М.С. Бичегкуев

Метрические пространства

Теория, задачи, решения

М. С. Бичегкуев

МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

ТЕОРИЯ, ЗАДАЧИ, РЕШЕНИЯ

Учебное пособие

R&C Dynamics РХД
Москва • Ижевск

2005

УДК 515.124
ББК 22.152.1+22.162

Бичегкуев М. С.
Метрические пространства: Теория, задачи, решения. — Москва–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2005. — 192 с.

Книга содержит изложение основ теории метрических пространств, а также разнообразные задачи, иллюстрирующие и дополняющие сущность рассматриваемых понятий.

Пособие предназначено для студентов математических специальностей вузов при изучении курсов математического анализа, теории функций и функционального анализа.

ISBN 5-93972-435-3 **ББК 22.152.1+22.162**

Издание осуществлено при поддержке Научного центра «ФИЗМАТКНИГА».
www.fizmatkniga.ru, тел.: (095) 409-93-28, 408-76-81.

http://rcd.ru
http://ics.org.ru

Памяти моего отца посвящается

Введение

Плодотворная концепция заключается в широком обобщении, ограниченном удачной конкретизацией.

Дж. Литлвуд

При теоретико-множественном подходе к изучению геометрических фигур исследуется взаимное расположение составляющих их точек, фундаментальной характеристикой которого является расстояние между точками. Численная мера (метрика), характеризующая различие этих точек, обладает свойствами (аксиомы метрики), аналогичными свойствам расстояния между двумя точками на плоскости. Такой подход к обобщению понятия расстояния и приводит к понятию метрического пространства.

Первое определение метрического пространства, сохранившееся по существу до настоящего времени, было дано (1906) французским математиком Морисом Фреше в работе «О некоторых положениях функционального исчисления» и явилось ярким примером применения аксиоматического метода. Сам термин «метрическое пространство» впервые использовал Феликс Хаусдорф в своей известной книге «Теория множеств».

Язык метрических пространств, соединяющий в себе наглядность с математической строгостью, широко применяется во многих разделах математики и теоретической физики.

Пособие состоит из 16 параграфов, которые начинаются с изложения теоретического материала. В конце каждого из них (кроме §0) с решениями и указаниями приводятся задачи и упражнения по данной теме, содержащие необходимый материал для усвоения теории. При составлении задач использовались учебники и задачники, указанные в списке использованной литературы.

Несколько слов об обозначениях. Через $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ обозначаются, соответственно, множества натуральных, целых, рациональных, действительных и комплексных чисел. Для сокращения записи будем пользоваться символами математической логики $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ для обозначения связок «*и*», «*или*», «*влечет*» или «*следует*», «*равносильно*». Кванторы $\forall$ и $\exists$ имеют обычный смысл: «*для любого*» и «*существует*». Символ «$:=$» будет обозначать равенство по определению, где двоеточие ставится со стороны определяемого объекта.

Для удобства ссылок в каждом параграфе приводится своя нумерация теорем и задач (например, теорема 5.1 означает теорему 1 из §5). Начало и конец доказательства утверждений будем обозначать знаками ◄, ►, соответственно, а знак ►, поставленный сразу после него, указывает на то, что доказательство нужно провести самостоятельно.

Автор сердечно благодарен профессорам А. Г. Баскакову, А. Е. Гутману и Е. М. Семенову, чьи критические замечания и полезные советы способствовали существенному улучшению содержания книги. За неоценимую помощь при оформлении рукописи хочу поблагодарить С. Д. Иванова и М. А. Шпакова.

§0. Сведения из теории множеств

Никто не может изгнать нас из рая,
который создал нам Кантор.
Д. Гильберт

Этот параграф посвящен краткому обзору системы теоретико-множественных терминов и обозначений, используемых при изложении дальнейшего материала.

0.1. Множества и отношения

Почти все встречающиеся в математике объекты основаны на понятии *множества*, являющегося первоначальным и интуитивно ясным. А именно, множество следует представлять как совокупность объектов произвольной природы, называемых его *элементами*. Руководствуясь соображениями удобства, заглавными буквами латинского и греческого алфавитов будем обозначать множества, а их элементы — строчными буквами.

Выражения «x принадлежит множеству A», или «x есть элемент множества A», или «x есть точка из A» имеют одинаковый смысл и могут быть представлены символически как $x \in A$, где $\in$ есть знак принадлежности. Его отрицание изображается символом $\notin$; выражение «x не принадлежит A» записывается: $x \notin A$.

Множества часто задаются определяющим их свойством. В соответствии с этим запись $\{x \in X : \varphi(x)\}$ обозначает множество всех тех элементов x из X, для которых выполнено условие $\varphi(x)$.

Если любой элемент множества A является элементом множества B, то говорят, что A является *подмножеством множества* B, или A *включено* (или *содержится*) в B, или B *содержит* A, и пишут $A \subset B$ или $B \supset A$. Включение обладает следующими свойствами:

(а) $A \subset A$ (т. е. всякое множество есть подмножество самого себя);

(б) если $A \subset B$ и $B \subset C$, то $A \subset C$.

Множество, содержащее лишь один элемент x, обозначается символом $\{x\}$.

Равенство двух множеств $A = B$ равносильно тому, что справедливы включения $A \subset B$ и $A \supset B$, т. е.

$$(A = B) \Longleftrightarrow ((A \subset B) \wedge (A \supset B)).$$

Если $A \subset B$ и $A \neq B$, то говорят, что A есть *собственное подмножество* B, и пишут $A \subsetneq B$.

Единственное множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым множеством* и обозначается символом $\varnothing$. Для любого множества A выполнено соотношение $\varnothing \subset A$ (так как пустое множество не содержит ни одного элемента, который не принадлежал бы любому другому множеству). Если множество содержит хотя бы один элемент, то оно называется *непустым*.

Пусть A и B — произвольные множества, тогда *объединением множеств* A и B называется множество

$$A \cup B := \{x : (x \in A) \vee (x \in B)\};$$

пересечением множеств A и B называется множество

$$A \cap B := \{x : (x \in A) \wedge (x \in B)\};$$

разностью множеств A и B называется множество

$$A \setminus B := \{x : (x \in A) \wedge (x \notin B)\};$$

симметрической разностью множеств A и B называется множество

$$A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Множества A и B называются *непересекающимися* (или *дизъюнктными*), если $A \cap B = \varnothing$.

Если $A \subset X$, то множество $X \setminus A$ называется *дополнением множества A относительно X*. Очевидно, что дополнением пустого множества является все множество X, и обратно.

Для подмножеств A и B множества X справедливы следующие соотношения:

(а) $X \setminus (X \setminus A) = A$;

(б) $A \subset B \Leftrightarrow X \setminus B \subset X \setminus A$;

(в) $A \cap B = \varnothing \Leftrightarrow A \subset X \setminus B \Leftrightarrow B \subset X \setminus A$;

(г) $A \cup B = X \Leftrightarrow X \setminus B \subset A \Leftrightarrow X \setminus A \subset B$.

Операции объединения и пересечения множеств коммутативны, ассоциативны и дистрибутивны:

$$A \cup B = B \cup A; \quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C);$$
$$A \cap B = B \cap A; \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C);$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C);$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Множества, элементами которого являются множества, называются *семействами*, или *классами, множеств*, а их элементы называются элементами семейства. При этом говорят, что $\{A_i : i \in I\}$ (или $\{A_i\}_{i \in I}$) есть *индексированное семейство* множеств, если каждому элементу i из множества I, называемого *индексным множеством*, поставлено в соответствие множество A_i. Если индексное множество I совпадает с множеством $\{1, 2, \ldots, n\}$, то будем также пользоваться записью $i = \overline{1, n}$ (вместо $i \in I$), где черта сверху означает, что индекс i пробегает значения от 1 до n.

Семейство всех подмножеств множества X будем обозначать символом $\mathscr{P}(X)$. Запись $A \in \mathscr{P}(X)$ означает, что A есть элемент семейства подмножеств множества X, т. е. является подмножеством множества X, и значит, можно также записать, что $A \subset X$. Ясно, что соотношения $X \in \mathscr{P}(X)$ и $\varnothing \in \mathscr{P}(X)$ верны всегда.

Объединением (или соответственно, *пересечением*) *семейства* множеств $\{A_i : i \in I\}$ называется множество

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \cup\{A_i : i \in I\} := \{x : \exists i_0 \in I, \ x \in A_{i_0}\}$$
$$\left(\bigcap_{i \in I} A_i = \cap\{A_i : i \in I\} := \{x : x \in A_i \text{ для всех } i \in I\}\right).$$

Семейство $\{A_i : i \in I\} \subset \mathscr{P}(X)$ называется *покрытием множества* X, если $\bigcup\limits_{i \in I} A_i = X$ (т. е. для каждого $x_0 \in X$ существует индекс $i_0 \in I$, такой, что $x_0 \in A_{i_0}$).

Покрытие $\{A'_i : i \in I'\}$ множества X называется *подпокрытием покрытия* $\{A_i : i \in I\}$ множества X, если $I' \subset I$ и $A'_i = A_i$ для всех $i \in I'$.

Покрытие $\{A_i : i \in I\}$ множества X называется *разбиением множества* X, если все его элементы не пусты и попарно не пересекаются.

В теории множеств важную роль играют *формулы де Моргана*: если X — некоторое множество и $\{A_i : i \in I\} \subset \mathscr{P}(X)$, то имеют место следующие утверждения:

(а) дополнение объединения множеств A_i равно пересечению их дополнений

$$X \setminus \cup\{A_i : i \in I\} = \cap\{X \setminus A_i : i \in I\};$$

(б) дополнение пересечения множеств A_i равно объединению их дополнений

$$X \setminus \cap\{A_i : i \in I\} = \cup\{X \setminus A_i : i \in I\}.$$

Пусть X и Y — заданные непустые множества. Рассмотрим произвольные элементы $x \in X, y \in Y$ и связанные с ними множества $\{x\}, \{y\}, \{x, y\}$. Двухэлементное множество $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ называется *упорядоченной парой* (или просто *парой*) *с первым элементом* x и *вторым элементом* y и обозначается символом (x, y). Термин «первый» для элемента $x \in X, x \neq y$, оправдывается тем, что $\{x\} \in \{\{x\}, \{x\, y\}\}$, а $\{y\} \notin \{\{x\}, \{x, y\}\}$.

Основное свойство, характеризующее понятие упорядоченной пары, устанавливает

Теорема 0.1.1. *Для того, чтобы выполнялось равенство* $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$, *необходимо и достаточно, чтобы* $x_1 = x_2$ *и* $y_1 = y_2$.

◀ Необходимость. Допустим, что $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$. Непосредственно из определения упорядоченной пары имеем

$$\{x_2\} \in (x_1, y_1), \qquad \{x_2, y_2\} \in (x_1, y_1),$$

откуда возможны следующие случаи:

$$\begin{array}{ll} (1)\ \{x_2\} = \{x_1\}; & (2)\ \{x_2\} \in \{x_1, y_1\}; \\ (3)\ \{x_2, y_2\} \in \{x_1\}; & (4)\ \{x_2, y_2\} = \{x_1, y_1\}. \end{array}$$

Из (1) следует, что $\{x_2, y_1\} = \{x_2, y_2\}$, а значит, $y_1 = y_2$. В случае (2) имеем равенства $x_1 = x_2 = y_1$, откуда вытекает, что $\{x_2, y_2\} = \{x_2, y_1\}$, т. е. $y_2 = y_1$. Если выполняется (3), т. е. $x_2 = x_1 = y_2$, то, учитывая $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$, получаем $\{x_2, y_1\} = \{x_1, y_2\}$. Следовательно, $y_1 = y_2$. Наконец, если $\{x_2, y_2\} = \{x_1, y_1\}$, то $\{x_2\} = \{x_1\}$, и случай (4) сводится к случаю (1).

Достаточность вытекает из очевидной цепочки равенств

$$(x_1, y_1) = \{\{x_1\}, \{x_1, y_1\}\} = \{\{x_2\}, \{x_2, y_2\}\} = (x_2, y_2)$$

и определения упорядоченной пары. ▶

Декартовым произведением множеств X и Y называется множество упорядоченных пар (x, y):

$$X \times Y := \{(x, y) : (x \in X) \wedge (y \in Y)\}.$$

При этом множество X называют *первым множителем*, а Y — *вторым множителем*. Элемент x упорядоченной пары $(x, y) \in X \times Y$ называется *первой координатой*, а y — *второй координатой*. Ясно, что если $X \times Y = \varnothing$, то это соотношение эквивалентно тому, что $X = \varnothing$ или $Y = \varnothing$.

Пусть $\{A_s : s \in S\} \subset \mathscr{P}(X)$ и $\{B_t : t \in T\} \subset \mathscr{P}(Y)$, где все рассматриваемые подмножества непустые. Тогда из определения декартова произведения вытекают следующие его свойства:

(а) $(A_1 \times B) \cup (A_2 \times B) = (A_1 \cup A_2) \times B$;
(б) $(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2)$;
(в) $(A_1 \setminus A_2) \times B = (A_1 \times B) \setminus (A_2 \times B)$;
(г) $(A_1 \subset A_2,\ B_1 \subset B_2) \Rightarrow (A_1 \times B_1 \subset A_2 \times B_2)$;
(д) $A \times B = (A \times Y) \cap (X \times B)$;
(е) $(X \times Y) \setminus (A \times B) = ((X \setminus A) \times Y) \cup (X \times (Y \setminus B))$;
(ж) $(A_1 \times B_1 = A_2 \times B_2) \Rightarrow (A_1 = A_2,\ B_1 = B_2)$;
(з) $\bigcup\limits_s A_s \times \bigcup\limits_t B_t = \bigcup\limits_{s,t} (A_s \times B_t)$;
(и) $\bigcap\limits_s A_s \times \bigcap\limits_t B_t = \bigcap\limits_{s,t} (A_s \times B_t)$.

Декартово произведение конечного семейства множеств $\{A_s : s = \overline{1,k}\}$ определяется по индукции формулой

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k = (A_1 \times \ldots \times A_{k-1}) \times A_k.$$

При этом, если $A_i = A$ для любого $i = \overline{1,k}$, то пишут

$$\underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{k \text{ раз}} = A^k.$$

Всякое подмножество R декартова произведения $X \times Y$ двух множеств X и Y называется *отношением между множествами* X и Y, а при $X = Y$ называется *отношением* в множестве X. Если $R \subset X \times Y$ — отношение, то соотношение $(x, y) \in R$ (часто пользуются и другим обозначением: xRy) выражается с помощью слов: (элемент) y соответствует (элементу) x по (или «посредством», или «относительно») R.

Если $R \subset X \times Y$ — некоторое отношение, то *проекции* R на множества X и Y определяются формулами

$$\mathrm{pr}_X R := \{x \in X : \exists y \in Y,\ (x, y) \in R\},$$
$$\mathrm{pr}_Y R := \{y \in Y : \exists x \in X,\ (x, y) \in R\}$$

и называются, соответственно, *областью определения отношения* R (обозначается $D(R)$), *областью значений отношения* R (обозначается $\mathrm{Im}(R)$). Ясно, что $R \subset \mathrm{pr}_X R \times \mathrm{pr}_Y R$.

Тождественным, или *диагональным, отношением* во множестве X называется множество

$$\triangle_X := \{(x, x) : x \in X\} \subset X \times X.$$

Отношение

$$R^{-1} := \{(y, x) : (x, y) \in R\} \subset Y \times X$$

называется *обратным отношением* к отношению $R \subset X \times Y$.

Композицией отношений $S \subset X \times Y$ и $R \subset Y \times Z$ называется множество

$$R \circ S := \{(x, z) : \exists y \in Y,\ (x, y) \in S,\ (y, z) \in R\} \subset X \times Z.$$

Для произвольного отношения R имеют место включения

$$R \circ R^{-1} \supset \triangle_{\mathrm{Im}(R)}, \quad R^{-1} \circ R \supset \triangle_{D(R)}.$$

Пусть R, S, T — некоторые отношения. Тогда имеют место следующие равенства

(а) $D(R^{-1}) = \mathrm{Im}(R)$, $\mathrm{Im}(R^{-1}) = D(R)$;

(б) $(R^{-1})^{-1} = R$;

(в) $R \circ (S \circ T) = (R \circ S) \circ T$;

(г) $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$.

0.2. Отображения множеств

Пусть X, Y — произвольные множества. Отношение $\Gamma \subset X \times Y$ называется *функциональным*, если оно удовлетворяет следующим условиям:

(i) $D(\Gamma) = X$;

(ii) $[(x, y_1) \in \Gamma] \wedge [(x, y_2) \in \Gamma] \Rightarrow y_1 = y_2$.

Таким образом, каждое функциональное отношение $\Gamma \subset X \times Y$ порождает соответствие $f = f_\Gamma$, сопоставляющее каждому $x \in X$ определенный (единственный) элемент $y \in Y$, а именно тот, при котором пара (x, y) принадлежит Γ. При этом полученное соответствие $f = f_\Gamma$ принято называть *отображением множества* X в множество Y (или *функцией* на множестве X со значениями в Y) и пишут $f\colon X \to Y$ или $X \xrightarrow{f} Y$, а отношение $\Gamma \subset X \times Y$ (обозначаемое более подробно Γ_f) — *графиком отображения* f, т. е.

$$\Gamma_f := \{(x, y) \in X \times Y : (x \in X) \wedge (y = f(x))\}.$$

Область определения $D(\Gamma_f)$ отношения Γ_f называется *областью определения отображения* f (обозначается $D(f)$), а область значений $\mathrm{Im}(\Gamma_f)$ отношения Γ_f — *множеством значений отображения* f (обозначается $\mathrm{Im}(f)$).

В тех случаях, когда в качестве области определения и множества значений отображения выступают множества определенной природы, вместо термина «отображение» используют другие (например, если отображение определено на некотором числовом множестве и действует в числовое множество, то вместо «отображение» обычно используют термин «функция»).

Рассмотрим произвольное отображение $f\colon X \to Y$. Пусть $x \in X$ и y — тот единственный элемент из Y, при котором $(x, y) \in \Gamma_f$. Тогда элемент y называется *значением отображения* f *в точке* x или *образом элемента* x при отображении f и обозначается $y = f(x)$, а элемент x — *прообразом элемента* y при отображении f. В этом случае говорят, что f отображает (или преобразует) x в y, и пишут $f\colon x \mapsto y$, или $x \overset{f}{\mapsto} y$, или более подробно $f : X \ni x \mapsto f(x) \in Y$.

Образом множества $A \subset X$ при отображении $f\colon X \to Y$ называется множество

$$f(A) := \{y \in Y : \exists x\ (x \in A) \wedge (y = f(x))\} = \{f(x) : x \in A\}.$$

Отображение $f\colon X \to Y$ называется *сюръективным* (или *отображением на*), если $f(X) = Y$; *инъективным*, если из $f(x_1) = f(x_2)$ следует, что $x_1 = x_2$; *биективным*, если оно сюръективно и инъективно.

Рассмотрим биективное отображение $f\colon X \to Y$. Тогда можно определить отображение f^{-1} следующим образом: если $f(x) = y$, то положим $f^{-1}(y) = x$, т. е. элементу $y \in Y$ ставится в соответствие тот элемент $x \in X$, образом которого при отображении f является элемент y. В силу сюръективности f такой элемент $x \in X$ найдется, а ввиду инъективности f он единственный. Следовательно, определено отображение $f^{-1} : Y \to X$, называемое *обратным отображением* к исходному отображению f.

Непосредственно из построения обратного отображения f^{-1} вытекает, что оно является биективным. Кроме того, обратное к нему отображение $(f^{-1})^{-1}\colon X \to Y$ совпадает с отображением $f\colon X \to Y$, т. е. $(f^{-1})^{-1} = f$.

Прообразом множества $B \subset Y$ при отображении $f\colon X \to Y$ называется множество

$$f^{-1}(B) := \{x \in X : \exists y\ (y \in B) \wedge (y = f(x))\} = \{x \in X : f(x) \in B\},$$

или в другой записи

$$f^{-1}(B) := \mathrm{pr}_X(\Gamma_f \cap (X \times B)).$$

Из последнего равенства и определения образа множества $A \subset X$ при отображении $f\colon X \to Y$ имеем

$$f(A) = \{y \in Y : A \cap f^{-1}(\{y\}) \neq \varnothing\} = \mathrm{pr}_Y(\Gamma_f \cap (A \times Y)).$$

Пусть $f\colon X \to Y$ и A_i, B_i $(i \in I)$ — произвольные подмножества множеств X и Y, соответственно. Тогда справедливы следующие формулы:

(а) $f(A_1 \bigcup A_2) = f(A_1) \bigcup f(A_2)$;

(а$'$) $f\left(\bigcup\limits_{i\in I} A_i\right) = \bigcup\limits_{i\in I} f(A_i)$;

(б) $f(A_1 \bigcap A_2) \subset f(A_1) \bigcap f(A_2)$;

(б$'$) $f\left(\bigcap\limits_{i\in I} A_i\right) \subset \bigcap\limits_{i\in I} f(A_i)$;

(в) $f(A_1 \setminus A_2) \subset f(A_1) \setminus f(A_2)$;

(г) $(A_1 \subset A_2) \Rightarrow (f(A_1) \subset f(A_2))$;

(д) $f^{-1}(B_1 \bigcap B_2) = f^{-1}(B_1) \bigcap f^{-1}(B_2)$;

(д$'$) $f^{-1}\left(\bigcap\limits_{i\in I} B_i\right) = \bigcap\limits_{i\in I} f^{-1}(B_i)$;

(е) $f^{-1}(B_1 \bigcup B_2) = f^{-1}(B_1) \bigcup f^{-1}(B_2)$;

(е$'$) $f^{-1}\left(\bigcup\limits_{i\in I} B_i\right) = \bigcup\limits_{i\in I} f^{-1}(B_i)$;

(ж) $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$;

(з) $(B_1 \subset B_2) \Rightarrow (f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2))$;

(и) $A \subset f^{-1}(f(A))$;

(к) $f(f^{-1}(B)) = B \bigcap f(X) \subset B$;

(л) $f(A) \bigcap B = f(A \bigcap f^{-1}(B))$;

(м) $(f(A) \subset B) \Leftrightarrow (A \subset f^{-1}(B))$, причем, если f — инъективное отображение, то включения (б), (б$'$) и (в) превращаются в равенства:

$$f\left(A_1 \bigcap A_2\right) = f(A_1) \bigcap f(A_2);$$
$$f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} f(A_i);$$
$$f(A_1 \setminus A_2) = f(A_1) \setminus f(A_2).$$

Для отображения $f\colon X \to Y$ имеют место следующие утверждения:

(а) (f — сюръективно) $\Leftrightarrow$ ($f(f^{-1}(B)) = B$ для любого $B \subset Y$);

(б) (f — инъективно) $\Leftrightarrow$ ($f^{-1}(f(A)) = A$ для любого $A \subset X$);

(в) (f — биективно) $\Leftrightarrow$ ($f^{-1}(f(A)) = A$ и $f(f^{-1}(B)) = B$ для любых множеств $A \subset X$ и $B \subset Y$).

Говорят, что отображение $f\colon X \to Y$ *постоянно*, если $f(x_1) = f(x_2)$ для любых $x_1, x_2 \in X$.

Отображение $I_X\colon X \to X$, определенное равенством $I_X(x) = x$ для всех $x \in X$, называется *тождественным отображением* множества X.

Если заданы отображения $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to Z$, то можно построить новое отображение

$$g \circ f\colon X \to Z,$$

значения которого на элементах множества X определяются формулой

$$(g \circ f)(x) := g(f(x)).$$

Построенное отображение $g \circ f$ называется *композицией отображений* f и g. Операция композиции ассоциативна, т. е. если $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$, $h\colon Z \to W$, то справедливо равенство

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Отметим, что даже в том случае, когда обе композиции $g \circ f$ и $f \circ g$ определены, вообще говоря,

$$g \circ f \neq f \circ g.$$

Пусть в композиции $f_n \circ \ldots \circ f_1$ все члены одинаковы и равны f, тогда ее обозначают f^n и называют *n-й степенью отображения* f.

Если $A \subset X$, то отображение $f\colon X \to Y$ порождает отображение $g\colon A \to Y$ по правилу $g(x) = f(x)$ для всех $x \in A$, которое называется *сужением отображения* f на множество A и обозначается символом $f|_A$, а отображение f называется *продолжением отображения* g на множество X. При этом имеют место формулы, относящиеся к образам и прообразам при сужениях:

$$(f|_A)(B) = f(B),\ B \subset A; \quad (f|_A)^{-1}(C) = A \cap f^{-1}(C),\ C \subset Y.$$

Отображения $\pi_X\colon X \times Y \to X$ и $\pi_Y\colon X \times Y \to X$, заданные на декартовом произведении $X \times Y$ и определенные формулами $\pi_X(x, y) = x$ и $\pi_Y(x, y) = y$, называются *отображениями проектирования* на сомножители X и Y.

Пусть заданы отображения $g_1\colon X \to Y_1$ и $g_2\colon X \to Y_2$. Тогда отображение $g\colon X \to Y_1 \times Y_2$, определенное условием $g(x) = (g_1(x), g_2(x))$ для каждого $x \in X$, называется *диагональным произведением отображений* g_1 и g_2, которые принято называть *компонентами отображения* g. Ясно, что $g_1 = \pi_{Y_1} \circ g$ и $g_2 = \pi_{X_1} \circ g$ и имеют место следующие формулы:

$$g(A) \subset g_1(A) \times g_2(A), \text{ где } A \subset X;$$

$$g^{-1}(B_1 \times B_2) = g_1^{-1}(B_1) \cap g_2^{-1}(B_2), \text{ где } B_1 \subset Y_1 \text{ и } B_2 \subset Y_2.$$

Если заданы отображения $f_1\colon X_1 \to Y_1$ и $f_2\colon X_2 \to Y_2$, то отображение $f\colon X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2$, определяемое по формуле $f(x_1, x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2))$, обозначается через $f_1 \times f_2$ и называется *прямым произведением* f_1 и f_2, а сами f_1 и f_2 — сомножителями этого произведения. Из этого определения получаем соотношения:

$$f(A_1 \times A_2) = f(A_1) \times f(A_2), \text{ где } A_1 \subset X_1 \text{ и } A_2 \subset X_2;$$

$$f^{-1}(B_1 \times B_2) = f_1^{-1}(B_1) \times f_2^{-1}(B_2), \text{ где } B_1 \subset Y_1 \text{ и } B_2 \subset Y_2.$$

Прямое произведение $f = f_1 \times f_2$ может быть истолковано как диагональное произведение отображений $f_{Y_1}\colon X_1 \times X_2 \to Y_1$ и $f_{Y_2}\colon X_1 \times X_2 \to Y_2$, где

$$f_{Y_1} := \pi_{Y_1} \circ (f_1 \times f_2) := f_1 \circ \pi_{X_1}\colon X_1 \times X_2 \to Y_1,$$

$$f_{Y_2} := \pi_{Y_2} \circ (f_1 \times f_2) := f_2 \circ \pi_{X_2}\colon X_1 \times X_2 \to Y_2.$$

Пусть $\{A_s : s \in S\}$ — некоторое семейство множеств. Множество всех функций f, действующих из S в $\bigcup\limits_{s \in S} A_s$, таких, что $f(s) \in A_s$ для любого $s \in S$, обозначается $\mathop{\times}\limits_{s \in S} A_s$ (или $\mathop{\times}\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ в случае последовательности множеств $A_1, A_2, \ldots$) и называется *декартовым произведением* семейства множеств $\{A_s : s \in S\}$. Для $f \in \underset{s\in S}{\times} A_s$ точка $f(s) \in A_s$ называется *s-ой координатой* функции f. Элемент декартова произведения $\underset{s\in S}{\times} A_s$, s-я координата которого есть точка $x_s \in A_s$, будет обозначаться в дальнейшем символом $\{x_s\}$ или $\{x_s : s \in S\}$.

0.3. Упорядоченные множества и лемма Цорна

Отношение R в множестве X, т.е. подмножество R произведения $X \times X$, называется *симметричным*, если $R = R^{-1}$; *антисимметричным*, если $R \cap R^{-1} \subset \Delta_X$; *транзитивным*, если $R \circ R \subset R$; *рефлексивным*, если $\Delta_X \subset R$.

Отношение R в множестве X называется *отношением порядка*, если оно рефлексивно, транзитивно и антисимметрично, т. е. для любых элементов x, y, $z \in X$ выполнены следующие условия:

(а) рефлексивность: $(x, x) \in R$;

(б) транзитивность: $\big((x,y) \in R\big) \wedge \big((y,z) \in R\big) \Rightarrow \big((x,z) \in R\big)$;

(в) антисимметричность: $\big((x,y) \in R\big) \wedge \big((y,x) \in R\big) \Rightarrow \big(x = y\big)$.

Отношение порядка R обозначают также символом $\leqslant$ и вместо $(x, y) \in R$ пишут $x \leqslant y$. При этом, если $x \leqslant y$, то говорят, что y *мажорирует* x, а элемент x *минорирует* y.

Отношение порядка $\leqslant$, вообще говоря, не позволяет сравнивать любые два элемента, поэтому его также называют *отношением частичного упорядочивания*, а исходное множество X с заданным в нем отношением порядка – *частично упорядоченным множеством* и обозначают $(X, \leqslant)$.

Элемент x из $(X, \leqslant)$ называется *мажорантой*, или *верхней границей* (соответственно, *минорантой*, или *нижней границей*), множества $A \subset X$, если $a \leqslant x$ (соответственно, $x \leqslant a$) для любого $a \in A$. Множество $A \subset X$ называется *ограниченным сверху* (*снизу*) в $(X, \leqslant)$, если оно обладает хотя бы одной мажорантой (минорантой). *Наибольшим* (*наименьшим*) элементом множества $A \subset X$ называется такой элемент $a \in A$, который служит мажорантой (минорантой) A и обозначается $\max_{(X,\leqslant)} A$ ($\min_{(X,\leqslant)} A$). Элемент $x_0 \in X$ ($x^0 \in X$) называется *точной нижней* (*верхней*) *гранью* множества $A \subset X$ и обозначается $\inf_{(X,\leqslant)} A$ ($\sup_{(X,\leqslant)} A$), если он служит наибольшей минорантой (наименьшей мажорантой) для A, т. е. $x_0 = \inf_{(X,\leqslant)} A$ ($x^0 = \sup_{(X,\leqslant)} A$) означает, что

(i) x_0 — миноранта (x^0 – мажоранта) множества A;

(ii) $x \leqslant x_0$ ($x^0 \leqslant x$) для любой миноранты (мажоранты) x множества A.

Элемент $x \in X$ называется *максимальным* в $(X, \leqslant)$, если из неравенства $x \leqslant y$, $y \in X$, следует равенство $x = y$. Элемент $z \in X$ называется *минимальным* в $(X, \leqslant)$, если из неравенства $y \leqslant z$, $y \in X$ следует равенство $z = y$.

Отношение L в множестве X называется *отношением линейного порядка*, если оно обладает следующими свойствами:

(а) если $(x, y) \in L$ и $(y, z) \in L$, то $(x, z) \in L$;

(б) если $(x, y) \in L$, то соотношение $(y, x) \in L$ не имеет места;

(в) если $x \neq y$, то либо $(x, y) \in L$, либо $(y, x) \in L$.

Из свойства (в) получаем, что в отличие от отношения порядка линейный порядок позволяет сравнивать между собой любые (различные) элементы из X.

Отношение линейного порядка L будем обозначать символом $<$.

Множество X вместе с некоторым отношением линейного порядка $<$ называется *линейно упорядоченным множеством*, и пишут $(X, <)$.

Пусть множество X линейно упорядочено отношением $<$, тогда, положив для любых x, $y \in X$

$$x \leqslant y \text{ в том и только в том случае, когда } x < y \text{ или } x = y,$$

получим некоторый порядок в множестве X. Следовательно, каждое линейно упорядоченное множество можно рассматривать как некоторое частично упорядоченное множество.

Если для любой пары x, y элементов подмножества A частично упорядоченного множества X имеет место одно из соотношений $x \leqslant y$ или $y \leqslant x$, то, полагая

$$x < y \text{ в том и только в том случае, когда } x \leqslant y \text{ и } x \neq y,$$

получим некоторый линейный порядок на A. При этом говорят, что A — линейно упорядоченное подмножество частично упорядоченного множества X.

Замечание 0.3.1. В множестве действительных чисел $\mathbb{R}$ отношение $\leqslant$ называется *неравенством*, а отношение $<$ — *строгим неравенством*.

Для любой пары чисел $a, b \in \mathbb{R}$, где $a < b$, приведем обозначения и названия для перечисленных ниже подмножеств из $\mathbb{R}$:

$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ – интервал ab;
$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\}$ – отрезок или сегмент ab;
$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\}$ – полуинтервал ab, содержащий число b;
$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\}$ – полуинтервал ab, содержащий число a.

Интервалы, отрезки или полуинтервалы называются *числовыми промежутками*, или просто *промежутками*. При этом множества вида

$$(a, +\infty) = (a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\};$$
$$[a, +\infty) = [a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x\};$$
$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : a > x\};$$
$$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : a \geqslant x\},$$

а также $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$ называются *неограничеными промежутками*. Употребление символов $+\infty$ и $-\infty$ связано с неограниченностью множества $\mathbb{R}$ сверху ($\sup \mathbb{R} = \infty$) и снизу ($\inf \mathbb{R} = -\infty$).

При доказательстве многих утверждений, касающихся некоторого множества объектов, возникает естественным образом некоторая частичная упорядоченность, что дает возможность применить одну из основополагающих теорем теории множеств, известную как

Лемма Цорна. *Если каждое линейно упорядоченное подмножество частично упорядоченного множества $(X, \leqslant)$ имеет мажоранту (миноранту), то в X существует максимальный (минимальный) элемент.*

Частично упорядоченное множество $(I, \leqslant)$ называется *направленным*, если для любых $i, j \in I$ существует такой элемент $k \in I$, что $i \leqslant k$, $j \leqslant k$, т. е. для любого двухэлементного множества из I существует мажоранта.

Обобщенной последовательностью в множестве Y называется отображение, действующее из направленного множества $(I, \leqslant)$ в Y.

0.4. Отношение эквивалентности

Отношение $E \subset X \times X$ называется *отношением эквивалентности* в множестве X, если оно удовлетворяет следующим условиям:

(E1) рефлексивность: $(\forall x \in X) : (x, x) \in E$ (т. е. $\Delta_X \subset E$);

(E2) симметричность: $(x, y) \in E \Rightarrow (y, x) \in E$ (т. е. $E = E^{-1}$);

(E3) транзитивность: $(x, y) \in E, (y, z) \in E$ (т. е. $E \circ E = E$).

Если E — отношение эквивалентности в X, то, очевидно, его область определения $D(E)$ совпадает с X. Вследствие этого отношение эквивалентности в X называют также отношением эквивалентности на X.

Элементы $x, y \in X$ называются *эквивалентными*, если $(x, y) \in E$. При этом часто употребляют запись $x \sim y \pmod E$ или, если это не может вызвать недоразумений, просто $x \sim y$.

Пусть E — отношение эквивалентности на множестве X и x — произвольный элемент из X. Тогда множество

$$[x]_E = \{y \in X : (x, y) \in E\}$$

называется *классом эквивалентности* (или *классом смежности*) элемента x по отношению E. Другими словами, $[x]_E$ есть E-образ одноэлементного множества $\{x\}$.

Теорема 0.4.1. *Пусть E — отношение эквивалентности на X. Тогда классы эквивалентности обладают следующими свойствами:*

(a) $(\forall x \in X) : [x]_E \neq \varnothing$;

(б) $(\forall x_1, x_2 \in X) : [x_1]_E \cap [x_2]_E \neq \varnothing \Rightarrow [x_1]_E = [x_2]_E$;

(в) $X = \bigcup\limits_{x \in X} [x]_E$.

◀ (а) Из рефлексивности отношения E следует, что для каждого $x \in E$ справедливо $x \in [x]_E$, т. е. $[x]_E \neq \varnothing$.

(б) Если $[x_1]_E \cap [x_2]_E \neq \varnothing$ и $x_1 = x_2$, то утверждение тривиально. Поэтому будем считать, что $x_1 \neq x_2$. Зафиксируем элемент $x \in [x_1] \cap [x_2]$ и возьмем произвольный элемент $y \in [x_2]$. Тогда из соотношений $(x_2, x) \in E$, $(x_2, y) \in E$ в силу симметричности E имеем $(x, x_2) \in E$, $(x_2, y) \in E$. Значит, $(x, y) \in E$. Теперь, принимая во внимание включение $x \in [x_1]_E$, т. е. $(x_1, x) \in E$, согласно транзитивности отношения E, получаем $(x_1, y) \in \in E$, т. е. $y \in [x_1]_E$. Так как y — произвольный элемент из $[x_2]_E$, то установлено включение $[x_2]_E \subset [x_1]_E$.

Аналогично рассуждая получаем, что $[x_1]_E \subset [x_2]_E$. Итак, имеет место равенство $[x_1]_E \subset [x_2]_E$.

(в) Так как для любого элемента $x \in X$ справедливо включение $x \in [x]_E$, то $\{x\} \subset [x]_E$. Значит,

$$X = \bigcup_{x \in X} \{x\} \subset \bigcup_{x \in X} [x]_E.$$

С другой стороны, учитывая соотношение $[x]_E \subset X$, получаем обратное включение: $\bigcup\limits_{x\in X} [x]_E \subset X$. Следовательно, $X = \bigcup\limits_{x\in X} [x]_E$. ►

Следствие 0.4.1. *Если* $x_1 \in [x]_E$, *то* $[x_1] = [x]$. ►

Следствие 0.4.2. *Если* $x_1 \notin [x]_E$, *то* $[x_1] \cap [x]_E = \varnothing$. ►

Из утверждений (б) и (в) теоремы 0.4.1 имеем, что всякое отношение эквивалентности на множестве X определяет разбиение множества. Справедливо обратное: всякое разбиение $\{A_s : s \in S\}$ множества X задает некоторое отношение эквивалентности E на X, определенное условием

$$((x, y) \in E) \iff (x, y \in A_s \text{ для некоторого } s \in S).$$

Объединение классов эквивалентности по E всех точек множества $A \subset X$ называется *насыщением множества* A по E и обозначается $[A]_E$, т. е.

$$[A] = \bigcup_{x\in A} [x]_E.$$

В случае, когда $[A] = A$, множество A называется *насыщенным*.

Согласно следствию 0.4.1, примером насыщенного множества является каждый класс эквивалентности, а именно: имеет место равенство

$$\big[[x]_E\big]_E = [x]_E. \tag{7.1}$$

Далее, непосредственно из определения насыщенного множества и теоремы 0.4.1 (а), следует справедливость включения

$$A \subset [A]$$

для любого множества $A \subset X$.

Пусть X – произвольное непустое множество и E – отношение эквивалентности на X. Множество, элементами которого служат классы эквивалентности по отношению E, называется *фактор-множеством* X по E и обозначается X/E.

Отображение $p : X \to X/E$, которое каждому элементу $x \in X$ ставит в соответствие класс эквивалентности $[x]_E \in X/E$, называется *фактор-отображением* (или *каноническим отображением*) X на X/E. Отметим, что p является однозначным отображением.

Теорема 0.4.2. *Пусть E – отношение эквивалентности на X и p – фактор-отображение X на X/E. Тогда*

$$((x, y) \in E) \iff (p(x) = p(y)).$$

◀ ($\Rightarrow$) Включение $(x,y) \in E$ (или, по-другому, $y \in [x]_E$) равносильно, согласно следствию 0.4.1, равенству $[x] = [y]$, т. е. $p(x) = p(y)$.

($\Leftarrow$) Если $p(x) = p(y)$, т. е. $[x] = [y]$, то $y \in [x]_E$, что означает включение $(x,y) \in E$. ▶

Из свойств классов эквивалентности и определения отображения p имеем:

(а) $\forall x \in X : x \in p(x)$;

(б) $\forall x, y \in X : x \in p(y) \Rightarrow y \in p(x)$;

(в) $\forall x, y, z \in X : y \in p(x), z \in p(y) \Rightarrow z \in p(x)$.

Пусть A — произвольное непустое подмножество множества X. Тогда из определения насыщения и образа множества при отображении $p : X \to X/E$ имеем

$$p(A) = p(\bigcup_{x\in A}\{x\}) = \bigcup_{x\in A} p(x) = \bigcup_{x\in A} [x]_E = [A]_E.$$

Итак, образ каждого множества $A \subset X$ совпадает с насыщением этого множества $[A]_E$ по E, в частности, $p([x]_E) = [x]_E$.

0.5. Мощность множества

Множества X и Y называются *равномощными* (или *эквивалентными* с точки зрения теории множеств), если существует биективное отображение X на Y. Легко видеть, что отношение равномощности между множествами рефлексивно, симметрично и транзитивно, т. е. является отношением эквивалентности.

Напомним две известные теоремы из теории множеств (см. например, [1], гл. III, §6):

Теорема Кантора – Бернштейна. *Если в множестве X существует подмножество X_0, равномощное Y, а в Y существует подмножество Y_0, равномощное X, то множества X и Y равномощны.*

Теорема о сравнении мощностей. *Для произвольных двух множеств X и Y либо существует $X_0 \subset X$, равномощное Y, либо существует $Y_0 \subset Y$, равномощное X.*

Пусть X, Y — два произвольных множества. Если множества X и Y равномощны, то говорят, что они *имеют одинаковую мощность* или *одно и то же кардинальное число.* Таким образом, каждому множеству X

сопоставлен некоторый объект — его мощность, который обозначают символом $|X|$. Равенство $|X| = |Y|$ имеет место в том и только том случае, если множества X и Y равномощны. В случае, если множество X равномощно некоторому подмножеству множества Y, *говорят, что мощность* множества X не больше мощности множества Y, и пишут $|X| \leqslant |Y|$. Отсюда получаем, что если $X \subset Y$, то $|X| \leqslant |Y|$.

Говорят, что мощность множества X меньше мощности множества Y, если $|X| \leqslant |Y|$, $|X| \neq |Y|$, и пишут $|X| < |Y|$.

Множество называется *конечным* (*по Дедекинду*), если оно не равномощно никакому собственному подмножеству, в противном случае — *бесконечным*. Таким образом, характерным признаком бесконечных множеств является возможность быть равномощным своей собственной части.

Множество X называется *счетным*, если оно равномощно множеству натуральных чисел $\mathbb{N}$, т. е. $|X| = |\mathbb{N}|$, или говорят, что множество имеет мощность $\aleph_0$ (читается «алеф-нуль») и пишут $|X| = \aleph_0$.

З а м е ч а н и е 0.5.1. Из определения счетного множества вытекает, что все его элементы можно пронумеровать всеми натуральными числами. Действительно, пусть f — некоторая конкретная биекция между счетным множеством X и множеством $\mathbb{N}$, $f : X \to \mathbb{N}$. Присвоим элементу x номер n, если $f(x) = n$, и положим $x = x_n$. Следовательно, счетное множество X можем записать в виде

$$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\},$$

который индуцируется порядком следования натуральных чисел, хотя в самом множестве X никакого порядка нет.

Приведем некоторые с в о й с т в а с ч е т н ы х м н о ж е с т в:

(а) всякое бесконечное подмножество счетного множества счетно;

(б) объединение конечного или счетного семейства счетных множеств счетно;

(в) всякое бесконечное множество содержит счетное подмножество.

Если про множество X известно, что оно либо конечно, либо счетно, то говорят, что *множество X не более чем счетно*, и пишут $|X| \leqslant \aleph_0$.

Множество называется *несчетным*, если оно не конечно и не счетно. Примером несчетного множества является множество точек отрезка $[0, 1]$, а его мощность называется *мощностью континуума*. При этом имеет место утверждение: если X — несчетное множество и множество A не более чем счетно, то множество $X \setminus A$ несчетно.

0.6. Последовательности и диагональный процесс Кантора

Пусть X — произвольное непустое множество. *Последовательностью элементов множества* X *называется* всякое отображение

$$\mathbb{N} \ni n \mapsto x_n \in X,$$

областью определения которого является множество натуральных чисел $\mathbb{N}$, а областью значений — множество X. При этом x_n называется n-м элементом (или n-м членом) последовательности, а n — номером этого элемента.

Вместо «*последовательности элементов множества* X» будем писать также «*последовательность из* X» или «*последовательность в* X».

Для сокращенной записи последовательности $\mathbb{N} \ni n \mapsto x_n \in X$ применяется один из следующих символов: $(x_n \in X)_{n\in\mathbb{N}}$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ или просто (x_n). Первые три символа используют, как правило, в тех случаях, когда выражение x_n содержит индексы, отличные от n (например, $(n+5m)_{n\in\mathbb{N}}$ означает последовательность $(1+5m, 2+5m, 3+5m, \ldots, n+ +5m, \ldots)$, в то время как $(n+5m)_{m\in\mathbb{N}}$ есть последовательность $(n+5, n+ +10, \ldots)$).

Непосредственно из определения равенства функции следует, что две последовательности (x_n) и (y_n) *равны* (или *совпадают*), если $x_n = y_n$ для каждого $n \in \mathbb{N}$, и пишут $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Замечание 0.6.1. Для записи последовательности употребляется символ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, отличный от символа $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, использующийся для обозначения множества значений последовательности. При этом отметим, что разные последовательности могут иметь одно и то же множество значений (например, $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}} \neq ((-1)^{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ и $\{(-1)^n : n \in \mathbb{N}\} = \{-1, 1\} = \{(-1)^{n+1} : n \in \mathbb{N}\}$). Кроме того, последовательность имеет бесконечное множество элементов, а множество значений может быть конечным.

Пусть $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ есть заданная последовательность в X. Последовательность $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ в X называется *подпоследовательностью последовательности* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, если существует строго возрастающая функция $\mathbb{N} \ni k \mapsto n(k) \in \mathbb{N}$ (т.е. если $k < l$, то $n(k) < n(l)$), такая, что $y_k = x_{n(k)}$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Другими словами, последовательность $(x_{n(k)})_{k\in\mathbb{N}}$, представляющая собой сужение отображения $\mathbb{N} \ni n \mapsto x_n \in \mathbb{N}$ на множество значений строго возрастающей функции $\mathbb{N} \ni k \mapsto n(k) \in \mathbb{N}$, называется подпоследовательностью последовательности $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Так как функция $n(k), k \in \mathbb{N}$, задает (возрастающую) последовательность в $\mathbb{N}$, то, учитывая обозначения элементов последовательности, можем записать $n(k) = n_k$ для каждого $k \in \mathbb{N}$. Поэтому последовательность $(x_{n(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ принимает следующий вид: $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Таким образом, $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ есть подпоследовательность последовательности $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, если она состоит из элементов последовательности $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и порядок следования ее элементов совпадает с порядком их следования в исходной последовательности или, по-другому, $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ получается из последовательности $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ путем вычеркивания тех членов x_n, которые отличны от x_{n_k}, а затем невычеркнутые члены нумеруют заново в порядке следования их прежних номеров.

Если $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ является подпоследовательностью последовательности $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, то говорят, что она извлечена из последовательности $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, и пишут $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subset (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Пусть X — некоторое непустое множество. Отображение

$$\underbrace{\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\ldots\times\mathbb{N}}_{k} \ni (n_1, n_2, \ldots, n_k) \mapsto x_{n_1 n_2 \ldots n_k} \in X$$

называется *k-кратной последовательностью элементов множества X* и обозначается символом

$$(x_{n_1 n_2 \ldots n_k})_{(n_1, n_2, \ldots, n_k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\ldots\times\mathbb{N}}$$

или

$$(x_{n_1 n_2 \ldots n_k})_{n_1, n_2, \ldots, n_k\in\mathbb{N}}.$$

Однократная последовательность называется просто последовательностью, а 2-кратная — *двойной последовательностью.*

Аналогично, как и выше, вводится понятие подпоследовательности для k-кратной последовательности.

Теорема 0.6.1 (диагональный процесс Кантора). *Пусть $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — заданная последовательность в X и $((x_{m,n})_{n\in\mathbb{N}})_{m\in\mathbb{N}}$ — последовательность последовательностей $(x_{m,n})_{n\in\mathbb{N}}$, удовлетворяющая следующим условиям:*

(*а*) *последовательность $(x_{1,n})_{n\in\mathbb{N}}$ совпадает с последовательностью $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (т. е. $x_{1,n} = x_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$);*

(*б*) *при каждом $m \in \mathbb{N}$ последовательность $(x_{m+1}, n)_{n\in\mathbb{N}}$ является подпоследовательностью последовательности $(x_{m,n})_{n\in\mathbb{N}}$. Тогда $(x_{n,n})_{n\in\mathbb{N}}$ есть подпоследовательность последовательности $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ для каждого $m \in \mathbb{N}$.*

◄ С помощью индукции покажем, что для любых $m \in \mathbb{N}$ и $r \in \mathbb{N}$ последовательность $(x_{m+r,n})_{n\in\mathbb{N}}$ есть подпоследовательность $(x_{m,n})_{n\in\mathbb{N}}$.

Предположим, что для некоторого $r \in \mathbb{N}$ доказано, что $(x_{m+r,n})_{n\in\mathbb{N}}$ является подпоследовательностью $(x_{m,n})_n \in \mathbb{N}$, т. е. существует строго возрастающая функция $\mu_r : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, такая, что

$$x_{m+r,n} = x_{m,\mu_r(n)}, \ n \in \mathbb{N}.$$

С другой стороны, согласно условию (б) имеем, что найдется строго возрастающая функция $\nu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, для которой

$$x_{m+r+1,n} = x_{m+r,\nu(n)}, \ n \in \mathbb{N}.$$

Следовательно,

$$x_{m+r+1,n} = x_{m+r,\nu(n)} = x_{m,\mu_r(\nu(n))}, \ n \in \mathbb{N},$$

где $\mu_{r+1}(n) = \mu_r(\nu(n))$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Ясно, что функция $\mu_{r+1} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ строго возрастающая, поэтому $(x_{m+r+1,n})_{n\in\mathbb{N}}$ является подпоследовательностью последовательности $(x_{m,n})_{n\in\mathbb{N}}$. Итак, $(x_{m+r,n})_{n\in\mathbb{N}}$ есть подпоследовательность $(x_{m,n})_{n\in\mathbb{N}}$ для любого $r \in \mathbb{N}$.

Для каждого $m \in \mathbb{N}$ и каждого $r \in \mathbb{N}$ положим

$$x_{m+r,m+r} = x_{m,\lambda_m(r)},$$

где $\lambda_m(r) = \mu_r(m+r)$. Покажем, что функция $\lambda_m : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ строго возрастающая при каждом m. Так как $\mu_{r+1}(u) = \mu_r(\nu(n))$, то

$$\lambda_m(r+1) = \mu_{r+1}(m+r+1) = \mu_r(\nu(m+r+1)).$$

Отсюда, принимая во внимание неравенство $\nu(m+r+1) \geqslant m+r+1$ (вследствие строгого возрастания функции ν), и из определения функции μ_r заключаем, что

$$\lambda_m(r+1) > \mu_r(m+r+1) > \mu_r(m+r) = \lambda_m(r).$$

Этим установлено, что $\lambda_m : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ есть строго возрастающая функция.

Положим $\lambda_m(0) = m$. При каждом $n \geqslant m$ выполняются равенства

$$x_{n,n} = x_{m,\lambda_m(n-m)}, \ n = 1, 2, \ldots,$$

которые будут иметь место и при $n = m$. Так как функция $n \mapsto \lambda_m(n-m)$ строго возрастающая при каждом $m \in \mathbb{N}$, то заключаем, что $(x_{n,n})_{n\in\mathbb{N}}$ есть подпоследовательность последовательности $(x_{m,n})_{n\in\mathbb{N}}$.▶

§1. Метрические пространства

Всякое правильное рассуждение можно свести к систематическому применению небольшого числа неизменных правил, не зависящих от конкретной природы объектов, о которых идет речь.

Н. Бурбаки

Пусть X – произвольное непустое множество. Функция

$$\rho : X \times X \to [0; \infty),$$

определенная на декартовом произведении $X \times X$, принимающая неотрицательные вещественные значения и удовлетворяющая следующим условиям:

(**M1**) $\rho(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$;

(**M2**) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ для любых $x, y \in X$;

(**M3**) $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$ для любых x, y, $z \in X$,

называется *метрикой на множестве* X.

Условия (M1) – (M3) называются *аксиомами метрики*; (M1) – *аксиома тождества*; (M2) – *аксиома симметрии*; (M3) – *аксиома треугольника*, или *неравенство треугольника.*

Число $\rho(x, y)$ называется *расстоянием между элементами* x и y, принадлежащими множеству X.

Метрическим пространством (сокращенно МП) называется пара (X, ρ), состоящая из множества X и заданной на нем метрики ρ. При этом элементы множества X (в соответствии с удобной геометрической терминологией) обычно называют *точками* пространства (X, ρ), а его подмножества – подмножествами пространства (X, ρ) или множествами в пространстве (или из пространства) (X, ρ).

Пусть (X, ρ) – МП, x_0 – некоторая точка из (X, ρ) и r – положительное число. Множество

$$B(x_0, r): = \{x \in X : \rho(x_0, x) < r\}$$

называется *открытым шаром* (или просто *шаром*) *с центром в точке* x_0 *радиуса* r. Множество

$$\overline{B}(x_0, r): = \{x \in X : \rho(x_0, x) \leqslant r\}$$

называется *замкнутым шаром с центром в точке* x_0 *радиуса* r. Множество

$$S(x_0, r): = \{x \in X : \rho(x_0, x) = r\}$$

называется *сферой с центром в точке* x_0 *радиуса* r.

Для множества A из пространства (X, ρ) и $r > 0$ множество

$$B(A, r): = \cup\{B(x, r) : x \in A\}$$

называется *шаровой окрестностью множества* A, или r*-шаром множества* A. Так как для любой точки $x \in A$ справедливо соотношение $x \in B(A, r)$, то получаем включение $A \subset B(A, r)$.

Предложение 1.1. (*а*) *Для любой точки* $x_1 \in B(x_0, r)$ *существует положительное число* r_1, *такое, что* $B(x_1, r_1) \subset B(x_0, r)$.

(*б*) *Пусть* x_0 *есть точка пространства* (X, ρ). *Тогда для любых чисел* r_1 *и* r_2, *таких, что* $0 < r_1 < r_2$, *справедливо включение* $\overline{B}(x_0, r_1) \subset \subset B(x_0, r_2)$.

◀ (а) Положим $r_1 = r - \rho(x_1, x_0)$. Тогда для произвольной точки $x \in B(x_1, r_1)$, в силу неравенства треугольника, имеем

$$\rho(x, x_0) \leqslant \rho(x_1, x_0) + \rho(x_1, x) < \rho(x_1, x_0) + r_1 = r.$$

Итак, если $x \in B(x_1, r_1)$, то $\rho(x, x_0) < r$, и тем самым требуемое включение доказано.

(б) Возьмем произвольную точку $x \in \overline{B}(x_0, r_1)$. Тогда $\rho(x, x_0) \leqslant r_1$, и так как $r_1 < r_2$, то $\rho(x, x_0) < r_2$. Значит, $x \in B(x_0, r_2)$. ▶

Диаметром непустого множества A из пространства (X, ρ) называется число

$$d(A): = \sup\{\rho(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in A\},$$

причем полагают $d(\varnothing): = 0$.

Множество $A \subset X$ называется *ограниченным* в пространстве (X, ρ), если $d(A) < \infty$.

Метрика ρ на множестве X называется *ограниченной числом* r (*ограниченной*), если $d(X) \leqslant r$ (если $d(X) < \infty$).

Расстоянием $\rho(x_0, A)$ *от точки* x_0 *до множества* A в пространстве (X, ρ) называется величина

$$\rho(x_0, A) := \inf\{\rho(x_0, x) : x \in A\}, \text{ если } A \neq \varnothing \text{ и } \rho(x, \varnothing) := \infty.$$

Так как $\rho(x_0, x) = \rho(x, x_0)$, в силу аксиомы (M2), для каждого $x \in A$, то положим $\rho(x_0, A) = \rho(A, x_0)$.

Ясно, что если $x_0 \in A$, то $\rho(x_0, A) = 0$. Подобным образом для двух множеств A и B из пространства (X, ρ) *расстояние* $\rho(A, B)$ *от множества* A *до множества* B есть число

$$\rho(A, B) := \inf\{\rho(x, y) : \ x \in A, y \in B\}, \text{ если } A \neq \varnothing \neq B,$$

и полагаем

$$\rho(A, \varnothing) := \infty =: \rho(\varnothing, B).$$

Предложение 1.2. *Пусть A, B — произвольные непустые множества в пространстве (X, ρ). Тогда имеют место равенства*

$$\rho(A, B) = \inf\{\rho(x, B) : \ x \in A\} = \inf\{\rho(A, y) : \ y \in B\}.$$

◀ Покажем сперва, что для произвольной ограниченной снизу вещественной функции f, определенной на декартовом произведении $A \times B$ множеств A и B, справедливо соотношение

$$\inf_{\substack{x\in A\\ y\in B}} f(x, y) = \inf_{x\in A}\left(\inf_{y\in B} f(x, y)\right) = \inf_{y\in B}\left(\inf_{x\in A} f(x, y)\right).$$

Действительно, поскольку $\inf\limits_{\substack{x\in A\\ y\in B}} f(x, y) \leqslant \inf\limits_{y\in B} f(x, y)$ для произвольного $x \in A$, то $\inf\limits_{\substack{x\in A\\ y\in B}} f(x, y) \leqslant \inf\limits_{x\in A}(\inf\limits_{y\in B} f(x, y))$. Далее, для каждого $\varepsilon > 0$ существует пара $(x_\varepsilon, y_\varepsilon) \in A \times B$, такая, что $f(x_\varepsilon, y_\varepsilon) < \inf\limits_{\substack{x\in A\\ y\in B}} f(x, y) + \varepsilon$.

С другой стороны, из неравенства

$$\inf_{x\in A}\left(\inf_{y\in B} f(x, y)\right) \leqslant \inf_{y\in B} f(x_\varepsilon, y) \leqslant f(x_\varepsilon, y_\varepsilon),$$

имеем: $\inf\limits_{x\in A}(\inf\limits_{y\in B} f(x,y)) \leqslant \inf\limits_{\substack{x\in A\\ y\in B}} f(x,y) + \varepsilon$. Отсюда, ввиду произвольного выбора ε, получаем, что

$$\inf_{x\in A}\left(\inf_{y\in B} f(x,y)\right) \leqslant \inf_{\substack{x\in A\\ y\in B}} f(x,y)$$

и (с учетом предыдущего)

$$\inf_{x\in A}\left(\inf_{y\in B} f(x,y)\right) = \inf_{\substack{x\in A\\ y\in B}} f(x,y).$$

Аналогично доказывается равенство

$$\inf_{y\in B}\left(\inf_{x\in A} f(x,y)\right) \leqslant \inf_{\substack{x\in A\\ y\in B}} f(x,y).$$

Для получения утверждения рассматриваемого предложения достаточно положить $f(x,y) = \rho(x,y)$.▶

Предложение 1.3. *Пусть (X,ρ) — произвольное МП. Тогда для любых точек x, $y \in X$ и любого непустого множества $A \subset X$ справедливо неравенство*

$$|\rho(x,A) - \rho(y,A)| \leqslant \rho(x,y).$$

◀ Для каждой точки $z \in A$ в силу неравенства треугольника имеем $\rho(x,z) \leqslant \rho(x,y) + \rho(y,z)$, поэтому

$$\begin{aligned}\rho(x,A) &= \inf_{z\in A}\rho(x,z) \leqslant \inf_{z\in A}(\rho(x,y)+\rho(y,z)) = \\ &= \rho(x,y) + \inf_{z\in A}\rho(y,z) = \rho(x,y) + \rho(y,A).\end{aligned}$$

Аналогично рассуждая, получаем, что $\rho(y,A) \leqslant \rho(x,y) + \rho(x,A)$. ▶

Отображение $\mathbb{N} \ni n \mapsto x_n \in X$, которое каждому числу $n \in \mathbb{N}$ ставит в соответствие точку x_n пространства (X,ρ), называется *последовательность точек* этого пространства и обозначается символом (x_n) или как семейство с индексом $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (см. 0.6).

Говорят, что *последовательность точек* (x_n) пространства (X,ρ) *сходится к точке* $x_0 \in X$, если числовая последовательность $(\rho(x_n,x_0))$

сходится к нулю при $n \to \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, x_0) = 0$, и пишут $x_n \to x_0$ или $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Точка x_0 называется *пределом последовательности* (x_n).

Из определения сходимости числовой последовательности имеем: последовательность (x_n) пространства (X, ρ) сходится к точке x_0, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$, что $\rho(x_n, x_0) < \varepsilon$ при $n > n_0$.

Предложение 1.4. *Всякая сходящаяся последовательность точек МП ограничена и имеет не более одного предела.* ▶

Предложение 1.5. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n_k} = x_0$ *для любой подпоследовательности* (x_{n_k}) *последовательности* (x_n). ▶

Две метрики ρ_1 и ρ_2 на множестве X называются *эквивалентными*, если они индуцируют одну и ту же сходимость, т. е. для каждой точки $x_0 \in X$ и каждой последовательности (x_n) точек пространства (X, ρ_1) условие $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_1(x_n, x_0) = 0$ выполняется тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_2(x_n, x_0) = 0$.

Теорема 1.1. *Для каждого пространства* (X, ρ) *существует метрика* ρ_1 *на множестве* X, *эквивалентная метрике* ρ *и ограниченная числом 1.*

◀ Положим

$$\rho_1(x, y) = \min\{1, \rho(x, y)\}, \ \forall x, y \in X.$$

Покажем, что ρ_1 — метрика на множестве X. Ясно, что ρ_1 удовлетворяет условиям (M1) и (M2). Пусть x, y и z — произвольные точки множества X. Положим $a = \rho(x, y)$, $b = \rho(y, z)$, $c = \rho(x, z)$. Так как каждое из чисел 2, $1 + a$, $1 + b$ и $a + b$ больше или равно 1 либо c, то

$$\min(2, 1 + a, 1 + b, a + b) \geqslant \min(1, c),$$

поэтому

$$\begin{aligned} \rho_1(x, y) + \rho_1(y, z) &= \min(1, a) + \min(1, b) = \\ &= \min(2, 1 + a, 1 + b, a + b) \geqslant \min(1, c) = \rho_1(x, z). \end{aligned}$$

Следовательно, ρ_1 удовлетворяет и условию (M3). Непосредственно из определения метрики ρ_1 заключаем, что она ограничена числом 1 и эквивалентна метрике ρ. ▶

Задачи и упражнения

1.1. Пусть X — произвольное множество и функция $\rho\colon X \times X \to \mathbb{R}$ удовлетворяет следующим условиям:

$(M1)$ $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$;

$(M2)$ $\rho(x, y) \leqslant \rho(z, x) + \rho(z, y)$,

для любых x, y, $z \in X$. Доказать, что функция ρ является метрикой на множестве X.

1.2. (а) Доказать, что в произвольном пространстве (X, ρ) для любых точек x, y, z, $t \in X$ справедливы неравенства:

$|\rho(x, y) - \rho(y, z)| \leqslant \rho(x, z)$ (*второе неравенство треугольника*);

$|\rho(x, z) - \rho(y, t)| \leqslant \rho(x, y) + \rho(z, t)$ (*неравенство четырехугольника*).

(б) Показать, что метрика ρ — непрерывная функция, т. е. если $x_n \to x_0$ и $y_n \to y_0$, то $\rho(x_n, y_n) \to \rho(x_0, y_0)$.

1.3. (а) Пусть $f\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ — непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям: а) $f(0) = 0$ и $f(x) > 0$ при $x > 0$; б) $f(x)$ — не убывает на $[0, \infty)$; в) $\dfrac{f(x)}{x}$ не возрастает при $x > 0$. Доказать, что функция $\rho(x, y) = f(|x - y|)$ определяет метрику на $\mathbb{R}$.

(б) Показать, что никакая из следующих функций не является метрикой на множестве всех непрерывных функций на отрезке $[a, b]$:

$f_1(x, y) = |x(t) - y(t)|$;

$f_2(x, y) = \max\limits_{a \leqslant t \leqslant b} (x(t) - y(t))^2$;

$f_3(x, y) = \int\limits_a^b (x(t) - y(t))dt$.

1.4. Пусть ρ — метрика на множестве X. Доказать, что следующие функции

(а) $\rho_1(x, y) = \dfrac{\rho(x, y)}{1 + \rho(x, y)}$,

(б) $\rho_2(x, y) = \ln(1 + \rho(x, y))$,

(в) $\rho_3(x, y) = \operatorname{arctg} \rho(x, y)$,

(г) $\rho_4(x, y) = \sqrt{1 + \rho(x, y)} - 1$,

(д) $\rho_5(x, y) = 1 - e^{-\rho(x, y)}$,

также являются метриками на X и указать, какие из них эквивалентны метрике ρ.

1.5. Говорят, что метрика ρ на множестве X удовлетворяет *ультраметрическому неравенству*, если

$$\rho(x, z) \leqslant \max\{\rho(x, y), \rho(y, z)\},$$

где x, y, z — произвольные точки множества X. Полученное пространство (X, ρ) называется *ультраметрическим*.

Доказать, что в ультраметрическом пространстве справедливы следующие утверждения:

(а) если $\rho(x, y) \neq \rho(y, z)$, то $\rho(x, z) = \max\{\rho(x, y), \rho(y, z)\}$;

(б) если два шара имеют общую точку, то один из них содержится в другом;

(в) расстояние между двумя различными открытыми шарами радиуса r, содержащимися в замкнутом шаре радиуса r, равно r.

1.6. Пусть X — множество всевозможных последовательностей натуральных чисел $x = (n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots)$, $y = (m_1, m_2, \ldots, m_k, \ldots)$ и $k_0(x, y)$ — наименьший индекс, при котором $n_k \neq m_k$. Доказать, что

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0, \text{ при } x = y, \\ \dfrac{1}{k_0(x, y)}, \text{ при } x \neq y, \end{cases}$$

есть метрика на X, удовлетворяющая ультраметрическому неравенству.

Полученное пространство (X, ρ) является примером ультраметрического пространства и называется *пространством Бэра*.

1.7. Показать, что семейство всех непустых подмножеств пространства (X, ρ) с «расстоянием»

$$\rho(A, B) = \inf\{\rho(x, y) : x \in A, y \in B\}, \quad A \subset X,\ B \subset X,$$

не является метрическим пространством.

1.8. Пусть A, B, C — непустые множества из пространства (X, ρ). Доказать справедливость следующих неравенств:

(а) $\rho(A \cup B, C) \leqslant \rho(A, C)$;
(б) $\rho(A, C) \leqslant \rho(A, B) + \rho(B, C) + d(B)$.

1.9. Доказать, что для любого замкнутого шара $\overline{B}(x_0, r)$ справедливо неравенство $d(\overline{B}(x_0, r)) \leqslant 2r$.

1.10. Пусть x_1, x_2 — произвольные точки пространства (X, ρ), причем $x_1 \neq x_2$. Покажите, что существует такое положительное число r, что $B(x_1, r) \bigcap B(x_2, r) = \varnothing$.

1.11. (а) Доказать, что если два открытых шара МП имеют общую точку, то существует шар, лежащий в их пересечении.

(б) Пусть x_0 — некоторая точка МП (X, ρ). Показать, что для любых чисел r_1 и r_2, удовлетворяющих условию $0 < r_1 \leqslant r_2$, имеют место включения:

$$B(x_0, r_1) \subset B(x_0, r_2), \quad \overline{B}(x_0, r_1) \subset \overline{B}(x_0, r_2).$$

1.12. Показать, что если $x \notin B(x_0, r)$, то справедливо неравенство

$$\rho(x, B(x_0, r)) \geqslant \rho(x_0, x) - r.$$

1.13. Доказать, что объединение двух ограниченных множеств пространства (X, ρ) ограничено. В частности, если A ограничено в (X, ρ), то какова бы ни была точка $x_0 \in X$, множество A содержится в замкнутом шаре $\overline{B}(x_0, \rho(x_0, A) + d(A))$.

1.14. Для любого множества M из пространства (X, ρ) и любого $r > 0$ положим

$$V_r(M) = \{x \in X : \rho(x, M) < r\}.$$

Доказать справедливость следующих утверждений:

(а) если $B(M, r)$ — r-шар множества M в пространстве (X, ρ), то $B(M, r) = V_r(M)$;

(б) если M, N — непустые множества из (X, ρ) и $\rho(M, N) = d$, то имеет место неравенство $\rho(V_r(M), V_r(N)) \geqslant d - 2r$.

1.15. Пусть ρ_1 и ρ_2 — две метрики на множестве X. Доказать, что если существуют постоянные $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$, такие, что для любых x, y из X выполняются неравенства

$$c_1\rho_1(x, y) \leqslant \rho_2(x, y) \leqslant c_2\rho_1(x, y), \ \forall x, y \in X, \qquad (*)$$

то ρ_1 эквивалентно ρ_2 (т. е. неравенства $(*)$ являются достаточным условием эквивалентности метрик ρ_1 и ρ_2).

Показать, что это условие не является необходимым для эквивалентности метрик ρ_1 и ρ_2.

1.16. Функция $\tilde{\rho}\colon X \times X \to [0, \infty)$, где X — произвольное множество, удовлетворяющая для любых x, y, $z \in X$ условиям:

$$\tilde{\rho}(x, x) = 0; \ \tilde{\rho}(x, y) = \tilde{\rho}(y, x); \ \tilde{\rho}(x, y) \leqslant \tilde{\rho}(x, z) + \tilde{\rho}(z, y),$$

называется *псевдометрикой* на множестве X. Псевдометрика обладает всеми свойствами метрики, кроме свойства $\tilde{\rho}(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$.

Пара $(X, \tilde{\rho})$, где $\tilde{\rho}$ — псевдометрика на множестве X, называется *псевдометрическим пространством.*

Показать, что если ρ — метрика, а $\tilde{\rho}$ — псевдометрика на X, то $\rho_1 = \rho + \tilde{\rho}$ — метрика на X.

1.17. Пусть $(G, +)$ — абелева группа, на которой определена метрика ρ, инвариантная относительно операции $+$, т. е.

$$\rho(x + z, y + z) = \rho(x, y), \quad \forall x,\ y,\ z \in G.$$

Пара (G, ρ) называется *метрической группой.* Показать, что для любых x, $y \in G$ и любого $k \in \mathbb{N}$ справедливы равенства

$$\rho(x, y) = \rho(\theta, x - y); \quad \rho(kx, \theta) \leqslant k\rho(x, \theta),$$

где θ — нулевой элемент группы G.

§2. Примеры метрических пространств

...полет в область абстрактной общности должен исходить из конкретного и частного и завершается конкретным и частным.

Р. Курант

Приведем примеры наиболее часто встречающихся пространств.

Пример 2.1. *Дискретное метрическое пространство* (или *пространство изолированных точек*) — произвольное множество X, для которого

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = y, \\ 1, & \text{если } x \neq y, \end{cases} \quad \forall\, x,\, y \in X.$$

Пример 2.2. *Числовая прямая*, или *пространство*, $\mathbb{R}$ — множество всех вещественных чисел с *евклидовой метрикой* ρ:

$$\rho(x,y) = |x - y|.$$

Пример 2.3. *Пространство* $\mathbb{R}^n$ — множество упорядоченных наборов из n действительных чисел с *евклидовой метрикой* ρ:

$$\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (\xi_k - \eta_k)^2},$$

где $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ и $y = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$.

Пример 2.4. *Пространство* m — множество всех ограниченных последовательностей, с расстоянием

$$\rho(x,y) = \sup_n |\xi_n - \eta_n|,$$

где $x = (\xi_n)$ и $y = (\eta_n)$.

Пример 2.5. *Пространство c* — множество всех сходящихся числовых последовательностей, с расстоянием

$$\rho(x, y) = \sup_n |\xi_n - \eta_n|,$$

где $x = (\xi_n)$ и $y = (\eta_n)$.

Пример 2.6. *Пространство* l_p $(1 \leqslant p < \infty)$ состоит из всех числовых последовательностей $x = (\xi_n)$, для которых $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p < \infty$, а расстояние определяется по формуле

$$\rho(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i - \eta_i|^p\right)^{1/p}, \quad 1 \leqslant p < \infty.$$

(В случае $p = \infty$ полагают $l_\infty := m$.)

Пример 2.7. *Пространство* l_p^m $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ — множество упорядоченных наборов из m действительных (комплексных) чисел с расстоянием

$$\rho(x, y) = \begin{cases} \left(\sum\limits_{i=1}^{m} |\xi_i - \eta_i|^p\right)^{1/p}, & \text{при } 1 \leqslant p < \infty, \\ \sup\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |\xi_i - \eta_i|, & \text{при } p = \infty, \end{cases}$$

где $x = (\xi_1, \ldots, \xi_m)$ и $y = (\eta_1, \ldots, \eta_m)$.

Пример 2.8. *Пространство s* — множество всех числовых последовательностей, в котором метрика определяется функцией

$$\rho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|\xi_n - \eta_n|}{1 + |\xi_n - \eta_n|},$$

где $x = (\xi_n)$ и $y = (\eta_n)$.

Пример 2.9. *Пространство* $C[a, b]$ — множество всех непрерывных действительных функций, определенных на отрезке $[a, b]$, с *чебышевской метрикой*, которая определяется функцией

$$\rho(x, y) = \max_{t \in [a,b]} |x(t) - y(t)|.$$

Пример 2.10. *Пространство* $C^k[a,b]$ – множество k раз непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a,b]$ функций с расстоянием

$$\rho(x,y) = \sum_{i=0}^{k} \max_{t\in[a,b]} |x^{(i)}(t) - y^{(i)}(t)|.$$

Пример 2.11. *Пространство* $M[a,b]$ – множество всех ограниченных на отрезке $[a,b]$ функций с расстоянием

$$\rho(x,y) = \sup_{t\in[a,b]} |x(t) - y(t)|.$$

Пример 2.12. *Пространство* $\widetilde{L}_p[a,b]$ $(1 \leqslant p < \infty)$ – множество непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций с расстоянием

$$\rho(x,y) = \left(\int_a^b |x(t) - y(t)|^p\,dt\right)^{1/p}.$$

(Часто полагают, что $\widetilde{L}_\infty[a,b] := M[a,b]$.)

Пример 2.13. *Пространство* $\widetilde{W}_p^l[a,b]$ $(l \in \mathbb{N},\ 1 \leqslant p < \infty)$ – множество l раз непрерывно дифференцируемых функций на отрезке $[a,b]$ с расстоянием

$$\rho(x,y) = \left(\sum_{k=0}^{l} \int_a^b |x^{(k)}(t) - y^{(k)}(t)|^p\,dt\right)^{1/p}.$$

Пример 2.14. Пусть (X,ρ_X), (Y,ρ_Y) – два метрических пространства. Для любой пары точек $z_1 = (x_1,y_1)$, $z_2 = (x_2,y_2)$ декартова произведения $Z = X \times Y$ положим

$$\rho_Z(z_1,z_2) := \max\{\rho_X(x_1,x_2), \rho_Y(y_1,y_2)\}.$$

Функция $\rho_Z\colon Z \times Z \to [0,\infty)$ является метрикой на множестве Z и называется *произведением метрик* ρ_X, ρ_Y, и пишут $\rho_Z = \rho_X \times \rho_Y$. Полученное МП (Z,ρ_Z) называется *произведением пространств* (X,ρ_X) и (Y,ρ_Y).

Задачи и упражнения

2.1. Проверить аксиомы метрики в примерах 2.1–2.14 и показать, что сходимость по метрике в пространствах из примеров 2.2–2.8, 2.14 есть сходимость покоординатная, а в пространствах $C[a,b]$, $C^k[a,b]$ и $M[a,b]$ — равномерная сходимость.

2.2. (а) Описать все сходящиеся последовательности в дискретном метрическом пространстве.

(б) Как связаны между собой, относительно отношения включения «$\subset$», следующие множества дискретного пространства: $B(x_0,\frac{1}{2})$, $B(x_0,1)$, $B(x_0,3)$, $\overline{B}(x_0,\frac{1}{3})$, $\overline{B}(x_0,2)$, $S(x_0,\frac{1}{4})$, $S(x_0,5)$, где x_0 — произвольная точка этого пространства? Установить, какие свойства шаров обычной геометрии не выполняются для шаров в дискретном пространстве.

2.3. На множестве $\mathbb{R}$ определены функции

(а) $\rho(x,y)=|\sin x-\sin y|$; (б) $\rho(x,y)=\cos^2(x-y)$;

(в) $\rho(x,y)=\operatorname{arctg}|x-y|$; (г) $\rho(x,y)=\dfrac{|x-y|}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}}$.

Какие из них являются метриками на $\mathbb{R}$?

2.4. Указать множество в пространстве $\mathbb{R}$, на котором функция $\rho_1(x,y)=|\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}y|$ является метрикой и эквивалентна евклидовой метрике (см. пример 2.2).

2.5. Пусть на множестве $\mathbb{R}^n$ определены функции

(а) $\rho_p(x,y)=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^p\right)^{1/p}$, $1\leqslant p<\infty$;

(б) $\rho_\infty(x,y)=\max\{|x_i-y_i| : i=\overline{1,n}\}$;

(в) $\hat\rho(x,y)=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{2^i}\dfrac{|x_i-y_i|}{1+|x_i-y_i|}$, где $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ и $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$.

Доказать, что (а) каждая из функций ρ_p, ρ_∞, $\hat\rho$ задает метрику, эквивалентную евклидовой метрике пространства $\mathbb{R}^n$; (б) $\lim\limits_{p\to\infty}\rho_p(x,y)=\rho_\infty(x,y)$; (в) если $1\leqslant p\leqslant q$, то $\rho_p(x,y)\leqslant\rho_q(x,y)$ для любых точек $x,y\in\mathbb{R}^n$.

Покажите, что функция ρ_p, введенная в пункте (а) для $p\in(0,1)$ не является метрикой на множестве $\mathbb{R}^n$.

2.6. (а) Изобразить единичный шар с центром в точке $(0,0)$ в пространствах $\mathbb{R}^2$, l_p^2 и l_∞^2.

(б) В каждом из пространств $\mathbb{R}^2$, l_1^2, l_∞^2 построить геометрическое место таких точек x, что $\rho(x, x_1) = \rho(x, x_2)$ для следующих случаев

1) $x_1 = (0,0)$, $x_2 = (1,1)$;

2) $x_1 = (0,0)$, $x_2 = (\frac{1}{2}, 1)$;

3) $x_1 = (1,3)$, $x_2 = (-1,0)$.

(в) Показать, что функция

$$\rho_1((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \begin{cases} |y_1 - y_2|, & \text{если } x_1 = x_2, \\ |y_1| + |y_2| + |x_1 - x_2|, & \text{если } x_1 \neq x_2, \end{cases}$$

задает метрику на множестве $\mathbb{R}^2$, не эквивалентную евклидовой метрике.

2.7. При каких значениях параметра $\alpha \in \mathbb{R}$ точка x принадлежит шару $B(x_0, r)$ в пространстве (X, ρ), если

(а) $X = \mathbb{R}$, $x = 1 - \alpha^2$, $x_0 = 3$, $r = 4$;

(б) $X = \mathbb{R}^2$, $x = (1 - \alpha, 1 + \alpha)$, $x_0 = (2,2)$, $r = 2$.

2.8. Определить расстояние между элементами

(а) $x = \{(-1)^n : n \in \mathbb{N}\}$, $y = \left\{\frac{1}{2^n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ в пространстве m;

(б) $x = \left\{\frac{1}{n+2} : n \in \mathbb{N}\right\}$, $y = \left\{\frac{2 + n - n^2}{n^2 - 4} : n \in \mathbb{N}\right\}$ в пространстве s;

(в) $x(t) = \dfrac{t^2 - 1}{t^2 - t + 1}$, $y(t) = \dfrac{3t}{t^2 - t + 1}$ в пространстве $C[-4, 5]$;

(г) $x(t) = 4t^3$, $y(t) = t|t - 2|$ в пространстве $M[0,3]$;

(д) $x(t) = \sin t$, $y(t) = \cos t$ в пространстве $\widetilde{L}_2[0, \frac{\pi}{2}]$;

(е) $x(t) = t^2 + 3t$, $y(t) = t^4 - 1$ в пространстве $\widetilde{W}_3^2[1,2]$.

2.9. В пространстве $\mathbb{R}^2$ найти расстояние между множествами A и B, если

(а) $A = \left\{(x,y) : y = 1 - \sin x,\ \frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}\right\}$,
$B = \left\{(x,y) : x = \sqrt{2}y - 5\right\}$;

(б) $A = \left\{(x,y) : y = x^2\right\}$,
$B = \left\{(x,y) : (x-3)^2 + (y-3)^2 = 1\right\}$.

2.10. (а) Доказать, что если множество ограничено в пространстве $C[a,b]$, то оно ограничено и в любом пространстве $\widetilde{L}_p[a,b]$ $(1 \leqslant p < \infty)$. Справедливо ли обратное утверждение?

(б) Будут ли эквивалентными на множестве $C[a,b]$ метрики пространств $\widetilde{L}_1[a,b]$ и $\widetilde{L}_2[a,b]$?

2.11. (а) Доказать, что если последовательность сходится в пространстве $C[a,b]$, то она сходится в любом пространтве $\widetilde{L}_p[a,b]$ $(1 \leqslant p < \infty)$.

(б) Доказать, что если последовательность сходится в пространстве $\widetilde{L}_q[a,b]$, где $q > 1$, то она сходится и в $\widetilde{L}_1[a,b]$.

(в) Пусть c_0 – пространство сходящихся к нулю последовательностей (x_n), $x_n \in \mathbb{R}$, с метрикой

$$\rho(x,y) = \sup_n |x_n - y_n|, \quad x = (x_n),\ y = (y_n).$$

Показать, что при любом $p \geqslant 1$ каждый элемент пространства l_p принадлежит пространству c_0, но элемент $x = \left(1, \frac{1}{\ln 2}, \ldots, \frac{1}{\ln n}, \ldots\right)$ из c_0 не принадлежит l_p ни при каком $p \geqslant 1$.

2.12. Пусть (X,ρ_X), (Y,ρ_Y) – произвольные пространства и пусть $Z = X \times Y$. Для любых точек $z_1 = (x_1,y_1) \in Z$ и $z_2 = (x_2,y_2) \in Z$ положим

$$\widetilde{\rho}_Z(z_1,z_2) = \rho_X(x_1,x_2) + \rho_Y(y_1,y_2);$$
$$\widehat{\rho}_Z(z_1,z_2) = \sqrt{\rho_X^2(x_1,x_2) + \rho_Y^2(y_1,y_2)}.$$

Показать, что функции $\widetilde{\rho}_Z$ и $\widehat{\rho}_Z$ являются метриками на множестве Z и эквивалентны произведению метрик $\rho_Z = \rho_X \times \rho_Y$ (см. пример 2.14).

2.13. Пусть $(X \times Y, \rho_X \times \rho_Y)$ – произведение пространств (X,ρ_X) и (Y,ρ_Y) (см. пример 2.14), и пусть (x_0,y_0) – произвольная точка, принадлежащая множеству $X \times Y$. Доказать справедливость следующих утверждений:

(а) для любых чисел $r_1 > 0$ и $r_2 > 0$ существует такое число $r > 0$, что

$$B_{X\times Y}((x_0,y_0),r) \subset B_X(x_0,r_1) \times B_Y(y_0,r_2);$$

(б) для любого числа $r > 0$ существуют такие числа $r_1 > 0$ и $r_2 > 0$, что

$$B_X(x_0,r_1) \times B_Y(y_0,r_2) \subset B_{X\times Y}((x_0,y_0),r).$$

2.14. Является ли сходящейся в пространстве (X,ρ) последовательность точек (x_n), если (а) $X = l_2$, $x_n = \Bigl(\underbrace{\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}}_{n^2}, 0, 0, \ldots\Bigr)$;

(б) $X = l_3$, $x_n = \left(1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, 0, 0, \ldots\right)$;

(в) $X = C[0,1]$, $x_n(t) = t^n - t^{2n}$;

(г) $X = C[0,1]$, $x_n(t) = \dfrac{t^{n+1}}{n+1} - \dfrac{t^{n+2}}{n+2}$;

(д) $X = \mathbb{R}$, $x_n = 1 + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \ldots + \dfrac{1}{n!}$?

2.15. Пусть $(X \times Y, \rho_X \times \rho_Y)$ — произведение пространств (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y). Доказать, что последовательность точек (z_n), где $z_n = (x_n, y_n)$ для каждого $n \in \mathbb{N}$, сходится в $(X \times Y, \rho_X \times \rho_Y)$ к некоторому элементу $z_0 = (x_0, y_0) \in X \times Y$ тогда и только тогда, когда $x_n \to x_0$ в (X, ρ_X) и $y_n \to y_0$ в (Y, ρ_Y).

§3. Структура подмножеств метрического пространства

Структура вещи — совсем не что-то такое, что мы могли бы «изобрести». Мы можем лишь выводить ее на свет терпеливо, смиренно; знакомясь с ней, ее раскрывать.

А. Гротендик

Точка x_0 пространства (X, ρ) называется *внутренней точкой множества* $A \subset X$, если существует такое число $r > 0$, что $B(x_0, r) \subset A$.

Множество $A \subset X$ называется *открытым* в пространстве (X, ρ), если каждая точка из A является внутренней. Таким образом, то, что A — открытое множество пространства (X, ρ), означает, что с каждой точкой $x_0 \in A$ связано положительное число r, для которого из условий $\rho(x_0, x) < r$, $x \in X$, следует включение $x \in A$.

Пустое множество $\varnothing$ (вообще не содержит точек и поэтому может считаться удовлетворяющим определению открытого множества) и само множество X являются открытыми множествами в пространстве (X, ρ).

Свойства открытых множеств в МП описывает

Теорема 3.1. *В произвольном МП справедливы следующие утверждения:*

(*а*) *любой открытый шар является открытым множеством;*

(*б*) *объединение любого семейства открытых множеств открыто;*

(*в*) *пересечение конечного числа открытых множеств открыто.* ►

Открытой окрестностью, или просто *окрестностью*, непустого *множества* $A \subset X$ (*точки* $x_0 \in X$) будем называть любое открытое множество в пространстве (X, ρ), содержащее множество A (точку x_0). Очевидно, что r-шар $B(A, r)$ множества A (открытый шар $B(x_0, r)$) является окрестностью множества A (точки x_0).

Замечание 3.1. Из определения окрестности точки и утверждения (а) теоремы 3.1 получаем, что x_0 — внутренняя точка множества A, если для нее существует окрестность, содержащаяся в A.

Теорема 3.2. *Для любого непустого множества A из пространства (X, ρ) и любого числа $r > 0$ множество*

$$V_r(A) = \{x \in X : \rho(x, A) < r\}$$

является окрестностью A.

◀ Непосредственно из определения множества $V_r(A)$ имеем включение $A \subset V_r(A)$. Покажем, что множество $V_r(A)$ открыто. Пусть x_0 — произвольная точка множества $V_r(A)$. Рассмотрим открытый шар $B(x_0, r_0)$, где $r_0 = r - \rho(x_0, A)$, и произвольную точку $y \in B(x_0, r_0)$. Используя неравенство

$$|\rho(x_0, A) - \rho(y, A)| \leqslant \rho(x_0, y)$$

из предложения 1.3 и определение числа r_0, получаем, что

$$\rho(y, A) \leqslant \rho(x_0, y) + \rho(x_0, A) < r.$$

Отсюда заключаем, что $B(x_0, r_0) \subset V_r(A)$, т. е. множество $V_r(A)$ открыто. ▶

Внутренняя точка множества $X \setminus A$ называется *внешней точкой множества A*. Ясно, что точка $x_0 \in X$ является внешней для множества A в (X, ρ) тогда и только тогда, когда $\rho(x_0, A) > 0$.

Точка x_0 пространства (X, ρ) называется *точкой прикосновения множества* $A \subset X$, если $\rho(x_0, A) = 0$. Совокупность всех точек прикосновения множества $A \subset X$ в пространстве (X, ρ) называется *замыканием множества A* и обозначается символом $\overline{A}$, т. е.

$$\overline{A} := \{x \in X : \rho(x, A) = 0\}.$$

Так как $\rho(x, A) = 0$ для любой точки $x \in A$, то заключаем, что $A \subset \overline{A}$, т. е. каждая точка множества A является для него точкой прикосновения.

Точка прикосновения множества A может не принадлежать A. Например, если $A = (0, 1)$ — интервал числовой прямой $\mathbb{R}$, то точки 0 и 1 являются точками прикосновения для A (в пространстве $\mathbb{R}$), причем они не принадлежат ему.

Теорема 3.3. *Пусть x_0 — точка прикосновения множества A и пусть $x_0 \notin A$. Тогда пересечение $V \cap A$ множества A с любой окрестностью V точки x_0 есть бесконечное множество.*

◄ Предположим противное, и пусть $V \cap A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ — конечное множество. По предположению, число

$$r_0 = \min\{\rho(x_0, x_k) : k = \overline{1, n}\} > 0.$$

Тогда, в силу открытости V, найдется такое число $0 < r < r_0$, что шар $B(x_0, r) \subset V$ и $B(x_0, r) \cap A = \varnothing$, т.е. $\rho(x_0, A) > 0$, а это противоречит условию теоремы. ►

Непосредственно из определения замыкания множества и теоремы 3.3 следует

Предложение 3.1. *Имеют место следующие утверждения:*
(а) $(x_0 \in \overline{A}) \Longleftrightarrow (\forall r > 0, B(x_0, r) \cap A \neq \varnothing)$*;*
(б) $(x_0 \in \overline{A}) \Longleftrightarrow (\exists\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset A : x_n \to x_0$ *при* $n \to \infty)$.

◄ (б) Для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует точка $x_n \in A$ такая, что $\rho(x_n, x_0) < \frac{1}{n}$. По произвольно заданному числу $\varepsilon > 0$ выберем n_0 так, чтобы $\varepsilon < 1$. Тогда $\rho(x_n, x_0) < \varepsilon$ при всех $n > n_0$, т.е. $x_n \to x_0$ при $n \to \infty$. ►

Предложение 3.2. *Для любой точки $x_0 \in X$ и любого множества A из пространства (X, ρ) справедливо равенство*

$$\rho(x_0, A) = \rho(x_0, \overline{A}).$$

◄ Непосредственно из определения расстояния от точки x_0 до множества A и включения $A \subset \overline{A}$ имеем неравенство

$$\rho(x_0, \overline{A}) \leqslant \rho(x_0, A). \tag{3.1}$$

С другой стороны, для любого $\varepsilon > 0$ существует такая $\overline{a}_\varepsilon \in \overline{A}$, что

$$\rho(x_0, \overline{a}_\varepsilon) < \rho(x_0, \overline{A}) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Учитывая, что $\overline{a}_\varepsilon$ является точкой прикосновения множества A, то найдется такая точка $a_\varepsilon \in A$, что $\rho(\overline{a}_\varepsilon, a_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}$. Следовательно,

$$\rho(x_0, a_\varepsilon) \leqslant \rho(x_0, \overline{a}_\varepsilon) + \rho(\overline{a}_\varepsilon, a_\varepsilon) < \rho(x_0, \overline{A}) + \varepsilon.$$

Отсюда, с учетом произвольного выбора числа $\varepsilon > 0$, заключаем, что

$$\rho(x_0, A) \leqslant \rho(x_0, \overline{A}). \tag{3.2}$$

Из полученных неравенств (3.1) и (3.2) следует справедливость нашего предложения. ►

Следствие 3.1. *Пусть A, B — произвольные множества из пространства (X, ρ). Тогда справедливы равенства*

$$\rho(A, B) = \rho(A, \overline{B}) = \rho(\overline{A}, B) = \rho(\overline{A}, \overline{B}).$$

◄ Непосредственно из предложений 1.2 и 3.2 имеем

$$\rho(A, B) = \inf_{x \in A} \rho(x, B) = \inf_{x \in A} \rho(x, \overline{B}) = \rho(A, \overline{B}),$$

и первое равенство доказано.

Аналогично устанавливается справедливость остальных равенств. ►

Точка x_0 пространства (X, ρ) называется *предельной точкой* множества $A \subset X$, если $x_0 \in \overline{A \setminus \{x_0\}}$ (т. е. согласно предложению 3.1.(а), для любого числа $r > 0$ множество $B(x_0, r) \cap (A \setminus \{x_0\}) \neq \varnothing$). Совокупность всех предельных точек множества A называется *производным множеством* (или *производной*) *множества* A и обозначается A'.

Из определения предельной точки и предложения 3.1. (б) следует следующий критерий принадлежности точки производному множеству: точка $x_0 \in A' \neq \varnothing$ тогда и только тогда, когда существует последовательность точек (x_n) множества A такая, что $x_n \to x_0$, где $x_n \in A \setminus \{x_0\}$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $x_n \neq x_m$ для всех $n \neq m$.

Каждая предельная точка множества является его точкой прикосновения. Обратное утверждение, вообще говоря, не верно. При этом справедливо

Предложение 3.3. *Для любого множества A из МП (X, ρ) имеет место равенство*

$$\overline{A} = A \cup A'.$$

◄ Если $x_0 \in \overline{A}$, то либо $x_0 \in A$, либо $x_0 \notin A$, и тогда произвольная окрестность точки x_0 содержит точку из A, отличную от x_0, т. е. $x_0 \in A'$. Следовательно, $\overline{A} \subset A \cup A'$. Отсюда и из включения $A \cup A' \subset \overline{A}$ (так как $A \subset \overline{A}$ и $A' \subset \overline{A}$) получаем справедливость требуемого равенства. ►

Точка x_0 пространства (X, ρ) называется *изолированной точкой множества* $A \subset X$, если существует открытый шар $B(x_0, r_0)$, такой, что $B(x_0, r_0) \cap A = \{x_0\}$. Множество, состоящее из изолированных точек, называется *дискретным*.

Ясно, что совокупность всех изолированных точек множества A совпадает с множеством $A \setminus A'$.

Очевидно, что если x_0 — изолированная точка множества A, то $x_0 \in \overline{A}$. Следовательно, с учетом определения предельной точки, заключаем, что замыкание $\overline{A}$ множества A состоит из точек трех типов: изолированные точки множества A; предельные точки множества A, принадлежащие A; предельные точки множества A, не принадлежащие A.

Множество $A \subset X$ называется *замкнутым* в пространстве (X, ρ), если $A = \overline{A}$. Например, из определения производной множества A имеем, что A' — замкнутое множество.

Замкнутое множество в МП характеризует

Теорема 3.4. *Множество $A \subset X$ замкнуто в пространстве (X, ρ) тогда и только тогда, когда его дополнение $X \setminus A$ открыто.*

◄ Пусть A — замкнутое множество и x_0 — произвольная точка из $X \setminus A$. Тогда из соотношения $x_0 \notin \overline{A}$, согласно предложению 3.1.(а), найдется такое $\varepsilon > 0$, что $B(x_0, \varepsilon) \cap A = \varnothing$, т.е. $\rho(x_0, A) = \varepsilon > 0$. Покажем справедливость включения $B(x_0, \varepsilon) \subset X \setminus A$. Допустим противное, т.е. существует элемент $y \in B(x_0, \varepsilon) \cap A$. Тогда имеем неравенство $\rho(x_0, y) \geqslant \rho(x_0, A) = \varepsilon$, которое противоречит тому, что $y \in B(x_0, \varepsilon)$. Следовательно, $B(x_0, \varepsilon) \subset X \setminus A$, а значит, множество $X \setminus A$ — открыто.

Обратно, пусть $X \setminus A$ — открытое множество. Тогда для любой точки $x_0 \in X \setminus A$ существует такое число $\varepsilon > 0$, что $B(x_0, \varepsilon) \subset X \setminus A$. Следовательно, для каждой точки $y \in A$ имеем неравенство $\rho(x_0, y) \geqslant \varepsilon$, т.е. $\rho(x_0, A) \geqslant \varepsilon$, значит, $x_0 \notin \overline{A}$. Таким образом, если $x_0 \in \overline{A}$, то $x_0 \notin X \setminus A$, т.е. имеем включение $\overline{A} \subset A$. Отсюда, учитывая то, что $A \subset \overline{A}$, получаем равенство $A = \overline{A}$. ►

Непосредственно из теоремы 3.4 получаем, что пустое множество $\varnothing$ и само множество X являются замкнутыми в (X, ρ).

Следствие 3.2. *Пересечение любого семейства и объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто.* ►

Точка x_0 пространства (X, ρ) называется *граничной точкой множества* $A \subset X$, если она является точкой прикосновения множеств A и $X \setminus A$. Совокупность всех граничных точек множества A называют *границей множества* A и обозначают $\operatorname{Fr} A$, т.е. $\operatorname{Fr} A := \overline{A} \cap \overline{(X \setminus A)}$.

Из этого определения следует, что характеристическое свойство граничной точки множества состоит в том, что в любой ее окрестности имеются как точки этого множества, так и точки, ему не принадлежащие, а с учетом предложения 3.1 имеем

Предложение 3.4. *Условие $x_0 \in \operatorname{Fr} A$ эквивалентно тому, что существует последовательность (x_n) из $X \setminus A$, сходящаяся к x_0, и существует последовательность $(\tilde{x}_n)$ из A, сходящаяся к x_0.*

◀ Пусть выполнено условие $x_0 \in \operatorname{Fr} A$. Тогда для любого $r > 0$ $B(x_0, r) \cap A \neq \varnothing$ и $B(x_0, r) \cap (X \setminus A) \neq \varnothing$. Положим $r = r_n$, где $r_0 \to 0$. В результате получим последовательности $(x_n), x_n \in A$, и $(\tilde{x}_n), x_n \in X \setminus A$, такие, что $x_n \to x_0$ и $\tilde{x}_n \to x_0$.

Обратно, если $x_n \to x_0, x_n \in A$, и $\widetilde{x}_n \to x_0, \widetilde{x}_n \in X \setminus A$, то из определения предела последовательности следует, что любой открытый шар $B(x_0, r)$ содержит как точку x_n, так и точку $\widetilde{x}_n$ при достаточно большом $n = n(r)$. Отсюда и из определения $\operatorname{Fr} A$ следует, что $x \in \operatorname{Fr} A$. ▶

Задачи и упражнения

3.1. (а) Пусть M — произвольное непустое подмножество МП (X, ρ), для которого $\operatorname{Int} M \neq \varnothing$. Доказать, что для любой точки $x_0 \in \operatorname{Int} M$ существует такое число $\varepsilon > 0$, что справедливо включение $\overline{B}(x_0, \varepsilon) \subset M$.

(б) Доказать, что множество $A = \{x \in C[a, b] : |x(t)| < x_0(t), t \in [a, b]\}$, где $x_0(t)$ — фиксированная функция из $C[a, b]$, является открытым множеством в пространстве $C[a, b]$.

(в) Пусть A — открытое множество в (X, ρ) и $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset X$. Показать, что множество $A \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$ также открыто.

3.2. Пусть A — произвольное непустое множество в пространстве (X, ρ) и пусть $0 < r_1 < r_2$. Показать, что множества

$$\{x \in X : \rho(x, A) > r_1\}, \quad \{x \in X : r_1 < \rho(x, A) < r_2\}$$

открыты, а множества

$$\begin{aligned} &\{x \in X : \rho(x, A) \leqslant r_1\}, && \{x \in X : \rho(x, A) \geqslant r_2\}, \\ &\{x \in X : r_1 \leqslant \rho(x, A) \leqslant r_2\}, && \{x \in X : \rho(x, A) = r_1\} \end{aligned}$$

замкнуты в пространстве (X, ρ).

3.3. Доказать, что (а) любое подмножество дискретного пространства (см. пример 2.1) является одновременно открытым и замкнутым; (б) в ультраметрическом пространстве любой открытый (замкнутый) шар является одновременно открытым и замкнутым множеством, причем выполнено равенство $B(x_0, r) = B(x, r)$ для любой точки $x \in B(x_0, r)$.

3.4. Доказать, что конечное множество открыто в МП тогда и только тогда, когда каждая его точка является изолированной.

3.5. На множестве X заданы две метрики ρ_1, ρ_2 и существует постоянная $c > 0$, такая, что $\rho_1(x, y) \leqslant c\rho_2(x, y)$ для любых $x, y \in X$. Доказать, что любое множество, открытое в пространстве (X, ρ_1), будет открытым и в пространстве (X, ρ_2).

3.6. Доказать, что если ρ_1 и ρ_2 – метрики на множестве X, удовлетворяющие неравенствам $(*)$ из задачи 1.15, то совокупности всех замкнутых множеств пространств (X, ρ_1) и (X, ρ_2) совпадают.

3.7. (а) Пусть в пространстве $\mathbb{R}^2$ заданы два множества

$$A = \left\{(x, y) : \ y = \sin\frac{1}{x},\ 0 < x \leqslant \frac{1}{\pi}\right\}, \quad B = \{(0, y) : -1 \leqslant y \leqslant 1\}.$$

Доказать, что $A' = A \cup B$.

Замыкание множества A носит специальное название — *польский отрезок*.

(б) Найти множества A' и $\overline{A}$ в пространстве $\mathbb{R}$, если $A = \{6\} \cup (3, 5]$.

(в) Пусть (x_n) – последовательность в (X, ρ) и $x_n \to x$. При каком условии точка x есть предельная точка множества значений $\{x_1, x_2, \ldots\}$ последовательности (x_n)?

(г) Построить пример множества в МП, состоящего из изолированных точек и имеющего непустое множество предельных точек.

3.8. Доказать следующее утверждение: если x_0 – предельная точка множества A, то любая окрестность точки x_0 содержит бесконечно много точек множества A.

3.9. Доказать следующие свойства диаметра:

(а) $A \subset B \Rightarrow d(A) \leqslant d(B)$;

(б) $d(A) = d(\overline{A})$;

(в) если $A \cap B = \varnothing$, то $d(A \cup B) \leqslant d(A) + d(B)$.

3.10. Пусть F_1, F_2 – замкнутые непустые ограниченные множества в пространстве $\mathbb{R}^n$. Доказать, что существуют точки $x_1 \in F_1$ и $x_2 \in F_2$, такие, что $\rho(x_1, x_2) = \rho(F_1, F_2)$.

3.11. Указать в пространстве $\mathbb{R}^2$ (или в пространстве $\mathbb{R}$) два непустых замкнутых непересекающихся множества A и B, таких, что $\rho(A, B) = 1$, но не существует таких точек $a \in A$ и $b \in B$, что $\rho(a, b) = 1$

3.12. Доказать, что если F – ограниченное замкнутое непустое множество в пространстве $\mathbb{R}^n$, то существуют точки x_1, $x_2 \in F$, такие, что выполняется равенство $\rho(x_1, x_2) = d(F)$.

3.13. Указать в пространстве $C[a,b]$ ограниченное замкнутое непустое множество F, для которого не существует точек x_1, $x_2 \in F$, таких, что $\rho(x_1, x_2) = d(F)$.

3.14. Доказать, что в МП для любых непустых непересекающихся замкнутых множеств существуют непересекающиеся окрестности.

3.15. Пусть $\mathscr{F}$ — семейство всех непустых замкнутых ограниченных подмножеств пространства (X, ρ). Доказать, что функция

$$\rho_H(F_1, F_2) = \max\{\sup_{x \in F_1} \rho(x, F_2), \sup_{x \in F_2} \rho(F_1, x)\}, \; F_1, \; F_2 \in \mathscr{F},$$

является метрикой на $\mathscr{F}$. Построенное МП $(\mathscr{F}, \rho_H)$ называется *пространством замкнутых ограниченных подмножеств пространства* (X, ρ), а ρ_H — *метрикой Хаусдорфа*.

3.16. Доказать следующие утверждения:

(а) если E — замкнутое ограниченное множество в пространстве $\mathbb{R}$ и $y = \sup E$, то $y \in E$;

(б) всякое непустое открытое множество в пространстве $\mathbb{R}$ представляет собой объединение не более чем счетного числа попарно непересекающихся интервалов.

3.17. Пусть (X, ρ_X), (Y, ρ_Y) — произвольные МП и (Z, ρ_Z) — произведение этих пространств (см. пример 2.14). Доказать, что (а) множество $W \subset Z$ открыто в пространстве (Z, ρ_Z) тогда и только тогда, когда для любой точки $(x_0, y_0) \in W$ существуют окрестности U и V точек $x_0 \in X$ и $y_0 \in Y$, соответственно, такие, что $(x_0, y_0) \in U \times V \subset W$; (б) если x_0 — предельная точка множества $A \subset X$, y_0 — предельная точка множества $B \subset Y$, то (x_0, y_0) — предельная точка множества $A \times B \subset X \times Y$; (в) обратное утверждение к предыдущему пункту неверно.

3.18. Доказать, что если (X, ρ) — произвольное МП, то диагональ

$$\Delta_X := \{(x, y) \in X \times X : x = y\}$$

множества $X \times X = X^2$ замкнута в пространстве $(X \times X, \rho \times \rho)$.

3.19. Пространство (X, ρ) называется *связным*, если из всех множеств пространства (X, ρ) только пустое множество $\varnothing$ и само X одновременно открыты и замкнуты. В противном случае оно называется *несвязным*.

Доказать, что пространство (X, ρ) связно тогда и только тогда, когда не существует двух открытых (или замкнутых) непустых множеств A и B в пространстве (X, ρ), таких, что $X = A \cup B$ и $A \cap B = \varnothing$.

§4. Операторы взятия внутренности, замыкания и граничный оператор

Определение по существу сводится к тому, что вместо какой-то комбинации старых символов используется один новый символ.

Г. Штейнгауз

Пусть A — произвольное множество в пространстве (X, ρ). *Внутренностью* (или *открытой частью*) *множества* A в пространстве (X, ρ) называется совокупность всех внутренних точек множества A; это множество обозначается $\operatorname{Int} A$ или, подробнее, $\operatorname{Int}_X A$. Отсюда, с учетом замечания 3.1, имеем

$$\operatorname{Int} A := \cup\{U - \text{открыто} : U \subset A\}.$$

Так как объединение любого семейства открытых множеств открыто (см. теорему 3.1(б)), то получаем, что внутренность множества представляет собой наибольшее открытое множество, содержащееся в A. Очевидно, что множество A открыто тогда и только тогда, когда $A = \operatorname{Int} A$.

Отображение $A \mapsto \operatorname{Int} A$, в силу которого каждому множеству $A \subset X$ сопоставляется его внутренность $\operatorname{Int} A$ в пространстве (X, ρ), называется *оператором взятия внутренности.*

Теорема 4.1. *Оператор* Int *обладает следующими свойствами:*
(*а*) $\operatorname{Int} X = X$;
(*б*) $\operatorname{Int} A \subset A$;
(*в*) $(A \subset B) \Rightarrow (\operatorname{Int} A \subset \operatorname{Int} B)$ — *свойство монотонности;*
(*г*) $\operatorname{Int}(A \cap B) = \operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B$;
(*д*) $\operatorname{Int}(\operatorname{Int} A) = \operatorname{Int} A$.

◄ (г) Из очевидных включений

$$\operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B \subset A, \ \operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B \subset B,$$

имеем

$$\operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B \subset A \cap B.$$

Так как левая часть последнего соотношения – открытое множество, то

$$\operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B \subset \operatorname{Int}(A \cap B). \tag{4.1}$$

С другой стороны, из свойства монотонности оператора Int получаем

$$\operatorname{Int}(A \cap B) \subset \operatorname{Int} A, \ \operatorname{Int}(A \cap B) \subset \operatorname{Int} B.$$

Отсюда следует

$$\operatorname{Int}(A \cap B) \subset \operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B. \tag{4.2}$$

Из включений (4.1) и (4.2) получаем требуемое равенство. ►

Отображение $A \mapsto \overline{A}$, сопоставляющее каждому множеству $A \subset X$ его замыкание $\overline{A}$ в пространстве (X, ρ), называется *оператором замыкания*. Согласно теореме 3.4 и определении множества $\operatorname{Int} A$ имеем

$$\overline{A} = \cap\{F \subset X : F = \overline{F}, F \supset A\}.$$

Так как пересечение любого семейства замкнутых множеств замкнуто (следствие 3.2), то получаем, что замыкание $\overline{A}$ множества A является наименьшим замкнутым множеством, содержащим A.

Теорема 4.2. *Оператор замыкания обладает следующими свойствами:*

(*а*) $\overline{\varnothing} = \varnothing$;
(*б*) $A \subset \overline{A}$;
(*в*) $(A \subset B) \Rightarrow (\overline{A} \subset \overline{B})$ – *свойство монотонности;*
(*г*) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
(*д*) $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$;

◄ (г) Из очевидных включений

$$A \subset A \cup B, \ B \subset A \cup B$$

и монотонности оператора замыкания

$$\overline{A} \subset \overline{A \cup B}, \ \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$$

получаем

$$\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}. \tag{4.3}$$

С другой стороны, из включений $A \subset \overline{A}$ и $B \subset \overline{B}$ вытекает, что $A \cup B \subset \subset \overline{A} \cup \overline{B}$. Так как множество $\overline{A} \cup \overline{B}$ замкнуто, то из определения замыкания имеем

$$\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}. \tag{4.4}$$

Из включений (4.3) и (4.4) следует справедливость равенства (г).

(д) Непосредственно из свойства монотонности оператора замыкания имеем: $\overline{A} \subset \overline{(\overline{A})}$. Покажем справедливость обратного включения: $\overline{(\overline{A})} \subset \overline{A}$. Пусть x_0 — произвольная точка множества $\overline{(\overline{A})}$, т.е. x_0 — точка прикосновения множества $\overline{A}$. Значит, в любом шаре $B(x_0, r)$ найдется точка $x_1 \in \overline{A}$ (в силу предложения 3.1). Пусть $r_1 = r - \rho(x_0, x_1)$. Рассмотрим шар $B(x_1, r_1)$. Для любого элемента y из $B(x_1, r_1)$, с учетом неравенства треугольника, имеем

$$\rho(x_0, y) \leqslant \rho(x_0, x_1) + \rho(x_1, y) = r - r_1 + \rho(x_1, y) < r.$$

Следовательно, $B(x_1, r_1) \subset B(x_0, r)$. Поскольку $x_1 \in \overline{A}$, то в множестве A найдется точка x_2, принадлежащая шару $B(x_1, r_1)$. Тогда $x_2 \in B(x_0, r)$. Таким образом, в произвольном шаре $B(x_0, r)$ содержится точка из A, т.е. $x_0 \in \overline{A}$. ►

Связь оператора взятия внутренности с оператором замыкания устанавливает

Теорема 4.3. *Для любого множества A из пространства (X, ρ) справедливо равенство*

$$\operatorname{Int} A = X \setminus \overline{(X \setminus A)}.$$

◄ Из включения $X \setminus A \subset \overline{X \setminus A}$ следует, что $A \supset X \setminus \overline{(X \setminus A)}$. Так как множество $X \setminus \overline{(X \setminus A)}$ открыто, а $\operatorname{Int} A$ представляет собой наибольшее открытое множество, содержащееся в A, то получаем

$$\operatorname{Int} A \supset X \setminus \overline{(X \setminus A)}. \tag{4.5}$$

Пусть U — произвольное открытое множество в пространстве (X, ρ), содержащееся в A. Тогда $X \setminus A \subset X \setminus U$. Учитывая свойство монотонности оператора замыкания и замкнутость множества $X \setminus U$, имеем

$$\overline{X \setminus A} \subset \overline{X \setminus U} = X \setminus U.$$

Следовательно, справедливо включение

$$U \subset X \setminus \overline{(X \setminus A)}. \tag{4.6}$$

Положив $U = \operatorname{Int} A$ в соотношении (4.6), получим

$$\operatorname{Int} A \subset X \setminus \overline{(X \setminus A)}. \tag{4.7}$$

Итак, из включений (4.5) и (4.7) следует справедливость искомого равенства. ►

Следствие 4.1. *Для любого множества A из пространства (X, ρ) имеет место равенство*

$$\overline{A} = X \setminus \operatorname{Int}(X \setminus A). \ ►$$

Отображение $A \mapsto \operatorname{Fr} A$, сопоставляющее каждому множеству $A \subset X$ множество всех его граничных точек $\operatorname{Fr} A$ в пространстве (X, ρ), называется *граничным оператором.*

Теорема 4.4. *Оператор* Fr *обладает следующими свойствами:*
(*а*) $\operatorname{Fr} A = X \setminus (\operatorname{Int} A \cup \operatorname{Int}(X \setminus A))$;
(*б*) $\operatorname{Fr} A = \operatorname{Fr}(X \setminus A)$;
(*в*) $\operatorname{Fr} A = \overline{A} \setminus \operatorname{Int} A$;
(*г*) $\overline{A} = A \cup \operatorname{Fr} A$;
(*д*) $\operatorname{Int} A = A \setminus \operatorname{Fr} A$. ►

Задачи и упражнения

4.1. Найти в пространстве $\mathbb{R}$ замыкание, внутренность и границу следующих его подмножеств:

$$\{a\}; \quad (a,b); \quad (a,b]; \quad [a,b); \quad [a,b]; \quad [a,b) \cup \{c\}; \quad [a,b) \cup (b,c].$$

4.2. (а) Доказать, что в произвольном МП справедливо включение $\overline{B(x_0,r)} \subset \overline{B}(x_0,r)$. Приведите пример, когда $\overline{B(x_0,r)}$ не совпадает с $\overline{B}(x_0,r)$.

(б) Доказать, что в пространстве $\mathbb{R}^n$ для всякой точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и любого числа $r > 0$ справедливы следующие равенства:

$$\overline{B}(x_0,r) = \overline{B(x_0,r)} = (B(x_0,r))';$$
$$S(x_0,r) = \operatorname{Fr}(B(x_0,r)) = \operatorname{Fr}(\overline{B}(x_0,r)).$$

4.3. Доказать следующие свойства оператора взятия внутренности и оператора замыкания:

(а) $\operatorname{Int}(A \setminus B) \subset \operatorname{Int} A \setminus \operatorname{Int} B$;
(б) $\overline{A \setminus B} \supset \overline{A} \setminus \overline{B}$;
(в) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$;
(г) $\operatorname{Int}(\overline{A \cup B}) = \overline{\operatorname{Int} \overline{A}} \cup \overline{\operatorname{Int} \overline{B}}$.

Приведите примеры множеств в пространстве $\mathbb{R}$, для которых множества $\overline{A} \setminus \overline{B}$ и $\overline{A \setminus B}$, $\overline{A \cap B}$ и $\overline{A} \cap \overline{B}$, $\operatorname{Int}(A \setminus B)$ и $\operatorname{Int} A \setminus \operatorname{Int} B$ различны.

4.4. Доказать свойства граничного оператора Fr:

(а) $\operatorname{Fr} \overline{A} \subset \operatorname{Fr} A$;
(б) $\operatorname{Fr}(\operatorname{Int} A) \subset \operatorname{Fr} A$;
(в) $\operatorname{Fr}(A \cup B) \subset \operatorname{Fr} A \cup \operatorname{Fr} B$;
(г) $\operatorname{Fr}(A \cap B) \subset \operatorname{Fr} A \cup \operatorname{Fr} B$;
(д) $\operatorname{Fr}(A \setminus B) \subset \operatorname{Fr} A \cup \operatorname{Fr} B$;
(е) $\operatorname{Fr} A = \left[A \cap \overline{(X \setminus A)}\right] \cup (\overline{A} \setminus A)$;
(ж) $\overline{\operatorname{Int}(\operatorname{Fr} A)} = \overline{A \cap \operatorname{Int}(\operatorname{Fr} A)} = \overline{(\operatorname{Int} \operatorname{Fr} A) \setminus A}$.

Приведите примеры множеств A и B в пространстве $\mathbb{R}$, при которых левая и правая части соотношений (а)–(д) различны.

4.5. Установить справедливость следующих утверждений:
(а) если $\overline{A} \cap \overline{B} = \varnothing$, то $\operatorname{Fr}(A \cup B) = \operatorname{Fr} A \cup \operatorname{Fr} B$;
(б) если A и B — открытые множества, то имеют место включения

$$(A \cap \operatorname{Fr} B) \cup (B \cap \operatorname{Fr} A) \subset \operatorname{Fr}(A \cup B) \subset$$
$$\subset (A \cap \operatorname{Fr} B) \cup (B \cap \operatorname{Fr} A) \cup (\operatorname{Fr} A \cup \operatorname{Fr} B).$$

Приведите пример в пространстве $\mathbb{R}$, когда все три множества различны.

4.6. Доказать, что (а) множество A открыто в пространстве (X, ρ) тогда и только тогда, когда $A \cap \operatorname{Fr} A = \varnothing$; (б) множество A замкнуто в пространстве (X, ρ) тогда и только тогда, когда $\operatorname{Fr} A \subset A$.

4.7. Доказать, что в произвольном МП (X, ρ) для произвольной точки $x_0 \in X$ и любого числа $r > 0$ равенство $S(x_0, r) = \operatorname{Fr}(B(x_0, r))$ будет иметь место тогда и только тогда, когда $\overline{B}(x_0, r) = \overline{B(x_0, r)}$ (см. задачу 4.2).

4.8. Пусть F — замкнутое и G — открытое множества из пространства (X, ρ). Доказать справедливость следующих равенств:

(а) $\overline{G \cap \overline{A}} = \overline{G \cap A}$,
(б) $\operatorname{Int}((\operatorname{Int} A) \cup F) = \operatorname{Int}(A \cup F)$,
(в) $\operatorname{Int}(\overline{G \cap A}) = \operatorname{Int} \overline{G} \cap \operatorname{Int} \overline{A}$,

где A — произвольное подмножество пространства (X, ρ).

4.9. Показать, что производное множество удовлетворяет следующим соотношениям:

(а) $(A \cup B)' = A' \cup B'$;

(б) $A' \setminus B' \subset (A \setminus B)'$;

(в) $A' \supset A'' \supset \ldots \supset A^{(n)} \supset \ldots$;

(г) $\bigcup\limits_i A_i' \subset \left(\bigcup\limits_i A_i\right)'$;

(д) $\left(\bigcap\limits_i A_i\right)' \subset \bigcap\limits_i A_i'$;

(е) $(A \subset B) \Rightarrow (A' \subset B')$;

(ж) $\big(A \setminus \{x_0\}\big)' = A' = \big(A \cup \{x_0\}\big)'$;

(з) если A — конечно, то $A' = \varnothing$.

4.10. Построить пример множества A в МП, у которого $A' \neq \varnothing$, а $A'' = \varnothing$.

4.11. Множество A пространства (X, ρ) называется *канонически открытым* (или, соответственно *канонически замкнутым*), если $A = \operatorname{Int} \overline{A}$ (или, соответственно $A = \overline{\operatorname{Int} A}$).

Приведите примеры множеств в пространствах $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ и $C[a, b]$, которые не являются канонически открытыми и канонически замкнутыми.

4.12. Доказать, что дополнение канонически открытого множества канонически замкнуто, и наоборот.

Приведите пример двух канонически открытых множеств, объединение которых не является канонически открытым, и пример двух канонически замкнутых множеств, пересечение которых не является канонически замкнутым.

§5. Подпространство метрического пространства

Всякое рассуждение должно проводиться в определенной, четко ограниченной области предметов, которую следует заранее указать и которая не может быть всеобъемлющей.

Э. Шредер

Пусть (X, ρ) — произвольное МП и M — некоторое его непустое подмножество. Для всякой пары точек x, $y \in M$ положим

$$\rho_M(x, y) := \rho(x, y). \tag{5.1}$$

Тем самым на множестве $M \times M$ определена функция $\rho_M = \rho\big|_{M\times M}$, для которой, очевидным образом, выполнены все аксиомы метрики. Значит, ρ_M является метрикой на M и называется *индуцированной метрикой* на множестве M из пространства (X, ρ). Полученное МП (M, ρ_M) называется *подпространством пространства* (X, ρ). Если M — открытое (замкнутое) подмножество в (X, ρ), то (M, ρ_M) называется *открытым* (*замкнутым*) *подпространством*.

Открытый шар с центром в точке $x_0 \in M$ радиуса r в подпространстве (M, ρ_M) пространства (X, ρ) будем обозначать символом $B_M(x_0, r)$, т. е.

$$B_M(x_0, r) := \{x \in M : \rho_M(x_0, x) < r\}.$$

Отсюда, принимая во внимание определение индуцированной метрики ρ_M (5.1), следует

Предложение 5.1. *Пусть (M, ρ_M) — подпространство МП (X, ρ). Тогда для всякой точки $x_0 \in M$ и любого числа $r > 0$ открытый шар $B_M(x_0, r)$ в (M, ρ_M) допускает представление*

$$B_M(x_0, r) = M \cap B(x_0, r), \tag{5.2}$$

где $B(x_0, r)$ — открытый шар в (X, ρ).

◀ Для произвольной точки $x \in B_M(x_0, r)$ одновременно выполнены соотношения: $x \in M$, $\rho(x, x_0) < r$, т. е. $x \in M \cap B(x_0, r)$. Значит, справедливо включение

$$B_M(x_0, r) \subset B(x_0, r) \cap M. \tag{5.3}$$

Обратно, если $x \in B(x_0, r) \cap M$, то из определения шара $B_M(x_0, r)$ имеем, что $x \in B_M(x_0, r)$. Отсюда заключаем, что

$$B(x_0, r) \cap M \subset B_M(x_0, r). \tag{5.4}$$

Из полученных соотношений (5.3) и (5.4) следует равенство (5.2). ▶

Из определения открытого множества в МП имеем, что множество $A \subset M$ *открыто в подпространстве* (M, ρ_M) (или *относительно множества* M), если для всякой точки $x_0 \in A$ существует число $r > 0$, такое, что $B_M(x_0, r) \subset A$.

Критерии открытости множества в подпространстве устанавливает следующая

Теорема 5.1. *Для того чтобы множество $A \subset M$ было открыто в подпространстве (M, ρ_M) пространства (X, ρ), необходимо и достаточно, чтобы существовало такое множество G, открытое в пространстве (X, ρ), что $A = M \cap G$.*

◀ Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть множество A открыто в (M, ρ_M). Тогда для любой точки $a \in A$ существует положительное число $r_a > 0$, такое, что $B_M(a, r_a) \subset A$, где $B_M(a, r_a)$ — открытый шар подпространства (M, ρ_M). Поэтому, принимая во внимание равенство (5.2), имеем

$$\cup\{B_M(a, r_a) : a \in A\} = [\cup\{B(a, r_a) : a \in A\}] \cap M.$$

Тогда из теоремы 3.1(б) заключаем, что множество $G = \cup\{B(a, r_a) : a \in A\}$ открыто в (X, ρ) и $A \subset G$. Следовательно, $M \cap G \supset A$. С другой стороны, согласно выбору шара $B(a, r_a)$ имеем $B(a, r_a) \cap M \subset A$ при каждом $a \in A$. Значит, $G \cap M \subset A$. Отсюда и из полученного выше включения, $M \cap G \supset A$, вытекает требуемое равенство: $A = M \cap G$.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Если G — открытое множество пространства (X, ρ) и $A = M \cap G$, то для каждой точки $a \in A$ найдется шар $B(a, r_a) \subset G$, в силу очевидного включения $A \subset G$. Тогда $B(a, r_a) \cap M \subset A$. Итак, для каждой точки $a \in A$ нашелся открытый шар $B_M(a, r_a) = B(a, r_a) \cap M$ в (M, ρ_M), такой, что $B_M(a, r_a) \subset A$, а это значит, что A — открытое множество в (M, ρ_M). ▶

Из критерия замкнутости множества в МП (теорема 3.4) и теоремы 5.1 следует

Теорема 5.2. *Для того чтобы множество $B \subset M$ было замкнутым в подпространстве (M, ρ_M) пространства (X, ρ), необходимо и достаточно, чтобы существовало замкнутое множество F пространства (X, ρ), такое, что $B = M \cap F$.* ►

Теорема 5.3. *Всякое открытое (замкнутое) множество A подпространства (M, ρ_M) открыто (замкнуто) в пространстве (X, ρ) тогда и только тогда, когда подпространство (M, ρ_M) открыто (замкнуто) в (X, ρ).*

◄ Необходимость очевидна, так как множество M само является открытым множеством в (M, ρ_M). Пусть теперь множество M открыто в (X, ρ) и пусть $A \subset M$ — произвольное открытое подмножество в (M, ρ_M), т. е. $A = M \cap G$, где G — некоторое открытое множество в (X, ρ). Таким образом, A есть пересечение двух открытых множеств в (X, ρ). Значит, в силу теоремы 3.1(в), множество A открыто в (X, ρ). ►

З а м е ч а н и е 5.1. Из доказанных теорем 5.1–5.3 заключаем, что множество A может быть открытым в подпространстве (M, ρ_M), не будучи открытым в самом пространстве (X, ρ) (например, если (X, ρ) совпадает с пространством $\mathbb{R}^2$, $M = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ и $A = \{(x, 0) : x \in (c, d)\}$, то множество A открыто в подпространстве (M, ρ_M), но не в $\mathbb{R}^2$). Следовательно, свойство множества A быть открытым зависит от пространства, в котором оно содержится. То же верно и в отношении свойства множества быть замкнутым.

Теорема 5.4. *Замыкание $\overline{B}^M$ множества $B \subset M$ в подпространстве (M, ρ_M) представимо в виде пересечения замыкания $\overline{B}^X$ множества B в пространстве (X, ρ) с множеством M, т. е. справедливо равенство $\overline{B}^M = \overline{B}^X \cap M$.*

◄ Согласно определению замыкания имеем, что

$$\overline{B}^M = \cap\{F \text{ — замкнуто в } (M, \rho_M) : F \supset B\}.$$

Так как каждое множество F, замкнутое в подпространстве (M, ρ_M), представимо, в силу теоремы 5.2, в виде

$$F = F_1 \cap M,$$

где F_1 — замкнутое множество в пространстве (X, ρ), окончательно получаем:

$$\overline{B}^M = \cap\{F_1 \cap M = F : F_1 \supset B\} =$$
$$= M \cap [\cap\{F_1 \text{ — замкнуто в } (X, \rho) : F_1 \supset B\}] = M \cap \overline{B}^X. \blacktriangleright$$

Задачи и упражнения

5.1. (а) Пусть $\overline{B}_M(x_0, r)$ $(S(x_0, r))$ — замкнутый шар (сфера) с центром в точке $x_0 \in M$ радиуса r в подпространстве (M, ρ_M). Установить справедливость следующих равенств:

$\overline{B}_M(x_0, r) = \overline{B}(x_0, r) \cap M,$
$S_M(x_0, r) = S(x_0, r) \cap M,$

где $\overline{B}(x_0, r)(S(x_0, r))$ — замкнутый шар (сфера) в пространстве (X, ρ).

(б) Пусть $[a, b]$ и (c, d) — подмножества пространства $\mathbb{R}$. Описать все замкнутые и открытые множества в подпространствах $((c, d), \rho_{(c,d)})$, $([c, d], \rho_{[c,d]})$, где $a < c < d < b$, и указать, какие из этих множеств будут открытыми (замкнутыми) в пространстве $\mathbb{R}$.

(в) Пусть $([a, b], \rho_{[a,b]})$ — подпространство пространства $\mathbb{R}$. Найти замыкание, границу и внутренность множеств $[c, d)$, (c, d), $\{c\}$, $[c, d\ ]$ $(a \leqslant c < d \leqslant b)$ в этом подпространстве.

5.2. Пусть (Z, d) — произведение пространств (X, ρ) и (Y, σ). Доказать, что для любой пары множеств $A \subset X$ и $B \subset Y$ имеют место следующие соотношения:

(а) $\operatorname{Int}_Z(A \times B) = \operatorname{Int}_X A \times \operatorname{Int}_Y B$;

(б) $\overline{A \times B}^Z = \overline{A}^X \times \overline{B}^Y$;

(в) $\operatorname{Fr}_Z(A \times B) = (\overline{A}^X \times \operatorname{Fr}_Y B) \cup \left(\operatorname{Fr}_X A \times \overline{B}^Y\right)$.

Из соотношения (б), в частности, получаем, что для замкнутости множества $A \times B$ в пространстве (Z, d) необходимо и достаточно, чтобы A было замкнуто в (X, ρ) и B было замкнуто в (Y, σ).

5.3. Пусть A, B — два непустых множества из пространства (X, ρ) и U — подмножество множества $A \cap B$, открытое (или, соответственно, замкнутое) в подпространствах (A, ρ_A) и (B, ρ_B). Показать, что тогда множество U открыто (замкнуто) в подпространстве $(A \cap B, \rho_{A \cap B})$.

5.4. Пусть B — множество в подпространстве (M, ρ_M) пространства (X, ρ). Доказать следующие формулы:

(а) $\operatorname{Int}_M B = M \setminus \overline{(M \setminus B)}^M = M \setminus \overline{(M \setminus B)}^X$;

(б) $\operatorname{Int}_X B \subset \operatorname{Int}_M B$;

(в) $\operatorname{Fr}_M B = \overline{B}^M \cap \overline{(M \setminus B)}^X$;

(г) $\operatorname{Fr}_M B \subset \operatorname{Fr}_X B$,

где $\operatorname{Int}_M B$ – внутренность множества $B \subset M$, а $\operatorname{Fr}_M B$ – граница множества B в подпространстве (M, ρ_M).

Приведите примеры множеств, для которых

$$\operatorname{Int}_X B \neq \operatorname{Int}_M B; \ \operatorname{Fr}_M B \neq \operatorname{Fr}_X B.$$

5.5. Доказать, что если множество U открыто (замкнуто) в подпространстве $(\overline{M}, \rho_{\overline{M}})$, то $M \cap U$ открыто (замкнуто) в подпространстве (M, ρ_M).

5.6. Приведите пример, когда множество замкнуто в подпространстве, но не является замкнутым в пространстве.

5.7. Пусть A – фиксированное подмножество пространства (X, ρ). Каждому множеству $B \subset A$ поставим в соответствие множество

$$F(B) = \{x \in X : \rho(x, B) \leqslant \rho(x, A \setminus B)\},$$

при этом будем полагать $\rho(x, \varnothing) = \infty$.

Доказать следующие соотношения:

(а) $F(\varnothing) = \varnothing$;

(б) $F(A) = X$;

(в) $B \subset F(B)$;

(г) $\overline{F(B)} = F(B)$;

(д) $F(B_1 \cup B_2) = F(B_1) \cup F(B_2)$, $B_1 \subset A$, $B_2 \subset A$;

(е) если $A = \bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i$, то $\bigcup\limits_{i=1}^{n} F(B_i) = X$;

(ж) $A \cap F(B) = A \cap \overline{B}^X$;

(з) если множество $B \subset A$ замкнуто в подпространстве (A, ρ_A), то $A \cap F(B) = B$.

5.8. Аналогично множеству $F(B)$ из задачи 5.7 определим множество

$$G(B) = \{x \in X : \rho(x, B) < \rho(x, A \setminus B)\}.$$

Доказать справедливость следующих утверждений:

(а) $G(B)$ – открытое множество в (X, ρ);

(б) $G(A) = X$;

(в) $G(\varnothing) = \varnothing$;

(г) $G(B_1 \cap B_2) = G(B_1) \cap G(B_2)$, $B_1 \subset A$, $B_2 \subset A$;

(д) если $\bigcap\limits_{i=1}^{n} B_i = \varnothing$, то $\bigcap\limits_{i=1}^{n} G(B_i) = \varnothing$;

(е) $A \cap G(B) = A \setminus \overline{(A \setminus B)}$;

(ж) если в множестве $B \subset A$ открыто в подпространстве (A, ρ_A), то $A \cap G(B) = B$.

5.9. Множество $M \subset X$ называется *связным* в пространстве (X, ρ), если связно пространство (M, ρ_M) (см. задачу 3.19). Доказать, что множество $M \subset X$ связно в (X, ρ) тогда и только тогда, когда для любой пары открытых (замкнутых) в (X, ρ) подмножеств U и V, таких, что из условий $M \subset U \cup V$, $M \cap U \neq \varnothing$, $M \cap V \neq \varnothing$, следует $M \cap U \cap V \neq \varnothing$.

Открытое связное множество в МП называют *областью*.

5.10. Установить следующие свойства связных множеств:

(а) замыкание связного подмножества в (X, ρ) связно;

(б) объединение любого семейства $\{M_t : t \in T\}$ связных подмножеств, имеющего непустое пересечение, связно;

(в) если M — связное подмножество в (X, ρ) и множество $N \subset X$ такое, что $M \subset N \subset \overline{M}$, то множество N связно;

(г) если M, N — связные подмножества в (X, ρ) и $\overline{M} \cap N = \varnothing$, то подмножество $M \cup N$ связно.

5.11. Доказать, что множество A в пространстве $\mathbb{R}$ связно в том и только в том случае, когда A обладает следующим свойством: $(\forall\, x, y, z \in M : x < z < y) \Rightarrow (z \in M)$.

5.12. Непустое подмножество K пространства (X, ρ) называется *компонентой связности пространства* (X, ρ), если оно является максимальным связным подмножеством, т. е. оно связно и не содержится в отличном от себя связном множестве из (X, ρ).

Доказать следующие свойства компоненты связности:

(а) компонента связности является замкнутым множеством;

(б) компоненты связности либо не пересекаются, либо совпадают;

(в) любое пространство представимо в виде объединения попарно непересекающихся связных компонент;

(г) пространство связно тогда и только тогда, когда оно состоит из одной компоненты связности.

5.13. *Компонентой связности точки* $x_0 \in X$ в пространстве (X, ρ) называется объединение $C(x_0)$ всех связных подмножеств пространства (X, ρ), содержащих точку x_0.

Доказать следующие утверждения:

(а) $C(x_0)$ — наибольшее связное множество, содержащее точку x_0, причем для любой точки $x_1 \in C(x_0)$ имеем $C(x_1) = C(x_0)$, а если $x_1 \notin C(x_0)$, то $C(x_1) \cap C(x_0) = \varnothing$;

(б) $C(x_0)$ — замкнутое множество в (X, ρ);

(в) компонента связности $C(x_0, y_0)$ точки (x_0, y_0) в произведении $(X \times Y, \rho_X \times \rho_Y)$ пространств (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y) совпадает с произведением $C_X(x_0) \times C_Y(y_0)$, где $C_X(x_0)$ $(C_Y(y_0))$ — компонента связности точки x_0 (y_0) в пространстве (X, ρ_X) $((Y, \rho_Y))$;

(г) компонента связности $C(x_0)$ точки x_0 содержится в каждом одновременно открытом и замкнутом множестве, содержащем x_0.

§6. Различные классы подмножеств

Математики — как французы: все, что вы им говорите, они переводят на свой язык, и это тотчас же становится чем-то совершенно иным.

И. Гете

Множество, представимое в виде пересечения счетного числа открытых множеств пространства (X, ρ), называется *множеством типа* G_δ, или G_δ*-множеством*.

Множество, представимое в виде объединения счетного числа замкнутых множеств пространства (X, ρ), называется *множеством типа* F_σ, или F_σ*-множеством*. Очевидно, что дополнение к $F_\sigma(G_\delta)$-множеству относительно множества X является $G_\delta(F_\sigma)$-множеством в (X, ρ). Связь между замкнутыми (открытыми) множествами и $G_\delta(F_\sigma)$-множествами устанавливает

Теорема 6.1. *Всякое непустое замкнутое множество в МП есть множество типа G_δ, а всякое непустое открытое множество — множество типа F_σ.*

◀ Пусть F — замкнутое множество в (X, ρ). Для каждого натурального числа n рассмотрим окрестность $V_n = V_{\frac{1}{n}}(F)$ множества F (см. теорему 3.2). Так как при всяком n справедливо соотношение $F \subset V_n$, то получаем включение $F \subset \cap\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$. С другой стороны, произвольная точка $x \in \cap\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ является точкой прикосновения множества F, а в силу замкнутости F заключаем, что $x \in F$. Отсюда, с учетом полученного выше включения, имеем равенство $F = \cap\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$, т. е. F есть множество типа G_δ.

Пусть U — открытое множество в (X, ρ). Тогда $X \setminus U = F$ замкнуто и является G_δ-множеством. Учитывая, что дополнение к G_δ-множеству есть F_σ-множество, получаем, что U есть F_σ-множество. ▶

Множество $A \subset X$ называется *всюду плотным* (или просто *плотным*) в пространстве (X, ρ), если $\overline{A} = X$, т. е. если каждая точка из X является точкой прикосновения для A. Очевидно (см. теорему 4.3), что множество A всюду плотно в (X, ρ) в том и только в том случае, когда $\mathrm{Int}\overline{A} = X$.

Множество $A \subset X$ называется *коплотным* (или *граничным*) в пространстве (X, ρ), если $X \setminus A$ всюду плотно в (X, ρ), т. е. $\mathrm{Int}A = \varnothing$.

Множество $A \subset X$ называется *нигде не плотным* (или *разреженным*) в пространстве (X, ρ), если его замыкание $\overline{A}$ коплотно в (X, ρ), т. е. $\mathrm{Int}\overline{A} = \varnothing$. Итак, множество A нигде не плотно в (X, ρ) тогда и только тогда, когда его замыкание не содержит никаких непустых открытых множеств пространства (X, ρ).

Теорема 6.2. *Пусть A — множество в пространстве (X, ρ). Тогда справедливы следующие утверждения:*

(а) *(A всюду плотно в (X, ρ)) $\Leftrightarrow$ (для любого непустого открытого множества U в (X, ρ) множество $A \cap U \neq \varnothing$);*

(б) *(A коплотно в (X, ρ)) $\Leftrightarrow$ (для любого непустого открытого множества U в (X, ρ) множество $U \cap (X \setminus A) \neq \varnothing$);*

(в) *(A нигде не плотно в (X, ρ)) $\Leftrightarrow$ (для любого непустого открытого множества U существует непустое открытое множество $V \subset U$, такое, что $V \cap A = \varnothing$);*

(г) *(A нигде не плотно в (X, ρ)) $\Rightarrow$ ($\overline{A}$ — нигде не плотно);*

(д) *(открытое множество A всюду плотно в (X, ρ)) $\Leftrightarrow$ ($X \setminus A$ — нигде не плотно);*

(е) *(замкнутое множество F нигде не плотно в (X, ρ)) $\Leftrightarrow$ (открытое множество $X \setminus F$ всюду плотно в (X, ρ)).*

◄ (а) Пусть $\overline{A} = X$, и пусть существует открытое непустое множество U, такое, что $A \cap U = \varnothing$. Тогда $A \subset X \setminus U$. Отсюда в силу замкнутости множества $X \setminus U$ имеем включение $\overline{A} \subset X \setminus U$, т. е. $X \subset X \setminus U$. Это противоречит тому, что $U \neq \varnothing$.

Обратно, для произвольной точки $x_0 \in X$ и произвольной ее окрестности U по условию имеем, что $A \cap U \neq \varnothing$. Следовательно, $x_0 \in \overline{A}$. Значит, в силу произвольного выбора точки x_0 получаем, что $\overline{A} \supset X$, т. е. $X = \overline{A}$.

(в) В силу определения нигде не плотного множества для любого непустого открытого множества U имеем: $(X \setminus \overline{A}) \cap U \neq \varnothing$. Положив $V = (X \setminus \overline{A}) \cap U$, получаем, что $V \subset U$ и $V \subset X \setminus \overline{A} \subset X \setminus A$, т. е. $V \cap A = \varnothing$.

Обратно, допустим, что $U = \operatorname{Int}\overline{A} \neq \varnothing$. По условию, существует такое непустое открытое подмножество V множества U, что $V \cap A = \varnothing$. Но тогда $V \cap \overline{A} = \varnothing$, что невозможно в силу определения множества U. ►

МП называется *сепарабельным*, если в нем существует счетное и всюду плотное подмножество, или другими словами: в (X, ρ) существует последовательность точек (x_n), такая, что для любого $\varepsilon > 0$ и любого $x \in X$ найдется элемент x_{n_0} последовательности (x_n), для которого выполняется неравенство $\rho(x, x_{n_0}) < \varepsilon$.

Семейство $\{G_t : t \in T\}$ непустых открытых множеств в (X, ρ) называется *базой пространства* (X, ρ), если любое непустое открытое множество в (X, ρ) можно представить в виде объединения некоторого подсемейства $\{G_t : t \in T_0\}$, $T_0 \subset T$, семейства $\{G_t : t \in T\}$. Ясно, что совокупность всех открытых шаров с центром во всевозможных точках из X является базой МП (X, ρ).

Предложение 6.1. *Семейство $\{G_t : t \in T\}$ непустых открытых множеств $G_t \subset X$ будет базой пространства (X, ρ) тогда и только тогда, когда для любой точки $x_0 \in X$ и любой ее окрестности V существует такой индекс $t_0 \in T$, что $x_0 \in G_{t_0} \subset V$.*

◄ Необходимость непосредственно следует из определения базы. Для доказательства достаточности рассмотрим произвольное открытое множество U в (X, ρ) и x — некоторую точку множества U. Тогда по условию найдется такой индекс $t(x) \in T$, что $x \in G_{t(x)} \subset U$. Следовательно, $U \subset \cup\{G_{t(x)} : x \in U\} \subset U$, т.е. U есть объединение подсемейства $\{G_{t(x)} : x \in U\}$ семейства $\{G_t : t \in T\}$, а это значит, что $\{G_t : t \in T\}$ — база пространства (X, ρ). ►

Теорема 6.3. *МП сепарабельно тогда и только тогда, когда оно обладает счетной базой.*

◄ Допустим, что (X, ρ) — сепарабельное МП и $M = \{a_n\}$ — счетное всюду плотное подмножество в (X, ρ). Рассмотрим семейство открытых шаров $\{B(a_n, \frac{1}{m}) : n, m \in \mathbb{N}\}$. Это семейство счетно (так как множество $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ счетно) и является базой пространства (X, ρ). Действительно, для любой точки $x \in X$ и каждого $r > 0$ существуют натуральное число m и элемент $a_n \in M$ (в силу плотности M в (X, ρ)), такие, что $\frac{1}{m} < \frac{r}{2}$ и $\rho(x, a_n) < \frac{1}{m}$, т.е. $x \in B(a_n, \frac{1}{m})$. Отсюда для произвольной точки $y \in B(a_n, \frac{1}{m})$ получим

$$\rho(x, y) \leqslant \rho(x, a_n) + \rho(a_n, y) < \frac{1}{m} + \frac{1}{m} = \frac{2}{m} < r.$$

Таким образом, для произвольного шара $B(x,r)$ найдется шар $B(a_n, \frac{1}{m})$ из рассматриваемого семейства, такой, что $B(a_n, \frac{1}{m}) \subset B(x,r)$. Отсюда на основании предложения 6.1 заключаем, что семейство открытых шаров $\{B(a_n, \frac{1}{m}) : n, m \in \mathbb{N}\}$ является базой пространства (X, ρ).

Обратно, пусть $\{G_n\}$ — счетная база пространства (X, ρ). Образуем счетное множество $M = \{a_n\}$, выбрав по одной точке $a_n \in G_n$. Покажем, что множество M всюду плотно в (X, ρ). Пусть $x_0 \in X$ — произвольная точка и U_0 — произвольная ее окрестность. Тогда из определения базы пространства имеем, что существует такой элемент $G_{n_0} \in \{G_n\}$, что $G_{n_0} \subset U_0$, а потому $a_{n_0} \in U_0$. Таким образом, каждая окрестность точки $x_0 \in X$ содержит точку из M, т.е. $\overline{M} = X$. ▶

Следствие 6.1. *Каждое открытое покрытие сепарабельного МП содержит счетное покрытие.*

◀ Пусть $U = \{U_\alpha\}$ — некоторое открытие сепарабельного МП (X, ρ). Тогда каждая точка $x \in X$ содержится в некотором U_α. Обозначим через $\{G_k : k \in \mathbb{N}\}$ счетную базу МП (X, ρ). Согласно предположению 6.1, имеем соотношение $x \in G_{k(x)} \subset U_\alpha$. Тогда система множеств $\{G_{k(x)} : x \in X\}$ счетна как подмножество счетной системы $\{G_k : k \in \mathbb{N}\}$ (см. пункт 0.5), причем она образует открытое покрытие (X, ρ). Выберем для каждого $G_{k(x)}$ одно из содержащих его множеств $U_\alpha \in U$. В результате получим счетное подпокрытие покрытия U. ▶

Следствие 6.2. *Любое подмножество сепарабельного МП сепарабельно.*

◀ Пусть (X, ρ) — сепарабельное МП, $M \subset X$, и пусть $\{G_n\}$ — счетная база в (X, ρ). Тогда, в силу теоремы 5.1, $\{G_n \cap M\} \setminus \{\varnothing\}$ — счетная база подпространства (M, ρ_M). Следовательно, на основании теоремы 6.3 получаем справедливость нашего утверждения. ▶

Объединяя следствия 6.1 и 6.2, получаем

Следствие 6.3. *Любое открытое покрытие любого подмножества сепарабельного МП имеет счетное подпокрытие.* ▶

Множество в МП называется *множеством первой категории* (или *тощим*), если оно представимо в виде счетного объединения нигде не плотных подмножеств в исходном МП. В противном случае оно называется *множеством второй категории*.

Теорема 6.4. *Всякое множество первой категории содержится в некотором F_σ-множестве первой категории.*

◄ Пусть M — произвольное множество первой категории в (X, ρ), и пусть $M = \bigcup\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$, где каждое из A_n нигде не плотно в (X, ρ). Очевидно, что $M \subset \cup\{\overline{A}_n : n \in \mathbb{N}\}$. Следовательно, M оказывается подмножеством множества $\bigcup\{\overline{A}_n : n \in \mathbb{N}\}$, являющегося, в силу теоремы 6.2.(г), F_σ-множеством первой категории. ►

Теорема 6.5. *Если дополнение к F_σ-множеству всюду плотно, то оно относится к первой категории.*

◄ Пусть $M = \bigcup\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$, F_n — замкнутые множества в (X, ρ), и пусть множество $X \setminus M$ всюду плотно в (X, ρ). Докажем, что каждое из множеств F_n нигде не плотно. В силу замкнутости множества F_n имеем, что $X \setminus F_n$ — открытое множество. Кроме того, из включения $X \setminus M \subset X \setminus F_n$ и монотонности оператора замыкания получаем равенство $\overline{X \setminus F_n} = X$. Следовательно, множество F_n нигде не плотно, а значит, M — множество первой категории. ►

Задачи и упражнения

6.1. Доказать следующие свойства $F_\sigma(G_\delta)$-множеств:

(а) объединение счетного числа F_σ-множеств есть F_σ-множество;

(б) пересечение конечного числа F_σ-множеств есть F_σ-множество;

(в) всякое F_σ-множество есть объединение возрастающей последовательности замкнутых множеств;

(г) пересечение счетного числа и объединение конечного числа G_δ-множеств есть G_δ-множество;

(д) всякое G_δ-множество есть пересечение убывающей последовательности открытых множеств.

6.2. Доказать, что в произвольном МП всякое счетное множество есть F_σ-множество.

6.3. Показать, что в пространстве $\mathbb{R}$

(а) множество $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ является одновременно F_σ-множеством и G_δ-множеством;

(б) множество рациональных чисел является F_σ-множеством;

(в) множество иррациональных чисел есть G_δ-множество.

6.4. Пусть на множестве X заданы две метрики ρ_1 и ρ_2, удовлетворяющие условию $(*)$ из задачи 1.15. Показать, что если A есть G_δ-множество (F_σ-множество) в (X, ρ_1), то A будет G_δ-множеством (F_σ-множеством) и в (X, ρ_2). Справедливо ли это утверждение в случае, если $\rho_1 \leqslant \rho_2$?

6.5. Доказать, что если множество A всюду плотно в (X, ρ), то для любого открытого множества U в (X, ρ) справедливо равенство

$$\overline{U} = \overline{A \cap U},$$

или другими словами: если множество A всюду плотно в (X, ρ), то любая часть $A \cap U$ множества A плотна в подпространстве (U, ρ_U), где U – произвольное непустое открытое множество из (X, ρ).

6.6. Показать, что

(а) граница любого открытого или замнутого множества МП нигде не плотна;

(б) граница любого множества МП представима в виде объединения двух коплотных множеств;

(в) объединение двух нигде не плотных множеств нигде не плотно;

(г) счетное объединение нигде не плотных множеств не является, вообще говоря, нигде не плотным.

6.7. Пусть n_0 — некоторое фиксированное натуральное число, и пусть задано множество

$$L_{n_0} \rightleftharpoons \{x \in l_2 : x = (\xi_n), \xi_n = 0 \text{ при } n > n_0\}.$$

Доказать, что множество L_{n_0} нигде не плотно в пространстве l_2.

6.8. Пусть (Z, d) – произведение пространств (X, ρ) и (Y, σ) (см. пример 2.14), где $Z = X \times Y$ и $d = \rho \times \sigma$. Доказать справедливость следующих утверждений:

(а) если множество $E \subset X$ нигде не плотно в пространстве (X, ρ), то $E \times F$ нигде не плотно в (Z, d) для любого множества $F \subset Y$;

(б) если A всюду плотно в (X, ρ) и B всюду плотно в (Y, σ), то множество $A \times B$ всюду плотно в (Z, d).

6.9. Пусть A, B – подмножества из (X, ρ) и $A \subset B$. Множество A называется *плотным* (соответственно, *коплотным, нигде не плотным*) *в* B или *относительно* B, если A плотно (соответственно, коплотно, нигде не плотно) в подпространстве (B, ρ_B), т. е. если $\overline{A}^B = B$ (соответственно, $\overline{(B \setminus A)}^B = B$, $\left(B \setminus \overline{A}^B\right) \cap B = B$).

Доказать справедливость следующих утверждений:

(а) $\overline{A} \setminus A$ коплотно в A;

(б) если A плотно в B, то оно плотно в каждом подмножестве B, содержащем A (в частности, A плотно в $\overline{A}$);

(в) если A коплотно в B, а B плотно в C, то A плотно в C.

6.10. Доказать, что если A нигде не плотно относительно $\overline{B}$, то множество $A \cap B$ нигде не плотно в B.

6.11. Пусть A — открытое множество и B — коплотное (нигде не плотное) множество в пространстве (X, ρ). Доказать, что тогда $A \cap B$ коплотно (нигде не плотно) относительно A, а $A \cap \overline{B}$ — относительно $\overline{A}$.

6.12. Доказать, что произведение $(X \times Y, \rho \times \sigma)$ пространств (X, ρ) и (Y, σ) сепарабельно тогда и только тогда, когда каждое из них сепарабельно.

6.13. (а) Доказать, что если M — всюду плотное связное подмножество пространства (X, ρ), то пространство (X, ρ) также связно.

(б) Доказать, что сепарабельное МП не содержит несчетного дискретного множества.

(в) Пусть M — всюду плотное подмножество пространства (X, ρ) и подпространство (M, ρ_M) сепарабельно. Доказать, что тогда пространство (X, ρ) сепарабельно.

6.14. Показать, что пространства $\mathbb{R}^n$, $C[a, b]$, $C^k[a, b]$ $(k \in \mathbb{N})$, s, l_p $(1 \leqslant p < \infty)$, сепарабельны, а пространства m, $M[a, b]$ — несепарабельны.

6.15. Является ли множество непрерывных ограниченных на прямой $\mathbb{R}$ функций с метрикой

$$\rho(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in \mathbb{R}\}$$

сепарабельным пространством?

6.16. Доказать, что если каждое бесконечное подмножество метрического пространства имеет предельную точку, то оно сепарабельно. Верно ли обратное утверждение?

6.17. Множество A пространства (X, ρ) называется *плотным в себе*, если $A \subset A'$, т. е. оно не содержит изолированных точек.

Множество M пространства (X, ρ) называется *совершенным*, если $M' = M$, т. е. оно замкнуто и плотно в себе.

Доказать, что

(а) если множество A плотно в себе, то его замыкание $\overline{A}$ совершенно;

(б) если A плотно в себе, то каждое открытое и каждое всюду плотное его подмножество плотны в себе;

(в) если A — всюду плотное коплотное множество, то оно плотно в себе;

(г) для произвольного подмножества G пространства (X, ρ) множества $\mathrm{Int}(\mathrm{Fr}\, G)$ и $G \cap \mathrm{Int}(\mathrm{Fr}\, G)$ плотны в себе.

6.18. Доказать, что любое подмножество множества первой категории и объединение не более чем счетного числа множеств первой категории есть множество первой категории.

6.19. Показать, что

(а) множество всех точек пространства $\mathbb{R}^n$, у которых координаты рациональны, есть множество первой категории;

(б) множество действительных чисел $\mathbb{R}$ является множеством второй категории в пространстве $\mathbb{R}$.

6.20. Пусть (X, ρ) — произвольное МП и пусть $B \subset A \subset X$. Доказать, что

(а) если B — множество первой категории в подпространстве (A, ρ_A), то B — множество первой категории в (X, ρ);

(б) если B — множество первой категории в подпространстве $(\overline{A}, \rho_{\overline{A}})$, то $B \cap A$ — множество первой категории в (A, ρ_A);

(в) если A — открытое множество первой категории в (X, ρ), то B — множество первой категории в подпространстве (A, ρ_A).

6.21. (а) Непустые множества A и B из пространства (X, ρ) называются *отделимыми*, если

$$\overline{A} \cap B = \varnothing = A \cap \overline{B}.$$

Установить следующие свойства отделимых множеств:

(1) если множества A и B замкнуты (или открыты), то множества $A \setminus B$ и $B \setminus A$ отделимы;

(2) если множества A и B оба замкнуты (или оба открыты) и $A \cap B = \varnothing$, то A и B отделимы;

(3) если множество A отделимо от B и от C, то A отделимо от $B \cup C$.

(б) Пусть A и B — два непустых отделимых множества в МП (X, ρ). Показать, что существуют открытые множества U и V, такие, что $U \supset A$, $V \supset B$, $U \cap V = \varnothing$.

(в) Доказать, что множества A и B отделимы тогда и только тогда, когда они не пересекаются и замкнуты в подпространстве $(A \cup B, \rho_{A \cup B})$.

§7. Непрерывные отображения

Для математики существенна лишь форма соответствия (связи) между двумя переменными величинами, которые она рассматривает.

Р. Курант, Г. Роббинс. Что такое математика?

Пусть (X,ρ), (Y,σ) — два произвольных метрических пространства. Говорят, что f — отображение пространства (X,ρ) в пространство (Y,σ), и пишут $f\colon (X,\rho) \to (Y,\sigma)$, имея в виду отображение f множества X в множество Y (обозначаемое $f\colon X \to Y$) с фиксированными на них метриками ρ и σ, соответственно.

Приведем следующие определения непрерывности отображения в точке:

(i) (на языке окрестностей) отображение $f\colon (X,\rho) \to (Y,\sigma)$ называется *непрерывным в точке* $x_0 \in X$, если для любой окрестности V точки $f(x_0) \in Y$ существует такая окрестность U точки x_0, что $f(U) \subset V$;

(ii) (по Гейне) отображение $f\colon (X,\rho) \to (Y,\sigma)$ называется *непрерывным в точке* $x_0 \in X$, если для любой последовательности точек (x_n), $x_n \in X$, сходящейся к x_0 в (X,ρ), последовательность $(f(x_n))$ сходится к $f(x_0)$ в (Y,σ);

(iii) (по Коши) отображение $f\colon (X,\rho) \to (Y,\sigma)$ называется *непрерывным в точке* $x_0 \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое, что из неравенства $\rho(x,x_0) < \delta$ следует $\sigma(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.

Теорема 7.1. *Определения (i), (ii) и (iii) эквивалентны.*

◄ Пусть задано отображение $f\colon (X,\rho) \to (Y,\sigma)$; покажем справедливость следующих импликаций: (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (i).

Докажем, что (i) $\Rightarrow$ (ii). Пусть x_0, $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, такие, что $x_n \to x_0$. Для каждой окрестности $V \subset Y$ точки $f(x_0)$, существует окрестность $U \subset X$ точки x_0 такая, что $f(U) \subset V$. Так как $x_n \to x_0$, то все точки x_n, начиная с некоторого номера n_0, содержатся в окрестности U: $x_n \in U$ при $n \geqslant n_0$. Но тогда $f(x_n) \in f(U) \subset V$ для $n \geqslant n_0$, т. е. $f(x_n) \to f(x_0)$.

Теперь покажем, что (ii) $\Rightarrow$ (iii). Пусть определение (iii) не выполнено, т. е. существует такое $\varepsilon > 0$, что для любого $\delta > 0$ найдется точка $x \in X$, для которой $\rho(x, x_0) < \delta$, однако $\sigma(f(x_0), f(x)) \geqslant \varepsilon$. Выбирая $\delta = \frac{1}{n}$, где $n = 1, 2, \ldots$, получим последовательность (x_n) в (X, ρ), которая сходится к точке x_0 и $\sigma(f(x_0), f(x_n)) \geqslant \varepsilon$. Это противоречит условию (ii).

Остается доказать, что (iii) $\Rightarrow$ (i). Пусть V — произвольная окрестность точки $f(x_0)$ в (Y, σ). Тогда найдется шар $B_Y(f(x_0), \varepsilon) \subset V$. Из (iii) имеем, что существует такое $\delta > 0$, что $\sigma(f(x_0), f(x)) < \varepsilon$, как только $x \in B_X(x_0, \delta)$. Но тогда $f(B_X(x_0, \delta)) \subset B_Y(f(x_0), \varepsilon) \subset V$, что означает непрерывность отображения f в точке x_0 в смысле определения (i). ▶

Отображение $f\colon (X, \rho) \to (Y, \sigma)$, непрерывное в каждой точке множества X, называется *непрерывным отображением* пространства (X, ρ) в пространство (Y, σ), или просто *непрерывным отображением* на пространстве (X, ρ). Множество всех непрерывных отображений из (X, ρ) в (Y, σ) обозначают символом $C(X, Y)$, причем при $Y = \mathbb{R}$ будем писать $C(X)$.

Теорема 7.2 (критерий непрерывности отображения). *Отображение $f\colon (X, \rho) \to (Y, \sigma)$ непрерывно тогда и только тогда, когда прообраз $f^{-1}(V)$ открыт в (X, ρ) для любого открытого множества V из пространства (Y, σ).*

◀ Необходимость. Пусть отображение $f\colon (X, \rho) \to (Y, \sigma)$ непрерывно и V — произвольное открытое множество в (Y, σ). Если $f^{-1}(V) = \varnothing$, то открытость множества $f^{-1}(V)$ очевидна, так как пустое множество $\varnothing$ открыто.

Пусть $f^{-1}(V) \neq \varnothing$, и положим $U = f^{-1}(V)$. Для произвольной точки $x_0 \in U$ имеем, что $f(x_0) \in V$, следовательно, V можно рассматривать как окрестность точки $f(x_0)$. В силу непрерывности отображения f найдется окрестность U_{x_0} точки x_0, такая, что $f(U_{x_0}) \subset V$, т. е. $U_{x_0} \subset U$. Итак, для любой точки $x_0 \in U$ найдется окрестность U_{x_0}, такая, что $U_{x_0} \subset U$. Поскольку $U = \cup\{U_{x_0} : x_0 \in U\}$, то множество U открыто как объединение открытых множеств U_{x_0}. Таким образом, прообраз $f^{-1}(V)$ любого открытого множества из (Y, σ) открыт в (X, ρ).

Достаточность. Пусть x_0 — произвольная точка из (X, ρ). Положим, $y_0 = f(x_0)$ и V — произвольная окрестность точки y_0. Тогда $U = f^{-1}(V)$ будет, по условию, окрестностью точки x_0, причём $f(U) \subset V$.

Следовательно, отображение f непрерывно в точке x_0, а в силу произвольного выбора точки x_0 заключаем, что f — непрерывное отображение пространства (X, ρ) в (Y, σ). ►

Из определения замкнутого множества и теоремы 7.2 следует

Теорема 7.2′ (критерий непрерывности отображения). *Отображение $f\colon (X, \rho) \to (Y, \sigma)$ непрерывно тогда и только тогда, когда прообраз $f^{-1}(V)$ замкнут в (X, ρ) для любого замкнутого множества V из (Y, σ).* ►

Пусть задана функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ и некоторое число $a \in \mathbb{R}$. Тогда множества вида

$$\begin{aligned}
X(f > a) &:= \{x \in X : f(x) > a\},\\
X(f < a) &:= \{x \in X : f(x) < a\},\\
X(f = a) &:= \{x \in X : f(x) = a\},\\
X(f \geqslant a) &:= X(f > a) \cup X(f = a),\\
X(f \leqslant a) &:= X(f < a) \cup X(f = a)
\end{aligned}$$

называются *множествами Лебега функции* f, определенной на множестве X.

Теорема 7.3. *Для непрерывности функции $f\colon (X, \rho) \to \mathbb{R}$ необходимо и достаточно, чтобы для любого $a \in \mathbb{R}$ множества $X(f < a)$, $X(f > a)$ были открыты, а множества $X(f \leqslant a)$, $X(f \geqslant a)$ и $X(f = a)$ — замкнуты в (X, ρ).*

◄ Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть x_0 — произвольная точка множества $X(f < a)$ и $\varepsilon = a - f(x_0)$. Так как отображение f непрерывно в точке x_0, то существует шар $B(x_0, \delta)$, в котором выполняется неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Для любой точки $x \in B(x_0, \delta)$, с учетом определения числа ε, имеем

$$f(x) < f(x_0) + \varepsilon = a.$$

Следовательно, справедливо включение $B(x_0, \delta) \subset X(f < a)$. Отсюда в силу произвольного выбора точки x_0 заключаем, что множество $X(f < a)$ открыто.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Для любой точки $x_0 \in X$ и любого $\varepsilon > 0$ рассмотрим множества $X(f < f(x_0) + \varepsilon)$ и $X(f > f(x_0) - \varepsilon)$, которые по условию открыты. Пересечение этих множеств

$$X(-\varepsilon < f(x) - f(x_0) < \varepsilon) = X(f(x_0) - \varepsilon < f < f(x_0) + \varepsilon)$$

также открыто и содержит точку x_0, а вместе с ней и некоторый шар $B(x_0, \delta)$, причем в нем выполняется неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ для любой точки $x \in B(x_0, \delta)$, которое означает непрерывность f в точке x_0.

Доказательство замкнутости множеств $X(f \leqslant a)$, $X(f \geqslant a)$ и $X(f = a)$ получаем из теоремы 3.4 путем перехода к дополнениям. ▶

Отображение $f\colon (X, \rho) \to (Y, \sigma)$ называется *равномерно непрерывным относительно метрик* ρ и σ (или просто *равномерно непрерывным* на пространстве (X, ρ)), если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $\sigma(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$ для любой пары точек x_1, $x_2 \in X$, удовлетворяющих условию $\rho(x_1, x_2) < \delta$.

Очевидно, что каждое равномерно непрерывное отображение непрерывно, однако обратное не имеет места.

Замечание 7.1. В отличие от понятия непрерывности, равномерная непрерывность есть, во-первых, свойство отображения на множестве X, тогда как непрерывность определяется в одной точке; во-вторых, если f непрерывно на (X, ρ), то для каждого $\varepsilon > 0$ и для каждой точки x_0 множества X можно найти $\delta > 0$, обладающее свойством, указанным в определении (iii) (т. е. δ зависит от ε и от точки x_0), а в случае равномерной непрерывности f на (X, ρ) для каждого $\varepsilon > 0$ найдется одно число $\delta > 0$, которое годится для всех точек x множества X.

Теорема 7.4. *Для любого непустого множества $A \subset X$ отображение $x \mapsto \rho(x, A)$ равномерно непрерывно.* ▶

Отображение $f\colon (X, \rho) \to (Y, \sigma)$ называется *изометрией* (X, ρ) на (Y, σ), если f — сюръективное отображение X на Y и $\rho(x_1, x_2) = \sigma(f(x_1), f(x_2))$ для любых $x_1, x_2 \in X$. Если существует изометрия (X, ρ) на (Y, σ), то говорят, что эти *пространства изометричны*.

Ясно, что изометрические пространства не отличимы по тем свойствам, которые определяются метрикой.

Замечание 7.2. Определение изометричности пространств (X, ρ) и (Y, σ) не исключает случай, когда $X = Y$ и $\rho = \sigma$. При этом изометрия называется *метрическим преобразованием* или *движением пространства* (X, ρ).

Отображение $f\colon (X, \rho) \to (Y, \sigma)$ называется *ограниченным*, если множество $f(X)$ ограничено в (Y, σ). Множество всех непрерывных ограниченных отображений из (X, ρ) в (Y, σ) обозначают символом $C_b(X, Y)$.

Пусть f_n, $f\colon (X, \rho) \to (Y, \sigma)$, где $n \in \mathbb{N}$. Говорят, что последовательность (f_n) *сходится равномерно* на множестве $M \subset X$ к f, если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$, такой, что $\sigma(f(x), f_n(x)) < \varepsilon$ для любого $x \in M$ и любого $n \geqslant n_0$.

Теорема 7.5. *Множество $C_b(X,Y)$ с метрикой*

$$\hat{\rho}(f,g) = \sup\{\sigma(f(x),g(x)) : x \in X\}$$

является МП, причем сходимость в нем совпадает с равномерной сходимостью. ►

Построенное МП в теореме 7.5 будем обозначать также символом $C_b(X,Y)$.

Теорема 7.6. *Если последовательность непрерывных отображений $f_n\colon (X,\rho) \to (Y,\sigma)$ сходится равномерно на множестве X к отображению f, то $f \in C(X,Y)$.*

◄ Пусть x_0 — произвольная точка из (X,ρ), ε — любое положительное число, а $B_Y(f(x_0),\varepsilon)$ — открытый шар в (Y,σ). Покажем, что существует окрестность U точки x_0, такая, что для всех $x \in U$ будем иметь $\sigma(f(x),f(x_0)) < \varepsilon$, т. е. отображение f непрерывно в точке $x_0 \in X$. Действительно, из равномерной сходимости последовательности (f_n) существует такой номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$, что для всех $n \geqslant n_0$ и для всех $x \in X$ имеет место неравенство $\sigma(f(x),f_n(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$. Зафиксировав некоторый номер $n_1 \geqslant n_0$ и пользуясь неравенством треугольника, получим

$$\begin{aligned}\sigma(f(x),f(x_0)) \leqslant \sigma(f(x),f_{n_1}(x)) &+ \\ + \sigma(f_{n_1}(x),f_{n_1}(x_0)) &+ \sigma(f_{n_1}(x_0),f(x_0)).\end{aligned} \qquad (*)$$

В силу непрерывности отображения f_{n_1} в точке x_0 существует такая окрестность U точки x_0, что справедливо включение $f_{n_1}(U) \subset B_Y(f(x_0),\frac{\varepsilon}{3})$ для всех $x \in U$, т. е. $\sigma\big(f_{n_1}(x),f_{n_1}(x_0)\big) < \frac{\varepsilon}{3}$ для каждого $x \in U$. Таким образом, каждое слагаемое в правой части $(*)$ меньше $\frac{\varepsilon}{3}$ для всех $x \in U$, что равносильно включению $f(U) \subset B_Y(f(x_0),\varepsilon)$. ►

Следствие 7.1. *Если последовательность непрерывных ограниченных отображений $f_n\colon (X,\rho) \to (Y,\sigma)$ равномерно сходится на множестве X к f, то $f \in C_b(X,Y)$.* ►

Согласно теореме 7.2, если отображение f непрерывно, то прообраз открытого множества является открытым, а прообраз замкнутого множества — замкнутым. Однако для образов это утверждение неверно. В связи с этим рассматривают два важных класса непрерывных отображений: замкнутые и открытые.

Непрерывное отображение $f\colon (X,\rho) \to (Y,\sigma)$ называется *открытым* (*замкнутым*), если образ открытого (замкнутого) множества из пространства (X,ρ) является открытым (замкнутым) в (Y,σ).

Отображение $f\colon (X,\rho) \to (Y,\sigma)$ называется *гомеоморфизмом* (или *взаимно непрерывным*), если оно биективно, $f \in C(X,Y)$ и $f^{-1} \in C(Y,X)$. Пространства (X,ρ) и (Y,σ) в этом случае называются *гомеоморфными*.

Предложение 7.1. *Гомеоморфное отображение является одновременно открытым и замкнутым отображением.*

◀ Пусть $f\colon (X,\rho) \to (Y,\sigma)$ – гомеоморфное отображение и $g\colon (Y,\sigma) \to (X,\rho)$ – обратное к нему отображение. Тогда для каждого множества $A \subset X$, очевидно, будем иметь $f(A) = g^{-1}(A)$, т. е. образ множества A при отображении f является прообразом A при отображении g и поэтому открытость (соответственно замкнутость) f следует из непрерывности отображений f и g. ▶

Предложение 7.2. *Открытое* (*и, соответственно, замкнутое*) *биективное отображение является гомеоморфизмом.*

◀ Пусть $f\colon (X,\rho) \to (Y,\sigma)$ – открытое (замкнутое) биективное отображение и $g\colon (Y,\sigma) \to (X,\rho)$ – обратное к f отображение, существующее в силу биективности f. Тогда из равенства $g^{-1}(A) = f(A)$, справедливого для каждого множества A из (X,ρ), получаем, что прообразы открытых (и, соответственно, замкнутых) множеств из (X,ρ) при отображении g будут открытыми (и, соответственно, замкнутыми) в (Y,σ) по условию. Следовательно, из теоремы 7.2 получаем, что $g \in C(Y,X)$. ▶

Задачи и упражнения

7.1. Пусть $(x,y) \mapsto \rho(x,y)$ – отображение пространства $(X \times X, \rho \times \rho)$ в пространство $\mathbb{R}$. Показать непрерывность этого отображения.

7.2. (а) Пусть отображения $f,g\colon (X,\rho) \to \mathbb{R}$ непрерывны. Доказать непрерывность следующих отображений:

$$f \pm g,\ f \cdot g,\ \frac{f}{g}\ (g \neq 0),\ \max\{f,g\},\ \min\{f,g\}.$$

(б) Доказать, что композиция $f \circ g$ непрерывных отображений $f\colon (X,\rho) \to (Y,\sigma)$ и $g\colon (Y,\sigma) \to (Z,\tau)$ является непрерывным отображением пространства (X,ρ) в (Z,τ).

(в) Доказать, что отображения проектирования (см. пункт 0.2)

$$\pi_X\colon (X \times Y, \rho \times \sigma) \to (X, \rho), \ \pi_Y\colon (X \times Y, \rho \times \sigma) \to (Y, \sigma)$$

являются непрерывными отображениями.

(г) Пусть $f\colon (X, \rho) \to (Y_1 \times Y_2, \sigma_1 \times \sigma_2)$ – диагональное произведение отображений $f_1\colon (X, \rho) \to (Y_1, \sigma_1)$ и $f_2\colon (X, \rho) \to (Y_2, \sigma_2)$ (см. пункт 0.2). Доказать, что отображение f непрерывно тогда и только тогда, когда каждая из его компонент непрерывна.

(д) Пусть $f\colon (X_1 \times X_2, \rho_1 \times \rho_2) \to (Y_1 \times Y_2, \sigma_1 \times \sigma_2)$ – прямое произведение отображений $f_1\colon (X_1, \rho_1) \to (Y_1, \sigma_1)$ и $f_2\colon (X_2, \rho_2) \to (Y_2, \sigma_2)$. Доказать, что для непрерывности прямого произведения отображений необходима и достаточна непрерывность каждого из его сомножителей.

7.3 (а) Пусть F — замкнутое непустое множество пространства (X, ρ) и $h(x) = \rho(x, F)$, $x \in X$. Доказать, что $h \in C(X)$ и $h(x) > 0$ для любого $x \notin F$.

(б) Пусть A и B — замкнутые непересекающиеся множества в пространстве (X, ρ). Положим

$$f(x) = \frac{\rho(x, A)}{\rho(x, A) + \rho(x, B)}.$$

Показать, что $f\colon (X, \rho) \to \mathbb{R}$ – непрерывное отображение, множество значений которого содержится в отрезке $[0, 1]$, причем $f(x) = 0$ в точках $x \in A$ (т. е. A – есть *нуль-множество* отображения f) и $f(x) = 1$ в точках $x \in B$.

7.4. Пусть $f, g\colon (X, \rho) \to (Y, \sigma)$ – непрерывные отображения. Доказать, что тогда множество $A = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ замкнуто в (X, ρ), а если A всюду плотно в (X, ρ), то $f = g$.

7.5. Две метрики ρ_1 и ρ_2 на множестве X называются *равномерно эквивалентными*, если для каждого $\varepsilon > 0$ существуют такие $\delta_1 > 0$ и $\delta_2 > 0$, что при всех $x, x' \in X$ имеем $\rho_2(x, x') < \varepsilon$, как только $\rho_1(x, x') < \delta_1$, и $\rho_1(x, x') < \varepsilon$, как только $\rho_2(x, x') < \delta_2$.

Показать, что метрики ρ_1 и ρ_2 на множестве X равномерно эквивалентны тогда и только тогда, когда тождественное отображение I_X пространства (X, ρ_1) на (X, ρ_2) является гомеоморфизмом.

Будет ли тождественное отображение $I_X : (X, \rho_1) \to (X, \rho_2)$ непрерывным при $\rho_1(x, y) \leqslant \rho_2(x, y)$ или при $\rho_1(x, y) \geqslant \rho_2(x, y)$?

7.6. Пусть ρ_1, ρ_2 — метрики на множестве X и $f\colon (X, \rho_1) \to (Y, \sigma)$ – непрерывное отображение. Какая должна быть метрика ρ_2, чтобы отображение $f\colon (X, \rho_2) \to (Y, \sigma)$ было также непрерывно?

7.7. (а) Доказать, что отображение $f\colon (X,\rho) \to (Y,\sigma)$ непрерывно в точке x_0 в том и только в том случае, когда выполнено одно из следующих утверждений:

(i) $[f(x_0) \in \operatorname{Int} B] \Longrightarrow \left[x_0 \in \operatorname{Int} f^{-1}(B)\right.$ для каждого $\left.B \subset Y\right]$;

(ii) $\left[x_0 \in f^{-1}(\operatorname{Int} B)\right] \Longrightarrow \left[x_0 \in \operatorname{Int} f^{-1}(B)\right.$ для каждого $\left.B \subset Y\right]$;

(iii) $\left[x_0 \in \overline{f^{-1}(B)}\right] \Longrightarrow \left[x_0 \in f^{-1}(\overline{B})\right.$ для каждого $\left.B \subset Y\right]$.

(б) Используя соотношения пункта (а), установить справедливость следующего утверждения (критерий непрерывности отображения): для непрерывности отображения $f\colon (X,\rho) \to (Y,\sigma)$ необходимо и достаточно выполнение одного из условий:

(i) $f\left(\overline{A}\right) \subset \overline{f(A)}$ для любого множества $A \subset X$;

(ii) $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$ для любого множества $B \subset Y$.

7.8. Пусть $f\colon (X,\rho) \to (Y,\sigma)$ — непрерывное отображение. Доказать, что функция

$$\tilde{\rho}(x,y) = \rho(x,y) + \sigma(f(x), f(y))$$

определяет метрику на множестве X, эквивалентную метрике ρ, причем отображение f равномерно непрерывно относительно метрик $\tilde{\rho}$ и σ.

7.9. Пусть $f\colon (X,\rho) \to (X,\rho)$ — непрерывное отображение и задана функция

$$\widehat{\rho}(x,y) = \rho(x,y) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \cdot \rho(f^i(x), f^i(y)),$$

где $f^i(x) = f(f^{i-1}(x))$ при $i \geqslant 1$ и $f^0(x) = x$. Доказать, что функция $\hat{\rho}$ определяет на X метрику, эквивалентную метрике ρ, и $f\colon (X,\rho) \to (X,\hat{\rho})$ равномерно непрерывно относительно метрик ρ и $\hat{\rho}$.

7.10. Доказать, что

(а) если отображение $f\colon (X,\rho) \to (Y,\sigma)$ непрерывно, то его график

$$\Gamma_f = \{(x,y) \in X \times Y : y = f(x)\}$$

есть замкнутое множество в произведении пространств (X,ρ) и (Y,σ) (см. пример 2.14);

(б) отображение $f\colon (X,\rho) \to (Y,\sigma)$ непрерывно тогда и только тогда, когда отображение $h\colon (X,\rho) \to (\Gamma_f, (\rho\times\sigma)_{\Gamma_f})$, где $(\Gamma_f, (\rho\times\sigma)_{\Gamma_f})$ — подпространство пространства $(X\times Y, \rho\times\sigma)$, задаваемое по формуле $h(x) = (x, f(x))$, является гомеоморфизмом, где $(\Gamma_f, (\rho\times\sigma)_{\Gamma_f})$ — подпространство пространства $(X\times Y, \rho\times\sigma)$.

7.11. *Колебанием отображения* $f\colon (X,\rho) \to (Y,\sigma)$ в точке $x_0 \in X$ называется величина

$$\omega(f, x_0) := \lim_{r\to 0} d(f(B_X(x_0, r))),$$

где $d(f(B_X(x_0,r)))$ — диаметр образа шара $B_X(x_0,r)$ из пространства (X,ρ) при отображении f.

Доказать следующие утверждения:

(а) отображение $f\colon (X,\rho) \to (Y,\sigma)$ непрерывно в точке $x_0 \in X$ тогда и только тогда, когда $\omega(f, x_0) = 0$ (*критерий непрерывности Бэра*);

(б) множество тех точек, в которых колебание отображения f равно нулю есть G_δ-множество (или другими словами: множество точек, в которых колебание не равно нулю является F_σ-множеством).

7.12. (а) Доказать, что отображение $f\colon (X,\rho) \to (Y,\sigma)$ непрерывно тогда и только тогда, когда каждая точка $x_0 \in X$ обладает такой окрестностью $O(x_0)$, что сужение $f\,|_{O(x_0)}\colon (O(x_0), \rho_{O(x_0)}) \to (Y,\sigma)$ — непрерывно.

(б) Пусть F_1, F_2 — замкнутые (или открытые) множества в (X,ρ) и $X = F_1 \cup F_2$. Доказать, что отображение $f\colon (X,\rho) \to (Y,\sigma)$ непрерывно тогда и только тогда, когда его сужения $f\big|_{F_1} \in C(F_1, Y)$ и $f\big|_{F_2} \in C(F_2, Y)$.

(в) Доказать, что если композиция непрерывных отображений $f\colon (X,\rho) \to (Y,\sigma)$ и $g\colon (Y,\sigma) \to (Z,d)$ является замкнутым (открытым) отображением, то сужение $g|_{f(X)}\colon (f(X), \sigma_{f(X)}) \to (Z,d)$ замкнуто (открыто).

(г) Пусть $f\colon (X,\rho) \to (Y,\sigma)$ — замкнутое (открытое) отображение. Показать, что для каждого множества $M \subset Y$ отображение $f_M\colon (f^{-1}(M), \rho_{f^{-1}(M)}) \to (M, \sigma_M)$ замкнуто (открыто).

7.13. (а) Доказать, что отображения проектирования π_X и π_Y (см. задачу 7.2.(в)) являются открытыми отображениями.

(б) Доказать, что для любого множества A, открытого (замкнутого) в $(X\times Y, \rho\times\sigma)$, и любой точки $x_0 \in X$ множество $A(x_0) = \pi_Y(A \cap (\{x_0\} \times Y))$ открыто (замкнуто) в (Y,σ).

7.14. Какие из следующих отображений открыты или замкнуты в пространстве $\mathbb{R}$:

(а) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$; (б) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0, \\ 1, & \text{при } x \geqslant 0; \end{cases}$

(в) $f(x) = 2$; (г) $f(x) = \sin x$?

7.15. Доказать, что образ связного МП (см. задачу 3.19) при непрерывном отображении является связным.

7.16. Пусть (X, ρ) – связное МП и функция $f \in C(X)$ принимает значения $f(x_1) = a \in \mathbb{R}$, $f(x_2) = b \in \mathbb{R}$. Доказать, что для любого числа c, лежащего между a и b, найдется такая точка $x_0 \in X$, в которой $f(x_0) = c$.

7.17. *Путем* в пространстве (X, ρ), соединяющем точки x_1, $x_2 \in X$, называется непрерывное отображение f отрезка $[\alpha, \beta]$, наделенного индуцированной метрикой из пространства $\mathbb{R}$, в пространство (X, ρ), такое, что $f(\alpha) = x_1$ и $f(\beta) = x_2$. Точки x_1, x_2 называют *началом* и *концом* пути, соответственно, а множество $f([\alpha, \beta])$ – *носителем* пути.

МП *линейно связно*, если две его произвольные точки могут быть соединены некоторым путем.

(а) Доказать, что всякое линейно связное МП связно (см. задачу 3.19).

(б) Показать, что множество

$$M = \{(x, y) : y = \sin \tfrac{\pi}{x},\ x \neq 0\} \cup \{(x, y) : x = 0, |y| \leqslant 1\}$$

связно, но не линейно связно.

7.18. Множество $M \subset \mathbb{R}^n$ называется *выпуклым*, если для любых точек x, $y \in M$ отрезок $[x, y] = \{z \in \mathbb{R}^n : z = (1 - t)x + ty,\ t \in [0, 1]\}$ содержится в M. Показать, что

(а) любое выпуклое множество в пространстве $\mathbb{R}^n$ линейно связно;

(б) открытый шар $B(x_0, r)$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ (см. пример 2.3) является выпуклым множеством.

7.19. *Ломаной* в пространстве $\mathbb{R}^n$ называется путь в $\mathbb{R}^n$

$$\varphi\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n,\ t \mapsto \varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)),\ t \in [\alpha, \beta],$$

для которого существует разбиение $T = \{\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = \beta\}$ отрезка $[\alpha, \beta]$, такое, что на любом частичном отрезке $[t_{k-1}, t_k]$ $(k = \overline{1, m})$ сужение отображения φ имеет вид

$$\varphi(t) = \varphi(t_{k-1}) \frac{t_k - t}{t_k - t_{k-1}} + \varphi(t_k) \frac{t - t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}},\ t \in [t_{k-1}, t_k],$$

т. е. носитель Γ_k пути $\varphi : [t_{k-1}, t_k] \to \mathbb{R}^n$ есть отрезок в $\mathbb{R}^n$.

Доказать, что если G – открытое непустое множество пространства $\mathbb{R}^n$, то следующие условия эквивалентны:

(а) множество G связно;

(б) множество G линейно связно;

(в) любые две точки из G можно соединить ломаной, целиком лежащей в G.

7.20. Пусть (M, ρ_M) — подпространство пространства (X, ρ) и для непрерывного отображения $f\colon (M, \rho_M) \to (Y, \sigma)$ существует такое непрерывное отображение $g\colon (X, \rho) \to (Y, \sigma)$, что $g|_M = f$. Тогда говорят, что f *непрерывно продолжается* на пространство (X, ρ). Отображение g в этом случае называется *непрерывным продолжением* отображения f на (X, ρ).

Доказать, что если A — замкнутое подмножество пространства (X, ρ), то для любого непрерывного отображения $f\colon (A, \rho_A) \to \mathbb{R}$ и любой метрики ρ на пространстве (X, ρ) формула

$$g(x) = \begin{cases} \inf\limits_{a \in A} \left\{ f(a) + \dfrac{\rho(x, a)}{\rho(x, A)} - 1 \right\}, & \text{если } x \in X \setminus A, \\ f(x), & \text{если } x \in A, \end{cases}$$

определяет непрерывное продолжение отображения f на (X, ρ).

7.21. Пусть f — изометрия пространства (X, ρ) на (Y, σ). Показать, что

(а) f является взаимно однозначным и равномерно непрерывным отображением;

(б) обратное отображение f^{-1} также является изометрией этих пространств.

§8. Полные метрические пространства

О глубине идеи, заложенной в формулировке нового математического понятия, можно судить лишь впоследствии по тому, насколько искуссно удается использовать это понятие.

Е. Вигнер. Этюды о симметрии

Последовательность (x_n) точек пространства (X, ρ) называется *фундаментальной последовательностью* (или *последовательностью Коши*, или *последовательностью, сходящейся в себе*), если она удовлетворяет условию Коши

$$\lim_{i\to\infty, j\to\infty} \rho(x_i, x_j) = 0,$$

которое означает, что для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такой номер k_ε, что для всех номеров i и j, удовлетворяющих условию $i \geqslant k_\varepsilon$, $j \geqslant k_\varepsilon$, справедливо неравенство

$$\rho(x_i, x_j) < \varepsilon. \qquad (*)$$

Условие $(*)$ можно сформулировать в следующем виде: для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_ε, что для всех номеров $i > n_\varepsilon$ и всех целых неотрицательных чисел p имеет место неравенство

$$\rho(x_i, x_{i+p}) < \varepsilon. \qquad (**)$$

Для того чтобы убедиться в равносильности условий $(*)$ и $(**)$, достаточно положить $p = i - j$, если $i \geqslant j$, и $p = j - i$, если $j \geqslant i$.

Предложение 8.1. *Любая сходящаяся последовательность является фундаментальной последовательностью.* ►

Из последнего предложения заключаем, что понятие фундаментальной последовательности есть более общее понятие, чем сходящаяся последовательность (т. е. существуют фундаментальные последовательности, которые не являются сходящимися).

Предложение 8.2. *Пусть (x_n) — фундаментальная последовательность в (X,ρ). Тогда для любой последовательности (ε_n), $\varepsilon_n > 0$, найдется подпоследовательность (x_{k_n}), удовлетворяющая условию*

$$\rho(x_{k_n}, x_{k_{n+1}}) < \varepsilon_n, \ n = 1, 2, \ldots .$$

◀ В силу фундаментальности последовательности (x_n) имеем:

$$\forall \varepsilon_n > 0 \ \exists k_n : \rho(x_m, x_{m'}) < \varepsilon_n, \ \forall m, m' \geqslant k_n.$$

Полагая в последней формуле $m = k_n$, $m' = k_{n+1}$ при $m' > m$, заключаем, что (x_{k_n}) – требуемая последовательность. ▶

Предложение 8.3. *Если фундаментальная последовательность (x_n) имеет сходящуюся подпоследовательность (x_{k_n}), $x_{k_n} \to x_0$, то и сама последовательность (x_n) сходится к $x_0 : x_n \to x_0$.*

◀ Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда существует натуральное число n_0, такое, что $\rho(x_i, x_j) < \frac{\varepsilon}{2}$ для любых $i, j \geqslant n_0$. С другой стороны, из $x_{k_n} \to x_0$ следует, что найдется такой номер n_1, что $\rho(x_{k_n}, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$ при $n \geqslant n_1$. Полагая $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$ при $k_n \geqslant n \geqslant n_2$, получим

$$\rho(x_n, x_{k_n}) < \frac{\varepsilon}{2}, \ \rho(x_{k_n}, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда, в силу неравенства треугольника, имеем

$$\rho(x_n, x_0) \leqslant \rho(x_n, x_{k_n}) + \rho(x_{k_n}, x_0) < \varepsilon, \ n > n_2.$$

Это означает, что $x_n \to x_0$ при $n \to \infty$. ▶

МП называется *полным* (сокращенно ПМП), если в нем любая фундаментальная последовательность сходится к некоторой точке этого пространства. При этом если (X, ρ) – ПМП, то метрика ρ называется *полной*.

С учетом предложения 8.1 можно сказать, что МП является полным, если в нем имеется тождественность между фундаментальными и сходящимися последовательностями, или, другими словами, последовательность будет сходящейся в ПМП тогда и только тогда, когда она фундаментальна.

З а м е ч а н и е 8.1. Важность понятия полноты проистекает из того, что нет необходимости в отыскании предела для последовательности, достаточно показать, что она фундаментальна.

Полноту пространства характеризует

Теорема Кантора. *МП (X, ρ) полно тогда и только тогда, когда каждая убывающая последовательность (F_n), $F_{n+1} \subset F_n$, непустых замкнутых множеств в (X, ρ), таких, что $\lim\limits_{n\to\infty} d(F_n) = 0$, имеет непустое пересечение $\cap\{F_n : n \in \mathbb{N}\} \neq \varnothing$.*

◀ Пусть (X, ρ) – ПМП и (F_n) — последовательность непустых замкнутых множеств в (X, ρ), таких, что

$$\lim_{n\to\infty} d(F_n) = 0, \; F_{n+1} \subset F_n, \; n \in \mathbb{N}. \tag{8.1}$$

Выберем точку $x_k \in F_k$, $k = 1, 2, \ldots$. Тогда все члены последовательности (x_k), начиная с n-го, содержатся в множестве F_n. Из соотношения $d(F_n) \to 0$ при $n \to \infty$ получаем, что (x_k) – фундаментальная последовательность и, в силу полноты (X, ρ), существует точка $x_0 \in X$, что $x_k \to x_0$. Так как множества F_n замкнуты, то $x_0 \in F_n$ для каждого номера $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, $\cap\{F_n : n \in \mathbb{N}\} \neq \varnothing$.

Обратно, пусть в пространстве (X, ρ) выполнено условие теоремы и (x_n) – фундаментальная последовательность в (X, ρ). Положим

$$F_n = \overline{\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}}, \; n = 1, 2, \ldots .$$

Учитывая, что множества F_n являются замкнутыми в (X, ρ) и удовлетворяют соотношениям (8.1), имеем $\cap\{F_n : n \in \mathbb{N}\} \neq \varnothing$, т.е. существует точка $x_0 \in F_n$, для любого $n \in \mathbb{N}$, которая является пределом последовательности (x_{k_n}), где $x_{k_n} \in F_n$ для каждого $n = 1, 2, \ldots$. Таким образом, (x_{k_n}) есть подпоследовательность последовательности (x_n) и $x_n \to x_0 \in X$. Отсюда, согласно предложению 8.3, окончательно получаем, что (X, ρ) – ПМП. ▶

Следствие 8.1. *Пространство $\mathbb{R}$ (т. е. множество всех действительных чисел $\mathbb{R}$ с евклидовой метрикой $\rho(x, y) = |x - y|$) является полным.*

(Для доказательства достаточно воспользоваться замкнутостью отрезка $[a, b]$ в пространстве $\mathbb{R}$ и теоремой Кантора о стягивающейся системе отрезков (см., например, [13], [27]).)

Теорема 8.1. *Пусть (X, ρ) – ПМП. Для того чтобы подпространство (A, ρ_A) пространства (X, ρ) было полным, необходимо и достаточно, чтобы множество A было замкнутым в (X, ρ).*

◀ Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть подпространство (A, ρ_A) полно и x — произвольная точка множества $\overline{A}$. Для каждого числа $n \in \mathbb{N}$ положим

$$F_n = A \cap \overline{B_X(x, n^{-1})},$$

где $B_X(x, n^{-1})$ — открытый шар в пространстве (X, ρ).

Ясно, что последовательность (F_n) из (A, ρ_A) удовлетворяет условию теоремы Кантора. Следовательно, в силу полноты подпространства (A, ρ_A) имеем: $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n \neq \varnothing$. Так как справедливо включение $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n \subset \{x\}$, то $x \in A$, и потому $\overline{A} \subset A$, т. е. имеет место равенство $A = \overline{A}$.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть множество $A \subset X$ замкнуто в ПМП (X, ρ), т. е. $A = \overline{A}$. Из определения индуцированной метрики ρ_A имеем, что каждая последовательность Коши в подпространстве (A, ρ_A) является последовательностью Коши и в пространстве (X, ρ). Следовательно, в силу полноты (X, ρ) она будет сходится к некоторой точке $x \in X$, а в силу замкнутости множества A получим, что $x \in A$. ▶

З а м е ч а н и е 8.2. Отметим, что при доказательстве необходимости теоремы 8.1 не использовали полноту пространства (X, ρ), т. е. доказано более сильное утверждение: если подпространство (A, ρ_A) пространства (X, ρ) полно, то множество A замкнуто в этом пространстве.

Теорема 8.2. *Если (Y, σ) — ПМП, то $C_b(X, Y)$ — ПМП.*

◀ Пусть (f_n) — последовательность Коши в пространстве $C_b(X, Y)$ (см. теорему 7.5). Тогда последовательность $(f_n(x))$ является фундаментальной последовательностью в полном пространстве (Y, σ) для любой точки $x \in X$ и, следовательно, имеет в нем предел. Тем самым определено отображение $f\colon (X, \rho) \to (Y, \sigma)$, которое каждой точке $x \in X$ ставит в соответствие $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \in Y$. Так как последовательность (f_n) равномерно сходится на пространстве (X, ρ) к f, то, в силу теоремы 7.6(б), получаем, что f — ограниченное и непрерывное отображение, т. е. $f \in C_b(X, Y)$. ▶

Теорема 8.3 (теорема Куратовского). *Каждое МП изометрично подпространству ПМП.*

◀ Пусть (X, ρ) — произвольное МП. Зафиксируем некоторую точку $a \in X$. Поставим в соответствие каждой точке $x \in X$ функцию f_x, которая определена на множестве X и задана формулой

$$f_x(z) = \rho(z, x) - \rho(z, a), \; z \in X. \tag{8.2}$$

Так как $|f_x(z)| \leqslant \rho(a,x)$, то $f_x \in C_b(X,\mathbb{R})$ для любого $x \in X$, где $C_b(X,\mathbb{R})$ — ПМП, в силу следствия 8.1 и теоремы 8.2, с метрикой

$$\hat{\rho}(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in X\}. \tag{8.3}$$

Докажем равенство

$$\hat{\rho}(f_x, f_y) = \rho(x,y) \text{ для всех } x, y \in X. \tag{8.4}$$

Для любого $z \in X$ имеет место неравенство

$$f_x(z) - f_y(z) = \rho(z,x) - \rho(z,a) - \rho(z,y) + \rho(z,a) \leqslant \rho(x,y).$$

Из условия симметрии вытекает, что

$$|f_x(z) - f_y(z)| \leqslant \rho(x,y).$$

Отсюда, в силу (8.3), получаем

$$\hat{\rho}(f_x, f_y) \leqslant \rho(x,y). \tag{8.5}$$

С другой стороны, так как

$$f_x(y) - f_y(y) = \rho(y,x) - \rho(y,a) + \rho(y,a) = \rho(x,y),$$

то из определения метрики $\hat{\rho}$ заключаем, что

$$\hat{\rho}(f_x, f_y) \geqslant \rho(x,y), \; x, y \in X. \tag{8.6}$$

Из неравенств (8.5) и (8.6) следует справедливость (8.4), т. е. изометричность (X,ρ) и подпространства функции из ПМП $C_b(X,\mathbb{R})$, представимых в виде равенства (8.2). ▶

Задачи и упражнения

8.1.(a) Установить следующие свойства фундаментальной последовательности (x_n):

(i) для любого положительного числа ε найдется элемент x_{n_0} фундаментальной последовательности (x_n), такой, что в открытом шаре $B(x_{n_0}, \varepsilon)$ находятся все элементы x_n этой последовательности с номерами n, удовлетворяющими условию $n \geqslant n_0$ (или другими словами: для любого $\varepsilon > 0$ найдется элемент фундаментальной последовательности x_{n_0}, такой, что вне открытого шара $B(x_{n_0}, \varepsilon)$ лежит не более чем конечное число элементов этой последовательности);

(ii) фундаментальная последовательность является ограниченной;

(iii) любая подпоследовательность фундаментальной последовательности фундаментальна.

(б) Пусть (x_n), (y_n) — две произвольные фундаментальные последовательности в пространстве (X, ρ). Показать, что последовательность чисел (a_n), где $a_n = \rho(x_n, y_n)$ для каждого $n \in \mathbb{N}$, сходится (в пространстве $\mathbb{R}$).

(в) Пусть (x_n) — фундаментальная последоватнльность в МП (X, ρ). Доказать, что для любой точки $x \in X$ существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x) = r(x),$$

причем функция $r : (X, \rho) \to \mathbb{R}$ неотрицательна и непрерывна.

(г) Для того чтобы последовательность точек $z_n = (x_n, y_n)$ в произведении пространств $(X \times Y, \rho \times \sigma)$ была фундаментальной последовательностью, необходимо и достаточно, чтобы последовательность (x_n) была фундаментальной в (X, ρ), а (y_n) — в (Y, σ).

8.2. Пусть (x_n) — последовательность точек пространства (X, ρ) и $G_k = \{x_k, x_{k+1}, \dots\}$, $k \in \mathbb{N}$. Доказать, что (x_n) — фундаментальная последовательность тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{k\to\infty} d(G_k) = 0$.

8.3. Приведите пример последовательности, которая фундаментальна в пространстве $(\mathbb{R}, \rho_1)$, где $\rho_1(x, y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|$, но не в пространстве $\mathbb{R}$.

8.4. Пусть (x_n) — фундаментальная последовательность, а (y_n) такова, что $\rho(x_n, y_n) \to 0$, то в этом случае последовательность (y_n) также фундаментальна, причем $y_n \to y$ тогда и только тогда, когда $x_n \to y$.

8.5. Доказать, что

(а) пространство $C[a, b]$ с чебышевской метрикой (пример 2.9) полно;

(б) пространство $\widetilde{L}_p[a, b]$ неполно (пример 2.12);

(в) множество всех непрерывных функций на числовой прямой $\mathbb{R}$ с метрикой

$$\rho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\max\limits_{[-n,n]} |x(t) - y(t)|}{1 + \max\limits_{[-n,n]} |x(t) - y(t)|}$$

является полным (обозначается $C(\mathbb{R})$);

(г) множество функций, *удовлетворяющих условию Гельдера степени* $\alpha > 0$ *на отрезке* $[a, b]$ (если существует постоянная $c > 0$, что для всех $t_1, t_2 \in [a, b]$, выполняется неравенство $|x(t_1) - x(t_2)| \leqslant c|t_1 - t_2|^\alpha$) с метрикой

$$\rho(x, y) = \sup_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t) - y(t)| + \sup_{a \leqslant t_1 < t_2 \leqslant b} \frac{|[x(t_2) - y(t_2)] - [x(t_1) - y(t_1)]|}{|t_2 - t_1|^\alpha}$$

является полным пространством. Оно называется *пространством Гельдера* и обозначается $H^\alpha[a, b]$.

8.6. Пусть $\{(X_i, \rho_i) : i \in \mathbb{N}\}$ — семейство пространств с метриками ρ_i, ограниченными числом 1. Доказать, что декартово произведение семейства множеств $\{X_i : i \in \mathbb{N}\}$ (см. пункт 0.2) с метрикой

$$\rho(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \cdot \rho_i(x_i, y_i), \ x = (x_i), \ y = (y_i), \ x_i, y_i \in X_i,$$

полно тогда и только тогда, когда каждое из пространств (X_i, ρ_i) полно.

Выведите отсюда, что пространства l_p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, $\mathbb{R}^n$ полные.

8.7. (а) Проверить, что МП, изометричное ПМП, является полным.

(б) Приведите пример двух гомеоморфных МП, когда одно из них полное, а другое нет.

8.8. (а) Пусть (X, ρ_1) — ПМП и метрика ρ_1 эквивалентна ρ_2. Будет ли (X, ρ_2) полным?

(б) Что можно утверждать о полноте пространств (X, ρ_i), где ρ_i $(i = \overline{1, 5})$ — метрики из задачи 1.4?

(в) Является ли дискретное МП полным?

8.9. (а) Пусть M — счетное подмножество пространства l_1, состоящее из элементов вида

$$x_n = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-1}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 0, \ldots).$$

Доказать, что M замкнуто в пространстве l_1 и убывающая последовательность замкнутых шаров $\overline{B}_M\left(x_n, 1 + \frac{2}{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$, имеет пустое пересечение.

(б) Построить в пространстве $\mathbb{R}$ последовательность вложенных друг в друга замкнутых непустых множеств с пустым пересечением.

8.10. Доказать, что

(а) множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ с метрикой

$$\rho(n,m) = \begin{cases} 1 + \dfrac{1}{n+m}, & \text{если } n \neq m, \\ 0, & \text{если } n = m, \end{cases}$$

является ПМП;

(б) последовательность замкнутых вложенных шаров $\overline{B}\left(n, 1+\frac{1}{2n}\right)$, $n\in\mathbb{N}$, не имеет общей точки в ПМП $(\mathbb{N},\rho)$ (см. пункт (а)).

8.11. Пусть (X,ρ) — полное пространство с ограниченной метрикой ρ, U — собственное непустое открытое множество в (X,ρ) и функция g задается формулой

$$g(x) = \frac{1}{\rho(x, X\setminus U)}, \ x \in U.$$

Доказать, что функция

$$\rho_U(x,y) = \rho(x,y) + |g(x) - g(y)|, \ x, y \in U$$

является полной метрикой на множестве U.

8.12. Пусть (X,ρ) — ограниченное полное пространство, и пусть G — совокупность всех взаимно однозначных и взаимно непрерывных отображений (X,ρ) на (X,ρ). Введем на G функцию

$$\sigma(f_1,f_2) = \sup\left\{\rho\left(f_1(x), f_2(x)\right) + \rho\left(f_1^{-1}(x), f_2^{-1}(x)\right) : x\in X\right\}.$$

Доказать, что σ — полная метрика на G.

8.13. Пусть (X,ρ) — ПМП и отображение $f \in C(X)$. Доказать, что если (F_n) — убывающая последовательность непустых замкнутых множеств из (X,ρ), таких, что $d(F_n)\to 0$ при $n\to\infty$, то справедливо равенство

$$f\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f(F_n).$$

8.14. Доказать, что если любая последовательность точек пространства (X,ρ) содержит фундаментальную подпоследовательность, то пространство (X,ρ) сепарабельно.

§9. Теорема Бэра о категории

«Серьезность» теоремы кроется не в практических следствиях из нее (обычно они ничтожны), а в значимости математических идей, между которыми устанавливается взаимосвязь.

Г. Харди

В теории полных пространств важную роль играет следующая

Теорема 9.1. *Если (X, ρ) – ПМП и (G_n) – последовательность непустых открытых всюду плотных подмножеств пространства (X, ρ), то множество $G = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n$ непусто и всюду плотно в (X, ρ).*

◄ Заметим, что, согласно теореме 6.2(а), всюду плотное множество имеет непустое пересечение с любым открытым множеством (шаром). Рассмотрим шар $B(x_1, r_1) \subset G_1$, который существует в силу того, что множество G_1 открыто и непусто. В непустом открытом множестве $B(x_1, \frac{r_1}{2}) \cap G_2$ выберем шар $B(x_2, r_2)$, где $r_2 < \frac{r_1}{4}$. Аналогично, выберем шар $B(x_3, r_3)$ в перессечении $B(x_2, \frac{r_2}{4}) \cap G_3$, причем возьмем $r_3 < \frac{r_2}{8}$ и т. д. В результате получим убывающую последовательность замкнутых шаров $(\overline{B}(x_k, \frac{r_k}{2}))$, для которых выполнены включения

$$\overline{B}(x_k, \frac{r_k}{2}) \subset B(x_k, r_k) \subset \overline{B}(x_{k-1}, \frac{r_{k-1}}{2}), k = 2, 3, \ldots,$$

и их радиусы стремятся к нулю. Согласно теореме Кантора, существует точка $x_0 \in X$, такая, что $x_0 \in \overline{B}(x_k, \frac{r_k}{2})$ для любого $k = 1, 2, \ldots$, а в силу построения шаров $B(x_k, r_k)$ заключаем, что $x_0 \in G$, т. е. $G \neq \varnothing$.

Покажем, что множество G всюду плотно в (X, ρ). Предположим противное, т. е. существует открытый шар $B(x, r) \subset X$, для которого $G \cap B(x, r) = \varnothing$, а значит, $G \cap \overline{B}(x, r) = \varnothing$ (см. задачу 6.5). В полном подпространстве $(\overline{B}(x, \frac{r}{2}), \rho_{\overline{B}(x, \frac{r}{2})})$ множества $U_n = G_n \cap \overline{B}(x, \frac{r}{2})$ открыты и всюду плотны для каждого $n = 1, 2, \ldots$. Следовательно, по доказанному, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} U_n \neq \varnothing$. Получили противоречие. ►

Так как дополнение открытого и всюду плотного множества есть замкнутое множество без внутренних точек, то, переходя к дополнениям, получим эквивалентную формулировку доказанной теоремы, а именно: справедлива

Теорема 9.2. *Пусть (X, ρ) — ПМП и (F_n) — последовательность замкнутых множеств без внутренних точек в (X, ρ). Тогда множество $F = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$ также лишено внутренних точек.* ►

Теорема Бэра. *Если ПМП является счетным объединением замкнутых подмножеств, то хотя бы одно из этих подмножеств содержит непустое открытое множество.*

◄ Пусть (X, ρ) — ПМП и (F_n) — последовательность его замкнутых множеств, таких, что $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$. Предположим противное, т. е. $\operatorname{Int} F_n = \varnothing$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Тогда $(X \setminus F_n)$ — последовательность открытых всюду плотных подмножеств в (X, ρ), удовлетворяющих (согласно теореме 9.1) условию $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (X \setminus F_n) \neq \varnothing$. Но это противоречит равенству $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$. Значит, хотя бы одно из множеств $X \setminus F_n$ не является всюду плотным. Поэтому $\operatorname{Int} F_n \neq \varnothing$ для некоторого n. ►

Ответ на вопрос о существовании множеств второй категории дает следующая теорема, известная как

Теорема Бэра о категории. *ПМП (X, ρ) нельзя представить в виде объединения счетного числа нигде не плотных его подмножеств, т. е. X есть множество второй категории.*

◄ Предположим противное: пусть X — непустое множество первой категории, т. е. $X = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$, где E_k — нигде не плотные множества. Так как $\operatorname{Int} \overline{E}_k = \varnothing$ для любого $k \in \mathbb{N}$, то последовательность $(\overline{E}_k)$ удовлетворяет условиям теоремы 9.2. Значит, $\operatorname{Int}\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\overline{E}_k\right) = \varnothing$. С другой стороны, имеем

$$\operatorname{Int}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\overline{E}_k\right) \supset \operatorname{Int}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k\right) = \operatorname{Int}X = X \neq \varnothing.$$

Получили противоречие. ►

Непосредственно самой теоремой Бэра редко приходится пользоваться. Обычно используют одно из ее следствий, известное как *принцип равномерной ограниченности*:

Теорема 9.3. *Пусть $\mathscr{F} = \{f : (X,\rho) \to \mathbb{R}\}$ — семейство непрерывных функций, определенных на ПМП (X,ρ), и пусть для каждого $x \in X$ существует такое число $m_x > 0$, что $|f(x)| \leqslant m_x$ для любого $f \in \mathscr{F}$. Тогда существуют непустое открытое множество $G \subset X$ и число $m > 0$, такие, что $|f(x)| \leqslant m$ для всех $x \in G$ и всех $f \in \mathscr{F}$.*

◄ Для функции $f \in \mathscr{F}$ рассмотрим множество Лебега (см. §7)

$$X_{k,f} = \{x \in X : |f(x)| \leqslant k\}, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Так как функция $f \subset C(X)$, *то, согласно теореме* 7.3, множества $X_{k,f}$ замкнуты. Значит, для каждого $k \in \mathbb{N}$ множество

$$X_k = \bigcap\{X_{k,f} : f \in \mathscr{F}\}$$

замкнуто как пересечение замкнутых множеств.

По условию, для каждой точки $x \in X$ найдется натуральное число k, такое, что $|f(x)| \leqslant k$ при всех $f \in \mathscr{F}$. Следовательно, имеем представление

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k.$$

Отсюда, с учетом полноты МП (X,ρ), по теореме Бэра заключаем, что найдется по крайней мере одно множество X_m из системы множеств X_k, которое содержит непустое открытое множество $G \subset X_m$, такое, что неравенство $|f(x)| \leqslant m$ выполняется для всех $x \in G$ и всех $f \in \mathscr{F}$. ►

Задачи и упражнения

9.1. Приведите пример неполного пространства (X,ρ), где X является множеством первой категории.

9.2. Доказать, что всякое МП, имеющее хотя бы одну изолированную точку, является множеством второй категории.

9.3. Приведите пример неполного МП без изолированных точек, являющегося множеством второй категории.

9.4. Доказать, что в ПМП дополнение к множеству первой категории есть множество второй категории.

9.5. Доказать, что ПМП, не имеющее изолированных точек, несчетно.

9.6. Показать на примере, что пересечение счетной совокупности открытых множеств, плотных в неполном пространстве, может не быть плотным в нем, т. е. если МП неполно, то утверждение теоремы 9.1 неверно.

9.7. Доказать, что если (X, ρ) — ПМП, то пересечение конечной или счетной совокупности множеств типа G_δ, каждое из которых всюду плотно в (X, ρ), является множеством типа G_δ, всюду плотным в этом же пространстве.

9.8. Приведите пример убывающей последовательности всюду плотных множеств в пространстве $\mathbb{R}$, имеющая пустое пересечение.

9.9. Доказать, что любая последовательность (G_n) подмножеств полного пространства (X, ρ) удовлетворяет равенству

$$\overline{X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[G_n \cap \overline{(X \setminus \overline{G_n})} \right]} = X.$$

9.10. Доказать, что непустое совершенное множество в полном пространстве имеет мощность континуума.

9.11. Используя теорему Бэра, доказать следующие утверждения:

(а) множество всех действительных чисел $\mathbb{R}$ несчетно;

(б) непрерывные функции, обладающие производной хотя бы в одной точке, образуют множество первой категории в пространстве $C[a, b]$.

§10. Принцип сжимающих отображений

Именно математика... дает надежнейшие правила; кто им следует — тому не опасен обман чувств.

Л. Эйлер

Отображение $f\colon (X,\rho) \to (X,\rho)$ называется *сжимающим*, если существует такое число $c \in (0,1)$, что для любых точек x, $y \in X$ выполняется неравенство

$$\rho(f(x), f(y)) \leqslant c\rho(x,y).$$

При этом число c называют *коэффициентом сжатия* отображения f.

Непосредственно из определения сжимающего отображения следует, что если для каждого $\varepsilon > 0$ взять $\delta = \frac{\varepsilon}{c}$, то для любых точек $x \in X$, $y \in X$, для которых $\rho(x,y) < \delta$, выполняется неравенство

$$\rho(f(x), f(y)) \leqslant c\rho(x,y) < c\delta = \varepsilon,$$

т. е. сжимающее отображение равномерно непрерывно, а следовательно, непрерывно в каждой точке пространства (X,ρ).

Точка x_0 пространства (X,ρ) называется *неподвижной точкой отображения* $f\colon (X,\rho) \to (X,\rho)$, если $f(x_0) = x_0$.

Теорема 10.1 (принцип сжимающих отображений). *Сжимающее отображение ПМП в себя имеет единственную неподвижную точку.*

◄ Пусть (X,ρ) — ПМП и f — сжимающее отображение пространства (X,ρ) в себя с коэффициентом сжатия $c \in (0,1)$. Возьмем произвольную точку $x \in X$ и положим

$$\begin{aligned}
&x_1 = f(x),\\
&x_2 = f(x_1) = (f \circ f)(x),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&x_n = f(x_{n-1}) = (\underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ раз}})(x),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\ .
\end{aligned}$$

Покажем, что полученная последовательность (x_n) фундаментальна. Из определения сжимающего отображения имеем:

$$\rho(x_1, x_2) = \rho(f(x), f(x_1)) \leqslant c\rho(x, x_1) = c\rho(x, f(x)),$$
$$\rho(x_2, x_3) = \rho(f(x_1), f(x_2)) = \rho(f(x_1), f(f(x_1))) \leqslant$$
$$\leqslant c\rho(x_1, f(x_1)) \leqslant c^2\rho(x, f(x)),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\rho(x_n, x_{n+1}) \leqslant c^n\rho(x, f(x)),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots .$$

Отсюда, для любого $p \in \mathbb{N}$, с помощью неравенства треугольника получаем

$$\rho(x_n, x_{n+p}) \leqslant \frac{c^n - c^{n+p}}{1-c}\,\rho(x, f(x)).$$

Так как $c \in (0, 1)$, то

$$\rho(x_n, x_{n+p}) \leqslant \frac{c^n}{1-c}\,\rho(x, f(x)).$$

Итак, последовательность (x_n) фундаментальна и в силу полноты пространства (X, ρ) существует точка $x_0 \in X$, являющаяся пределом последовательности (x_n), причем x_0 — неподвижная точка отображения f. Действительно, с учетом непрерывности отображения f, имеем

$$x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} f(x_{n-1}) = f\big(\lim_{n\to\infty} x_n\big) = f(x_0).$$

Покажем единственность неподвижной точки. Предположим, что существуют две точки x_0 и y_0, такие, что

$$f(x_0) = x_0,\ f(y_0) = y_0,\ x_0 \neq y_0.$$

Тогда имеем неравенство

$$\rho(x_0, y_0) = \rho(f(x_0), f(y_0)) \leqslant c\rho(x_0, y_0) < \rho(x_0, y_0),$$

что невозможно. ►

З а м е ч а н и е 10.1. Так как неподвижные точки отображения f являются решениями уравнения $f(x) = x$, то принцип сжимающих отображений можно сформулировать в следующем виде: *если* (X, ρ) — *ПМП и* f —

сжимающее отображение (X, ρ) в себя с коэффициентом сжатия $c \in (0, 1)$, то уравнение $f(x) = x$ имеет в пространстве (X, ρ) одно и только одно решение, которое может быть получено как предел итерационной последовательности

$$x_1 = f(x),\ x_2 = f(x_1), \ldots, x_n = f(x_{n-1}), \ldots,$$

построенной при любом выборе исходного элемента x, причем оценка сходимости последовательности (x_n) к решению уравнения x_0 задается формулой

$$\rho(x_n, x_0) \leqslant \frac{c^n}{1-c}\,\rho(x, f(x)). \qquad (10.2)$$

Построение последовательности (x_n) и исследование вопроса ее сходимости называют *методом последовательных приближений.*

Следствие 10.1 (локальный принцип сжимающих отображений). *Пусть (X, ρ) – ПМП и отображение $f\colon (X, \rho) \to (X, \rho)$ является сжимающим на некотором замкнутом шаре $\overline{B}(x_0, r)$ из (X, ρ), с коэффициентом сжатия $c \in (0, 1)$, и выполнено неравенство $\rho(x_0, f(x_0)) \leqslant (1 - c)r$. Тогда в замкнутом шаре $\overline{B}(x_0, r)$ существует единственная неподвижная точка отображения f.*

◀ Рассмотрим подпространство $(\overline{B}(x_0, r), \rho_{\overline{B}(x_0,r)})$ полного пространства (X, ρ). Так как $\overline{B}(x_0, r)$ – замкнутое множество, то рассматриваемое подпространство $(\overline{B}(x_0, r), \rho_{\overline{B}(x_0,r)})$ – полное, в силу теоремы 8.1.

Покажем, что f отображает $\overline{B}(x_0, r)$ в себя. Пусть x — произвольная точка замкнутого шара $\overline{B}(x_0, r)$, т. е. $\rho(x_0, x) \leqslant r$. Тогда, учитывая то, что f — сжимающее отображение на $\overline{B}(x_0, r)$, имеем следующую оценку

$$\begin{aligned}\rho(x_0, f(x)) &\leqslant \rho(x_0, f(x_0)) + \rho(f(x_0), f(x)) \leqslant \\ &\leqslant (1 - c)r + c\rho(x_0, x) \leqslant (1 - c)r + cr = r.\end{aligned}$$

Следовательно, $f(x) \in \overline{B}(x_0, r)$ и к отображению $f\colon \overline{B}(x_0, r) \to \overline{B}(x_0, r)$ применим принцип сжимающих отображений. ▶

Следствие 10.2. *Если некоторая степень отображения ПМП в себя является сжимающей, то само отображение имеет единственную неподвижную точку.*

◀ Пусть (X, ρ) — ПМП и отображение $f\colon (X, \rho) \to (X, \rho)$ таково, что его n-я степень $f^n := f \circ f \circ \ldots \circ f$, $n \geqslant 1$, является сжимающим отображением. Предположим, что x_0 – неподвижная точка отображения f^n, т. е. $f^n(x_0) = x_0$. Тогда

$$f(x_0) = f(f^n(x_0)) = f^n(f(x_0)).$$

Таким образом, $f(x_0)$ – неподвижная точка отображения f^n. Но такая точка, согласно принципу сжимающих отображений, единственная и, следовательно, $f(x_0) = x_0$. ▶

Следствие 10.3 (о непрерывной зависимости неподвижной точки). *Пусть (X, ρ) – ПМП и f, $g\colon (X, \rho) \to (X, \rho)$ – два сжимающих отображения с коэффициентами сжатия c_f и c_g, соответственно. Если $\rho(f(x), g(x)) < \varepsilon$ для любого $x \in X$, то неподвижные точки отображений f и g находятся друг от друга на расстоянии, не превышающем величину $\dfrac{\varepsilon}{1-c}$, где $\varepsilon = \sup\{\rho(f(x), g(x)) : x \in X\}$ и $c = \min\{c_f, c_g\}$.*

◀ Пусть x_0 — неподвижная точка отображения f и пусть $c = c_g$ (т. е. $c_f \geqslant c_g$). Положим $x_n = g^n(x_0)$. Тогда неподвижная точка x^* отображения g будет пределом последовательности (x_n), причем

$$\rho(x_0, x_n) \leqslant \rho(x_0, x_1) + \rho(x_1, x_2) + \ldots + \rho(x_{n-1}, x_n) \leqslant$$
$$\leqslant \rho(x_0, g(x_0))[1 + c_g + \ldots + c_g^{n-1}] \leqslant \frac{\rho(x_0, g(x_0))}{1 - c_g}.$$

Отсюда, при переходе $n \to \infty$ окончательно получаем, что

$$\rho(x_0, x^*) \leqslant \frac{\rho(x_0, g(x_0))}{1 - c_g} = \frac{\rho(f(x_0), g(x_0))}{1 - c_g} < \frac{\varepsilon}{1 - c}. \blacktriangleright$$

В дополнение к доказанной теореме приведем следующее

Предложение 10.1 (об устойчивости неподвижной точки). *Пусть (X, ρ) – полное, а (T, σ) – произвольное МП (играющее роль пространства параметров), и пусть каждому значению $t \in T$ отвечает сжимающее отображение $f_t\colon (X, \rho) \to (X, \rho)$, причем выполнены следующие условия:*

(i) *семейство $\{f_t : t \in T\}$ равномерно сжимающее, т. е. существует такое число c, $0 < c < 1$, которая является коэффициентом сжатия каждого отображения f_t;*

(ii) *при каждом $x \in X$ отображение $f_t(x)\colon (T, \sigma) \to (X, \rho)$ как функция от t непрерывно в некоторой точке $t_0 \in T$, т. е. $f_t(x) \to f_{t_0}(x)$ (в (X, ρ)) при $t \to t_0$ (в (T, σ)).*

Тогда решение $a(t) \in X$ уравнения $x = f_t(x)$ в точке t_0 непрерывно зависит от t, т. е. $a(t) \to a(t_0)$ (в (X, ρ)) при $t \to t_0$ (в (T, σ)).

◀ Согласно замечанию 10.1, решение $a(t)$ уравнения $x = f_t(x)$ может быть получено как предел итерационной последовательности (x_{n+1}), где $x_{n+1} = f_t(x_n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, исходя из произвольной точки $x_0 \in X$. Пусть $x_0 = a(t_0) = f_t(a(t_0))$. С учетом оценки (10.2) и условия (i), получаем

$$\rho(a(t), a(t_0)) = \rho(a(t), x_0) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{1-c}\rho(x_1, x_0) = \frac{1}{1-c}\rho(f_t(a(t_0)), f_{t_0}(a(t_0))).$$

Последний член в этом соотоношении, в силу условия (б), стремится к нулю при $t \to t_0$. Таким образом, доказано, что

$$\lim_{t\to t_0} \rho(a(t), a(t_0)) = 0, \text{ т. е. } \lim_{t\to 0} a(t) = a(t_0). \ ▶$$

Задачи и упражнения

10.1. (а) Пусть f — отображение пространства $\mathbb{R}$ в себя, определенное формулой $f(x) = x^3$. Найти все его неподвижные точки и показать, в окрестности каких неподвижных точек отображение f будет сжимающим.

(б) Установить, что отображение $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, заданное равенством $f(x) = \operatorname{sign} x + 2$, разрывно, а $f \circ f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — сжимающее отображение, и найти его неподвижную точку.

(в) Доказать, что отображение $f(x) = Ax$ пространства $\mathbb{R}^2$ (см. пример 2.3) в себя, где матрица $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 10 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, не является сжимающим в $\mathbb{R}^2$, а его некоторая натуральная степень является сжимающим.

(г) Пусть $f(x) = Ax + b$ — отображение пространства $l_\infty^n = (\mathbb{R}^n, \rho_1)$ в себя, где $\rho_1(x, y) = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i - y_i|$, заданное системой линейных уравнений

$$y_k = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j + b_k, \ k = 1, 2, \ldots, n.$$

Доказать, что f — сжимающее отображение с коэффициентом сжатия $\alpha \in (0, 1)$ тогда и только тогда, когда выполнено условие

$$\sum_{j=1}^{n} |a_{kj}| \leqslant \alpha < 1, \ k = 1, 2, \ldots, n.$$

(д) Пусть f — то же самое отображение, что и в пункте (г), и действует в пространстве $\mathbb{R}^n$ (см. пример 2.3). Доказать, что условие $\sum\limits_{j,k=1}^{n} |a_{kj}| < 1$ является достаточным, чтобы отображение f было сжимающим. Будет ли это условие необходимым?

(е) Пусть отображение $f : l_\infty^n \to l_\infty^n$ задано формулой

$$f(x) = \lambda Ax + b,$$

где $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ — заданная матрица и $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$. При каких значениях λ применим принцип сжимающих отображений?

10.2. Приведите пример сжимающего отображения f неполного пространства (X, ρ) в себя, для которого неподвижная точка может не существовать.

10.3. Пусть g — отображение полного пространства (X, ρ) в себя, такое, что $\rho(g(x), g(y)) < \rho(x, y)$ для любых $x, y \in X$, $x \neq y$.

Показать, что в этом случае неподвижной точки может не быть, а если она существует, то она единственна.

10.4. Пусть f — непрерывное отображение полного пространства (X, ρ) на себя, удовлетворяющее условию: существует число $c > 1$, такое, что $\rho(f(x), f(y)) \geqslant c\rho(x, y)$ для любых $x, y \in X$. Доказать, что существует и единственна неподвижная точка отображения f.

10.5. Пусть (X, ρ) — ПМП и отображение $g \in C(X, X)$. Доказать, что если f — сжимающее отображение пространства (X, ρ) в себя и коммутирующее с отображением g, (т. е. $f \circ g = g \circ f$), то уравнение $g(x) = x$ имеет решение.

10.6. (а) Пусть действительная функция $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, удовлетворяет *условию Липшица*:

$$|f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|,$$

где $0 < k < 1$. Доказать, что уравнение $f(x) = x$ имеет единственное решение. Найти последовательность, сходящуюся к этому решению.

(б) Пусть дано дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

с начальным условием

$$y(x_0) = y_0,$$

где функция f определена в прямоугольнике

$$\Pi = \{(x,y) : |x - x_0| \leqslant a, |y - y_0| \leqslant b\}$$

и удовлетворяет условию Липшица в Π по переменной y:

$$\exists\, L > 0 : |f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leqslant L|y_1 - y_2|.$$

Доказать, что на некотором сегменте $[x_0 - h, x_0 + h]$ существует единственное решение $y = \varphi(x)$ данного уравнения, удовлятворяющее начальному условию $y_0 = \varphi(x_0)$ (*теорема Пикара*).

(в) Доказать, что если $f \in C^1(\mathbb{R})$ и $0 < c < f'(x) < d < \infty$, то уравнение $f(x) = 0$ имеет единственное решение.

(г) Пусть функция $\varphi(s,x)$ определена в полосе

$$\Pi = \{(s,x) : a \leqslant s \leqslant b, -\infty \leqslant x \leqslant \infty\},$$

непрерывна в Π и имеет непрерывную производную по x, удовлетворяющую условию:

$$0 < m \leqslant \varphi_x(s,x) \leqslant M < \infty,\ (s,x) \in \Pi.$$

Доказать, что существует единственная функция $x^* \in [a,b]$, такая, что $\varphi(s, x^*(s)) \equiv 0$ на $[a,b]$.

10.7. Уравнение вида

$$x(t) - \lambda \int\limits_a^b K(t,s)x(s)ds = y(t),\ a \leqslant t \leqslant b,$$

где $K(t,s)$, $y(t)$ — заданные функции, λ — числовой параметр, $x(t)$ — неизвестная функция, называется *интегральным уравнением Фредгольма II рода*. Функция $K(t,s)$ называется *ядром интегрального уравнения*, а $y(t)$ — *свободным членом*.

Пусть отображение $f\colon C[a,b] \to C[a,b]$ определено равенством

$$f(x)(t) = \lambda \int\limits_a^b K(t,s)x(s)ds + y(t),$$

где $K \in C([a,b] \times [a,b])$, $y \in C[a,b]$. Найти условия на λ, при которых отображение f будет сжимающим. Выведите отсюда, что интегральное уравнение Фредгольма II рода имеет единственное непрерывное решение для любой функции $y \in C[a,b]$.

10.8. Уравнение Фредгольма называется *интегральным уравнением Вольтерра II рода*, если ядро $K(t,s) \equiv 0$ при $s > t$, и имеет вид

$$x(t) - \lambda \int_a^t K(t,s)x(s)ds = y(t), \ a \leqslant t \leqslant b.$$

Пусть $K \in C([a,b] \times [a,b])$, $y \in C[a,b]$ и

$$f(x)(t) = \lambda \int_a^t K(t,s)x(s)d(s) + y(t).$$

Доказать, что

(а) отображение f переводит $C[a,b]$ в $C[a,b]$;

(б) для любых функций $x_1, x_2 \in C[a,b]$ и любого $t \in [a,b]$ справедливо неравенство

$$|f^n(x_1)(t) - f^n(x_2)(t)| \leqslant \frac{\lambda^n c^n (b-a)^n}{n!} \rho(x_1, x_2),$$

где $c = \max\{|K(t,s)| : a \leqslant s, t \leqslant b\}$;

(в) уравнение Вольтерра при любом λ имеет единственное непрерывное решение.

10.9. Нелинейное уравнение вида

$$x(t) - \lambda \int_a^b K[t,s,x(s)]ds = y(t), \ a \leqslant t \leqslant b$$

называют *интегральным уравнением Урысона*.

Пусть $y \in C[a,b]$, функция $K(t,s,u) \in C([a,b] \times [a,b])$ при каждом фиксированном u и удовлетворяет условию Липшица по u:

$$|K(t,s,u_1) - K(t,s,u_2)| \leqslant M|u_1 - u_2|,$$

где M — константа, не зависящая от $t, s \in [a,b]$.

Найти условия на λ, при которых отображение

$$f(x)(t) = \lambda \int_a^b K[t, s, x(s)]ds + y(t)$$

будет сжимающим в пространстве $C[a, b]$.

10.10. Уравнение вида

$$x(t) - \lambda \int_a^b K(t, s)\psi[x(s)]ds = y(t),\ a \leqslant t \leqslant b$$

называют *интегральным уравнением Гаммерштейна*.

Пусть $K \in C([a, b] \times [a, b])$, $y \in C[a, b]$ и функция ψ удовлетворяст условию Липшица (см. задачу 10.6).

При каких значениях параметра λ из принципа сжимающих отображений следует существование и единственность решения уравнения Гаммерштейна?

10.11. Решить методом последовательных приближений следующие интегральные уравнения в пространстве $C[a, b]$:

(а) $x(t) = \int\limits_0^\pi \cos(t + s)x(s)ds + 2\sin t;$

(б) $x(t) = t + 1 + \int\limits_0^t e^{t-s}x(s)ds;$

(в) $x(t) = \dfrac{1}{3}\int\limits_{-1}^1 \dfrac{ts}{1 + x^2(s)}ds + 1;$

(г) $\int\limits_0^\pi K(s, t)x(t)dt = \dfrac{1}{2}\sin 2x,\quad K(s, t) = \begin{cases} \dfrac{t(\pi - s)}{\pi}, & 0 \leqslant t \leqslant s, \\ \dfrac{s(\pi - t)}{\pi}, & s \leqslant t \leqslant \pi; \end{cases}$

(д) $\int\limits_0^1 K(s, t)x(t)dt = \dfrac{1}{9}\cos 3x,\quad K(s, t) = \begin{cases} \dfrac{s^2 + t^2}{2} + \dfrac{1}{3} - s, & 0 \leqslant t \leqslant s, \\ \dfrac{s^2 + t^2}{2} + \dfrac{1}{3} - t, & s \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$

10.12. Решить следующие краевые задачи (предварительно сведя их к интегральному уравнению)

(а) $x''(t) = \lambda x^2(t) + y(t),\ x(0) = 0,\ x(1) = 0,\ y \in C[0,1];$

(б) $x''(t) = -\sin x,\ x(0) = 0,\ x'(0) = a\,(a > 0).$

§11. Пополнение метрического пространства

Ценность утверждений математики заключается в их абстрактности и общности.

А. Уайтхед

В этом параграфе описывается конструкция, позволяющая для каждого неполного МП (X, ρ) построить соответствующее ему ПМП (Y, σ) с помощью присоединения к множеству X «недостающих» элементов, которые являются пределами фундаментальных последовательностей точек МП (X, ρ), не сходящимися в нем. При этом МП (X, ρ) рассматривается как подпространство полученного ПМП (Y, σ), что позволяет использовать все преимущества полноты.

МП (Y, σ) называется *пополнением пространства* (X, ρ), если оно удовлетворяет следующим условиям:

(1) (Y, σ) — ПМП;

(2) пространство (Y, σ) содержит подпространство (Y_0, σ_{Y_0}), изометричное пространству (X, ρ);

(3) множество Y_0 всюду плотно в пространстве (Y, σ).

Теорема 11.1. *Каждое МП имеет пополнение.*

◀ Рассмотрим множество $\mathscr{F}$ всех фундаментальных последовательностей в (X, ρ). Если $\xi = (x'_n)$ и $\eta = (x''_n)$ две точки из $\mathscr{F}$, то числовая последовательность $(\rho(x'_n, x''_n))$ будет фундаментальной в силу неравенства четырехугольника (см. задачу 1.2)

$$|\rho(x'_n, x''_n) - \rho(x'_m, x''_m)| \leqslant \rho(x'_n, x'_m) + \rho(x''_n, x''_m).$$

Поэтому, учитывая полноту пространства $\mathbb{R}$ имеем, что существует предел числовой последовательности $(\rho(x'_n, x''_n))$, который обозначим через $\tilde{\rho}(\xi, \eta)$, т. е.

$$\tilde{\rho}(\xi, \eta) := \lim_{n\to\infty} \rho(x'_n, x''_n). \tag{11.1}$$

Легко видеть, что величина $\tilde{\rho}(\xi, \eta)$ обладает следующими свойствами:

$$\begin{aligned}
&\tilde{\rho}(\xi, \eta) \geqslant 0, \\
&\tilde{\rho}(\xi, \xi) = 0, \\
&\tilde{\rho}(\xi, \eta) = \tilde{\rho}(\eta, \xi), \\
&\tilde{\rho}(\xi, \eta) \leqslant \tilde{\rho}(\xi, \zeta) + \tilde{\rho}(\zeta, \eta),
\end{aligned}$$

где ξ, η, ζ — произвольные точки множества $\mathscr{F}$. Заметим, что равенство $\tilde{\rho}(\xi, \eta) = 0$ не означает, вообще говоря, что $\xi = \eta$, т.е. $\tilde{\rho}$ не является метрикой на $\mathscr{F}$.

Введем на множестве $\mathscr{F}$ отношение $E = \{(\xi, \eta) : \tilde{\rho}(\xi, \eta) = 0\}$. Это отношение, в силу приведенных свойств $\tilde{\rho}(\xi, \eta)$, является отношением эквивалентности и, следовательно, разбивает множество $\mathscr{F}$ на непересекающиеся классы эквивалентных фундаментальных последовательностей.

Обозначим через $Y = \mathscr{F}/E$ фактор-множество множества $\mathscr{F}$ по отношению E (см. пункт 0.4). Введем на множестве Y метрику. Если $y = [(x_n)]$ и $y' = [(x'_n)]$ — классы эквивалентности, содержащие фундаментальные последовательности (x_n) и (x'_n), то положим

$$\sigma(y, y') = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x'_n). \tag{11.2}$$

Как было доказано выше, предел в правой части (11.2) существует. Кроме того, он не зависит от выбора последовательностей в классах y и y'. Действительно, пусть $(\tilde{x}_n)$ и $(\tilde{x}'_n)$ — другие представители классов y и y', соответственно. Тогда из неравенства четырехугольника

$$|\rho(x_n, x'_n) - \rho(\tilde{x}_n, \tilde{x}'_n)| \leqslant \rho(x_n, \tilde{x}'_n) + \rho(\tilde{x}_n, x'_n)$$

следует равенство

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x'_n) = \lim_{n\to\infty} \rho(\tilde{x}_n, \tilde{x}'_n).$$

Далее из свойств величины $\tilde{\rho}(\xi, \eta)$, определенной равенством (11.1), получаем, что функция σ удовлетворяет аксиомам метрики. Таким образом, множество классов эквивалентных фундаментальных последовательностей из Y с метрикой σ является МП.

Рассмотрим отображение $p\colon X \to Y$, которое каждой точке $x \in X$ ставит в соответствие класс эквивалентности $[(x)]$, содержащий стационарную последовательность (x). Этот класс будет содержать также все фундаментальные последовательности, сходящиеся к точке x. Положим $Y_0 = p(X)$. Тогда функция

$$\sigma_{Y_0}([(x)], [(x')]) = \rho(x, x')$$

определяет метрику, индуцированную метрикой σ на множество Y_0. Следовательно, (Y_0, σ_{Y_0}) – подпространство пространства (Y, σ), а отображение $p\colon (X, \rho) \to (Y_0, \sigma_{Y_0})$ является изометрией.

Покажем, что Y_0 – всюду плотное множество в (Y, σ). Пусть y – некоторый элемент множества Y и (x_n) – произвольная последовательность из класса y. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $k_0 \in \mathbb{N}$, такое, что для всех номеров $n > k_0$ и $m > k_0$ выполняется неравенство

$$\rho(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{11.3}$$

Рассмотрим элемент $y_0 \in Y_0$, определенный равенством $y_0 = p(x_{m_0})$, где x_{m_0} – элемент последовательности (x_n) с номером $m_0 > k_0$. Тогда, переходя в неравенстве

$$\rho(x_n, x_{m_0}) < \frac{\varepsilon}{2}, \; n > k_0$$

к пределу при $n \to \infty$, получим

$$\sigma(y, y_0) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

т. е. элемент y является точкой прикосновения множества Y_0. Таким образом, для каждого элемента $y \in Y$ существует последовательность (x_n) в пространстве (X, ρ), такая, что $\sigma(y, p(x_n)) \to 0$ при $n \to \infty$. Значит, $\overline{Y_0} = Y$.

Остается доказать полноту пространства (Y, σ). Пусть (y_n) – фундаментальная последовательность в (Y, σ). Возьмем последовательность положительных чисел (ε_n): $\varepsilon_n \to 0$. Так как множество Y_0 всюду плотно в (Y, σ), то для каждого $y_n \in Y$ найдется элемент $y_0^{(n)} \in Y_0$, такой, что $\sigma(y_n, y_0^{(n)}) < \varepsilon_n$. Из неравенства

$$\sigma(y_0^{(n)}, y_0^{(m)}) \leqslant \sigma(y_0^{(n)}, y_n) + \sigma(y_m, y_0^{(m)}) + \sigma(y_n, y_m) <$$
$$< \varepsilon_n + \varepsilon_m + \sigma(y_n, y_m)$$

следует, что последовательность $(y_0^{(n)})$ фундаментальна в (Y, σ). Построим последовательность точек $x_0^{(1)}, x_0^{(2)}, \ldots$ множества X, где каждая из стационарных последовательностей $(x_0^{(1)})$, $(x_0^{(2)})$, ... принадлежит классу $y_0^{(1)}$, $y_0^{(2)}$, ... Эта последовательность фундаментальна в (X, ρ), и поэтому она определяет некоторый класс $y \in Y$. Используя неравенство треугольника, получаем

$$\sigma(y_n, y) \leqslant \sigma(y_n, y_0^{(n)}) + \sigma(y_0^{(n)}, y) < \varepsilon_n + \sigma(y_0^{(n)}, y).$$

Отсюда, с учетом соотношения $\sigma(y_0^{(n)}, y) \to 0$ при $n \to \infty$, заключаем, что $y_n \to y$ в (Y, σ) и полнота пространства (Y, σ) доказана. ►

Теорема 11.2. *Пусть (Y_1, σ_1) и (Y_2, σ_2) — любые два пополнения пространства (X, ρ). Тогда существует изометрия $f\colon (Y_1, \sigma_1) \to (Y_2, \sigma_2)$ такая, что $f(x) = x$ для всех $x \in X$ (т. е. изометрия f оставляет на месте точки из множества X).*

◄ Для каждого $i = 1, 2$ обозначим через $p_i\colon X \to Y_i$ изометричное отображение, у которого образ $p_i(X)$ всюду плотно в (Y_i, σ_i). Из определения пополнения, для каждого $y_1 \in Y_1$ существует такая последовательность (x_n) из (X, ρ), что $\lim\limits_{n\to\infty} p_1(x_n) = y_1$ (в (Y_1, σ_1)). Положим $y_2 = \lim\limits_{n\to\infty} p_2(x_n)$ (в (Y_2, σ_2)). Определим по формуле $f(y_1) = y_2$ отображение $f\colon Y_1 \to Y_2$, которое является изометрией Y_1 на Y_2. Действительно, из непрерывности метрики как функции двух переменных получим равенства

$$\begin{aligned}\sigma_1(y_1, y_1') &= \lim_{n\to\infty} \sigma_1(p_1(x_n), p_2(x_n')) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x_n') = \\ &= \lim_{n\to\infty} \sigma_2(p_2(x_n), p_2(x_n')) = \sigma_2(y_2, y_2') = \sigma_2(f(y_1), f(y_1')),\end{aligned}$$

где $f(y_1) = y_2$ и $f(y_1') = y_2'$. Отсюда следует, что отображение $f\colon Y_1 \to Y_2$ определено корректно. При этом f является взаимно однозначным соответствием. То, что отображение f оставляет на месте точки из множества X, непосредственно следует из его определения. ►

З а м е ч а н и е 11.1. Рассмотрим *теорию иррациональных чисел*, известную как *канторовская теория вещественных чисел*. Возьмем неполное пространство рациональных чисел $(\mathbb{Q}, \rho_\mathbb{Q})$ с евклидовой метрикой $\rho(x, y) = |x - y|$, и пусть (Y, σ) — его пополнение. «Недостающие» точки пространства $(\mathbb{Q}, \rho_\mathbb{Q})$ назовем *иррациональными числами*. Иначе говоря, согласно конструкции, приведенной в доказательстве теоремы 11.1, *иррациональным числом* считают класс эквивалентных фундаментальных последовательностей рациональных чисел, не имеющих предела в пространстве $(\mathbb{Q}, \rho_\mathbb{Q})$. Например, класс эквивалентных фундаментальных последовательностей, содержащий последовательность

$$x_n = 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!},$$

есть иррациональное число e, а класс, содержащий последовательность рациональных чисел $x_1 = 3$; $x_2 = 3,1$; $x_3 = 3,141$; ..., есть иррациональное число число $\pi = 3,1459259\ldots$ (т. е. запись иррационального числа в виде бесконечной непериодической десятичной дроби представляет собой выбор класса фундаментальных последовательностей).

В множестве действительных (иррациональных и рациональных) чисел введем отношение линейного порядка. Пусть $\xi \in Y$ и (x_n) – произвольная фундаментальная последовательность точек $x_n \in \mathbb{Q}$, при этом положим $\xi_x = x$, если класс ξ_x содержит стационарную последовательность (x), $x \in \mathbb{Q}$. Если ξ и ξ_x – различные классы, то из определения метрики σ (см. формулу (11.2)) получим, что либо $x_n > x$, либо $x_n < x$ для достаточно больших n. В этом случае полагаем $\xi > x$, а во втором – $\xi < x$, при этом результат не зависит от выбора последовательности (x_n).

Если ξ_1, ξ_2 – два иррациональных числа, то при любом выборе последовательностей $(x_n^{(1)})$ из ξ_1 и $(x_n^{(2)})$ из ξ_2 для достаточно больших n имеем либо $x_n^{(1)} < x_n^{(2)}$, либо $x_n^{(1)} > x_n^{(2)}$. В первом случае полагаем $\xi_1 < \xi_2$, а во втором $\xi_1 > \xi_2$.

Так как для каждого $\xi \in Y$ существует фундаментальная последовательность (x_n) точек из $(\mathbb{Q}, \rho_{\mathbb{Q}})$, такая, что $\sigma(\xi, p(x_n)) \to 0$ при $n \to \infty$ (т. е. всякое иррациональное число есть предел некоторой последовательности рациональных чисел), то это позволяет определить действия над действительными числами. Рассмотрим для примера сумму действительных чисел ξ_1 и ξ_2. Пусть $(\xi_n^{(1)})$, $(\xi_n^{(2)})$ – две последовательности из $(\mathbb{Q}, \rho_{\mathbb{Q}})$, такие, что $\sigma(\xi_1, p(x_n^{(1)})) \to 0$ и $\sigma(\xi_2, p(x_n^{(2)})) \to 0$. Из фундаментальности последовательности $(\xi_n^{(1)})+(\xi_n^{(2)})$ и полноты (Y, σ) имеем, что найдется элемент $\xi \in Y$, для которого $\sigma(\xi, p(x_n^{(1)} + x_n^{(2)})) \to 0$. Этот элемент называют суммой данных чисел ξ_1 и ξ_2.

Задачи и упражнения

11.1. Доказать, что если (X, ρ) – ПМП, то пополнением подпространства (A, ρ_A), $A \subset X$, является пространство $(\overline{A}, \rho_{\overline{A}})$.

11.2. Доказать неполноту и построить пополнения следующих пространств:

(а) множество $\mathbb{R}$ с расстоянием $\rho(x, y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|$;

(б) множество $\mathbb{R}$ с расстоянием $\rho(x, y) = |e^x - e^y|$.

11.3. На множестве $\{[a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ отрезков пространства $\mathbb{R}$ определим расстояние формулой

$$\rho([a, b], [c, d]) = |a - c| + |b - d|.$$

Доказать неполноту и найти пополнение полученного пространства.

11.4. Пусть f — изометрическое отображение пространства (X, ρ) в полное пространство (Y, σ). Доказать, что подпространство $(\overline{f(X)}, \sigma_{\overline{f(X)}})$ пространства (Y, σ) является пополнением пространства (X, ρ).

11.5. Пусть $\{(X_i, \rho_i) : i \in \mathbb{N}\}$ — семейство неполных метрических пространств и $\{(Y_i, \sigma_i) : i \in \mathbb{N}\}$ — соответствующие им пополнения. Доказать, что произведение пополнений является пополнением произведения этих пространств.

11.6. Доказать, что если МП сепарабельно, то его пополнение также сепарабельно.

11.7. На множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел будем всевозможными способами задавать метрики и строить пополнения. Показать, что в этом случае будем получать сепарабельные ПМП с бесконечным числом точек.

11.8. На множестве полиномов $P[a, b]$, заданных на отрезке $[a, b]$ числовой прямой $\mathbb{R}$, определим расстояние

$$\rho(x, y) = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t) - y(t)|.$$

Показать, что пространство $(P[a, b], \rho)$ — неполно и его пополнением является пространство $C[a, b]$.

11.9. Пополнение пространства $\tilde{L}_p[a, b]$ (пример 2.12) называется *пространством Лебега* и обозначается $L_p[a, b]$. При каких p пространство $L_p[a, b]$ сепарабельно?

11.10. Пополнение пространства $\widetilde{W}_p^l[a, b]$ (пример 2.13) называется *пространством Соболева* и обозначается $W_p^l[a, b]$. Доказать, что множество многочленов всюду плотно в пространстве $W_p^l[a, b]$ $(1 \leqslant p < \infty)$.

11.11 Пусть l_p^0 — пространство, состоящее из финитных последовательностей, т. е. из последовательностей вида

$$x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{k_1}, 0, \ldots),$$

где k_1 — некоторое натуральное число, с метрикой

$$\rho(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{k_1} |\xi_i - \eta_i|^p + \sum_{i=k_1+1}^{k_2} |\eta_i|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

если $y = (\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_{k_2}, 0, 0, \ldots)$ и $k_2 \geqslant k_1$. Найти пополнение пространства l_p^0.

§12. Вполне ограниченные пространства

...свойство, общее для слишком многих обьектов, вряд ли может быть очень интересным, и математические идеи также становятся скучными, если не обладают индивидуальностью в достаточной мере.

Г. Харди

Система подмножеств $\mathscr{A} = \{U_s : s \in S\}$ множества X называется *покрытием пространства* (X, ρ), если $X = \bigcup\{U_s : s \in S\}$.

Покрытие $\mathscr{A}$ называется *открытым* (или, соответственно, *замкнутым*), если каждое из множеств $U_s \in \mathscr{A}$ открыто (или, соответственно, замкнуто) в пространстве (X, ρ).

Подсистема $\mathscr{A}_0$ покрытия $\mathscr{A}$ пространства (X, ρ) называется *подпокрытием покрытия* $\mathscr{A}$, если сама система $\mathscr{A}_0$ образует покрытие (X, ρ).

Пространство (X, ρ) называется *вполне ограниченным*, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует конечное открытое покрытие пространства (X, ρ) множествами диаметра меньше ε, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется конечное семейство открытых множеств $\{U_i^\varepsilon : i = \overline{1, k}\}$, таких, что $X = \bigcup\{U_i^\varepsilon : i = \overline{1, k}\}$ и $d(U_i^\varepsilon) < \varepsilon$ для любого $i = \overline{1, k}$.

Теорема 12.1. *Для того чтобы пространство (X, ρ) было вполне ограниченным, необходимо и достаточно, чтобы каждому $\varepsilon > 0$ соответствовало конечное множество $A_\varepsilon \subset X$, такое, что $\rho(x, A_\varepsilon) < \varepsilon$, какова бы ни была точка $x \in X$.*

◄ Необходимость. Пусть (X, ρ) — вполне ограниченное МП и число $\varepsilon > 0$. Тогда для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдется конечное семейство непустых открытых подмножеств $\{U_1^n, U_2^n, \ldots, U_{k_n}^n\}$ МП (X, ρ), такое, что

$$X = U_1^n \cup U_2^n \cup \ldots \cup U_{k_n}^n, \quad d(U_i^n) < \frac{1}{n} \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k_n.$$

Из каждого множества U_i^n выберем по одной точке x_i^n. Тогда множество $A_{\frac{1}{n}} = \{x_1^n, \ldots, x_{k_n}^n\}$ есть искомое множество (при $\varepsilon > \frac{1}{n}$).

Д о с т а т о ч н о с т ь. Если $A_{\frac{\varepsilon}{2}}$ — множество, удовлетворяющее условию теоремы, то система открытых шаров радиуса $\frac{\varepsilon}{2}$ с центрами, принадлежащими множеству $A_{\frac{\varepsilon}{2}}$, представляет собой искомое покрытие пространства (X, ρ). ►

Множество $A \subset X$ называется *ε-сетью пространства* (X, ρ), или говорят, что множество A — *ε-плотно в пространстве* (X, ρ), если для любой точки $x \in X$ существует точка $a \in A$, такая, что $\rho(x, a) < \varepsilon$. При этом множество A называется *конечной ε-сетью*, если оно состоит из конечного числа точек.

На основании данного определения теорему 12.1 можно сформулировать в следующем виде: *МП (X, ρ) вполне ограниченное тогда и только тогда, когда при любом $\varepsilon > 0$ в пространстве (X, ρ) существует конечная ε-сеть.*

Предложение 12.1. *Любое вполне ограниченное МП сепарабельно и ограничено.*

◄ Пусть (X, ρ) — произвольное вполне ограниченное МП. Тогда, в силу теоремы 12.1, для любого $k \in \mathbb{N}$ существует конечное подмножество $A_k \subset X$, такое, что $\rho(x, A_k) < \frac{1}{k}$ для любого $x \in X$.

Положим $B = \cup\{A_k : k \in \mathbb{N}\}$. Ясно, что множество B не более чем счетно, причем для каждой точки $x \in X$ при любом $k \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$\rho(x, B) \leqslant \rho(x, A_k) < \frac{1}{k}.$$

Следовательно, $\rho(x, B) = 0$. Отсюда, с учетом произвольного выбора точки x, получаем равенство $X = \overline{B}$, что означает сепарабельность (X, ρ).

Покажем, что пространство (X, ρ) ограничено. Пусть $\{x_1, \ldots, x_n\}$ есть 1-сеть пространства (X, ρ) и x_0 — фиксированный элемент из (X, ρ). Положим $d = \max\{\rho(x_0, x_i) : i = \overline{1, n}\}$. Отсюда для произвольной точки $x \in X$ имеем неравенство

$$\rho(x, x_0) \leqslant \rho(x, x_i) + \rho(x_i, x_0) < 1 + d,$$

где x_i — центр открытого шара $B(x_i, 1)$, который содержит точку x. ►

Непустое множество $M \subset X$ называется *вполне ограниченным* в пространстве (X, ρ), если подпространство (M, ρ_M) — вполне ограниченное МП.

Пусть M — некоторое непустое подмножество пространства (X,ρ) и ε — произвольно заданное положительное число. Множество $A \subset X$ называется *ε-сетью для множества M* в (X,ρ), если для любой точки $x \in M$ существует $a \in A$, такое, что $\rho(x,a) < \varepsilon$.

Ясно, что множество $M \subset X$ вполне ограничено в пространстве (X,ρ) тогда и только тогда, когда для него при любом $\varepsilon > 0$ в (X,ρ) существует конечная ε-сеть. Следовательно, вполне ограниченное множество есть множество, к которому можно с любой степенью точности приблизиться конечными множествами.

Отметим, что если множество A есть конечная ε-сеть множества M, то оно не обязано содержаться в M и может даже не иметь с M ни одной общей точки (см. задачу 12.6(а)).

Примеры вполне ограниченных множеств доставляет

Предложение 12.2. *Если (X,ρ) — вполне ограниченное МП, то любое его подмножество M также вполне ограниченное.*

◄ Зафиксируем число $\varepsilon > 0$. Согласно теореме 12.1 выберем конечное множество $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, $\frac{\varepsilon}{2}$-плотное в пространстве (X,ρ). Пусть подмножество $\{x_{m_1}, \ldots, x_{m_l}\}$ множества A такое, что $\rho(x_{m_j}, M) < \frac{\varepsilon}{2}$ для каждого $j = \overline{1,l}$. Обозначим через $x'_1, x'_2, \ldots, x'_l$ точки из множества M, подчиненные условиям:

$$\rho(x_{m_j}, x'_j) < \frac{\varepsilon}{2},\ j = \overline{1,l}. \tag{12.1}$$

Покажем, что $B = \{x'_1, x'_2, \ldots, x'_l\}$ — ε-сеть множества M. Принимая во внимание определение множества A, для произвольной точки $x \in M$ найдется такое $x_i \in A$, что

$$\rho(x, x_i) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{12.2}$$

Следовательно, полагая $x_i = x_{m_j}$ для некоторого $j \leqslant l$ и учитывая неравенства (12.1), (12.2), окончательно получаем

$$\rho(x, x'_j) \leqslant \rho(x, x_i) + \rho(x_i, x'_j) < \varepsilon,$$

т. е. B является конечной ε-сетью для M. ►

Свойства вполне ограниченных множеств в МП характеризует следующее

Предложение 12.3. (*а*) *Всякое вполне ограниченное множество является ограниченным множеством.*

(*б*) *Если M — вполне ограниченное множество пространства (X, ρ), то его замыкание $\overline{M}$ также вполне ограниченное в (X, ρ).*

◀ (б) Достаточно заметить, что $\frac{\varepsilon}{2}$-плотное множество в подпространстве (M, ρ_M) будет ε-плотно в $(\overline{M}, \rho_{\overline{M}})$. ▶

Эквивалентное определение вполне ограниченных МП на языке последовательностей дает

Теорема 12.2. *МП будет вполне ограниченным тогда и только тогда, когда каждая последовательность его точек содержит фундаментальную подпоследовательность.*

◀ Пусть (X, ρ) — вполне ограниченное пространство и (x_n) — произвольная последовательность точек в (X, ρ). Зафиксируем произвольно $\varepsilon > 0$. Тогда в пространстве (X, ρ) существует конечная $\frac{\varepsilon}{2}$-сеть $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, т. е.

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} B\left(a_i, \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Выберем номер i таким, что шар $B(a_i, \frac{\varepsilon}{2})$ содержит бесконечно много элементов последовательности (x_n). Тогда существует подпоследовательность (x_{n_m}) последовательности (x_n), такая, что $x_{n_m} \in B(a_i, \frac{\varepsilon}{2})$ для любого $m \in \mathbb{N}$ и тем самым удовлетворяет условию $d(\{x_{n_m} : m \in \mathbb{N}\}) < \varepsilon$.

Положим $\varepsilon = 1$ и из заданной последовательности выделим подпоследовательность

$$x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1m}, \dots;\ d(\{x_{1m} : m \in \mathbb{N}\}) < 1, \tag{12.3}$$

где $x_{1m} = x_{n_m}$ для каждого $m \in \mathbb{N}$. Так как $B(a_i, \frac{1}{2})$ — вполне ограниченное множество (согласно предложению 12.2), содержащее последовательность (12.3), то из (12.3) можно выделить подпоследовательность

$$x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2m}, \dots;\ d(\{x_{2m} : m \in \mathbb{N}\}) < \frac{1}{2}.$$

Продолжая этот процесс, для каждого $p = 1, 2, \dots$ получим последовательность

$$x_{p1}, x_{p2}, \dots, x_{pm}, \dots;\ d(\{x_{pm} : m \in \mathbb{N}\}) < \frac{1}{p}.$$

Составим диагональную последовательность

$$x_{11}, x_{22}, \ldots, x_{mm}, \ldots . \tag{12.4}$$

Отсюда, в силу диагонального процесса Кантора (см. пункт 0.6), получаем, что последовательность (12.4) является подпоследовательностью каждой из построенных последовательностей. Поэтому каково бы ни было $\varepsilon > 0$, выбрав m_0 так, чтобы $\frac{1}{m_0} < \varepsilon$, получим, что для любых $m_1 > m_0$, $m_2 > m_0$ выполняется неравенство

$$\rho(x_{m_1 m_1}, x_{m_2 m_2}) < \frac{1}{m_0} < \varepsilon,$$

т. е. последовательность (12.4) фундаментальна.

Обратно, пусть пространство (X, ρ) не является вполне ограниченным, т. е. существует такое $\varepsilon > 0$, что пространство (X, ρ) не имеет конечной ε–сети. Пусть x_1 — произвольная точка множества X. По предположению, она не образует ε–сети. Поэтому существует такая точка $x_2 \in X$, что $\rho(x_1, x_2) \geqslant \varepsilon$. Пусть в (X, ρ) уже выбраны такие точки $x_1, \ldots, x_n$, что $\rho(x_i, x_j) \geqslant \varepsilon$ при $i \neq j$. Так как множество этих точек не является ε-сетью для (X, ρ), то в множестве X существует такая точка (обозначим ее через x_{n+1}), что $\rho(x_i, x_{n+1}) \geqslant \varepsilon$, $i = \overline{1, n}$. Продолжая этот процесс, получим последовательность точек $x_n \in X$, таких, что

$$\rho(x_n, x_m) \geqslant \varepsilon, \text{ при } n \neq m.$$

Ясно, что эта последовательность не содержит фундаментальной подпоследовательности. ►

Задачи и упражнения

12.1. (а) Пусть $\mathscr{A} = \{A_s : s \in S\}$ и $\mathscr{B} = \{B_t : t \in T\}$ — открытые покрытия пространства (X, ρ). Показать, что семейство множеств

$$\mathscr{A} \cap \mathscr{B} = \{A_s \cap B_t : (s, t) \in S \times T\}$$

является открытым покрытием пространства (X, ρ).

(б) Пусть (X, ρ), (Y, σ) — два произвольных пространства, и пусть $\mathscr{A} = \{A_s : s \in S\}$, $\mathscr{B} = \{B_t : t \in T\}$ — открытые покрытия пространств (X, ρ) и (Y, σ), соответственно. Показать, что

$$\mathscr{A} \times \mathscr{B} = \{A_s \times B_t : (s, t) \in S \times T\}$$

является открытым покрытием произведения пространств $(X \times Y, \rho \times \sigma)$. Семейство множеств $\mathscr{A} \times \mathscr{B}$ называется *произведением покрытий* $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$.

12.2. Доказать, что из всякого открытого покрытия сепарабельного МП можно выделить счетное открытое подпокрытие.

12.3. Доказать, что

(а) все конечные множества в произвольном МП вполне ограничены;

(б) множество ограничено в пространстве $\mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда оно вполне ограничено.

12.4. Приведите пример ограниченного, но не вполне ограниченного пространства.

12.5. Доказать утверждения:

(а) МП (X, ρ) сепарабельно тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует счетная ε-сеть в X;

(б) если в (X, ρ) существует бесконечное несчетное множество непересекающихся шаров фиксированного радиуса $\varepsilon > 0$, то (X, ρ) несепарабельно.

12.6. Установить справедливость следующих предложений:

(а) если M — множество в пространстве (X, ρ), A — конечная ε-сеть множества M в (X, ρ) и $M \cap A = \varnothing$, то существует конечная 2ε-сеть B множества M, такая, что $B \subset M$;

(б) если множество в МП имеет для каждого $\varepsilon > 0$ конечную ε-сеть, состоящую только из его точек, то оно вполне ограничено;

(в) если F — замкнутое вполне ограниченное множество в (X, ρ), то для любого $\varepsilon > 0$ имеет место представление $F = \bigcup\limits_{i=1}^{n(\varepsilon)} F_i$, где F_i — непустые замкнутые множества диаметра $d(F_i) < \varepsilon$, содержащиеся в F.

12.7. Множество

$$Q_\infty = \{x \in l_2 : x = (x_n),\ |x_n| \leqslant \frac{1}{2^n},\ n \in \mathbb{N}\}$$

называется *гильбертовым кирпичом*. Доказать, что Q_∞ — вполне ограниченное множество в пространстве l_2.

12.8. Пусть (X, ρ) — дискретное пространство. Доказать, что множество $M \subset X$ вполне ограничено в (X, ρ) тогда и только тогда, когда M — конечно.

12.9. Пусть (X, ρ) — вполне ограниченное МП. Доказать, что тогда пространство $(\mathscr{F}, \rho_H)$ замкнутых ограниченных подмножеств (см. задачу 3.15) пространства (X, ρ) также вполне ограничено.

12.10. Доказать, что МП, изометричное вполне ограниченному пространству, является вполне ограниченным.

12.11. Является ли МП, гомеоморфное вполне ограниченному пространству, вполне ограниченным?

12.12. Доказать, что множество $\{x \in C[0, 2\pi] : |x(t)| \leqslant 1\}$ не является вполне ограниченным в пространстве $C[0, 2\pi]$.

12.13. Доказать, что произведение пространств вполне ограничено тогда и только тогда, когда каждое из них вполне ограничено.

12.14. Доказать, что если (X, ρ) — вполне ограниченное пространство, то для каждой изометрии $f: (X, \rho) \to (X, \rho)$ образ $f(X)$ всюду плотен в (X, ρ).

12.15. Пусть (X, ρ) — вполне ограниченное пространство и отображение $f: (X, \rho) \to (X, \rho)$ удовлетворяет условию $\rho(x, y) \leqslant \rho(f(x), f(y))$ при всех $x, y \in X$. Доказать, что f — изометрия.

12.16. (а) Пусть (X, ρ), (Y, σ) — вполне ограниченные пространства и отображение $f: (X, \rho) \to (Y, \sigma)$ непрерывно. Доказать, что тогда $(X, \tilde{\rho})$ — вполне ограниченное пространство, где

$$\tilde{\rho}(x, y) = \rho(x, y) + \sigma(f(x), f(y)), \quad x, y \in X.$$

(б) Пусть (X, ρ) — вполне ограниченное пространство и отображение $f \in C(X, X)$. Доказать, что пространство $(X, \tilde{\rho})$, где $\tilde{\rho}$ — метрика, определенная в задаче 7.9, вполне ограничено.

§13. Компактные пространства

Почти бессмысленно говорить об открытых пространствах или о замкнутых пространствах, имеет смысл говорить о компактных метрических пространствах.

У. Рудин

МП называется *компактным*, если оно удовлетворяет *условию Бореля–Лебега*: всякое его открытое покрытие содержит конечное подпокрытие, т. е. если $\{U_s : s \in S\}$ — произвольное открытое покрытие пространства (X, ρ), то существует конечный набор индексов $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\} \subset S$, такой, что $X = \cup\{U_{s_k} : k = \overline{1, n}\}$.

Лемма 13.1. *Если МП полно и вполне ограничено, то оно компактно.*

◄ Пусть МП (X, ρ) полно и вполне ограничено. Допустим, что $\mathscr{U} = \{U_s : s \in S\}$ — произвольное открытое покрытие пространства (X, ρ), никакое конечное подсемейство которого не покрывает (X, ρ). Для положительного числа $\frac{1}{2^{n-1}}$, где $n \in \mathbb{N}$, существует, в силу того, что МП (X, ρ) вполне ограничено, конечная $\frac{1}{2^{n-1}}$-сеть $\{x_1, \ldots, x_k\}$. Следовательно, $X = \cup\{B(x_i, \frac{1}{2^{n-1}}) : i = \overline{1, k}\}$. Обозначим через B_{n-1} тот из шаров $B(x_i, \frac{1}{2^{n-1}})$, который нельзя покрыть конечным семейством из $\mathscr{U}$. Для числа $\frac{1}{2^n}$ существует конечное покрытие (X, ρ) шарами $\{B(x_i^1, \frac{1}{2^n}) : i = \overline{1, m}\}$. Среди этих шаров, имеющих непустое пересечение с B_{n-1}, найдется по крайней мере один шар B_n, который нельзя покрыть конечным семейством множеств из $\mathscr{U}$. Действительно, поскольку

$$B_{n-1} \subset \bigcup_{i=1}^{m} B(x_i^1, \frac{1}{2^n}),$$

в противном случае нашлось бы конечное подсемейство семейства $\mathscr{U}$, покрывающее B_{n-1}.

Обозначим через x_n центр открытого шара B_n, $n = 1, 2, \ldots$. Так как $B_n \cap B_{n-1} \neq \varnothing$ для каждого $n = 2, 3, \ldots$, то

$$\rho(x_{n-1}, x_n) \leqslant \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^{n-2}}.$$

Поэтому, если $n \leqslant p \leqslant q$, то

$$\rho(x_p, x_q) \leqslant \rho(x_p, x_{p+1}) + \ldots + \rho(x_{q-1}, x_q) <$$
$$< \frac{1}{2^{p-1}} + \ldots + \frac{1}{2^{q-2}} < \frac{1}{2^{n-2}}.$$

Это значит, что (x_n) — фундаментальная последовательность в (X, ρ) и, следовательно, в силу полноты (X, ρ) сходится к точке $x_0 \in X$.

Пусть $s_0 \in S$ — индекс, при котором $x_0 \in U_{s_0}$. Так как U_{s_0} — открытое множество, то существует число $r > 0$, такое, что $B(x_0, r) \subset U_{s_0}$. Из определения точки x_0 следует, что найдется номер n, для которого

$$\rho(x_n, x_0) < \frac{r}{2}, \ \frac{1}{2^n} < \frac{r}{2}.$$

Отсюда для указанного n получаем соотношение

$$B_n \subset B(x_0, r) \subset U_{s_0},$$

что противоречит определению шара B_n. ►

Лемма 13.2. *Если (X, ρ) — компактное МП, то любая последовательность точек из (X, ρ) содержит сходящуюся в нем подпоследовательность.*

◄ Пусть (x_n) — произвольная последовательность в (X, ρ). Положим

$$F_n = \overline{\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}}, \ n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Покажем, что $\cap\{F_n : n \in \mathbb{N}\} \neq \varnothing$. Предположим противное, т. е. $\cap\{F_n : n \in \in \mathbb{N}\} = \varnothing$. Тогда, полагая $X \backslash F_n = U_n$, получим, что семейство $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ является открытым покрытием пространства (X, ρ), которое, в силу компактности (X, ρ), содержит его конечное подпокрытие $\{U_{n_i} : i = = \overline{1, k}\}$. Но это значит, что $\cap\{F_{n_i} : i = \overline{1, k}\} = \varnothing$, что невозможно, так как если $n > \max\{n_i : i = \overline{1, k}\}$, то непустое множество F_n содержится в F_{n_i} для каждого $i = \overline{1, k}$. Таким образом, $\cap\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ содержит хотя бы одну точку x_0, т. е. x_0 является точкой прикосновения каждой последовательности $(x_n, x_{n+1}, \ldots), n = 1, 2, \ldots$. Возьмем последовательность шаров $B(x_0, \frac{1}{k})$ и в каждом шаре выберем входящую в него точку x_{n_k} так, чтобы выполнялось условие $n_k < n_{k+1}$ для каждого $k = 1, 2, \ldots$. В результате получим подпоследовательность (x_{n_k}) последовательности (x_n). Так как $\rho(x_{n_k}, x_0) < \varepsilon$ при любом $k \geqslant \frac{1}{\varepsilon}$, то заключаем, что эта подпоследовательность сходится к точке x_0. ►

Из доказанных лемм 13.1 и 13.2 следует критерий компактности МП на языке последовательностей, а именно: справедлива

Теорема 13.1. *МП (X, ρ) компактно тогда и только тогда, когда каждая последовательность точек из (X, ρ) содержит сходящуюся в нем подпоследовательность* (или другими словами: *МП компактно тогда и только тогда, когда оно полно и вполне ограничено*). ►

Непосредственно из предложения 12.1 и теоремы 13.1 следует

Предложение 13.1. *Компактное МП сепарабельно и ограничено.* ►

Теорема 13.2. *Если f — непрерывное отображение компактного пространства (X, ρ) на пространство (Y, σ), то (Y, σ) — компактное пространство.*

◄ Рассмотрим произвольную последовательность точек (y_n) пространства (Y, σ). Для каждой точки $y_n \in Y$ возьмем один из его прообразов $x_n \in X$. Так как (X, ρ) компактно,то, в силу леммы 13.2, последовательность (x_n) содержит подпоследовательность (x_{n_k}), такую, что $x_{n_k} \to x_0 \in X$. Отсюда, с учетом того, что $f \in C(X, Y)$, имеем

$$f(x_{n_k}) = y_{n_k} \to y_0 = f(x_0) \in f(X) = Y, \ k \to \infty.$$

Следовательно, подпоследовательность (y_{n_k}) последовательности (y_n) сходится к точке $y_0 \in Y$. Значит, согласно теореме 13.1, пространство (Y, σ) компактно. ►

Понятия непрерывности и равномерной непрерывности для отображения $f\colon (X, \rho) \to (Y, \sigma)$, в случае, когда (X, ρ) — компактное пространство, равносильны (см. замечание 7.1), а именно: имеет место

Теорема 13.3. *Пусть $f\colon (X, \rho) \to (Y, \sigma)$ — непрерывное отображение компактного МП (X, ρ) в произвольное МП (Y, σ), тогда оно равномерно непрерывно на X.*

◀ Пусть $f\colon (X,\rho) \to (Y,\sigma)$ не является равномерно непрерывным, т. е. существует такое $\varepsilon > 0$, что для любого $\delta > 0$ найдутся точки $x, x' \in X$, для которых выполняются неравенства

$$\rho(x,x') < \delta, \quad \sigma(f(x), f(x')) \geqslant \varepsilon.$$

Рассмотрим числовую последовательность (δ_n), $(\delta_n) > 0$, $\delta_n \to 0$, и для каждого δ_n выберем соответствующие точки $x_n, x'_n \in X$, такие, что $\rho(x_n, x'_n) < \delta_n$, $\sigma(f(x_n), f(x'_n)) \geqslant \varepsilon$. В силу компактности (X,ρ) из последовательности (x_n), выделим подпоследовательность (x_{n_k}) такую, что $x_{n_k} \to x_0 \in X$. Тогда согласно неравенству треугольника имеем

$$\rho(x_0, x'_{n_k}) \leqslant \rho(x_0, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, x'_{n_k}) \to 0, \ k \to \infty.$$

Таким образом, $x'_{n_k} \to x_0$ и в силу непрерывности f получаем, что

$$f(x_{n_k}) \to f(x_0), \ f(x'_{n_k}) \to f(x_0).$$

Следовательно, $\sigma(f(x_{n_k}), f(x'_{n_k})) \to 0$, а это противоречит неравенству $\sigma(f(x_n), f(x'_n)) \geqslant \varepsilon$, справедливому при любом n. ▶

Задачи и упражнения

13.1. Пусть (X,ρ) — компактное пространство и M — множество всех изометричных отображений пространства (X,ρ) в себя с метрикой $\hat\rho(x,y) = \max\{\rho(x(t), y(t)) : t \in X\}$. Доказать, что $(M, \hat\rho)$ — компактное пространство.

13.2. Доказать, что сепарабельное МП компактно тогда и только тогда, когда любая последовательность непустых замкнутых множеств, последовательно вложенных друг в друга, имеет непустое пересечение.

13.3. Доказать, что произведение двух пространств компактно тогда и только тогда, когда каждое из них компактно.

13.4. Пусть (X,ρ) — МП, в котором каждое бесконечное подмножество имеет предельную точку. Доказать, что пространство (X,ρ) компактно.

13.5. Установить справедливость следующих утверждений;

(а) если пространство (X,ρ) компактно, то существуют такие точки $a, b \in X$, что $\rho(a,b) = d(X)$;

(б) если для всякой пары непересекающихся замкнутых множеств A и B пространства (X,ρ) выполняется неравенство $\rho(A,B) > 0$, то пространство (X,ρ) компактно.

13.6. Доказать, что непрерывное отображение компактного пространства в произвольное МП является замкнутым отображением.

13.7. Пусть $f\colon (X,\rho) \to (Y,\sigma)$ — непрерывное инъективное отображение компактного пространства (X,ρ) на пространство (Y,σ). Доказать, что отображение является гомеоморфизмом.

13.8. Пусть (X,ρ) — компактное МП и f — отображение (X,ρ) в себя такое, что $\rho(f(x),f(y)) \geqslant \rho(x,y)$ для всех $x,y \in X$. Показать, что тогда f — изометрия (X,ρ) на (X,ρ). Будет ли отображение f изометрией, если $\rho(f(x),f(y)) \leqslant \rho(x,y)$ для всех $x,y \in X$?

13.9. Доказать (*теорема Дини*): если монотонная последовательность непрерывных функций $f_n\colon (X,\rho) \to \mathbb{R}$, определенных на компактном пространстве (X,ρ), сходится поточечно на X к непрерывной функции f на (X,ρ), то эта последовательность сходится равномерно на пространстве (X,ρ).

13.10. Непустое семейство $\mathscr{F} = \{F_s : s \in S\}$ множеств пространства (X,ρ) называется *центрированным*, если $F_{s_1} \cap \ldots \cap F_{s_n} \neq \varnothing$ для каждой конечной системы индексов $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\} \subset S$.

Доказать, что МП компактно в том и только в том случае, если каждое центрированное семейство замкнутых подмножеств имеет непустое пересечение.

13.11. Доказать, что для любого открытого покрытия $\mathscr{A} = \{A_t : t \in T\}$ компактного пространства (X,ρ) существует такое число $\varepsilon > 0$, что покрытие $\{B(x,\varepsilon) : x \in X\}$ вписано в $\mathscr{A}$, т. е. для каждого индекса $t_0 \in T$ существует шар $B(x,\varepsilon)$, такой, что $B(x,\varepsilon) \subset A_{t_0}$ (*теорема Лебега о покрытии компактного пространства*).

Всякое положительное число ε, удовлетворяющее теореме Лебега, называется *числом Лебега* покрытия $\mathscr{A}$.

Используя теорему Лебега о покрытиях, доказать теорему 13.3.

13.12. Пусть (X,ρ) — компактное пространство и $N(\varepsilon)$ — наименьшее число элементов, которое может иметь ε-сеть пространства (X,ρ). Тогда число $\log_2 N(\varepsilon) = H(\varepsilon, X)$ называется *ε-энтропией пространства* (X,ρ). Система множеств $\{A_i : i = \overline{1,k}\}$ в (X,ρ) называется *ε-различимой*, если диаметр каждого из этих множеств не меньше ε и множества A_i попарно не пересекаются. Наибольшее число элементов, из которых может состоять ε-различимая система в (X,ρ), обозначается через $K(\varepsilon)$, а число $\log_2 K(\varepsilon) = G(\varepsilon, X)$ называется *ε-емкостью пространства* (X,ρ).

Доказать, что для всякого $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство $H(2\varepsilon, X) \geqslant G(\varepsilon, X)$.

§14. Компактные и предкомпактные множества

Для понятий, которые кажутся близкими к чувственной интуиции, соответствующие математические объекты, в сущности, очень отличаются от того, что мы о них думаем.

Ж. Дьедонне

Множество $M \subset X$ называется *компактным* в пространстве (X, ρ), если подпространство (M, ρ_M) — компактное МП.

Теорема 14.1. *Для компактности множества $M \subset X$ в пространстве (X, ρ) необходимо и достаточно, чтобы каждое покрытие множества M открытыми в (X, ρ) множествами содержало конечное подпокрытие.*

◄ Необходимость. Пусть M — компактное множество в (X, ρ) и $\{U_s : s \in S\}$ — произвольное его покрытие открытыми в (X, ρ) множествами, т. е. $M \subset \cup\{U_s : s \in S\}$. Положим $V_s = M \cap U_s$ для каждого $s \in S$. В силу теоремы 5.1, имеем, что $\{V_s : s \in S\}$ — открытое покрытие множествами из (M, ρ_M). Из компактности (M, ρ_M) получаем, что найдется конечное подпокрытие $\{V_{s_1}, \dots, V_{s_n}\} \subset \{V_s : s \in S\}$, а тогда система $\{U_{s_1}, \dots, U_{s_n}\}$ будет служить конечным подпокрытием исходного покрытия $\{U_s : s \in S\}$.

Достаточность. Пусть выполнено условие теоремы и $\{V_s : s \in S\}$ — произвольное открытое покрытие пространства (M, ρ_M). Из теоремы 5.1 имеем, что для каждого V_s найдется открытое множество U_s в (X, ρ), такое, что $V_s = M \cap U_s$. Ясно, что $\{U_s : s \in S\}$ образует покрытие пространства (M, ρ_M) открытыми в (X, ρ) множествами. По условию, существует конечное подпокрытие $\{U_{s_1}, \dots, U_{s_n}\}$. Тогда $\{V_{s_1}, \dots, V_{s_n}\}$ — конечное подпокрытие покрытия $\{V_s : s \in S\}$, поэтому пространство (M, ρ_M) — компактно. ►

Предложение 14.1. *Пусть $M \subset A \subset X$. Множество M компактно в пространстве (X, ρ) в том и только том случае, когда оно компактно в подпространстве (A, ρ_A).* ►

З а м е ч а н и е 14.1. Из предложения 14.1 имеем, что свойство множества быть компактным не зависит от пространства, в которое оно положено.

Предложение 14.2. (*а*) *Пусть $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$ — семейство замкнутых множеств в пространстве (X, ρ). Множество $F = \bigcup\limits_{k=1}^{n} F_k$ компактно в пространстве (X, ρ) тогда и только тогда, когда все множества F_k компактны.*

(*б*) *Любое компактное множество в ПМП замкнуто.*

(*в*) *В компактном пространстве всякое замкнутое множество компактно.*

◄ (б) Пусть M — компактное множество в (X, ρ), т. е. МП (M, ρ_M) компактно. Тогда, в силу теоремы 13.1, оно полно, а из теоремы 8.1 имеем, что M — замкнутое множество в (X, ρ).

(в) Согласно теореме 13.1, компактное МП (X, ρ) является вполне ограниченным, а тогда множество $M \subset X$ также вполне ограничено (см. предложение 12.2). С учетом замкнутости множества M, из теоремы 8.1 имеем, что (M, ρ_M) — ПМП. Таким образом, (M, ρ_M) есть вполне ограниченное и полное МП, т. е. (M, ρ_M) — компактное МП. ►

Теорема 14.2. *Для того, чтобы множество в ПМП было компактным, необходимо и достаточно, чтобы оно было замкнутым и вполне ограниченным.* ►

Из теоремы 14.2, в частности, получаем следующее утверждение: *подмножество пространства $\mathbb{R}^n$ компактно тогда и только тогда, когда оно ограничено и замкнуто.*

Предложение 14.3. *Всякое непустое компактное множество в пространстве $\mathbb{R}$ ограничено и имеет наименьший и наибольший элементы.*

◄ Допустим, что M — непустое компактное множество в $\mathbb{R}$. Тогда в силу частного случая теоремы 14.2 имеем, что множество M ограничено, т. е. существуют $a = \inf M$, $b = \sup M$.

Из определения чисел a и b, для каждого числа $n \in \mathbb{N}$ найдутся такие точки $x_n \in M$ и $y_n \in M$, что выполняются следующие неравенства

$$a \leqslant x_n < a + \frac{1}{n}, \quad b - \frac{1}{n} < y_n \leqslant b.$$

Отсюда, при $n \to \infty$, получаем: $x_n \to a$, $y_n \to b$. Теперь, учитывая замкнутость множества M, имеем, что $a \in M$ и $b \in M$. ►

Множество $M \subset X$ называется *предкомпактным* (или *относительно компактным*) в пространстве (X, ρ), если его замыкание $\overline{M}$ компактно в пространстве (X, ρ).

Свойства предкомпактных множеств в МП характеризует

Предложение 14.4. *(а) Любое подмножество предкомпактного множества предкомпактно.*

(б) Предкомпактное множество вполне ограничено.

(в) Вполне ограниченное множество в полном пространстве предкомпактно.

(г) Объединение двух предкомпактных множеств предкомпактно.

◄ (а) Пусть $A \subset M \subset X$, где множество M предкомпактно. Тогда множество $\overline{A}$ замкнуто в компактном пространстве $(\overline{M}, \rho_{\overline{M}})$. Отсюда, с учетом предложения 14.2(в), заключаем, что оно компактно в $(\overline{M}, \rho_{\overline{M}})$, а в силу предложения 14.1(б), оно будет компактным в (X, ρ). Значит, множество A предкомпактно в (X, ρ).

(б) Если множество M предкомпактно в (X, ρ), то из компактности подпространства $(\overline{M}, \rho_{\overline{M}})$, в силу теоремы 13.1, получаем, что $(\overline{M}, \rho_{\overline{M}})$ — вполне ограничено, а тогда M как подмножество вполне ограниченного пространства (см. предложение 12.2(а)) также вполне ограничено.

(в) Пусть множество A вполне ограничено в ПМП (X, ρ). Тогда (в силу теоремы 8.1) $(\overline{A}, \rho_{\overline{A}})$ есть ПМП, а из предложения 12.2(б) заключаем, что пространство $(\overline{A}, \rho_{\overline{A}})$ вполне ограничено. Таким образом, согласно лемме 13.1, имеем, что множество A предкомпактно.

(г) Утверждение вытекает из предложения 14.2(а). ►

Теорема 14.3 (критерий Хаусдорфа). *Подмножество M полного пространства (X, ρ) предкомпактно тогда и только тогда, когда оно вполне ограничено* (или другими словами: *для предкомпактности подмножества M полного пространства (X, ρ) необходимо и достаточно, чтобы при любом $\varepsilon > 0$ существовала конечная ε-сеть для множества M в (X, ρ)*). ►

Грубо говоря, критерий Хаусдорфа о предкомпактности подмножества ПМП устанавливает, что предкомпактное множество можно представлять как «приближенно конечномерное» множество в том смысле, что для всякого $\varepsilon > 0$ имеется конечное множество точек $x_1, \ldots, x_n$, такое, что каждая точка M лежит не дальше чем на ε от одной точки x_i.

Аналогом теоремы Вейерштрасса о наибольшем и наименьшем значениях непрерывной функции на отрезке $[a, b]$ множества $\mathbb{R}$ (см., например, [20], т. 1, стр. 193) является следующая

Теорема 14.4. *Если $f\colon (X, \rho) \to \mathbb{R}$ — непрерывная действительная функция, определенная на компактном множестве $M \subset X$ МП (X, ρ), то она ограничена на M и принимает на нем наибольшее и наименьшее значения, т. е. множество $f(M)$ ограничено в пространстве $\mathbb{R}$ и существуют две точки $a, b \in M$, такие, что*

$$f(a) = \min_{x \in M} f(x), \quad f(b) = \max_{x \in M} f(x).$$

◄ Из теоремы 13.2(а) следует, что множество $f(M)$ компактно в пространстве $\mathbb{R}$, а тогда, согласно предложению 14.3, множество $f(M)$ имеет наименьший и наибольший элементы.

Пусть $p = \min\limits_{x \in M} f(x)$, $q = \max\limits_{x \in M} f(x)$, и пусть $a \in M$ и $b \in M$ таковы, что $f(a) = p$, $f(b) = q$. Так как для каждой точки $x \in M$ справедливо включение $f(x) \in f(M)$, то

$$f(a) \leqslant p \leqslant f(x) \leqslant q \leqslant f(b).$$

Отсюда видно, что f является ограниченной функцией и в точке a принимает наименьшее значение, а в точке b — наибольшее значение на множестве M. ►

Следствие 14.1. *Если f — заданная на компактном подмножестве K пространства (X, ρ) непрерывная и положительная функция, то существует число $c > 0$, такое, что $f(x) \geqslant c$ для всех $x \in K$.* ►

◄ Так как $f(x) > 0$ для любого $x \in K$ (по условию), то, в силу теоремы 14.4, найдется точка $a \in K$, в которой $f(a) = \inf\limits_{x \in K} f(x)$. Следовательно, $f(x) \geqslant f(a) = c > 0$ при любом $x \in K$. ►

Задачи и упражнения

14.1. Доказать следующие утверждения:

(а) объединение конечного числа компактных множеств компактно (в частности, множество, состоящее из конечного числа точек, компактно);

(б) пересечение любой совокупности компактных множеств компактно.

14.2. (а) Доказать, что любое неограниченное множество $A \subset X$ пространства (X, ρ) не компактно.

(б) Показать, что пересечение компактного и замкнутого множеств компактно. Будет ли объединение компактного и замкнутого множеств компактным?

(в) Пусть множество $K \subset X$ компактно в (X, ρ). Доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ имеет место представление $K = \bigcup\limits_{i=1}^{n(\varepsilon)} K_i$, где K_i — непустые компактные подмножества K диаметра $d(K_i) < \varepsilon$.

(г) Доказать, что всякое МП, все замкнутые шары которого компактны, полно.

14.3. (а) Пусть $\mathbb{Q}$ — множество всех рациональных чисел с метрикой $\rho_{\mathbb{Q}}(x, y) = |x - y|$. Показать, что множество $E = \{x \in \mathbb{Q} : 2 < x^2 < 3\}$ замкнуто и ограничено, но не компактно в $(\mathbb{Q}, \rho_{\mathbb{Q}})$.

(б) Доказать, что множество

$$\{t \cdot x(t) : x \in C[0,1], |x(t)| \leqslant 1\}$$

является замкнутым ограниченным, но не компактным в пространстве $C[0,1]$.

(в) Показать, что множество последовательностей (x_n) в пространстве l_2, удовлетворяющих условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \leqslant 1,$$

является замкнутым и ограниченным в l_2, но не компактным.

(г) Показать, что граница любого ограниченного множества в пространстве $\mathbb{R}^n$ компактна.

14.4. Пусть K — компактное множество в (X, ρ). Доказать следующие утверждения:

(а) если $K \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_n$, где $\{G_n\}$ — возрастающая последовательность открытых множеств в (X, ρ), то найдется такой номер n_0, что $K \subset G_{n_0}$;

(б) если $\{F_i\}$ — убывающая последовательность замкнутых множеств в (X, ρ) с пустым перессечением и $F_i \subset K$ для каждого $i \in \mathbb{N}$, то существует такой номер i_0, что $F_{i_0} = \varnothing$.

14.5. Пусть A, B — непустые множества из пространств (X, ρ) и (Y, σ), соответственно. Доказать, что множество $A \times B$ компактно в произведении пространств $(X \times Y, \rho \times \sigma)$ тогда и только тогда, когда множество A компактно в (X, ρ), а множество B — в (Y, σ).

14.6. Пусть $\{A_i : i \in \mathbb{N}\}$ – убывающая последовательность компактных множеств в (X, ρ) и пусть $K = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$. Доказать, что

(а) множество K не пусто;

(б) для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $n_0 = n(\varepsilon)$, что $A_i \subset \overline{B(K, \varepsilon)}$ при $i > n_0$ (($B(K, \varepsilon)$ – ε-шар множества K);

(в) множество K состоит из единственной точки, если $d(A_i) \to 0$ при $i \to \infty$.

14.7. (а) Пусть A – компактное множество в пространстве (X, ρ). Доказать, что для любой окрестности U множества A существует такое число $r > 0$, что r-шар $B(A, r) \subset U$.

(б) Доказать, что компактное множество нельзя изометрически отобразить на его собственное подмножество.

(в) Пусть $\{G_k : k \in \mathbb{N}\}$ – возрастающая последовательность открытых множеств и $\mathscr{G} = \cup\{G_k : k \in \mathbb{N}\}$ – компактно. Доказать, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует номер $n_0 = n(\varepsilon)$, такой, что при $n > n_0$ имеет место включение $\operatorname{Fr} G_n \subset B(\operatorname{Fr} G, \varepsilon)$, где $B(\operatorname{Fr} G, \varepsilon)$ – шаровая окрестность $\operatorname{Fr} G$.

14.8. Пусть $f\colon (X, \rho) \to (Y, \sigma)$ – непрерывное отображение компактного пространства (X, ρ) в пространство (Y, σ). Доказать, что для каждого множества $A \subset X$ справедливо равенство $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$.

14.9. Доказать, что проектирование $p\colon (X \times Y, \rho \times \sigma) \to (Y, \sigma)$ является замкнутым отображением, где (Y, σ) – произвольное пространство, а (X, ρ) – компактное пространство.

14.10. (а) Пусть множество $F \subset X$ замкнуто, а множество $K \subset X$ – компактно в пространстве (X, ρ), и пусть $F \cap K = \varnothing$. Доказать, что тогда $\rho(F, K) > 0$, причем существует точка $x_0 \in K$, для которой выполняется равенство $\rho(F, K) = \rho(F, x_0)$, причем $\rho(F, x_0) > 0$.

(б) Пусть G – открытое множество в $\mathbb{R}^n$, а K – компактное подмножество множества G. Показать, что тогда $\rho(K, \operatorname{Fr} G) > 0$, если $\operatorname{Fr} G \neq \varnothing$.

(в) Пусть F – замкнутое множество в $\mathbb{R}^n$ и точка $x_0 \notin F$. Показать, что существует точка $x \in F$, такая, что $\rho(x_0, F) = \rho(x_0, x)$.

(г) Пусть F – замкнутое, а K – компактное множества в пространстве $\mathbb{R}^n$. Доказать, что если $F \cap K = \varnothing$, то существуют точки $x_0 \in F$ и $x_1 \in K$, такие, что $\rho(F, K) = \rho(x_0, x_1) > 0$.

14.11. Пусть K_1, K_2 – компактные множества из пространства (X, ρ). Доказать, что существуют точки $x_1 \in K_1$ и $x_2 \in K_2$, такие, что выполняется равенство

$$\rho(x_1, x_2) = \rho(K_1, K_2).$$

14.12. Пусть (X, ρ), (Y, σ) — произвольные пространства, а отображение $f\colon (X, \rho) \to (Y, \sigma)$ такое, что сужение f на любом компактном множестве из (X, ρ) непрерывно. Доказать, что тогда $f \in C(X, Y)$.

14.13. (а) Пусть (X, ρ) — компактное МП, а отображение $f \in C(X, X)$ такое, что $\rho(f(x), f(y)) < \rho(x, y)$ для всех $x, y \in X$ и $x \neq y$. Доказать, что найдется такая точка $x_0 \in X$, что $f(x_0) = x_0$.

(б) Пусть (X, ρ) — компактное МП и отображение $f \in C(X, \mathbb{R})$. Доказать, что для любого $a \in \mathbb{R}$ прообраз множества $f^{-1}([a; \infty))$ — компактное множество типа G_δ.

14.14. Пусть E — не компактное множество в пространстве $\mathbb{R}$. Показать справедливость следующих утверждений:

(а) существует неограниченная функция, непрерывная на E;

(б) существует ограниченная функция, непрерывная на E, не имеющая максимума;

(в) если, кроме того, множество E ограниченно, то существует непрерывная на E функция, не являющаяся равномерно непрерывной.

14.15. Установить, что пересечение любой совокупности предкомпактных множеств предкомпактно.

14.16. Пусть A, B — множества из пространств (X, ρ) и (Y, σ), соответственно. Доказать, что декартово произведение $A \times B$ множеств $A \subset X$ и $B \subset Y$ предкомпактно в произведении пространств $(X \times Y, \rho \times \sigma)$ тогда и только тогда, когда множество A предкомпактно в (X, ρ), а множество B — в (Y, σ).

14.17. Показать, что образ предкомпактного множества при непрерывном отображении может не быть предкомпактным.

14.18. Доказать, что если для любого $\varepsilon > 0$ множество M пространства (X, ρ) имеет компактную ε-сеть, то множество M компактно в (X, ρ).

14.19. Установить справедливость следующего утверждения: образ предкомпактного множества при равномерно непрерывном отображении предкомпактен.

14.20. Доказать (*теорема Бореля–Лебега*): для того чтобы множество M было предкомпактно в пространстве $\mathbb{R}$, необходимо и достаточно, чтобы оно было ограничено.

14.21. МП (X, ρ) называется *локально компактным*, если у каждой точки множества X существует окрестность, замыкание которой компактно. Множество $M \subset X$ называется *локально компактным подмножеством* пространства (X, ρ), если подпространство (M, ρ_M) локально компактное МП.

Доказать следующие утверждения:

(а) пространство $\mathbb{R}^n$ — локально компактно (но не компактно);

(б) каждое открытое и замкнутое множество в локально компактном пространстве также локально компактно;

(в) пересечение двух локально компактных множеств из локально компактного пространства также локально компактно.

14.22. Пусть множество M состоит из функций, определенных на отрезке $[0, 1]$ и удовлетворяющих условию Липшица с фиксированной константой k (см. задачу 10.6) и метрикой ρ, индуцированной из пространства $C[0, 1]$. Доказать, что пространство (M, ρ_M) локально компактно.

§15. Критерии предкомпактности в конкретных пространствах

Частное вечно подчиняется общему, общее же все время подлаживается к частному.

И. Гете

В математическом анализе очень часто встречается задача о предкомпактности того или иного множества, рассматриваемого в некотором заданном МП. Поэтому большой интерес представляют легко применимые критерии предкомпактности множеств в некоторых пространствах, позволяющие узнавать такие множества. Это позволяет также сделать более прозрачным важное понятие компактности.

Семейство отображений $\mathscr{F} = \{f : (X, \rho) \to (Y, \sigma)\}$ называется *равномерно ограниченным на множестве* X, если множество

$$V = \{y \in Y : \exists f \in \mathscr{F}, \exists x \in X, y = f(x)\}$$

значений функций семейства $\mathscr{F}$ ограничено в (Y, σ).

Для семейства $\mathscr{F}$ числовых функций $f : (X, \rho) \to \mathbb{R}$ это означает существование такого числа $c \in \mathbb{R}$, что для всех $f \in F$ и всех $x \in X$ выполняется неравенство $|f(x)| \leqslant c$.

Семейство отображений $\mathscr{F} = \{f : (X, \rho) \to (Y, \sigma)\}$ называется *равностепенно непрерывным на множестве* X, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое, что для всех $f \in \mathscr{F}$ и всех точек $x_1, x_2 \in X$, для которых $\rho(x_1, x_2) < \delta$, выполняется неравенство $\sigma(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$.

Ясно, что каждое отображение f, входящее в состав равностепенно непрерывного семейства $\mathscr{F}$, равномерно непрерывно.

С помощью равностепенной непрерывности и равномерной ограниченности устанавливается критерий предкомпактности множества в пространстве $C[a, b]$, известный как

Теорема Арцела – Асколи. *Для того чтобы множество $M \subset C[a, b]$ было предкомпактно в пространстве $C[a, b]$, необходимо и достаточно,* *чтобы множество M было равномерно ограничено и равностепенно непрерывно.*

◄ Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть множество M предкомпактно в пространстве $C[a,b]$. Тогда, в силу теоремы 14.3, оно вполне ограничено, а значит, множество M равномерно ограничено.

Покажем, что множество M равностепенно непрерывно. Согласно вполне ограниченности M для данного $\varepsilon > 0$ существует конечная $(\varepsilon/3)$-сеть $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\} \subset M$. Так как функции $f_k \in C[a,b]$, $k = \overline{1,n}$, то они равномерно непрерывны. Следовательно, для каждой функции f_k найдется такое $\delta_k > 0$, чтобы

$$|f_k(x_1) - f_k(x_2)| < \frac{\varepsilon}{3}, \tag{15.1}$$

для всех $x_1, x_2 \in [a,b]$, для которых $|x_1 - x_2| < \delta_k$.

Непосредственно из определения $(\varepsilon/3)$-сети, для любой функции $f \in M$ существует функция f_k из множества $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$, такая, что

$$\rho(f, f_k) = \max_{x\in[a,b]} |f(x) - f_k(x)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{15.2}$$

Поэтому, если $\delta = \min\{\delta_k : k = 1, \ldots, n\}$ и $|x_1 - x_2| < \delta$, то для любой функции $f \in M$ из неравенств (15.1) и (15.2) имеем

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant |f(x_1) - f_k(x_1)| + |f_k(x_1) - f_k(x_2)| +$$
$$+ |f(x_2) - f_k(x_2)| \leqslant \max_{x\in[a,b]} |f(x) - f_k(x)| + |f_k(x_1) - f_k(x_2)| +$$
$$+ \max_{x\in[a,b]} |f(x) - f_k(x)| < 2\rho(f, f_k) + \frac{\varepsilon}{3} < \frac{2}{3}\varepsilon + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

а это означает, что множество M равностепенно непрерывно.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть множество M равномерно ограничено и равностепенно непрерывно. $C[a,b]$ — ПМП, поэтому для того, чтобы доказать предкомпактность множества M, достаточно установить, что оно вполне ограничено (теорема 14.3), т. е. для множества M в пространстве $C[a,b]$ при любом $\varepsilon > 0$ существует конечная ε-сеть. Для произвольной функции $f \in M$ и фиксированного $\varepsilon > 0$ выбрано $\delta > 0$ так, чтобы для любых точек $x_1, x_2 \in [a,b]$, для которых $|x_1 - x_2| < \delta$, выполнялось неравенство

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{5}.$$

Из равномерной ограниченности множества M имеем, что существует $c > 0$, такое, что $|f(x)| \leqslant c$ для любого $f \in M$ и для всех $x \in [a, b]$. Возьмем точки $\{x_i : i = 0, 1, \ldots, n\}$ отрезка $[a, b]$ и $\{y_j : j = 0, 1, \ldots, m\}$ отрезка $[-c, c]$, такие, что

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b,\ x_i - x_{i-1} < \delta,\ i = \overline{1, n};$$
$$-c = y_0 < y_1 < \ldots < y_m = c,\ y_j - y_{j-1} < \frac{\varepsilon}{5},\ j = \overline{1, m}.$$

Через точки $(x_i, 0)$, $i = 0, 1, \ldots, n$, проведем прямые, параллельные оси Oy, а через точки $(0, y_j)$, $j = 0, 1, \ldots, m$, прямые, параллельные оси Ox. В результате этого получим разбиение τ прямоугольника

$$\{(x, y) : a \leqslant x \leqslant b, \quad -c \leqslant y \leqslant c\},$$

в котором лежат графики функций $f \in M$, на прямоугольники с длинами сторон, параллельными оси Ox, меньшими δ, и параллельными оси Oy, меньшими $\frac{\varepsilon}{5}$.

Рассмотрим множество A всех непрерывных на $[a, b]$ функций, графиками которых являются ломаные, вершины которых лежат в вершинах (x_i, y_j) прямоугольников разбиения τ. Множество A конечно, так как конечным является множество всех вершин (x_i, y_j), где $i = 0, 1, \ldots, n$, $j = 0, 1, \ldots, m$.

Докажем, что A является ε-сетью для M. Выберем произвольную $f \in M$, и для каждого x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, обозначим через (x_i, y_i) ближайшую к точке $(x_i, f(x_i))$ точку вида (x_i, y_j), лежащую на прямой $x = x_i$, тогда $|f(x_i) - y_{j_i}| < \frac{\varepsilon}{5}$. Сопоставим f функцию $f_0 \in A$, графиком которой является ломаная, проходящая через вершины (x_0, y_{j_0}), (x_1, y_{j_1}), …, (x_n, y_{j_n}), т. е. $f_0(x_i) = y_{j_i}$, причем

$$|f_0(x_i) - f_0(x_{i-1})| \leqslant |f_0(x_i) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(x_{i-1}| +$$
$$+ |f(x_{i-1}) - f_0(x_{i-1})| < \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} = \frac{3\varepsilon}{5}.$$

В силу линейности функции f_0 на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ для любой точки $x \in [x_{i-1}, x_i]$ имеем

$$|f_0(x) - f_0(x_{i-1})| \leqslant |f_0(x_i) - f_0(x_{i-1})| < \frac{3\varepsilon}{5}.$$

Для каждой точки $x \in [a, b]$, найдется содержащий ее отрезок $[x_{i-1}, x_i]$, а для произвольной точки этого отрезка будем иметь

$$|f(x) - f_0(x)| \leqslant |f(x) - f(x_{i-1})| + |f(x_{i-1}) - f_0(x_{i-1})| + \\ + |f_0(x_{i-1}) - f_0(x)| < \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} + \frac{3}{5}\varepsilon = \varepsilon.$$

Отсюда и из определения чебышевской метрики ρ в пространстве $C[a, b]$ (см. пример 2.9) получаем, что $\rho(f, f_0) < \varepsilon$, т. е. множество A является конечной ε-сетью для M. ▶

Замечание 15.1. Теорема Арцела — Асколи допускает обобщение на случай отображения компактов, а именно: если $\mathscr{F}$ — семейство отображений $f : (X, \rho) \to (Y, \sigma)$, определенных на компактном МП (X, ρ) со значениями в ПМП (Y, σ), то для предкомпактности $\mathscr{F}$ в пространстве $C(X, Y)$ необходимо и достаточно, чтобы $\mathscr{F}$ было вполне ограниченным и равномерно непрерывным (см., например, [12], ч. II, стр. 470).

Теорема 15.1. *Множество $M \subset \mathbb{R}^n$ предкомпактно в пространстве $\mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда оно ограничено.*

◀ Необходимость очевидна, так как всякое вполне ограниченное множество ограничено.

Обратно, если множество M ограничено в пространстве $\mathbb{R}^n$, то его можно поместить внутрь некоторого достаточно большого куба. Если разбить такой куб на кубики с ребром $\frac{2\varepsilon}{\sqrt{n}}$, то вершины этих кубиков будут образовывать конечную ε-сеть в исходном кубе и, значит, в любом множестве, лежащем внутри этого куба. ▶

Теорема 15.2. *Множество $M \subset l_p$ $(1 \leqslant p < \infty)$ предкомпактно в пространстве l_p тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

(а) *существует такое число $c > 0$, что*

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \leqslant c$$

для любого $x \in M$, $x = (x_i)$ (т. е. множество M ограничено);

(б) *для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$, что*

$$\sum_{i=n_0+1}^{\infty} |x_i|^p < \varepsilon^p$$

для всех $x \in M$, $x = (x_i)$.

◄ Пусть M предкомпактно, тогда, в силу теоремы 14.3, множество M вполне ограничено, а значит, M ограничено и условие (а) выполнено.

Докажем справедливость условия (б). Для точки $x \in M$, $x = (x_n)$, положим

$$S_n(x) = (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots), \; R_n(x) = (0, \ldots, 0, x_{n+1}, \ldots).$$

Отсюда и из определения пространства l_p (см. пример 2.6) имеем

$$x = S_n(x) + R_n(x),$$

$$\rho(R_n(x), 0) = \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \rho(x, S_n(x)).$$

Ясно, что $R_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$. Для любых $x, y \in l_p$ получаем

$$\rho(S_n(x), S_n(y)) = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \rho(x, y).$$

Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольно, и выберем $\frac{\varepsilon}{3}$-сеть $\{z_1, z_2, \ldots, z_n\} \subset M$ для множества M. Тогда для любой точки $x \in M$ найдется такая z_{i_0}, что $\rho(x, z_{i_0}) < \frac{\varepsilon}{3}$. Кроме того,

$$\begin{aligned}\rho(R_n(x), 0) &= \rho(x, S_n(x)) \leqslant \rho(x, z_{i_0}) + \rho(z_{i_0}, S_n(x)) \leqslant \\ &\leqslant \rho(x, z_{i_0}) + \rho(z_{i_0}, S_n(z_{i_0})) + \rho(S_n(z_{i_0}), S_n(x)) < \\ &< 2\rho(x, z_{i_0}) + \rho(R_n(z_{i_0}), 0) < \frac{2}{3}\varepsilon + \rho(R_n(z_{i_0}), 0).\end{aligned}$$

Поскольку $\rho(R_n(z_{i_0}), 0) \to 0$, $n \to \infty$, то найдется такой номер n_0, что $\rho(R_n(z_{i_0}), 0) < \frac{\varepsilon}{3}$ при $n > n_0$ и всех $i_0 = \overline{1, n}$. Следовательно, справедливо неравенство $\rho(R_n(x), 0) < \varepsilon$, для всех $x \in M$, т. е. выполнено условие (б).

Обратно, пусть выполнены условия (а) и (б). Докажем, что для заданного $\varepsilon > 0$ множество M имеет конечную ε-сеть. Выберем номер n_0 так, чтобы $\rho(R_{n_0}(x), 0) < \frac{\varepsilon}{2}$ для всех $x \in M$. Рассмотрим конечное множество

$$M_1 = \{y \in l_p \colon y = (y_1, \ldots, y_{n_0}, 0, \ldots), \; y_i = k\delta, \; \delta = \frac{\varepsilon}{2n_0^{1/p}}, \; k \in \mathbb{Z}, \; |k| \leqslant \frac{c}{\delta}\}.$$

Для точки $x \in M$ выберем $y = ([\frac{x_1}{\delta}]\delta, \ldots, [\frac{x_{n_0}}{\delta}]\delta, 0, \ldots) \in M_1$, где $[x]$ – целая часть числа x. Тогда

$$\rho(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{n_0} \left|\left[\frac{x_k}{\delta}\right]\delta - x_k\right|^p + \sum_{k=n_0+1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{1/p} \leqslant \left[n_0\delta^p + \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p\right]^{\frac{1}{p}} = \varepsilon.$$

Отсюда, по теореме 14.3, с учетом полноты пространства l_p, получаем предкомпактность множества M. ▶

Задачи и упражнения

15.1. Доказать предкомпактность в пространстве $C[0,1]$ следующих множеств:

(а) $\{x \in C^2[0,1] : |x''(t)| \leqslant 1,\ x(0) = x(1) = 0\}$;

(б) $\{x \in C^1[0,1] : |x'(t)| \leqslant 1,\ x(0) = a\}$, a – некоторое число;

(в) $\{x \in C^1[0,1] : x(0) = 0,\ \int\limits_0^1 |x'(t)|^2 dt \leqslant 1\}$;

(г) $\{x \in C^2[0,1] : x(0) = 0,\ x'(0) = 0,\ \int\limits_0^1 |x''(t)|^2 dt \leqslant 1\}$;

(д) $\{x : x(\tau) = \int\limits_0^\tau \varphi(t)dt,\ \varphi \in C[0,1]\}$.

15.2. В пространстве $C[a,b]$ рассмотрим следующие семейства функций

(а) t^n, $n \in \mathbb{N}$;	(б) $\sin nt$, $n \in \mathbb{N}$;
(в) $\sin(n+t)$, $n \in \mathbb{N}$;	(г) $e^{t-\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$.

Какие из них предкомпактны в пространстве $C[a,b]$ и при каких a и b?

15.3. Какие из нижеперечисленных множеств предкомпактны в пространстве $C[0,1]$:

(а) $\{x \in C[0,1] : |x(t)| \leqslant B\}$,

(б) $\{x \in C^1[0,1] : |x(t)| \leqslant B_0,\ |x'(t)| \leqslant B_1\}$,

(в) $\{x \in C^2[0,1] : |x'(t)| \leqslant B_1,\ |x''(t)| \leqslant B_2\}$,

(г) $\{x \in C[0,1] : |x(t)| \leqslant B,\ |x(t_1) - x(t_2)| \leqslant L|t_1 - t_2|\}$,

(д) $\{x \in C^1[0,1] : |x(t)| \leqslant B,\ |x'(t_1) - x'(t_2)| \leqslant L|t_1 - t_2|\}$,

где B, B_0, B_1, B_2, L — некоторые постоянные? Указать, какие из этих множеств компактны.

15.4. Доказать, что образ шара в пространстве $C[0,1]$ при отображении

$$f(x)(t) = \int_0^1 K(t,s)x(s)ds,\ t \in [0,1],$$

где $K \in C([0,1] \times [0,1])$, является предкомпактным множеством в $C[0,1]$.

15.5. Пусть $f(t,s) \in C([a,b] \times [a,b])$. Для каждого $s \in [a,b]$ положим $g_s(t) = f(t,s)$. Доказать, что семейство функций $\{g_s : s \in [a,b]\}$ компактно в пространстве $C[a,b]$.

15.6. Доказать, что всякое предкомпактное множество в каждом из пространств $C[a,b]$ и l_2 является нигде не плотным.

15.7. Пусть (X,ρ) — компактное МП и (f_n) — равномерно сходящаяся последовательность непрерывных отображений $f_n : (X,\rho) \to (Y,\sigma)$, где (Y,σ) — произвольное МП. Доказать, что последовательность (f_n) равностепенно непрерывна.

Показать, что из равностепенной непрерывности последовательности (f_n) из $C(X,Y)$, вообще говоря, не следует равномерная сходимость на множестве X.

15.8. Доказать, что множество M предкомпактно в пространстве $C^k[a,b]$ (см. пример 2.10) тогда и только тогда, когда оно равномерно ограничено и множество производных порядка k входящих в M функций равностепенно непрерывно.

15.9. Доказать, что гильбертов кирпич (см. задачу 12.6)

$$Q_\infty = \{x \in l_2 : x = (\xi_n),\ |\xi_n| \leqslant \frac{1}{2^n},\ n \in \mathbb{N}\}$$

является предкомпактным множеством в пространстве l_2.

15.10. Доказать следующий критерий предкомпактности в пространстве s (см. пример 2.8): множество $A \subset s$ предкомпактно в пространстве s тогда и только тогда, когда существуют такие числа $c_1, c_2, \ldots$, что для любой последовательности (x_n) из A выполняется неравенство

$$|x_n| \leqslant c_n,\ n = 1, 2, \ldots .$$

Решения и указания

Истина не передается — она добывается.
В.Ф.Одоевский

§1

1.2. (б) Пусть (x_n), (y_n) — сходящиеся последовательности в (X, ρ), т. е. $x_n \to x_0 \in X$ и $y_n \to y_0 \in Y$. Из неравенства четырехугольника имеем

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x_0, y_0)| \leqslant \rho(x_n, x_0) + \rho(y_n, y_0),$$

откуда при $n \to \infty$ получим справедливость требуемой задачи.

1.3. (а) Выполнение аксиом метрики $(M1)$ и $(M2)$ очевидно. Для проверки аксиомы треугольника покажем, что для любых a и b, удовлетворяющих условию $0 \leqslant b \leqslant a$, выполняется неравенство $f(a + b) \leqslant f(a) + f(b)$. Отметим, что случай $b = 0$ тривиален, поэтому будем считать, что $0 < b \leqslant a$. Рассмотрим функцию

$$\varphi(a, b) = f(a) + f(b) - f(a + b) = f(b) - [f(a + b) - f(a)]$$

и покажем, что $\varphi(a, b) \geqslant 0$. Из теоремы Лагранжа о конечных приращениях для функций $f(x)$ на отрезке $[a, a + b]$ имеем

$$f(a + b) - f(a) = bf'(\xi),\ a < \xi < a + b.$$

Поэтому

$$\varphi(a, b) = f(b) - bf'(\xi).$$

Так как функция $\frac{f(x)}{x}$ не возрастает, то $\left(\frac{f(x)}{x}\right)' \leqslant 0$, т. е.

$$\frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} \leqslant 0.$$

Отсюда заключаем, что $f'(x) \leqslant \frac{f(x)}{x}$ $(x > 0)$, и поэтому, учитывая неотрицательность функции f, получаем

$$\varphi(a, b) \geqslant f(b) - b\frac{f(\xi)}{\xi}.$$

Поскольку $a < \xi$, то $\frac{f(\xi)}{\xi} \leqslant \frac{f(a)}{a}$. Следовательно,

$$\varphi(a, b) \geqslant f(b) - b\frac{f(a)}{a} = b\left(\frac{f(b)}{b} - \frac{f(a)}{a}\right).$$

Принимая во внимание условие в), приходим к неравенству $\frac{f(b)}{b} \geqslant \frac{f(a)}{a}$ (так как $0 < b \leqslant a$), а значит, к тому, что $\varphi(a, b) \geqslant 0$.

(б) Так как $|x(t) - y(t)|$ есть функция, а не число при фиксированных функциях $x(t)$ и $y(t)$, то $f_1(x, y)$ не является метрикой.

Покажем, что функция f_2 не является метрикой. Пусть $x(t) = 3t$, $y(t) = t$ и $z(t) = 2t$. Тогда

$$\max_{a\leqslant t\leqslant b}(x(t) - y(t))^2 = \max_{a\leqslant t\leqslant b} 4t^2 = 4\max\{a^2, b^2\};$$
$$\max_{a\leqslant t\leqslant b}(x(t) - z(t))^2 = \max_{a\leqslant t\leqslant b} t^2 = \max\{a^2, b^2\};$$
$$\max_{a\leqslant t\leqslant b}(z(t) - y(t))^2 = \max_{a\leqslant t\leqslant b} t^2 = \max\{a^2, b^2\}.$$

Отсюда имеем

$$f_2(x, y) = 4\max\{a^2, b^2\} > 2\max\{a^2, b^2\} = f_2(x, z) + f_2(z, y),$$

т. е. неравенство треугольника не выполнено. Следовательно, функция $f_2(x, y)$ не является метрикой.

Пусть $f_3(x, y) = 0$. Тогда из равенства

$$\int_a^b (x(t) - y(t))dt = 0$$

не следует, что $x(t) = y(t)$, $t \in [a, b]$. Действительно, если $x(t) = 2t$, $y(t) = t$, $a = -1$, $b = 1$, то $f_3(x, y) = 0$. Но $2t \neq t$ при $t \neq 0$. Следовательно, аксиома тождества $(M1)$ не выполнена.

1.10. Так как $x_1 \neq x_2$, то $\rho(x_1, x_2) = r > 0$. Положив $\varepsilon = \frac{r}{3}$, получаем, что $B(x, \varepsilon) \cap B(y, \varepsilon) = \varnothing$. Действительно, предположив противное, для любой точки $z \in B(x, \varepsilon) \cap B(y, \varepsilon)$ имели бы

$$r = \rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y) < \varepsilon + \varepsilon = \frac{2}{3}r,$$

что невозможно.

1.11. (а) Пусть $x \in B(x_1, r_1) \cap B(x_2, r_2)$. Положим

$$r_x = \min\{r_1 - \rho(x_1, x), r_2 - \rho(x, x_2)\}.$$

Для произвольной точки $z \in B(x, r_x)$ имеем

$$\rho(z, x_1) \leqslant \rho(z, x) + \rho(x, x_1) < r_x + \rho(x, x_1) \leqslant r_1;$$

$$\rho(z, x_2) \leqslant \rho(z, x) + \rho(x, x_2) < r_x + \rho(x, x_2) \leqslant r_2.$$

Следовательно, $z \in B(x_1, r_1) \cap B(x_2, r_2)$, откуда вытекает, что $B(x, r) \subset \subset B(x_1, r_1) \cap B(x_2, r_2)$.

1.12. Пусть y — произвольный элемент открытого шара $B(x_0, r)$. Тогда из неравенства треугольника имеем

$$\rho(x_0, x) \leqslant \rho(x_0, y) + \rho(y, x) < r + \rho(x.y).$$

Отсюда, переходя к точной нижней грани, получаем неравенство

$$\rho(x_0, x) - r < \inf_{y \in B(x_0, r)} \rho(x, y) = \rho(x, B(x_0, r)),$$

вследствии опрделения расстояния $\rho(x, B(x_0, r))$.

1.14. (б) Для любого $p > 0$ и любых точек $x \in V_r(M)$ и $y \in V_r(N)$ найдутся точки $x_0 \in M$ и $y_0 \in N$, такие, что

$$\rho(x, x_0) < r, \ \rho(y, y_0) < r.$$

Тогда

$$\rho(x_0, y_0) \leqslant \rho(x_0, x) + \rho(x, y) + \rho(y, y_0) < \rho(x, y) + 2r.$$

Отсюда, учитывая равенство $\rho(M, N) = d$, имеем

$$d \leqslant \rho(x_0, y_0) < \rho(x, y) + 2r.$$

Значит, $\rho(x,y) > d - 2r$, т. е. $\inf\limits_{x\in M,\ y\in N}\rho(x,y) \geqslant d - 2r$, что равносильно неравенству $\rho(V_r(M), V_r(N)) \geqslant d - 2r$.

§2

2.5. (б) Рассмотрим случай $n = 2$. Пусть $x = (x_1, x_2)$ и $y = (y_1, y_2)$ принадлежат $\mathbb{R}^2$, и пусть $|x_1 - y_1| > |x_2 - y_2|$. Тогда для метрик ρ_∞ и ρ_p будем иметь

$$\rho_\infty(x,y) = |x_1 - y_1|,$$

$$\rho_p(x,y) = \sqrt[p]{|x_1 - y_1|^p + |x_2 - y_2|^p} = |x_1 - y_1|\sqrt[p]{1 + \left|\frac{x_2 - y_2}{x_1 - y_1}\right|^p}.$$

Замечая, что при $p > 1$

$$1 < \sqrt[p]{1 + \left|\frac{x_2 - y_2}{x_1 - y_1}\right|^p} \leqslant 1 + \left|\frac{x_2 - y_2}{x_1 - y_1}\right|^p$$

и что величина $\left|\frac{x_2 - y_2}{x_1 - y_1}\right|^p \to 0$ при $p \to \infty$, получаем

$$\lim_{p\to\infty}\sqrt[p]{1 + \left|\frac{x_2 - y_2}{x_1 - y_1}\right|^p} = 1.$$

Отсюда заключаем, что

$$\lim_{p\to\infty}\rho_p(x,y) = |x_1 - y_1| = \rho_\infty(x,y). \qquad (\Pi_1)$$

Аналогично, при $|x_1 - y_1| < |x_2 - y_2|$, можно получить

$$\lim_{p\to\infty}\rho_p(x,y) = |x_2 - y_2| = \rho_\infty(x,y). \qquad (\Pi_2)$$

Наконец, в случае, когда $|x_1 - y_1| = |x_2 - y_2|$, будем иметь

$$\rho_p(x,y) = \sqrt[p]{2|x_1 - y_1|^p} = 2^{\frac{1}{p}}|x_1 - y_1|.$$

Так как $\lim\limits_{p\to\infty}\sqrt[p]{2} = 1$, то и в этом случае

$$\lim_{p\to\infty}\rho_p(x,y) = \rho_\infty(x,y). \qquad (\Pi_3)$$

Из равенств (Π_1)–(Π_3) получаем

$$\lim_{p\to\infty} \rho_p(x, y) = \rho_\infty(x, y)$$

для всех $x, y \in \mathbb{R}^2$.

2.15. $(\Rightarrow)$ Пусть (z_n) — последовательность в $(X \times Y, \rho_X \times \rho_Y)$, которая сходится к точке $z_0 = (x_0, y_0) \in X \times Y$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер n_0, такой, что $(\rho_X \times \rho_Y)(z_n, z_0) < \varepsilon$ для любых $n > n_0$. Но тогда для всех $n > n_0$ имеем неравенства

$$\rho_X(x_n, x_0) < \varepsilon, \ \rho_Y(y_n, y_0) < \varepsilon,$$

откуда заключаем, что $x_n \to x_0$ в (X, ρ_X) и $y_n \to y_0$ в (Y, ρ_Y).

$(\Leftarrow)$ Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ в (X, ρ_X) и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$ в (Y, ρ_Y), т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существуют числа $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, такие, что

$$\rho_X(x_n, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}, \ n > n_1,$$

$$\rho_Y(y_n, y_0) < \frac{\varepsilon}{2}, \ n > n_2.$$

Отсюда для любого $n > \max\{n_1, n_2\}$ имеем

$$(\rho_X \times \rho_Y)(z_n, z_0) = \max\{\rho_X(x_n, x_0), \rho_Y(y_n, y_0)\} < \varepsilon.$$

Итак, $z_n \to z_0$ в пространстве $(X \times Y, \rho_X \times \rho_Y)$.

§3

3.2. Рассмотрим произвольную точку x_0, принадлежащую множеству $\{x \in X : \rho(x, A) > r_1\}$, т. е. $\rho(x_0, A) > r_1$. Положим $r_0 = \rho(x_0, A) - r_1$. Согласно предложению 1.3, для любой точки $y \in B(x_0, r_0)$ имеем

$$\rho(y, A) \geqslant \rho(x_0.A) - \rho(x_0, y) > \rho(x_0, A) - r_0 = r.$$

Следовательно, из включения $B(x_0, r_0) \subset \{x \in X : \rho(x, A) > r_1\}$ вытекает, что множество $\{x \in X : \rho(x, A) > r_1\}$ открыто.

3.5. Пусть $B_i(x_0, r)$ — открытый шар в пространстве (X, ρ_i) для $i = 1, 2$. Тогда для любого $y_0 \in B_1(x_0, r)$ справедливо включение

$$B_2\Big(y_0, \frac{r - \rho_1(x_0, y_0)}{c}\Big) \subset B_1(x_0, r).$$

Действительно, из того, что $y \in B_2\Big(y_0, \dfrac{r - \rho_1(x_0, y_0)}{c}\Big)$, в силу неравенства треугольника имеем

$$\rho_1(x_0, y) \leqslant \rho_1(x_0, y_0) + \rho_1(y_0, y) \leqslant \rho_1(x_0, y_0) + c\rho_2(y_0, y) <$$
$$< \rho_1(x_0, y_0) + c\frac{r - \rho_1(x_0, y_0)}{c} = r.$$

Отсюда вытекает, что

$$B_1(x_0, r) = \bigcup \left\{ B_2\Big(y_0, \frac{r - \rho_1(x_0, y_0)}{c}\Big) : y \in B(x_1, r) \right\},$$

т. е. $B_1(x_0, r)$ открыто как объединение открытых шаров в пространстве (X, ρ_2). Теперь, принимая во внимание определение открытого множества, заключаем, что каждое множество, открытое в (X, ρ_1), будет открытым в (X, ρ_2).

3.6. Указание. Согласно задаче 3.5 имеем, что совокупности всех открытых множеств в (X, ρ_1) и (X, ρ_2) совпадают.

3.9. (б) Рассмотрим произвольные точки $x_0, y_0 \in \overline{A}$ и любое $\varepsilon > 0$. Тогда найдутся точки $x \in A$ и $y \in A$, такие, что

$$\rho(x_0, x) < \varepsilon, \ \rho(y_0, y) < \varepsilon.$$

Применяя неравенство треугольника, получаем

$$\rho(x_0, y_0) \leqslant \rho(x_0, x) + \rho(x, y) + \rho(y, y_0) < \rho(x, y) + 2\varepsilon.$$

Отсюда

$$\rho(x_0, y_0) - 2\varepsilon < \rho(x, y) \leqslant \sup_{x \in A, y \in A} \rho(x, y).$$

Далее, принимая во внимание произвольный выбор точек x_0 и y_0, заключаем, что

$$\sup_{x_0 \in \overline{A},\ y_0 \in \overline{A}} \rho(x_0, y_0) - 2\varepsilon \leqslant \sup \rho(x, y),$$

т. е. неравенство $d(\overline{A}) - 2\varepsilon \leqslant d(A)$ выполнено при любом $\varepsilon > 0$. Следовательно, $d(\overline{A}) - 2\varepsilon \leqslant d(A)$, которое, вместе с очевидным неравенством $d(A) \leqslant d(\overline{A})$, устанавливает, что $d(A) = d(\overline{A})$.

3.10. Из определения числа $\rho(F_1, F_2)$ для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдется такая пара элементов $x_n \in F_1$, $y_n \in F_2$, что

$$\rho(x_n, y_n) < \rho(F_1, F_2) + \frac{1}{n}.$$

Выберем из последовательности (x_n) в F_1 сходящуюся подпоследовательность $\left(x_{n_k}\right)_{k=1}^{\infty}$. Пусть $x_{n_k} \to x_0$, причем $x_0 \in F_1$ в силу замкнутости множества F_1. Аналогично, из последователности (y_n) в F_2 выделим подпоследовательность $\left(y_{n_k}\right)_{k=1}^{\infty}$ с пределом $y_0 \in F_2$. Из определения последовательностей (x_n) и (y_n) имеем

$$\rho(F_1, F_2) \leqslant \rho(x_{n_k}, y_{n_k}) \leqslant \rho(F_1, F_2) + \frac{1}{n_k}, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Отсюда окончательно получаем

$$\rho(x_0, y_0) = \lim_{k\to\infty} \rho(x_{n_k}, y_{n_k}) = \rho(F_1, F_2).$$

В случае, когда F_1, F_2 — замкнутые непересекающиеся множества, $\rho(x_0, y_0) > 0$, а следовательно, $\rho(F_1, F_2) > 0$.

3.14. Пусть F_1, F_2 — непересекающиеся замкнутые множества. Тогда никакая точка одного множества не является точкой прикосновения другого. Поэтому для каждой точки $x \in F_1$ число $d_x = \rho(x, F_2) > 0$. Аналогично для любой точки $y \in F_2$ число $d_y = \rho(y, F_1) > 0$. Положим

$$U_1 = \bigcup \left\{ B(x, \frac{d_x}{2}) : x \in F_1 \right\},$$

$$U_2 = \bigcup \left\{ B(y, \frac{d_y}{2}) : y \in F_2 \right\}.$$

Ясно, что множества U_1, U_2 открыты и содержат F_1 и F_2, соответственно. Покажем, что $U_1 \cap U_2 = \varnothing$. Предположим противное, т. е. имеется точка $z \in U_1 \cap U_2$. Тогда найдется такая точка $x \in F_1$, что $\rho(z, x) < \frac{d_x}{2}$, и такая точка $y \in F_2$, что $\rho(z, y) < \frac{d_y}{2}$. Пусть для определенности $d_x \geqslant d_y$. Тогда

$$\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y) < \frac{d_x + d_y}{2} \leqslant d_x,$$

что противоречит определению числа d_x.

3.15. Справедливость аксиомы тождества и симметрии для ρ_H очевидна. Докажем аксиому треугольника. Пусть F_1, F_2, F — произвольные множества из семейства $\mathcal{F}$. Тогда для произвольных элементов $x \in F_1$ и $z \in F$ имеем

$$\rho(x, F_2) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, F_2) \leqslant \rho(x, z) + \rho_H(F, F_2).$$

Отсюда, учитывая определения $\rho(x, F)$, получаем

$$\rho(x, F_2) \leqslant \inf_{z \in F} \rho(x, z) + \rho_H(F, F_2) = \rho(x, F) + \rho_H(F, F_2) \leqslant \rho_H(F_1, F) + \rho_H(F, F_2).$$

В силу произвольного выбора точки $x \in F_1$ заключаем

$$\sup_{x \in F_1} \rho(x, F_2) \leqslant \rho_H(F_1, F) + \rho_H(F, F_2).$$

Аналогично, из соображений симметрии для произвольной точки $y \in F_2$, имеем

$$\sup_{y \in F_2} \rho(F_1, y) \leqslant \rho_H(F_1, F) + \rho_H(F, F_2).$$

Из последних двух неравенств следует справедливость аксиомы треугольника. Итак, ρ_H — метрика на множестве $\mathcal{F}$.

3.16. (б) Пусть G — непустое открытое множество в $\mathbb{R}$. Введем на G отношение эквивалентности E:

$$(x, y) \in E \Rightarrow \exists (a, b) \subset \mathbb{R} : x, y \in (a, b) \subset G.$$

Легко видеть, что отношение E рефлексивно и симметрично. Поэтому остается установить транзитивность E. Допустим, что $(x, y) \in E$, $(y, z) \in E$. Тогда существуют интервалы (a, b) и (c, d), такие, что выполнены соотношения

$$x, y \in (a, b) \subset G; \ y, z \in (c, d) \subset G.$$

Отсюда заключаем, что $c < b$, причем интервал (a, d) содержится в G.

Согласно определению фактор-множества G/E,

$$G = \bigcup \{\xi : \xi \in G/E\},$$

где ξ — класс эквивалентных элементов из G по E. Покажем, что каждый класс ξ представляет собой интервал (a, b), где $a = \inf \xi$, $b = \sup \xi$. Так как для любого $x \in \xi$ справедливы неравенства $a \leqslant x \leqslant b$, то очевидно $(a, b) \supset \xi$. С другой стороны, если $x, y \in \xi$, то из определения ξ следует, что $(x, y) \subset \xi$. Из определения чисел a и b вытекает, что для любого интервала $(a_0, b_0) \subset (a, b)$, где $a_0, b_0 \in \xi$, следует, что $\xi \subset (a, b)$. Итак, $\xi = (a, b)$.

Система $\{\xi : \xi \in G/E\}$ не более чем счетна. Действительно, выбрав в каждом из интервалов ξ произвольное рациональное число, получаем взаимно однозначное соответствие между системой $\{\xi : \xi \in G/E\}$ и множеством рациональных чисел $\mathbb{Q}$.

3.18. Положим $U = X^2 \setminus \Delta_X$. Рассмотрим произвольную точку $(x_0, y_0) \in U$. Так как $x_0 \neq y_0$, то существуют открытые шары $B(x_0, \varepsilon_1)$ и $B(y_0, \varepsilon_2)$, такие, что $B(x_0, \varepsilon_1) \cap B(y_0, \varepsilon_2) = \varnothing$ (например, $0 < \varepsilon_1, \varepsilon_2 < \dfrac{\rho(x_0, y_0)}{2}$). Тогда из равенства $(B(x_0, \varepsilon_1) \times B(y_0, \varepsilon_2)) \cap \Delta_X = \varnothing$ следует, что $B(x_0, \varepsilon_1) \times B(y_0, \varepsilon_2) \subset X \setminus \Delta_X = U$. Теперь, принимая во внимание открытость множества $B(x_0, \varepsilon_1) \times B(y_0, \varepsilon_2)$ в пространстве $(X \times X, \rho \times \rho)$, заключаем, что U — открытое множество.

3.19. Предположим, что $X = U_1 \cup U_2$, где U_1, U_2 — непустые открытые множества и $U_1 \cap U_2 = \varnothing$. Тогда из равенства $X \setminus U_1 = U_2$ получаем, что множество U_1 замкнуто и открыто одновременно. В силу связности МП (X, ρ) имеем, что $U_1 = \varnothing$ или $U_1 = X$, а тогда $U_2 = X$ или $U_2 = \varnothing$. Это противоречит тому, что $U_1 \neq \varnothing$ и $U_2 \neq \varnothing$.

Обратно, пусть выполнено условие теоремы и $U \subset X$. Если U — открытое и замкнутое множество одновременно, то и множество $X \setminus U$ открыто и замкнуто. Следовательно, $X = U \cup (X \setminus U)$, что невозможно. Значит, $U = \varnothing$ или $X \setminus U = \varnothing$, т. е. пространство (X, ρ) связно.

§4

4.2. (а) Для любой точки $x \in \overline{B(x_0, r)}$, согласно предложению 3.1, имеем, что найдется последовательность (x_n) из $B(x_0, r)$, такая, что $x_n \to x$. Тогда из соотношения

$$\rho(x, x_0) \leqslant \rho(x, x_n) + \rho(x_n, x_0) < r + \rho(x, x_n),$$

учитывая, что $\rho(x, x_n) \to 0$ при $n \to \infty$, имеем $\rho(x, x_0) \leqslant r$, т. е. $x \in \overline{B}(x_0, r)$.

(б) Учитывая (легко проверяемые) равенства $B(x_0, r) = x_0 + B(0, r)$, $S(x_0, r) = x_0 + S(0, r)$, достаточно рассмотреть случай, когда $x_0 = 0$. Пусть x — произвольная точка из $\overline{B}(0, r)$, такая, что $x \neq 0$. Тогда точки $x_n = \dfrac{n-1}{n} x$, $n \in \mathbb{N}$, лежат в $B(0, r)$. Кроме того, точки $y_n = \frac{1}{n} x$ также лежат в $B(0, r)$ и $y_n \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно, справедливо включение $\overline{B}(0,r) \subset (B(0,r))'$. С другой стороны, $\overline{B(0,r)} \subset \overline{B}(0,r)$ (см. пункт (а)). Принимая во внимание полученные включения имеем

$$\overline{B}(0,r) \subset (B(0,r))' \subset \overline{B(0,r)} \subset \overline{B}(0,r),$$

откуда вытекают справедливость следующих равенств

$$\overline{B}(0,r) = \overline{B(0,r)} = (B(0,r))'.$$

Рассмотрим точку $x \in S(0,r)$. Тогда $x_n = \frac{n-1}{n}x \in B(0,r)$ для каждого $n \in \mathbb{N}$, и последовательность (x_n) сходится к x при $n \to \infty$. Значит, $S(0,r) \subset \mathrm{Fr}B(0,r)$. Обратно, если $x \in \mathrm{Fr}B(0,r)$, то $x \notin B(0,r)$, так как $B(0,r)$ состоит из внутренних точек и существует последовательность (x_n) из $B(0,r)$, сходящая к точке x. Следовательно, $x \in \overline{B}(0,r)$, а тогда $x \in S(0,r)$.

4.3. (а) Из равенства $A \setminus B = A \cap (X \setminus B)$ и теоремы 4.1.(г) имеем

$$\mathrm{Int}(A \setminus B) = \mathrm{Int}(A \cap (X \setminus B)) = \mathrm{Int}A \cap \mathrm{Int}(X \setminus B) = \mathrm{Int}A \cap (X \setminus \overline{B}).$$

Так как $\mathrm{Int}B \subset \overline{B}$, что равносильно включению $X \setminus \overline{B} \subset X \setminus \mathrm{Int}B$, то

$$\mathrm{Int}(A \setminus B) \subset \mathrm{Int}A \cap (X \setminus \mathrm{Int}B) = \mathrm{Int}A \setminus \mathrm{Int}B.$$

(б) Из равенства $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$, учитывая теорему 4.2(г), имеем

$$\overline{A} = \overline{(A \setminus B) \cup (A \cap B)} \subset \overline{(A \setminus B)} \cup \overline{B}.$$

Отсюда следует искомое включение

$$\overline{A} \setminus \overline{B} \subset \overline{A \setminus B}.$$

(в) Из очевидных включений $A \cap B \subset A$ и $A \cap B \subset B$, согласно монотонности оператора замыкания, имеем

$$\overline{A \cap B} \subset \overline{A}, \ \overline{A \cap B} \subset \overline{B}.$$

Следовательно,

$$\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}.$$

(г) Из теоремы 4.3 и следствия 4.1 имеем

$$\overline{\mathrm{Int}(\overline{\mathrm{Int}A})} = X \setminus \mathrm{Int}(X \setminus \mathrm{Int}(\overline{\mathrm{Int}A})) = X \setminus \mathrm{Int}(\overline{X \setminus \overline{\mathrm{Int}A}}) =$$
$$= X \setminus \mathrm{Int}(\overline{\mathrm{Int}(X \setminus \mathrm{Int}A)}) = X \setminus \mathrm{Int}(\overline{\mathrm{Int}(X \setminus \mathrm{Int}A)}) =$$
$$= \overline{X \setminus \overline{\mathrm{Int}(X \setminus \mathrm{Int}A)}} = \overline{\mathrm{Int}(X \setminus (X \setminus \mathrm{Int}A))} = \overline{\mathrm{Int}A}.$$

4.4. (а) Так как $X \setminus \overline{A} \subset X \setminus A$, то из определения границы имеем

$$\mathrm{Fr}\overline{A} = \overline{(\overline{A})} \cap \overline{(X \setminus \overline{A})} \subset \overline{A} \cap \overline{X \setminus A} = \mathrm{Fr}A.$$

4.7. Из равенства $\overline{B(x_0, r)} = \overline{B}(x_0, r)$ следует, что

$$S(x_0, r) = \overline{B}(x_0, r) \setminus B(x_0, r) = \overline{B(x_0, r)} \setminus B(x_0, r) = \mathrm{Fr}B(x_0, r).$$

Обратно, если $S(x_0, r) = \mathrm{Fr}B(x_0, r)$, то

$$\overline{B(x_0, r)} = B(x_0, r) \cap \mathrm{Fr}B(x_0, r) = B(x_0, r) \cup S(x_0, r) = \overline{B}(x_0, r).$$

4.8. (а) Так как $G = \mathrm{Int}G$, то, согласно теореме 4.3, имеем

$$G = X \setminus (\overline{X \setminus G}).$$

Пересекая обе части этого равенства с множеством $\overline{A}$, получаем

$$G \cap \overline{A} = \overline{A} \cap (X \setminus (\overline{X \setminus G})) = \overline{A} \setminus (\overline{X \setminus G}) \subset \overline{A \setminus (X \setminus G)} = \overline{A \cap G}.$$

Следовательно, согласно монотонности оператора замыкания, справедливо включение

$$\overline{G \cap \overline{A}} \subset \overline{A \cap G}.$$

Отсюда, принимая во внимание очевидное включение $\overline{G \cap A} \subset \overline{G \cap \overline{A}}$, следует справедливость указанного равенства.

(б) Переходя к дополнению множества $\mathrm{Int}(A \cup F)$ и применяя теорему 4.3, получим

$$X \setminus \mathrm{Int}(F \cup A) = \overline{X \setminus (F \cup A)} = \overline{(X \setminus F) \cap (X \setminus A)} =$$

$$= \overline{(X \setminus F) \cap (\overline{X \setminus A})} = X \setminus \mathrm{Int}[X \setminus ((X \setminus F) \cap (\overline{X \setminus A}))] =$$

$$= X \setminus \mathrm{Int}(F \cup (X \setminus (\overline{X \setminus A})) = X \setminus \mathrm{Int}(F \cup \mathrm{Int}A).$$

(в) Принимая во внимание монотонность оператора Int и задачу 4.3(в), получим $\overline{G \cap A} \subset \overline{G} \cap \overline{A}$, следовательно

$$\mathrm{Int}(\overline{G \cap A}) \subset \mathrm{Int}(\overline{G} \cap \overline{A}) = \mathrm{Int}\overline{G} \cap \mathrm{Int}\overline{A}. \qquad (\Pi_1)$$

Далее, учитывая равенство из пункта (а), имеем следующую цепочку соотношений

$$\mathrm{Int}\overline{G} \cap \mathrm{Int}\overline{A} \subset \overline{G} \cap \mathrm{Int}\overline{A} \subset \overline{\overline{G} \cap \mathrm{Int}\overline{A}} = \overline{G \cap \mathrm{Int}\overline{A}} \subset$$

$$\subset \overline{G \cap \overline{A}} = \overline{G \cap A}.$$

Отсюда и из определения внутренности множества вытекает, что

$$\mathrm{Int}\overline{G} \cap \mathrm{Int}\overline{A} \subset \mathrm{Int}(\overline{G \cap A}). \qquad (\Pi_2)$$

Из включений (Π_1) и (Π_2) следует требуемое равенство.

§5

5.9. $(\Rightarrow)$ Предположим, что существует пара открытых множеств U и V, таких, что из соотношений $M \subset U \cup V$, $M \cap U \neq \varnothing$ и $M \cap V \neq \varnothing$ вытекает равенство $M \cap U \cap V = \varnothing$. Так как множества $M \cap U$ и $M \cap V$ открыты относительно M, то из включения $M \subset U \cup V$ следует, что

$$M = (M \cap U) \cup (M \cap V),$$

т. е. M представляется в виде объединения двух непересекающихся непустых открытых множеств $(M \cap U)$ и $(M \cap V)$. Это противоречит связности множества M.

$(\Leftarrow)$ Пусть (M, ρ_M) — не связное пространство. Тогда найдутся такие непустые непересекающиеся открытые множества U_1 и V_1 относительно M, для которых выполняется равенство $M = U_1 \cup V_1$. Из определения открытости множества в подпространстве (см. теорему 5.1) (M, ρ_M) найдутся открытые в (X, ρ) множества U и V, такие, что $U_1 = U \cap M \neq \varnothing$, $V_1 = V \cap M \neq \varnothing$, $M \subset U \cup V$, причем $M \cap U \cap V = \varnothing$, а это противоречит условию.

5.11. $(\Rightarrow)$ Предположим, что существуют элементы $x, y, z \in M$, такие, что $x < z < y$, но $z \notin M$. Положим

$$U = \{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha < z\}, \; V = \{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha > z\}.$$

Ясно, что U, V — непустые непересекающиеся открытые множества, причем $M \cap U \neq \varnothing \neq M \cap V$. Следовательно, $M \cap (U \cup V) = \varnothing$, что противоречит связности множества M.

$(\Leftarrow)$ Пусть M — не связное множество и точки $x, y \in M$ такие, что $x < y$. Тогда найдутся открытые множества U и V в $\mathbb{R}$, для которых выполнены соотношения:

$$x \in U, \; y \in V, \; U \cap V = \varnothing, \; M \subset U \cup V.$$

Положим $W = U \cap [x, y]$ и $z = \sup W$. Так как $y \in V$ и $W \subset U$, то $z < y$. Если $z \in U$, то в силу неравенства $z < y$ и открытости U найдется отрезок $[z, z + \Delta z] \subset U$. Тогда $[z, z + \Delta z] \subset [x, y]$, что противоречит определению числа z. Следовательно, $z \notin U$. При этом $x < z$. Итак, существует точка z, для которой выполнено двойное неравенство $x < z < y$ и $z \notin M$, а это противоречит условию задачи.

§6

6.5. Из очевидного включения $U \cap A \subset U$ с учетом монотонности оператора замыкания (см. теорему 4.2(в)) имеем, что $\overline{U \cap A} \subset \overline{U}$. Обратно, для произвольной точки $x_0 \in \overline{U}$ и произвольной ее окрестности V следует, что $(A \cap U) \cap V \neq \varnothing$, а это значит, что $x \in \overline{U \cap A}$. Следовательно, $\overline{U} \subset \overline{U \cap A}$.

6.7. Согласно теореме 6.2(в) покажем, что произвольный открытый шар $B(x_0, r)$ в l_2 содержит в себе другой открытый шар, в котором нет точек множества L_{n_0}. Если в $B(x_0, r)$ нет точек из L_{n_0}, то доказательство на этом завершается. Предположим, что шар $B(x_0, r)$ содержит элемент $x_1 = (\xi_1^{(1)}, \ldots, \xi_{n_0}^{(1)}, 0, \ldots) \in L_{n_0}$. Тогда существует такое число $\varepsilon > 0$, что справедливо включение $B(x_1, \varepsilon) \subset B(x_0, r)$ (см. предложение 1.1(а)). Рассмотрим элемент $x_2 = (\xi_1^{(2)}, \xi_2^{(2)}, \ldots, \xi_{n_0}^{(2)}, \frac{\varepsilon}{2}, 0, \ldots) \in L_{n_0}$ и покажем, что $B(x_2, \frac{\varepsilon}{4}) \subset B(x_1, \varepsilon)$. Для любой точки $x \in B(x_2, \frac{\varepsilon}{4})$ имеем

$$\rho(x, x_1) \leqslant \rho(x, x_2) + \rho(x_2, x_1) < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{3}{4}\varepsilon < \varepsilon,$$

откуда вытекает требуемое включение. Кроме того, шар $B(x_2, \frac{\varepsilon}{4})$ не содержит точек из множества L_{n_0}. Действительно, отмечая $x_2 \notin L_{n_0}$, для любой точки $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n_0}, 0, \ldots) \in L_{n_0}$ получим

$$\rho(x_1, x_2) = \left(\sum_{k=1}^{n_0} |\xi_k - \xi_k^{(2)}|^2 + \frac{\varepsilon^2}{4}\right)^{1/2} \geqslant \frac{\varepsilon}{2} > \frac{\varepsilon}{4}.$$

Значит, $B(x_2, \frac{\varepsilon}{4}) \cap L_{n_0} = \varnothing$.

6.13. (б) Допустим противное, т. е. сепарабельное МП (X, ρ) содержит несчетное дискретное множество A. Тогда для каждой точки $x \in A$ существует положительное число ε_x, такое, что открытый шар $B(x, \varepsilon_x)$ не содержит других точек из A. Так как система $\{B(x, \varepsilon_x) : x \in A\}$ образует открытое покрытие сепарабельного МП (A, ρ_A) (см. следствие 6.2), то она не содержит счетного подпокрытия, т. е. следствие 6.1 не может выполняться.

Из доказанного утверждения вытекает, что если (X, ρ) — сепарабельное МП, то оно не содержит несчетного множества A, такого, что

$$\inf\{\rho(x, y) : x, y \in A, x \neq y\} > 0.$$

Действительно, множество A, обладающее указанным свойством, дискретно.

6.14. Покажем, что пространство s сепарабельно (см. пример 2.8). Рассмотрим множество

$$M = \{(r_1, r_2, \ldots, r_n, 0, \ldots) : r_i \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}\}.$$

Ясно, что M — счетное множество. Покажем, что оно всюду плотно в s. Для этого возьмем произвольный элемент $x \in s$, $x = (\xi_n)$, и произвольное число $\varepsilon > 0$. Выберем такое $n \in \mathbb{N}$, что

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k|}{1 + |\xi_k|} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Возьмем элемент $x_0 = (r_1, r_2, \ldots, r_n, 0, \ldots) \in M$ таким, чтобы

$$\sum_{k=1}^{n} |\xi_k - r_k| < \frac{\varepsilon}{2}$$

(в силу плотности множества рациональных чисел в пространстве $\mathbb{R}$). Тогда

$$\rho(x, x_0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k - r_k|}{1 + |\xi_k - r_k|} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k|}{1 + |\xi_k|} <$$
$$< \sum_{k=1}^{n} |\xi_k - r_k| + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Следовательно, $\overline{M} = s$.

Докажем, что пространство m не сепарабельно. Рассмотрим множество $M_{0,1}$ последовательностей $x = (\xi_n)$, где элементы ξ_n равны 0 или 1. Это множество имеет мощность континуума. Так как $\rho(x, y) = 1$ при $x \neq y$, то M есть дискретное множество в m. Теперь, принимая во внимание задачу 6.13(б), заключаем, что m не является сепарабельным МП.

Для доказательства несепарабельности пространства $M[a, b]$ достаточно рассмотреть семейство функций

$$f_\alpha(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t \in [a, \alpha), \\ 1, & \text{при } t \in [\alpha, b], \end{cases}$$

для каждого $\alpha \in [a, b]$.

6.15. Рассмотрим функцию

$$g(t) = \begin{cases} t + \frac{1}{2}, & \text{при } t \in [-\frac{1}{2}, 0], \\ \frac{1}{2} - t, & \text{при } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ 0, & \text{при } t \in \mathbb{R} \setminus [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]. \end{cases}$$

Для каждой последовательности $\alpha = (\alpha_n)$, где $\alpha_n = 0$ или $\alpha_n = 1$, определим семейство функций

$$f_\alpha(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n g(t - n),\ t \in \mathbb{R},$$

которое является множеством континуума, причем для различных последовательностей α' и α'' выполняется равенство $\rho(f_{\alpha'}, f_{\alpha''}) = \frac{1}{2}$.

§7

7.3. (а) Пусть F — замкнутое множество в (X, ρ) и точка $x \notin F$. Рассмотрим функцию $h(x) = \rho(x, F)$. Допустим, что $h(x) = 0$. Тогда $\inf\limits_{a \in F} \rho(x, a) = 0$, и поэтому для любого $\delta > 0$ имеем, что $B(x, \delta) \cap F \neq \varnothing$. Значит, $x \in \overline{F}$, что противоречит условию $x \notin F$. Итак, $h(x) > 0$ для любого $x \in X$.

Покажем, что $h \in C(X)$. Из определения функции $h(x)$ имеем, что для любого $x_1 \in X$ и любого $\varepsilon > 0$ существует точка $a \in F$, такая, что

$$\rho(x_1, a) < \rho(x_1, F) + \varepsilon.$$

Если x_2 — произвольная точка из X, то в силу неравенства треугольника имеем

$$\rho(x_2, a) \leqslant \rho(x_2, x_1) + \rho(x_1, a) < \rho(x_2, x_1) + \rho(x_1, F) + \varepsilon.$$

Следовательно,

$$\rho(x_2, F) < \rho(x_2, x_1) + \rho(x_1, F) + \varepsilon.$$

Отсюда в силу произвольного выбора ε получаем

$$\rho(x_2, F) - \rho(x_1, F) \leqslant \rho(x_2, x_1).$$

Меняя местами x_1 и x_2, имеем

$$\rho(x_1, F) - \rho(x_2, F) \leqslant \rho(x_2, x_1).$$

Таким образом, имеем оценку

$$|\rho(x_1, F) - \rho(x_2, F)| \leqslant \rho(x_1, x_2)$$

для любых $x_1, x_2 \in X$, которую, используя определение функции $h(x)$, перепишем в виде

$$|h(x_1) - h(x_2)| \leqslant \rho(x_1, x_2), \ x_1, x_2 \in X.$$

Отсюда заключаем, что $h \in C(X)$. Действительно, если $x_1 \in X$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \varepsilon > 0$ такое, что из $\rho(x_1, x_2) < \delta$ следует $|h(x_1) - h(x_2)| < \varepsilon$.

7.7. (б) Докажем справедливость утверждения (i). Если $A = \varnothing$, то утверждение очевидно. Поэтому будем считать, что $A \neq \varnothing$. Пусть x_0 — произвольная точка из $\overline{A}$. Тогда в силу непрерывности f в точке x_0 имеем, что для любой окрестности V точки $y_0 = f(x_0)$ найдется такая окрестность U точки x_0, что $f(U) \subset V$. Так как x_0 есть точка прикосновения для A, то $U \cap A \neq \varnothing$. Поэтому для любой точки $x \in A \cap U$ имеем следующие соотношения: $f(x) = y \in F(U) \subset V$ и $f(x) \in f(A)$. Следовательно, $f(x) \in f(A) \cap V$, т.е. $f(A) \cap V \neq \varnothing$ для любой окрестности V точки y_0. Значит, $y_0 \in \overline{f(A)}$, что равносильно включению $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$. Обратно, пусть $B \subset Y$ и $B = \overline{B}$. Положим $A = f^{-1}(B)$ и покажем, что A — замкнутое множество. Рассмотрим произвольную точку $x_0 \in \overline{A}$. Тогда $f(x_0) \in f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ (по условию). Из определения множества A имеем, что $f(A) = f(f^{-1}(B)) \subset B$. Отсюда, в силу монотонности оператора замыкания и замкнутости множества B, вытекает соотношение $\overline{f(A)} \subset \overline{B} = B$. Следовательно, $f(x_0) \in B$, что эквивалентно включению $x_0 \in A$. Таким образом, $\overline{A} \subset A$, что означает равенство $A = \overline{A}$. Теперь, используя критерий непрерывности отображения (теорема 7.2$'$), заключаем, что $f \in C(X, Y)$.

Докажем утверждение (ii). Положим $A = f^{-1}(B)$ для произвольного множества $B \subset Y$. Если $f \in C(X, Y)$, то, используя включение $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ из пункта (i), имеем, что

$$f(\overline{f^{-1}(B)}) \subset \overline{f(f^{-1}(B))} \subset \overline{B}.$$

Отсюда немедленно вытекает включение $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$. Обратно, пусть $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$ для любого $B \subset Y$. Положим $f^{-1}(\overline{B}) = A$.

Тогда $f(A) = f(f^{-1}(B)) \supset B$, и из монотонности операции замыкания получаем, что $\overline{B} \subset \overline{f(A)}$. Следовательно, $\overline{A} \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$, откуда вытекает соотношение $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$, т. е. $f \in C(X, Y)$ согласно пункту (i).

7.15. Допустим, что отображение $f : (X, \rho) \to (Y, \sigma)$ непрерывно, $f(X) = Y$, а (X, ρ) — связное МП. Предположим, что пространство (Y, σ) несвязно. Тогда найдутся непустые открытые множества V_1, V_2 в (Y, σ), такие, что $Y = V_1 \cup V_2$ и $V_1 \cap V_2 = \varnothing$. В силу непрерывности f имеем, что $U_1 = f^{-1}(V_1)$, $U_2 = f^{-1}(V_2)$ открыты в (X, ρ), причем из равенств $V_1 \cap V_2 = \varnothing$ и $Y = V_1 \cup V_2$ следует, что

$$\varnothing = f^{-1}(V_1 \cap V_2) = f^{-1}(V_1) \cap f^{-1}(V_2) = U_1 \cap U_2,$$

$$X = f^{-1}(Y) = f^{-1}(V_1 \cup V_2) = f^{-1}(V_1) \cup f^{-1}(V_2),$$

а это противоречит связности (X, ρ).

7.17. (а) Пусть (X, ρ) — линейное связное МП. Предположим, что оно несвязно, т. е. существуют такие непустые непересекающиеся открытые множества U и V, что $X = U \cup V$. В силу линейной связности (X, ρ) найдется путь $\gamma : [0, 1] \to X$, для которого $\gamma(0) \in U$ и $\gamma(1) \in V$. Так как $[0, 1]$ — связное множество, то, вследствие задачи 7.15, $\gamma([0, 1])$ — связное множество в (X, ρ). Но это невозможно, так как множества $U \cap \gamma([0, 1])$ и $V \cap \gamma([0, 1])$ не пересекаются.

(б) Множество M не является линейно связным, поскольку точки $(0, 0)$ и $(a, \sin\frac{\pi}{a})$, $a \neq 0$, нельзя соединить непрерывным путем из M. Покажем, что M — связное множество. Положим

$$M_0 = \{(x, y) : x = 0, |y| \leqslant 1\},$$

$$M_- = \{(x, y) : y = \sin\tfrac{\pi}{x},\ \infty < x < 0\},$$

$$M_+ = \{(x, y) : y = \sin\tfrac{\pi}{x},\ 0 < x < \infty\}.$$

Ясно, что каждое из множеств линейно связно, а значит, связны. Предположим, что существуют открытые множества G_1, G_2 в $\mathbb{R}^2$, такие, что $M = M_0 \cup M_- \cup M_+$ и $G_1 \cap G_2 = \varnothing$. Так как M_- связно, то если $M_- \cap G_1 \neq \varnothing$, то $M_- \subset G_1$. Учитывая включение $M_0 \subset \overline{M_-}$ и $M_- \cap G_2 = \varnothing$, заключаем, что $M_0 \cap G_2 = \varnothing$ и в силу связности M_0 имеем $M_0 \subset G_1$. С другой стороны, $M_0 \subset \overline{M_+}$, поэтому $M_+ \cap G_1 \neq \varnothing$, и тогда в силу связности M_+ получаем, что $M_+ \subset G_1$. Таким образом, $M \subset G_1$, что означает связность M.

7.18. (а) Используя определение выпуклого множества $M \subset \mathbb{R}^n$ имеем отображение
$$[0,1] \ni t \mapsto \gamma(t) = (1-t)x + ty \in M.$$

Отсюда для любых $t, s \in [0,1]$ и любых $x, y \in M$, используя определение МП $\mathbb{R}$, получаем
$$\rho(\gamma(t), \gamma(s)) = |t-s|\rho(x,y).$$

Откуда немедленно вытекает непрерывность функции $\gamma : [0,1] \to M$.

7.19. Импликация (в)$\Rightarrow$(б) очевидна, а (б)$\Rightarrow$(а) была установлена в задаче 7.17. Поэтому остается доказать, что (а)$\Rightarrow$(в).

Пусть x_0 — произвольная фиксированная точка из G. Обозначим через U множество всех точек $x \in G$, которые могут быть соединены ломаной $l_{x_0,x}$, целиком лежащей в G, т. е.
$$U = \{x \in G : \exists\, l_{x_0,x} \subset G\}.$$

Рассмотрим произвольную $a \in U$. Тогда в силу открытости G существует такое $\delta > 0$, что открытый шар $B(a,\delta)$ содержится в G. Так как $B(a,\delta)$ выпуклое множество (см. задачу 7.18), то для любой точки $x \in B(a,\delta)$ отрезок $[a,x] \subset B(a,\delta)$. Следовательно, $l_{x_0,a} \cup [a,x]$ есть ломаная, соединяющая точки x_0 и x, а значит, справедливо включение $B(a,\delta) \subset U$, т. е. U – открытое множество в $\mathbb{R}^n$. Принимая во внимание включение $U \subset G$ и открытость множеств U и G, заключаем, что U – открытое непустое подмножество в G.

Покажем, что $G \setminus U$ — открытое множество в G. Для любой точки $a \in G \setminus U$ имеем, что найдутся такие δ_1 и δ_2, что $B(a,\delta_1) \subset G$, $B(a,\delta_2) \cap U = \varnothing$. Выбирая $\delta_0 = \min(\delta_1, \delta_2)$, имеем включение $B(a,\delta_0) \subset$ $\subset G \setminus U$, откуда вытекает открытость множества $G \setminus U$ в $\mathbb{R}^n$, а следовательно, в G, причем $G \setminus U \neq \varnothing$.

Из очевидного равенства $G = U \cup (G \setminus U)$ и открытости множеств U и $G \setminus U$ (в G) вытекает, учитывая связность G, что $G = U$.

7.21. (а) Пусть x_1, x_2 — точки из (X,ρ), такие, что $x_1 \neq x_2$, тогда, в силу аксиомы метрики $(M1)$, $\rho(x_1,x_2) > 0$. Отсюда и из определения изометрии имеем, что
$$\rho(f(x_1), f(x_2)) = \rho(x_1,x_2) > 0.$$

Значит, $f(x_1) \neq f(x_2)$. Таким образом, если $x_1 \neq x_2$, то $f(x_1) \neq f(x_2)$, т. е. отображение f взаимно однозначно.

(б) Рассмотрим произвольные точки $y_1, y_2 \in Y$. Так как f есть отображение X на Y, то найдутся точки $x_1, x_2 \in X$, такие, что $f(x_1) = y_1$

и $f(x_2) = y_2$. Значит, имеем $x_1 = f^{-1}(y_1)$, $x_2 = f^{-1}(y_2)$ и

$$\rho(x_1, x_2) = \sigma(f(x_1), f(x_2)) = \rho(f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2)).$$

Отсюда вытекает равенство

$$\rho(f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2)) = \sigma(y_1, y_2),$$

т. е. отображение f^{-1} есть изометрия пространств (X, ρ) и (Y, σ).

§8

8.1. (в) Для произвольной точки $x \in X$ и любых номеров m и n выполняется второе неравенство треугольника:

$$|\rho(x_n, x) - \rho(x_m, x)| \leqslant \rho(x_n, x_m).$$

Вследствие фундаментальности последовательности (x_n) для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $n_0 \in \mathbb{N}$, что для любых $m, n > n_0$ имеет место неравенство $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$. Следовательно, для числовой последовательности $(\rho(x_n, x))$ выполнен критерий сходимости Коши, и, значит, предел

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x) = r(x)$$

определен и конечен для всякого $x \in X$.

Из неотрицательности метрики ρ вытекает неравенство $\rho(x_n, x) \geqslant 0$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Отсюда, согласно известной теореме о предельном переходе в неравенстве, получаем, что $r(x) \geqslant 0$ при всех $x \in X$.

Покажем, что функция r непрерывна. Для произвольных точек $x', x'' \in X$ имеем

$$|\rho(x_n, x') - \rho(x_n, x'')| \leqslant \rho(x', x'').$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $n \to \infty$, получаем неравенство

$$|r(x') - r(x'')| \leqslant \rho(x', x''),$$

откуда немедленно вытекает непрерывность функции r.

8.5. (б) Указание. Рассмотреть последовательность $\left(\operatorname{arctg}(nt)\right)_{n=1}^{\infty}$ в $\widetilde{L_2}[0, 1]$, которая фундаментальна, но сходится к разрывной функции

$$x(t) = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2}, & \text{при } t < 0, \\ 0, & \text{при } t = 0, \\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{при } t > 0, \end{cases}$$

или последовательность (x_n), где

$$x_n(t) = \begin{cases} -1, & \text{при } -1 \leqslant t \leqslant -\frac{1}{n}, \\ nt, & \text{при } -\frac{1}{n} < t < \frac{1}{n}, \\ 1, & \text{при } \frac{1}{n} \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$$

фундаментальная в $\widetilde{L_2}[-1, 1]$ и сходящаяся к функции

$$x(t) = \begin{cases} -1, & \text{при } -1 \leqslant t < 0, \\ 0, & \text{при } t = 0, \\ 1, & \text{при } 0 < t \leqslant 1. \end{cases}$$

В пространстве $\widetilde{L_1}[0, 1]$ последовательность (x_n):

$$x_n(t) = \begin{cases} 1, & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}, \\ n + 1 - 2nt, & \text{при } \frac{1}{2} < t \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}, \\ 0, & \text{при } \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} < t \leqslant 1, \end{cases}$$

является фундаментальной, но предельная функция

$$x(t) = \begin{cases} 1, & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{при } \frac{1}{2} < t \leqslant 1, \end{cases}$$

не принадлежит $\widetilde{L_1}[0, 1]$.

8.11. Непосредственно из определения функции g имеем, что $g(x) > 0$ для любого $x \in U$, причем она непрерывна на U. Ясно, что функция ρ_U является метрикой на множестве U. Пусть (x_n) — фундаментальная последовательность в подпространстве (U, ρ_U). Тогда в силу неравенства $\rho_U(x, y) \geqslant \rho(x, y)$ заключаем, что указанная последовательность фундаментальна в (X, ρ), а согласно полноте МП (X, ρ), существует предел

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \in X.$$

Покажем, что точка $x_0 \in U$. Для элементов x_n и x_m рассматриваемой фундаментальной последовательности при $\varepsilon = \frac{1}{2}$ имеем

$$\rho_U(x_n, x_m) < \frac{1}{2},\ n, m \geqslant n_0,\ m \geqslant n,$$

а в силу непрерывности функции g

$$|g(x_n) - g(x_m)| < \frac{1}{2}.$$

Отсюда, в частности, следует неравенство

$$g(x_n) < g(x_m) + \frac{1}{2}$$

или, в другой записи,

$$\rho_U(x_n, X \setminus U) > \frac{1}{g(x_m) + \frac{1}{2}}.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получим, что

$$\rho(x_0, X \setminus U) > 0,$$

т. е. $x_0 \notin X \setminus U$, что равносильно включению $x_0 \in U$.

§9

9.1. Пусть X — множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$, наделенное евклидовой метрикой $\rho(x, y) = |x - y|$. Это пространство неполное, причем является объединением счетной совокупности нигде не плотных (а именно, одноточечных) множеств. Следовательно, X — множество первой категории.

9.2. Пусть x_0 — произвольная точка МП (X, ρ). Одноточечное множество $\{x_0\}$ открыто в (X, ρ). Если A — произвольное нигде не плотное множество в (X, ρ), то существует непустое открытое множество $U \subset \{x_0\}$, такое, что $U \cap A = \varnothing$. Но единственное непустое подмножество в $\{x_0\}$ есть оно само. Поэтому $U = \{x_0\}$ и $x_0 \notin A$ для каждого нигде не плотного множества A. Значит, X не представимо в виде объединения любого, в том числе и счетного, семейства нигде не плотных множеств.

9.3. Пусть $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и ρ — евклидова метрика на X. Тогда (X, ρ) — неполное МП без изолированных точек. Покажем, что любое множество A, нигде не плотное в (X, ρ), будет нигде не плотным и в $\mathbb{R}$. Действительно, для любой точки $x \in \mathbb{R}$ и любой ее окрестности $U(x)$ найдется интервал $I \subset U(x)$, не содержащий точки 0 и, значит, входящий в X. Так как A нигде не плотно в (X, ρ), то в I содержится такой интервал I_1, что $I_1 \cap A = \varnothing$. Но $I_1 \subset U(x) \subset \mathbb{R}$. Значит, A нигде не плотно в $\mathbb{R}$.

Допустим, что $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, где все A_n нигде не плотны в (X, ρ). Из сказанного выше имеем, что $\mathbb{R} = \left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n\right) \cup \{0\}$. Но это невозможно, поскольку $\mathbb{R}$ — ПМП. Следовательно, множество X есть множество второй категории.

9.4. Пусть (X, ρ) — ПМП и A — множество первой категории в (X, ρ). Тогда $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, где A_n — нигде не плотны в (X, ρ). Допустим, что $X \setminus A$ — множество первой категории, т. е. $X \setminus A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$, B_n — нигде не плотные множества в (X, ρ). Следовательно, справедливо равенство $X = \left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cup \left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n\right)$, которое противоречит теореме Бэра о категории. Значит, $X \setminus A$ — множество второй категории.

9.5. Если бы ПМП (X, ρ) было счетным, т. е. $X = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, то $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \{x_n\}$, где каждое $\{x_n\}$ — нигде не плотно, ибо ни один шар $B(x_n, r)$ не содержится в $\overline{\{x_n\}} = \{x_n\}$. Иначе, x_n была бы изолированной точкой множества X. Значит, X — множество первой категории. Полученное противоречие допускает справедливость утверждения данной задачи.

§10

10.1. (а) Неподвижные точки отображения f находятся из уравнения $x^3 = x$. В результате получим три точки: $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$.

Рассмотрим отображение f в открытом шаре $B(0, r)$. Для произвольных точек $x, y \in B(0, r)$ имеем

$$\rho(f(x), f(y)) = |x^3 - y^3| = |x - y||x^2 + xy + y^2| \leqslant 3r_0^2 \rho(x, y),$$

где $r_0 = \max\{\rho(x, 0), \rho(y, 0)\}$ и $0 < r_0 < r$. Ясно, что отображение f будет сжимающим, если в $B(0, r)$ выполняется неравенство $0 < 3r_0^2 < 1$. Таким образом, f — сжимающее отображение в окрестности $\{x \in \mathbb{R} : |x| < \frac{1}{\sqrt{3}}\}$ точки 0.

Теперь рассмотрим отображение f в открытом шаре $B(-1, r)$. По теореме Лагранжа о конечных приращениях получаем

$$\rho(f(x), f(y)) = |x^3 - y^3| = 3c^2|x - y| = 3c^2\rho(x, y). \qquad (\Pi_1)$$

В окрестности $V = \{c \in \mathbb{R} : |c + 1| < r,\ 0 < r < 1\}$ точки $x = -1$ функция $c \mapsto c^2$ убывает. Поэтому в окрестности V выполняется неравенство $c^2 < (r + 1)^2$. Тогда из (Π_1) имеем

$$\rho(f(x), f(y)) < 3(r + 1)^2\rho(x, y).$$

Отсюда видно, что ни при каком $r > 0$ неравенство $3(r+1)^2 < 1$ выполняться не может. Следовательно, в окрестности точек $x_2 = -1$ отображение f не является сжимающим.

Аналогично можно установить, что в окрестности точки $x_3 = 1$ отображение f не является сжимающим.

(c) Запишем отображение $f : l^n_\infty \to l^n_\infty$ (см. пример 2.7) в развернутой форме

$$\eta_i = \lambda \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j + b_i,\ i = 1, 2, \ldots, n, \qquad (\Pi_1)$$

где $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, $f(x) = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ и $\left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^{n}$ — матрица A. Пусть $x_1 = \left(\xi_1^{(1)}, \xi_2^{(1)}, \ldots, \xi_n^{(1)}\right)$, $x_2 = \left(\xi_1^{(2)}, \xi_2^{(2)}, \ldots, \xi_n^{(2)}\right)$ — произвольные точки из $\mathbb{R}^n$. Тогда

$$\rho(f(x_1), f(x_2)) = \rho(\lambda Ax_1 + b, \lambda Ax_2 + b) =$$
$$= \max_{1 \leqslant i \leqslant n}\left|\lambda \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j^{(1)} - \lambda \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j^{(2)}\right| =$$
$$= |\lambda| \max_{1 \leqslant i \leqslant n}\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\xi_j^{(1)} - \xi_j^{(2)})\right| \leqslant |\lambda| \max_{1 \leqslant i \leqslant n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}||\xi_j^{(1)} - \xi_j^{(2)}|.$$

Отсюда в силу очевидного неравенства

$$|\xi_j^{(1)} - \xi_j^{(2)}| \leqslant \rho(x_1, x_2),\ i = 1, 2, \ldots, n,$$

имеем

$$\rho(f(x_1), f(x_2)) \leqslant |\lambda| \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \rho(x_1, x_2).$$

Следовательно, принцип сжимающих отображений применим, если

$$|\lambda| < \left(\max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right)^{-1}.$$

З а м е ч а н и е. Из доказанного утверждения вытекает, что если матрица $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ такова, что $\left(\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right)^{-1} < 1$ или $\left(\sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|^p \right)^{1/p} < 1$ для всех $i = \overline{1,n}$, то система (Π_1) имеет единственное решение в $\mathbb{R}_\infty^n$ (соответственно в l_1^n и в l_p^n, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $p > 1$), который может быть получен методом последовательных приближений, исходя из произвольного элемента.

10.2. Пусть $\mathbb{Q}^+$ — множество всех неотрицательных рациональных чисел с метрикой $\rho(x, y) = |x-y|$ и пусть φ — отображение в $(\mathbb{Q}^+, \rho)$, заданное формулой $\varphi(x) = \dfrac{1}{x+2}$. Непосредственно из определения φ имеем

$$\rho(\varphi(x_1), \varphi(x_2)) = \frac{|x_1 - x_2|}{(x_1+2)(x_2+2)} \leqslant \frac{1}{4}\rho(x_1, x_2), \ \ x_1, x_2 \in \mathbb{Q}^+.$$

Следовательно, φ — сжимающее отображение. Предположим, что φ имеет неподвижную точку $x_0 \in \mathbb{Q}^+$. Тогда справедливо соотношение

$$x_0 = \frac{1}{x_0+2} \Leftrightarrow x_0^2 + 2x_0 - 1 = 0.$$

Но последнее уравнение не имеет решений в $\mathbb{Q}^+$. Действительно, если x_0 — корень этого уравнения, то $(x+1)^2 = 2$, что противоречит факту, что квадрат рационального числа не может быть равен 2. Отсюда заключаем, что если в теореме о принципе сжимающих отображений опустить условие полноты МП (X, ρ), то теорема перестает быть верной.

10.3. У к а з а н и е. Рассмотреть функцию $f(x) = \frac{\pi}{2} + x - \operatorname{arctg} x$.

10.5. Так как f — сжимающее отображение, то, согласно принципу сжимающих отображений, f имеет единственную неподвижную точку $x_0 \in X$, т. е. $F(x_0) = x_0$. В силу коммутативности f и g имеем

$$g(x_0) = g(f(x_0)) = f(g(x_0)),$$

откуда следует, что $g(x_0)$ — неподвижная точка отображения f. Учитывая единственность неподвижной точки, заключаем, что $g(x_0) = x_0$. Итак, x_0 — неподвижная точка отображения g, что равносильно существованию решения уравнения $g(x) = x$.

10.6. (б) Данное дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad (\Pi_1)$$

с начальным условием

$$y(x_0) = y_0, \qquad (\Pi_2)$$

эквивалентно интегральному уравнению

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt. \qquad (\Pi_3)$$

Действительно, если $y = \varphi(x)$ — решение уравнения (Π_1), удовлетворяющее условию (Π_2), то после интегрирования (Π_1) получим (Π_3). Обратно, если $y = \varphi(x)$ — непрерывное решение уравнения (Π_3), то, дифференцируя правую часть по x, получим (Π_1), причем $y(x_0) = y_0$.

Покажем, что уравнение (Π_3) имеет единственное решение на некотором сегменте $[x_0 - h, x_0 + h]$ (условие на число h получим в ходе доказательства). Пусть $0 < h \leqslant a$, и рассмотрим множество

$$F = \{y \in C[x_0 - h, x_0 + h] : |y(x) - y_0| \leqslant b\},$$

которое является замкнутым в пространстве $C[x_0 - h, x_0 + h]$. Поэтому подпространство (F, ρ_F) представляет собой ПМП.

Введем на ПМП (F, ρ_F) отображение

$$g(y)(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt, \; x \in [x_0 - h, x_0 + h].$$

Ясно, что функция $g(y) \in C[x_0 - h, x_0 + h]$ в силу непрерывности интеграла с переменным верхним пределом. Так как функция $f \in C(\Pi)$, то по теореме Вейерштрасса существует такое число $m > 0$, что $|f(x,y)| \leqslant m$ для всех $(x, y) \in \Pi$. Из оценки

$$|g(y)(x) - y_0| \leqslant \left| \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt \right| \leqslant \int_{x_0}^{x} |f(t, y(t))|dt \leqslant m|x - x_0| \leqslant mh$$

имеем, что при выполнении условия $mh = b$ отображение g будет действовать в пространстве (F, ρ_F).

Далее, для всех произвольных элементов $y_1, y_2 \in F$, имеем

$$\rho(g(y_1), g(y_2)) = \max_{|x-x_0|\leqslant h} \left| \int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t))dt - \int_{x_0}^{x} f(t, y_2(t))dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{|x-x_0|\leqslant h} \left| \int_{x_0}^{x} |f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))|dt \right|.$$

Применяя условие Липшица и очевидное неравенство

$$|y_1(t) - y_2(t)| \leqslant \rho(y_1, y_2), \ t \in [x_0 - h, x_0 + h],$$

получаем, что

$$\rho(g(y_1), g(y_2)) \leqslant Lh\rho(y_1, y_2).$$

Если выбрать $Lh < 1$, то отображение $g : (F, \rho_F) \to (F, \rho_F)$ будет сжимающим.

Положим $h < \min\{\frac{b}{m}, \frac{1}{L}\}$. Тогда g — сжимающее отображение ПМП (F, ρ_F) в себя и, согласно принципу сжимающих отображений, имеет единственную неподвижную точку в (F, ρ_F) (т. е. для указанного h на сегменте $[x_0 - h, x_0 + h]$ существует ровно одно решение $y = \varphi(x)$ уравнения (Π_3), а с учетом сказанного вначале и задачи $(\Pi_1) - (\Pi_2)$).

(г) Рассмотрим в пространстве $C[a, b]$ отображение f, определенное формулой

$$f(x)(s) = x(s) - \frac{2}{M + m}\varphi(s, x(s)), \ s \in [a, b],$$

и покажем, что оно сжимающее. Пусть x_1, x_2 — произвольные элементы из $C[a,b]$. Тогда на основании теоремы Лагранжа о конечных приращениях для любого $s \in [a,b]$ будем иметь

$$|f(x_1)(s)-f(x_2)(s)| = \left|x_1(s)-x_2(s)-\frac{2}{M+m}[\varphi(s,x_1(s))-\varphi(s,x_2(s))]\right| =$$

$$= |x_1(s)-x_2(s)|\left|1-\frac{2}{M+m}\varphi_n(s,\theta(s))\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{M+m}|M+m-2\varphi_n||x_1(s)-x_2(s)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{M+m}(|M-\varphi|+|\varphi-m|)|x_1(s)-x_2(s)| = \frac{M-m}{M+m}\rho(x_1,x_2).$$

Отсюда, принимая во внимание соотношение $0 < \dfrac{M-m}{M+m} < 1$, получаем, что f — сжимающее отображение в $C[a,b]$. Следовательно, имеет единственную неподвижную точку $x^* \in C[a,b]$, т. е. $f(x^*) = x^*$. Значит,

$$x^*(s) \equiv x^*(s) - \frac{2}{M+m}\varphi(s,x^*(s)),$$

что равносильно тождеству $\varphi(s,x^*(s)) \equiv 0,\ s \in [a,b]$.

10.7. Очевидно, что при $\lambda = 0$ уравнение Фредгольма 2-го рода

$$x(t) - \lambda\int_a^b K(t,s)x(s)ds = y(t),\ a \leqslant t \leqslant b, \tag{Π_1}$$

имеет единственное непрерывное решение $x_0(t) \equiv y(t),\ t \in [a,b]$.

Пусть $\lambda \neq 0$, и рассмотрим отображение f, определенное в $C[a,b]$ равенством

$$f(x)(t) = \lambda\int_a^b K(t,s)x(s)ds + y(t). \tag{Π_2}$$

Покажем, что отображение f действует из $C[a,b]$ в $C[a,b]$. Действительно, положив $f(x)(t) = g(t)$ для произвольной точки $t \in [a,b]$ и любого Δt, такого, что $t+\Delta t \in [a,b]$, будем иметь

$$|g(t+\Delta t)-g(t)| = \left|\lambda \int_a^b K(t+\Delta t, s)x(s)ds + y(t+\Delta t) - \right.$$
$$\left. - \lambda \int_a^b K(t,s)x(s)ds - y(t)\right| \leqslant$$
$$\leqslant |\lambda| \int_a^b |K(t+\Delta t, s) - K(t,s)||x(s)|ds + |y(t+\Delta t) - y(t)|.$$

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Так как по условию $y \in C[a,b]$, то найдется такое $\delta_1 > 0$, что

$$|y(t+\Delta t) - y(t)| < \frac{\varepsilon}{2}, \ |\Delta t| < \delta_1. \qquad (\Pi_3)$$

Положим $m = \max\limits_{t\in[a,b]} |x(t)|$. Из непрерывности ядра $K(t,s)$ в квадрате $[a,b] \times [a,b]$ имеем, что оно равномерно непрерывно. Поэтому для выбранного ε найдется такое δ_2, что

$$\left|K(t+\Delta t, s) - K(t,s)\right| < \frac{\varepsilon}{2m(b-a)|\lambda|} \qquad (\Pi_4)$$

при любом $|\Delta t| < \delta_2$ и любом $s \in [a,b]$.

Возьмем $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогда при любом Δt, $|\Delta t| < \delta$, будут одновременно выполняться неравенства (Π_3) и (Π_4). Значит,

$$|g(t+\Delta t) - g(t)| < \varepsilon$$

для всех Δt, $|\Delta t| < \delta$, т. е. функция $g(t)$ непрерывна в каждой точке $t \in [a,b]$. Итак, $f : C[a,b] \to C[a,b]$.

Найдем условия, при которых отображение f будет сжимающим. Согласно определению метрики, в $C[a,b]$ имеем

$$\rho(f(x_1), f(x_2)) = \max_{t\in[a,b]} \left|\lambda \int_a^b K(t,s)[x_1(s) - x_2(s)]ds\right|.$$

Так как $|x_1(s) - x_2(s)| \leqslant \rho(x_1, x_2)$ для любого $s \in [a, b]$ и функция $K(t, s)$ ограничена (т.е. существует такое $M > 0$, что $|K(t, s)| \leqslant M$ при всех $(t, s) \in [a, b] \times [a, b]$), то

$$\rho(f(x_1), f(x_2)) \leqslant |\lambda| M(b - a)\rho(x_1, x_2).$$

Отсюда видно, что если

$$|\lambda| < \frac{1}{M(b - a)}, \qquad (\Pi_5)$$

то отображение f оказывается сжимающим. Теперь, учитывая, что $C[a, b]$ — ПМП и условие (Π_5) выполнено, применим принцип сжимающих отображений, откуда получим существование и единственность решения уравнения (Π_1) в $C[a, b]$, представляющего собой неподвижную точку отображения f. При этом решением интегрального уравнения (Π_1) называют всякую функцию из $C[a, b]$, которая, будучи подставлена в (Π_1), обращает его в тождество по t на отрезке $[a, b]$.

Если взять произвольную функцию $x_0 \in C[a, b]$, то из соотношений

$$x_{n+1} = \lambda \int_a^b K(t, s)x_n(s)ds + y(t), \ n = 0, 1, 2, \ldots$$

, получим последовательные приближения к указанному решению.

10.12. (а) По условию имеем следующую краевую задачу

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \lambda x^2(t) + y(t), \ t \in [0, 1], \qquad (\Pi_1)$$

$$x(0) = 0, \ x(1) = 0, \qquad (\Pi_2)$$

где $y \in C[0, 1]$, λ — числовой параметр.

Сведем данную краевую задачу к интегральному уравнению. Для этого, интегрируя дифференциальное уравнение (Π_1) дважды в пределах от 0 до t, получаем уравнение

$$x(t) = \int_0^t (t - s)[\lambda x^2(s) + y(s)]ds + c_1 t + c_2. \qquad (\Pi_3)$$

Теперь, принимая во внимание краевые условия (Π_2), находим

$$c_2 = 0, \ c_1 = \int_0^1 (s - 1)[\lambda x^2(s) + y(s)]ds.$$

Отсюда, подставляя в (Π_3) найденные значения c_1 и c_2, окончательно имеем

$$x(t) = \int_0^1 k(t,s)[\lambda x^2(s) + y(s)]ds, \qquad (\Pi_4)$$

где ядро $k(t,s)$ определяется равенством

$$k(t,s) = \begin{cases} s(t-1), & \text{при } 0 \leqslant s \leqslant t, \\ t(s-1), & \text{при } t \leqslant s \leqslant 1, \end{cases}$$

и называется *функцией Грина* краевой задачи (Π_1) – (Π_2). Ясно, что функция $k \in C([0,1] \times [0,1])$, причем

$$\max_{t,s \in [0,1]} |k(t,s)| = 1.$$

Рассмотрим отображение $f : C[0,1] \to C[0,1]$, определенное равенством

$$f(x)(t) = \int_0^1 k(t,s)[\lambda x^2(s) + y(s)]ds,$$

в замкнутом шаре $\overline{B}(x_0, r)$ пространства $C[0,1]$, где

$$x_0(t) = \int_0^1 k(t,s)y(s)ds.$$

Покажем, что отображение f действует в шаре $\overline{B}(x_0, r)$. Для произвольной точки $x \in \overline{B}(x_0, r)$ имеем

$$\rho(f(x), x_0) = \max_{t \in [0,1]} |f(x)(t) - x_0(t)| = \max_{t \in [0,1]} \left| \lambda \int_0^1 k(t,s)x^2(s)ds \right| \leqslant$$
$$\leqslant |\lambda| \max_{t \in [0,1]} |x(t)|^2.$$

Так как $x_0 \in C[0,1]$, то, полагая

$$\alpha = \max_{t \in [0,1]} |x_0(t)|,$$

заключаем, что

$$\max_{t\in[0,1]} |x(t)|^2 = \max_{t\in[0,1]} |(x(t) - x_0(t)) + x_0(t)|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \max_{t\in[0,1]} |x(t) - x_0(t)|^2 + 2\alpha \max_{t\in[0,1]} |x(t) - x_0(t)| + \alpha^2 \leqslant$$

$$\leqslant (r+\alpha)^2.$$

Отсюда получаем следующую оценку:

$$\rho(f(x), x_0) \leqslant |\lambda|(r+\alpha)^2.$$

Если параметр λ удовлетворяет условию

$$|\lambda| \leqslant \frac{r}{(r+\alpha)^2}, \qquad (\Pi_5)$$

то выполнятся неравенство

$$\rho(f(x), x_0) \leqslant r,$$

т. е. $f(x) \in \overline{B}(x_0, r)$.

Покажем, что отображение $f : \overline{B}(x_0, r) \to \overline{B}(x_0, r)$ является сжимающим. Рассмотрим произвольные элементы $x_1, x_2 \in \overline{B}(x_0, r)$. Тогда

$$\rho(f(x_1), f(x_2)) = \max_{t\in[0,1]} \left|\lambda \int_0^1 [x_1^2(s) - x_2^2(s)]ds\right| \leqslant$$

$$\leqslant |\lambda| \max_{t\in[0,1]} |x_1(s) + x_2(s)|\rho(x_1, x_2) \leqslant |\lambda| \max_{t\in[0,1]} \Big|(x_1(t) - x_0(t)) +$$

$$+ (x_2(t) - x_0(t)) + 2x_0(t)\Big| \cdot \rho(x_1, x_2) \leqslant 2|\lambda|(r+\alpha)\rho(x_1, x_2).$$

Следовательно, при выполнении неравенства

$$|\lambda| < \frac{1}{2(r+\alpha)} \qquad (\Pi_6)$$

будем иметь, что f — сжимающие отображения в $\overline{B}(x_0, r)$. Так как $\overline{B}(x_0, r)$ — замкнутое множество в ПМП $C[0,1]$, то $(\overline{B}(x_0, r), \rho_{\overline{B}(x_0,r)})$ — ПМП, и на основании принципа сжимающих отображений заключаем, что интегральное уравнение (Π_4), а значит, и краевая задача $(\Pi_1)-(\Pi_2)$, имеет единственное решение в $\overline{B}(x_0, r)$ при

$$|\lambda| < \min\left\{\frac{r}{(r+\alpha)^2}, \frac{1}{2(r+\alpha)}\right\},$$

которое находится с помощью метода последовательных приближений по формулам

$$x_0(t) = \int_0^1 k(t,s)y(s)ds,$$
$$\vdots$$
$$x_n(t) = \int_0^1 k(t,s)[\lambda x_{n-1}^2(s) + y(s)]ds, \ n = 1, 2, \ldots .$$

§11

11.11. Ясно, что l_p^0 – подпространство пространства l_p и оно неполно. Действительно, рассмотрим последовательность

$$x_1 = (1, 0, 0, \ldots), x_2 = (1, \frac{1}{2}, 0, \ldots), \ldots, x_n = (1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2^n}, 0, \ldots).$$

Так как при $m < n$

$$\rho(x_n, x_m) = \left(\sum_{i=m+1}^{n} \frac{1}{2^{ip}}\right)^{1/p} \to 0, \ m \to \infty,$$

то заключаем, что последовательность (x_n) фундаментальна в пространстве l_p^0, но не имеет предела в нем. Действительно, предположим, что существует $x_0 = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{k_0}, 0, 0, \ldots) \in l_p^0$, такое, что $\rho(x_n, x_0) \to 0$ при $n \to \infty$. Но, с другой стороны, для достаточно больших n и в силу равенства

$$\rho(x_n, x_m) = \left(\sum_{k=1}^{k_0} |\xi_k - \frac{1}{2^k}|^p + \sum_{k=k_0+1}^{n} \frac{1}{2^{kp}}\right)^{1/p}$$

приходим к абсурдному заключению

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=k_0+1}^{n}\frac{1}{2^{kp}}=0.$$

Обозначим пополнение l_p^0 через Y. Так как l_p^0 плотно в l_p, то Y изометрично пространству l_p.

§12

12.3. (б) ($\Rightarrow$) Пусть M — ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$. Тогда его можно заключить в куб с достаточно большим ребром. Разобьем этот куб на маленькие кубики, ребра которым меньше, чем $\frac{2\varepsilon}{\sqrt{n}}$, где $\varepsilon>0$ — произвольное число. Центры кубиков образуют конечную ε-сеть множества M.

($\Leftarrow$) Пусть M — вполне ограниченное и S — конечная сеть для M, состоящая из k точек. Рассмотрим некоторую фиксированную точку $x_0\in\mathbb{R}^n$. Для произвольной точки $x\in M$ существует точка $s_i\in S$, такая, что $\rho(x,s_i)<\varepsilon$. Отсюда в силу неравенства треугольника получаем

$$\rho(x_0,x)\leqslant\rho(x_0,s_i)+\rho(s_i,x)\leqslant\max\{\rho(x_0,s_i):i=\overline{1,k}\}+\varepsilon<\infty.$$

Положив $x_0=(0,0,\ldots,0)$, имеем

$$M\subset B(x_0,\max\{\rho(x_0,s_i):i=\overline{1,k}\}+\varepsilon).$$

12.4. Например, в пространстве l_2 рассмотрим множество $M=\{x_n:n\in\mathbb{N}\}$, где $x_n=\{0,0,\ldots,0,1,0,\ldots\}$ для каждого $n\in\mathbb{N}$. Так как $\rho(0,x_n)=1$ для любого n, то M — ограниченное множество. Из равенства $\rho(x_n,x_m)=\sqrt{2}$ при $n\neq m$ следует, что при $0<\varepsilon<\frac{1}{\sqrt{2}}$ множество M не имеет конечной ε-сети.

12.6. (а) Так как A — конечная ε-сеть множества M, то каждый шар $B(a_0,\varepsilon)$, $a_0\in A$, содержит хотя бы одну точку из M. Возьмем по одной точке $b\in B(a_0,\varepsilon)\cap M$ для каждого $a_0\in A$. Положим $B=\{b\}$. Тогда для любой точки $x\in M$ найдется точка $a_0\in A$, такая, что $\rho(x_0,a)<\varepsilon$, а для точки $x \in M$ найдется точка $a_0 \in A$, такая, что $\rho(a_0, b) < \varepsilon$. Отсюда, согласно неравенству треугольника,

$$\rho(b, x) \leqslant \rho(b, a_0) + \rho(a_0, x) < 2\varepsilon,$$

т. е. множество $B \subset M$ является 2ε-сетью для M.

(в) Так как F — вполне ограниченное множество, то для любого $\varepsilon > 0$ существует конечная $\frac{\varepsilon}{3}$-сеть $\{x_1, \ldots, x_{n(\varepsilon)}\} \subset F$. Но тогда $\bigcup\limits_{i=1}^{n(\varepsilon)} B(x_i, \frac{\varepsilon}{3}) \supset F$. Положим $F_i = \overline{B}(x_i, \frac{\varepsilon}{3}) \cap F \neq \varnothing$. Ясно, что F_i являются замкнутыми подмножествами в F, причем $d(F_i) \leqslant \frac{2}{3}\varepsilon$. Итак, для любого $\varepsilon > 0$ имеем: $F = \bigcup\limits_{i=1}^{n(\varepsilon)} F_i$, где F_i — непустые замкнутые множества и $d(F_i) < \varepsilon$ для каждого i.

12.7. Пусть (a_n) — фиксированная последовательность в l_2. Покажем, что множество

$$M = \{x \in l_2 : x = (x_n),\ |x_n| \leqslant |a_n| \text{ для каждого } n \in \mathbb{N}\}$$

вполне ограничено в l_2.

Возьмем $\varepsilon > 0$. Тогда в силу сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$ найдется номер k_0, такой, что

$$\sum_{n=k_0+1}^{\infty} |a_n|^2 < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2.$$

Рассмотрим множество

$$M_0 = \{(x_n) : x_n = 0 \text{ при } n > k_0\} \subset M.$$

Это множество ограничено (так как $\sup\limits_{1 \leqslant n \leqslant k_0} |x_n| \leqslant \sup\limits_{1 \leqslant n \leqslant k_0} |a_n|$) и конечномерно. Значит, согласно задаче 12.3(б), оно вполне ограничено. Поэтому для M_0 существует конечная $\frac{\varepsilon}{2}$-сеть. Каждой точке $x = (x_n) \in M_0$ сопоставим точку $x_0 = (b_1, b_2, \ldots, b_{k_0}, 0, 0, \ldots)$, такую, что $\rho_{M_0}(x, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$. Но тогда для любой $x \in M$ имеем $\rho_{l_2}^2(x, x_0) < (\frac{\varepsilon}{2})^2 + (\frac{\varepsilon}{2})^2$, т. е. $\frac{\varepsilon}{2}$-сеть будет ε-сетью для множества M.

В частности, полагая $a_n = \frac{1}{2^n}$ для каждого $n \in \mathbb{N}$, получаем решение задачи 12.7.

12.12. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ положим

$$x_n(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{n+1}, \\ 2n(n+1)t - 2n, & \text{при } \frac{1}{n+1} \leqslant t \leqslant \frac{2n+1}{2n(n+1)}, \\ -2n(n+1)t + 2n + 2, & \text{при } \frac{2n+1}{2n(n+1)} \leqslant t \leqslant \frac{1}{n}, \\ 0, & \text{при } \frac{1}{n} \leqslant t \leqslant 2\pi. \end{cases}$$

Непосредственно из определения функции x_n имеем, что

$$\rho(0, x_n) = 1, \ \rho(x_n, x_m) = 1, \ n \neq m.$$

Предположим противное, т. е. для множества $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ существует конечная сеть $S = \{y_1, \ldots, y_n\}$. Так как множество $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ бесконечно, а S – конечно, то существуют функции x_n и x_m, такие, что при $n \neq m$ выполнены неравенства

$$\rho(x_n, y_l) < \frac{1}{2}, \ \rho(x_m, y_l) < \frac{1}{2}$$

для одной и той же функции $y_l \in S$. Отсюда, согласно неравенству треугольника имеем

$$1 = \rho(x_n, x_m) \leqslant \rho(x_n, y_l) + \rho(y_l, x_m) < 1,$$

что приводит к абсурду.

§13

13.6. Пусть (X, ρ) – компактное МП и $f : (X, \rho) \to (Y, \sigma)$ — непрерывное отображение, причем $f(X) = Y$. Согласно теореме 13.1, пространство (Y, σ) также компактно. Рассмотрим произвольное замкнутое множество A в (X, ρ). В силу теоремы 8.1, подпространство (A, ρ_A) полно, а в силу предложения 12.2, (A, ρ) вполне ограничено. Следовательно, (A, ρ_A) — компактное МП. Положим $f(A) = B$. Ясно, что (B, σ_B) компактно, а значит, оно полно. Теперь, применяя теорему 8.1, заключаем, что множество B

замкнуто в (Y, σ). Итак, образ любого замкнутого множества в (X, ρ) при непрерывном отображении f есть множество, замкнутое в (Y, σ), т. е. f — замкнутое множество.

13.7. Пусть $g : (X, \rho) \to (Y, \sigma)$ — отображение, обратное к f, а A — произвольное замкнутое множество в (X, ρ). Так как $g^{-1}(A) = f(A)$, то $g^{-1}(A)$ — замкнутое множество в (Y, σ) как образ замкнутого отображения при замкнутом отображении f (см. задачу 13.6). Отсюда, согласно теореме 7.2$'$ заключаем, что g — непрерывно, а стало быть, f — гомеоморфизм.

13.9. Пусть для определенности последовательность (f_n) не возрастает, т. е. $f_n(x) \geqslant f_{n+1}(x)$ при любом $n \in \mathbb{N}$ и любом $x \in X$. Положим $g_n(x) = f_n(x) - f(x)$. Тогда функция $g_n \in C(X)$ при каждом $n \in \mathbb{N}$, $g_n \to 0$ на X и $g_n \geqslant g_{n+1}$. Покажем, что $g_n \rightrightarrows 0$. Возьмем произвольное ε. Тогда для любого $x \in X$ найдется такой номер $n(x)$, что

$$0 \leqslant g_{n(x)}(x) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

В силу непрерывности функций g_n и монотонности последовательности (g_n) существует окрестность U_x точки x, такая, что

$$0 \leqslant g_n(t) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \tag{Π_1}$$

если $t \in U_x$ и $n \geqslant n(x)$. Семейство $\{U_x : x \in X\}$ образует открытое покрытие пространства (X, ρ). Поскольку (X, ρ) — компактное МП, то найдется конечное множество точек $\{x_1, \ldots, x_m\} \subset X$, таких, что

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}. \tag{Π_2}$$

Положив $n(\varepsilon) = \max\{n(x_1), n(x_2), \ldots, n(x_m)\}$, на основании ($\Pi_1$) и ($\Pi_2$) заключаем, что

$$0 \leqslant g_n(t) \leqslant \varepsilon$$

при всех $t \in X$, если $n > n(\varepsilon)$, что равносильно равномерной сходимости последовательности (g_n) к 0, а значит, $f_n \rightrightarrows f$.

Отметим, что теорема Дини устанавливает случай, когда из поточечной сходимости непрерывных функций следует, что эта сходимость является равномерной. При этом требование компактности МП существенно (например, если $f_n(x) = \dfrac{1}{nx+1}$, $x \in (0,1)$, то последовательность (f_n) монотонно убывающая и $f_n \to 0$ поточечно на $(0,1)$, но равномерной сходимости нет).

13.11. Для каждой точки $x \in X$ выберем такое число $\varepsilon(x) > 0$, что открытый шар $B(x, 2\varepsilon(x))$ содержится в элементе покрытия $\mathcal{A}$. Открытое покрытие $\{B(x, \varepsilon(x)) : x \in X\}$ имеет конечное подпокрытие, т. е. существует конечное множество точек $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset X$, такое, что

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon(x_i)).$$

Положим $\varepsilon = \min\{\varepsilon(x_1), \ldots, \varepsilon(x_n)\}$. Тогда число ε обладает требуемым свойством.

Докажем теорему 13.3. Пусть $\varepsilon > 0$ и $\delta = \delta(\varepsilon)$ – число Лебега открытого покрытия $\{f^{-1}(B_Y(y, \frac{\varepsilon}{2})) : y \in Y\}$ пространства (X, ρ). Если $\rho(x, x') < \delta$, то найдется такая точка $y \in Y$, что $x' \in B_X(x, \delta) \subset$ $\subset f^{-1}(B_Y(y, \frac{\varepsilon}{2}))$, и потому $\sigma(f(x), f(x')) < \varepsilon$.

§14

14.1. (а) Пусть $\{K_i : i = \overline{1, m}\}$ – семейство компактных множеств в (X, ρ), и пусть $K = \bigcup\limits_{i=1}^{m} K_i$. Покажем, что K – компактное множество в (X, ρ). Рассмотрим произвольное открытое покрытие $\{U_s : s \in S\}$ множества K открытыми в (X, ρ) множествами. Так как $K_i \subset K$ для каждого $i = \overline{1, m}$, то $\{U_s : s \in S\}$ является открытым покрытием каждого из множеств K_i. В силу компактности K_i, согласно теореме 14.1, найдется конечное подпокрытие $\{U_{s,j} : j = \overline{1, l_i}\} \subset \{U_s : s \in S\}$ множества K_i : $\bigcup\limits_{j=1}^{l_i} U_{s,j} \supset K_i$. Отсюда заключаем, что $\bigcup\limits_{i=1}^{m} \bigcup\limits_{j=1}^{l_i} U_{s,j} \supset K$, т. е. семейство $\{\{U_{s,j} : j = \overline{1, l_i}\} : i = \overline{1, m}\}$ есть конечное подпокрытие покрытия $\{U_s : s \in S\}$ множества K.

14.2. (а) Рассмотрим произвольную точку $a \in A$ и систему открытых шаров $\{B(a, n) : n \in \mathbb{N}\}$. Ясно, что $A \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B(a, n)$. Если бы множество A было компактным, то система $\{B(a, n) : n \in \mathbb{N}\}$ содержала бы конечную подсистему $\{B(a, n_k) : k = \overline{1, l}\}$, такую, что $A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{l} B(a, n_k)$. Полагая $n_0 = \max\{n_k : k = \overline{1, l}\}$, получаем включение $A \subset B(a, n_0)$, которое противоречит неограниченности множества A.

(г) Пусть (x_n) — произвольная фундаментальная последовательность в (X, ρ). Согласно задаче 8.1(а) пункт (ii), она ограничена, т. е. содержится в некотором замкнутом шаре, который по условию компактен. Итак, в компактном пространстве (B, ρ_B) имеем последовательность (x_n), из которой можно выделить сходящую подпоследовательность (x_{n_k}) в (B, ρ_B), $x_{n_k} \to x_0 \in B$ (см. теорему 13.1). Но тогда и сама последовательность (x_n) сходится к точке x_0, $x_n \to x_0 \in X$ вследствие предложения 8.3.

14.3. (а) Рассмотрим последовательность (x_n) в $(\mathbb{Q}, \rho)$, определенную следующим образом:

$$x_0 = 1,\ x_n \doteq \frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}),\ n = 1, 2, \ldots .$$

Ясно, что $x_n > 0$ и $x_n \in \mathbb{Q}$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Покажем, что $x_n \in E$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Имеем

$$x_n^2 = \frac{1}{4}\left(x_{n-1}^2 + 4 + \frac{4}{x_{n-1}^2}\right) = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{x_{n-1}^2}{2} + \frac{2}{x_{n-1}^2}\right).$$

Отсюда, используя известное неравенство, $t + \frac{1}{t} \geqslant 2$ при $t > 0$, получаем, что

$$x_n^2 = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{x_{n-1}^2}{2} + \frac{2}{x_{n-1}^2}\right) \geqslant 2.$$

Так как $x_n \in \mathbb{Q}$ для каждого n, то $x_n^2 \neq 2$. Значит, $x_n^2 > 2$. Последовательность (x_n) убывающая, что вытекает из неравенства

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{x_n^2}\right) < 1,\ n = 1, 2, \ldots .$$

Отсюда имеем, что $x_n < x_1 = \frac{3}{2}$ и $x_n^2 < \frac{9}{4} < 3$. Таким образом, для элементов последовательности (x_n) имеем оценку: $2 < x_n^2 < 3$. Принимая во внимание то, что последовательность ограниченная снизу и убывающая, получаем ее сходимость в $\mathbb{R}$: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2}$. Но $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, а значит, $\sqrt{2} \notin E$. Следовательно, множество E замкнуто и ограничено, но не является компактным (на основании теоремы 13.1). Отсюда приходим к выводу, что требование полноты МП в теореме 14.2 существенно.

14.4. (а) Так как система $\{G_n\}$ есть открытое покрытие множества K, то из компактности K следует, что найдется конечная подсистема множеств $\{G_{n_1}, G_{n_2}, \ldots, G_{n_m}\} \subset \{G_n\}$, покрывающая K. Полагая $n_0 = \max\{n_i : i = \overline{1, m}\}$ и учитывая возрастание системы $\{G_n\}$, имеем включение $K \subset G_{n_0}$.

(б) Положим $X \setminus F_i = G_i$, $i \in \mathbb{N}$. Тогда $\{G_i\}$ — возрастающая последовательность открытых множеств. Из равенства $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} F_i = \varnothing$ следует, что $X = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} G_i \supset K$. Отсюда в силу пункта (а) имеем, что существует такой номер i_0, что $K \subset G_{i_0}$. Так как по условию $F_{i_0} \subset K$, то $F_{i_0} = \varnothing$.

14.10. (а) Ясно, что $\rho(F, K) = \delta \geqslant 0$. Так как (см. предложение 1.2)

$$\rho(F, K) = \inf_{x \in K} \rho(x, F),$$

то функция $f(x) = \rho(x, F)$, определенная на множестве K, непрерывна. Поскольку K компактно, то, по теореме 14.4, существует точка $x_0 \in K$, такая, что $f(x_0) = \delta$. Учитывая, что множество F замкнуто и $F \cap K = \varnothing$, получаем $x_0 \notin F$. Поэтому $\rho(x_0, F) > 0$, т. е. $\delta > 0$. Таким образом, $\rho(F, K) = \rho(F, x_0) > 0$.

(б) Так как $\mathrm{Fr}G$ — замкнутое множество и $K \cap \mathrm{Fr}G = \varnothing$, то согласно пункту (а) имеем $\rho(K, \mathrm{Fr}G) > 0$.

(в) Так как F — замкнутое множество и $x_0 \notin F$, то $\rho(x_0, F) = \delta > 0$ (см. задачу 7.3). Рассмотрим замкнутый шар $\overline{B}(x_0, \delta + 1)$, который компактен в $\mathbb{R}^n$. Поэтому $K = \overline{B}(x_0, \delta + 1) \cap F \neq \varnothing$ есть замкнутое ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$, а значит, множество K компактно в $\mathbb{R}^n$, причем $x_0 \notin K$. Принимая во внимание замкнутость множества $\{x_0\}$ в $\mathbb{R}^n$ и $x_0 \notin K$, заключаем, что, согласно пункту (а), найдется точка $x_1 \in K \subset F$, такая, что $\rho(x_0, x_1) = \rho(x_0, K) \leqslant \delta + 1$. Следовательно, справедливо неравенство $\rho(x_0, F) \leqslant \rho(x_0, K)$. С другой стороны, для любой точки $x \in F \setminus K$ имеем

$$\rho(x, x_0) \geqslant \delta + 1 \geqslant \rho(x_0, K).$$

Отсюда заключаем, что $\rho(x_0, F) \geqslant \rho(x_0, K)$, которое вместе с полученным выше неравенством устанавливает соотношение $\rho(x_0, F) = \rho(x_0, K)$. Теперь, используя пункт (а), получаем, что существует точка $x \in K$, для которой выполняется равенство $\rho(x_0, x) = \rho(x_0, F)$.

14.13. (а) Рассмотрим функцию $g : (X, \rho) \to \mathbb{R}$, определенную равенством

$$g(x) = \rho(x, f(x)), \ x \in X.$$

Ясно, что точка $x \in X$ является решением уравнения $f(x) = x$ тогда и только тогда, когда $g(x) = 0$. Предположим, что такой точки не существует, т. е. $g(x) > 0$ для всех $x \in X$. Так как функция g непрерывна, то ее наименьшее значение положительно (см. следствие 14.1) и достигается в некоторой точке $x_0 \in X$, $g(x_0) \leqslant g(x)$ для любого $x \in X$. Но по условию задачи имеем

$$g(f(x_0)) = \rho\big(f(x_0), f(f(x_0))\big) < \rho(x_0, f(x_0)) = g(x_0),$$

что противоречит определению точки $x_0 \in X$.

14.14. Указание. (а) Пусть E — ограниченное множество и $x_0 \in E' \setminus E$. Тогда функция $f(x) = \dfrac{1}{x - x_0}$, $x \in E$, непрерывна, но не ограничена. В случае, когда множество E не ограничено, достаточно взять функцию $f(x) = x$.

(б) Рассмотрим функцию $g(x) = \dfrac{1}{1 + (x - x_0)}$, если E — ограниченное множество. Тогда функция g ограничена, $0 < g(x) < 1$, и непрерывна, но не имеет максимума. Если E — не ограниченное множество, то положить $g(x) = \dfrac{x^2}{1 + x^2}$.

§15

15.1. (а) Пусть f — некоторая функция из $C[0,1]$, и обозначим через A заданное множество. Найдем представление функции $x \in A$ через f. Для этого рассмотрим следующую краевую задачу:

$$\begin{cases} x''(t) = f(t), & (\Pi_1) \\ x(0) = 0,\ x(1) = 0. & (\Pi_2) \end{cases}$$

Интегрируя дифференциальное уравнение (Π_1) и учитывая условия (Π_2), получим

$$x(t) = ct + \int_0^t (t - s) f(s) ds. \qquad (\Pi_3)$$

Полагая $t = 1$ в равенстве (Π_3) и принимая во внимание второе краевое условие $x(1) = 0$, будем иметь

$$0 = c + \int_0^1 (1 - s) f(s) ds.$$

Отсюда находим

$$c = \int_0^1 (s-1)f(s)ds.$$

Подставляя значение c в формулу ($П_3$), получим, что

$$x(t) = t\int_0^1 (s-1)f(s)ds + \int_0^t (t-s)f(s)ds$$

или, в другой записи,

$$x(t) = \int_0^t s(t-1)f(s)ds + \int_t^1 t(s-1)f(s)ds. \qquad (П_4)$$

Положим

$$G(t,s) = \begin{cases} s(t-1), & \text{при } 0 \leqslant s \leqslant t, \\ t(s-1), & \text{при } t \leqslant s \leqslant 1. \end{cases}$$

Тогда формула ($П_4$) примет вид

$$x(t) = \int_0^1 G(t,s)f(s)ds, \qquad (П_5)$$

где $G(t,s)$ — функция Грина, непрерывная в квадрате $[0,1] \times [0,1]$, причем справедлива оценка $|G(t,s)| \leqslant 1$.

Покажем, что функции, представимые в виде ($П_5$), удовлетворяют теореме Арцела–Асколи, если $|f(x)| \leqslant 1$. Равномерная ограниченность следует из равенства ($П_5$). Для любых точек $t_1, t_2 \in [0,1]$ имеем

$$|x(t_1) - x(t_2)| = \left|\int_0^1 G(t_1,s)f(s)ds - \int_0^1 G(t_2,s)f(s)ds\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1 |G(t_1,s) - G(t_2,s)||f(s)|ds \leqslant \int_0^1 |G(t_1,s) - G(t_2,s)|ds.$$

Так как функция G непрерывна, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое, что для всех $t_1, t_2 \in [0,1]$, удовлетворяющих условию $|t_1 - t_2| < \delta$, выполняется неравенство $|x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon$ для каждой функции $x \in A$. Итак, условия теоремы Арцела—Асколи выполнены, а значит, множество A предкомпактно в $C[0, 1]$.

15.2. (а) Установим, что множество $M = \{t^n : n \in \mathbb{N}\}$ не является предкомпактным в $C[0, 1]$, а именно: для $M \subset C[0, 1]$ не выполняется теорема Арцела—Асколи.

Ясно, что M — равномерное ограниченное множество. Покажем, что оно не будет равностепенно непрерывным. Так как функция t^n равномерно непрерывна на отрезке $[0, 1]$, то для любого $\varepsilon \in (0, 1)$ найдется $\delta > 0$, такое, что $|t_1^n - t_2^n| < \varepsilon$ для всех $t_1, t_2 \in [0, 1]$, для которых $|t_1 - t_2| < \delta$. Положим $t_1 = 1$. Тогда при всех t, где $1 - t < \delta$, следует, что $t > (1 - \varepsilon)^{\frac{1}{n}}$ или $(1 - t) < 1 - (1 - \varepsilon)^{\frac{1}{n}}$, т. е. в качестве $\delta > 0$ нужно взять число, не большее $1 - (1 - \varepsilon)^{\frac{1}{n}}$. Это число зависит от n и $\lim\limits_{n\to\infty} [1 - (1 - \varepsilon)^{\frac{1}{n}}] = 0$. Итак, число $\delta > 0$, которое годилось бы для всех функций t^n, не существует, т. е. M не является равностепенно непрерывным.

15.3. (а) Рассмотрим множество функций

$$x_n(t) = B \cdot \sin 2^n \pi t, \ n \in \mathbb{N}, \ t \in [0, 1].$$

Ясно, что x_n принадлежат множеству для любого $n \in \mathbb{N}$. Из определения метрики в $C[0, 1]$ при $k > n$ имеем

$$\rho(x_n, x_k) = \max_{t\in[0,1]} |x_n(t) - x_k(t)| \geqslant \left| x_n\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right) - x_k\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)\right| = 1.$$

Значит, последовательность (x_n) не содержит сходящейся подпоследовательности, а следовательно, рассмотренное множество не предкомпактно.

15.9. Покажем, что для Q_∞ существует конечная ε-сеть. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда найдется такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что $\frac{1}{2^{n_0}} < \frac{\varepsilon}{2}$. Каждой точке $x = (\xi_n) \in Q_\infty$ сопоставим точку $x_0 = (\xi_1, \ldots, \xi_{n_0}, 0, \ldots) \in Q_\infty$. Тогда

$$\rho(x, x_0) = \left(\sum_{k=n_0+1}^{\infty} \xi_k^2\right) \leqslant \left(\sum_{k=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{4^k}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}\cdot 2^{n_0}} < \frac{1}{2^{n_0}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поскольку множество точек $x_0 \in Q_\infty$ вполне ограничено (как ограниченное множество в n_0-мерном пространстве $\mathbb{R}^{n_0}$), то для него существует конечная $\frac{\varepsilon}{2}$-сеть, которая будет ε-сетью для Q_∞.

Список использованной литературы

Математика, вероятно, никогда не достигла бы такой степени совершенства, если бы древние не приложили столько усилий для изучения вопросов, которыми сегодня многие пренебрегают из-за мнимой бесплодности.

Л. Эйлер

1. *Александров П. С.* Введение в общую теорию множеств и функций. – М.: Гостехиздат, 1948.

2. *Александров П. С.* Введение в теорию множеств и общую топологию. – М.: Высшая школа, 1979.

3. *Александрян Р. А., Мирзаханян Э. А.* Общая топология. – М.: Наука, 1977.

4. *Антоневич А. Б., Князев П. Н., Радыно Я. В.* Задачи и упражнения по функциональному анализу. – Минск: Вышэйшая школа, 1978.

5. *Архангельский А. В., Пономарев В. Н.* Основы общей топологии в задачах и упражнениях. – М.: Наука, 1974.

6. *Бичегкуев М. С.* Метрические пространства: Задачи и теоремы. – Владикавказ: СОГУ, 1993.

7. *Борисович Ю. Г., Близняков Н. М., Израилевич Я. А., Фоменко Т. Н.* Введение в топологию. – М.: Наука, Физматлит, 1995.

8. *Гелбаум Б, Олмстед Дж.* Контрпримеры в анализе. – М.: Мир, 1967.

9. *Городецкий В. В., Нагнибида Н. И., Настасиев П. П.* Методы решения задач по функциональному анализу. – Киев: Выща школа, 1990.

10. *Гудиев А. Х.* Задачник по функциональному анализу. – Орджоникидзе: СОГУ, 1982.

11. *Дьедонне Ж.* Основы современного анализа. – М.: Мир, 1965.

12. *Зорич В. А.* Математический анализ: В 2-х ч. – М.: Наука, Ч. I, 1981; Ч. II, 1984.

13. *Камынин Л. И.* Курс математического анализа. В 2-х ч. – М.: МГУ. Т. I, 2001. Т. II, 1995.

14. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1984.

15. *Кириллов А. А., Гвишиани А. Д.* Теоремы и задачи функционального анализа. – М.: Наука, 1979.

16. *Князев П. Н.* Функциональный анализ. – Минск: Вышэйшая школа, 1985.

17. *Коллатц Л.* Функциональный анализ и вычислительная математика. – М.: Мир, 1969.

18. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1989.

19. *Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И.* Интегральные уравнения. – М.: Наука, 1976.

20. *Кудрявцев Л. Д.* Курс математического анализа: В 3-х т. – М.: Высшая школа. Т. I. II, 1988; Т. III, 1989.

21. *Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. Н., Шабунин М. Н.* Сборник задач по математическому анализу: Функции нескольких переменных. – М.: Физматлит, 1995.

22. *Кутателадзе С. С.* Основы функционального анализа. – Новосибирск: Наука, 1983.

23. *Леонтьева Т. А., Панферов В. С., Серов В. С.* Задачи по теории функций действительного переменного. – М.: МГУ, 1997.

24. *Очан Ю. С.* Сборник задач по математическому анализу. – М.: Просвещение, 1981.

25. *Порошкин А. Г.* Функциональный анализ. – М.: Вузовская книга, 2004.

26. *Решетняк Ю. Г.* Сборник задач по курсу математического анализа. – Новосибирск: НГУ, 1979.

27. *Решетняк Ю. Г.* Курс математического анализа. – Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, Ч. I, кн. 1, 1999; Ч. I, кн. 2, 1999; Ч. II, кн. 1, 2000; Ч. II, кн. 2, 2001.

28. *Рудин У.* Основы математического анализа. – М.: Мир, 1976.

29. *Садовничий В. А.* Теория операторов. – М.: МГУ, 1986.

30. *Треногин В. А., Писаревский Б. М., Соболева Т. С.* Задачи и упражнения по функциональному анализу. – М.: Наука, 1984.

31. *Хаусдорф Ф.* Теория множеств. – М.-Л.: Гостехиздат, 1937.

32. *Шварц Л.* Анализ: Т. 1 – М.: Мир, 1972.

33. *Шилов Г. Е.* Математический анализ: Специальный курс. – М.: Физматгиз, 1961.

34. *Энгелькинг Р.* Общая топология. – М.: Мир, 1986.

Указатель основных обозначений

Когда мы воспроизводим знак, то мы тем самым создаем определенную опору нашей мысли, — определенный центр, вокруг которого возникают различные представления.

Г. Фреге

ρ	— метрика
ρ_M	— метрика, индуцированная метрикой ρ на подмножестве M
$\rho_X \times \rho_Y$	— произведение метрик ρ_X и ρ_Y
ρ_H	— метрика Хаусдорфа
$\rho(x, y)$	— расстояние между точками x и y
$\rho(x, A)$	— расстояние от точки x до множества A
$\rho(A, B)$	— расстояние от множества A до множества B
$d(A)$	— диаметр множества A
Δ_X	— диагональ множества X
$\lvert X\rvert$	— мощность множества X
$B(A, r)$	— шаровая окрестность (или r-шар) множества A
$B(x_0, r)$	— открытый шар с центром в точке x_0 радиуса r
$\overline{B}(x_0, r)$	— замкнутый шар с центром в точке x_0 радиуса r
$S(x_0, r)$	— сфера с центром в точке x_0 радиуса r
$C(x_0)$	— компонента связности точки x_0 в МП
$\overline{A}$	— замыкание множества A
A'	— производное множество множества A
$\mathrm{Int}A$	— внутренность множества A
$\mathrm{Fr}A$	— граница множества A
$\overline{B}^M$	— замыкание множества B в подпространстве (M, ρ_M)
$\mathrm{Int}_M B$	— внутренность множества A в подпространстве (M, ρ_M)

$\mathrm{Fr}_M B$ — граница множества A в подпространстве (M, ρ_M)

$B_M(x_0, r)$ — открытый шар с центром в точке x_0 радиуса r в подпространстве (M, ρ_M)

$X(f < a)$, $X(f > a)$, $X(f \leqslant a)$, $X(f \geqslant a)$ — множества Лебега функции f, определенной на множестве X

Γ_f — график функции f

$f|_A$ — сужение отображения f на множество A

$f \circ g$ — композиция отображений f и g

Обозначения пространств

(X, ρ)	$C(X, Y)$
$(X \times Y, \rho_X \times \rho_Y)$	$C_b(X, Y)$
$\mathbb{R}$	$M[a, b]$
$\mathbb{R}^n$	$\widetilde{W}_p^l[a, b]$
s	$l_p (1 \leqslant p \leqslant \infty)$
c	$l_p^m (1 \leqslant p \leqslant \infty)$
m	$\tilde{L}_p[a, b] (1 \leqslant p < \infty)$
$C^k[a, b]$	$L_p[a, b] (1 \leqslant p < \infty)$
$W_p^l[a, b]$	$H^\alpha[a, b]\ (\alpha > 0)$

Сокращения

МП — метрическое пространство

ПМП — полное метрическое пространство

Предметный указатель

Содержание

— Я думаю, Дон, что в моей голове это просто не может уместиться. Я просто не знаю, как мне удастся все это выучить.

— Практикой. Немножко теории и много практики, — сказал он.— На это уходит примерно дней десять.

Р. Бах. Иллюзии

Бичегкуев Маирбек Сулейманович

МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

ТЕОРИЯ, ЗАДАЧИ, РЕШЕНИЯ

Дизайнер М. В. Ботя
Технический редактор А. В. Широбоков
Компьютерная верстка Д. П. Вакуленко
Корректор А. Р. Логунов

Подписано в печать 08.07.2005. Формат $60 \times 84^1/_{16}$.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 10,81. Уч. изд. л. 10,65.
Гарнитура Таймс. Бумага офсетная №1. Заказ №50.

НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика»
426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
http://rcd.ru   E-mail: borisov@rcd.ru   Тел./факс: (+73412) 500–295

Борисов А.В., Мамаев И.С., Соколовский М.А. Фундаментальные и прикладные проблемы теории вихрей

Боровских А. В., Перов А. И. Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям

Бураго Д. Ю., Бураго Ю. Д., Иванов С. В. Курс метрической геометрии

Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование

Ворович И. И. Лекции по динамике Ньютона

Гирвин С. Квантовый эффект Холла

Добеши И. Десять лекций по вейвлетам (2 изд.)

Диаку Ф., Холмс Ф. Небесные встречи. Истоки хаоса и устойчивости

Заславский Г. М. Физика хаоса в гамильтоновых системах.

Кокин А. А. Твердотельные квантовые компьютеры на ядерных спинах

Копцик В. А., Шубников А. В. Симметрия в науке и искусстве

Крик Ф. Безумный поиск. Личный взгляд на научное открытие

Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н. Введение в нелинейную механику. Приближенные и асимптотические методы нелинейной механики

Левинштейн М. Е., Симин Г. С. Знакомство с полупроводниками

Мандельброт Б. Фракталы, случай, финансы

Мохов О. И. Симплектическая и пуассонова геометрия на пространствах петель гладких многообразии и интегрируемые уравнения

Новая энциклопедия по современной небесной механике

Оэртель Г. Путеводитель Прандтля по гидродинамике

Пенроуз Р. Тени разума: в поисках науки о сознании

Пригожин И.(ред) Человек перед лицом неопределенности

Садовский М. В. Диаграмматика. Лекции по избранным задачам теории конденсированного состояния

Севастьянов Б. А. Курс теории вероятностей и математической статистики

Уиттекер Э. История теорий эфира и электричества

Фрадков А. Л., Якубовский О. А. (ред.) Управление молекулярными и квантовыми системами

Френкель Я. И. Кинетическая теория жидкостей

Шанже Ж.-П., Конн А. Материя и мышление

Шильников Л. П., Шильников А. Л., Тураев Д. В., Чуа Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике. Часть 1

Эбелинг В. Образование структур при необратимых процессах