственное решение?

Решение.

ООУ: $\begin{cases} b \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

1) При $b=0$ уравнение примет вид $0 \cdot x+2=0$. Решений нет.
2) Пусть $b \neq 0$: $\mathrm{D}=b^2-8b$, $\mathrm{D}=0$. Так как $b \neq 0$, то $b=8$.

Ответ. $b=8$.

№ 3. При каких значениях параметра a уравнение $(a-2)x^2-2ax+a+1=0$ имеет более одного корня?

Решение.

ООУ: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

1) При $a=2$ получим уравнение $-4x+3=0$. Оно имеет единственный корень.
2) Пусть $a \neq 2$. $\mathrm{D}_1>0$;
   тогда $a^2-(a+1)(a-2)>0$,
   $a+2>0$, $a>-2$ (рис. 161).

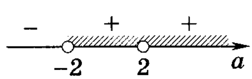


Рис. 161

Ответ. $a \in (-2; 2) \cup (2; +\infty)$.

№ 4. При каких значениях параметра a уравнение $a(a-2)x^2+(2a-4)x+3a-6=0$ имеет более одного решения?

Решение.

ООУ: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

1) При $a=0$ получаем уравнение $-4x-6=0$. Оно имеет единственное решение.
2) Пусть $a=2$: $0 \cdot x=0$; $x \in \mathrm{R}$.
3) Пусть $a \neq 0$ и $a \neq 2$.

Тогда $D_1=(a-2)^2-a(a-2) \cdot 3 \cdot (a-2)$,

$(a-2)^2(1-3a)>0$, $a<1/3$.

Ответ. $a \in (-\infty; 0) \cup (0; 1/3) \cup \{2\}$.

№ 5. Дано уравнение $(3+a)x^2-2ax+a+2=0$.

При каких значениях параметра a:

а) оно имеет два различных действительных корня;
б) имеет один корень;
в) не имеет действительных корней;
г) один из корней равен нулю;
д) оба корня равны нулю;
е) корни равны по модулю, но противоположны по знаку?

Решение.

а) $\begin{cases} 3+a \neq 0, \\ D_1>0; \end{cases}$ $\begin{cases} a \neq -3, \\ a^2-(3+a)(a+2)>0; \end{cases}$

$\begin{cases} a \neq -3, \\ 5a+6<0; \end{cases}$ $\begin{cases} a \neq -3, \\ a<-1{,}2. \end{cases}$

Ответ. $a \in (-\infty; -3) \cup (-3; -1{,}2)$.

б) При $a=-3$ уравнение $6x-1=0$ имеет единственное решение.

Пусть $a \neq -3$. Рассмотрим уравнение второй степени.

$\begin{cases} a \neq -3, \\ D_1=0; \end{cases}$ $\begin{cases} a \neq -3, \\ 5a+6=0; \end{cases}$

$a=-1{,}2$.

Ответ. $a=-3$ или $a=-1{,}2$.

в) $\begin{cases} a \neq -3, \\ D_1 < 0; \end{cases}$ $\begin{cases} a \neq -3, \\ -5a - 6 < 0; \end{cases}$ $\begin{cases} a \neq -3, \\ a > -1{,}2. \end{cases}$

$a > -1{,}2.$

Ответ. $a \in (-1{,}2; +\infty)$.

г) Уравнение должно иметь вид $Ax^2 + Bx = 0$, где $A \neq 0, B \neq 0$.

$\begin{cases} a + 2 = 0, \\ a \neq 0, a \neq -3. \end{cases}$

Ответ. $a = -2$.

д) Уравнение должно иметь вид $Ax^2 = 0$, где $A \neq 0$.

$\begin{cases} 2a = 0, \\ 3 + a \neq 0, \\ a + 2 = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} a = 0, \\ a \neq -3, \\ a = -2. \end{cases}$

Система не имеет решений.

Ответ. Таких значений параметра нет.

е) Уравнение должно иметь вид $Ax^2 + C = 0$, причем $A \neq 0$, $-C/A > 0$.

Из условия $B = 0$ следует, что $a = 0$.

Получим уравнение $3x^2 + 2 = 0$, которое не имеет действительных корней.

Ответ. Таких значений параметра нет.

№ 6. Найдите все значения параметра b, при которых:

а) точка пересечения графика функции

$y = x^2 - (b - 3)x + b - 1$

с осью ординат лежит выше оси абсцисс;

б) график данной функции касается оси абсцисс;

в) наименьшее значение функции равно -3.

Решение.

а) Как известно, график квадратичной функции $y = Ax^2 + Bx + C$ $(A \neq 0)$ пересекается с осью ординат в точке $(0; C)$. По условию $C = b - 1$. Поэтому $b - 1 > 0$, $b > 1$.

Ответ. $b > 1$.

б) $D = 0$: $(b-3)^2 - 4(b-1) = 0$, $b_{1,2} = 5 \pm 2\sqrt{3}$.

Ответ. $b_{1,2} = 5 \pm 2\sqrt{3}$.

в) Графиком данной квадратичной функции для каждого фиксированного $b \in \mathrm{R}$ является парабола, ветви которой направлены вверх. Наименьшее значение функция принимает при $x_0 = -\frac{B}{2A}$ (абсцисса вершины параболы). При этом $y_0 = -\frac{D}{4A}$ (ордината вершины параболы).

$y_0 = -3$; при этом $-\frac{b^2 - 10b + 13}{4} = -3$,

$b^2 - 10a + 13 = 12$,

$b^2 - 10b + 1 = 0$; $b_{1,2} = 5 \pm 2\sqrt{6}$.

Ответ. $b_{1,2} = 5 \pm 2\sqrt{6}$.

№ 7. При каких значениях параметра a уравнения $x^2 + (a+4)x + 2 = 0$ и $x^2 + x + a + 5 = 0$ имеют хотя бы один общий корень?

Решение.

Пусть x_1 — общий корень. Тогда получаем равенство

$x_1^2 + (a+4)x_1 + 2 = x_1^2 + x_1 + a + 5$; $(a+3)x_1 = a + 3$.

1) При $a = -3$ уравнения не имеют действительных корней (оба уравнения примут вид $x^2 + x + 2 = 0$).
2) Пусть $a \neq -3$. Тогда $x_1 = 1$. Из первого уравнения получим $1 + a + 4 + 2 = 0$. Откуда $a = -7$.

Ответ. $a = -7$.

№ 8. При каких значениях параметра a уравнения $x^2 + (a+4)x + a^2 - 16 = 0$ (1) и $x^2 + 2(a-8)x + a^2 - 6 = 0$ (2) равносильны?

Решение.

Рассмотрим сначала уравнение (1):

$D = (a+4)^2 - 4a^2 + 64 = -3a^2 + 8a + 80.$

1) Если $D < 0$, т. е. $a \in (-\infty; -4) \cup (20/3, +\infty)$, то уравнение не имеет действительных корней. ▶1

2) Пусть $D = 0$:

а) $a = -4$; $x_{1,2} = 0$;

б) $a = 20/3$; $x_{1,2} = -16/3$. ▶2

3) Если $D > 0$, т. е. $a \in (-4; 20/3)$, то уравнение имеет два различных действительных корня:

$$x_{1,2} = \frac{-a - 4 \pm \sqrt{-3a^2 + 8a + 80}}{2}.$$ ▶3

Теперь рассмотрим уравнение (2).

Обозначим D_1 — дискриминант уравнения (2) и рассмотрим три случая:

$$D_1 = (a-8)^2 - a + 6 = a^2 - 17a + 70.$$

1) $D_1 < 0$; $7 < a < 10$. Действительных решений нет. ▶4

2) $D_1 = 0$;

а) $a = 7$; $x_{3,4} = 1$;

б) $a = 10$; $x_{3,4} = -2$. ▶5

3) $D_1 > 0$; $a \in (-\infty; 7) \cup (10; +\infty)$,

$$x_{3,4} = 8 - a \pm \sqrt{a^2 - 17a + 70}.$$ ▶6

Нанесем результаты на оси параметра a (рис. 162).

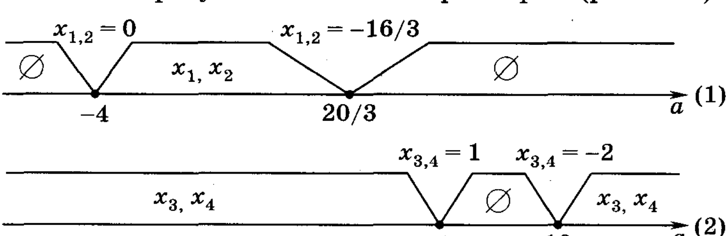


Рис. 162

Анализ рисунка 162 показывает, что при $a \in (7; 10)$ уравнения равносильны, так как оба не имеют корней.

Если уравнения равносильны при некоторых значениях $a \in [-4;\ 20/3]$, то должна быть совместна система уравнений

$$\begin{cases} a + 4 = 2(a - 8), \\ a^2 - 16 = a - 6. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы получаем $a = 20$, но это число не удовлетворяет второму уравнению.

Ответ. $a \in (7;\ 10)$.

Решение целого ряда задач основано на теоремах Виета. Рассмотрим некоторые из них.

№ 9. При каких значениях параметра a уравнение

$(a - 2)x^2 - 2(a + 2)x + a + 1 = 0$ имеет:

а) два различных действительных корня разных знаков;

б) два различных действительных положительных корня;

в) два различных действительных отрицательных корня?

Решение.

Заметим, что теоремы Виета используют в случае $D \geqslant 0$. Так как по условию корни должны быть различными, то $D > 0$. Кроме того, $a \neq 2$ (иначе уравнение будет линейным).

а) $\begin{cases} D_1 > 0, \\ x_1 \cdot x_2 < 0; \end{cases}$ $\begin{cases} (a + 2)^2 - (a - 2)(a + 1) > 0, \\ (a + 1)/(a - 2) < 0; \end{cases}$

$\begin{cases} 5a + 6 > 0, \\ (a + 1)(a - 2) < 0; \end{cases}$ $\begin{cases} a > -1{,}2, \\ (a + 1)(a - 2) < 0; \end{cases}$

$a \in (-1;\ 2)$ (рис. 163).

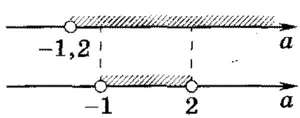


Рис. 163

Ответ. $a \in (-1;\ 2)$.

б) $\begin{cases} D_1 > 0, \\ x_1 + x_2 > 0, \\ x_1 \cdot x_2 > 0; \end{cases}$

$\begin{cases} 5a + 6 > 0, \\ (2(a+2)/(a-2) > 0, \\ (a+1)/(a-2) > 0; \end{cases}$

$\begin{cases} a > -1{,}2, \\ (a+2)(a-2) > 0, \\ (a+1)(a-2) > 0; \end{cases}$ $a \in (2; +\infty)$ (рис. 164).

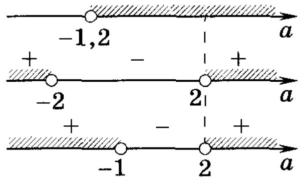


Рис. 164

<u>Ответ</u>. $a \in (2; +\infty)$.

в) $\begin{cases} D_1 > 0, \\ x_1 + x_2 < 0, \\ x_1 \cdot x_2 > 0; \end{cases}$

$\begin{cases} 5a + 6 > 0, \\ \dfrac{2(a+2)}{a-2} < 0, \\ (a+1)/(a-2) > 0; \end{cases}$

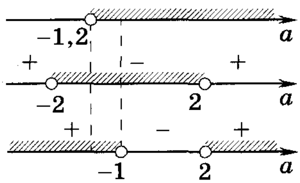


Рис. 165

$\begin{cases} a > -1{,}2, \\ (a+2)(a-2) < 0, \\ (a+1)(a-2) > 0. \end{cases}$ $a \in (-1{,}2; -1)$ (рис. 165).

<u>Ответ</u>. $a \in (-1{,}2; -1)$.

№ 10. При каких значениях параметра a сумма квадратов корней уравнения $x^2 - 6x + a = 0$ равна 6?

<u>Решение</u>.

$\begin{cases} D_1 \geqslant 0, \\ x_1^2 + x_2^2 = 6. \end{cases}$ $\begin{cases} 9 - a \geqslant 0, \\ (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 = 6. \end{cases}$

По теореме Виета $x_1 + x_2 = 6$, $x_1 \cdot x_2 = a$.

$\begin{cases} a \leqslant 9, \\ 36 - 2a = 6; \end{cases}$ $\begin{cases} a \leqslant 9, \\ a = 15. \end{cases}$

Решений нет.

<u>Ответ</u>. Таких значений параметра нет.

<u>*Замечание*</u>

Часто забывают о необходимости учета условия $D_1 \geqslant 0$, получая ответ $a = 15$. Это одна из типичных ошибок, встречающихся при решении задач на теоремы Виета.

№ 11. При каком значении параметра a сумма квадратов корней уравнения $x^2 + x \cdot \sqrt{a^2 - 4a} - a - 2 = 0$ принимает наименьшее значение?

Решение.

ООУ: $\begin{cases} a^2 - 4a \geqslant 0, \\ x \in \mathbb{R}; \end{cases}$ $\begin{cases} a \in (-\infty; 0] \cup [4; +\infty), \\ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$

$D = a^2 + 8$, $x_1 + x_2 = -\sqrt{a^2 - 4a}$; $x_1 \cdot x_2 = -a - 2$.

Тогда $x_1^2 + x_2^2 = (-\sqrt{a^2 - 4a})^2 - 2 \cdot (-a - 2)$;

$x_1^2 + x_2^2 = a^2 - 2a + 4$.

Найдем наименьшее значение функции
$f(a) = a^2 - 2a + 4$ на множестве $(-\infty; 0] \cup [4; +\infty)$.
$(1; 3)$ — координаты вершины параболы.
При $a \geqslant 1$ функция возрастает, при $a \leqslant 1$ — убывает.
Если $a \in [4; +\infty)$, то $f(a) \geqslant f(4)$. Так как $f(4) = 12$, то $f(a) \geqslant 12$.
Если $a \in (-\infty; 0]$, то $f(a) \geqslant f(0)$. Так как $f(0) = 4$, то $f(a) \geqslant 4$.

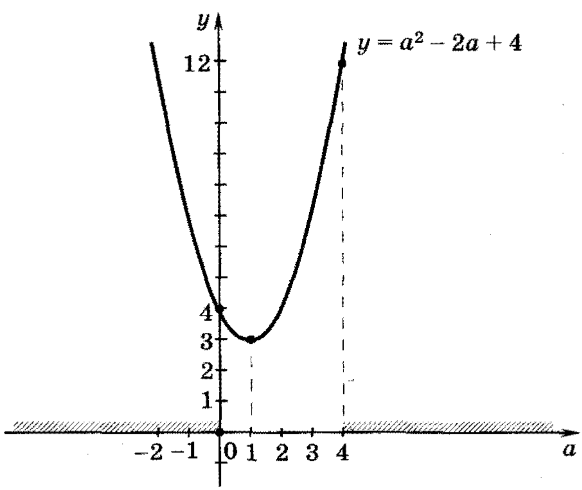


Рис. 166

Наименьшее значение функции равно 4. При этом $a = 0$ (рис. 166).

<u>Ответ</u>. $a = 0$.

№ 12. При каких значениях параметра a сумма корней квадратного уравнения $(3 - a)x^2 - 2ax + 4 = 0$ больше 1, а произведение корней меньше 8?

<u>Решение</u>.

$$\begin{cases} a \neq 3, \\ D_1 \geqslant 0, \\ x_1 + x_2 > 1, \\ x_1 \cdot x_2 < 8; \end{cases} \quad \begin{cases} a^2 + 4a - 12 \geqslant 0, \\ \dfrac{2a}{3 - a} > 1, \\ \dfrac{4}{3 - a} < 8; \end{cases} \quad \begin{cases} a^2 + 4a - 12 \geqslant 0, \\ \dfrac{3a - 3}{3 - a} > 0, \\ \dfrac{2a - 5}{3 - a} < 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a + 6)(a - 2) \geqslant 0, \\ (a - 1)(a - 3) < 0, \\ (a - 2{,}5)(a - 3) > 0. \end{cases}$$

$a \in [2; 2{,}5)$ (рис. 167).

<u>Ответ</u>. $a \in [2; 2{,}5)$.

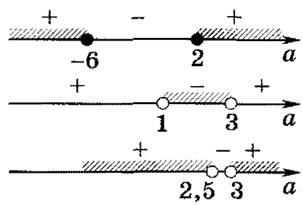


Рис. 167

№ 13. Известно, что корни уравнения $x^2 - x + a = 0$ в три раза меньше корней уравнения $x^2 - 4x + 5 - a = 0$. Найдите значение параметра a.

<u>Решение</u>.

Сначала попытаемся найти такие значения параметра a, при которых оба уравнения имеют решения одновременно:

$$\begin{cases} 1 - 4a \geqslant 0, \\ 4 - 5 + a \geqslant 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} a \leqslant 1/4. \\ a \geqslant 1. \end{cases}$$

Система несовместна.

<u>Ответ</u>. Такого значения параметра нет.

№ 14. При каком значении параметра b корни уравнения $x^2 - (b + 7)x + b + 13 = 0$ в два раза больше корней уравнения $x^2 + (1 - 2b)x + b^2 - b - 2 = 0$?

Решение.

Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + (1 - 2b)x + b^2 - b - 2 = 0$. Тогда по теореме Виета $x_1 + x_2 = 2b - 1$, $x_1 \cdot x_2 = b^2 - b - 2$.

По условию задачи $2x_1$ и $2x_2$ — корни уравнения $x^2 - (b + 7)x + b + 13 = 0$.

По теореме Виета $2x_1 + 2x_2 = b + 7$,

$2x_1 \cdot 2x_2 = b + 13$.

Составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2(2b - 1) = b + 7, \\ 4(b^2 - b - 2) = b + 13; \end{cases} \qquad \begin{cases} b = 3, \\ \left[\begin{array}{l} b = 3, \\ b = -7/4; \end{array}\right. \end{cases} \qquad b = 3.$$

В ходе решения не учитывалось условие $D \geqslant 0$ для каждого из квадратных уравнений. Поэтому сделаем проверку. При $b = 3$ получим уравнение $x^2 - 10x + 16 = 0$ (его корни 8 и 2) и $x^2 - 5x + 4 = 0$ (1 и 4 — корни данного уравнения). Значит, $b = 3$ удовлетворяет условию задачи.

Ответ. $b = 3$.

№ 15. При каких действительных значениях параметра a корни уравнения $x^2 + ax + 1 = 0$ таковы, что $x_1^4 + x_2^4 > 1$?

Решение.

$D = a^2 - 4$; $a^2 - 4 \geqslant 0$, $a \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.

$x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2 \cdot x_2^2 =$

$= ((x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2)^2 - 2(x_1 \cdot x_2)^2$.

По теореме Виета $x_1 + x_2 = -a$, $x_1 \cdot x_2 = 1$.

Составим и решим неравенство:

$(a^2 - 2)^2 - 2 > 1$; $(a^2 - 2)^2 - 3 > 0$.

Если $a^2 - 4 \geqslant 0$, то $a^2 - 2 \geqslant 2$;

$(a^2 - 2)^2 \geqslant 4$;

$(a^2 - 2)^2 - 3 > 0$.

Ответ. $a \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.

Ниже приводятся задачи, решение которых основано на теоремах о расположении корней квадратного трехчлена (см. Теоремы. 1—7, II.1.3.).

№ 16. Дано квадратное уравнение

$$x^2 - (2a - 1)x + 1 - a = 0.$$

При каких значениях параметра a:

а) оно имеет два различных действительных положительных корня;

б) два различных действительных отрицательных корня;

в) действительные корни разных знаков;

г) действительные корни, меньшие 1;

д) действительные корни, большие 2;

е) один из действительных корней меньше 3, а другой больше 3;

ж) корни действительны и заключены между –1 и 1;

з) больший действительный корень лежит в интервале (–2; 2);

и) меньший действительный корень лежит в интервале (1; 2);

к) один действительный корень меньше 1, а другой больше 3?

Решение.

а) На вопросы **а—в** можно ответить, используя теорему Виета. Однако во многих случаях решение упрощается, если использовать теоремы о расположении корней квадратного трехчлена. Пусть $f(x) = x^2 - (2a - 1)x + 1 - a$. По условию $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, т. е. $M = 0$; ветви параболы направлены вверх, так как коэффициент при x^2 равен 1. Тогда по теореме 2 имеем:

$$\begin{cases} (2a-1)^2 - 4(1-a) > 0, \\ (2a-1)/2 > 0, \\ 1 - a > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 4a^2 - 3 > 0, \\ a > 1/2, \\ a < 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a > \sqrt{3}/2, \\ a < -\sqrt{3}/2, \end{array}\right. \\ 1/2 < a < 1. \end{cases}$$

$a \in (\sqrt{3}/2;\ 1)$ (рис. 168).

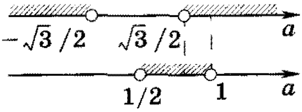


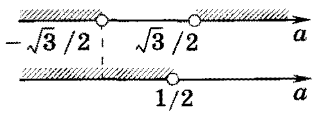
Рис. 168

<u>Ответ</u>. $a \in (\sqrt{3}/2;\ 1)$.

б) $K = 0$, коэффициент при x^2 равен 1. Применим теорему 1:

$$\begin{cases} 4a^2 - 3 > 0, \\ (2a-1)/2 < 0, \\ 1 - a > 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a > \sqrt{3}/2, \\ a < -\sqrt{3}/2, \end{array}\right. \\ a < 1/2, \\ a < 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a > \sqrt{3}/2, \\ a < -\sqrt{3}/2, \end{array}\right. \\ a < 1/2; \end{cases}$$



$a \in (-\infty;\ -\sqrt{3}/2)$ (рис. 169).

Рис. 169

<u>Ответ</u>. $a \in (-\infty;\ -\sqrt{3}/2)$.

в) $K = 0$.

Из условия $f(0) < 0$ получим $a > 1$; $a \in (1;\ +\infty)$.

<u>Ответ</u>. $a \in (1;\ +\infty)$.

г) $K = 1$.

$$\begin{cases} 4a^2 - 3 \geqslant 0, \\ (2a-1)/2 < 1, \\ 3 - 3a > 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a \geqslant \sqrt{3}/2, \\ a \leqslant -\sqrt{3}/2, \end{array}\right. \\ a < 3/2, \\ a < 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a \geqslant \sqrt{3}/2, \\ a \leqslant -\sqrt{3}/2, \end{array}\right. \\ a < 1; \end{cases}$$

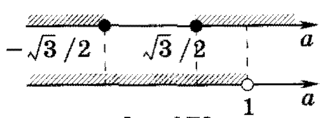


Рис. 170

$a \in (-\infty;\ -\sqrt{3}/2] \cup [\sqrt{3}/2;\ 1)$ (рис. 170).

<u>Ответ</u>. $a \in (-\infty;\ -\sqrt{3}/2] \cup [\sqrt{3}/2;\ 1)$.

д) $M = 2$.

$$\begin{cases} 4a^2 - 3 \geqslant 0, \\ (2a-1)/2 > 2, \\ 7 - 5a > 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a \geqslant \sqrt{3}/2, \\ a \leqslant -\sqrt{3}/2, \end{array}\right. \\ a > 2{,}5, \\ a < 1{,}4. \end{cases}$$

Система не имеет решений. Поэтому таких значений параметра нет.

Ответ. Таких значений параметра нет.

е) $K = 3$: $f(3) < 0$, $13 - 7a < 0$, $a > 13/7$, $a \in (13/7; +\infty)$.

Ответ. $a \in (13/7; +\infty)$.

ж) $M = -1$, $K = 1$ (теорема 4).

$$\begin{cases} 4a^2 - 3 \geqslant 0, \\ a + 1 > 0, \\ 3 - 3a > 0, \\ -1 < (2a-1)/2 < 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a \geqslant \sqrt{3}/2, \\ a \leqslant -\sqrt{3}/2, \end{array}\right. \\ a > -1, \\ a < 1, \\ -1/2 < a < 3/2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a \geqslant \sqrt{3}/2, \\ a \leqslant -\sqrt{3}/2, \end{array}\right. \\ -1/2 < a < 1. \end{cases}$$

$a \in [\sqrt{3}/2; 1)$ (рис. 171).

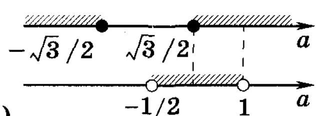


Рис. 171

Ответ. $a \in [\sqrt{3}/2; 1)$.

з) $M = -2$, $K = 2$ (теорема 5).

$$\begin{cases} 3a + 3 < 0, \\ 7 - 5a > 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} a < -1, \\ a < 1{,}4; \end{cases} \qquad a < -1.$$

Ответ. $a \in (-\infty; -1)$.

и) $M = 1$, $K = 2$ (теорема 6).

$$\begin{cases} f(1) > 0, \\ f(2) < 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} 3 - 3a > 0, \\ 7 - 5a < 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} a < 1, \\ a > 1{,}4. \end{cases}$$

Ответ. Таких значений параметра нет.

к) $M = 1$, $K = 3$ (теорема 7).

$\begin{cases} f((3) < 0, \\ f(1) < 0; \end{cases}$ $\begin{cases} 13 - 7a < 0, \\ 3 - 3a < 0; \end{cases}$ $\begin{cases} a > 13/7, \\ a > 1; \end{cases}$

$a \in (13/7; +\infty)$.

Ответ. $a \in (13/7; +\infty)$.

№ 17. Найдите все значения параметра b, при которых действительные корни уравнения $x^2 - bx + 4b = 0$ имеют разные знаки и каждый по модулю меньше 2.

Решение.

Пусть $x_1 < x_2$. По условию $|x_1| < 2$, $|x_2| < 2$, т. е. $x_1 \in (-2; 2)$, $x_2 \in (-2; 2)$. Так как x_1 и x_2 имеют разные знаки, то $x_1 \in (-2; 0)$, $x_2 \in (0; 2)$ ($x_1 = x_2 = 0$ не удовлетворяют условию задачи).

По теореме 6 о расположении корней квадратного трехчлена для $x_1 \in (-2; 0)$ должны выполняться условия: $\begin{cases} f(-2) > 0, \\ f(0) < 0, \end{cases}$ где $f(x) = x^2 - \mathrm{b}x + 4b$.

Для $x_2 \in (0; 2)$ по теореме 5: $\begin{cases} f(0) < 0, \\ f(2) > 0. \end{cases}$

Составим и решим систему неравенств:

$\begin{cases} f(-2) > 0, \\ f(0) < 0, \\ f(2) > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} 4 + 2b + 4b > 0, \\ 4b < 0, \\ 4 - 2b + 4b > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} b > -2/3, \\ b < 0, \\ b > -2; \end{cases}$

$b \in (-2/3; 0)$.

Ответ. $b \in (-2/3; 0)$.

№ 18. При каких значениях параметра c уравнение $cx^2 + 8x + 1 = 0$ имеет действительные корни, заключенные между -2 и 2?

Решение.

1) Если $c = 0$, то $x = -1/8$; $-1/8 \in (-2; 2)$.

2) Пусть $c \neq 0$. Уравнение второй степени.
$D_1 = 16 - c$. Пусть $f(x) = cx^2 + 8x + 1$, $c \neq 0$. По теореме 4 имеем:

$$\begin{cases} c \neq 0, \\ 16 - c \geqslant 0, \\ c \cdot f(-2) > 0, \\ c \cdot f(2) > 0, \\ -2 < -8/(2c) < 2; \end{cases} \qquad \begin{cases} c \neq 0, \\ c \leqslant 16, \\ c \cdot (4c - 15) > 0, \\ c \cdot (4c + 17) > 0, \\ 2/c > -1, \\ 2/c < 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} c \neq 0, \\ c \leqslant 16, \\ c \cdot (c - 15/4) > 0, \ (\text{рис. } 172) \\ c \cdot (c + 17/4) > 0, \\ c(c + 2) > 0, \\ c(c - 2) > 0. \end{cases}$$

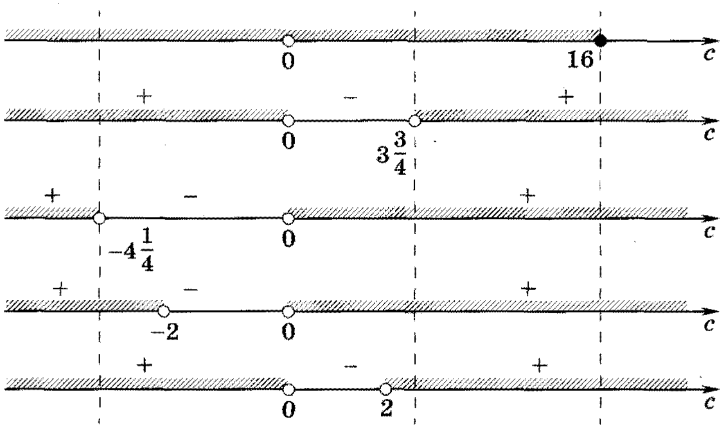


Рис. 172

Ответ. $c \in (-\infty; -17/4) \cup \{0\} \cup (15/4; 16]$.

№ 19. Найдите все действительные значения c, при которых корни уравнения $x^2 + x + c = 0$ будут действительны и оба корня больше c.

Решение.

По теореме Виета: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -1, \\ x_1 \cdot x_2 = c. \end{cases}$

Так как $x_1 + x_2 < 0$, то оба корня не могут быть положительными.

Пусть $x_1 < 0$, $x_2 < 0$. Тогда $x_1 \cdot x_2 > 0$, т. е. $c > 0$.

Но $x_1 > c$, $x_2 > c$ по условию задачи. Получим противоречие. Значит, оба корня не могут быть отрицательными.

Итак, либо корни имеют разные знаки, либо один из них равен нулю.

В первом случае $x_1 \cdot x_2 < 0$, т. е. $c < 0$; $D = 1 - 4c$.

Пусть $f(x) = x^2 + x + c$.

По теореме 2 о расположении корней квадратного трехчлена имеем систему неравенств:

$$\begin{cases} c < 0, \\ 1 - 4c > 0, \\ -1/2 > c, \\ c^2 + 2c > 0. \end{cases} \quad \begin{cases} c < 0, \\ c < 1/4, \\ c < -1/2, \\ c(c+2) > 0. \end{cases} \quad \begin{cases} c < -1/2, \\ \left[\begin{array}{l} c > 0, \\ c < -2 \end{array}\right. \end{cases} \text{(рис. 173).}$$

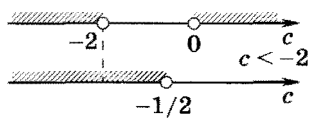


Рис. 173

Ответ. $c \in (-\infty; -2)$.

№ 20. Найдите все значения параметра a, при которых один действительный корень уравнения $(a - 5)x^2 + 2ax + a - 3 = 0$ больше 3, а другой меньше 1.

Решение.

Так как уравнение имеет два корня, то $a \neq 5$.

Пусть $f(x) = (a - 5)x^2 + 2ax + a - 3$, $a \neq 5$; $x_1 < x_2$.

По условию $x_1 < 1$, $x_2 > 3$ (рис. 174).

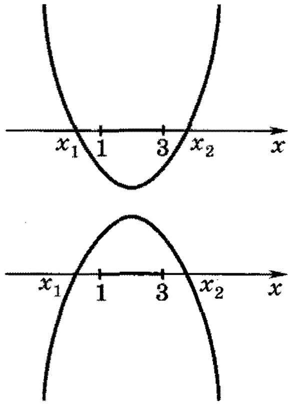


Рис. 174

По теореме 7: $\begin{cases}(a-5)f(1)<0,\\(a-5)f(3)<0;\end{cases}$

$\begin{cases}(a-5)(a-5+2a+a-3)<0,\\(a-5)(9a-45+6a+a-3)<0;\end{cases}$

$\begin{cases}(a-5)(a-2)<0,\\(a-5)(a-3)<0\end{cases}$ (рис. 175).

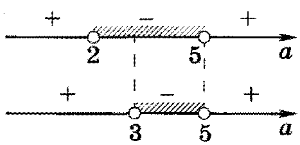


Рис. 175

<u>Ответ.</u> $a \in (3; 5)$.

Упражнения для самостоятельного решения

1) Дано уравнение $ax^2 - 5x + 5 = 0$. При каких значениях параметра a данное уравнение:
   а) имеет единственный действительный корень; (▶1а)
   б) не имеет решений; (▶1б)
   в) имеет два различных действительных корня; (▶1в)

г) имеет один из действительных корней, равный нулю; ▶1г

д) имеет два корня, равные нулю; ▶1д

е) имеет действительные корни, равные по модулю, но противоположные по знаку? ▶1е

2) При каких значениях параметра b уравнение $(9 - b^2)y^2 + 2(3 + b)y - 1 = 0$ не имеет решений? ▶2

3) При каких значениях параметра a уравнение $ax^2 - (a^2 + 1)x + a = 0$ имеет единственный действительный корень? ▶3

4) При каких значениях параметра a уравнение $(1 - a)x^2 - 20ax + 2 - a = 0$ имеет два различных действительных корня? ▶4

5) При каких значениях параметра p графики функций $y = (p + 1)x^2 - 3x + p$ и $y = 2px + 1$:

а) не имеют общих точек; ▶5а

б) пересекаются; ▶5б

в) имеют одну общую точку; ▶5в

г) имеют две общие точки? ▶5г

6) При каком значении параметра n графики функций $y = (3 - n)x^2 + 2nx + 1$ и $y = 6x + n - 2$ имеют более двух общих точек? ▶6

7) Найдите все значения параметра m, при которых уравнение $mx^2 - 6mx + 2 = 0$ имеет действительные:

а) отрицательные корни; ▶7а

б) неотрицательные корни; ▶7б

в) положительные корни; ▶7в

г) корни разных знаков; ▶7г

д) корни, сумма которых больше 2; ▶7д

е) корни, сумма обратных величин которых не превосходит 3. ▶7е

8) При каких значениях параметра c:

а) наибольшее значение функции $y = -cx^2 + 4cx - 1$ равно 1,3; ▶8а

б) наименьшее значение этой функции равно -3? ▶8б

9) При каком значении параметра a уравнения $x^2 - 2ax + 3a - 1 = 0$ и $x^2 + 2x - 4 = 0$ равносильны? ▶9

10) Дано уравнение $(b - 3)x^2 + 2bx + b + 2 = 0$. При каком значении параметра b оно имеет:

а) корни, большие 3; ▶10а

б) корни, меньшие -4; ▶10б

в) один корень больше 2, а другой меньше 2; ▶10в

г) меньший корень в интервале $(-7; -1)$; ▶10г

д) больший корень в интервале $(0; 3)$; ▶10д

е) корни в интервале $(-5; 6)$; ▶10е

ж) меньший корень, не превышающий по модулю 2; ▶10ж

з) больший корень, превышающий по модулю 1? ▶10з

11) При каком значении параметра a сумма квадратов корней уравнения $2x^2 + 2ax + a - 2 = 0$ принимает наименьшее значение? ▶11

2.5. Дробно-рациональные уравнения с параметром, сводимые к квадратным уравнениям

2.5.1. Подготовительные уравнения

№ 1. Решите уравнение $\dfrac{x(x-p)}{x+3} = 0$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} p \in \mathrm{R}, \\ x \neq -3. \end{cases}$

Решим уравнение-следствие $x(x - p) = 0$: $x_1 = 0$, $x_2 = p$.

Исследование (рис. 176).

1) $x_1 = 0$ при любом значении p. ▶1

2) $\begin{cases} x_2 = p, \\ p \neq -3. \end{cases}$ ▶2

3) $\begin{cases} p = -3, \\ x_1 = 0. \end{cases}$ ▶3

4) $x_1 = x_2$; $p = 0$. ▶4

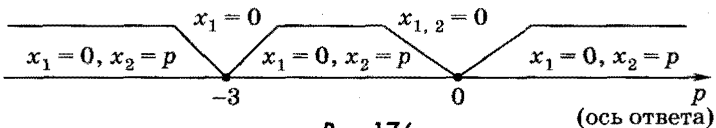


Рис. 176

Ответ. 1) Если $p \neq -3$, $p \neq 0$, то два корня $x_1 = 0$, $x_2 = p$.
2) Если $p = -3$ или $p = 0$, то один корень $x_1 = 0$.

№ 2. Решите уравнение $\dfrac{x^2 - a^2}{x - 3} = 0$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \neq 3. \end{cases}$

$x^2 - a^2 = 0$, $x_1 = a$, $x_2 = -a$.

Исследование (рис. 177).

1) $x_1 = x_2$; тогда $a = -a$; $a = 0$; $x_{1,\,2} = 0$. ▶1

2) $\begin{cases} x_1 = a, \\ a \neq 3. \end{cases}$ ▶2

3) $\begin{cases} x_2 = -a, \\ a \neq -3. \end{cases}$ ▶3

4) $\begin{cases} a = 3, \\ x_2 = -3. \end{cases}$ ▶4

5) $\begin{cases} a = -3, \\ x_1 = -3. \end{cases}$ ▶5

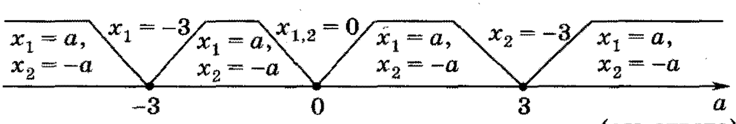


Рис. 177

Проиллюстрируем ответ в системе координат (aOx) (рис. 178).

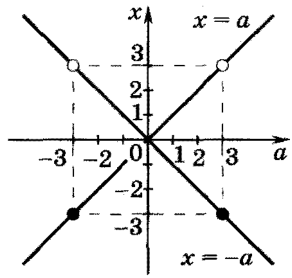


Рис. 178

<u>Ответ</u>. 1) Если $a \neq -3$, $a \neq 0$, $a \neq 3$, то два корня $x_1 = a$, $x_2 = -a$.
2) Если $a = -3$ или $a = 3$, то один корень $x = -3$.
3) Если $a = 0$, то $x_{1,\,2} = 0$.

№ 3. Решите уравнение

$$\frac{x^2 - 4x + 3}{x - a} = 0.$$

<u>Решение</u>.

ООУ: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \neq a. \end{cases}$

$x^2 - 4x + 3 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.

<u>Исследование</u>.

1) $\begin{cases} x_1 = 1, \\ a \neq 1. \end{cases}$ ▶1

2) $\begin{cases} x_2 = 3, \\ a \neq 3. \end{cases}$ ▶2

3) $\begin{cases} a = 1, \\ x_2 = 3. \end{cases}$ ▶3

4) $\begin{cases} a = 3, \\ x_1 = 1. \end{cases}$ ▶4

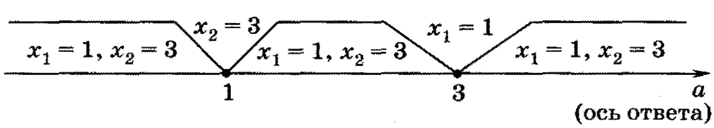


Рис. 179

6 – 5663

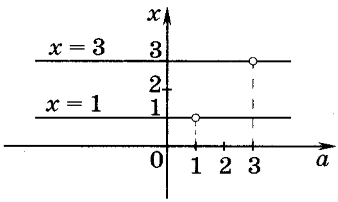


Рис. 180

Ответ легко списывается с оси параметра a (рис. 179).

Проиллюстрируем ответ в системе координат (aOx) (рис. 180).

№ 4. При каких значениях a уравнение $\dfrac{(x-a)(x+2a)}{(x-1)(x-2)} = 0$ имеет единственное решение?

Решение.

$$\text{ООУ: } \begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \neq 1, \\ x \neq 2. \end{cases}$$

Решив уравнение-следствие $(x-a)(x+2a)=0$, получим

$x_1 = a, \; x_2 = -2a.$

1) Узнаем, при каких значениях параметра a $x_1 = x_2$: $a = -2a, \; a = 0.$

   Итак, при $a = 0$ уравнение имеет единственное решение $x = 0$.

2) $x_1 = 1$: $a = 1$. Тогда $x_2 = -2$.

3) $x_2 = 1$: $-2a = 1, \; a = -1/2$. Тогда $x_1 = -1/2$.

4) $x_1 = 2$: $a = 2$; $x_2 = -4$.

5) $x_2 = 2$: $a = -1$; $x_1 = -1$.

Ответ. $a = -1$; $a = -1/2$; $a = 0$; $a = 1$; $a = 2$.

№ 5. Решите уравнение $\dfrac{(x+b)(x-3b)}{(x+1)(x-3)} = 0.$

Решение.

$$\text{ООУ: } \begin{cases} b \in \mathrm{R}, \\ x \neq -1, \\ x \neq 3. \end{cases}$$

$(x+b)(x-3b) = 0, \; x_1 = -b, \; x_2 = 3b.$

<u>Исследование</u> (рис. 181).

1) $x_1 = x_2$: $-b = 3b$; $b = 0$; $x_1 = x_2 = 0$. ▶1

2) $\begin{cases} x_1 = -b, \\ b \neq 1, \\ b \neq -3. \end{cases}$ ▶2

3) $\begin{cases} x_2 = 3b, \\ b \neq -1/3, \\ b \neq 1. \end{cases}$ ▶3

4) $\begin{cases} b = -3, \\ x_2 = -9. \end{cases}$ ▶4

5) $\begin{cases} b = -1/3, \\ x_1 = 1/3. \end{cases}$ ▶5

6) Если $b = 1$, то решений нет.

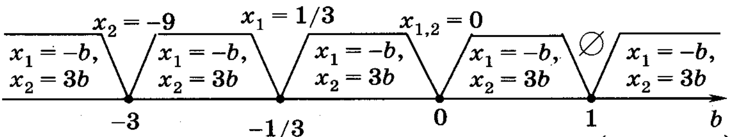


Рис. 181

Проиллюстрируем ответ в системе координат (bOx) (рис. 182).

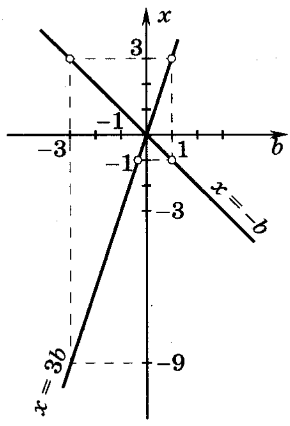


Рис. 182

№ 6. Решите уравнение $\dfrac{x^2 - (2a + 1)x + a^2 + a}{x - 2} = 0$.

ООУ: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \neq 2. \end{cases}$

$x^2 - (2a + 1)x + a^2 + a = 0$.

$\mathrm{D} = (2a + 1)^2 - 4a^2 - 4a = 1$.

$x_1 = a,\ x_2 = a + 1.$ ▶1

<u>Исследование</u> (рис. 183).

1) $x_1 \neq x_2$ при любом $a \in \mathrm{R}$. 2) $\begin{cases} x_1 = a, \\ a \neq 2. \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_2 = a + 1, \\ a \neq 1. \end{cases}$ 4) $\begin{cases} a = 2, \\ x_2 = 3. \end{cases}$ 5) $\begin{cases} a = 1, \\ x_1 = 1. \end{cases}$

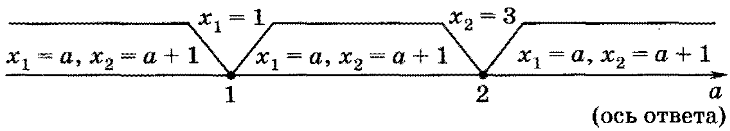


Рис. 183

Ответ запишите самостоятельно.

№ 7. При каких значениях b уравнение

$\dfrac{x^2 - (3b - 1)x + 2b^2 - 2}{x^2 - 3x - 4} = 0$ имеет единственное решение?

<u>Решение.</u>

ООУ: $\begin{cases} b \in \mathrm{R}, \\ x \neq 4, \\ x \neq -1. \end{cases}$

Решаем уравнение-следствие

$x^2 - (3b - 1)x + 2b^2 - 2 = 0.$

$\mathrm{D} = (b - 3)^2;\ x_1 = 2b - 2,\ \ x_2 = b + 1.$

1) Узнаем, при каких значениях b $x_1 = x_2$:
   $2b - 2 = b + 1,\ \ b = 3$. Но при $b = 3$ $x_1 = x_2 = 4$.
   Значит, в этом случае решений нет.
2) Подставим вместо x число -1 в уравнение-следствие:
   $1 + 3b - 1 + 2b^2 - 2 = 0,\ \ 2b^2 + 3b - 2 = 0,$
   $b = 1/2$ или $b = -2$.
3) А теперь для каждого из найденных значений b найдем корни уравнения-следствия.

а) $b = 1/2$: $x_1 = -1,\ x_2 = 3/2$. Значение x_2 допустимо.

б) $b = -2$: $x_1 = -6$, $x_2 = -1$. Значение x_1 допустимо.

Ответ. $b = 1/2$; $b = -2$.

№ 8. Решите уравнение $\dfrac{x^2 - (3b-1)x + 2b^2 - 2}{x^2 - 4x + 3} = 0.$

Решение.

Представим данное уравнение в виде ему равносильного уравнения

$$\frac{(x - 2b + 2)(x - b - 1)}{(x-3)(x-1)} = 0.$$

А теперь найдем область определения уравнения:

$$\text{ООУ: } \begin{cases} b \in \mathrm{R}, \\ x \neq 1, \\ x \neq 3. \end{cases}$$

Приравниваем к нулю числитель дроби:

$(x - 2b + 2)(x - b - 1) = 0$; $x_1 = 2b - 2$; $x_2 = b + 1$.

Исследование.

1) $x_1 = x_2$; тогда $2b - 2 = b + 1$, $b = 3$, $x_{1,2} = 4$. ▶1

2) $\begin{cases} x_1 = 2b - 2, \\ 2b - 2 \neq 1, \\ 2b - 2 \neq 3; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = 2b - 2, \\ b \neq 3/2, \\ b \neq 5/2. \end{cases}$ ▶2

3) $\begin{cases} x_2 = b + 1, \\ b + 1 \neq 1, \\ b + 1 \neq 3; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = b + 1, \\ b \neq 0, \\ b \neq 2. \end{cases}$ ▶3

4) $\begin{cases} b = 3/2, \\ x_2 = 5/2. \end{cases}$ ▶4 5) $\begin{cases} b = 5/2, \\ x_2 = 7/2. \end{cases}$ ▶5

6) $\begin{cases} b = 0, \\ x_1 = -2. \end{cases}$ ▶6 7) $\begin{cases} b = 2, \\ x_1 = 2. \end{cases}$ ▶7

Нанесем результаты исследования на координатную ось (рис. 184).

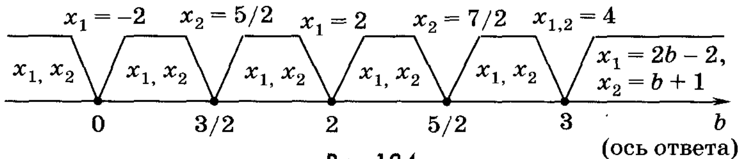


Рис. 184

Ответ легко записать, используя рисунок 184.

№ 9. Решите уравнение $\dfrac{x^2 - 2x + a - 1}{x - 2} = 0.$

<u>Решение</u> (рис. 185).

ООУ: $\begin{cases} a \in R, \\ x \neq 2. \end{cases}$

$x^2 - 2x + a - 1 = 0.$ $D_1 = 1 - a + 1 = 2 - a.$

1) $D_1 = 0$; $a = 2$: $x^2 - 2x + 1 = 0$; $x_{1,\,2} = 1.$

2) $D_1 < 0$; $a > 2$. Действительных корней нет.

3) $D_1 > 0$; $a < 2$: $x_1 = 1 - \sqrt{2 - a}$; $x_2 = 1 + \sqrt{2 - a}$.

<u>Исследование</u>.

Значение $x = 2$ подставим в уравнение-следствие

$x^2 - 2x + a - 1 = 0;$

$4 - 4 + a - 1 = 0,\ a = 1.$

Теперь найдем корни уравнения-следствия при $a = 1$: $x^2 - 2x = 0$; $x_1 = 2$; $x_2 = 0$.

Видим, что один из корней является корнем данного уравнения: $x_2 = 0$.

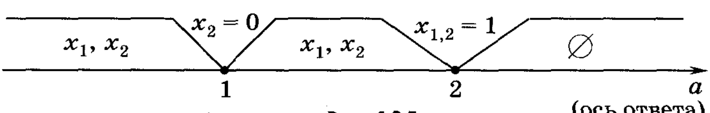


Рис. 185

<u>Ответ</u>. 1) Если $a \in (-\infty; 1) \cup (1; 2)$, то два корня $x_1 = 1 - \sqrt{2 - a}$; $x_2 = 1 + \sqrt{2 - a}$.

2) Если $a = 1$, то $x_2 = 0$.

3) Если $a = 2$, то $x_{1,\,2} = 1$.

4) Если $a > 2$, то решений нет.

№ 10. Решите уравнение $(x^2 - ax + 1)/(x + 3) = 0$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} a \in R, \\ x \neq -3. \end{cases}$

$x^2 - ax + 1 = 0$. $D = a^2 - 4$.

1) $D = 0$; $a = 2$ или $a = -2$.
   Если $a = 2$, то $x_{1,2} = 1$.
   Если $a = -2$, то $x_{1,2} = -1$. ▶1

2) $D < 0$; $|a| < 2$. Действительных корней нет. ▶2

3) $D > 0$; $\left[\begin{array}{l} a > 2, \\ a < -2. \end{array}\right.$

   $x_1 = (a + \sqrt{a^2 - 4})/2$; $x_2 = (a - \sqrt{a^2 - 4})/2$. ▶3

Исследование.

Значение $x = -3$ подставляем в уравнение-следствие:

$9 + 3a + 1 = 0$; $a = -10/3$.

Решаем уравнение-следствие при $a = -10/3$:

$x^2 + 10x/3 + 1 = 0$; $3x^2 + 10x + 3 = 0$; $x_1 = -1/3$; $x_2 = -3$.

Итак, если $a = -10/3$, то $x_1 = -1/3$. ▶4

Ответ запишите самостоятельно (рис. 186).

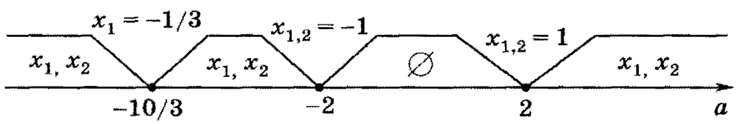


Рис. 186

№ 11. Решите уравнение $\dfrac{x^2 - ax + a + 5/4}{a(x + 2)} = 0$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} a \neq 0, \\ x \neq -2. \end{cases}$

$x^2 - ax + a + 5/4 = 0$. $D = a^2 - 4a - 5 = (a - 5)(a + 1)$.

1) $D = 0$; $a = 5$ или $a = -1$.
   Если $a = 5$, то уравнение $x^2 - 5x + 25/4 = 0$ имеет один корень $x_{1,2} = 5/2$. ▶1

Если $a = -1$, то $x_{1,2} = -1/2$. ▶2

2) $D < 0$; $a^2 - 4a - 5 < 0$; $a \in (-1; 5)$.
Действительных корней нет. ▶3

3) $D > 0$; $a \in (-\infty; -1) \cup (5; +\infty)$; ▶4

$$x_1 = \frac{a + \sqrt{(a-5)(a+1)}}{2};$$

$$x_2 = \frac{a - \sqrt{(a-5)(a+1)}}{2}.$$

Исследование.

Решаем уравнение-следствие относительно a при $x = -2$.

$4 + 2a + a + 5/4 = 0$; $a = -7/4$.

А теперь уравнение-следствие решаем относительно x при $a = -7/4$:

$x^2 + 7x/4 - 7/4 + 5/4 = 0$; $4x^2 + 7x - 2 = 0$;

$x_2 = -2$, $x_1 = 1/4$.

Видим, что $x_1 = 1/4$ — решение данного уравнения. ▶5

Ответ запишите самостоятельно по рисунку 187.

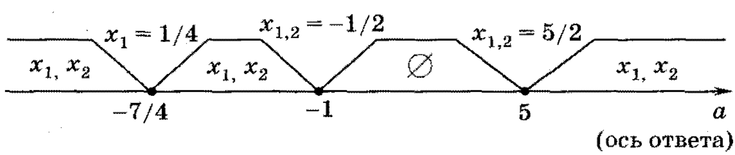


Рис. 187

№ 12. Решите уравнение $\dfrac{(a-1)x^2 - 2ax + a + 1}{(x+2)(x-1)} = 0$.

Решение (рис. 188).

$$\text{ООУ: } \begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \neq 1, \\ x \neq -2. \end{cases}$$

$(a-1)x^2 - 2ax + a + 1 = 0$.

1) Если $a = 1$, то уравнение-следствие является линейным: $-2x + 2 = 0$, $x = 1$. Решений нет, так как $x = 1$ не является допустимым. ▶1

2) $a \neq 1$. $D_1 = a^2 - a^2 + 1 = 1$; $x_1 = (a + 1)/(a - 1)$; $x_2 = 1$.

Перепишем данное уравнение в виде

$$\frac{(x-1)\left(x - \dfrac{a+1}{a-1}\right)}{(x-1)(x+2)} = 0.$$

Оно может иметь только один корень $x = \dfrac{a+1}{a-1}$

при условии, что $\dfrac{a+1}{a-1} \neq -2$;

$a + 1 \neq -2a + 2$; $a \neq 1/3$. ▶2

Если $a = 1/3$, то данное уравнение решений не имеет. ▶3

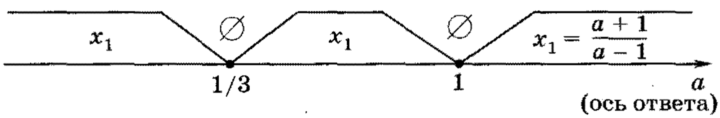


Рис. 188

<u>Ответ.</u> 1) Если $a \neq 1$, $a \neq 1/3$, то единственное решение $x = (a + 1)/(a - 1)$.

2) Если $a = 1$ или $a = 1/3$, то решений нет.

№ 13. При каких значениях b уравнение $\dfrac{(b-1)x^2 - 3x + b + 5}{x - 2} = 0$ имеет хотя бы одно решение?

<u>Решение.</u>

ООУ: $\begin{cases} b \in \mathbb{R}, \\ x \neq 2. \end{cases}$

$(b - 1)x^2 - 3x + b + 5 = 0.$

1) Если $b = 1$, то $-3x + 6 = 0$, $x = 2$.
Значит, при $b = 1$ данное уравнение решений не имеет.

2) Пусть $b \neq 1$.

$D = 9 - 4(b - 1)(b + 5) = -4b^2 - 16b + 29$.

Нас интересует случай, когда $D \geqslant 0$.

Решаем неравенство $4b^2 + 16b - 29 \leqslant 0$:

$b \in [(-4 - 3\sqrt{5})/2; (-4 + 3\sqrt{5})/2]$.

Учтем, что $b \neq 1$.

Тогда $b \in [(-4 - 3\sqrt{5})/2; 1) \cup (1; (-4 + 3\sqrt{5})/2]$.

Если $x = 2$, то решим уравнение

$(b - 1)4 - 6 + b + 5 = 0$; $b = 1$.

Ответ. Уравнение имеет хотя бы одно решение, если

$b \in [(-4 - 3\sqrt{5})/2; 1) \cup (1; (-4 + 3\sqrt{5})/2]$.

№ 14. При каких значениях a уравнение

$$\frac{(a^2 + a - 2)x^2 + (a^2 - 1)x - a + 1}{(x - 3)(x - 1)} = 0$$ имеет более одного решения?

Решение.

$$\text{ООУ: } \begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \neq 3, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

Решаем уравнение

$(a - 1)(a + 2)x^2 + (a^2 - 1)x - (a - 1) = 0$.

1) $a = 1$; тогда $0 \cdot x = 0$, $x \in (-\infty; +\infty)$.
Решениями данного уравнения являются все значения
$x \in (-\infty; 1) \cup (1; 3) \cup (3; +\infty)$.

2) $a \neq 1$; тогда $(a + 2)x^2 + (a + 1)x - 1 = 0$.
   а) $a = -2$; тогда $-x - 1 = 0$; $x = -1$. Одно решение.
   б) $a \neq -2$; тогда $D = (a + 3)^2$; $x_1 = 1/(a + 2)$, $x_2 = -1$.

Узнаем, при каких значениях a данное уравнение имеет решение $x_1 = 1/(a+2)$.

$$\begin{cases} 1/(a+2) \neq 3; \\ 1/(a+2) \neq 1, \\ a \neq -2,\ a \neq 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} a \neq -5/3; \\ a \neq -1, \\ a \neq -2,\ a \neq 1. \end{cases}$$

Если же $a = -3$, то $x_1 = x_2 = -1$.

Ответ. Уравнение имеет более одного решения, если $a \neq -3$, $a \neq -2$, $a \neq -5/3$, $a \neq -1$.

Уравнения для самостоятельного решения

1) $\dfrac{(2-y)(y-c)}{y+2} = 0.$ ▶1

2) $\dfrac{(y+2a)(2y-a)}{y-2} = 0.$ ▶2

3) $\dfrac{x^2-9x+20}{p(x+p)} = 0.$ ▶3

4) $\dfrac{(x+a)(x-2a)}{(x-3)(x-4)} = 0.$ ▶4

5) При каких значениях b приведенное уравнение $\dfrac{x^2-(3b+1)x+2b^2+b}{(b-1)(x^2-3x+2)} = 0$ имеет единственное решение? ▶5

6) $\dfrac{x^2+x-a-1}{x+1} = 0.$ ▶6

7) $\dfrac{4x^2+4(b-2)x+1}{(b-1)(x-2)} = 0.$ ▶7

8) $\dfrac{x^2-(3a+1)x+2a^2+3a-2}{(x-5)(x-3a)} = 0.$ ▶8

9) $\dfrac{x^2-ax+a-4}{x-3} = 0.$ ▶9

10) При каких значениях a данное уравнение $\dfrac{ax^2-2x+a+6}{x-3} = 0$ имеет хотя бы одно решение? ▶10

2.5.2. Дробно-рациональные уравнения с параметром, сводимые к квадратным уравнениям

№ 15. Решите уравнение

$$1-\frac{3}{x+a-1}=\frac{5a}{(x+a-1)(x+1)}.$$

Решение (рис. 189).

$$\text{ООУ: }\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \neq -1, \\ x \neq 1-a. \end{cases}$$

Освободившись от знаменателей, получим уравнение-следствие $x^2+(a-3)x-4a-4=0$.

$\mathrm{D}=(a+5)^2,\ x_1=4,\ x_2=-a-1.$

Исследование.

1) $\mathrm{D}=0$; тогда $a=-5$; $x_{1,2}=4$. ▶1

2) $\begin{cases} x_1=4, \\ a \neq -3. \end{cases}$ ▶2

3) $\begin{cases} x_2=-a-1, \\ -a-1 \neq -1, \\ -a-1 \neq 1-a; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=-a-1, \\ a \neq 0. \end{cases}$ ▶3

4) $\begin{cases} a=-3, \\ x_2=2. \end{cases}$ ▶4 5) $\begin{cases} a=0, \\ x_1=4. \end{cases}$ ▶5

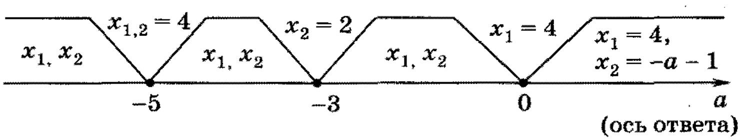


Рис. 189

Ответ. 1) Если $a \neq -5$, $a \neq -3$, $a \neq 0$, то два корня $x_1=4$, $x_2=-a-1$.

2) Если $a=-5$ или $a=0$, то один корень $x=4$.

3) Если $a=-3$, то $x_2=2$.

№ 16. Решите уравнение

$$\frac{x}{m(x+1)} - \frac{2}{x+2} = \frac{3-m^2}{m(x+1)(x+2)}.$$

Решение (рис. 190).

$$\text{ООУ: } \begin{cases} m \neq 0, \\ x \neq -1, \\ x \neq -2. \end{cases}$$

Данное уравнение приводим к квадратному:

$x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 2m - 3 = 0.$

$D_1 = 4,\ x_1 = m + 1,\ x_2 = m - 3.$

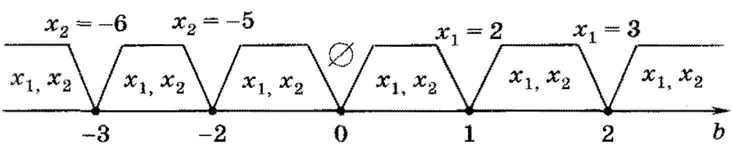
Исследование.

$$1) \begin{cases} x_1 = m+1, \\ m+1 \neq -1, \\ m+1 \neq -2, \\ m \neq 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = m+1, \\ m \neq -2, \\ m \neq -3, \\ m \neq 0. \end{cases}$$ ▶1

$$2) \begin{cases} x_2 = m-3, \\ m-3 \neq -1, \\ m-3 \neq -2, \\ m \neq 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = m-3, \\ m \neq 2, \\ m \neq 1, \\ m \neq 0. \end{cases}$$ ▶2

$$3) \begin{cases} m = -3, \\ x_2 = -6. \end{cases}$$ ▶3 $$4) \begin{cases} m = -2, \\ x_2 = -5. \end{cases}$$ ▶4

$$5) \begin{cases} m = 1, \\ x_1 = 2. \end{cases}$$ ▶5 $$6) \begin{cases} m = 2, \\ x_1 = 3. \end{cases}$$ ▶6



(ось ответа)

Рис. 190

Проиллюстрируем ответ в системе координат (mOx) (рис. 191).

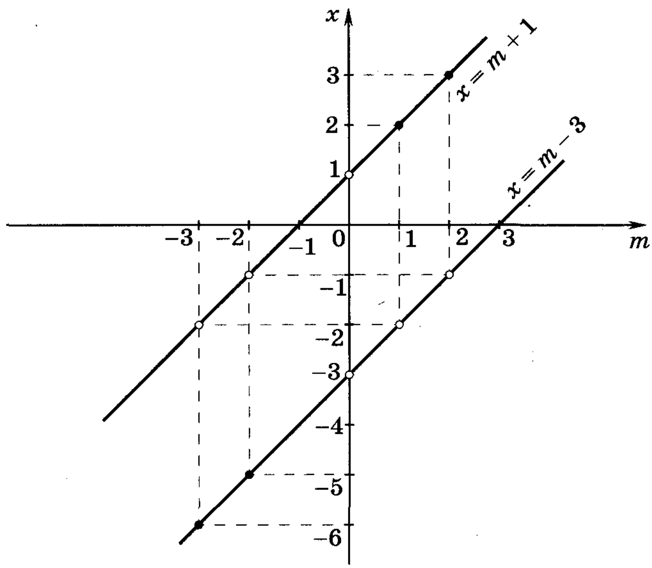


Рис. 191

Ответ запишите самостоятельно.

№ 17. Решите уравнение

$$\frac{(k+2)x^2}{(k+1)(x-2)} - \frac{2kx}{(k-1)(x-2)} = \frac{5}{k^2-1} +$$
$$+ \frac{12-k^2-k}{(k^2-1)(x-2)}.$$

Решение.

ООУ: $\begin{cases} k \neq \pm 1, \\ x \neq 2. \end{cases}$

Уравнение-следствие имеет вид

$(k+2)(k-1)x^2 - (2k^2+2k+5)x + k^2 + k - 2 = 0.$

1) $k = -2$; тогда $x = 0$. ▶1

2) $k \neq -2$; $k \neq \pm 1$; тогда $D = (6k+3)^2$;

$x_1 = (k+2)/(k-1)$; $x_2 = (k-1)/(k+2)$.

Исследование.

а) $D = 0$; $k = -1/2$, $x_1 = x_2 = -1$. ▶2

б) $\begin{cases} x_1 = (k+2)/(k-1), \\ (k+2)/(k-1) \neq 2, \\ k \neq -2, k \neq \pm 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = (k+2)/(k-1), \\ k \neq 4, \\ k \neq -2, \\ k \neq \pm 1. \end{cases}$ ▶3

в) $\begin{cases} x_2 = (k-1)/(k+2), \\ (k-1)/(k+2) \neq 2, \\ k \neq -2, \\ k \neq \pm 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = (k-1)/(k+2), \\ k \neq -5, \\ k \neq -2, \\ k \neq \pm 1. \end{cases}$ ▶4

г) $\begin{cases} k = -5, \\ x_1 = 1/2. \end{cases}$ ▶5 д) $\begin{cases} k = 4, \\ x_2 = 1/2. \end{cases}$ ▶6

Ответ запишите по рисунку 192.

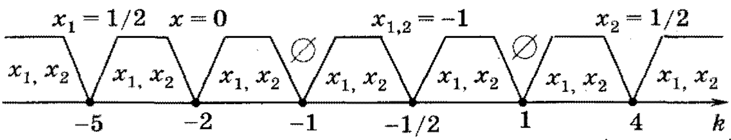


Рис. 192

№ 18. Решите уравнение

$$\frac{1}{2n+nx} - \frac{1}{2x-x^2} = \frac{2(n+3)}{x^3-4x}.$$

Решение.

$$\text{ООУ: } \begin{cases} n \neq 0, \\ x \neq -2, \\ x \neq 2, \\ x \neq 0. \end{cases}$$

Перепишем данное уравнение в виде равносильного ему:

$$\frac{1}{n(2+x)} + \frac{1}{x(-2+x)} = \frac{2(n+3)}{x(x^2-4)}.$$

Оно легко приводится к уравнению-следствию:

$x^2 + (n-2)x - 2n^2 - 4n = 0.$

$D = (3n + 2)^2$; $x_1 = -2n$; $x_2 = n + 2$.

Исследование.

1) $D = 0$; $n + 2 = -2n$, $n = -2/3$; $x_{1,2} = 4/3$. ▶1

2) $\begin{cases} x_1 = -2n, \\ n \neq 1, \\ n \neq -1, \\ n \neq 0. \end{cases}$ ▶2 3) $\begin{cases} x_2 = n + 2, \\ n \neq -4, \\ n \neq 0, \\ n \neq -2. \end{cases}$ ▶3

4) $\begin{cases} n = -4, \\ x_1 = 8. \end{cases}$ ▶4 5) $\begin{cases} n = -2, \\ x_1 = 4. \end{cases}$ ▶5

6) $\begin{cases} n = 1, \\ x_2 = 3. \end{cases}$ ▶6 7) $\begin{cases} n = -1, \\ x_2 = 1. \end{cases}$ ▶7

Ответ запишите самостоятельно по рисунку 193.

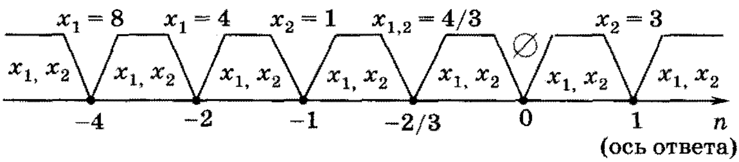


Рис. 193

Обратимся вновь к системе координат, чтобы проиллюстрировать ответ (рис. 194).

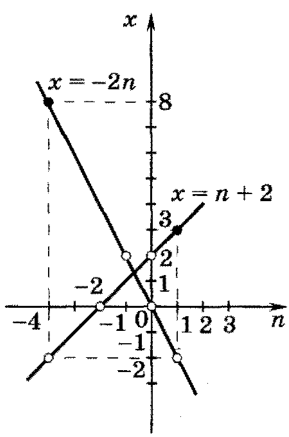


Рис. 194

№ 19. Решите уравнение

$$\frac{2x}{x-a}+\frac{1}{x+4}=\frac{7x+a}{x^2+x(4-a)-4a}.$$

<u>Решение</u> (рис. 195).

$$\text{ООУ: }\begin{cases} a\in \mathrm{R},\\ x\neq a,\\ x\neq -4.\end{cases}$$

Освободившись от знаменателей, получаем уравнение

$x^2+x-a=0.$
$\mathrm{D}=1+4a.$

1) Если $a<-1/4$, то действительных решений нет. ▶1

2) Если $a=-1/4$, то $x_{1,\,2}=-1/2$. ▶2

3) Если $a>-1/4$, то $x_1=(-1-\sqrt{1+4a})/2$;

$x_2=(-1+\sqrt{1+4a})/2$. ▶3

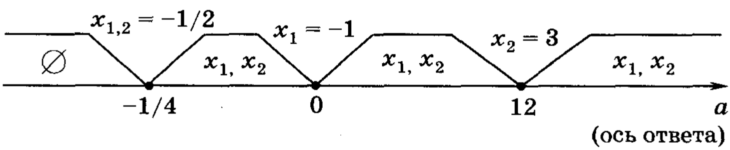


Рис. 195

<u>Исследование</u>.

1) Вместо x в уравнение-следствие подставим a: $a^2=0,\ a=0$.

А теперь в это же уравнение вместо a подставим 0.

$x^2+x=0,\quad \left[\begin{array}{l} x_2=0,\\ x_1=-1.\end{array}\right.$

Видим, что для данного уравнения допустимо только $x_1=-1$.

2) Пусть теперь $x=-4$: ▶4

$16-4-a=0,\ a=12.$

Решаем уравнение $x^2 + x - 12 = 0$: $\left[\begin{array}{l} x_1 = -4, \\ x_2 = 3. \end{array}\right.$

При $a = 12$ корнем данного уравнения будет $x_2 = 3$. (▶5)

Ответ. 1) Если $a \in (-1/4; 0) \cup (0; 12) \cup (12; +\infty)$, то два решения $x_1 = (-1 - \sqrt{1 + 4a})/2$ и $x_2 = (-1 + \sqrt{1 + 4a})/2$.

2) Если $a \in (-\infty; -1/4)$, то решений нет.

3) Если $a = -1/4$, то $x_{1,2} = -1/2$.

4) Если $a = 0$, то $x_1 = -1$.

5) Если $a = 12$, то $x_2 = 3$.

№ 20. Решите уравнение $\dfrac{b}{x-3} + \dfrac{x}{x+3} = \dfrac{17}{x^2-9}$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} b \in \mathrm{R}, \\ x \neq 3, \\ x \neq -3. \end{cases}$

Переходим к уравнению $x^2 + (b - 3)x + 3b - 17 = 0$.

$\mathrm{D} = (b - 11)(b - 7)$.

Рассмотрим ряд случаев.

1) $\mathrm{D} = 0$; $b = 11$ или $b = 7$.

а) $b = 11$: $x^2 + 8x + 16 = 0$, $x_{1,2} = -4$.

б) $b = 7$: $x_{1,2} = -2$. (▶1)

2) $\mathrm{D} < 0$; $b \in (7; 11)$. Решений нет. (▶2)

3) $\mathrm{D} > 0$; $b \in (-\infty; 7) \cup (11; +\infty)$.

$$x_1 = \frac{3 - b + \sqrt{(b-11)(b-7)}}{2};$$

$$x_2 = \frac{3 - b - \sqrt{(b-11)(b-7)}}{2}.$$ (▶3)

Исследование.

1) $x = 3$; $9 + 3b - 9 + 3b - 17 = 0$, $b = 2\frac{5}{6}$.

При $b = 2\frac{5}{6}$ — уравнение-следствие имеет корни $x_1 = 3$; $x_2 = -2\frac{5}{6}$.

Таким образом, данное уравнение имеет только один корень $x_2 = -2\frac{5}{6}$. (▸4)

2) $x = -3$; $9 - 3b + 9 + 3b - 17 = 0$, $0 \cdot b = -1$. Значит, ни при каком значении b x не может быть равным числу -3.

Ответ запишите самостоятельно по рисунку 196.

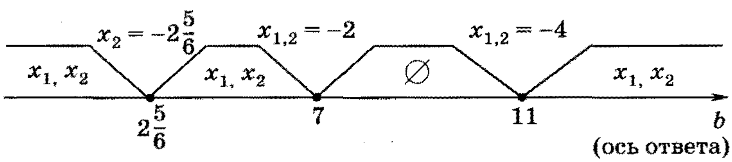


Рис. 196

№ 21. Решите уравнение

$$\frac{x}{b+1} + \frac{2x}{x-2} = \frac{3b-4}{(b+1)(x-2)}.$$

Решение (рис. 197).

ООУ: $\begin{cases} b \neq -1, \\ x \neq 2. \end{cases}$

$x^2 + 2bx - 3b + 4 = 0$.

$D_1 = b^2 + 3b - 4 = (b + 4)(b - 1)$.

Рассмотрим три случая.

1) $D_1 = 0$; а) $b = -4$: $x_{1,2} = 4$.

б) $b = 1$: $x_{1,2} = -1$. (▸1)

2) $D_1 < 0$; $b \in (-4; -1) \cup (-1; 1)$. Решений нет.

Учитывая, что $b = -1$ не является допустимым для данного уравнения, можно заключить, что при $b \in (-4;\ 1)$ данное уравнение действительных решений не имеет. ▶2

3) $D_1 > 0$; $b \in (-\infty;\ -4) \cup (1;\ +\infty)$.

$$x_1 = -b - \sqrt{b^2 + 3b - 4};$$

$$x_2 = -b + \sqrt{b^2 + 3b - 4}.$$ ▶3

<u>Исследование.</u>

Пусть $x = 2$; тогда $4 + 4b - 3b + 4 = 0$, $b = -8$.

Решаем уравнение $x^2 + 2bx - 3b + 4 = 0$ при $b = -8$:

$x^2 - 16x + 28 = 0$, $x_1 = 2$, $x_2 = 14$. ▶4

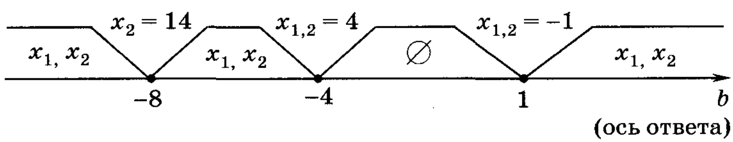


Рис. 197

<u>Ответ.</u> 1) Если $b \in (-\infty;\ -8) \cup (-8;\ -4) \cup (1;\ +\infty)$, то два корня $x_1 = -b - \sqrt{b^2 + 3b - 4}$ и $x_2 = -b + \sqrt{b^2 + 3b - 4}$.

2) Если $b = -8$, то $x_2 = 14$.

3) Если $b = -4$, то $x_{1,2} = 4$.

4) Если $b \in (-4;\ 1)$, то действительных решений нет.

5) Если $b = 1$, то $x_{1,2} = -1$.

Уравнения для самостоятельного решения

1) $\dfrac{x+2}{a+1} = \dfrac{2x - a - 1}{x - 2}$. ▶1

2) $\dfrac{x}{2m} + \dfrac{2}{x-2} = \dfrac{3x - 2m}{2(x-2)}$. ▶2

3) $\dfrac{x}{2a+3} + \dfrac{2a-1}{x} = \dfrac{2(2a+1)}{2a+3}$. ▶3

4) $\dfrac{(m-2)x}{m-1} - 1 = \dfrac{m+2}{m-1} - \dfrac{2x^2 + m + 1}{(m-1)x}$. ▶4

5) $\dfrac{x}{x-m} - \dfrac{2m}{x+m} = \dfrac{8m^2}{x^2-m^2}$. ▶5

6) $4(k-1)^2x + 4(k-1) + \dfrac{3k+4}{x} = 0$. ▶6

7) $\dfrac{x-a}{x-2} + \dfrac{10}{x+2} + \dfrac{44}{x^2-4} = 0$. ▶7

8) $\dfrac{ax+1}{x(x+a)} = -1$. ▶8

9) $\dfrac{1}{k} - \dfrac{2}{x-k} + \dfrac{2k+1}{x(x-k)} = \dfrac{1}{kx(x-k)}$. ▶9

2.6. Более сложные квадратные уравнения и их системы с параметром и к ним сводимые

№ 1. Сколько корней в зависимости от a имеет уравнение $ax^2 - |2x-1| = 0$?

Решение.

ООУ: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

Решим сначала данное уравнение аналитически.

Представим уравнение в виде $ax^2 = |2x-1|$.

Очевидно, что при $a < 0$ уравнение не имеет корней. ▶1

При $a = 0$ $x = 1/2$. ▶2

Пусть $a > 0$. Тогда данное уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} ax^2 = 2x - 1, \\ ax^2 = 1 - 2x. \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{ll} ax^2 - 2x + 1 = 0, & (1) \\ ax^2 + 2x - 1 = 0. & (2) \end{array}\right.$$

Решим каждое из уравнений совокупности.

$ax^2 - 2x + 1 = 0$.

$D_1 = 1 - a$.

1) $D_1 > 0$, $a \in (0; 1)$. Уравнение имеет два различных действительных корня x_1 и x_2. ▶3

2) $D_1 = 0$, $a = 1$: $x_{1,2} = 1$. ▶4

3) $D_1 < 0$, $a > 1$. Действительных корней нет. ▶5

$ax^2 + 2x - 1 = 0$. (2)

$D_1 = 1 + a$, $D_1 > 0$ при всех $a > 0$.

Уравнение имеет два различных действительных корня x_3 и x_4. (▶6)

В частности, если $a = 1$, то $x_3 = -1 - \sqrt{2}$.

$x_4 = -1 + \sqrt{2}$. (▶7)

Решение совокупности показано на оси ответа (рис. 198).

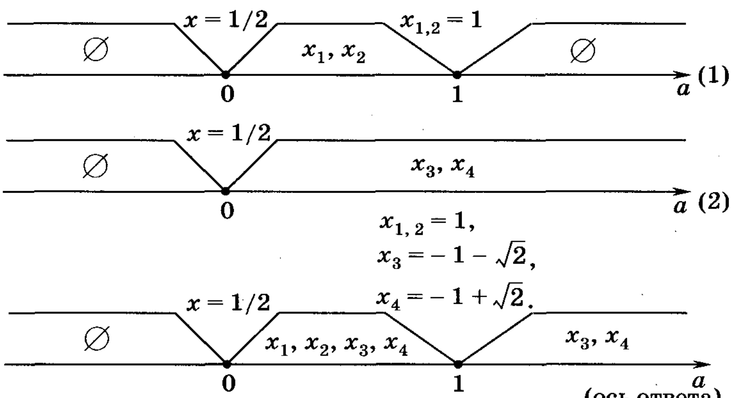


Рис. 198

Данное уравнение можно решить и графически в системе координат (xOy) (рис. 199—203).

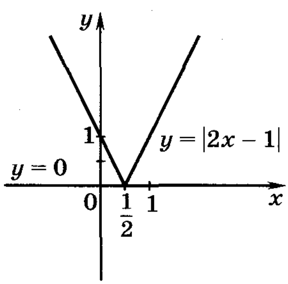


Рис. 199

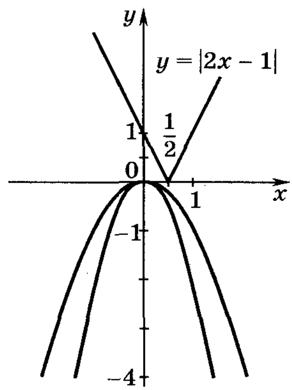


Рис. 200

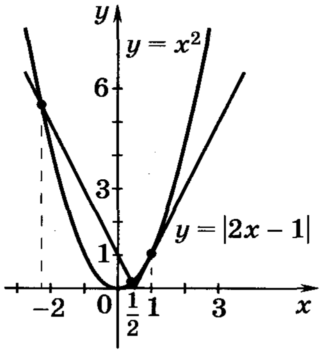


Рис. 201

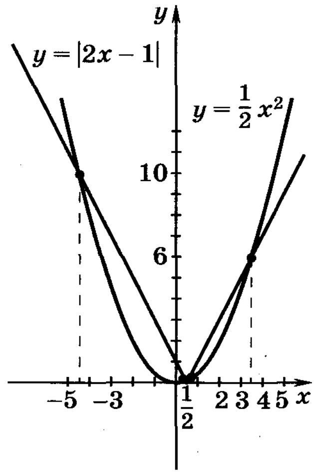


Рис. 202

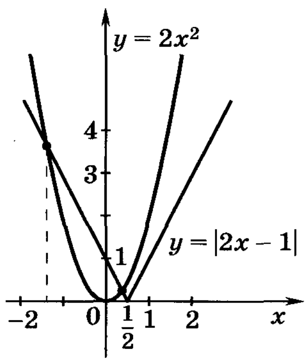


Рис. 203

При $a = 0$ уравнение имеет единственный корень $x = 1/2$ (рис. 199).

При $a < 0$ уравнение не имеет корней (рис. 200).

При $a = 1$ уравнение имеет три корня (рис. 201).

При $0 < a < 1$ уравнение имеет четыре корня (рис. 202).

При $a > 1$ уравнение имеет два корня (рис. 203).

Ответ. 1) Если $a < 0$, то корней нет.
2) Если $a = 0$, то один корень.
3) Если $0 < a < 1$, то четыре корня.
4) Если $a = 1$, то три корня.
5) Если $a > 1$, то два корня.

№ 2. В зависимости от значений параметра a определите число корней уравнения
$x^2 + 4x - 2|x - 1| + 2 + a = 0$.

Решение.

1 способ.

ООУ: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

Данное уравнение равносильно совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 1, \\ x^2 + 4x - 2x + 2 + 2 + a = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x < 1, \\ x^2 + 4x + 2x - 2 + 2 + a = 0; \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{ll} \begin{cases} x \geqslant 1, \\ x^2 + 2x + 4 + a = 0, \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} x < 1, \\ x^2 + 6x + a = 0. \end{cases} & (2) \end{array}\right.$$

Решаем каждую из полученных систем.

(1): $\begin{cases} x \geqslant 1, \\ x^2 + 2x + 4 + a = 0, \ D_1 = -a - 3. \end{cases}$

1) $a = -3$; тогда $(x + 1)^2 = 0$, $x_{1,2} = -1$. Но $-1 < 1$. Корней нет. ▶1

2) $a > -3$. Действительных корней нет. ▶2

3) $a < -3$; тогда $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{-a-3}$.

Заметим, что $x_1 = -1 - \sqrt{-a-3}$ является отрицательным числом при $a < -3$. Остается $x_2 = -1 + \sqrt{-a-3}$.

Решим неравенство $-1 + \sqrt{-a-3} \geqslant 1$.

$\sqrt{-a-3} \geqslant 2,\ -a-3 \geqslant 4,\ a \leqslant -7.$

Если $a = -7$, то $x_2 = 1$.

Итак, если $a \leqslant -7$, то система (1) имеет единственный корень $x_2 = -1 + \sqrt{-a-3}$. (▶3)

(2): $\begin{cases} x < 1, \\ x^2 + 6x + a = 0,\ D_1 = 9 - a. \end{cases}$

1) $a = 9$; тогда $(x+3)^2 = 0$, $x_{3,\,4} = -3$. (▶4)

2) $a > 9$. Действительных корней нет. (▶5)

3) $a < 9$; тогда $x_{3,\,4} = -3 \pm \sqrt{9-a}$.

Легко видеть, что $x_3 = -3 - \sqrt{9-a}$ удовлетворяет условию $x < 1$ при $a < 9$.

Остается решить систему неравенств $\begin{cases} x_4 < 1, \\ a < 9. \end{cases}$

$\begin{cases} \sqrt{9-a} < 4, \\ a < 9; \end{cases}$ $\begin{cases} a > -7, \\ a < 9; \end{cases}$ $a \in (-7;\ 9)$. (▶6)

Сведем решения систем (1) и (2) на одну ось (рис. 204).

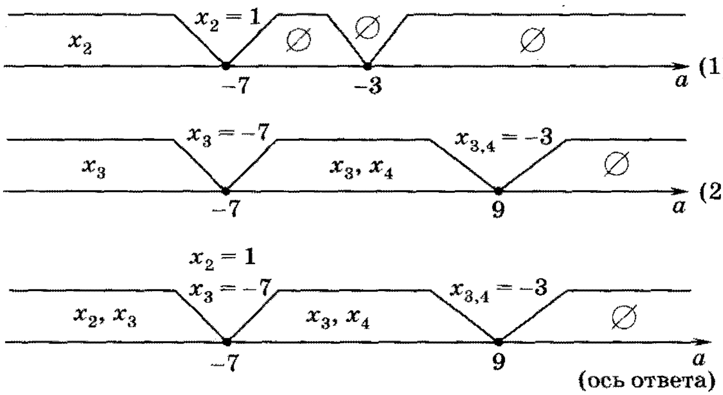


Рис. 204

Ответ. 1) Если $a \in (-\infty;\ 9)$, то уравнение имеет два корня.

2) Если $a = 9$, то уравнение имеет один корень.

3) Если $a \in (9;\ +\infty)$, то действительных корней нет.

2 способ.

Решим это уравнение с использованием системы координат (xOy).

Сначала рассмотрим систему (1):

$$\begin{cases} x \geqslant 1, \\ x^2 + 2x + 4 + a = 0. \end{cases}$$

Пусть $y = (x + 1)^2 + 3 + a$. Получаем семейство парабол, ветви которых направлены вверх, а вершины лежат на прямой $x = -1$ (рис. 205).

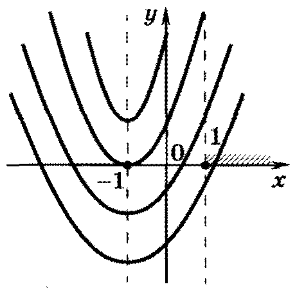


Рис. 205

Уравнение $x +2x + 4 + a = 0$ может иметь только одно решение, удовлетворяющее условию $x \geqslant 1$, если парабола пересекает ось абсцисс в точке, лежащей правее 1, или в точке 1. Поэтому достаточно решить систему неравенств:

$$\begin{cases} D_1 > 0, \\ y(1) \leqslant 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 1 - 4 - a > 0, \\ 7 + a \leqslant 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a < -3, \\ a \leqslant -7; \end{cases}$$

$a \leqslant -7$ (рис. 206).

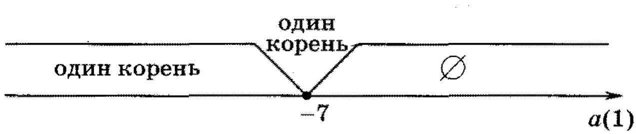


Рис. 206

А теперь обратимся к системе (2):

$$\begin{cases} x < 1, \\ x^2 + 6x + a = 0. \end{cases}$$

Пусть $y = (x + 3)^2 + a - 9$. Возможны следующие случаи (рис. 207).

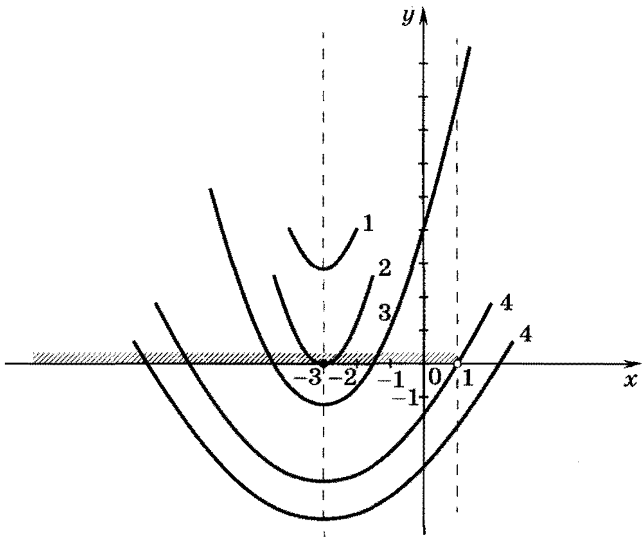


Рис. 207

1) $D_1 < 0$; $9 - a < 0$, $a > 9$. Действительных корней нет.
2) $D_1 = 0$; $a = 9$. Один корень $x = -3$.
3) $\begin{cases} D_1 > 0, \\ y(1) > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} 9 - a > 0, \\ 7 + a > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} a < 9, \\ a > -7; \end{cases}$

$a \in (-7; 9)$.

Уравнение $x^2 + 6x + a = 0$ имеет два корня, удовлетворяющих условию $x < 1$.

4) $\begin{cases} D_1 > 0, \\ y(1) \leqslant 0; \end{cases}$ $\begin{cases} 9 - a > 0, \\ 7 + a \leqslant 0; \end{cases}$ $\begin{cases} a < 9, \\ a \leqslant -7; \end{cases}$

$a \leqslant -7$.

Уравнение имеет один корень. Итог решения системы (2) представлен на рисунке 208.

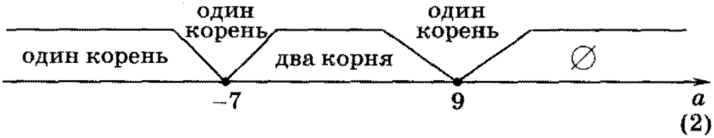


Рис. 208

3 способ.

Систему (1) перепишем в виде $\begin{cases} x \geqslant 1, \\ a = -x^2 - 2x - 4, \end{cases}$

а систему (2) в виде $\begin{cases} x < 1, \\ a = -x^2 - 6x. \end{cases}$

Построим график функции

$$y = \begin{cases} -x^2 - 2x - 4, \text{ если } x \geqslant 1; \\ -x^2 - 6x, \text{ если } x < 1 \end{cases} \quad \text{(рис. 209).}$$

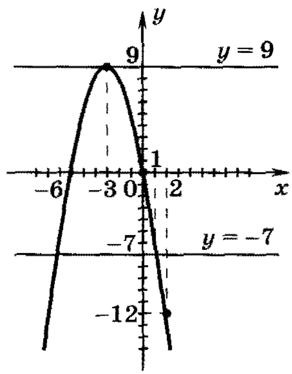


Рис. 209

Уравнение $y = a$ определяет множество прямых, параллельных оси абсцисс.

Если $a > 9$, то прямая $y = a$ не пересекает графика функции ни в одной точке. Поэтому данное уравнение решений не имеет.

Если $a = 9$, то прямая $y = 9$ касается графика в точке с абсциссой $x = -3$.

В остальных случаях ($a < 9$) прямая $y = a$ пересекает график функции в двух точках.

№ 3. Сколько решений в зависимости от параметра a имеет уравнение $(x + 2)|x - 2| = a$?

Решение.

ООУ: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

Решим сначала данное уравнение аналитически:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 2, \\ (x+2)(x-2) = a, \end{cases} \\ \begin{cases} x < 2, \\ (x+2)(2-x) = a; \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} x \geqslant 2, \\ x^2 = a + 4, \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} x < 2, \\ x^2 = 4 - a. \end{cases} & (2) \end{array}\right.$$

(1): Если $a < -4$, то система не имеет решений.

Если $a = -4$, то $x_{1,\,2} = 0$ не удовлетворяют условию $x \geqslant 2$. Решений нет. ▶1

Пусть $a > -4$, тогда $x_1 = \sqrt{a + 4}$, $x_2 = -\sqrt{a + 4}$.

Решим неравенства $\sqrt{a + 4} \geqslant 2$ и $\sqrt{a + 4} \leqslant -2$.

Из первого неравенства $a \geqslant 0$.

Второе неравенство не имеет решений, поэтому $x_2 = -\sqrt{a + 4}$ не является решением системы (1). ▶2

(2): Если $a > 4$, то система не имеет решений. ▶3

Если $a = 4$, то $x_{3,\,4} = 0$. ▶4

Пусть $a < 4$, тогда $x_3 = \sqrt{4 - a}$, $x_4 = -\sqrt{4 - a}$.

Решим неравенства $\sqrt{4 - a} < 2$ и $\sqrt{4 - a} > -2$.

Из первого неравенства получаем, что $0 < a < 4$. В этом промежутке решениями являются x_3 и x_4.

Второе неравенство выполняется при всех $a < 4$, т. е. x_4 является решением системы (2). ▶5

Сведем решения на одну ось (рис. 210). ▶6

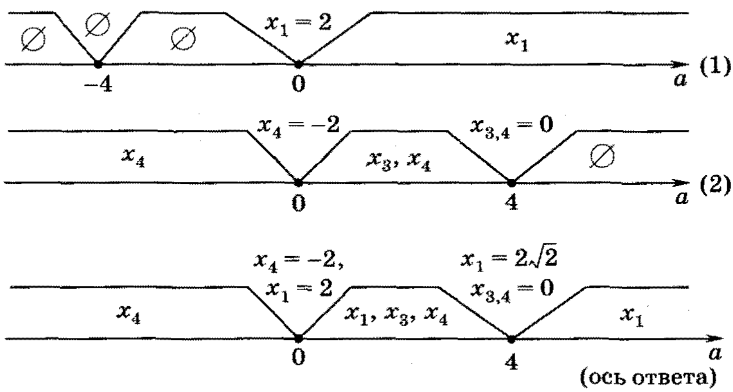


Рис. 210

Рассмотрим теперь графическое решение данного уравнения (рис. 211). Обратимся к системе координат (xOa) и рассмотрим функцию

$a = (x + 2)|x - 2|.$

$$a = \begin{cases} x^2 - 4, \ x \geqslant 2, \\ 4 - x^2, \ x < 2. \end{cases}$$

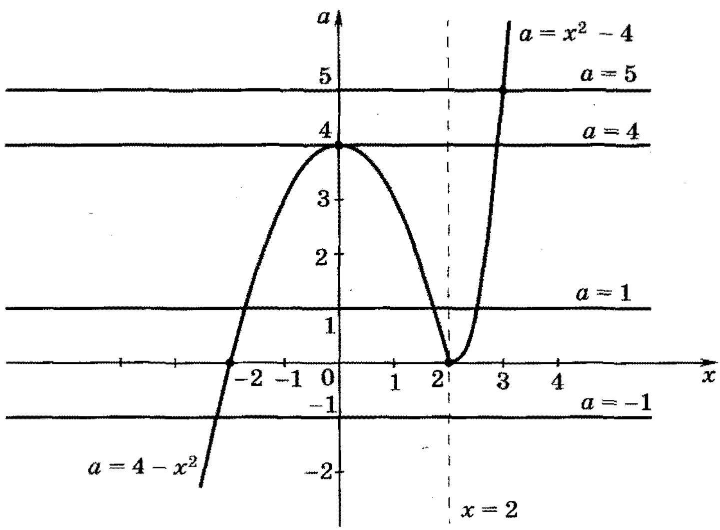


Рис. 211

Количество точек пересечения полученного графика с прямыми, параллельными оси Ox, позволяет судить о числе решений данного уравнения в зависимости от параметра a.

Ответ. 1) Если $a < 0$ или $a > 4$, то уравнение имеет единственное решение.
2) Если $a = 0$ или $a = 4$, то уравнение имеет два решения.
3) Если $0 < a < 4$, то уравнение имеет три решения.

№ 4. Определите количество корней уравнения $x^2 - 10|x - a| - 6x + 2 + 9a = 0$ в зависимости от значений параметра a.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

Раскроем модуль и приведем данное уравнение к равносильной ему совокупности систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant a, \\ x^2 - 10x + 10a - 6x + 2 + 9a = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x < a, \\ x^2 + 10x - 10a - 6x + 2 + 9a = 0; \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{ll} \begin{cases} x \geqslant a, \\ a = -(x^2 - 16x + 2)/19, \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} x < a, \\ a = x^2 + 4x + 2. \end{cases} & (2) \end{array}\right.$$

Воспользуемся графическим методом решения в системе координат (xOa) (рис. 212).

Сначала построим прямую $a = x$, а затем графики функций $a = -(x^2 - 16x + 2)/19$, если $x \geqslant a$ (1), и $a = x^2 + 4x + 2$, если $x < a$ (2).

Графики функций (1) и (2) пересекают прямую $a = x$ в точках $M(-1; 1)$ и $K(-2; -2)$.

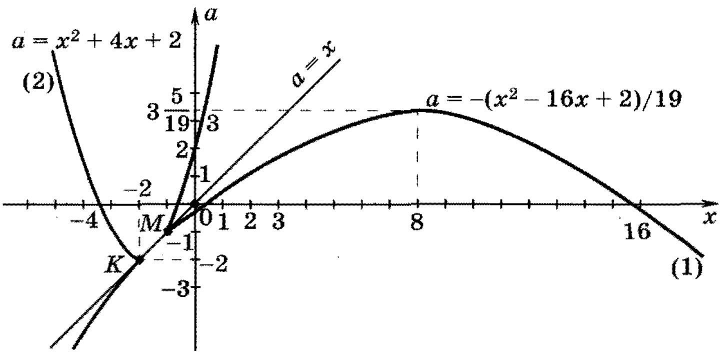


Рис. 212

Рассмотрим различные прямые $a = m$, где $m \in \mathrm{R}$.

$a = 3\dfrac{5}{19}$ — ордината вершины параболы, заданной уравнением (1).

Ответ. 1) Если $a \in (-\infty; -1) \cup \left(3\dfrac{5}{19}; +\infty\right)$, то уравнение имеет два корня.

2) Если $a = -1$ или $a = 3\dfrac{5}{19}$, то уравнение имеет три корня.

3) Если $a \in \left(-1; 3\dfrac{5}{19}\right)$, то уравнение имеет четыре корня.

№ 5. Решите уравнение $2x^4 - x^3 - 3ax^2 + ax + a^2 = 0$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

Перепишем приведенное уравнение в виде $a^2 - (3x^2 - x)a + 2x^4 - x^3 = 0$. Решаем его как квадратное относительно a.

Получим $\left[\begin{array}{l} a = 2x^2 - x, \\ a = x^2. \end{array}\right.$

Остается решить совокупность двух квадратных уравнений с параметром a:

$$\left[\begin{array}{l} 2x^2 - x - a = 0, \\ x^2 - a = 0. \end{array}\right.$$

Решим каждое уравнение отдельно и сведем на координатной прямой параметра результаты решений (рис. 213).

(1): $2x^2 - x - a = 0$, $D = 1 + 8a$.

1) $a < -1/8$. Это уравнение не имеет действительных корней. ▶1

2) $a = -1/8$; $(4x - 1)^2 = 0$; $x_{1,\,2} = 1/4$. ▶2

3) $a > -1/8$; $x_{1,\,2} = (1 \pm \sqrt{1 + 8a})/4$. ▶3

(2): $x^2 = a$.

1) Если $a < 0$, то действительных корней нет. ▶4

2) Если $a = 0$, то $x_{3,\,4} = 0$. ▶5

3) Если $a > 0$, то $x_{3,\,4} = \pm\sqrt{a}$. ▶6

Сводим все решения на одну ось. ▶7

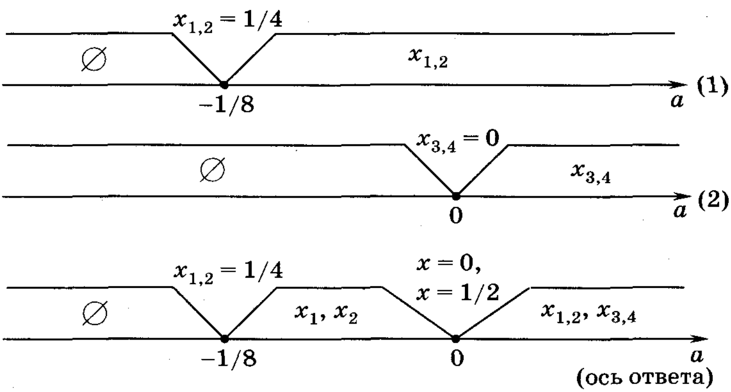


Рис. 213

<u>Ответ</u>. 1) Если $a \subset (0; +\infty)$, то

$$x_{1,\,2} = (1 \pm \sqrt{1 + 8a})/4;\ x_{3,\,4} = \pm\sqrt{a}.$$

2) Если $a \in [-1/8; 0)]$, то

$x_{1,2} = (1 \pm \sqrt{1+8a})/4$.

3) Если $a \in (-\infty; -1/8)$, то действительных корней нет.

№ 6. При каких значениях параметра b уравнение $\frac{x^2 - bx + b - 1}{x^2 - 3|x| + 2} = 0$ имеет единственное решение?

Решение.

ООУ: $\begin{cases} x^2 - 3|x| + 2 \neq 0, \\ b \in \mathrm{R}. \end{cases}$ $\begin{cases} b \in \mathrm{R}, \\ x \neq -2, \\ x \neq -1, \\ x \neq 1, \\ x \neq 2. \end{cases}$

Решим уравнение $x^2 - bx + b - 1 = 0$.

$\mathrm{D} = (b-2)^2$, $\mathrm{D} \geqslant 0$.

1) $\mathrm{D} = 0$, $b = 2$: $x_{1,2} = 1$. Но $x = 1$ не входит в ООУ. Решений нет.

2) $\mathrm{D} > 0$, $b \neq 2$: $x_1 = b - 1$; $x_2 = 1$, $x_2 \notin$ ООУ.

Исследование.

а) $\begin{cases} x_1 = b - 1, \\ b - 1 \neq -2, \\ b - 1 \neq -1, \\ b - 1 \neq 1, \\ b - 1 \neq 2, \\ b \neq 2; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = b - 1, \\ b \neq -1, \\ b \neq 0, \\ b \neq 2, \\ b \neq 3. \end{cases}$

б) Если $b = -1$, $b = 0$, $b = 2$, $b = 3$, то решений нет.

Ответ. $b \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 2) \cup (2; 3) \cup (3; +\infty)$.

№ 7. При каких значениях параметра a уравнение $(x^2 - 2x - a^2 + 1)(a + 3 - |x + 1|) = 0$ имеет 3 корня?

Решение.

Исходное уравнение равносильно совокупности:

$$\left[\begin{array}{ll} x^2 - 2x - a^2 + 1 = 0, & (1) \\ |x+1| = a + 3. & (2) \end{array}\right.$$

Возможны три случая: либо уравнение (1) имеет два корня, а уравнение (2) — один корень; либо уравнение (1) имеет один корень, а уравнение (2) — два корня; либо каждое уравнение имеет по два корня, два из которых совпадают.

Рассмотрим уравнение $x^2 - 2x - a^2 + 1 = 0$.

$D_1 = a^2$, $D_1 \geqslant 0$ при любых $a \in R$.

1) Если $a = 0$, то $D_1 = 0$. Первое уравнение имеет один корень. Второе уравнение примет вид $|x+1| = 3$. Оно имеет два корня. $a = 0$ удовлетворяет условию.
2) Если $a \neq 0$, то $D_1 > 0$. Первое уравнение имеет два корня. Уравнение (2) имеет один корень при $a = -3$.
3) Уравнение (1) имеет два корня $x_1 = 1 - a$, $x_2 = 1 + a$, если $a \neq 0$.

   Уравнение (2) имеет два корня $x_3 = a + 2$, $x_4 = -a - 4$, если $a > -3$.

   $x_1 = x_3$; тогда $1 - a = a + 2$, $a = -0{,}5$;
   $-0{,}5 \in (-3; 0) \cup (0; +\infty)$.

   $x_1 = x_4$; тогда $1 - a = -a - 4$. Решений нет.

   $x_2 = x_3$; тогда $1 + a = a + 2$. Решений нет.

   $x_2 = x_4$; тогда $1 + a = -a - 4$, $a = -2{,}5$;
   $-2{,}5 \in (-3; 0) \cup (0; +\infty)$.

Ответ. $a = -3$, $a = -2{,}5$, $a = -0{,}5$, $a = 0$.

Замечание

Вопрос о числе корней уравнения в зависимости от параметра a можно решить и графически в системе координат (xOy) или (xOa).

$$\left[\begin{array}{l} x^2 - 2x + 1 = a^2, \\ |x+1| - 3 = a; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} (x-1)^2 = a^2, \\ |x+1| - 3 = a; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x - 1 = a, \\ 1 - x = a, \\ |x+1| - 3 = a. \end{array}\right.$$

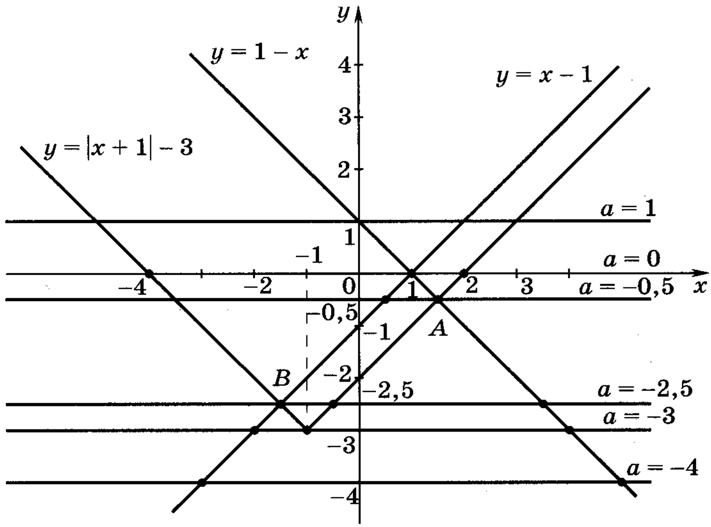


Рис. 214

Построим в системе координат (xOy) графики функций $y = x - 1$, $y = 1 - x$, $y = |x + 1| - 3$ и семейство прямых $y = a$ (рис. 214).

Из рисунка видно, что при $a < -3$ уравнение имеет два корня. Найдем координаты точки A:

$x - 2 = 1 - x$, $x = 1{,}5$; $y = -0{,}5$.

$A(1{,}5; -0{,}5)$.

Координаты точки B:

$-x - 4 = x - 1$, $x = -1{,}5$; $y = -2{,}5$.

$B(-1{,}5; -2{,}5)$.

При $a = -3$, $a = -2{,}5$, $a = -0{,}5$, $a = 0$ уравнение имеет три корня.

№ 8. Найдите все значения p, при каждом из которых число различных корней уравнения $\dfrac{(2 - 3p)x + 7 + 6p}{x - 2} = p^2 + 2$ (1) равно числу различных корней уравнения $(4 - 3p)x^2 - (p - 4)x + 1 = 0$ (2). (ЕГЭ 2005 г.)

<u>Решение</u>.

Решаем уравнение (1):

$$\frac{(2-3p)x+7+6p}{x-2}=p^2+2.$$

ООУ: $\begin{cases} p \in \mathrm{R}, \\ x \neq 2. \end{cases}$

$(2-3p)x+7+6p=x(p^2+2)-2p^2-4,$

$(p^2+3p)x=2p^2+6p+11:$

1) $p=0$; тогда $0 \cdot x=11$. Решений нет.

2) $p=-3$; тогда $0 \cdot x=11$. Решений нет.

3) $p \neq 0, p \neq -3$; тогда $x_1=\dfrac{2p^2+6p+11}{p^2+3p}$.

<u>Исследование</u>.

$$\begin{cases} \dfrac{2p^2+6p+11}{p^2+3p} \neq 2, \\ p \neq 0, p \neq -3; \end{cases} \qquad \begin{cases} 11 \neq 0, \\ p \neq 0, p \neq -3. \end{cases}$$

Итак, если $p \neq 0$, $p \neq -3$, то уравнение (1) имеет единственный корень $x_1=\dfrac{2p^2+6p+11}{p^2+3p}$. ▶1

Рассматриваем уравнение (2):

$(4-3p)x^2-(p-4)x+1=0.$

ООУ: $\begin{cases} p \in \mathrm{R}, \\ x \neq 2. \end{cases}$

1) $p=4/3$; тогда $8x/3=-1$, $x=-3/8$. ▶2

2) $p \neq 4/3$. Тогда дискриминант квадратного уравнения (2): $\mathrm{D}=p^2+4p$.

Рассмотрим случаи:

$\mathrm{D}<0$; $p^2+4p<0$, $-4<p<0$. В этом случае действительных корней нет. ▶3

$\mathrm{D}=0$; $p=0$ или $p=-4$.

Если $p=0$, то $x=-1/2$.

Если $p=-4$, то $x=-1/4$. ▶4

$D > 0$: $\left[\begin{array}{l} p < -4, \\ p > 0. \end{array}\right.$

Уравнение (2) имеет два различных корня x_2 и x_3. (▶5)

Сравнив оси (1) и (2) на рисунке 215, получаем ответ.

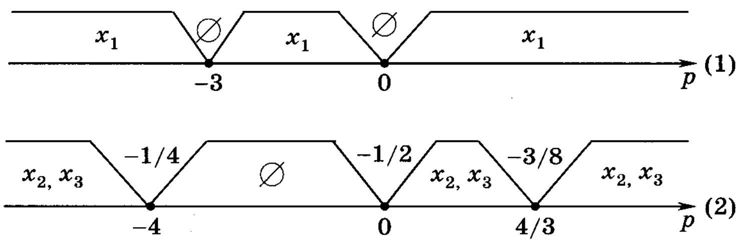


Рис. 215

Ответ. $-4; -3; 4/3$.

№ 9. Найдите все значения параметра p, при которых уравнение $(2p + 3)x^2 + (p + 3)x + 1 = 0$ имеет хотя бы один корень, и число различных корней этого уравнения равно числу различных корней уравнения $\dfrac{2x+1}{21-p} = \dfrac{1}{\sqrt{x-3}+3}$. (ЕГЭ 2005 г.)

Решение.

Решаем сначала уравнение $(2p + 3)x^2 + (p + 3)x + 1 = 0$ (1).

1) $2p + 3 = 0$, $p = -1{,}5$; тогда $3x/2 + 1 = 0$, $x = -2/3$. При $p = -1{,}5$ уравнение (1) имеет один корень, равный $-2/3$.
2) $p \neq -1{,}5$; $D \geqslant 0$, $(p + 3)^2 - 4(2p + 3) \geqslant 0$.
$p^2 + 6p + 9 - 8p - 12 \geqslant 0$, $p^2 - 2p - 3 \geqslant 0$,
$\left[\begin{array}{l} p \geqslant 3, \\ p \leqslant -1. \end{array}\right.$ Результат представлен на рисунке 216.

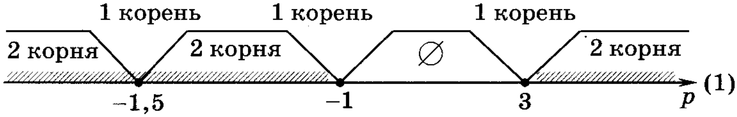


Рис. 216

Теперь рассмотрим уравнение

$\frac{2x+1}{21-p} = \frac{1}{\sqrt{x-3}+3}$ (2).

ООУ: $\begin{cases} x \geqslant 3, \\ p \neq 21. \end{cases}$

Заметим, что $\frac{1}{\sqrt{x-3}+3} > 0$. Значит, $\frac{2x+1}{21-p} > 0$ при $x \geqslant 3$. Тогда $p < 21$. Итак, уравнение (2) может иметь корни, если $p < 21$.

Введем две функции $y = \frac{1}{\sqrt{x-3}+3}$ и $y = \frac{2x+1}{21-p}$.

Первая из них убывает, а вторая возрастает при $\begin{cases} x \geqslant 3, \\ p < 21. \end{cases}$ Поэтому уравнение (2) может иметь не более одного корня.

Построим схематично график функции $y = \frac{1}{\sqrt{x-3}+3}$, а затем несколько прямых семейства, заданных уравнением $y = \frac{2x+1}{21-p}$ (рис. 217).

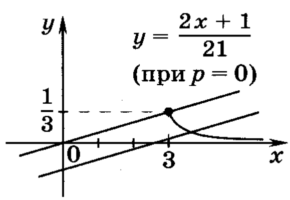


Рис. 217

Прямая с уравнением $y = \dfrac{2x+1}{21-p}$, $x \geqslant 3$, $p < 21$, пересечет график первой функции, если ее значение при $x = 3$ меньше или равно $1/3$; тогда $\dfrac{7}{21-p} \leqslant \dfrac{1}{3}$, $p \leqslant 0$. Нас интересуют только два значения p: $-1{,}5$ и -1. При каждом из них оба уравнения имеют по одному корню (рис. 218).

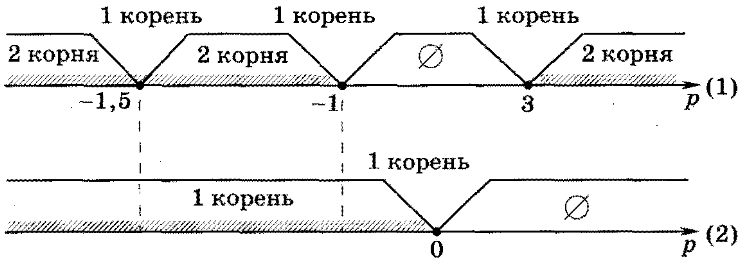


Рис. 218

Ответ. $-1{,}5$; -1.

№ 10. Решите систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{2ax - y - a^2}{x+2} = 0, \\ x^2 - y = 16. \end{cases}$

Решение (рис. 219).

ООС: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \neq -2, \\ y \in \mathrm{R}. \end{cases}$

$\begin{cases} 2ax - y - a^2 = 0, \\ x^2 - y = 16; \end{cases}$ $\quad\begin{cases} y = 2ax - a^2, \\ x^2 - 2ax + a^2 - 16 = 0. \end{cases}$

Решим уравнение $x^2 - 2ax + a^2 - 16 = 0$.

$D_1 = 16$, $x_1 = a - 4$, $x_2 = a + 4$.

Исследование.

1) $\begin{cases} x_1 = a - 4, \\ y_1 = a^2 - 8a, \\ a - 4 \neq -2, \end{cases}$ $\quad\begin{cases} x_1 = a - 4, \\ y_1 = a^2 - 8a, \\ a \neq 2. \end{cases}$

$$2)\begin{cases}x_2 = a + 4,\\ y_2 = a^2 + 8a,\\ a + 4 \neq -2;\end{cases} \qquad \begin{cases}x_2 = a + 4,\\ y_2 = a^2 + 8a,\\ a \neq -6.\end{cases}$$

3) Если $a = 2$, то $x_2 = 6$, $y_2 = 20$.

4) Если $a = -6$, то $x_1 = -10$, $y_1 = 84$.

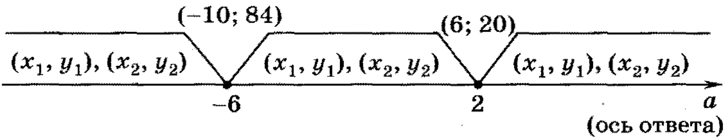


Рис. 219

Ответ. 1) Если $a = -6$, то система имеет единственное решение $(-10; 84)$.

2) Если $a = 2$, то система имеет единственное решение $(6; 20)$.

3) Если $a \neq -6$, $a \neq 2$, то система имеет два решения $(a - 4;\ a^2 - 8a)$, $(a + 4;\ a^2 + 8a)$.

№ 11. При каких значениях a система

$$\begin{cases}3y + 2 + xy = 0,\\ x(y + 1 - a) + y(2a - 3) + a + 3 = 0\end{cases}$$

имеет единственное решение?

Решение.

$$\text{ООС: } \begin{cases}a \in \mathrm{R},\\ x \in \mathrm{R},\\ y \in \mathrm{R}.\end{cases}$$

Из первого уравнения системы выразим y через x: $y = -2/(3 + x)$, если $x \neq -3$. При $x = -3$ система не имеет решений.

Второе уравнение после подстановки примет вид $x(-2/(x + 3) + 1 - a) - 2(2a - 3)/(x + 3) + a + 3 = 0$.

Получим уравнение-следствие

$$(1 - a)x^2 - 2(a - 2)x - a + 15 = 0. \qquad (1)$$

Система уравнений будет иметь единственное решение, если в уравнении (1) выполняется одно из трех условий:

1) $1 - a = 0$; 2) $D_1 = 0$; 3) один из корней равен -3.

Рассмотрим эти случаи.

1) $a = 1$; $2x + 14 = 0$, $x = -7$; $y = 1/2$.

2) $D_1 = (a - 2)^2 + (1 - a)(a - 15) = 12a - 11$.
$D_1 = 0$, если $a = 11/12$.

3) Подставим вместо x число -3 в уравнение (1):
$(1 - a) \cdot 9 + 2(a - 2) \cdot 3 - a + 15 = 0$, $4a = 12$,
$a = 3$.

Ответ. $a = 11/12$, $a = 1$, $a = 3$.

№ 12. При каких значениях b система уравнений

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ (bx - y)(x + 2b) = 0 \end{cases}$ имеет три решения?

Решение.

ООС: $\begin{cases} b \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}, \\ y \in \mathrm{R}. \end{cases}$

Пусть $b = 0$. Тогда из второго уравнения системы имеем, что либо $y = 0$, либо $x = 0$, либо они равны нулю одновременно. В последнем случае система решений не имеет. Если же $x = 0$ или $y = 0$, то система имеет два решения. Следовательно, $b = 0$ не удовлетворяет условию задания.

Пусть теперь $b \neq 0$.

Решаем графически в системе координат (xOy). Графиком уравнения $x^2 + y^2 = 9$ является окружность с центром в начале координат радиуса $r = 3$ (рис. 220). Второе уравнение системы равносильно совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l} bx - y = 0, \\ x + 2b = 0. \end{array}\right.$$

Покажем, как должны располагаться окружность и прямые, заданные уравнениями совокупности, чтобы данная система уравнений имела три решения (см. рис. 220).

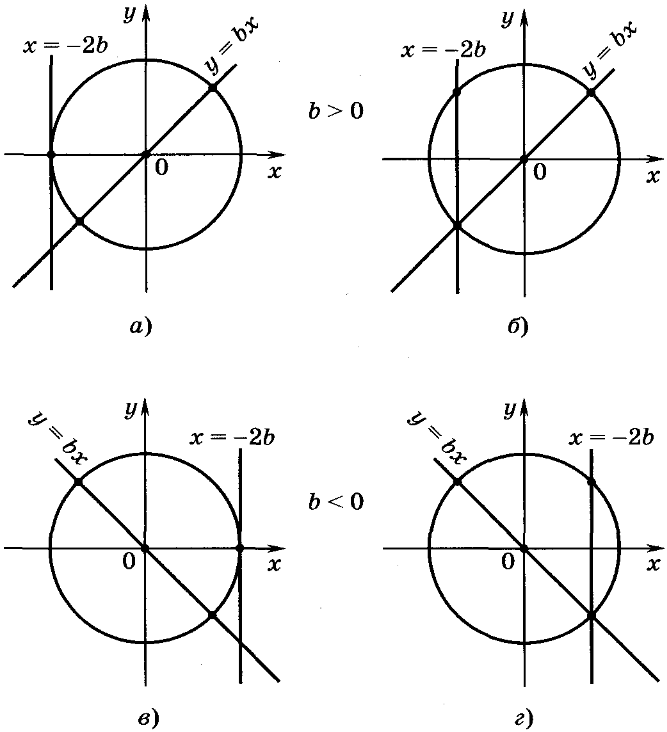


Рис. 220

В случае (*а*): $-2b = -3$, откуда $b = 3/2$.

Аналогично в случае (*в*): $b = -3/2$.

В случае (*б*) должна быть совместна система уравнений:

$$\begin{cases} x = -2b, \\ y = bx, \\ x^2 + y^2 = 9, \end{cases} \quad \text{где } b > 0.$$

Получим уравнение $4b^4 + 4b^2 = 9$. Пусть $b^2 = t$, где $t > 0$. Квадратное уравнение $4t^2 + 4t - 9 = 0$ имеет только один положительный корень

$t = (-1 + \sqrt{10})/2$. Тогда $b = \sqrt{(-1 + \sqrt{10})/2}$.

В случае (*г*) получаем $b = -\sqrt{(-1 + \sqrt{10})/2}$.

Ответ. $b = \pm 3/2,\ b = \pm \sqrt{(-1 + \sqrt{10})/2}$.

№ 13. Решите систему $\begin{cases} x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0, \\ x^2 - 3x \geqslant 0. \end{cases}$

Решение.

1 способ.

Решим сначала графически в системе координат (aOx). Представим уравнение системы в виде

$$(x - a - 1)(x - a + 1) = 0.$$

Строим прямые с уравнениями $x = a + 1$ и $x = a - 1$ (рис. 221). Неравенство $x \cdot (x - 3) \geqslant 0$ задает в плоскости два множества точек: 1) расположенных не ниже прямой $x = 3$; 2) не выше прямой $x = 0$.

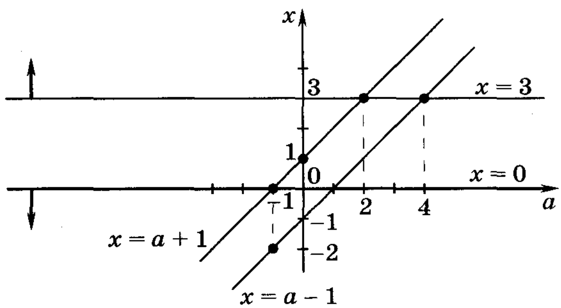


Рис. 221

Ответ. 1) Если $a \in (-\infty; -1] \cup [4; +\infty)$, то $x_1 = a - 1$; $x_2 = a + 1$.
2) Если $a \in (-1; 1]$, то $x_1 = a - 1$.
3) Если $a \in (1; 2)$, то решений нет.
4) Если $a \in [2; 4)$, то $x_2 = a + 1$.

2 способ.

А теперь решим систему аналитически.

Воспользуемся тремя координатными прямыми для параметра a: на первой оси покажем, когда $x_1 = a - 1$ является корнем, на второй — x_2, а на третьей оси сведем эти два случая (рис. 222).

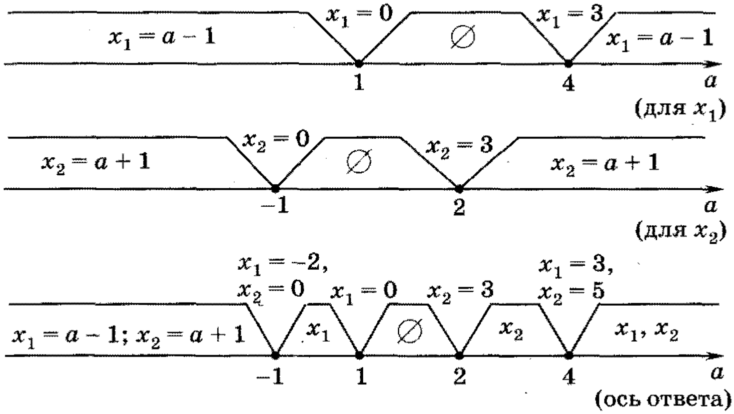


Рис. 222

Пусть $x_1 = a - 1$. Подставим $a - 1$ вместо x в неравенство $x^2 - 3x \geqslant 0$:

$(a - 1)(a - 4) \geqslant 0$ (рис. 223).

Рис. 223

Если $a = 1$, то $x_1 = 0$.

Если $a = 4$, то $x_1 = 3$.

Пусть $x_1 = a + 1$. Тогда получим неравенство

$(a + 1)(a - 2) \geqslant 0$ (рис. 224).

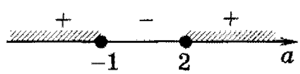


Рис. 224

Если $a = -1$, то $x_2 = 0$.

Если $a = 2$, то $x_2 = 3$.

№ 14. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых существует только одно значение x, удовлетворяющее системе уравнений

$$\begin{cases} |x^2 - 5x + 4| - 9x^2 - 5x + 4 + 10x|x| = 0, \\ x^2 - 2(a - 1)x + a(a - 2) = 0. \end{cases}$$

<u>Решение</u>.

ООС: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

Уравнение $x^2 - 2(a - 1)x + a(a - 2) = 0$ имеет два корня $x_1 = a - 2$ и $x_2 = a$ при любом $a \in \mathrm{R}$.

Рассмотрим функцию $y = |x^2 - 5x + 4| - 9x^2 - 5x + 4 + 10x|x|$.

Раскроем модули. $x = 0$, $x = 1$, $x = 4$ — характерные точки для подмодульных выражений (рис. 225).

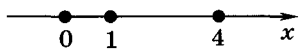


Рис. 225

$$y = \begin{cases} 2(x^2 - 5x + 4), \text{ если } x \in [0; 1] \cup [4; +\infty); \\ 0, \text{ если } x \in [1;4]; \\ -18x^2 - 10x + 8, \text{ если } x \in (-\infty; 0]. \end{cases}$$

Построим график этой функции (рис. 226).

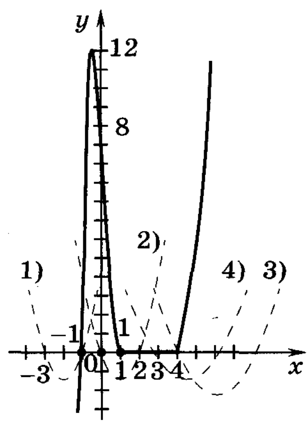


Рис. 226

Запишем множество решений первого уравнения: $\{-1\} \cup [1; 4]$.

$y = x^2 - 2(a-1)x + a(a-2) = 0$ задает семейство парабол. Нас интересуют только те из этих парабол, которые с множеством решений первого уравнения имеют только одну общую точку.

На рисунке 226 представлены четыре возможных случая расположения парабол. Рассмотрим их.

1) $a = -1$.

2) $1 < a < 3$.

3) $a - 2 = 4$, т. е. $a = 6$.

4) $2 < a - 2 < 4$; $4 < a < 6$.

<u>Ответ</u>. $a \in \{-1\} \cup (1; 3) \cup (4; 6]$.

№ 15. Найдите все p, при каждом из которых число корней уравнения

$$\frac{(7p+3)x + 35p - 2}{x+5} = p^2 + 3 \qquad (1)$$

равно числу корней уравнения

$$(p+3)x^2 + 2x(p+9) + 27 = 0. \qquad (2)$$

(ЕГЭ 2004 г.)

<u>Решение</u>.

Рассмотрим уравнение (1).

$$\text{ООУ: } \begin{cases} p \in \mathrm{R}, \\ x \neq -5. \end{cases}$$

Освободившись от знаменателя, перейдем к уравнению-следствию

$(7p + 3)\,x + 35p - 2 = x(p^2 + 3) + 5p^2 + 15;$

$p(7 - p) \cdot x = 5p^2 - 35p + 17.$

Рассмотрим ряд случаев:

а) $p = 0$: $0 \cdot x = 17$. Решений нет; (▶1)

б) $p = 7$: $0 \cdot x = 17$. Решений нет; (▶2)

в) $p \neq 0, p \neq 7$: $x_1 = (5p^2 - 35p + 17)/(7p - p^2)$.

Исследование.

$$\begin{cases} x_1 = (5p^2 - 35p + 17)/(7p - p^2), \\ p \neq 0, p \neq 7, \\ (5p^2 - 35p + 17)/(7p - p^2) \neq -5; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = (5p^2 - 35p + 17)/(7p - p^2), \\ p \neq 0, p \neq 7, \\ 5p^2 - 35p + 17 \neq -35p + 5p^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = (5p^2 - 35p + 17)/(7p - p^2) \text{ — один корень}, \\ p \neq 0, p \neq 7 \text{ (ось (1) на рис. 227).} \end{cases}$$ ▶3

Рассмотрим уравнение (2):

$(p + 3)x^2 + 2x(p + 9) + 27 = 0.$

ООУ: $\begin{cases} p \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

а) $p = -3$: $12x = -27$, $x = -9/4$ — один корень. ▶4

б) $p \neq -3$:

$D_1 = (p + 9)^2 - 27p - 81 = p^2 - 9p = p(p - 9).$

1) $D_1 < 0$: $0 < p < 9$. Уравнение (2) действительных решений не имеет. ▶5

2) $D_1 = 0$: 1) если $p = 0$, то $x = -3$ — один корень;

2) если $p = 9$, то $x = -3/2$ — один корень. ▶6

3) $D > 0$: $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} p > 9, \\ p < 0, \end{array}\right. \\ p \neq -3. \end{cases}$

Уравнение (2) имеет два корня. ▶7

Заполним ось (2) и поместим под ней ось (1) (рис. 227).

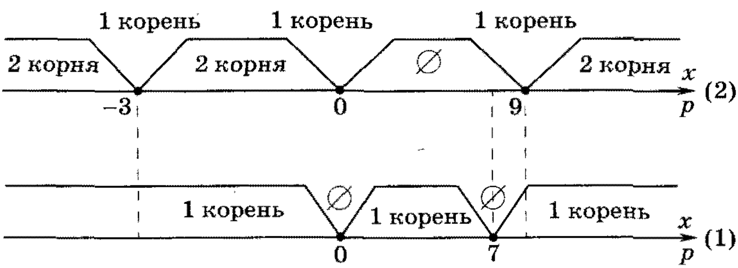


Рис. 227

Ответ. -3; 7; 9.

Замечание

При $p = 7$ и первое, и второе уравнения корней не имеют, т. е. их число равно 0.

Уравнения для самостоятельного решения

1) Решите уравнение $x^2 - |x| + a = 0$ аналитически и графически. (▶1)
2) Сколько решений в зависимости от значений параметра a имеет уравнение $(x + 1) \cdot |x + 1| = 2a$? (▶2)
3) Решите уравнение
$3x^4 - 2x^3 - 8x^2a + 4ax + 4a^2 = 0$. (▶3)
4) При каких значениях параметра p уравнение
$\dfrac{x^2 - 4px + 4p^2 - 4}{x^2 - 7|x| + 6} = 0$ не имеет решений? (▶4)
5) Сколько корней в зависимости от значений параметра a имеет приведенное уравнение
$(x^2 - 2x - a^2 + 1) \cdot (a + 3 - |x + 1|) = 0$? (▶5)
6) Определите количество корней уравнения $x^2 + 2|x - a| - 6x + 2 + 9a = 0$ в зависимости от значений параметра a. (▶6)
7) Решите систему уравнений $\begin{cases} x + y = 9, \\ x^2 + y^2 = a. \end{cases}$ (▶7)
8) При каких значениях параметра a система уравнений
$$\begin{cases} axy + x - y + 3/2 = 0, \\ x + 2y + xy + 1 = 0 \end{cases}$$
имеет единственное решение? (▶8)
9) При каких значениях параметра a система уравнений
$$\begin{cases} x - y = a(1 - xy), \\ 2 + x + y + xy = 0 \end{cases}$$
имеет единственное решение? (▶9)
10) Сколько решений в зависимости от значений a имеет система уравнений
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ |x| = y + a? \end{cases}$$ (▶10)

3. Квадратные неравенства с параметром и к ним сводимые

3.1. Подготовительные неравенства и их системы

Решите неравенства.

№ 1. $x^2 - 3x + 2 > 0$; $x^2 - 3x + 2 < 0$; $x^2 - 4x + 4 > 0$; $x^2 - 4x + 4 \geqslant 0$; $x^2 - 4x + 4 < 0$; $x^2 - 4x + 4 \leqslant 0$; $x^2 - x + 2 > 0$; $x^2 - x + 2 \leqslant 0$.

№ 2. $x^2 - 9 > 0$; $x^2 - 3 \leqslant 0$; $x^2 + 9 > 0$; $x^2 + 9 < 0$; $x^2 + a^2 > 0$; $x^2 + a^2 \leqslant 0$; $2x^2 - 8x \geqslant 0$; $x^2 - 3x < 0$; $x^2 > 0$; $x^2 \geqslant 0$; $x^2 < 0$; $x^2 \leqslant 0$; $(1 + a^2)x^2 \geqslant 0$; $(1 + a^2)x^2 < 0$.

№ 3. $0 \cdot x^2 < 3$; $0 \cdot x^2 > 6$; $0 \cdot x^2 - 4 \geqslant 0$; $0 \cdot x^2 \geqslant 0$; $0 \cdot x^2 > 0$; $0 \cdot x^2 \leqslant 0$; $0 \cdot x^2 < 0$; $0 \cdot x^2 > -2$; $0 \cdot x^2 \leqslant -6$; $ax^2 \geqslant 0$; $ax^2 < 0$; $0 \cdot x^2 \geqslant a^2$; $0 \cdot x^2 > a^2$; $0 \cdot x^2 \leqslant a^2$; $0 \cdot x^2 < a^2$; $0 \cdot x^2 \geqslant 3a^2 + 1$; $0 \cdot x^2 > 3a^2 + 1$; $0 \cdot x^2 \leqslant 3a^2 + 1$; $0 \cdot x^2 < 3a^2 + 1$; $0 \cdot x^2 \geqslant -3a^2 - 1$; $0 \cdot x^2 > -3a^2 - 1$; $0 \cdot x^2 \leqslant -3a^2 - 1$; $0 \cdot x^2 < -3a^2 - 1$; $0 \cdot x^2 \geqslant (a + 2)^2$; $0 \cdot x^2 > (a + 2)^2$; $0 \cdot x^2 < 4a + 1$; $0 \cdot x^2 > b^2 - 5b + 4$; $0 \cdot x^2 \geqslant |a|$; $0 \cdot x^2 \leqslant |a|$; $0 \cdot x^2 < (a + 2)^2/|a|$.

№ 4. $(x - 1)(x + 4) \leqslant 0$; $(3x - 2)(4x - 5) > 0$; $x(6 - x) < 0$; $(1 - 3x)(2 + 5x) \leqslant 0$; $(x - 1)^2 > 0$; $(5x + 2)^2 \leqslant 0$.

№ 5. Решите неравенство $(x - 1)(x - a) > 0$.

Решение.

ООН: $\begin{cases} a \in \mathbb{R}, \\ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$

Воспользуемся методом интервалов. «Граничные» точки интервалов: 1 и a. Анализируем, какой знак имеет выражение на каждом из интервалов.

Рассмотрим возможные случаи.

1) $a = 1$, т. е. «граничные» точки совпадают. Неравенство примет вид $(x - 1)^2 > 0$, откуда $x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$. (▶1)
2) $a > 1$,
$x \in (-\infty; 1) \cup (a; +\infty)$ (рис. 228). (▶2)
3) $a < 1$,
$x \in (-\infty; a) \cup (1; +\infty)$ (рис. 229). (▶3)

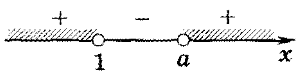


Рис. 228

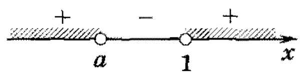


Рис. 229

Ответ. 1) Если $a = 1$, то $x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.
2) Если $a > 1$, то $x \in (-\infty; 1) \cup (a; +\infty)$.
3) Если $a < 1$, то $x \in (-\infty; a) \cup (1; +\infty)$.

Проиллюстрируем ответ в системе координат (aOx) (рис. 230).

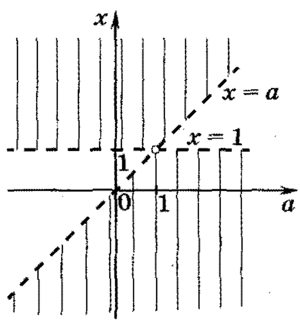


Рис. 230

№ 6. Решите неравенство $(2x + 3)(x + 3b) \leqslant 0$.

Решение.

ООН: $\begin{cases} b \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

Рассмотрим возможные случаи взаиморасположения точек $-3/2$ и $-3b$.

1) $-3b = -3/2$, т. е. $b = 1/2$. Неравенство примет вид $(x + 3/2)^2 \leqslant 0$, откуда $x = -3/2$. ▶1
2) $-3b > -3/2$, т. е. $b < 1/2$.
   $x \in [-3/2; -3b]$ (рис. 231). ▶2
3) $-3b < -3/2$, т. е. $b > 1/2$.
   $x \in [-3b; -3/2]$ (рис. 232). ▶3

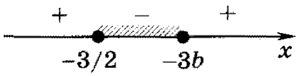


Рис. 231

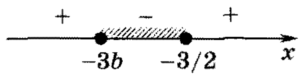


Рис. 232

Заполним ось ответа (рис. 233).

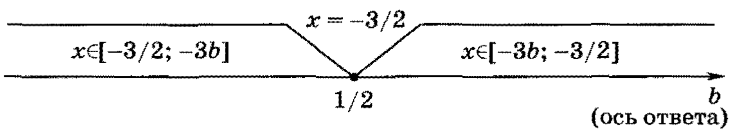


Рис. 233

№ 7. Решите неравенство $ax^2 > a$.

Решение.

ООН: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

$ax^2 - a > 0$, $a(x - 1)(x + 1) > 0$.

Рассмотрим три случая.

1) $a = 0$. Неравенство примет вид $0 \cdot x > 0$. Решений нет. ▶1
2) $a > 0$. Разделим обе части неравенства на a (знак неравенства при этом сохраняется): $(x - 1)(x + 1) > 0$.
   $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ (рис. 234). ▶2

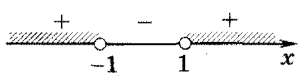


Рис. 234

3) $a < 0$. Разделим обе части неравенства на a, поменяв при этом знак «$>$» на «$<$»: $(x-1)(x+1) < 0$, откуда $x \in (-1; 1)$. (▸3)

Ответ. 1) Если $a = 0$, решений нет.
2) Если $a > 0$, то $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.
3) Если $a < 0$, то $x \in (-1; 1)$.

№ 8. Решите неравенство $|m+1|x^2 \leqslant 4m+4$.

Решение (рис. 235).

ООН: $\begin{cases} m \in \mathbb{R}, \\ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$

$$|m+1| = \begin{cases} m+1, & m > -1, \\ 0, & m = -1, \\ -m-1, & m < -1. \end{cases}$$

Рассмотрим три случая.

1) $m > -1$; $(m+1)x^2 \leqslant 4m+4$.
Разделим обе части неравенства на $m+1$.
Получим $x^2 \leqslant 4$, откуда $x \in [-2; 2]$. (▸1)

2) $m = -1$. Неравенство примет вид $0 \cdot x^2 \leqslant 0$; $x \in \mathbb{R}$. (▸2)

3) $m < -1$; $-(m+1)x^2 \leqslant 4m+4$. Разделим обе части неравенства на $-m-1$; тогда $x^2 \leqslant -4$. Решений нет. (▸3)

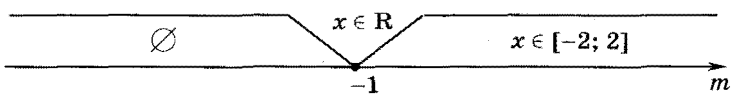


Рис. 235

Проиллюстрируем ответ в системе координат (mOx) (рис. 236).

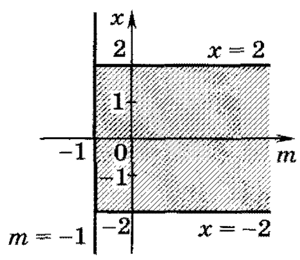


Рис. 236

№ 9. Решите неравенство $x^2 - 4a^2 \geqslant 0$.

Решение.

ООН: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

$(x - 2a)(x + 2a) \geqslant 0$. Сравним $-2a$ и $2a$.

1) Пусть $-2a = 2a$, т. е. $a = 0$. Неравенство примет вид $x^2 \geqslant 0$, откуда $x \in \mathrm{R}$.
2) Пусть $-2a < 2a$, $a > 0$.
$x \in (-\infty; -2a] \cup [2a; +\infty)$ (рис. 237).
3) Пусть $-2a > 2a$, $a < 0$.
$x \in (-\infty; 2a] \cup [-2a; +\infty)$ (рис. 238).

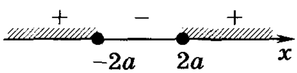


Рис. 237

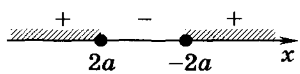


Рис. 238

Ответ. 1) Если $a = 0$, то $x \in \mathrm{R}$.
2) Если $a > 0$, то $x \in (-\infty; -2a] \cup [2a; +\infty)$.
3) Если $a < 0$, то $x \in (-\infty; 2a] \cup [-2a; +\infty)$.

№ 10. Решите неравенство $2x^2 - 6nx \leqslant 0$.

Решение.

ООН: $\begin{cases} n \in \mathrm{R}. \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

$x(x - 3n) \leqslant 0$. Сравним 0 и $3n$.

1) Пусть $3n = 0$, т. е. $n = 0$. Тогда $x^2 \leqslant 0$, $x = 0$.
2) Пусть $3n > 0$, т. е. $n > 0$. Тогда $x \in [0; 3n]$ (рис. 239).
3) Пусть $3n < 0$, т. е. $n < 0$. Тогда $x \in [3n; 0]$ (рис. 240).

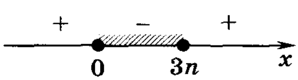


Рис. 239

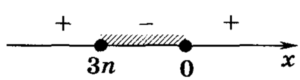


Рис. 240

Ответ. 1) Если $n = 0$, то $x = 0$.
2) Если $n > 0$, то $x \in [0; 3n]$.
3) Если $n < 0$, то $x \in [3n; 0]$.

Проиллюстрируем ответ в системе координат (nOx) (рис. 241).

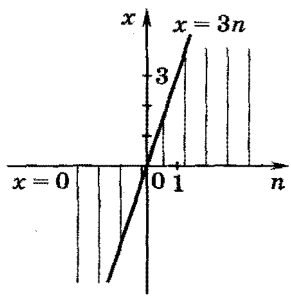


Рис. 241

№ 11. При каком значении параметра a решением неравенства $(x + 2a)(x - 1) \leqslant 0$ является промежуток $[-10; 1]$?

Решение.

ООН: $\begin{cases} a \in \mathbb{R}, \\ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$

Решаем методом интервалов. Сначала найдем «граничные» точки: 1 и $-2a$.

1) Если $-2a = 1$, то $a = -1/2$.
Решаем неравенство $(x - 1)^2 \leqslant 0$; $x = 1$. ▶1
Следовательно, $a = -1/2$ не удовлетворяет условию.
2) Пусть $-2a > 1$, т. е. $a < -1/2$.
Тогда $x \in [1; -2a]$ (рис. 242). ▶2
3) Пусть $-2a < 1$, т. е. $a > -1/2$.
Тогда $x \in [-2a; 1]$ (рис. 243). ▶3
Если $a = 5$, то $x \in [-10; 1]$.

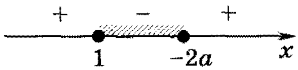


Рис. 242

Рис. 243

<u>Ответ.</u> $a = 5$.

№ 12. Решите систему неравенств $\begin{cases}(x+2)(3-x) \leqslant 0,\\ 2x + a < 0.\end{cases}$

<u>Решение.</u>

ООС: $\begin{cases}a \in \mathrm{R},\\ x \in \mathrm{R}.\end{cases}$

Решим каждое из неравенств системы.

$(x+2)(x-3) \geqslant 0$,

$x \in (-\infty; -2] \cup [3; +\infty)$ (рис. 244).

$2x + a < 0$, $x < -a/2$, $x \in (-\infty; -a/2)$ (рис. 245).

Рис. 244

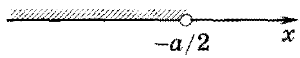


Рис. 245

Сравним числа -2 и 3 с выражением $-a/2$.

Рассмотрим несколько случаев.

1) $-a/2 < -2$; $a > 4$.

$x \in (-\infty; -a/2)$ (рис. 246).

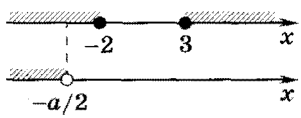


Рис. 246

2) $-a/2 = -2$; $a = 4$.

$x \in (-\infty; -2)$ (рис. 247).

3) $-2 < -a/2 < 3$; $-6 < a < 4$.

$x \in (-\infty; -2]$ (рис. 248).

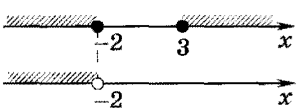


Рис. 247

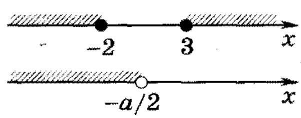


Рис. 248

4) $-a/2 = 3$; $a = -6$.
$x \in (-\infty; -2]$ (рис. 249).
5) $-a/2 > 3$; $a < -6$.
$x \in (-\infty; -2] \cup [3; -a/2)$ (рис. 250).

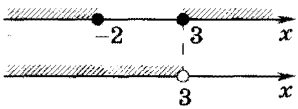


Рис. 249

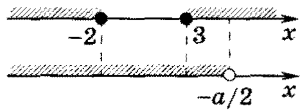


Рис. 250

Заполним ось ответа (рис. 251).

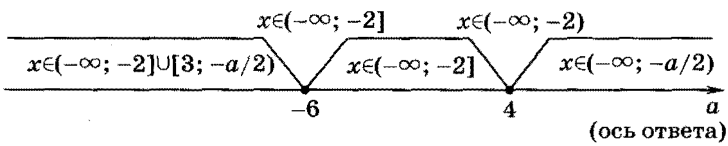


Рис. 251

№ 13. Решите систему неравенств
$$\begin{cases}(x - a - 1)(x + 1) \geqslant 0,\\ (x - a)^2 \leqslant 0.\end{cases}$$

Решение.

ООС: $\begin{cases}a \in \mathrm{R},\\ x \in \mathrm{R}.\end{cases}$

Решением второго неравенства является $x = a$. При этом первое неравенство примет вид $(a - a - 1)(a + 1) \geqslant 0$, откуда $a \leqslant -1$.

Ответ. 1) Если $a \leqslant -1$, то $x = a$.
2) Если $a > -1$, то решений нет.

№ 14. Решите неравенство $|x| \cdot (x - b - 1) \geqslant 0$.

Решение.

ООН: $\begin{cases}b \in \mathrm{R},\\ x \in \mathrm{R}.\end{cases}$

Так как $|x| \geqslant 0$, то данное неравенство равносильно совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} x = 0, \\ \begin{cases} x \neq 0, \\ x - b - 1 \geqslant 0; \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ \begin{cases} x \neq 0, \\ x \geqslant b + 1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Рассмотрим три случая.

1) $b + 1 = 0$, $b = -1$; тогда $x \geqslant 0$, т. е. $x \in [0; +\infty)$.

2) $b + 1 > 0$, $b > -1$; тогда $x \in \{0\} \cup [b + 1; +\infty)$ (рис. 252).

3) $b + 1 < 0$, $b < -1$; тогда $x \in [b + 1; +\infty)$ (рис. 253).

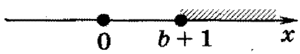


Рис. 252

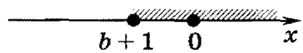


Рис. 253

Заполним ось ответа (рис. 254).

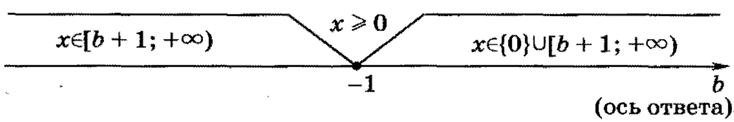


Рис. 254

Совокупность $\left[\begin{array}{l} x = 0, \\ \begin{cases} x \neq 0, \\ x \geqslant b + 1 \end{cases} \end{array}\right.$ можно было решить графически в системе координат (bOx) (рис. 255, 256).

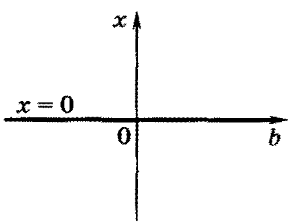


Рис. 255

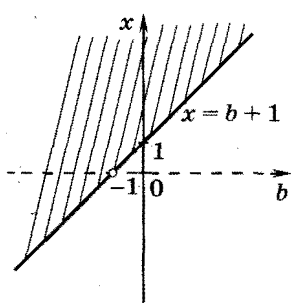


Рис. 256

«Наложив» первые два рисунка друг на друга, получим третий рисунок, с помощью которого легко получается ответ (рис. 257).

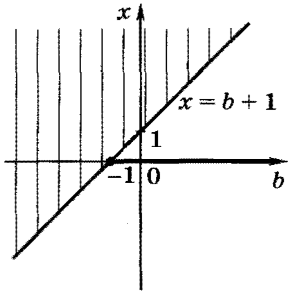


Рис. 257

Например, при $b = 0$ $x \in \{0\} \cup [1; +\infty)$.

Ответ. 1) Если $b \leqslant -1$, то $x \in [b + 1; +\infty)$.
2) Если $b > -1$, то $x \in \{0\} \cup [b + 1; +\infty)$.

Заметим, что совокупность также легко решается и в системах координат (xOy) и (xOb).

№ 15. При каких значениях параметра a неравенство $(x - 3a)(x + 3a) \leqslant 0$ является следствием неравенства $|x| \leqslant 3$?

Решение.

ООН: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

Для решения воспользуемся определением 8 из раздела «Основные понятия» в начале книги.
Решим каждое из неравенств.

$(x - 3a)(x + 3a) \leqslant 0$.

«Граничные» точки интервалов: $3a$ и $-3a$.
1) Если $a > 0$, то $x \in [-3a; 3a]$ (рис. 258).
2) Если $a = 0$, то $x = 0$.
3) Если $a < 0$, то $x \in [3a; -3a]$ (рис. 259).

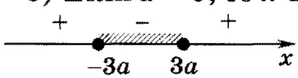


Рис. 258

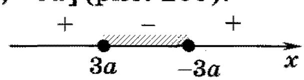


Рис. 259

$|x| \leqslant 3$, $x \in [-3; 3]$ (рис. 260).

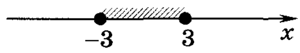


Рис. 260

Очевидно, что $a = 0$ не является решением задачи. Проверим, выполняются ли условия, при которых отрезок $[-3; 3]$ содержится либо в $[-3a; 3a]$, либо в $[3a; -3a]$:

$$\left[\begin{array}{l} a \geqslant 1, \\ a \leqslant -1. \end{array}\right.$$

Ответ. $a \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$.

№ 16. Решите неравенство $|x^2 - 5a| \leqslant 0$.

Решение.

$$\text{ООН: } \begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$$

Так как модуль действительного числа неотрицателен, то данное неравенство равносильно уравнению $x^2 - 5a = 0$ или $x^2 = 5a$.

1) Если $a < 0$, то решений нет.

2) Если $a = 0$, то $x_{1,2} = 0$.

3) Если $a > 0$, то $x_1 = -\sqrt{5a}$, $x_2 = \sqrt{5a}$ (рис. 261).

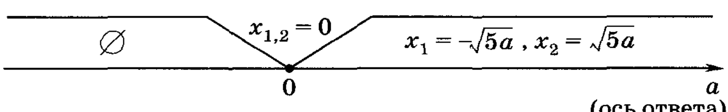


Рис. 261

Неравенства и их системы для самостоятельного решения

№ 1. Решите неравенства:

$0 \cdot x^2 \geqslant a^2 + a + 4$; $0 \cdot x^2 > a^2 + 4a + 4$;

$0 \cdot x^2 \leqslant a^2 + a + 4$; $0 \cdot x^2 < a^2 + a + 4$;

$0 \cdot x^2 > 3m + 10$; $0 \cdot x^2 \geqslant 3m + 10$;

$0 \cdot x^2 < 3m + 10$; $0 \cdot x^2 \leqslant 3m + 10$. ▶1

2) Решите неравенства: $(x + a)^2 \geqslant 0$; $(x + a)^2 > 0$; $(x + a)^2 \leqslant 0$; $(x + a)^2 < 0$. ▶2

3) Решите неравенство $(x + 4)(x - 2a) \leqslant 0$. ▶3

4) Решите неравенство $x \cdot (x - m^2 - 5m - 4) \leqslant 0$. ▶4

5) Решите неравенство $|x - 1| \cdot (x + b) > 0$. ▶5

6) Решите неравенство $x|n - 4| \cdot (x + n) \geqslant 0$. ▶6

7) Решите неравенство $|x^2 - 4b| \geqslant 0$. ▶7

8) Решите систему $\begin{cases}(x-1)(x-3) > 0,\\ x + a + 2 < 0.\end{cases}$ ▶8

9) Решите систему $\begin{cases}x^2 - 7x + 6 > 0,\\ (x-1)(x+a) > 0.\end{cases}$ ▶9

10) При каких значениях параметра c неравенство $(x - c)(x + c) \leqslant 0$ является следствием неравенства $|x + 1| \leqslant 4$? ▶10

3.2. Квадратные неравенства с параметром и к ним сводимые. Системы неравенств

№ 1. Решите неравенство $x^2 - 2ax - 4 + a^2 > 0$.

Решение.

ООН: $\begin{cases}a \in \mathrm{R},\\ x \in \mathrm{R}.\end{cases}$

$x_1 = a - 2$, $x_2 = a + 2$ — корни квадратного трехчлена $x^2 - 2ax - 4 + a^2$.

1 способ.

$(x - (a - 2))(x - (a + 2)) > 0$.

Решим данное неравенство методом интервалов, учитывая, что при любом $a \in \mathrm{R}$ $x_2 > x_1$ (рис. 262).

Рис. 262

$x \in (-\infty; a - 2) \cup (a + 2; +\infty)$.

2 способ

Воспользуемся «каркасом» квадратичной функции (рис. 263).

Ответ. $x \in (-\infty; a-2) \cup (a+2; +\infty)$.

Проиллюстрируем полученные результаты в системе координат (aOx) (рис. 264).

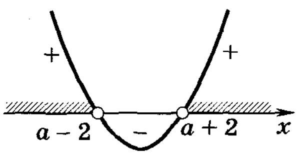


Рис. 263

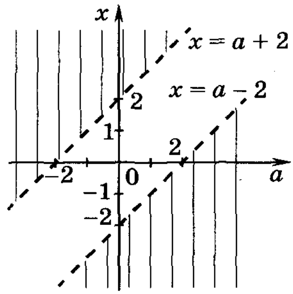


Рис. 264

Вопросы и задания

1) Укажите множество решений неравенства для $a = -3$, $a = 0$, $a = 4$.
2) При каком значении a $x \in (-\infty; 6) \cup (10; +\infty)$?
3) Можно ли указать такие значения параметра a, при которых множеством решений данного неравенства будет отрезок $[a-2; a+2]$?
4) Решите неравенство $x^2 - 2ax - 4 + a^2 \leqslant 0$. Приведите графическую иллюстрацию полученных результатов.

№ 2. Решите неравенство $x^2 - 2ax + 4 + a^2 > 0$.

Решение (рис. 265).

ООН: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R};\ D_1 < 0. \end{cases}$

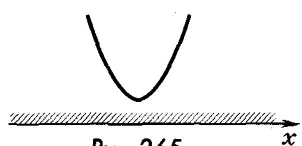


Рис. 265

Ответ. $x \in \mathrm{R}$.

№ 3. Решите неравенство $x^2 - 4ax + 4a^2 \leqslant 0$.

Решение.

ООН: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R};\ (x-2a)^2 \leqslant 0,\ x = 2a. \end{cases}$

Ответ. $x = 2a$.

№ 4. Решите неравенство $x^2 + mx + 2m^2 \leqslant 0$.

Решение.

ООН: $\begin{cases} m \in R, \\ x \in R; \ D = -7m^2. \end{cases}$

Рассмотрим два случая.

1) $D = 0$; тогда $m = 0$. Неравенство примет вид $x^2 \leqslant 0$, откуда $x = 0$ — единственное решение.
2) $D < 0$; тогда $m \neq 0$. Решений нет.

Ответ. 1) Если $m = 0$, то $x = 0$.
2) Если $m \neq 0$, то решений нет.

№ 5. Решите неравенство $x - 2x^2 + a - 1 < 0$.

Решение.

ООН: $\begin{cases} a \in R, \\ x \in R; \ -2x^2 + x + a - 1 < 0. \end{cases}$

Умножив на -1, получим

$2x^2 - x - a + 1 > 0$. $D = 8a - 7$.

Рассмотрим три случая.

1) $D > 0$; тогда $8a - 7 > 0$, $a > 7/8$.

$x_1 = (1 - \sqrt{8a - 7})/4$; $x_2 = (1 + \sqrt{8a - 7})/4$ (рис. 266).

$x \in (-\infty; (1 - \sqrt{8a - 7})/4) \cup ((1 + \sqrt{8a - 7})/4; +\infty)$. ▸1 (A)

2) $D = 0$, $a = 7/8$.

Неравенство примет вид $2 \cdot (x - 1/4)^2 > 0$;

откуда $x \in (-\infty; 1/4) \cup (1/4; +\infty)$ (рис. 267). ▸2

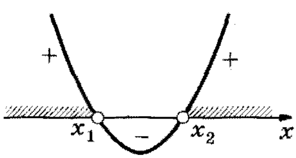


Рис. 266

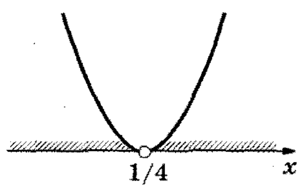


Рис. 267

3) $D < 0$, $a < 7/8$; тогда $x \in R$. (▶3)

Ответ запишите самостоятельно (рис. 268).

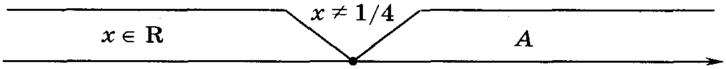


Рис. 268

№ 6. Решите неравенство $ax^2 + 2x + 1 \leqslant 0$.

Решение.

ООН: $\begin{cases} a \in R, \\ x \in R. \end{cases}$

1. $a = 0$. Неравенство примет вид $2x + 1 \leqslant 0$; $x \leqslant -1/2$. (▶1)
2. $a \neq 0$. $D_1 = 1 - a$.

Рассмотрим шесть случаев, соответствующих различным расположениям «каркаса» квадратичной функции.

1) $\begin{cases} a > 0, \\ D_1 > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} a > 0, \\ 1 - a > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} a > 0, \\ a < 1; \end{cases}$

$a \in (0; 1)$.

Пусть $x_1 = (-1 - \sqrt{1-a})/a$, $x_2 = (-1 + \sqrt{1-a})/a$.

При $a > 0$ $x_2 > x_1$. Поэтому $x \in [(-1 - \sqrt{1-a})/a;$ $(-1 + \sqrt{1-a})/a]$ (рис. 269). (▶2) (A)

2) $\begin{cases} a > 0, \\ D_1 = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} a > 0, \\ a = 1; \end{cases}$ $a = 1$.

$x = -1$ (рис. 270). (▶3)

3) $\begin{cases} a > 0, \\ D_1 < 0; \end{cases}$ $\begin{cases} a > 0, \\ a > 1; \end{cases}$ $a \in (1; +\infty)$.

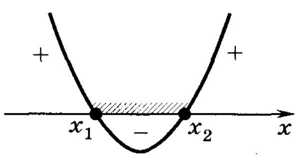


Рис. 269

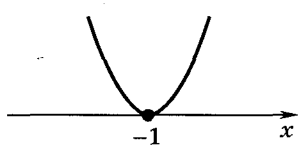


Рис. 270

Решений нет (рис. 271). ▶4

4) $\begin{cases} a < 0, \\ D_1 > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} a < 0, \\ a < 1; \end{cases}$ $a \in (-\infty; 0)$.

Сравним x_2 и x_1 при $a < 0$. Для этого оценим знак разности $x_2 - x_1$; $x_2 - x_1 = (2\sqrt{1-a})/a$. Видим, что $x_2 - x_1 < 0$ при $a < 0$. Поэтому $x_2 < x_1$.

$x \in (-\infty; (-1+\sqrt{1-a})/a] \cup [(-1-\sqrt{1-a})/a; +\infty)$ (B) (рис. 272). ▶5

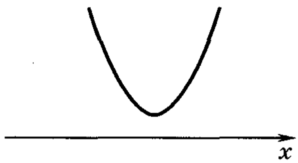


Рис. 271

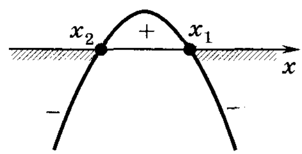


Рис. 272

5) $\begin{cases} a < 0, \\ D_1 = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} a < 0, \\ a = 1. \end{cases}$

Система не имеет решений, а потому такой случай невозможен.

6) $\begin{cases} a < 0, \\ D_1 < 0; \end{cases}$ $\begin{cases} a < 0, \\ a > 1. \end{cases}$

Такой случай невозможен.

Суммарный результат представлен на рисунке 273.

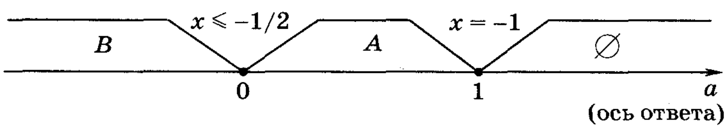


Рис. 273

<u>Ответ</u>. 1) Если $a \in (-\infty; 0)$, то

$x \in (-\infty; (-1+\sqrt{1-a})/a] \cup [(-1-\sqrt{1-a})/a; +\infty)$.

2) Если $a = 0$, то $x \in (-\infty; -1/2]$.

3) Если $a \in (0; 1)$, то

$x \in [(-1-\sqrt{1-a})/a; (-1+\sqrt{1-a})/a]$.

4) Если $a = 1$, то $x = -1$.
5) Если $a \in (1; +\infty)$, то решений нет.

№ 7. Решите неравенство
$(1 - a)x^4 - 2(a + 1)x^2 - a - 3 \geqslant 0$.

Решение.

ООН: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

1. $a = 1$. Неравенство примет вид $-4x^2 - 4 \geqslant 0$. Оно решений не имеет. ▶1
2. $a \neq 1$. Пусть $x^2 = y$.
$(1 - a)y^2 - 2(a + 1)y - a - 3 \geqslant 0$;
$D_1 = (a + 1)^2 + 1 - a)(a + 3)$, $D_1 = 4$, $D_1 > 0$.
Рассмотрим два случая.
1) $1 - a > 0$, $a < 1$; $y_1 = (a + 3)/(1 - a)$, $y_2 = -1$.
Сравним y_1 и y_2. $y_1 - y_2 = 4/(1 - a)$. При $a < 1$ $y_1 - y_2 > 0$, откуда $y_1 > y_2$.
$\left[\begin{array}{l} y \geqslant (a + 3)/(1 - a) \text{ (рис. 274)}, \\ y \leqslant -1; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x^2 \geqslant (a + 3)/(1 - a), \\ x^2 \leqslant -1. \end{array}\right.$

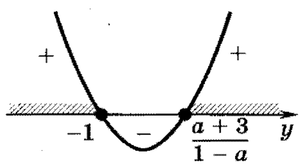


Рис. 274

Второе неравенство в совокупности не имеет решений. Рассмотрим первое неравенство.
$x^2 \geqslant (a + 3)/(1 - a)$.
а) Если $(a + 3)/(1 - a) < 0$, т. е. $a \in (-\infty; -3)$, то $x \in \mathrm{R}$. ▶2
б) Если $a = -3$, то $x^2 \geqslant 0$; $x \in \mathrm{R}$. ▶3
в) Пусть $(a + 3)/(1 - a) > 0$, т. е. $a \in (-3; 1)$.
$x^2 - (a + 3)/(1 - a) \geqslant 0$;

$(x + \sqrt{(a+3)/(1-a)})(x - \sqrt{(a+3)/(1-a)}) \geqslant 0.$

$x \in (-\infty; -\sqrt{(a+3)/(1-a)}\,] \cup$

$\cup\, [\sqrt{(a+3)/(1-a)}; +\infty)$ (рис. 275). ▶4 (A)

2) $1 - a < 0$, $a > 1$. Тогда $y_1 < y_2$.

$(a+3)/(1-a) \leqslant y \leqslant -1$ (рис. 276).

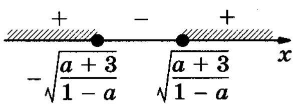


Рис. 275

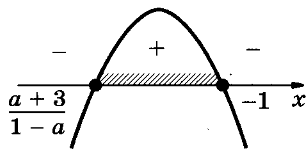


Рис. 276

$$\begin{cases} x^2 \leqslant -1, \\ x^2 \geqslant (a+3)/(1-a). \end{cases}$$

Так как первое неравенство не имеет решений, то и вся система не имеет решений. ▶5

Суммируем результаты (рис. 277).

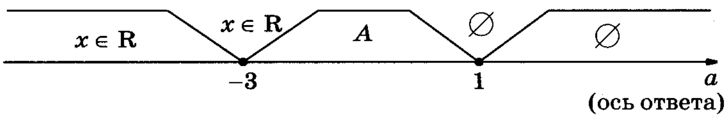


Рис. 277

<u>Ответ</u>. 1) Если $a \leqslant -3$, то $x \in \mathrm{R}$.

2) Если $a \in (-3; 1)$, то

$x \in (-\infty; -\sqrt{(a+3)/(1-a)}\,] \cup$

$\cup\, [\sqrt{(a+3)/(1-a)}; +\infty)$.

3) Если $a \geqslant 1$, то решений нет.

При решении неравенств вида $f(x) > 0$, $f(x) \geqslant 0$, $f(x) < 0$, $f(x) \leqslant 0$, в том числе и с параметром, удобен метод интервалов.

Он основан на следующем **Утверждении:**

если на интервале $(a; b)$ функция $y = f(x)$ непрерывна и не обращается в нуль, то она сохраняет на этом интервале постоянный знак.

Для определения знака $y = f(x)$, где $x \in (a;\ b)$, достаточно взять любое число из $(a;\ b)$, подставить вместо x и вычислить $f(x)$.

№ 8. Решите неравенство $(x - a)^2 \cdot (x - 1) \leqslant 0$.

<u>Решение</u>.

ООН: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

Находим нули непрерывной на множестве R функции $f(x) = (x - a)^2 \cdot (x - 1)$; $x = a$, $x = 1$. Приравниваем их: $a = 1$.

Рассмотрим возможные три случая.

1) $a = 1$; $(x - 1)^3 \leqslant 0$, $x \leqslant 1$.

2) $a < 1$.

При переходе через точку $x = a$ знак $f(x)$ не меняется. Договоримся в дальнейшем над точкой оси x, при переходе через которую знак выражения, стоящего в левой части неравенства, не меняется, рисовать флажок (рис. 278).

$x \in (-\infty;\ 1]$.

3) $a > 1$ (рис. 279).

$x \in (-\infty;\ 1] \cup \{a\}$.

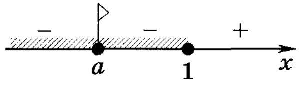


Рис. 278

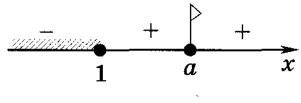


Рис. 279

Нанесем результаты на ось ответа (рис. 280).

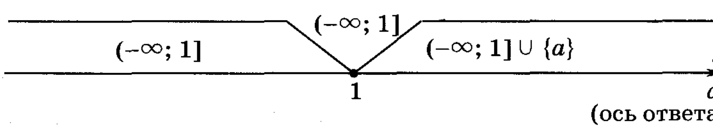


Рис. 280

№ 9. Решите неравенство $(x-2)^2 \cdot (x-3)(x-a) > 0$.

Решение.

ООН: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

$x = 2$, $x = 3$, $x = a$ — нули непрерывной на множестве R функции $f(x) = (x-2)^2 \cdot (x-3)(x-a)$. Рассмотрим возможные случаи (рис. 281).

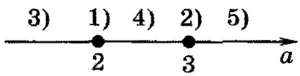


Рис. 281

1) $a = 2$: $(x-2)^3(x-3) > 0$ (рис. 282).
   $x \in (-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$. (A)
2) $a = 3$: $(x - 2^2(x-3)^2 > 0$ (рис. 283).

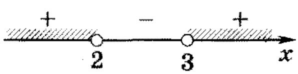


Рис. 282

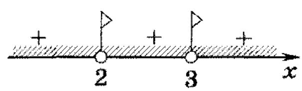


Рис. 283

   $x \in (-\infty; 2) \cup (2; 3) \cup (3; +\infty)$. (B)
3) $a < 2$ (рис. 284).
   $x \in (-\infty; a) \cup (3; +\infty)$. (C)
4) $2 < a < 3$ (рис. 285).
   $x \in (-\infty; 2) \cup (2; a) \cup (3; +\infty)$. (K)

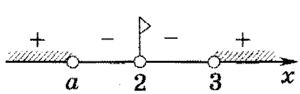


Рис. 284

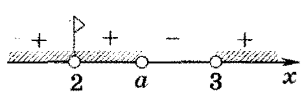


Рис. 285

5) $a > 3$ (рис. 286).

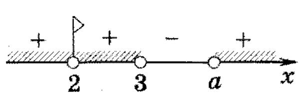


Рис. 286

$x \in (-\infty; 2) \cup (2; 3) \cup (a; +\infty)$. $\quad (L)$

Суммируем решения на оси ответа (рис. 287).

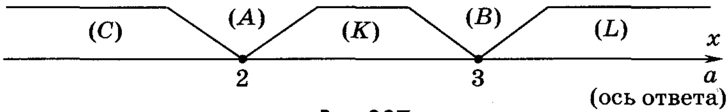


Рис. 287

№ 10. Решите неравенство

$$\frac{x^2 + x(3a-1) - 3a}{x-1} \geqslant 0.$$

<u>Решение</u>.

ООН: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \neq 1. \end{cases}$

Рассмотрим квадратный трехчлен

$x^2 + (3a-1)x - 3a$.

$\mathrm{D} = (3a-1)^2 + 12a$, $\mathrm{D} = (3a+1)^2$,

$x_1 = 1$, $x_2 = -3a$.

Неравенство примет вид $(x-1)(x+3a)/(x-1) \geqslant 0$.

<u>1 способ</u>.

$\begin{cases} x + 3a \geqslant 0, \\ x \neq 1; \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} x \geqslant -3a, \\ x \neq 1. \end{cases}$

Сравним 1 и $-3a$.

1) Пусть $1 > -3a$; тогда $a > -1/3$.
   $x \in [-3a; 1) \cup (1; +\infty)$ (рис. 288).
2) Пусть $1 = -3a$; тогда $a = -1/3$.
   $x \in (1; +\infty)$.
3) Пусть $1 < -3a$; тогда $a < -1/3$.
   $x \in [-3a; +\infty)$ (рис. 289).

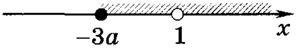


Рис. 288

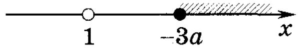


Рис. 289

Ответ запишите самостоятельно (рис. 290).

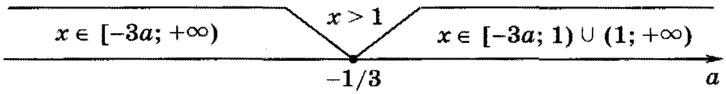


Рис. 290

2 способ.

Освобождаться от знаменателя не будем, но, решая это неравенство методом интервалов, учтем, что при переходе через $x = 1$ знак выражения левой части неравенства не меняется.

1) $a > -1/3$ (рис. 291):
   $x \in [-3a; 1) \cup (1; +\infty)$.
2) $a = -1/3$:
   $x \in (1; +\infty)$.
3) $a < -1/3$ (рис. 292):
   $x \in [-3a; +\infty)$.

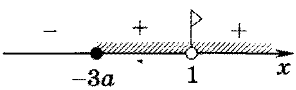


Рис. 291

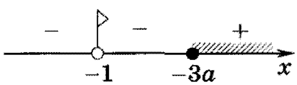


Рис. 292

№ 11. Решите неравенство $\dfrac{(x-1)x(x-a)}{x} > 0$.

Решение.

ООН: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \neq 0. \end{cases}$

Решить данное неравенство можно, предварительно сократив x в числителе и знаменателе и учитывая в дальнейшем, что $x \neq 0$. Но мы решим другим способом.

$x = 1$, $x = a$ — нули функции

$$f(x) = \frac{(x-1)x(x-a)}{x}.$$

При $x = 0$ она не определена. Сравниваем a с 0 и 1 (рис. 293).

1) $a = 0$: $\dfrac{x^2(x-1)}{x} > 0$, $x(x-1) > 0$ (рис. 294).

$x \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$. (A)

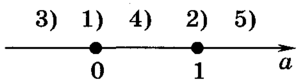


Рис. 293

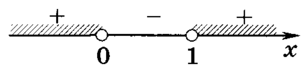


Рис. 294

2) $a = 1$: $\dfrac{(x-1)^2 \cdot x}{x} > 0$ (рис. 295).

$x \in (-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$. (B)

3) $a < 0$ (рис. 296):

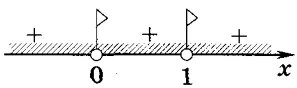


Рис. 295

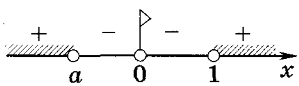


Рис. 296

$x \in (-\infty; a) \cup (1; +\infty)$. (C)

4) $0 < a < 1$ (рис. 297):

$x \in (-\infty; 0) \cup (0; a) \cup (1; +\infty)$. (K)

5) $a > 1$ (рис. 298):

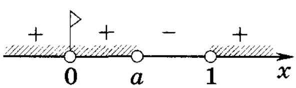


Рис. 297

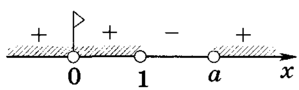


Рис. 298

$x \in (-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (a; +\infty)$. (L)

Заполним ось ответа (рис. 299).

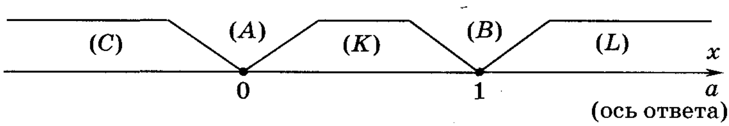


Рис. 299

№ 12. При каких значениях параметра a неравенство $(x - 3a)(x + 6) \leqslant 0$ имеет единственное решение?

<u>Решение.</u>

ООН: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

Решением данного неравенства при $3a \neq -6$ является отрезок. Если $3a = -6$, т. е. $a = -2$, то неравенство $(x + 6)^2 \leqslant 0$ имеет единственное решение $x = -6$.

<u>Ответ.</u> $a = -2$.

№ 13. При каких b решением неравенства $(x - 3)(x + 4)/(x - b)^2 \leqslant 0$ будет отрезок?

<u>Решение.</u>

ООН: $\begin{cases} b \in \mathrm{R}, \\ x \neq b. \end{cases}$

Рассмотрим возможные случаи.

1) Если $b < -4$, то $x \in [-4; 3]$ (рис. 300).

2) Пусть $b = -4$; тогда $(x - 3)(x + 4)/(x + 4)^2 \leqslant 0$; $(x - 3)/(x + 4) \leqslant 0$.
$x \in (-4; 3]$ (рис. 301). Поэтому $b = -4$ не удовлетворяет условию задачи.

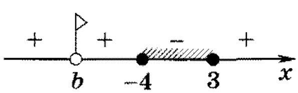


Рис. 300

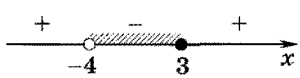


Рис. 301

3) $-4 < b < 3$.
$x \in [-4; b) \cup (b; 3]$ (рис. 302).

4) $b = 3$; тогда $(x - 3)(x + 4)/(x - 3)^2 \leqslant 0$,
$(x + 4)/(x - 3) \leqslant 0$.
$x \in [-4; 3)$ (рис. 303).

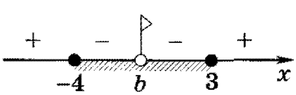


Рис. 302

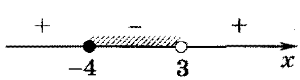


Рис. 303

5) $b > 3$; тогда $x \in [-4;\ 3]$ (рис. 304). (▸5)

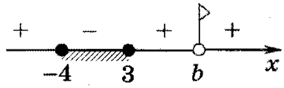


Рис. 304

Ответ. $b \in (-\infty;\ -4) \cup$
$\cup\ (3;\ +\infty)$.

№ 14. Найдите все значения параметра a, при которых множество решений неравенства

$$1 - \frac{a}{x} < \frac{5}{x}\left(2 - \frac{2a+5}{x} + \frac{5a}{x^2}\right)$$

содержится в некотором отрезке длиной 6 и при этом содержит какой-нибудь отрезок длиной 5. (ЕГЭ 2004 г.)

Решение.

ООН: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \neq 0. \end{cases}$

Решим сначала данное неравенство без дополнительных условий.

$$1 - \frac{a}{x} < \frac{5}{x}\left(2 - \frac{2a+5}{x} + \frac{5a}{x^2}\right).$$

Пусть $a/x = u$, $5/x = v$. Тогда получим неравенство $1 - u < v(2 - 2u - v + uv)$:

$1 - u < v(1 - u)(2 - v)$,

$(1 - u)(1 - v)^2 < 0$.

$(1 - a/x)(1 - 5/x)^2 < 0$,

$(x - a)(x - 5)^2/x < 0$.

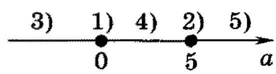


Рис. 305

Решаем последнее неравенство методом интервалов (рис. 305).

Рассмотрим пять случаев.

1) $a = 0$:

$x(x - 5)^2/x < 0$ (рис. 306).

Решений нет.

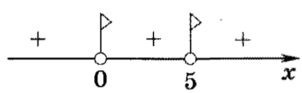


Рис. 306

2) $a = 5$:

$(x - 5)^3/x < 0$, $(x - 5)/x < 0$.

$x \in (0;\ 5)$ (рис. 307).

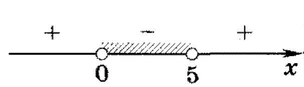


Рис. 307

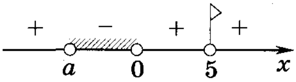


Рис. 308

3) $a < 0$:
$(x - a)(x - 5)^2/x < 0$,
$x \in (a; 0)$ (рис. 308).

4) $0 < a < 5$: $x \in (0; a)$ (рис. 309).
5) $a > 5$: $x \in (0; 5) \cup (5; a)$ (рис. 310).

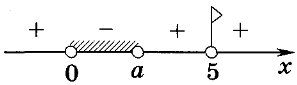


Рис. 309

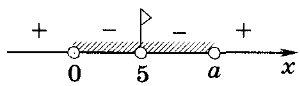


Рис. 310

Заполним ось ответа параметра a (рис. 311).

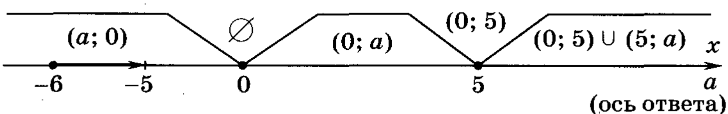


Рис. 311

А теперь произведем анализ множества решений неравенства и ответим на вопрос задания.

1. $a \in [0; 5]$. Например, $a = 4$, тогда $x \in (0; 4)$. Этот интервал содержится в отрезке длиной 6, но не содержит отрезок длиной 5. Следовательно, этот вариант не подходит.

2. $a > 5$. Тогда $x \in (0; 5) \cup (5; a)$ (рис. 312).

Чтобы в отмеченном множестве содержался какой-нибудь отрезок длиной 5, должно выполняться условие $a > 10$. Но тогда не выполняется первое условие (содержаться в отрезке длиной 6).

3. Пусть $a < 0$ (рис. 313).

а) Если $-5 \leqslant a < 0$, то не выполняется второе условие.

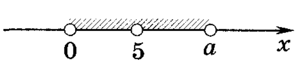


Рис. 312

Рис. 313

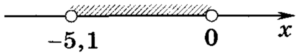


Рис. 314

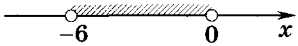


Рис. 315

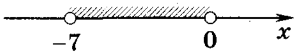


Рис. 316

б) $-6 < a < -5$. Пусть, например, $a = -5{,}1$ (рис. 314). Выполняются оба условия.

в) $a = -6$ (рис. 315).

Тоже выполняются оба условия.

г) $a < -6$. Пусть, например, $a = -7$ (рис. 316). Не выполняется первое условие.

Ответ. $[-6; -5)$.

№ 15. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множество решений неравенства $a^2 + 8a < \dfrac{4a^2}{x} - x(x - 2a - 4)$ содержит какой-нибудь отрезок длиной 2, но не содержит никакого отрезка длиной 3. (ЕГЭ 2004 г.)

Решение.

ООН: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \neq 0. \end{cases}$

Решаем данное неравенство, пока не учитывая дополнительные условия. Произведем равносильные преобразования:

$$x^2 - 2ax + a^2 < \frac{4a^2}{x} + 4x - 8a,$$

$$(x - a)^2 < \frac{4a^2 - 8ax + 4x^2}{x},$$

$$(x - a)^2 - \frac{4(x - a)^2}{x} < 0,$$

$$\frac{(x - a)^2(x - 4)}{x} < 0.$$

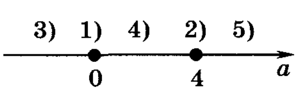


Рис. 317

Решаем полученное неравенство методом интервалов (рис. 317).

1) $a = 0$:
$x(x-4) < 0$ (рис. 318).
$x \in (0; 4)$. ▶1

2) $a = 4$:
$\dfrac{x-4}{x} < 0$, $x \in (0; 4)$. ▶2

3) $a < 0$
(рис. 319): $x \in (0; 4)$. ▶3

4) $0 < a < 4$
(рис. 320):
$x \in (0; a) \cup (a; 4)$. ▶4

5) $a > 4$
(рис. 321):
$x \in (0; 4)$. ▶5

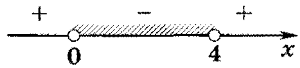


Рис. 318

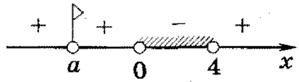


Рис. 319

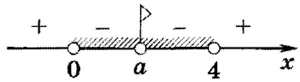


Рис. 320

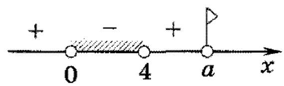


Рис. 321

Заполним ось ответа (рис. 322).

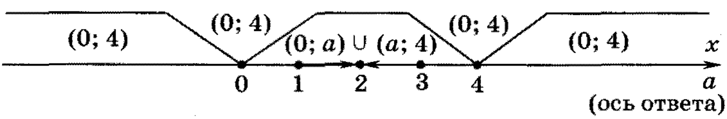


Рис. 322

Анализ множества решений

1. $a \leqslant 0$ или $a \geqslant 4$. Интервал $(0; 4)$ содержит какой-нибудь отрезок длиной 3. Поэтому второе условие не выполняется.
2. Пусть $a \in (0; 4)$ (рис. 323).

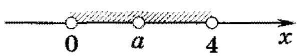


Рис. 323

а) $0 < a < 1$. В интервале $(a; 4)$ содержится какой-нибудь отрезок длиной 3.

б) $3 < a < 4$. В интервале $(0; a)$ есть какой-нибудь отрезок длиной 3.

в) $1 \leqslant a < 2$.

В интервале $(a;\ 4)$ есть какой-нибудь отрезок длиной 2, но не содержится никакого отрезка длиной 3.

г) $2 < a \leqslant 3$. Аналогично доказывается, что множество значений $(2;\ 3]$ удовлетворяет условиям задания.

д) $a = 2$. В множестве $(0;\ 2) \cup (2;\ 4)$ нет ни одного отрезка длиной 2. Поэтому $a = 2$ не удовлетворяет первому условию.

Ответ. $[1;\ 2) \cup (2;\ 3]$.

№ 16. Найдите все значения параметра a, при которых множество решений неравенства

$$\frac{9-(a+6)x}{x^2} < \frac{3a}{x^2}\left(\frac{3}{x}-2\right)-1$$

содержит число 4, а также содержит два непересекающихся отрезка длиной 4 каждый. (ЕГЭ 2004 г.)

Решение.

ООН: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \neq 0. \end{cases}$

Представим данное неравенство в виде
$9/x^2 - a/x - 6/x < (3/x)\cdot(a/x)\,(3/x-2) - 1$.

Пусть $3/x = u$, $a/x = v$. Тогда получим неравенство $u^2 - v - 2u < uv(u-2) - 1$.

Перенесем все члены неравенства в левую часть и разложим на множители:

$$(u-1)^2 - v(u-1)^2 < 0,$$
$$(u-1)^2(1-v) < 0.$$

Переходим к переменным x и a:

$$(3/x-1)^2(1-a/x) < 0,$$
$$(3-x)^2(x-a)/x < 0.$$

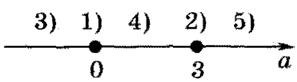


Рис. 324

Решим последнее неравенство методом интервалов (рис. 324).

1) $a = 0$

(рис. 325): $(x-3)^2 \cdot x/x < 0$.

Решений в этом случае нет.

Начинаем постепенно заполнять ось ответа. (▶1)

2) $a = 3$:

$(x-3)/x < 0$ (рис. 326):

$x \in (0; 3)$. (▶2)

3) $a < 0$

(рис. 327): $x \in (a; 0)$. (▶3)

4) $0 < a < 3$

(рис. 328): $x \in (0; a)$. (▶4)

5) $a > 3$

(рис. 329):

$x \in (0; 3) \cup (3; a)$. (▶5)

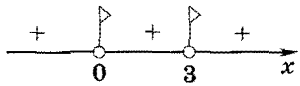


Рис. 325

Рис. 326

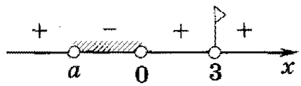


Рис. 327

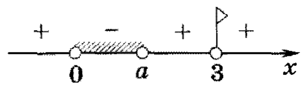


Рис. 328

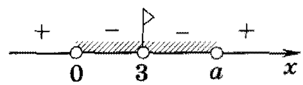


Рис. 329

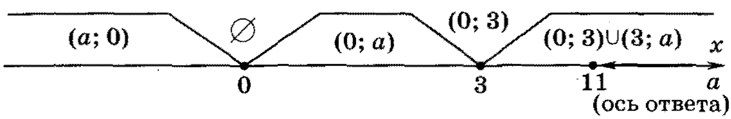


Рис. 330

Анализ множества решений неравенства

1. $a \leqslant 3$. Не выполняется первое условие.

2. Пусть $a > 3$:

а) $3 < a \leqslant 11$ (рис. 331).

В этом случае не выполняется второе условие (множество $(3; a) \cup (0; 3)$ не содержит двух непересекающихся отрезков длиной 4 каждый).

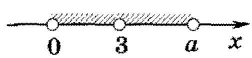


Рис. 331

б) $a > 11$. Легко видеть, что оба условия задания выполняются при каждом значении a, большем 11.

Ответ. $(11; +\infty)$.

№ 17. Найдите все значения параметра a, при которых в множестве решений неравенства

$x(x - 2a + 8) + a^2 < 16a - 8a^2/x$

можно расположить два отрезка длиной 6 и длиной 1, не имеющих общих точек. (ЕГЭ 2004 г.)

Решение.

ООН: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \neq 0. \end{cases}$

Произведем равносильные преобразования:

$x^2 - 2ax + 8x + a^2 < 16a - 8a^2/x$,

$(x - a)^2 + 8(x^2 - 2ax + a^2)/x <$
< 0,

$(x - a)^2(8 + x)/x < 0$.

Решим последнее неравенство методом интервалов (рис. 332).

1) $a = -8$ (рис. 333):
$(x + 8)/x < 0$, $x \in (-8; 0)$.
Начинаем поэтапно заполнять ось параметра a. ▶1

2) $a = 0$: $x(x + 8) < 0$,
$x \in (-8; 0)$. ▶2

3) $a < -8$ (рис. 334):
$x \in (-8; 0)$. ▶3

4) $-8 < a < 0$ (рис. 335):
$x \in (-8; a) \cup (a; 0)$. ▶4

5) $a > 0$ (рис. 336):
$x \in (-8; 0)$. ▶5

Заполним ось ответа (рис. 337).

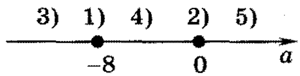


Рис. 332

Рис. 333

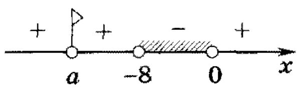


Рис. 334

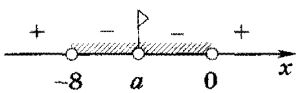


Рис. 335

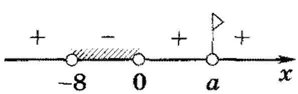


Рис. 336

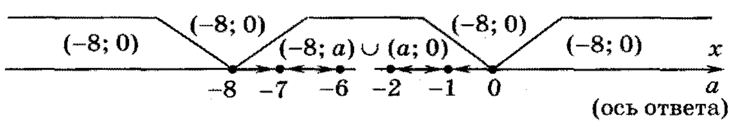


Рис. 337

Анализ множества решений неравенства

1. При $a \in (-\infty; -8] \cup [0; +\infty)$ условие задания выполняется.
2. $-8 < a < -7$ (рис. 338).
   В интервале $(a; 0)$ можно расположить два отрезка, указанные в условии задания.

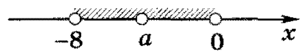


Рис. 338

Рис. 339

3. $a = -7$ (рис. 339).
   Этот случай нас не устраивает.
4. $-7 < a < -6$. Пусть, например, $a = -6{,}1$ (рис. 340).
   Отрезок длиной 1 можно расположить в интервале $(-8; a)$, а длиной 6 — в интервале $(a; 0)$.

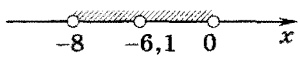


Рис. 340

5. Аналогично рассуждая, мы получим, что значения $a \in (-2; -1) \cup (-1; 0)$ нас тоже устраивают.
6. Пусть $-6 < a < -2$. Возьмем $a = -3$ (рис. 341).
   Отрезок длиной 6 при этом условии поместить в указанном множестве решений нельзя.

Рис. 341

Ответ. $a \in (-\infty; -7) \cup (-7; -6) \cup (-2; -1) \cup$
$\cup (-1; +\infty)$.

№ 18. При каких значениях параметра a неравенство $(1 - a)x^2 + 2ax - 3 - a < 0$ выполняется при любых значениях x?

Решение.

ООН: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

Потребуем, чтобы выполнялись условия:

$$\begin{cases} D_1 < 0, \\ 1 - a < 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} a^2 + (3 + a)(1 - a) < 0, \\ a > 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a > 3/2, \\ a > 1; \end{cases} \qquad a > 3/2.$$

<u>Ответ</u>. $a \in (1{,}5; +\infty)$.

№ 19. При каких значениях параметра c неравенство $(x+1)^2 > c$ выполняется при любых значениях x?

<u>Решение</u>.

ООН: $\begin{cases} c \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

Обратимся к системе координат (xOy) и построим график функции $y = (x + 1)^2$ и семейство прямых $y = c$, параллельных оси x (рис. 342).

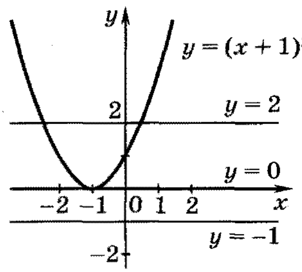


Рис. 342

Парабола $y = (x + 1)^2$ будет выше прямой $y = c$ при $c < 0$.

<u>Ответ</u>. $c \in (-\infty; 0)$.

Приведем аналитическое решение.

1) Если $c < 0$, то $x \in \mathrm{R}$. ▶1

2) Если $c = 0$, то $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$. ▶2

3) Если $c > 0$, тогда $(x + 1)^2 - c > 0$,

$(x + 1 - \sqrt{c})(x + 1 + \sqrt{c}) > 0$ (рис. 343).

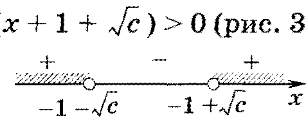


Рис. 343

$x \in (-\infty; -1 - \sqrt{c}) \cup (-1 + \sqrt{c}; +\infty)$. ▶3

Ответ. $c \in (-\infty; 0)$.

№ 20. При каких значениях параметра a неравенство $x^2 - |x| - a + 1 \leqslant 0$ не имеет решений?

Решение.

ООН: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

В системе координат (xOy) построим график функции $y = x^2 - |x| + 1$ и семейство прямых $y = a$, параллельных оси x (рис. 344).

Парабола $y = x^2 - x + 1$ имеет вершину с координатами: $x_0 = 1/2$, $y_0 = 3/4$. Точка пересечения с осью y: (0; 1). Таблица значений:

x	1	2
y	1	3

Отобразив график функции $y = x^2 - x + 1$ при $x \geqslant 0$ симметрично относительно оси y на левую полуплоскость, получим график функции $y = x^2 - |x| + 1$.

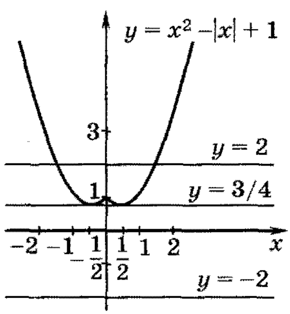


Рис. 344

Исходное неравенство не имеет решений, если график функции $y = x^2 - |x| + 1$ выше прямой $y = a$, т. е. при $a < 3/4$.

Ответ. $a \in (-\infty; 3/4)$.

№ 21. При каких значениях параметра b неравенство $x^2 + 2bx + 5b < 0$ выполняется для всех x, удовлетворяющих условию $|x| \leqslant 2$?

Решение.

ООН: $\begin{cases} b \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

Графиком квадратичной функции $y = x^2 + 2bx + 5b$ для каждого фиксированного $b \in \mathrm{R}$ является парабола, ветви которой направлены вверх. Возможны три случая ее расположения по отношению к оси Ox (рис. 345, *а*, *б*, *в*).

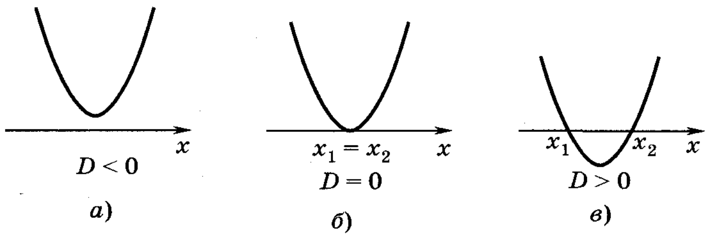


Рис. 345

В случаях (*а*) и (*б*) функция не может принимать отрицательные значения. Рассмотрим случай (*в*). Решим неравенство $|x| \leqslant 2$; $x \in [-2; 2]$.

Для того чтобы выполнялось условие задачи, отрезок $[-2; 2]$ должен лежать между x_1 и x_2, где x_1, x_2 — корни квадратного трехчлена (рис. 346).

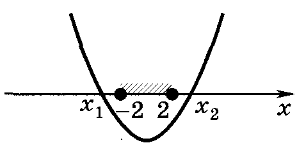


Рис. 346

Воспользуемся теоремой 7 о расположении корней квадратного трехчлена.

$\begin{cases} f(-2) < 0, \\ f(2) < 0; \end{cases}$ $\begin{cases} 4 - 4b + 5b < 0, \\ 4 + 4b + 5b < 0; \end{cases}$ $\begin{cases} b < -4, \\ b < -4/9; \end{cases}$ $b < -4.$

Ответ. $b \in (-\infty; -4)$.

№ 22. При каких значениях параметра a система неравенств

$$\begin{cases} x^2 - ax + a \geqslant 0, \\ 2x^2 + (a+1)x + 2 \geqslant 0 \end{cases}$$

имеет множеством решений множество всех действительных чисел?

Решение.

Условие задачи будет выполняться, если дискриминант каждого из квадратных трехчленов будет меньше или равен нулю:

$\begin{cases} a^2 - 4a \leqslant 0, \\ (a+1)^2 - 16 \leqslant 0; \end{cases}$ $\begin{cases} a(a-4) \leqslant 0, \\ (a-3)(a+5) \leqslant 0; \end{cases}$

$a \in [0; 3]$ (рис. 347).

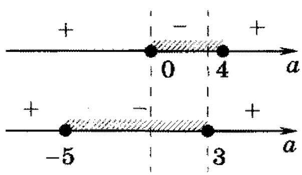


Рис. 347

Ответ. $a \in [0; 3]$.

Упражнения для самостоятельного решения

1) Решите неравенство $x^2 + 3x + a < 0$. (▶1)
2) Решите неравенство $bx^2 - 2bx + 1 > 0$. (▶2)
3) Решите неравенство $ax^4 + 2x^2 \leqslant 0$. (▶3)
4) Решите неравенство $(x+2)(x^2 - a^2)/(x+2) < 0$. (▶4)
5) Решите неравенство $(x^2 - 3x + 2)/(x^2 + ax) > 0$. (▶5)
6) Решите неравенство $(x-a)^2(x-1)(x-4) > 0$. (▶6)
7) Решите неравенство $(x-a)^2(x-1)(x-2)/(x-1) < 0$. (▶7)
8) При каких значениях c неравенство $cx^2 - x + 3 \leqslant 0$ имеет единственное решение? (▶8)

9) При каких значениях d неравенство $x^2 - 2dx + d^2 - 1 > 0$ выполняется для всех x таких, что $|x| < 3$? (▸9)

10) При каких a из неравенства $0 < x < 1$ следует неравенство $x^2 - a^2 \leqslant 0$? (▸10)

11) При каких значениях параметра a решением системы

$$\begin{cases} x^2 - x(3a - 2) + 2a^2 - 4a < 0, \\ x < 3 \end{cases}$$

является промежуток длины 5? (▸11)

12) При каких значениях параметра m система

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 4 \geqslant 0, \\ mx^2 - 2x(m + 2) + 8 < 0 \end{cases}$$

не имеет решений? (▸12)

3.3. Более сложные квадратные неравенства и их системы с параметром

№ 1. При каких значениях параметра a система неравенств

$$\begin{cases} -x^2 + 12x - a \geqslant 0, \\ |x| \leqslant 2 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

Решение.

ООС: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

Перепишем данную систему в виде

$$\begin{cases} x^2 - 12x + a \leqslant 0, \\ |x| \leqslant 2. \end{cases}$$

Найдем D_1 квадратного трехчлена $x^2 - 12x + a$: $\mathrm{D}_1 = 36 - a$.

Если $a = 36$ ($\mathrm{D}_1 = 0$), то система $\begin{cases} (x - 6)^2 \leqslant 0, \\ |x| \leqslant 2 \end{cases}$ решений не имеет.

Если $a > 36$ ($\mathrm{D}_1 < 0$), то система также несовместна.

Рассмотрим случай, когда $a < 36$ ($\mathrm{D}_1 > 0$).

Покажем схематично, как должны располагаться параболы $y = x^2 - 12x + a$, чтобы система имела единственное решение (рис. 348).

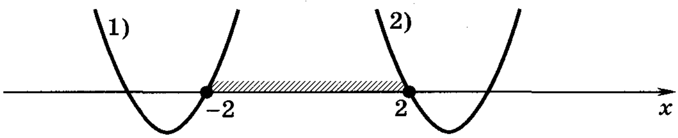


Рис. 348

Расположение 1) невозможно, так как абсцисса вершины параболы $x_0 = 6$. Значит, остается случай 2).

При $x = 2$ решаем относительно a уравнение $4 - 24 + a = 0$; $a = 20$.

<u>Ответ</u>. $a = 20$.

№ 2. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} x^2 - (y - a)^2 \geqslant 1, \\ y = x^2 + 1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение?

<u>Решение</u>.

$$\text{ООС: } \begin{cases} a \in \mathbf{R}, \\ x \in \mathbf{R}, \\ y \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

Из уравнения системы выразим x^2 через y и подставим в неравенство:

$$\begin{cases} x^2 = y - 1, \\ y - 1 - (y - a)^2 \geqslant 1. \end{cases}$$

Неравенство легко приводится к равносильному: $y^2 - (2a + 1)y + a^2 + 2 \leqslant 0$, где $y \geqslant 1$.

Введем функцию $f(y) = y^2 - (2a + 1)y + a^2 + 2$.

Для того чтобы неравенство $f(y) \leqslant 0$, где $y \geqslant 1$, имело хотя бы одно решение, график функции $f(y)$ должен располагаться так, как указано на рисунке 349.

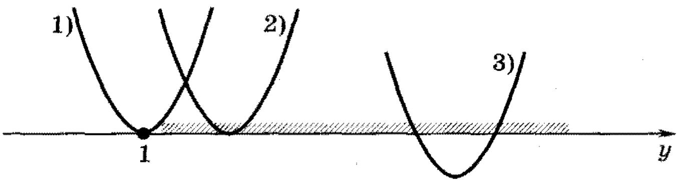


Рис. 349

А для этого достаточно, чтобы была совместна система неравенств:

$$\begin{cases}(2a+1)/2 \geqslant 1,\\(2a+1)^2 - 4(a^2+2) \geqslant 0,\\f(1) \geqslant 0.\end{cases}$$

И далее:

$$\begin{cases}a \geqslant 1/2,\\4a \geqslant 7,\\1 - 2a - 1 + a^2 + 2 \geqslant 0;\end{cases} \qquad \begin{cases}a \geqslant 7/4,\\a^2 - 2a + 2 \geqslant 0;\end{cases} \qquad a \geqslant 7/4.$$

Ответ. $a \geqslant 7/4$.

№ 3. При каких значениях параметра a система неравенств

$$\begin{cases}3x^2 + 2x - 4a \geqslant 0,\\-2 \leqslant x \leqslant -a\end{cases}$$

имеет решения?

Найдите решения системы, если $a \in [-2; -1/12]$.

Решение.

ООС: $\begin{cases}a \in \mathrm{R},\\x \in \mathrm{R}.\end{cases}$

Из двойного неравенства $-2 \leqslant x \leqslant -a$ следует, что $a \in (-\infty; 2]$. Значит, если $a > 2$, то система решений не имеет. (▸1)

Рассмотрим ряд случаев.

1) $a = 2$. Тогда $x = -2$. (▸2)

2) Пусть теперь $a \in (-\infty; 2)$.

Введем функцию $f(x) = 3x^2 + 2x - 4a$.

Найдем D_1 квадратного трехчлена: $D_1 = 1 + 12a$.

а) $D_1 \leqslant 0$, т. е. $a \leqslant -1/12$. Тогда данная система неравенств равносильна двойному неравенству $-2 \leqslant x \leqslant -a$. (▶3)

б) $D_1 > 0$, т. е. $-1/12 < a < 2$.

Узнаем сначала, при каких значениях a система не имеет решений.

Парабола должна располагаться так, как указано на рисунке 350.

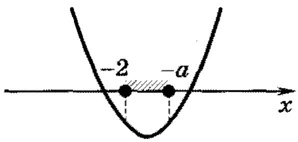


Рис. 350

Решаем систему неравенств $\begin{cases} f(-2) < 0, \\ f(-a) < 0: \end{cases}$

$\begin{cases} 12 - 4 - 4a < 0, \\ 3a^2 - 2a - 4a < 0; \end{cases}$ $\begin{cases} a > 2, \\ a(a - 2) < 0; \end{cases}$

$\begin{cases} a > 2, \\ a < 0. \end{cases}$ Система несовместна.

Значит, если $a \in (-1/12;\ 2)$, то данная система имеет решения. (▶4)

Ответ. 1) $a \in (-\infty;\ 2]$. 2) $x \in [-2;\ -a]$.

№ 4. При каких значениях параметра a множество решений неравенства $(a - x)(a + 2x - 8) < 0$ не содержит ни одного решения неравенства $x^2 \leqslant 4$?

Решение.

Решим это задание графически в системе координат (aOx) (рис. 351).

Видно, что если $a \in (-\infty;\ -2] \cup [12;\ +\infty)$, то ни одна точка полосы между прямыми $x = 2$ и $x = -2$,

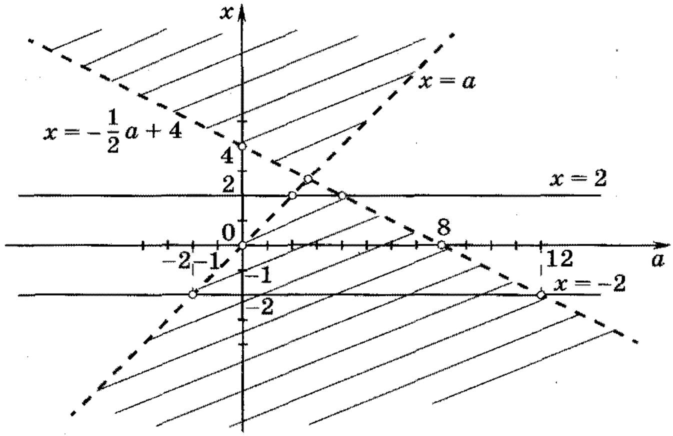


Рис. 351

включая точки этих прямых, не попадает в заштрихованные области.

Ответ. $a \in (-\infty; -2] \cup [12; +\infty)$.

№ 5. При каких значениях параметра a имеет решения система

$$\begin{cases} 2x^2 - 3ax - 9 \leqslant 0, \\ x^2 + ax - 2 \geqslant 0? \end{cases}$$

Решение.

ООС: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

Рассмотрим функции:

$f(x) = 2x^2 - 3ax - 9$ (1) и $\varphi(x) = x^2 + ax - 2$ (2).

$x_0 = 3a/4$ — абсцисса вершины параболы, являющейся графиком функции (1);

$x'_0 = -a/2$ — абсцисса вершины параболы (2).

Заметим, что дискриминанты квадратных трехчленов больше нуля при любом значении $a \in \mathrm{R}$. Найдем их корни:

(1): $x_1 = 3(a - \sqrt{a^2 + 8})/4$; $x_2 = 3(a + \sqrt{a^2 + 8})/4$.

(2): $x_3 = (-a - \sqrt{a^2 + 8})/2$; $x_4 = (-a + \sqrt{a^2 + 8})/2$.

А теперь рассмотрим три случая:

1) $a = 0$: $\begin{cases} 2x^2 - 9 \leqslant 0, \\ x^2 - 2 \geqslant 0 \end{cases}$ (рис. 352).

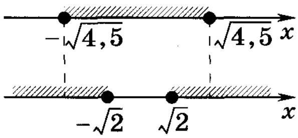


Рис. 352

Видим, что при $a = 0$ решения у системы есть.

2) $a > 0$. Покажем схематично, как могут при этом располагаться параболы (1) и (2) (рис. 353).

При $a > 0$ $x_4 > 0$; $x_1 < 0$. Значит, точка с абсциссой x_4 расположена правее точки с абсциссой x_1. Легко доказать, что $x_2 > x_4$. Поэтому и в случае $a > 0$ система имеет решения.

3) $a < 0$. Опять воспользуемся графической интерпретацией (рис. 354).

$x_3 < 0$; $x_2 > 0$. Докажем, что $x_3 > x_1$:

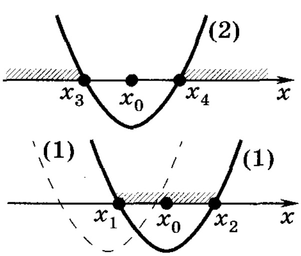


Рис. 353

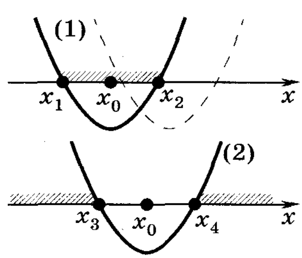


Рис. 354

$(-a - \sqrt{a^2+8})/2 > 3(a - \sqrt{a^2+8})/4;$

$\sqrt{a^2+8} > 5a.$

Последнее неравенство очевидно, так как $\sqrt{a^2+8} > 0$, $5a < 0$. И в этом случае система имеет решения.

Ответ. $a \in \mathrm{R}$.

№ 6. При каких значениях параметра a каждое решение неравенства $4x^2 + 8x + 3 < 0$ будет содержаться среди решений неравенства $2ax^2 - (7a - 4)x - 14 > 0$?

Решение.

При $a = 0$ второе неравенство является линейным:

$$4x - 14 > 0, \quad x > 3{,}5.$$

Множество решений первого неравенства в этом случае не принадлежит множеству решений второго: $(-3/2; -1/2) \not\subset (3{,}5; +\infty)$.

Значит, $a = 0$ не подходит.

Пусть теперь $a \neq 0$. Найдем D квадратного трехчлена $2ax^2 - (7a - 4)x - 14$:

$\mathrm{D} = (7a + 4)^2$, $\mathrm{D} \geqslant 0$.

Покажем схематично, как должны располагаться параболы, являющиеся графиками функции $f(x) = 2ax^2 - (7a - 4)x - 14$, чтобы каждое решение первого неравенства содержалось среди решений второго неравенства (рис. 355).

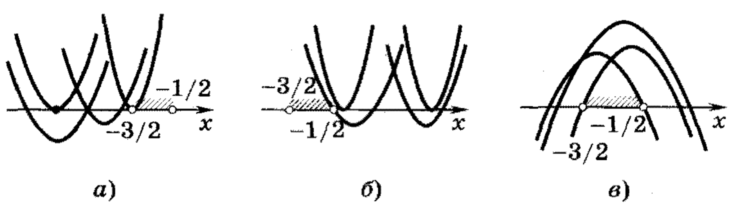


Рис. 355

а) $\begin{cases} a > 0, \\ (7a-4)/4a \leqslant -3/2, \\ \mathrm{D} \geqslant 0, \\ f(-3/2) \geqslant 0; \end{cases}$

$\begin{cases} a > 0, \\ (13a-4)/a \leqslant 0, \\ (7a+4)^2 \geqslant 0, \\ 2a \cdot 9/4 + (7a-4) \cdot 3/2 - 14 > 0; \end{cases}$ $\quad \begin{cases} a > 0, \\ a \leqslant 4/13, \\ a > 4/3. \end{cases}$

Система решений не имеет.

б) $\begin{cases} a > 0, \\ (7a-4)/4a \geqslant -1/2, \\ (7a+4)^2 \geqslant 0, \\ f(-1/2) \geqslant 0; \end{cases}$ $\quad \begin{cases} a > 0, \\ (9a-4)/a \geqslant 0, \\ a + 7a - 4 - 28 \geqslant 0; \end{cases}$

$\begin{cases} a > 0, \\ a \geqslant 4/9, \\ a \geqslant 4; \end{cases}$ $\quad a \geqslant 4,$

в) $\begin{cases} a < 0, \\ f(-3/2) \geqslant 0, \\ f(-1/2) \geqslant 0; \end{cases}$ $\quad \begin{cases} a < 0, \\ a \geqslant 4/3, \\ a \geqslant 4. \end{cases}$

Система решений не имеет.

Ответ. $a \geqslant 4$.

№ 7. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} (x-2b)(x-b/2) \geqslant 0, \\ x < 2. \end{cases}$$

Решение.

ООС: $\begin{cases} b \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

1 способ. Аналитический.

Сначала решим каждое из уравнений: $2b = 2$, $2b = b/2$, $2 = b/2$.

Откуда $b = 1$, $b = 0$, $b = 4$ соответственно.

Рассмотрим семь случаев (рис. 356).

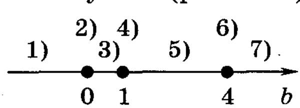


Рис. 356

1) $b < 0$.
$x \in (-\infty;\ 2b] \cup [b/2;\ 2)$ (рис. 357). ▶1
2) $b = 0$: $x \in (-\infty;\ 2)$. ▶2
3) $0 < b < 1$:
$x \in (-\infty;\ b/2] \cup [2b;\ 2)$ (рис. 358). ▶3

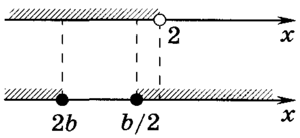


Рис. 357

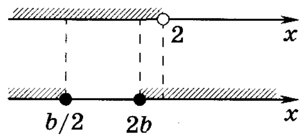


Рис. 358

4) $b = 1$: $x \in (-\infty;\ 1/2]$ (рис. 359). ▶4
5) $1 < b < 4$: $x \in (-\infty;\ b/2]$ (рис. 360). ▶5

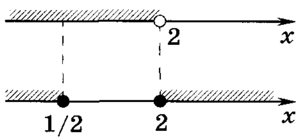


Рис. 359

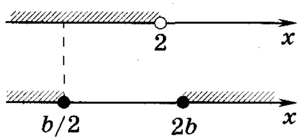


Рис. 360

6) $b = 4$: $x \in (-\infty;\ 2)$ (рис. 361). ▶6
7) $b > 4$: $x \in (-\infty;\ 2)$ (рис. 362). ▶7

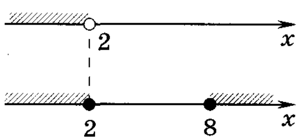


Рис. 361

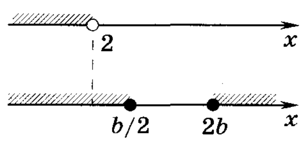


Рис. 362

Решение системы представлено на рисунке 363.

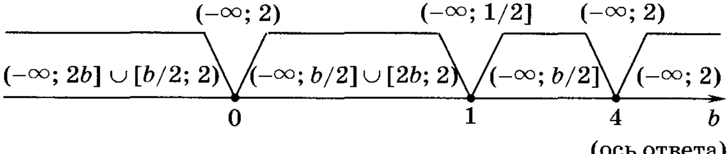


Рис. 363

2 способ. Решим систему графически в системе координат (bOx) (рис. 364).

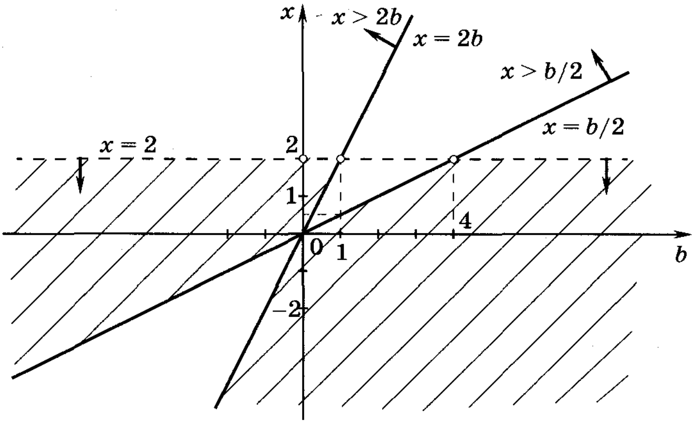


Рис. 364

Ответ. 1) Если $b \in (-\infty; 0)$, то
$x \in (-\infty; 2b] \cup [b/2; 2)$.
2) Если $b = 0$, то $x \in (-\infty; 2)$.
3) Если $b \in (0; 1)$, то
$x \in (-\infty; b/2] \cup [2b; 2)$.
4) Если $b \in [1; 4)$, то $x \in (-\infty; b/2]$.
5) Если $b \geqslant 4$, то $x \in (-\infty; 2)$.

№ 8. Решите неравенство

$$(x^2 + (a^2 - 2)x)/|a| > x + a^2 - 2.$$

Решение.

ООН: $\begin{cases} a \neq 0, \\ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$

Умножим обе части приведенного неравенства на $|a| > 0$ $(a \neq 0)$. ▶1

$x^2 + (a^2 - 2)x > |a|x + |a|a^2 - 2|a|$;

$x^2 + (a^2 - |a| - 2)x - |a|a^2 + 2|a| > 0$.

$D = ((a^2 - 2) - |a|)^2 + 4 \cdot |a|(a^2 - 2) = (a^2 - 2)^2 + 2|a| \cdot (a^2 - 2) + |a|^2$.

$D = (a^2 - 2 + |a|)^2$. $D \geqslant 0$ для любого $a \in \mathbb{R}$.

$x_1 = (-a^2 + |a| + 2 + a^2 - 2 + |a|)/2;\ x_1 = |a|;$

$x_2 = (-a^2 + |a| + 2 - a^2 + 2 - |a|)/2;\ x_2 = -a^2 + 2.$

Разложив квадратный трехчлен на множители, получим неравенство $(x + a^2 - 2)(x - |a|) > 0$. Решаем его.

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + a^2 - 2 > 0, \\ x - |a| > 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x + a^2 - 2 < 0, \\ x - |a| < 0; \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} x > 2 - a^2, \\ x > |a|; \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} x < 2 - a^2, \\ x < |a|; \end{cases} & (2) \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{ll} \begin{cases} a > 0, \\ x > 2 - a^2, \\ x > a; \end{cases} & (1.1) \\ \begin{cases} a < 0, \\ x > 2 - a^2, \\ x > -a; \end{cases} & (1.2) \\ \begin{cases} a > 0, \\ x < 2 - a^2, \\ x < a; \end{cases} & (2.1) \\ \begin{cases} a < 0, \\ x < 2 - a^2, \\ x < -a. \end{cases} & (2.2) \end{array}\right.$$

(1.1): Сравним $2 - a^2$ и a. Пусть $2 - a^2 > a$; тогда $a^2 + a - 2 < 0$, $(a + 2)(a - 1) < 0$, $a \in (0; 1)$ (рис. 365).

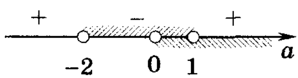


Рис. 365

Решим систему (1.1) при $a \in (0; 1)$. Тогда $x \in (2 - a^2; +\infty)$ (рис. 366).

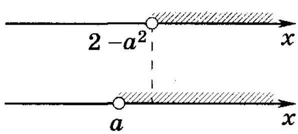


Рис. 366

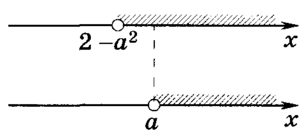


Рис. 367

Пусть $a > 1$, тогда $2 - a^2 < a$: $x \in (a; +\infty)$ (рис. 367). ▶3

Пусть $a = 1$; тогда $x > 1$. ▶4

Решение системы (1.1) приведено на рисунке 371 (верхняя ось). ▶5

(1.2): Сравним $2 - a^2$ и $-a$. Пусть $2 - a^2 > -a$; $a^2 - a - 2 < 0$, $(a - 2)(a + 1) < 0$, $a \in (-1; 0)$ (рис. 368).

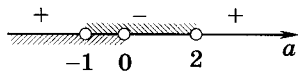


Рис. 368

Тогда $x \in (2 - a^2; +\infty)$ (рис. 369). ▶6

Пусть $2 - a^2 < -a$, т. е. $a < -1$, тогда $x \in (-a; +\infty)$ (рис. 370). ▶7

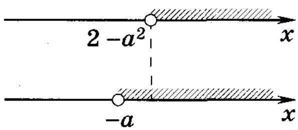


Рис. 369

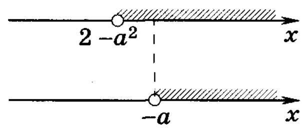


Рис. 370

Пусть $2 - a^2 = -a$, т. е. $a = -1$. Тогда $x > 1$. ▶8

Решение системы (1.2) представлено на рисунке 371 (средняя ось). ▶9

На нижней оси (рис. 371) показано решение системы (1). ▶10

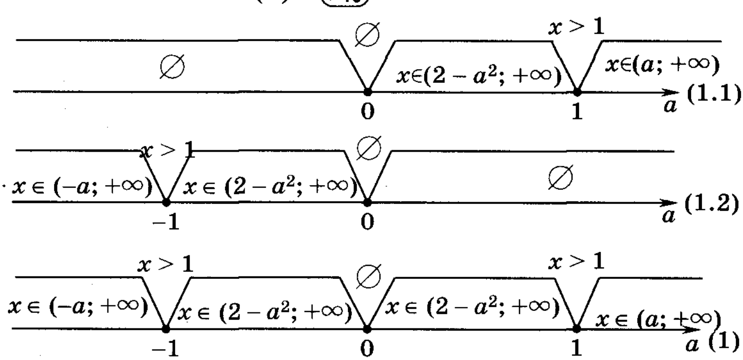


Рис. 371

(2.1): Пусть $a \in (0;\ 1)$; тогда $x \in (-\infty;\ a)$ (рис. 372). ▶11

Пусть $a > 1$; тогда $x \in (-\infty;\ 2 - a^2)$ (рис. 373). ▶12

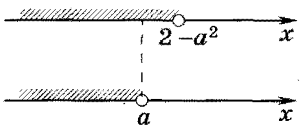


Рис. 372

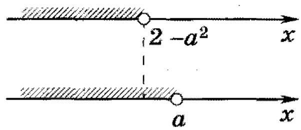


Рис. 373

Пусть $a = 1$: $x < 1$. ▶13

Решение системы (2.1) показано на рисунке 376 (верхняя ось). ▶14

(2.2): Пусть $a \in (-1;\ 0)$; тогда $x \in (-\infty;\ -a)$ (рис. 374). ▶15

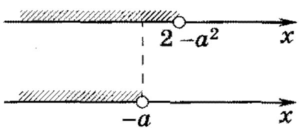


Рис. 374

Пусть $a < -1$; тогда $x \in (-\infty;\ 2 - a^2)$ (рис. 375). ▶16

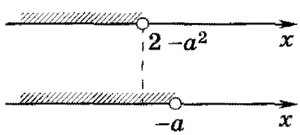


Рис. 375

Пусть $a = -1$; тогда $x < 1$. ▶17

Решение системы (2.2) представлено на рисунке 376 (средняя ось). ▶18

На нижней оси (рис. 376) показано решение системы (2). ▶19

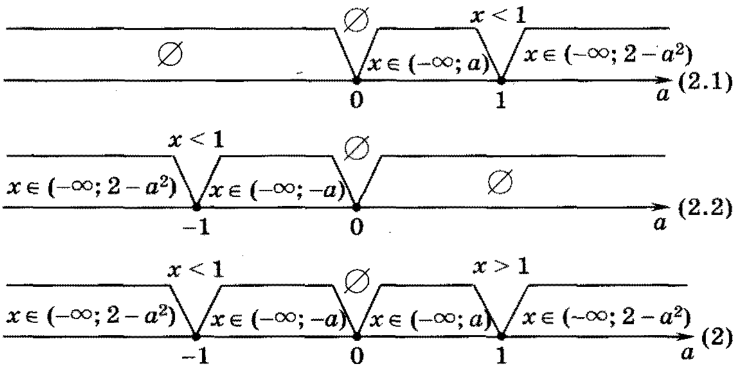


Рис. 376

Окончательный результат представлен на оси ответа (рис. 377). (▸20)

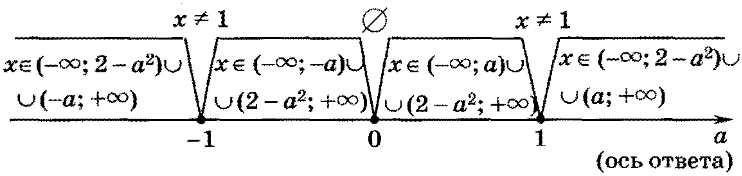


Рис. 377

Ответ. 1) Если $a = 0$, то решений нет.

2) Если $a \in (-\infty; -1)$, то
$x \in (-\infty; 2 - a^2) \cup (-a; +\infty)$.

3) Если $a \in (-1; 0)$, то
$x \in (-\infty; -a) \cup (2 - a^2; +\infty)$.

4) Если $a \in (0; 1)$, то
$x \in (-\infty; a) \cup (2 - a^2; +\infty)$.

5) Если $a \in (1; +\infty)$, то
$x \in (-\infty; 2 - a^2) \cup (a; +\infty)$.

6) Если $a = -1$ или $a = 1$, то
$x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

Совокупность систем (1) и (2) можно решить (и гораздо проще) графически в системе координат (aOx). Для этого построим графики функций

$x = 2 - a^2$ и $x = |a|$. На рисунке 378 заштриховано множество точек плоскости, расположенных выше каждого из графиков функций, исключая ось x, координаты каждой из которых удовлетворяют системе (1).

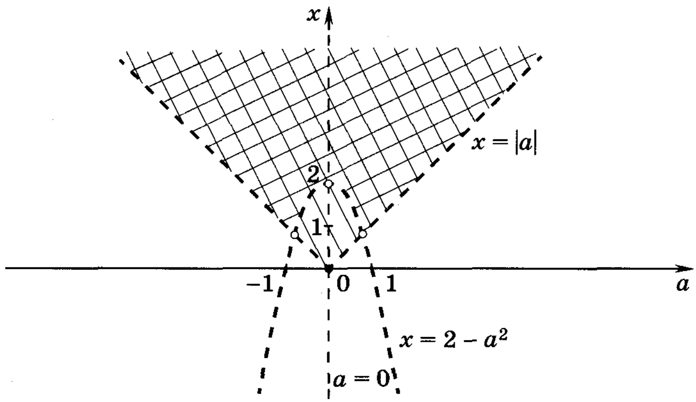


Рис. 378

На рисунке 379 заштриховано множество точек, координаты которых удовлетворяют системе (2).

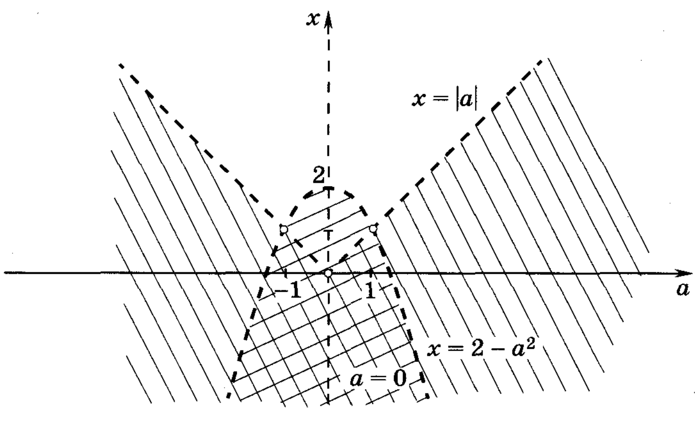


Рис. 379

На рисунке 380 представлено объединение множеств точек, отмеченных на рисунках 378 и 379.

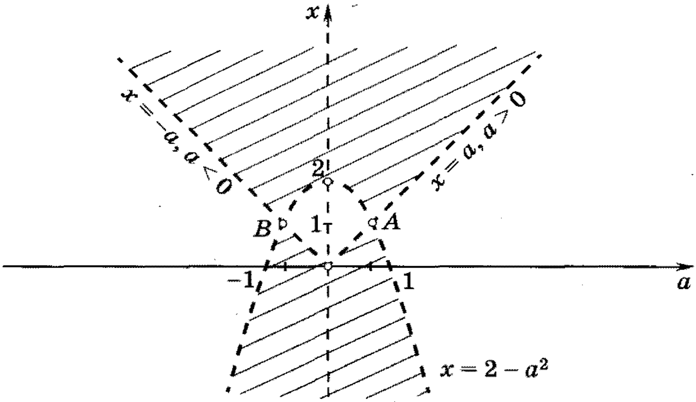


Рис. 380

Определим координаты точек пересечения графиков функций:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a > 0,\\ 2 - a^2 = a;\end{cases}\\ \begin{cases}a < 0,\\ 2 - a^2 = -a;\end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}a = 1,\\ a = -1.\end{array}\right. \qquad A(1;\, 1); \qquad B(-1;\, 1).$$

Проведем мысленно вертикальные прямые $a = c$, $c \in \mathbb{R}$, и определим множество решений совокупности в зависимости от a (см. ответ).

№ 9. Решите неравенство $x^2 + 2|x - a| + 2ax - 3 > 0$.

Решение.

ООН: $\begin{cases}a \in \mathbb{R},\\ x \in \mathbb{R}.\end{cases}$

Данное неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \geqslant a,\\ x^2 + 2x - 2a + 2ax - 3 > 0,\end{cases}\\ \begin{cases}x < a,\\ x^2 - 2x + 2a + 2ax - 3 > 0;\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \geqslant a, \\ x^2 + 2(1 + a)x - 2a - 3 > 0;\end{cases} \quad (1) \\ \begin{cases}x < a, \\ x - 2(1 - a)x + 2a - 3 > 0.\end{cases} \quad (2)\end{array}\right.$$

<u>1 способ</u>. Решим сначала эту совокупность аналитически.

Решим систему (1).

Найдем корни квадратного трехчлена $x^2 + 2(1 + a)x - 2a - 3$:

$D_1 = (a + 2)^2$, $x_1 = 1$, $x_2 = -2a - 3$.

Узнаем теперь, при каких значениях a верны равенства:

$1 = -2a - 3$; $1 = a$; $-2a - 3 = a$.

Получаем $a = -2$; $a = 1$; $a = -1$.

А теперь найдем решения системы

$\begin{cases}x \geqslant a, \\ (x - 1)(x + 2a + 3) > 0\end{cases}$

в каждом из семи случаев, отмеченных на оси параметра a (рис. 381).

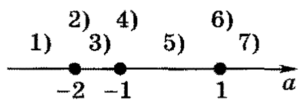


Рис. 381

1) $a < -2$. Сравним на этом интервале, где находится a по отношению к $x_1 = 1$ и $x_2 = -2a - 3$:

$a < 1 < -2a - 3$.

$x \in [a; 1) \cup (-2a - 3; +\infty)$ (рис. 382).

2) $a = -2$. Тогда система примет вид $\begin{cases}x \geqslant -2, \\ (x - 1)^2 > 0.\end{cases}$

$x \in [-2; 1) \cup (1; +\infty)$ (рис. 383).

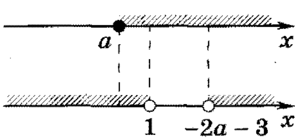


Рис. 382

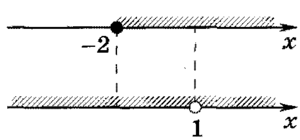


Рис. 383

3) $-2 < a < 1$. В этом случае $a < -2a - 3 < 1$.

$x \in [a; -2a - 3) \cup (1; +\infty)$ (рис. 384).

4) $a = -1$. Система примет вид $\begin{cases} x \geqslant -1, \\ (x-1)(x+1) > 0. \end{cases}$

$x \in (1; +\infty)$ (рис. 385).

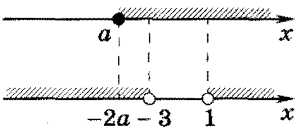


Рис. 384

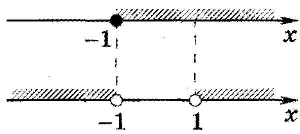


Рис. 385

5) $-1 < a < 1$. Тогда $-2a - 3 < a < 1$.
$x \in (1; +\infty)$ (рис. 386).

6) $a = 1$. Решаем систему $\begin{cases} x \geqslant 1, \\ (x-1)(x+5) > 0. \end{cases}$

$x \in (1; +\infty)$ (рис. 387).

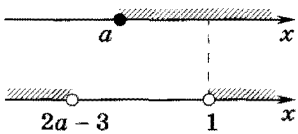


Рис. 386

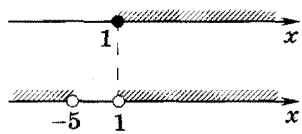


Рис. 387

7) $a > 1$. В этом случае $-2a - 3 < 1 < a$.
$x \in [a; +\infty)$ (рис. 388).

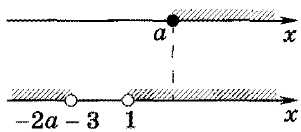


Рис. 388

Результаты решения системы (1) представлены на рисунке 389.

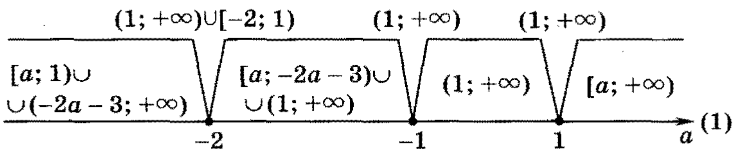


Рис. 389

Решим теперь систему (2).

Сначала найдем корни квадратного трехчлена $x^2 - 2(1 - a)x + 2a - 3$.

$D_1 = (a - 2)^2$, $x_3 = -1$, $x_4 = -2a + 3$.

Перейдем к системе $\begin{cases} x < a, \\ (x + 1)(x + 2a - 3) > 0. \end{cases}$

Решаем уравнения:

$a = -1$; $-2a + 3 = -1$; $-2a + 3 = a$.

Получим: $a = -1$; $a = 2$; $a = 1$.

Опять рассматриваем семь случаев (рис. 390).

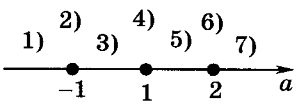


Рис. 390

1) $a < -1$: $x \in (-\infty; a)$ (рис. 391).

2) $a = -1$: $x \in (-\infty; -1)$ (рис. 392).

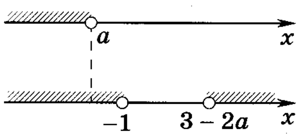


Рис. 391

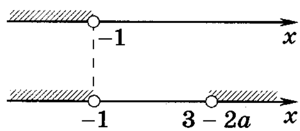


Рис. 392

3) $-1 < a < 1$: $x \in (-\infty; -1)$ (рис. 393).

4) $a = 1$: $x \in (-\infty; -1)$ (рис. 394).

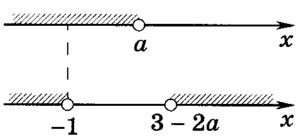


Рис. 393

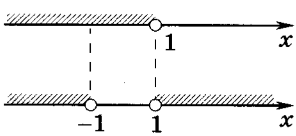


Рис. 394

5) $1 < a < 2$: $x \in (-\infty; -1) \cup (3 - 2a; a)$ (рис. 395).

6) $a = 2$: $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 2)$ (рис. 396).

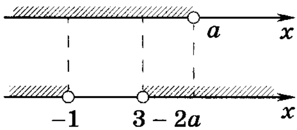


Рис. 395

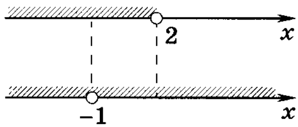


Рис. 396

7) $a > 2$: $x \in (-\infty; 3 - 2a) \cup (-1; a)$ (рис. 397).

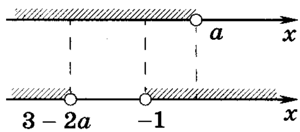


Рис. 397

Результат решения системы (2) представлен на рисунке 398.

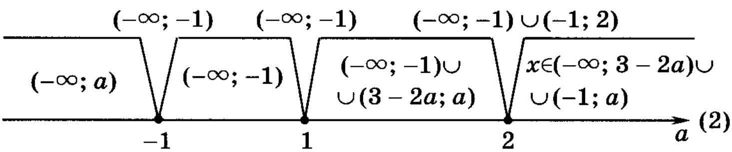


Рис. 398

Объединим решения системы (1) и системы (2) на рисунке 399.

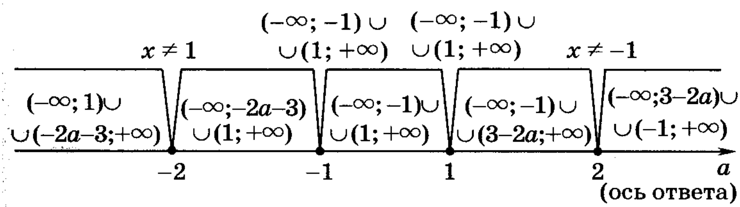


Рис. 399

<u>Ответ</u>. 1) Если $a \in (-\infty; -2)$, то
$x \in (-\infty; 1) \cup (-2a - 3; +\infty)$.
2) Если $a = -2$, то $x \neq 1$.

3) Если $a \in (-2; 1)$, то
$x \in (-\infty; -2a - 3) \cup (1; +\infty)$.
4) Если $a \in [-1; 1]$, то
$x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.
5) Если $1 < a < 2$, то
$x \in (-\infty; -1) \cup (3 - 2a; +\infty)$.
6) Если $a = 2$, то $x \neq -1$.
7) Если $a \in (2; +\infty)$, то
$x \in (-\infty; 3 - 2a) \cup (-1; +\infty)$.

<u>2 способ</u>. Решим графически неравенство $x^2 + 2|x - a| + 2ax - 3 > 0$ в системе координат (aOx).

Систему $\begin{cases} x \geqslant a, \\ (x-1)(x+2a+3) > 0 \end{cases}$ (1)

решаем графически.

Неравенство $x \geqslant a$ задает полуплоскость, отмеченную стрелками. Для решения неравенства $(x - 1)(x + 2a + 3) > 0$ узнаем сначала, при каких значениях a имеет место равенство $1 = -2a - 3$. Получаем $a = -2$. А теперь рассмотрим три случая.

1) Пусть $a > -2$. Тогда $1 > -2a - 3$. Решаем неравенство методом интервалов. Откуда $x \in (-\infty; -2a - 3) \cup (1; +\infty)$ (рис. 400).
2) Если $a = -2$, то $x \in [-2; 1) \cup (1; +\infty)$.

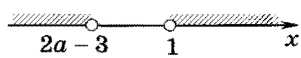


Рис. 400

3) Если $a < -2$, то $1 < -2a - 3$, а потому $x \in (-\infty; 1) \cup (-2a - 3; +\infty)$.

На рисунке 401 заштрихованы части плоскости, координаты каждой точки которых удовлетворяют системе (1).

Аналогично решаем систему (2):
$\begin{cases} x < a, \\ (x+1)(x+2a-3) > 0. \end{cases}$

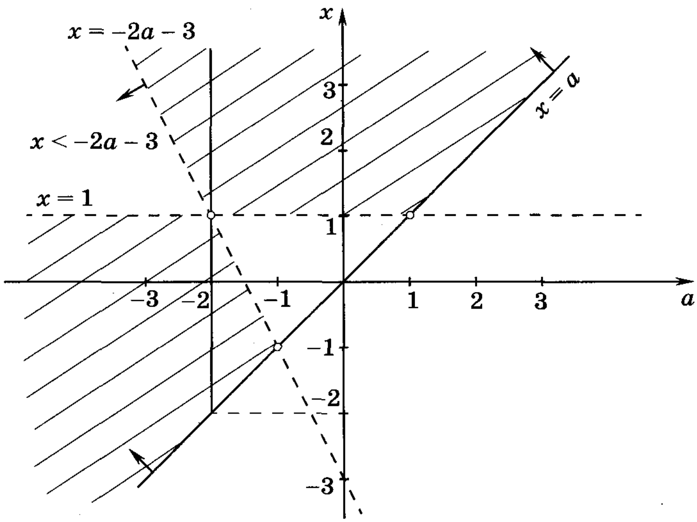


Рис. 401

Ее решение представлено на рисунке 402.

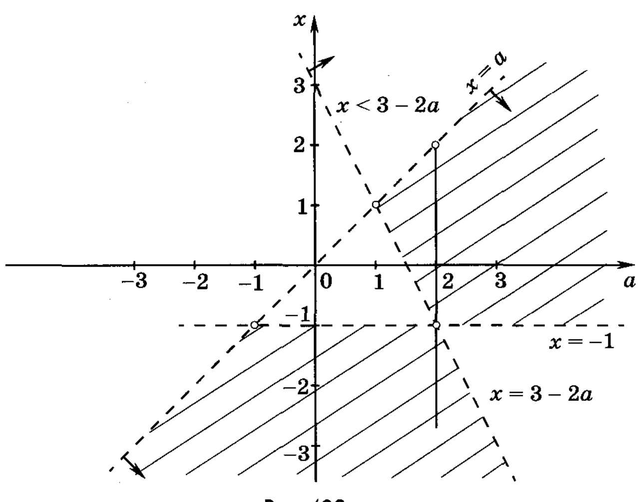


Рис. 402

А с рисунка 403 уже легко списывается ответ.

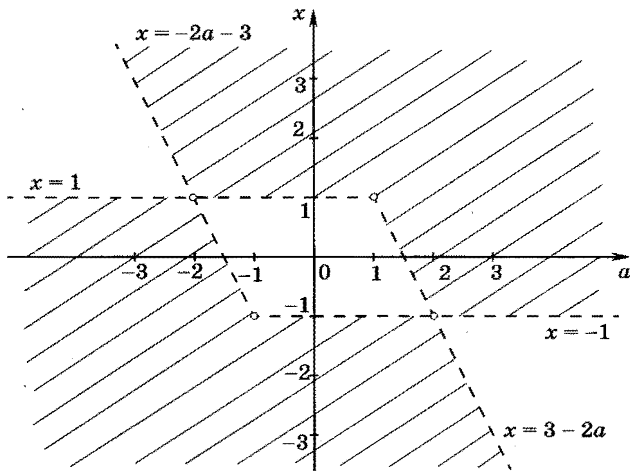


Рис. 403

Для получения рисунка 403 можно посоветовать воспользоваться калькой, что позволит совместить рисунки 401 и 402.

№ 10. Решите неравенство $ax^2 + x + 1 > 0$.

Решение.

1 способ. Решим неравенство аналитически, рассмотрев случаи $a = 0$, $a > 0$, $a < 0$ и учитывая знак дискриминанта.

Если $a = 0$, то $x > -1$. (▸1)

Пусть $a > 0$. Находим $D = 1 - 4a$.

Если $a = 1/4$ $(D = 0)$, то $x \neq -2$. (▸2)

Если $a > 1/4$ $(D < 0)$, то $x \in R$. (▸3)

Если $a < 1/4$, т. е. $a \in (-\infty; 0) \cup (0; 1/4)$, то $D > 0$.

Находим корни квадратного трехчлена:

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{1 - 4a}}{2a}; \; x_2 = \frac{-1 + \sqrt{1 - 4a}}{2a}.$$

Данное неравенство заменим ему равносильным: $a(x - x_1)(x - x_2) > 0$.

Если $a \in (0; 1/4)$, то ▶4

$$x \in \left(-\infty; \frac{-1-\sqrt{1-4a}}{2a}\right) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{1-4a}}{2a}; +\infty\right).$$

Если $a \in (-\infty; 0)$,

то $x \in \left(\frac{-1+\sqrt{1-4a}}{2a}; \frac{-1-\sqrt{1-4a}}{2a}\right)$. ▶5

Сведем все рассмотренные случаи на координатной прямой параметра a (рис. 404).

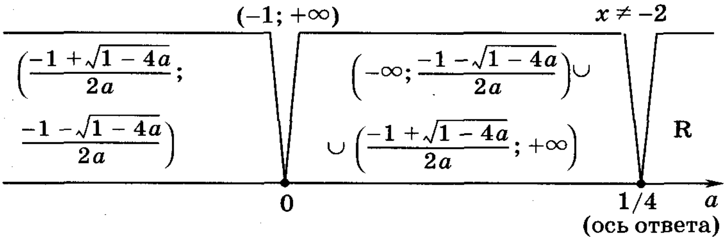


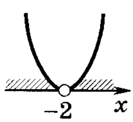
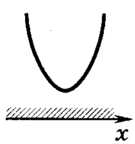
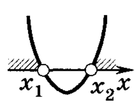
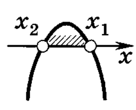
Рис. 404

<u>2 способ.</u>

Если $a = 0$, то $x \in (-1; +\infty)$.

Если $a \neq 0$, то $y = ax^2 + x + 1$ — квадратичная функция. Рассмотрим расположение графика этой функции относительно оси x (табл. 2).

Таблица 2

	$a = 1/4$	$a > 1/4$	$0 < a < 1/4$	$a < 0$
$a > 0$				—
$a < 0$	—	—	—	

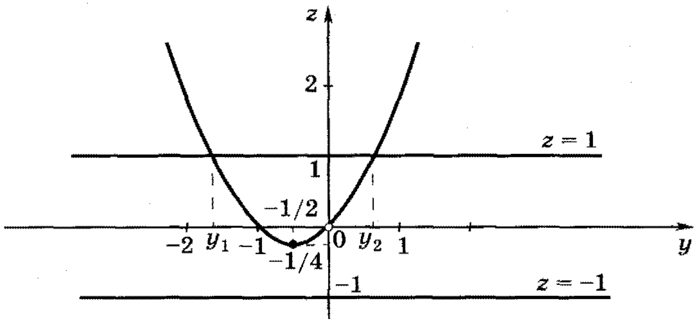


Рис. 405

Ответ легко выписывается с использованием полученной таблицы.

3 способ.

Пусть $x = 1/y$ ($y \neq 0$). Умножив обе части данного неравенства на $y^2 > 0$, получим квадратное неравенство $y^2 + y + a > 0$. Решим его графически в системе координат (yOz), представив в виде $y^2 + y > -a$. Сначала построим график функции $z = y^2 + y$, а затем рассмотрим семейство прямых $z = -a$ (рис. 405).

1) Если $z < -1/4$, т. е. $-a < -1/4$, $a > 1/4$, то y — любое действительное число, не равное нулю. Поэтому $x \neq 0$. Но при $x = 0$ данное неравенство верно при любом значении a. Значит, $x \in \mathrm{R}$.
2) Если $z = -1/4$, т. е. $a = 1/4$, то $y \neq -1/2$. А потому $x \neq 2$.
3) Пусть $a \in (0;\ 1/4)$. Найдем абсциссы точек пересечения графиков функций $z = y^2 + y$ и $z = -a$:

$$y_1 = (-1 - \sqrt{1-4a})/2;\ y_2 = (-1 + \sqrt{1-4a})/2.$$

Тогда $\left[\begin{array}{l} y > (-1 + \sqrt{1-4a})/2, \\ y < (-1 - \sqrt{1-4a})/2; \end{array}\right.$

$$\left[\begin{array}{l}1/x > 2a/(-1-\sqrt{1-4a}\,),\\ 1/x < 2a/(-1+\sqrt{1-4a}\,);\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}x < (-1-\sqrt{1-4a}\,/(2a),\\ x > (-1+\sqrt{1-4a}\,)/(2a).\end{array}\right.$$

4) Пусть $a < 0$. Тогда совокупность неравенств

$$\left[\begin{array}{l}1/x > 2a/(-1-\sqrt{1-4a}\,),\\ 1/x < 2a/(-1+\sqrt{1-4a}\,)\end{array}\right.$$

равносильна системе неравенств

$$\left\{\begin{array}{l}x > (-1+\sqrt{1-4a}\,)/(2a),\\ x < (-1-\sqrt{1-4a}\,)/(2a).\end{array}\right.$$

4 способ.

Перепишем данное неравенство в виде $ax^2 > -x-1$. Будем решать графически в системе координат (xOy). Построим график функции $y = -x-1$ и семейство кривых $f(x) = ax^2$ (рис. 406).

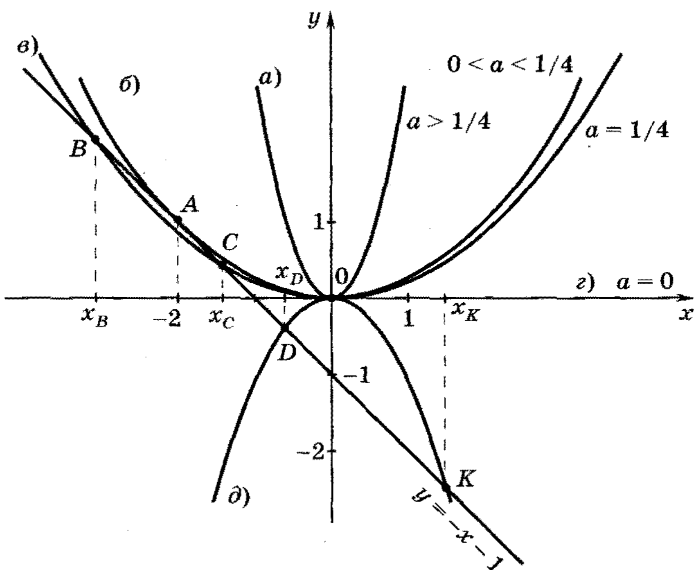


Рис. 406

Пусть A — точка касания прямой $y = -x - 1$ и одной из кривых семейства $f(x) = ax^2$. Абсциссу точки A определим, приравняв нулю дискриминант уравнения $ax^2 + x + 1 = 0$. Если $D = 0$, то $a = 1/4$. Рассмотрим теперь пять случаев на рисунке 406.

а) Парабола проходит выше точки A. Это будет в случае, если $D < 0$, т. е. $a > 1/4$. Тогда любое значение $x \in \mathrm{R}$ удовлетворяет неравенству $f(x) > -x - 1$.

б) В случае касания графика функции $f(x)$ прямой $y = -x - 1$ данному неравенству удовлетворяют все значения $x \in \mathrm{R}$, кроме $x = -2$. Это будет в случае, когда $a = 1/4$.

в) Пусть $a \in (0;\ 1/4)$. Тогда парабола пересекает прямую $y = -x - 1$ в двух точках B и C и проходит ниже точки A, но выше оси x. Найдем абсциссы точек B и C:

$$x_B = (-1 - \sqrt{1 - 4a})/(2a);$$

$$x_C = (-1 + \sqrt{1 - 4a})/(2a).$$

В этом случае имеем $\left[\begin{array}{l} x > x_C, \\ x < x_B, \end{array}\right.$

т. е.

$$\left[\begin{array}{l} x > (-1 + \sqrt{1 - 4a})/(2a), \\ x < (-1 - \sqrt{1 - 4a})/(2a). \end{array}\right.$$

г) Если $a = 0$, то данное неравенство верно при $x > -1$.

д) Пусть $a < 0$. Парабола пересекает прямую $y = -x - 1$ в точках D и K:

$$x_D = (-1 + \sqrt{1 - 4a}) / (2a);$$

$$x_K = (-1 - \sqrt{1 - 4a}) / (2a).$$

Тогда $x \in (x_D;\ x_K)$, т. е.

$$x \in ((-1 + \sqrt{1 - 4a})/(2a);\ (-1 - \sqrt{1 - 4a})/2a)).$$

№ 11. Решите неравенство

$$\frac{\max\{x^2-ax,\ a-x\}}{\min\{x^2-ax,\ a-x\}} > \frac{\min\{x^2-ax,\ a-x\}}{\max\{x^2-ax,\ a-x\}}.$$

Решение.

$$\text{ООН: } \begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \neq 0, \\ x \neq a. \end{cases}$$

Известно, что $\max\{A, B\} = \begin{cases} A, \text{ если } A > B, \\ B, \text{ если } B > A, \\ A \text{ или } B, \text{ если } A = B; \end{cases}$

$$\min\{A, B\} = \begin{cases} A, \text{ если } A < B, \\ B, \text{ если } B < A, \\ A \text{ или } B, \text{ если } A = B. \end{cases}$$

Тогда $\max\{x^2-ax,\ a-x\} =$

$$= \begin{cases} x^2-ax, \text{ если } x^2-ax > a-x, \\ a-x, \text{ если } a-x > x^2-ax, \\ a-x \text{ или } x^2-ax, \text{ если } a-x = a^2-ax; \end{cases}$$

$\min\{x^2-ax,\ a-x\} =$

$$= \begin{cases} x^2-ax, \text{ если } x^2-ax < a-x, \\ a-x, \text{ если } a-x < x^2-ax, \\ a-x \text{ или } x^2-ax, \text{ если } a-x = x^2-ax. \end{cases}$$

Если $x^2-ax = a-x$, то

$$\max\{x^2-ax,\ a-x\} = \min\{x^2-ax,\ a-x\} = \\ = x^2-ax = a-x.$$

В этом случае левая и правая части данного неравенства равны: $(a-x)/(a-x) > (a-x)/(a-x)$. Это неравенство решений не имеет ни при каком значении $a \in \mathrm{R}$. Остается решить совокупность систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2-ax > a-x, \\ (x^2-ax)/(a-x) > (a-x)/(x^2-ax); \end{cases} \\ \begin{cases} a-x > x^2-ax, \\ (a-x)/(x^2-ax) > (x^2-ax)/(a-x); \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}(x-a)(x+1)>0,\\ x(x-a)/(a-x)>(a-x)/(x(x-a)),\end{cases}\\ \begin{cases}(x-a)(x+1)<0,\\ (a-x)/(x(x-a))>(x(x-a))/(a-x);\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}(x-a)(x+1)>0,\\ -x>-1/x,\end{cases}\\ \begin{cases}(x-a)(x+1)<0,\\ -1/x>-x;\end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{ll}\begin{cases}(x-a)(x+1)>0,\\ (x^2-1)/x<0,\end{cases} & (1)\\ \begin{cases}(x-a)(x+1)<0,\\ (x^2-1)/x>0.\end{cases} & (2)\end{array}\right.$$

Решаем систему (1).

Находим значения x, при которых левые части неравенств $(x-a)(x+1)>0$ и $(x^2-1)/x<0$ равны нулю или не существуют: $x=a$, $x=-1$, $x=1$, $x=0$. Тогда $a=-1$, $a=1$, $a=0$.

Рассмотрим следующие случаи (рис. 407).

1) $a=-1$: $\begin{cases}(x+1)^2>0,\\ (x^2-1)/x<0,\end{cases}$ $\qquad (x^2-1)/x<0,$

$x\in(-\infty;-1)\cup(0;1)$ (рис. 408). ▶1

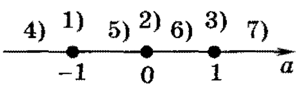


Рис. 407

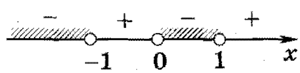


Рис. 408

2) $a=0$: $\begin{cases}x(x+1)>0,\\ (x^2-1)/x<0.\end{cases}$

$x\in(-\infty;-1)\cup(0;1)$ (рис. 409). ▶2

3) $a=1$: $\begin{cases}(x-1)(x+1)>0,\\ (x^2-1)/x<0.\end{cases}$

$x\in(-\infty;-1)$ (рис. 410). ▶3

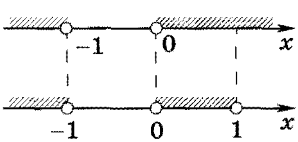


Рис. 409

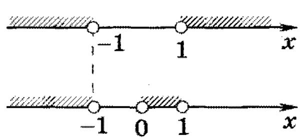


Рис. 410

4) $a < -1$: $x \in (-\infty; a) \cup (0; 1)$ (рис. 411). ▶4

5) $-1 < a < 0$: $x \in (-\infty; -1) \cup (0; 1)$ (рис. 412). ▶5

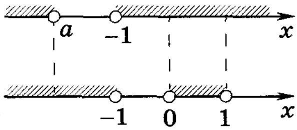


Рис. 411

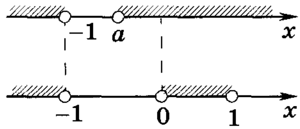


Рис. 412

6) $0 < a < 1$: $x \in (-\infty; -1) \cup (a; 1)$ (рис. 413). ▶6

7) $a > 1$:

$x \in (-\infty; -1)$ (рис. 414). ▶7

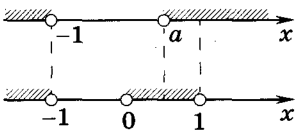


Рис. 413

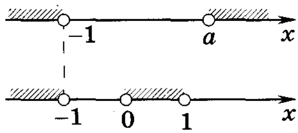


Рис. 414

На рисунке 415 представлены результаты решения системы (1).

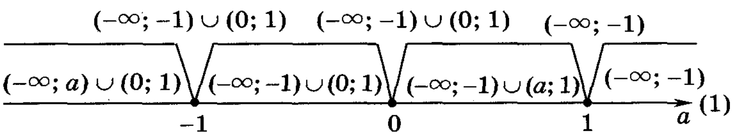


Рис. 415

Решим систему (2).

1) $a = -1$: $\begin{cases}(x+1)^2 < 0,\\(x^2-1)/x > 0.\end{cases}$ Решений нет. ▶8

2) $a = 0$: $\begin{cases}x(x+1) < 0,\\(x^2-1)/x > 0.\end{cases}$

$x \in (-1; 0)$ (рис. 416). ▶9

3) $a = 1$: $\begin{cases}(x-1)(x+1) < 0,\\(x^2-1)/x > 0.\end{cases}$

$x \in (-1; 0)$ (рис. 417). ▶10

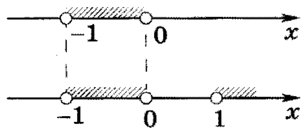


Рис. 416

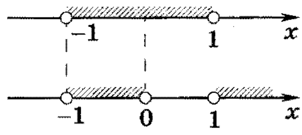


Рис. 417

4) $a < -1$.

Решений нет (рис. 418). ▶11

5) $-1 < a < 0$:

$x \in (-1; a)$ (рис. 419). ▶12

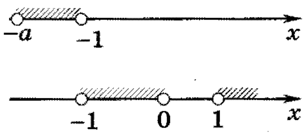


Рис. 418

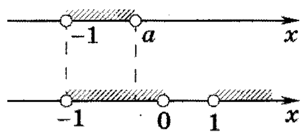


Рис. 419

6) $0 < a < 1$:

$x \in (-1; 0)$ (рис. 420). ▶13

7) $a > 1$:

$x \in (-1; 0) \cup (1; a)$ (рис. 421). ▶14

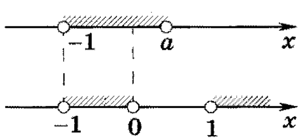


Рис. 420

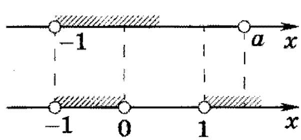


Рис. 421

На рисунке 422 представлены результаты решения системы (2):

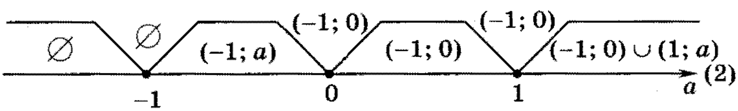


Рис. 422

А теперь объединим решения систем (1) и (2) на рисунке 423.

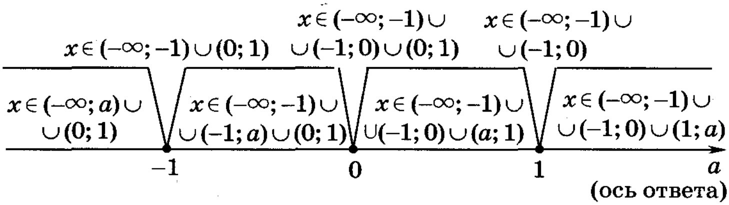


Рис. 423

<u>*Замечание*</u>

Совокупность систем $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}(x-a)(x+1)>0,\\(x^2-1)/x<0,\end{cases}\\\begin{cases}(x-a)(x+1)<0,\\(x^2-1)/x>0\end{cases}\end{array}\right.$

равносильна неравенству $(x-a)(x+1)^2(x-1)x<0$. Решим его методом интервалов, рассмотрев семь случаев (см. решение системы (1)).

Результаты решения сразу заносим на ось ответа. Напомним, что знак $\triangleright$ над точкой означает, что при переходе через нее знак неравенства не меняется.

1) $a=-1$: $(x+1)^3(x-1)x<0$,
$x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0)$ (рис. 424).

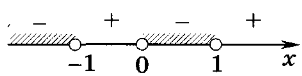


Рис. 424

2) $a=0$: $x^2(x+1)^2(x-1)<0$,
$x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 1)$ (рис. 425).

3) $a=1$: $(x-1)^2(x+1)^2x<0$,
$x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0)$ (рис. 426).

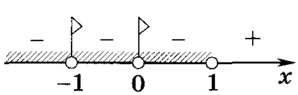


Рис. 425

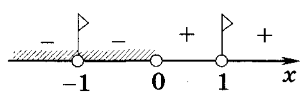


Рис. 426

4) $a < -1$: $x \in (-\infty; a) \cup (0; 1)$ (рис. 427).

5) $-1 < a < 0$: $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; a) \cup (0; 1)$ (рис. 428).

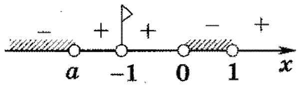


Рис. 427

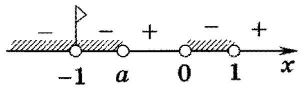


Рис. 428

6) $0 < a < 1$: $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (a; 1)$ (рис. 429).

7) $a > 1$: $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (1; a)$ (рис. 430).

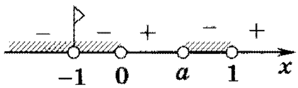


Рис. 429

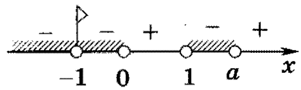


Рис. 430

Заполним ось ответа (рис. 431).

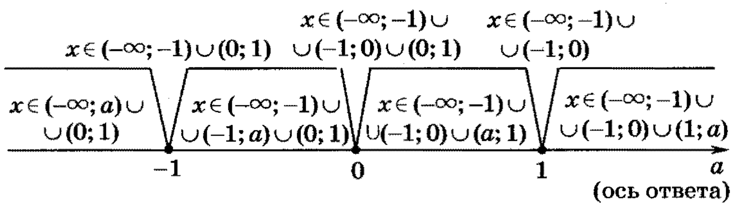


Рис. 431

№ 12. При каких значениях a множество решений неравенства $x(x-2) \leqslant (a+1)(|x-1|-1)$ содержит все члены некоторой бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом $b_1 = 1{,}7$ и $q > 0$?

(ЕГЭ 2004 г.)

<u>Решение.</u>

<u>1 способ.</u>

ООН: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

Раскрыв модуль, переходим к совокупности двух систем неравенств:

$$\left[\begin{array}{ll}\begin{cases} x \geqslant 1, \\ (x-2)(x-a-1) \leqslant 0, \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} x < 1, \\ x(x-1+a) \leqslant 0. \end{cases} & (2) \end{array}\right.$$

Решаем систему (1): $\begin{cases} x \geqslant 1, \\ (x-2)(x-a-1) \leqslant 0. \end{cases}$

«Граничные» точки интервалов: $x = 1$; $x = 2$; $x = a + 1$.

Сравним $(a + 1)$ с 2 и 1:

$a + 1 = 2$, $a = 1$;

$a + 1 = 1$, $a = 0$.

Теперь рассмотрим пять случаев (рис. 432).

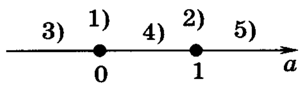


Рис. 432

1) $a = 0$: $\begin{cases} x \geqslant 1, \\ (x-2)(x-1) \leqslant 0, \end{cases}$

$1 \leqslant x \leqslant 2$.

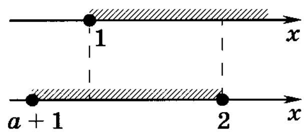


Рис. 433

2) $a = 1$: $\begin{cases} x \geqslant 1, \\ (x-2)^2 \leqslant 0, \end{cases}$ $x = 2$.

3) $a < 0$: $1 \leqslant x \leqslant 2$ (рис. 433).

4) $0 < a < 1$: $a + 1 \leqslant x \leqslant 2$ (рис. 434).

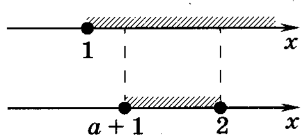


Рис. 434

5) $a > 1$: $2 \leqslant x \leqslant a + 1$ (рис. 435).

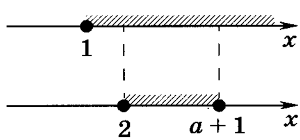


Рис. 435

Нанесем решения на ось (1) параметра a (рис. 440).

Аналогично решаем систему (2):

$\begin{cases} x < 1, \\ x(x-1+a) \leqslant 0. \end{cases}$

«Граничные» точки интервалов: $x = 1$; $x = 0$; $x = 1 - a$.

Сравним $(1 - a)$ с числами 1 и 0 (рис. 436).

$1 - a = 1$, $a = 0$; $1 - a = 0$, $a = 1$.

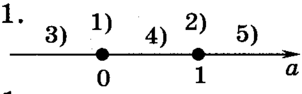


Рис. 436

1) $a = 0: \begin{cases} x < 1, \\ x(x-1) \leqslant 0, \ 0 \leqslant x < 1. \end{cases}$

2) $a = 1: \begin{cases} x < 1, \\ x^2 \leqslant 0, \ x = 0. \end{cases}$

3) $a < 0$: $0 \leqslant x < 1$ (рис. 437).

4) $0 < a < 1$: $0 \leqslant x \leqslant 1 - a$ (рис. 438).

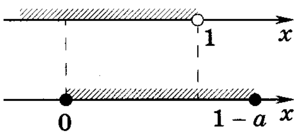


Рис. 437

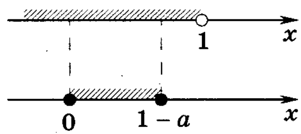


Рис. 438

5) $a > 1$:
$1 - a \leqslant x \leqslant 0$
(рис. 439).

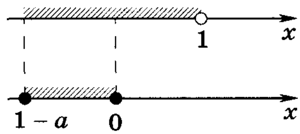


Рис. 439

Решения системы (2) нанесем на ось (2) параметра a (рис. 440).

На третьей оси параметра сведем решения систем (1) и (2) (рис. 440).

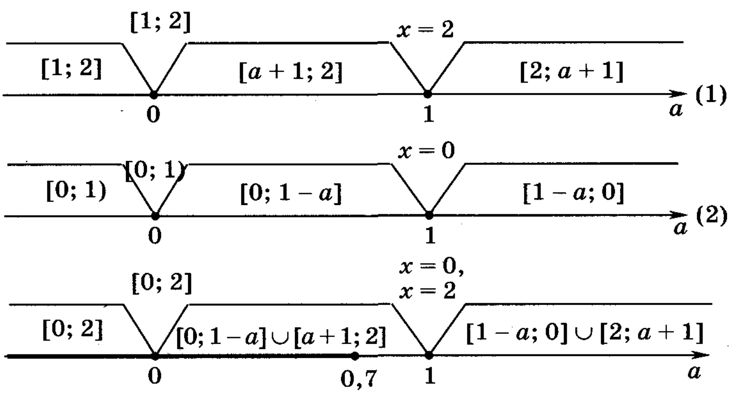


Рис. 440

А теперь проанализируем результаты решения совокупности.

1. Если $a \leqslant 0$, то $x \in [0; 2]$. Легко видеть, что члены любой бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом $b_1 = 1{,}7$ и $q > 0$ принадлежат отрезку $[0; 2]$.
2. Если $0 < a < 1$, то $x \in [0; 1 - a] \cup [a + 1; 2]$. Пусть $a + 1 = 1{,}7$, т. е. $a = 0{,}7$. Тогда имеем $[0; 0{,}3] \cup [1{,}7; 2]$. Возьмем, например, бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, у которой $b_1 = 1{,}7$; $b_2 = 0{,}1$. Тогда $q = 1/17$.

   Все члены этой прогрессии принадлежат множеству решений данного неравенства.

Ответ. $(-\infty; 0{,}7]$.

2 способ.

Пусть $|x - 1| = t$, где $t \geqslant 0$. Тогда
$(x - 2)x = x^2 - 2x = (x - 1)^2 - 1$.

Теперь решаем неравенство $t^2 - (a + 1)t + a \leqslant 0$, где $t \geqslant 0$. Переходим к системе

$$\begin{cases} (t-1)(t-a) \leqslant 0, \\ t \geqslant 0. \end{cases}$$

«Граничные» точки интервалов: $t = 0$, $t = 1$, $t = a$. Сравниваем a с числами 0 и 1; $a = 0$, $a = 1$. Рассмотрим возможные варианты (рис. 441):

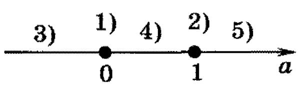


Рис. 441

1) $a = 0$: $\begin{cases} t(t-1) \leqslant 0,\ 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ t \geqslant 0 \text{ (рис. 442)}. \end{cases}$

   $|x - 1| \leqslant 1$, $-1 \leqslant x - 1 \leqslant 1$,
   $0 \leqslant x \leqslant 2$.

2) $a = 1$: $\begin{cases} (t-1)^2 \leqslant 0, \\ t \geqslant 0, \end{cases}$

$t = 1$, $|x - 1| = 1$,

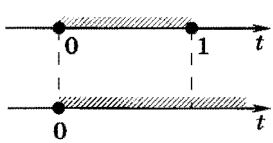


Рис. 442

$$\left[\begin{array}{l}x=2,\\ x=0,\end{array}\right.$$
$$\left[\begin{array}{l}x-1=1,\\ x-1=-1.\end{array}\right.$$

3) $a<0$:

$0\leqslant t\leqslant 1$ (рис. 443).

$|x-1|\leqslant 1,\ 0\leqslant x\leqslant 2.$

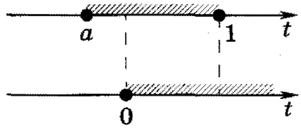


Рис. 443

4) $0<a<1$: $\begin{cases}t\geqslant a,\\ t\leqslant 1,\end{cases}$

$$\begin{cases}|x-1|\geqslant a,\\ |x-1|\leqslant 1,\end{cases}$$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\geqslant a+1,\\ x\leqslant 1-a,\end{array}\right.\\ 0\leqslant x\leqslant 2;\end{cases}$$

$x\in[0;1-a]\cup[1+a;2]$ (рис. 444).

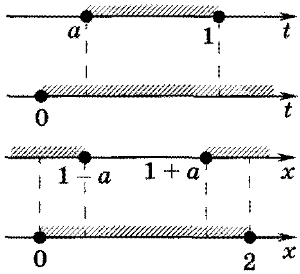


Рис. 444

5) $a>1$: $\begin{cases}t\geqslant 1,\\ t\leqslant a,\end{cases}$

$$\begin{cases}|x-1|\geqslant 1,\\ |x-1|\leqslant a,\end{cases}$$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x-1\geqslant 1,\\ x-1\leqslant -1,\end{array}\right.\\ -a\leqslant x-1\leqslant a,\end{cases}$$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\geqslant 2,\\ x\leqslant 0,\end{array}\right.\\ 1-a\leqslant x\leqslant 1+a;\end{cases}$$

$x\in[1-a;0]\cup[2;1+a]$ (рис. 445).

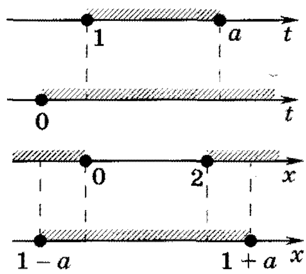


Рис. 445

Нанесем решения на ось (рис. 446).

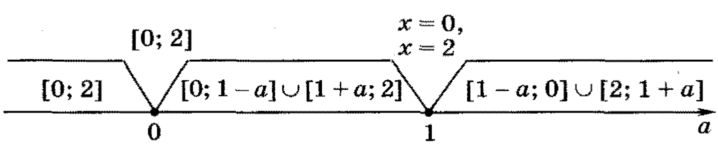


Рис. 446

Затем так же, как и в способе 1, анализируем результаты решения данного неравенства.

№ **13.** При каких значениях a множество решений неравенства $x(x-4) \geqslant (a+2)(|x-2|-2)$ содержит все члены некоторой арифметической прогрессии, содержащей как отрицательные, так и положительные члены, а разность прогрессии d равна 0,5?
(ЕГЭ 2004 г.)

Решение.

ООУ: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

Пусть $|x-2| = t$, где $t \geqslant 0$. Тогда $x(x-4) = x^2 - 4x = (x^2 - 4x + 4) - 4 = t^2 - 4$.

Решаем неравенство $t^2 - (a+2)t + 2a \geqslant 0$, где $t \geqslant 0$,

которое равносильно системе $\begin{cases} (t-2)(t-a) \geqslant 0, \\ t \geqslant 0. \end{cases}$

Найдем нули функций $f(t) = (t-2)(t-a)$ и $f_1(t) = t$: $t = 2$, $t = a$, $t = 0$. Приравняв найденные значения t попарно, получим $a = 0$, $a = 2$.

Рассмотрим пять случаев:

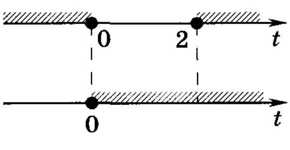


Рис. 447

1) $a = 0$: $\begin{cases} t(t-2) \geqslant 0, \\ t \geqslant 0 \end{cases}$ (рис. 447).

$\left[\begin{array}{l} t = 0, \\ t \geqslant 2, \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} |x-2| = 0, \\ |x-2| \geqslant 2, \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x-2 \geqslant 2, \\ x-2 \leqslant -2, \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x \geqslant 4, \\ x \leqslant 0. \end{array}\right.$

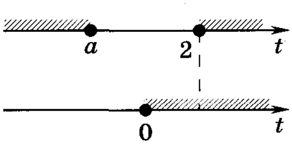


Рис. 448

2) $a = 2$: $\begin{cases} (t-2)^2 \geqslant 0, \\ t \geqslant 0, \end{cases}$

$t \geqslant 0$, $|x-2| \geqslant 0$, $x \in \mathrm{R}$.

3) $a < 0$: $t \geqslant 2$ (рис. 448),

$|x-2| \geqslant 2$, $\left[\begin{array}{l} x \geqslant 4, \\ x \leqslant 0. \end{array}\right.$

4) $0 < a < 2$ (рис. 449):

$$\left[\begin{array}{l} 0 \leqslant t \leqslant a, \\ t \geqslant 2, \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} |x-2| \leqslant a, \\ |x-2| \geqslant 2, \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} -a \leqslant x-2 \leqslant a, \\ x \geqslant 4, \\ x \leqslant 0, \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 2-a \leqslant x \leqslant 2+a, \\ x \geqslant 4, \\ x \leqslant 0. \end{array}\right.$$

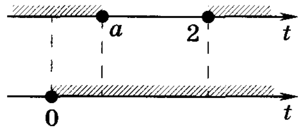


Рис. 449

5) $a > 2$ (рис. 450):

$$\left[\begin{array}{l} 0 \leqslant t \leqslant 2, \\ t \geqslant 0, \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} |x-2| \leqslant 2, \\ |x-2| \geqslant a, \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 0 \leqslant x \leqslant 4, \\ x \geqslant 2+a, \\ x \leqslant 2-a. \end{array}\right.$$

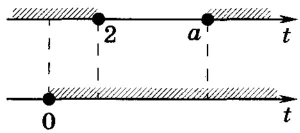


Рис. 450

Нанесем решения на ось ответа (рис. 451).

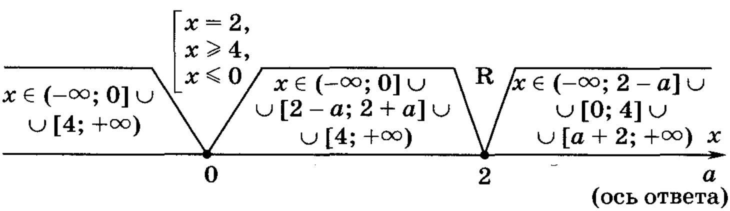


Рис. 451

А теперь проанализируем множество решений данного неравенства, учитывая условие задания.

1. Значения $a \leqslant 0$ нас не устраивают, так как при $d = 0{,}5$ нельзя подобрать ни одной арифметической прогрессии, содержащей как положительные, так и отрицательные члены, часть из которых принадлежит множеству $(-\infty;\ 0]$, а другая — множеству $[4;\ +\infty)$ $(4 - 0 > 0{,}5)$.
2. Пусть $0 < a < 2$.

   При этом x принимает значения из заштрихованных областей на рисунке 452. Должны выполняться условия

$\begin{cases} 2-a \leqslant 0{,}5, \\ 4-(2+a) \leqslant 0{,}5, \\ 0 < a < 2, \end{cases}$ $\begin{cases} a \geqslant 1{,}5, \\ a \geqslant 1{,}5, \\ 0 < a < 2; \end{cases}$ $1{,}5 \leqslant a < 2.$

3. $a = 2$ подходит.

4. $a > 2$ (рис. 453).

Составляем систему $\begin{cases} a > 2, \\ 0-(2-a) \leqslant 0{,}5, \\ a+2-4 \leqslant 0{,}5; \end{cases}$ $\begin{cases} a > 2, \\ a \leqslant 2{,}5; \end{cases}$

$a \in (2; 2{,}5]$.

Рис. 452

Рис. 453

Объединив множества [1,5; 2] и (2; 2,5], получим ответ.

Ответ. [1,5; 2,5].

Упражнения для самостоятельного решения

1) Решите неравенство $ax^2 + |x| + 1 > 0$. ▶1
2) Решите неравенство $ax^2 + |x-1| > 0$.
3) Решите неравенство
$|x^2 - 4x + 3| < a - x^2 - 6x$.
4) Решите неравенство $|x-a| < 3x - x^2 - 1$.
5) Решите неравенство $x^2 + 2|x-a| + 2ax - 3 \leqslant 0$. ▶5
6) При каких значениях параметра b имеет решения система неравенств
$\begin{cases} x^2-(b+1)x+b < 0, \\ x^2+(b+3)x+3b < 0? \end{cases}$ ▶6
7) При каких значениях параметра c система неравенств
$\begin{cases} x^2+2x+c \leqslant 0, \\ x^2-4x-6c \leqslant 0 \end{cases}$ имеет единственное решение? ▶7
8) При каких значениях параметра m всякое решение неравенства $x^2 - 3x + 2 < 0$ будет одновременно решением следующего неравенства:
$mx^2 - (3m+1)x + 3 > 0$? ▶8
9) Решите систему неравенств
$\begin{cases} (x-2b)(x-3b) \geqslant 0, \\ |2x-3| > 0. \end{cases}$

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С ПАРАМЕТРОМ

1. Единичная (тригонометрическая) окружность

Учитывая, что решение даже простейших тригонометрических уравнений и неравенств с параметром требует хорошего знания тригонометрии, следующие три главы мы посвятим раскрытию «белых пятен» школьной тригонометрии.

Основной моделью, позволяющей наглядно проиллюстрировать понятие тригонометрической функции, является единичная окружность на плоскости с фиксированной системой координат, начало которой совпадает с центром окружности. Такая окружность представляет собой инструмент для решения простейших тригонометрических уравнений, неравенств и их систем. С ее помощью можно корректно записать ответ, учитывая область определения уравнения (неравенства), а также исключив повторяющиеся решения. Так, если в результате решения уравнения мы получим две серии решений:

$$\left[\begin{array}{l} x=(\pi/4)\cdot k,\ k\in Z, \\ x=\pi n,\ n\in Z, \end{array}\right.$$

(Z — множество всех целых чисел), то легко видеть, что числа $x=\pi n$, $n\in Z$, содержатся среди множества чисел $x=(\pi/4)\cdot k$, $k\in Z$. Поэтому ответом будет $x=(\pi/4)\cdot k$, $k\in Z$.

Единичная окружность позволяет проанализировать тригонометрические формулы, сравнив области определений функций, стоящих в левой и правой частях каждой из них, и выделить «опасные формулы». Назовем формулу «опасной», если области определения функций, стоящих в левой и правой ее частях, не совпадают. Бездумное оперирование такими формулами может привести к потере корней (или приобретению посторонних корней) уравнения.

Рассмотрим, например, известную формулу тангенса двойного угла:

$$\operatorname{tg} 2x = 2\operatorname{tg} x/(1 - \operatorname{tg}^2 x).$$

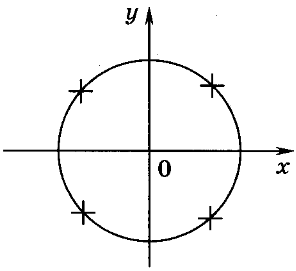


Рис. 454

Найдем область определения функции $y = \operatorname{tg} 2x$ (т. е. левой части формулы):

$$2x \neq \pi/2 + \pi k,\ k \in \mathbb{Z};$$
$$x \neq \pi/4 + (\pi/2)\cdot k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Отметим точки, соответствующие недопустимым значениям x, на единичной окружности (рис. 454).

Проделаем то же самое с правой частью формулы: $y = 2\operatorname{tg} x/(1 - \operatorname{tg}^2 x)$,

$$\begin{cases} 1 - \operatorname{tg}^2 x \neq 0, \\ x \neq \pi/2 + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$
$$\begin{cases} x \neq \pi/4 + (\pi/2)\cdot m,\ m \in \mathbb{Z}, \\ x \neq \pi/2 + \pi n,\ n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

(рис. 455).

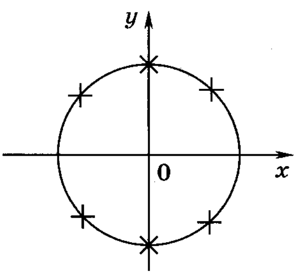


Рис. 455

Видим, что в левой и правой частях области определения функций различаются.

Теперь решим следующее уравнение:

$\operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} 2x = 0.$ (1)

ООУ: $\begin{cases} x \neq \pi n,\ n \in \mathbb{Z}, \\ x \neq \pi/4 + (\pi/2)\cdot k,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

(рис. 456).

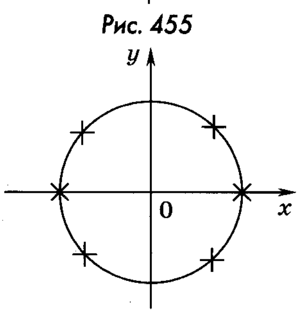


Рис. 456

Переходим к уравнению

$$1/\text{tg}\,x + 2\text{tg}\,x/(1 - \text{tg}^2 x) = 0. \qquad (2)$$

$$\frac{1 - \text{tg}^2 x + 2\text{tg}^2 x}{(1 - \text{tg}^2 x)\cdot \text{tg}\,x} = 0; \quad 1 + \text{tg}^2 x = 0.$$

И делаем неверный вывод, что решений нет. Да, действительно, решений нет у уравнения (2), но не у первоначального уравнения (1). Легко видеть, что числа вида $x = \pi/2 + \pi k$, $k \in Z$, удовлетворяют уравнению (1). Дело в том, что при замене $\text{tg}\,2x$ выражением $2\text{tg}x\ /\ (1 - \text{tg}^2 x)$ происходит сужение области определения функции $y = \text{tg}\,2x$ на множество $\pi/2 + \pi k$, $k \in Z$.

Ответ. $\pi/2 + \pi k$, $k \in Z$.

Пользоваться «опасными формулами», конечно, можно, но при этом необходимо следить за изменением области определения уравнения (неравенства).

Используя единичную окружность, легко записать ответ, причем разными способами. В качестве примера рассмотрим различные способы записи чисел, соответствующих точкам A, B, C окружности (рис. 457).

1) $x = \pi/3 + (2\pi/3)\cdot k$, $k \in Z$.

2) $\left[\begin{array}{l} x = \pi + 2\pi l,\ l \in Z, \\ x = \pm\pi/3 + 2\pi m,\ m \in Z. \end{array}\right.$

3) $x = -\pi/3 + (2\pi/3)\cdot t$, $t \in Z$.

4) $x = \pi + (2\pi/3)\cdot r$, $r \in Z$.

5) $\left[\begin{array}{l} x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z, \\ x = \pi/3 + 2\pi m,\ m \in Z, \\ x = -\pi/3 + 2\pi r,\ r \in Z. \end{array}\right.$

6) $\left[\begin{array}{l} x = -\pi + 2\pi s,\ s \in Z, \\ x = \pm\pi/3 + 2\pi q,\ q \in Z. \end{array}\right.$

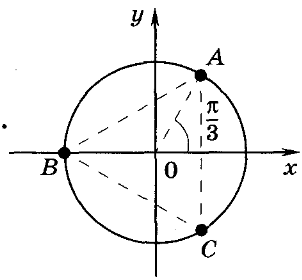


Рис. 457

Можно спорить, какой из перечисленных способов лучше, но ясно одно, что во всех правильно указаны числа, соответствующие трем заданным точкам единичной окружности.

Наряду с единичной окружностью будет широко использоваться и координатная прямая, особенно в задачах с параметрами.

1.1. Понятие единичной (тригонометрической) окружности

Рассмотрим окружность единичного радиуса на плоскости с фиксированной системой координат, начало которой совпадает с центром окружности.

Такую окружность будем обозначать буквой S и называть единичной (или тригонометрической) окружностью.

Согласно определению $S = \{(x; y) | x^2 + y^2 = 1\}$.

Построим отображение P: множество действительных числе R отображается на единичную окружность S ($R \longrightarrow S$).

Каждому действительному числу t поставим в соответствие точку P_t, принадлежащую окружности S, которая получается поворотом точки P (1; 0) на угол t радиан вокруг точки O (рис. 458). Напомним, что один радиан — это центральный угол, длина дуги которого равна радиусу:

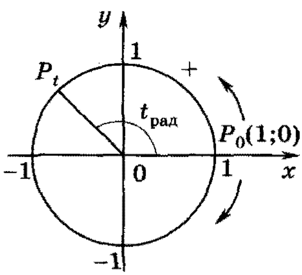


Рис. 458

$$1 \text{ рад} = 180°/\pi \approx 57{,}29578°.$$

Построенное отображение не является взаимно однозначным. Каждому действительному числу соответствует единственная точка окружности. Обратное неверно. Каждая точка окружности изображает бесчисленное множество действительных чисел.

Единичная окружность — это вторая после координатной прямой модель множества действительных чисел. Она позволяет изобразить графически основные понятия тригонометрии; исследовать области определения выражений, стоящих в левой и правой частях тригонометрических равенств; является эффективным инструментом при решении тригонометрических уравнений, неравенств и их систем. Ниже приводится модель единичной окружности (рис. 459).

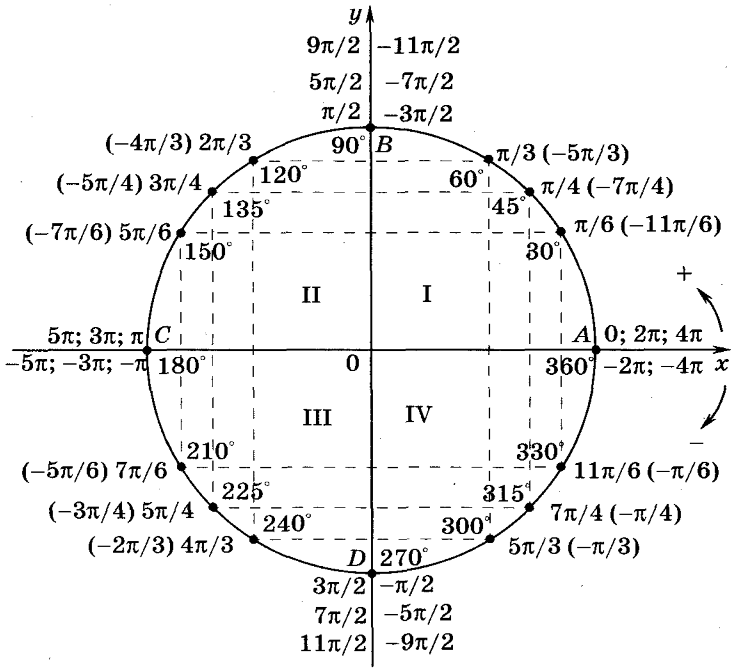


Рис. 459

Точки A, B, C, D назовем узловыми. Около каждой из отмеченных точек окружности записываем несколько чисел (неотрицательных и отрицательных), им соответствующих. Около узловых точек выписываем больше чисел, так как они понадобятся при изучении формул приведения.

Вопросы и задания по рисунку 459

1) Назовите по одному положительному и отрицательному числу, которые не записаны на модели единичной окружности, но соответствуют каждой из узловых точек.
2) Покажите точки на единичной окружности, соответствующие числам:
$\pi/6 + 2\pi$; $\pi/6 - 2\pi$; $\pi/3 + 4\pi$; $\pi/3 - 2\pi$; $2\pi/3 + 2\pi$; $2\pi/3 + 6\pi$; $5\pi/4 + 2\pi$; $5\pi/3 - 6\pi$; $-\pi/2 + 4\pi$; $3\pi/2 + 6\pi$; $\pi/2 - 2\pi$; $3\pi/2 + 4\pi$; $2\pi - \pi/6$; $4\pi - 2\pi/3$; $2\pi - 3\pi/2$.
3) Найдите точки на единичной окружности, соответствующие числам:
$7\pi/3$; $9\pi/4$; $11\pi/3$; $23\pi/6$; $-8\pi/3$; $-13\pi/4$; $-25\pi/4$; $5\pi/2$; 24π; -26π.
4) Изобразите на единичной окружности точки, соответствующие числам:
-2; 2; 3; 6; $\pi/12$; $\pi/10$; $-\pi/10$; $-\pi/5$; $7\pi/9$; $-9\pi/10$; $11\pi/10$; $6\pi/5$.

1.2. Запись чисел, соответствующих точкам единичной окружности

▶ Запись чисел, соответствующих одной точке единичной окружности

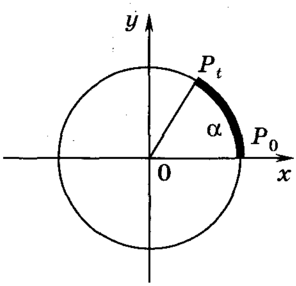


Рис. 460

Пусть на окружности дана произвольная точка P_t (рис. 460). При обходе окружности на целое число оборотов мы попадаем на исходную точку, а значит, точке P_t окружности наравне с некоторым числом t соответствует и любое число вида $t + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. В данном случае (см. рис. 460) точке P_t соответствуют числа $t = \alpha + 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Вопросы и задания

1) Запишите все числа, соответствующие выделенным точкам единичной окружности на рисунке 461 (*а—и*).

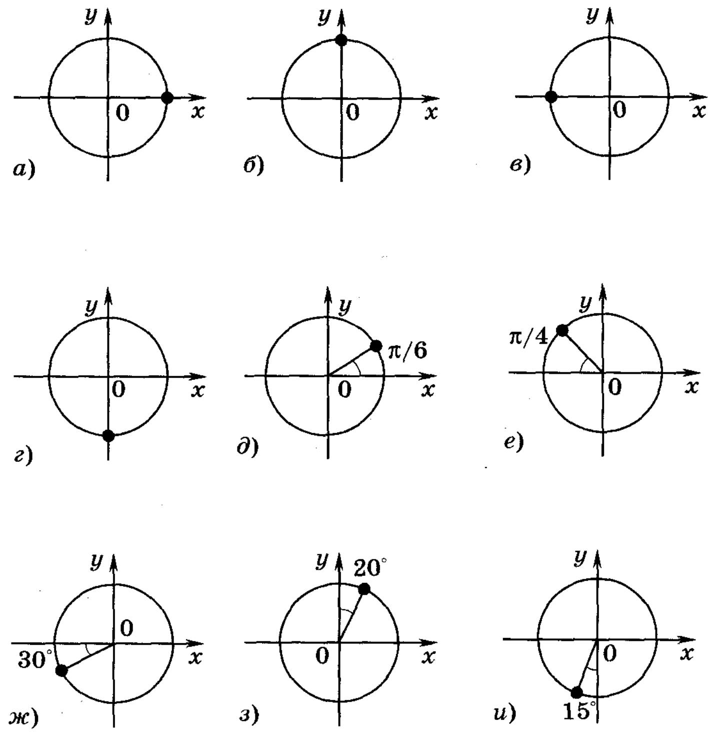


Рис. 461

2) Изобразите на единичной окружности точки, соответствующие числам:

а) $\pi/3 + 2\pi n$, $n \in Z$; **б)** $2\pi/3 + 2\pi k$, $k \in Z$; **в)** $2\pi m$, $m \in Z$; **г)** $\pi/2 + 2\pi m$, $m \in Z$; **д)** $-\pi + 2\pi k$, $k \in Z$; **е)** $-3\pi/2 + 2\pi l$, $l \in Z$; **ж)** $5\pi/2 + 2\pi l$, $l \in Z$; **з)** $\pi(1/4 + 2m)$, $m \in Z$; **и)** $\pi(-1/3 + 2n)$, $n \in Z$.

Замечание

Упражнений на закрепление остальных способов записи чисел в дальнейшем приводить не будем, так как из вышеприведенного ясны принципы их составления: от изображения точки на единичной окружности — к числу и, наоборот, от числа — к точке на единичной окружности.

Запись чисел, соответствующих двум диаметрально противоположным точкам единичной окружности

Пусть на окружности даны две диаметрально противоположные точки P_t, и $P_{t+\pi}$ (рис. 462). Этим точкам соответствуют числа вида $t = \alpha + \pi n$, $n \in Z$.

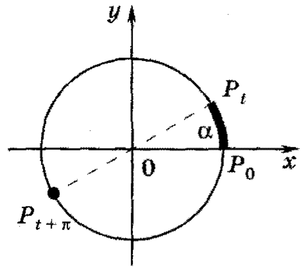


Рис. 462

Запись чисел, соответствующих двум точкам на единичной окружности с одинаковыми абсциссами

Пусть на окружности даны точки P_t и P_{-t} (рис. 463). Точке P_t соответствуют числа $t = \alpha + 2\pi n$, а точке P_{-t} — числа $t = -\alpha + 2\pi n$, где $n \in Z$. Значит, двум данным точкам соответствуют числа вида $t = \pm\alpha + 2\pi n$, $n \in Z$. То есть получили более компактную форму записи двух точек на окружности с одинаковыми абсциссами.

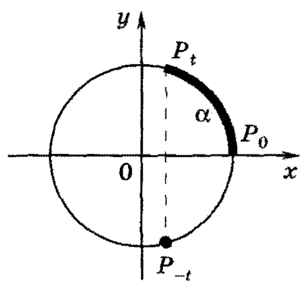


Рис. 463

Запись чисел, соответствующих точкам на единичной окружности с одинаковыми ординатами

На окружности даны точки P_t и $P_{\pi-t}$ (рис. 464). Точке P_t соответствуют числа $t = \alpha + 2\pi n$ (1), а точке $P_{\pi-t}$ — числа $t = \pi - \alpha + 2\pi n$ (2), где $n \in Z$.

Нетрудно заметить, что формулы (1) и (2) можно записать в следующем виде:

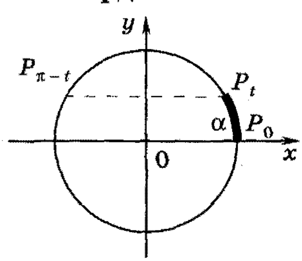


Рис. 464

$t = (-1)^k \alpha + \pi k,\ k \in Z.$

При четном k и $k = 0$ получаем формулу (1), при нечетном — формулу (2).

Запись чисел, соответствующих точкам, делящим единичную окружность на n равных частей

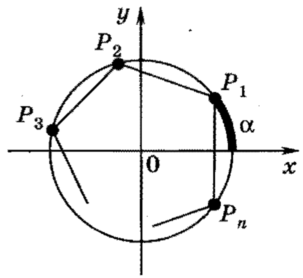


Рис. 465

Точки, делящие окружность на n равных дуг, являются вершинами правильного вписанного n-угольника (рис. 465). Пусть точке P_1 соответствуют числа $\alpha + 2\pi k$, $k \in Z$. Точке P_2 соответствуют числа $\alpha + 2\pi/n + 2\pi k$, $k \in Z$. Точке P_3 соответствуют числа $\alpha + 2\pi/n + 2\pi/n + 2\pi k$, $k \in Z$...

Тогда множество всех чисел, соответствующих вершинам n-угольника, запишется так:

$t = \alpha + 2\pi k/n$, где n — число точек, $k \in Z$.

Если $\alpha = 0$, то $t = 2\pi k/n$, $k \in Z$.

Вопросы и задания

1) Укажите все числа, соответствующие точкам окружности, изображенным на рисунке 466, *а*—*ш*.

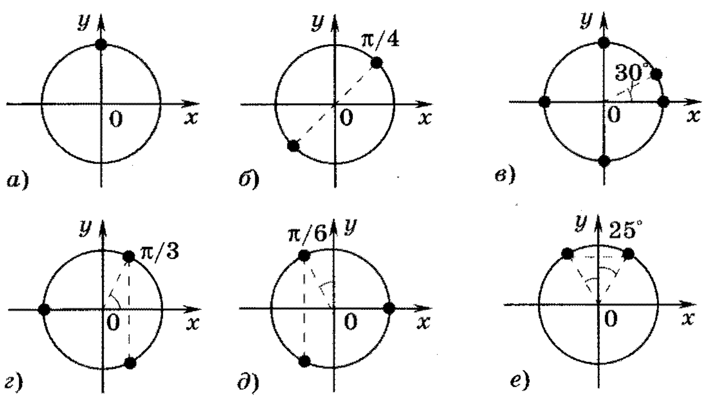


Рис. 466

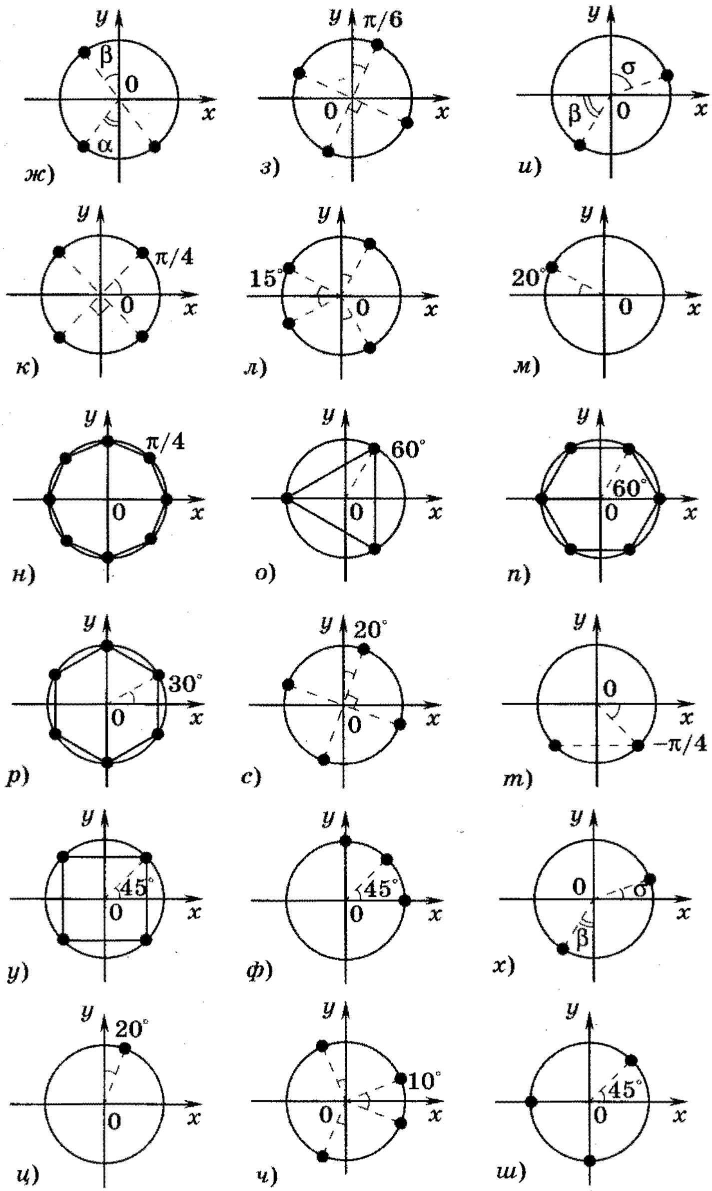

ж)
β
α
з)
π/6
и)
σ
β
к)
π/4
л)
15°
м)
20°
н)
π/4
о)
60°
п)
60°
р)
30°
с)
20°
т)
−π/4
у)
45°
ф)
45°
х)
σ
β
ц)
20°
ч)
10°
ш)
45°

Рис. 466

2) Изобразите на единичной окружности точки, соответствующие числам: 1; 4; -2; -1; 3,14; π; $\pi/2$; $\pi/4$; $\pm5\pi/6$; $\pm\pi/2$; $\pi/10 + 2\pi n$, $n \in Z$; $(-1)^k\pi/4 + \pi k$, $k \in Z$; $\pm\pi/3 + 2\pi k$, $k \in Z$; $\pi n/4$, $n \in Z$; $\pi/6 + \pi m/3$, $m \in Z$.

1.3. Запись множества корней наиболее рациональным образом

Решение многих тригонометрических уравнений и их систем приводит к совокупности или системе их корней. Для грамотной записи ответа (исключения повторяющихся решений и др.) мы используем единичную окружность.

Рассмотрим пример:

$$\left[\begin{array}{l} x = \pi m/4,\ m \in Z, \\ x = \pi/4 + \pi k/2,\ k \in Z, \\ x = \pm 3\pi/4 + 2\pi n,\ n \in Z. \end{array}\right.$$

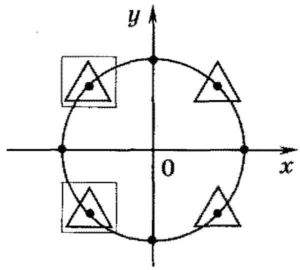


Рис. 467

Обратим внимание на рисунок 467. Мы видим, что он получается громоздким. Предлагаются на ваше рассмотрение следующие обозначения — «лепестки».

В совокупности около каждой строки нарисуем соответствующий лепесток.

$$\left[\begin{array}{l} x = \pi m/4,\ m \in Z, \\ x = \pi/4 + \pi k/2,\ k \in Z, \\ x = \pm 3\pi/4 + 2\pi n,\ n \in Z. \end{array}\right.$$

Теперь перенесем лепестки в нужные места тригонометрической окружности. Остается только записать числа, соответствующие точкам, около каждой из которых расположен *хоть один* лепесток (рис. 468). Это числа вида $\pi m/4$, $m \in Z$.

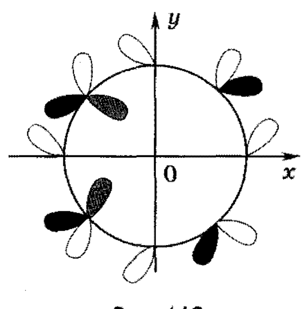


Рис. 468

А если бы мы решали *систему* тех же уравнений, то нам надо было бы записать числа, соответствующие точкам, около каждой из которых расположены *все* лепестки. Это числа $\pm 3\pi/4 + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

❑ <u>Примеры</u>.

№ 1. Решите данные совокупность и системы уравнений:

а) $\left[\begin{aligned} &x = \pi/3 + 2\pi l/3,\ l \in \mathbb{Z}, \\ &x = \pi m,\ m \in \mathbb{Z}; \end{aligned}\right.$

б) $\begin{cases} x = \pm\pi/3 + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}, \\ x = \pi m/3,\ m \in \mathbb{Z}, \\ x = \pi/3 + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}, \\ x = 4\pi/3 + \pi t,\ t \in \mathbb{Z}; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x = -\pi/2 + \pi l/4,\ l \in \mathbb{Z}, \\ x = \pi m,\ m \in \mathbb{Z}, \\ x = 7\pi/2 + 2\pi p,\ p \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

<u>Решение</u>.

а) Нарисуем против верхней строки совокупности белый лепесток, а у второй строки — черный:

$$\left[\begin{aligned} &x = \pi/3 + 2\pi l/3,\ l \in \mathbb{Z}, \\ &x = \pi m,\ m \in \mathbb{Z}. \end{aligned}\right.$$

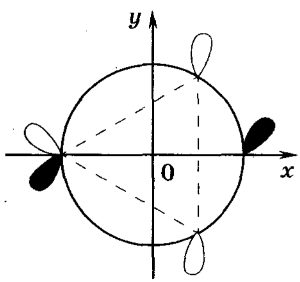


Рис. 469

Украсим такими же лепестками соответствующие точки тригонометрической окружности (рис. 469). В ответе надо записать четыре множества чисел. Но одна формула не может охватить все эти числа. Обсудив возможные формы записи ответа, учащиеся обычно останавливаются на одном из двух:

$$\left[\begin{aligned} &x = \pi/3 + 2\pi n/3,\ n \in \mathbb{Z}, \\ &x = 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \end{aligned}\right.$$

или

$$\left[\begin{array}{l} x = \pm\pi/3 + 2\pi m,\ m \in Z, \\ x = \pi t,\ t \in Z. \end{array}\right.$$

б) Для данной системы придется изобразить лепестки четырех цветов (рис. 470):

$$\begin{cases} x = \pm\pi/3 + 2\pi n,\ n \in Z, \\ x = \pi m/3,\ m \in Z, \\ x = \pi/3 + 2\pi k,\ k \in Z, \\ x = 4\pi/3 + \pi t,\ t \in Z. \end{cases}$$

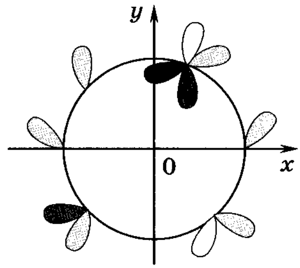


Рис. 470

В качестве ответа запишем все числа, которые соответствуют точке, собравшей около себя все четыре разных лепестка: $\pi/3 + 2\pi t$, $t \in Z$.

в) Перепишем задание, снабдив каждую строчку своим лепестком:

$$\begin{cases} x = -\pi/2 + \pi l/4,\ l \in Z, \\ x = \pi m,\ m \in Z, \\ x = 7\pi/2 + 2\pi p,\ p \in Z. \end{cases}$$

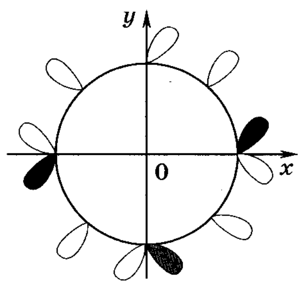


Рис. 471

На рисунке 471 мы видим, что ни у одной точки не собрались все три лепестка. Значит, данная система не имеет решений.

При решении следующих примеров надо учесть область определения уравнения.

№ 2. Решите системы уравнений и неравенств:

а) $\begin{cases} x \neq -\pi/2 + \pi k,\ k \in Z, \\ x = \pi t/2,\ t \in Z; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x \neq \pi k/2,\ k \in Z, \\ \left[\begin{array}{l} x = \pi/3 + 2\pi m/3,\ m \in Z, \\ x = 2\pi n/3,\ n \in Z. \end{array}\right. \end{cases}$

Решение.

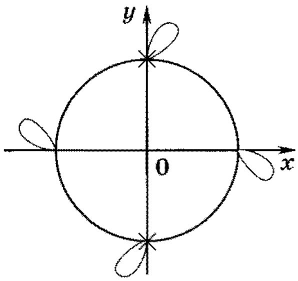


Рис. 472

а) Недопустимые точки на единичной окружности будем отмечать крестиками, а точки, заданные уравнением $x = \pi t/2$ ($t \in Z$), выделим светлыми лепестками (рис. 472). Уравнение $x = \pi t/2$, $t \in Z$, задает четыре точки на единичной окружности, из которых допустимы только две. Таким образом, требуемые значения x можно записать формулой $x = \pi m$, $m \in Z$.

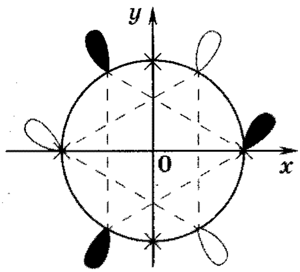


Рис. 473

б) На рисунке 473 точки, соответствующие первому равенству, отметим белыми лепестками, а второму равенству — черными лепестками. Для удобства нарисуем эти лепестки против соответствующих строк в системе:

$$\begin{cases} x \neq \pi k/2,\ k \in Z, \\ \left[\begin{array}{l} x = \pi/3 + 2\pi m/3,\ m \in Z, \\ x = 2\pi n/3,\ n \in Z. \end{array}\right. \end{cases}$$

Речь идет о тех точках, у которых стоит хотя бы один лепесток, но нет запрещающего знака. Этим точкам соответствуют числа $\pm\pi/3 + \pi k$, $k \in Z$.

Упражнения для самостоятельного решения

1) Исключите повторяющиеся решения:

а) $\left[\begin{array}{l} x = \pi/3 + 2\pi l/3,\ l \in Z, \\ x = \pi m,\ m \in Z. \end{array}\right.$

б) $\left[\begin{array}{l} x = (-1)^k \cdot \pi/4 + \pi k,\ k \in Z, \\ x = \pi/4 + \pi n/2,\ n \in Z. \end{array}\right.$

в) $\left[\begin{array}{l} x = \pm\pi/6 + \pi k/2,\ k \in Z, \\ x = \pi/3 + \pi n/2,\ n \in Z, \\ x = \pi m,\ m \in Z, \\ x = \pi t/4,\ t \in Z. \end{array}\right.$

г) $\left[\begin{array}{l} x = \pm\pi/4 + 2\pi k,\ k \in Z, \\ x = \pm 3\pi/4 + 2\pi n,\ n \in Z, \\ x = \pi/2 + \pi m,\ m \in Z, \\ x = \pi s,\ s \in Z, \\ x = \pi t/2,\ t \in Z, \\ x = \pi/4 + \pi q/2,\ q \in Z. \end{array}\right.$

д) $\left[\begin{array}{l} x = (-1)^k \cdot \pi/4 + \pi k,\ k \in Z, \\ x = \pm\pi/4 + \pi m,\ m \in Z, \\ x = \pi/3 + \pi n,\ n \in Z. \end{array}\right.$

е) $\left[\begin{array}{l} x = \pi/4 + \pi k,\ k \in Z, \\ x = \pi n/4,\ n \in Z, \\ x = \pi/3 + \pi m/6,\ m \in Z. \end{array}\right.$

ж) $\left[\begin{array}{l} x = \pm\pi/4 + \pi m,\ m \in Z, \\ x = \pi k/2,\ k \in Z, \\ x = \pi/2 + \pi n,\ n \in Z. \end{array}\right.$

з) $\left[\begin{array}{l} x = \pi m,\ m \in Z, \\ x = \pi k/2,\ k \in Z, \\ x = \pi n/3,\ n \in Z. \end{array}\right.$

и) $\left[\begin{array}{l} x = (-1)^k \cdot \pi/3 + \pi k,\ k \in Z, \\ x = \pm 5\pi/3 + 2\pi m,\ m \in Z, \\ x = \pi/3 + \pi n,\ n \in Z. \end{array}\right.$

к) $\left[\begin{array}{l} x = \pi n/2,\ n \in Z, \\ x = \pi k,\ k \in Z, \\ x = \pm\pi/4 + 2\pi m,\ m \in Z, \\ x = (-1)^t \cdot \pi/4 + \pi t,\ t \in Z, \\ x = \pi/4 + \pi l/2,\ l \in Z. \end{array}\right.$

л) $\left[\begin{array}{l} x = \pi k/4,\ k \in Z, \\ x = 3\pi/2 + \pi l/2,\ l \in Z. \end{array}\right.$

м) $\left[\begin{array}{l} x = -\pi/2 + \pi n/2,\ n \in Z, \\ x = 3\pi/2 + \pi k/2,\ k \in Z. \end{array}\right.$

Ответы.

а) $\left[\begin{array}{l} x = \pm\pi/3 + 2\pi l,\ l \in Z, \\ x = \pi m,\ m \in Z. \end{array}\right.$

б) $x = \pi/4 + \pi n/2,\ n \in Z.$

в) $\left[\begin{array}{l} x = \pi k/6,\ k \in Z, \\ x = \pi/4 + \pi n/2,\ n \in Z. \end{array}\right.$

г) $x = \pi t/4,\ t \in Z.$

д) $\left[\begin{array}{l} x = \pi/3 + \pi n,\ n \in Z, \\ x = \pi/4 + \pi k/2,\ k \in Z. \end{array}\right.$

е) $\left[\begin{array}{l} x = \pi n/6,\ n \in Z, \\ x = \pi/4 + \pi m/2,\ m \in Z. \end{array}\right.$

ж) $x = \pi k/4,\ k \in Z.$

з) $\left[\begin{array}{l} x = \pi/2 + \pi k,\ k \in Z, \\ x = \pi n/3,\ n \in Z. \end{array}\right.$

и) $\left[\begin{array}{l} x = \pi/3 + \pi n,\ n \in Z, \\ x = -\pi/3 + \pi k,\ k \in Z. \end{array}\right.$

к) $x = \pi n/4,\ n \in Z.$

л) $x = \pi t/4,\ t \in Z.$

м) $x = \pi m/2,\ m \in Z.$

2) Запишите решения совокупностей (систем):

а) $\left[\begin{array}{l} x = -\pi/4 + \pi q/4,\ q \in Z, \\ x = 3\pi/2 + \pi p/2,\ p \in Z; \end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{l} x = -\pi/4 + \pi q/4,\ q \in Z, \\ x = 3\pi/2 + \pi p/2,\ p \in Z. \end{array}\right.$

б) $\left[\begin{array}{l} x = -\pi/2 + \pi l/4,\ l \in Z, \\ x = \pi m,\ m \in Z, \\ x = 7\pi/2 + 2\pi v,\ v \in Z; \end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{l} x = -\pi/2 + \pi l/4,\ l \in Z, \\ x = \pi m,\ m \in Z, \\ x = 7\pi/2 + 2\pi v,\ v \in Z. \end{array}\right.$

в) $\left[\begin{array}{l} x = \pi m/4,\ m \in Z, \\ x = \pi/4 + \pi k/2,\ k \in Z, \\ x = \pm 3\pi/4 + 2\pi n,\ n \in Z; \end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{l} x = \pi m/4,\ m \in Z, \\ x = \pi/4 + \pi k/2,\ k \in Z, \\ x = \pm 3\pi/4 + 2\pi n,\ n \in Z. \end{array}\right.$

г) $\left[\begin{array}{l} x = \pi/4 + \pi n/2,\ n \in Z, \\ x = \pi/4 + \pi k,\ k \in Z, \\ x = \pm \pi/4 + 2\pi l,\ l \in Z; \end{array}\right.$

$$\begin{cases} x = \pi/4 + \pi n/2,\ n \in Z, \\ x = \pi/4 + \pi k,\ k \in Z, \\ x = \pm\pi/4 + 2\pi l,\ l \in Z. \end{cases}$$

Ответы.

Решения совокупностей	Решения систем
а) $x = \pi t/4,\ t \in Z.$	$x = \pi k/2,\ k \in Z.$
б) $x = \pi r/4,\ r \in Z.$	Решений нет.
в) $x = \pi v/4,\ v \in Z.$	$x = \pm 3\pi/4 + 2\pi n,\ n \in Z.$
г) $x = \pi/4 + \pi t/2,\ t \in Z.$	$x = \pi/4 + 2\pi m,\ m \in Z.$

3) Запишите решения систем.

а) $\begin{cases} x \neq \pi k/2,\ k \in Z, \\ x = \pi n/4,\ n \in Z. \end{cases}$

б) $\begin{cases} x \neq \pi/4 + \pi l/2,\ l \in Z, \\ \left[\begin{array}{l} x = \pi t/2,\ t \in Z, \\ x = -\pi - 2\pi m,\ m \in Z. \end{array}\right. \end{cases}$

в) $\begin{cases} x \neq \pi n,\ n \in Z, \\ x \neq \pi/2 + \pi k,\ k \in Z, \\ \left[\begin{array}{l} x = \pi/3 + 2\pi l/3,\ l \in Z, \\ x = \pi q/2,\ q \in Z. \end{array}\right. \end{cases}$

г) $\begin{cases} x \neq (-1)^k \cdot (-\pi/4) + \pi k,\ k \in Z, \\ x = \pi/4 + \pi t/2,\ t \in Z. \end{cases}$

Ответы.

а) $x = \pi/4 + \pi m/2,\ m \in Z.$

б) $x = \pi q/2,\ q \in Z.$

в) $x = \pm\pi/3 + 2\pi l,\ l \in Z.$

г) $x = (-1)^n \cdot \pi/4 + \pi n,\ n \in Z.$

2. Некоторые сведения из тригонометрии

2.1. Синус, косинус, тангенс и котангенс действительного числа

Определение синуса

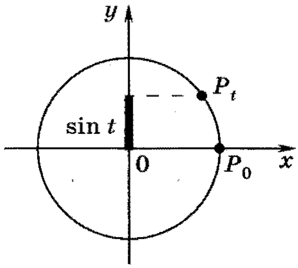
Синусом действительного числа t называется ордината точки P_t, соответствующей действительному числу t на единичной окружности (рис. 474, a).

Обозначение: $\sin t$.

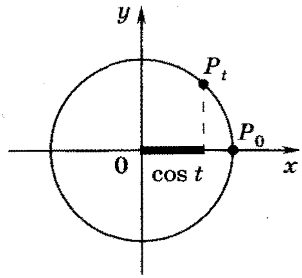
Определение косинуса

Косинусом действительного числа t называется абсцисса точки P_t, соответствующей действительному числу t на единичной окружности (рис. 474, *б*).

Обозначение: $\cos t$.



а)



б)

Рис. 474

Определение тангенса

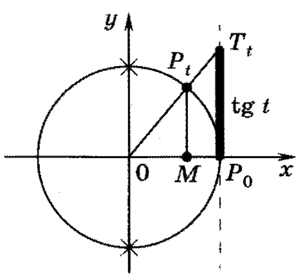


Рис. 475

Тангенсом действительного числа t называется отношение $\sin t/\cos t$. Тангенс действительного числа определен при условии, что $\cos t \neq 0$, т. е. $t \neq \pi/2 + \pi n$, где $n \in Z$ (рис. 475).

Обозначение: $\operatorname{tg} t$.

Линия тангенсов — прямая, заданная уравнением $x = 1$.

Тангенс действительного числа t численно равен ординате точки T_t, соответствующей этому числу, на линии тангенсов. Это следует из подобия треугольников OP_tM и OT_tP_0 и определения функции $\operatorname{tg} t$:

$$\triangle OP_tM \sim \triangle OT_tP_0, \text{ тогда } \frac{P_tM}{OM} = \frac{T_tP_0}{OP_0}, \qquad (1)$$

$$\frac{\sin t}{\cos t} = \frac{P_t M}{OM}. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) следует, что $\dfrac{\sin t}{\cos t} = \dfrac{T_t P_0}{OP_0}$, т. е. $\operatorname{tg} t = T_t P_0$, что и требовалось доказать.

Определение котангенса

Котангенсом действительного числа t называется отношение $\cos t/\sin t$. Котангенс действительного числа определен при условии, что $\sin t \neq 0$, т. е. $t \neq \pi k$, где $k \in Z$ (рис. 476).

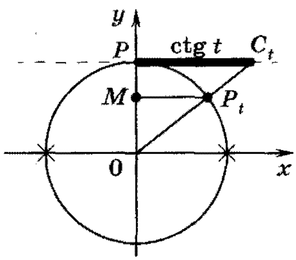


Рис. 476

Обозначение: $\operatorname{ctg} t$.

Линия котангенсов — это прямая с уравнением $y = 1$. Котангенс действительного числа t численно равен абсциссе точки C_t, соответствующей этому числу, на линии котангенсов. Это следует из подобия треугольников $OP_t M$ и $OC_t P$ и определения функции $\operatorname{ctg} t$. Чтобы найти точку $T_t(C_t)$, соответствующую числу t на линии тангенсов (котангенсов), достаточно найти точку пересечения луча OP_t с линией тангенсов (котангенсов) (рис. 475, 476). С помощью единичной окружности легко установить зависимость между значениями синуса, косинуса, тангенса и котангенса одного и того же числа. Например, точки P_t и P_{-t} симметричны относительно оси абсцисс, поэтому $P_t(\cos t, \sin t)$ и $P_{-t}(\cos(-t), \sin(-t))$ имеют одинаковые абсциссы, но противоположные ординаты, т. е. $\cos(-t) = \cos t$; $\sin(-t) = -\sin t$ (рис. 477).

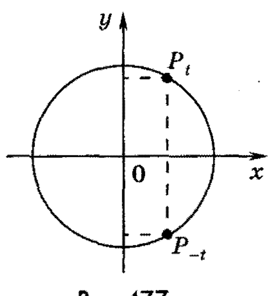


Рис. 477

По определению тангенса мы имеем:
$\operatorname{tg}(-t) = \sin(-t)/\cos(-t) = -\sin t/\cos t = -\operatorname{tg} t.$

Аналогично будем иметь
$\operatorname{ctg}(-t) = \cos(-t)/\sin(-t) = \cos t/(-\sin t) = -\operatorname{ctg} t.$

Очень часто абитуриентов пугают такие выражения, как $\sin 1$, $\cos 15$ (а не $\sin 1°$, $\cos 15°$) и т. п. Вызывают затруднения по существу несложные вопросы, для ответа на которые достаточно понимать только смысл этих выражений, т. е. необходимо глубокое понимание определения синуса и косинуса.

2.2. Обратные тригонометрические функции

Вспомним некоторые сведения о взаимно обратных функциях.

Если прямая функция монотонна на всей области определения, то для нее существует обратная. Для функции $y = x^2$, например, на всей области определения обратной не существует.

Связь свойств прямой и обратной функций

— Область определения прямой функции является областью значений обратной, а область значений прямой является областью определения обратной.

— Если прямая функция возрастает (убывает), то и обратная функция возрастает (убывает).

— Графики прямой и обратной функций симметричны относительно биссектрисы 1 и 3 координатных углов.

Ни одна из функций $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ не является монотонной на всей области определения. Поэтому можно говорить об обратных для этих функций на части области определения, где прямая функция возрастает или убывает.

2.2.1. Определения, свойства и графики обратных тригонометрических функций

Функция $y = \arcsin x$

▶ ***Определение.***

$y = \arcsin x$ — функция, обратная функции $y = \sin x$ на отрезке $[-\pi/2; \pi/2]$.

Иначе: $y = \arcsin x$ — число из отрезка $[-\pi/2; \pi/2]$, синус которого равен x (рис. 478).

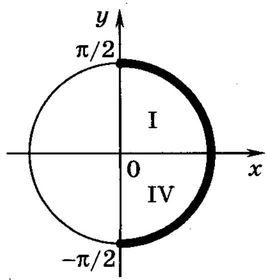


Рис. 478

❑ Примеры.

$\arcsin(1/2) = \pi/6$, $\arcsin(-1/2) = -\pi/6$,

$\arcsin\ 0 = 0$.

<u>График и свойства</u>

1) Область определения функции (D(y)): $[-1; 1]$.
2) Множество значений функции (E(y)): $[-\pi/2; \pi/2]$.
3) Наибольшее значение: $y = \pi/2$ (при $x = 1$). Наименьшее значение: $y = -\pi/2$ (при $x = -1$).
4) Возрастает (рис. 479).

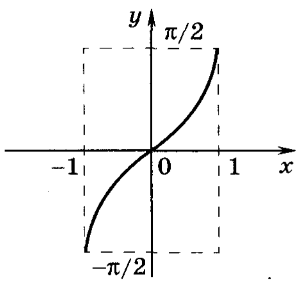


Рис. 479

5) Нечетная: $\arcsin(-x) = -\arcsin x$.
6) Не является периодической (в силу монотонности).
7) Если $x \in [0; 1]$, то $y \in [0; \pi/2]$ (четверть I на рис. 478).

Если $x \in [-1; 0]$, то $y \in [-\pi/2; 0]$ (четверть IV на рис. 478).

❑ Пример.
Найдите область определения функции

$$y = \arcsin \frac{2x-1}{x-2}.$$

Решение.
Воспользуемся тем, что областью определения функции $y = \arcsin t$ является отрезок $[-1; 1]$:

$$-1 \leqslant \frac{2x-1}{x-2} \leqslant 1, \quad \begin{cases} \dfrac{2x-1}{x-2} \geqslant -1, \\ \dfrac{2x-1}{x-2} \leqslant 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{2x-1+x-2}{x-2} \geqslant 0, \\ \dfrac{2x-1-x+2}{x-2} \leqslant 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{x-2} \geqslant 0, \\ \dfrac{x+1}{x-2} \leqslant 0 \text{ (рис. 480).} \end{cases}$$

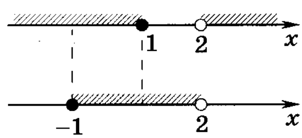


Рис. 480

Ответ. $[-1; 1]$.

Функция $y = \arccos x$

▶ ***Определение.***

$y = \arccos x$ — функция, обратная функции $y = \cos x$ на отрезке $[0; \pi]$.

Иначе: $y = \arccos x$ — число из отрезка $[0; \pi]$, косинус которого равен x.

График и свойства

1) $D(y)$: $[-1; 1]$.
2) $E(y)$: $[0; \pi]$.
3) Наибольшее значение: $y = \pi$ (при $x = -1$).

Наименьшее значение: $y = 0$ (при $x = 1$).

4) Убывает, так как убывает прямая функция (рис. 481).

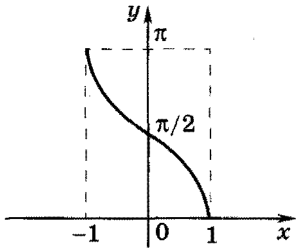


Рис. 481

5) Не обладает свойствами четности и нечетности. Имеет место равенство $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$, где $x \in [-1; 1]$.

6) Не является периодической (в силу монотонности).

7) Если $x \in [0; 1]$, то $y \in [0; \pi/2]$ (четверть I на рис. 482).

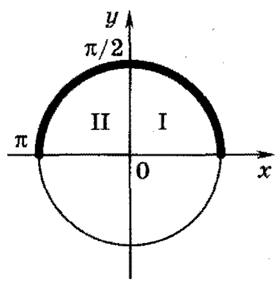


Рис. 482

Если $x \in [-1; 0]$, то $y \in [\pi/2; \pi]$ (четверть II на рис. 482).

Функция $y = \operatorname{arctg} x$

▶ ***Определение.***

$y = \operatorname{arctg} x$ — функция, обратная функции $y = \operatorname{tg} x$ на интервале $(-\pi/2; \pi/2)$.

Иначе: $y = \operatorname{arctg} x$ — число из интервала $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен x.

Г р а ф и к и с в о й с т в а

1) $D(y)$: R.
2) $E(y)$: $(-\pi/2; \pi/2)$.
3) Наибольшего и наименьшего значений не имеет.
4) Функция нечетная: $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$.
5) Возрастает на всей области определения (рис. 483).

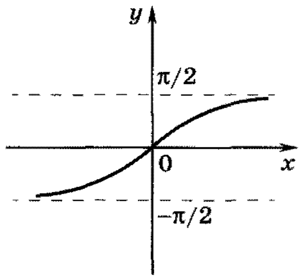


Рис. 483

6) Не является периодической.
7) $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{arctg} x = \pi/2$;
$\lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{arctg} x = -\pi/2$.
8) Если $x \geqslant 0$, то $y \in [0; \pi/2)$ (область I на рис. 484).
Если $x < 0$, то $y \in (-\pi/2; 0)$ (область IV на рис. 484).

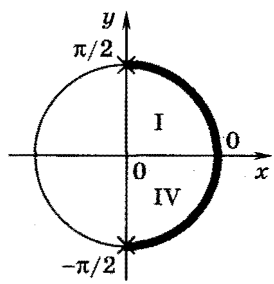


Рис. 484

Функция $y = \operatorname{arcctg} x$

▶ ***Определение.***

$y = \operatorname{arcctg} x$ — функция, обратная функции $y = \operatorname{ctg} x$ на интервале $(0; \pi)$.

Иначе: $y = \operatorname{arcctg} x$ — число из интервала $(0; \pi)$, котангенс которого равен x.

<u>График и свойства</u>

1) $D(y)$: R.
2) $E(y)$: $(0; \pi)$.
3) Наибольшего и наименьшего значений не имеет.
4) Не обладает свойствами четности и нечетности. Имеет место следующее равенство:
$\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$.
5) Убывает на всей области определения (рис. 485).

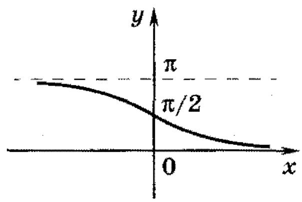


Рис. 485

6) Не является периодической.
7) $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{arcctg} x = 0$;
$\lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{arcctg} x = \pi$.
8) Если $x \geqslant 0$, то
$y \in (0; \pi/2]$
(четверть I на рис. 486).
Если $x < 0$, то
$y \in (\pi/2; \pi)$
(четверть II на рис. 486).

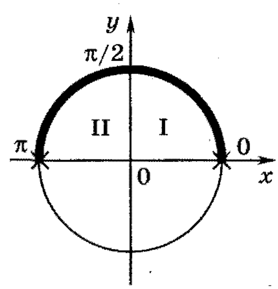


Рис. 486

2.2.2. Нахождение значения прямой тригонометрической функции от значения обратной, и наоборот

Исходя из определений обратных тригонометрических функций, можно записать следующие тождества:

$\sin(\arcsin x) = x,\ x \in [-1; 1]$,

$\cos(\arccos x) = x,\ x \in [-1; 1]$,

$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$, $x \in \mathrm{R}$,
$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x$, $x \in \mathrm{R}$.

А если нужно найти, например, $\sin(\operatorname{arctg}(1/3))$, $\cos(\operatorname{arcctg}(1/2))$, $\sin(\arccos(-3/5))$?

Для нахождения значения прямой функции от значения обратной воспользуемся правилом «прямоугольного треугольника»: если аргумент аркфункции удовлетворяет следующему условию: $0 < x < 1$ (для $\arcsin x$ и $\arccos x$) или $x > 0$ (для $\operatorname{arctg} x$ и $\operatorname{arcctg} x$), то значением данной аркфункции является величина острого угла. Используя прямоугольный треугольник с таким острым углом, находим два катета либо катет и гипотенузу (с точностью до коэффициента пропорциональности). Находим по теореме Пифагора третий линейный элемент, а затем — искомое значение прямой тригонометрической функции этого угла.

❑ Примеры.

№ 1. Найдите $\sin(\operatorname{arctg}(4/3))$.

Решение.

$\operatorname{arctg}(4/3)$ — острый угол некоторого прямоугольного треугольника, катеты которого 3 и 4, гипотенуза его равна 5 (рис. 487). Тогда

$\sin(\operatorname{arctg}(4/3)) = 4/5$.

№ 2. Найдите $\cos(\operatorname{arctg} 2)$.

Решение.

$\cos(\operatorname{arctg} 2) = 1/\sqrt{5}$ (рис. 488).

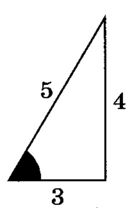


Рис. 487

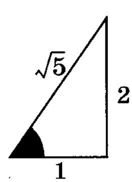


Рис. 488

№ 3. Найдите sin (2arcsin (1/3)).

Решение.

Воспользуемся формулой $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$.

$\sin(2\arcsin(1/3)) = 2\sin(\arcsin(1/3))\cos(\arcsin(1/3) =$

$= 2\cdot(1/3)\cdot\cos(\arcsin(1/3)) = 2\cdot(1/3)\cdot 2\sqrt{2}/3 =$

$= 4\sqrt{2}/9$ (рис. 489).

№ 4. Найдите sin (arcsin (3/5) – arccos (3/5)).

Решение (рис. 490).

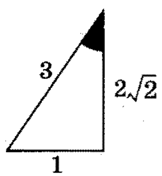


Рис. 489

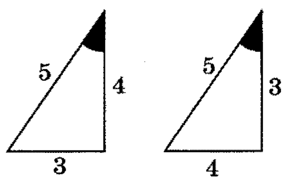


Рис. 490

$\sin(\arcsin(3/5) - \arccos(3/5)) =$
$= \sin(\arcsin(3/5))\cdot\cos(\arccos(3/5)) -$
$- \cos(\arcsin(3/5))\cdot\sin(\arccos(3/5)) =$
$= (3/5)\cdot(3/5) - \cos(\arcsin(3/5))\cdot\sin(\arccos(3/5)) =$
$= 9/25 - (4/5)\cdot(4/5) = -7/25.$

№ 5. Найдите tg (arccos (–2/3)).

Решение.

$\mathrm{tg}(\arccos(-2/3)) = \mathrm{tg}(\pi - \arccos(2/3)) =$

$= -\mathrm{tg}(\arccos(2/3)) = -\sqrt{5}/2$ (рис. 491).

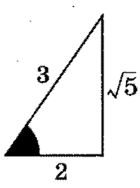


Рис. 491

№ 6. Вычислите без таблиц $\operatorname{arctg}(1/2) + \operatorname{arctg}(1/3)$.

Решение.

Заметим, что $0 < \operatorname{arctg}(1/2) < \pi/4$,
$0 < \operatorname{arctg}(1/3) < \pi/4$.
Поэтому $0 < \operatorname{arctg}(1/2) + \operatorname{arctg}(1/3) < \pi/2$.
Найдем тангенс суммы $\operatorname{arctg}(1/2) + \operatorname{arctg}(1/3)$:

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(1/2) + \operatorname{arctg}(1/3)) = \frac{1/2 + 1/3}{1 - (1/2)(1/3)} = 1.$$

Следовательно, $(\operatorname{arctg}(1/2) + \operatorname{arctg}(1/3))$ — угол первой четверти, тангенс которого равен единице. Поэтому $\operatorname{arctg}(1/2) + \operatorname{arctg}(1/3) = \pi/4$.

Справедливы следующие тождества:
$\arcsin(\sin x) = x$, $x \in [-\pi/2, \pi/2]$, $\arccos(\cos x) = x$, $x \in [0; \pi]$, $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x$, $x \in (-\pi/2; \pi/2)$, $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x$, $x \in (0; \pi)$.

№ 7. Найдите $\arccos(\cos 1/5))$.

Решение.

Учитывая, что $1/5 \in [0, \pi]$, делаем вывод, что $\arccos(\cos(1/5)) = 1/5$.

№ 8. Вычислите $\arcsin(\sin 6)$.

Решение.

Пусть $\arcsin(\sin 6) = x$, где $x \in [-\pi/2; \pi/2]$.
Находим синус от обеих частей равенства:
$\sin 6 = \sin x$,

$$\left[\begin{array}{l} x = 6 + 2\pi n,\ n \in Z, \\ x = \pi - 6 + 2\pi k,\ k \in Z. \end{array}\right.$$

Придавая n и k значения из множества Z, найдем $x \in [-\pi/2; \pi/2]$:
$x = 6 - 2\pi$.

Ответ. $\arcsin(\sin 6) = 6 - 2\pi$.

№ 9. Вычислите $\arccos(\sin 10)$.

Решение.

Пусть $\arccos(\sin 10) = x$, где $x \in [0; \pi]$.

Тогда $\sin 10 = \cos x$.

$\cos x - \sin 10 = 0$; $\cos x - \cos(\pi/2 - 10) = 0$,

$-2\sin(x/2 + \pi/4 - 5)\sin(x/2 - \pi/4 + 5) = 0$.

$$\left[\begin{array}{l} x/2 + \pi/4 - 5 = \pi k,\ k \in Z, \\ x/2 - \pi/4 + 5 = \pi n,\ n \in Z, \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = -\pi/2 + 10 + 2\pi k,\ k \in Z, \\ x = \pi/2 - 10 + 2\pi n,\ n \in Z. \end{array}\right.$$

Выбираем значение $x \in [0; \pi]$.

Ответ. $\arccos(\sin 10) = 10 - 5\pi/2$.

№ 10. Постройте график функции $y = \arcsin(\sin x)$.

Решение (рис. 492).

Отметим некоторые свойства рассматриваемой функции.

1) $D(y)$: R.
2) $E(y)$: $[-\pi/2; \pi/2]$.
3) Периодическая. Наименьший положительный период равен 2π.
4) Нечетная.
5) $\sin y = \sin x$.
6) Если $x \in [-\pi/2; \pi/2]$, то $y = x$.
   Если $x \in [\pi/2; 3\pi/2]$, то $y = \pi - x$.

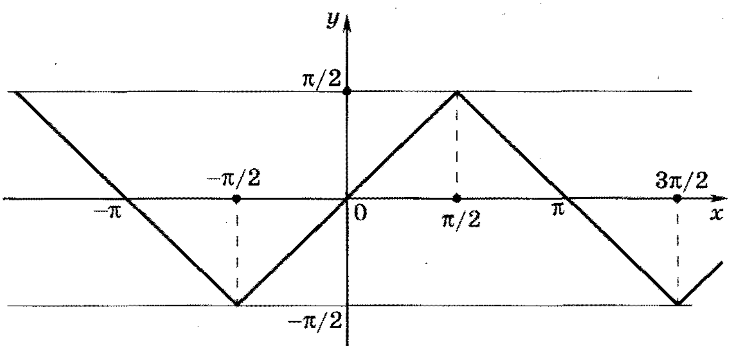


Рис. 492

№ 11. Постройте график функции $y = \arcsin(\cos x)$.

Решение (рис. 493).

Воспользуемся тем, что $\arcsin(\cos x) =$
$= -\arcsin(\sin(x - \pi/2))$.

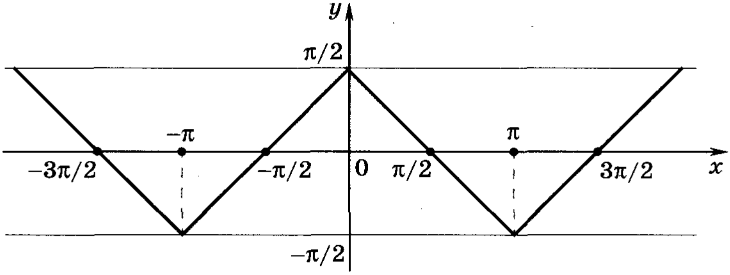


Рис. 493

№ 12. Найдите область определения функции

$$f(x) = \sqrt{\arcsin^2 x - 1}.$$

Решение.

Область определения данной функции совпадает с множеством решений системы неравенств

$$\begin{cases} |\arcsin x| \geqslant 1, \\ |x| \leqslant 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \arcsin x \geqslant 1, \\ \arcsin x \leqslant -1, \end{array}\right. \\ |x| \leqslant 1. \end{cases}$$

Воспользуемся графиком функции $y = \arcsin x$ (рис. 494).

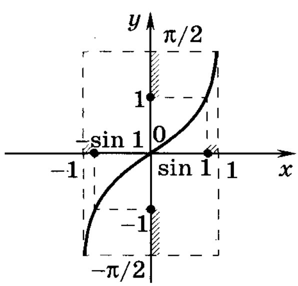


Рис. 494

Ответ. $[-1; -\sin 1] \cup [\sin 1; 1]$.

№ 13. Найдите область определения функции

$$f(x) = \sqrt{1 - \arccos^2 x}.$$

Решение (рис. 495).

Решаем систему неравенств

$$\begin{cases} |\arccos x| \leqslant 1, \\ |x| \leqslant 1: \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \leqslant \arccos x \leqslant 1, \\ |x| \leqslant 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos 1 \leqslant x \leqslant 1, \\ |x| \leqslant 1. \end{cases}$$

<u>Ответ</u>. $[\cos 1; 1]$.

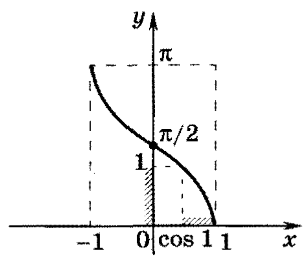


Рис. 495

№ 14. Найдите область значений функции

$f(x) = \arccos \dfrac{1 - 2\sqrt{4 - x^2}}{2}$. (ЕГЭ 2002 г.)

<u>Решение</u>.

Пусть $t = (1 - 2\sqrt{4 - x^2})/2$. Найдем область значений функции $t(x)$ с областью определения $[-2; 2]$:

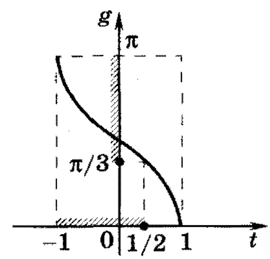


Рис. 496

$0 \leqslant \sqrt{4 - x^2} \leqslant 2;$

$-4 \leqslant -2\sqrt{4 - x^2} \leqslant 0;$

$-3 \leqslant 1 - 2\sqrt{4 - x^2} \leqslant 1;$

$-3/2 \leqslant (1 - 2\sqrt{4 - x^2})/2 \leqslant 1/2;$ $-3/2 \leqslant t \leqslant 1/2.$

Учтем, что $t \in [-1; 1]$. Получим, что $t \in [-1; 1/2]$.

Рассмотрим функцию $g(t) = \arccos t$, где $-1 \leqslant t \leqslant 1/2$. Функция $g(t)$ убывает в области определения. Поэтому $g(t) \in [\arccos (1/2); \arccos (-1)]$, т. е. $g(t) \in [\pi/3, \pi]$. Проиллюстрируем результат графически (рис. 496).

<u>Ответ</u>. $[\pi/3; \pi]$.

№ 15. Найдите область значений функции

$f(x) = \arcsin \sqrt{\dfrac{2 - x^2}{1 + x^2}}$. (ЕГЭ 2002 г.).

Решение.

Пусть $t = (2 - x^2) / (1 + x^2)$. Будем смотреть на полученное равенство как на уравнение относительно x, где t — параметр.

Справедливо следующее **Утверждение:**
область значений функции $y = f(x)$ совпадает с множеством значений y, как параметра, для каждого из которых уравнение $y = f(x)$ имеет хоть один корень.

Рассматриваем уравнение $t = (2 - x^2)/(1 + x^2)$:

$t + tx^2 = 2 - x^2$, $x^2(t + 1) = 2 - t$.

Пусть $t = -1$: $0 \cdot x^2 = 3$. Решений нет.

$t \neq -1$: $x^2 = (2 - t)/(t + 1)$. Последнее уравнение имеет корни, если $(2 - t)/(t + 1) \geqslant 0$, т. е. $t \in (-1; 2]$.

Обозначим $\sqrt{t}$ через S; $S = \sqrt{t}$, где $t \in [0; 2]$. Тогда

$S \in [0; \sqrt{2}\,]$. Учтем область определения функции

$g(S) = \arcsin S$: $\begin{cases} 0 \leqslant S \leqslant \sqrt{2}, \\ -1 \leqslant S \leqslant 1, \end{cases}$ $0 \leqslant S \leqslant 1.$

А теперь найдем область значений возрастающей функции $g(S) = \arcsin S$, где $S \in [0; 1]$:
$g(S) \in [0; \pi/2]$.

Ответ. $[0; \pi/2]$.

№ 16. Найдите множество значений функции

$y = \sin 2x$, если $x \in \left[\arccos\dfrac{5}{13}; \dfrac{5\pi}{12}\right]$. (ЕГЭ 2002 г.)

Решение.

Построим сначала график функции $y = \sin 2x$, если $x \in (0; \pi/2]$ (рис. 497).

Пусть $\arccos(5/13) = m$, $5\pi/12 = n$. Сравним $\arccos(5/13)$ и $\pi/4$: $5/13 < \sqrt{2}/2$, следовательно, $\arccos(5/13) > \pi/4$. И далее: $5/13 < 5\pi/12 < \pi/2$. Числа m и n попали в промежуток убывания функции $y = \sin 2x$. Вычислим $\sin(2\arccos(5/13))$ и $\sin(2 \cdot 5\pi/12)$:

$\sin(5\pi/6) = 1/2$;

$\sin(2\arccos(5/13)) =$
$= 2\sin(\arccos(5/13)) \cdot 5/13 =$
$= 2 \cdot (12/13) \cdot 5/13 =$
$= 120/169$ (рис. 498).

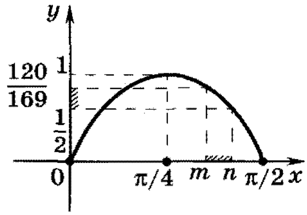


Рис. 497

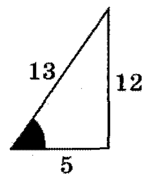


Рис. 498

Ответ. $[1/2; 120/169]$.

№ 17. Найдите множество значений функции $y = \cos 2x$, если $x \in [-\mathrm{arctg}(1/3); \mathrm{arctg}\, 2]$.

(ЕГЭ 2002 г.)

Решение.

Строим график функции $y = \cos 2x$, если $x \in [-\pi/4; 3\pi/4]$ (рис. 499).

Пусть $m = -\mathrm{arctg}(1/3)$, $n = \mathrm{arctg}\, 2$. Так как $0 < 1/3 < 1$, то $0 < \mathrm{arctg}(1/3) < \pi/4$, $-\pi/4 < -\mathrm{arctg}(1/3) < 0$, $-\pi/4 < m < 0$.

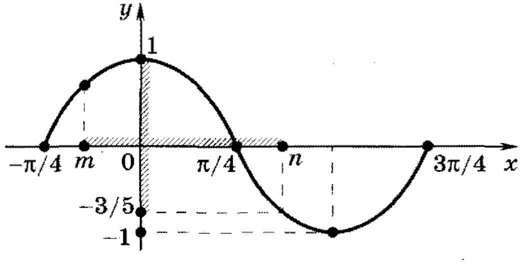


Рис. 499

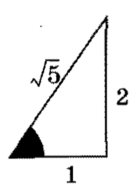


Рис. 500

Легко видеть, что $\pi/4 < \text{arctg}\, 2 < \pi/2$, $\pi/4 < n < \pi/2$. На $[m; n]$ функция $y = \cos 2x$ не является монотонной. Из рисунка 499 видно, что наибольшее значение функции равно 1, а наименьшее — $\cos(2\text{arctg}\, 2)$.

$\cos(2\text{arctg}\, 2) = 2\cos^2(\text{arctg}\, 2) - 1 = 2/5 - 1 = -3/5$ (рис. 500).

Ответ. $[-3/5; 1]$.

2.2.3. Тождества с обратными тригонометрическими функциями

При доказательстве тождеств, содержащих обратные тригонометрические функции, полезно пользоваться следующим **Утверждением:**

если числа α и β принадлежат промежутку, на котором некоторая тригонометрическая функция $T(x)$ строго монотонна и $T(\alpha) = T(\beta)$, то $\alpha = \beta$.

Доказательство (метод от противного).

Пусть $\alpha \neq \beta$. Значит, возможен один из двух случаев:

1) $\alpha > \beta$; 2) $\alpha < \beta$.

Если функция $T(x)$ возрастает (убывает), то $T(\alpha) > T(\beta)$ ($T(\alpha) < T(\beta)$), что противоречит условию $T(\alpha) = T(\beta)$. Аналогично доказывается, что α не может быть меньше β. Итак, $\alpha = \beta$. Что и требовалось доказать.

Эта теорема лежит в основе метода доказательства тождеств с обратными тригонометрическими функциями.

Пусть нам надо доказать тождество $\alpha = \beta$, где α и β — некоторые числа. Алгоритм доказательства:

1. Определяем промежуток, которому принадлежит число α.

2. Определяем промежуток, которому принадлежит число β.

3. Находим промежуток, которому принадлежат α и β. Пусть это промежуток I.

4. Выбираем прямую тригонометрическую функцию $T(x)$, которая на I монотонна.

5. Находим $T(\alpha)$ и $T(\beta)$.

6. Если $T(\alpha) = T(\beta)$, то рассматриваемое равенство $\alpha = \beta$ является тождеством.

❑ Примеры.

№ 18. Докажите тождество
$\arcsin(3/5) + \arcsin(12/13) = \arccos(-16/65)$.

Доказательство.
Пусть $\arcsin(3/5) + \arcsin(12/13) = \alpha$;
$\arccos(-16/65) = \beta$.

1. $0 < \arcsin(3/5) + \arcsin(12/13) < \pi$ (см. свойство 7 арксинуса — п. 2.2.1).

2. $\pi/2 < \arccos(-16/65) < \pi$ (см. свойство 7 арккосинуса — п. 2.2.1).

3. $0 < \alpha < \pi$; $0 < \beta < \pi$; $I = (0; \pi)$.

4. На множестве $(0; \pi)$ убывает функция $y = \cos x$.

5. Найдем $\cos\alpha$ и $\cos\beta$:
$\cos(\arcsin(3/5) + \arcsin(12/13)) =$
$= \cos(\arcsin(3/5))\cos(\arcsin(12/13)) -$
$- \sin(\arcsin(3/5) \cdot \sin(\arcsin(12/13)) =$
$= (4/5) \cdot 5/13 - (3/5) \cdot 12/13 = -16/65$ (рис. 501, *а*).
$\cos(\arccos(-16/65)) = -16/65$ (рис. 501, *б*).

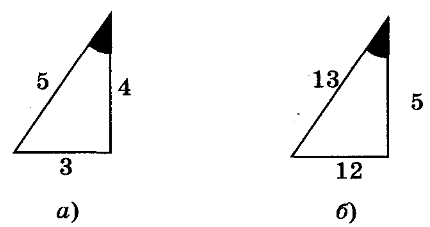


Рис. 501

6. Тождество доказано.

№ 19. Докажите, что $\arcsin(-x) = -\arcsin x$,
$x \in [-1; 1]$.

Доказательство.

1. $-\pi/2 \leqslant \arcsin(-x) \leqslant \pi/2$; $x \in [-1; 1]$.
2. $-\pi/2 \leqslant -\arcsin x \leqslant \pi/2$. (Здесь, кроме определения $\arcsin x$, нужно помнить, что при умножении на (-1) знак неравенства меняется на противоположный.)
3. $I = [-\pi/2; \pi/2]$.
4. На отрезке $[-\pi/2; \pi/2]$ возрастает $y = \sin t$.
5. $\sin(\arcsin(-x)) = -x$;
$\sin(-\arcsin x) = -\sin(\arcsin x) = -x$.
6. Тождество доказано.

2.2.4. Уравнения с обратными тригонометрическими функциями

№ 20. Решите уравнение $\arcsin x = \pi/3$.

Решение.

Это уравнение равносильно уравнению

$x = \sin \pi/3$. Откуда $x = \sqrt{3}/2$.

Ответ. $\sqrt{3}/2$.

№ 21. Решите уравнение $\arcsin x = 2$.

Решение.

Решений нет, так как $2 > \pi/2$.

Ответ. Решений нет.

№ 22. Решите уравнение $\arccos x = 2$.

Решение.

Учитывая, что $2 \in [0; \pi]$, получаем, что $x = \cos 2$.

Ответ. $\cos 2$.

№ 23. Решите уравнение $\operatorname{arctg}(2x - 1) = -1/4$.

Решение.

Заметим, что $-1/4 \in (-\pi/2; \pi/2)$. $2x - 1 = -\operatorname{tg}(1/4)$, $x = 1/2 - (1/2)\operatorname{tg}(1/4)$.

Ответ. $1/2 - (1/2)\operatorname{tg}(1/4)$.

11 – 5663

№ 24. Решите уравнение
$\arcsin(x^2 - 3x + 6) = \arcsin(2x + 2)$.

Решение.
Данное уравнение в силу монотонности арксинуса равносильно системе

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 6 = 2x + 2, \\ |2x + 2| \leqslant 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 5x + 4 = 0, \\ |2x + 2| \leqslant 1; \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = 4, \end{array}\right. \\ |2x + 2| \leqslant 1. \end{cases}$$

Ответ. Решений нет.

№ 25. Решите уравнение $(\arccos x)^2 + \arccos x - 2 = 0$.

Решение.
Пусть $\arccos x = t$, где $t \in [0; \pi]$.

$$t^2 + t - 2 = 0, \qquad \left[\begin{array}{l} t = 1, \\ t = -2. \end{array}\right.$$

Видим, что $-2 \notin [0; \pi]$.
$\arccos x = 1$, $x = \cos 1$.
Ответ. $\cos 1$.

№ 26. Решите уравнение $\arcsin x + 2\arccos x = \pi$.

Решение.
Воспользуемся тождеством:
$\arcsin x + \arccos x = \pi/2$, где $|x| \leqslant 1$. Тогда
$\pi/2 - \arccos x + 2\arccos x = \pi$, $\arccos x = \pi/2$, $x = 0$.

Ответ. 0.

№ 27. Решите уравнение $\arcsin 2x + \arcsin x = \pi/3$.

Решение.
Перепишем данное уравнение в виде
$\arcsin 2x = \pi/3 - \arcsin x$.
Найдем синус от обеих частей:

$$2x = (\sqrt{3}/2) \cdot \cos(\arcsin x) - x/2,\ 2x =$$
$$= (\sqrt{3}/2)\sqrt{1 - x^2} - x/2;\ 5x = \sqrt{3 - 3x^2}.$$

Переходим к системе, равносильной последнему уравнению:

$$\begin{cases} x \geqslant 0, \\ 25x^2 = 3 - 3x^2, \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geqslant 0, \\ x = \pm\sqrt{3/28}, \end{cases}$$

$x = \sqrt{3/28}$.

Проверка.

Проверим справедливость равенства

$\arcsin\sqrt{3/7} + \arcsin\sqrt{3/28} = \pi/3$;

$\arcsin\sqrt{3/7} = \pi/3 - \arcsin\sqrt{3/28}$.

Пусть $\arcsin\sqrt{3/7} = \alpha$; $\pi/3 - \arcsin\sqrt{3/28} = \beta$.

$0 < \alpha < \pi/2$; $0 < \arcsin\sqrt{3/28} < \pi/4$.

Поэтому $0 < \pi/3 - \arcsin\sqrt{3/28} < \pi/2$.

Итак, α и β принадлежат интервалу $(0; \pi/2)$, где синус монотонен.

Найдем синус от обеих частей проверяемого равенства:

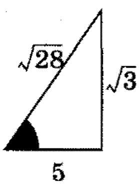


Рис. 502

$\sin(\arcsin\sqrt{3/7}) = \sqrt{3/7}$;

$\sin(\pi/3 - \arcsin\sqrt{3/28}) =$

$= (\sqrt{3}/2)\cdot\cos(\arcsin\sqrt{3/28}) -$

$- (1/2)\cdot\sqrt{3/28} =$

$= (\sqrt{3}/2)\cdot 5/\sqrt{28} - \sqrt{3}/(2\sqrt{28}) =$

$= (4\sqrt{3})/(2\sqrt{28}) = \sqrt{3/7}$ (рис. 502).

Равенство верно, а потому $x = \sqrt{3/28}$ — корень данного уравнения.

Ответ. $\sqrt{3/28}$.

Упражнения для самостоятельного решения

1) Вычислите:

а) $\sin(\arccos(3/5))$; б) $\operatorname{tg}(\arcsin(4/5) + 3\pi/2)$; в) $\sin((1/2)\arccos(1/9))$.

2) Докажите:

а) $\arccos(7/25) + \arccos(3/5) = \arccos(-3/5)$;

б) $\operatorname{arctg} 4 + \operatorname{arctg} 5 = \operatorname{arcctg}(-19/9)$;

в) $\arcsin(4/5) + \arccos(2/\sqrt{5}) = \operatorname{arctg}(2/11)$;

г) $\arcsin(3/5) + \arcsin(5/13) = \arcsin\dfrac{56}{65}$;

д) $\arcsin(3/4) + \operatorname{arcctg}(1/7) = (3/4)$;

е) $\arcsin(3/5) - \arcsin(4/5) = -\arcsin(7/25)$.

3) Вычислите без таблиц:

а) $\operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3$; б) $\operatorname{arctg}(1/3) + \operatorname{arctg}(1/5) + \operatorname{arctg}(1/7) + \operatorname{arctg}(1/8)$.

4) Докажите:

а) $\arccos(-x) = \pi - \arccos x,\ x \in [-1; 1]$;

б) $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x,\ x \in \mathrm{R}$; в) $\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x,\ x \in \mathrm{R}$.

5) Вычислите:

а) $\arcsin(\sin(\pi/9))$; б) $\arccos(\cos(2\pi/9))$; в) $\arcsin(\sin(4\pi/7))$; г) $\arccos(\cos(11\pi/9))$; д) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(10\pi/13))$; е) $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} 12)$.

6) Постройте графики функций:

а) $y = \arccos(\cos x)$; б) $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$;

в) $y = \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x)$; г) $y = \arccos(\sin x)$.

7) Найдите область определения функций:

а) $f(x) = \sqrt{1 - \arcsin^2 x}$; б) $f(x) = \sqrt{\arccos^2 x - 1}$;

в) $f(x) = \sqrt{3/4 - \arccos^2 x}$.

8) Найдите область значений функции:

а) $f(x) = \arccos\dfrac{x^2 - 2}{x^2 + 4}$; б) $f(x) = \arcsin\dfrac{2x^2 - 1}{x^2 + 2}$;

в) $f(x) = \arcsin(2{,}5 - \sqrt{9 - x^2})$.

(ЕГЭ 2002 г.)

9) Найдите множество значений функции:

а) $y = \cos 2x$; если $x \in [-\arcsin 0{,}4; \arccos 0{,}4]$;

б) $y = \sin 2x$, если $x \in [\operatorname{arctg} 0{,}5; \operatorname{arctg} 3]$;

в) $y = \sin 2x$, если $x \in [\operatorname{arctg} 1/3; \operatorname{arctg} 2]$.

(ЕГЭ 2002 г.)

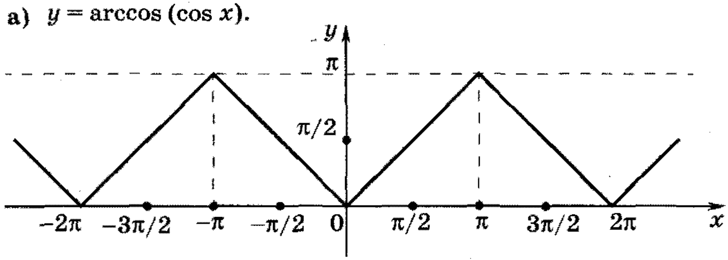
(Ответы.

1) а) $4/5$; б) $-3/4$; в) $2/3$. 3) а) π; б) $\pi/4$.

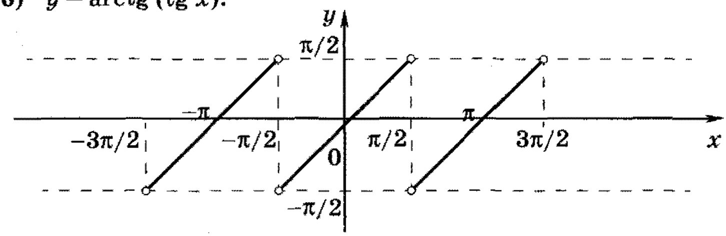
5) а) $\pi/9$; б) $2\pi/9$; в) $3\pi/7$; г) $7\pi/9$; д) $-3\pi/13$; е) $12 - 7\pi/2$.

6) Рисунок 503.

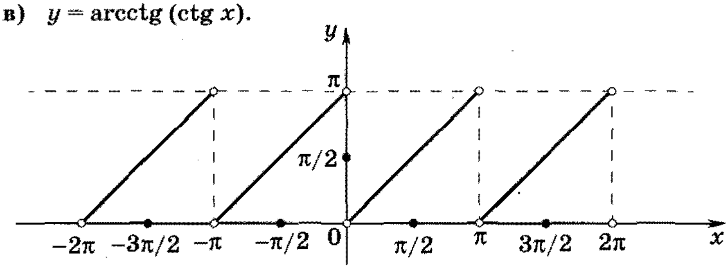
а) $y = \arccos(\cos x)$.



б) $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$.



в) $y = \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x)$.



г) $y = \arccos(\sin x)$.

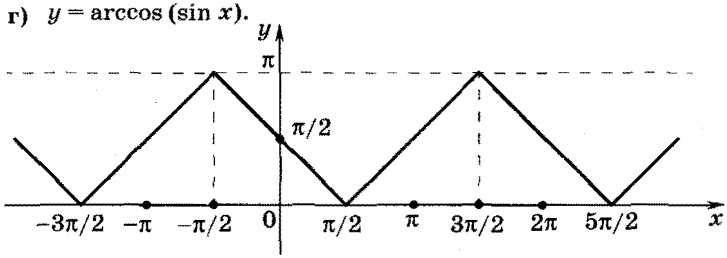


Рис. 503

7) а) $[-\sin 1; \sin 1]$; б) $[-1; \cos 1]$; в) $\left[\cos\frac{\sqrt{3}}{2}; 1\right]$.

8) а) $(0; 2\pi/3)$; б) $[-\pi; \pi/2]$; в) $[-\pi/6; \pi/2]$.

9) а) $[-0{,}68; 1]$; б) $[0{,}6; 1]$; в) $[0{,}6; 1])$.

2.3. Решение простейших тригонометрических уравнений

№ 1. $\sin x = a$.

ООУ: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

Рассмотрим все возможные случаи.

а) $|a| > 1$: решений нет.

б) $a = -1$: $\sin x = -1$,
$x = -\pi/2 + 2\pi k$, $k \in \mathrm{Z}$ (рис. 504).

в) $a = 1$: $\sin x = 1$,
$x = \pi/2 + 2\pi k$, $k \in \mathrm{Z}$ (рис. 505).

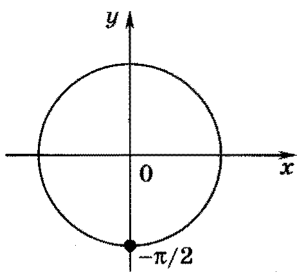


Рис. 504

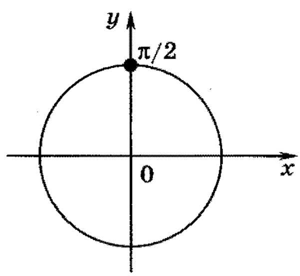


Рис. 505

г) $0 < a < 1$ (рис. 506).

Множество решений уравнения можно записать несколькими способами.

<u>1 способ:</u> $\left[\begin{array}{l} x = \arcsin a + 2\pi n,\ n \in \mathrm{Z}, \\ x = \pi - \arcsin a + 2\pi k,\ k \in \mathrm{Z}. \end{array}\right.$

Здесь в первой строке указано все множество чисел, соответствующих точке M (рис. 506), а во второй строке — все множество чисел, соответствующих точке K.

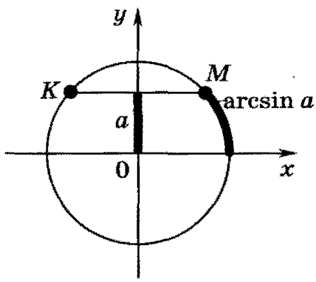


Рис. 506

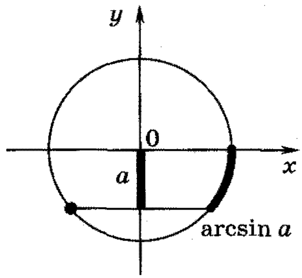


Рис. 507

2 способ: $x = (-1)^n \cdot \arcsin a + \pi n,\ n \in \mathrm{Z}$.

д) $-1 < a < 0$ (рис. 507).

1 способ: $\left[\begin{array}{l} x = \arcsin a + 2\pi n,\ n \in \mathrm{Z}, \\ x = \pi - \arcsin a + 2\pi k,\ k \in \mathrm{Z}. \end{array}\right.$

2 способ: $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in \mathrm{Z}$.

е) $a = 0$: $\sin x = 0$,

$x = \pi k,\ k \in \mathrm{Z}$ (рис. 508).

№ 2. $\cos x = a$.

ООУ: $\begin{cases} x \in \mathrm{R}, \\ a \in \mathrm{R}. \end{cases}$

а) $|a| > 1$: решений нет.

б) $a = -1$: $\cos x = -1$,

$x = \pi + 2\pi k,\ k \in \mathrm{Z}$ (рис. 509).

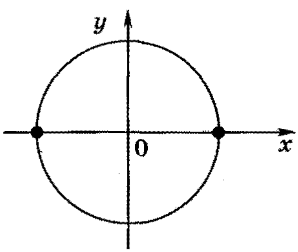


Рис. 508

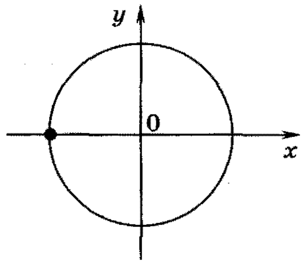


Рис. 509

в) $a = 1$: $\cos x = 1$,

$x = 2\pi k,\ k \in \mathrm{Z}$ (рис. 510).

г) $0 < a < 1$ (рис. 511).

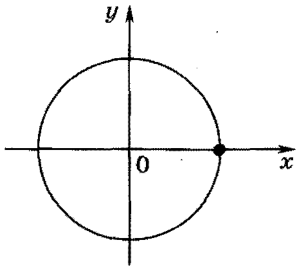


Рис. 510

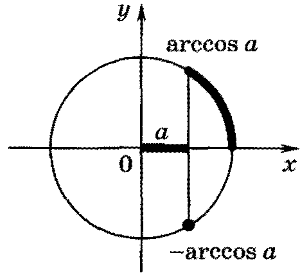


Рис. 511

<u>1 способ:</u> $\left[\begin{array}{l} x = \arccos a + 2\pi n,\ n \in \mathrm{Z}, \\ x = -\arccos a + 2\pi k,\ k \in \mathrm{Z}. \end{array}\right.$

<u>2 способ:</u> $x = \pm\arccos a + 2\pi n,\ n \in \mathrm{Z}.$

д) $-1 < a < 0$ (рис. 512).

<u>1 способ:</u> $\left[\begin{array}{l} x = \arccos a + 2\pi n,\ n \in \mathrm{Z}, \\ x = -\arccos a + 2\pi k,\ k \in \mathrm{Z}. \end{array}\right.$

<u>2 способ:</u> $x = \pm\arccos a + 2\pi n,\ n \in \mathrm{Z}.$

е) $a = 0$: $\cos x = 0$ (рис. 513),

$x = \pi/2 + \pi k,\ k \in \mathrm{Z}.$

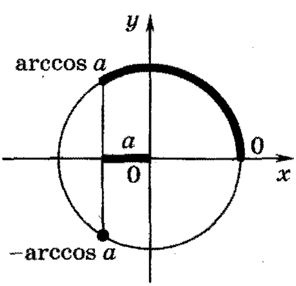


Рис. 512

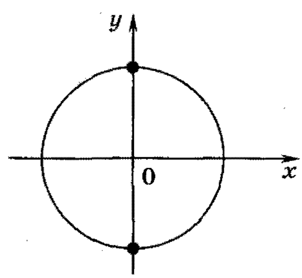


Рис. 513

№ 3. $\mathrm{tg}\, x = a$ (рис. 514).

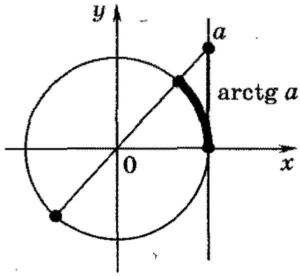


Рис. 514

а) $a = 0$: $x = \pi n,\ n \in \mathrm{Z}$.

б) $a \neq 0$.

<u>1 способ:</u> $\left[\begin{array}{l} x = \mathrm{arctg}\, a + 2\pi n,\ n \in \mathrm{Z}, \\ x = \pi + \mathrm{arctg}\, a + 2\pi k,\ k \in \mathrm{Z}. \end{array}\right.$

<u>2 способ:</u> $x = \mathrm{arctg}\, a + \pi n,\ n \in \mathrm{Z}$.

№ 4. $\mathrm{ctg}\, x = a$.

а) $a = 0$: $x = \pi/2 + \pi n,\ n \in \mathrm{Z}$.

б) $a \neq 0$.

<u>1 способ:</u> $\left[\begin{array}{l} x = \mathrm{arcctg}\, a + 2\pi n,\ n \in \mathrm{Z}, \\ x = \pi + \mathrm{arcctg}\, a + \pi k,\ k \in \mathrm{Z}. \end{array}\right.$

<u>2 способ:</u> $x = \mathrm{arcctg}\, a + \pi n,\ n \in \mathrm{Z}$ (рис. 515).

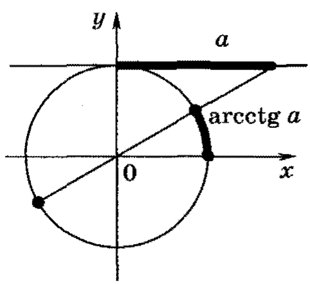


Рис. 515

2.4. Таблица «опасных» формул

Известны различные типы и методы решения тригонометрических уравнений. Они довольно обстоятельно рассматриваются в учебной и учебно-методической литературе.

При решении тригонометрических уравнений, неравенств и их систем мы рекомендуем использовать единичную окружность, а при необходимости и координатную прямую.

Находя область определения уравнения, желательно исключить на единичной окружности точки, соответствующие числам, которые не могут являться корнями данного уравнения.

Записать окончательный ответ наиболее рациональным способом поможет также единичная окружность.

Решая уравнение, необходимо следить за сохранением равносильности при переходе от одного уравнения к другому.

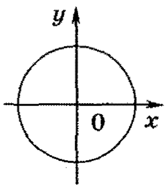
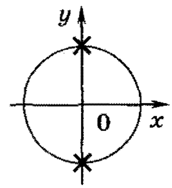
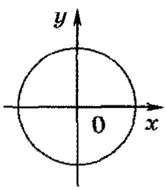
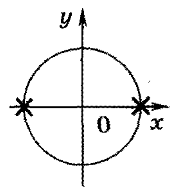
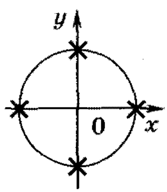
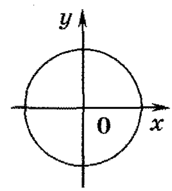
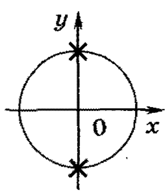
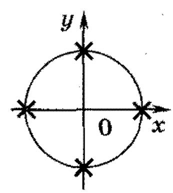
Также следует учитывать изменение области определения уравнения, которая может меняться в результате тождественных преобразований, возведения обеих частей уравнения в одну и ту же четную степень, при применении тригонометрических тождеств и т. д.

При использовании одних тригонометрических тождеств область определения уравнения может остаться неизменной, а при других — может расшириться или сузиться.

Предлагаемая нами таблица «опасных» формул, как нам кажется, поможет решить вопрос о потере или приобретении посторонних корней при применении различных тригонометрических тождеств.

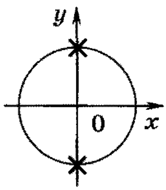
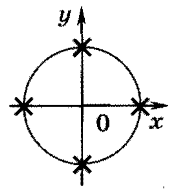
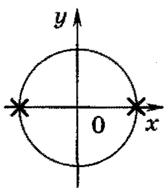
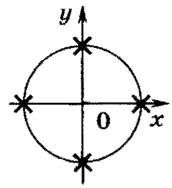
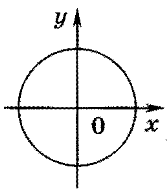
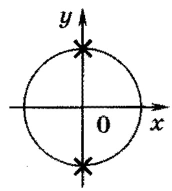
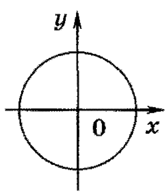
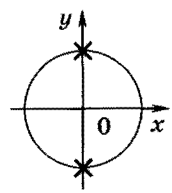
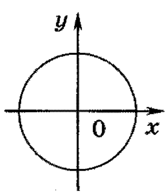
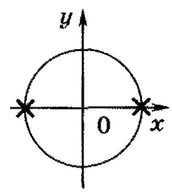
Таблица «опасных» формул[1]

Таблица 3

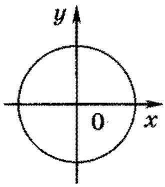
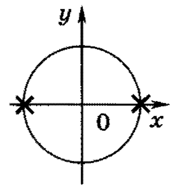
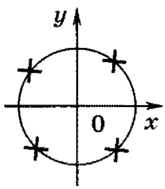
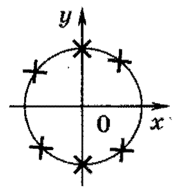
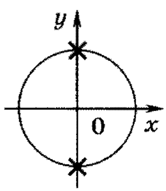
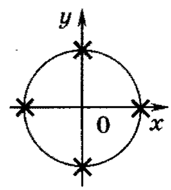
Область определения левой части тождества	Тождество	Область определения правой части тождества
	$\cos^2 \alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha + 1}$	
	$\sin^2 \alpha = \dfrac{1}{\operatorname{ctg}^2\alpha + 1}$	
	$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$	
	$\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$	

[1] Предложенная вашему вниманию таблица разработана учителем математики средней школы № 43 г. Воронежа М. Н. Игольченко, за что авторы выражают ей свою признательность.

Продолжение

Область определения левой части тождества	Тождество	Область определения правой части тождества
	$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$	
	$\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$	
	$\sin 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha + 1}$	
	$\cos 2\alpha = \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha + 1}$	
	$\sin 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha + 1}$	

Окончание

Область определения левой части тождества	Тождество	Область определения правой части тождества
	$\cos 2\alpha = \dfrac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{\operatorname{ctg}^2\alpha + 1}$	
	$\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$	
	$\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{1 - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$	
$\alpha \pm \beta \neq \pi/2 + \pi k,\ k \in Z$	$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$	$\begin{cases} \alpha \pm \beta \neq \pi/2 + \pi k,\ k \in Z, \\ \alpha \neq \pi/2 + \pi n,\ n \in Z, \\ \beta \neq \pi/2 + \pi m,\ m \in Z \end{cases}$

■ 2.5. Решение простейших тригонометрических неравенств

При решении простейших тригонометрических неравенств будем пользоваться следующим алгоритмом.

1. На единичной окружности отмечаем дугу (несколько дуг) так, что числа, соответствующие точкам этой дуги, удовлетворяют неравенству. Дуга выделяется цветом или штриховкой.

2. Около одного из концов дуги записываем одно из чисел, соответствующих этой точке.

3. Рисуем стрелку, направленную к другому концу отмеченной дуги. Стрелка снабжается знаком «+», если направление движения против часовой стрелки, и знаком «–» — если по часовой стрелке.

4. Записываем соответствующее число около второго конца дуги.

5. Запись ответа (с учетом, что каждой точке единичной окружности соответствует бесчисленное множество действительных чисел). Ответ можно записывать в виде двойного неравенства или в виде множества.

Если имеем две дуги, симметричные относительно начала координат, то достаточно записать концы одной из них, прибавив πk ($k \in Z$) к каждому из чисел, соответствующих концам.

№ 1. Решите неравенства.

а) $\sin x > 0$ (рис. 516, *а*).

Ответ можно записать в виде неравенства или интервала.

Ответ. $2\pi n < x < \pi + 2\pi n$, или $(2\pi n; \pi + 2\pi n)$, где $n \in Z$.

б) $\sin x < 0$ (рис. 516, *б*).

Ответ. $-\pi + 2\pi n < x < 2\pi n$, или $(-\pi + 2\pi n; 2\pi n)$, $n \in Z$.

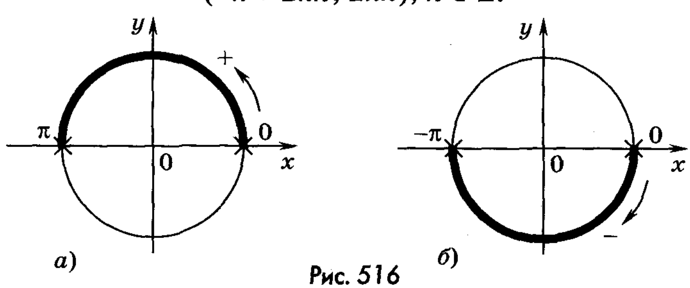


Рис. 516

в) $\cos x > 0$ (рис. 517).

Ответ. $-\pi/2 + 2\pi k < x < \pi/2 + 2\pi k$, или $(-\pi/2 + 2\pi k; \pi/2 + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

г) $\cos x < 0$ (рис. 518).

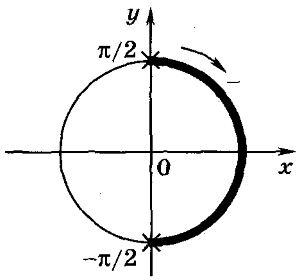


Рис. 517

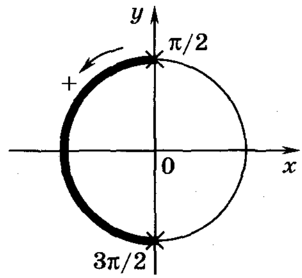


Рис. 518

Ответ. $\pi/2 + 2\pi k < x < 3\pi/2 + 2\pi k$, или $(\pi/2 + 2\pi k; 3\pi/2 + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

д) $\operatorname{tg} x > 0$ ($\operatorname{ctg} x > 0$) (рис. 519).

Ответ. $\pi m < x < \pi/2 + \pi m$, или $(\pi m; \pi/2 + \pi m)$, $m \in \mathbb{Z}$.

е) $\operatorname{tg} x < 0$ ($\operatorname{ctg} x < 0$) (рис. 520).

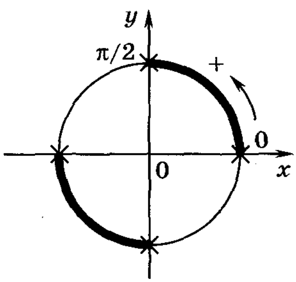


Рис. 519

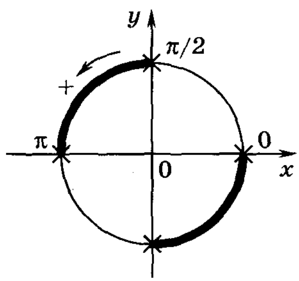


Рис. 520

Ответ. $\pi/2 + \pi m < x < \pi + \pi m$, или $(\pi/2 + \pi m; \pi + \pi m)$, $m \in \mathbb{Z}$.

№ 2. Решите неравенства.

а) $\sin x > 1/2$ (рис. 521).

Ответ. $(\pi/6 + 2\pi n; 5\pi/6 + 2\pi n)$, где $n \in \mathbb{Z}$.

б) $\sin x < -\sqrt{2}/2$ (рис. 522).

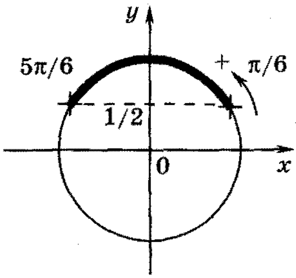


Рис. 521

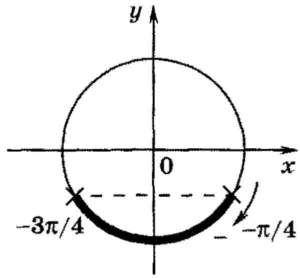


Рис. 522

<u>Ответ</u>. $(-3\pi/4 + 2\pi n; -\pi/4 + 2\pi n)$, где $n \in \mathbf{Z}$.

в) $\sin x > -\sqrt{3}/2$ (рис. 523).

<u>Ответ</u>. $(-\pi/3 + 2\pi n; 4\pi/3 + 2\pi n)$, где $n \in \mathbf{Z}$.

г) $\cos x > 1/2$ (рис. 524).

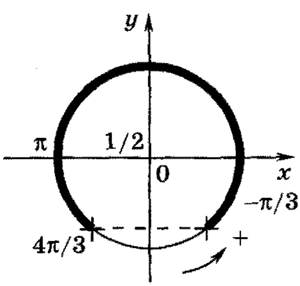


Рис. 523

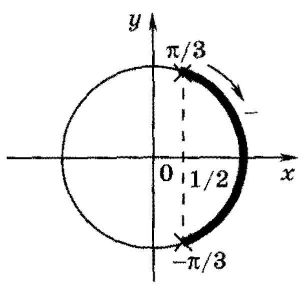


Рис. 524

<u>Ответ</u>. $(-\pi/3 + 2\pi n; \pi/3 + 2\pi n)$, где $n \in \mathbf{Z}$.

д) $\cos x < \sqrt{3}/2$ (рис. 525).

<u>Ответ</u>. $(\pi/6 + 2\pi n; 11\pi/6 + 2\pi n)$, где $n \in \mathbf{Z}$.

е) $\cos x > -1/2$ (рис. 526).

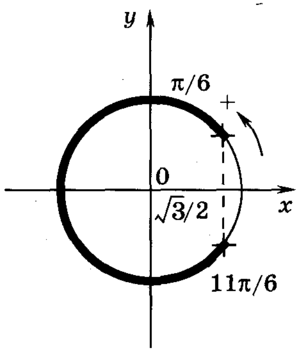


Рис. 525

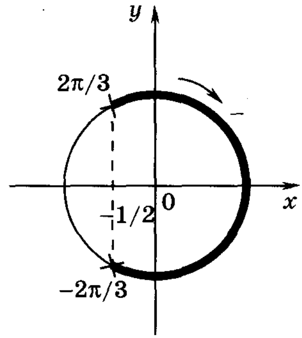


Рис. 526

Ответ. $(-2\pi/3 + 2\pi n;\ 2\pi/3 + 2\pi n)$, где $n \in \mathbb{Z}$.

ж) $\sin x \leqslant \sqrt{2}/2$ (рис. 527).

Ответ. $x \in [-5\pi/4 + 2\pi n;\ \pi/4 + 2\pi n]$, где $n \in \mathbb{Z}$.

з) $\sin x > 1/3$ (рис. 528).

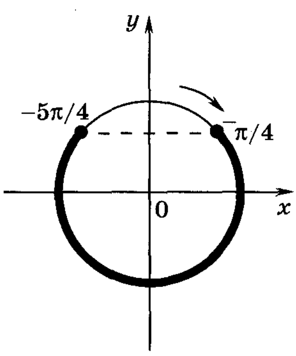


Рис. 527

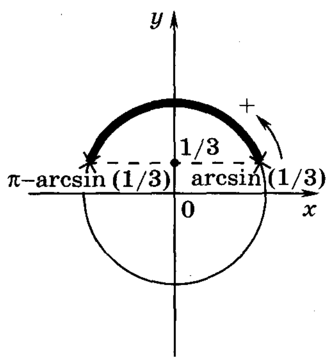


Рис. 528

Ответ. $(\arcsin(1/3) + 2\pi n;\ \pi - \arcsin(1/3) + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$.

и) $\sin x < -1/3$ (рис. 529).

Ответ. $(-\pi + \arcsin 1/3 + 2\pi n; -\arcsin 1/3 + 2\pi n)$, где $n \in Z$.

к) $\cos x < -\sqrt{2}/2$ (рис. 530).

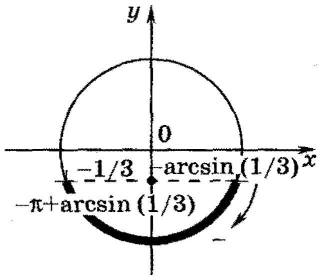


Рис. 529

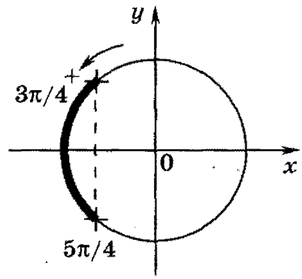


Рис. 530

Ответ. $(3\pi/4 + 2\pi n; 5\pi/4 + 2\pi n)$, где $n \in Z$.

л) $\cos x > 1/4$ (рис. 531).

Ответ. $(-\arccos (1/4) + 2\pi k; \arccos (1/4) + 2\pi k)$, где $k \in Z$.

м) $\cos x < -1/4$ (рис. 532).

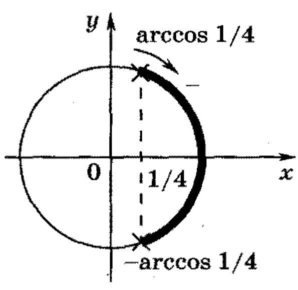


Рис. 531

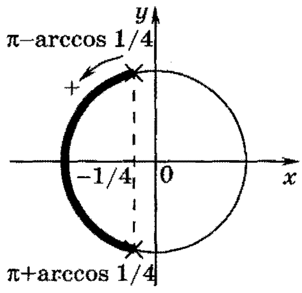


Рис. 532

Ответ. $x \in (\pi - \arccos (1/4) + 2\pi k,$ $\pi + \arccos (1/4) + 2\pi k)$, где $k \in Z$.

н) $\operatorname{tg} x > 1$ (рис. 533).

<u>Ответ</u>. $x \in (\pi/4 + \pi t; \pi/2 + \pi t)$, где $t \in Z$.

о) $\operatorname{tg} x > -1$ (рис. 534).

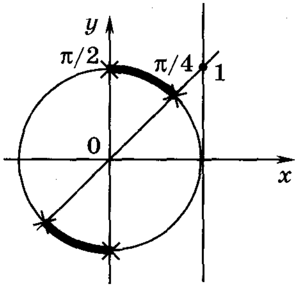


Рис. 533

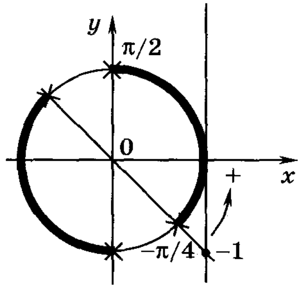


Рис. 534

<u>Ответ</u>. $(-\pi/4 + \pi t; \pi/2 + \pi t)$, где $t \in Z$.

п) $\operatorname{tg} x < \sqrt{3}$ (рис. 535).

<u>Ответ</u>. $(-\pi/2 + \pi t; \pi/3 + \pi t)$, где $t \in Z$.

р) $\operatorname{tg} x > -\sqrt{3}/3$ (рис. 536).

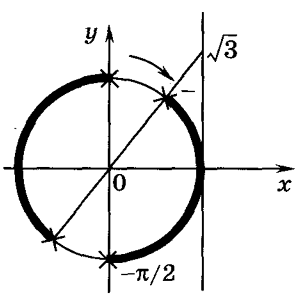


Рис. 535

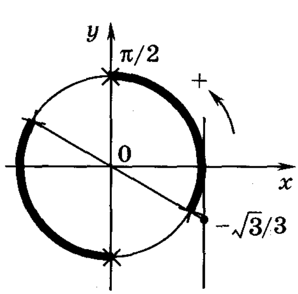


Рис. 536

<u>Ответ</u>. $(-\pi/6 + \pi t; \pi/2 + \pi t)$, где $t \in Z$.

с) $\operatorname{tg} x < -\sqrt{3}$ (рис. 537).

Ответ. $(-\pi/2 + \pi t; -\pi/3 + \pi t)$, где $t \in Z$.

т) $\operatorname{ctg} x > 1$ (рис. 538).

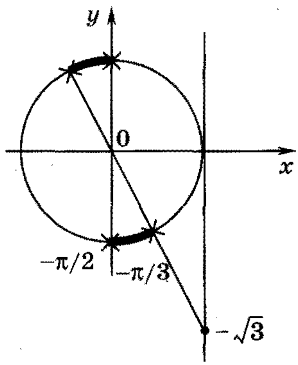


Рис. 537

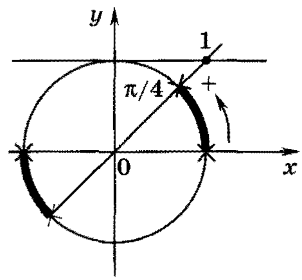


Рис. 538

Ответ. $(\pi t; \pi/4 + \pi t)$, где $t \in Z$.

у) $\operatorname{ctg} x > -1$ (рис. 539).

Ответ. $(\pi t; 3\pi/4 + \pi t)$, где $t \in Z$.

ф) $\operatorname{ctg} x < \sqrt{3}$ (рис. 540).

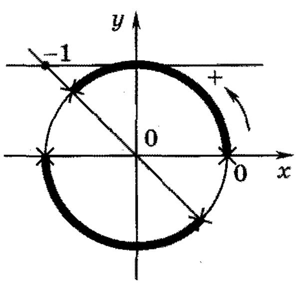


Рис. 539

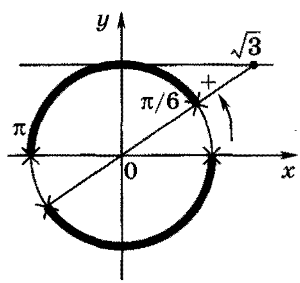


Рис. 540

Ответ. $(\pi/6 + \pi t; \pi + \pi t)$, где $t \in Z$.

х) $\operatorname{ctg} x < -\sqrt{3}/3$ (рис. 541).

Ответ. $(2\pi/3 + \pi k; \pi + \pi k)$, где $k \in Z$.

№ 3. Решите неравенство $\sin(x + \pi/3) > 1/2$.

Решение.

Обозначим $x + \pi/3 = t$. Получим неравенство $\sin t > 1/2$ (рис. 542).

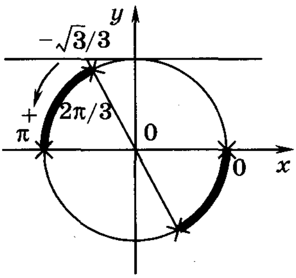


Рис. 541

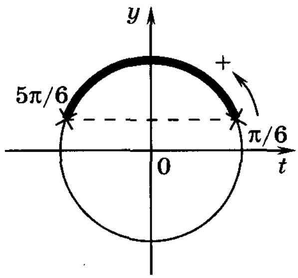


Рис. 542

$\pi/6 + 2\pi k < t < 5\pi/6 + 2\pi k$, где $k \in Z$,
$\pi/6 + 2\pi k < x + \pi/3 < 5\pi/6 + 2\pi k$, где $k \in Z$,
$-\pi/6 + 2\pi k < x < \pi/2 + 2\pi k$, где $k \in Z$.

Ответ. $(-\pi/6 + 2\pi k; \pi/2 + 2\pi k)$, где $k \in Z$.

№ 4. Решите неравенство $\cos 3x \leqslant -1/3$.

Решение.

Пусть $3x = t$. Решаем неравенство $\cos t \leqslant -1/3$ (рис. 543).

$2\pi n + \pi - \arccos(1/3) \leqslant t \leqslant \pi + \arccos(1/3) + 2\pi n$, $n \in Z$.

$2\pi n/3 + \pi/3 - (1/3)\arccos(1/3) \leqslant x \leqslant \pi/3 + (1/3)\arccos(1/3) + 2\pi n/3$, $n \in Z$.

Ответ. $[\pi/3 - (1/3)\arccos(1/3) + 2\pi n/3; \pi/3 + (1/3)\arccos(1/3) + 2\pi n/3]$, $n \in Z$.

№ 5. Решите неравенство $\sin(\pi/6 - 3x) > 2/5$.

Решение.

Учитывая нечетность функции $y = \sin t$, решаем неравенство, равносильное данному:
$\sin(3x - \pi/6) < -2/5$.

Пусть $3x - \pi/6 = t$; $\sin z < -2/5$ (рис. 544).

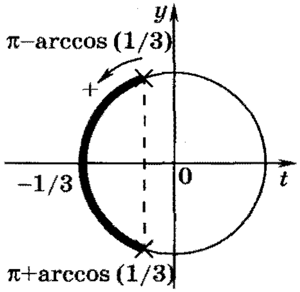


Рис. 543

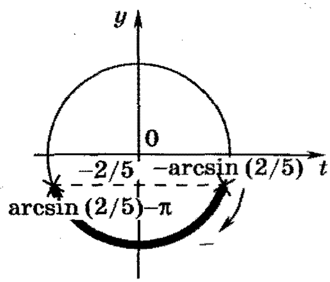


Рис. 544

$\arcsin(2/5) - \pi + 2\pi n < t < -\arcsin(2/5) + 2\pi n$, $n \in Z$,
$\arcsin(2/5) - \pi + 2\pi n < 3x - \pi/6 < -\arcsin(2/5) + 2\pi n$, $n \in Z$,
$(1/3)\arcsin(2/5) - 5\pi/18 + 2\pi n/3 < x < (-1/3)\arcsin(2/5) + \pi/18 + 2\pi n/3$, $n \in Z$.

Ответ. $((1/3)\arcsin(2/5) - 5\pi/18 + 2\pi n/3;$
$-(1/3)\arcsin(2/5) + \pi/18 + 2\pi n/3)$, $n \in Z$.

№ 6. Решите систему неравенств $\begin{cases} \sin x \geqslant -1/2, \\ \sin x < 1/4. \end{cases}$

Решение (рис.545).

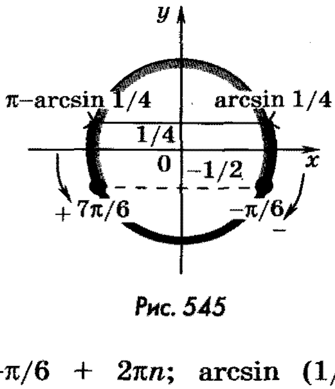


Рис. 545

Ответ. $[-\pi/6 + 2\pi n; \arcsin(1/4) + 2\pi n) \cup$
$\cup (\pi - \arcsin(1/4) + 2\pi k; 7\pi/6 + 2\pi k]$, $k, n \in Z$.

№ 7. Решите неравенство $\sin x \cdot (\cos x + 1/2) > 0$.

Решение.

Данное неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin x > 0, \\ \cos x > -1/2 \text{ (рис. 546)}; \end{cases} \\ \begin{cases} \sin x < 0, \\ \cos x < -1/2 \text{ (рис. 547)}. \end{cases} \end{array}\right.$$

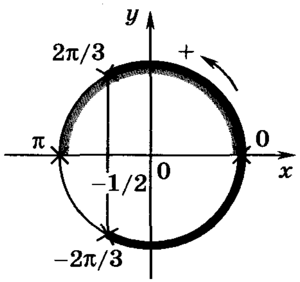


Рис. 546

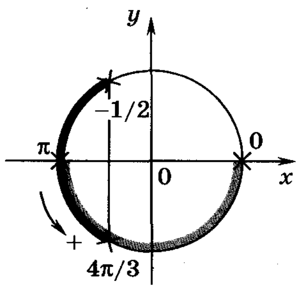


Рис. 547

Ответ. $(2\pi n;\ 2\pi/3 + 2\pi n) \cup (\pi + 2\pi k;\ 4\pi/3 + 2\pi k)$, $k, n \in \mathbb{Z}$.

№ 8. Решите неравенство

$(\cos x - \sqrt{2}/2)(2\sin x - \sqrt{3}) \geqslant 0$.

Решение.

Данное неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{ll} \begin{cases} \cos x \geqslant \sqrt{2}/2, \\ \sin x \geqslant \sqrt{3}/2, \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} \cos x \leqslant \sqrt{2}/2, \\ \sin x \leqslant \sqrt{3}/2. \end{cases} & (2) \end{array}\right.$$

Система (1) решений не имеет (рис. 548).

Решение системы (2) — на рисунке 549.

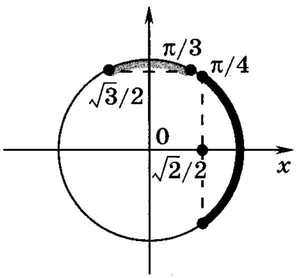


Рис. 548

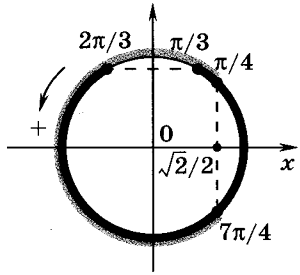


Рис. 549

Ответ. $[\pi/4 + 2\pi n;\ \pi/3 + 2\pi n] \cup$
$\cup\ [2\pi/3 + 2\pi k;\ 7\pi/4 + 2\pi k]$, $k, n \in Z$.

№ 9. Решите неравенство $2\sin^2 x - 5\sin x + 2 \geqslant 0$.

Решение.
Пусть $t = \sin x$, тогда имеем

$$\begin{cases} 2t^2 - 5t + 2 \geqslant 0, & (1) \\ |t| \leqslant 1. & (2) \end{cases}$$

Найдем корни квадратного трехчлена $2t^2 - 5t + 2$: $t_1 = 1/2$; $t_2 = 2$.

Решение неравенства (1) показано на оси (1) рисунка 550, решение неравенства (2) — на оси (2).
$-1 \leqslant t \leqslant 1/2$.

Решаем неравенство $\sin x \leqslant 1/2$ (рис. 551).

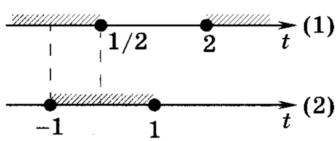


Рис. 550

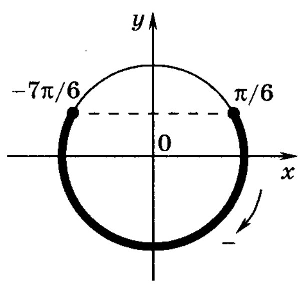


Рис. 551

Ответ. $[-7\pi/6 + 2\pi k;\ \pi/6 + 2\pi k]$, где $k \in Z$.

3. Метод «лепестков» в решении тригонометрических уравнений и неравенств

Приведем примеры решения некоторых более сложных тригонометрических уравнений и неравенств.

№ 1. Решите уравнение $\cos 3x + \sin 2x - \sin 4x = 0$.

Решение.

ООУ: $x \in R$.

$\cos 3x - 2\cos 3x \sin x = 0$,

$\cos 3x(1 - 2\sin x) = 0$,

$\left[\begin{array}{l}\cos 3x = 0,\\ \sin x = 1/2;\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x = \pi/6 + \pi k/3,\ k \in Z,\\ x = (-1)^n\pi/6 + \pi n,\ n \in Z\end{array}\right.$ (рис. 552).

Ответ. $\pi/6 + \pi k/3$, $k \in Z$.

№ 2. Решите уравнение $1/\sin x = 1/\sin 2x$.

Решение.

ООУ: $x \neq \pi n/2$, $n \in Z$.

Решим уравнение $\sin 2x = \sin x$:

$\sin x\,(2\cos x - 1) = 0$,

$\left[\begin{array}{l}\sin x = 0,\\ \cos x = 1/2.\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x = \pi m,\ m \in Z,\\ x = \pm\pi/3 + 2\pi l,\ l \in Z\end{array}\right.$ (рис. 553).

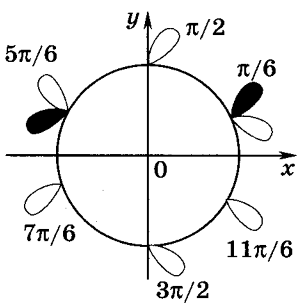


Рис. 552

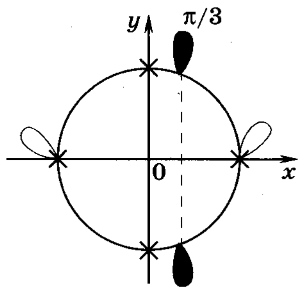


Рис. 553

Ответ. $\pm\pi/3 + 2\pi l$, $l \in Z$.

№ 3. Решите уравнение $\dfrac{(\cos x - \sqrt{3}\sin x)^2}{\sqrt{3} - 2\sin 2x} = \sqrt{3}/2.$

Решение.

ООУ: $\sin 2x \neq \sqrt{3}/2$,

$\left[\begin{array}{l} 2x \neq \pi/3 + 2\pi k,\ k \in Z, \\ 2x \neq 2\pi/3 + 2\pi n,\ n \in Z; \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} x \neq \pi/6 + \pi k,\ k \in Z, \\ x \neq \pi/3 + \pi n,\ n \in Z. \end{array}\right.$

Данное уравнение приводится к уравнению-следствию $2(\cos x - \sqrt{3}\sin x)^2 = 3 - 2\sqrt{3}\sin 2x$.

Решаем его.

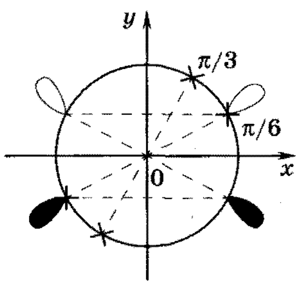


Рис. 554

$2(\cos^2 x - 2\sqrt{3}\cos x \sin x +$

$+ 3\sin^2 x) = 3 - 2\sqrt{3}\sin 2x,$

$2\cos^2 x + 6\sin^2 x - 3\sin^2 x -$

$- 3\cos^2 x = 0,$

$3\sin^2 x - \cos^2 x = 0,$

$4\sin^2 x - 1 = 0,$

$\left[\begin{array}{l} \sin x = 1/2, \\ \sin x = -1/2; \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x = (-1)^k\pi/6 + \pi k,\ k \in Z, \\ x = (-1)^{n+1}\pi/6 + \pi n,\ n \in Z \end{array}\right.$

(рис. 554).

Ответ. $-\pi/6 + \pi m,\ m \in Z$.

№ 4. Найдите все решения уравнения $\dfrac{\sin 6x}{\sin x + \cos x} = \dfrac{\cos 6x}{\cos x - \sin x}$, принадлежащие интервалу $(0; \pi/2)$.

Решение.

Учитывая область определения данного уравнения, надо найти все его решения, принадлежащие множеству $(0; \pi/4) \cup (\pi/4; \pi/2)$.

Освободимся от знаменателей в данном уравнении.

$\sin 6x \cos x - \sin 6x \sin x = \sin x \cos 6x + \cos x \cos 6x,$

$\sin 5x = \cos 5x,$

$\operatorname{tg} 5x = 1;$
$x = \pi/20 + \pi k/5,\ k \in Z$
(рис. 555).

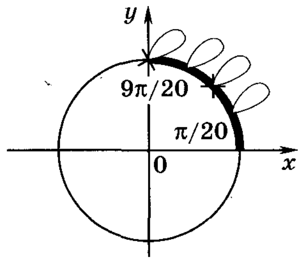


Рис. 555

Ответ. $\{\pi/20;\ 9\pi/20\}$.

№ 5. Решите уравнение

$$\frac{\cos 2x + \sin 4x}{\cos 6x} = 1.$$

Решение.
ООУ: $x \neq \pi/12 + \pi k/6,\ k \in Z$.
Отмечать недопустимые точки на единичной окружности легче, перейдя к градусной мере угла:
$x \neq 15^\circ + 30^\circ k,\ k \in Z$.
Освободимся в данном уравнении от знаменателя:
$\cos 2x - \cos 6x + \sin 4x = 0,$
$2\sin 4x \sin 2x + \sin 4x = 0,$
$\sin 4x\,(2\sin 2x + 1) = 0,$

$$\left[\begin{array}{l}\sin 4x = 0,\\ \sin 2x = -1/2;\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}x = \pi n/4,\ n \in Z,\\ 2x = -\pi/6 + 2\pi m,\ m \in Z,\\ 2x = -5\pi/6 + 2\pi k,\ k \in Z;\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}x = \pi n/4,\ n \in Z,\\ x = -\pi/12 + \pi m,\ m \in Z,\\ x = -5\pi/12 + \pi k,\ k \in Z\end{array}\right.$$

(рис. 556).

Ответ. $\pi t/2,\ t \in Z$.

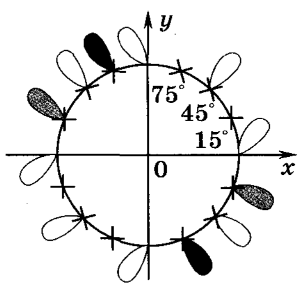


Рис. 556

№ 6. Решите уравнение
$(1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x)/\operatorname{tg} 2x = 0.$

Решение.

$$\text{ООУ: } \left\{\begin{array}{l}2x \neq \pi/2 + \pi k,\ k \in Z,\\ 2x \neq \pi n,\ n \in Z,\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l}x \neq \pi/4 + \pi k/2,\ k \in Z,\\ x \neq \pi n/2,\ n \in Z;\end{array}\right.$$

$x \neq \pi m/4,\ m \in Z.$
$(1 + \sin 2x) + (\sin x + \cos x) + \cos 2x = 0,$
$(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x + \cos x) + (\cos^2 x - \sin^2 x) = 0,$

$(\sin x + \cos x)(\sin x + \cos x + 1 + \cos x - \sin x) = 0,$

$\left[\begin{array}{l}\sin x + \cos x = 0,\\ \cos x = -1/2;\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\operatorname{tg} x = -1,\\ \cos x = -1/2;\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}x = -\pi/4 + \pi t,\ t \in Z,\\ x = \pm 2\pi/3 + 2\pi l,\ l \in Z\end{array}\right.$ (рис. 557).

Ответ. $\pm 2\pi/3 + 2\pi l,\ l \in Z.$

№ 7. Решите уравнение $3/\cos^2 x + 1 = 7\sin x/|\cos x|$.

Решение.

ООУ: $x \neq \pi/2 + \pi k,\ k \in Z$ (рис. 558).

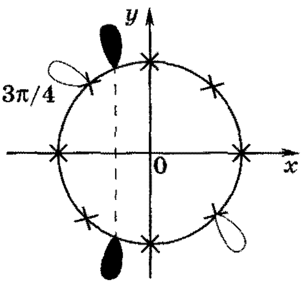


Рис. 557

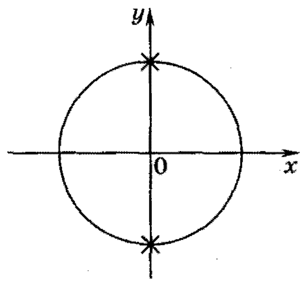


Рис. 558

Учитывая, что левая часть уравнения принимает положительные значения, корни уравнения (если они есть) должны удовлетворять условию $\sin x > 0$. Данное уравнение равносильно тогда совокупности систем:

$$\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}\cos x > 0,\\ \sin x > 0,\\ \dfrac{3}{\cos^2 x} + 1 = \dfrac{7\sin x}{\cos x};\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}\cos x < 0,\\ \sin x > 0,\\ \dfrac{3}{\cos^2 x} + 1 = -\dfrac{7\sin x}{\cos x}.\end{array}\right.\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}2\pi n < x < \pi/2 + 2\pi n,\ n \in Z \text{ (рис. 559)};\\ 4\cos^2 x + 3\sin^2 x - 7\sin x \cos x = 0;\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}\pi/2 + 2\pi k < x < \pi + 2\pi k,\ k \in Z \text{ (рис. 560)};\\ 4\cos^2 x + 3\sin^2 x + 7\sin x \cos x = 0;\end{array}\right.\end{array}\right.$$

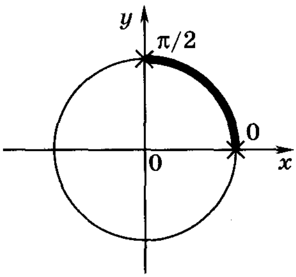


Рис. 559

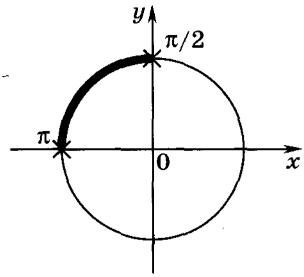


Рис. 560

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2\pi n < x < \pi/2 + 2\pi n,\ n \in \mathrm{Z}, \\ \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = 4/3 \\ \operatorname{tg} x = 1, \end{array}\right. \qquad \text{(рис. 561)}, \end{cases} \\ \begin{cases} \pi/2 + 2\pi k < x < \pi + 2\pi k,\ k \in \mathrm{Z}, \\ \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = -4/3 \\ \operatorname{tg} x = -1, \end{array}\right. \qquad \text{(рис. 562)}, \end{cases} \end{array}\right.$$

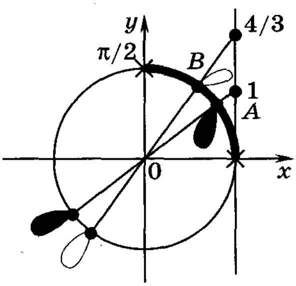


Рис. 561

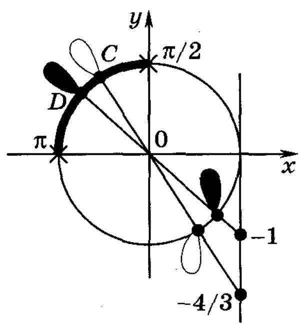


Рис. 562

Изобразим точки A, B, C, D на одной окружности и запишем соответствующие им числа (рис. 563).

<u>Ответ</u>. $(-1)^k\pi/4 + \pi k,\ k \in \mathrm{Z}$ (точки A и D);
$(-1)^n \operatorname{arctg}(4/3) + \pi n,\ n \in \mathrm{Z}$ (точки C и B).

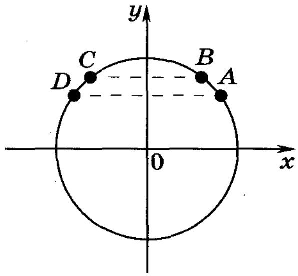


Рис. 563

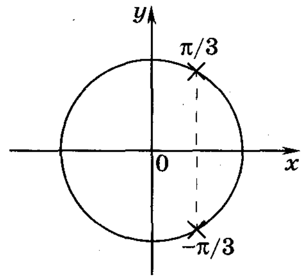


Рис. 564

№ 8. Решите уравнение

$$\sin x - \frac{|2\cos x - 1|}{2\cos x - 1}\sin^2 x = \sin^2 x.$$

Решение.

ООУ: $x \neq \pm\pi/3 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ (рис. 564).

Данное уравнение сводится к совокупности систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \cos x > 1/2, \\ \sin x - \sin^2 x = \sin^2 x, \end{cases} \\ \begin{cases} \cos x < 1/2, \\ \sin x + \sin^2 x = \sin^2 x; \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \cos x > 1/2, \\ \left[\begin{array}{l} \sin x = 0, \\ \sin x = 1/2 \end{array}\right. \end{cases} \text{(рис. 565)}, \\ \begin{cases} \cos x < 1/2, \\ \sin x = 0 \end{cases} \text{(рис. 566)}. \end{array}\right.$$

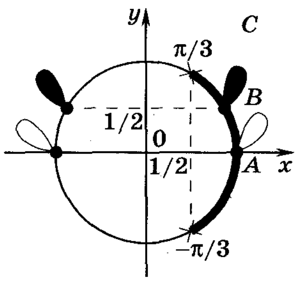


Рис. 565

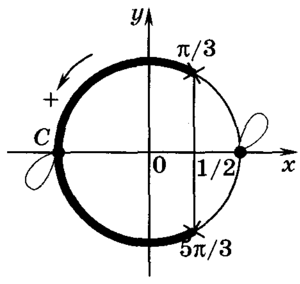


Рис. 566

Ответ. $\pi n,\ n \in Z$,
$\pi/6 + 2\pi m,\ m \in Z$.

№ 9. Решите уравнение $2^{|x-2|\sin x} = (\sqrt{2})^{x|\sin x|}$.

Решение.
ООУ: $x \in R$.
Данное уравнение равносильно такому:

$$|x-2|\sin x = \frac{x}{2}|\sin x|.$$

Рассмотрим ряд возможных случаев.

1) $\sin x = 0$; $x = \pi n,\ n \in Z$ — решения данного уравнения.

2) $\begin{cases} \sin x > 0, \\ 2|x-2|\sin x = x \cdot \sin x, \end{cases}$ $\quad \begin{cases} \sin x > 0, \\ 2|x-2| = x. \end{cases}$

Раскроем модуль. Получим совокупность систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin x > 0, \\ x \geqslant 2, \\ x = 4 \text{ (рис. 567)}, \end{cases} \\ \begin{cases} x = 4/3, \\ 0 < x < 2, \\ \sin x > 0 \text{ (рис. 568)}. \end{cases} \end{array}\right.$$

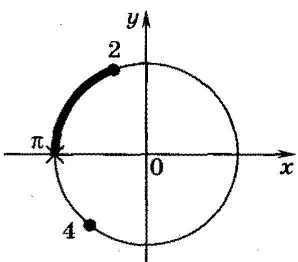


Рис. 567

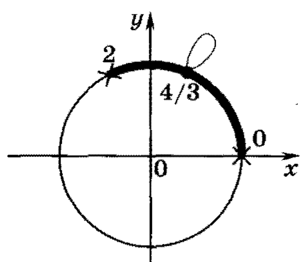


Рис. 568

Первая система решений не имеет. Решением второй системы является число $x = 4/3$.

3) $\begin{cases} \sin x < 0, \\ 2|x-2| = -x, \end{cases}$ $\quad \begin{cases} \sin x < 0, \\ x \leqslant 0, \\ -2x + 4 = -x, \end{cases}$ $\quad \begin{cases} \sin x < 0, \\ x \leqslant 0, \\ x = 4. \end{cases}$

Система решений не имеет.

Ответ. πn, $n \in Z$; 4/3.

№ 10. Решите уравнение $\dfrac{\cos x}{|\cos x|} = \sin x + \cos x$.

Решение.

ООУ: $x \neq \pi/2 + \pi k$, $k \in Z$ (рис. 569).

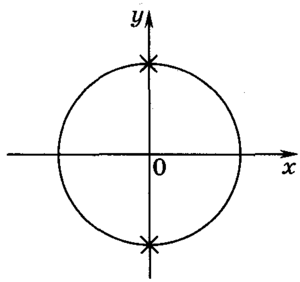


Рис. 569

Уравнение равносильно совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \cos x > 0, \\ \sin x + \cos x = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} \cos x < 0, \\ \sin x + \cos x = -1; \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \cos x > 0, \\ \sin(x + \pi/4) = \sqrt{2}/2, \end{cases} \\ \begin{cases} \cos x < 0, \\ \sin(x + \pi/4) = -\sqrt{2}/2. \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \cos x > 0, \\ \left[\begin{array}{l} x + \pi/4 = \pi/4 + 2\pi n,\ n \in Z, \\ x + \pi/4 = 3\pi/4 + 2\pi k,\ k \in Z, \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} \cos x < 0, \\ \left[\begin{array}{l} x + \pi/4 = -\pi/4 + 2\pi m,\ m \in Z, \\ x + \pi/4 = -3\pi/4 + 2\pi l,\ l \in Z; \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \cos x > 0, \\ \left[\begin{array}{l} x = 2\pi n,\ n \in Z, \\ x = \pi/2 + 2\pi k,\ k \in Z \end{array}\right. \text{(рис. 570)}, \end{cases} \\ \begin{cases} \cos x < 0, \\ \left[\begin{array}{l} x = -\pi + 2\pi l,\ l \in Z, \\ x = -\pi/2 + 2\pi m,\ m \in Z \end{array}\right. \text{(рис. 571)}. \end{cases} \end{array}\right.$$

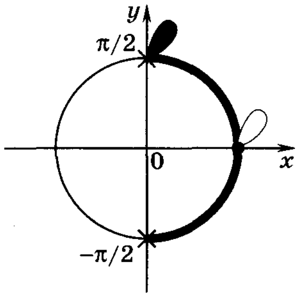


Рис. 570

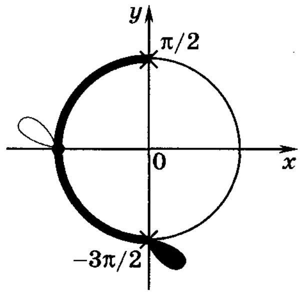


Рис. 571

Ответ. πn, $n \in \mathbb{Z}$.

№ 11. Решите уравнение $\sqrt{-15\cos x} + 2\sin x = 0$.

Решение.

Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \sin x \leqslant 0, \\ -15\cos x = 4\sin^2 x. \end{cases}$$

Решаем ее:

$$\begin{cases} \sin x \leqslant 0, \\ 4\cos^2 x - 15\cos x - 4 = 0. \end{cases}$$

$4\cos^2 x - 15\cos x - 4 = 0.$

$$\left[\begin{array}{l} \cos x = -1/4, \\ \cos x = 4. \end{array}\right.$$

Уравнение $\cos x = 4$ не имеет решений.

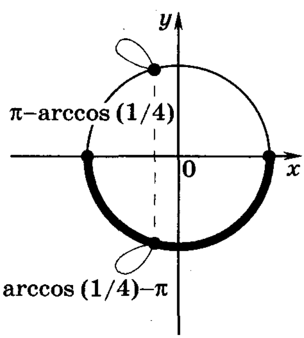


Рис. 572

$$\begin{cases} \sin x \leqslant 0, \\ \cos x = -1/4 \end{cases}$$ (рис. 572).

Ответ. $\arccos(1/4) - \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

№ 12. На отрезке $[-\pi/2; \pi/2]$ найдите все значения x, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{3}\sin x - \cos x = \sqrt{2 - \cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x}.$$

Решение.

Решаем систему

$$\begin{cases} \sqrt{3}\sin x - \cos x \geqslant 0, \\ (\sqrt{3}\sin x - \cos x)^2 = 2 - \cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x, \\ -\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \dfrac{1}{2}\cos x \geqslant 0, \\ 3\sin^2 x - 2\sqrt{3}\sin x\cos x + \cos^2 x = \\ = 2 - \cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x, \\ -\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(x - \pi/6) \geqslant 0, \\ -\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\pi k \leqslant x - \pi/6 \leqslant \pi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}, \\ -\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \pi/6 + 2\pi k \leqslant x \leqslant 7\pi/6 + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}, \\ -\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2 \text{ (рис. 573).} \end{cases}$$

Ответ. $[\pi/6; \pi/2]$.

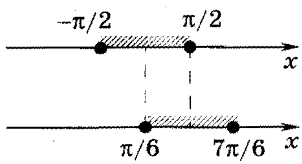


Рис. 573

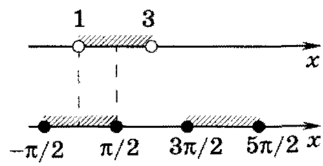


Рис. 574

№ 13. Решите неравенство

$$\sqrt{4x - x^2 - 3}\,(\sqrt{3}\cos x - \sqrt{1 + \cos 2x}) \geqslant 0.$$

Решение.

ООН: $4x - x^2 - 3 \geqslant 0$, $x^2 - 4x + 3 \leqslant 0$, $x \in [1; 3]$.

Заметим, что $x = 1$ и $x = 3$ — решения данного неравенства. Осталось найти решения неравенства $\sqrt{3}\cos x - \sqrt{1 + \cos 2x} \geqslant 0$, принадлежащие интервалу $(1; 3)$.

Неравенство $\sqrt{1 + \cos 2x} \leqslant \sqrt{3}\cos x$ равносильно системе

$\begin{cases}\cos x \geqslant 0,\\ 1+\cos 2x \leqslant 3\cos^2 x;\end{cases}$ $\begin{cases}\cos x \geqslant 0,\\ 3\cos^2 x - 2\cos^2 x \geqslant 0;\end{cases}$

$\begin{cases}\cos x \geqslant 0,\\ \cos^2 x \geqslant 0;\end{cases}$ $\cos x \geqslant 0$ (рис. 574).

Ответ. $[1; \pi/2] \cup \{3\}$.

№ 14. Решите уравнение

$2\sin(3x+\pi/4) = \sqrt{1+8\sin 2x\cos^2 2x}$.

Решение.

Данное уравнение равносильно следующей системе:

$\begin{cases}\sin(3x+\pi/4) \geqslant 0,\\ 4\sin^2(3x+\pi/4) = 1+8\sin 2x\cos^2 2x.\end{cases}$

Решаем ее.

$\begin{cases}\sin(3x+\pi/4) \geqslant 0,\\ 2-2\cos(6x+\pi/2) = 1+4\sin 4x\cos 2x;\end{cases}$

$\begin{cases}\sin(3x+\pi/4) \geqslant 0,\\ 1+2\sin 6x = 2(\sin 6x+\sin 2x);\end{cases}$

$\begin{cases}\sin(3x+\pi/4) \geqslant 0,\\ \sin 2x = 1/2;\end{cases}$

$\begin{cases}\sin(3x+\pi/4) \geqslant 0,\\ \left[\begin{array}{l} x = \pi/12+\pi k,\ k\in \mathbb{Z},\\ x = 5\pi/12+\pi n,\ n\in \mathbb{Z}\end{array}\right.\end{cases}$ (рис. 575).

Решим неравенство системы:

$2\pi m \leqslant 3x+\pi/4 \leqslant \pi+2\pi m,\ m\in \mathbb{Z},$

$-\pi/12+2\pi m/3 \leqslant x \leqslant \pi/4+2\pi m/3,\ m\in \mathbb{Z}.$

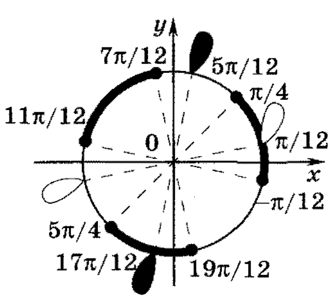


Рис. 575

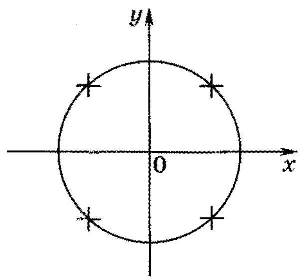


Рис. 576

С помощью единичной окружности выберем те решения уравнения системы, которые удовлетворяют неравенству $\sin(3x + \pi/4) \geqslant 0$.

Ответ. $\pi/12 + 2\pi k,\ k \in \mathrm{Z}$;
$17\pi/12 + 2\pi n,\ n \in \mathrm{Z}$.

№ 15. Решите уравнение

$$|\log_{1/3}(1 + \sin 2x)| + |\log_{1/3}(1 - \sin 2x)| = 1.$$

Решение.

ООУ: $\begin{cases}\sin 2x \neq -1,\\ \sin 2x \neq 1;\end{cases}$ $\begin{cases}x \neq -\pi/4 + \pi k,\ k \in \mathrm{Z},\\ x \neq \pi/4 + \pi n,\ n \in \mathrm{Z},\end{cases}$

$x \neq \pi/4 + \pi n/2,\ n \in \mathrm{Z}$ (рис. 576).

Учтем, что $|\sin 2x| < 1$ (рис. 577).

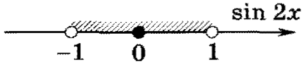


Рис. 577

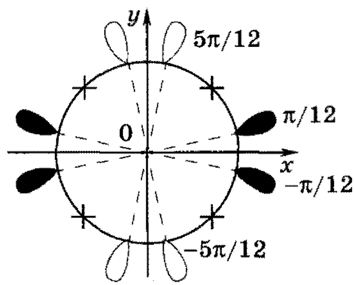


Рис. 578

Уравнение равносильно совокупности систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}-1 < \sin 2x \leqslant 0,\\ \log_{1/3}(1 + \sin 2x) - \log_{1/3}(1 - \sin 2x) = 1,\end{cases}\\ \begin{cases}0 < \sin 2x < 1,\\ -\log_{1/3}(1 + \sin 2x) + \log_{1/3}(1 - \sin 2x) = 1;\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}-1 < \sin 2x \leqslant 0,\\ (1 + \sin 2x)/(1 - \sin 2x) = 1/3,\end{cases}\\ \begin{cases}0 < \sin 2x < 1,\\ (1 - \sin 2x)/(1 + \sin 2x) = 1/3;\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}-1 < \sin 2x \leqslant 0,\\ \sin 2x = -1/2,\end{cases}\\ \begin{cases}0 < \sin 2x < 1,\\ \sin 2x = 1/2;\end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\sin 2x = -1/2,\\ \sin 2x = 1/2;\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}2x = -\pi/6 + 2\pi k,\ k \in Z,\\ 2x = -5\pi/6 + 2\pi n,\ n \in Z,\\ 2x = \pi/6 + 2\pi\, m,\ m \in Z,\\ 2x = 5\pi/6 + 2\pi t,\ t \in Z;\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}x = \pm 5\pi/12 + \pi n,\ n \in Z,\\ x = \pm\pi/12 + \pi k,\ k \in Z\end{array}\right. \quad \text{(рис. 578).}$$

<u>Ответ</u>. $\pm\pi/12 + \pi k/2,\ k \in Z$.

№ 16. Решите уравнение

$$\log_{(x - x^2)} (\sin x + \cos x) = \log_{(x - x^2)} (1 + \sin 2x).$$

<u>Решение</u>.

Найдем область определения уравнения, решив систему:

$$\begin{cases}\sin x + \cos x > 0,\\ x - x^2 > 0,\\ x - x^2 \neq 1;\end{cases} \qquad \begin{cases}\sin (x + \pi/4) > 0,\\ x(1 - x) > 0.\end{cases}$$

$2\pi n < x + \pi/4 < \pi + 2\pi n,\ n \in Z,$

$-\pi/4 + 2\pi n < x < 3\pi/4 + 2\pi n,\ n \in Z.$

Решением неравенства $x(1 - x) > 0$ является интервал $(0; 1)$. Покажем на окружности (рис. 579). Итак, $x \in (0; 1)$.

Данное уравнение сводится в области определения к равносильному:

$\sin x + \cos x = 1 + \sin 2x,$

$\sin x + \cos x = (\sin x + \cos x)^2,$

$(\sin x + \cos x)(\sin x + \cos x - 1) = 0,$

$$\left[\begin{array}{l}\sin x + \cos x = 1,\\ \sin x + \cos x = 0.\end{array}\right.$$

Уравнение $\sin x + \cos x = 0$ не имеет решений в области определения исходного уравнения. Решаем другое уравнение совокупности:

$\sin (x + \pi/4) = \sqrt{2}/2;$

$$\left[\begin{array}{l} x+\pi/4=\pi/4+2\pi k,\ k\in Z, \\ x+\pi/4=3\pi/4+2\pi m,\ m\in Z; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x=2\pi k,\ k\in Z, \\ x=\pi/2+2\pi m,\ m\in Z \end{array}\right. \quad \text{(рис. 579).}$$

Видим, что полученные решения уравнения $\sin x + \cos x = 1$ не входят в область определения данного уравнения.

О т в е т. Решений нет.

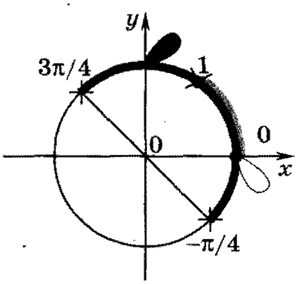


Рис. 579

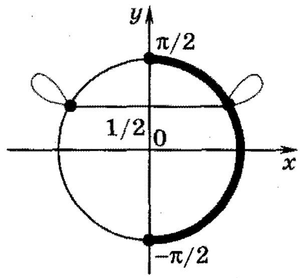


Рис. 580

№ 17. Найдите все решения уравнения

$1 - 5\sin x + 2\cos^2 x = 0$, удовлетворяющие неравенству $\cos x \geqslant 0$.

Р е ш е н и е.

$1 - 5\sin x + 2 - 2\sin^2 x = 0$,

$2\sin^2 x + 5\sin x - 3 = 0$.

Обозначим $\sin x = t$, $|t| \leqslant 1$,

$2t^2 + 5t - 3 = 0$,

$t_1 = -3$, $t_2 = 1/2$.

$|-3| > 1$, т. е. подходит только t_2: $\sin x = 1/2$,

$x = (-1)^k\pi/6 + \pi k$, $k \in Z$ (рис. 580).

О т в е т. $\pi/6 + 2\pi k$, $k \in Z$.

№ 18. Найдите все корни уравнения

$\dfrac{\cos 10x - \cos 8x}{2x^2 + \pi x - \pi^2} = \dfrac{\cos 6x - \cos 4x}{2x^2 + \pi x - \pi^2}$, принадлежащие интервалу $(0; \pi)$.

<u>Решение</u>.

Решим систему $\begin{cases} 2x^2 + \pi x - \pi^2 \neq 0, \\ \cos 10x - \cos 8x = \cos 6x - \cos 4x. \end{cases}$

$\begin{cases} x \neq -\pi,\ x \neq \pi/2, \\ \sin 9x \sin x = \sin 5x \sin x. \end{cases}$

Учтем, что $x \in (0;\ \pi)$ (рис. 581).

$x \in (0;\ \pi/2) \cup (\pi/2;\ \pi)$.

Рис. 581

$\sin x(\sin 9x - \sin 5x) = 0$,

$\left[\begin{array}{l} \sin x = 0, \\ \sin 2x = 0, \\ \cos 7x = 0; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \sin x = 0, \\ \cos x = 0, \\ \cos 7x = 0; \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x = \pi n,\ n \in \mathbb{Z}, \\ x = \pi/2 + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}, \\ x = \pi/14 + \pi m/7,\ m \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$

Выберем значения $x \in (0;\ \pi/2) \cup (\pi/2;\ \pi)$.

<u>Ответ</u>. $\{\pi/14;\ 3\pi/14;\ 5\pi/14;\ 9\pi/14;\ 11\pi/14;\ 13\pi/14\}$.

№ 19. Решите уравнение $3\operatorname{tg}^2 x - 8\cos^2 x + 1 = 0$.

<u>Решение</u>.

ООУ: $x \neq \pi/2 + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Умножим обе части уравнения на $\cos^2 x$:

$3\sin^2 x - 8\cos^4 x + \cos^2 x = 0$,

$3(1 - \cos^2 x) - 8\cos^4 x + \cos^2 x = 0$,

$8\cos^4 x + 2\cos^2 x - 3 = 0$.

Обозначим $\cos^2 x = t,\ 0 < t \leqslant 1$:

$8t^2 + 2t - 3 = 0,\ t_1 = 1/2;\ t_2 = -3/4$;

$-3/4 < 0$; подходит только t_1: $\cos^2 x = 1/2$,

$\left[\begin{array}{l} \cos x = \sqrt{2}/2, \\ \cos x = -\sqrt{2}/2, \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x = \pm\pi/4 + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}, \\ x = \pm 3\pi/4 + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}, \end{array}\right.$

$x = \pi/4 + \pi n/2,\ n \in \mathbb{Z}$ (рис. 582).

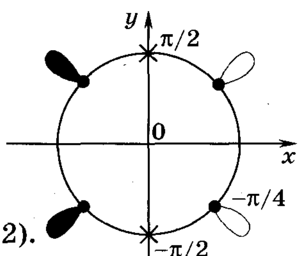


Рис. 582

<u>Ответ</u>. $\pi/4 + \pi n/2,\ n \in \mathbb{Z}$.

№ 20. Найдите корни уравнения
$\sin x + 8\cos 2x + \cos 4x + \sin 5x + 1 = 0$, принадлежащие области определения функции
$y = \operatorname{tg} x + \lg(\pi^2 + 4\pi x - 5x^2)$.

Решение.

Найдем область определения функции:

$$\begin{cases} \pi^2 + 4\pi x - 5x^2 > 0, \\ x \neq \pi/2 + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x^2 - 4\pi x - \pi^2 < 0, \\ x \neq \pi/2 + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\pi/5 < x < \pi, \\ x \neq \pi/2 + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

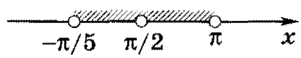


Рис. 583

$x \in (-\pi/5; \pi/2) \cup (\pi/2; \pi)$ (рис. 583).

Теперь решаем уравнение:

$\sin x + 8\cos 2x + \cos 4x + \sin 5x + 1 = 0,$

$2\sin 3x \cos 2x + 8\cos 2x + 2\cos^2 2x = 0,$

$\cos 2x \cdot (\sin 3x + \cos 2x + 4) = 0,$

$$\left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0, \\ \sin 3x + \cos 2x + 4 = 0. \end{array}\right.$$

Второе уравнение совокупности решений не имеет. Остается решить уравнение $\cos 2x = 0$:

$x = \pi/4 + \pi k/2,\ k \in \mathbb{Z}.$

Выберем решения, входящие в область определения функции (рис. 584).

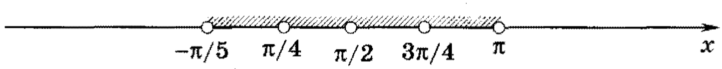


Рис. 584

Ответ. $\{\pi/4; 3\pi/4\}$.

№ 21. Решите уравнение $\sin(5x/4) + \cos x = 2$.

Решение.

Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \sin(5x/4) = 1, \\ \cos x = 1. \end{cases} \qquad \begin{cases} 5x/4 = \pi/2 + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}, \\ x = 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x/4 = \pi/10 + 2\pi n/5,\ n \in Z, \\ x/4 = \pi k/2,\ k \in Z. \end{cases}$$

Пусть $x/4 = t$. $\begin{cases} t = 18^\circ + 72^\circ n,\ n \in Z, \\ t = 90^\circ k,\ k \in Z \end{cases}$ (рис. 585).

$t = \pi/2 + 2\pi m,\ m \in Z,$

$x/4 = \pi/2 + 2\pi m,\ m \in Z,$

$x = 2\pi + 8\pi m,\ m \in Z.$

Ответ. $2\pi + 8\pi m,\ m \in Z$.

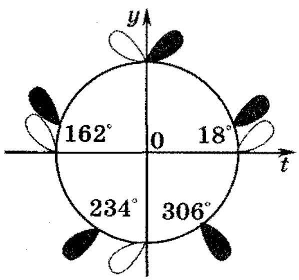


Рис. 585

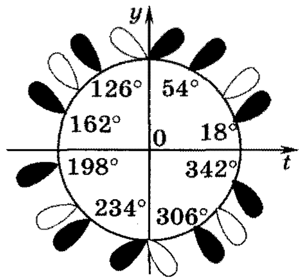


Рис. 586

№ 22. Решите уравнение $\cos 2x + \cos(6x/5) = -2$.

Решение.

Уравнение равносильно системе $\begin{cases} \cos 2x = -1, \\ \cos(6x/5) = -1. \end{cases}$

$\begin{cases} 2x = \pi + 2\pi k,\ k \in Z, \\ 6x/5 = \pi + 2\pi n,\ n \in Z; \end{cases}$ $\begin{cases} x = \pi/2 + \pi k,\ k \in Z, \\ x = 5\pi/6 + 5\pi n/3,\ n \in Z; \end{cases}$

$\begin{cases} x/5 = \pi/10 + \pi k/5,\ k \in Z, \\ x/5 = \pi/6 + \pi n/3,\ n \in Z. \end{cases}$ Пусть $x/5 = t$.

$\begin{cases} t = \pi/10 + \pi k/5,\ k \in Z, \\ t = \pi/6 + \pi n/3,\ n \in Z \end{cases}$ (рис. 586).

$\begin{cases} t = 18^\circ + 36^\circ k,\ k \in Z, \\ t = 30^\circ + 60^\circ n,\ n \in Z. \end{cases}$ $t = \pi/2 + \pi m,\ m \in Z,$

$x/5 = \pi/2 + \pi m,\ m \in Z,$

$x = 5\pi/2 + 5\pi m,\ m \in Z.$

Ответ. $5\pi/2 + 5\pi m,\ m \in Z$.

№ 23. Найдите все решения данного уравнения

$2 + \cos(3x/2) + \sqrt{3}\sin(3x/2) = 4\sin^2(x/4)$,

удовлетворяющие неравенству $\sin(x/2 + \pi/4) > 0$.

Решение.

Данное уравнение сводится к равносильному

$$1 + \left(\frac{1}{2}\cos\frac{3}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{3}{2}x\right) = 2\sin^2\frac{x}{4}.$$

$1 + \cos(3x/2 - \pi/3) = 1 - \cos(x/2)$,

$\cos(3x/2 - \pi/3) + \cos(x/2) = 0$,

$2\cos(x - \pi/6)\cos(x/2 - \pi/6) = 0$,

$\left[\begin{array}{l}\cos(x - \pi/6) = 0,\\ \cos(x/2 - \pi/6) = 0;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x = 2\pi/3 + \pi k,\ k \in Z,\\ x = 4\pi/3 + 2\pi n,\ n \in Z.\end{array}\right.$

Решаем неравенство $\sin(x/2 + \pi/4) > 0$.

Пусть $x/2 = t$: $\sin(t + \pi/4) > 0$,

$2\pi m < t + \pi/4 < \pi + 2\pi m,\ m \in Z$,

$-\pi/4 + 2\pi m < t < 3\pi/4 + 2\pi m,\ m \in Z$.

Отложим на единичной окружности точки, соответствующие сериям решений уравнения, перейдя к переменной t.

$\left[\begin{array}{l}t = \pi/3 + \pi k/2,\ k \in Z,\\ t = 2\pi/3 + \pi n,\ n \in Z\end{array}\right.$ (рис. 587).

Запишем решения, удовлетворяющие условию задачи:

$\left[\begin{array}{l}t = \pi/3 + 2\pi l,\ l \in Z,\\ t = 2\pi/3 + 2\pi s,\ s \in Z,\\ t = 11\pi/6 + 2\pi q,\ q \in Z,\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x = 2\pi/3 + 4\pi l,\ l \in Z,\\ x = 4\pi/3 + 4\pi s,\ s \in Z,\\ x = 11\pi/3 + 4\pi q,\ q \in Z.\end{array}\right.$

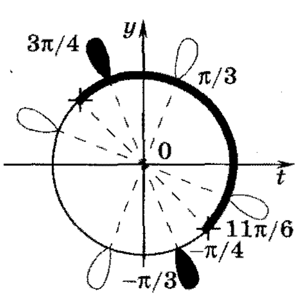


Рис. 587

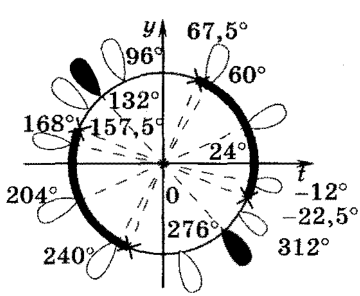


Рис. 588

Ответ. $2\pi/3 + 4\pi l,\ l \in Z$; $4\pi/3 + 4\pi s,\ s \in Z$;
$11\pi/3 + 4\pi q,\ q \in Z$.

№ 24. Найдите все решения уравнения

$2 + \cos(3x/2) + \sqrt{3}\sin(3x/2) = 4\sin^2(x/2)$, удовлетворяющие неравенству $\sin(x/2 + \pi/4) > 0$.

Решение.

Сначала решим уравнение, разделив обе его части на 2.

$$1 + \frac{1}{2}\cos\frac{3}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{3}{2}x = 2\sin^2\frac{x}{2}.$$

$1 + \cos(3x/2 - \pi/3) = 1 - \cos x$,

$\cos(3x/2 - \pi/3) + \cos x = 0$,

$\cos(5x/4 - \pi/6)\cos(x/4 - \pi/6) = 0$,

$\left[\begin{array}{l}\cos(5x/4 - \pi/6) = 0,\\ \cos(x/4 - \pi/6) = 0;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}5x/4 = \pi/6 + \pi/2 + \pi k,\ k \in Z,\\ x/4 = \pi/6 + \pi/2 + \pi n,\ n \in Z;\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}x/4 = 2\pi/15 + \pi k/5,\ k \in Z,\\ x/4 = 2\pi/3 + \pi n,\ n \in Z.\end{array}\right.$ Пусть $x/4 = t$.

$\left[\begin{array}{l}t = 24^\circ + 36^\circ k,\ k \in Z,\\ t = 120^\circ + 180^\circ n,\ n \in Z\end{array}\right.$ (рис. 588).

Теперь решаем неравенство $\sin(x/2 + \pi/4) > 0$, перейдя к переменной t:

$\sin(2t + \pi/4) > 0$, $2\pi m < 2t + \pi/4 < \pi + 2\pi m,\ m \in Z$,

$-\pi/8 + \pi m < t < 3\pi/8 + \pi m,\ m \in Z$,

$-22{,}5^\circ + 180^\circ m < t < 67{,}5^\circ + 180^\circ m,\ m \in Z$.

$\left[\begin{array}{l}t = 2\pi/15 + \pi k,\ k \in Z,\\ t = -\pi/15 + \pi n,\ n \in Z,\\ t = \pi/3 + \pi m,\ m \in Z.\end{array}\right.$

Ответ. $8\pi/15 + 4\pi k,\ k \in Z$; $-4\pi/15 + 4\pi n,\ n \in Z$;
$4\pi/3 + 4\pi m,\ m \in Z$.

Упражнения для самостоятельного решения

1) Решите уравнение

$$\sqrt{5\cos x - \cos(2x)} + 2\sin x = 0.$$

2) Решите неравенство $\dfrac{\sin^2 x - 1/4}{\sqrt{3} - (\sin x + \cos x)} > 0$.

3) Найдите все значения x, удовлетворяющие условию $\pi/2 < |3x - 2\pi| \leqslant \pi$ и являющиеся решениями уравнения
$\sin x + \cos x - \cos(2x) = \cos(3x) - \sin(2x) - 1$.

4) Решите уравнение $\cos 2x + \cos 6x = |\cos 4x|$.

5) При каких значениях x значения выражений $\sin x$; $0{,}5\sqrt{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x}$; $\cos x$ составляют арифметическую прогрессию?

6) Решите уравнение
$(\sin x + \sqrt{3}\cos x)\sin(3x) = 2$.

7) Решите уравнение $2\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}(2x) = \operatorname{tg}(4x)$.

8) Решите уравнение
$\sin(2x) - 2\cos(2x)\cos x = 4\cos x$.

9) Решите уравнение
$4/(\cos^2 x) + 1 = 9\sin x/|\cos x|$.

10) Найдите все значения x, удовлетворяющие уравнению $(\sin x + \cos x)^2 = 2\cos(\pi/4 - x)$ и лежащие на отрезке $[-\pi/4; \pi]$.

11) Решите уравнение
$\sin x + \sqrt{3}\cos x = \sqrt{0{,}5 + \cos(\pi/6 - x)}$.

12) Решите уравнение $\sqrt[4]{12}\sin x = \sqrt{\sin(2x)}$.

13) Найдите область определения функции

$$y = \frac{\sqrt{36 - x^2}\cdot \log_3(x^2 + 2x - 8)}{2\sin x - 1}.$$

14) Найдите корни уравнения

$$\sqrt{2}\sin(3x) - \cos^2 x - \sqrt{2}\cos x + \cos\frac{\pi - 6x}{2}\cos x = 0,$$

принадлежащие области определения функции $y = 4\operatorname{tg}(2x) + \lg(2\pi^2 - 5\pi x - 8x^2)$.

15) Найдите корни уравнения $\operatorname{tg}(x/5)(\sqrt{3}\cos^2(x/2) - \sqrt{2}\sin x\cos x - \sqrt{3}\sin^2(x/2)) = 0$, удовлетворяющие приведенному неравенству
$\lg^2(2x - \pi) + \lg^2(8\pi - x) \geqslant 0$.

4. Основные приемы решения тригонометрических уравнений и неравенств с параметром

4.1. Простейшие тригонометрические уравнения с параметром и к ним сводимые

№ 1. Решите уравнение $\sin x = a - 1$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

При решении данного уравнения учтем область значений функции $y = \sin x$: $y \in [-1; 1]$.

Договоримся частные решения данного уравнения, когда $a - 1 = 0$, $a - 1 = 1$, $a - 1 = -1$, выделять особо.

1) Пусть $a - 1 = 0$, т. е. $a = 1$. Тогда решаем уравнение $\sin x = 0$; $x_1 = \pi n$, $n \in \mathrm{Z}$. ▶1

2) $a - 1 = -1$, $a = 0$. Имеем $\sin x = -1$: $x_2 = -\pi/2 + 2\pi k$, $k \in \mathrm{Z}$. ▶2

3) $a - 1 = 1$, $a = 2$. Решаем уравнение $\sin x = 1$: $x_3 = \pi/2 + 2\pi m$, $m \in \mathrm{Z}$. ▶3

4) Пусть $|a - 1| > 1$: $\left[\begin{array}{l} a - 1 > 1, \\ a - 1 < -1, \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} a > 2, \\ a < 0. \end{array}\right.$ ▶4

Тогда уравнение $\sin x = a - 1$ решений не имеет.

5) Пусть $a \in (0; 1) \cup (1; 2)$. В этом случае $|a - 1| < 1$: $x_4 = (-1)^l \arcsin(a - 1) + \pi l$, $l \in \mathrm{Z}$. ▶5

Заполняем ось ответа (рис. 589).

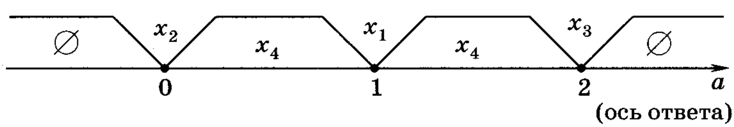


Рис. 589

Ответ. 1) Если $a = 0$, то $x = -\pi/2 + 2\pi k$, $k \in Z$.
2) Если $a = 1$, то $x = \pi n$, $n \in Z$.
3) Если $a = 2$, то $x = \pi/2 + 2\pi m$, $m \in Z$.
4) Если $a \in (0; 1) \cup (1; 2)$, то
$x = (-1)^l \arcsin(a - 1) + \pi l$, $l \in Z$.
5) Если $a \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$, то решений нет.

№ 2. Решите уравнение $\cos x = b + 3$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} b \in R, \\ x \in R. \end{cases}$

1) Пусть $b + 3 = 0$, т. е. $b = -3$:
$\cos x = 0$, $x_1 = \pi/2 + \pi k$, $k \in Z$. ▶1
2) $b + 3 = -1$, $b = -4$: $\cos x = -1$,
$x_2 = \pi + 2\pi n$, $n \in Z$. ▶2
3) $b + 3 = 1$, $b = -2$: $\cos x = 1$, $x_3 = 2\pi m$, $m \in Z$. ▶3
4) $|b + 3| > 1$: $\left[\begin{array}{l} b + 3 > 1, \\ b + 3 < -1, \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} b > -2, \\ b < -4. \end{array}\right.$ ▶4
Данное уравнение решений не имеет.
5) $b \in (-4; -3) \cup (-3; -2)$.
Тогда $x_4 = \pm\arccos(b + 3) + 2\pi l$, $l \in Z$. ▶5

Ответ списывается с заполненной оси ответа (рис. 590).

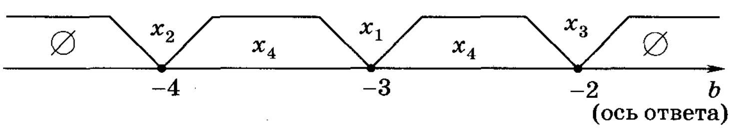


Рис. 590

№ 3. Решите уравнение $\operatorname{tg} x = 2a + 1$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} a \in R, \\ x \neq \pi/2 + \pi k, k \in Z. \end{cases}$

Рассмотрим два случая.

1) $a = -1/2$: $\operatorname{tg} x = 0$, $x_1 = \pi n$, $n \in Z$.

2) $a \neq -1/2$: $x_2 = \operatorname{arctg}(2a + 1) + \pi k$, $k \in Z$.

Ответ списывается с оси ответа (рис. 591).

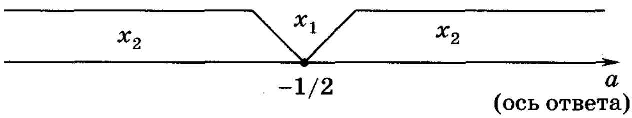


Рис. 591

№ 4. Решите уравнение $\operatorname{ctg} x = b + 2$.

<u>Решение.</u>

ООУ: $\begin{cases} b \in R, \\ x \neq \pi n, \ n \in Z. \end{cases}$

1) Если $b = -2$, то $\operatorname{ctg} x = 0$; $x_1 = \pi/2 + \pi k$, $k \in Z$.

2) Если $b \neq -2$, то $x_2 = \operatorname{arcctg}(b + 2) + \pi m$, $m \in Z$.

Заполним ось ответа (рис. 592).

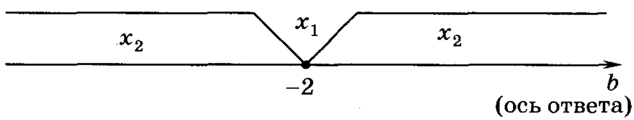


Рис. 592

№ 5. Решите уравнение $\sin(x + \pi/3) = a + 1$.

<u>Решение.</u>

ООУ: $\begin{cases} a \in R, \\ x \in R. \end{cases}$

1) $a + 1 = 0$, $a = -1$: $\sin(x + \pi/3) = 0$,
$x + \pi/3 = \pi k$, $k \in Z$, $x_1 = -\pi/3 + \pi k$, $k \in Z$. ▶1

2) $a + 1 = 1$, $a = 0$: $\sin(x + \pi/3) = 1$, $x = -\pi/3 + \pi/2 +$
$+ 2\pi n$, $n \in Z$, $x_2 = \pi/6 + 2\pi n$, $n \in Z$. ▶2

3) $a + 1 = -1$, $a = -2$:
$\sin(x + \pi/3) = -1$, $x = -\pi/3 - \pi/2 + 2\pi m$, $m \in Z$,
$x_3 = -5\pi/6 + 2\pi m$, $m \in Z$. ▶3

4) $|a + 1| > 1$, $\left[\begin{array}{l} a + 1 > 1, \\ a + 1 < -1, \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} a > 0, \\ a < -2. \end{array}\right.$ ▶4

Решений нет.

5) $a \in (-2; -1) \cup (-1; 0)$:
$x_4 = -\pi/3 + (-1)^l \arcsin(a + 1) + \pi l$, $l \in Z$. ▶5

Ответ представлен на числовой прямой (рис. 593).

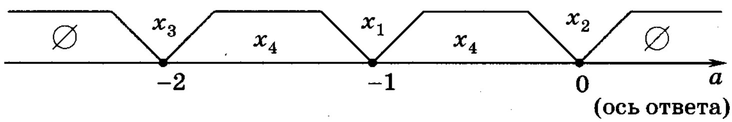


Рис. 593

№ 6. Решите уравнение $\cos(2x - 1) = c + 2$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} c \in R, \\ x \in R. \end{cases}$

1) $c = -2$: $\cos(2x - 1) = 0$, $2x - 1 = \pi/2 + \pi k$, $k \in Z$,
$x_1 = 1/2 + \pi/4 + \pi k/2$, $k \in Z$. ▶1

2) $c = -1$: $\cos(2x - 1) = 1$, $2x - 1 = 2\pi n$, $n \in Z$,
$x_2 = 1/2 + \pi n$, $n \in Z$. ▶2

3) $c = -3$: $\cos(2x - 1) = -1$, $2x - 1 = \pi + 2\pi m$, $m \in Z$,
$x_3 = 1/2 + \pi/2 + \pi m$, $m \in Z$. ▶3

4) $|c + 2| > 1$, $\left[\begin{array}{l} c + 2 > 1, \\ c + 2 < -1, \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} c > -1, \\ c < -3. \end{array}\right.$ ▶4

Решений нет.

5) $c \in (-3; -2) \cup (-2; -1)$:
$x_4 = 1/2 \pm (1/2)\arccos(c + 2) + \pi l$, $l \in Z$. ▶5

Запишите ответ по рисунку 594.

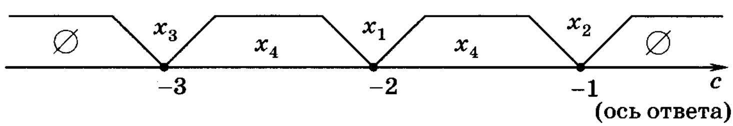


Рис. 594

№ 7. Решите уравнение $\cos\sqrt{x} = m + 1$.

<u>Решение.</u>

ООУ: $\begin{cases} m \in \mathrm{R}, \\ x \geqslant 0. \end{cases}$

1) $m = -1$: $\cos\sqrt{x} = 0$, $\sqrt{x} = \pi/2 + \pi k$, $k \in \mathrm{N} \cup \{0\}$.

Мы учли, что $\sqrt{x} \geqslant 0$. $x_1 = (\pi/2 + \pi k)^2$, $k \in \mathrm{N} \cup \{0\}$. ▶1

2) $m = -2$: $\cos\sqrt{x} = -1$, $\sqrt{x} = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathrm{N} \cup \{0\}$.
$x_2 = (\pi + 2\pi \mathrm{n})^2$, $n \in \mathrm{N} \cup \{0\}$. ▶2

3) $m = 0$: $\cos\sqrt{x} = 1$, $\sqrt{x} = 2\pi m$, $m \in \mathrm{N} \cup \{0\}$.
$x_3 = (2\pi m)^2$, $m \in \mathrm{N} \cup \{0\}$. ▶3

4) $|m + 1| > 1$, $\left[\begin{array}{l} m > 0, \\ m < -2. \end{array}\right.$ Решений нет. ▶4

5) Пусть $m \in (-2; -1) \cup (-1; 0)$.
Тогда имеем для каждого значения m две серии решений:

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{x} = \arccos(m + 1) + 2\pi l, \ l \in \mathrm{N} \cup \{0\}, \\ \sqrt{x} = -\arccos(m + 1) + 2\pi t, \ t \in \mathrm{N}, \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x_4 = (\arccos(m + 1) + 2\pi l)^2, \ l \in \mathrm{N} \cup \{0\}, \\ x_5 = (-\arccos(m + 1) + 2\pi t)^2, \ t \in \mathrm{N}. \end{array}\right.$$ ▶5

Ответ списывается с оси ответа (рис. 595).

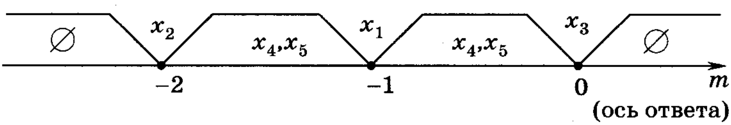


Рис. 595

№ 8. Решите уравнение $\sin x^2 = p + 3$.

<u>Решение.</u>

ООУ: $\begin{cases} p \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

1) $p=-3$: $\sin x^2=0$, $x^2=\pi n$, $n\in \mathrm{N}\cup\{0\}$.

$x_1=\pm\sqrt{\pi n}$, $n\in \mathrm{N}\cup\{0\}$. ▶1

2) $p=-2$: $\sin x^2=1$, $x^2=\pi/2+2\pi k$, $k\in \mathrm{N}\cup\{0\}$,

$x_2=\pm\sqrt{\pi/2+2\pi k}$, $k\in \mathrm{N}\cup\{0\}$. ▶2

3) $p=-4$: $\sin x^2=-1$, $x^2=-\pi/2+2\pi m$, $m\in \mathrm{N}$,

$x_3=\pm\sqrt{-\pi/2+2\pi m}$, $m\in \mathrm{N}$. ▶3

4) $|p+3|>1$, $\left[\begin{array}{l} p>-2, \\ p<-4. \end{array}\right.$ Решений нет. ▶4

5) $p\in(-3;-2)$.

Тогда $\left[\begin{array}{l} x^2=\arcsin(p+3)+2\pi l,\ l\in\{0\}\cup \mathrm{N}, \\ x^2=\pi-\arcsin(p+3)+2\pi t,\ t\in \mathrm{N}\cup\{0\}. \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x_4=\pm\sqrt{\arcsin(p+3)+2\pi l},\ l\in \mathrm{N}\cup\{0\}, \\ x_5=\pm\sqrt{\pi-\arcsin(p+3)+2\pi t},\ t\in \mathrm{N}\cup\{0\}. \end{array}\right.$ ▶5

6) $p\in(-4;-3)$.

Заметим, что в этом случае $(p+3)\in(-1;0)$, а значит, $-\pi/2<\arcsin(p+3)<0$.

Поэтому

$\left[\begin{array}{l} x^2=\arcsin(p+3)+2\pi c,\ c\in \mathrm{N}, \\ x^2=-\pi-\arcsin(p+3)+2\pi d,\ d\in \mathrm{N}. \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x_6=\pm\sqrt{\arcsin(p+3)+2\pi c},\ c\in \mathrm{N}, \\ x_7=\pm\sqrt{-\pi-\arcsin(p+3)+2\pi d},\ d\in \mathrm{N}. \end{array}\right.$ ▶6

Заполним ось ответа (рис. 596).

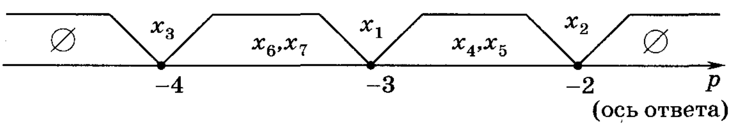


Рис. 596

№ 9. Решите уравнение $\operatorname{tg}|x|=a-2$.

<u>Решение</u>.

ООУ: $\left\{\begin{array}{l} a\in \mathrm{R}, \\ x\neq\pi/2+\pi k,\ k\in \mathrm{Z}. \end{array}\right.$

1) $a = 2$: $\operatorname{tg}|x| = 0$, $|x| = \pi n$, $n \in \mathrm{N} \cup \{0\}$,
$x_1 = \pm\,\pi n$, $n \in \mathrm{N} \cup \{0\}$.

2) $a > 2$: $|x| = \operatorname{arctg}(a - 2) + \pi m$, $m \in \mathrm{N} \cup \{0\}$,
$x_2 = \pm(\operatorname{arctg}(a - 2) + \pi m)$, $m \in \mathrm{N} \cup \{0\}$.

3) $a < 2$. Заметим, что в этом случае имеем
$-\pi/2 < \operatorname{arctg}(a - 2) < 0$.

Поэтому $|x| = \operatorname{arctg}(a - 2) + \pi l$, $l \in \mathrm{N}$,
$x_3 = \pm(\operatorname{arctg}(a - 2) + \pi l)$, $l \in \mathrm{N}$.

Ответ списывается с оси ответа (рис. 597).

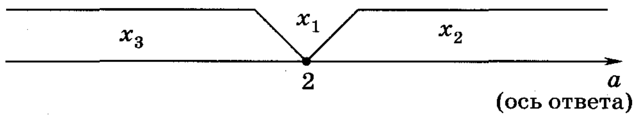


Рис. 597

№ 10. Решите уравнение $\sin(-x^2 + 2x - 1) = b + 1$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} b \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

Учитывая нечетность функции $y = \sin t$, данное уравнение сведем к ему равносильному
$\sin(x - 1)^2 = -b - 1$.

1) $b = -1$: $\sin(x - 1)^2 = 0$, $(x - 1)^2 = \pi k$, $k \in \mathrm{N} \cup \{0\}$.
$x - 1 = \pm\sqrt{\pi k}$, $k \in \mathrm{N} \cup \{0\}$,
$x_1 = 1 \pm \sqrt{\pi k}$, $k \in \mathrm{N} \cup \{0\}$. (▶1)

2) $b = 0$: $\sin(x - 1)^2 = -1$, $(x - 1)^2 = -\pi/2 + 2\pi n$, $n \in \mathrm{N}$,
$x_2 = 1 \pm \sqrt{-\pi/2 + 2\pi n}$ $n \in \mathrm{N}$. (▶2)

3) $b = -2$: $\sin(x - 1)^2 = 1$, $(x - 1)^2 = \pi/2 + 2\pi m$, $m \in \mathrm{N} \cup \{0\}$,
$x_3 = 1 \pm \sqrt{\pi/2 + 2\pi m}$, $m \in \mathrm{N} \cup \{0\}$. (▶3)

4) $|b+1| > 1$: $\left[\begin{array}{l} b > 0, \\ b < -2. \end{array}\right.$ Решений нет. ▶4

5) $b \in (-1;\, 0)$. Тогда $-1 < -b - 1 < 0$.

$(x-1)^2 = (-1)^l \arcsin(-b-1) + \pi l,\ l \in \mathrm{N}$,

$x_4 = 1 \pm \sqrt{(-1)^{l+1}\arcsin(b+1) + \pi l},\ l \in \mathrm{N}$. ▶5

6) $b \in (-2;\, -1)$. Тогда $0 < -b - 1 < 1$.

$(x-1)^2 = (-1)^c \arcsin(-b-1) + \pi c,\ c \in \mathrm{N} \cup \{0\}$,

$x_5 = 1 \pm \sqrt{(-1)^{c+1}\arcsin(b+1) + \pi c}$,

$c \in \mathrm{N} \cup \{0\}$. ▶6

Заполняем ось ответа (рис. 598).

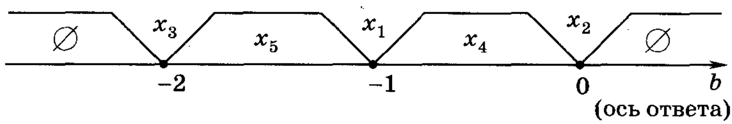


Рис. 598

№ 11. Решите уравнение $\cos(\pi x^2) = 5 - a$.

Решение.

ООУ: $\left\{\begin{array}{l} a \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{array}\right.$

1) $a = 5$: $\cos(\pi x^2) = 0,\ \pi x^2 = \pi/2 + \pi k,\ k \in \mathrm{N} \cup \{0\}$,

$x^2 = 1/2 + k,\ k \in \mathrm{N} \cup \{0\}$,

$x_1 = \pm\sqrt{1/2 + k},\ k \in \mathrm{N} \cup \{0\}$. ▶1

2) $a = 4$: $\cos(\pi x^2) = 1,\ \pi x^2 = 2\pi n,\ n \in \mathrm{N} \cup \{0\}$,

$x_2 = \pm\sqrt{2n},\ n \in \mathrm{N} \cup \{0\}$. ▶2

3) $a = 6$: $\cos(\pi x^2) = -1,\ \pi x^2 = \pi + 2\pi m,\ m \in \mathrm{N} \cup \{0\}$,

$x_3 = \pm\sqrt{1 + 2m},\ m \in \mathrm{N} \cup \{0\}$. ▶3

4) $|5 - a| > 1$: $\left[\begin{array}{l} a < 4, \\ a > 6. \end{array}\right.$ Решений нет. ▶4

5) $a \in (4;\, 5) \cup (5;\, 6)$.

$\left[\begin{array}{l} \pi x^2 = \arccos(5-a) + 2\pi c,\ c \in \mathrm{N} \cup \{0\}, \\ \pi x^2 = -\arccos(5-a) + 2\pi d,\ d \in \mathrm{N}. \end{array}\right.$

$$\left[\begin{array}{l} x_4 = \pm\sqrt{(1/\pi)\arccos(5-a)+2c},\ c \in \mathrm{N} \cup \{0\}, \\ x_5 = \pm\sqrt{(-1/\pi)\arccos(5-a)+2d},\ d \in \mathrm{N}. \end{array}\right.$$ ▶5

Ответ представлен на оси ответа (рис. 599).

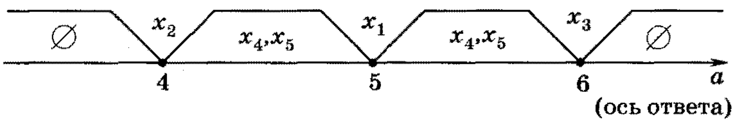


Рис. 599

№ 12. Решите уравнения $\sin x = 1/(a+2)$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} a \neq -2, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$ ▶1

1) Пусть $1/(a+2) = 1$, $a = -1$: $\sin x = 1$,
$x_1 = \pi/2 + 2\pi k$, $k \in \mathrm{Z}$. ▶2

2) Если $1/(a+2) = -1$, то $a = -3$: $\sin x = -1$,
$x_2 = -\pi/2 + 2\pi n$, $n \in \mathrm{Z}$. ▶3

3) $\left|\dfrac{1}{a+2}\right| > 1$: $\begin{cases} |a+2| < 1, \\ a \neq -2, \end{cases}$ $\begin{cases} -1 < a+2 < 1, \\ a \neq -2, \end{cases}$

$\begin{cases} -3 < a < -1, \\ a \neq -2, \end{cases}$

$a \in (-3; -2) \cup (-2; -1)$. ▶4

В этом случае решений нет.

4) Пусть $\left|\dfrac{1}{a+2}\right| < 1$, т. е. $a \in (-\infty; -3) \cup (-1; +\infty)$.

Тогда $x_3 = (-1)^m \arcsin(1/(a+2)) + \pi m$,
$m \in \mathrm{Z}$. ▶5

Заносим результаты на ось ответа (рис. 600).

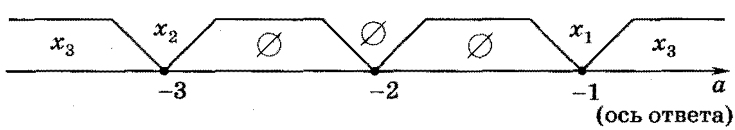


Рис. 600

Учитывая, что если $a \in (-3; -1)$, то решений нет, можно результат решения данного уравнения представить на рисунке 601.

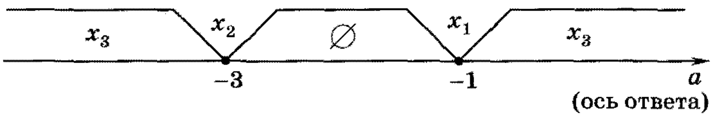


Рис. 601

№ 13. Решите уравнение $\sin x = \dfrac{2a}{a+1}$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} a \neq -1, \\ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$ ▶1

1) Пусть $2a/(a+1) = 0$, $a = 0$: $\sin x = 0$, $x_1 = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. ▶2

2) Если $2a/(a+1) = 1$, то $a = 1$, $\sin x = 1$, $x_2 = \pi/2 + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$. ▶3

3) Если $2a/(a+1) = -1$, то $a = -1/3$, $\sin x = -1$, $x_3 = -\pi/2 + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. ▶4

4) Пусть $|2a/(a+1)| > 1$:

$\left[\begin{array}{l} 2a/(a+1) > 1, \\ 2a/(a+1) < -1, \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} (a-1)/(a+1) > 0, \\ (3a+1)/(a+1) < 0. \end{array}\right.$

Видим, что $a \in (-\infty; -1) \cup (-1; -1/3) \cup (1; +\infty)$ (рис. 602).

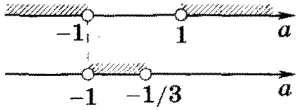


Рис. 602

В этом случае решений нет. ▶5

5) Пусть $\begin{cases} |2a/(a+1)| < 1, \\ a \neq 0, \end{cases}$ т. е. $a \in (-1/3; 0) \cup (0; 1)$.

Тогда $x_4 = (-1)^l \arcsin(2a/(a+1)) + \pi l,\ l \in Z$ ▶6 (рис. 603).

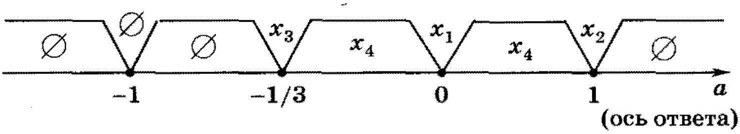


Рис. 603

И в этом случае удобнее рисунок 604.

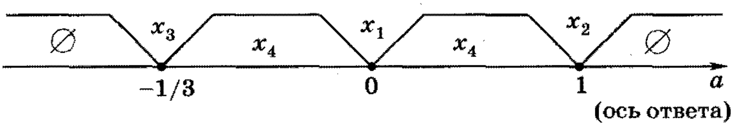


Рис. 604

№ 14. Решите уравнение $\sin x = (b-1)/(2b+1)$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} b \neq -1/2, \\ x \in R. \end{cases}$ ▶1

1) $b = 1$: $\sin x = 0$, $x_1 = \pi k$, $k \in Z$. ▶2

2) $\dfrac{b-1}{2b+1} = 1$, $b = -2$: $\sin x = 1$, $x_2 = \pi/2 + 2\pi n$, $n \in Z$. ▶3

3) $\dfrac{b-1}{2b+1} = -1$, $b = 0$: $\sin x = -1$, $x_3 = -\pi/2 + 2\pi m$, $m \in Z$. ▶4

4) $\left|\dfrac{b-1}{2b+1}\right| > 1$: $\left[\begin{array}{l} \dfrac{b-1}{2b+1} > 1, \\ \dfrac{b-1}{2b+1} < -1, \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \dfrac{b+2}{2b+1} < 0, \\ \dfrac{b}{2b+1} < 0. \end{array}\right.$

$b \in (-2; -1/2) \cup (-1/2; 0)$ (рис. 605).

В этом случае решений нет. ▶5

5) Пусть $\begin{cases} \left|\dfrac{b-1}{2b+1}\right| < 1, \\ b \neq 1. \end{cases}$

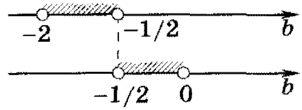


Рис. 605

Тогда $b \in (-\infty; -2) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$.

$x_4 = (-1)^l \arcsin \dfrac{b-1}{2b+1} + \pi l,\ l \in \mathbb{Z}.$ ▶6

Заполним ось ответа (рис. 606 и 607).

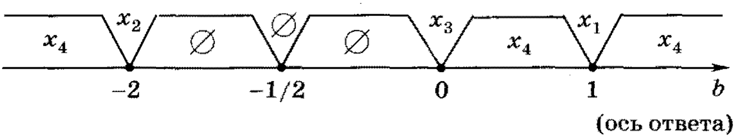


Рис. 606

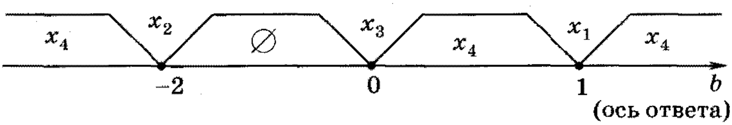


Рис. 607

№ 15. Решите уравнение $\cos x = (3a + 1)/(a - 2)$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} a \neq 2, \\ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$ ▶1

1) $a = -1/3$: $\cos x = 0$, $x_1 = \pi/2 + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. ▶2

2) $(3a + 1)/(a - 2) = 1$, $a = -3/2$: $\cos x = 1$, $x_2 = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. ▶3

3) $(3a + 1)/(a - 2) = -1$, $a = 1/4$: $\cos x = -1$, $x_3 = \pi + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$. ▶4

4) $|(3a + 1)/(a - 2)| > 1$: $\left[\begin{array}{l} (2a + 3)/(a - 2) > 0, \\ (4a - 1)/(a - 2) < 0. \end{array}\right.$

$a \in (-\infty; -3/2) \cup (1/4; 2) \cup (2; +\infty)$ (рис. 608).
В этом случае решений нет. (▸5)

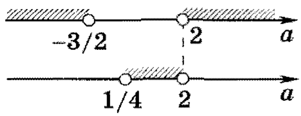


Рис. 608

5) $\begin{cases} |(3a+1)/(a-2)| < 1, \\ a \neq -1/3. \end{cases}$

Тогда $a \in (-3/2; -1/3) \cup (-1/3; 1/4)$. (▸6)

$$x_4 = \pm\arccos\frac{3a+1}{a-2} + 2\pi l,\ l \in Z.$$

Ответ представлен на оси ответа (рис. 609 или 610).

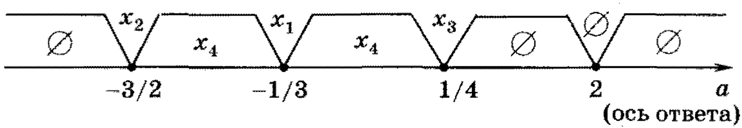


Рис. 609

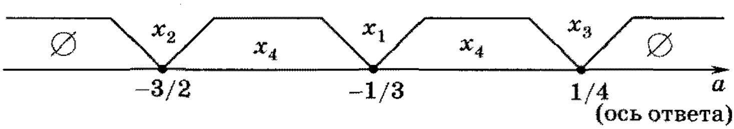


Рис. 610

№ 16. Решите уравнение $\sin x = a^2$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} a \in R, \\ x \in R. \end{cases}$

1) Пусть $a = 0$: $\sin x = 0$, $x_1 = \pi k$, $k \in Z$. (▸1)

2) $a^2 = 1$, $a = \pm 1$: $\sin x = 1$,
$x_2 = \pi/2 + 2\pi n$, $n \in Z$. (▸2)

3) $a^2 > 1$: $\left[\begin{array}{l} a > 1, \\ a < -1, \end{array}\right.$ $a \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

Решений нет. (▸3)

4) $\begin{cases} a^2 < 1, \\ a \neq 0, \end{cases}$ $a \in (-1; 0) \cup (0; 1)$:

$x_3 = (-1)^m \arcsin a^2 + \pi m,\ m \in Z$. (▸4)

Сведем все решения на ось ответа (рис. 611).

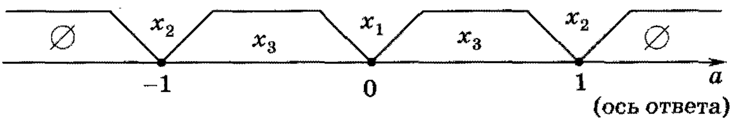


Рис. 611

№ 17. Решите уравнение $\sin x = b^2 + 1$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} b \in R, \\ x \in R. \end{cases}$

Легко видеть, что $b^2 + 1 \geqslant 1$, а потому данное уравнение имеет решения, только если $b = 0$:

$x = \pi/2 + 2\pi k,\ k \in Z$ (рис. 612). (*)

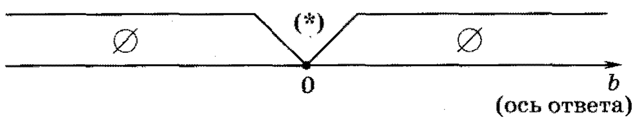


Рис. 612

№ 18. Решите уравнение $\sin x = a^2 - 1$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} a \in R, \\ x \in R. \end{cases}$

1) $a^2 - 1 = 0,\ a = \pm 1$: $\sin x = 0,\ x_1 = \pi k,\ k \in Z$. (▸1)

2) $a^2 - 1 = 1,\ a = \pm\sqrt{2}$: $\sin x = 1,\ x_2 = \pi/2 + 2\pi n$, $n \in Z$. (▸2)

3) $a^2 - 1 = -1$, $a = 0$: $\sin x = -1$, $x_3 = -\pi/2 + 2\pi m$, $m \in Z$. ▶3

4) $|a^2 - 1| > 1$: $\left[\begin{array}{l} a^2 - 1 > 1, \\ a^2 - 1 < -1, \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} a^2 > 2, \\ a^2 < 0, \end{array}\right.$

$|a| > \sqrt{2}$. ▶4

Решений нет.

5) $\begin{cases} |a^2 - 1| < 1, \\ a \ne \pm 1, \end{cases}$ $\begin{cases} a^2 - 1 < 1, \\ a^2 - 1 > -1, \\ a \ne \pm 1, \end{cases}$ $\begin{cases} -\sqrt{2} < a < \sqrt{2}, \\ a^2 > 0, \\ a \ne \pm 1. \end{cases}$

Из последней системы имеем, что

$a \in (-\sqrt{2}; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; \sqrt{2})$.

И тогда $x_4 = (-1)^l \arcsin(a^2 - 1) + \pi l$, $l \in Z$. ▶5

Заполним ось ответа (рис. 613).

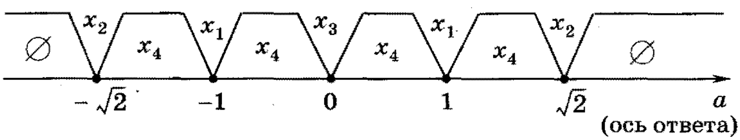


Рис. 613

№ 19. Решите уравнение $\cos x = a^2 - 2a$.

<u>Решение.</u>

ООУ: $\begin{cases} a \in R, \\ x \in R. \end{cases}$

1) $a^2 - 2a = 0$, $\left[\begin{array}{l} a = 0, \\ a = 2. \end{array}\right.$

$\cos x = 0$, $x_1 = \pi/2 + \pi k$, $k \in Z$. ▶1

2) $a^2 - 2a = -1$, $a = 1$: $\cos x = -1$, $x_2 = \pi + 2\pi n$, $n \in Z$. ▶2

3) $a^2 - 2a = 1$, $a^2 - 2a - 1 = 0$, $a = 1 \pm \sqrt{2}$: $\cos x = 1$, $x_3 = 2\pi m$, $m \in Z$. ▶3

4) $|a^2 - 2a| > 1$: $\left[\begin{array}{l} a^2 - 2a > 1, \\ a^2 - 2a < -1, \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} a^2 - 2a - 1 > 0, \\ a^2 - 2a + 1 < 0, \end{array}\right.$

$a^2 - 2a - 1 > 0$, т. е.

$a \in (-\infty; 1 - \sqrt{2}) \cup (1 + \sqrt{2}; +\infty)$.

В этом случае решений нет. (▶4)

5) Если $a \in (1-\sqrt{2}; 0) \cup (0; 1) \cup (1; 2) \cup (2; 1+\sqrt{2})$, то $x_4 = \pm\arccos(a^2-2a) + 2\pi l$, $l \in \mathbb{Z}$. (▶5)

Заполним ось ответа (рис. 614).

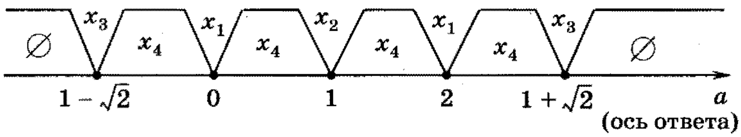


Рис. 614

№ 20. Решите уравнение $a\sin x = 3$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} a \in \mathbb{R}, \\ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$

1) Пусть $a = 0$: $0 \cdot \sin x = 3$. Решений нет.
2) Если $a \neq 0$, то данное уравнение сводится к уравнению $\sin x = 3/a$.

   Такого типа уравнения мы уже решали. Попробуйте его решить самостоятельно и сравнить с тем, что представлено на рисунках 615 и 616, где

$x_1 = -\pi/2 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$,

$x_2 = \pi/2 + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$,

$x_3 = (-1)^m \arcsin(3/a) + \pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

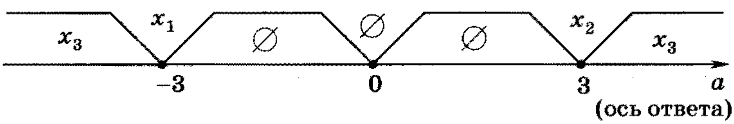


Рис. 615

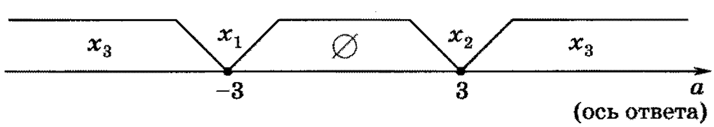


Рис. 616

№ 21. Решите уравнение $(a^2 - 4)\cos x = a + 2$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

Если $a = 2$, то $0 \cdot \cos x = 4$. Уравнение решений не имеет. ▶1

Если $a = -2$, то $0 \cdot \cos x = 0$, $x \in \mathrm{R}$. ▶2

Пусть $a \neq \pm 2$. Тогда решаем уравнение $\cos x = 1/(a - 2)$.

1) $1/(a - 2) = 1$, $a = 3$: $x_1 = 2\pi n$, $n \in \mathrm{Z}$. ▶3

2) $1/(a - 2) = -1$, $a = 1$: $x_2 = \pi + 2\pi m$, $m \in \mathrm{Z}$. ▶4

3) $|1/(a - 2)| > 1$: $\begin{cases} |a - 2| < 1, \\ a \neq 2, \end{cases}$ $\begin{cases} 1 < a < 3, \\ a \neq 2. \end{cases}$

Решений нет. ▶5

4) $a \in (-\infty; -2) \cup (-2; 1) \cup (3; +\infty)$.

В этом случае $\left|\dfrac{1}{a - 2}\right| < 1$ и

$$x_3 = \pm\arccos\frac{1}{a - 2} + 2\pi l,\ l \in \mathrm{Z}.$$ ▶6

Ответ представлен на рисунках 617 и 618.

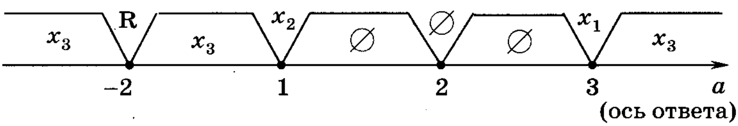


Рис. 617

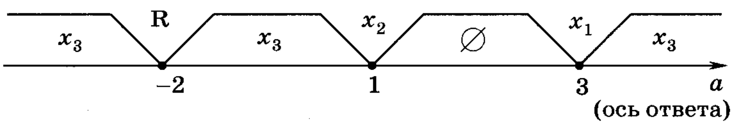


Рис. 618

№ 22. Решите уравнение $(b - 1)\sin x = b^2 - 1$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} b \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

Пусть $b = 1$: $0 \cdot \sin x = 0$, $x \in \mathrm{R}$. ▶1

Если $b \neq 1$, то имеем уравнение $\sin x = b + 1$.

1) $b + 1 = 0$, $b = -1$: $x_1 = \pi n$, $n \in \mathrm{Z}$. ▶2

2) $b + 1 = 1$, $b = 0$: $x_2 = \pi/2 + 2\pi k$, $k \in \mathrm{Z}$. ▶3

3) $b + 1 = -1$, $b = -2$: $x_3 = -\pi/2 + 2\pi m$, $m \in \mathrm{Z}$. ▶4

4) $\begin{cases} |b+1| > 1, \\ b \neq 1, \end{cases}$ $\quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} b > 0, \\ b < -2, \end{array}\right. \\ b \neq 1, \end{cases}$

$b \in (-\infty; -2) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$.

В этом случае решений нет. ▶5

5) $b \in (-2; -1) \cup (-1; 0)$. Тогда

$x_4 = (-1)^l \arcsin(b + 1) + \pi l$, $l \in \mathrm{Z}$. ▶6

Заполняем ось ответа (рис. 619).

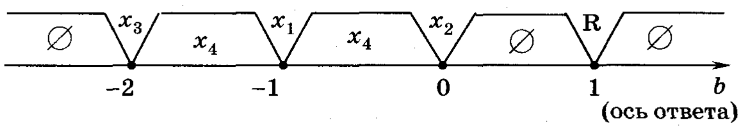


Рис. 619

№ 23. Решите уравнение $(a - 2)\cos x = a - 1$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

Пусть $a = 2$: $0 \cdot \cos x = 1$. Решений нет.

Если $a \neq 2$, то $\cos x = (a - 1)/(a - 2)$.

Решите это уравнение самостоятельно. Ответ представлен на рисунке 620, где $x_1 = \pi/2 + \pi k$, $k \in \mathrm{Z}$.

$x_2 = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathrm{Z}$.

$x_3 = \pm\arccos \dfrac{a-1}{a-2} + 2\pi m$, $m \in \mathrm{Z}$.

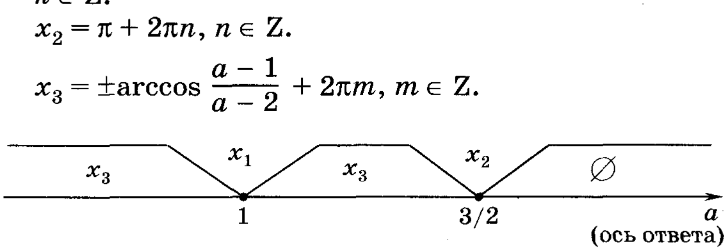


Рис. 620

№ 24. Найдите все значения a, при которых уравнение $(4a + x)\arcsin x = 0$ имеет ровно один корень.

(ЕГЭ 2002 г.)

<u>Решение.</u>

ООУ: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ |x| \leqslant 1. \end{cases}$

Уравнение сводится к совокупности систем (1) и (2).

(1): $\begin{cases} \arcsin x = 0, \\ a \in \mathrm{R}; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = 0, \\ a \in \mathrm{R}. \end{cases}$

(2): $\begin{cases} 4a + x = 0, \\ |x| \leqslant 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = -4a, \\ |4a| \leqslant 1, \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = -4a, \\ |a| \leqslant 1/4. \end{cases}$

Если $a = -1/4$, то $x_2 = 1$. Если $a = 1/4$, то $x_2 = -1$.

Узнаем, когда $x_2 = x_1$: $-4a = 0$, $a = 0$.

Тогда $x_2 = x_1 = 0$. Результаты отмечаем на оси параметра a (рис. 621).

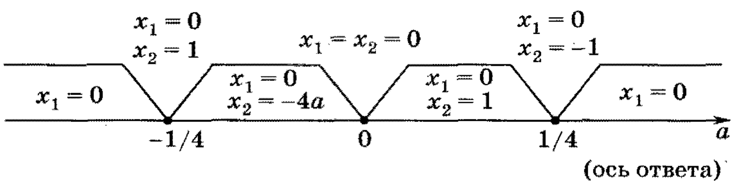


Рис. 621

<u>Ответ</u>. $(-\infty; -1/4) \cup \{0\} \cup (1/4; +\infty)$.

№ 25. Найдите все значения a, при которых уравнение $(2a - x) \arccos x = 0$ имеет ровно один корень. (ЕГЭ 2002 г.)

<u>Решение.</u>

ООУ: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ |x| \leqslant 1. \end{cases}$

Данное уравнение сводится к совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\arccos x = 0, \\ a \in \mathrm{R},\end{cases} \quad (1) \\ \begin{cases}x = 2a, \\ |x| \leqslant 1.\end{cases} \quad (2)\end{array}\right.$$

Решаем систему (1): $\begin{cases}x_1 = 1, \\ a \in \mathrm{R}.\end{cases}$

Переходим к системе (2): $\begin{cases}x_2 = 2a, \\ |2a| \leqslant 1,\end{cases}$ $\begin{cases}x_2 = 2a, \\ |a| \leqslant 1/2.\end{cases}$

Если $a = -1/2$, то $x_2 = -1$.

Если $a = 1/2$, то $x_2 = x_1 = 1$.

Нанесем результаты на ось параметра (рис. 622).

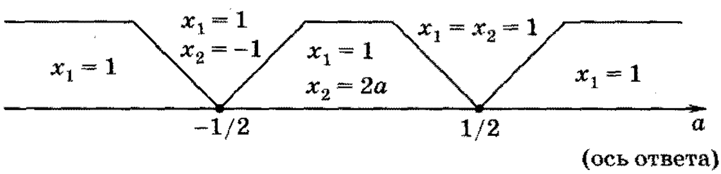


Рис. 622

Ответ. $(-\infty; -1/2) \cup [1/2; +\infty)$.

№ 26. Решите уравнение $\cos^2 2x = a + 2$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases}a \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}.\end{cases}$

Умножим обе части данного уравнения на 2.

$2\cos^2 2x = 2a + 4$,

$1 + \cos 4x = 2a + 4$,

$\cos 4x = 2a + 3$.

1) $a = -3/2$: $\cos 4x = 0$, $x_1 = \pi/8 + \pi k/4$, $k \in \mathrm{Z}$. ▶1

2) $2a + 3 = 1$, $a = -1$: $\cos 4x = 1$, $x_2 = \pi n/2$, $n \in \mathrm{Z}$. ▶2

3) $2a + 3 = -1$, $a = -2$: $\cos 4x = -1$, $x_3 = \pi/4 + \pi m/2$, $m \in \mathrm{Z}$. ▶3

4) $|2a + 3| > 1$: $\left[\begin{array}{l}2a + 3 > 1, \\ 2a + 3 < -1,\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}a > -1, \\ a < -2.\end{array}\right.$

Решений нет. ▶4

5) $a \in (-2; -3/2) \cup (-3/2; -1)$:
$x_4 = \pm(1/4)\arccos(2a + 3) + \pi l/2,\ l \in Z$. (▶5)
Заполним ось ответа (рис. 623).

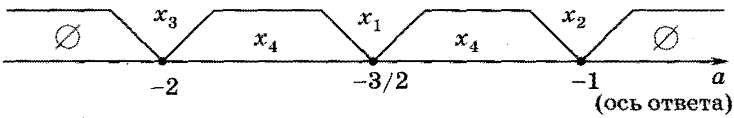


Рис. 623

№ 27. Решите уравнение $\cos x + \sqrt{3}\sin x = 2c$.

<u>Решение.</u>

ООУ: $\begin{cases} c \in R, \\ x \in R. \end{cases}$

Умножим обе части данного уравнения на 1/2:

$(1/2)\cos x + (\sqrt{3}/2)\sin x = c$, $\cos(x - \pi/3) = c$.

Решите это уравнение самостоятельно. Ответ представлен на рисунке 624, где

$x_1 = 5\pi/6 + \pi k,\ k \in Z$,

$x_2 = \pi/3 + 2\pi n,\ n \in Z$,

$x_3 = 4\pi/3 + 2\pi m,\ m \in Z$,

$x_4 = \pi/3 \pm \arccos c + 2\pi l,\ l \in Z$.

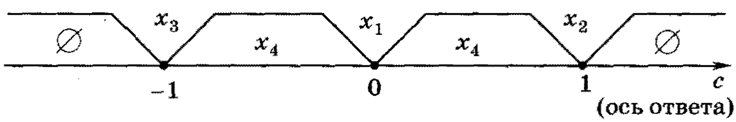


Рис. 624

№ 28. Решите уравнение $\sin x + a\cos x = 0$.

<u>Решение.</u>

ООУ: $\begin{cases} a \in R, \\ x \in R. \end{cases}$

Если $\cos x \neq 0$, то получим уравнение $\operatorname{tg} x = -a$, откуда $x = -\operatorname{arctg} a + \pi k,\ k \in Z$.

Если $\cos x = 0$, то $\sin x = 0$, что одновременно невозможно.

Ответ. $x = -\text{arctg}\, a + \pi k$, $k \in Z$, при любом a.

№ 29. Решите уравнение $a\sin x - \cos x = 0$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} a \in R, \\ x \in R. \end{cases}$

Если $a = 0$, то имеем уравнение $\cos x = 0$:
$x_1 = \pi/2 + \pi k$, $k \in Z$.

Если $a \neq 0$, то $\text{tg}\, x = 1/a$ и $x_2 = \text{arctg}\,(1/a) + \pi n$, $n \in Z$.

Ответ представлен на рисунке 625.

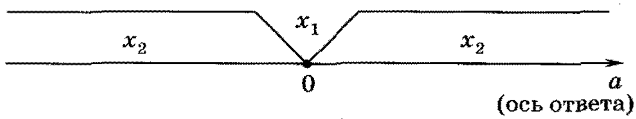


Рис. 625

№ 30. Решите уравнение $a\cos x - 2\sin^2(x/2) = 0$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} a \in R, \\ x \in R. \end{cases}$

$a\cos x - (1 - \cos x) = 0$, $(a + 1)\cos x = 1$.

Решите это уравнение самостоятельно. Ответ представлен на рисунке 626, где $x_1 = 2\pi k$, $k \in Z$.

$x_2 = \pi + 2\pi n$, $n \in Z$,

$x_3 = \pm\arccos(1/(a + 1)) + 2\pi m$, $m \in Z$.

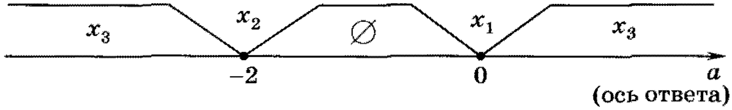


Рис. 626

№ 31. Решите уравнение $\sin 2x = a\sin x$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} a \in R, \\ x \in R. \end{cases}$

Воспользуемся формулой $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$.
$2\sin x\cos x - a\sin x = 0$,
$\sin x\,(2\cos x - a) = 0$. Уравнение сводится к совокупности:

$$\left[\begin{array}{ll} \sin x = 0, & (1) \\ \cos x = a/2. & (2) \end{array}\right.$$

Решаем первое уравнение совокупности:
$x_1 = \pi k$, $k \in Z$, при любом $a \in R$. (▶1)

Для решения уравнения $\cos x = a/2$ рассмотрим ряд случаев:

1) $a = 0$: $x_2 = \pi/2 + \pi n$, $n \in Z$. (▶2)
2) $a = 2$: $x_3 = 2\pi m$, $m \in Z$. (▶3)
3) $a = -2$: $x_4 = \pi + 2\pi l$, $l \in Z$. (▶4)
4) $|a/2| > 1$: $\left[\begin{array}{l} a > 2, \\ a < -2. \end{array}\right.$ (▶5)

Уравнение $\cos x = a/2$ решений не имеет.

5) $\begin{cases} |a/2| < 1, \\ a \neq 0, \end{cases}$ $\begin{cases} a < 2, \\ a > -2, \\ a \neq 0, \end{cases}$ $a \in (-2; 0) \cup (0; 2)$.

$x_5 = \pm\arccos(a/2) + 2\pi t$, $t \in Z$. (▶6)

При составлении ответа удобно воспользоваться тремя осями для параметра a (рис. 627):
на первой оси изображаются результаты решения уравнения $\sin x = 0$;
на второй — $\cos x = a/2$;
на третьей — ответ.

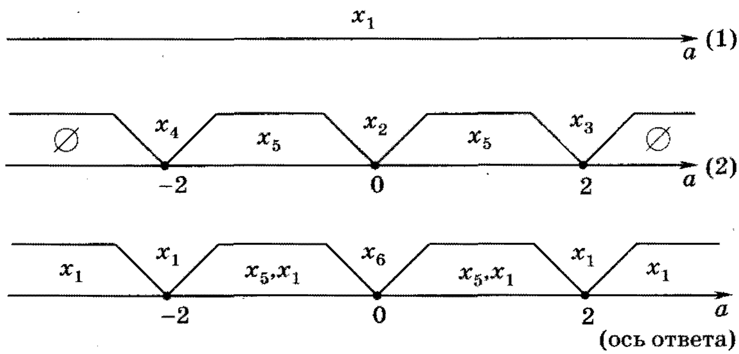


Рис. 627

Заметим, что при $a = 0$ множества решений x_1 и x_2 объединяются в множество $x_6 = \pi c/2$, $c \in \mathrm{Z}$.

Ответ. 1) Если $a \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$, то $x = \pi k$, $k \in \mathrm{Z}$.
2) Если $a = 0$, то $x = \pi c/2$, $c \in \mathrm{Z}$.
3) Если $a \in (-2; 0) \cup (0; 2)$, то $x = \pi k$, $k \in \mathrm{Z}$; $x = \pm\arccos(c/2) + 2\pi t$, $t \in \mathrm{Z}$.

№ 32. Решите уравнение $\cos^2 x - \sin^2 x = 2a\cos^2 2x$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

$\cos 2x = 2a\cos^2 2x$, $\cos 2x\,(2a\cos 2x - 1) = 0$,

$$\left[\begin{array}{ll} \cos 2x = 0, & (1) \\ 2a\cos 2x = 1. & (2) \end{array}\right.$$

Решаем (1): $\cos 2x = 0$, $x_1 = \pi/4 + \pi k/2$, $k \in \mathrm{Z}$, при любом a. (▶1)

Решаем (2): $2a\cos 2x = 1$. (▶2)

Пусть $a = 0$: $0 \cdot \cos 2x = 1$. Уравнение (2) решений не имеет.

Если $a \neq 0$, то решаем уравнение $\cos 2x = 1/(2a)$.

1) $a = 1/2$: $\cos 2x = 1$, $x_2 = \pi n$, $n \in \mathrm{Z}$. (▶3)

2) $a = -1/2$: $\cos 2x = -1$, $x_3 = \pi/2 + \pi m$, $m \in \mathrm{Z}$. (▶4)

3) $\begin{cases} \dfrac{1}{|2a|} > 1, \\ a \neq 0. \end{cases}$ $\begin{cases} |2a| < 1, \\ a \neq 0, \end{cases}$ $a \in (-1/2; 0) \cup (0; 1/2)$.

Уравнение (2) решений не имеет. (▶5)

4) $a \in (-\infty; -1/2) \cup (1/2; +\infty)$:
$x_4 = \pm(1/2)\arccos(1/2a) + \pi l$, $l \in \mathrm{Z}$. (▶6)

Объединяем решения (1) и (2) на оси ответа (рис. 628). (▶7)

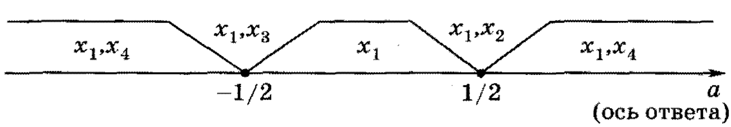


Рис. 628

№ 33. Решите уравнение $a\cos 3x + \sin 2x - \sin 4x = 0$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

Воспользуемся формулой разности синусов.

$a\cos 3x - 2\sin x \cos 3x = 0$,

$\cos 3x\,(a - 2\sin x) = 0$,

$$\left[\begin{array}{ll} \cos 3x = 0, & (1) \\ \sin x = a/2, & (2) \end{array}\right.$$

(1): $\cos 3x = 0$, $x_1 = \pi/6 + \pi k/3$,

$k \in \mathrm{Z}$, при любом a. ▶1

(2): $\sin x = a/2$.

1) $a = 0$: $x_2 = \pi n$, $n \in \mathrm{Z}$. ▶2

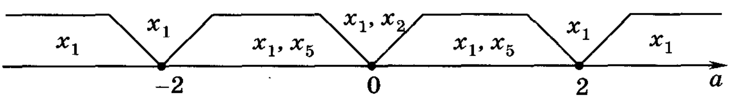
2) $a = 2$: $x_3 = \pi/2 + 2\pi m$, $m \in \mathrm{Z}$. ▶3

3) $a = -2$: $x_4 = -\pi/2 + 2\pi l$, $l \in \mathrm{Z}$. ▶4

4) $|a| > 2$. Уравнение (2) решений не имеет. ▶5

5) $a \in (-2;\ 0) \cup (0;\ 2)$: $x_5 = (-1)^t \arcsin(a/2) + \pi t$, $t \in \mathrm{Z}$. ▶6

Объединяем множества решений уравнений (1) и (2) (рис. 629). ▶7



(ось ответа)

Рис. 629

№ 34. При каких целых значениях параметра a уравнение $\cos ax = 1 + 7\cos^2(\pi/4 + x/2)$ имеет решения? Найдите их.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

$\cos ax = 1 + (7/2)(1 + \cos(\pi/2 + x))$,

$\cos ax = 1 + (7/2)(1 - \sin x)$,

$2\cos ax = 9 - 7\sin x$, $2\cos ax + 7\sin x = 9$.

Последнее уравнение приводим к равносильной ему системе:

$$\begin{cases} \sin x = 1, & (1) \\ \cos ax = 1. & (2) \end{cases}$$

Решим уравнение (1): $x = \pi/2 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, при любом значении a.

(2): $\cos ax = 1$:

1) $a = 0$. Решением уравнения (2) является множество $\mathbb{R}$. И тогда решением системы являются числа $x = \pi/2 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.
2) $a \neq 0$: $x = 2\pi n/a$, $n \in \mathbb{Z}$, — решения уравнения (2). Найдем такие целые значения a, при которых $\pi/2 + 2\pi k = 2\pi n/a$, где $k, n \in \mathbb{Z}$:
$1/2 + 2k = 2n/a$, $a + 4ka = 4n$, $a(1 + 4k) = 4n$.
При $k \in \mathbb{Z}$ сумма $1 + 4k$ не равна нулю:
$a = 4n/(1 + 4k)$. Чтобы a было целым числом, достаточно, чтобы $n = (1 + 4k)m$, $m \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$.
Тогда $a = 4m$, где $m \in \mathbb{Z}$, и $x = \pi/2 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ — решения системы.

Ответ. $a = 4m$, $m \in \mathbb{Z}$.
$x = \pi/2 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

№ 35. Решите уравнение $1 + \operatorname{tg}^2 x = a$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} a \in \mathbb{R}, \\ x \neq \pi/2 + \pi k, \ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

$\operatorname{tg}^2 x = a - 1$.

1) Если $a = 1$, то $\operatorname{tg} x = 0$: $x_1 = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.
2) Если $a < 1$, то решений нет.
3) Если $a > 1$, то $\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = \sqrt{a-1}, \\ \operatorname{tg} x = -\sqrt{a-1}. \end{array}\right.$

$x_2 = \pm\operatorname{arctg}\sqrt{a-1} + \pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

Ответ представлен на рисунке 630.

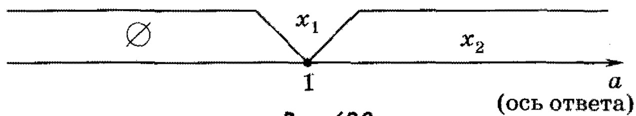


Рис. 630

№ 36. Решите уравнение $2\operatorname{tg} x/(1 - \operatorname{tg}^2 x) = 3a/2$. (1)

Решение.

$$\text{ООУ: } \begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \neq \pi/2 + \pi k,\ k \in \mathrm{Z}, \\ x \neq \pi/4 + \pi n/2,\ n \in \mathrm{Z}, \text{ (рис. 631).} \end{cases}$$

Перейдем от уравнения (1) к уравнению
$\operatorname{tg} 2x = 3a/2$. (2)

Заметим, что при этом область определения данного уравнения расширилась на множество $x = \pi/2 + \pi m$, $m \in \mathrm{Z}$. Подставим $x = \pi/2 + \pi m$, $m \in \mathrm{Z}$, в уравнение (2):
$0 = 3a/2$, $a = 0$.

Теперь $a = 0$ подставим в уравнение (2):
$\operatorname{tg} 2x = 0$, $x = \pi l/2$, $l \in \mathrm{Z}$.

С учетом области определения найдем при $a = 0$ множество решений данного уравнения. Это числа $x = \pi t$, $t \in \mathrm{Z}$.

Если $a \neq 0$, то $x = (1/2)\operatorname{arctg}(3a/2) + \pi c/2$, $c \in \mathrm{Z}$.

Ответ. 1) Если $a = 0$, то $x = \pi t$, $t \in \mathrm{Z}$.
2) Если $a \neq 0$, то
$x = (1/2)\operatorname{arctg}(3a/2) + \pi c/2$, $c \in \mathrm{Z}$.

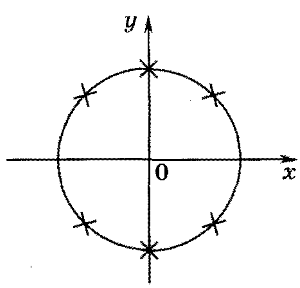


Рис. 631

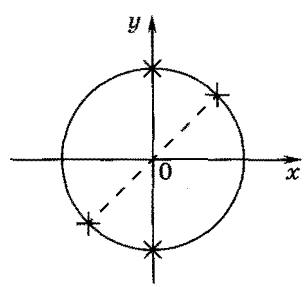


Рис. 632

№ 37. Решите уравнение $\dfrac{1+\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}x}=2b.$ (1)

Решение.

$$\text{ООУ: }\begin{cases} b\in R,\\ x\neq \pi/2+\pi k,\ k\in Z, \quad \text{(рис. 632).}\\ x\neq \pi/4+\pi n,\ n\in Z.\end{cases}$$

Перейдем к уравнению $\operatorname{tg}(x+\pi/4)=2b.$ (2)

Произошло расширение области определения уравнения (1) на множество $x=\pi/2+\pi k,\ k\in Z.$

Подставим $x=\pi/2+\pi k,\ k\in Z$ в уравнение (2):

$-1=2b,\ b=-1/2.$

А теперь $b=-1/2$ подставим в уравнение (2):

$\operatorname{tg}(x+\pi/4)=-1,$

$x+\pi/4=-\pi/4+\pi m,\ m\in Z,$

$x=-\pi/2+\pi m,\ m\in Z.$

Но полученные значения x не удовлетворяют области определения данного уравнения. Следовательно, расширение области определения уравнения (1) при переходе к уравнению (2) привело к приобретению посторонних решений.

Итак, если $b=-1/2$, то уравнение (1) решений не имеет.

Если $b\neq-1/2$, то $x=-\pi/4+\operatorname{arctg}2b+\pi l,\ l\in Z.$

Ответ. 1) Если $b\neq-1/2$, то
$x=-\pi/4+\operatorname{arctg}2b+\pi l,\ l\in Z.$
2) Если $b=-1/2$, то решений нет.

№ 38. При каких значениях a данное уравнение $1+\sin^2 ax=\cos x$ имеет единственное решение?

Решение.

$$\text{ООУ: }\begin{cases} a\in R,\\ x\in R.\end{cases}$$

Так как $|\cos x|\leqslant 1,\ 1+\sin^2 ax\geqslant 1$, то получим систему уравнений

$$\begin{cases}\sin ax=0,\\ \cos x=1.\end{cases}$$

1) Если $a = 0$, то R — множество решений уравнения $\sin ax = 0$. А потому $x = 2\pi n$, $n \in Z$, — решения системы. Значит, при $a = 0$ единственного решения у системы нет.

2) Пусть $a \neq 0$: $\begin{cases} x = \pi k/a, k \in Z, \\ x = 2\pi n, n \in Z. \end{cases}$

   $\pi k/a = 2\pi n$, $n = k/(2a)$, k, $n \in Z$.

   Если a — рациональное число ($a \neq 0$), то уравнение $n = k/(2a)$ в целых числах имеет бесчисленное множество решений. Значит, a — иррациональное число. Тогда $k = n = 0$. Следовательно, $x = 0$ — единственное решение.

Ответ. a — иррациональное число.

4.2. Тригонометрические уравнения и системы с параметром

№ 1. Решите уравнение $\cos^2 x + 6\sin x = 4a^2 - 2$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} a \in R, \\ x \in R. \end{cases}$

Пусть $\sin x = y$, $|y| \leqslant 1$.

$1 - \sin^2 x + 6\sin x = 4a^2 - 2$,

$y^2 - 6y + 4a^2 - 3 = 0$. Найдем D_1:

$D_1 = 4(3 - a^2)$.

1) $3 - a^2 < 0$, $|a| > \sqrt{3}$: решений нет. (▸1)

2) $a = \pm\sqrt{3}$, $y^2 - 6y + 9 = 0$. $(y - 3)^2 = 0$, $y = 3$. Решений нет, так как $3 > 1$. (▸2)

3) $D_1 > 0$; $-\sqrt{3} < a < \sqrt{3}$. Тогда

   $y_1 = 3 + 2\sqrt{3 - a^2}$; $y_2 = 3 - 2\sqrt{3 - a^2}$.

   Видим, что $y_1 > 1$.

   Остается $\sin x = 3 - 2\sqrt{3 - a^2}$.

Исследование.

$$\begin{cases} -1 \leqslant 3 - 2\sqrt{3 - a^2} \leqslant 1, \\ -\sqrt{3} < a < \sqrt{3}; \end{cases} \qquad \begin{cases} \sqrt{3 - a^2} \leqslant 2, \\ \sqrt{3 - a^2} \geqslant 1, \\ -\sqrt{3} < a < \sqrt{3}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3 - a^2 \leqslant 4, \\ 3 - a^2 \geqslant 1, \\ -\sqrt{3} < a < \sqrt{3}; \end{cases} \qquad \begin{cases} a^2 \geqslant -1, \\ a^2 \leqslant 2, \\ -\sqrt{3} < a < \sqrt{3}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\sqrt{2} \leqslant a \leqslant \sqrt{2}, \\ -\sqrt{3} < a < \sqrt{3}, \end{cases} \qquad |a| \leqslant \sqrt{2}.$$

Если $|a| \leqslant \sqrt{2}$, то $x_1 = (-1)^k \arcsin(3 - 2\sqrt{3 - a^2}) + \pi k,\ k \in Z$. ▶3

При $|a| = \sqrt{2}$ получаем $x_2 = \pi/2 + 2\pi n,\ n \in Z$. ▶4

При $a = \pm\sqrt{3}/2$ имеем $\sin x = 0$; $x_3 = \pi m,\ m \in Z$. ▶5

Заполним ось ответа (рис. 633).

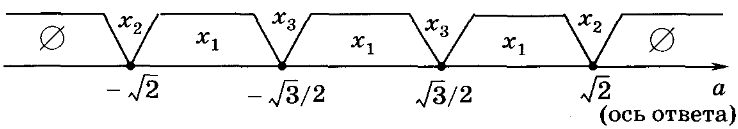


Рис. 633

Ответ. 1) Если $a \in (-\sqrt{2}; -\sqrt{3}/2) \cup$
$\cup (-\sqrt{3}/2; \sqrt{3}/2) \cup (\sqrt{3}/2; \sqrt{2})$, то
$x = (-1)^k \arcsin (3 - 2\sqrt{3 - a^2}) + \pi k,\ k \in Z$.

2) Если $|a| = \sqrt{2}$, то $x = \pi/2 + 2\pi n,\ n \in Z$.

3) Если $|a| > \sqrt{2}$, то решений нет.

4) Если $|a| = \sqrt{3}/2$, то $x = \pi m,\ m \in Z$.

№ 2. Решите уравнение $\sin^2 x - 5\cos x + k = 0$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} k \in R, \\ x \in R. \end{cases}$

Данное уравнение легко приводится к равносильному уравнению $\cos^2 x + 5\cos x - k - 1 = 0$.

Пусть $\cos x = t$, где $|t| \leqslant 1$. Тогда $t^2 + 5t - k - 1 = 0$, $D = 29 + 4k$.

1) $D < 0$; $k < -29/4$. Решений нет. ▶1
2) $D = 0$; $k = -29/4$, $t^2 + 5t + 25/4 = 0$, $t = -5/2$. Решений нет. ▶2
3) $D > 0$; $k > -29/4$, $t_1 = (-5 - \sqrt{29 + 4k})/2$;

   $t_2 = (-5 + \sqrt{29 + 4k})/2$.

   Легко видеть, что $t_1 < -1$.

   Решаем уравнение $\cos x = (-5 + \sqrt{29 + 4k})/2$.

<u>Исследование</u>.

$$\begin{cases} \left|(-5 + \sqrt{29 + 4k})/2\right| \leqslant 1, \\ k > -29/4, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1 \leqslant (-5 + \sqrt{29 + 4k})/2 \leqslant 1, \\ k > -29/4, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3 \leqslant \sqrt{29 + 4k} \leqslant 7, \\ k > -29/4. \end{cases}$$

$9 \leqslant 29 + 4k \leqslant 49$,

$-5 \leqslant k \leqslant 5$.

Итак, если $|k| \leqslant 5$, то данное уравнение имеет решения:

$x_1 = \pm\arccos\left((-5 + \sqrt{29 + 4k})/2\right) + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. ▶3

Выделим особо случаи, когда $\cos x = 0$, $\cos x = 1$, $\cos x = -1$:

$k = -5$: $\cos x = -1$, $x_2 = \pi + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

$k = -1$: $\cos x = 0$, $x_3 = \pi/2 + \pi l$, $l \in \mathbb{Z}$. ▶4

$k = 5$: $\cos x = 1$, $x_4 = 2\pi c$, $c \in \mathbb{Z}$.

Представим результаты на оси ответа (рис. 634).

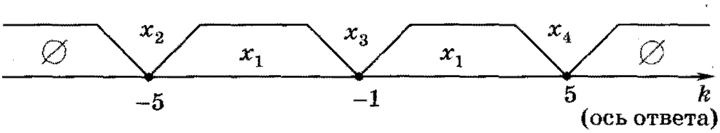


Рис. 634

№ 3. Решите уравнение

$\sin^2 x - \sin x \cdot \cos x - 2\cos^2 x = a.$

<u>Решение</u>.

ООУ: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

$\sin^2 x - \sin x \cdot \cos x - 2\cos^2 x - a\sin^2 x - a\cos^2 x = 0,$

$(1 - a)\sin^2 x - \sin x \cdot \cos x - (a + 2) \cdot \cos^2 x = 0.$

1. $\cos x \neq 0$, тогда $(1 - a)\mathrm{tg}^2\, x - \mathrm{tg}\, x - (a + 2) = 0.$

1) $a = 1$: $\quad \mathrm{tg}\, x = -3$. $x_1 = -\mathrm{arctg}\, 3 + \pi n,\ n \in \mathrm{Z}.$

2) $a \neq 1$: $\quad \mathrm{D} = 9 - 4a^2 - 4a$. Пусть $\mathrm{D} \geqslant 0$:

$4a^2 + 4a - 9 \leqslant 0,$

$(-1 - \sqrt{10})/2 \leqslant a \leqslant (-1 + \sqrt{10})/2,\ a \neq 1.$

$$\mathrm{tg}\, x = \frac{1 \pm \sqrt{9 - 4a^2 - 4a}}{2(1 - a)};$$

$$x_2 = \mathrm{arctg}\, \frac{1 \pm \sqrt{9 - 4a^2 - 4a}}{2(1 - a)} + \pi m,\ m \in \mathrm{Z}.$$

Если $a = (-1 - \sqrt{10})/2$, то

$x_3 = \mathrm{arctg}\,(\sqrt{10} - 3) + \pi m,\ m \in \mathrm{Z}.$

Если $a = (-1 + \sqrt{10})/2$, то

$x_4 = \mathrm{arctg}\,(-\sqrt{10} - 3) + \pi m,\ m \in \mathrm{Z}.$

Если $a \in (-\infty;\ (-1 - \sqrt{10})/2) \cup ((-1 + \sqrt{10})/2;\ +\infty)$, то решений нет.

2. $\cos x = 0$. Тогда имеем

$\begin{cases} \cos x = 0, \\ \sin^2 x(1 - a) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_5 = \pi/2 + \pi k,\ k \in \mathrm{Z}, \\ a = 1. \end{cases}$

Заполним ось ответа (рис. 635).

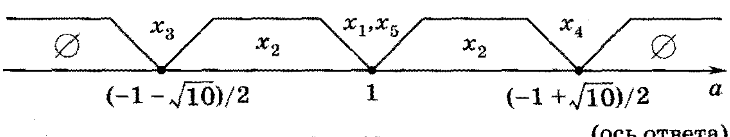


Рис. 635

Ответ. 1) Если $a \in \left(-\infty; \frac{-1-\sqrt{10}}{2}\right) \cup$

$\cup \left(\frac{-1+\sqrt{10}}{2}; +\infty\right)$, то решений нет.

2) Если $a \in \left(\frac{-1-\sqrt{10}}{2}; 1\right) \cup$

$\cup \left(1; \frac{-1+\sqrt{10}}{2}\right)$, то

$x = \operatorname{arctg} \frac{1 \pm \sqrt{9-4a^2-4a}}{2(1-a)} + \pi m,\ m \in Z.$

3) Если $a = 1$, то $x = -\operatorname{arctg} 3 + \pi n,\ n \in Z$; $x = \pi/2 + \pi k,\ k \in Z$.

4) Если $a = (-1-\sqrt{10})/2$, то

$x = \operatorname{arctg}(\sqrt{10} - 3) + \pi m,\ m \in Z.$

5) Если $a = (-1+\sqrt{10})/2$,

то $x = \operatorname{arctg}(-\sqrt{10} - 3) + \pi m,\ m \in Z.$

№ 4. Решите уравнение $\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg}(x - \pi/4) = b - 1$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} b \in R, \\ x \neq \pi/4 + \pi k/2,\ k \in Z \text{ (рис. 636).} \end{cases}$

Применяем формулы тангенса двойного аргумента и тангенса разности. Происходит сужение области определения данного уравнения на

$x = \pi/2 + \pi k,\ k \in Z$

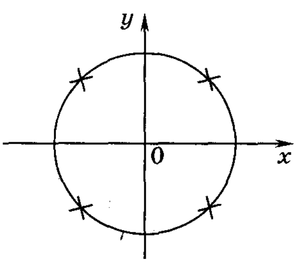


Рис. 636

Проверим эти числа подстановкой в исходное уравнение:

$\operatorname{tg} \pi - \operatorname{tg}(\pi/4) = b - 1,$

$-1 = b - 1,\ b = 0.$

Если $b = 0$, то $x_1 = \pi/2 + \pi k$, $k \in Z$, — корни данного уравнения. (▶1)

Пусть $b \neq 0$:

$$\frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x} - \frac{\operatorname{tg} x - 1}{1+\operatorname{tg} x} = b - 1,$$

$2\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x + 1 = b - 1 - (b-1)\cdot \operatorname{tg}^2 x$,
$\operatorname{tg} x \neq \pm 1$; $\quad b\operatorname{tg}^2 x = b - 2$.

Обозначим $\operatorname{tg} x = t$, $t \neq \pm 1$: $\begin{cases} t \neq \pm 1, \\ t^2 = (b-2)/b, \\ b \neq 0. \end{cases}$

Если $b \in (0;\ 2)$, то решений нет. (▸2)
Если $b = 2$, то $\operatorname{tg} x = 0$, $x_2 = \pi n$, $n \in \mathrm{Z}$. (▸3)
Если $b < 0$ или $b > 2$, то $\operatorname{tg}^2 x = (b-2)/b$.
Легко видеть, что $(b-2)/b \neq 1$.
$x_3 = \pm\operatorname{arctg}\sqrt{(b-2)/b} + \pi m$, $m \in \mathrm{Z}$. (▸4)
Списываем ответ с оси параметра (рис. 637).

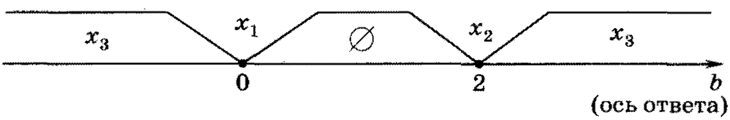


Рис. 637

Ответ. 1) Если $b = 0$, то $x = \pi/2 + \pi k$, $k \in \mathrm{Z}$.
2) Если $b = 2$, то $x = \pi n$, $n \in \mathrm{Z}$.
3) Если $b \in (-\infty;\ 0) \cup (2;\ +\infty)$, то
$x = \pm\operatorname{arctg}\sqrt{(b-2)/b} + \pi m$, $m \in \mathrm{Z}$.
4) Если $b \in (0;\ 2)$, то решений нет.

№ 5. Решите уравнение $\dfrac{\sin x - 1}{\sin x - 2} + a = \dfrac{\sin x - 2}{\sin x - 3}$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

Обозначим $\sin x = t$, $|t| \leqslant 1$.
Данное уравнение приводится к равносильному уравнению $a\sin^2 x - 5a\sin x + 6a - 1 = 0$. Учитывая замену, имеем $at^2 - 5at + 6a - 1 = 0$.
Если $a = 0$, то $0 \cdot t = 1$. Решений нет. (▸1)

Пусть $a \neq 0$. Найдем D: $D = a^2 + 4a = a(a+4)$.
Рассмотрим ряд случаев.

1) $D < 0$, т. е. $a \in (-4; 0)$. Решений нет. (▸2)
2) $D = 0$; $a = -4$, $-4t^2 + 20t - 25 = 0$, $(2t-5)^2 = 0$, $t = 5/2$. Но $5/2 > 1$. Поэтому решений нет. (▸3)
3) $D > 0$; $a \in (-\infty; -4) \cup (0; \infty)$.
Квадратное уравнение имеет два действительных корня t_1 и t_2:

$$t_1 = (5a + \sqrt{a^2 + 4a})/(2a);$$

$$t_2 = (5a - \sqrt{a^2 + 4a})/(2a).$$

<u>Исследование.</u>

Рассмотрим сначала $t_1 = (5a + \sqrt{a^2 + 4a})/(2a)$.
Решим две системы неравенств:

$$\begin{cases} \left|\dfrac{5a + \sqrt{a^2 + 4a}}{2a}\right| \leqslant 1, \\ a < -4; \end{cases} \tag{1}$$

и

$$\begin{cases} \left|\dfrac{5a + \sqrt{a^2 + 4a}}{2a}\right| \leqslant 1, \\ a > 0. \end{cases} \tag{2}$$

(1): $\begin{cases} -1 \leqslant (5a + \sqrt{a^2 + 4a})/(2a) \leqslant 1, \\ a < -4; \end{cases}$

$$\begin{cases} 2a \leqslant 5a + \sqrt{a^2 + 4a} \leqslant -2a, \\ a < -4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3a \leqslant \sqrt{a^2 + 4a} \leqslant -7a, \\ a < -4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9a^2 \leqslant a^2 + 4a, \\ a^2 + 4a \leqslant 49a^2, \\ a < -4; \end{cases} \qquad \begin{cases} a(2a-1) \leqslant 0, \\ a(12a-1) \geqslant 0, \\ a < -4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a - 1 \geqslant 0, \\ 12a - 1 \leqslant 0, \\ a < -4; \end{cases} \qquad \begin{cases} a \geqslant 1/2, \\ a \leqslant 1/12, \\ a < -4. \end{cases}$$

Система несовместна.

(2): Если $a > 0$, то $t_1 > 5/2$, так как

$t_1 = 5/2 + (\sqrt{a^2+4a})/(2a)$.

Итак, t_1 ни при каких $a \in (-\infty; -4) \cup (0; +\infty)$ не удовлетворяет неравенству $|t| \leqslant 1$.

Остается исследовать $t_2 = (5a - \sqrt{a^2+4a})/(2a)$. Заметим, что если $a \in (-\infty; -4)$, то $t_2 > 5/2$, так как $t_2 = 5/2 - (\sqrt{a^2+4a})/(2a)$. Пусть $a \in (0; +\infty)$:

$$\begin{cases} -1 \leqslant (5a - \sqrt{a^2+4a})/(2a) \leqslant 1, \\ a > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -7a \leqslant -\sqrt{a^2+4a} \leqslant -3a, \\ a > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{a^2+4a} \geqslant 3a, \\ \sqrt{a^2+4a} \leqslant 7a, \\ a > 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} a^2+4a \geqslant 9a^2, \\ a^2+4a \leqslant 49a^2, \\ a > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a-1 \leqslant 0, \\ 12a-1 \geqslant 0, \\ a > 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} a \leqslant 1/2, \\ a \geqslant 1/12, \\ a > 0; \end{cases} \qquad a \in [1/12; 1/2].$$

Выделим случаи, когда $t_2 = 0$, $t_2 = 1$, $t_2 = -1$:

$a = 1/6$: $\sin x = 0$, $x_1 = \pi k$, $k \in Z$. ▶4

$a = 1/12$: $\sin x = -1$; $x_2 = -\pi/2 + 2\pi n$, $n \in Z$. ▶5

$a = 1/2$: $\sin x = 1$, $x_3 = \pi/2 + 2\pi l$, $l \in Z$. ▶6

Если $a \in (1/12; 1/6) \cup (1/6; 1/2)$, то

$$x_4 = (-1)^c \cdot \arcsin \frac{5a - \sqrt{a^2+4a}}{2a} + \pi c,\ c \in Z. \text{ ▶7}$$

Заполним ось ответа (рис. 638 и 639).

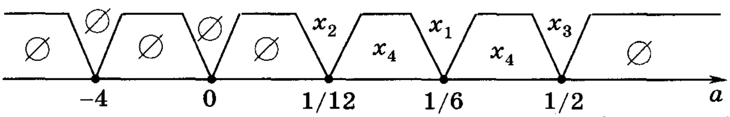


Рис. 638

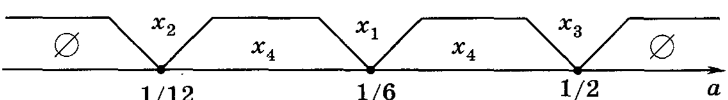


Рис. 639

№ 6. Решите уравнение

$\sin 2x - 2\sqrt{2}\ b(\sin x - \cos x) + 1 - 4b = 0.$

Решение.

ООУ: $\begin{cases} b \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

Умножим обе части данного уравнения на -1:

$-\sin 2x + 2\sqrt{2}\ b(\sin x - \cos x) - 1 + 4b = 0,$

$1 - \sin 2x + 2\sqrt{2}\ b(\sin x - \cos x) + 4b - 2 = 0,$

$(\sin x - \cos x)^2 + 2\sqrt{2}\ b(\sin x - \cos x) + 4b - 2 = 0.$

Пусть $y = \sin x - \cos x$. Тогда получим уравнение второй степени

$y^2 + 2\sqrt{2}\ by + 4b - 2 = 0.$

Найдем D_1: $D_1 = 2(b-1)^2$.

1) $D_1 = 0$; $b = 1$, $y = -\sqrt{2}$, $\sin x - \cos x = -\sqrt{2}$,

$\sqrt{2}\sin(x - \pi/4) = -\sqrt{2}$, $\sin(x - \pi/4) = -1$,

$x - \pi/4 = -\pi/2 + 2\pi k,\ k \in \mathrm{Z}.$

$x_1 = -\pi/4 + 2\pi k,\ k \in \mathrm{Z}.$

2) $D_1 > 0$; $b \neq 1$. Найдем y_1 и y_2:

$y_1 = -\sqrt{2}$; $y^2 = -2\sqrt{2}\,b + \sqrt{2}$.

Получаем два уравнения:

(1): $\sin x - \cos x = -\sqrt{2}$: $x_1 = -\pi/4 + 2\pi k,\ k \in \mathrm{Z}$, (▶1) при любом значении b.

(2): $\sin x - \cos x = -2\sqrt{2}\ b + \sqrt{2}$:

$\sin(x - \pi/4) = -2b + 1.$

Решаем это простейшее уравнение с параметром.

Если $b = 1/2$, то $\sin(x - \pi/4) = 0$, $x_2 = \pi/4 + \pi n$, $n \in \mathrm{Z}$. (▶2)

Если $|-2b + 1| > 1$, т. е. $\left[\begin{array}{l} -2b + 1 > 1, \\ -2b + 1 < -1, \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} b < 0, \\ b > 1, \end{array}\right.$

то решений у уравнения (2) нет.

Пусть $\begin{cases} |-2b + 1| < 1, \\ b \neq 1/2. \end{cases}$

Тогда $b \in (0;\ 1/2) \cup (1/2;\ 1)$.

В этом случае $x_3 = \pi/4 + (-1)^m \arcsin(1-2b) + \pi m$, $m \in Z$. (▸3)

Если $-2b + 1 = 1$, т. е. $b = 0$, то $\sin(x - \pi/4) = 1$, $x_4 = 3\pi/4 + 2\pi l$, $l \in Z$. (▸4)

Если $-2b + 1 = -1$, т. е. $b = 1$, то $\sin(x - \pi/4) = -1$, $x_1 = -\pi/4 + 2\pi k$, $k \in Z$.

Заметим, что при $b = 0$ две серии решений можно объединить в одну:

$x_5 = -\pi/4 + \pi t$, $t \in Z$. (▸5)

Заполним ось ответа (рис. 640).

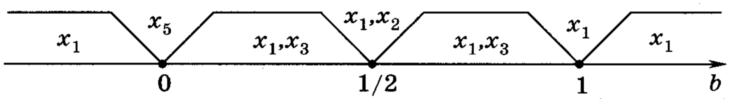


Рис. 640

Ответ. 1) Если $b \in (-\infty; 0) \cup [1; +\infty)$, то $x = -\pi/4 + 2\pi k$, $k \in Z$.
2) Если $b \in (0; 1/2) \cup (1/2; 1)$, то $x = -\pi/4 + 2\pi k$, $k \in Z$; $x = \pi/4 + (-1)^m \arcsin(1-2b) + \pi m$, $m \in Z$.
3) Если $b = 0$, то $x = -\pi/4 + \pi t$, $t \in Z$.
4) Если $b = 1/2$, то $x = \pi/4 + \pi n$, $n \in Z$, $x = -\pi/4 + 2\pi k$, $k \in Z$.

№ 7. Решите уравнение $\dfrac{1 - 2\sin^2 x}{1 + \sin 2x} = (a-1)\operatorname{tg} x$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} a \in R \\ x \neq \pi/2 + \pi k, \ k \in Z, \\ x \neq -\pi/4 + \pi n, \ n \in Z. \end{cases}$ (рис. 641)

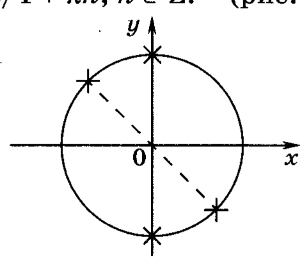


Рис. 641

$(1 - (1 - \cos 2x))/(1 + \sin 2x) = (a - 1)\,\mathrm{tg}\, x$,
$(\cos 2x)/(1 + \sin 2x) = (a - 1)\mathrm{tg}\, x$.
Применим формулы $\cos 2x = (1 - \mathrm{tg}^2 x)/(1 + \mathrm{tg}^2 x)$,
$\sin 2x = 2\mathrm{tg}\, x/(1 + \mathrm{tg}^2 x)$.
Получим уравнение
$(1 - \mathrm{tg}^2 x)/(\mathrm{tg}^2 x + 2\mathrm{tg}\, x + 1) = (a - 1)\mathrm{tg}\, x$.
$(1 - \mathrm{tg}^2 x)/(1 + \mathrm{tg}\, x)^2 = (a - 1)\mathrm{tg}\, x$,
$(1 - \mathrm{tg}\, x)/(1 + \mathrm{tg}\, x) = (a - 1)\mathrm{tg}\, x$,
$(a - 1)\mathrm{tg}^2 x + a\mathrm{tg}\, x - 1 = 0$.
Пусть $\mathrm{tg}\, x = u$: $(a - 1)u^2 + a \cdot u - 1 = 0$.
Если $a = 1$, то имеем линейное уравнение $u - 1 = 0$.
Тогда $u = 1$, $\mathrm{tg}\, x = 1$, $x_1 = \pi/4 + \pi m$, $m \in \mathbb{Z}$. ▶1
Пусть $a \neq 1$. Находим дискриминант квадратного трехчлена:
$D = a^2 + 4a - 4$.

1) $D < 0$; $a^2 + 4a - 4 < 0$, $a \in (-2 - 2\sqrt{2}; -2 + 2\sqrt{2})$.
Уравнение решений не имеет. ▶2

2) $D = 0$; $a = -2 - 2\sqrt{2}$ или $a = -2 + 2\sqrt{2}$.

Если $a = -2 - 2\sqrt{2}$, то $\mathrm{tg}\, x = \dfrac{2 + 2\sqrt{2}}{2(-3 - 2\sqrt{2})}$,

$\mathrm{tg}\, x = -(1 + \sqrt{2})/(3 + 2\sqrt{2})$, $\mathrm{tg}\, x = 1 - \sqrt{2}$,
$x_2 = \mathrm{arctg}\,(1 - \sqrt{2}) + \pi l$, $l \in \mathbb{Z}$. ▶3

Если $a = -2 + 2\sqrt{2}$, то $\mathrm{tg}\, x = \dfrac{2 - 2\sqrt{2}}{2(-2 + 2\sqrt{2} - 1)}$,

$\mathrm{tg}\, x = (1 - \sqrt{2})/(2\sqrt{2} - 3)$, $\mathrm{tg}\, x = \sqrt{2} + 1$.
$x_3 = \mathrm{arctg}\,(\sqrt{2} + 1) + \pi t$, $t \in \mathbb{Z}$. ▶4

3) $a \in (-\infty; -2 - 2\sqrt{2}) \cup (-2 + 2\sqrt{2}; 1) \cup (1; +\infty)$.
Тогда $D > 0$.

$$\mathrm{tg}\, x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4a - 4}}{2(a - 1)},$$

$$x_4 = \mathrm{arctg}\, \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4a - 4}}{2(a - 1)} + \pi c, \quad c \in \mathbb{Z}.$$ ▶5

Остается проверить, нет ли среди решений x_4 посторонних, так как при переходе от данного уравнения к уравнению $(a-1)\mathrm{tg}^2\,x + a\mathrm{tg}\,x - 1 = 0$ произошло расширение области определения на множество $-\pi/4 + \pi n$, $n \in \mathrm{Z}$.

Подставим вместо x выражение $-\pi/4 + \pi n$ в полученное уравнение:

$(a-1)\,\mathrm{tg}^2\,(-\pi/4) + a\mathrm{tg}\,(-\pi/4) - 1 = 0$,

$a - 1 - a - 1 = 0$, $-2 = 0$.

Таким образом, $-\pi/4 + \pi n$ не является решением. Значит, среди решений x_4 недопустимых нет.

Заполним ось ответа (рис. 642).

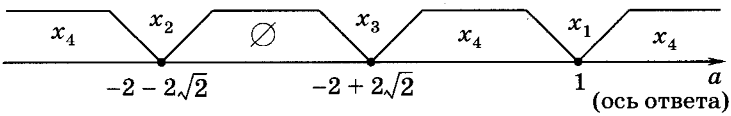


Рис. 642

№ 8. Решите уравнение

$(a^2+1)\sin^2 x + 2a^2 \sin x + 1/2 = 0$.

При каких действительных значениях параметра a это уравнение имеет хотя бы одно решение?

Решение.

ООУ: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

Пусть $t = \sin x$, где $|t| \leqslant 1$. Получим уравнение второй степени $(a^2+1)t^2 + 2a^2 t + 1/2 = 0$.

Найдем D_1: $\mathrm{D}_1 = a^4 - (a^2+1)/2 = (2a^4 - a^2 - 1)/2 = (a^2-1)(2a^2+1)/2$.

1) $\mathrm{D}_1 < 0$; $|a| < 1$. Решений нет. ▶1

2) $\mathrm{D}_1 = 0$; $a = 1$ или $a = -1$.

Решаем квадратное уравнение

$2t^2 + 2t + 1/2 = 0$: $(2t+1)^2 = 0$, $t = -1/2$,

$\sin x = -1/2$, $x_1 = (-1)^{k+1} \cdot \pi/6 + \pi k$, $k \in \mathrm{Z}$. ▶2

3) $D_1 > 0$; $|a| > 1$. Тогда уравнение имеет два различных действительных корня t_1 и t_2:

$$t_1 = \left(-a^2 + \sqrt{\frac{2a^4 - a^2 - 1}{2}} \right)/(a^2 + 1),$$

$$t_2 = \left(-a^2 - \sqrt{\frac{2a^4 - a^2 - 1}{2}} \right)/(a^2 + 1).$$

Учтем, что $|t| \leqslant 1$.

(1): $|t_1| \leqslant 1$:

$$\begin{cases} \left(-a^2 + \sqrt{\dfrac{2a^4 - a^2 - 1}{2}} \right)/(a^2 + 1) \leqslant 1, \\ \left(-a^2 + \sqrt{\dfrac{2a^4 - a^2 - 1}{2}} \right)/(a^2 + 1) \geqslant -1, \\ |a| > 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{(2a^4 - a^2 - 1)/2} \leqslant 2a^2 + 1, \\ \sqrt{(2a^4 - a^2 - 1)/2} \geqslant -1, \\ |a| > 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{2a^4 - a^2 - 1}{2} \leqslant 4a^4 + 4a^2 + 1, \\ |a| > 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a^2 + 1)(2a^2 + 1) \geqslant 0, \\ |a| > 1. \end{cases}$$

Система равносильна неравенству $|a| > 1$. Итак, если $|a| > 1$, то решения получаются из уравнения

$$\sin x = \left(-a^2 + \sqrt{\frac{2a^4 - a^2 - 1}{2}} \right)/(a^2 + 1):$$

$$x_2 = (-1)^n \arcsin\left(\frac{-a^2 + \sqrt{\dfrac{2a^4 - a^2 - 1}{2}}}{a^2 + 1} \right) + \pi n, n \in \mathbb{Z}. \quad (\blacktriangleright 3)$$

(2): $|t_2| \leqslant 1$:

$$\begin{cases} \left(-a^2 - \sqrt{\dfrac{2a^4 - a^2 - 1}{2}} \right)/(a^2+1) \leqslant 1, \\ \left(-a^2 - \sqrt{\dfrac{2a^4 - a^2 - 1}{2}} \right)/(a^2+1) \geqslant -1, \\ |a| > 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\sqrt{(2a^4 - a^2 - 1)/2} \leqslant 2a^2 + 1, \\ -\sqrt{(2a^4 - a^2 - 1)/2} \geqslant -1, \\ |a| > 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{(2a^4 - a^2 - 1)/2} \leqslant 1, \\ |a| > 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2a^4 - a^2 - 1 \leqslant 2, \\ |a| > 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a^2+1)(2a^2 - 3) \leqslant 0, \\ |a| > 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2a^2 - 3 \leqslant 0, \\ |a| > 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} |a| \leqslant \sqrt{3/2}, \\ |a| > 1. \end{cases}$$

Тогда $x_3 = (-1)^m \arcsin \dfrac{-a^2 - \sqrt{(2a^4 - a^2 - 1)/2}}{a^2+1} +$

$+ \pi m,\ m \in \mathrm{Z}.$ ▶4

Если $a = \pm\sqrt{3/2}$, то

$$\left[\begin{array}{l} x_4 = -\pi/2 + 2\pi l,\ l \in \mathrm{Z}, \\ x_5 = (-1)^{t+1} \arcsin(1/5) + \pi t,\ t \in \mathrm{Z}. \end{array} \right.$$ ▶5

Решения представлены на оси ответа (рис. 643).

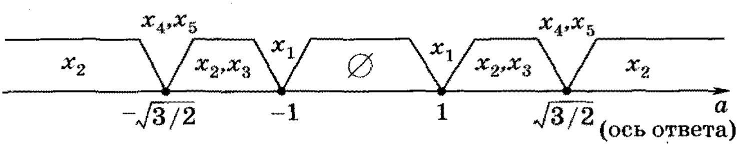


Рис. 643

<u>Ответ</u>. (1): 1) Если $|a| > \sqrt{3/2}$, то

$$x = (-1)^n \arcsin \frac{-a^2 + \sqrt{(2a^4 - a^2 - 1)/2}}{a^2+1} +$$

$+ \pi n,\ n \in \mathrm{Z}.$

2) Если $|a| = 1$, то $x = (-1)^{k+1}\pi/6 + \pi k$, $k \in Z$.

3) Если $a \in [-\sqrt{3/2}; -1) \cup (1; \sqrt{3/2})$, то

$$x = (-1)^n \arcsin \frac{-a^2 \pm \sqrt{(2a^4 - a^2 - 1)/2}}{a^2 + 1} +$$

$+ \pi n$, $n \in Z$.

4) Если $|a| < 1$, то решений нет.

(2): Уравнение имеет хотя бы одно решение, если $|a| \geqslant 1$.

№ 9. Найдите значения a, при которых уравнение $2\sin^2 x - 3\sin x \cos x - 3\cos^2 x = a$ не имеет решений, удовлетворяющих неравенству $0 \leqslant x < \pi/2$.

Решение.

Заметим, что если $x \in [0; \pi/2)$, $a \in R$, то уравнение определено. Приведем его к виду

$(2 - a)\sin^2 x - 3\sin x \cos x - (3 + a)\cos^2 x = 0$.

Если $x \in [0; \pi/2)$, то $\cos x \neq 0$.

Разделим обе части уравнения на $\cos^2 x \neq 0$:

$(2 - a)\text{tg}^2 x - 3\text{tg}\, x - 3 - a = 0$.

Пусть $y = \text{tg}\, x$, где $y \geqslant 0$ (так как $x \in [0; \pi/2)$):

$(2 - a)y^2 - 3y - 3 - a = 0$. (1)

Если $a = 2$, то $y = -5/3$. Но $-5/3 < 0$.

Итак, при $a = 2$ данное уравнение не имеет решений, удовлетворяющих неравенству

$0 \leqslant x < \pi/2$. ▶1

Пусть $a \neq 2$: тогда уравнение (1) — второй степени.

$D = 9 + 4(2 - a)(3 + a) = -4a^2 - 4a + 33$.

Найдем D_1 квадратного трехчлена $-4a^2 - 4a + 33$: $D_1 = 136$.

Тогда $a_1 = -(1 + \sqrt{34})/2$; $a_2 = (-1 + \sqrt{34})/2$ — корни квадратного трехчлена.

1) Если $a \in \left(-\infty; \dfrac{-1-\sqrt{34}}{2}\right) \cup \left(\dfrac{-1+\sqrt{34}}{2}; +\infty\right)$,

то $D < 0$, а значит, данное уравнение не имеет решений, удовлетворяющих неравенству $0 \leqslant x < \pi/2$. (▸2)

2) Пусть $a = (-1 - \sqrt{34})/2$.

Тогда уравнение (1) примет вид

$(5 + \sqrt{34})y^2/2 - 3y - (5 - \sqrt{34})/2 = 0$,

$y = 3/(5 + \sqrt{34})$.

Уравнение $\operatorname{tg} x = 3/(5 + \sqrt{34})$ имеет корни на интервале $[0; \pi/2)$. Обозначим их (*). (▸3)

3) Пусть $a = (-1 + \sqrt{34})/2$:

$(5 - \sqrt{34})y^2/2 - 3y - (5 + \sqrt{34})/2 = 0$,

$y = 3/(5 - \sqrt{34})$.

Но $3/(5 - \sqrt{34}) < 0$. Поэтому уравнение

$\operatorname{tg} x = 3/(5 - \sqrt{34})$ не имеет корней на интервале $[0; \pi/2)$. (▸4)

4) Пусть $D > 0$, т. е.

$a \in (-(1 + \sqrt{34})/2; 2) \cup (2; (-1 + \sqrt{34})/2)$.

Если $a \in (-(1 + \sqrt{34})/2; 2)$, то

$y = (3 \pm \sqrt{-4a^2 - 4a + 33})/(2(2 - a))$.

Легко видеть, что $\dfrac{3 + \sqrt{-4a^2 - 4a + 33}}{2(2-a)} > 0$.

Значит, при $a \in (-(1 + \sqrt{34})/2; 2)$ есть корни, принадлежащие интервалу $[0; \pi/2)$. Обозначим их (**). (▸5)

Если же $a \in (2; (-1 + \sqrt{34})/2)$, то имеем

$$\frac{3 + \sqrt{-4a^2 - 4a + 33}}{2(2-a)} < 0.$$

Рассмотрим число $\dfrac{3-\sqrt{-4a^2-4a+33}}{2(2-a)}$.

Знаменатель дроби меньше нуля. Чтобы число было положительным, надо, чтобы числитель дроби был тоже отрицательным:

$3-\sqrt{-4a^2-4a+33}<0$. Решаем это неравенство:

$\sqrt{-4a^2-4a+33}>3$, $-4a^2-4a+33>9$,

$a^2+a-6<0$, $-3<a<2$. Но $a \in \left(2; \dfrac{-1+\sqrt{34}}{2}\right)$.

Значит, при $a \in (2; (-1+\sqrt{34})/2)$ данное уравнение тоже не имеет решений, принадлежащих интервалу $[0; \pi/2)$ (рис. 644). ▶6

Ответ. $(-\infty; (-1-\sqrt{34})/2) \cup [2; +\infty)$.

№ 10. Даны два уравнения

$$\frac{x^3-(p+1)x^2+2(5p-12)x+14-p}{x^2-2x-3}=x-p \quad \text{и}$$

$$4\cos\left(\frac{\pi x}{x+4}\right)=(6+\sqrt{3-p})x-10.$$

Значение параметра p выбирается так, что $p \leqslant 3$ и число различных корней первого уравнения равно сумме $3-p$ и числа различных корней второго уравнения. Решите второе уравнение при каждом значении параметра, выбранном таким образом. (ЕГЭ 2005 г.)

Решение.

Пусть k — число различных корней первого уравнения, n — число различных корней второго уравнения. Тогда

$$\begin{cases} k=3-p+n, \\ p \leqslant 3, \\ k \in \mathrm{N},\ n \in \mathrm{N}, \text{ где N — множество всех натуральных чисел.} \end{cases}$$

Отсюда следует, что p — целое число.

Рассмотрим первое уравнение.

ООУ: $\begin{cases} x \neq -1, \\ x \neq 3, \\ p \leqslant 3, p \in \mathrm{Z}. \end{cases}$

Освободившись от знаменателя, переходим к уравнению-следствию $x^2 + (8p - 21)x - 4p + 14 = 0$. (1)

1) Пусть $x = -1$. Подставим это значение x в уравнение (1):

$1 - 8p + 21 - 4p + 14 = 0$, $p = 3$. А теперь $p = 3$ подставим в уравнение (1):

$x^2 + 3x + 2 = 0$, $\left[\begin{array}{l} x = -1, \\ x = -2, \end{array}\right.$ $\quad x = -2$.

Итак, при $p = 3$ первое уравнение имеет один корень.

2) Пусть $x = 3$: $\quad 9 + 24p - 63 - 4p + 14 = 0$, $p = 2$.

Если $p = 2$, то $x^2 - 5x + 6 = 0$, $\begin{cases} x = 3, \\ x = 2, \end{cases}$ $\quad x = 2$.

В этом случае первое уравнение тоже имеет один корень.

3) Находим дискриминант уравнения (1):

$\mathrm{D} = (8p - 21)^2 - 4(14 - 4p) = 64p^2 - 320p + 385$.

Нас интересуют только те значения p, которые удовлетворяют условиям: $p \leqslant 1$, $p \in \mathrm{Z}$. Легко видеть, что в этом случае $\mathrm{D} > 0$, а потому уравнение (1) и первое из данных уравнение имеют два различных корня (рис. 645).

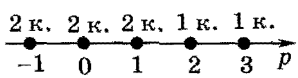


Рис. 645

Если первое уравнение имеет один корень, то $p = 2$ или $p = 3$.

1) $\begin{cases} p = 2, \\ k = 1, \end{cases}$ $\quad 1 = 3 - 2 + n$, $n = 0$.

Этот случай нас не устраивает.

2) $\begin{cases} p = 3, \\ k = 1, \end{cases}$ $1 = 3 - 3 + n$, $n = 1$.

Если первое уравнение имеет два различных корня, то $k = 2$, $p < 2$, $p \in \mathbb{Z}$. Тогда $2 = 3 - p + n$, $p = 1 + n$. При $n \in \mathbb{N}$ получим $p \geqslant 2$, что не удовлетворяет условию $p < 2$.

Итак, остается один вариант: $p = 3$, $n = 1$, $k = 1$.

Решим второе уравнение при $p = 3$.

$4\cos(\pi x/(x + 4)) = 6x - 10$,

$2\cos(\pi/(x + 4)) = 3x - 5$.

Последнее уравнение может иметь корни, если $-2 \leqslant 3x - 5 \leqslant 2$, т. е. $x \in [1; 7/3]$.

Представим выражение $\pi x/(x + 4)$ в виде $\pi(1 - 4/(x + 4))$.

Если x возрастает от 1 до 7/3, то $\pi x/(x + 4)$ возрастает от $\pi/5$ до $7\pi/19$.

Но $[\pi/5; 7\pi/19] \subset [0; \pi/2]$, где $y = \cos t$ убывает.

Функция $\varphi = 3x - 5$ возрастает. Значит, второе уравнение может иметь не более одного корня.

Подбором находим корень $x = 2$.

Ответ. 2.

№ 11. Найдите при $a = 1$ все решения уравнения $\sin(2(x - \pi)) - \sin(3x - \pi) = a \sin x$, расположенные на отрезке $[0; \pi/2]$, и выясните, при каких a данное уравнение имеет единственное решение на этом отрезке.

Решение.

1. При $a = 1$ данное уравнение имеет вид

$\sin(2x - 2\pi) + \sin(\pi - 3x) = \sin x$.

Решаем его: $\sin 2x + \sin 3x - \sin x = 0$,

$2\sin x \cos x + 2\sin x \cos 2x = 0$,

$\left[\begin{array}{l} \sin x = 0, \\ \cos 2x + \cos x = 0; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \sin x = 0, \\ 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0; \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} \sin x = 0, \\ \cos x = -1, \\ \cos x = 1/2. \end{array}\right.$

Уравнение $\sin x = 0$ имеет на отрезке $[0; \pi/2]$ один корень $x = 0$, а уравнение $\cos x = 1/2$ имеет на этом отрезке корень $x = \pi/3$. Уравнение $\cos x = -1$ не имеет корней на $[0; \pi/2]$.

Итак, данное уравнение при $a = 1$ имеет на отрезке $[0; \pi/2]$ два корня: $x = 0$, $x = \pi/3$.

2. Узнаем теперь, при каких значениях a данное уравнение имеет единственное решение на отрезке $[0; \pi/2]$.

$\sin 2x + \sin 3x = a \sin x,$

$2\sin x \cos x + 3\sin x - 4\sin^3 x - a \sin x = 0,$

$\sin x\,(2\cos x - 4\sin^2 x + 3 - a) = 0,$

$$\left[\begin{array}{l}\sin x = 0,\\ 2\cos x - 4\sin^2 x + 3 - a = 0.\end{array}\right.$$

Уравнение $\sin x = 0$ имеет на отрезке $[0; \pi/2]$ единственное решение $x = 0$ при любом значении a.

Остается выяснить, при каких значениях a второе уравнение совокупности не имеет решений на отрезке $[0; \pi/2]$ или имеет единственное решение $x = 0$.

Уравнение $2\cos x - 4\sin^2 x + 3 - a = 0$ приводим к равносильному: $4\cos^2 x + 2\cos x - a - 1 = 0.$ (1)

Пусть $t = \cos x$, где $0 \leqslant t \leqslant 1$.

$4t^2 + 2t - a - 1 = 0,$ (2)

$D_1 = 4a + 5.$

Рассмотрим ряд случаев.

1) $D_1 < 0$ (рис. 646), в этом случае $a < -5/4$. Уравнение (1) не имеет решений на отрезке $[0; \pi/2]$ при $a < -5/4$.

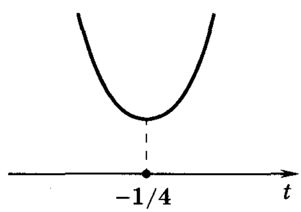


Рис. 646

2) Пусть $f(t) = 4t^2 + 2t - a - 1$. Система неравенств

$$\begin{cases} D_1 > 0,\\ f(0) < 0,\\ f(1) < 0\end{cases}$$

задает такое расположение параболы, которое указано на рисунке 647 (штриховкой отмечено множество значений $t = \cos x$, если $x \in [0; \pi/2]$).

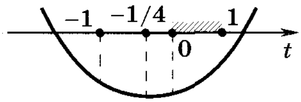


Рис. 647

$$\begin{cases} a > -5/4, \\ -a - 1 < 0, \\ 4 + 2 - a - 1 < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a > -5/4, \\ a > -1, \\ a > 5, \end{cases} \quad a > 5.$$

При $a > 5$ уравнение (2) не имеет решений, удовлетворяющих условию $0 \leqslant t \leqslant 1$, а потому уравнение (1) не имеет решений на отрезке $[0; \pi/2]$.

3) $\begin{cases} D_1 > 0, \\ f(1) = 0, \\ f(0) < 0 \end{cases}$ (рис. 648).

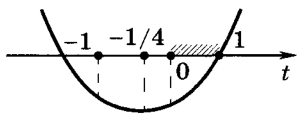


Рис. 648

$$\begin{cases} a > -5/4, \\ a = 5, \\ a > -1, \end{cases} \quad a = 5.$$

Если $a = 5$, то уравнение (2) примет вид

$4t^2 + 2t - 6 = 0$, $t_1 = -3/2$ $(-3/2 < -1)$, $t_2 = 1$.

Уравнение $\cos x = 1$ имеет на отрезке $[0; \pi/2]$ единственное решение $x = 0$.

4) $D_1 = 0$ (рис. 649), тогда $a = -5/4$.

Уравнение $\cos x = -1/4$ не имеет решений на отрезке $[0; \pi/2]$. Значит, уравнение (1) решений не имеет.

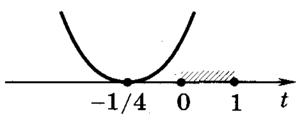


Рис. 649

5) Если $t = 0$, то $a = -1$ и $f(t) = 4t^2 + 2t$. График представлен на рисунке 650.

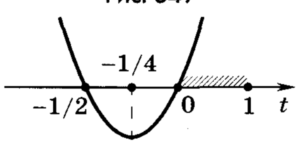


Рис. 650

Уравнение $\cos x = 0$ имеет решение $x = \pi/2$ на отрезке $[0; \pi/2]$.

Уравнение $\cos x = -1/2$ не имеет решений на этом отрезке.

Итак, при $a = -1$ данное уравнение на отрезке $[0; \pi/2]$ имеет два решения: $x = 0$, $x = \pi/2$.

6) $\begin{cases} D_1 > 0, \\ f(0) > 0 \end{cases}$ (рис. 651);

$\begin{cases} a > -5/4, \\ -a - 1 > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} a > -5/4, \\ a < -1; \end{cases}$

$-5/4 < a < -1.$

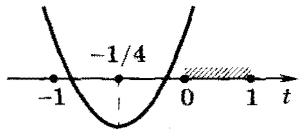


Рис. 651

Итак, если $a \in (-5/4; -1)$, то уравнение (2) не имеет решений, удовлетворяющих условию $t \in [0; 1]$. Значит, уравнение (1) не имеет решений на отрезке $[0; \pi/2]$.

Замечание

Чтобы выяснить, при каких значениях a данное уравнение имеет единственное решение на отрезке $[0; \pi/2]$, можно сначала узнать, при каких a данное уравнение имеет более одного решения на отрезке $[0; \pi/2]$ или не имеет решений. Уравнение $\sin 2x + \sin 3x = a\sin x$ равносильно совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = 0, \\ 4\cos^2 x + 2\cos x - a - 1 = 0. \end{array}\right.$$

Уравнение $\sin x = 0$ имеет единственное решение $x = 0$ на отрезке $[0; \pi/2]$ при любом значении a. Значит, нам остается узнать, при каких значениях a уравнение $4\cos^2 x + 2\cos x - a - 1 = 0$ (1) имеет на отрезке $[0; \pi/2]$ хотя бы один корень, кроме $x = 0$. Решая уравнение (1), учтем, что $a \neq 5$, так как при $a = 5$ уравнение (1) равносильно уравнению $\cos x = 1$, которое на отрезке $[0; \pi/2]$ имеет единственное решение $x = 0$.

Пусть $\cos x = t$, где $0 \leqslant t < 1$.

$4t^2 + 2t - 1 - a = 0$. Нас интересует случай, когда $D_1 \geqslant 0$, т. е. $a \geqslant -5/4$. Находим t_1 и t_2:

$t_1 = (-1 + \sqrt{5 + 4a})/4, \quad t_2 = (-1 - \sqrt{5 + 4a})/4.$

Заметим, что $(-1 - \sqrt{5+4a})/4 < 0$ при $a \geqslant -5/4$. Остается уравнение $\cos x = (-1 + \sqrt{5+4a})/4$. Оно имеет на отрезке $[0; \pi/2]$ корней, если значение a удовлетворяет системе неравенств

$$\begin{cases} a \geqslant -5/4, \\ 0 \leqslant -(1 + \sqrt{5+4a})/4 < 1. \end{cases} \qquad \begin{cases} a \geqslant -5/4, \\ \sqrt{5+4a} < 5, \\ \sqrt{5+4a} \geqslant 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \geqslant -5/4, \\ 5 + 4a < 25, \\ 5 + 4a \geqslant 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} a \geqslant -5/4, \\ a < 5, \\ a \geqslant -1; \end{cases} \qquad -1 \leqslant a < 5.$$

Итак, если $a \in [-1; 5)$, то данное уравнение имеет более одного решения на отрезке $[0; \pi/2]$, а потому, если $a \in (-\infty; -1) \cup [5; +\infty)$, то данное уравнение имеет на отрезке $[0; \pi/2]$ единственное решение $x = 0$.

Ответ. 1) При $a = 1$ уравнение имеет два корня $x = 0$, $x = \pi/3$ на отрезке $[0; \pi/2]$.
2) При $a \in (-\infty; -1) \cup [5; +\infty)$ данное уравнение имеет единственное решение $x = 0$ на отрезке $[0; \pi/2]$.

№ 12. При каких значениях параметра m уравнение $(2m + 3)\cos^2 x + (m + 1)\cos x + 4 = 0$ на интервале $(-\pi; \pi)$ имеет два различных корня?

Решение.
Пусть $t = \cos x$, где $t \in (-1; 1]$.
Решаем уравнение $(2m + 3)t^2 + (m + 1)t + 4 = 0.(1)$

Рис. 652

При $t = 1$ уравнение $\cos x = 1$ имеет на интервале $(-\pi; \pi)$ один корень $x = 0$ (рис. 652). В этом случае $m = -8/3$.

Заметим, что каждому значению $t \in (-1; 1)$ соответствуют два различных корня уравнения $\cos x = t$ из интервала $(-\pi; \pi)$. Поэтому данная задача свелась к следующей: при каких значениях параметра m уравнение (1) имеет одно решение $t \in (-1; 1)$?
1) Если $m = -3/2$, то $t = 8$. Но $8 \notin (-1; 1)$.
В этом случае решений нет.

2) Пусть $m \neq -3/2$. Вводим функцию
$f(t) = (2m+3)t^2 + (m+1)t + 4$.
На рисунке 653, *а—д* покажем схематически, как должна располагаться парабола в интересующих нас случаях. Направление ветвей параболы определяется знаком выражения $(2m+3)$ — коэффициента при t^2.

Из рисунка 653, *а* видно, что при $(2m+3) < 0$ (ветви параболы направлены вниз) $f(-1) > 0$, а $f(1) < 0$. Если $2m+3 > 0$ (ветви вверх), то $f(-1) < 0$, а $f(1) > 0$,

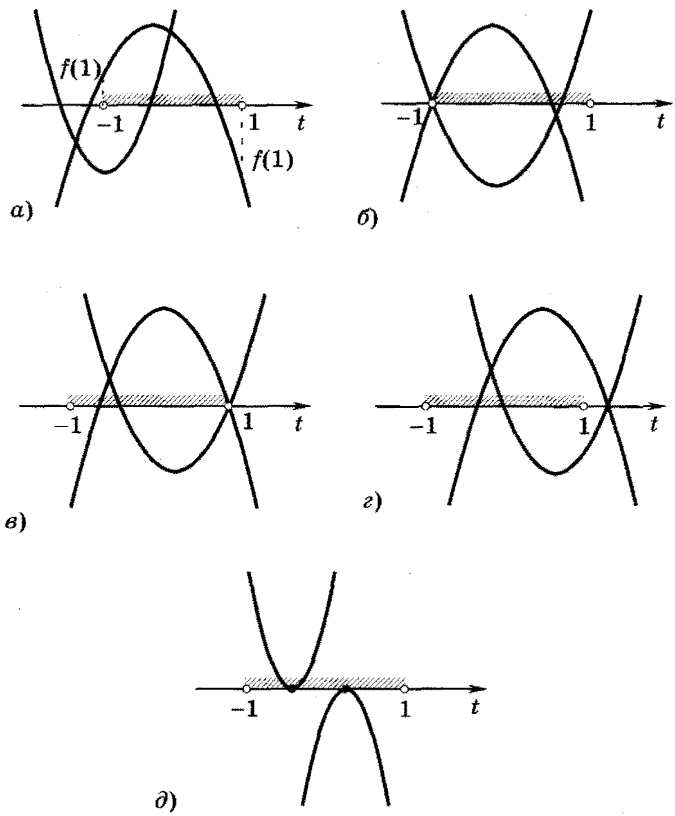


Рис. 653

тогда $f(-1)\cdot f(1) < 0$; аналогично в случае *г* $f(-1)\cdot f(1) < 0$; $(m+6)(3m+8) < 0$; $m \in (-6; -8/3)$.

В случае *б* $m = -6$. Тогда уравнение (1) имеет два корня: $t_1 = -1, t_2 = 4/9$. Но $-1 \notin (-1; 1)$. Остается один корень $4/9 \in (-1; 1)$.

В случае *в* $m = -8/3$. Уравнение (1) тогда имеет корни $t_1 = 1$, $t_2 = -12/7$. Но ни один из них не принадлежит интервалу $(-1; 1)$.

В случае *д* имеем систему

$$\begin{cases} D = 0, \\ -1 < -\dfrac{B}{2A} < 1, \text{ где } D = m^2 - 30m - 47; \end{cases}$$

$-\dfrac{B}{2A}$ — абсцисса вершины параболы

$f(x) = Ax^2 + Bx + C$.

$$-\frac{B}{2A} = \frac{-m-1}{2(2m+3)}; \quad \begin{cases} m^2 - 30m - 47 = 0, \\ \dfrac{-m-1}{2(2m+3)} > -1, \\ \dfrac{-m-1}{2(2m+3)} < 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} m = 15 \pm 4\sqrt{17}, \\ (3m+5)/(2m+3) > 0, \\ (5m+7)/(2m+3) > 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} m = 15 \pm 4\sqrt{17}, \\ \left[\begin{array}{l} m < -5/3, \\ m > -7/5; \end{array}\right. \end{cases}$$

$m = 15 + 4\sqrt{17}$.

Ответ. $[-6; -8/3) \cup \{15 + 4\sqrt{17}\}$.

№ 13. Решите уравнение $x \sin x = a|x|$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} a \in R, \\ x \in R. \end{cases}$

Заметим, что данное уравнение имеет решение $x_1 = 0$ при любом значении $a \in R$. (▶1)

Пусть $x \neq 0$. Тогда получим совокупность двух систем:

$$\left[\begin{array}{ll} \begin{cases} x > 0, \\ \sin x = a, \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} x < 0, \\ \sin x = -a. \end{cases} & (2) \end{array}\right.$$

Решаем систему (1):

1) $|a| > 1$. Решений нет. ▶2

2) $a = 1$: $\sin x = 1$, $x = \pi/2 + 2\pi k$. $k \in \mathrm{Z}$.
Учтем, что $x > 0$.
Тогда $x_2 = \pi/2 + 2\pi k$, $k \in \mathrm{N} \cup \{0\}$. ▶3

3) $a = -1$: $\sin x = -1$, $x_3 = -\pi/2 + 2\pi n$, $n \in \mathrm{N}$. ▶4

4) $0 < a < 1$ (рис. 654):
$x_4 = (-1)^m \arcsin a + \pi m$, $m \in \mathrm{N} \cup \{0\}$. ▶5

5) $-1 < a < 0$ (рис. 655): ▶6

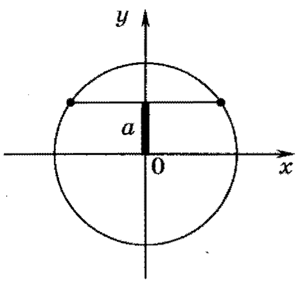


Рис. 654

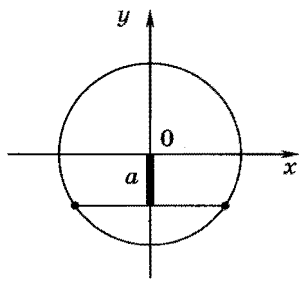


Рис. 655

$x_5 = (-1)^l \arcsin a + \pi l$, $l \in \mathrm{N}$.

6) $a = 0$: $x_6 = \pi t$, $t \in \mathrm{N}$. ▶7

Решим систему (2):

1) $|-a| > 1$: $\left[\begin{array}{l} a > 1, \\ a < -1. \end{array}\right.$ Решений нет. ▶8

2) $a = 0$: $x_7 = \pi p$, $p = -1, -2, -3, \ldots$. ▶9

3) $a = -1$: $\sin x = 1$, $x_8 = \pi/2 + 2\pi q$, ▶10
$q = -1, -2, -3, \ldots$.

4) $a = 1$: $\sin x = -1$, $x_9 = -\pi/2 + 2\pi h$, ▶11
$h = 0, -1, -2, \ldots$.

5) $0 < -a < 1,\ -1 < a < 0$:

$x_{10} = (-1)^{f+1} \arcsin a + \pi f,\ f = -1, -2, -3, \ldots$ (▶12)

6) $-1 < -a < 0,\ 0 < a < 1$:

$x_{11} = (-1)^{c+1} \arcsin a + \pi c,$ (▶13)

$c = 0, -1, -2, -3, \ldots$

Объединим решения на одной оси (рис. 656).

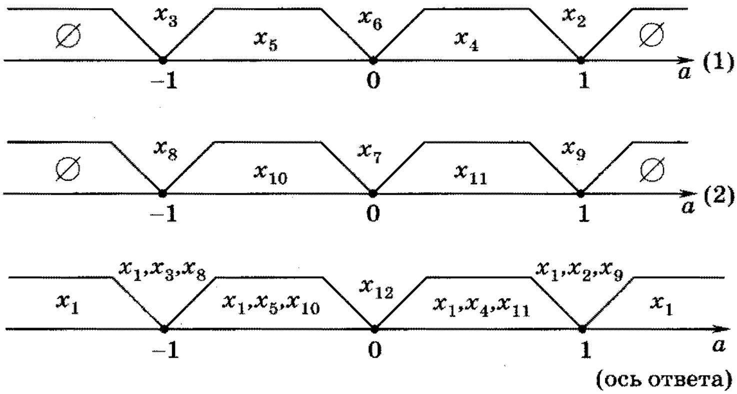


Рис. 656

Заметим, что при $a = 0$ решения объединяются в одно множество:

$x_{12} = \pi d,\ d \in \mathbb{Z}.$ (▶14)

Ответ. 1) Если $|a| > 1$, то $x = 0$.

2) Если $a = -1$, то $x = -\pi/2 + 2\pi n,\ n \in \mathbb{N}$; $x = \pi/2 + 2\pi q,\ q = -1, -2, \ldots$; $x = 0$.

3) Если $a = 1$, то $x = 0$; $x = \pi/2 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$; $x = -\pi/2 + 2\pi h,\ h = -1, -2, \ldots$.

4) Если $a = 0$, то $x = \pi d,\ d \in \mathbb{Z}$.

5) Если $a \in (-1; 0)$, то $x = 0$;
$x = (-1)^l \arcsin a + \pi l,\ l \in \mathbb{N}$.
$x = (-1)^{f+1} \arcsin a + \pi f,\ f = -1, -2, -3, \ldots$.

6) Если $a \in (0; 1)$, то $x = 0$;
$x = (-1)^m \arcsin a + \pi m,\ m = 0, 1, 2, 3, \ldots$
$x = (-1)^{c+1} \arcsin a + \pi c,\ c = 0, -1, -2, -3, \ldots$.

№ 14. При каких действительных значениях a множества решений уравнений $4\cos^2 x = a^2 - 6$ (1) и $1 - \cos 2x = a/6$ (2) совпадают?

Решение.

(1): $4\cos^2 x = a^2 - 6$. Понизим степень уравнения: $\cos 2x = (a^2 - 8)/2$.

1) $|a^2 - 8|/2 > 1$: $\left[\begin{array}{l} a^2 - 8 > 2, \\ a^2 - 8 < -2; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} a^2 > 10, \\ a^2 < 6; \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} |a| > \sqrt{10}; \\ |a| < \sqrt{6}. \end{array}\right.$ (▶1)

Уравнение (1) решений не имеет.

2) $(a^2 - 8)/2 = 0$, $a = \pm 2\sqrt{2}$: $\cos 2x = 0$,
$x_1 = \pi/4 + \pi k/2$, $k \in Z$. (▶2)

3) $(a^2 - 8)/2 = 1$, $a = \pm\sqrt{10}$: $\cos 2x = 1$,
$x_2 = \pi n$, $n \in Z$. (▶3)

4) $(a^2 - 8)/2 = -1$, $a = \pm\sqrt{6}$: $\cos 2x = -1$,
$x_3 = \pi/2 + \pi m$, $m \in Z$. (▶4)

5) $\left\{\begin{array}{l} a \neq \pm\sqrt{6}, \\ a \neq \pm\sqrt{8}, \\ a \neq \pm\sqrt{10}, \\ \dfrac{|a^2 - 8|}{2} < 1; \end{array}\right.$ $a \in (-\sqrt{10}; -\sqrt{8}) \cup (-\sqrt{8}; -\sqrt{6}) \cup \cup (\sqrt{6}; \sqrt{8}) \cup (\sqrt{8}; \sqrt{10})$.

$$2x = \pm\arccos\frac{a^2 - 8}{2} + 2\pi l,\ l \in Z,$$

$$x_4 = \pm(1/2)\arccos\frac{a^2 - 8}{2} + \pi l,\ l \in Z.$$ (▶5)

(2): $1 - \cos 2x = a/6$,
$\cos 2x = 1 - a/6$.

1) $|1 - a/6| > 1$: $\left[\begin{array}{l} 1 - a/6 > 1, \\ 1 - a/6 < -1; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} a < 0, \\ a > 12. \end{array}\right.$

Решений нет. (▸6)

2) $1 - a/6 = 0$, $a = 6$: $\cos 2x = 0$, $x_1 = \pi/4 + \pi k/2$, $k \in Z$. (▸7)

3) $1 - a/6 = 1$, $6 - a = 6$, $a = 0$: $\cos 2x = 1$, $x_2 = \pi n$, $n \in Z$. (▸8)

4) $1 - a/6 = -1$, $a = 12$: $\cos 2x = -1$, $x_3 = \pi/2 + \pi m$, $m \in Z$. (▸9)

5) $\begin{cases} |1 - a/6| < 1, \\ a \neq 6, \\ a \neq 12, \end{cases}$ $a \in (0; 6) \cup (6; 12)$.

$2x = \pm\arccos(1 - a/6) + 2\pi l$, $l \in Z$,

$x_5 = \pm(1/2)\arccos(1 - a/6) + \pi l$, $l \in Z$. (▸10)

Проиллюстрируем результаты на координатных прямых (рис. 657).

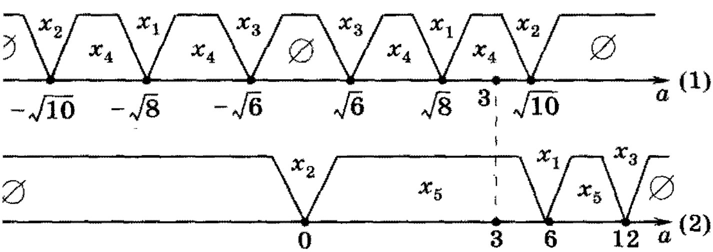


Рис. 657

Узнаем, когда $(a^2 - 8)/2 = 1 - a/6$, учитывая, что $a \in (\sqrt{6}; \sqrt{8}) \cup (\sqrt{8}; \sqrt{10})$.

$3a^2 - 24 = 6 - a$, $3a^2 + a - 30 = 0$.

$a_1 = -10/3$; $a_2 = 3$.

При $a = 3$ множества x_4 и x_5 совпадают. Нам нужно установить, при каких значениях a уравнения равносильны.

Сравнение результатов решений показывает, что при $a \in (-\infty; -\sqrt{10}) \cup (-\sqrt{6}; 0) \cup \{3\} \cup (12; +\infty)$ уравнения равносильны.

Ответ. $a \in (-\infty; -\sqrt{10}) \cup (\sqrt{6}; 0) \cup \{3\} \cup (12; +\infty)$.

Замечание

Приведем другой способ решения этого задания. Нам достаточно найти такие значения a, при которых данные уравнения одновременно не имеют решений или имеют одинаковые решения. Сначала в данных уравнениях перейдем к $\sin^2 x$:

$4\cos^2 x = a^2 - 6$, $4\sin^2 x = 10 - a^2$,

$\sin^2 x = (10 - a^2)/4$.

$1 - \cos 2x = a/6$, $2\sin^2 x = a/6$, $\sin^2 x = a/12$.

1. $\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} (10-a^2)/4 > 1, \\ (10-a^2)/4 < 0; \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} a/12 > 1, \\ a/12 < 0; \end{array}\right. \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} a^2 < 6, \\ a^2 > 10; \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} a > 12, \\ a < 0 \end{array}\right. \end{array}\right.$ (рис. 658).

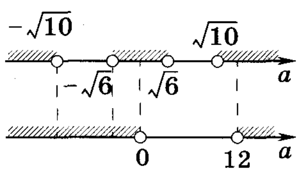


Рис. 658

$a \in (-\infty; -\sqrt{10}) \cup (-\sqrt{6}; 0) \cup (12; +\infty)$.

2. $\begin{cases} 4\sin^2 x = 10 - a^2, \\ 4\sin^2 x = a/3; \end{cases}$ $\begin{cases} 10 - a^2 = a/3, \\ a \geqslant 0; \end{cases}$

$\begin{cases} 3a^2 + a - 3 = 0, \\ a \geqslant 0; \end{cases}$ $\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} a = 3, \\ a = -20/6,\ a = 3, \end{array}\right. \\ a \geqslant 0. \end{array}\right.$

При $a = 3$ получаем уравнение $\sin^2 x = 1/4$. Это уравнение имеет решения. Значит, при $a = 3$ данные уравнения имеют одинаковые решения.

Поэтому при $a \in (-\infty; -\sqrt{10}) \cup (-\sqrt{6}; 0) \cup \{3\} \cup (12; +\infty)$ данные уравнения равносильны.

№ 15. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $2\cos 2x + 2a \sin x + a - 1 = 0$ имеет единственное решение на интервале $(-\pi/2; 0)$.

Решение.

Приведем данное уравнение к равносильному:

$4\sin^2 x - 2a \sin x - a - 1 = 0.$

Обозначим $\sin x = t$, где $t \in (-1; 0)$. Получим уравнение второй степени $4t^2 - 2at - a - 1 = 0$, где $t \in (-1; 0)$. Найдем его корни:

$D_1 = a^2 + 4a + 4 = (a + 2)^2$, $t_1 = (a + 1)/2$; $t_2 = -1/2.$

На интервале $(-\pi/2; 0)$ уравнение $\sin x = -1/2$ имеет единственное решение $x = -\pi/6$ при любом значении $a \in \mathrm{R}$.

Нам остается выяснить, при каких значениях a уравнение $\sin x = (a + 1)/2$ не имеет решений на интервале $(-\pi/2; 0)$ или имеет решение $x = -\pi/6$. Учитывая, что $t \in (-1; 0)$, решаем совокупность неравенств

$\left[\begin{array}{l}(a+1)/2 \leqslant -1,\\ (a+1)/2 \geqslant 0.\end{array}\right.$ Получим $\left[\begin{array}{l}a \leqslant -3,\\ a \geqslant -1.\end{array}\right.$

Если $x = -\pi/6$, то $(a + 1)/2 = -1/2$. Тогда $a = -2$.

Ответ. $a \in (-\infty; -3] \cup \{-2\} \cup [-1; +\infty)$.

Замечание

Решая уравнение $\sin x = (a + 1)/2$, можно сначала выяснить, при каких значениях a это уравнение имеет решения на интервале $(-\pi/2; 0)$. Получим систему неравенств

$\begin{cases}\dfrac{a+1}{2} > -1,\\[2mm] \dfrac{a+1}{2} < 0,\end{cases}$ откуда $\begin{cases}a+1 < 0,\\ a+1 > -2;\end{cases}$ $\begin{cases}a < -1,\\ a > -3;\end{cases}$ $a \in (-3; -1)$.

Если $a \in (-3; -1)$, то, чтобы решение было единственным, надо, чтобы $(a + 1)/2 = -1/2$: $a = -2$. Тогда при $a \in (-\infty; -3] \cup \{-2\} \cup [-1; +\infty)$ данное уравнение имеет единственное решение на интервале $(-\pi/2; 0)$.

№ 16. Докажите, что уравнение

$$\frac{\sin 3x \cdot \cos(\pi/3 - 4x) + 1}{a + \cos(\pi/6 + 7x) - \sin(\pi/3 - x)} = 0$$

имеет решения при любом $a \neq -2$. Найдите решения уравнения.

Решение.

Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \sin 3x \cos(\pi/3 - 4x) = -1, & (1) \\ a + \cos(\pi/6 + 7x) - \sin(\pi/3 - x) \neq 0. & (2) \end{cases}$$

Уравнение (1) равносильно совокупности систем

$$\left[\begin{array}{ll} \begin{cases} \sin 3x = -1, \\ \cos(\pi/3 - 4x) = 1; \end{cases} & (1а) \\ \begin{cases} \sin 3x = 1, \\ \cos(\pi/3 - 4x) = -1. \end{cases} & (2а) \end{array}\right.$$

(1а): $\begin{cases} \sin 3x = -1, \\ \cos(\pi/3 - 4x) = 1; \end{cases}$ $\begin{cases} 3x = -\pi/2 + 2\pi k,\ k \in Z, \\ -\pi/3 + 4x = 2\pi n,\ n \in Z; \end{cases}$

$\begin{cases} x = -\pi/6 + 2\pi k/3,\ k \in Z, \\ x = \pi/12 + \pi n/2,\ n \in Z \end{cases}$ (рис. 659).

Система несовместна.

(1б): $\begin{cases} \sin 3x = 1, \\ \cos(4x - \pi/3) = -1; \end{cases}$ $\begin{cases} x = \pi/6 + 2\pi m/3,\ m \in Z, \\ x = \pi/3 + \pi l/2,\ l \in Z \end{cases}$

(рис. 660).

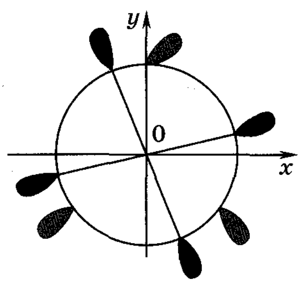


Рис. 659

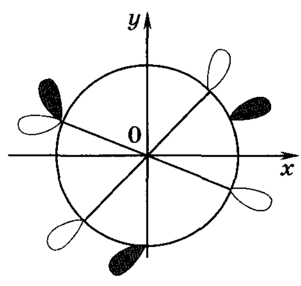


Рис. 660

$x = 5\pi/6 + 2\pi t,\ t \in Z.$

Подставим $x = 5\pi/6 + 2\pi t$, $t \in Z$, в неравенство (2):

$a + \cos(\pi/6 + 35\pi/6) - \sin(\pi/3 - 5\pi/6) \neq 0,$

$a + \cos 6\pi + \sin(\pi/2) \neq 0,$

$a + 2 \neq 0,\ a \neq -2.$

Ответ. $x = 5\pi/6 + 2\pi t$, $t \in Z$, при любом значении $a \neq -2$.

№ 17. Найдите все значения a, при которых уравнение $\sqrt{a - \sqrt{a + \cos x}} = \cos x$ имеет решения.

Решение.

Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \cos x \geqslant 0, \\ a - \sqrt{a + \cos x} = \cos^2 x. \end{cases}$$

И далее:

$$\begin{cases} \cos x \geqslant 0, \\ \sqrt{a + \cos x} = a - \cos^2 x; \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos x \geqslant 0, \\ a - \cos^2 x \geqslant 0, \\ a + \cos x = (a - \cos^2 x)^2. \end{cases}$$

Рассмотрим ряд случаев.

1) Если $a < 0$, то система решений не имеет. Это следует из неравенства $a - \cos^2 x \geqslant 0$.
2) Если $a = 0$, то данное уравнение примет вид $\sqrt{-\sqrt{\cos x}} = \cos x$. Получаем уравнение $\cos x = 0$: $x = \pi/2 + \pi k$, $k \in Z$.
3) Пусть $a > 0$. Решаем уравнение $a + \cos x = (a - \cos^2 x)^2$.

$a^2 - 2a\cos^2 x + \cos^4 x = a + \cos x,$

$a^2 - a(2\cos^2 x + 1) + \cos^4 x - \cos x = 0.$

Это уравнение — второй степени относительно a.

$D = (2\cos^2 x + 1)^2 - 4\cos^4 x + 4\cos x = (2\cos x + 1)^2,$

$$\left[\begin{aligned} &a = \cos^2 x + \cos x + 1, \\ &a = \cos^2 x - \cos x. \end{aligned}\right.$$

Теперь переходим к системе

$$\begin{cases} \cos x \geqslant 0, \\ a - \cos^2 x \geqslant 0, \\ \left[\begin{array}{l} \cos^2 x + \cos x + 1 - a = 0, \\ \cos^2 x - \cos x - a = 0, \end{array}\right. \end{cases}$$

которая приводится к совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{ll} \begin{cases} \cos^2 x + \cos x + 1 - a = 0, \\ \cos x \geqslant 0, \\ a - \cos^2 x \geqslant 0, \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} \cos^2 x - \cos x - a = 0, \\ \cos x \geqslant 0, \\ a - \cos^2 x > 0. \end{cases} & (2) \end{array}\right.$$

Рассмотрим систему (1).

На координатной прямой параметра a будем отмечать факт наличия или отсутствия решений системы (1) (рис. 661).

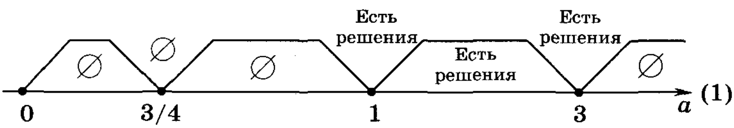


Рис. 661

Уравнение $\cos^2 x + \cos x + 1 - a = 0$ — квадратное относительно $\cos x$.

$D = 4a - 3$.

а) Если $D_1 < 0$, т. е. $0 < a < 3/4$, то система (1) решений не имеет.

б) $D = 0$: $a = 3/4$, $\cos^2 x + \cos x + 1/4 = 0$, $\cos x = -1/2$. Но $\cos x \geqslant 0$. Поэтому у системы (1) при $a = 3/4$ решений нет.

в) $D > 0$: $a > 3/4$. Уравнение имеет два корня:

$$\left[\begin{array}{l} \cos x = (-1 + \sqrt{4a - 3})/2, \\ \cos x = (-1 - \sqrt{4a - 3})/2. \end{array}\right.$$

Заметим, что $(-1 - \sqrt{4a-3})/2 < 0$ при $a > 3/4$.

Узнаем теперь, при каких значениях $a > 3/4$ уравнение $\cos x = (-1 + \sqrt{4a-3})/2$ имеет решения, учитывая, что $0 \leqslant \cos x \leqslant 1$:

$$\begin{cases}(-1+\sqrt{4a-3})/2 \geqslant 0,\\ (-1+\sqrt{4a-3})/2 \leqslant 1;\end{cases} \qquad \begin{cases}\sqrt{4a-3} \geqslant 1,\\ \sqrt{4a-3} \leqslant 3;\end{cases}$$

$$\begin{cases}4a-3 \geqslant 1,\\ 4a-3 \leqslant 9;\end{cases} \qquad \begin{cases}a \geqslant 1,\\ a \leqslant 3;\end{cases} \qquad a \in [1;\, 3].$$

Подставим выражение $(-1 + \sqrt{4a-3})/2$ вместо $\cos x$ в неравенство $a - \cos^2 x \geqslant 0$:

$a - (1 - 2\sqrt{4a-3} + 4a - 3)/4 \geqslant 0$, $2 + 2\sqrt{4a-3} \geqslant 0$.

Это неравенство верно при $a \in [1;\, 3]$.

А теперь займемся системой (2).

$\cos^2 x - \cos x - a = 0$. Дискриминант данного квадратного относительно $\cos x$ уравнения обозначим D': $D' = 1 + 4a$. Если $a > 0$, то $D' > 0$:

$$\left[\begin{aligned}&\cos x = (1+\sqrt{1+4a})/2,\\ &\cos x = (1-\sqrt{1+4a})/2.\end{aligned}\right.$$

Легко видеть, что $(1 + \sqrt{1+4a})/2 > 1$, если $a > 0$.

Узнаем, при каких значениях $a > 0$ уравнение $\cos x = (1 - \sqrt{1+4a})/2$ имеет решения при условии, что $0 \leqslant \cos x \leqslant 1$:

$0 \leqslant (1 - \sqrt{1+4a})/2 \leqslant 1$,

$$\begin{cases}\sqrt{1+4a} \leqslant 1,\\ \sqrt{1+4a} \geqslant -1,\end{cases} \qquad \sqrt{1+4a} \leqslant 1, \quad 1+4a \leqslant 1, \qquad a \leqslant 0.$$

Итак, уравнение $\cos x = (1 - \sqrt{1+4a})/2$, а значит, и система (2) при $a > 0$ решений не имеет (рис. 662). На рисунке 663 сведены результаты решения данного уравнения для всех рассмотренных случаев:

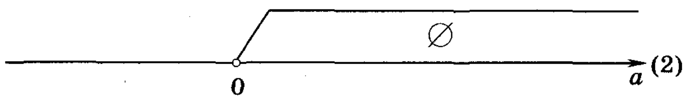


Рис. 662

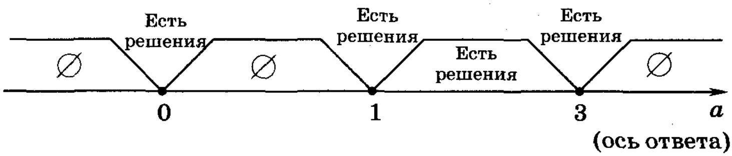


Рис. 663

<u>Ответ</u>. При $a \in [1;\ 3] \cup \{0\}$ данное уравнение имеет решения.

<u>*Замечание*</u>

При $a > 0$ приведем данное уравнение к совокупности двух систем

$$\left[\begin{array}{ll}\begin{cases}\cos^2 x + \cos x + 1 - a = 0, \\ \cos x \geqslant 0, \\ a - \cos^2 x \geqslant 0;\end{cases} & (1) \\ \begin{cases}\cos^2 x - \cos x - a = 0, \\ \cos x \geqslant 0, \\ a - \cos^2 x \geqslant 0.\end{cases} & (2)\end{array}\right.$$

Дальше можно решать другим способом. Покажем его.

Решаем систему (1). Уравнение $\cos^2 x + \cos x + 1 - a = 0$ — второй степени относительно $\cos x$.

$\cos x = (-1 \pm \sqrt{4a - 3})/2$, если $a \geqslant 3/4$.

1) Рассмотрим $\cos x = (-1 + \sqrt{4a - 3})/2$. Это уравнение имеет решения, удовлетворяющие системе (1), если

$$\begin{cases}0 \leqslant (-1 + \sqrt{4a - 3})/2 \leqslant 1, \\ a \geqslant 3/4;\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sqrt{4a - 3} \leqslant 3, \\ \sqrt{4a - 3} \geqslant 1, \\ a \geqslant 3/4;\end{cases} \qquad \begin{cases}4a - 3 \leqslant 9, \\ 4a - 3 \geqslant 1, \\ a \geqslant 3/4;\end{cases}$$

$$\begin{cases} a \leqslant 3, \\ a \geqslant 1, \\ a \geqslant 3/4. \end{cases} \qquad a \in [1; 3].$$

2) $\cos x = (-1 - \sqrt{4a-3})/2$. Видим, что неравенство $(-1 - \sqrt{4a-3})/2 < 0$ при $a \geqslant 3/4$.

Перейдем к системе (2).

$\cos^2 x - \cos x - a = 0$, $\cos x = (1 \pm \sqrt{1+4a})/2$.

Рассмотрим уравнение $\cos x = (1 + \sqrt{1+4a})/2$. Оно имеет решения, если $0 \leqslant (1 + \sqrt{1+4a})/2 \leqslant 1$:

$$\begin{cases} -1 \leqslant \sqrt{1+4a} \leqslant 1, \\ a > 0. \end{cases}$$

Эта система несовместна.

Уравнение $\cos x = (1 - \sqrt{1+4a})/2$ имеет решения, если

$$\begin{cases} 0 \leqslant (1 - \sqrt{1+4a})/2 \leqslant 1, \\ a > 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 \leqslant 1 - \sqrt{1+4a} \leqslant 2, \\ a > 0. \end{cases}$$

Эта система тоже решений не имеет.

Итак, если $a \in \{0\} \cup [1; 3]$, то данное уравнение имеет решения.

№ 18. Найдите значения a, при которых совместна система уравнений

$$\begin{cases} \cos^4 x - (a+2)\cos^2 x + 2a = 0, \\ 4^{\sqrt{y}} + a \cdot 2^{\sqrt{y}} + a - 1 = 0. \end{cases}$$

Решение.

Решим сначала уравнение

$$\cos^4 x - (a+2)\cos^2 x + 2a = 0. \qquad (1)$$

$t = \cos^2 x$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, $t^2 - (a+2)t + 2a = 0$.

$D = (a-2)^2$, $t_1 = 2$; $t_2 = a$.

$2 \notin [0; 1]$. Решаем уравнение $\cos^2 x = a$.

1) $a = 0$: $\cos x = 0$, $x_1 = \pi/2 + \pi k$, $k \in Z$. ▶1

2) $a = 1$: $\cos^2 x = 1$, $x_2 = \pi n$, $n \in Z$. ▶2

3) $a \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$. Решений нет. ▶3

4) $0 < a < 1$: $\cos^2 x = a$, $\cos x = \pm\sqrt{a}$.

$x_3 = \pm\arccos(\pm\sqrt{a}) + 2\pi m,\ m \in Z.$ (▸4)

Уравнение $4^{\sqrt{y}} + a \cdot 2^{\sqrt{y}} + a - 1 = 0$ (2) сводится к квадратному:

$l^2 + al + a - 1 = 0$, где $l = 2^{\sqrt{y}}$, $l \geqslant 1$.

$D = (a-2)^2$, $l_1 = -1$, $l_2 = 1 - a$.

Видим, что $-l \notin [1; +\infty)$.

Решаем уравнение $2^{\sqrt{y}} = 1 - a$. Оно имеет решения, если $1 - a \geqslant 1$: $a \leqslant 0$. (▸5)

Если $a = 0$, то $y_1 = 0$. (▸6)

Если $a < 0$, то $\sqrt{y} = \log_2(1-a)$, $y_2 = \log_2^2(1-a)$. (▸7)

Ответ. Система совместна только при $a = 0$ (рис. 664).

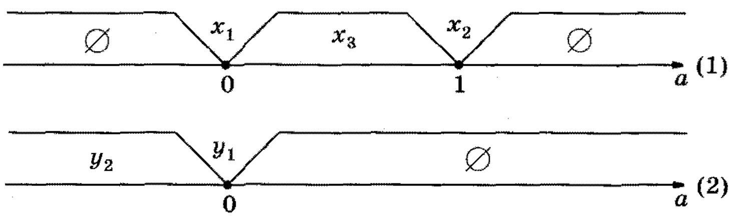


Рис. 664

№ 19. Найдите все значения a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} \sin x \cdot \cos 2y = a^2 + 1, \\ \cos x \cdot \sin 2y = a \end{cases}$$

имеет решения, и решите систему.

Решение.

ООС: $a \in R$, $x \in R$, $y \in R$.

Учитывая, что $|\sin t| \leqslant 1$, $|\cos t| \leqslant 1$, получим систему

$$\begin{cases} a^2 + 1 \leqslant 1, \\ -1 \leqslant a \leqslant 1. \end{cases}$$ Откуда $a = 0$.

А теперь решим данную систему при $a = 0$:

$$\begin{cases} \sin(x + 2y) = 1, \\ \sin(x - 2y) = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2y = \pi/2 + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z}, \\ x - 2y = \pi/2 + 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \pi/2 + \pi(k + n), \ k, n \in \mathbb{Z}, \\ y = \pi(k - n)/2, \ k, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ответ. Система имеет решения только при $a = 0$:

$$\begin{cases} x = \pi/2 + \pi(k + n), \ k, n \in \mathbb{Z}, \\ y = \pi(k - n)/2, \ k, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

4.3. Тригонометрические неравенства с параметром

№ 1. Решите неравенство $\sin x > a$.

Решение.

ООН: $\begin{cases} a \in \mathbb{R}, \\ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$

1) Если $a > 1$, то решений нет. (▸1)
2) Пусть $a = 1$. Неравенство $\sin x > 1$ решений не имеет. (▸2)
3) $a = 0$: $\sin x > 0$, $x \in (2\pi n; \pi + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$. (▸3) (α)
4) $a = -1$: $\sin x > -1$, $x \neq -\pi/2 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. (▸4) (β)
5) $a < -1$: $x \in \mathbb{R}$. (▸5) (γ)
6) $0 < a < 1$ (рис. 665): $x \in (\arcsin a + 2\pi m; \pi - \arcsin a + 2\pi m)$, $m \in \mathbb{Z}$. (▸6)

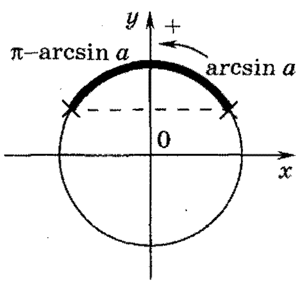


Рис. 665

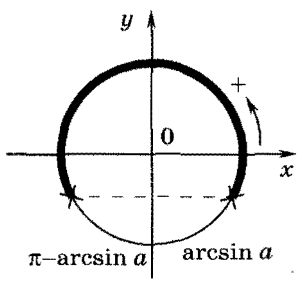


Рис. 666

7) $-1 < a < 0$: рис. 666.

$x \in (\arcsin a + 2\pi m;\ \pi - \arcsin a + 2\pi m)$, (γ)

$m \in \mathrm{Z}$. (▶7)

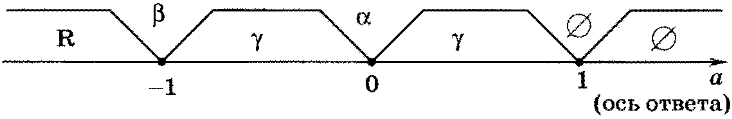


Рис. 667

<u>Ответ</u>. 1) Если $a \in (-1;\ 0) \cup (0;\ 1)$, то $(\arcsin a + 2\pi m;\ \pi - \arcsin a + 2\pi m)$, $m \in \mathrm{Z}$.

2) Если $a \in [1;\ +\infty)$, то решений нет.

3) Если $a \in (-\infty;\ -1)$, то $(-\infty;\ +\infty)$.

4) Если $a = -1$, то x — любое действительное число, кроме $-\pi/2 + 2\pi k$, $k \in \mathrm{Z}$.

5) Если $a = 0$, то $(2\pi n;\ \pi + 2\pi n)$, $n \in \mathrm{Z}$.

№ 2. Решите неравенство $\sin x < b$.

<u>Решение</u>.

ООН: $\begin{cases} b \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

Рассмотрим ряд случаев.

1) $b \leqslant -1$. Решений нет. (▶1)

2) $b = 0$: $\sin x < 0$, $x \in (-\pi + 2\pi k;\ 2\pi k)$, $k \in \mathrm{Z}$. (▶2) (α)

3) $b > 1$: $x \in \mathrm{R}$. (▶3)

4) $b = 1$: $\sin x < 1$, $x \neq \pi/2 + 2\pi n$, $n \in \mathrm{Z}$. (▶4) (β)

5) $b \in (-1;\ 0) \cup (0;\ 1)$: рис. 668 и 669.

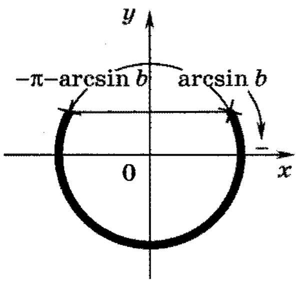


Рис. 668

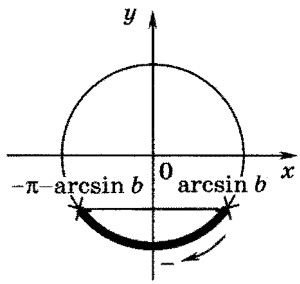


Рис. 669

$x \in (-\pi - \arcsin b + 2\pi m; \arcsin b + 2\pi m)$, (γ)
$m \in Z$. ▶5

Ответ запишите самостоятельно по рисунку 670.

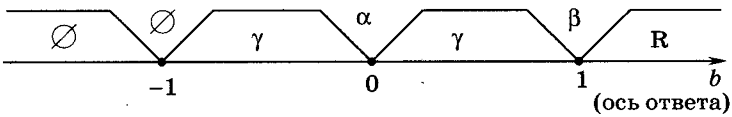


Рис. 670

№ 3. Решите неравенство $\cos x > b$.

Решение.

ООН: $\begin{cases} b \in R, \\ x \in R. \end{cases}$

1) $b \geqslant 1$: решений нет. ▶1
2) $b < -1$: $x \in R$. ▶2
3) $b = -1$: $\cos x > -1$, $x \neq -\pi + 2\pi k$, $k \in Z$. ▶3 (α)
4) $b = 0$: $\cos x > 0$, $x \in (-\pi/2 + 2\pi n; \pi/2 + 2\pi n)$, (β)
$n \in Z$. ▶4
5) $b \in (-1; 0) \cup (0; 1)$: рис. 671 и 672.

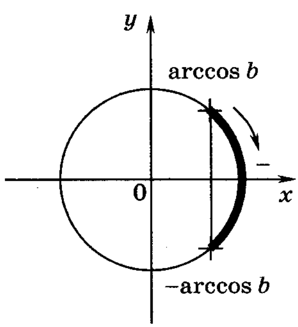


Рис. 671

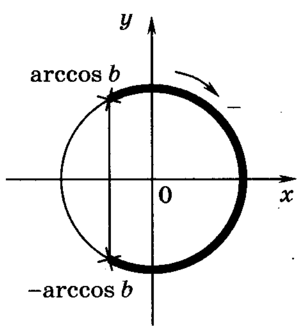


Рис. 672

$x \in (-\arccos b + 2\pi m; \arccos b + 2\pi m)$, $m \in Z$. ▶5 (γ)

Ответ списываем с оси ответа (рис. 673).

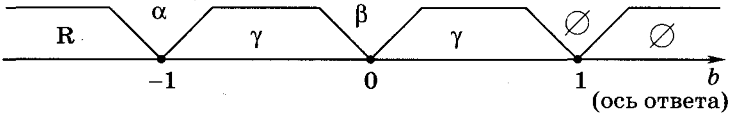


Рис. 673

№ 4. Решите неравенство $\cos x < a$.

Решение.

ООН: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

1) $a > 1$: $x \in \mathrm{R}$. (▸1)
2) $a \leqslant -1$: решений нет. (▸2)
3) $a = 0$: $\cos x < 0$, $x \in (\pi/2 + 2\pi k;\ 3\pi/2 + 2\pi k)$, $k \in \mathrm{Z}$. (▸3) (α)
4) $a = 1$: $\cos x < 1$, $x \neq 2\pi n$, $n \in \mathrm{Z}$. (▸4) (β)
5) $a \in (-1; 0) \cup (0; 1)$: рис. 674 и 675.

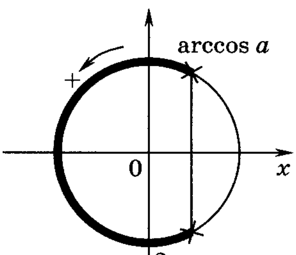


Рис. 674

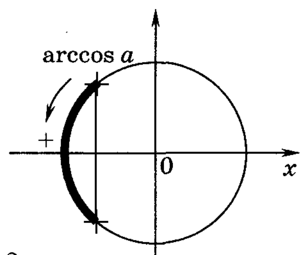


Рис. 675

$x \in (\arccos a + 2\pi m;\ 2\pi - \arccos a + 2\pi m)$, $m \in \mathrm{Z}$. (▸5) (γ)

Ответ приведен на оси параметра (рис. 676).

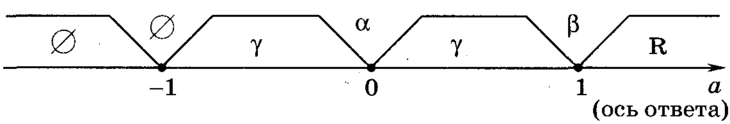


Рис. 676

№ 5. Решите неравенство $\operatorname{tg} x > a$.

Решение.

ООН: $\begin{cases} b \in \mathbf{R}, \\ x \neq \pi/2 + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}. \end{cases}$

1) $a = 0$: $\operatorname{tg} x > 0$, $x \in (\pi n; \pi/2 + \pi n)$, $n \in \mathbf{Z}$. (α)

2) $a > 0$: рис. 677.

$x \in (\operatorname{arctg} a + \pi m; \pi/2 + \pi m)$, $m \in \mathbf{Z}$. (β)

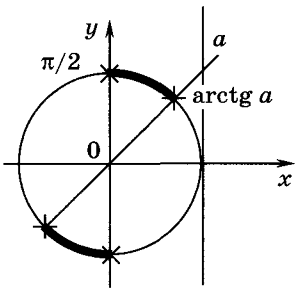


Рис. 677

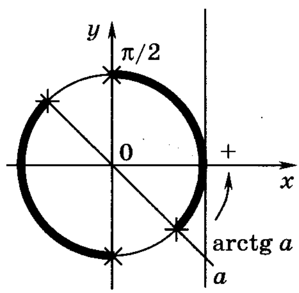


Рис. 678

3) $a < 0$: рис. 678.

$x \in (\operatorname{arctg} a + \pi m; \pi/2 + \pi m)$, $m \in \mathbf{Z}$. (β)

Заполним ось ответа (рис. 679).

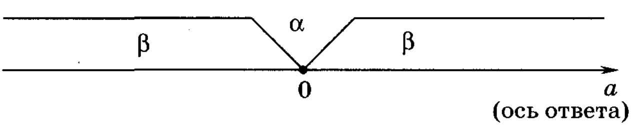


Рис. 679

№ 6. Решите неравенство $\operatorname{tg} x < b$.

Решение.

ООН: $\begin{cases} b \in \mathbf{R}, \\ x \neq \pi/2 + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}. \end{cases}$

1) $b = 0$: $\operatorname{tg} x < 0$, $x \in (-\pi/2 + \pi n; \pi n)$, $n \in \mathbf{Z}$. (α)

2) $b \neq 0$: рис. 680 и 681.

$x \in (-\pi/2 + \pi m; \operatorname{arctg} b + \pi m)$, $m \in \mathbf{Z}$. (β)

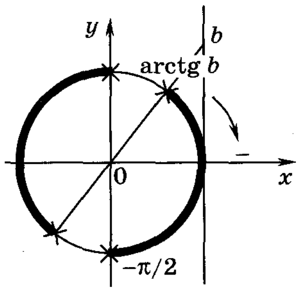


Рис. 680

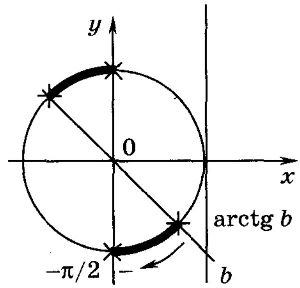


Рис. 681

Представим результаты на оси параметра (рис. 682).

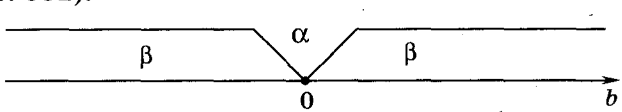


Рис. 682

№ 7. Решите неравенство $\operatorname{ctg} x > a$.

Решение.

ООН: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \neq \pi k,\ k \in \mathrm{Z}. \end{cases}$

1) $a = 0$: $\operatorname{ctg} x > 0$, $x \in (\pi n; \pi/2 + \pi n)$, $n \in \mathrm{Z}$. (α)

2) $a \neq 0$: рис. 683 и 684.

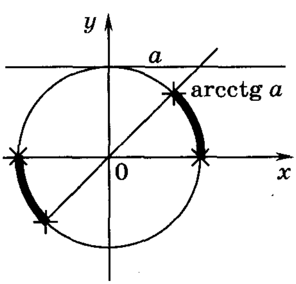


Рис. 683

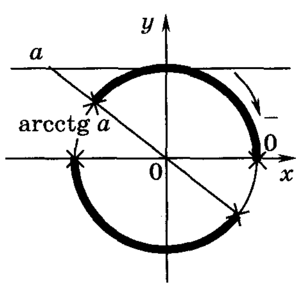


Рис. 684

$x \in (\pi m; \operatorname{arcctg} a + \pi m)$, $m \in \mathrm{Z}$. (β)

Ответ представлен на оси ответа (рис. 685).

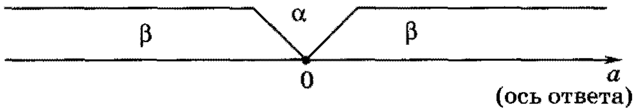


Рис. 685

№ 8. Решите неравенство $\operatorname{ctg} x < b$.

Решение.

ООН: $\begin{cases} b \in \mathrm{R}, \\ x \neq \pi k,\ k \in \mathrm{Z}. \end{cases}$

1) $b = 0$: $\quad \operatorname{ctg} x < 0,\ x \in (-\pi/2 + \pi n;\ \pi n),\ n \in \mathrm{Z}. \qquad (\alpha)$

2) $b \neq 0$: рис. 686 и 687.

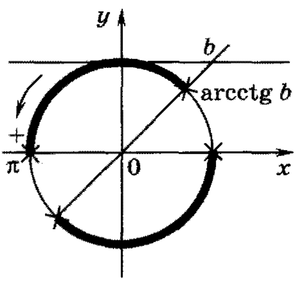


Рис. 686

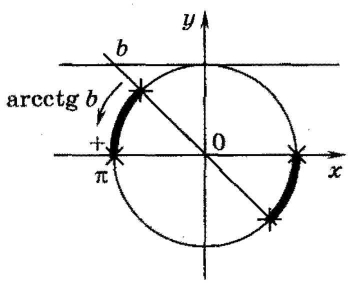


Рис. 687

$$x \in (\operatorname{arcctg} b + \pi m;\ \pi + \pi m),\ m \in \mathrm{Z}. \qquad (\beta)$$

Заполняем ось ответа (рис. 688).

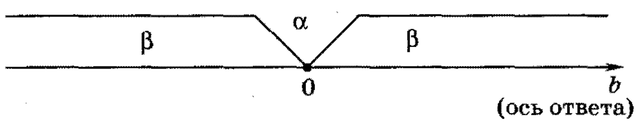


Рис. 688

№ 9. Решите неравенство $\sin x \geqslant a - 1$.

Решение.

ООН: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

1) $a-1=0$, $a=1$: $\sin x \geqslant 0$,
$x \in [2\pi k; \pi + 2\pi k]$, $k \in Z$. ▶1 (α)

2) $a-1=1$, $a=2$: $\sin x \geqslant 1$, $\sin x = 1$,
$x = \pi/2 + 2\pi n$, $n \in Z$. ▶2 (β)

3) $a-1=-1$, $a=0$: $\sin x \geqslant -1$, $x \in R$. ▶3

4) $a > 2$: решений нет. ▶4

5) $a < 0$: $x \in R$. ▶5

6) $a \in (0; 1) \cup (1; 2)$: рис. 689 и 690.

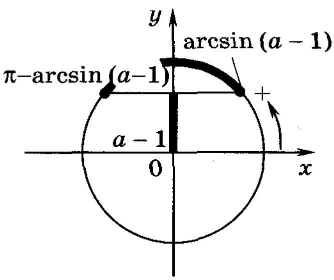


Рис. 689

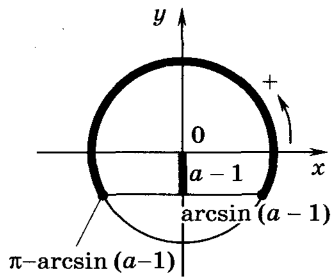


Рис. 690

$x \in (\arcsin (a-1) + 2\pi m;$
$\pi - \arcsin (a-1) + 2\pi m)$, $m \in Z$. ▶6 (γ)

Ответ списывается с оси параметра (рис. 691).

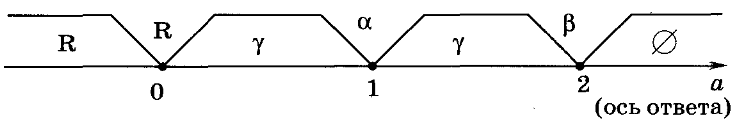


Рис. 691

№ 10. Решите неравенство $\cos (2x - \pi/4) \geqslant a$.

Решение.

ООН: $\begin{cases} a \in R, \\ x \in R. \end{cases}$

1) $a \leqslant -1$: $x \in R$. ▶1

2) $a > 1$: решений нет. ▶2

3) $a = 1$: $\cos (2x - \pi/4) = 1$,
$2x - \pi/4 = 2\pi k$, $k \in Z$, $x = \pi/8 + \pi k$, $k \in Z$. ▶3 (α)

4) $a = 0$: $\cos(2x - \pi/4) \geqslant 0$,
$-\pi/2 + 2\pi n \leqslant 2x - \pi/4 \leqslant \pi/2 + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$,
$-\pi/8 + \pi n \leqslant x \leqslant 3\pi/8 + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$. ▶4 (β)

5) $a \in (-1; 0) \cup (0; 1)$:
$-\arccos a + 2\pi m \leqslant 2x - \pi/4 \leqslant \arccos a + 2\pi m$,
$m \in \mathbb{Z}$,
$\pi/8 - \frac{1}{2}\arccos a + \pi m \leqslant x \leqslant \pi/8 + \frac{1}{2}\arccos a +$
$+ \pi m,\ m \in \mathbb{Z}$. ▶5 (γ)

Заполним ось ответа (рис. 692).

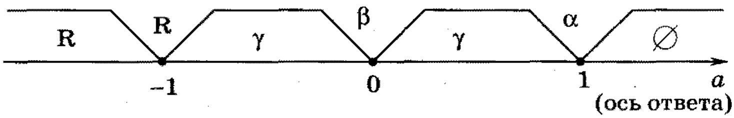


Рис. 692

№ 11. Решите неравенство $\cos^2(x + 1) < a$.

Решение.

ООН: $\begin{cases} a \in \mathbb{R}, \\ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$

$2\cos^2(x + 1) < 2a$, $1 + \cos(2x + 2) < 2a$,
$\cos(2x + 2) < 2a - 1$.

1) $2a - 1 = 0$, $a = 1/2$: $\cos(2x + 2) < 0$,
$\pi/2 + 2\pi k < 2x + 2 < 3/2\pi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$,
$\pi/4 - 1 + \pi k < x < 3/4\pi - 1 + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$. ▶1 (α)

2) $2a - 1 = -1$, $a = 0$: $\cos(2x + 2) < -1$. Решений нет. ▶2

3) $a < 0$. Решений нет. ▶3

4) $2a - 1 = 1$, $a = 1$: $\cos(2x + 2) < 1$, $2x + 2 \neq 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$,
$x \neq -1 + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$. ▶4 (β)

5) $a > 1$: $x \in \mathbb{R}$. ▶5

6) $a \in (0; 1/2) \cup (1/2; 1)$:
$\arccos(2a - 1) + 2\pi m < 2x + 2 < 2\pi -$
$- \arccos(2a - 1) + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}$,

$$\frac{1}{2}\arccos(2a-1)-1+\pi m<x<\pi-1-$$

$$-\frac{1}{2}\arccos(2a-1)+\pi m,\ m\in Z. \quad (\blacktriangleright 6) \qquad (\gamma)$$

Ответ списывается с оси ответа (рис. 693).

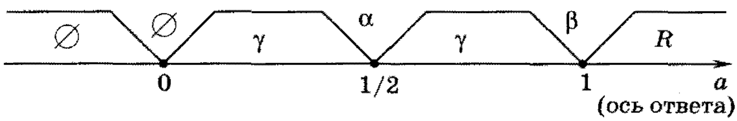


Рис. 693

№ 12. Решите неравенство $\sin x > 2/(a-1)$.

Решение.

ООН: $\begin{cases} a \neq 1, \\ x \in R. \end{cases}$ (▸1)

1) $2/(a-1)=1$, $a=3$: $\sin x>1$. Решений нет. (▸2)
2) $2/(a-1)>1$: $(2-a+1)/(a-1)>0$,
$(3-a)/(a-1)>0$, $a\in(1;3)$. Решений нет. (▸3)
3) $2/(a-1)=-1$, $a=-1$, $\sin x>-1$,
$x\neq-\pi/2+2\pi k$, $k\in Z$. (▸4) (α)
4) $2/(a-1)<-1$, $(a+1)/(a-1)<0$, $a\in(-1;1)$.
В этом случае $x\in R$. (▸5)

5) $\begin{cases} \dfrac{2}{a-1}<1, \\ \dfrac{2}{a-1}>-1; \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{3-a}{a-1}<0, \\ \dfrac{1+a}{a-1}>0 \end{cases}$ (рис. 694).

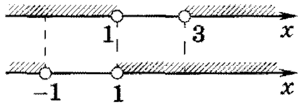


Рис. 694

$a\in(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$:

$$x \in \left(\arcsin \frac{2}{a-1} + 2\pi n; \pi - \arcsin \frac{2}{a-1} + 2\pi n \right),$$

$n \in \mathbb{Z}$. (▶6) (β)

Покажем результаты на оси ответа (рис. 695).

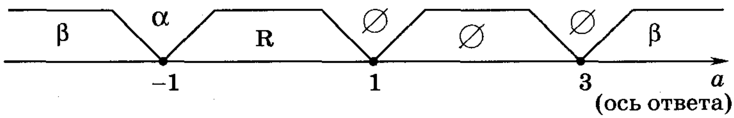


Рис. 695

№ 13. Решите неравенство $\cos x^2 > a - 2$.

Решение.

ООН: $\begin{cases} a \in \mathbb{R}, \\ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$

1) $a - 2 = 0$, $a = 2$: $\cos x^2 > 0$.

$-\pi/2 + 2\pi k < x^2 < \pi/2 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Если $k = 0$, то $x^2 < \pi/2$, $|x| < \sqrt{\pi/2}$,

$x \in (-\sqrt{\pi/2}; \sqrt{\pi/2})$. (α)

Если $k \in \mathbb{N}$, то $\begin{cases} x^2 < \pi/2 + 2\pi k, \\ x^2 > -\pi/2 + 2\pi k, \end{cases}$

$\begin{cases} |x| < \sqrt{\pi/2 + 2\pi k}, \\ |x| > \sqrt{-\pi/2 + 2\pi k} \end{cases}$ (рис. 696).

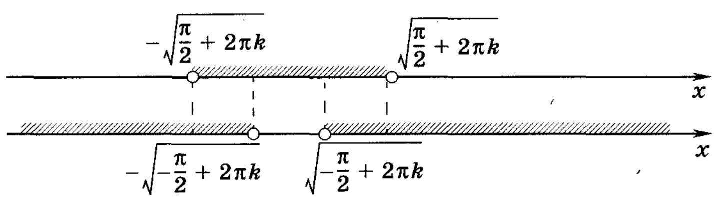


Рис. 696

$x \in (-\sqrt{\pi/2 + 2\pi k}; -\sqrt{-\pi/2 + 2\pi k}) \cup$

$\cup (\sqrt{-\pi/2 + 2\pi k}; \sqrt{\pi/2 + 2\pi k})$, $k \in \mathbb{N}$. (▶1) (β)

2) $a - 2 = 1$, $a = 3$: $\cos x^2 > 1$. Решений нет. (▶2)

3) $a > 3$. Решений нет. (▶3)

4) $a - 2 = -1$, $a = 1$: $\cos x^2 > -1$, $x^2 \neq \pi + 2\pi n$, $n \in \mathrm{N} \cup \{0\}$.

$x \neq \pm\sqrt{\pi + 2\pi n}$, $n \in \mathrm{N} \cup \{0\}$. (▶4) (γ)

5) $a \in (2; 3)$. Тогда $0 < a - 2 < 1$: рис. 697.

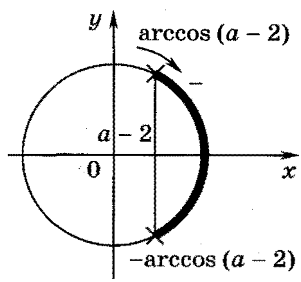


Рис. 697

$-\arccos(a-2) + 2\pi m < x^2 < \arccos(a-2) + 2\pi m$, $m \in \mathrm{N} \cup \{0\}$.

Если $m = 0$, то $x^2 < \arccos(a-2)$,

$|x| < \sqrt{\arccos(a-2)}$. (ω)

Если $m \in \mathrm{N}$, то

$$\begin{cases} x^2 > -\arccos(a-2) + 2\pi m, \\ x^2 < \arccos(a-2) + 2\pi m, \end{cases}$$

$$\begin{cases} |x| > \sqrt{-\arccos(a-2) + 2\pi m}, \\ |x| < \sqrt{\arccos(a-2) + 2\pi m} \end{cases}$$ (рис. 698).

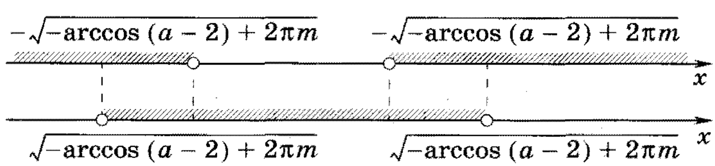


Рис. 698

$x \in (-\sqrt{\arccos(a-2)+2\pi m};$
$-\sqrt{-\arccos(a-2)+2\pi m}) \cup (\sqrt{-\arccos(a-2)+2\pi m};$
$\sqrt{\arccos(a-2)+2\pi m}),\ m \in \mathrm{N}$. (▶5) (φ)

6) $a \in (1; 2)$: $-1 < a-2 < 0$: рис. 699.

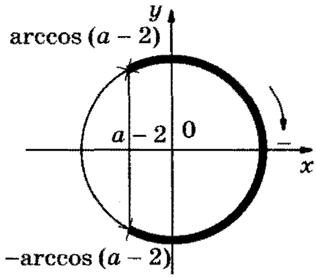


Рис. 699

В этом случае решения те же, что и в случае 5: (ω) и (φ). (▶6)

Ответ списывается с оси параметра (рис. 700).

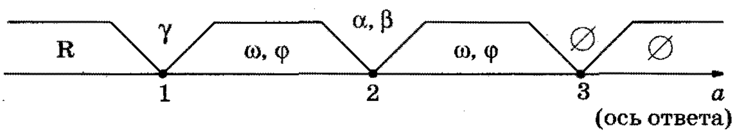


Рис. 700

№ 14. Решите неравенство $\sin x < a/(a-1)$.

<u>Решение.</u>

ООН: $\begin{cases} a \neq 1, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$ (▶1)

1) $a = 0$: $\sin x < 0$, $x \in (-\pi + 2\pi n; 2\pi n)$, $n \in \mathrm{Z}$. (▶2) (α)

2) $a/(a-1) = -1$, $a = 1/2$: $\sin x < -1$.
Решений нет. (▶3)

3) $a/(a-1) > 1$, $1/(a-1) > 0$, $a > 1$: $x \in \mathrm{R}$. (▶4)

4) $a/(a-1) < -1$, $(2a-1)/(a-1) < 0$, $1/2 < a < 1$.
Решений нет. (▶5)

5) $\begin{cases} -1 < a/(a-1) < 1, \\ a \neq 0, \end{cases}$ $\begin{cases} (2a-1)/(a-1) > 0, \\ a \neq 0, \\ 1/(a-1) < 0, \end{cases}$

$\begin{cases} a < 1/2, \\ a < 1, \\ a \neq 0, \end{cases}$ $\begin{cases} a < 1/2, \\ a \neq 0. \end{cases}$

$x \in \left(-\pi - \arcsin\dfrac{a}{a-1} + 2\pi k;\ \arcsin\dfrac{a}{a-1} + 2\pi k\right),$

$k \in Z.$ ▶6 (β)

Заполним ось ответа (рис. 701).

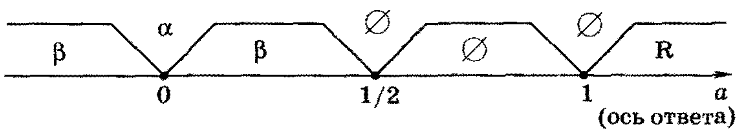


Рис. 701

№ 15. Решите неравенство $\cos x > 1/(a+1)$.

Решение.

ООН: $\begin{cases} a \neq -1, \\ x \in R. \end{cases}$ ▶1

1) $a = 0$: $\cos x > 1$. Решений нет. ▶2

2) $1/(a+1) > 1$, $(-a)/(a+1) > 0$, $-1 < a < 0$. Решений нет. ▶3

3) $1/(a+1) = -1$; $a = -2$: $\cos x > -1$, $x \neq \pi + 2\pi k$, $k \in Z$. (α) ▶4

4) $1/(a+1) < -1$, $\dfrac{2+a}{a+1} < 0$, $-2 < a < -1$: $x \in R$. ▶5

5) $a \in (-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$:

$x \in \left(-\arccos\dfrac{1}{a+1} + 2\pi n;\ \arccos\dfrac{1}{a+1} + 2\pi n\right),$

$n \in Z.$ ▶6 (β)

Ответ представлен на оси ответа (рис. 702).

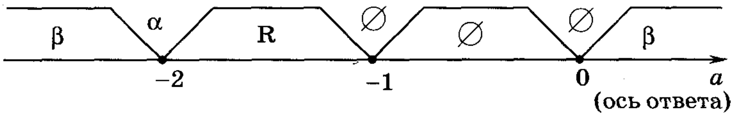


Рис. 702

№ 16. Решите неравенство $\cos x < \dfrac{a-1}{a+2}$.

Решение.

ООН: $\begin{cases} a \neq -2, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$ ▶1

1) $a = 1$: $\cos x < 0$, $x \in (\pi/2 + 2\pi k;\ 3\pi/2 + 2\pi k)$, $k \in \mathrm{Z}$. ▶2 (α)
2) $(a-1)/(a+2) > 1$, $a < -2$: $x \in \mathrm{R}$. ▶3
3) $(a-1)/(a+2) \leqslant -1$, $(2a+1)/(a+2) \leqslant 0$, $-2 < a \leqslant -1/2$. Решений нет. ▶4
4) $a \in (-1/2; 1) \cup (1; +\infty)$:

$$x \in \left(\arccos \frac{a-1}{a+2} + 2\pi n; \right. \qquad (\beta)$$

$$\left. 2\pi - \arccos \frac{a-1}{a+2} + 2\pi n \right),\ n \in \mathrm{Z}. \quad ▶5$$

Заполним ось ответа (рис. 703).

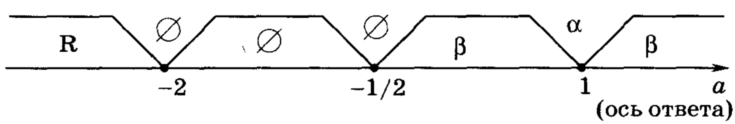


Рис. 703

№ 17. Решите неравенство $a \sin x > 2$.

Решение.

ООН: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

1) $a = 0$: $0 \cdot \sin x > 2$. Решений нет.
2) $a > 0$: $\sin x > 2/a$.
   а) $a = 2$: $\sin x > 1$. Решений нет.

б) $0 < a < 2$. Решений нет.

в) $a > 2$:

$x \in (\arcsin(2/a) + 2\pi n; \pi - \arcsin(2/a) + 2\pi n)$,
$n \in \mathbb{Z}$. (α)

3) $a < 0$: $\sin x < 2/a$.

а) $a = -2$: $\sin x < -1$. Решений нет.

б) $-2 < a < 0$. Решений нет.

в) $a < -2$:

$x \in (-\pi - \arcsin(2/a) + 2\pi n; \arcsin(2/a) + 2\pi n)$,
$n \in \mathbb{Z}$. (β)

Ответ списывается с оси ответа (рис. 704 или 705).

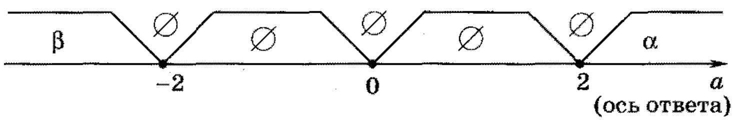


Рис. 704

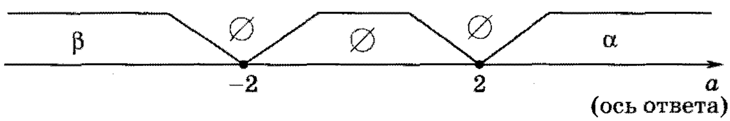


Рис. 705

Ответ. 1) Если $a > 2$, то $(\arcsin(2/a) + 2\pi n; \pi - \arcsin(2/a) + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$.

2) Если $a < -2$, то $(-\pi - \arcsin(2/a) + 2\pi n; \arcsin(2/a) + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$.

3) Если $|a| \leqslant 2$, то решений нет.

№ 18. Решите неравенство $\sin(ax - 2) \leqslant a$, где $-1 < a < 0$.

Решение.

Из рисунка 706:

$-\pi - \arcsin a + 2\pi k \leqslant ax - 2 \leqslant \arcsin a + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$,

$2 - \pi - \arcsin a + 2\pi k \leqslant ax \leqslant 2 + \arcsin a + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Учтем, что $-1 < a < 0$.

$2/a + (\arcsin a)/a + 2\pi k/a \leqslant x \leqslant 2/a - \pi/a -$
$-(\arcsin a)/a + 2\pi k/a,\ k \in \mathbb{Z}.$

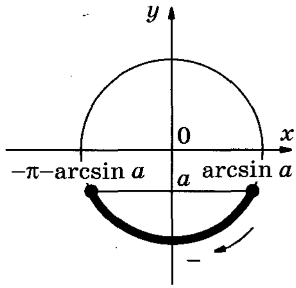


Рис. 706

Ответ. $[2/a + (\arcsin a)/a + 2\pi k/a;\ 2/a - \pi/a -$
$-(\arcsin a)/a + 2\pi k/a],\ k \in \mathbb{Z}.$

№ 19. Решите неравенство $(b-1)\cos x < 1$.

Решение.

ООН: $\begin{cases} b \in \mathbb{R}, \\ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$

$b = 1$: $0 \cdot \cos x < 1,\ x \in \mathbb{R}.$ ▶1

$b \neq 1$:

1) $b > 1$: $\cos x < 1/(b-1)$.

Рассмотрим ряд случаев, учитывая, что $1/(b-1) > 0$.

а) $\begin{cases} 1/(b-1) > 1, \\ b > 1; \end{cases}$ $\begin{cases} b < 2, \\ b > 1. \end{cases}$ Тогда $x \in \mathbb{R}$. ▶2

б) $\begin{cases} 1/(b-1) < 1, \\ b > 1; \end{cases}$ $b > 2$.

$$x \in \left(\arccos\frac{1}{b-1} + 2\pi k;\ 2\pi - \arccos\frac{1}{b-1} + 2\pi k\right),$$

$k \in \mathbb{Z}$. ▶3 (α)

в) $b = 2$: $\cos x < 1,\ x \neq 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$. ▶4 (β)

2) $b < 1$: $\cos x > 1/(b-1)$.

Заметим, что при $b < 1$ дробь $1/(b-1)$ меньше 0.

а) $\begin{cases} 1/(b-1) < -1, \\ b < 1; \end{cases}$ $\begin{cases} b > 0, \\ b < 1. \end{cases}$ Тогда $x \in \mathrm{R}$. ▶5

б) $1/(b-1) = -1, b = 0$: $\cos x > -1, x \neq \pi + 2\pi m,$ (γ)
$m \in \mathrm{Z}$. ▶6

в) $\begin{cases} 1/(b-1) > -1, \\ b < 1; \end{cases}$ $b < 0$.

$$x \in \left(-\arccos \frac{1}{b-1} + 2\pi l;\ \arccos \frac{1}{b-1} + 2\pi l \right),$$

$l \in \mathrm{Z}$. ▶7 (ω)

Заполняем ось ответа (рис. 707).

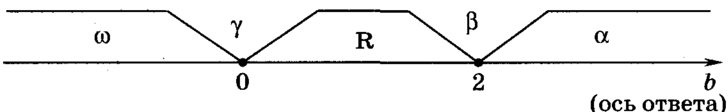


Рис. 707

№ 20. Решите неравенство $(a-2)\sin x > 3a + 4$.

Решение.

ООН: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

1) $a = 2$: $0 \cdot \sin x > 10$. Решений нет. ▶1
2) $a > 2$: $\sin x > (3a+4)/(a-2)$. Видно, что
$(3a+4)/(a-2) > 0$, если $a > 2$.
$(3a+4)/(a-2) = 1 + (2a+6)/(a-2)$, а потому
$(3a+4)/(a-2) > 1$, если $a > 2$.
В этом случае решений нет. ▶2
3) $a < 2$: $\sin x < (3a+4)/(a-2)$.
а) $a = -4/3$: $\sin x < 0$,
$x \in (-\pi + 2\pi k; 2\pi k), k \in \mathrm{Z}$. ▶3 (α)
б) $(3a+4)/(a-2) < -1, (2a+1)/(a-2) < 0$,
$a > -1/2$. Решений нет. ▶4
в) $a = -1/2$: $\sin x < -1$. Решений нет. ▶5
г) $(3a+4)/(a-2) > 1, (a+3)/(a-2) > 0$,
$a < -3$: $x \in \mathrm{R}$. ▶6

д) $a=-3$: $\sin x<1,\ x\neq \pi/2+2\pi n,\ n\in Z$. ▶7 (β)

е) $0<(3a+4)/(a-2)<1$: $-3<a<-4/3$.

$$x\in\left(-\pi-\arcsin\frac{3a+4}{a-2}+2\pi m;\ \arcsin\frac{3a+4}{a-2}+2\pi m\right),\ m\in Z. \quad ▶8 \qquad (\gamma)$$

ж) $-1<(3a+4)/(a-2)<0$, $-4/3<a<-1/2$:

$$x\in\left(-\pi-\arcsin\frac{3a+4}{a-2}+2\pi m;\ \arcsin\frac{3a+4}{a-2}+2\pi m\right),\ m\in Z. \quad ▶9$$

Заполним ось ответа (рис. 708).

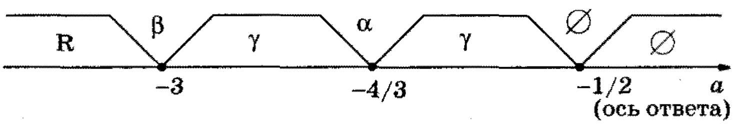


Рис. 708

№ 21. Решите неравенство $(5a-7)\cos x<a+5$.

Решение.

ООН: $\begin{cases} a\in R,\\ x\in R.\end{cases}$

1) $a=7/5$: $0\cdot\cos x<32/5,\ x\in R$. ▶1

2) $a>7/5$: $\cos x<(a+5)/(5a-7)$. Видно, что если $a>7/5$, то $(a+5)/(5a-7)>0$.

а) $(a+5)/(5a-7)=1$, $a=3$: $\cos x<1,\ x\neq 2\pi k$, $k\in Z$. ▶2 (α)

б) $(a+5)/(5a-7)>1$, $7/5<a<3$: $x\in R$. ▶3

в) $0<(a+5)/(5a-7)<1$, $a>3$:

$$x\in\left(\arccos\frac{a+5}{5a-7}+2\pi n;\ 2\pi-\arccos\frac{a+5}{5a-7}+2\pi n\right),\ n\in Z. \quad ▶4 \qquad (\beta)$$

3) $a < 7/5$: $\cos x > (a + 5)/(5a - 7)$.

а) $(a + 5)/(5a - 7) < -1$: $1/3 < a < 7/5$, $x \in \mathrm{R}$. (▶5)

б) $(a + 5)/(5a - 7) = -1$, $a = 1/3$: $\cos x > -1$, $x \neq \pi + 2\pi m$, $m \in \mathrm{Z}$. (▶6) (γ)

в) $-1 < (a + 5)/(5a - 7) < 0$,

$\begin{cases} a + 5 > 0, \\ a + 5 < -5a + 7, \end{cases}$ $\quad -5 < a < 1/3$:

$$x \in \left(-\arccos \frac{a+5}{5a-7} + 2\pi l;\right. \qquad (\omega)$$

$$\left.\arccos \frac{a+5}{5a-7} + 2\pi l\right), l \in \mathrm{Z}. \text{ (▶7)}$$

г) $a = -5$: $\cos x > 0$, $x \in (-\pi/2 + 2\pi t; \pi/2 + 2\pi t)$, $t \in \mathrm{Z}$. (▶8) (φ)

д) $0 < (a + 5)/(5a - 7) < 1$,

$\begin{cases} a < -5, \\ a < 3, \end{cases}$ $\quad a < -5$:

$$x \in \left(-\arccos \frac{a+5}{5a-7} + 2\pi l; \arccos \frac{a+5}{5a-7} +\right.$$

$$\left.+ 2\pi l\right), l \in \mathrm{Z}. \text{ (▶9)}$$

Заполняем ось ответа (рис. 709).

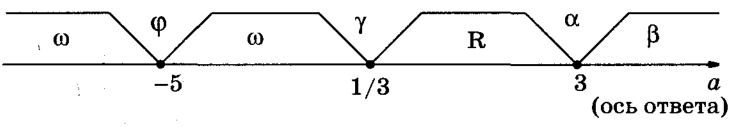


Рис. 709

№ 22. Решите неравенство $|\sin(2x - 4)| \leqslant a$.

<u>Решение</u>.

ООН: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

Легко видеть, что при $a < 0$ неравенство решений не имеет. (▶1)

Если $a = 0$, то $\sin(2x - 4) = 0$, $x = 2 + \pi k/2$, $k \in \mathrm{Z}$. (▶2) (α)

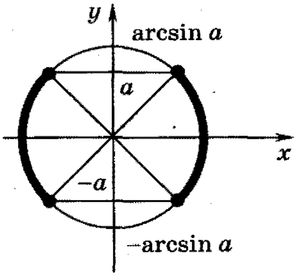


Рис. 710

Если $a \geqslant 1$, то $x \in R$. ▶3

Пусть $0 < a < 1$. Тогда данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} \sin(2x-4) \leqslant a, \\ \sin(2x-4) \geqslant -a. \end{cases}$$

Обозначим $2x - 4$ буквой t:

$$\begin{cases} \sin t \leqslant a, \\ \sin t \geqslant -a \text{ (рис. 710).} \end{cases}$$

$t \in [-\arcsin a + \pi n; \arcsin a + \pi n]$, $n \in Z$,

$-\arcsin a + \pi n \leqslant 2x - 4 \leqslant \arcsin a + \pi n$, $n \in Z$,

$2 - \dfrac{1}{2}\arcsin a + \pi n/2 \leqslant x \leqslant 2 + \dfrac{1}{2}\arcsin a + \pi n/2$,

$n \in Z$. ▶4 (β)

Заполняем ось ответа (рис. 711).

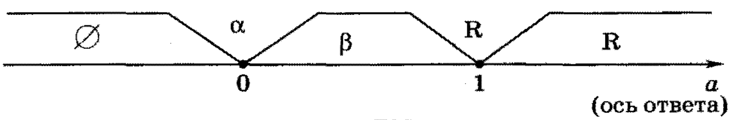


Рис. 711

№ 23. Решите неравенство $|\operatorname{tg}(3x-2)| \leqslant a$, где $a > 0$.

Решение.

Данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} \operatorname{tg}(3x-2) \leqslant a, \\ \operatorname{tg}(3x-2) \geqslant -a, \\ a > 0. \end{cases} \quad \text{Пусть } 3x - 2 = t: \begin{cases} \operatorname{tg} t \leqslant a, \\ \operatorname{tg} t \geqslant -a, \\ a > 0. \end{cases}$$

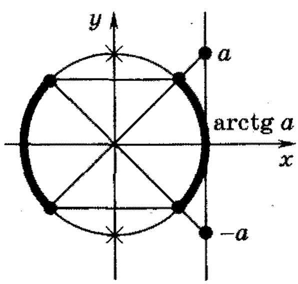


Рис. 712

$-\operatorname{arctg} a + \pi k \leqslant t \leqslant \operatorname{arctg} a + \pi k,\ k \in Z,$

$-\operatorname{arctg} a + \pi k \leqslant 3x - 2 \leqslant \operatorname{arctg} a + \pi k,\ k \in Z,$

$2/3 - (1/3) \operatorname{arctg} a + \pi k/3 \leqslant x \leqslant 2/3 + (1/3) \operatorname{arctg} a +$
$+ \pi k/3,\ k \in Z$ (рис. 712).

Ответ. $[2/3 - (1/3) \operatorname{arctg} a + \pi k/3;\ 2/3 +$
$+ (1/3) \operatorname{arctg} a + \pi k/3],\ k \in Z,\ a > 0.$

№ 24. Решите неравенство $\sin^2 (2x - \pi/4) \geqslant a,\ a \in (0; 1).$

Решение.

$2\sin^2 (2x - \pi/4) \geqslant 2a,$

$1 - \cos (4x - \pi/2) \geqslant 2a,$

$1 - \sin 4x \geqslant 2a,$

$\sin 4x \leqslant 1 - 2a.$

Если $0 < a < 1$, то $-1 < 1 - 2a < 1.$

1) $a = 1/2$: $\sin 4x \leqslant 0,$

$-\pi + 2\pi k \leqslant 4x \leqslant 2\pi k,\ k \in Z,$

$-\pi/4 + \pi k/2 \leqslant x \leqslant \pi k/2,\ k \in Z.$ $\qquad (\alpha)$

2) $0 < a < 1/2$. Тогда $0 < 1 - 2a < 1.$

$-\pi - \arcsin (1 - 2a) + 2\pi n \leqslant 4x \leqslant \arcsin (1 - 2a) +$
$+ 2\pi n,\ n \in Z,$

$$-\pi/4 - \frac{\arcsin(1 - 2a)}{4} + \pi n/2 \leqslant x \leqslant \frac{\arcsin(1 - 2a)}{4} +$$

$+ \pi n/2,\ n \in Z.$ $\qquad (\beta)$

3) $1/2 < a < 1$. Тогда $-1 < 1 - 2a < 0.$

$$-\pi/4 - \frac{\arcsin(1 - 2a)}{4} + \pi n/2 \leqslant x \leqslant \frac{\arcsin(1 - 2a)}{4} +$$

$+ \pi n/2,\ n \in Z.$ $\qquad (\beta)$

Заносим результаты на ось ответа (рис. 713).

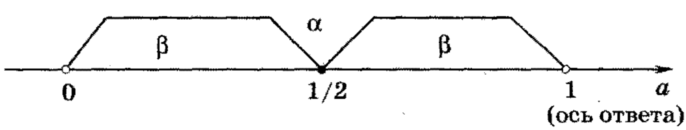


Рис. 713

№ 25. Решите неравенство $|\cos(x-2)| \geqslant a$, $a \in (0; 1)$.

Решение.

Данное неравенство равносильно совокупности неравенств

$\left[\begin{array}{l}\cos(x-2) \geqslant a, \\ \cos(x-2) \leqslant -a.\end{array}\right.$ Пусть $x - 2 = t$: $\left[\begin{array}{l}\cos t \geqslant a, \\ \cos t \leqslant -a.\end{array}\right.$

Воспользуемся единичной окружностью (рис. 714).

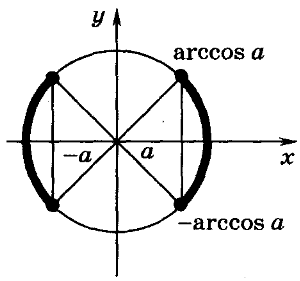


Рис. 714

$-\arccos a + \pi k, \leqslant t \leqslant \arccos a + \pi k$, $k \in Z$,
$-\arccos a + \pi k, \leqslant x - 2 \leqslant \arccos a + \pi k$, $k \in Z$,
$2 - \arccos a + \pi k \leqslant x \leqslant 2 + \arccos a + \pi k$, $k \in Z$.

Ответ. $[2 - \arccos a + \pi k; 2 + \arccos a + \pi k]$, $k \in Z$, $a \in (0; 1)$.

№ 26. Решите неравенство $\operatorname{ctg}|2x-3| \leqslant a$.

Решение.

ООН: $\begin{cases}a \in R, \\ x \neq \pi n/2 + 3/2, n \in Z.\end{cases}$

1) Если $a = 0$, то $\operatorname{ctg}|2x-3| \leqslant 0$.
$\pi/2 + \pi k \leqslant |2x-3| < \pi + \pi k$, $k \in N \cup \{0\}$.
Двойное неравенство равносильно системе
$\begin{cases}|2x-3| \geqslant \pi/2 + \pi k, \\ |2x-3| < \pi + \pi k, k \in N \cup \{0\}.\end{cases}$

Раскроем модуль и перейдем к совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{ll}\begin{cases}2x-3\geqslant 0,\\ 2x-3\geqslant \pi/2+\pi k,\\ 2x-3<\pi+\pi k,\end{cases} & k\in\mathrm{N}\cup\{0\}. \qquad (1)\\ \begin{cases}2x-3<0,\\ -2x+3\geqslant \pi/2+\pi n,\\ -2x+3<\pi+\pi n,\end{cases} & k\in\mathrm{N}\cup\{0\}. \qquad (2)\end{array}\right.$$

Первая система дает следующие решения $3/2+\pi/4+\pi k/2\leqslant x<3/2+\pi/2+\pi k/2$, $k\in\mathrm{N}\cup\{0\}$, а вторая — такие: $3/2-\pi/2-\pi k/2<x\leqslant 3/2-\pi/4-\pi k/2$, $k\in\mathrm{N}\cup\{0\}$.

Отсюда окончательно при $a=0$ получается

$$\left[\begin{array}{l}3/2+\pi/4+\pi k/2\leqslant x<3/2+\pi/2+\pi k/2,\\ 3/2-\pi/2-\pi k/2<x\leqslant 3/2-\pi/4-\pi k/2,\\ k\in\mathrm{N}\cup\{0\}.\end{array}\right. \qquad (\alpha)$$

2) Пусть $a\neq 0$. Тогда $\operatorname{ctg}|2x-3|\leqslant a$.

$\operatorname{arcctg} a+\pi m\leqslant|2x-3|<\pi+\pi m$, $m\in\mathrm{N}\cup\{0\}$.

Решая, как в предыдущем случае, получаем

$$\left[\begin{array}{l}3/2+(1/2)\operatorname{arcctg} a+\pi m/2\leqslant x<3/2+\pi/2+\pi m/2,\\ 3/2-\pi/2-\pi m/2<x\leqslant 3/2-(1/2)\operatorname{arcctg} a-\pi m/2,\\ m\in\mathrm{N}\cup\{0\}.\end{array}\right. \qquad (\beta)$$

Заполняем ось ответа (рис. 715).

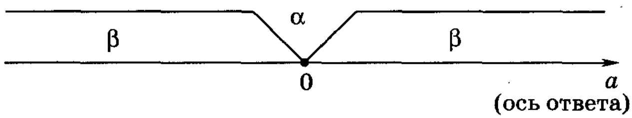


Рис. 715

№ 27. Решите неравенство $\cos x\leqslant 2-a^2$.

Решение.

ООН: $\begin{cases}a\in\mathrm{R},\\ x\in\mathrm{R}.\end{cases}$

1) $2-a^2=0$, $a=\pm\sqrt{2}$: $\cos x \leqslant 0$,
$x_1 \in [\pi/2+2\pi k; 3\pi/2+2\pi k]$, $k \in Z$. (▸1) (α)

2) $2-a^2=1$, $a=\pm 1$: $\cos x \leqslant 1$, $x \in R$. (▸2)

3) $2-a^2=-1$, $a=\pm\sqrt{3}$: $\cos x \leqslant -1$, $\cos x=-1$,
$x=\pi+2\pi n$, $n \in Z$. (▸3) (β)

4) $2-a^2>1$, $a^2<1$, $|a|<1$: $x \in R$. (▸4)

5) $2-a^2<-1$, $a^2>3$, $|a|>\sqrt{3}$. Решений нет. (▸5)

6) $a \in (-\sqrt{3}; -\sqrt{2}) \cup (-\sqrt{2}; -1) \cup (1; \sqrt{2}) \cup$
$\cup (\sqrt{2}; \sqrt{3})$.
Тогда $(2-a^2) \in (-1; 0) \cup (0; 1)$:
$x \in [\arccos(2-a^2)+2\pi m; 2\pi - \arccos(2-a^2) +$
$+ 2\pi m]$, $m \in Z$. (▸6) (γ)

Заполняем ось ответа (рис. 716).

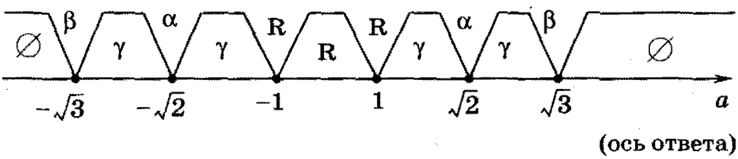


Рис. 716

№ 28. Решите неравенство $(a-3)\sin x < |2a-3|$.

<u>Решение.</u>

ООН: $\begin{cases} a \in R, \\ x \in R. \end{cases}$

1) $a=3$: $0 \cdot \sin x < 3$, $x \in R$. (▸1)

2) $a=3/2$: $(-3/2)\sin x < 0$, $\sin x > 0$,
$x \in (2\pi k; \pi+2\pi k)$. (▸2) (α)

3) $a>3$: $\sin x < (2a-3)/(a-3)$,
где $(2a-3)/(a-3) > 0$.
Заметим, что $(2a-3)/(a-3) = 1 + a/(a-3)$.
При $a>3$ выражение $1+a/(a-3)$ больше 1.
Поэтому $x \in R$. (▸3)

4) $3/2<a<3$: $\sin x > (2a-3)/(a-3)$, где
$(2a-3)/(a-3) < 0$.

а) $(2a-3)/(a-3) = -1$, $a = 2$: $\sin x > -1$.
$x \neq -\pi/2 + 2\pi n$, $n \in Z$. (▶4) (β)

б) $\begin{cases}(2a-3)/(a-3) > -1,\\ 3/2 < a < 3;\end{cases}$ $\begin{cases}2a-3 < -a+3,\\ 3/2 < a < 3;\end{cases}$

$\begin{cases}a < 2,\\ 3/2 < a < 3;\end{cases}$ $3/2 < a < 2$.

$$x \in \left(\arcsin\frac{2a-3}{a-3} + 2\pi m;\ \pi - \arcsin\frac{2a-3}{a-3} + 2\pi m\right),\ m \in Z.$$ (▶5) (γ)

в) $\begin{cases}(2a-3)/(a-3) < -1,\\ 3/2 < a < 3;\end{cases}$ $\begin{cases}2a-3 < -a+3,\\ 3/2 < a < 3;\end{cases}$

$2 < a < 3$. Тогда $x \in R$. (▶6)

5) $a < 3/2$: $\sin x > (3-2a)/(a-3)$,
где $(3-2a)/(a-3) < 0$.
а) $(3-2a)/(a-3) = -1$, $a = 0$: $\sin x > -1$,
$x \neq -\pi/2 + 2\pi n$, $n \in Z$. (▶7) (β)
б) $(3-2a)/(a-3) < -1$; $a < 0$. Тогда $x \in R$. (▶8)

в) $\begin{cases}(3-2a)/(a-3) > -1,\\ a < 3/2,\end{cases}$ $0 < a < 3/2$:

$$x \in \left(\arcsin\frac{3-2a}{a-3} + 2\pi l;\ \pi - \arcsin\frac{3-2a}{a-3} + 2\pi l\right),\ l \in Z.$$ (▶9) (ω)

Покажем результаты на оси ответа (рис. 717).

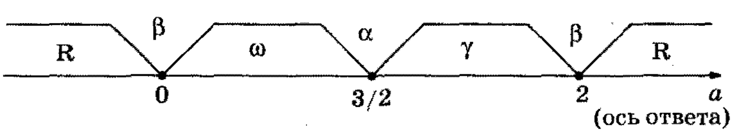


Рис. 717

№ 29. При каких значениях параметра a неравенство $||\sin x - 1/3| - 1/3| \leqslant a$ справедливо для всех x таких, что $0 \leqslant x \leqslant 2\pi/3$?

Решение.

Если $x \in [0;\ 2\pi/3]$, то $0 \leqslant \sin x \leqslant 1$.

Пусть $\sin x = t$, где $t \in [0;\ 1]$.

Данное неравенство лучше решить графически.

Рассмотрим функции:

$y = ||t - 1/3| - 1/3|,\ t \in [0;\ 1]$ (1)

и $y = a$. (2)

Построим график функции $y = ||t - 1/3| - 1/3|$, $t \in [0;\ 1]$ (рис. 718).

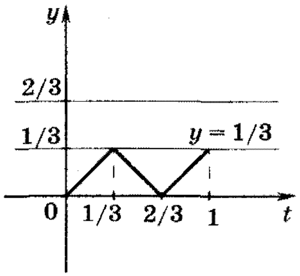


Рис. 718

Если $a \geqslant 1/3$, то график функции (1) расположен не выше графика функции $y = a$. (2)

Ответ. $a \geqslant 1/3$.

№ 30. Найдите все значения параметра a, при которых для любого действительного значения x выполнено неравенство $2a - 4 + a(3 - \sin^2 x)^2 + \cos^2 x < 0$.

Решение.

ООН: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

Обозначим $t = \sin^2 x$, $t \in [0;\ 1]$:

$2a - 4 + a(3 - t)^2 + 1 - t < 0,$

$at^2 - (6a + 1)t + 11a - 3 < 0.$

Найдем все значения параметра a, при которых

$f(t) = at^2 - (6a+1)t + 11a - 3$

будет отрицательным при любом $t \in [0;\ 1]$.

Рассмотрим три случая:

1) $a = 0$: $f(t) = -t - 3 < 0$ при любом $t \in [0;\ 1]$.

2) $a > 0$:

$$\begin{cases} a > 0, \\ f(0) = 11a - 3 < 0, \\ f(1) = a - 6a - 1 + 11a - 3 < 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} a > 0, \\ a < 3/11, \\ a < 2/3, \end{cases}$$

$0 < a < 3/11$ (рис. 719).

3) $a < 0$:

а) $\begin{cases} D = 1 + 24a - 8a^2 < 0, \\ a < 0 \text{ (рис. 720)}, \end{cases}$

$a < (6 - \sqrt{38})/4$.

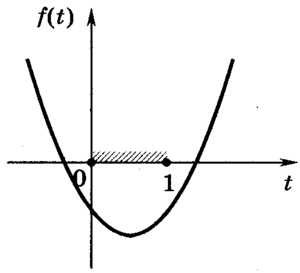


Рис. 719

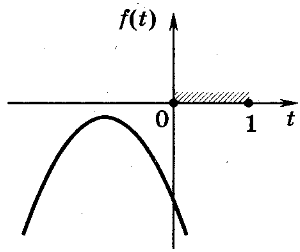


Рис. 720

б) $t_1 \leqslant t_2 < 0$,

$$\begin{cases} a < 0, \\ D \geqslant 0, \\ t_0 = (6a+1)/2a < 0, \\ f(0) = 11a - 3 < 0 \end{cases}$$

(рис. 721),

$(6 - \sqrt{38})/4 \leqslant a < 0$.

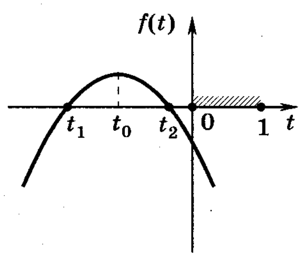


Рис. 721

в) $1 < t_1 \leqslant t_2$,

$$\begin{cases} a < 0, \\ D \geqslant 0, \\ (6a+1)/2a > 1 \text{ (рис. 722)}, \\ f(1) = 6a - 4 < 0. \end{cases}$$

Система несовместна.

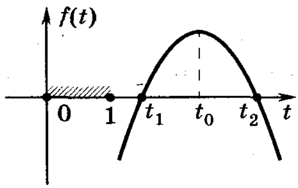


Рис. 722

Ответ. $a \in (-\infty; 3/11)$.

№ 31. Решите неравенство $\cos^2 x - a\cos x + 1 \geqslant 0$.

Решение.

ООН: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

Пусть $\cos x = t$, где $|t| \leqslant 1$.

Решаем систему неравенств $\begin{cases} t^2 - at + 1 \geqslant 0, \\ |t| \leqslant 1. \end{cases}$

Найдем дискриминант квадратного трехчлена $t^2 - at + 1$: $\mathrm{D} = a^2 - 4$.

Рассмотрим ряд случаев.

1) $\mathrm{D} = 0$; $a = \pm 2$, $(t \pm 1)^2 \geqslant 0$, $x \in \mathrm{R}$. (▶1)

2) $\mathrm{D} < 0$; $|a| < 2$, $x \in \mathrm{R}$. (▶2)

3) $\mathrm{D} > 0$; $|a| > 2$, $t_1 = (a - \sqrt{a^2 - 4})/2$;

$t_2 = (a + \sqrt{a^2 - 4})/2$.

Рассмотрим возможные случаи.

а) Пусть $f(t) = t^2 - at + 1$.

$\begin{cases} |a| > 2, \\ f(-1) > 0 \text{ (рис. 723)}, \\ f(1) > 0, \\ -1 < a/2 < 1; \end{cases}$ $\begin{cases} |a| > 2, \\ 2 + a > 0, \\ 2 - a > 0, \\ -2 < a < 2. \end{cases}$

$\begin{cases} |a| > 2, \\ |a| < 2. \end{cases}$ Система несовместна.

б) $t_1 = -1$, если $a = -2$ (рис. 724).

Но $|a| > 2$.

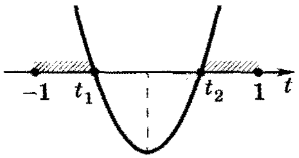


Рис. 723

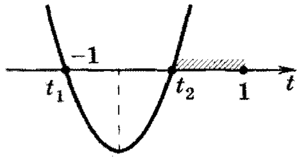


Рис. 724

Значит, такой случай тоже невозможен.

в) $\begin{cases} f(-1) < 0, \\ f(1) > 0 \text{ (рис. 725)}, \end{cases}$ $\begin{cases} 2 + a < 0, \\ 2 - a > 0, \end{cases}$ $a < -2.$

Тогда $t \in [t_2; 1]$: $\cos x \geqslant t_2$,

$$x \in \left[-\arccos \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2} + 2\pi k; \arccos \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2} + \right.$$

$$\left. + 2\pi k \right], k \in \mathbb{Z}. \quad (\blacktriangleright 3) \qquad (\alpha)$$

г) $t_2 = -1$ (рис. 726).

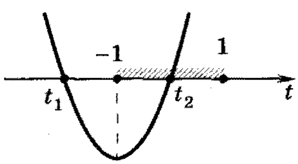


Рис. 725

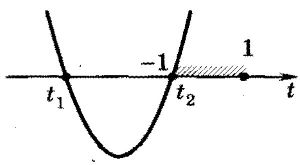


Рис. 726

$\begin{cases} (a + \sqrt{a^2 - 4} / 2) = -1, \\ |a| > 2. \end{cases}$ $\begin{cases} a = -2, \\ |a| > 2. \end{cases}$

Этот случай тоже невозможен.

д) $\begin{cases} f(-1) > 0, \\ f(1) < 0, \\ |a| > 2 \text{ (рис. 727)}. \end{cases}$ $\begin{cases} a + 2 > 0, \\ 2 - a < 0, a > 2, \\ |a| > 2. \end{cases}$

$t \in [-1; t_1]$: $\cos x \leqslant (a - \sqrt{a^2-4})/2$,

$x \in \left[\arccos \dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2} + 2\pi n; 2\pi - \right.$

$\left. - \arccos \dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2} + 2\pi n \right], n \in Z.$ (▶4) (β)

е) $t_1 = 1$ (рис. 728).

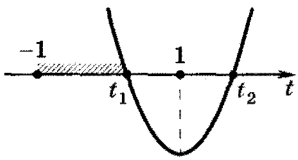


Рис. 727

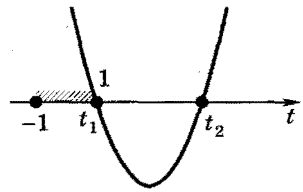


Рис. 728

$\begin{cases} (a - \sqrt{a^2-4})/2 = 1, \\ |a| > 2. \end{cases}$ $\begin{cases} a = 2, \\ |a| > 2. \end{cases}$

Система решений не имеет.

Заполняем ось ответа (рис. 729).

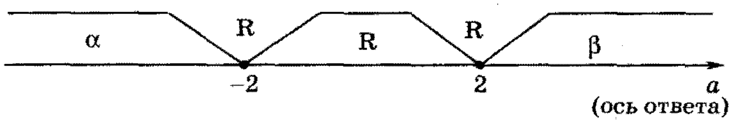


Рис. 729

№ 32. Найдите все значения b, при которых уравнение $(b - 2x) \arccos (x - 1) = 0$ имеет ровно один корень. (ЕГЭ 2002 г.)

<u>Решение.</u>

ООУ: $\begin{cases} b \in R, \\ 0 \leqslant x \leqslant 2. \end{cases}$

1. $\arccos (x - 1) = 0$, $x - 1 = 1$, $\begin{cases} x_1 = 2, \\ b \in R. \end{cases}$

2. $b - 2x = 0$, $\begin{cases} x_2 = b/2, \\ b \in R. \end{cases}$

Исследование.

1) $\begin{cases} x_2 = b/2, \\ 0 \leqslant b/2 \leqslant 2, \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = b/2, \\ 0 \leqslant b \leqslant 4. \end{cases}$

2) $\begin{cases} b = 0, \\ x_2 = 0. \end{cases}$ 3) $\begin{cases} b = 4, \\ x_2 = 2. \end{cases}$

Отметим полученные множества решений данного уравнения на оси параметра b (рис. 730).

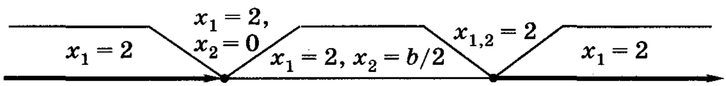


Рис. 730

Анализ множества решений показывает, что уравнение имеет ровно один корень, если $b \in (-\infty; 0) \cup [4; +\infty)$.

Ответ. $(-\infty; 0) \cup [4; +\infty)$.

№ 33. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых все решения уравнения $a \cdot \sin x - 2a - 1 = 0$ принадлежат области определения функции $y = \sqrt{\lg(2\sin x)}$. Запишите все множество решений уравнения для найденных значений a.

Решение.

Найдем сначала область определения функции $y = \sqrt{\lg(2\sin x)}$. Достаточно решить неравенство $\lg(2\sin x) \geqslant 0$: $2\sin x \geqslant 1$, $\sin x \geqslant 1/2$. Воспользуемся единичной окружностью. Получаем множество $[\pi/6 + 2\pi k; 5\pi/6 + 2\pi k]$, $k \in Z$ (рис. 731).

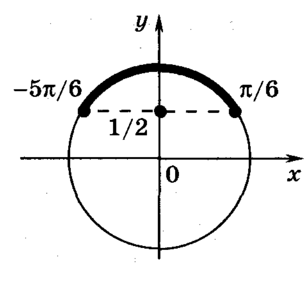


Рис. 731

Рассмотрим уравнение $a \cdot \sin x - 2a - 1 = 0$, сводимое к ему равносильному уравнению $a \sin x = 2a + 1$. Если $a = 0$, то уравнение не имеет решений. Пусть $a \neq 0$, тогда $\sin x = 2 + 1/a$. Последнее уравнение имеет решения, принадлежащие области определения функции $y = \sqrt{\lg(2\sin x)}$, если

$$\begin{cases} 2 + 1/a \leqslant 1, \\ 2 + 1/a \geqslant 1/2. \end{cases}$$

Решаем эту систему:

$$\begin{cases} 1 + 1/a \leqslant 0, \\ 3/2 + 1/a \geqslant 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{a+1}{a} \leqslant 0, \\ \dfrac{3a+2}{a} \geqslant 0 \text{ (рис. 732).} \end{cases}$$

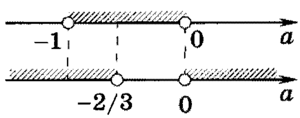


Рис. 732

Получаем, что $a \in [-1; -2/3]$. Тогда множество решений данного уравнения совпадает с областью определения функции $y = \sqrt{\lg(2\sin x)}$.

Ответ. $a \in [-1; -2/3]$; $[\pi/6 + 2\pi k; 5\pi/6 + 2\pi k]$, $k \in \mathbb{Z}$.

Упражнения для самостоятельного решения

1) При каких действительных значениях параметра a уравнение $\sin x + 2\cos x = a - 1$ имеет решения? (▸1)
2) При каких действительных значениях параметра b уравнение $2(b^2 + 1)\cos^2 x + 4b^2\cos x + 1 = 0$ не имеет решений? (▸2)
3) Найдите все значения параметра p, при которых уравнение $\sin^2 x + p\sin x = p^2 - 1$ имеет решения. (▸3)

4) Решите уравнение
$a\cos x + a/\cos x + 1 = 0.$ ▶4

5) Решите уравнение
$\sin 3x - \sin 2x = a\sin x.$ ▶5

6) Найдите все значения параметра b, при каждом из которых все решения уравнения $(b-1)\cos x - 3b = 0$ принадлежат области определения функции $y = \sqrt{\lg(-2\cos x)}$. Запишите все множество решений уравнения для найденных значений b. ▶6

7) Найдите все значения параметра b, при каждом из которых все решения уравнения $(b-1)\cos x - 3b = 0$ принадлежат области определения функции $y = \sqrt{-\lg(2\cos x)}$. Запишите все множество решений уравнения для найденных значений b. ▶7

8) Найдите все значения параметра c, при каждом из которых все решения уравнения $2c + 4 - c\sin x = 0$ принадлежат области определения функции $y = \sqrt{1 + \lg(\sin x/5)}$. Запишите все множество решений уравнения для найденных значений c. ▶8

9) Найдите все значения параметра d, при каждом из которых все уравнения $3d - 6 + (d+1)\cos x = 0$ принадлежат области определения функции $y = \sqrt{1 + \lg(-\cos x/5)}$. Запишите все множество решений уравнения для найденных значений d. ▶9

10) При каких значениях a уравнения равносильны:

а) $\sin x = a$ и $\sin x = a^2 - 2$; ▶10

б) $\cos x = a$ и $\sqrt{\cos x} = a$; ▶11

в) $|\cos x| = a$ и $\cos^2 x = a^2$? ▶12

11) Решите неравенство $\sin(mx - 3) < m$, где $-1 < m < 0$. ▶13

12) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $a^2 + 2a - \sin^2 x - 2a \cos x > 2$ выполняется для любого значения x. ▸14

13) Найдите все значения параметра a, при которых неравенство $(a - 1)\sin^2 x + 2(a - 2)\sin x + a + 3 < 0$ не имеет решений. ▸15

14) Решите неравенство
$\sin x + a \cos x < a$ $(a \neq 0)$. ▸16

15) Решите неравенство
$(\operatorname{tg} x)/(\operatorname{tg} x + 2) - 1/a > 1/(\operatorname{tg} x + 2)$. ▸17

Литература

1. *Амелькин В. В., Рабцевич В. Л.* Задачи с параметрами: справочное пособие по математике. — Минск: Асар, 1996.
2. *Беляева Э. С.* Единичная окружность в подготовительном курсе тригонометрии // Математика в школе. — № 2. — 2000.
3. *Беляева Э. С., Потапов А. С., Титоренко С. А.* Разделительная функция параметра / Проблемы теории и практики обучения математике: сб. науч. работ междунар. науч. конф. «57-е Герценовские чтения» / Рос. гос. пед. ун-т им. А. И. Герцена. — СПб., 2004.
4. *Беляева Э. С., Потапов А. С.* Тригонометрические уравнения и неравенства с параметром: учебное пособие. — Воронеж: ВГПУ, 2001.
5. *Беляева Э. С., Потапов А. С.* Уравнения и неравенства первой степени с параметром и к ним сводимые: учебное пособие. — Воронеж: ВГПУ, 2001.
6. *Беляева Э. С., Потапов А. С., Титоренко С. А.* Обучение школьников решению уравнений и неравенств с параметром графическим методом // Труды четвертых Колмогоровских чтений / Яросл. гос. пед. ун-т им. К. Д. Ушинского. — Ярославль, 2006.
7. *Беляева Э. С., Потапов А. С., Титоренко С. А.* Теория и методика решений уравнений, неравенств и их систем с параметром // Труды третьих Колмогоровских чтений / Яросл. гос. пед. ун-т им. К. Д. Ушинского. — Ярославль, 2005.

8. *Беляева Э. С., Потапов А. С.* Уравнения и неравенства второй степени с параметром и к ним сводимые: учебное пособие. — Воронеж: ВГПУ, 2001.
9. *Беляева Э. С., Потапов А. С.* Уравнения и неравенства с параметром в школьном курсе математики / Проблемы теории и практики обучения математике: сб. науч. работ междунар. науч. конф. «54-е Герценовские чтения» / Рос. гос. пед. ун-т им. А. И. Герцена. — СПб., 2001.
10. *Буданцев П. А., Щипакин Г. М.* Квадратные и иррациональные уравнения. — М.: Гос. уч.-пед. изд. Министерства просвещения РСФСР, 1956.
11. *Горнштейн П. И., Полонский В. Б., Якир М. С.* Задачи с параметрами. — Киев: РИА «Текст», МП «ОКО», 1992.
12. *Гусев В. А., Мордкович А. Г.* Математика. Справочные материалы. — М.: Просвещение, 1988.
13. *Звавич Л. И., Аверьянов Д. И., Пигарев Б. П., Трушанина Т. Н.* Задания для подготовки к письменному экзамену по математике в 9 классе: пособие для учащихся. — М.: Просвещение, 1999.
14. *Звавич Л. И., Шляпочник Л. Я., Чинкина М. В.* Алгебра и начала анализа: 3600 задач для школьников и поступающих в вузы. — М.: Дрофа, 1999.
15. *Карп А. П.* Сборник задач по алгебре и началам анализа: учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики. — М.: Просвещение, 1995.
16. *Макаров В. К.* Задачи с параметрами: Пособие для поступающих в Московский университет. — М.: МГУ, 1968.
17. Математический энциклопедический словарь. — М.: Советская энциклопедия, 1988.
18. *Новоселов С. И.* Специальный курс элементарной алгебры. — М.: Высшая школа, 1965.

19. *Потапов М. К., Олехник С. Н., Нестеренко Ю. В.* Конкурсные задачи по математике. — М.: Наука, 1992.
20. *Фрид Э.* и др. Малая математическая энциклопедия. — Будапешт: Изд-во Академия наук Венгрии, 1976.
21. *Черкасов О. Ю., Якушев А. Г.* Математика: методические указания для поступающих в вузы. — М.: МГУ, 1996.
22. *Ястребинецкий Г. А.* Задачи с параметрами: книга для учителя. — М.: Просвещение, 1986.

Приложение

Сведения общего характера

Латинский алфавит

Печатная буква	Название	Печатная буква	Название
Aa	а	Nn	эн
Bb	бе	Oo	о
Cc	це	Pp	пе
Dd	де	Qq	ку
Ee	е	Rr	эр
Ff	эф	Ss	эс
Gg	ге (же)	Tt	тэ
Hh	ха (аш)	Uu	у
Ii	и	Vv	ве
Jj	йот (жи)	Ww	дубль-ве
Kk	ка	Xx	икс
Ll	эль	Yy	игрек
Mm	эм	Zz	зет

Греческий алфавит

Печатная буква	Название	Печатная буква	Название
Αα	альфа	Νν	ню
Ββ	бета	Ξξ	кси
Γγ	гамма	Οο	омикрон
Δδ	дельта	Ππ	пи
Εε	эпсилон	Ρρ	ро
Ζζ	дзета	Σσ	сигма
Ηη	эта	Ττ	тау
Θθ	тэта	Υυ	ипсилон
Ιι	йота	Φφ	фи
Κκ	каппа	Χχ	хи
Λλ	ламбда	Ψψ	пси
Μμ	мю	Ωω	омега

Некоторые часто встречающиеся постоянные

Величина	n	$\lg n$	Величина	n	$\lg n$	Величина	n	$\lg n$
π	3,1416	0,4971	$1/\pi$	0,3183	$\bar{1}$,5029	$\sqrt[3]{\pi}$	1,4646	0,1657
2π	6,2832	0,7982	$1/2\pi$	0,1592	$\bar{1}$,2018	$\sqrt[3]{1/\pi}$	0,6828	$\bar{1}$,8343
3π	9,4248	0,9743	$1/3\pi$	0,1061	$\bar{1}$,0257	$\sqrt[3]{\pi/6}$	0,8060	$\bar{1}$,9063
4π	12,5664	1,0992	$1/4\pi$	0,0796	$\bar{2}$,9008	$\sqrt[3]{3/4\pi}$	0,6204	$\bar{1}$,7926
$4\pi/3$	4,1888	0,6221	π^2	9,8696	0,9943	$\sqrt[3]{\pi^2}$	2,1450	0,3314
$\pi/2$	1,5708	0,1961	$2\pi^2$	19,7392	1,2953	e	2,7183	0,4343
$\pi/3$	1,0472	0,0200	$\sqrt{\pi}$	1,7725	0,2486	e^2	7,3891	0,8686
$\pi/4$	0,7854	$\bar{1}$,8951	$\sqrt{2\pi}$	2,5066	0,3991	$\sqrt{e}$	1,6488	0,2171
$\pi/6$	0,5236	$\bar{1}$,7190	$\sqrt{\pi/2}$	1,2533	0,0981	$\sqrt[3]{e}$	1,3956	0,1448
$\pi/180$	0,0175	$\bar{2}$,2419	$\sqrt{1/\pi}$	0,5642	$\bar{1}$,7514	$1/e$	0,3676	$\bar{1}$,5657
$2/\pi$	0,6366	$\bar{1}$,8039	$\sqrt{2/\pi}$	0,7979	$\bar{1}$,9019	$1/e^2$	0,1353	$\bar{1}$,1314
$180/\pi$	57,2958	1,7581	$\sqrt{3/\pi}$	0,9772	$\bar{1}$,9900	$\sqrt{1/e}$	0,6065	$\bar{1}$,7829
$10800/\pi$	3437,7467	3,5363	$\sqrt{4/\pi}$	1,1284	0,0525	ln 10	2,3026	0,3622
$648000/\pi$	206264,81	5,3144						

Значения тригонометрических функций для значения аргумента $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi/2$

Аргумент		Тригонометрические функции					
В градусном измерении	В радианах	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\sec\alpha$	$\mathrm{cosec}\,\alpha$
0°	0	0	1	0	не существует	1	не существует
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}8660$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}5774$	$\sqrt{3} \approx 1{,}7322$	$\frac{2\sqrt{3}}{3} \approx 1{,}1547$	2
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}7071$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}7071$	1	1	$\sqrt{2} \approx 1{,}4142$	$\sqrt{2} \approx 1{,}4142$
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}8660$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3} \approx 1{,}7322$	$\frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}5774$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3} \approx 1{,}1547$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	не существует	0	не существует	1

Основные формулы элементарной математики

Арифметика и алгебра

Пропорции

В пропорции $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ числа a и d называются крайними членами, b и c — средними; основное свойство пропорции:

произведение крайних членов равно произведению средних, то есть $ad = bc$.

Производные пропорции: $\frac{a \pm b}{a} = \frac{c \pm d}{c}$ $\frac{a \pm c}{b \pm d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Действия со степенями

$$(a \cdot b \cdot c)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n, \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n},$$

$$\frac{1}{a^n} = \frac{a^0}{a^n} = a^{-n}, (a^m)^n = a^{mn}.$$

Действия с корнями

(корни предполагаются арифметическими, то есть подкоренное выражение $\geqslant 0$ и, кроме того, сам корень берется со знаком +)

$$\sqrt[m]{a \cdot b \cdot c} = \sqrt[m]{a}\sqrt[m]{b}\sqrt[m]{c}, \sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}, a^{n/m} = \sqrt[m]{a^n},$$

$$(\sqrt[m]{a^n})^p = \sqrt[m]{a^{np}}, \sqrt[m]{a^n} = \sqrt[mp]{a^{np}}.$$

Разложение на множители

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ (разность квадратов),

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ (сумма кубов),

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ (разность кубов).

Квадратные уравнения

Уравнение $x^2 + px + q = 0$ решается по формуле

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ решается по формуле

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Если x_1 и x_2 корни уравнения $x^2 + px + q = 0$, то $x_1 + x_2 = -p$ и $x_1 \cdot x_2 = q$;

$x^2+px+q=(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2+px+q=0$

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1 и x_2 — корни уравнения $ax^2+bx+c=0$

Прогрессии

a_1 — первый член, a_n — n-й член, d — разность арифметической прогрессии;

u_1 — первый член, u_n — n-й член, q — знаменатель геометрической прогрессии;

S_n — сумма n членов прогрессии, S — сумма бесконечно убывающей прогрессии:

$$a_n=a_1+d(n-1),\ S_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2},\ S_n=\frac{[2a_1+d(n-1)]n}{2};$$

$$u_n=u_1q^{n-1},\ S_n=\frac{u_nq-u_1}{q-1},\ S_n=\frac{u_1(q^n-1)}{q-1},\ S=\frac{u_1}{1-q},$$
$$|q|<1.$$

Логарифмы
($N>0,\ a>0,\ a\neq 1$)

Запись $\log_a N=x$ равносильна записи $a^x=N$, поэтому $a^{\log_a N}=N$.

Логарифмирование:

$$\log_a a=1,\ \log_a 1=0,$$

$$\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N,\ \log_a\frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N,$$

$$\log_a N^m=m\log_a N,\ \log_a\sqrt[m]{N}=\frac{1}{m}\log_a N.$$

Обозначения: $\log_{10}N=\lg N$, $\log_e N=\ln N$.

Соотношения: $\log_b a=\dfrac{1}{\log_a b}$, $\log_a N=\dfrac{\log_b N}{\log_b a}$.

(число $\log_b a$ в последней формуле называется модулем перехода от системы логарифмов с основанием b к системе с основанием a)

Комбинаторика

$A_m^n=m(m-1)\dots(m-n+1)$ (размещения);

$P_m=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot m=m!$ (перестановки);

$$C_m^n = \frac{A_m^n}{P_n} = \frac{m(m-1)...(m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n}$$ (сочетания).

Бином Ньютона

$$(x+a)^m =$$
$$= x^m + C_m^1 x^{m-1} a + ... + C_m^k x^{m-k} a^k + ... + C_m^{m-1} x a^{m-1} + a^m,$$

в частности,

$(x+a)^2 = x^2 + 2xa + a^2$ (квадрат суммы);

$(x-a)^2 = x^2 - 2xa + a^2$ (квадрат разности);

$(x+a)^3 = x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + a^3$ (куб суммы);

$(x-a)^3 = x^3 - 3x^2a + 3xa^2 - a^3$ (куб разности).

Свойства биномиальных коэффициентов C_m^n

$$1 + C_m^1 + C_m^2 + ... + C_m^{m-1} + 1 = 2^m,$$

$$1 - C_m^1 + C_m^2 - ... + (\pm 1)^m = 0, \ C_m^n = C_m^{m-n}.$$

Геометрия и тригонометрия

Длина окружности C и ее дуги l

$C = 2\pi R$, $l = \frac{\pi R a}{180} = R\alpha$ (a — градусная мера дуги, α — радианная мера, R — радиус).

Площади

Треугольник: $S = \frac{ah}{2}$ (a — основание, h — высота);

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (p — полупериметр, a, b и c — стороны);

$S = \frac{ab\sin C}{2}$ (C — угол, противолежащий стороне c).

Для равностороннего треугольника $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ (a — сторона треугольника)

Параллелограмм: $S = bh$ (b — основание, h — высота)

Ромб: $S = \frac{d_1 d_2}{2}$ (d_1 и d_2 — диагонали).

Трапеция: $S = \frac{a+b}{2}h$ (a и b — основания, h — высота)

Правильный многоугольник: $S = \frac{Pa}{2}$ (P — периметр, a — апофема).

Круг: $S = \pi R^2$.

Круговой сектор: $S = \frac{Rl}{2} = \frac{R^2\alpha}{2} = \frac{\pi R^2 a}{360}$ (a — градусная мера дуги сектора, α — радианная мера, l — длина дуги сектора).

Поверхности

Призма: $S_{\text{бок}} = Pl$ (P — периметр перпендикулярного сечения, l — боковое ребро).

Правильная пирамида: $S_{\text{бок}} = \frac{Pa}{2}$ (P — периметр основания, a — апофема).

Правильная усеченная пирамида: $S_{\text{бок}} = \frac{P_1 + P_2}{2} \cdot a$ (P_1 и P_2 — периметры оснований, a — апофема).

Цилиндр: $S_{\text{бок}} = 2\pi Rh$ (h — высота).

Конус: $S_{\text{бок}} = \pi Rl$ (l — образующая).

Усеченный конус: $S_{\text{бок}} = \pi(R_1 + R_2)l$.

Шар $S = 4\pi R^2$.

Объемы

Призма: $V = Sh$ (S — площадь основания, h — высота).

Пирамида: $V = \frac{Sh}{3}$.

Усеченная пирамида: $V = \frac{h}{3}(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2})$.

Цилиндр: $V = \pi R^2 h$.

Конус: $V = \frac{\pi R^2 h}{3}$.

Усеченный конус: $V = \frac{\pi h}{3}(R_1^2 + R_2^2 + R_1 R_2)$.

Шар: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Перевод градусной меры угла в радианную и обратно

$\alpha = \frac{\pi \cdot a^\circ}{180^\circ}$, $a^\circ = \frac{\alpha \cdot 180^\circ}{\pi}$ (α — радианная мера угла, a — градусная).

Основные соотношения между тригонометрическими функциями

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1\,,\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\,,\ \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,,\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}\,,$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}\,,\ \sec^2\alpha = 1 + \operatorname{tg}^2\alpha\,,\ \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}\,,$$

$$\operatorname{cosec}^2\alpha = 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha$$

Формулы приведения

$$\sin(\alpha + n\pi) = \pm\sin\alpha\,,\ \cos(\alpha + n\pi) = \pm\cos\alpha\,,\ \operatorname{tg}(\alpha + n\pi) = \operatorname{tg}\alpha\,,$$

$$\sin\left(\alpha + n\frac{\pi}{2}\right) = \pm\cos\alpha\,,\ \cos\left(\alpha + n\frac{\pi}{2}\right) = \mp\sin\alpha\,,$$

$$\operatorname{tg}\left(\alpha + n\frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{ctg}\alpha$$

(в формулах первой строки n может быть любым целым числом, причем верхний знак соответствует значению $n = 2k$, а нижний — значению $n = 2k + 1$; в формулах второй и третьей строк n может быть только нечетным числом, причем верхний знак берется при $n = 4k + 1$, а нижний — при $n = 4k - 1$).

Формулы сложения

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta\,,$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta\,.$$

Двойные и половинные углы

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha\,,\ \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha\,,\ \operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}\,,$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}\,,\ 2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \cos\alpha\,,$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}\,,\ 2\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1 + \cos\alpha\,,$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}} = \frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} = \frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha}\,.$$

Формулы преобразования сумм и разностей тригонометрических функций в произведения

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha \pm \beta}{2}\cos\frac{\alpha \mp \beta}{2}\,,$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2}\,,$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\sin\frac{\beta - \alpha}{2}\,.$$

Содержание

Э. С. Беляева, А. С. Потапов, С. А. Титоренко

УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С ПАРАМЕТРОМ

Часть 1

Тема «Уравнения и неравенства с параметром» отсутствует в школьной программе, но имеется в программах вступительных экзаменов в вузы и в материалах ЕГЭ по математике. Данный учебный комплект раскрывает эту тему в полном объеме и состоит из учебного пособия в двух частях и электронного приложения.

Каждый раздел пособия содержит необходимые теоретические сведения. Детально рассмотрен широкий спектр задач разных уровней сложности, доступно и наглядно изложена методика их решения. Комплект станет незаменимым помощником для старшеклассников, абитуриентов, преподавателей математики, а также для студентов математических специальностей.

Пособия этой серии помогут вам:

- провести глубокую теоретическую и практическую подготовку к единому государственному экзамену;
- самостоятельно разобраться в сложных вопросах, не прибегая к помощи репетитора.

дрофа

ISBN 978-5-358-02062-7

9 785358 020627