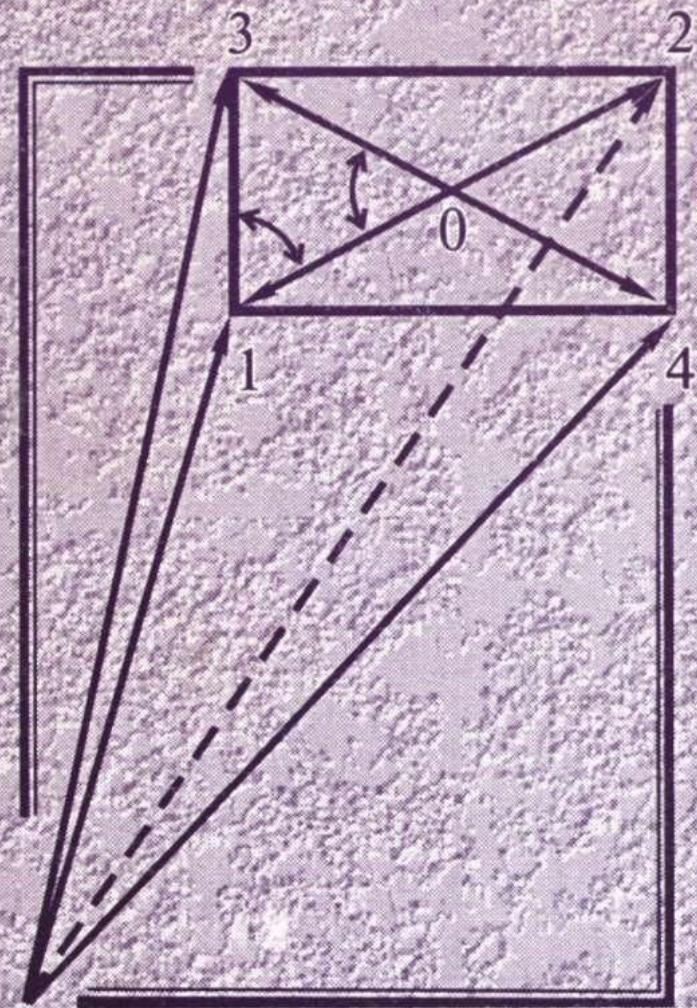


**А. В. Березин
Ю. А. Курочкин
Е. А. Толкачев**

КВАТЕРНИОНЫ в релятивистской физике



УРСС

**А. В. Березин
Ю. А. Курочкин
Е. А. Толкачев**

КВАТЕРНИОНЫ в релятивистской физике

Издание второе, исправленное



Москва • 2003

УРСС

Березин Александр Васильевич,
Курочкин Юрий Александрович,
Толкачев Евгений Аркадьевич

Кватернионы в релятивистской физике. Изд. 2-е, испр. — М.: Едиториал УРСС, 2003. — 200 с.

ISBN 5-354-00403-9

Книга представляет собой первое в научной литературе систематическое изложение применения кватернионов для параметризации групп пространственно-временной симметрии и реализации ряда их представлений. Излагается оригинальный подход к описанию кинематики и динамики классических и квантованных полей, основанный на использовании объектов одной алгебраической природы — бикватернионов. Приведены краткие сведения из истории развития кватернионного исчисления и его приложений.

Может быть полезна широкому кругу лиц, интересующихся теоретической физикой, алгеброй, геометрией, в том числе аспирантам и научным работникам.

Редактор: акад. АН Белоруссии *Ф. И. Федоров*

Рецензенты:

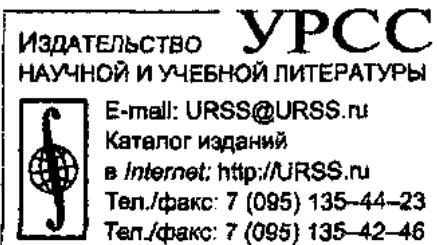
д-р физ.-мат. наук *В. И. Стражев*,
д-р физ.-мат. наук *И. Д. Феранчук*

Издательство «Едиториал УРСС», 117312, г. Москва, пр-т 60-летия Октября, 9.

Лицензия ИД № 05175 от 25.06.2001 г. Подписано к печати 10.06.2003 г.

Формат 60×90/16. Тираж 480 экз. Печ. л. 12,5. Зак. № 2-971/197.

Отпечатано в типографии ООО «Рокос». 117312, г. Москва, пр-т 60-летия Октября, 9.



ISBN 5-354-00403-9

© А. В. Березин,
Ю. А. Курочкин,
Е. А. Толкачев, 1989, 2003
© Едиториал УРСС, 2003

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Предлагаемая вниманию читателя книга впервые была издана в 1989 году и неожиданно для авторов быстро исчезла с прилавков книжных магазинов. По прошествии почти полутора десятков лет ссылки на нее все еще появляются в научных статьях, монографиях и диссертациях. Еще большее количество научных работ свидетельствует о том, что тираж книги был явно недостаточен, поскольку независимо воспроизводят некоторые из опубликованных в ней результатов. Есть сведения, что книга использовалась при чтении спецкурсов в ряде высших учебных заведений России. Собственный опыт общения авторов со студентами и аспирантами также говорит, что движение по цепочке «комплексные числа — кватернионы — бикватернионы» наиболее простой и эффективный путь к практическому освоению многих разделов и методов современной теоретической физики, особенно на начальном этапе обучения. Практика показывает, что даже ученики старших классов легко усваивают навыки работы с кватернионами и кватернионными параметризациями таких важнейших физических групп, как группа вращений и группа Лоренца.

Интерес к кватернионам и их приложениям в физике подтверждается многочисленными публикациями, которые при желании легко найти на научных страницах Интернета и в физико-математических журналах. Данная монография послужит читателю полезным багажом в путешествии по этой интересной и далеко неисчерпанной области исследований.

Авторы

ОТ АВТОРОВ

История кватернионов знала приливы и отливы интереса к ним. Первая мировая война привела к распаду «Международной ассоциации для содействия изучению кватернионов и родственных математических систем», а вместе с ассоциацией исчез элемент мистики в отношении к алгебре кватернионов и казалось, что отныне ее исключительности возвращен первозданный математический смысл.

Однако сегодня несостоительность столь ограниченного толкования исключительности кватернионов вполне очевидна. Все чаще в физической литературе кватернионы возникают в сочетании с такими экзотическими терминами, как «цвет», «аромат», число «поколений». Распространяется убеждение в неслучайности и нетривиальности совпадения ранга этой алгебры с размерностью пространства-времени.

В то же время следует подчеркнуть, что новая волна интереса к кватернионам возникла в первую очередь благодаря тому, что все эти годы отдельные исследователи в разных странах продолжали вести работу по развитию и использованию идей и методов кватернионного исчисления в теоретической физике от классической механики до квантовой теории поля.

Настоящая книга посвящена одному из таких направлений, связанному в основном с применением кватернионов для параметризации групп пространственно-временной симметрии с целью построения адекватного и единообразного аппарата для описания кинематики и динамики классических и квантовых полей. Кроме того, в ней содержится краткий исторический очерк.

В книгу включен материал, требующий различной степени подготовленности. Однако большинство параграфов вполне доступно студентам физико-математических специальностей.

Надеемся, что чтение даже отдельных разделов этой

книги позволит получить представление о применении кватернионов в физике. Если у читателя возникнет желание использовать кватернионы для решения конкретных задач или глубже ознакомиться с литературой по этому вопросу, авторы будут считать свою задачу выполненной.

Исследования, которые легли в основу этой монографии, оказались возможными благодаря поддержке со стороны коллективов лабораторий теоретической физики и физики высоких энергий Института физики АН БССР. Мы глубоко благодарны академику Ф. И. Федорову за плодотворные дискуссии, проходившие в той особой творческой атмосфере, которая отличает его научный семинар.

КРАТКИЙ ИСТОРИЧЕСКИЙ ОЧЕРК РАЗВИТИЯ КВАТЕРНИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЙ В ГЕОМЕТРИИ, МЕХАНИКЕ И ФИЗИКЕ

Кватернионы встречаются еще в XVIII в. в работах Л. Эйлера и К. Ф. Гаусса [1, 2]. Отметим также, что Б. О. Родригес в 1840 г. пришел к закону, эквивалентному правилу умножения кватернионов, при изучении сложения поворотов твердого тела [1—4]. Тем не менее создателем кватернионного исчисления принято считать выдающегося ирландского ученого В. Р. Гамильтона (1805—1865). В 1843 г. он независимо открыл кватернионы в результате поиска алгебраических объектов, имеющих в трехмерном пространстве ту же геометрическую интерпретацию, что и комплексные числа на плоскости. Такой подход оказался необычайно плодотворным, поскольку позволял оперировать геометрическими объектами как алгебраическими величинами. Поэтому не удивительно, что остаток своей жизни В. Р. Гамильтон посвятил разработке, популяризации и приложениям алгебры кватернионов в механике и физике. Среди многочисленных работ Гамильтона этого периода (см. ссылки в работах [3, 5, 6]) следует выделить две большие книги «*Lectures on Quaternions*» (1853) и «*Elements of Quaternions*» (1866). В. Р. Гамильтон полагал, что аппарат кватернионов сыграет роль, подобную исчислению флюксий Ньютона [7], лежащему в основе современного математического анализа.

В последующем развитии алгебры кватернионов и ее приложений в математике и физике условно выделим три направления.

К первому из них можно отнести чисто алгебраические работы А. Кэли, В. К. Клиффорда, Б. Пирса, К. С. Пирса, Г. Фробениуса, выполненные примерно с 1850 по 1900 г., в которых была установлена связь кватернионов с матрицами и определено место кватернионов в системе различных алгебр, т. е. доказаны положения, называемые соответственно теоремами Фробениуса и Гурвица [2, 8, 9].

Второе направление связано в основном с именами В. К. Клиффорда (1845—1879) и А. П. Котельникова (1865—1944). В работах Клиффорда получила дальнейшее развитие теория комплексных кватернионов (бикватернионов), берущая начало в трудах Гамильтона. Клиффорд впервые применил бикватернионы к описанию геометрии неевклидовых пространств постоянной кривизны и исследованию механики в этих пространствах, в идейном отношении восходящему к работам Пуансо, который возродил в начале прошлого века геометрический подход к проблемам механики (интерес к этому подходу был в известной мере утрачен из-за внушительных результатов, достигнутых благодаря аналитическим методам Лагранжа)*. В работах Пуансо, Мебиуса и Шаля установлена эквивалентность произвольного перемещения тела винтовому перемещению и положено начало изучению кинематики и статики, а также сформулировано понятие винта, развитое в работах Плюккера. Всестороннее исследование винтов проведено в капитальном труде английского ученого Р. Болла «Treatise on the theory of the screws» (1876). Клиффорд применил к формулировке теории винтов параболические (определенные над дуальными числами) и эллиптические (определенные над двойными числами) бикватернионы. Дуальные и двойные числа введены им как некоторое обобщение обычных комплексных чисел. Он показал, что с помощью дуальных чисел можно дать описание винтов в обычном трехмерном евклидовом пространстве, а с помощью эллиптических бикватернионов — описание винтов в трехмерном пространстве постоянной положительной кривизны (пространстве Римана в узком смысле слова, или эллиптическом пространстве). Х. Кокс в 1883 г. показал, что бикватернионы, определенные над обычными (гиперболическими) комплексными числами, могут быть использованы для описания винтов в трехмерном пространстве отрицательной постоянной кривизны (пространстве Лобачевского, или гиперболическом пространстве).

Считается, что наиболее полно и последовательно винтовое исчисление развито в работах А. П. Котельникова в тесной связи с его теорией векторов неевклидо-

* Известно высказывание Н. И. Лобачевского: «Оставалось бы исследовать, какого рода перемена произойдет от введения воображаемой Геометрии в Механику...» [10].

вых пространств. Используя получившие в то время широкое признание результаты А. Кэли и Ф. Клейна по проектной интерпретации неевклидовой геометрии, Котельников, естественно, переходит от рассмотрения векторов как упорядоченных пар точек к изучению пар плоскостей (роторов, по его терминологии) и пар прямых (винтов). Близкие к работам Котельникова исследования были выполнены Э. Штуди [11—13].

В результате выяснилось, что статика и кинематика в трехмерных пространствах Евклида, Лобачевского и Римана (постоянной кривизны) полностью определяются геометрией или группой движений этих пространств. При этом понятие инварианта группы движений лежит в основе определения абсолютно твердого тела.

Новую жизнь эти идеи получили в связи с принципом геометрического конвенционализма Пуанкаре, утверждавшего, что выбор геометрии для описания физических явлений, вообще говоря, произволен и может быть предметом соглашения. Определяющими при этом являются соображения математического удобства, что приводит к появлению эффективной неевклидовой геометрии уже в ряде задач традиционной механики.

Работы А. П. Котельникова не приобрели широкой известности. О современном состоянии исследований по теории винтов можно получить представление из монографии [13]. В настоящее время ведутся также работы, развивающие идеи В. К. Клиффорда, Х. Кокса и А. П. Котельникова по применению комплексных чисел различного вида (дуальных, двойных и обычных) к описанию свойств симметрии пространств постоянной кривизны с единой точки зрения и к построению классической и квантовой механики в этих пространствах (см., например, работу [14] и библиографию к ней).

Выдвинутая Котельниковым идея построения теории векторов в неевклидовых пространствах постоянной кривизны в данной книге развивается на основе сочетания кватернионного исчисления с векторной параметризацией [16] групп движений этих пространств. Сформулированная при этом теория векторов трехмерного пространства Лобачевского применяется к описанию релятивистской кинематики реакций элементарных частиц. Третье направление развития кватернионного исчисления и его физических приложений можно условно характеризовать как аналитическое.

После В. Р. Гамильтона значительную роль в развитии приложений кватернионного исчисления в физике, а также в пропаганде широкого применения кватернионов в различных областях естествознания сыграл П. Г. Тэт (1831—1901). Вероятно, под его влиянием Дж. К. Максвелл использовал кватернионы в своем «Трактате по электричеству и магнетизму» [17]. Дальнейшее развитие теории электромагнетизма в работах О. Хэвисайда имело, как известно, практическую направленность, в то же время он много сделал для развития математических методов, используемых в теории электромагнетизма. В частности, некоторые методические неудобства использования кватернионов, отмеченные самим Дж. К. Максвеллом (отрицательность квадрата векторной части кватерниона, сопоставляемой с квадратом длины векторов), побудили Хэвисайда построить для трехмерного евклидова пространства векторное исчисление, фактически не связанное с кватернионами, в котором отдельно определялись скалярное и векторное произведения векторов [18].

Независимо от О. Хэвисайда векторное исчисление было построено Д. В. Гиббсом. Сторонники использования кватернионного исчисления, возглавляемые П. Г. Тэттом, выступали против векторного исчисления. Историк математики Д. Я. Стройк следующим образом характеризует сложившуюся ситуацию: «Некоторые британские математики видели в исчислении кватернионов нечто вроде «универсальной арифметики» Лейбница, что, конечно, вызвало оппозицию (Хэвисайд против Тета) и из-за этого слава кватернионов значительно потускнела» [2, 21].

Необходимо отметить, что Дж. К. Максвелл, использовавший в своем «Трактате...» векторные части кватернионов и тем самым давший мощный толчок развитию векторного исчисления, судя по некоторым его высказываниям, был близок к тому, чтобы считать кватернионное исчисление чем-то вроде «универсальной арифметики» [19, 20]. Подробно о роли теории электромагнетизма в формировании векторного исчисления в трехмерном пространстве можно прочитать в статьях Н. В. Александровой [21]. Там же содержатся некоторые сведения о взаимоотношениях П. Г. Тета и его сторонников с О. Хэвисайдом и Д. В. Гиббсом.

К концу прошлого — началу нашего века точка зре-

ния приверженцев векторного исчисления, независимого от кватернионов, восторжествовала, однако история приложений кватернионов в физике, так тесно связанная с уравнениями Максвелла, не закончилась. Как известно, уравнения Максвелла явились исходным пунктом в создании специальной теории относительности (СТО). После четырехмерной формулировки СТО в 1908 г. Г. Минковским А. В. Конвой (1875—1950) в 1911 г. и независимо Л. Зильберштейн в 1912 г. построили кватернионный аналог этой теории [6]. При этом выяснилось, что использование полных кватернионов, а не только их векторных частей, предоставляет естественную возможность записи уравнений Максвелла в виде, явно ковариантном относительно преобразований Лоренца. Такая запись уравнений Максвелла полностью эквивалентна их тензорной формулировке, что легко проверяется при выборе явного представления бикватернионов матрицами 4×4 . Использование полных четырехмерных кватернионов для формулировки уравнений электромагнитного поля имеет еще одну важную особенность. Уравнения Максвелла в кватернионной форме выглядят во многом аналогично соотношениям Коши—Римана в теории функций комплексного переменного и в этом смысле играют роль условий кватернионной аналитичности.

Условия, подобные уравнениям Максвелла (но для действительных кватернионов), легли в основу теории кватернионной аналитичности, которая была построена Р. Фютером преимущественно в 30-е годы нашего столетия [22, 23]. Примером обобщения этой теории на бикватернионы и электродинамику может служить работа К. Имаеды [24]. Существует ряд возможностей для определения аналитичности кватернионных функций от кватернионных аргументов или кватернионной моногенности. В связи с этим можно отметить различные, более или менее удачные попытки построения теории кватернионных функций кватернионных аргументов [25—27]. Однако работы Фютера, вероятно, являются наиболее конструктивными уже хотя бы потому, что они связаны с уравнениями Максвелла. Здесь можно сослаться на авторитет известного американского математика Р. Беллмана, который, имея в виду именно работы Фютера, отметил, что для кватернионов развита довольно полная теория, во многом аналогичная обычной теории функ-

ций комплексного переменного [28]. Следует указать также на попытки использования теории аналитических кватернионных функций по Фютеру в теории калибровочных полей и в теории сигма-моделей [29].

Кратко охарактеризуем применение кватернионов в физике (преимущественно в физике элементарных частиц) в послевоенный период. Оно основывается на возможности параметризации с их помощью важных для практических применений групп пространственно-временной и внутренней симметрии, а также ряда их представлений. Использование объектов одной алгебраической природы позволяет при этом существенно упростить анализ соответствующих динамических уравнений и их решений. Характерными для данного периода развития приложений кватернионного исчисления в физике являются работы [30—35]. В нашей книге основное внимание сосредоточено на исследовании комплексной группы Лоренца $SO(4, C)$ и ее подгрупп.

Особый интерес представляет наличие глубокой связи между векторной и кватернионной параметризациями преобразований этих групп. Векторная параметризация группы Лоренца $SO(3, 1)$ и ряда ее подгрупп впервые предложена Ф. И. Федоровым [15]. Исключительное математическое изящество в сочетании с простотой и наглядностью получаемых формул делает эту параметризацию необычайно удобным аппаратом исследования в различных областях теоретической физики. Исчерпывающее изложение данного подхода и библиография содержится в работе [16]. Рассмотрение пространственно-временной симметрии в предлагаемой книге будет вестись с учетом тесной связи векторной параметризации с кватернионным исчислением.

Другим приложением кватернионов в данный период является обобщение квантовой механики, состоящее в замене стандартного гильбертова пространства этой теории, определенного над полем комплексных чисел, на гильбертово пространство, определенное над телом кватернионов [36—39]. Естественно, что при этом обычная абелева группа калибровочных преобразований квантовой механики $U(1)$ переходит в неабелеву калибровочную группу $SU(2)$. Существуют также попытки определения гильбертова пространства над октавами, являющимися естественным обобщением кватернионов [39—41]. Известная выделенность исключитель-

ных алгебр (кватернионов и октав) иногда используется для обоснования вида группы внутренней симметрии теории элементарных частиц [42—46]. Именно поэтому в физике элементарных частиц впервые стали фигурировать исключительные группы как группы внутренней симметрии [40, 47]. Следует также упомянуть о широком применении кватернионов и октав в алгебраическом подходе в квантовой теории поля, на который возлагаются определенные надежды в связи с некоторыми принципиальными трудностями стандартной схемы [48]. Одно из направлений алгебраического подхода основано на использовании лиево-иордановых алгебр, простейшие примеры которых дают алгебры кватернионов и октав [40, 47, 48].

Как уже упоминалось, существуют попытки применить понятие кватернионной аналитичности при решении классических уравнений Янга—Миллса, описывающих неабелевые векторные калибровочные поля. Естественность и удобство применения кватернионов в задачах этого типа связаны с тем, что самодуальные решения уравнений Янга—Миллса по существу кватернионы. Это вытекает, очевидно, из того, что представление кватернионов матрицами 4×4 и соответствующие самодуальные тензоры напряженностей этих полей совпадают. Подчеркнем также, что в работах Аттья—Уорда, Белавина—Захарова задача описания инстантонов (самодуальных решений уравнений Янга—Миллса) была сведена к проблеме алгебраической геометрии, которая рассматривалась Аттья, Хитчином, Дринфельдом и Маниным. При этом существенным моментом явилось представление вектор-потенциалов калибровочных полей с помощью матриц (прямоугольных в случае произвольного топологического заряда инстанtonного поля), заданных над телом кватернионов [49].

Наконец, упомянем о применении бикватернионов в общей теории относительности (ОТО). Характерна в этом отношении работа Рэстола [50], а также приложение в книге Н. В. Мицкевича [51]. На наш взгляд, наиболее конструктивным направлением здесь является представление тетрад как 4-векторов, заданных над бикватернионами.

НЕКОТОРЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

§ 1. ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ АЛГЕБРЫ, БИКВАТЕРНИОНЫ

К исключительным алгебрам относятся алгебры вещественных и комплексных чисел, кватернионов и октав (октанионов) [8, 9]. Вначале напомним основные понятия алгебры комплексных чисел [52].

Комплексными числами называются выражения вида $z = a + ib$, где a и b — вещественные числа, i — некоторый символ, удовлетворяющий соотношению $i^2 = -1$, причем следует также учесть, что i коммутирует с числами a и b . Число a называется действительной частью комплексного числа z , b — его мнимой частью. Для комплексных чисел z и z' вводятся операции сложения и умножения:

$$z + z' = a + ib + a' + ib' = (a + a') + i(b + b'), \quad (1.1)$$

$$zz' = aa' - bb' + i(ab' + a'b). \quad (1.2)$$

Отметим, что если в выражениях (1.1) и (1.2) положить $b = b' = 0$, то вместо z и z' получим вещественные числа a , a' , а правила сложения и умножения (1.1) и (1.2) перейдут в сложение и умножение вещественных чисел. Нетрудно проверить, что правила сложения и умножения комплексных чисел (1.1) и (1.2) обладают свойствами коммутативности (переместительности) и ассоциативности (сочетательности). Наконец, справедлив дистрибутивный (распределительный) закон, устанавливающий связь между этими действиями:

$$z(z' + z'') = zz' + zz''. \quad (1.3)$$

Каждому комплексному числу z ставится в соответствие число $z^* = a - ib$, называемое комплексно сопряженным, и, таким образом, для комплексных чисел вводится операция $(*)$ — комплексного сопряжения. Произведение

комплексного числа z на число, ему комплексно сопряженное, дает вещественное положительное число:

$$zz^* = a^2 + b^2. \quad (1.4)$$

Число

$$|z| = \sqrt{zz^*} = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (1.5)$$

называется модулем комплексного числа. Для модуля произведения двух комплексных чисел z и z' имеет место тождество

$$|zz'| = |z||z'|. \quad (1.6)$$

Комплексные числа образуют двумерное вещественное линейное пространство, поскольку если поставить в соответствие комплексному числу $z = a+ib$ двумерный вектор (a, b) , то из (1.1) следует формула сложения двумерных векторов (a, b) и (a', b') . Для сложения комплексных чисел, как и для сложения двумерных векторов, выполняются переместительный закон, сочетательный закон и условие разрешимости уравнения

$$z + w = z', \quad (1.7)$$

где w — неизвестное комплексное число, которое определено однозначно:

$$w = z' - z.$$

В векторном вещественном пространстве определяется умножение вектора на вещественное число λ :

$$\lambda(a, b) = (\lambda a, \lambda b), \quad (1.8)$$

для которого выполняются:

а) сочетательный закон

$$\lambda(\mu a, \mu b) = (\lambda\mu)(a, b),$$

где μ , как и λ , — вещественное число;

б) распределительный закон по отношению к числовому множителю, согласно которому

$$\lambda \{(a, b) + (a', b')\} = \lambda(a, b) + \lambda(a', b');$$

в) распределительный закон по отношению к векторному множителю, согласно которому

$$(\lambda + \mu)(a, b) = \lambda(a, b) + \mu(a, b).$$

Из (1.8) следуют также

г) правило умножения на 0-число:

$$0 \cdot (a, b) = (0, 0);$$

д) правило умножения на единицу:

$$1 \cdot (a, b) = (a, b);$$

е) правило умножения на $(0, 0)$ -вектор:

$$\lambda(0, 0) = (0, 0).$$

Нетрудно видеть, что все вышеперечисленные свойства двумерных векторов можно перенести на комплексные числа, используя свойства умножения комплексных чисел и взяв в качестве множителей λ частный случай комплексных чисел — вещественные числа.

С учетом того, что комплексному числу соответствует двумерный вектор, получим представление комплексного числа в виде 2×2 -матрицы. Действительно, в произведении комплексных чисел

$$z'' = zz'$$

представим $z' = a' + i b'$ в виде двумерного вектор-столбца $\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$, а z в виде вектор-столбца $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ и воспользуемся правилом матричного умножения. В результате получим для z представление в виде 2×2 -матрицы

$$z \rightarrow \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}. \quad (1.9)$$

Легко проверить, что сложению и умножению матриц (1.9) соответствуют сложение и умножение отвечающих им комплексных чисел, причем свойства сложения и умножения матриц (1.9) совпадают со свойствами сложения и умножения комплексных чисел.

Все остальные свойства комплексных чисел также можно сформулировать на языке матриц (1.9). Например, комплексно-сопряженному числу z^* соответствует матрица

$$z^* \rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \quad (1.10)$$

получаемая из матрицы (1.9) транспонированием, что приводит к замене знака перед элементами b и, очевидно, соответствует определению сопряжения комплексного числа.

Взяв определитель матриц (1.9) и (1.10), убедимся, что он совпадает с квадратом модуля комплексного числа. Зная определитель матрицы (1.9), найдем обратную

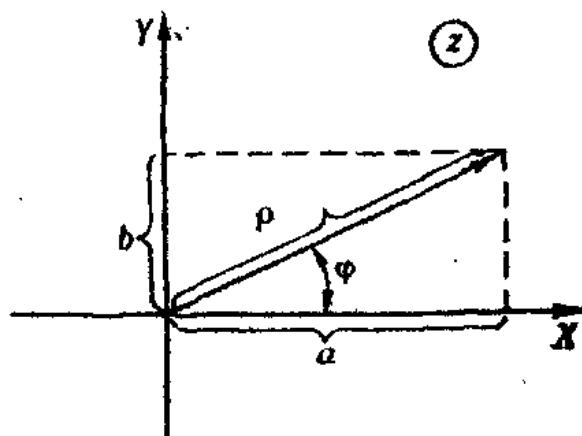


Рис. 1.1

ей матрицу, которая, согласно определению обратных матриц [52], равна

$$\frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \quad (1.11)$$

что в свою очередь соответствует комплексному числу z^{-1} , удовлетворяющему условию $zz^{-1}=1$. Определение обратного комплексного числа z^{-1} решает задачу определения операции деления комплексных чисел. Данная задача эквивалентна решению уравнения

$$zz' = z''$$

относительно неизвестного z' , когда z и z'' предполагаются известными.

Геометрическая интерпретация комплексных чисел состоит в том, что комплексным числам ставятся в соответствие точки евклидовой плоскости — двумерные векторы (рис. 1.1). При этом вещественная часть комплексного числа a откладывается по оси абсцисс, а коэффициент при мнимой единице b — по оси ординат. Переходя к полярным координатам ρ, ϕ на плоскости X, Y , получим тригонометрическую форму записи комплексного числа

$$z = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi) = \rho e^{i\varphi}, \quad (1.12)$$

где $\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\operatorname{tg} \varphi = b/a$ и $\rho \cos \varphi = a$, $\rho \sin \varphi = b$. Представление комплексного числа z в виде матрицы (1.9) в координатах $\rho\varphi$ есть матрица

$$\rho \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}. \quad (1.13)$$

Очевидно, что 2×2 -матрица (1.13) есть матрица поворота на угол φ в плоскости X, Y , умноженная на модуль комплексного числа. Следовательно, геометрический смысл произведения двух комплексных чисел zz' сводится к повороту (например, вектора, соответствующего z') на угол φ и растяжению его длины (модуля) ρ' в ρ раз. В справедливости сказанного легко убедиться непосредственными геометрическими построениями.

Опираясь на вышеизложенные сведения о комплексных числах, приведем несколько необходимых в дальнейшем определений.

Прежде всего дадим определение алгебры [8, 9, 52, 53]. Алгеброй называется линейное пространство A , для элементов которого задана операция умножения, обладающая следующими свойствами:

$$\begin{aligned} ab &\in A, \\ a(b+c) &= ab + ac, \\ (a+b)c &= ac + bc, \\ \alpha(ab) &= a(\alpha b) + (\alpha a)b \end{aligned} \quad (1.14)$$

для любых $a, b, c \in A$ и любого числа α . Алгебра A называется вещественной, если A — вещественное линейное пространство и α в этом случае любое вещественное число, и комплексной, если A — комплексное линейное пространство. Соответственно α в последнем случае — любое комплексное число.

Очевидно, комплексные числа образуют двумерную вещественную алгебру и одномерную комплексную алгебру. Вещественные числа образуют одномерную вещественную алгебру. Под размерностью алгебры понимается размерность линейного пространства A [53]. Алгебра называется коммутативной, если операция умножения, определенная в ней, коммутативна, и ассоциативной, ес-

ли операция умножения ассоциативна. Алгебра называется алгеброй с делением, если в ней всегда разрешимо относительно x уравнение

$$ax = b, \quad (1.15)$$

где $a, x, b \in A$. Наконец, алгебра называется нормированной, если в ней определена норма, т. е. каждому элементу алгебры поставлено в соответствие положительное вещественное число. Алгебры вещественных и комплексных чисел являются коммутативными, ассоциативными, нормированными алгебрами с делением. Норма (абсолютная величина или модуль) (1.5) для комплексного числа вводится с помощью операции комплексного сопряжения. Норма вещественного числа определяется следующим образом:

$$|a| = \sqrt{a^2}.$$

Для нормы вещественных чисел, так же как и для комплексных, справедливо соотношение (1.6).

Исключительные алгебры по своим свойствам наименее отличаются от алгебр вещественных и комплексных чисел, которые в дальнейшем будем обозначать R, C . В частности, все исключительные алгебры являются алгебрами с делением и для нормы в них справедливо соотношение, аналогичное (1.6). По мере рассмотрения других исключительных алгебр сказанное здесь будет уточняться и приобретать математически более строгие формулировки.

Наконец отметим разницу между двумерными векторами вообще и двумерными векторами, которые ставятся в соответствие комплексным числам, в частности. Двумерные векторы, как уже говорилось, образуют элементы линейного пространства, которое является более широким понятием, чем алгебра. Эту разницу можно подчеркнуть, например, прибегнув к понятию допустимых линейных преобразований в этих пространствах. Самое общее линейное преобразование для комплексных чисел задается умножением комплексного числа z на комплексное число z' с последующим прибавлением к результату умножения некоторого комплексного числа t :

$$z'' = z'z + t. \quad (1.16)$$

Геометрический смысл такого преобразования сводится к тому, что преобразуемый 2-вектор, соответствующий z ,

поворачивается на некоторый угол ϕ' , определяемый z' , $\operatorname{tg} \phi' = b'/a'$, растягивается в ρ' ($\rho' = \sqrt{a'^2 + b'^2}$) раз с последующим сдвигом в плоскости z на c . Такое преобразование задается, как нетрудно подсчитать, четырьмя параметрами. В двумерном, вещественном линейном пространстве, на элементы которого (x, y) никаких дополнительных ограничений (например, чтобы они образовывали алгебры), самым общим неоднородным линейным преобразованием будет преобразование вида

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + c, \\ y' &= vx + dy + d, \end{aligned} \quad (1.17)$$

которое можно записать в векторной форме:

$$X' = AX + B, \quad (1.18)$$

где $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ — двумерные вектор-столбцы, а $A = \begin{pmatrix} a & b \\ v & d \end{pmatrix}$ — произвольная 2×2 -матрица

с вещественными элементами a, b, v, d и с единственным накладываемым на нее ограничением $\det A \neq 0$ (\det обозначает определитель). Преобразования (1.16) и (1.18) отличаются по числу параметров в комплексном числе z' (1.16) и в матрице A (1.18).

Таким образом, на примере допустимых линейных преобразований можно видеть разницу, существующую между произвольным двумерным линейным пространством и двумерным пространством, соответствующим комплексным числам. Указанная разница является следствием задания операции умножения. Справедление операции сопряжения для комплексных чисел эквивалентно определению нормы в алгебре комплексных чисел или заданию на двумерной плоскости расстояния между двумя произвольными точками. При этом говорят, что в двумерном пространстве задана метрика евклидова пространства. Если потребовать, чтобы преобразования (1.18) сохраняли неизменным расстояние между двумя вещественными точками двумерного евклидова пространства (длину вектора), то они сводятся к преобразованиям вращения двумерной плоскости и сдвигам. Такие преобразования называются движениями двумерной ев-

клиновой плоскости, и они, как было показано выше, могут быть заданы для комплексных чисел с помощью операций, определенных только для них, а именно с помощью умножения комплексных чисел и их сложения. При этом вращение задается умножением на комплексное число единичного модуля. Данное свойство присуще не только комплексным числам, но и кватернионам, что оказывается весьма удобным в различных физических задачах.

Алгебра кватернионов H_R может быть задана следующими соотношениями между четырьмя базисными элементами e_0, e_1, e_2, e_3 [8]:

$$e_0 e_k = e_k e_0 = e_k, \quad e_0^2 = e_0, \quad e_l e_k = \varepsilon_{lkh} e_j - \delta_{lk} e_0, \quad (1.19)$$

где l, k, j пробегают значения 1, 2, 3; ε_{lkh} — полностью антисимметричный символ Леви—Чивита; $\varepsilon_{lkh} = \pm 1$, если $l \neq k, k \neq j, l \neq j$, причем последовательности индексов l, k, j , получаемой из последовательности 1, 2, 3 четным числом перестановок, соответствует знак плюс, а получаемой нечетным числом перестановок — знак минус; $\varepsilon_{lkh} = 0$, если каких-либо два индекса принимают одинаковые значения; символ Кронекера $\delta_{lk} = 1$ при $l = k$ и $\delta_{lk} = 0$ при $l \neq k$.

Произвольный кватернион x определяется как линейная комбинация базисных элементов

$$x = x_0 e_0 + x_k e_k, \quad (1.20)$$

x_0, x_k — вещественные числа.

В дальнейшем для кватерниона удобно будет использовать исторически сложившееся обозначение в виде суммы скаляра и трехмерного вектора

$$x = x_0 + \mathbf{x} = (x)_S + (x)_V, \quad (1.21)$$

где

$$x_0 = (x)_S \stackrel{\text{def}}{=} x_0 e_0, \quad \mathbf{x} = (x)_V \stackrel{\text{def}}{=} x_k e_k.$$

Тогда, согласно (1.19), произведение x'' двух кватернионов x' и x задается соотношением

$$\begin{aligned} x'' &= x_0'' + \mathbf{x}'' = x' x = (x'_0 + \mathbf{x}') (x_0 + \mathbf{x}) = \\ &= (x'_0 e_0 + x'_l e_l) (x_0 e_0 + x_k e_k) = x'_0 x_0 + (x'_0 x_k + x'_l x_k) e_k + \\ &\quad + x'_l x_k (\varepsilon_{lkh} e_j - \delta_{lk} e_0), \end{aligned} \quad (1.22)$$

т. е.

$$x''_0 = x'_0 x_0 - (x' x), \quad x'' = x'_0 x - x' x_0 + [x' x],$$

где $(x x') \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{2} (x x' + x' x),$ (1.22')

$$[x x'] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} (x x' - x' x).$$

Для кватернионов определяется операция кватернионного сопряжения, которая кватерниону $x = x_0 + x'$ ставит в соответствие кватернион $\bar{x} = x_0 - x'$. Легко убедиться, используя формулу (1.22), что произведение xx' является скаляром. Это означает, что в линейном пространстве алгебры кватернионов может быть определена норма (модуль кватерниона)

$$N(x) = \sqrt{\overline{xx}} = \sqrt{x_0^2 + (x^2)} = \sqrt{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \quad (1.23)$$

где

$$(x^2) \stackrel{\text{def}}{=} (\bar{x} x) = -x^2,$$

для которой выполняется тождество

$$N(x) N(x') = N(xx'). \quad (1.24)$$

Используя (1.22), нетрудно показать, что, подобно тому как умножению на комплексное число соответствует линейное преобразование 2-вектора, представляющего второй сомножитель, произведению кватернионов можно поставить в соответствие линейное преобразование 4-векторов. Расписывая кватернион (1.22) по компонентам

$$\begin{aligned} x'_1 &= x'_0 x_1 - x'_3 x_2 + x'_2 x_3 + x'_1 x_0, \\ x'_2 &= x'_0 x_2 + x'_3 x_1 - x'_1 x_3 + x'_2 x_0, \\ x'_3 &= -x'_2 x_1 + x'_1 x_2 + x'_0 x_3 + x'_3 x_0, \\ x'_0 &= -x'_1 x_1 - x'_2 x_2 - x'_3 x_3 + x'_0 x_0 \end{aligned} \quad (1.25)$$

и ставя в соответствие x'' и x 4-вектор-столбцы, получаем, что соотношению (1.22) соответствует преобразование

$$x'' = Ax, \quad (1.26)$$

где

$$x'' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_0 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} x'_0 - x'_3 & x'_1 & x'_2 \\ x'_3 & x'_0 - x'_1 & x'_2 \\ -x'_2 & x'_1 & x'_0 + x'_3 \\ -x'_1 - x'_2 - x'_3 & x'_0 \end{pmatrix}.$$

Матрица A является представлением кватерниона x' в том смысле, что A можно записать в форме (1.20), где роль кватернионных единиц e_0, e_k будут играть следующие 4×4 -матрицы:

$$e_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.27)$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

которые удовлетворяют соотношениям (1.19) при обычных правилах матричного умножения. Таким образом, нами получено представление произвольного кватерниона в виде матрицы 4×4 . Свойства некоммутативности и ассоциативности, которые следуют из (1.19), заведомо выполняются для матриц (1.27).

Для кватернионов $x \neq 0$ ($x = 0 \Rightarrow x_0 = x_1 = x_2 = x_3 = 0$) всегда определен обратный кватернион. Кватернион x^{-1} , обратный кватерниону x , равен

$$x^{-1} = \frac{\bar{x}}{N^2(x)}, \quad (1.28)$$

и, следовательно, кватернионы образуют алгебру с делением. Для них всегда разрешимо уравнение

$$xx' = x''$$

относительно x' при заданных x и x'' .

Сложение кватернионов обладает теми же свойствами, что и сложение комплексных чисел. Умножение кватернионов, как уже отмечалось, ассоциативно, т. е.

$$(xx')x'' = x(x'x''), \quad (1.29)$$

где x, x', x'' — кватернионы, и некоммутативно, т. е.

$$xx' \neq x'x.$$

Для модуля (нормы) кватернионов справедливо соотношение (1.24), аналогичное соотношению (1.6) для комплексных чисел, которое называют также тождеством для четырех квадратов (произведение двух сумм четырех квадратов равно сумме четырех квадратов) или тождеством Эйлера. Таким образом, если сравнивать свойства алгебры комплексных чисел и алгебры кватернионов, легко видеть, что все свойства последней совпадают со свойствами алгебры комплексных чисел, за исключением свойства коммутативности. При этом аналогично тому, как из алгебры комплексных чисел с мнимой частью, равной нулю, следует алгебра вещественных чисел, полагая равными нулю любые две из трех векторных компонент кватернионов, получаем алгебру комплексных чисел. В этом смысле обычно говорят, что комплексные числа образуют коммутативную подалгебру алгебры кватернионов. И наоборот, алгебру кватернионов можно рассматривать как удвоение алгебры комплексных чисел. Учитывая, что $e_3 = e_1e_2$, кватернион x можно представить в виде

$$\begin{aligned} x = x_0e_0 + x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 &= x_0e_0 + x_1e_1 + \\ &+ (x_2e_0 + x_3e_1)e_2. \end{aligned}$$

Вводя обозначения $z_1 = x_0e_0 + x_1e_1$, $z_2 = x_2e_0 + x_3e_1$, имеем

$$x = z_1e_0 + z_2e_2. \quad (1.30)$$

Выражение (1.30) называется симплектическим разложением кватерниона. Используя данное разложение и поступая аналогично тому, как это делалось при получении представления кватернионов матрицами 4×4 , можно установить связь между кватернионами и матрицами 2×2 . Действительно, в произведении кватернионов $x'' = x'x$ представим каждый из кватернионов в виде симплектического разложения $x'' = z'_1e_0 + z'_2e_2$, $x = z_1e_0 + z_2e_2$

и будем рассматривать их как комплексные 2-векторы-строки. Тогда произведение кватернионов представляется как

$$(z_1^*, z_2^*) = (z_1, z_2) \begin{pmatrix} z_1' & z_2' \\ -z_1'^* & z_2'^* \end{pmatrix}. \quad (1.31)$$

Учитывая произвол в определении базиса комплексных чисел и проводя замену $e_0 \rightarrow 1$, $e_1 \rightarrow i$, получаем

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} z_1' & z_2' \\ -z_2'^* & z_1'^* \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_0' + ix_1' & x_2' + ix_3' \\ -x_2' + ix_3' & x_0' - ix_1' \end{pmatrix} = \\ &= x_0' \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + x_1' \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + x_2' \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + x_3' \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (1.32)$$

где 2×2 -матрицы реализуют представление алгебры кватернионов, т. е.

$$\begin{aligned} e_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \\ e_3 &= \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Матрицы (1.33) с точностью до умножения на $-i$ и перестановки индексов 1 и 3 совпадают с известными матрицами Паули [54]

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.34)$$

которые обладают следующими коммутационными свойствами:

$$\begin{aligned} \{\sigma_k \sigma_q\}_- &= \sigma_k \sigma_q - \sigma_q \sigma_k = 2i \epsilon_{kqp} \sigma_p, \quad \{\sigma_k, \sigma_q\}_+ = \\ &= \sigma_k \sigma_q + \sigma_q \sigma_k = 2\delta_{kq}, \end{aligned} \quad (1.35)$$

где ϵ_{kqp} — антисимметричный символ Леви—Чивита, δ_{kq} — симметричный символ Кронекера ($k, q, p = 1, 2, 3$). Матрицы Паули ортогональны в том смысле, что

$$\text{Sp}(\sigma_\mu \sigma_\nu) = 2\delta_{\mu\nu}, \quad (1.36)$$

в данном случае индексы μ, ν пробегают значения 0, 1, 2, 3. Символ Sp означает операцию взятия следа матрицы — сумму ее диагональных членов. Любая произвольная вещественная 2×2 -матрица A может быть разложена с комплексными коэффициентами по базису матриц Паули, т. е.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A_0\sigma_0 + A_1\sigma_1 + A_2\sigma_2 + A_3\sigma_3 = A_\mu\sigma_\mu. \quad (1.37)$$

Коэффициенты A_μ в силу ортогональности матриц σ_μ (1.36) могут быть определены однозначно по матрице A :

$$A_\mu = \frac{1}{2} \text{Sp}(\sigma_\mu A). \quad (1.38)$$

Очевидно, что и произвольную комплексную матрицу 2×2 можно представить в виде (1.37) разложения по матрицам Паули с коэффициентами, определяемыми по формуле (1.38). Отметим, что аналогично (1.36) — (1.38) для кватернионов имеют место соотношения

$$(e_\mu e_\nu)_0 = \delta_{\mu\nu}, \quad x = x_\mu e_\mu, \quad x_\nu = (xe_\nu)_0.$$

Матрицы Паули используются в квантовой механике при описании частиц со спином. Между алгеброй матриц Паули и алгеброй кватернионов, несмотря на указанное выше соответствие, т. е. $e_0 \rightarrow \sigma_0 = I$, $e_1 = -i\sigma_1$, $e_2 = -i\sigma_2$, $e_3 = -i\sigma_3$, есть существенное различие. Оно связано с тем, что кватернионы — это математический объект, определенный над вещественными числами. Иными словами, коэффициенты разложения произвольного кватерниона x по набору базисных элементов вещественны. Для кватерниона определена операция кватернионного сопряжения, которой на языке матриц Паули соответствует операция матричного транспонирования. Операция комплексного сопряжения не имеет аналога для кватернионов.

Полное соответствие между произвольными линейными комбинациями матриц Паули и единичной матрицы можно установить с такой математической конструкцией, как комплексные кватернионы или бикватернионы. Алгебру бикватернионов будем обозначать символом H_c .

Бикватернионы общего вида можно определить как

линейные комбинации с комплексными коэффициентами 4-базисных элементов, для которых алгебра задается соотношениями (1.19). Аналогично введенным выше кватернионам бикватернион z есть

$$z = z_0 e_0 + z_k e_k, \quad (1.39)$$

или

$$z = z_0 + z, \quad (1.40)$$

где $z_0, z_k (k = 1, 2, 3)$ — комплексные числа. Очевидно, что для бикватернионов наряду с операцией кватернионного сопряжения определена операция комплексного сопряжения. И если операция кватернионного сопряжения бикватерниону $z = z_0 + z$ ставит в соответствие бикватернион $\bar{z} = z_0 - z$, то операция комплексного сопряжения ставит бикватерниону $z = z_0 + z$ комплексно сопряженный бикватернион $\bar{z} = z_0^* + z^* = z_0^* e_0 + z_k^* e_k$.

Отметим некоторые свойства, делающие алгебру бикватернионов существенно отличной от алгебры кватернионов. Произведение бикватерниона z на сопряженный ему бикватернион \bar{z} не является нормой, так как в общем случае это комплексное число. Однако эта билинейная форма будет играть важную роль в дальнейших построениях в связи со следующими обстоятельствами. Первое: для данной билинейной формы, как и для нормы кватерниона, справедливо соотношение (1.24), т. е. для произведения двух бикватернионов $z' = z'_0 + z'$ и $z = z_0 + z$ $z'z$ всегда справедливо соотношение $(z'z)(\bar{z}'\bar{z}) = (z'\bar{z}')(\bar{z}z)$. Второе: указанная билинейная форма может равняться нулю и тогда, когда сам бикватернион отличен от нуля. В этом случае для бикватерниона не определен обратный бикватернион и, следовательно, не разрешимо уравнение

$$z'z = z''$$

при заданных z', z'' , если z' обладает указанным свойством, т. е. $z' \neq 0, z\bar{z}' = 0$. Поэтому алгебра бикватернионов не является алгеброй с делением в отличие от алгебры кватернионов. Следовательно, алгебра бикватернионов не является исключительной алгеброй, однако в том случае, когда билинейная форма $z\bar{z}$ бикватерниона z отлична от нуля, ее свойства максимально близки свойствам исключительной алгебры (алгебры кватернионов), что делает ее особенно удобной в приложениях. Это сущест-

венно, поскольку именно бикватернионы находят применение для описания свойств физического пространства времени.

Бикватернионы и кватернионы являются частным случаем более общей математической конструкции — алгебры Клиффорда.

Алгебра Клиффорда задается n образующими e_k , где $k = 1, 2, \dots, n$, для которых выполняются следующие соотношения [53]:

$$e_k e_j + e_j e_k = 2\delta_{kj}. \quad (1.41)$$

Базис алгебры Клиффорда E_s образуют $e_0 = -e_1^2$ ($e_0 e_k = -e_k e_0$), n образующих e_k и всевозможные произведения, допускаемые соотношением (1.41), — всего 2^n элементов ($s = 0, 1, \dots, 2^n$). С этой точки зрения кватернионы можно задать как алгебру Клиффорда с двумя образующими e_1, e_2 . Полный базис такой алгебры Клиффорда находим, взяв все независимые произведения элементов e_1, e_2 , а именно $-e_1^2 = -e_2^2 = e_0 = E_0$, $E_3 = e_3 = e_1 e_2$, и дополнив их самими образующими $E_1 = e_1$ и $E_2 = e_2$. Таким образом, мы построили базис алгебры кватернионов как частный случай алгебры Клиффорда.

Бикватернионы можно рассматривать как алгебру Клиффорда с тремя образующими e_1, e_2, e_3 . Возьмем все возможные независимые произведения: $e_1 e_4 = E_4$, $e_3 e_2 = -E_5$, $e_1 e_3 = E_6$, $e_1 e_2 e_3 = E_7$, $E_0 = e_0 = -e_1^2 = -e_2^2 = -e_3^2$, дополним их образующими, которые обозначим E_1, E_2, E_3 , и получим восемь базисных элементов. Свойства их, по определению, задаются условием (1.41). Используя данное условие, легко убедиться, что множество указанных восьми базисных элементов замкнуто относительно операции умножения (т. е. какие бы мы ни брали произведения из данных восьми элементов, они всегда будут выражаться только через данные восемь элементов), таким образом, это множество действительно образует алгебру. Другой особенностью построенной алгебры Клиффорда является то, что элемент $E_7 = e_1 e_2 e_3$ коммутативен с остальными базисными элементами рассматриваемой алгебры и $E_7^2 = e_0 = 1$. Тогда, очевидно, произвольный элемент алгебры Клиффорда с тремя образующими, задаваемый выражением

$$x = x_0 E_0 + x_1 E_1 + x_2 E_2 + x_3 E_3 + x_4 E_4 + x_5 E_5 + x_6 E_6 + x_7 E_7 =$$

$$= x_0e_0 + x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_1e_2 + x_5e_2e_3 + x_6e_1e_3 + \\ + x_7e_1e_2e_3,$$

можно представить в форме удвоения алгебры кватернионов

$$x = x_0e_0 + x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + e_1e_2e_3(-x_4e_3 + x_8e_1 + \\ x_9e_3 + x_7e_0) = (x_0 + e_1e_2e_3x_7)e_0 + (x_1 + e_1e_2e_3x_5)e_1 + \\ + (x_2 + e_1e_2e_3x_6)e_2 + (x_3 - e_1e_2e_3x_4)e_3.$$

Вводя замены

$$e_1e_2e_3 = E_7 \rightarrow j,$$

$$x_0 \rightarrow x_0, \quad x_7 \rightarrow y_0, \quad x_1 \rightarrow x_1, \quad x_5 \rightarrow y_1,$$

$$x_2 \rightarrow x_2, \quad x_9 \rightarrow y_2, \quad x_3 \rightarrow x_3, \quad -x_4 \rightarrow y_3,$$

$$z_0 = x_0 + jy_0, \quad z_1 = x_1 + jy_1, \quad z_2 = x_2 + jy_2, \quad z_3 = x_3 + jy_3,$$

приходим к бикватерниону в форме (1.39).

Конструкцию удвоения алгебр можно использовать для построения еще одной интересной алгебры — алгебры октав, не являющейся алгеброй Клиффорда, но принадлежащей к исключительным алгебрам.

Алгебра октав O задается восемью базисными элементами e_0, e_r ($r = 1, 2, \dots, 7$) со свойствами

$$e_4 = e_0e, \quad e_5 = e_1e, \quad e_6 = e_2e, \quad e_7 = e_3e, \quad (1.42)$$

где e_0, e_1, e_2, e_3 — элементы базиса алгебры кватернионов H_R , т. е. для них выполняются соотношения (1.19). В силу (1.42) произвольная октава x всегда может быть представлена в виде удвоения кватернионов

$$x = x_0e_0 + x_re_r = x_1 + x_{11}e, \quad (1.43)$$

где x_1 и $x_{11} \in H_R$.

Тогда произведение x'' двух октав x и x' , взятых в форме удвоения, определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} x'' = x_1'' = x_{11}''e &= xx' = (x_1 + x_{11}e)(x_1' + x_{11}'e) = \\ &= (x_1x_1' - \bar{x}_{11}'x_{11}) + (x_{11}'x_1 + x_{11}\bar{x}_1')e, \end{aligned} \quad (1.44)$$

где, очевидно,

$$x_{11}'' = x_1x_1' - \bar{x}_{11}'x_{11}, \quad x_{11}' = x_{11}'x_1 + x_{11}\bar{x}_1'.$$

Используя (1.44), можно получить соотношения между базисными элементами алгебры октав e_0, e_n . Поскольку их достаточно много в отличие от соотношений, определяющих алгебру кватернионов, иной раз проще и удобнее начинать с правила умножения (1.44). Используя (1.44), можно убедиться, что произведение октав неассоциативно:

$$(x'x')x \neq x'(x'x). \quad (1.45)$$

Для алгебры октав O можно ввести операцию сопряжения, которая элементу x ставит в соответствие элемент \bar{x} :

$$\bar{x} = \bar{x}_1 - x_{11}e, \quad (1.46)$$

где для кватерниона черта над ним служит, так и прежде, обозначением кватернионного сопряження. С помощью сопряженной октавы каждому элементу алгебры октав однозначно ставится в соответствие положительное число $N(x)$ — норма (модуль) октавы, определяемая как

$$N(x) = \sqrt{\bar{x}x} = \sqrt{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2}. \quad (1.47)$$

Для нормы октав, как для комплексных чисел и кватернионов, справедливо соотношение типа (1.24), т. е.

$$N(x)N(x') = N(xx').$$

Алгебра октав — алгебра с делением, т. е. для октав всегда определен обратный элемент. Определение элемента x^{-1} , обратного к октаве x , вполне аналогично определению обратного элемента в алгебре комплексных чисел и кватернионов:

$$x^{-1} = \frac{\bar{x}}{N^2(x)}.$$

Как уже отмечалось, алгебра октав неассоциативна, т. е. в общем случае для нее справедливо (1.45). Однако для октав выполняется условие альтернативности

$$(xx)x' = x(xx'), \quad (\bar{x}\bar{x})x' = \bar{x}(\bar{x}\bar{x}'), \quad (1.48)$$

которое можно рассматривать как ослабленный вариант условия ассоциативности. Вышеперечисленные свойства характеризуют алгебру октав как исключительную ал-

гебру. Приведем без доказательства теоремы об исключительных алгебрах [8, 9].

I. Теорема Фробениуса.

Любая ассоциативная алгебра с делением изоморфна одной из трех: алгебре действительных чисел, алгебре комплексных чисел или алгебре кватернионов.

II. Обобщенная теорема Фробениуса.

Любая альтернативная алгебра с делением изоморфна одной из четырех алгебр: действительных чисел, комплексных чисел, кватернионов или октав.

Здесь следует пояснить, что под изоморфизмом в математике понимается одно — однозначное соответствие между множествами. Примером изоморфных множеств из тех, которые рассматривались выше, могут служить множества комплексных чисел и матриц 2×2 вида (1.9). Изоморфные множества в математическом отношении не считаются различными.

III. Теорема Гурвица.

Любая нормированная алгебра с единицей изоморфна одной из четырех алгебр: действительных чисел, комплексных чисел, кватернионов или октав. Алгебра A является алгеброй с единицей, если в ней существует такой элемент e_0 — единица, что для любого $a \in A$ $ae_0 = a$, $e_0a = a$.

Приведенные теоремы по существу определяют те свойства алгебр R — действительных чисел, C — комплексных чисел, H_R — кватернионов, O — октав, которые характеризуют их как исключительные алгебры. Таким образом, первой и простейшей является алгебра действительных чисел. Следующая в ряду исключительных алгебр — алгебра комплексных чисел, в которой умножение сохраняет все свойства умножения действительных чисел: коммутативность, ассоциативность, обратимость (возможность определения операции деления), существование единицы. В алгебре кватернионов из перечисленных свойств теряется только коммутативность умножения. Наконец, последней в ряду исключительных алгебр является алгебра октав, для которой ассоциативность заменяется условием альтернативности, но для нее по-прежнему возможно деление и существует единица. Таким образом, условия, сформулированные в теоремах Фробениуса и Гурвица, весьма жесткие и выделяют из большого многообразия рассматриваемых в математике алгебр очень узкий их класс, а именно исключительные алгебры. Действительные и комплексные числа, как из-

вестно, широко используются в физике, в технических науках. Ниже будет показано, что широкий круг задач современной физики, связанных с теорией относительности и квантовой механикой, может быть простым и естественным образом сформулирован и решен на языке бикватернионов. При этом следует отметить удобство использования бикватернионов, обусловленное теми их свойствами, которые, в свою очередь, являются общими для бикватернионов и исключительных алгебр: правила умножения, делимость в тех случаях, когда она определена для бикватернионов, соотношение для билинейной формы бикватернионов типа соотношения (1.24), наличие единицы и некоторые другие. Поэтому в дальнейшем мы будем иногда употреблять слово «кватернион», имея в виду вещественные и комплексные кватернионы.

§ 2. КВАТЕРНИОННАЯ ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ ГРУППЫ $SO(4, C)$ И ЕЕ СВЯЗЬ С ВЕКТОРНОЙ ПАРАМЕТРИЗАЦИЕЙ

Прежде всего дадим определение группы [55]. Множество G называется группой, если для любых двух его элементов g_1 и g_2 определено произведение, удовлетворяющее следующим условиям:

- а) $g_1g_2 \in G$;
- б) $(g_1g_2)g_3 = g_1(g_2g_3)$ для любых $g_1, g_2, g_3 \in G$;
- в) в G существует элемент e такой, что $eg = ge = g$ для каждого $g \in G$; e называется единичным элементом группы G ;
- г) для каждого элемента $g \in G$ существует один и только один элемент, обозначаемый g^{-1} , такой, что $gg^{-1} = g^{-1}g = e$; элемент g^{-1} называется обратным к g . Очевидно, g элемент обратный к g^{-1} , так что $(g^{-1})^{-1} = g$.

Группа G называется коммутативной (или абелевой), если $g_1g_2 = g_2g_1$ для всех $g_1, g_2 \in G$, и некоммутативной в противном случае. В случае коммутативной группы вместо g_1g_2 пишут также $g_1 + g_2$ и тогда единичный элемент обозначают через 0. При таком обозначении произведения говорят, что группа задана в аддитивной записи.

Группа называется конечной, если число ее элементов конечно; в противном случае группа называется бесконечной. Число элементов конечной группы G называется ее порядком и обозначается $|G|$.

Прежде всего следует отметить, что понятие произведения элементов в определении группы является весьма

общим. Под групповым произведением понимается любая бинарная операция, т. е. операция, которая ставит в соответствие любой паре элементов множества элемент этого же множества, причем данная бинарная операция должна обладать всеми перечисленными выше свойствами. Приведем примеры групп, используя математические структуры, введенные в предыдущем параграфе.

I. Совокупность всех действительных чисел есть группа, если определить в ней умножение как сложение действительных чисел; эта группа называется аддитивной группой действительных чисел. Ее единичным элементом является число нуль, а обратным элементом к числу a — число $-a$. Аналогично определяется аддитивная группа комплексных чисел.

II. Совокупность всех отличных от нуля действительных чисел образует группу, если определить в ней умножение как обычное умножение чисел. Эта группа называется мультипликативной группой действительных чисел. Единицей этой группы является число 1, а обратным к числу a — число $a^{-1} = 1/a$. Аналогично определяется мультипликативная группа комплексных чисел.

Вышеприведенные примеры касались бесконечных групп. Приведем несколько примеров конечных групп.

Множество $G = \{1, i, -1, -i\}$ с обычным умножением представляет собой конечную группу. Это очевидно, если воспользоваться таблицей умножения (таблицей Кэли):

	1	i	-1	$-i$
1	1	i	-1	$-i$
i	i	-1	$-i$	1
-1	-1	$-i$	1	i
$-i$	$-i$	1	i	-1

С ее помощью удобно представлять некоторые конечные группы.

Используя элементы базиса кватернионов, можно также построить конечную группу. Очевидно, множество $G = \{e_0, e_1, -e_0, -e_1, e_2, -e_2, e_3, -e_3\}$ с обычным умножением, определяемым соотношениями (1.19), есть группа. Таблица Кэли для данной группы может быть записана в виде

	e_0	e_1	e_2	e_3	$-e_0$	$-e_1$	$-e_2$	$-e_3$
e_0	e_0	e_1	e_2	e_3	$-e_0$	$-e_1$	$-e_2$	$-e_3$
e_1	e_1	$-e_0$	e_3	$-e_2$	$-e_1$	e_0	$-e_3$	e_2
e_2	e_2	$-e_3$	$-e_0$	e_1	$-e_2$	e_3	e_0	$-e_1$
e_3	e_3	e_2	$-e_1$	$-e_0$	$-e_3$	$-e_2$	e_1	e_0
$-e_0$	$-e_0$	$-e_1$	$-e_2$	$-e_3$	e_0	e_1	e_2	e_3
$-e_1$	$-e_1$	e_0	$-e_3$	e_2	e_1	$-e_0$	e_3	$-e_2$
$-e_2$	$-e_2$	e_3	e_0	$-e_1$	e_2	$-e_3$	$-e_0$	e_1
$-e_3$	$-e_3$	$-e_2$	e_1	e_0	e_3	e_2	$-e_1$	$-e_0$

В силу некоммутативности умножения в приведенной таблице для конечной кватернионной группы принимается соглашение, по которому в паре $e_k e_l$ первым берется сомножитель, стоящий по вертикали. Конечную группу можно построить и для бикватернионов. Обратимся теперь к произвольным кватернионам. Любой кватернион x можно представить в виде произведения нормы кватерниона $N(x)$ на кватернион x' , который подчиняется условию $x' \bar{x} = 1$ и который естественно называть единичным. Сказанное остается справедливым и для бикватернионов в случае, если для бикватерниона z выполнено условие $z \bar{z} \neq 0$.

Нетрудно убедиться, что единичные кватернионы и бикватернионы образуют группу относительно операции умножения кватернионов, поскольку при этом выполняются сформулированные в начале параграфа групповые аксиомы. Очевидно, что единичные кватернионы образуют подгруппу группы единичных бикватернионов, т. е. подмножество множества единичных бикватернионов, замкнутое относительно операции кватернионного умножения, для которого также выполняются групповые аксиомы. Следует напомнить, что при использовании обозначений для кватернионов $x = x_0 + x$ единице в алгебре кватернионов e_0 соответствует обычная единица 1.

Отметим, например, что единичные октавы, которые могут быть определены аналогично единичным кватернионам, не образуют группу относительно операции умножения октав в силу неассоциативности такого умножения.

Для дальнейшего нам понадобится представление о группах преобразований. Термином «преобразование» уже приходилось пользоваться в первом параграфе, опираясь на интуитивное представление о нем как о некоторой операции, в результате которой одна величина или совокупность величин выражались через аналогичную величину или совокупность величин. Более строгое определение состоит в следующем.

Пусть M — множество. Преобразованием M называется взаимно однозначное отображение M на M . Совокупность $\tau(M)$ всех преобразований множества M образует группу, в которой роль групповой операции («умножения») играет композиция отображений, а роль единицы — тождественное преобразование.

Проиллюстрируем введенное выше понятие группы преобразований на примерах уже известных нам групп комплексных чисел и кватернионов (бикватернионов) относительно операции их умножения.

Как уже говорилось, умножению комплексного числа на комплексное число модуля 1, представимого в виде $e^{i\Phi}$, соответствует преобразование вращения двумерного вещественного вектора.

Таким образом, в качестве множества M здесь выступает множество всех комплексных чисел C или двумерных вещественных векторов — точек евклидовой плоскости. Совокупность $\tau(M)$ — множество комплексных чисел вида $e^{i\Phi}$ либо вещественных матриц 2×2 вращения евклидовой плоскости. Умножению комплексного числа $z = a + ib$ на комплексное число $e^{i\Phi}$ соответствует преобразование — поворот двумерного вектора в плоскости (X, Y) на угол Φ . Пусть комплексное число $z = a + ib$ последовательно умножается на числа $e^{i\Phi_1}$ и $e^{i\Phi_2}$, что, очевидно, эквивалентно умножению на комплексное число $e^{i(\Phi_1 \pm \Phi_2)}$. Соответственно на языке преобразований двумерных векторов вектор (a, b) сначала поворачивается в плоскости (X, Y) на угол Φ_1 , а потом еще на угол Φ_2 , что эквивалентно композиции двух поворотов в плоскости (X, Y) , т. е. повороту на угол $\Phi_1 + \Phi_2$. Это означает, что последовательное осуществление двух поворотов вектора (a, b) в плоскости (X, Y) также есть поворот в этой плоскости вектора (a, b) . Ассоциативность для композиции поворотов означает, что

$$e^{i(\Phi_1 + \Phi_2)} e^{i\Phi_1} z = e^{i\Phi_1} e^{i(\Phi_2 + \Phi_3)} z. \quad (2.1)$$

Из выражения (2.1) следует, что в случае, когда совершаются три последовательных поворота вектора (a, b) в плоскости (X, Y) на углы $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, такое преобразование может быть совершено как поворот сначала на угол $\varphi_2 + \varphi_3$, а затем еще на угол φ_1 , и это совпадает с поворотом, который в рассматриваемой ситуации осуществлялся бы сначала на угол φ_3 , а затем дополнительно на суммарный угол $\varphi_1 + \varphi_2$. Очевидно, что в обоих случаях конечный результат один и тот же — поворот вектора (a, b) в плоскости (X, Y) на угол $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3$.

Умножению комплексного числа z на 1 отвечает поворот на угол $2\pi k$, т. е. тождественное преобразование вектора (a, b) . Преобразованию, обратному к $e^{i\varphi}$, отвечает поворот на угол $-\varphi$. Очевидно, что композиция преобразования поворота на φ и обратного ему на $-\varphi$ есть тождественное преобразование.

Рассмотренные выше преобразования группы вращения двумерной плоскости оставляют неизменной (инвариантной) длину преобразуемого вектора $a^2 + b^2 = \text{inv}$. Обычно группы преобразований, используемые в физике, принято различать по их инвариантам, т. е. величинам, которые остаются неизменными при преобразованиях данной группы. Группа преобразований, действующих в двумерном евклидовом пространстве и оставляющих неизменной длину двумерного преобразуемого вектора, — группа вращений двумерной плоскости (или двумерная специальная ортогональная группа $O(2.R)$). Аналогично группа преобразований, действующих в трехмерном евклидовом пространстве, сохраняющих длину вектора в нем, называется группой трехмерных вращений, или трехмерной ортогональной группой $O(3.R)$. Инвариант данной группы задается выражением

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \text{inv}.$$

Можно определить группу ортогональных преобразований как группу преобразований, действующих в n -мерном евклидовом пространстве, оставляющих инвариантной длину соответствующего вектора, т. е.

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2 = \text{inv}.$$

Такая группа преобразований обозначается как $O(n.R)$. R означает, что преобразования определены в вещественном пространстве. Аналогичным образом могут быть

определенны и группы преобразований, действующих в комплексных линейных пространствах C_n и оставляющими неизменными сумму квадратов компонент вектора. Такие преобразования образуют группы комплексных ортогональных преобразований, обозначаемых в случае n -мерного комплексного линейного пространства символом $O(n.C)$. Требование равенства единице определяет матрицы линейного преобразования выделяет из групп ортогональных преобразований $O(n.R)$ и $O(n.C)$ их подгруппы — группы собственных ортогональных преобразований $SO(n.R)$ и $SO(n.C)$ соответственно.

Рассмотрим подробнее группу $SO(4.C)$, которая непосредственно связана с бикватернионами [56, 57]. По определению, она оставляет неизменной билинейную комбинацию

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2. \quad (2.2)$$

Очевидно, (2.2) можно представить в виде произведения двух бикватернионов: $z = z_0 + z$ и $\bar{z} = z_0 - z$. Это позволяет параметризовать преобразование группы $SO(4.C)$, пользуясь только операциями, определенными над бикватернионами. Рассмотрим преобразование произвольного бикватерниона z с использованием операции умножения. Поскольку умножение бикватернионов некоммутативно, то следует различать умножение z на произвольные бикватернионы слева и справа. Таким образом, общее преобразование представим в виде

$$z' = Az\bar{B}. \quad (2.3)$$

Найдем ограничения на A и B , накладываемые требованием инвариантности билинейной комплексной 4-формы (2.2):

$$\bar{z}z = z'\bar{z}'. \quad (2.4)$$

Поскольку

$$\bar{z}' = B\bar{z}\bar{A}, \quad (2.5)$$

то

$$z'\bar{z}' = Az\bar{B}B\bar{z}\bar{A} = (zz)(A\bar{A})(B\bar{B}),$$

и из условия (2.4) следует

$$(A\bar{A})(B\bar{B}) = 1. \quad (2.6)$$

Не ограничивая общности, можем положить

$$A\bar{A} = 1, \quad B\bar{B} = 1. \quad (2.7)$$

Условия (2.7) из 16 независимых параметров, первоначально заложенных в преобразование (2.3), оставляют независимыми только 12. Для того чтобы они выполнялись автоматически, удобно представить бикватернионы A и B в явно отнормированном виде:

$$A = \pm \frac{Q_0 + Q}{\sqrt{Q_0^2 + (Q^2)}}, \quad B = \pm \frac{G_0 + G}{\sqrt{G_0^2 + (G^2)}}$$

или

$$A = \pm \frac{1 + q}{\sqrt{1 + (q^2)}} = A(q), \quad B = \pm \frac{1 + g}{\sqrt{1 + (g^2)}} = A(g), \quad (2.8)$$

где введены обозначения

$$q = \frac{Q}{Q_0} = \frac{A - \bar{A}}{A + \bar{A}}, \quad g = \frac{G}{G_0} = \frac{B - \bar{B}}{B + \bar{B}}, \quad (2.9)$$

причем

$$\bar{A} = (-q) = \pm \frac{1 - q}{\sqrt{1 + (q^2)}}, \quad \bar{B} = A(-g) = \pm \frac{1 - g}{\sqrt{1 + (g^2)}}. \quad (2.10)$$

Поясним возникновение множителя (± 1) в (2.8). Множество единичных бикватернионов образует группу, изоморфную $SL(2, C)$. Это легко установить, используя связь между базисными кватернионами e_0, e_1, e_2, e_3 и матрицами Паули. Как будет видно из дальнейшего изложения, векторные бикватернионы q и g по отдельности подчиняются закону композиции, изоморфному закону композиции вектор-параметра группы Лоренца [16]. Следовательно, параметры $q(g)$ образуют групповое многообразие $SO(3, 1)$. Между $SL(2, C)$ и $SO(3, 1)$ существует $2 \leftrightarrow 1$ соответствие. Множитель (± 1) как раз отражает двузначность отображения $SO(3, 1)$ в $SL(2, C)$. В большинстве случаев он будет несуществен. Поэтому для параметризации единичных бикватернионов будем использовать q, g , опуская множитель (± 1) .

Установим закон композиции кватернионных параметров q и g , отвечающий умножению единичных бикватернионов. Очевидно, что произведение \bar{A}'' двух единичных бикватернионов \bar{A}' и \bar{A} есть единичный бикватернион. Следовательно, каждый из трех бикватернионов \bar{A}'' ,

A' и A может быть представлен в виде (2.8) (не принимая во внимание множитель (± 1)), т. е. можно написать

$$\begin{aligned} A(q'') &= A(q') A(q) = \frac{1+q''}{\sqrt{1+(q'')^2}} = \\ &= \frac{(1+q')(1+q)}{\sqrt{1+(q'^2)} \sqrt{1+(q^2)}}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

где q'' , q' и q — параметры, определяющие бикватернионы A'' , A' , A соответственно.

Используя правило перемножения бикватернионов, получаем

$$\frac{1+q''}{\sqrt{1+(q'')^2}} = \frac{1+q'+q-(q'q)+[q'q]}{\sqrt{1+(q'^2)} \sqrt{1+(q^2)}}. \quad (2.12)$$

Приравнивая по отдельности скалярные и векторные части бикватернионов в выражении (2.12), имеем

$$\frac{q''}{\sqrt{1+(q'')^2}} = \frac{q'+q+[q'q]}{\sqrt{1+(q'^2)} \sqrt{1+(q^2)}}, \quad (2.13)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+(q'')^2}} = \frac{1-(q'q)}{\sqrt{1+(q'^2)} \sqrt{1+(q^2)}}, \quad (2.14)$$

и, наконец, взяв отношение соответственно правых и левых частей (2.13) и (2.14), получим выражение кватерниона q'' через q' и q :

$$q'' = \frac{q'+q+[q'q]}{1-(q'q)} \stackrel{\text{def}}{=} \langle q', q \rangle. \quad (2.15)$$

При учете (1.22) выражение (2.15) можно переписать в виде

$$q'' = \frac{q'+q+\frac{1}{2}(q'\bar{q}-q\bar{q}')} {1-\frac{1}{2}(q'\bar{q}+q\bar{q}')}. \quad (2.16)$$

Закон композиции кватернионных параметров (2.15) с точностью до изоморфизма между векторными кватернионами и векторами, при котором операции (1.22') над кватернионами переходят в скалярное и векторное про-

изведения векторов, совпадает с законом композиции вектор-параметров группы Лоренца. Этот закон для комплексных вектор-параметров группы векторов Лоренца был получен Ф. И. Федоровым [15], а затем обобщен [58] на группу $SO(4.C)$. Его использование открыло дорогу для всестороннего исследования конечных преобразований этих групп. В результате ряд формул релятивистской физики приобрел простой вид, а промежуточные выкладки существенно сократились. Учитывая описанный выше изоморфизм, мы в дальнейшем не будем каждый раз специально оговаривать переходы от кватернионных параметров к вектор-параметрам Федорова.

Выражения (2.3), (2.8) — (2.10), (2.16) полностью определяют необходимые свойства преобразований группы $SO(4.C)$. Установим некоторые важные особенности этих преобразований. Используя общее определение преобразования бикватернионов (2.3) и поставив в соответствие бикватернионам z, z' 4-вектор-столбцы, аналогично тому, как это делалось в случае соотношений (1.25) — (1.27), можно простым способом получить явные выражения для матриц преобразования $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q, g) \in SO(4.C)$, отвечающих парам единичных бикватернионов $A = A(q)$ и $B = A(g)$ (2.8). Действительно, подставляя кватернионы A и B в (2.3) и производя перемножение трех бикватернионов по правилу (1.22), после соответствующей перегруппировки слагаемых найдем

$$\begin{aligned} z' &= z_0 + z' = A(q)z\bar{A}(g) = A(q)zA(-g) = \\ &= \frac{(1+q)(z_0 + z)(1-g)}{\sqrt{1+(q^2)}\sqrt{1+(g^2)}} = (\alpha z + u z_0) + (v z + d z_0). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Отсюда после перехода к четырехмерной блочной записи

$$\begin{pmatrix} z' \\ z'_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & u \\ v & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ z_0 \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

получаем закон преобразования комплексных 4-векторов

$$z' = \mathcal{L}(q, g)z, \quad (2.19)$$

осуществляемый с помощью записанной явно, в развернутой вектор-параметрической форме [57] 4×4 -матрицы комплексной группы $SO(4.C)$ (или, как ее часто на-

зывают, комплексной группы Лоренца) самого общего вида:

$$\mathcal{L}(q, g) = \begin{pmatrix} \alpha & u \\ v & d \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+(q^2)}} \frac{1}{\sqrt{1+(g^2)}} \times \\ \times \begin{pmatrix} 1 + g \cdot q + q^x + g^x + q \cdot g - (qg) & q - g + [qg] \\ - q + g - [qg] & 1 - (qg) \end{pmatrix}, \quad (2.20)$$

где q^x, g^x — матрицы, дуальные 3-векторам q и g ($(q^x)_{ab} = \epsilon_{abc} q_c$), $q \cdot g, g \cdot g, g \cdot q, q \cdot q$ — матрицы-диады ($(q \cdot g)_{ab} = q_a g_b$ ($a, b, c = 1, 2, 3$)).

В принципе для дальнейшей работы явный вид матрицы комплексных четырехмерных вращений (2.20) не нужен. Однако проделанный здесь в рамках кватернионного исчисления вывод преследует цель продемонстрировать методическое отличие от стандартного матричного подхода. В последующих приложениях достаточно знать выражение для преобразований (2.19) в форме (2.3), учесть представление (2.8) для единичных бикватернионов и применять закон умножения кватернионов или закон композиции кватернионных параметров (2.15). При этом следует помнить о неоднозначности соответствия между параметрами и группой единичных бикватернионов, о котором говорилось выше. Для группы $SO(4.C)$ это сводится к тому, что каждому значению параметров q и g отвечают два элемента группы $SO(4.C)$.

Следует обратить внимание и на то, что преобразования $\mathcal{L}ESO(4.C)$ имеют структуру прямого произведения $\mathcal{L}=A \otimes B$ в том смысле, что умножение двух элементов $\mathcal{L}=A \otimes B$ и $\mathcal{L}'=A' \otimes B'$ производится по правилу $\mathcal{L}\mathcal{L}'=AA' \otimes BB'$. В этом легко убедиться, если воспользоваться определением (2.3).

Располагая полученными выше результатами относительно преобразований комплексной группы вращений в комплексном 4-пространстве, легко получить аналогичные результаты для ряда групп, являющихся подгруппами группы $SO(4.C)$ и играющих важную роль в физике. К таким группам прежде всего относится группа Лоренца $SO(3.1)$. Ее можно рассматривать также как группу вращений псевдоевклидова 4-пространства, оставляющих инвариантной длину s вектора x :

Структура вектор-параметров группы $SO(4, C)$ и ее некоторых подгрупп

Группа	Пространство, в которых действуют преобразования группы	Условия, выделяющие из C_4 соответствующие подпространства	Вектор-параметр группы	Допустимая область изменения вектор-параметров
$SO(4, C)$	C_4 комплексное 4-пространство	$z = z_0 + z, z^* = z_0^* + z^*$, $\bar{z} = \bar{z}_0 - z, \bar{z}^* = \bar{z}_0^* - z^*$	$q = a + ib, g = c + id$ ($a^* = a, b^* = b, c^* = c, d^* = d^*$)	$1 + \langle q, -q^* \rangle \neq 0$
$SO(3, 1)$	R_4 псевдоэвклидово 4-пространство	$z \rightarrow x, \bar{z} \rightarrow -x^*,$ $x = ix_0 + x, \bar{x} = ix_0 - x$	$q = a + ib,$ $g = q^* = a - ib$	$1 + \langle q, -q^* \rangle \neq 0$
$SO(4, R)$	R_4 евклидово 4-пространство	$z \rightarrow x, x = x_0 + x,$ $\bar{x} = x_0 - x, x^* = x$	$q = q^* = a,$ $g = g^* = c$	$0 \leq a < \infty,$ $0 \leq c < \infty$
$SO(3, C)$	C_3 комплексное 3-пространство	$z \rightarrow z, \bar{z} \rightarrow z = 0$	$q = g = a + ib$	$1 + \langle q, -q^* \rangle \neq 0$
$SO(3, R)$	R_3 евклидово 3-пространство	$z \rightarrow x, x = x,$ $\bar{x} + x = 0, x^* = x$	$q = q^* = n$	$0 \leq n < \infty$

$$s^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_0^2 = \text{inv}, \quad (2.21)$$

где x_1, x_2, x_3, x_0 — вещественные числа. Вводя четвертую, чисто минимую координату $x_4 = ix_0$, инвариант (2.21) можно представить в евклидовой форме:

$$s^2 = x_\mu x_\mu = \text{inv} (\mu = 1, 2, 3, 4). \quad (2.22)$$

Выражение (2.22) представимо в виде произведения бикватернионов частного вида $x = x_4 + x = ix_0 + x$ и $\bar{x} = x_4 - x = ix_0 - x$, которые из всей совокупности бикватернионов, очевидно, выделяются условием $x = -\bar{x}^*$. Требуя, чтобы это условие выполнялось и для преобразованного бикватерниона в формуле (2.3), можно получить ограничения, которые из всей совокупности вектор-параметров группы $SO(4.C)$ выделяют вектор-параметры ее подгруппы — группы Лоренца. В таблице приведен перечень ограничений на бикватернионы общего вида, выделяющие бикватернионы и кватернионы, соответствующие векторам некоторых пространств, применяемых в физике, а также ограничения на вектор-параметры группы $SO(4.C)$, которые сводят преобразования данной группы к преобразованиям групп вращений в соответствующих подпространствах.

Остановимся на некоторых свойствах преобразований группы Лоренца. Согласно таблице, они задаются комплексным вектор-параметром q и комплексно сопряженным ему вектор-параметром q^* и могут быть записаны в кватернионной форме (2.3):

$$x' = L(q)xL(-q^*), \quad L(q) = A(q) = B^*(q). \quad (2.23)$$

Это соотношение можно переписать в виде матричного преобразования, действующего на 4-вектор $x = (x, ix_0)$ и преобразующего данный 4-вектор в 4-вектор $x' = (x', ix'_0)$, т. е.

$$x' = \mathcal{L}x, \quad (2.24)$$

где \mathcal{L} получается из матрицы группы преобразований $SO(4.C)$ заменой g на q^* . Напомним вкратце физический смысл преобразований Лоренца, составляющих математическую основу специальной теории относительности. Как известно, преобразования Лоренца описывают переходы между инерциальными системами отсчета, в которых изучается одно и то же физическое явле-

ние. Иными словами, если физическое явление (событие) относительно наблюдателя в инерциальной системе K происходит в точке с координатами x, y, z в момент времени t , а относительно наблюдателя в инерциальной системе K' , связанной с системой K преобразованием Лоренца \mathcal{L} , происходит в точке с координатами x', y', z' в момент времени t' , то $\{x, y, z, x_0 = ct\}$ и $\{x', y', z', x'_0 = ct'\}$, где c — скорость света в вакууме, являются соответственно компонентами 4-векторов x и x' в выражении (2.24).

В основе СТО лежат два постулата [59].

I. Все физические явления в инерциальных системах при одинаковых начальных условиях протекают одинаково.

II. Скорость света (скорость распространения электромагнитных волн в вакууме) одинакова во всех инерциальных системах отсчета (причем по всем направлениям) и не зависит ни от скорости источника, ни от скорости наблюдателя.

Первый постулат СТО является обобщением механического принципа относительности Галилея, согласно которому все механические явления одинаково протекают во всех инерциальных системах отсчета. Коснемся вкратце второго постулата. Если в одной из инерциальных систем произошло событие, состоящее в испускании света источником, находящимся в начале координат, то за время t расстояние, пройденное светом, равно ct , т. е. имеет место соотношение

$$r^2 - c^2 t^2 = 0, \quad (2.25)$$

где $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ — квадрат радиуса-вектора. В системе отсчета, движущейся относительно первой, если в момент испускания света начала отсчета этих систем совпадали, будет иметь место

$$r'^2 = c^2 t'^2, \quad r'^2 - c^2 t'^2 = 0 \quad (2.26)$$

или

$$r^2 - c^2 t^2 = r'^2 - c^2 t'^2, \quad (2.27)$$

где $r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$, t' — время распространения света по часам наблюдателя во второй системе отсчета. x', y', z', t' связаны с x, y, z, t преобразованиями Лоренца. Такие преобразования в случае, когда вторая система отсчета движется относительно первой со скоростью v (причем

оси координат параллельны и движение совершается вдоль оси x), имеют, как известно, вид

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + vx'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (2.28)$$

Они являются частным случаем общих преобразований (2.24). Соотношение (2.27), в свою очередь, как нетрудно видеть, является частным случаем выражения (2.22), определяющего преобразования Лоренца. Неизменность скорости света относительно любой из систем отсчета, устанавливаемая вторым постулатом СТО и математически содержащаяся в (2.27), связывает в единое целое пространственные координаты и время. Таким образом происходит объединение пространства и времени в четырехмерное многообразие, которое, в частности, можно рассматривать как многообразие бикватернионов специального вида. Инвариант преобразований группы Лоренца (2.22), который в СТО называют также интервалом и обозначают s , кроме уже рассматриваемого нами значения (2.27), т. е. когда

$$s^2 = 0, \quad (2.29)$$

может принимать значения

$$s^2 = r^2 - c^2 t^2 > 0, \quad (2.30)$$

$$s^2 = r^2 - c^2 t^2 < 0. \quad (2.31)$$

В случае (2.29) интервал s представляет собой соотношение, которому удовлетворяют координаты и время распространяющихся от точечного источника электромагнитных (световых) волн, и поэтому такой интервал называется светоподобным. Иногда его называют также изотропным.

Интервал, удовлетворяющий условию (2.30), называется пространственноподобным. Это название связано с тем, что преобразованием Лоренца можно перейти в систему отсчета, в которой бикватернион, удовлетворяющий (2.30), имеет только пространственные компоненты.

Интервал, удовлетворяющий условию (2.31), называется временеподобным. В этом случае с помощью преобразования Лоренца можно перейти в систему отсчета,

в которой бикватернион будет иметь только временную координату.

Условия (2.29) и (2.31) разбивают все 4-пространство-время (мир Минковского) на инвариантные относительно преобразований Лоренца подпространства (рис. 2.1). На рис. 2.1 для упрощения взяты только две пространственные координаты x и y , что не принципиально с точки зрения демонстрации разбиения мира Минков-

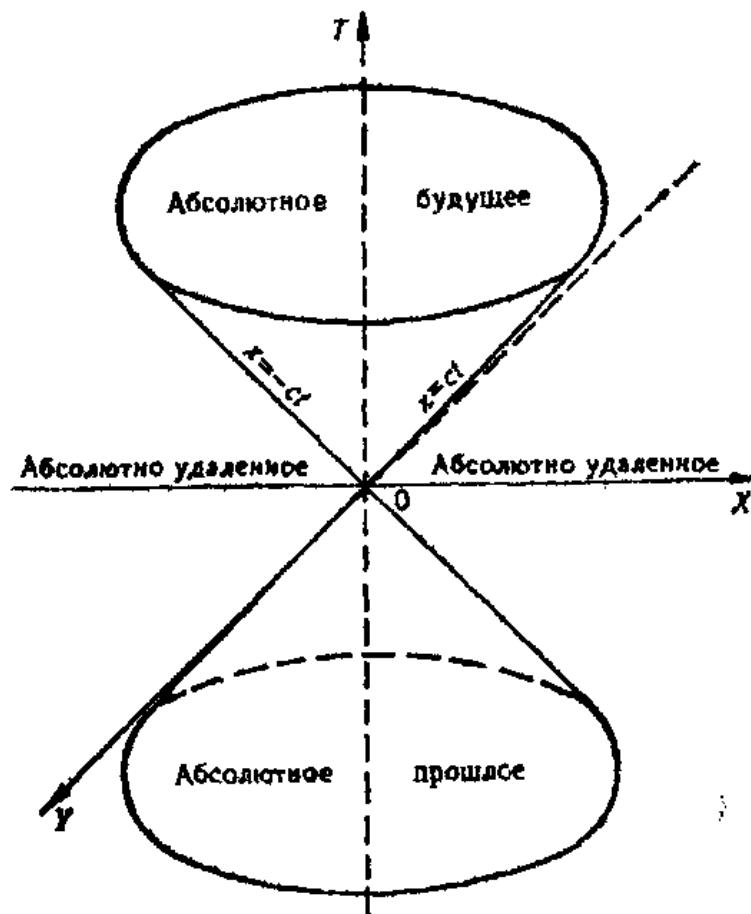


Рис. 2.1

ского на инвариантные подпространства. Конус $s^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0$ называется световым. Внутренность верхней полости светового конуса называется абсолютным будущим, а нижней полости — абсолютным прошлым. Две данные области отвечают значениям интервала (2.31). Наконец, пространство-время вне светового конуса соответствует значениям интервала (2.30) и называется областью абсолютно удаленных событий.

Теперь дадим интерпретацию приведенным в таблице соотношениям, определяющим допустимые области изменения вектор-параметров группы $SO(4.C)$ и ее подгрупп. Что касается вектор-параметров группы $SO(3.R)$ и $SO(4.R)$, то это вещественные векторы, включая и век-

торы бесконечной длины. Таким образом, вектор-параметры образуют трехмерное евклидово пространство, дополненное векторами бесконечной длины.

Особый интерес представляет интерпретация соотношений, определяющих область изменения комплексных вектор-параметров некомпактных комплексных групп. Как видно из таблицы, эта область задается общим выражением

$$1 + \langle \mathbf{q}, -\mathbf{q}^* \rangle^2 \neq 0. \quad (2.32)$$

Физическая интерпретация неравенства (2.32) для векторной параметризации группы Лоренца дана в работах [16, 60], где показано, что (2.32) сводится к

$$1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2} \neq 0. \quad (2.33)$$

В (2.33) \mathbf{v} — относительная скорость движения системы отсчета, c — скорость света. Таким образом, неравенство нулю в соотношениях (2.32) и (2.33) означает, что относительная скорость \mathbf{v} движения системы отсчета не может быть равна скорости света. Легко убедиться на примере преобразований Лоренца частного вида (2.28), что при равенстве $|\mathbf{v}| = c$ их выражения становятся неопределенными. То же происходит и с преобразованиями Лоренца общего вида (2.23).

Отметим, что световой конус представляет собой фундаментальную область пространства Минковского, на которой сосредоточены динамические [61] и кинематические [62] особенности математических выражений релятивистской физической теории. Соотношениям типа (2.32), фигурирующим в таблице, в принципе можно дать интерпретацию, не связанную непосредственно с физическим пространством-временем — миром Минковского. Такая интерпретация основана на бикватерционной формулировке преобразований этих групп и сводится к тому, что в любом случае невыполнение условия (2.32) означает выход на конус в некотором псевдоевклидовом 4-пространстве, векторы которого строятся из произвольных единичных бикватернионов. Действительно, пусть имеется бикватернион, удовлетворяющий условию

$$\bar{z}z = 1,$$

тогда также

$$z^* \bar{z}^* = 1.$$

Построим бикватернион

$$l = il_0 + l = iz\bar{z}^*, \quad l = -\bar{l}^*, \quad \bar{l} = -1, \quad (2.34)$$

соответствующий вектору псевдоевклидова 4-пространства. Тогда если z выразить через вектор-параметр

$$z = \frac{1+q}{\sqrt{1+(q^2)}}, \quad q = \frac{z-\bar{z}}{z+\bar{z}},$$

то легко убедиться, что l определяется таким же образом через вектор-параметр $\langle q, -q^* \rangle$, т. е.

$$\begin{aligned} l &= i \frac{l'}{\sqrt{l'l'}} = i \frac{1 + \langle q, -q^* \rangle}{\sqrt{1 + (\langle q, -q^* \rangle)^2}}, \\ \langle q, -q^* \rangle &= \frac{l - \bar{l}}{l + \bar{l}}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Из выражения (2.35) следует, что поскольку $il' = i(1 + \langle q, -q^* \rangle)$ $l'l'$ имеет ту же структуру, что и l (2.34), то равенство $l'l' = 0$ означает выход на конус псевдоевклидова пространства (при этом каждая компонента l стремится к бесконечности). Отсюда следует вывод, что условие (2.32) всегда связано с выходом на конус в псевдоевклидовом 4-пространстве. Это условие в алгебраическом смысле связано с наличием в алгебре бикватернионов делителей нуля (в отличие от алгебры кватернионов).

До сих пор мы рассматривали только непрерывные преобразования группы Лоренца, т. е. имели дело с собственной группой Лоренца $SO(3,1)$. Однако в физике важную роль играют дискретные преобразования пространства Минковского, которые в развивающем подходе должны быть сформулированы с помощью операций, определенных над бикватернионами, таких, как кватернионное и комплексное сопряжение и изменение знака кватерниона (умножение его на -1). К дискретным операциям, определенным на пространственно-временном многообразии, относятся операция отражения пространства (P -инверсия), операция обращения времени (T -инверсия) и, наконец, операция отражения пространства-

времени (PT -инверсия). Очевидно, что операция обращения времени с точки зрения разбиения пространства Минковского на инвариантные относительно непрерывных преобразований Лоренца многообразия есть операция, связывающая события в конусе прошлого с событиями в конусе будущего и наоборот. Операции P , T , PT над кватернионами, сопоставляемыми с векторами пространства Минковского, могут быть определены следующим образом:

$$x' = Px \rightarrow \bar{x} = -x^*, \quad (2.36)$$

$$x' = Tx \rightarrow x^* = -\bar{x}, \quad (2.37)$$

$$x' = PTx \rightarrow \bar{x}^* = -x. \quad (2.38)$$

Очевидно, что операции P , T и PT , так же как и непрерывные преобразования группы Лоренца, оставляют инвариантным интервал $s^2 = x\bar{x}$. Однако, как видно из (2.36) — (2.38), на кватернионах x они определяются неоднозначно. Как будет показано в дальнейшем, требование инвариантности динамических уравнений относительно дискретных преобразований устраниет этот произвол. Дискретные преобразования дополняют группу собственных ортохронных (не меняющих направление оси времени) преобразований до полной группы Лоренца.

Преобразования группы Лоренца не исчерпывают всех допустимых преобразований в пространстве Минковского, которые оставляют инвариантным интервал s . Полная группа движений четырехмерного псевдоевклидова пространства наряду с дискретными преобразованиями пространства-времени и вращениями (преобразованиями Лоренца) включает также сдвиги, которые математически реализуются в данном подходе с помощью операции сложения бикватернионов

$$x' = x + a,$$

где a — постоянный бикватернион пространства Минковского. Дополненная сдвигами группа Лоренца называется группой Пуанкаре или неоднородной группой Лоренца. Инвариантность уравнений относительно преобразований, входящих в группу преобразований Пуанкаре, является одним из важнейших требований к физической теории. В частности, инвариантность теории

относительно преобразований группы Лоренца автоматически обеспечивает выполнение принципа относительности. В основе построения физической теории, инвариантной относительно определенной группы преобразований (группы Лоренца, группы Пуанкаре и т. д.), лежит теория представления этой группы, поэтому приведем некоторые сведения о представлениях группы Лоренца в кватернионной формулировке.

§ 3. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ ЛОРЕНЦА, РЕАЛИЗУЕМЫЕ В РАМКАХ АЛГЕБРЫ КВАТЕРНИОНОВ

Величины, рассматриваемые в физике, как правило, относятся к определенной системе координат и классифицируются по характеру их преобразования при переходе от одной системы координат к другой.

Всякая фигурирующая в теории физическая величина, которую мы обозначим Φ , является функцией координат и времени $\Phi = \Phi(x, t)$. В релятивистской теории пространство и время объединяются в четырехмерное псевдоевклидово пространство, и поэтому функцию $\Phi(x, t)$ можно рассматривать как функцию точек этого четырехмерного пространства ($\Phi = \Phi(x)$, $x = \{ict, \mathbf{x}\}$) или бикватернионов $x = ict + \mathbf{x}$, задающих положения этих точек. В общем случае сама физическая величина может описываться не одной функцией $\Phi(x)$, а набором функций $\{\Phi_i(x)\}$ ($i = 1, 2, 3, \dots$), заданных в каждой точке пространства-времени, т. е. величины $\{\Phi_i(x)\}$ являются элементами (векторами) некоторого векторного пространства. В этом случае обычно говорят, что задано поле величин в пространстве Мinkовского. При этом, когда осуществляется преобразование координат, накладывается требование, чтобы функции изменились некоторым согласованным с преобразованиями Лоренца в пространстве-времени образом, а именно чтобы функции $\Phi_i(x)$ преобразовывались по представлениям группы Лоренца. Существует обширный раздел математики, занимающийся изучением затронутых здесь вопросов и называющийся теорией представлений групп (см. [55, 56], а также [16, 54]). Здесь будет рассмотрен некоторый сравнительно узкий класс представлений группы Лоренца, связанный с бикватернионами и широко применявшийся в физике.

Дадим определение представления группы на примере группы Лоренца.

Пусть имеется группа преобразований Лоренца, действующих на пространстве-времени Минковского 1R_4 , и имеется, вообще говоря, комплексное, n -мерное пространство Y функций $\{\Phi_i(x)\}$. Представлением группы Лоренца в пространстве Y называется гомоморфное отображение группы преобразований Лоренца, действующих в 1R_4 , в группу операторов $T(\mathcal{L})$, действующих в пространстве Y , для которых выполнены условия

$$T(\mathcal{L})T(\mathcal{L}') = T(\mathcal{L}\mathcal{L}'), \quad (3.1)$$

$$T(1) = I, \quad (3.2)$$

$$T(\mathcal{L}^{-1}) = T^{-1}(\mathcal{L}). \quad (3.3)$$

В физике, как правило, рассматриваются линейные конечномерные представления группы Лоренца, при этом операторы $T(\mathcal{L})$ являются матрицами размерности $n \times n$. В выражении (3.2) I — единичная матрица в 4-пространстве Минковского, а I — $n \times n$ -единичная матрица в пространстве Y . Пространство Y называется пространством представления, операторы $T(\mathcal{L})$ — операторами преобразования представления. Условие (3.3) означает, что матрица $T(\mathcal{L})$ имеет обратную и не является сингулярной. Поскольку матрица Лоренца $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q, q^*)$ — функция комплексных вектор-параметров, которые образуют группу относительно операции композиции (см. § 2) (при этом единичным элементом являются вектор-параметры $q=0, q^*=0$, а обратным элементом — вектор-параметры $-q$ и $-q^*$), то вместо выражений (3.1) — (3.3) можно написать [16]

$$T(q, q^*)T(q', q'^*) = T(\langle q, q' \rangle, \langle q^*, q'^* \rangle), \quad (3.4)$$

$$T(0) = I, \quad (3.5)$$

$$T(-q, -q^*) = T^{-1}(q, q^*). \quad (3.6)$$

На основе векторной параметризации группы Лоренца и ряда других ортогональных групп были построены и эффективно использованы при решении конкретных задач релятивистской физики операторы их конечномерных представлений (см. [16] и библиографию).

Остановимся подробнее на вопросах связи представлений группы Лоренца с бикватернионами. Прежде все-

частном называется много-однозначное соответствие. Выше давалось определение изоморфизма как одно-однозначного соответствия. Очевидно, что изоморфизм является частным случаем гомоморфизма. Если гомоморфное отображение множества преобразований некоторой группы в множество операторов преобразования представлений является изоморфизмом, то такое представление называется точным. Примером может служить представление группы комплексных чисел модуля единицы относительно операции умножения соответствующими 2×2 -матрицами (1.9)–(1.11). Представление называется неточным, если более чем одному элементу группы соответствует одна и та же матрица представления. Примером могут служить преобразования вращений и группы Лоренца, которые рассматриваются как представления групп единичных кватернионов и бикватернионов соответственно. Действительно, пусть матрица вращений O задается с помощью кватернионов $Ax\bar{A}$, где $AA=1$, $A^*=A$, $\bar{x}=-x$, $x^*=x$ — кватернионы (см. (2.3), (2.8) и таблицу). Очевидно, что одному и тому же преобразованию вращения O соответствуют кватернионы A и $-A$. Аналогичная ситуация имеет место для преобразований Лоренца \mathcal{L} , $x'=\mathcal{L}x$ или в бикватернионах $x'=LxL^*$, и, следовательно, одному преобразованию Лоренца могут быть поставлены в соответствие два бикватерниона L и $-L$. Таким образом, группа единичных кватернионов (бикватернионов) $2 \leftrightarrow 1$ отображается на группу трехмерных вращений (Лоренца).

Изоморфное отображение группы (алгебры) на себя называется автоморфизмом. Если отображение осуществляется с помощью элементов этой же группы (алгебры), то говорят о внутреннем автоморфизме. Рассмотренные выше преобразования группы $SO(4,C)$ и ее подгрупп, в том числе группы Лоренца и вещественной группы вращений, являются внутренними автоморфизмами множеств бикватернионов и кватернионов соответственно. При построении волновых уравнений, которые описывают физические поля, реализованные на алгебре кватернионов и соответствующие элементарным частицам, необходимо задать конкретные представления группы Лоренца $SO(3,1)$, по которым преобразуются рассматриваемые величины [63]. Различные классы таких величин, преобразующихся по однозначным представле-

ниям группы $SO(3,1)$, можно выделить с помощью автоморфизма и антиавтоморфизма (т. е. изоморфных отображений алгебры на себя с точностью до сохранения или обратного порядка сомножителей в законе умножения) алгебры H_c , которыми являются комплексное и кватернионное сопряжения. При этом нужно учесть, что действие группы $SO(3,1)$ на кватернион может быть задано в виде

$$\varphi(L)z\psi(L), \quad L\bar{L} = 1, \quad (3.7)$$

где φ и ψ — операторы комплексного или кватернионного сопряжений или же их композиции. Указанные классы величин можно получить из кватернионов $z = x_0 + iy_0 + x + iy$, удовлетворяющих одному из следующих условий:

$$z = \bar{z}, \text{ откуда } z = z_0 = x_0 + iy_0, \quad (3.8)$$

$$z = \bar{z}, z^* = \pm z, \text{ откуда } z = x_0 \text{ или } z = iy_0, \quad (3.9)$$

$$\bar{z}^* = \pm z, \text{ откуда } z = x_0 + iy \text{ или } z = iy_0 + x, \quad (3.10)$$

$$\bar{z} = -z, \text{ откуда } z = x + iy. \quad (3.11)$$

Идентифицируя полученные классы величин с соответствующими тензорными объектами по количеству компонент при учете операции P -отражения, определенной в (2.36) — (2.38), заключаем, что кватернион, удовлетворяющий условиям (3.8), (3.9), соответствует скаляру (верхний знак при z в (3.9)) или псевдоскаляру, условию (3.10) — вектору (нижний знак при z в (3.10)) или псевдовектору и, наконец, условию (3.11) — антисимметричному тензору второго ранга. Требование инвариантности классов рассмотренных величин относительно преобразований соответствующих представлений группы $SO(3,1)$ позволяет определить вид этих преобразований:

$$z \rightarrow z' = Lz\bar{L}^* \quad (3.12)$$

для кватернионов, отвечающих векторным и псевдовекторным величинам, и

$$z \rightarrow z' = L^*z\bar{L}^* \quad (3.13)$$

для кватернионов, отвечающих антисимметричным тензорам.

Так как на алгебре H_C не существует других автоморфизмов и антиавтоморфизмов, кроме комплексного и кватернионного сопряжения и их композиции, можно предположить, что в этой алгебре нельзя выделить пространство тензорных представлений группы Лоренца более высокой валентности. Чтобы построить такие представления, нужно обратиться к алгебрам Клиффорда большей размерности или же строить тензорные поля над алгеброй кватернионов H_C [64]. Кроме перечисленных однозначных представлений группы $SO(3,1)$, связанных с бикватернионами, введем понятие двузначных — спинорных представлений этой группы. Элементы спинорного пространства представлений — спиноры — обозначим буквой ξ . Спиноры ξ аналитически представляют собой двумерные комплексные векторы и определяются как объекты, которые при преобразованиях 4-векторов (бикватернионов) пространства Минковского (2.23)

$$x' = Lx\bar{L}^*, \quad \bar{x} = -x^* \quad (3.14)$$

преобразуются по закону

$$\xi' = L\xi, \quad (3.15)$$

где L в формуле (3.15) — комплексная 2×2 -матрица, которая может рассматриваться как соответствующее представление бикватерниона L в формуле (3.14). Данное представление, очевидно, реализуется, если в бикватернионе L в качестве базисных элементов взять единичную 2×2 -матрицу и матрицы Паули, умноженные на (i) . Таким образом сами спиноры могут быть выражены через бикватернионы, будет показано в § 11 гл. 4. Важным моментом при этом является использование делителей нуля в алгебре бикватернионов. Последние представляют собой проективные операторы, вырезающие из бикватернионного пространства подпространства, элементы которых обладают всеми необходимыми для определения спиноров свойствами. Отметим также, что в случае, когда при определении группы симметрии за исходное (фундаментальное) представление берется не векторное представление (3.14), а спинорное, бикватернионам $\pm L$ в отличие от (3.14) будут отвечать различные преобразования в (3.15). Это приводит к тому, что фундаментальной группой симметрии в теории становится универсальная накрывающая группа $SO(3,1)$ —

SL (2.C). Данная процедура дает возможность избежать неоднозначностей в волновых функциях, соответствующих элементарным частицам с полуцелым спином [54]. С помощью кватернионов могут быть также описаны спинорные представления ортогональных групп размерности выше 4 [65].

§ 4. ФУНКЦИИ ОТ КВАТЕРНИОНОВ И БИКВАТЕРНИОНОВ

Введение комплексных чисел приводит к рассмотрению комплексных функций от комплексных переменных. Теория аналитических функций комплексного переменного необычайно содержательна в математическом отношении и весьма эффективна и полезна в физических приложениях. Благодаря работам швейцарского математика Фютера существует довольно детально разработанная теория кватернионных функций от кватернионной переменной, во многом аналогичная теории аналитических функций комплексной переменной. Она легко может быть обобщена на случай, когда аргументы и функции являются бикватернионами, как это сделано в работе [24] (см. также [23, 66]). Прежде чем дать краткое введение в теорию аналитических функций от кватернионов и бикватернионов, напомним, что комплексная функция $f(z)$ комплексного переменного z называется аналитической, если для нее выполнено условие Коши—Римана

$$\frac{df(z)}{dz^*} = 0. \quad (4.1)$$

Здесь $\frac{d}{dz^*} = \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y}$ — оператор Коши — Римана.

Приравнивая нуль в отдельности действительные и мнимые части, условие (4.1) можно также переписать в виде, чаще встречающемся в пособиях по комплексному анализу, а именно

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad f(z) = u(z) + iv(z). \quad (4.2)$$

Рассмотрим теперь обобщение условий (4.1), (4.2) на случай функций кватернионного переменного. Пусть $f(x) =$

$= f_0(x)e_0 + f_1(x)e_1 + f_2(x)e_2 + f_3(x)e_3$ — функция-кватернион кватернионного аргумента x . Введем четырехмерное кватернионное обобщение векторного дифференциального оператора Гамильтона $\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} -$ оператор $\nabla = e_0 \frac{\partial}{\partial x_0} + e_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + e_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + e_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$ и сопряженный ему оператор $\bar{\nabla} = e_0 \frac{\partial}{\partial x_0} - e_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - e_2 \frac{\partial}{\partial x_2} - e_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$. Легко видеть, что именно оператор ∇ соответствует оператору d/dz^* в теории функций комплексного переменного, и поэтому его можно обозначить так же, как производную по сопряженному кватерниону \bar{x} , т. е. $\nabla = d/d\bar{x}$. Тогда обобщением (4.2), очевидно, является условие кватернионной аналитичности

$$\nabla f(x) = \frac{df}{dx} = 0. \quad (4.3)$$

Приравнивая нулю отдельные компоненты кватерниона (4.3), имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_0}{\partial x_0} - \frac{\partial f_1}{\partial x_1} - \frac{\partial f_2}{\partial x_2} - \frac{\partial f_3}{\partial x_3} &= 0, \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_0} + \frac{\partial f_0}{\partial x_1} + \frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3} &= 0, \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_0} + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f_0}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1} &= 0, \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_0} + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_0}{\partial x_2} &= 0, \end{aligned} \quad (4.4)$$

что в свою очередь легко переписывается в векторных обозначениях:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_0}{\partial x_0} - (\nabla f) &= \frac{\partial f_0}{\partial x_0} - \operatorname{div} \mathbf{f} = 0, \\ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_0} + [\nabla \mathbf{f}] &= \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_0} + \operatorname{rot} \mathbf{f} = 0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Фютер рассмотрел полиномы вида

$$P_{n_1 n_2 n_3}(x) = (n!)^{-1} \sum_{(k_r)}^{n_1 + n_2 + n_3 = n} (x_{k_1} + e_{k_1} x_0) \cdots (x_{k_n} + e_{k_n} x_0), \quad (4.6)$$

где суммирование проводится по всем допустимым k_r , с фиксированными числами n_1 , n_2 и n_3 , которые указывают, сколько раз появляется 1, 2 и 3 соответственно в сериях (k_1, k_2, \dots, k_n) .

Как нетрудно убедиться, они подчиняются условию

$$\overset{\leftarrow}{P_{n_1 n_2 n_3}}(x) \nabla = 0, \quad (4.7)$$

где стрелка показывает направление действия оператора $\nabla = d/d\bar{x}$.

Из условия (4.7) могут быть получены полиномы, непосредственно удовлетворяющие условию кватернионной аналитичности (4.3). Действительно, взяв кватернионное сопряжение к соотношению (4.7) и совершая очевидные переобозначения индексов k_r и замену переменных x_0 на $-x_0$, получаем, что в сущности те же полиномы (4.6) удовлетворяют условию (4.3):

$$\nabla P_{n_1 n_2 n_3}(x) = 0. \quad (4.8)$$

Анализируя структуру полиномов Фютера, можно установить, что

$$P_{n_1 n_2 n_3}(x) = x_1^{n_1} x_2^{n_2} x_3^{n_3} + x_0 P_{n-1}(x), \quad (4.9)$$

где $P_{n-1}(x)$ — полином степени $n-1$ от переменных x_0 , x_k , и нетрудно убедиться в справедливости соотношения

$$(n_1! n_2! n_3!)^{-1} (\partial^k P_{s_1 s_2 s_3}(x) / \partial x_1^{s_1} \partial x_2^{s_2} \partial x_3^{s_3}) = \delta_{s_1 n_1} \delta_{s_2 n_2} \delta_{s_3 n_3}, \quad (4.10)$$

где

$$\sum_{i=1}^3 s_i = \sum_{i=1}^3 n_i = n.$$

Любая аналитическая в некоторой области \mathcal{D} кватернионная функция $f(x)$, выражющаяся как равномерно сходящийся ряд компонент кватерниона x , для которого норма $N(x) < 1$, может быть представлена в виде

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{(n_1, n_2, n_3)}^{n_1+n_2+n_3=n} c_{n_1, n_2, n_3} P_{n_1, n_2, n_3}(x), \quad (4.11)$$

где

$$c_{n_1, n_2, n_3} = (\partial^n f(x)/\partial x_1^{n_1} \partial x_2^{n_2} \partial x_3^{n_3}).$$

Очевидно, что сходимость (4.11) может быть доказана для $N(x) < 1$.

Приведенные выше соотношения могут быть обобщены на случай бикватернионов. При этом дифференциальные условия кватернионной аналитичности имеют вид

$$\begin{aligned} \nabla_z f(z) = \frac{\partial f(z)}{\partial z} = & \left(e_0 \frac{\partial}{\partial z_0} + e_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + e_2 \frac{\partial}{\partial z_2} + \right. \\ & \left. + e_3 \frac{\partial}{\partial z_3} \right) (f_0(z)e_0 + f_1(z)e_1 + f_2(z)e_2 + f_3(z)e_3) = 0. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Допускают обобщение и полиномы Фютера, по которым может быть разложена любая аналитическая бикватернионная функция $f(z)$. Некоторые детали, касающиеся вопросов кватернионной аналитичности, можно найти в работе [24]. Здесь же приведем сведения о теореме типа теоремы Коши о вычетах.

Пусть $f(z)$ — аналитическая функция в \mathcal{D} и Ω^3 — трехмерная гиперповерхность, полностью лежащая в области \mathcal{D} четырехмерного комплексного пространства z_0, z_1, z_2, z_3 . Определим функционал

$$f(\Omega^3) = \{(8\pi)^3\}^{-1} \int_{\Omega^3} \{f(z) dz \square (z - A)^{-1}\}, \quad \square = \nabla \bar{\nabla}, \quad (4.13)$$

где A — постоянный бикватернион и dz — элемент поверхности Ω^3 , определяемый как

$$dz = \sum_{\mu=1}^4 e_\mu dz_0 dz_1 dz_2 dz_3 / dz_\mu. \quad (4.14)$$

Пусть функция $f(z)$ является аналитической в области Ω^3 , не содержащей точек светового конуса, вершина которого находится в A ; тогда $f(\Omega^3)$ — стационарный функционал в Ω^3 , т. е.

$$\{f(z) \bar{\nabla} \square (z - A)^{-1}\} = 0. \quad (4.15)$$

I. Кватернионное пространство. Ограничимся специальным случаем, когда z — кватернионная переменная и S_0^3 — трехмерная гиперсфера с центром в точке A в четырехмерном кватернионном пространстве (x_0, y_1, y_2, y_3) . Тогда на основе главной теоремы Фютера для кватернионов (аналога теоремы Коши) можно записать

$$f(A) = \{(8\pi)^3\}^{-1} \int_{S_0^3} \{f(z) dz^+ \square (z - A)^{-1}\}, \quad (4.16)$$

где dz^+ является кватернионом элемента поверхности S_0^3 и дается выражением

$$dz^+ = ds_0 + \sum_{k=1}^3 ie_k ds_k,$$

$$ds_0 = dy_1 dy_2 dy_3, \quad ds_k = dx_0 dy_1 dy_2 dy_3 / dy_k,$$

$$z - A = x_0' + \sum_{k=1}^3 ie_k y_k'.$$

II. Бикватернионное пространство. Деформируем поверхность S_0^3 к подходящей гиперповерхности, на которой начальное условие для $f(z)$ может задаваться таким способом, что в процессе деформации поверхность остается в Ω^3 . Такой поверхностью служит, например, поверхность, задаваемая уравнением $x_0 = \text{const}$ в вещественном подпространстве бикватернионного пространства, элементы которого имеют компоненты x_0', x_1', x_2', x_3' . Определим изменяющуюся при деформации поверхность следующим образом:

$$S_P^3 : \{(x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2)^{1/2} - x_0'\}^2 + y_0'^2 = \varepsilon^2.$$

Положим, что

$$z - A = x_0' + ie' + \sum_{k=1}^3 e_k x_k'.$$

В пределе $\varepsilon \rightarrow 0$ S_P^3 стремится к поверхности пересечения плоскости $x_0 = \text{const}$ со световым конусом $x_0'^2 - x_1'^2 -$

$-x_2'^2 - x_3'^2 = 0$. Переменную поверхность S_0^3 , задаваемую как и в (4.16), можно преобразовать в S_F^3 путем непрерывной деформации, оставаясь в области Ω . Значение функционала $f(T^3)$ не изменяется в процессе деформации переменной поверхности. Поэтому из (4.16) получим

$$f(A) = \{(8\pi)^3\}^{-1} \int_{S_F^3} \{f(z) dz \square (z - A)^{-1}\}.$$

Важным и конструктивным моментом в формулировке условий кватернионной аналитичности является то, что в качестве обобщения оператора Коши—Римана в (4.3) выбирается оператор ∇ , ковариантный относительно группы $SO(4.R)$, либо ∇_z в (4.12), ковариантный относительно группы $SO(4.C)$. Этим подход Фютера к определению кватернионной аналитичности отличается от изложенных в работах [25, 26]. В § 8 будет показано, что уравнения электромагнитного поля в пустоте, не содержащие источников, можно рассматривать как условия кватернионной аналитичности для оператора, ковариантного относительно группы Лоренца $SO(3.1)$.

**ВЕКТОРЫ ТРЕХМЕРНЫХ
ПРОСТРАНСТВ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ,
СОПОСТАВЛЯЕМЫЕ С ПАРАМИ ТОЧЕК,
И КИНЕМАТИКА**

**§ 5. КВАТЕРНИОНЫ
И ПРОСТРАНСТВА ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ**

Рассмотрим поверхность в четырехмерном евклидовом пространстве R_4 , задаваемую уравнением

$$x\bar{x} = 1, \quad (5.1)$$

где $x = x_0 + \mathbf{x} \in R_4$ — кватернион, и поверхности в пространстве Минковского 1R_4 , определяемые уравнениями

$$x\tilde{x} = -1, \quad (5.2)$$

$$x\bar{x} = 1, \quad (5.3)$$

$$x\tilde{x} = 0, \quad (5.4)$$

где $x = ix_0 + \mathbf{x} \in {}^1R_4$ — бикватернионы пространства Минковского. Уравнение (5.1) — уравнение 3-сферы. Отождествлением противоположных точек поверхность сферы (5.1) преобразуется в эллиптическое трехмерное пространство S_3 (пространство постоянной положительной кривизны — пространство Римана в узком смысле этого слова).

Поверхность (5.2) — двухполостный гиперболоид или псевдосфера мнимого радиуса. Как известно, на верхней поле гиперболоида можно реализовать геометрию трехмерного вещественного пространства Лобачевского 1S_3 . Поверхность (5.3) — однополостный гиперболоид или псевдосфера. На данной поверхности может быть реализована геометрия трехмерного мнимого пространства Лобачевского. Поверхность (5.4) — световой конус в пространстве Минковского — является абсолютом — областью бесконечно удаленных точек как для точек вещественного пространства Лобачевского, реализуемого на поверхности (5.2), так и для точек мнимого про-

странства Лобачевского, реализуемого на поверхности (5.3). При проективной интерпретации вещественное (в данном случае) трехмерное пространство Лобачевского S_3^1 удобно расширить, дополнив его бесконечно удаленными точками (точками, принадлежащими конусу) и идеальными точками (точками минимого пространства Лобачевского). Это пространство называется расширенным пространством Лобачевского. Вещественное пространство Лобачевского в такой интерпретации выступает как собственная область расширенного пространства Лобачевского. В основном нам понадобится вещественное трехмерное пространство Лобачевского, однако в освещении некоторых вопросов будем обращаться к расширенному пространству Лобачевского. Дальнейшее изложение материала данного параграфа будет основано на результатах работ [67–71].

Определение векторов в эллиптическом трехмерном пространстве [70, 71]. В таком пространстве каждой точке соответствуют два 4-радиуса-вектора (кватернионы) x и $-x$. Покажем, что расстояние между точками с радиусами-векторами x и x' можно определить формулой

$$\rho(x, x') = \arccos \frac{1}{2} (\bar{x}\bar{x}' + x'\bar{x}), \quad (5.5)$$

$$\frac{1}{2} (\bar{x}\bar{x}' + x'\bar{x}) = x_0 x'_0 - (x\bar{x}').$$

Отметим, что, поскольку кривизна пространства постоянна, она принята за единицу, и поэтому длина, определяемая (5.5), безразмерна. Величина $\rho(x, x')$ должна удовлетворять стандартным аксиомам: положительности, аддитивности и условию выполнения неравенства треугольника. Что касается первого требования, то для двух кватернионов x и x' оно легко проверяется. Второе требование означает, что если на прямой (геодезической) рассматриваемого пространства заданы три точки x, x', x'' и точка x' находится между x и x'' , то

$$\rho(x, x'') = \rho(x, x') + \rho(x', x''). \quad (5.6)$$

Второе и третье условия будут рассмотрены ниже; здесь только отметим, что расстояние является максимальным ($\rho=\pi/2$) для точек, радиусы-векторы которых ортогональны ($\bar{x}\bar{x}' + x'\bar{x}=0$).

Как известно, через две различные точки с радиусами-векторами x и x' проходит только одна прямая (геодезическая). Она состоит из точек, радиусы-векторы которых x'' выражаются через радиусы-векторы x и x' формулой

$$x'' = \alpha x + \beta x',$$

где

$$\alpha = \frac{\sin(\eta - \xi)}{\sin \eta}, \quad \beta = \frac{\sin \xi}{\sin \eta}, \quad \eta = \arccos \frac{1}{2} (x \bar{x}' + x' \bar{x}),$$

ξ — параметр. Ясно, что для задания прямой достаточно указать любые две различные точки, принадлежащие ей.

Определение 1. Вектором в римановом пространстве (постоянной кривизны) будем называть объект, состоящий из прямой, на которой указано направление, и положительного числа $\rho \leq \pi/2$ — длины вектора. Из определения следует, что семейство векторов в 3-мерном пространстве постоянной кривизны является 5-параметрическим.

Над векторами и точками естественно определяется ряд операций.

Определение 2. Откладывание вектора от точки.

Данная операция определена только для точек, лежащих на векторе (точнее, на прямой, соответствующей

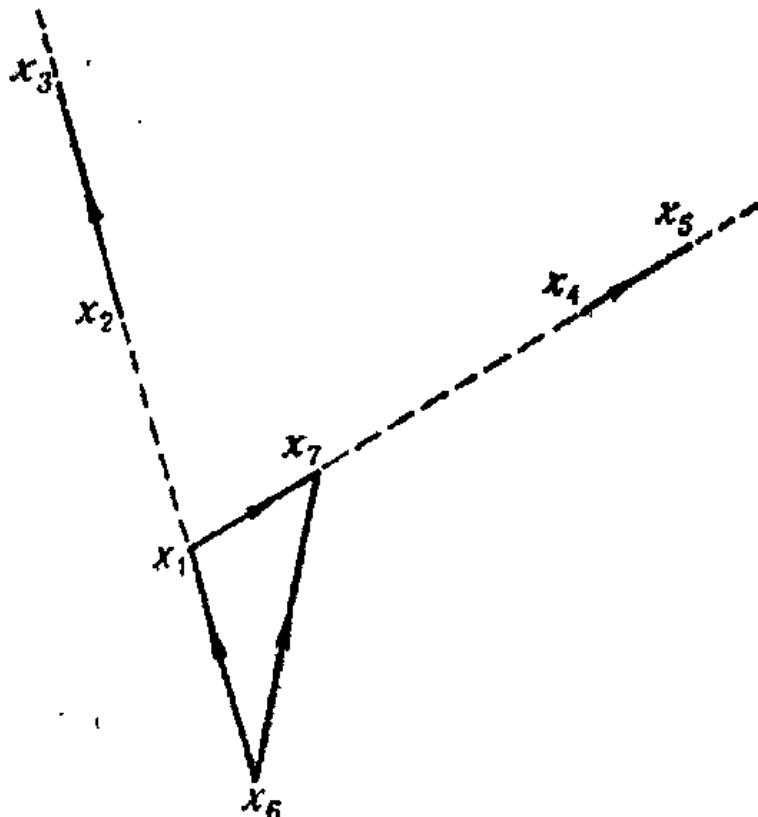


Рис. 5.1

вектору). Она ставит в соответствие исходной точке x новую точку x' , также лежащую на векторе и отстоящую от точки x (в указанном на прямой направлении) на расстоянии, равном длине вектора.

Определение 3. Проведение вектора через две точки.

Операция ставит в соответствие упорядоченной паре точек x и x' соединяющий их вектор $\overrightarrow{xx'}$, направленный от точки x к точке x' . Длина этого вектора равна расстоянию между точками; соответствующая прямая проходит через указанные точки и направлена от x к x' .

В соответствии с приведенными определениями удобно задавать вектор $\overrightarrow{xx'}$ прямой, на которой отмечены две точки x и x' — начало и конец вектора и стрелкой указано направление от x к x' . Согласно определению 1, точки x и x' можно передвигать вдоль прямой без изменения расстояния между ними.

Определение 4. Сложение векторов.

Операция определена только для векторов, пересекающихся в некоторой точке. Пусть x_1 — точка пересечения векторов $\overrightarrow{x_2x_3}$ и $\overrightarrow{x_4x_5}$ или, точнее говоря, точка пересечения прямых, на которых лежат эти векторы (рис. 5.1). Чтобы найти их сумму, переносим пары точек x_2 , x_3 и x_4 , x_5 вдоль соответствующих прямых (см. Определение 3) так, чтобы точки x_3 и x_5 совпали с точкой x_1 , т. е. совмещаем начало вектора $\overrightarrow{x_2x_3}$ и конец вектора $\overrightarrow{x_4x_5}$ с точкой пересечения соответствующих прямых. При этом точка x_2 перейдет в точку x_6 , а точка x_5 — в x_7 . Тогда вектор $\overrightarrow{x_6x_7}$, соединяющий начало вектора $\overrightarrow{x_6x_1}(x_2x_3)$ с концом вектора $\overrightarrow{x_1x_7}(x_4x_5)$, будет искомой суммой векторов $\overrightarrow{x_2x_3} = \overrightarrow{x_6x_1}$ и $\overrightarrow{x_4x_5} = \overrightarrow{x_1x_7}$. Операцию сложения будем обозначать фигурными скобками:

$$\{\overrightarrow{x_2x_3}, \overrightarrow{x_4x_5}\} = \overrightarrow{x_6x_7}.$$

Приведенное построение естественно назвать правилом треугольника (это аналог правила параллелограмма в случае евклидова пространства). Отметим, что операция сложения векторов в общем случае некоммутативна и является частично ассоциативной. Последнее означает,

что ассоциативность сложения для векторов $\vec{K}, \vec{N}, \vec{M}$ имеет место:

$$\{\{\vec{K}, \vec{N}\}, \vec{M}\} = \{\vec{K}, \{\vec{N}, \vec{M}\}\}, \quad (5.7)$$

если все фигурирующие в (5.7) операции допустимы. Частичная ассоциативность следует непосредственно из аналитического выражения для операции сложения векторов, к которому мы переходим.

Пусть x_1 и x_2 — кватернионы, которые ставятся в соответствие единичным радиусам-векторам начальной и конечной точек вектора \vec{x}_1x_2 в 3-мерном римановом пространстве ($x_1\bar{x}_1=1, x_2\bar{x}_2=1$). Поставим в соответствие кватернионам x_1, x_2 кватернион Q_{12} с помощью соотношения

$$x_2 = Q_{12}x_1. \quad (5.8)$$

Учитывая условие (5.1), кватернион Q_{12} можно выразить через кватернионы x_1 и x_2 :

$$Q_{12} = x_2\bar{x}_1. \quad (5.9)$$

Поскольку, очевидно,

$$Q_{12}\bar{Q}_{12} = 1, \bar{Q}_{12} = x_1\bar{x}_2,$$

то, согласно формулам (2.8), (2.9), кватернион Q_{12} можно задать его вектор-параметром q_{12} , где

$$q_{12} = \frac{Q_{12} - \bar{Q}_{12}}{Q_{12} + \bar{Q}_{12}} = \frac{x_2\bar{x}_1 - x_1\bar{x}_2}{x_2\bar{x}_1 + x_1\bar{x}_2}. \quad (5.10)$$

Вектор q_{12} , определяемый кватернионом Q_{12} , дает аналитическое описание вектора в рассматриваемом римановом пространстве. Трем точкам, задаваемым кватернионами x_1, x_2, x_3 , отвечают три кватерниона:

$$Q_{12} = x_2\bar{x}_1, Q_{23} = x_3\bar{x}_2, Q_{13} = x_3\bar{x}_1, \quad (5.11)$$

соответствующие сторонам треугольника в пространстве Римана. Очевидно, имеет место соотношение

$$Q_{13} = x_3\bar{x}_1 = Q_{23}Q_{12} = x_3\bar{x}_3x_2\bar{x}_1, \quad (5.12)$$

которому соответствует закон композиции вектор-параметров

$$q_{13} = \frac{q_{12} + q_{23} + [q_{12}q_{23}]}{1 - (q_{12}q_{23})}. \quad (5.13)$$

Формула (5.13) является, таким образом, аналитическим выражением закона сложения векторов — правила треугольника в римановом пространстве постоянной кривизны.

Теперь, учитывая определение длины отрезка в римановом пространстве постоянной кривизны (5.5), нетрудно получить соотношение

$$|\mathbf{q}| = \operatorname{tg} \rho. \quad (5.14)$$

Возводя (5.13) в квадрат, после несложных преобразований получаем формулу

$$\frac{1}{\sqrt{1 + (\rho_{13})^2}} = \frac{1 - (\rho_{12}\rho_{23})}{\sqrt{1 + (\rho_{12})^2} \sqrt{1 + (\rho_{23})^2}}, \quad (5.15)$$

которая представляет собой теорему косинусов для трехмерного эллиптического пространства, выраженную через векторы этого пространства, и которую нетрудно переписать в стандартной форме, воспользовавшись (5.14). Действительно, подставляя (5.14) в (5.15) и вводя косинус угла θ_2 между векторами \mathbf{q}_{12} и \mathbf{q}_{23} , получаем

$$\cos \rho_{13} = \cos \rho_{12} \cos \rho_{23} + \sin \rho_{12} \sin \rho_{23} \cos \theta_2. \quad (5.16)$$

Используя теорему косинусов для эллиптического пространства, можно пояснить неравенство треугольника для длины, о чем речь шла выше. Рассматривая ρ_{13} при фиксированных ρ_{12} и ρ_{23} как функцию θ_2 , легко установить, что

$$\rho_{12} + \rho_{23} \geq \rho_{13}. \quad (5.17)$$

Аналогично для других углов того же треугольника получаются неравенства

$$\rho_{13} + \rho_{12} \geq \rho_{23}, \quad (5.18)$$

$$\rho_{12} + \rho_{23} \geq \rho_{13}. \quad (5.19)$$

Неравенство треугольника, таким образом, означает, что длина любой из сторон треугольника меньше суммы длин двух других его сторон.

С помощью соотношений (5.13)–(5.16) легко выясняется смысл условия аддитивности длины отрезка в эллиптическом пространстве. Пусть имеется прямая с точками 1, 2, 3 в трехмерном эллиптическом пространстве. Зададим по ней векторы \mathbf{q}_{12} , \mathbf{q}_{23} . Для одинаково направ-

ленных векторов q_{12} и q_{23} их сумма, согласно (5.13), определяется соотношением

$$q_{13} = \frac{q_{12} + q_{23}}{1 - (q_{12}q_{23})}. \quad (5.20)$$

Аналогичное соотношение имеет место для модулей векторов q_{12} , q_{23} , q_{13} :

$$\begin{aligned} |q_{13}| &= \frac{|q_{12}| + |q_{23}|}{1 - |q_{12}| |q_{23}|} = \\ &= \frac{\operatorname{tg} \rho_{12} + \operatorname{tg} \rho_{23}}{1 - \operatorname{tg} \rho_{12} \operatorname{tg} \rho_{23}} = \operatorname{tg}(\rho_{12} + \rho_{23}) = \operatorname{tg} \rho_{13}. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Справедливость (5.21) легко проверить, используя теорему косинусов. Теорема косинусов (5.16) или правило сложения векторов (5.13) полностью определяют геометрию в пространстве S_3 . При малых значениях длин сторон треугольника, разлагая модули векторов в ряд по их длине ρ в формуле (5.13) и ограничиваясь первыми степенями по ρ , получим обычную формулу сложения векторов в трехмерном евклидовом пространстве:

$$\rho_{13}q'_{13} = \rho_{12}q'_{12} + \rho_{23}q'_{23}, \quad (5.22)$$

где q'_{13} , q'_{12} , q'_{23} — единичные векторы в направлении исходных векторов q_{13} , q_{12} , q_{23} . Таким образом, переход от плоского евклидова пространства к пространству постоянной кривизны с точки зрения излагаемой здесь теории векторов можно рассматривать как переход от пространства с законом сложения векторов (5.22) — правилом параллелограмма — к пространству с законом сложения векторов (5.13), являющимся аналитическим выражением правила треугольника. Предельный переход от формулы (5.13) к формуле (5.22) имеет некоторые особенности, связанные со структурой произвольных векторов q , вытекающей из формул (5.9), (5.10) (см. также [70]).

Из формулы (5.13), в частности, следует, что в римановом пространстве постоянной кривизны не существует подобных треугольников. Наличие подобных треугольников в плоском евклидовом пространстве можно рассматривать как следствие инвариантности соответствующей формулы векторного сложения (5.22) относительно

масштабных преобразований. Очевидно, что при одновременном преобразовании длин сторон вида $\rho_{13}' = \lambda \rho_{13}$, $\rho_{12}' = \lambda \rho_{12}$, $\rho_{23}' = \lambda \rho_{23}$ формула (5.22) не меняется. Для формулы (5.13), как легко убедиться, такая инвариантность не имеет места.

Перейдем к определению векторов в трехмерном расширенном пространстве Лобачевского. Это можно сделать на основе соотношений типа (5.8) — (5.13). Существуют три вида векторов в зависимости от того, на каких прямых лежат векторы в расширенном пространстве Лобачевского. Если вектор принадлежит прямой, пересекающей абсолют (собственной прямой), то его естественно называть собственным; если вектор принадлежит прямой, не пересекающей абсолют (идеальной прямой), то его будем называть идеальным вектором; если вектор принадлежит прямой, касающейся абсолюта (изотропной прямой), то такой вектор назовем изотропным. Наконец, возможно введение векторов, соответствующих парам точек, лежащих по разные стороны абсолюта [71].

Аналитические формулы для задания вектора, сопоставляемого с парами точек, соответствующих бикватернионам x_1 и x_2 , как легко убедиться, приводятся к виду (5.10), в котором кватернионы x_1 и x_2 заменяются на бикватернионы, подчиняющиеся условиям (5.2), (5.3). Отметим, что все три вида векторов — собственные, идеальные и изотропные — могут быть определены в идеальной области расширенного пространства Лобачевского, в то время как в собственной области расширенного пространства Лобачевского существуют только собственные векторы. Собственные векторы в идеальной области расширенного пространства 1S_3 можно рассматривать как векторы, полученные из векторов собственной области этого пространства переносом последних вдоль прямых, на которых они лежат. Очевидно, что продолжение прямых, лежащих в собственной области, в идеальную область всегда связано с пересечением абсолюта, так что все векторы собственной области являются собственными. (Более подробные сведения о всех видах прямых содержатся в монографии [72], а о векторах, лежащих на них, — в работе [71].)

Обратимся к более детальному изложению теории векторов в собственной области расширенного 3-пространства Лобачевского (вещественном 3-пространстве

Лобачевского). На этой основе в дальнейшем будет дано изложение релятивистской кинематики.

Если в вещественном трехмерном пространстве Лобачевского, реализуемом на поверхности, определяемой формулой (5.2), заданы две точки 1 и 2, координаты которых определяют компоненты бикватернионов x_1 и x_2 , то

$$Q_{12} = -x_2\bar{x}_1, \quad \bar{Q}_{12} = -x_1\bar{x}_2 \quad (5.23)$$

и

$$q_{12} = \frac{Q_{12} - \bar{Q}_{12}}{Q_{12} + \bar{Q}_{12}} = \frac{-x_2\bar{x}_1 + x_1\bar{x}_2}{-x_2\bar{x}_1 - x_1\bar{x}_2} = \frac{x_2\bar{x}_1 - x_1\bar{x}_2}{x_2\bar{x}_1 + x_1\bar{x}_2}. \quad (5.24)$$

Соответственно для трех точек 1, 2, 3 имеет место соотношение, совпадающее с формулой (5.13), для пространства Римана:

$$q_{12} = \frac{q_{12} + q_{23} + [q_{12}q_{23}]}{1 - (q_{12}q_{23})}, \quad (5.25)$$

где

$$q_{23} = \frac{Q_{23} - \bar{Q}_{23}}{Q_{23} + \bar{Q}_{23}}, \quad q_{12} = \frac{Q_{12} - \bar{Q}_{12}}{Q_{12} + \bar{Q}_{12}}, \quad (5.26)$$

$$Q_{23} = -x_3\bar{x}_2, \quad Q_{12} = -x_2\bar{x}_1, \quad Q_{13} = Q_{23}Q_{12}. \quad (5.27)$$

В качестве длины отрезка, соответствующего вектору q_{12} в пространстве Лобачевского, принимается величина ρ_{12} , связанная с модулем следующим образом:

$$i \operatorname{th} \rho_{12} = |q_{12}|. \quad (5.28)$$

Обосновать такое определение длины в пространстве Лобачевского можно, например, проанализировав область изменения ρ_{12} при изменении x_2 от $x_2 = x_1$, когда, очевидно, длина должна равняться нулю, до $x_2 = x'_2$, где $x'_2\bar{x}'_2 = 0$, т. е. когда второй конец отрезка стремится асимптотически на бесконечности стать точкой конуса, а отрезок становится бесконечно длинным. Такого рода анализ наряду с требованиями аддитивности, положительности и выполнения неравенства треугольника однозначно приводит к параметризации (5.28) модуля q_{12} , где ρ_{12} можно считать длиной отрезка в вещественном пространстве Лобачевского.

Возводя (5.25) в квадрат и подставляя вместо модуля q_{12} выражение (5.28) через длину отрезка, после неслож-

ных преобразований приходим к теореме косинусов в пространстве Лобачевского:

$$\operatorname{ch} \rho_{13} = \operatorname{ch} \rho_{12} \operatorname{ch} \rho_{23} - \operatorname{sh} \rho_{12} \operatorname{sh} \rho_{23} \cos \theta_2, \quad (5.29)$$

где θ_2 , как и в случае риманова пространства постоянной кривизны, определяется формулой

$$\cos \theta_2 = \frac{(\mathbf{q}_{12} \mathbf{q}_{23})}{\sqrt{(\mathbf{q}_{12}^2)} \sqrt{(\mathbf{q}_{23}^2)}}. \quad (5.30)$$

Используя выражение (5.29) для теоремы косинусов в пространстве Лобачевского, легко проверить выполнение неравенства треугольника для длины в пространстве Лобачевского.

Известно, что в пространстве 1S_3 в отличие от пространства S_3 существуют параллельные прямые. Поэтому естественно рассмотреть вопрос о параллельных прямых на основе введенных нами векторов. По определению, параллельными называются прямые, пересекающиеся на бесконечности. Это означает, что существует связь определения параллельности с соответствующим предельным переходом, а именно: если, например, имеется треугольник, то для того, чтобы две из его сторон были параллельны, необходимо точку их пересечения устремить в бесконечность. Таким образом, если требуется построить вектор, параллельный заданной прямой, одну из вершин в треугольнике устремим в бесконечность вдоль той из его сторон, которая лежит на данной прямой. Воспользуемся формулой сложения векторов (5.25), в которой каждый вектор соответствует одной из сторон треугольника. Зафиксирув направление вектора \mathbf{q}_{12} , устремим его начало к бесконечности. Это соответствует тому, что $\mathbf{q}_{12} \rightarrow \mathbf{n}_{12} = i \mathbf{q}_{12} / \sqrt{(\mathbf{q}_{12}^2)}$, $\rho_{12} \rightarrow \infty$ согласно (5.28). При этом

$$\mathbf{q}_{13} \rightarrow \mathbf{n}_{13} = \frac{\mathbf{n}_{12} + \mathbf{q}_{23} + [\mathbf{n}_{12} \mathbf{q}_{23}]}{1 - (\mathbf{n}_{12} \mathbf{q}_{23})}, \quad (5.31)$$

соответственно и

$$\rho_{13} = \operatorname{arcth}(-i|\mathbf{q}_{13}|) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \sqrt{(\mathbf{q}_{13}^2)}}{1 + \sqrt{(\mathbf{q}_{13}^2)}} \rightarrow \infty, \quad (5.32)$$

в чем легко убедиться, если от формулы (5.31) перейти к теореме косинусов. Умножив формулу (5.31) скалярно на \mathbf{n}_{12} , получим

$$(\mathbf{n}_{12}\mathbf{n}_{13}) = \frac{-1 + (\mathbf{n}_{12}\mathbf{q}_{23})}{1 - (\mathbf{n}_{12}\mathbf{q}_{23})} = -1, \quad (5.33)$$

или $\cos\theta_1 = 1$ (θ_1 — угол между \mathbf{n}_{12} и \mathbf{n}_{13}), что означает, очевидно, параллельность векторов \mathbf{n}_{12} и \mathbf{n}_{13} . Следует, однако, отметить, что поскольку $1 + (\mathbf{n}_{12}^2) = 0$ и $1 + (\mathbf{n}_{13}^2) = 0$, то соответствующие преобразования Q (5.26), (5.27) для \mathbf{n}_{12} и \mathbf{n}_{13} не определены и последние не являются векторами собственной области расширенного пространства Лобачевского. Чтобы из этих векторов получить параллельные векторы данного пространства, их необходимо умножить на вещественное число α ($0 \leq \alpha \leq 1$). Например, если мы хотим, чтобы длина каждого из указанных векторов совпадала с длиной исходных векторов \mathbf{q}_{12} и \mathbf{q}_{13} , \mathbf{n}_{12} и \mathbf{n}_{13} необходимо умножить на $-\sqrt{i(\mathbf{q}_{12}^2)}$ и $i\sqrt{(\mathbf{q}_{13}^2)}$ соответственно. Тогда $\mathbf{n}_{12} \rightarrow \mathbf{q}_{12}$, а

$$\mathbf{n}_{13} \rightarrow i\mathbf{n}_{13} \sqrt{(\mathbf{q}_{13}^2)} = \frac{\mathbf{n}_{12} + \mathbf{q}_{23} + [\mathbf{n}_{12}\mathbf{q}_{23}]}{1 - (\mathbf{n}_{12}\mathbf{q}_{23})} \sqrt{(\mathbf{q}_{13}^2)}.$$

Если в формуле (5.31) $(\mathbf{n}_{12}\mathbf{q}_{23}) = 0$ (прямоугольный треугольник), то, умножая (5.31) скалярно на \mathbf{q}_{23} , получим

$$(\mathbf{n}_{12}\mathbf{q}_{23}) = \mathbf{q}_{23}^2, \quad (5.34)$$

или

$$\cos\theta_3 = \operatorname{th}\rho_{23}, \quad (5.35)$$

что дает известную зависимость угла параллельности от длины перпендикуляра, опущенного из точки на одной параллельной прямой на другую параллельную прямую.

В пространстве Лобачевского, как известно, через одну заданную точку можно провести две прямые, параллельные данной. Действительно, одной и той же прямой соответствует как вектор \mathbf{n}_{12} , так и вектор $-\mathbf{n}_{12}$. При замене \mathbf{n}_{12} на $-\mathbf{n}_{12}$ в формуле (5.31) полученный вектор

$$\mathbf{n}'_{13} = \frac{-\mathbf{n}_{12} + \mathbf{q}_{23} - [\mathbf{n}_{12}\mathbf{q}_{23}]}{1 + (\mathbf{n}_{12}\mathbf{q}_{23})} \quad (5.36)$$

отличен от \mathbf{n}_{13} (5.31) и в то же время параллелен \mathbf{n}_{12} , в чем легко убедиться, умножив (5.36) скалярно на \mathbf{n}_{12} .

Угол же между n_{13} и n'_{13} равен удвоенному углу параллельности, определяемому формулой (5.35).

Установим трансформационные свойства введенных векторов. Иными словами, выясним, как преобразуются векторы трехмерного риманова пространства постоянной кривизны, когда кватернионы x_1, x_2, x_3 преобразуются с помощью преобразований группы $SO(4.R)$, и соответственно как преобразуются векторы пространства Лобачевского, когда бикватернионы пространства Минковского преобразуются с помощью преобразований из группы Лоренца $SO(3.1)$. С этой целью отметим, что, согласно формуле (2.3) и таблице (см. также (2.23)), бикватернионы x_1, x_2 преобразуются следующим образом:

$$x'_1 = L(\mathbf{q}) x_1 L(-\mathbf{q}^*),$$

$$x'_2 = L(\mathbf{q}) x_2 L(-\mathbf{q}^*),$$

при этом Q_{12} преобразуется согласно соотношению

$$Q'_{12} = L(\mathbf{q}) Q_{12} L(-\mathbf{q}) = L Q_{12} \bar{L}. \quad (5.37)$$

Формула (5.37) определяет внутренние автоморфизмы алгебры бикватернионов, образующие группу, изоморфную трехмерной группе комплексных вращений $SO(3.C)$. Из (5.37) следует, что

$$\mathbf{q}'_{12} = L \mathbf{q}_{12} \bar{L}, \quad (5.38)$$

или, как это впервые было установлено для вектор-параметров, соответствующих бикватернионам L и Q [16],

$$\mathbf{q}'_{12} = \langle \mathbf{q}, \mathbf{q}_{12} - \mathbf{q} \rangle = O(\mathbf{q}) \mathbf{q}_{12}, \quad O(\mathbf{q}) \in SO(3.C). \quad (5.39)$$

Аналогичные соотношения будут иметь место и тогда, когда x_1 и x_2 — кватернионы, т. е. $x_1 = x_1^*, x_2^* = x_2, x_1, x_2 \in R_4$, и подчиняются условию (5.1). Из формулы (2.3) и таблицы следует, что в этом случае

$$x'_1 = A(\mathbf{a}) x_1 A(-\mathbf{c}) = A x_1 \bar{B}, \quad (5.40)$$

$$x'_2 = A(\mathbf{a}) x_2 A(-\mathbf{c}) = A x_2 \bar{B}.$$

Формулы (5.40) определяют преобразование четырехмерной группы вращений $SO(4.R)$ в кватернионной

формулировке. Из этих формул для Q_{12} , заданного на сфере, легко получается соотношение

$$Q'_{12} = A Q_{12} \bar{A} = A(\mathbf{a}) Q_{12} A(-\mathbf{a}), \quad (5.41)$$

где A — кватернион, задаваемый вещественным вектор-параметром \mathbf{a} . Для q_{12} имеют место формулы

$$\dot{q}_{12} = A q_{12} \bar{A}, \quad (5.42)$$

$$\dot{q}'_{12} = \langle \mathbf{a}, q_{12}, -\mathbf{a} \rangle = O(\mathbf{a}) q_{12}, \quad O(\mathbf{a}) \in SO(3, R). \quad (5.43)$$

Таким образом, при преобразованиях Лоренца $SO(3,1)$ бикватернионов, соответствующих векторам псевдоевклидова 4-пространства, векторы пространства Лобачевского преобразуются по фундаментальному представлению комплексной группы трехмерных вращений. При преобразовании группы $SO(4, R)$ над кватернионами, сопоставляемыми с векторами евклидова 4-пространства, векторы трехмерного пространства постоянной положительной кривизны преобразуются по фундаментальному представлению вещественной группы трехмерных вращений.

Из формул (5.38) и (5.42), определяющих трансформационные свойства векторов в трехмерных пространствах положительной и отрицательной постоянной кривизны, следует, что квадраты векторов в этих пространствах и их скалярные произведения являются инвариантами преобразований групп движений данных пространств, а именно групп $SO(3,1)$ и $SO(4, R)$. Соответственно инвариантами являются длины отрезков и углы, так как первые — функции скалярного квадрата вектора, вторые — функции скалярных произведений векторов, между которыми определяются углы. Таким образом, геометрические фигуры в данных пространствах при преобразованиях групп движений этих пространств ведут себя аналогично абсолютно твердому телу в трехмерном евклидовом пространстве относительно движений этого пространства, а именно вращений и сдвигов.

Сделаем несколько замечаний о структуре введенных векторов пространств S_3 и S_3' . Наряду с векторами, введенными с помощью соотношений (5.8) — (5.10) и (5.23), (5.24), можно ввести векторы q исходя из формулы для преобразования сопряженных кватернионов (би-

кватернионов) \bar{x}_1 и \bar{x}_2 . Пусть имеется \tilde{Q}_{12} , определенное соотношениями

$$\bar{x}_2 = \tilde{Q}_{12}x_1, \quad \tilde{Q}_{12} = \pm \bar{x}_2x_1, \quad \bar{\tilde{Q}}_{12} = \pm x_1\bar{x}_2, \quad \tilde{Q}_{12}\bar{\tilde{Q}}_{12} = 1. \quad (5.44)$$

Тогда вектор $\tilde{\mathbf{q}}_{12}$, соответствующий бикватерниону \tilde{Q}_{12} , определяется как

$$\tilde{\mathbf{q}}_{12} = \frac{\tilde{Q}_{12} - \bar{\tilde{Q}}_{12}}{\tilde{Q}_{12} + \bar{\tilde{Q}}_{12}} = \frac{\bar{x}_2x_1 - \bar{x}_1x_2}{x_2x_1 + x_1x_2}. \quad (5.45)$$

Введем два вектора:

$$\mathbf{a} = \frac{1}{2}(\mathbf{q}_{12} + \tilde{\mathbf{q}}_{12}) = \frac{1}{2} \left(\frac{x_2\bar{x}_1 - x_1\bar{x}_2}{x_2x_1 + x_1x_2} + \frac{\bar{x}_2x_1 - \bar{x}_1x_2}{x_2x_1 + x_1x_2} \right), \quad (5.46)$$

$$\mathbf{b}' = \frac{1}{2}(\mathbf{q}_{12} - \tilde{\mathbf{q}}_{12}) = \frac{1}{2} \left(\frac{x_2\bar{x}_1 - x_1\bar{x}_2}{x_2x_1 + x_1x_2} - \frac{\bar{x}_2x_1 - \bar{x}_1x_2}{x_2x_1 + x_1x_2} \right). \quad (5.47)$$

Заметим, что \mathbf{a} остается неизменным при замене $x_1 \rightarrow \bar{x}_1$, $x_2 \rightarrow \bar{x}_2$, в то время как \mathbf{b}' при такой замене меняет знак на противоположный. Приняв во внимание, что \mathbf{q}_{12} и $\tilde{\mathbf{q}}_{12}$ суть векторы пространства 1S_3 , а векторы x_1 и x_2 принадлежат псевдоевклидову 4-пространству, т. е. $-\bar{x}_1 = x_1$, $-\bar{x}_2 = x_2$, из формул (5.46), (5.47) непосредственно получаем, что $\mathbf{a}^* = \mathbf{a}$, $\mathbf{b}'^* = -\mathbf{b}'$. В случае, если \mathbf{q}_{12} и $\tilde{\mathbf{q}}_{12}$ — векторы 3-пространства Римана постоянной кривизны, то x_1 и x_2 — кватернионы, соответствующие векторам 4-пространства Евклида, и, следовательно, $\bar{x}_1 = x_1$ и $\bar{x}_2 = x_2$, при этом $\mathbf{a}^* = \mathbf{a}$ и $\mathbf{b}'^* = \mathbf{b}'$. Таким образом, в дальнейшем в случае пространства 1S_3 будем иметь $\mathbf{b}' = i\mathbf{b}$, $\mathbf{q} = \mathbf{a} + i\mathbf{b}$, а для пространства Римана $\mathbf{b}' = \mathbf{b}$, где $\mathbf{b}^* = \mathbf{b}$, $\mathbf{q} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$. Используя формулы (5.46), (5.47), легко проверить, что всегда

$$(\mathbf{ab}) = 0. \quad (5.48)$$

Это условие с учетом того (см. (5.28)), что длина вектора в собственной области пространства Лобачевского меняется от нуля до бесконечности, и приводит к соотношению

$$-1 < (\mathbf{q}_{12}^2) = (\mathbf{q}_{12}^2)^* \leqslant 0 \text{ либо } -\infty \leqslant (\mathbf{q}_{12}^2) = (\mathbf{q}_{12}^2)^* < -1, \quad (5.49)$$

причем равенство нулю выполняется только тогда, когда $a = b = 0$. Соответственно для идеальных векторов будет иметь место неравенство

$$0 \leqslant (q_{12}^2) = (q_{12}^2)^* \leqslant \infty \quad (5.50)$$

и для изотропных векторов — условие

$$(q_{12}^2) = (q_{12}^2)^* = 0 \text{ при } a^2 = b^2 \neq 0. \quad (5.51)$$

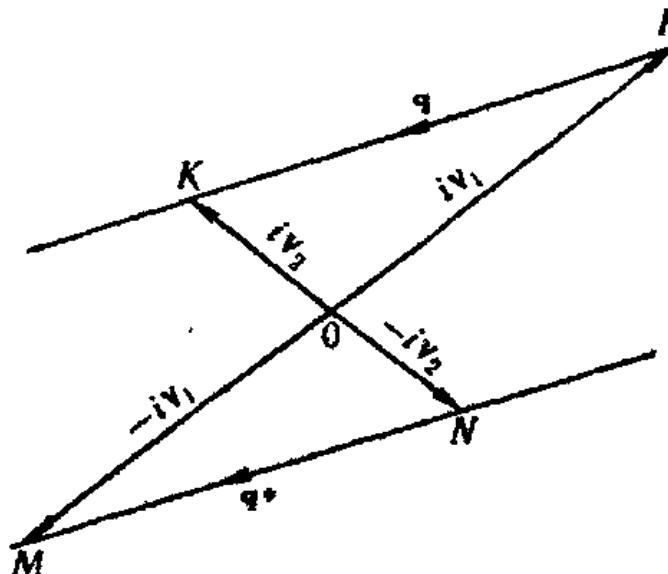


Рис. 5.2

Поскольку векторы 3-пространства Лобачевского в общем случае являются комплексными, то необходимо выяснить геометрический смысл комплексно сопряженных векторов. С этой целью проведем следующее построение (рис. 5.2).

Точка O имеет координаты $(0, 0, 0)$, точки F и M — компоненты векторов $i v_1 = i x_1/x_{01}$ и $-i v_2 = -i x_2/x_{02}$ соответственно, аналогично точки K и N — компоненты векторов $i v_2 = i \frac{x_2}{x_{02}}$ и $-i v_1 = -i \frac{x_1}{x_{01}}$. Отметим, что компо-

ненты векторов $\frac{x_1}{x_{01}}$ и $\frac{x_2}{x_{02}}$ представляют собой бельтрамиевы координаты точек в 3-пространстве Лобачевского [89].

Вектору \vec{KF} соответствует его аналитическое представление

$$q = \langle i v_2, -i v_1 \rangle, \quad (5.52)$$

а вектору \vec{MN} — аналитическое представление

$$q^* = \langle -i v_2, i v_1 \rangle. \quad (5.53)$$

Очевидно, вектор \vec{KF} лежит на прямой, задаваемой уравнением

$$x = \alpha x_1 + \beta x_2, \quad (5.54)$$

а \vec{MN} — на прямой

$$x' = \alpha \bar{x}_1 + \beta \bar{x}_2. \quad (5.55)$$

Найдем точки пересечения прямых (5.54) и (5.55). Эти точки определяются бикватернионами $\bar{X} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{V(x_1 - x_2)(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}$

и $X = \frac{x_1 - x_2}{V(x_1 - x_2)(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}$ и лежат, как видно, в идеальной

области пространства Лобачевского (4-векторы \bar{X} и X пространственноподобны), следовательно, прямые (5.54) и (5.55), на которых лежат векторы \vec{KF} и \vec{MN} , определенные комплексно сопряженными аналитическими представлениями (5.52) и (5.53), являются расходящимися. Напомним, что расходящимися называются прямые, пересекающиеся в идеальной области пространства Лобачевского.

Характерное свойство расходящихся прямых в пространстве Лобачевского — общий для них обеих перпендикуляр, длина которого есть кратчайшее расстояние между данными расходящимися линиями. В существовании и единственности такого перпендикуляра можно убедиться, исследуя на экстремум расстояние между любыми точками расходящихся прямых (5.54), (5.55). Для этого перпендикуляра может рассматриваться как мнимый угол между пересекающимися в идеальной точке расходящимися прямыми (см., например, [72]).

Используя наличие общего для двух расходящихся прямых пространств Лобачевского перпендикуляра как определяющее их свойство, легко решить обратную задачу, т. е. показать, что любые две расходящиеся прямые могут быть связаны с комплексно сопряженными векторами. Для этого необходимо с помощью преобразования группы движений трехмерного пространства Лобачевского — группы Лоренца (группы трехмерных комплексных вращений) начало координат перенести в середину общего для обеих расходящихся прямых перпендикуляра KF — точку O , как это изображено на рис. 5.3. Проводя

через точку O прямую, пересекающую расходящиеся прямые в точках M и N , из равных треугольников KNO и MFO легко установить, что векторы \vec{KN} и \vec{MF} аналитически представляются комплексно сопряженными векторами q . Таким образом, можно сделать вывод, что аналитические представления векторов, лежащих на расходящихся прямых и имеющих одинаковую длину, всегда могут быть получены преобразованием группы движений

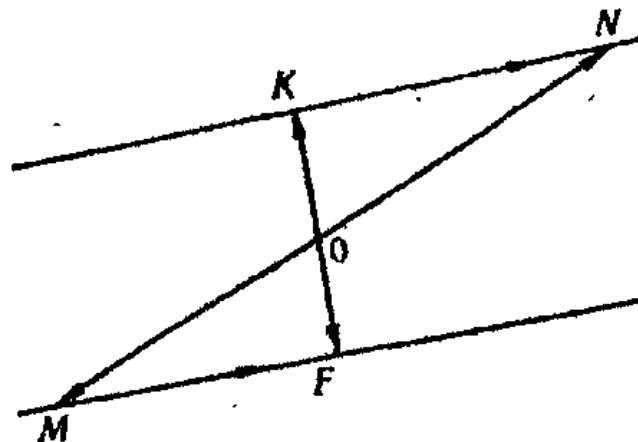


Рис. 5.3

пространства Лобачевского из комплексно сопряженных векторов пространства Лобачевского.

При геометрической интерпретации формул сложения векторов, лежащих на расходящихся прямых, можно их связывать с треугольником в расширенном пространстве Лобачевского либо пользоваться правилом шестиугольника, если мы не хотим выходить за рамки собственной области пространства Лобачевского, как это показано в работе [73].

Преобразования Q_{12} , Q_{23} , Q_{13} , играющие важную роль в приведенных выше построениях, очевидно, не являются преобразованиями Лоренца и только на прямой пространства Лобачевского, задаваемой соответственно бикватернионами x_1, x_2 ; x_2, x_3 ; x_1, x_3 , действуют как преобразования Лоренца и переводят 4-вектор пространства Минковского в 4-вектор пространства Минковского. В этом легко убедиться, используя уравнение прямой в пространстве Лобачевского, которое по форме совпадает с уравнением прямой в пространстве Римана с точностью до замены кватернионов на бикватернионы пространства Минковского. Заметим, что преобразования типа Q , согласно работе [3], были введены еще Гамильто-

ном и представляют собой преобразования, которые называются отражениями. Они широко использовались Э. Картаном в его теории спиноров [75]. Это элементарные преобразования, из которых могут быть построены любые преобразования ортогональных групп [75—77].

В физике важную роль играют так называемые плоские (простые) преобразования Лоренца, тесно связанные с преобразованиями типа Q . Плоские преобразования Лоренца, как и преобразования типа Q , выделяются путем наложения дополнительного условия на их вектор-параметры $(q^2)^* = (q^2)$. Они определяются начальным и конечным (т. е. преобразуемым и преобразованным) 4-векторами. К простым, плоским преобразованиям Лоренца относятся широко используемые в физике преобразования «буста» — преобразования от системы покоя к системе, движущейся с определенной скоростью; чисто лоренцевы преобразования; преобразования вращений; преобразования подгруппы группы Лоренца, оставляющие неизменным некоторый фиксированный 4-вектор, называемый преобразованиями стационарной подгруппы группы Лоренца 4-вектора (малой группы). Такие преобразования для 4-импульса элементарной частицы наряду со сдвигами пространства-времени образуют подгруппы группы Пуанкаре — малые группы Пуанкаре. Преобразования малых групп Пуанкаре были положены в основу построения волновых функций элементарных частиц как неприводимых представлений группы Пуанкаре. Простые преобразования псевдоортогональных и ортогональных групп широко применяются в римановой геометрии пространств высшей размерности [78].

Установим связь плоских преобразований Лоренца с преобразованиями типа Q [68]. Всякое плоское преобразование Лоренца $\mathcal{L}q(x_1, x_2)x = \mathcal{L}[x_1, x_2]x_1 = x_2$ можно записать в кватернионной форме:

$$x_3 = L(q')x_1\bar{L}^*(q') = L(q')x_1L(-q''). \quad (5.56)$$

Рассматривая $L(q')$ и $L(-q'')$ как преобразования типа Q и учитывая явные выражения для $L(q')$, найденные в работе [79], можно написать

$$L = L(q') = e_+ \bar{e}_1 = \bar{e}_+ e_2,$$

$$\bar{L}^* = L(-q'') = \bar{e}_1 e_+ = \bar{e}_+ e_1,$$

где

$$e_1 \bar{e}_1 = e_2 \bar{e}_2 = e_+ \bar{e}_+ = 1, x_1 = ie_1, x_2 = ie_2, e_+ = \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{(x_1 + x_2)^2}}.$$

Используя очевидное соотношение

$$e_1 L(-q') = e_1 \bar{e}_1 e_+ = e_+ \bar{e}_1 e_1 = L(q') e_1,$$

вместо (5.56) можно записать

$$\begin{aligned} x_2 = ie_2 &= iL(q') e_1 L(-q') = iL(q') L(q') e_1 = \\ &= L(q') L(q') x_1. \end{aligned} \quad (5.57)$$

В свою очередь, согласно (5.9), для бикватернионов x_1 и x_2 будем иметь

$$x_2 = Q(q)x_1, Q(q) = -x_2 \bar{x}_1.$$

Сравнивая последнее выражение с (5.57) и учитывая, что при произведении бикватернионов автоматически выполняется закон композиции соответствующих вектор-параметров, получаем

$$Q(q) = L(q') L(q') = L^2(q') = L(\langle q', q' \rangle),$$

откуда следует соотношение

$$q = \langle q', q' \rangle = \frac{2q'}{1-(q')^2} \quad \left(q' = \frac{q}{1+\sqrt{1+(q^2)}} \right),$$

и, в частности, для преобразований «буста» [79] находим

$$q = \left\langle -i \frac{x}{1+x_0}, -i \frac{x}{1+x_0} \right\rangle = -i \frac{x}{x_0}.$$

Легко убедиться, что плоские преобразования, определяемые условием $(q^2) = (q^2)^*$ на вектор-параметры, действуют вдоль геодезических пространства Лобачевского (в случае группы Лоренца) и, таким образом, можно сказать, что геометрически они выделены принципом минимальности расстояния между точками.

Итак, мы показали, что можно установить соответствие между парами точек трехмерных римановых пространств постоянной кривизны и вектор-параметрами кватернионов и бикватернионов Q , преобразующих данные пары точек друг в друга. Такие вектор-параметры являются аналитическими образами векторов соответствую-

щих трехмерных пространств. При этом переход от евклидова трехмерного пространства к трехмерным пространствам постоянной кривизны можно рассматривать как замену правила сложения векторов в евклидовом пространстве (правила параллелограмма) на правило треугольника, аналитическим выражением которого являются формулы (5.13), (5.25).

Развитый подход в принципе может быть использован для построения специфической аксиоматизации трехмерных пространств постоянной кривизны.

В заключение сделаем ряд замечаний. Идея построения теории векторов, сопоставляемых с парами точек в неевклидовых пространствах постоянной кривизны, принадлежит А. П. Котельникову. Теория разрабатывалась еще в конце прошлого века преимущественно в геометрическом плане [12, 13, 80]. Отличительной чертой проведенных выше построений является аналитическое представление векторов указанных пространств как вектор-параметров единичных кватернионов или бикватернионов. Это дало возможность решить проблему неоднозначности выбора правила сложения векторов в неевклидовых пространствах постоянной кривизны, с которой столкнулся А. П. Котельников. Таким образом, теория векторов неевклидовых пространств постоянной кривизны, сопоставляемых с упорядоченными парами точек, стала более удобной в физических приложениях. Кроме того, область приложений значительно расширилась за счет охвата релятивистской кинематики. Это связано с тем, что аналитическое выражение правила сложения векторов (5.25) по существу совпадает с самой общей формой закона сложения релятивистских относительных скоростей. Сделанные утверждения будут продемонстрированы в двух следующих параграфах, здесь же отметим, что в работе [71] идеи аналитического представления векторов неевклидовых пространств постоянной кривизны, сопоставляемых с парами точек, обобщены на неевклидовые пространства произвольной размерности, при этом основную роль сыграли результаты работ [74—77], в которых группы движений пространств постоянной кривизны представляются в виде произведений плоских преобразований и параметризуются простыми антисимметричными матрицами.

§ 6. КИНЕМАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Согласно теореме Шаля, произвольное перемещение твердого тела в пространстве эквивалентно винтовому движению. Винтовое движение определяется как результат вращения и поступательного перемещения тела в направлении, параллельном оси вращения. Легко видеть, что для винтового движения перенос и вращение коммутативны. Говоря современным языком, кинематика абсолютно твердого тела, определяемого как объект, расстояние между двумя любыми точками которого остается при движении неизменным:

$$(x - x_0)^2 = \text{const}, \quad (6.1)$$

задается группой $E(3)$ -движений трехмерного евклидова пространства. В (6.1) x и x_0 — радиус-векторы двух произвольно выбранных точек в абсолютно твердом теле. Группа $E(3)$ представляет собой полупрямое произведение группы сдвигов T^3 на группу трехмерных вращений $SO(3,R) = E(3) \sim T^3 \times SO(3,R)$. Очевидно, что выражение (6.1) является инвариантом группы $E(3)$. Многообразие параметров группы $E(3)$ совпадает с пространством конфигураций абсолютно твердого тела [81, 82]. В качестве параметров сдвигов могут быть выбраны координаты точек тела (например, координаты центра масс). Параметры группы вращений задают положения тела относительно некоторого фиксированного базиса.

Если в выражении (6.1) фиксировать x_0 , то группа инвариантности (6.1) сводится к группе вращений трехмерного пространства, которая может быть параметризована различными способами. В § 2 была описана ее векторная параметризация в стандартной и кватернионной формулировках.

Установление связей между различными допустимыми параметризациями группы вращений — одна из важнейших задач кинематики абсолютно твердого тела. Это связано с тем, что в зависимости от конкретной задачи, решаемой в этой практически важной области механики, оказывается удобной та или иная параметризация группы вращений.

Согласно § 2 (см. (2.3) и таблицу), преобразование группы трехмерных вращений $SO(3,R)$ в кватернионной формулировке имеет вид

$$x' = Ax\bar{A}, \quad (6.2)$$

где $x' = \{x'_a\}$, $x = \{x_a\}$, $a = 1, 2, 3$ — трехмерные векторы, компоненты которых определяют положение некоторой точки твердого тела до и после преобразования относительно некоторой фиксированной системы отсчета. Подставляя в выражение (2.20) $\mathbf{q} = \mathbf{n}$ и $\mathbf{g} = -\mathbf{n}$, в соответствии с таблицей можно получить выражение для матрицы трехмерной вещественной группы вращений $O(\mathbf{n})$ [16]:

$$O(\mathbf{n}) = 1 + 2 \frac{\mathbf{n}^x + \mathbf{n}^{x*}}{1 + (\mathbf{n}^2)}, \quad (6.3)$$

где $(n^x)_{ab} = \epsilon_{abc} n_c$, как и прежде, матрица, дуальная к трехмерному вещественному вектору $\mathbf{n} = \{n_c\}$; $a, b, c = 1, 2, 3$.

Для матриц $O(\mathbf{n})$ и $O(\mathbf{n}')$, определенных согласно (6.3), как отмечалось, имеет место

$$O(\mathbf{n}') = O(\mathbf{n}') O(\mathbf{n}), \quad (6.4)$$

$$\mathbf{n}'' = \langle \mathbf{n}', \mathbf{n} \rangle = \frac{\mathbf{n}' + \mathbf{n} + [\mathbf{n}' \mathbf{n}]}{1 - (\mathbf{n}' \mathbf{n})}. \quad (6.5)$$

В свою очередь \mathbf{n} выражается через матрицу $O(\mathbf{n})$ по формуле

$$n^x = \frac{O - \tilde{O}}{1 + \frac{1}{2} \text{Sp}(O)}, \quad (\tilde{O})_{ab} = O_{ba}. \quad (6.6)$$

Соотношения (6.3) — (6.6) фактически полностью определяют векторную параметризацию группы $SO(3, R)$.

В соотношении (6.2) \bar{A} удовлетворяет условию

$$A \bar{A} = 1. \quad (6.7)$$

Компоненты кватерниона $A = A_0, A_1, A_2, A_3$ с учетом того, что они подчиняются условию (6.7), также можно рассматривать как параметры, задающие изменение положения абсолютно твердого тела, имеющего одну закрепленную точку или параметры трехмерной вещественной группы вращений $SO(3, R)$. Такие параметры называются параметрами Эйлера [83] или параметрами Родрига—Гамильтона [82, 84]. Аналогично тому, как это делалось в § 2, для матрицы $SO(4, C)$ и ее вектор-параметров \mathbf{q} и \mathbf{g} можно найти выражение матрицы через параметры

Родрига—Гамильтона (A_0 , \mathbf{A}). Используя матрицы — дуальную вектору \mathbf{A} и $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$ — 3-матрицу-диаду, матрицу $O(\mathbf{A})$ можно представить в виде

$$O(\mathbf{A}) = 1(A_0^2 - \mathbf{A}^2) + 2\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} + 2A_0\mathbf{A}^\times, \quad (6.8)$$

что эквивалентно довольно громоздкому, но более известному в литературе выражению:

$$O(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} A_1^2 - A_2^2 - A_3^2 + A_0^2 & 2(A_1A_2 - A_2A_0) \\ 2(A_1A_2 + A_2A_0) & A_2^2 - A_3^2 - A_1^2 + A_0^2 \\ 2(A_1A_3 - A_2A_0) & 2(A_2A_3 + A_1A_0) \\ & 2(A_3A_1 - A_1A_0) \\ & 2(A_3A_2 - A_1A_0) \\ A_3^2 - A_1^2 - A_2^2 + A_0^2 & \end{pmatrix}. \quad (6.9)$$

Из формул (2.8) — (2.10) как частный случай следуют соотношения между вектор-параметром \mathbf{n} трехмерной вещественной группы вращений и параметрами Родрига—Гамильтона A_0 , \mathbf{A} :

$$A_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + (\mathbf{n}^2)}}, \quad \mathbf{A} = \frac{\mathbf{n}}{\sqrt{1 + (\mathbf{n}^2)}}, \quad (6.10)$$

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{A}}{A_0}. \quad (6.11)$$

С помощью соотношений (6.10), (6.11) и (6.6) в свою очередь можно выразить параметры Родрига—Гамильтона через элементы матрицы O .

Важной особенностью параметризации группы $SO(3, R)$ с помощью трехмерного вещественного вектора \mathbf{n} является то, что он сам имеет непосредственный кинематический смысл в отличие, например, от параметров Родрига—Гамильтона. Кинематический смысл вектор-параметра \mathbf{n} заключается в том, что его направление задает направление мгновенной оси вращения твердого тела, а длина вектора \mathbf{n} равна тангенсу половинного угла поворота ϕ . Вводя единичный вектор \mathbf{n}_0 по направлению мгновенной оси вращения тела, получим

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}_0 \operatorname{tg} \frac{\Phi}{2}. \quad (6.12)$$

Таким образом, из существования векторной параметризации вещественной трехмерной группы вращений следует известная фундаментальная теорема Эйлера, согласно которой любой поворот твердого тела, имеющего неподвижную точку, всегда можно осуществить вращением вокруг некоторой оси [83, 84].

Практически важно представление матрицы преобразования группы $SO(3,R)$ в виде произведения трех плоских поворотов. Одна из таких возможностей — параметризация ортогональной 3×3 -матрицы с помощью углов Эйлера, полезная при решении многих задач. При заданных осях вращений и углах поворотов последовательность трех эйлеровских поворотов полностью определяет преобразование. И наоборот, если заданы требуемое преобразование, оси вращений и их последовательность, то определены и эйлеровы углы вращения.

Задача представления произвольного поворота твердого тела в виде произведения плоских поворотов весьма изящно и наглядно может быть решена с помощью сопоставления плоским поворотам векторов на двумерной сфере. Векторы на двумерной сфере можно рассматривать как частный случай введенных в предыдущем параграфе векторов на 3-сфере (в 3-пространстве Римана). Однако прежде чем дать краткое введение в теорию этих векторов, напомним связь вращения произвольного твердого тела с вращениями сферы. Для этого рассмотрим твердое тело с неподвижной точкой 0 с координатами $x_0 = \{0, 0, 0\}$. Проведем сферическую поверхность Ω единичного радиуса с центром в точке 0. Очевидно, положение тела вполне определяется положениями тех его точек, которые лежат на поверхности Ω , а любое перемещение тела, которое оставляет неподвижной точку 0, есть его преобразование в себя.

Уравнение 2-сферы в кватернионах имеет вид

$$x\bar{x} = 1, \quad x + \bar{x} = 0. \quad .13)$$

Рассмотрим на 2-сфере две точки, задаваемые радиусами-векторами x_1 и x_2 . Очевидно, что векторные части соответствующих кватернионов определяют плоскость, пересечение которой с 2-сферой в свою очередь задает геодезическую (окружность большого радиуса) на этой 2-сфере. Точки x_1 и x_2 на данной окружности большого радиуса вырезают отрезок. Задавая на этом отрезке направление, получаем вектор на 2-сфере, сопоставляе-

мый с парой точек x_1, x_2 . Поскольку 2-сфера — пространство, однородное по отношению к группе трехмерных вращений, то все окружности большого радиуса на 2-сфере могут быть преобразованы друг в друга вращениями. Дуги большого радиуса в свою очередь являются пространствами, однородными относительно поворотов плоскости, в которой они лежат. С этим связано то, что векторы на 2-сфере определяются с точностью до сдвигов на прямой (геодезической). Именно плоские повороты и соответствуют сдвигам вдоль геодезических.

Двум точкам x_1 и x_2 на 2-сфере, аналогично тому как это делалось в предыдущем параграфе для пространства S_3 , ставится в соответствие кватернион плоского преобразования, преобразующий их одна в другую:

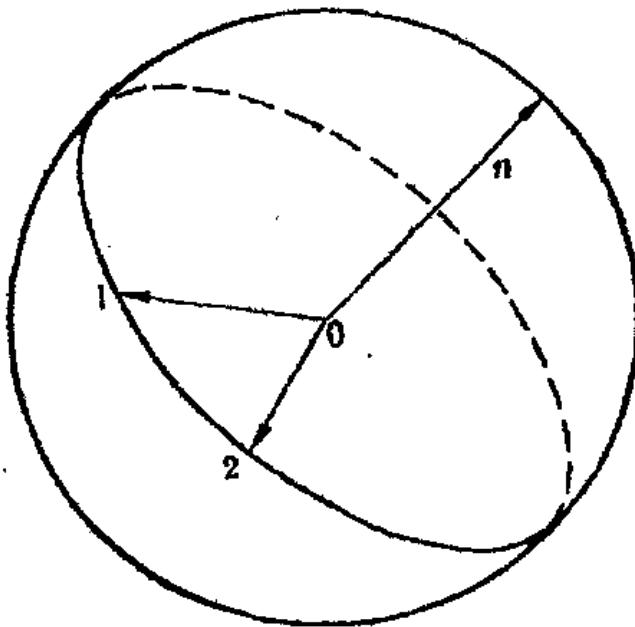


Рис. 6.1

Двум точкам x_1 и x_2 на 2-сфере, аналогично тому как это делалось в предыдущем параграфе для пространства S_3 , ставится в соответствие кватернион плоского преобразования, преобразующий их одна в другую:

$$Q_{12} = \bar{x}_2 x_1 = (x_2 x_1) - [x_2 x_1]. \quad (6.14)$$

Вводя единичный кватернион n_0 , можно представить Q_{12} в виде

$$Q_{12} = \cos \Phi_{12} + n_0 \sin \Phi_{12} = e^{n_0 \Phi_{12}} = e^{\Phi_{12}} = \frac{1 + n_{12}}{\sqrt{1 + (n_{12})^2}}. \quad (6.15)$$

Здесь $\Phi_{12} = n_0 \Phi_{12}$, $n_{12} = n_0 \operatorname{tg} \Phi_{12}$, Φ_{12} — угол между векторами x_1 и x_2 , отсчитываемый от x_1 к x_2 . Таким образом, кватернион $n = n_0 \operatorname{tg} \Phi_{12}$, однозначно связанный с кватернионом Q_{12} (6.15), задает аналитическое представление вектора на 2-сфере. Очевидно, что любому единичному

кватерниону всегда может быть поставлен в соответствие некоторый вектор на 2-сфере. Действительно, всякий бикватернион $Q = Q_0 + \mathbf{Q}$, подчиняющийся условию $Q\bar{Q} = 1$, можно представить в виде (6.15). Сопоставление его с вектором на 2-сфере осуществляется следующим образом: сфера единичного радиуса с центром в точке 0 с координатами $\{0, 0, 0\}$ пересекается плоскостью, проходящей через 0 и ортогональной векторной части

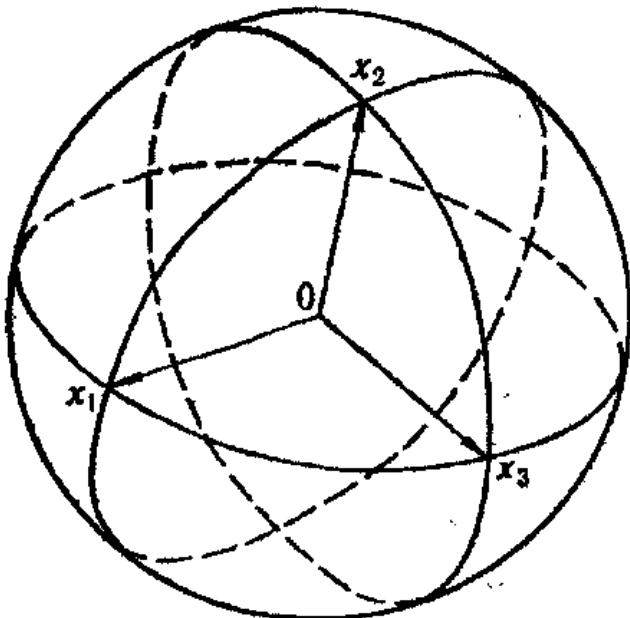


Рис. 6.2

кватерниона Q . На полученной окружности большого радиуса от произвольно выбранной точки откладывается вектор, длиной равный φ , где $\varphi = \operatorname{arctg} |\mathbf{Q}/Q_0|$, направление которого связывается с направлением векторной части кватерниона Q . Условимся выбирать на дуге направление так, чтобы с вектором $\mathbf{n} = \mathbf{Q}'/Q_0$ оно образовывало правый винт. Геометрически это изображено на рис. 6.1. Отметим также, что сложению векторов на 2-сфере соответствует сферический треугольник (рис. 6.2). Как и прежде, аналитическим выражением правила сложения векторов (правила треугольника), очевидно, будет формула

$$\mathbf{n}_{13} = \frac{\mathbf{n}_{12} + \mathbf{n}_{23} + [\mathbf{n}_{12}\mathbf{n}_{23}]}{1 - (\mathbf{n}_{12}\mathbf{n}_{23})}. \quad (6.16)$$

Подчеркнем, что сказанное о геометрической интерпретации кватернионов относится к произвольному единичному кватерниону. Отсюда автоматически следует теорема Эйлера, которую можно сформулировать и так

[84]: любое вращательное движение твердого тела эквивалентно плоскому вращению вокруг некоторой оси. Таким образом, произвольному преобразованию вращения

$$\begin{aligned} x_2 = Ax_1\bar{A}, \quad x_1\bar{x}_1 = x_2\bar{x}_2 = 1, \\ x_1 + \bar{x}_1 = 0, \quad x_2 + \bar{x}_2 = 0, \end{aligned} \quad (6.17)$$

можно поставить в соответствие единичный кватернион $Q_{12} = x_2\bar{x}_1$, зависящий от угла между векторами x_1 и x_2 ; тогда кватернион A будет выражаться через $\phi/2$.

Обратимся непосредственно к задаче разложения заданного преобразования вращения на эйлеровские вращения, при этом будем следовать изложению, принятому в книге [84].

Рассмотрим произвольное преобразование вращения, которое определяется некоторым кватернионом A . Данному кватерниону, как уже говорилось, на окружности большого радиуса единичной 2-сферы отвечает дуга, длина которой равна половине угла поворота. Пусть то же самое преобразование выполняется путем вращения вокруг некоторых заданных осей. Каждая ось вращения определяет на сфере большой круг, на котором должна располагаться дуга соответствующего кватерниона, определяющего результирующее преобразование.

Остановимся на случае, когда заданы две ортогональные друг другу оси вращения. Кватернионы, соответствующие этим осям окружности большого радиуса, будем обозначать A_1 и A_2 . На 2-сфере выполним некоторые построения (рис. 6.3). Как видно, вектор \vec{NC} на 2-сфере, отвечающий кватерниону A , равен сумме векторов \vec{NB} и \vec{BC} :

$$\vec{NC} = \{\vec{NB}, \vec{BC}\}, \quad (6.18)$$

которой соответствует произведение кватернионов A_2 и A'_1 , т. е.

$$A = A_2 A'_1. \quad (6.19)$$

Дуга, соответствующая кватерниону $A'_1(\vec{BN})$, может быть получена из «разрешенной» дуги $A_1(\vec{MK})$ путем ее переноса некоторым преобразованием вращения (рис. 6.3).

Действительно, из треугольников DBN и MDK находим

$$\vec{MD} = \{\vec{MK}, \vec{KD}\} = \vec{DN} = \{\vec{DB}, \vec{BN}\}. \quad (6.20)$$

Треугольники DBN и MDK равны по построению, вектор \vec{MK} на окружности, соответствующей кватерниону A , равен по длине дуге \vec{BN} , которая является одной из составляющих разложения исходного вектора \vec{CN} , соот-

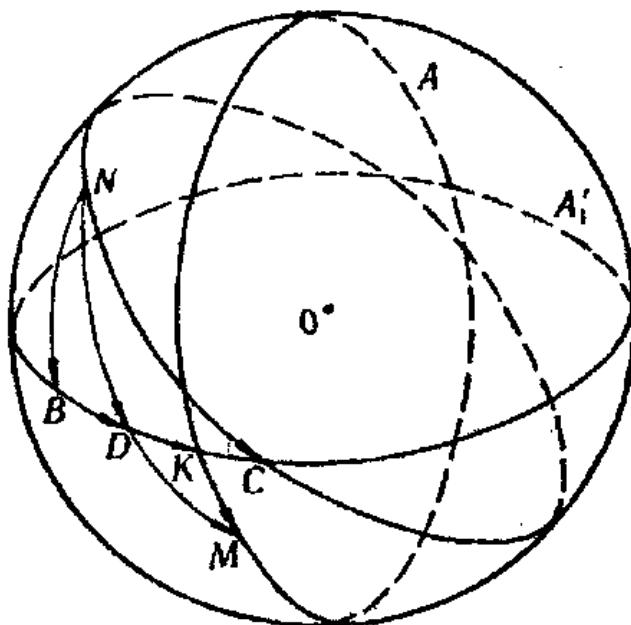


Рис. 6.3

ветствующего исходному вращению, задаваемому кватернионом A . Из равенства треугольников следует $\vec{ND} = -\vec{DM}$ и $\vec{DK} = \vec{BD}$. Обозначив через G' кватернион, отвечающий равным векторам \vec{BD} и \vec{DK} , можем записать равенство кватернионов

$$A_1 G' = G' A'_1, \quad (6.21)$$

откуда следует $A'_1 = G' A_1 G'$. Подставляя A_1 в (6.21), получаем

$$A = A_2 \bar{G}' A_1 G'. \quad (6.22)$$

Теперь учтем, что A_2 и G' определяют вращение вокруг одной и той же оси, которое обозначим A'_2 . В результате получим

$$A = A'_2 A_1 G', \quad (6.23)$$

ЧТО И ДАЕТ РАЗЛОЖЕНИЕ ВРАЩЕНИЯ, ОПРЕДЕЛЯЕМОГО A , В ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ЭЙЛЕРОВСКИХ ВРАЩЕНИЙ. Очевидно, что аналогичные построения и рассуждения можно провести на противоположной стороне сферы у пересечения дуг A , A_1 , A_2 , при этом будет получена другая возможная последовательность в разложении вращения на эйлеровские.

В заключение параграфа приведем соотношения, связывающие компоненты вектор-параметра группы $SO(3,R)$ с углами Эйлера, полученные в работе [16]:

$$\begin{aligned} n_x &= -\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{2} / \cos \frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2}, \\ n_y &= \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \sin \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{2} / \cos \frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2}, \\ n_z &= -\operatorname{tg} \frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2}; \end{aligned} \quad (6.24)$$

здесь Φ_1 и Φ_2 отвечают поворотам вокруг оси OZ , а θ — вокруг оси OY . Вектор-параметр, согласно (6.16), (6.23), также может быть представлен через эйлеровские углы в виде

$$\mathbf{n} = \left\langle -k \operatorname{tg} \frac{\Phi_1}{2} \mathbf{j} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}, k \operatorname{tg} \frac{\Phi_2}{2} \right\rangle. \quad (6.25)$$

Соотношение (6.24) можно разрешить относительно углов Эйлера и найти их выражения через компоненты вектор-параметра

$$\Phi_1 = \operatorname{arctg} \frac{n_x n_z - n_y}{n_y n_z + n_x}, \quad \Phi_2 = \operatorname{arctg} \frac{n_x n_z - n_y}{n_y n_z + n_x}, \quad (6.26)$$

$$\theta = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{n_x^2 + n_y^2}{1 + n_z^2}}.$$

С помощью формул (6.24) можно получить выражение матрицы $O \in SO(3,R)$ через углы Эйлера:

$$O(\Phi_1, \theta, \Phi_2) = \begin{pmatrix} \cos \Phi_1 \cos \Phi_2 - \cos \theta \sin \Phi_1 \sin \Phi_2 \\ -\sin \Phi_1 \cos \Phi_2 - \cos \theta \cos \Phi_1 \sin \Phi_2 \\ \sin \Phi_2 \sin \theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \theta \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 & \sin \varphi_1 \sin \theta \\ -\sin \varphi_1 \sin \varphi_2 & \cos \varphi_1 \sin \theta \\ -\cos \varphi_2 \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (6.27)$$

Данная параметризация матрицы группы $SO(3, R)$ с помощью углов Эйлера совпадает с приведенной в работе [16] и отличается знаком углов θ , φ_1 и φ_2 от выражений, используемых в других книгах. Это связано с тем, что матрица (6.27) преобразует компоненты вектора при неизменном базисе в соответствии со смыслом вектор-параметра.

В качестве самостоятельного упражнения можно рекомендовать читателю выразить матрицу вращения O через параметры Кэли—Клейна. Напомним, что параметрами Кэли—Клейна являются элементы 2×2 -матрицы — представления кватерниона A в формуле (6.2). Это легко сделать с помощью соотношений (1.37), (1.38).

§ 7. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ КИНЕМАТИКА

Переход от нерелятивистской кинематики к релятивистской можно рассматривать как переход от евклидовой геометрии пространства нерелятивистских скоростей к геометрии трехмерного пространства Лобачевского релятивистских скоростей. Уже в работе А. Эйнштейна «К электродинамике движущихся сред» [85] содержится формула квадрата результирующей сложения произвольно направленных скоростей, которая впоследствии была интерпретирована А. Зоммерфельдом как формула треугольника или теорема косинусов в пространстве Лобачевского [86]. На связь кинематики специальной теории относительности и геометрии трехмерного пространства Лобачевского обращали внимание многие ученые: В. Варичак, Г. Герглотц, А. А. Роб, Б. Паули, Ф. Клейн и др. [87].

Действительно, используя определение 4-скорости

$$u = \frac{dx}{ds}, \quad (7.1)$$

легко убедиться, что для $u = iu_0 + u$ справедливо соотношение

$$u\bar{u} = -1. \quad (7.2)$$

В определении (7.1) $ds = \sqrt{dx^2 dx} = c dt \sqrt{1 - v^2/c^2}$ — релятивистский интервал между двумя бесконечно близкими точками на мировой линии частицы в пространстве Минковского [88], v — скорость частицы, c — скорость света. При этом s является собственным временем частицы, т. е. временем, измеряемым в системе отсчета, связанной с частицей. Как уже отмечалось в § 5 данной главы, на поверхности, задаваемой уравнением (7.2), реализуется геометрия трехмерного пространства Лобачевского. Таким образом, создание теории относительности и установление того факта, что пространство релятивистских скоростей есть трехмерное пространство Лобачевского, открыло широкие возможности для развития идей А. П. Котельникова, относящихся к построению теории векторов неевклидовых пространств постоянной кривизны, и последующего применения этой теории к различным вопросам физики элементарных частиц.

Более того, именно обращение к специальной теории относительности как физической теории помогло решить поставленную А. П. Котельниковым проблему неоднозначности выбора закона сложения векторов. В качестве последнего естественно понимается релятивистский закон сложения скоростей. При этом сами скорости интерпретируются как векторы, сопоставляемые с парами точек в трехмерном пространстве Лобачевского.

Обычно используемая векторная вещественная форма записи закона сложения относительных релятивистских скоростей (V и v) [89] довольно громоздка:

$$v' = \frac{v - V + (a_{00} - 1) \frac{V}{V^2} (Vv - V^2)}{a_{00} \left(1 - \frac{(Vv)}{c^2} \right)}, \quad (7.3)$$

где $a_{00} = 1/\sqrt{1 - V^2/c^2}$. Формула (7.3) получается из формулы (7.1) преобразованием Лоренца с последующим выделением трехмерной части из 4-скорости и по своему смыслу является нековариантной. Выше в основу теории векторов трехмерного пространства Лобачевского было положено выражение

$$q_{13} = \frac{q_{13} - q_{23} - [q_{12}q_{23}]}{1 + (q_{12}q_{23})}, \quad (7.4)$$

где в случае релятивистского пространства скоростей трехмерные комплексные векторы q_{12} , q_{23} и, следовательно, q_{13} определяются в свою очередь через относительные скорости v_{01} , v_{02} по той же формуле (7.4), например:

$$q_{12} = \frac{i(v_{01} - iv_{02} + [v_{01}v_{02}])}{1 - (v_{01}v_{02})}, \quad (7.5)$$

где $v = u/u_0$, $u = iu_0 + v$ определяется формулой (7.1). Начиная с формулы (7.5) будем полагать $c = 1$. В то время как векторы q_{12} , q_{23} , q_{13} соответствуют парам точек, задаваемых векторами iv_{01} и iv_{02} , iv_{02} и iv_{03} , iv_{01} и iv_{03} , сами векторы iv_{01} , iv_{02} , iv_{03} рассматриваются как векторы, отвечающие парам точек 0 , iv_{01} ; 0 , iv_{02} ; 0 , v_{03} .

Построение теории векторов на основе закона сложения (7.4) обладает рядом преимуществ по сравнению с подходом, основанным на формуле (7.3):

1) формула (7.4), будучи проще формулы (7.3), более удобна для расчетов. Комплексность величин q_{12} , q_{23} , q_{13} при выполнении конкретных вычислений не играет существенной роли и не усложняет расчетов, если иметь в виду, что комплексные векторы q_{12} , q_{13} , q_{23} выражаются через вещественные относительные скорости по формуле (7.5). Очевидно, и сами векторы q_{12} , q_{13} , q_{23} в данном случае могут рассматриваться как комплексные скорости. Комплексность означает, что скорость определяется относительно системы отсчета, связанной не с покоящейся, а с движущейся точкой (частицей). Здесь следует напомнить, что квадрат q есть величина вещественная. Нетрудно убедиться, что квадрат q , определяемого (7.5) с противоположным знаком, равен квадрату соответствующей относительной скорости [89]. Кроме того, в § 5 было показано, что углы между пересекающимися векторами (в данном случае между векторами комплексных относительных скоростей), кроме случая, когда они лежат на расходящихся прямых 3-пространства Лобачевского, являются реальными углами между направлениями движения релятивистских частиц относительно подвижной системы отсчета;

2) векторы q_{12} , q_{23} , q_{13} , равно как и векторы iv_{01} , iv_{02} , iv_{03} в отличие от входящих в формулу (7.3) векторов V , v и v' обладают вполне определенными трансформационными свойствами относительно преобразований группы Лоренца. При преобразованиях Лоренца 4-век-

торов псевдоевклидова пространства эти векторы, как было показано ранее, преобразуются с помощью преобразований трехмерной комплексной группы вращений;

3) формула (7.4) может быть использована не только для построения теории векторов в трехмерном пространстве Лобачевского, но и для построения аналогичной теории в других пространствах постоянной кривизны, например на 2-сфере и 3-сфере (с отождествленными противоположными точками) (см. § 5 и 6).

Впервые геометрия Лобачевского пространства релятивистских скоростей была применена к решению конкретных задач релятивистской физики в работах советских ученых. Подробное изложение представлений о пространстве релятивистских скоростей как о трехмерном пространстве Лобачевского было дано В. А. Фоком в его фундаментальной монографии [89]. Удобство такого подхода было продемонстрировано им на примере вывода эффекта астрономической aberrации. Н. А. Черников предложил новый метод в кинематике элементарных частиц, основанный на связи пространства релятивистских скоростей с пространством Лобачевского. Этот метод разрабатывался в работах самого Н. А. Черникова, а также Я. А. Смородинским, Э. Г. Бубелевым и др. [90—92]. Методы, основанные на использовании геометрии Лобачевского трехмерного пространства релятивистских относительных скоростей, используются в квазипотенциальном подходе Логунова—Тавхелидзе—Кадышевского [93—95].

Исследования процессов множественного рождения частиц при высоких энергиях показали, что наиболее естественной энергетической переменной, параметризующей амплитуды рассеяния, является быстрота, геометрический смысл которой — длина в пространстве релятивистских скоростей Лобачевского. В ряде работ А. М. Балдина и его сотрудников [96, 97] показано, что использование инвариантных кинематических переменных, непосредственно построенных из 4-скоростей частиц, участвующих в реакции, дает возможность прийти к важным выводам при обработке экспериментальных данных по рождению струй в различных реакциях. Так, для пространства релятивистских скоростей удалось сформулировать принцип, аналогичный принципу Н. Н. Боголюбова,— ослабление корреляций в статистической физике. Следствием его является то, что распре-

деления, описывающие процессы множественного рождения частиц, факторизуются в переменных, представляющих собой квадраты разностей 4-скоростей частиц, участвующих в реакции. Иными словами, распределения в пространстве релятивистских скоростей распадаются на множители, связанные с различными кластерами (струями) в этом пространстве. Под кластерами (струями), таким образом, понимается некоторое состояние адронной материи, когда сумма скоростей составляющих его точечных частиц относительно некоторого 4-вектора скорости, характеризующего движение этой группы частиц как целого, является минимальной. В качестве вектора 4-скорости, определяющей движение группы частиц как целого, берется отнормированная сумма 4-скоростей всех частиц, входящих в данную группу. По мнению авторов [96, 97], универсальность распределений частиц, рождающихся в струе, т. е. независимость от того, в какой из реакций образуется струя, свидетельствует о рождении цветных объектов (кварков, глюонов) [97].

Обратимся к формулировке некоторых общих правил решения кинематических задач, существенно основанных на ранее развитом математическом аппарате.

Эти правила основаны на том, что каждая массивная частица, участвующая в реакции, характеризуется 4-импульсом p , которому можно поставить в соответствие бикватернион $p=ti$, где $i=p/m$ — бикватернион 4-скорости, определенный в (7.1); m — масса частицы. Поскольку 4-скорости всех частиц независимо от их масс подчиняются одному и тому же условию $ii=-1$, то именно пространство Лобачевского 4-скоростей, а не 4-импульсов удобно принять за исходное, ставя в соответствие 4-скоростям частиц p_r/m_r ($r=1, 2, \dots$ — номера частиц), участвующих в реакции точки в этом пространстве. Однако в некоторых случаях за исходное удобно принять пространство Лобачевского, отвечающее некоторой фиксированной массе частицы. Тогда если в качестве исходного выбрано пространство 4-импульса, соответствующего, например, массе m_1 , то точки, соответствующие частицам с 4-импульсами p_r и с массами покоя m_r , будут задаваться 4-импульсами $m_1 \frac{p_r}{m_r}$. К импульсному пространству Лобачевского следует прибегать и в том случае, когда рассматриваются реакции с участием

безмассовых частиц. Для таких частиц, как известно, 4-скорость не определена, в то время как 4-импульс находится на световом конусе или абсолюте пространства Лобачевского [91].

Можно сформулировать следующие правила, определяющие кинематику реакций в пространстве Лобачевского.

1. Каждой реакции элементарных частиц в пространстве Лобачевского релятивистских скоростей соответствует некоторая геометрическая фигура (многогранник), вершинами которой являются точки, определяемые 4-скоростями $u_r = p_r/m_r$ частиц.

2. Безмассовым частицам соответствуют вершины, лежащие на бесконечности.

3. Ребрам и диагоналям многогранника ставятся в соответствие бикватернионы $u_r u_j$, преобразующие вершину, соответствующую r -й частице, в вершину, которая отвечает j -й частице, а также векторы пространства Лобачевского $q_{rj} = (u_r \bar{u}_j - u_j \bar{u}_r) / (u_r \bar{u}_j + u_j \bar{u}_r)$. Здесь учитывается, что между q_{rj} и $u_r u_j$, как было показано выше, существует взаимно однозначное соответствие.

4. Ребру между массивной и безмассовой (или между двумя безмассовыми) вершинами соответствует вектор q_{rj} , причем $(q_{rj}^2) = -1$.

5. Рассмотрение реакции относительно одной из вершин многогранника отвечает выбору системы отсчета, совпадающей с системой покоя соответствующей частицы, а относительно точки пересечения диагоналей — описанию реакции в системе отсчета, которая совпадает с системой центра масс частиц, соответствующих точкам на концах диагоналей.

6. Если необходимо перейти в некоторую произвольную систему отсчета, определяемую 4-скоростью u , то рассмотренный выше многогранник необходимо дополнить соответствующей вершиной.

В качестве кинематических переменных, характеризующих реакцию в таком подходе, выступают длины ребер многогранника (быстроты); углы между векторами q_{rj} , имеющими общие начала или концы; углы между плоскостями граней многогранника, определяемые как углы между векторными произведениями векторов q_{rj} , которые лежат в данных плоскостях. Следует отметить, что все перечисленные характеристики являются лоренцевскими инвариантами, как это было показано

выше. Определение векторов в пространстве Лобачевского делает тригонометрию этого пространства столь же ковариантной, сколь ковариантна тригонометрия евклидова пространства при введении в нем векторного исчисления.

Рассмотрим еще некоторые особенности предлагаемого метода на примерах расчета кинематики процессов рассеяния элементарных частиц. Начнем с бинарного процесса упругого рассеяния, в котором участвуют частицы, имеющие одинаковые массы. Для такого процесса

$$1 + 2 \rightleftharpoons 3 + 4$$

имеет место закон сохранения 4-импульса

$$p_1 + p_2 = p_3 + p_4,$$

или

$$m u_1 + m u_2 = m u_3 + m u_4.$$

В силу данного линейного ограничения на 4-скорости частиц точки, соответствующие u_1, u_2, u_3, u_4 , образуют плоский четырехугольник. В этом легко убедиться непосредственно, осуществляя построение четырехугольника в системе центра масс реакции, которая, как известно, определяется условием

$$p_1 + p_2 = m(u_1 + u_2) = 0,$$

откуда получаем, что $u_1 = -u_2$. Следовательно, от некоторой произвольно выбранной точки O необходимо отложить два противоположно направленных вектора одинаковой длины $-i(u_1/u_{01}) = -iv_1, i(u_2/u_{02}) = iv_2$. Поскольку в силу закона сохранения 3-импульса в данном процессе также $p_3 + p_4 = mu_3 + mu_4 = 0$, то из той же точки O откладываем еще два противоположно направленных, но равных по модулю вектора $-iv_3 = iv_4$. При этом угол $\theta_{\text{с.ц.м}}$ между прямыми 1,2 и 3,4 (рис. 7.1) имеет смысл угла рассеяния в системе центра масс. Концы построенных нами векторов $-iv_1, iv_2, -iv_3, iv_4$ являются вершинами четырехугольника реакции.

Здесь уместно сделать несколько замечаний. Первое сводится к тому, что, хотя все приводимые здесь рисунки выглядят как обычные евклидовские, следует иметь в виду, что для каждого треугольника применяется формула сложения векторов геометрии Лобачевского (7.4). Чертеж лишь дает представление о порядке расположения вершин (сторон) и углов в соответствующей

фигуре в пространстве Лобачевского. Второе замечание касается построения четырехугольников бинарных процессов для случаев, когда в них участвуют частицы различных масс. При этом легко убедиться, что если импульсы частиц равны по модулю, то частице с большей массой необходимо поставить в соответствие вектор меньшей длины. Действительно, движению частицы относительно некоторой системы отсчета в пространстве

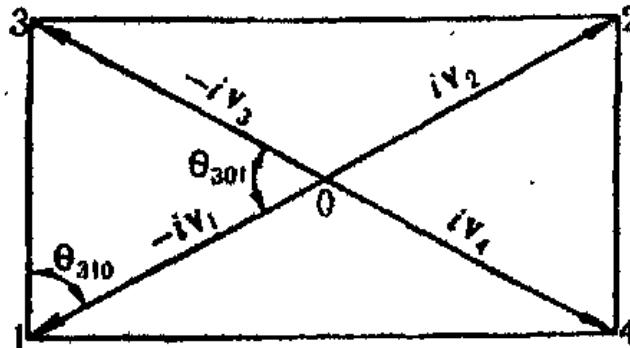


Рис. 7.1

Лобачевского соответствует некоторый отрезок (вектор). Выберем систему отсчета так, чтобы одна из осей совпадала по направлению с импульсом движущейся частицы. Тогда у соответствующего бикватерниона 4-импульса остаются две компоненты, которые единственным образом параметризуются длиной отрезка, т. е. $p = iE + p = m(iu_0 + u)$, $u_0 = \operatorname{ch} \rho$, $|u| = \operatorname{sh} \rho$, и, следовательно, ρ — длина в пространстве скоростей (быстрота) — выражается через модуль импульса или энергию частицы соотношениями $\operatorname{ch} \rho = E/m$, $\operatorname{sh} \rho = |p|/m$. Отсюда видно, что при равных по модулю импульсах быстрота больше, если масса меньше. Для фотона она бесконечна. С учетом этого бинарному процессу, в котором упруго рассеиваются две частицы разных масс ($m_1 = m_3$, $m_2 = m_4$, $m_1 \neq m_2$), соответствует равнобедренная трапеция (рис. 7.2), а неупругому бинарному процессу, в котором все частицы (до и после реакции) имеют различные массы ($m_1 \neq m_2 \neq m_3 \neq m_4$) — некоторый четырехугольник, имеющий в общем случае все стороны различной длины (рис. 7.3). Четырехугольники, изображенные на рис. 7.1—7.3, представляют собой геометрические объекты, полностью характеризующие кинематику соответствующих бинарных реакций без учета возможности существования спина частиц.

Некоторые задачи кинематики элементарных частиц

с учетом наличия у них спина рассматривались на основе геометрии Лобачевского релятивистского пространства скоростей в работах [94, 98]. Однако полное, всестороннее исследование данной проблемы с привлечением бикватернионов и расширенного пространства Лобачевского еще предстоит осуществить. Поэтому здесь мы ограничимся процессами с участием только бесспиновых частиц. Если теперь бинарный процесс рассеяния рассматривается в некоторой произвольной системе отсчета, то соответствующий четырехугольник должен быть, согласно правилу 6, дополнен еще одной точкой O' . Таким образом, геометрическим объектом, характеризующим кинематику бинарного процесса, в общем случае является пирамида с вершинами в точках 1, 2, 3, 4, O' . Для бинарного упругого процесса с равными массами основанием этой пирамиды будет четырехугольник, изображенный на рис. 7.4. Аналогичные фигуры будут иметь место для реакций с участием частиц с неравными массами. При этом, очевидно, произойдет замена основания пирамиды 1, 2, 3, 4 в зависимости от соотношений масс частиц в начале и в конце реакции на четырехугольники, соответствующие рис. 7.2 или 7.3. Сам четырехугольник является инвариантной (не зависящей от

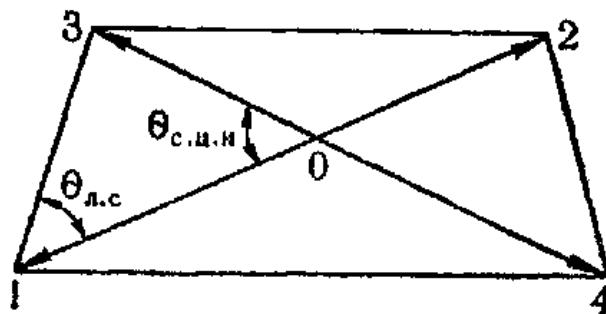


Рис. 7.2

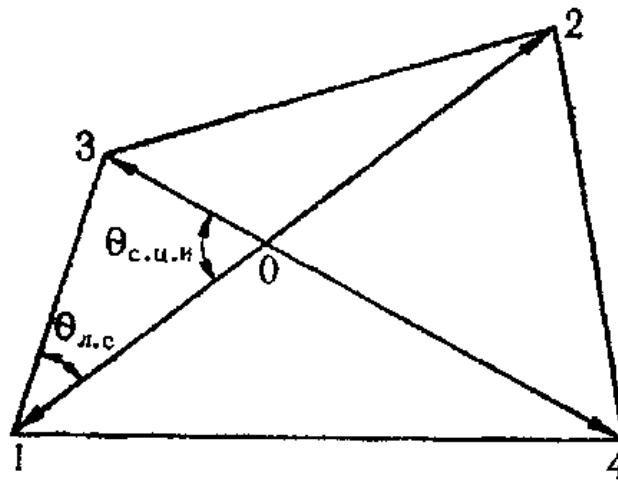


Рис. 7.3

сящей от выбора точки O') геометрической характеристикой кинематики процесса. По этой причине в качестве инвариантных переменных, характеризующих реакцию, могут быть выбраны величины, связанные с размерами четырехугольника,— длины его сторон или диагоналей, углы между сторонами или диагоналями. В случае равных масс задание длины диагонали и угла

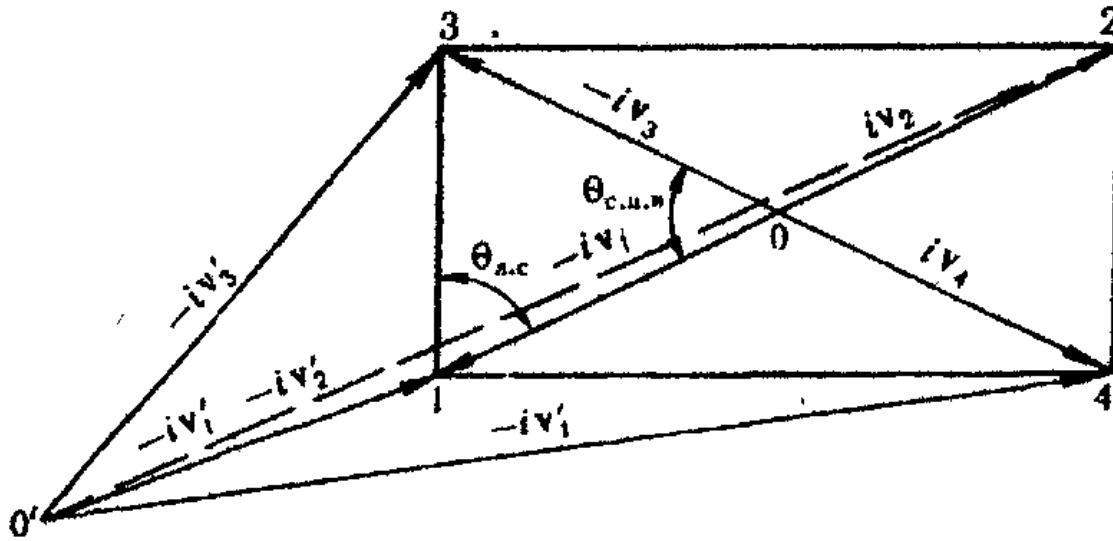


Рис. 7.4

между диагоналями полностью определяет четырехугольник реакции.

Предлагаемый геометрический подход дает возможность определить независимо от выбора точки O' такие важные, используемые для описания реакций, инварианты, как косинусы углов рассеяния в системе центра инерции и в лабораторной системе отсчета (в системе покоя частицы 1). Независимость от выбора точки O' здесь понимается в том смысле, что при любом выборе $O' \cos \theta_{c.c.m}$ определяется как косинус угла между диагоналями четырехугольника реакции, а $\cos \theta_{l.s.c}$ — как косинус угла между стороной 3,1 и диагональю 1,2. Однако сами векторы, соответствующие диагоналям четырехугольника и его сторонам, будут зависеть от выбора точки O' . Так, для положения O' , изображенного на рис. 7.4,

$$\begin{aligned} q_{12}' &= \langle -iV_1, iV_2' \rangle, \\ q_{34}' &= \langle -iV_3, iV_4' \rangle, \\ q_{13}' &= \langle -iV_1, iV_3' \rangle. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Если реакция рассматривается в системе центра инерции и точка O' совпадает с точкой O , то

$$\mathbf{q}'_{12} \rightarrow \mathbf{q}_{12} = \langle -i\mathbf{v}_1, i\mathbf{v}_2 \rangle,$$

$$\mathbf{q}'_{34} \rightarrow \mathbf{q}_{34} = \langle -i\mathbf{v}_3, i\mathbf{v}_4 \rangle, \quad (7.7)$$

$$\mathbf{q}'_{13} \rightarrow \mathbf{q}'_{13} = \langle -i\mathbf{v}_1, i\mathbf{v}_3 \rangle.$$

Совместим точку O' с точкой 1, что соответствует переходу к лабораторной системе отсчета, при этом

$$\mathbf{q}'_{12} \rightarrow i\mathbf{v}_{12},$$

$$\mathbf{q}'_{13} \rightarrow i\mathbf{v}_{13}, \quad (7.8)$$

$$\mathbf{q}'_{34} \rightarrow \langle -i\mathbf{v}_{13}, i\mathbf{v}_{14} \rangle,$$

где приняты новые обозначения для векторов, соответствующих сторонам четырехугольника и его диагоналям, с учетом их структуры в лабораторной системе отсчета. Так, очевидно, сторонам 1, 3 и 1, 4, а также диагонали 1, 2 соответствуют теперь чисто мнимые векторы $-i\mathbf{v}_{13}$, $-i\mathbf{v}_{14}$, $i\mathbf{v}_{12}$. Для косинуса угла рассеяния в системе центра инерции трех указанных выборов систем отсчета имеют место равенства

$$\begin{aligned} \cos \theta_{c.i.m} &= \frac{\langle \mathbf{q}'_{12} \mathbf{q}'_{34} \rangle}{\sqrt{(\mathbf{q}'_{12})^2} \sqrt{(\mathbf{q}'_{34})^2}} = \frac{\langle \mathbf{q}_{12} \mathbf{q}_{34} \rangle}{\sqrt{(\mathbf{q}_{12})^2} \sqrt{(\mathbf{q}_{34})^2}} = \\ &= \frac{i (\mathbf{v}_{12} \langle -i\mathbf{v}_{13}, i\mathbf{v}_{14} \rangle)}{\sqrt{(-\mathbf{v}_{12}^2)} \sqrt{(\langle -i\mathbf{v}_{13}, i\mathbf{v}_{14} \rangle^2)}, \quad (7.9) \end{aligned}$$

или, согласно формулам (7.6) — (7.8),

$$\begin{aligned} \cos \theta_{c.i.m} &= \frac{(\langle -i\mathbf{v}'_1, i\mathbf{v}'_2 \rangle \langle -i\mathbf{v}'_3, i\mathbf{v}'_4 \rangle)}{\sqrt{(\langle -i\mathbf{v}'_1, i\mathbf{v}'_2 \rangle^2)} \sqrt{(\langle -i\mathbf{v}'_3, i\mathbf{v}'_4 \rangle^2)}} = \\ &= \frac{(\langle -i\mathbf{v}_1, i\mathbf{v}_2 \rangle \langle -i\mathbf{v}_3, i\mathbf{v}_4 \rangle)}{\sqrt{(\langle -i\mathbf{v}_1, i\mathbf{v}_2 \rangle^2)} \sqrt{(\langle -i\mathbf{v}_3, i\mathbf{v}_4 \rangle^2)}} = \\ &= \frac{i (\mathbf{v}_{12} \langle -i\mathbf{v}_{13}, i\mathbf{v}_{14} \rangle)}{\sqrt{(-\mathbf{v}_{12}^2)} \sqrt{(\langle -i\mathbf{v}_{13}, i\mathbf{v}_{14} \rangle^2)}}. \quad (7.10) \end{aligned}$$

Косинус угла рассеяния лабораторной системы отсчета для данных случаев определяется соотношениями

$$\cos \theta_{\text{л.с}} = \frac{(\mathbf{q}'_{12} \mathbf{q}'_{13})}{\sqrt{(\mathbf{q}'_{12}^2)} \sqrt{(\mathbf{q}'_{13}^2)}} = \frac{(\mathbf{q}_{12} \mathbf{q}_{13})}{\sqrt{(\mathbf{v}_{12}^2)} \sqrt{(\mathbf{v}_{13}^2)}} = \\ = \frac{(\mathbf{v}_{12} \mathbf{v}_{13})}{\sqrt{(\mathbf{v}_{12}^2)} \sqrt{(\mathbf{v}_{13}^2)}} \quad (7.11)$$

или, с учетом (7.6) — (7.8),

$$\cos \theta_{\text{л.с}} = \frac{(\langle -i\mathbf{v}_1, i\mathbf{v}_2 \rangle \langle -i\mathbf{v}_1, i\mathbf{v}_3 \rangle)}{\sqrt{(\langle -i\mathbf{v}_1, i\mathbf{v}_2 \rangle^2)} \sqrt{(\langle -i\mathbf{v}_1, i\mathbf{v}_3 \rangle^2)}} = \\ = \frac{(\langle -i\mathbf{v}_1, i\mathbf{v}_2 \rangle \langle i\mathbf{v}_1, i\mathbf{v}_3 \rangle)}{\sqrt{(\langle -i\mathbf{v}_1, i\mathbf{v}_2 \rangle^2)} \sqrt{(\langle -i\mathbf{v}_1, i\mathbf{v}_3 \rangle^2)}} = \\ = \frac{(\mathbf{v}_{12} \mathbf{v}_{13})}{\sqrt{(\mathbf{v}_{12}^2)} \sqrt{(\mathbf{v}_{13}^2)}}. \quad (7.12)$$

Напомним, что равенства в формулах (7.10) и (7.12) имеют место вследствие инвариантности скалярных произведений векторов пространства Лобачевского и их длин относительно преобразований комплексных вращений. Именно такими преобразованиями связаны между собой векторы пространства Лобачевского, заданные относительно различных систем отсчета.

Выражения для косинусов углов рассеяния легко могут быть записаны как функции соответствующих 4-импульсов или 4-скоростей, для чего необходимо воспользоваться указанными в правилах связями этих величин с векторами пространства Лобачевского. В случае кинематики частиц с неравными массами приведенные выше рассуждения сохраняют свою силу.

Кроме реакций упругого и неупругого столкновения элементарных частиц существует класс реакций — распадов. Геометрическое построение фигур, соответствующих таким реакциям, имеет свою специфику, на которой следует кратко остановиться.

Рассмотрим вначале распад

$$1 \rightarrow 2 + 3 \quad (7.13)$$

элементарной частицы на две. Для распада имеет место закон сохранения 4-импульса

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3.$$

Удобнее всего геометрическую фигуру, соответствующую реакции (7.13), строить в системе, где покоятся распадающаяся частица 1. В этой системе отсчета закон сохранения З-импульса частиц принимает вид

$$\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 = m_2 \mathbf{u}_2 + m_3 \mathbf{u}_3 = 0.$$

Таким образом,

$$\mathbf{u}_2 = - \frac{m_3}{m_2} \mathbf{u}_3.$$

Выбрав некоторую точку O как соответствующую системе покоя частицы 1, необходимо отложить от нее противоположно направленные векторы, отвечающие 4-скоростям частиц 2 и 3 — $i\mathbf{v}_2 = -i\mathbf{u}_2/m_{02}$, $i\mathbf{v}_3 = i\mathbf{u}_3/m_{03}$. Когда массы продуктов распада равны, то точка O будет находиться посередине отрезка, а в случае неравных масс точка O будет ближе к точке, соответствующей 4-скорости частицы большей массы. Геометрической фигурой, характеризующей реакцию (7.13), следовательно, будет отрезок, который Н. А. Черниковым рассматривается как рычаг в пространстве Лобачевского [90]. Закон сохранения импульса аналогичен закону равновесия рычага, причем длины плеч здесь заменяются на длины окружностей с радиусами r_{02} и r_{03} (рис. 7.5). Закон сохранения З-импульса в форме условия равновесия рычага относительно точки O при этом запишется так:

$$m_2 \sin \rho_{03} = m_3 \sin \rho_{02}.$$

Если пользоваться аналогиями с ньютоновской статикой и кинематикой, тогда целесообразно еще раз подчеркнуть, что геометрические фигуры, сопоставляемые с процессами взаимодействия элементарных частиц, являются аналогами абсолютно твердого тела в ньютоновской механике. Разница только в том, что определение аб-

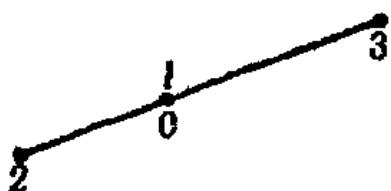
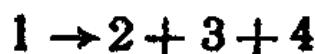


Рис. 7.5

согласно твердого тела в ньютоновской механике связано с инвариантностью относительно группы движений трехмерного евклидова пространства, в то время как геометрические фигуры, сопоставляемые с реакциями, определяются как инварианты относительно группы движений трехмерного пространства Лобачевского — группы Лоренца или группы $SO(3, C)$.

Рассмотрим распад одной частицы на три. Путем непосредственного построения в системе покоя распадающейся частицы с учетом законов сохранения легко убедиться, что в данном случае реакции



соответствует треугольник (рис. 7.6). Точка 1, соответствующая системе покоя первой частицы, совпадает с системой центра инерции частиц 2, 3, 4 и поэтому всегда находится внутри треугольника. Очевидно, что и четырехугольник бинарной реакции, и треугольник распада одной частицы на три при определенных углах рассеяния или разлета могут вырождаться в отрезок. Так, например, в случае бинарного упругого рассеяния на 180° и рассеяния вперед (на 0°) четырехугольник реакции вырождается в отрезок. Ниже приводятся решения с помощью развитых методов двух кинематических задач.

1. Требуется рассмотреть распад $0 \rightarrow 1 + 2$ ($p = p_1 + p_2$) на две частицы с нулевыми массами ($m_1 = m_2 = 0$) в системе отсчета $p = (iE, \mathbf{p})$ и выразить угол θ_{12} между \mathbf{p}_1 и \mathbf{p}_2 через угол между \mathbf{p}_1 и \mathbf{p} .

Геометрически такой процесс изображается на рис. 7.7. Прямая 1,2 и векторы $\mathbf{q}'_1, \mathbf{q}'_2$, лежащие на ней, соответствуют распаду частицы в ее системе покоя. Поскольку продукты распада — безмассовые частицы, то концы векторов $\mathbf{q}'_1, \mathbf{q}'_2, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$ находятся на бесконечности (на абсолюте (конусе) соответствующего массового гиперболоида). Это означает, что длины векторов бесконечны и

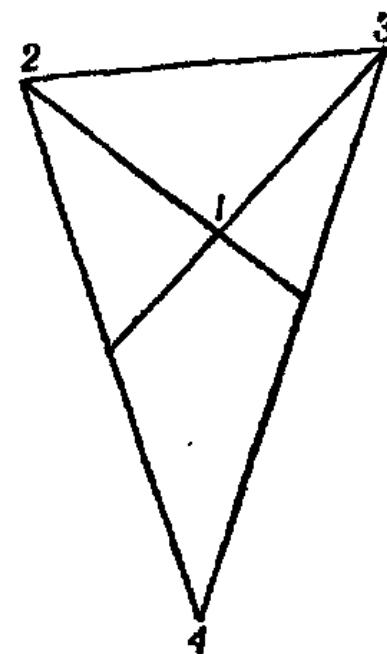


Рис. 7.6

$$(\mathbf{q}_1^2) = (\mathbf{q}_2^2) = (\mathbf{q}'_1^2) = (\mathbf{q}'_2^2) = -1. \quad (7.14)$$

Из рис. 7.7 следует, что вектор \mathbf{q}'_1 можно рассматривать как разность векторов \mathbf{q} и \mathbf{q}_1 , т. е.

$$\mathbf{q}'_1 = \langle \mathbf{q}, -\mathbf{q}_1 \rangle = \frac{\mathbf{q} - \mathbf{q}_1 - [\mathbf{q}\mathbf{q}_1]}{1 + (\mathbf{q}\mathbf{q}_1)}. \quad (7.15)$$

Умножая обе части (7.15) скалярно на \mathbf{q}_2 и учитывая, что $(\mathbf{q}_2[\mathbf{q}\mathbf{q}_1]) = 0$, получим

$$\frac{(\mathbf{q}_2\mathbf{q}) - (\mathbf{q}_2\mathbf{q}_1)}{1 + (\mathbf{q}\mathbf{q}_1)} = (\mathbf{q}_2\mathbf{q}'_1). \quad (7.16)$$

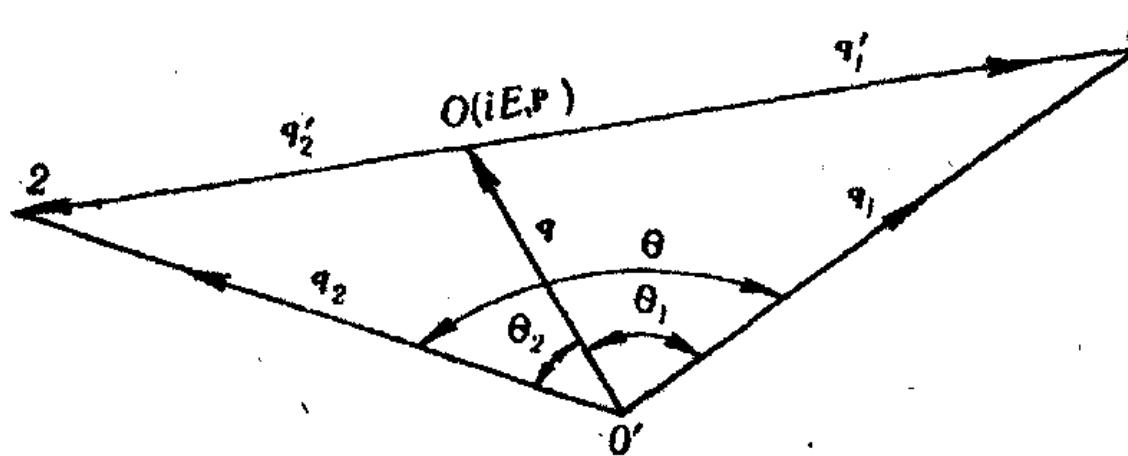


Рис. 7.7

Учитывая (7.14) и вводя обозначение $\mathbf{q} = -i(p/E) = -iv$, выражение (7.16) перепишем в виде

$$-v \cos \theta_2 + \cos \theta_{12} = -(1 - v \cos \theta_1). \quad (7.17)$$

Принимая во внимание (см. рис. 7.7), что $\theta_{12} = \theta_1 + \theta_2$, из (7.17) после несложных преобразований получаем соотношение

$$\cos \theta_{12} = \frac{(1 - v \cos \theta_1)^2 - v^2 \sin^2 \theta_1}{(1 - v \cos \theta_1)^2 + v^2 \sin^2 \theta_1},$$

которое можно представить также в виде

$$\cos \frac{\theta_{12}}{2} = \frac{1 - v \cos \theta_1}{\sqrt{(1 - v \cos \theta_1)^2 - v^2 \sin^2 \theta_1}}.$$

2. Для распада $p \rightarrow p_1 + p_2$ вывести выражение для угла разлета θ_{12} через энергию частиц — продуктов рас-

пада E_1, E_2 и с его помощью показать, что минимальный угол разлета θ_{12}^{\min} получается в симметричном случае, когда $\theta_1 = \theta_2$.

Формулу для θ_{12} легко вывести непосредственно из закона сохранения 4-импульса для данного распада. Она имеет вид

$$\sin \frac{\theta_{12}}{2} = \frac{m}{2\sqrt{E_1 E_2}}. \quad (7.18)$$

Учитывая, что энергия E распадающейся частицы задана, и исключив с помощью закона сохранения энергии, например, E_1 , получим выражение для $\sin(\theta_{12}/2)$ как функцию E_2 . Исследовав его на экстремум, можно найти минимальное значение угла. Таков стандартный путь решения задачи.

Простотой и наглядностью отличается следующее геометрическое решение задачи: изобразим, как и в предыдущем примере, распад в двух системах отсчета (рис. 7.8). Всевозможные ситуации с различными углами разлета в системе отсчета, где 4-импульс распадающейся частицы есть $p = (iE, p)$, отличаются положениями вершины O на окружность фиксированного радиуса, соответствующего заданной энергии E распадающейся частицы. При этом поскольку AO_1 и O_1B параллельны AB , то, согласно теореме об угле параллельности (см. (5.35)), имеем

$$\cos \frac{\theta_{12}}{2} = \operatorname{th} \rho_{O_1 K},$$

где $\rho_{O_1 K}$ — длина перпендикуляра из O_1 на AB . Поскольку $\cos \theta_{12}/2$ — функция убывающая, то минимальное зна-

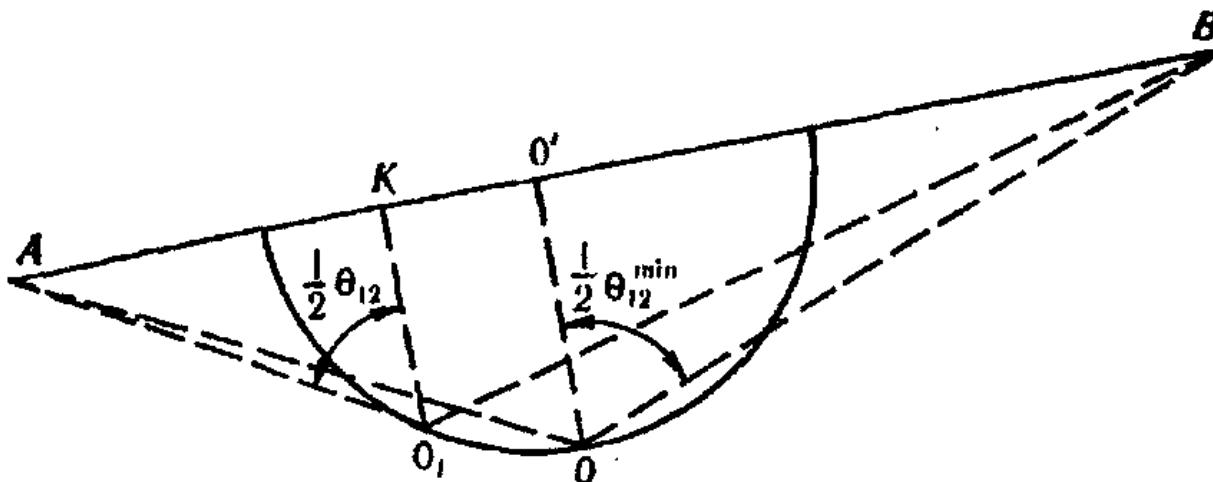


Рис. 7.8

чение θ_{12} соответствует максимальному $p_{o,k}$, а это достигается тогда, когда K совпадает с O' . Как видно из рисунка, это и есть симметричный случай. При этом следует отметить, что $\operatorname{th} p_{o,o} = |\mathbf{p}|/E$ и, следовательно,

$$\cos \frac{\theta_{12}^{\min}}{2} = \frac{|\mathbf{p}|}{E}, \quad \sin \frac{1}{2} \theta_{12}^{\min} = \frac{m}{E}.$$

В свою очередь из формулы (7.18) и из построений следует, что этот случай как раз соответствует условиям $E_1=E_2=E/2$ и $\theta_1=\theta_2$.

Следующие две задачи рекомендуются для самостоятельного решения.

3. Для бинарного процесса построить четырехугольник реакции, найти на нем точку, соответствующую системе Брейта ($\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2=0$), и выразить косинусы углов рассеяния системы центра инерции и лабораторной системы отсчета в системе Брейта.

4. Пусть нейтральная частица 2 возникает в реакции столкновения частиц a и b , т. е. $p_a+p_b=p_1+p_2$ ($a+b \rightarrow 1+2$). Определить m_2 по известному минимальному углу разлета α (см. задачу 2), массе m_1 частицы 1 и полной энергии сталкивающихся частиц 1 и 2.

Решение последней задачи на основе развитых выше методов приводится в работе [70]. Многие задачи, решаемые с привлечением геометрии Лобачевского, можно найти в работах [90, 91].

Глава 3

КВАТЕРНИОННАЯ ФОРМУЛИРОВКА КЛАССИЧЕСКОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

§ 8. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА—ЛОРЕНЦА

Изложенный в предыдущей главе кватернионный подход к описанию релятивистской кинематики обладает рядом несомненных достоинств. Однако его широкое применение возможно только при наличии последовательной алгебраической формулировки современных динамических теорий.

Первой динамической теорией, при формулировке которой использовалось кватернионное исчисление, была классическая электродинамика Максвелла. Ее уравнения в современных векторных обозначениях в системе единиц, где скорость света $c=1$, имеют вид

$$[\nabla \mathbf{E}] = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (\nabla \mathbf{E}) = \rho, \quad (8.1)$$

$$[\nabla \mathbf{H}] = -\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{j}, \quad (\nabla \mathbf{H}) = 0,$$

где \mathbf{E} , \mathbf{H} — векторы напряженности электрического и магнитного полей; ρ и \mathbf{j} — плотности зарядов и токов, удовлетворяющие уравнению непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\nabla \mathbf{j}) = 0. \quad (8.2)$$

Ставя в соответствие напряженностям векторный кватернион $\mathbf{F}=\mathbf{H}-i\mathbf{E}$, а ρ и \mathbf{j} — кватернион $I=i\rho+\mathbf{j}$ и используя закон умножения (1.22), легко убедиться, что уравнения Максвелла (8.1) представляют собой не что иное, как условие аналитичности кватерниона \mathbf{F} , нарушенное источником I [24, 27]:

$$\nabla \mathbf{F} = I. \quad (8.1a)$$

Действуя на левую и правую части (8.1а) дифференциальным оператором $\bar{\nabla}$, получаем кватернионный аналог (8.2)

$$(\bar{\nabla} I)S = 0. \quad (8.2a)$$

Кватернион I , очевидно, удовлетворяет условию

$$-I^* = I \quad (8.3)$$

и, следовательно, при преобразованиях Лоренца изменяется по тому же представлению, что и оператор ∇ :

$$I^L = LIL^*, \quad (8.4)$$

где L определяется формулой (2.8).

Очевидно, что уравнения (8.1а) будут лоренц-ковариантны, если

$$\mathbf{F}^L = L^* \mathbf{F} \bar{L}^*. \quad (8.5)$$

Действительно, при этом из $\nabla^L \mathbf{F}^L = I^L$ получаем

$$L \nabla \bar{L}^* L^* \mathbf{F} \bar{L}^* = LIL^* \text{ или } \nabla \mathbf{F} = I.$$

В качестве упражнения можно проверить, что следующие из (8.5) трансформационные свойства \mathbf{H} , \mathbf{E} совпадают с приведенными в работе [88].

Отметим также, что при учете (8.3) уравнения Максвелла в кватернионах формально могут быть записаны в виде системы

$$\frac{1}{2} \left\{ \nabla \mathbf{F} - (\overline{\nabla \mathbf{F}})^* \right\} = I, \quad (8.6)$$

$$\frac{1}{2} \left\{ \nabla \mathbf{F} + (\overline{\nabla \mathbf{F}})^* \right\} = 0.$$

Вводя антисимметричный тензор электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$, уравнения этой системы можно переписать в стандартной явно лоренц-ковариантной форме

$$\partial_\nu F_{\mu\nu} = I_\mu, \quad \partial_\nu \overset{x}{F}_{\mu\nu} = 0,$$

где

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & -iE_x \\ -H_z & 0 & H_x & -iE_y \\ H_y & -H_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix},$$

$$\overset{\times}{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\tau} F_{\rho\sigma},$$

$$\overset{\times\times}{F}_{\mu\nu} = -\vec{F}_{\mu\nu}, \quad (I_\mu) = (i\rho, \mathbf{j}).$$

Как будет показано в § 10, уравнения электромагнитного поля в форме (8.6) удобно использовать при переходе к кватернионной формулировке уравнений макроскопической электродинамики.

В качестве примера решения уравнений (8.1a) рассмотрим свободное электромагнитное поле ($I=0$). Тогда имеем уравнение

$$\nabla F = 0, \quad (8.7)$$

решение которого будем искать в виде

$$F = \sqrt{\frac{2}{k_0 V}} (f_1 e^{i(\bar{k}\bar{x})S} + f_2 e^{-i(\bar{k}\bar{x})S}), \quad (8.8)$$

где f_i ($i=1, 2$) — трехмерные бикватерионы, не зависящие от координат; нормировочный множитель выбран из соображений удобства. Подставляя (8.8) в (8.7), находим

$$k f_1 = k f_2 = 0. \quad (8.9)$$

Следовательно, $\bar{k}k f_i = 0$, и из требования нетривиальности решения находим условие на импульс плоской волны

$$\bar{k}k = -k_0^2 + \mathbf{k}^2 = 0.$$

Выделив в (8.9) скалярную и векторную части, получаем два уравнения:

$$(k f_i) = 0, \quad i k_0 f_i = -[k f_i]. \quad (8.10)$$

Второе является уравнением на собственные функции и имеет решение лишь при $\bar{k}k = 0$. Это решение единственno с точностью до комплексного множителя и

задается круговым вектором \mathbf{f} [99]. Следовательно, решение (8.9) представимо в виде

$$f_1 = \cos \xi e^{i\alpha f}, \quad f_2 = \sin \xi e^{i\alpha f}, \quad (8.11)$$

где f — бикватернион ($kf=0$); a, ξ — параметры.

Подставляя (8.11) в (8.8) и производя сдвиг фазы $(k\bar{x})_S$ на α , находим частное решение

$$\mathbf{F} = \sqrt{\frac{2}{k_0 V}} (\cos \xi e^{i(k\bar{x})_S} + \sin \xi e^{-i(k\bar{x})_S}) \mathbf{f}. \quad (8.12)$$

Суперпозиция таких волн с различными k, f и ξ представляет собой общее решение свободных уравнений Максвелла в кватернионах.

Обратим внимание на то, что в отличие от стандартного подхода, основанного на использовании векторной алгебры или тензорного исчисления, нам не пришлось в процессе решения применять понятие потенциала. Далее, несмотря на комплексные экспоненты в (8.8), решение для полей \mathbf{E} и \mathbf{H} получается непосредственно в действительной форме. Это связано с наличием мнимой единицы в исходном определении полевого кватерниона $\mathbf{F} = \mathbf{H} - i\mathbf{E}$. Отметим, что при рассмотрении процессов диссипации энергии электромагнитного поля в среде необходимо, как обычно, расширять исходную алгебру, вводя дополнительную мнимую единицу (см. § 10).

Выясним теперь смысл параметров ξ и $f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f$ в выражении (8.12).

Для того чтобы проще прослеживалась связь с обычным описанием электромагнитных волн, на время оставим явно ковариантный подход и выпишем выражения для напряженностей электрического и магнитного полей, следующие из (8.12):

$$\begin{aligned} \mathbf{H} = 2 \sqrt{\frac{1}{k_0 V}} & \left[\operatorname{Re} f \sin \left(\xi + \frac{\pi}{4} \right) \cos \varphi - \right. \\ & \left. - \operatorname{Im} f \cos \left(\xi + \frac{\pi}{4} \right) \sin \varphi \right], \end{aligned} \quad (8.13)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = -2 \sqrt{\frac{1}{k_0 V}} & \left[\operatorname{Re} f \cos \left(\xi + \frac{\pi}{4} \right) \sin \varphi + \right. \\ & \left. + \operatorname{Im} f \sin \left(\xi + \frac{\pi}{4} \right) \cos \varphi \right], \end{aligned}$$

где $\phi = (k\bar{x})_S$. Из (8.10) следует, что лоренц-инварианты для плоской электромагнитной волны равны нулю, т. е.

$$FF = 0 \quad \text{или} \quad H^2 - E^2 = (HE) = 0,$$

откуда получаем

$$(\operatorname{Re} f \operatorname{Im} f) = 0 \quad \text{и} \quad |\operatorname{Re} f| = |\operatorname{Im} f|.$$

Таким образом, формулы (8.13) представляют собой разложение кватернионов E и H по ортогональному базису, образуемому $\operatorname{Re} f$ и $\operatorname{Im} f$ в плоскости, перпендикулярной импульсу k . Обозначая соответствующие проекции E_1 и E_2 , находим уравнение кривой, которую описывает конец вектор-кватерниона E при изменении фазы ϕ :

$$\frac{E_1^2}{|\mathbf{e}_1|^2} + \frac{E_2^2}{|\mathbf{e}_2|^2} = 1, \quad \text{где} \quad \begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \operatorname{Re} f \cos \left(\xi + \frac{\pi}{4} \right), \\ \mathbf{e}_2 &= \operatorname{Im} f \sin \left(\xi + \frac{\pi}{4} \right). \end{aligned} \quad (8.14)$$

В общем случае это эллипс с полуосами $|\mathbf{e}_1|$ и $|\mathbf{e}_2|$. При этом говорят, что поляризация волны эллиптическая. Когда $\xi = 0, \pi/2$, эллипс переходит в окружность и поляризация называется круговой. Отметим, что в этом случае в (8.12) остается только одна из экспонент. При $\xi = \pm \frac{\pi}{4}$ либо $|\mathbf{e}_1|$, либо $|\mathbf{e}_2|$ равны нулю и поляризация становится линейной — электрический (магнитный) кватернион колеблется вдоль фиксированных взаимно ортогональных направлений. Из (8.12) очевидно, что линейная поляризация есть сумма двух круговых, и наоборот.

Легко также убедиться, что $\operatorname{sign}(k[\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2])$ определяет направление вращения кватерниона E в случае эллиптической поляризации [99].

Как показано в работе [100], поляризация может быть описана явно релятивистски ковариантным образом. Убедимся, что и в этом случае просто и единообразно задача решается при применении алгебры бикватернионов. Как известно, наиболее общее описание всех поляризационных свойств электромагнитных волн задается тензором пучка. Чтобы ввести его кватернионный аналог, перепишем (8.13) в комплексной форме:

$$\mathbf{E} = i \sqrt{\frac{k_0}{2V}} (\mathbf{e} e^{i(\mathbf{k}\bar{x})S} - \mathbf{e}^* e^{-i(\mathbf{k}\bar{x})S}), \quad (8.15)$$

где

$$\mathbf{e} = \frac{1}{k_0} (\sin \xi \mathbf{f}^* - \cos \xi \mathbf{f}). \quad (8.16)$$

Тензором пучка, по определению [99], называется матрица

$$\Phi_{ab} = \overline{\mathbf{e}_a \mathbf{e}_b^*} = \overline{\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}^*}, \quad a, b = 1, 2, 3, \quad (8.17)$$

где $\mathbf{e}_{a(b)}$ — компоненты кватерниона \mathbf{e} ; черта обозначает усреднение по ансамблю чистых состояний. Для представления в кватернионах тензора второго ранга введем понятие кватернионного оператора (a, b) [101], где a, b — бикватернионы. Его действие на произвольный бикватернион определяется следующим образом:

$$(a, b)x = axb. \quad (8.18)$$

Отсюда следует естественный закон умножения двух операторов :

$$(a, b)(c, d) = (ac, db). \quad (8.19)$$

Тогда очевидно, что тензору пучка в кватернионах соответствует оператор пучка

$$\overline{\Phi} = \frac{1}{2} [(\mathbf{e}, \mathbf{e}^*) + (\mathbf{e}\mathbf{e}^*, \mathbf{e}_0)]. \quad (8.20)$$

Для того чтобы выразить Φ через ковариантные величины ξ, \mathbf{f} , достаточно подставить (8.16) в (8.20) и произвести операцию усреднения:

$$\overline{\cos 2\xi} = \cos 2\eta, \quad \overline{\sin 2\xi (\mathbf{f}, \mathbf{f})} = \sin 2\eta (\mathbf{g}, \mathbf{g}), \quad (8.21)$$

где η — лоренцевский скаляр, а бикватернион \mathbf{g} преобразуется по тому же представлению, что и бикватернионы \mathbf{F}, \mathbf{f} , и удовлетворяет уравнению $k\mathbf{g} = 0$.

Кроме того, из выражения для вектора энергии-импульса плоской волны

$$k = \frac{1}{2i} \int dV \mathbf{F}^* \mathbf{e}_0 \mathbf{F} \quad (8.22)$$

следует условие нормировки для бикватерниона

$$\mathbf{f}^* e_0 \mathbf{f} = -\frac{1}{4} k e_0 k. \quad (8.23)$$

Кватернионная единица e_0 вписана в формулы (8.22), (8.23) для сохранения их ковариантности. Легко убедиться, что (8.23) можно переписать в виде

$$(\mathbf{f}^*, \mathbf{f}) + (\mathbf{f}^* \mathbf{f}, e_0) = -\frac{1}{2} (k, k). \quad (8.24)$$

Отметим, что в отличие от аналогичных выражений в работе [100] левая и правая части оператора (8.24) одинаково применимы как к векторным бикватернионам, преобразующимся по представлению (1.0), так и к бикватернионам, преобразующимся по представлению (1.1) группы Лоренца. Кроме того, в развивающем подходе нет необходимости вводить дополнительные искусственные операции умножения [100].

Подставляя полученные выражения в определение (8.20), находим окончательно

$$\begin{aligned} \Phi = & \frac{1}{4} \{ 1 + (\mathbf{n}, \mathbf{n}) - 2i \cos 2\eta [(\mathbf{n}, e_0) + (e_0, \mathbf{n})] \} - \\ & - \frac{1}{2k_0} \sin 2\eta [(\mathbf{g}, \mathbf{g}) + (\mathbf{g}^*, \mathbf{g}^*)], \end{aligned} \quad (8.25)$$

где $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{k}}{k_0}$ — единичный вектор волновой нормали.

При желании, воспользовавшись формулами из монографии [99], нетрудно установить связь построенного оператора пучка и соответственно ковариантных параметров \mathbf{g} и η с параметрами Стокса и другими встречающимися в литературе характеристиками поляризации электромагнитного излучения.

В заключение параграфа рассмотрим уравнения движения заряженных частиц во внешнем электромагнитном поле, которые, как известно (см., например, [88]), могут быть записаны в виде

$$m \frac{du_\mu}{ds} = e F_{\mu\nu} u_\nu, \quad (8.26)$$

где m — масса частицы; $F_{\mu\nu}$ — тензор электромагнитного поля, определенный выше; $u_\mu = (iu_0, \mathbf{u}) = (1 - \mathbf{v}^2)^{-1/2} (i, \mathbf{v})$ — 4-скорость.

Нетрудно записать соответствующее выражение в кватернионах:

$$m \frac{du}{ds} = \frac{1}{2} e(uF - F^*u) = f_L. \quad (8.27)$$

Очевидно, 4-мерная сила Лоренца f_L преобразуется по векторному представлению группы Лоренца и удовлетворяет при этом лоренц-инвариантному условию $f_L^* = -f_L$. Трехмерная ее часть имеет вид

$$f_L = e(E + [vH]). \quad (8.28)$$

Система уравнений (8.1a) и (8.27) составляет основу всей классической электродинамики. Вообще говоря, эта система выглядит переопределенной, поскольку (8.1a) включает восемь уравнений относительно шести неизвестных F . Однако, вводя потенциалы $A = iA_0 + A$ с помощью соотношения

$$F = -(\bar{\nabla}A)_V \quad (8.29)$$

(соответственно в тензорных обозначениях $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, а в векторных $H = [\nabla A]$, $E = -\frac{\partial A}{\partial t} - \bar{\nabla}A_0$), приходим к четырем уравнениям с четырьмя неизвестными:

$$\square A = -I, \quad (8.30)$$

где $\square = \bar{\nabla}\bar{\nabla} = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2$ — даламбертиан.

§ 9. ЭЛЕКТРОДИНАМИКА ДУАЛЬНО ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

Уравнения классической электродинамики в кватернионах (8.1a) и (8.27) весьма удобны с точки зрения анализа дуальной инвариантности теории. Действительно, если отказаться от условия (8.3), сохранив при этом лоренц-инвариантность уравнений, и ввести комплексный заряд в выражение для силы Лоренца

$$f_L = \frac{1}{2} q^* u F - q F^* u, \quad (9.1)$$

где $q = e + ig$, то, очевидно, полученные уравнения будут инвариантны относительно дуальных преобразований:

$$\check{\mathbf{F}} = \mathbf{F}e^{i\theta}, \check{q} = qe^{i\theta}, \check{I} = Ie^{i\theta}. \quad (9.2)$$

Следует подчеркнуть, что преобразования токов в (9.2) генерируются преобразованием зарядов (констант) q . Действительно,

$$\begin{aligned} I &= \sum_k (e_k + ig_k) \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k)(i + \mathbf{v}_k) = \\ &= \sum_k q_k e^{i\theta_k} \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k)(i + \dot{\mathbf{v}}_k) = \sum_k [i(\rho_k^\epsilon + i\rho_k^\theta) + \mathbf{j}_k^\epsilon + i\mathbf{j}_k^\theta] \end{aligned} \quad (9.3)$$

и при дуальных преобразованиях (9.2)

$$\check{\Phi}_k = \Phi_k + \theta,$$

где \mathbf{v}_k — скорость k -го заряда, $q_k = \sqrt{e_k^2 + g_k^2}$, $\Phi_k = \arctg g_k/e_k$.

В дуально инвариантной записи оба уравнения (8.6) становятся неоднородными:

$$\frac{1}{2} [\nabla \mathbf{F} - (\nabla \overline{\mathbf{F}})^*] = \frac{1}{2} (I - \bar{I}^*) = \sum_k (i\rho_k^\epsilon + \mathbf{j}_k^\epsilon) = I^\epsilon, \quad (9.4)$$

$$\frac{1}{2} [\nabla \mathbf{F} + (\nabla \overline{\mathbf{F}})^*] = \frac{1}{2} (I + \bar{I}^*) = \sum_k (i\rho_k^\theta + \mathbf{j}_k^\theta) = I^\theta.$$

Появление источников двух типов с математической точки зрения связано с нарушением условия аналитичности для полевого кватерниона. Переход к стандартной однозарядовой теории возможен, если фазы всех зарядов равны (по $\text{mod } 2\pi$).

При дуальных преобразованиях сохраняются плотность энергии и импульса электромагнитного поля:

$$\mathbf{FF}^* = -(\mathbf{H}^2 + \mathbf{E}^2) + 2i[\mathbf{HE}] \quad (9.5)$$

и другие наблюдаемые [102]. В то же время лоренцевские инварианты электромагнитного поля

$$\widetilde{\mathbf{FF}} = \mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2 - 2i(\mathbf{HE}) \quad (9.6)$$

при преобразовании (9.2) преобразуются по закону

$$(\widetilde{\mathbf{FF}}) = \mathbf{FF}e^{2i\theta}. \quad (9.7)$$

Напомним, что выражение $H^2 - E^2 = \text{Re}(\bar{F}\bar{F})$ определяет плотность лагранжиана свободного электромагнитного поля.

Симметрийные аспекты уравнений Максвелла с исчерпывающей полнотой исследованы в монографии [103], поэтому мы остановимся лишь на анализе определения дискретных преобразований в классической электродинамике с двумя зарядами [104].

Операции обобщенной пространственной (\mathcal{P}) и временной (\mathcal{T}) инверсий, сохраняющие форму уравнения (8.1а) и согласующиеся с векторным характером силы Лоренца (9.1), задаются следующим образом:

$$\mathcal{P}: x \rightarrow -x^*, \nabla \rightarrow -\nabla^*, F \rightarrow \pm F^*, I \rightarrow \mp I^*, f_L \rightarrow -f_L^*, \quad (9.8)$$

$$\mathcal{T}: x \rightarrow x^*, \nabla \rightarrow \nabla^*, F \rightarrow \mp F^*, I \rightarrow \mp I^*, f_L \rightarrow f_L^*. \quad (9.9)$$

Отметим, что произвол в определении дискретных операций, отмеченный в § 2, здесь исчезает.

Два знака в преобразованиях полевых величин и токов соответствуют возможности использования наряду с обычным (E — вектор, H — псевдовектор) также альтернативного выбора.

Если перейти от кватернионной записи к векторной, то формулам (9.8), (9.9) соответствуют преобразования полей и зарядов следующего вида:

$$\mathcal{P}: E \rightarrow \mp E, H \rightarrow \pm H, e \rightarrow \pm e, g \rightarrow \mp g, f_L \rightarrow -f_L^*, \quad (9.8a)$$

$$\mathcal{T}: E \rightarrow \pm E, H \rightarrow \mp H, e \rightarrow \pm e, g \rightarrow \mp g, f_L \rightarrow f_L^*. \quad (9.9a)$$

Следует подчеркнуть, что введенные выше операции \mathcal{P} и \mathcal{T} существенно отличаются от стандартных определений пространственного и временного отражений в классической теории поля. Дело в том, что они включают в себя изменения знака размерной константы g (либо e), в то время как соответствующая плотность заряда остается инвариантной. В сущности, \mathcal{P} и \mathcal{T} являются операциями «комбинированных» инверсий:

$$\mathcal{P} = C_{g(e)} P_0, \mathcal{T} = C_{g(e)} T_0, \quad (9.10)$$

где P_0 и T_0 — стандартные операции инверсии. Операции инверсий зарядов C , C_e , C_g могут быть определены следующим образом:

$$C : I \rightarrow -I, \quad F \rightarrow -F, \quad \nabla \rightarrow \nabla, \quad (9.11)$$

$$C_e : I \rightarrow \bar{I}^*, \quad \text{не определено}, \quad \nabla \rightarrow \nabla, \quad (9.12)$$

$$C_g : I \rightarrow -\bar{I}^*, \quad \text{не определено}, \quad \nabla \rightarrow \nabla. \quad (9.13)$$

Важно, что в отличие от C операции C_e , C_g по отдельности не являются преобразованиями симметрии уравнений Максвелла. Более того, действие каждой из них на кватернион F , а следовательно, и на поля вообще не определено, поскольку умножение кватернионов некоммутативно. Однако они могут быть определены над потенциалами, задаваемыми соотношением

$$F = -(\bar{\nabla} W)_v, \quad W = A + iB, \quad -\bar{A}^* = A, \quad -\bar{B}^* = B. \quad (9.14)$$

При этом уравнения поля принимают вид

$$\square W = -I,$$

откуда следует

$$C_e : W \rightarrow \bar{W}^*, \quad C_g : W \rightarrow -\bar{W}^*.$$

Отметим, что в тензорной записи условия (9.14) соответствуют двухпотенциальному определению тензора электромагнитного поля

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\rho B_\sigma,$$

предложенному Кабибо и Феррари [105].

Из определения (9.10) и свойств C_e и C_g следует, что электродинамика с двумя видами зарядов не инвариантна относительно обычных операций пространственного и временного отражения. Существует единственное исключение, соответствующее тривиальному случаю однозарядовой электродинамики, когда

$$\text{Im}(q_i q_j) = 0, \quad (9.15)$$

где i — номер частицы. В этом случае операции P и T могут быть определены следующим образом:

$$P = e^{i\theta} P_0 e^{-i\theta}, \quad T = e^{i\theta} T_0 e^{-i\theta},$$

где θ — общая ($\text{mod } 2\pi$) фаза зарядов.

Как было отмечено в работе [106], использование двухпотенциального формализма влечет за собой строгие симметрийные ограничения на возможность лагранжевой формулировки теории, сводящиеся к требованию полной эквивалентности системы (9.4) и уравнений движения с силой (9.1) стандартным уравнениям однозарядовой электродинамики Максвелла—Лоренца.

При использовании определения поля через потенциалы (9.14) для установления такой эквивалентности условий (9.15), вообще говоря, недостаточно. Действительно, полевые уравнения после дуального поворота на общий для всех зарядов угол $\vartheta = \arctg g_1/e_b$ сводятся к виду

$$\square \tilde{W} = - \sum_k |q_k| I_k, \quad (9.16)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{W} = \tilde{A} + i\tilde{B} = \sum_k & \left\{ \frac{1}{|q_k|} (e_k A + g_k B) + \right. \\ & \left. + \frac{i}{|q_k|} (e_k B - g_k A) \right\}, \end{aligned}$$

$|q_k| = \sqrt{e_k^2 + g_k^2}$ — эффективные заряды.

Для того чтобы (9.16) были полностью эквивалентны обычным полевым уравнениям, необходимо теперь потребовать

$$\tilde{B} = 0, (e_k B - g_k A) = 0. \quad (9.17)$$

В сущности (9.17) представляет собой условие асимптотического обращения в нуль потенциала \tilde{W} на бесконечности, что является стандартным требованием при наличии источников. В том, что условия (9.15), (9.17) действительно достаточны для существования лагранжевой формулировки электродинамики дуально заряженных частиц, легко убедиться, рассмотрев следующее действие [107]:

$$\begin{aligned} S = - \sum_k & \left\{ \int m_k ds_k + \int \operatorname{Re} [\tilde{W} (-\vec{I}_k + i\lambda_k)]_S d^4x \right\} - \\ & - \operatorname{Re} \frac{1}{4} \int d^4x (f^* \mathbf{F} \bar{\mathbf{F}})_S, \end{aligned} \quad (9.18)$$

где λ_k — множители Лагранжа, $-\bar{\lambda}_k^* = \lambda_k$, $f = a + ib$, $a(b) = a^*(b^*) = \bar{a}(\bar{b})$ — безразмерные параметры, и, не ограничивая общности, можно положить $ff^* = 1$.

Очевидно, действие (9.18) лоренц-инвариантно и не изменяется при дуальных преобразованиях (9.2), если

$$\tilde{f} = fe^{2i\theta}. \quad (9.19)$$

Варьируя (9.18) последовательно по полям W , координатам заряженных частиц x и множителям Лагранжа λ_k , получаем следующую систему уравнений:

$$\nabla P = -\frac{fq^*}{|f|^2} \sum_k (j_k + i\lambda_k), \quad I_k = q_k j_k, \quad (9.20)$$

$$m_k \left(\frac{\partial u}{\partial s} \right)_k = [e_k u_k (-\bar{\nabla} A)_v + g_k u_k (-\bar{\nabla} B)_v] - [\dots]^*, \quad (9.21)$$

$$q^* W + (\overline{q^* W})^* = 0. \quad (9.22)$$

Теперь можно убедиться [107], что уравнения (9.20), (9.22) совместны только при выполнении условий

$$\lambda_k = 0, \quad \text{Im}(q_i^* q_j) = e_i g_j - e_j g_i = 0.$$

При этом

$$\text{Im}(q_i^* f) = 0 \text{ или } b = \frac{2e_i g_i}{e_i^2 - g_i^2} a. \quad (9.23)$$

Решение (9.23) есть

$$f = \frac{q^2}{|q|^2}, \quad a = \frac{e_i^2 - g_i^2}{e_i^2 + g_i^2}, \quad b = \frac{2e_i g_i}{e_i^2 + g_i^2}. \quad (9.24)$$

Легко видеть, что после дуального поворота на угол $\Theta = \arctg g_i/e_i$ полевые уравнения (9.20) и уравнения движения (9.21) приводятся к обычным уравнениям однозарядовой электродинамики.

Функция Лагранжа с полевой частью, зависящей от параметров (9.24), рассматривалась в работах [108]. Однако при этом не накладывались связи (9.17), что приводило к уравнениям движения зарядов с неправильным выражением для силы Лоренца.

Отметим, что в отличие от случая свободного электромагнитного поля инвариантности действия (9.18) относительно дуальных преобразований полей и параметров не отвечает сохраняющаяся величина.

Можно легко проверить, что условие обращения в нуль соответствующей вариации действия при этом выполняется тождественно.

Что касается перехода к свободному электромагнитному полю в выражении для действия (9.18), то здесь дело обстоит не так просто, как в однопотенциальной формулировке электродинамики, где достаточно вычеркнуть члены, пропорциональные зарядам и массам частиц.

В этом пределе условие (9.17) не имеет места и не может служить для устранения лишних степеней свободы, связанных с введением второго потенциала. Однако оно уже и не является необходимым, поскольку возникает возможность устраниТЬ их с помощью выбора калибровки. Действительно, определение (9.14) не изменяется при преобразованиях

$$W \rightarrow W + \dot{W}, \quad \dot{W} = \dot{A} + i\dot{B}, \quad (9.25)$$

при условии, что

$$-(\bar{\nabla} \dot{W})_v = 0. \quad (9.26)$$

Отсюда непосредственно следует, что \dot{A} и \dot{B} удовлетворяют уравнениям для потенциала свободного электромагнитного поля. Следовательно, с помощью (9.25) в случае свободного (и только свободного) поля можно исключить один из потенциалов в выражении для W .

При этом теряет смысл введение параметров f в выражение для действия, поскольку лагранжианы

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} \operatorname{Re}(f^* \bar{F} \bar{F})_S, \quad \mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4} \operatorname{Re}(\bar{F} \bar{F}), \quad (9.27)$$

где

$$F = -(\bar{\nabla} A)_v, \quad -\bar{A}^* = A, \quad (9.28)$$

отличаются друг от друга на дивергенцию и постоянный множитель.

Поэтому, выбирая в качестве лагранжиана \mathcal{L}_0 (9.27) при условии (9.28) и вводя второй потенциал, связанный с A дуально ковариантным условием

$$[\bar{\nabla}(A - iB)]_v = 0, \quad (9.29)$$

при бесконечно малых дуальных поворотах имеем

$$(A + iB) \rightarrow (A + iB)(1 + i\delta\theta). \quad (9.30)$$

Существенно, что вариация формы лагранжиана при преобразованиях (9.30) может быть записана как дивергенция без использования полевых уравнений, т. е. не на экстремалях действия. Учитывая все вышесказанное, по теореме Нетер легко получить закон сохранения дуального тока [107]:

$$D = \frac{1}{2} i(A - iB) F - \overline{[i(A - iB) F]^*}, \quad (9.31)$$

или в тензорных обозначениях

$$D_\mu = \overset{\times}{F}_{\mu\nu} A_\nu - F_{\mu\nu} B_\nu.$$

Таким образом, алгебраический подход дает наиболее адекватную формулировку уравнений классической электродинамики с двумя типами источников. Об этом говорит и тот факт, что время от времени алгебраическая формулировка дуальной электродинамики «переоткрывается» на страницах периодической научной печати [109].

§ 10. МАКРОСКОПИЧЕСКАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Приведенные в предыдущих параграфах этой главы уравнения электромагнитного поля и движения заряженных частиц в принципе пригодны и для описания электромагнитных явлений в средах. Однако практически осуществить такое микроскопическое рассмотрение невозможно из-за того, что число уравнений движения (8.26), которое придется решать при этом, равно числу заряженных частиц в веществе. Кроме того, под действием электромагнитного поля в среде появляются наведенные заряды и токи, которые в свою очередь изменяют обусловливающие их поля. Это приводит к тому, что для самосогласованного описания электромагнитного поля в среде уже недостаточно шести величин $F = H - iE$.

Следует также помнить, что частицы среды подчиняются законам статистической физики и поэтому необходимо учитывать их тепловое движение.

В большинстве случаев микроскопическое описание

избыточно, потому что в процессе измерения полей макроскопическим прибором проводится их усреднение по некоторым конечным областям пространства и промежуткам времени. Поэтому и в теории достаточно рассматривать соответствующим образом усредненные поля. В нашу задачу не входит описание процедуры усреднения, с которой можно ознакомиться по учебникам и монографиям (см., например, [110]). Напомним только, что в результате ее применения к уравнениям поля (8.6) получается система

$$\frac{1}{2} (\nabla \mathbf{F} - (\overline{\nabla} \mathbf{F})^*) = \mathbf{I}, \quad (10.1)$$

$$\frac{1}{2} (\nabla \mathbf{G} + (\overline{\nabla} \mathbf{G})^*) = 0,$$

где

$$\mathbf{F} = \mathbf{H} - i\mathbf{D}, \quad \mathbf{G} = \mathbf{B} - i\mathbf{E}, \quad (10.2)$$

\mathbf{E} и \mathbf{B} — средние напряженности электрического и магнитного полей, при этом, однако, \mathbf{B} принято называть магнитной индукцией, \mathbf{D} и \mathbf{H} учитывают наведенные в веществе заряды и токи и называются соответственно электрической индукцией и напряженностью магнитного поля. Ток в (10.1) считается заданным.

Система уравнений (10.1) не замкнута и ее следует дополнить материальными уравнениями, устанавливающими определенные связи между кватернионами \mathbf{F} и \mathbf{G} и характеристиками среды.

Так, например, для покоящихся гиротропных сред наиболее общие уравнения связи были предложены Ф. И. Федоровым [99]. В векторной форме они имеют вид

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} + \alpha \mathbf{H}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} + \beta \mathbf{E}, \quad (10.3)$$

где α , β , ϵ , μ — некоторые 3×3 -матрицы. При попытке записи в кватернионах этих материальных уравнений естественно возникает проблема кватернионной параметризации 3×3 -матриц, а в дальнейшем при релятивистском обобщении — и четырехмерных матриц. Возникает следующий вопрос: возможна ли кватернионная параметризация еще каких-либо представлений группы вращений или группы Лоренца, кроме рассмотренных в гл. 1?

Исследование кватернионной формулировки уравнений связи Федорова для произвольных гиротропных сред отчасти позволяет дать на него ответ.

Легко убедиться, что для случая действительных матриц α , β , e , μ кватернионный аналог (10.3) имеет вид

$$\mathbf{B} - i\mathbf{D} = (\rho_n \mathbf{H} - i\sigma_n \mathbf{E})_S e_n, \quad (10.4)$$

где $n = 1, 2, 3$; $\operatorname{Re} \rho_n = \mu_n$; $\operatorname{Im} \rho_n = -\alpha_n$; $\operatorname{Re} \sigma_n = e_n$; $\operatorname{Im} \sigma_n = -\beta_n$. При этом компоненты кватернионов α_n , β_n , e_n , μ_n совпадают с элементами соответствующих строк 3×3 -матриц α , β , e , μ ; кватернионы \mathbf{B} , \mathbf{D} , \mathbf{H} , \mathbf{E} ставятся в соответствие векторам.

При необходимости анализа диссипации энергии в среде нужно рассматривать α_n , β_n , e_n , μ_n как элементы некоторой подалгебры $H_C \oplus H_C$ вида $z = x + iy$, где $x, y \in H_C$, $j^2 = -1$ и j коммутирует со всеми e_μ и i . Тогда для любого z определены три операции сопряжения: $z^* = x^* + iy^*$, $*z = x - iy$ и $\bar{z} = \bar{x} + j\bar{y}$. Условия отсутствия диссипации энергии в периодическом поле имеют вид [99, 111]

$$(e_m e_n)_S = (e_n e_m)_S, \quad (e_m \mu_n)_S = (e_n^* \mu_m)_S, \quad (10.5)$$

$$(e_n \alpha_m)_S = (e_m^* \beta_n)_S.$$

Очевидно, что тройки кватернионов e_n и μ_n , удовлетворяющие условиям (10.5), соответствуют симметричным трехмерным матрицам e и μ в (10.3).

Система уравнений (10.1), (10.4) является инвариантной относительно группы $SO(3)$ -пространственных вращений и полностью описывает распространение электромагнитных волн в покоящихся гиротропных средах. Отметим также, что эта система не изменяется и при дуальных преобразованиях вида

$$(\mathbf{H} \pm i\mathbf{E}) \rightarrow (\mathbf{H} \pm i\mathbf{E}) e^{\pm i\phi}, \quad (\mathbf{B} \pm i\mathbf{D}) \rightarrow (\mathbf{B} \pm i\mathbf{D}) e^{\pm i\phi}, \quad (10.6)$$

$$\rho_n + \sigma_n \rightarrow \rho_n + \sigma_n, \quad \rho_n - \sigma_n \rightarrow (\rho_n - \sigma_n) e^{\mp 2i\phi},$$

которые являются обобщением формул (9.2).

Очевидно, что уравнения связи (10.3) должны сохранять свою форму и в произвольной инерциальной системе отсчета, при этом соответствующие матрицы будут,

вообще говоря, нелинейно зависеть от скорости [99]. Кроме того, они будут реализовывать некоторые представления группы Лоренца. В этой связи рассмотрим лоренц-ковариантное обобщение кватернионных уравнений связи (10.4) [111].

Напомним, что кватернионы F и G — элементы пространства неприводимого представления группы $SO(3,1)$ с законом преобразования

$$F^L(G^L) = L^* F(G) \bar{L}^* \quad (10.7)$$

и соответствуют антисимметричным тензорам в стандартном подходе. A priori неизвестно, по какому представлению группы Лоренца преобразуются кватернионы $\sigma_n, \beta_n, e_n, \mu_n$. Ясно, однако, что все они должны преобразовываться по одному и тому же представлению, т. е. по тензорному (10.7) или по векторному:

$$A^L = L A \bar{L}^*. \quad (10.8)$$

Рассмотрим тензорный закон преобразования. В этом случае из (10.4) после некоторых алгебраических выкладок получаем

$$\begin{aligned} \{(\bar{e}_n - \sigma_n) F\}_S e_n - \{(\bar{e}_n + \sigma_n) F^*\}_S \bar{u} e_n u = \\ = \{(\bar{e}_n + \rho_n) G\}_S e_n - \{(\bar{e}_n + \rho_n) G^*\}_S \bar{u} e_n u, \end{aligned} \quad (10.9)$$

где $u = iu_0 + u$ — кватернион, соответствующий 4-скорости; кроме того, использовалось соотношение $LL^* = iu$, которое выполняется, если L задает некоторый буст [16]. В тензорных обозначениях (10.9) принимает вид

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} u_\nu &= \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} u_\nu + \alpha_{\mu\nu\rho\sigma} \overset{\times}{G}_{\rho\sigma} u_\nu, \\ \overset{\times}{F}_{\mu\nu} u_\nu &= \mu_{\mu\nu\rho\sigma} \overset{\times}{G}_{\rho\sigma} u_\nu + \beta_{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} u_\nu, \end{aligned} \quad (10.10)$$

где

$$\chi_{0i0j} = \chi_{ij}, \quad \chi_{ijkl} = \frac{1}{2} \epsilon_{ijm} \epsilon_{klm} \chi_{mn},$$

\times обозначает любой из символов α, β, e, μ .

Полученные уравнения, как нетрудно видеть, не удовлетворяют симметричному принципу двойственности [112]. Иными словами, нельзя представить полевые ве-

личины, стоящие в левой и правой частях (10.10), в качестве некоторых взаимно дуальных элементов векторных пространств (где фундаментальным тензором является объект, построенный из тензоров, характеризующих свойства среды), не приходя при этом к противоречию с требованием лоренц-ковариантности уравнений. Таким образом, остается единственная возможность: кватернионы α_n , β_n , e_n , μ_n преобразуются по векторному представлению группы Лоренца (10.8).

Поступая так же, как и при получении (10.9), имеем

$$\begin{aligned}\tilde{L}\tilde{\Phi}L^* &= (\mu_n \tilde{L}^* \tilde{\Gamma}L^* + i\beta_n \tilde{L}^* \Phi L^*)_S e_n, \\ \tilde{L}\tilde{\Gamma}L^* &= (e_n \tilde{L}^* \Phi L^* - i\alpha_n \tilde{L}^* \tilde{\Gamma}L^*)_S e_n,\end{aligned}\quad (10.11)$$

где

$$\begin{aligned}\Phi &= \frac{1}{2}(\mathbf{F}\bar{u} - \bar{u}\mathbf{F}^*), \quad \tilde{\Phi} = \frac{i}{2}(u\mathbf{F} + \mathbf{F}^*u), \\ \Gamma &= \frac{1}{2}(\mathbf{G}\bar{u} - \bar{u}\mathbf{G}^*), \quad \tilde{\Gamma} = \frac{i}{2}(u\mathbf{G} + \mathbf{G}^*u),\end{aligned}$$

при этом L известным образом выражается через u [16]. При выводе (10.11) использовалось соотношение (10.4) в форме

$$\operatorname{Re} F = \operatorname{Re} (\mu_n G + i\beta_n F)_S e_n, \quad \operatorname{Im} G = \operatorname{Im} (e_n F - i\alpha_n G)_S e_n.$$

В тензорных обозначениях система (10.11) имеет вид

$$\begin{aligned}G_{\mu\nu} u_\nu &= e_{\mu\nu} F_{\nu\rho} u_\rho + \alpha_{\mu\nu} \overset{x}{G}_{\nu\rho} u_\rho, \\ \overset{x}{F}_{\mu\nu} u_\nu &= \mu_{\mu\nu} \overset{x}{G}_{\nu\rho} u_\rho + \beta_{\mu\nu} F_{\nu\rho} u_\rho.\end{aligned}\quad (10.12)$$

Очевидно, уравнения (10.11) выглядят менее привлекательно, нежели (10.12), а наличие в них кватернионных единиц во многом обесценивает преимущества алгебраического безиндексного подхода. Однако легко убедиться, что эти недостатки связаны в первую очередь с некоторой «прямолинейностью» выбранной кватернионной параметризации тензоров α , β , e , μ . Если же с самого начала использовать известное диадное представление этих тензоров [99], то наиболее естественной выглядит их параметризация с помощью кватернионных операторов вида

$$e = e_1 + e_2 \{ (c_1, c_2) + (c_2, c_1) \}, \quad (10.13)$$

аналогичным выражением определяется μ ; α и β имеют структуру вида

$$\alpha = \alpha^0 + d, \quad \beta = \beta^0 - d, \quad (10.14)$$

где α^0, β^0 задаются выражениями (10.13); d — векторный кватернион. При этом соответствие с выражениями, получающимися в $SO(3)$ -ковариантном подходе Ф. И. Федорова [99], легко устанавливается с помощью формул

$$\begin{aligned} a \cdot b &\longleftrightarrow -\frac{1}{2} [(a, b) + (ab, e_0)], \\ a \cdot b + b \cdot a &\longleftrightarrow \frac{1}{2} [2(ab) - (a, b) - (b, a)]. \end{aligned} \quad (10.15)$$

С учетом (10.13), (10.14), (8.18) уравнения связи для движущихся гиротропных сред в кватернионных (10.11) принимают вид

$$\tilde{\Phi} = L (8L\tilde{\Gamma}L^* + \alpha\bar{L}\Phi L^*)_v \bar{L}^*, \quad (10.16)$$

$$\Gamma = L (\mu L\Phi L^* + \beta\bar{L}\tilde{\Gamma}L^*)_v \bar{L}^*.$$

Из этих уравнений путем громоздких, но несложных алгебраических преобразований можно найти трансформационные свойства кватернионов (а следовательно, и матриц) α, β, e, μ при преобразованиях группы Лоренца [111], и их использование открывает эффективные методы исследования влияния движения среды на характер ее гиротропии.

С точки зрения развития математического аппарата основной интерес вызывает возможная реализация некоторых представлений группы Лоренца и ее подгрупп с помощью кватернионных операторов типа (8.18). В следующих главах рассмотрим этот подход на примере теории спинорного поля.

КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА И КВАТЕРНИОНЫ

§ 11. УРАВНЕНИЕ ДИРАКА

В предыдущих главах было показано, что использование кватернионного исчисления в релятивистской кинематике, кинематике твердого тела, классической электродинамике значительно упрощает ряд алгебраических вычислений. С математической точки зрения это связано прежде всего с тем, что некоторые наиболее часто встречающиеся в физических приложениях представления групп $SO(3)$, $SU(2)$, $SO(3,1)$ и т. д. проще всего реализуются как действие кватернионных (бикватернионных) операторов в пространстве кватернионов (бикватернионов).

При переходе от классической теории к квантовой сфера применения теоретико-групповых методов значительно расширяется, они становятся одним из важнейших средств изучения как кинематики, так и динамики системы. В кинематике квантовых систем теория представлений групп Пуанкаре и Лоренца позволяет ввести понятие элементарной частицы, описать ее возможные состояния, построить релятивистские волновые уравнения [54]. При этом в отличие от классической теории в квантовой наряду с импульсом возникает новая кинематическая характеристика, необходимая для полного описания элементарной частицы,— собственный момент количества движения, или спин. В динамике само введение взаимодействия основано прежде всего на теоретико-групповых соображениях. Вид взаимодействия определяется требованиями релятивистской и локальной калибровочной инвариантности [113]. При этом кроме пространственно-временной симметрии возникает понятие внутренней симметрии, которая имеет не геометрическое, а динамическое происхождение. В стандартной теории электрослабого взаимодействия группой динамической

симметрии является группа $SU(2) \otimes U(1)$. Естественно, что для ее параметризации удобно использовать кватернионы [114]. Еще одна возможность применять кватернионное исчисление в релятивистской квантовой теории — параметризация спиновых степеней свободы, происхождение которых тесно связано с группами $SO(3)$, $E(2)$. Для фотонов эта задача рассматривалась в предыдущей главе. Другой частицей, представляющей наибольший интерес, является частица со спином $1/2$. Для описания такой частицы и соответствующей античастицы используется комплексное четырехкомпонентное поле, подчиняющееся уравнению Дирака. Ясно, что 4-комплексные функции можно задать с помощью одного бикватерниона. Таким образом, естественно возникает задача о реализации уравнения Дирака в рамках алгебры бикватернионов.

Впервые, по-видимому, попытку переформулировки уравнения Дирака на языке гиперкомплексных чисел (в частности, кватернионов) предпринял еще А. Зоммерфельд [115]. В основе этого подхода лежала интересная идея о минимальном алгебраическом представлении уравнения первого порядка в том смысле, что число компонент волновой функции должно быть равно рангу используемой алгебры.

Частичное решение этой задачи было дано Гюрши [116]. Иваненко и Никольский в 1930 г., показали, что уравнение Дирака для безмассового поля можно представить в виде «условия аналитичности» для функций кватернионного переменного [117]. Аналогичный подход был использован в работе [118], где воспроизведены результаты [116, 117] и решена проблема включения взаимодействия с электромагнитным полем.

Прежде чем перейти к исследованию различных реализаций уравнения Дирака в алгебре кватернионов, введем два новых базиса в пространстве бикватернионов, отличных от e_0, e_a . Первый из них задается бикватернионами P_1, P_2, S_1, S_2 , определяемыми с помощью соотношений

$$P_a P_b = \delta_{ab} P_b, \quad S_a S_b + S_b S_a = 2\delta_{ab}, \quad a, b = 1, 2, \quad (11.1)$$

$$P_{1(2)} S_a = S_a P_{2(1)}, \quad S_a^* = -S_a, \quad P_{1(2)}^* = P_{2(1)}.$$

Из (11.1) следует общее выражение для введенных бикватернионов:

$$\Pi_{1(2)} = \frac{1}{2} (1 \pm i\mathbf{n}_3), \quad S_a = i\mathbf{n}_a, \quad (11.2)$$

где векторные кватернионы \mathbf{n}_a образуют базис алгебры кватернионов с законом умножения, аналогичным (1.19):

$$\mathbf{n}_i \mathbf{n}_j = e_{ijk} \mathbf{n}_k - \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (11.3)$$

Укажем следующие важные свойства, вытекающие из (11.1):

$$\Pi_1 + \Pi_2 = 1, \quad \bar{\Pi}_{1(2)} = \Pi_{2(1)}, \quad \bar{S}_a = -S_a. \quad (11.4)$$

Произвольный бикватернион в этом базисе

$$q = \alpha_a \Pi_a + \beta_a S_a \quad (11.5)$$

при кватернионном и комплексном сопряжениях переходит соответственно в

$$\bar{q} = \alpha_1 \bar{\Pi}_2 + \alpha_2 \bar{\Pi}_1 - \beta_a S_a \quad (11.6)$$

и

$$q^* = \alpha_1^* \bar{\Pi}_2 + \alpha_2^* \bar{\Pi}_1 - \beta_a^* S_a. \quad (11.7)$$

Более симметричным относительно закона умножения является базис, образуемый следующими бикватернионами Π^{ab} :

$$\Pi^{11} = \Pi_1, \quad \Pi^{21} = S \Pi_1, \quad \Pi^{12} = S \Pi_2, \quad \Pi^{22} = \Pi_2, \quad (11.8)$$

где $S = S_1$. Закон умножения для этих базисных бикватернионов имеет вид

$$\Pi^{ab} \Pi^{cd} = \delta_{bc} \Pi^{ad}. \quad (11.9)$$

Произвольный бикватернион в этом базисе

$$q = \alpha_{ab} \Pi^{ab} \quad (11.10)$$

при кватернионном сопряжении переходит в

$$\bar{q} = \alpha_{ab} S_2 \Pi^{ba} S_2. \quad (11.11)$$

Переходя к вопросу о кватернионной формулировке уравнения Дирака, напомним, что уравнение Максвелла можно рассматривать как условие аналитичности (см.

гл. 3) для векторного кватерниона \mathbf{r} , нарушенное внешним током (8.1а). Введем бикватернионы Φ_1 , Φ_2 , которые под действием группы Лоренца преобразуются по закону

$$\Phi_{1(2)} = L\Phi_{1(2)}, \quad (11.12)$$

и запишем для Φ_1^* лоренц-ковариантное условие аналитичности, предполагая, что его нарушение характеризуется скалярным параметром m и бикватернионом Φ_2 :

$$\nabla\Phi_1^* = m\Phi_2. \quad (11.13a)$$

Если потребовать, чтобы Φ_1 и Φ_2 удовлетворяли уравнению Клейна—Фока с массой m , то получаем второе уравнение:

$$\nabla\Phi_2^* = -m\Phi_1. \quad (11.13b)$$

Эта система уравнений содержит в два раза больше независимых комплексных функций, чем требуется для описания одной частицы со спином $1/2$ и соответствующей античастицы. Однако тот факт, что для кватернионов существуют умножения как слева, так и справа, которые коммутируют, позволяет свести (11.13а) и (11.13б) к системе двух независимых уравнений. Введем новые волновые функции

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= \Phi_1\alpha + \Phi_2\beta, \\ \Psi_2 &= \Phi_1\gamma + \Phi_2\delta, \end{aligned} \quad (11.14)$$

где бикватернионы α , β , γ , δ определяются требованием, чтобы Ψ_1 и Ψ_2 удовлетворяли уравнениям

$$\begin{aligned} \nabla\Psi_1^* &= m\Psi_1A, \\ \nabla\Psi_2^* &= m\Psi_2B. \end{aligned} \quad (11.15)$$

Здесь A и B пока произвольные бикватернионы. Из того, что Φ_1 и Φ_2 подчиняются (11.13а) и (11.13б), следуют условия

$$\begin{aligned} \alpha^* &= \beta A, \quad -\beta^* = \alpha A, \\ \gamma^* &= \delta B, \quad -\delta^* = \gamma B. \end{aligned} \quad (11.16)$$

Отметим, что эта система имеет решение только тогда, когда биквaternionы A и B имеют векторные части, так как должны выполняться соотношения

$$\alpha^* = -\alpha^* A^* A, \quad \gamma^* = -\gamma^* B^* B.$$

Следовательно,

$$AA^* = -1, \quad BB^* = -1.$$

Тогда преобразование (11.14) с произвольными β и δ и

$$\alpha = \beta^* A^*, \quad \gamma = \delta^* B^*$$

приводит к (11.15). Частной формой записи (11.15) является уравнение, полученное в работах [116—119]. В этом случае

$$A = B = P^{22} - P^{11} = P_2 - P_1.$$

Для установления связи полученных уравнений с уравнением Дирака следует рассмотреть систему для Ψ_1 и Ψ_1^* :

$$\begin{aligned} \nabla \Psi_1^* &= m \Psi_1 (P^{22} - P^{11}), \\ \bar{\nabla} \Psi_1 &= m \Psi_1^* (P^{22} - P^{11}). \end{aligned} \tag{11.17}$$

Задав Ψ_1 в базисе (11.8)

$$\Psi = \psi_{a1} P^{a1} + \psi_{a2} P^{a2}$$

и подставив в (11.17), получаем, что биспинор

$$\psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_1^* \end{pmatrix}$$

подчиняется обычному уравнению Дирака

$$(\gamma_\mu \partial_\mu - im) \psi = 0,$$

причем

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что, налагая требование локальной калибропечной инвариантности относительно преобразований вида

$$\{\Psi \rightarrow \Psi' = \Psi \exp \{ie\theta (P_2 - P_1)\}\}, \tag{11.18}$$

можно [118] ввести взаимодействие с электромагнитным полем и получить систему уравнений для спинорной электродинамики:

$$\begin{aligned}\nabla\Psi^* - ieA\Psi^*(P_2 - P_1) &= m\Psi(P_2 - P_1), \\ \bar{\nabla}\Psi - ie\bar{A}\Psi(P_2 - P_1) &= m\Psi^*(P_2 - P_1),\end{aligned}\quad (11.19)$$

причем $ie\Psi\Psi^* = I$ — сохраняющийся электрический ток.

Однако изложенная выше кватернионная формулировка уравнения Дирака неудовлетворительна из-за нелинейности над полем комплексных чисел, что делает уравнения (11.17) крайне неудобными для построения квантовой теории. Этот недостаток впервые был преодолен в работе [120]. Предложенная в ней реализация уравнения Дирака основана на введении кватернионных операторов (см. § 8). Прежде всего необходимо получить кватернионный аналог биспиноров, в пространстве которых реализуется двузначное представление $(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$ группы $SO(3, 1)$. При построении биспинорного представления группы Лоренца необходимо учесть, что пространство функций поля должно распадаться в прямую сумму двух подпространств, элементы каждого из которых преобразуются по своему закону. Следовательно, любой оператор рассматриваемого представления должен быть прямой суммой двух операторов, каждый из которых действует в соответствующем подпространстве. Это позволяет сделать вывод, что если T — оператор данного представления, то он должен иметь вид

$$T = (a_1, b_1) + (a_2, b_2), \quad a_n, b_n \in H_C, \quad n = 1, 2. \quad (11.20)$$

Каждый из операторов (a_n, b_n) * действует лишь в одном из вышеуказанных подпространств, которые должны быть инвариантны относительно такого действия. Значит, рассматриваемые подпространства образуют в алгебре H_C некоторые идеалы, прямая сумма которых есть H_C . Так как в H_C нет нетривиальных двусторонних идеалов, то без ограничения общности можно предположить, что эти идеалы — левые при условии, что данные подпространства инвариантны относительно умножения

* Здесь и далее в выражениях вида (a_n, b_n) по n суммирование не производится.

справа на b_1 и b_2 соответственно. Данное условие, как легко показать, с точностью до автоморфизма определяет бикватернионы $b_{1(2)}$.

В самом деле, пусть ϕ — элемент подпространства, инвариантного относительно умножения справа на b_1 . Далее, оператор $I = (e_0, b_1 + b_2)$, действуя на ϕ , при вышеуказанном условии дает $\phi b_2 = 0$. Отсюда легко получить $b_1 b_2 = b_2 b_1 = 0$, и тогда делители нуля $b_{1(2)}$ можно выбрать не зависящими от кватернионов L , параметризующих группу Лоренца. Отсюда видно, что оператор I является единичным и $b_1 + b_2 = 1$, откуда $b_a^2 = b_a$. Такими свойствами в алгебре H_C могут обладать лишь проекторы P_a типа рассмотренных выше, которые определены с точностью до автоморфизма H_C . Очевидно также, что исходные левые идеалы определяются этими же проекторами. Таким образом, операторы (11.20) принимают вид

$$T = (a_1, P_1) + (a_2, P_2). \quad (11.21)$$

Все это позволяет построить кватернионную формулировку релятивистски инвариантного волнового уравнения для свободного спинорного поля. Будем исходить из системы четырех линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами, которую можно записать в виде

$$(\Gamma_\mu \partial_\mu + m) \Psi = 0, \quad (11.22)$$

где бикватернион Ψ — функция поля, а Γ_μ — кватернионные операторы

$$\Gamma_\mu = (A_\mu, B_\mu) + (\bar{A}_\mu^*, \bar{B}_\mu^*). \quad (11.23)$$

При преобразованиях Лоренца операторы ∂_μ трансформируются в $\partial'_\mu = L_{\mu\nu} \partial_\nu$. В кватернионном же формализме этому соответствует преобразование кватернионов A_μ при неизменных ∂_μ :

$$A_\mu^L = L A_\mu \bar{L}^*. \quad (11.24)$$

Требуя теперь инвариантности уравнения (11.22) относительно преобразований Лоренца, получим соотношение

$$(L A_\mu \bar{L}^*, B_\mu) + (L \bar{A}_\mu^* \bar{L}^*, B_\mu) = T \Gamma_\mu T^{-1},$$

где T определяется уравнением (11.21), а

$$T^{-1} = (a_1^{-1}, P_1) + (a_2^{-1}, P_2).$$

Заметим, что a_1^{-1} и a_2^{-1} всегда существуют, иначе среди операторов T были бы делители нуля, что невозможно, поскольку они реализуют представление группы Лоренца.

Учитывая, что $L^{-1} = L$, и требуя, чтобы левая и правая части равенства преобразовывались одинаковым образом, приходим к выводу, что неравные нулю A_μ можно получить лишь в случае $A_\mu = A_\mu^*$, когда

$$\Gamma_\mu = (A_\mu, B_\mu) + (\bar{A}_\mu, \bar{B}_\mu^*). \quad (11.25)$$

Вновь требуя лоренц-инвариантности уравнения (11.22), где Γ_μ определяются равенством (11.25), имеем

$$(LA_\mu L^*, B_\mu) + (L^* \bar{A}_\mu L, \bar{B}_\mu^*) = T\Gamma_\mu T^{-1}. \quad (11.26)$$

Из требования одинаковости трансформационных свойств обеих частей равенства (11.26) вытекает условие равенства нулю выражений $P_a B_\mu P_a$, $a=1,2$. Это же требование приводит к тому, что либо $a_1=L$, $a_2=L^*$, либо $a_1=-L^*$, $a_2=L$. Таким образом, существуют две возможности:

$$a_1 = L^*, a_2 = L, B_\mu = P_1 S \quad (11.27a)$$

и

$$a_1 = L, a_2 = L^*, B_\mu = P_2 S. \quad (11.27b)$$

Здесь и в дальнейшем будем опускать индекс $a=1,2$ у кватерниона S_a , имея в виду, что оба его значения равноправны. Как видно, условия (11.27a), (11.27b) совпадают с точностью до замены P_1 на P_2 . Выберем, например, условие (11.27b). Заметим также, что бикватернионы A_μ определены с точностью до несущественной численной константы, которую мы опускаем. Бикватернионы A_μ предполагаем линейно независимыми, поэтому их можно перевести в образующие алгебры H_C некоторым преобразованием группы $GL(4, R)$. Исходя из этого, без ограничения общности можно положить

$$A_0 = e_0, A_k = -e_k. \quad (11.28)$$

Тогда операторы Γ_μ будут удовлетворять перестановочным соотношениям алгебры матриц Дирака и уравнение (11.22) окончательно принимает форму

$$\nabla \Psi P_1 S + \bar{\nabla} \Psi P_2 S - m \Psi = 0, \quad (11.29)$$

полученную впервые в работе [120]. Закон преобразования относительно группы Лоренца волновой функции Ψ при этом имеет вид

$$T(q)\Psi = L(q)\Psi P_1 + L^*(q)\Psi P_2. \quad (11.30)$$

Уравнение (11.29) может быть получено из лоренц-инвариантного лагранжиана:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \{\tilde{\Psi} \mathcal{D} \Psi - \tilde{\Psi} \tilde{\mathcal{D}} \Psi\}_S + m \{\tilde{\Psi} \Psi\}_S \quad (11.31)$$

варьированием по Ψ , $\tilde{\Psi}$ $\tilde{\mathcal{D}}$, что несколько отличается от вариационной процедуры, определенной в работе [121]. Здесь $\tilde{\Psi} = S \bar{\Psi}^*$, а оператор \mathcal{D} находим следующим образом:

$$\mathcal{D} = (\nabla, P_1 S) + (\tilde{\nabla}, P_2 S), \quad (11.32)$$

причем $\tilde{\Psi} \tilde{\mathcal{D}}$ определяется согласно соотношению

$$\tilde{\Psi} \tilde{\mathcal{D}} = P_1 S \Psi \nabla + P_2 S \tilde{\Psi} \tilde{\nabla}. \quad (11.33)$$

Заметим, что, построив уравнение (11.29), можно отказаться от преобразования операторов Γ_μ под действием группы Лоренца и считать, что изменяется оператор ∇ по закону $\nabla^L = L \nabla L^*$, что согласуется с принадлежностью ∇ к классу величин, преобразующихся по векторному представлению группы Лоренца. При этом трансформационные свойства Ψ определяются оператором $(L, P_2) + (L^*, P_1)$, реализующим представление $\left(\frac{1}{2}, 0\right) \oplus \left(0, \frac{1}{2}\right)$ группы Лоренца в пространстве биквaternionов. Таким образом, с точностью до преобразований подобия, которые будут рассмотрены в § 13, кватернионная формулировка уравнения Дирака (11.29) является единственной. Представление уравнения в форме (11.22) позволяет легко переходить от стандартной матричной формулировки к кватернионной и наоборот. Некоторые свойства кватернионных аналогов γ -матриц Дирака будут рассмотрены в § 15 в связи с кватернионной формулировкой квантовой спинорной электродинамики.

Эквивалентность (11.29) уравнению Дирака легко

проверить, используя разложение Ψ в базисе (11.8). В отличие от (11.17) уравнение Дирака в кватернионах (11.29) явным образом линейно над полем комплексных чисел, что позволяет стандартным образом ввести взаимодействие с внешним электромагнитным полем, наложив условие локальной калибровочной инвариантности относительно преобразований вида $\Psi(x) \rightarrow \exp(i\alpha(x)) \times \Psi(x)$ для спинорного поля и $A \rightarrow A + (i/e)\nabla\alpha(x)$ — для электромагнитного поля. При этом получаем

$$(\nabla - ieA) \Psi P_1 S + (\bar{\nabla} - ie\bar{A}) \Psi P_2 S = m\Psi. \quad (11.34)$$

В квантовой теории важное значение имеет исследование характера преобразований волновой функции относительно дискретных операций: отражения пространства, отражения времени, зарядового сопряжения. Принимая во внимание преобразования $A(x)$ при отражении пространства и времени

$$A \rightarrow A^P = -A^*(x^*), \quad A^T = A^*(x^*) \quad (11.35)$$

и из соображений инвариантности уравнения (11.34) определим следующим образом дискретные операции для волновой функции Дирака:

$$\Psi^P = \begin{cases} \pm \Psi S \\ \pm i\Psi S \end{cases}, \quad \Psi^T = \Psi^* S_2, \quad \Psi^C = \Psi^*. \quad (11.36)$$

Рассмотрим коммутацию P -отражения с преобразованиями Лоренца

$$(\Psi^L)^P = \pm (L\Psi P_1 + L^*\Psi P_2) S,$$

$$(\Psi^P)^L = \pm (L\Psi S P_2 + L^*\Psi S P_1).$$

Сравнивая оба выражения, получаем

$$(\Psi^L)^P = (\Psi^P)^L,$$

т. е. операция P -отражения обладает нужными свойствами относительно преобразований группы Лоренца.

Кроме того,

$$(\Psi^P)^P = \pm \Psi.$$

Знаки \pm отражают неоднозначность определения спиноров при пространственном повороте на 2π .

Согласно Вигнеру, для определения операции T -отра-

жения необходимо введение антиунитарного оператора, чем и вызвано комплексное сопряжение волновой функции. Повторное действие оператора T -отражения дает

$$(\Psi^T)^T = -\Psi.$$

Выполняя операции L и T в разном порядке:

$$(\Psi^L)^T = (L\Psi\pi_2 + L^*\Psi\pi_1) * S_2 = L^*\Psi^*\pi_1 S_2 + L\Psi^*\pi_2 S_2,$$

$$(\Psi^T)^L = L\Psi^*S_2\pi_2 + L^*\Psi^*S_2\pi_1 = L\Psi^*\pi_1 S_2 + L^*\Psi^*\pi_2 S_2,$$

получим

$$(\Psi^L)^T = (\Psi^T)^{L*}.$$

Особенно просто выглядит операция зарядового сопряжения, которая сводится к комплексному сопряжению. Ее смысл легко уяснить исходя из кватернионной формулировки уравнения Дирака во внешнем электромагнитном поле. Если волновая функция $\Psi(x)$ удовлетворяет уравнению (11.34), то $\Psi^c = \Psi^*$, поскольку

$$-(\nabla^* + ieA^*(x))\Psi^*(x)\pi_2 S - (\bar{\nabla}^* + ie\bar{A}^*(x))\Psi^*(x)\pi_1 S = \\ = m\Psi^*(x).$$

Учитывая, что

$$\nabla^* = -\bar{\nabla}, \quad A^* = -\bar{A},$$

получаем уравнение для Ψ^* , отличающееся от (11.34) тем, что оно описывает движение частицы с зарядом $-e$. Таким образом, операция зарядового сопряжения дает нам волновую функцию частицы с противоположным зарядом. Отметим также, что в кватернионном представлении операция зарядового сопряжения сводится к комплексному сопряжению. Возможность такого определения для полей произвольного спина была рассмотрена Ф. И. Федоровым [122].

Среди билинейных комбинаций бикватернионов Ψ , Ψ^* выделяются комбинации, преобразующиеся по не-приводимым представлениям группы Лоренца. Из общей теории конечномерных представлений группы Лоренца [16] следует, что произвольная билинейная комбинация Ψ и Ψ^* преобразуется как прямая сумма скаляра, псевдоскаляра, вектора, псевдовектора и антисимметричного тензора второго ранга. Все они ранее были реализованы в пространстве бикватернионов. Соответ-

ствующие бикватернионы, построенные из Ψ и Ψ^* , имеют вид:

1) скаляр

$$S_\Phi = \Psi^* S \bar{\Psi} - \Psi S \bar{\Psi}^*. \quad (11.37)$$

Легко проверить, что при преобразовании Лоренца и пространственном отражении он не меняется:

$$S_\Phi^L = S_\Phi, \quad S_\Phi^P = S_\Phi;$$

2) псевдоскаляр

$$P_\Phi = \Psi^* S_2 \bar{\Psi} - \Psi S_2 \bar{\Psi}^*, \quad P_\Phi^L = P_\Phi, \quad P_\Phi^P = -P_\Phi; \quad (11.38)$$

3) вектор

$$V_\Phi = i(\Psi \Pi_1 \bar{\Psi}^* + \overline{\Psi \Pi_2 \bar{\Psi}^*}) = i(\Psi \Pi_1 \bar{\Psi}^* + \Psi^* \Pi_1 \bar{\Psi}), \quad (11.39)$$

$$-V_\Phi^* = V_\Phi, \quad V_\Phi^L = L V_\Phi \bar{L}^*, \quad V_\Phi^P = \bar{V}_\Phi;$$

4) псевдовектор

$$A_\Phi = i(\Psi \Pi_1 \bar{\Psi}^* - \Psi^* \Pi_1 \bar{\Psi}), \quad (11.40)$$

$$-\bar{A}_\Phi^* = A_\Phi, \quad A_\Phi^L = L A_\Phi \bar{L}^*, \quad A_\Phi^P = -\bar{A}_\Phi;$$

5) антисимметричный тензор второго ранга. Как известно, он соответствует прямой сумме представлений $(1.0) \oplus (0.1)$. В этом случае

$$T_\Phi = i(\Psi \Pi_2 S \bar{\Psi}^* + \Psi^* \Pi_2 S \bar{\Psi}) \quad \text{и} \quad T_\Phi^L = L T_\Phi \bar{L}, \quad T_\Phi^P = T_\Phi^* \quad (11.41a)$$

или

$$T_\Phi = \Psi (S_1 + i S_2) \bar{\Psi}^* - \overline{\Psi (S_1 + i S_2) \bar{\Psi}^*}. \quad (11.41b)$$

Выражение (11.39) позволяет построить 4-мерный вектор тока дираковской частицы

$$I = 2ie(\Psi \Pi_2 \bar{\Psi}^* + \Psi^* \Pi_2 \bar{\Psi}), \quad (11.42)$$

который, как легко убедиться, сохраняется, если Ψ — решение уравнения Дирака:

$$(\nabla I)_S = 0.$$

В качестве инвариантной билинейной формы используется выражение для скаляра (11.37).

Уравнение (11.29), как легко видеть, может иметь в качестве решений эрмитовы поля:

$$\Psi^* = \Psi. \quad (11.43)$$

Это следует из того, что

$$0 = (\nabla\Psi\pi_1S + \bar{\nabla}\Psi\pi_2S - m\Psi)^* = \nabla\Psi^*\pi_1S + \bar{\nabla}\Psi^*\pi_2S - m\Psi^*,$$

т. е. если Ψ — решение, то и Ψ^* будет решением. Таким образом,

$$\eta_1 = \eta_1^* = \Psi + \Psi^* \text{ или } \eta_2 = i(\Psi - \Psi^*) = \eta_2^*$$

будет решением. Условие (11.43) является релятивистски инвариантным:

$$(L\Psi\pi_1 + L^*\Psi\pi_2)^* = L\Psi\pi_1 + L^*\Psi\pi_2.$$

Поскольку комплексное сопряжение задает операцию зарядового сопряжения, то ясно, что частицы, описываемые полями (11.43), нейтральные.

При переходе к безмассовому случаю уравнение (11.29) распадается на два независимых уравнения:

$$\nabla\Psi\pi_1 = 0, \bar{\nabla}\Psi\pi_2 = 0.$$

Они эквивалентны уравнениям Вейля для нейтриноного и антинейтриноного поля.

Таким образом, уравнение Дирака в виде (11.29) обладает рядом достоинств. Недостатком предложенной формулировки, который не позволяет в полной мере использовать аппарат кватернионного исчисления, является то, что мы работаем с бикватернионами. Этот недостаток присущ, впрочем, любым описаниям релятивистских объектов на основе кватернионов. Попытка ограничиться рамками алгебры кватернионов при описании преобразований Лоренца в пространстве Минковского предпринята в работе [123]. Однако удовлетворительной признать ее нельзя, так как она, по сути дела, основана на том, что закон умножения комплексных чисел

$$zz' = (x + iy)(x' + iy') = (xx' - yy') + i(yx' + xy')$$

можно реализовать как обычное умножение вещественных матриц 2×2 вида (см. § 1)

$$\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}.$$

Используя аналогичное представление для бикватернионов, из закона преобразования 4-вектора

$$Lx\bar{L}^* = (l_1 + il_2)(ix_0 + x)(\bar{l}_1 - i\bar{l}_2)$$

получаем закон преобразования в форме

$$X \rightarrow X^L = AX\bar{A}^T,$$

данной в работе [123]. Здесь X и A — 2×2 -кватернионные матрицы вида

$$X = \begin{pmatrix} x & -x_0 \\ x_0 & x \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} l_1 & -l_2 \\ l_2 & l_1 \end{pmatrix}, \quad \bar{A}^T = \begin{pmatrix} \bar{l}_1 & \bar{l}_2 \\ -\bar{l}_2 & \bar{l}_1 \end{pmatrix}.$$

Аналогично, взяв уравнение (11.17), получим чисто кватернионную формулировку уравнения Дирака:

$$\begin{pmatrix} \partial_0 & \nabla \\ -\nabla & \partial_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} \Psi_1 & e_3 \\ -\Psi_2 & e_3 \end{pmatrix},$$

приведенную в работе [123].

§ 12. НЕКОТОРЫЕ РЕШЕНИЯ КВАНТОВОМЕХАНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ДИРАКА НА ОСНОВЕ КВАТЕРНИОННОГО ПОДХОДА

В задачи данной работы не входит сколь-нибудь последовательное изложение основ и приложений квантовой механики, с которыми можно ознакомиться по известным учебникам [124]. Поэтому ряд определений и формул в дальнейшем будет считаться известным. Целью данного параграфа является демонстрация возможностей, методов и характерных особенностей решения квантовомеханического уравнения Дирака в изложенной выше кватернионной формулировке.

С математической точки зрения уравнение Дирака представляет собой систему четырех уравнений в частных производных первого порядка по четырем переменным для четырех функций. Естественно, что поиск его решений включает в себя и некоторую алгебраическую задачу. В предыдущем параграфе было показано, что независимые переменные, неизвестные функции и мат-

рицы, задающие само уравнение Дирака, могут быть записаны с помощью бикватернионов. Для бикватернионов не построен анализ, подобный теории функций комплексного переменного, в то же время многие физические задачи, связанные с решением уравнения Дирака, сводятся к алгебраическим расчетам. Поэтому вполне целесообразно рассмотреть особенности алгебраических вычислений и формулировки конечных результатов в развивающем подходе [101, 125].

Возьмем сначала свободное волновое уравнение (11.29). С точки зрения физических приложений интересны решения, отвечающие собственным функциям некоторых операторов, соответствующих физическим величинам. В частности, фундаментальное значение имеют решения в виде плоских волн

$$\Psi^\pm(x) = \Psi^\pm e^{\pm i(p\bar{x})} s, \quad (12.1)$$

которые являются собственными функциями оператора 4-импульса ∇ с собственными значениями $p = ip_0 + p$, $p_0 > 0$. Знак \pm характеризует отрицательно-частотные и положительно-частотные решения, имеющие различный физический смысл.

Подстановка этого выражения в (11.29) сводит систему дифференциальных уравнений к алгебраической системе

$$ip\tilde{\Psi}(p) P_1 S - i\bar{p}\tilde{\Psi}(p) P_2 S - m\tilde{\Psi}(p) = 0 \quad (12.2)$$

для неизвестного кватерниона $\tilde{\Psi}(p)$. Умножая (12.2) на кватернионный оператор

$$(ip, P_1 S) + (i\bar{p}, P_2 S),$$

получаем

$$(p\bar{p} + m^2)\tilde{\Psi} = 0.$$

Отсюда следует условие существования нетривиального решения системы (12.2)

$$p\bar{p} + m^2 = 0,$$

которое представляет собой не что иное, как известную связь между импульсом и энергией частицы в релятивистской теории.

Используя равенство

$$P_1 + P_2 = 1,$$

представим в (12.2) $\tilde{\Psi}(p)$ в виде

$$\tilde{\Psi}(p) = \tilde{\Psi}(p) P_1 + \tilde{\Psi}(p) P_2.$$

Тогда имеем

$$(-ip\tilde{\Psi}S - m\tilde{\Psi}) P_2 + (-i\bar{p}\tilde{\Psi}S - m\tilde{\Psi}) P_1 = 0.$$

Умножая справа на P_1 и P_2 , приходим к двум уравнениям

$$(-ip\tilde{\Psi}S - m\tilde{\Psi}) P_2 = 0, \quad (12.3a)$$

$$(-i\bar{p}\tilde{\Psi}S - m\tilde{\Psi}) P_1 = 0. \quad (12.3b)$$

Подействовав на (12.3a) оператором $(i\bar{p}, S)$, а на (12.3b) — оператором (ip, S) , убеждаемся, что (12.3a) и (12.3b) эквивалентны. Решением одного из них, а следовательно, и (12.2) будет

$$\tilde{\Psi}(p) = \Phi_1 P_1 - \frac{ip}{m} \Phi_1 P_1 S, \quad (12.4)$$

где Φ_1 — произвольный бикватернион. Однако так как Φ_1 входит в решение только в виде произведения с P_1 справа, то он определен с точностью до слагаемого, пропорционального $\Phi_2 P_2$.

Решение (12.4) имеет несимметричный по p вид. Для придания ему более симметричного вида представим p как квадрат некоторого бикватерниона

$$-\frac{ip}{m} = a^2 = (a_0 + ia)^2, \quad a^* = \bar{a}.$$

Тогда, введя вместо Φ_1 произвольный кватернион Φ :

$$\Phi_1 = \bar{a}\Phi,$$

получим симметричную запись для решения:

$$\Psi = \bar{a}\Phi P_1 + a\Phi P_1 S. \quad (12.5)$$

Легко найти выражение a через p :

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{p_0}{m} + 1} - \frac{ip}{\sqrt{\frac{p_0}{m} + 1}} \right). \quad (12.6)$$

В силу условия $p\bar{p} = -m^2$ p имеет 3 независимые компоненты. Можно параметризовать p трехмерным кватернионом u :

$$p = im \left(\frac{1 + iu}{\sqrt{1 + u^2}} \right)^2, \quad a = \frac{1 + iu}{\sqrt{1 + u^2}}. \quad (12.7)$$

Такое представление p тесно связано с векторной параметризацией группы Лоренца. Действительно,

$$\frac{1 + iu}{\sqrt{1 + u^2}}$$

является элементом группы Лоренца, задающим буст, при котором 4-импульс $(im, 0)$ переходит в p . Тогда (12.5) можно рассматривать как преобразование Лоренца (11.30), в котором

$$L = a = \frac{1 + iu}{\sqrt{1 + u^2}}, \quad (12.8)$$

осуществляемое над кватернионом

$$\Phi P_1(1 + S),$$

являющимся решением (12.2) в случае $p = (im, 0)$. Закон преобразования (11.30), примененный к решениям вида (12.1), означает замену p на

$$p^L = L p \bar{L}^*$$

с соответствующим изменением волновой функции. Следовательно, произвольное решение (12.1) можно рассматривать как решение, полученное для покоящейся частицы, над которым совершено преобразование буста по закону (11.30).

Дополнительную классификацию состояний можно провести с помощью оператора проекции спина на некоторую ось s . Спин определяется как момент количества движения частицы в состоянии покоя. Для построения оператора проекции спина найдем вначале оператор проекции полного момента количества движения. Чтобы подчеркнуть тот факт, что уравнение Дирака описывает эволюцию во времени волновой функции, запишем его в гамильтоновой форме. Для этого достаточно в операторе ∇ выделить скалярную часть:

$$-i\partial_0\Psi(x) = \nabla\Psi(x)(P_2 - P_1) + m\Psi(x)S. \quad (12.9)$$

Такая форма записи является явно инвариантной только относительно преобразований группы трехмерных вращений. Учитывая, что при этом $L^* = L$, находим из (11.30) закон преобразования волновой функции

$$\Psi'(x) = L(c)\Psi(L(c)x\bar{L}(c)),$$

где $c = q = q^*$. Отсюда получаем, что инфинитезимальные генераторы этих преобразований $I(\hat{c})$ (\hat{c} — единичный фиксированный кватернион, задающий ось вращений) действуют на волновые функции $\Psi(x)$ следующим образом:

$$I(\hat{c})\Psi(x) = i[\hat{c} + (\hat{x}\hat{c} - \hat{c}\hat{x})\nabla + (\overrightarrow{\hat{x}\hat{c}} - \overrightarrow{\hat{c}\hat{x}})\nabla]\Psi(x). \quad (12.10)$$

Из построения ясно, что $I(\hat{c})$ — оператор проекции полного момента количества движения на ось c . Легко проверить, что он коммутирует с гамильтонианом уравнения (12.9)

$$H = (\nabla, P_2 - P_1) + (m, S)$$

и, следовательно, вместе с H может входить в полный набор наблюдаемых. Однако $I(\hat{c})$ не входит в полный набор с p . Для построения оператора проекции спина перейдем в (12.10) к импульльному представлению и, согласно определению этого оператора, ограничимся состояниями с $p = ime_0$, что соответствует покоящейся частице:

$$I(\hat{c})\Psi(ime_0) = i\hat{c}\Psi(ime_0). \quad (12.11)$$

Для частицы с произвольным p оператор проекции спина $S(p, \hat{c})$ определяется исходя из того, что такое состояние получается с помощью преобразования буста из состояния с $p = ime_0$. Тогда

$$T(iu)i\hat{c}T(-iu)\Psi(ime_0) = S(p, \hat{c})\Psi(p).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} S(p, \hat{c}) &= T(iu)i\hat{c}T(-iu) = i(L(iu)cL(-iu), P_1) + \\ &+ i(L(-iu)\hat{c}L(iu), P_2) \end{aligned} \quad (12.12)$$

является ковариантным оператором проекции спина движущейся частицы на ось \hat{c} . Найдем собственные функции оператора $S(ime_0, \hat{c})$:

$$i\hat{c}\Psi = \lambda\Psi \quad (12.13)$$

или

$$(\lambda - i\hat{c})\Psi = 0.$$

Умножая слева на $(\lambda - i\hat{c})$, получаем

$$(\lambda^2 + \hat{c}^2)\Psi = 0.$$

Так как мы ищем нетривиальные решения, то

$$\lambda^2 + \hat{c}^2 = \lambda^2 - 1, \quad \lambda = \pm 1.$$

Следовательно, собственные функции подчиняются уравнению

$$(1 \pm i\hat{c})\Psi(\hat{c}) = 0.$$

Используя разложение $\Psi = (1 + i\hat{c})\Psi + (1 - i\hat{c})\Psi$, получаем решение

$$\Psi = (1 \pm i\hat{c})\xi,$$

где ξ — произвольный бикватернион. Учитывая, что Ψ подчиняется уравнению Дирака, т. е. имеет вид (12.5), получаем решение для $p = ime_0$ и проекции спина $\pm 1/2$ на ось c :

$$v^{\pm, r}(0, \hat{c}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1+n}{\sqrt{1-n^2}} \Pi_r(1 \pm S), \quad r = 1, 2,$$

и для произвольного p

$$v^{\pm, r}(p, \hat{c}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{(1+iu)}{\sqrt{1+u^2}} \frac{(1+n)}{\sqrt{1-n^2}} \Pi_r(1 \pm S) \Pi_s + \right. \\ \left. + \frac{(1-iu)}{\sqrt{1+u^2}} \frac{(1+n)}{\sqrt{1-n^2}} \Pi_r(1 \pm S) \Pi_1 \right], \quad (12.14)$$

где

$$n = \frac{n_s \hat{c} - (n_s \hat{c})_s}{1 - (n_s \hat{c})_s}. \quad (12.15)$$

Следовательно, состояние с импульсом p и проекцией спина $\pm 1/2$ на ось c получается из состояния с $p = ime_0$

и проекцией спина $\pm 1/2$ ($r=1, 2$) на ось n_3 путем преобразования Лоренца $L(\mathbf{q})$:

$$v^{\pm, r}(\mathbf{p}, \hat{\mathbf{c}}) = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{p_0}} T(\mathbf{q}) v^{\pm, r}(im\mathbf{e}_0, \hat{\mathbf{c}}), \quad (12.16)$$

где

$$\mathbf{q} = \langle i\mathbf{u}, \mathbf{n} \rangle,$$

причем $i\mathbf{u}$ определяется из (12.7), а \mathbf{n} — согласно (12.15). Множитель $\sqrt{m}/\sqrt{p_0}$ возникает из нормировки, принятой в [61].

Отметим, что решение строится из кватернионов \mathbf{p} , \mathbf{n}_3 , $\hat{\mathbf{c}}$, причем $\hat{\mathbf{c}}$ можно выбирать произвольно. Обычно полагают $\hat{\mathbf{c}} = \mathbf{n}_3$ либо $\hat{\mathbf{c}} = \bar{\mathbf{p}} = \mathbf{p}(|\mathbf{p}|)^{-1}$. Однако в двухчастичных задачах, когда фигурирует прямое произведение двух решений, иногда оказывается более удобным выбор $\hat{\mathbf{c}}$, связанный с импульсами обоих решений. В частности, существенные упрощения достигаются при выборе [16, 126—128]

$$\hat{\mathbf{c}} = \frac{\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2}{|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2|}. \quad (12.17)$$

Выражение (12.16) содержит все эти возможности как частные случаи и позволяет проанализировать любой из них.

Представление решения в виде (12.16) делает тривиальным доказательство ряда алгебраических свойств решений. Так, выполнение условия нормировки

$$[S\bar{v}^{\pm, r}(\mathbf{p}, \hat{\mathbf{c}}) v^{\pm, n}(\mathbf{p}, \hat{\mathbf{c}})]_S = \pm \delta_{rn} \frac{m}{p_0} \quad (12.18)$$

вследствие того, что слева стоит скаляр, достаточно проверить лишь в системе покоя, что делается тривиально.

Используя решения (12.16) свободного уравнения Дирака, найдем формулы суммирования по спиновому индексу в рамках кватернионного формализма [101]. Для этого определим функцию Грина уравнения (11.29), которая в импульсном представлении задается оператором, обратным оператору

$$\mathcal{D}_p = i(p, \Pi_1 S) + i(\bar{p}, \Pi_2 S) + m. \quad (12.19)$$

Очевидно, что

$$\mathcal{D}_p^{-1} = -\mathcal{D}_{-p} (\bar{p}\bar{p} + m^2)^{-1} \quad (12.20)$$

удовлетворяет условию $\mathcal{D}_p \mathcal{D}_p^{-1} = 1$.

Результат действия функции Грина \mathcal{D}_p^{-1} на произвольный бикватернион Ψ , реализующий биспинорное представление группы Лоренца, может быть записан в виде разложения по четырем линейно независимым бикватернионам $v^{\pm, i}(\mathbf{p})$ (12.16):

$$\mathcal{D}_p^{-1}\Psi = \sum_{i=1}^2 \{(B^{+, i}(\mathbf{p})\Psi)_S v^{+, i}(\mathbf{p}) + (B^{-, i}(\mathbf{p})\Psi)_S v^{-, i}(\mathbf{p})\}. \quad (12.21)$$

Действуя на левую и правую части (12.21) оператором \mathcal{D}_p (12.19), получаем

$$\begin{aligned} \Psi = & i(p_0 - \lambda) \sum_{i=1}^2 (B^{+, i}(\mathbf{p})\Psi)_S v^{+, i}(\mathbf{p}) S + \\ & + i(p_0 + \lambda) \sum_{i=1}^2 (B^{-, i}(\mathbf{p})\Psi)_S v^{-, i}(\mathbf{p}) S, \end{aligned} \quad (12.22)$$

где

$$\lambda = \sqrt{p^2 + m^2}.$$

Воспользовавшись теперь условием нормировки (12.18), находим

$$i(p_0 - \lambda) \sum_{i=1}^2 (B^{+, i}\Psi)_S \delta_{ij} = (S \bar{v}^{*-, i}(\mathbf{p})\Psi)_S, \quad (12.23)$$

$$i(p_0 + \lambda) \sum_{i=1}^2 (B^{-, i}\Psi)_S \delta_{ij} = (S \bar{v}^{*+, i}(\mathbf{p})\Psi)_S.$$

Тогда в силу произвольности Ψ имеем

$$B^{\pm, i}(\mathbf{p}) = \frac{S \bar{v}^{*\mp, i}(\mathbf{p})}{i(p_0 \mp \lambda)}. \quad (12.24)$$

Подставляя выражение (12.24) в (12.21), умножая на λ^2 и совершая предельный переход $p_0 \rightarrow \pm \lambda$, получаем искомые формулы суммирования по спиновому индексу:

$$\sum_{i=1}^2 (S \bar{v}^{*\mp, i}(\mathbf{p})\Psi)_S v^{\pm, i}(\mathbf{p}) = \frac{\pm \mathcal{D}_{\mp p}}{2p_0} \Psi. \quad (12.25)$$

Как и следовало ожидать, они отличаются от стандартного выражения [61] заменой матриц Дирака на их

кватернионные аналоги (11.25). Формулы (12.25) будут использованы в следующей главе при конкретных расчетах в кватернионной формулировке квантовой электродинамики.

Продемонстрируем методику решения уравнения Дирака в кватернионах в поле плоской электромагнитной волны с потенциалом $A(x)$. При этом обобщим уравнение (11.34), предполагая возможность существования у дираковской частицы аномального магнитного и дипольного электрического моментов. Соответствующее уравнение тогда имеет вид [101, 125]

$$(\nabla - ieA) \Psi P_1 + (\bar{\nabla} - ie\bar{A}) \Psi P_2 + \alpha F \Psi P_1 S + \\ + \beta F^* \Psi P_2 S - m \Psi S = 0. \quad (12.26)$$

Комплексные величины α и β характеризуют величину моментов. Они могут быть ограничены требованием инвариантности уравнения относительно P --, C - и T -образований (11.36).

В случае плоской электромагнитной волны выполняются следующие очевидные соотношения:

$$A(x) = A(\phi), \quad \Phi = (k\bar{x})_S, \quad k\bar{k} = 0, \quad (12.27)$$

k — импульс волны.

Из определения поля через потенциал в калибровке Лоренца находим

$$F = -\bar{\nabla} A = -\bar{k} \frac{dA}{d\phi} \quad (12.28)$$

и

$$-\bar{k} \frac{dA}{d\phi} = \frac{d\bar{A}}{d\phi} k, \quad k \frac{d\bar{A}}{d\phi} k = 0. \quad (12.29)$$

Решение уравнения (12.26) будем искать в виде

$$\Psi(x) = \Psi(p) e^{i(p\bar{x})_S}, \quad (12.30)$$

при этом, не теряя общности, можно считать, что $p\bar{p} = -m^2$. Тогда получаем

$$\left(k \frac{d}{d\phi} - p \right) \Psi P_1 + (\beta F^* - m) \Psi P_2 S = 0,$$

$$\left(\bar{k} \frac{d}{d\varphi} + \bar{\mathcal{P}} \right) \Psi \Pi_2 + (\alpha F - m) \Psi \Pi_1 S = 0, \quad (12.31)$$

где $\mathcal{P} = i(p - eA)$.

Умножая первое уравнение системы (12.31) на k , а второе на \bar{k} и используя (12.28), получаем систему алгебраических уравнений

$$\bar{k} \bar{\mathcal{P}} \Psi \Pi_1 = \bar{k} m \Psi \Pi_2 S, \quad (12.32)$$

$$k \bar{\mathcal{P}} \Psi \Pi_2 = k m \Psi \Pi_1 S,$$

связывающую кватернионы $\Psi \Pi_1$ и $\Psi \Pi_2$. Общее решение (12.25) имеет вид

$$\Psi = (\bar{\mathcal{P}} k + m \bar{k}) \Phi \Pi_1 + (\mathcal{P} \bar{k} + m k) \Phi \Pi_1 S, \quad (12.33)$$

где Φ — произвольный кватернион. Подставляя (12.33) в (12.31), получаем систему уравнений для определения Φ :

$$\left(k \bar{p} \frac{d}{d\varphi} + i \mathcal{D} \right) k \Phi \Pi_1 + \beta F^* p \bar{k} \Phi \Pi_1 = 0, \quad (12.34)$$

$$\left(\bar{k} p \frac{d}{d\varphi} + i \mathcal{D} \right) \bar{k} \Phi \Pi_1 + \alpha F \bar{p} k \Phi \Pi_1 = 0,$$

где $\mathcal{D} = (p - eA)(\bar{p} - e\bar{A}) + m^2$.

Введем обозначение $\kappa = (\bar{p}k)_S$, тогда (12.34) можно переписать в виде

$$k \left(\frac{d}{d\varphi} + \frac{i \mathcal{D}}{\kappa} \right) \Phi \Pi_1 + \beta F^* \Phi \Pi_1 = 0, \quad (12.35)$$

$$\bar{k} \left(\frac{d}{d\varphi} + i \frac{\mathcal{D}}{\kappa} \right) \Phi \Pi_1 + \alpha F \Phi \Pi_1 = 0.$$

Складывая оба уравнения и вводя новую неизвестную функцию Θ

$$\Theta \Pi_1 = \exp \left\{ \int \frac{i \mathcal{D}}{\kappa} d\varphi \right\} \Phi \Pi_1,$$

получаем

$$2ik_0 \frac{d}{d\varphi} \Theta \Pi_1 + (\beta F^* + \alpha F) \Theta \Pi_1 = 0. \quad (12.36)$$

Из требования инвариантности уравнения (12.26) относительно дискретных преобразований (11.36) вытекают следующие ограничения на параметры α и β :

$$\alpha = \beta(P - i\nu), \quad \beta = -\beta^*(T - i\nu), \quad \alpha = -\beta^*(C - i\nu).$$

Следовательно, в C -, P -, T -инвариантной теории имеем

$$\beta = \alpha = -i\mu, \quad \mu^* = \mu.$$

Подставив это условие в (12.36), приходим к уравнению

$$\frac{d\Theta P_1}{d\phi} = -\frac{\mu}{2k_0} (F^* + F) \Theta P_1. \quad (12.37)$$

В частности, если мы рассмотрим плоскую электромагнитную волну линейной поляризации, для которой

$$A(\phi) = af(\phi),$$

где $f(\phi)$ — скалярная функция, то уравнение (12.37) легко интегрируется:

$$\Theta P_1 = \exp \{-\chi f(\phi) (\bar{a}k)_S\} CP_1, \quad (12.38)$$

где C — произвольный постоянный кватернион, определяемый начальными условиями. Таким образом, в этом случае полное решение имеет вид

$$\begin{aligned} \Psi(x) = & \{ \bar{\mathcal{P}}k + m\bar{k} \exp \{-\chi f(\phi) (\bar{a}k)_S\} CP_1 + \\ & + (\mathcal{P}\bar{k} + m\bar{k}) \exp \{-\chi f(\phi) (\bar{a}k)_S\} CP_1 S \} \times \\ & \times \exp \left[i(p\bar{x})_S + \int \frac{i\mathcal{D}}{\chi} d\phi \right]. \end{aligned} \quad (12.39)$$

В случае эллиптической поляризации, когда

$$\frac{dA}{d\phi} = (-H_2 k_1 + H_1 k_2), \quad k = ik_0 + k_s,$$

где k_1, k_2, k_s удовлетворяют условию, аналогичному (11.3), т. е. образуют базис алгебры кватернионов, можно с целью упрощения волнового уравнения преобразовать проективные кватернионы $P_{1(2)}$ в естественные проекторы $ik/2k_0$, являющиеся делителями нуля из-за безмассовости фотона.

Такое преобразование ведется к повороту

$$\bar{R}P_1R = -\frac{ik}{2k_0}, \quad \Theta' = \Theta R. \quad (12.40)$$

Нахождение явного вида R можно рассматривать как полезное упражнение. Отметим, что данный прием может быть удобен при решении целого ряда задач в кватернионах на основе уравнения (11.34), при этом естественный базис для кватернионов (11.3) в каждом конкретном случае следует определять исходя из физических характеристик рассматриваемых полей.

Из (12.40) находим, что $\Theta(\phi)k = (f_1(\phi) + f_2(\phi)k_2)k$ со скалярными $f_1(\phi)$ и $f_2(\phi)$. При этом (12.37) переходит в матричное уравнение

$$\frac{d}{d\phi} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 0 & H \\ -H^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \quad (12.41)$$

где $H = H_1 + iH_2$, которое легко решается только в случае линейной и круговой поляризаций. Хотя, как и в других подходах, решение уравнения (12.26) для произвольной поляризации электромагнитной волны найти не удается, преимущество кватернионного подхода проявляется в том, что остающееся уравнение (12.41) имеет максимально компактный вид, а его матрица обладает простыми математическими свойствами, что позволяет проводить анализ уравнения в самом общем виде.

§ 13. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КВАТЕРНИОННЫХ АНАЛОГОВ γ -МАТРИЦ И НЕРЕЛЯТИВИСТИЧЕСКИЙ ПРЕДЕЛ УРАВНЕНИЯ ДИРАКА

Как известно [124], при стандартной формулировке релятивистской квантовой механики существует произвол в выборе представления для γ -матриц Дирака, описываемый группой $U(4)$. Этот произвол не связан с физикой, поскольку наблюдаемые от него не зависят. Однако при решении конкретных задач часто удобно фиксировать представление γ -матриц, отказываясь от явной ковариантности, но существенно упрощая расчеты. При этом, за исключением простых случаев, когда, например, число компонент волновой функции эффективно уменьшается из-за безмассовости спинорного поля или в ультрарелятивистском пределе, выбор удобного

представления заранее не очевиден, как и его связь с физикой задачи.

Изложенная в предыдущих параграфах данной главы минимальная алгебраическая формулировка уравнения Дирака открывает новые возможности при анализе этой проблемы.

Определим в пространстве кватернионных функций поля унитарные преобразования как кватернионные операторы, сохраняющие скалярное произведение. Соответствующая лоренц-инвариантная билинейная форма имеет вид (11.37)

$$\rho = -2(\bar{\Psi}\Psi)_S = 2(S\bar{\Psi}^*\Psi)_S = -2\{\overline{(\eta\Psi)^*}\Psi\}_S,$$

где $\eta = (e_0, S)$ играет роль матрицы билинейной формы.

Легко видеть, что преобразование функций поля

$$\Psi \rightarrow \Psi' = u\Psi, \quad u = (u_1, u_2), \quad (13.1)$$

оставляет ρ инвариантной только при условии

$$\bar{u}_1^* u_1 = \bar{u}_2^* u_2 = 1, \quad (13.2)$$

причем

$$\eta \rightarrow \eta' = u\bar{\mu}^*, \quad \bar{u}^* = (\bar{u}_1^*, \bar{u}_2^*) = u^+. \quad (13.3)$$

Операторы u , удовлетворяющие (13.2), реализуют представление группы $U(2) \otimes U(2)$, а если учесть, что умножение на скаляр коммутативно, то указанная группа редуцируется до $SU(2) \otimes SU(2) \otimes U(1)$. Как и следовало ожидать, в развивающем алгебраическом подходе группа, определяющая нефизический произвол в уравнении Дирака, существенно сужается. Частично вопрос об удобстве выбора явного вида проекторов в уравнении Дирака уже обсуждался в конце предыдущего параграфа, где рассматривалась задача о заряженной спинорной частице в поле плоской электромагнитной волны. В частности, было установлено, что при нахождении явного вида решения необходимо «доворачивать», вообще говоря, произвольные делители нуля $P_{1(2)}$ до естественных проекторов:

$$P_{1(2)}^k = \frac{1}{2} \left(1 \pm i \frac{\mathbf{k}}{k_0} \right). \quad (13.4)$$

Очевидно, что данное представление для проективных кватернионных операторов могло быть получено

уже при выводе уравнения (12.31) с учетом (12.27). Фактически это и было сделано, но только при получении (12.41), что позволило не обращаться к явному виду преобразования поворота R .

Рассмотрим теперь нерелятивистский предел уравнения Дирака в кватернионах и выясним, чему при этом соответствуют левые идеалы, определяемые проекторами $P_{1(2)}$. Перейдем к гамильтоновой форме уравнения Дирака, однако в несколько ином представлении, чем (12.9). Производя унитарное преобразование вида

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}} [1 + (e_0, (P_1 - P_2) S)], \quad (13.5)$$

получаем из (12.9)

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Psi = \nabla \Psi S + m \Psi (P_1 - P_2). \quad (13.6)$$

После тождественной замены $\Psi = \Psi P_1 + \Psi P_2$, (13.6) превращается в систему

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial t} \Psi P_1 &= \nabla \Psi S P_1 + m \Psi P_1, \\ i \frac{\partial}{\partial t} \Psi P_2 &= \nabla \Psi S P_2 - m \Psi P_2. \end{aligned} \quad (13.7)$$

Умножая второе уравнение системы справа на S и вводя обозначения

$$\varphi = \Psi P_1, \quad \chi = \Psi S P_1, \quad (13.8)$$

находим

$$\begin{aligned} i \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= \nabla \chi + m \varphi, \\ i \frac{\partial \chi}{\partial t} &= \nabla \varphi - m \varphi, \end{aligned} \quad (13.9)$$

или в импульсном представлении $p = ie + \mathbf{p}$

$$\begin{aligned} (mc^2 - e) \varphi + i c p \chi &= 0, \\ i c p \varphi - (mc^2 + e) \chi &= 0. \end{aligned} \quad (13.10)$$

Поскольку нас интересует переход к нерелятивистскому приближению, в формуле (13.10) указана явная зависимость коэффициентов от скорости света c .

Система (13.10) при выборе в качестве базиса алгебры бикватернионов матриц Паули

$$e_0 = 1, \quad e_k = -i\sigma_k$$

в точности совпадает со стандартными формулами (см., например, [124]).

Условие разрешимости (13.10) имеет вид

$$m^2c^4 - e^2 + c^2\mathbf{p}^2 = 0$$

или

$$e = \pm p_0 \equiv c \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2c^2}. \quad (13.11)$$

Отметим, что оператор

$$\Lambda = \frac{H_D}{\sqrt{H_D}} = \frac{(ip, S) + (m, \Pi_1 - \Pi_2)}{p_0} \quad (13.12)$$

коммутирует с H_D и, поскольку $\Lambda^2 = 1$, имеет собственные значения

$$\lambda = \frac{e}{p_0} = \pm 1,$$

которые соответствуют разбиению собственных фракций на так называемые состояния с «положительной» ($\lambda = +1$) и «отрицательной» ($\lambda = -1$) энергией.

Из (13.10) с учетом (13.11) находим связь между кватернионами Φ и χ :

$$\chi = \frac{icp}{mc^2 + e} \Phi, \quad (13.13)$$

а так как

$$\Psi(p) = \Psi(p)(\Pi_1 + \Pi_2) = \Psi\Pi_1 + \Psi S \Pi_1 S = \Phi + \chi S,$$

то окончательно имеем

$$\psi(p) = \Phi + \frac{icp}{mc^2 + e} \Phi S = u\Pi_1 + \frac{icp}{mc^2 + e} u\Pi_1 S, \quad (13.14)$$

где u — произвольный (с точностью до нормировки) кватернион. В качестве упражнения можно проверить, что (13.14) и (12.4) действительно связаны унитарным преобразованием (13.5).

Из (13.13) следует, что для решений с $\lambda = +1$ в нерелятивистском пределе, когда $e = p_0 = mc^2 + E'$,

$$\chi = \frac{ic\mathbf{p}}{2mc^2 + E'} \quad \Phi \approx \frac{i\mathbf{p}}{2mc} \quad \Phi \ll \Phi. \quad (13.15)$$

Таким образом, нерелятивистскую спиновую частицу можно описывать двухкомпонентным кватернионом вида $\Psi \Pi_1$.

Аналогичным образом осуществляется нерелятивистский предельный переход в уравнении (12.26) при наличии взаимодействия с электромагнитным полем. При этом в первом порядке по c^{-1} получается кватернионный аналог уравнения Паули ($\alpha = \beta = 0$)

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Phi = \left[\left(\mathbf{v} - i \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 \right]_S \Phi + eA_0\Phi - \frac{ie}{2mc} \mathbf{H}\Phi. \quad (13.16)$$

Отметим, что, считая α, β отличными от нуля, необходимо помнить о эрмитовости гамильтониана. Условие эрмитовости кватернионного оператора $Q = (a, b)$ есть (13.3)

$$(a, b) = (\bar{a}^*, \bar{b}^*). \quad (13.17)$$

Можно убедиться, что из (13.17) для параметров, входящих в уравнение (12.26), следует условие $\alpha = -\beta^*$, которое автоматически обеспечивает инвариантность уравнения относительно зарядового сопряжения.

Как следует из (13.15), в пределе малых скоростей две из четырех комплексных компонент спинорного кватерниона стремятся к нулю. Известно представление Фолди—Воутхайзена [124], в котором при любом импульсе каждому из знаков λ соответствуют только две ненулевые компоненты. Поскольку оно широко используется при описании движения спинорных частиц во внешних полях, построим его кватернионный аналог [63]:

Для этого необходимо найти кватернионный оператор V такой, что

$$V\Psi = u\Pi_1, \quad (13.18)$$

где Ψ определяется формулой (13.14).

Будем искать V в виде

$$V = \exp [\alpha (in, (\Pi_1 - \Pi_2) S)], \quad (13.19)$$

где $n = p(|p|)^{-1}$, α — действительный параметр.

Легко проверить, что

$$V = \cos \alpha + \sin \alpha (in, (\Pi_1 - \Pi_2) S). \quad (13.20)$$

Подставляя эту формулу в (13.18) и используя (13.14), находим

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{|\mathbf{p}|}{m + p_0} = -\sqrt{\frac{p_0 - m}{p_0 + m}} \quad (13.21)$$

или

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{p_0 + m}{2p_0}}, \quad \sin \alpha = -\sqrt{\frac{p_0 - m}{2p_0}}.$$

Из (13.21) и (13.20) следует, что

$$\begin{aligned} V &= \sqrt{\frac{p_0 + m}{2p_0}} - \sqrt{\frac{1}{2p_0(p_0 + m)}} (\mathbf{i}\mathbf{p}, (\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2) \mathbf{S}) = \\ &= (2p_0(p_0 + m))^{-1/2} [p_0 + m - (\mathbf{i}\mathbf{p}, (\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2) \mathbf{S})] = \\ &= \frac{\beta H_D + p_0}{\sqrt{2p_0(p_0 + m)}}, \end{aligned} \quad (13.22)$$

где $\beta = (e_0, \mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2)$ играет роль матрицы β в стандартном подходе [124]. $H_D = (\mathbf{i}\mathbf{p}, \mathbf{S}) + (m, \mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2)$ — гамильтониан уравнения (13.6) в импульсном представлении, под действием преобразования V он приводится к виду

$$V H_D V^* = (p_0, \mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2). \quad (13.23)$$

Построенное преобразование (13.22) является кватернионным аналогом преобразования Фолди—Воутхайзена.

В заключение отметим, что кватернионные функции, постулированные в работе [38] для описания нерелятивистского спина, получаются как частный случай (13.14).

§ 14. КВАЗИКОГЕРЕНТНЫЕ СОСТОЯНИЯ ДЛЯ НЕРЕЛЯТИВИСТСКОГО СПИНА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В последнее время в приложениях квантовой механики получил широкое распространение метод когерентных состояний [129]. Покажем на простом примере, как в этой области применяется развитый в предыдущих параграфах алгебраический подход к описанию спиновых свойств [63].

Вначале напомним, что метод когерентных состояний позволяет получить основные динамические характеристи-

стике квантовых систем, не решая соответствующего уравнения Шредингера. Он состоит в нахождении алгебры динамической симметрии этого уравнения, т. е. алгебры операторов, коммутирующих с оператором уравнения Шредингера $\hat{A} - E$ на множестве решений [130]:

$$[\hat{A}, \hat{H} - E] \varphi = 0. \quad (14.1)$$

Тем самым оператор \hat{A} переводит решение данного уравнения в некоторое, вообще говоря, другое решение. Как правило, алгебра таких операторов является конечной алгеброй Ли. Если это так, то система когерентных состояний может быть получена в результате действия соответствующей группы Ли на некоторый фиксированный вектор состояния [131].

Пусть имеются произвольная группа Ли G с элементами g и группа $T(G)$ с элементами $T(g)$ — ее неприводимое унитарное представление, действующее в гильбертовом пространстве \mathcal{H} с векторами $|\Psi\rangle$. Под стационарной группой произвольного вектора $|\Psi_0\rangle$ из \mathcal{H} здесь будем понимать группу M такую, что

$$T(m)|\Psi_0\rangle = e^{i\Phi(m)}|\Psi_0\rangle, \quad m \in M, \Phi: M \rightarrow \mathbb{R}. \quad (14.2)$$

Отметим, что это определение обобщает обычное определение стационарной подгруппы M элемента x из топологического пространства X как подгруппы некоторой группы G , действующей в этом пространстве, такой, что

$$mx = x, \quad m \in M.$$

Теперь, используя (14.2), можно определить систему когерентных состояний как систему векторов из \mathcal{H} вида

$$|\tilde{g}\rangle = T(\tilde{g})|\Psi_0\rangle, \quad (14.3)$$

где $\tilde{g} \in G/M$, M — стационарная подгруппа фиксированного вектора $|\Psi_0\rangle$ в смысле (14.2).

Как было показано в работе [131], полнота системы (14.3) следует из неприводимости $T(g)$.

Когерентные состояния возникают, например, в задаче о движении нерелятивистской частицы со спином в магнитном поле. В этом случае они определяются операторами неприводимого представления группы $SU(2)$. Рассмотрим [131] пространство неприводимого представления группы $SU(2)$ веса j с базисными векторами $|\mu, j\rangle$, где

$$I_3 |\mu, j \rangle = \mu |\mu, j \rangle. \quad (14.4)$$

Здесь I_3 — 3-я проекция вектор-оператора данного представления. Можно показать [131], что элементы стационарной подгруппы произвольного вектора $|\mu, j\rangle$ будут иметь вид

$$m = \begin{pmatrix} e^{i\phi} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi} \end{pmatrix} \quad (14.5)$$

и что фактор-группа $SU(2)/M$, рассматриваемая как топологическое пространство, гомоморфна 2-сфере. Пусть n — радиус-вектор на этой сфере, а $u(n)$ — элемент $SU(2)/M$, соответствующий вектору $n = (\cos \phi \sin \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \theta)$. Тогда систему когерентных состояний можно определить [131] как (j опускаем)

$$|\mu, n \rangle = T(u_3(\phi)) T(u_2(\theta)) |\mu \rangle, \quad (14.6)$$

где $u_3(\phi)$ соответствует повороту вокруг оси OZ на угол ϕ , а $u_2(\theta)$ — вокруг оси OY на угол θ . Так как группу $SU(2)$ можно параметризовать кватернионами, то, очевидно, можно построить состояния $|\alpha\rangle = D(\alpha) |0\rangle$ типа когерентных, где $D(\alpha)$ — некоторый кватернионный оператор. Так, например, в работе [128] было положено $|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, при этом «когерентные» состояния имеют вид

$$|\alpha\rangle = \alpha |0\rangle, \quad (14.7)$$

где $\bar{\alpha\alpha}=1$, $\alpha \in H_R$. Вектор $|0\rangle$ в (14.7) отвечает положительной проекции спина (в дальнейшем будем обозначать его $|0_+\rangle$), а соответствующий проектор [128] имеет вид

$$|0_+\rangle \langle 0_+| = \frac{1}{2} (1 + \sigma_3) = P_1. \quad (14.8)$$

Наряду с вектором состояния вакуума $|0_+\rangle$ можно ввести вектор $|0_-\rangle$, соответствующий отрицательной проекции спина, и проектор

$$|0_-\rangle \langle 0_-| = P_2. \quad (14.9)$$

Переход от проектора (14.8) к проектору на когерентное состояние (вообще говоря, не являющееся чистым по спину) осуществляется преобразованием вида

$$|\alpha\rangle \langle \alpha| = \alpha P_1 \bar{\alpha}.$$

Как известно, в дискретном спектре энергий электрона в магнитном поле возникает дополнительное вырождение Ландау, связанное с равенством энергии состояний $|n_1, n_{2+}\rangle$ и $|n_1+1, n_{2-}\rangle$, где

$$|n_1, n_2\rangle = \frac{a^{+n_1} b^{+n_2}}{\sqrt{n_1! n_2!}} |0, 0\rangle, \quad (14.10)$$

причем два набора операторов a, a^+ и b, b^+ такие, что для каждого из них имеют место бозонные коммутационные соотношения и операторы из разных наборов коммутируют. Эти операторы имеют вид:

$$a = (2m\omega)^{-1/2} [p_1 - eA_1 + i(-p_2 + eA_2)], \quad (14.11)$$

$$a^+ = (2m\omega)^{-1/2} [p_1 - eA_1 - i(-p_2 + eA_2)],$$

$$b = \left(\frac{m\omega}{2}\right)^{-1/2} (x_0 - iy_0), \quad (14.12)$$

$$b^+ = \left(\frac{m\omega}{2}\right)^{-1/2} (x_0 + iy_0),$$

при этом

$$x_0 = x_1 + \frac{1}{m\omega} (p_2 - eA_2), \quad (14.13)$$

$$y_0 = x_2 - \frac{1}{m\omega} (p_1 - eA_1)$$

и

$$\omega = \frac{eH}{m}. \quad (14.14)$$

Вектор состояния вакуума определяется из условия

$$a|0, 0\rangle = b|0, 0\rangle = 0. \quad (14.15)$$

Заметим, что в данном случае имеется также бесконечнократное вырождение по n_2 . Ясно, что в полную алгебру динамической симметрии должны входить и операторы перехода между состояниями $|n_1, n_{2+}\rangle$ и $|n_1+1, n_{2-}\rangle$.

Такие операторы [130] имеют вид

$$\tilde{A} = a(a^+a)^{-1/2} \sigma_+, \quad \tilde{A}^+ (a^+a)^{-1/2} a^+ \sigma_-, \quad (14.16)$$

где

$$\sigma_{\pm} = \frac{1}{2} (\sigma_1 \pm i\sigma_2). \quad (14.17)$$

Легко проверить соотношения ($|n_1, n_{2\pm}\rangle \equiv |n_{\pm}\rangle$)

$$\begin{aligned} \tilde{A}|n_+\rangle &= 0, \quad \tilde{A}|n_-\rangle = |n - 1_+\rangle, \\ \tilde{A}^+|n_+\rangle &= |n + 1_-\rangle, \quad \tilde{A}^+|n_-\rangle = 0. \end{aligned} \quad (14.18)$$

Очевидно также, что операторы (14.16) и σ_3 образуют алгебру $SU(2)$.

Построим состояния типа когерентных, соответствующие такой алгебре в кватернионном подходе. Для этого предположим, что состояния $|n_{\pm}\rangle$ с обычными свойствами есть кватернионы. Тогда проекторами на состояние с положительной (отрицательной) проекцией спина являются операторы умножения слева на $P_{1(2)}$.

Перепишем операторы (14.16) в виде

$$A = a(a^+a)^{-1/2}P_1S, \quad A^+ = (a^+a)^{-1/2}a^+P_2S. \quad (14.19)$$

Легко убедиться, что их действие на кватернионные векторы состояния $|n_{\pm}\rangle$ аналогично (14.18). Очевидно, что операторы (14.19) и $(P_1 - P_2)$ образуют алгебру $SU(2)$. Тогда стационарная подгруппа группы, соответствующая данной алгебре, имеет вид

$$M = \{e^{i\varphi(P_1 - P_2)}, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\}. \quad (14.20)$$

Зафиксируем теперь произвольный вектор $|n_+\rangle$, для которого

$$P_1|n_+\rangle = |n_+\rangle, \quad P_2|n_+\rangle = 0. \quad (14.21)$$

Построим далее оператор

$$C(\alpha) = \exp(\alpha A^+ - \alpha^* A). \quad (14.22)$$

Докажем, что экспонента в (14.22) допускает линеаризацию по оператору A . Для этого разложим $C(\alpha)$ в ряд по степеням $\alpha A^* - \alpha^* A$:

$$\begin{aligned} C(\alpha) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k |\alpha|^{2k} \left\{ \frac{1}{(2k)!} [(A+A^k)^k + (AA^k)^k] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{(2k+1)!} [\alpha(A+A^k)^k A^+ - \alpha^*(AA^k)^k A] \right\}. \end{aligned} \quad (14.23)$$

Здесь учтено очевидное свойство операторов A , A^+ :

$$A^2 = A^{+2} = 0. \quad (14.24)$$

Нетрудно показать также, что

$$A^+A = P_2, \quad AA^+ = P_1, \quad (14.25)$$

и тогда выражение (14.23) примет вид

$$C(\alpha) = \cos |\alpha| + \frac{\sin |\alpha|}{|\alpha|} (\alpha A^+ - \alpha^* A). \quad (14.26)$$

Заметим теперь, что выражение $\alpha A^+ - \alpha^* A$ можно преобразовать следующим образом:

$$\alpha A^+ - \alpha^* A = |\alpha| e^{-i\Phi(P_1 - P_2)} (A^+ - A), \quad (14.27)$$

где $\Phi = \arg \alpha$. При этом выражение для $C(\alpha)$ окончательно примет вид

$$C(\alpha) = \cos |\alpha| + e^{-i\Phi(P_1 - P_2)} \sin |\alpha| (A^+ - A). \quad (14.28)$$

Если учесть, что исходя из общего определения нужно взять преобразования фактор-группы данной группы по стационарной подгруппе M , то получим операторы, генерирующие некоторые состояния типа когерентных в виде

$$C(\alpha) = \cos |\alpha| + \sin |\alpha| (A^+ - A). \quad (14.29)$$

Действие (14.29) на произвольный вектор $|n_+\rangle$ (с учетом того, что операторы A , A^+ обладают свойствами, аналогичными (14.18)) дает

$$|n, \alpha\rangle = \cos |\alpha| |n_+\rangle + \sin |\alpha| |n+1-\rangle. \quad (14.30)$$

Легко проверить, что состояния (14.30) минимизируют соотношение неопределенностей для операторов

$$Q = \frac{1}{2} (A^+ + A), \quad \mathcal{P} = \frac{i}{2} (A^+ - A), \quad (14.31)$$

$$(\Delta Q)_{n,\alpha}^2 (\Delta \mathcal{P})_{n,\alpha}^2 = -\frac{1}{4} ([\mathcal{P}, Q]_-)_{n,\alpha}^2. \quad (14.32)$$

В работе [132] была предпринята попытка построения квазикогерентных состояний для описания изоспиновых степеней свободы с помощью операторов (здесь приводятся их кватернионные аналоги):

$$B = a\pi_1 S, \quad B^+ = a^+ \pi_2 S, \quad (14.33)$$

которые, действуя на состояния $|n_{\pm}\rangle$, дают

$$B|n_+\rangle = B^+|n_-\rangle = 0, \quad B|n_-\rangle = \sqrt{n}|n-1_+\rangle,$$

$$B^+|n_+\rangle = \sqrt{n+1}|n+1_-\rangle.$$

Легко убедиться, что операторы (14.33) в отличие от (14.13) не образуют замкнутой алгебры. Это приводит к тому, что состояния [132]

$$\begin{aligned} |\tilde{n}, \tilde{\alpha}\rangle &= \exp(\alpha B^+ - \alpha^* B)|n_+\rangle = \cos \alpha_n |n_+\rangle + \\ &+ \exp(-i\varphi) \sin \alpha_n |n+1_-\rangle; \quad \alpha_n = \sqrt{n+1}|\alpha|, \quad \Phi = \arg g\alpha, \end{aligned} \quad (14.34)$$

минимизируют соотношения неопределенностей для операторов $(B+B^+)/2$ и $i(B^+-B)/2$ лишь при условии $\Phi = -k\pi/2$, $k=0, \pm 1, \pm 2\dots$

Отметим в заключение, что излагаемый в данной работе вариант кватернионной формулировки квантовой механики обладает тем преимуществом, что при переходе к нерелятивистскому пределу не приходится изменять размерность алгебры, в рамках которой определяются оператор уравнения и волновая функция.

КВАТЕРНИОНЫ В КАЛИБРОВОЧНЫХ ТЕОРИЯХ

§ 15. КВАНТОВАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

В настоящем параграфе на основе алгебраического подхода к описанию электромагнитного и спинорного полей строится аппарат квантовой спинорной электродинамики, в котором все объекты являются бикватернионами. Возможность оперировать с объектами одной алгебраической природы — несомненное преимущество с точки зрения алгоритмизации расчета матричных элементов, соответствующих конкретным физическим процессам.

Последовательное и полное изложение квантовой электродинамики (КЭД) имеется во многих книгах (например, [61, 133]), поэтому основное внимание мы уделим особенностям процедуры вторичного квантования и диаграммной технике в кватернионной формулировке КЭД. Желающим изучить общие принципы квантования волновых полей или провести сравнение со стандартными формулами можно посоветовать обратиться к монографии Н. Н. Боголюбова и Д. В. Ширкова [61].

Напомним, что в теории квантованных полей волновые функции становятся операторами и описывают процессы рождения и уничтожения частиц, действуя на амплитуду состояния, которая содержит полную информацию о физическом состоянии системы.

Операторная алгебра спинорных волновых функций определяется, например, с помощью задания перестановочных соотношений для коэффициентов $a_i^\pm(\mathbf{p})$

$$[a_i^{*-}(\mathbf{p}), \quad a_j^+(\mathbf{p}')]_+ = \delta_{ij}\delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}'), \quad (15.1)$$

$$[a_i^-(\mathbf{p}), \quad a_j^{*+}(\mathbf{p}')]_+ = \delta_{ij}\delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$$

в лоренц-инвариантном разложении решения свободного уравнения Дирака $\Psi(x)$ по плоским волнам (12.1):

$$\Psi(x) = \Psi^+(x) + \Psi^-(x),$$

$$\Psi^\pm(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{i=1}^2 \int a_i^\pm(\mathbf{p}) v^{\pm,i}(\mathbf{p}) e^{\mp i(p\bar{x})_S} d^3p,$$

где $v^{\pm,i}(\mathbf{p})$ определяются формулой (12.16).

Можно показать [61], что удовлетворяющие (15.1) операторы $a_i^{*+}(\mathbf{p})$ и $a_i^-(\mathbf{p})$ являются соответственно операторами рождения частиц с импульсом \mathbf{p} , массой m , зарядом $+1$ и проекцией спина на ось \mathbf{c} , равной $\pm 1/2$ ($i=1, 2$). Операторы же $a^+(\mathbf{p})$, $a_i^{*-}(\mathbf{p})$ есть операторы рождения и уничтожения частиц, отличающихся от указанных выше знаком заряда и переворотом спина: $\pm 1/2$ ($i=2, 1$).

Используя формулы суммирования по спиновому индексу (12.25), можно получить перестановочные соотношения в x -представлении для спинорного поля в рамках кватернионного подхода:

$$\{ \Psi(x) (QS\bar{\Psi}^*(y))_S \}_+ = -\frac{i}{2} [(\nabla, \Pi_1 S) + (\bar{\nabla}, \Pi_2 S) + m] \mathcal{D}(x-y) Q, \quad (15.2)$$

где Q — произвольный кватернион, не содержащий операторов $a_i^\pm(\mathbf{p})$; $\mathcal{D}(x-y)$ — перестановочная функция Паули—Иордана.

Отметим, что мы строим антикоммутатор $\Psi(x)$ со сверткой $(QS\bar{\Psi}^*(y))_S$, так как именно эти величины являются наиболее общими выражениями для двух взаимно коммутирующих объектов, построенных из полей $\Psi(x)$ и $\bar{\Psi}^*(y)$ и линейных по ним над полем комплексных чисел в рамках классической теории поля. Использование бикватернионов позволяет получить перестановочные соотношения (15.2), не прибегая к компонентной записи ни в левой, ни в правой части в отличие от обычного подхода. Это прямое следствие использования объектов одной алгебраической природы.

Из (15.2) автоматически следует выражение для хронологического спаривания двух спинорных операторов поля, которое равно вакуумному среднему от хронологического произведения этих операторов и с точностью до множителя i — спинорной причинной функции Грина $S^c(x-y)$.

$$\boxed{\Psi(x)(QS\bar{\Psi}^*(y))_S = \frac{i}{2} [(\nabla, \Pi_1 S) + \bar{\nabla}, \Pi_2 S] + m] \mathcal{D}^c(x-y)Q = \\ = S^c(x-y)Q, \quad (15.3)}$$

которая описывает причинную связь процессов рождения и уничтожения частиц в различных точках пространства и времени x и y . Связь между (15.2) и (15.3) следует из обычного предположения о том, что причинная функция спинорного поля строится из скалярной причинной функции с помощью того же дифференциального оператора, который связывает соответствующие перестановочные функции.

Аналогичные выражения для вторично квантованного электромагнитного поля $A(x)$ имеют вид [61]

$$[A(x), (A(y)\tilde{Q})_S] = -i\mathcal{D}_0(x-y)\tilde{Q}, \quad (15.4)$$

$$\overline{A(x)(A(y)\tilde{Q})_S} = -i\mathcal{D}_0^c(x-y)\tilde{Q},$$

где индекс «0» соответствует условию $m=0$ для электромагнитного поля.

Используемые выше определения для сингулярных функций полностью соответствуют приведенным в монографии [61].

Как известно, матрица рассеяния в квантовой теории поля выражается через хронологически упорядоченную экспоненту:

$$S = T(\exp i\int \mathcal{L}_{int}(x) dx), \quad (15.5)$$

где для локальных операторов $\Lambda_1(x_1), \dots, \Lambda_n(x_n)$ имеет место определение

$$T(\Lambda_1(x_1) \cdots \Lambda_n(x_n)) = \Lambda_{j_1}(x_{j_1}) \cdots \Lambda_{j_n}(x_n)$$

при

$$x_{j_1}^0 \geq x_{j_2}^0 \geq \cdots \geq x_{j_n}^0.$$

Наиболее удобный алгебраический прием вычисления матричных элементов (15.5) по различным состояниям — приведение членов матрицы рассеяния к нормальной форме, в которой все операторы уничтожения стоят справа от операторов рождения. При этом хронологическое произведение отличается от нормального на неоператорную

функцию, которая и называется хронологическим спариванием (15.3), (15.4).

Записывая лагранжиан взаимодействия спинорной электродинамики в кватернионной форме:

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -ie [(\Psi^* \bar{P}_s \bar{\Psi} + \Psi \bar{P}_s \bar{\Psi}^*) \bar{A}]_S, \quad (15.6)$$

где: (...) — символ нормального произведения, и используя при приведении отдельных членов S -матрицы к нормальной форме выражения для хронологического спаривания, получаем кватернионную формулировку правил соответствия для диаграмм Фейнмана. Ее отличие от стандартной (см., например, [61]) заключается в том, что элементам диаграмм Фейнмана вместо 4-векторов, биспиноров и 4×4 -матриц ставятся в соответствие кватернионы и кватернионные операторы. Укажем те пункты этих правил соответствия, где существенна модификация.

1. Каждой внешней линии диаграммы Фейнмана ставится в соответствие $(2\pi)^{-3/2} v^{-,i}(p)$ — для входящей электронной линии, $(2\pi)^{-3/2} \bar{S}v^{*,+,i}(p)$ — для выходящей электронной линии, $(2\pi)^{-3/2} \bar{S}v^{*-,-i}(p)$ — для входящей позитронной линии, $(2\pi)^{-3/2} v^{+,i}(p)$ — для выходящей позитронной линии, $(2\pi)^{-3/2} \frac{\sigma^a}{\sqrt{2k_0}}$ — для входящего или выходящего фотона с поляризацией σ^a .

2. Каждой внутренней электронной линии ставится в соответствие кватернионный оператор

$$\frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{i(p, \bar{P}_1 S) + i(\bar{p}, P_2 S) + m}{pp + m^2 - ie} d^4 p.$$

3. Каждой внутренней фотонной линии между вершинами с индексами μ и ν ставится в соответствие

$$-\frac{i\delta^{\mu\nu}}{(2\pi)^4} \int \frac{1}{k^2 + ie} d^4 k.$$

4. Каждой вершине с индексом μ , в которую входят электронная линия p_1 и фотонная линия k и выходит электронная линия p_2 , ставится в соответствие кватернионный оператор

$$ie(2\pi)^4 \{e_\mu, \bar{P}_1 S\} + \{e_\mu, P_2 S\} \delta^4(p_2 - p_1 - k).$$

Каждой незамкнутой электронной линии, которую удобно читать по направлению стрелки, а запись осуществлять справа налево, ставится в соответствие скалярная часть полученного по модифицированным правилам Фейнмана кватерниона, электронной петле — скалярная часть полученного кватернионного оператора, а всей диаграмме — произведение полученных выражений для всех непрерывных электронных линий с соответ-

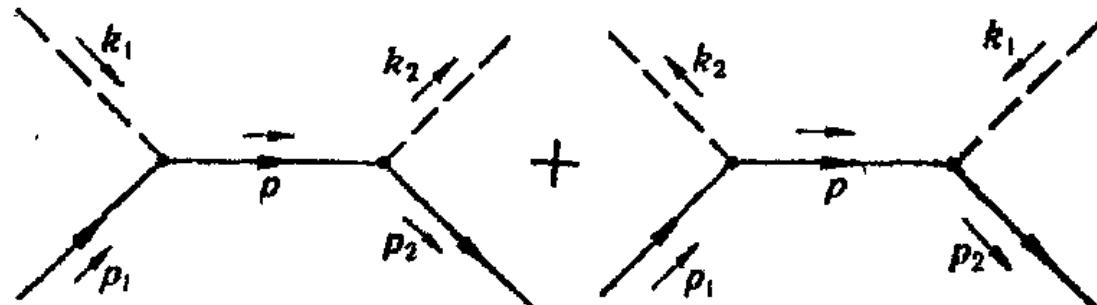


Рис. 15.1

вующим суммированием. Возникающая на промежуточном этапе явная зависимость от выбора кватернионного базиса устраняется при использовании очевидных соотношений

$$\sum_{\mu=0}^3 e_\mu Q \bar{e}_\mu = 4Q_0, \quad \sum_{\mu=0}^3 e_\mu Q e_\mu = -2Q. \quad (15.7)$$

Используя (15.7), легко получить следующую формулу:

$$\overline{(a\Psi(x)bS\Psi^*(y))_S} = [(a, b) S^c(x-y)]_S,$$

которую (или ее фурье-образ) удобно применять при вычислении электронных петель, не расписывая поля по компонентам. Напомним также, что правила Фейнмана должны быть дополнены правилом знаков, которое выражается в умножении полученного выражения на $(-1)^l$, где l — число замкнутых электронных циклов в рассматриваемой диаграмме.

Продемонстрируем характерные особенности техники расчета квантово-электродинамических процессов в кватернионном формализме на стандартном примере комптоновского рассеяния [101], которое описывается суммой диаграмм (рис. 15.1).

Как известно, сечение процесса пропорционально квадрату модуля матричного элемента, для которого, ис-

пользуя правила Фейнмана, можно выписать следующее выражение:

$$F = \frac{e^2}{8\pi^2 V k_{10} k_{20}} \left[S \bar{v}^{*+,\ell}(p_2) \left(\frac{A(\sigma_2) \mathcal{D}(-p_1 - k_1) A(\sigma_1)}{(p_1 + k_1)(p_1 - \bar{k}_1) + m^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{A(\sigma_1) \mathcal{D}(-p_1 + k_2) A(\sigma_2)}{(p_1 - k_1)(p_1 - \bar{k}_1) + m^2} \right) v^{-,\ell}(p_1) \right]_S, \quad (15.8)$$

где p_1, p_2, k_1, k_2 — импульсы начальных и конечных электронов и фотонов; σ_1, σ_2 — поляризации начального и конечного фотонов; $\mathcal{D}(p)$ определяется формулой (12.19); факторы $A(\sigma_n)$ ($n=1,2$) имеют вид

$$A(\sigma_n) = (\sigma_n, (P_1 - P_2) S). \quad (15.9)$$

В выражении (15.8) интегрирование по импульсу внутренней электронной линии снято за счет вершинной δ -функции.

При вычислении квадрата модуля матричного элемента (15.8) будем для начального электрона усреднять, а для конечного — суммировать по спиновым состояниям. Кроме того, перейдем в систему покоя начального электрона ($p_1 = i\vec{m}e_0$). При этом, очевидно,

$$p_2 = i\sqrt{(\vec{k}_1 - \vec{k}_2)^2 + m^2} + \vec{k}_1 - \vec{k}_2 = iE_2 + \vec{p}_2, \quad (15.10)$$

$$(p_2 \vec{k}_1)_S = -mk_{10}, \quad (p_2 \vec{k}_2)_S = -mk_{20},$$

$$(p_1 \sigma_1)_S = (p_1 \sigma_2)_S = 0.$$

Далее, в силу поперечности и безмассовости фотона имеют место соотношения

$$(\sigma_1 \vec{k}_1)_S = (\sigma_2 \vec{k}_2)_S = 0, \quad (\vec{k}_1 \vec{k}_1) = (\vec{k}_2 \vec{k}_2) = 0, \quad \sigma_1 \vec{\sigma}_1 = \sigma_2 \vec{\sigma}_2 = 1.$$

Тогда для квадрата модуля матричного элемента имеем

$$\sum_{i,j} |F|^2 = \frac{e^4}{2(4\pi)^4 m^2 (k_{10} k_{20})^2} \sum_{i,j} |[S \bar{v}^{*+,\ell}(p_2) M v^{-,\ell}(p_1)]_S|^2, \quad (15.11)$$

где M — числитель кватернионного оператора в (15.8) после приведения выражения к общему знаменателю.

Рассмотрим теперь двойную сумму в (15.11) подробнее, чтобы продемонстрировать характерные приемы вы-

числений в кватернионном подходе. Введем обозначение для произвольного кватернионного оператора $Q = (Q^L, Q^R)$ и будем широко использовать формулы суммирования по спиновому индексу (12.25), а также возможности перестановки под знаком взятия скалярной части:

$$(ab)_S = (\bar{a} \bar{b})_S = (ba)_S, \quad (ab)_S (cd)_S = (c(ab)_S d)_S.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j} \{(S\bar{v}^{*+..i}(p_2)M^L v^{-..j}(p_1)M^R]_S v^{-..i}(p_2)\bar{S}^*\bar{M}^R * \bar{v}^{*+..j}(p_1)\bar{M}^L * \}_S = \\ &= \frac{1}{2p_{20}} \sum_j [\mathcal{D}^L(p_2)M^L v^{-..j}(p_1)M^R \mathcal{D}^R(p_2)S\bar{M}^R * S\bar{S}v^{*+..j}(p_1)M^L *]_S = \\ &= \frac{1}{2p_{20}} \sum_j [S\bar{v}^{*+..j}(p_1)\bar{M}^L * \mathcal{D}^L(p_2)M^L v^{-..j}(p_1)M^R \mathcal{D}^R(p_2)S\bar{M}^R * S]_S = \\ &= \frac{1}{2p_{20}} \sum_{v=0}^3 \sum_j [e_v \bar{M}^L * \mathcal{D}^L(p_2)M^L (S\bar{v}^{*+..j}(p_1)\bar{e}_v) S \times \\ & \quad \times v^{-..j}(p_1)M^R \mathcal{D}^R(p_2)S\bar{M}^R * S]_S = \\ &= \frac{1}{4p_{10}p_{20}} \sum_{v=0}^3 [e_v \bar{M}^L * \mathcal{D}^L(p_2)M^L \mathcal{D}^L(p_1)\bar{e}_v \mathcal{D}^R(p_1) \times \\ & \quad \times M^R \mathcal{D}^R(p_2)S\bar{M}^R * S]_S = \frac{1}{p_{10}p_{20}} (\mathcal{D}^L(p_2)M^L \mathcal{D}^L(p_1)\bar{M}^L *)_S \times \\ & \quad \times (S\bar{M}^R * S\mathcal{D}^R(p_1)M^R \mathcal{D}^R(p_2))_S = \\ &= \frac{1}{4p_{10}p_{20}} [\mathcal{D}(p_2)M\mathcal{D}(p_1)\bar{M}^*]_S, \end{aligned} \tag{15.12}$$

где

$$\bar{M}^* = (\bar{M}^L *, S\bar{M}^R * S) = (e_0, S)(\bar{M}^L *, \bar{M}^R *) (e_0, S) = \eta M^+ \eta. \tag{15.13}$$

Вспоминая, что оператор η (11.37) играет в развивающем формализме роль матрицы билинейной формы и определение эрмитового сопряжения кватернионного оператора (13.3), убеждаемся, что (15.13) в точности совпадает с обычным заданием операции \bar{M} для матричного

оператора M [61]. Кроме того, поскольку в традиционном подходе суммирование и усреднение по спинам электронов в квадрате матричного элемента сводится к вычислению следа

$$\text{Sp}(\mathcal{D}(p_2)M\mathcal{D}(p_1)\bar{M}), \quad (15.14)$$

где одинаковые символы обозначают матричные аналоги соответствующих кватернионных операторов из (15.12), приходим к следующему правилу. Пусть 4×4 -матрице $(A_{\mu\nu})$ соответствует кватернионный оператор $A = (A^L, A^R)$, тогда

$$\text{Sp } A_{\mu\nu} = A_S = 4A_S^LA_S^R. \quad (15.15)$$

Теперь вернемся к непосредственному вычислению двойной суммы в (15.11) или (15.12). Для этого выпишем в явном виде M , \bar{M}^* , $\mathcal{D}(p_1)$ и $\mathcal{D}(p_2)$:

$$M = ik_{10}k_{20} [(\sigma_2 \hat{k}_1 \sigma_1 + \sigma_1 \hat{k}_2 \sigma_2, \Pi_2 S) + \\ + (\sigma_3 \hat{k}_1 \sigma_1 + \sigma_1 \hat{k}_3 \sigma_3, \Pi_1 S)], \quad (15.16)$$

где $\hat{k}_n = k_n (k_{n0})^{-1}$, $n = 1, 2$;

$$\bar{M}^* = ik_{10}k_{20} [(\sigma_1 \hat{k}_1 \sigma_3 + \sigma_3 \hat{k}_2 \sigma_1, \Pi_3 S) + \\ + (\sigma_1 \hat{k}_1 \sigma_3 + \sigma_3 \hat{k}_2 \sigma_1, \Pi_1 S)] \quad (15.17)$$

и

$$\mathcal{D}(p_1) = (m, 1 - S),$$

$$\mathcal{D}(p_2) = (m, 1 - S) + i(k_1 - k_2, \Pi_1 S) + i(\tilde{k}_1' - \tilde{k}_2, \Pi_2 S).$$

Тогда при учете очевидных соотношений

$$(\Pi_i S)_S = (S)_S = 0, \quad (\Pi_i)_S = \frac{1}{2}, \quad i = 1, 2, \quad (15.18)$$

и определения (15.15) находим

$$[\mathcal{D}(p_2)M\mathcal{D}(p_1)\bar{M}^*]_S = A_1 + A_2 + A_3, \quad (15.19)$$

где

$$A_1 = [(m, 1 - S)M\mathcal{D}(p_1)\bar{M}^*]_S = -2k_{10}^2 k_{20}^2 m^2 \times \\ \times [(\sigma_2 \hat{k}_1 \sigma_1 + \sigma_1 \hat{k}_2 \sigma_2)(\sigma_1 \hat{k}_1 \sigma_3 + \sigma_3 \hat{k}_2 \sigma_1) +$$

$$\begin{aligned}
& + (\sigma_2 \hat{k}_1 \sigma_1 + \sigma_1 \hat{k}_2 \sigma_2)(\sigma_1 \hat{k}_1 \sigma_2 + \sigma_2 \hat{k}_2 \sigma_1) + \\
& + (\sigma_2 \hat{k}_1 \sigma_1 + \sigma_1 \hat{k}_2 \sigma_2)(\sigma_1 \hat{k}_1 \sigma_2 + \sigma_2 \hat{k}_2 \sigma_1) + \\
& + (\sigma_2 \hat{k}_1 \sigma_1 + \sigma_2 \hat{k}_2 \sigma_2)(\sigma_1 \hat{k}_1 \sigma_2 + \sigma_2 \hat{k}_2 \sigma_1)]_S = \\
& = 32 k_{10}^2 k_{20}^2 m^2 (\sigma_1 \sigma_2)_S^2 = 32 k_{10}^2 k_{20}^2 m^2 \cos^2 \theta, \quad (15.20)
\end{aligned}$$

$$(\hat{k}_a + \hat{\bar{k}}_a = 2i, \quad \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_1 = -2(\sigma_1 \sigma_2)_S),$$

$$\begin{aligned}
A_2 &= \{i(k_1 - k_2, \Pi_1 S) M \mathcal{D}(p_1) \bar{M}^*\}_S = \\
&= -2k_{10}^2 k_{20}^2 m i [(k_1 - k_2)(\sigma_2 \hat{k}_1 \sigma_1 + \sigma_1 \hat{k}_2 \sigma_2) \times \\
&\times (\sigma_1 \hat{k}_1 \sigma_2 + \sigma_2 \hat{k}_2 \sigma_1)]_S = -2k_{10}^2 k_{20}^2 m i \times \\
&\times [-(k_1 - k_2)(\sigma_2 \hat{k}_1 \hat{k}_1 \sigma_2 + \sigma_1 \hat{k}_2 \hat{k}_2 \sigma_1) + \\
&+ (k_1 - k_2)(\sigma_2 \hat{k}_1 \sigma_1 \sigma_2 \hat{k}_2 \sigma_1 + \sigma_1 \hat{k}_2 \sigma_2 \sigma_1 \hat{k}_1 \sigma_2)]_S. \quad (15.21)
\end{aligned}$$

Прежде чем продолжить вычисление A_2 , напомним, что $k_{1(2)}$ являются делителями нуля и с точностью до множителя $\pm i/2$ совпадают с «естественными» проективными операторами $\Pi_{1(2)}^k$, рассмотренными ранее (13.4), поэтому имеют место соотношения

$$\hat{k}_a \hat{\bar{k}}_a = 0, \quad \hat{k}_a \hat{k}_a = 2ik_a, \quad \sigma_a \hat{k}_a \sigma_a = -\bar{k}_a, \quad (15.22)$$

где $a=1,2$ и нет суммирования по повторяющимся индексам.

С учетом (15.22) имеем

$$\begin{aligned}
& -[(k_1 - k_2)(\sigma_2 \hat{k}_1 \hat{k}_1 \sigma_2 + \sigma_1 \hat{k}_2 \hat{k}_2 \sigma_1)]_S = \\
& = -2i[(k_1 - k_2)(\sigma_2 \hat{k}_1 \sigma_2 + \sigma_1 \hat{k}_2 \sigma_1)]_S = \\
& = -2i[k_1 \sigma_2 \hat{k}_1 \sigma_2 - k_2 \sigma_1 \hat{k}_2 \sigma_1 + k_1 \sigma_1 \hat{k}_2 \sigma_1 - k_2 \sigma_2 \hat{k}_1 \sigma_2]_S = \\
& = -4i \left(\frac{(k_1 \sigma_2)_S^2}{k_{10}} - \frac{(k_2 \sigma_1)_S^2}{k_{20}} \right) - 2i \left(\frac{1}{k_{10}} - \frac{1}{k_{20}} \right) (\bar{k}_2 k_1)_S, \quad (15.23)
\end{aligned}$$

а

$$\begin{aligned}
& [(k_1 - k_2)(\sigma_2 \hat{k}_1 \sigma_1 \sigma_2 \hat{k}_2 \sigma_1 + \sigma_1 \hat{k}_2 \sigma_2 \sigma_1 \hat{k}_1 \sigma_2)]_S = 2[(k_1 \sigma_2)_S \hat{k}_1 \sigma_1 \times \\
& \times (\sigma_2 \hat{k}_2 + \hat{k}_2 \sigma_2) \sigma_1 - (k_2 \sigma_1)_S \hat{k}_2 \sigma_2 (\hat{k}_1 \sigma_1 + \sigma_1 \hat{k}_1) \sigma_2]_S =
\end{aligned}$$

$$= 4i \left[\frac{(k_1 \sigma_3)^2 s}{k_{10}} - \frac{(k_2 \sigma_1)^2 s}{k_{20}} \right]. \quad (15.24)$$

Подставляя (15.23), (15.24) в (15.21), получаем

$$A_3 = 4k_{10}k_{20}m(k_1\bar{k}_2)_S(k_{10} - k_{20}). \quad (15.25)$$

Поскольку, как легко убедиться, выражение для A_3 отличается от A_2 заменой k_a на \bar{k}_a , то очевидно, что

$$A_3 = A_2.$$

Учитывая, что

$$(k_1\bar{k}_2)_S = m(k_{10} - k_{20}),$$

окончательно находим

$$\begin{aligned} & [D(p_2)MD(p_1)\bar{M}^*]_S = \\ & = 8m^2k_{10}^2k_{20}^2 \left(4\cos^2\theta + \frac{k_{10}}{k_{20}} + \frac{k_{20}}{k_{10}} - 2 \right), \end{aligned} \quad (15.26)$$

что в точности совпадает с соответствующим результатом, полученным в классическом подходе [61].

В заключение остановимся на соотношении изложенного выше метода расчета матричных элементов спинорной квантовой электродинамики с известными ранее.

С одной стороны, развивающий алгебраический метод ближе всего к универсальному подходу Ф. И. Федорова [16], от которого его отличает последовательное использование объектов одной алгебраической природы для задания импульсов, спинов и поляризаций, полей, пропагаторов и соответственно одного закона умножения.

С другой стороны, как мог заметить читатель, при конкретном расчете квадрата матричного элемента комптон-эффекта отличие от общезвестных формул состоит лишь в замене γ-матриц их кватернионными аналогами Γ_μ и операции вычисления следа операцией сопоставления скаляра кватернионному оператору (15.15):

$$\text{Sp}(\hat{a}_n\hat{a}_{n-1}\cdots\hat{a}_1) = \{\hat{A}_n\hat{A}_{n-1}\cdots\hat{A}_1\}_S,$$

где

$$\hat{a}_n = a_{n\mu}\gamma_\mu, \hat{A} = a_{n\mu}\Gamma_\mu.$$

Легко видеть, что имеет место простая формула

$$\begin{aligned} \{\hat{A}_n \hat{A}_{n-1} \dots \hat{A}_1\}_S &= \{(\dots \bar{A}_4 A_3 \bar{A}_2 A_1, P_1 S^n) + \\ &\quad + (\dots A_4 \bar{A}_3 A_2 \bar{A}_1, P_2 S^n)\}_S = \\ &= \begin{cases} 4 \operatorname{Re}(\dots \bar{A}_4 A_3 \bar{A}_2 A_1)_S, & n = 2k, \\ 0 & , n = 2k + 1, \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (15.27)$$

При выводе (15.27) мы, естественно, полагали, что $\bar{A}_n^* = A_n$, и пользовались очевидными формулами

$$(P_1 S^n)_S = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & n = 2k, \\ 0, & n = 2k + 1, \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Вычисление же скалярной части кватерниона (15.27) существенно отличается от обычного нахождения следа соответствующей матрицы тем важным обстоятельством, что вместо сложных рекуррентных соотношений [16]

$$\gamma^k \gamma^l \gamma^m = \delta_{kl} \gamma^m - \delta_{km} \gamma^l + \delta_{lm} \gamma^k + e_{klmn} \gamma^5 \gamma^n, \quad (15.28)$$

$$\gamma^5 \gamma^k \gamma^l = \delta_{kl} \gamma^5 - \frac{1}{2} e_{klmn} \gamma^m \gamma^n,$$

где $\gamma^5 = \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \gamma^4$, используется закон умножения кватернионных единиц

$$e_m e_n = -\delta_{mn} e_0 + \delta_{m0} e_n + \delta_{n0} e_m + e_{0mn} e_l. \quad (15.29)$$

Отметим, что применение кватернионного аналога $\gamma_0 = -i \gamma_5$ оператора $\Gamma_0 = -i(e_0, P_1 - P_2)$ позволяет получить еще одну простую формулу, полезную при использовании кватернионных методов в теории электрослабого взаимодействия:

$$\begin{aligned} \operatorname{Sp}(\hat{a}_n \dots a_1 \gamma_0) &= \{\hat{A}_n \dots \hat{A}_1 \Gamma_0\}_S = \\ &= \begin{cases} 4 \operatorname{Im}(\dots \bar{A}_4 A_3 \bar{A}_2 A_1)_S, & n = 2k, \\ 0 & , n = 2k + 1, \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (15.30)$$

Для понимания алгебраических пренъ, "есть развиваемого подхода достаточно сравнить формулы (15.27) и (15.30) с аналогичными выражениями в работе [16]. Совершенно прозрачную алгебраическую интерпретацию получают и другие формулы из § 36 монографии [16], составляющие в совокупности эффективный аппарат непосредственного расчета матричных элементов.

Таким образом, изложенный в данном параграфе кватернионный формализм является промежуточным между матричным [61] и основанным на «специфическом исчислении операторов Дирака» [16] подходами. В его рамках легко осуществляется взаимный «перевод» соотношений. В то же время использование универсального закона умножения (15.29) для всех величин делает данный аппарат исключительно удобным для алгоритмизации алгебраической части аналитических вычислений матричных элементов на ЭВМ.

§ 16. ДУАЛЬНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ УРАВНЕНИЙ ЯНГА—МИЛЛСА

Классическая и квантовая спинорная электродинамика — простейший пример калибровочной теории поля. Действительно, уравнения для полей материи $\Psi(x)$ инвариантны относительно глобальных калибровочных преобразований — постоянных фазовых сдвигов поля $\Psi(x) \rightarrow e^{ia} \Psi$, которые, очевидно, образуют абелеву группу $U(1)$. При локализации этой симметрии, т. е. задании в каждой пространственно-временной точке своей калибровочной группы $U(1)$, естественно возникает проблема самосогласования фазовой зависимости поля $\Psi(x)$ вдоль некоторого пути. Это достигается введением в качестве связности векторного калибровочного поля, взаимодействующего с током полей материи, сохранение которого следовало уже из наличия глобальной симметрии по теореме Нетер [113].

Операторы сохраняющихся зарядов выражаются через генераторы группы. В частном случае классической $U(1)$ -калибровочной теории — это электрический заряд спинорного поля.

Обобщение идеи калибровочной инвариантности на случай произвольной компактной группы привело к значительному прогрессу в построении единого механизма для различных типов взаимодействий. Убедительным

экспериментальным подтверждением калибровочной концепции стало открытие нейтральных токов [134], а потом и промежуточных векторных мезонов [135], предсказанных электрослабой $SU(2)_L \otimes U(1)$ -калибровочно-инвариантной теорией [136].

Имеется обширная литература по теории калибровочных полей (см., например, [113, 137]). Для понимания последующего материала достаточно прочесть главы 4 и 5 из монографии [137].

В настоящем параграфе мы продемонстрируем конструктивность развивающихся алгебраических методов на примере решения проблемы симметрии между «электрическими» и «магнитными» характеристиками (или дуальной симметрии) в янг-миллсовском секторе неабелевской калибровочной теории. Вопрос этот интересен уже хотя бы потому, что непосредственное перенесение [138] методов исследования дуальной симметрии свободного электромагнитного поля на неабелев случай привел к утверждению о невозможности дуально-инвариантной формулировки уравнений Янга—Миллса. В то же время делались попытки [139—141] применения в теории полей Янга—Миллса двухпотенциального описания с двумя константами связи и построения лагранжевой формулировки такой теории при наличии источников двух типов. При этом, однако, использовался [140] лагранжиан, полевая часть которого пропорциональна

$$F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a + \overset{\times}{F}_{\mu\nu}^a \overset{\times}{F}_{\mu\nu}^a$$

и, следовательно, тождественно равна нулю, а из полученных таким образом полевых уравнений не был исключен второй потенциал, что делало их недоопределенными.

Развивая методы § 9 данной книги и следуя работам [142—144], покажем, как корректно строится дуально-инвариантная формулировка системы уравнений Янга—Миллса, и найдем условия, при которых она является лагранжевой.

Рассмотрим систему нелинейных уравнений, описывающую некоторое свободное неабелево калибровочное поле:

$$(D_\nu G_{\mu\nu})^a = 0, \quad (D_\nu \overset{\times}{G}_{\mu\nu})^a = 0, \quad (16.1)$$

где $G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu V_\nu^a - \partial_\nu V_\mu^a - qf^{abc}V_\mu^b V_\nu^c$ — тензор напряженности поля, $D_\mu = \partial_\mu - qf^{abc}V_\mu^b$ — ковариантная производная, V_μ^a — потенциал калибровочного поля, f^{abc} — структурные постоянные, определяющие алгебру Ли группы, q — константа самодействия (заряд) калибровочного поля. Подразумевается также, что все f^{abc} полностью антисимметричны, что имеет место для любой компактной полупростой группы Ли.

Если не все структурные константы равны нулю, калибровочная группа является неабелевой, а поля — самодействующими. В этом случае при определении дуальных преобразований нельзя ограничиться их заданием лишь над потенциалами и напряженностями, необходимо также преобразовывать константы связи в полной аналогии с электродинамикой дуально заряженных частиц. При этом, конечно, следует потребовать, чтобы все наблюдаемые выражались через дуально инвариантные комбинации.

Очевидно, что для решения проблемы надо построить аналог выражения (9.14) для тензора электромагнитного поля, которое в тензорной форме имеет вид

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\rho B_\sigma.$$

Наличие самодействия усложняет задачу, но использование кватернионного формализма значительно упрощает ее решение.

Действительно, параметризуем пространственно-временную зависимость всех величин, входящих в уравнения Янга—Миллса (16.1), с помощью комплексных кватернионов. При этом

$$(\mathcal{D}\mathbf{G})^a = 0, \quad (16.2)$$

где $\mathbf{G}^a = \mathbf{H}^a - i\mathbf{E}^a$, $\mathcal{D} = \nabla - qf^{abc}V^b$, и имеет место определение

$$\mathbf{G}^a = -(\bar{\nabla}V^a - qf^{abc}V^b V^c)_V, \quad (16.3)$$

а также выполняются соотношения $-\bar{V}^{b*} = V^b$, т. е. $V^b = -iV_0^b + \mathbf{V}^b$, V_0^b , \mathbf{V}^b — действительны и

$$q^* = \bar{q} = q. \quad (16.4)$$

Легко проверить, что уравнение (16.2) при выполнении (16.3), (16.4) полностью эквивалентно системе (16.1).

Дуально инвариантное обобщение (16.2) получается при снятии условий (16.3) и (16.4). Напомним, что в электродинамике приходилось также отказываться от вещественности заряда (8.3) для построения дуально инвариантной силы Лоренца (9.1).

Тогда, переопределяя тензор поля и ковариантную производную:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^a &= -(\bar{\nabla} W^a - q^* f^{abc} W^b W^c)_v, \\ D &= \nabla - \frac{1}{2} f^{abc} (q^* W^b - q \bar{W}^{b*}), \end{aligned} \quad (16.5)$$

где

$$W^a = A^a + iB^a, \quad -\bar{A}^{a*} = A^a, \quad -\bar{B}^{a*} = B^a, \quad q = e + ig,$$

получаем обобщенные уравнения Янга — Миллса

$$(DF)^a = 0, \quad (16.6)$$

инвариантные относительно дуальных преобразований вида

$$\tilde{q} = q e^{i\theta}, \quad \tilde{W}^a = W^a e^{i\theta}, \quad \tilde{F}^a = F^a e^{i\theta}. \quad (16.7)$$

Определения (16.7) при выполнении (16.4) переходят в (16.3), а (16.6) — в (16.2).

При этом мы видим, что, как и в электродинамике дуально заряженных частиц (см. § 9), калибровочное поле при дуально инвариантном обобщении описывается двумя потенциалами и двумя зарядами.

Выпишем теперь найденные соотношения в тензорных обозначениях. При этом (16.5) переходит в

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\rho B_\sigma^a - f^{abc} \left\{ A_\mu^b (e A_\nu^c + g B_\nu^c) - \right. \\ &\quad - B_\mu^b (e B_\nu^c - g A_\nu^c) - \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} [B_\rho^b (e A_\sigma^c + g B_\sigma^c) + \\ &\quad \left. + A_\rho^b (e B_\sigma^c - g A_\sigma^c)] \right\}, \end{aligned} \quad (16.8)$$

$$D_\mu = \partial_\mu - f^{abc} (e A_\mu^b + g B_\mu^b),$$

а (16.7) — в соотношения

$$\begin{cases} \tilde{A}_\mu^a = A_\mu^a \cos \theta + B_\mu^a \sin \theta \\ \tilde{B}_\mu^a = -A_\mu^a \sin \theta + B_\mu^a \cos \theta, \end{cases} \quad \begin{cases} \tilde{e} = e \cos \theta + g \sin \theta \\ \tilde{g} = -e \sin \theta + g \cos \theta. \end{cases}$$

Легко убедиться, что уравнения (16.1), (16.2) при определениях (16.5), (16.8) инвариантны относительно калибровочных преобразований вида

$$W' = hWh^{-1} - \frac{i}{q} (\nabla h) h^{-1} \quad (16.9)$$

или

$$A'_\mu = hA_\mu h^{-1} - \frac{ie}{e^2 + g^2} (\partial_\mu h) h^{-1},$$

$$B'_\mu = hBh^{-1} - \frac{ie}{e^2 + g^2} (\partial_\mu h) h^{-1},$$

где $W = W^b T^b$, T^b — генераторы калибровочной группы H , $h \in H$.

Так как преобразования (16.7) и (16.9) коммутируют, то группа симметрии обобщенных уравнений Янга—Миллса расширяется до $H \otimes U_d(1)$.

Подчеркнем, что если исходить из уравнений (16.1) и определений (16.7), то в общем случае мы не приедем с помощью дуального поворота к (16.1) и (16.3). Для этого необходимо дополнительное условие, которое, конечно, должно быть дуально и калибровочно инвариантным, например

$$q^* W^b + \overline{(q^* W^b)^*} = 0 \quad (16.10)$$

или

$$eB_\mu^b - gA_\mu^b = 0.$$

Условие (16.10) устраивает лишние степени свободы калибровочного поля W_μ^a и играет ту же роль, что и условие (9.17) в электродинамике.

Теперь в полной аналогии со случаем электродинамики дуально заряженных частиц (9.18) можно выписать дуально инвариантную функцию Лагранжа свободного поля Янга—Миллса:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} \operatorname{Re} \left\{ (f^* F^b \bar{F}^a)_S - \frac{i}{2} [(q^* W^a + \overline{(q^* W^a)^*}) \bar{\lambda}^a]_S \right\}, \quad (16.11)$$

где параметры $f = a + ib$ при дуальных поворотах преобразуются в соответствии с (9.19), а λ^b — изовектор-кваттернион множителей Лагранжа $(-\bar{\lambda}^b)^* = \lambda^b$.

Варьирование по полям и множителям Лагранжа опять (как и в § 9) приводит к (16.10) и уравнениям поля, которые совместны только при $\lambda^b = 0$, $f = \frac{q^2}{|q^2|}$ и в

точности совпадают с (16.6). Важно подчеркнуть, что вследствие самодействия дуальная инвариантность теории полей Янга—Миллса не приводит к существованию сохраняющегося тока. Это обстоятельство, а также попытки определить дуальные преобразования только над потенциалами, не затрагивая заряда, и послужили основой для утверждения о невозможности дуально инвариантной формулировки уравнений, описывающих неабелевы калибровочные поля.

Включение взаимодействия со спинорными и хиггсовскими полями в дуально инвариантном подходе производится в предположении, что они являются дуальными скалярами, и вся процедура сводится к замене стандартных ковариантных производных на выражения типа (16.5).

В известном смысле дуальную симметрию уравнений Янга—Миллса можно рассматривать как «скрытую», что формулируется в виде принципа дуальной инвариантности наблюдаемых. Конструктивность этого принципа в неабелевой теории еще более очевидна, чем в электродинамике с источниками. Это обусловлено тем, что при выборе нетривиальной топологической структуры вакуума Хиггса в ряде моделей существуют солитонные решения с конечной энергией монопольного [145] и дионного [146] типов.

В частности, дионные решения были найдены в модели Джорджи—Глэшоу [147], описывающей взаимодействующие $SO(3)$ -калибровочное поле и триплет полей Хиггса. Поскольку эта модель будет подробно рассмотрена в следующем параграфе, приведем лишь выражение для энергии, на основе которого оценивается масса диона:

$$T_{00} = M = \int d^3x \left\{ \frac{1}{2} [\text{Re}(F^b F^{b*}) + ((D\Phi)^b)^2] + V(\Phi) \right\}, \quad (16.12)$$

где $V(\Phi) = \frac{\kappa}{4} [(\Phi^b)^2 - a^2]^2$; $b = 1, 2, 3$; Φ^b —поле Хиггса.

Из определения электромагнитного поля в хиггсовском

вакууме $F = \Phi^b F^b/a$ следует выражение для заряда диона-
ной конфигурации

$$q = \frac{1}{a} \int F dS. \quad (16.13)$$

С учетом (16.13) из (16.12) имеем

$$\begin{aligned} M &\geq \int \frac{1}{2} \operatorname{Re} (F^b F^{b*} + [(\mathbf{D}\Phi)^b]^2) d^3x = \\ &= \frac{1}{2} \int \operatorname{Re} \left(F^b - \frac{q}{|q|} (\mathbf{D}\Phi)^b \right) \left(F^{b*} - \frac{q^*}{|q|} (\mathbf{D}\Phi)^b \right) d^3x + \\ &\quad + a|q| \geq a|q| = a\sqrt{e^2 + g^2}. \end{aligned} \quad (16.14)$$

Полученная дуально инвариантная оценка не содержит произвольных параметров, совпадает с соответствующими формулами работ [148, 149] и не требует для своего обоснования выхода за рамки стандартных представлений о структуре и размерности импульсного пространства, как в суперсимметричной модели.

В сущности, и в дуально инвариантную оценку (16.14) можно было бы ввести параметр с помощью замены

$$\frac{q}{|q|} \rightarrow \hat{n}(\gamma) = \cos \gamma + i \sin \gamma$$

с условием, что при дуальном повороте на угол θ $\gamma \rightarrow \gamma + \theta$.

Однако в нашем распоряжении нет других глобальных характеристик поля, кроме заряда, из которых можно построить такой «вектор» относительно дуальной группы.

Очевидно, что условия, минимизирующие функционал энергии (16.14) (уравнения Богомольного [150])

$$F^a = \frac{q}{|q|} (\mathbf{D}\Phi)^a, \quad (16.15)$$

также ковариантны относительно дуальных преобразований.

Таким образом, использование простой алгебраической техники позволило полностью решить проблему дуально инвариантной формулировки уравнений Янга—

Миллса. Отметим в заключение, что отказ от дополнительного условия (16.10) приводит к выходу за рамки исходной теории и получающиеся при этом уравнения представляют самостоятельный интерес.

§ 17. КАЛИБРОВОЧНЫЕ МОДЕЛИ С КВАТЕРНИОННОЙ ПАРАМЕТРИЗАЦИЕЙ ГРУПП ВНУТРЕННЕЙ СИММЕТРИИ

Предыдущий материал прежде всего демонстрировал возможности применения кватернионного исчисления к описанию пространственно-временных характеристик элементарных частиц, т. е. их координат, импульсов, спинов. Конечно, нельзя не обратить внимания на тот удивительный факт, что алгебра кватернионов, выделенная с точки зрения чистой математики, тесно связана с группой Лоренца именно в пространстве 3+1 измерений, а все фундаментальные частицы обладают теми спинами, которые естественным образом задаются кватернионами. Однако с практической точки зрения наибольшее значение имеет тот факт, что различные алгебраические вычисления в релятивистской кинематике, квантовой электродинамике могут быть сведены к действиям в рамках алгебры кватернионов и тем самым унифицированы. Аналогичная ситуация наблюдается и при использовании кватернионов для параметризации групп внутренней симметрии калибровочных теорий. Продемонстрируем это, основываясь на работах [114, 151].

Группами внутренних симметрий стандартных теорий являются компактные группы. Поэтому в дальнейшем ограничимся кватернионами. Так как не существует нетривиальной теоретико-полевой модели, в которой бы как пространственно-временные, так и внутренние степени свободы одновременно параметризовались кватернионами, то спиновые степени свободы будут отмечаться индексами, а когда это несущественно — индекс будет опускаться. Основой применения кватернионов в калибровочных теориях является возможность объединения некоторого мультиплета частиц в кватернион [151]:

$$\Phi = \Phi_\mu e_\mu. \quad (17.1)$$

Так как мы используем кватернионы, то естественно потребовать, чтобы поля Φ_μ были эрмитовыми (майорановскими для биспиноров).

Для построения вещественного лагранжиана применяются комбинации $\bar{\partial}_\mu \Phi \partial_\mu \Phi$, $\bar{\Phi} \Phi$. Ясно, что эти комбинации, а следовательно, и лагранжиан инвариантны относительно группы преобразований

$$\Phi \rightarrow a\Phi b, \quad a\bar{a} = b\bar{b} = 1. \quad (17.2)$$

Как уже отмечалось, эти преобразования являются группой $SO(4) \sim SO(3) \otimes SO(3)$. Если рассматривать (17.1) не как формальное объединение полей, а как единую величину — «кватерполе» [151], то среди преобразований (17.1) особое место занимают те, которые образуют подгруппу $SO(3)$ следующего вида:

$$\Phi \rightarrow a\Phi \bar{a} = \Phi'. \quad (17.3)$$

Эти преобразования являются автоморфизмами кватернионов, так как при этом не меняется закон умножения кватернионов:

$$a\Phi_1 \bar{a} a\Phi_2 \bar{a} = a\Phi_1 \Phi_2 \bar{a}.$$

Поэтому последовательная классическая кватернионная теоретико-полевая модель, в которой все физические величины определены через произведения кватерполей, будет инвариантной относительно группы преобразований (17.3). Это полностью аналогично ситуации с инвариантностью относительно глобальных фазовых преобразований в теориях, содержащих комплексные поля. Как известно, требование локальной инвариантности эквивалентно введению взаимодействия. Следовательно, наиболее простой вариант динамической теории, основанной на кватернионах, можно построить, исходя из требования локальной инвариантности относительно (17.3) [152]. Однако существование группы преобразований (17.2) дает возможность рассмотреть теорию, уравнения которой локально инвариантны относительно $SO(4)$ с дальнейшим спонтанным нарушением ее до калибровочной группы автоморфизмов.

Требование локальной инвариантности означает то, что a и b в (17.2) становятся функциями координат. Тогда производная от кватерполя преобразуется следующим образом:

$$\partial_\mu \Phi' = a(x) [\partial_\mu \Phi + (\bar{a}\partial_\mu a)\Phi + \Phi(\partial_\mu b)\bar{b}] b(x). \quad (17.4)$$

Для компенсации возникающих добавок необходимо ввести два лоренц-векторных вещественных кватерполя $V_\mu(x) = V_\mu^v e_v$, $W_\mu = W_\mu^v e_v$, а производную (17.4) заменить на ковариантную производную:

$$\mathcal{D}_\mu \Phi(x) = \partial_\mu \Phi(x) - g [V_\mu(x) \Phi(x) + \Phi(x) W_\mu(x)], \quad (17.5)$$

которая в отличие от $\partial_\mu \Phi(x)$ преобразуется, как и поле $\Phi(x)$, т. е. согласно (17.2). Закон преобразования для $V_\mu(x)$ и $W_\mu(x)$ будет

$$\begin{aligned} V'_\mu &= a V_\mu \bar{a} + \frac{1}{g} (\partial_\mu a) \bar{a}, \\ W'_\mu &= \bar{b} W_\mu b + \frac{1}{g} \bar{b} (\partial_\mu b), \end{aligned} \quad (17.6)$$

причем нулевые компоненты остаются неизменными относительно калибровочных преобразований:

$$V_\mu^{0'} = V_\mu^0, \quad W_\mu^{0'} = W_\mu^0. \quad (17.7)$$

В самом деле,

$$V'_\mu + \bar{V}'_\mu = a (V_\mu + \bar{V}_\mu) \bar{a} + \frac{1}{g} [(\partial_\mu a) \bar{a} + a (\partial_\mu \bar{a})].$$

В силу того что $a\bar{a} = 1$, получаем

$$(\partial_\mu a) \bar{a} + a (\partial_\mu \bar{a}) = \partial_\mu (a\bar{a}) = 0.$$

Таким образом, соотношения (17.7) действительно имеют место. Воспользовавшись этим, можно, не нарушая симметрии, полагать условия

$$V_\mu^0 = W_\mu^0 \quad (17.8a)$$

или

$$V_\mu^0 = W_\mu^0 = 0. \quad (17.8b)$$

Для того чтобы выделить подгруппу автоморфизмов, вместо V_μ и W_μ вводятся поля $v_\mu = V_\mu + W_\mu$ и $w_\mu = -V_\mu + W_\mu$. Ясно, что поле w_μ является калибровочным полем автоморфизмов. Далее запишем Φ в (17.5) как $\Phi_0 + \Phi$, а V_μ и W_μ заменим на v_μ и w_μ :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\mu (\Phi_0 + \Phi) &= \partial_\mu \Phi_0 + \frac{g}{2} (\Phi v_\mu) + \partial_\mu \Phi - \\ &- \frac{g}{2} (\Phi_0 v_\mu - [w_\mu \Phi]). \end{aligned}$$

Тогда видно, что v_μ определяет переходы между Φ_0 и Φ , а w_μ задает взаимодействие в рамках триплета Φ . Следовательно, при интерпретации Φ_0 как лептонного поля, а Φ — как кваркового, поле w_μ можно назвать «цветным» полем (трех) псевдоглюонов, а v_μ — «лепто-кварковым» векторным полем [151].

Еще раз следует подчеркнуть, что возникающие калибровочные поля в $SO(4)$ -калибровочной теории кватерполя четко подразделяются на два класса в связи с выделенностью подгруппы $SO(3)$ внутренних автоморфизмов. Эти же два класса выделяются и с физической точки зрения, если рассматривать предлагаемую модель как упрощенный вариант объединения лептонов и цветных夸арков в КХД, где взаимодействия между кварками и между夸арком и лептоном существенно различаются.

Принципиальное различие между группой симметрии и группой автоморфизмов остается и при включении механизма Хиггса спонтанного нарушения $SO(4)$ -калибровочной группы до $SO(3)$ -группы автоморфизмов. Введем скалярное кватерполе

$$\Phi = \Phi_\mu e_\mu.$$

Для кватерполей Φ , ϕ , w_μ и v_μ можно построить, образуя комбинации типа $\Phi\bar{\Phi}$, $\mathcal{D}_\mu\Phi\mathcal{D}_\mu\bar{\Phi}$ и т. д., локально $SO(4)$ -инвариантный лагранжиан, который давал бы минимум энергии не при $\Phi=0$, а при некотором конечном значении Φ . Тогда именно это решение отвечает состоянию вакуума. Пользуясь локальной калибровочной инвариантностью, это вакуумное решение с помощью преобразования

$$\Phi'(x) = a(x)\Phi(x)b(x), \quad (17.9)$$

где

$$a(x) = \bar{b}(x)\bar{\Phi}(x)(\Phi(x)\bar{\Phi}(x))^{-1/2},$$

сводится к кватерполю, обладающему только скалярной частью. Вследствие $SO(4)$ -инвариантности лагранжиана $\Phi'(x)$ также будет вакуумным решением. Если это решение выбрать в качестве основного состояния, относительно которого строятся возбужденные состояния, то симметрия системы $SO(4)$ окажется «спонтанно нарушенной» до $SO(3)$ — группы автоморфизмов кватернионов, оставляющей скалярный кватернион неизменным.

Выбрав калибровку $\Phi - \bar{\Phi} = 0$, что осуществимо с помощью преобразования (17.9), переходим к теории, в которой калибровочные поля ω_μ , оставляющие инвариантным вакуум и калибровку, остаются безмассовыми, а поля v_μ приобретают массу, которую можно сделать сколь угодно большой выбором параметров в лагранжиане, тем самым делая сколь угодно слабыми лептон-кварковые переходы. Более подробно с этой моделью и ее связью с реалистическими калибровочными теориями можно ознакомиться в работе [151].

Теперь перейдем к краткому изложению кватернионной формулировки $SU(2)_L \otimes SU(2)_R \otimes U(1)$ калибровочной теории электрослабых взаимодействий [114]. В ней вводятся скалярные эрмитовы кватерполя Φ , Φ_L , Φ_R , которые преобразуются относительно калибровочной группы $SO(4)$ следующим образом:

$$\Phi \rightarrow a\Phi\bar{b}, \quad (17.10a)$$

$$\Phi_L = a\Phi_L, \quad (17.10b)$$

$$\Phi_R \rightarrow b\Phi_R, \quad a\bar{a} = b\bar{b} = 1. \quad (17.10c)$$

Требование локальности калибровочных преобразований приводит, как и в предыдущей модели, к введению двух векторных калибровочных полей V_μ и W_μ . Так как преобразования действуют только слева, то они оставляют инвариантным разбиение

$$\Phi_{L,R} = \Phi_{L,R}\Pi_1 + \Phi_{L,R}\Pi_2. \quad (17.11)$$

Ясно, что $\Phi_{L,R}\Pi_1$ и $\Phi_{L,R}\Pi_2$ становятся бикватернионами. Они связаны комплексным сопряжением

$$(\Phi_{L,R}\Pi_1)^* = \Phi_{L,R}\Pi_2.$$

Введя обозначение

$$\Phi_{L,R} = \Phi_{L,R}\Pi_1,$$

перепишем (17.11) в виде

$$\Phi_{L,R} = \Phi_{L,R} + \Phi_{L,R}^*. \quad (17.12)$$

Разбиение (17.11) не носит инвариантного характера, так как при умножении $\Phi_{L,R}$ на произвольный кватернион имеем

$$\Phi_{L,R}\Pi_{1(2)}A \neq \Phi_{L,R}.$$

Однако существует однопараметрическая подгруппа, задаваемая выражением

$$A = e^{iq_{L,R}(\Pi_1 - \Pi_2)\xi},$$

коммутирующая с $\Pi_{1(2)}$ и тем самым оставляющая инвариантным разбиение (17.11). Из соотношений

$$\Pi_1 A = e^{iq_{L,R}\xi} \Pi_1,$$

$$\Pi_2 A = e^{-iq_{L,R}\xi} \Pi_2$$

следует, что разбиение (17.11) есть на самом деле разложение по собственным векторам оператора A . Таким образом, вводится еще одна группа преобразований, изоморфная

$$\Phi'_{L,R} = \Phi_{L,R} A + \Phi_{L,R}^* A = \Phi_{L,R} e^{iq_{L,R}\xi} + \Phi_{L,R}^* e^{-iq_{L,R}\xi}. \quad (17.13)$$

Преобразования (17.10а—в), (17.13), как легко видеть, образуют группу $SU(2) \otimes SU(2) \otimes U(1)$, элементы которой задаются совокупностью $(a, b, e^{iq_{L,R}\xi})$. Как уже отмечалось, для W_μ и V_μ выбрана калибровка (17.8б). Требование инвариантности теории относительно локальных преобразований (17.13) приводит к необходимости введения нулевых компонент. Предположив $q_L = q_R = q$, получаем

$$W_\mu = ie_0 C_\mu + W_\mu,$$

$$V_\mu = ie_0 C_\mu + V_\mu.$$

Здесь уместно отметить тот факт, что в $SU(2)_L \otimes SU(2)_R \otimes U(1)$ калибровочной теории представления, задаваемые (17.10а—в), (17.12), а также тривиальное выделены с точки зрения возможности кватернионной формулировки. Именно этих представлений достаточно для построения современных теорий электрослабого взаимодействия, основанных на группе $SU(2)_L \otimes U(1)$ и ее обобщениях до группы $SU(2)_L \otimes SU(2)_R \otimes U(1)$ [114].

В задачи данной книги не входит изложение современных калибровочных теорий. Здесь только ставилась цель показать, какие алгебраические конструкции выделены с точки зрения кватернионного подхода в калибровочных теориях, содержащих группу $SU(2)$. Подробности можно найти в вышеуказанных работах.

Рассмотрим простой пример, показывающий целесообразность использования кватернионов для параметризации групп внутренней симметрии при практических вычислениях.

Рассмотрим $SO(3)$ -калибровочно инвариантный лагранжиан модели Джорджи—Глэшоу [147]

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(G_{\mu\nu}G_{\mu\nu}) + \frac{1}{2}(\tilde{D}_\mu\Phi D_\mu\Phi) - V(\Phi), \quad (17.14)$$

где $V(\Phi) = \frac{\kappa}{4}(\tilde{\Phi}\Phi - a^2)^2$ — потенциал Хиггса;

$$G_{\mu\nu} = \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu + e(W_\mu W_\nu)^V \quad (17.15)$$

— тензор напряженностей поля; $D_\mu = \partial_\mu - eW_\mu$ — ковариантная производная; $W_\mu^a = W_\mu^a e^a$ — потенциал поля; $\Phi = \phi^a e^a$ — поле Хиггса; $a = 1, 2, 3$; тильда обозначает операцию «изотопического» кватернионного сопряжения $e^a \rightarrow -e^a$, которая является антиавтоморфизмом; векторная и скалярная части кватернионов выделяются стандартным образом: $q = q^a e^a$, $q^S = 1/2(q + \tilde{q})$, $q^V = (q - \tilde{q})/2 = \vec{q}$.

Уравнения движения могут быть получены варьированием по кватернионам $\partial_\mu W_\nu$, W_μ , Φ , $\partial_\mu\Phi$, если учесть, что для любого кватерниона q имеет место равенство

$$\frac{\partial}{\partial q} = e^a \frac{\partial}{\partial q^a}.$$

Таким образом, находим

$$(D_\nu G_{\mu\nu})^V = -e(W_\mu\Phi)^V, \quad (17.16)$$

$$(\tilde{D}_\mu D_\mu\Phi)^V = -\kappa\Phi(\tilde{\Phi}\Phi - a^2). \quad (17.17)$$

Изотопическим вращениям соответствуют преобразования кватернионов W_μ , Φ вида

$$W_\mu \rightarrow W'_\mu = R W_\mu \tilde{R}, \quad \Phi \rightarrow \Phi' = R\Phi\tilde{R}, \quad \tilde{R}R = 1. \quad (17.18)$$

Для иллюстрации техники алгебраических вычислений рассмотрим построение монопольных решений в хиггсовском вакууме, который определяется условиями

$$V(\Phi) = 0, \quad (D_\mu\Phi)^V = 0, \quad G_{\mu\nu} \neq 0.$$

Из первых двух уравнений имеем

$$\tilde{\Phi}\Phi = a^2, \quad \partial_\mu\Phi - e(W_\mu\Phi)^V = 0. \quad (17.19)$$

Отсюда легко найти явный вид потенциалов W_μ , выразив их через хиггсовские поля Φ . Для этого умножим обе части второго уравнения (17.19) на кватернион $\Phi^{-1} = a^{-2}\tilde{\Phi}$, после чего общее решение может быть записано в виде

$$W_\mu = \frac{1}{a^2e} ((\partial_\mu\Phi)\tilde{\Phi})^V + \frac{1}{a}\tilde{\Phi}A_\mu, \quad (17.20)$$

где $A_\mu = A_\mu e^\theta$ — произвольный 4-вектор.

Подставляя (17.20) в (17.14), легко находим выражение для тензора поля в вакууме Хиггса:

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{a^2e} \tilde{\Phi} \{ \tilde{\Phi} (\partial_\mu\Phi\partial_\nu\Phi)^V \}^S + \frac{\tilde{\Phi}}{a} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu). \quad (17.21)$$

Выбирай в качестве «электромагнитной» подгруппы калибровочной группы малую группу кватерниона Φ , которая, очевидно, есть $SO(2)$ или $U(1)$, естественно определить [153] тензор электромагнитного поля и потенциала как проекции $G_{\mu\nu}$ и W_μ на Φ :

$$F_{\mu\nu} = \left(\frac{\Phi}{a} G_{\mu\nu} \right)^S \quad (17.22)$$

и

$$A_\mu = \left(\frac{\Phi}{a} W_\mu \right)^S. \quad (17.23)$$

Здесь следует подчеркнуть, что для топологически нетривиальных решений уравнений Янга—Миллса нельзя глобально связать потенциалы, введенные выше, и напряженности обычным образом:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (17.24)$$

поскольку (17.24) не совместно с существованием монополей. В отдельных областях это возможно, что соответствует локальной тривиализации [155] $U(1)$ -раслоения. Отметим также, что в отличие от $F_{\mu\nu}$ потенциал A_μ (17.23) $SO(3)$ -калибровочно нековариантен, причем проекция $(\partial_\mu h)h^{-1}$ на Φ не сводится к допустимым $U(1)$ -калибровочным преобразованиям. При включении

взаимодействия с электрически заряженными пробными частицами это будет выражаться в том, что лишь потенциальная часть (17.22) будет наблюдаемой, а это практически сводит на нет преимущество «гладкого» описания поля монополя т'Хоофта—Полякова.

Для построения статического монопольного решения уравнений (17.15), (17.16) выберем топологически нетривиальную калибровку для хиггсовского поля в виде так называемого «ежа»:

$$\vec{\Phi} = \frac{1}{2} \vec{a} \vec{n}, \quad \vec{n} = \hat{\vec{x}} = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}, \quad \hat{\vec{x}} = \hat{x}_a e^a. \quad (17.25)$$

Тогда из (17.20) следует, что

$$\vec{W}_\mu = \frac{1}{e} (\vec{n} \partial_\mu \vec{n})^\nu \quad (17.26)$$

и

$$\vec{G}_{ab} = \frac{1}{e |\vec{x}|^2} \epsilon_{abc} \vec{x}_c \vec{n}, \quad \vec{G}_{0a} = 0.$$

С учетом определений (17.22), (17.23) получаем соответственно

$$F_{ab} = \frac{1}{e |\vec{x}|^2} \epsilon_{abc} \vec{x}_c, \quad A_\mu = 0, \quad F_{0a} = 0. \quad (17.27)$$

Формулы (17.25)—(17.27) описывают монополь т'Хоофта—Полякова [145] в хиггсовском вакууме. При этом тензор электромагнитного поля полностью определяется поведением полей Хиггса, а электромагнитный потенциал равен нулю. Построим теперь, используя технику алгебры кватернионов, калибровочное преобразование, устанавливающее соответствие между монополями Дирака и т'Хоофта—Полякова. Для этого следует найти такой кватернион \bar{u} , что

$$i\bar{u}\bar{\Phi} = ae^a. \quad (17.28)$$

Поскольку преобразование (17.28) представляет собой обычный трехмерный поворот, естественно воспользоваться кватернионным аналогом векторной параметризации группы $SO(3)$:

$$u = \frac{1 + \vec{c}}{\sqrt{1 + \vec{c}^2}}, \quad (17.29)$$

где $\vec{c}^* = \vec{c}$ зависит от x .

После простых выкладок получаем

$$\vec{u}\vec{n} = \frac{1 - \vec{c}^2}{1 + \vec{c}^2} \vec{n} + \frac{2}{1 + \vec{c}^2} [(\vec{c} \vec{n}) \vec{c} + [\vec{c} \vec{n}]] = e^3, \quad (17.30)$$

где применены стандартные обозначения векторной алгебры для скалярного и векторного произведений. Решение уравнения (17.30) хорошо известно [16]:

$$\vec{c} = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} (\vec{e}^3 \vec{n})^\vee.$$

При этом соответствующий электромагнитный потенциал имеет вид

$$A_\theta = 0, \quad A_\phi = -\frac{1}{er} \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta}, \quad A_r = A_\theta = 0, \quad (17.31)$$

что совпадает с известным сингулярным потенциалом Дирака [102].

Отметим, что напряженность магнитного поля, рассчитанная с помощью (17.21), (17.22), сингулярности не содержит, так как при корректных вычислениях можно убедиться, что член, обусловленный полями Хиггса, в точности сокращает сингулярность вида

$$\frac{4\pi}{e} \Theta(-z) \delta(x) \delta(y),$$

появляющуюся при вычислении $\operatorname{rot} \mathbf{A}$ (17.31). Сингулярность потенциала (17.31) — следствие сингулярности преобразования (17.29), что в свою очередь обусловлено отсутствием гладкого преобразования, переводящего расслоение $P(R^3, H_R)$ в его сечение $P(R^3, e^3)$.

Очевидно, что для рассматриваемой простой модели с лагранжианом (17.13) не составляет труда дать полностью алгебраическую формулировку, используя результаты § 16 и кватернионную параметризацию группы внутренней симметрии — $SO(3)$. Для реализации представлений полной группы нам понадобится алгебра

$H_C \otimes H_R$, которая изоморфна алгебре Клиффорда M_4 над R^4 [135].

Выделим в M_4 две подалгебры, одна из которых реализует пространство представления группы Лоренца, а другая — группы внутренней симметрии $SO(3)$. Если выбрать в качестве образующих алгебры M_4 γ -матрицы Дирака, удовлетворяющие перестановочным соотношениям

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2\eta_{\mu\nu}, \quad \eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, 1, 1, -1), \quad (17.32)$$

то образующие «пространственной» алгебры можно построить в виде

$$e_0 = I, \quad e_1 = \gamma_4, \quad e_2 = \gamma_5, \quad e_3 = \gamma_4 \gamma_5, \quad (17.33)$$

а образующие «изотопической» алгебры — в виде

$$e_0 = I, \quad e^a = \epsilon^{abc} \gamma_b \gamma_c. \quad (17.34)$$

Легко проверить, что каждое из множества элементов (17.33), (17.34) представляет собой некоторую подалгебру алгебры M_4 , а для их образующих e_i и e^a выполняется кватернионный закон композиции.

Алгебру с образующими (17.33) обозначим H_S , а с образующими (17.34) — H_I . Очевидно, что элементы H_S коммутируют с элементами H_I . Благодаря этому в M_4 можно независимо задавать преобразования группы Лоренца и $SO(3)$. Так, например, элемент

$$A = (iA_0^a + A^a)e^a, \quad a = 1, 2, 3, \quad (17.35)$$

под действием группы Лоренца преобразуется по закону

$$A^L = LAL^{-1}, \quad L \in H_I, \quad LL^{-1} = 1, \quad (17.36)$$

а при «изотопических» вращениях —

$$A' = RAR^{-1}, \quad R \in H_I, \quad RR^{-1} = 1, \quad R = R^*. \quad (17.37)$$

В алгебре M_4 можно естественным образом ввести операции « $*$ », « \sim » ($e^a \rightarrow -e^a$), « \rightarrow » ($e_i \rightarrow -e_i$), причем только первая из них есть автоморфизм M_4 , две же другие ни автоморфизмами, ни антиавтоморфизмами M_4 , вообще говоря, не являются, хотя, очевидно, операция « \sim » — антиавтоморфизм алгебры H_I , а « \rightarrow » — антиавтоморфизм алгебры H_S . Легко видеть, что любой эле-

мент из M_4 можно единственным образом представить в виде

$$A = A_0 + \mathbf{A} + \vec{A} + \hat{A}, \quad (17.38)$$

где A_0 — скаляр, \mathbf{A} — элемент H_S (векторная часть), \vec{A} — элемент H_I (изовекторная часть), \hat{A} — элемент $H_S \otimes H_I$ (бивекторная часть). Каждое из приведенных в (17.38) слагаемых можно выразить через A с помощью операций сопряжения следующим образом:

$$A_0 = \frac{1}{4} (A + \bar{A} + \tilde{A} + \tilde{\bar{A}}),$$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{4} (A - \bar{A} + \tilde{A} - \tilde{\bar{A}}) = A_V, \quad (17.39)$$

$$\vec{A} = \frac{1}{4} (A + \bar{A} - \tilde{A} - \tilde{\bar{A}}) = A^V,$$

$$\hat{A} = \frac{1}{4} (A - \bar{A} - \tilde{A} + \tilde{\bar{A}}) = A_B.$$

Используя введенные выше определения и обозначения, уравнения Янга—Миллса модели Джорджи—Глэшоу (17.15), (17.16) можно записать в виде

$$(DG)_B = -e(\Phi W)_B, \quad (17.40)$$

$$(\bar{D}\bar{D}\Phi)_B = -\lambda\Phi (\tilde{\Phi}\Phi - a^2),$$

где

$$W = (-iW_0^a + \mathbf{W}^a)e^a,$$

$$G = (\bar{D}W)_B = ((\bar{\nabla} - e\bar{W}) W)_B,$$

$$\Phi = \Phi^a e^a.$$

В заключение отметим, что в качестве образующих M_4 можно было бы использовать кватернионные операторы (8.18). В свою очередь обозначения (17.39) удобно применять при анализе структуры матричных элементов в квантовой электродинамике в кватернионной формулировке.

ЛИТЕРАТУРА

1. Стойк Д. Я. Краткий очерк истории математики. М., 1969. 328 с.
2. Бурбаки Н. Очерки по истории математики. М., 1963. 292 с.
3. Биденхарн Л., Шаук Дж. Угловой момент в квантовой физике. М., 1984. Т. 1. 302 с.
4. Боголюбов А. Н. Математики, механики. Киев, 1983. 638 с.
5. Burall-Porti C., Marcolongo R., Lattes S. Elements de calcul vectories. Paris, 1910. 229 p.
6. Synge J. E. // Communications of the Dublin Institute for advanced studies. Ser. A, 1972. Vol. 21. P. 1—67.
7. Bell E. T. Men of Mathematics. London, 1939. 652 р.
8. Кантор И. Л., Соловьев А. С. Гиперкомплексные числа. М., 1973. 143 с.
9. Курош А. Г. Лекции по общей алгебре. М., 1973. 399 с.
10. Лобачевский Н. И. // Полн. собр. соч. М., 1946. Т. 1. С. 185—261.
11. Котельников А. П., Фок В. А. Некоторые применения идей Лобачевского в механике и физике. М.; Л., 1950. С. 7—47.
12. Путята Т. В., Лаптев Б. Л., Розенфельд Б. А., Фрадкин Б. Н. Александр Петрович Котельников (1865—1944). М., 1968. 122 с.
13. Диментберг Ф. М. Винтовое исчисление. М., 1965. 197 с.
14. Громов И. А. // Теор. и мат. физика. 1981. Т. 49, № 2. С. 210—218.
15. Федоров Ф. И. // ДАН БССР. 1961. Т. 5, № 3. С. 101—104; № 5. С. 194—198; Федоров Ф. И. // ДАН СССР. 1962. Т. 143, № 1. С. 56—59.
16. Федоров Ф. И. Группа Лоренца. М., 1979. 383 с.
17. Максвелл Дж. К. Избр. соч. по теории электромагнитного поля. М., 1952. 685 с.
18. Болотовский Б. М., Хэвисайд О. М., 1985. 225 с.
19. Курочкин Ю. А. // Вопр. история естествознания и техники. 1984. № 2. С. 155—156.
20. Максвелл Дж. К. Статья и речи. М., 1968. 422 с.
21. Александрова Н. В. // Вопр. история естествознания и техники. 1982. № 1. С. 85—89; Александрова Н. В. // Историко-математические исследования. М., 1982. Вып. 26. С. 205—234.
22. Соломениев Е. Д. // Мат. энциклопедия. М., 1977. Т. 1. С. 1007.
23. Fueter R. // Comm. Math. Helv. 1934—1935. В. 7. С. 307—330; Fueter R. // Ibid., 1936—1937. В. 8. С. 371—378; Fueter R. // Ibid., 1936—1937. В. 9. С. 320—334; Fueter R. // Ibid., 1937—1938. В. 10. С. 306—315.
24. Imaeda K. // Nuovo cimento. 1976. Vol. 32 B, N 1. P. 138—162.
25. Крылов Н. М. // ДАН СССР. 1947. Т. 55, № 9. С. 799—800.
26. Мейлихзон А. С. // ДАН СССР. 1948. Т. 59, № 3. С. 431—434.

27. Курочкин Ю. А. Кватернионы и некоторые приложения их в физике. Мн., 1976. 20 с. (Препринт / Ин-т физики АН БССР: 109).
28. Беллман Р. Введение в теорию матриц. М., 1969. 367 с.
29. Gürsey F., Tze N. C. // Ann. of Phys. 1980. Vol. 128, N 1. P. 29—130.
30. Kilmister C. W. // Proc. of the Royal Irish Academy. Sec. A. 1953. Vol. 55, N 5. P. 73—99.
31. Sachs M., Schwebel S. L. // J. Math. Phys. 1962. Vol. 3, N 5. P. 843—848.
32. Ehlers J., Rindler W., Robinson I. // Perspectives geometry and relativity. Blomington; London, 1966. P. 134—149.
33. Edmonds J. D. Jr. // Intern. J. Theor. Phys. 1972. Vol. 6, N 3. P. 205—224; Edmonds J. D. Jr. // Nuovo cimento. 1973. Vol. 7, N 10. P. 398—400.
34. Казанова Г. Векторная алгебра. М., 1979. 119 с.
35. Зайцев Г. А. Алгебраические проблемы математической и теоретической физики. М., 1974. 191 с.
36. Finkelstein D., Jauch J. M., Schiminovich S., Speiser D. // J. Math. Phys. 1963. Vol. 4, N 1. P. 136—140; N 6. P. 788—796.
37. Jauch J. M. // Group Theory and its applications. 1968. Vol. 1, N 4. P. 66—78.
38. Polubarinov I. V. Matrix and analytic representations of quaternions and octonions. Dubna, 1978. 22 p. (Communications / JINR E2-11169).
39. Rembilinski J. // J. Phys. A. Math. Gen. 1981. Vol. 14. P. 2609—2624.
40. Gursey F. // Talk presented at the Kyoto Conference on Mathematical Problems in Theoretical Physics. 1975. 40 p.
41. Sorgsepp L., Löhhmus J. About nonassociativity in physics and Cayley—Graves octonions. Tartu, 1987. 58 p. (Preprint / Division of Physical, Mathematical and Technical sciences of the Academy of sciences of the Estonian SSR: F-7).
42. Pais A. // Phys. Rev. Lett. 1961. Vol. 7, N 1. P. 291—293.
43. Günaydin M. // J. Math. Phys. 1978. Vol. 17, N 10. P. 1875—1883.
44. Чкареули Дж. // ЯФ. 1981. Т. 34, вып. 2 (8). С. 460—475.
45. Калашников О. К., Конштейн С. Е., Фрадкин Е. С. // ЯФ. 1979. Т. 29, вып. 6. С. 1660—1668.
46. Gamba A. High Energy Physics and Elementary Particles. IAEA. Vienna, 1965. P. 641—646.
47. Gürsey F., Ramond P. // Phys. Lett. 1976. Vol. 60B, N 2. P. 177—180.
48. Эмх Ж. Алгебраические методы в статистической механике и квантовой теории поля. М., 1976. 433 с.
49. Дринфельд В. Г., Манин Ю. И. // ЯФ. 1979. Т. 29, вып. 6. С. 1646—1659.
50. Rastall P. // Rev. Mod. Phys. 1964. Vol. 36. P. 820—832.
51. Мицкевич Н. В. Физические поля в общей теории относительности. М., 1969. 324 с.
52. Фаддеев Д. К. Лекции по алгебре. М., 1984. 416 с.
53. Кострикин А. И., Манин Ю. И. Линейная алгебра и геометрия. М., 1986. 303 с.
54. Новожилов Ю. В. Введение в теорию элементарных частиц. М., 1972. 472 с.
55. Наймарк М. А. Теория представлений групп. М., 1976. 559 с.

56. Желобенко Д. П. Компактные группы Ли и их представления. М., 1970. 664 с.
57. Богуш А. А., Курочкин Ю. А., Лапковский А. К., Федоров Ф. И. // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. науок. 1976. № 1. С. 69—75.
58. Богуш А. А. О векторной (регулярной) параметризации комплексной группы Лоренца $SO(4, C)$. Мин., 1972. 47 с. (Препринт / Ин-т физики АН БССР); Богуш А. А., Федоров Ф. И. // Теор. и мат. физика. 1972. Т. 13, № 1. С. 67—74.
59. Угаров В. А. Специальная теория относительности. М., 1969. 303 с.
60. Федоров Ф. И. // ДАН БССР. 1973. Т. 17, № 3. С. 208—210.
61. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантованных полей. М., 1973. 416 с.
62. Богуш А. А., Курочкин Ю. А. // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. науок. 1974. № 5. С. 75—84.
63. Томкачев Е. А., Томильчик Л. М., Трегубович А. Я. Кватернионная квантовая механика и квазикогерентные состояния. Мин., 1985. 30 с. (Препринт / Ин-т физики АН БССР: 388).
64. Ермолаев Е. А. // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. науок. 1985. № 1. С. 87—90; Ермолаев Е. А. Некоторые применения кватернионов ранга r в теории релятивистских волновых уравнений. Мин., 1986. 36 с. (Препринт / Ин-т физики АН БССР: 435).
65. Волобуев И. П., Мир-Касимов Р. М. Комплексные кватернионы и спинорные представления групп де Ситтера $SO(4,1)$ и $SO(3,2)$. Дубна, 1977. 24 с. (Препринт / ОИЯИ: Р2-10676).
66. Зайцев Г. А., Салуини А. М. // Изв. вузов. Физика. 1972. № 6 (121). С. 14—18.
67. Богуш А. А., Курочкин Ю. А., Федоров Ф. И. // ДАН СССР. 1977. Т. 236, № 1. С. 58—60.
68. Богуш А. А., Курочкин Ю. А. Современные проблемы ОТО. Мин., 1979. С. 193—206.
69. Богуш А. А., Курочкин Ю. А., Федоров Ф. И. // 11-я Междунар. школа молодых ученых по физике высоких энергий и релятивистской ядерной физике. Гомель, 1977. Дубна, 1979. С. 467—479.
70. Курочкин Ю. А. Теория векторов трехмерных пространств постоянной кривизны и ее приложения в релятивистской кинематике. Мин., 1983. 36 с. (Препринт / Ин-т физики АН БССР: 291).
71. Курочкин Ю. А., Федоровых А. М. Теория векторов в пространствах постоянной кривизны произвольной размерности и геометрическая интерпретация конечных преобразований ортогональной и псевдоортогональной групп. Мин., 1985. 34 с. (Препринт / Ин-т физики АН БССР: 399).
72. Розенфельд Б. А. Неевклидовы пространства. М., 1969. 547 с.
73. Курочкин Ю. А., Федоровых А. М. Ковариантные методы в теоретической физике. (Физика элементарных частиц и теория относительности). Мин., 1986. С. 74—80.
74. Картан Э. Теория спиноров. М., 1947. 223 с.
75. Богуш А. А., Федоров Ф. И. // ДАН СССР. 1972. Т. 206, № 6. С. 1033—1036.
76. Богуш А. А. О некоторых свойствах ортогональных преобразований. Мин., 1972. 48 с. (Препринт / Ин-т физики АН БССР).
77. Богуш А. А., Федоров Ф. И., Федоровых А. М. // ДАН СССР. 1974. Т. 214, № 5. С. 985—988.

78. Лапковский А. К. Релятивистская кинематика, неевклидовы пространства и экспоненциальное отображение. Мн., 1985. 263 с.
79. Богуш А. А., Федоров Ф. И. // ДАН БССР. 1961. Т. 5, № 8. С. 327—330.
80. Розенфельд Б. А. История неевклидовой геометрии. М., 1976. 413 с.
81. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М.: УРСС, 2003. 416 с.
82. Кирпичников С. Н., Новоселов В. С. Математические аспекты кинематики твердого тела. Л., 1986. 520 с.
83. Смиг Дж. Классическая динамика. М., 1963. 448 с.
84. Бранец В. Н., Шмыглевский И. П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М., 1973. 319 с.
85. Эйнштейн А. // Собр. науч. тр. М., 1965. Т. 1. С. 7—35.
86. Зоммерфельд А. Электродинамика. М., 1958. 501 с.
87. Паули В. Теория относительности. М., 1983. 336 с.
88. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М., 1967. 459 с.
89. Фок В. А. Теория пространства, времени и тяготения. М., 1955. 504 с.
90. Черников Н. А. // ЭЧАЯ. 1973. Т. 4, вып. 3. С. 773—810.
91. Смородинский Я. А. Эйнштейновский сборник. М., 1971. С. 272—301.
92. Бубелев Э. Г., Черников Н. А. // Acta Phys. Pol. 1964. Т. 26. С. 155—161; Бубелев Э. Г. // Acta Phys. Pol. 1964. Т. 26. С. 279—305.
93. Кадышевский В. Г., Мир-Касимов Р. М., Скачков Н. Б. // ЭЧАЯ. 1972. Т. 2, вып. 3. С. 637—690.
94. Скачков Н. Б., Соловцов И. Л. // ЭЧАЯ. 1978. Т. 9, вып. 1. С. 5—47.
95. Амирханов И. В., Груша Г. В., Мир-Касимов Р. М. // ЭЧАЯ. 1981. Т. 12, вып. 3. С. 651—691.
96. Baldin A. M. e. a. Hadron jets in deep-inelastic $\bar{v}N$ interactions and universality of the jet properties in relative four-velocity space. Dubna, 1987. Р. 17—25. (Rapid communications / JINR: 1 (21) -87).
97. Baldin A. M. e. a. Universal four-dimensional hadron jets and the observability of colour charges. Dubna, 1987. 15 p. (Preprint / JINR: EI-87-142).
98. Смородинский Я. А. // ЖЭТФ. 1962. Т. 43, вып. 6(12). С. 2217—2223.
99. Федоров Ф. И. Теория гиротропии. Мн., 1976. 456 с.
100. Федоровых А. М. // ДАН БССР. 1984. Т. 28, № 2. С. 131—134.
101. Березин А. В., Толкачев Е. А. Некоторые приложения кватернионов в теории классических и квантованных полей. Мн., 1983. 25 с. (Препринт / Ин-т физики АН БССР: 368).
102. Стражев В. И., Томильчик Л. М. Электродинамика с магнитным зарядом. Мн., 1975. 336 с.
103. Фущич В. И., Никитин А. Г. Симметрия уравнений Максвелла. Киев, 1983. 200 с.
104. Курочкин Ю. А., Толкачев Е. А., Томильчик Л. М. // ДАН БССР. 1977. Т. 21, № 11. С. 988—990.
105. Cabibbo N., Ferrari E. // Nuovo cimento. 1962. Vol. 23. Р. 1147—1154.
106. Толкачев Е. А., Томильчик Л. М. // Ковариантные методы в

- теоретической физике. (Физика элементарных частиц и теория относительности). Мин., 1981. С. 44—48.
107. Толкачев Е. А., Томильчик Л. М., Швар Я. М. Дуальная инвариантность и лагранжева формулировка теории калибровочных полей. Мин., 1987. 36 с. (Препринт // Ин-т физики АН БССР: 458).
 108. Тевикян Р. В. // ЖЭТФ. 1966. Т. 50. С. 911; Tevikian R. V. To the theory of magnetic charge. Ереван, 1987. 20 р. (Preprint E-975 (25)-87).
 109. De Faria-Rosa M. A., Recami E., Rodrigues W. A. // Phys. Lett. 1986. Vol. 73, N 6. P. 233—236.
 110. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М., 1982. 620 с.
 111. Березин А. В., Толкачев Е. А., Трегубович А. Я. // Ковариантные методы в теоретической физике. (Физика элементарных частиц и теория относительности). Мин., 1986. С. 37—43.
 112. Левашев А. Е. Движение и двойственность в релятивистской электродинамике. Мин., 1979. 320 с.
 113. Коноплева Н. П., Попов В. Н. Калибровочные поля. М., 1980. 240 с.; Богуш А. А. Введение в полевую теорию элементарных частиц. Мин., 1981. 390 с.
 114. Morita K. // Progr. Theor. Phys. 1982. Vol. 67, N 6. P. 1860—1876.
 115. Зоммерфельд А. Строение атома и спектры. М., 1956. Т. 2. 964 с.
 116. Gursey F. // Nuovo cimento. 1958. Vol. 7. P. 411—415.
 117. Ivanenko D. D., Nicolski K. V. // Z. Phys. 1930. Vol. 63. P. 129—137.
 118. Толкачев Е. А., Ермолаев Е. А. Кватернионы и уравнения для спинорного поля. Мин., 1979. 18 с. (Препринт / Ин-т физики АН БССР: 183).
 119. Ермолаев Е. А. // Весні АН БССР. Сер. фіз.-мат. науок. 1976. № 1. С. 75—78.
 120. Березин А. В., Толкачев Е. А., Федоров Ф. И. // ДАН БССР. 1980. Т. 24, № 24. С. 308—310.
 121. Ермолаев Е. А. // ДАН БССР. 1979. Т. 23, № 9. С. 804—807.
 122. Федоров Ф. И. // Весні АН БССР. Сер. фіз.-мат. науок. 1983. № 5. С. 36—42.
 123. Morita K. // Progr. Theor. Phys. 1986. Vol. 75, N 1. P. 220—223.
 124. Давыдов А. С. Квантовая механика. М., 1973. 704 с.; Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. М., 1974. 752 с.
 125. Березин А. В., Толкачев Е. А. // Изв. вузов. Физика. 1981. Т. 10. С. 43—46.
 126. Федоров Ф. И. // ТМФ. 1970. Т. 2. С. 343—349.
 127. Сикач С. М. // Весні АН БССР. Сер. фіз.-мат. науок. 1984. № 2. С. 84—92.
 128. Галынский М. В., Сикач С. М. // Ковариантные методы в теоретической физике. Мин., 1986. С. 121—126.
 129. Переломов А. М. Обобщенные когерентные состояния и их применения. М., 1987. 270 с.
 130. Мадкин И. А., Манько В. И. Динамические симметрии и когерентные состояния квантовых систем. М., 1979. 319 с.
 131. Perelomov A. M. // Comm. Math. Phys. 1972. Vol. 26, N 3. P. 222—236.
 132. Томильчик Л. М. // Тез. 8-й Всесоюз. конф. по теории элементарных частиц. Ужгород, 1971. С. 31—34.

133. Ахизер А. И., Берестецкий В. Б. Квантовая электродинамика. М., 1969.
134. Hasert F. J. e. a. // Phys. Lett. 1973. Vol. 46B. P. 138—140.
135. Arnisson G. e. a. // Phys. Lett. 1983. Vol. 122B. P. 103—116; Banner M. e. a. // Ibid. P. 476—482.
136. Glashow S. L. // Nucl. Phys. 1961. Vol. 22. P. 579—588; Weinberg S. // Phys. Rev. Lett. 1967. Vol. 19. P. 1264—1267; Salam A. // Proc. Nobel Symposium. Stockholm, 1968. P. 367—377.
137. Хуанг К. Кварки, лептоны и калибровочные поля. М., 1985.
138. Deser S., Teitelboim C. // Phys. Rev. 1976. Vol. D13. P. 1592—1597.
139. McKeon G. // Nucl. Phys. 1979. Vol. B147. P. 299—316.
140. Joshi D. C., Benjwal M. P., Kumar S. // Acta Phys. Pol. 1985. Vol. B16, N 10. P. 901—908.
141. Benjwal M. P., Joshi D. C. // Phys. Rev. 1987. Vol. D36, N 2. P. 629—631.
142. Толкачев Е. А. // ДАН БССР. 1983. Т. 27, № 4. С. 307.
143. Толкачев Е. А. // Тр. междунар. семин. «Теоретико-групповые методы в физике». Звенигород-82. М., 1983. Т. 1. С. 192—196.
144. t'Hooft G. // Nucl. Phys. 1974. Vol. B79. P. 276—284.
145. Поляков А. М. // Письма в ЖЭТФ. 1974. Т. 20. С. 430—433.
146. Julia B., Zee A. // Phys. Rev. 1975. Vol. D11. P. 2227—2232.
147. Georgi M., Glashow S. L. // Phys. Rev. Lett. 1972. Vol. 28. P. 1494—1497.
148. Witten E., Olive D. // Phys. Lett. 1978. Vol. 78. P. 97—101.
149. Rossi P. // Phys. Rep. 1982. Vol. 86. P. 319—362.
150. Богомольный Е. В. // ЯФ. 1976. Т. 24. С. 861—870.
151. Говорков А. Б. // Теор. и мат. физика. 1986. Т. 68, № 3. С. 381—391.
152. Finkelstein D., Jauch J. M., Schiminovich S., Speiser D. // J. Math. Phys. 1963. Vol. 4, N 6. P. 788—796.
153. Goddard P., Olive O. // Rep. Progr. Phys. 1978. Vol. 41. P. 1361—1437.
154. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. М.: УРСС, 2001, Т. 1—3.
155. Dirac P. A. M. // Proc. Roy. Soc. 1931. Vol. A133. P. 60—72.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие ко второму изданию	1
От авторов	3
Краткий исторический очерк развития кватернионного исчисления и его применений в геометрии, механике и физике	5

Глава 1.

НЕКОТОРЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

§ 1. Исключительные алгебры, бикватернионы	12
§ 2. Кватернионная параметризация группы $SO(4, C)$ и ее связь с векторной параметризацией	30
§ 3. Представления группы Лоренца, реализуемые в рамках алгебры кватернионов	48
§ 4. Функции от кватернионов и бикватернионов	53

Глава 2.

ВЕКТОРЫ ТРЕХМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ, СОПОСТАВЛЯЕМЫЕ С ПАРАМИ ТОЧЕК, И КИНЕМАТИКА

§ 5. Кватернионы и пространства постоянной кривизны	59
§ 6. Кинематика твердого тела	79
§ 7. Релятивистская кинематика	88

Глава 3.

КВАТЕРНИОННАЯ ФОРМУЛИРОВКА КЛАССИЧЕСКОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

§ 8. Система уравнений Максвелла—Лоренца	105
§ 9. Электродинамика дуально заряженных частиц	112
§ 10. Макроскопическая электродинамика	119

Глава 4.

КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА И КВАТЕРНИОНЫ

§ 11. Уравнение Дирака	125
§ 12. Некоторые решения квантовомеханического уравнения Дирака на основе кватернионного подхода	138
§ 13. Преобразования кватернионных аналогов γ-матриц и нерелятивистский предел уравнения Дирака	149
§ 14. Квазикогерентные состояния для нерелятивистского спина в магнитном поле	154

Глава 5.

КВАТЕРНИОНЫ В КАЛИБРОВОЧНЫХ ТЕОРИЯХ

§ 15. Квантовая электродинамика	161
§ 16. Дуальная инвариантность уравнений Янга—Миллса	172
§ 17. Калибровочные модели с кватернионной параметриза- цией группы внутренней симметрии	179
Литература	191

Издательство УРСС

специализируется на выпуске учебной и научной литературы, в том числе монографий, журналов, трудов ученых Российской Академии наук, научно-исследовательских институтов и учебных заведений.



Уважаемые читатели! Уважаемые авторы!

Основываясь на широком и плодотворном сотрудничестве с Российским фондом фундаментальных исследований и Российским гуманитарным научным фондом, мы предлагаем авторам свои услуги на выгодных экономических условиях. При этом мы берем на себя всю работу по подготовке издания — от набора, редактирования и верстки до тиражирования и распространения.

Среди вышедших и готовящихся к изданию книг мы предлагаем Вам следующие:

Пенроуз Р. НОВЫЙ УМ КОРОЛЯ. О компьютерах, мышлении и законах физики.

Вигнер Э. Инвариантность и законы сохранения. Этюды о симметрии.

Петрашень М. И., Трифонов Е. Д. Применение теории групп в квантовой механике.

Менский М. Б. Группа путей: измерения, поля, частицы.

Менский М. Б. Метод индуцированных представлений.

Хамермеш М. Теория групп и ее применение к физическим проблемам.

Галицкий В. М., Карнаков Б. М., Коган В. И. Задачи по квантовой механике. Ч. 1, 2.

Ляховский В. Д., Болохов А. А. Группы симметрии и элементарные частицы.

Коноплева Н. П., Попов В. Н. Калибровочные поля.

Розенталь И. Л., Архангельская И. В. Геометрия, динамика, Вселенная.

Сарданашвили Г. А. Современные методы теории поля. Т. 1—4.

Рубаков В. А. Классические калибровочные поля.

Волобуев И. П., Кубышин Ю. А. Дифференциальная геометрия и алгебры Ли в их приложениях в теории поля.

Маслов В. П., Шведов О. Ю. Метод комплексного ростка в задаче многих частиц и квантовой теории поля.

Пригожин И. От существующего к возникающему.

Грин Б. Элегантная Вселенная. Суперструны, скрытые размерности и поиски окончательной теории.

Серия «Синергетика: от прошлого к будущему»

Малинецкий Г. Г., Потапов А. Б. Современные проблемы нелинейной динамики.

Капица С. П., Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г. Синергетика и прогнозы будущего.

Баранцев Р. Г. Методология современного естествознания.

Баранцев Р. Г. и др. Асимптотология — путь к целостной простоте.

Чернавский Д. С. Синергетика и информация (динамическая теория информации).

Трубецков Д. И. Введение в синергетику. Т. 1, 2.

Пригожин И., Стенгерс И. Время. Хаос. Квант. К решению парадокса времени.

Пригожин И., Стенгерс И. Порядок из хаоса. Новый диалог человека с природой.

Пригожин И., Николис Г. Познание сложного. Введение.

Пригожин И., Глендорф П. Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций.

По всем вопросам Вы можете обратиться к нам:
тел./факс (095) 135-44-23, тел. 135-42-46
или электронной почтой urss@urss.ru.

Полный каталог изданий представлен
в Интернет-магазине: <http://urss.ru>

Издательство УРСС

**Книга представляет собой первое в научной
литературе систематическое изложение
применения кватернионов для параметризации
групп пространственно-временной симметрии
и реализации ряда их представлений. Излагается
оригинальный подход к описанию кинематики
и динамики классических и квантованных полей,
основанный на использовании объектов одной
алгебраической природы — бикватернионов.
Приведены краткие сведения из истории
развития кватернионного исчисления и его
приложений.**

1996 ID 14865



9 785354 004034 >

ИЗДАТЕЛЬСТВО
НАУЧНОЙ И УЧЕБНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ



E-mail: URSS@URSS.ru
Каталог изданий
в Internet: <http://URSS.ru>
Тел./факс: 7 (095) 135-44-23
Тел./факс: 7 (095) 135-42-46