УДК 512.542+512.547

Белоногов В. А. **Представления и характеры в теории конечных групп.** Свердловск, 1990. ISBN 5-7691-0075-3.

Излагаются основы теории модулярных представлений и теории p-блоков с включением основных результатов, наиболее часто применяемых при исследовании конечных групп. Способ изложения не требует применения сложного теоретико-кольцевого аппарата. Изучаются введенные автором понятия взаимодействия и D-блока, характеризующие соотношения ортогональности некоторого общего вида. Продемонстрировано применение рассмотренных результатов и методов в различных конкретных ситуациях при исследовании конечных групп.

Книга рассчитана на научных работников, аспирантов и студентов, интересующихся теорией конечных групп.

Ответственный редактор

доктор физико-математических наук **А. И. Старостин**

Рецензенты

доктор физико-математических наук **А. А. Махнёв**,
кандидат физико-математических наук **И. А. Чубаров**

Глава 1
Представления над полем произвольной характеристики

§ А. Сведения из линейной алгебры . . . .
§ Б. Представления групп. Интерпретации. Эквивалентность
§ В. Приводимые представления. Их неприводимые части и диагонали . . . .
§ Г. Регулярное представление . . . .
§ Д. Свойства неприводимого представления . . . . .
§ Е. Классы неприводимых представлений . . . .
§ Ё. Строение групповой алгебры . . . .
§ Ж. Связь представлений группы и подгруппы . . . .

Глава 2
Обыкновенные представления

§ А. Основы теории обыкновенных представлений. Обзор .
§ Б. Индуцированные характеры . . . .
§ В. Брауэрова характеризация обобщенных характеров . .
§ Г. Теорема Брауэра — Дэйда о нормальном дополнении
§ Д. Обобщение теоремы Фробениуса — Виланда . . .
§ Е. Непростота или сопряженность инволюций .
§ Ё. Признаки непростоты конечной группы на языке характеров . . . .
§ Ж. π-обобщения . . . .

Глава 3
Взаимодействия и *D*-блоки

§ А. Определение взаимодействий . . . .
§ Б. Взаимодействие на языке таблицы характеров . . .
§ В. Взаимодействие на языке классовых функций . . .
§ Г. Взаимодействие на языке групповой алгебры . . .
§ Д. D-блоки и p-блоки . . . .
§ Е. Взаимодействия и p-блоки в абелевых группах . . .
§ Ё. p-блоки некоторых конкретных групп . . . . .

Глава 4
Модулярные представления

§ А. Простейшие свойства . . . . . .
§ Б. Алгебраические числа . . . .
§ В. Модулирование обыкновенных представлений . . .
§ Г. Брауэровы характеры. Число классов неприводимых модулярных представлений . . . . .
§ Д. Связь обыкновенных и брауэроных характеров . . .

§ Е. Таблица брауэровых характеров и связанные с ней матрицы 157
§ Ё. Брауэровы характеры группы и подгруппы . . 167

Глава 5
Теория p-блоков

§ А. Определение p-блоков по Брауэру 170
§ Б. p-блоки и брауэровы характеры . . 175
§ В p-блоки и групповая алгебра CG . . 179
§ Г. Дефект блока 182
§ Д. p-блоки и групповая алгебра FG . 187
§ Е. Дефектные группы блока 192
§ Ё. Брауэрово индуцирование блоков. Первая основная теорема Брауэра 196
§ Ж. Обобщенные числа разложения. Вторая основная теорема Брауэра 203
§ З. Взаимодействия p-блоков с p-сечениями 213
§ И. p-блоки и нормальные подгруппы 219
§ Й. Главный p-блок 222
§ К. p-блоки группы $G=PC_G(P)$ 225
§ Л О блоках с циклической дефектной группой . 230

Глава 6
Применения к исследованию строения групп

§ А. Уточнение теоремы Бернсайда 232
§ Б. Z^*-теорема 234
§ В. О группах с сильно замкнутой абелевой 2-подгруппой 237
§ Г. Признаки непростоты факторизуемой группы . . . 243

Глава 7
Конечные группы с небольшим главным p-блоком

§ А. Формулировки основных результатов 246
§ Б. Разложение на простые множители порядков конечных групп лиева типа 248
§ В. Конечные группы с небольшим главным D-блоком 251
§ Г. Доказательство теоремы А2 258
§ Д Главные D-блоки некоторых простых групп . . . 259
§ Е Доказательство теоремы А3 268

Глава 8
Активные фрагменты таблицы характеров

§ А Активные фрагменты и их ранги 271
§ Б Активный фрагмент и порядки централизаторов . . 275
§ В Характеризации некоторых простых групп активным фрагментом таблицы характеров 280
§ Г Порядок группы 282
§ Д Простые группы 284
§ Е Доказательство теорем В1 и В2 . . 289
§ Ё Доказательство теоремы В3 290
§ Ж Взаимодействия и нормальные подгруппы 294
§ З Малые взаимодействия 296

Глава 9
Пространственные взаимодействия

§ А Геометрическая характеризация взаимодействий 308
§ Б Геометрия полуортогональных подпространств . 311
§ В Взаимодействия [illegible] некоторых пространствах 319

§ Г. К определению скалярного произведения в $Z(CG)$ 329
§ Д. Пространственные взаимодействия 336
§ Е. Индуцирование и ограничение взаимодействий . 340
§ Ё. Взаимодействия для брауэровых характеров 346

Приложение 1. Таблицы характеров 352

Приложение 2. Матрицы p-разложения 366

Приложение 3. Конечные простые группы и их порядки 368

Список литературы . 370

Предметный указатель 374

ПРЕДИСЛОВИЕ

Представления и характеры давно и с большим успехом используются при изучении строения групп. Теория представлений конечных групп над полем, возникшая в конце прошлого века, бурно развивается в настоящее время. Она естественным образом подразделяется на теории обыкновенных и модулярных представлений. На стыке их находится теория p-блоков, развитая Р. Брауэром.

Изучение связей между строением конечной группы и свойствами ее таблицы характеров — одна из главных задач теории представлений. Основные темы настоящей книги — *модулярные представления*, *p-блоки* и *взаимодействия* — тесно связаны с этой задачей. Понятие взаимодействия, введенное в [6], по существу, представляет собой некоторый общий тип соотношений ортогональности. Оно позволяет, в частности, дать новый подход к p-блокам. Основными объектами изучения в книге являются характеры и классовые функции. Представления же появляются лишь в некоторых ключевых пунктах. Изложение материала можно назвать элементарным. Нигде не используется, например, модульно-кольцевой аппарат. Все необходимые результаты из теории алгебраических чисел доказаны в главе 4. Некоторое представление о содержании книги дают оглавление и следующие замечания.

Глава 1, по существу,— введение в предмет.

Глава 2 посвящена обыкновенным представлениям. Здесь содержатся обзор результатов из [12], новые результаты, необходимые для следующих глав, а также некоторые применения обыкновенных характеров к исследованию конечных групп.

В главе 3 в рамках теории обыкновенных характеров рассматривается понятие взаимодействия. С его помощью для любого нормального подмножества D конечной группы G определяются D-блоки. Как частный случай D-блоков вводятся p-блоки. В главе 5 будет доказано, что это определение равносильно классическому определению p-блока, введенному Брауэром. Преимущество данного здесь определения состоит в том, что оно с самого начала зависит только от простого числа p и не зависит от выбора в кольце целых алгебраических чисел максимального идеала, содержащего p.

Глава 4 содержит основы теории модулярных представлений.

Главным объектом изучения здесь являются некоторые особые классовые функции группы, называемые брауэровыми характерами. Устанавливаются важные соотношения между обыкновенными и брауэровыми характерами. Отметим, что обычно брауэров характер (для простого числа p) считается определенным лишь на множестве всех p'-элементов группы. По нашему же определению он определен и на остальных элементах группы, приняв на них нулевые значения. (В книге имеются еще некоторые отклонения от общепринятой терминологии.)

В главе 5 развивается аппарат теории p-блоков. Рассматриваются понятия дефекта и дефектных групп блока, брауэров гомоморфизм и брауэрово индуцирование блоков. Доказываются первая и вторая основные теоремы Брауэра о p-блоках. Эти теоремы, а также результаты о главном p-блоке (§ 11) наиболее часто используются в приложениях.

Приложениям теории p-блоков к исследованию строения конечных групп посвящена глава 6. Здесь показаны в действии изложенные ранее результаты.

Глава 7 посвящена изучению конечных групп, имеющих главный p-блок порядка 3. Многие результаты этой главы относятся к произвольным D-блокам. Полное описание исследуемых здесь групп получено с помощью классификации конечных простых групп.

В главах 8, 9 продолжается изучение взаимодействий и D-блоков. С каждым взаимодействием в группе G естественным образом связывается определенная подматрица таблицы характеров группы G, называемая активным фрагментом этой таблицы. В главе 8 изучаются влияние активного фрагмента таблицы характеров группы на строение группы и обратное влияние. В частности, получены характеризации активным фрагментом некоторых конечных простых групп. Исследованы взаимодействия с двухстрочным или двухстолбцовым активным фрагментом.

В главе 9 взаимодействия характеризуются в геометрических терминах, на языке так называемых полуортогональных подпространств. Эта характеризация наводит на мысль о необходимости изучения некоторых обобщенных взаимодействий. Такие взаимодействия появляются под названием пространственных взаимодействий, так как взаимодействуют уже подпространства указанием их порядков. Список литературы поможет выбрать темы для дальнейшего чтения.

Ссылка на результат $\mathrm{Y}n$ главы m (n, m — числа, Y — буква) в этой главе обозначается через $\mathrm{Y}n$, а за пределами ее через $m\mathrm{Y}n$. Подобно, § Y главы m обозначается через § $m\mathrm{Y}$ за пределами главы m. $\mathrm{Y}n(k)$ есть ссылка на k-й пункт из $\mathrm{Y}n$. Выражение «$A = B$ в силу C» записывается кратко в виде «$A =_C B$» или (когда C записывается длинно) в виде «$A = B\S C\S$». Оба сокращения могут встречаться в цепочке соотношений; например, запись $A = B\S C\S \leqslant D$ означает, что $A = B\S C\S$ и $B \leqslant D$. Подобный смысл имеют сокращения, в которых вместо знака $=$ встречаются знаки $\Leftrightarrow$, $\Rightarrow$ и т. п. Знак $\times$ используется иногда как знак переноса формул. Латинские буквы G и p играют особую роль. Всюду в книге G — конечная группа, а p — простое число.

ОБОЗНАЧЕНИЯ

Из теории множеств:

Знаки $\in$, $\subseteq$, $\cup$, $\cap$, $\setminus$, $\varnothing$ имеют обычный теоретико-множественный смысл.

$|A|$ — мощность (число элементов) конечного множества A.

$\{a, \ldots, x\}$ — множество элементов $a, \ldots, x$.

$\{\ldots|\ldots\}$ — множество всех ... таких, что ....

$\{a_1, \ldots, a_n\}$ — множество $\{a_1, \ldots, a_n\}$ мощности n (т. е. с $a_i \neq a_j$ при $i \neq j$).

$\dot{\cup}$ — знак объединения попарно не пересекающихся множеств

$A \times B$ — декартово произведение множеств A и B.

$f: A \to B$ — другая запись для f, если f — функция из A в B (отображение A в B), т. е. $f = (A, B, \Gamma)$, где $\Gamma \subseteq A \times B$ и для каждого $a \in A$ существует единственный $b \in B$ такой, что $(a, b) \in \Gamma$ (A — область определения, B — область прибытия, а Γ — график функции f).

Если f — функция из A в B, $a \in A$ и $C \subseteq A$, то

$\left.\begin{matrix} f(a) \\ a^f \end{matrix}\right\}$ — образ a при отображении f (второе обозначение употребляется лишь тогда, когда f — гомоморфизм векторного пространства, кольца или группы);

f: $a \mapsto b$ — f отображает a в b (т. е. $f(a) = b$ или $a^f = b$);

$f(C)$ $= \{f(c) | c \in C\}$;

C^f $= \{c^f | c \in C\}$;

$f|_C$ — ограничение f на C;

$a \mapsto T(a)$ $(a \in A)$ — функция из A в B с графиком $\Gamma = \{(a, T(a)) | a \in A\}$, где либо B ясно из контекста, либо $B = \{T(a) | a \in A\}$, (здесь T — некоторое правило, позволяющее указать $T(a)$ по a).

Из теории чисел:

$\boldsymbol{N}$ — множество всех натуральных чисел;

$\boldsymbol{Z}$ — кольцо всех целых чисел;

$\acute{\boldsymbol{Z}}$ — кольцо всех целых алгебраических чисел;

$\boldsymbol{Q}$ — поле всех рациональных чисел;

$\acute{\boldsymbol{Q}}$ — поле всех алгебраических чисел;

$\boldsymbol{R}$ — поле всех действительных чисел;
$\boldsymbol{C}$ — поле всех комплексных чисел;
$\boldsymbol{Q}(a)$ — наименьшее подполе из $\boldsymbol{C}$, содержащее a ($a \in \boldsymbol{C}$);
p — всюду обозначает простое число.

Если $m, n \in \boldsymbol{Z}$, то
$m \mid n$ — m делит n;
$p^m \| n$ — $p^m \mid n$ и p^{m+1} не делит n;
$\alpha_p(n) = m$, где $p^m \| n$;
$n_p = p^{\alpha_p(n)}$ (p-часть числа n);
$\pi(n)$ — множество всех простых чисел, делящих n;
$o_p(n)$ — показатель (порядок) числа n по модулю p, т. е. наименьшее из натуральных чисел m таких, что $n^m \equiv 1 \pmod p$ (определен лишь когда p не делит n).

Если π — множество простых чисел, то
n_π — π-часть числа n $\left(= \prod_{p \in \pi} n_p\right)$;
π' — множество всех простых чисел, не принадлежащих π.
$p' = \{p\}'$.
(m, n) — наибольший общий делитель m и n.

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq j, \\ 1, & \text{если } i = j \end{cases}$$

(i, j — любые объекты, а 0 и 1 — ноль и единица рассматриваемого в контексте поля).

Если $a \in \boldsymbol{C}$, то
$|a|$ — модуль a,
$\bar{a}$ — число комплексно сопряженное с a,
$\mathrm{GF}(p^n)$ — поле, состоящее из p^n элементов.
$\mathfrak{p}$ — некоторый максимальный идеал кольца $\hat{\boldsymbol{Z}}$, содержащий p;
$\mathfrak{R} = \left\{ \frac{a}{b} \middle| a \in \hat{\boldsymbol{Z}}, b \in \hat{\boldsymbol{Z}} \setminus \mathfrak{p} \right\}$ — подкольцо в $\hat{\boldsymbol{Q}}$;
$\mathfrak{P}$ — (единственный) максимальный идеал в $\mathfrak{R}$;
$\boldsymbol{F}$ $\mathfrak{R}/\mathfrak{P}$ (алгебраическое замыкание поля порядка p);
μ естественный гомоморфизм $\mathfrak{R}$ на $\boldsymbol{F}$.

Из линейной алгебры:

Если K кольцо и m, n — натуральные числа, то
K^{+} аддитивная группа кольца K;
$K^{\times}$ мультипликативная группа кольца K;
$M(m \times n, K)$ множество всех $m \times n$-матриц над K;
$M(n, K)$ кольцо всех $n \times n$-матриц над K;
$GL(n, K)$ $M(n, K)$.

Если X — матрица, то
X_{ij} элемент, лежащий в i-й строке и j-м столбце матрицы X;
$X^{т}$ транспонированная матрица для X ($(X^{т})_{ij} = X_{ji}$);
ранг X — ранг матрицы X;
$X_{m \times n}$ — другое обозначение для X, если X — $m \times n$-матрица.

Если X — $n \times n$-матрица, то
$\det(X)$ — определитель X;

след (X) $= \sum_{i=1}^{n} X_{ii}$.

$\operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n)$ — диагональная $n \times n$-матрица с главной диагональю $(a_1, \ldots, a_n)$.

$O_{m \times n}$ — нулевая $m \times n$-матрица над некоторым кольцом (известным из контекста);

O $= O_{m \times n}$, если m и n ясны из контекста,

E_n — единичная $n \times n$-матрица над некоторым кольцом (известным из контекста);

E $= E_n$, если n ясно из контекста.

Если $M \in M(m \times n, C)$, то

$\overline{M}$ — $m \times n$-матрица с $(\overline{M})_{ij} = \overline{M_{ij}}$ при всех i, j;

M^* $= \overline{M}^{\mathsf{T}} (= \overline{M^{\mathsf{T}}})$.

$M \otimes X$ — тензорное произведение матрицы M на матрицу X.

$V(n, F)$ - арифметическое векторное пространство размерности n над полем F.

Если V — векторное пространство над полем F, то

$\dim V$ — размерность V;

$\operatorname{End}(V)$ — кольцо всех эндоморфизмов (линейных операторов) V;

$\operatorname{Aut}(V)$ — группа всех автоморфизмов V;

$U \oplus W$ — прямая сумма подпространств U и W из V;

$U \otimes W$ тензорное произведение пространств U и W;

$F[A]$ — подпространство из V, натянутое на подмножество A из V.

Если $B = (B_1, \ldots, B_n)$ — упорядоченная база в $V \simeq V(n, F)$, $v \in V$ и S — столбец векторов из V, то

α_B — матрица оператора $\alpha \in \operatorname{End}(V)$ относительно B;

i_B — естественный изоморфизм из $\operatorname{Aut}(V)$ на $\operatorname{GL}(n, F)$ (относительно B);

v/B — (единственная) матрица-строка $(f_1, \ldots, f_n)$ с элементами из F такая, что $v = \sum_{i=1}^{n} f_i B_i (= (f_1, \ldots, f_n) B$, если B записана в виде столбца);

S/B (единственная) матрица M над F такая, что $S = MB$, если B записана в виде столбца.

Если на V зафиксировано некоторое скалярное произведение $(\, , \,)_V$, U и W — подпространства из V и $\alpha \in \operatorname{End}(V)$, то

$W^{\perp}$ $= \{v \in V \mid (v, w)_V = 0$ для всех $w \in W\}$;

$U \perp W$ — U и W полуортогональны;

π_W — ортогональное проектирование V на W;

α^* — сопряженный с α эндоморфизм V.

Если на паре (V, L) векторных пространств задана форма $s(\, , \,)$, W — подпространство из V и $\alpha \in \operatorname{End}(V)$, то

W' $= \{l \in L \mid s(w, l) = 0$ для всех $w \in W\}$;

α' — двойственный относительно s эндоморфизм L.

Из теории групп:

G всюду обозначает конечную группу.

$\Phi(G)$ — подгруппа Фраттини группы G.

$Z(G)$ — центр G.

G' — коммутант G.

$\mathrm{Aut}(G)$ — группа всех автоморфизмов G.

$C_G(H)$ — централизатор H в G.

$N_G(H)$ — нормализатор H в G.

$\left.\begin{array}{l} C(H) = C_G(H) \\ N(H) = N_G(H) \end{array}\right\}$, если G ясна из контекста.

$\mathrm{Cl}(G)$ — множество всех классов сопряженных элементов группы G.

$k(G) = |\mathrm{Cl}(G)|$.

$H \leqslant G$: H — подгруппа группы G.

$H \trianglelefteq G$: H — нормальная подгруппа группы G.

$H \trianglelefteq G$: H — нормальное подмножество (объединение классов сопряженных элементов) группы G.

$\pi(G)$ — множество всех простых делителей порядка G.

$\langle H \rangle$ — подгруппа, порожденная множеством H (в рассматриваемой группе).

$\pi(g) = \pi(\langle g \rangle)$ для $g \in G$.

$\left.\begin{array}{l} N \rtimes H \\ H \ltimes N \end{array}\right\}$ — полупрямое произведение нормальной подгруппы N и подгруппы H.

$H^G = \{g^{-1}hg \mid h \in H,\ g \in G\}$ для $H \subseteq G$.

Если $g \in G$, а π — простое число или множество простых чисел, то

$g^G = \{g\}^G$ (класс сопряженных элементов);

$o(g)$ — порядок g;

g_π — π-часть элемента g;

$S_{G,\pi}(g)$ — π-сечение группы G, содержащее g;

G_π — множество всех π-элементов из G;

$O_\pi(G)$ — наибольшая нормальная π-подгруппа из G;

$O^\pi(G)$ $\langle G_{\pi'} \rangle$.

$O(G)$ $O_{2'}(G)$

$\mathrm{Syl}_p(G)$ — множество всех p-силовских подгрупп группы G;

Если $D \trianglelefteq G$, то

$k_G(D)$ — число классов сопряженных элементов группы G, содержащихся в D.

Из теории представлений:

$\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{C}, \ldots$ представления групп или групповых алгебр.

$\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ классовые функции или некоторые гомоморфизмы колец

$\chi_{\mathscr{A}}$ характер представления $\mathscr{A}$.

$\deg \mathscr{A}$ степень $\mathscr{A}$.

$\mathrm{Ker}\, \mathscr{A}$ — ядро $\mathscr{A}$.

$\mathscr{A} \approx \mathscr{B}$ $\mathscr{A}$ эквивалентно $\mathscr{B}$.

$\mathscr{A} \sim \mathscr{B}$ — $\mathscr{A}$ диагонально эквивалентно $\mathscr{B}$.
$\mathscr{A} \oplus \mathscr{B}$ — прямая сумма $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$.
$\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ — тензорное произведение $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$.
$\mathscr{A}_W$ — фактор представления $\mathscr{A}$ (на W).
$\left.\begin{matrix}\mathscr{A}_T^G \\ \mathscr{A}^G\end{matrix}\right\}$ — индуцированное представление.
$\mathrm{Reg}_{G,F}$ — операторное регулярное представление группы G над полем F.
FG — групповая алгебра G над F.
$J(FG)$ — радикал Джекобсона алгебры FG.
$Z(FG)$ — центр FG (подалгебра в FG).

Если $A \subseteq G$, то

$\hat{A}_{(F)} = \sum\limits_{a \in A} a \in FG$ (длина волны зависит от длины A),
$\hat{A} = \hat{A}_{(F)}$, если F ясно из контекста.
$\mathrm{CF}(G \to K)$ — множество всех классовых функций из G в K (K — кольцо).
$\mathrm{CF}(G)$ — C-пространство всех классовых функций из G в C,
$\mathrm{Irr}_F(G)$ — множество всех неприводимых характеров G над F,
$\mathrm{Irr}(G) = \mathrm{Irr}_C(G)$.
$\mathrm{Irr}(G|N) = \{\chi \in \mathrm{Irr}(G) | \mathrm{Ker}\,\chi \supseteq N\}$, где $N \trianglelefteq G$.
1_G — главный характер группы G.

Если $\psi \in \mathrm{CF}(G)$, $\alpha \in \mathrm{Aut}(C)$ и $z \in Z(CG)$, то

$\mathrm{Irr}(\psi) = \{\chi \in \mathrm{Irr}(G) | (\psi, \chi)_G \neq 0\}$;
ψ^α — функция из G в C такая, что $\psi^\alpha(g) = \psi(g)^\alpha$ для всех $g \in G$;
$\bar{\psi} = \psi^\alpha$, где α — комплексное сопряжение ($\bar{\psi}(g) = \overline{\psi(g)}$);
$\tilde{\psi}$ — функция из CG в C такая, что $\tilde{\psi}\left(\sum\limits_{g \in G} a_g g\right) = \sum\limits_{g \in G} a_g \psi(g)$ $(a_g \in C)$;
$\psi(z)$ часто пишется вместо $\tilde{\psi}(z)$;
$(\alpha, \beta)_G = \frac{1}{|G|} \sum\limits_{g \in G} \alpha(g) \overline{\beta(g)}$ — скалярное произведение в $\mathrm{CF}(G)$ ($\alpha, \beta \in \mathrm{CF}(G)$).
$(u, v)_G = a \sum\limits_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \chi(u) \overline{\chi(v)}$ — скалярное произведение в $Z(CG)$ $\left(a = \frac{1}{|G|}\right.$ в гл. 3 и $a = 1$ в гл. 9) ($u, v \in Z(CG)$).
$(u, v)_Z$ — скалярное произведение в $Z = Z(CG)$, рассматриваемое в § 9Г ($u, v \in Z$).
$\hat{A}$ — группа характеров абелевой группы A.

Если $H \leqslant G$, $\alpha \in \mathrm{CF}(H)$ и $g \in G$, то

α^G — индуцированная классовая функция;

α^g — функция из H^g в C такая, что $\alpha^g(h^g)=\alpha(h)$ для всех $h\in H$;
$G_\alpha=\{g\in G\mid \alpha^g=\alpha\}$.

Если $\chi\in \mathrm{Irr}(G)$, то

ω_χ — линейное отображение из $Z(CG)$ в C такое, что $\omega_\chi(\widetilde{g^G})=$ $=\dfrac{|g^G|\chi(g)}{\chi(1)}$;

$e_\chi=\sum\limits_{g\in G}\dfrac{\chi(1)\overline{\chi(g)}}{|G|}g$.

Если $D\trianglelefteq G$, $\Phi\subseteq \mathrm{Irr}(G)$, $\{\psi\}\cup\Theta\subseteq \mathrm{CF}(G)$ и $\{z\}\cup V\subseteq$ $\subseteq Z(CG)$, то

$X(\Phi, D)$ — подматрица таблицы характеров X группы G, состоящая из значений характеров из Φ на элементах из D;

e_Φ $=\sum\limits_{\varphi\in\Phi}e_\varphi$;

$\psi|_D^0$ — D-срезка функции ψ (она совпадает с ψ на D и исчезает на $G\setminus D$);

$\Theta|_D^0$ $=\{\theta|_D^0\mid\theta\in\Theta\}$;

ε_D $=1_G|_D^0$,

ψ_Φ $=\sum\limits_{\varphi\in\Phi}(\psi,\varphi)_G\varphi$ — Φ-срезка функции ψ;

$z|_\Phi^0$ $=ze_\Phi$ — Φ-срезка элемента z;

z_D — D-срезка элемента z $\left(\text{если } z=\sum\limits_{g\in G}a_g g, \text{ где } a_g\in C,\right.$ $\left.\text{то } z_D=\sum\limits_{d\in D}a_d d\right)$;

$V|_\Phi^0$ $=\{v|_\Phi^0\mid v\in V\}$;

V_D $=\{v_D\mid v\in V\}$;

ψ^c $=\psi|^0_{G_{p'}}$, если p ясно из контекста;

$\hat{D}$ $=\{\breve{C}\mid C\in \mathrm{Cl}(G),\ C\subseteq D\}$, если G ясна из контекста;

D^- $=G\setminus D$

Φ^- $=\mathrm{Irr}(G)\setminus\Phi$

$D\longleftrightarrow\Phi$ — D и Φ взаимодействуют.

$\beta_{\mathscr{A}}$ — брауэров характер представления $\mathscr{A}$.

$\mathrm{IBr}_p(G)$ — множество всех неприводимых брауэровых p-характеров группы G;

$\mathrm{IBr}(G)$ $=\mathrm{IBr}_p(G)$, если p ясно из контекста.

$\acute{\beta}$ — главный неразложимый характер группы, соответствующий неприводимому брауэрову характеру β.

B — таблица брауэровых характеров рассматриваемой группы,

d — матрица p-разложения группы G,

$\mathfrak{c}$ — матрица Картана группы G,
$X^{(\mu)}$ — $\mathfrak{p}$-модуляция X, где X — представление, матрица, классовая функция или элемент из $\mathfrak{Z}G$.
$\mathrm{Bl}_p(G)$ — множество всех p-блоков группы G,
$\mathrm{Bl}(G)$ $=\mathrm{Bl}_p(G)$, если p фиксировано,
$\mathrm{Bl}_p(G|\mathrm{Def}\,P)$ — множество всех p-блоков группы G с дефектной группой P;
$\mathfrak{d}_{\mathrm{B}}$ — матрица p-разложения p-блока B,
$\mathfrak{c}_{\mathrm{B}}$ — матрица Картана p-блока B,
$d_p(\chi)$ — p-дефект $\chi\,(\chi\in\mathrm{Irr}(G))$,
$d_p(\mathrm{B})$ — p-дефект p-блока B,
$d(\mathrm{B})$ $=d_p(\mathrm{B})$, если p фиксировано.
$\mathfrak{D}_p(K)$ — класс сопряженных в G p-дефектных групп класса $K\in\mathrm{Cl}(G)$.
$\mathfrak{D}_p(\mathrm{B})$ — множество всех p-дефектных групп p-блока B.
$\mathfrak{D}(\mathrm{B})$ $=\mathfrak{D}_p(\mathrm{B})$, если p фиксировано.
λ_{B} — блочный характер алгебры FG, связанный с блоком B.
$a_{\mathrm{B}}(K)$ определяется равенством $e_{\mathrm{B}}^{\mu}=\sum\limits_{K\in\mathrm{Cl}(G)}a_{\mathrm{B}}(K)\widehat{K}$.

Если $H\leqslant G$ и $\Theta\in\mathrm{Bl}_p(H)$ и λ_Θ — блочный характер, то
$\Theta^{(G)}$ — индуцированный (по Брауэру) блок,
$\lambda_\Theta^{(G)}$ — индуцированный (по Брауэру) блочный характер,
$\mathrm{B}_{(H)}$ $=\bigcup\{\Theta\in\mathrm{Bl}_p(H)\,|\,\Theta^{(G)}=\mathrm{B}\}$, где $\mathrm{B}\in\mathrm{Bl}_p(G)$,
$\mathrm{B}(a)$ $=\mathrm{B}_{(C_G(a))}\,(a\in G)$,
$r_{G,H,P}$ — брауэров гомоморфизм,
$\mathfrak{d}^a$ — матрица обобщенных чисел разложения для p-сечения $S_G(a)$ группы $G\,(a\in G_p)$,
$\hat{\mathfrak{d}}$ — матрица обобщенных чисел разложения (для p) группы G,
$\xi_{a,\alpha}$ — функция, определяемая в § 5Ж.

Если Λ — подпространство в $\mathrm{CF}(G)$ и V — подпространство в $Z(CG)$, то
$\psi|_V^{\circ}$ — V-срезка функции $\psi\in\mathrm{CF}(G)$,
$z|_\Lambda^{\circ}$ — Λ-срезка элемента $z\in Z(CG)$,
$\Lambda\longleftrightarrow V$ — Λ и V взаимодействуют,
$\Lambda\underset{s}{\longleftrightarrow}V$ — Λ и V взаимодействуют относительно s.

Глава 1

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ НАД ПОЛЕМ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ

§ А. СВЕДЕНИЯ ИЗ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Из курса линейной алгебры (см., например, [34] или [42]) читателю знакомы понятие векторного пространства и относящиеся к нему понятия базы (или базиса), размерности, подпространства, гомоморфизма и другие. Напомним некоторые из них.

Векторное пространство над полем F — это множество V с операциями сложения ($u+v\in V$ для u, $v\in V$) и умножения на скаляр ($fv\in V$ для $f\in F$ и $v\in V$) такими, что

1) V — абелева группа по сложению;
2) $f(u+v)=fu+fv$, $(f_1+f_2)v=f_1v+f_2v$;
3) $(f_1f_2)v=f_1(f_2v)$, $1v=v$.

Здесь u, $v\in V$; f, f_1, $f_2\in F$; 1 — единица поля F. Элементы векторного пространства называют векторами. В этой книге будут встречаться только векторные пространства конечной размерности над полем F, которые мы будем называть *F-пространствами*. F-пространство размерности 0 состоит лишь из одного вектора. Всякое F-пространство размерности $\dim V=n\geqslant 1$ имеет *базу*, т. е. либо множество $\{v_1, \ldots, v_n\}$, либо последовательность $(v_1, \ldots, v_n)$ векторов из V такие, что каждый вектор из V однозначно представляется в виде $\sum_{i=1}^{n} f_iv_i$, где $f_i\in F$. Базы первого типа называются *неупорядоченными*, а второго — *упорядоченными*. Очевидно, равносильны условия: а) $(v_1, \ldots, v_n)$ — база V; б) $\{v_1, \ldots, v_n\}$ — база V и $v_i\neq v_j$ при $i\neq j$.

Множество $M(m\times n, F)$ всех $m\times n$-матриц над F с операциями сложения матриц и умножения матриц на элементы из F является F-пространством размерности mn. F-пространство $M(1\times n, F)$ называется *арифметическим* F-пространством и обозначается через $V(n, F)$.

Отображение $\alpha: v\mapsto v^\alpha$ $(v\in V)$ F-пространства V в F-пространство W называется *гомоморфизмом*, если $(u+v)^\alpha=u^\alpha+v^\alpha$ и $(fv)^\alpha=fv^\alpha$ для всех u, $v\in V$ и $f\in F$. F-пространства V и W называются *изоморфными* (запись $V\simeq W$), если существует изоморфизм (т. е. взаимно однозначный гомоморфизм) V на W.

A1. Всякое F-пространство размерности $n \geqslant 1$ изоморфно $V(n, F)$.

□

Гомоморфизм F-пространства V в себя называется *эндоморфизмом* или *линейным оператором* пространства V. Множество всех эндоморфизмов пространства V относительно операций сложения и умножения ($v^{\alpha+\beta} = v^{\alpha} + v^{\beta}$ и $v^{\alpha\beta} = (v^{\alpha})^{\beta}$) является кольцом, которое обозначается через $\mathrm{End}(V)$. Мультипликативная группа всех обратимых элементов из $\mathrm{End}(V)$ (*автоморфизмов* V) обозначается через $\mathrm{Aut}(V)$.

Пусть V — F-пространство, $\alpha \in \mathrm{End}(V)$ и $B = (v_1, \ldots, v_n)$ — база V. *Матрицей эндоморфизма (оператора)* α относительно B называется матрица α_B, составленная из коэффициентов разложения векторов $v_1^{\alpha}, \ldots, v_n^{\alpha}$ по базе B, а именно, если

$$\text{(a1)} \qquad \begin{cases} v_1^{\alpha} = f_{11}v_1 + \ldots + f_{1n}v_n, \\ \vdots \\ v_n^{\alpha} = f_{n1}v_1 + \ldots + f_{nn}v_n \end{cases}$$

($f_{ij} \in F$), то

$$\alpha_B = \begin{pmatrix} f_{11} & \ldots & f_{1n} \\ \vdots & & \\ f_{n1} & \ldots & f_{nn} \end{pmatrix}.$$

Коэффициенты f_{ij} записаны в α_B в том же порядке, в каком они встречаются в системе (1).

Для любого кольца K через $M(n, K)$ обозначим кольцо всех $n \times n$-матриц над K с операциями сложения и умножения матриц, а через $GL(n, K)$ — мультипликативную группу всех обратимых матриц из $M(n, K)$.

Легко проверить (см. [12, § 4]) справедливость следующего утверждения.

A2. Пусть V — F-пространство размерности n и B — его упорядоченная база. Тогда отображение $\alpha \mapsto \alpha_B$ ($\alpha \in \mathrm{End}(V)$) есть изоморфизм кольца $\mathrm{End}(V)$ на кольцо $M(n, F)$, а его ограничение

$$i_B : \alpha \mapsto \alpha_B \ (\alpha \in \mathrm{Aut}(V))$$

— изоморфизм группы $\mathrm{Aut}(V)$ на группу $GL(n, F)$.

□

A3. Определение. Изоморфизм i_B, определенный в **A2**, назовем *естественным изоморфизмом* $\mathrm{Aut}(V)$ на $GL(n, F)$, а i_B^{-1} — *естественным изоморфизмом* $GL(n, F)$ на $\mathrm{Aut}(V)$.

В вычислениях, связанных с матрицами, условимся записывать базы F-пространства V в виде столбцов. Под произведением $k\times l$-матрицы X над F на столбец $U=\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_l \end{pmatrix}$ $(u_i\in V)$ будем понимать столбец $XU=\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{l} X_{1i}u_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{l} X_{ki}u_i \end{pmatrix}$ (X_{ij} обозначает элемент, лежащий в i-й строке и j-м столбце матрицы X). Очевидно, что $X(YU)=(XY)U$ для матриц X, Y и столбца U, а если U — база в V, то из $XU=YU$ следует $X=Y$.

Если $\alpha\in\operatorname{End}(V)$, то U^α обозначает столбец, полученный из столбца U (см. выше) заменой каждого ее вектора u_i на u_i^α.

A4. Пусть V — F-пространство, $\alpha\in\operatorname{Aut}(V)$, а A и B — упорядоченные базы в V, записанные в виде столбцов. Тогда

$$\alpha_B=T\alpha_A T^{-1},$$

где T — матрица перехода от A к B.

Доказательство. Из $B=TA$ получаем $(\alpha_B T)\,A=\alpha_B B=B^\alpha=(TA)^\alpha=TA^\alpha=(T\alpha_A)\,A$.

□

A5. Пусть V — F-пространство с упорядоченной базой A и W — F-пространство с упорядоченной базой B. Тогда для $\alpha\in\operatorname{Aut}(V)$ и $\beta\in\operatorname{Aut}(W)$ равносильны условия:

(1) $\alpha_A=\beta_B$;

(2) $\beta=\gamma^{-1}\alpha\gamma$, где γ — (единственный) изоморфизм V на W, переводящий A в B.

Доказательство. Пусть γ — изоморфизм V на W с $A^\gamma=B$. Тогда

$$B^{\gamma^{-1}\alpha\gamma}=A^{\alpha\gamma}=(\alpha_A A)^\gamma,$$

$$B^\beta=\beta_B B=\beta_B A^\gamma=(\beta_B A)^\gamma.$$

Но совпадение левых сторон этих равенств равносильно условию (2), а совпадение правых — условию (1).

□

Говорят, что пространство V есть *прямая сумма* своих подпространств $V_1, \ldots, V_m$ $\left(\text{запись } V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_m \text{ или } V = \bigoplus_{i=1}^{m} V_i\right)$, если $V = V_1 + \ldots + V_m$ и $V_i \cap \left(\sum_{j \neq i} V_j\right) = 0$ при $i = 1, \ldots, m$.

Если $V_1, \ldots, V_m$ — произвольные F-пространства, то их *внешняя прямая сумма* есть F-пространство, состоящее из всех последовательностей $(v_1, \ldots, v_m)$, где $v_i \in V_i$ $(i = 1, \ldots, m)$, с операциями

$$(v_1, \ldots, v_m) + (v_1', \ldots, v_m') = (v_1 + v_1', \ldots, v_m + v_m'),$$
$$f(v_1, \ldots, v_m) = (fv_1, \ldots, fv_m) \text{ для } f \in F.$$

Оно обозначается через $V_1 \breve{\oplus} \ldots \breve{\oplus} V_m$ или $\breve{\bigoplus}_{i=1}^{m} V_i$.

Если $V = \bigoplus_{i=1}^{m} V_i$, то, очевидно, $V \simeq \breve{\bigoplus}_{i=1}^{m} V_i$ и $\dim V = \sum_{i=1}^{m} \dim V_i$.

Пусть V и W — F-пространства. Рассмотрим аддитивную абелеву группу A, порожденную символами $v \otimes w$, где $v \in V$ и $w \in W$, с определяющими соотношениями (кроме соотношений коммутативности)

$$(v_1 + v_2) \otimes w = (v_1 \otimes w) + (v_2 \otimes w),$$
$$u \otimes (w_1 + w_2) = (v \otimes w_1) + (v \otimes w_2),$$
$$(fv) \otimes w = v \otimes (fw).$$

Определим в A умножение на элементы f поля F по правилу $f\left(\sum_{i=1}^{k} v_i \otimes w_i\right) = \sum_{i=1}^{k} (fv_i) \otimes w_i$. Тогда A становится F-пространством, которое называется *тензорным произведением* пространств V и W и обозначается через $V \otimes W$. Основное свойство его таково:

если $\{v_1, \ldots, v_m\}$ — база пространства V, а $\{w_1, \ldots, w_n\}$ — база пространства W, то множество mn векторов $v_i \otimes w_j$ $(i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n)$ является базой пространства $V \otimes W$.

А6. Теорема. Пусть M — матрица с элементами из поля F. Тогда существует целое неотрицательное число r, называемое *рангом* матрицы M (над F), равное каждому из следующих чисел:

1) числу линейно независимых строк матрицы M;

2) числу линейно независимых столбцов матрицы M;

3) наибольшему из порядков отличных от нуля миноров матрицы M.

Если K — поле, содержащее F, то ранг M над K равен рангу M над F.

(Последнее утверждение следует из наличия пункта 3).)

A7. Следствие. Пусть $M_1, \ldots, M_k$ — матрицы из $M(m \times n, F)$, где F — поле, и K — надполе поля F. Тогда, если $M_1, \ldots, M_k$ линейно независимы над F (т. е. как элементы векторного пространства $M(m \times n, F)$), то они также линейно независимы над K (т. е. как элементы векторного пространства $M(m \times n, K)$).

A8. Теорема. Пусть $A \in M(m \times n, \mathbf{Z})$. Тогда существуют матрицы $X \in GL(m, \mathbf{Z})$ и $Y \in GL(n, \mathbf{Z})$ такие, что

$$XAY = \operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_l, 0, \ldots, 0),$$

где $0 \leqslant l \leqslant \min\{m, n\}$, $a_i \in \mathbf{N}$ при $i = 1, \ldots, l$ и $a_i | a_{i+1}$ при $i = 1, \ldots, l-1$. При этом последовательность $(a_1, \ldots, a_l)$ определяется однозначно.

Доказательство легко получается с помощью элементарных преобразований матрицы. См., например, идею доказательства теоремы I из § 13 в [42] или [36, теорема (16.6)].

A9. Определение (см. [16]). Пусть A и B — конечные множества. *$A \times B$-матрицей* над кольцом K называется функция M из $A \times B$ на некоторое подмножество из K. Образ элемента (a, b) при M условимся обозначать через $M_{a,b}$ (или через M_{ab}).

Строкой $A \times B$-матрицы M, соответствующей элементу $a \in A$ (или помеченной элементом $a \in A$), называется функция $M_{a\cdot}: b \mapsto M_{a,b}$ $(b \in B)$.

Столбцом $A \times B$-матрицы M, соответствующим элементу $b \in B$ (или помеченным элементом $b \in B$), называется функция $M_{\cdot b}: a \mapsto M_{a,b}$ $(a \in A)$.

Суммой $A \times B$-матриц M и N над K называется $A \times B$-матрица $M + N$ такая, что $(M + N)_{a,b} = M_{a,b} + N_{a,b}$ для всех $(a, b) \in A \times B$.

(*Матричным*) *произведением* $A \times B$-матрицы M над K на $B \times C$-матрицу N над K называется $A \times C$-матрица MN такая, что $(MN)_{a,c} = \sum_{b \in B} M_{a,b} N_{b,c}$ для всех $(a, c) \in A \times C$. (Сумма считается равной 0, если $B = \varnothing$.)

$A \times B$-матрица называется *пустой*, если $A = \varnothing$ или $B = \varnothing$.

Обычную $m \times n$-матрицу можно рассматривать как $A \times B$-матрицу при $A = \{1, \ldots, m\}$ и $B = \{1, \ldots, n\}$ $(m, n \in \mathbf{N})$.

Очевидным образом можно определить *ранг* $A \times B$-матрицы и *определитель* $A \times A$-матрицы. Ранг пустой матрицы считается равным нулю. При рассмотрении обычных матриц в клеточной (блочной) форме бывает полезно допустить, что некоторые клетки пустые матрицы $O_{m \times 0}$ $(A = \{1, \ldots, m\}$, $B = \varnothing)$ или $O_{0 \times n}$ $(A = \varnothing$, $B = \{1, \ldots, n\})$ (см., например, замечание после доказательства леммы 3Б2).

§ Б. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУПП. ИНТЕРПРЕТАЦИИ. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ

Б1. Определение. *Представлением* группы G над полем F называется гомоморфизм этой группы в группу $\mathrm{GL}(n, F)$ или в группу $\mathrm{Aut}(V)$, где V — F-пространство размерности n, $n \geqslant 1$. Число n называется *степенью* этого представления.

Представления в группу $\mathrm{GL}(n, F)$ будем называть *матричными*, а представления в $\mathrm{Aut}(V)$ — *операторными*. Обозначать представления будем рукописными прописными буквами латинского алфавита. Представление $\mathscr{A}$ называется *точным*, если его ядро $\mathrm{Ker}\,\mathscr{A}$ $(=\{g \in G \mid \mathscr{A}(g) = \mathscr{A}(1)\})$ — единичная подгруппа. Степень представления $\mathscr{A}$ обозначается через $\deg \mathscr{A}$.

Б2. Определение. Пусть $V \simeq \mathrm{V}(n, F)$ и i_B — естественный изоморфизм $\mathrm{Aut}(V)$ на $\mathrm{GL}(n, F)$, определенный в **А2** (B — упорядоченная база в V). Если $\mathscr{A}$ — операторное представление $G \to \mathrm{Aut}(V)$, то композиция $\mathscr{M} = \mathscr{A} i_B$ есть матричное представление $G \to \mathrm{GL}(n, F)$ $(\mathscr{M}(g) = \mathscr{A}(g)_B$ для всех $g \in G)$. Оно называется *матричной интерпретацией* представления $\mathscr{A}$, а $\mathscr{A}$ $(= \mathscr{M} i_B^{-1})$ — *операторной интерпретацией* представления $\mathscr{M}$. Прилагательные «матричная» и «операторная» здесь могут быть опущены.

Часто бывает полезным перейти от данного представления к его интерпретации. Поэтому нужно уметь формулировать результаты о представлениях групп как на матричном, так и на операторном языке. Некоторые переформулировки результатов с одного языка на другой будут оставлены читателю в качестве легких, но полезных упражнений.

Б3. Пусть $\mathscr{M}_1$ и $\mathscr{M}_2$ — матричные представления группы G над F. Равносильны условия:

(1) $\mathscr{M}_1$ и $\mathscr{M}_2$ — матричные интерпретации одного операторного представления;

(2) существует обратимая матрица S над F такая, что

$$\mathrm{S}^{-1}\mathscr{M}_1(g)\mathrm{S} = \mathscr{M}_2(g) \text{ для всех } g \in G.$$

Доказательство. Применить **А2** и **А4**.

□

Б4. Пусть $\mathscr{A}_1 : G \to \mathrm{Aut}(V_1)$ и $\mathscr{A}_2 : G \to \mathrm{Aut}(V_2)$ — операторные представления группы G. Равносильны условия:

(1) $\mathscr{A}_1$ и $\mathscr{A}_2$ — операторные интерпретации одного матричного представления;

(2) существует изоморфизм σ из V_1 на V_2 такой, что

$$\sigma^{-1}\mathscr{A}_1(g)\sigma = \mathscr{A}_2(g) \text{ для всех } g\in G.$$

Доказательство. Применить **А5**.

□

Равенство $\mathscr{A}_1(g)\sigma = \sigma\mathscr{A}_2(g)$, равносильное равенству пункта (2), часто выражают так: диаграмма

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\mathscr{A}_1(g)"'] & V_2 \arrow[d, "\mathscr{A}_2(g)"] \\ V_1 \arrow[r, "\sigma"] & V_2 \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Образно говоря, условие (2) означает, что группа $\mathscr{A}_1(G)$ действует на V_1 точно так же, как группа $\mathscr{A}_2(G)$ действует на V_2.

Б5. Определение. Пусть $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ — представления конечной группы G над полем F. Будем говорить, что $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ *эквивалентны* и писать $\mathscr{A} \approx \mathscr{B}$, если выполнено одно из следующих условий:

1) $\mathscr{A}$ есть интерпретация (матричная или операторная) представления $\mathscr{B}$;

2) $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ — матричные интерпретации одного операторного представления;

3) $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ — операторные интерпретации одного матричного представления.

Б6. Пусть $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$ — представления конечной группы G над полем F. Тогда

$$\mathscr{A} \approx \mathscr{B} \approx \mathscr{C} \Rightarrow \mathscr{A} \approx \mathscr{C}.$$

Доказательство. Если представления $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$ — все матричные или все операторные, то утверждение следует из **Б3** и **Б4**. Если $\mathscr{B}$ есть интерпретация представлений $\mathscr{A}$ и $\mathscr{C}$, то результат следует из определения эквивалентности. Поэтому дальнейшего рассмотрения требуют лишь два случая.

Случай 1. $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ — матричные представления, $\mathscr{C}$ — операторное представление $G \to \mathrm{Aut}(V)$.

Тогда существуют матрица S над F и упорядоченная база B в V такие, что $S^{-1}\mathscr{A}(g)S = \mathscr{B}(g) = \mathscr{C}(g)_B$ для всех $g\in G$. Поскольку S, будучи обратимой, является матрицей перехода от B к некоторой базе D пространства V, то $\mathscr{A}(g) = S\mathscr{C}(g)_B S^{-1} = \mathscr{C}(g)_D$ по **А4**, и значит, $\mathscr{A} \approx \mathscr{C}$.

Случай 2. $\mathscr{A}: G \to \mathrm{Aut}(V)$, $\mathscr{B}: G \to \mathrm{Aut}(W)$ — операторные, а $\mathscr{C}$ — матричное представления.

Тогда для всех $g \in G$ имеем $\mathscr{B}(g) = \sigma^{-1}\mathscr{A}(g)\sigma$ для некоторого изоморфизма $\sigma: V \to W$ (по **Б4**) и $\mathscr{B}(g)_B = \mathscr{C}(g)$ для некоторой базы B из W. Пусть A — база в V, которая переходит при σ в B. Тогда по **А5** $\mathscr{A}(g)_A = \mathscr{B}(g)_B$. Таким образом, $\mathscr{A}(g)_A = \mathscr{C}(g)$ для всех $g \in G$, и значит, $\mathscr{A} \approx \mathscr{C}$.

□

Б7. Определение. Из **Б6** и очевидных соотношений $\mathscr{A} \approx \mathscr{A}$ и $\mathscr{A} \approx \mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{B} \approx \mathscr{A}$ следует, что все представления группы G над данным полем F разбиваются на непересекающиеся классы эквивалентных представлений ($\mathscr{A} \approx \mathscr{B} \Leftrightarrow \mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ лежат в одном классе). Будем называть их просто *классами представлений* группы G над F.

Б8. Упражнение. Если $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ — эквивалентные представления группы G, то

1) $\operatorname{Ker}\mathscr{A} = \operatorname{Ker}\mathscr{B}$;
2) $\mathscr{A}(G) \simeq \mathscr{B}(G)$.

Б9. Определение. 1) Пусть $\mathscr{A}$ — представление группы G над полем F. *Характером представления* $\mathscr{A}$ называется функция $\chi_{\mathscr{A}}$ из G в F, определяемая следующим образом:

а) если $\mathscr{A}$ — матричное представление, то

$$\chi_{\mathscr{A}}(g) = \text{след}\,(\mathscr{A}(g)) \left(= \sum_{i=1}^{\deg \mathscr{A}} \mathscr{A}(g)_{ii} \right) \text{ при } g \in G;$$

б) если $\mathscr{A}$ — операторное представление, то $\chi_{\mathscr{A}} = \chi_{\mathscr{M}}$, где $\mathscr{M}$ — любая матричная интерпретация представления $\mathscr{A}$ (независимость от выбора $\mathscr{M}$ показывается в доказательстве **Б10**).

2) Характер представления группы G над полем F называется *характером группы G над F*.

Б10. 1) Эквивалентные представления группы G имеют равные характеры.

2) Характер любого представления группы G есть *классовая функция*, т. е. его значения на сопряженных элементах группы G совпадают.

Доказательство. 1): Непосредственно проверяется, что для $n \times n$-матриц X и Y над F след(XY) = след(YX) и, следовательно, след$(X^{-1}YX)$ = след(YXX^{-1}) = след(Y). Отсюда и из **Б3** следует, что эквивалентные матричные представления имеют одинаковые характеры. Этим доказаны корректность определения **Б9**(2) и в силу этого утверждение 1).

2): $\chi_{\mathscr{A}}(x^{-1}gx) = \text{след}\,\mathscr{A}(x^{-1}gx) = \text{след}\,(\mathscr{A}(x)^{-1}\mathscr{A}(g)\mathscr{A}(x)) = \text{след}\,\mathscr{A}(g) = \chi_{\mathscr{A}}(g)$.

□

Характеры представлений играют важную роль в теории представлений.

Рассмотрим теперь некоторые конструкции, позволяющие построить новые представления группы из уже известных ее представлений.

Б11. Определение. 1) Пусть $\mathscr{A}_i : \mathrm{Aut}(V_i)$ $(i=1, \ldots, n)$ — операторные представления группы G над F. Определим отображение $\mathscr{A} : G \to \mathrm{Aut}(V)$, где $V = V_1 \breve{\oplus} \ldots \breve{\oplus} V_n$ (внешняя прямая сумма) по правилу

$$(v_1, \ldots, v_n)^{\mathscr{A}(g)} = \left(v_1^{\mathscr{A}_1(g)}, \ldots, v_n^{\mathscr{A}_n(g)}\right)$$

для всех $g \in G$. Очевидно, $\mathscr{A}$ — представление группы G. Говорят, что $\mathscr{A}$ — *прямая сумма* представлений $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_n$, и пишут $\mathscr{A} = \mathscr{A}_1 \oplus \ldots \oplus A_n$ или $\mathscr{A} = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} \mathscr{A}_i$.

2) Матричное представление $\mathscr{M}$ называется *прямой суммой* матричных представлений $\mathscr{M}_1, \ldots, \mathscr{M}_n$ $\left(\text{запись: } \mathscr{M} = \mathscr{M}_1 \oplus \ldots \oplus \mathscr{M}_n \text{ или } \mathscr{M} = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} \mathscr{M}_i\right)$, если

$$\mathscr{M}(g) = \begin{pmatrix} \mathscr{M}_1(g) & & \mathrm{O} \\ & \ddots & \\ \mathrm{O} & & \mathscr{M}_n(g) \end{pmatrix} \text{ для всех } g \in G.$$

3) Представление, являющееся прямой суммой двух представлений, называется *разложимым*.

4) Положим $n\mathscr{A} = \underbrace{\mathscr{A} \oplus \ldots \oplus \mathscr{A}}_{n \text{ раз}}$ ($\mathscr{A}$ — представление группы, $n \in \boldsymbol{N}$).

Отметим, что $\mathscr{A} \oplus \mathscr{B}$ не определено, если одно из представлений $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ матричное, а другое — операторное.

Б12. Упражнение. Пусть $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_n$ и $\mathscr{M}_1, \ldots, \mathscr{M}_n$ — представления группы G, причем $\mathscr{A}_i \approx \mathscr{M}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Тогда

1) $\mathscr{A}_1 \oplus \ldots \oplus \mathscr{A}_n \approx \mathscr{M}_1 \oplus \ldots \oplus \mathscr{M}_n$, если обе суммы определены;

2) $\chi_{\mathscr{A}_1 \oplus \ldots \oplus \mathscr{A}_n} = \chi_{\mathscr{A}_1} + \ldots + \chi_{\mathscr{A}_n}$, если $\mathscr{A}_1 \oplus \ldots \oplus \mathscr{A}_n$ определено.

Б13. Определение. 1) Пусть $\mathrm{A} \in M(m \times m, F)$ и $\mathrm{B} \in M(n \times n, F)$. *Прямым* (или *кронекеровым*) *произведением* матрицы A на матрицу B называется матрица C, получающаяся из матрицы A заменой элементов A_{ij} клетками $\mathrm{A}_{ij}\mathrm{B}$. Она обозначается через $\mathrm{A} \otimes \mathrm{B}$. Ее размеры $mn \times mn$.

2) Пусть $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ — матричные представления группы G степеней m и n над F. Определим функцию

$$\mathscr{A} \otimes \mathscr{B} : g \mapsto \mathscr{A}(g) \otimes \mathscr{B}(g) \quad (g \in G)$$

из G в $GL(mn, F)$. Как легко увидеть, $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ — представление группы G над F. Оно называется *тензорным* (или *прямым*) *произведением* представлений $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$.

Б14. Упражнение. $\chi_{\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}} = \chi_{\mathscr{A}} \chi_{\mathscr{B}}$.

Б15. Пусть $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{A}_1$, $\mathscr{B}_1$ — матричные представления группы G над полем F, причем $\mathscr{A} \approx \mathscr{A}_1$ и $\mathscr{B} \approx \mathscr{B}_1$.

Тогда $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B} \approx \mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{B}_1$.

Доказательство. Пусть $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in M(m \times m, F)$ и $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in M(n \times n, F)$. Тогда

$$\mathrm{P} \otimes \mathrm{X} = \begin{pmatrix} \mathrm{P}_{11}\mathrm{X} & \dots & \mathrm{P}_{1m}\mathrm{X} \\ \dots & & \dots \\ \mathrm{P}_{m1}\mathrm{X} & \dots & \mathrm{P}_{mm}\mathrm{X} \end{pmatrix} \text{ и } \mathrm{Q} \otimes \mathrm{Y} = \begin{pmatrix} \mathrm{Q}_{11}\mathrm{Y} & \dots & \mathrm{Q}_{1m}\mathrm{Y} \\ \dots & & \dots \\ \mathrm{Q}_{m1}\mathrm{Y} & \dots & \mathrm{Q}_{mm}\mathrm{Y} \end{pmatrix}.$$

Так как (i, j)-я клетка в произведении $(\mathrm{P} \otimes \mathrm{X})(\mathrm{Q} \otimes \mathrm{Y})$ есть $\sum_{k=1}^{m} \mathrm{P}_{ik}\mathrm{Q}_{kj}\mathrm{XY} = (\mathrm{PQ})_{ij}\mathrm{XY}$, то

$$(\mathrm{P} \otimes \mathrm{X})(\mathrm{Q} \otimes \mathrm{Y}) = (\mathrm{PQ}) \otimes (\mathrm{XY}). \tag{б1}$$

Используем это равенство. По условию существуют обратимые матрицы X и Y такие, что $\mathscr{A}_1(g) = \mathrm{X}^{-1}\mathscr{A}(g)\mathrm{X}$ и $\mathscr{B}_1(g) = \mathrm{Y}^{-1}\mathscr{B}(g)\mathrm{Y}$ для всех $g \in G$.

Теперь, дважды применяя (б1), получаем $(\mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{B}_1)(g) = (\mathrm{X}^{-1}\mathscr{A}(g)\mathrm{X}) \otimes (\mathrm{Y}^{-1}\mathscr{B}(g)\mathrm{Y}) = (\mathrm{X}^{-1} \otimes \mathrm{Y}^{-1})(\mathscr{A}(g) \otimes \mathscr{B}(g)) \times (\mathrm{X} \otimes \mathrm{Y}) = (\mathrm{X} \otimes \mathrm{Y})^{-1}((\mathscr{A} \otimes \mathscr{B})(g))(\mathrm{X} \otimes \mathrm{Y})$ для всех $g \in G$, т. е. $\mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{B}_1 \approx \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$.

□

Отметим одно представление, которое имеется у любой группы G над любым полем F.

Б16. Определение. *Единичное представление* G над F есть представление группы G в $GL(1, F)$ или в $\mathrm{Aut}(V)$, где $V \simeq \mathrm{V}(1, F)$, при котором каждому $g \in G$ ставится в соответствие единичная матрица или соответственно единичный оператор. Характер единичного представления G над F называется *главным характером* G над F.

Б17. Упражнение. Пусть $\mathscr{M}$ — матричное представление $G \to \mathrm{GL}(n, F)$. Определим функцию $\mathscr{M}^-$ по правилу

$$\mathscr{M}^-(g) = \mathscr{M}(g^{-1})^{\mathrm{т}} \quad (g \in G)$$

(т — транспонирование). Тогда

1) $\mathscr{M}^-$ — представление группы G;
2) $\chi_{\mathscr{M}^-}(g) = \chi_{\mathscr{M}}(g^{-1}) \quad (g \in G)$;
3) $\mathscr{M}^-$ неприводимо $\Leftrightarrow$ $\mathscr{M}$ неприводимо.

Б18. Замечание. Пусть θ — изоморфизм поля F на поле K. Тогда для любого представления $\mathscr{A}: G \to \mathrm{GL}(n, F)$ отображение $\mathscr{A}^{(\theta)}$ со свойством $\mathscr{A}^{(\theta)}(g)_{ij} = (\mathscr{A}(g)_{ij})^{\theta}$ для всех $g \in G$ является, очевидно, представлением $G \to \mathrm{GL}(n, K)$. Легко заметить, что если $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ — представления G над F, то

1) представление $\mathscr{A}^{(\theta)}$ приводимо, разложимо, точное $\Leftrightarrow$ представление $\mathscr{A}$ соответственно приводимо, разложимо, точное;
2) $\chi_{\mathscr{A}^{(\theta)}}(g) = \chi_{\mathscr{A}}(g)^{\theta}$ при $g \in G$;
3) $\mathscr{A} \approx \mathscr{B} \Leftrightarrow \mathscr{A}^{(\theta)} \approx \mathscr{B}^{(\theta)}$.

Б19. Замечание. Для простого числа p положим $\boldsymbol{F}_p = \boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z}$ (поле всех классов вычетов по модулю p в $\boldsymbol{Z}$). Один из путей применения результатов теории представлений к абстрактным группам основан на возможности посмотреть на элементарную абелеву p-группу как на векторное пространство над полем $\boldsymbol{F}_p$. Именно, если P — элементарная абелева группа порядка p^n, записанная аддитивно, то можно рассмотреть векторное пространство $\widehat{P} \simeq V(n, \boldsymbol{F}_p)$, в котором аддитивной группой является P, а умножение на элементы из $\boldsymbol{F}_p$ определяется по правилу: $[m]x = mx$ ($[m] = m + p\boldsymbol{Z}$, $m \in \boldsymbol{Z}$, $x \in P$). При этом, очевидно, $\mathrm{Aut}(\widehat{P}) = \mathrm{Aut}(P)$.

Если такая P является нормальной подгруппой группы G, то действие группы G сопряжениями на P вызывает операторное представление G над $\boldsymbol{F}_p$.

§ В. ПРИВОДИМЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ. ИХ НЕПРИВОДИМЫЕ ЧАСТИ И ДИАГОНАЛИ

В1. Определение. Операторное представление $\mathscr{A}: G \to \mathrm{Aut}(V)$ называется *приводимым*, если V имеет нетривиальное (т. е. отличное от $\{0\}$ и V) $\mathscr{A}(G)$-допустимое подпространство. Матричное представление называется *приводимым*, если оно является интерпретацией приводимого операторного представления. Представление, не являющееся приводимым, называется *неприводимым*.

Согласно В5 (см. ниже), представление приводимо тогда и только тогда, когда оно эквивалентно матричному представлению $\mathscr{M}$ такому, что для некоторого натурального m

$$\mathscr{M}(g) = \begin{pmatrix} A(g)_{m\times m} & O \\ B(g) & C(g) \end{pmatrix} \text{ для всех } g\in G.$$

Поэтому эквивалентные представления одновременно либо приводимы, либо неприводимы.

B2. Определение. 1) Пусть $\mathscr{A}$ — приводимое представление $G \to \mathrm{Aut}(V)$ и W — $\mathscr{A}(G)$-допустимое нетривиальное подпространство в V. Тогда можно определить два новых представления $\mathscr{A}_W: G \to \mathrm{Aut}(W)$ и $\mathscr{A}_{V/W}: G \to \mathrm{Aut}(V/W)$, положив для $g\in G$

$$\mathscr{A}_W(g): w \longmapsto w^{\mathscr{A}(g)} \ (w\in W) \ (\text{т. е. } \mathscr{A}_W(g) = \mathscr{A}(g)|_W),$$

$$\mathscr{A}_{V/W}(g): v + W \longmapsto v^{\mathscr{A}(g)} + W \ (v\in V)$$

(ясна независимость этого определения от выбора v в смежном классе $v+W$). Первое из них называется *подпредставлением*, а второе *фактор-представлением* представления $\mathscr{A}$.

2) Более общие: если U и V — $\mathscr{A}(G)$-допустимые подпространства в V и $U \supset W$, то можно определить представление $\mathscr{A}_{U/W}: G \to \mathrm{Aut}(U/W)$, положив

$$\mathscr{A}_{U/W}(g): u + W \longmapsto u^{\mathscr{A}(g)} + W \ (g\in G,\ u\in U).$$

Оно называется *фактором* представления $\mathscr{A}$. ($\mathscr{A}_{U/W}$ читается: $\mathscr{A}$ над U/W.)

3) Пусть $\mathscr{M}$ — матричная интерпретация представления $\mathscr{A}$. Тогда любая матричная интерпретация фактора (соответственно, подпредставления, фактор-представления) представления $\mathscr{A}$ называется *фактором* (соответственно, *подпредставлением*, *фактор-представлением*) представления $\mathscr{M}$.

B3. Упражнение. Проверить, что $\mathscr{A}_{U/W}$ правильно определено и действительно является представлением группы G.

B4. Упражнение. Пусть $\mathscr{A}$ — представление $G \to \mathrm{Aut}(V)$, а U и W — $\mathscr{A}(G)$-допустимые подпространства в V такие, что $U \not\subseteq W$. Тогда

$$\mathscr{A}_{U+W/W} \approx \mathscr{A}_{U/U\cap W}.$$

(Использовать **Б4**, записав $U + W = \dot{\bigcup\limits_{i=1}^{m}} (u_i + W)$ и взять $\sigma: u_i + W \longmapsto u_i + (U\cap W)$).

B5. Пусть $\mathscr{A}$ — операторное представление $G \to \mathrm{Aut}(V)$ и $\mathscr{M}_1, \ldots, \mathscr{M}_k$ — матричные представления группы G. Равносильны условия:

(1) V имеет ряд $\mathscr{A}(G)$-допустимых подпространств

$$\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_k = V$$

такой, что $\mathcal{A}_{V_i/V_{i+1}}$ имеет матричную интерпретацию $\mathcal{M}_i$ при $i = 1, \ldots, k$;

(2) $\mathcal{A}$ имеет матричную интерпретацию $\mathcal{M}$ такую, что

$$\mathcal{M}(g) = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_1(g) & & \mathrm{O} \\ & \ddots & \\ * & & \mathcal{M}_k(g) \end{pmatrix} \text{ для всех } g \in G.$$

Доказательство. Соображения индукции, **Б2** и матричное равенство

$$\begin{pmatrix} \mathrm{S} & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \mathrm{T} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{O} \\ \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{S} & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \mathrm{T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{S}^{-1}\mathrm{AS} & \mathrm{O} \\ * & \mathrm{T}^{-1}\mathrm{DT} \end{pmatrix}$$

позволяют рассмотреть лишь случай $k = 2$.

(1) $\Rightarrow$ (2): Пусть W — $\mathcal{A}(G)$-допустимое подпространство в V, $\mathcal{A}_W \approx \mathcal{M}_1$ и $\mathcal{A}_{V/W} \approx \mathcal{M}_2$. Тогда существуют база $B = (w_1, \ldots, w_m)$ в W и база $C = (v_1 + W, \ldots, v_h + W)$ в V/W $(m + h = \dim V)$ такие, что для всех $g \in G$ $\mathcal{A}_W(g)_B = \mathcal{M}_1(g)$ $\left(\text{т. е. } w_i^{\mathcal{A}(g)} = \sum_{j=1}^{m} \mathcal{M}_1(g)_{ij} w_j\right)$ и $\mathcal{A}_{V/W}(g)_C = \mathcal{M}_2(g)$ $\left(\text{т. е. } v_i^{\mathcal{A}(g)} + W = \sum_{j=1}^{h} \mathcal{M}_2(g)_{ij}(v_j + W) \text{ и, значит, } v_i^{\mathcal{A}(g)} = u_i + \sum_{j=1}^{h} \mathcal{M}_2(g)_{ij} v_j, \text{ где } u_i \in W\right)$. Теперь, образовав базу $D = (w_1, \ldots, w_m, v_1, \ldots, v_h)$ пространства V, получим

$$\mathcal{A}(g)_D = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_1(g) & \mathrm{O} \\ * & \mathcal{M}_2(g) \end{pmatrix} \text{ при } g \in G$$

($*$ заменяет некоторую матрицу, которая зависит как от g, так и от выбора представителей v_i в смежных классах, составляющих C).

Таким образом, условие (2) выполнено при $\mathcal{M} = \mathcal{A}i_D$.

(2) $\Rightarrow$ (1): Пусть теперь верно (2). Тогда $\mathcal{M} = \mathcal{A}i_B$ для некоторой базы $B = (v_1, \ldots, v_n)$ в V. Пусть $m = \deg \mathcal{M}_1$ и $h = n - m$. Тогда для любого $g \in G$ имеем

$$v_i^{\mathcal{A}(g)} = \sum_{j=1}^{m} \mathcal{M}_1(g)_{ij} v_j \text{ при } 1 \leqslant i \leqslant m;$$

$$v_{m+k}^{\mathcal{A}(g)} = u_k + \sum_{j=1}^{h} \mathcal{M}_2(g)_{kj} v_{m+j} \text{ при } 1 \leqslant k \leqslant h,$$

где $u_1, \ldots, u_h$ — линейные комбинации векторов $v_1, \ldots, v_m$. Обозначим через W подпространство из V, порожденное векторами $v_1, \ldots, v_m$. Тогда W $\mathcal{A}(G)$-допустимо, $\mathcal{A}_W \approx \mathcal{M}_1$ (взять базу $(v_1, \ldots, v_m)$ в W) и $\mathcal{A}_{V/W} \approx \mathcal{M}_2$ (взять базу $(v_{m+1} \dotplus W, \ldots, v_n \dotplus W)$ в V/W). Следовательно, верно (1).

□

B6. Определение. Пусть $\mathcal{A}$ — представление группы G над полем F. Скажем, что представление $\mathcal{A}$ $(\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_m)$-*приводимо*, если $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_m$ — представления G над F и $\mathcal{A}$ эквивалентно матричному представлению $\mathcal{M}$ такому, что

$$\mathcal{M}(g) = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_1(g) & & O \\ & \ddots & \\ * & & \mathcal{M}_m(g) \end{pmatrix} \text{ для всех } g \in G$$

с $\mathcal{M}_i \approx \mathcal{B}_i$ при $i = 1, \ldots, m$.

Заметим, что по этому определению эквивалентные представления одновременно являются или не являются $(\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_m)$-приводимыми.

Из **B5** непосредственно вытекает

B7. Операторное представление $\mathcal{A}: G \to \mathrm{Aut}(V)$ $(\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_m)$-приводимо, если и только если V имеет ряд

$$\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_m = V$$

$\mathcal{A}(G)$-допустимых подпространств с $\mathcal{A}_{V_i/V_{i-1}} \approx \mathcal{B}_i$ при $i = 1, \ldots, m$.

□

B8. Упражнение. Если представление $\mathcal{A}$ $(\mathcal{B}, \mathcal{C})$-приводимо, $\mathcal{B}$ $(\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_m)$-приводимо и $\mathcal{C}$ $(\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n)$-приводимо, то $\mathcal{A}$ $(\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_m, \mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n)$-приводимо.

B9. Определение. Пусть $\mathcal{A}$ — представление группы G над полем F. *Диагональю* представления $\mathcal{A}$ называется представление $\mathcal{D}$ такое, что

1) $\mathcal{D} = \mathcal{X}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{X}_k$, где $k \geqslant 1$ и $\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_k$ — неприводимые представления G над F (все операторные или все матричные) и

2) $\mathcal{A}$ $(\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_k)$-приводимо.

Из определений **B6** и **B9** следует, что диагональ представления $\mathcal{A}$ является также диагональю любого представления, эквивалентного $\mathcal{A}$.

Если $\mathcal{X}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{X}_k$ — диагональ представления $\mathcal{A}$, то $\tilde{\mathcal{X}}_1 \oplus \ldots \oplus \tilde{\mathcal{X}}_k$, где $\tilde{\mathcal{X}}_i \approx \mathcal{X}_i$ при $i = 1, \ldots, k$, также диагональ $\mathcal{A}$. Но при $\sigma \in S_k$ $\mathcal{X}_{\sigma(1)} \oplus \ldots \oplus \mathcal{X}_{\sigma(k)}$ уже может не быть диагональю $\mathcal{A}$.

B10. Упражнение. Подтвердить примером предыдущее утверждение.

B11. Определение. Неприводимое представление, эквивалентное некоторому фактору представления $\mathscr{A}$, называется *неприводимой частью* представления $\mathscr{A}$.

Согласно следующей теореме, для того, чтобы узнать все (с точностью до эквивалентности) неприводимые части данного представления, достаточно знать лишь одну диагональ этого представления.

B12. Теорема. Пусть $\mathscr{A}$ — представление конечной группы G над некоторым полем.

1) $\mathscr{A}$ имеет диагональ.

2) Любые две диагонали $\mathscr{D}$ и $\mathscr{T}$ представления $\mathscr{A}$ эквивалентны. Если $\mathscr{D}=\bigoplus_{i=1}^{m}\mathscr{D}_i$ и $\mathscr{T}=\bigoplus_{i=1}^{n}\mathscr{T}_i$ — их разложения в прямую сумму неприводимых представлений, то $m=n$ и $\mathscr{D}_i\approx\mathscr{T}_{\sigma(i)}$ для некоторой перестановки $\sigma\in S_n$ при $i=1, \ldots, n$.

3) Любая неприводимая часть представления $\mathscr{A}$ эквивалентна некоторому прямому слагаемому любой диагонали представления $\mathscr{A}$.

Доказательство. Можно предполагать, что $\mathscr{A}$ — операторное представление $G\to \mathrm{Aut}(V)$.

1): Так как V имеет конечную размерность, то V имеет неуплотняемый ряд $\{0\}=V_0\subset V_1\subset \ldots \subset V_k=V$ $\mathscr{A}(G)$-допустимых подпространств ($\mathscr{A}(G)$-композиционный ряд). Но тогда $\bigoplus_{i=1}^{k}\mathscr{A}_{V_i/V_{i-1}}$ — диагональ представления $\mathscr{A}$.

2): Оба утверждения пункта 2) непосредственно вытекают из следующего утверждения («теоремы Жордана — Гельдера»):

Если $\mathscr{A}$ — представление $G\to \mathrm{Aut}(V)$ и V имеет два $\mathscr{A}(G)$-композиционных ряда

(1) $$\{0\}=V_0\subset V_1\subset \ldots \subset V_{m-1}\subset V_m=V,$$

(2) $$\{0\}=U_0\subset U_1\subset \ldots \subset U_{n-1}\subset U_n=V,$$

то $m=n$ и существует перестановка $s\in S_n$ такая, что $\mathscr{A}_{V_i/V_{i-1}}\approx\approx\mathscr{A}_{U_{s(i)}/U_{s(i)-1}}$ для всех $i=1, \ldots, m$ (такие ряды будем называть $\mathscr{A}$-эквивалентными).

Доказывать это будем индукцией по размерности V. Поэтому можно предполагать, что $V_{m-1}\neq U_{n-1}$. Тогда $V=V_{m-1}+U_{n-1}$ и согласно **B4**

(в1)

$$\mathscr{A}_{V/V_{m-1}}\approx\mathscr{A}_{U_{n-1}/W} \text{ и } \mathscr{A}_{V/U_{n-1}}\approx\mathscr{A}_{V_{m-1}/W}, \text{ где } W=V_{m-1}\cap U_{n-1}.$$

Пусть $\{0\}=W_0\subset W_1\subset \ldots \subset W_t=W$ — $\mathscr{A}(G)$-композиционный ряд в W. Тогда

$$\{0\}=W_0\subset W_1\subset \ldots \subset W\subset V_{m-1}\subset V, \tag{3}$$

$$\{0\}=W_0\subset W_1\subset \ldots \subset W\subset U_{n-1}\subset V \tag{4}$$

- $\mathscr{A}(G)$-композиционные ряды в V. Ввиду (в1) они $\mathscr{A}$-эквивалентны. С другой стороны, по предположению индукции $\mathscr{A}$-эквивалентны ряды (1) и (3), а также (2) и (4). Следовательно, $\mathscr{A}$-эквивалентны и ряды (1) и (2).

3): Пусть $\mathscr{A}_{U/W}$ — неприводимая часть представления $\mathscr{A}:G\to \mathrm{Aut}(V)$. Так как ряд $\{0\}\subseteq W\subset U\subseteq V$ можно, очевидно, уплотнить до $\mathscr{A}(G)$-композиционного ряда, то $\mathscr{A}_{U/W}$ — прямое слагаемое некоторой диагонали представления $\mathscr{A}$. Отсюда и из 2) следует требуемое.

□

В13. Упражнение. Пусть $\mathscr{A}:G\to \mathrm{Aut}(V)$ — представление группы G и $V=V_1\oplus \ldots \oplus V_k$, где все V_i $\mathscr{A}(G)$-допустимы. Тогда $\mathscr{A}\approx \mathscr{A}_{V_1}\oplus \ldots \oplus \mathscr{A}_{V_k}$.

В14. Определение. Будем говорить, что представления $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ группы G *диагонально эквивалентны* (запись $\mathscr{A}\sim\mathscr{B}$), если они имеют эквивалентные диагонали.

Отношение диагональной эквивалентности является, очевидно, отношением эквивалентности на множестве всех представлений данной группы (т. е. $\mathscr{A}\sim\mathscr{A}$, из $\mathscr{A}\sim\mathscr{B}$ следует $\mathscr{B}\sim\mathscr{A}$, $\mathscr{A}\sim\mathscr{B}\sim\mathscr{C}\Rightarrow\mathscr{A}\sim\mathscr{C}$). Понятно также, что из $\mathscr{A}\approx\mathscr{B}$ следует $\mathscr{A}\sim\mathscr{B}$.

В15. Упражнение. Если представление $\mathscr{A}(\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_m)$-приводимо и представления $\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_m$ — все операторные или все матричные, то $\mathscr{A}\sim\mathscr{B}_1\oplus \ldots \oplus\mathscr{B}_m$.

Согласно Б4 эквивалентность операторных представлений $\mathscr{A}:G\to \mathrm{Aut}(V)$ и $\mathscr{B}:G\to \mathrm{Aut}(W)$ равносильна существованию изоморфизма σ из V на W такого, что

$$\mathscr{A}(g)\sigma=\sigma\mathscr{B}(g) \text{ для всех } g\in G. \tag{в2}$$

Часто встречается более общая ситуация, когда последнее условие выполнено для некоторого гомоморфизма $\sigma:V\to W$.

В16. Определение. Гомоморфизм σ со свойством (в2) называется *сплетающим оператором* (*сплетающим гомоморфизмом*) для пары представлений $(\mathscr{A}, \mathscr{B})$.

В17. Пусть $\mathscr{A}: G \to \mathrm{Aut}(V)$ и $\mathscr{B}: G \to \mathrm{Aut}(W)$ — операторные представления группы G и σ — гомоморфизм из V в W такой, что

(в3) $$\mathscr{A}(g)\sigma = \sigma\mathscr{B}(g) \text{ для всех } g \in G.$$

Тогда

либо $\sigma = 0$ (т. е. $\mathrm{Ker}\,\sigma = V$),

либо $\mathscr{A}_{V/\mathrm{Ker}\,\sigma} \approx \mathscr{B}_{V^\sigma}$.

Доказательство. Ввиду (в3) $\mathrm{Ker}\,\sigma$ — $\mathscr{A}(G)$-допустимое подпространство в V $(v^\sigma = 0 \Rightarrow (v^{\mathscr{A}(g)})^\sigma = (v^\sigma)^{\mathscr{B}(g)} = 0)$ и V^σ — — $\mathscr{B}(G)$-допустимое подпространство в W $((v^\sigma)^{\mathscr{B}(g)} = (v^{\mathscr{A}(g)})^\sigma \in V^\sigma)$. Пусть $\sigma \neq 0$. Тогда представления $\mathscr{A}_{V/\mathrm{Ker}\,\sigma}$ и $\mathscr{B}_{V^\sigma}$ определены. Определим отображение $\widehat{\sigma}$ из $V/\mathrm{Ker}\,\sigma$ на V^σ, положив $(v + \mathrm{Ker}\,\sigma)^{\widehat{\sigma}} = v^\sigma$. Легко увидеть, что $\widehat{\sigma}$ правильно определено и является изоморфизмом. Далее, имеем $(v + \mathrm{Ker}\,\sigma)^{\mathscr{A}(g)\widehat{\sigma}} = (v + \mathrm{Ker}\,\sigma)^{\widehat{\sigma}\mathscr{B}(g)}$ для всех $v \in V$, т. е. $\mathscr{A}_{V/\mathrm{Ker}\,\sigma}(g)\widehat{\sigma} = \widehat{\sigma}\mathscr{B}_{V^\sigma}(g)$. Отсюда по **Б4** $\mathscr{A}_{V/\mathrm{Ker}\,\sigma} \approx \mathscr{B}_{V^\sigma}$.

□

§ Г. РЕГУЛЯРНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

Г1. Определение. Пусть F — поле и G — конечная группа. Множество всех формальных сумм вида $\sum\limits_{g \in G} f_g g$, где $f_g \in F$, с операциями

$$\sum_{g \in G} f_g g + \sum_{g \in G} h_g g = \sum_{g \in G} (f_g + h_g) g,$$

$$\Big(\sum_{g \in G} f_g g\Big)\Big(\sum_{g \in G} h_g g\Big) = \sum_{g,\, x \in G} f_g h_x g x = \sum_{g \in G} \Big(\sum_{y \in G} f_{gy^{-1}} h_y\Big) g,$$

$$f\Big(\sum_{g \in G} f_g g\Big) = \sum_{g \in G} (f f_g) g$$

$(f_g,\ h_g,\ f \in F)$, обозначается через FG и называется *групповой алгеброй* группы G над полем F.

Это действительно есть *алгебра* над полем F, т. е.

1) FG есть F-пространство относительно операций сложения и умножения на элементы поля F (будем обозначать его через $F[G]$);

2) FG есть кольцо относительно операций сложения и умножения;

3) $f(ab) = (fa)b = a(fb)$ для всех $f \in F$ и всех $a,\ b \in FG$.

Г2. Определение. 1) *Операторным регулярным представлением* группы G над полем F называется представление $\mathrm{Reg}_{G,F}: G \to \mathrm{Aut}(F[G])$, определяемое так:

$$\mathrm{Reg}_{G,F}(x): \sum_{g\in G} f_g g \mapsto \sum_{g\in G} f_g gx = \sum_{g\in G} f_{gx^{-1}} g.$$

(Легко проверяется, что это — действительно представление, степень его равна $|G|$, а ядро — единичное.)

2) Если B — база в $F[G]$, состоящая из всех $g\in G$, упорядоченных некоторым образом, то $\mathrm{Reg}_{G,F} i_B$ называется *матричным регулярным представлением* группы G над F.

Пусть $B = (g_1, \ldots, g_{|G|})$, $\mathcal{M} = \mathrm{Reg}_{G,F} i_B$ и $g\in G$. Для любого j имеем $g_j g = g_{\alpha_j}$, где $\alpha_j \in \{1, \ldots, |G|\}$. Тогда, как легко увидеть, j-я строка матрицы $\mathcal{M}(g)$ состоит из $|G|-1$ нулей и одной единицы, расположенной в α_j-м столбце ($j=1, \ldots, |G|$). Поэтому:

Г3. Если $\chi_{\text{рег}}$ — характер регулярного представления группы G над F, то

$$\chi_{\text{рег}}(g) = \begin{cases} |G| 1_F, & \text{если } g = 1, \\ 0, & \text{если } g\in G\setminus\{1\}. \end{cases}$$

Важная роль регулярного представления проявляется в следующем результате.

Г4. Теорема. Пусть G — конечная группа и F — поле.

1) Любое неприводимое представление группы G над F является неприводимой частью регулярного представления G над F,

2) Число классов неприводимых представлений группы G над F не превосходит порядка G над F,

3) Каждое представление группы G над F эквивалентно фактору прямой суммы нескольких экземпляров регулярного представления G над F.

Доказательство. Пусть $\mathcal{A}$ — операторное представление $G \to \mathrm{Aut}(V)$ и $\mathcal{R} = \mathrm{Reg}_{G,F}$.

1) : Пусть $\mathcal{A}$ неприводимо и $v\in V\setminus\{0\}$. Тогда $V = F[v^{\mathcal{A}(G)}]$ и отображение

$$\sigma: \sum_{g\in G} f_g g \mapsto \sum_{g\in G} f_g v^{\mathcal{A}(g)} \quad (f_g\in F)$$

есть, очевидно, гомоморфизм из $F[G]$ на V. Кроме того, для любого $g\in G$ имеем

$$\mathcal{R}(g)\sigma = \sigma\mathcal{A}(g),$$

так как $\left(\sum_{x\in G} f_x x\right)^{\mathcal{R}(g)\sigma} = \left(\sum_{x\in G} f_x xg\right)^{\sigma} = \sum_{x\in G} f_x v^{\mathcal{A}(xg)} =$

$$= \left(\sum_{x\in G} f_x v^{\mathcal{A}(x)}\right)^{\mathcal{A}(g)} = \left(\sum_{x\in G} f_x x\right)^{\sigma\mathcal{A}(g)}.$$

Теперь по **B17** $\mathcal{R}_{F[G]/\mathrm{Ker}\,\sigma} \approx \mathcal{A}_{(FG)}{}^{\sigma} = \mathcal{A}$.

2): Непосредственно следует из 1) и **B12** (3).

3): Используем схему доказательства пункта 1). Существует подмножество $\{v_1, \ldots, v_m\}$ в V (например, база V) такое, что $V = F\left[v_1^{\mathcal{A}(G)}\right] + \ldots + F\left[v_m^{\mathcal{A}(G)}\right]$. Рассмотрим представление $m\mathcal{R}: G \to \mathrm{Aut}(W)$, где $W = F[G] \dot{\oplus} \ldots \dot{\oplus} F[G]$ (m слагаемых). При этом $\left(\sum_{g\in G} f_g^{(1)} g, \ldots, \sum_{g\in G} f_g^{(m)} g\right)^{m\mathcal{R}(x)} = \left(\sum_{g\in G} f_g^{(1)} gx, \ldots, \sum_{g\in G} f_g^{(m)} gx\right)$. Определим отображение $\sigma: W \to V$, положив

$$\sigma: \left(\sum_{g\in G} f_g^{(1)} g, \ldots, \sum_{g\in G} f_g^{(m)} g\right) \mapsto \sum_{g\in G} \left(f_g^{(1)} v_1^{\mathcal{A}(g)} + \ldots + f_g^{(m)} v_m^{\mathcal{A}(g)} \right).$$

Легко увидеть, что σ — гомоморфизм W на V и

$$m\mathcal{R}(g)\sigma = \sigma\mathcal{A}(g) \text{ для всех } g \in G.$$

По **B17** $m\mathcal{R}_{W/\mathrm{Ker}\,\sigma} \sim \mathcal{A}_{W^{\sigma}} = \mathcal{A}$.

□

Г5. Замечание. В отличие от неприводимых представлений не каждое неразложимое представление является фактором регулярного представления (если характеристика поля делит порядок группы). Неразложимое представление, являющееся прямым слагаемым регулярного представления, называется *главным неразложимым представлением*. О свойствах таких представлений (они не изучаются в этой книге) можно прочитать, например, в [53].

Г6. Определение. Пусть G — группа и R — кольцо. Множество всех формальных сумм $\sum_{g\in G} f_g g$, где $f_g \in R$, с операциями сложения и умножения вида, указанного в **Г1**, является, очевидно, кольцом. Оно называется *групповым кольцом* G *над* R и обозначается через RG.

§ Д. СВОЙСТВА НЕПРИВОДИМОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

Из **B17** непосредственно вытекает:

Д1. Лемма Шура. Пусть $\mathcal{A}: G \to \mathrm{Aut}(V)$ и $\mathcal{B}: G \to \mathrm{Aut}(W)$ — неприводимые операторные представления группы G над полем F и пусть σ — гомоморфизм из V в W такой, что

$$\mathcal{A}(g)\sigma = \sigma\mathcal{B}(g) \text{ для всех } g \in G.$$

Тогда либо $\sigma = 0$, либо σ — изоморфизм и, следовательно, $\mathcal{A} \approx \mathcal{B}$.

□

Не представляет труда дать матричную формулировку этой леммы.

Д2. Пусть $\mathscr{A}: G \to \mathrm{GL}(m, F)$ и $\mathscr{B}: G \to \mathrm{GL}(n, F)$ — неприводимые представления группы G, $\mathrm{S} \in \mathrm{M}(m \times n, F)$ и

$$\mathscr{A}(g)\,\mathrm{S} = \mathrm{S}\mathscr{B}(g) \text{ для всех } g \in G.$$

Тогда либо $\mathrm{S} = 0$, либо S обратима.

□

(Прямое доказательство этой леммы см. в [12, § 2]).

Теперь нас будет интересовать случай, когда $\mathscr{A} = \mathscr{B}$.

Д3. Пусть $\mathscr{M}$ — неединичное неприводимое представление $G \to \mathrm{GL}(n, F)$ и $C = C_{\mathrm{M}(n,F)}(\mathscr{M}(G))$.

Тогда

1) C — тело;

2) каждая конечная абелева подгруппа в $C^{\times}$ — циклическая;

3) центр группы $\mathscr{M}(G)$ — циклический;

4) если поле F алгебраически замкнуто, то C — множество всех скалярных матриц из $\mathrm{M}(n, F)$ (и, следовательно, $C \simeq F$).

Доказательство. 1): Ясно, что C — подкольцо в $\mathrm{M}(n, F)$. Обратимость же ненулевых матриц из C непосредственно следует из Д2.

2): Пусть H — конечная абелева мультипликативная подгруппа из C. Покажем, что H — циклическая. (Это верно для любого тела C.) Подтело K, порожденное элементами из H, является, очевидно, полем. Существует $t \in N$ такое, что любой элемент из H удовлетворяет уравнению $x^t = 1$ и t является порядком некоторого $h \in H$. По теореме Безу (остаток от деления многочлена $P(x)$ над K на $x - a$ равен $P(a)$) имеем $x^t - 1 = (x - h)(x - h^2) \ldots \ldots (x - h^t)$ и $k^t - 1 = (k - h)(k - h^2) \ldots (k - h^t) \neq 0$ для всех $k \in K \setminus \langle h \rangle$. Значит, $H = \langle h \rangle$.

3): Следует из 2), так как $Z(\mathscr{M}(G)) \subseteq C$.

4): Если $\mathrm{S} \in C$, то $\mathrm{S} - f\mathrm{E} \in C$ для любого $f \in F$. Если f — корень многочлена $\det(\mathrm{S} - f\mathrm{E})$, то по Д2 получим $\mathrm{S} - f\mathrm{E} = 0$.

□

Д4. Упражнение. Пусть P — минимальная нормальная p-подгруппа группы G, $C_G(P) = P$ и $H \leqslant G$. Если H действует неприводимо на P, т. е. P — минимальная нормальная подгруппа в PH, то в $C_G(H)$ каждая абелева подгруппа — циклическая.

Д5. Определение. Пусть $\mathscr{M}$ — представление $G \to \mathrm{GL} \times \times (n, F)$, $m \in N$ и L — подпространство F-пространства $\mathrm{M}(m \times n, F)$, такое что $L\mathscr{M}(G) = L$. Через $\mathscr{M}_L$ обозначим отображение $G \to \mathrm{Aut}(L)$, определяемое формулой

$$\mathscr{M}_L(g): l \mapsto l\mathscr{M}(g) \quad (g \in G,\ l \in L).$$

Очевидно, что

1) $\mathscr{M}_L$ — операторное представление группы G,

2) $\mathscr{M}_L$ неприводимо $\Leftrightarrow$ в L нет нетривиальных подпространств U с $U\mathscr{M}(G)=U$.

Д6. Пусть $\mathscr{M}$ — матричное представление $G \to \mathrm{GL}(n, F)$ и $V = \mathrm{M}(m\times n, F)$, $m \geqslant 1$. Тогда $\mathscr{M}_V \approx m\mathscr{M}$.

Доказательство. 1) Пусть сначала $m=1$. Тогда в базе $((1, 0, \ldots, 0), (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, 1))$ пространства $V = \mathrm{M}(1\times n, F)$ линейный оператор $\mathscr{M}_V(g)$ имеет матрицу $\mathscr{M}(g)$. Следовательно, $\mathscr{M}_V \approx \mathscr{M}$.

2) Пусть $m>1$. Обозначим через V_i множество всех матриц из V, в которых любая строка, кроме i-й, состоит из нулей. Тогда $V_i \simeq \mathrm{M}(1\times n, F)$, V_i — $\mathscr{M}_V(G)$-допустимо и $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_m$. Согласно **В13** $\mathscr{M}_V \approx (\mathscr{M}_V)_{V_1} \oplus \ldots \oplus (\mathscr{M}_V)_{V_m}$, а по пункту 1) этого доказательства $(\mathscr{M}_V)_{V_i} (= \mathscr{M}_{V_i}) \approx \mathscr{M}$. Следовательно, по **Б12**(1) $\mathscr{M}_V \approx m\mathscr{M}$.

□

Д7. Пусть $\mathscr{M}$ — неприводимое представление $G \to \mathrm{GL}(n, F)$ и V — минимальное ненулевое подпространство из $\mathrm{M}(n\times n, F)$ такое, что $V\mathscr{M}(G)=V$. Тогда $\mathscr{M}_V \approx \mathscr{M}$.

Доказательство. Очевидно, что $\mathscr{M}_V$ — неприводимая часть представления $\mathscr{M}_{\mathrm{M}(n\times n, F)}$ и, следовательно (теорема **В12**), эквивалентно прямому слагаемому любой его диагонали. Но по **Д6** одна из этих диагоналей есть $n\mathscr{M}$. Значит, $\mathscr{M}_V \approx \mathscr{M}$.

□

Наиболее законченную форму имеют результаты о неприводимых представлениях над алгебраически замкнутым полем.

Д8. Лемма о ненулевом следе. Пусть $\mathscr{M}$ — неприводимое представление $G \to \mathrm{GL}(n, F)$ над алгебраически замкнутым полем F и L — ненулевое подпространство из $\mathrm{M}(n\times n, F)$ такое, что $L\mathscr{M}(G)=L$. Тогда L содержит матрицу с ненулевым следом.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что L — минимальное ненулевое подпространство со свойством $L\mathscr{M}(G)=L$. Тогда согласно **Д6** и **Д7** $\mathscr{M}_{\mathrm{M}(1\times n, F)} \approx \mathscr{M} \approx \mathscr{M}_L$. Так как $L \neq \{0\}$, то существует $m \in \mathrm{M}(1\times n, F)$ с $mL \neq \{0\}$. Поскольку же $(mL)\mathscr{M}(G)=mL$, то из неприводимости $\mathscr{M}_{\mathrm{M}(1\times n, F)}$ следует, что

$$mL = \mathrm{M}(1\times n, F)$$

и отображение $l \mapsto ml \ (l \in L)$ есть изоморфизм из L на $\mathrm{M}(1\times n, F)$.

Пусть $B=(l_1, \ldots, l_n)$ — база в L. Тогда $mB=(ml_1, \ldots, ml_n)$ — база в $M(1\times n, F)$.

Для произвольного k с $1\leqslant k\leqslant n$ обозначим через $\widetilde{l}_k$ линейное преобразование

$$u\longmapsto u\cdot l_k \ (u\in M(1\times n, F))$$

пространства $M(1\times n, F)$. В базе $A=((1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, 1))$ оно имеет матрицу l_k:

(д1) $$(\widetilde{l}_k)_A=l_k.$$

Найдем теперь матрицу $(\widetilde{l}_k)_{mB}$. Для любого i имеем

$$(ml_k)\,l_i=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(k)}\,(ml_j), \text{ где } a^{(k)}\in M(n, F).$$

Поскольку поле F алгебраически замкнуто, то существует $f_k\in F$ с $\det(a^{(k)}-f_k\,E)=0$. Но тогда n векторов

$$(ml_k-f_km)\,l_i\left(=\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}^{(k)}-f_k\delta_{ij})\,ml_j\right)$$

$(i=1, \ldots, n)$ линейно зависимы и, значит, порожденное ими подпространство $(ml_k-f_km)\,L$ отлично от V. Поскольку же оно выдерживает умножение на $\mathscr{M}(G)$, то $(ml_k-f_km)\,L=\{0\}$, откуда $(ml_k)\,l_i=f_k\,(ml_i)$ или, меняя роли k и i,

$$(ml_i)\,l_k=f_i\,(ml_k) \text{ для всех } i \text{ и } k.$$

Отсюда

(д2) $$(\widetilde{l}_k)_{mB}=\begin{pmatrix} \mathrm{O} & \begin{matrix} f_1\\ \vdots\\ f_n\end{matrix} & \mathrm{O}\end{pmatrix}, \text{ где } \begin{pmatrix} f_1\\ \vdots\\ f_n\end{pmatrix} \text{ — } k\text{-й столбец.}$$

По **А4** матрицы из (д1) и (д2) сопряжены. Следовательно, они имеют равные следы, т. е. след $l_k=f_k$. Если предположить, что следы всех матриц из L равны нулю, то $f_k=0$ для всех k и по (д2) $l_k=0$ для всех k, что противоречиво.

□

Д9. Определение. Пусть $\mathscr{M}$ — матричное представление $G\to GL(n, F)$. *Координатными функциями* представления $\mathscr{M}$ называются функции $\mathscr{M}_{ij}$ $(i, j\in\{1, \ldots, n\})$ из G в F, где

$$\mathscr{M}_{ij}: g\longrightarrow \mathscr{M}(g)_{ij} \ (g\in G).$$

Множество всех функций из G в F с операциями

$$\varphi_1 \dotplus \varphi_2 : g\longmapsto \varphi_1(g)\dotplus\varphi_2(g),$$
$$f\varphi : g\longmapsto f\varphi(g)$$

(φ, φ_1, φ_2 — функции, $f\in F$) есть F-пространство. Обозначим его через $(G\to F)$. Очевидно, $\dim(G\to F)=|G|$.

Подпространство в $(G \to F)$, порожденное всеми координатными функциями представления $\mathscr{M}$ называется *пространством координатных функций* представления $\mathscr{M}$ и обозначается через $S(\mathscr{M})$.

Д10. Пространства координатных функций эквивалентных матричных представлений совпадают.

Доказательство. Пусть $\mathscr{M}$ и $\mathscr{N}$ — эквивалентные матричные представления группы G. Тогда по **Б3** для некоторой матрицы T будет $\mathscr{M}(g) = \mathrm{T}^{-1}\mathscr{N}(g)\,\mathrm{T}$ для всех $g \in G$, откуда $\mathscr{M}_{ij}(g) = \sum_{k,l}((\mathrm{T}^{-1})_{ik}\mathrm{T}_{lj})\,\mathscr{N}_{kl}(g)$ и, значит, $S(\mathscr{M}) \subseteq S(\mathscr{N})$. Симметрично получаем и $S(\mathscr{N}) \subseteq S(\mathscr{M})$.

□

Д11. Теорема Бернсайда. Пусть G — конечная группа и $\mathscr{M}$ — представление $G \to \mathrm{GL}(n, F)$ над алгебраически замкнутым полем F. Равносильны условия:

(1) $\mathscr{M}$ неприводимо;

(2) множество всех координатных функций $\mathscr{M}_{ij}$ представления $\mathscr{M}$ состоит из n^2 элементов и линейно независимо;

(3) $F[\mathscr{M}(G)] = \mathrm{M}(n, F)$, т. е. $\mathscr{M}(G)$ содержит n^2 линейно независимых (над F) матриц.

Доказательство. (1)⇒(2): Условие линейной зависимости n^2 функций $\mathscr{M}_{ij}$ равносильно существованию матрицы $l \in \mathrm{M}(n, F) \setminus \{0\}$ такой, что

(д3) $$\text{след}\,(l\mathscr{M}(g)) = 0 \text{ для всех } g \in G$$

$\left(\text{след}\,(l\mathscr{M}(g)) = \sum_{i,j=1}^{n} l_{ij}\mathscr{M}_{ji}(g)\right)$. Пусть L — множество всех $l \in \mathrm{M}(n, F)$ со свойством (д3). Очевидно, L — подпространство в $\mathrm{M}(n, F)$, $L\mathscr{M}(G) = L$ и след $l = \text{след}\,(l\mathscr{M}(1)) = 0$ для всех $l \in L$. Отсюда и из неприводимости $\mathscr{M}$ по **Д8** следует, что $L = \{0\}$. Таким образом, условие (д3) не может быть выполнено при $l \neq 0$.

(2)⇔(3): Условие (2) равносильно линейной независимости строк $(n^2 \times |G|)$-матрицы

$$\begin{array}{c|ccccc|}
 & g_1 & \cdots & g_k & \cdots & g_{|G|} \\
\hline
 & & & \vdots & & \\
\mathscr{M}_{ij} & \cdots & \cdots & \mathscr{M}_{ij}(g_k) & & \\
 & & & & & \\
\hline
\end{array}$$

(столбцы помечены элементами g_k группы G в некотором порядке).

По теореме А6 о ранге матрицы это равносильно существованию n^2 линейно независимых столбцов этой матрицы, а это равносильно условию (3).

(2)$\Rightarrow$(1): Если $\mathscr{M}$ приводимо, то согласно В5 оно эквивалентно представлению $\mathscr{N}$ с

$$\mathscr{N}(g)=\begin{pmatrix} A'(g) & 0 \\ B(g) & C(g) \end{pmatrix} \text{для всех } g\in G.$$

Ясно, что число линейно независимых координатных функций представления $\mathscr{N}$ меньше, чем n^2. По Д10 это же свойство имеет и $\mathscr{M}$, что противоречит условию (2). Следовательно, $\mathscr{M}$ неприводимо.

□

Д12. Пусть $\mathscr{M}$ — неприводимое представление $G\to \mathrm{GL}(n, F)$ над алгебраически замкнутым полем F. Пусть K — надполе поля F, и $\mathscr{M}^K$ — представление $G\to\mathrm{GL}(n, K)$ такое, что $\mathscr{M}^K(g)=\mathscr{M}(g)$ для всех $g\in G$. Тогда $\mathscr{M}^K$ неприводимо.

Доказательство. По теореме Бернсайда $\mathscr{M}(G)$ содержит n^2 матриц, линейно независимых над F. Согласно А7 эти матрицы линейно независимы над K. Так как $\mathscr{M}^K(G)=\mathscr{M}(G)$, то отсюда по теореме Бернсайда следует неприводимость $\mathscr{M}^K$.

□

Отметим, что вместо „$\mathscr{M}^K$ неприводимо“ часто говорят „$\mathscr{M}$ неприводимо над K“.

Д13. **Упражнение.** Пусть F — алгебраически замкнутое поле.

1) Все неприводимые представления абелевой группы над F имеют степень 1.

2) Если $\mathscr{X}$ — неприводимое представление G над F, то

$$\deg\mathscr{X}=1\Leftrightarrow \mathrm{Ker}\,\mathscr{X}\supseteq G'.$$

3) Пусть $G=H_1\times H_2$ и $\mathscr{X}_i$ — неприводимое матричное представление группы G над F такое, что $H_i\subseteq\mathrm{Ker}\,\mathscr{X}_i$ $(i=1, 2)$. Тогда представление $\mathscr{X}_1\otimes\mathscr{X}_2$ группы G неприводимо.

§ Е. КЛАССЫ НЕПРИВОДИМЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

Е1. Пусть $\mathscr{M}=\mathscr{M}_1\oplus\ldots\oplus\mathscr{M}_k$, где $\mathscr{M}_i$ — неприводимое представление $G\to\mathrm{GL}(n_i, F)$ $(i=1, \ldots, k)$ и $M=M(n_1, F)\oplus\ldots\oplus M(n_k, F)$ (подпространство из $M(n\times n, F)$, где $n=n_1+\ldots+n_k$). Пусть L — минимальное ненулевое подпространство из M с $L\times\mathscr{M}(G)=L$ и L_i — проекция L на $M(n_i, F)$ (каждый элемент l

из L однозначно представляется в виде $l = l_1 \oplus \ldots \oplus l_k$, где $l_i \in \in M(n_i, F)$, и $L_i = \{l_i \mid l \in L\}$). Тогда

$$(L_i \neq \{0\}) \Rightarrow (\mathscr{M}_L \approx \mathscr{M}_i)$$

$(i \in \{1, \ldots, k\})$.

Доказательство. Ввиду минимальности L представление $\mathscr{M}_L$ неприводимо. Зафиксируем j с $L_j \neq \{0\}$ (оно существует, так как $L \neq \{0\}$). Очевидно,

(e1) $\quad l\mathscr{M}(g) = l_1\mathscr{M}_1(g) \oplus \ldots \oplus l_k\mathscr{M}_k(g)$ при $l \in L$ и $g \in G$

(обозначения l_i для $l \in L$ введены выше). Поэтому L_i — подпространство из $M(n_i, F)$ с $L_i\mathscr{M}_i(G) = L_i$ $(i = 1, \ldots, k)$. Отображение π: $l \mapsto l_j (l \in L)$ есть гомоморфизм из L на L_j, причем L_j не имеет нетривиальных подпространств W с $W\mathscr{M}_j(G) = W$ (иначе $\pi^{-1}(W)$ противоречит минимальности L ввиду (e1)). Следовательно, представление $(\mathscr{M}_j)_{L_j}$ неприводимо. Кроме того,

$$\mathscr{M}_L(g)\pi = \pi(\mathscr{M}_j)_{L_j}(g) \text{ для всех } g \in G,$$

так как $l^{\mathscr{M}_L(g)\pi} = (l\mathscr{M}(g))^\pi =_{(e1)} l_jM_j(g) = l^\pi \mathscr{M}_j(g) = l^{\pi(\mathscr{M}_j)_{L_j}}$.

Поскольку $\pi \neq 0$, то по лемме Шура (Д1) $\mathscr{M}_L \approx (\mathscr{M}_j)_{L_j}$. Но по Д7 $(\mathscr{M}_j)_{L_j} \approx \mathscr{M}_j$. Значит, $\mathscr{M}_L \approx \mathscr{M}_j$.

$\sqsubset$

Е2. Теорема Фробениуса — Шура. Пусть $\mathscr{X}_1, \ldots, \mathscr{X}_k$ — попарно неэквивалентные неприводимые представления группы G над алгебраически замкнутым полем F.

1) Если представления $\mathscr{X}_1, \ldots, \mathscr{X}_k$ матричные, то множество $T = \{(\mathscr{X}_i)_{s_i, t_i} \mid i \in \{1, \ldots, k\};\ s_i, t_i \in \{1, \ldots, \deg\mathscr{X}_i\}\}$ всех координатных функций этих представлений линейно независимо над F, причем $|T| = \sum\limits_{i=1}^{k} (\deg\mathscr{X}_i)^2 \leqslant |G|$.

2) Характеры представлений $\mathscr{X}_1, \ldots, \mathscr{X}_k$ попарно различны и линейно независимы.

Доказательство. 1): Положим $d_i = \deg\mathscr{X}_i$. Условие, что функции из T линейно независимы и $|T| = \sum\limits_{i=1}^{k} (\deg\mathscr{X}_i)^2$, равносильно тому, что если для некоторых $c_i \in M(d_i, F)$ выполнено условие

$$\sum_{i=1}^{k} \text{след}(c_i\mathscr{X}_i(g)) = 0 \text{ для всех } g \in G,$$

то $c_i = 0$ для всех i.

Положим $\mathscr{X} = \mathscr{X}_1 \oplus \ldots \oplus \mathscr{X}_k$ и $M = \{c_1 \oplus \ldots \oplus c_k \mid c_i \in \in M(d_i, F)$, след $(c_i\mathscr{X}_i(g)) = 0$ для всех $g \in G$ $(i = 1, \ldots, k)\}$. Очевидно, M — подпространство в $M(d_1, F) \oplus \ldots \oplus M(d_k, F)$. Предположим, что $M \neq \{0\}$. Пусть L — минимальное ненулевое подпространство из M с $L\mathscr{X}(G) = L$, а L_i — проекция L на $M(d_i, F)$. Зафиксируем j с $L_j \neq \{0\}$. Поскольку $\mathscr{X}_i$ неэквивалентно $\mathscr{X}_j$ при $i \neq j$, то по E1 $L_i = \{0\}$ для всех $i \neq j$. Таким образом, если $l = l_1 \oplus \ldots \oplus l_k \in L$, то $l_i = 0$ для всех $i \neq j$ и тогда след$(l_j \times \times \mathscr{X}_j(g)) = 0$ для всех $g \in G$. По теореме Бернсайда отсюда следует, что $l_j = 0$. Следовательно, $l = 0$, что противоречиво. Значит, $M = \{0\}$.

Итак, функции из T линейно независимы и $|T| = \sum_{i=1}^{k} (\deg \mathscr{X}_i)^2$. Поскольку же T содержится в $|G|$-мерном пространстве всех функций из G в F, то $|T| \leqslant |G|$.

2): Можно предполагать, что представления $\mathscr{X}_1, \ldots, \mathscr{X}_k$ — матричные. Так как их характеры — суммы попарно непересекающихся множеств координатных функций $\left(\chi_{\mathscr{X}_i} = \sum_{j=1}^{d_i} (\mathscr{X}_i)_{jj}\right)$, то утверждение следует из 1).

□

E3. Пусть $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ — неприводимые представления группы G над алгебраически замкнутым полем F. Тогда

$$\mathscr{X} \approx \mathscr{Y} \Leftrightarrow \chi_{\mathscr{X}} = \chi_{\mathscr{Y}}.$$

Доказательство. Непосредственно следует из E2 (2).

□

E4. Теорема. 1) Пусть $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ — неприводимые неэквивалентные матричные представления конечной группы G над полем F. Тогда

$$\sum_{g \in G} \mathscr{X}(g)_{ij} \mathscr{Y}(g^{-1})_{kl} = 0$$

при любых возможных i, j, k, l.

2) Пусть F — алгебраически замкнутое поле и $\mathscr{X}$ — неприводимое представление $G \to \mathrm{GL}(n, F)$. Тогда существует матрица $\mathrm{M} \in M(n, F)$ такая, что

$$\sum_{g \in G} \mathscr{X}(g)_{ij} \mathscr{X}(g^{-1})_{kl} = \mathrm{M}_{jk} \delta_{il}.$$

В частности, $n\mathrm{M} = |G| \mathrm{E}_n$ и $\mathrm{M}_{ii} = \mathrm{M}_{jj}$ для всех i, j.

Доказательство. 1): Пусть $\deg \mathscr{X} = m$ и $\deg \mathscr{Y} = n$. Для любой $m \times n$-матрицы S составим матрицу $\mathrm{T} = \sum_{g \in G} \mathscr{X}(g) \mathrm{S} \mathscr{Y}(g^{-1})$. Тогда, очевидно, $\mathscr{X}(g)\mathrm{T} = \mathrm{T}\mathscr{Y}(g)$ для всех $g \in G$, откуда по лемме Шура $\mathrm{T} = \mathrm{O}$.

Зафиксируем произвольно числа j и k ($1 \leqslant j \leqslant m$, $1 \leqslant k \leqslant n$) и выберем в качестве S матрицу, в которой все члены равны 0, кроме одного, равного 1 и стоящего в j-й строке и k-м столбце, т. е. положим $S_{ab} = \delta_{aj}\delta_{kb}$. Получаем

$$0 = T_{il} = \sum_{g \in G} \sum_{a=1}^{m} \sum_{b=1}^{n} \mathscr{X}(g)_{ia} S_{ab} \mathscr{Y}(g^{-1})_{bl} = \sum_{g \in G} \mathscr{X}(g)_{ij} \mathscr{Y}(g^{-1})_{kl}.$$

2): Положим $P = \sum_{g \in G} \mathscr{X}(g) K \mathscr{X}(g^{-1})$, где $K \in M(n, F)$. Тогда $P\mathscr{X}(g) = \mathscr{X}(g) P$ для всех $g \in G$ и по лемме Шура

(e2) $$P = f E_n,$$

где f — элемент из F, зависящий от выбора M. Зафиксируем произвольно числа j и k с $1 \leqslant j \leqslant n$, $1 \leqslant k \leqslant n$ и положим $K = E_{(j, k)}$ — $(n \times n)$-матрица с (j, k)-вхождением, равным 1, и остальными вхождениями, равными 0 (т. е. $K_{ab} = \delta_{aj}\delta_{kb}$). Элемент f в (e2) соответствующий этой матрице K, обозначим через M_{jk}. Из (e2) получаем

$$\sum_{g \in G} \mathscr{X}(g) E_{(j, k)} \mathscr{X}(g^{-1}) = M_{jk} E_n.$$

Вычисляя (i, l)-вхождения слева и справа, имеем

$$\sum_{g \in G} \mathscr{X}(g)_{ij} \mathscr{X}(g^{-1})_{kl} = M_{jk} \delta_{il}.$$

Взяв здесь $l = i$, просуммируем по i:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{g \in G} \mathscr{X}(g)_{ij} \quad \mathscr{X}(g^{-1})_{ki} = n M_{jk}.$$

Левая часть равна $\sum_{g \in G} \sum_{i=1}^{n} \mathscr{X}(g^{-1})_{ki} \mathscr{X}(g)_{ij} = \sum_{g \in G} (\mathscr{X}(g^{-1}) \mathscr{X} \times$ $\times (g))_{kj} = \sum_{g \in G} \delta_{kj} = |G| \delta_{kj}$. Таким образом, $nM = |G| E_n$.

Наконец, $M_{jj} = \sum_{g \in G} \mathscr{X}(g)_{ij} \mathscr{X}(g^{-1})_{ji} = \sum_{g \in G} \mathscr{X}(g^{-1})_{ji} \mathscr{X}(g)_{ij} =$ $= \sum_{g \in G} \mathscr{X}(g)_{ji} \mathscr{X}(g^{-1})_{ij} = M_{ii}$.

□

E5. Определение. 1) Характер неприводимого представления группы G над полем F называется *неприводимым характером группы G над F*. Множество всех неприводимых характеров группы G над F обозначается через

$$\mathrm{Irr}_F(G).$$

2) Множество всех классовых (т. е. постоянных на классах сопряженных элементов) функций из группы G в кольцо K обозначается через

$$\mathrm{CF}(G \to K).$$

Е6. Если F — алгебраически замкнутое поле, то $|\mathrm{Irr}_F(G)|$ совпадает с числом классов неприводимых представлений G над F.

Доказательство. Следует из Е3.

□

Е7. Упражнение. Если χ, $\psi \in \mathrm{Irr}_F(G)$ (F — поле) и $\chi \neq \psi$, то $\sum_{g \in G} \chi(g)\psi(g^{-1}) = 0$.

Е8. Замечания: 1) Пусть $C_1, \ldots, C_k$ — все классы сопряженных элементов группы G и F — поле. Введем функции ε_i ($i = 1, \ldots, k$) из G в F, положив

$$\varepsilon_i(g) = \begin{cases} 1, & \text{если } g \in C_i, \\ 0, & \text{если } g \in G \setminus C_i. \end{cases}$$

Очевидно, что $CF(G \to F)$ есть F-пространство (относительно сложения функций и умножения функции на элемент из F) и $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k\}$ — его база.

2) Пусть F — алгебраически замкнутое поле и G — конечная группа с k классами сопряженных элементов. Так как $\mathrm{Irr}_F(G) \subseteq \subseteq \mathrm{CF}(G \to F)$, то по Е2(2) и Е6 $|\mathrm{Irr}_F(G)| \leqslant k$.

Пусть $\mathrm{char}(F) = p$. В § **4Г** будет доказано, что $|\mathrm{Irr}_F(G)|$ совпадает с числом *p'-классов* (т. е. классов сопряженных p'-элементов) группы G.

Е9. Упражнение. Пусть $\mathcal{R}$ — матричное регулярное представление группы G над полем F. Тогда ранг системы всех координатных функций представления $\mathcal{R}$ равен $|G|$.

§ Ё. СТРОЕНИЕ ГРУППОВОЙ АЛГЕБРЫ

Рассмотрим групповую алгебру FG конечной группы G над полем F.

Ё1. Определение. *Представлением* групповой алгебры FG называется ее гомоморфизмом $\mathcal{G}$ в алгебру $\mathrm{M}(n, F)$ или в алгебру $\mathrm{End}(V(n, F))$. *Характером* представления $\mathcal{G}$ называется функция $\chi_{\mathcal{G}}: x \mapsto \text{след}\, \mathcal{G}(x)$ $(x \in FG)$.

Как гомоморфизм алгебр отображение $\mathcal{G}$ удовлетворяет условиям:

$$\mathcal{G}(x + y) = \mathcal{G}(x) + \mathcal{G}(y), \quad \mathcal{G}(fx) = f\mathcal{G}(x),$$

$$\mathcal{G}(xy) = \mathcal{G}(x)\,\mathcal{G}(y),$$

$$\mathcal{G}(1) = \mathrm{E}, \quad \mathcal{G}(0) = \mathrm{O}$$

(x, $y \in FG$; $f \in F$; E и O — единица и иоль в $\mathrm{M}(n, F)$ или в $\mathrm{End}(V(n, F))$).

Существует очевидная взаимосвязь представлений группы G над F и представлений групповой алгебры FG:

Ё2. Существует взаимно однозначное отображение $\mathscr{A} \mapsto \breve{\mathscr{A}}$ из множества всех представлений группы G над F на множество всех представлений алгебры FG такое, что

$$\breve{\mathscr{A}}\left(\sum_{g \in G} f_g g\right) = \sum_{g \in G} f_g \mathscr{A}(g)\,(f_g \in F) \text{ и } \breve{\mathscr{A}}|_G = \mathscr{A}.$$

□

Ё3. Определение. 1) Закрепим обозначение $\breve{\mathscr{A}}$ для представления $\mathscr{A}$ группы G, введенное в Ё2.

2) Если χ — характер представления $\mathscr{A}$ группы G над F, то $\breve{\chi}$ обозначает характер представления $\breve{\mathscr{A}}$ алгебры FG, а $\mathrm{Ker}\,\breve{\chi} = \mathrm{Ker}\,\breve{\mathscr{A}}$.

3) Положим

$$J(FG) = \bigcap_{\chi \in \mathrm{Irr}_F(G)} \mathrm{Ker}\,\breve{\chi}.$$

$J(FG)$ называется *радикалом Джекобсона* групповой алгебры FG.

Очевидно, что определения $\breve{\chi}$ и $\mathrm{Ker}\,\breve{\chi}$ не зависят от выбора представления $\mathscr{A}$ с $\chi = \chi_{\mathscr{A}}$, а $J(FG)$ — двухсторонний идеал в FG (так как все $\mathrm{Ker}\,\breve{\chi}$ — двухсторонние идеалы в FG).

Ё4. Пусть $\mathscr{X}_1, \ldots, \mathscr{X}_l$ — попарно неэквивалентные неприводимые матричные представления группы G над алгебраически замкнутым полем F и $\mathscr{X} = \mathscr{X}_1 \oplus \ldots \oplus \mathscr{X}_l$. Тогда

$$F[\mathscr{X}(G)] = \begin{pmatrix} F[\mathscr{X}_1(G)] & & O \\ & \ddots & \\ O & & F[\mathscr{X}_l(G)] \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Пусть L и R — соответственно левая и правая части доказываемого равенства. Очевидно, что $L \subseteq R$, причем L и R — подпространства в $\mathrm{M}(n, F)$, где $n = n_1 + \ldots + n_l$ и $n_i = \deg \mathscr{X}_i$. Покажем, что $\dim L = \dim R$ (тогда будет $L = R$). Рассмотрим матрицу M размеров $n^2 \times |G|$:

$$\begin{array}{c|ccccc|} & g_1 & \cdots & g_m & \cdots & g_{|G|} \\ \hline \mathscr{X}_{11} & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ \mathscr{X}_{ij} & & \cdot & \mathscr{X}_{ij}(g_m) & & \\ \vdots & & & & & \\ \mathscr{X}_{nn} & & & & & \\ \hline \end{array}$$

$\mathscr{X}_{ij}$ — координатные функции представления $\mathscr{X}$). Ясно, что dim L равна числу линейно независимых столбцов в M, а следовательно (А6), и числу t линейно независимых строк в M. По теореме Фробениуса — Шура (Е2(1)) $t = n_1^2 + \ldots + n_l^2$. Итак, dim $L = n_1^2 + \ldots + n_l^2$. Но этому же числу равна и $\dim R$, так как $F[\mathscr{X}_i(G)] \simeq \mathrm{M}(n_i, F)$ по теореме Бернсайда (Д11).

□

Напомним, что идеал I кольца или алгебры K называется *нильпотентным*, если $I^n = \mathrm{O}$ для некоторого $n \in N$.

Ё5. Теорема. Пусть F — алгебраически замкнутое поле, $\mathrm{Irr}_F(G) = \{\chi_1, \ldots, \chi_l\}$ и $n_i = \deg \chi_i$.

1) $J(FG)$ — нильпотентный идеал в FG.

2) $FG/J(FG) = A_1 \oplus \ldots \oplus A_l$ — прямая сумма подалгебр A_i таких, что $A_iA_j = \mathrm{O}$ при $i \neq j$ и $A_i \simeq \mathrm{M}(n_i, F)$ (алгебраический изоморфизм) ($i, j \in \{1, \ldots, l\}$).

Доказательство. 1) Пусть $J = J(FG)$ и $\mathscr{R}$ — матричное регулярное представление группы G. Из В12(1) вытекает существование матрицы $\mathrm{S} \in GL(|G|, F)$ и неприводимых представлений $\mathscr{Y}_1, \ldots, \mathscr{Y}_m$ группы G над F таких, что

$$\mathrm{S}^{-1}\widetilde{\mathscr{R}}(x)\mathrm{S} = \begin{pmatrix} \widetilde{\mathscr{Y}}_1(x) & & \mathrm{O} \\ & \ddots & \\ * & & \widetilde{\mathscr{Y}}_m(x) \end{pmatrix}$$

для всех $x \in FG$. Так как $\widetilde{\mathscr{Y}}_i(x) = \mathrm{O}$ при $x \in J$ для всех $i = 1, \ldots, m$ по определению Ё3(3), то

$$\mathrm{S}^{-1}\widetilde{\mathscr{R}}(J)\mathrm{S} = \begin{pmatrix} \mathrm{O} & & \mathrm{O} \\ & \ddots & \\ * & & \mathrm{O} \end{pmatrix}$$

и, следовательно, $(\mathrm{S}^{-1}\widetilde{\mathscr{R}}(J)\mathrm{S})^{|G|} = \mathrm{O}$. Поскольку, очевидно, Ker $\widetilde{\mathscr{R}} = \mathrm{O}$, то $J \simeq \widetilde{\mathscr{R}}(J) \simeq \mathrm{S}^{-1}\widetilde{\mathscr{R}}(J)\mathrm{S}$, и, значит, $J^{|G|} = \mathrm{O}$.

2): Пусть $\mathscr{X}_i$ — неприводимое матричное представление G над F с характером χ_i ($i = 1, \ldots, l$) и $\mathscr{X} = \mathscr{X}_1 \oplus \ldots \oplus \mathscr{X}_l$. Тогда $\mathrm{Ker}\,\widetilde{\mathscr{X}} = \bigcap_{i=1}^{l} \mathrm{Ker}\,\widetilde{\mathscr{X}}_i = J(FG)$, и следовательно, $FG/J(FG) \simeq \widetilde{\mathscr{X}}(FG)$ (алгебраический изоморфизм). Но согласно Ё4 $\widetilde{\mathscr{X}}(FG) = F[\mathscr{X} \times \times (G)] = A_1' \oplus \ldots \oplus A_l'$, где $A_i' = \mathrm{diag}(\mathrm{O}, \ldots, \mathrm{O}, F[\mathscr{X}_i(G)], \mathrm{O}, \ldots, \mathrm{O})$ — подалгебра в $\widetilde{\mathscr{X}}(FG)$, изоморфная $\mathrm{M}(n_i, F)$ по **Д11**, и $A_i'A_j' = \mathrm{O}$ при $i \neq j$. Отсюда следует требуемое утверждение о $FG/J(FG)$.

□

Ё6. Пусть F — алгебраически замкнутое поле, $\mathscr{R} = \mathrm{Reg}_{G, F}$ (см. § Г) и $\mathscr{X}_1, \ldots, \mathscr{X}_l$ — представители всех классов неприводимых представлений G над F.

1) $\mathscr{R}_{FG/J(FG)} \approx \bigotimes_{i=1}^{l} n_i \mathscr{X}_i$, где $n_i = \deg \mathscr{X}_i$.

2) $\dim FG/J(FG) = \sum_{i=1}^{l} n_i^2$.

Доказательство. 1): Следует из **Ё5(2)** и **Д6**.

2): Следует из 1).

□

Теперь рассмотрим *центр* $Z(FG)$ групповой алгебры FG (множество всех $z \in FG$ таких, что $zx = xz$ для всех $x \in FG$). Напомним, что для $X \subseteq G$ через $\breve{X}$ обозначается сумма $\sum_{x \in X} x \in FG$.

Ё7. 1) $Z(FG)$ — подалгебра в FG.

2) $Z(FG) = F\breve{C}_1 \dotplus \ldots \dotplus F\breve{C}_k$, где $C_1, \ldots, C_k$ — все классы сопряженных элементов группы G.

3) Существуют целые неотрицательные числа h_{ijm} такие, что для всех $i, j \in \{1, \ldots, k\}$

$$\breve{C}_i \breve{C}_j = \sum_{m=1}^{k} h_{ijm} \breve{C}_m.$$

4) Пусть $\mathrm{char}(F) = 0$. Если $g \in C_m$, то h_{ijm} есть число всех записей вида $g = g_i g_j$, где $g_i \in C_i$ и $g_j \in C_j$.

Доказательство. См. [12, § 9].

□

§ Ж. СВЯЗЬ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУППЫ И ПОДГРУППЫ

Пусть $H \leqslant G$. Некоторую связь между представлениями групп G и H устанавливает операция ограничения представлений: если $\mathscr{A}$ — представление группы G над полем F, то $\mathscr{A}|_H$ — представление H над F. Другую важную связь дает операция индуцирования представлений, сопоставляющая каждому представлению подгруппы H над F некоторое представление группы G над F (см. **Ж3**).

Ж1. Упражнение. Пусть $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ — представления группы G. Тогда

1) если $\mathscr{A} \approx \mathscr{B}$, то $\mathscr{A}|_H \approx \mathscr{B}|_H$;
2) если $\mathscr{A} \sim \mathscr{B}$, то $\mathscr{A}|_H \sim \mathscr{B}|_H$;
3) если $\mathscr{A}$ приводимо, то $\mathscr{A}|_H$ приводимо;
4) если $\mathscr{A}$ разложимо, то $\mathscr{A}|_H$ разложимо.

Ж2. Пусть $H \leqslant G$ и F — поле.

1) Если $\mathscr{R}$ — регулярное представление $G \to \mathrm{Aut}(F[G])$, то $\mathscr{R}|_{HF[H]}$ — регулярное представление группы H.

2) Если $\mathscr{U}$ — неприводимое представление H над F, то существует неприводимое представление $\mathscr{X}$ группы G над F такое, что $\mathscr{U}$ — неприводимая часть представления $\mathscr{X}|_H$.

Доказательство. 1): Очевидно.

2): Пусть $\mathscr{U}$ — неприводимое представление H над F. По **Г4(1)** $\mathscr{U}$ является неприводимой частью регулярного представления группы H и, следовательно, по 1) — неприводимой частью представления $\mathscr{R}|_H$, где $\mathscr{R}$ — регулярное представление группы G. Пусть $\mathscr{X} = \mathscr{X}_1 \oplus \ldots \oplus \mathscr{X}_m$ — диагональ представления $\mathscr{R}$, где все $\mathscr{X}_i$ неприводимы. Согласно **Ж1(2)** $\mathscr{R}|_H \sim \mathscr{X}|_H$ и, следовательно, $\mathscr{R}|_H \sim \mathscr{X}_1|_H \oplus \ldots \oplus \mathscr{X}_m|_H$. Отсюда и из теоремы **В12** следует, что $\mathscr{U}$ — неприводимая часть некоторого из представлений $\mathscr{X}_i|_H$.

□

Ж3. Определение. Пусть $H \leqslant G$ и $T = (t_1, \ldots, t_m)$ — система вычетов G по H, т. е. такая последовательность элементов группы G, что $G = Ht_1 \dot{\cup} \ldots \dot{\cup} Ht_m$ ($m = |G:H|$). Пусть $\mathscr{A}$ — представление $H \to \mathrm{GL}(n, F)$. Для любого $g \in G$ положим

$$\mathscr{A}'(g) = \begin{cases} \mathscr{A}(g), & \text{если } g \in H, \\ O_{n \times n}, & \text{если } g \in G \setminus H. \end{cases}$$

Определим отображение $\mathscr{A}_T^G$ группы G в $\mathrm{M}(nm, F)$, полагая для $g \in G$

$$(\text{ж}1) \qquad {}^{G}_{T}(g) = \begin{array}{c} j\text{-я колонна} \\ \left(\begin{array}{c|c|c} & & \\ \hline & \mathscr{A}'(t_i g t_j^{-1}) & \\ \hline & & \end{array}\right) \end{array} i\text{-й ряд},$$

т. е. $\mathscr{A}_T^G(g)$ состоит из m^2 клеток степени n таких, что клетка с координатами (i, j) есть $\mathscr{A}'(t_i g t_j^{-1})$.

Отображение $\mathscr{A}_T^G$ (являющееся представлением G над F по **Ж4(1)**) называется представлением, *индуцированным* представлением $\mathscr{A}$ относительно T. Говорят также, что $\mathscr{A}_T^G$ — *индуцированное представление* группы G. Если T ясно из контекста, то слова «относительно T» здесь опускают и пишут $\mathscr{A}^G$ вместо $\mathscr{A}_T^G$.

Заметим, что $\mathscr{A}'(t_i g t_j^{-1}) \neq 0 \Leftrightarrow t_i g \in H t_j$. Поэтому в матрице (ж1) в каждой колонне и в каждом ряду имеется точно одна ненулевая клетка.

Ж4. Теорема. Пусть $H \leqslant G$, $T = (t_1, \ldots, t_m)$ и R — системы вычетов G по H и $\mathscr{A}$ — матричное представление H над F.

1) $\mathscr{A}_T^G$ — представление G над F.

2) $\mathscr{A}_T^G \approx \mathscr{A}_R^G$.

3) Для всех $g \in G$

$$\chi_{\mathscr{A}_T^G}(g) = \sum_{i=1}^{m} \chi_{\mathscr{A}'}(t_i g t_i^{-1}),$$

где $\chi_{\mathscr{A}'}(g) = \chi_{\mathscr{A}}(g)$ при $g \in H$ и $\chi_{\mathscr{A}'}(g) = 0$ при $g \in G \setminus H$.

Доказательство. Следует из [12, § 23].

□

Ж5. Определение. Пусть $H \leqslant G$, $T = (t_1, \ldots, t_m)$ — система вычетов G по H и $\xi \in \mathrm{CF}(H \to F)$, где F — поле. Для любого $g \in G$ положим

$$\xi'(g) = \begin{cases} \xi(g), & \text{если } g \in H, \\ 0, & \text{если } g \in G \setminus H. \end{cases}$$

Определим отображение $\xi^G \colon G \to F$, положив

$$\xi^G(g) = \sum_{i=1}^{m} \xi'(t_i g t_i^{-1})$$

(оно не зависит от выбора системы вычетов T, так как $\xi'((h_i t_i) g (h_i t_i)^{-1}) = \xi'(t_i g t_i^{-1})$ при $h_i \in H$). Говорят, что функция ξ^G *индуцирована* функцией ξ.

Ж6. Пусть $H \leqslant G$, F — поле и $\xi \in \mathrm{CF}(H \to F)$.

1) $\xi^G \in \mathrm{CF}(G \to F)$.

2) $\xi^G(g) = 0$, если $g^G \cap H = \varnothing$.

3) Если ξ — характер представления $\mathscr{A}$ подгруппы H, то ξ^G — характер представления $\mathscr{A}_T^G$ (при любой системе T вычетов G по H).

4) Если $H \leqslant K \leqslant G$, то $(\xi^K)^G = \xi^G$.

5) $\left(\sum_{i=1}^{n} f_i \xi_i\right)^G = \sum_{i=1}^{n} f_i \xi_i^G$ для любых $f_1, \ldots, f_n$ из F и любых $\xi_1, \ldots, \xi_n$ из $\mathrm{CF}(H \to F)$.

6) Если $\operatorname{char}(F)$ не делит $|H|$, то

$$\xi^G(g) = \frac{1}{|H|}\sum_{x\in G}\xi'(xgx^{-1}) = \frac{|C_G(g)|}{|H|}\times\sum_{x\in g^G\cap H}\xi(x).$$

Доказательство. Следует из [12, § 24].

□

Ж7. Упражнение. Пусть $H\leqslant G$, T — система вычетов G по H и $\mathscr{A}$ — матричное представление H над полем F.

1) Как связаны ядра представлений $\mathscr{A}$ и $\mathscr{A}_T^G$?

2) Если $\mathscr{A}$ — регулярное представление H над F, то $\mathscr{A}_T^G$ — регулярное представление G над F.

3) Если $\mathscr{A}$ — $(\mathscr{B}, \mathscr{C})$ — приводимо, то $\mathscr{A}_T^G$ — $(\mathscr{B}_T^G, \mathscr{C}_T^G)$-приводимо.

4) Если $\mathscr{A}\approx\mathscr{B}\oplus\mathscr{C}$, то $\mathscr{A}_T^G\approx\mathscr{B}_T^G\oplus\mathscr{C}_T^G$.

5) Если $\xi\in\mathrm{CF}(H\to F)$ и $\psi\in\mathrm{CF}(G\to F)$, то $\xi^G\psi=(\xi\psi|_H)^G$.

Ж8. Определение. Пусть $H\leqslant G$, $\mathscr{A}$ — представление подгруппы H и $g\in G$. Определим отображение

$$\mathscr{A}^g : h^g \mapsto \mathscr{A}(h)\quad (h\in H).$$

Очевидно, что $\mathscr{A}^g$ — представление подгруппы H^g. Оно называется *сопряженным* с представлением $\mathscr{A}$ группы H (при помощи g).

Ж9. Упражнение. Пусть $H\leqslant G$, $g\in G$, а $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ — представления H.

1) $\mathscr{A}^g$ неприводимо $\Leftrightarrow$ $\mathscr{A}$ неприводимо.

2) $\mathscr{A}^g\approx\mathscr{B}^g\Leftrightarrow\mathscr{A}\approx\mathscr{B}$.

3) $\mathscr{A}^g B^g\Leftrightarrow A\sim B$.

Ж10. Лемма Клиффорда. Пусть $\mathscr{X}$ — неприводимое представление группы G и $N\trianglelefteq G$. Тогда существуют неприводимое представление $\mathscr{A}$ группы N и подмножество T в G такие, что

$$\mathscr{X}|_N = \bigoplus_{t\in T_1}\mathscr{A}^t.$$

Доказательство. Можно считать, что $\mathscr{X}$ — операторное представление $G\to\operatorname{Aut}(V)$. Пусть W — минимальное $\mathscr{X}(N)$-допустимое подпространство в V. Тогда таковыми являются и все подпространства $W^{\mathscr{X}(g)}$ при $g\in G$, причем сумма их равна V из-за неприводимости $\mathscr{X}$. Поэтому существует подмножество T в G такое, что $V=\bigoplus_{t\in T}W^{\mathscr{X}(t)}$. Отсюда, полагая $\mathscr{A}=(\mathscr{X}|_N)_W$, получаем требуемое заключение.

□

Глава 2

ОБЫКНОВЕННЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

§ А. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ОБЫКНОВЕННЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ. ОБЗОР

Здесь мы приведем формулировки некоторых результатов глав III — V из [12] и сделаем несколько добавлений.

А1. Определение. Представление конечной группы G над полем F называется *обыкновенным*, если $\mathrm{char}(F)$ не делит $|G|$.

А2. Теорема Машке. 1) Всякое обыкновенное представление $\mathscr{A}$ конечной группы G эквивалентно прямой сумме неприводимых представлений группы G над тем же полем.

2) Если $\mathscr{A}$ — матричное представление и

$$\mathscr{A}(g) = \begin{pmatrix} \mathrm{A}(g) & \mathrm{O} \\ \mathrm{B}(g) & \mathrm{C}(g) \end{pmatrix} \text{ для всех } g \in G,$$

где $\mathrm{A}(g)$ — квадратная матрица, размеры которой не зависят от g, то существует матрица, S такая, что

$$\mathrm{S}^{-1}\mathscr{A}(g)\mathrm{S} = \begin{pmatrix} \mathrm{A}(g) & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \mathrm{C}(g) \end{pmatrix} \text{ для всех } g \in G.$$

3) Если $\mathscr{A}$ — операторное представление $G \to \mathrm{Aut}(V)$ и V_1 — $\mathscr{A}(G)$-допустимое подпространство из V, то существует $\mathscr{A}(G)$-допустимое подпространство V_2 в V такое, что $V = V_1 \oplus V_2$.

Доказательство. См. [12, теоремы 2 и 6] для матричных представлений. Остальное получается отсюда применением **1В5**.

□

А3. Пусть P — силовская элементарная абелева нормальная подгруппа конечной группы G, $P_1 \leqslant P$ и $P_1 \trianglelefteq G$. Тогда $P = P_1 \times P_2$, где $P_2 \trianglelefteq G$.

Доказательство. Следует из **А2(3)** и **1Б19**.

□

А4. Теорема. Пусть G — конечная группа и F — алгебраически замкнутое поле такое, что $\operatorname{char}(F)$ не делит $|G|$.

1) Число классов неприводимых представлений группы G над F равно числу k классов сопряженных элементов группы G.

2) Пусть $\chi_1, \ldots, \chi_k$ — все различные характеры неприводимых представлений G над F и $g_1, \ldots, g_k$ — представители всех классов сопряженных элементов в G. Тогда

$$\sum_{g \in G} \chi_i(g)\, \chi_j(g^{-1}) = |G|\, \delta_{ij}$$

(первое соотношение ортогональности) и

$$\sum_{i=1}^{k} \chi_i(g_m)\, \chi_i(g_n^{-1}) = |C_G(g_m)|\, \delta_{mn}$$

(второе соотношение ортогональности).

3) Число матричных представлений степени 1 группы G над F равно индексу $|G:G'|$ коммутанта G' группы G.
[12, теорема 7, лемма 10].

А5. Определение. *Алгебраическим числом* называется элемент из C, являющийся корнем уравнения вида $x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$, где $n \in N$, и все a_i — рациональные числа. *Целым алгебраическим числом* называется элемент из C, являющийся корнем уравнения предыдущего вида, все коэффициенты которого — целые числа.

Положим: $\hat{Q}$ — множество всех алгебраических чисел, $\hat{Z}$ — множество всех целых алгебраических чисел.

А6. 1) $\hat{Q}$ — подполе в C.
2) $\hat{Z}$ — подкольцо в $\hat{Q}$.
3) $\hat{Z} \cap Q = Z$.
[12, леммы 14, 15].

А7. Теорема. Пусть G — конечная группа и F — алгебраически замкнутое поле характеристики 0.

1) Два представления G над F эквивалентны, если и только если их характеры равны.

2) Любое представление G над F эквивалентно матричному представлению $\mathscr{M}$ такому, что элементы матриц $\mathscr{M}(g)$ при $g \in G$ все лежат в поле $\widehat{Q_F}$ (Q_F — простое подполе в F, а $\widehat{Q_F}$ — его алгебраическое замыкание в F; $Q_F \simeq Q$ и $\widehat{Q_F} \simeq \hat{Q}$).

3) Степень неприводимого представления G над F делит $|G|$.
[12, леммы 12 и 13, теорема 8].

A8. Упражнение. Пусть F — алгебраически замкнутое поле характеристики 0. Конечные подгруппы A и B из $GL(n, F)$ сопряжены в $GL(n, F)$, если и только если существует изоморфизм γ из A на B такой, что след $a =$ след $\gamma(a)$ для всех $a \in A$.

A9. Теорема. Пусть $\mathscr{X}$ — неприводимое матричное представление G над $\boldsymbol{C}$, χ — характер $\mathscr{X}$ и ω_χ — линейное отображение из $Z(\boldsymbol{C}G)$ в $\boldsymbol{C}$ такое, что $\omega_\chi(\widetilde{g^G}) = \dfrac{|g^G|\chi(g)}{\chi(1)}$ при $g \in G$.

1) $\sum\limits_{x \in g^G} \mathscr{X}(x) = \omega_\chi(\widetilde{g^G})\mathrm{E}$, где E — единичная матрица ($g \in G$).

2) $\omega_\chi(\widetilde{g^G})$ — целое алгебраическое число ($g \in G$).

3) ω_χ — алгебраический гомоморфизм из $Z(\boldsymbol{C}G)$ в $\boldsymbol{C}$, т. е. такое линейное отображение, что

$$\omega_\chi(z_1 z_2) = \omega_\chi(z_1)\,\omega_\chi(z_2)$$

для любых $z_1, z_2 \in Z(\boldsymbol{C}G)$.

4) Если $z \in Z(G)$, то $\chi(zg) = \dfrac{\chi(z)\chi(g)}{\chi(1)}$ для всех $g \in G$.

Доказательство. 1): Предпоследнее равенство на с. 33 в [12].

2): [12, лемма 16].

3): Следует из 1) (см. также второе равенство на с. 34 в [12]; правая часть его есть $\omega_{\chi_n}(\widetilde{x_i^G}\widetilde{x_l^G})$).

4): Следует из 3) и из $|(zg)^G| = |g^G|$.

□

A10. Определение. *Характером группы* G называется характер любого представления G над $\boldsymbol{C}$. Характер неприводимого представления G над $\boldsymbol{C}$ называется *неприводимым характером группы* G. Степень и ядро представления, имеющего характер χ, называются соответственно *степенью характера* χ (обозначается через $\deg\chi$) и *ядром характера* χ (обозначается через $\operatorname{Ker}\chi$). Классовые функции из G в $\boldsymbol{C}$ называются *классовыми функциями группы* G. Разность двух характеров группы G называется *обобщенным характером* группы G.

A11. Пусть χ — характер группы G и $g \in G$.

1) Существует представление $\mathscr{M}$ группы G с характером χ такое, что $\mathscr{M}(g) = \operatorname{diag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$, где $n = \chi(1)$ и $\varepsilon_i^{o(g)} = 1$. В частности, $\chi(g) = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n \in \boldsymbol{Q}(\omega)$ ($\subseteq \hat{\boldsymbol{Z}}$), где ω — первообразный корень степени $|G|$ из 1.

2) $|\chi(g)| \leqslant \chi(1)$.

3) $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$.

[12, лемма 17 и ее доказательство].

А12. Определение. Для любой классовой функции θ группы G определим функцию $\bar{\theta}$ по правилу: $\bar{\theta}(g) = \overline{\theta(g)}$ $(g \in G)$. Функция $\bar{\theta}$ называется *комплексно сопряженной* с функцией θ.

А13. Если χ — характер G, то $\bar{\chi}$ — также характер G, а если χ — неприводимый характер G, то $\bar{\chi}$ — неприводимый характер G [12, лемма 18].

А14. Пусть ω — первообразный корень степени n из 1 в поле C.

1) Каждый элемент a из $Q(\omega)$ имеет единственное представление вида $a = \sum_{i=0}^{\varphi(n)-1} q_i\omega^i$, где $q_i \in Q$.

2) $\mathrm{Aut}(Q(\omega)) = \{\alpha_m | m \in N,\ m \leqslant n,\ (m, n) = 1\}$, где α_m — единственный автоморфизм поля $Q(\omega)$, переводящий ω в ω^m. В частности, $|\mathrm{Aut}(Q(\omega))| = \varphi(n)$, где φ — функция Эйлера.

3) Если $a \in Q(\omega)$ и $a^\alpha = a$ для всех $\alpha \in \mathrm{Aut}(Q(\omega))$, то $a \in Q$.
[12, теорема 9 и ее доказательство].

А15. Пусть G — конечная группа и ω — первообразный корень степени $|G|$ из 1. Для любого натурального числа m с $m \leqslant |G|$ и $(m, |G|) = 1$ пусть α_m — автоморфизм поля $Q(\omega)$, определенный в **А14**(2). Тогда

$$\chi(g)^{\alpha_m} = \chi(g^m)$$

для любого характера χ группы G и любого $g \in G$.

[12, лемма 20 и ее доказательство].

При изучении конечной группы очень важную роль играют ее неприводимые характеры.

А16. Обозначения. 1) $\mathrm{Irr}(G)$ обозначает множество всех неприводимых характеров группы G.

2) Пусть $CF(G)$ — C-пространство всех классовых функций из G в C, в котором определено *скалярное произведение* $(\ ,\ )_G$:

$$(\alpha, \beta)_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \alpha(g)\overline{\beta(g)}.$$

A17. Замечание. В [12] скалярное произведение определено иначе: $(\alpha, \beta)_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \alpha(g) \beta(g^{-1})$. Для случая, когда α и β — обобщенные характеры, оба эти скалярные произведения дают один и тот же результат (по **A11** (3)).

Непосредственно проверяются следующие свойства:

$$(\alpha, \beta)_G = \overline{(\beta, \alpha)}_G, \quad (\alpha + \beta, \gamma)_G = (\alpha, \gamma)_G + (\beta, \gamma)_G;$$

$$(f\alpha, \beta)_G = f(\alpha, \beta)_G, \quad (\alpha, f\beta)_G = \bar{f}(\alpha, \beta)_G$$

$(\alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{CF}(G), f \in C)$.

A18. Теорема. Пусть G — конечная группа. Тогда $\mathrm{Irr}(G)$ — ортонормированная база пространства $\mathrm{CF}(G)$. [12, лемма 11].

A19. Определение. Если $\{C_1, \ldots, C_k\}$ — множество всех классов сопряженных элементов группы G, $g_i \in C_i$ и $\mathrm{Irr}(G) = \{\chi_1, \ldots, \chi_k\}$, то $(k \times k)$-матрица X с $X_{ij} = \chi_i(g_j)$ называется *таблицей характеров* группы G.

Обычно ее записывают так:

$$\begin{array}{c|cccc|}
 & C_1 & C_2 & & C_k \\
\hline
\chi_1 & \chi_1(g_1) & \chi_1(g_2) & \ldots & \chi_1(g_k) \\
\chi_2 & \chi_2(g_1) & \chi_2(g_2) & \ldots & \chi_2(g_k) \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\chi_k & \chi_k(g_1) & \chi_k(g_2) & \ldots & \chi_k(g_k) \\
\hline
\end{array}$$

Любая таблица характеров группы G может быть преобразована в любую другую таблицу характеров группы G перестановкой строк и столбцов. Обычно нумерация выбирается так, что $\chi_1 = 1_G$ (главный характер группы G), а $C_1 = \{1\}$. Можно было бы видоизменить понятие таблицы характеров группы G, определив ее как $\mathrm{Irr}(G) \times \mathrm{Cl}(G)$-матрицу в смысле **1A9**. При таком определении каждая конечная группа будет иметь точно одну таблицу характеров.

Первое и второе соотношения ортогональности (теорема **A4**) представляют собой зависимость соответственно между строками и столбцами таблицы характеров. По теореме **A18** строки таблицы характеров линейно независимы. Следовательно, линейно независимы ее столбцы и $\det(X) \neq 0$.

A20. Упражнения. 1) Элементы x и y группы G сопряжены в G, если и только если $\chi(x) = \chi(y)$ для всех $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$.

2) Элемент x группы G сопряжен в G со своим обратным (такой элемент называется *вещественным*), если и только если $\chi(x) \in \boldsymbol{R}$ для всех $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$.

3) Пусть X — таблица характеров группы G и $g_1, \ldots, g_k$ — представители всех классов сопряженных элементов G, тогда

$$\det(X) = \varepsilon \prod_{i=1}^{k} |C_G(g_i)|, \text{ где } \varepsilon^4 = 1.$$

4) $\sum_{g \in G} \chi(xg)\overline{\chi(g)} = |G| \dfrac{\chi(x)}{\chi(1)}$ для любых $x \in G$ и $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$.

А21. Теорема. Пусть G — конечная группа, $g_1, \ldots, g_k$ — представители всех ее классов сопряженных элементов и h_{ijm} — коэффициенты в таблице умножения классов группы G. Пусть $y_1, \ldots, y_k$ — переменные и A — $k \times k$-матрица с $A_{ij} = \sum_{m=1}^{k} h_{mij} y_i$.

Классовая функция θ группы G является неприводимым характером группы G, если и только если выполнены три условия:

1) функция $\zeta = \sum_{i=1}^{k} \dfrac{|g_i^G| \theta(g_i)}{\theta(1)} y_i$ удовлетворяет уравнению $\det(A - \zeta E) = 0$;

2) $(\theta, \theta)_G = 1$;

3) $\theta(1) > 0$.

[12, теорема 10].

А22. Зная коэффициенты в таблице умножения классов группы G, можно вычислить таблицу характеров группы G.

[12, следствие 1 теоремы 10].

А23. Пусть $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ и $\alpha \in \mathrm{Aut}(Q(\omega))$, где ω — первообразный корень степени $|G|$ из единицы. Тогда функция

$$\chi^\alpha : g \mapsto \chi(g)^\alpha \ (g \in G)$$

также принадлежит $\mathrm{Irr}(G)$.

[12, следствие 2 теоремы 10].

А24. Определение. Характер χ^α, определенный в **А23**, называется *алгебраически сопряженным* с χ.

А25. По таблице характеров группы G можно определить:

1) степени неприводимых характеров G ($\deg \chi = \chi(1)$);

2) $|G| \left(= \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \chi(1)^2 \right)$;

3) порядки централизаторов элементов $\left(|C_G(g)| = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} |\chi(g)|^2 \right)$;

4) порядки классов сопряженных элементов;

5) $Z(G)$ $(g \in Z(G) \Leftrightarrow |g^G| = 1)$;

6) G' ($g\in G' \Leftrightarrow \chi(g)=\chi(1)$ всякий раз как $\chi\in \mathrm{Irr}(G)$ и $\chi(1)=1$);

7) коэффициенты h_{ijm} в таблице умножения классов группы G:

$$h_{ijm}=\frac{|g_i^G||g_j^G|}{|G|}\sum_{\chi\in \mathrm{Irr}(G)}\frac{\chi(g_i)\chi(g_j)\overline{\chi(g_m)}}{\chi(1)}$$

(h_{ijm} — коэффициент при $\widetilde{g_m^G}$ в произведении $\widetilde{g_i^G}\,\widetilde{g_j^G}$; см. 1Ё7).

8) коммутаторы группы G $\left(g \text{ является коммутатором} \Leftrightarrow \right.$ $\left.\Leftrightarrow \sum_{\chi\in \mathrm{Irr}(G)}\frac{\chi(g)}{\chi(1)}>0\right)$.

Доказательство. 1) — 7): [12, лемма 21].

8): Пусть r — число пар (x, y) элементов из G таких, что $g=[x, y]$. Покажем, что $r=|G|\sum_{\chi\in \mathrm{Irr}(G)}\frac{\chi(g)}{\chi(1)}$. Тогда пункт 8) будет доказан. Имеем

$$r=\sum_{x\in G}|\{y\in G\,|\,x^{-1}x^y=g\}|=\sum_{x\in G}|\{y\in G\,|\,x^y=xg\}|=$$

$$=\sum_{x\in G}|C_G(x)|\,|x^G\cap\{xg\}|=_{\mathrm{A4}(2)}\sum_{x\in G}\sum_{\chi\in \mathrm{Irr}(G)}\overline{\chi(x)}\chi(xg)=$$

$$=_{\mathrm{A20}(4)}|G|\sum_{\chi\in \mathrm{Irr}(G)}\frac{\chi(g)}{\chi(1)}.$$

□

А26. Замечание. Соотношение А25(7) можно сформулировать следующим образом. Пусть a, b, $c\in G$ и $\#\,(a^{\cdot}b^{\cdot}=c)$ обозначает число пар (a_1, b_1) таких, что $a_1\in a^G$, $b_1\in b^G$ и $a_1b_1=c$. Тогда

$$\#\,(a^{\cdot}b^{\cdot}=c)=\frac{|G|}{|C_G(a)||C_G(b)|}\sum_{\chi\in \mathrm{Irr}(G)}\frac{\chi(a)\chi(b)\overline{\chi(c)}}{\chi(1)}.$$

А27. Упражнение. Если g — коммутатор в G, $n\in N$ и $(n, o(g))=1$, то g^n — коммутатор в G.

А28. Если $\chi\in \mathrm{Irr}(G)$ и $\chi(1)>1$, то существует $x\in G$ с $\chi(x)=0$. [12, лемма 22].

А29. Упражнение. Пусть G — конечная группа, $\chi\in \mathrm{Irr}(G)$ и l — число элементов g из G таких, что $\chi(g)=0$.

1) $l\geqslant\chi(1)^2-1$.

2) $l=0\Leftrightarrow\chi(1)=1$ (т. е. χ линейный).

А30. Пусть $\mathscr{A}$ — представление группы G с характером χ. Тогда

1) $\{g\in G\,|\,\chi(g)=\chi(1)\}=\mathrm{Ker}\,\mathscr{A}\trianglelefteq G$;

2) если $|\chi(g)|=\chi(1)$ для некоторого $g\in G$, то $\mathscr{A}(g)=\lambda E$, где $\lambda\in C$ и $E=\mathscr{A}(1)$; в частности, $gN\in Z(G/N)$, где $N=\operatorname{Ker}\mathscr{A}$.

[12, лемма 27].

A31. Пусть G — конечная группа, $g\in G$ и $\chi\in\operatorname{Irr}(G)$. Если $\frac{\chi(g)}{\chi(1)}\in\hat{Z}$ или $(\chi(1), |g^G|)=1$, то либо $|\chi(g)|=\chi(1)$, либо $\chi(g)=0$.

[12, доказательство леммы 28].

A32. Теорема Бернсайда. Если $g\in G$ и $|g^G|=p^a$, где p — простое число и $a\in N$, то группа G непроста.

[12, теорема 12].

Следующие результаты касаются непростых групп.

A33. Определение. Пусть $N\trianglelefteq G$. Положим

$$\operatorname{Irr}(G\,|\,N)=\{\chi\in\operatorname{Irr}(G)\,|\operatorname{Ker}\chi\supseteq N\}.$$

A34. Пусть $N\trianglelefteq G$.

1) Существует взаимно однозначное отображение $\chi\longmapsto\chi'$ из $\operatorname{Irr}(G|N)$ на $\operatorname{Irr}(G/N)$ такое, что $\chi'(gN)=\chi(g)=\chi(gn)=\chi(ng)$ для всех $g\in G$ и $n\in N$.

2) $N=\bigcap_{\chi\in\operatorname{Irr}(G|N)}\operatorname{Ker}\chi$.

[12, лемма 23].

A35. Пусть $N\trianglelefteq G$ и $g\in G$. Тогда

$$|C_G(g)|-|C_{G/N}(gN)|=\sum_{\chi\in\operatorname{Irr}(G)\setminus\operatorname{Irr}(G|N)}|\chi(g)|^2.$$

[12, лемма 24].

A36. Упражнение. Пусть $N\trianglelefteq G$, $g\in G$ и $C_N(g)=1$. Тогда $|C_G(g)|=|C_{G/N}(gN)|$ и $\chi(g)=0$ для всех $\chi\in\operatorname{Irr}(G)\setminus\operatorname{Irr}(G|N)$.

A37. Если χ, $\lambda\in\operatorname{Irr}(G)$ и $\lambda(1)=1$, то $\chi\lambda\in\operatorname{Irr}(G)$.

[12, лемма 25].

A38. Пусть $G=A\times B$. Для классовых функций α и β групп A и B соответственно через $\alpha\times\beta$ обозначим (классовую) функцию из G в C такую, что $(\alpha\times\beta)(ab)=\alpha(a)\beta(b)$ для всех $a\in A$ и $b\in B$.

1) $\operatorname{Irr}(G)=\{\alpha\times\beta\,|\,\alpha\in\operatorname{Irr}(A),\ \beta\in\operatorname{Irr}(B)\}$.

2) Если α и β — обобщенные характеры A и B соответственно, то $\alpha\times\beta$ — обобщенный характер G.

Доказательство. 1): [12, лемма 26].

2): Следует из 1).

□

A39. Определение. Пусть A — конечная абелева группа. Во множестве $\mathrm{Irr}(A)$ введем операцию умножения по правилу

$$\chi\psi(a) = \chi(a)\psi(a) \text{ для } \chi, \psi \in \mathrm{Irr}(A) \text{ и } a \in A.$$

Очевидно, что множество $\mathrm{Irr}(A)$ вместе с этой операцией есть группа. Обозначим ее через $\hat{A}$ и назовем *группой характеров* группы A (над C).

A40. Пусть A — конечная абелева группа, $A = \langle a_1 \rangle \times \ldots \times \langle a_n \rangle$ и ε_i — некоторый первообразный корень степени $o(a_i)$ из единицы в поле C. Каждому элементу $a = a_1^{s_1} \ldots a_n^{s_n}$ группы A поставим в соответствие функцию $\chi_a : A \to C$ с $\chi_a(a_1^{t_1} \ldots a_n^{t_n}) = \varepsilon_1^{s_1 t_1} \ldots \varepsilon_n^{s_n t_n}$ (s_i, $t_i \in Z$).

1) $\chi_a \in \mathrm{Irr}(A)$ для всех $a \in A$.

2) Отображение $a \mapsto \chi_a$ ($a \in A$) есть изоморфизм группы A на группу $\hat{A}$.

3) Если $B \leqslant A$, то отображение $\alpha \mapsto \alpha|_B$ ($\alpha \in \hat{A}$) есть гомоморфизм $\hat{A}$ на $\hat{B}$ с ядром

$$B^{\perp} \equiv \mathrm{Irr}(A|B)\ (= \{\alpha \in \hat{A} \mid \alpha(B) = 1\}).$$

4) Отображение $B \mapsto B^{\perp}$ ($B \leqslant A$) есть взаимно однозначное отображение множества всех подгрупп группы A на множество всех подгрупп группы $\hat{A}$.

Доказательство. Простой подсчет.

□

A41. Теорема. Пусть некоторая группа A действует как группа перестановок на множестве классов сопряженных элементов группы G и на $\mathrm{Irr}(G)$, причем

$$\chi(g) = \chi^a(g^a) \text{ для всех } a \in A,\ \chi \in \mathrm{Irr}(G) \text{ и } g \in G,$$

где g^a обозначает элемент из $(g^G)^a$. Тогда для каждого $a \in A$ число неподвижных относительно a классов равно числу неподвижных относительно a неприводимых характеров.

Доказательство. Пусть $\mathrm{Cl}(G) = \{C_1, \ldots, C_k\}$, $g_i \in C_i$, $\mathrm{Irr}(G) = \{\chi_1, \ldots, \chi_k\}$, X — таблица характеров группы G с $X_{ij} = \chi_i(g_j)$. Для $a \in A$ определим $k \times k$ — матрицы $P(a)$ и $Q(a)$, положив

$$P(a)_{ij} = \delta_{\chi_i^a, \chi_j} \text{ и } Q(a)_{ij} = \delta_{C_i^a, C_j} \left(= \delta_{C_i, C_j^{a^{-1}}} \right).$$

Тогда

$$(P(a)X)_{st} = \sum_{m=1}^{k} P(a)_{sm} X_{mt} = \chi_s^a(g_t),$$

$$(XQ(a))_{st} = \sum_{m=1}^{k} X_{sm} Q(a)_{mt} = \chi_s(g_t^{a^{-1}}).$$

По условию теоремы отсюда следует, что $P(a)X = XQ(a)$. Так как матрица X невырождена, то $Q(a) = X^{-1}P(a)X$ и, следовательно,

$$\text{след}\, P(a) = \text{след}\, Q(a).$$

Это и есть требуемое утверждение, так как след $P(a) = |\{\chi \in \in \mathrm{Irr}(G) | \chi^a = \chi\}|$, а след $Q(a) = |\{C \in \mathrm{Cl}(G) | C^a = C\}|$.

□

A42. Определение. Пусть $\mathscr{P}$ — гомоморфизм группы G в группу S_Ω всех перестановок конечного множества Ω. $\mathscr{P}$ называется *представлением группы G перестановками* множества Ω. $|\Omega|$ называется степенью $\mathscr{P}$. *Характером* представления $\mathscr{P}$ называется функция $\chi_{\mathscr{P}}: G \to C$ такая, что

$$\chi_{\mathscr{P}}(g) = |\{i \in \Omega | i^{\mathscr{P}(g)} = i\}|$$

($i^{\mathscr{P}(g)}$ — образ i при действии $\mathscr{P}(g)$).

A43. Пусть $\mathscr{P}$ — представление группы G перестановками конечного множества Ω и $\chi = \chi_{\mathscr{P}}$.

1) χ — характер группы G.

2) $(\chi, 1_G)_G = m$, где m — число орбит группы $\mathscr{P}(G)$.

3) Если группа $\mathscr{P}(G)$ транзитивна, то $(\chi^2, 1_G)_G = t$, где t — число орбит группы $\mathscr{P}(G)_i$ при любом $i \in \Omega$ ($\mathscr{P}(G)_i$ — стабилизатор символа i в $\mathscr{P}(G)$).

4) Если группа $\mathscr{P}(G)$ дважды транзитивна, то $\chi = 1_G + \psi$, где $\psi \in \mathrm{Irr}(G) \setminus \{1_G\}$.

[12, теорема 11].

A44. Упражнение. Пусть $G = \{g_1, \ldots, g_n\}$ — группа порядка n. Рассмотрим представление

$$\mathscr{P}: g \mapsto \begin{pmatrix} g_1 & \ldots & g_n \\ g^{-1}g_1g & \ldots & g^{-1}g_ng \end{pmatrix} \quad (g \in G)$$

группы G перестановками множества G. По **A43(1)** $\chi_{\mathscr{P}} = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} a_\chi \chi$, где $a_\chi \in N \cup \{0\}$. Выразить a_χ через значения характера χ. Полученный результат сформулировать как свойство таблицы характеров группы G.

А45. Упражнение. Пусть $H \leqslant G$, $\{Hx_1, \ldots, Hx_n\}$ — множество всех смежных классов G по H и $\{H_1, \ldots, H_m\}$ — множество всех подгрупп, сопряженных с H в G. Показать, что отображения

$$\mathcal{P}: g \mapsto \begin{pmatrix} Hx_1 \ldots Hx_n \\ Hx_1g \ldots Hx_ng \end{pmatrix} \quad (g \in G),$$

$$Q: g \mapsto \begin{pmatrix} H_1 \quad \ldots \quad H_m \\ g^{-1}H_1g \ldots g^{-1}Hg \end{pmatrix} \quad (g \in G)$$

являются представлениями группы G перестановками, причем

$$\chi_{\mathcal{P}}(g) = \frac{|g^G \cap H|\,|C_G(g)|}{|H|}$$

(следовательно, $\chi_{\mathcal{P}} = 1_H^G$) и

$$\chi_Q(g) = \frac{|g^G \cap N_G(H)|\,|C_G(g)|}{|N_G(H)|}.$$

А46. Упражнение. Пусть $\mathcal{P}$ — представление группы G перестановками конечного множества Ω, $g \in G_p$ и p не делит $|\Omega|$. Тогда p не делит $\chi_{\mathcal{P}}(1)$.

А47. Упражнение. Пусть G — конечная группа, в которой все элементы простого порядка p сопряжены, E — некоторая элементарная абелева p-подгруппа в G и $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$. Тогда

1) если $g \in G$ и $o(g) = p$, то $\chi(g) \equiv \chi(1) \pmod{|E|}$;

2) если $\chi \neq 1_G$ и $\chi(1) \leqslant \frac{|E|}{2}$, то G непроста.

Использование представлений перестановками и их характеров при изучении строения групп см., например, в [39 — 41].

§ Б. ИНДУЦИРОВАННЫЕ ХАРАКТЕРЫ

Пусть $H \leqslant G$, $\mathcal{A}$ — представление H над $\mathbf{C}$ и $\xi \in \mathrm{CF}(H)$. Определение индуцированного представления $\mathcal{A}_T^G$ и индуцированной классовой функции ξ^G, а также некоторые их свойства см. в § **1Ж**. Здесь приводятся некоторые результаты из [12] и доказывается ряд новых результатов.

Б1. Закон взаимности Фробениуса. Пусть $H \leqslant G$, $\xi \in \mathrm{CF}(H)$ и $\psi \in \mathrm{CF}(G)$. Тогда

$$(\xi^G, \psi)_G = (\xi, \psi|_H)_H.$$

[12, теорема 15].

Б2. Определение. 1) Подмножество T группы G называется *TI-подмножеством* в G, если $T \cap T^g = \varnothing$ для всех $g \in G \setminus N_G(T)$.

2) Непустое подмножество T группы G называется *исключительным подмножеством* в G, если

а) T есть TI-подмножество в G,

б) для любых двух инволюций a и b группы G из $ab \in T$ следует $ba \in T$.

Б3. Пусть T — TI-подмножество группы G, $H = N_G(T)$ и α, $\beta \in \mathrm{CF}(H)$. Если α и β исчезают на $H \setminus T$, то

1) $\alpha^G(g) = \begin{cases} \alpha(g), & \text{если } g \in T, \\ 0, & \text{если } g \in G \setminus T^G; \end{cases}$

2) $(\alpha^G, \beta^G)_G = (\alpha, \beta)_H$.

[12, теорема 16].

Б4. Формула Судзуки. Пусть T — исключительное подмножество группы G, $H = N_G(T)$ и I — некоторое нормальное подмножество инволюций из G. Тогда для любой $\xi \in \mathrm{CF}(H)|^0_T$

$$\frac{1}{|G|} \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \frac{\chi(\widehat{I})^2}{\chi(1)} (\xi^G, \chi)_G = \frac{1}{|H|} \sum_{\varphi \in \mathrm{Irr}(H)} \frac{\varphi(\widehat{J})^2}{\varphi(1)} (\xi, \varphi)_H,$$

где J — любое нормальное подмножество из H, содержащееся в $I \cap H$ и включающее каждую инволюцию из $I \cap H$, инвертирующую какой-либо элемент из T.

[12, теорема 17].

Б5. Определение. Пусть $T \subseteq H \leqslant G$. T называется *специальным подмножеством в H относительно G*, если

1) $T \trianglelefteq H$;

2) $C_G(t) \subseteq H$ для всех $t \in T$;

3) любые два элемента из T, сопряженные в G, сопряжены в H;

4) из $t \in T$ и $\langle t \rangle = \langle h \rangle$, где $h \in H$, следует, что $h \in T$.

(Совокупность условий 1) — 3) равносильна тому, что T — TI-подмножество в G и $H = N_G(T)$.)

Б6. Метод специальных классов. Пусть $H \leqslant G$ и $T = t_1^H \dot\cup \ldots \dot\cup t_n^H$ — специальное подмножество в H относительно G. Пусть $\mathrm{Irr}(H) = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_s\}$ и $\mathrm{Irr}(G) = \{\chi_1, \ldots, \chi_k\}$.

1) Существует целочисленная $n\times s$-матрица $\mathfrak{a}$ такая, что обобщенные характеры

$$\lambda_i = \sum_{j=1}^{s} \mathfrak{a}_{ij}\varphi_j \quad (i=1, \ldots, n)$$

образуют базу в пространстве $\mathrm{CF}(H)|_T^0 = \{\theta\in \mathrm{CF}(H) \mid \theta|_{H\setminus T} = 0\}$.

2) Существует точно одна $n\times n$ матрица $\mathfrak{c}$ такая, что

$$\varphi_i(t_j) = \sum_{m=1}^{n} \mathfrak{c}_{jm}\mathfrak{a}_{mi} \quad (i\in\{1, \ldots, s\},\ j\in\{1, \ldots, n\}).$$

3) Если $\mathfrak{b}$ — $n\times k$-матрица, определяемая равенствами

$$\lambda_i^G = \sum_{j=1}^{k} \mathfrak{b}_{ij}\chi_j \quad (i=1, \ldots, n),$$

то $\mathfrak{b}$ целочисленна и $\mathfrak{b}\mathfrak{b}^{\mathrm{T}} = \mathfrak{a}\mathfrak{a}^{\mathrm{T}}$. Кроме того, при фиксированной матрице $\mathfrak{a}$ последнее равенство дает лишь конечное число решений для $\mathfrak{b}$ с точностью до вычеркивания или добавления нулевых столбцов.

4) $\chi_i(t_j) = (\mathfrak{c}\mathfrak{b})_{ji}$ $(i\in\{1, \ldots, k\},\ j\in\{1, \ldots, n\})$.
[12, теорема 18].

Б7. Определение. Пусть $H\leqslant G$, $\xi\in \mathrm{CF}(H)$ и $g\in G$.

1) Определим функцию ξ^g из H^g в C, положив

$$\xi^g(h^g) = \xi(h) \text{ для всех } h\in H.$$

Скажем, что функции ξ и ξ^g *G-сопряжены*.

2) Положим

$$G_\xi = \{g\in G \mid \xi^g = \xi\}.$$

Ясно, что $G_\xi \leqslant G$, а если $H \trianglelefteq G$, то $H\leqslant G_\xi$.

Б8. Упражнение. Пусть $H\leqslant G$, $g\in G$ и α, $\beta\in \mathrm{CF}(H)$. Тогда
1) $(\alpha^g, \beta^g)_{H^g} = (\alpha, \beta)_H$;
2) если $H \trianglelefteq G$ и $\psi\in \mathrm{CF}(G)$, то $(\psi|_H, \alpha^g)_H = (\psi|_H, \alpha)_H$.

Б9. Теорема Клиффорда. Пусть $N \trianglelefteq G$, $\chi\in \mathrm{Irr}(G)$ и φ — неприводимая часть характера $\chi|_N$, т. е. $\varphi\in \mathrm{Irr}(\chi|_N)$. Пусть $\{\varphi^g \mid g\in G\} = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_t\}$. Тогда

$$\chi|_N = m\sum_{i=1}^{t}\varphi_i,$$

где $m = (\chi|_N, \varphi)_N$.

Доказательство. По **Б1** $(\varphi^G, \chi)_G = (\varphi, \chi|_N)_N = \overline{m} = m$, так что $\varphi^G = m\chi + \psi$, где ψ — характер G, и

(б1) $$\varphi^G|_N = m\chi|_N + \psi|_N \ (\psi|_N \text{ — характер } N).$$

При $n \in N$ по **1Ж6** (6) имеем $\varphi^G(n) = \frac{1}{|N|}\sum_{g\in G}\varphi'(gng^{-1}) = \frac{1}{|N|}\sum_{g\in G}\varphi^g(n)$, т. е. $|N|\varphi^G|_N = \sum_{g\in G}\varphi^g$. Отсюда и из (б1) следует, что $\chi|_N = \sum_{i=1}^{t}(\chi|_N, \varphi_i)_N\varphi_i$. Но $(\chi|_N, \varphi_i)_N = m$ по **Б8** (2).

□

Б10. Теорема. Пусть $H \trianglelefteq G$ и $\varphi \in \mathrm{Irr}(H)$. Положим

$$A = \{\theta \in \mathrm{Irr}(G_\varphi) \mid \varphi \in \mathrm{Irr}(\theta|_H)\},$$
$$B = \{\chi \in \mathrm{Irr}(G) \mid \varphi \in \mathrm{Irr}(\chi|_H)\}.$$

1) Отображение $\theta \mapsto \theta^G \ (\theta \in A)$ есть биекция A на B.

2) Пусть $G = \dot{\bigcup}_{i=1}^{t} G_\varphi x_i$. Если $\theta \in A$ и $\chi = \theta^G$, то

а) $G_\theta = G_\varphi$ и $\chi|_{G_\varphi} = \sum_{i=1}^{t}\theta^{x_i}$;

б) $\theta|_H = m\varphi$ и $\chi|_H = m\sum_{i=1}^{t}\varphi^{x_i}$ для некоторого $m \in \mathbf{N} \cup \{0\}$.

Доказательство. Пусть $\theta \in A$ и $\chi \in \mathrm{Irr}(\theta^G)$. Тогда по **Б1** $\theta \in \mathrm{Irr}(\chi|_{G_\varphi})$ и, значит, $\chi \in B$. По **Б9** $\chi|_H = m\sum_{i=1}^{t}\varphi^{x_i}$, где $m \in \mathbf{N}$, и (так как φ инвариантен в G_φ) $\theta|_H = k\varphi$, где $k \in \mathbf{N}$. Так как $\theta \in \mathrm{Irr}(\chi|_{G_\varphi})$, то $k \leqslant m$. Но тогда

$$mt\varphi(1) = \chi(1) \leqslant \theta^G(1) = t\theta(1) = tk\varphi(1) \leqslant tm\varphi(1)$$

и, следовательно, $k = m$ и $\chi = \theta^G$.

Таким образом, доказаны следующие утверждения.

(б2) Отображение $\theta \mapsto \theta^G \ (\theta \in A)$ есть отображение A в B.

(б3) Справедливо утверждение б) пункта 2).

Докажем теперь утверждение 2а).

Так как $(\chi|_{G_\theta}, \theta)_{G_\theta} = (\chi, \theta^G)_G = (\chi, \chi)_G = 1$ (по (б2)), то по **Б9** $\chi|_{G_\theta} = \sum_{j=1}^{s}\theta^{y_j}$, где $\{y_1, \ldots, y_s\}$ — полная система вычетов G по G_θ. Так как $G_\varphi \leqslant G_\theta$, то $s \leqslant t$. Следовательно, $\chi(1) = s\theta(1) \leqslant t\theta(1)$. Но по 2б) $\chi(1) = t\theta(1)$. Значит, $s = t$, $G_\varphi = G_\theta$ и верно 2а).

Далее, из 2а) следует, что $\mathrm{Irr}(\chi|_{G_\theta}) \cap A = \{\theta\}$. Поэтому отображение из (б2) взаимно однозначно.

Наконец, пусть $\chi \in B$. Так как $\varphi \in \mathrm{Irr}(\chi|_H)$, то существует $\theta \in \mathrm{Irr}(\chi|_{G_\theta})$ с $\varphi \in \mathrm{Irr}(\theta|_H)$. Следовательно, $\theta \in A$ и $\theta^G = \chi$ по (б2). Этим завершено доказательство пункта 1).

□

Б11. Пусть $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ и $\chi \neq \theta^G$ для любого характера θ любой истинной подгруппы группы G (такой характер χ называется *примитивным* характером).

1) Для любой $N \trianglelefteq G$ χ кратен неприводимому характеру подгруппы N.

2) Если $\mathrm{Ker}\,\chi = 1$, то любая абелева нормальная подгруппа группы G содержится в $Z(G)$.

Доказательство. 1): Непосредственно следует из **Б10**.

2): Пусть $A \trianglelefteq G$ и A — абелева. По 1) $\chi|_A = m\lambda$, где $m \in \mathbf{N}$, и λ — неприводимый и, следовательно, линейный характер A. Поэтому $|\chi(a)| = \chi(1)$ для всех $a \in A$ и по **А30**(2) $A \subseteq Z(G)$.

□

Б12. Определение. 1) Характер χ группы G называется *мономиальным*, если $\chi = \lambda^G$, где λ — линейный характер некоторой (не обязательно истинной) подгруппы группы G.

2) Конечная группа называется *M-группой*, если каждый ее неприводимый характер мономиален.

Б13. Конечная нильпотентная группа является M-группой.

Доказательство. Пусть G — нильпотентная группа, $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ и H — минимальная среди подгрупп $K \leqslant G$ таких, что $\chi = \psi^G$ для некоторого $\psi \in \mathrm{Irr}(K)$. Пусть $\chi = \varphi^G$, $\varphi \in \mathrm{Irr}(H)$. В силу транзитивности индуцирования (**1Ж6**(4)) φ примитивен в смысле **Б11**. Теперь по **Б11**(2) каждая абелева нормальная подгруппа из $H/\mathrm{Ker}\,\varphi = \overline{H}$ содержится в $Z(\overline{H})$. Отсюда и из нильпотентности $\overline{H}$ следует, что $\overline{H}$ — абелева. Поэтому φ линеен и χ мономиален.

□

Б14. Пусть $N \trianglelefteq G$. Положим $\mathrm{CF}(G|N) = \{\xi \in \mathrm{CF}(G) | \xi(ng) = \xi(g)$ для всех $n \in N$ и $g \in G\}$.

1) Существует взаимно однозначное отображение $\xi \mapsto \tilde{\xi}$ из $\mathrm{CF}(G|N)$ на $\mathrm{CF}(G/N)$ такое, что

$$\tilde{\xi}(gN) = \xi(g) \text{ для всех } g \in G.$$

2) Пусть $N \leqslant H \leqslant G$, $\xi \in CF(H|N)$ и $\tilde{\xi}$ — функция из $CF(H/N)$, определенная в 1) (с H на месте G). Тогда

$$\widetilde{\xi}^{G/N} = \widetilde{\xi^G},$$

где $\widetilde{\xi^G}$ определена в 1).

Доказательство. 1): Непосредственно следует из **А34** и **А18**.

2): $\widetilde{\xi}^{G/N}(gN) = \sum_{i=1}^{t} \widetilde{\xi}^{\cdot}((g_iN)(gN)(g_iN)^{-1}) =_{1)} \sum_{i=1}^{t} \xi^{\cdot}(g_igg_i^{-1}) = \xi^G(g) =$

$= \widetilde{\xi^G}(gN)$, где $G = \dot{\bigcup}_{i=1}^{t} Hg_i$ (и, значит, $G/N = \dot{\bigcup}_{i=1}^{t} (H/N)(g_iN)$.

□

Б15. Теорема Макки. Пусть A и B - подгруппы группы G и $\alpha \in CF(A)$. Тогда

$$\alpha^G|_B = \sum_{i=1}^{m} (\alpha^{g_i}|_{A^{g_i} \cap B})^B,$$

где $g_1, \ldots, g_m$ — любая полная система вычетов группы G по двойному модулю (A, B) $\left(\text{т. е. } G = \dot{\bigcup}_{i=1}^{m} Ag_iB\right)$.

Доказательство. Для любой функции θ на какой-либо подгруппе H группы G определим функцию θ' из G в C, положив $\theta'(g) = \theta(g)$ при $g \in H$ и $\theta'(g) = 0$ при $g \in G \setminus H$.

Для каждого $i \in \{1, \ldots, m\}$ рассмотрим разложение B по модулю $A^{g_i} \cap B$: $B = \dot{\bigcup}_{j=1}^{k_i} (A^{g_i} \cap B)\, b_{ij}$. Тогда $G = \dot{\bigcup}_{i=1}^{m} Ag_iB =$ $= \dot{\bigcup}_{i=1}^{m} \dot{\bigcup}_{j=1}^{k_i} Ag_ib_{ij}$ и при $b \in B$ получаем (по определению **1Ж5**)

$$\alpha^G(b) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k_i} \alpha'(g_ib_{ij}bb_{ij}^{-1}g_i^{-1}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k_i} (\alpha')^{g_i}(b_{ij}bb_{ij}^{-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k_i} (\alpha^{g_i})'(b_{ij}bb_{ij}^{-1}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k_i} (\alpha^{g_i})'|_{A^{g_i} \cap B}(b_{ij}bb_{ij}^{-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} (\alpha^{g_i}|_{A^{g_i} \cap B})^B(b).$$

□

Б16. Замечание. Как видно из доказательства, теорема Макки останется верной, если предположить, что $\alpha \in CF(A \to F)$, где F — любое поле. Легко увидеть также, что функция $(\alpha^{g_i}|_{A^{g_i} \cap B})^B$ не зависит от выбора элемента g_i в двойном сложном классе Bg_iB.

Б17. Следствие. Если $G=AB$, где A и B — подгруппы группы G, и $\alpha\in\mathrm{CF}(A)$, то
$$\alpha^G|_B=(\alpha|_{A\cap B})^B.$$
□

Б18. Упражнение. Пусть $G=AB$, где A и B — подгруппы группы G и $A\cap B=1$. Пусть $\alpha\in\mathrm{CF}(A)$ и $\beta\in\mathrm{CF}(B)$. Тогда
$$\sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(G)}(\alpha,\ \chi|_A)_A(\chi|_B,\ \beta)_B=\alpha(1)\beta(1).$$

Б19. Упражнение. Пусть A и B — подгруппы группы G, $\alpha\in\mathrm{CF}(A)$ и $\beta\in\mathrm{CF}(B)$. Тогда
$$(\alpha^G,\ \beta^G)_G=\sum_{i=1}^{m}\left(\alpha^{g_i}\,|_{A^{g_i}\cap B},\ \beta\,|_{A^{g_i}\cap B}\right)_{A^{g_i}\cap B},$$
где $g_1,\ \ldots,\ g_m$ — любая система вычетов G по $(A,\ B)$, т. е. $G=\dot{\bigcup\limits_{i=1}^{m}}Ag_iB$.

§ В. БРАУЭРОВА ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ОБОБЩЁННЫХ ХАРАКТЕРОВ

Цель этого параграфа доказать следующую теорему, принадлежащую Брауэру.

В1. Определение. Группа называется *брауэровой элементарной*, если для некоторого простого числа p она является прямым произведением p-группы и циклической p'-группы.

Заметим, что каждая подгруппа брауэровой элементарной группы сама является брауэровой элементарной.

В2. Теорема. Пусть $\psi\in\mathrm{CF}(G)$. Равносильны условия:

(1) ψ — обобщенный характер G;

(2) $\psi|_E$ — обобщенный характер E для любой брауэровой элементарной подгруппы E группы G;

(3) ψ — $\mathbf{Z}$-линейная комбинация характеров вида λ^G, где λ — линейный характер брауэровой элементарной подгруппы группы G.

Сначала установим несколько вспомогательных результатов.

В3. Пусть A, B и C — множества классовых функций ψ группы G, удовлетворяющих, соответственно, условиям (1), (2) и (3) теоремы **В2**.

1) $C \subseteq A \subseteq B$.

2) Относительно операций поточечного сложения и умножения функций B является кольцом, причем C — идеал в B.

3) Для доказательства теоремы **В2** достаточно показать, что $1_G \in C$.

Доказательство. 1): Очевидно.

2): Ясно, что B — кольцо $((\varphi\psi)|_H = \varphi|_H\psi|_H)$. Пусть $\gamma \in C$ и $\beta \in B$. Тогда $\gamma = \sum_i a_i\lambda_i^G$, где $a_i \in \boldsymbol{Z}$ и λ_i — линейный характер некоторой брауэровой элементарной подгруппы E_i из G. Используя **1Ж7** (5), получаем

(в1) $$\gamma\beta = \sum_i a_i(\lambda_i^G\beta) = \sum_i a_i(\lambda_i\beta|_{E_i})^G.$$

Так как $\beta \in B$, то $\beta|_{E_i} \in \boldsymbol{Z}[\mathrm{Irr}(E_i)]$ и, следовательно, $\lambda_i\beta|_{E_i} \in \boldsymbol{Z}[\mathrm{Irr}(E_i)]$. Так как E_i нильпотентна, то по **Б13** $\lambda_i\beta|_{E_i} = \sum_j b_{ij}\mu_{ij}^{E_i}$, где $b_{ij} \in \boldsymbol{Z}$ и μ_{ij} — линейный характер некоторой брауэровой элементарной подгруппы из E_i. Но тогда $(\lambda_i\beta|_{E_i})^G = \sum_j b_{ij}\mu_{ij}^G$ и вследствие (в1) $\gamma\beta \in C$. Поэтому C — идеал в B.

3): Если $1_G \in C$, то по 2) будет $C = B$ и тогда по 1) $A = B = C$, что равносильно утверждению теоремы **В2**.

□

Таким образом, дальнейшая наша цель — показать, что $1_G \in C$. Потребуется следующий комбинаторный результат.

В4. Пусть M — конечное множество и R — кольцо всех функций из M в $\boldsymbol{Z}$ с поточечными сложением и умножением. Предположим, что для каждого $m \in M$ и каждого простого числа p существует функция f в R такая, что p не делит $f(m)$. Тогда $1_M \in R$, где 1_M — постоянная функция на M со значениями 1.

Доказательство. Для каждого $m \in M$ положим $I_m = \{f(m) | f \in R\}$. Очевидно, I_m — идеал в $\boldsymbol{Z}$. Если $I_m \neq \boldsymbol{Z}$, то $I_m \subseteq p\boldsymbol{Z}$ для некоторого простого числа p, а это противоречит предположению. Следовательно, $I_m = \boldsymbol{Z}$, и значит, существует функция $f_m \in R$ такая, что $f_m(m) = 1$. Но тогда $\prod_{m \in M}(1_M - f_m) = 0$ (нулевая функция). Раскрыв скобки, можно представить 1_M в виде линейной комбинации произведений функций $f_m \in R$, т. е. $1_M \in R$.

□

В5. Определение. Группа H называется *квазиэлементарной*, если существует простое число p такое, что $H = C \rtimes P$, где C — циклическая p'-группа и P — p-группа.

Подгруппы квазиэлементарной группы, очевидно, квазиэлементарны.

В6. Пусть $\mathfrak{H}$ — множество всех квазиэлементарных подгрупп группы G. Тогда

$$1_G = \sum_{K\in\mathfrak{H}} n_K (1_K)^G, \text{ где } n_K \in \mathbf{Z}.$$

Доказательство. Пусть R — множество всех $\mathbf{Z}$-линейных комбинаций характеров вида $(1_K)^G$, где $K\in\mathfrak{H}$. Покажем, что (в2) R — подкольцо в $\mathbf{Z}[\mathrm{Irr}(G)]$.

Пусть H, $K\in\mathfrak{H}$. Достаточно проверить, что $(1_H)^G\cdot(1_K)^G\in R$. Положим $\theta=(1_H)^G$. Тогда $\theta(1_K)^G=(\theta|_K)^G$ по **1Ж7**(5). Но по теореме Макки (**Б15**) $\theta|_K=(1_H)^G|_K=\sum_{i=1}^{s}(1_{K_i})^K$, где $K_1, \ldots, K_s$ — некоторое множество (квазиэлементарных) подгрупп из K. Следовательно, $(1_H)^G(1_K)^G=\sum_{i=1}^{s}(1_{K_i})^G$ и (в2) доказано.

Теперь к кольцу R применим **В4**. Функции из R, очевидно, целочисленны. Далее, пусть $g\in G$ и p — простое число. Положим $H=\langle g_{p'}\rangle \leftthreetimes P$, где P — силовская p-подгруппа из $N\equiv N_G\times\times(\langle g_{p'}\rangle)$. Если $g^x\in H$ для некоторого $x\in G$, то $g^x=(g_p)^x(g_{p'})^x$, откуда $(g_{p'})^x\in\langle g_{p'}\rangle$ и $x\in N$. Значит, $g^G\cap H=g^N\cap H$. Теперь по **А45** $(1_H)^G(g)=\dfrac{|g^G\cap H||C_G(g)|}{|H|}=\dfrac{|g^N\cap H||C_N(g)|}{|H|}=\chi_{\mathcal{P}}(g)$, где $\mathcal{P}$ — представление группы N перестановками множества Ω всех смежных классов N по H. Так как $g_{p'}$ лежит в ядре $\mathcal{P}$, то $\chi_{\mathcal{P}}(g)=\chi_{\mathcal{P}}(g_p)$. Но по **А46** последнее число не делится на p, так как $|\Omega|=|N:H|$ не делится на p. Таким образом, если положить $f=(1_H)^G$, то $f\in R$ и p не делит $f(g)$. Следовательно, по **В4** $1_G\in R$.

□

В7. Пусть $G=C\leftthreetimes P$, C — p'-группа, P — p-группа, $\lambda\in\mathrm{Irr}(C)$, $\lambda(1)=1$, $C_G(P)\subseteq\mathrm{Ker}\,\lambda$ и $G_\lambda=G$. Тогда $\lambda=1_C$.

Доказательство. Пусть $K=\mathrm{Ker}\,\lambda$. По **А34**(1) λ принимает постоянные значения на смежных классах Kx, где $x\in C$, причем в силу линейности λ эти значения различны для различных смежных классов ($\lambda(C)\simeq C/K$). Отсюда и из инвариантности λ относительно P следует, что P нормализует каждый смежный класс Kx, $x\in C$. При действии P сопряжениями на Kx число неинвариантных точек должно делиться на p. Но p не делит $|K|=|Kx|$. Следовательно, $Kx\cap C_G(P)\neq\varnothing$. Но по условию $C_G(P)\subseteq K$. Поэтому $K=Kx$, а значит, $K=C$ и $\lambda=1_C$.

□

Доказательство теоремы В2. Согласно В3 достаточно показать, что $1_G \in C$ в обозначениях из **В3**. Если G — брауэрова элементарная, то это очевидно. Поэтому будем считать, что G не является таковой. Теперь индукция по $|G|$ вследствие транзитивности индуцирования (**1Ж6** (4)) сводит доказательство теоремы к доказательству следующего утверждения.

(в3) $1_G = \sum\limits_{H \in \mathfrak{H}} m_H (1_H)^G$, где $m_H \in \mathbf{Z}$ и $\mathfrak{H}$ — некоторое множество истинных подгрупп группы G.

Если G не является квазиэлементарной, то это так по **В6**. Следовательно, можно предположить, что $G = C \rtimes P$, C — циклическая p'-группа, P — p-группа и $C_C(P) \equiv Z \neq C$.

Положим $E = Z \times P$. Так как $((1_E)^G, 1_G)_G = (1_E, 1_E)_E = 1$, то $(1_E)^G = 1_G + \omega$, где ω — характер G. Так как $G = CE$ и $C \cap E = Z$, то по **Б17**

$$1_C + \omega|_C = (1_E)^G|_C = (1_Z)^C,$$

откуда

$$1 = ((1_Z)^C, 1_C)_C = (1_C + \omega|_C, 1_C)_C$$

и, значит, $(\omega|_C, 1_C) = 0$.

Пусть $\chi \in \operatorname{Irr}(\omega)$ и $\lambda \in \operatorname{Irr}(\chi|_C)$. Из предыдущего равенства следует, что $\lambda \neq 1_C$. Далее, так как $Z \trianglelefteq G$ и, следовательно, $Z \subseteq \operatorname{Ker}((1_E)^G)$, то $Z \subseteq \operatorname{Ker}\chi$. Но тогда $Z (= C_C(P)) \subseteq \operatorname{Ker}\lambda$ и по **В7** λ неинвариантен в G, т. е. $G_\lambda < G$. По **Б10** существует $\theta \in \operatorname{Irr}(G_\lambda)$ ($c\lambda \in \operatorname{Irr}(\theta|_E)$) такой, что $\chi = \theta^G$. Поэтому $1_G = (1_E)^G - \omega$ имеет требуемый в (в3) вид.

□

§ Г. ТЕОРЕМА БРАУЭРА — ДЭЙДА О НОРМАЛЬНОМ ДОПОЛНЕНИИ

Пусть $H_0 \trianglelefteq H \leqslant G$. Фактор-группу H/H_0 называют обычно *секцией* группы G, а нормальную подгруппу N группы G со свойством $G = NH$ и $N \cap H = H_0$ — *нормальным дополнением секции* H/H_0 в G.

Следующая теорема получена Дэйдом [64] и является усилением раннего результата Брауэра.

В доказательстве ее существенно используется брауэрова характеризация обобщенных характеров (теорема **В2**).

Г1. Теорема. Пусть $H_0 \trianglelefteq H \leqslant G$, $\pi = \pi(H/H_0)$ и выполнены следующие условия:

1) $h_1, h_2 \in H$ и $(h_1)^G = (h_2)^G \Rightarrow (h_1 H_0)^{H/H_0} = (h_2 H_0)^{H/H_0}$;

2) любая брауэрова элементарная π-подгруппа из G сопряжена в G с подгруппой из H.

Тогда существует единственная нормальная подгруппа N группы G такая, что

$$G = HN \text{ и } H \cap N = H_0,$$

а именно, $N = \{g \in G \mid g_\pi \in H_0^G\}$.

Доказательство. Для любого элемента или подмножества S группы H через $\widetilde{S}$ будем обозначать образ S при естественном гомоморфизме H на $H/H_0(=\widetilde{H})$. Зафиксируем элементы $h_1, \ldots h_n$ в H такие, что $\mathrm{Cl}(\widetilde{H})=\dot{}\{\widetilde{h}_1^{\widetilde{H}}, \ldots, \widetilde{h}_n^{\widetilde{H}}\}$ и $h_1=1$, и положим

$K_i=h_i^H H_0$ (полный образ $\widetilde{h}_i^{\widetilde{H}}$ в H),

$K_i^*=\{g\in G|g_\pi\in K_i^G\}$ $(i=1, \ldots, n)$.

Очевидно,

(г1) $$H=\dot{\bigcup_{i=1}^{n}} K_i$$

и вследствие условия 1) (по которому $h^G\cap H\subseteq h^H H_0$ при $h\in H$)

(г2) $$K_i^*\cap H=K_i.$$

По условию 2) каждый π-элемент из G сопряжен с некоторым элементом из H. Отсюда и из (г1), (г2) следует, что

(г3) $$G=\dot{\bigcup_{i=1}^{n}} K_i^*.$$

Далее, пусть

$$\mathrm{Irr}(H|H_0)=\dot{}\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}.$$

Тогда по **А34**

$$\mathrm{Irr}(\widetilde{H})=\dot{}\{\widetilde{\varphi}_1, \ldots, \widetilde{\varphi}_n\},$$

где $\widetilde{\varphi}_i(\widetilde{h})=\varphi_i(h)$ для всех $h\in H$ $(i=1, \ldots, n)$. Для каждого $i\in\in\{1, \ldots, n\}$ определим классовую функцию φ_i^* группы G, положив

(г4) $$\varphi_i^*(g)=\varphi_i(h_j)\,(=\widetilde{\varphi}_i(\widetilde{h}_j)) \text{ при } g\in K_j^*$$

(определение корректно ввиду (г3)). Тогда при $i\in\{1, \ldots, n\}$

(г5) $$\varphi_i^*(g)=\varphi_i^*(g_\pi) \text{ для всех } g\in G$$

(по определению K_i^*) и

(г6) $$\varphi_i^*|_H=\varphi_i$$

(по (г1) — (г3)).

Покажем теперь, что

(г7) φ_i^* — обобщенный характер G $(i=1, \ldots, n)$.

Пусть E — произвольная брауэрова элементарная подгруппа группы G, $E=P\times Q$, где P — π-группа и Q — π'-группа. По теореме **В2** для доказательства (г7) достаточно показать, что $\varphi_i^*|_E$ есть обобщенный характер E. Вследствие (г5) $\varphi_i^*|_E=\varphi_i^*|_P\times 1_Q$ в обозначениях из **А38**. Следовательно (по **А38**), достаточно показать, что $\varphi_i^*|_P$ — обобщенный характер P. По условию 2) P сопряжена с подгруппой из H. Так как φ_i^* — классовая функция, то без ограничения общности можно считать, что $P \leqslant H$. Но тогда по (г6) $\varphi_i^*|_P = \varphi_i|_P$, а $\varphi_i|_P$ — характер P. Утверждение (г7) доказано.

Определим еще n классовых функций группы G:

(г8) $$\psi_i = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(h_i)\,\varphi_j^* \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Из (г4) и соотношений ортогональности для $\widetilde{H}$ получаем

$$\psi_i(g) = \begin{cases} |C_{\widetilde{H}}(\widetilde{h}_i)|, & \text{если } g \in K_i^*, \\ 0, & \text{если } g \in G \setminus K_i^*. \end{cases}$$

Отсюда

$$(\psi_i, 1_G)_G = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\psi_i(g) = \frac{|C_{\widetilde{H}}(\widetilde{h}_i)|\,|K_i^*|}{|G|} =$$

$$= \frac{|K_i^*|}{|G:H|\,|H_0|\,|\widetilde{h}_i^{\widetilde{H}}|}.$$

Так как $(\psi_i, 1_G)_G \in \hat{Z}$ вследствие (г7) и (г8), то по **А6** (3) в правой части записанной выше цепочки равенств стоит целое число. Так как $|K_i^*| \neq 0$ по (2), то $|G:H|\,|H_0|\,|\widetilde{h}_i^{\widetilde{H}}| \leqslant |K_i^*|$ $(i = 1, \ldots, n)$. На самом деле здесь должно быть равенство, так как просуммировав по $i \in \{1, \ldots, n\}$ левую и правую части, получим одно и то же значение $|G|$. Итак,

(г9) $$|K_i^*| = |G:H|\,|H_0|\,|\widetilde{h}_i^{\widetilde{H}}| \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Теперь получаем

$$(\varphi_i^*, \varphi_i^*)_G = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|\varphi_i^*(g)|^2 = \frac{1}{|G|}\sum_{j=1}^{n}|K_j^*|\,|\widetilde{\varphi}_i(\widetilde{h}_j)|^2;$$

$$\{(г3),\ (г4)\} = \frac{|G:H|\,|H_0|}{|G|}\sum_{j=1}^{n}|\widetilde{h}_j^{\widetilde{H}}|\,|\widetilde{\varphi}_i(\widetilde{h}_j)|^2 \ \{(9)\} =$$

$$= \frac{1}{|\widetilde{H}|}\sum_{x\in\widetilde{H}}|\widetilde{\varphi}_i(x)|^2 = (\widetilde{\varphi}_i, \widetilde{\varphi}_i)_{\widetilde{H}} = 1.$$

Отсюда, из (г6) и из $\varphi_i^*(1) = \varphi_i(1) > 0$ следует, что

$$\varphi_i^* \in \mathrm{Irr}(G) \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Следовательно (**А30** (1)), $\mathrm{Ker}(\varphi_i^*) = \{g \in G \mid \varphi_i^*(g) = \varphi_i^*(1)\} \trianglelefteq G$. По (г4) $\mathrm{Ker}(\varphi_i^*) = \{g \in G \mid g_\pi \in \mathrm{Ker}(\varphi_i)^G\}$, а по **А34** (2) $\bigcap_{i=1}^{n}\mathrm{Ker}(\varphi_i) = H_0 = K_1$.

Следовательно, $\bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Ker}(\varphi_i^*) = K_1^*$. Таким образом, $N \equiv K_1^* \trianglelefteq G$ и по (г2) $N \cap H = H_0$. Кроме того, по (г9) $|N| = |K_1^*| = |G:H||H_0|$, откуда

$$|HN| = \frac{|H||N|}{|H \cap N|} = \frac{|H||G:H||H_0|}{|H_0|} = |G|$$

и, значит, $HN = G$. Итак,

$$N = \{g \in G \mid g_\pi \in H_0^G\} \trianglelefteq G, \quad G = HN \text{ и } H \cap N = H_0.$$

Пусть M — любая нормальная подгруппа G такая, что $G = HM$ и $H \cap M = H_0$. Эти условия однозначно определяют $|M|$. Поэтому $|M| = |N|$. Но $N \subseteq M$ $(g \in N \Rightarrow g_\pi \in H_0^G \subseteq M$ и $g_{\pi'} \in G_{\pi'} \subseteq M)$. Следовательно, $M = N$.

□

§ Д. ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ФРОБЕНИУСА — ВИЛАНДА

В этом параграфе дается некоторый способ отыскивания нормальных подгрупп конечной группы, основанный на рассмотрении ее TI-подмножеств. Напомним, что TI-подмножеством группы G называется ее подмножество T такое, что $T \cap T^g = \varnothing$ для всех $g \in G \setminus N_G(T)$. Главным результатом здесь является следующая теорема из [3], обобщающая, в частности, теоремы Фробениуса и Виланда (см. **Д2** и [**36**, теоремы (35.5) и (35.12)]).

Д1. Теорема. Пусть T — TI-подмножество конечной группы G и $H = N_G(T)$. Тогда G имеет точно одну нормальную подгруппу N такую, что

$G = HN$ и $H \cap N = \langle H \setminus T \rangle$.

При этом $N = G \setminus (H \setminus \langle H \setminus T \rangle)^G$.

Доказательство. Если $\langle H \setminus T \rangle = H$, то заключение теоремы выполнено при $N = G$.

Предположим, что $\langle H \setminus T \rangle < H$, и рассмотрим произвольный неглавный неприводимый характер φ группы H, содержащий $\langle H \setminus T \rangle$ в своем ядре. Положим

$$\theta = n 1_H - \varphi,$$

где $n = \varphi(1)$. Так как θ исчезает на $H \setminus T$, то по **Б3**

(д1) $$\theta^G(g) = \begin{cases} \varphi(1) - \varphi(d), \text{ если } g \in t^G, \ t \in T, \\ 0, \text{ если } g \in G \setminus T^G; \end{cases}$$

(д2) $$(\theta^G, \theta^G)_G = n^2 + 1.$$

Кроме того, по закону взаимности Фробениуса (Б1)

(д3) $$(\theta^G,\ 1_G)_G = (\theta,\ 1_H)_H = n,$$

т. е. θ^G содержит характер 1_G с кратностью n. Из (д2), (д3) и равенства $\theta^G(1) = 0$ (которое получается из (Д1)) следует, что

$$\theta^G = n1_G - \chi,$$

где χ — неглавный неприводимый характер группы G. Отсюда и из (д1) получаем

$$\chi(g) = \varphi(1) - \theta^G(g) = \begin{cases} \varphi(t), & \text{если } g \in t^G,\ t \in T, \\ \varphi(1), & \text{если } g \in G \setminus T^G. \end{cases}$$

Поэтому $\operatorname{Ker}\chi =_{\text{A30 (1)}} \{g \in G \mid \chi(g) = \chi(1)\} = (G \setminus T^G) \cup (T \cap \operatorname{Ker}\varphi)^G \equiv N_\varphi \trianglelefteq G$.

Положим

$$N = \bigcap_{\varphi \in \Phi} N_\varphi,$$

где Φ — множество всех неглавных неприводимых характеров группы H, содержащих $\langle H \setminus T \rangle$ в своем ядре. Тогда $N \trianglelefteq G$. Далее, учитывая, что T — TI-подмножество в G такое, что $\bigcap_{\varphi \in \Phi} \operatorname{Ker}\varphi = \langle H \setminus T \rangle$ и $T = (H \setminus \langle H \setminus T \rangle) \cup (T \cap \langle H \setminus T \rangle)$, имеем $N = (G \setminus T^G) \cup \bigcap_{\varphi \in \Phi} (T \cap \operatorname{Ker}\varphi)^G = (G \setminus T^G) \cup (T \cap \langle H \setminus T \rangle)^G = G \setminus (H \setminus \langle H \setminus T \rangle)^G$.

Поэтому $H \cap N \subseteq \langle H \setminus T \rangle$ и

$$|HN| = \frac{|H|\,|N|}{|H \cap N|} = \frac{|H|\,(|G| - |H \setminus \langle H \setminus T \rangle|)\,|G:H|}{|H \cap N|} =$$

$$= |G| \frac{|\langle H \setminus T \rangle|}{|H \cap N|} \geqslant |G|.$$

Отсюда

(д4) $$G = HN \text{ и } H \cap N = \langle H \setminus T \rangle.$$

Остается показать единственность нормальной подгруппы N с условиями (д4). Пусть $N_1 \trianglelefteq G$, $G = HN_1$ и $H \cap N_1 = \langle H \setminus T \rangle$. Тогда $N_1 \cap (H \setminus \langle H \setminus T \rangle)^G = \varnothing$ и поэтому $N_1 \subseteq N$. Но теперь $N = N \cap HN_1 = (N \cap H) N_1 = \langle H \setminus T \rangle N_1 = N_1$.

□

Приведем несколько следствий доказанного результата.

Теорема Д1 дает нетривиальный результат лишь в случае, когда $\langle H \setminus T \rangle \neq H$, т. е. когда T — «достаточно большое» подмножество в H. Случай самого большого T $(T = H \setminus \{1\})$ приводит к следующему классическому результату.

Д2. Теорема Фробениуса. Пусть $H \leqslant G$ и $H \cap H^g = 1$ для всех $g \in G \setminus H$. Тогда G имеет точно одну нормальную подгруппу N такую, что $G = H \leftthreetimes N$. Более того, $N = G \setminus (H \setminus 1)^G$.

Доказательство. Положим $T = H \setminus \{1\}$. Тогда T — TI-подмножество в G, $N_G(T) = H$ и результат следует из **Д1**.

□

Д3. Теорема. Пусть $H_0 \trianglelefteq H \leqslant G$ и

$$H \cap H^g \subseteq H_0 \cup H_0^g \text{ для всех } g \in G \setminus H.$$

Тогда G имеет точно одну нормальную подгруппу N такую, что $G = HN$ и $H \cap N = H_0$. При этом $N = G \setminus (H \setminus H_0)$.

Доказательство. Следует из **Д1** при $T = H \setminus H_0$ (легко заметить, что T — TI-подмножество в G и $N_G(T) = H$).

□

Отсюда вытекает известная теорема Виланда (см. [12, теорема 13] или [36, (35.5)]), условие которой содержит более сильное требование: $H \cap H^g \subseteq H_0$ для всех $g \in G \setminus H$.

Как уже отмечалось, для использования теоремы **Д1** необходимо найти такое TI-подмножество T в G, что $\langle N_G(T) \setminus T \rangle \neq N_G(T)$. В связи с этим представляют интерес утверждения, позволяющие по данному TI-подмножеству T построить некоторое б о л ь ш е е TI-подмножество T_1, для которого, однако, $N_G(T_1) = N_G(T)$.

Д4. Пусть T — TI-подмножество группы G и f — отображение G в G такое, что $f(x^y) = f(x)^y$ для всех x и y из G. Если T_1 — нормальное подмножество в $N_G(T)$ такое, что $f(T_1) = T$, то T_1 — TI-подмножество в G и $N_G(T_1) = N_G(T)$.

Доказательство. Если $T_1 \cap T_1^g \neq \varnothing$, то существуют элементы a и b в T_1 такие, что $a = b^g$. Но тогда $f(a) = f(b^g) = f(b)^g \in T \cap T^g$, откуда $g \in N_G(T)$ и $T_1 \cap T_1^g = T_1$. Поэтому T_1 — TI-подмножество в G и $N_G(T_1) = N_G(T)$.

□

Д5. Теорема. Пусть T — TI-подмножество конечной группы G, $H = N_G(T)$, $H_0 \trianglelefteq H$ и $\pi = \pi(H/H_0)$. Если каждый π-элемент из $H \setminus H_0$ содержится в T, то G имеет точно одну нормальную подгруппу N со свойствами $G = \langle T \rangle N$ и $\langle T \rangle \cap N = \langle T \rangle \cap H_0$. При этом $N = G \setminus (H \setminus H_0)^G$.

Доказательство. Пусть f — отображение G в G, сопоставляющее каждому элементу g из G его π-часть g_π. Очевидно, $f(x^y)=f(x)^y$ для любых $x, y \in G$. Так как $f(H\setminus H_0)=(H\setminus H_0)_\pi$ является, как легко увидеть, TI-подмножеством в G и $N_G((H\setminus H_0)_\pi)=H$, то по **Д4** $H\setminus H_0$ — TI-подмножество в G и $N_G(H\setminus H_0)=H$. По теореме **Д1** $N \doteq G\setminus(H\setminus H_0)^G \trianglelefteq G$, $G=HN$ и $H\cap N=H_0$. Отсюда и из $H=(T\cup\{1\})H_0=\langle T\rangle H_0$ следует, что $G=\langle T\rangle N$ и

$$\langle T\rangle \cap N=\langle T\rangle\cap(H\cap N)=\langle T\rangle\cap H_0.$$

Пусть теперь $N_1 \trianglelefteq G$, $G=\langle T\rangle N_1$ и $\langle T\rangle\cap N_1=\langle T\rangle\cap H_0$. Если $h\in(H\setminus H_0)\cap N_1$, то $h_\pi\in T\cap\langle h\rangle\subseteq\langle T\rangle\cap N_1\subseteq H_0$, откуда $h=h_\pi h_{\pi'}\in H_0O^\pi(H)=H_0$. Поэтому $(H\setminus H_0)\cap N_1=\varnothing$ и, следовательно, $N_1\subseteq G\setminus(H\setminus H_0)^G=N$. Теперь

$$N=N\cap\langle T\rangle N_1=(N\cap\langle T\rangle)N_1=(H_0\cap\langle T\rangle)N_1=N_1.$$

□

Отсюда вытекает другая теорема Виланда [36, теорема (35.12)] (в ней допускается возможность $N_G(H)>H$):

> **Д6. Теорема.** Пусть $H_0 \trianglelefteq H\leqslant G$, $(|N_G(H):H|, |H:H_0|)=1$ и $H\cap H^g=1$ для всех $g\in G\setminus N_G(H)$. Предположим, что
>
> $$H_0\leqslant H_1\trianglelefteq N_G(H) \text{ и } |N_G(H)/H_1|=|H/H_0|.$$
>
> Тогда существует точно одна нормальная подгруппа N в G такая, что
>
> $$G=HN \text{ и } H\cap N=H_0.$$
>
> Более того, $N=G\setminus(N_G(H)\setminus H_1)^G$.

Доказательство. Вытекает из **Д5**, так как множества $H\setminus H_0$, $N_G(H)$ и H_1 удовлетворяют условию теоремы **Д5** на месте T, H и H_0 соответственно.

□

Д7. Обозначения. Если $a\in G$ и $A\subseteq G$, то положим

$$\sqrt[G]{a}=\{g\in G\mid a\in\langle g\rangle\}$$

$$\sqrt[G]{A}=\bigcup_{a\in A}\sqrt[G]{a}.$$

Д8. Пусть T — TI-подмножество группы G такое, что

1) все элементы из T имеют один и тот же порядок m;

2) из $t\in T$ следует $t^n\in T$ при любом целом n, взаимно простом с m.

Тогда $\sqrt[G]{T}$ — TI-подмножество в G и $N_G\left(\sqrt[G]{T}\right)=N_G(T)$.

Доказательство. Так как T — TI-подмножество в G, то $\sqrt[G]{t} \subseteq \subseteq C_G(t) \subseteq N_G(T)$ для любого $t \in T$ и поэтому $\sqrt[G]{T} \subseteq N_G(T)$. Теперь легко заметить, что $\sqrt[G]{T}$ — нормальное подмножество в $N_G(T)$.

Пусть $\sqrt[G]{T} \cap \left(\sqrt[G]{T}\right)^g \neq \varnothing$. Тогда существуют элементы a и b в $\sqrt[G]{T}$ такие, что $a = b^g$ и, следовательно, $\langle a \rangle = \langle b \rangle^g$. По определению $\sqrt[G]{T}$ существуют элементы t_1 и t_2 в T такие, что $\langle t_1 \rangle \leqslant \langle a \rangle$ и $\langle t_2 \rangle \leqslant \langle b \rangle$. Так как по 1) $|\langle t_1 \rangle| = |\langle t_2 \rangle|$, то из $\langle a \rangle = \langle b \rangle^g$ следует, что $\langle t_1 \rangle = \langle t_2 \rangle^g$, откуда $t_1 = (t_2^n)^g$, где $n \in N$ и $(n, m) = 1$. По условию 2) $t_2^n \in \in T$. Теперь $t_1 \in T \cap T^g$ и, значит, $g \in N_G(T)$. Отсюда следует требуемое заключение.

□

Д9. Пусть a — элемент простого порядка p конечной группы G и P — силовская p-подгруппа из $N_G(\langle a \rangle)$. Тогда G имеет нормальную подгруппу N такую, что

$$G = N_G(\langle a \rangle) N \text{ и } N_G(\langle a \rangle) \cap N = O^p(N_G(\langle a \rangle)) \left\langle P \setminus \sqrt[P]{a} \right\rangle.$$

В частности, если $N_G(\langle a \rangle)$ p'-замкнут, то

$$G = PN \text{ и } P \cap N = \left\langle P \setminus \sqrt[P]{a} \right\rangle.$$

Доказательство. Подмножество $\langle a \rangle \setminus \{1\}$ удовлетворяет условию утверждения **Д8** на месте T. Поэтому $\sqrt[G]{\langle a \rangle \setminus \{1\}} = \sqrt[G]{a}$ — TI-подмножество в G и $N_G\left(\sqrt[G]{a}\right) = N_G(\langle a \rangle)$. По теореме **Д1** G имеет нормальную подгруппу N такую, что $G = N_G(\langle a \rangle) N$ и $N_G(\langle a \rangle) \cap N = \left\langle N_G(\langle a \rangle) \setminus \sqrt[G]{a} \right\rangle$. Но, как нетрудно заметить, последняя подгруппа совпадает с $O^p(N_G(\langle a \rangle)) \left\langle P \setminus \sqrt[P]{a} \right\rangle$.

□

Д10. В связи с **Д9** было бы интересно изучить строение конечных p-групп P, имеющих в своем центре элемент z порядка p такой, что $\left\langle P \setminus \sqrt[P]{z} \right\rangle \neq P$. Такими группами, например, являются p-группы с циклической подгруппой индекса p, за исключением нециклических групп порядка p^2 и групп диэдра; прямое произведение циклической группы порядка p^n и p-группы периода меньшего, чем p^n; 2-группы вида $A \langle b \rangle$, где $|\langle b \rangle| = 2^n > > 2$ и $a^b = a^{-1}$ для всех $a \in A$; прямое произведение любой p-группы, указанной выше и имеющей порядок, больший p, и элементарной абелевой p-группы.

Пусть T — TI-подмножество группы G и $H=N_G(T)$. При доказательстве теоремы **Д1** мы рассматривали эту ситуацию при условии, что $\langle H\setminus T\rangle$ — истинная нормальная подгруппа в H или, что равносильно, H имеет исчезающий на $H\setminus T$ обобщенный характер вида

$$\theta=n1_G-\varphi,$$

где $n\in N$ и $\varphi\in\operatorname{Irr}(H)\,(\varphi\neq 1_G)$.

Здесь будет рассмотрена похожая ситуация, но с обобщенным характером θ несколько более общего вида. Основной результат — теорема **Б1** [3, теорема 2]. Она может быть использована для получения как признаков непростоты, так и утверждений о сопряженности инволюций в простой группе. Частный случай ее ($n=1$) встречался в [12] под названием леммы о сопряженности инволюций.

Напомним, что исключительное подмножество группы G — это ее TI-подмножество T такое, что для любых двух инволюций a и b группы G из $ab\in T$ следует $ba\,(=(ab)^{-1})\in T$.

Е1. Теорема. Пусть G — конечная группа, T — ее исключительное подмножество и $H=N_G(T)$. Предположим, что существуют различные неприводимые характеры φ_1 и φ_2 группы H, натуральное число n и числа ε_1 и ε_2, равные ± 1, такие, что обобщенный характер

$$\theta=n1_G+\varepsilon_1\varphi_1+\varepsilon_2\varphi_2$$

исчезает на $H\setminus T$. Тогда G имеет истинную (т. е. отличную от G) нормальную подгруппу

$$N=\langle I\setminus I_0^G\rangle,$$

где I — множество всех инволюций группы G, а I_0 — множество всех инволюций из H, инвертирующих по крайней мере один элемент из T.

Заметим, что равенство $N=1$ равносильно утверждению, что каждая инволюция группы G сопряжена с некоторой инволюцией из I_0.

Для доказательства теоремы Е1 потребуется следующее утверждение. (Оно используется также в § 7В.)

Е2. Пусть T — TI-подмножество конечной группы G, $1\notin T$ и $H=N_G(T)$ имеет исчезающий на $H\setminus T$ обобщенный характер θ вида, указанного в теореме **Е1**. Тогда

1) $\theta^G=n1_G+\delta_1\chi_1+\delta_2\chi_2$, где χ_1, χ_2 — различные неприводимые характеры группы G и δ_1, $\delta_2\in\{1,\ -1\}$, причем χ_1 и χ_2 — оба неглавные, если φ_1 и φ_2 — оба неглавные;

2) если C_1 и C_2 — классы сопряженных элементов группы G (может быть совпадающие), лежащие в $G \setminus T^G$, и если

$$C_1 C_2 \cap T = \varnothing,$$

то по крайней мере одна из подгрупп $\langle C_1 \rangle$ и $\langle C_2 \rangle$ содержится в $\operatorname{Ker} \chi_1 \cap \operatorname{Ker} \chi_2$ и, в частности, отлична от G.

Доказательство. По условию, $\theta = n1_H + \varepsilon_1\varphi_1 + \varepsilon_2\varphi_2$. Если один из характеров φ_1 и φ_2 совпадает с 1_H, то оба утверждения леммы следуют из доказательства теоремы **Д1** (в этом случае один из характеров χ_1 и χ_2 — главный, а в ядре другого содержится $\langle G \setminus T^G \rangle$). Пусть φ_1 и φ_2 оба отличны от 1_H. По **Б3** (2) $(\theta^G, \theta^G)_G = (\theta, \theta)_H = n^2 + 2$, а по закону взаимности Фробениуса (**Б1**) $(\theta^G, 1_G)_G = n$. Из этих равенств вытекает утверждение 1).

Пусть C_1 и C_2 — классы сопряженных элементов группы G, лежащие в $G \setminus T^G$ и такие, что $C_1C_2 \cap T = \varnothing$. Тогда число $\rho_{C_1, C_2} \times \times (g)$ всех различных пар (c_1, c_2) таких, что $c_1 \in C_1$, $c_2 \in C_2$ и $c_1c_2 = g$ $(g \in G)$, равно нулю при всех g из T^G. Но из **А26** следует, что

$$\rho_{C_1, C_2}(g) = \frac{|C_1||C_2|}{|G|} \sum_{\chi \in \operatorname{Irr}(G)} \frac{\chi(c_1)\chi(c_2)}{\chi(1)} \overline{\chi(g)},$$

где $c_1 \in C_1$ и $c_2 \in C_2$. Поэтому классовая функция

(e1) $$\mu = \sum_{\chi \in \operatorname{Irr}(G)} \frac{\overline{\chi(c_1)}\,\overline{\chi(c_2)}}{\chi(1)} \chi$$

исчезает на множестве T^G. Но по **Б3** (1) обобщенный характер θ^G исчезает на $G \setminus T^G$. Следовательно, по определению скалярного произведения,

(e2) $$(\theta^G, \mu)_G = 0.$$

Отсюда ввиду (e1) и пункта 1) получаем

(e3) $$n + \frac{\chi_1(c_1)\chi_1(c_2)}{\chi_1(1)} \delta_1 + \frac{\chi_2(c_1)\chi_2(c_2)}{\chi_2(1)} \delta_2 = 0.$$

Так как $\{1, c_1, c_2\} \subseteq G \setminus T^G$, то по **Б3** (1) $\theta^G(1) = \theta^G(c_1) = \theta^G(c_2) = 0$, т. е.

(e4) $$\begin{cases} n + \delta_1\chi_1(1) + \delta_2\chi_2(1) = 0, \\ n + \delta_1\chi_1(c_1) + \delta_2\chi_2(c_1) = 0, \\ n + \delta_1\chi_1(c_2) + \delta_2\chi_2(c_2) = 0. \end{cases}$$

Из равенств (e3) и (e4) выводим

$$n + \frac{\chi_1(c_1)\chi_1(c_2)}{\chi_1(1)} \delta_1 - \frac{(n+\delta_1\chi_1(c_1))(n+\delta_1\chi_1(c_2))}{n+\delta_1\chi_1(1)} = 0$$

и после преобразований

$$\frac{n\delta_1(\chi_1(1)-\chi_1(c_1))(\chi_1(1)-\chi_1(c_2))}{\chi_1(1)(n+\delta_1\chi_1(1))}=0.$$

Поэтому либо $\chi_1(c_1)=\chi_1(1)$, либо $\chi_1(c_2)=\chi_1(1)$, а это означает, что либо C_1, либо C_2 содержится в $\operatorname{Ker}\chi_1$. Пусть $C_i\subseteq\operatorname{Ker}\chi_1$ ($i\in\{1, 2\}$). Тогда из равенств (е4) следует, что $C_i\subseteq\operatorname{Ker}\chi_2$. Следовательно, C_i, а значит, и $\langle C_i\rangle$ содержится в $\operatorname{Ker}\chi_1\cap\operatorname{Ker}\chi_2$.

□

Доказательство теоремы Е1. Если $I\setminus I_0^G$ пусто, то $N=1<G$, как и требуется.

Предположим, что $I\setminus I_0^G$ непусто. Обозначим через C некоторый класс сопряженных элементов группы G, содержащийся в $I\setminus I_0^G$.

Заметим, что если некоторый элемент t из T представляется в виде $t=ab$, где a и b — инволюции из G, то обе эти инволюции содержатся в I_0. Действительно, тогда $t^a=ba$ принадлежит T по определению исключительного подмножества. Следовательно, $t^a\in T\cap T^a$, а так как T — TI-подмножество в G, то $a\in N_G(T)=H$. Так как, кроме того, $t^a=ba=t^{-1}$, то $a\in I_0$. Подобно, $t^b=ba=t^{-1}$ и $b\in I_0$.

Из этого замечания и из того, что $C\cap I_0=\varnothing$, следует, что

$$CC\cap T=\varnothing.$$

Далее, $C\subseteq G\setminus T^G$, так как, если $c\in C$ и $c\in t^G$, где $t\in T$, то $t^t=t^{-1}$, $t\in I_0$ и $c\in I_0^G$, что невозможно. Наконец, $1\notin T$, поскольку иначе $H=G$ и $I=I_0$. Теперь по **Е2 (2)** $C\subseteq\operatorname{Ker}\chi_1\cap\operatorname{Ker}\chi_2=K$. Так как C — произвольный класс сопряженных элементов из $I\setminus I_0^G$, то $\langle I\setminus I_0^G\rangle\subseteq K$, а так как χ_1 или χ_2 — неглавный характер, то $K\neq G$.

□

Е3. Замечание. Предположение, содержащееся во втором предложении теоремы **Е1**, очевидно, будет выполнено, если T является объединением нескольких смежных классов группы H по некоторой ее нормальной подгруппе K и H/K имеет различные неприводимые характеры $\tilde{\varphi}_1$ и $\tilde{\varphi}_2$ такие, что обобщенный характер $\tilde{\theta}=n1_{H/K}+\varepsilon_1\tilde{\varphi}_1+\varepsilon_2\tilde{\varphi}_2$ исчезает на $(H\setminus T)/K$ (при этом связь между φ_i и $\tilde{\varphi}_i$ такова: $\varphi_i(h)=\tilde{\varphi}_i(hK)$ при любом $h\in H$).

Е4. Замечание. Одним из примеров групп, которые могут выступать в роли H в теореме **Е1**, является группа диэдра $\tilde{H}=\langle c\rangle\rtimes\langle a\rangle$ порядка >4 ($o(a)=2$, $c^a=c^{-1}$). Если $\tilde{\varphi}_1$ — неприводимый характер $\tilde{H}$ с ядром $\langle c\rangle$ и $\tilde{\varphi}_2$ — любой неприводимый характер $\tilde{H}$ степени 2, то, как легко проверить, обобщенный характер $1_{\tilde{H}} + \tilde{\varphi}_2 - \tilde{\varphi}_3$ исчезает на $\tilde{H} \setminus (\langle c \rangle \setminus \{1\})$.

Из теоремы E1 и замечаний E3 и E4 непосредственно вытекает следующее утверждение.

E5. Пусть G — конечная группа, $H \leqslant G$ и K — нормальная подгруппа из H такая, что

1) H/K — группа диэдра порядка > 4 (обозначим через C/K — ее единственную циклическую подгруппу индекса 2),

2) $C \setminus K$ является TI-подмножеством в G и $N_G(C \setminus K) = H$.

Тогда $\langle I \setminus I_0^G \rangle \lhd G$, где I — множество всех инволюций из G, а I_0 — множество всех инволюций из H, инвертирующих по крайней мере один элемент из $C \setminus K$.

□

Утверждение E5 позволяет дать простое доказательство известной теоремы Брауэра и Судзуки о непростоте конечной группы с обобщенно кватернионной силовской 2-подгруппой S [12, теорема 21] для случая, когда $|S| > 8$.

E6. Если силовская 2-подгруппа S конечной группы G является обобщенной группой кватернионов порядка, большего 8, то группа G непроста.

Доказательство. Пусть $\langle a \rangle$ — циклическая подгруппа индекса 2 из S и B — подгруппа порядка 4 из $\langle a \rangle$. Тогда $C_G(B) = R \leftthreetimes \langle a \rangle$ и $N_G(B) = R \leftthreetimes S \equiv H$, где $|R|$ нечетен. Пусть b — инволюция из B. Положим $C = R\langle a \rangle$, $K = R \leftthreetimes \langle b \rangle$ и $T = C \setminus K$. Тогда H/K — группа диэдра порядка > 4, T — TI-подмножество в G и $N_G(T) = H$ (если $t \in T \cap T^g$, то $\langle t \rangle = \langle t_1 \rangle^g$, где $t_1 \in T$, а так как B — единственная подгруппа порядка 4 и в $\langle t \rangle$ и в $\langle t_1 \rangle$, то $B = B^g$, т. е. $g \in H$). Согласно E5 $\langle I \setminus I_0^G \rangle \lhd G$. Но b — единственная инволюция в H и b не инвертирует элементы из T. Следовательно, $I_0 = \varnothing$ и $1 < \langle I \rangle \lhd G$.

□

E7. Пусть G — конечная простая группа, имеющая подгруппу A со следующими свойствами:

1) $|A|$ нечетен,

2) $A \cap A^g = 1$ для всех $g \in G \setminus N_G(A)$,

3) $N_G(A) = (A \leftthreetimes B)\langle j \rangle$, где $(|A|, |B|) = 1$ и $j^2 \in B$.

Тогда каждая инволюция группы G сопряжена с некоторой инволюцией из подмножества Bj.

Доказательство. По теореме Фейта-Томпсона подгруппа A разрешима. Следовательно, A имеет нормальную подгруппу A_1 некоторого простого индекса p. Подгруппу A_1 с этим свойством мы выберем так, что $A_1 \triangleleft N_G(A)$ (это возможно, так как, если $A_1^j \neq A_1$, то $\tilde{A} = A\langle j \rangle / A_1 \cap A_1^j = (\langle a \rangle \times \langle a^j \rangle) \rtimes \langle i \rangle$, где $|\langle a \rangle| = p$ и i^2 централизует $\langle a \rangle \times \langle a^j \rangle$; но тогда $\langle aa^j \rangle \triangleleft \tilde{A}$ и в качестве новой A_1 мы можем взять полный прообраз $\langle aa^j \rangle$ в $A\langle j \rangle$). Положим $H = N_G(A)$ и $\overline{H} = H / A_1 B$. Для любой подгруппы X из H через $\overline{X}$ будем обозначать образ X при естественном гомоморфизме H на $\overline{H}$. Имеем $\overline{H} = \overline{A} \rtimes \langle \overline{j} \rangle$, $|\overline{H}| = 2p$.

Предположим сначала, что $\overline{H} = \overline{A} \times \langle \overline{j} \rangle$. В этом случае $\langle \overline{j} \rangle \triangleleft \overline{H}$ и, значит, $A_1 B \langle j \rangle \triangleleft H$. Теперь можно заметить, что для группы G выполнены условия **Д5** при $T = A \setminus A_1$, $H = N_G(A)$ и $H_0 = A_1 B \langle j \rangle$. Действительно, $H \subseteq N_G(T) \subseteq N_G(\langle T \rangle) = N_G(A) = H$, т. е. $N_G(T) = H$. Отсюда и из того, что T содержится в TI-подмножестве $A \setminus \{1\}$ группы G следует, что T — TI-подмножество в G. Как замечено выше, $H_0 \triangleleft H$. Наконец, так как $\pi = \pi(H/H_0) = \{p\} \not\subseteq \pi(B\langle j \rangle)$, то каждый π-элемент из $H \setminus H_0$ содержится в T. Теперь по теореме **Д5** G имеет нормальную подгруппу N такую, что $G = AN$ и $A \cap N = A \cap H_0 = A_1$. Это противоречит простоте группы G.

Следовательно, $\overline{H} \neq \overline{A} \times \langle \overline{j} \rangle$. Но тогда $[\overline{A}, \overline{j}] \neq 1$ и, значит, $[\overline{A}, \overline{j}] = \overline{A}$. Так как $[\overline{a}, \overline{j}]^{\overline{j}} = [\overline{a}, \overline{j}]^{-1}$, то $\overline{H}$ — группа диэдра. Покажем теперь, что для группы G выполнены условия утверждения **Е5** при $H = N_G(A)$, $C = A \times B$ и $K = A_1 B$. Действительно, $K \triangleleft H$ и $H/K = \overline{H}$ — группа диэдра порядка $2p > 4$. Далее, при $T = C \setminus K$ имеем $H = N_G(A) \subseteq N_G(T) = N_G(A \times B) \subseteq N_G(A) = H$, т. е. $N_G(T) = H$. Наконец, из 2) и из $(|A|, |B|) = 1$ следует, что $C \cap C^g \subseteq B$ при любом $g \in G \setminus H$ и, следовательно, T — TI-подмножество в G. Теперь по **Е5** $\langle I \setminus I_0^G \rangle \triangleleft G$, а так как по условию группа G простая, то $I = I_0^G$. Из строения $H = N_G(A)$ видно, что $I_0 \subseteq (B\langle j \rangle)^H \setminus B = (Bj)^H$. Поэтому $I \subseteq (Bj)^G$. (Так как G — группа четного порядка, то существует инволюция i такая, что $Bj = Bi$.)

□

Отметим некоторые частные случаи утверждения **Е7**. Пусть выполнено его условие. Если $|B|$ нечетен, то все инволюции из Bj сопряжены между собой (в $B \rtimes \langle j \rangle$) и, следовательно, G имеет лишь один класс сопряженных инволюций. При $B = 1$ и дополнительном условии, что j инвертирует каждый элемент из A, это было замечено К. Харадой [75, следствие 1]. Пусть теперь B — неединичная циклическая 2-группа. Тогда инволюции из $B \rtimes \langle j \rangle$ порождают группу диэдра порядка $\geqslant 4$ и, следовательно, Bj содержит точно два класса сопряженных инволюций из $B\langle j\rangle$. Поэтому в G не более двух классов сопряженных инволюций. При $|B|=2$ и дополнительном условии, что $A\leftthreetimes\langle j\rangle$ — группа Фробениуса с ядром A и $|\langle j\rangle|=2$, это доказано В. М. Бусаркиным и Б. К. Дураковым в [17].

Отметим теперь одно утверждение, являющееся некоторым дополнением к лемме **E2**.

E8. Пусть выполнено условие леммы **E2**, $C_1, \ldots, C_s$ — классы сопряженных элементов группы G, содержащиеся в $G\setminus T^G$, и $c_i\in C_i$. Если существуют (целые) числа n_{ij} такие, что

$$\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s} n_{ij}\rho_{c_i,\,c_j}(t)=0 \text{ для всех } t \text{ из } T, \tag{e5}$$

то

$$\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s} n_{ij}\frac{\chi(1)-\chi(c_i)}{|C_G(c_i)|}\cdot\frac{\chi(1)-\chi(c_j)}{|C_G(c_j)|}=0$$

для любого $\chi\in\{\chi_1, \chi_2\}$ (см. **E2**).

Для доказательства нужно с равенством (e5) проделать те же действия, которые проделаны в доказательстве леммы **E2** с равенством $\rho_{c_1,\,c_2}(t)=0$.

Применения теоремы **E1** к исследованию строения конечных групп см. также в [32, ссылки [42, 43, 262]], [43], [44], [45].

§ Ë. ПРИЗНАКИ НЕПРОСТОТЫ КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ НА ЯЗЫКЕ ХАРАКТЕРОВ

Попытаемся расширить теорему **E1**, в которой рассматривается следующая ситуация.

В конечной группе G имеется TI-подмножество T такое, что подгруппа $H=N_G(T)$ обладает исчезающим (т. е обращающимся в нуль) на $H\setminus T$ обобщенным характером вида

$$\theta=n1_H+\varepsilon_1\varphi_1+\varepsilon_2\varphi_2,$$

где 1_H — главный характер H, φ_1 и φ_2 — различные неприводимые характеры H, n — натуральное число и $\varepsilon_i\in\{1, -1\}$. Тогда утверждается существование в G истинной нормальной подгруппы определенного вида.

Эта «локальная» ситуация приводит в доказательстве теоремы к такой «глобальной» ситуации:

G имеет обобщенный характер

$$\mu=n1_G+\delta_1\chi_1+\delta_2\chi_2,$$

где χ_1 и χ_2 — различные неприводимые характеры G и $\{\delta_1, \delta_2\}\subseteq\{1, -1\}$, причем μ исчезает на $g^Gg^G\cup\{g\}$ для определенной инволюции g из G. Отсюда выводится, что $\langle g^G\rangle\neq G$, и это влечет заключение теоремы.

Попытки обобщить эту теорему, заменяя θ обобщенным характером (или некоторым множеством обобщенных характеров) более общего вида, приводят к рассмотрению подобной «глобальной» ситуации, но с обобщенным характером μ более общего вида.

Сформулируем основные результаты параграфа (см. [5]).

Ё1. Теорема. Пусть g — элемент конечной группы G, причем

1) на $g^G g^G \cup \{1\}$ исчезает функция $\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_i$, где $a_i \in \in \boldsymbol{R} \setminus \{0\}$ и $\chi_i \in \operatorname{Irr}(G)$;

2) $\{\chi_1(g), \ldots, \chi_n(g)\} \subseteq \boldsymbol{R}$;

3) из $a_i < 0$ и $a_j < 0$ следует, что

$$\frac{|\chi_i(g)|}{\chi_i(1)} = \frac{|\chi_j(g)|}{\chi_j(1)}.$$

Равносильны условия:

(а) $\sum_{i=1}^{n} a_i |\chi_i(g)| > 0$;

(б) $\sum_{i=1}^{n} a_i |\chi_i(g)| = 0$;

(в) $\frac{|\chi_i(g)|}{\chi_i(1)} = \frac{|\chi_j(g)|}{\chi_j(1)}$ для всех $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

Ё2. Замечания: 1. Если элемент g — вещественный (т. е. сопряжен в G со своим обратным), то условие 2) автоматически выполнено, а в условии 1) можно опустить выражение $\cup \{1\}$.

2. Условие 3) будет автоматически выполнено, если среди коэффициентов a_i не более чем один отрицательный.

Из теоремы Ё1 выводятся следующие два признака непростоты.

Ё3. Следствие А. Для элемента g конечной группы G равносильны условия:

(А1) $\langle g^G \rangle \neq G$;

(А2) существует функция $\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_i$, где $a_i \in \boldsymbol{R} \setminus \{0\}$ и $\chi_i \in \in \operatorname{Irr}(G)$, такая, что

1) $\chi_1 = 1_G$;

2) μ исчезает на $\{1, g\} \cup g^G g^G$;

3) $\{\chi_1(g), \ldots, \chi_n(g)\} \subseteq \boldsymbol{R}$;

4) из $a_i < 0$ и $a_j < 0$ следует, что $\frac{\chi_i(g)}{\chi_i(1)} = \frac{\chi_j(g)}{\chi_j(1)}$.

Ё4. Следствие Б. Пусть g — вещественный элемент конечной группы G. Равносильны условия:

(Б1) $[g, G] \neq G$;

(Б2) существует функция $\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i\chi_i$, где $a_i \in \boldsymbol{R} \setminus \{0\}$ и $\chi_i \in \in \operatorname{Irr}(G)$, такая, что

1) $\chi_1 = 1_G$,
2) μ исчезает на $g^G g^G$,
3) $\sum_{i=1}^{n} a_i |\chi_i(g)| \geq 0$,
4) из $a_i < 0$ и $a_j < 0$ следует, что $\frac{|\chi_i(g)|}{\chi_i(1)} = \frac{|\chi_j(g)|}{\chi_j(1)}$.

С помощью теоремы Ё1 будет доказано следующее расширение обсуждавшейся выше теоремы Е1.

Ё5. Теорема. Пусть G — конечная группа, T — ее исключительное подмножество и $H = N_G(T)$. Предположим, что на $H \setminus T$ исчезают обобщенные характеры

$$\theta_1 = n1_H + \varepsilon_1\varphi_1 + \varepsilon_2\varphi_2 + \varepsilon_3\varphi_3,$$
$$\theta_2 = \varepsilon_1\varphi_1 + \varepsilon_4\varphi_4 + \varepsilon_5\varphi_5,$$
$$\theta_3 = \varepsilon_2\varphi_2 - \varepsilon_4\varphi_4 + \varepsilon_6\varphi_6,$$

где $\varphi_1, \ldots, \varphi_6$ — попарно различные неприводимые характеры H, n — натуральное число, ε_i лежат в $\{1, -1\}$.

Тогда G имеет истинную (т. е. отличную от G) нормальную подгруппу

$$N = \langle I \setminus I_0^G \rangle,$$

где I — множество всех инволюций группы G, а I_0 — множество всех инволюций из H, инвертирующих по крайней мере один элемент из T.

В конце параграфа приведен пример, показывающий, что теорема Ё5 будет неверна, если из ее условия исключить θ_2 в θ_3, а оставить только θ_1. Из этого же примера видно, что в теореме Ё1 нельзя опустить условие 3).

1. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ Ё1

Ё6. Лемма. Пусть g — элемент конечной группы G и на $g^G g^G$ исчезает функция $\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i\chi_i$, где $a_i \in \boldsymbol{C}$ и $\chi_i \in \operatorname{Irr}(G)$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\chi_i(g)^2}{\chi_i(1)} = 0.$$

Доказательство. [12, следствие леммы 32].

□

Е7. Лемма. Пусть $a_1, \ldots, a_n$, $x_1, \ldots, x_n$, $d_1, \ldots, d_n$ — элементы некоторого поля, $n \geqslant 3$, причем $d_1, \ldots, d_n$ отличны от нуля. Предположим, что

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i d_i = 0.$$

Тогда

1) $$\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{x_i^2}{d_i} = \sum_{i=1}^{n-1} a_i d_i \left(\frac{x_i}{d_i} - \frac{x_n}{d_n}\right)^2;$$

2) если $a_n \neq 0$, то

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{x_i^2}{d_i} = -\sum_{\substack{i,\, j=1\\ i<j}}^{n-1} \frac{a_i d_i a_j d_j}{a_n d_n} \left(\frac{x_i}{d_i} - \frac{x_j}{d_j}\right)^2.$$

Доказательство. 1): Простой подсчет показывает, что

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{x_i^2}{d_i} = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{(x_i - f d_i)^2}{d_i}$$

для любого элемента f рассматриваемого поля. При $f = \frac{x_n}{d_n}$ отсюда получается первое утверждение леммы.

2): $$\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{x_i^2}{d_i} = \sum_{i=1}^{n-1} a_i \frac{x_i^2}{d_i} + \frac{(a_n x_n)^2}{a_n d_n} = \sum_{i=1}^{n-1} a_i \frac{x_i^2}{d_i} - \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i x_i\right)^2}{\sum\limits_{j=1}^{n-1} a_j d_j} =$$

$$= -(a_n d_n)^{-1}\left(\sum_{i,\, j=1}^{n-1} \frac{a_i x_i^2 a_j d_j}{d_i} - \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i\right)^2\right) = -(a_n d_n)^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 x_i^2 + \right.$$

$$\left. + \sum_{\substack{i,\, j=1\\ i\neq j}}^{n-1} \frac{a_i a_j x_i^2 d_j^2}{d_i d_j} - \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 x_i^2 - 2\sum_{\substack{i,\, j=1\\ i<j}}^{n-1} a_i a_j x_i x_j\right) = -(a_n d_n)^{-1} \times$$

$$\times \sum_{\substack{i,\, j=1\\ i<j}}^{n-1} \frac{a_i a_j}{d_i d_j} (x_i d_j - x_j d_i)^2 = -\sum_{\substack{i,\, j=1\\ i<j}}^{n-1} \frac{a_i d_i a_j d_j}{a_n d_n} \left(\frac{x_i}{d_i} - \frac{x_j}{d_j}\right)^2.$$

□

Ключевым пунктом в доказательстве теоремы Ё1 является следующий результат.

Ё8. Лемма. Пусть g — элемент конечной группы G, причем

1) на $g^G g^G \cup \{1\}$ исчезает функция $\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i\chi_i$, где $a_i \in \boldsymbol{R} \setminus \{0\}$ и $\chi_i \in \operatorname{Irr}(G)$;

2) $\{\chi_1(g), \ldots, \chi_n(g)\} \subseteq \boldsymbol{R}$;

3) $\sum_{i=1}^{n} a_i\varepsilon_i\chi_i(g) = 0$ при некоторых $\varepsilon_i \in \{1, -1\}$;

4) из $a_i < 0$, $a_j < 0$ следует, что $\frac{\varepsilon_i\chi_i(g)}{\chi_i(1)} = \frac{\varepsilon_j\chi_j(g)}{\chi_j(1)}$.

Тогда

$$\frac{\varepsilon_i\chi_i(g)}{\chi_i(1)} = \frac{\varepsilon_j\chi_j(g)}{\chi_j(1)} \text{ для всех } i,\ j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Доказательство. Из условий 3) и 1) получаем три равенства

$$\text{(ё1)} \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i(\varepsilon_i\chi_i(g)) = 0,$$

$$\text{(ё2)} \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i\chi_i(1) = 0,$$

$$\text{(ё3)} \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\chi_i(g)^2}{\chi_i(1)} = 0$$

(последнее — по лемме Ё6).

Ввиду (ё1) и (ё2) мы можем считать, что $n \geqslant 3$. Нумерацию выберем так, что $a_1, \ldots, a_m$ положительны, $a_{m+1}, \ldots, a_n$ отрицательны. Из (ё2) следует, что $m < n$. Из-за возможности рассмотреть $-\mu$ вместо μ, можно считать, что $m > 1$. Итак, $1 < m < n$.

Учитывая (ё1) и (ё2), мы можем применить лемму Ё7, по пункту 1) которой получаем

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{(\varepsilon_i\chi_i(g))^2}{\chi_i(1)} = \sum_{i=1}^{m} a_i\chi_i(1)\left(\frac{\varepsilon_i\chi_i(g)}{\chi_i(1)} - \frac{\varepsilon_n\chi_n(g)}{\chi_n(1)}\right)^2.$$

Согласно (ё3) последняя сумма равна нулю, а так как все числа в ней вещественные и коэффициенты перед ненулевыми квадратами все положительные по условию 4), то каждый квадрат равен нулю. Это равносильно утверждению леммы.

$\square$

Теперь мы завершим доказательство теоремы Ё1, воспользовавшись тем, что в лемме Ё8 не исключается совпадение некоторых из характеров $\chi_1, \ldots, \chi_n$.

Ввиду условия 1) теоремы выполнены равенства (ё2) и (ё3) из доказательства леммы Ё8. В частности, не все a_i положительны. Пусть $a_n < 0$. Тогда, ввиду (ё3) и условия 3) теоремы, можно считать, что

$$\chi_n(g) \neq 0 \tag{ё9}$$

(иначе $\chi_i(g) = 0$ для всех $i \in \{1, \ldots, n\}$ и заключение теоремы верно). Положим

$$b = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i |\chi_i(g)|}{2|\chi_n(g)|},$$

$$\varepsilon_i = \operatorname{sign} \chi_i(g) \text{ при } i \in \{1, \ldots, n\}, \tag{ё10}$$

$$\chi_{n+1} = \chi_n, \quad \varepsilon_{n+1} = -\varepsilon_n. \tag{ё11}$$

Тогда

$$\mu = \sum_{i=1}^{n-1} a_i \chi_i + (a_n - b)\chi_n + b\chi_{n+1} \tag{ё12}$$

и, как легко проверить,

$$\sum_{i=1}^{n-1} a_i \varepsilon_i \chi_i(g) + (a_n - b)\varepsilon_n \chi_n(g) + b\varepsilon_{n+1}\chi_{n+1}(g) = 0.$$

Отсюда видно, что при $b > 0$ для функции μ, записанной в виде (ё12), выполнены все условия леммы Ё8. Но согласно заключению этой леммы должно быть

$$\frac{\varepsilon_n \chi_n(g)}{\chi_n(1)} = \frac{\varepsilon_{n+1}\chi_{n+1}(g)}{\chi_{n-1}(1)},$$

что противоречиво вследствие (ё9) и (ё11).

Таким образом, $b \leqslant 0$. Отсюда следует равносильность условий (а) и (б) теоремы Ё1.

Если выполнено условие (б), то для $\mu = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \chi_i$ будут выполнены условия леммы Ё8 при $\varepsilon_i = \operatorname{sign} \chi_i(g)$ и согласно заключению этой леммы будет выполнено условие (в).

Если выполнено условие (в), то ввиду (ё2) будет

$$\sum_{i=1}^{n} a_i |\chi_i(g)| = \frac{|\chi_n(g)|}{\chi_n(1)} \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_i(1) = 0,$$

т. е. будет выполнено условие (б).

Теорема Ё1 доказана.

Теорему Ё1 можно сформулировать в еще более общем виде.

Ё9. Теорема. Пусть g — элемент конечной группы G, причем

1) на $g^G g^G \cup \{1\}$ исчезает функция $\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_i$, где $a_i \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ и $\chi_i \in \operatorname{Irr}(G)$;

2) $\{\chi_1(g), \ldots, \chi_n(g)\} \subseteq \mathbf{R}$;

3) существуют элементы $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ из $\{1, -1\}$ такие, что из $a_i < 0$ и $a_j < 0$ следует

$$\frac{\varepsilon_i \chi_i(g)}{\chi_i(1)} = \frac{\varepsilon_j \chi_j(g)}{\chi_j(1)} \geqslant 0.$$

Равносильны условия:

(а) $\sum_{i=1}^{n} a_i \varepsilon_i \chi_i(g) \geqslant 0$;

(б) $\sum_{i=1}^{n} a_i \varepsilon_i \chi_i(g) = 0$;

(в) $\frac{\varepsilon_i \chi_i(g)}{\chi_i(1)} = \frac{\varepsilon_j \chi_j(g)}{\chi_j(1)} \geqslant 0$ для всех $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

Доказательство. Если выполнены условия теоремы Ё9, то выполнены условия (а значит, и заключение) теоремы Ё1.

Если выполнено условие (в), то $\varepsilon_i = \operatorname{sign} \chi_i(g)$ для всех $i \in \{1, \ldots, n\}$ и тогда по теореме Ё1 будет выполнено условие (б). Очевидно, (б) влечет (а).

Пусть выполнено условие (а). Тогда ввиду 3) будет $\sum_{i=1}^{n} a_i |\chi_i(g)| \geqslant 0$ и согласно теореме Ё1 $\sum_{i=1}^{n} a_i |\chi_i(g)| = 0$. Отсюда и из 2) получаем

$$\sum_{i=1}^{n} a_i (\varepsilon_i \delta_i - 1) |\chi_i(g)| \geqslant 0,$$

где $\delta_i = \operatorname{sign} \chi_i(g)$. Так как $\varepsilon_i = \delta_i$ при $a_i < 0$, то отсюда следует, что $\varepsilon_i = \delta_i$ для всех i с $\chi_i(g) \neq 0$. Но теперь по теореме Ё1 из (а) следует (в).

$\square$

2. ПРИЗНАКИ НЕПРОСТОТЫ

Приступим к доказательству следствий А и Б. Далее G обозначает конечную группу и g — ее элемент.

(ё13) $\qquad\qquad$ (А1) $\Rightarrow$ (А2).

Действительно, пусть $N = \langle g^G \rangle$, $X = \operatorname{Irr}(G|N) \setminus \{1_G\}$ и

$$\mu = \sum_{\chi \in X} \chi(1)\chi - (|G:N| - 1) 1_G.$$

Тогда $\{1, g\} \cup g^G g^G \subseteq N$ и

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \in N, \\ -|G:N| \text{ при } x \in G \setminus N \end{cases}$$

(см. **А34 (1)** и **1Г3**). Отсюда видно, что при выбранном μ выполнено (А2).

(ё14) $\quad$ (А2) $\Rightarrow$ (А1).

Действительно, из (А2) следуют условия леммы **Ё8** с $\varepsilon_i = 1$ для всех $i \in \{1, \ldots, n\}$. Теперь заключение леммы Ё8 и условие $\chi_1 = 1_G$ влекут равенства

$$\frac{\chi_i(g)}{\chi_i(1)} = 1 \text{ для всех } i = 2, \ldots, n.$$

Следовательно, по **А30 (1)** $\langle g^G \rangle \subseteq \bigcap_{i=2}^{n} \operatorname{Ker} \chi_i \neq G$.

(ё15) $\quad$ (Б2) $\Rightarrow$ (Б1).

Действительно, из (Б2) по теореме **Ё1** получаем

$$\frac{|\chi_i(g)|}{\chi_i(1)} = 1 \text{ для всех } i = 2, \ldots, n.$$

Отсюда по **А30 (2)**

$$[g, G] \subseteq \bigcap_{i=2}^{n} \operatorname{Ker} \chi_i \neq G.$$

(ё16) $\quad$ Если элемент g — вещественный, то (Б1) $\Rightarrow$ (Б2).

При выполнении условия (Б1) имеем $N = [g, G] \lhd G$, $gN \in Z(G/N)$ и $g^2 \in N$ (так как элемент g вещественный). Если $\langle g^G \rangle \neq G$, то (ё16) следует из (ё13). Пусть $\langle g^G \rangle = G$. Тогда $G = N\langle g \rangle$, $|G:N| = 2$ и $g^G g^G \subseteq N$. Пусть χ неглавный характер G с ядром N и $\mu = 1_G - \chi$. Тогда

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \in N, \\ 2 \text{ при } x \in G \setminus N \end{cases}$$

и

$$1_G(g) - (-1)\chi(g) = 0.$$

Таким образом, при выбранном μ выполнено условие (Б2).

Следствия А и Б доказаны. Как видно из доказательства, оба они останутся справедливыми, если в (А2) и (Б2) условие 4) заменить условием

4′) среди коэффициентов a_i не более чем один отрицательный.

На практике можно пытаться получить условия 4) следствий А и Б, рассматривая другие классовые функции, исчезающие на $\{1, g\} \cup g^G g^G$. Например, если в следствии А $\mu = 1_G + \chi_2 + \chi_3 - \chi_4 - \chi_5$ и на $\{1, g\} \cup g^G g^G$ исчезают также функции $\mu_1 = c_4\chi_4 + c_6\chi_6 + c_7\chi_7$ и $\mu_2 = c_5\chi_5 + c_9\chi_6 + c_8\chi_8$ ($c_i \in C$, $\chi_i \in \operatorname{Irr}(G)$), то как легко увидеть, условие 4) для μ выполнено.

Здесь будет доказана теорема Ё5.

Напомним, что T называется исключительным подмножеством группы G, если T — TI-подмножество в G и для любых двух инволюций a и b группы G из $ab \in T$ следует $ba \in T$.

Ё10. Пусть g — элемент конечной группы G и $\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i\chi_i$, где $a_i \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ и $\chi_i \in \mathrm{Irr}(G)$. Предположим, что

а) μ исчезает на $\{1\} \cup g^G g^G$,

б) $\sum_{i=1}^{n} a_i\varepsilon_i\chi_i(g) = 0$ при некоторых $\varepsilon_i \in \{1, -1\}$,

в) $\dfrac{\varepsilon_i\chi_i(g)}{\chi_i(1)} = \dfrac{\varepsilon_j\chi_j(g)}{\chi_j(1)}$ при $i, j \in \{1, \ldots, n-2\}$. Тогда

$$\frac{\varepsilon_{n-1}\chi_{n-1}(g)}{\chi_{n-1}(1)} = \frac{\varepsilon_n\chi_n(g)}{\chi_n(1)}.$$

Доказательство. Из условия а) следует, что

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\chi_i(1) = 0, \tag{ё17}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\chi_i(g)^2}{\chi_i(1)} = 0 \quad (\text{по Ё6}). \tag{ё18}$$

Отсюда и из б), в) согласно утверждениям 1) и 2) леммы Ё7 получаем два равенства:

$$\left(\sum_{i=1}^{n-2} a_i\chi_i(1)\right)\left(\frac{\varepsilon_1\chi_1(g)}{\chi_1(1)} - \frac{\varepsilon_n\chi_n(g)}{\chi_n(1)}\right)^2 + \\ + a_{n-1}\chi_{n-1}(1)\left(\frac{\varepsilon_{n-1}\chi_{n-1}(g)}{\chi_{n-1}(1)} - \frac{\varepsilon_n\chi_n(g)}{\chi_n(1)}\right)^2 = 0,$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n-2} a_i\chi_i(1)\right)\left(\frac{\varepsilon_1\chi_1(g)}{\chi_1(1)} - \frac{\varepsilon_{n-1}\chi_{n-1}(g)}{\chi_{n-1}(1)}\right)^2 = 0.$$

Отсюда следует, что либо

$$\frac{\varepsilon_1\chi_1(g)}{\chi_1(1)} = \frac{\varepsilon_{n-1}\chi_{n-1}(g)}{\chi_{n-1}(1)}, \tag{ё19}$$

либо $\sum_{i=1}^{n-2} a_i\chi_i(1) = 0$ и

$$\frac{\varepsilon_{n-1}\chi_{n-1}(g)}{\chi_{n-1}(1)} = \frac{\varepsilon_n\chi_n(g)}{\chi_n(1)}. \tag{ё20}$$

В первом случае равенства б) и (ё17) перепишутся в виде

$$\left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i\chi_i(1)\right)\frac{\varepsilon_1\chi_1(g)}{\chi_1(1)} + a_n\varepsilon_n\chi_n(g) = 0,$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i\chi_i(1)\right) + a_n\chi_n(1) = 0,$$

откуда следует, что $\dfrac{\varepsilon_1\chi_1(g)}{\chi_1(1)} = \dfrac{\varepsilon_n\chi_n(g)}{\chi_n(1)}$ и, значит, выполнено (ё20). Следовательно, всегда верно (ё20).

□

Доказательство теоремы Ё5. Можно считать, что ни один из характеров $\varphi_1, \ldots, \varphi_6$ не совпадает с 1_H, так как в противном случае заключение теоремы будет следовать из теоремы **Е1**.

Если $I \setminus I_0^G$ пусто, то $N = 1 \neq G$, как и требуется.

Предположим, что $I \setminus I_0^G$ непусто и пусть $g \in I \setminus I_0^G$. Тогда точно так же как, и в доказательстве теоремы **Е1**, устанавливается, что

$$\{1, g\} \cup g^G g^G \subseteq G \setminus T^G.$$

Согласно **Б3**(1) функции θ_1^G, θ_2^G и θ_3^G исчезают на $G \setminus T^G$ и, следовательно,

(ё21) $\qquad \theta_1^G$, θ_2^G и θ_3^G исчезают на $\{1, g\} \cup g^G g^G$.

Теперь, воспользовавшись **Б3**(2), мы найдем разложения θ_1^G, θ_2^G и θ_3^G на неприводимые характеры группы G. Так как $(\theta_1^G, \theta_1^G)_G = (\theta_1\theta_1)_H = n^2 + 3$ и $(\theta_1^G, 1_G)_G = (\theta_1, 1_H)_H = n$ (**Б1**), то

(ё22) $$\theta_1^G = n1_G + \delta_1\chi_1 + \delta_2\chi_2 + \delta_3\chi_3,$$

где χ_1, χ_2, χ_3 — попарно различные неглавные неприводимые характеры G и $\delta_i \in \{1, -1\}$. Ввиду (ё21) элемент g и функция $\mu = \varepsilon\theta_1^G$ $(\varepsilon = \pm 1)$ удовлетворяют условиям а) и б) (с $\varepsilon_i = 1$) **Ё10**. Поэтому мы можем в дальнейшем предполагать, что

(ё23) $$\frac{\chi_i(g)}{\chi_i(1)} \neq \frac{\chi_j(g)}{\chi_j(1)} \text{ при некоторых } i, j \in \{1, 2, 3\}.$$

(Если это не так, то по **Ё10** при $i \in \{1, 2, 3\}$ $\chi_i(g) = \chi_i(1)$ и, значит, $N \subseteq \operatorname{Ker} \chi_3 \neq G$). Так как $(\theta_2^G, \theta_2^G)_G = (\theta_2, \theta_2)_H = 3$, $(\theta_2^G, \theta_1^G)_G = (\theta_2, \theta_1)_H = 1$ и $(\theta_2^G, 1_G)_G = (\theta_2, 1_H)_H = 0$, то (с точностью до нумерации характеров χ_i)

(ё24) $$\theta_2^G = \delta_1\chi_1 + \delta_4\chi_4 + \delta_5\chi_5,$$

где χ_4 и χ_5 — различные элементы из $\mathrm{Irr}(G)\setminus\{1_G, \chi_1\}$ и $\delta_i \in \{1, -1\}$. Из (ё21) следует, что элемент g и функция $\mu = \varepsilon\theta_2^G$ при некотором $\varepsilon \in \{1, -1\}$ удовлетворяют условиям леммы Ё8, причем в условии 2) все $\varepsilon_i = 1$. Следовательно,

(ё25) $$\frac{\chi_1(g)}{\chi_1(1)} = \frac{\chi_4(g)}{\chi_4(1)} = \frac{\chi_5(g)}{\chi_5(1)}.$$

Отсюда, из $(\theta_1^G, \theta_2^G)_G = 1$ и из (ё23) следует, что

(ё26) $$\{\chi_4, \chi_5\} \subseteq \mathrm{Irr}(G)\setminus\{1_G, \chi_1, \chi_2, \chi_3\}.$$

Далее, так как $(\theta_3^G, \theta_3^G)_G = 3$, $(\theta_3^G, \theta_1^G)_G = 1$, $(\theta_3^G, \theta_2^G)_G = -1$ и $(\theta_3^G, 1_G)_G = 0$, то при условиях (ё23) и (ё26) для θ_3^G имеется лишь одна возможность (с точностью до нумерации характеров χ_i):

(ё27) $$\theta_3^G = \delta_2\chi_2 - \delta_4\chi_4 + \delta_6\chi_6,$$

где $\chi_6 \in \mathrm{Irr}(G)\setminus\{1_G, \chi_1, \ldots, \chi_5\}$ и $\delta_6 \in \{1, -1\}$. С помощью леммы Ё8, примененной к g и $\mu = \pm\theta_3^G$, получаем

(ё28) $$\frac{\chi_2(g)}{\chi_2(1)} = \frac{\chi_4(g)}{\chi_4(1)} = \frac{\chi_6(g)}{\chi_6(1)}.$$

Из (ё25) и (ё28) следует, что

$$\frac{\chi_1(g)}{\chi_1(1)} = \frac{\chi_2(g)}{\chi_2(1)},$$

а теперь по Ё10 $\chi_3(g) = \chi_3(1)$ и $N \subseteq \mathrm{Ker}\,\chi_3 \neq G$.

Теорема Ё5 доказана.

Ё11. Пример. Пусть $G = \mathrm{PSL}(2, 7)$, a — ее элемент порядка 7 и $T = \langle a \rangle \setminus \{1\}$. Тогда T — исключительное подмножество в G и

$$H \equiv N_G(T) = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle, \text{ где } |\langle b \rangle| = 3.$$

Рассмотрим таблицы характеров групп H и G.

H	1	b	b^{-1}	a	a^{-1}
φ_1	1	1	1	1	1
φ_2	1	ε	$\bar\varepsilon$	1	1
φ_3	1	$\bar\varepsilon$	ε	1	1
φ_4	3	0	0	ω	$\bar\omega$
φ_5	3	0	0	$\bar\omega$	ω

G	1	g	t	b	a	a^{-1}
χ_1	1	1	1	1	1	1
χ_2	3	-1	0	1	ω	$\bar\omega$
χ_3	3	-1	0	1	$\bar\omega$	ω
χ_4	6	2	0	0	-1	-1
χ_5	7	-1	1	-1	0	0
χ_6	8	0	-1	0	1	1

Здесь $\varepsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\omega = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2}$, $g = t^2$ — инволюция. Легко видеть, что

$$\theta \equiv \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 - \varphi_4 \text{ исчезает на } H \setminus T,$$

$$\theta^G = \chi_1 - \chi_2 - \chi_4 + \chi_6 \text{ исчезает на } G \setminus T^G,$$

$$g^G g^G = \{1\} \cup g^G \cup t^G \cup b^G = G \setminus T^G,$$

$$\langle g^G \rangle = G = [g, G].$$

Отсюда можно сделать три вывода:

1) В теореме Ё5 нельзя игнорировать обобщенные характеры θ_2 и θ_3.

2) В теореме Ё1 условие 3) не излишне.

3) В следствиях А и Б условие 4) не излишне.

§ Ж. π-ОБОБЩЕНИЯ

Утверждение Б3, являющееся одним из основных аргументов в доказательстве теорем Д1 и Е1, обобщено Н. Николаи [87] следующим образом:

Ж1. Теорема. Пусть G — конечная группа, $H \leqslant G$, π — множество простых чисел и T — объединение π-сечений из H, обладающее следующими свойствами:

а) любые два π-элемента из T, сопряженные в G, сопряжены в H;

б) для каждого π-элемента t из T

$$C_G(t) = C_H(t) O_{\pi'}(C_G(t));$$

в) для любого непустого множества S π-элементов из T

$$C_G(S)_{\pi'} \subseteq C_H(S) \left(\bigcap_{s \in S} O_{\pi'}(C_G(s)) \right).$$

Тогда для любого обобщенного характера θ подгруппы H, постоянного на π-сечениях из H и исчезающего на $H \setminus T$, существует обобщенный характер $\theta^{G, \pi}$ группы G, удовлетворяющий следующим условиям:

1) $\theta^{G, \pi}(g) = \begin{cases} \theta(t) \text{ при } g \in S_{G, \pi}(t), \ t \in T, \\ 0 \text{ при } g \in G \setminus S_{G, \pi}(T); \end{cases}$

2) $(\theta^{G, \pi}, \theta^{G, \pi})_G = (\theta, \theta)_H$;

3) $(\theta^{G, \pi}, 1_G)_G = (\theta, 1_H)_H$.

Здесь приняты обозначения: $S_{G, \pi}(a) = \{x \in G \mid x_\pi \in a_\pi^G\}$ — π-сечение группы G, содержащее элемент a; $S_{G, \pi}(A) = \bigcup_{a \in A} S_{G, \pi}(a)$.

Заметим, что если для G, H и T выполнено условие теоремы Ж1 при $\pi = \pi(G)$, то T — TI-подмножество в G и $H = N_G(T)$ (и обратно).

Теперь, повторив почти дословно доказательства теорем **Д1** и **Ё1**, заменив при этом ссылки на **Б3** и закон взаимности Фробениуса ссылками на теорему **Ж1**, мы получим доказательства сформулированных ниже теорем **Ж2** и **Ж4**.

Ж2. Теорема. Пусть выполнены условия теоремы **Ж1**. Тогда G имеет точно одну нормальную подгруппу N такую, что

$$G = HN \text{ и } H \cap N = \langle H \setminus T \rangle O^{\pi}(H).$$

При этом

$$N = G \setminus S_{G,\pi}(\langle H \setminus T \rangle O^{\pi}(H)).$$

□

Отсюда вытекает следующий результат Судзуки [76].

Ж3. Пусть H — π-холлова подгруппа конечной группы G. H имеет нормальное дополнение в G тогда и только тогда, когда выполнены условия:

1) любые два элемента из H, сопряженные в G, сопряжены в H;

2) если $h \in H \setminus Z(G)$, то $C_G(h) = O_{\pi'}(C_G(h)) \rtimes C_H(h)$.

Доказательство. Для доказательства достаточности нужно применить теорему **Ж2** при $T = H \setminus Z(G)$. Тогда $H \cap N = \langle H \setminus T \rangle O^{\pi}(H) = Z(G) \cap H$, откуда $N = (Z(G) \cap H) \times N_0$ и $G = HN = H \ltimes N_0$. Необходимость очевидна.

□

Теорема Ж4. Пусть выполнены условия теоремы **Ж1** и пусть для любых двух инволюций a и b группы G из $ab \in T_{\pi}$ следует, что $\{a, b\} \subseteq H$. Предположим, что существуют различные неприводимые характеры φ_1 и φ_2 группы H, натуральное число n и числа ε_1 и ε_2, равные ± 1, такие, что обобщенный характер

$$\theta = n 1_H + \varepsilon_1 \varphi_1 + \varepsilon_2 \varphi_2$$

постоянен на π-сечениях группы H и исчезает на $H \setminus T$.

Тогда $$\langle I \setminus I_0^G \rangle \lhd G,$$

где I — множество всех инволюций группы G, а I_0 — множество всех инволюций из H, инвертирующих по крайней мере один π-элемент из T.

□

Подобным образом можно получить π-обобщение теоремы **Ё5**. Его формулировка получается из формулировки теоремы **Ж4**, заменой θ множеством $\{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$ обобщенных характеров из **Ё5**.

Глава 3

ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ И D-БЛОКИ

§ А. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

Понятие «взаимодействие», которое вводится в этой главе, можно рассматривать как некоторый общий тип соотношений ортогональности. На его основе для любого нормального подмножества D конечной группы определяются «D-блоки». Как частный случай D-блоков вводятся p-блоки, систематическое изучение которых будет предпринято в главе 5. Там же будет доказана равносильность данного здесь определения p-блока классическому определению Р. Брауэра. Частными случаями D-блоков являются также π-блоки (π — множество простых чисел) и блоки Осимы. Изложение материала следует статье [6].

А1. Обозначения и определения. Пусть $D \trianglelefteq G$ (D — нормальное подмножество группы G), $\Phi \subseteq \operatorname{Irr}(G)$ и $\psi \in \operatorname{CF}(G)$.

1) *Положим* $\psi_\Phi = \sum_{\varphi \in \Phi} (\psi, \varphi)_G \varphi$. Функцию ψ_Φ *назовем* Φ-*срезкой* функции ψ. Ясно, что $\theta \mapsto \theta_\Phi$ ($\theta \in \operatorname{CF}(G)$) есть линейный оператор пространства $\operatorname{CF}(G)$.

$$\Theta_\Phi = \{\theta_\Phi \mid \theta \in \Theta\} \text{ для } \Theta \subseteq \operatorname{CF}(G).$$

2) Пусть $\psi|_D^0$ — классовая функция группы G, определяемая равенством

$$\psi|_D^0(g) = \begin{cases} 0 & \text{при } g \in G \setminus D, \\ \psi(g) & \text{при } g \in G. \end{cases}$$

$\psi|_D^0$ назовем *D-срезкой* функции ψ. Очевидно, $|_D^0$ — линейный оператор пространства $\operatorname{CF}(G)$ и $\psi|_D^0 = \psi\varepsilon_D$, где

$$\varepsilon_D = 1_G|_D^0 = \frac{1}{|G|} \sum_{d \in D}' \sum_{\chi \in \operatorname{Irr}(G)} \overline{\chi(d)}\chi.$$

$$\Theta|_D^0 = \{\theta|_D^0 \mid \theta \in \Theta\} \text{ для } \Theta \subseteq \operatorname{CF}(G).$$

Очевидно, $\operatorname{CF}(G)|_D^0$ — подпространство в $\operatorname{CF}(G)$, состоящее из всех классовых функций, исчезающих на $G \setminus D$, и $\operatorname{CF}(G) = \operatorname{CF}(G)|_D^0 \oplus \operatorname{CF}(G)|_{G\setminus D}^0$.

В § Г будут определены Ф-срезка и D-срезка элементов центра групповой алгебры CG.

А2. Соглашения для главы 3.

1) Если группа обозначена буквой G, $D \trianglelefteq G$ и $\Phi \subseteq \mathrm{Irr}(G)$, то положим

$D^- = G \setminus D$,

$\Phi^- = \mathrm{Irr}(G) \setminus \Phi$.

2) Там, где без объяснения встречаются буквы D и (или) Φ, предполагаем, что они связаны с группой, обозначенной буквой G, а именно, $D \trianglelefteq G$ и $\Phi \subseteq \mathrm{Irr}(G)$.

А3. Основные определения. Пусть G — конечная группа, $D \trianglelefteq G$ и $\Phi \subseteq \mathrm{Irr}(G)$.

1) Скажем, что D и Φ *взаимодействуют* (запись $D \leftarrow\!\!\rightarrow \Phi$), если D-срезка $\varphi|_D^0$ любого характера φ из Φ является линейной комбинацией характеров из Φ:

$$\varphi|_D^0 = \sum_{\psi \in \Phi} a_{\varphi,\psi}\psi, \quad a_{\varphi,\psi} \in C.$$

Если $D \leftarrow\!\!\rightarrow \Phi$, то пару (D, Φ) назовем *взаимодействием в группе* G.

2) *D-блоком* группы G называется минимальное (по включению) непустое подмножество из $\mathrm{Irr}(G)$, взаимодействующее с D.

3) *Ф-блоком* группы G называется минимальное непустое нормальное подмножество из G, взаимодействующее с Φ.

Легко заметить (см. также **Б3**), что утверждения $D \leftarrow\!\!\rightarrow \Phi$, $D \leftarrow\!\!\rightarrow \Phi^-$, $D^- \leftarrow\!\!\rightarrow \Phi$ и $D^- \leftarrow\!\!\rightarrow \Phi^-$ равносильны.

А4. Примеры взаимодействий:

1) $D \leftarrow\!\!\rightarrow \Phi$, если хотя бы одно из множеств D, D^-, Φ, Φ^- пусто («тривиальные» взаимодействия).

2) $D \leftarrow\!\!\rightarrow \Phi$, если $\varphi(d) = 0$ для всех $(d, \varphi) \in D \times \Phi$.

3) $D \leftarrow\!\!\rightarrow \{\chi\} \Leftrightarrow \chi$ исчезает на D или на D^- $(D \trianglelefteq G$, $\chi \in \mathrm{Irr}(G))$.

4) $g^G \leftarrow\!\!\rightarrow \Phi \Leftrightarrow \varphi(g) = 0$ для всех $\varphi \in \Phi$ или $\chi(g) = 0$ для всех $\chi \in \Phi^-$.

5) Если $N \trianglelefteq G$, то $N \leftarrow\!\!\rightarrow \mathrm{Irr}(G|N)$.

Утверждения 1) — 3) очевидны. 4) получается из того, что $(\varphi|_D^0, \chi)_G = 0$ для всех $(\varphi, \chi) \in \Phi \times \Phi^-$. Для доказательства 5) нужно заметить, что $1_G|_N^0 = \frac{|N|}{|G|} \sum_{\varphi \in \mathrm{Irr}(G|N)} \varphi(1)\varphi$. Следующий важный факт будет доказан в главе 5.

6) Для любого простого числа p любой p-блок конечной группы G взаимодействует с любым ее p-сечением.

7) Конкретный пример: в группе $\mathrm{PSU}(3,3^2)$ множество D всех

элементов порядков 4 и 12 взаимодействует с множеством, состоящим из двух характеров φ и ψ степени 28.

Из таблицы характеров PSU $(3,3^2)$ (см. приложение 1) видно, что $\varphi|_D^0 = \frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{2}\psi$ и $\psi|_D^0 = -\frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{2}\psi$.

А5. Упражнение. Пусть $G \neq 1$, $g \in G$ и $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$. Тогда

$$g^G \longleftrightarrow \{\chi\} \Leftrightarrow \chi(g) = 0.$$

А6. Упражнение. Пусть $D \trianglelefteq G$ и $\Phi \subseteq \mathrm{Irr}(G)$.

1) Если Φ — D-блок группы G, то либо $\mathrm{Irr}(\Phi|_D^0) = \varnothing$ (и тогда $|\Phi| = 1$), либо $\mathrm{Irr}(\Phi|_D^0) = \Phi$.

2) Если $\Phi|_D^0 \subseteq C[\Phi] + C\psi$, где $\psi \in \mathrm{Irr}(G)$, то либо $D \longleftrightarrow \Phi$, либо $D \longleftrightarrow \Phi \cup \{\psi\}$.

§ Б. ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ НА ЯЗЫКЕ ТАБЛИЦЫ ХАРАКТЕРОВ

Главная цель этого параграфа — доказать следующую теорему

Б1. Теорема. *Пусть* G — *конечная группа* $D \trianglelefteq G$ *и* $\Phi \subseteq \mathrm{Irr}(G)$.

Следующие условия равносильны:

1) $D \longleftrightarrow \Phi$;

2) $\sum_{d \in D} \varphi(d)\overline{\chi(d)} = 0$ для всех $(\varphi, \chi) \in \Phi \times \Phi^-$;

3) $\sum_{\varphi \in \Phi} \varphi(d)\overline{\varphi(g)} = 0$ для всех $(d, g) \in D \times D^-$;

4) $\frac{1}{|G|} \sum_{d \in D} \sum_{\varphi \in \Phi} \varphi_0(d)\overline{\varphi(d)}\varphi(d_0) = \varphi_0(d_0)$ для всех $(\varphi_0, d_0) \in \Phi \times D$.

Для доказательства теоремы потребуется следующая **лемма об унитарной матрице**. (Напомним, что матрица M над C называется унитарной, если $MM^* = E$ — единичная матрица.)

Б2. Лемма. Пусть M — унитарная матрица над полем C, записанная в клеточной форме:

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Следующие условия равносильны:

$$\begin{array}{ll} (1)\ AA^*A = A, & (5)\ AC^* = O, \\ (2)\ BB^*B = B, & (6)\ A^*B = O, \\ (3)\ CC^*C = C, & (7)\ BD^* = O, \\ (4)\ DD^*D = D, & (8)\ C^*D = O. \end{array}$$

Доказательство. По условию $MM^* = E$ и $M^*M = E$, откуда

1) $AA^* + BB^* = E$,	5) $A^*A + C^*C = E$,
2) $CC^* + DD^* = E$,	6) $B^*B + D^*D = E$,
3) $AC^* + BD^* = O$,	7) $A^*B + C^*D = O$,
4) $CA^* + DB^* = O$,	8) $B^*A + D^*C = O$.

Равносильность условий (1) — (8) докажем по схеме: (1) $\Rightarrow$ (6) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (7) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (8) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (5) $\Rightarrow$ (1). Запись $K \underset{i)}{\Rightarrow} L$ будет обозначать, что L следует из K при помощи условия i) ($i \in \{1, \ldots, 8\}$). Воспользуемся также тем, что $SS^* = O$ влечет $S = O$ для любой комплексной матрицы S.

Имеем (1) $AA^*A = A \underset{1)}{\Rightarrow} BB^*A = O \Rightarrow A^*BB^*A = O \Rightarrow (A^*B) \times (A^*B)^* = O \Rightarrow$ (6) $A^*B = O \underset{1)}{\Rightarrow}$ (2) $BB^*B = B \underset{6)}{\Rightarrow} BD^*D = O \Rightarrow (BD^*) \times (BD^*)^* = O \Rightarrow$ (7) $BD^* = O \underset{6)}{\Rightarrow} D^*DD^* = D^* \Rightarrow$ (4) $DD^*D = D \underset{2)}{\Rightarrow} CC^*D = O \Rightarrow (C^*D)^*(C^*D) = O \Rightarrow$ (8) $C^*D = O \Rightarrow D^*C = O \underset{2)}{\Rightarrow}$ (3) $CC^*C = C \Rightarrow C^*CC^* = C^* \underset{5)}{\Rightarrow} A^*AC^* = O \Rightarrow$ (5) $AC^* = O \underset{5)}{\Rightarrow}$ (1) $AA^*A = A$.

□

Замечание. Лемма остается справедливой, если допустить, что некоторые из клеток A, B, C, D являются «пустыми матрицами» вида $O_{m\times 0}$ («матрица с m строками и 0 столбцами») или $O_{0\times n}$ («матрица с 0 строками и n столбцами»), определив умножение: $O_{m\times 0} O_{0\times n} = O_{m\times n}$ и $O_{0\times n}K = O_{0\times l}$ для любой $n\times l$-матрицы K (см. 1A9). При этом закон умножения клеточных матриц остается прежним.

Доказательство теоремы Б1. Равносильность условий (1) и (2) следует непосредственно из определения взаимодействия, так как $(\varphi|^0_D, \chi)_G = \frac{1}{|G|} \sum_{d\in D} \varphi(d)\overline{\chi(d)}$. Докажем равносильность условий (2) — (4).

Пусть k — число классов сопряженных элементов в G; $g_1, \ldots, g_k$ — представители этих классов; $\mathrm{Irr}(G) = \{\chi_1, \ldots, \chi_k\}$. Рассмотрим $k\times k$-матрицу Y над C такую, что $Y_{ij} = \chi_i(g_j)\sqrt{|C_G(g_j)|^{-1}}$. Из соотношений $(YY^*)_{ij} = \sum_{m=1}^{k} Y_{im}\overline{Y_{jm}} =$

$$= \sum_{m=1}^{k} \frac{\chi_i(g_m)\overline{\chi_j(g_m)}}{|C_G(g_m)|} = (\chi_i, \chi_j)_G = \delta_{ij}$$ следует, что $YY^* = E$, т. е. матрица Y — унитарная.

Предположим, что нумерация классов сопряженных элементов и нумерация неприводимых характеров группы G выбраны так, что

$$D=\bigcup_{l=1}^{t} g_l^G \text{ и } \Phi=\{\chi_1, \ldots, \chi_l\}.$$

Запишем матрицу Y в клеточной форме

$$\mathrm{Y}=\begin{pmatrix}\mathrm{A} & \mathrm{B}\\ \mathrm{C} & \mathrm{D}\end{pmatrix},$$

где верхние клетки имеют l строк, а левые — t столбцов.

Выразим условия (2) — (4) теоремы **Б1** в терминах матриц A, B, C, D. Пусть $\varphi\in\Phi$ и $\chi\in\Phi^-$. Тогда $\varphi=\chi_i$, где $1\leqslant i\leqslant l$, и $\chi=\chi_{l+j}$, где $1\leqslant j\leqslant k-l$. Имеем

$$\sum_{d\in D}\varphi(d)\overline{\chi(d)}=\sum_{m=1}^{t}\chi_i(g_m)\overline{\chi_{l+j}(g_m)}\frac{|G|}{|C_G(g_m)|}=$$

$$=|G|\sum_{m=1}^{t}\mathrm{A}_{im}(\mathrm{C}^*)_{mj}=|G|(\mathrm{AC}^*)_{ij}.$$

Отсюда следует, что условие (2) равносильно матричному равенству $\mathrm{AC}^*=\mathrm{O}$.

Подобно доказывается, что условие (3) равносильно равенству $\mathrm{A}^*\mathrm{B}=\mathrm{O}$, а условие (4) — равенству $\mathrm{AA}^*\mathrm{A}=\mathrm{A}$. Но по лемме **Б2** равенства $\mathrm{AC}^*=\mathrm{O}$, $\mathrm{A}^*\mathrm{B}=\mathrm{O}$ и $\mathrm{AA}^*\mathrm{A}=\mathrm{A}$ равносильны между собой.

□

Отметим, что равносильность условий (2) и (3), по-существу, была доказана в работе Иизуки и Накаямы [69] (другим методом).

Из равносильности условий (1) — (3) теоремы **Б1** легко получаются следующие два утверждения.

Б3. Равносильны условия:

(1) $D\longleftrightarrow\Phi$;

(2) $D^-\longleftrightarrow\Phi$;

(3) $D\longleftrightarrow\Phi^-$;

(4) $D^{-1}\equiv\{d^{-1}|d\in D\}\longleftrightarrow\Phi$;

(5) $D\longleftrightarrow\overline{\Phi}\equiv\{\overline{\varphi}|\varphi\in\Phi\}$.

□

Б4. Пусть D, D_1, D_2 — нормальные подмножества из G, а Φ, Φ_1, Φ_2 — подмножества из $\mathrm{Irr}(G)$.

1) Если $D_1\longleftrightarrow\Phi$ и $D_2\longleftrightarrow\Phi$, то $D_1\cap D_2\longleftrightarrow\Phi$, $D_1\cup D_2\longleftrightarrow\Phi$ и $D_1\setminus D_2\longleftrightarrow\Phi$.

2) Если $D\longleftrightarrow\Phi_1$ и $D\longleftrightarrow\Phi_2$, то $D\longleftrightarrow\Phi_1\cap\Phi_2$, $D\longleftrightarrow\Phi_1\cup\cup\Phi_2$ и $D\longleftrightarrow\Phi_1\setminus\Phi_2$.

□

Б5. Обозначение. Пусть $\Phi \subseteq \mathrm{Irr}(G)$ и $D \trianglelefteq G$. Если X — таблица характеров группы G, то $X(\Phi, D)$ обозначает подматрицу из X, лежащую на пересечении строк, соответствующих характерам из Φ, и столбцов, соответствующих элементам из D. Часто, употребляя букву X в обозначении $X(\Phi, D)$, мы будем подразумевать, хотя и не оговаривать, что она обозначает таблицу характеров группы G (однозначно определяемой по Φ).

Утверждение **Б1** ((1) $\Rightarrow$ (4)) указывает полезное применение информации о взаимодействии $D \longleftrightarrow \Phi$ для определения строения группы G. Из него вытекает, например, следующий результат.

Б6. Пусть $D \longleftrightarrow \Phi$, причем известен фрагмент $X(\Phi, D)$ таблицы характеров группы G и порядки классов $d_1^G, \ldots, d_t^G$, из которых состоит D. Тогда, если $\varphi_0(d_0) \neq 0$ для некоторых $\varphi_0 \in \Phi$ и $d_0 \in D$, то можно вычислить порядок группы G:

$$|G| = \varphi_0(d_0)^{-1} \sum_{i=1}^{t} |d_i^G| \varphi_0(d_i) \sum_{\varphi \in \Phi} \overline{\varphi(d_i)} \varphi(d_0).$$

□

Так, если G имеет следующий расширенный фрагмент таблицы характеров:

g	d_1	d_2
$\lvert g^G \rvert$	990	990
φ_1	$i\sqrt{2}$	$-i\sqrt{2}$
φ_2	$-i\sqrt{2}$	$i\sqrt{2}$

и известно, что $d_1^G \cup d_2^G \longleftrightarrow \{\varphi_1, \varphi_2\}$, то по **Б6**, взяв $\varphi_0 = \varphi_1$ и $d_0 = d_1$, найдем $|G| = 990 \left(\sum_{j=1}^{2} \overline{\varphi_j(d_1)} \varphi_j(d_1) - \sum_{j=1}^{2} \overline{\varphi_j(d_2)} \varphi_j(d_1) \right) = 7920$. Эта ситуация встречается в группе Матье M_{11}.

На самом деле **Б6** — лишь очень частный случай утверждения **Б1** ((1) $\Rightarrow$ (4)). Если $D = d_1^G \dot\cup \ldots \dot\cup d_t^G$, то условие **Б1** (4) дает систему линейных уравнений

$$\sum_{i=1}^{t} \left(\sum_{\varphi \in \Phi} \varphi_0(d_i) \overline{\varphi(d_i)} \varphi(d_0) \right) \frac{1}{|C_G(d_i)|} = \varphi_0(d_0)$$

($(\varphi_0, d_0) \in \Phi \times D$) относительно неизвестных $\frac{1}{|C_G(d_i)|}$. В ряде случаев уже эта система позволяет найти порядки многих (иногда всех) этих централизаторов и (если $1 \in D$) $|G|$ (см. **Б7** и §§ 8Б—Г).

Б7. Упражнение. Пусть $D \longleftrightarrow \Phi$ и

$$\mathrm{X}(\Phi, D) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Показать, что $1 \in D$ и найти порядки централизаторов всех элементов из D в группе G. (Можно доказать даже, что $G \simeq A_5$; см. 8Б4)

Отметим теперь одно свойство взаимодействия, вытекающее непосредственно из определения А3(1).

Б8. Пусть $D \trianglelefteq G$, $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_l\} \subseteq \mathrm{Irr}(G)$ и $D \longleftrightarrow \Phi$. По **А3(1)** существует (очевидно, единственная) $l \times l$-матрица a над $\boldsymbol{C}$, такая, что

$$\varphi_i\Big|_D^0 = \sum_{j=1}^{l} \mathrm{a}_{ij}\varphi_j \quad (i = 1, \ldots, l).$$

Тогда

1) $\mathrm{a}^2 = \mathrm{a} = \mathrm{a}^*$;

2) ранг a равен рангу $\mathrm{X}(\Phi, D)$ для любой таблицы характеров X группы G.

Доказательство. 1): $\mathrm{a}_{ij} = \left(\varphi_i\Big|_D^0, \varphi_j\right)_G = \left(\varphi_i\Big|_D^0, \varphi_j\Big|_D^0\right)_G = \left(\sum_{m=1}^{l} \mathrm{a}_{im}\varphi_m, \sum_{m=1}^{l} \mathrm{a}_{jm}\varphi_m\right)_G = \sum_{m=1}^{l} \mathrm{a}_{im}\mathrm{a}_{jm} = (\mathrm{aa}^*)_{ij}$, т. е. $\mathrm{a} = \mathrm{aa}^*$. Поэтому $\mathrm{a}^* = \mathrm{a}$ и $\mathrm{a} = \mathrm{a}^2$.

2): Пусть $D = d_1^G \,\dot\cup\, \ldots \,\dot\cup\, d_t^G$. Ранг $\mathrm{X}(\Phi, D)$ не зависит от выбора X. Выберем X так, что $\mathrm{X}(\Phi, D)_{ij} = \varphi_i(d_j)$. Имеем $\mathrm{a}_{ij} = \left(\varphi_i\Big|_D^0, \varphi_j\right)_G = \sum_{n=1}^{t} \frac{\varphi_i(d_n)\overline{\varphi_j(d_n)}}{|C_G(d_n)|} = (\mathrm{X}(\Phi, D)\,\mathrm{T}\,\mathrm{X}(\Phi, D)^*)_{ij}$, где $\mathrm{T} = \mathrm{diag}(|C_G(d_1)|, \ldots, |C_G(d_t)|)^{-1}$. Значит,

$$\mathrm{a} = \mathrm{X}(\Phi, D)\,\mathrm{T}\,\mathrm{X}(\Phi, D)^* = \mathrm{MM}^*,$$

где $\mathrm{M} = \mathrm{X}(\Phi, D)\sqrt{\mathrm{T}}$. Но ранг MM^* = ранг M для любой матрицы M над $\boldsymbol{C}$, что следует из существования псевдообратной матрицы [18, с. 34—35]. Следовательно, ранг a = ранг M = ранг $\mathrm{X}(\Phi, D)$.

□

Б9. Упражнение. Пусть X — таблица характеров группы G, $D \trianglelefteq G$ и $\Phi \subseteq \mathrm{Irr}(G)$. Пусть $\mathrm{X}(\Phi, D)$ имеет t столбцов, которым соответствуют элементы $d_1, \ldots, d_t$ соответственно. Равносильны условия:

(1) $D \longleftrightarrow \Phi$ и ранг $X(\Phi, D) = t$;

(2) $X(\Phi, D)^* X(\Phi, D) = \mathrm{diag}(|C_G(d)|, \ldots, |C_G(d_t)|)$;

(3) $X(\Phi^-, D) = O$.

Б10. Упражнение. Пусть выполнено условие из **Б9** и $T = \mathrm{diag}(|C_G(d_1)|, \ldots, |C_G(d_t)|)^{-1}$. Равносильны условия:

1) $D \longleftrightarrow \Phi$ и ранг $X(\Phi, D) = |\Phi|$;

2) $X(\Phi, D)\,T X(\Phi, D)^* = E$;

3) $X(\Phi, D^-) = O$.

Б11. Упражнение. Если $D \longleftrightarrow \Phi$ и матрица $X(\Phi, D)$ — квадратная невырожденная ($D \trianglelefteq G$, $\Phi \subseteq \mathrm{Irr}(G)$), то $D = G$ и $\Phi = \mathrm{Irr}(G)$.

Сформулируем теперь один результат, доказательство которого получим в следующих параграфах.

Б12. Теорема. Пусть $D \trianglelefteq G$, $\Phi \subseteq \mathrm{Irr}(G)$ и X — таблица характеров группы G. Равносильны условия:

(1) $D \longleftrightarrow \Phi$;

(2) ненулевая линейная комбинация строк матрицы $X(\Phi, D)$ не может быть одновременно линейной комбинацией строк матрицы $X(\Phi^-, D)$;

(3) ненулевая линейная комбинация столбцов матрицы $X(\Phi, D)$ не может быть одновременно линейной комбинацией столбцов матрицы $X(\Phi, D^-)$.

Равносильность условий (1) и (2) следует из **В3**((1) $\Leftrightarrow$ (2)), а равносильность условий (1) и (3) — из **Г8** ((1) $\Leftrightarrow$ (2)) и **Г5**.

§ В. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ НА ЯЗЫКЕ КЛАССОВЫХ ФУНКЦИЙ

В1. Теорема. Пусть G — конечная группа, $D \trianglelefteq G$ и $\Phi \subseteq \mathrm{Irr}(G)$. Равносильны условия:

(1) $D \longleftrightarrow \Phi$;

(2) $\alpha_\Phi|^0_D = (\alpha|^0_D)_\Phi$ для всех $\alpha \in \mathrm{CF}(G)$;

(3) Для любой функции $\alpha \in \mathrm{CF}(G)$, исчезающей на $G \setminus D$, ее Φ-срезка α_Φ также исчезает на $G \setminus D$;

(4) Всякая функция f из G в $\mathbf{C}$, удовлетворяющая условию

$$\sum_{g \in G} f(g)\varphi(g) = 0 \text{ для всех } \varphi \in \Phi,$$

удовлетворяет также условию

$$\sum_{d \in D} f(d)\varphi(d) = 0 \text{ для всех } \varphi \in \Phi.$$

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2): Пусть $D \longleftrightarrow \Phi$. Тогда выполнены условия (2) и (4) теоремы **Б1**, из которых вытекают соответственно следующие соотношения для любой функции $\alpha \in CF(G)$:

(в1) $$\sum_{d \in D} \alpha(d) \overline{\varphi(d)} = \sum_{d \in D} \alpha_\Phi(d) \overline{\varphi(d)} \text{ при } \varphi \in \Phi,$$

(в2) $$\frac{1}{|G|} \sum_{d \in D} \sum_{\varphi \in \Phi} \alpha_\Phi(d) \overline{\varphi(d)} \varphi(d_0) = \alpha_\Phi(d_0) \text{ при } d_0 \in D.$$

Теперь

$\alpha_\Phi \big|_D^0 = \frac{1}{|G|} \sum_{d \in D} \sum_{\varphi \in \Phi} \alpha(d) \overline{\varphi(d)} \varphi$ {из (в1), (в2) и того факта, что правая часть исчезает вне D по условию (3) в **Б1**} $=$

$$= \sum_{\varphi \in \Phi} (\alpha \big|_D^0, \varphi)_G \varphi = (\alpha \big|_D^0)_\Phi.$$

(2) $\Rightarrow$ (3): Очевидно.

(3) $\Rightarrow$ (4): Для любого $d \in D$ классовая функция $\alpha_d \equiv \equiv \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \overline{\chi(d)} \chi$ исчезает на $G \setminus D$ по второму соотношению ортогональности. Если верно (4), то функция $(\alpha_d)_\Phi = \sum_{\varphi \in \Phi} \overline{\varphi(d)} \varphi$ также исчезает на $G \setminus D$. Это равносильно условию (3) теоремы **Б1**. Значит, $D \longleftrightarrow \Phi$, т. е. для всех $\varphi \in \Phi$

$$\varphi \big|_D^0 = \sum_{\psi \in \Phi} a_{\varphi, \psi} \psi, \text{ где } a_{\varphi, \psi} \in \boldsymbol{C}.$$

Пусть f — функция из G в $\boldsymbol{C}$ такая, что

$$\sum_{g \in G} f(g) \varphi(g) = 0 \text{ для всех } \varphi \in \Phi.$$

Тогда для любого $\varphi \in \Phi$ имеем

$$\sum_{d \in D} f(d) \varphi(d) = \sum_{g \in G} f(g) \varphi \big|_D^0(g) = \sum_{g \in G} f(g) \times$$
$$\times \sum_{\psi \in \Phi} a_{\varphi, \psi} \psi(g) = \sum_{\psi \in \Phi} a_{\varphi, \psi} \Big(\sum_{g \in G} f(g) \psi(g) \Big) = 0.$$

(4) $\Rightarrow$ (1): Для любого $\chi \in \Phi^-$ по первому соотношению ортогональности

$$\sum_{g \in G} \overline{\chi(g)} \varphi(g) = 0 \text{ для всех } \varphi \in \Phi,$$

откуда согласно 4) (при $f = \overline{\chi}$)

$$\sum_{d \in D} \overline{\chi(d)} \varphi(d) = 0 \text{ для всех } \varphi \in \Phi.$$

Но это равносильно условию (2) теоремы **Б1** и, следовательно, условию $D \longleftrightarrow \Phi$.

□

Как легко увидеть, теорема **B1** останется справедливой, если в условии (4) вместо «всякая функция» написать «всякая классовая функция».

B2. Определение. Пусть $D \trianglelefteq G$. $T = \{\tau_1, \ldots, \tau_l\}$ — база в $\mathrm{CF}(G)\big|^0_D$, $\mathrm{Irr}(G) = \{\chi_1, \ldots, \chi_k\}$ и

$$\chi_i\big|^0_D = \sum_{j=1}^{l} d_{ij}\tau_j \text{ с } d_{ij} \in \boldsymbol{C}\ (i = 1, \ldots, k).$$

T-графом группы G называется граф с множеством вершин $\mathrm{Irr}(G)$, в котором χ_i и χ_j соединены тогда и только тогда, когда $d_{im} \neq 0$ и $d_{jm} \neq 0$ при некотором m.

B3. Пусть $D \trianglelefteq G$ и $\Phi \subseteq \mathrm{Irr}(G)$. Равносильны условия:

(1) $D \longleftrightarrow \Phi$;

(2) $\mathrm{CF}(G)\big|^0_D = \boldsymbol{C}\left[\Phi\big|^0_D\right] \oplus \boldsymbol{C}\left[\Phi^-\big|^0_D\right]$;

(3) существует база T в $\mathrm{CF}(G)\big|^0_D$ такая, что Φ есть объединение всех вершин нескольких компонент связности T-графа группы G;

(4) $\boldsymbol{C}[\Phi] = \left(\mathrm{CF}(G)\big|^0_D\right)_\Phi \oplus \left(\mathrm{CF}(G)\big|^0_{D^-}\right)_\Phi$.

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2): Всегда

$$\mathrm{CF}(G)\big|^0_D = \boldsymbol{C}\left[\Phi\big|^0_D\right] + \boldsymbol{C}\left[\Phi^-\big|^0_D\right].$$

Если же $D \longleftrightarrow \Phi$ (и тогда $D \longleftrightarrow \Phi$ по **Б3**); то $\boldsymbol{C}\left[\Phi\big|^0_D\right] \subseteq \boldsymbol{C} \times [\Phi]$, $\boldsymbol{C}\left[\Phi^-\big|^0_D\right] \subseteq \boldsymbol{C}[\Phi\ ]$ и, значит, $\boldsymbol{C}\left[\Phi\big|^0_D\right] \cap \boldsymbol{C}\left[\Phi^-\big|^0_D\right] = O$.

(2) $\Rightarrow$ (1): Пусть α — классовая функция группы G, исчезающая на D. Тогда $0 = \alpha\big|^0_D = \alpha_\Phi\big|^0_D + \alpha_{\Phi^-}\big|^0_D$. Отсюда и из (2) следует, что $\alpha_\Phi\big|^0_D = 0$, т. е. α_Φ также исчезает на D. Теперь по теореме **B1** ((3) $\Rightarrow$ (1) с D^- в роли D) $D \longleftrightarrow \Phi$. Следовательно, $D \longleftrightarrow \Phi$.

(2) $\Rightarrow$ (3): Очевидно (возьмем $T = T_1 \cup T_2$, где T_1 — база в $\boldsymbol{C}\left[\Phi\big|^0_D\right]$ и T_2 — база в $\boldsymbol{C}\left[\Phi^-\big|^0_D\right]$).

(3) $\Rightarrow$ (2): Пусть верно (3). Для любого $\alpha \in \mathrm{CF}(G)$ имеется единственное разложение $\alpha\big|^0_D$ по базе T: $\alpha\big|^0_D = \sum_{\tau \in T} d_{\alpha\tau}\tau\ (d_{\alpha\tau} \in \boldsymbol{C})$. Положим $T_1 = \{\tau \in T \mid d_{\varphi\tau} \neq 0$ для некоторого $\varphi \in \Phi\}$ и $T_2 = \{\tau \in T \mid d_{\chi\tau} \neq 0$ для некоторого $\chi \in \Phi^-\}$. Тогда $T_1 \cap T_2 = \varnothing$ по свойству (3), $\boldsymbol{C}\left[\Phi\big|^0_D\right] \subseteq \boldsymbol{C}[T_1]$ и $\boldsymbol{C}\left[\Phi^-\big|^0_D\right] \subseteq \boldsymbol{C}[T_2]$. Следовательно, верно (2).

(1) $\Rightarrow$ (4): Для $\varphi \in \Phi$ имеем $\varphi = \varphi_\Phi = \left(\varphi\big|^0_D + \varphi\big|^0_{D^-}\right)_\Phi = \left(\varphi\big|^0_D\right)_\Phi + \left(\varphi\big|^0_{D^-}\right)_\Phi$. Значит, $\boldsymbol{C}[\Phi] = \left(\mathrm{CF}(G)\big|^0_D\right)_\Phi + \left(\mathrm{CF}(G)\big|^0_{D^-}\right)_\Phi$. Если теперь $D \longleftrightarrow \Phi$ (и тогда $D^- \longleftrightarrow \Phi$), то по теореме **B1** ((1) $\Rightarrow$ (4)) $\left(\mathrm{CF}(G)\big|^0_D\right)_\Phi \subseteq \mathrm{CF}(G)\big|^0_D$, $\left(\mathrm{CF}(G)\big|^0_{D^-}\right)_\Phi \subseteq \mathrm{CF}(G)\big|^0_{D^-}$ и, значит, последняя сумма прямая.

(4) $\Rightarrow$ (1): Пусть верно (4). Для любого $\chi \in \Phi^-$ имеем $0 = \chi_\Phi = (\chi|_D^0)_\Phi + (\chi|_{D-}^0)_\Phi$ и ввиду (4) $(\chi|_D^0)_\Phi = 0$, т. е. $\chi|_D^0 \subseteq C[\Phi^-]$. Значит, $D \leftarrow\!\!\rightarrow \Phi^-$ и $D \leftarrow\!\!\rightarrow \Phi$.

□

Теперь установим несколько общих следствий ситуации, рассмотренной в определении **B2**. Следующее утверждение будет использовано в главе 4.

B4. Теорема. Пусть G — конечная группа, $\operatorname{Irr}(G) = \{\chi_1, \ldots, \chi_k\}$, $D \trianglelefteq G$, $\{\tau_1, \ldots, \tau_l\}$ — база в $\mathrm{CF}(G)|_D^0$, d — $k \times l$-матрица над C и

$$\chi_i|_D^0 = \sum_{j=1}^{l} \mathrm{d}_{ij}\tau_j \quad (i = 1, \ldots, k). \tag{в3}$$

Положим

$$\psi_j = \sum_{j=1}^{k} \overline{\mathrm{d}_{ij}}\chi_i \quad (j = 1, \ldots, l),$$
$$\mathrm{c} = \mathrm{d}^*\mathrm{d}.$$

Тогда

1) матрица c невырождена;
2) $(\tau_i, \tau_j)_G = (\mathrm{c}^{-1})_{ij}$;
3) $\psi_i = \sum_{j=1}^{l} \mathrm{c}_{ij}\tau_j$, в частности, $\{\psi_1, \ldots, \psi_l\}$ — база в $\mathrm{CF}(G)|_D^0$;
4) $(\psi_i, \psi_j)_G = \mathrm{c}_{ij}$;
5) $(\tau_i, \psi_j)_G = \delta_{ij}$;
6) $\tau_i = \sum_{j=1}^{k} \mathrm{b}_{ij}\chi_j$, где $\mathrm{b} = \mathrm{c}^{-1}\mathrm{d}^*$;
7) $\chi_i|_D^0 = \sum_{j=1}^{k} \mathrm{a}_{ij}\chi_j$, где $\mathrm{a} = \mathrm{db} = \mathrm{dc}^{-1}\mathrm{d}^*$;
8) $\mathrm{a}^2 = \mathrm{a} = \mathrm{a}^*$, $\mathrm{ad} = \mathrm{d}$, $\mathrm{ba} = \mathrm{b}$.

Доказательство. Число классов сопряженных элементов группы G, из которых состоит D, очевидно, равно размерности l пространства $\mathrm{CF}(G)|_D^0$. Обозначим через $d_1, \ldots, d_l$ представителей этих классов и введем матрицы:

$$\chi \text{ — } k \times l\text{-матрица с } \chi_{ij} = \chi_i(d_j);$$

$$\tau \text{ — } l \times l\text{-матрица с } \tau_{ij} = \tau_i(d_j);$$

$$\psi \text{ — } l \times l\text{-матрица с } \psi_{ij} = \psi_i(d_j).$$

Согласно второму соотношению ортогональности

$$\chi^*\chi = \operatorname{diag}(|C_G(d_1)|, \ldots, |C_G(d_l)|). \tag{в4}$$

Теперь перейдем к доказательству утверждений 1) — 8).

1): По (в3) $\chi = \mathrm{d}\tau$, откуда

$$\chi^*\chi = \tau^*\mathrm{d}^*\mathrm{d}\tau = \tau^*\mathrm{c}\tau \tag{в5}$$

и, значит, c и τ — невырождены.

2): Из (в5) получаем

$$\mathrm{c}^{-1} = \tau(\chi^*\chi)^{-1}\tau^*. \tag{в6}$$

Отсюда $(\mathrm{c}^{-1})_{ij} = \sum_{m=1}^{l}\sum_{n=1}^{l} \tau_i(d_m)\frac{\delta_{mn}}{|C_G(d_m)|}\overline{\tau_j(d_n)} = \frac{1}{|G|}\sum_{m=1}^{l}\tau_i(d_m)\times$

$\times |d_m^G|\overline{\tau_j(d_m)} = \frac{1}{|G|}\sum_{d\in D}\tau_i(d)\overline{\tau_j(d)} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\tau_i(g)\overline{\tau_j(g)} = (\tau_i, \tau_j)_G$.

3): Сначала покажем, что ψ_i исчезает на $G\setminus D$. Пусть $g\in G\setminus D$. По второму соотношению ортогональности

$$\sum_{i=1}^{k}\chi_i(d_m)\overline{\chi_i(g)} = 0 \text{ при } m = 1, \ldots, k.$$

Но $\sum_{i=1}^{k}\chi_i(d_m)\overline{\chi_i(g)} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}\mathrm{d}_{ij}\tau_j(d_m)\overline{\chi_i(g)} = \sum_{j=1}^{l}\tau_j(d_m)\sum_{i=1}^{k}\mathrm{d}_{ij}\overline{\chi_i(g)} =$

$= \sum_{j=1}^{l}\tau_j(d_m)\overline{\psi_j(g)}$.

Следовательно,

$$\sum_{j=1}^{l}\tau_j(d_m)\overline{\psi_j(g)} = 0 \text{ при } m = 1, \ldots, l.$$

Получилась система l однородных линейных уравнений с l неизвестными $\overline{\psi_j(g)}$. Так как матрица этой системы есть τ, которая невырождена, как показано при доказательстве пункта 1), то система имеет лишь нулевое решение, т. е. $\psi_j(g) = 0$ при $j = 1, \ldots, l$.

Теперь имеем $\psi_j = \psi_j|_D^0 = \sum_{i=1}^{k}\overline{\mathrm{d}_{ij}}\chi_i|_D^0 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{m=1}^{l}\overline{\mathrm{d}_{ij}}$

$\mathrm{d}_{im}\tau_m = \sum_{m=1}^{l}\mathrm{c}_{jm}\tau_m$.

Так как матрица c невырождена, то $\{\psi_1, \ldots, \psi_l\}$ — база в $\mathrm{CF}(G)|_D^0$.

4): Умножая (в6) слева и справа на c и учитывая, что $\mathrm{c}=\mathrm{c}^*$ и $\mathrm{c}\tau = \psi$ (согласно 3)), получаем

$$\mathrm{c} = \psi(\chi^*\chi)^{-1}\psi^*.$$

Отсюда таким же образом, как при доказательстве 2), выводим $\mathrm{c}_{ij} = (\psi_i, \psi_j)_G$.

5): Умножив (в6) справа на $c\,(=c^*)$, получим

$$E=\tau(\chi^*\chi)^{-1}\psi^*,$$

откуда $\delta_{ij}=(\tau_i,\ \psi_j)_G$.

6): Используя (в3) и 2), получаем

$$b_{ij}=(\tau_i,\ \chi_j)_G=(\tau_i,\ \chi_j\,|\,{}^0_D)_G=\left(\tau_i,\ \sum_{m=1}^{l}d_{jm}\tau_m\right)_G=\sum_{m=1}^{l}\overline{d_{jm}}\times$$

$$\times(\tau_i,\ \tau_m)_G=\sum_{m=1}^{l}\overline{d_{jm}}(c^{-1})_{im}=(c^{-1}d^*)_{il}.$$

7): $$a_{ij}=(\chi_i\,|\,{}^0_D,\ \chi_j)_G=\left(\sum_{m=1}^{l}d_{im}\tau_m,\ \chi_j\right)_G=\sum_{m=1}^{l}d_{im}(\tau_m,\ \chi_j)_G=$$

$$=\sum_{m=1}^{l}d_{im}b_{mj}=(db)_{il}.$$

8): Непосредственно следует из 7).

□

В5. Замечание. Отметим полученные в доказательстве **В4** равенства:

$$a\chi=\chi \ \text{ и } \ \chi\tau^{-1}=d.$$

Отсюда и из условий 6) — 8), в частности, следует, что для любой матрицы m равносильны условия:

$$ma=a,\ m\chi=\chi,\ md=d,\ mb^*=b^*.$$

§ Г ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ НА ЯЗЫКЕ ГРУППОВОЙ АЛГЕБРЫ

Приведем несколько условий, равносильных условию $D\longleftrightarrow\Phi$, в формулировках которых участвуют элементы и C-подпространства центра $Z(CG)$ групповой алгебры CG группы G.

Г1. Всюду в этом параграфе используются следующие обозначения:

$C_1,\ \ldots,\ C_h$ — все классы сопряженных элементов группы G;

$g_i\in C_i$;

$\widetilde{C_i}=\sum_{g\in C_i}g\in Z(CG)$ — классовые суммы

$k_i=\dfrac{1}{\sqrt{|C_i|}}\widetilde{C_i}.$

Для $\alpha\in CF(G)$ и $z=\sum_{g\in G}a_g g$ $(a_g\in C)$ положим

$$\alpha(z)=\sum_{g\in G}a_g\alpha(g).$$

По 1Ё7 $Z(CG)=C\widetilde{C_1}\oplus\ \ldots\ \oplus C\widetilde{C_k}$. В $Z(CG)$, как векторном пространстве над C, введем скалярное произведение $(\ ,\ )_G$ и два линейных преобразования, связанных с D и Φ.

Г2. Определение. Для $y,\ z\in Z(CG)$ положим

$$(y,\ z)_G=\frac{1}{|G|}\sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(G)}\chi(y)\overline{\chi(z)}.$$

Очевидно, что ($z,\ y_j,\ z_i\in Z(CG);\ a_i,\ b_j\in C$)

(г1) $$(y,\ z)_G=\overline{(z,\ y)_G};$$

(г2) $$\left(\sum_i a_iz_i,\ \sum_j b_jy_j\right)_G=\sum_{i,\ j}a_i\overline{b_j}(z_i,\ y_j)_G;$$

(г3) $$(\widetilde{C_i},\ \widetilde{C_j})_G=\delta_{ij}\,|C_i|;$$

(г4) $$(k_i,\ k_j)_G=\delta_{ij};$$

(г5) $$z=\sum_{i=1}^{k}\frac{(z,\ \widetilde{C_i})_G}{|C_i|}\widetilde{C_i};$$

(г6) $$z=\sum_{i=1}^{k}(z,\ k_i)_Gk_i.$$

Г3. Определение. Пусть G — конечная группа; $\chi\in\mathrm{Irr}(G)$ и $\Phi\subseteq\mathrm{Irr}(G)$. Положим

$$e_\chi=\sum_{g\in G}\frac{\chi(1)\overline{\chi(g)}}{|G|}g,$$

$$e_\Phi=\sum_{\varphi\in\Phi}e_\varphi$$

($e_\Phi=0$ при пустом Φ). Если $z\in Z(CG)$, то элемент ze_Φ назовем *Φ-срезкой* элемента z и будем обозначать через $z|_\Phi^0$.

Г4. Определение. Пусть $D\trianglelefteq G$. Для $z\in Z(CG)$ положим

$$z_D=\sum_{C_i\subseteq D}(z,\ k_i)_Gk_i.$$

(Другими словами, если $z=\sum\limits_{i=1}^{k}a_i\widetilde{C_i}\ (a_i\in C)$, то $z_D=\sum\limits_{C_i\subseteq D}a_i\widetilde{C_i}$.) $_D$ назовем *D-срезкой* элемента z.

Очевидно, что отображения $z\longmapsto z|_\Phi^0$ и $z\longmapsto z_D\ (z\in Z(CG))$ являются линейными операторами пространства $Z(CG)$.

Элементарные свойства элементов e_χ, которые нам потребуются, собраны в следующей лемме.

Г5. Лемма. Пусть $y, z \in Z(CG)$ и $\{\varphi, \psi\} \cup \Phi \subseteq \mathrm{Irr}(G)$. Тогда

1) $\varphi(e_\psi) = \delta_{\varphi,\psi}\varphi(1)$,

2) $(z, e_\varphi)_G = \dfrac{\varphi(1)\varphi(z)}{|G|}$,

3) $z = \sum\limits_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \dfrac{\chi(z)}{\chi(1)} e_\chi$ $\left(\text{в частности, } 1 = \sum\limits_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} e_\chi\right)$,

4) $Z(CG) = \bigoplus\limits_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} Ce_\chi$,

5) $y = z \Leftrightarrow \chi(y) = \chi(z)$ для всех $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$,

6) $e_\varphi e_\psi = \delta_{\varphi,\psi} e_\varphi$,

7) если $z = \sum\limits_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} a_\chi e_\chi \, (a_\chi \in C)$, то $z|_\Phi^0 = \sum\limits_{\varphi \in \Phi} a_\varphi e_\varphi$, в частности,

$$z|_\Phi^0 = \sum_{\varphi \in \Phi} \frac{\varphi(z)}{\varphi(1)} e_\varphi,$$

8) $\widetilde{C}_i|_\Phi^0 = \sum\limits_{j=1}^{k} u_{ij}\widetilde{C}_j$, где $u_{ij} = \sum\limits_{\varphi \in \Phi} \dfrac{\varphi(g_i)\overline{\varphi(g_j)}}{|C_G(g_i)|}$.

9) Если $e \in Z(CG)$ и $e^2 = e$, то $e = e_\Phi$ для некоторого $\Phi \subseteq \mathrm{Irr}(G)$.

Доказательство. 1): Следует из первого соотношения ортогональности.

2): Ввиду 1) $(z, e_\varphi)_G = \dfrac{1}{|G|} \sum\limits_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \chi(z)\overline{\chi(e_\varphi)} = \dfrac{\varphi(z)\varphi(1)}{|G|}$.

3): Пусть $\mathrm{Irr}(G) = \{\chi_1, \ldots, \chi_k\}$ и X — таблица характеров G: $X_{ij} = \chi_i(g_j)$. Из соотношений ортогональности непосредственно следует, что матрица X невырожденная, а именно,

$$X^{-1} = \mathrm{diag}(|C_G(g_1)|, \ldots, |C_G(g_k)|^{-1})X^*.$$

Теперь, решая в пространстве $Z(CG)$ систему уравнений

$$e_\chi = \sum_{i=1}^{k} \frac{\chi(1)\overline{\chi(g_i)}}{|G|}\widetilde{C}_i \quad (\chi \text{ пробегает } \mathrm{Irr}(G))$$

относительно $\widetilde{C}_i$ $\left(\text{матрица этой системы есть } \dfrac{1}{|G|}\mathrm{diag}(\chi_1(1), \ldots, \chi_k(1))\overline{X}\right)$, получаем

$$\widetilde{C}_i = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \frac{|C_i|\chi(g_i)}{\chi(1)} e_\chi.$$

Отсюда следует утверждение 3).

4): По 2) и 1)

$$(e_\varphi, e_\psi)_G = \delta_{\varphi,\psi}\frac{\varphi(1)^2}{|G|}$$

и, следовательно, элементы e_χ для $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ линейно независимы. Отсюда и из 3) вытекает 4).

5): Следует из 3).

6): Для $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ и для $z_1, z_2 \in Z(CG)$ имеем

$$\chi(z_1 z_2) = \frac{\chi(z_1)\chi(z_2)}{\chi(1)}$$

(2A9 (3)). Поэтому ввиду 1)

$$\chi(e_\varphi e_\psi) = \chi(e_\varphi)\chi(e_\psi)\chi(1)^{-1} = \chi(1)\delta_{\chi,\varphi}\delta_{\chi,\psi} = \chi(1)\delta_{\varphi,\psi}\delta_{\chi,\varphi} =$$
$$= \chi(\delta_{\varphi,\psi}e_\varphi) \text{ для всех } \chi \in \mathrm{Irr}(G).$$

Отсюда в силу 5) следует из 6).

7): Непосредственно следует из 6).

8): Следует из 7).

9): По 4) $e = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} a_\chi e_\chi$, где $a_\chi \in C$. По 6) $e^2 = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \times$ $\times a_\chi^2 e_\chi$. Следовательно, по 4) из $e^2 = e$ следует, что $a_\chi = a_\chi^2$, т. е. $a_\chi \in \{0, 1\}$. Поэтому $e = e_\Phi$, где $\Phi \subseteq \{\chi \in \mathrm{Irr}(G) \mid a_\chi = 1\}$.

□

Г6. Пусть $D \trianglelefteq G$, $\Phi \subseteq \mathrm{Irr}(G)$, $\alpha \in \mathrm{CF}(G)$ и $z \in Z(CG)$. Тогда

1) $\alpha(z|^0_\Phi) = \alpha_\Phi(z)$;

2) $\alpha(z_D) = \alpha|^0_D(z)$.

Доказательство. 1): Применяя утверждения 7) и 1) из **Г5**, получаем

$$\overline{\alpha(z|^0_\Phi)} = \sum_{\varphi \in \Phi} \frac{\varphi(z)}{\varphi(1)}\alpha(e_\varphi) = \sum_{\varphi \in \Phi} \frac{\varphi(z)}{\varphi(1)}(\alpha, \varphi)_G \varphi(1) =$$
$$= \sum_{\varphi \in \Phi} (\alpha, \varphi)_G \varphi(z) = \alpha_\Phi(z).$$

2): $\alpha(z_D) = \alpha|^0_D(z_D) = \alpha|^0_D(z)$.

□

Г6 в сочетании с **Г5** (5) позволяет некоторые утверждения о классовых функциях переформулировать на языке элементов из $Z(CG)$ и наоборот.

Г7. Теорема. Пусть G — конечная группа, $D \trianglelefteq G$ и $\Phi \subseteq \mathrm{Irr}(G)$. Равносильны условия:

(0) $D \longleftrightarrow \Phi$;

(1) для любого класса C_i, содержащегося в D, $\widetilde{C_i}|^0_\Phi$ есть линейная комбинация классовых сумм $\widetilde{C_j}$ для $C_j \subseteq D$;

(2) $z_D|_\Phi^0 = (z|_\Phi^0)_D$ для всех $z \in Z(CG)$;

(3) для любого $z \in Z(CG)$ из $z|_\Phi^0 = z$ следует $z_D|_\Phi^0 = z_D$;

(4) всякая функция f из $\mathrm{Irr}(G)$ в C, удовлетворяющая условию

$$\sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} f(\chi)\chi(d) = 0 \text{ для всех } d \in D,$$

удовлетворяет также условию

$$\sum_{\varphi \in \Phi} f(\varphi)\varphi(d) = 0 \text{ для всех } d \in D.$$

Доказательство. (0) $\Rightarrow$ (1): Это следует из **Г5** (8) и из равносильности условий (1) и (3) теоремы **Б1**.

(0) $\Rightarrow$ (2): Для всех $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ и $z \in Z(CG)$ с помощью **Г6** получаем

$$\chi(z_D|_\Phi^0) = \chi_\Phi(z_D) = \chi_\Phi|_D^0(z),$$
$$\chi((z|_\Phi^0)_D) = \chi|_D^0(z|_\Phi^0) = (\chi|_D^0)_\Phi(z).$$

Если $D \longleftrightarrow \Phi$, то по **В1** выполнено условие (2) из **В1**, согласно которому правые части записанных выше равенств совпадают. Следовательно, равны и левые их части. Но отсюда по **Г5** (5) следует (2).

(2) $\Rightarrow$ (3): Очевидно.

(3) $\Rightarrow$ (4): Пусть $\varphi \in \Phi$ и $\chi \in \Phi^-$. Так как $e_\varphi|_\Phi^0 = e_\varphi$ по **Г5** (6), то из (3) следует, что $(e_\varphi)_D|_\Phi^0 = (e_\varphi)_D$. Поэтому $0 = \chi((e_\varphi)_D) = \frac{\varphi(1)}{|G|}\sum_{d\in D}\overline{\varphi(d)}\chi(d)$. Отсюда ввиду равносильности условий (1) и (2) теоремы **Б1** $D \longleftrightarrow \Phi$. Поскольку уже доказано, что (0) $\Rightarrow$ (1), то для всех $C_i \subseteq D$ имеем

$$\widetilde{C}_i|_\Phi^0 = \sum_{C_j \subseteq D} u_{ij}\widetilde{C}_j.$$

Теперь из того, что

$$\sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} f(\chi)\chi(d_i) = 0 \text{ для всех } d_i \in C_i \subseteq D$$

(f — функция из $\mathrm{Irr}(G)$ в C), получаем

$$\sum_{\varphi\in\Phi} f(\varphi)\varphi(d_i) = \frac{1}{|C_i|}\sum_{\varphi\in\Phi} f(\varphi)\varphi(\widetilde{C}_i) = \frac{1}{|C_i|}\sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(G)} f(\chi)\chi(\widetilde{C}_i|_\Phi^0) =$$
$$= \frac{1}{|C_i|}\sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(G)} f(\chi)\sum_{C_j\subseteq D} u_{ij}\chi(\widetilde{C}_j) = \frac{1}{|C_i|}\sum_{C_j\subseteq D} u_{ij}\times$$
$$\times\left(\sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(G)} f(\chi)\chi(\widetilde{C}_j)\right) = 0.$$

(4) $\Rightarrow$ (0): Доказывается подобно утверждению (4) $\Rightarrow$ (1) теоремы **В1**.

$\llcorner$

Г8. Пусть $D \trianglelefteq G$, $\Phi \subseteq \mathrm{Irr}(G)$, $\hat{D} = \{\widetilde{C_i} | C_i \subseteq D\}$ и $\hat{D}^- = \{\widetilde{C_i} | C_i \subseteq D^-\}$.

Равносильны условия:

(1) $D \longleftrightarrow \Phi$;

(2) $Z(\boldsymbol{C}G)|_{\Phi}^{0} = \boldsymbol{C}[\hat{D}|_{\Phi}^{0}] \oplus \boldsymbol{C}[\hat{D}^-|_{\Phi}^{0}]$;

(3) $\boldsymbol{C}[\hat{D}] = (Z(\boldsymbol{C}G)|_{\Phi}^{0})_D \oplus (\hat{Z}(\boldsymbol{C}G)|_{\Phi^-}^{0})_D$.

Доказательство подобно (двойственно) доказательству **В3.** (Условие, двойственное условию (3), здесь опущено.)

□

§ Д. D-БЛОКИ И p-БЛОКИ

Напомним, что D-блок группы G — это минимальное непустое подмножество из $\mathrm{Irr}(G)$, взаимодействующее с D ($D \trianglelefteq G$). Следовательно:

Д1. Для любого D-блока Φ выполнены условия (2) — (4) теоремы **Б1**, условия (2) — (4) теоремы **В1** и условия (1) — (4) теоремы **Г7.**

Сейчас мы определим один очень важный частный случай D-блоков — p-блоки. Напомним, что $G_{p'}$ обозначает множество всех p'-элементов группы G.

Д2. Определение. Пусть p — простое число. *p-блоком* группы G называется D-блок группы G при $D = G_{p'}$.

Позже (§ 5А) будет доказана равносильность этого определения классическому определению p-блока, принадлежащему Р. Брауэру. Преимущество данного здесь определения состоит в том, что оно не зависит от выбора в $\hat{Z}$ максимального идеала $\mathfrak{p}$, содержащего p.

В этом параграфе рассматриваются в основном свойства произвольных D-блоков. Они присущи, в частности, и p-блокам. Специальные свойства p-блоков будут изучаться в главе 5.

В конце параграфа упоминаются другие частные случаи D-блоков: π-блоки и блоки Осимы.

Д3. Понятия D-блока, $(G \setminus D)$-блока и D^{-1}-блока совпадают.

Доказательство непосредственно вытекает из **Б3.**

□

Д4. Пусть $\mathrm{B}_1, \ldots, \mathrm{B}_t$ — все D-блоки группы G. Тогда

1) $\mathrm{B}_i \cap \mathrm{B}_j = \varnothing$ при $i \neq j$;

2) $\bigcup_{i=1}^{t} \mathrm{B}_i = \mathrm{Irr}(G)$;

3) каждое непустое подмножество из $\mathrm{Irr}(G)$, взаимодействующее с D, является объединением некоторых B_i;

4) $\mathrm{CF}(G)|_D^0 = \bigoplus_{i=1}^{t} \mathbf{C}\left[\mathrm{B}_i|_D^0\right]$.

Доказательство. Следует из **Б3**, **Б4** и **В3**.

□

Д5. Определение. Пусть χ, $\psi \in \mathrm{Irr}(G)$. Скажем, что χ и ψ *непосредственно D-связаны*, если

(д1) $$\sum_{d \in D} \chi(d)\overline{\psi(d)} \neq 0.$$

χ и ψ называются *D-связанными*, если либо $\chi = \psi$, либо существует последовательность $\chi_1, \ldots, \chi_n$ характеров из $\mathrm{Irr}(G)$ такая, что $\chi_1 = \chi$, $\chi_n = \psi$ и χ_i непосредственно D-связан с χ_{i+1} при $i \in \{1, \ldots, n-1\}$.

В случае, когда D — множество всех p'-элементов из G (p — простое число), D-связанные характеры будем называть *p-связанными*.

Заметим, что условие (д1) равносильно каждому из условий:

$$\psi \in \mathrm{Irr}(\chi|_D^0) \text{ и } \chi \in \mathrm{Irr}(\psi|_D^0).$$

Рассмотрим граф $\Gamma(G, D)$ с множеством вершин $\mathrm{Irr}(G)$ и множеством ребер $\{\{\chi, \psi\} \mid \chi, \psi \in \mathrm{Irr}(G), \chi \neq \psi, \chi$ и ψ непосредственно D-связаны$\}$. Из равносильности условий (1) и (2) теоремы **Б1** легко следует, что D-блоки группы G — это в точности множества всех вершин компонент связанности графа $\Gamma(G, D)$. Другими словами:

Д6. Два неприводимых характера χ и ψ группы G принадлежат к одному D-блоку, если и только если они D-связаны. В частности, χ и ψ лежат в одном p-блоке, если и только если они p-связаны.

□

Это дает практический способ вычисления D-блоков по таблице характеров. Пусть $D \trianglelefteq G$. Для χ, $\psi \in \mathrm{Irr}(G)$ положим $a_{\chi,\psi} = \sum_{d \in D} \chi(d)\overline{\psi(d)}$. Выберем $\chi_1 \in \mathrm{Irr}(G)$ и будем находить содержащий его D-блок B, добавляя постепенно к χ_1 другие характеры. Сначала, вычислив все $a_{\chi_1,\psi}$ для $\psi \in \mathrm{Irr}(G) \setminus \{\chi_1\}$, добавим к χ_1 все характеры, непосредственно D-связанные с χ_1. Получим последовательность

(д2) $$\chi_1, \ldots, \chi_k.$$

Если $k=1$, то $B=\{\chi_1\}$. Если $k>1$, то расширим (д2), добавив к ней характеры, непосредственно D-связанные с χ_2 и не записанные в ней ранее (для этого вычисляем $a_{\chi_2, \psi}$ для $\psi \in \mathrm{Irr}(G) \setminus \{\chi_1, \ldots, \chi_k\}$). Затем перейдем к χ_3 и т. д. Таким путем мы идем по последовательности (д2), вообще говоря, удлиняя ее. Если мы подошли к концу последовательности, не удлинив ее, то множество всех членов ее в этот момент и есть B. Подобно, рассмотрев $\mathrm{Irr}(G) \setminus B$ вместо $\mathrm{Irr}(G)$, найдем следующий D-блок, и т. д.

Д7. Пример. Рассмотрим таблицу характеров группы S_6.

g^G	1A	2A	2B	2C	3A	3B	4A	4B	5A	6A	6B
$\lvert g^G \rvert$	1	45	15	15	40	40	90	90	144	120	120
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	−1	−1	1	1	−1	1	1	−1	−1
χ_3	5	1	3	−1	2	−1	1	−1	0	0	0
χ_4	5	1	−3	1	2	−1	−1	−1	0	0	0
χ_5	5	1	1	−3	−1	2	−1	−1	0	1	0
χ_6	5	1	−1	3	−1	2	1	−1	0	−1	0
χ_7	9	1	−3	−3	0	0	1	1	−1	0	0
χ_8	9	1	3	3	0	0	−1	1	−1	0	0
χ_9	10	−2	2	−2	1	1	0	0	0	−1	1
χ_{10}	10	−2	−2	2	1	1	0	0	0	1	−1
χ_{11}	16	0	0	0	−2	−2	0	0	1	0	0

(Характер χ_3 принимает значение 1 на элементах из A_6 и значение -1 на элементах из $S_6 \setminus A_6$.)

Пусть D — множество всех 2-элементов из $S_6 \setminus A_6$, т. е. $D = 2B \cup 2C \cup 4A$. Найдем все D-блоки группы S_6.

Положим $a_{ij} = \sum_{d \in D} \chi_i(d) \overline{\chi_j(d)} = 15\chi_i(g_{2B}) \overline{\chi_j(g_{2B})} + 15\chi_i(g_{2C}) \times \times \overline{\chi_j(g_{2C})} + 90\chi_i(g_{4A}) \overline{\chi_j(g_{4A})}$, где $g_{2B} \in 2B$, $g_{2C} \in 2C$ и $g_{4A} \in 4A$. Сначала найдем D-блок B_1, содержащий главный характер χ_1. Вычисления показывают, что при $j>1$ $a_{1j} \neq 0$ в точности при $j \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$. Значит, в B_1 лежат характеры $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4, \chi_5, \chi_6$. Рассмотрение χ_2 не увеличивает эту последовательность ($a_{2j} = -a_{1j}$). Далее, видим, что при $j>6$ $a_{3j} \neq 0$ в точности при $j \in \{9, 10, 11\}$. Следовательно, характеры $\chi_6, \chi_{10}, \chi_{11}$ также лежат в B_1. Теперь можно убедиться, что

(д3) $$a_{ij} = 0, \text{ если } i \notin \{7, 8\} \text{ и } j \in \{7, 8\}.$$

Следовательно, $B_1 = \{\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4, \chi_5, \chi_6, \chi_9, \chi_{10}, \chi_{11}\}$. Кроме того, $a_{7,8} \neq 0$ и, значит, $B_2 = \{\chi_7, \chi_8\}$ — другой D-блок.

Заметим, что проверку условия (д3) можно заменить проверкой условия $D \longleftrightarrow \{\chi_7, \chi_8\}$ непосредственно с помощью определения **А2** (1); очевидно, $\chi_7 - \chi_8 = 2\chi_7 |_D^0 = -2\chi_3 |_D^0$.

Отметим, что если $D = d^G$ — класс сопряженных элементов, то D-блоки группы G определяются моментально: каждый характер χ с $\chi(d) = 0$ образует отдельный D-блок $\{\chi\}$, а остальные характеры из $\mathrm{Irr}(G)$ составляют еще один D-блок.

Д8. Пусть B — D-блок группы G. Равносильны условия:

(1) функции $\psi|_D^0$ при $\psi \in$ B все различны и линейно независимы;

(2) $\chi|_D^0 = \chi$ для некоторого $\chi \in$ B;

(3) $|B| = 1$ и $1 \in D$.

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2): Пусть выполнено условие (1), $B = \{\psi_1, \ldots, \psi_m\}$ и g — произвольный элемент из $G \setminus D$. По определению D-блока $D \longleftrightarrow$ B и по теореме **Б1**.

$$\text{(д4)} \qquad \sum_{i=1}^{m} \overline{\psi_i(d)}\, \psi_i(g) = 0 \text{ для всех } d \in D.$$

Это дает систему линейных однородных уравнений с m неизвестными $\psi_i(g)$. Матрица этой системы $(\psi_i(d))^*$ ($i \in \{1, \ldots, m\}$, $d \in D$) по условию (1) имеет ранг m. Следовательно (по теореме Крамера), система (д4) имеет единственное решение:

$$\psi_i(g) = 0 \quad (i = 1, \ldots, m).$$

Таким образом, $\psi_i|_D^0 = \psi_i$ и выполнено условие (2).

(2) $\Rightarrow$ (3): Пусть верно условие (2). Тогда χ не может быть непосредственно D^--связан ни с одним характером из $\mathrm{Irr}(G) \setminus \{\chi\}$ и по **Д6**, **Д3** $B = \{\chi\}$. Кроме того, $1 \in D$, так как $\chi(1) \neq 0$.

(3) $\Rightarrow$ (1): Очевидно.

□

Д9. Пусть D — собственное нормальное подмножество группы G и B — D-блок группы G, содержащий некоторый линейный (в частности, главный) характер. Тогда $|B| > 1$.

Доказательство. Это следует из **Д8** потому, что линейный характер не имеет нулей.

□

Д10. 1) Пусть Φ — D-блок группы G ($D \trianglelefteq G$) и $1 \in D$. Тогда $\bigcap_{\varphi \in \Phi} \operatorname{Ker} \varphi \subseteq D$.

2) Если Φ — p-блок группы G, то $\bigcap_{\varphi \in \Phi} \operatorname{Ker} \varphi \subseteq O_{p'}(G)$.

Доказательство. 1): По теореме **Б1** ((1) $\Rightarrow$ (3))

$$\sum_{\varphi\in\Phi}\varphi(1)\varphi(g)=0 \text{ для всех } g\in G\setminus D.$$

Поэтому из $g\in\left(\bigcap_{\varphi\in\Phi}\operatorname{Ker}\varphi\right)\cap(G\setminus D)$ следовало бы, что

$$0=\sum_{\varphi\in\Phi}\varphi(1)\varphi(g)=\sum_{\varphi\in\Phi}\varphi(1)^2>0.$$

2): Следует из 1) при $D=G_{p'}$.

$\square$

Для множества M натуральных чисел, через Н. О. К. M будем обозначать наименьшее общее кратное всех чисел из M.

Д11. Пусть B — D-блок группы G и $1\in D$. Положим

$$n=\text{Н. О. К.}\,\{|H| \mid H\leqslant G,\ H\cap D=\{1\}\}.$$

Тогда

1) $\frac{1}{n}\sum_{\chi\in B}\chi(1)\chi(g)\in\hat{\boldsymbol{Z}}$ для всех $g\in G$;

2) $\sum_{\chi\in B}\chi(1)^2=nq$, где $q\in\boldsymbol{N}$.

Доказательство. 1): Пусть $H\leqslant G$, $H\cap D=1$ и $g\in G$. По теореме **Б1**

(д5) $$\sum_{\chi\in B}\chi(d)\overline{\chi(x)}=0 \text{ для всех } (d,\ x)\in D\times D^{-}.$$

Поэтому сумма, записанная в 1), равна нулю при $g\in D^{-}$. Пусть $g\in D$. Тогда по (д5) $\sum_{\chi\in B}\chi(g)\overline{\chi(h)}=0$ для всех $h\in H\setminus D=H\setminus 1$ и поэтому $\frac{1}{|H|}\sum_{\chi\in B}\chi(g)\chi(1)=\frac{1}{|H|}\sum_{\chi\in B}\chi(g)\sum_{h\in H}\overline{\chi(h)}=\sum_{\chi\in B}\chi(g)\times$ $\times(\chi|_H,\ 1_H)_H\in\hat{\boldsymbol{Z}}$.

Но тогда $\frac{1}{n}\sum_{\chi\in B}\chi(g)\chi(1)\in\hat{\boldsymbol{Z}}$ (по индукции: если $a/k\in\hat{\boldsymbol{Z}}$, $a/l\in\hat{\boldsymbol{Z}}$ и $(k,\ l)=1$, то $1=kx+ly$ для некоторых целых x и y и $a/kl=(ax/l)+(ay/k)\in\hat{\boldsymbol{Z}}$).

2): Следует из 1) и того факта, что $\hat{\boldsymbol{Z}}\cap\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Z}$ (**2А6** (3)).

$\square$

Д12. Если B — p-блок группы G, то

1) $|G|_p\cdot e_B\in\hat{\boldsymbol{Z}}G$,

2) $|G|_p$ делит $\sum_{\chi\in B}\chi(1)^2$.

Доказательство. По **Г3** $e_B = \sum_{g \in G} a_g g$, где $a_g = \sum_{\chi \in B} \frac{\chi(1)\overline{\chi(g)}}{|G|}$.

Так как B есть $G_{p'}$-блок (**Д2**), то можно применить **Д11** при $D = G_{p'}$. Так как здесь $n = |G|_p$, то из **Д11**(1) следует $|G|_{p'} \times a_g \in \hat{Z}$ и, значит, верно 1). Из **Д11**(2) следует 2).

□

Утверждение **Д12**(2) в ряде случаев может упростить нахождение p-блоков группы по ее таблице характеров.

Д13. Определение. 1) D-блок группы G, содержащий главный характер 1_G группы G, называется *главным D-блоком* группы G.

2) p-блок группы G, содержащий 1_G, называется *главным p-блоком* группы G.

Д14. Упражнение. Пусть B — главный p-блок группы G. Если степень каждого нелинейного характера из B делится на p, то $|G/G'| \geqslant p$.

Отметим теперь еще один частный случай D-блоков — H-блоки в смысле Осимы [89].

Д15. Определение. Пусть $H \leqslant G$. *H-блоки Осимы* группы G — это классы эквивалентности в $\mathrm{Irr}(G)$ по следующему отношению ∞: для $\chi, \psi \in \mathrm{Irr}(G)$ $\chi \infty \psi$, если существует последовательность $\chi_1, \ldots, \chi_n$ в $\mathrm{Irr}(G)$ такая, что $\chi_1 = \chi$, $\chi_n = \psi$ и для любого $i = 1, \ldots, n-1$ ограничения $\chi_i|_H$ и $\chi_{i+1}|_H$ имеют общую неприводимую часть.

Д16. Пусть H — подгруппа группы G с сердцевиной D (т. е. $D = \bigcap_{g \in G} H^g$) и $\Phi \subseteq \mathrm{Irr}(G)$. Равносильны условия:

(1) Φ — H-блок Осимы;
(2) $\Phi = \{\chi \in \mathrm{Irr}(G) | \chi|_D \in \mathbf{C}\varphi|_D\}$ для некоторого $\varphi \in \Phi$;
(3) Φ — D-блок группы G.

Доказательство. (1) $\Leftrightarrow$ (2): Следует из теоремы 7 работы [89], по которой неприводимые характеры χ и ψ группы G лежат в одном H-блоке Осимы, если и только если $\chi(d)/\chi(1) = \psi(d)/\psi(1)$ для всех $d \in D$.

(2) $\Leftrightarrow$ (3): Для любого $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ по теореме Клиффорда (**2Б9**) $\chi|_D = m\theta_\mu$, где m — натуральное число, $\mu \in \mathrm{Irr}(D)$ и θ_μ — сумма всех неприводимых характеров D, G-сопряженных с μ; при этом, если ν G-сопряжен с μ, то $\theta_\nu = \theta_\mu$. Поэтому для χ, $\psi \in \mathrm{Irr}(G)$ имеем: $(\chi|_D = c\psi|_D$ для некоторого $c \in \mathbf{C}) \Leftrightarrow (\chi|_D = m\theta_\mu$,

$\psi|_D^0 = n\theta_\mu$, где m и n — натуральные числа и $\mu \in \mathrm{Irr}(D)) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow ((\chi|_D^0, \psi|_D^0)_G \neq 0)$. Отсюда и из **Д6** следует требуемое утверждение.

□

Д17. Упражнение. Пусть D — нормальная подгруппа группы G и $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$. Тогда

$$(\chi|_D, \chi|_D)_D = \frac{|G:D|\,\chi(1)^2}{\sum\limits_{\varphi \in \Phi} \varphi(1)^2},$$

где Φ — D-блок группы G, содержащий χ.

Д18. Упражнение. Пусть D — нормальная подгруппа группы G и $\Phi \subseteq \mathrm{Irr}(G)$. Следующие условия равносильны:

(1) $D \longleftrightarrow \Phi$;

(2) $\sum\limits_{\varphi \in \Phi} \varphi(1)\varphi(g) = 0$ для всех $g \in G \setminus D$.

(Применить **Г7** ((1) $\Rightarrow$ (0)).)

Еще один частный случай D-блоков — π-блоки (π — множество простых чисел) — будет отмечен в главе 5.

§ Е. ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ И p-БЛОКИ В АБЕЛЕВЫХ ГРУППАХ

Пусть A — конечная абелева группа и $\hat{A}$ — ее группа характеров (над $\mathbf{C}$). Напомним определение и некоторые свойства группы $\hat{A}$ (см. **2А40**). $\hat{A}$ есть множество $\mathrm{Irr}(A)$ с операцией умножения: $\chi\psi(a) = \chi(a)\psi(a)$ ($\chi, \psi \in \mathrm{Irr}(A)$). При этом $\mathrm{Irr}(A)$ совпадает с множеством всех гомоморфизмов из A в $\mathbf{C}$. Для любой подгруппы B из A положим

$$B^{\perp} = \{\chi \in \hat{A} \mid \chi(b) = 1 \text{ для всех } b \in B\}.$$

Тогда $B^{\perp} \leqslant \hat{A}$ и $\hat{A}/B^{\perp} \simeq B$. В частности, $\hat{A} \simeq A$. Отображение $\perp: B \mapsto B^{\perp}$ — взаимно однозначное отображение множества всех подгрупп из A на множество всех подгрупп из $\hat{A}$. Обратное ему отображение обозначим через $\top$.

Е1. Теорема. Пусть A — конечная абелева группа, $D \subseteq A$ и $\Phi \subseteq \mathrm{Irr}(A)$. Следующие условия равносильны:

(1) $D \longleftrightarrow \Phi$;

(2) существует подгруппа B в A такая, что D есть объединение некоторого (возможно пустого) множества смежных классов по B в A, а Φ есть объединение некоторого множества смежных классов по $B^{\perp}$ в $\hat{A}$.

Доказательство этой теоремы вытекает из следующих утверждений Е2 — Е8, в которых предполагается выполненным условие теоремы Е1.

Е2. Если $D \leftarrow\rightarrow \Phi$, $a \in A$ и $\alpha \in \hat{A}$, то $aD \leftarrow\rightarrow \alpha\Phi$.

Доказательство. Воспользуемся равносильностью условий (1) и (4) теоремы **Б1**. Для пары (D, Φ) имеем

$$\frac{1}{|A|} \sum_{d \in D} \sum_{\varphi \in \Phi} \psi(d) \overline{\varphi(d)} \varphi(t) = \psi(t)$$

при всех $(\psi, t) \in \Phi \times D$. Теперь нам достаточно проверить справедливость условия (4) теоремы **Б1** для пары $(aD, \alpha\Phi)$. При этом мы будем иметь в виду, что $\xi(g)$ есть корень из 1 для всех $(\xi, g) \in \hat{A} \times A$ и, следовательно, $\xi(g)\overline{\xi(g)} = |\xi(g)|^2 = 1$. Пусть $(t_1, \psi_1) \in aD \times \alpha\Phi$. Тогда $t_1 = at$, $t \in D$ и $\psi_1 = \alpha\psi$, $\psi \in \Phi$. Имеем

$$\frac{1}{|A|} \sum_{d_1 \in aD} \sum_{\varphi_1 \in \alpha\Phi} \psi_1(d_1) \overline{\varphi_1(d_1)} \varphi_1(t_1) =$$

$$= \frac{1}{|A|} \sum_{d \in D} \sum_{\varphi \in \Phi} \alpha\psi(ad) \overline{\alpha\varphi(ad)} \alpha\varphi(at) =$$

$$= \alpha(at)\psi(a)\left(\frac{1}{|A|} \sum_{d \in D} \sum_{\varphi \in \Phi} \psi(d) \overline{\varphi(d)} \varphi(t)\right) =$$

$$= \alpha(at)\psi(a)\psi(t) = \alpha(at)\psi(at) = \psi_1(t_1).$$

Таким образом, условие (4) теоремы **Б1** выполнено для пары $(aD, \alpha\Phi)$.

□

Е3. Пусть $\hat{A}(D)$ — пересечение всех подгрупп группы $\hat{A}$, взаимодействующих с D. Тогда D-блоки группы $\hat{A}$ — это в точности смежные классы по $\hat{A}(D)$ в $\hat{A}$.

В частности, $D \leftarrow\rightarrow \Phi$ тогда и только тогда, когда Φ есть объединение некоторого множества смежных классов по $\hat{A}(D)$ в $\hat{A}$.

Доказательство. Пусть Ψ — произвольный D-блок группы $\hat{A}$, $\psi \in \Psi$ и $\Lambda = \psi^{-1}\Psi$. Согласно **Е2** Λ также является D-блоком. Покажем, что Λ — подгруппа в $\hat{A}$. Так как $1_{\hat{A}} \in \Lambda$, то $\Lambda \cap \lambda\Lambda \ni \lambda$ для всех $\lambda \in \Lambda$. Но ввиду **Е2** и **Б4** $D \leftarrow\rightarrow \Lambda \cap \lambda\Lambda$. Поэтому $\Lambda = \lambda\Lambda$, $\Lambda \leqslant \hat{A}$ и $\hat{A}(D) \leqslant \Lambda$. Так как Λ — D-блок и $D \leftarrow\rightarrow \hat{A}(D)$ по **Б4**, то $\Lambda = \hat{A}(D)$. Таким образом, $\Psi = \psi\hat{A}(D)$.

□

Подобно доказывается следующее (двойственное) утверждение.

E4. Пусть $A(\Phi)$ — пересечение всех подгрупп из A, взаимодействующих с Φ. Тогда Φ-блоки группы A — это в точности смежные классы по $A(\Phi)$ в A.

В частности, $D \longleftrightarrow \Phi$ тогда и только тогда, когда D есть объединение некоторого множества смежных классов по $A(\Phi)$ в A.

□

E5. Если $D \leqslant A$, то $\hat{A}(D) = D^{\perp}$ и $A(D^{\perp}) = D$.

Доказательство. Пусть $\varnothing \neq \Phi \subseteq D^{\perp}$. Тогда $\varphi(d) = 1$ для всех $(d, \varphi) \in D \times \Phi$ и поэтому

$$\frac{1}{|A|} \sum_{d \in D} \sum_{\varphi \in \Phi} \psi(d) \overline{\varphi(d)} \varphi(t) = \frac{|D||\Phi|}{|A|} \psi(t)$$

для всех $(\psi, t) \in \Phi \times D$. Отсюда и из равносильности условий (1) и (4) теоремы **Б1** следует, что $D \longleftrightarrow \Phi$ тогда и только тогда, когда $|D||\Phi| = |A|$, т. е. когда $\Phi = D^{\perp}$. Следовательно, $D^{\perp}$ — D-блок группы A и $\hat{A}(D) = D^{\perp}$. Подобно доказывается, что $A(D^{\perp}) = D$.

□

E6. Положим

$$B(D) = \{a \in A \mid Da = D\}.$$

Тогда $B(D) \leqslant A$ и D-блоки группы A — это в точности смежные классы по $B(D)^{\perp}$ в $\hat{A}$.

Доказательство. Очевидно, что $B(D) \leqslant A$. Это наибольшая (т. е. единственная максимальная) среди подгрупп H из A таких, что D есть объединение смежных классов по H.

Пусть Ψ — D-блок группы A. Тогда D есть объединение Ψ-блоков, т. е. ввиду **E4** объединение смежных классов по $A(\Psi)$. Следовательно, $A(\Psi) \leqslant B(D)$ и, значит (так как $B(D)$ — объединение смежных классов по $A(\Psi)$), $B(D) \longleftrightarrow \Psi$. Отсюда следует, что Ψ есть объединение $B(D)$-блоков и, значит, ввиду **E3** и **E5** (с $B(D)$ в роли D) объединение смежных классов по $B(D)^{\perp}$. Но $D \longleftrightarrow \alpha B(D)^{\perp}$ для всех $\alpha \in \hat{A}$. Следовательно, Ψ — смежный класс по $B(D)^{\perp}$ в $\hat{A}$.

□

Подобно доказывается следующее утверждение.

E7. Положим $\mathrm{B}(\Phi)=\{\alpha\in\hat{A}\mid\Phi\alpha=\Phi\}$. Тогда $\mathrm{B}(\Phi)\leqslant\hat{A}$ и Φ-блоки группы A — это в точности смежные классы по $\mathrm{B}(\Phi)^{\top}$ в A.

□

E8. Равносильны условия:
(1) $D\longleftrightarrow\Phi$;
(2) $B(D)\longleftrightarrow\Phi$;
(3) $D\longleftrightarrow\mathrm{B}(\Phi)$;
(4) $B(D)^{\perp}\leqslant\mathrm{B}(\Phi)$.

Доказательство. Следует из **E6** и **E7**.

□

Доказательство теоремы E1. (1) $\Rightarrow$ (2): Вытекает из **E6** при $B=B(D)$.

(2) $\Rightarrow$ (1): Пусть верно (2). По **E5** $B\longleftrightarrow B^{\perp}$. Следовательно, по **E2** $dB\longleftrightarrow\varphi B^{\perp}$ для всех $d\in D$ и $\varphi\in\Phi$ и, значит, $D\longleftrightarrow\Phi$.

□

Из теоремы **E1** (или из **E6**) непосредственно следует, что два неприводимых характера группы A лежат в одном D-блоке тогда и только тогда, когда их ограничения на $B(D)$ совпадают. В частности, A имеет более одного D-блока тогда и только тогда, когда D является объединением смежных классов по некоторой неединичной подгруппе B из A (т. е. когда $B(D)\neq 1$).

E9. Теорема. Пусть p — простое число. p-блоки конечной абелевой группы A — это в точности смежные классы группы $\hat{A}$ по ее силовской p-подгруппе.

Доказательство. Согласно **Д2** p-блоки — это D-блоки при D, состоящем из всех p'-элементов группы A. Но $D=O_{p'}(A)\leqslant A$. Следовательно, по **E3** и **E5** p-блоки являются смежными классами по $D^{\perp}$ в $\hat{A}$. Однако $D^{\perp}\simeq A/D$, т. е. $D^{\perp}$ — силовская p-подгруппа в $\hat{A}$.

□

Утверждение **E2** можно распространить на неабелевы группы следующим образом.

E10. Упражнение. Пусть $D\longleftrightarrow\Phi$, где $D\trianglelefteq G$ и $\Phi\subseteq\mathrm{Irr}(G)$.

1) Если λ — линейный характер группы G, то $D\longleftrightarrow\lambda\Phi$. ($\lambda\Phi\subseteq\mathrm{Irr}(G)$ по **2A37**.)

2) Если $z \in Z(G)$, то $zD \longleftrightarrow \Phi$.

(Можно дать доказательство этих утверждений, пользуясь только определением А3(2) и (для 2)) 2А9(4).)

§ Е. p-БЛОКИ НЕКОТОРЫХ КОНКРЕТНЫХ ГРУПП

Утверждение **Д6** дает практический способ вычисления p-блоков. При этом на основании **Д3** мы можем рассматривать p-блоки и как $G_{p'}$-блоки и как $(G \setminus G_{p'})$-блоки в зависимости от того, с каким из множеств $G_{p'}$ и $G \setminus G_{p'}$ проще производить вычисления.

Заметим, что если p не делит $|G|$, то $G_{p'} = G$ и, следовательно, множество всех p-блоков группы G есть $\{\{\chi\} | \chi \in \mathrm{Irr}(G)\}$. Если же G — p-группа, то, очевидно, $\mathrm{Irr}(G)$ — ее единственный p-блок. Отметим еще, что лишь беглого взгляда на таблицу характеров группы достаточно, чтобы определить все ее p-блоки порядка 1: $\{\chi\}$ есть p-блок группы G если и только если χ исчезает на $G \setminus G_{p'}$ (Д8).

Е1. Пример. Вычислим p-блоки группы $G = S_4$ $(p \in \{2, 3\})$. Таблица характеров группы G имеет вид

g^G	1A	2A	2B	3A	4A
$\lvert g^G \rvert$	1	3	6	8	6
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	-1	1	-1
χ_3	2	2	0	-1	0
χ_4	3	-1	1	0	-1
χ_5	3	-1	-1	0	1

1) Пусть $p = 2$.

Тогда $G_{p'} = G_{2'} = 1\mathrm{A} \cup 3\mathrm{A}$. Положим $a_{ij} = \sum_{x \in G_{2'}} \chi_i(x)\overline{\chi_j(x)} = \chi_i(1)\chi_j(1) + 8\chi_i(g_{3\mathrm{A}})\overline{\chi_j(g_{3\mathrm{A}})}$, где $g_{3\mathrm{A}} \in 3\mathrm{A}$. По **Д5** $a_{ij} \neq 0$ если и только если χ_i и χ_j непосредственно 2-связаны. Вычисляем $a_{12} = 1 + 8 \neq 0$, $a_{13} = 2 - 8 \neq 0$, $a_{14} = 3 \neq 0$, $a_{15} = 3 \neq 0$. Таким образом, характер χ_1 непосредственно 2-связан с любым другим χ_i и, значит, G имеет точно один 2-блок $B_1 = \mathrm{Irr}(G)$.

2) Пусть $p = 3$.

Тогда $G_{p'} = G_{3'} = 1\mathrm{A} \cup 2\mathrm{A} \cup 2\mathrm{B} \cup 4\mathrm{A}$ и $G \setminus G_{2'} = 3\mathrm{A}$. Будем смотреть на 3-блоки как на 3А-блоки. Но для определения 3А-блоков достаточно беглого взгляда на столбец таблицы характеров, соответствующий 3А (χ_i и χ_j непосредственно 3А-связаны $\Longleftrightarrow \chi_i(g_{3\mathrm{A}})\overline{\chi_j(g_{3\mathrm{A}})} \neq 0$). Таким образом, G имеет точно три 3-блока: $B_1 = \{\chi_1, \chi_2, \chi_3\}$, $B_2 = \{\chi_4\}$ и $B_3 = \{\chi_5\}$.

Е2. Пример. Найдем все p-блоки группы $G = \mathrm{PSL}(2, 7)$ $(= \mathrm{GL}(3, 2))$ порядка 168. Запишем ее таблицу характеров $\left(b_7 = \left(-1 + i\sqrt{7}\right)/2\right)$.

g^G	1A	2A	3A	4A	7A	7B
$\lvert g^G \rvert$	1	21	56	2	24	24
χ_1	1	1	1	1	1	1
χ_2	3	-1	0	1	b_7	$\overline{b_7}$
χ_3	3	-1	0	1	$\overline{b_7}$	b_7
χ_4	6	2	0	0	-1	-1
χ_5	7	-1	1	-1	0	0
χ_6	8	0	-1	0	1	1

1) Пусть $p = 2$.

Тогда $G \setminus G_{2'} = 2\mathrm{A} \cup 4\mathrm{A}$ и мы рассмотрим 2-блоки как $2\mathrm{A} \cup 4\mathrm{A}$-блоки. Для нахождения последних нужно найти числа

$$a_{ij} = \sum_{x \in 2\mathrm{A} \cup 4\mathrm{A}} \chi_i(x)\overline{\chi_j(x)} = 21\left(\chi_i(g_{2\mathrm{A}})\overline{\chi_j(g_{2\mathrm{A}})} + 2\chi_i(g_{4\mathrm{A}})\overline{\chi_j(g_{4\mathrm{A}})}\right).$$

Найдем сначала главный 2-блок B_1. Вычисляем $\frac{1}{21}a_{12} = \frac{1}{21}a_{13} = -1 + 2 \neq 0$, $a_{14} \neq 0$, $a_{15} \neq 0$, $a_{16} = 0$. Отсюда заключаем, что $\{\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4, \chi_5\} \subseteq \mathrm{B}_1$. Далее, получаем $a_{i6} = 0$ для всех $i \neq 6$. Следовательно, G имеет точно два 2-блока $\mathrm{B}_1 = \{\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4, \chi_5\}$ и $\mathrm{B}_2 = \{\chi_6\}$.

2) Пусть $p = 3$.

Здесь $G \setminus G_{3'} = 3\mathrm{A}$ и все 3-блоки находятся непосредственно из рассмотрения столбца таблицы характеров, соответствующего классу 3A: $\mathrm{B}_1 = \{\chi_1, \chi_5, \chi_6\}$, $\mathrm{B}_2 = \{\chi_2\}$, $\mathrm{B}_3 = \{\chi_3\}$, $\mathrm{B}_4 = \{\chi_4\}$.

3) Пусть $p = 7$.

Тогда 7-блоки есть $7\mathrm{A} \cup 7\mathrm{B}$-блоки. Вычисляя суммы $\chi_i(g_{7\mathrm{A}}) \times \overline{\chi_j(g_{7\mathrm{A}})} + \chi_i(g_{7\mathrm{B}})\overline{\chi_j(g_{7\mathrm{B}})}$, находим эти блоки:

$$\mathrm{B}_1 = \{\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4, \chi_6\}, \ \mathrm{B}_2 = \{\chi_5\}.$$

В главе 5 будут получены многие важные свойства p-блоков, позволяющие, в частности, упростить их вычисление по таблице характеров.

Глава 4
МОДУЛЯРНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

§ А. ПРОСТЕЙШИЕ СВОЙСТВА

А1. Определение. Представление конечной группы над полем, характеристика которого делит порядок этой группы, называется *модулярным*. Модулярное представление над полем характеристики p называется *p-модулярным*.

Основной вклад в развитие теории модулярных представлений внес Ричард Брауэр. Существенным отличием модулярных представлений от обыкновенных является тот факт, что приводимое модулярное представление может не быть разложимым. В частности, характер приводимого модулярного представления над алгебраически замкнутым полем уже не определяет с точностью до эквивалентности это представление. Он не определяет даже неприводимые части представления. Например, представления $\mathscr{A}$ и $\mathscr{A} \oplus (\underbrace{\mathscr{B} \oplus \ldots \oplus \mathscr{B}}_{p \text{ раз}})$ над полем характеристики p имеют равные характеры. Многие другие привычные нам свойства обыкновенных представлений оказываются неверными для модулярных представлений. Так, степень модулярного неприводимого представления над алгебраически замкнутым полем не обязана делить порядок группы (см. замечание в конце этого параграфа).

Напомним, что буква p всюду в этой книге обозначает простое число.

А2. Упражнение. Пусть F — поле характеристики p. Тогда

1) $(a+b)^p = a^p + b^p$ и $(a-b)^p = a^p - b^p$ для всех $a, b \in F$;

2) в группе $F^{\times}$ нет элементов порядка p.

А3. Упражнение. Пусть F — поле характеристики p и $G = \langle g \rangle$ — группа порядка p. Показать, что отображение $\mathscr{A}: g^i \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i & 1 \end{pmatrix}$ $(0 \leqslant i \leqslant p)$ есть представление $G \to \mathrm{GL}(2, F)$, которое приводимо, но не разложимо.

Пусть g — элемент конечной группы G. Тогда g однозначно представляется в виде

$$g = g_p g_{p'},$$

где g_p — p-элемент, $g_{p'}$ — p'-элемент и $g_p, g_{p'} \in \langle g \rangle$ (так как $\langle g \rangle$ является прямым произведением p-группы и p'-группы); g_p называется *p-частью*, а $g_{p'}$ *p'-частью* элемента g. Очевидно, что при любом гомоморфизме γ группы G будет $\gamma(g_{p'}) = \gamma(g)_{p'}$. ■

A4. Пусть F — алгебраически замкнутое поле характеристики p и $g \in GL(n, F)$. Тогда

1) g сопряжен в $GL(n, F)$ с треугольной матрицей вида

$$a = \begin{pmatrix} f_1 & & & O \\ & f_2 & & \\ & & \ddots & \\ * & & & f_n \end{pmatrix}, \text{ где } f_i \in F,$$

причем $f_i^{o(g)} = 1$, если $o(g)$ конечен ($i = 1, \ldots, n$);

2) матрица a является p-элементом тогда и только тогда, когда $f_1 = f_2 = \ldots = f_n = 1$ (и тогда $o(a)$ делит p^{n-1});

3) если a имеет конечный порядок в $GL(n, F)$, то матрицы a и $a_{p'}$ имеют одинаковые главные диагонали.

4) если g — p'-элемент, то g сопряжен в $GL(n, F)$ с диагональной матрицей.

Доказательство. 1): Применим индукцию по числу n. Пусть V — F-пространство размерности n, $\sigma \in \mathrm{Aut}(V)$ и $\sigma_B = g$ для некоторой базы B в V. Так как поле F алгебраически замкнуто, то существует элемент f_1 в F такой, что $\det(\sigma_B - f_1 E_n) = 0$. Но тогда $\sigma - f_1\varepsilon \in \mathrm{End}(V) \setminus \mathrm{Aut}(V)$ (ε — единица в $\mathrm{Aut}(V)$). Следовательно, существует $v \in V \setminus \{0\}$ такой, что $v^{\sigma - f_1\varepsilon} = 0$, т. е. $v^\sigma = f_1 v$. Выберем теперь в V базу A, первым элементом которого является вектор v. Тогда

$$\sigma_A = \begin{pmatrix} f_1 & O \\ C & D \end{pmatrix}.$$

По **IA4** g сопряжен с σ_A.

По предположению индукции

$$S^{-1}DS = \begin{pmatrix} f_2 & & O \\ & \ddots & \\ * & & f_n \end{pmatrix}$$

для некоторой $S \in GL(n-1, F)$. Но тогда

$$\begin{pmatrix} 1 & O \\ O & S \end{pmatrix}^{-1} \sigma_A \begin{pmatrix} 1 & O \\ O & S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 & & & O \\ & f_2 & & \\ & & \ddots & \\ * & & & f_n \end{pmatrix} \equiv a$$

и g сопряжен с a. Последнее утверждение в 1) очевидно.

2): Пусть $o(a) = p^m$. Тогда

$$\mathrm{E} = \mathrm{a}^{p^m} = \begin{pmatrix} f_1^{p^m} & & O \\ & \ddots & \\ * & & f_n^{p^m} \end{pmatrix},$$

откуда $f_i^{p^m} = 1$. Так как $\mathrm{char}(F) = p$, то $0 = (f_i^{p^m} - 1) = (f_i - 1)^{p^m}$, т. е. $f_i = 1$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Обратное доказывается индукцией по n. Пусть $f_1 = \ldots = f_n = 1$. Покажем, что $a^{p^{n-1}} = \mathrm{E}$.

Имеем $\mathrm{a} = \begin{pmatrix} 1 & O \\ \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{pmatrix}$, где $\mathrm{D} = \begin{pmatrix} 1 & & O \\ & \ddots & \\ * & & 1 \end{pmatrix}$, и по индукции $\mathrm{D}^{p^{n-2}} = \mathrm{E}_{n-1}$. Тогда $\mathrm{a}^{p^{n-1}} = \begin{pmatrix} 1 & O \\ A & \mathrm{D}^{p^{n-2}} \end{pmatrix}^p = \begin{pmatrix} 1 & O \\ A & \mathrm{E} \end{pmatrix}^p = \begin{pmatrix} 1 & O \\ pA & \mathrm{E} \end{pmatrix} = \mathrm{E}_n$ $(A \in \mathrm{M}((n-1) \times 1, F)$.

3): Если $o(\mathrm{a})$ конечен, то $\mathrm{a} = \mathrm{a}_p \mathrm{a}_{p'}$ и $\mathrm{a}_p = \mathrm{a}^r$, $\mathrm{a}_{p'} = \mathrm{a}^s$ $(r, s \in \mathbf{N})$. Так как a_p — p-элемент, то по пункту 2)

$$a_p = a^r = \begin{pmatrix} f_1^r & & O \\ & \ddots & \\ * & & f_n^r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & O \\ & \ddots & \\ * & & 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь

$$a = a^r a^s = \begin{pmatrix} 1 & & O \\ & \ddots & \\ * & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1^s & & O \\ & \ddots & \\ * & & f_n^s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1^s & & O \\ & \ddots & \\ * & & f_n^s \end{pmatrix},$$

откуда $f_i^s = f_i$ при $i = 1, \ldots, n$.

Таким образом, главные диагонали матриц a и $\mathrm{a}_{p'}$ равны.

□

4): Следует из **2A2** (1) и **2A4** (3), так как тождественное отображение группы $\langle g \rangle$ в $\mathrm{GL}(n, F)$ есть обыкновенное представление.

□

Легко заметить (с помощью **A4** (2)), что элемент a из **A4** (1) имеет конечный порядок если и только если все элементы f_i имеют конечные порядки в $F^\times$ (при этом $o(a) = p^m k$, где $m \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ и $k = [o(f_1), \ldots, o(f_n)]$).

А5. Теорема. Пусть χ — характер представления группы G над полем характеристики p. Тогда

$$\chi(g)=\chi(g_{p'}) \text{ для всех } g\in G.$$

Доказательство. Если $\mathscr{X}: G\to \mathrm{GL}(n, F)$ — представление с характером χ, то по **А4(1)** $\mathscr{X}(g)$ сопряжена в группе $\mathrm{GL}(n, \hat{F})$ ($\hat{F}$ — алгебраическое замыкание поля F) с матрицей

$$\mathrm{a}=\begin{pmatrix} f_1 & & \mathrm{O} \\ & \ddots & \\ * & & f_n \end{pmatrix}$$

и поэтому $\mathscr{X}(g_{p'})$ сопряжена с $\mathrm{a}_{p'}$. Но по **А4(3)** $a_{p'}$ имеет ту же главную диагональ, что и а. Следовательно, $\chi(g)=f_1+\ldots+f_n=$ $=\chi(g_{p'})$.

□

Таким образом, чтобы знать характеры p-модулярных представлений, достаточно знать их значения на p'-элементах.

А6. Число классов неприводимых представлений группы G над алгебраически замкнутым полем F характеристики p не превосходит числа p'-классов (т. е. классов сопряженных p'-элементов) группы G.

Доказательство. Пусть $\chi_1, \ldots, \chi_s$ — все неприводимые характеры группы G над F и k число p'-классов в G. По теореме **1E2(2)** функции $\chi_1, \ldots, \chi_s$ линейно независимы. Отсюда ввиду **А5** следует линейная независимость функций $\chi_1|_{G_{p'}}, \ldots, \chi_s|_{G_{p'}}$. Так как последние лежат в k-мерном пространстве всех классовых функций из $G_{p'}$ в F, то $s\leqslant k$.

□

В § Г будет доказано, что $s=k$.

А7. Пусть G — конечная p-группа и F — поле характеристики p. Тогда единственными неприводимыми представлениями G над F являются единичные представления (матричное и операторные).

Доказательство. Пусть $\mathscr{A}$ — неприводимое матричное представление G над F и z — элемент из G такой, что $\mathscr{A}(z)\in Z(\mathscr{A}(G))$ и $\mathscr{A}(z)^p=\mathrm{E}$. Так как $\mathrm{char}(F)=p$, то $(\mathscr{A}(z)-\mathrm{E})^p=$ $=\mathscr{A}(z)^p-\mathrm{E}=\mathrm{O}$, откуда $\det(\mathscr{A}(z)-\mathrm{E})=\mathrm{O}$. Так как $\mathscr{A}(z)-\mathrm{E}$ централизует $\mathscr{A}(G)$, то из леммы Шура и предыдущего равенства следует, что $\mathscr{A}(z) - \mathrm{E} = \mathrm{O}$, т. е. $\mathscr{A}(z) = \mathrm{E}$. Но тогда $Z(\mathscr{A}(G)) = 1$, а так как $\mathscr{A}(G)$ — p-группа, то $\mathscr{A}(G) = 1$ и $\mathscr{A}$ — единичное представление.

□

A8. Пусть $\mathscr{A}: G \to \mathrm{Aut}(V)$ — операторное представление p-группы G над полем F характеристики p. Тогда существует ненулевой вектор в V, инвариантный относительно $\mathscr{A}(G)$.

Доказательство. Пусть W — минимальное ненулевое $\mathscr{A}(G)$-допустимое подпространство в V. Тогда подпредставление $\mathscr{A}_W$ неприводимо и по **A7** единично, т. е. $W = Fw$ и $w^{\mathscr{A}(g)} = w$ для всех $g \in G$.

□

A9. Пусть $\mathscr{A}$ — неприводимое представление группы G над полем F характеристики p. Тогда

$$O_p(G) \subseteq \mathrm{Ker}\,\mathscr{A}.$$

Доказательство. Можно, очевидно, считать, что представление $\mathscr{A}$ операторное: $G \to \mathrm{Aut}(V)$. Положим $P = O_p(G)$. Применив A8 к представлению $\mathscr{A}|_P$, получим, что $W \equiv \left\{v \in V \mid v^{\mathscr{A}(P)} = \{v\}\right\}$ — ненулевое подпространство в V. Но для $w \in W$, $g \in G$ и $t \in P$ имеем $\left(w^{\mathscr{A}(g)}\right)^{\mathscr{A}(t)} = \left(w^{\mathscr{A}(gtg^{-1})}\right)^{\mathscr{A}(g)} = w^{\mathscr{A}(g)}$, т. е. $w^{\mathscr{A}(g)} \in W$ и W — $\mathscr{A}(G)$-допустимое подпространство в V. Ввиду неприводимости $\mathscr{A}$ $W = V$. Но тогда $\mathscr{A}(P)$ действует тривиально на V, т. е. $P \subseteq \mathrm{Ker}\,\mathscr{A}$.

□

Отсюда непосредственно вытекает (см. **1Б19**):

A10. Если $X = P \leftthreetimes G$, где P — минимальная нормальная p-подгруппа в группе X, то $O_p(G)$ централизует P.

□

A11. Теорема. Пусть G — конечная группа и F — поле характеристики p. Тогда пересечение ядер всех неприводимых представлений G над F равно $O_p(G)$.

Доказательство. По A9 $O_p(G)$ содержится в пересечении K ядер всех неприводимых представлений G над F. Так как $K \trianglelefteq G$, то для завершения доказательства достаточно показать, что K — p-группа. Рассмотрим регулярное представление $\mathscr{R}: G \to \mathrm{GL}(|G|, F)$.

Так как $\mathscr{R}(G) \simeq G$ (§ 1Г), то достаточно проверить, что $\mathscr{R}(K)$ — p-группа. Пусть $\mathscr{X}_1 \oplus \ldots \oplus \mathscr{X}_m$ — диагональ представления $\mathscr{R}$, т. е. $\mathscr{X}_i$ неприводимы и $\mathscr{R} \approx \tilde{\mathscr{R}}$, где

$$\tilde{\mathscr{R}}(g) = \begin{pmatrix} \mathscr{X}_1(g) & & O \\ & \ddots & \\ * & & \mathscr{X}_m(g) \end{pmatrix} \text{ при } g \in G.$$

Пусть $k \in K$. По определению K, $\mathscr{X}_1(k), \ldots, \mathscr{X}_m(k)$ — единичные матрицы. Но тогда по **А4** (2) (алгебраическая замкнутость поля F там не используется) $\tilde{\mathscr{R}}(k)$ — p-элемент. Таким образом, $K (\simeq \mathscr{R}(K) \simeq \tilde{\mathscr{R}}(K))$ — p-группа.

□

А12. G — конечная группа и F — алгебраически замкнутое поле характеристики p. Равносильны условия:

(1) все неприводимые представления G над F одномерны (имеют степень 1);

(2) $G/O_p(G)$ — абелева.

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2): Если представление $\mathscr{A}$ группы G одномерно, то $G/\operatorname{Ker}\mathscr{A}$ изоморфна подгруппе из $\mathrm{GL}(1, F) \simeq F^\times$ и, следовательно, $G' \subseteq \operatorname{Ker}\mathscr{A}$. Таким образом, если верно (1), то вследствие теоремы **А11** $G' \subseteq O_p(G)$, и верно (2).

(2) $\Rightarrow$ (1): Пусть $G' \subseteq O_p(G)$ и $\mathscr{A}$ — неприводимое матричное представление G над F. По теореме **А11** $G' \subseteq \operatorname{Ker}\mathscr{A}$, т. е. группа $\mathscr{A}(G) (\simeq G/\operatorname{Ker}\mathscr{A})$ абелева. В частности, $\mathscr{A}(g)\mathscr{A}(x) = \mathscr{A}(x)\mathscr{A}(g)$ для всех $g, x \in G$ и по **1Д3** (4) $\mathscr{A}(g) = \lambda_g \mathrm{E}_n$, где $\lambda_g \in F$ и E_n — единичная матрица, для всех $g \in G$ ($n = \deg \mathscr{A}$). Так как $\mathscr{A}$ неприводимо, то $n = 1$.

□

А13. Лемма. 1) Пусть A — подгруппа мультипликативной группы некоторого поля F. Если $A \neq 1$, то $\sum\limits_{a \in A} a = 0$.

2) Пусть p — простое число и $i \in \mathbf{Z}$. Тогда

$$\sum_{x \in \mathrm{GF}(p)^\times} x^i = \begin{cases} -1, & \text{если } p - 1 \mid i, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Доказательство. 1): Пусть $a_0 \in A \setminus \{1\}$. Тогда $a_0 \sum\limits_{a \in A} a = \sum\limits_{a \in A} a$, откуда $\sum\limits_{a \in A} a = 0$.

2): Так как $x^{p-1} = 1$ при $x \in \mathrm{GF}(p)^\times$, то $x^i = x^{i_0}$, где i_0 — остаток от деления i на $p - 1$. Поэтому требуемое равенство достаточно доказать при $0 \leqslant i \leqslant p - 2$. При $i = 0$ $\sum\limits_{x \in \mathrm{GF}(p)^\times} x^i = p - 1 = -1$.

Пусть $0 < i \leqslant p-2$. Положим $A = \{x^i | x \in \mathrm{GF}(p)^\times\}$. Ясно, что $1 \neq A \leqslant \mathrm{GF}(p)^\times$ и отображение $\mu: x \mapsto x^i$ $(x \in \mathrm{GF}(p)^\times)$ есть гомоморфизм $\mathrm{GF}(p)^\times$ на A. Пусть $K = \mathrm{Ker}\,\mu$. Тогда ввиду 1) $\sum_{x \in \mathrm{GF}(p)^\times} x^i = |K| \sum_{a \in A} a = 0$.

□

A14. Пусть $G = \mathrm{SL}(2, p)$ и F — произвольное поле характеристики p. Тогда G имеет неприводимое представление степени d над F при любом $d \in \{1, \ldots, p-1\}$.

Доказательство. Для любого $m \in \{0, 1, \ldots, p-2\}$ определим F-пространство V_m, состоящее из всех однородных многочленов над F степени m от переменных x и y. Очевидно, $\{x^i y^{m-i} | i = 0, 1, \ldots, m\}$ — база в V_m в $\dim V_m = m+1$.

Определим представление $\mathcal{A}_m: G \to \mathrm{Aut}(V_m)$, положив $(x^i y^{m-i})^{\mathcal{A}_m(g)} = (g_{11}x + g_{12}y)^i (g_{21}x + g_{22}y)^{m-i}$ для $g \in \mathrm{SL}(2, p)$.

Предположим, что V_m имеет $\mathcal{A}_m(G)$-допустимое подпространство W. Пусть $w = \sum_{j=0}^{m} f_j x^j y^{m-j} \in W \setminus \{0\}$ $(f_j \in F)$ и k — наибольшее из чисел $0, 1, \ldots, m$ с $f_k \neq 0$.

Обозначим через F_p простое подполе в F. Для $t \in F_p$ положим

$$a(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } b(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}.$$

Далее будем писать w^g вместо $w^{\mathcal{A}_m(g)}$ для $g \in G$. Имеем

$$W \ni w^{a(t)} = \sum_{j=0}^{k} f_j (x+ty)^j y^{m-j} = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j(x, y)\, t^j.$$

Нам потребуется явный вид лишь одной из функций $\alpha_j: \alpha_k(x, y) = f_k y^m$. Используя лемму **A13**, имеем

$$W \ni \sum_{t \in \mathrm{GF}(p)^\times} t^{-k} \overline{w^{a(t)}} = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j(x, y) \sum_{t \in \mathrm{GF}(p)^\times} t^{k-j} =$$

$$= -\alpha_k(x, y) = -f_k y^m.$$

Так как $f_k \neq 0$, то $y^m \in W$. Теперь при $0 \leqslant i \leqslant m$

$$W \ni \sum_{t \in \mathrm{GF}(p)^\times} t^{-i} (y^m)^{b(t)} = \sum_{t \in \mathrm{GF}(p)^\times} t^{-i} (tx+y)^m =$$

$$= \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} x^j y^{m-j} \sum_{t \in \mathrm{GF}(p)^\times} t^{j-i} = \binom{m}{i} x^i y^{m-i}$$

(по A13), а поскольку p не делит $\binom{m}{i}$, то $x^i y^{m-i} \in W$. Таким образом, $W = V_m$ и, значит, $\mathscr{A}_m$ — неприводимо.

⌐

A15. Замечание. По **A14** группа SL (2, p) имеет неприводимое представление степени $p-2$ над любым полем характеристики p. Но при $p > 5$ $p-2$ не делит $|\mathrm{SL}(2, p)| (= p(p^2-1))$. Следовательно, в отличие от обыкновенных представлений (см. **2A7 (3)**) степень неприводимого модулярного представления над алгебраически замкнутым полем не делит, вообще говоря, порядок группы.

Отметим без доказательства еще одну особенность модулярных представлений. Если характеристика p поля F делит $|G|$, то число классов неразложимых представлений G над F конечно если и только если силовская p-подгруппа в G циклическая [77, § VII. 5]. Все неразложимые 2-модулярные представления группы $Z_2 \times Z_2$ получил В. А. Башев [2].

§ Б. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ЧИСЛА

Для построения теории модулярных представлений потребуются некоторые свойства алгебраических чисел, которые мы и получим в этом параграфе.

Напомним некоторые определении. Алгебраические и целые алгебраические числа определены в **2A5**, $\hat{Q}$ - поле всех алгебраических чисел, $\hat{Z}$ — кольцо всех целых алгебраических чисел. $\hat{Z} \cap Q = Z$ по **2A6**.

Максимальный идеал кольца K — это его истинный (т. е. отличный от K) идеал, не содержащийся в других истинных идеалах кольца K. Если I — максимальный идеал кольца K, то фактор-кольцо K/I является, очевидно, полем. Идеал I кольца K называется *простым*, если $\{0\} \neq I \neq K$ и из $a, b \in K \setminus I$ следует $ab \in K \setminus I$. Пусть F — подполе поля E. Естественным образом можно рассмотреть E как векторное пространство над F. Говорят, что E есть *конечное расширение поля* F, если размерность этого векторного пространства конечна.

Б1. Пусть p — простое число. Тогда кольцо $\hat{Z}$ имеет максимальный идеал, содержащий p. Если $\mathfrak{p}$ — такой идеал, то $\mathfrak{p} \cap Z = pZ$.

Доказательство. Очевидно, $p\hat{Z}$ — собственный идеал в $\hat{Z}$. Но всякий собственный идеал произвольного кольца с единицей K содержится в максимальном идеале из K (см. [37, с. 80]; это сразу следует из леммы Цорна и того факта, что объединение линейно упорядоченного по включению множества собственных идеалов из K есть собственный идеал в K). Следовательно, $p\in \in p\hat{Z} \subseteq \mathfrak{p}$, где $\mathfrak{p}$ — максимальный идеал в $\hat{Z}$.

Ясно, что $pZ \subseteq \mathfrak{p} \cap Z$. Если бы это включение было строгое, то в $\mathfrak{p}$ содержалось бы некоторое число m, взаимно простое с p, а следовательно, и число $(p, m) = 1$. Это противоречиво, так как тогда $\mathfrak{p} = \hat{Z}$.

$\lrcorner$

Б2. Максимальный ненулевой идеал любого кольца с единицей K является простым идеалом в K.

Доказательство. Пусть I — максимальный идеал в K и a, $b\in K\setminus I$. Тогда $I + aK = K$, $I + bK = K$ и $K = (I + aK)\times \times(I + bK) = II + aKI + bKI + abKK \subseteq I + abK$. Так как $I \neq K$, то отсюда следует, что $ab \notin I$.

□

Б3. Замечание. Пусть $\mathfrak{p}$ — максимальный идеал в $\hat{Z}$, содержащий простое число p. По **Б1** $\mathfrak{p} \supseteq pZ$. Укажем еще некоторые числа, содержащиеся в (любом таком) $\mathfrak{p}$. Пусть n — произвольное натуральное число и ε — корень степени p^n из 1 в C. Тогда $1 - \varepsilon \in \mathfrak{p}$. Действительно, для образа $\breve{\varepsilon}$ элемента ε в поле $\hat{Z}/\mathfrak{p}$ имеем $\breve{\varepsilon}^{p^n} = \breve{1}$, откуда по **А2(2)** $\breve{\varepsilon} = \breve{1}$, $\widetilde{1 - \varepsilon} = \breve{0}$ и $1 - \varepsilon \in \mathfrak{p}$. Таким образом, $\mathfrak{p} \supseteq pZ \cup \{1 - \varepsilon | \varepsilon^{p^n} = 1$ для некоторого $n\in N\}$. Кроме того, если t — корень многочлена $x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$, где $a_i \in pZ$ (или $a_i \in \mathfrak{p}$) для всех i, то $t^n \in \mathfrak{p}$ и по **Б2** $t \in \mathfrak{p}$. В частности, $\sqrt[n]{p} \in \mathfrak{p}$ при любом $n\in N$.

Б4. Пусть F — подполе поля $\hat{Q}$ и $R = F \cap \hat{Z}$. Тогда каждый простой идеал кольца R является максимальным идеалом в R.

Доказательство. Пусть I — простой идеал в R, $I \neq \{0\}$. Рассмотрим $b\in I\setminus\{0\}$. Тогда b удовлетворяет уравнению $b_0x^m + +b_1x^{m-1} + \ldots + b_m = 0$, где $b_i\in Z$ для всех i и $b_m \neq 0$. Так как $b_m = -(b_0b^m + b_1b^{m-1} + \ldots + b_{m-1}b) \in I \cap Z$, то $I \cap Z \neq \neq \{0\}$. Кроме того, $I \cap Z \neq Z$, поскольку $1 \notin I$. Из простоты идеала I в R легко следует простота идеала $I \cap Z$ в Z. Следовательно, $I \cap Z = pZ$ для некоторого простого числа p (если бы $I \cap Z$ содержал два простых числа p и q, то было бы $1 = pu + +qv\in I$ для некоторых целых u, v).

Предположим, что I не является максимальным идеалом в R, т. е.

$$I\subset A\subset R$$

для некоторого идеала A из R. Тогда $pZ = I \cap Z \subseteq A \cap Z \subset$

$\subset Z$ $(1 \notin A)$. Но pZ, очевидно, максимальный идеал в Z. Следовательно,

$$A \cap Z = pZ \subseteq I.$$

Пусть $a \in A \setminus I$. Тогда a удовлетворяет уравнению $x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$, где все $a_i \in Z$. Поэтому $a_n \in A \cap Z \subseteq I$ и, следовательно,

$$a(a^{n-1} + a_1a^{n-2} + \ldots + a_{n-1}) \in I.$$

Так как $a \notin I$, а идеал I простой, то

$$a^{n-1} + a_1a^{n-2} + \ldots + a_{n-1} \in I.$$

Но теперь $a_{n-1} \in A \cap Z \subseteq I$ и, продолжив эти рассуждения далее, получим $a \in I$, что противоречиво.

□

Б5. Пусть F — подполе из C, являющееся конечным расширением поля Q. Тогда

1) $F \subseteq \hat{Q}$;

2) если $\mathfrak{p}$ — максимальный идеал в $\hat{Z}$, содержащий простое число p, то $\mathfrak{p} \cap F$ — максимальный идеал в $\hat{Z} \cap F$, содержащий p.

Доказательство. 1): По условию F можно рассматривать как векторное пространство над Q некоторой конечной размерности n. Но тогда для любого $f \in F$ элементы $f^n, f^{n-1}, \ldots, f, 1$ линейно зависимы над Q, т. е. $a_0f^n + a_1f^{n-1} + \ldots + a_{n-1}f + a_n = 0$ для некоторой ненулевой последовательности $a_0, \ldots, a_n$ чисел из Q. Значит, $f \in \hat{Q}$.

2): Пусть $\mathfrak{p}$ — максимальный идеал в $\hat{Z}$, содержащий p. По **Б2** $\mathfrak{p}$ — простой идеал в $\hat{Z}$. Легко заметить, что тогда $\mathfrak{p} \cap F$ — простой идеал в $\hat{Z} \cap F$ (если $a, b \in (\hat{Z} \cap F) \setminus (\mathfrak{p} \cap F) \subseteq \hat{Z} \setminus \mathfrak{p}$, то $ab \notin \mathfrak{p}$ в силу простоты $\mathfrak{p}$ в $\hat{Z}$; тем более, $ab \notin \mathfrak{p} \cap F$). Ясно, что $p \in \mathfrak{p} \cap F$. Теперь по **Б4** $\mathfrak{p} \cap F$ — максимальный идеал в $\hat{Z} \cap F$.

□

Как видно из доказательства, свойство 2) в **Б5** справедливо для любого подполя F из $\hat{Q}$.

Б6. Пусть F — подполе из $\hat{Q}$, являющееся конечным расширением поля Q, и $R = \hat{Z} \cap F$ (кольцо всех целых алгебраических чисел из F). Тогда группа R^+ является конечно порожденной. Любая подгруппа группы R^+ также конечно порождена.

Доказательство. Элементарное доказательство первого утверждения см. [28, теорема 25.1.6]. Второе утверждение следует из первого при помощи [28, теорема 8.1.1].

□

Б7. Пусть F и R — как в **Б6** и $f \in F$. Равносильны условия:

(1) $f \in R$;

(2) подгруппа $\langle 1, f, f^2, \ldots \rangle$ группы K^+ конечно порождена.

Доказательство. Пусть $H = \langle 1, f, f^2, \ldots \rangle$ — подгруппа из K^+.

(1)⇒(2): Если $f \in R$, то существуют целые числа $a_1, \ldots, a_n$ $(n \geqslant 1)$ такие, что $f^n + a_1 f^{n-1} + \ldots + a_n = 0$. Но тогда $H = \langle 1, f, \ldots, f^{n-1} \rangle$.

(2)⇒(1): Пусть $H = \langle h_1, \ldots, h_n \rangle$. Элемент h_i есть $\boldsymbol{Z}$-линейная комбинация элементов $1, f, f^2, \ldots$, т. е. $h_i = g_i(f)$, где g_i — многочлен с целыми коэффициентами $(i = 1, \ldots, n)$. Возьмем натуральное число m, большее степени любого из этих многочленов. Тогда

$$f^m = a_1 g_1(f) + \ldots + a_n g_n(f)$$

для некоторых целых a_i. Следовательно, f является корнем многочлена степени m с целыми коэффициентами, причем коэффициент при старшем члене равен 1 (по выбору m). Это означает, что $f \in \hat{\boldsymbol{Z}}$. Теперь $f \in \hat{\boldsymbol{Z}} \cap F = R$.

□

Б8. Определение. Пусть F — подполе из $\hat{\boldsymbol{Q}}$, являющееся конечным расширением поля $\boldsymbol{Q}$, и $R = F \cap \hat{\boldsymbol{Z}}$. *$R$-идеалом* (или *дробным идеалом*) поля F называется подмножество из F вида fI, где $f \in F$ и I — идеал в R.

Б9. Теорема. Пусть F — подполе из $\boldsymbol{Q}$, являющееся конечным расширением $\boldsymbol{Q}$, и $R = F \cap \hat{\boldsymbol{Z}}$. Пусть $\mathfrak{A}$ — множество всех ненулевых R-идеалов поля F с операцией $A * B = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \mid n \in \boldsymbol{N},\ a_i \in A,\ b_i \in B \right\}$. Тогда $\mathfrak{A}$ — группа, причем для любого $A \in \mathfrak{A}$ обратный ему элемент имеет вид

$$A^{-1} = \{ f \in F \mid fA \subseteq R \}.$$

Доказательство. Операцию $*$ будем называть произведением. Очевидно, что она ассоциативна, и единицей в $\mathfrak{A}$ является R.

Покажем, что обратным для каждого $A \in \mathfrak{A}$ будет R-идеал

(б1) $$A^{(-1)} = \{ f \in F \mid fA \subseteq R \}.$$

1) Пусть $A \in \mathfrak{A}$. Для каждого $a \in A \setminus \{0\}$ существует идеал I в R такой, что $A^{(-1)} = a^{-1}I$. В частности, $A^{(-1)} \in \mathfrak{A}$.

Действительно, из (б1) следует, что $A^{(-1)}R \subseteq R$ и $aA^{(-1)} \subseteq R$ при $a \in A$. Поэтому $A^{(-1)} = a^{-1}I$, где $I \equiv aA^{(-1)}$ — идеал в R.

2) Если $A \in \mathfrak{A}$, то группа A^+ изоморфна подгрупне из R^+ и, следовательно, конечно порождена.

Действительно, по определению R-идеала $A = fI$, где $f \in F$ и I — идеал в R. Значит, $A^+ \simeq I^+ \leqslant R^+$ и остается применить **Б6.**

3) Каждый ненулевой идеал I кольца R содержит произведение некоторого числа $m \geqslant 1$ простых идеалов.

Предположим, что это не так и обозначим через $\mathfrak{B}$ — множество всех идеалов I из R, для которых утверждение 3) неверно. Так как R^+ конечно порождена (**Е6**), то в множестве $\mathfrak{B}$ (как и в любом множестве подгрупп из R^+) имеется максимальный по включению элемент B (иначе существует бесконечная последовательность $H_1 < H_2 < \ldots$ подгрупп R^+ с $H_i \in \mathfrak{B}$, но тогда $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} H_i \equiv H < R^+$, H — конечно порождена (**Е6**) и, следовательно, $H = H_i$ для некоторого i). Из определения $\mathfrak{B}$ следует, что если $B \subset I$, где I — идеал из R, то I содержит произведение простых идеалов. Так как идеал B не простой, то существуют $r, s \in R \setminus B$ такие, что $rs \in B$. Тогда каждый из идеалов $B + rR$ и $B + sR$ строго содержит B и, следовательно, содержит произведение простых идеалов. Но $(B + rR) \ast (B + sR) = B \ast B + rB + sB + rsR \subseteq B$ и, значит, B также содержит произведение простых идеалов. Утверждение 3) доказано.

4) Пусть P, P_1, ..., P_n — простые идеалы кольца R и $P_1 \ast \ldots \ast P_n \subseteq P$. Тогда $P \in \{P_1, \ldots, P_n\}$.

Если это не так, то существует $a_i \in P_i \setminus P$ (P_i — максимальный идеал в R по **Б4**) для $i = 1, \ldots, n$. Однако $a_1 \ldots a_n \subseteq P_1 \ast \ldots \ast P_n$, что противоречит простоте идеала P.

5) Пусть $A \in \mathfrak{A}$ и $A \subset R$. Тогда $A^{(-1)} \supset R$.

При доказательстве этого утверждения воспользуемся тем, что понятия простоты и максимальности ненулевого идеала из R совпадают (**Б2, Б4**).

Ясно, что $A^{(-1)} \supseteq R$. Пусть $a \in A \setminus \{0\}$. По 3) существуют простые идеалы $P_1, \ldots, P_n$ из R такие, что $P_1 \ast \ldots \ast P_n \subseteq aR \subseteq A$. Можно предполагать, что $n > 1$, так как иначе, $P_1 = aR = A$ и поэтому $a^{-1} \in A^{(-1)} \setminus R$. Будем считать, что число n выбрано так, что произведение любых $n - 1$ простых идеалов из R не содержится в A. Пусть P — максимальный идеал из R, содержащий A. По 4) $P \in \{P_1, \ldots, P_n\}$ и, следовательно,

$$P \ast B \subseteq aR \subseteq A \subseteq P,$$

где B — произведение $n - 1$ простых идеалов и, значит, $B \not\subseteq aR$. Пусть $b \in B \setminus aR$. Тогда $c \equiv a^{-1}b \notin R$, но $cA = a^{-1}bA \subseteq a^{-1}bP = (a^{-1}P) \ast (bR) \subseteq a^{-1}(P \ast B) \subseteq a^{-1}(aR) = R$. Поэтому $c \in A^{(-1)} \setminus R$ и верно 5).

6) Если $A\in\mathfrak{A}$ и $A\subseteq R$, то $A\ast A^{(-1)}=R$.

Положим $B=A\ast A^{(-1)}$. Очевидно, $B\in\mathfrak{A}$, $B\subseteq R$ и, значит, $B^{(-1)}\supseteq R$. Далее, $A\ast(A^{(-1)}\ast B^{(-1)})=B\ast B^{(-1)}\subseteq R$, откуда $A^{(-1)}\ast B^{(-1)}\subseteq A^{(-1)}$.

Теперь для любого $f\in B^{(-1)}$ будет $A^{(-1)}f\subseteq A^{(-1)}$ и, значит,

$$f^n\in A^{(-1)}f^n\subseteq A^{(-1)} \text{ для всех } n\in \boldsymbol{N}\cup\{0\}.$$

Пусть G — подгруппа из $(A^{(-1)})^{-}$, порожденная множеством

$$\{f^n\mid n\in \boldsymbol{N}\cup\{0\}\}\quad \left(G=\sum_{n=0}^{\infty}\boldsymbol{Z}f^n\right). \text{ По 2) и \textbf{Б6} } G$$

конечно порождена. Следовательно, по **Б7** $f\in R$. Мы получили, что $B^{(-1)}\subseteq R$ и, значит, $B^{(-1)}=R$. Отсюда и из 5) следует, что $B=R$. Утверждение 6) доказано.

7) Если $A\in\mathfrak{A}$ и $f\in F$, то $(fA)^{(-1)}=f^{-1}A^{(-1)}$.

Действительно, $(fA)^{(-1)}=\{x\in F\mid xfA\subseteq R\}=\{x\in F\mid xf\in A^{(-1)}\}=$ $=f^{-1}A^{(-1)}$.

8) Пусть $A\in\mathfrak{A}$. Тогда $A\ast A^{(-1)}=R$ (т. е. $A^{-1}=A^{(-1)}$).

Действительно, $A=fI$, где $f\in F$ и I — идеал из R, и теперь $A\ast A^{(-1)}=_{6)}(fI)\ast(f^{-1}I^{(-1)})=II^{(-1)}=_{5)}R$.

Этим завершено доказательство теоремы **Б9**.

□

Б10. R-идеал $A\ast B$, введенный в теореме **Б9**, будем называть *произведением* A и B.

Б11. Теорема. Пусть F — подполе из $\hat{\boldsymbol{Q}}$, являющееся конечным расширением $\boldsymbol{Q}$, и $R=F\cap\hat{\boldsymbol{Z}}$.

1) Каждый идеал кольца R, отличный от $\{0\}$ и R, единственным способом, с точностью до порядка множителей, представляется в виде произведения простых идеалов кольца R.

2) Каждый R-идеал A поля F, отличный от $\{0\}$ и R, единственным способом, с точностью до порядка множителей, представляется в виде произведения

$$A=P_1\ast\cdots\ast P_m\ast Q_1^{-1}\ast\cdots\ast Q_n^{-1},$$

где $\{P_1,\ldots,P_m\}$ и $\{Q_1,\ldots,Q_n\}$ — непересекающиеся множества простых идеалов кольца R и $m+n\geq 1$.

Доказательство. 1): Пусть A — идеал кольца R, отличный от $\{0\}$ и R. Согласно утверждению 3) в доказательстве теоремы **Б9** существуют натуральное число n и простые идеалы $P_1,\ldots,P_n$ такие, что

$$P_1\ast\cdots\ast P_n\subseteq A. \tag{62}$$

Пусть P — максимальный идеал в R, содержащий A. Тогда $P \in \{P_1, \ldots, P_n\}$ (см. утверждение 4) в доказательстве **Б9**). Пусть $P = P_1$.

Применим индукцию по n (со свойством (б2)). При $n = 1$ будет $A = P$ и утверждение 1) верно. Пусть $n > 1$. Тогда вследствие теоремы **Б9** $P_2 \ast \ldots \ast P_n \leqslant P^{-1} \ast A \subseteq P^{-1} \ast P \subseteq R$, т. е. идеал $P^{-1} \ast A$ из R содержит произведение $n-1$ простых идеалов.

По предположению индукции $P^{-1} \ast A = Q_1 \ast \ldots \ast Q_s$, где Q_i — простые идеалы. Но теперь по **Б9** $A = P \ast Q_1 \ast \ldots \ast Q_s$.

Остается доказать единственность разложения. Пусть $A = P_1 \ast \ldots \ast P_n = Q_1 \ast \ldots \ast Q_m$, где P_i и Q_j — простые идеалы. Если P — простой идеал, содержащий A, то $P \subseteq \{P_1, \ldots, P_n\}$ (см. утверждение 4) из доказательства **Б9**) и также $P \subseteq \{Q_1, \ldots, Q_m\}$. Пусть $P = P_1 = Q_1$. Тогда по **Б9** $P_2 \ast \ldots \ast P_n = Q_2 \ast \ldots \ast Q_m$ и по индукции $n = m$ и $P_i = Q_{\sigma(i)}$ для некоторой перестановки $\sigma \in S_n$.

2): Пусть A — R-идеал в F. Тогда $A = r^{-1}I$, где $r \in R$ и I — идеал в R. Поэтому $A = (rR)^{-1} \ast I$ (по **Б9**), где rR — идеал в R. Теперь по 1) $I = P_1 \ast \ldots \ast P_m$ и $rR = Q_1 \ast \ldots \ast Q_n$, где P_i и Q_j — простые идеалы из R. Следовательно, по **Б9** $A = P_1 \ast \ldots \ast P_m \ast Q_1^{-1} \ast \ldots \ast Q_n^{-1}$. Если $P_i = Q_j$ для некоторых i, j, то $P_i \ast Q_j^{-1} = R$ и множители P_i и Q_j можно опустить. Единственность разложения следует из 1).

□

Теперь мы установим некоторые следствия теоремы **Б11**.

Б12. Пусть F и R — как в **Б11** и A, B — идеалы из R. Равносильны условия:

(1) $A \subseteq B$;

(2) $A = B \ast C$ для некоторого идеала C из R.

Доказательство. (1)⇒(2): По теореме **Б11** (1) $A = P_1 \ast \ldots \ast P_m$ и $B = Q_1 \ast \ldots \ast Q_n$, где P_i и Q_j — простые идеалы в R. Из $P_1 \ast \ldots \ast P_m \subseteq B \subseteq Q_1$ следует (см. утверждение 4) в доказательстве **Б9**), что $Q_1 \in \{P_1, \ldots, P_m\}$. Пусть $P_1 = Q_1$. Тогда $P_2 \ast \ldots \ast P_m \subseteq Q_2 \ast \ldots \ast Q_n$ (**Б9**). Применив индукцию по n, заключаем, что верно (2).

(2)⇒(1): Очевидно.

□

Б13. Определение. Пусть F и R — как в теореме **Б11** и P — максимальный идеал в R. Пусть $f \in F \setminus \{0, 1\}$. По **Б11** идеал fR единственным образом с точностью до порядка множителей представляется (в группе $\mathfrak{A}$) в виде

$$fR = P_1^{m_1} * \ldots * P_n^{m_n},$$

где P_i — простые идеалы из R, $m_i \in \boldsymbol{Z}$ и $m_i \neq 0$. Положим

$$v_P(f) = \begin{cases} 0, & \text{если } P \notin \{P_1, \ldots, P_n\}, \\ m_i, & \text{если } P = P_i \, (i \in \{1, \ldots, n\}). \end{cases}$$

Кроме того, положим

$$v_P(1) = 0.$$

Б14. Пусть F, R и P — как в **Б13** и $f_1, f_2 \in F \setminus \{0\}$.

1) $v_P(f_1 f_2) = v_P(f_1) + v_P(f_2)$;

2) $v_P(f_1 / f_2) = v_P(f_1) - v_P(f_2)$;

3) Если $r \in R \setminus \{0\}$, то $v_P(r) \equiv m \geqslant 0$ и $r \in P^m \setminus P^{m+1}$.

Доказательство. 1), 2): Следуют из **Б11**(2), так как $f_1 f_2 R = (f_1 R)(f_2 R)$ и $(f_1 / f_2) R = (f_1 R)(f_2 R)^{-1}$.

3): $v_P(r) \equiv m \geqslant 0$ по **Б11**(1), $r \in P^m$ по **Б13** $(P^0 = R)$, $r \notin P^{m+1}$ по **Б12**.

□

Б15. Пусть F, R и P — как в **Б13**, $f \in F$ и $m \in \boldsymbol{N} \cup \{0\}$. Равносильны условия:

(1) $v_P(f) = m$;

(2) $f = \dfrac{r}{q}$, где $r \in P^m \setminus P^{m+1}$ и $q \in R \setminus P$.

Доказательство. (1)⇒(2): Пусть $v_P(f) = m$. По **Б13** и **Б11**(2) $fR = P^m * P_1 * \ldots * P_l * Q_1^{-1} * \ldots * Q_n^{-1}$, где P_i и Q_j — простые идеалы из R, отличные от P. Возьмем $q_j \in P_j \setminus P$ $(j = 1, \ldots, n)$. По утверждению 1) из доказательства теоремы **Б9** $Q_j^{-1} = q_j^{-1} I_j$, где I_j — идеал из R $\left(Q_j^{-1} = Q_j^{(-1)}\right.$ по **Б9**$\left.\right)$. Положим $q = q_1 \ldots q_n$. Тогда $fR = q^{-1} P^m * P_1 * \ldots * P_l * I_1 * \ldots * I_n$ и, следовательно, $f = \dfrac{r}{q}$, где $r \in R$. Так как идеал P — простой (**Б2**), то из $q_j \in R \setminus P$ следует, что $q \in R \setminus P$, откуда $v_P(q) = 0$ по **Б14**(3). Наконец, по **Б14**(1) $v_P(r) = v_P(fq) = v_P(f) + v_P(q) = m + 0 = m$, откуда по **Б14**(3) $r \in P^m \setminus P^{m+1}$.

(2)⇒(1): Следует из **Б14**.

□

Б16. Пусть $\mathfrak{p}$ — максимальный идеал в $\hat{\boldsymbol{Z}}$, содержащий простое число, и $f \in \hat{\boldsymbol{Q}}$. Тогда f можно представить в виде $f = \frac{r}{s}$, где $r, s \in \hat{\boldsymbol{Z}}$ и $\{r, s\} \not\subseteq \mathfrak{p}$.

Доказательство. Положим $F = \boldsymbol{Q}(f)$, $R = F \cap \hat{\boldsymbol{Z}}$ и $P = \mathfrak{p} \cap R$. Очевидно, F — конечное расширение поля $\boldsymbol{Q}$. По **Б5**(2) и **Б2** P — простой идеал кольца R. Пусть $v_P(f) = m$. Без ограничения общности можно считать, что $m \geqslant 0$ (иначе рассмотрим f^{-1} вместо f, так как $v_P(f^{-1}) = -v_P(f)$ по **Б14**(3)). Теперь по **Б15** $f = \frac{r}{s}$, где $r \in \hat{\boldsymbol{Z}}$ и $s \in R \setminus P \subseteq \hat{\boldsymbol{Z}} \setminus \mathfrak{p}$. Значит, $\{r, s\} \not\subseteq \mathfrak{p}$.

Б17. Теорема. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — ненулевые алгебраические числа и $\mathfrak{p}$ — максимальный идеал из $\hat{\boldsymbol{Z}}$, содержащий простое число. Тогда существует число $f \in \hat{\boldsymbol{Q}}$ такое, что $a_1 f, \ldots, a_n f$ все содержатся в $\hat{\boldsymbol{Z}}$, но не все содержатся в $\mathfrak{p}$.

Доказательство. Подберем требуемое число f в поле $F = \boldsymbol{Q}(a_1, \ldots, a_n)$, которое является, очевидно, конечным расширением $\boldsymbol{Q}$. Положим $R = F \cap \hat{\boldsymbol{Z}}$ и $P = R \cap \mathfrak{p}$. По **Б5**(2) и **Б2** P — простой идеал в R. Положим $m_i = v_P(a_i)$. Выберем нумерацию чисел a_i так, что $m_1 \leqslant \ldots \leqslant m_n$, и перейдем от последовательности $a_1, \ldots, a_n$ к последовательности $\breve{a}_1, \ldots, \breve{a}_n$, где $\breve{a}_i = \frac{a_i}{a_1}$. Здесь $\breve{a}_1 = 1$. По **Б14**(2) $v_P(\breve{a}_i) = m_i - m_1 \geqslant 0$. Следовательно, по **Б15** $\breve{a}_i = \frac{r_i}{q_i}$, где $r_i \in R$ и $q_i \in R \setminus P$. Положим $q = q_1 \ldots q_n$. Так как идеал P — простой, то $q \notin \mathfrak{p}$. Теперь число $f = \frac{q}{a_1}$ обладает требуемым свойством

$$\left(a_i f = \breve{a}_i q = \frac{r_i}{q_i} q \in \hat{\boldsymbol{Z}} \text{ и } a_1 f = q \notin \mathfrak{p}\right).$$

□

Б18. Теорема. Пусть p — простое число, $\mathfrak{p}$ — максимальный идеал из $\hat{\boldsymbol{Z}}$, содержащий p, и U — подгруппа из $\hat{\boldsymbol{Z}}^{\times}$, состоящая из всех корней из единицы степеней, не делящихся на p. Тогда

1) $\hat{\boldsymbol{Z}}/\mathfrak{p}$ — поле характеристики p, являющееся алгебраическим замыканием своего простого подполя;

2) при естественном гомоморфизме $\hat{\boldsymbol{Z}}$ на $\hat{\boldsymbol{Z}}/\mathfrak{p}$ мультипликативная группа U отображается изоморфно на $(\hat{\boldsymbol{Z}}/\mathfrak{p})^{\times}$.

Доказательство. Положим $F = \hat{Z}/\mathfrak{p}$. Из выбора идеала $\mathfrak{p}$ следует, что

(63) $\qquad$ F — поле и $\operatorname{char}(F) = p$.

Пусть K — простое подполе в F и $*$ — естественный гомоморфизм $\acute{Z} \to F$. Тогда $K = (Z + \mathfrak{p})^*$ — поле порядка p.

(64) $\qquad$ Если $f \in F$, то $K(f)$ — конечное поле.

Действительно, $f = r + \mathfrak{p}$, где $r \in \hat{Z}$ и, значит, r — корень многочлена $x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ с $a_i \in Z$; но тогда f — корень многочлена $x^n + a_1^* x^{n-1} + \ldots + a_n^* (a_i^* \in K)$ и, следовательно, $K(f) = K[f]$ § [37, с. 187] или [33, с. 420, 421]§ $= K + Kf + \ldots + Kf^{n-1}$ конечно. В частности, f — корень из 1 степени $|K(f)| - 1$, взаимно простой с p.

По (64) F — алгебраическое расширение поля K и, значит, $F \subseteq \hat{K}$. Для доказательства обратного включения (и следовательно, пункта 1)) нужно доказать алгебраическую замкнутость поля F (или, равносильно, что F имеет подполе порядка p^n для любого натурального n).

Предварительно покажем, что

(65) $*$ индуцирует изоморфизм группы U в группу $F^{\times}$.

Пусть $u \in U \setminus \{1\}$. Тогда u — примитивный корень из 1 некоторой степени $n > 1$ с p не делит n и поэтому

$$1 + x + \ldots + x^{n-1} = \frac{x^n - 1}{x - 1} = \prod_{i=1}^{n-1} (x - u^i).$$

При $x = 1$ получаем, что $n = (1 - u) r$, где $r \in \acute{Z}$, и $n^* = (1 - u)^* r^*$. Так как p не делит n, то $n^* \neq 0$ и, следовательно, $u^* \neq 1^*$. Этим доказано (65).

(66) $\qquad$ Для любого натурального n поле F имеет подполе порядка p^n.

Пусть u — первообразный корень из 1 степени $p^n - 1$. По (65) u^* — первообразный корень из 1^* степени $p^n - 1$ в F. По (64) $|K(u^*)| = p^s$ для некоторого натурального s. При этом должно быть $p^n - 1 \mid p^s - 1$, откуда $n \mid s$ (если $s = nq + t$, где $0 \leqslant t < n$, то $p^s - 1 = (p^{nq} - 1) p^t + (p^t - 1)$, причем первое слагаемое делится на $p^n - 1$) и, значит, $K(u^*)$ содержит подполе порядка p^n. (Так как это подполе K_1 должно содержать все корни уравнения $x^{p^n} = x$ из $K(u^*)$, то оно совпадает с $K(u^*)$. Таким образом, $|K(u^*)| = p^n$.)

Из (64) и (66) следует, что

(67) $\qquad$ $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} K(u_n^*)$, где $u_n \in U$ и $|K(u_n^*)| = p^n$.

Отсюда и из (63) вытекает 1).
Из (66) и (67) следует 2).

□

Б19. Определение. Пусть $\mathfrak{p}$ — максимальный идеал кольца $\hat{\mathbf{Z}}$. Положим

$$\hat{\mathbf{Z}}_{\mathfrak{p}}=\left\{\frac{r}{s}\,\middle|\,r\in\hat{\mathbf{Z}},\ s\in\hat{\mathbf{Z}}\setminus\mathfrak{p}\right\}.$$

Очевидно, $\hat{\mathbf{Z}}_{\mathfrak{p}}$ — подкольцо в $\hat{\mathbf{Q}}$. Оно называется *кольцом* $\mathfrak{p}$*-целых* чисел ($\hat{\mathbf{Q}}$).

Б20. Теорема. Пусть $\mathfrak{p}$ — максимальный идеал кольца $\hat{\mathbf{Z}}$, $\mathfrak{R}=\hat{\mathbf{Z}}_{\mathfrak{p}}$ и $\mathfrak{P}=\left\{\frac{r}{s}\,\middle|\,r\in\mathfrak{p},\ s\in\hat{\mathbf{Z}}\setminus\mathfrak{p}\right\}$. Тогда

1) все элементы из $\mathfrak{R}\setminus\mathfrak{p}$ обратимы в $\mathfrak{R}$,
2) $\mathfrak{P}$ — единственный максимальный идеал в $\mathfrak{R}$,
3) $\mathfrak{P}\cap\hat{\mathbf{Z}}=\mathfrak{p}$,
4) $\mathfrak{R}=\hat{\mathbf{Z}}+\mathfrak{P}$.
5) $\mathfrak{R}/\mathfrak{P}\simeq\hat{\mathbf{Z}}/\mathfrak{p}$,
6) $\mathfrak{R}\cap\mathbf{Q}=\left\{\frac{m}{n}\,\middle|\,m\in\mathbf{Z},\ n\in\mathbf{Z}\setminus p\mathbf{Z}\right\}$.

Доказательство. 1), 2): Очевидно.

3): Пусть $r\in\mathfrak{P}\cap\hat{\mathbf{Z}}$. Тогда $r=\frac{t}{s}$, где $t\in\mathfrak{p}$ и $s\in\hat{\mathbf{Z}}\setminus\mathfrak{p}$. По Б3 идеал $\mathfrak{p}$ — простой. Поэтому из $r\notin\mathfrak{p}$ следовало бы, что $rs\notin\mathfrak{p}$. Но $rs=t\in\mathfrak{p}$.

4): Пусть $r\in\mathfrak{R}$. Тогда $r=\frac{t}{s}$, где $t\in\hat{\mathbf{Z}}$ и $s\in\hat{\mathbf{Z}}\setminus\mathfrak{p}$. Так как $\hat{\mathbf{Z}}=s\hat{\mathbf{Z}}+\mathfrak{p}$, то $t=sz+v$, где $z\in\hat{\mathbf{Z}}$ и $v\in\mathfrak{p}$. Поэтому $r=\frac{t}{s}=$ $=z+\frac{v}{s}\in\hat{\mathbf{Z}}+\mathfrak{P}$.

5): $\mathfrak{R}/\mathfrak{P}=_{4)}(\hat{\mathbf{Z}}+\mathfrak{P})/\mathfrak{P}\simeq\hat{\mathbf{Z}}/\hat{\mathbf{Z}}\cap\mathfrak{P}=_{3)}\hat{\mathbf{Z}}/\mathfrak{p}$.

6): Пусть $q=\frac{m}{n}$, где $m,\ n\in\mathbf{Z}$ и $(m,\ n)=1$. Если p не делит n, то $n\notin\mathfrak{p}$ и $q\in\mathfrak{R}$. Значит, правая часть доказываемого равенства содержится в левой. Предположим, что p/n и $q\in\mathfrak{R}$. Тогда $q=\frac{a}{b}$, где $a\in\hat{\mathbf{Z}}$ и $b\in\mathbf{Z}\setminus\mathfrak{p}$. Имеем $\frac{m}{n}=\frac{a}{b}$, $mb=na\in$ $\in p\hat{\mathbf{Z}}\subseteq\mathfrak{p}$. Так как $\mathfrak{p}$ — простой идеал (Б2), то из $mb\in\mathfrak{p}$ следует что $m\in\mathfrak{p}$ или $b\in\mathfrak{p}$. Это противоречит выбору m и b. Следовательно, если $q\in\mathfrak{R}$, то p не делит n.

□

В поле K характеристики 0 можно рассмотреть секцию T/I, где T — подкольцо в K и I — максимальный идеал в T. Такая секция является полем, а ее характеристика может быть уже простым числом. Например, поле $\boldsymbol{Q}$ имеет в качестве секции поле любого простого порядка p, а именно $\boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z}$. Согласно Б18 для любого простого p поле $\hat{\boldsymbol{Q}}$ имеет секцию $\hat{\boldsymbol{Z}}/\mathfrak{p}$, изоморфную алгебраическому замыканию поля $\mathrm{GF}(p)$.

Такое „вплетение„ полей характеристики p в поля характеристики 0 позволяет установить некоторые связи между обыкновенными и модулярными представлениями.

В1. В этом параграфе мы зафиксируем простое число p и максимальный идеал $\mathfrak{p}$ в $\hat{\boldsymbol{Z}}$ с $p \in \mathfrak{p}$; положим

$\mathfrak{R} = \hat{\boldsymbol{Z}}_{\mathfrak{p}}$,

$\mathfrak{P}$ — единственный максимальный идеал в $\mathfrak{R}$,

$\boldsymbol{F} = \mathfrak{R}/\mathfrak{P}$,

μ — естественный кольцевой гомоморфизм $\mathfrak{R}$ на $\boldsymbol{F}$.

В2. Теорема. Пусть $\mathscr{A}$ — представление конечной группы G над полем $\boldsymbol{C}$. Тогда существует матричное представление $\mathscr{M}$ группы G, эквивалентное представление $\mathscr{A}$, такое, что все элементы матриц $\mathscr{M}(g)$ при $g \in G$ лежат в $\mathfrak{R}$.

Доказательство. Согласно теореме 2А7 (2) любое представление группы G над $\boldsymbol{C}$ эквивалентно представлению G над $\hat{\boldsymbol{Q}}$. Поэтому мы можем в дальнейшем считать, что

$$\mathscr{A} : G \to \mathrm{Aut}(V),$$

где V — векторное пространство размерности n над $\hat{\boldsymbol{Q}}$ с базой $(v_1, \ldots, v_n)$. Положим

$$\{w_1, \ldots, w_l\} = \left\{ v_i^{\mathscr{A}(g)} \,\middle|\, 1 \leqslant i \leqslant n,\ g \in G \right\},$$

$$W = \sum_{i=1}^{l} w_i \mathfrak{R},$$

$$W_0 = \sum_{i=1}^{l} w_i \mathfrak{P}.$$

Очевидно, W — $\mathscr{A}(G)$-инвариантное подмножество в V и $V = W\hat{\boldsymbol{Q}}$, причем W и W_0 — подгруппы аддитивной группы $V+$ пространства V. Рассмотрим естественный гомоморфизм

$$\tau: W \to W/W_0.$$

Как легко заметить, группу W^τ можно доопределить до векторного пространства над полем $F=\mathfrak{R}/\mathfrak{P}$, положив $w^\tau r^\mu=(wr)^\tau$ $(w\in W,\ r\in\mathfrak{R})$; при этом будет

$$W^\tau=\sum_{i=1}^{l} w_i^\tau F.$$

Можно считать, что нумеризация элементов w_i выбрана так, что

(в1) $\qquad (w_1^\tau, \ldots, w_k^\tau)$ — база в W^τ $(1\leqslant k\leqslant l)$.

Тогда $W^\tau=\sum_{i=1}^{k} w_i^\tau F=\left(\sum_{i=1}^{k} w_i\mathfrak{R}\right)^\tau$ и

$$W=\sum_{i=1}^{k} w_i\mathfrak{R}+W_0.$$

Предположим, что $W\neq\sum_{i=1}^{k} w_i\mathfrak{R}$. Тогда существует число s с $k<$ $<s\leqslant l$ такое, что

(в2) $$W=\sum_{i=1}^{k} w_i\mathfrak{R}+\sum_{i=k+1}^{s} w_i\mathfrak{P}$$

и s — минимальное число с этим свойством. Запишем

$$w_s=\sum_{i=1}^{k} w_ir_i+\sum_{i=k+1}^{s} w_i\rho_i\ \ (r_i\in\mathfrak{R},\ \rho_i\in\mathfrak{P}),$$

откуда $w_s(1-\rho_s)=\sum_{i=1}^{k} w_ir_i+\sum_{i=k+1}^{s-1} w_i\rho_i$. Так как $1-\rho_s\in\mathfrak{R}\setminus\mathfrak{P}$, то он обратим в $\mathfrak{R}$. Следовательно, $w_s=\sum_{i=1}^{s-1} w_ir_i'$, где $r_i'\in\mathfrak{R}$. Подставив это в (в2), мы получим противоречие с минимальностью s. Таким образом,

$$W=\sum_{i=1}^{k} w_i\mathfrak{R}.$$

Предположим, что $w_1, \ldots, w_k$ линейно зависимы над $\hat{Q}$, т. е. $\sum_{i=1}^{k} w_ia_i=0$, где $a_i\in\hat{Q}$ и не все a_i равны нулю. По **Б17** существует $r\in\hat{Q}$ такое, что $\{a_1r, \ldots, a_kr\}$ содержится в $\mathfrak{R}$, но не содержится в $\mathfrak{P}$. Следовательно,

$$0=\left(\sum_{i=1}^{k} w_ia_ir\right)^\tau=\sum_{i=1}^{k} w_i^\tau(a_ir)^\mu,$$

где не все $(a_ir)^\mu$ равны нулю. Но это противоречит (в1). Таким образом, $w_1, \ldots, w_k$ — линейно независимы над $\hat{Q}$. Но тогда $V = W\hat{Q} = \sum_{i=1}^{k} w_i\hat{Q}$ и $(w_1, \ldots, w_k)$ — база в V (в частности, $k=n$).

Теперь пусть $\mathscr{M}$ — матричная интерпретация представления $\mathscr{A}$ относительно базы $(w_1, \ldots, w_n)$, т. е. $\mathscr{M}(g) = (a_{ij})_{n\times n}$, если $w_i^{\mathscr{A}(g)} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}w_j$. Так как $W^{\mathscr{A}(G)} = W = \sum_{i=1}^{n} w_i\mathfrak{R}$, то все $a_{ij}\in\mathfrak{R}$. Итак, $\mathscr{A}\approx\mathscr{M}$ и $\mathscr{M}(G)\subseteq \mathrm{M}(n, \mathfrak{R})$.

□

Если $\mathscr{M}(G)\subseteq \mathrm{M}(n, \mathfrak{R})$, то, очевидно, $\mathscr{M}(G)\subseteq \mathrm{GL}(n, \mathfrak{R})$.

B3. Теорема. 1) Для каждой матрицы $M\in \mathrm{M}(n, \mathfrak{R})$ $(n\geqslant 1)$ определим матрицу $M^{(\mathfrak{p})}\in \mathrm{M}(n, F)$, положив $(M^{(\mathfrak{p})})_{ij} = (M_{ij})^{\mathfrak{p}}$ $(i,j\in\{1, \ldots, n\})$. Отображение $f: M\longmapsto M^{(\mathfrak{p})}$ $(M\in \mathrm{GL}(n, \mathfrak{R}))$ есть гомоморфизм из $\mathrm{GL}(n, \mathfrak{R})$ на $\mathrm{GL}(n, F)$.

2) Для представления $\mathscr{M}$ группы G такого, что $\mathscr{M}(G)\subseteq \mathrm{GL}(n, \mathfrak{R})$, определим отображение

$$\mathscr{M}^{(\mathfrak{p})}: g \to \mathscr{M}(g)^{(\mathfrak{p})} \ (g\in G)$$

из G в $\mathrm{GL}(n, F)$. Тогда $\mathscr{M}^{(\mathfrak{p})}$ — представление группы G над F и $\chi_{\mathscr{M}^{(\mathfrak{p})}}(g) = \chi_{\mathscr{M}}(g)^{\mathfrak{p}}$ при $g\in G$.

Доказательство. 1): При $M, N\in \mathrm{GL}(n, \mathfrak{R})$ имеем $((MN)^{(\mathfrak{p})})_{ij} = ((MN)_{ij})^{\mathfrak{p}} = \left(\sum_{t=1}^{n} M_{it}N_{tj}\right)^{\mathfrak{p}} = \sum_{t=1}^{n} (M_{it})^{\mathfrak{p}}(N_{tj})^{\mathfrak{p}} = (M^{(\mathfrak{p})}N^{(\mathfrak{p})})_{ij}$. Следовательно, $(MN)^{(\mathfrak{p})} = M^{(\mathfrak{p})}N^{(\mathfrak{p})}$ и f — гомоморфизм. Далее, пусть $A\in \mathrm{GL}(n, F)$ и B — некоторая матрица из $\mathrm{M}(n, \mathfrak{R})$ такая, что $B^{(\mathfrak{p})} = A$. Так как $\det(B)^{\mathfrak{p}} = \det(A)\neq 0$, то $\det(B)\notin\mathfrak{P}$, B^{-1} — матрица над $\mathfrak{R}$ и $B\in \mathrm{GL}(n, \mathfrak{R})$. Таким образом, f — отображение $\mathrm{GL}(n, \mathfrak{R})$ на $\mathrm{GL}(n, F)$.

2): $\mathscr{M}^{(\mathfrak{p})}$, будучи композицией гомоморфизмов $\mathscr{M}$ и $f|_{\mathscr{M}(G)}$ (из пункта 1)), есть гомоморфизм.

□

B4. Определение. 1) Матрица $M^{(\mathfrak{p})}$, определенная в **B3**(1), называется $\mathfrak{p}$-*модуляцией* матрицы M (M — матрица над $\mathfrak{R}$).

2) Представление $\mathscr{M}^{(\mathfrak{p})}$, определенное в **B3**(2), называется $\mathfrak{p}$-*модуляцией* представления $\mathscr{M}$ ($\mathscr{M}(G)\subseteq \mathrm{GL}(n, \mathfrak{R})$). Будем говорить также, что $\mathscr{M}^{(\mathfrak{p})}$ получается из $\mathscr{M}$ *модулированием по* $\mathfrak{p}$. Если $\mathscr{A}$ — любое представление, эквивалентное $\mathscr{M}$, то $\mathscr{M}^{(\mathfrak{p})}$ будем называть $\mathfrak{p}$-*модуляцией* представления $\mathscr{A}$.

3) Для любой функции $f\colon G\to\mathfrak{R}$ обозначим через $f^{(\mu)}$ функцию из G в $\boldsymbol{F}$ с $f^{(\mu)}(g)=f(g)^{\mu}$ $(g\in G)$.

4) Для элемента $a=\sum_{g\in G} r_g g$ из $\boldsymbol{C}G$ с $r_g\in\mathfrak{R}$ положим $a^{(\mu)}=\sum_{g\in G} r_g^{\mu} g (\in \boldsymbol{F}G)$.

Вместо $x^{(\mu)}$ будем писать также x^{μ}.

Отметим, что вместо термина „$\mathfrak{p}$-модуляция„ обычно употребляется термин „$\mathfrak{p}$-редукция„. Из **В2** и **В3** непосредственно вытекает:

В5. Для любого представления конечной группы G над $\boldsymbol{C}$, существует его p-модуляция.

□

Возникает вопрос: будут ли эквивалентными различные p-модуляции данного представления G над $\boldsymbol{C}$? Ответ на этот вопрос отрицательный, как показывает следующий пример. Пусть $p=2$ и $G=\langle g\rangle$ — группа порядка 2. G имеет представления $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ над $\boldsymbol{C}$ с $\mathscr{A}(g)=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ и $\mathscr{B}(g)=\begin{pmatrix}1&0\\1&-1\end{pmatrix}$. $\mathscr{A}\approx\mathscr{B}$, так как $\begin{pmatrix}1&0\\-\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$. Но, очевидно, $\mathscr{A}^{(\mu)}\not\approx\mathscr{B}^{(\mu)}$. Таким образом, представление $\mathscr{A}$ имеет две неэквивалентные p-модуляции $\mathscr{A}^{(\mu)}$ и $\mathscr{B}^{(\mu)}$.

В § Г мы докажем, что любые две p-модуляции одного представления G над $\boldsymbol{C}$ имеют эквивалентные диагонали.

Еще вопрос: всякое ли представление конечной группы G над полем $\boldsymbol{F}$ является p-модуляцией некоторого представления G над $\boldsymbol{C}$? Ответ — также отрицательный, что видно из следующего примера.

Пусть $G=\mathrm{A}_5$ и $p=2$. Так как $\mathrm{A}_5\simeq\mathrm{SL}(2,4)\leq\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{F})$, то существует точное неприводимое представление $\mathscr{A}$ степени 2 группы G над $\boldsymbol{F}$. Если бы, однако, существовало представление $\mathscr{M}$ группы A_5 над $\mathfrak{R}$ с $\mathscr{M}^{(\mu)}=\mathscr{A}$, то было бы $\mathrm{A}_5\simeq\mathscr{M}(G)\subseteq\subseteq\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{C})$. Но это противоречиво, так как $\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{C})$ имеет (как легко проверить) только одну инволюцию.

В6. Всякое матричное представление G над $\boldsymbol{F}$ является фактором p-модуляции некоторого обыкновенного представления.

Доказательство. Пусть $\mathscr{A}$ — матричное представление G над F. По **1Г4**(3) $\mathscr{A}$ эквивалентно фактору представления $m\mathscr{R}$, где $m\in\boldsymbol{N}$ и $\mathscr{R}=\mathrm{Reg}_{G,\boldsymbol{F}}i_B$, B — упорядоченная база в $\boldsymbol{F}G$, состоящая из всех элементов группы G. Но $m\mathscr{R}$ есть, очевидно, p-модуляция представления $m\mathscr{R}_1$, где $\mathscr{R}_1=\mathrm{Reg}_{G,\boldsymbol{C}}i_B$.

□

В § Д будет доказано, что любое неприводимое представление G над F является неприводимой частью p-модуляции некоторого неприводимого представления G над C.

Отметим одно применение теоремы **В2** к обыкновенным характерам.

В7. Если $\chi \in \operatorname{Irr}(G)$, то $\chi(1)$ делит $|G:Z(G)|$.

Доказательство. Пусть $p \in \pi(G)$ и $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{R}$ — как в **В1**. Покажем, что

$$\text{(в3)} \qquad \frac{|G:Z(G)|}{\chi(1)} \in \mathfrak{R}.$$

По **В2** существует представление $\mathscr{X}$ с $\chi_{\mathscr{X}} = \chi$ и $\mathscr{X}(G) \subseteq \subseteq \mathrm{GL}(n, \mathfrak{R})$ $(n = \chi(1))$. Если $z \in Z(G)$, то $\mathscr{X}(z) = \varepsilon(z)\mathrm{E}$, где $\varepsilon(z)$ — корень из единицы, и для любого $g \in G$

$$\mathscr{X}(gz)_{11}\mathscr{X}(z^{-1}g^{-1})_{11} = \mathscr{X}(g)_{11}\varepsilon(z)\varepsilon(z)^{-1}\mathscr{X}(g^{-1})_{11} = $$
$$= \mathscr{X}(g)_{11}\mathscr{X}(g^{-1})_{11}.$$

Пусть $\{g_1, \ldots, g_m\}$ — полная система вычетов G по $Z(G)$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{m} \mathscr{X}(g_i z)_{11}\mathscr{X}(z^{-1}g_i^{-1})_{11} = \sum_{i=1}^{m} \mathscr{X}(g_i)_{11}\mathscr{X}(g_i^{-1})_{11}.$$

Отсюда и из **1Е4**(2) получаем

$$\sum_{i=1}^{m} \mathscr{X}(g_i)_{11}\mathscr{X}(g_i^{-1})_{11} = \frac{1}{|Z(G)|}\sum_{g \in G} \mathscr{X}(g)_{11}\mathscr{X}(g^{-1})_{11} = \frac{|G:Z(G)|}{\chi(1)}$$

и (в3) доказано.

Из (в3) и **Б20**(6) следует, что $\frac{|G:Z(G)|}{\chi(1)} = \frac{m}{n}$, где m, $n \in \boldsymbol{N}$ и p не делит n. Так как это верно для любого $p \in \pi(G)$, то $\frac{|G:Z(G)|}{\chi(1)} \in \boldsymbol{N}$.

□

§ Г. БРАУЭРОВЫ ХАРАКТЕРЫ. ЧИСЛО КЛАССОВ НЕПРИВОДИМЫХ МОДУЛЯРНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

В этом параграфе мы начинаем изучать одно из важнейших понятий теории модулярных представлений — понятие брауэрова характера. С его помощью будет найдено также число классов неприводимых представлений группы G над любым алгебраически замкнутым полем характеристики p. Определение брауэрова характера модулярного представления зависит от выбора максимального идеала $\mathfrak{P}$ в $\hat{Z}$, содержащего p. Поэтому во избежание неопределенности мы примем следующее соглашение, фиксирующее один такой $\mathfrak{p}$ до конца книги.

Г1. Соглашение. Для простого числа, обозначенного буквой p, обозначим через $\mathfrak{p}$ фиксированный (всюду в этой книге) простой идеал кольца $\overset{*}{Z}$, содержащий p. При этом полагаем

$\mathfrak{R} = Z_{\mathfrak{p}}$.

$\mathfrak{P}$ — единственный максимальный идеал в $\mathfrak{R}$,

$F = \mathfrak{R}/\mathfrak{P}$,

μ — естественный гомоморфизм $\mathfrak{R}$ на F.

Г2. Определения. 1) Пусть $U = \{a \in \mathbf{C} \mid a^m = 1$ для некоторого $m \in Z \setminus pZ\}$. Согласно **Б18 (2)** $\mu|_U$ — взаимно однозначное отображение U на $F^{\times}$; положим $\tilde{\mu} = (\mu|_U)^{-1}$.

Пусть $\mathscr{A}$ — представление G над F и $\mathscr{M}: G \to \mathrm{GL}(n, F)$ — некоторое эквивалентное ему матричное представление. Для любого $g \in G_{p'}$ пусть $\varepsilon_1(g), \ldots, \varepsilon_n(g)$ — полная последовательность собственных значений матрицы $\mathscr{M}(g)$ (тогда по **А4** $\mathscr{M}(g)$ сопряжена с

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1(g) & & O \\ & \ddots & \\ * & & \varepsilon_n(g) \end{pmatrix}$$

при подходящей нумерации $\varepsilon_i(g)$, $\varepsilon_i(g) \in U$ и $\chi_{\mathscr{A}}(g) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i(g)\Big)$. *Брауэровым характером представления* $\mathscr{A}$ (относительно $\mathfrak{p}$) называется функция $\beta_{\mathscr{A}}$ из G в $\mathbf{C}$ такая, что

$$\beta_{\mathscr{A}}(g) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i(g)^{\tilde{\mu}} & \text{при } g \in G_{p'}, \\ 0, & \text{при } g \in G \setminus G_{p'}. \end{cases}$$

2) *Брауэровым p-характером группы* G (или брауэровым характером G относительно p) называется брауэров характер любого представления G над F.

3) Брауэров характер неприводимого представления группы G над F называется *неприводимым брауэровым p-характером* группы G. Множество всех неприводимых брауэровых p-характеров группы G обозначается через $\mathrm{IBr}_p(G)$ (или через $\mathrm{IBr}_{\mathfrak{p}}(G)$, если идеал $\mathfrak{p}$ нужно указать явно). Индекс p здесь может быть опущен, если p указано в контексте.

Г3. Пусть $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ — представления G над F.

1) $\beta_{\mathscr{A}} \in \mathrm{CF}(G)|^{0}_{G_{p'}}$.

2) Если $\mathscr{A} \sim \mathscr{B}$, то $\beta_{\mathscr{A}} = \beta_{\mathscr{B}}$.

3) $\chi_{\mathscr{A}}(g)=\beta_{\mathscr{A}}(g_{p'})^{\mu}$ для всех $g\in G$.

4) $\beta_{\mathscr{A}\oplus\mathscr{B}}=\beta_{\mathscr{A}}+\beta_{\mathscr{B}}$.

5) $\beta_{\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}}=\beta_{\mathscr{A}}\beta_{\mathscr{B}}$.

Доказательство. Свойства 1), 2) и 4) следуют непосредственно из определения **Г2**.

3): Следует из определения **Г2** и **А5**.

5): Рассмотрим представления $\mathscr{A}:G\to \mathrm{GL}(m, \boldsymbol{F})$ и $\mathscr{B}:G\to \mathrm{GL}(n, \boldsymbol{F})$. Пусть $g\in G_{p'}$. Согласно **А5** существуют невырожденные матрицы A и B над $\boldsymbol{F}$ такие, что

$$\mathrm{A}^{-1}\mathscr{A}(g)\mathrm{A}=\begin{pmatrix}\varepsilon_1 & & O\\ & \ddots & \\ * & & \varepsilon_m\end{pmatrix} \text{ и } B^{-1}\mathscr{B}(g)B=\begin{pmatrix}\delta_1 & & O\\ & \ddots & \\ * & & \delta_n\end{pmatrix},$$

где ε_i, $\delta_j\in\boldsymbol{F}$. Теперь согласно равенству (61) из доказательства **1Б15**

$$(A\otimes B)^{-1}((\mathscr{A}\otimes\mathscr{B})(g))(A\otimes B)=(\mathrm{A}^{-1}\otimes\mathrm{B}^{-1})(\mathscr{A}(g)\otimes\mathscr{B}(g))\times$$
$$\times(\mathrm{A}\otimes\mathrm{B})=(\mathrm{A}^{-1}\mathscr{A}(g)\mathrm{A})\otimes(\mathrm{B}^{-1}\mathscr{B}(g)\mathrm{B})=$$
$$=\begin{pmatrix}\varepsilon_1 & & O\\ & \ddots & \\ * & & \varepsilon_m\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}\delta_1 & & O\\ & \ddots & \\ * & & \delta_n\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}\varepsilon_1\begin{pmatrix}\delta_1 & & O\\ & \ddots & \\ * & & \delta_n\end{pmatrix} & & \mathbf{O}\\ & \ddots & \\ * & & \varepsilon_m\begin{pmatrix}\delta_1 & & O\\ & \ddots & \\ * & & \delta_n\end{pmatrix}\end{vmatrix},$$

откуда вследствие 2) $\beta_{\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}}(g)=\left(\sum\limits_{i=1}^{m}\widetilde{\varepsilon_i^{\mu}}\right)\left(\sum\limits_{j=1}^{n}\widetilde{\delta_j^{\mu}}\right)=\beta_{\mathscr{A}}(g)\times$ $\times\beta_{\mathscr{B}}(g)$. При $g\in G\setminus G_{p'}$ равенство 6) очевидно.

$\sqsupset$

Г4. 1) Существует взаимно однозначное отображение f: $\beta\mapsto\beta^*$ множества $\mathrm{IBr}_p(G)$ на множество $\mathrm{Irr}_{\boldsymbol{F}}(G)$ такое, что $\beta^*(g)=$ $=\beta(g_{p'})^{\mu}$ для всех $(\beta, g)\in\mathrm{IBr}_p(G)\times G$.

2) Функции $\beta^{(\mu)}$ при $\beta\in\mathrm{IBr}_p(G)$ линейно независимы (над $\boldsymbol{F}$).

Доказательство. 1): Пусть $\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_l$ — представители всех классов эквивалентных неприводимых представлений G над $\boldsymbol{F}$. Положим $\beta_i=\beta_{\mathscr{B}_i}$ и $\beta_i^*=\chi_{\mathscr{B}_i}$. По **Г3**(3) $\beta_i^*(g)=\beta_i(g_{p'})^{\mu}$, причем $\beta_i^*\neq\beta_j^*$ при $i\neq j$ по теореме **1Е2**. Следовательно, $\beta_i\neq\beta_j$ при $i\neq j$ и f: $\beta_i\to\beta_i^*$ $(i\in\{1, \ldots, l\})$ и есть требуемое отображение.

2): Непосредственно следует из 1), **1Е2** и **А5**.

$\sqsupset$

Г5. Пусть $\mathscr{A}$ — представление конечной группы G над $\mathbf{C}$ и $\breve{\mathscr{A}}$ — некоторая его p-модуляция. Тогда

$$\beta_{\breve{\mathscr{A}}} = \chi_{\mathscr{A}}\Big|_{G_{p'}}^{0}$$

Доказательство. Вследствие теоремы **В1** можно считать, что $\mathscr{A}(G) \subseteq \mathrm{GL}(n, \mathfrak{R})$. Пусть $g \in G_{p'}$. Тогда

$$\text{(г1)} \qquad \chi_{\mathscr{A}}(g) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i,$$

где $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ — корни (в $\mathbf{C}$) характеристического многочлена $f(x) \equiv \det(x\mathrm{E}_n - \mathscr{A}(g)) = \prod_{i=1}^{n}(x - \varepsilon_i)$ матрицы $\mathscr{A}(g)$. Ясно, что $\varepsilon_i \in \mathfrak{R}$ для всех i. Далее,

$$\text{(г2)} \qquad \beta_{\breve{\mathscr{A}}}(g) = \sum_{i=1}^{n} \widetilde{\delta_i^{\mu}},$$

где $\delta_1, \ldots, \delta_n$ — корни (в F) характеристического многочлена $h(x) \equiv \det(x\mathrm{E}_n^{(\mu)} - \breve{\mathscr{A}}(g))$ матрицы $\breve{\mathscr{A}}(g)$ (E_n^{μ} — единица в $\mathrm{GL}(n, F)$), а $\widehat{\mu}$ имеет тот же смысл, что и в определении **Г2**. Поскольку, очевидно, $h(x)$ можно получить из $f(x)$ заменой всех его коэффициентов их образами при отображении $\mu: \mathfrak{R} \to F$, то при подходящей перенумерации чисел δ_i будет $\delta_i^{\mu} = \varepsilon_i$ и, следовательно, $\varepsilon_i = \widetilde{\delta_i^{\mu}}$. Отсюда и из (г1), (г2) следует, что $\beta_{\breve{\mathscr{A}}}(g) = \chi_{\mathscr{A}}(g)$. При $g \in G \setminus G_{p'}$ это равенство тривиально.

□

Г6. Упражнение. Показать, что брауэров характер группы G не является, вообще говоря, характером группы G.

Г7. Лемма. Если $\mathscr{A}$ — представление группы G над $\mathbf{C}$, то $\chi_{\mathscr{A}}\Big|_{G_{p'}}^{0} = \sum_{\beta \in \mathrm{IBr}_p(G)} m_\beta \beta$, где $m_\beta \in N \cup \{0\}$.

Доказательство. Пусть $\breve{\mathscr{A}}$ — p-модуляция представления $\mathscr{A}$, существующая согласно **В5**. По **Г5** $\chi_{\mathscr{A}}\Big|_{G_{p'}}^{0} = \beta_{\breve{\mathscr{A}}}$. Рассмотрим диагональ $\mathscr{B}_1 \oplus \ldots \oplus \mathscr{B}_t$ представления $\breve{\mathscr{A}}$, где все $\mathscr{B}_i$ неприводимы. По **Г3** (2, 4) $\beta_{\breve{\mathscr{A}}} = \beta_{\mathscr{B}_1} + \ldots + \beta_{\mathscr{B}_t}$. Так как $\beta_{\mathscr{B}_i} \in \mathrm{IBr}_p(G)$, то отсюда следует заключение леммы.

□

Г8. Теорема. Пусть G — конечная группа.

1) $\operatorname{IBr}_p(G)$ есть база $\mathbf{C}$-пространства $\operatorname{CF}(G)|^0_{G_{p'}}$.

2) $|\operatorname{IBr}_p(G)|$ совпадает с числом всех p'-классов группы G.

Доказательство. Пусть $C_1, \ldots, C_l$ — все p'-классы группы G. Положим $e_i = 1_G|^0_{C_i}$. Тогда, очевидно, $\operatorname{CF}(G)|^0_{G_{p'}} = \bigoplus\limits_{i=1}^{l} \mathbf{C}e_i$ и $\dim \operatorname{CF}(G)|^0_{G_{p'}} = l$. Пусть $s = |\operatorname{IBr}_p(G)|$. Согласно **А6** $s \leqslant l$. Но по лемме **Г7** $\operatorname{CF}(G)|^0_{G_{p'}} = \mathbf{C}\left[\operatorname{Irr}(G)|^0_{G_{p'}}\right] \subseteq \mathbf{C}[\operatorname{IBr}_p(G)]$. Отсюда следует, что $l \leqslant s$, а значит, $s = l$ и $\operatorname{CF}(G)|^0_{G_{p'}} = \mathbf{C}[\operatorname{IBr}_p(G)]$.

□

Г9. Теорема. Пусть G — конечная группа и K — алгебраически замкнутое поле характеристики p. Тогда число классов неприводимых представлений G над K равно числу p'-кассов группы G.

Доказательство. Пусть первое из названных в теореме чисел есть s, а второе — l. Согласно **А6** $s \leqslant l$. Докажем, что $l \leqslant s$.

Пусть K_1 — алгебраическое замыкание в K его простого подполя и $s_1 = |\operatorname{Irr}_{K_1}(G)|$. Так как $K_1 \simeq \mathbf{F}$, то (см. замечание **1Б18**) по **Г4** и **Г8** (2) $s_1 = l$. Для завершения доказательства остается доказать, что $s_1 \leqslant s$.

Пусть $\mathscr{X}_1, \ldots, \mathscr{X}_{s_1}$ — представители всех классов эквивалентных неприводимых представлений G над K_1. Для любого i пусть $\mathscr{X}_i^K$ — представление G над K с $\mathscr{X}_i^K(g) = \mathscr{X}_i(g)$ для всех $g \in G$. По теореме Бернсайда (**1Д11**) $\mathscr{X}_i^K$ — неприводимое представление G над K. Так как характеры представлений $\mathscr{X}_1^K, \ldots, \mathscr{X}_{s_1}^K$ попарно различны, то согласно теореме **1Е2** (2) эти представления попарно неэквивалентны. Поэтому $s_1 \leqslant s$.

□

Г10. Замечание. Пусть выполнено условие теоремы **Г9** и K_1 — алгебраическое замыкание в K его простого подполя. В ее доказательстве одновременно получены следующие утверждения:

1) Всякое неприводимое представление группы G степени n над полем K эквивалентно (неприводимому) представлению $\mathscr{M}$ с $\mathscr{M}(G) \subseteq \operatorname{GL}(n, K_1)$.

2) Если $\mathscr{X}_1, \ldots, \mathscr{X}_s$ — представители всех классов неприводимых представлений G над K_1, то $\mathscr{X}_1^K, \ldots, \mathscr{X}_s^K$ — представители всех классов неприводимых представлений G над K.

Отсюда и из **1Б18**, в частности, следует, что изучение неприводимых представлений над любым алгебраически замкнутым полем характеристики p сводится к изучению представлений над $\boldsymbol{F}$.

Отметим, что если поле K не является алгебраически замкнутым, то число классов неприводимых представлений G над K зависит от поля K. Это число указал С. Д. Берман [13].

Отметим теперь два следствия теоремы Г8.

Г11. Для представлений $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ группы G над полем $\boldsymbol{F}$ равносильны условия:

(1) $\beta_{\mathcal{A}} = \beta_{\mathcal{B}}$,

(2) $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ имеют эквивалентные диагонали (т. е. $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$).

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2): Пусть $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{B}_1$ — некоторые диагонали представлений $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ соответственно. Тогда $\mathcal{A}_1 \approx \approx \bigoplus_{i=1}^{s} m_i \mathcal{Y}_i$ и $\mathcal{B}_1 \approx \bigoplus_{i=1}^{s} n_i \mathcal{Y}_i$; где m_i, n_i — целые неотрицательные числа и $\mathcal{Y}_1, \ldots, \mathcal{Y}_s$ — попарно неэквивалентные неприводимые представления G над $\boldsymbol{F}$. Пусть $\beta_i = \beta \mathcal{Y}_i$. Тогда $\beta_{\mathcal{A}} = \sum_{i=1}^{s} m_i \beta_i$ и $\beta_{\mathcal{B}} = \sum_{i=1}^{s} n_i \beta_i$. Если $\beta_{\mathcal{A}} = \beta_{\mathcal{B}}$, то вследствие теоремы Г8 $m_i = n_i$ для всех i. Но тогда $\mathcal{A}_1 \approx \mathcal{B}_1$.

(2) $\Rightarrow$ (1): Очевидно.

□

Г12. Любые две p-модуляции одного и того же представления группы G над $\boldsymbol{C}$ имеют эквивалентные диагонали.

Доказательство. Непосредственно следует из Г5 и Г11.

□

Г13. Теорема. Пусть p не делит $|G|$. Тогда

1) если $\{\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_k\}$ — множество представителей всех классов неприводимых представлений G над $\boldsymbol{C}$ и $\mathcal{X}_i^*$ — некоторая p-модуляция представления $\mathcal{X}_i$ (существующая согласно В5) ($i \in \{1, \ldots, k\}$), то $\{\mathcal{X}_1^*, \ldots, \mathcal{X}_k^*\}$ — множество представителей всех классов неприводимых представлений G над $\boldsymbol{F}$;

2) $\mathrm{IBr}_p(G) = \mathrm{Irr}(G)$.

Доказательство. 1): Вследствие теоремы В2 можно предположить, что каждое $\mathcal{X}_i$ есть матричное представление такое, что все элементы матриц из $\mathcal{X}_i(G)$ лежат в $\mathfrak{R}$, и что $\mathcal{X}_i^* = \mathcal{X}_i^{(\mu)}$. Так как число классов эквивалентных неприводимых представлений G над $\boldsymbol{F}$ (так же как и над $\boldsymbol{C}$) равно k по теореме 2А4, то для доказательства пункта 1) достаточно показать, что а) $\mathscr{X}_i^*$ неприводимо при всех i,

б) $\mathscr{X}_i^* \not\approx \mathscr{X}_j^*$ при $i \neq j$.

Предположим, что для некоторого i представление $\mathscr{X}_i^*$ приводимо, т. е. существует матрица T над $\boldsymbol{F}$ такая, что $\mathrm{T}^{-1}\mathscr{X}_i^*(g)\mathrm{T} = \begin{pmatrix} a_i(g) & O \\ c_i(g) & d_i(g) \end{pmatrix}$ для всех $g \in G$. По **В3(1)** существует $B \in \mathrm{GL}(n, \mathfrak{R})$ с $B^{(\mu)} = \mathrm{T}$ (n — степень $\mathscr{X}_i$). Пусть $\mathscr{X}$ — представление группы G с $\mathscr{X}(g) = B^{-1}\mathscr{X}_i(g)B$ при $g \in G$. Тогда $\mathscr{X}(G) \subseteq \mathrm{GL}(n, \mathfrak{R})$ и $\mathscr{X}^{(\mu)}(g) = \mathrm{T}^{-1}\mathscr{X}_i^*(g)\mathrm{T} = \begin{pmatrix} a_i(g) & O \\ c_i(g) & d_i(g) \end{pmatrix}$ при $g \in G$. В частности, $\mathscr{X}^{(\mu)}(g)_{1n} = 0$ для всех $g \in G$. Так как $\mathscr{X}$ неприводимо, то по теореме **1Е4(2)** $|G| = n \sum\limits_{g \in G} \mathscr{X}(g)_{1n}\mathscr{X}(g^{-1})_{n1}$. Но тогда $|G|^{\mu} = n^{\mu} \sum\limits_{g \in G} \mathscr{X}^{(\mu)}(g)_{1n}\mathscr{X}^{(\mu)}(g)_{n1} = 0$ и, значит, $|G| \in \mathfrak{P} \cap \boldsymbol{Z} = p\boldsymbol{Z}$. Это противоречит условию. Следовательно, выполнено условие а).

Предположим теперь, что $\mathscr{X}_i^* \approx \mathscr{X}_j^*$ для некоторых различных i и j. Тогда, как и выше, можно доказать, что существует матрица $\mathrm{B} \in \mathrm{GL}(n, \mathfrak{R})$ (n — степень $\mathscr{X}_i$) такая, что $(\mathrm{B}^{-1}\mathscr{X}_i(g)\mathrm{B})^{(\mu)} = \mathscr{X}_j^*(g)$ для всех $g \in G$. Пусть $\mathscr{A}$ — представление G с $\mathscr{A}(g) = \mathrm{B}^{-1}\mathscr{X}_i(g)\mathrm{B}$ ($g \in G$) и $\mathscr{B} = \mathscr{X}_j$. Так как поле F алгебраически замкнуто, то по **1Е4(2)**, примененному к неприводимому (по а)) представлению $\mathscr{A}^{(\mu)}$ ($= \mathscr{B}^{(\mu)}$), имеем

$$\sum_{g \in G} \mathscr{A}^{(\mu)}(g)_{1n}\mathscr{B}^{(\mu)}(g^{-1})_{n1} = \sum_{g \in G} \mathscr{A}^{(\mu)}(g)_{1n}\mathscr{A}^{(\mu)}(g^{-1})_{n1} = \left(\frac{|G|}{n}\right)^{\mu}.$$

Так как p не делит $|G|$, то $\left(\frac{|G|}{n}\right)^{\mu} \neq 0$. Тем более, $\sum\limits_{g \in G} \mathscr{A}(g)_{1n} \times \mathscr{B}(g^{-1})_{n1} \neq 0$, откуда по **1Е4(1)** $\mathscr{A} \approx \mathscr{B}$. Но тогда $\mathscr{X}_i \approx \mathscr{X}_j$, что противоречит предположению. Утверждение 1) доказано.

2): Пусть $\beta_i = \beta_{\mathscr{X}_i^*}$ и $\chi_i = \chi_{\mathscr{X}_i}$. По **Г5** $\beta_i = \chi_i|^0_{G_{p'}} = \chi_i$ (так как $G_{p'} = G$). Отсюда и из 1) следует 2).

□

Г14. Если β — брауэров p-характер группы G и H — p'-подгруппа в G, то $\beta|_H$ — характер H.

Доказательство. Пусть β — брауэров характер представления $\mathscr{B}$ группы G над F. Тогда $\beta|_H$ есть, очевидно, брауэров характер представления $\mathscr{B}|_H$ группы H. Следовательно, по **Г3(2, 4)** $\beta|_H$ — сумма неприводимых брауэровых характеров H. Но по теореме **Г13** $\mathrm{IBr}_p(H) = \mathrm{Irr}(H)$. Отсюда следует заключение.

□

Г15. Пусть $\mathscr{A}$ — матричное представление G над $\boldsymbol{F}$ и $g \in G_{p'}$.

1) $|\beta_{\mathscr{A}}(g)| \leqslant \beta_{\mathscr{A}}(1)$.

2) $|\beta_{\mathscr{A}}(g)| = \beta_{\mathscr{A}}(1) \Longleftrightarrow \mathscr{A}(g)$ — скалярная матрица (и тогда $g \operatorname{Ker} \mathscr{A} \in Z(G/\operatorname{Ker} \mathscr{A})$).

3) $\beta_{\mathscr{A}}(g) = \beta_{\mathscr{A}}(1) \Longleftrightarrow g \in \operatorname{Ker} \mathscr{A}$.

Доказательство. Пусть $n = \deg \mathscr{A}$. По **А4**(4) элемент $\mathscr{A}(g)$ сопряжен в $\mathrm{GL}(n, \boldsymbol{F})$ с матрицей $\widetilde{g} = \operatorname{diag}(f_1, \ldots, f_n)$, где $f_i \in \boldsymbol{F}$ и $f_i^{o(g)} = 1$. Положим $\varepsilon_i = f_i^{\widehat{\mu}}$, где $\widehat{\mu}$ — как в **Г2**. Тогда $\beta_{\mathscr{A}}(g) = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n$ и ε_i — корни из 1 степени $o(g)$ в поле $\boldsymbol{C}$.

1): $|\beta_{\mathscr{A}}(g)| = |\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n| \leqslant n = \beta_{\mathscr{A}}(1)$.

2): Если $|\beta_{\mathscr{A}}(g)| = \beta_{\mathscr{A}}(1)$, то $|\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n| = n$ и, значит, $\varepsilon_1 = \ldots = \varepsilon_n$ и по **Б18**(2) $f_1 = \ldots = f_n$. Тогда $\widetilde{g} = f_1 \mathrm{E} \in Z(\mathrm{GL}(n, \boldsymbol{F}))$ и поэтому $\mathscr{A}(g) = f_1 E$. Обратное очевидно.

3): Если $\beta_{\mathscr{A}}(g) = \beta_{\mathscr{A}}(1)$, то $\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n = n$, откуда $\varepsilon_1 = \ldots = \varepsilon_n = 1$, $f_1 = \ldots = f_n = 1$, $\widetilde{g} = \mathrm{E}$ и $g \in \operatorname{Ker} \mathscr{A}$. Обратное очевидно.

□

Очевидно, что утверждение **Г15**(3) можно записать так:

$$(\operatorname{Ker} \mathscr{A})_{p'} = \{g \in G_{p'} \mid \beta_{\mathscr{A}}(g) = \beta_{\mathscr{A}}(1)\}.$$

Если $\mathscr{A}$ — неприводимое представление, то по **А9**

$$\operatorname{Ker} \mathscr{A} / \langle (\operatorname{Ker} \mathscr{A})_{p'} \rangle = O_p(G / \langle (\operatorname{Ker} \mathscr{A})_{p'} \rangle).$$

Г16. Упражнение. Пусть $\mathscr{A}$ — представление G над алгебраически замкнутым полем характеристики p и $g \in G$. Равносильны условия:

(1) $\chi_{\mathscr{A}}(g) = \chi_{\mathscr{A}}(1)$,

(2) $g_{p'} \in \operatorname{Ker} \mathscr{A}$.

Г17. Упражнение. Число неприводимых брауэровых p-характеров степени 1 группы G равно $|G/G'|_{p'}$.

§ Д. СВЯЗЬ ОБЫКНОВЕННЫХ И БРАУЭРОВЫХ ХАРАКТЕРОВ

Здесь мы найдем важные связи между обыкновенными и брауэровыми характерами конечной группы. Введем одно из основных понятий теории модулярных представлений — матрицу разложения. В качестве применений отметим некоторые новые свойства обычной таблицы характеров.

Д1. Соглашение. Зафиксируем простое число p и будем писать $\mathrm{IBr}(G)$ вместо $\mathrm{IBr}_p(G)$. Для группы, обозначенной буквой G, оператор $|^0_{G_0}$ будем обозначать через $^\circ$; ψ° будем называть *p-срезкой* функции $\psi \in \mathrm{CF}(G)$.

Д2. Теорема. Пусть $\mathrm{Irr}(G) = \{\chi_1, \ldots, \chi_k\}$ и $\mathrm{IBr}(G) = \{\beta_1, \ldots, \beta_l\}$. Тогда

1) существует единственная $k \times l$-матрица d над $\boldsymbol{C}$ такая, что

$$\chi_i^\circ = \sum_{j=1}^{l} \mathrm{d}_{ij}\beta_j \quad (i = 1, \ldots, k);$$

при этом $\mathrm{d}_{ij} \in \boldsymbol{N} \cup \{0\}$ для всех i, j;

2) ранг d равен l (т. е. столбцы матрицы d линейно независимы);

3) каждое неприводимое представление группы G над полем $\boldsymbol{F}$ есть неприводимая часть p-модуляции некоторого неприводимого представления G над $\boldsymbol{C}$.

Доказательство. 1): Следует из **Г7** и **Г8**.

2): Ранг $\mathrm{d} = \dim \boldsymbol{C}[\mathrm{Irr}(G)^\circ] = \dim \mathrm{CF}(G)^\circ =_{\text{Г8}} l$.

3): Равенство из 1) равносильно (по **Г5** и **Г11**) утверждению, что любая p-модуляция представления с характером χ_i имеет своей диагональю представление $\bigoplus_{j=1}^{l} \mathrm{d}_{ij}\mathscr{P}_j$, где $\mathscr{B}_j$ — представление над $\boldsymbol{F}$ с брауэровым p-характером β_j. Отсюда и из 2) следует требуемое утверждение.

□

Д3. Определение. Матрица d из **Д2(1)** называется *матрицей p-разложения* (или матрицей разложения для p) группы G, а d_{ij} — *числами p-разложения* (или числами разложения для p) группы G. Приставка p- в этих определениях может быть опущена, если p ясно из контекста. Вместо d_{ij} будем писать также $\mathrm{d}_{\chi_i\beta_j}$.

Понятно, что любые две матрицы p-разложения группы различаются лишь порядком строк и столбцов. При желании можно было бы определить матрицу p-разложения группы G как $\mathrm{Irr}(G) \times \mathrm{IBr}_p(G)$-матрицу (в смысле **1А9**).

Д4. Теорема. 1) Каждый брауэров p-характер группы G есть p-срезка некоторого обобщенного характера группы G.

2) $\boldsymbol{Z}[\mathrm{IBr}_p(G)] = \boldsymbol{Z}[\mathrm{Irr}(G)^\circ]$.

3) Если γ — p-срезка обобщенного характера группы G (в частности, брауэров p-характер G), то $|G|_p\gamma$ — обобщенный характер группы G.

Доказательство. 1): Пусть β — брауэров характер G относительно p. Обозначим через $\beta^{(p)}$ функцию из G в $\mathbf{C}$ такую, что

$$\beta^{(p)}(g)=\beta(g_{p'}) \text{ для всех } g\in G.$$

Покажем, что

(д1) $$\beta^{(p)} \text{ — обобщенный характер } G.$$

Воспользуемся брауэровой характеризацией обобщенных характеров (2В2). Пусть E — произвольная брауэрова элементарная подгруппа G и $E=P\times Q$, где P — p-группа и Q — p'-группа. Если $g\in E$, то $g_p\in P$ и $g_{p'}\in Q$. Поэтому $\beta^{(p)}|_E=1_P\times\beta|_Q$ в обозначениях 2А38. Так как $\beta|_Q$ — обобщенный характер Q по **Г14**, то по 2А38 $\beta^{(p)}|_E$ — обобщенный характер E. Теперь по теореме **2В2** верно (д1).

Остается заметить, что $\beta=\beta^{(p)}\Big|^0_{G_{p'}}$.

2): Левая часть содержится в правой по 1). Обратное включение следует из **Д2** (1).

3): Согласно теореме Брауэра **2В2** достаточно доказать, что $|G|_p\gamma|_E$ есть обобщенный характер E для любой брауэровой элементарной подгруппы E из G. Пусть $E=A\times B$ — такая подгруппа, где A — p-группа и B — p'-группа. Обозначим через ρ — регулярный характер A. Тогда $\rho(1)=|A|$ и $\rho(a)=0$ при $a\in A\setminus\{1\}$. Для любых $a\in A$ и $b\in B$ имеем $\gamma(ab)=\frac{1}{|A|}\rho(a)\gamma(b)$, т. е. $|A|\gamma|_E=\rho\times\gamma|_B$ в обозначениях **2А38**. Так как по условию $\gamma=\psi\Big|^0_{G_{p'}}$, где ψ — обобщенный характер G, то $\gamma|_B=\psi|_B$ — обобщенный характер B. Теперь по **2А38** $|A|\gamma|_E$, а тем более и $|G|_p\gamma|_E$ — обобщенный характер E.

□

Д5. Пусть $g, h\in G_{p'}$. Равносильны условия:
(1) g и h сопряжены в G;
(2) $\beta(g)=\beta(h)$ для всех $\beta\in \mathrm{IBr}_p(G)$;
(3) $\beta(g)\equiv\beta(h) \pmod{\mathfrak{p}}$ для всех $\beta\in \mathrm{IBr}_p(G)$;
(4) $\zeta(g)=\zeta(h)$ для всех $\zeta\in \mathrm{Irr}_F(G)$.

Доказательство. (1) ⇒ (2) ⇒ (3): Очевидно.

(3) ⇒ (4): Из (3) следует, что $\beta(g)^\mu=\beta(h)^\mu$ для всех $\beta\in \mathrm{IBr}_p(G)$. Отсюда и из **Г4** следует (4).

(4) ⇒ (1): Пусть l — число p'-классов в G.
По теореме **Г9** $|\mathrm{Irr}_F(G)|=l$. Пусть $\mathrm{Irr}_F(G)=\{\zeta_1, \ldots, \zeta_l\}$, $G_{p'}=\bigcup_{i=1}^{l} g_i^G$ и Y — $(l\times l)$-матрица с $Y_{ij}=\zeta_i(g_j)$. Так как характеры $\zeta_1, \ldots, \zeta_l$ линейно независимы по теореме **1Е2** и $\zeta_i(g)=\zeta_i(g_{p'})$ при $g\in G$ по **А5**, то строки матрицы Y линейно независимы. Следовательно, линейно независимы и ее столбцы. Но по (4)

столбцы, соответствующие классам g^G и h^G, равны. Значит $g^G = h^G$.

□

Полученные результаты позволяют установить некоторые новые свойства таблицы характеров группы.

Д6. Пусть $g, h \in G$. Равносильны условия:
(1) $g_{p'}$ и $h_{p'}$ сопряжены в G;
(2) $\chi(g) = \chi(h) \pmod{\mathfrak{p}}$ для всех $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$.

Доказательство. Покажем сначала, что

(д2) $\qquad \chi(x) \equiv \chi(x_{p'}) \pmod{\mathfrak{p}}$ для всех $(\chi, x) \in \mathrm{Irr}(G) \times G$.

При доказательстве (д2) можно считать, что χ — характер группы $\langle x \rangle$, и даже, что $\chi \in \mathrm{Irr}(\langle x \rangle)$. Но тогда $\chi(1) = 1$ и $\chi(x) = \chi(x_p)\chi(x_{p'}) = \varepsilon\chi(x_{p'})$, где ε — корень степени $o(x_p)$ из 1. Отсюда, так как $\varepsilon \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}}$ согласно **Б2**, следует (д2).

Вследствие (д2) условие (2) равносильно условию

$$\chi(g_{p'}) \equiv \chi(h_{p'}) \pmod{\mathfrak{p}} \text{ для всех } \chi \in \mathrm{Irr}(G),$$

которое по Д4(2) равносильно условию

$$\beta(g_{p'}) \equiv \beta(h_{p'}) \pmod{\mathfrak{p}} \text{ для всех } \beta \in \mathrm{IBr}_p(G).$$

Но это условие по **Д5** равносильно условию (1). Итак, (1) $\Leftrightarrow$ (2).

□

Д7. Замечание. Так как $\mathfrak{p} \cap \mathbf{Z} = p\mathbf{Z}$, то для целых $\chi(g)$ и $\chi(h)$ сравнение из **Д6**(2) равносильно сравнению $\chi(g) \equiv \equiv \chi(h) \pmod{p}$.

Д8. Пусть $C_1, \ldots, C_k$ — все классы сопряженных элементов группы G, $g_j \in C_j$ и $\pi_j = \pi(\langle g_j \rangle)$. Пусть X — таблица характеров группы G, j-й столбец которой соответствует классу C_j ($j = 1, \ldots, k$). Тогда по X можно определить множества $\pi_1, \ldots, \pi_k$.

Доказательство. Пусть $\mathrm{Irr}(G) = \{\chi_1, \ldots, \chi_k\}$ и $X_{ij} = \chi_i(g_j)$. По X легко находится номер j_0 единичного класса ($X_{ij_0} \geqslant |X_{ij}|$ для всех i, j). Тогда $\pi_{j_0} = \varnothing$. Затем можно определить номера всех классов C_j таких, что $|\pi_j| = 1$. А именно, по **Д6** для любого $p \in \pi(G)$ $o(g_j)$ есть степень p, если и только если для всех i $\chi_i(g_j) \equiv \chi_i(1) \pmod{\mathfrak{p}}$, т. е. $X_{ij} \equiv X_{ij_0} \pmod{\mathfrak{p}}$, где $\mathfrak{p}$ некоторый максимальный идеал из $\hat{Z}$, содержащий p. Подобно мы найдем номера всех классов C_j с $|\pi_j| = 2$. А именно, по **Д6** $\pi_j = \{p, q\}$, если и только если для некоторого класса C_m с $\pi_m = \{q\}$ будет $X_{ij} \equiv X_{im} \pmod{\mathfrak{p}}$ для всех i. Таким образом мы найдем последовательно все π_j.

□

Д9. Пусть $\mathrm{Irr}(G) = \cdot\{\chi_1, \ldots, \chi_k\}$ и l — число p'-классов в G.

1) Ранг системы функций $\overset{\circ}{\chi}_1, \ldots, \overset{\circ}{\chi}_k$ равен l.

2) Если $\overset{\circ}{\chi}_1, \ldots, \overset{\circ}{\chi}_l$ линейно независимы, то $\overset{\circ}{\chi}_{l+1}, \ldots, \overset{\circ}{\chi}_k$ — линейные комбинации функций $\overset{\circ}{\chi}_1, \ldots, \overset{\circ}{\chi}_l$ с рациональными коэффициентами.

Доказательство. 1): Следует из того, что $\overset{\circ}{\chi}_1, \ldots, \overset{\circ}{\chi}_k$ порождают l-мерное пространство $\mathrm{CF}(G)^\circ$.

2): Пусть $\mathrm{IBr}_p(G) = \cdot\{\beta_1, \ldots, \beta_l\}$. По **Д2**(1) выполняется система равенств $\overset{\circ}{\chi}_i = \sum_{j=1}^{l} \mathrm{d}_{ij}\beta_j$, где $\mathrm{d}_{ij} \in \boldsymbol{Z}$ $(i = 1, \ldots, k)$. Если $\overset{\circ}{\chi}_1, \ldots, \overset{\circ}{\chi}_l$ линейно независимы, то из первых l равенств этой системы можно выразить $\beta_1, \ldots, \beta_l$ через $\overset{\circ}{\chi}_1, \ldots, \overset{\circ}{\chi}_l$: $\beta_j = \sum_{m=1}^{l} q_{jm}\overset{\circ}{\chi}_m$, причем с рациональными q_{jm}. Теперь при $t > l$ имеем $\overset{\circ}{\chi}_t = \sum_{j=1}^{l} \mathrm{d}_{tj}\beta_j = \sum_{j=1}^{l} \mathrm{d}_{tj} \sum_{m=1}^{l} q_{jm}\overset{\circ}{\chi}_m = \sum_{m=1}^{l} \left(\sum_{j=1}^{l} \mathrm{d}_{tj}q_{jm}\right)\overset{\circ}{\chi}_m$, где $\sum_{j=1}^{l} \mathrm{d}_{tj}q_{jm} \in \boldsymbol{Q}$.

❑

Д10. Упражнение. Пусть $\psi \in \mathrm{CF}(G)^\circ$. Если для любой p'-подгруппы H группы G $\psi|_H$ есть обобщенный характер H, то ψ — p-срезка обобщенного характера группы G.

(Использовать функцию $\psi^{(p)}$, определенную в доказательстве **Д4**(1).)

§ Е. ТАБЛИЦА БРАУЭРОВЫХ ХАРАКТЕРОВ И СВЯЗАННЫЕ С НЕЙ МАТРИЦЫ

Продолжим изучение брауэровых характеров и их связи с обыкновенными характерами. Примем соглашение **Д1**.

Е1. Обозначения и определения для группы, обозначенной буквой G.

1) $\cdot\{\chi_1, \ldots, \chi_k\} = \mathrm{Irr}(G)$.

2) $\cdot\{\beta_1, \ldots, \beta_l\} = \mathrm{IBr}_p(G)$.

3) $x_1, \ldots, x_l$ — представители всех p'-классов группы G $\left(G_{p'} = \dot{\bigcup}_{i=1}^{l} x_i^G\right)$.

4) d — *матрица p-разложения* группы G, а именно, $k \times l$-матрица с элементами из $\boldsymbol{N} \cup \{0\}$ такая, что

$$\overset{\circ}{\chi}_i = \sum_{j=1}^{l} \mathrm{d}_{ij}\beta_j \quad (i = 1, \ldots, k).$$

5) $c = d^{\mathrm{T}}d - l \times l$ — матрица с элементами из $\mathbf{N} \cup \{0\}$, называемая *матрицей Картана* группы G (для p).

6) Положим

$$\acute{\beta}_i = \sum_{j=1}^{k} d_{ji}\chi_j \quad (i = 1, \ldots, l).$$

Характер $\acute{\beta}_i$ называется *главным неразложимым характером* группы G, соответствующим β_i (или *главным неразложимым p-характером* группы G).

E2. Теорема. Для конечной группы G (при обозначениях **E1**) справедливы следующие утверждения.

1) Матрица c обратима.

2) $\hat{\beta}_i = \sum_{j=1}^{l} c_{ij}\beta_j$; в частности, $\{\hat{\beta}_1, \ldots, \hat{\beta}_l\}$ — база пространства $\mathrm{CF}(G)^{\circ}$.

3) $(\beta_i, \beta_j)_G = (c^{-1})_{ij}$.

4) $(\hat{\beta}_i, \acute{\beta}_j)_G = c_{ij}$.

5) $(\beta_i, \hat{\beta}_j)_G = \delta_{ij}$.

6) $\beta_i = \sum_{j=1}^{k} f_{ij}\chi_j$, где $f = c^{-1}d^{\mathrm{T}}$.

7) $\chi_i^{\circ} = \sum_{j=1}^{k} a_{ij}\chi_j$, где $a = df = dc^{-1}d^{\mathrm{T}}$.

8) $a^2 = a = a^{\mathrm{T}}$, $ad = d$, $fa = f$, ранг $a = l$.

Доказательство. Согласно **Г8** $\{\beta_1, \ldots, \beta_l\}$ — база в $\mathrm{CF}(G)\big|_{\overset{\circ}{G}_{p'}}$. Поэтому утверждение теоремы непосредственно следует из **З4**.

□

E3. Если $\acute{\beta}$ — главный неразложимый p-характер группы G, то

$$|G|_p \text{ делит } \hat{\beta}(1).$$

Доказательство. Пусть $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$. Так как $\hat{\beta}$ исчезает на $G \setminus G_p$, по **E2**(2), то $\dfrac{\acute{\beta}(1)}{|P|} = (\hat{\beta}|_P, 1_P)_P \in \mathbf{Z}$.

□

E4. Если $\theta \in \mathrm{CF}(G)^{\circ}$, то

$$\theta = \sum_{\beta \in \mathrm{IBr}(G)} (\theta, \hat{\beta})_G \beta = \sum_{\beta \in \mathrm{IBr}(G)} (\theta, \beta)_G \hat{\beta}.$$

Доказательство. Следует из **Г8**, **E2**(2) и **E2**(3).

Е5. Матрица $|G|_p c^{-1}$ целочисленна.

Доказательство. Так как $(c^{-1})_{ij} = (\beta_i, \beta_j)_G$ (Е2(3)), $|G|_p\beta$ — обобщенный характер группы G Д4(3) и β_j есть p-срезка некоторого обобщенного характера $\beta_j^{(p)}$ (Д4), то

$$(|G|_p c^{-1})_{ij} = (|G|_p\beta_i, \beta_j)_G = (|G|_p\beta_i, \beta_j^{(p)})_G \in \boldsymbol{Z}.$$

□

Е6. Замечание. Из полученных результатов легко вытекает следующий частный случай теоремы Фробениуса [52, теорема 9.1.2]:

$$|G|_{p'} \text{ делит } |G_{p'}|.$$

Действительно, беря $\chi_1 = 1_G$ и $\beta_1 = \overset{\circ}{1}_G$, имеем $\beta_1 = \sum_{i=1}^{k} \mathfrak{f}_{1i}\chi_i$, где $\mathfrak{f} = c^{-1}d^{\tau}$ (Е2(6)), и $\mathfrak{f}_{11} = (\beta_1, \chi_1) = \frac{|G_{p'}|}{|G|}$. Так как матрицы d и $|G|_p c^{-1}$ целочисленны (Е5), то $\frac{|G_{p'}|}{|G|_{p'}} = |G|_p \mathfrak{f}_{11} \in \boldsymbol{Z}$.

□

Е7. Определение. Примем обозначения Е1(1—3) и введем следующие матрицы:

$\mathbf{X}$ — $k\times l$-матрица с $\mathbf{X}_{ij} = \chi_i(x_j)$;

$\mathbf{B}$ — $l\times l$-матрица с $\mathbf{B}_{ij} = \beta_i(x_j)$;

$\hat{\mathbf{B}}$ — $l\times l$-матрица с $\hat{\mathbf{B}}_{ij} = \hat{\beta}_i(x_j)$.

Матрица $\mathbf{B}$ называется *таблицей брауэровых p-характеров* группы G (или таблицей брауэровых характеров группы G для p).

Заметим, что изменение нумерации характеров χ_i, p-характеров β_i и p'-элементов x_i приведет к изменению нумерации строк и столбцов в $\mathbf{X}$, $\mathbf{B}$ и $\hat{\mathbf{B}}$. Для дальнейшего такая перенумерация не имеет значения. Отметим еще, что $\mathbf{X}$, $\mathbf{B}$ и $\hat{\mathbf{B}}$ — матрицы над кольцом $\hat{Z}$ (их элементы — суммы корней из единицы).

Е8. 1) $\mathbf{X} = d\mathbf{B}$, $\hat{\mathbf{B}} = c\mathbf{B}$, $\mathbf{B} = c^{-1}d^{\tau}\mathbf{X}$.

2) $\mathbf{B}^*\hat{\mathbf{B}} = \hat{\mathbf{B}}^*\mathbf{B} = \mathbf{X}^*\mathbf{X} = \operatorname{diag}(|C_G(x_1)|, \ldots, |C_G(x_l)|)$.

3) Каждая из матриц d, c, $\mathbf{B}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{X}$ имеет ранг l; в частности, c, $\mathbf{B}$ и $\hat{\mathbf{B}}$ обратимы.

4) Каждая из матриц d^{μ}, $\mathbf{B}^{\mu}$ и $\mathbf{X}^{\mu}$ имеет ранг l; в частности, $\mathbf{B} \in GL(l, \mathfrak{R})$.

Доказательство. 1): Первое равенство следует из определения матрицы d, второе — из Е2(2), третье — из Е2(7).

2): Последнее равенство следует из второго соотношения ортогональности. Кроме того, по 1) имеем $\mathbf{X}^*\mathbf{X} = \mathbf{B}^* \mathrm{d}^*\mathrm{d}\, \mathbf{B} = \mathbf{B}^* \mathrm{c}\, \hat{\mathbf{B}} = \hat{\mathbf{B}}^*\mathbf{B}$ и $\mathbf{X}^*\mathbf{X} = (\mathbf{X}^*\mathbf{X})^* = (\mathbf{B}^*\hat{\mathbf{B}})^* = \hat{\mathbf{B}}^*\mathbf{B}$.

3): Обратимость c — это **E2** (1). Обратимость $\mathbf{B}$ и $\hat{\mathbf{B}}$ следует из 2). Матрица $\mathbf{X}$ состоит из l столбцов обычной таблицы характеров группы G и, следовательно, имеет ранг l. Отсюда и из равенств $\mathbf{X} = \mathrm{d}\,\mathbf{B}$ и $\mathrm{d} = \mathbf{X}\mathbf{B}^{-1}$ вытекает, что и ранг d равен l.

4): По **Г4** функции $\beta_1^\mu, \ldots, \beta_l^\mu$ линейно независимы. Поэтому ранг $\mathbf{B}^\mu$ равен l. В частности, $\det(\mathbf{B}) \notin \mathfrak{p}$, т. е. $\mathbf{B} \in GL(l, \mathfrak{R})$. Далее из **Д4** (2) следует, что $\mathbf{Z}[\beta_1^\mu, \ldots, \beta_l^\mu] = \mathbf{Z}[(\mathring{\chi}_1)^\mu, \ldots, (\mathring{\chi}_k)^\mu]$ и, значит, ранг $\mathbf{X}^\mu$ совпадает с рангом $\mathbf{B}^\mu (= l)$. Наконец, из $\mathbf{X}^\mu = \mathrm{d}^\mu \mathbf{B}^\mu$ и $\mathrm{d}^\mu = \mathbf{X}^\mu (\mathbf{B}^\mu)^{-1}$ следует, что ранг d^μ равен рангу $\mathbf{X}^\mu (= l)$.

□

Замечание. Матрицы c^μ и $\hat{\mathbf{B}}^\mu$ необратимы, что следует из **E13** (2) и **E2** (2).

E9. Если $\beta \in \mathrm{IBr}(G)$, то $\dfrac{\hat{\beta}(g)}{|C_G(g)|} \in \mathfrak{R}$ для всех $g \in G$.

Доказательство. $\hat{\mathbf{B}} = (\mathbf{B}^*)^{-1} \operatorname{diag}(|C_G(x_1)|, \ldots, |C_G(x_l)|)$ по **E8** (2). Отсюда

$$\hat{\beta}_i(x_j) = \overline{(\mathbf{B}^{-1})_{ji}}\,|C_G(x_j)| \quad (j = 1, \ldots, l).$$

Так как $\mathbf{B} \in GL(l, \mathfrak{R})$ (**E8** (4)), то **E9** верно при $g \in G_{p'}$. Но оно верно и при $g \in G \setminus G_{p'}$, так как в этом случае $\hat{\beta}(g) = 0$ (**E2** (2)).

□

Заметим, что при $g = 1$ из **E9** получается **E3**.

E10. Для любых $x \in G_{p'}$ и $g \in G$

$$\sum_{\beta \in \mathrm{IBr}(G)} \beta(x)\overline{\hat{\beta}(g)} = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \chi(x)\overline{\chi(g)} \left(= \delta_{x^G,\, g^G} |C_G(g)|\right).$$

Доказательство.

$$\sum_{\beta \in \mathrm{IBr}(G)} \beta(x)\overline{\hat{\beta}(g)} = \sum_{\beta \in \mathrm{IBr}(G)} \beta(x) \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \mathrm{d}_{\chi\beta}\overline{\chi(g)} =$$

$$= \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \left(\sum_{\beta \in \mathrm{IBr}(G)} \mathrm{d}_{\chi\beta}\beta(x)\right)\overline{\chi(g)} = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \chi(x)\overline{\chi(g)}.$$

□

E11. Упражнение. 1) Пусть $\chi_{\text{рег}}$ — регулярный характер группы G. Тогда

1) $\chi_{\text{рег}} = \sum_{\beta \in \mathrm{IBr}(G)} \beta(1)\hat{\beta} = \sum_{\beta \in \mathrm{IBr}(G)} \hat{\beta}(1)\beta$;

2) $|G| = \sum_{\beta \in \mathrm{IBr}(G)} \beta(1)\hat{\beta}(1)$.

E12. Пусть c — матрица Картана группы G для p и $|\mathrm{IBr}_p \times \times (G)| = l$. Тогда существуют матрицы X и Y в $\mathrm{GL}(l, \boldsymbol{Z})$ такие, что

$$\text{(e1)} \qquad \mathrm{XcY} = \begin{pmatrix} p^{a_1} & & \mathrm{O} \\ & \ddots & \\ \mathrm{O} & & p^{a_l} \end{pmatrix}, \text{ где } 0 \leqslant a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_l$$

и $p^{a_l} = |G|_p$ ($a_1, \ldots, a_l$ — целые числа).

Доказательство. По теореме **1A8** существуют матрицы X и Y в $\mathrm{GL}(l, \boldsymbol{Z})$ такие, что X с $\mathrm{Y} = \mathrm{diag}(u_1, \ldots, u_l)$, где $\{u_1, \ldots, u_l\} \subseteq \subseteq N$. Далее, по **E5** матрица $|G|_p \mathrm{c}^{-1}$ целочисленная. Отсюда следует, что $u_i | |G|_p$ для всех i, т. е. $u_i = p^{a_i} \leqslant |G|_p$ ($i = 1, \ldots, l$). Видоизменяя X и Y, легко добиться того, чтобы $a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_l$. Таким образом, мы получили равенство (e1). Остается показать, что $p^{a_i} = |G|_p$ для некоторого i. Будем считать, что в обозначениях **E1** $x_1 = 1$ (так что $\mathbf{B}_{i1} = \beta_i(1)$ и $\hat{\mathbf{B}}_{i1} = \hat{\beta}_i(1)$). По **E2** (2) $\hat{\mathbf{B}} = \mathrm{c}\mathbf{B}$. Отсюда и из (e1) получаем

$$\text{(e2)} \qquad \mathrm{X}\hat{\mathbf{B}} = \mathrm{PQ},$$

где P — правая часть равенства (e1) и $\mathrm{Q} = \mathrm{Y}^{-1}\mathbf{B}$. Беря элементы с координатами $(i, 1)$ в левой и правой частях равенства (e2), получаем

$$\sum_{m=1}^{l} \mathrm{X}_{im}\hat{\beta}_m(1) = p^{a_i}\mathrm{Q}_{i1}.$$

Так как $|G|_p$ делит $\hat{\beta}_m(1)$ для всех m (**E3**), то левая часть этого равенства делится на $|G|_p$. Следовательно,

$$\text{(e3)} \qquad \mathrm{Q}_{i1} \text{ делится на } |G|_p/p^{a_i} \text{ для всех } i.$$

Далее, беря в обеих частях равенства $\mathbf{B} = \mathrm{YQ}$ элементы с координатами $(j, 1)$, получаем

$$\text{(e4)} \qquad \beta_j(1) = \sum_{m=1}^{l} \mathrm{Y}_{jm}\mathrm{Q}_{m1} \quad (j = 1, \ldots, l).$$

Так как в качестве β_j можно взять брауэров характер 1_G° (и тогда $\beta_j(1) = 1$), то из (e4) следует, что p не делит Q_{m1} для некоторого m. Отсюда и из (e3) $p^{a_m} = |G|_p$ для некоторого m.

□

E13. Теорема. Пусть **B** — таблица брауэровых p-характеров группы G, c — матрица Картана группы G для p и $G_{p'} = \dot{\bigcup}_{i=1}^{l} x_i^G$ $(x_i \in G)$. Тогда

1) $\det(\mathbf{B})^2 = \pm \prod_{i=1}^{l} |C_G(x_i)|_{p'}$;

2) $\det(\mathrm{c}) = \prod_{i=1}^{l} |C_G(x_i)|_p$.

Доказательство. По E8(1, 2) $\mathbf{B}^*\mathrm{c}\mathbf{B} = \mathbf{B}^*\hat{\mathbf{B}} = \mathrm{diag}(|C_G(x_1)|, \ldots, |C_G(x_l)|)$. Следовательно, $|\det(\mathbf{B})|^2 \det(\mathrm{c}) = \prod_{i=1}^{l} |C_G(x_i)|$ и, значит, $\det(\mathrm{c}) > 0$. Отсюда и из E12 следует, что

$$\det(\mathrm{c}) = p^n, \text{ где } n \in N \cup \{0\}.$$

Далее, из $\mathbf{X} = \mathrm{d}\mathbf{B}$ получаем $\mathbf{X}^\tau \mathbf{X} = \mathbf{B}^\tau \mathrm{d}^\tau \mathrm{d}\mathbf{B} = \mathbf{B}^\tau \mathrm{c}\mathbf{B}$, где $(\mathbf{X}^\tau \mathbf{X})_{ij} = |C_G(x_i)|\delta_{ij^*}$ и j^* определяется равенством $(x_{j^*})^G = (x_j^{-1})^G$. Отсюда $\pm \prod_{i=1}^{l} |C_G(x_i)| = \det(\mathbf{B})^2 \det(\mathrm{c})$ и

$$\text{(e5)} \qquad \det(\mathbf{B})^2 = \pm \frac{\prod_{i=1}^{l} |C_G(x_i)|}{p^n}.$$

Так как $\det(\mathbf{B}) \in \hat{Z}$, то $p^n \,\Big|\, \prod_{i=1}^{l} |C_G(x_i)|$ (по 2A6(3)), а так как по E8(4) $\det(\mathbf{B}) \notin \mathfrak{p}$ и, следовательно, $\det(\mathbf{B})^2 \notin \mathfrak{p}$ (из-за простоты идеала $\mathfrak{p}$), то $p^n = \prod_{i=1}^{l} |C_G(x_i)|_p$. Отсюда и из (e5) следует требуемое.

□

E14. Пусть матрица d — матрица p-разложения группы G и пусть m_i обозначает наибольший общий делитель миноров i-го порядка в d $(i = 1, \ldots, l)$. Тогда

$$m_1 = \ldots = m_l = 1.$$

Доказательство. Так как, очевидно, $m_i | m_{i+1}$, то достаточно доказать, что $m_l = 1$. Так как ранг d^μ равен l по E8(4), то p не делит m_l. Предположим, что m_l делится на простое число q, отличное от p. Рассмотрев элементы матриц d и c по модулю q, получим матрицы $\mathrm{d}^{(q)}$ и $\mathrm{c}^{(q)}$ над Z/qZ такие, что ранг $\mathrm{d}^{(q)}$ меньше l и, следовательно, ранг $\mathrm{c}^{(q)} (= \mathrm{d}^{(q)\tau}\mathrm{d}^{(q)})$ меньше l. Но тогда q должно делить $\det(\mathrm{c})$, а это противоречит тому, что $\det(\mathrm{c})$ — степень p (E13). Итак, $m_l = 1$.

□

E15. Наибольший общий делитель элементов любого столбца матрицы d равен 1.

Доказательство. Непосредственно следует из **E14**, так как d имеет l столбцов.

□

E16. Пусть θ — обобщенный характер группы G, исчезающий на $G \setminus G_{p'}$. Тогда

$$\theta = \sum_{\beta \in \mathrm{IBr}(G)} k_\beta \hat{\beta}, \text{ где } k_\beta \in \boldsymbol{Z}.$$

Доказательство. По теореме **E1** (1) $\theta = \sum_{\beta \in \mathrm{IBr}(G)} k_\beta \hat{\beta}$, где $k_\beta \in \boldsymbol{C}$. По **E1** (5) $k_\beta = (\theta, \beta)_{G}$. По **Д4** $\beta = \sum_{\beta \in \mathrm{IBr}(G)} n_\chi \chi^\circ$, где $n_\chi \in \boldsymbol{Z}$. Из этих соотношений получаем

$$k_\beta = (\theta, \beta)_G = \left(\theta, \sum_{\beta \in \mathrm{IBr}(G)} n_\chi \chi^\circ\right) =$$
$$= \sum_{\beta \in \mathrm{IBr}(G)} n_\chi \, (\theta, \chi^0)_G = \sum_{\beta \in \mathrm{IBr}(G)} n_\chi (\theta, \chi)_G \in \boldsymbol{Z}.$$

□

E17. Каждый автоморфизм поля $\hat{Q}$ представляет столбцы таблицы брауэровых характеров группы G.

Доказательство. Пусть $\alpha \in \mathrm{Aut}\,(\hat{Q})$ и ω — первообразный корень степени $|G|_{p'}$ из 1. Тогда существует натуральное число k такое, что $\omega^\alpha = \omega^k$ и $(k, |G|_{p'}) = 1$. Пусть $\beta \in \mathrm{IBr}\,(G)$ и $g \in G_{p'}$. Так как по определению $\beta(g) = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n$ — сумма корней степени $|G|_{p'}$ из 1 (т. е. $\varepsilon_i = \omega^{n_i}$, $n_i \in N \cup \{0_i\}$ и $\beta(g^k) = \varepsilon_1^k + \ldots + \varepsilon_n^k$, то $\beta(g)^\alpha = \beta(g^k)$. Таким образом, α переводит столбец таблицы **B** брауэровых характеров группы G, соответствующий элементу g, в столбец **B**, соответствующий элементу g^k.

□

Замечание. Автоморфизм поля $\hat{Q}$ не переставляет, вообще говоря, строки таблицы брауэровых характеров.

По **2A12** из $\chi \in \mathrm{Irr}\,(G)$ следует $\bar{\chi} \in \mathrm{Irr}\,(G)$. Подобное свойство справедливо и для брауэровых характеров.

E18. Теорема. Если $\beta \in \mathrm{IBr}\,(G)$, то
1) $\bar{\beta} \in \mathrm{IBr}\,(G)$;
2) $\hat{\bar{\beta}} = \overline{\hat{\beta}}$.

Доказательство. 1): Пусть $\mathscr{B}$ — матричное представление G над $\boldsymbol{F}$ с $\beta_{\mathscr{B}}=\beta$. Рассмотрим обратно-транспонированное к нему представление $\mathscr{C}$, т. е. $\mathscr{C}(g)=\mathscr{B}(g^{-1})^{\mathsf{T}}$ для всех $g\in G$. Пусть $g\in G$. Тогда $\beta(g)=\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^{\widetilde{\mu}}$, где $n=\deg\mathscr{B}$ и $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ — полная последовательность собственных значений матрицы $\mathscr{B}(g)$ ($\widetilde{\mu}$ — как в определении Г2). Но тогда $\varepsilon_1^{-1}, \ldots, \varepsilon_n^{-1}$ — полная последовательность собственных значений матрицы $\mathscr{B}(g)^{-1}=\mathscr{B}(g)^{-1}$ (что вытекает, например, из А4), а следовательно, и матрицы $\mathscr{C}(g)$. Но тогда

$$\beta_{\mathscr{C}}(g)=\sum_{i=1}^{n}(\varepsilon_i^{-1})^{\widetilde{\mu}}=\sum_{i=1}^{n}(\varepsilon_i^{\widetilde{\mu}})^{-1}=\sum_{i=1}^{n}\overline{\varepsilon_i^{\widetilde{\mu}}}=\overline{\beta(g)}.$$

Остается доказать, что $\mathscr{C}$ неприводимо. Но это сразу следует из матричного равенства

$$\begin{pmatrix}\mathrm{O} & \mathrm{E}_n\\ \mathrm{E}_m & \mathrm{O}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{A}_{m\times m} & \mathrm{B}\\ \mathrm{O} & \mathrm{D}_{n\times n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{O} & \mathrm{E}_m\\ \mathrm{E}_n & \mathrm{O}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathrm{D} & \mathrm{O}\\ \mathrm{B} & \mathrm{A}\end{pmatrix}$$

и из неприводимости $\mathscr{B}$.

2): Для $i\in\{1, \ldots, k\}\equiv I$ определим i^* так, что $\chi_{i^*}=\overline{\chi_i}$; для $j\in\{1, \ldots, l\}\equiv J$ определим $\widetilde{j}$ так, что $\beta_{\widetilde{j}}=\overline{\beta_j}$. Тогда i^* пробегает I вместе с i (по 2А13), а $\widetilde{j}$ пробегает J вместе с j (по 1)). Согласно Д2 (2)

$$\mathring{\chi}_i=\sum_{j=1}^{l}\mathrm{d}_{ij}\beta_j\ (i=1, \ldots, k).$$

Отсюда

$$\mathring{\chi}_{i^*}=\overline{\mathring{\chi}_i}=\sum_{j=1}^{l}\mathrm{d}_{ij}\overline{\beta_j}=\sum_{j=1}^{l}\mathrm{d}_{ij}\beta_{\widetilde{j}}.$$

Следовательно,

(е6) $$\mathrm{d}_{i^*\widetilde{j}}=\mathrm{d}_{ij}\ \text{для всех}\ (i, j)\in I\times J.$$

Теперь $$\hat{\beta}_j=\sum_{i=1}^{k}\mathrm{d}_{ij}\overline{\chi_i}=\sum_{i=1}^{k}\mathrm{d}_{ij}\chi_{i^*}=_{(\mathrm{e}6)}\sum_{i=1}^{k}\mathrm{d}_{i^*\widetilde{j}}\chi_{i^*}=$$

$$=\sum_{i^*=1}^{k}\mathrm{d}_{i^*\widetilde{j}}\chi_{i^*}=\hat{\beta}_{\widetilde{j}}=\overline{\hat{\beta}_j}.$$

□

Е19. Определение. Если φ — брауэров p-характер группы G и $\varphi=\sum_{\beta\in\mathrm{IBr}(G)}m_\beta\beta\ (m_\beta\in\boldsymbol{Z})$, то m_β называется *кратностью* β в χ.

E20. Пусть φ — брауэров p-характер группы G и $\beta \in \mathrm{IBr}(G)$. Тогда кратность β в φ равна кратности $\bar{\beta}$ в $\bar{\varphi}$.

Доказательство. Кратность $\bar{\beta}$ в $\bar{\varphi}$ равна $(\bar{\varphi}, \hat{\bar{\beta}})_G =_{\mathrm{E18(2)}} \overline{(\varphi, \hat{\beta})_G} = (\varphi, \hat{\beta})_G = (\varphi, \hat{\beta})_G$ — кратность β в φ.

□

E21. Если $\alpha, \beta \in \mathrm{IBr}(G)$, то $\hat{\alpha}\beta = \sum_{\gamma \in \mathrm{IBr}(G)} m_\gamma \hat{\gamma}$, где $m_\gamma \in N \cup \{0\}$.

Доказательство. Так как $\hat{\alpha}\beta \in \mathrm{CF}(G)^\circ$, то по **E2** (2) записанное выше равенство верно для некоторых $m_\gamma \in C$. Далее, вследствие **E2** (5), $m_\gamma = (\hat{\alpha}\beta, \gamma)_G = (\hat{\alpha}, \bar{\beta}\gamma)_G$. Но $\bar{\beta} \in \mathrm{IBr}(G)$ по **E18**. Значит, $\bar{\beta}\gamma$ — брауэров характер группы G по **Г3** (5). Следовательно, $m_\gamma = (\hat{\alpha}, \bar{\beta}\gamma)_G$, будучи кратностью α в $\bar{\beta}\gamma$, принадлежат $N \cup \{0\}$.

□

E22. Если $\alpha \in \mathrm{IBr}(G)$ и $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$, то $\hat{\alpha}\chi = \sum_{\beta \in \mathrm{IBr}(G)} m_\beta \hat{\beta}$, где $m_\beta \in N \cup \{0\}$.

Доказательство. $\hat{\alpha}\chi = \hat{\alpha}\chi^\circ = \sum_{\beta \in \mathrm{IBr}(G)} n_\beta \hat{\alpha}\beta$, где $n_\beta \in N \cup \{0\}$ по **Д2** (1). Остается применить **E21**.

□

Приведем примеры вычисления матрицы p-разложения d и таблицы брауэровых характеров **B**. Если β — брауэров характер представления $\mathscr{B}$, то условимся писать $\mathrm{Ker}\,\beta$ вместо $\mathrm{Ker}\,\mathscr{B}$.

E23. Пример. Пусть $G = A_4$. Запишем ее таблицу характеров.

	12	4	3	3
	1A	2A	3A	3B
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	1	z	$\bar{z}$
χ_3	1	1	$\bar{z}$	z
χ_4	3	-1	0	0

$$\left(z = e^{\frac{2\pi i}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

1) Пусть $p = 2$. Так как G имеет 3 $2'$-класса, то $|\mathrm{IBr}_2(G)| = 3$, а так как $\chi_1^\circ, \chi_2^\circ, \chi_3^\circ$ линейны и линейно независимы, то

$\mathrm{IBr}_2(G)=\{\overset{\circ}{\chi}_1, \overset{\circ}{\chi}_2, \overset{\circ}{\chi}_3\}$. Кроме того, $\overset{\circ}{\chi}_4=\overset{\circ}{\chi}_1+\overset{\circ}{\chi}_2+\overset{\circ}{\chi}_3$. Следовательно,

$$\mathrm{d}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\1&1&1\end{pmatrix} \text{ и } \mathrm{B}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&z&\bar{z}\\1&\bar{z}&z\end{pmatrix}.$$

2) Пусть $p=3$. Здесь $G_{3'}=1\mathrm{A}\cup 2\mathrm{A}$ и $\mathrm{IBr}_3(G)=\{\beta_1, \beta_2\}$, где $\beta_1=\overset{\circ}{\chi}_1=\overset{\circ}{\chi}_2=\overset{\circ}{\chi}_3$. Так как $G/O_3(G)$ неабелева, то по **А12** $\beta_2(1)>1$, т. е. $\beta_2(1)\in\{2,3\}$. Если $\beta_2(1)=2$, то $\overset{\circ}{\chi}_3=\beta_1+\beta_2$ и p-характер $\beta_2=\overset{\circ}{\chi}_3-\beta_1$ принимает значения 2 и -2 на элементах $1\in 1\mathrm{A}$ и $t\in 2\mathrm{A}$ соответственно. Отсюда по **Г15**(2) $t\,\mathrm{Ker}\,\beta_2\in Z(G/\mathrm{Ker}\,\beta_2)$, что невозможно ($\mathrm{Ker}\,\beta_2<G$). Следовательно, $\beta_2(1)=3$ и $\overset{\circ}{\chi}_4=\beta_4$. Таким образом,

$$\mathrm{d}=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\\1&0\\0&1\end{pmatrix} \text{ и } \mathrm{B}=\begin{pmatrix}1&1\\3&-1\end{pmatrix}.$$

Е24. Пример. Пусть $G=S_4$. Таблица характеров ее имеет вид

	24	8	4	3	4
	1A	2A	2B	3A	4A
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	-1	1	-1
χ_3	2	2	0	-1	0
χ_4	3	-1	1	0	-1
χ_5	3	-1	-1	0	1

1) Пусть $p=2$. Тогда $G_{2'}=1\mathrm{A}\cup 3\mathrm{A}$ и $\mathrm{IBr}_2(G)=\{\beta_1, \beta_2\}$, где $\beta_1=\overset{\circ}{\chi}_1=\overset{\circ}{\chi}_2$. По **А12** $\beta_2(1)>1$. Так как $\overset{\circ}{\chi}_3$ не кратен β_1, то $\beta_2(1)=2$ и $\overset{\circ}{\chi}_3=\beta_2$. Значит,

$$\mathrm{d}=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\\0&1\\1&1\\1&1\end{pmatrix} \text{ и } \mathrm{B}=\begin{pmatrix}1&1\\2&-1\end{pmatrix}.$$

2) Пусть $p=3$. Тогда $G_{3'}=1\mathrm{A}\cup 2\mathrm{A}\cup 2\mathrm{B}\cup 4\mathrm{A}$ и $\mathrm{IBr}_3(G)=\{\beta_1, \beta_2, \beta_2, \beta_4\}$, где $\beta_1=\overset{\circ}{\chi}_1$ и $\beta_2=\overset{\circ}{\chi}_2$. Кроме того, $\overset{\circ}{\chi}_3=\beta_1+$

$+\beta_2$. Следовательно, первые три строки матрицы 2-разложения d таковы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть m — кратность β_1 в $\overset{\circ}{\chi}_4$. Покажем, что $m=0$. Если это не так, то $m\in\{1, 2\}$. Пусть $\beta=\overset{\circ}{\chi}_4-m\beta_1$ и $x\in 4A$. Тогда $\beta(1)=3-m$ и $\beta(x)=-1-m$. При $m=2$ будет $\beta(1)<|\beta(x)|$ в противоречие с Г15(1). При $m=1$ будет $\beta(1)=2$ и $\beta(x)=-2$, откуда по Г15(2) $x\operatorname{Ker}\beta\in Z(G/\operatorname{Ker}\beta)$, что невозможно. Таким образом, $m=0$. Подобно доказывается, что кратность β_2 в $\overset{\circ}{\chi}_4$ и кратности β_1, β_2 в $\overset{\circ}{\chi}_5$ равны нулю. По А12 $\{\beta_3(1), \beta_4(1)\}\neq\{1\}$. Далее, из $\{\beta_1(1), \beta_2(1)\}=\{1, 2\}$ следовало бы, что $\overset{\circ}{\chi}_4=\beta_3+\beta_4=\overset{\circ}{\chi}_5$, но $\overset{\circ}{\chi}_4\neq\overset{\circ}{\chi}_5$. Значит, $\beta_3(1)=\beta_4(1)=3$, $\overset{\circ}{\chi}_4=\beta_3$ и $\overset{\circ}{\chi}_5=\beta_4$. Итак,

$$\mathrm{d}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } \mathbf{B}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что использование теории p-блоков облегчает нахождение матрицы d (см., например, 5Б7 и 5В8).

Вообще же, нахождение матриц p-разложения для конкретных групп — одна из наиболее трудных задач теории модулярных представлений. Она не решена даже для симметрических групп, теория представлений которых достаточно хорошо разработана [83]. Неизвестно, определяет ли таблица характеров X группы G таблицу брауэровых характеров этой группы (при фиксированном p-модулировании μ). Неизвестно даже, определяет ли X множество степеней неприводимых брауэровых характеров группы G (см. [66, § IV. 5]).

§ Е. БРАУЭРОВЫ ХАРАКТЕРЫ ГРУППЫ И ПОДГРУППЫ

Пусть $H\leqslant G$. Если β — брауэров p-характер G, то, очевидно, $\beta|_H$ есть брауэров p-характер H. Пусть теперь α — брауэров p-характер H. Будет ли индуцированная классовая функция α^G брауэровым p-характером группы G? Положительный ответ на этот вопрос вытекает из следующего утверждения.

Ё1. Пусть $H \leqslant G$ и $G = Ht_1 \dot{\cup} \ldots \dot{\cup} Ht_s$ — разложение G на левые смежные классы по H ($s = |G : H|$). Пусть $\mathscr{A}$ — матричное представление H над F и $\mathscr{A}^G$ — представление G, индуцированное представлением $\mathscr{A}$ относительно $(t_1, \ldots, t_s)$. Тогда

$$\beta_{\mathscr{A}^G} = (\beta_{\mathscr{A}})^G.$$

Доказательство. Пусть $g \in G_{p'}$. Согласно определению

$$\begin{array}{cc} & j\text{-й столбец} \\ \mathscr{A}^G(g) = & \left(\begin{array}{c|c|c} \hline & \mathscr{A}'(t_i g t_j^{-1}) & \\ \hline \end{array} \right) \end{array} \quad i\text{-я строка},$$

где $\mathscr{A}'(x) = \mathscr{A}(x)$ при $x \in H$ и $\mathscr{A}'(x) = O$ при $x \in G \setminus H$. Пусть I — множество всех $i \in \{1, \ldots, s\}$, для которых $\mathscr{A}'(t_i g t_i^{-1}) \neq O$ (т. е. $t_i g t_i^{-1} \in H$) и $\{\varepsilon_1^{(i)}, \ldots, \varepsilon_n^{(i)}\}$ — полная последовательность собственных значений $n \times n$-матрицы $\mathscr{A}(t_i g t_i^{-1})$. Тогда $\beta_{\mathscr{A}^G}(g) =$

$$= \sum_{i \in I} (\varepsilon_1^{(i)} + \ldots + \varepsilon_n^{(i)})^{\sim\mu} = \sum_{i \in I} \beta_{\mathscr{A}}(t_i g t_i^{-1}) = \sum_{i=1}^{s} \beta'_{\mathscr{A}}(t_i g t_i^{-1}) =$$

$= \left(\beta_{\mathscr{A}}\right)^G(g)$ $\Big($где $\beta'_{\mathscr{A}}(x) = \beta(x)$ при $x \in H$ и $\beta'_{\mathscr{A}}(x) = 0$ при $x \in G \setminus H\Big)$.

Итак, $\beta_{\mathscr{A}^G}(g) = \left(\beta_{\mathscr{A}}\right)^G(g)$ для всех $g \in G_{p'}$. Если же $g \in G \setminus G_{p'}$, то $\beta_{\mathscr{A}^G}(g) = 0 = \left(\beta_{\mathscr{A}}\right)^G(g)$ по **Г2 (1)** и **1Ж6 (6)**.

□

Ё2. Следствие. Если $H \leqslant G$ и α — брауэров p-характер H, то α^G — брауэров p-характер G.

□

Ё3. Теорема. Пусть $H \leqslant G$.

1) Если γ — главный неразложимый p-характер группы G, то $\gamma|_H$ — сумма главных неразложимых p-характеров H.

2) Если α — главный неразложимый p-характер H, то α^G — сумма главных неразложимых p-характеров G.

Доказательство. Будем писать $\mathrm{IBr}(G)$ вместо $\mathrm{IBr}_p(G)$.

1): Пусть $\gamma = \hat{\beta}$, где $\beta \in \mathrm{IBr}(G)$. Так как по **Е2 (2)** $\{\hat{\alpha} | \alpha \in \mathrm{IBr}(H)\}$ есть база в $\mathrm{CF}(H)\Big|^{\circ}_{H_{p'}}$, то

$$\hat{\beta}|_H = \sum_{\alpha \in \mathrm{IBr}(H)} m_{\beta\alpha} \hat{\alpha}, \text{ где } m_{\beta\alpha} \in \boldsymbol{C}.$$

Нам нужно показать, что $m_{\beta\alpha} \in N \cup \{0\}$. По Ё2 (5) и закону взаимности Фробениуса $m_{\beta\alpha} = (\hat{\beta}|_H, \alpha)_H = (\beta, \alpha^G)_G$. Но, согласно Ё2, $\alpha^G = \sum_{\eta \in \mathrm{IBr}(H)} k_{\alpha\eta}\eta$, где $k_{\alpha\eta} \in N \cup \{0\}$. Снова по Ё2 (5) имеем $m_{\beta\alpha} = (\alpha^G, \hat{\beta})_G = \overline{k_{\alpha\beta}} = k_{\alpha\beta} \in N \cup \{0\}$, что и утверждается в пункте 1).

2): Пусть $\alpha = \hat{\eta}$, где $\eta \in \mathrm{IBr}(H)$. Так как α^G есть брауэров p-характер G по Ё2 и $\{\hat{\beta} | \beta \in \mathrm{IBr}(G)\}$ — база в $\mathrm{CF}(G)^c$ по Ё2 (2), то

$$\hat{\eta}^G = \sum_{\beta \in \mathrm{IBr}(G)} n_\beta \beta, \text{ где } n_\beta \in \boldsymbol{C}.$$

Далее, $n_\beta = (\hat{\eta}^G, \beta)_G = (\hat{\eta}, \beta|_H)_H = \overline{(\beta|_H, \hat{\eta})_H}$. Но $\beta|_H$ есть, очевидно, p-характер H и, следовательно, $\beta|_H = \sum_{\theta \in \mathrm{IBr}(H)} m_{\beta\theta}\theta$, где $m_{\beta\theta} \in N \cup \{0\}$. Теперь $n_\beta = \overline{m_{\beta\eta}} \in N \cup \{0\}$.

□

Ё4. Упражнение. Пусть $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ и $\mathscr{E}_P$ — единичное представление P над $\boldsymbol{F}$. Тогда среди неприводимых частей индуцированного представления $\mathscr{E}_P^G$ (при любой системе вычетов G по P) содержатся все неприводимые представления G над $\boldsymbol{F}$.

Ё5. Упражнение. Пусть $G = A \times B$. Тогда $\mathrm{IBr}_p(G) = \{\alpha \times \beta | \alpha \in \mathrm{IBr}_p(A), \beta \in \mathrm{IBr}_p(B)\}$. (Определение $\alpha \times \beta$ см. в 2A38.)

Глава 5
ТЕОРИЯ p-БЛОКОВ

§ А. ОПРЕДЕЛЕНИЕ p-БЛОКОВ ПО БРАУЭРУ

Теория p-блоков была создана Р. Брауэром. Введенное им понятие p-блока совпадает с понятием $(p, \mathfrak{p})$-блока в следующем определении. Как выяснится ниже, оно не зависит от выбора $\mathfrak{p}$ и совпадает с понятием p-блока, введенным в главе 3.

А1. Определение. Пусть p — простое число и $\mathfrak{p}$ — некоторый максимальный идеал кольца $\hat{Z}$, содержащий p. Для произвольной конечной группы G определим отношение эквивалентности $\sim_{\mathfrak{p}}$ на $\mathrm{Irr}(G)$, положив $\chi \sim_{\mathfrak{p}} \psi$, если

$$\frac{|g^G|\chi(g)}{\chi(1)} \equiv \frac{|g^G|\psi(g)}{\psi(1)} \pmod{\mathfrak{p}} \text{ для всех } g \in G.$$

Классы эквивалентности по $\sim_{\mathfrak{p}}$ в $\mathrm{Irr}(G)$ называются $(p, \mathfrak{p})$-*блоками* (неприводимых характеров) группы G.

Напомним утверждение 3Д11(1).

А2. Пусть $D \trianglelefteq G$, $1 \in D$, B — D-блок группы G и $n \equiv$ Н. О. К. $\{|H| \mid H \leqslant G,\ H \cap D = 1\}$. Тогда $\frac{1}{n} \sum_{\chi \in B} \chi(1)\chi(g) \in \hat{Z}$ для всех $g \in G$.

□

А3. Пусть $D \trianglelefteq G$, $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ и $P \cap D = 1$. Тогда каждый D-блок группы G есть объединение ее $(p, \mathfrak{p})$-блоков.

Доказательство. Предположим, что предложение неверно. Тогда существует тройка (B, φ, ψ) такая, что

1) B — D-блок группы G;
2) $\varphi \in B$, а $\psi \in \mathrm{Irr}(G) \setminus B$;
3) φ и ψ лежат в одном $(p, \mathfrak{p})$-блоке.

В групповой алгебре CG рассмотрим элемент $e_B = \sum_{\chi \in B} e_\chi = $ $= \sum_{g \in G} a_g g$, где $a_g = \frac{1}{|G|} \sum_{\chi \in B} \chi(1)\overline{\chi(g)}$.

Пусть $\mathfrak{R} = \hat{Z}_{\mathfrak{p}}$ — кольцо $\mathfrak{p}$-целых чисел в $\hat{Q}$ и $\mathfrak{P}$ — единственный максимальный идеал в $\mathfrak{R}$ (**4Б19**, **4Б20**). Так как $P \cap D = 1$, то по **А2** $\frac{1}{|P|} \sum_{\chi \in B} \chi(1) \overline{\chi(g)} \in \hat{Z}$. Следовательно,

$$a_g \in \mathfrak{R} \text{ для всех } g \in G.$$

Пусть $g_1^G, \ldots, g_k^G$ — все классы сопряженных элементов группы G. Из 3) получаем

$$\omega_\varphi(e_B) - \omega_\psi(e_B) = \sum_{i=1}^{k} a_{g_i} \left(\frac{|g_i^G| \varphi(g_i)}{\varphi(1)} - \frac{|g_i^G| \psi(g_i)}{\psi(1)} \right) \in \mathfrak{P}.$$

(так как $\mathfrak{P}$ идеал в $\mathfrak{R}$). С другой стороны, из соотношений ортогональности немедленно следует, что $\omega_\chi(e_\xi) = \delta_{\chi\xi}$ для χ, $\xi \in \in \mathrm{Irr}(G)$. Поэтому вследствие 2) $\omega_\varphi(e_B) = 1$ и $\omega_\psi(e_B) = 0$. Но тогда получается, что $1 \in \mathfrak{P}$ и, значит, $\mathfrak{P} = \mathfrak{R}$, что противоречиво. Следовательно, противоречащей предложению тройки (B, φ, ψ) не существует.

□

А4. Каждый p-блок группы G есть объединение $(p, \mathfrak{p})$-блоков.

Доказательство. По определению p-блок есть D-блок при $D = G_{p'}$. Но тогда $P \cap D = 1$ для $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ и остается сослаться на **А3**.

□

Для доказательства обратного утверждения нам потребуется понятие брауэрова графа. По **4Д2** для любого $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ имеем разложение

$$\chi\Big|_{G_{p'}}^{0} = \sum_{\beta \in \mathrm{IBr}_{\mathfrak{p}}(G)} d_{\chi\beta}\beta, \text{ где } d_{\chi\beta} \in N \cup \{0\}$$

($\mathfrak{p}$ — максимальный идеал в $\hat{Z}$, содержащий p).

А5. Определение. Положим $\mathrm{IBr}_{\mathfrak{p}}(\chi) = \{\beta \in \mathrm{IBr}_{\mathfrak{p}}(G) \mid d_{\chi\beta} \neq \neq 0\}$ для $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ и $\mathrm{IBr}_{\mathfrak{p}}(\Phi) = \bigcup_{\varphi \in \Phi} \mathrm{IBr}_{\mathfrak{p}}(\varphi)$ для $\Phi \subseteq \mathrm{Irr}(G)$.

Брауэров граф группы G относительно $\mathfrak{p}$ есть граф с множеством вершин $\mathrm{Irr}(G)$, в котором вершины χ и ψ соединены, если и только если $\mathrm{IBr}_{\mathfrak{p}}(\chi) \cap \mathrm{IBr}_{\mathfrak{p}}(\psi) \neq \varnothing$. В случае, когда идеал $\mathfrak{p}$ фиксирован (ясен из контекста), всюду в этих обозначениях и определении будем писать p вместо $\mathfrak{p}$.

А6. Если А и В различные $(p, \mathfrak{p})$-блоки группы G, то
$$\mathrm{IBr}_{\mathfrak{p}}(\mathrm{A}) \cap \mathrm{IBr}_{\mathfrak{p}}(\mathrm{B}) = \varnothing.$$

Доказательство. Пусть $\chi \in \mathrm{A}$ и $\beta \in \mathrm{IBr}_{\mathfrak{p}}(\mathrm{A})$ с $d_{\chi\beta} > 0$. Согласно теореме **4В2** среди представлений, имеющих характер χ, есть такое представление $\mathscr{X}$, что $\mathscr{X}(G) \subseteq \mathrm{CL}(n, \mathfrak{R})$, где $n = \chi(1)$ и $\mathfrak{R} = \hat{Z}_{\mathfrak{p}}$. Пусть μ — естественный гомоморфизм $\mathfrak{R} \to F = \mathfrak{R}/\mathfrak{P}$ и $\mathscr{X}^{(\mu)}$ — $\mathfrak{P}$-модуляция представления $\mathscr{X}$. Так как $d_{\chi\beta} > 0$, то некоторое представление $\mathscr{B}$ с брауэровым характером β является неприводимой частью представления $\mathscr{X}^{(\mu)}$. Но по **2А9 (1)** для всех $g \in G$ имеем $\mathscr{X}^{\mu}(\widetilde{g^G}) = (\mathscr{X}(\widetilde{g^G}))^{\mu} = \omega_{\chi}(\widetilde{g^G})^{\mu} \mathrm{E}_n$ и, следовательно,
$$\mathscr{B}(\widetilde{g^G}) = \omega_{\chi}(\widetilde{g^G})^{\mu} \mathrm{E}_m, \text{ где } m = \beta(1).$$

Если предположить, что $\beta \in \mathrm{IBr}_{\mathfrak{p}}(\mathrm{B})$, то будет существовать $\psi \in \mathrm{B}$ с $d_{\psi\beta} > 0$. Но тогда подобно предыдущему мы получим равенство $\mathscr{B}(\widetilde{g^G}) = \omega_{\psi}(\widetilde{g^G})^{\mu} \mathrm{E}_m$ для любого $g \in G$. Следовательно, $\omega_{\chi}(\widetilde{g^G})^{\mu} = \omega_{\psi}(\widetilde{g^G})^{\mu}$ для всех $g \in G$, т. е. χ и ψ лежат в одном $(p, \mathfrak{p})$-блоке, что противоречиво.

□

Из А6 непосредственно вытекает

А7. Каждый $(p, \mathfrak{p})$-блок группы G является объединением связных компонент брауэрова графа группы G относительно $\mathfrak{p}$.

□

А8. Теорема. Пусть G — конечная группа, p — простое число и $\mathfrak{p}$ — максимальный идеал в $\hat{Z}$, содержащий p. Равносильны условия:

(1) Φ — p-блок группы G;

(2) Φ — $(p, \mathfrak{p})$-блок группы G;

(3) Φ — связная компонента брауэрова графа группы G относительно $\mathfrak{p}$.

Доказательство. По **А4**

а) каждый p-блок группы G есть объединение ее $(p, \mathfrak{p})$-блоков. По **А7**

б) каждый $(p, \mathfrak{p})$-блок группы G есть объединение связных компонент брауэрова графа группы G относительно $\mathfrak{p}$.

Пусть А — связная компонента брауэрова графа G относительно $\mathfrak{p}$. Так как $\mathrm{IBr}_{\mathfrak{p}}(G)$ является базой в $\mathrm{CF}(G)\Big|^{0}_{G_{p'}}$ **(4Г8)**, то брауэров граф группы G относительно $\mathfrak{p}$ является $\mathrm{IBr}_{\mathfrak{p}}(G)$-графом в смысле определения **3В2** (при $D = G_{p'}$). Поэтому по **3В3** $G_{p'} \dashrightarrow \mathrm{A}$ и, значит, А — объединение p-блоков. Таким образом, в) каждая связная компонента брауэрова графа G относительно p есть объединение p-блоков группы G.

Из а), б), в) следует заключение теоремы.

□

А9. Пусть $B_1, \ldots, B_t$ — все p-блоки группы G. Тогда

$$\text{(a1)} \qquad \mathrm{CF}(G)\Big|^0_{G_{p'}} = \bigoplus_{i=1}^{t} \boldsymbol{C}[\mathrm{IBr}_p(B_i)],$$

причем $\boldsymbol{C}[\mathrm{IBr}_p(B_i)] = \boldsymbol{C}\left[B_i\Big|^0_{G_{p'}}\right]$.

Доказательство. Так как $\mathrm{IBr}_p(G)$ — база в $\mathrm{CF}(G)\Big|^0_{G_{p'}}$ (**4Г8**) и множества $\mathrm{IBr}_p(B_i)$ ($i = 1, \ldots, t$) попарно не пересекаются по **А6**, то верно (a1).

Далее, $\boldsymbol{C}\left[B_i\Big|^0_{G_{p'}}\right] \subseteq \boldsymbol{C}[\mathrm{IBr}_p(B_i)]$ по определению множества $\mathrm{IBr}_p(B_i)$ и

$$\mathrm{CF}(G)\Big|^0_{G_{p'}} = \bigoplus_{i=1}^{t} \boldsymbol{C}\left[B_i\Big|^0_{G_{p'}}\right]$$

по **3Д4**. Отсюда из (a1) следует заключительное равенство.

□

Вследствие теоремы А8 утверждение А3 можно сформулировать следующим образом [6, теорема 4].

А10. Теорема. Пусть $D \trianglelefteq G$, $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ и $P \cap D = 1$. Тогда каждый D-блок группы G есть объединение ее p-блоков.

□

Отметим теперь одно следствие теоремы **А8**, которое существенно облегчает нахождение одного из p-блоков, а именно, главного p-блока группы.

А11. Неприводимый характер χ группы G принадлежит главному p-блоку группы G, если и только если он непосредственно p-связан с главным характером G $\left(\text{т. е. } \left(\chi\Big|^0_{G_{p'}},\ 1_G\right)_G \neq 0\right)$.

Доказательство. Покажем сначала, что

$$\text{(a2)} \qquad |G_{p'}| \text{ не делится на } p.$$

Пусть $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$. Тогда $C_G(P) = Z(P) \times K$, где K — p'-группа. Рассмотрим действие P сопряжениями на $G_{p'}$. Тогда порядок любой P-орбиты на $G_{p'}$ делит $|P|$, причем объединение всех одноэлементных P-орбит есть K. Следовательно, $|G_{p'}|\equiv|K| \pmod p$ и верно (а2).

Пусть χ — характер из главного p-блока G и пусть $G_{p'} = \dot{\bigcup}_{i=1}^{l} g_i^G$. По теореме А8 ((1)$\Rightarrow$(2))

$$\frac{|g_i^G|\,\chi(g_i)}{\chi(1)} \equiv |g_i^G| \pmod{\mathfrak{p}} \quad (i = 1, \ldots, l).$$

Поэтому

$$\frac{|G|}{\chi(1)}\left(\chi\Big|^{0}_{G_{p'}},\ 1_G\right)_G = \sum_{i=1}^{l} \frac{|g_i^G|\,\chi(g_i)}{\chi(1)} \equiv \sum_{i=1}^{l} |g_i^G| = |G_{p'}| \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$$

по (а2) и, значит, $\left(\chi\Big|^{0}_{G_{p'}},\ 1_G\right)_G \neq 0$.

Обратное утверждение следует из 3Д6.

□

Так как $\left(1_G\Big|^{0}_{G_{p'}},\ 1_G\right)_G \neq 0$, то из **А11** следует, что $\mathrm{Irr}\left(1_G\Big|^{0}_{G_{p'}}\right)$ есть главный p-блок группы G.

Установим теперь один результат о π-блоках. Теория π-блоков была развита Иизукой [79] и Брауэром (в неопубликованной работе, см. [88]) и рассматривалась во многих других работах (см., например, [91], [93], [94]).

А12. Определение. Пусть π — множество простых чисел. *π-блок* группы G — это минимальное непустое подмножество из $\mathrm{Irr}(G)$, которое при любом $p\in\pi$ является объединением p-блоков группы G.

А13. Пусть D — множество всех π'-элементов группы G, $\Phi \subseteq \mathrm{Irr}(G)$. Тогда следующие условия равносильны:

(1) Φ — D-блок группы G;

(2) Φ — π-блок группы G.

Доказательство. а) Пусть $p\in\pi$. Так как $D\cap P = 1$ для $P\in \mathrm{Syl}_p(G)$, то по теореме **А10** D-блок является объединением p-блоков. Следовательно, D-блок является объединением π-блоков.

б) Пусть Φ — π-блок группы G и $p\in\pi$. Φ есть объединение p-блоков и, значит, объединение $G_{p'}$-блоков. Таким образом, $G_{p'} \longleftrightarrow \Phi$ для всех $p\in\pi$. Но тогда, согласно **3Б4**, $D = \bigcap_{p\in\pi} G_{p'} \longleftrightarrow \Phi$. Следовательно, Φ — объединение D-блоков.

Из а) и б) следует требуемое заключение.

□

Б1. Определение. 1) Множество всех p-блоков группы G обозначим через $\mathrm{Bl}_p(G)$.

2) Пусть $B \in \mathrm{Bl}_p(G)$ и $\psi \in \mathrm{CF}(G)$. Скажем, что функция ψ *подчинена p-блоку* B, если $\psi \in \boldsymbol{C}[B]$ (т. е. $\psi = \sum\limits_{\chi \in B} (\psi, \chi)_G \chi$).

Б2. Соглашение. В этой главе простое число p считается фиксированным. Поэтому в обозначениях $\mathrm{IBr}_p(G)$ и $\mathrm{Bl}_p(G)$ будем (как правило) опускать индекс p. Кроме того, оператор $\Big|^0_{G_{p'}}$ обозначается через $^\circ$.

Заметим, что по определению p-блока $B^\circ \subseteq \boldsymbol{C}[B]$ для всех $B \in \mathrm{Bl}(G)$, т. е. p-срезка χ° любого характера χ из B подчинена B.

Б3. Пусть $B_1, \ldots, B_t$ — все p-блоки группы G.

1) $\mathrm{Irr}(G) = \dot{\bigcup\limits_{i=1}^{t}} B_i$.

2) $\mathrm{CF}(G) = \bigoplus\limits_{i=1}^{t} \boldsymbol{C}[B_i]$.

3) $\mathrm{IBr}(G) = \dot{\bigcup\limits_{i=1}^{t}} \mathrm{IBr}(B_i)$.

4) $\mathrm{CF}(G)^\circ = \bigoplus\limits_{i=1}^{t} \boldsymbol{C}[\mathrm{IBr}(B_i)]$.

Доказательство. 1), 2): См. **3Д4.**

3): Следует из **А6.**

4): Следует из 3) и того факта, что $\mathrm{IBr}(G)$ — база в $\mathrm{CF}(G)^\circ$ (**4Г8**).

□

Б4. Теорема. Пусть $B \in \mathrm{Bl}(G)$.

1) $\boldsymbol{Z}[\mathrm{IBr}(B)] = \boldsymbol{Z}[B^\circ]$.

2) Если $\beta \in \mathrm{IBr}(B)$, то β и $\hat{\beta}$ подчинены блоку B.

3) $\mathrm{IBr}(B)$ есть множество всех неприводимых брауэровых p-характеров группы G, подчиненных блоку B.

Доказательство. 1): Так как

$$\chi^\circ = \sum_{\beta \in \mathrm{IBr}(B)} d_{\chi\beta}\beta \quad \text{при } \chi \in B \tag{б1}$$

по определению множества $\mathrm{IBr}(B)$, то $\boldsymbol{Z}[B^\circ] \subseteq \boldsymbol{Z}[\mathrm{IBr}(B)]$.

Докажем обратное включение. Пусть $\beta \in \mathrm{IBr}(B)$. Так как $\mathrm{IBr}(G) \subseteq \boldsymbol{Z}[\mathrm{Irr}(G)^\circ]$ (**4Д4**), то $\beta = \beta_1 + \beta_2$, где $\beta_1 = \sum\limits_{\chi \in B} m_\chi \chi^\circ$, $\beta_2 =$

$= \sum_{\chi \in \mathrm{B}^-} m_\chi \chi^\circ$ ($\mathrm{B}^- = \mathrm{Irr}(G) \setminus \mathrm{B}$) и $m_\chi \in \boldsymbol{Z}$ для всех $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$. Но теперь $\boldsymbol{C}[\mathrm{IBr}(\mathrm{B})] \ni \beta - \beta_1 = \beta_2 \in \boldsymbol{C}[\mathrm{IBr}(\mathrm{B}^-)]$, откуда по **Б3**(4) $\beta = \beta_1 \in \boldsymbol{Z}[\mathrm{B}^\circ]$.

2): Пусть $\beta \in \mathrm{IBr}(\mathrm{B})$. Тогда вследствие 1) $\beta \in \boldsymbol{Z}[\mathrm{B}^\circ] \subseteq \boldsymbol{Z}[\mathrm{B}]$. Далее, $\hat{\beta} = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \mathrm{d}_{\chi\beta}\chi$, где $\mathrm{d}_{\chi\beta} \in \boldsymbol{Z}$, по определению $\hat{\beta}$. Но $\mathrm{d}_{\chi\beta} = 0$, если $\chi \notin \mathrm{B}$ (**А6**). Следовательно,

$$\hat{\beta} = \sum_{\chi \in \mathrm{B}} \mathrm{d}_{\chi\beta}\chi. \tag{62}$$

3): Вследствие 1) $\mathrm{IBr}(\mathrm{B}) \subseteq \mathrm{IBr}(G) \cap \boldsymbol{C}[\mathrm{B}]$. Поскольку это верно для всех $\mathrm{B} \in \mathrm{Bl}(G)$, то из **Б3**(2, 3) следует обратное включение.

□

Для множества M натуральных чисел через Н.О.Д.M обозначим наибольший общий делитель всех чисел из M.

Б5. Пусть $\mathrm{B} \in \mathrm{Bl}(G)$. Тогда

$$\text{Н.О.Д. } \{\chi(1) \mid \chi \in \mathrm{B}\} = \text{Н.О.Д. } \{\beta(1) \mid \beta \in \mathrm{IBr}(\mathrm{B})\}.$$

Доказательство. Следует из **Б4**(1).

□

Б6. Пусть Φ — объединение p-блоков группы G. Предположим, что функция

$$\psi \equiv \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} (a_\chi \chi + b_\chi \chi^\circ) + \sum_{\beta \in \mathrm{IBr}(G)} (c_\beta \beta + d_\beta \hat{\beta}),$$

где a_χ, b_χ, c_β, $d_\beta \in \boldsymbol{C}$, исчезает на $G_{p'}$ (соответственно на $G \setminus G_{p'}$). Тогда функция

$$\varphi = \sum_{\chi \in \Phi} (a_\chi \chi + b_\chi \chi^\circ) + \sum_{\beta \in \mathrm{IBr}(\Phi)} (c_\beta \beta + d_\beta \hat{\beta})$$

также исчезает на $G_{p'}$ (соответственно на $G \setminus G_{p'}$).

Доказательство. По условию $G_{p'} \longleftrightarrow \Phi$. Из определения взаимодействия и из **Б4**(2) следует, что $\varphi = \psi_\Phi$ (см. определение **3А1**). Но теперь требуемое утверждение следует из теоремы **3В1**.

□

Б7. Пусть $\mathrm{Bl}(G) = \{\mathrm{B}_1, \ldots, \mathrm{B}_t\}$. Тогда при подходящей нумерации элементов множеств $\mathrm{Irr}(G)$ и $\mathrm{IBr}(G)$ матрица разложения d и матрица Картана c группы G представляются в виде:

1) $\mathrm{d} = \begin{pmatrix} \mathrm{d}_1 & & \mathrm{O} \\ & \ddots & \\ \mathrm{O} & & \mathrm{d}_t \end{pmatrix}$,

где d_i — подматрица в d, состоящая из чисел $d_{\chi\beta}$ с $\chi \in B_i$ и $\beta \in$ $\in \operatorname{Irr}(B_i)$;

2) $$c = \begin{pmatrix} c_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & c_t \end{pmatrix},$$

где c_i — подматрица из c, состоящая из чисел $c_{\beta\gamma}$ с α, $\beta \in \operatorname{IBr}(B_i)$, и $c_i = d_i^T d_i$ для всех i.

При этом ранг d_i = ранг $c_i = |\operatorname{IBr}(B_i)|$.

Доказательство. 1) и 2) следуют из определения матриц d, c и из **А6**, (б1), (б2). Утверждение о рангах следует из линейной независимости столбцов матриц d и c (**4Д2** (2)) и из 1), 2).

□

Б8. Определение. Пусть $\operatorname{Bl}_p(G) = \{B_1, \ldots, B_t\}$ и $B = B_i$ для некоторого $i \in \{1, \ldots, t\}$. Матрица d_i, определенная в **Б7**, называется *матрицей разложения блока* B и обозначается через d_B. Матрица c_i, определенная в **Б7**, называется *матрицей Картана блока* B и обозначается через c_B.

Б9. Пусть $B \in \operatorname{Bl}_p(G)$. Тогда $|B| \geqslant |\operatorname{IBr}(B)|$ и равносильны условия:

(1) $|B| = |\operatorname{IBr}(B)|$,

(2) $\chi^\circ = \chi$ для некоторого $\chi \in B$,

(3) $|B| = 1$.

Кроме того, если $B = \{\chi\}$, то $\operatorname{IBr}(B) = \{\chi\}$ и $\hat{\chi} = \chi$.

Доказательство. Матрица d_B размеров $|B| \times |\operatorname{IBr}(B)|$ имеет ранг $|\operatorname{IBr}(B)|$ по **Б7**. Поэтому $|B| \geqslant |\operatorname{IBr}(B)|$.

Далее, условие (1) равносильно обратимости матрицы d_B и, следовательно, (**4Д2** (1) и **4Г8** (1)), линейной независимости функций χ^c при $\chi \in B$. Поэтому равносильность условий (1) — (3) следует из **3Д8**.

Пусть $B = \{\chi\}$. Тогда $\operatorname{IBr}(B) = \{\beta\}$ и из **Б4** (1) следует, что $\beta = \chi = \chi^\circ$. В частности, $d_{\chi\beta} = 1$ и, значит, $\hat{\beta} = d_{\chi\beta}\chi = \chi$.

□

Б10. Пример. Вычислим матрицу 3-разложения d группы $G \simeq$ $\simeq \mathrm{PSL}(2, 11)$, используя **Б7**. По таблице характеров группы G (см. приложение 1) 3-блоки ее легко находим: $B_1 = \{\chi_1, \chi_4, \chi_6\}$, $B_2 = \{\chi_2, \chi_3, \chi_5\}$, $B_3 = \{\chi_7\}$, $B_4 = \{\chi_8\}$. Пусть $l_i = |\operatorname{IBr}(B_i)|$. По **Б9** $l_1 < 3$, $l_2 < 3$, $l_3 = l_4 = 1$. Но $l_1 + l_2 + l_3 + l_4 = 6$ (числу всех 3-классов в G). Поэтому $l_1 = l_2 = 2$.

Сначала найдем d_{B_1}. Так как $\chi_1 \in B_1$, то $\mathrm{IBr}(B_1) = \{\beta_1, \beta_2\}$, где $\beta_1 = \overset{\circ}{\chi}_1$. Воспользуемся тем фактом, что G имеет неабелеву подгруппу $H = \langle b \rangle \rtimes \langle a \rangle$ порядка 11·5. Легко найти ее таблицу характеров:

	1	b	b^2	b^3	b^4	a	a^{-1}
φ_1	1	1	1	1	1	1	1
φ_2	1	z	z^2	z^3	z^4	1	1
φ_3	1	z^2	z^4	z	z^3	1	1
φ_4	1	z^3	z	z^4	z^2	1	1
φ_5	1	z^4	z^3	z^2	z	1	1
ψ	5	0	0	0	0	b_{11}	$\overline{b_{11}}$
$\overline{\psi}$	5	0	0	0	0	$\overline{b_{11}}$	b_{11}

$\left(z = e^{\frac{2\pi i}{5}}\right)$

Так как классы 5A и 5B вещественные, то можно считать, что $\{b, b^{-1}\} \subseteq 5\mathrm{A}$, $\{b^2, b^3\} \subseteq 5\mathrm{B}$, $a \in 11\mathrm{A}$ и $a^{-1} \in 11\mathrm{B}$. Легко подсчитать, что $\overset{\circ}{\chi}_4|_H = \psi + \overline{\psi}$. Так как ψ и $\overline{\psi}$ — неприводимые брауэровы 3-характеры H по **4Г13 (2)**, то отсюда следует, что $\overset{\circ}{\chi}_4$ есть либо неприводимый брауэров 3-характер, либо сумма двух неприводимых брауэровых 3-характеров степени 5. Поскольку $\beta_1 = \overset{\circ}{\chi}_1$, то второй случай невозможен и, значит, $\beta_2 = \overset{\circ}{\chi}_4$. Кроме того, $\overset{\circ}{\chi}_6 = \overset{\circ}{\chi}_1 + \overset{\circ}{\chi}_4$. Следовательно,

$$d_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обратимся к блоку B_2. Находим $\overset{\circ}{\chi}_2|_H = \psi$ и $\overset{\circ}{\chi}_3|_H = \overline{\psi}$. Отсюда следует, что $\overset{\circ}{\chi}_2$ и $\overset{\circ}{\chi}_3$ — неприводимые брауэровы 3-характеры группы G. Так как, кроме того, $\overset{\circ}{\chi}_5 = \overset{\circ}{\chi}_2 + \overset{\circ}{\chi}_3$, то

$$d_{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь согласно **Б7 (1)** $d = \mathrm{diag}(d_{B_1}, d_{B_2}, 1, 1)$.

Следующий результат показывает, что число неприводимых брауэровых p-характеров, подчиненных p-блоку B, может быть найдено из таблицы характеров.

Б11. Пусть $B \in \mathrm{Bl}_p(G)$. Тогда

$$|\mathrm{IBr}(B)| = \sum_{\chi \in B} (\chi^\circ, \chi)_G.$$

Доказательство. Пусть $B = \{\chi_1, \ldots, \chi_m\}$ и a_B — $m \times m$-матрица с $(a_B)_{ij} = (\overset{\circ}{\chi}_i, \chi_j)_G$. Тогда след $a_B = \sum_{\chi \in B} (\chi^\circ, \chi)_G$. Очевидно,

a_B — подматрица матрицы a $(= dc^{-1}d^T)$ из **4E2** (7). Подобно **Б7** (1, 2) матрицу a можно записать в «блочной форме»:

$$a = \begin{pmatrix} a_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & a_t \end{pmatrix},$$

где $a_i = d_i c_i^{-1} d_i^T$ в обозначениях из **Б7**. Так как a_B есть одна из матриц a_i, то в силу **Б7** и **4E2** (8)

(63) $$\text{ранг } a_B = |IBr(B)| \text{ и } a_B^2 = a_B.$$

Подобно **4A4** (1) для некоторой обратимой матрицы S имеем

$$S^{-1} a_B S = \begin{pmatrix} f_1 & & O \\ & \ddots & \\ * & & f_n \end{pmatrix} (f_i \in C).$$

По (63) $f_i^2 = f_i$, т. е. $f_i \in \{0, 1\}$ и, значит, и число ненулевых f_i равно $|IBr(B)|$. Отсюда $|IBr(B)| = f_1 + \ldots + f_n =$ след $a_B = \sum_{\chi \in B} (\chi^\circ, \chi)_G$.

□

Б12. Упражнение. Если $B \in Bl_p(G)$, то

$$\sum_{\chi \in B} \chi(x) \overline{\chi(g)} = \sum_{\beta \in IBr(B)} \beta(x) \overline{\hat{\beta}(g)}$$

для всех $(x, g) \in G_{p'} \times G$.

Б13. Упражнение. Пусть $\mathscr{A}$ — представление G над F и $\beta_{\mathscr{A}}$ подчинен p-блоку B группы G. Тогда $\bigcap_{\chi \in B} \operatorname{Ker} \chi \subseteq \operatorname{Ker} \mathscr{A}$. (По **3Д10** (2) $\bigcap_{\chi \in B} \operatorname{Ker} \chi \subseteq O_{p'}(G)$).

§ В. p-БЛОКИ И ГРУППОВАЯ АЛГЕБРА CG

В этом параграфе будет получена характеризация p-блоков группы G на языке групповой алгебры CG. Здесь сохраняются обозначения $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{P}$, F и μ, принятые в **4Г1**. Кроме того, $\mathfrak{R}G$ обозначает подкольцо кольца CG, состоящее из всех элементов вида $\sum_{g \in G} r_g g$, где $r_g \in \mathfrak{R}$. В соответствии с **4B4** (4) каждому элементу $x = \sum_{g \in G} r_g g$ из $\mathfrak{R}G$ $(r_g \in \mathfrak{R})$ соответствует элемент $x^\mu = \sum_{g \in G} r_g^\mu g$ в FG. Пусть $\{\chi\} \cup \Phi \subseteq \operatorname{Irr}(G)$. Будем использовать обозначения ω_χ (алгебраический гомоморфизм из $Z(CG)$ на C)

из 2А9, $e_\chi = \frac{\chi(1)}{|G|}\sum_{g\in G}\overline{\chi(g)}g$ (идемпотент из $Z(CG)$) и $e_\Phi = \sum_{\varphi\in\Phi} e_\varphi$ (3Г3).

Вообще говоря, $e_\chi \notin \mathfrak{R}G$ и, следовательно, не всегда определен соответствующий ему идемпотент в e_χ^{μ} в $Z(FG)$.

В1. Пусть $\chi,\ \psi\in \mathrm{Irr}(G)$.

1) $e_\chi^2 = e_\chi$ и $e_\chi e_\psi = 0$ при $\chi\neq\psi$.

2) $\sum_{\zeta\in\mathrm{Irr}(G)} e_\zeta = 1$.

3) $\{e_\Phi \mid \Phi\subseteq \mathrm{Irr}(G)\}$ есть множество всех идемпотентов в $Z(CG)$.

4) $\omega_\chi(e_\psi) = \delta_{\chi\psi}$.

5) $\omega_\chi(e_\Phi) = \begin{cases}1, & \text{если } \chi\in\Phi,\\ 0, & \text{если } \chi\notin\Phi\end{cases}$ $(\Phi\subseteq\mathrm{Irr}(G))$.

Доказательство. Следует из 3Г5.

□

В2. Пусть $B\in \mathrm{Bl}_p(G)$ и $e_B = \sum_{g\in G} a_g g$, где $a_g\in C$. Тогда

1) $a_g = \frac{1}{|G|}\sum_{\chi\in B}\chi(1)\overline{\chi(g)} = \frac{1}{|G|}\sum_{\beta\in\mathrm{IBr}(B)}\beta(1)\overline{\hat\beta(g)}$;

2) $a_g = 0$, если $p \mid o(g)$ $\left(\text{т. е. } e_B = \sum_{g\in G_{p'}} a_g g\right)$;

3) $a_g\in\mathfrak{R}$ для всех $g\in G$ (т. е. $e_B\in\mathfrak{R}G$).

Доказательство. 1): Первое равенство следует из определения e_B, а второе — из **Б12** (из **4Е10** и **Б6**).

2): Так как $G_{p'} \longleftrightarrow B$ и $1\in G_{p'}$, то по теореме **3Б1** для всех $g\in G\setminus G_{p'}$ будет $\sum_{g\in G}\chi(1)\overline{\chi(g)} = 0$, т. е. $a_g = 0$.

3): Следует из **3Д12**(1).

□

В3. Упражнение. Если $B\in\mathrm{Bl}_p(G)$, то $|G|_p$ делит $\sum_{\chi\in B}\chi(1)^2$.

В4. Если $B\in\mathrm{Bl}_p(G)$, то

$$\sum_{\chi\in B}\frac{\chi(x)\overline{\chi(y)}}{|C_G(x)|}\in\mathfrak{R} \text{ для всех } (x,\ y)\in G\times G.$$

Доказательство. Пусть $x\in G$. Так как $e_B\in\mathfrak{R}G$ (по **В2**), то $\widetilde{x^G}e_B\in\mathfrak{R}G$. Но по лемме **3Г5(8)** $\widetilde{x^G}e_B = \sum_{y\in G}u_y y$, где $u_y = \sum_{\chi\in B}\frac{\chi(x)\overline{\chi(y)}}{|C_G(x)|}$. Из этих двух предложений следует требуемое.

□

B5. Если $\alpha \in \mathrm{CF}(G \to \mathfrak{R})$ и $\mathrm{B} \in \mathrm{Bl}_p(G)$, то $\alpha_\mathrm{B} \in \mathrm{CF}(G \to \mathfrak{R})$.

Доказательство. Очевидно, $\alpha = \sum\limits_{x^G \in \mathrm{Cl}(G)} \alpha(x)\, 1_G \big|_{x}^{0}{}_G$. Но $\left(1_G \big|_{x}^{0}{}_G\right)_\mathrm{B}(g) = \sum\limits_{\chi \in \mathrm{B}} \left(1_G \big|_{x}^{0}{}_G, \chi\right)_G \chi(g) = \sum\limits_{\chi \in \mathrm{B}} \frac{1}{|G|} |x^G| \overline{\chi(x)}\, \chi(g) =$
$= \sum\limits_{\chi \in \mathrm{B}} \frac{\overline{\chi(x)}\, \chi(g)}{|C_G(x)|}$ для $g \in G$.
Так как это принадлежит $\mathfrak{R}$ по **B4**, то $\alpha_\mathrm{B}(g) \in \mathfrak{R}$.

□

B6. Теорема. Пусть $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{Irr}(G)$. Равносильны условия:
(1) A — p-блок группы G;
(2) A — минимальное непустое подмножество из $\mathrm{Irr}(G)$ такое, что $e_\mathrm{A} \in \mathfrak{R}G$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A}$ — множество всех непустых подмножеств из $\mathrm{Irr}(G)$, являющихся объединением p-блоков группы G, а $\mathfrak{B}$ — множество всех непустых подмножеств Φ из $\mathrm{Irr}(G)$ таких, что $e_\Phi \in \mathfrak{R}G$. Согласно **B2** (3) $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$. Докажем обратное включение.

Пусть $\Phi \in \mathfrak{B}$. Рассмотрим два произвольных неприводимых характера χ и ψ группы G, лежащих в одном p-блоке. Тогда, так как $e_\Phi \in \mathfrak{R}G$, то по **A1** и **A8** $\omega_\chi(e_\Phi) - \omega_\psi(e_\Phi) \in \mathfrak{R}p = \mathfrak{P}$ и, в частности, $\omega_\chi(e_\Phi) - \omega_\psi(e_\Phi) \notin \{1, -1\}$. Поскольку же $\omega_\chi(e_\Phi)$, $\omega_\psi(e_\Phi) \in \{0, 1\}$ по **B1** (5), то отсюда следует, что либо $\omega_\chi(e_\Phi) = \omega_\psi(e_\Phi) = 1$, либо $\omega_\chi(e_\Phi) = \omega_\psi(e_\Phi) = 0$. В первом случае χ и ψ лежат в Φ, во втором — вне Φ. Следовательно, $\Phi \in \mathfrak{A}$. Итак, $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$, откуда следует требуемое утверждение.

□

B7. Определение. Пусть $\mathrm{B} \in \mathrm{Bl}_p(G)$. Элемент e_B называется *идемпотентом Осимы блока* B.

B8. Пусть $\chi \in \mathrm{B} \in \mathrm{Bl}_p(G)$. Равносильны условия:
(1) $\mathrm{B} = \{\chi\}$,
(2) $|G|_p$ делит $\chi(1)$,
(3) $\chi(g) = 0$ для всех неединичных p-элементов g из G,
(4) $\chi(g) = 0$ для всех $g \in G \setminus G_{p'}$.

Доказательство. (1)$\Rightarrow$(4): Следует из **Б9**.
(4)$\Rightarrow$(3): Очевидно.
(3)$\Rightarrow$(2): Пусть $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$. По (3) $\chi(x) = 0$ для всех $x \in P \setminus \{1\}$. Следовательно, $(\chi|_P, 1_P)_P = \frac{\chi(1)}{|P|}$, откуда следует (2).

(2)⇒(1): Если $|G|_p$ делит $\chi(1)$, то $e_\chi = \frac{\chi(1)}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi(g)}\, g \in \Re G$, откуда по теореме **В6** $\mathrm{B} = \{\chi\}$.

□

В9. Упражнение. Пусть $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ и π — множество простых чисел. Равносильны условия:

(1) $|G|_\pi$ делит $\chi(1)$,

(2) $\chi(g) = 0$ для каждого неединичного π-элемента g из G,

(3) $\chi(g) = 0$ для каждого $g \in G \setminus G_{\pi'}$.

В10. Пусть χ, $\psi \in \mathrm{Irr}(G)$. Равносильны условия:

(1) χ и ψ лежат в одном p-блоке группы G;

(2) $\frac{|x^G|\,\chi(x)}{\chi(1)} \equiv \frac{|x^G|\,\psi(x)}{\psi(1)} \pmod{\mathfrak{p}}$ для всех $x \in G_{p'}$.

Доказательство. (1)⇒(2): Следует из **А8** ((1)⇒(2)).

(2)⇒(1): Пусть $\chi \in \mathrm{B} \in \mathrm{Bl}_p(G)$. По **В2** (2, 3) e_B есть линейная комбинация сумм p'-классов группы G, причем с коэффициентами из $\Re$. Но условие (2), которое мы считаем выполненным, можно записать так: $\omega_\chi(\widetilde{x^G}) \equiv \omega_\psi(\widetilde{x^G}) \pmod{\mathfrak{p}}$ для всех $x \in G_{p'}$. Следовательно, $\omega_\chi(e_\mathrm{B}) \equiv \omega_\psi(e_\mathrm{B}) \pmod{\mathfrak{p}}$. По **В1** (5) $\omega_\chi(e_\mathrm{B}) = 1$ и $\omega_\psi(e_\mathrm{B}) \in \{1, 0\}$. Из последних двух предложений следует, что $\omega_\psi(e_\mathrm{B}) = 1$ и, значит, $\psi \in \mathrm{B}$.

□

В11. Упражнение. Пусть $\mathrm{B} \in \mathrm{Bl}_p(G)$ и $\alpha \in \mathrm{Aut}(\hat{Q})$. Тогда $\mathrm{B}^\alpha (\equiv \{\chi^\alpha \mid \chi \in \mathrm{B}\})$ есть также p-блок группы G и если $e_\mathrm{B} = \sum_{g \in G} a_g g$, то $e_{\mathrm{B}^\alpha} = \sum_{g \in G} a_g^\alpha g$ ($a_g \in \hat{Q}$ по **В2**).

§ Г. ДЕФЕКТ БЛОКА

Г1. Определение. Пусть $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$.

p-дефектом характера χ называется число $d_p(\chi)$, определяемое равенством

$$p^{d_p(\chi)} = \left(\frac{|G|}{\chi(1)}\right)_p.$$

p-дефектом p-блока B группы G называется число

$$d_p(\mathrm{B}) = \max\{d_p(\chi) \mid \chi \in \mathrm{B}\}.$$

p-высотой характера $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ называется число

$$h_p(\chi) = d_p(\mathrm{B}) - d_p(\chi),$$

где $\chi \in \mathrm{B} \in \mathrm{Bl}_p(G)$.

В случае, когда простое число p фиксировано (ясно из контекста), приставка p- в этих определениях и индекс p в этих обозначениях могут быть опущены.

Далее p фиксировано согласно **Б2**.

Как следует из определения $d(\mathrm{B})$ в каждом p-блоке B есть характер ψ высоты 0, т. е. с минимальным $\psi(1)_p$. При этом, очевидно, $p^{d(\mathrm{B})} = \left(\frac{|G|}{\psi(1)}\right)_p$ и $p^{h(\chi)} = \frac{\chi(1)_p}{\psi(1)_p}$ для $\chi \in \mathrm{B}$.

Г2. Пусть $\mathrm{B} \in \mathrm{Bl}_p(G)$.

1) $\frac{|G|_p}{p^{d(\mathrm{B})}} = \min\{\chi(1)_p \mid \chi \in \mathrm{B}\} = \min\{\beta(1)_p \mid \beta \in \mathrm{IBr}(G)\}$.

2) $p^{d(\mathrm{B})} \frac{\chi(g)}{|C_G(g)|} \in \mathfrak{R}$ для всех $(\chi, g) \in \mathrm{B} \times G$.

3) $p^{d(\mathrm{B})} \frac{\beta(g)}{|C_G(g)|} \in \mathfrak{R}$ для всех $(\beta, g) \in \mathrm{IBr}(\mathrm{B}) \times G$

Доказательство. 1): Первое равенство следует непосредственно из определения $d(\mathrm{B})$, второе — из **Б5**.

2): Пусть $\chi \in \mathrm{B}$ и $g \in G$. По **2А9** (2) $\alpha = \frac{|G|\chi(g)}{|C_G(g)|\chi(1)} \in \hat{\mathbf{Z}}$, откуда $p^{d(\chi)} \frac{\chi(g)}{|C_G(g)|} = \alpha \frac{\chi(1)_{p'}}{|G|_{p'}} \in \mathfrak{R}$. Это влечет 2), так как $d(\chi) \leqslant d(\mathrm{B})$ при $\chi \in \mathrm{B}$.

3): Можно считать, что $g \in G_{p'}$. Тогда по теореме **Б4** (1) $\beta(g) = \sum_{\chi \in \mathrm{B}} m_{\beta\chi}\chi(g)$, где $m_{\beta\chi} \in \mathbf{Z}$, для всех $\beta \in \mathrm{IBr}(\mathrm{B})$. Отсюда и из 2) следует 3).

□

Г3. Пусть $\chi \in \mathrm{B} \in \mathrm{Bl}_p(G)$. Тогда $p^{d(\mathrm{B})}\chi^\circ$ есть обобщенный характер группы G.

Доказательство. Положим $d = d(\mathrm{B})$ и $\alpha = p^d\chi^\circ$. Согласно теореме **2В2** достаточно показать, что $\alpha|_E$ есть обобщенный характер E для любой брауэровой элементарной подгруппы E из G.

Пусть $E = P \times Q$ — брауэрова элементарная подгруппа группы G, где P — p-группа и Q — p'-группа. Тогда $\alpha|_Q = p^d\chi|_Q$ — характер Q. Поэтому для $\xi \in \mathrm{Irr}(E)$ имеем

$$(\alpha|_E, \xi)_E = \frac{1}{|E|}\sum_{x \in E}\alpha(x)\overline{\xi(x)} = \frac{1}{|E|}\sum_{x \in Q}\alpha(x)\overline{\xi(x)} = \\ = \frac{1}{|P|}(\alpha|_Q, \xi|_Q)_Q \in \mathbf{Q}.$$

Но с другой стороны,

$$(\alpha|_E, \xi)_E = \frac{1}{|E|}\sum_{x \in Q} p^d\chi(x)\overline{\xi(x)} = \frac{1}{|Q|}\sum_{x \in Q}\frac{|C_G(x)|}{|P|}\frac{p^d\chi(x)}{|C_G(x)|}\overline{\xi(x)} \in \mathfrak{R},$$

так как $\frac{p^d\chi(x)}{|C_G(x)|} \in \mathfrak{R}$ по Г2 (2) и, очевидно, $\frac{|C_G(x)|}{|P|} \in \mathbf{Z}$. Следовательно, $(\alpha|_E, \xi)_E \in \boldsymbol{Q} \cap \Re = \boldsymbol{Z}$ (по 2А6) и $\alpha|_E$ — обобщенный характер.

□

Г4. Пусть $B \in Bl_p(G)$ и χ — характер высоты 0 из B. Тогда $p^{d(B)-1}\ \chi^\circ$ не является обобщенным характером группы G.

Доказательство. Так как $h(\chi)=0$, то $\chi(1)_p = |G|_p / p^{d(B)}$ и

(г1) $$p^{d(B)-1}\chi(1)_p = |G|_p/p.$$

Положим $\theta = p^{d(B)-1}\chi^\circ$. Если θ — обобщенный характер, то по **4Е16** $\theta = \sum\limits_{\beta \in IBr(G)} m_\beta \hat{\beta}$, где $m_\beta \in \boldsymbol{Z}$, а тогда по **4Е3** $|G|_p$ делит $\theta(1)$. Это противоречит (г1).

□

Следующий результат дает характеризацию дефекта блока.

Г5. Теорема. Если $B \in Bl_p(G)$, то
1) $d(B) = \min\{n \in \boldsymbol{N} \cup \{0\} | p^n\chi^\circ \in \boldsymbol{Z}[Irr(G)]$ для всех $\chi \in B\}$.
2) $d(B) = \min\{n \in \boldsymbol{N} \cup \{0\} | p^n\beta \in \boldsymbol{Z}[Irr(G)]$ для всех $\beta \in IBr(B)\}$.

Доказательство. 1): Следует из **Г3** и **Г4**.
2): Следует из 1) и того, что $\boldsymbol{Z}[IBr(B)] = \boldsymbol{Z}[B^\circ]$ (**Б4**(1)).

□

Важная роль характера высоты 0 вскрывается следующей теоремой.

Г6. Теорема. Пусть $B \in Bl_p(G)$ и χ — характер высоты 0 из B. Тогда $Irr(\chi^\circ) = B$ и, в частности, χ непосредственно p-связан с каждым другим характером из B.

Доказательство. Положим $|G|_p = p^a$, $d = d(B)$ и $\breve{\chi} = p^d\chi^\circ$. По **Г3** $\breve{\chi}$ — обобщеный характер группы G, причем подчиненный блоку B (по определению p-блока). Следовательно,

(г2) $$\breve{\chi} = \sum_{\psi \in B} (\breve{\chi}, \psi)_G\, \psi, \text{ где } (\breve{\chi}, \psi)_G \in \boldsymbol{Z}.$$

Требуется показать, что $(\breve{\chi}, \psi)_G \neq 0$ для всех $\psi \in B$. Ясно, что $(\breve{\chi}, \chi)_G > 0$.

Пусть $\psi \in B \setminus \{\chi\}$. Покажем сначала, что

(г3) $$(\breve{\chi}, \psi)_G\, \chi(1) \equiv (\breve{\chi}, \chi)_G\ \psi(1) \pmod{p\psi(1)_p}.$$

Положим $G_{p'} = \dot{\bigcup\limits_{i=1}^{l}} x_i^G$. Тогда

$$\frac{|G|(\breve{\chi},\psi)_G}{p^d\psi(1)} = \sum_{i=1}^{l} \omega_\psi(\widetilde{x_i^G})\overline{\chi(x_i)} \in Q \cap \hat{Z} = Z.$$

Применяя теорему **А8** ((1)⇒(2)), получаем

$$\frac{|G|(\breve{\chi},\psi)_G}{p^d\psi(1)} = \sum_{i=1}^{l} \omega_\psi(\widetilde{x_i^G})\overline{\chi(x_i)} \equiv$$

$$\equiv \sum_{i=1}^{l} \omega_\chi(\widetilde{x_i^G})\overline{\chi(x_i)} = \frac{|G|(\breve{\chi},\chi)_G}{p^d\chi(1)} \pmod{\mathfrak{p}},$$

откуда (так как левая и правая части сравнения — целые числа)

$$\frac{|G|(\breve{\chi},\psi)_G}{p^d\psi(1)} \equiv \frac{|G|(\breve{\chi},\chi)_G}{p^d\chi(1)} \pmod{p}.$$

Умножив обе части сравнения на $\chi(1)\psi(1)$ (отчего модуль умножится на $\chi(1)_p\psi(1)_p = p^{a-d}\psi(1)_p$), получим

$|G|_{p'}p^{a-d}(\breve{\chi},\ \psi)_G\chi(1) \equiv |G|_{p'}p^{a-d}(\breve{\chi},\ \chi)_G\psi(1) \pmod{p^{a-d+1}\ \psi(1)_p}$, откуда следует (г3).

Предположим, что $(\breve{\chi}, \psi_0)_G = 0$ для некоторого $\psi_0 \in \mathrm{B}$. Из (г3) при $\psi = \psi_0$ вытекает тогда, что $p | (\breve{\chi}, \chi)_G$. Но теперь снова по (г3) получаем $p | (\breve{\chi}, \psi)_G$ для всех $\psi \in \mathrm{B}$. Отсюда и из (г2) следует, что $\frac{1}{p}\breve{\chi} = p^{d-1}\chi^\circ$ есть обобщенный характер G, в противоречие с **Г4**.

Следовательно, $(\breve{\chi}, \psi)_G \neq 0$ для всех $\psi \in \mathrm{B}$.

□

Г7. Замечание. Теорема **Г6** существенно облегчает нахождение p-блоков группы G при помощи **3Д6**. Порядок действий при этом может быть таким. Сначала найдем главный p-блок B_1 с помощью **А11** (**А11** — частный случай теоремы **Г6**, так как 1_G — характер высоты 0 в главном p-блоке G), рассмотрев выражения $\sum\limits_{x \in G_{p'}} \chi(x) \left(= |G| \left(\breve{1}_G, \chi\right)_G\right)$ для всех $\chi \in \mathrm{Irr}(G) \setminus \{1_G\}$. Затем среди характеров из $\mathrm{Irr}(G) \setminus \mathrm{B}_1$ выбираем χ_2 с минимальной p-частью степени ($\chi_2(1)_p \leqslant \psi(1)_p$ при $\psi \in \mathrm{Irr}(G) \setminus \mathrm{B}_1$). Он обязан быть характером высоты 0 в своем p-блоке B_2. Для нахождения B_2 согласно **Г6** нужно лишь рассмотреть выражения $\sum\limits_{x \in G_{p'}} \chi_2(x) \times$ $\times \overline{\chi(x)} \left(= |G| \left(\overset{0}{\chi_2}, \chi\right)_G\right)$ для всех $\chi \in \mathrm{Irr}(G) \setminus (\mathrm{B}_1 \cup \{\chi_2\})$. Те χ, для которых это выражение отлично от 0, составит вместе с χ_2 блок B_2.

Продолжив этот процесс далее, найдем все p-блоки G. Нетрудно изложить этот алгоритм нахождения p-блоков в качестве программы для ЭВМ.

Если χ — характер высоты 0 в блоке B, то по **Г6** $|B| \leqslant (\breve{\chi}, \breve{\chi})_G$, где $\breve{\chi}$ — обобщенный характер $p^{d(B)}\chi^{\circ}$. Отсюда легко следует, что $|B| \leqslant p^{2d(B)}$. Брауэр и Фейт [59] получили следующую более точную оценку.

Г8. Если $B \in \mathrm{Bl}_p(G)$, то $|B| \leqslant \frac{1}{4} p^{2d(B)} + 1$.

Доказательство. Пусть $B = \{\chi_1, \ldots, \chi_m\}$ и $\mathrm{a_B}$ — матрица с $(\mathrm{a_B})_{ij} = (\chi_i^{\circ}, \chi_j)_G$. Согласно **Г3** матрица $\mathrm{f} = p^{d(B)}\mathrm{a_B}$ целочисленна. Пусть χ_1 — характер высоты 0. Тогда по **Г6** $\mathrm{a}_{1j} \neq 0$ и, следовательно, $\mathrm{f}_{1j} \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$ для всех j. По (63) (в доказательстве **Б11**) $\mathrm{f}^2 = p^{d(B)}\mathrm{f}$. Поэтому $p^{d(B)}\mathrm{f}_{11} = (\mathrm{f}^2)_{11} = \sum_{j=1}^{m} \mathrm{f}_{1j}\mathrm{f}_{j1} = \sum_{j=1}^{m} (\mathrm{f}_{1j})^2 \geqslant (\mathrm{f}_{11})^2 + (m-1)$, откуда $(\mathrm{f}_{11})^2 - p^{d(B)}\mathrm{f}_{11} + (m-1) \leqslant 0$. Таким образом, график многочлена $x^2 - p^{d(B)}x + (m-1)$ пересекает ось x и, значит, его дискриминант неотрицателен: $p^{2d(B)} - 4(m-1) \geqslant 0$. Отсюда $m \leqslant \frac{1}{4} p^{2d(B)} + 1$.

□

Брауэр выдвинул следующее предположение [55].

Г9. Гипотеза. Если $B \in \mathrm{Bl}_p(G)$, то $|B| \leqslant p^{d(B)}$.

Подтверждения этой гипотезы получены пока лишь в очень частных случаях (см. [66, § IV. 5] и [86, § 1]).

Г10. Пусть $\mathrm{c_B}$ — матрица Картана p-блока B группы G. Тогда существуют матрицы X и Y в $GL(s, \mathbf{Z})$, где s — степень матрицы $\mathrm{c_B}$, такие, что

$$\mathrm{X}\mathrm{c_B}\mathrm{Y} = \begin{pmatrix} p^{a_1} & & O \\ & \ddots & \\ O & & p^{a_s} \end{pmatrix}, \text{ где } 0 \leqslant a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_s,$$

и $a_s = d(B)$.

Доказательство. Сначала, применяя схему доказательства **4Е5**, устанавливаем, что $p^{d(B)}\mathrm{c_B}^{-1}$ — целочисленна. Затем почти дословно повторяем доказательство **4Е12**. При этом вместо матрицы c нужно рассматривать матрицу $\mathrm{c_B}$, а равенство $\hat{\mathbf{B}} = \mathrm{c}\mathbf{B}$ заменить равенством $\hat{\mathbf{B}}_B = \mathrm{c_B}\mathbf{B}_B$, где $\hat{\mathbf{B}}_B$ и $\mathbf{B}_B$ — подматрицы из $\hat{\mathbf{B}}$ и $\mathbf{B}$ соответственно, строки которых соответствуют p-характерам из $\mathrm{IBr}(B)$. Кроме того, аргумент „p не делит Q_{h1}" в конце доказательства нужно заменить аргументом „$p|G|_p/p^{d(B)}$ не делит Q_{k1}“, который следует из Г2 (1).

□

Г11. Пусть $B \in Bl_p(G)$. Равносильны условия:
(1) $d(B)=0$,
(2) $|B|=1$.

Доказательство. Следует из **В8**, так как условие $d(B)=0$ равносильно тому, что $d(\chi)=0$ для всех $\chi \in B$.

□

Г12. Упражнение. Пусть $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$. Тогда $p^{d(\chi)}$ есть наименьшее из всех натуральных чисел m таких, что $m\chi^{\circ}$ — обобщенный характер группы G.

§ Д. p-БЛОКИ И ГРУППОВАЯ АЛГЕБРА FG

Д1. Определение. Пусть $B \in Bl_p(G)$.

1) Определим линейное отображение $\lambda_B : Z(FG) \to F$, положив

$$\lambda_B(\widetilde{g^G}) = \omega_\chi(\widetilde{g^G})^\mu \quad \text{для } g \in G,$$

где χ — некоторый элемент из B. Определение λ_B не зависит от выбора χ, так как $\omega_\chi(\widetilde{g^G})^\mu = \omega_\psi(\widetilde{g^G})^\mu$ для всех $\psi \in B$ (**А1**, **А8**). λ_B называется *блочным характером* алгебры $Z(FG)$, соответствующим p-блоку B.

2) Элемент e_B^μ (идемпотент из $Z(FG)$) называется *идемпотентом блока* B.

Д2. Пусть $B \in Bl_p(G)$. Тогда λ_B есть алгебраический гомоморфизм из $Z(FG)$ на F.

Доказательство. Следует из **2А9 (3)**.

□

Д3. Пусть $z \in Z(FG)$ и $\lambda_B(z)=0$ для всех $B \in Bl_p(G)$. Тогда $z \in J(FG)$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{U}$ — произвольное неприводимое матричное представление алгебры FG и $\mathcal{U}_1$ — его ограничение на G. Тогда $\mathcal{U}_1$ — неприводимое представление G над F. Пусть β — брауэров характер представления $\mathcal{U}_1$. Тогда $\beta \in \mathrm{IBr}(B)$ для некоторого $B \in Bl_p(G)$ и, как показано в доказательстве **А6**,

$$\mathcal{U}(z) = \lambda_B(z)\,E. \qquad \text{(д1)}$$

Так как $\lambda_B(z) = 0$, то $z \in \operatorname{Ker} \mathfrak{U}$. Таким образом, z лежит в пересечении ядер всех неприводимых представлений алгебры FG, т. е. в $J(FG)$.

□

Напомним, что идемпотент (т. е. самоквадрат) алгебры A называется *примитивным*, если он не равен нулю и не является суммой двух других идемпотентов e_1 и e_2 таких, что $e_1e_2 = 0$.

Д4. Теорема. Пусть $B_1, \ldots, B_t$ — все p-блоки группы G.

1) Существует точно t алгебраических гомоморфизмов из $Z(FG)$ на F, а именно: $\lambda_{B_1}, \ldots, \lambda_{B_t}$.

2) Существует точно t примитивных идемпотентов в $Z(FG)$, а именно: $e^{\mu}_{B_1}, \ldots, e^{\mu}_{B_t}$.

3) $\lambda_{B_i}(e^{\mu}_{B_i}) = 1$ и $\lambda_{B_i}(e^{\mu}_{B_j}) = 0$ при $i \neq j$.

4) $e^{\mu}_{B_i} e^{\mu}_{B_j} = \delta_{ij} e^{\mu}_{B_i}$

5) $\sum\limits_{i=1}^{t} e^{\mu}_{B_i} = 1$.

6) Каждый идемпотент из $Z(FG)$ есть сумма некоторого множества идемпотентов $e^{\mu}_{B_i}$.

Доказательство. 3): Для $\chi \in B_i$ имеем $\omega_\chi(e_{B_j}) = \delta_{ij}$ (**B1** (5)). Следовательно, $\lambda_{B_i}(e^{\mu}_{B_j}) = \omega_\chi(e_{B_j})^{\mu} = \delta^{\mu}_{ij} = \delta_{ij}$.

4), 5): Непосредственно следуют из **B1** (1, 2).

1): Пусть λ — произвольный алгебраический гомоморфизм из $Z(FG)$ на F. Тогда $\operatorname{Ker}\lambda$ есть F-подпространство в $Z(FG)$ размерности $\dim Z(FG) - 1$ и $Z(FG) = \operatorname{Ker}\lambda + F \cdot 1$, где 1 — единица группы G ($1 \notin \operatorname{Ker}\lambda$, так как иначе было бы $\lambda(z) = \lambda(z \cdot 1) = \lambda(z) \cdot \lambda(1) = \lambda(z)\, 0 = 0$ для всех $z \in Z(FG)$). Поэтому λ полностью определяется своим ядром. Если $\lambda \neq \lambda_{B_i}$, то $\operatorname{Ker}\lambda_{B_i} \not\subseteq \operatorname{Ker}\lambda$ и, следовательно, существует $z_i \in \operatorname{Ker}\lambda_{B_i} \setminus \operatorname{Ker}\lambda$ ($\lambda(z_i) \neq 0$). Если $\lambda \notin \{\lambda_{B_1}, \ldots, \lambda_{B_t}\}$, то, положив $z = z_1 \ldots z_t$, имеем $\lambda(z) \neq 0$, но $\lambda_{B_i}(z) = 0$ для всех $i = 1, \ldots, t$. Из этих равенств по Д3 следует, что $z \in J(FG)$. Значит, по **1Е5** элемент z нильпотентен, т. е. $z^m = 0$ для некоторого натурального числа m. Но тогда $\lambda(z)^m = \lambda(z^m) = 0$, в противоречие с тем, что $\lambda(z) \neq 0$. Поэтому $\lambda \in \{\lambda_{B_1}, \ldots, \lambda_{B_t}\}$.

6): Пусть e — произвольный идемпотент в $Z(FG)$. Вследствие 5) $e = e \cdot 1 = \sum\limits_{i=1}^{t} e e^{\mu}_{B_i}$. Следовательно, достаточно доказать, что $ee^{\mu}_{B_i} \in \{0, e^{\mu}_{B_i}\}$ для каждого i. Пусть для некоторого i $ee^{\mu}_{B_i} \neq 0$. Так как $(ee^{\mu}_{B_i})^2 = e^2 (e^{\mu}_{B_i})^2 = ee^{\mu}_{B_i}$, то элемент $ee^{\mu}_{B_i}$ не нильпотентен. Теперь по **B9** $\lambda_{B_j}(ee^{\mu}_{B_i}) \neq 0$ для некоторого j. Но тогда

$\lambda_{B_j}(ee^{\mu}_{B_i}) = 1$ (— единственный ненулевой идемпотент в F). Если $j \neq i$, то $\lambda_{B_j}(ee^{\mu}_{B_i}) = \lambda_{B_j}(e)\,\lambda_{B_j}(e^{\mu}_{B_i}) = 0$ по 3). Значит, $j = i$ и $\lambda_{B_i}(ee^{\mu}_{B_i}) = \lambda_{B_i}(e)$. Отсюда $\lambda_{B_i}((1-e)\,e^{\mu}_{B_i}) = 0$. Но, очевидно, и $\lambda_{B_j}((1-e)\,e^{\mu}_{B_i}) = 0$ для любого $j \neq i$. Следовательно, элемент $(1-e)\,e^{\mu}_{B_i}$ лежит в $J(FG)$ (Д3) и по 1Ё5 нильпотентен. Однако он является, очевидно, идемпотентом. Значит, $(1-e)\,e^{\mu}_{B_i} = 0$, т. е. $ee^{\mu}_{B_i} = e^{\mu}_{B_i}$.

2): Из 4) и 6) следует, что все примитивные идемпотенты из $Z(FG)$ лежат в $\{e^{\mu}_{B_1}, \ldots, e^{\mu}_{B_t}\}$. Но каждый идемпотент $e^{\mu}_{B_i}$ примитивен: по 3) он отличен от нуля, а равенство вида $e^{\mu}_{B_i} = e^{\mu}_{B_j} + e^{\mu}_{B_k}$ при $j \neq k$ противоречиво вследствие 4).

□

Д5. Пусть $\mathrm{Bl}_p(G) = \{B_1, \ldots, B_t\}$.

1) Групповая алгебра FG разлагается в прямую сумму

$$FG = I_1 \oplus \ldots \oplus I_s$$

ненулевых двусторонних идеалов I_j, неразложимых в прямую сумму ненулевых двусторонних идеалов.

2) Разложение из пункта 1) единственно с точностью до порядка слагаемых, а именно, $s = t$ и при подходящей нумерации слагаемых $I_j = FGe_{B_j} = e_{B_j}FG = FGe_{B_j}FG$. (Двусторонние идеалы I_j называются *блочными идеалами* алгебры FG.)

Доказательство. Положив $I_j = FGe_{B_j}$, получим по **Д4** (4, 5) утверждение 1) при $s = t$.

2): Если $FG = A_1 \oplus \ldots \oplus A_m$ — другое разложение FG со свойством пункта 1), то

$$1 = e_1 + \ldots + e_m, \text{ где } e_m \in A_m. \tag{д2}$$

Так как A_i — двусторонние идеалы, то $A_iA_j \subseteq A_i \cap A_j = \{0\}$ при $i \neq j$. Отсюда и из (д2) следует, что $e_ia_i = a_ie_i = a_i$ для всех $a_i \in A_i$. Следовательно, e_i — идемпотент из $Z(FG)$ и $A_i = FGe_i$. Из неразложимости A_i следует, что e_i примитивен. Теперь по **Д4** (2) $\{e_1, \ldots, e_m\} = \{e^{\mu}_{B_1}, \ldots, e^{\mu}_{B_t}\}$. Можно считать, что $e_j = e^{\mu}_{B_j}$ и тогда $A_j = I_j$.

□

Д6. Пусть $\mathscr{A}$ — неприводимое представление G над F с брауэровым характером α и $B \in \mathrm{Bl}_p(G)$. Равносильны условия:

(1) $\alpha \in C[B]$,

(2) $\mathscr{A}(z) = \lambda_B(z)\,E$ для всех $z \in Z(FG)$,

(3) $\mathscr{A}(e_B^\mu) = E$,

(4) $\mathscr{A}(e_B^\mu) \neq O$.

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2): См. (д1).

(2) $\Rightarrow$ (3): Следует из **Д4** (3).

(3) $\Rightarrow$ (4): Очевидно.

(4) $\Rightarrow$ (1): Пусть $\alpha \notin \boldsymbol{C}[B]$. Тогда по **Б3** (3) и **Б4** (2) $\alpha \in \boldsymbol{C}[\Phi]$ для некоторого p-блока $\Phi \neq B$. Так как (1) $\Rightarrow$ (2), то $\mathscr{A}(z) = \lambda_\Phi(z) E$ для всех $z \in Z(FG)$. Отсюда при $z = e_B^\mu$ по **Д4** (3) получаем $\mathscr{A}(e_B^\mu) = O$ в противоречие с (4).

□

Д7. Упражнение. Пусть $\mathscr{R} = \mathrm{Reg}_{G,F}$ (операторное регулярное представление G над F) и $B \in \mathrm{Bl}_p(G)$. Тогда брауэров характер представления $\mathscr{R}_{FGe_B^\mu}$ подчинен блоку B.

Д8. Упражнение. Пусть $\mathscr{A}: G \to \mathrm{Aut}(V)$ — представление G над F. Тогда существует множество $\{B_1, \ldots, B_m\}$ p-блоков группы G такое, что

$$V = V^{\mathscr{A}(e_{B_1}^\mu)} \oplus \ldots \oplus V^{\mathscr{A}(e_{B_m}^\mu)},$$

где все слагаемые $\mathscr{A}(G)$-инвариантные и ненулевые, и

$$\mathscr{A} \approx \mathscr{A}_1 \oplus \ldots \oplus \mathscr{A}_m,$$

где представление $\mathscr{A}_i$ имеет брауэров характер, подчиненный блоку B_i ($i = 1, \ldots, m$).

При изучении p-блоков оказывается полезным следующее понятие, позволяющее осуществить переход из алгебры $Z(FG)$ в алгебру $Z(FH)$, где H содержится в некоторой локальной подгруппе группы G.

Д9. Определение. Пусть P — p-подгруппа группы G и $PC_G(P) \leqslant H \leqslant N_G(P)$. *Брауэров гомоморфизм* $r_{G,H,P}$ есть линейное отображение из $Z(FG)$ в $Z(FH)$ такое, что

$$r_{G,H,P}(\widehat{K}) = \widetilde{K \cap C_G(P)} \text{ для всех } K \in \mathrm{Cl}(G).$$

Всюду далее при употреблении обозначения $r_{G,H,P}$ подразумевается, что P — p-подгруппа группы G и $PC_G(P) \leqslant H \leqslant N_G(P)$.

Очевидно, $r_{G,H,P}(Z(FG)) \subseteq Z(FC_G(P))$.

Д10. Брауэров гомоморфизм. $r = r_{G,H,P}: Z(FG) \to Z(FH)$ есть алгебраический гомоморфизм, т. е. для всех $u, v \in Z(FG)$ и всех $f \in F$

1) $r(u+v)=r(u)+r(v)$;
2) $r(fu)=fr(u)$;
3) $r(uv)=r(u)r(v)$.

Доказательство. 1) и 2) очевидны.

3): Достаточно показать, что $r(\widehat{K}\widehat{L})=r(\widehat{K})r(\widehat{L})$, когда $K, L\in \mathrm{Cl}(G)$. Для $c\in C_G(P)$ положим $A_c=\{(k, l)\in K\times L \mid kl=c\}$ и $B_c=\{(k, l)\in(K\cap C_G(P))\times(L\cap C_G(P)) \mid kl=c\}$. Тогда $|A_c|^\mu$ есть коэффициент при c в $r(\widehat{K}\widehat{L})$ и $|B_c|^\mu$ — коэффициент при c в $r(\widehat{K})r(\widehat{L})$. Остается показать, что $|A_c|^\mu=|B_c|^\mu$, т. е. $|A_c|\equiv |B_c| \pmod p$ $(\mathfrak{P}\cap \mathbf{Z}=p\mathbf{Z})$.

Так как $P\subseteq C_G(c)$, то можно определить действие P на A_c, полагая $(k, l)^x=(k^x, l^x)$ для $x\in P$. Тогда B_c является множеством всех неподвижных точек множества A_c при этом действии. Поскольку же длина любой неодноточечной P-орбиты делится на p, то отсюда следует, что $p \mid |A_c\setminus B_c|$, т. е. $|A_c|\equiv|B_c| \pmod p$.

□

Д11. Замечание. Легко заметить, что если в определении $r_{G,H,P}$ условие $PC_G(P)\leqslant H\leqslant N_G(P)$ заменить более слабым условием $C_G(P)\trianglelefteq H\leqslant G$, то **Д10** останется верным.

Д12. Определение. Пусть $K\in \mathrm{Cl}(G)$. Положим $\mathfrak{D}_p(K)=\bigcup_{k\in K}\mathrm{Syl}_p(C_G(k))$. Элементы этого множества назовем *p-дефектными группами класса* K.

Д13. Пусть P — p-подгруппа группы G, $r\equiv r_{G,H,P}$ — брауэров гомоморфизм и $z\equiv\sum_{K\in \mathrm{Cl}(G)} f_K\widehat{K}$ $(f_K\in \boldsymbol{F})$.

1) $r(z)\neq 0 \Longleftrightarrow r(\widehat{K})\neq 0$ для некоторого $K\in \mathrm{Cl}(G)$ с $f_K\neq 0$.
2) $r(\widehat{K})\neq 0 \Longleftrightarrow P\leqslant D$, где $D\in\mathfrak{D}_p(K)$ $(K\in \mathrm{Cl}(G))$.

Доказательство. 1): Следует из того, что при различных $K\in \mathrm{Cl}(G)$ множества $K\cap C_G(P)$ не пересекаются.

2): $r(\widehat{K})\neq 0 \Longleftrightarrow K\cap C_G(P)\neq\varnothing \Longleftrightarrow P\leqslant C_G(k)$ для некоторого $k\in K \Longleftrightarrow P\leqslant D$, где $D\in\mathfrak{D}_p(K)$.

□

Д14. Пусть e_B^μ — идемпотент p-блока B группы G. Запишем его в виде $e_B^\mu=\sum_{K\in \mathrm{Cl}(G)} a_B(K)\widehat{K}$, где $a_B(K)\in\boldsymbol{F}$. Пусть $K\in \mathrm{Cl}(G)$ с $a_B(K)\neq 0$ и пусть $P\in\mathfrak{D}_p(K)$. Тогда существует $\Theta\in \mathrm{Bl}_p(N_G(P))$ такой, что

$$\lambda_B=r_{G,\,N_G(P),\,P}\lambda_\Theta.$$

Доказательство. Пусть $r = r_{G,\ N_G(P),\ P}$. Из **Д13** (при $z = e_B^\mu$) следует, что $r(e_B^\mu) \equiv e \neq 0$, а по **Д10**(3) $e^2 = e$. По **Д3** $\lambda_\Theta(e) \neq 0$ для некоторого $\Theta \in \mathrm{Bl}_p(N_G(P))$. Теперь по **Д4**(2, 3) $\lambda_\Theta(e) = 1$. Положим $\lambda = r\lambda_\Theta$. Как композиция двух алгебраических гомоморфизмов λ есть алгебраический гомоморфизм из $Z(FG)$ на F, причем $\lambda(e_B^\mu) = \lambda_\Theta(r(e_B^\mu)) = \lambda_\Theta(e) = 1$. Отсюда по **Д4**(1, 3) $\lambda = \lambda_B$.

□

§ Е. ДЕФЕКТНЫЕ ГРУППЫ БЛОКА

Пусть B — p-блок группы G. Рассмотрев соответствующие ему идемпотент e_B^μ и алгебраический гомоморфизм λ_B (см. § Д), свяжем с B определенные классы сопряженных элементов и определенный класс сопряженных p-подгрупп группы G.

Е1. Определение. Пусть $B \in \mathrm{Bl}_p(G)$.

1) Запишем e_B^μ в виде $e_B^\mu = \sum\limits_{K \in \mathrm{Cl}(G)} a_B(K)\breve{K}$. (Согласно **В2** $a_B(K) = \left(\frac{1}{|G|}\sum\limits_{\chi \in B}\chi(1)\chi(k)\right)^\mu$, где $k \in K$.)

2) Положим $\mathrm{Cl}(e_B^\mu) = \{K \in \mathrm{Cl}(G) \mid a_B(K) \neq 0\}$ и элементы этого множества назовем *е-классами* блока B. (Согласно **В2** e-классы являются p'-классами.)

3) Положим $\mathrm{Cl}(\lambda_B) = \{K \in \mathrm{Cl}(G) \mid \lambda_B(\breve{K}) \neq 0\}$ и элементы этого множества назовем *λ-классами* блока B.

4) Класс, являющийся одновременно e-классом и λ-классом называется *дефектным классом блока* B.

5) p-дефектные группы (см. **Д12**) дефектных классов блока B называются *дефектными группами блока* B. Множество всех дефектных групп блока B обозначим через $\mathfrak{D}(B)$.

Е2. Дефектные классы любого p-блока B существует.

Доказательство. Согласно **Д4**(3) $1 = \lambda_B(e_B^\mu) = \sum\limits_{K \in \mathrm{Cl}(G)} a_B(K) \times \lambda_B(\breve{K})$. Следовательно, существует класс K с $a_B(K) \neq 0$ и $\lambda_B(\breve{K}) \neq 0$.

□

Е3. Пример. Пусть $G = S_4$ и $p = 3$. Из рассмотрения таблицы характеров группы G (см. **3Ё1**) непосредственно видно, что G имеет точно три 3-блока: $B_1 = \{\chi_1, \chi_2, \chi_3\}$, $B_2 = \{\chi_4\}$ и $B_3 = \{\chi_5\}$.

По таблице характеров, вычисляя числа $a_{B_1}(K)$ для $3'$-классов K, находим

$$e^{\mu}_{B_1} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\mu} \widetilde{1A} + \left(\frac{1}{4}\right)^{\mu} \widetilde{2A} = \widetilde{1A} + \widetilde{2A},$$

т. е. $\mathrm{Cl}(e^{\mu}_{B_1}) = \{1A, 2A\}$. Вычислим значения λ_{B_1} на этих классах. Напомним, что при $B \in \mathrm{Bl}_p(G)$

$$\lambda_B(\widetilde{g^G}) = \left(\frac{|g^G|\chi(g)}{\chi(1)}\right)^{\mu} \text{ для любого } \chi \in B.$$

Находим $\lambda_{B_1}(\widetilde{1A}) = 1$ и $\lambda_{B_1}(\widetilde{2A}) = 0$. Таким образом, $1A$ — единственный дефектный класс блока B_1 и, значит, $\mathfrak{D}(B_1) = \mathrm{Syl}_3(G)$.

Далее, находим

$$e^{\mu}_{B_2} = \widetilde{2A} - \widetilde{2B} + \widetilde{4A},$$

$\lambda_{B_2}(\widetilde{2A}) = -1$, $\lambda_{B_2}(\widetilde{2B}) = 2^{\mu} = -1$, $\lambda_{B_2}(\widetilde{4A}) = 1$. Следовательно, существует точно три дефектных класса блока B_2 и $\mathfrak{D}(B_2) = \{1\}$.

Те же дефектные классы и ту же дефектную группу имеет, как легко увидеть, и блок B_3.

Хотя может существовать более одного дефектного класса блока B, но, как сейчас будет доказано, все дефектные группы блока B сопряжены между собой.

E4. Определение. Для классов $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ сопряженных подгрупп группы G запись $\mathfrak{A} \lessapprox \mathfrak{B}$ означает, что существуют $A \in \mathfrak{A}$ и $B \in \mathfrak{B}$ такие, что $A \leqslant B$.

E5. Теорема. Пусть $B \in \mathrm{Bl}_p(G)$. Тогда

1) $\mathfrak{D}(B) = \mathfrak{D}_p(K)$ для любого дефектного класса K блока B;

2) $\mathfrak{D}_p(E) \lessapprox \mathfrak{D}(B) \lessapprox \mathfrak{D}_p(L)$ для любого e-класса E и любого λ-класса L блока B.

Доказательство. Пусть $E \in \mathrm{Cl}(e^{\mu}_B)$ и $L \in \mathrm{Cl}(\lambda_B)$. Покажем, что $\mathfrak{D}_p(E) \lessapprox \mathfrak{D}_p(L)$, откуда, очевидно, следуют оба утверждения теоремы. Пусть $P \in \mathfrak{D}_p(E)$. Согласно **Д14** $\lambda_B = r\lambda_\Theta$, где $r = r_{G,\, N_G(P),\, P}$ и $\Theta \in \mathrm{Bl}_p(N_G(P))$. Теперь, так как $L \in \mathrm{Cl}(\lambda_B)$, то $0 \neq \lambda_B(\widetilde{L}) = \lambda_\Theta(r(\widetilde{L}))$ и, значит, $r(\widetilde{L}) \neq 0$. Отсюда по **Д13(2)** следует, что $P \leqslant D$, где $D \in \mathfrak{D}_p(L)$. Итак, $\mathfrak{D}_p(E) \lessapprox \mathfrak{D}_p(L)$.

□

E6. Пусть $B \in \mathrm{Bl}_p(G)$. Идемпотент Осимы блока B запишем в виде $e_B = \sum_{g \in G} a_g g \ (a_g \in C)$. Тогда

$$\frac{p^{d(B)} a_g}{|C_G(g)|} \in \mathfrak{R} \text{ для всех } g \in G.$$

Доказательство. По **B2(1)** $a_g = \frac{1}{|G|} \sum_{\beta \in \mathrm{IBr}(\mathrm{B})} \beta(1)\hat{\beta}(g)$. Если $\beta \in \mathrm{IBr}_p(G)$ и $g \in G$, то по **4E9** $\frac{\hat{\beta}(g)}{|C_G(g)|} \in \mathfrak{R}$, а по **Г2(3)** $\frac{p^{d(\mathrm{B})}\beta(1)}{|G|} \in \mathfrak{R}$. Поэтому $\frac{p^{d(\mathrm{B})}a_g}{|C_G(g)|} = \sum_{\beta \in \mathrm{IBr}(\mathrm{B})} \frac{p^{d(\mathrm{B})}\beta(1)}{|G|} \frac{\hat{\beta}(g)}{|C_G(g)|} \in \mathfrak{R}$.

□

E7. Теорема. Пусть $\mathrm{B} \in \mathrm{Bl}_p(G)$ и $D \in \mathfrak{D}(\mathrm{B})$. Тогда $|D| = p^{d(\mathrm{B})}$.

Доказательство. Пусть $K = k^G$ — дефектный класс блока B, т. е. $a_\mathrm{B}(K) \neq 0$ и $\lambda_\mathrm{B}(\widetilde{K}) \neq 0$. Тогда $|D| = |C_G(k)|_p$. Пусть $e_\mathrm{B} = \sum_{g \in G} a_g g$ ($a_g \in \mathfrak{R}$ по **B2(3)**). Тогда $a_\mathrm{B}(K) = a_k^\mu$ и, следовательно, $a_k \notin \mathfrak{p}$. Отсюда и из того, что $\frac{p^{d(\mathrm{B})}a_k}{|C_G(k)|} \in \mathfrak{R}$ (по **E6**) следует, что $\frac{p^{d(\mathrm{B})}}{|C_G(k)|} \in \mathfrak{R}$. Поэтому $p^{d(\mathrm{B})} \geqslant |C_G(k)|_p = |D|$.

Докажем обратное. Пусть χ — характер высоты 0 из B, т. е. $p^{d(\mathrm{B})} = p^{d(\chi)} = \frac{|G|_p}{\chi(1)_p}$. Так как $0 \neq \lambda_\mathrm{B}(\widetilde{K}) = \omega_\chi(\widetilde{K})^\mu = \left(\frac{|k^G|\chi(k)}{\chi(1)}\right)^\mu = \left(\frac{|G|}{\chi(1)} \frac{\chi(k)}{|C_G(k)|}\right)^\mu$, то $\mathfrak{P} \not\ni \frac{|G|_p}{\chi(1)_p} \frac{\chi(k)}{|C_G(k)|} = p^{d(\mathrm{B})} \frac{\chi(k)}{|D|}$ и, значит, $p^{d(\mathrm{B})} \leqslant |D|$.

□

Из **E7** непосредственно вытекает:

E8. Пусть P — дефектная группа p-блока B группы G.
1) Если B — главный p-блок, то $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$.
2) Если $|\mathrm{B}| = 1$, то $P = 1$.

□

Теоремы **E5** и **E7** позволяют находить дефектные группы блока, не находя его дефектных классов. Согласно им $\mathfrak{D}(\mathrm{B}) = \mathfrak{D}_p(g^G)$, где g^G — любой p'-класс (не обязательно дефектный) такой, что $|C_G(g)|_p = p^{d(\mathrm{B})}$ и либо $\lambda_\mathrm{B}(\widetilde{g^G}) \neq 0$, либо $a_\mathrm{B}(g^G) \neq 0$.

E9. Упражнение. Найти дефектные группы всех 2-блоков группы $\mathrm{PSL}(2, 19)$.

E10. Если $K \in \mathrm{Cl}(G)$ и $K \not\subseteq C_G(O_p(G))$, то $\widetilde{K}$ — нильпотентный элемент в FG.

Доказательство. Пусть $P = O_p(G)$. P действует сопряжениями на K. Пусть A — некоторая орбита этого действия и $k \in A$. Так как $K \cap C_G(P) = \varnothing$, то $|A| > 1$ и, следовательно, $p \| |A|$. Далее, для любого $a \in A$ имеем $a = k^x = k[k, x]$ для некоторого $x \in P$. Так как $P \trianglelefteq G$, то $[k, x] \in P$ и, значит, $A \subseteq kP$.

Пусть теперь $\mathcal{U}$ — любое неприводимое представление G над F. По теореме **4A13** $P \subseteq \operatorname{Ker} \mathcal{U}$. Следовательно, $\mathcal{U}$ принимает постоянное значение $\mathcal{U}(k)$ на kP и поэтому на A. Теперь $\sum\limits_{a \in A} \mathcal{U}(a) = |A| \mathcal{U}(k) = 0$ (так как $p \| |A|$) и, значит, $\mathcal{U}(\breve{K}) = 0$. Так как это верно для любого неприводимого представления G над F, то $\breve{K} \in J(FG)$. Но элементы из $J(FG)$ нильпотентны по **1Ё5(1)**.

□

Е11. Каждая дефектная группа любого p-блока группы G содержит $O_p(G)$.

Доказательство. Пусть $\mathrm{B} \in \mathrm{Bl}_p(G)$ и $K \equiv k^G$ — дефектный класс блока B. Тогда $\lambda_{\mathrm{B}}(\widetilde{K}) \neq 0$, и поэтому $\widetilde{K}$ не нильпотентен. Отсюда по **Е7** следует, что $K \subseteq C_G(O_p(G))$, т. е. $O_p(G) \subseteq C_G(k)$. Значит, $O_p(G) \subseteq D$ для всех $D \in \mathfrak{D}_p(K) = \mathfrak{D}(\mathrm{B})$.

□

Замечание. Справедливо более сильное утверждение: каждая дефектная группа любого p-блока группы G является пересечением пары силовских p-подгрупп группы G [74].

Е12. Пусть $P = O_p(G)$. Предположим, что $C_G(P) \subseteq P$ (например, G — p-разрешимая группа с $O_{p'}(G) = 1$). Тогда G имеет единственный p-блок.

Доказательство. Пусть $\mathrm{B}, \Phi \in \mathrm{Bl}_p(G)$. Покажем сначала, что $\lambda_{\mathrm{B}}(e_{\Phi}^{\mu}) = a_{\Phi}(\{1\})$. Так как $\lambda_{\mathrm{B}}(e_{\Phi}^{\mu}) = \sum\limits_{K \in \mathrm{Cl}(G)} a_{\Phi}(K) \lambda_{\mathrm{B}}(\widetilde{K})$ и $\lambda_{\mathrm{B}}(1) = 1$, то достаточно показать, что для любого $K \neq \{1\}$ либо $a_{\Phi}(K) = 0$, либо $\lambda_{\mathrm{B}}(\widetilde{K}) = 0$. Если $K \not\subseteq C_G(P)$, то по **Е10** $\widetilde{K}$ нильпотентен и, значит, $\lambda_{\mathrm{B}}(\widetilde{K}) = 0$. Если же $K \subseteq C_G(P)$, то по условию $K \subseteq P$ $(K \neq \{1\})$. Теперь по **В2(2)** $a_{\mathrm{B}}(K) = 0$. Итак, $\lambda_{\mathrm{B}}(e_{\Phi}^{\mu}) = a_{\Phi}(\{1\})$. Так как правая часть не зависит от B, то по **Д4(3)** $\mathrm{B} = \Phi$.

□

В связи с темой этого параграфа упомянем некоторые вопросы, поставленные Брауэром [55]. Пусть $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$. Какую информацию о строении P можно получить по таблице характеров G? В частности, можно ли узнать, является ли P абелевой?

Так как P есть дефектная группа главного p-блока группы G, то положительный ответ иа последний вопрос вытекает из справедливости следующей гипотезы.

Е13. Гипотеза Брауэра об абелевости дефектной группы. Для p-блока B группы G равносильны условия:

(1) дефектная группа блока B абелева,

(2) все характеры блока B имеют высоту 0.

Эту гипотезу называют также гипотезой о высоте 0. Пока она подтверждена лишь в некоторых частных случаях (см. [86, § 1]).

В заключение сформулируем одни результат, который будет доказан позже (Ж20): Если $g \in G$ и g_p не содержится ни в одной дефектной группе p-блока B, то $\chi(g) = 0$ для всех $\chi \in$ B.

§ Ё. БРАУЭРОВО ИНДУЦИРОВАНИЕ БЛОКОВ. ПЕРВАЯ ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА БРАУЭРА

В этом параграфе изучается связь между p-блоками конечной группы G и p-блоками некоторых ее p-локальных подгрупп.

Ё1. Определение. 1) Пусть $H \leqslant G$ и $\Theta \in \mathrm{Bl}_p(H)$. Для блочного характера λ_Θ алгебры $Z(FH)$, соответствующего блоку Θ (Д1), определим линейное отображение $\lambda_\Theta^{(G)}: Z(FG) \to F$, положив

$$\lambda_\Theta^{(G)}(\breve{K}) = \lambda_\Theta(\widetilde{K \cap H}) \text{ для всех } K \in \mathrm{Cl}(G).$$

Если окажется, что $\lambda_\Theta^{(G)}$ есть алгебраический гомоморфизм, то по **Д4(1)** существует единственный p-блок Ψ группы G такой, что $\lambda_\Theta^{(G)} = \lambda_\Psi$. В этом случае мы пишем $\Theta^{(G)} = \Psi$ и говорим, что $\Theta^{(G)}$ *определен* и, что блок Ψ *индуцирован* (*по Брауэру*) блоком Θ.

Соответствие $\Theta \mapsto \Theta^{(G)}$ называется *брауэровым индуцированием* блоков.

2) Пусть $H \leqslant G$ и $\mathrm{B} \in \mathrm{Bl}_p(G)$. Положим

$$\mathrm{B}_{(H)} = \bigcup \{\Theta \in \mathrm{Bl}_p(H) \mid \Theta^{(G)} = \mathrm{B}\}.$$

Отметим, что вместо «брауэрово индуцирование» часто говорят «брауэрово соответствие».

Ё2. Пусть $A \leqslant B \leqslant G$ и $\Theta \in \mathrm{Bl}_p(A)$. Предположим, что $\Theta^{(B)}$ определен. Тогда для $(\Theta^{(B)})^{(G)}$ и $\Theta^{(G)}$ имеются лишь две возможности:

1) они оба не определены,

2) они оба определены и $(\Theta^{(B)})^{(G)} = \Theta^{(G)}$.

Доказательство. Для $K \in \mathrm{Cl}(G)$ по Ё1 получаем $(\lambda_{\theta^{(B)}})^{(G)}(\widehat{K}) =$
$= (\lambda_{\theta}^{(B)})^{(G)}(\widehat{K}) = \lambda_{\theta}^{(B)}(\widetilde{K \cap B}) = \lambda_{\theta}(\widetilde{K \cap A}) = \lambda_{\theta}^{(G)}(\widehat{K})$, т. е.

$$(\text{ё}1) \qquad (\lambda_{\theta^{(B)}})^{(G)} = (\lambda_{\theta})^{(G)}.$$

Теперь в зависимости от того, является или нет функция из (ё1) алгебраическим гомоморфизмом, получаются возможности 2) или 1) соответственно.

□

Отметим некоторые связи между операциями брауэрова индуцирования блоков и обычного индуцирования характеров.

Ё3. Пусть $H \leqslant G$ и $\theta \in \Theta \in \mathrm{Bl}_p(H)$. Тогда

$$\lambda_{\theta}^{(G)}(\widetilde{g^G}) = \left(\frac{|g^G|\,\theta^G(g)}{\theta^G(1)}\right)^{\mu} \text{ для всех } g \in G.$$

Доказательство. $\lambda_{\theta}^{(G)}(\widetilde{g^G}) =_{\text{Ё1}} \lambda_{\theta}(\widetilde{g^G \cap H}) =_{\text{Д1}} \left(\frac{\theta(\widetilde{g^G \cap H})}{\theta(1)}\right)^{\mu} =$
$= \left(\frac{|G:H|\,\theta(\widetilde{g^G \cap H})}{|G:H|\,\theta(1)}\right)^{\mu} =_{\text{1Ж6 (6)}} \left(\frac{\theta^G(\widetilde{g^G})}{\theta^G(1)}\right)^{\mu}.$

□

Ё4. Пусть $H \leqslant G$, $\theta \in \Theta \in \mathrm{Bl}_p(H)$ и $\chi \in \mathrm{B} \in \mathrm{Bl}_p(G)$. Равносильны условия:

(1) $\mathrm{B} = \Theta^{(G)}$;

(2) $\dfrac{|g^G|\,\chi(g)}{\chi(1)} \equiv \dfrac{|g^G|\,\theta^G(g)}{\theta^G(1)} \pmod{\mathfrak{p}}$ для всех $g \in G$.

Доказательство. $(1) \Leftrightarrow_{\text{Ё1}} (\lambda_{\mathrm{B}} = \lambda_{\theta}^{(G)}) \Leftrightarrow_{\text{Ё3}} \left(\left(\frac{|g^G|\,\chi(g)}{\chi(1)}\right)^{\mu} =\right.$
$\left.= \left(\frac{|g^G|\,\theta^G(g)}{\theta^G(1)}\right)^{\mu} \text{ для всех } g \in G\right) \Leftrightarrow (2).$

□

Ё5. Пусть $H \leqslant G$ и $\theta \in \Theta \in \mathrm{Bl}_p(H)$. Если $\theta^G \in \mathrm{Irr}(G)$, то $\Theta^{(G)}$ определен и

$$\theta^G \in \Theta^{(G)}.$$

Доказательство. Следует из Ё4, так как при $\theta^G = \chi \in \mathrm{B} \in \mathrm{Bl}_p(G)$ условие (2) в Ё4 тривиально выполнено.

□

Ё6. Пусть $H \leqslant G$, $\theta \in \Theta \in \mathrm{Bl}_p(H)$ и $B \in \mathrm{Bl}_p(G)$. Если $\Theta^{(G)}$ определен, то

1) $(\theta^G)_B(1)_p \geqslant \theta^G(1)_p \quad ((\theta^G)_B(1) \in N \cup \{0\})$;

2) $(\theta^G)_B(1)_p = \theta^G(1)_p \Leftrightarrow B = \Theta^{(G)} \Leftrightarrow \left(\dfrac{(\theta^G)_B(1)}{\theta^G(1)} - 1\right) \in \mathfrak{P}$.

Доказательство. 1): Так как $\Theta^{(G)}$ определен, то $\lambda_{\Theta^{(G)}} = \lambda_\Theta^{(G)}$ и по Ё3

$$\lambda_{\Theta^{(G)}}(z^\mu) = \left(\frac{\theta^G(z)}{\theta^G(1)}\right)^\mu \text{ для всех } z \in Z(\mathfrak{R}G).$$

Следовательно,

$$\lambda_{\Theta^{(G)}}(e_B^\mu) = \left(\frac{\theta^G(e_B)}{\theta^G(1)}\right)^\mu =_{\text{зг6 (1)}} \left(\frac{(\theta^G)_B(1)}{\theta^G(1)}\right)^\mu, \tag{ё2}$$

откуда $\dfrac{(\theta^G)_B(1)}{\theta^G(1)} \in \mathfrak{R}$ и $\left(\text{так как } (\theta^G)_B(1) = \sum\limits_{\chi \in B} (\theta^G, \chi)_G \chi(1) \in N \cup \cup \{0\}\right)$ верно 1).

2): Так как $\lambda_{\Theta^{(G)}}(e_B^\mu) = \delta_{\Theta^{(G)}, B}$ (Д3 (3)), то из (ё2) следует 2).

□

Ё7. Пусть $H \leqslant G$ и $\Theta \in \mathrm{Bl}_p(H)$. Если $\Theta^{(G)}$ определен, то каждая дефектная группа блока Θ содержится в некоторой дефектиой группе блока $\Theta^{(G)}$.

Доказательство. Пусть K — дефектный класс блока $\Theta^{(G)}$. Тогда $0 \neq \lambda_{\Theta^{(G)}}(\widehat{K}) = \lambda_\Theta(\widetilde{K \cap H})$ и, следовательно, $\lambda_\Theta(\overline{k^H}) \neq 0$ для некоторого $k \in K \cap H$, т. е. k^H есть λ-класс блока Θ. По теореме Е5 $\mathfrak{D}(\Theta) \lesssim \mathfrak{D}_p(k^H)$, т. е. $C_H(k)$ содержит некоторую дефектную группу P блока Θ. Но теперь $P \leqslant S \in \mathrm{Syl}_p(C_G(k)) = \mathfrak{D}_p(K) = \mathfrak{D}(\Theta^{(G)})$.

□

Теперь мы рассмотрим один случай выбора подгруппы H, в котором брауэрово индуцирование $\Theta \to \Theta^{(G)}$ всегда определено.

Ё8. Пусть P — p-подгруппа группы G и $PC_G(P) \leqslant \leqslant H \leqslant N_G(H)$. Тогда для любого $\Theta \in \mathrm{Bl}_p(H)$
1) $\Theta^{(G)}$ определен,
2) $\lambda_{\Theta^{(G)}} = r_{G,H,P}\lambda_\Theta$.

Доказательство. Пусть $\Theta \in \mathrm{Bl}_p(H)$. Так как образ $Z(\boldsymbol{F}G)$ при брауэровом гомоморфизме $r \equiv r_{G, H, P}$ (Д9) лежит в $Z(\boldsymbol{F}C_G(P))$, то можно рассмотреть отображение $r\lambda_\Theta \colon Z(\boldsymbol{F}G) \to \boldsymbol{F}$. Покажем что

$$r\lambda_\Theta = \lambda_\Theta^{(G)}. \tag{ё3}$$

Достаточно проверить совпадение значений левой и правой частей на классовых суммах группы G. Пусть $K \in \mathrm{Cl}(G)$. Запишем $\widetilde{K \cap H} = u + v$, где $u = \widetilde{K \cap C_G(P)} = r(\widetilde{K})$, а v — линейная комбинация элементов $\widetilde{L}$, где $L \cap C_G(P) = \varnothing$. Тогда

$$r\lambda_\Theta(\widetilde{K}) = \lambda_\Theta(r(\widetilde{K})) = \lambda_\Theta(u),$$

$$\lambda_\Theta^{(G)}(\widetilde{K}) = \lambda_\Theta(\widetilde{K \cap H}) = \lambda_\Theta(u) + \lambda_\Theta(v).$$

Так как $P \trianglelefteq H$, то $C_H(O_p(H)) \subseteq C_G(P)$ и по **Е10** элементы $\widetilde{L}$ для всех указанных выше L нильпотентны. Следовательно, $\lambda_\Theta(v) = 0$ и равенство (ё3) доказано.

Так как $r\lambda_\Theta$ есть, очевидно, алгебраический гомоморфизм из $Z(\boldsymbol{F}G)$ на $\boldsymbol{F}$, то по теореме **Д4** существует единственный p-блок Ψ группы G с $r\lambda_\Theta = \lambda_\Psi$. Отсюда и из (ё3) следуют утверждения 1) и 2).

□

Ё9. Если $a \in G_p$, то $\Theta^{(G)}$ определен для любого

$$\Theta \in \mathrm{Bl}_p(C_G(a)).$$

Доказательство. Следует из **Ё8** при $P = \langle a \rangle$ и $H = C_G(a)$.

□

Ё10. Пусть P — p-подгруппа группы G.
Положим

$$\mathfrak{A} = \{K \in \mathrm{Cl}(G) \mid P \in \mathfrak{D}_p(K)\},$$
$$\mathfrak{B} = \{L \in \mathrm{Cl}(N_G(P)) \mid P \in \mathfrak{D}_p(L)\}.$$

Тогда соответствие $K \mapsto K \cap C_G(P)$ определяет биекцию из $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{B}$.

Доказательство. Пусть $K \in \mathfrak{A}$. Покажем сначала, что $K \cap C_G(P) \in \mathfrak{B}$. Пусть $x, y \in K \cap C_G(P)$. Тогда $y = x^g$ для некоторого $g \in G$, откуда $P, P^g \in \mathrm{Syl}_p(C_G(y))$ и, значит, $P = P^{gc}$ для некоторого $c \in C_G(y)$. Но теперь $y = x^{gc}$ и $gc \in N_G(P)$. Следовательно, $K \cap C_G(P) = L \in \mathrm{Cl}(N_G(P))$. Понятно также, что $P \in \mathfrak{D}_p(L)$. Таким образом, отображение $K \mapsto K \cap C_G(P)$ $(K \in \mathfrak{A})$ есть взаимно однозначное отображение из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$.

Пусть теперь $L \in \mathfrak{B}$. Обозначим через K единственный класс группы G, содержащий L. Покажем, что $K \in \mathfrak{A}$ и $K \cap C_G(P) = L$. Пусть $P \leqslant S \in \mathrm{Syl}_p(C_G(l))$, где $l \in L$. Если $P < S$, то $P < N_S(P) \leqslant$

$\leqslant C_{N_G(P)}(l)$ в противоречие с тем, что $P \in \mathfrak{D}_p(L)$. Значит, $P = S \in \mathfrak{D}_p(K)$ и $K \in \mathfrak{A}$. По доказанному выше $K \cap C_G(P) \in \mathfrak{B}$, а так как $K \cap C_G(P) \ni l$, то $K \cap C_G(P) = l^H = L$.

□

Ё11. Обозначение. Для любой группы G положим
$$\mathrm{Bl}_p(G|\mathrm{Def}\, P) = \{B \in \mathrm{Bl}_p(G) \mid P \in \mathfrak{D}(B)\}$$
(подразумевается, что P — p-подгруппа группы G).

Ё12. Первая основная теорема Брауэра. Пусть P — p-подгруппа конечной группы G и $N_G(P) \leqslant H \leqslant G$. Тогда брауэрово индуцирование $\Theta \mapsto \Theta^{(G)}$ определяет биекцию
$$\mathrm{Bl}_p(H|\mathrm{Def}\, P) \to \mathrm{Bl}_p(G|\mathrm{Def}\, P).$$

Доказательство. Возможны два случая.

Случай 1. $H = N_G(P)$.

Пусть $\Theta \in \mathrm{Bl}(H|\mathrm{Def}\, P)$. По **Ё3** $\Theta^{(G)} \equiv \Psi \in \mathrm{Bl}_p(G)$. Так как $P \in \mathfrak{D}(\Theta)$, то по **Ё7** $P \leqslant P_1 \in \mathfrak{D}(\Psi)$. Покажем, что $P = P_1$.

Пусть $L = l^H$ — дефектный класс блока Θ и $K \equiv l^G$. По **Ё10** $K \cap C_G(P) = L$ и $P \in \mathfrak{D}_p(K)$. Далее, по **Ё8** $\lambda_\Psi(\widetilde{K}) = \lambda_\Theta(r_{G,H,P} \times (\widetilde{K})) = \lambda_\Theta(\widetilde{L}) \neq 0$, т. е. K — λ-класс блока Ψ. Но тогда из $\mathfrak{D}(\Psi) \lesssim \mathfrak{D}_p(K)$ (теорема **Е5**) следует, что $|P_1| \leqslant |P|$ и, значит, $P = P_1 \in \mathfrak{D}(\Psi)$. Таким образом, соответствие $\Theta \to \Theta^{(G)}$ определяет отображение из $\mathrm{Bl}(H|\mathrm{Def}\, P)$ в $\mathrm{Bl}(G|\mathrm{Def}\, P)$.

Пусть $\Psi \in \mathrm{Bl}(G|\mathrm{Def}\, P)$ и K — дефектный класс блока Ψ. Тогда $a_\Psi(K) \neq 0$ и $P \in \mathfrak{D}_p(K)$. По **Д14** существует $\Theta \in \mathrm{Bl}_p(H)$ такой, что $\lambda_\Psi = r_{G,H,P}\, \lambda_\Theta$, откуда по **Ё8** $\Theta^{(G)} = \Psi$. Покажем, что $P \in \mathfrak{D}(\Theta)$. Так как $P \leqslant O_p(H)$, то $P \leqslant P_2 \in \mathfrak{D}(\Theta)$ (**Е11**). Но по **Ё7** P_2 содержится в некоторой дефектной группе блока Ψ, т. е. в P^g, где $g \in G$. Таким образом, $P = P_2 \in \mathfrak{D}(\Theta)$ и $\Theta \in \mathrm{Bl} \times (G|\mathrm{Def}\, P)$. Значит, при рассматриваемом соответствии $(\Theta \mapsto \Theta^{(G)})$ $\mathrm{Bl}(H|\mathrm{Def}\, P)$ отображается на $\mathrm{Bl}(G|\mathrm{Def}\, P)$.

Остается проверить взаимную однозначность этого отображения. Предположим, что Θ_1, $\Theta_2 \in \mathrm{Bl}(H|\mathrm{Def}\, P)$ и $\Theta_1^{(G)} = \Theta_2^{(G)} \equiv \Psi$. Покажем, что, $\lambda_{\Theta_1}(e^{\mathrm{u}}_{\Theta_1}) = \lambda_{\Theta_2}(e^{\mathrm{u}}_{\Theta_1})$. Для этого достаточно показать, что

$$(\text{ё}4) \qquad \lambda_{\Theta_1}(\widetilde{L}) = \lambda_{\Theta_2}(\widetilde{L}) \text{ для всех } L \in \mathrm{Cl}_H(e^{\mathrm{u}}_{\Theta_1}).$$

Пусть $L \in \mathrm{Cl}_H(e^{\mathrm{u}}_{\Theta_1})$ и $D \in \mathfrak{D}_p(L)$. Тогда по **Е5** $D \lesssim P$ и если $D < P$, то $\lambda_{\Theta_1}(\widetilde{L}) = \lambda_{\Theta_2}(\widetilde{L}) = 0$. Пусть $D = P$. Тогда по **Ё10** $L = K \cap C_G(P)$ для некоторого $K \in \mathrm{Cl}(G)$ с $P \in \mathfrak{D}_p(K)$. Теперь по **Ё8** $\lambda_{\Theta_1}(\widetilde{L}) = \lambda_{\Theta_1}(r_{G,H,P}(\widetilde{K})) = \lambda_\Psi(\widetilde{K})$ и подобно $\lambda_{\Theta_2}(\widetilde{L}) = \lambda_\Psi(\widetilde{K})$. Значит, верно (ё4) и $\lambda_{\Theta_1}(e^{\mathrm{u}}_{\Theta_1}) = \lambda_{\Theta_2}(e^{\mathrm{u}}_{\Theta_1})$, откуда по теореме **Д4** (3) $\Theta_1 = \Theta_2$.

В случае 1 теорема доказана.

Случай 2 $N_G(P) < H$.

Согласно случаю 1 существуют биекции α: $\mathrm{Bl}(N_G(P)|\mathrm{Def}\,P) \to \mathrm{Bl}(H|\mathrm{Def}\,P)$ и β: $\mathrm{Bl}(N_G(P)|\mathrm{Def}\,P) \to \mathrm{Bl}(G|\mathrm{Def}\,P)$ такие, что $\alpha(\Theta) = \Theta^{(H)}$ и $\beta(\Theta) = \Theta^{(G)}$. Теперь по Ё2 существует отображение γ: $\mathrm{Bl}(H|\mathrm{Def}\,P) \to \mathrm{Bl}(G|\mathrm{Def}\,P)$ такое, что $\gamma(\Phi) = \Phi^{(G)}$, $\alpha\gamma = \beta$. Следовательно, $\gamma = \alpha^{-1}\beta$ — биекция.

$\square$

Пусть $B \in \mathrm{Bl}_p(G|\mathrm{Def}\,P)$. Если $\Theta \in \mathrm{Bl}_p(N_G(P))$ и $\Theta^{(G)} = B$, то по **Е11** и **Ё7** $\Theta \in \mathrm{Bl}_p(N_G(P)|\mathrm{Def}\,P)$. Поэтому существует точно один p-блок Θ подгруппы $N_G(P)$ такой, что $\Theta^{(G)} = B$. Его называют часто *брауэровым корреспондентом* блока B.

Ё13. Пусть P — p-подгруппа группы G, $PC_G(P) \leqslant H \leqslant N_G(P)$ и $B \in \mathrm{Bl}_p(G)$.

1) $r_{G,H,P}(e_B^\mu) = e^\mu_{B_{(H)}}$.

2) $B_{(H)} \neq \varnothing \Leftrightarrow P$ содержится в некоторой дефектной группе блока B.

3) Для любого $g \in G$

$$\left(\sum_{\chi \in B} \frac{\chi(\widetilde{g^G})\,\overline{\chi}}{|G|}\right)^{\mu}\Bigg|_H\Bigg|^0_{C_G(P)} = \left(\sum_{\zeta \in B_{(H)}} \frac{\zeta(\widetilde{g^G \cap C_G(P)})\,\overline{\zeta}}{|H|}\right)^{\mu}.$$

Доказательство. 1): Положим $f = r_{G,H,P}(e_B^\mu)$. Так как, очевидно, $f^2 = f$, то

$$f = \sum_{\Theta \in A} e^\mu_\Theta$$

для некоторого (возможно пустого) $A \subseteq \mathrm{Bl}_p(H)$. Теперь, учитывая **Д4** (3) и **Ё8**, для $\Theta \in \mathrm{Bl}_p(H)$ имеем

$$(\Theta \in B_{(H)}) \Leftrightarrow \left(\lambda_{\Theta^{(G)}}(e_B^\mu) = 1\right) \Leftrightarrow (\lambda_\Theta(f) = 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{\Theta_1 \in A} \lambda_\Theta(e^\mu_{\Theta_1}) = 1\right) \Leftrightarrow (\Theta \in A).$$

2): $(B_{(H)} \neq \varnothing) \Leftrightarrow_{1)} (r_{G,H,P}(e_B^\mu) \neq 0) \Leftrightarrow_{\text{Д13}} (P \leqslant P_1 \in \mathfrak{D}(K)$ для некоторого $K \in \mathrm{Cl}(e_B^\mu)) \Leftrightarrow_{\text{Е5}} (P \leqslant P_2 \in \mathfrak{D}(B))$.

3): Согласно 3Г5 (8)

$$g^G e_B^\mu = \sum_{x^G \in \mathrm{Cl}(G)} \left(\sum_{\chi \in B} \frac{\chi(\widetilde{g^G})\,\overline{\chi(x)}}{|G|}\right)^{\mu} \widetilde{x^G}.$$

При брауэровом гомоморфизме $r_{G,H,P}$ левая и правая части этого равенства переходят соответственно в $\widetilde{\overline{g^G} \cap C_G(P)}\, e_{B_{(H)}} =$

$$= \sum_{h^H \in \mathrm{Cl}(H)} \sum_{\zeta \in B_{(H)}} \left(\frac{\zeta\left(\widetilde{\overline{g^G} \cap C_G(P)}\right)\overline{\zeta(h)}}{|H|} \right)^{\mu} \widetilde{\overline{h^H}}$$

(здесь использованы свойства 1) и 3Г5 (8)) и в

$$\sum_{\substack{h^H \in \mathrm{Cl}(H), \\ h^H \subseteq C_G(P)}} \left(\sum_{\chi \in B} \frac{\chi\left(\widetilde{\overline{g^G}}\right)\overline{\chi(h)}}{|G|} \right)^{\mu} \widetilde{\overline{h^H}}.$$

Из равенства записанных выражений следует 3). □

Ё14. Пусть $B \in \mathrm{Bl}_p(G)$ и $C = C_G(O_p(G))$.

1) $e_B^{\mu} \in F[\hat{C}]$.

2) $\left(\sum_{\chi \in B} \frac{\chi(1)\overline{\chi(g)}}{|G|} \right)^{\mu} = 0$ при $g \in G \setminus C$.

Доказательство. Следует из Ё13 (1) (при $P = O_p(G)$ и $H = G$) и равенства $e_B^{\mu} = \sum_{g^G \in \mathrm{Cl}(G)} \left(\sum_{\chi \in B} \frac{\chi(1)\overline{\chi(g)}}{|G|} \right)^{\mu} \widetilde{\overline{g^G}}$.

□

Ё15. Гипотеза Алперина. Пусть $B \in \mathrm{Bl}_p(G|\mathrm{Def}\, P)$ и $B = \Theta^{(G)}$, где $\Theta \in \mathrm{Bl}_p(N_G(P)|\mathrm{Def}\, P)$. Тогда

$$k_0(B) = k_0(\Theta),$$

где $k_0(B)$ и $k_0(\Theta)$ — числа характеров высоты 0 в B и Θ соответственно.

Для p-разрешимых групп эту гипотезу доказал П. Г. Гресь [20]. Интересные применения этого результата получены в [21]. Гипотеза Алперина доказана также для групп, силовские p-подгруппы которых пересекаются по единичной подгруппе [86, теорема 1.1 (b)].

Ё16. Упражнение. Для любой группы H через $m_p(H)$ обозначим число неприводимых характеров H, степени которых не делятся на p. Доказать, что из справедливости гипотезы Алперина вытекает справедливость следующего утверждения: если $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$, то $m_p(G) = m_p(N_G(P))$ (гипотеза Алперина — Маккея).

§ Ж. ОБОБЩЕННЫЕ ЧИСЛА РАЗЛОЖЕНИЯ. ВТОРАЯ ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА БРАУЭРА

В этом параграфе доказывается важнейший результат теории p-блоков — вторая основная теорема Брауэра. Матрица разложения $\mathfrak{d}$ группы здесь будет дополнена до некоторой квадратной невырожденной матрицы $\hat{\mathfrak{d}}$, называемой обобщенной матрицей разложения.

Ж1. Соглашение. Зафиксируем простое число p и множество

$$A = \{a_1, \ldots, a_m\}$$

представителей всех классов сопряженных p-элементов группы G такое, что $a_1 = 1$. Положим

$$R = \{(a, \alpha) \mid a \in A, \ \alpha \in \mathrm{IBr}_p(C_G(a))\}.$$

Ж2. Определение. Пусть $g \in G$. *p-сечением* группы G для элемента g называется множество

$$S_G(g) = \{g_p x \mid x \in C_G(g_p)_{p'}\}^G.$$

Другими словами, $S_G(g)$ есть множество всех элементов группы G, p-часть которых сопряжена в G с g_p. При необходимости указать p явно будем писать $S_{G,p}(g)$ вместо $S_G(g)$.

Очевидно,

$$G = \dot{\bigcup_{i=1}^{m}} S_G(a_i)$$

и, следовательно,

$$\mathrm{CF}(G) = \bigoplus_{i=1}^{m} \mathrm{CF}(G)\Big|^{0}_{S_G(a_i)}.$$

Ж3. Пусть $a \in G_p$ и $r_1, \ldots, r_n$ — представители всех p'-классов группы $H = C_G(a)$. Тогда

1) $S_H(a) = \dot{\bigcup_{i=1}^{n}} (ar_i)^H$,

2) $S_G(a) = \dot{\bigcup_{i=1}^{n}} (ar_i)^G$.

Доказательство. 1): Очевидно.

2): Если $ar_i = (ar_j)^g$ для некоторого $g \in G$, то $g \in C_G(a)$, $r_i = r_j^g$ и, значит $i = j$. Таким образом, в правой части равенства 2) знак $\dot{\cup}$ поставлен правильно.

Очевидно, правая часть содержится в левой. Но и обратно, из $x \in S_G(a)$ следует, что для некоторого $g \in G$ будет $x \in (aH_{p'})^g = \left(\bigcup_{i=1}^{n} (ar_i)^H \right)^g \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (ar_i)^G$.

□

Ж4. Пусть $a \in G_p$ и $H = C_G(a)$. Тогда существует единственная $\mathrm{Irr}(G) \times \mathrm{IBr}(H)$ — матрица d^a над $\boldsymbol{C}$ такая, что

(ж1) $\chi(ar) = \sum_{\alpha \in \mathrm{IBr}(H)} (\mathrm{d}^a)_{\chi\alpha} \alpha(r)$ для всех $(\chi, r) \in \mathrm{Irr}(G) \times H_{p'}$.

Кроме того, $(\mathrm{d}^a)_{\chi\alpha} \in \boldsymbol{Z}[U]$, где $U = \{x \in \boldsymbol{C} \mid x^{o(a)} = 1\}$.

Доказательство. Пусть $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$. Тогда $\chi|_H = \sum_{\zeta \in \mathrm{Irr}(H)} m_\zeta \zeta$, где $m_\zeta \in \boldsymbol{N} \cup \{0\}$. Если $\mathscr{X}$ — неприводимое представление H с характером ζ, то (по лемме Шура) $\mathscr{X}(a) = \varepsilon_\zeta E$, где $\varepsilon_\zeta^{o(a)} = 1$, откуда $\mathscr{X}(ar) = \varepsilon_\zeta \mathscr{X}(r)$ и $\zeta(ar) = \varepsilon_\zeta \zeta(r)$ для всех $r \in H_{p'}$. Следовательно, $\chi(ar) = \sum_{\zeta \in \mathrm{Irr}(H)} m_\zeta \varepsilon_\zeta \zeta(r) = \sum_{\alpha \in \mathrm{IBr}(H)} \left(\sum_{\zeta \in \mathrm{Irr}(H)} m_\zeta \varepsilon_\zeta \times \mathrm{d}'_{\zeta\alpha} \right) \alpha(r)$, где d' — матрица разложения для H, для всех $r \in H_{p'}$. Обозначив выражение в скобках через $(\mathrm{d}^a)_{\chi\alpha}$, получим матрицу d^a со свойством (ж1), причем верно и последнее утверждение.

Единственность следует из линейной независимости брауэровых характеров H.

□

Ж5. Определение. 1) Матрица d^a из **Ж4** называется *обобщенной матрицей разложения* для секции $S_G(a)$.

2) $\mathrm{Irr}(G) \times R$ — матрица $\hat{\mathrm{d}}$ с $\hat{\mathrm{d}}_{\chi, (a, \alpha)} = \mathrm{d}^a_{\chi\alpha}$ называется *обобщенной матрицей p-разложения* группы G, а ее элементы — *обобщенными числами p-разложения* группы G.

При подходящем упорядочении строк и столбцов матрицу $\hat{\mathrm{d}}$ можно, очевидно, записать в виде

$$\hat{\mathrm{d}} = \left| \mathrm{d}^{a_1} \middle| \mathrm{d}^{a_2} \middle| \; . \quad . \; \middle| \mathrm{d}^{a_m} \right|,$$

причем $\mathrm{d}^{a_1} = \mathrm{d}$ — обычная матрица разложения группы G.

Как будет видно из дальнейшего, матрица $\hat{\mathrm{d}}$ — квадратная и невырожденная.

Ж6. Определение. Пусть $a \in G_p$, $H = C_G(a)$ и $r_1, \ldots, r_m$ — представители всех p'-классов в H. $\left(\text{Тогда согласно Ж3 } S_G(a) = \dot{\bigcup\limits_{i=1}^{m}} (ar_i)^G.\right)$

Для каждого $\alpha \in \mathrm{IBr}_p(H)$ определим функцию $\xi_{a,\alpha} \in \in \mathrm{CF}(G)|^0_{S_G(a)}$ равенством

$$\xi_{a,\alpha}(g) = \begin{cases} 0, & \text{если } g \in G \setminus S_G(a), \\ \alpha(r_i), & \text{если } g \in (ar_i)^G \end{cases}$$

или, что равносильно,

$$\xi_{a,\alpha} = \sum_{i=1}^{m} \alpha(r_i)\, \varepsilon_{(ar_i)^G}.$$

Легко заметить, что если p-элементы a и b сопряжены в G, то $\{\xi_{a,\alpha} | \alpha \in \mathrm{IBr}(C_G(a))\} = \{\xi_{b,\beta} | \beta \in \mathrm{IBr}(C_G(b))\}$. Поэтому $\{\xi_{a,\alpha} | a \in \in G_p,\ \alpha \in \mathrm{IBr}(C_G(a))\} = \{\xi_{a,\alpha} | (a, \alpha) \in R\}$.

Ж7. 1) Если $a \in G_p$, то $\{\xi_{a,\alpha} | \alpha \in \mathrm{IBr}(C_G(a))\}$ — база в $\mathrm{CF} \times \times (G)|^0_{S_G(a)}$.

2) Множество $\Xi = \{\xi_{a,\alpha} | (a, \alpha) \in R\}$ есть база пространства $\mathrm{CF}(G)$. При этом для всех $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$

$$\chi = \sum_{(a,\alpha) \in R}{}' d_{\chi,(a,\alpha)}\, \xi_{a,\alpha} = \sum_{(a,\alpha) \in R} d^a_{\chi\alpha} \xi_{a,\alpha}.$$

3) Если $\psi \in \mathrm{CF}(G \to \mathfrak{R})$, то коэффициенты в разложении ψ по базе Ξ принадлежат $\mathfrak{R}$.

4) $$(\xi_{a,\alpha}, \xi_{b,\beta})_G = \begin{cases} 0, & \text{если } a^G \neq b^G, \\ (\alpha, \beta)_{C_G(a)}, & \text{если } a = b. \end{cases}$$

Доказательство. 1): Функции $\xi_{a,\alpha}$ попарно различны и линейно независимы, так как таковы функции α. Кроме того, $\dim \times \times \mathrm{CF}(G)|^0_{S_G(a)}$ равна числу p'-классов в $C_G(a)$ (по **Ж3**), которое совпадает с $|\mathrm{IBr}(C_G(a))|$ (теорема **4Г1**).

2): Первое утверждение следует из 1) и очевидного равенства $\mathrm{CF}(G) = \bigoplus\limits_{a \in A} \mathrm{CF}(G)|^0_{S_G(a)}$. Второе — из **Ж4**.

3): Согласно **Ж6** для любого $a \in A$ имеется система уравнений

$$\xi_{a,\alpha} = \sum_{i=1}^{m} \alpha(r_i)\, \varepsilon_{(ar_i)^G} \quad (\alpha \text{ пробегает } \mathrm{IBr}(C_G(a)))$$

с «неизвестными» $\varepsilon_{(ar_i)^G}$. Матрицей этой системы является брауэрова таблица характеров группы $C_G(a)$, которая принадлежит

$CL(m, \mathfrak{K})$ по 4E8 (3). Следовательно, функции $\varepsilon_{(a r_i)^G}$ — линейные комбинации функций $\xi_{a,\alpha}$ с коэффициентами из $\mathfrak{K}$. Остается заметить, что $\psi = \sum_{g^G \in \mathrm{Cl}(G)} \psi(g)\,\varepsilon_{g^G}$.

4): Простой подсчет.

□

Ж8. Пусть $a, b \in G_p$.

1) Если $a^G \neq b^G$, то $(\mathrm{d}^a)^* \mathrm{d}^b = \mathrm{O}$.

2) $(\mathrm{d}^a)^* \mathrm{d}^a = \mathrm{c}_a$, где c_a — матрица Картана группы $C_G(a)$.

3) $\hat{\mathrm{d}}^* \hat{\mathrm{d}} = \begin{pmatrix} \mathrm{c}_{a_1} & & \mathrm{O} \\ & \ddots & \\ \mathrm{O} & & \mathrm{c}_{a_m} \end{pmatrix}$, где c_{a_i} — матрица Картана группы $C_G(a_i)$ (при подходящем упорядочении столбцов в $\hat{\mathrm{d}}$).

Доказательство. По Ж7 (2) $\chi = \sum_{(a,\alpha) \in R} \hat{\mathrm{d}}_{\chi,(a,\alpha)} \xi_{a,\alpha} = \sum_{(a,\alpha) \in R} \times$ $\times\, \mathrm{d}^a_{\chi\alpha} \xi_{a\alpha}$ для $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ и $\xi_{a,\alpha} = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} (\hat{\mathrm{d}}^{-1})_{(a,\alpha),\chi}\chi$ для $(a, \alpha) \in$ $\in R$. При этом $(\hat{\mathrm{d}}^{-1})_{(a,\alpha),\chi} = (\xi_{a,\alpha}, \chi)_G = \Big(\xi_{a,\alpha}, \sum_{(b,\beta) \in R} \mathrm{d}^b_{\chi\beta} \xi_{b,\beta}\Big)_G =$ $= \sum_{(b,\beta) \in R} \mathrm{d}^b_{\chi\beta} \delta_{a,b} (\alpha, \beta)_{C_G(a)}$ [Ж7 (4)] $= \sum_{\beta \in \mathrm{IBr}(C_G(a))} \mathrm{d}^a_{\chi\beta} (\mathrm{c}_a^{-1})_{\alpha\beta}$ [4E2 (3)] $=$ $= ((\mathrm{c}_a^{-1})(\mathrm{d}^a)^*)_{\alpha\chi}$.

Теперь $\xi_{a,\alpha} = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} ((\mathrm{c}_a^{-1})(\mathrm{d}^a)^*)_{\alpha\chi}\chi = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \sum_{(b,\beta) \in R} ((\mathrm{c}_a^{-1}) \times$ $\times (\mathrm{d}^a)^*)_{\alpha,\chi} \mathrm{d}^b_{\chi\beta} \xi_{b,\beta}$ [Ж7 (2)] $= \sum_{(b,\beta) \in R} (\mathrm{c}_a^{-1} (\mathrm{d}^a)^* \mathrm{d}^b)_{(a,\alpha),(b,\beta)} \xi_{b,\beta}$.

Поэтому

$$\mathrm{c}_a^{-1} (\mathrm{d}^a)^* \mathrm{d}^b = \begin{cases} \mathrm{O}, & \text{если } a^G \neq b^G, \\ \mathrm{E}, & \text{если } a = b. \end{cases}$$

Отсюда следуют утверждения 1) — 3).

□

Ж9. Пусть $a \in G_p$ и B — объединение некоторого множества p-блоков группы G. Если $a \in Z(G)$, то $S_G(a) \longleftrightarrow B$ и, в частности,

1) $(ze_{\mathrm{B}})_{S_G(a)} = z_{S_G(a)} e_{\mathrm{B}}$ для всех $z \in Z(\boldsymbol{C}G)$,

2) $(ue^{\mu}_{\mathrm{B}})_{S_G(a)} = u_{S_G(a)} e^{\mu}_{\mathrm{B}}$ для всех $u \in Z(\boldsymbol{F}G)$.

Доказательство. По определению p-блока, $G_{p'} \longleftrightarrow$ B. Так как $a \in Z(G)$, то по 3E10 (2) $aG_{p'} \longleftrightarrow$ B. Но $aG_{p'} = S_G(a)$. Значит, $S_G(a) \longleftrightarrow$ B. Отсюда и из теоремы 3Г1 следует 1). Применяя к 1) модулирование μ, получаем 2).

□

Ж10. Пусть $a \in G_p$, $H = C_G(a)$ и $r_1, \ldots, r_n$ — представители всех p'-классов группы H. Пусть $\mathrm{B} \in \mathrm{Bl}_p(G)$. Тогда существуют элементы $a_{ij} \in \boldsymbol{F}$ такие, что для $i = 1, \ldots, m$ в $Z(\boldsymbol{F}G)$ имеют место равенства

1) $\widetilde{(ar_i)^G}\, e^{\mu}_{\mathrm{B}} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} \widetilde{(ar_j)^G}$;

2) $\widetilde{(ar_i)^H}\, e^{\mu}_{\mathrm{B}_{(H)}} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} \widetilde{(ar_j)^H}$.

Доказательство. Предположим, что

$$\text{(ж2)} \qquad \widetilde{(ar)^G}\, e^{\mu}_{\mathrm{B}} \notin \boldsymbol{F}[\widehat{S_G(a)}] \text{ для некоторого } r \in H_{p'}.$$

Тогда в разложение

$$\widetilde{(ar)^G}\, e^{\mu}_{\mathrm{B}} = \sum_{K \in \mathrm{Cl}(G)} u_K \widetilde{K}\ \overline{(u_K \in \boldsymbol{F})}$$

с ненулевым коэффициентом u_K входит некоторый класс $K = k^G$ такой, что $k_p \equiv b$ не сопряжен в G с a. Положим $C(b) = C_G(b)$ и $V = S_{C(b)}(b)$. Рассмотрим брауэров гомоморфизм $s = r_{G,\, C(b),\, \langle b \rangle}$. Так как $s(\widetilde{K})\ (= \widetilde{K \cap C(b)})$ имеет слагаемое $\widetilde{k^{C(b)}}$, то $s\big((ar)^G \times \times e^{\mu}_{\mathrm{B}}\big)_V \neq 0$. Но левая часть равна $\big(\widetilde{(ar)^G \cap C(b)}\, e^{\mu}_{\mathrm{B}_{(C(b))}}\big)_V$ ≬Е7 (1)≬ $= \big(\widetilde{(ar)^G \cap C(b)}\big)_V e^{\mu}_{\mathrm{B}_{(C(b))}}$ ≬Ж10≬. Следовательно, $(ar)^G \cap V \neq \varnothing$, в противоречие с выбором класса k^G.

Значит, утверждение (ж2) неверно, т. е.

(ж3) $\boldsymbol{F}[\widehat{S_G(a)}]\, e^{\mu}_{\mathrm{B}} \subseteq \boldsymbol{F}[\widehat{S_G(a)}]$ (для всех $a \in G_p$ и $\mathrm{B} \in \mathrm{Bl}_p(G)$).

Поэтому существуют элементы $a_{ij} \in \boldsymbol{F}$, для которых выполнено условие 1).

Рассмотрим теперь брауэров гомоморфизм $t = r_{G,\, H,\, \langle a \rangle}$. $t(\widetilde{(ar_i)^G}) = (ar_i)^G \cap H = \widetilde{(ar_i)^H} + l_i$, где $l_i \in L = \boldsymbol{F}[\widehat{H \setminus S_H(a)}]$ $(i = 1, \ldots, n)$. Применяя t к 1) и учитывая, что $t(e^{\mu}_{\mathrm{B}}) = e^{\mu}_{\mathrm{B}_{(H)}}$ ≬Ё13 (1)≬, получаем

$$\text{(ж4)} \qquad (\widetilde{(ar_i)^H} + l_i)\, e^{\mu}_{\mathrm{B}_{(H)}} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (\widetilde{(ar_j)^H} + l_j).$$

Применяя свойство (ж3) к группе H на месте G, получаем $\widetilde{(ar_i)^H}\, e^{\mu}_{\mathrm{B}_{(H)}} \in \boldsymbol{F}[\widehat{S_G(a)}]$ и $l_i e^{\mu}_{\mathrm{B}_{(H)}} \in L$.

Отсюда и из (ж4) следует 2).

□

Ж11. Если выполнено условие **Ж10**, то для всех $i, j \in \{1, \ldots, n\}$

1) $\left(\sum\limits_{\chi \in B} \frac{\chi(ar_i)\overline{\chi(g)}}{|C_G(ar_i)|}\right)^\mu = 0$ при $g \in G \setminus S_G(a)$;

2) $\left(\sum\limits_{\chi \in B} \frac{\chi(ar_i)\,\chi(ar_j)}{|C_G(ar_i)|}\right)^\mu = \left(\sum\limits_{\zeta \in B_{(H)}} \frac{\zeta(r_i)\overline{\zeta(r_j)}}{|C_H(r_i)|}\right)^\mu.$

Доказательство. По **3Г5** (8) из равенств **Ж10** (1) следует, что $a_{ij} = \left(\sum\limits_{\chi \in B} \frac{\chi(ar_i)\overline{\chi(ar_j)}}{|C_G(ar_i)|}\right)^\mu$, а из равенств **Ж10** (1) следует, что

$$a_{ij} = \left(\sum_{\zeta \in B_{(H)}} \frac{\zeta(ar_i)\overline{\zeta(ar_j)}}{|C_G(ar_i)|}\right)^\mu \underset{2A9\,(4)}{=} \left(\sum_{\zeta \in B_{(H)}} \frac{\overline{\zeta(r_i)}\,\zeta(r_j)}{|C_H(r_i)|}\right)^\mu.$$

Отсюда следует 2).

Равенство 1) подобно получается из **Ж10** (1), так как в правой части последнего отсутствует слагаемое $\widetilde{g^G}$.

□

По **В4** $\xi_{a,\alpha} \in \mathrm{CF}(G \to \mathfrak{K})$. Поэтому можно рассмотреть функцию $\xi_{a,\alpha}^\mu$.

Ж12. При обозначениях из **Ж10**

$$(\xi_{a,\alpha})_B^\mu = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha \notin \mathrm{IBr}(B_{(H)}), \\ \xi_{a,\alpha}^\mu, & \text{если } \alpha \in \mathrm{IBr}(B_{(H)}). \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $g \in G$. Имеем $(\xi_{a,\alpha})_B^\mu(g) = \left(\sum\limits_{\chi \in B} (\xi_{a,\alpha}, \chi)_G \chi(g)\right)^\mu = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha(r_i) \sum\limits_{\chi \in B} \frac{\overline{\chi(ar_i)}\,\chi(g)}{|C_G(ar_i)|}\right)^\mu$. Если $g \notin S_G(a)$, то это равно нулю по **Ж11** (1) и, следовательно, доказываемое равенство верно.

Пусть $g \in (ar)^G \subseteq S_G(a)$. Тогда вследствие **Ж11** (2)

$$(\xi_{a,\alpha})_B^\mu(g) = \sum_{i=1}^{n} \alpha(r_i) \sum_{\zeta \in B_{(H)}} \frac{\overline{\zeta(r_i)}\,\zeta(r_j)}{|C_H(r)|} = \alpha_{B_{(H)}}(r) =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha \notin C[B_{(H)}], \\ \alpha(r), & \text{если } \alpha \in C[B_{(H)}]. \end{cases}$$

Остается заметить, что $\alpha(r)=\xi_{a,\alpha}(g)$ (Ж6) и $\alpha\in\boldsymbol{C}[\mathrm{B}_{(H)}]\Leftrightarrow\alpha\in\in\mathrm{IBr}(\mathrm{B}_{(H)})$ (В3(3)).

□

Ж13. Пусть $\chi\in\mathrm{B}\in\mathrm{Bl}_p(G)$ и σ — автоморфизм поля $\boldsymbol{Q}\left(e^{\frac{2\pi i}{|G|}}\right)$, оставляющей на месте все корни из 1 степеней, взаимно простых с p. Тогда

1) $\chi^\sigma\in\mathrm{B}$,

2) $\mathrm{d}^a_{\chi^\sigma\alpha}=(\mathrm{d}^a_{\chi\alpha})^\sigma$ для всех $(a,\alpha)\in R$.

3) $\sum\limits_{\psi\in\mathrm{B}}\overline{\mathrm{d}^a_{\psi\alpha}}\mathrm{d}^a_{\psi\beta}\in\boldsymbol{Z}$ для всех (a,α), $(a,\beta)\in R$.

Доказательство. 1): Так как для всех $x\in G_{p'}$ $\chi(x)$ остается неподвижным относительно σ и, следовательно, $\omega_{\chi^\sigma}(x)=\omega_\chi(x)$, то по **В10** $\chi^\sigma\in\mathrm{B}$.

2): Следует из 1), **Ж4** и того, что $\alpha^\sigma=\alpha$ при $\alpha\in\mathrm{IBr}(C_G(a))$.

3): Сумму, записанную в 3), обозначим через s. По **Ж4** $s\in\in\boldsymbol{Q}(\omega)$, где $\omega=e^{\frac{2\pi i}{|G|_p}}$. Очевидно, что любой автоморфизм поля $\boldsymbol{Q}(\omega)$ может быть расширен до автоморфизма поля $\boldsymbol{Q}\left(e^{\frac{2\pi i}{|G|}}\right)$, оставляющего на месте все корни степени $|G|_{p'}$ из единицы. Следовательно, по 1) и 2) число s допустимо относительно всех автоморфизмов поля $\boldsymbol{Q}(\omega)$ и по **2А14**(3) $s\in\boldsymbol{Q}$. Но по **Ж4** $s\in\acute{\boldsymbol{Z}}$. Значит (**2А6**), $s\in\boldsymbol{Z}$.

□

Ж14. Определение. Матрица А над $\boldsymbol{C}$ называется *положительно определенной* (соответственно, *положительно полуопределенной*), если она эрмитова (т. е. $\mathrm{A}=\mathrm{A}^*$) и все ее собственные значения положительны (соответственно, неотрицательны).

Ж15. Лемма. Пусть $\mathrm{A},\mathrm{B}\in\mathrm{M}(n,\boldsymbol{C})$.

1) Матрицы MM^* и $\mathrm{M}^*\mathrm{M}$ положительно полуопределены для любой матрицы М над $\boldsymbol{C}$.

2) Если В положительно полуопределена, то $\mathrm{B}=\mathrm{M}^*\mathrm{M}$ для некоторой $\mathrm{M}\in M(n,\boldsymbol{C})$.

3) Если А и В положительно полуопределены, то $\det(\mathrm{A}+\mathrm{B})\geqslant\det(\mathrm{A})$, причем

$$\det(\mathrm{A}+\mathrm{B})=\det(\mathrm{A})\Rightarrow\mathrm{B}=\mathrm{O}.$$

Доказательство. 1): См. [**42**, 19.6 (с. 235, 236)].

2): Согласно [**42**, § 19, теорема 4а] $\mathrm{B}=\mathrm{U}^{-1}\mathrm{diag}(d_1,\ldots,d_n)\,\mathrm{U}$, где U — унитарная матрица ($\mathrm{U}^{-1}=\mathrm{U}^*$), $d_i\in\boldsymbol{R}$ и $d_i\geqslant 0$. Положив $\mathrm{M}=\mathrm{diag}\left(\sqrt{d_1},\ldots,\sqrt{d_n}\right)\mathrm{U}$, получим $\mathrm{B}=\mathrm{M}^*\mathrm{M}$.

3): Учитывая равенство $B = U^{-1}\,\mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n)\,U$ из доказательства пункта 2), можно предположить, что $B = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n)$. Кроме того, применив индукцию, можно считать, что лишь одно d_i отлнчно от нуля. Пусть, например, $d_1 \neq 0$. Записав разложение определителя $\det(A + B)$ по первой строке, получим $\det(A + B) = \det(A) + d_1 \det T$, где T — матрица, полученная из A, вычеркиванием первого столбца и первой строки. Так как $A = M^*M$ по 2), то (применить формулу Бинэ — Коши [18, с. 20]) $\det(T) \geqslant 0$, прячем $\det(T) > 0$, если A обратима. Таким образом, $\det(A + B) \geqslant \det(A)$, а если $\det(A + B) = \det(A)$, то $d_1 = 0$ и $B = O$.

□

Ж16. Обозначения. Пусть $B \in \mathrm{Bl}_p(G)$ и $a \in G_p$. Положим

$$B(a) = B_{(C_G(a))},$$

т. е. $B(a) = \bigcup\{\Theta \in \mathrm{Bl}_p(C_G(a)) \mid \Theta^{(G)} = B\}$.

Ж17. Вторая основная теорема Брауэра. Пусть $a \in G_p$ и $\chi \in B \in \mathrm{Bl}_p(G)$. Тогда для всех $r \in C_G(a)_{p'}$

$$\chi(ar) = \sum_{\alpha \in \mathrm{IBr}(B(a))} d^{a}_{\chi\alpha}\alpha(r).$$

Доказательство. Пусть $H = C_G(a)$ и c_H — матрица Картана группы H. Как строки, так и столбцы ее находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами из $\mathrm{IBr}(H)$. Для $\alpha, \beta \in \mathrm{IBr}(H)$ через $(c_H)_{\alpha,\beta}$ будем обозначать элемент матрицы c_H, лежащий в строке, соответствующей α, и столбце, соответствующем β. Согласно **Б6**(2) прн подходящей нумерации элементов нз $\mathrm{IBr}(H)$ матрицу c_H можно записать в виде

$$c_H = \begin{pmatrix} C & O \\ O & Д \end{pmatrix}, \tag{ж5}$$

где C — подматрица из c_H, состоящая из элементов $(c_H)_{\alpha\beta}$ с $\alpha, \beta \in \mathrm{IBr}(B(a))$. Согласно **Ж9**(2) $C_{\alpha\beta} = (c_H)_{\alpha\beta} = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \overline{d^{a}_{\chi\alpha}} d^{a}_{\chi\beta} = \left(\sum_{\chi \in B} \overline{d^{a}_{\chi\alpha}} d^{a}_{\chi\beta}\right) + \left(\sum_{\chi \in B^-} \overline{d^{a}_{\chi\alpha}} d^{a}_{\chi\beta}\right)$. Следовательно, C можно представить в вяде суммы двух матриц:

$$C = C_1 + C_2, \tag{ж6}$$

где $(C_1)_{\alpha\beta}$ и $(C_2)_{\alpha\beta}$ — соответственно первое и второе слагаемое в предыдущей сумме.

Матрицы C, C_1 и C_2 положительно полуопределены по **Ж15**(1). Следовательно, по **Ж15**(2)

$$\det(C) \geqslant \det(C_1). \tag{ж7}$$

Из (ж6) получаем

(ж8) $$E = C^{-1}C_1 + C^{-1}C_2.$$

Так как C положительно определена (вследствие **4E13** (2)) и каждое собственное значение матрицы C^{-1} обратно некоторому собственному значению матрицы C, то C^{-1} положительно определена и, значит, оба слагаемых в (ж8) положительно полуопределены. В частности,

(ж9) $$\det(C^{-1}C_1) \geqslant 0.$$

Покажем, что

(ж10) $$\begin{cases} (C^{-1}C_1)_{\alpha\beta} \text{ есть коэффициент при } \xi_{a,\beta} \text{ в разложении} \\ (\xi_{a,\alpha})_{\mathrm{B}} \text{ по базе } \{\xi_{u,\varphi} \mid u \in A,\ \varphi \in \mathrm{IBr}(C_G(u))\}. \end{cases}$$

Действительно,

$$(\xi_{a,\alpha})_{\mathrm{B}} = \sum_{\chi\in\mathrm{B}} (\xi_{a,\alpha}, \chi)_G \chi = \sum_{\chi\in\mathrm{B}} \Big(\xi_{a,\alpha}, \sum_{(u,\varphi)\in R} d^u_{\chi\varphi} \xi_{u,\varphi}\Big)_G \chi =$$

$$= \sum_{\chi\in\mathrm{B}} \sum_{\varphi\in\mathrm{IBr}(H)} \overline{d^a_{\chi\varphi}} (\alpha, \varphi)_H \chi \ \text{§Ж7 (4)§} =$$

$$= \sum_{\chi\in\mathrm{B}} \sum_{\varphi\in\mathrm{IBr}(H)} \overline{d^a_{\chi\varphi}} (C^{-1})_{\alpha\varphi} \chi \ \text{§4E2 (3) и (ж5)§} =$$

$$= \sum_{\chi\in\mathrm{B}} \sum_{\varphi\in\mathrm{IBr}(H)} (C^{-1})_{\alpha\varphi} \overline{d^a_{\chi\varphi}} \sum_{(t,\gamma)\in R} d^t_{\chi\gamma} \xi_{t,\gamma} =$$

$$= \sum_{(t,\gamma)\in R} \Big[\sum_{\varphi\in\mathrm{IBr}(H)} (C^{-1})_{\alpha\varphi} \sum_{\chi\in\mathrm{B}} \overline{d^a_{\chi\varphi} d^t_{\chi\gamma}} \Big] \xi_{t,\gamma}.$$

Отсюда следует (ж10) (выражение в квадратных скобках при $(t, \gamma) = (a, \beta)$ есть $(C^{-1}C_1)_{\alpha\beta}$).

Так как $(\xi_{a,\alpha})_{\mathrm{B}} \in \mathrm{CF}(G \to \mathfrak{R})$ по **B5**, то из (ж10) следует, что $(C^{-1}C_1)_{\alpha\beta} \in \mathfrak{R}$ для всех $\alpha, \beta \in \mathrm{IBr}(H)$. Но согласно **4E13** и **Ж14** $(C^{-1}C_1)_{\alpha\beta}$ есть рациональное число, знаменатель которого есть степень p. Следовательно,

(ж11) $$(C^{-1}C_1)_{\alpha\beta} \in \mathbf{Z} \text{ для всех } \alpha, \beta \in \mathrm{IBr}(H).$$

Далее, из (ж10) и **Ж12** следует, что $(C^{-1}C_1)_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$, что вместе с (ж11) влечет $C^{-1}C_1 \equiv E \pmod p$. Следовательно, ввиду (ж9), $\det(C^{-1}C_1) \geqslant 1$, т. е. $\det(C_1) \geqslant \det(C)$.

Отсюда и из (ж7) получаем

(ж12) $$\det(C) = \det(C_1).$$

Теперь из (ж6) и (ж12) по **Ж15** (3) следует, что $C_2 = O$, т. е. $\sum_{\chi\in\mathrm{B}^-} \overline{d^a_{\chi\alpha} d^a_{\chi\beta}} = 0$ для всех $\alpha, \beta \in \mathrm{IBr}(\mathrm{B}(a))$ и, в частности (при $\alpha = \beta$)

$$d^a_{\chi\alpha} = 0 \text{ для всех } \alpha \in \mathrm{IBr}(\mathrm{B}(a)).$$

□

Ж18. Пусть $B \in Bl_p(G)$. Положим $R_B = \{(a, \alpha) | a \in A, \alpha \in IBr(B(a))\}$. Тогда $\chi = \sum_{(a, \alpha) \in R_B} \hat{d}_{\chi, (a, \alpha)} \xi_{a, \alpha}$ для всех $\chi \in B$.

Доказательство. Пусть $a \in A$ и $H = C_G(a)$. Утверждение **Ж17** можно переписать в виде

$$\chi \Big|_{S_G(a)}^{0} = \sum_{\alpha \in IBr(B(a))} d^a_{\chi \alpha} \xi_{a, \alpha}.$$

Отсюда следует требуемое $\left(\chi = \sum_{a \in A} \chi \Big|_{S_G(a)}^{0}, \ d^a_{\chi \alpha} = \hat{d}_{\chi, (a, \alpha)}\right)$.

□

Ж19. Определение. Подматрицу матрицы $\hat{d}$, строки которой помечены характерами из B, а столбцы — элементами из R_B (см. **Ж18**), обозначим через $\hat{d}_B$ и назовем *обобщенной матрицей разложения блока* B.

Пусть $Bl_p(G) = \{B_1, \ldots, B_t\}$. По **Ж18**

(ж13)
$$\hat{d} = \begin{array}{c} \\ B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_t \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} R_{B_1} & R_{B_2} & \cdots & R_{B_t} \end{array} \\ \begin{pmatrix} \hat{d}_{B_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \hat{d}_{B_2} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & \hat{d}_{B_t} \end{pmatrix} \end{array}$$

(клеточно-диагональная матрица). Так как матрица $\hat{d}$ обратима по **Ж7** (2), то, конечно, все матрицы $\hat{d}_{B_i}$ обратимы. В частности, $|B_i| = |R_{B_i}|$.

В следующем параграфе мы покажем, что при $(a, \alpha) \in R_B$ $\xi_{a, \alpha} \in C[B]$ для любого $B \in Bl_p(G)$.

Ж20. Пусть $B \in Bl_p(G)$, $P \in \mathfrak{D}(B)$ и a — p-элемент группы G, не лежащий в P^G. Тогда

$$\chi(g) = 0 \text{ для всех } (\chi, g) \in B \times S_G(a).$$

Доказательство. Положим $H = C_G(a)$. По **Ё12** (2) из $a \notin P^G$ следует, что $B(a) = \varnothing$. Отсюда по второй основной теореме Брауэра (**Ж17**) следует требуемое.

□

Это утверждение может оказаться полезным при нахождении дефектной группы блока.

Ж21. Упражнение. Пусть $a \in G_p$ и $H = C_G(a)$. Для любого $\psi \in CF(H)|^0_{H_{p'}}$ определим функцию $\psi_a \in CF(H)|^0_{S_G(a)}$, положив

$$\psi_a(h) = \psi(a^{-1}h) \text{ при } h \in H.$$

1) $\xi_{a,\alpha} = (\alpha_a)^G$ и $\xi_{a,\alpha}|_H = \alpha_a$ $(\alpha \in \mathrm{IBr}(H))$.

2) Отображение j_a: $\psi \mapsto (\psi_a)^G \left(\psi \in CF(H)|^0_{H_{p'}}\right)$ есть алгебраический изоморфизм из $CF(H)|^0_{H_{p'}}$ на $CF(G)|^0_{S_G(a)}$.

3) Если $\psi,\ \theta \in CF(H)^0_{H_{p'}}$, то $(\psi_a^G, \theta_a^G)_G = (\psi, \theta)_H$. Таким образом j_a есть изометрия.

4) Если $b \in G_p$ и $b^G \neq a^G$, то $(\psi_a^G, \theta_b^G)_G = 0$ для $\psi \in CF(H)^\circ$ и $\theta \in CF(C(b))^\circ$.

§ 3. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ p-БЛОКОВ С p-СЕЧЕНИЯМИ

Цель этого параграфа — доказать следующий важный результат.

31. Теорема. Каждый p-блок конечной группы G взаимодействует с каждым ее p-сечением.

Предварительно докажем, что каждая функция $\xi_{a,\alpha}$ **(Ж6)** подчинена некоторому p-блоку группы G

32. Пусть G — конечная группа, $a \in G_p$, $\Theta \in \mathrm{Bl}_p(C_G(a))$ и $\alpha \in \mathrm{IBr}(\Theta)$. Тогда

$$\xi_{a,\alpha} \in C[\Theta^{(G)}].$$

Доказательство. Как показано при доказательстве теоремы **Ж17**,

$$(з1)\quad \begin{cases} (\xi_{a,\alpha})_{\Theta^{(G)}} = \sum\limits_{(b,\beta)\in R} a_{b,\beta}\xi_{b,\beta}, \text{ где } a_{b,\beta} = \\ = \sum\limits_{\gamma\in \mathrm{IBr}(C_G(a))} (c^{-1})_{\alpha\gamma} \sum\limits_{\chi \in \Theta^{(G)}} \overline{d^a_{\chi\gamma}} d^b_{\chi\beta} \end{cases}$$

(c — матрица Картана группы $C_G(a)$). Заметим, что здесь под знаком второй суммы можно написать «$\chi \in \mathrm{Irr}(G)$» вместо «$\chi \in \Theta^{(G)}$», так как если $(c^{-1})_{\alpha\gamma} \neq 0$, то $\gamma \in \mathrm{IBr}(\Theta)$ по **Б7** (2) и тогда $d^a_{\chi\gamma} = 0$ при $\chi \in \mathrm{Irr}(G) \setminus \Theta^{(G)}$ **(Ж17)**. Поэтому

$$a_{b,\beta} = \sum_{\gamma\in \mathrm{IBr}(C_G(a))} (c^{-1})_{\alpha\gamma} \sum_{\chi\in \mathrm{Irr}(G)} \overline{d^a_{\chi\gamma}} d^b_{\chi\beta} =$$

$$= \begin{cases} 0, \text{ если } a \neq b, \\ \sum\limits_{\gamma\in \mathrm{IBr}(C_G(a))} (c^{-1})_{\alpha\gamma}(c)_{\gamma\beta} = \delta_{\alpha\beta}, \text{ если } a = b \end{cases}$$

(Ж8 (2)) и, значит, $(\xi_{a,\alpha})_{\Theta^{(G)}} = \xi_{a,\alpha}$.

□

Доказательство теоремы 31. Пусть $B \in \mathrm{Bl}_p(G)$ и $a \in G_p$. Нужно показать, что $S_G(a) \longleftrightarrow B$.

Согласно Ж7 (2) для любой функции $\varphi \in \mathrm{CF}(G)$

$$\varphi = \sum_{(a,\,\alpha) \in R} u_{a,\,\alpha} \xi_{a,\,\alpha} \ (u_{a,\,\alpha} \in C).$$

Ясно, что

$$\varphi \Big|^{0}_{S_G(a)} = \sum_{\alpha \in \mathrm{IBr}(C(a))} u_{a,\,\alpha} \xi_{a,\,\alpha}.$$

Кроме того, согласно 32,

$$\varphi_B = \sum_{\substack{a \in A \\ \alpha \in B(a)}} u_{a,\,\alpha} \xi_{a,\,\alpha}.$$

Отсюда следует, что

$$\left(\varphi \Big|^{0}_{S_G(a)}\right)_B = \sum_{\alpha \in B(a)} u_{a,\,\alpha} \xi_{a,\,\alpha} = (\varphi_B) \Big|^{0}_{S_G(a)}.$$

Так как это верно для всех $\varphi \in \mathrm{CF}(G)$, то по теореме 3В1 $S_G(a) \longleftrightarrow B$.

□

33. Пусть $B \in \mathrm{Bl}_p(G)$ и $a \in G_p$.

1) $\sum\limits_{\chi \in B} \chi(g)\overline{\chi(h)} = 0$ всякий раз, как g и h лежат в разных p-сечениях группы G.

2) $\sum\limits_{g \in S_G(a)} \chi(g)\overline{\zeta(g)} = 0$ всякий раз, как χ и ζ лежат в разных p-блоках группы G.

3) $\dfrac{1}{|G|} \sum\limits_{g \in S_G(a)} \chi_0(g) \sum\limits_{\chi \in B} \overline{\chi(g)}\chi(g_0) = \chi_0(g_0)$ для всех $(\chi_0, g_0) \in B \times S_G(a)$.

Доказательство. Следует из 32 и теоремы 3Б1.

□

34. Замечание. Пусть $S = \bigcup\limits_{i=1}^{m} s_i^G$ — p-сечение группы G и $B \in \mathrm{Bl}_p(G)$. Если $\chi_0(s_0) \neq 0$ для некоторых $\chi_0 \in B$ и $s_0 \in S$, то по 33 (3) справедлива следующая формула для порядка группы G:

$$|G| = \chi_0(s_0)^{-1} \sum_{i=1}^{m} \left| s_i^G \right| \chi_0(s_i) \sum_{\chi \in B} \overline{\chi(s_i)} \chi(s_0).$$

Следующий результат показывает, что вычисление второй (внутренней) суммы в формуле из 34 можно свести к вычислению подобной суммы в подгруппе $C_G(a)$.

35. Пусть $a \in G_p$, $H = C_G(a)$, $H_{p'} = \dot{\bigcup}_{i=1}^{n} r_i^H$ и $B \in \mathrm{Bl}_p(G)$. Тогда

$$\sum_{\chi \in B} \chi(ar_i)\overline{\chi(ar_j)} = \sum_{\zeta \in B_{(H)}} \zeta(r_i)\overline{\zeta(r_j)}$$

для всех i, $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Доказательство. Для любых i, j имеем

$$\sum_{\chi \in B} \chi(ar_i)\overline{\chi(ar_j)} = \sum_{\chi \in B} \sum_{\alpha, \beta \in \mathrm{IBr}(B(a))} d^a_{\chi\alpha}\alpha(r_i)\overline{d^a_{\chi\beta}\beta(r_j)} \text{ §Ж17§} =$$

$$= \sum_{\alpha, \beta \in \mathrm{IBr}(B(a))} \alpha(r_i)\overline{\beta(r_j)} \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \overline{d^a_{\chi\beta}}d^a_{\chi\alpha} \text{ §Ж17§} =$$

$$= \sum_{\alpha, \beta \in \mathrm{IBr}(B(a))} \alpha(r_i)\overline{\beta(r_j)} \sum_{\zeta \in \mathrm{Irr}(H)} \overline{\mathrm{d}_{\zeta\beta}}\mathrm{d}_{\zeta\alpha} \text{ §Ж8§} =$$

$$= \sum_{\zeta \in \mathrm{Irr}(H)} \sum_{\alpha \in \mathrm{IBr}(B(a))} \mathrm{d}_{\zeta\alpha}\alpha(r_i) \sum_{\beta \in \mathrm{IBr}(B(a))} \overline{\mathrm{d}_{\zeta\beta}}\,\overline{\beta(r_j)} =$$

$$= \sum_{\zeta \in B(a)} \zeta(r_i)\overline{\zeta(r_j)} \text{ §(61)§}.$$

□

Отметим теперь некоторые следствия теоремы **31**.

36. Пусть $\psi \in \mathrm{CF}(G)$ и ψ постоянна на каждом p-сечении группы G. Тогда ψ подчинена главному p-блоку группы G.

Доказательство. Пусть $S_1, \ldots, S_m$ — все p-сечения группы G. Положим $\alpha_i = 1_G \big|^0_{S_i}$ $(i = 1, \ldots, m)$. Тогда

$$\psi = \sum_{i=1}^{m} \psi(s_i)\alpha_i, \text{ где } s_i \in S_i.$$

Поэтому достаточно проверить, что $\alpha_i \in \mathcal{C}[B_1]$, где B_1 — главный p-блок группы G, для всех i. Пусть $\chi \in \mathrm{Irr}(G) \setminus B_1$. Имеем $(\alpha_i, \chi)_G = \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} \alpha_i(g)\overline{\chi(g)} = \frac{1}{|G|}\sum_{g \in S_i} 1_G(g)\overline{\chi(g)} =_{33(2)} 0$.
Значит, $\alpha_i \in \mathcal{C}[B_1]$.

□

37. Пусть S — p-сечение группы G. Тогда каждый p-блок группы G является объединением ее S-блоков.

Доказательство. Пусть $B \in \mathrm{Bl}_p(G)$. По теореме **31** $S \longleftrightarrow B$. Следовательно, по **3Д3** (3) B — объединение S-блоков группы G.

□

38. Теорема. Пусть $\Phi \subseteq \mathrm{Irr}(G)$. Равносильны условия:
(1) Φ — p-блок группы G;
(2) Φ — минимальное непустое подмножество из $\mathrm{Irr}(G)$, которое является объединением S-блоков для любого p-сечения S группы G, отличного от $G_{p'}$.

Доказательство. (1)$\Rightarrow$(2): Пусть $\Phi \in \mathrm{Bl}_p(G)$. Тогда по **37** для Φ будет выполнено условие (2′), получающееся опусканием слова «минимальное» в (2). Предположим, что $\varnothing \neq \Psi \subset \Phi$ и Ψ удовлетворяет условию (2′). Тогда существуют характеры $\varphi,\ \psi \in \Phi$ такие, что

$$\varphi \in \Phi \setminus \Psi \text{ и } \psi \in \Psi. \tag{з2}$$

По **3Д6** существует последовательность

$$(\varphi =)\, \varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_n\, (= \psi) \tag{з3}$$

элементов из Φ такая, что для всех $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ характеры φ_i и φ_{i+1} непосредственно p-связаны, т. е. $\sum\limits_{x \in G_{p'}} \varphi_i(x)\overline{\varphi_{i+1}(x)} \neq 0$ и, следовательно, $\sum\limits_{g \in G \setminus G_{p'}} \varphi_i(g)\overline{\varphi_{i+1}(g)} \neq 0$. Отсюда следует, что для некоторого p-сечения S (зависящего от i) $\sum\limits_{g \in S} \varphi_i(g)\overline{\varphi_{i+1}(g)} \neq$ $\neq 0$ и по **3Д6** φ_i и φ_{i+1} лежат в одном S-блоке. Поэтому при любом $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ либо $\{\varphi_i, \varphi_{i+1}\} \subseteq \Phi \setminus \Psi$, либо $\{\varphi_i, \varphi_{i+1}\} \subseteq \Psi$. Следовательно, все члены последовательности (з3) (включая φ и ψ) содержатся в одном из множеств $\Phi \setminus \Psi$ и Ψ. Но это противоречит условию (з2). Значит, множество Ψ не существует и верно (2).

(2)$\Rightarrow$(1): Следует из **37** и из (1)$\Rightarrow$(2).

□

Теорема **38** позволяет упростить вычисление p-блоков конечной группы.

39. Пример. Рассмотрим группу $G = A_7$. Таблица характеров ее имеет вид

$\lvert C_G(g)\rvert$	$\lvert G\rvert$	24	36	9	4	5	12	7	7
p'-части							AA		
g^G	1A	2A	3A	3B	4A	5A	6A	7A	7B
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	6	2	3	0	0	1	-1	-1	-1
χ_3	10	-2	1	1	0	0	1	b_7	$\overline{b_7}$
χ_4	10	-2	1	1	0	0	1	$\overline{b_7}$	b_7
χ_5	14	2	-1	2	0	-1	-1	0	0
χ_6	14	2	2	-1	0	-1	2	0	0
χ_7	15	-1	3	0	-1	0	-1	1	1
χ_8	21	1	-3	0	-1	1	1	0	0
χ_9	35	-1	-1	-1	1	0	-1	0	0

1) Найдем сначала 7-блоки. $G\setminus G_{7'}=7A\cup 7B$, причем 7A и 7B — 7-сечения. 7A-блоки есть очевидно,

(з4) $$\{\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4, \chi_7\}, \{\chi_5\}, \{\chi_6\}, \{\chi_8\}, \{\chi_9\}.$$

Поскольку характеры $\chi_5, \chi_6, \chi_8, \chi_9$ принимают нулевые значения и на элементах из 7B, то последние четыре 7A-блока в (з4) являются также и $(7A\cup 7B)$-блоками и, значит, 7-блоками. Но тогда в силу 37 в (з4) перечислены все 7-блоки G.

2) 5-блоки находятся из рассмотрения столбца таблицы характеров G, соответствующего классу 5A, так как $G\setminus G_{5'}=5A$. Это есть

$$\{\chi_1, \chi_2, \chi_5, \chi_6, \chi_8\}, \{\chi_3\}, \{\chi_4\}, \{\chi_7\}, \{\chi_9\}.$$

3) Для нахождения 3-блоков рассмотрим множество $G\setminus G_{3'}=$ $=3A\cup 3B\cup 6A$. Данные второй строки над таблицей характеров говорят о том, что 3-части элементов класса 6A лежат в 3A. (Это можно установить и по самой таблице характеров, так как по **4Д6** $g_{p'}{}^G=h_{p'}{}^G \Leftrightarrow \chi(g)\equiv\chi(h) \pmod{\mathfrak{p}}$ для всех $\chi\in \mathrm{Irr}(G)$.) Следовательно, $G\setminus G_{3'}$ состоит из двух 3-сечений: 3B и $3A\cup 6A$.

Вследствие **37** главный 3-блок B_1 группы G содержит главный 3B-блок Θ_1, который есть $\{\chi_1, \chi_3, \chi_4, \chi_5, \chi_6, \chi_9\}$. Входят ли в B_1 характеры χ_2, χ_7 и χ_8? Согласно **A11** $\chi\in B_1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \sum_{x\in G_{3'}} \chi(x)\neq 0 \Leftrightarrow \sum_{g\in G\setminus G_{3'}} \chi(g)\neq 0$. Имеем $\sum_{g\in G\setminus G_{3'}} \chi_2(g)=$ $=\sum_{g\in 3A\cup 6A} \chi_2(g)=\frac{|G|}{36}\cdot 3+\frac{|G|}{12}(-1)=0$. Следовательно, $\chi_2\notin$ $\notin B_1$. Подобно получаем $\chi_7\notin B_1$ и $\chi_8\notin B_1$. Таким образом, $B_1=$ $=\Theta_1$. Но, как легко проверить, между собой характеры χ_2, χ_7 и χ_8 (непосредственно) $3A\cup 6A$-связаны. Следовательно, они 3-связаны и (**3Д6**) лежат в одном 3-блоке. Таким образом, G имеет два 3-блока:

$$\{\chi_1, \chi_3, \chi_4, \chi_5, \chi_6, \chi_9\} \text{ и } \{\chi_2, \chi_7, \chi_8\}.$$

2) Найдем теперь 2-блоки. Множество $G\setminus G_{2'}$ есть объединение двух 2-секций $2A\cup 6A$ и 4A. Прямым вычислением находим $2A\cup 6A$-блоки: $\{\chi_1, \chi_6, \chi_7, \chi_8, \chi_9\}$ и $\{\chi_2, \chi_3, \chi_4, \chi_5\}$. Так как эти множества — также объединения 4A-блоков, то по **38** они — 2-блоки.

Отметим, что в главе 8 будет получен результат (**8З13**), позволяющий при $D=d_1^G \dot\cup d_2^G$ найти D-блоки группы G, почти не производя вычислений.

Объединяя теоремы **38** и **Г6**, можно получить следующее важное утверждение.

З10. Упражнение. Пусть $B\in \mathrm{Bl}_p(G)$, χ — характер высоты 0 из B и $\psi\in \mathrm{Irr}(G)$. Равносильны условия:

(1) $\psi\in B$,

(2) существует p-сечение S группы G, отличное от $G_{p'}$, такое, что ψ непосредственно S-связан с χ $\left(\text{т. е. } \sum_{s \in S} \psi(s)\overline{\chi(s)} \neq 0\right)$.

311. Для $a \in G_p$ и $\mathrm{B} \in \mathrm{Bl}_p(G)$ положим

$$\Xi_{a,\,\mathrm{B}} = \bigoplus_{\alpha \in \mathrm{IBr}\,(\mathrm{B}\,(a))} C\xi_{a,\,\alpha}.$$

Тогда

1) $\mathrm{CF}(G) = \bigoplus_{a \in A} \bigoplus_{\mathrm{B} \in \mathrm{Bl}_p(G)} \Xi_{a,\,\mathrm{B}}$,

2) $\mathrm{CF}(G)\big|^0_{S_G(a)} = \bigoplus_{\mathrm{B} \in \mathrm{Bl}_p(G)} \Xi_{a,\,\mathrm{B}}$ $(a \in A)$,

3) $C[\mathrm{B}] = \bigoplus_{a \in A} \Xi_{a,\,\mathrm{B}}$ $(\mathrm{B} \in \mathrm{Bl}_p(G))$,

4) $\mathrm{CF}(G)\big|^0_{S_G(a)} \cap C[\mathrm{B}] = \Xi_{a,\,\mathrm{B}}$ $(a \in A,\ \mathrm{B} \in \mathrm{Bl}_p(G))$,

5) прямые слагаемые $\Xi_{a,\,\mathrm{B}}$ в 1) попарно ортогональны (относительно скалярного произведения).

Доказательство. 2): Следует из того, что $\mathrm{CF}(G)\big|^0_{S_G(a)} = \bigoplus_{\alpha \in \mathrm{IBr}\,(C\,(a))} C\xi_{a,\,\alpha}$ (Ж7 (1)) и $\mathrm{Irr}\,(C\,(a)) = \dot{\bigcup}_{\mathrm{B} \in \mathrm{Bl}\,(G)} \mathrm{B}\,(a)$ (Ё9).

1): Следует из 2) и того, что $\mathrm{CF}(G) = \bigoplus_{a \in A} \mathrm{CF}(G)\big|^0_{S_G(a)}$.

3): Следует из 32 и того, что $\mathrm{CF}(G) = \bigoplus_{\mathrm{B} \in \mathrm{Bl}\,(G)} C[\mathrm{B}]$.

4): Следует из 2) и 3).

5): Следует из Ж7 (4) и того, что $\Xi_{a,\,\mathrm{B}} \subseteq C[\mathrm{B}]$.

□

312. Пусть $a \in G_p$, $H = C_G(a)$, $\mathrm{A} \in \mathrm{Bl}_p(H)$ и $\mathrm{B} \in \mathrm{Bl}_p(G)$.

1) Если $\theta \in \mathrm{CF}(H)\big|^0_{S_H(a)} \cap C[\mathrm{A}]$, то $\theta^G \in C[\mathrm{A}^{(G)}]$.

2) Если $\theta \in \mathrm{CF}(H)\big|^0_{S_H(a)}$, то $(\theta^G)_{\mathrm{B}} = (\theta_{\mathrm{B}\,(a)})^G$.

3) Если $\xi \in \mathrm{CF}(G)\big|^0_{S_G(a)}$, то $\xi_{\mathrm{B}}|_H = (\xi|_H)_{\mathrm{B}\,(a)}$.

Доказательство. 1): По 311 (4) при $H = G$ имеем $\theta = \sum_{\alpha \in \mathrm{IBr}\,(\mathrm{A})} k_\alpha \alpha_a$, $k_\alpha \in C$ (роль функций $\xi_{a,\,\alpha}$ для группы H играют функции α_a из Ж21). Поэтому $\theta^G = \sum_{\alpha \in \mathrm{IBr}\,(\mathrm{A})} k_\alpha \alpha_a^G = \sum_{\alpha \in \mathrm{IBr}\,(\mathrm{A})} k_\alpha \xi_{a,\,\alpha}$ {Ж20 (1)} $\subseteq C[\mathrm{A}^{(G)}]$ {32}.

2): Так как $S_H(a) \longleftrightarrow \mathrm{A}$ по 31 и $\theta \in \mathrm{CF}(H)\big|^0_{S_H(a)}$, то по 3В1 $\alpha_{\mathrm{A}} \in \mathrm{CF}(H)\big|^0_{S_H(a)}$. Теперь $\theta^G = \left(\sum_{\Delta \in \mathrm{Bl}\,(H)} \theta_\Delta\right)^G \subseteq \sum_{\Delta} C[\Delta^{(G)}]$ по 1).

3): По **311**(4) $\xi = \sum_{\alpha \in \mathrm{IBr}(H)} s_\alpha \xi_{a,\alpha}$, $s_\alpha \in \boldsymbol{C}$, откуда $\xi_{\mathrm{B}} = \sum_{\alpha \in \mathrm{IBr}(\mathrm{B}(a))} s_\alpha \xi_{a,\alpha}$ по **32** и, значит,

$$\xi_{\mathrm{B}}|_H = \sum_{\alpha \in \mathrm{IBr}(\mathrm{B}(a))} s_\alpha \alpha_a$$

($\alpha_a = \xi_{a,\alpha}|_H$, см. **Ж21**). Далее,

$$(\xi|_H)_{\mathrm{B}(a)} = \Big(\sum_{\alpha \in \mathrm{IBr}(H)} s_\alpha \alpha_a\Big)_{\mathrm{B}(a)} = \sum_{\alpha \in \mathrm{IBr}(\mathrm{B}(a))} s_\alpha \alpha_a,$$

так как α_a и α подчинены одному p-блоку по **32**.

□

Следующий результат принадлежит Фонгу [67, теорема 1A].

313. Пусть $\mathrm{B} \in \mathrm{Bl}_p(G)$, $D \in \mathfrak{D}(\mathrm{B})$ и $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$. Если $g \in D$ и

(з5) $\qquad \chi((gr)^\alpha)) = \chi(gr)$ для $\chi \in \mathrm{B}$, и всех $r \in C_G(D)_{p'}$,

то g^α и g сопряжены в G.

Доказательство. По определению дефектной группы блока существует $x \in G_{p'}$ такой, что $D \in \mathrm{Syl}_p(C_G(x))$ и $0 \neq \lambda_{\mathrm{B}}(\widehat{x^G}) = \left(\frac{|x^G|\chi(x)}{\chi(1)}\right)^\mu$. Предположим, что g^α и g не сопряжены в G. Тогда элементы gx и $(gx)^\alpha = g^\alpha x^\alpha$ лежат в разных p-сечениях группы G и по **33**(1) будет

$$0 = \sum_{\chi \in \mathrm{B}} \chi(gx)\overline{\chi((gx)^\alpha)} = \sum_{\chi \in \mathrm{B}} |\chi(gx)|^2$$

(последнее — в силу (з5)). Следовательно, $\chi(gx) = 0$ для всех $\chi \in \mathrm{B}$. Но по **4А8** $\chi(gx) \equiv \chi((gx)_{p'}) = \chi(x) \pmod{\mathfrak{p}}$. Следовательно, $\chi(x) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$ для всех $\chi \in \mathrm{B}$. Возьмем в качестве χ характер высоты 0 в B, т. е. такой, что $\frac{|G|_p}{\chi(1)_p} = p^{d(\mathrm{B})}$ и, следовательно (Е6), $\frac{|G|_p}{\chi(1)_p} = |D| = |C_G(x)|_p$. Тогда $\left(\frac{|x^G|\chi(x)}{\chi(1)}\right)^\mu = \left(\frac{|G|}{|C_G(x)|\chi(1)} \times \chi(x)\right)^\mu = \left(\frac{|G|_{p'}}{|C_G(x)|_{p'}\chi(1)_{p'}}\right)^\mu \chi(x)^\mu = 0$, в противоречие с $\lambda_{\mathrm{B}}(\widehat{x^G}) \neq 0$.

□

§ И. p-БЛОКИ И НОРМАЛЬНЫЕ ПОДГРУППЫ

Пусть $H \trianglelefteq G$. Напомним, что если $\xi \in \mathrm{CF}(H)$ и $g \in G$, то ξ^g обозначает функцию из $\mathrm{CF}(H)$ такую, что

$$\xi^g(h) = \xi(ghg^{-1}) \text{ для всех } h \in H.$$

Подмножества Γ и $\Gamma^g = \{\gamma^g | \gamma \in \Gamma\}$ из $\mathrm{CF}(H)$ называются *сопряженными* в G.

И1. Если $\Theta \in \mathrm{Bl}_p(H)$, $H \trianglelefteq G$ и $g \in G$, то $\Theta^g \in \mathrm{Bl}_p(H)$.

Доказательство. Пусть α, $\beta \in \mathrm{Irr}(H)$. Очевидно, $(\alpha^g, \beta^g)_H = (\alpha, \beta)_H$ и $(H_{p'})^g = H_{p'}$ при $g \in G$. Отсюда следует, что α^g и β^g (непосредственно) p-связаны, если и только если α и β (непосредственно) p-связаны. Теперь требуемое утверждение следует из **3Д5**.

□

Таким образом, группа G действует на множестве всех p-блоков ее нормальной подгруппы H. Пусть $\{\Theta_1, \ldots, \Theta_s\}$ — G-орбита блоков подгруппы H. Ясно, что тогда $\sum_{i=1}^{s} e_{\Theta_i}$ — идемпотент в $Z(\Re G)$. Следовательно, по **В6** существует единственно определенное непустое множество $\{B_1, \ldots, B_t\}$ p-блоков группы G такое, что

$$\sum_{i=1}^{s} e_{\Theta_i} = \sum_{j=1}^{t} e_{B_j}.$$

И2. Определение. В ситуации, описанной в предыдущем абзаце, будем говорить, что блок B_j *накрывает* блок Θ_i для всех i, j.

И3. Пусть $H \trianglelefteq G$, $\Theta \in \mathrm{Bl}_p(H)$, $\breve{\Theta}$ — объединение всех p-блоков группы H, сопряженных с Θ в G, и $B \in \mathrm{Bl}_p(G)$. Равносильны условия:

(1) B накрывает Θ;

(2) $\chi|_H \in \mathbf{C}[\breve{\Theta}]$ для всех $\chi \in B$;

(3) $\mathrm{Irr}(\chi|_H) \cap \breve{\Theta} \neq \varnothing$ для всех $\chi \in B$;

(4) $\mathrm{Irr}(\chi|_H) \cap \breve{\Theta} \neq \varnothing$ для некоторого $\chi \in B$.

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2): Пусть верно (1). Тогда существуют G-орбита $\{\Theta_1, \ldots, \Theta_s\}$ p-блоков H с $\Theta_1 = \Theta$ $\left(\bigcup_{i=1}^{s} \Theta_i = \breve{\Theta}\right)$ и подмножество $\{B_1, \ldots, B_t\}$ из $\mathrm{Bl}_p(G)$ с $B_1 = B$ такие, что

$$\sum_{i=1}^{s} e_{\Theta_i} = \sum_{j=1}^{t} e_{B_j}. \qquad \text{(и1)}$$

Пусть $\chi \in B$. Тогда

$$\chi|_H = \sum_{\xi \in \mathrm{Irr}(H)} m_{\chi\xi}\,\xi, \text{ где } m_{\chi\xi} \in N \cup \{0\}. \qquad \text{(и2)}$$

Так как $\chi\left(\sum_{i=1}^{s} e_{\Theta_i}\right) = \chi\left(\sum_{j=1}^{t} e_{B_j}\right) = \chi(e_{B_1}) = \chi(e_\chi) = \chi(1)$ $(\chi(e_\psi) = \delta_{\chi\psi}\chi(1)$ по 3Г5(1)), то из (и1) и (и2) получаем

$$\chi(1) = \sum_{\xi \in \mathrm{Irr}(H)} m_{\chi\xi} \sum_{i=1}^{s} \xi(e_{\Theta_i}) = \sum_{\xi \in \breve{\Theta}} m_{\chi\xi}\,\xi(1). \qquad \text{(и3)}$$

Из (и2) и (и3) следует, что $m_{\chi\xi}=0$ при $\xi\notin\breve{\Theta}$, т. е. верно (2).

(2) $\Rightarrow$ (3): Очевидно, так как $(\chi|_H, \xi^g)_H=((\chi|_H)^g, \xi^g)_H=(\chi|_H, \xi)_H$ для всех $\xi\in\mathrm{Irr}(H)$.

(3) $\Rightarrow$ (4): Очевидно.

(4) $\Rightarrow$ (1): Пусть $\{\Theta_1, \ldots, \Theta_s\}$ — G-орбита p-блоков H, содержащая Θ. Тогда $\sum\limits_{i=1}^{s} e_{\Theta_i}=\sum\limits_{j=1}^{t} e_{B_j}$ для некоторого множества p-блоков B_j группы G. Пусть $\chi\in B$ и $\chi|_H$ имеет неприводимую часть в Θ. Тогда $\chi\left(\sum\limits_{i=1}^{s} e_{\Theta_i}\right)=\chi|_H\left(\sum\limits_{i=1}^{s} e_{\Theta_i}\right)\neq 0$ н, следовательно, $\chi(e_{B_j})\neq 0$ для некоторого $j\in\{1, \ldots, t\}$. Значит (3Г5(1)), $\chi\in B_j$, т. е. $B=B_j$ и верно (1).

□

И4. Пусть $H\trianglelefteq G$, $\Theta\in\mathrm{Bl}_p(H)$ и $\Theta^{(G)}$ определен. Тогда

(1) Θ^G накрывает Θ;

(2) $(\Theta^g)^{(G)}$ определен и совпадает с $\Theta^{(G)}$ для любого $g\in G$;

(3) если $\Theta_1\in\mathrm{Bl}_p(H)$ и $\Theta_1^{(G)}=\Theta^{(G)}$, то $\Theta_1=\Theta^g$ для некоторого $g\in G$.

Доказательство. 1): Пусть $\theta\in\Theta$. По **Ё6**(2) $(\theta^G)\,\Theta^{(G)}(1)\neq 0$ и, значит, существует $\chi\in\Theta^{(G)}$ такой, что $0\neq(\chi, \theta^G)_G=(\chi|_H, \theta)_H$ (**2А41**). Отсюда по **И3** ((4) $\Rightarrow$ (1)) следует 1).

2): Пусть $\theta\in\Theta$. По **Ё3** для всех $x\in G$ $\lambda_\Theta^{(G)}(\widehat{x^{(G)}})=\left(\frac{|x^G|\,\theta^G(x)}{\theta(1)}\right)^\mu$. Но при $g\in G$ $\theta^g\in\Theta^g$ и, очевидно, $(\theta^g)^G=\theta^G$. Отсюда и из **Ё3** следует, что $\lambda_{\Theta^g}^{(G)}=\lambda_\Theta^{(G)}$, а значит, $(\Theta^g)^{(G)}$ определен и равен $\Theta^{(G)}$.

3): Пусть $\Theta_1\in\mathrm{Bl}_p(H)$ и $\Theta_1^{(G)}=\Theta^{(G)}$. Тогда по 1) блок $\Theta^{(G)}$ накрывает и блок Θ и блок Θ_1. По **И3** ((1) $\Rightarrow$ (2)) отсюда следует 3).

□

И5. Пусть P — нормальная p-подгруппа группы G, $B\in\mathrm{Bl}_p\times(G|\mathrm{Def}\,P)$ и $H=PC_G(P)$. Тогда

$$B_{(H)}=\bigcup_{i=1}^{s}\Theta_i,$$

где $\{\Theta_1, \ldots, \Theta_s\}$ — G-орбита p-блоков из $\mathrm{Bl}_p(H|\mathrm{Def}\,P)$.

Доказательство. По **Ё13**(2) существует p-блок Θ группы H такой, что $\Theta^{(G)}=B$. По **И4** множество всех таких блоков Θ есть G-орбита p-блоков H. Наконец, если $\Theta^{(G)}=B$, где $\Theta\in\in\mathrm{Bl}_p(H|\mathrm{Def}\,Q)$, то $Q\leqslant P$ по **Ё7** и $P\leqslant Q$ по **Е8**, т. е. $P\in\mathfrak{D}(\Theta)$.

□

Из первой основной теоремы Брауэра (**Ё6**) и **И5** непосредственно вытекает следующий результат.

И6. Теорема. Пусть $B \in Bl_p(G|\mathrm{Def}\, P)$ и $H = PC_G(P)$. Тогда

$$B_{(H)} = \bigcup_{i=1}^{s} \Theta_i,$$

где $\Theta_1, \ldots, \Theta_s$ — $N_G(P)$-орбита p-блоков из $Bl_p(H|\mathrm{Def}\, P)$.

□

Строение блоков Θ_i будет описано в теореме **К7**.

И7. Пусть $H \trianglelefteq G$, $\Theta \in Bl_p(H)$ и $B \in Bl_p(G)$. Если B накрывает Θ, то $\lambda_B(\widetilde{h^G}) = \lambda_\Theta(\widetilde{h^G})$ для всех $h \in H$.

Доказательство. Пусть $\chi \in B$. Так как B накрывает Θ, то по **И3** существует $\theta \in \mathrm{Irr}(\chi|_H) \cap \Theta$. Пусть $h \in H$. По теореме Клиффорда (**2Б9**) $\chi(\widetilde{h^G}) = n\theta(\widetilde{h^G})$ для некоторого $n \in \boldsymbol{N}$ $(n = (\chi|_H, \theta)_H |G:G_\theta|)$, откуда

$$\frac{\chi(\widetilde{h^G})}{\chi(1)} = \frac{\theta(\widetilde{h^G})}{\theta(1)}.$$

Применяя μ к обеим частям этого равенства, получаем требуемое.

□

Обратное к **И7** утверждение также верно, но нам не потребуется.

И8. Пусть P — p-подгруппа группы G, $P \trianglelefteq G$ и $C_G(P) \leqslant H \trianglelefteq G$. Тогда каждый p-блок подгруппы H накрывается точно одним p-блоком группы G.

Доказательство. Пусть $\Theta \in Bl_p(H)$. Существование p-блока группы G, накрывающего Θ, следует из **И2** (или **И3**).

Пусть B и Г — p-блоки группы G, накрывающие Θ. По **И7** $\lambda_B(\widetilde{h^G}) = \lambda_\Gamma(\widetilde{h^G})$ для всех $h \in H$. Если же $g \in G \setminus H$, то $g^G \cap C_G(P) = \varnothing$ (и тогда $g^G \cap C_G(O_p(G)) = \varnothing$) и по **Е10** $\lambda_B(\widetilde{g^G}) = 0 = \lambda_\Gamma(\widetilde{g^G})$. Следовательно, $\lambda_B = \lambda_\Gamma$ и, значит (**Д4**(1)), $B = \Gamma$.

□

§ Й. ГЛАВНЫЙ p-БЛОК

Й1. Теорема. Пусть $H \leqslant G$, $\Theta \in Bl_p(H|\mathrm{Def}\, P)$ и $C_G(P) \subseteq H$. Равносильны условия:
(1) Θ — главный p-блок H,
(2) $\Theta^{(G)}$ — главный p-блок G.

Доказательство. При $P=1$ утверждение теоремы тривиально. Пусть $P\neq 1$.

(1) $\Rightarrow$ (2): Пусть $K\in \mathrm{Cl}(G)$. Тогда P действует без неподвижных точек на $K\setminus H$, откуда $|K|\equiv |K\cap H| \pmod p$. Теперь, если Θ — главный p-блок H и B_1 — главный p-блок G, то $\lambda_\Theta^{(G)}(\widetilde{K})=$ $=\lambda_\Theta(\widetilde{K\cap H})=|K\cap H|^\mu=|K|^\mu=\lambda_{\mathrm{B}_1}(K)$. Следовательно, $\lambda_\Theta^{(G)}=$ $=\lambda_{\mathrm{B}_1}$, т. е. $\Theta^{(G)}=\mathrm{B}_1$.

(2) $\Rightarrow$ (1): Пусть $\Theta^{(G)}=\mathrm{B}_1$ — главный p-блок G. Так как $\Theta\in \mathrm{Bl}_p(H|\mathrm{Def}\,P)$, то по теореме **И6** существует $\Theta'\in \mathrm{Bl}_p(PC_G\times$ $\times(P)|\mathrm{Def}\,P)$ с $(\Theta')^{(H)}=\Theta$. Тогда по **Ё2** $(\Theta')^{(G)}=\Theta^{(G)}=\mathrm{B}_1$. Так как уже доказано, что (1) $\Rightarrow$ (2), то достаточно показать, что

(й1) $\qquad\qquad$ Θ' — главный p-блок группы $PC_G(P)$.

Положим $\Theta''=(\Theta')^{(N_G(P))}$. Тогда $(\Theta'')^{(G)}=\mathrm{B}_1$ по **Ё2** и $P\leqslant$ $\leqslant Q\in\mathfrak{D}(\Theta'')$ по **Ё7**.

Если $P=Q$, то $\Theta''\in \mathrm{Bl}_p(N_G(P)|\mathrm{Def}\,P)\equiv\mathfrak{B}$ и по первой основной теореме Брауэра (**Ё12**) $\mathrm{B}_1=(\Theta'')^{(G)}\in \mathrm{Bl}_p(G|\mathrm{Def}\,P)$. Отсюда по **Е7** главный p-блок Θ_1 подгруппы $N_G(P)$ принадлежит $\mathfrak{B}$. Так как (1) $\Rightarrow$ (2), то $\Theta_1^{(G)}=\mathrm{B}_1$. Но также $\Theta''\in\mathfrak{B}$ и $(\Theta'')^{(G)}=\mathrm{B}_1$. По **Ё12** $\Theta''=\Theta_1$. При $P<Q$ это же получается индукцией по $|G|_p/|P|$. Но по **И4** $\Theta''(=(\Theta')^{(G)})$ накрывает Θ', откуда по **И3** ((1) $\Rightarrow$ (3)) (взять $\chi=1_{N_G(P)}$ в (3)) следует $1_{PC_G(P)}\in\Theta'$. Этим утверждение (й1) доказано.

$\square$

Отметим, что доказанную теорему часто называют третьей основной теоремой Брауэра [53, 62, 90].

Й2. Теорема. Пусть B_1 — главный p-блок группы G. Тогда

1) $\bigcap\limits_{\chi\in \mathrm{B}_1}\mathrm{Ker}\,\chi=O_{p'}(G)$,

2) $\bigcap\limits_{\beta\in \mathrm{IBr}(\mathrm{B}_1)}\mathrm{Ker}\,\beta=O_{p',p}(G)$.

Доказательство. 1): Пусть Θ_1 — главный p-блок подгруппы $H=O_{p'}(G)$. Тогда $\Theta_1=\{1_H\}$ и по **И3** ((4) $\Rightarrow$ (1)) B_1 накрывает Θ_1. Так как блок Θ_1 G-инвариантен, то из **И3** ((1) $\Rightarrow$ (2)) следует $\chi|_H\in C1_H$ и, следовательно, $H\subseteq\mathrm{Ker}\,\chi$ для всех $\chi\in \mathrm{B}_1$.

Таким образом, $O_{p'}(G)\subseteq\bigcap\limits_{\chi\in \mathrm{B}_1}\mathrm{Ker}\,\chi$.

Обратное утверждение следует из **33**(1) (если g — p-элемент из $\bigcap\limits_{\chi\in \mathrm{B}_1}\mathrm{Ker}\,\chi$, то $0=\sum\limits_{\chi\in \mathrm{B}_1}\chi(g)\chi(1)=\sum\limits_{\chi\in \mathrm{B}_1}\chi(1)^2$, что противоречиво).

2): Пусть теперь $\beta\in \mathrm{IBr}(\mathrm{B}_1)$.

Тогда по **Б6**(1) и **4Г13** существует $\chi\in \mathrm{B}_1$ такой, что $\chi^\circ=$ $=\sum\limits_{\varphi\in \mathrm{IBr}(\mathrm{B}_1)}d_{\chi\varphi}\varphi$, $d_{\chi\beta}\neq 0$ и некоторое представление $\mathscr{R}$ с брауэровым характером β является неприводимой частью p-модуляции $\mathscr{X}^{\mu}$ некоторого представления $\mathscr{X}$ с характером χ. Поэтому $\operatorname{Ker}\chi = \operatorname{Ker}\mathscr{X} \subseteq \operatorname{Ker}\mathscr{X}^{\mu} \subseteq \operatorname{Ker}\mathscr{B} = \operatorname{Ker}\beta$. Так как $O_{p'}(G) \subseteq \operatorname{Ker}\chi$, то $O_{p'}(G) \subseteq \operatorname{Ker}\beta$.

Пусть $\bar{G} = G/O_{p'}(G)$. Тогда $\mathscr{B}$ является композицией естественного гомоморфизма γ: $G \to \bar{G}$ и некоторого неприводимого представления $\bar{\mathscr{B}}$ группы $\bar{G}$. Так как по **4A11** $O_p(\bar{G}) \subseteq \operatorname{Ker}\bar{\mathscr{B}}$, то $O_{p',p}(G) \subseteq \operatorname{Ker}\mathscr{B} = \operatorname{Ker}\beta$. Таким образом, $O_{p',p}(G) \subseteq \bigcap\limits_{\beta \in \operatorname{IBr}(B_1)} \operatorname{Ker}\beta \equiv K$.

Предположим, что $O_{p',p}(G) < K$. Тогда $K/O_{p',p}(G)$ не является p-группой и, следовательно, существует $k \in K_{p'} \setminus O_{p',p}(G)$. Имеем $\beta(k) = \beta(1)$ для всех $\beta \in \operatorname{IBr}(B_1)$. Так как по **Б3**(2) $\overset{\circ}{B}_1 \subseteq \boldsymbol{Z}[\operatorname{IBr}(B_1)]$, то отсюда следует, что $\chi(k) = \chi(1)$ и $k \in \operatorname{Ker}\chi$ для всех $\chi \in B_1$. По 1) тогда $k \in O_{p'}(G) \subseteq O_{p',p}(G)$ в противоречие с выбором k. Итак, $O_{p',p}(G) = K$.

□

Й3. Пусть B_1 — главный p-блок группы G. Равносильны условия:

(1) G имеет нормальное p-дополнение;

(2) $|\operatorname{IBr}(B_1)| = 1$.

Доказательство. $(1) \Leftrightarrow G = O_{p',p}(G) \overset{\text{й}(2)}{\Longleftrightarrow} G \subseteq \operatorname{Ker}\beta$ для всех $\beta \in \operatorname{IBr}(B_1) \Leftrightarrow B_1 = \{\overset{\circ}{1}_G\} \Leftrightarrow (2)$.

□

Й4. Пусть B_1 — главный p-блок группы G, $\chi \in B_1$, $\chi(1) = p^n$ $(n \in \boldsymbol{N})$ и $\operatorname{Ker}\chi = 1$. Пусть $P \in \operatorname{Syl}_p(G)$. Тогда

$$C_G(P) \subseteq Z(G).$$

Доказательство. Так как $\chi \in B_1$, то **(A8)**

$$\text{(й2)} \qquad \frac{|g^G|\,\chi(g)}{\chi(1)} \equiv |g^G| \ (\operatorname{mod}\mathfrak{p}) \text{ для всех } g \in G.$$

Пусть $g \in C_G(P)$. Тогда p не делит $|g^G|$ и, следовательно,

$$\text{(й3)} \qquad (\chi(1),\ |g^G|) = 1.$$

Отсюда по **2A31** либо $\chi(g) = 0$, либо $|\chi(g)| = \chi(1)$. Если $\chi(g) = 0$, то из (й2) следует, что $|g^G| \in \mathfrak{p} \cap \boldsymbol{Z} = p\boldsymbol{Z}$, в противоречие с (й3). Поэтому $|\chi(g)| = \chi(1)$ и по **2A30**(2) $g \in Z(G)$.

□

Й5. Пусть $a \in G_p$ и $\chi \in B_1$, где B_1 — главный p-блок группы G. Тогда

$$\chi(ar) = \chi(a) \text{ для всех } r \in O_{p'}(C_G(a)).$$

Доказательство. Пусть $r \in O_{p'}(C_G(a))$. По второй основной теореме Брауэра **(Ж17)**

$$(й4)\qquad \chi(ar) = \sum_{\beta \in \mathrm{IBr}(B_1(a))} d^a_{\chi\beta}\beta(r).$$

По теореме **Й1** $B_1(a)$ есть главный p-блок группы $C_G(a)$. Но по **Й2** $O_{p'}(C_G(a)) \subseteq \bigcap_{\beta \in \mathrm{IBr}(B_1(a))} \mathrm{Ker}\,\beta$ и, значит, $\beta(r) = \beta(1)$ для всех $\beta \in \mathrm{IBr}(B_1(a))$. Отсюда и из (й4) следует, что $\chi(ar) = \chi(a)$.

□

Й6. Упражнение. Пусть B_1 — главный p-блок группы G и $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$. Тогда $C_G(P) = Z(P) \times M$, где M — p' — группа, и

$$\{\chi \in B_1 | \chi(1) = 1\} = \mathrm{Irr}(G|G'M).$$

(Применить **В11, 4Г4 и 4Г14.**)

§ К. p-БЛОКИ ГРУППЫ $G = PC_G(P)$

Пусть P — p-подгруппа группы G. Теорема **И6** связывает определенным образом p-блоки группы G, имеющие дефектную группу P, с p-блоками подгруппы $PC_G(P)$, имеющими ту же дефектную группу P. Такие p-блоки группы вида $PC_G(P)$ изучаются в этом параграфе.

Сначала докажем несколько вспомогательных утверждений.

К1. Пусть $N \trianglelefteq G$. Положим

$$\mathrm{CF}(G|N) = \{\alpha \in \mathrm{CF}(G) | \alpha(gn) = \alpha(g) \text{ для всех } (g, n) \in G \times N\}.$$

Тогда

1) $\mathrm{CF}(G|N)$ — $\boldsymbol{C}$-подпространство в $\mathrm{CF}(G)$ с базой $\mathrm{Irr}(G|N)$;

2) отображение $\alpha \to \tilde{\alpha}$ ($\alpha \in \mathrm{CF}(G|N)$), гда $\tilde{\alpha}$ — классовая функция группы $G|N$, определяемая равенством

$$\tilde{\alpha}(gN) = \alpha(g) \text{ для всех } g \in G,$$

есть изоморфизм $\boldsymbol{C}$-пространства $\mathrm{CF}(G|N)$ на $\boldsymbol{C}$-пространство $\mathrm{CF}(G/N)$, отображающий $\mathrm{Irr}(G|N)$ иа $\mathrm{Irr}(G/N)$.

Доказательство. Очевидно, отображение $\sigma: \alpha \mapsto \tilde{\alpha}$ пункта 2) есть биекция. Легко проверяется и его линейность, т. е. σ — изоморфизм.

По **2А34** (1) отображение σ переводит биективно $\mathrm{Irr}(G|N)$ на $\mathrm{Irr}(G/N)$. Поскольку $\mathrm{Irr}(G/N)$ — база в $\mathrm{CF}(G/N)$ **(2А18)** и σ — изоморфизм, то $\mathrm{Irr}(G|N) = \mathrm{Irr}(G/N)^{\sigma^{-1}}$ — база в $\mathrm{CF}(G|N)$.

□

К2. Пусть P — нормальная p-подгруппа группы G. Тогда

1) существует изоморфизм ν C-пространства $\mathrm{CF}(G)^\circ$ на C-пространство $\mathrm{CF}(G/P)^\circ$ такой, что
$$\theta^\nu(gP)=\theta(g) \text{ для всех } g\in G_{p'}$$
(в частности, функции θ из $\mathrm{CF}(G)^\circ$ постоянны на множествах $gP\cap G_{p'}$ при $g\in G$);

2) ν отображает (биективно) $\mathrm{IBr}_p(G)$ на $\mathrm{IBr}_p(G/P)$;

3) если $\alpha\in\mathrm{CF}(G|P)$, то $(\alpha^\circ)^\nu=\tilde{\alpha}^\circ$, где $\tilde{\alpha}$ определено как в **К1** при $N=P$.

4) числа p-разложения групп G и G/P связаны соотношениями $d_{\chi\beta}=d_{\tilde{\chi}\beta^\nu}$, если $\chi\in\mathrm{Irr}(G|P)$ и $\beta\in\mathrm{IBr}_p(G)$.

Доказательство. 1), 2): Пусть $\beta\in\mathrm{IBr}_p(G)$. Тогда $\beta=\beta_{\mathscr{A}}$, где $\mathscr{A}$ — неприводимое представление G над F. По **4А13** $P\subseteq\mathrm{Ker}\,\mathscr{A}$. Поэтому существует (очевидно, неприводимое) представление $\tilde{\mathscr{A}}$ группы G/P такое, что $\tilde{\mathscr{A}}(gP)=\mathscr{A}(g)$ для всех $g\in G$. Следовательно, $\beta_{\tilde{\mathscr{A}}}(gP)=\beta_{\mathscr{A}}(g)$ для всех $g\in G_{p'}$, и, в обозначениях пункта 1), $\beta_{\tilde{\mathscr{A}}}=\beta^\nu$. Понятно, что отображение $\beta\longmapsto\beta^\nu$ $(\beta\in\mathrm{IBr}_p(G))$ есть биекция из $\mathrm{IBr}_p(G)$ на $\mathrm{IBr}_p(G/P)$.

Так как $\mathrm{IBr}_p(G)$ есть база пространства $\mathrm{CF}(G^\circ)$ **(4Д3)**, а $\mathrm{IBr}_p(G/P)$ — база пространства $\mathrm{CF}(G/P)^\circ$, то построенная выше биекция единственным образом продолжается до изоморфизма ν этих C-пространств. При этом, очевидно, будет $\theta^\nu(gP)=\theta(g)$ для всех $g\in G_{p'}$.

(Если $\theta\in\mathrm{CF}(G)^\circ$, $g\in G_{p'}$ и $g_1\in gP\cap G_{p'}$, то $\theta(g_1)=\theta^\nu\times\times(g_1P)=\theta^\nu(gP)=\theta(g)$.)

3): Если gP — p'-элемент в G/P, то элемент g можно выбрать так, что $g\in G_{p'}$. Но тогда $(\alpha^\circ)^\nu(gP)=\alpha^\circ(g)=\alpha(g)=\tilde{\alpha}(gP)==\tilde{\alpha}^\circ(gP)$.

4): Пусть $\chi\in\mathrm{Irr}(G|P)$. Так как по 2) $\mathrm{IBr}_p(G/P)=\{\beta^\nu\,|\,\beta\in\in\mathrm{IBr}_p(G)\}$, то
$$\tilde{\chi}^\circ=\sum_{\beta\in\mathrm{IBr}_p(G)}d_{\tilde{\chi}\beta^\nu}\beta^\nu.$$
Но тогда $\chi^\circ=_{3)}(\tilde{\chi}^\circ)^{\nu^{-1}}=\sum\limits_{\beta\in\mathrm{IBr}_p(G)}d_{\tilde{\chi}\beta^\nu}\beta^\nu$ и, следовательно **(4Г13(1))**, $d_{\chi\beta}=d_{\tilde{\chi}\beta^\nu}$.

□

К3. Обозначение. Для группы, обозначенной буквой G и имеющей нормальную p-подгруппу, обозначенную буквой P,

ν имеет тот же смысл, что и в **К2(1)**,

$\tilde{\alpha}$ (для $\alpha\in\mathrm{CF}(G|P)$) имеет тот же смысл, что и в **К1(2)** при $N=P$.

K4. Пусть P — нормальная p-подгруппа группы G.

1) $\mathrm{Irr}(G)^\circ \subseteq \boldsymbol{Z}[\mathrm{Irr}(G|P)^\circ]$.

2) $\mathrm{CF}(G)^\circ = \mathrm{CF}(G|P)^\circ$.

3) Если $\mathrm{B} \in \mathrm{Bl}_p(G)$, то $\mathrm{B}^\circ \subseteq \boldsymbol{Z}[\mathrm{Irr}(G|P) \cap \mathrm{B}]^\circ$, и в частности,
$$\mathrm{Irr}(G|P) \cap \mathrm{B} \neq \varnothing.$$

Доказательство. 1): Используем изоморфизм ν из **K2(1)**. $(\mathrm{Irr}(G)^\circ)^\nu \subseteq_{4\text{Д}3} \boldsymbol{Z}[\mathrm{IBr}(G)]^\nu =_{\text{K}2(2)} \boldsymbol{Z}[\mathrm{IBr}(G/P)] =_{4\text{Д}3} \boldsymbol{Z}[\mathrm{Irr} \times \times (G/P)^\circ] =_{\text{K}1} \boldsymbol{Z}[\widetilde{\mathrm{Irr}(G|P)^\circ}] =_{\text{K}2(3)} \boldsymbol{Z}[\mathrm{Irr}(G|P)^\circ]^\nu$. Так как ν — изоморфизм, то отсюда следует 1).

2): $\mathrm{CF}(G)^\circ = \boldsymbol{C}[\mathrm{Irr}(G)]^\circ =_{1)} \boldsymbol{C}[\mathrm{Irr}(G|P)]^\circ =_{\text{K}1(1)} \mathrm{CF}(G|P)^\circ$.

3): Пусть $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$. По 1) $\chi^\circ = \sum\limits_{\zeta \in \mathrm{Irr}(G|P)} m_{\chi\zeta}\zeta^\circ$, где $m_{\chi\zeta} \in \boldsymbol{Z}$. Если $\chi \in \mathrm{B}$, то по **Б6** отсюда следует, что $\chi^\circ = \sum\limits_{\zeta \in \mathrm{Irr}(G|P) \cap \mathrm{B}} m_{\chi\zeta}\zeta^\circ$, и утверждение 3) верно.

□

K5. Пусть P — нормальная p-подгруппа группы G и $\mathrm{B} \in \in \mathrm{Bl}_p(G)$. Тогда существует непустое множество $\{\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n\}$ p-блоков группы G/P такое, что

1) $\widetilde{\mathrm{Irr}(G|P) \cap \mathrm{B}} = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \mathrm{A}_i$;

2) $\mathrm{IBr}(\mathrm{B})^\nu = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \mathrm{IBr}(\mathrm{A}_i)$;

3) $\boldsymbol{C}[\mathrm{B}^\circ]^\nu = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} \boldsymbol{C}[\mathrm{A}_i^\circ]$.

Доказательство. 1): Пусть $\chi \in \mathrm{Irr}(G|P) \cap \mathrm{B}$ ($\neq \varnothing$ по **K4(3)**), $\psi \in \mathrm{Irr}(G/P)$ и ψ лежит в одном p-блоке с $\tilde{\chi}$. По **K1** $\psi = \tilde{\chi}_1$ для некоторого $\chi_1 \in \mathrm{Irr}(G|P)$. Согласно **А8** p-блок группы есть связная компонента брауэрова графа этой группы. Поэтому утверждение 1) будет доказано, если доказать, что связанность $\tilde{\chi}$ и $\tilde{\chi}_1$ в брауэровом графе группы G/P влечет связанность χ и χ_1 в брауэровом графе группы G. Но это легко следует из **K2(4)**.

2): Из **K2(4)** легко вытекает следующее утверждение.

(к1) Если $\chi \in \mathrm{Irr}(G|P)$, то $\mathrm{IBr}_p(\tilde{\chi}) = \mathrm{IBr}_p(\chi)^\nu$.

(Напомним (**А5**), что $\mathrm{IBr}_p(\chi) = \{\beta \in \mathrm{IBr}_p(G) | d_{\chi\beta} \neq 0\}$ для $\chi \in \in \mathrm{Irr}(G)$ и $\mathrm{IBr}_p(\Phi) = \bigcup\limits_{\varphi \in \Phi} \mathrm{IBr}_p(\varphi)$ для $\Phi \subseteq \mathrm{Irr}(G)$). Имеем
$$\mathrm{IBr}(\mathrm{B})^\nu =_{\text{K}4(3)} \mathrm{IBr}(\mathrm{Irr}(G|P) \cap \mathrm{B})^\nu =$$
$$=_{(\text{к}1)} \mathrm{IBr}(\widetilde{\mathrm{Irr}(G|P) \cap \mathrm{B}}) =_{1)} \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{IBr}(\mathrm{A}_i).$$

3): Следует из 2) и **А9**.

□

К6. Теорема. Пусть $G = PC_G(P)$, где P — p-подгруппа, и $\mathrm{B} \in \mathrm{Bl}_p(G)$. Тогда

1) $\widetilde{\mathrm{Irr}(G|P) \cap \mathrm{B}} = \mathrm{A} \in \mathrm{Bl}_p(G/P)$;

2) $\mathrm{c_B} = |P| \mathrm{c_A}$

(точнее, $(\mathrm{c_B})_{\beta\gamma} = |P| (\mathrm{c_A})_{\beta^\nu \gamma^\nu}$ для всех $\beta, \gamma \in \mathrm{IBr}(\mathrm{B})$);

3) если $D \in \mathfrak{D}(\mathrm{B})$, то $D/P \in \mathfrak{D}(A)$.

Доказательство. Положим $\overline{G} = G/P$ и $\overline{g} = gP$ для $g \in G$. Так как $G_{p'} \subseteq C_G(P)$, то $gP \cap G_{p'} = \{g\}$ для всех $g \in G_{p'}$. Следовательно,

(к2) отображение $g \mapsto \overline{g}\ (g \in G_{p'})$ есть биекция $G_{p'}$ на $\overline{G}_{p'}$,

$$\text{(к3)} \qquad |\overline{g}^{\overline{G}}| = |g^G| \text{ для всех } g \in G_{p'}.$$

1): Пусть $\chi, \psi \in \mathrm{Irr}(G|P) \cap \mathrm{B}$. По **B11**

$$\frac{|g^G|\chi(g)}{\chi(1)} \equiv \frac{|g^G|\psi(g)}{\psi(1)} \pmod{\mathfrak{p}} \text{ для всех } g \in G_{p'}.$$

Отсюда и из (к3) следует, что

$$\frac{|\overline{g}^{\overline{G}}|\widetilde{\chi}(\overline{g})}{\widetilde{\chi}(\overline{1})} \equiv \frac{|\overline{g}^{\overline{G}}|\widetilde{\psi}(\overline{g})}{\widetilde{\psi}(\overline{1})} \pmod{\mathfrak{p}} \text{ для всех } \overline{g} \in \overline{G}_{p'}.$$

По **B11** это означает, что $\widetilde{\chi}$ и $\widetilde{\psi}$ лежат в одном p-блоке группы $\overline{G}$. Следовательно, в **К5**(1) $n = 1$.

2): По **К5**(2) и 1) ν отображает биективно $\mathrm{IBr(B)}$ на $\mathrm{IBr(A)}$. Пусть $\beta, \gamma \in \mathrm{IBr(B)}$. По **4E2**(3)

$$(\mathrm{c_A^{-1}})_{\beta^\nu \gamma^\nu} = \frac{1}{|\overline{G}|} \sum_{\overline{g} \in \overline{G}_{p'}} \beta^\nu(\overline{g}) \overline{\gamma^\nu(\overline{g})} =$$

$$=_{(\text{к}2),\ \text{К}2(1)} \frac{1}{|\overline{G}|} \sum_{g \in G_{p'}} \beta(g) \overline{\gamma(g)} = |P| (\mathrm{c_B^{-1}})_{\beta\gamma},$$

т. е. $\mathrm{c_A^{-1}} = |P| \mathrm{c_B^{-1}}$ и $\mathrm{c_B} = |P| \mathrm{c_A}$.

3): Из 2) и **Г11** следует, что $p^{d(\mathrm{B})} = |P| p^{d(\mathrm{A})}$. Пусть $D_\mathrm{A} \in \mathfrak{D}(\mathrm{A})$ и $D_\mathrm{B} \in \mathfrak{D}(\mathrm{B})$. Из предыдущего равенства и **Е7** следует, что

$$\text{(к4)} \qquad |D_\mathrm{B}| = |P| |D_\mathrm{A}|.$$

Пусть g^G — дефектный класс блока B (**Е1**) и $\chi \in \mathrm{B}$. Тогда $\lambda_\mathrm{B}(\widetilde{g^G}) \neq 0$ и поэтому $\omega_\chi(\widetilde{g^G}) \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$. Отсюда и из б) следует, что $\omega_{\widetilde{\chi}}(\widetilde{\overline{g}^{\overline{G}}}) \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$ и, так как $\widetilde{\chi} \in \mathrm{A}$ по 1), $\lambda_\mathrm{A}(\widetilde{\overline{g}^{\overline{G}}}) \neq 0$. Следовательно, по **Е5**(2) $\mathfrak{D}(\mathrm{A}) \leqslant \mathfrak{D}_p(\overline{g}^{\overline{G}})$, т. е. D_A содержится в некоторой силовской p-подгруппе $\bar{S}$ группы $C_{\bar{G}}(\bar{g})$. Так как $(o(g), |P|)=1$, то $C_{\bar{G}}(\bar{g})=C_G(g)/P$ и, следовательно, $\bar{S}=S/P$, где $S\in \in \mathrm{Syl}_p(C_G(g))$. Но по **Е5**(1) $\mathfrak{D}(\mathrm{B})=\mathrm{Syl}_p(C_G(g))$ и можно считать, что $D_{\mathrm{B}}=S$. Тогда $D_{\mathrm{A}}\leqslant D_{\mathrm{B}}/P$ и вследствие (к4) $D_{\mathrm{A}}=D_{\mathrm{B}}/P$.

□

Заметим, что по **Е11** P содержится в дефектной группе любого p-блока В группы $PC_G(P)$. В связи с теоремой **И6** интересно рассмотреть те p-блоки В, дефектной группой которых является сама P (тогда $P=Q_p(G)$).

К7. Теорема. Пусть $G=PC_G(P)$, где P — p-подгруппа группы G, и $\mathrm{B}\in \mathrm{Bl}_p(G|\mathrm{Def}\ P)$. Тогда

1) $\mathrm{B}\cap \mathrm{Irr}(G|P)=\{\chi\}$ для некоторого χ;

2) $\mathrm{IBr}(\mathrm{B})=\{\chi^\circ\}$ и $\widehat{\chi^\circ}=|P|\chi^\circ$;

3) если $\mathrm{Irr}(P)=\{\zeta_1, \ldots, \zeta_m\}$, то $\mathrm{B}=\{\chi_1, \ldots, \chi_m\}$, где функции χ_i определяются так:

$$\chi_i(g)=\begin{cases}\zeta_i(g_p)\chi(g_{p'}), & \text{если } g_p\in P,\\ 0, & \text{если } g_p\notin P.\end{cases}$$

Доказательство. 1): Согласно **К6**(1, 3) $\widetilde{\mathrm{B}\cap \mathrm{Irr}(G|P)}=\mathrm{A}$ есть p-блок группы G/P, причем дефект этого p-блока равен нулю. Отсюда по **Г12** следует, что $|\mathrm{A}|=1$, и **1)** доказано.

2): По **К5**(1) $\mathrm{IBr}(\mathrm{B})^\nu=\mathrm{IBr}(\mathrm{A})=\{\widetilde{\chi^\circ}\}$, откуда $\mathrm{IBr}(\mathrm{B})=$
$=\left\{(\widetilde{\chi^\circ})^{\nu^{-1}}\right\}=_{\text{К2}(3)}\{\chi^\circ\}$. По **К6**(2) $\widehat{\chi^\circ}=|P|\chi^\circ$.

3): Покажем сначала, что χ_i — обобщенный характер группы G $(i=1, \ldots, m)$. Пусть $E=P_1\times Q$ — произвольная нильпотентная подгруппа из G, где $P_1\in \mathrm{Syl}_p(E)$. По **В2** достаточно показать, что $\chi_i|_E$ — обобщенный характер E. Можно считать, что $P\leqslant P_1$ так как, очевидно, PE также нильпотентна. Если $y\in Q$, то по **Г2**(2) $p^{d(\mathrm{B})}\dfrac{\chi(y)}{|C_G(y)|}\in\mathfrak{R}$, поскольку $p^{d(\mathrm{B})}=|P|$(**Е6**) и $P\leqslant \leqslant P_1\leqslant C_G(y)$, то и $\dfrac{\chi(y)}{|P_1:P|}\in\mathfrak{R}$. Пусть $\theta\in \mathrm{Irr}(E)$. Тогда в обозначениях из **2А38** будет $\theta=\alpha\times\beta$, где $\alpha\in\mathrm{Irr}(P_1)$ и $\beta\in\mathrm{Irr}(Q)$. Имеем

$$(\chi_i|_E, \theta)_E=\frac{1}{|E|}\sum_{x\in E}\chi_i(x)\overline{\theta(x)}=$$

$$=\frac{1}{|E|}\sum_{\substack{a\in P_1\\ y\in Q}}\chi_i(ay)\overline{\theta(ay)}=\frac{1}{|E|}\sum_{\substack{a\in P\\ y\in Q}}\zeta_i(a)\chi(y)\overline{\theta(ay)}=$$

$$=\left(\frac{1}{|P|}\sum_{a\in P}\zeta_i(a)\overline{\alpha(a)}\right)\left(\frac{1}{|Q|}\sum_{y\in Q}\chi(y)\overline{\beta(y)}\right)\frac{1}{|P_1:P|}.$$

В последнем произведении первые два множителя — целые числа, причем второй множитель делится на $|P_1:P|$, так как $\frac{\chi(y)}{|P_1:P|}\in\mathfrak{R}$. Итак, χ_i — обобщенный характер группы G. Далее,

$$|G|(\chi_i, \chi_i)_G = \sum_{x\in G}\chi_i(x)\overline{\chi_i(x)} =$$

$$= \sum_{\substack{a\in P\\ y\in G_{p'}}}\zeta_i(a)\chi(y)\overline{\zeta_i(a)}\,\overline{\chi(y)} =$$

$$= \Big(\sum_{a\in P}\zeta_i(a)\overline{\zeta_i(a)}\Big)\Big(\sum_{y\in G_{p'}}\chi^\circ(y)\overline{\chi^\circ(y)}\Big) =$$

$$=_{\text{4Е2 (2)}}|P|\cdot|G|(\mathrm{c_B}^{-1})_{11} =_{\text{К6 (2), 2)}}|G|.$$

Так как, кроме того, $\chi_i(1)=\zeta_i(1)\chi(1)>0$, то $\chi_i\in\mathrm{Irr}(G)$. Ясно, что $\mathrm{d}_{\chi_i,\chi^\circ}=\zeta_i(1)$. Следовательно, $(\mathrm{c_B})_{11}=\sum_{\psi\in\mathrm{B}}\mathrm{d}^2_{\psi\chi^\circ}\geqslant$ $\geqslant\sum_{i=1}^{m}\zeta_i(1)^2=|P|$. Но по **К6** $\mathrm{c_B}=|P|(1)$. Следовательно, в предыдущем неравенстве достигается равенство и, значит, $\mathrm{B}=\{\chi_1, \ldots, \chi_m\}$. Понятно, что $\chi_i\neq\chi_j$ при $i\neq j$.

❑

Характер χ из **К7** называют *каноническим характером* блока B. Заметим, что согласно **К7** (3) он имеет высоту 0.

§ Л. О БЛОКАХ С ЦИКЛИЧЕСКОЙ ДЕФЕКТНОЙ ГРУППОЙ

Блоки с единичной дефектной группой состоят из одного характера (**5Г12**). Брауэр в начале сороковых годов изучил p-блоки с дефектной группой порядка p. Томпсон [98] исследовал p-блоки группы G с циклической дефектной группой P такой, что $C_G(P)=P$ и $P\setminus\{1\}$ является TI-подмножеством в G. Наконец, Дэйд [63] изучил строение произвольных p-блоков с циклической дефектной группой. Часть этого очень важного результата и одно его следствие приводятся без доказательства в этом параграфе.

Л1. Теорема Дэйда. Пусть B — p-блок группы G с неединичной циклической дефектной группой P.

1) $|\mathrm{IBr}(\mathrm{B})|=e$, где $e\,|\,p-1$.

2) $|\mathrm{B}|=e+\frac{|P|-1}{e}$.

3) Числа разложения $\mathrm{d}_{\chi\beta}$ блока B все принадлежат множеству $\{0, 1\}$. (Напомним, что $\mathrm{d}_{\chi\beta}$ определяются равенствами $\chi^\circ=$ $=\sum_{\beta\in\mathrm{IBr}(\mathrm{B})}\mathrm{d}_{\chi\beta}\beta$ $(\chi\in\mathrm{B})$).

4) B разбивается на два подмножества $\{\chi_1, \ldots, \chi_e\}$ и $\{\psi_1, \ldots, \psi_t\}$ $\left(t=\frac{|P|-1}{e}\right)$ такие, что $\chi_1 = 1_G$ и для любого $\beta \in \mathrm{IBr}(\mathrm{B})$

а) $\mathrm{d}_{\psi_i\beta} = \mathrm{d}_{\psi_1\beta}$ для всех $i = 1, \ldots, t$;

б) если $\mathrm{d}_{\psi_1\beta} = 0$, то $\mathrm{d}_{\chi_j\beta} = 1$ точно для двух значений $j \in \{1, \ldots, e\}$;

в) если $\mathrm{d}_{\psi_1\beta} = 1$, то $\mathrm{d}_{\chi_j\beta} = 1$ точно для одного $j \in \{1, \ldots, e\}$;

г) $\overset{\circ}{\psi}_1 = \ldots = \overset{\circ}{\psi}_t = \sum_{j=1}^{e} \delta_j \overset{\circ}{\chi}_j$ при некоторых $\delta_j \in \{1, -1\}$.

5) Все характеры блока B имеют высоту 0.

Характеры $\psi_1, \ldots, \psi_t$ называются *исключительными характерами* блока B. Как следует из 4г) они имеют равные степени. Доказательство теоремы **Л1** см., например, в [65, § 68].

Отметим одно следствие этой теоремы (см. [57, I, § 3]).

Л2. Пусть G — конечная группа с циклической силовской p-подгруппой P и B_1 — главный p-блок группы G. Тогда

1) справедливы утверждения 1) — 5) из **Л1** при $e = |N_G(P):C_G(P)|$;

2) существуют числа $\varepsilon_i \in \{1, -1\}$ такие, что $\chi_i(g) = \varepsilon_i$ для всех $g \in G \setminus G_{p'}$ $(i = 1, \ldots, e)$;

3) существуют множество $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_t\}$ представителей всех классов неглавных неприводимых характеров P, сопряженных относительно $N_G(P)$, и число $\varepsilon \in \{1, -1\}$ такие, что

$$\psi_j(g) = \varepsilon \sum_{s \in S} \lambda_j^s(g_p) \text{ для всех } g \in G \text{ с } g_p \in P \setminus \{1\},$$

где S — полная система вычетов $N_G(P)$ по $C_G(P)$; в частности, $\sum_{j=1}^{t} \psi_j(g) = -\varepsilon$ для всех $g \in G \setminus G_{p'}$.

Здесь мы докажем лишь один очень частный случай теоремы **Л1**.

Л3. Пусть B — 2-блок группы G с дефектной группой $\langle a \rangle$ порядка 2. Тогда $|B| = 2$, $|\mathrm{IBr}(B)| = 1$, $\mathrm{d}_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{d}_B^a = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Доказательство. По **Г8** $|B| \leqslant \frac{1}{4} 2^2 + 1 = 2$, т. е. $|B| = 2$. Тогда $|\mathrm{IBr}(B)| = 1$ по **Б9**. По **Г10** $\mathrm{c}_B = (2)$, откуда $\mathrm{d}_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Теперь по **Ж8**(1, 2) находим $\mathrm{d}_B^a = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

□

Глава 6
ПРИМЕНЕНИЯ К ИССЛЕДОВАНИЮ СТРОЕНИЯ ГРУПП

Ранее уже были показаны применения теории представлений к исследованию строения конечных групп. В частности, таким применениям посвящены параграфы Г, Д, Е главы 2. Настоящая глава содержит некоторые применения теории p-блоков.

§ А. УТОЧНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ БЕРНСАЙДА

Если конечная группа имеет класс сопряженных элементов, порядок которого есть неединичная степень простого числа, то по теореме Бернсайда 2A32 она не проста. Следующее уточнение этого результата получено Л. С. Казариным [26]. Напомним, что $S(G)$ обозначает разрешимый радикал группы G.

A1. Теорема. Пусть $x \in G$ и $|x^G| = r^m$, где r — простое число и $m \in \mathbf{Z}$. Тогда $x \in S(G)$.

Доказательство. Пусть G — контрпример наименьшего порядка к теореме. Среди элементов $x \in G \setminus S(G)$, удовлетворяющих условию теоремы, выберем элемент наименьшего порядка. Тогда

$$\text{(a1)} \qquad o(x) = p, \text{ где } p \text{ — простое число.}$$

Кроме того, $m > 0$ и по упомянутой теореме Бернсайда группа G не проста.

Пусть $M \lhd G$, $\bar{G} = G/M$ и $\bar{x} = xM$. Тогда $|\bar{x}^{\bar{G}}| = |\bar{G} : C_{\bar{G}}(\bar{x})|$ делит $|G : C_G(x)| = r^m$, поскольку $C_{\bar{G}}(\bar{x}) \geqslant \overline{C_G(x)} = C_G(x)M/M$. Так как $|\bar{G}| < |G|$, то $\bar{x} \in S(\bar{G})$. Отсюда и того факта, что x не может содержаться ни в какой истинной нормальной подгруппе N группы G (иначе $x \in S(N) \subseteq S(G)$), следует, что

$$G/M \text{ разрешима.}$$

Если предположить, что G имеет две минимальные нормальные подгруппы M_1 и M_2, то G будет изоморфно подгруппе разрешимой группы $(G/M_1)\times(G/M_2)$, что невозможно, так как G — контрпример к теореме. Следовательно,

(a2) G имеет точно одну минимальную нормальную подгруппу.

Пусть M — минимальная нормальная подгруппа в G. Предположим, что подгруппа $M \rtimes \langle x \rangle$ отлична от G. Так как $|x^{M\langle x \rangle}| = |M\langle x \rangle : C_{M\langle x \rangle}(x)| = |MC_G(x) : C_G(x)|$ делит r^m, то из $M\langle x \rangle < G$ следует, что $x \in S(M\langle x \rangle)$. Но тогда $M\langle x \rangle = M \times \langle x \rangle$, $x \in C_G(M) \trianglelefteq G$ и $M \not\leq C_G(M)$ (так как M неразрешима), в противоречие с (a2). Следовательно,

(a3) $G = M \rtimes \langle x \rangle$, где M — минимальная нормальная подгруппа в G.

Предположим, что $p = r$ и обозначаем через R силовскую r-подгруппу из G, содержащую x. По условию $G = C_G(x)R$. Отсюда $x \in \bigcap_{g \in G} R^g \subseteq S(G)$. Следовательно,

(a4) $$p \neq r.$$

Предположим, что p не делит $|M|$. Тогда $\langle x \rangle$ нормализует некоторую силовскую r-подгруппу R из M (аргумент Фраттини: $G = MN_G(R)$). Так как $G = C_G(x)R$, то $x^G = x^R \subseteq R \rtimes \langle x \rangle$ и, значит, $\langle x^G \rangle$ — разрешимая группа. Следовательно,

(a5) $$p \text{ делит } |M|.$$

Пусть B — главный p-блок группы G. Покажем, что

(a6) каждый линейный характер группы G содержится в B.

Действительно, если χ — линейный характер G, то $G_{p'} \subseteq M \cap \subseteq \operatorname{Ker}\chi$, $\chi\big|{}^0_{G_{p'}} = 1_G\big|{}^0_{G_{p'}}$ и $\left(\chi\big|{}^0_{G_{p'}}, 1_G\right)_G \neq 0$. Это означает, что χ непосредственно p-связан с 1_G (3Д5) и, следовательно (3Д6), лежит в B (a6) доказано.

Таким образом, B содержит p линейных характеров.

Пусть χ — нелинейный характер из B. Предположим, что r не делит $\chi(1)$. Тогда по **2A31** либо $\chi(x) = 0$, либо $|\chi(x)| = \chi(1)$. Так как $\chi \in$ B, то по теореме 5A8 ((1)$\Rightarrow$(2)) $\frac{|x^G|\chi(x)}{\chi(1)} \equiv |x^G| (\operatorname{mod} \mathfrak{p})$, а так как $|x^G| = r^m \notin \mathfrak{p}$, то $\chi(x) \neq 0$. Следовательно, $|\chi(x)| = \chi(1)$. Отсюда по **2A30** $x \operatorname{Ker}\chi \in Z(G/\operatorname{Ker}\chi)$. Но $\operatorname{Ker}\chi \not\geq M$ и по (a2) $\operatorname{Ker}\chi = 1$. Значит, $x \in Z(G) \subseteq S(G)$, что противоречиво. Поэтому

(a7) $\chi(1) = rn_\chi$, где $n_\chi \in N$, для всех $\chi \in$ B с $\chi(1) > 1$.

По (а5) существует элемент y порядка p в M. Так как 1 и y лежат в разных p-сечениях группы G, то по **533**(1)

$$\sum_{\chi \in \mathrm{B}} \chi(1)\chi(y) = 0.$$

Отсюда

$$\sum_{\substack{\chi \in \mathrm{B} \\ \chi(1)>1}} \chi(1)\chi(y) + \sum_{\substack{\chi \in \mathrm{B} \\ \chi(1)=1}} \chi(y) = 0,$$

т. е. (см. (а7) и (а6))

$$r\left(\sum_{\substack{\chi \in \mathrm{B} \\ \chi(1)>1}} n_\chi \chi(y)\right) + p = 0,$$

что противоречиво (**2А6** (3)).

Значит, контрпримера к теореме не существует.

$\lrcorner$

§ Б. Z^*-ТЕОРЕМА

Следующая теорема носит название Z^*-теоремы и принадлежит Глауберману [69]. Она является расширением теоремы Брауэра — Судзуки о непростоте групп с обобщенио кватернионной силовской 2-подгруппой [12, теорема 21], используемой в доказательстве.

Напомним, что $Z^*(G)$ обозначает полный прообраз в G подгруппы $Z(G/O(G))$ из $G/O(G)$.

Б1. Теорема. Пусть $T \in \mathrm{Syl}_2(G)$ и t — инволюция из T. Равносильны условия:
(1) $o([g, t])$ нечетен для всех $g \in G$,
(2) $t^G \cap T = \{t\}$,
(3) $t \in Z^*(G)$.

Доказательство. (1)$\Rightarrow$(2): Пусть $g \in G$ и $t^g \in T$. По (1) $o(t^g t)$ нечетен. Но $t^g t \in T$. Следовательно, $t^g t = 1$ и $t^g = t^{-1} = t$.

(2)$\Rightarrow$(1): Пусть $g \in G$ и $o([g, t])$ четен. Положим $s = t^g$. Тогда $[g, t] = st \in \langle s, t \rangle = \langle st \rangle \rtimes \langle t \rangle \cong D((st)^t = (st)^{-1})$ и существует инволюция z в $\langle st \rangle$, принадлежащая, очевидно, $Z(D)$. Пусть $t \in P \in \mathrm{Syl}_2(D)$. Тогда $s^d \in P$ для некоторого $d \in D$. Очевидно, существует $x \in G$ с $P^x \subseteq T$. Тогда $\{t^x, s^{dx}\} \subseteq T$ и по (2) должно быть $t^x = s^{dx}$, т. е. $t = s^d$. Но это противоречиво, так как тогда $D = \langle s, t \rangle \subseteq \langle (st)^2 \rangle \rtimes \langle t \rangle \lhd D$.

(3)$\Rightarrow$(1): Если $t \in Z^*(G)$, то для всех $g \in G$ $[g, t] \in O(G)$ и, следовательно, $o([g, t])$ нечетен.

(1)$\Rightarrow$(3): Пусть G — контрпример наименьшего порядка к утверждению ((1)$\Rightarrow$(3)). Пусть t — инволюция из G такая, что $o[g, t]$ нечетен для всех $g \in G$ и $t \notin Z^*(G)$.

Установим ряд свойств группы G. Два первых непосредственно следуют из минимальности G.

(61) $$O(G)=1.$$

(62) $$\text{Если } t\in H<G, \text{ то } t\in Z^*(H).$$

(63) $$\langle t^G \rangle = G.$$

Предположим, что $\langle t^G \rangle = N \neq G$. Так как $N \trianglelefteq G$, то $O(N) \subseteq O(G)$ и по (61) $O(N)=1$. Но по (62) $t\in Z^*(N)=Z(N)$. Теперь для каждого $g\in G$ t^g есть инволюция из $Z(N)$ и, значит, $(t^g t)^2=1$. Но по условию $o(t^g t)$ нечетен, откуда $t^g t=1$, т. е. $t^g=t$. Получается, что $t\in Z(G)$ и G — не контрпример.

(64) $$\text{Если } 1\neq N\lhd G, \text{ то } G=N\leftthreetimes \langle t \rangle.$$

По (63) $t\notin N$. Тогда условие (1) выполнено для $(tN,\ G/N)$ на месте $(t,\ G)$ и так как $|G/N|<|G|$, то $tN\in Z^*(G/N)$, т. е. $G/N \rhd O(G/N)\leftthreetimes\langle tN \rangle$ и по (63) $G/N=O(G/N)\leftthreetimes\langle tN \rangle$. Следовательно,

$$G=K\leftthreetimes\langle t \rangle, \text{ где } |K/N| \text{ нечетен.}$$

Если $N<K$, то $H=N\leftthreetimes\langle t \rangle$ и по (62) $t\in Z^*(H)$. Но $O(H)\subseteq O(N)\subseteq O(G)=1$. Значит, $t\in Z(H)$ и $t\in C_G(N)\trianglelefteq G$. По (63) $C_G(N)=G$, т. е. $N\subseteq Z(G)$. Теперь по (61) N — 2-группа и $K=N\times O(K)=N$. Итак, $G=N\leftthreetimes\langle t \rangle$.

(65) $$T \text{ имеет инволюцию, отличную от } t.$$

В противном случае, T — циклическая или обобщенно кватернионная группа. В первом случае, очевидно, $G=O(G)\leftthreetimes T$. Во втором — $t\in Z^*(G)$ по теореме Брауэра — Судзуки [12, теорема 21]. В любом случае G — не контрпример.

(66) Пусть s — инволюция из G, не сопряженная с t, $D=\langle s,\ t \rangle$ и $t\in T_0\in \mathrm{Syl}_2(D)$. Тогда

$$T_0=\langle t \rangle\times\langle z \rangle, \text{ где } z \text{ — инволюция из } \langle st \rangle,$$

$$tz\in s^D,$$

$$O(\langle st \rangle)\subseteq O(C_G(z)).$$

Очевидно, $D=\langle st \rangle\leftthreetimes\langle t \rangle$, причем $o(st)$ четен (иначе s и t сопряжены) и $C_D(t)=\langle t \rangle\times\langle z \rangle$, где z — инволюция из $\langle st \rangle$. Так как по (62) $t\in Z(T_0)$, то $T_0=C_D(t)=\langle t \rangle\times\langle z \rangle$.

Так как $s\in D$, то существует $s_0\in s^D\cap T_0$. Очевидно, $s_0\neq t$ и $s_0\neq z$. Следовательно, $s_0=tz$. Далее, пусть $H=C_G(z)$. По (62) $t\in Z^*(H)$, т. е. $[H,\ t]\subseteq O(H)$. Очевидно, $O(\langle st \rangle)=\langle (st)^2 \rangle$, а $(st)^2=[s,\ t]\subseteq O(H)$. Свойство (66) доказано.

(67) Пусть s — инволюция из G, не сопряженная с t, B — главный 2-блок группы G и $\chi\in$ B. Тогда

$$\chi(st)=\chi(s^x t^y) \text{ для всех } x,\ y\in G.$$

Так как $s^x t^y = (s^{xy^{-1}} t)^y$ и χ — классовая функция, то достаточно доказать свойство (б7) при $y = 1$.

Примем обозначения из (б6). Так как $st = z(st)_{2'}$ и по (б6) $(st)_{2'} \in O(C_G(z))$, то по 5Й4 $\chi(st) = \chi(z)$. Положим $s_0 = tz$. Тогда

(б8) $$\chi(st) = \chi(s_0 t), \text{ где } s_0 \in s^G \cap C_G(t).$$

Пусть теперь $x \in G$. Подобно предыдущему получаем

(б9) $$\chi(s^x t) = \chi(\widetilde{s_0} t), \text{ где } \widetilde{s_0} \in s^G \cap C_G(t).$$

Выберем $x \in G$ так, что $\widetilde{s_0}^x = s_0$. Тогда $\{t, t^x\} \subseteq C_G(s_0)$. Так как $o(t^x t)$ нечетен по предположению и $\langle t^x, t \rangle = \langle t^x t \rangle \rtimes \langle t \rangle$, то $t^x = t^c$ для некоторого $c \in \langle t^x, t \rangle \subseteq C_G(s_0)$. Следовательно, $(s_0 t)^{cx^{-1}} = (s_0{}^{cx^{-1}}) t = \widetilde{s_0} t$. Отсюда и из (б8), (б9) следует, что $\chi(st) = \chi(s^x t)$.

(б10) Пусть s — инволюция из $T \setminus \{t\}$, B — главный 2-блок группы G и $\chi \in \mathrm{B} \setminus \{1_G\}$. Тогда

$$\chi(s)(\chi(t) + \chi(1)) = 0.$$

Так как (1)$\Rightarrow$(2), то $s \notin t^G$. Пусть $\mathrm{Cl}(G) = \{C_1, \ldots, C_k\}$, где $C_1 = s^G$ и $C_2 = t^G$. По 1Ё7(3)

(б11) $$\widetilde{C}_1 \widetilde{C}_2 = \sum_{i=1}^{k} a_i \widetilde{C}_i, \text{ где } a_i \in \mathbf{Z}.$$

Применив к обеим частям этого равенства алгебраический гомоморфизм ω_χ $\left(\omega_\chi(\widetilde{g^G}) = \dfrac{|g^G| \chi(g)}{\chi(1)}\right.$ (2А9)), получим

(б12) $$\frac{|C_1| \chi(s)}{\chi(1)} \frac{|C_2| \chi(t)}{\chi(1)} = \sum_{i=1}^{k} a_i \frac{|C_i| \chi(x_i)}{\chi(1)} \quad (x_i \in C_i).$$

Если $a_i \neq 0$, то по 1Ё7(4) $x_i = s^x t^y$ для некоторых $x, y \in G$ и по (б7) $\chi(x_i) = \chi(st)$. Поэтому (б12) перепишется в виде

$$|C_1| \chi(s) |C_2| \chi(t) = \chi(1) \chi(st) \sum_{i=1}^{k} a_i |C_i|.$$

Но из (б11) и 1Ё7(4) следует, что $|C_1||C_2| = \sum_{i=1}^{k} a_i |C_i|$. Следовательно,

(б13) $$\chi(s) \chi(t) = \chi(1) \chi(st).$$

Так как по (б2) $t \in Z(T)$ $(T \in \mathrm{Syl}_2(G),\ t \in T)$, то st есть инволюция из T, отличная от t. Поэтому равенство (б13) останется справедливым, если в нем заменить s на st. Получаем

(б14) $$\chi(st) \chi(t) = \chi(1) \chi(s).$$

Если $\chi(s)\neq 0$, то $\chi(st)\neq 0$ и из равенств (б13), (б14) получаем $\chi(t)^2=\chi(1)^2$, т. е. $\chi(t)=\pm\chi(1)$. Если $\chi(t)=\chi(1)$, то $t\in\operatorname{Ker}\chi\lhd G$ ($\chi\neq 1_G$), что противоречит (б3). Значит, при $\chi(s)\neq$ $\neq 0$ будет $\chi(t)=-\chi(1)$ и (б10) доказано.

Теперь можно легко завершить доказательство теоремы **Б1.** По (б6) существует инволюция $s\in T\setminus\{t\}$. Так как (1)⇒(2), то $s^G\neq t^G$. По 533(1)

$$\sum_{\chi\in B}\chi(s)\chi(t)=\sum_{\chi\in B}\chi(s)\chi(1)=0.$$

Теперь

$$0=\sum_{\chi\in B}\chi(s)\chi(t)+\sum_{\chi\in B}\chi(s)\chi(1)=$$

$$=\sum_{\chi\in B}\chi(s)(\chi(t)+\chi(1))=_{(б.10)}1_G(s)(1_G(t)+1)=2.$$

Полученное противоречие показывает отсутствие контрпримера G.

□

§ В. О ГРУППАХ С СИЛЬНО ЗАМКНУТОЙ АБЕЛЕВОЙ 2-ПОДГРУППОЙ

В этом параграфе будет доказано одно обобщение Z^*-теоремы **Б1**, полученное Гольдшмидтом [71]. Пусть $A\leqslant T\leqslant G$. Напомним, что A называется сильно замкнутой в T относительно G, если $A^G\cap T=A$, т. е. для всех $a\in A$ и $g\in G$ из $a^g\in T$ следует $a^g\in A$.

В1. Теорема. Пусть $T\in\mathrm{Syl}_2(G)$ и A — абелева подгруппа из T, сильно замкнутая в T относительно G. Предположим, что имеется инволюция t в $C_T(A)\setminus A$ такая, что $A\subseteq O_{2',2}(C_G(\tilde{t}))$ для всех инволюций $\tilde{t}$ из At. Тогда $A\subseteq O_{2',2}(G)$.

Если $|A|=2$, то предположение, содержащееся во втором предложении теоремы, может быть опущено, так как оно получается по индукции и по теореме Брауэра и Судзуки **2Е6** о группах с обобщенно кватернионной силовской 2-подгруппой. При $|A|>2$ оно не может быть опущено, так как имеются простые группы G, имеющие абелевы сильно замкнутую подгруппу A в T.

Для доказательства теоремы потребуется следующий результат.

В2. Пусть $T\in\mathrm{Syl}_2(G)$ и A — абелева подгруппа из T. Равносильны условия:

(1) A сильно замкнута в T относительно G;

(2) $N_G(A)$ контролирует слияние в T относительно G (т. е. для всех $t\in T$ и $g\in G$ из $t^g\in T$ следует, что $t^g=t^n$ для некоторого $n\in N_G(A)$).

Доказательство. См. [70, теорема 6.1].

□

Доказательство теоремы В1. Предположим, что

(в1) G — минимальный контрпример к **В1** и A — подгруппа наименьшего порядка, удовлетворяющая условию теоремы **В1**, но не ее заключению.

Пусть $N \trianglelefteq G$ и $\overline{G}=G/N$. Всегда, когда некоторая фактор-группа группы G обозначена через $\overline{G}$, условимся под $\overline{M}$, где M — подмножество или элемент из G, понимать образ M при естественном гомоморфизме G на $\overline{G}$. Ясно, что $\overline{T} \in \mathrm{Syl}_2(\overline{G})$. Покажем, что

(в2) $\qquad\qquad \overline{A}$ сильно замкнута в $\overline{T}$ относительно $\overline{G}$.

Действительно, пусть $a \in A$, $g \in G$ и $\overline{a^g} \in \overline{T}$. Тогда $a^g \in TN$ и по теореме Силова $a^{gn} \in T$ для некоторого $n \in N$. Так как по условию $A^G \cap T = A$, то $a^{gn} \in A$. Значит, $\overline{a^g} = \overline{a^{gn}} \in \overline{A}$ и (в2) верно.

Предположим, что $|N|$ нечетен. Тогда $C_{\overline{G}}(\overline{i}) = \overline{C_G(i)}$ для любой инволюции i из G и $\overline{t} \in C_{\overline{T}}(\overline{A}) \diagdown \overline{A}$. Понятно, что $\overline{G}$, $\overline{A}$ удовлетворяют условию теоремы В1 на месте G, A. Следовательно, по (в1)

(в3) $$O(G)=1.$$

Предположим, что $Z(G) \neq 1$. По (в3) $Z(G)$ — 2-группа. Так как At не может иметь центральных инволюций по (в1), то $t \notin AZ(G)$. Положим $\overline{G} = G/Z(G)$. Тогда $\overline{t} \in C_{\overline{T}}(\overline{A}) \diagdown \overline{A}$. Пусть t_1 — инволюция из $\overline{A}\overline{t}$. Тогда $t_1 = \overline{zat}$, где $z \in Z(G)$ и $a \in A$. Положим $\widetilde{t} = at$, $\widetilde{t}^2 = a^2 \in Z(G)$ (так как t_1 — инволюция). Если $a^2 \neq 1$, то $A \cap Z(G) \neq 1$ и в силу минимальности A в (в1) будет $A \subseteq Z(G)$. Но это противоречит тому, что A не удовлетворяет заключению теоремы **В1**. Следовательно, $a^2=1$ и $\widetilde{t}$ — инволюция. Пусть K — полный прообраз $C_{\overline{G}}(t_1)$ в G. Тогда $K = N_G(Z(G)\langle \widetilde{t} \rangle)$ и $C_G(\widetilde{t}) \trianglelefteq K$. Теперь $\overline{C_G(\widetilde{t})} \trianglelefteq C_{\overline{G}}(t_1)$ и поэтому

$$\overline{A} \subseteq \overline{O_{2',2}(C_G(\widetilde{t}))} \subseteq O_{2',2}(\overline{C_G(\widetilde{t})}) \subseteq O_{2',2}(C_{\overline{G}}(t_1)).$$

Снова $\overline{G}$, $\overline{A}$ удовлетворяют условию теоремы **В1** на месте G, A. По (в1) $\overline{A} \subseteq O_{2',2}(\overline{G})$. Отсюда и из (в3), следует что $\overline{A} \subseteq O_2(\overline{G})$ и, значит, $A \subseteq O_2(G)$. Это противоречит (в1). Следовательно,

(в4) $$Z(G)=1.$$

Пусть A_0 — минимальная нормальная подгруппа из $N_G(A)$, содержащаяся в A. Предположим, что $A_0 < A$. По **В2** A_0 сильно замкнута в T относительно G. Кроме того, $A_0 \subseteq A \subseteq O_{2',2} \times$ $\times (C_G(\widetilde{t}))$ для любой инволюции $\widetilde{t} \in A_0 t$. Из-за минимальности выбора A в (в1) имеем $A_0 \subseteq O_{2',2}(G) =_{(в3)} O_2(G)$. Отсюда и из сильной замкнутости A_0 в T следует, что $A_0 \trianglelefteq G$. Пусть $K = C_G \times \times (A_0) (\trianglelefteq G)$. Тогда $A \langle t \rangle \subseteq T \cap K \in \mathrm{Syl}_2(K)$. Легко увидеть, что K, A удовлетворяют условию теоремы на месте G, A. Кроме того, $K \neq G$, так как $Z(G) = 1$. По (в1) $A \subseteq O_{2',2}(K) \subseteq O_{2',2} \times \times (G)$. Противоречие. Следовательно,

(в5) A — минимальная нормальная подгруппа в $N_G(A)$ и, в частности, A элементарная абелева.

Пусть $N \lhd G$ и $A \cap N \neq 1$. Из (в5) следует, что $A \subseteq N$ и, значит, $\langle A^G \rangle \subseteq N$. Легко увидеть, также, что $N \langle t \rangle$, A удовлетворяют условию теоремы на месте G, A. Если $G \neq N \langle t \rangle$, то $A \subseteq O_{2',2}(N \langle t \rangle) \cap N \subseteq O_{2',2}(N) \subseteq O_{2',2}(G)$, в противоречие с (в1). Следовательно, $G = N \langle t \rangle$. Подобно получаем, что $G = \langle A^G \rangle \langle t \rangle$. Значит, $N = \langle A^G \rangle$. Таким образом,

(в6) если $N \lhd G$ и $A \cap N \neq 1$, то $N = \langle A^G \rangle$ и $G = N \rtimes \langle t \rangle$

(в7) Пусть $t_1, \ldots, t_m$ обозначают инволюции из At такие, что любая инволюция из At сопряжена в G точно с одной из инволюций $t_1, \ldots, t_m$.

Докажем следующее утверждение.

(в8) Если $a \in A \setminus \{1\}$, то $a^G t_i^G \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} (t_j O(C_G(t_j)))^G$

$$(i = 1, \ldots, m).$$

Пусть $g = a' t_i'$, где $a' \in a^G$ и $t_i' \in t_i^G$. Как известно, $g = g_2 \times \times g_{2'} = g_{2'} g_2$, где g_2 — 2-часть и $g_{2'}$ — $2'$-часть элемента g. Утверждение (в8) будет доказано, если мы покажем, что g_2 сопряжена с инволюцией из At и $g_{2'} \in O(C_G(g_2))$. Инволюции a' и t_i' порождают группу диэдра $D = \langle a', t_i' \rangle = \langle a' \rangle \rtimes \langle g \rangle$. По теореме Силова $(\langle a' \rangle \langle g_2 \rangle)^y \subseteq T$ для некоторого $y \in G$. Очевидно, можно считать, что элемент g в $a^G t_i^G$ выбран так, что $\langle a' \rangle \langle g_2 \rangle \subseteq T$. Так как $A^G \cap T = A$, то $a' \in A$ и $t_i \notin (a')^G$. Поэтому $4 \mid |D|$ и $g_2 \neq 1$. Легко заметить, что D имеет точно три класса сопряженных инволюций с представителями a', $a' g_2$ и g_2^k для некоторого натурального k. Так как $t_i' \in D$, то t_i' сопряжена в D с a', $a' g_2$ или g_2^k. Уже замечено выше, что t_i' не сопряжена с a'. Кроме того, t_i' не сопряжена в D с g_2^k, поскольку $g_2^k \in Z(D)$. Следовательно, t_i' сопряжена в D с $a' g_2$, т. е. $t_i = (a' g_2)^y$ для некоторого $y \in G$. Так как $N_G(A)$ контролирует слияние в T относительно G по В2, то $t_i = (a' g_2)^n = a'^n g_2^n$ для некоторого $n \in N_G(A)$, откуда $g_2^n = a'^n t_i \in At$. Так как $t \in C_G(A)$ и A элементарная абелева, то g_2 — инволюция. Остается показать, что $g_{2'} \in O(C_G(g_2))$. По предположению $A \subseteq O_{2',2}(C_G(g_2^n)) = (O_{2',2}(C_G(g_2)))^n$, откуда $a' \in A \subseteq O_{2',2}(C_G(g_2))$. Отсюда и из того, что a' инвертирует $g_{2'}$, получаем $g_{2'}^2 = [a', g_{2'}] \in O_{2',2} \times (C_G(g_2))$. Так как $o(g_{2'})$ нечетен, то отсюда следует, что $g_{2'} \in O(C_G(g_2))$. Утверждение (в8) доказано.

Теперь мы начнем работать с характерами. Напомним, что $\omega_\chi(\widetilde{g^G}) = \frac{\chi(g)|g^G|}{\chi(1)}$ при $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ и $g \in G$.

(в9) Пусть B_1 — главный 2-блок группы G. Тогда для любого $a \in A \setminus \{1\}$ существует матрица $b \in M(m, \boldsymbol{Z})$ такая, что

$$\omega_\chi(\widetilde{a^G})\,\chi(t_i)\,|t_i^G| = \sum_{j=1}^{m} \mathrm{b}_{ij}\chi(t_j)\,|t_j^G|$$

для всех $i \in \{1, \ldots, m\}$ и всех $\chi \in \mathrm{B}_1$.

Так как $a^G t_i^G \trianglelefteq G$, то по (в8) $a^G t_i^G = \dot{\bigcup}_{j=1}^{m} \dot{\bigcup}_{x \in M_{ij}} (t_j x)^G$, где $M_{ij} \subseteq O(C_G(t_j))$. Следовательно, существуют целые неотрицательные числа a_{ijx} такие, что

$$\widetilde{a^G}\,\widetilde{t_i^G} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{x \in M_{ij}} a_{ijx}\widetilde{(t_j x)^G} \quad (i = 1, \ldots, m).$$

Применяя к обеим частям равенства алгебраический гомоморфизм ω_χ и умножение на $\chi(1)$, получаем

$$\omega_\chi(\widetilde{a^G})\,\chi(t_i)\,|t_i^G| = \sum_{j=1}^{m} \sum_{x \in M_{ij}} a_{ijx}\chi(t_j x)|(t_j x)^G|$$

для всех $i \in \{1, \ldots, m\}$ и $\chi \in \mathrm{B}_1$. Но $\chi(t_j x) = \chi(t_j)$ по 5Й5 и, очевидно, $|(t_j x)^G| = |t_j^G|\,|C_G(t_j) : C_G(t_j x)|$. Таким образом, положив $\mathrm{b}_{ij} = \sum_{x \in M_{ij}} a_{ijx}|C_G(t_j) : C_G(t_j x)|$, получим (в9).

(в10) Положим $N = \langle A^G \rangle$ (нормальное замыкание A в G). Тогда $G = N \rtimes \langle t \rangle$. Если $y \in T \setminus N$, то $y \in t_j^G$ для некоторого j.

Для $\chi \in \mathrm{B}_1$ положим

$$v_\chi = \begin{pmatrix} \chi(t_1)\,|t_1^G| \\ \vdots \\ \chi(t_m)\,|t_m^G| \end{pmatrix}.$$

Пусть $a \in A$. По (в9) $\omega_\chi(\widetilde{a^G})\,v_\chi = \mathrm{b}v_\chi$, т. е. v_χ — собственный вектор матрицы b, соответствующий собственному значению $\omega_\chi(\widetilde{a^G})$. Пусть y — произвольный 2-элемент из G, не сопряженный ни с одним элементом из At. По 533(1)

$$\sum_{\chi \in \mathrm{B}_1} \chi(y)\,\chi(t_i) = 0 \quad (1 \leqslant i \leqslant m)$$

Умножая это на $|t_l^G|$, получаем

$$\sum_{\chi\in B_1} \chi(y)\, v_\chi = O.$$

Пусть $B_1 = \{\chi_1, \ldots, \chi_l\}$. Предположим, что характеры в B_1 упорядочены так, что $\chi_1 = 1$ и $\omega_{\chi_1}(\widetilde{a^G}) = \ldots = \omega_{\chi_r}(\widetilde{a^G}) \neq \neq \omega_{\chi_s}(\widetilde{a^G})$ при $s > r$. Теперь перепишем предыдущее выделенное равенство в виде

$$\sum_{s=1}^{r} \chi_s(y)\, v_{\chi_s} = -\sum_{s=r+1}^{l} \chi_s(y)\, v_{\chi_s}.$$

Поскольку собственные векторы матрицы, соответствующие различным собственным значениям, линейно независимы [18, с. 84], то должно быть

$$\sum_{s=1}^{r} \chi_s(y)\, v_{\chi_s} = O.$$

Так как $\chi_1(y) = 1$, то $r \geqslant 2$. Из $\omega_{\chi_1}(\widetilde{a^G}) = \omega_{\chi_2}(\widetilde{a^G})$ следует, что $\chi_2(a) = \chi_2(1)$ и, значит (2A30(1)), $a \in \operatorname{Ker}\chi_2 \lhd G$. По (в6) $\operatorname{Ker}\chi_2 = \langle A^G \rangle = N$ и $G = N\langle t \rangle$. Так как $N \neq G$, то $G = N \leftthreetimes \langle t \rangle$.

Остается доказать последнее утверждение в (в10). Если предположить, что $r \geqslant 3$, то будет $\operatorname{Ker}\chi_3 = \operatorname{Ker}\chi_2 = N$, что невозможно, поскольку $|G/N| = 2$. Следовательно, $r = 2$ и мы имеем $\chi_1 \times \times (y)\, v_{\chi_1} + \chi_2(y)\, v_{\chi_2} = O$. Напомним, что здесь y — любой 2-элемент группы G, не сопряженный с инволюцией из At. Если предположить, что такой элемент y есть в $T \setminus N$, то будет $\chi_1(y) = 1$, $\chi_2(y) = -1$ и $v_{\chi_1} - v_{\chi_2} = O$. Но в качестве y можно взять единицу и тогда получить $v_{\chi_1} + v_{\chi_2} = O$, что противоречит предыдущему равенству. Утверждение (в10) доказано.

Пусть $T_0 = T \cap N$. Так как $G = N \leftthreetimes \langle t \rangle$, то $T = T_0 \leftthreetimes \langle t \rangle$. Кроме того, по (в10) $T_0 t\ (= T \setminus T_0)$ состоит из инволюций. Следовательно, t инвертирует T_0, а значит, T_0 абелева и $\Omega_1(T_0)$ (нижний слой T_0) содержится в $Z(T)$. Так как A — элементарная абелева, то $A \subseteq \Omega_1(T_0)$. Предположим, что $A < \Omega_1(T_0)$. Пусть $t_0 \in \Omega_1(T_0) \setminus A$ и $K = C_G(t_0)$. Так как $Z(G) = 1$, то $K \neq G$. Учитывая, что $T \subseteq K$, легко увидеть, что A сильно замкнута в T относительно K и $A \subseteq O_{2',2}(C_G(\tilde{t})) \cap C_K(\tilde{t}) \subseteq O_{2',2}(C_G(\tilde{t}))$ для всех $\tilde{t} \in At$. По (в1) $A \subseteq O_{2',2}(C_G(t_0))$. Поскольку это верно для любой инволюции t_0 из $\Omega_1(T_0) \setminus A$, то при фиксированной t_0 будет также $A \subseteq O_{2',2}(C_G(\tilde{t}_0))$ для всех $\tilde{t}_0 \in At_0$. Таким образом, t_0 удовлетворяет условию, наложенному в теореме на t. Следовательно, все предыдущие утверждения останутся верными при замене t на t_0. В частности, по (в10) будет $G = N \leftthreetimes \langle t_0 \rangle$ $(N =$

$= \langle A^G \rangle$). Но это противоречит тому, что $t_0 \in T_0 \subseteq N$. Мы доказали следующее утверждение.

(в11) Пусть $T_0 = T \cap N$ $(N = \langle A^G \rangle)$. Тогда T_0 абелева и $A = \Omega_1(T_0) \subseteq Z(T)$.

Положим $C = C_N(A)$. Тогда $T_0 \in \mathrm{Syl}_2(C)$ и $N_C(T_0)/C_C(T_0)$ изоморфна подгруппе H нечетного порядка из $\mathrm{Aut}(T_0)$, действующей тривиально на $A = \Omega_1(T_0)$. Поэтому $H = 1$ [73, теорема 5.2.4] и $N_C(T_0) = C_C(T_0)$. Но теперь по теореме Бернсайда ([73, теорема 7.4.3] или [52, теорема 14.3.1]) C имеет нормальное 2-дополнение. Так как $C_G(A) = C \leftthreetimes \langle t \rangle$, то

(в12) $\qquad C_G(A)$ имеет нормальное 2-дополнение.

Так как $T \leqslant C_G(A) \trianglelefteq N_G(A)$, то по лемме Фраттини $N_G(A) = N_G(T)\, C_G(A) = N_G(T)\, TO(C_G(A)) = N_G(T)\, O(N_G(A))$. Пусть теперь $x, x^g \in T$ для некоторого $g \in G$. Тогда $x^g = x^n$ для некоторого $n \in N_G(A)$ по В2. Но $n = n_1 n_2$, где $n_1 \in N_G(T)$ и $n_2 \in O \times \times (N_G(A))$. Поэтому $x^g = x^{n_1 n_2} = y^{n_2}$, где $y = x^{n_1} \in T$. Теперь $T \ni \ni y^{-1} y^{n_2} = [y, n_2] \in O(N_G(A))$, откуда $y^{-1} y^{n_2} = 1$ и $x^g = y^{n_2} = y = x^{n_1}$. Таким образом,

(в13) $\qquad N_G(T)$ контролирует слияние в T.

Отсюда следует, в частности, что $N_G(T) = T \leftthreetimes H$, где $H \neq 1$ (иначе по теореме Бернсайда N имеет нормальное 2-дополнение в противоречие с (в3)).

Предположим, что $A < T_0$. Так как $A = \Omega_1(T_0)$ по (в11), то $A \cap \Phi(T_0) \neq 1$, а так как $T_0 = T \cap N \trianglelefteq N_G(T)$, то $A \cap \Phi(T_0) \trianglelefteq \trianglelefteq N_G(T)$. Отсюда по (в13) $A \cap \Phi(T_0) \trianglelefteq N_G(A)$. Следовательно, по (в5) $A \subseteq \Phi(T_0)$ и, значит, $A \subseteq \Phi(T)$. Далее, по (в10) каждый элемент из $T \setminus T_0$ сопряжен в G с элементом из At. Поэтому $N_G(T)$ действует транзитивно на смежных классах по A, лежащих в $T \setminus T_0$. Следовательно, неединичная подгруппа H нечетного порядка действует на $\overline{T} = T/\Phi(T)$ и в силу того, что $\overline{A} = 1$, это действие транзитивно на $\overline{T} \setminus \overline{T}_0$. Но поскольку $\overline{T}$ H-инвариантна, то по 2А3 $\overline{T}$ имеет H-инвариантную подгруппу $\overline{T}_1$ такую, что $\overline{T} = \overline{T}_0 \times \overline{T}_1$. Это противоречит транзитивности H на $\overline{T} \setminus \overline{T}_0$. Следовательно,

(в14) $\quad T_0 = A$ и $T = A \times \langle t \rangle$ — элементарная абелева.

Из (в14) и 2А3 следует, что $T = A \times \langle t_1 \rangle$, где $\langle t_1 \rangle$ — H-инвариантная и поэтому $N_G(T)$-инвариантная подгруппа порядка 2. Теперь в силу (в13) $t_1^G \cap T = \{t_1\}$ и по теореме Б1 $t_1 \in Z^*(G)$. Однако, $Z^*(G) = Z(G) = 1$ по (в3) и (в4).

Таким образом, контрпримера к теореме В1 не существует.

$\square$

Результаты этого параграфа получены Л. С. Казариным [27].

Г1. Теорема. Пусть G имеет циклическую силовскую p-подгруппу и $G = AB$, где $A \leqslant G$ и $B \leqslant G$. Предположим, что $Z(A)$ имеет элемент a порядка p такой, что $\langle a^G \rangle = G$. Тогда $Z(B)_{p'} \subseteq O_{p'}(G)$.

Предварительно докажем следующее утверждение [68].

Г2. Пусть $G = AB$, $A \leqslant G$, $B \leqslant G$, $a \in Z(A)$ и $b \in Z(B)$. Тогда

$$\chi(ab) = \frac{\chi(a)\chi(b)}{\chi(1)} \text{ для всех } \chi \in \mathrm{Irr}(G).$$

Доказательство. Так как $G = AB$, то для любых x, $y \in G$ существуют $a_1 \in A$ и $b_1 \in B$ такие, что $xy^{-1} = a_1^{-1} b_1$. Тогда $a_1 x = b_1 y \equiv z$ и $a^x b^y = a^{a_1 x} b^{b_1 y} = (ab)^z$. Следовательно, $a^G b^G = (ab)^G$ и $\widetilde{a^G}\,\widetilde{b^G} = n\,\widetilde{(ab)^G}$ для некоторого $n \in N$. Отсюда следует, что $|a^G| \times |b^G| = n|(ab)^G|$ и по **2А8(3)** $\frac{|a^G|\chi(a)}{\chi(1)} \frac{|b^G|\chi(b)}{\chi(1)} = n \frac{|(ab)^G|\chi(ab)}{\chi(1)}$ при $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$. Из последних двух равенств следует требуемое утверждение.

□

Доказательство теоремы Г1. Пусть G — минимальный контрпример к теореме и $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$. Тогда, очевидно, $O_{p'}(G) = 1$. Поэтому если G имеет неединичную нормальную подгруппу N, то $|N|$ делится на p и $N \supseteq \langle a^G \rangle = G$. Кроме того, $G \neq \langle a \rangle$. Следовательно,

(г1) $\qquad G$ — простая неабелева группа.

Пусть $b \in Z(B)_{p'} \setminus \{1\}$. По **Г2**

(г2) $$\chi(ab) = \frac{\chi(a)\chi(b)}{\chi(1)} \text{ для всех } \chi \in \mathrm{Irr}(G).$$

Обозначим через B_1 главный p-блок группы G. По **Л2**

$$B_1 = \{\chi_1, \ldots, \chi_e\} \,\dot\cup\, \{\psi_1, \ldots, \psi_t\},$$

где $e = |N_G(P) : C_G(P)|$ и $t = \frac{|P|-1}{e}$, причем

(г3) $$\chi_1 = 1_G$$

(г4) $$\chi_i(g) = \delta_i \in \{1, -1\} \text{ при } g \in G \setminus G_{p'} \ (i = 1, \ldots, e),$$

(г5) $$\psi_j \big|_{G_{p'}} = \psi_1 \big|_{G_{p'}} \ (j = 1, \ldots, t).$$

По (г2) и (г4)

(г6) $$\chi_i(ab)=\delta_i\frac{\chi_i(b)}{\chi_i(1)}\ (i=1,\ \ldots,\ e).$$

Следовательно, $\frac{\chi_i(b)}{\chi_i(1)}\in\hat{Z}$, откуда по 2А31 и 2А30 (2) либо $\chi_i(b)=0$, либо $b\,\mathrm{Ker}\,\chi_i\in Z(G/\mathrm{Ker}\,\chi_i)$. Ввиду (г1) последний случай возможен лишь при $\chi_i=1_G$. Таким образом,

(г7) $$\chi_i(b)=\chi_i(ab)=0 \text{ при } i=2,\ \ldots,\ e.$$

Пусть $x\in G_{p'}$. По 533 (1) $\sum_{\chi\in B_1}\overline{\chi(a)}\,\chi(x)=0$. Отсюда и из (г4), (г5) следует, что

(г8) $$\sum_{i=1}^{e}\delta_i\chi_i(x)+\varepsilon\psi_j(x)=0 \text{ для всех } x\in G_{p'}\ (j=1,\ \ldots,\ t),$$

где $\varepsilon=\sum_{k=1}^{t}\psi_k(a)$. При $x=b$ отсюда с учетом (г7) получаем, что

(г9) $$1+\varepsilon\psi_j(b)=0\ (j=1,\ \ldots,\ t).$$

Предположим, что $ab\in G_{p'}$. Тогда по (г8) (при $x=ab$), (г7) и (г9)

$$\psi_j(b)=\psi_j(ab)\neq 0\ (j=1,\ \ldots,\ t).$$

Отсюда и из (г2) следует, что $\psi_j(a)=\psi_j(1)$, т. е. $a\in\mathrm{Ker}\,\psi_j$. Это противоречиво, так как $\mathrm{Ker}\,\psi_j=1$ по (г1) и (г3). Поэтому

(г10) $$ab\in G\setminus G_{p'}.$$

Из (г10) и (г4) вытекает, что $\chi_i(ab)=\delta_i\neq 0$ при $i=1,\ \ldots,\ e$. Значит, по (г7) $e=1$. Поэтому равенство (г8) при $x=1$ запишется так

$$1+\varepsilon\psi_j(1)=0.$$

Отсюда и из (г9) следует, что $\psi_j(b)=\psi_j(1)$, т. е. $b\in\mathrm{Ker}\,\psi_j$. Это противоречиво, так как $\mathrm{Ker}\,\psi_j=1$. (Случай $e=1$ противоречив и потому, что тогда $G=O_{p'}(G)\leftthreetimes P$ по теореме Берисайда [52, § 14.3].)

Таким образом, контрпримера к теореме не существует.

□

Г3. Теорема. Пусть $G=AB$, где A — p-разложимая подгруппа с циклической силовской p-подгруппой P и B — p'-подгруппа. Если $b\in Z(B)$ и $(o(b),\ p-1)=1$, то $b\in O_{p'}(G)$.

Доказательство. Пусть G — минимальный контрпример к теореме. Пусть $b\in Z(B)\setminus\{1\}$ с $(o(b),\ p-1)=1$ и a — элемент порядка p из A. По Л2 главный p-блок B_1 группы G имеет вид, описанный в доказательстве теоремы Г1. Легко увидеть, что

(г11) для G и b выполнены утверждения (г2) — (г6).

Очевидно, что

(г12) $$O_{p'}(G)=1.$$

Отсюда и из Г1 следует, что

(г13) $N\equiv\langle a^G\rangle$ — единственная минимальная нормальная подгруппа

$$\text{в } G \text{ и } N\neq G.$$

Из (г6) следует, что либо $\chi_i(ab)=\chi_i(b)=0$, либо $b\operatorname{Ker}\chi_i\in Z\times\times(G/\operatorname{Ker}\chi_i)$. По (г12) последнее возможно лишь тогда, когда $\operatorname{Ker}\chi_i\neq 1$, т. е. (см. (г13)) когда $a\in\operatorname{Ker}\chi_i$. Поэтому вследствие (г4) (при $g=a$)

(г14) $$\text{если } \chi_i(b)\neq 0, \text{ то } \chi_i(1)=\delta_i=1.$$

Без ограничения общности можно считать, что $A=C_G(P)$. Пусть $A=P\times M$. По Й6 число линейных характеров в B_1 равно $|G:G'M|$. Если это число равно 1, т. е. χ_1 — единственный линейный характер в B_1, то в силу (г14) будет выполнено утверждение (г7), а тогда, как и в доказательстве теоремы Г1, получим, что $\psi_j(a)=\psi_j(1)$ при $j=1,\ldots,t$ и, значит, $\sum_{j=1}^{t}\psi_j(a)\notin\notin\{1,-1\}$, в противоречие с Л2. Следовательно,

$$G'M\lhd G.$$

Если $P\nsubseteq G'M$, то $H\equiv G'MB<G$ и $H=(A\cap H)B$. По индукции $b\in O_{p'}(H)$. Но это противоречиво, так как $H\lhd G$ и $O_{p'}(H)\subseteq\subseteq O_{p'}(G)$. Поэтому $P\subseteq G'M$. Положим $L=G'M$. Тогда $L==G'A=A(L\cap B)$ и, вследствие минимальности G, $b\notin L$. По лемме Фраттини $G=LN_G(P)$. Значит, $|G/L|=|N_G(P)/N_G(P)\cap L|$ делит $|N_G(P)/C_G(P)|$ $(C_G(P)=A)$. Но $N_G(P)/C_G(P)$ изоморфна подгруппе группы всех автоморфизмов циклической группы P и поэтому ее порядок делит число $p^{\alpha-1}(p-1)$, где $p^\alpha=|P|$. Это противоречиво, так как образ элемента b в G/L не равен 1 и $o(b)$ взаимно прост с $p(p-1)$. Таким образом, контрпримера к теореме не существует.

□

Глава 7

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С НЕБОЛЬШИМ ГЛАВНЫМ p-БЛОКОМ

§ А. ФОРМУЛИРОВКИ ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Пусть p — простой делитель порядка группы G. Согласно 3Д9 главный p-блок B_1 группы G состоит более чем из одного характера. Не представляет труда исследовать крайний случай, когда $|B_1| = 2$. Напомним, что запись $p \| n$ для $n \in N$ означает, что $p|n$, но p^2 не делит n.

А1. Равносильны условия:

(1) главный p-блок группы G состоит из двух неприводимых характеров;

(2) $p=2$ и $2 \| |G|$.

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2): Пусть $\Phi = \{1_G, \varphi\}$ — главный p-блок G и $D = G_{p'}$. Тогда $1_G\big|^0_D = u1_G + v\varphi$ (u, $v \in C$; очевидно, $v \neq 0$). Применяя к этому равенству оператор $\big|^0_D$, находим $\varphi\big|^0_D = a1_G\big|^0_D$, где $a = \frac{1-u}{v}$. Отсюда следует (2А30), что $D \subseteq \operatorname{Ker}\varphi$. По 3Б1 ((1) $\Rightarrow$ (3)) $\varphi(g) \neq a$ при $g \in G \setminus D$. Следовательно, $D = \operatorname{Ker}\varphi$ и $D \lhd G$. По 3Б1 ((1) $\Rightarrow$ (2)) $\chi\big|^0_D$ не является константой при $\chi \in \operatorname{Irr}(G) \setminus \Phi$. Поэтому $\Phi = \operatorname{Irr}(G|D)$. Теперь $2 = |\Phi| = k(G/D)$, откуда следует (2).

(2) $\Rightarrow$ (1): Из (2) следует, что $G_{2'}$ — нормальная подгруппа индекса 2 в G [52, теорема Бернсайда 14.3.1]. Но тогда множество $\operatorname{Irr}(G|G_{2'})$ состоит из двух характеров и взаимодействует с $G_{2'}$ по 3А3(5). Следовательно, оно является главным 2-блоком и верно (1).

□

Цель этой главы — изучить конечные группы, имеющие главный p-блок, состоящий из трех характеров. Изложение материала следует [10]. В § Г доказывается следующий результат.

А2. Теорема. Равносильны условия:

(1) главный p-блок группы G состоит из трех неприводимых характеров;

(2) $p=3$ и $3 \| |G|$.

С помощью классификации конечных простых групп ситуация теоремы **А2** уточняется следующим образом.

А3. Теорема. Пусть главный 3-блок группы G состоит из трех неприводимых характеров 1_G, α и β, причем $\alpha(1) \leqslant \beta(1)$. Тогда $\operatorname{Ker}\alpha \cap \operatorname{Ker}\beta = O_{3'}(G)$ и для $\bar{G} = G/O_{3'}(G)$ выполнено одно из следующих условий:

1) $|\bar{G}| = 3$, $\alpha(1) = \beta(1) = 1$;

2) $\bar{G} \simeq S_3$, $\alpha(1) = 1$, $\beta(1) = 2$;

3) $\bar{G}$ имеет нормальную простую подгруппу L такую, что $\bar{G}$ изоморфна подгруппе из $\operatorname{Aut}(L)$, 3 не делит $|\bar{G}: L|$ и имеет место один из следующих случаев:

а) $L \simeq J_1$, $\alpha(1) = 76$, $\beta(1) = 77$;
б) $L \simeq PSL(2, q)$, $3 \| q+1$, $\alpha(1) = q-1$, $\beta(1) = q$;
в) $L \simeq PSL(2, q)$, $3 \| q-1$, $\alpha(1) = q$, $\beta(1) = q+1$;
г) $L \simeq PSL(3, q)$, $3 \| q+1$, $\alpha(1) = q^3-1$, $\beta(1) = q^3$;
д) $L \simeq PSU(3, q^2)$, $3 \| q-1$, $\alpha(1) = q^3$, $\beta(1) = q^3+1$.

Кроме того, в случаях 2) и 3) характеры α и β целочисленны.

А4. Замечания: 1. $\operatorname{Aut}(J_1) \simeq J_1$, $\operatorname{Aut}(PSL(2, q)) \simeq P\Gamma L(2, q)$; $\operatorname{Aut}(PSL(3, q)) \simeq P\Gamma L(3, q) \rtimes \langle \gamma \rangle$, где γ — графовый автоморфизм порядка 2; $\operatorname{Aut}(PSU(3, q^2)) \simeq P\Gamma U(3, q^2)$ (см. [**47**, теоремы 30 и 36]).

2. Точные значения характеров $\alpha|_L$ и $\beta|_L$ указаны в § Д.

§ Б содержит вспомогательные результаты, необходимые для доказательства теоремы **А3**. Здесь получены формулы, позволяющие вычислить показатель наибольшей степени данного простого числа, делящей порядок конечной группы лиева типа.

В § В изучается более общая ситуация, чем в теореме **А2**. Вместо p-блоков здесь рассматриваются D-блоки для произвольного нормального подмножества D группы G. Установлен ряд свойств группы G, имеющей главный D-блок порядка 3.

В § Г доказывается теорема **А2**. Доказательство опирается на результаты § В.

В § Д рассматриваются группы $PSL(2, q)$, $PSL(3, q)$, $PSU \times \times (3, q^2)$ и находятся необходимые и достаточные условия наличия у них главного D-блока порядка 3 для произвольного нормального подмножества D. Полученные здесь результаты используются в § Е.

В § Е доказывается теорема **А3**.

А5. Обозначения. Для целого числа $a \neq 0$ положим:
$\alpha_p(a)$ — наибольшее из целых чисел m с $p^m | a$;
$o_p(a)$ — наибольшее из натуральных чисел m с $a^m \equiv 1 \pmod p$ (не определено при $p|a$).

А6. Замечание. Следующие примеры показывают, что если в теореме А2 заменить 3 на 5, то каждое из ее утверждений (1) $\Rightarrow$ (2) и (2) $\Rightarrow$ (1) будет ложным.

1) Пусть $p = 5$. Если $G \simeq A_5$, A_6, $PSL(2, 11)$, $PSL(2, 19)$, или $PSL(2, 16)$, то $5 \| |G|$, но, как легко проверить (таблицы характеров этих групп см. в приложении 1), порядок главного 5-блока равен 4 ($\neq 5$).

2) Пусть $G \simeq PSL(2, 7)$, $PSL(2, 13)$, A_7, $PSU(3, 3^2)$, $PSL(2, 27)$ или $PSL(2, 29)$ и пусть $p = 7$ ($\neq 5$). Легко проверить, что порядок главного p-блока группы G равен 5.

§ Б. РАЗЛОЖЕНИЕ НА ПРОСТЫЕ МНОЖИТЕЛИ ПОРЯДКОВ КОНЕЧНЫХ ГРУПП ЛИЕВА ТИПА

В § Д потребуется найти все известные конечные простые группы G с $\alpha_3(|G|) = 1$. Задача сразу же сводится к случаю, когда G — группа лиева типа. Кроме того, в главе 8 для групп G лиева типа потребуется определить значения $\alpha_2(|G|)$. Поэтому в этом параграфе, обобщив задачу, мы покажем, как получить общие формулы для $\alpha_p(|G|)$ для всех таких G и всех простых чисел p. Такую возможность указывает следующий результат [4, лемма 2].

Б1. Теорема. Пусть p — простое число; a, b, n — целые числа, $a \neq b$ и $n > 0$. Предположим, что $a \equiv b \not\equiv 0 \pmod p$. Тогда

$$\alpha_p(a^n - b^n) = \begin{cases} \alpha_p(a-b) + \alpha_p(n), & \text{если } p > 2 \text{ или } n \text{ нечетно}, \\ \alpha_2(a-b) + \alpha_2(n) + \alpha_2\left(\dfrac{a+b}{2}\right), & \text{если } p = 2 \text{ и } n \text{ четно}. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $m, n \in N$ и $m \leqslant n$. Так как, очевидно, $\alpha_p(n!) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \left[\dfrac{n}{p^i}\right]$, то

$$\alpha_p\left(\binom{n}{m}\right) = \alpha_p\left(\frac{n!}{m!\,(n-m)!}\right) = \sum_{i=1}^{\infty}\left(\left[\frac{n}{p^i}\right] - \left[\frac{m}{p^i}\right] - \left[\frac{n-m}{p^i}\right]\right).$$

Но, как легко увидеть, $\left[\dfrac{n}{p^i}\right] - \left[\dfrac{m}{p^i}\right] - \left[\dfrac{n-m}{p^i}\right]$ равно 1 при $\left\{\dfrac{n}{p^i}\right\} < \left\{\dfrac{m}{p^i}\right\}$ и равно 0 в противном случае. Следовательно,

$$\text{(б1)} \qquad \alpha_p\left(\binom{n}{m}\right) = \left|\left\{ i \in N \,\middle|\, \left\{\frac{n}{p^i}\right\} < \left\{\frac{m}{p^i}\right\}\right\}\right|.$$

В частности,

$$\alpha_p\left(\binom{n}{m}\right) \geqslant \alpha_p(n) - \alpha_p(m), \tag{62}$$

$$\alpha_p\left(\binom{p^k}{m}\right) = k - \alpha_p(m) \text{ при } m \leqslant p^k. \tag{63}$$

Пусть теперь $\alpha_p(a-b) = u$ и $\alpha_p(n) = v$, т. е.

$$a = b + p^u l, \quad n = p^v m,$$

где $(l, p) = (m, p) = 1$. По условию $u \geqslant 1$ и $v \geqslant 0$. Покажем, что

1) $a^n = b^n + p^{u+v} lk$, где $(k, p) = 1$, если $p^u > 2$ или $v = 0$,

2) $a^n = b^n + p^{u+v}\left(\frac{a+b}{2}\right) lk$, где $(k, p) = 1$, если $p = 2$ и $v \neq 0$.

$\left(\text{Если } p = 2, \text{ но } p^u > 2, \text{ то } \frac{a+b}{2} \text{ нечетно}\right)$. Из 1) и 2) непосредственно вытекает утверждение леммы.

Так как $a^n = (b + p^u l)^n = b^n + np^u lb^{n-1} + \left(\sum\limits_{i=2}^{n} \binom{n}{i} p^{ui} l^i b^{n-i}\right)$, то для доказательства формулы из утверждения 1) достаточно показать, что третье слагаемое делится на p^{u+v+1}, для чего, в свою очередь, достаточно показать, что при $i \geqslant 2$ будет $\alpha_p\left(\binom{n}{i}\right) + ui \geqslant u + v + 1$. При $v = 0$ это очевидно. Пусть $v > 0$. По (62) $\alpha_p\left(\binom{n}{i}\right) \geqslant v - \alpha_p(i)$. Но $v - \alpha_p(i) + ui \geqslant u + v + 1$ при $i \geqslant 2$, если $p^u > 2$ (из $ui - \alpha_p(i) < u + 1$ следует $up^{\alpha_p(i)} - u < \alpha_p(i) + 1$, т. е. $u\left(p^{\alpha_p(i)} - 1\right) \leqslant \alpha_p(i)$, что верно лишь при $u = 1$, $p = 2$ и $\alpha_p(i) \leqslant 1$). Таким образом, утверждение 1) доказано.

Пусть теперь $p = 2$ и $v \neq 0$. Из утверждения 1) вытекает, что

1') $a^n = b^n + p^v(a-b)k$, где $(k, p) = 1$, если $u > 1$. Так как $\alpha_2(a^2 - b^2) > 1$, то с помощью утверждения 1') $\left(\text{примененного к } a^2, b^2, \frac{n}{2} \text{ на местах } a, b, n \text{ соответственно}\right)$ получаем $a^n = (a^2)^{\frac{n}{2}} = b^n + p^{v-1}(a^2 - b^2)k$, где $(k, p) = 1$. Это равносильно утверждению 2).

□

Заметим, что при нечетных a и b $\alpha_2\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$ тогда и только тогда, когда $a \equiv b \pmod 4$.

Из **Б1** легко вытекает следующее утверждение.

Б2. Для натурального числа n и целого числа q положим

$$l(n, q) = \prod_{i=1}^{n} (q^i - 1).$$

Пусть p не делит q и $o_p(q) = \delta$. Тогда

$$\alpha_p(l(n, q)) = \begin{cases} \alpha_p\left(\left[\frac{n}{\delta}\right]!\right) + \left[\frac{n}{\delta}\right]\alpha_p(q^\delta - 1), & \text{если } p > 2, \\ \alpha_2(n!) + n\alpha_2(q-1) + \left[\frac{n}{2}\right]\alpha_2\left(\frac{q+1}{2}\right), & \text{если } p = 2. \end{cases}$$

□

Смысл рассмотрения функции l в том, что через нее можно выразить порядки всех присоединенных групп лиева типа.

Б3. Пусть G — одна из следующих присоединенных групп лиева типа: $A_n(q)$, $B_n(q)$, $C_n(q)$, $D_n(q)$, ${}^2A_n(q)$, ${}^2D_n(q)$ и ${}^3D_n(q)$. Тогда

1) $|A_n(q)| = \frac{1}{d} q^{\frac{n(n+1)}{2}} \frac{l(n+1, q)}{q-1}$, $d = (n+1, q-1)$;

2) $|B_n(q)| = |C_n(q)| = \frac{1}{d} q^{n^2} l(n, q^2)$, $d = (2, q-1)$;

3) $|D_n(q)| = \frac{1}{d} q^{\frac{n(n-1)}{2}} (q^n - 1) l(n-1, q^2)$, $d = (4, q^n - 1)$;

4) $|{}^2A_n(q)| = \frac{1}{d} q^{\frac{n(n+1)}{2}} \frac{|l(n+1, -q)|}{q+1}$, $d = (n+1, q+1)$;

5) $|{}^2D_n(q)| = \frac{1}{d} q^{\frac{n(n-1)}{2}} (q^n + 1) l(n-1, q^2)$, $d = (4, q^n + 1)$;

6) $|{}^3D_4(q)| = q^{12} \frac{l(2, q^6)}{q^2+1}$

и, следовательно, с помощью формулы из **Б2** можно вычислить $\alpha_p(|G|)$ для всех простых p, не делящих q.

Доказательство непосредственно следует из рассмотрения формул для порядков G (приложение 3) и **Б2**.

□

Б4. Замечание. Порядки других присоединенных групп лиева типа ($G_2(q)$, $F_4(q)$, $E_6(q)$, $E_7(q)$, $E_8(q)$, ${}^2B_2(q)$ $(q = 2^{2m+1})$, ${}^2G_2(q)$ $(q = 3^{2m+1})$, ${}^2F_4(q)$ $(q = 2^{2m+1})$, ${}^2E_6(q)$) нет смысла выражать через функцию l, так как они являются произведениями чисел $\frac{1}{d}$ $(d \in \{1, 2, 3\})$, q^m и небольшого числа чисел вида $q^m - 1$ и $q^m +$

$+1\left(=\dfrac{q^{2m}-1}{q^m-1}\right)$, а потому $\alpha_p(|G|)$ находится непосредственно с помощью теоремы **Б1**.

Б5. Замечание. Пусть $(p, q)=1$ и $o_p(q)=\delta$. Легко подсчитать (переходя от $\mathbf{Z}$ к $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$), что $o_p(q^m)=\dfrac{\delta}{(m,\delta)}$ $(m\in \mathbf{N})$ и при $p>2$

(а) $$o_p(-q)=\begin{cases} 2\delta, \text{ если } \delta \text{ нечетно,}\\ \delta, \text{ если } 4|\delta,\\ \dfrac{\delta}{2}, \text{ если } 2\,\|\,\delta.\end{cases}$$

Отсюда и из **Б2** для $p>2$ следуют формулы

(б) $$\alpha_p(l(n, q^2))=\alpha_p\left(\left[\frac{n(2,\delta)}{\delta}\right]!\right)+\left[\frac{n(2,\delta)}{\delta}\right]\alpha_p(q^\delta-1),$$

(в) $$\alpha_p(l(n, -q))=\begin{cases}\alpha_p\left(l\left(\left[\dfrac{n}{2}\right], q\right)\right), \text{ если } \delta \text{ нечетно,}\\ \alpha_p(l(n, q)), \text{ если } 4|\delta,\\ \alpha_p(l(2n, q)), \text{ если } 2\,\|\,\delta.\end{cases}$$

§ В. КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С НЕБОЛЬШИМ ГЛАВНЫМ D-БЛОКОМ

В1. Теорема. Пусть G — конечная группа, $D \trianglelefteq G$, $1\in D$, $\Phi=\{1_G, \alpha, \beta\}\subseteq \mathrm{Irr}(G)$ и $\alpha(1)\leqslant\beta(1)$. Равносильны утверждения:

(А) Φ — D-блок группы G;

(Б) выполнено по крайней мере одно из условий:

Б1) G имеет нормальную подгруппу N индекса 3, $D=N\cup dN$, где $d\in D$, и $\Phi=\mathrm{Irr}(G|N)$;

Б2) G имеет нормальную подгруппу N такую, что $G/N\simeq S_3$, $D\in\{N, N\cup(G\setminus K)\}$, где K — нормальная подгруппа индекса 2 из G, содержащая N, и $\Phi=\mathrm{Irr}(G|N)$;

Б3) $\alpha(1)>1$, $\beta(d)=\alpha(d)+1$ для всех $d\in D$, $\alpha(x)=1$ и $\beta(x)=-1$ для всех $x\in G\setminus D$.

В случаях Б2) и Б3) характеры α и β целочисленны.

В2. Замечание. Если в **Б3**) условие «$\alpha(1)>1$» заменить условием «$\alpha(1)=1$», то (как легко увидеть) получится в точности условие Б2) с $D=N$.

Доказательство. (А) $\Rightarrow$ (Б): Пусть Φ — D-блок группы G. Тогда $D\longleftrightarrow\Phi$ и по теореме **3Б1** ((1) $\Rightarrow$ (3))

(в1) $$1+\alpha(d)\overline{\alpha(x)}+\beta(d)\overline{\beta(x)}=0 \text{ для всех } (d, x)\in D\times D^-$$

и, в частности (при $d=1$),

(в2) $\qquad 1+\alpha(1)\alpha(x)+\beta(1)\beta(x)=0$ для всех $x\in D$.

Далее, по теореме **3Б1** ((1) $\Rightarrow$ (4)) $\frac{1}{|G|}\sum_{d\in D}\varphi(d)(1+\overline{\alpha(d)}\alpha(d_0)+$ $+\overline{\beta(d)}\beta(d_0)=\varphi(d_0)$ для всех $(\varphi, d_0)\in\Phi\times D$, откуда при $\varphi=1_G$ и $d_0=1$ получаем

(в3) $$|G|=\sum_{d\in D}(1+\alpha(1)\overline{\alpha(d)}+\beta(1)\overline{\beta(d)}).$$

Подобно, так как $D^-\longleftrightarrow\Phi$,

(в4) $$|G|=\sum_{x\in D^-}(1+\alpha(x_0)\overline{\alpha(x)}+\beta(x_0)\overline{\beta(x)}) \text{ для всех } x_0\in D^-.$$

Предположим, что $\alpha(1)<\beta(1)$.

Пусть σ — произвольный автоморфизм поля $\boldsymbol{Q}(\omega)$, где ω — первообразный корень степени $|G|$ из 1. Тогда для любого $\chi\in$ $\in\mathrm{Irr}(G)$ функция $\chi^\sigma: g\mapsto\chi(g)^\sigma\,(g\in G)$ также принадлежит $\mathrm{Irr}(G)$ (**2А23**). Из определения D-связанности (**3Д5**) следует, что если χ и ψ D-связаны, то χ^σ и ψ^σ также D-связаны. Отсюда по **3Д6** следует, что $\{1_G^\sigma, \alpha^\sigma, \beta^\sigma\}$ — D-блок группы G. Так как $1_G^\sigma=$ $=1_G$, то $\{1_G^\sigma, \alpha^\sigma, \beta^\sigma\}=\{1_G, \alpha, \beta\}$ и вследствие $\alpha(1)\neq\beta(1)$ $\alpha^\sigma=\alpha$ и $\beta^\sigma=\beta$. Но тогда по **2А14** (3) $\alpha(g)$, $\beta(g)\in\boldsymbol{Q}$ для всех $g\in G$. Так как, кроме того, $\alpha(g)$ и $\beta(g)$ — целые алгебраические числа, то по **2А6** (3) $\alpha(g)$, $\beta(g)\in\boldsymbol{Z}$. Мы получили следующее утверждение.

(в5) Если $\alpha(1)<\beta(1)$, то характеры α и β целочисленны.

Случай 1. Пусть $\alpha(1)=\beta(1)=1$.

Согласно (2) $1+\alpha(x)+\beta(x)=0$ для всех $x\in D^-$, а так как $|\alpha(x)|\leqslant 1$ и $|\beta(x)|\leqslant 1$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ не могут быть вещественными. Поэтому $\beta=\overline{\alpha}$ и $\alpha(x)=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Пусть $\widetilde{G}=G/G'$, $\widetilde{D}=DG'/G'$ и для любого $\chi\in\mathrm{Irr}(G|G')$ через $\widetilde{\chi}$ обозначим неприводимый характер $\widetilde{G}$ такой, что $\widetilde{\chi}(gG')=$ $=\chi(g)$ для всех $g\in G$ (см. **2А34**). Очевидно, $\Phi\subseteq\mathrm{Irr}(G|G')$ и $\widetilde{\Phi}$ — подгруппа порядка 3 в $\hat{\widetilde{G}}$ (группе характеров группы $\widetilde{G}$). Так как $D\longleftrightarrow\Phi$, то $\varphi|_D^0=\sum_{\psi\in\Phi}m_{\varphi\psi}\psi\ (m_{\varphi\psi}\in\boldsymbol{C})$ для всех $\varphi\in\Phi$. Но тогда, очевидно, $\widetilde{\varphi}|_{\widetilde{D}}^0=\sum_{\psi\in\Phi}m_{\varphi\psi}\widetilde{\psi}\ (\widetilde{\varphi}\in\widetilde{\Phi})$, т. е. $\widetilde{D}\longleftrightarrow\widetilde{\Phi}$. Отсюда по теореме **3Е1** $\widetilde{D}$ — объединение смежных классов по подгруппе $\widetilde{N}=\bigcap_{\widetilde{\varphi}\in\widetilde{\Phi}}\mathrm{Ker}\,\widetilde{\varphi}$ индекса 3 в $\widetilde{G}$. Так как $\widetilde{1}\in\widetilde{D}$, то $\widetilde{D}=$ $=\widetilde{N}\cup\widetilde{d}\widetilde{N}$ и, следовательно, $D=N\cup dN$, где $d\in D$, $N/G'=\widetilde{N}$ и $\widetilde{d}=dG'$. Таким образом,

(в6) если $\alpha(1)=\beta(1)=1$, то G — группа типа Б1) теоремы.

Случай 2. Пусть $1=\alpha(1)<\beta(1)$.

Ввиду (в5) $\alpha(g)\in\{1, -1\}$ для всех $g\in G$. Поэтому $K=\mathrm{Ker}\,\alpha$ имеет индекс 2 в G. Пусть $x\in D^-$. Ввиду (в2) $\beta(1)\beta(x)=-(1+\alpha(x))\in\{0, -2\}$, откуда, учитывая (в5), получаем:

(в7) Если $x\in D^-$, то либо $\beta(x)=0$, либо $\beta(x)=-1$ и $\beta(1)=2$.

а) Предположим, что $\beta(x_0)=0$ для некоторого $x_0\in D^-$. Тогда по (в1) и (в2)

(в8) $$\alpha(d)=1 \text{ для всех } d\in D.$$

Значит, $D\subseteq K$, причем $D\neq K$, так как иначе $\{1_G, \alpha\}\longleftrightarrow D$. Пусть $k\in K\setminus D$. По (в2) при $x=k$ $\beta(1)\beta(k)=-2$, откуда по (в5)

(в9) $$\beta(1)=2 \text{ и } \beta(k)=-1 \text{ для всех } k\in K\setminus D.$$

Отсюда и из (в1) при $x\in K\setminus D$ получаем $1+\alpha(d)-\beta(d)=0$ для всех $d\in D$. Так как $D\subsetneq K$, то отсюда

(в10) $$\beta(d)=2 \text{ для всех } d\in D.$$

Если же $x\in D^-$, то $\alpha(x)=-1$ и по (в2) $\beta(1)\beta(x)=0$. Таким образом,

(в11) $$\beta(x)=0 \text{ для всех } x\in D^-.$$

Получаем следующий фрагмент таблицы характеров группы G:

	D	$K\setminus D$	$G\setminus K$
α	$1\ldots 1$	$1\ldots 1$	$-1\ldots -1$
β	$2\ldots 2$	$-1\ldots -1$	$0\ldots 0$

Отсюда следует, что $D=\mathrm{Ker}\,\beta\trianglelefteq G$ и по формуле (в3) $|G|=6|D|$. Так как $\beta(1)\neq 1$, то G/D неабелева и, значит, $G/D\simeq S_3$. При этом, очевидно, $\{1_G, \alpha, \beta\}=\mathrm{Irr}(G|D)$. Таким образом,

(в12) если $1=\alpha(1)<\beta(1)$ и $\beta(x_0)=0$ для некоторого $x_0\in D^-$, то выполнено условие Б2) при $N=D$.

б) Пусть $\beta(x)\neq 0$ для всех $x\in D^-$. Тогда по (в7)

(в13) $$\beta(1)=2 \text{ и } \beta(x)=-1 \text{ для всех } x\in D^-.$$

По (в2) и (в13)

(в14) $$\alpha(x)=1 \text{ для всех } x\in D^-$$

и, следовательно, $D^-\subseteq K$, т. е. $G=D\cup K$. Теперь по (в1), (в13) и (в14)

$$\beta(d)=\alpha(d)+1 \text{ для всех } d\in D,$$

т. е. $\beta(d)=2$ при $d\in K\cap D$ и $\beta(d)=0$ при $d\in D\setminus K$.

Мы имеем следующий фрагмент таблицы характеров группы G:

	$K \setminus D$	$K \cap D$	$D \setminus K$
α	$1 \ldots 1$	$1 \ldots 1$	$-1 \ldots -1$
β	$-1 \ldots -1$	$2 \ldots 2$	$0 \ldots 0$

$$((K \setminus D) \cup (K \cap D) \cup (D \setminus K) = G).$$

Отсюда по формуле (в4) находим

$$|G| = \sum_{x \in D^-} (1 + 1 + 1) = 3|D^-|,$$

откуда $|K \cap D| = |K| - |D^-| = \frac{|G|}{2} - \frac{|G|}{3} = \frac{|G|}{6}$. Так как $K \cap D = \operatorname{Ker}\beta \trianglelefteq G$ и $\operatorname{Irr}(G|K \cap D) \ni \beta$ с $\beta(1) \neq 1$, то $G/K \cap D$ неабелева и, следовательно, $G/K \cap D \simeq S_3$. При этом, очевидно, $\{1_G, \alpha, \beta\} = \operatorname{Irr}(G|K \cap D)$. Итак,

(в15) если $1 = \alpha(1) < \beta(1)$ и $\beta(x) \neq 0$ для всех $x \in D^-$, то G — группа типа Б2) с $N = K \cap D$ и $D = N \cup (G \setminus K)$.

Случай 3. Пусть $\alpha(1) > 1$.

Положим $n = (\alpha(1), \beta(1))$. Вследствие (2) $\frac{1}{n} = -\frac{\alpha(1)}{n}\alpha(x) - \frac{\beta(1)}{n}\beta(x)$ — целое алгебраическое число, и, следовательно, $n = 1$. В частности, $\alpha(1) \neq \beta(1)$ и по (в5)

(в16) характеры α и β целочисленны.

Отсюда и из (в2) следует, что $\alpha(x) \neq 0$ и $\beta(x) \neq 0$ для всех $x \in D^-$. Но тогда по 2А28 существует $d_0 \in D$ с $\beta(d_0) = 0$. По (в1) $\alpha(d_0) \times \alpha(x) = -1$ при $x \in D^-$, откуда вследствие (в16)

(в17) $\alpha(x) = -\alpha(d_0) \in \{1, -1\}$ для всех $x \in D^-$.

Подобно получаем для некоторого $d_1 \in D$

(в18) $\beta(x) = -\beta(d_1) \in \{1, -1\}$ для всех $x \in D^-$.

Из (в17), (в18) и (в2) следует, что

(в19) $\beta(1) = \alpha(1) + 1$, $\alpha(x) = 1$ и $\beta(x) = -1$ для всех $x \in D^-$.

Из (в19) и (в1) вытекает, что

$$\beta(d) = \alpha(d) + 1 \text{ для всех } d \in D.$$

Отсюда и из (в19) получаем

(в20) если $\alpha(1) > 1$, то выполнено условие Б3).

Теперь из (в6), (в12), (в15) и (в20) следует, что (А) $\Rightarrow$ (Б).

(Б) $\Rightarrow$ (А): Пусть выполнено условие Б1). Тогда имеется следующий фрагмент таблицы характеров группы G:

	N	g_1N	g_2N
1_G	$1 \ldots 1$	$1 \ldots 1$	$1 \ldots 1$
α	$1 \ldots 1$	$\varepsilon \ldots \varepsilon$	$\bar\varepsilon \ldots \bar\varepsilon$
β	$1 \ldots 1$	$\bar\varepsilon \ldots \bar\varepsilon$	$\varepsilon \ldots \varepsilon$

где $\varepsilon = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ и $\{1, g_1, g_2\}$ — полная система вычетов G по N. Имеем $(i = 1, 2)$

$$1_G|_N^0 = \alpha|_N^0 = \beta|_N^0 = \frac{1}{3}(1_G + \alpha + \beta),$$

$$1_G|_{g_iN}^0 = \frac{1}{3}(1_G + \bar\varepsilon^i\alpha + \varepsilon^i\beta),$$

$$\alpha|_{g_iN}^0 = \frac{1}{3}(\varepsilon^i 1_G + \alpha + \bar\varepsilon^i\beta),$$

$$\beta|_{g_iN}^0 = \frac{1}{3}(\bar\varepsilon^i 1_G + \varepsilon^i\alpha + \beta).$$

Следовательно, N, g_1N и g_2N взаимодействуют с Φ и, значит, $D \equiv N \cup dN \longleftrightarrow \Phi$ при любом $d \in \{1, g_1, g_2\}$. Нетрудно заметить также, что D не взаимодействует с истинными непустыми подмножествами из Φ. Таким образом, верно (А).

Если выполнено Б2), то подобно предыдущему случаю, построив фрагмент таблицы характеров G (по таблице характеров S_3), легко получить утверждение (А).

Пусть теперь верно Б3). Тогда $1_G|_{D^-}^0 = \alpha|_{D^-}^0 = -\beta|_{D^-}^0 = \frac{1}{3}(1_G + \alpha - \beta)$ и, значит, $D^- \longleftrightarrow \Phi$. Кроме того, легко проверить, что характеры 1_G, α, β D^--связаны. Следовательно, Φ есть D^--блок группы G, а тогда (ЗД3) верно и (А).

Утверждение о целочисленности характеров α и β в случаях Б2) и Б3) следует из (в5) и (в16).

□

В3. Пусть при условии теоремы **В1** выполнено условие Б3) и пусть $N \trianglelefteq G$.

1) Если $N \subseteq D$, то $N \subseteq \operatorname{Ker}\alpha \cap \operatorname{Ker}\beta$.

2) Если $N \not\subseteq D$, то $\alpha|_N$ и $\beta|_N$ — различные неприводимые неглавные характеры группы N, $\{1_N, \alpha|_N, \beta|_N\}$ — главный

$(D\cap N)$-блок группы N и выполнено условие Б3) теоремы **В1** с $(N,\ D\cap N,\ \alpha|_N,\ \beta|_N)$ на месте $(G,\ D,\ \alpha,\ \beta)$.

Доказательство. 1): Докажем сначала следующее утверждение.

а) Если C_1 и C_2 — классы сопряженных элементов группы G, лежащие в D и такие, что $C_1C_2\subseteq D$, то по крайней мере один из классов C_1 и C_2 содержится в $\operatorname{Ker}\alpha\cap\operatorname{Ker}\beta$.

Определим обобщенный характер $\theta=1_G+\alpha-\beta$. Вследствие Б3) θ исчезает на D. Применив к G, θ и TI-подмножеству D^- из G утверждение **2Е2** заменив предварительно в нем букву T на D^- (тогда $(D^-)^G=D^-$, $H=G$, $\theta^G=\theta$ и $\{\chi_1,\ \chi_2\}=\{\alpha,\ \beta\}$), получим а).

Теперь для любого $n\in N$ имеем $n^Gn^G\subseteq N\subseteq D$, откуда по а) $n^G\subseteq\operatorname{Ker}\alpha\cap\operatorname{Ker}\beta$, и утверждение 1) доказано.

2): По теореме Клиффорда (**2Б9**)

(в21) $\alpha|_N=m_\alpha\sum\limits_{i=1}^{a}\gamma_i$, где $m_\alpha\in N$, $\Gamma=\{\gamma_1,\ \ldots,\ \gamma_a\}$ — класс

G-сопряженных неприводимых характеров группы N и $a\geqslant 1$;

(в22) $\beta|_N=m_\beta\sum\limits_{i=1}^{b}\delta_i$, где $m_\beta\in N$, $\Delta=\{\delta_1,\ \ldots,\ \delta_b\}$ — класс

G-сопряженных неприводимых характеров группы N и $b\geqslant 1$.

Пусть $N\not\subseteq D$. Тогда существует $x\in N\cap D^-$ и по свойству Б3) $\alpha(x)=1$ и $\beta(x)=-1$. Отсюда и из (в21) получаем

$$\frac{1}{m_\alpha}=\sum_{i=1}^{a}\gamma_i(x)\in\hat{Z}\cap Q=Z$$

(**2А6** (3), $\hat{Z}$ — кольцо всех целых алгебраических чисел), т. е. $m_\alpha=1$. Подобно получаем, что $m_\beta=1$. Таким образом,

(в23) $$m_\alpha=m_\beta=1.$$

Отсюда следует, что

(в24) $$\Gamma\cap\Delta=\varnothing,$$

так как в противном случае было бы $\alpha|_N=\beta|_N$, в противоречие с тем, что $\beta(1)=\alpha(1)+1$. Так как $\beta(1)>\alpha(1)>1$ (по Б3)), то из (в21) и (в22) следует, что

(в25) $$1_N\notin\Gamma\cup\Delta.$$

Поэтому $0=(\alpha|_N,\ 1_N)_N=\frac{1}{|N|}\Big(\sum\limits_{\alpha\in D\cap N}\alpha(d)+|N|-|D\cap N|\Big)$, откуда

(в26) $$\sum_{d\in D\cap N}\alpha(d)=|D\cap N|-|N|.$$

Подобно из (в25) получаем

$$\text{(в27)} \qquad \sum_{d \in \overline{D}^- \cap N} \beta(d) = |N| - |D \cap N|.$$

Но $\beta(d) = \alpha(d) + 1$ для всех $d \in D$. Отсюда и из (в26), (в27) получаем

$$\text{(в28)} \qquad 2|N| = 3|D \cap N|.$$

Вследствие (в21) — (в24) $b - a = (\alpha|_N + \beta|_N, \quad \beta|_N - \alpha|_N)_N = ((\alpha + \beta)|_N, (\beta - \alpha)|_N)_N$. Но по Б3) $\alpha + \beta$ исчезает на D^-, а $\beta - \alpha$ равно 1 на D. Следовательно, $b - a = \frac{1}{|N|} \sum_{d \in D \cap N} (\alpha(d) + \beta(d)) = 0$ по (в6) и (в7). Таким образом, $a = b$. Так как по (в21) — (в23) $\alpha(1) = a\gamma_1(1)$ и $\beta(1) = b\delta_1(1)$, то отсюда и из $\beta(1) = \alpha(1) + 1$ следует, что

$$\text{(в29)} \qquad a = b = 1.$$

Следовательно, $\alpha|_N = \gamma_1$ и $\beta|_N = \delta_1$. Отсюда и из (в24), (в25) вытекает, что $|\{1_N, \alpha|_N, \beta|_N\}| = 3$. Так как для $(N, D \cap N, \alpha|_N, \beta|_N)$ выполнено, очевидно, условие Б3), то по теореме **В1** $\{1_N, \alpha|_N, \beta|_N\}$ — $D \cap N$-блок группы N.

□

В4. Пусть выполнено условие предложения **В3** и пусть $N = A \times B$. Тогда по крайней мере одна из полугрупп A и B содержится в $\operatorname{Ker} \alpha \cap \operatorname{Ker} \beta$.

Доказательство. Вследствие **В3** можно полагать, что $N = G$. Пусть ни A, ни B не содержатся в $\operatorname{Ker} \alpha \cap \operatorname{Ker} \beta$. Тогда по **В3** $\alpha|_A \in \operatorname{Irr}(A)$ и $\alpha|_B \in \operatorname{Irr}(B)$. Но по **2А38** существуют $\alpha_1 \in \operatorname{Irr}(A)$ и $\alpha_2 \in \operatorname{Irr}(B)$ такие, что $\alpha(ab) = \alpha_1(a)\alpha_2(b)$ для всех $a \in A$ и $b \in B$. Отсюда следует, что $\alpha|_A = \alpha_2(1)\alpha_1$ и $\alpha|_B = \alpha_1(1)\alpha_2$. Но ранее мы показали, что $\alpha|_A$ и $\alpha|_B$ неприводимы. Значит, $\alpha_1(1) = \alpha_2(1) = 1$. Но теперь $\alpha(1) = \alpha_1(1)\alpha_2(1) = 1$, в противоречие с Б3).

□

В5. Теорема. Пусть выполнены условие теоремы **В1** и свойство Б3). Положим $\overline{G} = G/\operatorname{Ker} \alpha \cap \operatorname{Ker} \beta$. Тогда $\overline{G}$ имеет нормальную простую неабелеву подгруппу L такую, что $\overline{G}$ изоморфна подгруппе из $\operatorname{Aut}(L)$.

Доказательство. Вследствие естественного соответствия $\gamma \mapsto \tilde{\gamma}$ между неприводимыми характерами групп G и $\overline{G}$ (**2А34** (1)), условие Б3) естественным образом переносится с G на $\overline{G}$. При этом $\{1_G, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}\}$ есть $\overline{D}$-блок группы $\overline{G}$, где $\overline{D}$ — образ D в $\overline{G}$, по теореме **В1** ((Б) $\Rightarrow$ (А)) (следовательно, можно предполагать, что $\operatorname{Ker}\alpha \cap \operatorname{Ker}\beta = 1$). Пусть L — минимальная нормальная подгруппа в $\overline{G}$. По **В4** L — простая группа и $C_{\overline{G}}(L) = 1$. Поэтому $\overline{G}$ изоморфна подгруппе из $\operatorname{Aut}(L)$. Неабелевость L следует из того, что $\tilde{\alpha}|_L \in \operatorname{Irr}(L)$ и $\tilde{\alpha}(1) = \alpha(1) > 1$.

□

В6. Пусть при условии теоремы **В1** выполнено свойство Б3). Тогда

1) $|G| = 3 \cdot \frac{|D|}{2}$;

2) если $H \leqslant G$, то $|H|$ делит $3|H \cap D|$ (т. е. либо $H \subseteq D$, либо $|H| = 3|H \cap D|$, либо $|H| = 3\frac{|H \cap D|}{2}$);

3) $G_{3'} \subseteq D$;

4) $\alpha(1)\beta(1)$ делит $|x^G|$ для всех $x \in G \setminus D$.

Доказательство. 1): По условию выполнено утверждение (в4) в доказательстве теоремы **В1**. Из (в4) и Б3) при $x_0 \in D^-$ получаем $|G| = \sum_{x \in D^-} (1 + \alpha(x_0)\overline{\alpha(x)} + \beta(x_0)\overline{\beta(x)}) = 3|D^-|$, откуда следует 1).

2): Рассмотрим обобщенный характер $\theta = \beta - \alpha$. Согласно Б3) $\theta(d) = 1$ при $d \in D$ и $\theta(x) = -2$ при $x \in D^-$. Для подгруппы H из G имеем $\mathbf{Z} \ni (\theta|_H, 1_H)_H = \frac{1}{|H|}\sum_{h \in H}\theta(h) = \frac{1}{|H|}(|H \cap D| - 2|H \cap D^-|) = \frac{1}{|H|}(|H \cap D| - 2(|H| - |H \cap D|)) = -2 + \frac{3|H \cap D|}{|H|}$. Отсюда следует 2).

3): Пусть $g \in G_{3'}$. По 2) $|\langle g \rangle|$ делит $3|\langle g \rangle \cap D|$. Следовательно, $|\langle g \rangle| = |\langle g \rangle \cap D|$, т. е. $\langle g \rangle \subseteq D$.

4): Пусть $x \in D^-$. Так как $\frac{|x^G|\alpha(x)}{\alpha(1)} \in \hat{\mathbf{Z}}$ (2А9 (2)) и $\alpha(x) = 1$, то $\alpha(1) \| x^G|$. Подобно, $\beta(1) \| x^G|$. Так как $(\alpha(1), \beta(1)) = 1$, то получаем 4).

□

§ Г. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ А2

Применим результаты § В для доказательства теоремы **А2**, сформулированной в § А.

(1) $\Rightarrow$ (2): Пусть $\Phi = \{1_G, \alpha, \beta\}$ — главный p-блок группы G. Тогда Φ есть главный D-блок группы G, где $D = G_{p'}$, и p делит $|G|$. Согласно теореме **В1** для группы G выполнено одно из ее утверждений Б1) — Б3).

Пусть выполнено Б1), т. е, G имеет нормальную подгруппу N с $|G/N|=3$ и $G_{p'}=N\cup dN$ $(d\in G)$. Но тогда N — p'-группа и, значит, $p\|\,|G/N|$. Таким образом, $p=3$ и верно (2).

Пусть выполнено Б2), т. е. G имеет нормальную подгруппу N с $G/N\simeq S_3$ и либо $G_{p'}=N$, либо $G_{p'}=N\cup(G\setminus K)$, где $N< K\lhd G$ $(|G:K|=2)$. Тогда N — p'-группа и $p\in\{2, 3\}$. Если $G_{p'}=N$, то G/N должна быть p-группой, что не так. Следовательно, $G_{p'}=N\cup(G\setminus K)$. Так как $G\setminus K$ содержит элементы четного порядка, то $p\neq 2$. Итак, $p=3$, а так как N — p'-группа, то 9 не делит $|G|$.

Наконец, пусть выполнено Б3). Тогда при $D=G_{p'}$ выполнено условие из **В6**. Так как по **В6**(3) $G_{3'}\subseteq D$, то $p=3$ и, значит, $3\|\,|G|$. Пусть $P\in \mathrm{Syl}_3(G)$. Тогда $P\cap D=1$ и по **В6**(2) $|P|=3$. Таким образом, верно (2).

(2) $\Rightarrow$ (1): Пусть $3\|\,|G|$ и B — главный 3-блок группы G. Тогда, очевидно, $d_3(\mathrm{B})=1$ и по **Г9** $|\mathrm{B}|\leqslant\frac{1}{4}3^2+1$, т. е. $|\mathrm{B}|\leqslant 3$. Отсюда, из **3Д9** и **А1** следует, что $|\mathrm{B}|=3$. Теорема **А2** доказана.

□

§ Д. ГЛАВНЫЕ D-БЛОКИ НЕКОТОРЫХ ПРОСТЫХ ГРУПП

В следующем параграфе потребуется определить главные 3-блоки простых групп $\mathrm{PSL}(2, q)$, $\mathrm{PSL}(3, q)$ и $\mathrm{PSU}(3, q^2)$. Здесь же решается более общая задача, а именно, определяются условия, при которых названные группы имеют главный D-блок порядка 3 для какого-либо нормального подмножества D из G. Без ограничения общности предполагается, что $1\in D$. Оказывается, что необходимым и достаточным условием существования такого D является цикличность силовской 3-подгруппы в G; при этом само D определяется однозначно: $D=\{g\in G\,|\,o(g)$ не делится на $|G|_3\}$.

Д1. Теорема. Пусть $G=\mathrm{PSL}(2, q)$, $q>3$, $D\trianglelefteq G$, $1\in D$ и Φ — главный D-блок группы G. Положим $t=(2, q-1)$. Равносильны условия:

(1) $|\Phi|=3$;

(2) в обозначениях таблиц 1 — 3

$$\text{либо } 3|q+1 \text{ и } \Phi=\left\{1_G,\ \varphi_{\frac{q+1}{3t}},\ \mathrm{St}\right\},$$

$$\text{либо } 3|q-1 \text{ и } \Phi=\left\{1_G,\ \mathrm{St},\ \theta_{\frac{q-1}{3t}}\right\};$$

(3) 3 не делит q и $D=\{q\in G\,|\,o(g)$ не делится на $|G|_3\}$.

Доказательство. Как известно, $|G|=\frac{1}{t}q(q-1)(q+1)$.

Случай 1. $q=2^a$.

Тогда G имеет элементы u, x, y порядков 2, $q-1$, $q+1$ соответственно и таблица характеров группы G имеет следующий вид [84].

Таблица 1. **Таблица характеров группы** $\mathrm{PSL}(2, q)$ **при** $q=2^a$

	1	u	$x^m\left(1\leqslant m\leqslant\frac{q-2}{2}\right)$	$y^n\left(1\leqslant n\leqslant\frac{q}{2}\right)$
1_G	1	1	1	1
$\varphi_k\left(1\leqslant k\leqslant\frac{q}{2}\right)$	$q-1$	-1	0	$-2\cos\frac{2\pi kn}{q+1}$
St	q	0	1	-1
$\theta_l\left(1\leqslant l\leqslant\frac{q-2}{2}\right)$	$q+1$	1	$2\cos\frac{2\pi lm}{q-1}$	0

(St — характер Стейнберга)

(1)$\Rightarrow$(2): Пусть $\Phi=\{1_G, \alpha, \beta\}$ и $\alpha(1)\leqslant\beta(1)$. По теореме В1 имеем

(д1) $$\beta(d)=\alpha(d)+1 \text{ для всех } d\in D,$$

(д2) $$\alpha(x)=1 \text{ и } \beta(x)=-1 \text{ для всех } x\in G\setminus D.$$

Так как $1\in D$, то $\beta(1)=\alpha(1)+1$ и, следовательно, имеются лишь две возможности; 1) $\alpha(1)=q-1$ и $\beta(1)=q$ и 2) $\alpha(1)=q$ и $\beta(1)=q+1$.

1) Пусть $\alpha(1)=q-1$ и $\beta(1)=q$. Тогда $\alpha=\varphi_k$ для некоторого $k\in\left\{1, \ldots, \frac{q}{2}\right\}$ и $\beta=\mathrm{St}$. Вследствие (д2)

(д3) $$G\setminus D\subseteq\bigcup_{n=1}^{q/2}(y^n)^G.$$

По (д1) и (д2)

(д4) $$\alpha(y^n)\in\{1, -2\}\ \left(n=1, \ldots, \frac{q}{2}\right).$$

$\alpha(y)=-2\cos\frac{2\pi k}{q+1}\neq-2$, так как $k<q+1$. Следовательно, $\alpha(y)=1$, т. е. $\cos\frac{2\pi k}{q+1}=-\frac{1}{2}$ и $\frac{2\pi k}{q+1}=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi s\ (s\in\boldsymbol{Z})$.

Отсюда $3k=(q+1)(3s\pm1)$, а так как $3k\leqslant\frac{3q}{2}<2(q+1)$, то $3k=q+1$,

(д5) $$3|q+1 \text{ и } \alpha=\varphi_{\frac{q+1}{3}}.$$

Таким образом, верно (2).

2) Пусть $\alpha(1)=q$ и $\beta(1)=q+1$. Тогда $\alpha=\mathrm{St}$ и $\beta=\theta_l$ для некоторого $l\in\left\{1, \ldots, \frac{q-2}{2}\right\}$. Подобно случаю 1) получаем

(д6) $$3|q-1 \text{ и } \beta=\theta_{\frac{q-1}{3}}.$$

Снова верно (2).

(2) $\Rightarrow$ (3): Пусть выполнено условие (2). Тогда верно (1) и, в частности, верны (д1), (д2) и (д3). Пусть $3|q+1$, $\alpha=\varphi_{\frac{q+1}{3}}$ и $\beta=\mathrm{St}$. По таблице 1 находим

(д7) $$\varphi_{\frac{q+1}{3}}(y^n)=-2\cos\frac{2\pi}{3}n=$$

$$=\begin{cases}1, & \text{если 3 не делит } n \text{ (т. е. } |G|_3 \text{ делит } o(y^n)),\\ -2, & \text{если } 3|n \text{ (т. е. } |G|_3 \text{ не делит } o(y^n)).\end{cases}$$

Отсюда и из (д1), (д2), (д3) следует $G\setminus D=\{g\in G \mid o(g)$ делится на $|G|_3\}$, т. е. верно (3).

К тому же выводу приходим и в случае, когда $3|q-1$, $\alpha=\mathrm{St}$ и $\beta=\theta_{\frac{q-1}{3}}$, так как

(д8) $$\theta_{\frac{q-1}{3}}(x^m)=2\cos\frac{2\pi}{3}m=$$

$$=\begin{cases}-1, & \text{если 3 не делит } m \text{ (т. е. } |G|_3 \text{ делит } o(x^m)),\\ 2, & \text{если } 3|m \text{ (т. е. } |G|_3 \text{ не делит } o(x^m)).\end{cases}$$

(3) $\Rightarrow$ (1): Пусть D как в (3). Тогда, если $3|q+1$, то по (д7) выполнены условия (д1) и (д2) при $\alpha=\varphi_{\frac{q+1}{3}}$ и $\beta=\mathrm{St}$. Если же $3|q-1$, то по (д8) будут выполнены условия (д1) и (д2) при $\alpha=\mathrm{St}$ и $\beta=\theta_{\frac{q-1}{3}}$. Но по теореме **B1** из условий (д1) и (д2) следует, что $\{1_G, \alpha, \beta\}$ — главный D-блок группы G. Следовательно, верно (1).

Случай 2. $q\equiv1 \pmod 4$.

G имеет элементы x и y порядков $\frac{q-1}{2}$ и $\frac{q+1}{2}$ соответственно несопряженные элементы u и v простого порядка p, делящего q, и следующую таблицу характеров [84].

Таблица 2. **Таблица характеров группы PSL (2, q) при $q \equiv 1 \pmod 4$)**

	1	u	v	x^m $\left(1 \leqslant m \leqslant \frac{q-1}{4}\right)$	y^n $\left(1 \leqslant n \leqslant \frac{q-1}{4}\right)$
1_G	1	1	1	1	1
χ_1	$\frac{q+1}{2}$	$\frac{1+\sqrt{q}}{2}$	$\frac{1-\sqrt{q}}{2}$	$(-1)^m$	0
χ_2	$\frac{q+1}{2}$	$\frac{1-\sqrt{q}}{2}$	$\frac{1-\sqrt{q}}{2}$	$(-1)^m$	0
φ_k $\left(1 \leqslant k \leqslant \frac{q-1}{4}\right)$	$q-1$	-1	-1	0	$-2\cos\frac{4\pi kn}{q+1}$
St	q	0	0	1	-1
θ_l $\left(1 \leqslant l \leqslant \frac{q-5}{4}\right)$	$q+1$	1	1	$2\cos\frac{4\pi lm}{q-1}$	0

Ввиду изоморфизма PSL (2, 5)$\simeq$PSL (2, 4) можно считать, что в случае 2 $q>5$. Но теперь доказательство теоремы проводится здесь в точности по схеме доказательства для случая 1 (при $q=5$ возникает дополнительная возможность $\alpha(1)=\frac{q+1}{2}$ и $\beta(1)=q-1$).

Случай 3. $q \equiv -1 \pmod 4$.

Доказательство теоремы в этом случае проводится по той же схеме, что и в случаях 1 и 2 (см. табл. 3, в которой $o(u)=o(v)=p$, где p — простое число, делящее q, $o(x)=\frac{q-1}{2}$ и $o(y)=\frac{q+1}{2}$ [84]).

□

Д2. Теорема. Пусть $G=\mathrm{PSL}(3, q)$, $D \trianglelefteq G$, $1 \in D$ и Φ — главный D-блок группы G. Равносильны условия:

(1) $|\Phi|=3$;

(2) $3 | q+1$ и $\Phi=\left\{1_G, \chi_{q^2-1}^{\left(\frac{q^2-1}{3}\right)}, \mathrm{St}\right\}$ в обозначениях таблицы 4;

(3) $D=\{g \in G \mid o(g)$ не делится на $|G|_3\}$ и $D \neq G$.

Таблица 3. **Таблица характеров группы** PSL$(2, q)$ **при** $q \equiv -1 \pmod 4$.

	1	u	v	x^m $\left(1 \leqslant m \leqslant \frac{q-3}{4}\right)$	y^n $\left(1 \leqslant n \leqslant \frac{q+1}{4}\right)$
1_G	1	1	1	1	2
χ_1	$\frac{q-1}{2}$	$\frac{-1+i\sqrt{q}}{2}$	$\frac{-1-i\sqrt{q}}{2}$	0	$(-1)^{n+1}$
χ_2	$\frac{q-1}{2}$	$\frac{-1-i\sqrt{q}}{2}$	$\frac{-1+i\sqrt{q}}{2}$	0	$(-1)^{n+1}$
φ_k $\left(1 \leqslant k \leqslant \frac{q-3}{4}\right)$	$q-1$	-1	-1	0	$-2\cos\frac{4\pi kn}{q+1}$
St	q	0	0	1	-1
θ_l $\left(1 \leqslant l \leqslant \frac{q-3}{4}\right)$	$q+1$	1	1	$2\cos\frac{4\pi lm}{q-1}$	0

Доказательство. Отметим, что $|G| = \frac{1}{t} q^3(q^3-1)(q^2-1) = \frac{1}{t} q^3(q-1)^2(q+1)(q^2+q+1)$, где $t = (3, q-1)$. Так как PSL$(3, 2) \simeq$ PSL$(2, 7)$, то при $q = 2$ теорема **Д2** непосредственно следует из теоремы **Д1** (PSL$(3, 2)$ имеет точно по одному неприводимому характеру степеней 7 и 8). Далее предполагаем, что $q > 2$.

(1)$\Rightarrow$(2): Пусть $|\Phi| = 3$, $\Phi = \{1_G, \alpha, \beta\}$ и $\alpha(1) \leqslant \beta(1)$. По теореме **В1**

(д9) $\quad\beta(d) = \alpha(d) + 1$ для всех $d \in D$;

(д10) $\quad\alpha(x) = 1$ и $\beta(x) = -1$ для всех $x \in G \setminus D$.

Выпишем (см. таблицу 2 в [92]) в порядке возрастания все степени неприводимых характеров группы G: 1, q^2+q, q^2+q+1 (отсутствует при $q = 4$), $\frac{1}{3}(q^3+2q^2+2q+1)$ (отсутствует при $t = 1$), q^3-q^2-q+1, q^3-1, q^3, q^3+q^2+q и q^3+2q^2+2q+1 (отсутствуют при $q = 4$). Так как $\beta(1) = \alpha(1) + 1$ по (д9), то для $\alpha(1)$, $\beta(1)$ имеются лишь две возможности:

1) $\alpha(1) = q^2+q$, $\beta(1) = q^2+q+1$,

2) $\alpha(1) = q^3-1$, $\beta(1) = q^3$.

Таблица 4. **Фрагмент таблицы характеров группы** PSL(3, q)

$\lvert C_G(g)\rvert$	$\lvert G\rvert$	$\frac{q^3(q-1)}{t}$	q^2	$\frac{q(q-1)^2(q+1)}{t}$	$\frac{q(q-1)}{t}$	$(q-1)^2$	$\frac{(q-1)^2}{t}$	$\frac{(q-1)^2}{t}$	$\frac{q^2+q+1}{t}$
g	1	g_2	g_3	$g_4^{(k)}$	$g_5^{(k)}$	g_6'	$g_6^{(k,l,m)}$	$g_7^{(k)}$	$g_8^{(k)}$
χ_{q^2+q}	q^2+q	q	0	$q+1$	1	2	2	0	-1
$\chi_{q^2+q+1}^{(u)}$	q^2+q+1	$q+1$	1	$(q+1)\varepsilon^{tuk}+\varepsilon^{-2tuk}$	$\varepsilon^{tuk}+\varepsilon^{-2tuk}$	3	$\varepsilon^{tuk}+\varepsilon^{tul}+\varepsilon^{tum}$	ε^{tuk}	0
$\chi_{q^3-1}^{(u)}$	q^3-1	-1	-1	$(q-1)\varepsilon^{tuk}$	$-\varepsilon^{tuk}$	0	0	$-\eta^{tuk}-\eta^{qtuk}$	0
St	q^3	0	0	q	0	1	1	-1	1

В таблице 4 приведены все значения всех неприводимых характеров степеней, указанных в 1) и 2) (см. таблицы 2 и 1*в* в [92]; в таблице 2 имеются ошибки при $t=1$).

Здесь $\varepsilon=e^{\frac{2\pi i}{q-1}}$, $\eta=e^{\frac{2\pi i}{q^2-1}}$; параметр u для характеров $\chi^{(u)}_{q^3-1}$: $1\leqslant u\leqslant q^2-1$, $q+1$ не делит u, $\chi^{(u_1)}_{q^3-1}=\chi^{(u_2)}_{q^3-1}\Leftrightarrow u_1\equiv u_2 \pmod{q^2-1}$. Другие параметры будут указаны ниже в случае необходимости. g_6 отсутствует при $t=1$.

1) Пусть $\alpha(1)=q^2+q$ и $\beta(1)=q^2+q+1$. Тогда $\alpha=\chi_{q^2+q}$ и $\beta=\chi^{(u)}_{q^2+q-1}$ для некоторого u. Так как $\alpha(g_7^{(1)})=0$ и $\beta(g_7^{(1)})=$ $=\varepsilon^{tu}$, то по (д9) и (д10) будет $\varepsilon^{tu}=1$. Но в этом случае получается $\beta=\alpha+1_G$, что противоречиво. Случай 1) невозможен.

2) Пусть $\alpha(1)=q^3-1$ и $\beta(1)=q^3$. Тогда $\alpha=\chi^{(u)}_{q^3-1}$ для некоторого u и $\beta=\mathrm{St}$. Из (д9), (д10) и таблицы 4 получаем, что $\varepsilon^{tu}=1$, $G\setminus D\subseteq\bigcup\limits_k (g_7^{(k)})^G$ и $\eta^{tuk}+\eta^{qtuk}\in\{2,-1\}$ для всех k. Если $g_7^{(1)}\in D$, то по (д9) $\eta^{tu}+\eta^{qtu}=2$ и, значит, $\eta^{tu}=1$. Но тогда $\eta^{tuk}+\eta^{qtuk}=2$ для всех k и $G\setminus D=\varnothing$, в противоречие с $|\Phi|=3$. Следовательно, $g_7^{(1)}\in G\setminus D$ и по (д10) $\eta^{tu}+\eta^{qtu}=-1$. Отсюда следует, что

$$(\text{д11})\qquad (\eta^{tu})^3=1,\ \eta^{tu}\neq 1$$

и $\eta^{qtu}=\eta^{-tu}$, т. е. $\eta^{tu(q+1)}=1$. Поэтому $3\mid q+1$ и $t=1$. Теперь по (д11) $3u=(q^2-1)s$, $s\in\boldsymbol{Z}$ и так как $u<q^2-1$, то $u\in$ $\in\left\{\frac{q^2-1}{3},\ 2\frac{q^2-1}{3}\right\}$. Поскольку $2\,\frac{q^2-1}{3}\equiv q\,\frac{q^2-1}{3} \pmod{q^2-1}$, то $\beta=\chi_{q^3-1}^{\left(\frac{q^2-1}{3}\right)}=\chi_{q^3-1}^{\left(2\frac{q^2-1}{3}\right)}$. Таким образом, выполнено условие (2).

(2) $\Rightarrow$ (3): Пусть выполнено условие (2). Тогда выполнено и условие (1) и, как видно из предыдущих рассуждений, $G\setminus D$ состоит в точности из тех элементов $g_7^{(k)}$, на которых $\chi_{q^3-1}^{\left(\frac{q^2-1}{3}\right)}$ принимает значение 1, т. е. когда $\eta^{uk}+\eta^{quk}=-1$ при $u=$ $=\frac{q^2-1}{3}$. Вследствие (д11) это равносильно условию: 3 не делит k. В частности, $g_7^{(1)}\in G\setminus D$. Пусть $a=(2,\ q-1)$. Как видно из таблицы 1*a* в [92], $o(\overline{g}_7^{(k)})=(q-1)/a\left(\frac{q^2-1}{a},\ k\right)$. Поэтому условие $(3,\ k)=1$ равносильно тому, что $(o(g_7^{(k)}))_3=(q^2-1)_3$. Так как $3\mid q+1$, то $(q^2-1)_3=|G|_3$. Кроме того, как видно из таблицы 4 порядки всех элементов из $G\setminus\left(\bigcup\limits_k (g_7^{(k)})^G\right)$ взаимно просты с $q+1$ и, следовательно, взаимно просты с 3. Из предыдущих утверждений теперь следует условие (3).

(3) $\Rightarrow$ (1): Пусть выполнено (3). Так как силовская подгруппа порядка q^2 в $\mathrm{PSL}(3, q)$ нециклична, то 3 не делит q. Если $3|q-1$, то $|G|_3=(q-1)_3^2(q^2+q+1)_3$. Из таблицы 4 видно, что G не имеет элементов такого порядка. Это противоречит тому, что $D\neq G$. Следовательно, $3|q+1$ и $t=1$. Поэтому при $u=(q^2-1)/3$ имеем: $\varepsilon^u=1$, $\eta^{2u}=1$, $\eta^u\neq 1$ и

$$-\eta^{uk}-\eta^{quk}=\begin{cases}-2, & \text{если } 3|k,\\ 1, & \text{если 3 не делит } k.\end{cases}$$

Так как условие $(3, k)=1$ равносильно условию $(o(g_7^{(k)}))_3=|G|_3$ (что показано ранее), то из этих равенств следует справедливость условий (д9) и (д10) при $\alpha=\chi_{q^2-1}^{\left(\frac{q^2-1}{3}\right)}$, $\beta=\mathrm{St}$. По теореме **В1** это означает, что $\Phi=\{1_G, \alpha, \beta\}$ и, значит, верно (1).

□

Д3. Теорема. Пусть $G=\mathrm{PSU}(3, q^2)$ при $q>2$, $D\trianglelefteq G$, $1\in D$ и Φ — главный D-блок группы G. Равносильны условия:

(1) $|\Phi|=3$;

(2) $3|q-1$ и $\Phi=\left\{1_G, \mathrm{St}, \chi_{q^3+1}^{\left(\frac{q^2-1}{3}\right)}\right\}$ в обозначениях таблицы 5;

(3) $D=\{g\in G\,|\,o(g)$ не делится на $|G|_3\}$ и $D\neq G$.

Доказательство. $|G|=\frac{1}{t}q^3(q^3+1)(q^2-1)=\frac{1}{t}q^3(q-1)(q+1)^2(q^2-q+1)$, где $t=(3, q+1)$. Исходя из таблицы 2 в [92] выпишем в порядке возрастания все степени неприводимых представлений группы G: 1, q^2-q, q^2-q+1, $\frac{1}{3}(q^3-q^2-q-1)$ (отсутствует при $t=1$), q^3-q^2-q-1, q^3-q^2+q, q^3, q^3+1, q^3+q^2-q-1. Выпишем часть таблицы характеров группы G, состоящую из всех значений всех характеров G степеней q^2-q, q^2-q+1, q^3 и q^3+1 (см. таблицы 2 и 1в в [92] (в таблице 2 есть ошибки при $t=1$)). Это — таблица 5.

В ней $\varepsilon=e^{\frac{2\pi i}{q+1}}$, $\eta=e^{\frac{2\pi i}{q^2-1}}$; параметр u для характеров $\chi_{q^3+1}^{(u)}$: $1\leqslant u\leqslant q^2-1$, $q-1$ не делит u, $\chi_{q^3+1}^{(u_1)}=\chi_{q^3+1}^{(u_2)}\Leftrightarrow u_1\equiv -qu_2 \pmod{q^2-1}$; $o(g_7^{(k)})=(q^2-1)/at\left(\frac{q^2-1}{at}, k\right)$, где $a=(2, q-1)$; g_6' отсутствует при $t=1$.

Дальнейшее доказательство почти дословно повторяет доказательство теоремы **Д2**.

□

Таблица 5. **Фрагмент таблицы характеров группы** PSU $(3, q^2)$ **при** $q > 2$

$\lvert C_G(g)\rvert$	$\lvert G\rvert$	$\frac{q^3(q+1)}{t}$	q^2	$\frac{q(q+1)^2(q-1)}{t}$	$\frac{q(q+1)}{t}$	$(q+1)^2$	$\frac{(q+1)^2}{t}$	$\frac{q^2-1}{t}$	$\frac{q^2-q+1}{t}$
g	1	g_2	$g_3^{(k)}$	$g_4^{(k)}$	$g_5^{(k)}$	g_6'	$g_6^{(k,l,m)}$	$g_7^{(k)}$	$g_8^{(k)}$
χ_{q^2-q}	q^2-q	$-q$	0	$-q+1$	1	2	2	0	-1
$\chi^{(u)}_{q^2-q+1}$	q^2-q+1	$-q+1$	1	$-(q-1)\varepsilon^{tuk}+$ $+\varepsilon^{-2tuk}$	$\varepsilon^{tuk}+$ $+\varepsilon^{-2tuk}$	3	$\varepsilon^{tuk}+$ $+\varepsilon^{tul}+$ $+\varepsilon^{tum}$	ε^{tuk}	0
St	q^3	0	0	q	0	-1	-1	1	1
$\chi^{(u)}_{q^3+1}$	q^3+1	1	1	$(q+1)\varepsilon^{tuk}$	ε^{tuk}	0	0	$\eta^{tuk}+$ $+\eta^{-qtuk}$	0

В этом параграфе предполагается, что справедлива классификация конечных простых групп, т. е. что каждая конечная простая неабелева группа изоморфна знакопеременной группе, присоединенной группе лиева типа, группе Титса ${}^2F_4(2)'$ или одной из 26 спорадических простых групп (приложение 3).

Е1. Пусть G — конечная простая неабелева группа. Равносильны условия:

(1) $3 \| |G|$;

(2) $G \simeq J_1$, $PSL(2, q)$ с $3 \| q^2 - 1$, $PSL(3, q)$ с $3 \| q + 1$ или $PSU(3, q^2)$ с $3 \| q$ 1.

Доказательство. (1) $\to$ (2): Пусть G — спорадическая группа или группа Титса. Просмотр порядков таких групп (приложение 3) немедленно приводит к выводу, что $G \simeq J_1$. Если же $G \simeq A_n$, то, очевидно, $n = 5$ и $G \simeq PSL(2, 5)$ $(3 \| 5^2 - 1)$.

Остается рассмотреть случай, когда G — присоединенная группа лиева типа над конечным полем $GF(q)$. Порядки таких G см. в приложении 3. Так как во всех случаях q^2 делит $|G|$, то 3 не делит q. В частности, $G \neq {}^2G_2(q)$.

Пусть $G \simeq A_n(q)$ $(n \geqslant 1)$. Положим $\delta = o_3(q)$. Тогда либо $\delta = 1$ и $3 | q - 1$, либо $\delta = 2$ и $3 | q + 1$. Согласно Б3 и Б2

$$\alpha_3(|G|) = -\alpha_3(d) - \alpha_3(q-1) + \alpha_3(l(n+1, q)) =$$

$$= -\alpha_3(d) - \alpha_3(q-1) + \alpha_3\left(\left[\frac{n+1}{\delta}\right]!\right) + \left[\frac{n+1}{\delta}\right]\alpha_3(q^\delta - 1) =$$

$$= \begin{cases} -\alpha_3(d) + n\alpha_3(q-1) + \alpha_3((n+1)!), & \text{если } \delta = 1; \\ \alpha_3\left(\left[\frac{n+1}{2}\right]!\right) + \left[\frac{n+1}{2}\right]\alpha_3(q+1), & \text{если } \delta = 2. \end{cases}$$

Выражение верхней строки может быть равно 1 лишь при $n = 1$. В этом случае, $G \simeq PSL(2, q)$ и $3 \| q - 1$. Выражение нижней строки равно 1 лишь при $\left[\frac{n+1}{2}\right] = 1$, т. е. при $n \in \{1, 2\}$. В этом случае $G \simeq PSL(2, q)$ или $PSL(3, q)$ и $3 \| q + 1$.

Пусть $G \simeq B_n(q)$ или $C_n(q)$ $(n \geqslant 2)$. Так как $o_3(q^2) = 1$, то по Б3 и Б2

$$\alpha_3(|G|) = \alpha_3(l(n, q^2)) = \alpha_3(n!) + n\alpha_3(q^2 - 1) \geqslant 2.$$

Пусть $G \simeq D_n(q)$ или ${}^2D_n(q)$ $(n \geqslant 4)$. Подобно предыдущему получаем

$$\alpha_3(|G|) \geqslant \alpha_3(l(n-1, q^2)) \geqslant 4.$$

Пусть $G\simeq{}^2\mathrm{A}_n(q)$ $(n\geqslant 2)$. Положим $\delta=o_3(-q)$. Тогда либо $\delta=1$ и $3|q+1$, либо $\delta=2$ и $3|q-1$. Имеем

$$\alpha_3(|G|)=-\alpha_3(d)-\alpha_3(q+1)+\alpha_3(l(n+1,-q))=$$

$$=\begin{cases}-\alpha_3(d)+n\alpha_3(q+1)+\alpha_3((n+1)!), & \text{если } \delta=1,\\ \alpha_3\left(\left[\frac{n+1}{2}\right]!\right)+\left[\frac{n+1}{2}\right]\alpha_3(q^2-1), & \text{если } \delta=2.\end{cases}$$

Следовательно, $\alpha_3(|G|)$ равно 1 только при $\delta=2$ и $\left[\frac{n+1}{2}\right]=1$, т. е. при $n=2$ В этом случае $G\simeq\mathrm{PSU}(3,\ q^2)$ и $3\|q-1$.

Пусть $G\simeq{}^3\mathrm{D}_4(q)$. Тогда $\alpha_3(|G|)=\alpha_3(l(2,\ q^6))=2\alpha_3(q^6-1)=2\alpha_3(q^2-1)+2\geqslant 4$.

Ясно, что 3 не делит $|{}^2\mathrm{B}_2(q)|$.

Для остальных групп G ($\mathrm{G}_2(q)$, $\mathrm{F}_4(q)$, $\mathrm{E}_6(q)$, $\mathrm{E}_7(q)$, $\mathrm{E}_8(q)$, ${}^2\mathrm{F}_4(q)$, ${}^2\mathrm{E}_6(q)$), очевидно, $\alpha_3(|G|)\geqslant\alpha_3((q^2-1)^2)\geqslant 2$.

(2) $\Rightarrow$ (1): Очевидно.

$\square$

E2. Главный 3-блок группы G имеет порядок 3, если и только если выполнено одно из условий:

1) $|G/O_{3'}(G)|=3$;

2) $G/O_{3'}(G)\simeq S_3$;

3) $\overline{G}\equiv G/O_{3'}(G)$ имеет нормальную подгруппу L, изоморфную одной из групп пункта (2) в **E1**, 3 не делит $|\overline{G}:L|$ и $\overline{G}$ изоморфна подгруппе из $\mathrm{Aut}(L)$.

Доказательство. Легко следует из А2 и **Е1**.

$\square$

Доказательство теоремы А3. Пусть $\Phi\equiv\{1_G,\ \alpha,\ \beta\}$ — главный 3-блок группы G и $\alpha(1)\leqslant\beta(1)$. По теореме **А2** $3\|\,|G|$. Положим $D=G_{3'}$. Тогда Φ есть главный D-блок группы G. Следовательно, по теореме **В1** для G выполнено одно из его условий Б1), Б2), Б3).

Пусть выполнены Б1) или Б2). Тогда $\mathrm{Ker}\,\alpha\cap\mathrm{Ker}\,\beta=N$, а так как $3\|\,|G|$, то N — $3'$-группа. Значит, $\mathrm{Ker}\,\alpha\cap\mathrm{Ker}\,\beta=O_{3'}(G)$ и для G выполнены условия 1) или 2).

Пусть выполнено Б3), $N=\mathrm{Ker}\,\alpha\cap\mathrm{Ker}\,\beta$ и $\breve{G}\equiv G/N$. Согласно теореме **В5** группа $\breve{G}$ имеет нормальную простую неабелеву подгруппу K такую, что $\breve{G}$ изоморфна подгруппе из $\mathrm{Aut}(K)$. Одновременно по **Е2** группа $\overline{G}\equiv G/O_{3'}(\overline{G})$ имеет нормальную простую подгруппу $L\simeq J_1$, $\mathrm{PSL}(2,\ q)$, $\mathrm{PSL}(3,\ q)$ или $\mathrm{PSU}(3,\ q^2)$, и $\overline{G}$ изоморфна подгруппе из $\mathrm{Aut}(L)$. Так как $O_{3'}(G)\subseteq D$, то по

B3 (1) $O_{3'}(G) \subseteq N$. Отсюда и из упомянутых свойств фактор-групп $\widetilde{G}$ и $\overline{G}$ следует, что $N = O_{3'}(G)$.

Для завершения доказательства теоремы **А3** остается определить $\alpha(1)$ и $\beta(1)$ при конкретных L из пунктов а)—д). Так как $O_{3'}(G) = \mathrm{Ker}\,\alpha \cap \mathrm{Ker}\,\beta\,(= N)$, то далее можно считать, что $O_{3'}(G) = 1$, и рассмотреть G вместо $\overline{G}$. Тогда $L \triangleleft G$. По **B3** (2) $\Phi_0 = \{1_G, \alpha|_L, \beta|_L\}$ — главный $(D \cap L)$-блок группы L и $|\Phi_0| = 3$. Так как $D \cap L = L_{3'}$, то Φ_0 — главный 3-блок группы L. Если $L \simeq \mathrm{PSL}(2, q)$, $\mathrm{PSL}(3, q)$ или $\mathrm{PSU}(3, q^2)$, то из теорем **Д1** — **Д3** получаем значения $\alpha|_L(1)$ $(= \alpha(1))$ и $\beta|_L(1)$ $(= \beta(1))$. Они и записаны в пунктах б) — д) теоремы **А3**.

В случае $L \simeq \mathrm{J}_1$ главный 3-блок L легко находится по таблице характеров группы J_1 [84] с помощью теоремы **B1** (Б3)$\Rightarrow$(А).

□

§ А. АКТИВНЫЕ ФРАГМЕНТЫ И ИХ РАНГИ

А1. Определение. Если X — таблица характеров группы G, $\Phi\subseteq \mathrm{Irr}(G)$ и $D \trianglelefteq G$, то $X(\Phi,\ D)$ обозначает подматрицу из X, лежащую на пересечении строк, соответствующих характерам из Φ, и столбцов, соответствующих элементам из D. В случае, когда D и Φ взаимодействуют, матрица $X(\Phi,\ D)$ называется *активным фрагментом таблицы характеров* X группы G или, для краткости, *активным фрагментом группы* G.

А2. Обозначения. Если группа обозначена буквой G, $D \trianglelefteq G$ и $\Phi\subseteq \mathrm{Irr}(G)$, то полагаем

$$D^- = G\setminus D,$$

$$\Phi^- = \mathrm{Irr}(G)\setminus\Phi.$$

В этой главе изучаются влияние активного фрагмента таблицы характеров группы на строение этой группы и обратное влияние. Результаты получены автором. Часть их содержится в [8], [9], [11].

А3. Упражнение. Пусть $A = X(\Phi,\ D)$ — активный фрагмент группы G ($D \trianglelefteq G$, $\Phi\subseteq \mathrm{Irr}(G)$).

1) $1_G\in\Phi \Leftrightarrow A$ имеет строку $(1,\ \ldots,\ 1)$.

2) $1\in D \Leftrightarrow A$ имеет ненулевой столбец, состоящий из вещественных неотрицательных чисел (тогда A имеет столбец, состоящий из степеней характеров из Φ).

3) Если в A вычеркнуть нулевую строку или нулевой столбец, то получится снова активный фрагмент группы G.

Из **3Б1** и **А3** легко вывести следующие два признака непростоты группы.

А4. Упражнение. Равносильны условия:

(1) G имеет активный фрагмент

$$\begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \text{ размеров } s\times t;$$

(2) G имеет нормальную подгруппу H такую, что $H \supseteq G'$, $|G:H| = s$ и H состоит из t классов сопряженных элементов группы G.

А5. Упражнение. Равносильны условия:

(1) G имеет активный фрагмент, состоящий из t равных положительных вещественных столбцов;

(2) G имеет нормальную подгруппу, состоящую из t классов сопряженных элементов группы G.

Сделаем некоторые наблюдения о рангах подматриц таблицы характеров. Пусть $D \trianglelefteq G$ и $\Phi \subseteq \mathrm{Irr}(G)$. Разобьем (подходящую) таблицу характеров X группы G на четыре части, как показано на рисунке, и внутри i-й клетки запишем ранг r_i этой клетки ($r_1 = \text{ранг}\,\mathrm{X}(\Phi,\ D)$, $r_2 = \text{ранг}\,\mathrm{X}(\Phi,\ D^-)$ и т. д.).

$$\begin{array}{c|c|c|} & D & D^- \\ \hline \Phi & r_1 & r_2 \\ \hline \Phi^- & r_3 & r_4 \\ \hline \end{array}$$

Легко увидеть справедливость следующих неравенств:

$$r_1 + r_2 \geqslant |\Phi|,$$

$$r_1 + r_3 \geqslant k_G(D),$$

$$r_1 + r_2 + r_3 + r_4 \geqslant k(G).$$

(Напомним, что $k(G)$ — число классов сопряженных элементов группы G и $k_G(D)$ — число классов сопряженных элементов группы G, содержащихся в D.)

Естественно возникает вопрос: в каких случаях достигаются границы? Оказывается, что равенства в этих трех соотношениях могут достигаться лишь одновременно, причем в точности тогда, когда данное разбиение таблицы характеров есть разбиение на активные фрагменты. Это — новая характеризация взаимодействий.

А6. Теорема. Пусть X — таблица характеров группы G, $D \trianglelefteq G$ и $\Phi \subseteq \mathrm{Irr}(G)$. Равносильны условия:

(1) $\text{ранг}\,\mathrm{X}(\Phi,\ D) + \text{ранг}\,\mathrm{X}(\Phi,\ D^-) = |\Phi|$;

(2) $\text{ранг}\,\mathrm{X}(\Phi,\ D) + \text{ранг}\,\mathrm{X}(\Phi^-,\ D) = k_G(D)$;

(3) сумма рангов матриц $\mathrm{X}(\Phi,\ D)$, $\mathrm{X}(\Phi,\ D^-)$, $\mathrm{X}(\Phi^-,\ D)$ и $\mathrm{X}(\Phi^-,\ D^-)$ равна $k(G)$;

(4) $D \longleftrightarrow \Phi$.

Доказательство. (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (4): Утверждения (1) $\Leftrightarrow$ (4) и (2) $\Leftrightarrow$ (4) следуют, соответственно, из утверждений (1) $\Leftrightarrow$ (3) и (1) $\Leftrightarrow$ (2) в **3Б12**.

(1)$\Leftrightarrow$(3): Вследствие равносильности условий (1) и (4) и равносильности условий $D \longleftrightarrow \Phi$ и $D \longleftrightarrow \Phi^-$ (3Б3), наряду с равенством (1) верно также и равенство ранг$\mathrm{X}(\Phi^-, D)$ + ранг$\mathrm{X}(\Phi^-, D^-) = |\Phi^-|$. Складывая эти равенства, получаем (3). Если же верно (3), то очевидные неравенства ранг$\mathrm{X}(\Phi, D)$ + ранг$\mathrm{X}(\Phi, D^-) \geqslant |\Phi|$ и ранг$\mathrm{X}(\Phi^-, D)$ + ранг$\mathrm{X}(\Phi^-, D^-) \geqslant |\Phi^-|$ в действительности являются равенствами; следовательно, верно (1).

. I

A7. Пусть X — таблица характеров группы G, $D \trianglelefteq G$ и $\Phi \subseteq \mathrm{Irr}(G)$. Тогда

$$\text{ранг}\,\mathrm{X}(\Phi, D) \leqslant |\Phi| + k_G(D) - k(G).$$

Доказательство. Очевидно, ранг$\mathrm{X}(\Phi, D)$ + ранг$\mathrm{X}(\Phi, D^-) \geqslant$ ранг$\mathrm{X}(\Phi, G) = |\Phi|$ и ранг$\mathrm{X}(\Phi, D^-) \leqslant k_G(D^-) = k(G) - k_G(D)$. Из этих неравенств следует требуемое.

□

Исследуем теперь крайний случай, когда в утверждении **A7** достигается равенство.

A8. Теорема. Пусть G — конечная группа, X — ее таблица характеров, $D \trianglelefteq G$ и $\Phi \subseteq \mathrm{Irr}(G)$. Равносильны условия:

(А) ранг$\mathrm{X}(\Phi, D) = |\Phi| + k_G(D) - k(G)$,

(Б) $\mathrm{X}(\Phi^-, D^-) = 0$.

Доказательство. (А)$\Rightarrow$(Б): Из (А) и **A7** получаем $|\Phi^-| \geqslant$ ранг$\mathrm{X}(\Phi^-, D) \geqslant k_G(D)$ − ранг$\mathrm{X}(\Phi, D) = k_G(D) - (|\Phi| + k_G(D) - k(G)) = |\Phi^-|$. Поэтому

(a1) $$\text{ранг}\,\mathrm{X}(\Phi^-, D) + \text{ранг}\,\mathrm{X}(\Phi, D) = k_G(D),$$

(a2) $$\text{ранг}\,\mathrm{X}(\Phi^-, D) = |\Phi^-|.$$

Согласно теореме **A6** ((3)$\Rightarrow$(1)) из (a1) следует, что $D \longleftrightarrow \Phi$. Тогда по 3Б3 $D \longleftrightarrow \Phi^-$. Но теперь снова по теореме **A6** ((1)$\Rightarrow$(2)), в которой рассмотрим Φ^- в роли Φ, имеем ранг$\mathrm{X}(\Phi^-, D)$ + ранг$\mathrm{X}(\Phi^-, D^-) = |\Phi^-|$. Отсюда и из (a2) следует (Б).

(Б)$\Rightarrow$(А): Из условия (Б), очевидно, следует, что $\Phi^- \longleftrightarrow D$, $\Phi \longleftrightarrow D^-$ и $\Phi \longleftrightarrow D$. Беря последовательно эти взаимодействия в качестве пункта (1) теоремы **A6**, получаем (учитывая (Б)) ранг$\mathrm{X}(\Phi^-, D) = |\Phi^-|$ (из равенства (2) теоремы **A6**), ранг$\mathrm{X}(\Phi, D^-) = k_G(D^-)$ (из равенства (3) теоремы **A6**), и ранг$\mathrm{X}(\Phi, D) = k(G)$ − ранг$\mathrm{X}(\Phi^-, D)$ − ранг$\mathrm{X}(\Phi, D^-) = k(G) - |\Phi^-| -$

$-k_G(D^-) = |\Phi| + k_G(D) - k(G)$ (из равенства (4) теоремы **A6** с учетом предшествующих равенств).

□

Отметим одно следствие теоремы **A8** для непростой группы.

A9. Пусть G — конечная группа и $N \trianglelefteq G$. Положим $\Phi = \mathrm{Irr}(G|N)$ и

$$a_G(N) = k(G) + 1 - k(G/N) - k_G(N).$$

1) $a_G(N) \geqslant 0$.

2) $a_G(N) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{X}(\Phi^-, N^-) = 0$.

3) Если $T \trianglelefteq G$ и $T \subseteq N^-$, то

$$k_G(T) - \text{ранг}\,\mathrm{X}(\Phi, T) = a_G(N) \Leftrightarrow \mathrm{X}(\Phi^-, (N \cup T)^-) = O.$$

4) Если $\Psi \subseteq \Phi^-$, то

$$|\Psi| - \text{ранг}\,\mathrm{X}(\Psi, N) = a_G(N) \Leftrightarrow \mathrm{X}((\Phi \cup \Psi)^-, N^-) = O.$$

Доказательство. 1), 2): Следуют непосредственно из **A7** и теоремы **A8** при $D = N$, так как ранг $\mathrm{X}(\Phi, N) = 1$, а $|\Phi| = |\mathrm{Irr}(G/N)| = k(G/N)$ по **2A33**.

3): Следует из теоремы **A8** при $D = N \cup T$, так как ранг $\mathrm{X} \times (\Phi, D) = 1 +$ ранг $\mathrm{X}(\Phi, T)$ (столбец из $\mathrm{X}(\Phi, N)$ не может быть линейной комбинацией столбцов из $\mathrm{X}(\Phi, N^-)$, поскольку иначе столбцы таблицы характеров группы G/N были бы линейно зависимы) и $k_G(D) = k_G(N) + k_G(T)$.

$$\begin{array}{c} \\ \Phi \Big\{ \\ \\ \end{array}
\begin{array}{|c|c:c|}
\multicolumn{1}{c}{N} & \multicolumn{1}{c}{T} & \multicolumn{1}{c}{} \\ \hline
\begin{matrix} 1 & \dots & 1 \\ a & \dots & a \end{matrix} & * & \\ \hline
 & & O \\ \hline
\end{array}$$

4): Из равенства для рангов, установленного в доказательстве пункта 3), при $T = N^-$ получается $|\Phi| = 1 +$ ранг $\mathrm{X}(\Phi, N) =$ ранг $\mathrm{X}(\Phi, N) +$ ранг $\mathrm{X}(\Phi, N^-)$. Но тогда по теореме **A6** $N \longleftrightarrow \Phi$ и $k_G(N) = 1 +$ ранг $\mathrm{X}(\Phi^-, N)$. Отсюда легко следует, что ранг $\mathrm{X}(\Phi \cup \Psi, N) = 1 +$ ранг $\mathrm{X}(\Psi, N)$.

$$\begin{array}{r|c|c|}
\multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{N} & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{2-3}
\Phi & \begin{matrix} 1 & \dots & 1 \\ a & \dots & a \end{matrix} & \\ \cline{2-3}
\Psi & * & \\ \cdashline{2-3}
 & & O \\ \cline{2-3}
\end{array}$$

Теперь утверждение 4) следует из теоремы **А8**, если в ней вместо Φ взять $\Phi \cup \Psi$.

$\square$

А10. Пример. Пусть $G = N \rtimes H$ — группа Фробениуса с фробениусовым ядром N и $\Phi = \mathrm{Irr}(G|N)$. Хорошо известно, что $\chi(h) = 0$ для всех $\chi \in \Phi^-$ и $h \in H$ (см., например, [73, теорема 6.34]). Этот факт непосредственно следует и из **А9**: так как $\{H^g | g \in G\} \cup \{N\}$ есть расщепление группы G, то $k(G) = k(H) + k_G(N) + 1$, т. е. $a_G(N) = 0$.

А11. Пример. Пусть G — конечная p-группа (p — простое число) и $|G'| = p$. Тогда

$$\mathrm{X}(\mathrm{Irr}(G|G')^-, \ Z(G)^-) = \mathrm{O},$$

т. е. каждый нелинейный неприводимый характер группы G исчезает на каждом ее нецентральном элементе.

Действительно, как легко увидеть, $G' \leqslant Z(G)$ и при $\Phi = \mathrm{Irr}(G|G')$ ранг$\mathrm{X}(\Phi, \ Z(G)) = |Z(G):G'| = |Z(P)|/p$. Далее, $|g^G| = p$ при $g \in G \setminus Z(G)$ и $k(G) = |Z(G)| + (|G| - |Z(G)|)/p$. Но теперь при $D = Z(G)$ выполнено условие (А) теоремы **А8** и, следовательно, $\mathrm{X}(\Phi^-, \ Z(G)^-) = \mathrm{O}$.

§ Б. АКТИВНЫЙ ФРАГМЕНТ И ПОРЯДКИ ЦЕНТРАЛИЗАТОРОВ

В теореме **3Б1** даны характеризации взаимодействия на языке таблицы характеров. Легко заметить, что равносильность условий (1) и (4) этой теоремы можно переписать в следующем виде.

Б1. Пусть G — конечная группа, $D = d_1^G \dot\cup \ldots \dot\cup d_t^G$ и $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_s\} \subseteq \mathrm{Irr}(G)$. Равносильны условия:

(1) $D \longleftrightarrow \Phi$;

(2) система уравнений

$$(б1) \qquad \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{t} \left(\varphi_m(d_i) \sum\limits_{j=1}^{s} \overline{\varphi_j(d_i)}\, \varphi_j(d_n) \right) x_i = \varphi_m(d_n), \\ (m = 1, \ldots, s; \ n = 1, \ldots, t), \end{cases}$$

имеет решение $x_i = \dfrac{1}{|C_G(d_i)|}$ $(i = 1, \ \ldots, \ t)$.

$\square$

Таким образом, имея активный фрагмент $\mathrm{X}(\Phi, \ D)$, мы получаем систему уравнений, связывающую порядки централизаторов элементов из D. Чем больше ранг r системы (б1), тем большую информацию о порядках этих централизаторов мы получим. Сейчас мы докажем, что $r \geqslant$ ранг $\mathrm{X}(\Phi, \ D)$. Некоторым сюрпризом является факт, что может быть $r >$ ранг $\mathrm{X}(\Phi, \ D)$.

Б2. Теорема. Пусть при обозначениях из **Б1** $D \longleftrightarrow \Phi$. Обозначим через t_0 максимальное число попарно не пропорциональных столбцов в $\mathrm{X}(\Phi, D)$. Тогда ранг r системы уравнений (б1) удовлетворяет неравенству

$$\text{ранг}\, \mathrm{X}(\Phi, D) \leqslant r \leqslant t_0.$$

Обе границы для r достигаются.

Доказательство. Положим $\mathrm{A} = \mathrm{X}(\Phi, D)$. Тогда систему (б1) можно записать в виде

$$(б2) \qquad \begin{cases} \sum_{i=1}^{t} \mathrm{A}_{mi} (\mathrm{A}^*\mathrm{A})_{in} x_i = \mathrm{A}_{mn}, \\ (m = 1, \ldots, s;\ n = 1, \ldots, t) \end{cases}$$

или в виде одного матричного равенства

$$(б3) \qquad \mathrm{A}\, \mathrm{diag}(x_1, \ldots, x_t)\, \mathrm{A}^*\mathrm{A} = \mathrm{A}.$$

Рассмотрим часть системы (б2), в которой n фиксировано. Матрица этой системы есть

$$\mathrm{M}_n = \begin{pmatrix} \mathrm{A}_{11}(\mathrm{A}^*\mathrm{A})_{1n} & \mathrm{A}_{12}(\mathrm{A}^*\mathrm{A})_{2n} & \ldots & \mathrm{A}_{1t}(\mathrm{A}^*\mathrm{A})_{tn} \\ \mathrm{A}_{21}(\mathrm{A}^*\mathrm{A})_{1n} & \mathrm{A}_{22}(\mathrm{A}^*\mathrm{A})_{2n} & \ldots & \mathrm{A}_{2t}(\mathrm{A}^*\mathrm{A})_{tn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathrm{A}_{s1}(\mathrm{A}^*\mathrm{A})_{1n} & \mathrm{A}_{s2}(\mathrm{A}^*\mathrm{A})_{2n} & \ldots & \mathrm{A}_{st}(\mathrm{A}^*\mathrm{A})_{tn} \end{pmatrix}.$$

Следовательно, матрица M системы (б2) может быть записана в виде

$$(б4) \qquad \mathrm{M} = \begin{pmatrix} \mathrm{A}\, \mathrm{diag}((\mathrm{A}^*\mathrm{A})_{11}, \ldots, (\mathrm{A}^*\mathrm{A})_{t1}) \\ \mathrm{A}\, \mathrm{diag}((\mathrm{A}^*\mathrm{A})_{12}, \ldots, (\mathrm{A}^*\mathrm{A})_{t2}) \\ \vdots \\ \mathrm{A}\, \mathrm{diag}((\mathrm{A}^*\mathrm{A})_{1t}, \ldots, (\mathrm{A}^*\mathrm{A})_{tt}) \end{pmatrix}.$$

Ранг r этой матрицы мы и должны оценить.

Положим $a = \text{ранг}\, \mathrm{A}$. Тогда $\text{ранг}\, \mathrm{A}^*\mathrm{A} = a$, что следует из равенства (б3) и **Б1**. Пусть столбцы с номерами $j_1, \ldots, j_a$ в $\mathrm{A}^*\mathrm{A}$ линейно независимы (в частности, ненулевые). Тогда линейно независимы и столбцы с этими же номерами в матрице A $\left(\text{из } \sum_{j=1}^{t} c_j \mathrm{A}_{\cdot j} = \mathrm{O} \text{ следует } \sum_{j=1}^{t} c_j (\mathrm{A}^*\mathrm{A})_{\cdot j} = \mathrm{O}\right)$.

Здесь $\mathrm{X}_{\cdot j}$ — j-й столбец матрицы X. Пусть также $\mathrm{X}_{i\cdot}$ — i-я строка в X.

Покажем, что столбцы с номерами $j_1, \ldots, j_a$ в M линейно независимы. Пусть

$$\sum_{l=1}^{a} c_l \mathrm{M}_{\cdot j_l} = \mathrm{O}, \text{ где } c_l \in \boldsymbol{C}.$$

Тогда для любого $n \in \{1, \ldots, t\}$ будет

$$\sum_{l=1}^{a} c_l A_{\cdot j_l} (A^*A)_{j_l n} = O.$$

Отсюда, в силу линейной независимости столбцов $A_{\cdot j_l}$ $(l = 1, \ldots, a)$, получаем $c_l (A^*A)_{j_l n} = O$ при $n \in \{1, \ldots, t\}$, т. е. $c_l (A^*A)_{j_l \cdot} = O$ $(l = 1, \ldots, a)$. Но $(A^*A)_{j_l \cdot} = \overline{(A^*A)_{\cdot j_l}} \neq O$. Следовательно, $c_l = 0$ при $l \in \{1, \ldots, a\}$. Таким образом,

$$a \leqslant r.$$

Покажем теперь, что $r \leqslant t_0$. Пусть k-й и l-й столбцы матрицы A пропорциональны:

$$A_{\cdot k} = c A_{\cdot l}, \quad c \in \boldsymbol{C}.$$

Тогда k-я и l-я строки матрицы A^*A также пропорциональны, а именно,

$$(A^*A)_{k\cdot} = \bar{c} (A^*A)_{l\cdot}.$$

Но теперь для любых n, $i \in \{1, \ldots, t\}$.

$$(M_n)_{ik} = A_{ik} (A^*A)_{kn} = |c|^2 A_{il} (A^*A)_{ln} = |c|^2 (M_n)_{il},$$

т. е. в матрице M k-й и l-й столбцы пропорциональны. Значит,

$$r \leqslant t_0.$$

Остается показать достижимость границ. Если G — неединичная группа и $X(\Phi, D)$ — неединичная строка таблицы характеров группы G (т. е. $\Phi = \{\varphi\}$, $\varphi \neq 1_G$ и $D = G$), то, как легко увидеть, $r =$ ранг $X(\Phi, D) = 1$.

Пусть $G = A_5$. Легко проверить, что G имеет активный фрагмент

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

ранг $A = 2$ и $r = t_0 = 3$.

□

Б3. Замечание. Пусть $A = X(\Phi, D)$ — активный фрагмент группы G, $a =$ ранг A и r, t_0 как в теореме **Б2**. При решении уравнения (б3) мы можем отбросить «лишние» (т. е. линейно зависимые от остальных) строки. А именно, если в **A** линейно независимы строки с номерами $i_1, \ldots, i_a$, то уравнение (б3) равносильно уравнению

(б5) $$A_{[i_1, \ldots, i_a]} \operatorname{diag}(x_1, \ldots, x_t) A^*A = A_{[i_1, \ldots, i_a]},$$

где $A_{[i_1, \ldots, i_a]}$ — матрица, состоящая из строк с номерами $i_1, \ldots, i_a$ матрицы A. Подобно, если в A линейно независимы столбцы с номерами $j_1, \ldots, j_a$, то уравнение (65), очевидно, равносильно уравнению

(66) $$A_{[i_1, \ldots, i_a]} \operatorname{diag}(x_1, \ldots, x_t) A^* A^{[j_1, \ldots, j_a]} = A^{[j_1, \ldots, j_a]}_{[i_1, \ldots, i_a]},$$

где $A^{[j_1, \ldots, j_a]}$ и $A^{[j_1, \ldots, j_a]}_{[i_1, \ldots, i_a]}$ — матрицы, состоящие из столбцов с номерами $j_1, \ldots, j_a$ матриц A и $A_{[i_1, \ldots, i_a]}$ соответственно.

Так как справа стоит $a \times a$-матрица, то (66) дает систему a^2 уравнений и, значит, $r \leqslant a^2$. Это позволяет следующим образом уточнить утверждение теоремы **Б2**:

(67) $$a \leqslant r \leqslant \min(t_0, a^2).$$

Б4. Пример. Предположим, что группа G имеет активный фрагмент

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(как в группе A_5). Пусть столбцы матрицы A соответствуют классам d_1^G, d_2^G и d_3^G соответственно. Тогда согласно **Б1** уравнение

$$A \operatorname{diag}(x_1, x_2, x_3) A^* A = A$$

имеет решение $x_i = \dfrac{1}{|C_G(d_i)|}$ $(i = 1, 2, 3)$. Так как ранг $A = 2$, то согласно замечанию **Б3** записанное выше уравнение равносильно следующему:

$$A_{[1, 2]} \operatorname{diag}(x_1, x_2, x_3) A^* (A^{[2, 3]}) = A^{[2, 3]}_{[1, 2]}.$$

Имеем

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 4x_1 & 0 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} -5x_1 + 3x_2 + x_3 & 5x_1 + x_2 + 2x_3 \\ -20x_1 + x_3 & 20x_1 + 2x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

откуда получаем $x_1 = \frac{1}{60}$, $x_2 = \frac{1}{4}$, $x_3 = \frac{1}{3}$. Так как $d_1 = 1$ (см. упражнение А3 (2)), то получаем

$$|G| = 60, \ |C_G(d_2)| = 4, \ |C_G(d_3)| = 3.$$

С учетом этих равенств уже совсем легко показать, что $G \simeq A_5$. (Из $|C_G(d_3)| = 3$ следует, что в G нет элементов порядка 15, а потому $O(G) = 1$ и силовская 2-подгруппа T в G не циклическая. Тогда $T \simeq E_4$ и $|N_G(T)| = 12$. Так как $N_G(T)$ имеет индекс 5 в G и единичную сердцевину, то $G \simeq A_5$).

Б5. Замечание. Пусть выполнено условие **Б1** и $X(\Phi, D)$ — активный фрагмент группы G. Если, кроме того, известна строка $(b_1, \ldots, b_t)$ фрагмента $X(\Phi^-, D)$, то для отыскания порядков централизаторов элементов из D мы можем добавить к системе (б1) уравнения

$$\sum_{i=1}^{t} \varphi_m(d_i)\bar{b}_i x_i = 0 \ (m = 1, \ldots, s),$$

так как по теореме **3Б1** ((1) $\Rightarrow$ (2)) этим уравнениям также удовлетворяют значения $x_i = \frac{1}{|C_G(d_i)|}$ $(i = 1, \ldots, t)$.

В частности, если активный фрагмент $X(\Phi, D)$ не содержит строки $(1, \ldots, 1)$ (т. е. $1_G \notin \Phi$), то такая строка есть в $X(\Phi^-, D)$ и, следовательно, систему (б1) можно пополнить уравнениями

$$\sum_{i=1}^{t} \varphi_m(d_i) x_i = 0 \ (m = 1, \ldots, s).$$

В ряде случаев такая расширенная система позволяет найти больше централизаторов, чем система (б1).

Б6. Упражнение. Многие группы G имеют активный фрагмент вида

$$X(\Phi, D) = \begin{pmatrix} ai & -ai \\ -ai & ai \end{pmatrix}, \text{ где } a \in R \setminus \{0\} \ \left(i = \sqrt{-1}\right).$$

Показать, что в этом случае

$$|C_G(d)| = 4a^2 \text{ для всех } d \in D.$$

Б7. Упражнение. Предположим, что группа G имеет двухстолбцовый фрагмент

$$\begin{pmatrix} a_1 & ka_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_s & ka_s \end{pmatrix}, \text{ где } k \neq 1 \text{ и } |a_1|^2 + \ldots + |a_s|^2 = \alpha \neq 0.$$

Пусть d_1 и d_2 — элементы, которым соответствуют первый и второй столбцы фрагмента соответственно. Показать, что $k \in \boldsymbol{Q}$, $\alpha \in \boldsymbol{Z}$,

$$|C_G(d_1)| = (1-k)\alpha, \quad |C_G(d_2)| = k(1-k)\alpha.$$

Если $a_1 + \ldots + a_s \neq 0$, то $|G| = \max\{|C_G(d_1)|, |C_G(d_2)|\}$. (Изучение двухстолбцовых активных фрагментов и примеры групп с такими фрагментами содержатся в § З).

§ В. ХАРАКТЕРИЗАЦИИ НЕКОТОРЫХ ПРОСТЫХ ГРУПП АКТИВНЫМ ФРАГМЕНТОМ ТАБЛИЦЫ ХАРАКТЕРОВ

Имеется большое число работ, посвященных характеризациям конечных групп их таблицами характеров (см. [35, § 1.5]). Здесь мы получим характеризации некоторых групп частью их таблицы характеров, а именно, активным фрагментом таблицы характеров.

Поставим перед собой цель: изучить конечные группы, имеющие активный фрагмент вида

$$n \text{ раз} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \overbrace{1 \ \ldots \ 1}^{l \text{ раз}} & \overbrace{1 \ \ldots \ 1}^{m \text{ раз}} \\ q & 0 \ \ldots \ 0 & \varepsilon \ \ldots \ \varepsilon \\ q-\varepsilon & -\varepsilon \ \ldots \ -\varepsilon & 0 \ \ldots \ 0 \\ \vdots & \vdots \qquad \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ q-\varepsilon & -\varepsilon \ \ldots \ -\varepsilon & 0 \ \ldots \ 0 \end{pmatrix} \right.$$

или, в краткой записи,

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} & l & m \\ & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ q & 0 & \varepsilon \\ q-\varepsilon & -\varepsilon & 0 \end{pmatrix}, \\ n \to & \end{array}$$

где $\{l, m, n\} \subseteq \boldsymbol{N}$ и $\{q, \varepsilon\} \subseteq \boldsymbol{C}$ (в **Г1** доказывается, что $q \in \boldsymbol{N}$ и $\varepsilon \in \{1, -1\}$). (Число со стрелкой указывает кратность соответствующих строки или столбца.)

Сформулируем три теоремы, доказательства которых будут получены в параграфах Г — Ё.

В1. Теорема. Пусть G — конечная группа, q — натуральное число и $\varepsilon \in \{1, -1\}$. Равносильны условия:

(1) G имеет активный фрагмент таблицы характеров

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} & & m \\ & & \downarrow \end{array} \\ & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ q & 0 & \varepsilon \\ q-\varepsilon & -\varepsilon & 0 \end{pmatrix}, \\ n \to & \end{array}$$

где $m, n \in \boldsymbol{N}$;

(2) $G \simeq \mathrm{PSL}(2, 2^a)$ и $q = 2^a$, где $a \in \boldsymbol{N}$, $a \geqslant 2$.

В2. Теорема. Пусть G — конечная группа и $q \in \boldsymbol{N}$. Равносильны условия:

(1) q четно и G имеет активный фрагмент таблицы характеров вида

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} & 3 & m \\ & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ q & 0 & \varepsilon \\ q-\varepsilon & -\varepsilon & 0 \end{pmatrix}, \\ n \to & \end{array}$$

где $m, n \in \boldsymbol{N}$ и $\varepsilon \in \boldsymbol{C}$;

(2) $G \simeq \mathrm{Sz}(r)$ и $q = r^2$, где $r = 2^{2a+1}$, $a \in \boldsymbol{N}$.

Следующая теорема включает в себя две предыдущих, но в отличие от них ее доказательство опирается на классификацию конечных простых групп.

В3. Теорема. Для конечной группы G равносильны условия:

(1) G имеет активный фрагмент таблицы характеров вида

$$\text{(в1)} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} & l & m \\ & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ q & 0 & \varepsilon \\ q-\varepsilon & -\varepsilon & 0 \end{pmatrix}, \\ n \to & \end{array}$$

где $\{l, m, n\} \subseteq \boldsymbol{N}$ и $\{q, \varepsilon\} \subseteq \boldsymbol{C}$;

(2) $G \simeq \mathrm{PSL}(2, r)$ при $r > 3$, $\mathrm{Sz}(r)$ при $r = 2^{2a+1} \geqslant 8$ или $\mathrm{PSL}(3, 4)$.

В следующем утверждении для каждой из групп пункта (2) теоремы **В3** перечисляются все ее активные фрагменты вида (**в1**). Доказательство этого утверждения легко следует из рассмотрения таблиц характеров групп пункта (2). (Облегчает дело утверждение (д24) из доказательства **Д1**.)

В4. 1) Группа $\mathrm{PSL}(2, 2^a)$ с $a \geqslant 2$ имеет точно два активных фрагмента вида (в1):

в первом $q = 2^a$, $\varepsilon = 1$, $l = 1$, $m = \frac{q}{2} - 1$, $n = \frac{q}{2}$;

во втором $q = 2^a$, $\varepsilon = -1$, $l = 1$, $m = \frac{q}{2}$, $n = \frac{q}{2} - 1$.

2) Группа $\mathrm{PSL}(2, p^a)$, где p — нечетное простое число, $a \in \boldsymbol{N}$ и $p^a > 5$, имеет точно один активный фрагмент вида (в1); в нем

$$q = p^a, \ p^a \equiv \varepsilon \pmod 4, \ l = 2, \ m = \left[\frac{q+1}{4}\right], \ n = \left[\frac{q-1}{4}\right].$$

3) Группа $\mathrm{Sz}(r)$ $(r = 2^{2a+1} \geqslant 8)$ имеет точно один фрагмент вида (в1); в нем

$$q = r^2,\ \varepsilon = -1,\ l = 3,\ m = \frac{r}{2},\ n = \frac{r}{2} - 1.$$

4) Группа $\mathrm{PSL}(3, 4)$ имеет точно один активный фрагмент вида (в1); в нем

$$q = 64,\ \varepsilon = 1,\ l = 4,\ m = 3,\ n = 2.$$

$\lrcorner$

Заметим, что при $n = 1$ фрагмент (в1), определяемый набором параметров $(q,\ \varepsilon,\ l,\ m,\ 1)$, можно (переставив строки и столбцы в (в1)) задать набором параметров $(q - \varepsilon,\ -\varepsilon,\ m,\ l,\ 1)$. В рассмотренных выше примерах таких фрагментов точно два. А именно, для $\mathrm{PSL}(2, 4)$ $(\simeq \mathrm{PSL}(2, 5))$ фрагмент с параметрами $q = 4$, $\varepsilon = -1$, $l = 1$, $m = 2$, $n = 1$ можно задать параметрами $q = 5$, $\varepsilon = 1$, $l = 2$, $m = 1$, $n = 1$, а для $\mathrm{PSL}(2, 7)$ $(\simeq \mathrm{PSL}(3, 2))$ фрагмент с параметрами $q = 7$, $\varepsilon = -1$, $l = 2$, $m = 2$, $n = 1$ задать параметрами $q = 8$, $\varepsilon = 1$, $l = 2$, $m = 2$, $n = 1$.

В следующем параграфе мы вычислим порядок группы, имеющей активный фрагмент насколько более общего вида, чем (в1).

В § Д демонстрируется некоторый метод доказательства простоты группы G с данным фрагментом $\mathrm{X}(\Phi, D)$ (на примере активного фрагмента вида (в1)), а также уточнения порядков централизаторов элементов, как входящих, так и не входящих в D.

В § Е доказываются теоремы **В1** и **В2**.

В § Ё с использованием результатов предыдущих параграфов и классификации конечных простых групп доказывается теорема **В3**.

§ Г. ПОРЯДОК ГРУППЫ

Г1. Пусть конечная группа G имеет активный фрагмент таблицы характеров вида

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} & l & m \\ & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ r \to \\ n \to \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ q & 0 & \varepsilon \\ q - \varepsilon & -\varepsilon & 0 \end{pmatrix}, \end{array}$$

где $\{l, m, r, n\} \subseteq \boldsymbol{N}$ и $\{q, \varepsilon\} \subseteq \boldsymbol{C}$. Обозначим через e, $u_1, \ldots, u_l$, $v_1, \ldots, v_m$ — элементы группы G, которым соответствуют 1-й, 2-й и т. д. столбцы этого фрагмента. Положим $U = \bigcup\limits_{i=1}^{l} u_i^G$ и $V = \bigcup\limits_{i=1}^{m} v_i^G$. Тогда

$$e = 1,\ \varepsilon \in \{1, -1\},\ q \in \boldsymbol{N},$$
$$|G| = q(q - \varepsilon)(rn + r + n),$$
$$|U| = (q - \varepsilon)(qr + \varepsilon),$$
$$|V| = q(n(q - \varepsilon) - \varepsilon).$$

Доказательство. Обозначим данный в условии фрагмент через А. Тогда $A = X(\Phi, D)$, где $\Phi \subseteq \mathrm{Irr}(G)$ ($|\Phi| = r+n+1$) и $D = e^G \cup U \cup V$. Пусть $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_{1+r+n}\}$, причем значения φ_i на D лежат в i-й строке фрагмента А.

Заметим сначала, что

$$\varphi_1 = 1_G,$$

так как в противном случае $1_G \in \Phi^-$ и по теореме **3Б1** ((1) ⇒ (2)) было бы $0 = \sum_{d \in D} \varphi_1(d)\overline{1_G(d)} = |D|$.

Покажем теперь, что $e = 1$. Пусть это не так. Тогда $1 \in D^-$ и по теореме **3Б1** ((1) ⇒ (3)) столбец $(\varphi_1(1), \ldots, \varphi_{1+r+n}(1))^T$ из $X(\Phi, D^-)$ ортогонален каждому столбцу из A. Поэтому $1 - \varepsilon \sum_{i=r+2}^{1+r+n} \varphi_i(1) = 0$ и $1 + \varepsilon \sum_{i=2}^{r+1} \varphi_i(1) = 0$. Но из первого равенства следует, что $\varepsilon > 0$, а из второго — $\varepsilon < 0$. Таким образом,

$$e = 1.$$

Поэтому $\{q, q - \varepsilon\} \subseteq \boldsymbol{N}$ и, значит, $\varepsilon \in \boldsymbol{Z}$. Пусть $g \in D^-$. Тогда по теореме **3Б1** ((1) ⇒ (3)) $1 + \varepsilon \sum_{i=2}^{r+1} \overline{\varphi_i(g)} = 0$. Следовательно, $\frac{1}{\varepsilon}$ — целое алгебраическое число и по **2А6** (3) $\frac{1}{\varepsilon} \in \boldsymbol{Z}$. Таким образом,

$$\varepsilon \in \{1, -1\}.$$

Положим

$$z = |C_G(e)|^{-1},$$
$$x_i = |C_G(u_i)|^{-1} \quad (i = 1, \ldots, l),$$
$$y_i = |C_G(v_i)|^{-1} \quad (i = 1, \ldots, m).$$

Согласно **Б1** (см. также равенство (б3) в доказательстве теоремы **Б2**) справедливо равенство

$$\text{(г1)} \qquad A\,\mathrm{diag}(z, x_1, \ldots, x_l, y_1, \ldots, y_m)\,A^*A = A.$$

Очевидно, ранг $A = 2$, а максимальное число l_0 попарно непропорциональных столбцов в А равно 3. По теореме **Б2** ранг системы (г1) равен 2 или 3. Как выяснится из дальнейшего решения он равен 3.

Приступим к решению системы (г1). Отбрасывая заведомо избыточные уравнения, получаем

$$\begin{array}{cccc} & l & m & \\ & \downarrow & \downarrow & \\ \left(\begin{array}{c} q \\ q-\varepsilon \end{array}\right. & \begin{array}{c} 0 \\ -\varepsilon \end{array} & \left.\begin{array}{c} \varepsilon \\ 0 \end{array}\right) \end{array} \mathrm{diag}(z, x_1, \ldots, x_l, y_1, \ldots, y_m) \times$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} & r & n \\ & \downarrow & \downarrow\end{array} \\ \times\ \begin{array}{r} \\ l\to \\ m\to\end{array} & \begin{pmatrix}1&q&q-\varepsilon\\1&0&-\varepsilon\\1&-\varepsilon&0\end{pmatrix}\end{array} \begin{array}{r} \\ r\to \\ n\to\end{array}\begin{pmatrix}1&1\\0&\varepsilon\\-\varepsilon&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&\varepsilon\\-\varepsilon&0\end{pmatrix}$$

(в левой части оставлены лишь две строки в первом множителе и два столбца в последнем множителе; тогда справа остается подматрица из A, лежащая на пересечении выбранных строк и столбцов). Отсюда

$$\begin{pmatrix} qz & 0\ \dots\ 0 & \varepsilon y_1\ \dots\ \varepsilon y_m \\ (q-\varepsilon)z & -\varepsilon x_1\ \dots\ -\varepsilon x_l & 0\ \dots\ 0 \end{pmatrix}\times$$

$$\times\ \begin{array}{r} \\ l\to \\ m\to\end{array}\begin{pmatrix} 1-n\varepsilon(q-\varepsilon) & 1+rq\varepsilon \\ 1+n & 1 \\ 1 & 1+r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&\varepsilon\\-\varepsilon&0\end{pmatrix}$$

и, полагая $x=x_1+\dots+x_l$ и $y=y_1+\dots+y_m$, получаем систему уравнений относительно z, x, y:

$$\begin{cases} (1-n\varepsilon(q-\varepsilon))qz+\varepsilon y=0, \\ (1+rq\varepsilon)qz+(1+r)\varepsilon y=\varepsilon, \\ (1-n\varepsilon(q-\varepsilon))(q-\varepsilon)z-(1+n)\varepsilon x=-\varepsilon, \\ (1+rq\varepsilon)(q-\varepsilon)z-\varepsilon x=0. \end{cases}$$

Отсюда находим

$$z=(q(q-\varepsilon)(r+n+rn))^{-1},$$

$$\frac{x}{z}=(q-\varepsilon)(rq+\varepsilon),$$

$$\frac{y}{z}=q(n(q-\varepsilon)-\varepsilon).$$

Так как $e=1$, то $z=|G|^{-1}$ и, следовательно, $\frac{x}{z}=|U|$ и $\frac{y}{z}=|V|$. Отсюда и из предыдущих равенств следует требуемое.

□

§ Д. ПРОСТОТА ГРУППЫ

Д1. Пусть выполнено условие утверждения **Г1** при $r=1$. Тогда

1) группа G проста,

2) $|G|=q(q-\varepsilon)(2n+1)$ и $2n+1\,|\,q+\varepsilon$ (в частности, числа q, $q-\varepsilon$ и $2n+1$ попарно взаимно просты),

3) для любого $g\in G\setminus\{1\}$ $|C_G(g)|$ делит одно из чисел q, $q-\varepsilon$, $2n+1$.

Доказательство. Примем обозначения, введенные в **Г1** и в его доказательстве. По **Г1**

(д1) $$|G| = q(q-\varepsilon)(2n+1),$$

(д2) $$|U| = q^2 - 1,$$

(д3) $$|V| = q(n(q-\varepsilon)-\varepsilon).$$

Кроме того, $e = 1$ и $\varphi_1 = 1_G$ (см. доказательство **Г1**).

Пусть $g \in D^-$. Тогда по теореме **3Б1** ((1) $\Rightarrow$ (3)) $\sum_{\varphi\in\Phi} \overline{\varphi(v_1)} \times \varphi(g) = 0$, т. е. (так как $\varphi_1 = 1_G$) $1 + \varepsilon\varphi_2(g) = 0$. Следовательно,

(д4) $$\varphi_2(g) = -\varepsilon \text{ для всех } g \in D^-.$$

Пусть $g_1, \ldots, g_s$ — представители всех классов сопряженных элементов группы G, входящие в $G \setminus D$. Полученные свойства позволяют записать следующий фрагмент таблицы характеров G, расширяющий активный фрагмент $A = \mathrm{X}(\Phi, D)$ (a_{ij} — обозначение для $\varphi_{r+i}(g_j)$).

(д5)

	1	U: $u_1 \ldots u_l$	V: $v_1 \ldots v_m$	D^-: $g_1 \ldots g_s$
φ_1	1	$1 \ldots 1$	$1 \ldots 1$	$1 \ldots 1$
φ_2	q	$0 \ldots 0$	$\varepsilon \ldots \varepsilon$	$-\varepsilon \ldots -\varepsilon$
φ_3	$q-\varepsilon$	$-\varepsilon \ldots -\varepsilon$	$0 \ldots 0$	$a_{11} \ldots a_{1s}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots \quad \vdots$	$\vdots \quad \vdots$	$\vdots \quad \vdots$
φ_{2+n}	$q-\varepsilon$	$-\varepsilon \ldots -\varepsilon$	$0 \ldots 0$	$a_{n1} \ldots a_{ns}$

По теореме **Б1** ((1) $\Rightarrow$ (3)) $0 = \sum_{\varphi\in\Phi} \overline{\varphi(u_1)}\varphi(g_j) = 1 - \varepsilon\sum_{i=1}^{n} a_{ij}$, т. е.

(д6) $$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = \varepsilon \text{ для всех } j \in \{1, \ldots, s\}.$$

Предположим, что для некоторого $x \in G$ $o(x) = p^a$, где p — простое число и $a \in N$. Тогда $x_{p'} = 1$ и согласно **4Д6** и **4Д7** $\varphi_2(1) \equiv \varphi_2(x) \pmod p$. Отсюда вытекает следующее утверждение.

(д7) Пусть $x \in G$ и $o(x) = p^a$, где p — простое число и $a \in N$. Тогда

а) если $x \in U$, то $p \mid q$;

б) если $x \in V$, то $p \mid q - \varepsilon$;

в) если $x \in D^-$, то $p \mid q + \varepsilon$.

Мы будем постепенно расширять утверждение (д7), снимая условие примарности элемента x. Покажем сначала, что

(д8) $$\text{если } u \in U, \text{ то } \pi(u) \subseteq \pi(q).$$

Пусть $u \in U$ и $\pi(u) = \{p_1, \ldots, p_f\}$. Применим индукцию по f. Если $f = 1$, то утверждение (д8) следует из (д7). Пусть $f > 1$. Тогда $u_{p_1'} \neq 1$ и, следовательно, $\varphi_2\left(u_{p_1'}\right) \in \{0, \varepsilon, -\varepsilon\}$. По **4Д6** и **4Д7** $0 = \varphi_2(u) \equiv \varphi_2\left(u_{p_1'}\right)$, что возможно лишь при $\varphi_2\left(u_{p_1'}\right) = 0$. Значит, $u_{p_1'} \in U$ и по индукции $\pi\left(u_{p_1'}\right) \subseteq \pi(q)$. Подобно получаем, что $\pi\left(u_{p_2'}\right) \subseteq \pi(q)$. Следовательно, $\pi(u) \subseteq \pi(q)$.

(д9) Если $x \in V \cup D^-$, то $\pi(x) \subseteq \pi(q^2 - 1)$.

Для доказательства применим индукцию по $|\pi(x)|$. Если x примарен, то утверждение (д9) следует из (д7). Пусть $|\pi(x)| \geqslant 2$ и $p \in \pi(x)$. Так как $x \in V \cup D^-$, то $\varphi_2(x) = \pm \varepsilon$. По **4Д6** и **4Д7** $\pm \varepsilon = \varphi_2(x) \equiv \varphi_2(x_{p'}) \pmod p$. Следовательно, $\varphi_2(x_{p'}) \neq 0$ и $x_{p'} \in V \cup D^-$. По индукции $\pi(x_{p'}) \subseteq \pi(q^2 - 1)$. Так как это верно для любого $p \in \pi(x)$, то (д9) доказано.

Пусть $p \in \pi(q)$ и $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$. Тогда по (д9) $P \setminus \{1\} \subseteq U$ и $\boldsymbol{Z} \in (\varphi_2|_P, 1_P)_P = \frac{1}{|P|}(\varphi_2(1) + 0) = \frac{q}{|P|}$. Таким образом,

(д10) $$\left(q, \frac{|G|}{q}\right) = 1.$$

Предположим, что D^- содержит элемент g_i порядка 2^a, $a \in \boldsymbol{N}$. Тогда $(g_i)_{2'} = 1$ и по **4Д6** при $p = 2$ имеем $q - \varepsilon = \varphi_{2+j}(1) \equiv \equiv \varphi_{2+j}(g_i) = a_{ij} \pmod p$ при $j = 1, \ldots, n$. Но тогда по (д6) $n(q - \varepsilon) \equiv \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \varepsilon \pmod 2$. Так как $2 | q + \varepsilon$ по (д7), то q нечетно. Поэтому записанное выше сравнение невозможно и

(д11) в D^- нет элементов порядка 2^a, где $a \in \boldsymbol{N}$.

Пусть $p \in \pi(q - \varepsilon)$ и $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$. Из (д7) и (д11) следует, что $P \setminus \{1\} \subseteq V$. Тогда $\boldsymbol{Z} \ni (\varphi_3|_P, 1_P)_P = \frac{1}{|P|}(\varphi_3(1) + 0) = \frac{q - \varepsilon}{|P|}$. Следовательно,

(д12) $$\left(q - \varepsilon, \frac{|G|}{q - \varepsilon}\right) = 1.$$

Из (д1), (д11) и (д12) вытекает, что

(д13) числа q, $q - \varepsilon$ и $2n + 1$ попарно взаимно просты.

Отсюда и из (д7) следует также, что

(д14) $$\pi(2n + 1) \subseteq \pi(q + \varepsilon).$$

Далее, мы воспользуемся утверждением **5В9**: Пусть $|G| = ab$, где $(a, b) = 1$, и $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$. Тогда $a | \chi(1)$ если и только если $\chi(g) = 0$ для всех $g \in G$ с $\pi(g) \cap \pi(a) \neq \varnothing$. Отсюда и из (д8), (д9), (д5) следует, что

(д15) $$U = \{g \in G \mid \pi(g) \cap \pi(q) \neq \varnothing\}.$$

Кроме того, из утверждения **5В9** и из (д5) следует, что $\pi(g_i)\cap\pi(q-\varepsilon)=\varnothing$ $(i=1, \ldots, s)$, а тогда в силу (д9) и (д1) $\pi(g_i)\subseteq\pi(2n+1)$ и, значит,

(д16) $$o(g_i) \text{ делит } 2n+1 \quad (i=1, \ldots, s).$$

Предположим, что существует $v\in V$ такой, что $\pi(v)\nsubseteq\nsubseteq\pi(q-\varepsilon)$. Из (д7) следует, что такой элемент v можно выбрать так, что для некоторого $p\in\pi(v)$ будет $v_{p'}\notin V$ и, значит, по (д15) $v_{p'}\in D^-$. Пусть $v_{p'}=g_j$. По **4Д6** $0=\varphi_{2+i}(v)\equiv\varphi_{2+i}(v_{p'})==a_{ij}$ для всех $i\in\{1, \ldots, n\}$. Суммируя эти сравнения по i и применяя (д6), получаем $0\equiv\varepsilon \pmod p$, что противоречиво. Поэтому

(д17) $$o(v_i) \text{ делит } q-\varepsilon \quad (i=1, \ldots, m).$$

Из (д15), (д16) и (д17) следует утверждение **Д1** (3).

В частности, $|C_G(g_i)|=\frac{2n+1}{t_i}$, где $t_i\in\boldsymbol{N}$, $|g_i^G|=q(q-\varepsilon)t_i$ $(i=1, \ldots, s)$ и $|D^-|=q(q-\varepsilon)\sum_{i=1}^{s}t_i$. Но по (д1)—(д3) $|D^-|==|G|-1-|U|-|V|=q(q-\varepsilon)n$. Значит,

(д18) $$\sum_{i=1}^{s}t_i=n$$

и, в частности, $s\leqslant n$. Докажем обратное неравенство. Очевидно, ранг $X(\Phi, D)=2$. По теореме **А6** ранг $X(\Phi, D^-)=|\Phi|-$ ранг $X(\Phi, D)=n$. Следовательно, $n\leqslant s$ и, значит,

(д19) $$s=n.$$

Воспользуемся этим, чтобы расширить фрагмент (д5) таблицы характеров группы G. Снова по теореме **А6** получаем ранг $X(\Phi^-, D^-)=s-$ ранг $X(\Phi, D^-)=0$, т. е.

(д20) $$X(\Phi^-, D^-)=O.$$

Далее, из (д18) и (д19) следует, что $t_i=1$ для всех i, т. е.

(д21) $$|C_G(g_i)|=2n+1 \quad (i=1, \ldots, s).$$

Отсюда и из равенства $(\varphi_2, \varphi_{2+i})_G=0$ получаем

(д22) $$\sum_{j=1}^{s}a_{ij}=\varepsilon \quad (i=1, \ldots, n).$$

Пусть $C=C_G(g_1)$ и $\chi\in\Phi^-$. По (д15), (д16) и (д17) $C\setminus\{1\}\subseteq\subseteq D^-$. Отсюда и из (д20), (д21) получаем $\boldsymbol{Z}\ni(\chi|_C, 1_C)_C==\frac{1}{|C|}(\chi(1)+0)=\frac{\chi(1)}{2n+1}$, т. е.

(д23) $$2n+1|\chi(1) \text{ для всех } \chi\in\Phi^-.$$

Положим $\Phi^-=\{\chi_1, \ldots, \chi_{l+m-1}\}$ $(k(G)=1+l+m+n$ по (д5) и (д19)) и $\chi_i(1)=(2n+1)f_i$, где $f_i\in\boldsymbol{N}$ по (д23). Свойства (д20)

и (д23) позволяют расширить фрагмент (д5) следующим образом.
(д24) G имеет следующий фрагмент таблицы характеров:

	1	U: $u_1 \ldots u_l$	V: $v_1 \ldots v_m$	D^-: $g_1 \ldots g_n$
φ_1	1	$1 \ldots 1$	$1 \ldots 1$	$1 \ldots 1$
φ_2	q	$0 \ldots 0$	$\varepsilon \ldots \varepsilon$	$-\varepsilon \ldots -\varepsilon$
φ_3	$q-\varepsilon$	$-\varepsilon \ldots -\varepsilon$	$0 \ldots 0$	$a_{11} \ldots a_{1n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots \quad \vdots$	$\vdots \quad \vdots$	$\vdots \quad \vdots$
φ_{2+n}	$q-\varepsilon$	$-\varepsilon \ldots -\varepsilon$	$0 \ldots 0$	$a_{n1} \ldots a_{nn}$
χ_1	$(2n+1)f_1$		–	$0 \ldots 0$
$\vdots$	$\vdots$			$\vdots \quad \vdots$
χ_{l+m-1}	$(2n+1)f_{l+m-1}$			$0 \ldots 0$

Положим $f=\sum_{i=1}^{l+m-1} f_i^2$. Тогда $|G|=\sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(G)}\chi(1)^2=1+q^2+$ $+(q-\varepsilon)^2 n+(2n+1)^2 f$, откуда

$$(q+\varepsilon)(n(q+\varepsilon)-(2n+1)\varepsilon)=(2n+1)^2 f.$$

Отсюда следует, что

(д25) $$2n+1 \mid q+\varepsilon.$$

(Действительно, если $d=(2n+1,\ q+\varepsilon)$, $a=\frac{2n+1}{d}$ и $b=\frac{q+\varepsilon}{d}$, то $(a,\ b)=1$, $(a,\ n)=1$ и $a^2 \mid b(nb-a\varepsilon)$, откуда $a \mid nb$ и, значит, $a=1$).

Из (д1), (д13) и (д25) следует утверждение **Д1** (2).

Остается доказать, что группа G проста. Предположим, что это неверно. Тогда (**2А34** (2)) существует $\chi\in\mathrm{Irr}(G)$ с $1<\mathrm{Ker}\,\chi\equiv$ $\equiv N<G$. Ясно, что $\chi\notin\{\varphi_1,\ \varphi_2\}$.

Предположим, что $\chi=\varphi_{2+i}$ для некоторого $i\in\{1,\ \ldots,\ n\}$. Так как $\mathrm{Ker}\,\chi=\{g\in G \mid \chi(g)=\chi(1)\}$, то по (д24) $N\subseteq\{1\}\cup D^-$ и, следовательно, $\mathrm{Irr}(G|N)\subseteq\{\varphi_1,\ \varphi_3,\ \ldots,\ \varphi_{2+n}\}$. Согласно **2А34** (1) таблица характеров группы G/N имеет вид ($t\geqslant 3$)

$\tilde\varphi_1$	1	$1 \ldots 1$	$1 \ldots 1$	$1 \ldots 1$
$\tilde\varphi_3$	$q-\varepsilon$	$\varepsilon \ldots \varepsilon$	$0 \ldots 0$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots \quad \vdots$	$\vdots \quad \vdots$	
$\tilde\varphi_t$	$q-\varepsilon$	$\varepsilon \ldots \varepsilon$	$0 \ldots 0$	

Но это невозможно (например, столбец $(1\ 0\ \ldots\ 0)^{\tau}$ этой таблицы не ортогонален другим столбцам).

Следовательно, $\chi = \chi_i$ для некоторого i. Тогда $N = \operatorname{Ker} \chi_i \subseteq D$ и $\operatorname{Irr}(G|N) \subseteq \{\varphi_1, \chi_1, \ldots, \chi_{l+m-1}\}$. Но это противоречиво, так как по **2А34**(1) таблица характеров группы G/N должна иметь столбец $(1\ 0\ \ldots\ 0)^{\tau}$.

Таким образом, группа G проста.

□

§ Е. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ В1 И В2

Е1. Пусть выполнено условие утверждения **Д1**.

1) Если $l = 1$, то $q = 2^a$, где $a \in \boldsymbol{N}$, $a \geqslant 2$ и $G \simeq \simeq \mathrm{PSL}(2, 2^a)$.

2) Если $l = 2$ и q четно, то $q = 8$ и $G \simeq \mathrm{PSL}(3, 2)$.

3) Если $l = 3$ и q четно, то $q = r^2$, где $r = 2^{2a+1}$, $a \in \boldsymbol{N}$ и $G \simeq \mathrm{Sz}(r)$.

Доказательство. Будем использовать обозначения, принятые в **Г1**.

1) Пусть $l = 1$. Тогда $U = u_1^G$ и вследствие (д1) и (д2)

$$|C_G(u_1)| = \frac{q(2n+1)}{q+\varepsilon}.$$

Поэтому по **Д1**(2) q четно, u_1^G - единственный класс элементов четного порядка из G и u_1 — инволюция. Следовательно, G — CIT-группа и силовская 2-подгруппа в G — элементарная абелева. Кроме того, по **Д1** группа G проста. Но по результату М. Судзуки [95, 96] простая CIT-группа изоморфна одной из групп $\mathrm{PSL}(2, 2^a)$ $(a > 1)$; $\mathrm{PSL}(2, p)$, где p — простое число Ферма или Мерсена; $\mathrm{PSL}(2, 9)$; $\mathrm{PSL}(3, 4)$; $\mathrm{Sz}(2^{2a+1})$ $(a \geqslant 1)$. Так как силовская 2-подгруппа в G — элементарная абелева, то $G \simeq \simeq \mathrm{PSL}(2, 2^a)$, $a \geqslant 2$ $(\mathrm{PSL}(2, 5) \simeq \mathrm{PSL}(2, 4))$.

2) Пусть $l = 2$ и q четно. Тогда $o(u_1) = 2$ и $o(u_2) \in \{2, 4, p\}$, где p — нечетное простое число, делящее q. Отсюда и из **Д1**(3) следует, что G — CIT-группа. Из приведенного выше списка простых CIT-групп и утверждений **В4**(1 — 3) следует, что $G \simeq \simeq \mathrm{PSL}(2, 7)$ $(\simeq \mathrm{PSL}(3, 2))$ и $q = 8$.

3) Пусть $l = 3$ и q четно. Если G есть CIT-группа, то, так же, как и в предыдущих пунктах, получаем, что $G \simeq \mathrm{Sz}(r)$ и $q = r^2$ $(r = 2^{2a+1})$.

Пусть G не является CIT-группой. Тогда она имеет элемент порядка $2p$, где p — нечетное простое число. В силу **Д1**(3) можно считать, что

(е1) $$o(u_1) = 2,\ o(u_2) = p,\ o(u_3) = 2p;$$

(е2) $$C_G(u_1) = TP, \text{ где } T \in \mathrm{Syl}_2(G) \text{ и } P \text{ — } p\text{-группа}.$$

Кроме того, так как все неединичные элементы из T лежат в u_1^G, то

(е3) T — элементарная абелева 2-группа.

Так как группа G проста по **Д1** (1), то из (е3) по результату Уолтера [100] следует, что $G \simeq \mathrm{PSL}(2, 2^a)$ $(a \geqslant 2)$, $\mathrm{PSL}(2, r)$ с $r \equiv \pm 3 \pmod 8$ или группе типа Янко — Ри. Последний случай невозможен вследствие (е2). Но первые два случая также невозможны, так как согласно утверждениям **В4** (1 — 2) они имеют активные фрагменты вида (в1) лишь при $l < 3$.

□

Доказательства теорем **В1** и **В2** теперь непосредственно вытекают из **Е1** и **В4**.

□

§ Ё. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ В3

Утверждение (2) $\Rightarrow$ (1) теоремы **В3** непосредственно вытекает из **В4**.

Для доказательства обратного утверждения будет использована основная классификационная теорема (приложение 3):

Ё1. Каждая конечная простая неабелева группа изоморфна одной из групп:

1) группе лиева типа,
2) знакопеременной группе,
3) одной из 26 спорадических простых групп.

Пусть G — конечная группа, имеющая активный фрагмент $X(\Phi, D)$ типа (в1). Примем обозначения, введенные в **Г1** (с $r = 1$) и его доказательстве. По **Д1** группа G проста. Поэтому она изоморфна одной из групп пунктов 1) — 3) из **Ё1**.

Случай 1. Пусть G — группа лиева типа.

В этом случае G изоморфна либо присоединенной группе лиева типа, либо группе Титса ${}^2F_4(2)'$. Заметим сразу же, что последнее невозможно, так как $|{}^2F_4(2)'| = 2^{11} \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 13$ $(2^{11} = 2048,$ $3^3 \cdot 5^2 = 675)$, а это противоречит тому, что $|G| = q(q - \varepsilon)(2n+1)$ (**Д1** (1)). Далее G — присоединенная группа лиева типа над полем характеристики p.

Теперь мы воспользуемся тем фактом [60, теорема 6.4.7.], что всякая присоединенная группа G лиева типа имеет неприводимый характер St, называемый *характером Стейнберга*, который обладает следующими свойствами:

$$(\text{ё}1) \qquad \begin{cases} \mathrm{St}(1) = |G|_p, \\ \mathrm{St}(g) = 0 \text{ при } g \in G \setminus G_{p'}, \\ \mathrm{St}(g) = \pm |C_G(g)|_p \text{ при } g \in G_{p'}. \end{cases}$$

Для дальнейшего полезно иметь перед глазами фрагмент таблицы характеров группы G, полученный в пункте (д23) доказательства **Д1**.

Из этого фрагмента, из (ё1) и **Д1** (2) вытекает, что

(ё2) $$|G|_p = \mathrm{St}(1) \in \{q,\ q-\varepsilon,\ 2n+1\}.$$

1) Пусть $|G|_p = 2n+1$.

Тогда из упомянутого выше фрагмента таблицы характеров, (ё1) и **Д1** (2, 3) следует, что $G_{p'} = \{1\} \cup U \cup V$ ($= D$), $\mathrm{St} \in \Phi^-$ (т. е. $\mathrm{St} = \chi_i$ для некоторого i) и $\mathrm{St}(d) \in \{1,\ -1\}$ при $d \in U \cup V$. Поэтому

$$|G| = |G|(\mathrm{St},\ \mathrm{St})_G = (2n+1)^2 + |U| + |V|,$$

т. е. (см. **Г1**) $q(q-\varepsilon)(2n+1) = (2n+1)^2 + (q^2-1) + q(n(q-\varepsilon)-\varepsilon) = 2n(2n+2) + q(q-\varepsilon)(n+1)$, откуда $q(q-\varepsilon) = 4(n+1)$. Так как $2n+1$ делит $q+\varepsilon$ (**Д1** (2)), то $q(q-\varepsilon) = 2(2n+1)+2 \leqslant 2(q+\varepsilon)+2$, откуда $(q-2)(q-\varepsilon) \leqslant 2(1+2\varepsilon) \leqslant 6$. Поэтому $\varepsilon = 1$, $q = 4$, $|G| = 60$ и $G \simeq \mathrm{PSL}(2,\ 5)$. В этом случае условие **В3** (2) верно.

2) Пусть $|G|_p = q-\varepsilon$.

С помощью тех же аргументов, что и в случае 1), получаем, что $G_{p'} = \{1\} \cup U \cup D^-$ и $\mathrm{St}(g) \in \{1,\ -1\}$ при $g \in U \cup D^-$. Поэтому $|G| = |G|(\mathrm{St},\ \mathrm{St})_G = (q-\varepsilon)^2 + |U| + |D^-| = (q-\varepsilon)^2 + |G| - 1 - |V|$, откуда $|V| = q(q-2\varepsilon)$. Но $|V| = q(n(q-\varepsilon)-\varepsilon)$ по **Г1**. Следовательно, $n = 1$ и, значит (**Д1**), $2n+1 = 3$ делит $q+\varepsilon$.

(ё3) $$|G| = 3q(q-\varepsilon) \text{ и } 3 \| |G|.$$

Но в главе 7 полностью описаны конечные простые группы X с $3 \| |X|$. А именно, согласно **7Е1** $G \simeq \mathrm{J}_1$, $\mathrm{PSL}(2, r)$, $\mathrm{PSL}(3,\ r)$ или $\mathrm{PSU}(3,\ r^2)$ при некоторых r (r — степень p). Первый случай отпадает, так как G — группа лиева типа. При $G \simeq \mathrm{PSL}(2,\ r)$ условие **В3** (2) выполнено.

Пусть $G \simeq \mathrm{PSL}(3,\ r)$. Тогда $|G| = \frac{1}{(3,\ r-1)} r^3 (r^3-1)(r^2-1)$, $|G|_p = r^3 = q-\varepsilon$ и по (ё3) $(r^3-1)(r^2-1)/(3,\ r-1) = 3q = 3(r^3+\varepsilon)$. Поэтому $\varepsilon = -1$ и $r^2-1 = 3(3,\ r-1)$, что противоречиво.

Подобно доказывается противоречивость случая $G \simeq \mathrm{PSU}(3,\ r^2)$.

3) Пусть $|G|_p = q$.

Если q четно, то по **Д1** (3) G является CIT-группой и по результату М. Судзуки [95] (цитированному в доказательстве **Е1** (1)) удовлетворяет условию (2). Поэтому далее мы предполагаем, что q нечетно. Тогда $|G|_2 = (q-\varepsilon)_2$, $4 \mid q-\varepsilon$ и, следовательно,

(ё4) $$|G|_2 = \left(\frac{q^2-1}{2}\right)_2.$$

а) Пусть $G = A_k(r)$ $(k \geqslant 1)$. Тогда $|G| = \frac{1}{d} r^{k(k+1)/2}(r^2-1) \times \times (r^3-1)\ldots(r^{k+1}-1)$, где $d=(k+1,\ r-1)$ и $q=|G|_p= = r^{k(k+1)/2}$. Воспользуемся формулой (ё4), применив результаты § 7Б. По 7Б3(1) и 7Б2 $\alpha_2(|G|) = \alpha_2\left(\frac{l(k+1,\ r)}{r-1}\right) - \alpha_2(d) = k\alpha_2(r-1) + \alpha_2((k+1)!) + \left[\frac{k+1}{2}\right]\alpha_2\left(\frac{r+1}{2}\right) - \alpha_2(d)$. По 7Б1 $\alpha_2\left(\frac{q^2-1}{2}\right) = \alpha_2(r^{k(k+1)}-1)-1 = \alpha_2(r-1)+\alpha_2(k(k+1))+\alpha_2\left(\frac{r+1}{2}\right)-1$.

Следовательно, по (ё4) $(k-1)\alpha_2(r-1)+\alpha_2((k-1)!)+\left(\left[\frac{k-1}{2}\right]-1\right)\alpha_2\left(\frac{r+1}{2}\right)+1=\alpha_2(d)\leqslant\alpha_2(r-1)$. Это возможно лишь при $k=1$. Значит, $G=A_1(r)\simeq PSL(2,r)$ и верно В3(2).

б) Пусть $G \simeq {}^2A_k(r)$ $(k \geqslant 2)$. Тогда $|G| = \frac{1}{d} r^{k(k+1)/2}(r^2-1) \times \times (r^3+1)\ldots(r^{k+1}-(-1)^{k+1})$, где $d=(k+1,\ r+1)$ и $|G|_p = q = = r^{k(k+1)/2}$. По 7Б3(4) и 7Б2 $\alpha_2(|G|) = \alpha_2(l(k+1,\ -r)) - \alpha_2(r+1) - \alpha_2(d)$. По 7Б1 $\alpha_2\left(\frac{q^2-1}{2}\right) = \alpha_2(r-1)+\alpha_2(k(k+1))+\alpha_2\left(\frac{r+1}{2}\right)-1$. Теперь видно, что при $k \geqslant 2$ равенство (ё4) невозможно.

в) Пусть G есть $B_k(r)$ или $C_k(r)$ $(k \geqslant 2)$. Тогда $|G| = \frac{1}{2} r^{k^2} \times \times (r^2-1)(r^4-1)\ldots(r^{2k}-1)$. По 7Б3(2) и 7Б2 $\alpha_2(|G|) = -1 + \alpha_2(l(k,\ r^2)) = -1+k\alpha_2(r^2-1)+\alpha_2(k!)$, а по 7Б1 $\alpha_2\left(\frac{q^2-1}{2}\right) = -1+\alpha_2(r^{2k^2}-1) = -1+\alpha_2(r^2-1)+\alpha_2(k^2)$. Отсюда и из (ё4) получаем $(k-1)\alpha_2(r^2-1) = \alpha_2(k)-\alpha_2((k-1)!)$, что противоречиво (левая часть больше k, а правая — меньше k).

г) Пусть G есть $D_k(r)$ или ${}^2D_k(r)$ $(k \geqslant 4)$. По 7Б3 $|G| = = r^{k(k-1)/2} l(k-1,\ r^2)(r^k \pm 1)/(4,\ r^k \pm 1)$, а по 7Б2 и 7Б1 $\alpha_2(|G|) \geqslant \geqslant \alpha_2(l(k-1,\ r^2)) = (k-1)\alpha_2(r^2-1)+\alpha_2((k-1)!)$, $\alpha_2\left(\frac{q^2-1}{2}\right) = = -1+\alpha_2(r^{k(k-1)}-1) = -1+\alpha_2(r-1)+\alpha_2(k(k-1)) + \alpha_2\left(\frac{r+1}{2}\right)$. Отсюда следует противоречивость равенства (ё4).

д) Пусть G есть ${}^3D_4(r)$, $G_2(r)$ или $F_4(r)$. Тогда $|G|$ есть соответственно $r^{12}(r^8+r^4+1)(r^6-1)(r^2-1)$, $r^6(r^6-1)(r^2-1)$ или $r^{24}(r^{12}-1)(r^2-1)(r^6-1)(r^2-1)$. В любом случае получается противоречие с Д1(2), так как все множители, кроме первого (равного q), делят $q-1$.

е) Если G есть $E_6(r)$, или ${}^2E_6(r)$, то $|G| = \frac{1}{d} r^{36}(r^2-1)(r^5 \mp 1) \times \times (r^6-1) \times (r^8-1)(r^9 \mp 1)(r^{12}-1)$, $d=(3,\ r\mp 1)$ и $r^9 \mp 1$ не делит $q^2-1=r^{72}-1$, в противоречие с Д1(2).

ё) Если G есть $E_7(r)$ или $E_8(r)$, то $|G|$ есть соответственно $\frac{1}{2}r^{63}(r^2-1)(r^6-1)(r^8-1)(r^{10}-1)(r^{12}-1)(r^{14}-1)(r^{16}-1)$ или $r^{120}(r^2-1)(r^6-1)(r^{12}-1)(r^{14}-1)(r^{18}-1)(r^{20}-1)(r^{24}-1)(r^{30}-1)$. В любом случае $|G|$ имеет множитель f (равный соответственно $r^{10}-1$ и $r^{14}-1$), не делящий $q(q^2-1)$, что противоречит **Д1** (2).

ж) Наконец, если $G={}^2G_2(r)$ $(r=3^{2a+1}>3)$, то $|G|=r^3(r^3+1)(r-1)$, откуда по **Д1** (2) $q=r^3$, $q-\varepsilon=r^3+1$ и $2n+1=r-1$. Последнее равенство противоречиво, так как $r-1$ четно.

Таким образом, в случае 1 утверждение (1) $\Rightarrow$ (2) теоремы **В3** доказано.

Случай 2. Пусть $G=A_k$ — знакопеременная группа.

Можно считать, что $k\geqslant 7$, так как $A_5\simeq PSL(2, 5)$ и $A_6\simeq PSL(4, 2)$. По **Д1** (2) $|G|=q(q-\varepsilon)(2n+1)$. Пусть f — четное из чисел q и $q-\varepsilon$. Так как G имеет элемент (12)(34)(567) порядка 6, то по **Д1** (3) $6|f$. Далее, если s — простое число, не превосходящее $k-3$, то G имеет, очевидно, элемент порядка $3s$ и по **Д1** (3) $s|f$. Но тогда $|A_{k-3}|$ делит f и $|A_{k-3}|\leqslant f<|G|/f\leqslant |G:A_{k-3}|$, т. е.

$$\frac{(k-3)!}{2}<(k-2)(k-1)k.$$

Более того, каждое непростое из чисел $k-2$, $k-1$, k также должно делить f. Если k четно, то $|G|/f=k-1$ — простое число, что невозможно. Следовательно, k нечетно и

$$\frac{(k-3)!}{2}(k-1)<(k-2)k,$$

а это при $k\geqslant 7$ невозможно.

Случай 3. G — спорадическая группа.

По **Д1** группа G имеет следующие свойства:

1) существует $\chi\in \mathrm{Irr}(G)$ такой, что $\chi(1)$ делится на $|G|_2$;

2) существует $\psi\in \mathrm{Irr}(G)$ такой, что $\psi(1)=\chi(1)\pm 1$.

Из всех спорадических групп свойство 1) имеют лишь следующие группы (в скобках указаны значения $\chi(1)$): M_{11}(16), J_1(56,120), J_3(1920), J_4(1981808640), M^cL(896,9856), He(21504), O'N(207360), Co_2(1835008), HN(3424256), Ly(120064, 2260964, 43110144), Th(4096000), Fi_{23}(504627200), Fi_{24}'(19781362400), M(6268774036138873040448, 24186694143879592668759808) (см. [61]; проверку условия $|G|_2|\chi(1)$ можно заменить проверкой условия $\chi(g)=0$ для всех неединичных 2-элементов g согласно **5В8**). Но ни в одном из этих случаев не выполнено условие 2).

Таким образом, спорадические группы не имеют активного фрагмента типа (в1).

□

Пусть $N \trianglelefteq G$. В этом параграфе выясняются некоторые связи между взаимодействиями в группах G и G/N. Напомним, что $\mathrm{Irr}(G|N)$ обозначает множество всех неприводимых характеров группы G, ядра которых содержат N.

Ж1. Пусть $N \trianglelefteq G$. Тогда

1) существует взаимно однозначное отображение $\chi_i \mapsto \psi_i$ множества $\mathrm{Irr}(G|N) = \{\chi_1, \ldots, \chi_m\}$ на множество $\mathrm{Irr}(G/N) = \{\psi_1, \ldots, \psi_m\}$ такое, что $\psi_i(gN) = \chi_i(gn) = \chi_i(ng) = \chi_i(g)$ для любых $g \in G$ и $n \in N$;

2) $\bigcap\limits_{i=1}^{m} \mathrm{Ker}\,\chi_i = N$.

Доказательство. См. 2А34.

□

Ж2. «Соглашение о волне». Если фактор-группа G/N обозначена через $\widetilde{G}$, то для любого элемента или подмножества X из G его образ в $\widetilde{G}$ при естественном гомоморфизме G на $\widetilde{G}$ обозначается через $\widetilde{X}$, а для любого $\varphi \in \mathrm{Irr}(G|N)$ через $\widetilde{\varphi}$ обозначается неприводимый характер группы $\widetilde{G}$ (существующий по **Ж1**) такой, что

$$\widetilde{\varphi}(\widetilde{g}) = \varphi(g) \text{ для всех } g \in G;$$

для любого $\Phi \subseteq \mathrm{Irr}(G)$ полагаем

$$\widetilde{\Phi} = \{\widetilde{\varphi} \mid \varphi \in \Phi \cap \mathrm{Irr}(G|N)\}.$$

Ж3. Теорема. Пусть G — конечная группа, $D \subseteq G$, $\Phi \subseteq \mathrm{Irr}(G)$, $N \trianglelefteq G$ и $\widetilde{G} = G/N$.

1) Если $DN = D$ или $\Phi \subseteq \mathrm{Irr}(G|N)$, то из $D \longleftrightarrow \Phi$ следует $\widetilde{D} \longleftrightarrow \widetilde{\Phi}$.

2) Если $DN = D$ и $\Phi \subseteq \mathrm{Irr}(G|N)$, то из $\widetilde{D} \longleftrightarrow \widetilde{\Phi}$ следует $D \longleftrightarrow \Phi$.

Доказательство. 1): Пусть сначала $DN = D$. Тогда ввиду **Ж1**(1) для любых $\chi, \psi \in \mathrm{Irr}(G|N)$ будет

$$\sum_{d \in D} \chi(d)\overline{\psi(d)} = |N| \sum_{t \in \widetilde{D}} \widetilde{\chi}(t)\overline{\widetilde{\psi}(t)}. \qquad (ж1)$$

Можно считать, что $\varnothing \neq \widetilde{\Phi} \subset \mathrm{Irr}(\widetilde{G})$. Пусть $\alpha \in \widetilde{\Phi}$ и $\beta \in \widetilde{\Phi}^- \equiv \mathrm{Irr}(\widetilde{G}) \setminus \widetilde{\Phi}$. Тогда существуют $\chi \in \Phi \cap \mathrm{Irr}(G|N)$ и $\psi \in \Phi^- \cap \mathrm{Irr}(G|N)$ такие, что $\widetilde{\chi} = \alpha$ и $\widetilde{\psi} = \beta$. Пусть $D \longleftrightarrow \Phi$. По теореме **3Б1**((1)⇒(2)) для выбранных χ и ψ левая часть равенства (ж1) равна нулю. Следовательно, $\sum_{t\in\widetilde{D}} \alpha(t)\overline{\beta(t)} = 0$ для всех $(\alpha, \beta)\in\widetilde{\Phi}\times\widetilde{\Phi}^-$ и по теореме 3Б1 ((2)⇒(1)) $\widetilde{D}\longleftrightarrow\widetilde{\Phi}$.

Пусть теперь $\Phi\subseteq\mathrm{Irr}(G|N)$. Тогда $\widetilde{\Phi}=\{\widetilde{\varphi}|\varphi\in\Phi\}$ и $|\widetilde{\Phi}|=|\Phi|$. Пусть $t\in\widetilde{D}$ и $y\in\widetilde{G}\setminus\widetilde{D}$. Тогда существуют $d\in D$ и $g\in D^-$, такие, что $t=\widetilde{d}$ и $y=\widetilde{g}$. По теореме 3Б1 ((1)⇒(3)) из $D\longleftrightarrow\Phi$ следует, что $\sum_{\varphi\in\Phi}\varphi(d)\overline{\varphi(g)}=0$, а тогда

$$\sum_{\gamma\in\widetilde{\Phi}}\gamma(t)\overline{\gamma(\widetilde{g})}=\sum_{\varphi\in\Phi}\widetilde{\varphi}(\widetilde{d})\overline{\widetilde{\varphi}(\widetilde{g})}=\sum_{\varphi\in\Phi}\varphi(d)\overline{\varphi(g)}=0.$$

По теореме 3Б1 ((3)⇒(1)) отсюда следует, что $D\longleftrightarrow\Phi$.

2): Пусть $DN=D$, $\Phi\subseteq\mathrm{Irr}(G|N)$ и $\widetilde{D}\longleftrightarrow\widetilde{\Phi}$. Тогда по теореме 3Б1 ((1)⇒(3)) $\sum_{\gamma\in\widetilde{\Phi}}\gamma(\widetilde{d})\overline{\gamma(\widetilde{g})}=0$ для всех $(d, g)\in D\times D^-$. Но это равносильно условию $\sum_{\varphi\in\Phi}\varphi(d)\overline{\varphi(g)}=0$ для всех $(d, g)\in D\times D^-$, откуда по теореме 3Б1 ((3)⇒(1)) $D\longleftrightarrow\Phi$.

□

Отметим несколько следствий теоремы Ж3.

Ж4. Пусть $N\trianglelefteq G$, $\widetilde{G}=G/N$, $T\trianglelefteq\widetilde{G}$, $\Psi\subseteq\mathrm{Irr}(\widetilde{G})$ и $T\longleftrightarrow\Psi$. Тогда $D\longleftrightarrow\Phi$, где D — полный прообраз T в G и $\Phi=\{\varphi\in\mathrm{Irr}(G|N)|\widetilde{\varphi}\in\Psi\}$.

Доказательство. Непосредственно следует из Ж3 (2).

□

Ж5. Пусть $N\trianglelefteq G$. Тогда $gN\longleftrightarrow\mathrm{Irr}(G|N)$ для любого $g\in G$.

Доказательство вытекает из Ж4, так как $\widetilde{gN}=\widetilde{g}\longleftrightarrow\mathrm{Irr}(\widetilde{G})=\widetilde{\mathrm{Irr}(G|N)}$.

□

Ж6. Пусть $D\longleftrightarrow\Phi$, $D\trianglelefteq G$ и $\Phi\subseteq\mathrm{Irr}(G)$, и $N\trianglelefteq G$.
1) Если $\Phi\subseteq\mathrm{Irr}(G|N)$, то $DN\longleftrightarrow\Phi$.
2) Если $DN=D$, то $D\longleftrightarrow\Phi\cap\mathrm{Irr}(G|N)$.

Доказательство. 1): Пусть $\widetilde{G}=G/N$. Из $\Phi\subseteq\mathrm{Irr}(G|N)$ по Ж3 (1) следует, что $\widetilde{D}\longleftrightarrow\widetilde{\Phi}$. Но $\widetilde{D}=\widetilde{DN}$. Следовательно, $\widetilde{DN}\longleftrightarrow\widetilde{\Phi}$ и по Ж3 (2) $DN\longleftrightarrow\Phi$.

2): Подобно предыдущему. (Это следует также из Ж5 и 3Б4.)

□

Ж7. Пусть выполнено условие теоремы **Ж3**, $DN=D$ и $\Phi\subseteq \subseteq \mathrm{Irr}(G|N)$. Тогда

$$(\Phi - D\text{-блок группы } G) \Leftrightarrow (\widetilde{\Phi} - \widetilde{D}\text{-блок группы } \widetilde{G}).$$

Доказательство. Непосредственно следует из теоремы **Ж3**.

□

§ 3. МАЛЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Пусть G — конечная группа. Чтобы определить все взаимодействия $D\leftarrow\!\!\rightarrow\Phi$ в G с $k_G(D)=1$ или $|\Phi|=1$, достаточно беглого взгляда на ее таблицу характеров, так как согласно следующему утверждению **З1** (доказанному в § 3А), для этого в ней нужно знать лишь расположение нулей.

З1. Пусть G — конечная неединичная группа, $g\in G$, $\chi\in\mathrm{Irr}(G)$, $D\trianglelefteq G$ и $\Phi\subseteq\mathrm{Irr}(G)$.

1) $g^G\leftarrow\!\!\rightarrow\{\chi\}\Leftrightarrow\chi(g)=0$;

2) $D\leftarrow\!\!\rightarrow\{\chi\}\Leftrightarrow\chi$ исчезает на D или на D^-;

3) $g^G\leftarrow\!\!\rightarrow\Phi\Leftrightarrow$ на g исчезают все функции из Φ или все функции из Φ^-.

□

Цель этого параграфа — изучение взаимодействий $D\leftarrow\!\!\rightarrow\Phi$, у которых $k_G(D)=2$ или $|\Phi|=2$. При $|\Phi|=2$ достаточно рассмотреть лишь случай, когда Φ — D-блок группы G, так как иначе $D\leftarrow\!\!\rightarrow\{\varphi\}$ для любого $\varphi\in\Phi$ и дело сводится к **З1**. Также при $k_G(D)=2$ можно предполагать, что D — Φ-блок. Сначала рассмотрим случай, когда $|\Phi|=2$.

В следующей лемме, по существу, описываются группы, в таблице характеров которых есть столбец с точно двумя ненулевыми значениями.

З2. Пусть G — конечная группа, $|G|>2$, $d\in G$ и $\Phi=\{\varphi_1, \varphi_2\}\subseteq\mathrm{Irr}(G)$. Равносильны условия:

(1) $d^G\leftarrow\!\!\rightarrow\Phi$;

(2) выполнено одно из утверждений:

а) $\varphi_1(d)=\varphi_2(d)=0$,

б) G — группа Фробениуса с дополнительным множителем $\langle d\rangle$ порядка 2 и Φ — множество всех линейных характеров группы G.

Доказательство. (1)$\Rightarrow$(2): Пусть верно (1), но неверно а). Тогда по **З1** $\chi(d)=0$ для всех $\chi\in\Phi^-$ (т. е. *столбец таблицы характеров группы* G, соответствующий классу d^G, *имеет точно два ненулевых значения*). Так как $|G|>2$, то $\Phi^-\neq\varnothing$, а значит, $1_G\in\Phi$ и $d\neq1$. Пусть $\Phi=\{1_G, \varphi\}$. По теореме 3Б1 ((1)$\Rightarrow$(3)) $1+\varphi(d)\varphi(1)=0$, т. е. $\varphi(d)=-\frac{1}{\varphi(1)}$. Поскольку $\varphi(d)$ — целое алгебраическое число, то (2А6(3)) $\varphi(1)=1$ и $\varphi(d)=-1$. Теперь $|C_G(d)|=\sum_{\chi\in \operatorname{Irr}(G)}|\chi(d)|^2=2$. Следовательно, G — группа Фробеннуса с дополнительным множителем $\langle d\rangle$ порядка 2. Так как, очевидно, $|G:G'|=2$, то Φ — множество всех линейных характеров G.

(2) $\Rightarrow$ (1): Из а), очевидно, следует (1). Пусть верно б). Тогда $G=G'\rtimes\langle d\rangle$ и, следовательно, имеется точно два линейных характера в $\operatorname{Irr}(G)$. Далее, если χ — нелинейный характер G, то $G'\not\subseteq \operatorname{Ker}\chi$ и по А10 $\chi(d)=0$. Таким образом, функции из Φ^- исчезают на d, т. е. $d^G \dashrightarrow \Phi$.

□

Утверждение 32 можно, очевидно, сформулировать так: (G имеет ненулевой активный фрагмент таблицы характеров размеров 2×1) $\Longleftrightarrow$ (таблица характеров G имеет столбец с точно двумя ненулевыми значениями) $\Longleftrightarrow$ ($|G|=2$ или G — группа Фробениуса с дополнительным множителем порядка 2).

33. Теорема. Пусть φ и ψ — различные неприводимые характеры группы G и $D\trianglelefteq G$. Равносильны условия:

(А) $\{\varphi, \psi\}$ — D-блок группы G;

(Б) при некоторых $a, b\in \boldsymbol{C}$

$$\psi(d)=a\varphi(d) \text{ для всех } d\in D,$$
$$\psi(x)=b\varphi(x) \text{ для всех } x\in G\setminus D.$$

Кроме того, если выполнены равенства условия (Б), то

$$\{a, b\}=\left\{\frac{\psi(1)}{\varphi(1)}, -\frac{\varphi(1)}{\psi(1)}\right\}\quad (ab=-1).$$

Доказательство. Пусть выполнено условие (А). Тогда при некоторых u, v, u_1, v_1 из $\boldsymbol{C}$

$$\varphi\,|_D^0=u\varphi+v\psi,$$
$$\psi\,|_D^0=u_1\varphi+v_1\psi.$$

Из первого равенства с применением операторов $|_D^0$ и $|_{D^-}^0$ получаем

$$\psi\,|_D^0=\frac{1-u}{v}\,\varphi\,|_D^0,$$

$$\psi\,|_{D^-}^0=-\frac{u}{v}\,\varphi\,|_{D^-}^0$$

($v\neq 0$, так как по условию (А) D не взаимодействует с $\{\varphi\}$), что равносильно условию (Б).

Теперь пусть выполнено условие (Б). Тогда

$$\psi = a\varphi|_D^0 + b\varphi|_{D^-}^0, \tag{з1}$$

причем $a \neq b$, так как φ и ψ линейно независимы. Из (з1) получаем $\psi = (a-b)\varphi|_D^0 + b\varphi$ и $\psi|_D^0 = a\varphi|_D^0$, откуда

$$\begin{aligned} \varphi|_D^0 &= \frac{b}{b-a}\varphi - \frac{1}{b-a}\psi, \\ \psi|_D^0 &= \frac{ab}{b-a}\varphi - \frac{a}{b-a}\psi. \end{aligned} \tag{з2}$$

Это означает, что $D \leftarrow\rightarrow \{\varphi, \psi\}$. Если $\{\varphi, \psi\}$ — не D-блок, то (3Б4) $D \leftarrow\rightarrow \{\varphi\}$ и $D \leftarrow\rightarrow \{\psi\}$. Тогда либо $1 \in D$, $\varphi = \varphi|_D^0$ и $\psi = \psi|_D^0$, либо $1 \in D^-$, $\varphi = \varphi|_{D^-}^0$ и $\psi = \psi|_{D^-}^0$. В любом случае условие (Б) влечет пропорциональность φ и ψ, что невозможно. Следовательно, $\{\varphi, \psi\}$ — D-блок группы G. Итак, (А)$\Leftrightarrow$(Б).

Пусть для $a, b \in \boldsymbol{C}$ выполнены равенства условия (Б). По доказанному верно и условие (А). Поэтому ввиду **3Б1** ((1)$\Rightarrow$(3)) $\varphi(d)\overline{\varphi(x)} + \psi(d)\overline{\psi(x)} = 0$ для всех $(d, x) \in D \times D^-$. С помощью (Б) эти равенства можно записать в виде $\varphi(d)\overline{\varphi(x)}(1 + a\overline{b}) = 0$. Так как φ и ψ не пропорциональны, то существует $(d, x) \in D \times D^-$ с $\varphi(d)\varphi(x) \neq 0$ и, следовательно, $a\overline{b} = -1$. Далее, если $1 \in D$, то из (Б) следует $a = \dfrac{\psi(1)}{\varphi(1)}$, а если $1 \in D^-$, то $b = \dfrac{\psi(1)}{\varphi(1)}$. В любом случае $b = \overline{b} = -\dfrac{1}{a}$ и $\{a, b\} = \left\{\dfrac{\psi(1)}{\varphi(1)}, -\dfrac{\varphi(1)}{\psi(1)}\right\}$.

□

34. Замечание. Как следует из приведенного доказательства (см. равенства (з2)) и из $ab = -1$, при выполнении условия (Б) в **33** справедливы равенства

$$\varphi|_D^0 = \frac{1}{1+a^2}\varphi + \frac{a}{1+a^2}\psi,$$

$$\psi|_D^0 = \frac{a}{1+a^2}\varphi + \frac{a^2}{1+a^2}\psi.$$

Это, в частности, позволяет вычислить суммы вида $\sum\limits_{d \in D} \xi(d)\overline{\eta(d)}$, где $\{\xi, \eta\} \subseteq \{\varphi, \psi\}$. Например, $\sum\limits_{d \in D} |\varphi(d)|^2 = |G|\left(\varphi|_D^0, \varphi\right)_G = \dfrac{|G|}{1+a^2}$. Если $1_G \notin \{\varphi, \psi\}$, то $\sum\limits_{d \in D} \varphi(d) = |G|\left(\varphi|_D^0, 1_G\right)_G = 0$. (Если $1_G \in \{\varphi, \psi\}$, то строение G полностью определяется в **37**.)

35. Пусть $\varphi \in \operatorname{Irr}(G)$, $\varphi \neq \overline{\varphi}$ и $D \trianglelefteq G$. Равносильны условия:

(1) $\{\varphi, \overline{\varphi}\}$ — D-блок группы G;

(2) φ на одном из множеств D и $G\setminus D$ принимает мнимые значения, а на другом — вещественные.

Доказательство. Пусть для определенности $1\in D$. Тогда условие (1) согласно теореме 33 (при $\psi=\overline{\varphi}$) равносильно условию: $\overline{\varphi(d)}=\varphi(d)$ при всех $d\in D$ и $\overline{\varphi(x)}=-\varphi(x)$ (так как $ab=-1$) при всех $x\in G\setminus D$. Но это условие равносильно условию (2).

□

Продолжим изучение ситуации теоремы 33.

36. Пусть G — конечная группа, $\Phi=\{\varphi, \psi\}\subseteq \mathrm{Irr}(G)$, $D\trianglelefteq G$ и для чисел $a, b\in \boldsymbol{C}$ выполнены условия

$$\psi(d)=a\varphi(d) \text{ для всех } d\in D,$$

$$\psi(x)=b\varphi(x) \text{ для всех } x\in G\setminus D.$$

Положим

$$G_+=\{g\in G\mid \psi(g)/\varphi(g)>0\},$$

$$G_-=\{g\in G\mid \psi(g)/\varphi(g)<0\},$$

$$G_0=\{g\in G\mid \psi(g)=\varphi(g)=0\}.$$

1) $G=G_+\dot\cup G_-\dot\cup G_0$, причем G_+ и G_- — непустые.

2) Если $T\trianglelefteq G$, то Φ является T-блоком группы G, если и только если $T=G_+\cup S$ или $T=G_-\cup S$, где S — объединение некоторого множества классов сопряженных элементов группы G, входящих в G_0.

3) G_+, G_- и все классы сопряженных элементов группы G, входящие в G_0, суть все Φ-блоки группы G.

4) Если какое-либо из множеств G_+ и G_- есть класс сопряженных элементов, то либо $|G|=2$, либо G — группа Фробениуса с дополнительным множителем порядка 2 и Φ — множество всех линейных характеров группы G.

5) Пусть $T\in\{G_+, G_-, G_0\}$, $g\in T$ и k — целое число, взаимно простое с порядком элемента g. Тогда $g^k\in T$. В частности, $T=T^{-1}$.

6) G_+, G_- и G_0 (если $G_0\neq\varnothing$) — объединения смежных классов по подгруппе $\mathrm{Ker}\,\varphi\cap\mathrm{Ker}\,\psi$.

Доказательство. По теореме 33 $ab=-1$. Можно считать, что $a>0$ и $b<0$. Тогда $G_+=\{g\in G\mid \psi(g)=a\varphi(g)\neq 0\}$ и $G_-=\{g\in G\mid \psi(g)=b\varphi(g)\neq 0\}$.

1): Очевидно.

2): По теореме 33 множество $\{a, b\}$ вполне определяется множеством Φ, т. е. фактически не зависит от D. Отсюда и из равносильности условий (А) и (Б) теоремы 33 следует утверждение 2).

3): Согласно утверждению 2) $G_+ \longleftrightarrow \Phi$. Если G_+ не является Φ-блоком, то Φ взаимодействует с некоторым нормальным подмножеством T из G с $\varnothing \subset T \subset G_+$. По 2) Φ не является T-блоком, а значит, $T \longleftrightarrow \{\varphi\}$ и $T \longleftrightarrow \{\psi\}$, что противоречит условию теоремы ввиду **31**. Таким образом, G_+ — Φ-блок группы G. Подобно доказывается, что и G_- — Φ-блок. Ясно, что остальные Φ-блоки — это классы сопряженных элементов, входящие в G_0.

4): Непосредственно следует из **32**.

5): Пусть m — целое число, взаимно простое с $|G|$. По **2A15** существует автоморфизм α_m поля $Q(\omega)$, где ω — первообразный корень степени $|G|$ из 1, такой, что $\chi(g^m) = \chi(g)^{\alpha_m}$ для всех $g \in G$ и всех $\chi \in \operatorname{Irr}(G)$. Пусть $g \in G_+$, т. е. $a = \frac{\psi(g)}{\varphi(g)}$. Но тогда $\frac{\psi(g^m)}{\varphi(g^m)} = \left(\frac{\psi(g)}{\varphi(g)}\right)^{\alpha_m} = a^{\alpha_m} = a \left(\varphi(g^m) = \varphi(g)^{\alpha_m} \neq 0\right)$ и, значит, $g^m \in G_+$. Также доказывается, что $(g \in G_-) \Rightarrow (g^m \in G_-)$. Следовательно, и $(g \in G_0) \Rightarrow (g^m \in G_0)$. Таким образом,

(з3) если $(m, |G|) = 1$, то при отображении $g \mapsto g^m$ $(g \in G)$ каждое из множеств G_+, G_- и G_0 отображается на себя.

Пусть $g \in T \in \{G_+, G_-, G_0\}$, k — целое число и $(k, o(g)) = 1$, где $o(g)$ — порядок g. Тогда $g^k = g^m$, где $m = k + |G|_{\pi(k)'}$, а поскольку, очевидно, $(m, |G|) = 1$, то по свойству (з3) $g^k = g^m \in T$.

6): По **2A34**(1) $\psi(gk) = \psi(g)$ и $\varphi(gk) = \varphi(g)$ для любых $g \in G$ и $k \in K \equiv \operatorname{Ker}\varphi \cap \operatorname{Ker}\psi$. Пусть $g \in G_+$. Тогда $\psi(gk) = \psi(g) = a\varphi(g) = a\varphi(gk)$, т. е. $gk \in G_+$ $(k \in K)$. Таким образом, $G_+K = G_+$. Так же доказывается, что $G_-K = G_-$ и $G_0K = G_0$.

□

Представляет интерес случай, когда из двух характеров состоит главный D-блок, т. е. D-блок, содержащий главный характер. Рассмотрим несколько более общую ситуацию.

37. Пусть $D \trianglelefteq G$ и Φ — D-блок группы G, содержащий линейный характер. Равносильны условия:

(1) $|\Phi| = 2$;

(2) G имеет подгруппу N индекса 2 и $D \in \{N, G \setminus N\}$.

Доказательство. (1)$\Rightarrow$(2): Пусть $\Phi = \{\varphi, \psi\}$ и характер φ линейный. По теореме **33** существуют числа a, $b \in C \setminus \{0\}$ такие, что $\psi|_D = a\varphi|_D$ и $\psi|_{D^-} = b\varphi|_{D^-}$. Отсюда и из линейности φ (линейный характер не имеет нулевых значений) следует, что ψ не имеет нулевых значений и, следовательно (**2A28**), он линейный. По **34**(2) $D = G_-$ или $D = G_-$ (так как $G_0 = \varnothing$) и тогда по **34**(6)

$D=DK$, где $K=\operatorname{Ker}\varphi\cap\operatorname{Ker}\psi$. Так как характеры φ и ψ оба линейные, то

$$G'\leqslant K<G \text{ и } \Phi\subseteq \operatorname{Irr}(G|G').$$

Примем «соглашение о волне» (Ж2) для группы $\widetilde{G}=G/G'$ (с $N=G'$). Тогда по теореме Ж3 $\widetilde{D}\leftarrow\rightarrow\widetilde{\Phi}$. При этом $\varnothing\subset\widetilde{D}\subset\widetilde{G}$, так как $D=DK=DG'$. Теперь, поскольку группа $\widetilde{G}$ абелева, то по теореме 3Е1 $\widetilde{\Phi}$ является смежным классом по подгруппе порядка 2 в группе характеров группы $\widetilde{G}$, а $\widetilde{D}$ — смежный класс группы $\widetilde{G}$ по некоторой ее подгруппе $\widetilde{N}$ индекса 2. Обозначив через N полный прообраз $\widetilde{N}$ в G, получим, что $|G:N|=2$ и D — смежный класс по N.

(2) $\Rightarrow$ (1): Так как $G'\leqslant N$, то $D=DG'$ и согласно Ж6 (2) $D\leftarrow\rightarrow\Phi_1\equiv\Phi\cap\operatorname{Irr}(G|G')$. Поскольку по условию $\Phi_1\neq\varnothing$ и Φ — D-блок группы G, то $\Phi=\Phi_1\subseteq\operatorname{Irr}(G|G')$. Теперь по Ж7 $\widetilde{\Phi}$ есть $\widetilde{D}$-блок группы $\widetilde{G}=G/G'$. Так как $\widetilde{D}$ — смежный класс в $\widetilde{G}$ по подгруппе индекса 2, то по теореме 3Е1 все $\widetilde{D}$-блоки группы $\widetilde{G}$ имеют порядок 2. Таким образом, $|\widetilde{\Phi}|=2$ и, следовательно, $|\Phi|=2$.

□

Из 37 непосредственно вытекает следующее расширение утверждения 7А1.

38. Пусть G — конечная группа и p — простое число. Равносильны условия:

(1) G имеет p-блок порядка 2, содержащий линейный характер;

(2) $p=2$ и $|G:\mathrm{O}(G)|=2$.

□

До сих пор мы рассматривали взаимодействия $D\leftarrow\rightarrow\Phi$ с малым Φ. Подобные результаты можно получить и для взаимодействий с малым D.

39. Пусть $|G|>2$, $D=d_1^G\cup d_2^G$, где d_1, $d_2\in G$, и $\varphi\in\operatorname{Irr}(G)$. Равносильны условия:

(1) $D\leftarrow\rightarrow\{\varphi\}$;

(2) выполнено одно из утверждений:

а) $\varphi(d_1)=\varphi(d_2)=0$;

б) D — нормальная элементарная абелева p-подгруппа группы G (p — простое число), $|G|_{p'}=|D|-1$ и φ — (единственный) неприводимый характер группы G вида ξ^G, где $\xi\in\mathrm{CF}(D)$.

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2): Пусть выполнено условие (1), но не выполнено условие а). Тогда по 31 $\varphi(g)=0$ для всех $g\in$

$\in G \setminus D$. В частности, $D = \{1\} \cup d^G$, $d \in D$. Так как $|G| > 2$, то число k классов в G больше двух, $G \setminus D \neq \varnothing$ и $\varphi \neq 1_G$. Имеем следующий фрагмент таблицы характеров группы $(k-2 \geqslant 1)$:

	1	d	$g_1 \quad \ldots \quad g_{k-2}$
1_G	1	1	$1 \quad \ldots \quad 1$
φ	$\varphi(1)$	$\varphi(d)$	$0 \quad \ldots \quad 0$
χ_1 $\vdots$ χ_{k-2}	$\chi_1(1)$	$\chi_1(d)$	$\chi_1(g_1)$

Отсюда $0 = (\varphi, 1_G)_G = \frac{1}{|G|}(\varphi(1) + |d^G|\varphi(d))$, т. е.

$$|d^G|\varphi(d) = -\varphi(1). \tag{з4}$$

Так как $\varphi(d)$ — целое алгебраическое число и $\varphi(d) = -\frac{\varphi(1)}{|d^G|} \in \in \boldsymbol{Q}$, то **(2А6)**

$$\varphi(d) \in \boldsymbol{Z}. \tag{з5}$$

Далее, $1 = (\varphi, \varphi)_G = \frac{1}{|G|}(\varphi(1)^2 + |d^G|\varphi(d)^2)$, откуда ввиду (з4)

$$|G| = -\varphi(1)\varphi(d)|D| = \varphi(d)^2|D|(|D|-1). \tag{з6}$$

Пусть $\chi \in \mathrm{Irr}(G) \setminus \{\varphi\}$. Тогда $0 = |G|(\varphi, \chi)_G = \varphi(1)\chi(1) + |d^G|\varphi(d)\chi(d) = \varphi(1)(\chi(1) - \chi(d))$ {по (з4)}. Таким образом,

$$\chi(d) = \chi(1) \text{ для всех } \chi \in \mathrm{Irr}(G) \setminus \{\varphi\}. \tag{з7}$$

Положим $N = \bigcap_{\chi \in \mathrm{Irr}(G) \setminus \{\varphi\}} \mathrm{Ker}\,\chi$. Тогда N — истинная нормальная подгруппа в G, причем по (з7) $D \subseteq N$. Докажем обратное включение. Пусть $g \in N \setminus D$. Тогда

$$\chi(g) = \chi(1) \text{ при } \chi \in \mathrm{Irr}(G) \setminus \{\varphi\}, \tag{з8}$$

и, применяя второе соотношение ортогональности к столбцам таблицы характеров, соответствующим 1 и d, а затем — 1 и g, получаем $0 = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \chi(1)\chi(d) = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \chi(1)\chi(g)$, откуда ввиду (з7) и (з8) $\varphi(1)\varphi(d) = 0$, что противоречит (з4). Таким образом, $N = D$. Очевидно, D — минимальная нормальная подгруппа в G и, значит,

(з9) D — элементарная абелева p-подгруппа (p — простое число).

Далее, так как $\varphi(g)=0$ для любого неединичного p'-элемента g из G, то для $Q\in\mathrm{Syl}_q(G)$ с $q\neq p$ будет $\frac{\varphi(1)}{|Q|}=(\varphi|_Q,\ 1_Q)_Q\in$ $\in\mathbf{Z}$, откуда

(з10) $$|G|_{p'} \text{ делит } \varphi(1).$$

Ввиду (з6) $|G|_p=\frac{|G|}{|G|_{p'}}=-\frac{\varphi(1)}{|G|_{p'}}\varphi(d)|D|$. Следовательно, $-\varphi(d)=p^\gamma$ для некоторого $\gamma\geqslant 0$, а так как по (з6) $|G|=$ $=\varphi(d)^2|D|(|D|-1)$, то

(з11) $$|G|_{p'}=|D|-1.$$

Пусть $\xi\in\mathrm{Irr}(D)\setminus\{1_D\}$. Тогда $\xi^G(g)=\frac{|C_G(g)|}{|D|}\sum_{x\in g^G\cap D}\xi(x)$, $\xi^G(g)=0$ при $g\in G\setminus D$, $\xi^G(1)=|G:D|$ и $\xi^G(d)=\frac{|C_G(d)|}{|D|}\Big(\sum_{x\in D}\times$ $\times\xi(x)-\xi(1)\Big)=\frac{|C_G(d)|}{|D|}(|D|(\xi,\ \ 1_D)_D-1)=-|C_G(d)|/|D|=$ $=\frac{|G:D|}{\varphi(1)}\varphi(d)$ [по (з4)]. Следовательно,

(з12) $$\xi^G=\frac{|G:D|}{\varphi(1)}\varphi \text{ для всех } \xi\in\mathrm{Irr}(D)\setminus\{1_D\}.$$

Теперь из (з9), (з11) и (з12) следует условие б).

(2) $\Rightarrow$ (1): Из а), очевидно, следует (1). Пусть верно б). Тогда из $\varphi=\xi^G$, $\xi\in\mathrm{CF}(D)$, следует, что φ исчезает на $G\setminus D$, и, значит, $D\longleftrightarrow\{\varphi\}$.

□

3.10. Теорема. Пусть d^G и t^G — различные классы сопряженных элементов группы G ($d,\ t\in G$) и $\Phi\subseteq\mathrm{Irr}(G)$. Тогда равносильны условия:

(А) $d^G\cup t^G$ — Φ-блок группы G;

(Б) при некоторых $a,\ b\in\mathbf{C}$
$$\varphi(t)=a\varphi(d) \text{ для всех } \varphi\in\Phi,$$
$$\chi(t)=b\chi(d) \text{ для всех } \chi\in\Phi^-.$$

Кроме того, если выполнены равенства условия (Б), то
$$\{a,\ b\}=\left\{1,\ -\frac{|d^G|}{|t^G|}\right\}.$$

Доказательство. Положим $x=\widetilde{d^G}\ \Big(=\sum_{g\in d^G}g\Big)$ и $y\in\widetilde{t^G}$. Заметим сначала, что система равенств условия (Б) равносильна системе

(з13) $$\begin{cases} y\,|_{\Phi}^{0}=a_1x\,|_{\Phi}^{0},\\ y\,|_{\Phi^-}^{0}=b_1x\,|_{\Phi^-}^{0},\end{cases}$$

где $a_1 = a\dfrac{|t^G|}{|d^G|}$ и $b_1 = b\dfrac{|t^G|}{|d^G|}$. Действительно, первое равенство из (з13) по 3Г5(5) равносильно тому, что $\psi\left(y|_\Phi^0\right) = \psi\left(a_1 x|_\Phi^0\right)$ для всех $\psi \in \mathrm{Irr}(G)$, а это ввиду 3Г6(1) равносильно условию $\varphi(y) = a_1\varphi(x)$ для всех $\varphi \in \Phi$, которое равносильно первому равенству из (Б). Подобно проверяется равносильность вторых равенств.

Пусть выполнено условие (А). Тогда по теореме 3Г7 ((0) $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ (1)) существуют числа u, v, u_1, v_1 такие, что

$$x|_\Phi^0 = ux + vy,$$

$$y|_\Phi^0 = u_1 x + v_1 y.$$

Отсюда, так же, как и в доказательстве теоремы 33, получаем

$$y|_\Phi^0 = \frac{1-u}{v}\, x|_\Phi^0,$$

$$y|_{\Phi^-}^0 = -\frac{u}{v}\, x|_{\Phi^-}^0$$

($v \neq 0$, так как по условию (А) d^G не взаимодействует с Φ). Согласно сделанному выше замечанию, это равносильно условию (Б).

Пусть выполнено условие (Б) и, следовательно, условие (з13). Из последнего, как и в доказательстве теоремы 33, получаем

$$\text{(з14)}\qquad \begin{cases} x|_\Phi^0 = \dfrac{b_1}{b_1 - a_1}x - \dfrac{1}{b_1 - a_1}y, \\[2ex] y|_\Phi^0 = \dfrac{a_1 b_1}{b_1 - a_1}x - \dfrac{a_1}{b_1 - a_1}y. \end{cases}$$

Следовательно, по теореме 3Г7 ((1) $\Rightarrow$ (0)), $d^G \cup t^G \longleftarrow\!\!\rightarrow \Phi$. Легко увидеть, что $d^G \cup t^G$ есть Φ-блок.

Итак, (А) $\Leftrightarrow$ (Б).

Пусть для некоторых a, $b \in C$ выполнены равенства условия (Б). Тогда выполнено и (А), откуда по теореме 3Б1 ((1) $\Rightarrow$ (2)) $|d^G|\varphi(d)\overline{\chi(d)} + |t^G|\varphi(t)\overline{\chi(t)} = 0$ для всех $(\varphi, \chi) \in \Phi \times \Phi^-$. Отсюда $a\bar{b} = -\dfrac{|d^G|}{|t^G|}$. Далее, либо $1_G \in \Phi$ и тогда по условию (Б) $a = 1$, либо $1_G \in \Phi^-$ и $b = 1$. Таким образом, $\{a, b\} = \left\{1, -\dfrac{|d^G|}{|t^G|}\right\}$.

□

311. Пусть $d \in D$, $d^G \neq (d^{-1})^G$ и $\Phi \subseteq \mathrm{Irr}(G)$. Следующие условия равносильны:

(1) $d^G \cup (d^{-1})^G$ — Φ-блок группы G;

(2) на элементе d характеры одного из множеств Φ и Φ^- принимают мнимые значения, а другого — вещественные.

Доказательство. Непосредственно следует из теоремы **310** и того факта, что $\chi(d^{-1}) = \overline{\chi(d)}$ для всех $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$.

□

312. Пусть G — конечная группа, $D = d^G \dot\cup t^G$ $(d, t \in G)$, $\Phi \subseteq \mathrm{Irr}(G)$ и для чисел a, $b \in \boldsymbol{C}$ выполнены условия

$$\varphi(t) = a\varphi(d) \text{ для всех } \varphi \in \Phi;$$

$$\chi(t) = b\chi(d) \text{ для всех } \chi \in \Phi^-.$$

Положим

$I_+ = \{\psi \in \mathrm{Irr}(G) \mid \psi(t) = \psi(d) \neq 0\}$,

$I_- = \left\{\psi \in \mathrm{Irr}(G) \mid \psi(t) = -\dfrac{|d^G|}{|t^G|}\psi(d) \neq 0\right\}$,

$I_0 = \{\psi \in \mathrm{Irr}(G) \mid \psi(t) = \psi(d) = 0\}$.

1) $\mathrm{Irr}(G) = I_+ \dot\cup I_- \dot\cup I_0$, причем I_+ и I_- непустые.

2) Пусть $\Psi \subseteq \mathrm{Irr}(G)$. Тогда D является Ψ-блоком группы G, если и только если $\Psi = I_+ \cup \Lambda$ или $\Psi = I_- \cup \Lambda$, где $\Lambda \subseteq I_0$.

3) $\{I_+\} \cup \{I_-\} \cup \{\{\chi\} \mid \chi \in I_0\}$ — множество всех D-блоков группы G.

4) $|I_+| > 1$. Если $I_- = \{\varphi\}$, то D — элементарная абелева p-подгруппа в G и φ — единственный неприводимый характер группы G с $D \not\subseteq \mathrm{Ker}\,\varphi$.

5) Пусть $\Psi \in \{I_+, I_-, I_0\}$, $\psi \in \Psi$ и $\alpha \in \mathrm{Aut}(\boldsymbol{Q}(\omega))$, где ω — первообразный корень степени $|G|$ из 1. Тогда $\psi^\alpha \in \Psi$. В частности, $\Psi = \overline{\Psi}$.

Доказательство. Подобно доказательству **34** со ссылкой на **39** и **310** вместо **32** и **33**.

□

313. Упражнение. Пусть d и t — элементы группы G и $D = d^G \dot\cup t^G$. Пусть I_+, I_- и I_0 имеют тот же смысл, что и в **312**.

1) Если $I_+ \cup I_- \cup I_0 = \mathrm{Irr}(G)$, то множество всех D-блоков группы G есть $\{I_+\} \cup \{I_-\} \cup \{\{\chi\} \mid \chi \in I_0\}$.

2) Если $I_+ \cup I_- \cup I_0 \neq \mathrm{Irr}(G)$, то множество всех D-блоков группы G есть $\{\mathrm{Irr}(G) \setminus I_0\} \cup \{\{\chi\} \mid \chi \in I_0\}$.

Это утверждение полезно использовать при вычислении p-блоков с помощью **538** в случае, когда некоторое p-сечение группы состоит из двух классов.

314. Замечание. В [8, предложения 2.4 и 2.5] для каждой спорадической простой группы G получено (с помощью теорем 33 и 310) описание всех взаимодействий (D, Φ) таких, что либо $|\Phi| = 2$ и Φ — D-блок G, либо $k_G(D) = 2$ и D — Φ-блок G. Взаимодействия первого типа имеют все спорадические группы, кроме групп M_{12}, M_{22}, M_{23}, M_{24}, J_2, J_3, Suz, He, Co_1. Отметим, что во всех случаях степени характеров из Φ оказались равными. Взаимодействия второго типа встречаются во всех спорадических группах, кроме группы Хельда He.

Глава 9

ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

В настоящей главе рассматриваются некоторые расширения понятия взаимодействия $D \longleftrightarrow \Phi$, введенного в главе 3.

Первая идея обобщения состоит в том, чтобы определить взаимодействие $V \longleftrightarrow \Lambda$ для любого $\mathbb{C}$-подпространства V из $Z(\mathbb{C}G)$ (центра групповой алгебры $\mathbb{C}G$) и любого $\mathbb{C}$-подпространства Λ из $\mathrm{CF}(G)$ (пространства классовых функций из G в $\mathbb{C}$), причем так, чтобы прежнее взаимодействие $D \longleftrightarrow \Phi$ было равносильно взаимодействию $\mathbb{C}[\hat{D}] \longleftrightarrow \mathbb{C}[\Phi]$, где $\hat{D}$ — множество всех классовых сумм, соответствующих классам из D. Побуждающим мотивом такого обобщения является геометрическая характеризация обычного взаимодействия, полученная в § A. Вторая идея — распространить понятие взаимодействия $D \longleftrightarrow \Phi$ на случай, когда Φ — некоторое множество брауэровых характеров группы G, а D — объединение некоторых ее p'-классов. При реализации этих идей ряд общих рассуждений удается формализовать на языке векторных пространств над произвольным полем. Так появилось понятие взаимодействия подпространств двух произвольных векторных пространств, «спаренных» при помощи некоторой полуторалинейной формы. Результаты главы получены в [7], [8].

Обозначения. Если M — матрица над полем F и $\alpha \in \mathrm{Aut}(F)$, то M^α обозначает матрицу с $(M^\alpha)_{ij} = (M_{ij})^\alpha$. В частности, если α обозначен чертой, т. е. α: $f \to \bar{f}$ $(f \in F)$, то пишем $\overline{M}$ вместо M^α и M^* вместо $\overline{M^\tau}$ (τ — транспонирование).

Пусть L — векторное пространство размерности n над полем F. Если B — упорядоченная база в L, то через B_i обозначается ее i-й вектор, т. е. $B = (B_1, \ldots, B_n)$. При этом вместо «$\sum_{i=1}^{n} h \times (B_i)$», где h — некоторая функция, будем писать также «$\sum_{x \in B} h \times (x)$».

Часто упорядоченная база записывается в виде столбца. Если B — база в L, записанная в виде столбца векторов, $l \in L$ и S — столбец векторов из L, то

l/B — (единственная) матрица $(f_1, \ldots, f_n)$ с $f_i \in F$ такая, что $l = (f_1, \ldots, f_n)B \left(= \sum_{i=1}^{n} f_i B_i \right)$;

S/B — (единственная) матрица X с $S = XB$.

Легко доказываются следующие свойства (B — упорядоченная база в L; S, S_1, S_2 — столбцы векторов из L; $f \in F$; M — матрица над F):

1) $(S_1 + S_2)/B = S_1/B + S_2/B$;
2) $(fS)/B = f(S/B)$;
3) $(MS)/B = M(S/B)$;
4) $S/(MB) = (S/B)M^{-1}$, если M обратима;
5) $S^\alpha/B^\alpha = S/B$ для $\alpha \in \mathrm{Aut}(L)$.

Далее эти свойства используются без ссылок.

Если база пространства L, двойственная базе B относительно данной полуторалинейной формы на L, обозначена через $\breve{B}$, то для $l = B_i$ при $i \in \{1, \ldots, n\}$ полагаем $\breve{l} = (\breve{B})_i$.

§ A. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

Взаимодействия характеризуются здесь в терминах следующего геометрического понятия.

A1. Определение. Пусть L — векторное пространство с фиксированной полуторалинейной эрмитовой формой. Подпространства V и K из L называются *полуортогональными* (в L) (запись: $V \perp K$ (в L)), если существуют подпространства V_1 и K_1 в L такие, что $V = (V \cap K) \oplus V_1$, $K = (V \cap K) \oplus K_1$ и подпространства $V \cap K$, V_1 и K_1 попарно ортогональны относительно данной формы.

Хорошо известным примером полуортогональных подпространств является пара перпендикулярных плоскостей в трехмерном эвклидовом пространстве.

В этом параграфе $\mathrm{CF}(G)$ рассматривается вместе с обычным скалярным произведением классовых функций

$$(\alpha, \beta)_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \alpha(g)\overline{\beta(g)} \quad (\alpha, \beta \in \mathrm{CF}(G)),$$

а в $Z(\mathbf{C}G)$ фиксируется скалярное произведение

$$(u, v)_G = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \chi(u)\overline{\chi(v)} \quad (u, v \in Z(\mathbf{C}G)).$$

Как легко заметить, все результаты этого параграфа останутся верными, если скалярное произведение в $Z(\mathbf{C}G)$ выбрать в виде $(u, v)_G = a \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \chi(u)\overline{\chi(v)}$, где — a любое фиксированное ненулевое вещественное число; в частности, можно взять скалярное произведение из 3Г2, где $a = \frac{1}{|G|}$.

Напомним, что $z|_{\Phi}^{0}=ze_{\Phi}$ для $z\in Z(\mathbf{C}G)$ и $\Phi\subseteq \mathrm{Irr}(G)$. Если V — подпространство векторного пространства $L\in\{\mathrm{CF}(G), Z(\mathbf{C}G)\}$, то π_V означает проектирование L на V с ядром $V^{\perp}$.

А2. Теорема. Пусть G — конечная группа, $D\trianglelefteq G$ и $\Phi\subseteq \mathrm{Irr}(G)$. Равносильны условия:

(1) $D \longleftrightarrow \Phi$,

(2) $\mathrm{CF}(G)|_{D}^{0} \underset{\smile}{\perp} \mathbf{C}[\Phi]$ в $\mathrm{CF}(G)$,

(3) $\mathbf{C}[\hat{D}] \underset{\smile}{\perp} Z(\mathbf{C}G)|_{\Phi}^{0}$ в $Z(\mathbf{C}G)$.

Доказательство. Положим $V=\mathrm{CF}(G)|_{D}^{0}$ и $\Lambda=\mathbf{C}[\Phi]$.

(1) $\Rightarrow$ (2): По (1) $\lambda|_{D}^{0}\in\Lambda$ для всех $\lambda\in\Lambda$. Для любого $\lambda\in\Lambda$ имеем $\lambda=\lambda|_{D}^{0}+\lambda|_{D^-}^{0}$. Так как $\lambda|_{D}^{0}\in\Lambda$, то и $\lambda|_{D^-}^{0}\in\Lambda$. Кроме того, очевидно, $\lambda|_{D^-}^{0}\in V^{\perp}$. Следовательно, $\lambda\in(\Lambda\cap V)+(\Lambda\cap V^{\perp})$. Теперь $\Lambda=(\Lambda\cap V)+(\Lambda\cap V^{\perp})$, и так как слагаемые ортогональны, эта сумма прямая. Положим $\Lambda_1=\Lambda\cap V^{\perp}$. Тогда $\Lambda=(\Lambda\cap \cap V)\oplus\Lambda_1$. Далее, обозначив через V_1 ортогональное дополнение к $\Lambda\cap V$ в V, получим $V=(\Lambda\cap V)\oplus V_1$, причем подпространства $\Lambda\cap V$, Λ_1 и V_1 попарно ортогональны. Таким образом, $V\underset{\smile}{\perp}\Lambda$ в $\mathrm{CF}(G)$.

(2) $\Rightarrow$ (1): Пусть $V\underset{\smile}{\perp}\Lambda$, т. е. $V=(V\cap\Lambda)\oplus V_1$, $\Lambda=(V\cap\Lambda)\oplus \oplus\Lambda_1$ и $V\cap\Lambda$, V_1, Λ_1 — попарно ортогональны. Тогда $\Lambda_1\perp V$, т. е. $\Lambda_1\subseteq V^{\perp}$. Легко видеть, что $V^{\perp}=\mathrm{CF}(G)|_{D^-}^{0}$, откуда $\Lambda_1|_{D}^{0}= =0$. Следовательно, для всех $\varphi\in\Phi$ имеем $\varphi|_{D}^{0}\in(V\cap\Lambda)|_{D}^{0}=V\cap \cap\Lambda\subseteq\Lambda=\mathbf{C}[\Phi]$, т. е. $D\longleftrightarrow\Phi$.

(1) $\Leftrightarrow$ (3): Пусть $T=\mathbf{C}[\hat{D}]$ и $S=Z(\mathbf{C}G)|_{\Phi}^{0}$. По теореме 3Г7 ((0) $\Rightarrow$ (1)) (1) $\Leftrightarrow$ $(v|_{\Phi}^{0}\in T$ для всех $v\in T)$. Далее с помощью 3Г5 (2, 7) получаем $S^{\perp}=Z(\mathbf{C}G)|_{\Phi^-}^{0}$, где $\Phi^-=\mathrm{Irr}(G)\setminus\Phi$. Дальнейшее доказательство подобно доказательству того, что (1) $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ (2).

□

Свойства пар полуортогональных подпространств будут изучаться в следующем параграфе. Отметим одно из них уже сейчас.

А3. Пусть L — векторное пространство с некоторым скалярным произведением. Тогда для его невырожденных подпространств V и K равносильны условия:

(1) $V\underset{\smile}{\perp} K$;

(2) $V=V_1\oplus V_2$, где $V_1\subseteq K$ и $V_2\subseteq K^{\perp}$;

(3) $K=K_1\oplus K_2$, где $K_1\subseteq V$ и $K_2\subseteq V^{\perp}$.

Доказательство. См. Б11.

□

Отсюда и из теоремы **А2** непосредственно вытекает следующая характеризация взаимодействий.

А4. Пусть $D \trianglelefteq G$ и $\Phi \subseteq \mathrm{Irr}(G)$. Равносильны условия:

(1) $D \longleftrightarrow \Phi$;

(2) $\mathbf{C}[\Phi] = \Lambda_1 \oplus \Lambda_2$, где Λ_1 — подпространство из $\mathrm{CF}(G)|_D^0$, а Λ_2 — подпространство из $\mathrm{CF}(G)|_{D^-}^0$;

(3) $\mathrm{CF}(G)|_D^0 = \Psi_1 \oplus \Psi_2$, где Ψ_1 — подпространство из $\mathbf{C}[\Phi]$, а Ψ_2 — подпространство из $\mathbf{C}[\Phi^-]$;

(4) $\mathbf{C}[\hat{D}] = V_1 \oplus V_2$, где V_1 — подпространство из $Z(\mathbf{C}G)|_\Phi^0$, а V_2 — подпространство из $Z(\mathbf{C}G)|_{\Phi^-}^0$;

(5) $Z(\mathbf{C}G)|_\Phi^0 = K_1 \oplus K_2$, где K_1 — подпространство из $\mathbf{C}[\hat{D}]$, а K_2 — подпространство из $\mathbf{C}[\widehat{D^-}]$.

□

Отметим одно приложение (**А6**) последнего результата.

А5. Лемма. Пусть $H \leqslant G$. Для $h \in H$ положим $\varepsilon_{h^H} = 1_H\big|_{h^H}^0$ и $\varepsilon_{h^G} = 1_G\big|_{h^G}^0$.

1) $\left(\varepsilon_{h^H}\right)^G = \dfrac{|C_G(h)|}{|C_H(h)|}\varepsilon_{h^G}$ для всех $h \in H$.

2) Если $T \trianglelefteq H$, то $(\mathrm{CF}(H)|_T^0)^G = \mathrm{CF}(G)\big|_{T^G}^0$.

Доказательство. 1): Согласно **1Ж6** для всех $g \in G$ имеем

$$\left(\varepsilon_{h^H}\right)^G(g) = \frac{|C_G(g)|}{|H|}\sum_{x \in g^G \cap H}\varepsilon_{h^H}(x) = \frac{|C_G(g)|}{|H|}|g^G \cap h^H| =$$

$$= \begin{Bmatrix} \dfrac{|C_G(h)|}{|H|}|h^H| & \text{при } g^G = h^G \\ 0 & \text{при } g^G \neq h^G \end{Bmatrix} = \frac{|C_G(g)|}{|C_H(g)|}\varepsilon_{h^G}(g).$$

2): Следует из 1), так как, очевидно, $\mathrm{CF}(H)|_T^0 = \sum_{h \in T}\mathbf{C}\varepsilon_{h^H}$ и $\mathrm{CF}(G)\big|_{T^G}^0 = \sum_{h \in T}\mathbf{C}\varepsilon_{h^G}$.

□

А6. Пусть $H \leqslant G$, $T \trianglelefteq H$ и $\mathrm{CF}(H)|_T^0 = \bigoplus_{i=1}^m \Lambda_i$, где Λ_i — подпространства из $\mathrm{CF}(H)$ и $m \geqslant 1$. Положим $\Phi_i = \bigcup_{\lambda \in \Lambda_i}\mathrm{Irr}(\lambda^G)$. Тогда если $\Phi_i \cap \Phi_j = \varnothing$ при всех $i \neq j$, то $T^G \longleftrightarrow \Phi_i$ для всех $i = 1, \ldots, m$.

Доказательство. По **А5** $\mathrm{CF}(G)\Big|_{T}^{0}{}_{G} = \left(\bigoplus_{i=1}^{m}\Lambda_i\right)^G = \sum_{i=1}^{m}\Lambda_i^G$. Если $\Phi_i \cap \Phi_j = \varnothing$ при $i \neq j$, то для любого $i \in \{1, \ldots, m\}$ $\mathrm{CF}\times\times(G)\Big|_{T}^{0}{}_{G} = \Lambda_i^G \oplus \Gamma_i$, где Γ_i — сумма всех Λ_j^G с $j \neq i$, причем $\Lambda_i^G \subseteq \boldsymbol{C}[\Phi_i]$ и $\Gamma_i \subseteq \boldsymbol{C}\left[\Phi_i^{-}\right]$. Отсюда по **А4** ((3) $\Rightarrow$ (1)) $T^G \longleftrightarrow \Phi_i$.

□

§ Б. ГЕОМЕТРИЯ ПОЛУОРТОГОНАЛЬНЫХ ПОДПРОСТРАНСТВ

Следующее предположение считается выполненным всюду в этом параграфе. Вводимые в нем обозначения сохраняются до конца параграфа.

Б1. Предположение. Пусть L — n-мерное векторное пространство над полем F, $\tau \in \mathrm{Aut}(F)$, $\tau^2 = 1$ и $(\ ,\ )_L$ — невырожденная полуторалинейная относительно τ форма на L с $(l_1, l_2)_L = (l_2, l_1)_L^{\tau}$. Положим $\bar{f} = f^{\tau}$ при $f \in F$.

Для невырожденного подпространства V из L через π_V обозначается ортогональное проектирование L на V (см. **Б9**).

Форма, о которой идет речь в **Б1**, называется эрмитовой (при $\tau = 1$ — симметричной).

Б2. Определение. Подпространства V и K из L называются полуортогональными (запись $V \mathbin{\underset{\sim}{\perp}} K$), если существуют подпространства V_1 и K_1 в L такие, что $V = (V \cap K) \oplus V_1$, $K = (V \cap K) \oplus K_1$ и подпространства $V \cap K$, V_1 и K_1 попарно ортогональны.

Образно говоря, полуортогональные подпространства «ортогональны по модулю их пересечения». Основные свойства пар полуортогональных подпространств собраны в следующей теореме.

Б3. Теорема. Для невырожденных подпространств V и K из L равносильны условия:

(1) $V \mathbin{\underset{\sim}{\perp}} K$,

(2) $\pi_V\pi_K = \pi_K\pi_V$,

(3) $V^{\pi_K} \subseteq V$,

(4) $V = (V \cap K) \oplus (V \cap K^{\perp})$,

(5) $V = K^{\pi_V} \oplus (K^{\perp})^{\pi_V}$.

Кроме того, если $F = \boldsymbol{C}$ и τ — комплексное сопряжение в $\boldsymbol{C}$, то условиям (1) — (5) равносильно также условие

(6) $(v^{\pi_K}, k^{\pi_V})_L = (v, k)_L$ для всех $(v, k) \in V \times K$.

Доказательство теоремы непосредственно вытекает из утверждений **Б11**, **Б12**, **Б15** и **Б20**.

Свойства Б4 — Б9 пространства L хорошо известны в линейной алгебре. Доказательства их имеются в [16, гл. IX].

Б4. 1) $\left(\sum_i f_i l_i,\ \sum_j h_j k_j\right)_L = \sum_{i,j} f_i \overline{h_j} (l_i, k_j)_L$ для всех f_i, $h_j \in F$ и l_i, $k_j \in L$ (полуторалинейность формы).

2) ($l_0 \in L$ и $(l_0, l)_L = 0$ для всех $l \in L$) $\Rightarrow l_0 = 0$ (невырожденность формы).

□

Б5. Для подпространства V из L положим $V^\perp = \{l \in L \mid (l, v)_L = 0$ для всех $v \in V\}$. Тогда

1) $\dim(V) + \dim(V^\perp) = n$;

2) $V^{\perp\perp} = V$;

3) если V невырожденно (неизотропно), т. е. $V \cap V^\perp = 0$, то $L = V \oplus V^\perp$.

□

Б6. Пусть A и B — базы пространства L, записанные в виде столбцов. Обозначим через $R(A, B)$ $n \times n$-матрицу с $R(A, B)_{ij} = (A_i, B_j)_L$. Тогда

1) матрица $R(A, B)$ обратима и $R(A, B) = R(A, B)^*$,

2) $(l_1, l_2)_L = (l_1/A) R(A, B) (l_2/B)^*$ для всех l_1, $l_2 \in L$,

3) $R(C, D) = (C/A) R(A, B) (D/B)^*$ для любых баз C и D в L,

4) для каждой базы A пространства L существует единственная двойственная ей база C в L, т. е. такая, что $(A_i, C_j)_L = \delta_{ij}$ для всех i, $j \in \{1, \ldots, n\}$, а именно, $C = R(A, A)^{-1} A$.

□

В дальнейшем мы часто будем обозначать базу C, двойственную к A, через $\widetilde{A}$. В этом случае, согласно обозначениям, принятым в начале этой главы, будем писать $\widetilde{A_i}$ вместо C_i ($= (\widetilde{A})_i$).

Б7. Пусть либо $\tau \neq 1$, либо $\operatorname{char}(F) \neq 2$. Тогда

1) L имеет ортогональную базу A ($(A_i, A_j)_L = 0$ при $i \neq j$),

2) если $F = \mathbf{C}$ и τ — комплексное сопряжение или $\tau = 1$, то L имеет ортонормированную базу B ($(B_i, B_j)_L = \delta_{ij}$).

□

Б8. Пусть α, $\beta \in \operatorname{End}(L)$.

1) Для любого $\alpha \in \operatorname{End}(L)$ существует единственный $\alpha^* \in \operatorname{End}(L)$ такой, что $(x^\alpha, y)_L = (x, y^{\alpha^*})_L$ для всех x, $y \in L$ (α^* называется сопряженным с α);

2) $(\alpha + \beta)^* = \alpha^* + \beta^*$;

3) $(f\alpha)^* = \overline{f}\alpha^*$ для $f \in F$;

4) $(\alpha\beta)^* = \beta^*\alpha^*$;
5) $1^* = 1$, $0^* = 0$;
6) $\alpha^{**} = \alpha$;
7) $\alpha \in \mathrm{Aut}(L) \Rightarrow (\alpha^{-1})^* = (\alpha^*)^{-1}$.

□

Б9. Пусть V — невырожденное подпространство в L и π_V — ортогональное проектирование L на V (элемент l из L однозначно представляется в виде $l = v + z$, где $v \in V$ и $z \in V^\perp$, и тогда $l^{\pi_V} = v$). Тогда

1) если $V = V_1 \dot{+} V_2$, причем V_1 и V_2 ортогональны (т. е. $V_1 \subseteq V_2^\perp$), то $\pi_V = \pi_{V_1} + \pi_{V_2}$ (в кольце $\mathrm{End}(L)$); в частности, $\pi_V + \pi_{V^\perp} = 1$;

2) $\pi_V^2 = \pi_V$;

3) $(x^{\pi_V}, y)_L = (x^{\pi_V}, y^{\pi_V})_L = (x, y^{\pi_V})_L$ для всех $x, y \in L$;

4) $\pi_V^* = \pi_V$.

□

Займемся теперь полуортогональными подпространствами. Очевидно, что

$$V \underset{\smile}{\perp} K \Leftrightarrow K \underset{\smile}{\perp} V.$$

Б10. Для подпространств V и K из L равносильны условия:
(1) $V \underset{\smile}{\perp} K$;
(2) существуют попарно ортогональные подпространства A, V_1 и K_1 в L такие, что $V = A + V_1$ и $K = A + K_1$.

Доказательство. (1)⇒(2): Следует из определения **Б2** при $A = V \cap K$.

(2)⇒(1): Если выполнено условие (2), то $A \subseteq V \cap K$, $V_1 \subseteq V \cap K^\perp$ и $K_1 \subseteq K \cap V^\perp$, откуда $V = (V \cap K) + (V \cap K^\perp)$ и $K = (V \cap K) + (V^\perp \cap K)$. Пусть V_2 — некоторое дополнение к $(V \cap K) \cap (V \cap K^\perp)$ в $V \cap K^\perp$ и K_2 — некоторое дополнение к $(V \cap K) \cap (V^\perp \cap K)$ в $V^\perp \cap K$. Тогда $V = (V \cap K) \dot{+} V_2$, $K = (V \cap K) \dot{+} K_2$ и подпространства $V \cap K$, V_2 и K_2 попарно ортогональны. Следовательно, $V \underset{\smile}{\perp} K$.

□

Б11. Для невырожденных подпространств V и K из L равносильны условия:
(1) $V \underset{\smile}{\perp} K$;
(2) $\pi_V \pi_K = \pi_K \pi_V$;
(3) $V^{\pi_K} \subseteq V$;
(4) $K^{\pi_V} \subseteq K$;
(5) $V = V_1 \dot{+} V_2$, где $V_1 \subseteq K$ и $V_2 \subseteq K^\perp$;
(6) $K = K_1 \dot{+} K_2$, где $K_1 \subseteq V$ и $K_2 \subseteq V^\perp$.

Доказательство. В следующих рассуждениях используются свойство **Б9**(1) и тот факт, что из ортогональности V и K (запись $V \perp K$) вытекает $\pi_V \pi_K = 0$.

(1)⇒(2): Из полуортогональности V и K следует, что $V = (V \cap K) \oplus V_1$, $K = (V \cap K) \oplus K_1$, $V_1 \perp K$ и $K_1 \perp V$. Значит, $\pi_V = \pi_{V \cap K} + \pi_{V_1}$ и $\pi_K = \pi_{V \cap K} + \pi_{K_1}$. Отсюда, $\pi_V \pi_K = \pi_{V \cap K}^2 + \pi_{V \cap K} \pi_{K_1} + \pi_{V_1} \pi_{V \cap K} + \pi_{V_1} \pi_{K_1} = \pi_{V \cap K}^2$. Этому же равно и $\pi_K \pi_V$.

(2)⇒(3): $V^{\pi_K} = L^{\pi_V \pi_K} = L^{\pi_K \pi_V} = K^{\pi_V} \subseteq V$.

(3)⇒(5): Для любого $v \in V$ имеем $v = v^{\pi_K} + v^{\pi_{K^\perp}}$. Так как по (3) $v^{\pi_K} \in V$, то $v^{\pi_{K^\perp}} = v - v^{\pi_K} \in V$. Следовательно, полагая $V_1 = V^{\pi_K}$ и $V_2 = V^{\pi_{K^-}}$, получаем условие (5).

(5)⇒(4): $K^{\pi_V} = K^{\pi_{V_1} + \pi_{V_2}} \subseteq K^{\pi_{V_1}} + K^{\pi_{V_2}} = K^{\pi_{V_1}} \subseteq V_1 \subseteq K$.

(4)⇒(6): Подобно (3)⇒(5).

(6)⇒(1): Условие (6) можно, очевидно, переписать в виде

$$(6_1) \qquad K = (K \cap V) \oplus (K \cap V^\perp).$$

Кроме того, наряду с (6) справедливо также и условие (5), так как утверждения (6)⇒(3)⇒(5) доказываются подобно утверждениям (5)⇒(4)⇒(6) (нужно лишь поменять местами V и K). Таким образом,

$$(6_2) \qquad V = (V \cap K) \oplus (V \cap K^\perp).$$

Из (6₁) и (6₂) следует (1).

□

Из **Б11** непосредственно вытекают следующие три утверждения.

Б12. Пусть V и K — невырожденные подпространства в L. Если V и K полуортогональны, то $\pi_V \pi_K = \pi_{V \cap K}$, $V^{\pi_K} = K^{\pi_V} = V \cap K$, $V = (V \cap K) \oplus (V \cap K^\perp)$, $K = (V \cap K) \oplus (K \cap V^\perp)$, $\pi_V \pi_K \pi_{V^\perp} = 0$, $\pi_V \pi_K \pi_V = \pi_V \pi_K$, $\pi_V \pi_K \pi_V = \pi_K \pi_V$.

Обратно, каждое из этих восьми равенств влечет полуортогональность V и K.

□

Б13. Пусть V и K — невырожденные подпространства в L. Равносильны условия:

(1) $V \underset{\sim}{\perp} K$,
(2) $V \underset{\sim}{-} K^\perp$,
(3) $V^- \underset{\sim}{-} K$,
(4) $V^\perp \underset{\sim}{\perp} K^-$.

□

Б14. Пусть V, и X, Y — невырожденные подпространства в L, причем и X, Y полуортогональны V. Тогда каждое из подпространств $X\cap Y$, $X\cap Y^{\perp}$ и $X+Y$ невырожденно и полуортогонально V.

□

Б15. Пусть V и K — невырожденные подпространства в L. Равносильны условия:

(1) $V \underset{\smile}{\perp} K$,

(2) $V = K^{\pi_V} \oplus (K^{\perp})^{\pi_V}$,

(3) $K = V^{\pi_K} \oplus (V^{\perp})^{\pi_K}$.

Доказательство. (1)$\Rightarrow$(2): $V = L^{\pi_V} = (K+K^{\perp})^{\pi_V} \subseteq K^{\pi_V} + (K^{\perp})^{\pi_V} \subseteq V$. Следовательно, $V = K^{\pi_V} + (K^{\perp})^{\pi_V}$. Если $V \underset{\smile}{\perp} K$, то по Б13 также $V \underset{\smile}{\perp} K^{\perp}$ и по **Б11** $K^{\pi_V} \subseteq K$ и $(K^{\perp})^{\pi_V} \subseteq K^{\perp}$. Значит, $K^{\pi_V} \cap (K^{\perp})^{\pi_V} = 0$ и верно (2).

(2)$\Rightarrow$(1): Пусть $l \in V^{\perp}$. Тогда $0 = l^{\pi_V} = l^{(\pi_K+\pi_{K^{\perp}})\pi_V} = l^{\pi_K\pi_V} + l^{\pi_{K^{\perp}}\pi_V}$, причем $l^{\pi_K\pi_V} \in K^{\pi_V}$ и $l^{\pi_{K^{\perp}}\pi_V} \in (K^{\perp})^{\pi_V}$. Отсюда и из (2) следует, что $l^{\pi_K\pi_V} = 0$ и $l^{\pi_{K^{\perp}}\pi_V} = 0$. Первое из них дает $(V^{\perp})^{\pi_K\pi_V} = 0$, т. е. $(V^{\perp})^{\pi_K} \subseteq V^{\perp}$. Отсюда ввиду **Б11** и **Б13** следует (1).

(1)$\Leftrightarrow$(3): Следует из (1)$\Leftrightarrow$(2) и симметричности отношения полуортогональности.

□

Б16. Пусть либо $\tau \neq 1$, либо $\mathrm{char}(F) \neq 2$. Тогда каждое не вполне вырожденное подпространство из L содержит невырожденное одномерное подпространство.

Доказательство. Пусть K — не вполне вырожденное подпространство из L, т. е. существуют $k_1, k_2 \in K$ с $(k_1, k_2)_L \neq 0$, и предположим, что $(k, k)_L = 0$ для всех $k \in K$. Отсюда при $k = fk_1 + k_2$, где $f \in F$, получаем $f(k_1, k_2)_L = -\bar{f}\,\overline{(k_1, k_2)_L}$ и, в частности, $(k_1, k_2)_L = -\overline{(k_1, k_2)_L}$. Из этих двух равенств следует, что $f = \bar{f}$ для всех $f \in F$, т. е. $\tau = 1$. Но тогда предыдущее равенство дает $2(k_1, k_2)_L = 0$, т. е. $2 = 0$, что противоречит предположению.

□

Б17. Пусть $|F| \geqslant 5$, $\{x, y\} \subseteq L$, $K = Fx \oplus Fy$, $(x, y)_L = 0$, $(x, x)_L \neq 0$, и $(y, y)_L \neq 0$. Тогда существует одномерное невырожденное подпространство в K, отличное от Fx и Fy.

Доказательство. Пусть $k = fx + y$, где $f \in F \setminus \{0\}$. Подберем f так, чтобы было $(k, k)_L \neq 0$. Имеем $(k, k)_L = f\bar{f}(x, x)_L + (y, y)_L$. Если это равно нулю при всех $f \in F \setminus \{0\}$, то

$$f\bar{f} = 1 \text{ для всех } f \in F \setminus \{0\}.$$

Но это возможно лишь при $|F|\leqslant 4$. Действительно, $\mathrm{char}(F)\in\{2, 3\}$, так как, если $2\neq 0$, то $2\cdot\bar{2}=1$ и $3=0$. Далее, для любого $f\in F\setminus\{0\}$ либо $f+\bar{f}=0$ и тогда $f^4=1$, либо $(f+\bar{f})(\overline{f+\bar{f}})=1$ и тогда $f^2+f\bar{f}+\bar{f}^2=0$, $f^3-\bar{f}^3=0$ и $f^6=1$. Поэтому $|F|=2$, 3 или 4.

□

Б18. Пусть $|F|\geqslant 5$, $\tau\neq 1$ или $\mathrm{char}(F)\neq 2$, V и K — невырожденные подпространства в L. Равносильны условия:

(1) $(V\underset{\sim}{\perp}X)\Leftrightarrow(K\underset{\sim}{\perp}X)$ для любого невырожденного подпространства X из L;

(2) $V=K$ или $V=K^{\perp}$.

Доказательство. (1)⇒(2): Ввиду **Б11** условие (1) равносильно условию

$$(63)\qquad (X=(X\cap V)\oplus(X\cap V^{\perp}))\Leftrightarrow(X=(X\cap K)\oplus(X\cap K^{\perp}))$$

для любого невырожденного подпространства X из L.

В частности, при $X=K$ отсюда следует, что

$$(64)\qquad K=(K\cap V)\oplus(K\cap V^{\perp}).$$

Предположим, что $K\cap V\neq 0$ и $K\cap V^{\perp}\neq 0$. Так как, очевидно, $K\cap V$ и $K\cap V^{\perp}$ невырожденны, то по **Б16** существуют невырожденные подпространства Fv и Fu в $K\cap V$ и $K\cap V^{\perp}$ соответственно.

Теперь по **Б17** существует невырожденное подпространство Fk в $Fv\oplus Fu$, отличное от Fv и Fu. Но тогда по (63) при $X=Fk$ имеем

$$Fk=(Fk\cap V)\oplus(Fk\cap V^{\perp})=0,$$

что противоречиво. Таким образом, либо $V\cap K=0$, либо $K\cap V^{\perp}=0$, и ввиду (64) верно (2).

(2)⇒(1): Следует из **Б13**.

□

Б19. Пусть A и $\tilde{A}$ — двойственные базы в L и $l\in L$. Тогда

1) $l=\sum\limits_{a\in A}(l, a)_L\tilde{a}=\sum\limits_{a\in A}(l, \tilde{a})_L a$;

2) если V — невырожденное подпространство в L с базой A_V, причем $A_V\subseteq A$, то

$$l^{\pi_V}=\sum_{v\in A_V}(l, v)_L\tilde{v}^{\pi_V}=\sum_{v\in A_V}(l, \tilde{v}^{\pi_V})_L v;$$

в частности, если B_V — ортогональная база в V, то

$$l^{\pi_V}=\sum_{v\in B_V}\frac{(l, v)_L}{(v, v)_L}v.$$

Доказательство. (1): Очевидно.

(2): Пусть $A_V=(A_1, \ldots, A_m)$, $A=(A_1, \ldots, A_n)$ и $\widetilde{A}=(\widetilde{A_1}, \ldots, \widetilde{A_n})$. Из определения двойственных баз следует, что $F[\widetilde{A}_{m+1}, \ldots, \widetilde{A}_n]=V^{\perp}$. Учитывая это и (1), получаем $l^{\pi_V}=\left(\sum_{i=1}^{n}(l, A_i)_L\widetilde{A}_i\right)^{\pi_V}=\sum_{i=1}^{m}(l, A_i)_L\widetilde{A}_i^{\pi_V}=\sum_{v\in A_V}(l, v)_L\widetilde{v}^{\pi_V}$.

Далее, подставляя в (1) l^{π_V} вместо l, получаем $l^{\pi_V}=\sum_{i=1}^{n}(l^{\pi_V}, \widetilde{A}_i)_L A_i =_{\text{Б9(4)}} \sum_{i=1}^{n}(l, \widetilde{A}_i^{\pi_V})_L A_i=\sum_{i=1}^{m}(l, \widetilde{A}_i^{\pi_V})_L A_i=\sum_{v\in A_V}(l, \widetilde{v}^{\pi_V})_L v$. Основные равенства в (2) доказаны.

Наконец, пусть $B_V=(B_1, \ldots, B_m)$ — ортогональная база в V. Двойственной ей базой в V будет база $C_V=(C_1, \ldots, C_m)$, где согласно Б6 (4) $C_i=B_i/(B_i, B_i)_L$. Возьмем теперь любую пару D, E двойственных баз в $V^{\perp}$ и обозначим через B базу в L, получающуюся добавлением базы D к B_V. Очевидно, что двойственная ей база в L есть база $\widetilde{B}$, полученная добавлением к базе C_V базы E. Теперь, заменяя в основных равенствах из (2) пару $(A, \widetilde{A})$ парой $(B, \widetilde{B})$, получаем требуемое частное равенство.

□

Б20. Пусть $F=\mathbf{C}$ и τ — комплексное сопряжение. Тогда для невырожденных подпространств V и K из L равносильны условия:

(1) $V\,\underset{\smile}{\perp}\,K$;

(2) $(v^{\pi_K}, k^{\pi_V})_L=(v, k)_L$ для всех $(v, k)\in V\times K$.

Доказательство. По Б7 и Б5(3) подпространства V, $V^{\perp}$, K, $K^{\perp}$ имеют ортонормированные базы B_V, $B_{V^{\perp}}$, B_K и $B_{K^{\perp}}$ соответственно, причем $B_1=B_V\cup B_{V^{\perp}}$ и $B_2=B_K\cup B_{K^{\perp}}$ — базы в L. По Б6 (3) $R(B_1, B_2)=(B_1/B_2)R(B_2, B_2)=B_1/B_2$ и $R(B_2, B_1)=B_2/B_1=(B_1/B_2)^{-1}$. Но по Б6 (1) $R(B_1, B_2)=R(B_2, B_1)^*$. Следовательно, матрица $R(B_1, B_2)$ унитарна. Представим ее в клеточном виде

$$\begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{pmatrix},$$

где $\mathrm{A}_{ij}=((B_V)_i, (B_K)_j)_L$, $\mathrm{B}_{is}=((B_V)_i, (B_{K^{\perp}})_s)_L$, $\mathrm{C}_{tj}=((B_{V^{\perp}})_t, (B_K)_j)_L$, $\mathrm{D}_{ts}=((B_{V^{\perp}})_t, (B_{K^{\perp}})_s)_L$ (размеры A — $|B_V|\times|B_K|$). По лемме об унитарной матрице (ЗБ2)

(65) $$\mathrm{AC}^*=\mathrm{O},$$

(66) $$\mathrm{AA}^*\mathrm{A}=\mathrm{A}.$$

Но $(AC^*)_{it} = \sum_j A_{ij}\overline{C_{tj}} = \sum_{k\in B_K} ((B_V)_i,\ k)_L \cdot \overline{((B_{V\perp})_t,\ k)_L}$. Так как по (65) это равно 0 для любых i и t, то $(65) \Leftrightarrow \left(\sum_{k\in B_K} (v,\ k)_L \times \right.$ $\left.\times \overline{(w,\ k)_L} = 0 \text{ для всех } (v,\ w)\in V\times V^\perp\right) \Leftrightarrow_{Б19(2)} ((v^{\pi_K},\ w)_L = 0$ для всех $(v,\ w)\in V\times V^\perp) \Leftrightarrow (V^{\pi_K} \subseteq V) \Leftrightarrow_{(Б11)} (V \perp K)$. Итак, условие (65) равносильно условию (1). Подобно доказывается, что условие (66) равносильно условию

$$\sum_{v\in B_V}\sum_{k\in B_K} (v_0,\ k)_L (k,\ v)_L (v,\ k_0)_L = (v_0,\ k_0)_L$$

для всех $(v_0,\ k_0)\in V\times K$, которое ввиду **Б19**(2) равносильно условию (2).

□

Б21. Для невырожденных подпространств V и K из L равносильны условия:

(1) $(v^{\pi_K},\ k^{\pi_V})_L = (v,\ k)_L$ для всех $(v,\ k)\in V\times K$,

(2) $(\pi_V\pi_K)^2 = \pi_V\pi_K$,

(3) $\pi_V\pi_K\pi_{V\perp}\pi_K = 0$,

(4) если A_V и B_K — базы в V и K соответственно, $A_V\subseteq A$ и $B_K\subseteq B$, где A и B — базы в L, $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ — базы в L, двойственные A и B соответственно, то

$$\sum_{k\in B_K}\sum_{v\in B_V} (v_0,\ \widetilde{k}^{\pi_K})_L (k,\ v)_L (\widetilde{v}^{\pi_V},\ k_0)_L = (v_0,\ k_0)_L$$

для всех $(v_0,\ k_0)\in V\times K$.

Доказательство. (1)$\Rightarrow$(2): Для произвольных $x,\ y\in L$ $(x^{\pi_V\pi_K\pi_V\pi_K},\ y)_L =_{Б9(4)} (x^{\pi_V\pi_K},\ y^{\pi_K\pi_V})_L =_{(1)} (x^{\pi_V},\ y^{\pi_K})_L = =_{Б9(4)} (x^{\pi_V\pi_K},\ y)_L$. Отсюда ввиду невырожденности формы $(\ ,\ )_L$ следует (2).

(2)$\Rightarrow$(3): $\pi_V\pi_K = \pi_V\pi_K 1\pi_K = \pi_V\pi_K(\pi_V + \pi_{V\perp})\pi_K = (\pi_V\pi_K)^2 + \pi_V\pi_K\pi_{V\perp}\pi_K$.

(3)$\Rightarrow$(1): Для любого $v\in V$ имеем $v^{\pi_K} = v^{\pi_k^2} = v^{\pi_K\pi_V\pi_K} + + v^{\pi_K\pi_{V\perp}\pi_K} =_{(3)} v^{\pi_K\pi_V\pi_K}$. Поэтому $(v^{\pi_K\pi_V\pi_K},\ k)_L = (v^{\pi_K},\ k)_L$ для всех $k\in K$, а это ввиду **Б9**(4) равносильно (1).

(1)$\Leftrightarrow$(4): Следует из **Б19**(2).

□

Б22. Пусть M — векторное пространство над полем F с полуторалинейной эрмитовой формой $(\ ,\ )_M$ и θ — полулинейное отображение из L в M такое, что $\dim L^\theta > 2$. Тогда равносильны условия:

(1) θ сохраняет ортогональность векторов (т. е. из $(l_1, l_2)_L = 0$ следует $(l_1^\theta, l_2^\theta)_M = 0$ для всех $l_1, l_2 \in L$);

(2) θ сохраняет полуортогональность подпространств (т. е. из $V \mathrel{\underline{\perp}} K$ в L следует $V^\theta \mathrel{\underline{\perp}} K^\theta$ в M).

Доказательство. (1)$\Rightarrow$(2): Пусть $V \mathrel{\underline{\perp}} K$ в L, т. е. $V = (V \cap K) \oplus V_1$, $K = (V \cap K) \oplus K_1$ и подпространства $V \cap K$, V_1 и K_1 попарно ортогональны. Тогда $V^\theta = (V \cap K)^\theta + V_1^\theta$, $K^\theta = (V \cap K)^\theta + K_1^\theta$ и подпространства $(V \cap K)^\theta$, V_1^θ и K_1^θ попарно ортогональны в M по условию (1). Теперь по **Б10** $V^\theta \mathrel{\underline{\perp}} K^\theta$.

(2)$\Rightarrow$(1): Пусть выполнено условие (2), $\{l, k\} \subseteq L$, $(l, k)_L = 0$, но $(l^\theta, k^\theta)_M \neq 0$. Так как $Fl \mathrel{\underline{\perp}} Fk$, то по (2) $Fl^\theta \mathrel{\underline{\perp}} Fk^\theta$. По **Б11** ((1)$\Rightarrow$(6)) $Fk^\theta = U \oplus V$, где $U \subseteq Fl^\theta$, $V \subseteq (Fl^\theta)^\perp$, и, значит, $Fk^\theta = Fl^\theta$. Поэтому $(Fl)^\perp = A \cup B$, где $A = \{v \in (Fl)^\perp \mid Fv^\theta \perp Fl^\theta\}$ и $B = \{v \in (Fl)^\perp \mid Fv^\theta = Fl^\theta\}$. Поскольку, очевидно, A и B — подпространства в $(Fl)^\perp$, то отсюда следует, что A или B совпадает с $(Fl)^\perp$. Так как $k \in (Fl)^\perp \setminus A$, то $(Fl)^\perp = B$ и, значит, $((Fl)^\perp)^\theta = Fl^\theta$.

Таким образом, подпространство $(Fl)^\perp$ из L, имеющее размерность $n-1$ по **Б5** (1), отображается при действии θ на одномерное подпространство из M, в противоречие с тем, что $\dim L^\theta > 2$.

□

§ В. ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В СПАРЕННЫХ ВЕКТОРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Будем рассматривать следующую ситуацию.

В1. Предположение. Пусть Ψ и Z — k-мерные векторные пространства над полем F, $\tau \in \operatorname{Aut}(F)$, $\tau^2 = 1$, $(\ ,\ )_\Psi$ и $(\ ,\ )_Z$ — невырожденные эрмитовы относительно τ формы (скалярные произведения) в Ψ и Z соответственно, s — невырожденная полуторалинейная относительно $\tau\gamma$ форма на $\Psi \times Z$, где $\gamma \in \operatorname{Aut}(F)$ и $\tau\gamma = \gamma\tau$. Предположим, что существуют ортонормированные базы в Ψ и Z соответственно, двойственные относительно s. Положим $\bar{f} = f^\tau$ для $f \in F$. Под базами понимаются упорядоченные базы.

Замечание. Если A и B — ортонормированные базы пространств Ψ и Z соответственно, то при фиксированном $\gamma \in \operatorname{Aut}(F)$ существует точно одна полуторалинейная форма s на $\Psi \times Z$ такая, что A и B двойственны относительно s: нужно положить $s(A_i, B_j) = \delta_{ij}$ и распространить это по полуторалинейности. Таким образом, существенным в предположении **В1** является лишь наличие двух пространств одинаковой размерности над F, имеющих ортонормированные базы. Задание формы s играет вспомогательную роль.

Сначала отметим три свойства, которые вытекают лишь из существования формы s, «спаривающей» векторные пространства Ψ и Z. Доказательства их можно найти в [16, гл IX].

B2. Для каждой базы A из Ψ существует единственная база B в Z, двойственная к A (относительно s), т. е. такая, что $s(A_i, B_j) = \delta_{ij}$ при $i, j \in \{1, \ldots, k\}$. Подобное утверждение справедливо для баз из Z.

□

B3. Для подпространств Γ и V из Ψ и Z соответственно положим

$$\Gamma^\circ = \{z \in Z \mid s(\gamma, z) = 0 \quad \text{для всех } \gamma \in \Gamma\},$$
$$V^\circ = \{\psi \in \Psi \mid s(\psi, v) = 0 \text{ для всех } v \in V\}.$$

Тогда, если M — подпространство из Ψ или Z, то

1) M° — подпространство в Z или Ψ соответственно,

2) $\dim(M) + \dim(M^\circ) = k$,

3) $M^{\circ\circ} = M$.

□

B4. 1) Для любого $\alpha \in \operatorname{End}(\Psi)$ существует единственный $\alpha^s \in \operatorname{End}(Z)$ такой, что $s(\psi^\alpha, z) = s(\psi, z^{\alpha^s})$ для всех $(\psi, z) \in \Psi \times Z$.

2) Для любого $\beta \in \operatorname{End}(Z)$ существует единственный $\beta^s \in \operatorname{End}(\Psi)$ такой, что $s(\psi, z^\beta) = s(\psi^{\beta^s}, z)$ для всех $(\psi, z) \in \Psi \times Z$.

3) $\alpha^{ss} = \alpha$ для всех $\alpha \in \operatorname{End}(\Psi) \cup \operatorname{End}(Z)$.

□

B5. Пусть V — невырожденное подпространство из Z.

1) Для каждого $\psi \in \Psi$ существует элемент $\psi|_V^0$ в Ψ, который однозначно определяется равенствами:

$$s(\psi|_V^0, v) = s(\psi, v) \text{ для всех } v \in V;$$

$$s(\psi|_V^0, t) = 0 \quad \text{для всех } t \in V^\perp.$$

$\psi|_V^0$ назовем *V-срезкой* элемента ψ (относительно s). Положим $\Phi|_V^0 = \{\varphi|_V^0 \mid \varphi \in \Phi\}$ для $\Phi \subseteq \Psi$.

2) Отображение $\psi \mapsto \psi|_V^0$ $(\psi \in \Psi)$ совпадает с линейным отображением $(\pi_V)^s$.

Доказательство. Приведенные равенства равносильны, очевидно, условию

$$s(\psi|_V^0, z) = s(\psi, z^{\pi_V}) \text{ для всех } z \in Z.$$

По **B4**(2) это равносильно тому, что

$$s\left(\psi|_V^0,\ z\right)=s\left(\psi^{(\pi_V)^s},\ z\right) \text{ для всех } z\in Z.$$

Отсюда и из невырожденности формы s следует, что $\psi|_V^0=\psi^{(\pi_V)^s}$. Поэтому верны 1) и 2).

□

Подобно доказывается следующее утверждение.

B6. Пусть Λ — невырожденное подпространство из Ψ.

1) Для любого $z\in Z$ существует элемент $z|_\Lambda^0$ в Z, который однозначно определяется равенствами

$$s\left(\lambda,\ z|_\Lambda^0\right)=s(\lambda,\ z) \text{ для всех } \lambda\in\Lambda;$$

$$s\left(\varphi,\ z|_\Lambda^0\right)=0 \quad \text{для всех } \varphi\in\Lambda^\perp.$$

$z|_\Lambda^0$ назовем *Λ-срезкой* элемента z (относительно s). Положим $X|_\Lambda^0=\{x|_\Lambda^0 \mid x\in X\}$ для $X\subseteq Z$.

2) Отображение $z\longmapsto z|_\Lambda^0$ $(z\in Z)$ совпадает с линейным отображением $(\pi_\Lambda)^s$.

□

B7. Пусть A и B — двойственные ортонормированные базы в Ψ и Z соответственно (записанные в виде столбцов).

Положим

$$\psi'=(\psi/A)^{\gamma^{-1}}B \text{ для } \psi\in\Psi,$$
$$z'=(z/B)^{\gamma}A \text{ для } z\in Z.$$

1) Определение отображений $\psi\longmapsto\psi'$ $(\psi\in\Psi)$ и $z\longmapsto z'$ $(z\in Z)$ не зависит от выбора пары двойственных ортонормированных баз в Ψ и Z.

2) $\psi\longmapsto\psi'$ $(\psi\in\Psi)$ есть полулинейное относительно γ^{-1} отображение Ψ на Z.

3) $(\psi_1',\ \psi_2')_Z=(\psi_1,\ \psi_2)_\Psi^{\gamma^{-1}}$ для всех $\psi_1,\ \psi_2\in\Psi$.

4) $z\longmapsto z'$ $(z\in Z)$ есть полулинейное относительно γ отображение Z на Ψ.

5) $(z_1',\ z_2')_\Psi=(z_1,\ z_2)_Z$ для всех $z_1,\ z_2\in Z$.

6) $\psi''=\psi$ и $z''=z$ для всех $\psi\in\Psi$ и $z\in Z$.

Доказательство. 1): Пусть $A,\ C$ — базы в Ψ и $B,\ D$ — базы в Z. Введем $k\times k$-матрицу

$$S(A,\ B) \text{ с } S(A,\ B)_{ij}=s(A_i,\ B_j).$$

Легко проверить (или см. [16, с. 357]), что

(в1) $$S(C,\ D)=(C/A)\,S(A,\ B)\,((D/B)^*)^\gamma.$$

Предположим, что A двойственна B и C двойственна D. Тогда предыдущее равенство дает

(в2) $$(C/A)^{-1}=((D/B)^*)^\gamma.$$

Предположим далее, что A, B, C, D ортонормированны. Подставив в Б6(3) B вместо A и B, и D вместо C и D, получим

(в3) $$(D/B)^{-1}=(D/B)^*.$$

Теперь

$$(\psi/C)^{\gamma^{-1}}D=(\psi/(C/A)\,A)^{\gamma^{-1}}D=(\psi/A)^{\gamma^{-1}}((C/A)^{-1})^{\gamma^{-1}}D=$$

$$=_{(\text{в2})}(\psi/A)^{\gamma^{-1}}(D/B)^*\,D=(\psi/A)^{\gamma^{-1}}(D/B)^*(D/B)\,B=_{(\text{в3})}(\psi/A)^{\gamma^{-1}}B.$$

Этим доказано утверждение 1) для первого отображения. Подобно оно доказывается и для второго.

2) — 6): Простой подсчет.

□

B8. Если K и M — подпространства в Ψ или Z, то
1) $(K+M)'=K'+M'$,
2) $(K\cap M)'=K'\cap M'$,
3) $K\subseteq M\ \Rightarrow\ K'\subseteq M'$,
4) $\dim(K')=\dim K$,
5) $K\perp M\ \Rightarrow\ K'\perp M'$.

Доказательство. Следует из **B7**.

□

B9. Для всех $\psi\in\Psi$ и $z\in Z$

$$s(\psi,\ z)=(\psi,\ z')_\Psi=(\psi',\ z)_Z^\gamma=\overline{s(z',\ \psi')}.$$

Доказательство. Пусть A и B — двойственные ортонормированные базы в Ψ и Z соответственно, $\psi=\sum\limits_{i=1}^{k}f_iA_i$, $z=\sum\limits_{j=1}^{k}h_jB_j$ (f_i, $h_i\in F$). Имеем

$$s(\psi,\ z)=s\Big(\sum_i f_iA_i,\ \sum_j h_jB_j\Big)=\sum_i f_i\overline{h_i^\gamma},$$

$$(\psi,\ z')_\Psi=\Big(\sum_i f_iA_i,\ \sum_j h_j^\gamma A_j\Big)=\sum_i f_i\overline{h_i^\gamma},$$

$$(\psi', z)_Z = \left(\sum_i f_i^{\gamma^{-1}} B_i, \ \sum_i h_i B_i\right) = \sum_i f_i^{\gamma^{-1}} \overline{h_i},$$

$$s(z', \psi') = s\left(\sum_j h_j^{\gamma} A_j, \ \sum_i f_i^{\gamma^{-1}} B_i\right) = \sum_i \overline{f_i} h_i^{\gamma}.$$

Отсюда вытекает требуемое утверждение.

□

В10. Следующие условия равносильны:

(1) A и B — двойственные базы в Ψ,

(2) A и B' — двойственные (относительно s) базы в Ψ и Z соответственно,

(3) A' и B — двойственные базы в Z и Ψ соответственно,

(4) A' и B' — двойственные базы в Z.

Доказательство. Следует из **В9**.

□

В11. 1) Если B и $\breve{B}$ — двойственные базы в Z и $\psi \in \Psi$, то

$$\psi' = \sum_{b \in B} s(\psi, \breve{b})^{\gamma^{-1}} b.$$

В частности, если B ортогональна, то

$$\psi' = \sum_{b \in B} \frac{s(\psi, b)^{\gamma^{-1}}}{(b, b)_Z} b.$$

2) Если A и $\breve{A}$ — двойственные базы в Ψ и $z \in Z$, то

$$z' = \sum_{\alpha \in A} \overline{s(\breve{\alpha}, z)}\, \alpha.$$

В частности, если A ортогональна, то

$$z' = \sum_{\alpha \in A} \frac{\overline{s(\alpha, z)}}{(\alpha, \alpha)_\Psi} \alpha.$$

Доказательство. 1): По **Б19**(1) и **В9** получаем $\psi' = \sum_{b \in B} (\psi', \breve{b})_Z b = \sum_{b \in B} s(\psi, \breve{b})^{\gamma^{-1}} b$. Если B ортогональна, то $\breve{b} = \frac{b}{(b, b)_Z}$ по **Б6**(4).

2): Подобно предыдущему.

□

В12. Если A — ортонормированная база в Ψ (соответственно в Z), то A' — двойственная ей ортонормированная база в Z (соответственно в Ψ).

Доказательство. Следует из **В9**.

□

В13. Пусть A и Γ — базы в Ψ, причем A — ортонормированная. Тогда

$$\Gamma'/\mathrm{A}' = (\Gamma/\mathrm{A})^{\vee-1}.$$

Доказательство. Как следует из **В9**, для любых баз C и D в Ψ и Z соответственно выполняется равенство

(в4) $$S(C,\ D) = R(C,\ D') = R(C',\ D)^{\vee}$$

(определение этих матриц дано в **В7** и **Б6** с $L\in\{\Psi,\ Z\}$). Отсюда

(в5) $$R(\Gamma,\ \mathrm{A}) = R(\Gamma',\ \mathrm{A}')^{\vee}$$

и ввиду ортонормированности базы A $R(\mathrm{A}',\ \mathrm{A}') = R(A,\ A) = E$ (единичная матрица). Но $R(\Gamma,\ A) =_{\text{Б6(3)}} (\Gamma/A)\,R(A,\ A) = \Gamma/A$ и $R(\Gamma',\ A') = (\Gamma'/A')\,R(A',\ A') = \Gamma'/A'$. Из этих равенств и из (в5) следует требуемое равенство.

□

В14. 1) Если B и $\widetilde{B}$ — двойственные базы в Z и $\alpha,\ \beta\in\Psi$, то

$$(\alpha,\ \beta)_\Psi = \sum_{b\in B} s(\alpha,\ b)\,\overline{s(\beta,\ \widetilde{b})}.$$

2) Если A и $\widetilde{A}$ — двойственные базы в Ψ и $x,\ y\in Z$, то

$$(x,\ y)_Z = \left(\sum_{\alpha\in A}\overline{s(\alpha,\ x)}\,s(\widetilde{\alpha},\ y)\right)^{\vee-1}$$

Доказательство. 1): Согласно **В10** B' и $\widetilde{B}'$ — двойственные базы в Ψ. Поэтому по **Б19(1)** $(\alpha,\ \beta)_\Psi = \left(\sum_{b\in B}(\alpha,\ b')_\Psi\,\widetilde{b}',\ \beta\right)_\Psi =$

$$= \sum_{b\in B}(\alpha,\ b')_\Psi(\widetilde{b}',\ \beta)_\Psi =_{\text{В9}} \sum_{b\in B} s(\alpha,\ b)\,\overline{s(\beta,\ \widetilde{b})}.$$

2): Подобно 1).

□

Если M — подпространство из Ψ или Z, то $M^{\perp}$ — подпространство в Ψ или Z соответственно, имеющие тот же смысл, что и в **Б5**.

B15. Пусть M — подпространство из Ψ или Z. Тогда

$$M^{\circ\perp} = M^{\perp\circ} = M',$$

$$M'^{\perp} = M^{\perp\prime} = M^{\circ},$$

$$M'^{\circ} = M^{\circ\prime} = M^{\perp}.$$

Доказательство. Пусть M — подпространство в Ψ. Будем использовать **B9**, **Б5** (2) и **B3** (3). Имеем $M^{\circ\perp} = \{z \in Z \mid s(\mu, z) = 0$ для всех $\mu \in M\}^{\perp} = \{z \in Z \mid (\mu', z)_Z = 0$ для всех $\mu \in M\}^{\perp} = ((M')^{\perp})^{\perp} = M'$ и $M^{\perp\circ} = \{\psi \in \Psi \mid (\mu, \psi)_{\Psi} = 0$ для всех $\mu \in M\}^{\circ} = \{\psi \in \Psi \mid s(\psi, \mu') = 0$ для всех $\mu \in M\}^{\circ} = ((M')^{\circ})^{\circ} = M'$. Первые два равенства доказаны. С их помощью получаем $M'^{\perp} = M^{\circ\perp\perp} = M^{\circ} = M^{\perp\perp\circ} = M^{\perp\prime}$ и $M'^{\circ} = M^{\perp\circ\circ} = M^{\perp} = M^{\circ\circ\perp} = M^{\circ\prime}$. Случай, когда M — подпространство в Z, доказывается подобно.

□

B16. Пусть $\alpha \in \mathrm{End}(\Psi)$ и $\beta \in \mathrm{End}(Z)$. Определим отображения

$$\alpha' : z \mapsto ((z')^{\alpha})' \quad (z \in Z),$$

$$\beta' : \psi \mapsto ((\psi')^{\beta})' \quad (\psi \in \Psi).$$

Тогда

1) Отображение $\alpha \mapsto \alpha'$ ($\alpha \in \mathrm{End}(\Psi)$) есть изоморфизм колец $\mathrm{End}(\Psi)$ и $\mathrm{End}(Z)$ и полулинейное относительно γ^{-1} отображение $\mathrm{End}(\Psi)$ на $\mathrm{End}(Z)$, рассматриваемых как векторные пространства над F.

2) Отображение $\beta \mapsto \beta'$ ($\beta \in \mathrm{End}(Z)$) есть изоморфизм колец $\mathrm{End}(Z)$ и $\mathrm{End}(\Psi)$ и полулинейное относительно γ отображение векторных пространств $\mathrm{End}(Z)$ на $\mathrm{End}(\Psi)$.

3) $\alpha'' = \alpha$, $\beta'' = \beta$.

Доказательство. Простой подсчет с использованием **B7**.

□

B17. Если α — линейное преобразование Ψ или Z, то

$$\alpha^{s*} = \alpha^{*s} = \alpha',$$

$$\alpha'^{*} = \alpha^{*\prime} = \alpha^{s},$$

$$\alpha'^{s} = \alpha^{s\prime} = \alpha^{*}.$$

Доказательство. Рассмотрим случай, когда $\alpha \in \mathrm{End}(\Psi)$. Пусть A и B — двойственные ортонормированные базы в Ψ и Z соответственно. Первые два равенства мы докажем, показав, что равны матрицы рассматриваемых преобразований в базе B. Будем обозначать через ν_A матрицу преобразования $\nu \in \mathrm{End}(\Psi)$ в базе A и через δ_B — матрицу преобразования $\delta \in \mathrm{End}(Z)$ в базе B. Используя равенство (в1) из доказательства **B7**, получаем $\alpha_A =$

$= \mathrm{A}^\alpha /\mathrm{A} = (\mathrm{A}^\alpha /\mathrm{A}) S(\mathrm{A}, B) = S(\mathrm{A}^\alpha, B) = S(\mathrm{A}, B^{\alpha^s}) = S(\mathrm{A}, B) \times$
$\times ((B^{\alpha^s}/B)^*)^\gamma = ((B^{\alpha^s}/B)^*)^\gamma = (((\alpha^s)_B)^*)^\gamma$, откуда

$$(\text{в}6) \qquad (\alpha^s)_B = ((\alpha_\mathrm{A})^*)^{\gamma^{-1}}$$

(ортонормированность баз A и B здесь не примеияли). Подобно с использованием **Б6** (3) доказывается, что

$$(\text{в}7) \qquad (\alpha^*)_\mathrm{A} = (\alpha_\mathrm{A})^*.$$

$$(\text{в}8) \qquad (\beta^*)_B = (\beta_B)^* \text{ для } \beta \in \mathrm{End}(Z).$$

Теперь имеем

$$(\alpha^{s*})_B =_{(\text{в}8)} ((\alpha^s)_B)^* =_{(\text{в}6)} (\alpha_\mathrm{A})^{\gamma^{-1}},$$

$$(\alpha^{*s})_B =_{(\text{в}6)} (((\alpha^*)_\mathrm{A})^*)^{\gamma^{-1}} =_{(\text{в}8)} (\alpha_\mathrm{A})^{\gamma^{-1}},$$

$$(\alpha')_B = B^{\alpha'}/B =_{\text{в}12} (\mathrm{A}')^{\alpha'}/\mathrm{A}' = (\mathrm{A}^\alpha)'/\mathrm{A}' =_{\text{в}13} (\mathrm{A}^\alpha/\mathrm{A})^{\gamma^{-1}} = (\alpha_\mathrm{A})^{\gamma^{-1}}.$$

Таким образом, первые два равенства доказаны. Используя их, **Б8** (6) и **В4** (3), получаем

$$\alpha'^* = \alpha^{s**} = \alpha^s = \alpha^{**s} = \alpha^{*\prime},$$

$$\alpha'^s = \alpha^{*ss} = \alpha^* = \alpha^{ss*} = \alpha^{s\prime}.$$

Случай $\alpha \in \mathrm{End}(Z)$ рассматривается подобно (вместо равенства (в6) возникает равенство $(\alpha^s)_\mathrm{A} = ((\alpha_B)^*)^\gamma$).

□

В18. Пусть L — любое из пространств Ψ и Z, а M — невырожденное подпространство в L. Тогда

1) $(l^{\pi_M})' = (l')^{\pi_{M'}}$ для всех $l \in L$;
2) $(\pi_M)' = (\pi_M)^s = \pi_{M'}$.

Доказательство. Пусть $L = \Psi$ и $l = \psi \in \Psi$. Так как $\Psi = M \oplus M$ и $Z = M' \oplus M'^\perp =_{\text{в}15} M' \oplus M^{\perp\prime}$, то по **Б9** (1)

$$(\text{в}9) \qquad \psi = \psi^{\pi_M} + \psi^{\pi_{M^\perp}},$$

$$(\text{в}10) \qquad \psi' = (\psi')^{\pi_{M'}} + (\psi')^{\pi_{M^{\perp\prime}}}.$$

Но из (в9) следует

$$(\text{в}11) \qquad \psi' = (\psi^{\pi_M})' + \left(\psi^{\pi_{M^\perp}}\right)',$$

причем здесь, как и в (в10), первое слагаемое принадлежит M', а второе $M^{\perp\prime}$. Следовательно, по (в10) и (в11) $(\psi')^{\pi_{M'}} = (\psi^{\pi_M})'$ и утверждение 1) доказано. Кроме того, $(\psi^{\pi_M})' = (((\psi')')^{\pi_M})' = (\psi')^{(\pi_M)'}$, поэтому из 1) следует, что

$$\pi_{M'} = (\pi_M)'.$$

Для доказательства утверждения 2) осталось заметить, что

$$(\pi_M)^s =_{\text{B17}} ((\pi_M)^*)' =_{\text{Б9 (4)}} (\pi_M)'.$$

Случай $L = Z$ рассматривается подобно.

□

B19. Пусть Λ и V — невырожденные подпространства из Ψ и Z соответственно.

1) Отображение $|_V^0$ совпадает с ортогональным проектированием $\pi_{V'}$ пространства Ψ, т. е.

$$\psi|_V^0 = \psi^{\pi_{V'}} \text{ для всех } \psi \in \Psi.$$

2) Отображение $|_\Lambda^0$ совпадает с $\pi_{\Lambda'}$, т. е.

$$z|_\Lambda^0 = z^{\pi_{\Lambda'}} \text{ для всех } z \in Z.$$

Доказательство. Следует из **B5** (2), **B6** (2) и **B18** (2).

□

B20. Пусть Λ и V — невырожденные подпространства из Ψ и Z соответственно. Равносильны условия:

$$(1)\ \Lambda|_V^0 \subseteq \Lambda,$$
$$(2)\ V|_\Lambda^0 \subseteq V.$$

Доказательство. $(\Lambda|_V^0 \subseteq \Lambda) \Leftrightarrow_{\text{B19}} (\Lambda^{\pi_{V'}} \subseteq \Lambda) \Leftrightarrow_{\text{Б11}} ((V')^{\pi_\Lambda} \subseteq \subseteq V') \Leftrightarrow_{\text{B8 (3)}} (((V')^{\pi_\Lambda})' \subseteq V) \Leftrightarrow_{\text{B16}} (V^{(\pi_\Lambda)'} \subseteq V) \Leftrightarrow_{\text{B18 (2)}} (V^{\pi_{\Lambda'}} \subseteq \subseteq V) \Leftrightarrow_{\text{B19}} (V|_\Lambda^0 \subseteq V)$.

□

B21. Определение. Пусть Λ и V — невырожденные подпространства в Ψ и Z соответственно. Скажем, что Λ и V *взаимодействуют* (запись: $\Lambda \overset{}{\underset{s}{\longleftrightarrow}} V$ или $V \underset{s}{\longleftrightarrow} \Lambda$), если выполнено одно из условий (1) и (2) в **B20**.

B22. Теорема. Пусть Λ и V — невырожденные подпространства в Ψ и Z с базами A_Λ и B_V соответственно, A и $\widetilde{A}$ — двойственные базы в Ψ, B и $\widetilde{B}$ — двойственные базы в Z, $A_\Lambda \subseteq A$, $B_V \subseteq B$. Равносильны условия:

(1) $\Lambda \underset{s}{\longleftrightarrow} V$,

(2) $\Lambda \underset{\sim}{\perp} V'$,

(3) $\Lambda' \underset{\sim}{\perp} V$,

(4) $\sum\limits_{\lambda \in A_\Lambda} s(\widetilde{\lambda}^{\pi_\Lambda}, v)\overline{s(\lambda, w)} = 0$ для всех $(v, w) \in V \times V^\perp$,

(5) $\sum\limits_{v \in B_V} s(\lambda, \widetilde{v}^{\pi_V})\overline{s(\mu, v)} = 0$ для всех $(\lambda, \mu) \in \Lambda \times \Lambda^\perp$.

Если $F=\boldsymbol{C}$ и τ — комплексное сопряжение в $\boldsymbol{C}$, то условиям (1) — (5) равносильны условия

(6) $s(\lambda|_V^0, v|_\Lambda^0)=s(\lambda, v)$ для всех $(\lambda, v)\in\Lambda\times V$,

(7) $\sum\limits_{\lambda\in A_\Lambda}\sum\limits_{v\in B_V} s(\lambda_0, \breve{v}^{\pi_V})\overline{s(\lambda, v)}\,s(\hat{\lambda}^{\pi_\Lambda}, v_0)=s(\lambda_0, v_0)$

для всех $(\lambda_0, v_0)\in\Lambda\times V$.

Доказательство. (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3): По **В21** и **В19** условие (1) равносильно каждому из условий $\Lambda^{\pi_V'}\subseteq\Lambda$ и $V^{\pi_\Lambda'}\subseteq V$. Но по **Б11** они равносильны соответственно условиям (2) и (3).

(2) $\Leftrightarrow$ (4): Из **Б19**, **В4** и **В9** следует, что

$$\psi^{\pi_V'}=\sum_{v\in B_V} s(\psi, \breve{v}^{\pi_V})\,v' \text{ при } \psi\in\Psi. \qquad (в12)$$

$$z^{\pi_\Lambda'}=\sum_{\lambda\in A_\Lambda}\overline{s(\hat{\lambda}^{\pi_\Lambda}, z)}^{\tau^{-1}}\lambda' \text{ при } z\in Z. \qquad (в13)$$

Теперь (1) $\Leftrightarrow_{\text{В19}}(\Lambda^{\pi_V'}\subseteq\Lambda)\Leftrightarrow_{\text{Б5 (2)}}((\lambda^{\pi_V'}, \mu)_\Psi=0$ для всех $(\lambda, \mu)\in\Lambda\times\Lambda$ $)\Leftrightarrow_{\text{(в12), В9}}$ (4).

(1) $\Leftrightarrow$ (5): Подобно предыдущему (с использованием (в13)).

Пусть теперь $F=\boldsymbol{C}$ и τ — комплексное сопряжение.

(2) $\Leftrightarrow$ (6): Согласно **Б20** условие (2) равносильно тому, что

$$(\lambda^{\pi_V'}, (v')^{\pi_\Lambda})_\Psi=(\lambda, v')_\Psi \text{ для всех } (\lambda, v)\in\Lambda\times V.$$

Но по **В9** правая часть есть $s(\lambda, v'')=s(\lambda, v)$, а левая часть есть $s(\lambda^{\pi_V'}, ((v')^{\pi_\Lambda})')=_{\text{В18 (1)}}s(\lambda^{\pi_V'}, v^{\pi_\Lambda'})=_{\text{В19}}s(\lambda|_V^0, v|_\Lambda^0)$.

(6) $\Leftrightarrow$ (7): Следует из равенств (в12) и (в13), установленных во втором абзаце доказательства.

□

В23. Замечания. 1) Теорема **В22** остается верной, если в ее утверждении (4) поменять местами $\hat{\lambda}^{\pi_V}$ и λ, в утверждении (5) поменять местами $\breve{v}^{\pi_\Lambda}$ и v, а в утверждении (7) сделать по крайней мере одну из этих замен. Это вытекает из **Б19** (2).

2) Если в теореме **В22** предположить, что базы A_Λ и B_V ортогональны, то условия (4), (5) и (7) упрощаются, так как по **Б6** (4) при подходящем выборе A и B

$$\hat{\lambda}^{\pi_\Lambda}=\hat{\lambda}=\frac{\lambda}{(\lambda, \lambda)_\Psi} \text{ и } \breve{v}^{\pi_V}=\breve{v}=\frac{v}{(v, v)_Z}$$

(см. рассуждения в конце доказательства **Б19**).

В24. *Для невырожденных подпространств* Λ *и* V *из* Ψ *и* Z *соответственно равносильны условия:*

(1) $\Lambda\xleftrightarrow[s]{}V$,

(2) $\Lambda\perp V^\circ$,

(3) $\Lambda^\circ\perp V$.

Доказательство. Имеем $(1) \Leftrightarrow_{\text{В22}} (\Lambda \perp V') \Leftrightarrow_{\text{Б13}} (\Lambda \perp V'^{\perp}) \Leftrightarrow_{\text{В15}} (2)$. Подобно доказывается, что $(1) \Leftrightarrow (3)$.

□

§ Г. К ОПРЕДЕЛЕНИЮ СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ В (ZCG)

Г1. Для группы, обозначенной буквой G, принимаются следующие обозначения:

$C_1, \ldots, C_k$ — все классы сопряженных элементов группы G; $g_i \in C_i$;

$c_i = \widetilde{C}_i = \sum_{x \in C_i} x \, (\in Z(CG))$;

$\mathrm{Irr}(G) = \{\chi_1, \ldots, \chi_k\}$;

$\Psi = \mathrm{CF}(G)$ — C-пространство всех классовых функций из G в C;

$Z = Z(CG)$ — центр групповой алгебры CG;

$(\varphi, \psi)_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varphi(g) \overline{\psi(g)}$ для $\varphi, \psi \in \Psi$;

если $z = \sum_{i=1}^{k} f_i c_i \, (f_i \in C)$, $\delta \in \mathrm{Aut}(C)$ и $\mathfrak{a} = (a_1, \ldots, a_k)$, то положим

$z^\delta = \sum_{i=1}^{k} f_i^\delta c_i$,

$z^{\mathfrak{a}} = \sum_{i=1}^{k} f_i a_i c_i$,

$\mathfrak{a}^{-1} = (a_1^{-1}, \ldots, a_k^{-1})$;

τ обозначает комплексное сопряжение, т. е. автоморфизм $c \mapsto \bar{c}$ $(c \in C)$ поля C, где $\bar{c}$ — число, комплексно сопряженное с c;

ε_g для $g \in G$ обозначает отображение из CG в C, определяемое для $u = \sum_{x \in G} a_x x \, (a_x \in C)$ равенством $\varepsilon_g(u) = a_g$.

Напомним, что в **ЗА1** введена классовая функция ε_D для $D \trianglelefteq G$. Связь между функциями ε_D и ε_g такова: $\varepsilon_D(g) = \sum_{d \in D} \varepsilon_d(g)$ для всех $g \in G$.

Согласно [34], *скалярным произведением* в векторном пространстве V над полем C называется билинейная или полуторалинейная относительно τ форма f на V; в последнем случае, при выполнении условия $f(u, v) = \overline{f(v, u)}$ для всех $u, v \in V$, скалярное произведение называется *эрмитовым*.

Скалярное произведение $(\ ,\ )_G$ в Ψ широко используется в теории представлений. Оно является эрмитовым и невырожденным. В § ЗГ было введено скалярное произведение в C-пространстве Z:

$$(z_1, z_2)_G = \frac{1}{|G|} \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \chi(z_1) \overline{\chi(z_2)} \quad (z_1, z_2 \in Z).$$

Подобное скалярное произведение $\left(\text{без множителя } \frac{1}{|G|}\right)$ рассматривалось в [81, с. 42].

Какие другие скалярные произведения в Z могут быть полезны? Кажется очевидным, что такое скалярное произведение $(\ ,\ )_Z$ в Z должно удовлетворять следующим условиям:

1) $(\ ,\ )_Z$ эрмитово и невырожденно;

2) относительно $(\ ,\ )_Z$ ортогональна база $(c_1, \ldots, c_k)$ пространства Z.

Г2. Теорема. Пусть G — конечная группа и f — отображение из $Z \times Z$ в $\boldsymbol{C}$. Равносильны условия:

(1) f — невырожденное эрмитово скалярное произведение в Z, относительно которого ортогональна база $(c_1, \ldots, c_k)$;

(2) существует последовательность $\mathfrak{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ чисел из $\boldsymbol{C} \setminus \{0\}$ такая, что

$$f(z_1, z_2) = \sum_{\chi \in \operatorname{Irr}(G)} \chi\left(z_1^{\mathfrak{a}}\right) \overline{\chi\left(z_2^{\mathfrak{a}}\right)} \text{ для всех } z_1, z_2 \in Z.$$

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2): Пусть f удовлетворяет условию (1) и $f_i = f(c_i, c_i)$ $(i = 1, \ldots, k)$. Тогда $f_i \in \boldsymbol{R}$ и ввиду невырожденности формы f $f_i \neq 0$. Отсюда следует, что $B = (B_1, \ldots, B_k)$, где $B_i = f_i^{-\frac{1}{2}} c_i$, есть ортонормированная относительно f база в Z. Далее, из § 3Г (см. **3Г2** и свойства (г1) — (г3) под ним) следует, что формула

$$\text{(г1)} \qquad h(z_1, z_2) = \sum_{\chi \in \operatorname{Irr}(G)} \chi(z_1) \overline{\chi(z_2)}$$

задает невырожденное эрмитово скалярное произведение h на Z, относительно которого ортогональна база $(c_1, \ldots, c_k)$. Тогда относительно h ортонормирована база $E = (E_1, \ldots, E_k)$ пространства Z, где $E_i = h(c_i, c_i)^{-1/2} c_i$.

Обозначим через α линейное преобразование пространства Z, переводящее базу B в базу E, т. е. для любого $z = \sum_{i=1}^{k} s_i B_i$ $(s_i \in \boldsymbol{C})$ $z^{\mathfrak{a}} = \sum_{i=1}^{k} s_i E_i$. Очевидно,

$$\text{(г2)} \qquad f(z_1, z_2) = h\left(z_1^{\mathfrak{a}}, z_2^{\mathfrak{a}}\right) \text{ для всех } z_1, z_2 \in Z.$$

Положим $\mathfrak{a} = (a_1, \ldots, a_k)$, где $a_i = f_i h(c_i, c_i)^{-1/2}$. Тогда $z^{\alpha} = z^{\mathfrak{a}}$ для всех $z \in Z$ и, следовательно, из (г1) и (г2) следует условие (2).

(2) $\Rightarrow$ (1): Отображение f со свойством (2) является, очевидно, эрмитовым скалярным произведением. Далее, используя вто-

рое соотношение ортогональности, получаем $f(c_i, c_j) = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \chi(a_i c_i)\overline{\chi(a_j c_j)} = |a_i|^2 |G| \, |C_i| \delta_{ij}$, т. е. f невырожденно и относительно него база $(c_1, \ldots, c_k)$ ортогональна.

□

Полезность выбора того или иного скалярного произведения в Z может проявиться во взаимоотношениях Z с Ψ. В рассматриваемой далее ситуации скалярное произведение в пространстве Z берется в самой общей форме, определяемой условием (2) в **Г2** (т. е. с неопределенными параметрами $a_1, \ldots, a_k$).

Г3. Предположение. Пусть G — конечная группа с k классами сопряженных элементов. $\boldsymbol{C}$-пространства $\Psi = \mathrm{CF}(G)$ и $Z = Z(\boldsymbol{C}G)$ рассматриваются вместе со следующими скалярными произведениями:

$$(\psi_1, \psi_2)_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \psi_1(g)\overline{\psi_2(g)} \text{ при } \psi_1, \psi_2 \in \Psi,$$

$$(z_1, z_2)_Z = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \overline{\chi(z_1^{\mathfrak{a}})\chi(z_2^{\mathfrak{a}})} \text{ при } z_1, z_2 \in Z,$$

где $\mathfrak{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ — фиксированная последовательность чисел из $\boldsymbol{C} \setminus \{0\}$. Далее, зафиксируем $\alpha \in \{1, \tau\} \subseteq \mathrm{Aut}(\boldsymbol{C})$ (τ — комплексное сопряжение) и определим полуторалинейную относительно τ форму s на $\Psi \times Z$ равенством

$$s(\psi, z) = \psi\left(z^{\alpha\mathfrak{a}}\right) \text{ при } (\psi, z) \in \Psi \times Z.$$

Это предположение считается выполненным во всех следующих утверждениях этого параграфа. (По существу, оно лишь фиксирует обозначения G, k, Ψ, Z, s и $(\ , \ )_Z$.)

Г4. 1) $(\ , \ )_G$ и $(\ , \ )_Z$ — невырожденные эрмитовы скалярные произведения в Ψ и Z соответственно.

2) $(\chi_1, \ldots, \chi_k)$ — ортонормированная база в Ψ.

3) $(c_1, \ldots, c_k)$ — ортогональная база в Z и $(c_j, c_j)_Z = \underline{|a_j|^2 |C_j| \, |G| \text{ для } j \in \{1, \ldots, k\}}$.

4) $(z_1, z_2)_Z = |G| \sum_{g \in G} \overline{\varepsilon_g(z_1^{\mathfrak{a}})\varepsilon_g(z_2^{\mathfrak{a}})}$.

5) $(z_1, z_2)_Z^{\alpha} = (z_1^{\alpha}, z_2^{\alpha})_Z$.

6) Если $a_j \in \boldsymbol{R}$ при $j \in \{1, \ldots, k\}$, то $s(\psi, z)^{\alpha} = s(\psi^{\alpha}, z^{\alpha})$ для всех $(\psi, z) \in \Psi \times Z$.

Доказательство. 1) - 3): Утверждения о $(\ , \ )_G$ хорошо известны, а о $(\ , \ )_Z$ следуют из **Г2**.

4): Правая часть равенства задает, очевидно, эрмитово скалярное произведение в Z, как и левая. Кроме того, на парах элементов базы $(c_1, \ldots, c_k)$ она принимает, как легко увидеть, те же значения, что и левая часть. Отсюда следует требуемое равенство.

5), 6): Простой подсчет.

□

Г5. Скалярные произведения в Z и Ψ можно выразить через форму s следующим образом:

1) $(z_1, z_2)_Z = \left(\sum_{i=1}^{k} s(\chi_i, z_1)\overline{s(\chi_i, z_2)}\right)^{\alpha}$ для всех $z_1, z_2 \in Z$,

2) $(\psi_1, \psi_2)_G = \sum_{j=1}^{k} \frac{s(\psi_1, c_j)\overline{s(\psi_2, c_j)}}{(c_j, c_j)_Z}$ для всех $\psi_1, \psi_2 \in \Psi$.

Доказательство. Простой подсчет с помощью **Г4**.

□

Г6. Теорема. Предположим, что выполнено предположение **Г3**, и положим $(\, , \,)_\Psi = (\, , \,)_G$ и $\gamma = \tau\alpha$.

1) Для Ψ, Z, $(\, , \,)_\Psi$, $(\, , \,)_Z$, s, τ и γ выполнено предположение **B1**. Следовательно, при предположении **Г3** сохраняют смысл все определения и верны все утверждения из § В.

2) Если $D \trianglelefteq G$ и $\Phi \subseteq \mathrm{Irr}(G)$, то

$$(D \longleftrightarrow \Phi) \Leftrightarrow (C[\hat{D}] \underset{s}{\longleftrightarrow} C[\Phi])$$

(здесь $C[\hat{D}] \underset{s}{\longleftrightarrow} C[\Phi]$ — взаимодействие подпространств, введенное в **B21**).

Доказательство. 1): По **Г1** (1) скалярные произведения $(\, , \,)_\Psi$ и $(\, , \,)_Z$ невырождены и эрмитовы. Остается найти базы A в Ψ и B в Z, которые ортонормированы и двойственны относительно s. Возьмем $A = (\chi_1, \ldots, \chi_k)$ и по ней подберем B.

Для $\psi \in \Psi$ положим

$$\dot{\psi} = \sum_{m=1}^{k} \frac{\overline{s(\psi, c_m)^{\alpha}}}{(c_m, c_m)_Z}.$$

Тогда

$$s(\chi_i, \dot{\chi}_j) = \sum_{m=1}^{k} \frac{\overline{s(\chi_j, c_m)}}{(c_m, c_m)_Z} s(\chi_i, c_m) = \text{г5 (2)} \, (\chi_i, \chi_j)_G = \delta_{ij}.$$

Следовательно, база A двойственна базе $B = (\dot{\chi}, \ldots, \dot{\chi}_k)$. Наконец,

$$(\dot{\chi}_i, \dot{\chi}_j)_Z \underset{\text{г5 (2)}}{=} \left(\sum_{t=1}^{k} s(\chi_t, \dot{\chi}_i) \overline{s(\chi_t, \dot{\chi}_j)} \right)^{\alpha} = \left(\sum_{t=1}^{k} \delta_{ti}\delta_{tj} \right)^{\alpha} = \delta_{ij},$$

т. е. база B ортонормирована.

2): Пусть $\psi \in \Psi$. Для любого $j \in \{1, \ldots, k\}$ имеем

$$s(\psi|_D^0, c_j) = a_j\psi|_D^0(g_j) = \begin{cases} a_j\psi(g_j) = s(\psi, c_j), \text{ если } C_j \subseteq D, \\ 0, \text{ если } C_j \not\subseteq D. \end{cases}$$

Следовательно, для всех $z \in Z$

$$s(\psi|_D^0, z) = \begin{cases} s(\psi, z), \text{ если } z \in \boldsymbol{C}[\hat{D}], \\ 0, \text{ если } z \in \boldsymbol{C}[\widehat{D^-}] = \boldsymbol{C}[\hat{D}]^{\perp}. \end{cases}$$

Отсюда и из **B5** следует, что

(г3) $$\psi|_D^0 = \psi|_{\boldsymbol{C}[\hat{D}]}^0.$$

Поэтому

$$\Phi|_D^0 \subseteq \boldsymbol{C}[\Phi] \Leftrightarrow \boldsymbol{C}[\Phi]|_{\boldsymbol{C}[\hat{D}]}^0 \subseteq \boldsymbol{C}[\Phi]$$

что равносильно (см. определение **3А3** (1) и **B21**) утверждению 2).

□

Соберем свойства операций′ (введенных в **B7**), установленные в § В.

Г7. 1) Если A и B — любая пара двойственных (относительно s) баз в Ψ и Z соответственно (записанных в виде столбцов), то

$$\psi' = (\psi/A)^{\alpha} B \text{ для всех } \psi \in \Psi,$$

$$z' = (z/B)^{\alpha} A \text{ для всех } z \in Z.$$

2) $\psi' = \sum_{j=1}^{k} \frac{s(\psi, c_j)^{\tau\alpha}}{(c_j, c_j)_Z} c_j = \frac{1}{|G|} \sum_{j=1}^{k} \left(a_j^{-1} \overline{\psi(g_j)} \right)^{\alpha}$ при $\psi \in \Psi$ и, в частности,

$$\chi' = \frac{1}{\chi_i(1)} \left(e_{\chi_i} \right)^{\alpha^{-1}\alpha} \ (i = 1, \ldots, k).$$

3) $z' = \sum_{i=1}^{k} \overline{s(\chi_i, z)} \chi_i$ при $z \in Z$ и, в частности,

$$c_j' = \overline{a}_j |G| \varepsilon_{c_j} \ (j = 1, \ldots, k).$$

4) $\psi \mapsto \psi'$ $(\psi \in \Psi)$ и $z \mapsto z'$ $(z \in Z)$ — полулинейные относительно $\tau\alpha$ отображения из Ψ на Z и из Z на Ψ соответственно.

5) $\psi'' = \psi$ и $z'' = z$ для всех $\psi \in \Psi$ и $z \in Z$.

6) $(\psi_1', \psi_2')_Z = (\psi_1, \psi_2)_G^{\tau\alpha}$ для всех $\psi_1, \psi_2 \in \Psi$.

7) $(z_1', z_2')_G = (z_1, z_2)_Z^{\tau\alpha}$ для всех $z_1, z_2 \in Z$.

8) $s(\psi, z) = (\psi, z')_G = (\psi', z)_Z^{\tau\alpha} = \overline{s(z', \psi')}$ для всех $(\psi, z) \in \Psi \times Z$.

Доказательство. На основании теоремы **Г6** можно опираться на утверждения Bm.

1), 4) — 7): Следуют из **В7**.

2), 3): Следуют из **В11** и **Г4** (3).

8): Следует из **В9**.

$\square$

Г8. Пусть $D \trianglelefteq G$, $\Phi \subseteq \operatorname{Irr}(G)$, $\psi \in \Psi$ и $z \in Z$.

1) $\psi^{\pi C[\hat{D}]'} = \psi|^0_{C[\hat{D}]} = \psi|^0_D$ и, в частности, $C[\hat{D}]' = \Psi|^0_D$.

2) $z^{\pi C[\Phi]'} = z|^0_{C[\Phi]} = (z^{\mathfrak{a}\alpha}|^0_\Phi)^{\mathfrak{a}^{-1}\alpha}$ и, в частности, $C[\Phi]' = (Z|^0_\Phi)^{\mathfrak{a}^{-1}\alpha}$.

3) Если последовательность $\mathfrak{a}$ постоянна, то

$$z^{\pi C[\Phi]'} = (z^\alpha|^0_\Phi)^\alpha \text{ и } C[\Phi]' = (Z|^0_\Phi)^\alpha.$$

Доказательство. 1): Первое равенство следует из **В5**, а второе есть равенство (г3) в доказательстве теоремы **Г6**.

2): Первое равенство следует из **В6**. Далее, применяя равенство (в13), установленное в доказательстве теоремы **В22**, при $\Lambda = C[\Phi]$ (тогда можно взять $A_\Lambda = \Phi$ и $\tilde{\lambda}^{\pi_\Lambda} = \lambda$), получаем

$$z^{\pi C[\Phi]'} = \sum_{\varphi \in \Phi} s(\varphi, z)^\alpha \varphi'.$$

Отсюда

$$c_j^{\pi C[\Phi]'} = \sum_{\varphi \in \Phi} (a_j \varphi(c_j))^\alpha \varphi' =_{\text{г7 (8)}} \sum_{\varphi \in \Phi} a_j^\alpha \varphi(c_j)^\alpha \frac{1}{|G|} \times$$

$$\times \sum_{m=1}^{k} (a_m^{-1} \overline{\varphi(g_m)})^\alpha c_m = \left(a_j \sum_{m=1}^{k} \sum_{\varphi \in \Phi} \frac{\varphi(g_j) \overline{\varphi(g_m)}}{|C_G(g_j)|} c_m \right)^{\mathfrak{a}^{-1}\alpha} =$$

$$=_{\text{зг5 (8)}} (a_j c_j|^0_\Phi)^{\mathfrak{a}^{-1}\alpha}.$$

Теперь для $z = \sum_{j=1}^{k} f_j c_j \, (f_j \in C)$ получаем

$$z^{\pi C[\Phi]'} = \sum_{j=1}^{k} f_j \left(a_j c_j |_{\Phi}^{0}\right)^{\alpha - 1\alpha} = \left(\sum_{j=1}^{k} f_j^{\alpha} a_j c_j |_{\Phi}^{0}\right)^{\alpha - 1\alpha} = \left(z^{\alpha\alpha} |_{\Phi}^{0}\right)^{\alpha - 1\alpha}.$$

3): Следует из 2).

□

Г9. Равносильны условия:

(1) существуют ортонормированные базы $A = (A_1, \ldots, A_k)$ и $B = (B_1, \ldots, B_k)$ в Ψ и Z соответственно такие, что $A_i(B_j) = \delta_{ij}$;

(2) $|a_j| = 1$ при $j = 1, \ldots, k$.

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2): Пусть A и B — как в условии (1). Рассмотрим произвольные ортонормированные базы C в Ψ и D в Z. Все четыре базы будем записывать в виде столбцов. Из ортонормированности баз A и C следует, что существует унитарная матрица M с $C = \mathrm{M}A$. Подобно существует унитарная матрица N с $D = \mathrm{N}B$. По формуле (в1) имеем $S(C, D) = (C/A) S(A, B) \times \times ((D/B)^{\mathrm{T}})^* = \mathrm{M}(\mathrm{N}^{\mathrm{T}})^*$ (по определению $S(C, D)_{ij} = s(C_i, D_j)$). Таким образом, матрица $S(C, D)$ унитарна.

Теперь в качестве C и D возьмем $C = (\chi_1, \ldots, \chi_k)$ и $D = \left(\frac{c_1}{a_1 \sqrt{|C_1||G|}}, \ldots, \frac{c_k}{a_k \sqrt{|C_k||G|}}\right)$. Тогда $s(C_i, D_j) = \frac{\chi_i(g_j)}{a_j \sqrt{|C_G(g_j)|}}$, т. е. $S(C, D) = \mathrm{YT}$, где $\mathrm{Y}_{ij} = \frac{\chi_i(g_j)}{\sqrt{|C_G(g_j)|}}$ и $\mathrm{T} = \operatorname{diag}(a_1^{-1}, \ldots, a_k^{-1})$. Из соотношений ортогональности следует унитарность матрицы Y. Следовательно, унитарна и матрица T, т. е. $|a_j| = 1$ для всех $j \in \{1, \ldots, k\}$.

(2) $\Rightarrow$ (1): Пусть $|a_j| = 1$ при $j \in \{1, \ldots, k\}$. Тогда ввиду **Г4**(3) $B \equiv (B_1, \ldots, B_k)$, где $B_j = \frac{c_j}{\sqrt{|C_j||G|}}$, — ортонормированная база в Z. Далее, очевидно, $A \equiv (A_1, \ldots, A_k)$, где $A_i = \frac{\sqrt{|G|}}{\sqrt{|C_i|}} \varepsilon_{C_i}$, — ортонормированная база в Ψ. Теперь $A_i(B_j) = \delta_{ij}$, т. е. верно (1).

□

Отметим теперь два частных случая выбора значений параметров в предположении **Г3**.

Г10. Пусть $\alpha = \tau$ и $a_j = (|C_j||G|)^{-1/2}$. Тогда

1) $(c_1, \ldots, c_k)$ — ортонормированная база в Z,

2) $\psi \mapsto \psi' \, (\psi \in \Psi)$ — линейная изометрия Ψ на Z,

3) $z \mapsto z' \, (z \in Z)$ — линейная изометрия Z на Ψ.

Доказательство. Следует из **Г4**(3) и **Г7**.

□

Г11. Пусть $\alpha = 1$ и $a_j = a$ при $j \in \{1, \ldots, k\}$ $(a \in \boldsymbol{C} \setminus \{0\})$. Тогда для $\psi, \psi_1, \psi_2 \in \Psi$ и $z, z_1, z_2 \in Z$

1) $s(\psi, z) = a\psi(z)$;

2) $(z_1, z_2)_Z = |a|^2 \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \chi(z_1)\overline{\chi(z_2)} = |a|^2 |G| \sum_{g \in G} \varepsilon_g(z_1)\overline{\varepsilon_g(z_2)}$;

3) $\psi' = \dfrac{1}{\bar{a}|G|} \sum_{g \in G} \overline{\psi(g)}\, g$, $X_i' = \dfrac{1}{a\chi_i(1)} e_{\chi_i}$ $(i = 1, \ldots, k)$;

4) $z' = \bar{a} \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \overline{\chi(z)}\, \chi = \bar{a}|G| \sum_{g \in G} \overline{\varepsilon_g(z)}\, \varepsilon_g$, $c_j' = \bar{a}|G| \varepsilon_{C_j}$ $(j = 1, \ldots, k)$;

5) $\psi^{\pi_{C[D]'}} = \psi|_D^0$ при $D \trianglelefteq G$;

6) $z^{\pi_{C[\Phi]'}} = z|_\Phi^0$ при $\Phi \subseteq \mathrm{Irr}(G)$;

7) $(\psi_1', \psi_2')_Z = \overline{(\psi_1, \psi_2)_G}$;

8) $a\psi(z) = (\psi, z')_G = \overline{(\psi', z)_Z}$;

9) $z'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in (\boldsymbol{C}z)^\perp$ для $z, x \in Z$ (другими словами, $z'(x) = 0$ есть уравнение гиперплоскости, перпендикулярной вектору z);

10) тогда и только тогда существуют ортонормированные базы $A = (A_1, \ldots, A_k)$ в Ψ и $B = (B_1, \ldots, B_k)$ в Z со свойством $A_i(B_j) = \delta_{ij}$ $(\{i, j\} \subseteq \{1, \ldots, k\})$, когда $|a| = 1$.

Доказательство. 1) — 8): Следует из **Г4**, **Г7** и **Г8**.

9): Следует из 8).

10): Следует из **Г10**.

□

§ Д. ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Пусть G — конечная группа. В силу теоремы **Г6**(1) и определения **В21** можно в рамках предположения **Г3** рассматривать взаимодействия $\Lambda \underset{s}{\longleftrightarrow} V$ для подпространств Λ из $\mathrm{CF}(G)$ и подпространств V из $Z(\boldsymbol{C}G)$. Здесь мы конкретизируем это понятие, взяв в **Г3** $\alpha = 1$ и $a_j = 1$ для всех $j = 1, \ldots, k$.

Д1. Предположение. Пусть G — конечная группа, Ψ есть $\boldsymbol{C}$-пространство $\mathrm{CF}(G)$ с обычным скалярным произведением $(\ ,\ )_G$ и Z есть $\boldsymbol{C}$-пространство $Z(\boldsymbol{C}G)$ со скалярным произведением $(\ ,\ )_G$, которое задается формулой

(д1) $$(z_1, z_2)_G = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \chi(z_1)\overline{\chi(z_2)} \quad (z_1, z_2 \in Z).$$

Это предположение считается выполненным всюду в этом параграфе.

Д2. Примем обозначения **Г1**.

Д3. 1) Формула (д1) задает невырожденное эрмитово скалярное произведение в Z.

2) $(c_i, c_j)_G = |G||C_j|\delta_{ij}$.

3) $z = \frac{1}{|G|} \sum_{j=1}^{k} \frac{(z, c_j)_G}{|C_j|} c_j$ для всех $z \in Z$.

Доказательство. Простой подсчет.

□

Д4. Предположим, что выполнено предположение **Д1** и положим $(z_1, z_2)_Z = (z_1, z_2)_G$ для $z_1, z_2 \in Z$ и $s(\psi, z) = \psi(z)$ для $(\psi, z) \in \Psi \times Z$. Тогда выполнено предположение **Г3** при

$$(\text{д}2) \qquad \begin{cases} \alpha = 1, \\ a_j = 1 \text{ для всех } j \in \{1, \ldots, k\}. \end{cases}$$

Следовательно, при этих значениях параметров для G верны все утверждения **Гm** (из § Г) и все утверждения **Вm** (из § В).

Доказательство. Следует из **Д3**. **Г11** (1) и **Г6** (1).

□

В силу **Д4** все определения, введенные в § Г и § В, сохраняют смысл для произвольной группы G при условии (д2). Однако мы введем их здесь независимо от предыдущих параграфов.

Результаты этого параграфа представляют собой переформулировки результатов § Г и § В в соответствии с **Д4**, т. е. при условии (д2) в **Д4**.

Д5. Определение. 1) Для $\psi \in \Psi$ положим

$$\psi' = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\psi(g)}\, g.$$

2) Для $z \in Z$ положим

$$z' = \sum_{\chi \in \operatorname{Irr}(G)} \overline{\chi(z)}\, \chi.$$

Д6. Все утверждения 1) — 12) из **Г11** справедливы при $a = 1$.

Доказательство. Следует из **Д4**.

□

Д7. Определение. Пусть Λ и V — подпространства из Ψ и Z соответственно. Положим

$$\Lambda^{\circ} = \{z \in Z \mid \lambda(z) = 0 \text{ для всех } \lambda \in \Lambda\},$$
$$V^{\circ} = \{\psi \in \Psi \mid \psi(v) = 0 \text{ для всех } v \in V\}.$$

Д8. Пусть M — подпространство из Ψ или Z. Тогда

$$M^{\circ\perp} = M^{\perp\circ} = M',$$
$$M'^{\perp} = M^{\perp\prime} = M^{\circ},$$
$$M'^{\circ} = M^{\circ\prime} = M^{\perp}.$$

Доказательство. Следует из **В15** и **Д4**.

□

Д9. Определение. Пусть Λ и V — подпространства в Ψ и Z соответственно.

1) Для функции $\psi \in \Psi$ обозначим через $\psi|_V^0$ функцию из Ψ, однозначно определяемую (согласно **В4**(2)) условием

$$\psi|_V^0(z) = \psi(z^{\pi_V}) \text{ для всех } z \in Z.$$

Положим $\Lambda|_V^0 = \{\lambda|_V^0 \mid \lambda \in \Lambda\}$.

2) Для элемента $z \in Z$ обозначим через $z|_\Lambda^0$ элемент из Z, однозначно определяемый (согласно **В4**(1)) условием

$$\psi(z|_\Lambda^0) = \psi^{\pi_\Lambda}(z) \text{ для всех } \psi \in \Psi.$$

Положим $V|_\Lambda^0 = \{v|_\Lambda^0 \mid v \in V\}$.

Д10. Пусть Λ и V — подпространства из Ψ и Z соответственно.
1) $\psi|_V^0 = \psi^{\pi_{V'}}$ для всех $\psi \in \Psi$.
2) $\Psi|_V^0 = V' = \{\psi \in \Psi \mid \psi$ исчезает на $V^{\perp}\}$.
3) $z|_\Lambda^0 = z^{\pi_{\Lambda'}}$ для всех $z \in Z$.
4) $Z|_\Lambda^0 = \Lambda' = \{z \in Z \mid$ все функции из $\Lambda^{\perp}$ исчезают на $z\}$.

Доказательство. 1), 3) и первые равенства в 2), 4) следуют из **В19**. Вторые равенства в 2) и 4) следуют из **Д8**.

□

Д11. Пусть $D \trianglelefteq G$ и $\Phi \subseteq \mathrm{Irr}(G)$.
1) $\psi|^0_{C'_{[D]}} = \psi|_D^0$ для всех $\psi \in \Psi$.
2) $z|^0_{C_{[\Phi]}} = z|_\Phi^0$ для всех $z \in Z$.

Доказательство. Следует из **Г8** и **Г11**.

□

Д12. Определение. Пусть Λ и V — подпространства из Ψ и Z соответственно. Скажем, что Λ и V *взаимодействуют* (запись $\Lambda \leftarrow\!\!\rightarrow V$ или $V \leftarrow\!\!\rightarrow \Lambda$), если $\Lambda|_V^0 \subseteq \Lambda$. Если $\Lambda \leftarrow\!\!\rightarrow V$, то пару (Λ, V) назовем *пространственным взаимодействием в группе* G.

Д13. Пусть $D \trianglelefteq G$ и $\Phi \subseteq \operatorname{Irr}(G)$. Равносильны условия:
(1) $D \leftarrow\!\!\rightarrow \Phi$,
(2) $\boldsymbol{C}[\hat{D}] \leftarrow\!\!\rightarrow \boldsymbol{C}[\Phi]$.

Доказательство. Следует из **Г6** (2).

□

Д14. Для подпространств Λ и V из Ψ и Z соответственно равносильны условия:
(1) $\Lambda \leftarrow\!\!\rightarrow V$,
(2) $V|_\Lambda^0 \subseteq V$,
(3) $\Lambda \leftarrow\!\!\rightarrow V^\perp$,
(4) $\Lambda^\perp \leftarrow\!\!\rightarrow V$,
(5) $\Lambda \perp V^\circ$,
(6) $\Lambda \perp V'$,
(7) $\Lambda^\circ \perp V$,
(8) $\Lambda' \perp V$,
(9) $\Lambda = \Lambda_1 \oplus \Lambda_2$, где Λ_1 — подпространство из V°, а Λ_2 — подпространство из $V' (= V^{\circ\perp} = V^{\perp\circ})$,
(10) $V = V_1 \oplus V_2$, где V_1 — подпространство из Λ°, а V_2 — подпространство из $\Lambda' (= \Lambda^{\circ\perp} = \Lambda^{\perp\circ})$.

Доказательство. (1) $\Leftrightarrow$ (2): Следует из **В20**.
(1) $\Leftrightarrow$ (6) $\Leftrightarrow$ (8): Следует из **В22**.
(1) $\Leftrightarrow$ (9) $\Leftrightarrow$ (10): Следует из **Б11**.
Равносильность условий (3) — (8) следует из **Б13**, **Б22** и **Д8**.

□

Д15. Упражнение. Пусть Λ и V — подпространства из Ψ и Z соответственно.

1) $\Lambda|_V^0 \dotplus \Lambda|_{V^\perp}^0$ есть наименьшее среди подпространств из Ψ, которые содержат Λ и взаимодействуют с V.

2) $V|_\Lambda^0 \dotplus V|_{\Lambda^\perp}^0$ есть наименьшее среди подпространств из Z, которые содержат V и взаимодействуют с Λ.

Д16. Упражнение. Пусть $D \trianglelefteq G$ и Λ — подпространство из Ψ. Равносильны условия:

(1) $\Lambda \leftarrow\!\!\rightarrow \boldsymbol{C}[\hat{D}]$,

(2) $\Lambda = \Lambda_1 \oplus \Lambda_2$, где Λ_1 — подпространство из $\mathrm{CF}(G)|_D^0$, а Λ_2 — подпространство из $\mathrm{CF}(G)|_{D^-}^0$.

Д17. Пусть Λ подпространство из Ψ, а V_1 и V_2 — подпространства из Z. Если $\Lambda \leftarrow\rightarrow V_1$ и $\Lambda \leftarrow\rightarrow V_2$, то $\Lambda \leftarrow\rightarrow V_1 \cap V_2$, $\Lambda \leftarrow\rightarrow V_1 \cap V_2{}'$ и $\Lambda \leftarrow\rightarrow V_1 + V_2$.

Утверждение остается справедливым, если в нем поменять местами Ψ и Z.

Доказательство. Следует из **Д14** ((1)$\Rightarrow$(8)) и **Б14**.

□

Д18. Упражнение. Пусть ψ и Λ — элемент и подпространство из Ψ, а z и V — элемент и подпространство из Z.

1) $(C\psi \leftarrow\rightarrow V) \Leftrightarrow (\psi(V) = \{0\}$ или $\psi(V^\perp) = \{0\})$.

2) $(\Lambda \leftarrow\rightarrow Cz) \Leftrightarrow (\Lambda(z) = \{0\}$ или $\Lambda^\perp(z) = \{0\})$.

3) $(C\psi \leftarrow\rightarrow Cz) \Leftrightarrow (\psi(z) = 0$ или $C\psi = Cz')$.

§ Е. ИНДУЦИРОВАНИЕ И ОГРАНИЧЕНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

Пусть G — конечная группа и H — ее подгруппа. Установить некоторую связь между взаимодействиями в G и в H — цель этого параграфа.

Е1. Обозначения. Для группы G примем обозначения **Г1**. Кроме того, $\Psi_H = \mathrm{CF}(H)$ и $Z_H = Z(CH)$; в Ψ_H определено обычное скалярное произведение классовых функций; скалярные произведения в Z и Z_H определены формулами

$$(z_1, z_2)_G = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \chi(z_1)\overline{\chi(z_2)} \quad (z_1, z_2 \in Z),$$

$$(x_1, x_2)_H = \sum_{\xi \in \mathrm{Irr}(H)} \xi(x_1)\overline{\xi(x_2)} \quad (x_1, x_2 \in Z_H).$$

Взаимодействия подпространств из Ψ с подпространствами из Z будем называть *взаимодействиями* в G, а взаимодействия подпространств из Ψ_H с подпространствами из Z_H — *взаимодействиями* в H.

Результаты § Д применяются далее как к группе G, так и к группе H на месте G (в последнем случае, в частности, Ψ и Z должны быть заменены на Ψ_H и Z_H соответственно). Некоторая осторожность будет нужна с употреблением знака $'$, так как он используется для обозначения четырех отображений: отображений из Ψ на Z и из Z на Ψ, определенных в **Д5**, а также подобных отображений из Ψ_H на Z_H и из Z_H на Ψ_H. Между пространствами Ψ и Ψ_H имеется некоторая взаимосвязь, осуществляемая операциями ограничения и индуцирования классовых функций. Мы определим подобные операции для элементов из Z и Z_H, использовав для этой цели отображения $'$.

Е2. Определение. Для $z \in Z$ положим

$$z|_H = (z'|_H)'$$

(первый штрих — отображение из Z в Ψ, определенное в Д5, второй — подобное отображение из Ψ_H в Z_H). Скажем, что z_H — *ограничение* элемента z на H.

Е3. 1) $z \mapsto z|_H$ $(z \in Z)$ — линейное отображение из Z в Z_H.

2) $\widetilde{g^G}|_H = |G:H|\,(\widetilde{g^G \cap H})$ и $C\widetilde{g^G}|_H = C\,(\widetilde{g^G \cap H})$ для всех $g \in G$.

3) $z = \sum\limits_{g \in G} f_g g$ $(f_g \in C,\ z \in Z) \Rightarrow z|_H = |G:\ H| \sum\limits_{h \in H} f_h h.$

4) $z|_H = \dfrac{1}{|H|} \sum\limits_{h \in H} \dfrac{(z, \widetilde{h^G})_G}{|h^G|} h = \dfrac{1}{|H|} \sum\limits_{b \in \mathrm{Cl}\,(H)} \dfrac{(z, \widetilde{b^G})_G}{|b^G|} \widetilde{b}$ для всех $z \in Z$.

Доказательство. 1): Очевидно.

2): С помощью **Д6**, примененному сначала к G, а затем к H, получаем

$$\widetilde{g^G}|_H = ((\widetilde{g^G})'|_H)' = \left(|G|\varepsilon_{g^G}\Big|_H\right)' = \left(|G|\varepsilon_{g^G \cap H}\right)' =$$

$$= \left(|G| \sum_{K \in \mathrm{Cl}\,(H),\ K \subseteq g^G} \varepsilon_K\right)' = |G| \sum_{K \in \mathrm{Cl}\,(H),\ K \subseteq g^G} \times$$

$$\times \frac{1}{|H|} \widetilde{K} = |G:\ H|\,(\widetilde{g^G \cap H}).$$

3): Следует из 1) и 2).

4): Пусть $z = \sum\limits_{g \in G} f_g g \in Z$ $(f_g \in C)$. Тогда по **Д3** $f_g = \dfrac{(z, \widetilde{g^G})_G}{|G|\,|g^G|}$. Отсюда и из 3) следует 4).

□

Е4. Пусть $\xi \in \Psi_H$ и $z \in Z$. Тогда

$$\xi^G(z) = \xi(z|_H).$$

Доказательство. Согласно **Е3** (1) достаточно рассмотреть лишь случай $z = \widetilde{g^G}$, где $g \in G$. Имеем

$$\xi^G(z) = |g^G|\xi^G(g) = |g^G| \frac{|C_G(g)|}{|H|} \sum_{x \in g^G \cap H} \xi(x) =$$

$$= |G:H|\,\xi(\widetilde{g^G \cap H}) = \xi(|G:H|(\widetilde{g^G \cap H})) = \xi(z|_H).$$

□

E5. Определение. Для $x \in Z_H$ положим

$$x^G = ((x')^G)'.$$

Скажем, что x^G *индуцирован* элементом x.

E6. 1) $x \mapsto x^G$ $(x \in Z_H)$ есть линейное отображение из Z_H в Z.

2) $(\widetilde{h^H})^G = \dfrac{|h^H|}{|h^G|}\widetilde{h^G}$ и $(C\widetilde{h^H})^G = C\widetilde{h^G}$ для всех $h \in H$.

3) $x = \sum_{h \in H} f_h h \ (f_h \in C,\ x \in Z_H) \Rightarrow x^G = \sum_{h \in H} \dfrac{f_h}{|h^G|}\widetilde{h^G}$.

4) $x^G = \dfrac{1}{|H|}\sum_{g \in G} \dfrac{(x, \widetilde{g^G \cap H})_H}{|g^G|} = \dfrac{1}{|H|}\sum_{C \in \mathrm{Cl}(G)} \dfrac{(x, \widetilde{C \cap H})_H}{|C|}\widetilde{C}$ при $x \in \in Z_H$.

Доказательство. 1): Очевидно.

2): Используя **Д6** и **Г11** (4) для группы G и для группы H на месте G, получаем

$$(\widetilde{h^H})^G = (((\widetilde{h^H})')^G)' = \left(\left(|H|\varepsilon_{h^H}\right)^G\right)' =$$

$$=_{\text{Д6}} \left(|H|\frac{|C_G(h)|}{|C_H(h)|}\varepsilon_{h^G}\right)' =_{\text{Г11 (4)}} \frac{|H|\,|C_G(h)|}{|C_H(h)|\,|G|}\widetilde{h^G} =$$

$$= \frac{|h^H|}{|h^G|}\widetilde{h^G}.$$

3) Следует из 1) и 2).

4) Следует из 3) и **Г4** (3) (примененного к H на месте G).

□

E7. Пусть $\psi \in \Psi$ и $x \in Z_H$. Тогда

$$\psi(x^G) = \psi|_H(x).$$

Доказательство. Ввиду **E6** (1) достаточно проверить это лишь при $x = \widetilde{h^H}$, где $h \in H$. В этом случае имеем

$$\psi(x^G) = \psi\left(\frac{|h^H|}{|h^G|}\widetilde{h^G}\right) = |h^H|\psi(h) = \psi|_H(\widetilde{h^H}) = \psi|_H(x).$$

□

E8. Пусть $H \leqslant G$. Тогда

1) $(\psi|_H)' = \psi'|_H$ для всех $\psi \in \Psi$,
2) $(z|_H)' = z'|_H$ для всех $z \in Z$,
3) $(\xi^G)' = (\xi')^G$ для всех $\xi \in \Psi_H$,
4) $(x^G)' = (x')^G$ для всех $x \in Z_H$.

Доказательство. 1): $\psi'|_H =_{\text{Е2}} (\psi''|_H)' =_{\text{Д6}} (\psi|_H)'$.
2) — 4): Подобно.

□

Е9. Пусть $\Lambda \longleftrightarrow V$, где Λ и V — подпространства из Ψ и Z соответственно, и $H \leqslant G$. Если $\Lambda^{\perp}|_H \subseteq (\Lambda|_H)^{\perp}$ или $V^{\perp}|_H \subseteq (V|_H)^{\perp}$, то $\Lambda|_H \longleftrightarrow V|_H$.

Доказательство. Пусть $\Lambda^{\perp}|_H \subseteq (\Lambda|_H)^{\perp}$. По **Д14** ((1) $\Rightarrow$ (8)) из $\Lambda \longleftrightarrow V$ следует, что $V = V_1 \dotplus V_2$, где V_1 — подпространство из Λ' и V_2 — подпространство из Λ°. Следовательно, $V|_H = V_1|_H \dotplus V_2|_H$ по **Е3** (1), причем $V_1|_H \subseteq \Lambda'|_H = (\Lambda|_H)'$ по **Е8** и $V_2|_H \subseteq \Lambda^{\circ}|_H = \Lambda^{\perp\prime}|_H =_{\text{Е8}} (\Lambda^{\perp}|_H)' \subseteq (\Lambda|_H)^{\perp\prime}$ §начальное предположение§ $=_{\text{Д8}} (\Lambda|_H)^{\circ}$. Отсюда по **Д14** ((8) $\Rightarrow$ (1), H на месте G) $\Lambda|_H \longleftrightarrow V|_H$.
В случае, когда $V^{\perp}|_H \subseteq (V|_H)^{\perp}$, доказательство подобно.

□

Е10. Теорема. Пусть $H \leqslant G$, $D \trianglelefteq G$, Λ — подпространство из Ψ и $\Lambda \longleftrightarrow \boldsymbol{C}[\hat{D}]$. Тогда

1) $\Lambda|_H \longleftrightarrow \boldsymbol{C}[\hat{D}]|_H$;

2) $\Lambda|_H \longleftrightarrow \boldsymbol{C}[\widehat{D \cap H}]$

(здесь $\boldsymbol{C}[\widehat{D \cap H}]$ — подпространство из Z_H, порожденное суммами классов сопряженных элементов группы H, входящих в $D \cap H$).

Доказательство. 1): Пусть $D = \dot{\bigcup\limits_{i=1}^{s}} C_i$ и $G \setminus D = \dot{\bigcup\limits_{i=s+1}^{k}} C_i$. Положим, $V = \boldsymbol{C}[\hat{D}]$. Тогда $V|_H = \sum\limits_{i=1}^{s} \boldsymbol{C}c_i|_H =_{\text{Е3}} \sum\limits_{i=1}^{s} \boldsymbol{C}(\widetilde{C_i \cap H})$, а $V^{\perp}|_H = \sum\limits_{i=s+1}^{k} \boldsymbol{C}(\widetilde{C_i \cap H}) \subseteq (V|_H)^{\perp}$ §Д3, примененное к H§. Теперь по **Е9** $\Lambda|_H \longleftrightarrow V|_H$.

2): $(\Lambda \longleftrightarrow \boldsymbol{C}[\hat{D}]) \Leftrightarrow_{\text{Д16}} (\Lambda|_D^0 \subseteq \Lambda) \Rightarrow ((\Lambda|_D^0)|_H \subseteq \Lambda|_H) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow ((\Lambda|_H)|_{D \cap H}^0 \subseteq \Lambda|_H) \Leftrightarrow (\Lambda|_H \longleftrightarrow \boldsymbol{C}[\widehat{D \cap H}])$.

□

Е11. Пусть $H \leqslant G$ и $\Gamma \longleftrightarrow U$, где Γ и U — подпространства из Ψ_H и Z_H соответственно. Если $(\Gamma^{\perp})^G \subseteq (\Gamma^G)^{\perp}$ или $(U^{\perp})^G \subseteq (U^G)^{\perp}$, то $\Gamma^G \longleftrightarrow U^G$ (взаимодействие в G).

Доказательство. Пусть $(\Gamma^{\perp})^G \subseteq (\Gamma^G)^{\perp}$. Согласно **Д14** ((1) $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ (8)) $U = U_1 \perp U_2$, где U_1 — подпространство из Γ' и U_2 — подпространство из $\Gamma^{\circ} = \Gamma^{\perp\prime}$ (**Д8**). Следовательно, $U^G = U_1^G + U_2^G$, причем U_1^G и U_2^G — подпространства в Z по **Е6** (1). Далее, $U_1^G \subseteq (\Gamma')^G = (\Gamma^G)'$ по **Е8** (3) и ввиду условия **Е11** $U_2^G \subseteq (\Gamma^{\perp\prime})^G =_{\text{Е8}} ((\Gamma^{\perp})^G)' \subseteq ((\Gamma^G)^{\perp})' =_{\text{Д8}} (\Gamma^G)^{\circ}$. Отсюда по **Д14** ((8) $\Rightarrow$ (1)) $\Gamma^G \longleftrightarrow U^G$.

В случае, когда $(U^{\perp})^G \subseteq (U^G)^{\perp}$, доказательство подобно.

□

Е12. Теорема. Пусть $H \leqslant G$ и $D \trianglelefteq G$. Тогда для любого подпространства Γ в $\mathrm{CF}(H)$ из $\Gamma \longleftrightarrow \boldsymbol{C}[\widehat{D \cap H}]$ следует $\Gamma^G \longleftrightarrow \boldsymbol{C}[\hat{D}]$.

Доказательство. Положим $T = H \cap D$ $U = \boldsymbol{C}[\hat{T}]$. Покажем, что выполнено условие $(U^{\perp})^G \subseteq (U^G)^{\perp}$ из **Е11**. Очевидно, $T^G \cap H = T$. Используя это и **Е6**, имеем $(U^{\perp})^G =_{\text{Д3}} \boldsymbol{C}[\widehat{H \setminus T}]^G = \boldsymbol{C}[\widehat{(H \setminus T)^G}] \subseteq \boldsymbol{C}[\widehat{G \setminus T^G}] = \boldsymbol{C}[\widehat{T^G}]^{\perp} = (U^G)^{\perp}$ Теперь по **Е11** $\Gamma^G \longleftrightarrow U^G = \boldsymbol{C}[\widehat{T^G}]$.

Далее, $D = T^G \mathbin{\dot\cup} D_1$, где $D_1 \subseteq G \setminus H^G$. Следовательно, функции из Γ^G исчезают на D_1 (по определению индуцирования) и, значит, $\Gamma^G \longleftrightarrow \boldsymbol{C}[\hat{D}_1]$. Теперь по **Д17** $\Gamma^G \longleftrightarrow (\boldsymbol{C}[\widehat{T^G}] + \boldsymbol{C}[\hat{D}_1]) = \boldsymbol{C}[\hat{D}]$.

□

Е13. Замечание. Очевидно, что теорему **Е12** можно сформулировать так.

Пусть $H \leqslant G$, $T \trianglelefteq H$ и $T^G \cap H = T$. Тогда из $\Gamma \longleftrightarrow \boldsymbol{C}[\hat{T}]$ следует $\Gamma^G \longleftrightarrow \boldsymbol{C}[\widehat{T^G}]$ (Γ — подпространство из Ψ_H).

Покажем, что в этом утверждении условие $T^G \cap H = T$ не может быть опущено. Пусть $G = \mathrm{PSL}(2, 7)$ и $H \in \mathrm{Syl}_2(G)$. Тогда $H = \langle b \rangle \rtimes \langle a \rangle$, где a и b — элементы порядков 2 и 4. Положим $T = a^H$. Тогда $T^G \cap H = a^H \mathbin{\dot\cup} (ab)^H \mathbin{\dot\cup} \{b^2\}$ и, следовательно, $T^G \cap H \neq T$. Пусть $\Gamma = \boldsymbol{C}\gamma$, где γ — единственный неприводимый характер степени 2 группы H ($\gamma(a) = \gamma(ab) = 0$, $\gamma \times \times (b^2) = -2$). Так как $\gamma(a) = 0$, то $\Gamma \longleftrightarrow \boldsymbol{C}[\hat{T}]$. С другой стороны, $\gamma^G(a) = \dfrac{|C_G(a)|}{|H|} \sum\limits_{x \in a^G \cap H} \gamma(x) = \dfrac{8}{8}(2\gamma(a) + 2\gamma(ab) + \gamma(b^2)) = -2 \neq 0$ и $\gamma^G(1) = 2|G : H| \neq 0$. Так как $1 \in \boldsymbol{C}[\widehat{T^G}]^{\perp}$, то по **Д14** ((1) $\Leftrightarrow$ (9)) $\Gamma^G (= \boldsymbol{C}\gamma^G)$ не взаимодействует с $\boldsymbol{C}[\widehat{T^G}]$.

E14. Пусть $D \trianglelefteq G$, Λ — подпространство в Ψ и $\Lambda \longleftrightarrow C[\hat{D}]$. Тогда $(\Lambda|_H)^G \longleftrightarrow C[\hat{D}]$ для любой подгруппы H из G.

Доказательство. Следует из **E10 (2)**, **E12**, **E3** и **E6**.

□

Другое доказательство теоремы **E12** можно получить с помощью следующей леммы.

E15. Лемма. Пусть $H \leqslant G$, $T \trianglelefteq H$ и $T^G \cap H = T$. Тогда

$$(\xi|_T^0)^G = \xi^G|_{T^G}^0 \text{ для всех } \xi \in \mathrm{CF}(H).$$

Доказательство. Согласно **1Ж (6)** для любого $g \in G$ имеем

$$(\xi|_T^0)^G(g) = \frac{|C_G(g)|}{|H|} \sum_{x \in g^G \cap H} \xi|_T^0(x) =$$

$$= \begin{cases} 0 \text{ при } g \in G \setminus T^G, \\ \dfrac{|C_G(g)|}{|H|} \displaystyle\sum_{x \in t^G \cap H} \xi|_T^0(x) \text{ при } g \in t^G,\ t \in T, \end{cases}$$

и также

$$\xi^G|_{T^G}^0(g) = \begin{cases} 0 \text{ при } g \in G \setminus T^G, \\ \xi^G(t) = \dfrac{|C_G(g)|}{|H|} \displaystyle\sum_{x \in t^G \cap H} \xi(x) \text{ при } g \in t^G,\ t \in T. \end{cases}$$

Так как по условию $T^G \cap H = T$, то $\xi|_T^0(x) = \xi(x)$ при $x \in t^G \cap \cap H (\subseteq T)$. Поэтому вычисленные выражения для левой и правой частей доказываемого равенства совпадают.

□

E16. Пусть $H \leqslant G$ и $D \trianglelefteq G$. Тогда

$$\xi^G|_D^0 = (\xi|_{H \cap D}^0)^G \text{ для всех } \xi \in \mathrm{CF}(H).$$

Доказательство. Очевидно, $(H \cap D)^G \cap H = H \cap D$. Поэтому по **E15** при $T = D \cap H$ имеем $(\xi|_{H \cap D}^0)^G = \xi^G|_{(H \cap D)^G}^0$. Но ξ^G исчезает на $G \setminus H^G$ (по определению индуцирования). Следовательно, $\xi^G|_D^0 = \xi^G|_{D \cap H^G}^0 = \xi^G|_{(D \cap H)^G}^0$.

□

Е17. Пусть $H \leqslant G$, $T \trianglelefteq H$ и $T^G \cap H = T$. Тогда для любого подпространства Λ из $\mathrm{CF}(H)$

$$(\Lambda|_T^0)^G = \Lambda^G\Big|_{T^G}^0,$$

$$(\Lambda|_{H\setminus T}^0)^G = \Lambda^G\Big|_{(H\setminus T)^G}^0 = \Lambda^G\Big|_{G\setminus T^G}^0.$$

Доказательство. Равенства $(\Lambda|_T^0)^G = \Lambda^G\big|_{T^G}^0$ и $(\Lambda|_{H\setminus T}^0)^G = \Lambda^G\big|_{(H\setminus T)^G}^0$ непосредственно вытекают из **Е15**. Далее, из условия $T^G \cap H = T$ следует, что $G = T^G \dot\cup (H\setminus T)^G \dot\cup (G\setminus H^G)$. Так как все функции из Λ^G исчезают на $G\setminus H^G$ (по определению индуцирования), то $\Lambda^G\big|_{(H\setminus T)^G}^0 = \Lambda^G\big|_{(H\setminus T)^G \cup (G\setminus H)^G} = \Lambda^G\big|_{G\setminus T^G}^0$.

□

Другое доказательство теоремы Е12. Пусть $T = D \cap H$ и $\Gamma \longleftrightarrow C(T)$. Согласно **Д16** $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$, где Γ_1 — подпространство из $\mathrm{CF}(H)|_T^0$ и Γ_2 — подпространство из $\mathrm{CF}(H)|_{H\setminus T}^0$. Но тогда $\Gamma^G = \Gamma_1^G + \Gamma_2^G$, где Γ_1^G и Γ_2^G — подпространства из $(\mathrm{CF}(H)|_T^0)^G$ и $(\mathrm{CF}(H)|_{H\setminus T}^0)^G$ соответственно. Ввиду **Е15** и **Е17** (очевидно, $T^G \cap H = T$) последние два подпространства из Ψ совпадают с $\mathrm{CF}(G)\big|_{T^G}^0$ и $\mathrm{CF}(G)\big|_{G\setminus T^G}^0$ соответственно. Теперь по **Д16** $\Gamma^G \longleftrightarrow \widehat{C[T^G]}$.

Дальнейшее доказательство такое же, как в первом доказательстве теоремы Е12 (последний абзац).

□

§ Ё. ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДЛЯ БРАУЭРОВЫХ ХАРАКТЕРОВ

Ё1. Определение. Пусть D — нормальное подмножество группы G, состоящее из p'-элементов, и $\Phi \subseteq \mathrm{IBr}_p(G)$. Скажем, что D и Φ *взаимодействуют* (запись $D \longleftrightarrow \Phi$), если $\varphi|_D^0 \in C[\Phi]$ для всех $\varphi \in \Phi$.

Ё2. Обозначения. Зафиксируем группу G и простое число p. Примем обозначения **Г1** и введем следующие:

$\Psi_p = \mathrm{CF}(G)|_{G_{p'}}^0$ — подпространство в $\Psi = \mathrm{CF}(G)$, рассматриваемое вместе с обычным скалярным произведением $(\ ,\ )_G$;

$\{C_1, \ldots, C_l\}$ — множество всех p'-классов в G;

$Z_p = \bigoplus\limits_{i+1}^{l} C\widetilde{C}_i$ — подпространство в $Z = Z(CG)$;

если $\psi \in \Psi_p$ и $\Phi \subseteq \mathrm{IBr}_p(G)$, то

ψ_Φ — образ ψ при ортогональном проектировании Ψ_p на $C[\Phi]$,
$\Phi^- = \mathrm{IBr}_p(G) \setminus \Phi$;
$D^- = G_{p'} \setminus D$, если $D \trianglelefteq G$ и $D \subseteq G_{p'}$.

Ё3. Теорема. Пусть G — конечная группа, D — объединение некоторых ее p'-классов и $\Phi \subseteq \mathrm{IBr}_p(G)$. Равносильны условия:

(1) $D \leftarrow\rightarrow \Phi$,

(2) $\sum\limits_{\varphi \in \Phi} \overline{\varphi(d)}\, \hat{\varphi}_\Phi(g) = 0$ для всех $(d, g) \in D \times D^-$,

(3) $\sum\limits_{d \in D} \overline{\varphi(d)}\, \hat{\mu}(d) = 0$ для всех $(\varphi, \mu) \in \Phi \times \Phi^-$,

(4) $\frac{1}{|G|} \sum\limits_{d \in D} \sum\limits_{\varphi \in \Phi} \varphi_0(d)\, \overline{\hat{\varphi}_\Phi(d)\, \varphi(d_0)} = \varphi_0(d_0)$ для всех $(\varphi_0, d_0) \in \Phi \times D$.

Доказательство. Примем обозначения $(\ ,\ )_Z$ и s, введенные в **Г3**, положив $a_i = (|G||C_i|)^{\frac{1}{2}}$ и $\alpha = \tau$. Ограничения скалярного произведения $(\ ,\ )_Z$ и формы s на Z_p и $\Psi_p \times Z_p$ обозначим через $(\ ,\ )_{Z_p}$ и s_p соответственно. Согласно **Г10** $(c_1, \ldots, c_k)$ — ортонормированная база в Z и поэтому

(ё1) $\qquad (c_1, \ldots, c_l)$ — ортонормированная база в Z_p.

Найдем теперь ортонормированную базу пространства Ψ_p, двойственную относительно s_p базе $(c_1, \ldots, c_l)$ пространства Z_p. Пусть $\mathrm{IBr}_p(G) = \{\beta_1, \ldots, \beta_l\}$. Согласно **4Г8**(1) и **4Е2**(2, 5)

(ё2) $\qquad (\beta_1, \ldots, \beta_l)$ и $(\hat{\beta}_1, \ldots, \hat{\beta}_l)$ — двойственные базы пространства Ψ_p,

(ё3) $$(\beta_i, \beta_j)_G = (\mathrm{c}^{-1})_{ij}$$

(ё4) $$\beta_i = \sum_{j=1}^{k} \mathrm{b}_{ij}\chi_j, \text{ где } \mathrm{b} = \mathrm{c}^{-1}\mathrm{d}^\tau,$$

(ё5) $$\overset{\circ}{\chi}_i = \sum_{j=1}^{k} \mathrm{a}_{ij}\chi_j, \text{ где } \mathrm{a} = \mathrm{db} = \mathrm{dc}^{-1}\mathrm{d}^\tau.$$

(Здесь d — матрица p-разложения $\left(\overset{\circ}{\chi}_i = \sum\limits_{j=1}^{l} \mathrm{d}_{ij}\beta_j\right)$ и c — матрица Картана).

Обозначим через Y $k \times l$-матрицу над $\boldsymbol{C}$ с

$$\mathrm{Y}_{ij} = s(\chi_i,\ c_j) = \frac{\chi_i(g_j)}{\sqrt{C_G(g_j)}}.$$

По (ё5)

(ё6) $$\mathrm{aY} = \mathrm{Y}.$$

Положим

$$M = (\mathrm{bY})^{-1}, \text{ где } \mathrm{b} = \mathrm{c}^{-1}\mathrm{d}^{\mathrm{T}}$$

(обратимость матрицы bY следует из (ё4)). Покажем, что

(ё7) $A \equiv M(\beta_1, \ldots, \beta_l)^{\mathrm{T}}$ — ортонормированная база в Ψ_p (записанная в виде столбца).

Пусть A_i — i-й вектор столбца A. Имеем

$$(A_i,\ A_j)_G = \left(\sum_{m=1}^{l} M_{im}\beta_m,\ \sum_{n=1}^{l} M_{jn}\beta_n\right)_G = \sum_{m=1}^{l}\sum_{n=1}^{l} M_{im}(\beta_m,$$

$$\beta_n)_G\overline{M_{jn}} =_{(\text{ё}3)} \sum_{m=1}^{l}\sum_{n=1}^{l} M_{im}(\mathrm{c}^{-1})_{mn}(M^*)_{nj} = (M\mathrm{c}^{-1}M^*)_{ij}.$$

Но

$$M\mathrm{c}^{-1}M^* = (\mathrm{bY})^{-1}\mathrm{c}^{-1}((\mathrm{bY})^*)^{-1} = (\mathrm{Y}^*\mathrm{b}^*\mathrm{cbY})^{-1} =$$

$$=_{(\text{ё}4)} (\mathrm{Y}^*\mathrm{dc}^{-1}\mathrm{cc}^{-1}\mathrm{d}^*\mathrm{Y})^{-1} =_{(\text{ё}5)} (\mathrm{Y}^*\mathrm{aY})^{-1} =_{(\text{ё}6)} (\mathrm{Y}^*\mathrm{Y})^{-1} = \mathrm{E}$$

(последнее равенство — простой подсчет). Таким образом, $(A_i, A_j)_G = \delta_{ij}$ и (ё7) доказано.

(ё8) База A пространства Ψ_p, указанная в (ё7), двойственна относительно s_p базе $(c_1, \ldots, c_l)$ пространства Z_p.

Действительно,

$$s_p(A_i,\ c_j) = s_p\left(\sum_{m=1}^{l} M_{im}\beta_m,\ c_j\right) =_{(\text{ё}4)} s\left(\sum_{m=1}^{l} M_{im} \times\right.$$

$$\left.\times \sum_{n=1}^{k} \mathrm{b}_{mn}\chi_n,\ c_j\right) = \sum_{m=1}^{l}\sum_{n=1}^{k} M_{im}\mathrm{b}_{mn}s(\chi_n,\ c_j) =$$

$$= \sum_{m=1}^{l}\sum_{n=1}^{k} M_{im}\mathrm{b}_{mn}\mathrm{Y}_{nj} = (M\mathrm{bY})_{ij} = \mathrm{E}_{ij} = \delta_{ij}.$$

Из (ё1), (ё7) и (ё8) следует, что

(ё9) предположение **B1** выполнено для Ψ_p, Z_p, $(\ ,\ )_G$, $(\ ,\ )_{Z_p}$, s_p, τ, τ на месте Ψ, Z, $(\ ,\ )_\Psi$, $(\ ,\ )_Z$, s, τ, α соответственно.

Ввиду (ё9) справедливость теоремы вытекает непосредственно из теоремы **В22** (равносильность условий (1), (4), (5), (7)), если в ней принять $A=(\beta_1, \ldots, \beta_l)$ и $\widetilde{A}=(\hat{\beta}_1, \ldots, \hat{\beta}_l)$ (на основании (ё2)), $B=\widetilde{B}=(c_1, \ldots, c_l)$ (на основании (ё7)) и расписать $s_p \times \times (\psi, c_j) = \psi(g_j) \sqrt{|C_G(g_j)|}^{-1}$ при $\psi \in \Psi_p$.

□

Что касается функций $\hat{\varphi}_\Phi$, которые встречаются в формулировке теоремы Ё3, то их можно выразить через функции из Φ, если известны скалярные произведения любых двух функций из Φ.

Ё4. Лемма. Пусть M — квадратная матрица над некоторым кольцом K, записанная в клеточной форме

$$M=\begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{pmatrix},$$

где матрица M_4 — квадратная обратимая. Тогда

1) M обратима если и только если $M_1 - M_2M_4^{-1}M_3$ обратима;

2) если M обратима, то

$$M^{-1}=\begin{pmatrix} S_1 & S_2 \\ S_3 & S_4 \end{pmatrix},$$

где

$$(\text{ё}10)\qquad \begin{cases} S_1=(M_1-M_2M_4^{-1}M_3)^{-1}, \\ S_2=-S_1M_2M_4^{-1}, \\ S_3=-M_4^{-1}M_3S_1, \\ S_4=M_4^{-1}-S_3M_2M_4^{-1}. \end{cases}$$

Доказательство. Предположим, что M обратима:

$$\begin{pmatrix} E & O \\ O & E \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} S_1S_2 \\ S_3S_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M_1M_2 \\ M_3M_4 \end{pmatrix},$$

где все три матрицы имеют одинаковые клеточные формы. Умножив обе части этого равенства справа на

$$\begin{pmatrix} E & O \\ -M_4^{-1}M_3 & M_4^{-1} \end{pmatrix},$$

получим

$$\begin{pmatrix} E & O \\ -M_4^{-1}M_3 & M_4^{-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} S_1S_2 \\ S_3S_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M_1-M_2M_4^{-1}M_3 & M_2M_4^{-1} \\ O & E \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} S_1(M_1-M_2M_4^{-1}M_2) & S_1M_2M_4^{-1}+S_2 \\ S_3(M_1-M_2M_4^{-1}M_3) & S_3M_2M_4^{-1}+S_4 \end{pmatrix},$$

откуда следует обратимость матрицы $M_1 - M_2M_4^{-1}M_3$ и справедливость равенств (ё10).

□

Ё5. Пусть $\Phi = \{\beta_1, \ldots, \beta_s\} \subseteq \mathrm{IBr}_p(G)$ и $\mathfrak{f}$ — $s \times s$-матрица над $\boldsymbol{C}$ такая, что $\mathfrak{f}_{ij} = (\beta_i, \beta_j)_G$. Тогда матрица $\mathfrak{f}$ обратима и

$$(\hat{\beta}_i)_\Phi = \sum_{j=1}^{s} (\mathfrak{f}^{-1})_{ij}\beta_j \; (i = 1, \ldots, s).$$

Доказательство. Запишем матрицу Картана $\mathfrak{c}$ в клеточной форме

$$\mathfrak{c} = \begin{pmatrix} \mathfrak{m}_1 & \mathfrak{m}_2 \\ \mathfrak{m}_3 & \mathfrak{m}_4 \end{pmatrix},$$

где $\mathfrak{m}_1$ — $s \times s$-матрица. В такой же клеточной форме представим и обратную ей матрицу

$$\mathfrak{c}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathfrak{s}_1 & \mathfrak{s}_2 \\ \mathfrak{s}_3 & \mathfrak{s}_4 \end{pmatrix}.$$

Согласно (ё3) $\mathfrak{s}_1 = \mathfrak{f}$. Кроме того, по лемме **Ё4** $\mathfrak{f}$ обратима и

(ё11) $$\mathfrak{f} = (\mathfrak{m}_1 - \mathfrak{m}_2\mathfrak{m}_4^{-1}\mathfrak{m}_3)^{-1}$$

(невырожденность матрицы $\mathfrak{m}_4$ следует из **4Е2** (3, 4), а также из вычисления v_{ij} ниже).

Из (ё2) видно, что $(\widehat{\beta_{s+1}}, \ldots, \hat{\beta}_l)$ — база в $\boldsymbol{C}[\Phi]^\perp$. Для $i = 1, \ldots, l$ рассмотрим разложение β_i по базе $(\beta_1, \ldots, \beta_s, \widehat{\beta_{s+1}}, \ldots, \hat{\beta}_l)$ пространства Ψ_p:

(ё12) $$\beta_i = \sum_{j=1}^{s} u_{ij}\beta_j + \sum_{m=s+1}^{l} v_{im}\hat{\beta}_m.$$

Если $i \leqslant s$, то, очевидно, $u_{ij} = \delta_{ij}$ и $v_{im} = 0$. При $i > s$, подставив в (ё12) $\hat{\beta}_m = \sum_{j=1}^{l} \mathfrak{c}_{mj}\beta_j$, получим

$$\beta_i = \sum_{j=1}^{s} \left(u_{ij} + \sum_{m=s+1}^{l} v_{im}\mathfrak{c}_{mj}\right)\beta_j + \sum_{j=s+1}^{l} \left(\sum_{m=s+1}^{l} v_{im}\mathfrak{c}_{mj}\right)\beta_j.$$

Теперь, учитывая клеточную форму матрицы $\mathfrak{c}$, легко подсчитать, что $v_{ij} = (\mathfrak{m}_4^{-1})_{ij}$ и $u_{ij} = (-\mathfrak{m}_4^{-1}\mathfrak{m}_3)_{ij}$. Но тогда

(ё13) $$(\beta_i)_\Phi = \begin{cases} \beta_i \text{ при } i \leqslant s, \\ \sum_{j=1}^{s} u_{ij}\beta_j = \sum_{j=1}^{s} (-\mathfrak{m}_4^{-1}\mathfrak{m}_3)_{ij}\beta_j \text{ при } i > s. \end{cases}$$

Очевидно, $(\hat{\beta}_i)_\Phi = 0$ при $i > s$. При $i \in \{1, \ldots, s\}$ находим

$$(\hat{\beta}_i)_\Phi = \left(\sum_{j=1}^{l} c_{ij}\beta_j\right)_\Phi = \sum_{j=1}^{l} c_{ij}(\beta_j)_\Phi =_{(\text{ё}13)} \sum_{j=1}^{s} c_{ij}\beta_j +$$

$$+ \sum_{j=s+1}^{l} c_{ij} \sum_{t=1}^{s} (-m_4^{-1}m_3)_{jt}\beta_t = \sum_{j=1}^{s} (m_1 - m_2 m_4^{-1} m_3)_{ij}\beta_j =$$

$$=_{(\text{ё}11)} \sum_{j=1}^{s} (f^{-1})_{ij}\beta_j.$$

□

В случае, когда p не делит порядок группы G, теорема Ё3 превращается в теорему 3Б1.

Над таблицей характеров любой неабелевой группы записаны еще две или три строки. Нижняя из них содержит обозначения классов сопряженных элементов (в таблицах 2, 3 и 23 — представителей классов). Классы, состоящие из элементов порядка n обозначаются через nA, nB, nC и т. д. Верхняя строка над таблицей характеров содержит порядки централизаторов элементов классов (над g^G в ней записан $|C_G(g)|$). Средняя строка (когда она есть) над каждым классом g^G указывает буквенные обозначения классов $(g_{p'})^G$, где p пробегает $\pi(o(g))$ возрастая. Например, если над классом $g^G = 60$A стоит ABC, то это означает, что $g_{2'} \in 15$A, $g_{3'} \in 20$B и $g_{5'} \in 12$C.

В самих таблицах приняты обозначения:

$$z_n = e^{\frac{2\pi i}{n}},$$

$$y_n = z_n + z_n^{-1} = 2\cos\frac{2\pi}{n},$$

$$y_n^{*k} = z_n^k + z_n^{-k} = 2\cos\frac{2k\pi}{n}$$

для всех $n \in \boldsymbol{N}$ и $k \in \boldsymbol{Z}$;

$$b_n = \sum_{j=1}^{(n-1)/2} z_n^{j^2} = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{n}\right) & \text{при } n \equiv 1 \pmod 4, \\ \frac{1}{2}\left(-1+i\sqrt{n}\right) & \text{при } n \equiv -1 \pmod 4) \end{cases}$$

для нечетных n;

$$b_n^* = \frac{1}{2}\left(-1-\sqrt{n}\right) = -1 - b_n \quad \text{для } n \equiv 1 \pmod 4).$$

Например, $b_5 = z_5 + z_5^4 (= y_5)$ и $b_5^* = -1 - z_5 - z_5^4 = z_5^2 + z_5^3$ $(= y_5^{*2} = y_5^{*3})$.

Обозначения групп — те же, что и в [61]. В частности, $L_n(q) = PSL(n, q)$ и $U_n(q) = PSU(n, q^2)$.

1. $G = \langle g \rangle \simeq Z_n$ (циклическая группа порядка n)

	1	g	g^2	$\dots$	g^{n-1}
χ_1	1	1	1	$\dots$	1
χ_2	1	z	z^2	$\dots$	z^{n-1}
χ_3	1	z^2	z^4	$\dots$	$z^{2(n-1)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
χ_n	1	z^{n-1}	$z^{2(n-1)}$	$\dots$	$z^{(n-1)^2}$

$$z = z_n$$

2. $G = \langle b \rangle \rtimes \langle a \rangle \simeq D_{2n}$ (диэдральная группа порядка $2n$)
$n = 2m + 1$

	$\lvert G \rvert$ 1	2 a	n b	n b^2	$\dots$ $\dots$	n b^m
χ_1	1	1	1	1	$\dots$	1
χ_2	1	-1	1	1	$\dots$	1
χ_3	2	0	y	y^{*2}	$\dots$	y^{*m}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
χ_{m+2}	2	0	y^{*m}	y^{*2m}	$\dots$	y^{*m^2}

$$y = y_n, \;\; y^{*k} = y_n^{*k} = 2\cos\frac{2k\pi}{n}$$

3. $G = \langle b \rangle \rtimes \langle a \rangle \simeq \mathrm{D}_{2n},\ n = 2m$

$|G| = 2n$

	$\lvert G \rvert$	2	n	n	$\cdots$	n	$\lvert G \rvert$
	1	a	ab	b		b^{m-1}	b^m
χ_1	1	1	1	1	$\cdots$	1	1
χ_2	1	-1	-1	1	$\cdots$	1	1
χ_3	1	1	-1	-1	$\cdots$	$(-1)^{m-1}$	$(-1)^m$
χ_4	1	-1	1	-1	$\cdots$	$(-1)^{m-1}$	$(-1)^m$
χ_5	2	0	0	y	$\cdots$	$y^{*(m-1)}$	y^{*m}
χ_6	2	0	0	y^{*2}	$\cdots$	$y^{*2(m-1)}$	y^{*2m}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
χ_{m+3}	2	0	0	$y^{*(m-1)}$	$\cdots$	$y^{*(m-1)^2}$	$y^{*(m-1)m}$

$y = y_n,\ y^{*k} = y_n^{*k}$

4. $G = \mathrm{A}_4$

$|G| = 12 = 2^2 \cdot 3$

	$\lvert G \rvert$	4	3	3
	1A	2A	3A	3B
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	1	z_3	$\bar{z}_3$
χ_3	1	1	$\bar{z}_3$	z_3
χ_4	3	-1	0	0

5. $G = S_4$

$|G| = 24 = 2^3 \cdot 3$

	$\lvert G\rvert$	8	4	3	4
	1A	2A	2B	3A	4A
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	-1	1	-1
χ_3	2	2	0	-1	0
χ_4	3	-1	1	0	-1
χ_5	3	-1	-1	0	1

6. $G = SL(2, 3)$

$|G| = 24 = 2^3 \cdot 3$

	$\lvert G\rvert$	$\lvert G\rvert$	6	6	4	6	6
	1A	2A	3A	3B	4A	6A	6B
χ_1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	z	$\bar{z}$	1	z	$\bar{z}$
χ_3	1	1	$\bar{z}$	z	1	$\bar{z}$	z
χ_4	2	-2	-1	-1	0	1	1
χ_5	2	-2	$-z$	$-\bar{z}$	0	z	$\bar{z}$
χ_6	2	-2	$-\bar{z}$	$-z$	0	$\bar{z}$	z
χ_7	3	3	0	0	-1	0	0

$z = z_3$

7. $G \simeq A_5 \simeq L_2(4) \simeq L_2(5)$

$|G| = 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$

	$\lvert G\rvert$	4	3	5	5
	1A	2A	3A	5A	5B
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	3	-1	0	$-b_5$	$-b_5^*$
χ_3	3	-1	0	$-b_5^*$	$-b_5$
χ_4	4	0	1	-1	-1
χ_5	5	1	-1	0	0

8. $G = S_5$

$|G| = 120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$

	$\|G\|$	8	12	6	4	5	6
	1A	2A	2B	3A	4A	5A	6A
χ_1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	-1	1	-1	1	-1
χ_3	4	0	2	1	0	-1	-1
χ_4	4	0	-2	1	0	-1	1
χ_5	5	1	1	-1	-1	0	1
χ_6	5	1	-1	-1	1	0	-1
χ_7	6	-2	0	0	0	1	0

9. $G \simeq L_3(2) \simeq L_2(7)$

$|G| = 168 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$

	$\|G\|$	8	3	4	7	7
	1A	2A	3A	4A	7A	7B
χ_1	1	1	1	1	1	1
χ_2	3	-1	0	1	b_7	$\overline{b_7}$
χ_3	3	-1	0	1	$\overline{b_7}$	b_7
χ_4	6	2	0	0	-1	-1
χ_5	7	-1	1	-1	0	0
χ_6	8	0	-1	0	1	1

10. $G \simeq A_6 \simeq L_2(9)$

$|G| = 360 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$

	$\|G\|$	8	9	9	4	5	5
	1A	2A	3A	3B	4A	5A	5B
χ_1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	5	1	2	-1	-1	0	0
χ_3	5	1	-1	2	-1	0	0
χ_4	8	0	-1	-1	0	$-b_5$	$-b_5^*$
χ_5	8	0	-1	-1	0	$-b_5^*$	$-b_5$
χ_6	9	1	0	0	1	-1	-1
χ_7	10	-2	1	1	0	0	0

11. $G \simeq L_2(8)$

$|G| = 504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$

	$\|G\|$	8	9	7	7	7	9	9	9
	1A	2A	3A	7A	7B	7C	9A	9B	9C
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	7	-1	-2	0	0	0	1	1	1
χ_2	7	-1	1	0	0	0	$-y_9$	$-y_9^{*2}$	$-y_9^{*4}$
χ_4	7	-1	1	0	0	0	$-y_9^{*4}$	$-y_9$	$-y_9^{*2}$
χ_5	7	-1	1	0	0	0	$-y_9^{*2}$	$-y_9^{*4}$	$-y_9$
χ_6	8	0	-1	1	1	1	-1	-1	-1
χ_7	9	1	0	y_7	y_7^{*2}	y_7^{*4}	0	0	0
χ_8	9	1	0	y_7^{*4}	y_7	y_7^{*2}	0	0	0
χ_9	9	1	0	y_7^{*2}	y_7^{*4}	y_7	0	0	0

12. $G \simeq L_2(11)$

$|G| = 660 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$

	$\|G\|$	12	6	5	5	6	11	11
	1A	2A	3A	5A	5B	6A	11A	11B
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	5	1	-1	0	0	1	b_{11}	$\overline{b_{11}}$
χ_6	5	1	-1	0	0	1	$\overline{b_{11}}$	b_{11}
χ_4	10	-2	1	0	0	1	-1	-1
χ_5	10	2	1	0	0	-1	-1	-1
χ_6	11	-1	-1	1	1	-1	0	0
χ_7	12	0	0	b_5	b_5^*	0	1	1
χ_8	12	0	0	b_5^*	b_5	0	1	1

13. $G \simeq \mathrm{L}_2(13)$

$|G| = 1092 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13$

	$\|G\|$	12	6	6	7	7	7	13	13
	1A	2A	3A	6A	7A	7B	7C	13A	13B
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	7	-1	1	-1	0	0	0	$-b_{13}$	$-b_{13}^{*}$
χ_3	7	-1	1	-1	0	0	0	$-b_{13}^{*}$	$-b_{13}$
χ_4	12	0	0	0	$-y_7$	$-y_7^{*2}$	$-y_7^{*4}$	-1	-1
χ_5	12	0	0	0	$-y_7^{*4}$	$-y_7$	$-y_7^{*2}$	-1	-1
χ_6	12	0	0	0	$-y_7^{*2}$	$-y_7^{*4}$	$-y_7$	-1	-1
χ_7	13	1	1	1	-1	-1	-1	0	0
χ_8	14	2	-1	-1	0	0	0	1	1
χ_9	14	-2	-1	1	0	0	0	1	1

14. $G \simeq \mathrm{L}_2(17)$

$|G| = 2448 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 17$

	$\|G\|$	16	9	8	8	8	9	9	9	17	17
	1A	2A	3A	4A	8A	8B	9A	9B	9C	17A	17B
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	9	1	0	1	-1	-1	0	0	0	$-b_{17}$	$-b_{17}^{*}$
χ_3	9	1	0	1	-1	-1	0	0	0	$-b_{17}^{*}$	$-b_{17}$
χ_4	16	0	-2	0	0	0	1	1	1	-1	-1
χ_5	16	0	1	0	0	0	$-y_9$	$-y_9^{*2}$	$-y_9^{*4}$	-1	-1
χ_6	16	0	1	0	0	0	$-y_9^{*4}$	$-y_9$	$-y_9^{*2}$	-1	-1
χ_7	16	0	1	0	0	0	$-y_9^{*2}$	$-y_9^{*4}$	$-y_9$	-1	-1
χ_4	17	1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	0	0
χ_9	18	2	0	-2	0	0	0	0	0	1	1
χ_{10}	18	-2	0	0	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	0	0	0	1	1
χ_{11}	18	-2	0	0	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	0	0	0	1	1

$$(\sqrt{2} = y_8)$$

15. $G \simeq A_7$

$|G| = 2520 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$

	$\lvert G \rvert$	24	36	9	4	5	12	7	7
		A	A	A	A	A	AA	A	A
	1A	2A	3A	3B	4A	5A	6A	7A	7B
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	6	2	3	0	0	1	-1	-1	-1
χ_3	10	-2	1	1	0	0	1	b_7	$\overline{b_7}$
χ_4	10	-2	1	1	0	0	1	$\overline{b_7}$	b_7
χ_5	14	2	2	-1	0	-1	2	0	0
χ_6	14	2	-1	2	0	-1	-1	0	0
χ_7	15	-1	3	0	-1	0	-1	1	1
χ_8	21	1	-3	0	-1	1	1	0	0
χ_9	35	-1	-1	-1	1	0	-1	0	0

16. $G \simeq L_2(19)$

$|G| = 3420 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 19$

	$\lvert G \rvert$	20	9	10	10	9	9	9	10	10	19	19
		A	A	A	A	A	A	A	AA	BA	A	A
	1A	2A	3A	5A	5B	9A	9B	9C	10A	10B	19A	19B
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	9	1	0	-1	-1	0	0	0	1	1	b_{19}	$\overline{b_{19}}$
χ_3	9	1	0	-1	-1	0	0	0	1	1	$\overline{b_{19}}$	b_{19}
χ_4	18	-2	0	$-b_5$	$-b_5^*$	0	0	0	$-b_5$	$-b_5^*$	-1	-1
χ_5	18	-2	0	$-b_5^*$	$-b_5$	0	0	0	$-b_5^*$	$-b_5$	-1	-1
χ_6	18	2	0	$-b_5$	$-b_5^*$	0	0	0	b_5	b_5^*	-1	-1
χ_7	18	2	0	$-b_5^*$	$-b_5$	0	0	0	b_5^*	b_5	-1	-1
χ_8	19	-1	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	0	0
χ_9	20	0	2	0	0	-1	-1	-1	0	0	1	1
χ_{10}	20	0	-1	0	0	y_9	y_9^{*2}	y_9^{*4}	0	0	1	1
χ_{11}	20	0	-1	0	0	y_9^{*4}	y_9	y_9^{*2}	0	0	1	1
χ_{12}	20	0	-1	0	0	y_9^{*2}	y_9^{*4}	y_9	0	0	1	1

17. $G \simeq L_3(3)$

$|G| = 5616 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 13$

	$\lvert G\rvert$	48	54	9	8	6	8	8	13	13	13	13
		A	A	A	A	AA	A	A	A	A	A	A
	1A	2A	3A	3B	4A	6A	8A	8B	13A	13B	13C	13D
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	12	4	3	0	0	1	0	0	-1	-1	-1	-1
χ_3	13	-3	4	1	1	0	-1	-1	0	0	0	0
χ_4	16	0	-2	1	0	0	0	0	d	d^{*2}	d^{*4}	d^{*8}
χ_5	16	0	-2	1	0	0	0	0	d^{*8}	d	d^{*2}	d^{*4}
χ_6	16	0	-2	1	0	0	0	0	d^{*4}	d^{*8}	d	d^{*2}
χ_7	16	0	-2	1	0	0	0	0	d^{*2}	d^{*4}	d^{*8}	d
χ_8	26	2	-1	-1	2	-1	0	0	0	0	0	0
χ_9	26	-2	-1	-1	0	1	$i\sqrt{2}$	$-i\sqrt{2}$	0	0	0	0
χ_{10}	26	-2	-1	-1	0	1	$-i\sqrt{2}$	$i\sqrt{2}$	0	0	0	0
χ_{11}	27	3	0	0	-1	0	-1	-1	1	1	1	1
χ_{12}	39	-1	3	0	-1	-1	1	1	0	0	0	0

$$d = \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{12} z_{13}^{j^4},\quad d^{*k} = \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{12} z_{13}^{kj^4}\quad \left(i\sqrt{2} = z_8 + z_8^3\right)$$

18. $G \simeq U_3(3) \simeq G_2(2)'$

$|G| = 6048 = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 7$

	$\lvert G\rvert$	96	108	9	96	96	16	12	7	7	8	8	12	12
		A	A	A	A	A	A	AA	A	A	A	A	AA	AB
	1A	2A	3A	3B	4A	4B	4C	6A	7A	7B	8A	8B	12A	12B
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	6	-2	-3	0	-2	-2	2	1	-1	-1	0	0	1	1
χ_3	7	-1	-2	1	3	3	-1	2	0	0	-1	-1	0	0
χ_4	7	3	-2	1	$-2i-1$	$2i-1$	1	0	0	0	i	$-i$	$i-1$	$-i-1$
χ_5	7	3	-2	1	$2i-1$	$-2i-1$	1	0	0	0	$-i$	i	$-i-1$	$i-1$
χ_6	14	-2	5	-1	2	2	2	1	0	0	0	0	-1	-1
χ_7	21	5	3	0	1	1	1	-1	0	0	-1	-1	1	1
χ_8	21	1	3	0	$2i-3$	$-2i-3$	-1	1	0	0	i	$-i$	$-i$	i
χ_9	21	1	3	0	$-2i-3$	$2i-3$	-1	1	0	0	$-i$	i	i	$-i$
χ_{10}	27	3	0	0	3	3	-1	0	-1	-1	1	1	0	0
χ_{11}	28	-4	1	1	$4i$	$-4i$	0	-1	0	0	0	0	i	$-i$
χ_{12}	28	-4	1	1	$-4i$	$4i$	0	-1	0	0	0	0	$-i$	i
χ_{13}	32	0	-4	-1	0	0	0	0	$-b_7$	$-\overline{b_7}$	0	0	0	0
χ_{14}	32	0	-4	-1	0	0	0	0	$-\overline{b_7}$	$-b_7$	0	0	0	0

19. $G \simeq M_{11}$

$|G| = 7920 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$

	$\|G\|$	48	18	8	5	6	8	8	11	11
	1A	2A	3A	4A	5A	6A	8A	8B	11A	11B
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	10	2	1	2	0	-1	0	0	-1	-1
χ_3	10	-2	1	0	0	1	$i\sqrt{2}$	$-i\sqrt{2}$	-1	-1
χ_4	10	-2	1	0	0	1	$-i\sqrt{2}$	$i\sqrt{2}$	-1	-1
χ_5	11	3	2	-1	1	0	-1	-1	0	0
χ_6	16	0	-2	0	1	0	0	0	b_{11}	$\overline{b_{11}}$
χ_7	16	0	-2	0	1	0	0	0	$\overline{b_{11}}$	b_{11}
χ_8	44	4	-1	0	-1	1	0	0	0	0
χ_9	45	-3	0	1	0	0	-1	-1	1	1
χ_{10}	55	-1	1	-1	0	-1	1	1	0	0

20. $G = L_3(4)$

$|G| = 20160 = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$

	$\|G\|$	64	9	16	16	16	5	5	7	7
	1A	2A	3A	4A	4B	4C	5A	5B	7A	7B
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	20	4	2	0	0	0	0	0	-1	-1
χ_3	35	3	-1	3	-1	-1	0	0	0	0
χ_4	35	3	-1	-1	3	-1	0	0	0	0
χ_5	35	3	-1	-1	-1	3	0	0	0	0
χ_6	45	-3	0	1	1	1	0	0	b_7	$\overline{b_7}$
χ_7	45	-3	0	1	1	1	0	0	$\overline{b_7}$	b_7
χ_8	63	-1	0	-1	-1	-1	$-b_5$	$-b_5^*$	0	0
χ_9	63	-1	0	-1	-1	-1	$-b_5^*$	$-b_5$	0	0
χ_{10}	64	0	1	0	0	0	-1	-1	1	1

21. $G \simeq A_8 \simeq L_4(2)$

$|G| = 20160 = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$

	$\|G\|$	192	96	180	18	16	8	15	12	6	7	7	15	15
		A	A	A	A	A	A	A	AB	BA	A	A	AA	AA
	1A	2A	2B	3A	3B	4A	4B	5A	6A	6B	7A	7B	15A	15B
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	7	-1	3	4	1	-1	1	2	0	-1	0	0	-1	-1
χ_3	14	6	2	-1	2	2	0	-1	-1	0	0	0	-1	-1
χ_4	20	4	4	5	-1	0	0	0	1	1	-1	-1	0	0
χ_5	21	-3	1	6	0	1	-1	1	-2	0	0	0	1	1
χ_6	21	-3	1	-3	0	1	-1	1	1	0	0	0	b_{15}	$\overline{b_{15}}$
χ_7	21	-3	1	-3	0	1	-1	1	1	0	0	0	$\overline{b_{15}}$	b_{15}
χ_8	28	-4	4	1	1	0	0	-2	1	-1	0	0	1	1
χ_9	35	3	-5	5	2	-1	-1	0	1	0	0	0	0	0
χ_{10}	45	-3	-3	0	0	1	1	0	0	0	b_7	$\overline{b_7}$	0	0
χ_{11}	45	-3	-3	0	0	1	1	0	0	0	$\overline{b_7}$	b_7	0	0
χ_{12}	56	8	0	-4	-1	0	0	1	0	-1	0	0	1	1
χ_{13}	64	0	0	4	-2	0	0	-1	0	0	1	1	-1	-1
χ_{14}	70	-2	2	-5	1	-2	0	0	-1	1	0	0	0	0

22. $G=J_1$

$|G|=175560=2^3\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 19$

	$\|G\|$	120	30	30	30	6	7	10	10	11	15	15	19	19	19
		A	A	A	A	AA	A	AA	BA	A	AA	BA	A	A	A
	1A	2A	3A	5A	5B	6A	7A	10A	10B	11A	15A	15B	19A	19B	19C
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	56	0	2	$-2b_5$	$-2b_5^*$	0	0	0	0	1	b_5	b_5^*	-1	-1	-1
χ_3	56	0	2	$-2b_5^*$	$-2b_5$	0	0	0	0	1	b_5^*	b_5	-1	-1	-1
χ_4	76	4	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	0	0	0
χ_5	76	-4	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	1	0	0	0
χ_6	77	5	-1	2	2	-1	0	0	0	0	-1	-1	1	1	1
χ_7	77	-3	2	b_5	b_5^*	0	0	b_5	b_5^*	0	b_5	b_5^*	1	1	1
χ_8	77	-3	2	b_5^*	b_5	0	0	b_5^*	b_5	0	b_5^*	b_5	1	1	1
χ_9	120	0	0	0	0	0	1	0	0	-1	0	0	c	c^{*2}	c^{*4}
χ_{10}	120	0	0	0	0	0	1	0	0	-1	0	0	c^{*4}	c	c^{*2}
χ_{11}	120	0	0	0	0	0	1	0	0	-1	0	0	c^{*2}	c^{*4}	c
χ_{12}	133	5	1	-2	-2	-1	0	0	0	1	1	1	0	0	0
χ_{13}	133	-3	-2	$-b_5$	$-b_5^*$	0	0	b_5	b_5^*	1	$-b_5$	$-b_5^*$	0	0	0
χ_{14}	133	-3	-2	$-b_5^*$	$-b_5$	0	0	b_5^*	b_5	1	$-b_5^*$	$-b_5$	0	0	0
χ_{15}	209	1	-1	-1	-1	1	-1	1	1	0	-1	-1	0	0	0

$$c=\frac{1}{3}\sum_{l=1}^{18} z_{19}^{l^3},\quad c^{*k}=\frac{1}{3}\sum_{l=1}^{18} z_{19}^{kl^3}$$

23. $G = \mathrm{Sz}(q)$

$$|G| = q^2(q-1)(q^2+1) = q^2(q-1)\,m_-m_+,$$
$$q = 2^{2n+1},\ m_- = q+1-2r,\ m_+ = q+1+2r,\ r = 2^n$$

	$\lvert G\rvert$	q^2	$2q$	$q-1$	m_+	m_-
	1	t	$u_1,\ u_2$	v^a $\left(a = 1, \ldots, \frac{q-2}{2}\right)$	$(w_+)^b$ $(b \in I_+)$	$(w_-)^c$ $(c \in I_-)$
1_G	1	1	1	1	1	1
χ	q^2	0	0	1	-1	-1
χ_j $\left(j = 1, \ldots, \frac{q-2}{2}\right)$	q^2+1	1	1	α_{ja}	0	0
η_k $\left(k = 1, \ldots, \frac{q-2r}{4}\right)$	$m\ (q-1)$	$2r-1$	-1	0	β_{kb}	0
ζ_l $\left(l = 1, \ldots, \frac{q-2r}{4}\right)$	$m_+(q-1)$	$-2r-1$	-1	0	0	γ_{lc}
$\omega_1,\ \omega_2$	$r(q-1)$	$-r$	$\pm ir$	0	1	-1

Здесь t, u_1, u_2, v, w_+, w_- — элементы порядков 2, 4, 4, $q-1$, m_+, m_- соответственно, $I_+ \cup I_- \subseteq \boldsymbol{N}$, $|I_+| = \frac{q+2r}{4}$, $|I_-| = \frac{q-2r}{4}$,

$$\alpha_{ja} = y_{q-1}^{*ja},\ \beta_{kb} = y_{m_+}^{*kb} + y_{m_+}^{*kbq},\ \gamma_{lc} = y_{m_-}^{*lc} + y_{m_-}^{*lcq}.$$

Отметим, что в тексте книги имеются также таблицы характеров групп PSL (2, 2^n) на с. 260, PSL (2, q) при $q \equiv 1 \pmod 4$ на с. 262, PSL (2, q) при $q \equiv -1 \pmod 4$ на с. 263 и S_6 на с. 114.

В следующих матрицах записаны лишь ненулевые значения чисел p-разложения $d_{\chi\beta}$. Слева от матрицы записаны степени соответствующих неприводимых характеров χ, а над матрицей — степени соответствующих неприводимых брауэровых p-характеров β.

1. $G = S_3$

1) $p = 2$

	1	2
1	1	
1	1	
2		1

2) $p = 3$

	1	1
1	1	
1		1
2	1	1

2. $G = S_4$

1) $p = 2$

	1	2
1	1	
1	1	
2		1
3	1	1
3	1	1

2) $p = 3$

	1	1	3	3
1	1			
1		1		
2	1	1		
3			1	
3				1

3. $G = A_5$

1) $p = 2$

	1	2	2	4
1	1			
3	1	1		
3	1		1	
4				1
5	1	1	1	

2) $p = 3$

	1	3	3	4
1	1			
3		1		
3			1	
4				1
5	1			1

3) $p = 5$

	1	3	5
1	1		
3		1	
3		1	
4	1	1	
5			1

4. $G = L_2(7)$

1) $p=2$

	1	3	3	8
1	1			
3		1		
3			1	
6		1	1	
7	1	1	1	
8				1

2) $p=3$

	1	3	3	6	7
1	1				
3		1			
3			1		
6				1	
7					1
8	1				1

3) $p=7$

	1	3	5	7
1	1			
3		1		
3		1		
6	1		1	
7				1
8		1	1	

5. $G = S_5$

1) $p=2$

	1	4	4
1	1		
1	1		
4		1	
4		1	
5	1		1
5	1		1
6	2		1

2) $p=3$

	1	1	4	4	6
1	1				
1		1			
4			1		
4				1	
5	1		1		
5		1		1	
6					1

3) $p=5$

	1	1	3	3	5	5
1	1					
1		1				
4	1		1			
4		1		1		
5					1	
5						1
6			1	1		

ПРИЛОЖЕНИЕ 3. КОНЕЧНЫЕ ПРОСТЫЕ ГРУППЫ И ИХ ПОРЯДКИ

Классификационная теорема [19, с. 146]. Если G — конечная простая группа, то она изоморфна одной из групп следующего списка:

группы лиева типа

$A_n(q)$, $n \geqslant 1$,

$$|G| = d^{-1}q^{n(n+1)/2}\prod_{i=1}^{n}(q^{i+1}-1) \qquad d=(n+1,\ q-1)$$

$B_n(q)$, $n \geqslant 2$,

$$|G| = d^{-1}q^{n^2}\prod_{i=1}^{n}(q^{2i}-1) \qquad d=(2,\ q-1)$$

$C_n(q)$, $n \geqslant 3$,

$$|G| = d^{-1}q^{n^2}\prod_{i=1}^{n}(q^{2i}-1) \qquad d=(2,\ q-1)$$

$D_n(q)$, $n \geqslant 4$,

$$|G| = d^{-1}q^{n(n-1)}(q^n-1)\prod_{i=1}^{n-1}(q^{2i}-1) \quad d=(4,\ q^n-1)$$

$G_2(q)$

$$|G| = q^6(q^6-1)(q^2-1)$$

$F_4(q)$

$$|G| = q^{24}(q^{12}-1)(q^8-1)(q^6-1)(q^2-1)$$

$E_6(q)$

$$|G| = d^{-1}q^{36}(q^{12}-1)(q^9-1)(q^8-1)(q^6-1)(q^5-1)(q^2-1)$$
$$d=(3,\ q-1)$$

$E_7(q)$

$$|G| = d^{-1}q^{63}(q^{18}-1)(q^{14}-1)(q^{12}-1)(q^{10}-1)(q^8-1)\times$$
$$\times(q^6-1)(q^2-1) \qquad d=(2,\ q-1)$$

$E_8(q)$

$$|G| = q^{120}(q^{30}-1)(q^{24}-1)(q^{20}-1)(q^{18}-1)(q^{14}-1)\times$$
$$\times(q^{12}-1)(q^8-1)(q^2-1)$$

${}^2A_n(q)$, $n \geqslant 2$,

$$|G| = d^{-1}q^{n(n+1)/2}\prod_{i=1}^{n}(q^{i+1}-(-1)^{i+1}) \quad d=(n+1,\ q+1)$$

${}^2B_2(q)$, $q=2^{2m+1}$, $m \geqslant 1$

$$|G| = q^2(q^2+1)(q-1)$$

${}^2D_n(q)$, $n \geqslant 4$,

$$|G| = d^{-1}q^{n(n-1)}(q^n+1)\prod_{i=1}^{n-1}(q^{2i}-1) \quad d=(4,\ q^n+1)$$

$^3D_n(q)$

$$|G| = q^{12}(q^8+q^4+1)(q^6-1)(q^2-1)$$

$^2G_2(q),\ q = 3^{2m+1},\ m \geqslant 1$

$$|G| = q^3(q^3+1)(q-1)$$

$^2F_4(q),\ q = 2^{2m+1},\ m \geqslant 2$

$$|G| = q^{12}(q^6+1)(q^4-1)(q^3+1)(q-1)$$

$^2F_4(2)'$

$$|G| = 2^{11}\cdot 3^3\cdot 5\cdot 13$$

$^2E_6(q)$

$$|G| = d^{-1}q^{36}(q^{12}-1)(q^9+1)(q^8-1)(q^6-1)(q^5+1)(q^2-1)$$

$$d = (3,\ q+1)$$

знакопеременные группы

$A_n,\ n \geqslant 5$

$$|G| = n!/2$$

спорадические группы

M_{11}, $|G| = 2^4\cdot 3^2\cdot 5\cdot 11$
M_{12}, $|G| = 2^6\cdot 3^3\cdot 5\cdot 11$
M_{22}, $|G| = 2^7\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7\cdot 11$
M_{23}, $|G| = 2^7\cdot 3^2\cdot 5\cdot 11\cdot 23$
M_{24}, $|G| = 2^{10}\cdot 3^3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 23$
J_1, $|G| = 2^3\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 19$
J_2, $|G| = 2^7\cdot 3^3\cdot 5^2\cdot 7$
J_3, $|G| = 2^7\cdot 3^5\cdot 5\cdot 17\cdot 19$
J_4, $|G| = 2^{21}\cdot 3^3\cdot 5\cdot 7\cdot 11^3\cdot 23\cdot 29\cdot 31\cdot 37\cdot 43$
HS, $|G| = 2^9\cdot 3^2\cdot 5^3\cdot 7\cdot 11$
McL, $|G| = 2^7\cdot 3^6\cdot 5^3\cdot 7\cdot 11$
Suz, $|G| = 2^{13}\cdot 3^7\cdot 5^2\cdot 7\cdot 11\cdot 13$
Ru, $|G| = 2^{14}\cdot 3^3\cdot 5^3\cdot 7\cdot 13\cdot 29$
He, $|G| = 2^{10}\cdot 3^3\cdot 5^2\cdot 7^3\cdot 17$
Ly, $|G| = 2^8\cdot 3^7\cdot 5^6\cdot 7\cdot 11\cdot 31\cdot 37\cdot 67$
O'N, $|G| = 2^9\cdot 3^4\cdot 5\cdot 7^3\cdot 11\cdot 19\cdot 31$
Co_1, $|G| = 2^{61}\cdot 3^9\cdot 5^4\cdot 7^2\cdot 11\cdot 13\cdot 23$
Co_2, $|G| = 2^{18}\cdot 3^6\cdot 5^3\cdot 7\cdot 11\cdot 23$
Co_3, $|G| = 2^{10}\cdot 3^7\cdot 5^3\cdot 7\cdot 11\cdot 23$
Fi_{22}, $|G| = 2^{17}\cdot 3^9\cdot 5^2\cdot 7\cdot 11\cdot 13$
Fi_{23}, $|G| = 2^{18}\cdot 3^{13}\cdot 5^2\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 17\cdot 23$
Fi_{24}', $|G| = 2^{21}\cdot 3^{16}\cdot 5^2\cdot 7^3\cdot 11\cdot 13\cdot 17\cdot 23\cdot 29$
HN, $|G| = 2^{14}\cdot 3^6\cdot 5^6\cdot 7\cdot 11\cdot 19$
Th, $|G| = 2^{15}\cdot 3^{10}\cdot 5^3\cdot 7^3\cdot 13\cdot 19\cdot 31$
B, $|G| = 2^{41}\cdot 3^{13}\cdot 5^6\cdot 7^2\cdot 11\cdot 13\cdot 17\cdot 19\cdot 23\cdot 31\cdot 47$
M, $|G| = 2^{46}\cdot 3^{20}\cdot 5^9\cdot 7^6\cdot 11^2\cdot 13^3\cdot 17\cdot 19\cdot 23\cdot 29\cdot 31\cdot 41\cdot 47\cdot 59\cdot 71.$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Артин Э. Геометрическая алгебра. М.: Наука, 1969.

2. Башев В. А. Представления группы $Z_2 \times Z_2$ в поле характеристики 2 // Докл. АН СССР. 1961. Т. 141, № 5. С. 1015—1018.

3. Белоногов В. А. Нормальные дополнения и сопряженность инволюций в конечной группе // Алгебра и логика. 1976. Т. 15, № 1. С. 22—38.

4. Белоногов В. А. О неприводимом представлении p-группы над конечным полем // Исследования по современной алгебре. Свердловск, 1981. С. 3—12.

5. Белоногов В. А. Признаки непростоты конечной группы на языке характеров // Алгебра и логика. 1982. Т. 21, № 4. С. 386—401.

6. Белоногов В. А. *Д*-блоки характеров конечной группы // Исследования по теории групп. Свердловск, 1984. С. 3—31.

7. Белоногов В. А. Взаимодействия в конечных группах и векторных пространствах // Структурные вопросы теории групп. Свердловск, 1986. С. 3—32.

8. Белоногов В. А. Взаимодействия и *Д*-блоки в конечных группах // Подгрупповая структура групп. Свердловск, 1988. С. 4—44.

9. Белоногов В. А. О нулях в таблице характеров // Теоретико-групповые исследования. Свердловск, 1990. С. 3—7

10. Белоногов В. А. Конечные группы с небольшим главным p-блоком // Там же. С. 8—30.

11. Белоногов В. А. Характеризация групп $Sz(q)$ актиинным фрагментом таблицы характеров // Международная конференция по алгебре, посвящ. памяти А. И. Мальцева (1909—1967). Тезисы докладов по теории групп. Новосибирск, 1989. С. 16.

12. Белоногов В. А., Фомин А. Н. Матричные представления в теории конечных групп. М.: Наука, 1976.

13. Берман С. Д. Число неприводимых представлений конечной группы над произвольным полем // Докл. АН СССР. 1956. Т. 106, № 5. С. 767—769.

14. Берман С. Д. Представления конечных групп // Алгебра 1964 (Итоги науки и техники). М., 1966. С. 83—122.

15. Бовди А. А. Мультипликативная группа целочисленного группового кольца. Ужгород: Ужгородский гос. ун-т. 1987. (Рукопись деп. в УкрНИИНТИ 24.09.87, № 2712-Укр87.)

16. Бурбаки Н. Алгебра. Модули, кольца, формы. М.: Наука, 1986.

17 Бусаркин В. М., Дураков Б. К. Об одном классе конечных неразрешимых групп // Алгебра и логика. 1974. Т. 13, № 2. С. 153—167.

18. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1966

19. Горенстейн Д. Конечные простые группы. Введение в их классификацию. М.: Мир, 1985.

20. Гресь П. Г. Доказательство для p-разрешимых групп гипотезы Алперина о числе характеров высоты 0 // 6. Всесоюзный симпозиум по теории групп: [Сб. науч. тр.]. Киев, 1980. С. 179—188.

21. Гресь П. Г. Несколько следствий для p-разрешимых групп гипотезы Алперина // Укр. мат. ж. 1986. Т. 38, № 1. С. 17—22.

22. Гудивок П. М. Целочисленные представления конечных групп. Ужгород: Ужгород. гос ун-т, 1978.

23. Гудивок П. М., Рудько В. П. Тензорные произведения представлений конечных групп. Ужгород: Ужгород. гос. ун-т, 1985.
24. Джеймс Г. Теория представлений симметрических групп. М.: Мир, 1982. (Новое в зарубеж. науке. Математика. № 32)
25. Залесский А. Е. Линейные группы // Алгебра. Топология. Геометрия (Итоги науки и техники.) 1983. Т. 21. С. 135—182.
26. Казарин Л. С. О p^{α}-лемме Бернсайда // Матем. заметки. 1989. Т. 48, № 2. С. 45—48.
27. Казарин Л. С. Признаки существования разрешимой нормальной подгруппы у группы с факторизацией // Международная конференция по алгебре, посвящ. памяти А. И. Мальцева (1909—1967). Тезисы докладов по теории групп. Новосибирск, 1989. С. 54
28. Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И. Основы теории групп. М.: Наука, 1977.
29. Кондратьев А. С. Неприводимые подгруппы группы $GL_8(2)$ // Commun. Algebra. 1987. V. 15, N 5. P. 1039—1093.
30. Кондратьев А. С. Числа разложения группы J_2 // Алгебра и логика Т. 27, № 5. 1988. С. 535—561.
31. Кондратьев А. С. Числа разложения групп $\hat{J}_2$ и $\mathrm{Aut}(J_2)$ // Алгебра и логика 1988. Т. 27, № 6. С. 690—710.
32. Кондратьев А. С., Махнев А. А., Старостин А. И. Конечные группы // Алгебра. Геометрия. Топология. (Итоги науки и техники). 1986. Т. 24. С. 3—120.
33. Кострикин А. И. Введение в алгебру. М.: Наука, 1977.
34. Кострикин А. И., Манин Ю. И. Линейная алгебра и геометрия. М: Наука, 1986.
35. Кострикин А. И., Чубаров И. А. Представления конечных групп // Алгебра. Топология. Геометрия. (Итоги науки и техники.) 1985. Т. 23. С. 119—195.
36. Кэртис Ч., Райнер И. Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. М.: Наука, 1969.
37. Ленг С. Алгебра. М.: Мир, 1968.
38. Мазуров В. Д. Конечные группы // Алгебра. Топология. Геометрия. (Итоги науки и техники.) 1976. Т. 14. С. 5—56.
39. Мазуров В. Д. Минимальное подстановочное представление простой группы Томпсона // Алгебра и логика. 1988. Т. 27, № 5. С. 562—580.
40. Мазуров В. Д., Мазурова Н. П. Широкие подгруппы спорадических групп // Структурные вопросы теории групп. Свердловск, 1986. С. 71—84.
41. Мазурова Н. П. Подгруппы больших конечных групп и задача линейной оптимизации // Алгебра и логика. 1986. Т. 25, № 4. С. 405—414.
42 Мальцев А. И. Основы линейной алгебры. М.: Наука, 1970.
43. Махнев А. А. Конечные группы с циклическими силовскими 2-подгруппами в централизаторах 3-элементов // Подгрупповая структура групп. Свердловск, 1988. С. 86—112.
44. Подуфалов Н. Д. О конечных группах, 2-локальный 3-ранг которых не превосходит единицы // Алгебра и логика. 1983. Т. 22, № 3. С. 297—307.
45. Подуфалов Н. Д. Конечные простые группы типа характеристики 2 и 3 // Тр. ин-та мат. СО АН СССР. 1984. Т. 4. С. 49—81.
46. Романовский А. В. Исключительные характеры конечных групп. Минск: Наука и техника, 1985.
47. Стейнберг Р. Лекции о группах Шевале. М.: Мир, 1975.
48. Струнков С. П. О некоторых арифметических свойствах характеров конечных групп // XI Всесоюзный симпозиум по теории групп, посвящ. 60-летию чл.-корр. АН СССР М. И. Каргаполова: [Тез. сообщ.]. Свердловск, 1989. С. 109—110
49. Сыскин С. А. О действии группы $L_2(q)$ на 2-группе // Алгебра и логика. 1979. Т. 18, № 2. С. 224—231.
50. Фейт У. Некоторые следствия классификации простых конечных групп // Успехи матем. наук. 1983. Т. 38, № 3. С. 127—133.

51. Фомин А. Н. О минимальной степени линейности конечных простых групп // Алгебра и логика. 1986. Т. 25, № 1. С. 103—110.
52. Холл М. Теория групп. М.: Изд-во иностр. литер., 1962
53. Alperin J. L. Local representations theory. Cambridge: Cambridge Univ. Press. 1986.
54. Brauer R. A. characterization of the characters of groups of finite order // Ann. Math. (2). 1953. V. 57. P. 357—377.
55. Brauer R. Representations of finite groups // Lecture on modern mathematics. N. Y., 1963. V. 1. P. 133—175.
56. Brauer R. Some application of the characters to the theory of blocks. I—V // J. Algebra. 1964. V. 1, N 2. P. 152—167; 1964. V. 1, N 4 P. 307—334; 1966. V. 3, N 2. P. 225—255; 1971. V. 17, N 4. P. 489—521; 1974. V. 28, N 3. P. 433—460.
57. Brauer R. On finite groups with cyclic Sylow subgroups. I, II // J. Algebra. 1976. V. 40, N 2. P. 556—584; 1979. V. 58, N 2. P. 291—318.
58. Brauer R. Theory of group characters. Tokyo: Kinokuniya Book Store 1979.
59. Brauer R., Feit W. On the number of irreducible characters of finite groups in a given block // Proc. Nat. Acad. Sci USA. 1959. V. 45, N 3. P. 361—365.
60. Carter R. W. Finite groups of Lie type. Conjugacy classes and complex characters. Chichester. etc.: Willey, 1985.
61. Conway J. H., Curtis R. T., Norten S. P., Parker R. A., Wilson R. A. Atlas of finite groups. Oxford: Clarendon Press., 1985.
62. Curtis C. W., Reiner I. Methods of representation theory with applications to finite groups and orders. Vol I, II. N. Y., etc.: John Willey and Sons. 1981, 1987.
63. Dade E. C. Blocks with cyclic defect groups // Ann. Math. 1966. V. 84, N 1. P. 20—48.
64. Dade E. C. On normal complements to sections of finite groups // J. Austral Math. Soc. 1975. V. 19, N 3. P. 257—262.
65. Dornhoff L. Group representation theory. Pt A, B. N. Y.: Marcel Dekker, 1971, 1972.
66. Feit W. The representation theory of finite groups Amsterdam etc.: North — Holland Publishing Company. 1982.
67. Fong P. On the charracters of p-solvable groups // Trans Amer. Math. Soc. 1961. V. 98, N 2. P. 263—284.
68. Gallagher P. X. The conjugacy classes in finite simple group // J. reine und augew. math. 1969. B. 239 / 240. S. 363—365.
69. Glauberman G. Central elements in core-free groups // J. Algebra. 1966. V. 4, N 3. P. 403—420.
70. Glauberman G. A sufficient condition for p-stability // Proc. London Math. Soc. 1972. V. 25, N 2. P. 253—287.
71. Goldschmidt D. M. An application of Brauers second main theorem // J. Algebra. 1972. V. 20, N 1. P. 72—77.
72. Goldschmidt D. Lectures on character theory. Berkeley: Publish or Perish. 1980.
73. Gorenstein D. Finite groups. N. Y.: Harper and Row. 1968.
74. Green J. Blocks of modular representations // Math. Zs. 1962. V. 79, N 5. P. 100—115.
75. Harada K. A characterization of the groups LF (2, q) // Ill. J. Math. 1967. V. 11, N 4. P. 647—659.
76. Huppert B. Endliche Gruppen. I. Berlin: Springer, 1967.
77. Huppert B., Blackburn N. Finite, groups. II, III. Berlin: Springer, 1982.
78. Iizuka K. On Osimas blocks of group characters // Proc. Japan Acad. 1960. V. 36, N 7. P. 392—396.
79. Iizuka K. Some studies on the orthogonality relations for group characters // Kumamoto J Sci. 1961. V. A5. P. 111—118.

80. I i z u k a K., N a k a y a m a T. A remark on ortogonality relations in finite groups // Nagoya Math. J. 1962. V. 20. P. 185—194.
81. I s a a c s I. M. Character theory of finite groups. N. Y.: Acad. Press. 1976.
82. J a m e s G. D. The modular characters of Mathieu groups // J. Algebra. 1973. V. 27, N 1. P. 57—111.
83. J a m e s G., K e r b e r A. The representation theory of the symmetric group. Encyclopedia of Mathematics. V. 16, Massachusets: Addison — Wesley, Reading. 1981.
84. M c K a y J. The non-abelian simple groups G, $|G| \leqslant 10^6$ — character tables. // Commun. Algebra. 1979. V. 7, N 13. P. 1407—1445.
85. M i c h l e r G. O. Brauers conjectures and the classification of finite simple groups // Lect. Notes Math. 1986. V 1178. P. 129—142.
86. M i c h l e r G. O. Modular representation theory and classification of finite simple groups // Proceedings of symposia in pure mathematics. 1987. V. 47, part 1. P. 223—231.
87. N i c c o l a i N. A. Isometries and generalized group characters // J. Algebra. 1967. V. 31, N 1. P. 647—659.
88. O l s s o n J. B. Aus dem Nachlass von Richard Brauer // Vorlesungen aus dem Fachbereich Mathematik der Universität Essen. 1982. Heft 8.
89. O s i m a M. On the representations on groups of finite order // Math. J. Okayama Univ. 1952. V. 1. P. 33—61.
90 P u t t a s w a m a i a h B. M., D i x o n J. D. Modular representations of finite groups. N. Y., etc.: Acad. Press. 1977.
91. R e y n o l d s W. F. Characters of finite groups and sets of primes // Proc. Symp. Pure Math. 1971. V. 21. Providens R. P. 123—125.
92. S i m p s o n W. A., F r a m e J. S. The character tables for SL(3, q), SU(3, q^2), PSL(3, q), PSU(3, q^2) // Can. J. Math. 1973. V. XXV, N 3. P. 486—494.
93. S l a t t e r y M. C. Pi-blocks of P_i-separable groups // J. Algebra. 1985. V. 102, N 1. P. 60—77.
94. S t a s z e w s k i R On π-blocks of finite groups // Commun. Algebra. 1985. V. 13, N 11. P. 2369—2405.
95. S u z u k i M. Finite groups with nilpotent centralizers // Trans. Amer. Math. Soc. 1961. V. 99, N 3. P. 425—470.
96. S u z n k i M. On a class of doubly transitive groups // Ann. Math. 1962. V. 75, N 1. P. 105—145.
97. S u z u k i M. On the existence of a Hall normal subgroup // Proc. J. Math. Soc. Japan. 1963. V. 15, N 4. P. 387—391.
98. T h o m p s o n J. G. Vertices and sourses // J. Algebra. 1967. V. 6, N 1. P. 1—6.
99. T s u s h i m a J On the block of defect zero // Nagoya Math. J. 1971. V. 44. P. 57—59.
100. W a l t e r J. H. The characterization of finite groups with abelian Sylow 2-subgroups // Ann. Math. 1969. V. 89, N 3. P. 405—514.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

А

Автоморфизм векторного пространства 17
—— поля 53, 55, 163
Активный фрагмент таблицы характеров 271
Алгебра 32
—— групповая 32
Алгебраически сопряженные характеры 55
Алгебраический гомоморфизм 43, 52, 190
Алгебраическое число 51

Б

База векторного пространства 16
—— неупорядоченная 16
—— упорядоченная 16
Блок
D-—— 96
p-—— 112, 170
π-—— 174
Ф-—— 96
Блоки
—— абелевой группы 121
—— сопряженные 219, 220
Блочно-секционная ортогональность 214
Блочно-секционное взаимодействие 213
Блочный характер алгебры $Z(FG)$ 187
Брауэров гомоморфизм 190
—— граф 171
—— характер группы 147
—— p-—— —— 147
—— характер представления 147
Брауэрова характеризация характеров 66
—— элементарная группа 66
Брауэрово индуцирование p-блоков 196

В

Векторное пространство 16
Вещественный элемент группы 54, 83
Взаимодействие 96, 327, 346
—— малое 296
—— пространственное 339
—— тривиальное 96
Внешняя прямая сумма пространств 19
Высота характера 182
Вычетов система 47

Г

Геометрическая характеризация взаимодействий 308

Главный D-блок 117, 251, 259
——— p-блок 117, 222, 246
——— неразложимый характер 158
——— характер 25
Гомоморфизм брауэров 190
——— векторных пространств 16
——— сплетающий 31
Граф брауэров 171
T-——— 104
Группа
M-——— 64
π-——— 69, 70
——— брауэрова элементарная 66
——— дробных идеалов 134
——— квазиэлементарная 67
——— лиева типа 248, 268, 290
——— спорадическая 268, 293
——— Фробениуса 297
——— характеров 58
Групповая алгебра 32
Групповое кольцо 34

Д

Дефект блока
p-——— ——— 182
p-——— характера 182
Дефектная группа блока 192
p-——— ——— ——— 192
——— ———класса 191
p-——— ——— ——— 191
Дефектный класс блока 192
Джекобсона радикал 44
Диагональ представления 29
Диагональная эквивалентность представлений 30

Е

Единичное представление 25
Естественный изоморфизм $\mathrm{Aut}(V) \to \mathrm{GL}(n, F)$ 17
——— ———$\mathrm{GL}(n, F) \to \mathrm{Aut}(V)$ 17

З

Закон взаимности Фробениуса 60

И

Идеал
R-——— 134
——— дробный 134
——— максимальный 131
——— нильпотентный 45
——— простой 131
——— $\mathfrak{p}$ 131, 142, 147
Идемпотент 188
——— p-блока 187
——— Осимы p-блока 181
——— примитивный 188
——— центральный 187
Индуцированная классовая функция 48
Индуцированное представление 47
Индуцированный элемент в $Z(CG)$ 342

Интерпретация представления 21
Исключительное подмножество 61
Исключительные характеры 231

К

Картана матрица 158, 177
Квазиэлементарная группа 67
Класс
p'-——— группы 127
——— представлений 23
Классификация конечных простых групп 247, 281, 368
Классовая сумма 107
——— функция 23, 42, 52
Кольцо $\mathfrak{R}$ $\mathfrak{p}$-целых чисел в $\hat{Q}$ 141, 142, 197
——— $\hat{Z}$ всех целых алгебраических чисел 51
Комплексно-сопряженный характер 53
Координатные функции представления 37
Кронекерово произведение матриц 25

Л

Лемма об унитарной матрице 97
——— о ненулевом следе 36
——— о сопряженности инволюций 77
——— Шура 34, 35
Линейный оператор 17
——— характер 56

М

Матрица
$A \times B$-——— 20
——— Картана 158, 177
——— линейного оператора 17
——— положительно определенная 209
——— ——— полуопределенная 209
——— пустая 20, 98
——— разложения 154, 177
——— p-——— 157
——— эндоморфизма 17
Матричная интерпретация операторного представления 21
Матричное представление 21
Метод специальных классов 61
Модулирование 144
Модулярное представление 124
Модуляция
p-——— 144
$\mathfrak{p}$-——— 144
Мономиальный характер 64

Н

Непосредственная D-связанность характеров 113
——— p-связанность характеров 113
Неприводимая часть представления 30
——— ——— характера 62
Неприводимое представление 26
Неприводимый брауэров характер 147
——— ——— p-——— 147
——— характер 42

Нормальное дополнение 69
—— подмножество 12

О

Обобщенная матрица разложения 204, 212
—— —— р-—— 204
Обобщенный характер 52
Ограничение элементов из CG 341
Одномерное представление 129
Оператор 17
—— сплетающий 31
Операторная интерпретация матричного представления 21
Операторное представление 21
Орбита р-блоков нормальной подгруппы 220, 221
Ортогональное проектирование 311, 313

П

Подмножество
TI-—— 61
—— исключительное 61
—— нормальное 12
—— специальное 61
Подпредставление 27
Подчиненность р-блоку 175
Поле
—— $Q(\omega)$ 10, 53
—— $\hat{Q}$ 51, 131
—— F 142, 147
Полуортогональность подпространств 308, 311
Представление 21, 43
—— главное неразложимое 34
—— группы 21
—— групповой алгебры 43
—— единичное 35
—— индуцированное 47
—— матричное 21
—— модулярное 124
—— р-—— 124
—— неприводимое 26
—— неразложимое 34, 131
—— обыкновенное 50
—— операторное 21
—— перестановками 59
—— приводимое 26
—— $(\mathscr{B}_1, \dots, \mathscr{B}_n)$-—— 29
—— разложимое 24
—— регулярное 33
—— точное 21
Представления
—— диагонально эквивалентные 30
—— сопряженные 49
—— эквивалентные 22
Примитивный идемпотент 188
—— характер 64
Произведение дробных идеалов 134, 136
Пространство координатных функций 38
F-—— 16
Прямая сумма подпространств 19
—— —— представлений 24

Пустые матрицы 20, 98

Р

Радикал Джекобсона 44
Размерность векторного пространства 16
Ранг матрицы 19
Расширение поля конечное 131

С

Связанность неприводимых характеров 113
D-——— ——— ——— 113
р-——— ——— ——— 113
Сечение
π-——— 93
р-——— 203
Система вычетов по подгруппе 47
Скалярное произведение классовых функций 53
——— ——— элементов центра групповой алгебры CG 108, 331, 340
Соотношение ортогональности
——— ——— блочно-секционное 214 (33)
——— ——— второе 51
——— ——— первое 51
Сопряженные р-блоки нормальной подгруппы 219, 220
Специальное подмножество 61
Сплетающий гомоморфизм 31
——— оператор 31
Срезка
р-——— 154
V-——— 95, 108, 320
Λ-——— 95, 108, 321
Степень представления 21
——— характера 52

Т

Таблица характеров 54
——— брауэровых ——— 159
——— ——— р-——— 159
Тензорное произведение матриц 25
——— ——— пространств 19
——— ——— представлений 25
Теорема Бернсайда о неприводимом представлении 38
——— ——— о непростоте группы 57, 232
——— Брауэра 1-я основная 200
——— ——— 2-я основная 210
——— ——— 3-я основная 223
——— Брауэра — Дэйда 69
——— Брауэра — Судзуки 80
——— Виланда 74, 75
——— Дэйда 230
——— Клиффорда 62
——— Макки 65
——— Машке 50
——— Фробениуса 79
——— Фробениуса — Виланда 74
——— Фробениуса — Шура 40

У

Унитарная матрица 97

Ф

Фактор представления 27
Фактор-представление 27
Форма полуторалинейная 311, 312, 319
——— эрмитова 311, 312

Формула Судзуки 61
——— умножения классов 46 (E7)

Х

Характер группы 29, 52
p-——— ——— 147
——— главный 25
——— ——— неразложимый 158
——— линейный 56
——— мономиальный 64
——— неприводимый 42, 52
——— представления 23
——— примитивный 64
——— Стейнберга 260, 290

Ц

Целое алгебраическое число 51
Центр групповой алгебры 46

Ч

Часть представления неприводимая 30
π-——— числа 10
p-——— ——— 10
π-——— элемента группы 12, 125
p-——— ——— ——— 125
Числа разложения 154
——— ——— обобщенные 203
Число неприводимых характеров 150
——— ——— ——— в p-блоке 186

Э

Эквивалентные представления 22
Элемент группы вещественный 54, 83
π-——— 70, 74, 93, 182
p-——— 125, 181, 203
Эндоморфизм 17
Эрмитова форма 311, 312

Я

Ядро брауэрова характера 165, 223
——— представления 21, 56, 128, 153
——— характера 52, 223

Белоногов Вячеслав Александрович

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ И ХАРАКТЕРЫ В ТЕОРИИ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Рекомендовано к изданию
Ученым советом Института
математики и механики
и НИСО УрО АН СССР
по плану выпуска 1990 г.

Редактор В. С. Симакова
Технический редактор Н. Р. Рабинович
Художник М. Н. Гарипов
Корректоры Г. Н. Старкова, Г. К. Лохнева

НИСО № 177(88)—1650.
Сдано в набор 4.04.90. Подписано к печати 25.12.91. Формат $60\times90^1/_{16}$. Бумага книжно-журнальная. Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 24. Уч.-изд. л. 26. Тираж 1000. Заказ № 127.
Цена 8 р. 40 к.

620219, Свердловск, ГСП-384,
ул. С. Ковалевской, 16.
Типография изд-ва «Уральский рабочий».
620219, Свердловск, ул. Тургенева, 13.