МАТЕМАТИКА
НОВОЕ В ЗАРУБЕЖНОЙ НАУКЕ
РЕДАКТОРЫ СЕРИИ: А.Н. КОЛМОГОРОВ, С.П. НОВИКОВ
13

Р. БОУЭН

МЕТОДЫ СИМВОЛИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ

Сборник статей

Перевод с английского
под редакцией
В. М. АЛЕКСЕЕВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР» МОСКВА 1979

УДК 519.2 + 531.19 + 517

Книга представляет собой сборник переводов недавних работ известного американского математика. В них исследуются топологические и метрические свойства классических динамических систем, удовлетворяющих условию гиперболичности (периодические траектории, энтропия, инвариантные меры). Исследование проводится методами символической динамики, интенсивно развивающимися в последнее десятилетие. Теория, излагаемая в книге, интересна своими связями с различными задачами дифференциальных уравнений, эргодической теории, статистической физики.

Книга предназначена математикам различных специальностей. Она доступна аспирантам и студентам старших курсов математических факультетов.

Редакция литературы по математическим наукам

1702040000

Б $\frac{20203-018}{041(01)-79}$ 18—79

ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящем сборнике объединены шесть статей американского математика Руфуса Боуэна, активно работающего в теории динамических систем (одна из статей написана им совместно с французским специалистом в области математической физики Давидом Рюэлем).

Результаты Р. Боуэна, относящиеся к топологической и эргодической теории динамических систем, хорошо известны и высоко ценятся специалистами, но в публикациях на русском языке отражены сравнительно мало. Вместе с тем оказалось, что эти результаты тесно связаны с кругом идей, привлекающих в последнее время внимание многих математиков и физиков, интересующихся такими вопросами, как возникновение турбулентности, связь между детерминированными и случайными процессами и т. д. Поэтому можно надеяться, что этот сборник будет полезен достаточно широкой аудитории читателей, включающей как специалистов по данному предмету, так и представителей смежных наук.

За исключением последней статьи, объектом исследования в этом сборнике являются гладкие динамические системы, в которых существенную роль играет свойство гиперболичности. Обусловленная этим свойством неустойчивость фазовых траекторий приводит к сложному, запутанному их поведению и делает малопригодными классические методы анализа. С подобной ситуацией математики впервые столкнулись при изучении поведения геодезических на поверхностях отрицательной кривизны. Именно здесь впервые были введены многие понятия и впервые наблюдались явления, занявшие теперь видное место в теории динамических систем с гиперболической структурой. Жак Адамар одним из первых почувствовал необычность ситуации. В своей статье Les surfaces à courbures opposées et leur lignes géodesiques, *J. Math. pur. app.*, 4 (1898), 27—73, он писал: «Используемый мною метод прост, но полученные результаты, напротив, сложны или по крайней мере очень отличаются от тех, с которыми мы привыкли встречаться». И далее, в конце статьи Адамар задает вопрос, который в последние 10—15 лет звучит весьма актуально: «Имеется ли что-нибудь подобное в задачах динамики и, в частности, в небесной механике? Если это так, то вся постановка вопроса об устойчивости планетных систем нуждается в коренном пересмотре».

Развивая идеи Адамара, Марстон Морс первым ввел в обиход то, что впоследствии получило название «методы символической динамики». Хотя с тех пор прошло около шестидесяти лет, все же долгое время сфера применимости этих методов оставалась довольно узкой — фактически это были все те же геодезические на поверхностях отрицательной кривизны. Примыкающие сюда же работы Дж. Биркгофа о гомоклинических точках и М. Картрайт — Дж. Литлвуда — Н. Левинсона о символической динамике для неавтономных уравнений 2-го порядка широкого внимания не привлекли.

События стали развиваться весьма быстро после того, как на Киевской конференции по нелинейным колебаниям в 1961 г. С. Смейл продемонстрировал пример, существенной деталью которого была знаменитая «подкова Смейла». Вскоре появились «У-системы» Д. В. Аносова и «аксиома А» Смейла, и тем самым был выделен интересный и важный класс динамических систем, обладающих свойством экспоненциальной неустойчивости траекторий.

Подкова Смейла и ее аналоги, с одной стороны, и введенное Я. Г. Синаем понятие марковского разбиения, с другой, вновь вызвали к жизни методы символической динамики. На сей раз обнаружилось, что эти методы являются эффективным средством анализа таких классических систем, как алгебраические автоморфизмы тора, нелинейные колебания и небесная механика. Можно надеяться, что в скором времени такие понятия, как «символическая модель», «топологическая марковская цепь» и т. п., станут для изучающих конкретные системы столь же привычными, как «инвариантный тор», «разложение в ряд Фурье», «показатели Ляпунова».

Общая теория динамических систем традиционно делится на две большие ветви — топологическую динамику и эргодическую теорию. Методы символической динамики работают и там, и там, но в настоящем сборнике эргодическая часть все-таки преобладает. В первой статье читатель найдет построение марковского разбиения для ограничения диффеоморфизма, удовлетворяющего аксиоме А, на множество неблуждающих точек и эргодическую теорию таких диффеоморфизмов. Существенное место здесь занимают «термодинамический формализм», гиббсовские меры и «вариационный принцип». Введенные Д. Рюэлем и Я. Г. Синаем по аналогии со статистической физикой эти понятия удачно вписались в традиционный для динамических систем круг. Это оживило эргодическую теорию гладких систем и уже принесло интересные результаты. Оказалось, например, что базисные множества диффеоморфизмов класса C^2, удовлетворяющих аксиоме А, имеют лебеговскую меру нуль. Замечательно, что класс гладкости здесь нельзя понизить: в пятой статье сборника описано построение «толстой подковы Смейла», базисное множество которой имеет положительную лебеговскую меру.

Во второй статье изучаются некоторые топологические свойства тех же диффеоморфизмов, удовлетворяющих аксиоме А. Здесь показано, что свойства возвращаемости траекторий у гладкой динамической системы, обладающей марковским разбиением, те же, что у траекторий символической модели (топологической цепи Маркова), построенной по этому разбиению.

В третьей и четвертой статьях аналогичная теория (топологическая и эргодическая) развивается для потоков, удовлетворяющих аксиоме A. Этим до некоторой степени заполняется имеющийся в нашей литературе пробел, ибо в большинстве публикаций последнего времени авторы явно предпочитают рассматривать лишь случай дискретного времени.

В последней статье Р. Боуэн распространяет понятие топологической энтропии на динамические системы с некомпактным фазовым пространством. Хотя исследуемая ситуация здесь более абстрактна и не предполагает гладкости, все же легко проследить связь результатов и методов с остальной частью сборника, например с § 2 первой статьи.

При выборе терминологии мы руководствовались сложившимися в советской математической литературе традициями[1]) и не стремились оговаривать все места, где русские термины расходятся с английскими. Некоторое неудобство у читателя может быть вызвано небольшим разнобоем в обозначениях (хотя почти все статьи и написаны одним автором), однако мы не рискнули добиваться здесь единообразия.

Изложение Боуэна, за исключением, пожалуй, первой и пятой статей, рассчитано на читателя, знакомого с основными понятиями теории динамических систем.

Тем, кто далек от этой тематики, но желает «войти в предмет», можно рекомендовать для справок:

по эргодической теории — П. Биллингслей, Эргодическая теория и информация, М., «Мир», 1969;

по У- и А-системам — З. Нитецки, Введение в дифференциальную динамику, М., «Мир», 1975.

Дальнейшие литературные указания, в том числе и на статьи обзорного и учебного характера, читатель найдет во всех статьях сборника. Там, где это казалось нам желательным, мы расширяли список литературы, не стремясь, впрочем, добиться полноты.

Кроме того, М. В. Якобсон и я написали для данного сборника специальное добавление. Первая его часть имеет целью познакомить читателей с нашей точкой зрения на суть методов символической динамики и объяснить естественность их появления в гладких системах. Поэтому мы рекомендуем прочесть эту часть в самом начале, а затем уже обратиться

---

[1]) См., например, замечания в конце сборника «Гладкие динамические системы», М., «Мир», 1977.

к основному тексту. Вторая часть посвящена более специальным вопросам. Здесь освещены некоторые работы Р. Боуэна, не вошедшие в сборник, и приведен ряд других результатов, относящихся к тому же кругу вопросов.

Эта книга была уже сдана в производство, когда мы узнали, что ее автора нет в живых — известие, трагизм которого усугубился его полной неожиданностью. В расцвете творческих и физических сил, едва преодолев тридцатилетний рубеж, скончался один из самых активных и интересных математиков последнего десятилетия.

Роберт[1]) Эдвард Боуэн родился 23 февраля 1947 г. в Калифорнии. Уже в школьные годы он обратил на себя внимание блестящими математическими способностями. Свою первую научную работу — по теории чисел — Боуэн опубликовал одновременно с поступлением в университет в Беркли. Окончив университет за три года вместо четырех, он был удостоен медали как лучший выпускник года. В эти годы профессора университета характеризовали Боуэна как лучшего студента-математика, когда-либо учившегося в Беркли, и как лучшего студента-математика в стране. Эти высокие оценки подтверждались победами в студенческих конкурсах.

В 1967 г. Боуэн начинает работать над диссертацией под руководством С. Смейла. В это самое время гладкие динамические системы бурно развиваются усилиями математиков СССР, США и других стран, и очень скоро Боуэн оказывается в числе наиболее активных исследователей в этой области. Летом 1974 г. Р. Боуэн был приглашен прочитать доклад на международном конгрессе математиков в Ванкувере. Особенно его привлекает эргодическая теория гладких систем и, в частности, методы символической динамики. Читатели этой книги имеют прекрасную возможность в этом убедиться.

Руфус Боуэн скоропостижно скончался 30 июля 1978 г. от кровоизлияния в мозг.

Я не был знаком с ним лично — только по работам, которые высоко ценю. Рассказы наших американских коллег позволяют представить себе не только облик ученого, но и жизнерадостного, общительного человека. Особенно я благодарен Питеру Уолтерсу, биографическими заметками которого о Р. Боуэне я частично воспользовался.

В. М. Алексеев

---

[1]) Вдохновленные цветом его волос и бороды друзья дали Боуэну прозвище «Руфус» — по-латыни «рыжий». Имя привилось, и с 1968 г. Боуэн подписывал им свои работы.

РАВНОВЕСНЫЕ СОСТОЯНИЯ И ЭРГОДИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ДИФФЕОМОРФИЗМОВ АНОСОВА[1])

Р. Боуэн

Оглавление

Эти заметки возникли из курса лекций, прочитанного автором в Университете штата Миннесота, и были переработаны в то время, когда автор был слоановским стипендиатом.

0. ВВЕДЕНИЕ

Основная задача этой работы состоит в изложении эргодической теории диффеоморфизмов Аносова и диффеоморфизмов, удовлетворяющих аксиоме A. Множество орбит таких диффеоморфизмов имеет сложную структуру, и чтобы понять ее, пожалуй, лучше всего связать в топологическом

---

[1]) Rufus Bowen, Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms, Lecture Notes in Mathematics, 470, Springer-Verlag, Berlin — Heidelberg — New York, 1975.

и метрическом смысле эти диффеоморфизмы с гомеоморфизмом сдвига на пространстве символических последовательностей. Подобная идея изучения одного и того же примера с различных точек зрения уже привела к тому, что из задач механики возникли топологическая динамика и эргодическая теория. Теперь мы обращаемся к этим двум дисциплинам в надежде, что они помогут нам при изучении дифференцируемых систем.

Данные заметки состоят из четырех разделов. Сначала мы изучим статистические свойства гиббсовских мер. Эти меры на пространстве последовательностей возникают в современной статистической механике; они интересуют нас постольку, поскольку являются решением задачи о восстановлении инвариантной меры, если она в некотором смысле приближенно известна. Гиббсовские меры удовлетворяют также вариационному принципу, важность которого определяется тем, что он применим в более общих пространствах, чем пространство последовательностей. Исходя из этого принципа мы строим «термодинамический формализм» на компактных пространствах, чему посвящен второй раздел. В третьем вводятся диффеоморфизмы, удовлетворяющие аксиоме A, и для них строится символическая динамика, т. е. выясняется, как они связаны со сдвигом на пространстве последовательностей. В последнем разделе с помощью символической динамики изучается эргодическая теория диффеоморфизмов, удовлетворяющих аксиоме A.

В своем изложении я опирался на работы многих авторов. Основные ссылки приведены в конце каждого раздела, но некоторые я, несомненно, пропустил. В целом эти заметки обязаны своим существованием главным образом работам Д. Рюэля и Я. Г. Синая.

Вначале напомним, что *вероятностным пространством* называется тройка $(X, \mathfrak{B}, \mu)$, где $\mathfrak{B}$ — некоторая σ-алгебра подмножеств X, а μ — неотрицательная мера на $\mathfrak{B}$, удовлетворяющая условию $\mu(X) = 1$. *Автоморфизмом* мы называем взаимно однозначное отображение T: $X \to X$, для которого

(i) $E \in \mathfrak{B}$ тогда и только тогда, когда $T^{-1}E \in \mathfrak{B}$;
(ii) $\mu(T^{-1}E) = \mu(E)$ для $E \in \mathfrak{B}$.

Если T: $X \to X$ — гомеоморфизм компактного метрического пространства, то естественную σ-алгебру образуют борелевские множества. Вероятностная мера на этой σ-алгебре называется *борелевской* вероятностной мерой. Обозначим $M(X)$ множество борелевских вероятностных мер на X, а $M_T(X)$ — подмножество инвариантных мер, т. е. $\mu \in M_T(X)$, если

$\mu(T^{-1}E)=\mu(E)$ для всех борелевских множеств E. Для всякой меры $\mu\in M(X)$ можно определить $T^*\mu\in M(X)$, положив $T^*\mu(E)=\mu(T^{-1}E)$.

Напомним, что вещественные непрерывные функции на компактном метрическом пространстве X образуют банахово пространство $C(X)$ с нормой $\|f\|=\max\limits_{x\in X}|f(x)|$. Слабая * топология на пространстве $C(X)^*$ непрерывных линейных функционалов $\alpha\colon C(X)\to\mathbb{R}$ порождается множествами вида

$$U(f,\varepsilon,\alpha_0)=\{\alpha\in C(X)^*\colon |\alpha(f)-\alpha_0(f)|<\varepsilon\}$$

с $f\in C(X)$, $\varepsilon>0$, $\alpha_0\in C(X)^*$.

Представление Рисса. Для всякой меры $\mu\in M(X)$ определим $\alpha_\mu\in C(X)^*$ равенством $\alpha_\mu(f)=\int f\,d\mu$. Тогда $\mu\leftrightarrow\alpha_\mu$ является взаимно однозначным соответствием между $M(X)$ и

$$\{\alpha\in C(X)^*\colon\ \alpha(1)=1\quad\text{и}\quad\alpha(f)\geqslant 0\quad\text{при}\quad f\geqslant 0\}.$$

Мы часто будем отождествлять α_μ с μ и писать μ, подразумевая α_μ. При таком отождествлении слабая * топология на $C(X)^*$ индуцирует топологию на $M(X)$ (называемую слабой топологией).

Предложение. *$M(X)$ — компактное выпуклое метризуемое пространство.*

Доказательство. Пусть $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ — плотное подмножество в $C(X)$. Читатель может убедиться, что слабая топология на $M(X)$ эквивалентна топологии, порождаемой метрикой

$$d(\mu,\mu')=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}\|f_n\|^{-1}\left|\int f_n\,d\mu-\int f_n\,d\mu'\right|.$$

Предложение. *$M_T(X)$ — непустое замкнутое подмножество $M(X)$.*

Доказательство. Заметим, что $T^*\colon M(X)\to M(X)$ — гомеоморфизм и что $M_T(X)=\{\mu\in M(X)\colon T^*\mu=\mu\}$. Возьмем $\mu\in M(X)$, и пусть $\mu_n=\frac{1}{n}(\mu+T^*\mu+\ \ldots\ +(T^*)^{n-1}\mu)$. Выберем подпоследовательность μ_{n_k}, сходящуюся к $\mu'\in M(X)$. При этом $\mu'\in M_T(X)$.

Предложение. *Мера μ принадлежит $M_T(X)$ тогда и только тогда, когда $\int(f\circ T)\,d\mu=\int f\,d\mu$ для всех $f\in C(X)$.*

Доказательство. Именно это равенство соответствует в силу теоремы Рисса равенству $T^*\mu=\mu$.

1. ГИББСОВСКИЕ МЕРЫ

А. Гиббсовские распределения

Рассмотрим физическую систему, которая может находиться в одном из состояний $1, \ldots, n$. Энергии соответствующих состояний обозначим $E_1, \ldots, E_n$. Предположим, что с этой системой вступил во взаимодействие значительно больший «источник теплоты» с температурой T. Исходная система и источник теплоты обмениваются при этом энергией, но температура источника остается постоянной, потому что он гораздо больше нашей системы. Так как энергия нашей системы не фиксирована, каждое из возможных состояний реализуется с некоторой вероятностью. Физический факт, известный из статистической механики, состоит в том, что вероятность P_j, с которой система пребывает в состоянии j, задается *распределением Гиббса*:

$$P_j = \frac{e^{-\beta E_j}}{\sum\limits_{i=1}^{n} e^{-\beta E_i}},$$

где $\beta = 1/kT$, а k — физическая константа.

Мы не будем пытаться обосновывать физически гиббсовское распределение, а изложим математический факт, тесно связанный с физическими рассуждениями.

1.1. Лемма. *Пусть заданы действительные числа $a_1, \ldots, a_n$. Тогда величина*

$$F(p_1, \ldots, p_n) = \sum_{i=1}^{n} (-p_i \log p_i) + \sum_{i=1}^{n} p_i a_i$$

достигает своего максимального значения $\log \sum\limits_{i=1}^{n} e^{a_i}$ на симплексе $\{(p_1, \ldots, p_n)\colon p_i \geqslant 0,\ p_1 + \ldots + p_n = 1\}$ в единственной точке

$$p_j = e^{a_j} \left(\sum_i e^{a_i} \right)^{-1}.$$

Это доказывается вычислением. Величина $H(p_1, \ldots, p_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} (-p_i \log p_i)$ называется *энтропией* распределения $(p_1, \ldots, p_n)$ (*замечание*: функция $\varphi(x) = -x \log x$ непрерывна на $[0, 1]$, если положить $\varphi(0) = 0$). Член $\sum\limits_i p_i a_i$ — это, разумеется, среднее значение функции $a(i) = a_i$.

В статистической механике $a_i = -\beta E_i$, энтропия обозначается S, а средняя энергия E. Таким образом, гиббсовское распределение максимизирует величину

$$S - \beta E = S - \frac{1}{kT} E$$

или, что эквивалентно, минимизирует $E - kTS$. Последнее выражение называется свободной энергией. Принцип «природа максимизирует энтропию» применим, когда энергия фиксирована; если же энергия не фиксирована, то «природа минимизирует свободную энергию».

Рассмотрим теперь простую *бесконечную* систему, одномерную решетку. Поставим в соответствие каждому целому числу физическую систему с n возможными состояниями 1, 2, ..., n. Сопоставляя каждому i некоторое $x_i \in \{1, \ldots, n\}$, получаем одну из конфигураций системы:

$$\ldots\ x_{-2}x_{-1}x_0x_1x_2x_3\ \ldots .$$

Таким образом, конфигурация — это точка

$$\underline{x} = \{x_i\}_{i=-\infty}^{\infty} \in \prod_{\mathbf{Z}} \{1, \ldots, n\} = \Sigma_n.$$

Сформулируем теперь предположения относительно энергии.

(1) Вклад $\Phi_0(k)$ в общую энергию системы, связанный с появлением k-го состояния, не зависит от места, на котором это состояние встретилось.

(2) Если состояние k_1 встретилось на i_1-м месте, а k_2 — на i_2-м, то потенциальная энергия $\Phi_2^*(i_1, i_2; k_1, k_2)$ их взаимодействия зависит только от их относительного расположения, т. е. существует такая функция

$$\Phi_2\colon \mathbf{Z} \times \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, n\} \to \mathbf{R},$$

что $\Phi_2^*(i_1, i_2; k_1, k_2) = \Phi_2(i_1 - i_2; k_1, k_2)$ (отсюда, в частности $\Phi_2(j; k_1, k_2) = \Phi_2(-j; k_2, k_1)$).

(3) Вся энергия системы складывается из членов вида (1) и (2).

При этих предположениях вклад в энергию от x_0, находящегося на 0-м месте, равен

$$\varphi^*(\underline{x}) = \Phi_0(x_0) + \sum_{j \neq 0} \frac{1}{2} \Phi_2(j; x_j, x_0)$$

(мы «отдаем» каждому из состояний x_0, x_k половину энергии их взаимодействия).

Предположим теперь, что $\|\Phi_2\|_j = \sup\limits_{k_1, k_2} |\Phi_2(j; k_1, k_2)|$ удовлетворяют условию

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|\Phi_2\|_j < \infty.$$

Тогда $\varphi^*(\underline{x}) \in \mathbb{R}$, и если ввести в множестве возможных состояний $\{1, \ldots, n\}$ дискретную топологию, а в $\Sigma_n = \prod\limits_{Z} \{1, \ldots, n\}$ топологию прямого произведения, то $\varphi^*(\underline{x})$ непрерывно зависит от x.

Рассмотрев всевозможные наборы $x_{-m} \ldots x_0 \ldots x_m$, мы получим конечную систему (n^{2m+1} возможных конфигураций) с энергией

$$E_m(x_{-m} \ldots x_m) = \sum_{j=-m}^{m} \Phi_0(x_j) + \sum_{-m \leqslant j < k \leqslant m} \Phi_2(k - j; x_k, x_j)$$

и гиббсовское распределение с вероятностями μ_m, пропорциональными $e^{-\beta E_m(x_{-m} \ldots x_m)}$. Предположим теперь, что для каждого набора $x_{-m} \ldots x_m$ существует предел

$$\mu(x_{-m} \ldots x_m) = \lim_{k \to \infty} \sum \mu_k \{(x'_{-k} \ldots x'_k):\ x'_j = x_j \ \forall |j| \leqslant m\},$$

где сумма берется по всем $(x'_{-k} \ldots x'_k)$, таким, что $x'_j = x_j$ при $|j| \leqslant m$. Тогда $\mu \in M(\Sigma_n)$, и естественно назвать μ распределением Гиббса на Σ_n (при заданной энергии и данном β). Для $\underline{x} = \{x_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$ мы можем к $E_m(x_{-m} \ldots x_m)$ добавить вклад от взаимодействий x_j $(-m \leqslant j \leqslant m)$ со *всеми* остальными x_k, что дает

$$\sum_{j=-m}^{m} \left(\Phi_0(x_j) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \Phi_2(k - j; x_k, x_j) \right).$$

Если определить *гомеоморфизм* (левого) *сдвига* $\sigma: \Sigma_n \to \Sigma_n$ равенством $\sigma \{x_i\}_{i=-\infty}^{\infty} = \{x_{i+1}\}_{i=-\infty}^{\infty}$, то последнее выражение совпадает с $\sum\limits_{j=-m}^{m} \varphi^*(\sigma^j \underline{x})$. Это выражение отличается от $E_m(x_{-m} \ldots x_m)$ не больше чем на

$$\sum_{j=-m}^{m} \left(\sum_{k=j+m+1}^{\infty} \frac{1}{2} \|\Phi_2\|_k + \sum_{k=m-j+1}^{\infty} \frac{1}{2} \|\Phi_2\|_k \right) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} k \|\Phi_2\|_k.$$

Таким образом, если $C = \sum_{k=1}^{\infty} k \| \Phi_2 \|_k < \infty$, то E_m отличается от $\sum_{j=-m}^{m} \varphi^* (\sigma^j \underline{x})$ не больше чем на C. Следовательно, заменяя при построении распределения Гиббса μ_m функцию E_m на $\sum_{-m}^{m} \varphi^* (\sigma^j \underline{x})$, мы изменяем значения вероятностей на множитель, заключенный между $2e^{-C}$ и $2e^{C}$. Дело в том, что учет координат x_i при $i \notin [-m, m]$ меняет μ_m, но не слишком сильно, если предположить, что $\sum_{1}^{\infty} k \| \Phi_2 \|_k < \infty$.

Теперь мы сформулируем теорему, к которой стремились. Для непрерывной функции $\varphi\colon \Sigma_n \to \mathbb{R}$ положим по определению

$$\operatorname{var}_k \varphi = \sup \{ | \varphi (\underline{x}) - \varphi (\underline{y}) | \colon x_i = y_i \ \ \forall |i| \leqslant k \}.$$

Так как φ равномерно непрерывна, $\lim_{k \to \infty} \operatorname{var}_k \varphi = 0$.

1.2. Теорема. *Предположим, что для функции* $\varphi\colon \Sigma_n \to \mathbb{R}$ *существуют такие константы* $c > 0$, $\alpha \in (0, 1)$, *что* $\operatorname{var}_k \varphi \leqslant c\alpha^k$ *при всех* k. *Тогда существует единственная мера* $\mu \in M_\sigma(\Sigma_n)$, *для которой можно найти такие константы* $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ *и* P, *что*

$$c_1 \leqslant \frac{\mu \{ \underline{y}\colon y_i = x_i \ \ \forall i = 0, \ldots, m-1 \}}{\exp \left(-Pm + \sum_{k=0}^{m-1} \varphi (\sigma^k \underline{x}) \right)} \leqslant c_2$$

при всех $\underline{x} \in \Sigma_n$ *и* $m \geqslant 0$.

Эта мера μ обозначается μ_φ и называется *гиббсовской мерой*, соответствующей функции φ. С точностью до констант из $[c_1, c_2]$ относительные вероятности наборов $x_0 \ldots x_m$ равны $\exp \sum_{k=0}^{m-1} \varphi (\sigma^k \underline{x})$. Для упоминавшейся ранее физической системы $\varphi = -\beta\varphi^*$. Заметим, что состояния Гиббса в статистической механике *не определяются* предыдущей теоремой. Мы не учли многих тонкостей, возникающих в более сложных системах (например, многомерных решетках), где теорема неверна. Целью нашего обсуждения в значительной мере была мотивировка теоремы; более детальное изложение содержится в работах Рюэля [9] и Лэнфорда [6].

Перед тем как доказывать теорему, рассмотрим обобщение пространства Σ_n, которое потребуется нам в дальнейщем. Для $n \times n$-матрицы A из нулей и единиц положим

$$\Sigma_A = \{\underline{x} \in \Sigma_n \colon A_{x_i x_{i+1}} = 1 \ \forall i \in Z\}.$$

Другими словами, мы рассматриваем все $\underline{x}$, для которых переходы $x_i x_{i+1}$ допустимы в смысле матрицы A при всяком i[1]. Легко видеть, что Σ_A замкнуто и $\sigma\Sigma_A = \Sigma_A$. *Мы всегда предполагаем матрицу A такой, что всякое k от 1 до n встречается как x_0 для некоторого $\underline{x} \in \Sigma_A$.* (В противном случае $\Sigma_A = \Sigma_B$, где B — матрица размера $m \times m$ и $m < n$.)

1.3. Лемма. *Сдвиг $\sigma\colon \Sigma_A \to \Sigma_A$ является топологическим перемешиванием*[2] *(т. е. для любых непустых открытых подмножеств U, V множества Σ_A существует такое N, что $\sigma^m U \cap \cap V \neq \varnothing \ \forall m \geqslant N$) тогда и только тогда, когда $A^M > 0$ (т. е. $A_{ij}^M > 0 \ \forall i, j$) при некотором M.*

Доказательство. По индукции доказывается, что A_{ij}^m — число таких $(m+1)$-наборов $a_0 a_1 \ldots a_m$, где a_i — целые числа между 1 и n, что

(a) $A_{a_k a_{k+1}} = 1$, $k = 0, \ldots, m-1$,

(b) $a_0 = i$, $a_m = j$.

Пусть $U_i = \{\underline{x} \in \Sigma_A \colon x_0 = i\} \neq \varnothing$.

Предположим, что сдвиг $\sigma\colon \Sigma_A \to \Sigma_A$ перемешивает. Тогда $\exists N_{ij}$ такое, что $U_i \cap \sigma^n U_j \neq \varnothing \ \forall n \geqslant N_{ij}$. Если $\underline{a} \in U_i \cap \sigma^n U_j$, то $a_0 a_1 \ldots a_n$ удовлетворяет (a) и (b); отсюда $A_{ij}^m > 0 \ \forall i, j$ при $m \geqslant \max\limits_{i,j} N_{ij}$.

Предположим, что $A^M > 0$ для некоторого M. Так как любое целое k от 1 до n встречается в качестве x_0 для некоторого $\underline{x} \in \Sigma_A$, в каждой строке матрицы A найдется хотя бы один положительный элемент. Отсюда по индукции следует, что $A^m > 0$ при всех $m \geqslant M$. Рассмотрим открытые подмножества U, V множества Σ_A и $\underline{a} \in U$, $\underline{b} \in V$. Существует такое r, что

$$U \supset \{\underline{x} \in \Sigma_A \colon x_k = a_k \ \forall |k| \leqslant r\},$$

$$V \supset \{\underline{x} \in \Sigma_A \colon x_k = b_k \ \forall |k| \leqslant r\}.$$

Для $t \geqslant 2r + M$ имеем $m = t - 2r \geqslant M$ и, значит, $A^m > 0$. Следовательно, найдутся такие $c_0, \ldots, c_m$, что $c_0 = b_r$,

---

[1] Автор никак не называет динамическую систему (Σ_A, σ). Мы будем иногда использовать ее название, принятое в советской математической литературе, — топологическая марковская цепь (сокращенно ТМЦ). — *Прим. перев.*

[2] Или, короче: сдвиг $\sigma\colon \Sigma_A \to \Sigma_A$ перемешивает. — *Прим. перев.*

$c_m = a_{-r}$, $A_{c_k c_{k+1}} = 1$ при всех k. При этом точка

$$\underline{x} = \dots b_{-2}b_{-1}b_0 \dots b_r c_1 \dots c_{m-1} a_{-r} \dots a_0 a_1 \dots$$

содержится в Σ_A и $\underline{x} \in \sigma^t U \cap V$. Значит, $\sigma\colon \Sigma_A \to \Sigma_A$ перемешивает. $\square$

Обозначим $\mathscr{F}_A$ семейство всех непрерывных функций $\varphi\colon \Sigma_A \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих условию $\operatorname{var}_k \varphi \leqslant b\alpha^k$ (при всех $k \geqslant 0$) с некоторыми положительными константами b и $\alpha \in (0, 1)$. Для всякого $\beta \in (0, 1)$ можно задать на Σ_A метрику d_β, положив $d_\beta(\underline{x}, \underline{y}) = \beta^N$, где N — максимальное из неотрицательных чисел, удовлетворяющих условию $x_i = y_i$ при $|i| < N$. При этом $\mathscr{F}_A$ совпадает с множеством функций, удовлетворяющих условию Гёльдера с положительным показателем относительно метрики d_β. Тогда теорема, которая нас интересует, звучит следующим образом.

1.4. Существование гиббсовских мер. *Предположим, что сдвиг $\sigma\colon \Sigma_A \to \Sigma_A$ топологически перемешивает и $\varphi \in \mathscr{F}_A$. Тогда существует единственная σ-инвариантная борелевская вероятностная мера μ на Σ_A, для которой можно найти такие константы $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ и P, что*

$$C_1 \leqslant \frac{\mu\{\underline{y}\colon\ y_i = x_i \quad \forall i \in [0, m)\}}{\exp\left(-Pm + \sum_{k=0}^{m-1} \varphi(\sigma^k \underline{x})\right)} \leqslant C_2$$

для всякого $\underline{x} \in \Sigma_A$ и $m \geqslant 0$.

Эта теорема будет доказана не сразу. На первом шаге мы сузим множество рассматриваемых функций φ.

Определение. Две функции ψ, $\varphi \in C(\Sigma_A)$ *гомологичны* относительно σ (обозначается $\psi \sim \varphi$), если существует такая функция $u \in C(\Sigma_A)$, что

$$\psi(\underline{x}) = \varphi(\underline{x}) - u(\underline{x}) + u(\sigma\underline{x}).$$

1.5. Лемма. *Предположим, что $\varphi_1 \sim \varphi_2$ и теорема 1.4 справедлива для φ_1. Тогда она справедлива для φ_2 и $\mu_{\varphi_1} = \mu_{\varphi_2}$.*

Доказательство.

$$\left|\sum_{k=0}^{m-1} \varphi_1(\sigma^k \underline{x}) - \sum_{k=0}^{m-1} \varphi_2(\sigma^k \underline{x})\right| = \left|\sum_{k=0}^{m-1} u(\sigma^{k+1}\underline{x}) - u(\sigma^k \underline{x})\right| = \\ = |u(\sigma^m \underline{x}) - u(\underline{x})| \leqslant 2\|u\|.$$

При замене φ_1 на φ_2 экспонента в искомом неравенстве изменится на множитель, не превышающий $e^{2\|u\|}$. Поэтому неравенство для φ_2 будет выполняться при той же мере μ и константе P и других константах C_1, C_2. □

1.6. Лемма. *Всякая функция $\varphi \in \mathcal{F}_A$ гомологична некоторой функции $\psi \in \mathcal{F}_A$, удовлетворяющей условию: $\psi(\underline{x}) = \psi(\underline{y})$, если $x_i = y_i$ для всех $i \geqslant 0$.*

Доказательство. Для всякого t, $1 \leqslant t \leqslant n$, выберем последовательность $\{a_{k,t}\}_{k=-\infty}^{\infty} \in \Sigma_A$ с $a_{0,t} = t$. Определим отображение r: $\Sigma_A \to \Sigma_A$ равенством $r(\underline{x}) = \underline{x}^*$, где

$$x_k^* = \begin{cases} x_k & \text{при } k \geqslant 0, \\ a_{k,x_0} & \text{при } k \leqslant 0. \end{cases}$$

Пусть

$$u(x) = \sum_{j=0}^{\infty} (\varphi(\sigma^j \underline{x}) - \varphi(\sigma^j r(\underline{x}))).$$

Так как $\sigma^j \underline{x}$ и $\sigma^j r(\underline{x})$ совпадают на отрезке от $-j$ до $+\infty$, получаем

$$|\varphi(\sigma^j \underline{x}) - \varphi(\sigma^j r(\underline{x}))| \leqslant \operatorname{var}_j \varphi \leqslant b\alpha^j.$$

Вследствие того, что $\sum_{j=0}^{\infty} b\alpha^j < \infty$, функция u определена и непрерывна. Если $x_i = y_i$ при $|i| \leqslant n$, то для $j \in [0, n]$

$$|\varphi(\sigma^j \underline{x}) - \varphi(\sigma^j \underline{y})| \leqslant \operatorname{var}_{n-j} \varphi \leqslant b\alpha^{n-j}$$

и

$$|\varphi(\sigma^j r(\underline{x})) - \varphi(\sigma^j r(\underline{y}))| \leqslant b\alpha^{n-j}.$$

Отсюда

$$|u(\underline{x}) - u(\underline{y})| \leqslant \sum_{j=0}^{[n/2]} |\varphi(\sigma^j \underline{x}) - \varphi(\sigma^j \underline{y}) + \\ + \varphi(\sigma^j r(\underline{y})) - \varphi(\sigma^j r(\underline{x}))| + 2 \sum_{j > [n/2]} b\alpha^j \leqslant$$

$$\leqslant 2b \left(\sum_{j=0}^{[n/2]} \alpha^{n-j} + \sum_{j > [n/2]} \alpha^j \right) \leqslant \frac{2b\alpha^{[n/2]}}{1-\alpha}.$$

Это показывает, что $u \in \mathcal{F}_A$. Отсюда $\psi = \varphi - u + u \circ \sigma$ тоже принадлежит $\mathcal{F}_A$. Кроме того,

$$\psi(\underline{x}) = \varphi(\underline{x}) + \sum_{j=-1}^{\infty} (\varphi(\sigma^{j+1} r(\underline{x})) - \varphi(\sigma^{j+1}\underline{x})) +$$
$$+ \sum_{j=0}^{\infty} (\varphi(\sigma^{j+1}\underline{x}) - \varphi(\sigma^{j} r(\sigma\underline{x}))) =$$
$$= \varphi(r(\underline{x})) + \sum_{j=0}^{\infty} (\varphi(\sigma^{j+1} r(\underline{x})) - \varphi(\sigma^{j} r(\sigma\underline{x}))).$$

Последнее выражение, как мы и хотели, зависит только от $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$. (Это доказательство привел по моей просьбе в порядок Д. Линд.) □

Леммы 5 и 6 показывают, что при поиске гиббсовских мер μ_φ для $\varphi \in \mathcal{F}_A$ (т. е. при доказательстве теоремы 1.4) мы можем ограничиться рассмотрением функций $\varphi(\underline{x})$, которые зависят только от $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$.

B. Рюэлевский вариант теоремы Перрона — Фробениуса

Введем в рассмотрение пространство односторонних последовательностей. Через $\underline{x}$ обозначим $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ (символ $\underline{x}$ сохраняется также для $\{x_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$, но никогда не будет использоваться в двух смыслах одновременно). Пусть

$$\Sigma_A^+ = \left\{ \underline{x} \in \prod_{i=0}^{\infty} \{1, \ldots, n\}\colon A_{x_i x_{i+1}} = 1 \text{ для всех } i \geqslant 0 \right\}.$$

Определим $\sigma\colon \Sigma_A^+ \to \Sigma_A^+$ равенством $\sigma(\underline{x})_i = x_{i+1}$. Сдвиг σ — это непрерывное конечнократное отображение Σ_A^+ на себя[1]). Для $\varphi \in C(\Sigma_A^+)$ определим $\varphi \in C(\Sigma_A)$ равенством $\varphi(\{x_i\}_{i=-\infty}^{\infty}) = \varphi(\{x_i\}_{i=0}^{\infty})$. Предположим, что функция $\varphi \in C(\Sigma_A)$ удовлетворяет следующему условию: $\varphi(\underline{x}) = \varphi(\underline{y})$, если $x_i = y_i$ при всех $i \geqslant 0$. Тогда можно считать, что φ принадлежит $C(\Sigma_A^+)$, положив $\varphi(\{x_i\}_{i=0}^{\infty}) = \varphi(\{x_i\}_{i=-\infty}^{\infty})$, где x_i при $i \leqslant 0$ выбраны любым образом, лишь бы $\{x_i\}_{i=-\infty}^{\infty} \in \Sigma_A$. Таким образом, функции из $C(\Sigma_A^+)$ отождествляются с некоторым подмножеством в $C(\Sigma_A)$. Леммы 1.5 и 1.6 показывают, что достаточно

---

[1]) Динамическая система (Σ_A^+, σ) называется односторонней топологической марковской цепью. — *Прим. перев.*

построить гиббсовские меры для $\varphi \in C(\Sigma_A^+) \cap \mathcal{F}_A$, чтобы получить их для всех $\varphi \in \mathcal{F}_A$.

В этом разделе мы докажем теорему Рюэля, которая в дальнейшем используется для построения и изучения гиббсовских мер. Для $\varphi \in C(\Sigma_A^+)$ определим оператор $L = L_\varphi$ на $C(\Sigma_A^+)$ следующим образом:

$$(L_\varphi f)(\underline{x}) = \sum_{\underline{y} \in \sigma^{-1}\underline{x}} e^{\varphi(\underline{y})} f(\underline{y}).$$

Этот оператор оказывается полезным в связи с тем, что отображение σ не является взаимно однозначным на Σ_A^+.

1.7. Рюэлевский вариант теоремы П — Ф [10], [11]. *Предположим, что сдвиг* σ: $\Sigma_A \to \Sigma_A$ *перемешивает,* $\varphi \in \mathcal{F}_A \cap C(\Sigma_A^+)$, *а* $L = L_\varphi$ — *определенный выше оператор. Тогда существуют константа* $\lambda > 0$, *функция* $h \in C(\Sigma_A^+)$, $h > 0$, *и мера* $\nu \in M(\Sigma_A^+)$, *для которых* $Lh = \lambda h$, $L^*\nu = \lambda\nu$, $\nu(h) = 1$ *и* $\lim\limits_{m \to \infty} \|\lambda^{-m} L^m g - \nu(g) \cdot h\| = 0$ *для всех* $g \in C(\Sigma_A^+)$.

Доказательство. Так как L — положительный оператор и $L1 > 0$, то $G(\mu) = (L^*\mu(1))^{-1} L^*\mu \in M(\Sigma_A^+)$ для $\mu \in M(\Sigma_A^+)$. Напомним теорему Шаудера — Тихонова (см. Данфорд и Шварц, Линейные операторы, т. 1, стр. 423): пусть E — непустое компактное выпуклое подмножество локально выпуклого топологического векторного пространства; тогда всякое непрерывное отображение G: $E \to E$ имеет неподвижную точку. Согласно этой теореме, существует такая мера $\nu \in M(\Sigma_A^+)$, что $G(\nu) = \nu$. Отсюда получаем, что $L^*\nu = \lambda\nu$ с $\lambda > 0$.

Мы докажем теорему 1.7 при помощи ряда лемм. Пусть $b > 0$ и $\alpha \in (0, 1)$ — любые константы, такие, что $\operatorname{var}_k \varphi \leqslant b\alpha^k$ для всех $k \geqslant 0$. Положим $B_m = \exp\left(\sum\limits_{k=m+1}^{\infty} 2b\alpha^k\right)$ и рассмотрим следующее множество функций:

$$\Lambda = \{f \in C(\Sigma_A^+)\colon\ f \geqslant 0,\ \nu(f) = 1,\ f(\underline{x}) \leqslant B_m f(\underline{x}') \quad \text{при} \quad x_i = x_i' \quad \text{для всех} \quad i \in [0, m]\}.$$

1.8. Лемма. *Существует такая функция* $h \in \Lambda$, *что* $Lh = \lambda h$ *и* $h > 0$.

Доказательство. Проверим, что $\lambda^{-1}Lf \in \Lambda$ при $f \in \Lambda$. Очевидно, $\lambda^{-1}Lf \geqslant 0$ и

$$\nu(\lambda^{-1}Lf) = \lambda^{-1}L^*\nu(f) = \nu(f) = 1.$$

Предположим, что $x_i = x'_i$ при $i \in [0, m]$. По определению
$$Lf(\underline{x}) = \sum_j e^{\varphi(j\underline{x})} f(j\underline{x}),$$
где суммирование идет по всем j, для которых $A_{jx_0} = 1$[1]). Для $\underline{x}'$ приведенное выражение содержит те же j; так как $j\underline{x}$ и $j\underline{x}'$ имеют одинаковые координаты на местах от 0 до $m+1$, получаем
$$e^{\varphi(j\underline{x})} f(j\underline{x}) \leqslant e^{\varphi(j\underline{x}')} e^{b\alpha^{m+1}} B_{m+1} f(j\underline{x}') \leqslant B_m e^{\varphi(j\underline{x}')} f(j\underline{x}')$$
и, значит,
$$Lf(\underline{x}) \leqslant B_m Lf(\underline{x}').$$

Рассмотрим любые $\underline{x}, \underline{z} \in \Sigma_A^+$. Так как $A^M > 0$, существует такое $\underline{y}' \in \sigma^{-M}\underline{x}$, что $y'_0 = z_0$. Для $f \in \Lambda$ имеем
$$L^M f(\underline{x}) = \sum_{\underline{y} \in \sigma^{-M}\underline{x}} \exp\left(\sum_{k=0}^{M-1} \varphi(\sigma^k \underline{y})\right) \cdot f(\underline{y}) \geqslant$$
$$\geqslant e^{-M\|\varphi\|} \cdot f(\underline{y}') \geqslant e^{-M\|\varphi\|} \cdot B_0^{-1} f(\underline{z}).$$

Пусть $K = \lambda^M e^{M\|\varphi\|} B_0$. Из $1 = \nu(\lambda^{-M} L^M f) \geqslant K^{-1} f(\underline{z})$ находим, что $\|f\| \leqslant K$, так что $\underline{z}$ было произвольным. Из $\nu(f) = 1$ следует, что $f(\underline{z}) \geqslant 1$ для некоторого $\underline{z}$, и мы получаем $\inf \lambda^{-M} L^M f \geqslant K^{-1}$.

Если $x_i = x'_i$ при $i \in [0, m]$ и $f \in \Lambda$, то при $m \to \infty$, поскольку $B_m \to 1$, имеем
$$|f(\underline{x}) - f(\underline{x}')| \leqslant (B_m - B_m^{-1}) K \to 0.$$

Таким образом, Λ равностепенно непрерывно, и, значит, по теореме Арцела — Асколи компактно. Так как $1 \in \Lambda$, Λ не пусто. Применив теорему Шаудера — Тихонова к $\lambda^{-1}L\colon \Lambda \to \Lambda$, находим $h \in \Lambda$: $Lh = \lambda h$. Более того, $\inf h = \inf \lambda^{-M} L^M h \geqslant K^{-1}$. □

1.9. Лемма. *Существует такое* $\eta \in (0, 1)$, *что для* $f \in \Lambda$ *имеем* $\lambda^{-M} L^M f = \eta h + (1-\eta) f'$ *с* $f' \in \Lambda$.

Доказательство. Положим $g = \lambda^{-M} L^M f - \eta h$, где η будет определено ниже. При $\eta\|h\| \leqslant K^{-1}$ получаем $g \geqslant 0$. Предположим, что $x_i = x'_i$ при всех $i \in [0, m]$. Мы хотим выбрать η

---

[1]) Здесь символом $j\underline{x}$ обозначена последовательность $\{y_n\}_{n=0}^{+\infty}$, где $y_0 = j$ и $y_n = x_{n-1}$ при $n \geqslant 1$. Аналогичный смысл имеет встречающийся далее символ $j_1 \ldots j_r\underline{x}$. — *Прим. ред.*

так, чтобы выполнялось неравенство $g(\underline{x}) \leqslant B_m g(\underline{x}')$ или, иначе,

$$\eta(B_m h(\underline{x}') - h(\underline{x})) \leqslant B_m \lambda^{-M} L^M f(\underline{x}') - \lambda^{-M} L^M f(\underline{x}). \qquad (*)$$

Выше было показано, что $Lf_1(\underline{x}) \leqslant B_{m+1} e^{b\alpha^{m+1}} Lf_1(\underline{x}') \leqslant \leqslant B_{m+1} e^{b\alpha^m} Lf_1(\underline{x}')$ для всякого $f_1 \in \Lambda$. Применив это к $f_1 = = \lambda^{-M+1} L^{M-1} f$, получаем

$$\lambda^{-M} L^M f(\underline{x}) \leqslant B_{m+1} e^{b\alpha^m} \lambda^{-M} L^M f(\underline{x}').$$

Далее, $h(\underline{x}) \geqslant B_m^{-1} h(\underline{x}')$, так как $h \in \Lambda$. Для доказательства неравенства (*) достаточно поэтому получить, что

$$\eta\left(B_m - B_m^{-1}\right) h(\underline{x}') \leqslant \left(B_m - B_{m+1} e^{b\alpha^m}\right) \lambda^{-M} L^M f(\underline{x}')$$

или

$$\eta\left(B_m - B_m^{-1}\right) \| h \| \leqslant \left(B_m - B_{m+1} e^{b\alpha^m}\right) K^{-1}.$$

Существует такое c, что логарифмы чисел B_m, B_m^{-1} и $B_{m+1} e^{b\alpha^m}$ при всех m лежат внутри отрезка $[-c, c]$. Пусть u_1, u_2 — такие положительные константы, что

$$u_1(x - y) \leqslant e^x - e^y \leqslant u_2(x - y) \quad \text{при} \quad x, y \in [-c, c], \quad x > y.$$

Для справедливости (*) достаточно, чтобы $\eta > 0$ удовлетворяло неравенству

$$\eta \| h \| u_2 (\log B_m + \log B_m) \leqslant K^{-1} u_1 \left(\log B_m - \log\left(B_{m+1} e^{b\alpha^m}\right)\right),$$

или

$$\eta \| h \| u_2 \left(4b\alpha^{m+1}/(1 - \alpha)\right) \leqslant K^{-1} u_1 b \alpha^m,$$

или

$$\eta \leqslant u_1 (1 - \alpha) (4\alpha u_2 \| h \| K)^{-1}. \ \square$$

1.10. Лемма. *Существуют такие константы* $A > 0$ *и* $\beta \in (0, 1)$, *что*

$$\| \lambda^{-n} L^n f - h \| \leqslant A\beta^n$$

при всех $f \in \Lambda$, $n \geqslant 0$.

Доказательство. Пусть $n = Mq + r$, $0 \leqslant r < M$. Из 1.9 и $Lh = \lambda h$ по индукции получаем, что для $f \in \Lambda$

$$\lambda^{-Mq} L^{Mq} f = \left(1 - (1 - \eta)^q\right) h + (1 - \eta)^q f'_q,$$

где $f'_q \in \Lambda$. Из $\| f'_q \| \leqslant K$ следует, что

$$\| \lambda^{-Mq} L^{Mq} f - h \| \leqslant (1 - \eta)^q (\| h \| + K)$$

и

$$\|\lambda^{-n}L^n f - h\| = \|\lambda^{-r}L^r(\lambda^{-Mq}L^{Mq}f - h)\| \leqslant A(1-\eta)^{q+1} \leqslant A\beta^n,$$

где

$$A = (1-\eta)^{-1}(\|h\| + K) \sup_{0 \leqslant r < M} \|\lambda^{-r}L^r\|,$$

$$\beta^M = 1 - \eta. \ \square$$

1.11. Лемма. *Пусть* $\mathscr{C}_r = \{f \in C(\Sigma_A^+)\colon \operatorname{var}_r f = 0\}$. *Если* $F \in \Lambda$, $f \in \mathscr{C}_r$, $f \geqslant 0$ *и* $fF \neq 0$, *то* $\nu(fF)^{-1}\lambda^{-r}L^r(fF) \in \Lambda$.

Доказательство. Предположим, что $x_i = x_i'$ при $i \in [0, m]$. Тогда

$$L^r(fF)(\underline{x}) = \\ = \sum_{j_1 \ldots j_r \underline{x}} \exp\left(\sum_{k=0}^{r-1} \varphi(\sigma^k(j_1 \ldots j_r \underline{x}))\right) f(j_1 \ldots j_r \underline{x}) F(j_1 \ldots j_r \underline{x}),$$

где суммирование распространяется на всевозможные наборы символов $j_1 \ldots j_r$ длины r, для которых $j_1 \ldots j_r \underline{x} \in \Sigma_A^+$. В выражении для $L^r(fF)(\underline{x}')$ совокупность наборов $j_1 \ldots j_r$ будет та же самая. Далее, $f(j_1 \ldots j_r \underline{x}) = f(j_1 \ldots j_r \underline{x}')$, так как $f \in \mathscr{C}_r$,

$$F(j_1 \ldots j_r \underline{x}) \leqslant B_{m+r} F(j_1 \ldots j_r \underline{x}')$$

и

$$\varphi(\sigma^k(j_1 \ldots j_r \underline{x})) \leqslant \varphi(\sigma^k(j_1 \ldots j_r \underline{x}')) + \operatorname{var}_{m+r-k}\varphi.$$

Вследствие того, что

$$B_{m+r} \exp\left(\sum_{k=0}^{r-1} \operatorname{var}_{m+r-k}\varphi\right) \leqslant B_{m+r} \exp\left(\sum_{l=m+1}^{m+r} b\alpha^l\right) \leqslant B_m,$$

каждый член в приведенном выражении для $L^r(fF)(\underline{x})$ не больше, чем соответствующий член для $L^r(fF)(\underline{x}')$, умноженный на B_m. Отсюда $L^r(fF)(\underline{x}) \leqslant B_m L^r(fF)(\underline{x}')$.

Остается показать, что $\nu(fF) > 0$. Рассуждая, как при доказательстве 1.8 (с $L^r(fF)$ вместо f), получаем

$$\lambda^r \nu(fF) = \nu(\lambda^{-M} L^{M+r}(fF)) \geqslant K^{-1} L^r(fF)(\underline{z})$$

при любом $\underline{z}$. Но из $fF(\underline{w}) > 0$ для некоторого $\underline{w}$ следует, что $L^r(fF)(\sigma^r \underline{w}) > 0$ и, значит, $\nu(fF) > 0$. $\square$

1.12. Лемма. *Для* $f \in \mathscr{C}_r$, $F \in \Lambda$ *и* $n \geqslant 0$

$$\|\lambda^{-n-r} L^{n+r}(fF) - \nu(fF) h\| \leqslant A\nu(|fF|)\beta^n.$$

Для $g \in C(\Sigma_A^+)$

$$\lim_{n\to\infty} \|\lambda^{-m}L^m g - \nu(g)h\| = 0.$$

Доказательство. Запишем f в виде $f^+ - f^-$, где $f^+, f^- \geqslant 0$ и $f^+, f^- \in \mathscr{C}^r$. Имеем

$$\|\lambda^{-n-r}L^{n+r}(f^\pm F) - \nu(f^\pm F)h\| \leqslant A\nu(f^\pm F)\beta^n.$$

При $f^\pm F \equiv 0$ это очевидно; при $f^\pm F \not\equiv 0$ мы применяем леммы 1.11 и 1.10. Из этих неравенств вытекает первое утверждение леммы.

Для заданной функции g и $\varepsilon > 0$ можно найти такое r и такие $f_1, f_2 \in \mathscr{C}_r$, что $f_1 \leqslant g \leqslant f_2$ и $0 \leqslant f_2 - f_1 \leqslant \varepsilon$. Так как $|\nu(f_i) - \nu(g)| < \varepsilon$, из первого утверждения леммы с $F = 1$ при достаточно большом m получаем

$$\|\lambda^{-m}L^m f_i - \nu(g)h\| \leqslant \varepsilon(1 + \|h\|).$$

Так как $\lambda^{-m}L^m f_1 \leqslant \lambda^{-m}L^m g \leqslant \lambda^{-m}L^m f_2$,

$$\|\lambda^{-m}L^m g - \nu(g)h\| \leqslant \varepsilon(1 + \|h\|)$$

при большом m.

C. Построение гиббсовских мер

По-прежнему предполагается, что $\varphi \in \mathscr{F}_A \cap C(\Sigma_A^+)$ и ν, h, λ те же, что в рюэлевской теореме Перрона — Фробениуса. Тогда $\mu = h\nu$ — вероятностная мера на Σ_A^+; по определению $\mu(f) = \nu(hf) = \int f(\underline{x})h(\underline{x})\,d\nu$.

1.13. Лемма. *Мера* μ *инвариантна относительно сдвига* $\sigma\colon \Sigma_A^+ \to \Sigma_A^+$.

Доказательство. Мы должны доказать, что $\mu(f) = \mu(f \circ \sigma)$ для $f \in C(\Sigma_A^+)$. Отметим, что

$$((Lf)\cdot g)(\underline{x}) = \sum_{\underline{y} \in \sigma^{-1}\underline{x}} e^{\varphi(\underline{y})} f(\underline{y})\, g(\underline{x}) =$$

$$= \sum_{\underline{y} \in \sigma^{-1}\underline{x}} e^{\varphi(\underline{y})} f(\underline{y})\, g(\sigma\underline{y}) = L(f\cdot(g\circ\sigma))(x).$$

Отсюда получаем

$$\mu(f) = \nu(hf) = \nu(\lambda^{-1}Lh\cdot f) =$$

$$= \lambda^{-1}\nu(L(h\cdot(f\circ\sigma))) = \lambda^{-1}(L^*\nu)(h\cdot(f\circ\sigma)) =$$

$$= \nu(h\cdot(f\circ\sigma)) = \mu(f\circ\sigma). \quad \square$$

Так как μ — это σ-инвариантная мера на Σ_A^+, существует естественный способ превратить μ в меру на Σ_A. Для $f \in C(\Sigma_A)$ определим $f^* \in C(\Sigma_A^+)$ формулой

$$f^* \{x_i\}_{i=0}^{\infty} = \min \{ f(\underline{y}) \colon \ \underline{y} \in \Sigma_A, \ y_i = x_i \quad \text{при всех} \quad i \geqslant 0 \}.$$

Отметим, что при $m, n \geqslant 0$ справедливо неравенство

$$\| (f \circ \sigma^n)^* \circ \sigma^m - (f \circ \sigma^{n+m})^* \| \leqslant \operatorname{var}_n f.$$

Отсюда

$$| \mu ((f \circ \sigma^n)^*) - \mu ((f \circ \sigma^{n+m})^*) | = \\ = | \mu ((f \circ \sigma^n)^* \circ \sigma^m) - \mu ((f \circ \sigma^{n+m})^*) | \leqslant \operatorname{var}_n f,$$

а $\operatorname{var}_n f$ стремится к нулю при $n \to \infty$, так как f непрерывна. Значит, $\tilde{\mu}(f) = \lim_{n \to \infty} \mu ((f \circ \sigma^n)^*)$ существует по критерию Коши. Нетрудно проверить, что $\tilde{\mu} \in C(\Sigma_A)^*$. Из теоремы Рисса об общем виде линейного функционала следует, что $\tilde{\mu}$ задает вероятностную меру на Σ_A, которую мы обозначим через μ, не опасаясь возможной двусмысленности. Отметим, что

$$\tilde{\mu}(f \circ \sigma) = \lim_{n \to \infty} \mu ((f \circ \sigma^{n+1})^*) = \tilde{\mu}(f),$$

т. е. $\tilde{\mu}$ — это σ-инвариантный функционал. Кроме того, $\tilde{\mu}(f) = \mu(f)$ при $f \in C(\Sigma_A^+)$.

Напомним, что мера μ называется *эргодической*, если для всякого борелевского множества E, такого, что $E = \sigma^{-1} E$, $\mu(E) = 0$ или 1. Мера μ называется *перемешивающей*, если

$$\lim_{n \to \infty} \mu (E \cap \sigma^{-n} F) = \mu(E) \cdot \mu(F)$$

для любых борелевских множеств E и F. Ясно, что из перемешивания вытекает эргодичность, и обычным образом показывается, что условия перемешивания достаточно проверять для E и F из базы топологии на Σ_A.

1.14. Предложение. *Мера μ перемешивающая относительно $\sigma \colon \Sigma_A \to \Sigma_A$.*

Доказательство. Обозначим $S_m \varphi(\underline{x}) = \sum_{k=0}^{m-1} \varphi(\sigma^k \underline{x})$. Пусть $f, g \in C(\Sigma_A^+)$. По индукции убеждаемся, что

$$(L^m f)(\underline{x}) = \sum_{\underline{y} \in \sigma^{-m} \underline{x}} e^{S_m \varphi(\underline{y})} f(\underline{y}).$$

При этом

$$((L^m f) \cdot g)(\underline{x}) = \sum_{\underline{y} \in \sigma^{-m} \underline{x}} e^{S_m \varphi(\underline{y})} f(\underline{y})\, g(\sigma^m \underline{y}) = L^m (f \cdot (g \circ \sigma^m))(\underline{x}).$$

Положим

$$E = \{\underline{y} \in \Sigma_A: \ y_i = a_i, \ r \leqslant i \leqslant s\},$$
$$F = \{\underline{y} \in \Sigma_A: \ y_i = b_i, \ u \leqslant i \leqslant v\}.$$

Так как μ — это σ-инвариантная мера, при проверке условия перемешивания можно предполагать, что $r = u = 0$. Мы хотим подсчитать

$$\mu(E \cap \sigma^{-n}F) = \mu(\chi_E \cdot \chi_{\sigma^{-n}F}) = \mu(\chi_E \cdot (\chi_F \circ \sigma^n)) =$$
$$= \nu(h\chi_E \cdot (\chi_F \circ \sigma^n)) = \lambda^{-n}L^{*n}\nu(h\chi_E \cdot (\chi_F \circ \sigma^n)) =$$
$$= \nu(\lambda^{-n}L^n(h\chi_E \cdot (\chi_F \circ \sigma^n))) = \nu(\lambda^{-n}L^n(h\chi_E) \cdot \chi_F).$$

Далее,

$$|\mu(E \cap \sigma^{-n}F) - \mu(E)\mu(F)| = |\mu(E \cap \sigma^{-n}F) - \nu(h\chi_E)\nu(h\chi_F)| =$$
$$= |\nu((\lambda^{-n}L^n(h\chi_E) - \nu(h\chi_E)h)\chi_F)| \leqslant$$
$$\leqslant \|\lambda^{-n}L^n(h\chi_E) - \nu(h\chi_E)h\| \nu(F).$$

Так как $\chi_E \in \mathscr{C}_s$, из леммы 1.12 следует, что при $n \geqslant s$

$$\|\lambda^{-n}L^n(h\chi_E) - \nu(h\chi_E)h\| \leqslant A\mu(E)\beta^{n-s},$$

где $\beta \in (0, 1)$. Отсюда получаем при $n \geqslant s$

$$|\mu(E \cap \sigma^{-n}F) - \mu(E)\mu(F)| \leqslant A'\mu(E)\mu(F)\beta^{n-s},$$

где $A' = A \cdot (\inf h)^{-1}$. Значит, $\mu(E \cap \sigma^{-n}F) \to \mu(E) \cdot \mu(F)$. $\square$

1.15. Лемма. *Пусть* $a = \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{var}_k \varphi < \infty$. *Если* $\underline{x}, \underline{y} \in \Sigma_A$ *и* $x_i = y_i$ *при* $i \in [0, m)$, *то*

$$|S_m\varphi(\underline{x}) - S_m\varphi(\underline{y})| \leqslant a.$$

Доказательство. Определим $\underline{y}'$, положив

$$y'_i = \begin{cases} y_i & \text{при} \quad i \geqslant 0, \\ x_i & \text{при} \quad i \leqslant 0. \end{cases}$$

Так как $\varphi \in C(\Sigma_A^+)$, $\varphi(\sigma^k\underline{y}') = \varphi(\sigma^k\underline{y})$ при $k \geqslant 0$. Отсюда

$$|S_m\varphi(\underline{x}) - S_m\varphi(\underline{y})| \leqslant \sum_{k=0}^{m-1} |\varphi(\sigma^k\underline{x}) - \varphi(\sigma^k\underline{y}')| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=0}^{m-1} \operatorname{var}_{m-1-k}\varphi \leqslant a. \ \square$$

Закончим теперь доказательство теоремы 1.4.

1.16. Теорема. *Мера μ является гиббсовской мерой, соответствующей функции $\varphi \in \mathcal{F}_A \cap C(\Sigma_A^+)$.*

Доказательство. Пусть $E = \{\underline{y} \in \Sigma_A\colon y_i = x_i$ при $i \in [0, m)\}$. Для всякого $\underline{z} \in \Sigma_A^+$ существует не более одного $\underline{y}' \in \sigma^{-m}\underline{z}$, такого, что $\underline{y}' \in E$. Отсюда, используя 1.15, получаем

$$L^m(h\chi_E)(\underline{z}) = \sum_{\underline{y} \in \sigma^{-m}\underline{z}} e^{S_m\varphi(\underline{y})} h(\underline{y}) \chi_E(\underline{y}) \leqslant e^{S_m\varphi(\underline{x})} \cdot e^a \cdot \|h\|$$

и, значит,

$$\mu(E) = \nu(h\chi_E) = \lambda^{-m}\nu\left(L^m(h\chi_E)\right) \leqslant \lambda^{-m} e^{S_m\varphi(\underline{x})} e^a \|h\|.$$

Таким образом, можно положить $c_2 = e^a\|h\|$. С другой стороны, для всякого $\underline{z} \in \Sigma_A^+$ существует по крайней мере одно такое $\underline{y}' \in \sigma^{-m-M}\underline{z}$, что $\underline{y}' \in E$. Отсюда

$$L^{m+M}(h\chi_E)(\underline{z}) \geqslant e^{S_{m+M}\varphi(\underline{y}')} h(\underline{y}') \geqslant e^{-M\|\varphi\|-a} (\inf h)\, e^{S_m\varphi(\underline{x})}$$

и

$$\mu(E) = \lambda^{-m-M}\nu\left(L^{m+M}(h\chi_E)\right) \geqslant c_1 \lambda^{-m} e^{S_m\varphi(\underline{x})},$$

где $c_1 = \lambda^{-M} e^{-M\|\varphi\|-a}$. Мы доказали неравенства из 1.4 для мер цилиндрических множеств при $P = \log\lambda$.

Предположим теперь, что μ' — некоторая другая мера, удовлетворяющая неравенствам из 1.4 с константами c_1', c_2', P'. Для $\underline{x} \in \Sigma_A$ положим $E_m(\underline{x}) = \{\underline{y} \in \Sigma_A\colon y_i = x_i$ для всех $i \in [0, m)\}$. Пусть T_m — такое конечное подмножество Σ_A, что в представлении $\Sigma_A = \bigcup_{\underline{x} \in T_m} E_m(\underline{x})$ множества $E_m(\underline{x})$ не пересекаются. Тогда

$$c_1' e^{-P'm} \sum_{\underline{x} \in T_m} e^{S_m\varphi(\underline{x})} \leqslant \sum_{\underline{x} \in T_m} \mu'(E_m(\underline{x})) = 1 \leqslant c_2' e^{-P'm} \sum_{\underline{x} \in T_m} e^{S_m\varphi(\underline{x})}.$$

Отсюда видно, что $P' = \lim\limits_{m\to\infty} \frac{1}{m} \log\left(\sum_{\underline{x} \in T_m} e^{S_m\varphi(\underline{x})}\right)$. То же рассуждение можно применить к μ; значит, $P' = P$, так как они равны одному и тому же пределу.

Оценки на $\mu'(E_m(\underline{x}))$ и $\mu(E_m(\underline{x}))$ дают нам соотношение $\mu'(E_m(\underline{x})) \leqslant d\mu(E_m(\underline{x}))$, где $d = c_2' c_1^{-1}$. Аппроксимируя борелевские множества цилиндрическими, получаем $\mu'(E) \leqslant \leqslant d\mu(E)$ для всех борелевских множеств E. В частности, $\mu'(E) = 0$, если $\mu(E) = 0$. По теореме Радона — Никодима $\mu' = f\mu$, где f интегрируема по мере μ. Применяя сдвиг σ, получаем

$$\mu' = \sigma^*\mu' = (f \circ \sigma)\, \sigma^*\mu = (f \circ \sigma)\, \mu.$$

Так как производная Радона — Никодима единственна (с точностью до множеств нулевой μ-меры), $f\circ\sigma=f$ почти всюду. Из эргодичности μ следует, что функция f почти всюду по мере μ равна некоторой константе c.

Из $1=\mu'(\Sigma_A)=\int c\,d\mu=c$ получаем $\mu'=\mu$. □

D. Вариационный принцип

Мы опишем гиббсовские меры как меры, на которых достигает максимума некоторая величина, аналогично тому, как это делалось в лемме 1.1. Если $\mathscr{C}=\{C_1,\ldots,C_k\}$ — разбиение пространства с мерой $(X,\mathfrak{B},\mu)$ (т. е. C_i попарно не пересекаются и $X=\bigcup_{i=1}^{k}C_i$), то его энтропией называется число

$$H_\mu(\mathscr{C})=\sum_{i=1}^{k}(-\mu(C_i)\log\mu(C_i)).$$

Если $\mathscr{D}$ — другое конечное разбиение, то по определению

$$\mathscr{C}\vee\mathscr{D}=\{C_i\cap D_j\colon\ C_i\in\mathscr{C},\ D_j\in\mathscr{D}\}.$$

1.17. Лемма. $H_\mu(\mathscr{C}\vee\mathscr{D})\leqslant H_\mu(\mathscr{C})+H_\mu(\mathscr{D})$.

Доказательство.

$$\begin{aligned}H_\mu(\mathscr{C}\vee\mathscr{D})-H_\mu(\mathscr{C})&=\\&=\sum_{i,j}(-\mu(C_i\cap D_j)\log\mu(C_i\cap D_j))-\sum_i(-\mu(C_i)\log\mu(C_i))=\\&=\sum_{i,j}\left(-\mu(C_i\cap D_j)\log\frac{\mu(C_i\cap D_j)}{\mu(C_i)}\right)=\\&=\sum_{i,j}\mu(C_i)\left(\frac{-\mu(C_i\cap D_j)}{\mu(C_i)}\log\frac{\mu(C_i\cap D_j)}{\mu(C_i)}\right).\end{aligned}$$

Функция $\varphi(x)=-x\log x$ ($\varphi(0)=0$) вогнута на $[0,1]$, так как $\varphi''(x)<0$ при $x\in(0,1)$ (рис. 1). Отсюда следует, что $\varphi(a_1x_1+a_2x_2)\geqslant a_1\varphi(x_1)+a_2\varphi(x_2)$, если $x_1,x_2\in[0,1]$, $a_1+a_2=1$, $a_i\geqslant 0$. По индукции получаем, что $\varphi\left(\sum_1^n a_ix_i\right)\geqslant\sum_1^n a_i\varphi(x_i)$ при $\sum_1^n a_i=1$ и $a_i\geqslant 0$. Взяв $a_i=\mu(C_i)$ и $x_i=\dfrac{\mu(C_i\cap D_j)}{\mu(C_i)}$, получаем

$$\sum_i\mu(C_i)\varphi\left(\frac{\mu(C_i\cap D_j)}{\mu(C_i)}\right)\leqslant\varphi\left(\sum_i\mu(C_i\cap D_j)\right)=\varphi(\mu(D_j)).$$

Таким образом,

$$H_\mu(\mathscr{C} \vee \mathscr{D}) - H_\mu(\mathscr{C}) \leqslant \sum_j \varphi(\mu(D_j)) = H_\mu(\mathscr{D}). \ \square$$

1.18. Лемма. *Пусть* $\{a_m\}_{m=1}^\infty$ — *последовательность, удовлетворяющая условиям* $\inf \frac{a_m}{m} > -\infty$, $a_{n+m} \leqslant a_n + a_m$ *при всех* m, n. *Тогда* $\lim\limits_{m\to\infty} \frac{a_m}{m}$ *существует и равен* $\inf\limits_m \frac{a_m}{m}$.

Доказательство. Зафиксируем $m > 0$. При $j > 0$ запишем $j = km + n$, где $0 \leqslant n < m$. Тогда

$$\frac{a_j}{j} = \frac{a_{km+n}}{km+n} \leqslant \frac{a_{km}}{km} + \frac{a_n}{km} \leqslant \frac{ka_m}{km} + \frac{a_n}{km}.$$

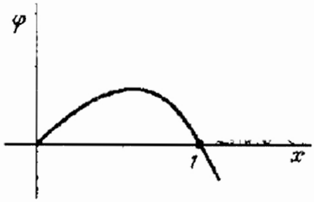


Рис. 1.

Устремив $j \to \infty$, $k \to \infty$, получаем

$$\varlimsup_j \frac{a_j}{j} \leqslant \frac{a_m}{m}.$$

Отсюда $\varlimsup\limits_j \frac{a_j}{j} \leqslant \inf\limits_m \frac{a_m}{m}$. Так как $\varliminf\limits_j \frac{a_j}{j} \geqslant \inf\limits_m \frac{a_m}{m}$, получаем, что $\lim\limits_j \frac{a_j}{j}$ существует и равен $\inf\limits_m \frac{a_m}{m}$. $\square$

1.19. Лемма. *Если* $\mathscr{D}$ — *конечное разбиение пространства* $(X, \mathfrak{B}, \mu)$, *а* T — *автоморфизм* $(X, \mathfrak{B}, \mu)$, *то существует предел*

$$h_\mu(T, \mathscr{D}) = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} H_\mu(\mathscr{D} \vee T^{-1}\mathscr{D} \vee \ldots \vee T^{-m+1}\mathscr{D}).$$

Доказательство. Положим $a_m = H_\mu(\mathscr{D} \vee T^{-1}\mathscr{D} \vee \ldots \vee T^{-m+1}\mathscr{D})$. Тогда

$$a_{m+n} \leqslant H_\mu(\mathscr{D} \vee \ldots \vee T^{-m+1}\mathscr{D}) + H_\mu(T^{-m}\mathscr{D} \vee \ldots \vee T^{-m-n+1}\mathscr{D}) = a_m + a_n,$$

так как

$$T^{-m}\mathscr{D} \vee \ldots \vee T^{-m-n+1}\mathscr{D} = T^{-m}(\mathscr{D} \vee \ldots \vee T^{-n+1}\mathscr{D}),$$

а мера μ T-инвариантна. $\square$

Определение. Пусть $\mu \in M_\sigma(\Sigma_A)$, а $\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_n\}$ — разбиение на цилиндры $U_i = \{\underline{x} \in \Sigma_A: x_0 = i\}$. Тогда $s(\mu) = h_\mu(\sigma, \mathcal{U})$ называется *энтропией* по мере μ.

Предположим теперь, что $\varphi \in C(\Sigma_A)$ и что $a_0 a_1 \ldots a_m$ — набор целых чисел между 1 и n, удовлетворяющий условию $A_{a_k a_{k+1}} = 1$. Обозначим

$$\sup_{a_0 a_1 \ldots a_{m-1}} S_m\varphi = \sup\left\{\sum_{k=0}^{m-1} \varphi(\sigma^k \underline{x}): \underline{x} \in \Sigma_A,\ x_i = a_i \text{ при } 0 \leqslant i < m\right\}$$

и

$$Z_m(\varphi) = \sum_{a_0 a_1 \ldots a_{m-1}} \exp\left(\sup_{a_0 \ldots a_{m-1}} S_m\varphi\right).$$

1.20. Лемма. *Для функции* $\varphi \in C(\Sigma_A)$ *существует предел* $P(\varphi) = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \log Z_m(\varphi)$ *(число* $P(\varphi)$ *называется давлением, соответствующим* φ*).*

Доказательство. Отметим, что

$$\sup_{a_0 \ldots a_{m+n-1}} S_{m+n}\varphi \leqslant \sup_{a_0 \ldots a_{m-1}} S_m\varphi + \sup_{a_m \ldots a_{m+n-1}} S_n\varphi.$$

Из этого следует, что $Z_{m+n}(\varphi) \leqslant Z_m(\varphi) Z_n(\varphi)$. Действительно, члены в $Z_{m+n}(\varphi)$ не превосходят соответствующих членов в $Z_m(\varphi) Z_n(\varphi)$ и, кроме того, $Z_m(\varphi) Z_n(\varphi)$ может содержать дополнительные положительные члены. Мы можем поэтому применить лемму 1.18 к $a_m = \log Z_m(\varphi)$ (отметим, что $a_m \geqslant -m\|\varphi\|$). □

1.21. Предложение. *Пусть* $\varphi \in C(\Sigma_A)$, $\mu \in M_\sigma(\Sigma_A)$. *Тогда*

$$s(\mu) + \int \varphi\, d\mu \leqslant P(\varphi).$$

Доказательство. Из $\int \varphi \circ \sigma^k\, d\mu = \int \varphi\, d\mu$ следует, что $\frac{1}{m} \int S_m\varphi\, d\mu = \int \varphi\, d\mu$, где $S_m\varphi(\underline{x}) = \sum_{k=0}^{m-1} \varphi(\sigma^k \underline{x})$. Отсюда

$$s(\mu) + \int \varphi\, d\mu = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m}\left[H_\mu(\mathcal{U} \vee \ldots \vee \sigma^{-m+1}\mathcal{U}) + \int S_m\varphi\, d\mu\right].$$

Далее, точки $\underline{x} \in \Sigma_A$ распределены по элементам разбиения $\mathcal{U} \vee \ldots \vee \sigma^{-m+1}\mathcal{U}$ в соответствии с координатами $x_0, x_1, \ldots$

$\ldots, x_{m-1}$. Поэтому

$$H_\mu(\mathcal{U} \vee \ldots \vee \sigma^{-m+1}\mathcal{U}) + \int S_m\varphi \, d\mu \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{a_0 \ldots a_{m-1}} \mu(a_0 \ldots a_{m-1})(-\log \mu(a_0 \ldots a_{m-1}) +$$

$$+ \sup_{a_0 \ldots a_{m-1}} S_m\varphi) \leqslant \log Z_m(\varphi) \text{ по лемме 1.1.}$$

Теперь достаточно устремить m к ∞. □

1.22. Теорема. *Предположим, что сдвиг* $\sigma\colon \Sigma_A \to \Sigma_A$ *перемешивает, функция* $\varphi \in \mathcal{F}_A$ *и* μ_φ — *гиббсовская мера, соответствующая* φ. *Тогда* μ_φ — *это единственная мера* $\mu \in M_\sigma(\Sigma_A)$, *для которой*

$$s(\mu) + \int \varphi \, d\mu = P(\varphi).$$

Доказательство. Для заданного набора $a_0 \ldots a_{m-1}$ найдем такое $\underline{x}$ с $x_i = a_i$ $(i = 0, \ldots, m-1)$, что

$$S_m\varphi(\underline{x}) = \sup_{a_0 \ldots a_{m-1}} S_m\varphi.$$

Так как $\mu = \mu_\varphi$ — гиббсовская мера,

$$\frac{\mu\{\underline{y} \in \Sigma_A\colon y_i = a_i \forall 0 \leqslant i < m\}}{\exp(-Pm + S_m\varphi(\underline{x}))} \in [c_1, c_2].$$

Сумма мер таких множеств по всевозможным $a_0 \ldots a_{m-1}$ равна 1, поэтому

$$c_1 \exp(-Pm) Z_m(\varphi) \leqslant 1 \leqslant c_2 \exp(-Pm) Z_m(\varphi),$$

или

$$\frac{Z_m(\varphi)}{\exp(Pm)} \in [c_2^{-1}, c_1^{-1}].$$

Отсюда следует, что $P(\varphi) = \lim\limits_m \frac{1}{m} \log Z_m(\varphi) = P$.

Если $y_i = x_i$ при всех $i = 0, \ldots, m-1$, то

$$|S_m\varphi(\underline{y}) - S_m\varphi(\underline{x})| \leqslant \sum_{k=0}^{m-1} |\varphi(\sigma^k\underline{x}) - \varphi(\sigma^k\underline{y})| \leqslant$$

$$\leqslant \operatorname{var}_0\varphi + \operatorname{var}_1\varphi + \ldots + \operatorname{var}_{[m/2]}\varphi + \operatorname{var}_{m-[m/2]}\varphi + \ldots + \operatorname{var}_0\varphi \leqslant$$

$$\leqslant 2c \sum_{k=0}^{[m/2]} \alpha^k \leqslant \frac{2c}{1-\alpha} = d.$$

Отсюда если $B=\{\underline{y}\in\Sigma_A\colon y_i=a_i$ при $i=0,\ldots,m-1\}$, то для $\underline{x}\in B$

$$-\mu(B)\log\mu(B)+\int\limits_B S_m\varphi\,d\mu\geqslant-\mu(B)[\log\mu(B)-S_m\varphi(\underline{x})+d]\geqslant$$

$$\geqslant-\mu(B)\left[\log\left(c_1e^{-Pm+S_m\varphi(\underline{x})}\right)-S_m\varphi(\underline{x})+d\right]\geqslant$$

$$\geqslant\mu(B)(Pm-\log c_1-d);$$

$$H_\mu(\mathcal{U}\vee\ \ldots\ \vee\sigma^{-m+1}\mathcal{U})+\int S_m\varphi\,d\mu=$$

$$=\sum_B\left(-\mu(B)\log\mu(B)+\int\limits_B S_m\varphi\,d\mu\right)\geqslant\sum_B\mu(B)(Pm-\log c_1-d)=$$

$$=Pm-\log c_1-d.$$

Таким образом,

$$s(\mu)+\int\varphi\,d\mu=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\left(H_\mu(\mathcal{U}\vee\ \ldots\ \vee\sigma^{-m+1}\mathcal{U})+\int S_m\varphi\,d\mu\right)\geqslant$$

$$\geqslant\lim\frac{1}{m}(Pm-\log c_1-d)=P=P(\varphi).$$

Обратное неравенство было доказано в 1.21. Итак,

$$s(\mu_\varphi)+\int\varphi\,d\mu=P(\varphi).$$

Для доказательства единственности нам потребуются две леммы.

1.23. Лемма. *Пусть X — компактное метрическое пространство, $\mu\in M(X)$ и $\mathcal{D}=\{D_1,\ldots,D_n\}$ — борелевское разбиение X. Предположим, что $\{\mathscr{C}_m\}_{m=1}^{\infty}$ — такая последовательность разбиений, что $\operatorname{diam}\mathscr{C}_m=\max\limits_{C\in\mathscr{C}_m}\operatorname{diam}C\to 0$ при $m\to\infty$. Тогда существует такая последовательность разбиений $\{E_1^m,\ldots,E_n^m\}$, что*

1) *каждый элемент E_i^m является объединением элементов разбиения $\mathscr{C}_m$;*

2) $\lim\limits_{m\to\infty}\mu(E_i^m\,\Delta\,D_i)=0$ *при всех i.*

Доказательство. Найдем такие компактные множества $K_1,\ldots,K_n$, что $K_i\subset D_i$ и $\mu(D_i\setminus K_i)<\varepsilon$. Для $\delta=\inf\limits_{i\neq j}d(K_i,K_j)$ выберем такое m, что $\operatorname{diam}\mathscr{C}_m<\delta/2$. Объединим элементы $C\in\mathscr{C}_m$ в группы $E_1^m,\ldots,E_n^m$ так, что $C\in E_i^m$, если $C\cap K_i\neq\varnothing$. Поскольку $\operatorname{diam}\mathscr{C}_m<\delta/2$, каждое $C\in\mathscr{C}_m$ может пересечься не более чем с одним K_i. Присоединим элементы C, не пересекающнеся ни с одним K_i, к любой из групп E_i^m. Тогда $E_i^m \supset K_i$ и

$$\mu(E_i^m \Delta D_i) = \mu(D_i \setminus E_i^m) + \mu(E_i^m \setminus D_i) \leqslant \varepsilon + \\ + \mu\left(X \setminus \bigcup_{i=1}^{m} K_i\right) \leqslant (n+1)\varepsilon. \ \square$$

1.24. Лемма. *Предположим, что* $0 \leqslant p_1, \ldots, p_m \leqslant 1$, $s = p_1 + \ldots + p_m \leqslant 1$ *и* $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$. *Тогда*

$$\sum_{i=1}^{m} p_i (a_i - \log a_i) \leqslant s\left(\log \sum_{i=1}^{m} e^{a_i} - \log s\right).$$

Доказательство. Давное утверждение обобщает лемму 1.1. Непосредственным вычисленнем проверяется, что левая часть достигает максимума при $p_i = se^{a_i} / \sum_j e^{a_j}$. $\square$

Продолжение доказательства теоремы 1.22. Пусть $\nu \in M_\sigma(\Sigma_A)$ удовлетворяет равенству $s(\nu) + \int \varphi \, d\nu = P$. Предположим сначала, что ν сингулярна по отношению к μ. Тогда существует борелевское множество B, такое, что $\sigma(B) = B$, $\mu(B) = 0$, а $\nu(B) = 1$. Пусть $\mathscr{C}_m = \sigma^{-[m/2]+1}\mathscr{U} \vee \ldots \vee \mathscr{U} \vee \ldots \vee \sigma^{m-[m/2]}\mathscr{U}$. Пользуясь метрикой d_β, заключаем, что $\operatorname{diam} \mathscr{C}_m \to 0$. Применим 1.23 к разбиению $\{B, X \setminus B\}$ и найдем множества E^m, которые состоят из элементов $\mathscr{C}_m$ и удовлетворяют условию $(\mu + \nu)(B \Delta E^m) \to 0$. Так как мера $\mu + \nu$ σ-инварнантна и $\sigma^{-m+[m/2]}B = B$, получаем $(\mu + \nu)(B \Delta F^m) \to 0$, где $F^m = \sigma^{-m+[m/2]}E^m$ является объединением элементов разбиения $\sigma^{-m+1}\mathscr{U} \vee \ldots \vee \mathscr{U}$. Так как $s(\nu) = \inf \frac{1}{m} H_\nu(\mathscr{U} \vee \ldots \vee \sigma^{-m+1}\mathscr{U})$, получаем

$$P = P(\varphi) = s(\nu) + \int \varphi \, d\nu \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{m}\left(H_\nu(\mathscr{U} \vee \ldots \vee \sigma^{-m+1}\mathscr{U}) + \int S_m\varphi \, d\nu\right),$$

или

$$mP \leqslant \sum_{B \in \mathscr{U} \vee \ldots \vee \sigma^{-m+1}\mathscr{U}} \left[-\nu(B) \log \nu(B) + \int_B S_m\varphi \, d\nu\right].$$

Выбрав $\underline{x}_B \in B$, получаем $S_m\varphi \leqslant S_m\varphi(\underline{x}_B) + d$ на B и, значит,

$$mP \leqslant d + \sum_B \nu(B)(S_m\varphi(\underline{x}_B) - \log \nu(B)),$$

$$mP \leqslant d + \sum_{B \subset F^m} \nu(B)(S_m\varphi(\underline{x}_B) - \log \nu(B)) + \\ + \sum_{B \subset X \setminus F^m} \nu(B)(S_m\varphi(\underline{x}_B) - \log \nu(B)).$$

Применив 1.24, получаем

$$mP - d \leqslant \nu(F^m)\log \sum_{B\subset F^m} \exp S_m\varphi(\underline{x}_B) + \\ + \nu(X\setminus F^m) \sum_{B\subset X\setminus F^m} \exp S_m\varphi(\underline{x}_B) + 2K^*,$$

где $K^* = \sup\limits_{0\leqslant s\leqslant 1}(-s\log s)$. Перегруппируем члены:

$$-2K^* - d \leqslant \nu(F^m)\log \sum_{B\subset F^m} \exp(S_m\varphi(\underline{x}_B) - mP) + \\ + \nu(X\setminus F^m)\log \sum_{B\subset X\setminus F^m} \exp(S_m\varphi(\underline{x}_B) - mP) \leqslant \\ \leqslant \nu(F^m)\log \sum_{B\subset F^m} c_2^{-1}\mu(B) + \nu(X\setminus F^m)\log \sum_{B\subset X\setminus F^m} c_2^{-1}\mu(B) \leqslant \\ \leqslant \log c_2^{-1} + \nu(F^m)\log\mu(F^m) + \nu(X\setminus F^m)\log\mu(X\setminus F^m).$$

При $m\to\infty$ имеем $\nu(F^m)\to 1$, $\mu(F^m)\to 0$, и, значит, предыдущее неравенство невозможно.

В общем случае запишем $\nu'\in M_\sigma(\Sigma_A)$ в виде $\nu' = \beta\nu + (1-\beta)\mu'$, где $\beta\in[0, 1]$, $\nu\in M_\sigma(\Sigma_A)$ — мера, сингулярная относительно μ, а $\mu'\in M_\sigma(\Sigma_A)$ — мера, абсолютно непрерывная относительно μ. Так как носители мер ν и μ' не пересекаются,

$$P_{\nu'}(\varphi) = \beta P_\nu(\varphi) + (1-\beta)P_{\mu'}(\varphi),$$

где $P_\nu(\varphi) = s(\nu) + \int\varphi d\nu$. Предположим, что $P_{\nu'}(\varphi) = P$. Так как $P_\nu(\varphi)\leqslant P$ и $P_{\mu'}(\varphi)\leqslant P$ (предложение 1.21), получаем $P_\nu(\varphi) = P$ или $\beta = 0$. Мы только что показали, что $P_\nu(\varphi)\neq P$. Значит, $\nu' = \mu'$ и можно записать $\nu' = \frac{d\nu'}{d\mu}\mu$. Из инвариантности мер ν' и μ и единственности производной Радона — Никодима на множестве полной меры следует σ-инвариантность $\frac{d\nu'}{d\mu}$ на этом множестве. Значит, $\frac{d\nu'}{d\mu}$ — константа и $\nu' = \mu$. □

E. Дополнительные свойства гиббсовских мер

В этом разделе будет показано, что гиббсовские меры обладают еще некоторыми хорошими свойствами. В дальнейшем мы предполагаем, что $\mu = \mu_\varphi$, где $\varphi\in\mathscr{F}_A$, и что $\sigma|\Sigma_A$ топологически перемешивает.

Два разбиения $\mathscr{P}$ и $\mathscr{Q}$ называются *ε-независимыми*, если

$$\sum_{P\in\mathscr{P},\, Q\in\mathscr{Q}} |\mu(P\cap Q) - \mu(P)\cdot\mu(Q)| < \varepsilon.$$

Пусть $\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_n\}$ — разбиение Σ_A на множества

$$U_j = \{\underline{x} \in \Sigma_A\colon\ x_0 = j\}.$$

Разбиение $\mathcal{U}$ называется *слабо бернуллиевским* (относительно σ и μ), если для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $N = N(\varepsilon)$, что разбиения

$$\mathcal{P} = \mathcal{U} \vee \sigma^{-1}\mathcal{U} \vee \ldots \vee \sigma^{-s}\mathcal{U} \quad \text{и} \quad \mathcal{Q} = \sigma^{-t}\mathcal{U} \vee \ldots \vee \sigma^{-t-r}\mathcal{U}$$

ε-независимы при всех $s \geqslant 0$, $r \geqslant 0$, $t \geqslant s + N(\varepsilon)$. Известная теорема Фридмана и Орнстейна [4] утверждает, что если $\mathcal{U}$ — слабо бернуллиевское, то автоморфизм (σ, μ) сопряжен сдвигу Бернулли.

1.25. Теорема. *Разбиение $\mathcal{U}$ слабо бернуллиевское относительно гиббсовской меры $\mu = \mu_\varphi$.*

Доказательство. Как и раньше, можно считать, что $\varphi \in C(\Sigma_A^+)$. Прв $P \in \mathcal{P}$ имеем $\chi_P \in \mathscr{C}_s$. Для $Q \in \mathcal{Q}$ получаем, как и при доказательстве 1.14, что

$$|\mu(P \cap Q) - \mu(P)\mu(Q)| \leqslant A'\mu(P)\mu(Q)\beta^{t-s},$$

где $\beta \in (0, 1)$. Суммируя по P и Q, получаем

$$\sum_{P,Q} |\mu(P \cap Q) - \mu(P)\mu(Q)| \leqslant A'\beta^{t-s} \leqslant \varepsilon$$

прн достаточно большом $t - s$. □

Если сдвиг σ является перемешивающим преобразованием относительно меры μ, то $\mu(f \cdot (g \circ \sigma^n)) \to \mu(f) \cdot \mu(g)$ при $n \to \infty$ для непрерывных функций f и g (на самом деле для функций из L^2). В предыдущем доказательстве использовалось то, что эта сходимость происходит с экспоненциальной скоростью для характеристических функций цилиндрических множеств. Мы покажем, что экспоненциальная сходимость имеет место для любых функций из $\mathcal{F}_A$.

Для $\alpha \in (0, 1)$ определим семейство $\mathcal{H}_\alpha$ функций $f \in C(\Sigma_A)$, удовлетворяющих условию $\operatorname{var}_k f \leqslant c\alpha^k$ при некотором c. Тогда $\mathcal{H}_\alpha$ — банахово пространство с нормой

$$\|f\|_\alpha = \|f\| + \sup_{k \geqslant 0} (\alpha^{-k} \operatorname{var}_k f).$$

1.26. Свойство экспоненциального убывания корреляций. Для заданного $\alpha \in (0, 1)$ существуют такие константы D и $\gamma \in (0, 1)$, что для всех $f, g \in \mathcal{H}_\alpha$, $n \geqslant 0$

$$|\mu(f \cdot (g \circ \sigma^n)) - \mu(f)\mu(g)| \leqslant D\|f\|_\alpha \|g\|_\alpha \gamma^n.$$

Доказательство. Для $k \geqslant 0$ и $\underline{x} \in \Sigma_A$ положим

$$E_k(\underline{x}) = \{\underline{y} \in \Sigma_A\colon\ y_i = x_i \,\forall\, |i| \leqslant k\}.$$

Определим $f_k(\underline{x}) = \mu(E_k(\underline{x}))^{-1} \int\limits_{E_k(\underline{x})} f\,d\mu$. Тогда $\mu(f_k) = \mu(f)$ и $\|f - f_k\| \leqslant \|f\|_\alpha \cdot \alpha^k$. Отсюда

$$|\mu(f\cdot(g\circ\sigma^n)) - \mu(f)\mu(g)| \leqslant |\mu(f_k\cdot(g_k\circ\sigma^n)) - \mu(f_k)\mu(g_k)| +$$
$$+ |\mu((f - f_k)\cdot(g\circ\sigma^n))| + |\mu(f\cdot((g - g_k)\circ\sigma^n))| \leqslant$$
$$\leqslant |\mu(f_k\cdot(g_k\circ\sigma^n)) - \mu(f_k)\cdot\mu(g_k)| + 2\alpha^k\|f\|_\alpha\|g\|_\alpha.$$

Функция f_k измерима относительно разбиения $\mathscr{P} = \{E_k(\underline{x})\}_{\underline{x}}$, т. е. $f_k = \sum\limits_{P\in\mathscr{P}} a_P\chi_P$. То же верно и для $g_k = \sum\limits_{P\in\mathscr{P}} b_P\chi_P$. Отсюда

$$|\mu(f_k\cdot(g_k\circ\sigma^n)) - \mu(f_k)\mu(g_k)| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{P,\,Q\in\mathscr{P}} |a_Pb_Q|\,|\mu(P\cap\sigma^{-n}Q) - \mu(P)\mu(Q)| \leqslant$$
$$\leqslant \|f\|\cdot\|g\|\cdot A'\beta^{n-2k} \leqslant$$
$$\leqslant \|f\|_\alpha\cdot\|g\|_\alpha\cdot A'\beta^{n-2k}.$$

Положив $k = [n/3]$, мы получаем требуемый результат с $\gamma = \max\{\alpha^{1/3}, \beta^{1/3}\}$. □

1.27. Центральная предельная теорема. *Для всякой функции* $\psi\in\mathscr{F}_A$ *существует такая константа* $\sigma = \sigma(\psi)\in[0,\infty)$, *что*

$$\mu\{\underline{x}\in\Sigma_A:\ n^{-1/2}(S_n\psi(\underline{x}) - n\mu(\psi)) < r\} \to \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{r} e^{-x^2/2\sigma^2}\,dx.$$

При $\sigma = 0$ *сходимость имеет место для* $r \neq 0$, *а правая часть берется равной* 0 *при* $r < 0$ *и* 1 *при* $r > 0$.

Замечание. Мы не приводим доказательства, отсылая читателя к работе М. Ратнер [13]. Интересно знать, когда $\sigma(\psi) = 0$. Это имеет место в точности тогда (см. [13]), когда уравнение

$$\psi - \mu(\psi) = u\circ\sigma - u$$

имеет решение $u\in L_2(\mu)$. Интересно, что в случае, когда такое u существует, можно найти и $u\in\mathscr{F}_A$, так что ψ гомологична константе. Соответствующее рассуждение носит слишком косвенный характер, и было бы желательно найти хорошее прямое доказательство.

1.28. Теорема. *Предположим, что сдвиг* $\sigma\colon \Sigma_A \to \Sigma_A$ *перемешивает и* $\varphi, \psi \in \mathcal{F}_A$. *Следующие условия эквивалентны:*

(i) $\mu_\varphi = \mu_\psi$;

(ii) *существует такая константа* K, *что* $S_m\varphi(\underline{x}) - S_m\psi(\underline{x}) = mK$, *если только* $\underline{x} = \sigma^m \underline{x}$;

(iii) *существуют константа* K *и функция* $u \in \mathcal{F}_A$, *такие, что* $\varphi(\underline{x}) = \psi(\underline{x}) + K + u(\sigma \underline{x}) - u(\underline{x})$ *при всех* $\underline{x}$;

(iv) *существуют константы* K *и* L, *такие, что* $|S_m\varphi(\underline{x}) - S_m\psi(\underline{x}) - mK| \leqslant L$ *при всех* $\underline{x}$ *и всех* $m > 0$.

Если эти условия выполняются, то $K = P(\varphi) - P(\psi)$.

Доказательство. Импликация (iii)$\Rightarrow$(iv) очевидна, а (iv)$\Rightarrow$(i) доказывается точно так же, как лемма 1.5. Предположим, что $\mu_\varphi = \mu_\psi$ и $\sigma^m \underline{x} = \underline{x}$. Из определения гиббсовской меры и равенства $\mu_\varphi = \mu_\psi$ получаем

$$\frac{\exp(-P(\varphi)j + S_j\varphi(\underline{x}))}{\exp(-P(\psi)j + S_j\psi(\underline{x}))} \in [d_1, d_2],$$

где $d_1 > 0$, d_2 не зависят от $\underline{x}$ и j. Это эквивалентно тому, что

$$|S_j\varphi(\underline{x}) - S_j\psi(\underline{x}) - j(P(\varphi) - P(\psi))| \leqslant M$$

для некоторого M, не зависящего от j и $\underline{x}$. Если $\sigma^m \underline{x} = \underline{x}$, то для $j = km$ имеем $S_j\varphi(\underline{x}) = kS_m\varphi(\underline{x})$ и

$$M > k\,|S_m\varphi(\underline{x}) - S_m\psi(\underline{x}) - m(P(\varphi) - P(\psi))|.$$

При $k \to \infty$ получаем (ii) с $K = P(\varphi) - P(\psi)$.

Пусть теперь справедливо (ii). Чтобы доказать (iii), нам потребуется следующая стандартная лемма.

1.29. Лемма. *Пусть* $T\colon X \to X$ — *топологически транзитивное непрерывное отображение компактного метрического пространства; существует такая точка* $x \in X$, *что если* $U \neq \varnothing$ — *открытое множество и* $N > 0$, *то* $T^n x \in U$ *при некотором* $n \geqslant N$.

Доказательство. Так как X — пространство, удовлетворяющее 2-й аксиоме счетности, его топология имеет базу U_1, U_2, … . Вследствие транзитивности открытое множество

$$V_{i,N} = \bigcup_{n \geqslant N} T^{-n} U_i$$

плотно в X. По теореме Бэра о категории существует $x \in \bigcap_{i,N} V_{i,N}$. □

Продолжим вывод (iii) из (ii). Пусть $\underline{x}$ — точка, которая существует согласно лемме для $X = \Sigma_A$, $T = \sigma$ (перемешивание сильнее транзитивности). Положим $\eta = \varphi - \psi - K \in \in \mathcal{F}_A$. Положим $\Gamma = \{\sigma^k \underline{x}: k \geqslant 0\}$ и определим функцию $u: \Gamma \to \mathbb{R}$ равенством

$$u(\sigma^k \underline{x}) = \sum_{j=0}^{k-1} \eta(\sigma^j \underline{x}).$$

Так как Γ плотно в Σ_A, Γ должно быть бесконечным множеством (за исключением тривиального случая, когда Σ_A вырождается в точку) и, значит, $\underline{x}$ — не периодическая точка. Поэтому $\sigma^k \underline{x} \neq \sigma^m \underline{x}$ при $m \neq k$ и функция u корректно определена на Γ. Оценим $\operatorname{var}_r(u|\Gamma)$. Предположим, что $\underline{y} = \sigma^k \underline{x}$ и $\underline{z} = \sigma^m \underline{x}$ $(m > k)$ совпадают на местах от $-r$ до r. Тогда $x_{k+s} = x_{m+s}$ для всех $|s| \leqslant r$. Зададим $\underline{w} \in \Sigma_A$ равенством

$$w_i = x_t \quad \text{при} \quad i \equiv t \pmod{m-k}, \quad k \leqslant t \leqslant m.$$

Тогда $\sigma^{m-k} \underline{w} = \underline{w}$ и координаты точек $\underline{w}$ и $\underline{x}$ совпадают на местах от $k-r$ до $m+r$; значит, $\sigma^j \underline{x}$, $\sigma^j \underline{w}$ совпадают на местах от $k-r-j$ до $m+r-j$. Далее,

$$u(\underline{z}) - u(\underline{y}) = \sum_{j=k}^{m-1} \eta(\sigma^j \underline{x}).$$

Вследствие (ii)

$$\sum_{j=k}^{m-1} \eta(\sigma^j \underline{w}) = 0,$$

поэтому

$$\begin{aligned} |u(\underline{z}) - u(\underline{y})| &\leqslant \sum_{j=k}^{m-1} |\eta(\sigma^j \underline{x}) - \eta(\sigma^j \underline{w})| \leqslant \\ &\leqslant \operatorname{var}_r \eta + \operatorname{var}_{r+1} \eta + \ldots + \operatorname{var}_{r+1} \eta + \operatorname{var}_r \eta \leqslant \\ &\leqslant 2 \sum_{s=r}^{\infty} \operatorname{var}_s \eta. \end{aligned}$$

Так как $\eta \in \mathcal{F}_A$, $\operatorname{var}_s \eta \leqslant c\alpha^s$ при некотором $\alpha \in (0, 1)$ и

$$\operatorname{var}_r(u|\Gamma) \leqslant 2c \sum_{s=r}^{\infty} \alpha^s = \frac{2c}{1-\alpha} \alpha^r.$$

Таким образом, u равномерно непрерывна на Γ и, значит, продолжается единственным образом до непрерывной функции $u: \Sigma_A = \overline{\Gamma} \to \mathbb{R}$. Так как $\operatorname{var}_r u = \operatorname{var}_r(u|\Gamma)$, $u \in \mathcal{F}_A$. Для $\underline{z} \in \Gamma$

$$u(\sigma \underline{z}) - u(\underline{z}) = \eta(\underline{z}),$$

и это равенство распространяется на Σ_A по непрерывности. □

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

По поводу гиббсовских состояний и статистической механики мы отсылаем читателя к книге Рюэля [9] и работе Лэнфорда [6]. Определение гиббсовского состояния в статистической механике не совпадает с тем, которое мы дали в п. А. Гиббсовские состояния определяются там для более широкого класса функций φ, и наша теорема при этом соответствует теореме статистической механики о единственности гиббсовского состояния [3], [10], [6]. В этих статьях рассматривается пространство Σ_n в отличие от несколько более общего Σ_A. Доказательство теоремы 1.4 для Σ_A содержится в работах [2], [11], [12].

Вариационное свойство (1.22) гиббсовских мер μ_φ доказали Лэнфорд и Рюэль [7] в случае Σ_n. Для Σ_A доказательство можно найти в [2] или [11]. Мы следовали доказательству из [2], которое в свою очередь основано на доказательстве Адлера и Вейса [1] теоремы Перри (теорема 1.22 с $\varphi = 0$).

Условие слабой бернуллиевости (1.25) в случае Σ_n первым проверил Галавотти [5]. На случай Σ_A его независимо распространили Бунимович, Ратнер, Рюэль и автор этой работы. Теорема 1.28 заимствована из работ Лившица [8] и Синая [12]. Теорема 1.26 содержится в [11].

Рюэль дал два доказательства аналога теоремы Перрона — Фробениуса в двух различных случаях [10], [11]. Мы частично использовали оба эти доказательства.

[В дополнение к приведенному списку литературы можно рекомендовать обзор [14], в котором значительное место уделяется эргодической теории гладких динамических систем гиперболического типа и связям эргодической теории со статистической механикой. В частности, топологические цепи Маркова и гиббсовские меры рассматриваются в § 3 гл. 2 этого обзора.

О методах символической динамики, о топологических марковских цепях и об их применении в теории динамических систем см. книгу [15], которая содержит также обширный список литературы. — *Ред.*]

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Adler R. L., Weiss B., Similarity of automorphisms of the torus, Memoirs of the A. M. S., 98 (1970).
2. Bowen R., Some systems with unique equilibrium states, *Math. Systems Theory*, 8 (1975), 193—202.
3. Добрушин Р. Л., Задача единственности гиббсовского случайного поля и проблема фазовых переходов, *Функц. анализ и его прилож.*, 2, № 4 (1968), 44—57.
4. Friedman N., Ornstein D., On the isomorphism of weak Bernoulli transformations, *Advances in Math.*, 5 (1970), 365—394.
5. Gallavotti G., Ising model and Bernoulli schemes in one dimension, *Commun. math. Phys.*, 32 (1973), 183—190.
6. Lanford O., Entropy and equilibrium states in classical statistical mechanics, Statistical mechanics and mathematical problems (ed. A. Lenard), Lecture Notes in Physics, 20, Springer-Verlag, 1968.
7. Lanford O., Ruelle D., Observables at infinity and states with short range correlations in statistical mechanics, *Commun. math. Phys.*, 13 (1969), 194—215.
8. Лившиц А. Н., Некоторые свойства гомологий У-систем, *Матем. заметки*, 10, № 5 (1971), 555—564.
9. Ruelle D., Statistical Mechanics, New York, Benjamin, 1969. [Русский перевод: Рюэль Д., Статистическая механика. Строгие результаты, М., Мир, 1971.]

10 Ruelle D., Statistical mechanics of a one-dimensional lattice gas, *Commun. math. Phys.*, 9 (1968), 267—278.

11. Ruelle D., A measure associated with Axiom A attractors, *Amer. J. Math.*, 98 (1976), 619—654.

12 Синай Я. Г., Гиббсовские меры в эргодической теории, *Успехи матем. наук*, 27, № 4 (1972), 21—64.

13 Ratner M., The central limit theorem for geodesic flows on n-dimensional manifolds of negative curvature, *Israel J. Math.*, 16 (1973), 181—197.

14*. Каток А. Б., Синай Я. Г., Стёпин А. М., Теория динамических систем и общих групп преобразований с инвариантной мерой В сб. Математический анализ, т. 13, 1975 (Итоги науки и техники), ВИНИТИ, М., 1975, стр. 129—262.

15*. Алексеев В. М., Символическая динамика, Одиннадцатая математическая школа, Киев, Изд-во Ин-та математики АН УССР, 1976.

2. ОБЩИЙ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЙ ФОРМАЛИЗМ

A. Энтропия

В § 1.D мы определили число $h_\mu(T, \mathscr{D})$ в случае, когда T — эндоморфизм вероятностного пространства, а $\mathscr{D}$ — конечное измеримое разбиение. Определим *энтропию* T по мере μ равенством

$$h_\mu(T) = \sup_{\mathscr{D}} h_\mu(T, \mathscr{D}),$$

где $\mathscr{D}$ пробегает всевозможные конечные разбиения. Докажем теперь несколько лемм, связанных с вычислением энтропии.

Положим

$$H_\mu(\mathscr{C}\,|\,\mathscr{D}) = H_\mu(\mathscr{C} \vee \mathscr{D}) - H_\mu(\mathscr{D}) = \\ = -\sum_i \mu(D_i) \sum_j \frac{\mu(C_j \cap D_i)}{\mu(D_i)} \log \frac{\mu(C_j \cap D_i)}{\mu(D_i)} \geqslant 0.$$

Из леммы 1.17 следует, что $H_\mu(\mathscr{C}\,|\,\mathscr{D}) \leqslant H_\mu(\mathscr{C})$. Будем писать $\mathscr{C} \subset \mathscr{D}$, если каждый элемент разбиения $\mathscr{C}$ является объединением элементов разбиения $\mathscr{D}$.

2.1. Лемма.

(a) $H_\mu(\mathscr{C}\,|\,\mathscr{D}) \leqslant H_\mu(\mathscr{C}\,|\,\mathscr{E})$, *если* $\mathscr{D} \supset \mathscr{E}$;

(b) $H_\mu(\mathscr{C}\,|\,\mathscr{D}) = 0$, *если* $\mathscr{D} \supset \mathscr{C}$;

(c) $H_\mu(\mathscr{C} \vee \mathscr{D}\,|\,\mathscr{E}) \leqslant H_\mu(\mathscr{C}\,|\,\mathscr{E}) + H_\mu(\mathscr{D}\,|\,\mathscr{E})$;

(d) $H_\mu(\mathscr{C}) \leqslant H_\mu(\mathscr{D}) + H_\mu(\mathscr{C}\,|\,\mathscr{D})$.

Доказательство. Положим $\varphi(x) = -x \log x$. При этом $H_\mu(\mathscr{C}\,|\,\mathscr{D}) = \sum_j \sum_i \mu(D_i)\, \varphi\left(\frac{\mu(C_j \cap D_i)}{\mu(D_i)}\right)$. Так как $\mathscr{E} \subset \mathscr{D}$, последнее выражение можно переписать в виде

$$H_\mu(\mathscr{C}\mid\mathscr{D})=\sum_j\sum_{E\in\mathscr{E}}\mu(E)\sum_{D_i\subset E}\frac{\mu(D_i)}{\mu(E)}\varphi\left(\frac{\mu(C_j\cap D_i)}{\mu(D_i)}\right).$$

Вследствие вогнутости φ (см. доказательство леммы 1.17) имеем $\varphi\left(\sum a_i x_i\right)\geqslant\sum a_i\varphi(x_i)$, где

$$a_i=\frac{\mu(D_i)}{\mu(E)},\qquad x_i=\frac{\mu(C_j\cap D_i)}{\mu(D_i)}.$$

Отсюда

$$H_\mu(\mathscr{C}\mid\mathscr{D})\leqslant\sum_j\sum_E\mu(E)\varphi\left(\frac{\mu(C_j\cap E)}{\mu(E)}\right)=H_\mu(\mathscr{C}\mid\mathscr{E}).$$

Утверждение (b) следует из того, что $\mathscr{C}\vee\mathscr{D}=\mathscr{D}$ при $\mathscr{D}\supset\mathscr{C}$. Утверждение (c) следует из соотношений

$$\begin{aligned}H_\mu(\mathscr{C}\vee\mathscr{D}\mid\mathscr{E})&=\\&=H_\mu(\mathscr{C}\vee\mathscr{D}\vee\mathscr{E})-H_\mu(\mathscr{D}\vee\mathscr{E})+H_\mu(\mathscr{D}\vee\mathscr{E})-H_\mu(\mathscr{E})=\\&=H_\mu(\mathscr{C}\mid\mathscr{D}\vee\mathscr{E})+H_\mu(\mathscr{D}\mid\mathscr{E})\leqslant\\&\leqslant H_\mu(\mathscr{C}\mid\mathscr{E})+H_\mu(\mathscr{D}\mid\mathscr{E}),\end{aligned}$$

где неравенство вытекает из (a). Наконец, (d) следует из

$$\begin{aligned}H_\mu(\mathscr{C})=H_\mu(\mathscr{C}\vee\mathscr{D})-H_\mu(\mathscr{D}\mid\mathscr{C})&\leqslant\\\leqslant H_\mu(\mathscr{C}\vee\mathscr{D})=H_\mu(\mathscr{D})+H_\mu(\mathscr{C}\mid\mathscr{D}).&\ \square\end{aligned}$$

2.2. Лемма. *Пусть T — эндоморфизм вероятностного пространства $(X, \mathfrak{B}, \mu)$, а $\mathscr{C}$ и $\mathscr{D}$ — конечные разбиения. Тогда*

(a) $H_\mu(T^{-k}\mathscr{C}\mid T^{-k}\mathscr{D})=H_\mu(\mathscr{C}\mid\mathscr{D})$ *при* $k\geqslant 0$;

(b) $h_\mu(T,\mathscr{C})\leqslant h_\mu(T,\mathscr{D})+H_\mu(\mathscr{C}\mid\mathscr{D})$;

(c) $h_\mu(T,\mathscr{C}\vee\ldots\vee T^{-n}\mathscr{C})=h_\mu(T,\mathscr{C})$.

Доказательство. (a) Из T-инвариантности меры μ следует, что

$$\begin{aligned}H_\mu(T^{-k}\mathscr{C}\mid T^{-k}\mathscr{D})&=H_\mu(T^{-k}\mathscr{C}\vee T^{-k}\mathscr{D})-H_\mu(T^{-k}\mathscr{D})=\\&=H_\mu(\mathscr{C}\vee\mathscr{D})-H_\mu(\mathscr{D})=H_\mu(\mathscr{C}\mid\mathscr{D}).\end{aligned}$$

(b) Используя лемму 2.1, находим

$$H_\mu(\mathscr{C}\vee\ldots\vee T^{-m+1}\mathscr{C})\leqslant H_\mu(\mathscr{D}\vee\ldots\vee T^{-m+1}\mathscr{D})+$$
$$+H_\mu(\mathscr{C}\vee\ldots\vee T^{-m+1}\mathscr{C}\,|\,\mathscr{D}\vee\ldots\vee T^{-m+1}\mathscr{D})\leqslant$$
$$\leqslant H_\mu(\mathscr{D}\vee\ldots\vee T^{-m+1}\mathscr{D})+\sum_{k=0}^{m-1}H_\mu(T^{-k}\mathscr{C}\,|\,\mathscr{D}\vee\ldots\vee T^{-m+1}\mathscr{D})\leqslant$$
$$\leqslant H_\mu(\mathscr{D}\vee\ldots\vee T^{-m+1}\mathscr{D})+\sum_{k=0}^{m-1}H_\mu(T^{-k}\mathscr{C}\,|\,T^{-k}\mathscr{D})\leqslant$$
$$\leqslant H_\mu(\mathscr{D}\vee\ldots\vee T^{-m+1}\mathscr{D})+mH_\mu(\mathscr{C}\,|\,\mathscr{D}).$$

Разделив обе части полученного неравенства на m, получаем при $m\to\infty$

$$h_\mu(T,\mathscr{C})\leqslant h_\mu(T,\mathscr{D})+H_\mu(\mathscr{C}\,|\,\mathscr{D}).$$

(c) Положим $\mathscr{D}=\mathscr{C}\vee\ldots\vee T^{-n}\mathscr{C}$. Тогда

$$\frac{1}{m}H_\mu(\mathscr{D}\vee\ldots\vee T^{-m+1}\mathscr{D})=\frac{1}{m}H_\mu(\mathscr{C}\vee\ldots\vee T^{-m-n+1}\mathscr{C}).$$

При $m\to\infty$ получаем $\left(\text{учитывая, что } \dfrac{m}{m+n}\to 1\right)$

$$h_\mu(T,\mathscr{D})=h_\mu(T,\mathscr{C}).\ \square$$

2.3. Лемма. *Пусть X — компактное метрическое пространство, $\mu\in M(X)$, $\varepsilon>0$, $\mathscr{C}$ — конечное борелевское разбиение. Существует такое $\delta>0$, что $H_\mu(\mathscr{C}\,|\,\mathscr{D})<\varepsilon$ для любого разбиения $\mathscr{D}$, удовлетворяющего условию* $\operatorname{diam}\mathscr{D}<\delta$.

Доказательство. Пусть $\mathscr{C}=\{C_1,\ldots,C_n\}$. В лемме 1.23 мы показали, что для всякого $\alpha>0$ можно найти такое $\delta>0$, что если $\operatorname{diam}\mathscr{D}<\delta$, то существует разбиение $\mathscr{E}=\{E_1,\ldots\ldots,E_n\}\subset\mathscr{D}$, удовлетворяющее условию

$$\mu(E_i\,\Delta\,C_i)<\alpha.$$

Выражение

$$H_\mu(\mathscr{C}\,|\,\mathscr{E})=\sum_{i,j}\mu(E_i)\,\varphi\left(\frac{\mu(C_j\cap E_i)}{\mu(E_i)}\right)$$

непрерывным образом зависит от величин

$$\mu(C_j\cap E_i)\qquad\text{и}\qquad\mu(E_i)=\sum_j\mu(C_j\cap E_i)$$

и обращается в нуль при $\mu(C_j\cap E_i)=\delta_{ij}\mu(C_j)$. Значит, при достаточно малом α имеем $H_\mu(\mathscr{C}\,|\,\mathscr{E})<\varepsilon$. Отсюда вследствие 2.1 (a)

$$H_\mu(\mathscr{C}\,|\,\mathscr{D})\leqslant H_\mu(\mathscr{C}\,|\,\mathscr{E})<\varepsilon,$$

2.4. Предложение. *Пусть $T: X \to X$ — непрерывное отображение компактного метрического пространства, $\mu \in M_T(X)$ и $\mathscr{D}_n$ — последовательность разбиений с* $\operatorname{diam} \mathscr{D}_n \to 0$. *Тогда*

$$h_\mu(T) = \lim_{n\to\infty} h_\mu(T, \mathscr{D}_n).$$

Доказательство. Очевидно, $h_\mu(T) \geqslant \limsup_n h_\mu(T, \mathscr{D}_n)$. Рассмотрим любое разбиение $\mathscr{C}$. Согласно леммам 2.2 (b) и 2.3,

$$h_\mu(T, \mathscr{C}) \leqslant \liminf_n h_\mu(T, \mathscr{D}_n).$$

Меняя $\mathscr{C}$, получаем $h_\mu(T) \leqslant \liminf_n h_\mu(T, \mathscr{D}_n)$. □

Гомеоморфизм $T: X \to X$ называется *разделяющим* траектории, если существует такое $\varepsilon > 0$ [1]), что

$$d(T^k x, T^k y) \leqslant \varepsilon \quad \text{при всех} \quad k \in Z \ \Rightarrow\ x = y.$$

2.5. Предложение. *Пусть $T: X \to X$ — гомеоморфизм с разделяющей константой ε. Тогда $h_\mu(T) = h_\mu(T, \mathscr{D})$ при $\mu \in M_T(X)$ и* $\operatorname{diam} \mathscr{D} \leqslant \varepsilon$.

Доказательство. Пусть $\mathscr{D}_n = T^n\mathscr{D} \vee \ldots \vee \mathscr{D} \vee \ldots \vee T^{-n}\mathscr{D}$. Тогда вследствие свойства разделяемости $\operatorname{diam} \mathscr{D}_n \to 0$. Отсюда $h_\mu(T) = \lim h_\mu(T, \mathscr{D}_n)$. Но $h_\mu(T, \mathscr{D}_n) = h_\mu(T, \mathscr{D})$ по лемме 2.2(c). □

Рассмотрим случай $\sigma: \Sigma_A \to \Sigma_A$ и стандартного разбиения $\mathscr{U} = \{U_1, \ldots, U_n\}$, где $U_i = \{x \in \Sigma_A: x_0 = i\}$. Гомеоморфизм σ разделяющий, и вследствие 2.5 $h_\mu(\sigma) = h_\mu(\sigma, \mathscr{U})$ для $\mu \in M_\sigma(\Sigma_A)$. В § 1 мы обозначали $h_\mu(\sigma, \mathscr{U})$ через $s(\mu)$. Так как $s(\mu) = h_\mu(\sigma)$, получаем по определению $h_\mu(\sigma)$, что число $s(\mu)$ зависит только от свойств σ как автоморфизма пространства с мерой $(\Sigma_A, \mathfrak{B}, \mu)$ и не зависит от свойств σ как гомеоморфизма и от разбиения $\mathscr{U}$.

2.6. Лемма. $h_\mu(T^n) = n h_\mu(T)$ *при* $n > 0$.

Доказательство. Пусть $\mathscr{C}$ — некоторое разбиение и $\mathscr{E} = \mathscr{C} \vee \ldots \vee T^{-n+1}\mathscr{C}$. Тогда

$$\begin{aligned} n h_\mu(T, \mathscr{C}) &= \lim_{m\to\infty} \frac{n}{nm} H_\mu(\mathscr{C} \vee \ldots \vee T^{-nm+1}\mathscr{C}) = \\ &= \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} H_\mu(\mathscr{E} \vee T^{-n}\mathscr{E} \vee \ldots \vee T^{(-m+1)n}\mathscr{E}) = \\ &= h_\mu(T^n, \mathscr{E}) \leqslant h_\mu(T^n). \end{aligned}$$

---

[1]) Число ε называется *разделяющей константой* гомеоморфизма T. — *Прим. перев.*

Меняя $\mathscr{C}$, получаем $nh_\mu(T)\leqslant h_\mu(T^n)$. С другой стороны, из 2.2(b) и 2.1(b) следует, что

$$h_\mu(T^n, \mathscr{C})\leqslant h_\mu(T^n, \mathscr{E})=nh_\mu(T, \mathscr{C}).$$

Отсюда

$$h_\mu(T^n)=\sup_{\mathscr{C}} h_\mu(T^n, \mathscr{C})\leqslant n\sup_{\mathscr{C}} h_\mu(T, \mathscr{C})=nh_\mu(T). \quad \square$$

B. Давление

В этом разделе через $T\colon X\to X$ будет обозначаться заданное непрерывное отображение компактного метрического пространства X. Для $\varphi\in C(X)$ мы определим давление $P(\varphi)$, обобщив построения § 1.D.

Пусть $\mathscr{U}$ — конечное открытое покрытие X, $W_m(\mathscr{U})$ — множество всех наборов длины m, состоящих из элементов покрытия $\mathscr{U}$:

$$\underline{U}=U_{i_0}U_{i_1}\ldots U_{i_{m-1}}.$$

Ниже под m подразумевается $m(\underline{U})$ — число элементов в наборах $\underline{U}$. Определим

$$X(\underline{U})=\{x\in X\colon\ T^kx\in U_{i_k}\ \text{при}\ k=0, \ldots, m-1\},$$

$$S_m\varphi(\underline{U})=\sup\left\{\sum_{k=0}^{m-1}\varphi(T^kx)\colon\ x\in X(\underline{U})\right\}.$$

В случае $X(\underline{U})=\varnothing$ полагаем $S_m\varphi(\underline{U})=-\infty$. Будем говорить, что $\Gamma\subset W_m(\mathscr{U})$ покрывает X, если $X=\bigcup_{\underline{U}\in\Gamma}X(\underline{U})$. Наконец, определим

$$Z_m(\varphi, \mathscr{U})=\inf_{\Gamma}\sum_{\underline{U}\in\Gamma}\exp S_m\varphi(\underline{U}),$$

где Γ пробегает всевозможные подмножества $W_m(\mathscr{U})$, покрывающие X.

2.7. Лемма. *Предел*

$$P(\varphi, \mathscr{U})=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\log Z_m(\varphi, \mathscr{U})$$

существует и конечен.

Доказательство. Если $\Gamma_m\subset W_m(\mathscr{U})$ и $\Gamma_n\subset W_n(\mathscr{U})$ оба покрывают X, то

$$\Gamma_m\Gamma_n=\{\underline{U}\underline{V}\colon\ \underline{U}\in\Gamma_m,\ \underline{V}\in\Gamma_n\}\subset W_{n+m}(\mathscr{U})$$

покрывает X. Легко видеть, что

$$S_{m+n}\varphi(\underline{U}\underline{V})\leqslant S_m\varphi(\underline{U})+S_n\varphi(\underline{V}),$$

и, значит,

$$\sum_{\underline{UV}} \exp S_{m+n}\varphi(\underline{UV}) \leqslant \Big(\sum_{\underline{U}\in\Gamma_m} \exp S_m\varphi(\underline{U})\Big)\Big(\sum_{\underline{V}\in\Gamma_n} \exp S_n\varphi(\underline{V})\Big).$$

Поэтому

$$Z_{m+n}(\varphi, \mathcal{U}) \leqslant Z_m(\varphi, \mathcal{U})\, Z_n(\varphi, \mathcal{U}).$$

Положим $a_m = \log Z_m(\varphi, \mathcal{U})$. Из $Z_m(\varphi, \mathcal{U}) \geqslant e^{-m\|\varphi\|}$ следует, что $\inf \frac{a_m}{m} \geqslant -\|\varphi\| > -\infty$. Таким образом, последовательность a_m удовлетворяет условиям леммы 1.18. □

2.8. Предложение. *Предел*

$$P(\varphi) = \lim_{\operatorname{diam} \mathcal{U}\to 0} P(\varphi, \mathcal{U})$$

существует (но может равняться $+\infty$*).*

Доказательство. Пусть $\mathcal{V}$ — открытое покрытие, более мелкое, чем $\mathcal{U}$, т. е. каждый элемент $V \in \mathcal{V}$ содержится в некотором $U(V) \in \mathcal{U}$. Для $\underline{V} \in W_m(\mathcal{V})$ положим $\underline{U}(\underline{V}) = U(V_{i_0}) \ldots \ldots U(V_{i_{m-1}})$. Если $\Gamma_m \subset W_m(\mathcal{V})$ покрывает X, то $\underline{U}(\Gamma_m) = \{\underline{U}(\underline{V}) : \underline{V} \in \Gamma_m\} \subset W_m(\mathcal{U})$ покрывает X. Пусть $\gamma = \gamma(\mathcal{U}) = \sup \{(\varphi(x) - \varphi(y)) : x, y \in U$ для некоторого $U \in \mathcal{U}\}$. Тогда $S_m\varphi(\underline{U}(\underline{V})) \leqslant S_m\varphi(\underline{V}) + m\gamma$ и, значит,

$$Z_m(\varphi, \mathcal{U}) \leqslant Z_m(\varphi, \mathcal{V})\, e^{m\gamma}, \qquad P(\varphi, \mathcal{U}) \leqslant P(\varphi, \mathcal{V}) + \gamma.$$

Так как для любого покрытия $\mathcal{U}$ все $\mathcal{V}$ достаточно малого диаметра являются более мелкими, чем $\mathcal{U}$, получаем

$$P(\varphi, \mathcal{U}) - \gamma(\mathcal{U}) \leqslant \liminf_{\operatorname{diam} \mathcal{V}\to 0} P(\varphi, \mathcal{V}).$$

Если $\operatorname{diam} \mathcal{U} \to 0$, то $\gamma(\mathcal{U}) \to 0$ и, значит,

$$\limsup_{\operatorname{diam} \mathcal{U}\to 0} P(\varphi, \mathcal{U}) \leqslant \liminf_{\operatorname{diam} \mathcal{V}\to 0} P(\varphi, \mathcal{V}),$$

что и требовалось доказать. □

В случаях, когда возможна путаница, мы будем обозначать топологическое давление $P(\varphi)$ через $P_T(\varphi)$.

2.9. Лемма. *Пусть* $S_n\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(T^k x)$. *Тогда* $P_{T^n}(S_n\varphi) = nP_T(\varphi)$ *при* $n > 0$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{V} = \mathcal{U} \vee \ldots \vee T^{-n+1}\mathcal{U}$. Между множествами $W_m(\mathcal{V})$ и $W_{mn}(\mathcal{U})$ существует взаимно однозначное соответствие, при котором $\underline{U} = U_{i_0}U_{i_1} \ldots U_{i_{mn-1}}$ сопоставляется $\underline{V} = \underline{U}^* = V_{l_0} \ldots V_{l_{m-1}}$, где $V_{l_k} = U_{i_{kn}} \cap T^{-1}U_{i_{kn+1}} \cap \ldots \ldots \cap T^{-n+1}U_{i_{kn+n-1}}$. При этом $X(\underline{U}) = X(\underline{V})$ и $S^T_{mn}\varphi(\underline{U}) =$

$=S_m^{T^n}(S_n\varphi)(\underline{V})$. Отсюда получаем

$$Z_{mn}^T(\varphi, \mathcal{U})=Z_m^{T^n}(S_n\varphi, \mathscr{V}) \quad \text{и} \quad nP_T(\varphi, \mathcal{U})=P_{T^n}(S_n\varphi, \mathscr{V}).$$

Если $\operatorname{diam}\mathcal{U}\to 0$, то $\operatorname{diam}\mathscr{V}\to 0$ и, значит, $nP_T(\varphi)=$ $=P_{T^n}(S_n\varphi)$. □

Сформулируем теперь первый интересный результат про давление $P(\varphi)$.

2.10. Теорема. *Пусть T: $X\to X$ — непрерывное отображение компактного метрического пространства и $\varphi\in C(X)$. Тогда*

$$h_\mu(T)+\int\varphi\, d\mu\leqslant P(\varphi)$$

для всякой меры $\mu\in M_T(X)$.

Для начала нам потребуются две леммы.

2.11. Лемма. *Предположим, что $\mathscr{D}$ — борелевское разбиение X, такое, что всякая точка $x\in X$ содержится в замыкании не более чем M элементов $\mathscr{D}$. Тогда*

$$h_\mu(T, \mathscr{D})+\int\varphi\, d\mu\leqslant P_T(\varphi)+\log M.$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{U}$ — конечное открытое покрытие X, каждый элемент которого пересекается не более чем с M элементами $\mathscr{D}$. Пусть $\Gamma_m\subset W_m(\mathcal{U})$ покрывает X. Для всякого $B\in\mathscr{D}_m=\mathscr{D}\vee\ \dots\ \vee T^{-m+1}\mathscr{D}$ выберем такое $x_B\in B$, что $\int\limits_B S_m\varphi\, d\mu\leqslant\mu(B)\,S_m\varphi(x_B)$. При этом

$$\begin{aligned}h_\mu(T, \mathscr{D})+\int\varphi\, d\mu&\leqslant\frac{1}{m}\Big(H_\mu(\mathscr{D}_m)+\int S_m\varphi\, d\mu\Big)\leqslant\\&\leqslant\frac{1}{m}\sum_B\mu(B)(-\log\mu(B)+S_m\varphi(x_B))\leqslant\\&\leqslant\frac{1}{m}\log\sum_B\exp S_m\varphi(x_B),\end{aligned}$$

последнее по лемме 1.1. Для всякого x_B выберем такое $\underline{U}_B\in\Gamma_m$, что $x_B\in X(\underline{U}_B)$. Кратность отображения $B\to\Gamma_m$ не превосходит M^m. Из $S_m\varphi(x_B)\leqslant S_m\varphi(\underline{U}_B)$ получаем

$$\begin{aligned}h_\mu(T, \mathscr{D})+\int\varphi\, d\mu&\leqslant\frac{1}{m}\log\sum_{\underline{U}\in\Gamma_m}M^m\exp S_m\varphi(\underline{U})\leqslant\\&\leqslant\log M+\frac{1}{m}\log Z_m(\varphi, \mathcal{U}).\end{aligned}$$

Переходя к пределу сначала при $m \to \infty$, а потом при $\operatorname{diam} \mathcal{U} \to 0$, приходим к требуемому неравенству. $\square$

2.12. Лемма. *Пусть $\mathcal{A}$ — конечное открытое покрытие X. Для всякого $n > 0$ существует такое борелевское разбиение $\mathcal{D}_n$ пространства X, что*

(a) *всякий элемент D из $\mathcal{D}_n$ содержится в некотором элементе $T^{-k}\mathcal{A}$ при $k = 0, \ldots, n-1$;*

(b) *не более чем $n|\mathcal{A}|$ элементов $\mathcal{D}_n$ имеют общую точку, принадлежащую их замыканиям.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_m\}$ и $g_1, \ldots, g_m$ — разбиение единицы, подчиненное покрытию $\mathcal{A}$. Тогда $G = (g_1, \ldots, g_m)\colon X \to s_{m-1} \subset \mathbb{R}^m$ — отображение X в $(m-1)$-мерный симплекс s_{m-1}. Далее, $\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_m\}$, где $U_i = \{x \in s_{m-1}\colon x_i > 0\}$, — открытое покрытие и $G^{-1}U_i \subset A_i$. Так как размерность $(s_{m-1})^n$ равна $nm - n$, существует такое борелевское разбиение $\mathcal{D}_n^*$ множества $(s_{m-1})^n$, что

(a′) каждый элемент $\mathcal{D}_n^*$ содержится в одном из множеств $U_{i_1} \times \ldots \times U_{i_n}$;

(b′) не более чем nm элементов $\mathcal{D}_n^*$ могут иметь общую точку, принадлежащую их замыканиям.

Разбиение $\mathcal{D}_n = L^{-1}\mathcal{D}_n^*$, где

$$L = (G,\ G \circ T,\ \ldots,\ G \circ T^{n-1})\colon\ X \to (s_{m-1})^n$$

удовлетворяет условиям леммы. $\square$

Доказательство теоремы 2.10. Пусть $\mathcal{C}$ — борелевское разбиение, $\varepsilon > 0$. В соответствии с леммой 2.3 найдем открытое покрытие $\mathcal{A}$, такое, что $H_\mu(\mathcal{C} | \mathcal{D}) < \varepsilon$ для всякого разбиения $\mathcal{D}$, каждый элемент которого содержится в некотором элементе $\mathcal{A}$. Для заданного $n > 0$ пусть $\mathcal{E} = \mathcal{C} \vee \ldots \vee T^{-n+1}\mathcal{C}$, а $\mathcal{D}_n$ то же, что в лемме 2.12. Тогда (см. доказательство леммы 2.6)

$$\begin{aligned} h_\mu(T, \mathcal{C}) + \int \varphi\, d\mu &= \frac{1}{n}\left(h_\mu(T^n, \mathcal{E}) + \int S_n\varphi\, d\mu\right) \leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{n}\left(h_\mu(T^n, \mathcal{D}_n) + \int S_n\varphi\, d\mu\right) + \frac{1}{n} H_\mu(\mathcal{E} | \mathcal{D}_n) \leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{n}\left(P_{T^n}(S_n\varphi) + \log n |\mathcal{A}|\right) + \frac{1}{n} H_\mu(\mathcal{E} | \mathcal{D}_n), \end{aligned}$$

где в последнем неравенстве используется лемма 2.11. Далее,

$$H_\mu(\mathcal{E} | \mathcal{D}_n) \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} H_\mu(T^{-k}\mathcal{C} | \mathcal{D}_n),$$

Так как элементы $\mathscr{D}_n$ содержатся в элементах покрытия $T^{-k}\mathscr{A}$ при всяком k, получаем $H_\mu(T^{-k}\mathscr{C}|\mathscr{D}_n) < \varepsilon$ (ввиду T-инвариантности меры μ покрытие $T^{-k}\mathscr{A}$ играет относительно разбиения $T^{-k}\mathscr{C}$ ту же роль, что $\mathscr{A}$ относительно $\mathscr{C}$). Отсюда находим

$$h_\mu(T, \mathscr{C}) + \int \varphi\, d\mu \leqslant P_T(\varphi) + \frac{1}{n}\log n\,|\mathscr{A}| + \varepsilon.$$

При $n \to \infty$ и $\varepsilon \to 0$ получаем требуемый результат. □

2.13. Предложение. *Пусть T_1: $X \to X$, T_2: $Y \to Y$ — непрерывные отображения компактных метрических пространств, π: $X \to Y$ — непрерывное сюръективное отображение, удовлетворяющее условию $\pi T_1 = T_2\pi$. Тогда*

$$P_{T_2}(\varphi) \leqslant P_{T_1}(\varphi\circ\pi)$$

для $\varphi \in C(Y)$.

Доказательство. Для открытого покрытия $\mathscr{U}$ пространства Y имеем

$$P_{T_2}(\varphi, \mathscr{U}) = P_{T_1}(\varphi\circ\pi, \pi^{-1}\mathscr{U}).$$

Как и в доказательстве предложения 2.8, получаем

$$P_{T_1}(\varphi\circ\pi, \pi^{-1}\mathscr{U}) \leqslant P_{T_1}(\varphi\circ\pi) + \gamma(\varphi\circ\pi, \pi^{-1}\mathscr{U}).$$

Но если $\operatorname{diam}\mathscr{U} \to 0$, то $\gamma(\varphi\circ\pi, \pi^{-1}\mathscr{U}) = \gamma(\varphi, \mathscr{U}) \to 0$. Отсюда, полагая $\operatorname{diam}\mathscr{U} \to 0$, получаем

$$P_{T_2}(\varphi) \leqslant P_{T_1}(\varphi\circ\pi). \quad \square$$

C. Вариационный принцип

Рассмотрим конечное открытое покрытие $\mathscr{U}$ пространства X. Будем говорить, что $\Gamma \subset W^*(\mathscr{U}) = \bigcup_{m>0} W_m(\mathscr{U})$ *покрывает* $K \subset X$, если $K \subset \bigcup_{\underline{U}\in\Gamma} X(\underline{U})$. Для $\lambda > 0$ и $\Gamma \subset W^*(\mathscr{U})$ определим

$$Z(\Gamma, \lambda) = \sum_{\underline{U}\in\Gamma} \lambda^{m(\underline{U})} \exp S_{m(\underline{U})}\varphi(\underline{U}).$$

2.14. Лемма. *Пусть $P = P(\varphi, \mathscr{U})$, $\lambda > 0$. Предположим, что $Z(\Gamma, \lambda) < 1$ для некоторого Γ, покрывающего X. Тогда $\lambda \leqslant e^{-P}$.*

Доказательство. Так как X компактно, Γ можно выбрать конечным. Пусть $\Gamma \subset \bigcup_{m=1}^{M} W_m(\mathscr{U})$. При этом $Z(\Gamma^n, \lambda) \leqslant$ $\leqslant Z(\Gamma, \lambda)^n$, где $\Gamma^n = \{\underline{U}_1\underline{U}_2 \ldots \underline{U}_n \colon \underline{U}_i \in \Gamma\}$. Полагая $\Gamma^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma^n$, получаем

$$Z(\Gamma^*, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} Z(\Gamma^n, \lambda) < \infty.$$

Зафиксируем некоторое N и рассмотрим точку $x \in X$. Так как Γ покрывает X, можно найти такое $\underline{U} = \underline{U}_1 \underline{U}_2 \ldots \underline{U}_n \in \Gamma^*$, что

(a) $x \in X(\underline{U})$,

(b) $N \leqslant m(\underline{U}) < N + M$.

Обозначим $\underline{U}^*$ поднабор из первых N символов набора $\underline{U}$. Тогда

$$S_N\varphi(\underline{U}^*) \leqslant S_{m(\underline{U})}\varphi(\underline{U}) + M\|\varphi\|.$$

Обозначив Γ_N множество построенных таким образом наборов $\underline{U}^*$, получаем

$$\lambda^N \sum_{\Gamma_N} \exp S_N \varphi(\underline{U}^*) \leqslant \max\{1, \lambda^{-M}\} e^{M\|\varphi\|} Z(\Gamma^*, \lambda),$$

или $\lambda^N \cdot Z_N(\varphi, \mathcal{U}) \leqslant \text{const}$. Отсюда следует, что $\lambda \leqslant e^{-P}$. $\square$

Обозначим δ_x единичную меру, сосредоточенную в точке x. Определим

$$\delta_{x,n} = n^{-1}(\delta_x + \delta_{Tx} + \ldots + \delta_{T^{n-1}x}),$$

$$V(x) = \{\mu \in M(X)\colon\ \delta_{x,n_k} \to \mu \text{ для некоторой последовательности } n_k \to \infty\}.$$

Из того, что $M(X)$ — компактное метрическое пространство, следует, что $V(x) \neq \varnothing$. Далее, $T^*\delta_{x,n} = \delta_{Tx,n}$ и для $f \in C(X)$ имеем

$$|T^*\delta_{x,n}(f) - \delta_{x,n}(f)| = n^{-1}|f(T^n x) - f(x)| \leqslant 2n^{-1}\|f\|.$$

Таким образом, $V(x) \subset M_T(X)$.

Пусть E — конечное множество, $\underline{a} = (a_0, \ldots, a_{k-1}) \in E^k$. Определим меру $\mu_{\underline{a}}$ на E равенством

$$\mu_{\underline{a}}(e) = k^{-1} \cdot (\text{число таких индексов } j, \text{ что } a_j = e).$$

Положим

$$H(\underline{a}) = -\sum_{e \in E} \mu_{\underline{a}}(e) \log \mu_{\underline{a}}(e).$$

2.15. Лемма. *Пусть $x \in X$, $\mu \in V(x)$, $\mathcal{U}$ — конечное открытое покрытие X и $\varepsilon > 0$. Существуют число m и такое сколь* *угодно большое число N, что можно найти набор $\underline{U} \in W_N(\mathcal{U})$, удовлетворяющий следующим условиям:*

(a) $x \in X(\underline{U})$,

(b) $S_N\varphi(\underline{U}) \leqslant N\left(\int \varphi\, d\mu + \gamma(\mathcal{U}) + \varepsilon\right)$,

(c) *$\underline{U}$ содержит поднабор длины $km \geqslant N - m$, который, если его представить как $\underline{a} = a_0 \ldots a_{k-1} \in (\mathcal{U}^m)^k$, удовлетворяет неравенству $\frac{1}{m} H(\underline{a}) \leqslant h_\mu(T) + \varepsilon$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_r\}$. Напомним, что

$$\gamma(\mathcal{U}) = \sup\{|\varphi(y) - \varphi(z)|: y, z \in U_i, i = 1, \ldots, r\}.$$

Найдем такое борелевское разбиение $\mathscr{C} = \{C_1, \ldots, C_r\}$, что $\bar{C}_i \subset U_i$. Существует такое m, что

$$\frac{1}{m} H_\mu(\mathscr{C} \vee \ldots \vee T^{-m+1}\mathscr{C}) \leqslant h_\mu(T, \mathscr{C}) + \varepsilon/2 \leqslant h_\mu(T) + \varepsilon/2.$$

Пусть $\delta_{x, n_j} \to \mu$. При $n' > n$ имеем

$$\delta_{x, n'} = \frac{n}{n'} \delta_{x, n} + \frac{n' - n}{n'} \delta_{T^n x, n' - n}.$$

Из этой формулы следует, что если заменить n_j ближайшим числом, кратным m, то пределом полученной последовательности по-прежнему будет μ. Поэтому можно положить $n_j = mk_j$.

Пусть $D_1, \ldots, D_l$ — непустые элементы разбиения $\mathscr{C} \vee \ldots \vee T^{-m+1}\mathscr{C}$. Для каждого D_i найдем компакт $K_i \subset D_i$, такой, что $\mu(D_i \setminus K_i) < \beta$ (где $\beta > 0$ достаточно мало). Каждый элемент D_i содержится в некотором элементе покрытия $\mathcal{U} \vee \ldots \vee T^{-m+1}\mathcal{U}$, и можно найти открытые множества $V_i \supset K_i$, для которых это тоже верно. Более того, можно считать, что $V_i \cap V_j = \varnothing$ при $i \neq j$. Далее, впишем каждое V_i в борелевское множество V_i^*, также содержащееся в некотором элементе покрытия $\mathcal{U} \vee \ldots \vee T^{-m+1}\mathcal{U}$ и такое, что $\{V_1^*, \ldots, V_l^*\}$ — борелевское разбиение X.

Зафиксируем $n_j = mk_j$. Пусть M_i — количество чисел $s \in [0, n_j)$, таких, что $T^s x \in V_i^*$, а $M_{i,r}$ — количество таких $s \equiv r \pmod m$. Определим

$$p_{i,r} = M_{i,r}/k_j,$$

$$p_i = M_i/n_j = \frac{1}{m}(p_{i,0} + \ldots + p_{i,m-1}).$$

Из $\delta_{x, n_j} \to \mu$ получаем

$$\liminf_{j\to\infty} p_i \geqslant \widetilde{\mu}(K_i) \geqslant \mu(D_i) - \beta,$$

$$\limsup_{j\to\infty} p_i \leqslant \mu(K_i) + t\beta \leqslant \mu(D_i) + t\beta.$$

При достаточно большом j и достаточно малом β имеем

$$\frac{1}{m}\left(-\sum_i p_i \log p_i\right) \leqslant \frac{1}{m}\left(-\sum_i \mu(D_i)\log\mu(D_i)\right) + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant$$
$$\leqslant h_\mu(T) + \varepsilon.$$

Вследствие вогнутости $\varphi(x) = -x\log x$ (см. 1.17)

$$\varphi(p_i) \geqslant \sum_{r=0}^{m-1} \frac{1}{m}\varphi(p_{i,r})$$

и, значит, $\sum_i \varphi(p_i) \geqslant \frac{1}{m}\sum_{r=0}^{m-1}\sum_i \varphi(p_{i,r})$. При некотором $r \in [0, m)$ должно выполняться неравенство $\sum_i \varphi(p_{i,r}) \leqslant \sum_i \varphi(p_i)$ и, значит,

$$\frac{1}{m}\sum_i \varphi(p_{i,r}) \leqslant h_\mu(T) + \varepsilon.$$

Для $N = n_j + r$ при большом j построим $\underline{U} = U_0U_1 \ldots$ $\ldots U_{N-1} \in \mathcal{U}^N$ следующим образом. Для $s < r$ выберем $U_s \in \mathcal{U}$, содержащее $T^s x$. Для всякого V_i^* выберем $U_{0,i} \cap T^{-1}U_{1,i} \cap \ldots$ $\ldots \cap T^{-m+1}U_{m-1,i} \supset V_i^*$. Для $s \geqslant r$ запишем s в виде $s = r + mp + q$ с $p \geqslant 0$, $m > q \geqslant 0$. Найдем такое i, что $T^{r+mp}x \in V_i^*$, и положим $U_s = U_{q,i}$. Обозначив

$$a_p = U_{0,i}U_{1,i} \ldots U_{m-1,i},$$

получаем

$$\underline{U} = U_0 \ldots U_{r-1}a_0a_1 \ldots a_{k_j-1}.$$

Последовательности $\underline{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_{k_j-1})$ соответствует мера $\mu_{\underline{a}}$ на $\mathcal{U}^m$, которая задается вероятностями $\{p_{i,r}\}_{i=1}^t$ и некоторым количеством нулей [1]). При этом

$$\frac{1}{m}H(\underline{a}) = \frac{1}{m}\sum_i \varphi(p_{i,r}) \leqslant h_\mu(T) + \varepsilon.$$

---

[1]) $\mu_{\underline{a}}(e) \neq 0$, лишь если $e \in \mathcal{U}^m$ — один из выбранных выше элементов, содержащих V_i^*, $i = 1, \ldots, t$. — *Прим. перев.*

Остается проверить (b). Из $\delta_{x, n_j} \to \mu$ при больших j получаем $\left|\frac{1}{N}\delta_{x, N}(\varphi) - \int \varphi\, d\mu\right| < \varepsilon$, или $S_N\varphi(x) \leqslant N\left(\int \varphi\, d\mu + \varepsilon\right)$. Но для $x \in X(\underline{U})$

$$S_N\varphi(\underline{U}) \leqslant S_N\varphi(x) + N\gamma(\mathcal{U}). \ \square$$

2.16. Лемма. *Пусть заданы конечное множество E и число $h \geqslant 0$. Положим $R(k, h) = \{\underline{a} \in E^k : H(\underline{a}) \leqslant h\}$. Тогда*

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{1}{k} \log |R(k, h)| \leqslant h.$$

Доказательство. Для всякой меры ν на E и $\alpha \in (0, 1)$ рассмотрим

$$R_k(\nu) = \{\underline{a} \in E^k : |\mu_{\underline{a}}(e) - \nu(e)| < \alpha \ \forall e \in E\}.$$

Пусть μ — мера, инвариантная относительно сдвига Бернулли на пространстве $\Sigma = \prod_{i=0}^{\infty} E$, порожденная распределением

$$\mu(e) = (1-\alpha)\,\nu(e) + \alpha/|E|.$$

Каждый набор $\underline{a} \in R_k(\nu)$ соответствует цилиндрическому подмножеству $C_{\underline{a}}$ пространства Σ. Так как каждое $e \in E$ встречается в $\underline{a}$ по меньшей мере $k(\nu(e)+\alpha)$ раз,

$$\mu(C_{\underline{a}}) \geqslant \prod_e \mu(e)^{k(\nu(e)+\alpha)}.$$

Поскольку цилиндры $C_{\underline{a}}$ не пересекаются и имеют суммарную меру 1, получаем

$$1 \geqslant |R_k(\nu)| \prod_e \mu(e)^{k(\nu(e)+\alpha)},$$

или

$$\frac{1}{k}\log|R_k(\nu)| \leqslant \sum_e \left(-(\nu(e)+\alpha)\log\mu(e)\right) \leqslant$$

$$\leqslant H(\mu) + \sum_e 3\alpha\,|\log\mu(e)|.$$

Из $\mu(e) \geqslant \alpha/|E|$ получаем

$$\frac{1}{k}\log|R_k(\nu)| \leqslant H(\mu) + 3\alpha|E|(\log|E| - \log\alpha).$$

При $\alpha \to 0$ второй член в правой части стремится к 0 и $H(\mu) \to H(\nu)$ равномерно по ν. Поэтому для всякого $\varepsilon > 0$ можно найти такое достаточно малое α, что для всех k и ν

$$\frac{1}{k}\log|R_k(\nu)| \leqslant H(\nu) + \varepsilon.$$

Выбрав α, найдем такое конечное множество распределений N на E, что

(a) $H(\nu) \leqslant h$ для $\nu \in N$,

(b) если $H(\nu') \leqslant h$, то при некотором $\nu \in N$

$$|\nu'(e) - \nu(e)| < \alpha \quad \text{для всех} \quad e.$$

Тогда $R(k, h) \subset \bigcup_{\nu \in N} R_k(\nu)$,

$$\frac{1}{k}\log|R(k, h)| \leqslant \frac{1}{k}\log|N| + h + \varepsilon,$$

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{1}{k}\log|R(k, h)| \leqslant h + \varepsilon.$$

При $\varepsilon \to 0$ получаем требуемый результат. □

2.17. Вариационный принцип. *Пусть T: $X \to X$ — непрерывное отображение компактного метрического пространства и $\varphi \in C(X)$. Тогда*

$$P_T(\varphi) = \sup_\mu \left(h_\mu(T) + \int \varphi\, d\mu\right),$$

где $\mu \in M_T(X)$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{U}$ — конечное открытое покрытие X и $\varepsilon > 0$. Для всякого $m > 0$ обозначим X_m множество точек $x \in X$, для которых 2.15 выполняется при этом m и некоторой мере $\mu \in V(x)$. Так как $V(x) \neq \varnothing$, из 2.15 следует, что $X = \bigcup_m X_m$. Для всякого действительного числа u обозначим $Y_m(u)$ множество точек $x \in X_m$, для которых 2.15 выполняется при некоторой мере $\mu \in V(x)$, удовлетворяющей условию $\int \varphi\, d\mu \in [u - \varepsilon, u + \varepsilon]$. Пусть

$$c = \sup_\mu \left(h_\mu(T) + \int \varphi\, d\mu\right).$$

При $x \in Y_m(u)$ соответствующая мера μ удовлетворяет неравенству $h_\mu(T) \leqslant c - u + \varepsilon$. Если $x \in Y_m(u)$, то набор $\underline{a} \in (\mathcal{U}^m)^k$, фигурирующий в 2.15(с), содержится в $R(k, c - u + \varepsilon, \mathcal{U}^m)$. Таким образом, число возможных наборов $\underline{U}$ из 2.15 для любого фиксированного N не превосходит

$$b(N) = |E|^m |R(k, m(c - u + \varepsilon), \mathcal{U}^m)|.$$

Вследствие 2.16

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N}\log b(N) \leqslant c - u + \varepsilon.$$

Пусть $\Gamma = \Gamma_{m,u}$ — совокупность всех наборов U, о которых идет речь, соответствующих всевозможным N, большим N_0. Тогда Γ покрывает $Y_m(u)$ и

$$Z(\Gamma, \lambda) \leqslant \sum_{N=N_0}^{\infty} \lambda^N b(N) \exp N(u + 2\varepsilon + \gamma(\mathcal{U})).$$

Если N_0 достаточно велико, то $b(N) \leqslant \exp N(c - u + 2\varepsilon)$ и

$$Z(\Gamma, \lambda) \leqslant \sum_{N=N_0}^{\infty} \lambda^N \exp N(c + 4\varepsilon + \gamma(\mathcal{U})) \leqslant \sum_{N=N_0}^{\infty} \beta^N = \beta^{N_0}/(1-\beta),$$

где $\beta = \lambda \exp(c + 4\varepsilon + \gamma(\mathcal{U})) < 1$.

Мы получили, что при $\lambda < \exp[-(c + 4\varepsilon + \gamma(\mathcal{U}))]$ каждое множество $Y_m(u)$ можно покрыть таким $\Gamma \subset W^*(\mathcal{U})$, для которого $Z(\Gamma, \lambda)$ сколь угодно мало. Из $X = \bigcup_{m=1}^{\infty} X_m$ и $X_m = Y_m(u_1) \cup \ldots \cup Y_m(u_r)$, где точки $u_1, \ldots, u_r$ образуют ε-сеть в $[-\|\varphi\|, \|\varphi\|]$, получаем, взяв объединение соответствующих Γ, покрытие Γ пространства X, удовлетворяющее условию $Z(\Gamma, \lambda) < 1$. По лемме 2.14 $\lambda \leqslant e^{-P(\varphi, \mathcal{U})}$, или

$$P(\varphi, \mathcal{U}) \leqslant c + 4\varepsilon + \gamma(\mathcal{U}).$$

Так как ε было произвольным, $P(\varphi, \mathcal{U}) \leqslant c + \gamma(\mathcal{U})$. Окончательно получаем

$$P(\varphi) = \lim_{\operatorname{diam} \mathcal{U} \to 0} P(\varphi, \mathcal{U}) \leqslant \lim_{\operatorname{diam} \mathcal{U} \to 0} (c + \gamma(\mathcal{U})) = c.$$

Противоположное неравенство $c \leqslant P(\varphi)$ следует из теоремы 2.10. □

2.18. Следствие. *Предположим, что* $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — *семейство компактных подмножеств* X, *таких, что* $TX_\alpha \subset X_\alpha$ *при каждом* α *и* $X = \bigcup_\alpha X_\alpha$. *Тогда*

$$P_T(\varphi) = \sup_\alpha P_{T|X_\alpha}(\varphi \mid X_\alpha).$$

Доказательство. Если $\mu \in M_T(X_\alpha)$, то $\mu \in M_T(X)$ и

$$P_T(\varphi) \geqslant h_\mu(T) + \int \varphi \, d\mu.$$

Отсюда

$$P_T(\varphi) \geqslant \sup_{\mu \in M_T(X_\alpha)} \left(h_\mu(T) + \int \varphi \, d\mu\right) = P_{T|X_\alpha}(\varphi \mid X_\alpha).$$

Если $x \in X_\alpha$, то $V(x) \subset M_T(X_\alpha)$ и, значит,

$$c' = \sup \left\{ h_\mu(T) + \int \varphi \, d\mu : \mu \in \bigcup_{x \in X_\alpha} V(x) \right\} \leqslant \sup_\alpha P_{T|X_\alpha}(\varphi \mid X_\alpha).$$

В доказательстве 2.17 использовался лишь тот факт, что $c \geqslant h_\mu(T) + \int \varphi \, d\mu$ при $\mu \in V(x)$. Число c' также обладает этим свойством, и мы получаем $P_T(\varphi) \leqslant c'$. □

D. Равновесные состояния

Мера $\mu \in M_T(X)$, удовлетворяющая условию $h_\mu(T) + \int \varphi \, d\mu = P_T(\varphi)$, называется *равновесным состоянием* для функции φ (относительно T). Как было показано в § 1, гиббсовское состояние μ_φ, соответствующее функции $\varphi \in \mathcal{F}_A$, является единственным равновесным состоянием для этой функции.

2.19. Предложение. *Предположим, что при некотором $\varepsilon > 0$ равенство $h_\mu(T, \mathcal{D}) = h_\mu(T)$ выполняется для любых $\mu \in M_T(X)$ и $\mathcal{D}$ с $\operatorname{diam} \mathcal{D} < \varepsilon$. Тогда для всякой функции $\varphi \in C(X)$ существует равновесное состояние.*

Доказательство. Покажем, что отображение $\mu \to h_\mu(T)$ полунепрерывно сверху на $M_T(X)$. Тогда $\mu \to h_\mu(T) + \int \varphi \, d\mu$ также полунепрерывно сверху, и предложение следует из 2.17 и того, что функция, полунепрерывная сверху на компакте, достигает своей верхней грани.

Зафиксируем $\mu \in M_T(X)$, $\alpha > 0$ и $\mathcal{D} = \{D_1, \ldots, D_n\}$ с $\operatorname{diam} \mathcal{D} < \varepsilon$. При некотором m имеем $\frac{1}{m} H_\mu(\mathcal{D} \vee \ldots \vee T^{m+1}\mathcal{D}) \leqslant h_\mu(T) + \alpha$. Для данного $\beta > 0$ выберем такие компактные множества $K_{i_0, \ldots, i_{m-1}} \subset \bigcap_{k=0}^{m-1} T^{-k} D_{i_k}$, что

$$\mu\Big(\bigcap_k T^{-k} D_{i_k} \setminus K_{i_0, \ldots, i_{m-1}}\Big) < \beta.$$

Тогда

$$D_i \supset L_i = \bigcup_{j=0}^{m-1} \bigcup \{T^j K_{i_0, \ldots, i_{m-1}} : i_j = i\}.$$

Так как L_i — это непересекающиеся компактные множества, можно найти такое разбиение $\mathcal{D}' = \{D_1', \ldots, D_n'\}$, $\operatorname{diam} \mathcal{D}' < \varepsilon$, что $L_i \subset \operatorname{int} D_i'$. При этом

$$K_{i_0, \ldots, i_{m-1}} \subset \operatorname{int} \bigcap_k T^{-k} D_{i_k}'.$$

Если мера ν близка к μ в слабой топологии, то

$$\nu\Big(\bigcap_k T^{-k} D_{i_k}'\Big) \geqslant \mu(K_{i_0, \ldots, i_{m-1}}) - \beta$$

и $\left|\nu\left(\bigcap_k T^{-k}D'_{i_k}\right)-\mu\left(\bigcap_k T^{-k}D_{i_k}\right)\right|\leqslant 2\beta m$. При достаточно малом β отсюда следует, что

$$h_\nu(T)=h_\nu(T,\mathscr{D}')\leqslant\frac{1}{m}H_\nu(\mathscr{D}'\vee\ldots\vee T^{-m+1}\mathscr{D}')\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{m}H_\mu(\mathscr{D}\vee\ldots\vee T^{-m+1}\mathscr{D})+\alpha\leqslant h_\mu(T)+2\alpha.\ \square$$

2.20. Следствие. *Если T — разделяющий гомеоморфизм, то для каждой функции $\varphi\in C(X)$ существует равновесное состояние.*

Доказательство. Вспомним 2.5. $\square$

Отметим, что в 2.19 нет ограничений на φ. Взяв $\varphi=0$, определим *топологическую энтропию* T равенством

$$h(T)=P_T(0).$$

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Содержание этого раздела навеяно теорией гиббсовских состояний в статистической механике и понятием топологической энтропии в топологической динамике. Условия на φ важны для *единственности* равновесного состояния, но и то лишь в случае, когда гомеоморфизм T удовлетворяет весьма строгим ограничениям. Диффеоморфизмы, удовлетворяющие аксиоме А, достаточно близки к топологическим цепям Маркова $\sigma\colon\Sigma_A\to\Sigma_A$, и для них теорему единственности удается доказать.

Определение энтропии $h_\mu(T)$ принадлежит Колмогорову и Синаю (см. [2] [1])). Для разделяющего T Рюэль [15] определил $P_T(\varphi)$ и доказал теоремы 2.10, 2.17 и 2.20. Для T общего вида определение и результаты принадлежат Уолтерсу [16].

При переходе от Σ_A к общему случаю компактного метрического пространства X основные трудности возникают оттого, что более сложна топология X. Поэтому статья Уолтерса тесно связана с более ранними работами про топологическую энтропию $h(T)$, т. е. со случаем $\varphi=0$. Определение $h(T)$ принадлежит Адлеру, Конхейму и Мак-Эндрю [1]. Для этого случая теоремы были доказаны Гудвином [10] (теорема 2.10), Динабургом [6] (X конечномерно, 2.17), Гудменом [8] (X любое, 2.17), и Гудменом [9] (2.20). Для символических сдвигов эти результаты были ранее доказаны Перри [14]. Доказательства, которые мы приводим в этих заметках, — это модификации доказательств из [4].

Гуревич [11] построил пример такого T, что для функции $\varphi=0$ не существует равновесного состояния, а Мисюревич [13] построил такой же пример для диффеоморфизма T. Условие из 2.19 выполняется для класса отображений, включающего все аффинные преобразования групп Ли [3], а Мисюревич [13] показал, что равновесные состояния существуют при несколько более слабых условиях.

Рюэль [15] доказал, что в случае разделяющего T бэровское множество функций φ имеет единственное равновесное состояние. Гудмен [9] привел пример сдвига на минимальном множестве в пространстве последовательностей, для которого функция $\varphi=0$ имеет более одного равновесного состояния. Я думаю, что специалисты по математической физике

[1]) См. также [17], [18]. — *Прим. перев.*

знают примеры особых функций φ на Σ_n с неединственным равновесным состоянием; в статистической механике вместо гомеоморфизмов изучают действия Z^m и получают при $m \geqslant 2$ примеры неединственности даже для простых функций φ. Единственность была доказана в [5] для некоторого класса функций φ, при условии что T удовлетворяет свойству разделения траекторий и весьма ограничительному условию, называемому спецификацией; этот результат перенес на случай потоков Франко-Санчес [7] [1]).

Упомянем, наконец, об одном очень интересном результате в другом направлении. Пусть $T\colon M \to M$ — непрерывное отображение компактного многообразия, а λ—собственное значение отображения $T_*\colon H_1(M) \to H_1(M)$, индуцированного в одномерных гомологиях. Тогда, как показал Мэннинг [12], $h(T) \geqslant \log|\lambda|$. Возможно, что это неравенство справедливо для собственных значений λ в гомологиях $H_k(M)$ при любом k, а не только при $k = 1$, при условии, что T — диффеоморфизм [2]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Adler R. L., Konheim A. G., McAndrew M. H., Topological entropy, *Trans. Am. Math. Soc.*, 114 (1965), 309—319.
2. Billingsley P., Ergodic Theory and Information, Wiley, 1965. [Русский перевод: Биллингслей П., Эргодическая теория и информация, М., «Мир», 1969.]
3. Bowen R., Entropy-expansive maps, *Trans. Am. Math. Soc.*, 164 (1972), 323—332.
4. Bowen R., Topological entropy for noncompact sets, *Trans. Am. Math. Soc.*, 184 (1973), 125—136. [Русский перевод см. в настоящем сборнике.]
5. Bowen R., Some systems with unique equilibrium states, *Math. Systems Theory*, 8, № 3 (1974), 193—202.
6. Динабург Е. И., Связь между различными энтропийными характеристиками динамических систем, *Изв. АН СССР, Сер. матем.*, 35, № 2 (1971), 324—366.
7. Franco-Sanchez E., Flows with unique equilibrium states, *Amer. J. Math.* 99, № 3 (1977), 486—514.
8. Goodman T., Relating topological entropy and measure entropy, *Bull. London Math. Soc.*, 3 (1971), 176—180.
9. Goodman T., Maximal measures for expansive homeomorphisms, *J. London Math. Soc.* (2), 5 (1972), 439—444.
10. Goodwyn L. W., Topological entropy bounds measure-theoretic entropy, *Proc. Am. Math. Soc.*, 23 (1969), 679—688.
11. Гуревич Б. М., Топологическая энтропия счетной цепи Маркова, *ДАН СССР*, 187, № 4 (1969), 715—718.
12. Manning A., Topological entropy and the first homology group, Dynamical Systems, Warwick 1974, Lecture Notes in Mathematics, 468, Springer-Verlag, 1975, pp. 185—190.
13. Misiurewicz M., Diffeomorphism without any measure with maximal entropy, *Bull. Acad. Pol. Sci.*, 21 (1973), 903—910.
14. Parry W., Intrinsic Markov chains, *Trans. Am. Math. Soc.*, 112 (1964), 55—66.
15. Ruelle D., Statistical mechanics on a compact set with Z^ν action satisfying expansiveness and specification, *Trans. Am. Math. Soc.*, 185 (1973), 237—251.

[1]) О единственности равновесных состояний см. также работы [19]—[22]. — *Прим. перев.*

[2]) Эта гипотеза носит название «гипотезы об энтропии». Обзор результатов по этому вопросу см. в [23]. — *Прим. перев.*

16. Walters P., A variational principle for the pressure of continuous transformations, *Amer. J. Math*, 97 (1975), 937—971.
17*. Рохлин В. А., Лекции по энтропийной теории преобразований с инвариантной мерой, *Успехи матем. наук*, 12, вып. 5 (1967), 3—56.
18*. Синай Я. Г., Введение в эргодическую теорию, Ереван, Изд-во Ереванского ун-та, 1973
19*. Гуревич Б. М., Энтропия сдвига и марковские меры в пространстве путей счетного графа, *ДАН СССР*, 192, № 5 (1970), 963—965.
20*. Гуревич Б. М., Экстремальные марковские меры на пространстве путей счетного графа, Тезисы доклада на 2-й Вильнюсской конф. по теор. вероятн. и матем. статистике, Вильнюс, 1977.
21*. Гуревич Б. М., Единственность меры с максимальной энтропией для символических динамических систем, близких к марковским, *ДАН СССР*, 204, № 1 (1972), 15—17.
22*. Denker M., Measures with maximal entropy, Lecture Notes in Mathematics, 532, Springer-Verlag, 1976, pp. 70—112.
23*. Каток А. Б., Гипотеза об энтропии, сб. Гладкие динамические системы, М., «Мир», 1977, стр. 181—203.

3. ДИФФЕОМОРФИЗМЫ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИЕ АКСИОМЕ А

А. Определения

Пусть $f\colon M \to M$ — диффеоморфизм компактного риманова C^∞-многообразия M. При этом дифференциал f можно рассматривать как отображение $Df\colon TM \to TM$, где $TM = \bigcup_{x\in M} T_xM$ — касательное расслоение над M, и $Df_x\colon T_xM \to T_{f(x)}M$.

Определение. Замкнутое подмножество $\Lambda \subset M$ называется *гиперболическим*, если $f(\Lambda) = \Lambda$ и для каждого $x \in \Lambda$ касательное пространство T_xM представляется в виде прямой суммы подпространств

$$T_xM = E_x^u \oplus E_x^s,$$

так что

(a) $Df(E_x^s) = E_{f(x)}^s$, $Df(E_x^u) = E_{f(x)}^u$;

(b) существуют такие константы $c > 0$ и $\lambda \in (0, 1)$, что

$$\|Df^n(v)\| \leqslant c\lambda^n \|v\|, \quad \text{если} \quad v \in E_x^s, \quad n \geqslant 0,$$

$$\|Df^{-n}(v)\| \leqslant c\lambda^n \|v\|, \quad \text{если} \quad v \in E_x^u, \quad n \geqslant 0;$$

(c) E_x^s, E_x^u меняются непрерывно в зависимости от x.

Замечание. Условие (c) на самом деле следует из других. Расслоения $E^u = \bigcup_{x\in\Lambda} E_x^u$ и $E^s = \bigcup_{x\in\Lambda} E_x^s$ являются непрерывными подрасслоениями расслоения $T_\Lambda M = \bigcup_{x\in\Lambda} T_xM$ и $T_\Lambda M = E^u \oplus E^s$.

Точка $x \in M$ называется ***неблуждающей***, если

$$U \cap \bigcup_{n>0} f^n U \neq \varnothing$$

для всякой окрестности U точки x. Нетрудно понять, что множество $\Omega = \Omega(f)$ всех неблуждающих точек замкнуто и инвариантно относительно f. Точка x называется *периодической*, если $f^n x = x$ при некотором $n > 0$; очевидно, такая точка принадлежит $\Omega(f)$.

Определение. Диффеоморфизм f *удовлетворяет аксиоме А*, если $\Omega(f)$ — гиперболическое множество и

$$\Omega(f) = \overline{\{x\colon\ x \text{ — периодическая точка}\}}\,[1]).$$

Это определение принадлежит Смейлу [14]. Советские математики интенсивно изучали диффеоморфизмы f специального типа, а именно У-диффеоморфизмы[2]): f называется *У-диффеоморфизмом*, если все многообразие M является гиперболическим множеством [2]. Мы увидим несколько позднее, что такие диффеоморфизмы всегда удовлетворяют аксиоме А. Отметим в связи с этим, что неизвестно, выполняется ли условие $\Omega(f) = M$ для всякого У-диффеоморфизма f. Отсылаем читателя к примерам из [14][3]).

Риманова метрика на M используется для того, чтобы сформулировать условие (b) из определения гиперболического множества. Справедливость этого условия не зависит от используемой метрики, хотя константы c и λ от нее зависят. Метрика называется *ляпуновской* (по отношению к А-диффеоморфизму f), если $\Omega(f)$ — гиперболическое относительно f множество и $c = 1$.

3.1. Лемма. *Для всякого А-диффеоморфизма существует ляпуновская метрика.*

Доказательство. Эту лемму доказал Мезер (доказательство см. в [8][4])). ☐

Мы будем *всегда* использовать ляпуновскую метрику, это несколько упростит различные оценки. Для $x \in M$ определим

---

[1]) Диффеоморфизмы, удовлетворяющие аксиоме А, мы будем называть также А-диффеоморфизмами. — *Прим. перев.*

[2]) В соответствии с традицией отечественной математической литературы выражения «Anosov diffeomorphism, Anosov flow» переводятся как «У-диффеоморфизм, У-поток». Мы не будем, как правило, отмечать далее расхождения в терминологии, отсылая читателя к [16, замечания о терминологии]. — *Прим. перев.*

[3]) См. по этому поводу также [16] — [19]. — *Прим. перев.*

[4]) См. также [20]. — *Прим. перев.*

множества

$$W^s(x)=\{y\in M:\ d(f^nx,\ f^ny)\to 0 \text{ при } n\to\infty\},$$

$$W^s_\varepsilon(x)=\{y\in M:\ d(f^nx,\ f^ny)\leqslant\varepsilon \text{ при всех } n\geqslant 0\},$$

$$W^u(x)=\{y\in M:\ d(f^{-n}x,\ f^{-n}y)\to 0 \text{ при } n\to\infty\},$$

$$W^u_\varepsilon(x)=\{y\in M:\ d(f^{-n}x,\ f^{-n}y)\leqslant\varepsilon \text{ при всех } n\geqslant 0\}.$$

Основная аналитическая информация о поведении А-диффеоморфизмов дается следующей теоремой об устойчивых многообразиях.

3.2. Теорема. *Пусть Λ — гиперболическое множество относительно C^r-диффеоморфизма f. Тогда при малом $\varepsilon>0$ для $x\in\Lambda$ имеем*

(a) $W^s_\varepsilon(x)$, $W^u_\varepsilon(x)$ — *такие C^r-диски, что* $T_xW^s_\varepsilon(x)=E^s_x$, $T_xW^u_\varepsilon(x)=E^u_x$;

(b) $d(f^nx,\ f^ny)\leqslant\lambda^nd(x,\ y)$ *при* $y\in W^s_\varepsilon(x)$, $n\geqslant 0$,
$d(f^{-n}x,\ f^{-n}y)\leqslant\lambda^nd(x,\ y)$ *при* $y\in W^u_\varepsilon(x)$, $n\geqslant 0$;

(c) $W^s_\varepsilon(x)$, $W^u_\varepsilon(x)$ *непрерывно зависят от* x.

Доказательство. См. работу Хирша и Пью [8][1]). □

Одно из следствий 3.2(b) состоит в том, что $W^s_\varepsilon(x)\subset W^s(x)$ при $x\in\Lambda$. Отсюда следует, что

$$W^s(x)=\bigcup_{n\geqslant 0}f^{-n}W^s_\varepsilon(f^nx)$$

при $x\in\Lambda$. Аналогично

$$W^u(x)=\bigcup_{n\geqslant 0}f^nW^u_\varepsilon(f^{-n}x).$$

3.3. Канонические координаты. *Предположим, что f — диффеоморфизм, удовлетворяющий аксиоме А. Тогда для всякого достаточно малого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что если $x,\ y\in\Omega(f)$ и $d(x,y)\leqslant\delta$, то пересечение $W^s_\varepsilon(x)\cap W^u_\varepsilon(y)$ состоит из единственной точки, которую мы обозначим $[x,y]$. При этом $[x,y]\in\Omega(f)$ и отображение*

$$[\cdot,\cdot]:\ \{(x,\ y)\in\Omega\times\Omega:\ d(x,\ y)\leqslant\delta\}\to\Omega$$

непрерывно.

Доказательство. См. Смейл [14][2]). Первое утверждение следует из того, что пересечение $W^s_\varepsilon(x)\cap W^u_\varepsilon(x)=\{x\}$ трансверсально, а такое пересечение сохраняется при малых воз-

[1]) См. также [19, гл. 5]. — *Прим. перев.*
[2]) См. также [19, гл. 6]. — *Прим. перев.*

мущениях. При доказательстве того, что $[x, y] \in \Omega(f)$, используется плотность в $\Omega(f)$ периодических точек. Для У-диффеоморфизмов, разумеется, $[x, y] \in M$, и мы получаем канонические координаты на M (вместо $\Omega(f)$) без всяких предположений относительно периодических точек. □

3.4. Лемма. *Пусть Λ — гиперболическое множество. Тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что Λ является разделяющимся подмножеством M с разделяющей константой ε, т. е. если $x \in \Lambda$, $y \in M$ и $y \neq x$, то*

$$d(f^k x, f^k y) > \varepsilon \quad \text{при некотором} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Доказательство. В противном случае $y \in W^s_\varepsilon(x) \cap W^u_\varepsilon(x)$. Так как x тоже лежит в этом пересечении, получаем, согласно 3.3, что $y = x$. □

B. Спектральное разложение

В дальнейшем через f обозначается диффеоморфизм, удовлетворяющий аксиоме А.

3.5. Теорема о спектральном разложении. *Множество $\Omega(f)$ представимо в виде $\Omega(f) = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \ldots \cup \Omega_s$, где Ω_i — такие попарно непересекающиеся замкнутые множества, что*

(a) $f(\Omega_i) = \Omega_i$ и $f|\Omega_i$ топологически транзитивно;

(b) $\Omega_i = X_{1,i} \cup \ldots \cup X_{n_i,i}$, где $X_{j,i}$ — попарно непересекающиеся замкнутые множества, $f(X_{j,i}) = X_{j+1,i}$ $(X_{n_i+1,i} = X_{1,i})$ и $f^{n_i}|X_{j,i}$ топологически перемешивают.

Доказательство (см. [4], [14]). Для периодической точки $p \in \Omega$ обозначим $X_p = \overline{W^u(p) \cap \Omega}$. Пусть δ то же, что в 3.3. Мы утверждаем, что

$$X_p = B_\delta(X_p) = \{y \in \Omega\colon\ d(y, X_p) < \delta\}.$$

Так как периодические точки плотны в Ω, достаточно показать, что всякая периодическая точка $q \in B_\delta(X_p)$ лежит в X_p. Выберем $x \in W^u(p) \cap \Omega$, такое, что $d(x, q) < \delta$, и рассмотрим точку $x' = [q, x] \in W^u(p) \cap W^s(q) \cap \Omega$. Если $f^m p = p$ и $f^n q = q$, то

$$f^{kmn} x' \in f^{kmn} W^u(p) = W^u(f^{kmn} p) = W^u(p)$$

и $d(f^{kmn} x', q) = d(f^{kmn} x', f^{kmn} q) \to 0$ при $k \to \infty$. Значит, $q \in X_p$.

Отметим, что $f X_p = X_{f(p)}$, так как $f W^u(p) = W^u(f(p))$. Если, как и выше, $q \in X_p$, то $W^u_\delta(q) \subset X_p$ и

$$W^u(q) = \bigcup_{k \geqslant 0} f^{kmn} W^u_\delta(q) \subset \bigcup_{k \geqslant 0} f^{kmn} X_p = X_p$$

(отметим, что $y \in W^u(q)$ тогда и только тогда, когда $f^{-kmn}y \to q$ при $k \to \infty$). Отсюда следует, что $X_q \subset X_p$. Если x' то же, что и выше, то $f^{kmn}x' \in X_q$ при больших k, так как множество $X_q = B_\delta(X_q)$ открыто в Ω. Из $f^{jmn}X_q = X_{f^{jmn}q} = X_q$ получаем, что $f^{jmn}x' \in X_q$ при всех j и

$$p = \lim_{j \to -\infty} f^{jmn}x' \in \overline{X}_q = X_q.$$

Поменяв ролями p и q в приведенных выше рассуждениях, получаем $X_p \subset X_q$. В итоге мы доказали, что из $q \in X_p$ для периодических точек p, q следует, что $X_p = X_q$.

Далее, любые два множества X_p, X_q или не пересекаются, или совпадают. Действительно, если $X_p \cap X_q \neq \varnothing$, то их пересечение открыто в Ω и, следовательно, содержит периодическую точку r; тогда $X_p = X_r = X_q$. Далее,

$$\Omega = \bigcup_p B_\delta(X_p) = \bigcup_p X_p, \quad p \text{ — периодические.}$$

Из компактности Ω и того, что X_p — открытые множества, получаем

$$\Omega = X_{p_1} \cup \ldots \cup X_{p_l},$$

где X_{p_j} попарно не пересекаются. При этом $f(X_{p_j}) = X_{f(p_j)}$ пересекается и, следовательно, совпадает с некоторым X_{p_i}. Итак, f переставляет множества X_{p_j}, и Ω_i как раз являются объединениями множеств X_{p_j}, составляющих циклы этой перестановки.

Транзитивность в (a) следует из перемешивания в (b). Нам осталось доказать, что f^N: $X_r \to X_r$ — перемешивающее преобразование, если r — периодическая точка, а N — положительное число, такое, что $f^N X_r = X_r$. Предположим, что U и V — непустые подмножества X_r, открытые в X_r (а значит, и в Ω). Выберем периодические точки $p \in U$ и $q \in V$, и пусть $f^m p = p$, $f^n q = q$. Пусть $0 \leqslant j < mn$ и $f^j p \in X_r$. Рассуждения, аналогичные приведенным в начале этого доказательства, показывают, что можно найти точку x'_j, для которой

$$x'_j \in f^j U \quad \text{и} \quad f^{kmn}x'_j \in V \quad \text{при больших} \quad k.$$

Представив tN в виде $tN = kmn + j$, $0 \leqslant j \leqslant mn$, получаем $f^j p = f^{tN} p \in X_r$ и

$$f^{kmn}x'_j = f^{tN}(f^{-jN}x'_j) \in f^{tN}U \cap V,$$

если k велико. Значит, $f^{tN}U \cap V \neq \varnothing$ при больших t и $f^N | X_r$ топологически перемешивает. □

Множества Ω_i из спектрального разложения $\Omega(f)$ называются *базисными множествами* f. Отметим, что если $g = f^n$, где n кратно каждому из чисел n_i, то базисные множества g — это $X_{j,i}$, а $g|X_{j,i}$ перемешивает. Иногда мы ограничиваемся рассмотрением базисных множеств, на которых преобразование является перемешивающим; общий случай сводится к этому путем рассмотрения f^n.

Последовательность $\underline{x} = \{x_i\}_{i=a}^{b}$ точек из M (может быть $a = -\infty$, $b = +\infty$) называется *α-траекторией*[1]), если

$$d(fx_i, x_{i+1}) < \alpha \quad \text{при всех } i \in [a, b-1].$$

Будем говорить, что точка $x \in X$ *β-отслеживает* α-траекторию $\underline{x}$, если

$$d(f^i x, x_i) \leqslant \beta \quad \text{при всех} \quad i \in [a, b].$$

3.6. Предложение. *Для всякого* $\beta > 0$ *существует такое* $\alpha > 0$, *что всякая α-траектория* $\{x_i\}_{i=a}^{b}$ *в* Ω *(т. е. у которой каждое* $x_i \in \Omega$*) β-отслеживается некоторой точкой* $x \in \Omega$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ — маленькое число, которое мы определим позднее, а $\delta \in (0, \varepsilon)$ — число из 3.3, т. е. такое, что $W^s_\varepsilon(x) \cap W^u_\varepsilon(y) \cap \Omega \neq \varnothing$ для $x, y \in \Omega$, удовлетворяющих условию $d(x, y) \leqslant \delta$. Найдем столь большое M, что $\lambda^M \varepsilon < \delta/2$, и затем такое $\alpha > 0$, что

$$\text{если } \{y_i\}_{i=0}^{M} \text{ — некоторая α-траектория и } \Omega,$$

$$\text{то } d(f^j y_0, y_j) < \delta/2 \quad \text{при всех} \quad j \in [0, M].$$

Рассмотрим сначала некоторую α-траекторию $\{x_i\}_{i=0}^{rm}$ с $r > 0$. Определим рекуррентно последовательность точек x'_{kM} при $k \in [0, r]$, положив $x'_0 = x_0$ и

$$x'_{(k+1)M} = W^u_\varepsilon(f^M x'_{kM}) \cap W^s_\varepsilon(x_{(k+1)M}) \in \Omega.$$

Это определение имеет смысл: $d(f^M x'_{kM}, f^M x_{kM}) \leqslant \lambda^M \varepsilon < \delta/2$ и $d(f^M x_{kM}, x_{(k+1)M}) < \delta/2$ вследствие выбора α; значит, $d(f^M x'_{kM}, x_{(k+1)M}) < \delta$ и точка $x'_{(k+1)M}$ существует. Далее, положим $x = f^{-rM} x'_{rM}$. Для $i \in [0, rM]$ выберем такое s, что $i \in$

---

[1]) В оригинале α-pseudo-orbit. — *Прим. перев.*

$\in [sM, (s+1)M)$. При этом

$$d\left(f^i x, f^{i-sM}x'_{sM}\right) \leqslant \sum_{t=s+1}^{r} d\left(f^{i-tM}x'_{tM}, f^{i-tM+M}x'_{(t-1)M}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{t=s+1}^{r} \varepsilon\lambda^{tM-i} \leqslant \frac{\varepsilon\lambda}{1-\lambda}$$

(мы воспользовались тем, что $x'_{tM} \in W^u_\varepsilon\left(f^M x'_{(t-1)M}\right)$). Так как $x'_{sM} \in W^s_\varepsilon(x_{sM})$,

$$d\left(f^{i-sM}x'_{sM}, f^{i-sM}x_{sM}\right) \leqslant \varepsilon.$$

Вследствие выбора α имеем

$$d\left(f^{i-sM}x_{sM}, x_i\right) < \delta/2.$$

Согласно неравенству треугольника,

$$d(f^i x, x_i) \leqslant \frac{\varepsilon\lambda}{1-\lambda} + \varepsilon + \delta/2.$$

При малом ε полученное выражение меньше, чем заданное β.

Далее, всякая α-траектория $\{x_i\}_{i=0}^n$ в Ω продолжается до $\{x_i\}_{i=0}^{rM}$, где $rM \geqslant n$, если положить $x_i = f^{i-n}x_n$ при $i \in (n, rM]$. Точка $x \in \Omega$, отслеживающая эту продолженную α-траекторию, отслеживает и исходную. Если $\{x_i\}_{i=a}^b$ — конечная α-траектория, то такова и $\{x_{j+a}\}_{j=0}^{b-a}$, и если x отслеживает последнюю α-траекторию, то $f^{-a}x$ отслеживает исходную. Таким образом, предложение доказано для конечных α-траекторий. Если $\{x_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$ — бесконечная α-траектория в Ω, найдем точки $x^{(m)} \in \Omega$, β-отслеживающие $\{x_i\}_{i=-m}^{m}$, и определим x как предельную точку последовательности $x^{(m)}$. Тогда $x \in \Omega$ β-отслеживает α-траекторию $\{x_i\}_{i=-\infty}^{+\infty}$. □

3.7. Следствие. *Для любого $\beta > 0$ существует такое $\alpha > 0$, что справедливо следующее: если $x \in \Omega$ и $d(f^n x, x) < \alpha$, то существует такое $x' \in \Omega$, что $f^n x' = x'$ и*

$$d(f^k x, f^k x') \leqslant \beta \quad \textit{при всех} \quad k \in [0, n].$$

Доказательство. Положим $x_i = f^k x$ при $i \equiv k \pmod n$, $k \in [0, n)$. Тогда $\{x_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$ — это α-траектория. Пусть $x' \in \Omega$ — точка, β-отслеживающая эту α-траекторию. Тогда

$$d\left(f^i x', f^i f^n x'\right) \leqslant d\left(f^i x', x_i\right) + d\left(x_i, f^{i+n}x'\right) \leqslant 2\beta$$

и в силу свойства разделения траекторий (лемма 3.4) $f^n x' = x'$. □

3.8. Лемма Аносова о замыкании. *Всякий У-диффеоморфизм f удовлетворяет аксиоме А.*

Доказательство. Нам нужно доказать, что периодические точки плотны в $\Omega(f)$. Канонические координаты из 3.3 существуют для У-диффеоморфизмов, так же как и для А-диффеоморфизмов, поэтому предложение 3.6 и следствие 3.7 для них справедливы с заменой $\Omega(f)$ на M. Если y — неблуждающая точка У-диффеоморфизма f, то для всякого γ можно найти такую точку x, что $d(x, y) < \gamma$ и $d(f^n x, x) < \gamma$ при некотором n. Периодические точки x', построенные согласно 3.7 для таких x, сходятся к y. □

3.9. Фундаментальная окрестность. *Пусть f удовлетворяет аксиоме А. Существует такая окрестность U множества $\Omega(f)$, что*

$$\bigcap_{n \in Z} f^n U = \Omega(f).$$

Доказательство. Пусть β мало, а α выбрано согласно 3.6. Выберем такое $\gamma < \alpha/2$, что

$$x, y \in M, \quad d(x, y) < \gamma \Rightarrow d(fx, fy) < \alpha/2.$$

Пусть $U = \{y \in M: d(y, \Omega) < \gamma\}$. Если $y \in \bigcap_{n \in Z} f^n U$, выберем такие точки $x_i \in \Omega$, что $d(f^i y, x_i) < \gamma$. Пусть $x \in \Omega$ β-отслеживает $\{x_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$. Тогда $d(f^i y, f^i x) < \beta + \gamma$ при всех i. Для малых β и γ вследствие 3.4 получаем $y = x \in \Omega$. □

Для базисного множества Ω_j диффеоморфизма f, удовлетворяющего аксиоме А, положим

$$W^s(\Omega_j) = \{x \in M: \ d(f^n x, \Omega_j) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty\},$$

$$W^u(\Omega_j) = \{x \in M: \ d\left(f^{-n} x, \Omega_j\right) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty\}.$$

Из определения множества неблуждающих точек легко вывести для всякой точки $x \in M$, что $f^n x \to \Omega$ и $f^{-n} x \to \Omega$ при $n \to \infty$. Так как $\Omega = \Omega_1 \cup \ldots \cup \Omega_s$ является объединением непересекающихся замкнутых инвариантных множеств, отсюда следует, что

$$M = \bigcup_{j=1}^{s} W^s(\Omega_j) = \bigcup_{j=1}^{s} W^u(\Omega_j)$$

и множества, входящие в эти объединения, не пересекаются.

3 Зак. 1231

3.10. Предложение. $W^s(\Omega_j)=\bigcup_{x\in\Omega_j}W^s(x)$ *и* $W^u(\Omega_j)=\bigcup_{x\in\Omega_j}W^u(x)$. *Для* $\varepsilon>0$ *существует окрестность* U_j *множества* Ω_j, *такая, что*

$$\bigcap_{k\geqslant 0}f^{-k}U_j\subset W^s_\varepsilon(\Omega_j)=\bigcup_{x\in\Omega_j}W^s_\varepsilon(x),$$

$$\bigcap_{k\geqslant 0}f^{k}U_j\subset W^u_\varepsilon(\Omega_j)=\bigcup_{x\in\Omega_j}W^u_\varepsilon(x).$$

Доказательство. Предположим, что $f^ny\to\Omega_j$ при $n\to\infty$; тогда $d(f^ny,\Omega_j)<\gamma$ при всех $n\geqslant N$. При $n\geqslant N$ выберем такое $x_n\in\Omega_j$, что $d(x_n,f^ny)\leqslant\gamma$; при $n\leqslant N$ пусть $x_n=f^{n-N}x_N$. Тогда $\{x_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ является α-траекторией в Ω_j. Если $x\in\Omega_j$ — точка, отслеживающая ее, то

$$f^Ny\in W^s_\varepsilon(f^Nx)\subset W^s(f^Nx)$$

(если γ достаточно мало). При этом $y\in f^{-N}W^s(f^Nx)=W^s(x)$. Обратное включение $W^s(\Omega_j)\supset\bigcup_{x\in\Omega_j}W^s(x)$ очевидно.

Доказательство для $W^u(\Omega_j)$ аналогично; кроме того, мы доказали второе утверждение с $U_j=\{y\in M: d(y,\Omega_j)\leqslant\gamma\}$. □

C. Марковские разбиения

Подмножество $R\subset\Omega_s$ называется *прямоугольником*, если оно имеет маленький диаметр и

$$[x,y]\in R,\quad \text{когда}\quad x,y\in R.$$

Прямоугольник R называется *правильным*, если он замкнут и $R=\overline{\operatorname{int}R}$ (под $\operatorname{int}R$ подразумевается множество внутренних точек R как подмножества Ω_s). Для $x\in R$ положим

$$W^s(x,R)=W^s_\varepsilon(x)\cap R\qquad\text{и}\qquad W^u(x,R)=W^u_\varepsilon(x)\cap R,$$

где ε мало, а диаметр R мал по сравнению с ε.

3.11. Лемма. *Пусть R — замкнутый прямоугольник. Как подмножество Ω_s он имеет границу*

$$\partial R=\partial^sR\cup\partial^uR,$$

где

$$\partial^sR=\{x\in R:\ x\notin\operatorname{int}W^u(x,R)\},$$

$$\partial^uR=\{x\in R:\ x\notin\operatorname{int}W^s(x,R)\},$$

а множества внутренних точек берутся в $W^u(x, R)$ *и* $W^s(x, R)$ *как в подмножествах* $W^u_\varepsilon(x) \cap \Omega$, $W^s_\varepsilon(x) \cap \Omega$.

Доказательство. Если $x \in \operatorname{int} R$, то $W^u(x, R) = R \cap (W^u_\varepsilon(x) \cap \Omega)$ является окрестностью x в $W^u_\varepsilon(x) \cap \Omega$, так как R — окрестность x в Ω. Аналогично $x \in \operatorname{int} W^s(x, R)$.

Предположим, что $x \in \operatorname{int} W^u(x, R)$ и $x \in \operatorname{int} W^s(x, R)$. Для точек $y \in \Omega_i$, близких к x, точки

$$[x, y] \in W^s_\varepsilon(x) \cap \Omega \quad \text{и} \quad [y, x] \in W^u_\varepsilon(x) \cap \Omega$$

непрерывно зависят от y. Отсюда для $y \in \Omega_s$, достаточно близких к x, $[x, y] \in R$ и $[y, x] \in R$. При этом

$$y' = [\,[y, x], [x, y]\,] \in R \cap W^s_\varepsilon(y) \cap W^u_\varepsilon(y)$$

и $y' = y$, так как $W^s_\varepsilon(y) \cap W^u_\varepsilon(y) = \{y\}$. Значит, $x \in \operatorname{int} R$. □

Определение. *Марковским разбиением* Ω_s называется такое конечное покрытие $\mathscr{R} = \{R_1, \ldots, R_m\}$ множества Ω_s правильными прямоугольниками, что

(a) $\operatorname{int} R_i \cap \operatorname{int} R_j = \varnothing$ при $i \neq j$,

(b) $fW^u(x, R_i) \supset W^u(fx, R_j)$ и $fW^s(x, R_i) \subset W^s(fx, R_j)$, если $x \in \operatorname{int} R_i$, $fx \in \operatorname{int} R_j$.

3.12. Теорема. *Пусть* Ω_s — *базисное множество А-диффеоморфизма* f. *Тогда на* Ω_s *существует марковское разбиение* $\mathscr{R}$ *с прямоугольниками произвольно малого диаметра.*

Доказательство. Для очень малого $\beta > 0$ выберем согласно 3.6 настолько малое α, что всякая α-траектория в Ω_s β-отслеживается точкой из Ω_s. Выберем такое $\gamma < \alpha/2$, что

$$d(fx, fy) < \alpha/2, \quad \text{если} \quad d(x, y) < \gamma.$$

Пусть $P = \{p_1, \ldots, p_r\}$ — некоторая γ-сеть в Ω_i и

$$\Sigma(p) = \left\{ \underline{q} \in \prod_{-\infty}^{\infty} P\colon\ d(fq_j, q_{j+1}) < \alpha \text{ при всех } j \right\}.$$

Для всякой последовательности $\underline{q} \in \Sigma(P)$ существует единственная точка $\theta(\underline{q}) \in \Omega_s$, которая β-отслеживаст $\underline{q}$; для всякого $x \in \Omega_s$ существуют такие последовательности $\underline{q}$, что $x = \theta(\underline{q})$.

Если $\underline{q}$, $\underline{q}' \in \Sigma(P)$ и $q_0 = q'_0$, определим $\underline{q}^* = [\underline{q}, \underline{q}'] \in \Sigma(P)$, положив

$$q^*_j = \begin{cases} q_j & \text{при} \quad j \geqslant 0, \\ q'_j & \text{при} \quad j \leqslant 0. \end{cases}$$

Тогда $d(f^j\theta(\underline{q}^*), f^j\theta(\underline{q})) \leqslant 2\beta$ при $j \geqslant 0$ и $d(f^j\theta(\underline{q}^*), f^j\theta(\underline{q}')) \leqslant 2\beta$ при $j \leqslant 0$. Значит,

$$\theta(\underline{q}^*) \in W^s_{2\beta}(\theta(\underline{q})) \cap W^u_{2\beta}(\theta(\underline{q}')),$$

т. е. $\theta[\underline{q}, \underline{q}'] = [\theta(\underline{q}), \theta(\underline{q}')]$.

Проверим теперь, что множество $T_s = \{\theta(\underline{q}): \underline{q} \in \Sigma(P), q_0 = p_s\}$ является прямоугольником. Для $x, y \in T_s$ запишем $x = \theta(\underline{q})$, $y = \theta(\underline{q}')$, где $q_0 = p_s = q_0'$. Тогда

$$[x, y] = \theta[\underline{q}, \underline{q}'] \in T_s.$$

Предположим, что $x = \theta(\underline{q})$, где $q_0 = p_s$ и $q_1 = p_t$. Рассмотрим $y \in W^s(x, T_s)$, $y = \theta(\underline{q}')$, $q_0' = p_s$. Тогда $y = [x, y] = \theta[\underline{q}, \underline{q}']$ и $fy = \theta(\sigma[\underline{q}, \underline{q}']) \in T_t$, так как $\sigma[\underline{q}, \underline{q}']$ имеет нулевую координату $q_1' = p_t$. Из $fy \in W^s_\varepsilon(fx)$ ($\operatorname{diam} T_s \leqslant 2\beta$ мал по сравнению с ε) получаем $fy \in W^s(fx, T_t)$. Мы доказали, что

(i) $fW^s(x, T_s) \subset W^s(fx, T_t)$.

Аналогичным образом доказывается, что $f^{-1}W^u(fx, T_t) \subset \subset W^u(x, T_s)$, т. е.

(ii) $fW^u(x, T_s) \supset W^u(fx, T_t)$.

Каждый прямоугольник T_s замкнут; это вытекает из следующей леммы.

3.13. Лемма. *Отображение* $\theta: \Sigma(P) \to \Omega_s$ *непрерывно.*

Доказательство. В противном случае существует такое $\gamma > 0$, что для всякого N можно найти последовательности $\underline{q}_N, \underline{q}_N' \in \Sigma(P)$ с $q_{j,N} = q'_{j,N}$ при всех $j \in [-N, N]$, но

$$d(\theta(\underline{q}_N), \theta(\underline{q}_N')) \geqslant \gamma.$$

Положив $x_N = \theta(\underline{q}_N)$, $y_N = \theta(\underline{q}_N')$, получаем

$$d(f^j x_N, f^j y_N) \leqslant 2\beta \qquad \forall j \in [-N, N].$$

Перейдя к подпоследовательностям, можно считать, что $x_N \to x$ и $y_N \to y$ при $N \to \infty$. Тогда $d(f^j x, f^j y) \leqslant 2\beta$ при всех j и $d(x, y) \geqslant \gamma$. Это противоречит свойству разделения траекторий $f | \Omega_s$. □

Мы построили покрытие $\mathscr{T} = \{T_1, \ldots, T_r\}$ множества Ω_s прямоугольниками, и условия (i), (ii) аналогичны марковскому условию (b). Однако прямоугольники T_j могут пересекаться и не быть правильными. Для всякого $x \in \Omega_s$ положим $\mathscr{T}(x) = \{T_j \in \mathscr{T}: x \in T_j\}$ и $\mathscr{T}^*(x) = \{T_k \in \mathscr{T}: T_k \cap T \neq \varnothing$ для некоторого $T_j \in \mathcal{T}(x)\}$. Так как $\mathcal{T}$ — покрытие Ω_s замкнутыми множествами, $Z = \Omega_s \setminus \bigcup_j \partial T_j$ является открытым плотным подмножеством в Ω_s. Действительно, используя рассуждения, близкие к 3.11, можно показать, что множество

$$Z^* = \{x \in \Omega_s\colon\ W^s_\varepsilon(x) \cap \partial^s T_k = \varnothing,\ W^u_\varepsilon(x) \cap \partial^u T_k = \varnothing \quad \text{для всех } T_k \in \mathcal{T}^*(x)\}$$

открыто и плотно в Ω_s.

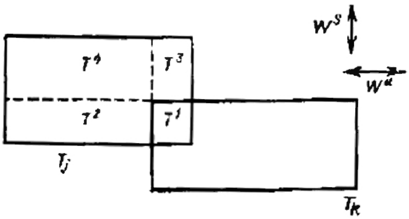


Рис. 2.

Для $T_j \cap T_k \neq \varnothing$ положим (рис. 2)

$$T^1_{j,k} = \{x \in T_j\colon\ W^u(x, T_j) \cap T_k \neq \varnothing,\ W^s(x, T_j) \cap T_k \neq \varnothing\} = T_j \cap T_k;$$

$$T^2_{j,k} = \{x \in T_j\colon\ W^u(x, T_j) \cap T_k \neq \varnothing,\ W^s(x, T_j) \cap T_k = \varnothing\};$$

$$T^3_{j,k} = \{x \in T_j\colon\ W^u(x, T_j) \cap T_k = \varnothing,\ W^s(x, T_j) \cap T_k \neq \varnothing\};$$

$$T^4_{j,k} = \{x \in T_j\colon\ W^u(x, T_j) \cap T_k = \varnothing,\ W^s(x, T_j) \cap T_k = \varnothing\}.$$

Если $x, y \in T_j$, то $W^s([x, y], T_j) = W^s(x, T_j)$ и $W^u([x, y], T_j) = W^u(y, T_j)$; отсюда следует, что $T^n_{j,k}$ — прямоугольник. Каждое множество $\operatorname{int} T^n_{j,k}$ является прямоугольником, открытым в Ω_s, а каждое $x \in T_j \cap Z^*$ лежит в $\operatorname{int} T^n_{j,k}$ при некотором n. Для $x \in Z^*$ определим

$$R(x) = \bigcap \{\operatorname{int} T^n_{j,k}\colon\ x \in T_j,\ T_k \cap T_j \neq \varnothing \text{ и } x \in T^n_{j,k}\}.$$

Множество $R(x)$ — это открытый прямоугольник $(x \in Z^*)$. Предположим, что $y \in R(x) \cap Z^*$. Из $R(x) \subset \mathcal{T}(x)$ и $R(x) \cap \cap T_j = \varnothing$ для $T_j \notin \mathcal{T}(x)$ получаем $\mathcal{T}(y) = \mathcal{T}(x)$. Для $T_j \in \in \mathcal{T}(x) = \mathcal{T}(y)$ и $T_k \cap T_j \neq \varnothing$ точка y лежит в тех же $T^n_{j,k}$, что и x, так как $T^n_{j,k} \supset R(x)$; отсюда $R(y) = R(x)$. Если $R(x) \cap \cap R(x') \neq \varnothing$ $(x, x' \in Z^*)$, то существует $y \in R(x) \cap R(x') \cap Z^*$; при этом $R(x) = R(y) = R(x')$. Так как имеется лишь конечное число прямоугольников $T^n_{j,k}$, найдется лишь конечное число различных $R(x)$. Пусть

$$\mathcal{R} = \{\overline{R(x)}: x \in Z^*\} = \{R_1, \ldots, R_m\}.$$

Для $x' \in Z^*$ имеем $R(x') = R(x)$ или $R(x') \cap R(x) = \varnothing$; отсюда $(\overline{R(x)} \setminus R(x)) \cap Z^* = \varnothing$. Так как Z^* плотно в Ω_s, $\overline{R(x)} \setminus R(x)$ не имеет внутренних точек (в Ω_s) и $R(x) = \operatorname{int} \overline{R(x)}$. Если $R(x) \neq R(x')$, то

$$\operatorname{int} \overline{R(x)} \cap \operatorname{int} \overline{R(x')} = R(x) \cap R(x') = \varnothing.$$

Чтобы показать, что $\mathcal{R}$ — марковское разбиение, нам осталось проверить условие (b).

Предположим, что $x, y \in Z^* \cap f^{-1}Z^*$, $R(x) = R(y)$ и $y \in W^s_\varepsilon(x)$. Покажем, что $R(fx) = R(fy)$. Во-первых, $\mathcal{T}(fx) = \mathcal{T}(fy)$. В противном случае найдется такое T_j, что $fx \in T_j$, $fy \notin T_j$. Пусть $fx = \theta(\sigma \underline{q})$ с $q_1 = p_j$ и $q_0 = p_s$. Тогда $x = \theta(\underline{q}) \in T_s$ и по доказанному выше свойству (i)

$$fy \in fW^s(x, T_s) \subset W^s(fx, T_j),$$

что противоречит $fy \notin T_j$. Пусть теперь $fx, fy \in T_j$ и $T_k \cap \cap T_j \neq \varnothing$. Мы хотим показать, что точки fx, fy принадлежат одним и тем же прямоугольникам $T^n_{j,k}$. Из $fy \in W^s_\varepsilon(fx)$ следует, что $W^s(fy, T_j) = W^s(fx, T_j)$. Мы придем к противоречию, предположив, что

$$W^u(fy, T_j) \cap T_k = \varnothing, \qquad fz \in W^u(fx, T_j) \cap T_k.$$

Пусть $fx = \theta(\sigma \underline{q})$, $q_1 = p_j$ и $q_0 = p_s$. Тогда, согласно (ii),

$$fz \in W^u(fx, T_j) \subset fW^u(x, T_s),$$

или $z \in W^u(x, T_s)$. Пусть $fz = \theta(\sigma \underline{q}')$; $q'_1 = p_k$ и $q_0 = p_t$. Тогда $z \in T_t$ и $fW^s(z, T_t) \subset W^s(fz, T_k)$. При этом $T_s \in \mathcal{T}(x) = \mathcal{T}(y)$ и $z \in T_t \cap T_s \neq \varnothing$. Далее, $z \in W^u(x, T_s) \cap T_t$, а так как x, y лежат в одних и тех же $T^n_{s,t}$, существует некоторое $z' \in \in W^u(y, T_s) \cap T_t$. Тогда

$$z'' = [z, y] = [z, z'] \in W^s(z, T_t) \cap W^u(y, T_s)$$

и $fz'' = [fz, fy] \in W^s(fz, T_k) \cap W^u(fy, T_j)$ (поскольку fz, fy принадлежат прямоугольнику T_j), и мы пришли к противоречию. Значит, $R(fx) = R(fy)$.

При малом $\delta > 0$ множества

$$Y_1 = \bigcup \{W^s_\delta(z): z \in \bigcup_j \partial^s T_j\},$$

$$Y_2 = \bigcup \{W^u_\delta(z): z \in \bigcup_j \partial^u T_j\}$$

замкнуты и нигде не плотны (см. доказательство 3.11). Множество $Z^* \supset \Omega_s \setminus (Y_1 \cup Y_2)$ открыто и плотно. Кроме того, если $x \notin (Y_1 \cup Y_2) \cup f^{-1}(Y_1 \cap Y_2)$, то $x \in Z^* \cap f^{-1}Z^*$ и множество точек $y \in W^s(x, R(x))$, удовлетворяющих условию $y \in Z^* \cap f^{-1}Z^*$, открыто и плотно в $W^s(x, \overline{R(x)})$ (как в подмножестве $W^s_\varepsilon(x) \cap \Omega_s$). Согласно предыдущему, $R(fy) = R(fx)$ для такого y; по непрерывности

$$fW^s(x, \overline{R(x)}) \subset \overline{R(fx)}.$$

Из $fW^s(x, \overline{R(x)}) \subset W^s_\varepsilon(fx)$ получаем, что $fW^s(x, \overline{R(x)}) \subset \subset W^s(fx, R(fx))$. Если $\operatorname{int} R_i \cap f^{-1} \operatorname{int} R_j \neq \varnothing$, то это открытое подмножество Ω_s содержит некоторое x, удовлетворяющее предыдущим условиям, и $R_i = \overline{R(x)}$, $R_j = \overline{R(fx)}$. Для всякого $x' \in R_i \cap f^{-1}R_j$ имеем $W^s(x', R_i) = \{[x', y]: y \in W^s(x, R_i)\}$ и

$$\begin{aligned} fW^s(x', R_i) &= \{[fx', fy]: y \in W^s(x, R_i)\} \subset \\ &\subset \{[fx', z]: z \in W^s(fx, R_j)\} \subset \\ &\subset W^s(fx', R_j). \end{aligned}$$

Этим заканчивается доказательство половины марковского условия (b). Вторая половина доказывается аналогично, так что мы опускаем доказательство. Другой способ состоит в том, чтобы применить предыдущие рассуждения к f^{-1}, заметив, что $W^u_f = W^s_{f^{-1}}$. □

D. Символическая динамика

В этом разделе $\mathscr{R} = \{R_1, \ldots, R_m\}$ будет обозначать марковское разбиение базисного множества Ω_s. Определим *матрицу переходов* $A = A(\mathscr{R})$, положив

$$A_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } \operatorname{int} R_i \cap f^{-1} \operatorname{int} R_j \neq \varnothing, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

3.14. Лемма. *Предположим, что* $x \in R_i$, $fx \in R_j$, $A_{ij} = 1$. *Тогда* $fW^s(x, R_i) \subset W^s(fx, R_j)$ *и* $fW^u(x, R_i) \supset W^u(fx, R_j)$.

Доказательство. Именно это утверждение фигурировало в последней части доказательства 3.12. □

Определение. $\partial^s\mathscr{R} = \bigcup_j \partial^s R_j$ и $\partial^u\mathscr{R} = \bigcup_j \partial^u R_j$.

3.15. Предложение. $f(\partial^s\mathscr{R}) \subset \partial^s\mathscr{R}$ *и* $f^{-1}(\partial^u\mathscr{R}) \subset \partial^u\mathscr{R}$.

Доказательство. Множество $\bigcup_j (\operatorname{int} R_i \cap f^{-1} \operatorname{int} R_j)$ плотно в R_i. Поэтому для всякого $x \in R_i$ можно найти некоторое j

и такую последовательность точек $x_n \in \operatorname{int} R_i \cap f^{-1} \operatorname{int} R_j$, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Тогда $A_{ij} = 1$, $x \in R_i$ и $fx \in R_j$. Значит, $fW^u(x, R_i) \supset W^u(fx, R_j)$. Если $fx \notin \partial^s \mathcal{R}$, то $W^u(fx, R_j)$ является окрестностью fx в $W^u_\varepsilon(fx) \cap \Omega_s$ и, значит, $W^u(x, R_i)$ — окрестность x в $W^u_\varepsilon(x) \cap \Omega_s$, т. е. $x \notin \partial^s R_i$. Мы показали, что $f(\partial^s \mathcal{R}) \subset \partial^s \mathcal{R}$. Включение $f^{-1}\partial^u \mathcal{R} \subset \partial^u \mathcal{R}$ доказывается аналогичным образом или путем применения первого утверждения к f^{-1} вместо f.

3.16. Лемма. *Пусть* $D \subset W^s_\delta(x) \cap \Omega$ *и* $C \subset W^u_\delta(x) \cap \Omega$. *Прямоугольник* $[C, D]$ *правильный тогда и только тогда, когда* $D = \overline{\operatorname{int} D}$ *и* $C = \overline{\operatorname{int} C}$ *как подмножества* $W^s_\delta(x) \cap \Omega$ *и* $W^u_\delta(x) \cap \Omega$ *соответственно.*

Доказательство аналогично 3.11. □

Определение. Пусть R, S — два прямоугольника. Назовем S *u-субпрямоугольником* в R, если

(a) $S \neq \varnothing$, $S \subset R$, S правильный,

(b) $W^u(y, S) = W^u(y, R)$ для $y \in S$.

3.17. Лемма. *Пусть* S *есть u-субпрямоугольник в* R_i *и* $A_{ij} = 1$. *Тогда* $f(S) \cap R_j$ *есть u-субпрямоугольник в* R_j.

Доказательство. Выберем $x \in R_i \cap f^{-1} R_j$ и положим $D = W^s(x, R_i) \cap S$. Из условия (b) в определении u-субпрямоугольника получаем

$$S = \bigcup_{y \in D} W^u(y, R_i) = [W^u(x, R_i), D].$$

Так как прямоугольник S правильный и непустой (по лемме 3.16), $D \neq \varnothing$ и $D = \overline{\operatorname{int} D}$. Далее,

$$f(S) \cap R_j = \bigcup_{y \in D} (fW^u(y, R_i) \cap R_j).$$

Согласно 3.14, $fy \in R_j$ и $fW^u(y, R_i) \cap R_j = W^u(fy, R_j)$. Значит, $f(S) \cap R_j = \bigcup\limits_{y' \in f(D)} W^u(y', R_j) = [W^u(fx, R_j), f(D)]$. Так как $R_j = [W^u(fx, R_j), W^s(fx, R_j)]$ — правильный прямоугольник, $W^u(fx, R_j) = \overline{\operatorname{int} W^u(fx, R_j)}$. Из того, что f отображает $W^s_\varepsilon(x) \cap \Omega$ гомеоморфно на окрестность $f(x)$ в $W^s_\varepsilon(fx) \cap \Omega$, следует, что $f(D) = \overline{\operatorname{int} f(D)}$ и, значит, $f(S) \cap R_j$ правильный по 3.16. Из $f(D) \neq \varnothing$ следует, что $f(S) \cap R_j \neq \varnothing$; если $y'' \in f(S) \cap R_j$, то $y'' \in W^u(y', R_j)$ при некотором $y' \in f(D)$ и $W^u(y'', R_j) = W^u(y', R_j) \subset f(S) \cap R_j$. Значит, $f(S) \cap R_j$ есть u-субпрямоугольник в R_j. □

3.18. Теорема. *Для всякой последовательности* $\underline{a} \in \Sigma_A$ *множество* $\bigcap\limits_{j \in \mathbf{Z}} f^{-j} R_{a_j}$ *состоит из одной точки, которую мы обозначим* $\pi(\underline{a})$. *Отображение* $\pi\colon \Sigma_A \to \Omega_k$ *непрерывно и сюръективно,* $\pi \circ \sigma = f \circ \pi$ *и* π *взаимно однозначно на массивном множестве* $Y = \Omega_k \setminus \bigcup\limits_{j \in \mathbf{Z}} f^j (\partial^s \mathscr{R} \cup \partial^u \mathscr{R})$.

Доказательство. Если $a_1 a_2 \ldots a_n$ — такое слово, что $A_{a_j a_{j+1}} = 1$, то по индукции (с использованием 3.17) убеждаемся, что

$$\bigcap_{j=1}^{n} f^{n-j} R_{a_j} = R_{a_n} \cap f\left(\bigcap_{j=1}^{n-1} f^{n-1-j} R_{a_j}\right)$$

является u-субпрямоугольником в R_{a_n}. Отсюда получаем, что

$$K_n(\underline{a}) = \bigcap_{j=-n}^{n} f^{-j} R_{a_j}$$

непусто и является замыканием множества своих внутренних точек. Вследствие того, что $K_n(\underline{a}) \supset K_{n+1}(\underline{a}) \supset \ldots$, имеем

$$K(\underline{a}) = \bigcap_{j=-\infty}^{\infty} f^{-j} R_{a_j} = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n(\underline{a}) \neq \varnothing.$$

Если $x, y \in K(\underline{a})$, то $f^j x, f^j y \in R_{a_j}$ близки при всех $j \in \mathbf{Z}$, и, значит, $x = y$ по свойству разделения траекторий. Из

$$K(\sigma \underline{a}) = \bigcap_j f^{-j} R_{a_{j+1}} = f\left(\bigcap_j f^{-j} R_{a_j}\right) = fK(\underline{a})$$

получаем $\pi \circ \sigma = f \circ \pi$. Непрерывность π доказывается как в 3.13. Поскольку $\partial^s \mathscr{R} \cup \partial^u \mathscr{R}$ нигде не плотно, Y является массивным множеством. Для $x \in Y$ выберем такое a_j, что $f^j x \in R_{a_j}$. Из $x \in Y$ следует, что $f^j x \in \operatorname{int} R_{a_j}$ и, значит, $A_{a_j a_{j+1}} = 1$. Отсюда $\underline{a} = \{a_j\} \in \Sigma_A$ и $x = \pi(\underline{a})$. Если $x = \pi(\underline{b})$, то $f^j x \in R_{b_j}$ и $b_j = a_j$ вследствие того, что $f^j x \notin \partial^s \mathscr{R} \cup \partial^u \mathscr{R}$; таким образом, π инъективно над Y. Так как $\pi(\Sigma_A)$ — компактное подмножество Ω_k, содержащее плотное в Ω_k множество Y, получаем $\pi(\Sigma_A) = \Omega_k$. $\square$

3.19. Предложение. *Сдвиг* $\sigma\colon \Sigma_A \to \Sigma_A$ *топологически транзитивен. Если* $f \mid \Omega_s$ — *перемешивающее отображение, то таково и* $\sigma\colon \Sigma_A \to \Sigma_A$.

Доказательство. Пусть U, V — непустые открытые множества в Σ_A. Для некоторых $\underline{a}$, $\underline{b} \in \Sigma_A$ и N имеем

$$U \supset U_1 = \{\underline{x} \in \Sigma_A: \ x_i = a_i \ \ \forall i \in [-N, N]\},$$

$$V \supset V_1 = \{\underline{x} \in \Sigma_A: \ x_i = b_i \ \ \forall i \in [-N, N]\}.$$

Далее,

$$\varnothing \neq \operatorname{int} K_N(\underline{a}) = \bigcap_{j=-N}^{N} f^{-j} \operatorname{int} R_{a_j} = U_2,$$

$$\varnothing \neq \operatorname{int} K_N(\underline{b}) = \bigcap_{j=-N}^{N} f^{-j} \operatorname{int} R_{b_j} = V_2.$$

Если $x = \pi(\underline{x}) \in U_2$, то $f^j x \in R_{x_j}$ и $f^j x \in \operatorname{int} R_{a_j}$, откуда следует, что $x_j = a_j$; значит, $\pi^{-1}(U_2) \subset U_1$. Аналогично $\pi^{-1}(V_2) \subset V_1$. Вследствие транзитивности $f \mid \Omega_s$ найдутся сколь угодно большие n, при которых $f^n U_2 \cap V_2 \neq \varnothing$. При этом

$$\varnothing \neq \pi^{-1}(f^n U_2 \cap V_2) = \pi^{-1}(f^n U_2) \cap \pi^{-1}(V_2) \subset f^n U \cap V.$$

Аналогичные рассуждения показывают, что если $f \mid \Omega_s$ перемешивает, то и $\sigma \mid \Sigma_A$ перемешивает. $\square$

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Основными источниками являются: по У-диффеоморфизмам — работа Аносова [2], по А-диффеоморфизмам — работа Смейла [14]. Теорему об устойчивых многообразиях для гиперболических множеств доказали Хирш и Пью [8][1]. Теоремы о существовании канонических координат и о спектральном разложении заимствованы из [14], а часть 3.5, относящаяся к перемешиванию, — из [4].

Идея α-траекторий, вероятно, приходила в голову многим. Предложение 3.6 в явном виде доказано в [6], хотя более ранние аналогичные утверждения содержатся в [4], а для У-диффеоморфизмов — в [2]. Синай [12] в явном виде сформулировал 3.6 для У-диффеоморфизмов. Следствие 3.7 имеется в [2] для У-диффеоморфизмов и в [3] для диффеоморфизмов, удовлетворяющих аксиоме А. Как видно из названия, 3.8 доказал Аносов. Результаты 3.9 и 3.10 заимствованы из [7] и [15], а в доказательствах мы следовали работе [6].

Символическая динамика для некоторых геодезических потоков восходит к Адамару и была развита Морсом [9]. Смейл [13] перенес ее на случай «подковы», а Адлер и Вейс [1] — на случай автоморфизмов тора. Синай [10], [11] доказал теоремы пп. С и D для У-диффеоморфизмов, а в [5] они были обобщены на случай диффеоморфизмов, удовлетворяющих аксиоме А.

[Помимо обзора Смейла [14] многие результаты этой главы (теоремы об устойчивых многообразиях, о существовании канонических координат и др.) содержатся в книге [19].

[1]) См. [19, примечание на стр. 148]. — *Прим. ред.*

Предложения 3.6 — 3.8, а также свойство спецификации (см. стр. 231) на базисном множестве Ω_i, на котором Λ-диффеоморфизм f является перемешивающим, вытекают из теоремы Аносова о семействах ε-траекторий (см. [20] и [21]).

В дополнение к указанным автором работам по марковским разбиениям назовем § 7 книги [22] и гл. 2 обзора [23]. — *Ред.*]

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Adler R., Weiss B., Similarity of automorphisms of the torus, Memoirs AMS, 98 (1970).
2. Аносов Д. В., Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова, 90 (1967).
3. Bowen R., Topological entropy and Axiom A, Global Analysis, Proc. Symp. in Pure Math., 14, Amer. Math. Soc., Providence, R. I, 1970, pp. 23—42.
4. Bowen R., Periodic points and measures for Axiom A diffeomorphisms, *Trans. AMS*, **154** (1971), 377—397.
5. Bowen R., Markov partitions for Axiom A diffeomorphisms, *Amer. J. Math.*, **92** (1970), 725—747.
6. Bowen R., ω-limit sets for axiom A diffeomorphisms, *J. Diff. Eq.*, 18 (1975), 333—339.
7. Hirsch M., Palis J., Pugh C., Shub M., Neighborhoods of hyperbolic sets, *Inventiones Math.*, 9 (1970), 121—134.
8. Hirsch M., Pugh C., Stable manifolds and hyperbolic sets, Global Analysis, Proc. Symp. in Pure Math., 14, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1970, pp. 133—163.
9. Morse M., Representation of geodesics, *Amer. J. Math.*, **43** (1921), 35—51.
10. Синай Я. Г., Марковские разбиения и У-диффеоморфизмы, *Функц. анализ и его прилож.*, 2, № 1 (1968), 64—89.
11. Синай Я. Г., Построение марковских разбиений, *Функц. анализ и его прилож.*, 2, № 3 (1968), 70—80.
12. Синай Я. Г., Гиббсовские меры в эргодической теории, *Успехи матем. наук*, 27, № 4 (1972), 21—64.
13. Smale S., Diffeomorphisms with many periodic points, Differential and Combinatorial Topology, Princeton, 1965, pp. 63—80. [Русский перевод в сб. *Математика*, 11 : 4 (1967), 88—106.]
14. Smale S., Differentiable dynamical systems, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 73 (1967), 747—817. [Русский перевод: *Успехи матем. наук*, 25, вып. 1 (1970), 113—185.]
15. Smale S., The Ω-stability theorem, Global Analysis, Proc. Symp. in Pure Math., 14, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1970, pp. 289—298. [Русский перевод с препринта в сб. *Математика*, 13 : 2 (1969), 161—169.]

16*. Гладкие динамические системы, М., «Мир», 1977.

17*. Брин М. И., Неблуждающие точки У-диффеоморфизмов, *ДАН СССР*, 235, № 4 (1977), 737—740.

18*. Каток А. Б., Динамические системы с гиперболической структурой, В сб. «Девятая летняя математическая школа», Киев, «Наукова Думка», 1976, стр. 125—211.

19*. Нитецки З., Введение в дифференциальную динамику, М., «Мир», 1975.

20*. Аносов Д. В., Об одном классе инвариантных множеств гладких динамических систем, Тр. 5-й Междунар. конф. по нелинейным колебаниям, т. 2, Киев, 1970, стр. 39—45.

21*. Каток А. Б., Локальные свойства гиперболических множеств, Добавление 1 к книге [19], стр. 214—232.

22*. Алексеев В. М., Символическая динамика, Одиннадцатая математическая школа, Киев, Изд-во Ин-та математики АН УССР, 1976.

23*. Каток А. Б., Синай Я. Г., Стёпин А. М., Теория динамических систем и общих групп преобразований с инвариантной мерой, В сб. Математический анализ, т. 13, 1975 (Итоги науки и техники), ВИНИТИ, М., 1975, стр. 129—262.

4. ЭРГОДИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ДИФФЕОМОРФИЗМОВ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ АКСИОМЕ A

A. Равновесные состояния на базисных множествах

Напомним, что функция φ называется *гёльдеровской* (удовлетворяет условию Гёльдера), если существуют такие константы a, $\theta > 0$, что

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant a d(x, y)^{\theta}.$$

4.1. Теорема. *Пусть Ω_s — базисное множество A-диффеоморфизма f, а φ: $\Omega_s \to \mathbb{R}$ — гёльдеровская функция. Тогда для φ существует единственное равновесное состояние μ_φ (относительно $f|\Omega_s$). Кроме того, μ_φ — эргодическая мера; если $f|\Omega_s$ — топологическое перемешивание, то мера μ_φ бернуллиевская.*

4.2. Лемма. *Существуют константы $\varepsilon > 0$ и $\alpha \in (0, 1)$, для которых справедливо следующее: если $x \in \Omega_s$, $y \in M$ и $d(f^k x, f^k y) < \varepsilon$ при всех $k \in [-N, N]$, то $d(x, y) < \alpha^N$.*

Доказательство. См. [17, стр. 140][1]).

Доказательство теоремы 4.1. Пусть $\mathscr{R}$ — марковское разбиение на Ω_s, диаметр элементов которого не превосходит ε, A — матрица переходов для $\mathscr{R}$, а π: $\Sigma_A \to \Omega_s$ — отображение из § 3. D. Пусть $\varphi^* = \varphi \circ \pi$. Если для $\underline{x}, \underline{y} \in \Sigma_A$ выполнено $x_k = y_k$ при $k \in [-N, N]$, то

$$f^k \pi(\underline{x}),\ f^k \pi(\underline{y}) \in R_{x_k} = R_{y_k} \quad \text{при} \quad k \in [-N, N].$$

Отсюда $d(\pi(\underline{x}), \pi(\underline{y})) < \alpha^N$, $|\varphi^*(\underline{x}) - \varphi^*(\underline{y})| \leqslant a(\alpha^{\theta})^N$ и, значит, $\varphi^* \in \mathscr{F}_A$.

Предположим для начала, что $f|\Omega_s$ перемешивает. Тогда, как показано в 3.19, $\sigma|\Sigma_A$ тоже перемешивает, и мы получаем, согласно § 1, гиббсовскую меру μ_{φ^*}. Обозначим $D_s =$

---

[1]) Практически то же утверждение содержится в [21, стр. 167]. — *Прим. ред.*

$=\pi^{-1}(\partial^s\mathscr{R})$ и $D_u=\pi^{-1}(\partial^u\mathscr{R})$. Множества D_s и D_u являются замкнутыми подмножествами Σ_A, меньшими чем Σ_A, и $\sigma D_s\subset D_s$, $\sigma^{-1}D_u\subset D_u$. Из σ-инвариантности μ_{φ^*} следует, что $\mu_{\varphi^*}(\sigma^n D_s)=$ $=\mu_{\varphi^*}(D_s)$; пользуясь тем, что $\sigma^{n+1}D_s\subset\sigma^n D_s$, получаем

$$\mu_{\varphi^*}\left(\bigcap_{n\geqslant 0}\sigma^n D_s\right)=\mu_{\varphi^*}(D_s).$$

Множество $\bigcap_{n\geqslant 0}\sigma^n D_s$ имеет меру 0 или 1, так как оно σ-инвариантно и мера μ_{φ^*} эргодическая (см. 1.14); поскольку его дополнение (непустое открытое множество) имеет, согласно 1.4, положительную меру, получаем $\mu_{\varphi^*}(D_s)=0$. Аналогичным образом убеждаемся, что $\mu_{\varphi^*}(D_u)=0$. Пусть теперь $\mu_\varphi=$ $=\pi^*\mu_{\varphi^*}$, т. е. $\mu_\varphi(E)=\mu_{\varphi^*}(\pi^{-1}E)$. Мера μ_φ при этом f-инвариантна, и автоморфизмы пространств с мерой (σ,μ_{φ^*}), (f,μ_φ) сопряжены, так как отображение π взаимно однозначно всюду, кроме множества меры нуль $\bigcup_{n\in\mathbf{Z}}\sigma^n(D_s\cup D_u)$. В частности, $h_{\mu_\varphi}(f)=h_{\mu_{\varphi^*}}(\sigma)$ и, значит,

$$h_{\mu_\varphi}(f)+\int\varphi\,d\mu_\varphi=h_{\mu_{\varphi^*}}(\sigma)+\int\varphi^*\,d\mu_{\varphi^*}=P_\sigma(\varphi^*)\geqslant P_f(\varphi).$$

Отсюда следует, что $P_f(\varphi)=P_\sigma(\varphi^*)$ и что μ_φ — равновесное состояние для φ в смысле § 2. Из 1.25 вытекает, что μ_φ — бернуллиевская мера.

4.3. Лемма. *Для всякой меры $\mu\in M_f(\Omega_s)$ существует такая мера $\nu\in M_\sigma(\Sigma_A)$, что $\pi^*\nu=\mu$.*

Доказательство. Этот хорошо известный факт доказывается следующим образом. Зададим положительный линейный функционал $F(g\circ\pi)=\mu(g)=\int g\,d\mu$ на соответствующем подпространстве пространства $C(\Sigma_A)$. Используя модифицированную теорему Хана — Банаха, можно продолжить F до положительного функционала на $C(\Sigma_A)$. Так как $F(1)=$ $=F(1\circ\pi)=1$, функционал F можно отождествить с некоторой мерой $\beta\in M(\Sigma_A)$. Ввиду компактности существует предел $\nu=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{n_k}\left(\beta+\sigma^*\beta+\ \ldots\ +\left(\sigma^{n_k-1}\right)^*\beta\right)$. Тогда $\sigma^*\nu=\nu$ и $\pi^*\nu=\mu$ (здесь используется то, что $\pi^*(\sigma^k)^*\beta=(f^k)^*\pi^*\beta=$ $=(f^k)^*\mu=\mu$). □

Доказательство теоремы 4.1 (*продолжение*). Предположим, что мера μ является равновесным состоянием для функции φ

и найдем меру $\nu \in M_\sigma(\Sigma_A)$, такую, что $\pi^* \nu = \mu$. Тогда $h_\nu(\sigma) \geqslant h_\mu(f)$ и, значит,

$$h_\nu(\sigma) + \int \varphi^* \, d\nu \geqslant h_\mu(f) + \int \varphi \, d\mu = P(\varphi) = P(\varphi^*).$$

Таким образом, ν — равновесное состояние для φ^*, и вследствие 1.21 — 22 $\nu = \mu_{\varphi^*}$. Следовательно, $\mu = \pi^* \mu_{\varphi^*} = \mu_\varphi$.

Нам остается разобрать случай, когда $\Omega_s = X_1 \cup \ldots \cup X_m$, где $f X_k = X_{k+1}$ и $f^m \mid X_1$ перемешивает. Для $\mu \in M_f(\Omega_s)$ имеем $\mu(X_i) = 1/m$ и, значит, $\mu' = m\mu \mid X_1 \in M_{f^m}(X_1)$. Обратно, если $\mu' \in M_{f^m}(X_1)$, то $\mu \in M_f(\Omega_s)$, где

$$\mu(E) = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \mu'(X_1 \cap f^k E).$$

Можно проверить, что $\mu \longleftrightarrow \mu'$ — взаимно однозначное соответствие $M_f(\Omega_s) \longleftrightarrow M_{f^m}(X_1)$, при котором $h_{\mu'}(f^m) = m h_\mu(f)$ и $\int S_m \varphi \, d\mu' = m \int \varphi \, d\mu$. Поэтому задача нахождения меры μ, максимизирующей выражение $h_\mu(f) + \int \varphi \, d\mu$, эквивалентна задаче нахождения меры μ', максимизирующей $h_{\mu'}(f^m) + \int S_m \varphi \, d\mu'$. Если φ удовлетворяет условию Гёльдера на Ω_s, то $S_m \varphi$ удовлетворяет условию Гёльдера на X_1, и мы приходим к требуемому результату, так как X_1 — базисное множество для f^m, а $f^m \mid X_1$ — перемешивающее преобразование. □

4.4. Предложение. *Пусть* φ: $\Omega_s \to \mathbb{R}$ — *гёльдеровская функция и* $P = P_{f \mid \Omega_s}(\varphi)$. *Для достаточно малого* $\varepsilon > 0$ *существует такая константа* $b_\varepsilon > 0$, *что для всякого* $x \in \Omega_s$

$$\mu_\varphi \{y \in \Omega_s\colon\ d(f^k y, f^k x) < \varepsilon \quad \forall k \in [0, n)\} \geqslant b_\varepsilon \exp(-Pn + S_n \varphi(x)).$$

Доказательство. Построим марковское разбиение $\mathscr{R}$, диаметры элементов которого меньше ε. Предположим для начала, что $f \mid \Omega_s$ перемешивает. Найдем такое $\underline{x} \in \Sigma_A$, что $\pi(\underline{x}) = x$. Тогда

$$B = \{y \in \Omega_s\colon\ d(f^k y, f^k x) < \varepsilon \ \forall k \in [0, n)\} \supset$$
$$\supset \pi \{\underline{y} \in \Sigma_A\colon\ y_k = x_k \ \forall k \in [0, n)\}.$$

Применяя 1.4 и равенство $P(\varphi^*) = P(\varphi) = P$, получаем

$$\mu_\varphi(B) \geqslant c_1 \exp(-Pn + S_n \varphi(x)).$$

Сведение общего случая к перемешивающему проводится так же, как при доказательстве 4.1, и предоставляется читателю. □

4.5. Предложение. *Пусть φ, ψ: $\Omega_s \to \mathbb{R}$ — две гёльдеровские функции. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) $\mu_\varphi = \mu_\psi$;

(ii) *существуют такие константы K и L, что $|S_m\varphi(x) - S_m\psi(x) - Km| \leqslant L$ при всех $x \in \Omega_s$ и всех $m \geqslant 0$;*

(iii) *существует такая константа K, что $S_m\varphi(x) - S_m\psi(x) = Km$ при $x \in \Omega_s$, $f^m x = x$;*

(iv) *существуют такая гёльдеровская функция u: $\Omega_s \to \mathbb{R}$ и такая константа K, что*

$$\varphi(x) - \psi(x) = K + u(fx) - u(x).$$

Если эти условия выполняются, то $K = P(\varphi) - P(\psi)$.

Доказательство. Пусть $\varphi^* = \varphi \circ \pi$ и $\psi^* = \psi \circ \pi$. Мы предполагаем, что $f | \Omega_s$ перемешивает, и предоставляем читателю сведение общего случая к этому. Если $\mu_\varphi = \mu_\psi$, то $\mu_{\varphi^*} = \mu_{\psi^*}$, и по теореме 1.28 существуют такие K и L, что

$$|S_m\varphi^*(\underline{x}) - S_m\psi^*(\underline{x}) - Km| \leqslant L$$

при $\underline{x} \in \Sigma_A$. Для $x \in \Omega_s$ выберем $\underline{x} \in \pi^{-1}(x)$ и получим (ii).

Предположим, что (ii) выполнено и $f^m x = x$. Тогда

$$L \geqslant |S_{mj}\varphi(x) - S_{mj}\psi(x) - mjK| = j|S_m\varphi(x) - S_m\psi(x) - mK|.$$

При $j \to \infty$ получаем (iii). Если (iv) выполнено, то

$$\varphi^*(\underline{x}) - \psi^*(\underline{x}) = K + u(\pi(\sigma\underline{x})) - u(\pi(\underline{x}))$$

и $\mu_{\varphi^*} = \mu_{\psi^*}$ по теореме 1.28. Отсюда имеем $\mu_\varphi = \pi^*\mu_{\varphi^*} = \pi^*\mu_{\psi^*} = \mu_\psi$.

Предположим теперь, что выполнено (iii), и докажем (iv). Пусть $\eta(x) = \varphi(x) - \psi(x) - K$. Выберем точку $x \in \Omega_s$, положительная полутраектория которой плотна в Ω_s (лемма 1.29). Обозначим $A = \{f^k x: k \geqslant 0\}$ и определим u: $A \to \mathbb{R}$ равенством

$$u(f^k x) = \sum_{j=0}^{k-1} \eta(f^j x).$$

Для $z \in A$ имеем $u(fz) - u(z) = \eta(z)$.

Выберем ε и α, как в 4.2. Согласно 3.7, существует такое $\delta > 0$, что если $y \in \Omega_s$ и $d(f^n y, y) < \delta$, то найдется такое $y' \in \Omega_s$, что $f^n y' = y'$ и $d(f^k y, f^k y') < \varepsilon/2$ при всех $k \in [0, n]$. Пусть R — максимальный коэффициент, в который f увеличивает расстояние между точками. Предположим, что $y = f^k x$, $z = f^m x$, где $k < m$ и $d(y, z) < \varepsilon/2R^N$. Если N велико, получаем $z = f^n y$, $n = m - k$ и $d(f^n y, y) < \delta$. Найдем y', для которого $y' = f^n y'$. Тогда, так как $S_n\eta(y') = 0$,

$$|u(z) - u(y)| = \left|\sum_{j=0}^{n-1} \eta(f^j y) - S_n\eta(y')\right| \leqslant \sum_{j=0}^{n-1} |\eta(f^j y) - \eta(f^j y')|.$$

Из выбора R и y' следует, что

$$d(f^l y, f^l y') < \varepsilon \quad \text{при всех} \quad l \in [-N, n+N].$$

При $j \in [0, n)$ лемма 4.2 дает

$$d(f^j y, f^j y') < \alpha^{\min\{j+N,\, N+n-j\}}.$$

Функция η гёльдеровская, поэтому

$$|\eta(f^j y) - \eta(f^j y')| \leqslant a \cdot \alpha^{\theta \min(j+N,\, N+n-j)},$$

$$|u(z) - u(y)| \leqslant 2a \sum_{r=N}^{\infty} \alpha^{\theta r} \leqslant \frac{2a}{1-\alpha^\theta}\alpha^{\theta N}.$$

Выбрав такое N, что $d(x, y) \in [\varepsilon/2R^{N+1}, \varepsilon/2R^N]$, получаем

$$|u(z) - u(y)| \leqslant a' \cdot \alpha^{\theta N}.$$

Взяв такое $\gamma > 0$, что $(1/R)^\gamma \geqslant \alpha^\theta$, получаем

$$|u(z) - u(y)| \leqslant a'' d(x, y)^\gamma.$$

Таким образом, функция u удовлетворяет на A условию Гёльдера и единственным образом продолжается до гёльдеровской функции на $\overline{A} = \Omega_s$. Формула $\eta(z) = u(fz) - u(z)$ продолжается на Ω_s по непрерывности. □

B. Случай $\varphi = \varphi^{(u)}$

Напомним, что на M задана риманова структура, которая индуцирует на M меру m — риманов объем. До конца данного раздела мы будем предполагать, что $f\colon M \to M$ — это А-диффеоморфизм класса C^2, а Ω_s — базисное множество диффеоморфизма f. Для $x \in \Omega_s$ положим $\varphi^{(u)}(x) = -\log \lambda(x)$, где $\lambda(x)$ — якобиан линейного отображения

$$Df\colon E^u_x \to E^u_{fx}$$

(евклидова структура в слоях E^u_x, E^u_{fx} индуцируется римановой метрикой).

4.6. Лемма. *Если Ω_s — базисное множество класса C^2, то функция $\varphi^{(u)}\colon \Omega_s \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условию Гёльдера.*

Доказательство. Отображение $x \to E^u_x$ гёльдеровское (см. [17, 6.4]), а отображение $E^u_x \to \varphi^{(u)}(x)$ дифференцируемо, поэтому их композиция $x \to \varphi^{(u)}(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера. □

По теореме 4.1 функция $\varphi^{(u)}$ имеет единственное равновесное состояние, которое мы обозначим $\mu^+ = \mu_{\varphi^{(u)}}$. Вообще говоря, функция $\varphi^{(u)}$ зависит от выбора метрики, но при $f^m x = x$

$$S_m\varphi^{(u)}(x) = -\log \operatorname{Jac}\left(Df^m\colon E_x^u \to E_x^u\right)$$

от метрики не зависит (якобиан здесь равен модулю определителя). Из 4.5 получаем, что мера μ^+ на Ω_s и давление $P(\varphi^{(u)})$ не зависят от используемой метрики.

4.7. Первая лемма об объеме. *Пусть*

$$B_x(\varepsilon, n) = \{y \in M\colon\ d(f^k x, f^k y) \leqslant \varepsilon \ \text{ при всех } \ k \in [0, n)\}.$$

Если Ω_s — базисное множество класса C^2 и $\varepsilon > 0$ мало, то существует такая константа $C_\varepsilon > 1$, что при всех $x \in \Omega_s$

$$m(B_x(\varepsilon, n)) \in \left[C_\varepsilon^{-1}, C_\varepsilon\right] \exp S_n\varphi^{(u)}(x).$$

Доказательство. См. [8, 4.2].

4.8. Предложение. *Пусть Ω_s — базисное множество класса C^2.*

(a) *Положим $B(\varepsilon, n) = \bigcup\limits_{x \in \Omega_s} B_x(\varepsilon, n)$. Тогда при малом $\varepsilon > 0$*

$$P_{f|\Omega_s}(\varphi^{(u)}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log m(B(\varepsilon, n)) \leqslant 0.$$

(b) *Положим $W_\varepsilon^s(\Omega_s) = \bigcup\limits_{x \in \Omega_s} W_\varepsilon^s(x)$. Если $m\left(W_\varepsilon^s(\Omega_s)\right) > 0$, то*

$$P_{f|\Omega_s}(\varphi^{(u)}) = 0 \qquad \text{и} \qquad h_{\mu^+}(f) = -\int \varphi^{(u)}\, d\mu^+.$$

Доказательство. Назовем множество $E \subset M$ *(n, δ)-разделенным*, если для любых двух различных точек y, z из E существует такое $k \in [0, n)$, что $d(f^k y, f^k z) > \delta$. Пусть $E_n(\delta)$ — максимальное[1]) среди (n, δ)-разделенных подмножеств Ω_s. Для $x \in \Omega_s$ имеем $x \in B_y(\varepsilon, n)$ при некотором $y \in E_n(\delta)$; в противном случае множество $E_n(\delta) \cup \{x\}$ будет (n, δ)-разделенным. При этом $B_x(\varepsilon, n) \subset B_y(\delta + \varepsilon, n)$, $B(\varepsilon, n) \subset \bigcup\limits_y B_y(\delta + \varepsilon, n)$ и вследствие 4.7

$$m(B(\varepsilon, n)) \leqslant C_{\delta+\varepsilon} \sum_{y \in E_n(\delta)} \exp S_n\varphi^{(u)}(y). \tag{*}$$

[1]) В том смысле, что его нельзя расширить в классе (n, δ)-разделенных подмножеств. — *Прим. перев.*

При $\delta \leqslant \varepsilon$ множество $\bigcup_{y \in E_n(\delta)} B_y(\delta/2, n) \subset B(\varepsilon, n)$ является объединением непересекающихся подмножеств и, значит,

$$m(B(\varepsilon, n)) \geqslant C_{\delta/2}^{-1} \sum_{y \in E_n(\delta)} \exp S_n\varphi^{(u)}(y). \qquad (**)$$

Из гёльдеровости $\varphi^{(u)}$ получаем

$$|\varphi^{(u)}(x) - \varphi^{(u)}(y)| \leqslant a d(x, y)^{\theta},$$

где $a, \theta > 0$ — некоторые константы, а $x, y \in \Omega_s$ — любые точки. Пусть $x \in B_y(\varepsilon, n) \cap \Omega_s$. Тогда при $j \in [0, n)$

$$d(f^j x, f^j y) < \alpha^{\min(j, n-j-1)}$$

по лемме 4.2. Отсюда

$$|S_n\varphi(x) - S_n\varphi(y)| \leqslant \sum_{j=0}^{n-1} |\varphi^{(u)}(f^j x) - \varphi^{(u)}(f^j y)| \leqslant 2a \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^{k\theta} = \gamma.$$

Зафиксируем $\delta \leqslant \varepsilon$, и пусть $\mathcal{U}$ — открытое покрытие Ω_s с $\operatorname{diam} \mathcal{U} < \delta$. Пусть $\Gamma \subset \mathcal{U}^n$ покрывает Ω_s. Для всякого $y \in E_n(\delta)$ найдем такое $\underline{U}_y \in \Gamma$, что $y \in X(\underline{U}_y)$. При этом $S_n\varphi^{(u)}(\underline{U}_y) \geqslant S_n\varphi(y)$. Если $\underline{U}_y = \underline{U}_{y'}$, то $d(f^k y, f^k y') \leqslant \operatorname{diam} U_k < \delta$ и $y = y'$, поскольку $E_n(\delta)$ является (n, δ)-разделенным множеством. Значит,

$$\sum_{\underline{U} \in \Gamma} \exp S_n\varphi^{(u)}(\underline{U}) \geqslant \sum_{y \in E_n(\delta)} \exp S_n\varphi(y).$$

Используя этот факт и доказанное выше неравенство (*) получаем

$$P(\varphi^{(u)}, \mathcal{U}) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \inf_{\Gamma} \sum_{\underline{U} \in \Gamma} \exp S_n\varphi^{(u)}(\underline{U}) \geqslant$$

$$\geqslant \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log m(B(\varepsilon, n)).$$

Переходя к пределу при $\operatorname{diam} \mathcal{U} \to 0$, получаем аналогичное неравенство для $P(\varphi^{(u)})$ вместо $P(\varphi^{(u)}, \mathcal{U})$.

Пусть теперь $\mathcal{U}$ — любое открытое покрытие, а δ — число Лебега для $\mathcal{U}$. Для всякого $y \in E_n(\delta)$ можно выбрать такое $\underline{U}_y \in \mathcal{U}^n$, что $B_y(\delta, n) \cap \Omega_s \subset X(\underline{U}_y)$. Пусть $\Gamma = \{\underline{U}_y\colon y \in E_n(\delta)\}$. Множество Γ покрывает Ω_s, так как каждое $x \in \Omega_s$ содержится в некотором $B_y(\delta, n)$, где $y \in E_n(\delta)$. Кроме того,

$$S_n\varphi^{(u)}(\underline{U}_y) \leqslant S_n\varphi^{(u)}(y) + \gamma$$

и, значит, $Z_n(\varphi^{(u)}, \mathcal{U}) \leqslant \sum_{\underline{U}_y \in \Gamma} \exp S_n\varphi^{(u)}(\underline{U}_y) \leqslant e^{\gamma} \sum_{y \in E_n(\delta)} \exp S_n\varphi^{(u)}(y)$.

Используя (**), получаем

$$P(\varphi^{(u)}, \mathcal{U}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log Z_n(\varphi^{(u)}, \mathcal{U}) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log m(B(\varepsilon, n)).$$

При $\operatorname{diam} \mathcal{U} \to 0$ имеем

$$P(\varphi^{(u)}) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log m(B(\varepsilon, n)).$$

Тот факт, что $m(B(\varepsilon, n)) \leqslant m(M)$, заканчивает доказательство (a).

Далее, из $W^s_\varepsilon(\Omega_s) \subset B(\varepsilon, n)$ следует, что $m(B(\varepsilon, n)) \geqslant m(W^s_\varepsilon(\Omega_s))$. Если $m(W^s_\varepsilon(\Omega_s)) > 0$, то формула (a) даст $P(\varphi^{(u)}) = 0$. Так как μ^+ — равновесное состояние для $\varphi^{(u)}$, получаем

$$h_{\mu^+}(f) + \int \varphi^{(u)}\, d\mu^+ = P(\varphi^{(u)}) = 0. \ \square$$

Базисное множество Ω_s называется *аттрактором*, если у него существует такая малая окрестность U, что $f(U) \subset U$. Вследствие предложения 3.10 это эквивалентно тому, что $W^s_\varepsilon(\Omega_s)$ — окрестность множества Ω_s.

4.9. Лемма. (a) *Пусть Ω_s — базисное множество диффеоморфизма класса C^1. Если $W^u_\varepsilon(x) \subset \Omega_s$ при некотором $x \in \Omega_s$, то Ω_s — аттрактор.*

(b) *Если Ω_s не является аттрактором, то существует такое $\gamma > 0$, что для всякого $x \in \Omega_s$ найдется $y \in W^u_\varepsilon(x)$, удовлетворяющее условию $d(y, \Omega_s) > \gamma$.*

Доказательство. Если $W^u_\varepsilon(x) \subset \Omega_s$, то

$$U_x = \bigcup \{W^s_\varepsilon(y):\ y \in W^u_\varepsilon(x)\}$$

является окрестностью x в M (см. [15, лемма 4.1 [1]]). Выберем периодическую точку $p \in U_x$; пусть, например, $f^m p = p$. При малом β имеем $W^u_\beta(p) \subset U_x$; если $z \in W^u_\beta(p)$ лежит в $W^s_\varepsilon(y)$ $(y \in W^u_\varepsilon(x) \subset \Omega_s)$, то $d(f^n z, f^n y) < \varepsilon$ и $d(f^{-n} z, f^{-n} p) < \beta$ при $n \geqslant 0$. По теореме 3.9 $z \in \Omega_s$ и $W^u_\beta(p) \subset \Omega_s$. Значит, и $W^u(p) = \bigcup_{k\geqslant 0} f^{mk} W^u_\beta(p) \subset \Omega_s$.

---

[1]) Для удобства читателей приводим формулировку этой леммы:

Пусть $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^u \oplus \mathbb{R}^s$, $D^s(\delta) \subseteq 0 \oplus \mathbb{R}^s$, $D^u(\varepsilon) \subseteq \mathbb{R}^u \oplus 0$ — стандартные диски с центрами в 0 радиусов δ и ε соответственно.

Пусть, далее, $A = \{A(y):\ y \in D^s(\delta)\}$ — непрерывное семейство u-мерных дисков, гладко вложенных в $\mathbb{R}^m$, причем $A(y)$ является графиком отображения $g_y\colon D^u(\varepsilon) \to \mathbb{R}^s$, $g_y(0) = y$.

Тогда $\bigcup_y A(y)$ является окрестностью нуля в $\mathbb{R}^m$. — *Прим. ред.*

Далее, $X_p = \overline{W^u(p)}$ и $\Omega_s = X_p \cup fX_p \cup \ldots \cup f^N X_p$ при некотором N. Для каждого $x \in \bigcup_{k=0}^{N} f^k W^u(p) = Y$ имеем $W^u_\varepsilon(x) \subset \Omega_s$, и поэтому множество U_x, определенное выше, является окрестностью x в M. Так как $W^s_\varepsilon(x)$, $W^u_\varepsilon(x)$ зависят от $x \in \Omega_s$ непрерывным образом, можно найти такое не зависящее от x число $\delta > 0$, что для всех $x \in Y$ окрестность U_x содержит 2δ-шар $B_x(2\delta)$ с центром в x (см. [15, лемма 4.1]). При этом

$$B_{\Omega_s}(\delta) \subset \bigcup \{U_x\colon\ x \in Y\} \subset W^s_\varepsilon(\Omega_s)$$

и, значит, Ω_s — аттрактор.

Чтобы доказать (b), отметим, что множество

$$V_\gamma = \{x \in \Omega_s\colon\ d(y, \Omega_s) > \gamma \text{ для некоторого } y \in W^u_\varepsilon(x)\}$$

открыто, так как $W^u_\varepsilon(x)$ непрерывным образом зависит от x. Кроме того, при уменьшении γ множество V_γ увеличивается, и, согласно (a), $\bigcup_{\gamma>0} V_\gamma = \Omega_s$. Из компактности получаем $V_\gamma = \Omega_s$ при некотором $\gamma > 0$. □

4.10. Вторая лемма об объеме. *Пусть Ω_s — базисное множество класса C^2. Для малых $\varepsilon, \delta > 0$ существует такое $d = d(\varepsilon, \delta) > 0$, что*

$$m(B_y(\delta, n)) \geqslant d\, m(B_x(\varepsilon, n))$$

при $x \in \Omega_s$ и $y \in B_x(\varepsilon, n)$.

Доказательство. См. [8, 4.3].

4.11. Теорема. *Пусть Ω_s — базисное множество диффеоморфизма класса C^2. Следующие условия эквивалентны:*

(a) *Ω_s — аттрактор;*
(b) *$m(W^s(\Omega_s)) > 0$;*
(c) *$P_{f|\Omega_s}(\varphi^{(u)}) = 0$.*

Доказательство. Так как $W^s(\Omega_s) = \bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n} W^s_\varepsilon(\Omega_s)$, условие (b) эквивалентно тому, что $m(W^s_\varepsilon(\Omega_s)) > 0$. Если Ω_s — аттрактор, то (b) выполнено, так как $W^s_\varepsilon(\Omega_s)$ — окрестность Ω_s. Условие (c) следует из (b) согласно предложению 4.8 (b). Нам осталось доказать, что если Ω_s не является аттрактором, то $P(\varphi^{(u)}) < 0$.

Для заданного малого $\varepsilon > 0$ выберем γ, как в 4.9 (b). Найдем такое N, что

$$f^N W^u_{\gamma/4}(x) \supset W^u_\varepsilon(x)$$

при всех $x \in \Omega_s$. Пусть $E \subset \Omega_s$ есть (γ, n)-разделенное множество. Для $x \in E$ найдется такое $y(x, n) \in B_x(\gamma/4, n)$, что

$$d\left(f^{n+N} y(x, n), \Omega_s\right) > \gamma$$

$\left(\text{ввиду того, что } f^n B_x(\gamma/4, n) \supset W^u_{\gamma/4}(f^n x) \text{ и } f^N W^u_{\gamma/4}(f^n x) \supset \supset W^u_\varepsilon(f^{N+n} x)\right)$. Выберем такое $\delta \in (0, \gamma/4)$, что из $d(z, y) < \delta$ следует, что $d(f^N z, f^N y) < \gamma/2$. Тогда

$$B_{y(x, n)}(\delta, n) \subset B_x(\gamma/2, n),$$
$$f^{n+N} B_{y(x, n)}(\delta, n) \cap B_{\Omega_s}(\gamma/2) = \varnothing.$$

Отсюда $B_{y(x, n)}(\delta, n) \cap B(\gamma/2, n+N) = \varnothing$. Используя вторую лемму об объеме, получаем

$$-m(B(\gamma/2, n+N)) + m(B(\gamma/2, n)) \geqslant \sum_{x \in E} m(B_{y(x, n)}(\delta, n)) \geqslant$$
$$\geqslant d(3\gamma/2, \delta) \sum_{x \in E} m(B_x(3\gamma/2, n)) \geqslant d(3\gamma/2, \delta)\, m(B(\gamma/2, n)).$$

Отсюда при $d = d(3\gamma/2, \delta)$ получаем

$$m(B(\gamma/2, n+N)) \leqslant (1-d)\, m(B(\gamma/2, n))$$

и вследствие предложения 4.8 (а)

$$P_{f \mid \Omega_s}(\varphi^{(u)}) \leqslant \frac{1}{N} \log(1-d) < 0. \ \square$$

Замечание. Существует пример базисного множества класса C^1 (подкова), которое не является аттрактором, и тем не менее $m(W^s(\Omega_s)) > 0$ [18].

C. Аттракторы и У-диффеоморфизмы

Так как $M = \bigcup_{k=1}^{r} W^s(\Omega_k)$, из теоремы 4.11 следует, что почти все по мере m точки $x \in M$ под действием А-диффеоморфизма f класса C^2 стремятся к какому-нибудь аттрактору. Из этого вытекает следующий результат.

4.12. Теорема. *Пусть Ω_s — аттрактор диффеоморфизма класса C^2. Для почти всех по мере m точек $x \in W^s(\Omega_s)$ и для любой непрерывной функции g: $M \to \mathbb{R}$*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g(f^k x) = \int g\, d\mu^+$$

(т. е. x — типичная точка для μ^+).

Доказательство. Обозначим $\bar{g}(n, x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} g(f^k x)$ и $\bar{g} = \int g\, d\mu^+$. Зафиксируем $\delta > 0$ и определим множества

$$C_n(g, \delta) = \{x \in M\colon |\bar{g}(n, x) - \bar{g}| > \delta\},$$

$$E(g, \delta) = \{x \in M\colon |\bar{g}(n, x) - \bar{g}| > \delta \text{ для бесконечного набора чисел } n\} = \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} C_n(g, \delta).$$

Выберем такое $\varepsilon > 0$, что $|g(x) - g(y)| < \delta$, если $d(x, y) < \varepsilon$.

Далее зафиксируем $N > 0$ и последовательно выберем множества $R_N, R_{N+1}, \ldots$ следующим образом. Пусть $R_n\ (n \geqslant N)$ — максимальное подмножество в $\Omega_s \cap C_n(g, 2\delta)$, удовлетворяющее условиям

(a) $B_x(\varepsilon, n) \cap B_y(\varepsilon, k) = \varnothing$ для $x \in R_n$, $y \in R_k$, $N \leqslant k < n$;

(b) $B_x(\varepsilon, n) \cap B_{x'}(\varepsilon, n) = \varnothing$ для $x, x' \in R_n$, $x \neq x'$.

Если $y \in W^s_\varepsilon(\Omega_s) \cap C_n(g, 3\delta)$ $(n \geqslant N)$ и $y \in W^s_\varepsilon(z)$, где $z \in \Omega_s$, то, согласно выбору ε, $z \in C_n(g, 2\delta)$. Вследствие максимальности R_n имеем

$$B_z(\varepsilon, n) \cap B_x(\varepsilon, k) \neq \varnothing \quad \text{для некоторого} \quad x \in R_k, \quad N \leqslant k \leqslant n.$$

Тогда $y \in B_z(\varepsilon, n) \subset B_z(\varepsilon, k) \subset B_x(2\varepsilon, k)$ и, значит,

$$W^s_\varepsilon(\Omega_s) \cap \bigcup_{n=N}^{\infty} C_n(g, 3\delta) \subset \bigcup_{k=N}^{\infty} \bigcup_{x \in R_k} B_x(2\varepsilon, k).$$

Используя первую лемму об объеме 4.7, получаем

$$m\left(W^s_\varepsilon(\Omega_s) \cap \bigcup_{n=N}^{\infty} C_n(g, 3\delta)\right) \leqslant c_{2\varepsilon} \sum_{k=N}^{\infty} \sum_{x \in R_k} \exp S_k \varphi^{(u)}(x).$$

Из определения R_n следует, что $V_N = \bigcup_{k=N}^{\infty} \bigcup_{x \in R_k} B_x(\varepsilon, k)$ является объединением непересекающихся множеств. Вследствие выбора ε, $B_x(\varepsilon, k) \subset C_k(g, \delta)$ для $x \in R_k \subset C_k(g, 2\delta)$ и, значит, $V_N \subset \bigcup_{k=N}^{\infty} C_k(g, \delta)$. Так как μ^+ — эргодическая мера, из эргодической теоремы получаем

$$0 = \mu^+(E(g, \delta)) = \lim_{n \to \infty} \mu^+\left(\bigcup_{n=N}^{\infty} C_n(g, \delta)\right).$$

Отсюда $\lim_{N\to\infty} \mu^+(V_N)=0$. Вследствие 4.8 (b) имеем $P_{f\mid\Omega_s}(\varphi^{(u)})=0$ и, значит, согласно 4.4,

$$\mu^+(V_N) \geqslant b_\varepsilon \sum_{k=N}^{\infty} \sum_{x\in R_k} \exp S_k\varphi^{(u)}(x).$$

Так как $\mu^+(V_N)\to 0$, сумма в правой части стремится к 0 при $N\to\infty$. Используя неравенство из предыдущего абзаца, убеждаемся, что

$$\lim_{N\to\infty} m\left(W^s_\varepsilon(\Omega_s)\cap \bigcup_{n=N}^{\infty} C_n(g, 3\delta)\right)=0.$$

Отсюда в свою очередь следует, что $m\left(W^s_\varepsilon(\Omega_s)\cap E(g, 3\delta)\right)=0$.

При $\delta'>3\delta$ множество $E(g, \delta')\cap f^{-n}W^s_\varepsilon(\Omega_s)\subset f^{-n}\left(E(g, 3\delta)\cap\right.$ $\left.\cap W^s_\varepsilon(\Omega_s)\right)$ имеет меру 0, так как f сохраняет множества m-меры 0. Поэтому

$$m\left(E(g, \delta')\cap W^s(\Omega_s)\right)\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} m\left(E(g, \delta')\cap f^{-n}W^s_\varepsilon(\Omega_s)\right)=0.$$

Пусть g по-прежнему фиксировано, а $\delta'=1/m\to 0$. Тогда для всех $x\in W^s(\Omega_s)$, кроме множества $A(g)$, m-мера которого равна нулю, получаем $\lim_n \bar g(n, x)=\bar g$. Пусть $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ — плотное подмножество в $C(X)$; для $x\in W^s(\Omega_s)\setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} A(g_k)$ получаем, что $\lim_n \bar g(n, x)=\bar g$ для всех функций $g\in C(X)$. □

4.13. Следствие. *Предположим, что f: $M\to M$ — транзитивный У-диффеоморфизм класса C^2. Если некоторая вероятностная мера μ, абсолютно непрерывная относительно m, инвариантна относительно f, то $\mu=\mu^+$.*

Доказательство. В этом случае спектральное разложение имеет вид $M=\Omega=\Omega_0$. Пусть $g\in C(M)$. По эргодической теореме существует функция g^*: $M\to\mathbb{R}$, такая, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} g(f^k x)=g^*(x)$$

для почти всех по мере μ точек x. Пусть A — множество точек $x\in M$, для которых

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} g(f^k x)=\int g\,d\mu^+.$$

Так как $m(A)=1$ и $\mu<m$, получаем $\mu(A)=1$. Отсюда $g^*(x)=\int g\,d\mu^+$ для почти всех по мере μ точек x. Тогда

$$\int g\,d\mu=\int g^*\,d\mu=\int g\,d\mu^+.$$

Из того, что это справедливо для всех $g\in C(M)$, следует, что $\mu=\mu^+$. $\square$

Замечание. Если M связно, то $M=\Omega_0=X_1$ и f перемешивает. При этом мера μ, о которой шла речь, будет бернуллиевской.

4.14. Теорема. *Пусть f — транзитивный У-диффеоморфизм класса C^2. Следующие условия эквивалентны:*

(a) *существует инвариантная относительно f мера вида $\mu=h\,dm$, где h — положительная гёльдеровская функция;*

(b) *существует инвариантная относительно f мера, абсолютно непрерывная по отношению к m;*

(c) *если $f^n x=x$, то Df^n: $T_xM\to T_xM$ имеет определитель* 1.

Доказательство. Очевидно, из (a) следует (b). Предположим, что (b) выполняется. Пусть $\lambda^{(s)}(x)$ — якобиан Df: $E^s_{f^{-1}x}\to E^s_x$ и $\varphi^{(s)}(x)=\log\lambda^{(s)}(x)$. Далее, f^{-1} — это У-диффеоморфизм с $E^u_{x,\,f^{-1}}=E^s_{x,\,f}$ и $E^s_{x,\,f^{-1}}=E^u_{x,\,f}$. Кроме того,

$$\lambda^{(u)}_{f^{-1}}(x)=\operatorname{Jac} Df^{-1}\colon\ E^s_x\to E^s_{f^{-1}x}=\lambda^{(s)}(x)^{-1}$$

и, значит, $\varphi^{(u)}_{f^{-1}}(x)=-\log\lambda^{(u)}_{f^{-1}}(x)=\varphi^{(s)}(x)$. Существует такая инвариантная мера μ^-, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}g(f^{-k}x)=\int g\,d\mu^-$$

для почти всех по мере m точек x; μ^- — это единственное равновесное состояние для $\varphi^{(u)}_{f^{-1}}$ относительно f^{-1}. Отметим, что состояния, равновесные относительно f^{-1}, те же, что и относительно f, так как $M_f(M)=M_{f^{-1}}(M)$ и $h_\nu(f)=h_\nu(f^{-1})$. Значит, $\mu^-=\mu_{\varphi^{(s)}}$. Применяя 4.13 к f и к f^{-1}, получаем

$$\mu_{\varphi^{(u)}}=\mu^+=\mu^-=\mu_{\varphi^{(s)}}.$$

Согласно 4.8 (b), $P(\varphi^{(u)})=0=P(\varphi^{(s)})$. Вследствие 4.5 при $f^n x=x$ имеем

$$\sum_{k=0}^{n-1}\varphi^{(u)}(f^k x)-\sum_{k=0}^{n-1}\varphi^{(s)}(f^k x)=0.$$

Потенцируем и получаем

$$1 = (\det Df^n \mid E_x^u)(\det Df^n \mid E_x^s) = \det Df^n \mid T_x M.$$

Предположим теперь, что выполнено (с), и пусть $\varphi(x) = \log \operatorname{Jac}(Df\colon T_x M \to T_{fx} M)$. Тогда, если $f^n x = x$, то

$$S_n \varphi(x) = \log \prod_{k=0}^{n-1} \operatorname{Jac}(Df\colon T_{f^k x} M \to T_{f^{k+1} x} M) =$$
$$= \log \operatorname{Jac}(Df^n\colon T_x M \to T_{f^n x} M) = 0.$$

По предложению 4.5 (с $\psi = 0$, $K = 0$) существует гёльдеровская функция $u\colon M \to \mathbb{R}$, такая, что $\varphi(x) = u(fx) - u(x)$. Положим $h(x) = e^{u(x)}$. Рассматривая $\mu = h\,dm$ как абсолютную величину некоторой формы, получаем

$$f^*(h\,dm)(fx) = h(x)\, e^{\varphi(x)}\, dm(fx) = h(fx)\, dm(fx) = (h\,dm)(fx).$$

Значит, мера μ инвариантна относительно f. □

Замечание. На самом деле функция h принадлежит к классу C^1. См. [9], [10].

4.15. Следствие. *Среди У-диффеоморфизмов класса C^2 открытое и всюду плотное множество составляют те, для которых не существует инвариантной меры $\mu \prec m$.*

Доказательство ([14, стр. 36]). Воспользуемся условием 4.14 (с). Предположим, что $f^n x = x$ и $\det(Df^n \mid T_x M) \neq 1$. Диффеоморфизм f_1, близкий к f, также является У-диффеоморфизмом, и существует такая периодическая точка x_1, близкая к x, что $f_1^n x_1 = x_1$. При этом $\det(Df_1^n \mid T_{x_1} M)$ близок к $\det(Df^n \mid T_x M)$ и отличен от 1. Мы пользуемся здесь теорией структурной устойчивости, которая не входит в эти заметки. С другой стороны, если $f^n x = x$ и $\det(Df^n \mid T_x M) = 1$, то это условие нарушается при сколь угодно малом возмущении диффеоморфизма f. □

В случае когда для f не существует инвариантной меры $\mu \prec m$, мера m на самом деле является диссипативной [16].

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Эта глава содержит основные теоремы данной работы. Работа в целом реализует некоторый вариант предложенной Синаем [14] программы применения статистической механики к диффеоморфизмам[1]). Рюэль в [12] перенес результаты Синая об У-диффеоморфизмах на случай аттракторов диффеоморфизмов, удовлетворяющих аксиоме А, а в [11] ввел формализм для равновесных состояний.

---

[1]) Обзор результатов, полученных в этой области, содержится в [20, гл. 2]. — *Прим. перев.*

Теорема 4.1 содержится в [6] и [7]; случай У-диффеоморфизмов см. в [14]. Результаты 4.5, 4.13, 4.14 и 4.15 заимствованы из [9], [10] и [14]. Раздел В дословно перенесен из [8]. Теорема 4.12 доказана Рюэлем [12] (мы следовали доказательству из [8]). Рюэль [12] доказал также близкими методами, что $f^n\mu \to \mu^+$, если $\mu \prec m$ имеет носитель в окрестности аттрактора; для У-диффеоморфизмов этот результат доказал Синай [13].

То что в случае транзитивного У-диффеоморфизма мера μ^+ бернуллиевская, доказал Азенкотт [4]. Эргодическая теория У-диффеоморфизмов в случае, когда $\mu^+ \prec m$, изучалась во многих работах; см., например, [2] или [3].

В случае когда $\varphi^{(u)}$ — постоянная функция, μ^+ является единственной инвариантной мерой, максимизирующей энтропию ($\varphi = 0$ и $\varphi^{(u)}$ имеют одно и то же равновесное состояние). Для гиперболического автоморфизма двумерного тора μ^+ является мерой Хаара, а конструкция 4.1 принадлежит Адлеру и Вейсу [1]. Эта статья играет важную роль в развитии предмета и хорошо читается. Если $\varphi^{(u)} \neq C$, мера μ с максимальной энтропией все же имеет следующий геометрический смысл: периодические точки на Ω_s равномерно распределены относительно μ [5]. К. Зигмунд [19] рассмотрел *типичные* свойства мер на Ω_s.

[Мера μ^+ играет также важную роль при рассмотрении малых случайных возмущений У- и А-диффеоморфизмов (см. [22]). — *Ред.*]

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Adler R., Weiss B., Similarity of automorphisms of the torus, Memoirs AMS, 98 (1970).
2. Аносов Д. В., Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова, **90** (1967).
3. Аносов Д. В., Синай Я. Г., Некоторые гладкие эргодические системы, *Успехи матем. наук*, **22**, вып. 5 (1967), 107—172.
4. Azencott R., Diffeomorphismes d'Anosov et schemas de Bernoulli, *C. R. Acad. Sci. Paris*, Sér. A-B, **270**, A1105—A1107 (1970).
5. Bowen R., Periodic points and measures for Axiom A diffeomorphisms, *Trans. A. M. S.*, **154** (1971), 377—397.
6. Bowen R., Some systems with unique equilibrium states, *Math. Systems Theory*, **8**, № 3 (1974), 193—202.
7. Bowen R., Bernoulli equilibrium states for Axiom A diffeomorphisms, *Math. Systems Theory*, **8** (1975), 289—294.
8. Bowen R., Ruelle D., The ergodic theory of Axiom A flows, *Inventiones Math.*, **29** (1975), 181—202. [Русский перевод см. в настоящем сборнике.]
9. Лившиц А. Н., Когомологии динамических систем, *Изв. АН СССР*, Сер. матем., **36**, № 6 (1972), 1296—1320.
10. Лившиц А. Н., Синай Я. Г., Об инвариантных мерах, совместимых с гладкостью, для транзитивных У-систем, *ДАН СССР*, **207**, № 5 (1972), 1039—1041.
11. Ruelle D., Statistical mechanics on a compact set with Z^ν action satisfying expansiveness and specification, *Trans. A. M. S.*, 185 (1973), 237—251.
12. Ruelle D., A measure associated with Axiom A attractors, *Amer. J. Math.*, **98** (1976), 619—654.
13. Синай Я. Г., Марковские разбиения и У-диффеоморфизмы, *Функц. анализ и его прилож.*, **2**, № 1 (1968), 64—89.
14. Синай Я. Г., Гиббсовские меры в эргодической теории, *Успехи матем. наук*, **27**, вып. 4 (1972), 21—64.

15. Hirsch M., Palis J., Pugh C., Shub M., Neighborhoods of hyperbolic sets, *Inventiones Math.*, **9** (1970), 121—134.
16. Гуревич Б. М., Оселедец В. И., Распределения Гиббса и диссипативность У-диффеоморфизмов, *ДАН СССР*, **209**, № 5 (1973), 1021—1023.
17. Hirsch M., Pugh C., Stable manifolds and hyperbolic sets, Global Analysis, Proc. Symp. in Pure Math., 14, Amer. Math Soc., Providence, R. I., 1970, pp. 133—163.
18. Bowen R., A horseshoe with positive measure, *Inventiones Math.*, **29** (1975), 203—204. [Русский перевод см. в настоящем сборнике.]
19. Sigmund K., Generic properties of invariant measures for Axiom A diffeomorphisms, *Inventiones Math.*, **11** (1970), 99—109.
20*. Каток А. Б., Синай Я. Г., Стёпин А. М., Теория динамических систем и общих групп преобразований с инвариантной мерой, В сб. Математический анализ, т. 13, 1975 (Итоги науки и техники, ВИНИТИ АН СССР), М., 1975, стр. 129—262.
21*. Нитецки З., Введение в дифференциальную динамику, М., «Мир», 1975.
22*. Кифер Ю. И., О малых случайных возмущениях некоторых гладких динамических систем, *Изв. АН СССР*, сер. матем., **38**, № 5 (1974), 1091—1115.

МАРКОВСКИЕ РАЗБИЕНИЯ И МИНИМАЛЬНЫЕ МНОЖЕСТВА ДЛЯ ДИФФЕОМОРФИЗМОВ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ АКСИОМЕ А [1])

Р. Боуэн

1. ВВЕДЕНИЕ

В этой статье марковские разбиения используются для изучения минимальных множеств диффеоморфизмов, принадлежащих к некоторому классу, введенному Смейлом [9]. В [1] (или [15, § 3С]. — *Ред.*) мы построили марковские разбиения базисных множеств Ω_s диффеоморфизмов f^*, удовлетворяющих аксиоме А (см. [9]), обобщив метод, примененный Синаем к диффеоморфизмам Аносова ([7], [8], [11]). При помощи этих разбиений удается представить $f = f^* | \Omega_s$ как факторсистему неприводимой топологической марковской цепи с конечным числом состояний [1, § 4] (или [15, теорема 3.18]. — *Ред.*); при этом отображение факторизации π эквивариантным образом сопоставляет точкам Ω_s некоторые последовательности символов.

Основной результат настоящей статьи состоит в том, что π сохраняет свойство минимальности и что все минимальные подмножества f нульмерны. Это, в частности, дает ответ на следующий вопрос Смейла [10]: может ли гиперболический автоморфизм тора иметь одномерные минимальные множества? Хирш [2] показал, что в этом примере не может быть минимальных множеств коразмерности один.

М. Морс [3], [4] и [5] использовал методы символической динамики для изучения минимальных геодезических на поверхности отрицательной кривизны. Данную статью можно рассматривать как распространение и обобщение результатов Морса на рассматриваемый случай. Настоящим обобщением геодезических потоков, изучавшихся Морсом, являются потоки, удовлетворяющие аксиоме А (см. [9]). Технически они сложнее диффеоморфизмов, но со временем и для них будут построены марковские разбиения, и методы этой статьи будут перенесены на случай потоков. В частности, можно ожидать, что справедлива следующая

---

[1]) Rufus Bowen, Markov Partitions and Minimal Sets for Axiom A Diffeomorphisms, *American Journal of Mathematics*, 92 (1970), 907—917.

Гипотеза. Всякое минимальное множество потока, удовлетворяющего аксиоме А, или одномерно, или состоит из одной точки [1]).

М. Ратнер [6] построила марковские разбиения для трехмерных потоков Аносова. Можно попытаться доказать сформулированную выше гипотезу в этом случае.

2. МНОЖЕСТВА $J_s(x)$ И $J_u(x)$

На протяжении этой статьи через $\mathscr{C}$ обозначается марковское разбиение относительно $f: \Omega_s \to \Omega_s$, где Ω_s — базисное множество диффеоморфизма f, удовлетворяющего аксиоме А (мы используем определения и обозначения из [1] (или [15]. — *Ред.*)). При $E, F \in \mathscr{C}$ положим

$$t(E, F) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad f(\operatorname{int} E) \cap \operatorname{int} F \neq \varnothing, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

и пусть

$$\Sigma = \{(E_i)_{i=-\infty}^{+\infty}\colon E_i \in \mathscr{C} \text{ и } t(E_i, E_{i+1}) = 1 \quad \text{при всех} \quad i \in Z\}.$$

Введем обозначения: $\boldsymbol{E} = (E_i)_{i=-\infty}^{+\infty}$, $\boldsymbol{x} = (x_i)_{i=-\infty}^{+\infty}$ и т. д. Σ — это компактное метрическое пространство; существует сюръективное отображение $\pi\colon \Sigma \to \Omega_s$, определенное равенством (см. [1, § 4] (или [15, теорема 3.18]. — *Ред.*))

$$\pi(\boldsymbol{E}) = \bigcap_{i \in Z} f^{-i} E_i.$$

Определение. При $x \in \Omega_s$ положим $\operatorname{Set} x = \{E \in \mathscr{C}\colon x \in E\}$.

Лемма 1. (a) $\operatorname{Set} x = \{E \in \mathscr{C}\colon \ E = x_0$ *для некоторого* $\boldsymbol{x} \in \pi^{-1}(x)\}$.

(b) $\operatorname{Set}[x, y] \supset \operatorname{Set} x \cap \operatorname{Set} y$.

Доказательство. (a) Если $x = \pi(\boldsymbol{x})$, то, очевидно, $x_0 \in \operatorname{Set} x$. То, что такое $\boldsymbol{x}$ существует для всякого элемента из $\operatorname{Set} x$, было показано при доказательстве предложения 31 из [1] (близкие рассуждения см. в 3.18 из [15]. — *Ред.*).

(b) Выражение $[x, y]$ определено, разумеется, лишь для близких точек x и y [1, § 2] (или [15, п. 3.3]. — *Ред.*). Если $x, y \in E \in \mathscr{C}$, то $[x, y] \in E$, потому что E — прямоугольник [1, § 2] ([15, § 3C]. — *Ред.*).

---

[1]) Доказательство этой гипотезы содержится в работе Р. Боуэна [12]. Марковские разбиения для потоков, удовлетворяющих аксиоме А, построены в [12] и [13]. — *Прим. перев.*

Определение. При $x \in \Omega_s$ положим

$$J_s(x) = \{\mathscr{D} \subset \mathscr{C}\colon \forall \delta > 0 \ \exists z \in W^s_\delta(x) \setminus \partial^u \mathscr{C} \text{ с } \operatorname{Set} z = \mathscr{D}\},$$

$$J_u(x) = \{\mathscr{D} \subset \mathscr{C}\colon \forall \delta > 0 \ \exists z \in W^u_\delta(x) \setminus \partial^s \mathscr{C} \text{ с } \operatorname{Set} z = \mathscr{D}\}.$$

Выберем $\delta = \delta(x)$ настолько малым, чтобы $\operatorname{Set} z \in J_s(x)$, если $z \in W^s_\delta(x) \setminus \partial^u \mathscr{C}$, и $\operatorname{Set} z \in J_u(x)$, если $z \in W^u_\delta(x) \setminus \partial^s \mathscr{C}$. Обозначим U_x настолько малую открытую окрестность x в Ω_s, что

(1) $U_x \subset \bigcup \{E\colon E \in \operatorname{Set} x\}$

и

(2) $[x, z] \in \operatorname{int} W^s_{\delta(x)}(x)$ и $[z, x] \in \operatorname{int} W^u_{\delta(x)}(x)$

при $z \in U_x$ (используется лемма 5 из [1] [1]).

Лемма 2. *Пусть z настолько близко к x, что $[x, z]$ определено. Если $z \notin \partial^u \mathscr{C}$, то для всякого $\delta > 0$ существует $z' \in W^s_\delta(z) \setminus \bigcup_{n \in \mathbf{Z}} f^n(\partial^u \mathscr{C})$ с $\operatorname{Set} z' = \operatorname{Set} z$ и $[x, z'] \notin \partial^u \mathscr{C}$. Если $z \notin \partial^s \mathscr{C}$, то для всякого $\delta > 0$ существует $z' \in W^u_\delta(z) \setminus \bigcup_{n \in Z} f^n(\partial^s \mathscr{C})$ с $\operatorname{Set} z' = \operatorname{Set} z$ и $[z', x] \notin \partial^s \mathscr{C}$.*

Доказательство. Напомним, что $\partial^u \mathscr{C} = \bigcup_{E \in \mathscr{C}} \partial^u E$, где $\partial^u E = \{x \in E\colon x \in \partial W^s(x, E) \text{ в } W^s_\gamma(x)\}$. Но $\partial W^s(x, E)$ — замкнутое нигде не плотное подмножество $W^s_\gamma(x)$ [1, лемма 9] [2]. Следовательно, если $z \notin \partial^u \mathscr{C}$, то

$$W = \bigcap_{E \in \operatorname{Set} z} \operatorname{int} W^s(z, E) \setminus \bigcup \{E \in \mathscr{C}\colon E \notin \operatorname{Set} z\}$$

является открытой окрестностью z в $W^s_\gamma(z)$. Очевидно, $\operatorname{Set} z' = \operatorname{Set} z$ при всех $z' \in W$ и $W \cap \partial^u \mathscr{C} = \varnothing$ (если $z' \in W$, то при $E \in \operatorname{Set} z' = \operatorname{Set} z$ имеем $z \in \operatorname{int} W^s(z, E) = \operatorname{int} W^s(z', E)$).

Так как $\partial^u \mathscr{C} \cap W^s_\gamma(x)$ содержится в конечном объединении нигде не плотных множеств вида $\partial W^s(y, E)$, $\partial^u \mathscr{C} \cap W^s_\gamma(x)$ нигде не плотно в $W^s_\gamma(x)$. Каждое из множеств $f^{-n} W^s_\gamma(z)$ может быть покрыто конечным числом $W^s_\gamma(x)$, поэтому

$$f^n(\partial^u \mathscr{C}) \cap W^s_\gamma(z) \subset f^n\Big(\bigcup_x \partial^u \mathscr{C} \cap W^s_\gamma(x)\Big)$$

---

[1]) Это утверждение следует из непрерывности отображения $[\cdot, \cdot]$. См. также лемму 9.1 из добавления. — *Прим. перев.*

[2]) См. лемму 9.5 из добавления. — *Прим. перев.*

нигде не плотно в $W^s_\gamma(z)$. По теореме Бэра о категории $W \setminus \bigcup_{n \in Z} f^n(\partial^u \mathscr{C})$ всюду плотно в W. То, что можно избежать точек $[z, \partial^u\mathscr{C} \cap W^s_\gamma(x)]$, следует из [1, лемма 8] [1]).

Замечание. Второе утверждение доказывается аналогично. Один из способов убедиться в этом состоит в следующем. Разбиение $\mathscr{C}$, марковское относительно f, является марковским также и относительно f^{-1}. При замене f на f^{-1} меняются ролями устойчивые и неустойчивые множества. Это пример своеобразной «двойственности»; а именно, если $K(f, \mathscr{C})$ — нечто, определенное в терминах f и $\mathscr{C}$, то $K^*(f, \mathscr{C}) = K(f^{-1}, \mathscr{C})$ будет ему «двойственным». Например, $\partial^u\mathscr{C}$ и $\partial^s\mathscr{C}$ двойственны. При этом утверждения про $(f, \mathscr{C})$, примененные к $(f^{-1}, \mathscr{C})$, приводят к «двойственным» утверждениям; например, $f\partial^s\mathscr{C} \subset \partial^s\mathscr{C}$ переходит в $f^{-1}\partial^u\mathscr{C} \subset \partial^u\mathscr{C}$.

Предложение 3. *Если* $y \in U_x$, *то*

$$J_s(y) = \{\mathscr{D} \cap \operatorname{Set} y \colon \mathscr{D} \in J_s([x, y])\}$$

и

$$J_u(y) = \{\mathscr{D} \cap \operatorname{Set} y \colon \mathscr{D} \in J_u([y, x])\}.$$

Доказательство. Рассмотрим $z \in W^s_\delta(y)$ и $z^* = [x, z] \in W^s_{\delta'}([x, y])$; δ и δ' одновременно стремятся к 0. Множество $\bigcup\{E \colon E \in \operatorname{Set} y\}$ является окрестностью y, поэтому при δ достаточно малом $\operatorname{Set} z \subset \operatorname{Set} y$. Из определения U_x следует, что $\operatorname{Set} y \subset \operatorname{Set} x$. По лемме 1 (b)

$$\operatorname{Set} z^* \supset \operatorname{Set} z \cap \operatorname{Set} x = \operatorname{Set} z$$

и, значит,

$$\operatorname{Set} z \subset \operatorname{Set} z^* \cap \operatorname{Set} y.$$

Так как $z = [y, z^*]$, из леммы 1 (b) следует также, что

$$\operatorname{Set} z \supset \operatorname{Set} y \cap \operatorname{Set} z^*.$$

Отсюда $\operatorname{Set} z = \operatorname{Set} y \cap \operatorname{Set} z^*$.

Рассмотрим $\mathscr{E} \in J_s(y)$ и одну из точек z, описанных выше, для которой $\mathscr{E} = \operatorname{Set} z$ и $z \notin \partial^u\mathscr{C}$. Тогда, по лемме 2, мы можем сколь угодно мало изменить z таким образом, чтобы получить $z^* \notin \partial^u\mathscr{C}$, сохранив $\mathscr{E} = \operatorname{Set} z$. При этом $\mathscr{E} = \operatorname{Set} z = \operatorname{Set} y \cap \operatorname{Set} z^*$. Аналогично, если $z^* \notin \partial^u\mathscr{C}$, мы можем считать, что $z \notin \partial^u\mathscr{C}$, и получить $\operatorname{Set} y \cap \operatorname{Set} z^* = \operatorname{Set} z \in J_s(y)$ при малом δ'. Отсюда следует первое из доказываемых утверждений.

[1]) См. лемму 9.4 из добавления. — *Прим. перев.*

Второе утверждение двойственно первому.

Следствие 4. *$\{x \in \Omega_s: \overline{\overline{J_s(x)}} \leqslant k\}$ и $\{x \in \Omega_s: \overline{\overline{J_u(x)}} \leqslant k\}$ — открытые множества (здесь $\overline{\overline{A}}$ — мощность множества A).*

Доказательство. Из определения U_x видно, что если $y \in U_x$, то $J_s([x, y]) \subset J_s(x)$ и $J_u([y, x]) \subset J_u(x)$. Согласно предложению 3, отсюда следует, что

$$\overline{\overline{J_s(y)}} \leqslant \overline{\overline{J_s([x, y])}} \leqslant \overline{\overline{J_s(x)}}$$

и

$$\overline{\overline{J_u(y)}} \leqslant \overline{\overline{J_u([y, x])}} \leqslant \overline{\overline{J_u(x)}}.$$

Следствие 5. *Если $y \in U_x$, $\overline{\overline{J_s(y)}} = \overline{\overline{J_s(x)}}$ и $\overline{\overline{J_u(y)}} = \overline{\overline{J_u(x)}}$, то $\mathrm{Set}\, y = \mathrm{Set}\, x$, $J_s(y) = J_s(x)$ и $J_u(y) = J_u(x)$.*

Доказательство. Если $E \in \mathrm{Set}\, x$, то $V = U_x \cap W^s(x, E)$ совпадает с замыканием в $W^s_\delta(x)$ множества своих внутренних точек, поэтому, как и в лемме 2, существует $z \in V \setminus \partial^u\mathscr{C}$. При этом $E \in \mathrm{Set}\, z \in J_s(x)$. Если y удовлетворяет нашим предположениям, неравенства в доказательстве предыдущего следствия должны обратиться в равенства; отсюда $J_s([x, y]) = J_s(x)$. В частности, отсюда следует, что $\mathrm{Set}\, z \in J_s([x, y])$ и $[x, y] \in E$. Таким образом, $\mathrm{Set}\,[x, y] \supset \mathrm{Set}\, x$; из $[x, y] \in U_x$ получаем $\mathrm{Set}\,[x, y] = \mathrm{Set}\, x$. Аналогичным образом $J_u([y, x]) = J_u(x)$ и $\mathrm{Set}\,[y, x] = \mathrm{Set}\, x$.

Так как $y = [[y, x], [x, y]]$, из леммы 1(b) получаем

$$\mathrm{Set}\, y \supset \mathrm{Set}\,[y, x] \cap \mathrm{Set}\,[x, y] = \mathrm{Set}\, x.$$

Из $y \in U_x$ следует, что $\mathrm{Set}\, x \supset \mathrm{Set}\, y$, и, значит, $\mathrm{Set}\, y = \mathrm{Set}\, x$. Остальные утверждения вытекают теперь из предложения 3.

3. ОТНОШЕНИЕ ПОРЯДКА И ДЕЙСТВИЕ f

Для заданного $N > 0$ обозначим K_N множество всех целочисленных наборов $(a_1, \ldots, a_n)$ длины n, где $1 \leqslant n \leqslant N$, $1 \leqslant a_i \leqslant N$ и $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$. Зададим на K_N частичный порядок $\leqslant$:

$$(a_1, \ldots, a_n) \geqslant (b_1, \ldots, b_m)$$

при условии, что или $n > m$, или $n = m$ и $b_i \geqslant a_i$ при всех $1 \leqslant i \leqslant n$. (Подчеркнем, что это *не есть* «естественное» условие $a_i \geqslant b_i$.) Будем писать $(a_1, \ldots, a_n) > (b_1, \ldots, b_m)$, если $(a_1, \ldots, a_n) \geqslant (b_1, \ldots, b_m)$ и $(a_1, \ldots, a_n) \neq (b_1, \ldots, b_m)$.

Зафиксируем некоторое $N \geqslant 2^{2^{\overline{\overline{\mathscr{C}}}}}$. Для $L \subset \mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathscr{C}))$ (где $\mathscr{P}(B)$ — множество подмножеств из B) определим $L^* \in K_N$ как набор $(a_1, \ldots, a_n)$, где $n = \overline{\overline{L}}$ и $a_1, \ldots, a_n$ — мощности n

подмножеств, входящих в L. В частности, при $x \in \Omega_s$ мы можем рассмотреть $I_s(x)^*$ и $I_u(x)^*$.

Лемма 6. (а) *Если $x \in E \cap f^{-1}F$, где $E, F \in \mathscr{C}$ и $t(E, F) = 1$, то $fW^s(x, E) \subset W^s(f(x), F)$ и $fW^u(x, E) \supset W^u(f(x), F)$.*

(b) *Предположим, что $E_1 \neq E_2$ и F — элементы $\mathscr{C}$, $x \in E_1 \cap E_2 \cap f^{-1}F$ и $t(E_1, F) = t(E_2, F) = 1$. Тогда $x \in \partial^u \mathscr{C}$.*

Доказательство. (а) Это лемма 25(а) из [1] (или лемма 3.14 из [15]. — *Ред.*).

(b) При наших предположениях из (а) следует, что

$$V = W^u(x, E_1) \cap W^u(x, E_2) \supset f^{-1}W^u(f(x), F).$$

Так как $W^u(f(x), F)$ содержит открытое подмножество всякой окрестности $f(x)$ в $W^u_\gamma(f(x))$, V содержит открытое подмножество всякой окрестности x в $W^u_\gamma(x)$. Как и при доказательстве леммы 2, мы можем найти такое $x' \in V$, что $x' \notin \partial^s \mathscr{C}$. Из $E_1 \neq E_2$ следует, что $V \subset E_1 \cap E_2 \subset \partial E_1$. Так как $\partial E_1 = \partial^u E_1 \cup \partial^s E_1$, заведомо $x' \in \partial^u E_1$. При этом $W^u(x', E_1) \subset \partial^u E_1 \subset \partial^u \mathscr{C}$ и, значит, $x \in \partial^u \mathscr{C}$.

Лемма 7. (а) *Предположим, что $z \notin \partial^u \mathscr{C}$. Тогда для всякого $F \in \operatorname{Set} f(z)$ существует единственное $T_z(F) \in \operatorname{Set} z$, такое, что $t(T_z(F), F) = 1$. Отображение T_z: $\operatorname{Set} f(z) \to \operatorname{Set} z$ сюръективно. Если $y \in W^s_\gamma(z) \setminus \partial^u \mathscr{C}$ и $\operatorname{Set} y = \operatorname{Set} z$, то $\operatorname{Set} f(y) = \operatorname{Set} f(z)$ и $T_y = T_z$.*

(b) *Предположим, что $z \notin \partial^s \mathscr{C}$. Тогда для всякого $F \in \operatorname{Set} f^{-1}(z)$ существует единственное $T'_z(F) \in \operatorname{Set} z$, такое, что $t(F, T'_z(F)) = 1$. Отображение T'_z: $\operatorname{Set} f^{-1}(z) \to \operatorname{Set} z$ сюръективно. Если $y \in W^u_\gamma(z) \setminus \partial^s \mathscr{C}$ и $\operatorname{Set} y = \operatorname{Set} z$, то $\operatorname{Set} f^{-1}(y) = \operatorname{Set} f^{-1}(z)$ и $T'_y = T'_z$.*

Доказательство. (а) Для $F \in \operatorname{Set} f(z)$, согласно лемме 1(а), существует $\boldsymbol{w} \in \pi^{-1}(f(z))$ с $w_0 = F$. При этом $\sigma^{-1}(\boldsymbol{w}) \in \pi^{-1}(z)$ (напомним, что гомеоморфизм сдвига σ: $\Sigma \to \Sigma$, определенный равенством $\sigma(\boldsymbol{x})_i = x_{i+1}$, удовлетворяет условию $f \circ \pi = \pi \circ \sigma$) и, значит, $z \in w_{-1}$ по лемме 1(а). Из $\boldsymbol{w} \in \Sigma$ следует, что $t(w_{-1}, w_0) = t(w_{-1}, F) = 1$. По лемме 6(b) w_{-1} единственно, так как $z \notin \partial^u \mathscr{C}$; поэтому отображение T_z корректно определено.

Если $E \in \operatorname{Set} z$, то $z_0 = E$ для некоторого $\boldsymbol{z} \in \pi^{-1}(z)$. При этом $z_1 \in \operatorname{Set} f(z)$ и $t(z_0, z_1) = 1$; отсюда $T(z_1) = z_0$ и T_z сюръективно.

Рассмотрим $y \in W^s_\gamma(z) \setminus \partial^u \mathscr{C}$ с $\operatorname{Set} y = \operatorname{Set} z$. Тогда $y \in W^s(z, E)$ при всяком $E \in \operatorname{Set} z$. Если $F \in \operatorname{Set} f(z)$ и $E =$

$= T_z(F)$, то вследствие леммы 6(а)

$$f(y) \in fW^s(z, E) \subset W^s(f(z), F) \subset F.$$

Таким образом, $\operatorname{Set} f(z) \subset \operatorname{Set} f(y)$. Из-за симметрии $\operatorname{Set} f(y) \subset \subset \operatorname{Set} f(z)$, т. е. $\operatorname{Set} f(y) = \operatorname{Set} f(z)$. Равенство $T_y = T_z$ теперь очевидно, так как отображение T_z определялось по множествам $\operatorname{Set} z$ и $\operatorname{Set} f(z)$, а не непосредственно по z.

(b) двойственно к (a).

Предложение 8. *$J_s(f(x))^* \leqslant J_s(x)^*$ и $J_u(f^{-1}(x))^* \leqslant J_u(x)^*$.*

Доказательство. Определим отображение R_x^s: $J_s(x) \to J_s(f(x))$:

$$R_x^s(\mathscr{D}) = \operatorname{Set} f(z)$$

при $\mathscr{D} \in J_s(x)$, $\mathscr{D} = \operatorname{Set} z$, где $z \in W^s_{\delta(x)}(x) \setminus \partial^u \mathscr{C}$. Лемма 7(a) показывает, что отображение R_x^s корректно определено. Мы утверждаем, что оно сюръективно; действительно, если $\mathscr{E} \in J_s(f(x))$, то, по лемме 2, для произвольно малого δ можно найти $w \in W^s_\delta(f(x)) \setminus \partial^u \mathscr{C}$ с $\operatorname{Set} w = \mathscr{E}$ и $w \notin f(\partial^u \mathscr{C})$. При этом $\mathscr{E} = R_x^s(\operatorname{Set} f^{-1}(w))$.

Пусть $J_s(x)^* = (a_1, \ldots, a_n)$ с $a_i = \overline{\overline{\mathscr{D}}}_i$ и $J_s(x) = \{\mathscr{D}_1, \ldots, \mathscr{D}_n\}$. Пусть $J_s(f(x))^* = (b_1, \ldots, b_m)$ с $b_i = \overline{\overline{\mathscr{E}}}_i$ и $J_s(f(x)) = \{\mathscr{E}_1, \ldots, \mathscr{E}_m\}$. Тогда R_x^s порождает сюръективное отображение g: $[1, n] \to [1, m]$, заданное равенством $R_x^s(\mathscr{D}_i) = \mathscr{E}_{g(i)}$. При этом или $n > m$ и $(a_1, \ldots, a_n) > (b_1, \ldots, b_m)$, или $n = m$ и g — взаимно однозначное отображение.

Рассмотрим второй случай. При некотором z отображение T_z: $\mathscr{E}_{g(i)} \to \mathscr{D}_i$ сюръективно, значит, $b_{g(i)} \geqslant a_i$. Для всякого i должно найтись такое $j \in [1, i]$, что $g(j) \geqslant i$; в противном случае $g[1, i] \subset [1, i-1]$, что противоречит взаимной однозначности g. При этом

$$b_i \geqslant b_{g(j)} \geqslant a_j \geqslant a_i.$$

Здесь мы используем то, что a_i и b_i расположены в убывающем порядке.

Второе утверждение доказывается с помощью двойственности.

Определение. Назовем точку $x \in \Omega_s$ *точкой s-ветвления* (*u-ветвления*), если существуют x, $y \in \pi^{-1}(x)$ с $x_0 = y_0$, но $x_1 \neq y_1$ $(x_{-1} \neq y_{-1})$.

Предложение 9. *Если x — точка s-ветвления, то $J_s(x)^* > J_s(f(x))^*$. Если x — точка u-ветвления, то $J_u(x)^* > J_u(f^{-1}(x))^*$.*

Доказательство. Пусть x — точка s-ветвления. Для доказательства утверждения достаточно показать, что одно из отображений T_z (см. лемму 7(а)) с $z \in W^s_{\delta(x)}(x) \setminus \partial^u \mathscr{C}$ не является взаимно однозначным. Действительно, если $(a_1, \ldots, a_n) = (b_1, \ldots, b_n)$ (а это, согласно предложению 8, единственная остающаяся возможность), то g взаимно однозначно и

$$\sum_{i=1}^{n} b_i = \sum_{i=1}^{n} a_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} b_{g(i)} = \sum_{i=1}^{n} b_i.$$

Мы пользуемся здесь тем, что $a_i \leqslant b_{g(i)}$; для равенства необходимо, чтобы $a_i = b_{g(i)}$ при всех i, т. е. чтобы T_z было взаимно однозначным.

Так как x — точка s-ветвления, существуют $E \in \operatorname{Set} x$ и $F_1, F_2 \in \operatorname{Set} f(x)$, $F_1 \neq F_2$, такие, что $t(E, F_1) = t(E, F_2) = 1$. Используя лемму 2, выберем

$$z \in \left(W^s(x, E) \cap W^s_{\delta(x)}(x)\right) \setminus \partial^u \mathscr{C}.$$

По лемме 6(а)

$$fW^s(x, E) \subset W^s(f(x), F_1) \cap W^s(f(x), F_2).$$

Таким образом, $F_1, F_2 \in \operatorname{Set} f(z)$ и $T_z(F_1) = T_z(F_2) = E$, т. е. T_z не является взаимно однозначным. Второе утверждение двойственно первому.

4. НАСКОЛЬКО ИНЪЕКТИВНО ОТОБРАЖЕНИЕ π?

Предложение 10. *Существует целое d, такое, что $\overline{\overline{\pi^{-1}(x)}} \leqslant d$ при всех x.*

Доказательство. Пусть $c = \overline{\overline{\mathscr{C}}}$, а e — длина максимальной цепи в частично упорядоченном множестве $(K_N, \leqslant)$. Пусть $0 \leqslant n_1 < n_2 < \ldots < n_k$ — все такие неотрицательные целые числа, что $f^{n_i}(x)$ — точки s-ветвления. Из предложений 8 и 9 следует, что

$$J_s\left(f^{n_1}(x)\right)^* > J_s\left(f^{n_2}(x)\right)^* > \ldots > J_s\left(f^{n_k}(x)\right)^*.$$

Поэтому $k \leqslant e$.

Пусть A_n — множество всех таких последовательностей $(E_0, \ldots, E_n)$ элементов $\mathscr{C}$, что существует некоторое $\mathbf{x} \in \pi^{-1}(x)$ с $x_i = E_i$ при всех $0 \leqslant i \leqslant n$. По определению точки s-ветвления

$$\overline{\overline{A}}_{n+1} = \overline{\overline{A}}_n, \text{ если } f^n(x) \text{ не есть точка } s\text{-ветвления.}$$

Далее, $\overline{\overline{A}}_{n+1} \leqslant c\overline{\overline{A}}_n$ при всяком n. Так как $\overline{\overline{A}}_0 \leqslant c$, из этого следует, что $\overline{\overline{A}}_n \leqslant c^{k+1} \leqslant c^{e+1}$ при всех $n \geqslant 0$. Отсюда получаем, что существует не более c^{e+1} возможностей для $(x_i)_{i=0}^{\infty}$, где $\boldsymbol{x} \in \pi^{-1}(x)$.

Аналогичным образом существует не более c^{e+1} возможностей для $(x_i)_{i=-\infty}^{0}$, где $\boldsymbol{x} \in \pi^{-1}(x)$. Таким образом, $\overline{\overline{\pi^{-1}(x)}} \leqslant c^{2(e+1)}$ [1]).

Следствие 11. *$\boldsymbol{x}$ — периодическая точка тогда и только тогда, когда $\pi(\boldsymbol{x})$ периодическая.*

Доказательство. Из $f \circ \pi = \pi \circ \sigma$ легко следует, что если $\boldsymbol{x}$ периодическая, то и $\pi(\boldsymbol{x})$ периодическая. Если $f^n(x) = x$, где $x = \pi(\boldsymbol{x})$, то σ переставляет между собой точки конечного множества

$$\pi^{-1}\{x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x)\}.$$

Значит, σ^m при некотором m оставляет точки этого множества на месте; $\boldsymbol{x}$ содержится в этом множестве.

Определение. Пусть $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ и $\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_m)$ — элементы множества K_N. Положим

$$\Phi(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \{x \in \Omega_s : J_s(f^j(x))^* = \boldsymbol{a} \text{ и } J_u(f^j(x))^* = \boldsymbol{b} \text{ при всех } j \in Z\}.$$

Предложение 12. *Если $\pi(\boldsymbol{x}) = \pi(\boldsymbol{y}) \in \Phi(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ и $x_l = y_l$ при некотором l, то $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$.*

Доказательство. Пусть $x = \pi(\boldsymbol{x}) = \pi(\boldsymbol{y})$. Так как $J_s(f^j(x))^*$ и $J_u(f^j(x))^*$ не меняются с изменением j, предложение 9 показывает, что $f^j(x)$ ни при каком j не является ни точкой s-ветвления, ни точкой u-ветвления. Из определения точки ветвления следует при этом, что если $x_j = y_j$, то $x_{j+1} = y_{j+1}$ и $x_{j-1} = y_{j-1}$. Если $x_i = y_i$ при некотором i, получаем отсюда, что $x_j = y_j$ при всех $j \in Z$.

Следствие 13. *Ограничение $\pi \mid \pi^{-1}(\Phi(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}))$ является локальным гомеоморфизмом. Отсюда $\Phi(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ нульмерно или пусто.*

Доказательство. Для всякого $E \in \mathscr{C}$ рассмотрим следующее открытое подмножество $\pi^{-1}(\Phi(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}))$:

$$U_E = \{\boldsymbol{x} \in \pi^{-1}(\Phi(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})) : x_0 = E\}.$$

Покажем, что непрерывное отображение $\pi \mid U_E$ является гомеоморфизмом U_E на свой образ. Из предыдущего предло-

[1]) Число $c^{2(e+1)} > c^{2^c}$. Можно показать, что $\overline{\overline{\pi^{-1}(x)}} \leqslant c^2$; см. [14] и добавление. — *Прим. перев.*

жения следует, что $\pi | U_E$ взаимно однозначно. Мы должны показать, что если x^n, $x \in U_E$ и $\pi(x^n) \to \pi(x)$ при $n \to \infty$, то $x^n \to x$. В противном случае, переходя к подпоследовательности, мы можем считать, что $x^n \to y \in \Sigma$, где $y \neq x$. Тогда

$$\pi(y) = \lim_{n \to \infty} \pi(x^n) = \pi(x).$$

Так как $y_0 = \lim x_0^n = E$, мы получаем $y \in U_E$ в противоречие с взаимной однозначностью $\pi | U_E$.

По лемме 1(а), $\pi(U_E) = E \cap \Phi(a, b)$. Из следствия 5 вытекает, что если $x \in \pi(U_E)$, то существует такая открытая окрестность U_x точки x в Ω_s, что $U_x \cap \Phi(a, b) \subset E$. Таким образом, $\pi(U_E)$ является окрестностью x в $\Phi(a, b)$. Из произвольности выбора x следует, что $\pi(U_E)$ открыто в $\Phi(a, b)$. Это завершает доказательство первого утверждения. Второе утверждение следует из первого.

Определение. $\mathrm{orb}_\sigma(x) = \overline{\{\sigma^n(x)\colon n \in Z\}}$.

Замечание. Легко проверить, что если $y \in \mathrm{orb}_\sigma(x)$, то $\mathrm{orb}_\sigma(y) \subset \mathrm{orb}_\sigma(x)$, и что $\mathrm{orb}_f \pi(x) = \pi\, \mathrm{orb}_\sigma(x)$.

Следствие 14. *Если* $x = \pi(x) = \pi(x^*) \in \Phi(a, b)$ *и* $x^* \in \mathrm{orb}_\sigma(x)$, *то* $x \in \mathrm{orb}_\sigma(x^*)$.

Доказательство. Пусть $x^1 = x$, $x^2 = x^*$, $x^3, \ldots, x^r$ — точки множества $\pi^{-1}(x)$; $r < \infty$ в силу следствия 11. Так как $x^* \in \mathrm{orb}_\sigma(x)$, $\sigma^{n_k}(x) \to x^*$ при $k \to \infty$ для некоторой последовательности целых чисел $\{n_k\}$. Перейдя к подпоследовательности, мы можем считать, что

$$\sigma^{n_k}(x^j) \to y^j \in \Sigma$$

для всякого $j \in [1, r]$. При этом

$$\pi(y^j) = \lim_k \pi\sigma^{n_k}(x^j) = \lim_k f^{n_k}\pi(x^j) = \lim_k f^{n_k}(x)$$

не зависит от j, $\pi(y^j) = \pi(y^1) = \pi(x^*) = x$. Таким образом, равенства $\beta(x^j) = y^j$ задают отображение $\beta\colon \pi^{-1}(x) \to \pi^{-1}(x)$. Если $i \neq j$, то $x_m^i \neq x_m^j$ при всех m вследствие предложения 12; в частности, $x_{n_k}^i \neq x_{n_k}^j$ и, значит, $y_0^i = \lim x_{n_k}^i \neq \neq \lim x_{n_k}^j = y_0^j$. Таким образом, β является перестановкой элементов $\pi^{-1}(x)$ и $\beta^t(x^*) = x$ при некотором $t > 0$. Так как $\beta(x^j) \in \mathrm{orb}_\sigma(x^j)$, мы получаем из сделанного выше замечания

$$x \in \mathrm{orb}_\sigma \beta^{t-1}(x^*) \subset \mathrm{orb}_\sigma \beta^{t-2}(x^*) \subset \ldots \subset \mathrm{orb}_\sigma \beta(x^*) \subset$$
$$\subset \mathrm{orb}_\sigma(x^*).$$

5. МИНИМАЛЬНОСТЬ

Определение. Пусть $g: X \to X$ — гомеоморфизм компактного пространства X. Подмножество $A \subset X$ является *минимальным* относительно g, если

(a) A замкнуто, $A \neq \varnothing$ и $g(A) = A$

и

(b) в случае когда $B \subset A$ удовлетворяет (a), мы имеем $B = A$.

Точка $x \in X$ называется *рекуррентной*, если множество $\mathrm{orb}_g(x)$ минимально относительно g.

Лемма 15. *Пусть A — множество, минимальное относительно g в указанном выше смысле. Если $B \subset A$ замкнуто и либо $g(B) \subset B$, либо $g^{-1}(B) \subset B$, то $B = \varnothing$ или $B = A$. Если $x \in A$, то*

$$A = \overline{\{g^n(x) : n \geqslant 0\}} = \overline{\{g^{-n}(x) : n \geqslant 0\}}.$$

Доказательство. Рассмотрим инвариантное относительно g множество $\bigcap_{n \geqslant 0} g^n(B)$ (если $g(B) \subset B$) или $\bigcap_{n \geqslant 0} g^{-n}(B)$ (если $g^{-1}(B) \subset B$). Вследствие минимальности A это множество пусто или совпадает с A; если оно совпадает с A, то, очевидно, $B = A$; если оно пусто, то из свойства убывающей последовательности компактных множеств получаем $B = \varnothing$. Второе утверждение является частным случаем первого.

Перейдем теперь к нашему основному результату.

Теорема 16. *Точка $\pi(x) \in \Omega_s$ рекуррентна относительно f тогда и только тогда, когда $x \in \Sigma$ рекуррентна относительно σ. Минимальными относительно f являются в точности множества $\pi(A)$, где A — минимальные множества относительно σ. Минимальные относительно f множества нульмерны.*

Доказательство. Легко видеть, что если A минимально, то таково же и $\pi(A)$; поэтому из рекуррентности x вытекает рекуррентность $\pi(x)$, ибо $\mathrm{orb}_f \pi(x) = \pi(\mathrm{orb}_\sigma(x))$.

Предположим, что $A \subset \Omega_s$ минимально и $x = \pi(x) \in A$. Пусть

$$B_k = \{z \in A : \overline{\overline{J_s(z)}} \geqslant k\} \quad \text{и} \quad C_k = \{z \in A : \overline{\overline{J_u(z)}} \geqslant k\}.$$

Множества B_k и C_k замкнуты согласно следствию 4; из предложения 8 вытекает, что $f(C_k) \subset C_k$ и $f^{-1}(B_k) \subset B_k$. По доказанной выше лемме каждое из множеств B_k, C_k пусто или совпадает с A. Значит, найдутся такие k_1 и k_2, для которых $\overline{\overline{J_s(z)}} = k_1$ и $\overline{\overline{J_u(z)}} = k_2$ при всех $z \in A$. При этом из следствия 5 получаем, что $J_s(y)^* = J_s(x)^*$ и $J_u(y)^* = J_u(x)^*$ для всех $y \in U_x \cap A$. Пусть $a = J_s(x)^*$ и $b = J_u(x)^*$.

По доказанной выше лемме для всякого $z \in A$

$$A = \overline{\{f^n(z)\colon n \geqslant 0\}} = \overline{\{f^{-n}(z)\colon n \geqslant 0\}}.$$

Отсюда $f^n(z),\ f^{-m}(z) \in U_x \cap A$ для некоторых $m,\ n \geqslant 0$. При этом

$$J_s\big(f^n(z)\big)^* = J_s\big(f^{-m}(z)\big)^* = a$$

и

$$J_u\big(f^n(z)\big)^* = J_u\big(f^{-m}(z)\big)^* = b.$$

Согласно предложению 8,

$$a = J_s\big(f^{-m}(z)\big)^* \geqslant J_s(z)^* \geqslant J_s\big(f^n(z)\big)^* = a$$

и

$$b = J_u\big(f^{-m}(z)\big)^* \leqslant J_u(z)^* \leqslant J_u\big(f^n(z)\big)^* = b.$$

Отсюда $J_s(z)^* = a$ и $J_u(z)^* = b$ для всякого $z \in A$; так как A инвариантно, из этого следует, что $A \subset \Phi(a, b)$. В силу следствия 13, A нульмерно.

Осталось показать, что x — рекуррентная точка, т. е. что $\boldsymbol{A} = \overline{\mathrm{orb}_\sigma(\boldsymbol{x})}$ минимально; тогда $A = \overline{\mathrm{orb}_f(x)} = \pi(\overline{\mathrm{orb}_\sigma(\boldsymbol{x})}) = \pi(\boldsymbol{A})$. Предположим, что $\boldsymbol{A}$ не минимально. Тогда существует замкнутое σ-инвариантное множество $\boldsymbol{B} \subset \boldsymbol{A}$, такое, что $\varnothing \neq \boldsymbol{B} \neq \mathbf{A}$. При этом $\boldsymbol{x} \notin \boldsymbol{B}$, иначе было бы $\boldsymbol{A} = \overline{\mathrm{orb}_\sigma(\boldsymbol{x})} \subset \boldsymbol{B}$. Далее, $\pi(\boldsymbol{B}) \subset A$ замкнуто, f-инвариантно и непусто; так как A минимально, $\pi(\boldsymbol{B}) = A$. Значит, $x \in \pi(\boldsymbol{B})$ и существует $\boldsymbol{x}^* \in \boldsymbol{B} \cap \pi^{-1}(x)$. Так как $\boldsymbol{x}^* \in \boldsymbol{A} = \overline{\mathrm{orb}_\sigma(\boldsymbol{x})}$ и $x = \pi(\boldsymbol{x}) = \pi(\boldsymbol{x}^*) \in A \subset \Phi(a, b)$, из следствия 14 получаем, что $x \in \overline{\mathrm{orb}_\sigma(\boldsymbol{x}^*)} \subset \boldsymbol{B}$, т. е. противоречие.

Следствие 17. *Если $f^*\colon M \to M$ — диффеоморфизм, удовлетворяющий аксиоме* A, *то все его минимальные множества нульмерны.*

Доказательство. Если $A \subset M$ — непустое замкнутое инвариантное относительно f^* множество, то $A \cap \Omega(f^*) \neq \varnothing$. Если A минимально, то $A \subset \Omega(f^*)$, поскольку $f^*(A \cap \Omega(f^*)) = A \cap \Omega(f^*)$. Рассмотрим спектральное разложение $\Omega(f^*)$:

$$\Omega(f^*) = \Omega_0 \cup \ldots \cup \Omega_t$$

(см. [9] (или [15, теорема 3.5]. — *Ред.*)); $f(A \cap \Omega_i) = A \cap \Omega_i$. Так как A минимально, $A \subset \Omega_s$ при некотором s. Теперь применим нашу теорему.

6. ТРАНЗИТИВНОСТЬ

Определение. Пусть $g: X \to X$ — гомеоморфизм компактного пространства. Траектория точки $x \in X$ *всюду плотна относительно* g, если $\operatorname{orb}_g(x) = X$.

Предложение 18. *Траектория точки* $\boldsymbol{x} \in \Sigma$ *всюду плотна относительно* σ *тогда и только тогда, когда траектория точки* $x = \pi(\boldsymbol{x})$ *всюду плотна относительно* f.

Доказательство. Если траектория $\boldsymbol{x}$ всюду плотна, то

$$\operatorname{orb}_f(x) = \pi \operatorname{orb}_\sigma(\boldsymbol{x}) = \pi(\Sigma) = \Omega_s$$

и траектория x всюду плотна. Предположим, что траектория x всюду плотна. Покажем, что всякий набор $(E_0, \ldots, E_n)$, который встречается в записи какой-либо точки из Σ, встретится в записи точки $\boldsymbol{x}$. Из доказательства предложения 30 из [1] (или теоремы 3.18 из [15]. — *Ред.*) следует, что

$$U = \bigcap_{i=0}^{n} f^{-i}(\operatorname{int} E_i) \neq \varnothing.$$

Так как $\operatorname{orb}_f(x) = \Omega_s$, $f^m(x) \in U$ при некотором $m \in \mathbb{Z}$. Тогда $f^{m+i}(x) \in \operatorname{int} E_i$ при $0 \leqslant i \leqslant n$. По самому определению π отсюда следует, что $x_{m+i} = E_i$; значит, $(E_0, \ldots, E_n)$ содержится в записи $\boldsymbol{x}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bowen R., Markov partitions for Axiom A diffeomorphisms, *Amer. J. Math.*, 92 (1970), 725—747.
2. Hirsch M., On invariant subsets of hyperbolic sets, Essays on Topology and related topics, Springer-Verlag, 1970.
3. Morse M., Representation of geodesics, *Amer. J. Math.*, 43 (1921), 33—51.
4. Morse M., Recurrent geodesics on a surface of negative curvature, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 22 (1921), 84—110.
5. Morse M., Symbolic dynamics (lecture notes), Institute for Advanced Study, Princeton, 1966.
6. Ратнер М., Об инвариантной мере для У-потока на трехмерном многообразии, *ДАН СССР*, 186, № 2 (1969), 261—263.
7. Синай Я. Г., Марковские разбиения и У-диффеоморфизмы, *Функц. анализ и его прилож.*, 2, № 1 (1968), 64—89.
8. Синай Я. Г., Построение марковских разбиений, *Функц. анализ и его прилож.*, 2, № 3 (1968), 70—80.
9. Smale S., Differentiable dynamical systems, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 73 (1967), 747—817. [Русский перевод: Смейл С., Дифференцируемые динамические системы, *Успехи матем. наук*, 25, вып. 1 (1970), 113—185.]
10. Smale S., Notes on differentiable dynamical systems, Global Analysis, Proc. Symp. in Pure Math., 14, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1970.

11*. Гуревич Б. М., Синай Я. Г., Алгебраические автоморфизмы тора и цепи Маркова, Дополнение к книге П. Биллингслея «Эргодическая теория и информация», М., «Мир», 1969.
12*. Боуэн Р., Символическая динамика для гиперболических потоков, третья статья в настоящем сборнике
13*. Ratner M., Markov partitions for Anosov flows on n-dimensional manifolds, *Israel J. Math.*, 15 (1973), 92—114.
14*. Якобсон М. В., О некоторых свойствах марковских разбиений, *ДАН СССР*, 226, № 5 (1976), 1021—1024.
15*. Боуэн Р., Равновесные состояния и эргодическая теория диффеоморфизмов Аносова, первая статья в настоящем сборнике.

СИМВОЛИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ПОТОКОВ [1])

Р. Боуэн

Пусть $\mathscr{M}$ — конечное множество элементов (называемых символами) с дискретной топологией, а $\Sigma_{\mathscr{M}} = \prod_{Z} \mathscr{M}$ — множество всех бесконечных в обе стороны последовательностей символов с топологией прямого произведения. В символической динамике изучают динамику дифференцируемого потока, связывая ее с гомеоморфизмом сдвига $\sigma\colon \Sigma_{\mathscr{M}} \to \Sigma_{\mathscr{M}}$. Такой подход впервые применил Адамар [9] в 1898 г., установив соответствие между геодезическими на поверхности отрицательной кривизны и некоторыми последовательностями символов [2]). Позднее Марстон Морс, используя это соответствие, построил рекуррентную непериодическую геодезическую [13], [14], [15].

Нашей целью является построение символической динамики для потоков Φ, удовлетворяющих «аксиоме А» Смейла, которые являются обобщением геодезических потоков на поверхностях отрицательной кривизны. Мы применяем символическую динамику для изучения следующих свойств потока Φ:

(i) рекуррентные свойства траекторий;
(ii) число замкнутых орбит данного периода;
(iii) инвариантные меры.

Отметим, что эти свойства потока Φ определяются его множеством неблуждающих точек Ω. Можно рассматривать эту статью как изучение структуры топологического потока $\Phi|\Omega$, Однако мы не занимаемся теорией устойчивости, хотя и пользуемся теорией устойчивых многообразий, которая была создана для этой цели.

---

[1]) Rufus Bowen, Symbolic Dynamics for Hyperbolic Flows, *American Journal of Mathematics*, **95** (1973), 429—459.

[2]) Строго говоря, Адамар не связывал динамику геодезического потока с гомеоморфизмом сдвига σ. Поэтому собственно «методы символической динамики» ведут начало от М. Морса. См. также [33]. — *Прим. ред.*

Пусть X — базисное множество некоторого дифференцируемого потока φ_t: $M \to M$, причем X не является ни точкой, ни отдельной замкнутой орбитой. Наш общий подход состоит в том, чтобы свести задачу про $\varphi_t|X$ к случаю простейшего базисного множества — гиперболическому символическому потоку. Сформулируем наши основные результаты.

Теорема. *Существуют гиперболический символический поток* ψ_t: $\Lambda(\sigma, f) \to \Lambda(\sigma, f)$ *и такое конечнократное непрерывное сюръективное отображение* ρ: $\Lambda(\sigma, f) \to X$, *что*

(1) $\rho\psi_t = \varphi_t\rho$,

(2) *при* $z \in \Lambda(\sigma, f)$ φ_t*-траектория точки* $\rho(z)$ *будет периодической, всюду плотной, устойчивой по Пуассону или рекуррентной тогда и только тогда, когда таковой является* ψ_t*-траектория точки* z.

Теорема. *Все минимальные множества потока* φ_t *одномерны.*

Теорема. *Непериодические рекуррентные траектории* $\varphi_t|X$ *плотны в* X. *В частности, поток* φ_t: $M \to M$, *удовлетворяющий аксиоме* A, *всегда имеет минимальное множество, не сводящееся к периодической траектории, если только* $\Omega(\varphi_t)$ *не состоит из конечного числа неподвижных точек и замкнутых орбит.*

Теорема. *Дзета-функция* $Z_{\Phi|X}(s)$ *представляется в виде частного произведений конечного числа дзета-функций гиперболических символических потоков.*

В [5] было показано, что периодические траектории φ_t равномерно распределены по некоторой φ_t инвариантной нормированной борелевской мере μ_Φ [1]). Так как поток ψ_t: $\Lambda(\sigma, f) \to \Lambda(\sigma, f)$ реализуется на базисном множестве некоторого дифференцируемого потока [6], существует и мера μ_Ψ.

Теорема. *Отображение* ρ *осуществляет метрический изоморфизм измеримых потоков* (ψ_t, μ_Ψ) *и* (φ_t, μ_Φ).

Назовем φ_t-инвариантную меру μ *единственной мерой с максимальной энтропией*, если $h_\mu(\varphi_t) = h(\varphi_t)$ и μ — единственная нормированная борелевская φ_t-инвариантная мера, для которой выполняется это равенство.

Теорема. μ_Φ — *единственная мера с максимальной энтропией для* φ_t *тогда и только тогда, когда* μ_Ψ — *единственная мера с максимальной энтропией для* ψ_t.

---

[1]) См. п. 14 добавления. — *Прим. ред.*

Структура гиперболического символического потока ψ_t до сих пор понята не полностью. Приведенные выше теоремы связаны со следующими гипотезами относительно ψ_t.

Гипотеза 1. *Дзета-функция $Z_\Psi(s)$ мероморфна на всей плоскости.*

Гипотеза 2. *Измеримый поток (ψ_t, μ_Ψ) является бернуллиевским (в случае когда поток ψ_t перемешивает).*

Гипотеза 3. *μ_Ψ — единственная мера с максимальной энтропией для ψ_t* [1]*.*

Для диффеоморфизмов все соответствующие гипотезы справедливы. Моделью в этом случае служит топологическая марковская цепь, которая устроена проще, чем гиперболический символический поток; поэтому программа применения методов символической динамики осуществлена в большей степени для диффеоморфизмов (см. [3], [4], [12] [2]), чем для потоков.

Эта статья в той или иной степени является непосредственным развитием упомянутых более ранних работ по диффеоморфизмам. Этим работам в свою очередь предшествовали: подкова Смейла [23], [24], работа Адлера и Вейса [1] про автоморфизмы двумерного тора, марковские разбиения Синая для У-диффеоморфизмов [21], [22]. Для настоящей статьи были также полезны заметки Морса [15]. Наконец, упомянем о статье [19], в которой было построено марковское разбиение для трехмерного У-потока.

После того как эта статья была написана, мы получили рукопись работы [26], в которой марковские разбиения строятся для У-потоков (это частный случай нашего § 7).

1. ИСХОДНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Пусть M — компактное дифференцируемое многообразие и φ_t: $M \to M$ — дифференцируемый поток. Замкнутое φ_t-инвариантное множество $X \subset M$, не содержащее неподвижных точек, называется *гиперболическим*, если ограничение касательного расслоения на X может быть записано в виде прямой суммы Уитни трех φ_t-инвариантных подрасслоений:

$$T_X M = E + E^s + E^u,$$

[1]) Гипотеза 2 доказана в [27]; гипотеза 3 доказана в [28] а ее обобщение на случай гиббсовских мер в [29]; гипотеза 1 опровергнута в [35].— *Прим. ред.*

[2]) А также [31, § 4] и добавление. — *Прим. ред.*

где E — одномерное расслоение, касательное к потоку, и существуют такие константы c, $\lambda > 0$, что

(a) $\|D\varphi_t(v)\| \leqslant ce^{-\lambda t}\|v\|$ при $v \in E^s$, $t \geqslant 0$,

(b) $\|D\varphi_{-t}(u)\| \leqslant ce^{-\lambda t}\|u\|$ при $u \in E^u$, $t \geqslant 0$.

(1.1) Определение. Замкнутое φ_t-инвариантное множество $X \subset M$ называется *базисным* [1]), если

(a) X является гиперболическим,
(b) замкнутые орбиты, содержащиеся в X, плотны в X,
(c) поток $\varphi_t | X$ топологически транзитивен,
(d) существует такое открытое множество $U \supset X$, что $X = \bigcap_{t \in \mathbb{R}} \varphi_t(U)$.

Множество неблуждающих точек Ω определяется равенством

$\Omega = \{x \in M$: для всякой окрестности V точки x и всякого $t_0 > 0$ существует такое $t > t_0$, что $\varphi_t(V) \cap V \neq \varnothing\}$.

Будем говорить, что поток φ_t *удовлетворяет аксиоме A*, если Ω является объединением некоторого множества, удовлетворяющего (a) и (b), и конечного числа не принадлежащих ему гиперболических неподвижных точек. По теореме Смейла о спектральном разложении [24], [18] гиперболическое множество является объединением конечного числа непересекающихся базисных множеств. Траекторная структура φ_t в большой степени определяется этими базисными множествами. На протяжении этой статьи *X всегда будет обозначать базисное множество, не сводящееся к единственной замкнутой орбите.*

Для точки $x \in X$ и числа $\varepsilon > 0$ определим *устойчивое* и *неустойчивое множества*:

$$W_\varepsilon^s(x) = \{y \in M\colon d(\varphi_t(x), \varphi_t(y)) \leqslant \varepsilon \text{ при всех } t \geqslant 0$$
$$\text{и } d(\varphi_t(x), \varphi_t(y)) \to 0 \text{ при } t \to +\infty\},$$
$$W_\varepsilon^u(x) = \{y \in M\colon d(\varphi_{-t}(x), \varphi_{-t}(y)) \leqslant \varepsilon \text{ при всех } t \geqslant 0$$
$$\text{и } d(\varphi_{-t}(x), \varphi_{-t}(y)) \to 0 \text{ при } t \to +\infty\}.$$

Эти множества являются подмногообразиями (по крайней мере вблизи x); кроме того, они φ_t-инвариантны в следующем

[1]) Стоит отметить, что определение базисного множества здесь a priori не связано со спектральным разложением Смейла. Зато в нем присутствует (d) — условие локальной максимальности. См. п. 5 добавления. — *Прим. ред.*

смысле [10], [11]: существуют такие положительные константы c и λ, что при малом ε и $t > 0$

$$\varphi_t W^s_\varepsilon(x) \subset W^s_{\varepsilon c e^{-\lambda t}}(\varphi_t(x)),$$
$$\varphi_{-t} W^u_\varepsilon(x) \subset W^s_{\varepsilon c e^{-\lambda t}}(\varphi_{-t}(x)).$$

(1.2) Канонические координаты [24], [18]. Для всякого малого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, для которого справедливо следующее: если $x, y \in X$ и $d(x, y) \leqslant \delta$, то существует единственное $v = v(x, y)$, $|v| \leqslant \varepsilon$, такое, что

$$W^s_\varepsilon(\varphi_v(x)) \cap W^u_\varepsilon(y) \neq \varnothing.$$

Кроме того, это непустое множество состоит из единственной точки, и эта точка лежит в X; мы обозначим ее $\langle x, y\rangle$. При этом отображения v и $\langle\ ,\ \rangle$ непрерывны на $\{(x, y) \in X \times X:\ d(x, y) \leqslant \delta\}$.

Предположим теперь, что D — гладкий замкнутый диск малого диаметра, содержащий внутри точку $x \in X$, трансверсальный к потоку φ_t и имеющий размерность $\dim M - 1$. Такой диск является локальным сечением потока φ_t, т. е. существует такая константа ξ, что отображение $(z, t) \to \varphi_t(z)$ осуществляет диффеоморфизм прямого произведения $D \times [-\xi, \xi]$ на некоторую окрестность $U_\xi(D)$ точки x. Проекция pr_D: $U_\xi(D) \to D$, определенная равенством $\mathrm{pr}_D \varphi_t(z) = z$ при $|t| \leqslant \xi$, является дифференцируемым отображением.

Если $T \subset X \cap D$ — замкнутое множество, не пересекающееся с границей ∂D и имеющее малый диаметр (зависящий от $d(T, \partial D)$), можно определить отображение

$$\langle\ ,\ \rangle_D\colon T \times T \to X \cap D,$$

положив $\langle x, y\rangle_D = \mathrm{pr}_D\langle x, y\rangle$. Множество T называется *прямоугольником*, если $\langle x, y\rangle_D \in T$ при всех $x, y \in T$; в этом случае мы пишем $\langle x, y\rangle_T$ вместо $\langle x, y\rangle_D$ и замечаем, что на самом деле это выражение не зависит от D. Если T — прямоугольник, то для $x \in T$ положим

$$W^s(x, T) = \{\langle x, y\rangle_T:\ y \in T\} = T \cap \mathrm{pr}_D\big(U_\xi(D) \cap W^s_\varepsilon(x)\big),$$
$$W^u(x, T) = \{\langle z, x\rangle_T:\ z \in T\} = T \cap \mathrm{pr}_D\big(U_\xi(D) \cap W^u_\varepsilon(x)\big),$$

где ε велико по сравнению с $\operatorname{diam} T$. Отображение $(u, v) \to \langle u, v\rangle_T$ определяет гомеоморфизм G_x: $W^u(x, T) \times W^s(x, T) \to T$.

Граница прямоугольника T (рассматриваемого как подмножество множества $D \cap X$) состоит из двух частей: $\partial T = \partial^s T \cup \partial^u T$, где

$$\partial^s T = G_x(\partial W^u(x, T) \times W^s(x, T)),$$
$$\partial^u T = G_x(W^u(x, T) \times \partial W^s(x, T)).$$

Здесь $\partial W^u(x, T)$ и $\partial W^s(x, T)$ обозначают границы соответствующих множеств, которые мы рассматриваем как подмножества в $W^u(x, D \cap X)$ и $W^s(x, D \cap X)$. Можно убедиться, что если $\varepsilon > 0$ достаточно мало, то для $x \in T$ справедливы следующие утверждения:

(a) $x \in \partial^s T$ тогда и только тогда, когда $x = \lim\limits_n x_n$ для некоторой последовательности точек $x_n \in W^u_\varepsilon(x) \cap X$, $x_n \notin \varphi_{[-\varepsilon, \varepsilon]}T$;

(b) $x \in \partial^u T$ тогда и только тогда, когда $x = \lim\limits_n x_n$ для некоторой последовательности точек $x_n \in W^s_\varepsilon(x) \cap X$, $x_n \notin \varphi_{[-\varepsilon, \varepsilon]}T$.

Мы построим символическую динамику для φ_t: $X \to X$ по аналогии с тем, как это делалось для диффеоморфизмов в [3][1]), рассматривая отображение (функцию последования) Пуанкаре между прямоугольниками T и используя структуру произведения $\langle\ ,\ \rangle_T$. Определим теперь наши «символические» объекты.

Пусть $\mathscr{M}$ — конечное множество, наделенное дискретной топологией. Рассмотрим $\Sigma_{\mathscr{M}} = \prod\limits_{Z} \mathscr{M}$ с топологией прямого произведения. Мы будем обозначать последовательность $(m_i)_{i \in Z}$ через $\underline{m}$ и писать $\underline{m}_i = m_i$. Для нас представляет интерес следующее семейство метрик на $\Sigma_{\mathscr{M}}$: для $a > 1$ положим $d_a(\underline{m}, \underline{n}) = a^{-N}$, где N — наибольшее неотрицательное целое число, такое, что $m_i = n_i$ при всех $|i| < N$.

Гомеоморфизм сдвига σ: $\Sigma_{\mathscr{M}} \to \Sigma_{\mathscr{M}}$ определяется равенством $\sigma(\underline{m})_i = m_{i+1}$. Если ограничение $\sigma | \Lambda$ сдвига σ на инвариантное множество $\Lambda = \sigma(\Lambda)$ топологически транзитивно (т. е. для открытых подмножеств U, V множества Λ пересечение $\sigma^m U \cap V$ непусто при некотором $m > 0$), то (Λ, σ) называется *транзитивным символическим каскадом*. Назовем динамическую систему (Λ, σ) *топологической марковской цепью*, если (Λ, σ) — транзитивный символический каскад и существует такая функция A: $\mathscr{M} \times \mathscr{M} \to \{0, 1\}$, что

$$\Lambda = \Sigma(A) = \{\underline{m} \in \Sigma_{\mathscr{M}}: A(m_i, m_{i+1}) = 1 \quad \text{при всех} \quad i \in Z\}.$$

Предположим, что (Λ, σ) — транзитивный символический каскад, а f: $\Lambda \to \mathbb{R}$ — положительная непрерывная функция. Пусть

$$Y = \{(\underline{m}, t): t \in [0, f(\underline{m})], \underline{m} \in \Lambda\} \subset \Lambda \times \mathbb{R}.$$

[1]) См. также [31] и пп. 9, 10 добавления. — *Прим. ред.*

Отождествив точки $(\underline{m}, f(\underline{m}))$ и $(\sigma(\underline{m}), 0)$ при всех $\underline{m} \in \Lambda$, получим новое пространство $\Lambda(\sigma, f)$. Пространство $\Lambda(\sigma, f)$ компактно и метризуемо (по поводу метрики см. [2][1])). «Вертикальное движение» с учетом отождествлений определяет специальный поток $\mathrm{sus}_t(\sigma, f)$ на $\Lambda(\sigma, f)$. Если $z = p(\underline{m}, u)$, где p: $Y \to \Lambda(\sigma, f)$ — отображение факторизации, то для $t \geqslant 0$ положим

$$\mathrm{sus}_t(z) = p(\sigma^k(\underline{m}), v),$$

где $k \geqslant 0$ выбрано так, что значение

$$v = t + u - \sum_{j=0}^{k-1} f(\sigma^j(\underline{m}))$$

удовлетворяет условию $0 \leqslant v \leqslant f(\sigma^k(\underline{m}))$.

(1.3) Определение. *Гиперболическим символическим потоком* называется поток вида

$$\mathrm{sus}_t(\sigma, f): \Lambda(\sigma, f) \to \Lambda(\sigma, f),$$

где (Λ, σ) — топологическая марковская цепь, а функция f: $\Lambda \to \mathbb{R}$ положительна и удовлетворяет условию Липшица в метрике d_a при некотором $a > 1$.

Класс гиперболических символических потоков совпадает с классом всех одномерных базисных множеств для потоков (см. [6]). Мы рассматриваем их в качестве стандартных представителей базисных множеств и показываем, что все остальные базисные множества являются их факторами. При осуществлении этой программы важным является понятие «разделяемости» (см. [2]).

(1.4) Определение. Непрерывный поток g_t: $Z \to Z$ на компактном метрическом пространстве называется *разделяющим траектории*, когда $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$, такое, что если $d(g_t x, g_{s(t)} y) < \delta$ $\forall t \in \mathbb{R}$ и некоторых $x, y \in Z$ и непрерывного отображения s: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющего условию $s(0) = 0$, то $y = g_v x$ при некотором $|v| < \varepsilon$.

(1.5) Лемма. *Существуют положительные константы c и λ, удовлетворяющие следующему условию: для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что если $x, y \in X$, s: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непрерывное отображение, $s(0) = 0$, и $d(\varphi_t x, \varphi_{s(t)} y) \leqslant \delta$ при всех $|t| \leqslant L$, то*

$$d(y, \varphi_v x) \leqslant c e^{-\lambda L}$$

при некотором $|v| \leqslant \varepsilon$.

---

[1]) См. примечание 2 на стр. 148. — *Прим. ред.*

Доказательство. См. 1.6 из [5].

(1.6) Следствие. *Поток* $\varphi_t\colon X \to X$ *разделяет траектории.*

2. ПОСТРОЕНИЕ СИМВОЛИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ

(2.1) Определение. Совокупность множеств $\mathcal{T} = \{T_1, \ldots, T_n\}$ называется *правильным семейством размера* α, если

(i) каждое T_i — замкнутое подмножество X;
(ii) $X = \varphi_{[-\alpha,\,0]}\Gamma(\mathcal{T})$, где $\Gamma(\mathcal{T}) = T_1 \cup \ldots \cup T_n$,

и существуют такие замкнутые гладкие диски $D_1, \ldots, D_n$ в M, трансверсальные к потоку φ_t, что

(iii) $\dim D_i = \dim M - 1$;
(iv) $\operatorname{diam} D_i < \alpha$;
(v) $T_i \subset \operatorname{int} D_i$ и $T_i = \overline{T_i^*}$, где T_i^* — множество внутренних точек T_i, рассматриваемого как подмножество метрического пространства $D_i \cap X$;
(vi) при $i \neq j$ по крайней мере одно из множеств $D_i \cap \varphi_{[0,\,\alpha]}D_j$ или $D_j \cap \varphi_{[0,\,\alpha]}D_i$ пусто; в частности, $D_i \cap D_j = \varnothing$.

Предположим теперь, что $\mathcal{T}$ — описанное выше семейство и α достаточно мало. Из (ii) следует, что для всякой точки $x \in \Gamma(\mathcal{T})$ существует первый положительный момент времени $t(x) \leqslant \alpha$, когда $\varphi_{t(x)}(x) \in \Gamma(\mathcal{T})$. Так как D_i попарно не пересекаются и каждое D_i является локальным сечением потока, существует такое $\beta > 0$, что $t(x) \geqslant \beta$ при всех x. Отображение $H_{\mathcal{T}}\colon \Gamma(\mathcal{T}) \to \Gamma(\mathcal{T})$, определенное равенством $H_{\mathcal{T}}(x) = \varphi_{t(x)}(x)$, является взаимно однозначным.

Отображения $t(x)$ и $H_{\mathcal{T}}(x)$ не являются непрерывными на $\Gamma(\mathcal{T})$. Однако они непрерывны на

$$\Gamma'(\mathcal{T}) = \left\{x \in \Gamma(\mathcal{T})\colon (H_{\mathcal{T}})^k(x) \in \bigcup_{i=1}^{n} T_i^* \text{ при всех } k \in \mathbf{Z}\right\}.$$

По теореме Бэра о категории $\Gamma'(\mathcal{T})$ плотно в $\Gamma(\mathcal{T})$ и

$$\varphi_{\mathbf{R}}\Gamma'(\mathcal{T}) = \left\{x \in X\colon \varphi_{\mathbf{R}}(x) \cap \Gamma(\mathcal{T}) \subset \bigcup_{i=1}^{n} T_i^*\right\}$$

плотно в X.

Для $x \in \Gamma'(\mathcal{T})$ пусть $q(x)$ обозначает единственное множество $T_i \in \mathcal{T}$, содержащее x. Из непрерывности соответствия $q\colon \Gamma'(\mathcal{T}) \to \mathcal{T}$ следует непрерывность отображения $Q\colon \Gamma'(\mathcal{T}) \to \prod_{\mathbf{Z}} \mathcal{T}$, определяемого формулой

$$Q(x) = \left(q\left(H^i_{\mathcal{T}}(x)\right)\right)_{i \in \mathbf{Z}}.$$

Из того, что поток φ_t: $X \to X$ разделяет траектории, следует взаимная однозначность отображения Q (достаточно вспомнить, что α мало, и воспользоваться теоремой 3 (iv) из [2], в которой приводятся условия, эквивалентные свойству разделения траекторий [1])). Итак, отображение

$$Q^{-1}\colon Q(\Gamma'(\mathcal{T})) \to \Gamma'(\mathcal{T})$$

определено корректно; мы увидим, что оно продолжается до непрерывной функции π: $\Lambda \to \Gamma(\mathcal{T})$, где

$$\Lambda = \Lambda(\mathcal{T}) = \overline{\{Q(x)\colon x \in \Gamma'(\mathcal{T})\}} \subset \prod_{\mathbf{Z}} \mathcal{T}.$$

Отметим, что $\sigma\Lambda = \Lambda$, так как $\sigma Q(x) = Q(H_{\mathcal{S}}(x))$.

(2.2) Лемма. *Существует непрерывное сюръективное отображение* π: $\Lambda \to \Gamma(\mathcal{T})$, *такое, что*

(i) π *удовлетворяет условию Липшица на* Λ *в метрике* d_a *при некотором* $a > 1$;

(ii) $\pi(\underline{S}) \in S_0$ *для* $\underline{S} \in \Lambda$;

(iii) $\pi^{-1}(x) = \{Q(x)\}$ *для* $x \in \Gamma'(\mathcal{T})$.

Доказательство. Из леммы 1.5 и гладкости дисков D_t следует существование таких констант $a > 1$ и $K > 0$, что если $x, y \in \Gamma(\mathcal{T})$ удовлетворяют условию $q(H^i_{\mathcal{S}}(x)) = q(H^i_{\mathcal{S}}(y))$ при всех $|i| \leqslant N$, то

$$d(x, y) \leqslant K \cdot a^{-N}$$

(детали см. в [6]). Отсюда следует, что Q^{-1} удовлетворяет условию Липшица на $Q(\Gamma'(\mathcal{T}))$ в метрике d_a. Значит, его можно продолжить с сохранением условия Липшица до отображения π множества $\Lambda = \overline{Q(\Gamma'(\mathcal{T}))}$. Из замкнутости множеств $S_0 \in \mathcal{T}$ и из того, что утверждение (ii) выполняется на плотном подмножестве $Q(\Gamma'(\mathcal{T}))$ множества Λ, следует, что оно выполняется на всем Λ. Утверждение (iii) справедливо в общем случае построения символической динамики потоков, разделяющих траектории (лемма 9 из [2]).

Для $\underline{S} \in Q(\Gamma'(\mathcal{T}))$ рассмотрим $t(\pi(\underline{S}))$. На множестве

$$\{\underline{S} = Q(x)\colon x \in T_i,\ H_{\mathcal{S}}(x) \in T_j\}$$

$t(\pi(\underline{S}))$ — это время, которое требуется точке $x = \pi(\underline{S})$, чтобы пройти от D_i до D_j. Так как D_i и D_j — гладкие локальные

---

[1]) Условие, о котором идет речь, формулируется так же, как свойство разделения траекторий 1.4, только выражение «$\forall t \in \mathbf{R}$» следует заменить словами «для последовательности моментов $(t_i)_{i \in \mathbf{Z}}$, такой, что $t_i \to \pm\infty$ при $i \to \pm\infty$ и $|t_{i+1} - t_i| < \alpha$, где α мало». — *Прим. перев.*

сечения, это время зависит от x дифференцируемым и, следовательно, липшицевым образом. Поэтому $t(\pi(\underline{S}))$ удовлетворяет условию Липшица по $\underline{S}$ и продолжается до функции f: $\Lambda \to R$, удовлетворяющей условию Липшица в метрике d_a. Далее,

$$\varphi_{f(\underline{S})}\pi(\underline{S}) = \pi(\sigma(\underline{S}))$$

для $\underline{S} = Q(x)$ (и правая, и левая части равны $H_{\mathscr{T}}(x)$); значит, эта формула выполняется для всех $\underline{S} \in \Lambda$.

Построим теперь специальный поток $\mathrm{sus}_t(\sigma, f)$: $\Lambda(\sigma, f) \to \Lambda(\sigma, f)$, как в § 1. Мы будем обозначать $\mathrm{sus}_t(\sigma, f)$ через ψ_t. Определим отображение ρ: $\Lambda(\sigma, f) \to X$ равенством

$$\rho(\psi_t \underline{S}) = \varphi_t \pi(\underline{S}).$$

Это определение корректно, так как $\varphi_{f(\underline{S})}\pi(\underline{S}) = \pi(\sigma(\underline{S}))$ (именно такие отождествления мы делаем при построении пространства $\Lambda(\sigma, f)$). Мы хотим, чтобы символический поток ψ_t был гиперболическим. Вообще говоря, это не так, поскольку (Λ, σ) не является топологической марковской цепью. Чтобы добиться этого, следует выбрать семейство $\mathscr{T}$ специальным образом.

(2.3) Определение. Пусть $\mathscr{T}$ — правильное семейство малого размера α для потока φ_t: $X \to X$. Семейство $\mathscr{T}$ называется *марковским*, если

(i) каждое множество $T_i \in \mathscr{T}$ является прямоугольником;

(ii) из $x \in U(T_i, T_j) = \{w \in \Gamma'(\mathscr{T})\colon w \in T_i,\ H_{\mathscr{T}}(w) \in T_j\}$ следует $W^s(x, T_i) \subset U(T_i, T_j)$;

(iii) из $y \in V(T_k, T_i) = \{w \in \Gamma'(\mathscr{T})\colon H_{\mathscr{T}}^{-1}(w) \in T_k,\ w \in T_i\}$ следует $W^u(y, T_i) \subset V(T_k, T_i)$.

Определим отображение $A_{\mathscr{T}}$: $\mathscr{T} \times \mathscr{T} \to \{0, 1\}$, положив $A_{\mathscr{T}}(T_i, T_j) = 1$ тогда и только тогда, когда существует точка $x \in \Gamma'(\mathscr{T})$, такая, что $x \in T_i$ и $H_{\mathscr{T}}(x) \in T_j$. Имеем $\Lambda \subset \Sigma(A_{\mathscr{T}})$.

(2.4) Теорема. *$\Lambda = \Sigma(A_{\mathscr{T}})$ тогда и только тогда, когда семейство $\mathscr{T}$ марковское.*

Доказательство. I. Предположим сначала, что $\Lambda = \Sigma(A_{\mathscr{T}})$. Пусть $x, y \in T \in \mathscr{T}$. Тогда существуют такие последовательности $\underline{S}, \underline{P} \in \Lambda$, что $x = \pi(\underline{S})$, $y = \pi(\underline{P})$ и $S_0 = P_0 = T$. Образуем последовательность $\underline{W}$ следующим образом:

$$W_i = \begin{cases} S_i & \text{при} \quad i \geqslant 0, \\ P_i & \text{при} \quad i \leqslant 0. \end{cases}$$

При этом $\underline{W} \in \Sigma(A_{\mathcal{T}}) = \Lambda$. Пусть $z = \pi(\underline{W}) \in T$. Определим рекуррентным образом u_i и v_i, положив

(i) $u_0 = v_0 = 0$;

(ii) $u_{i+1} = u_i + f(\sigma^i(\underline{S}))$, $\quad v_{i+1} = v_i + f(\sigma^i(\underline{W}))$.

Тогда $\varphi_{u_i}(x)$, $\varphi_{v_i}(z) \in S_i = W_i$ при $i \geqslant 0$. Определим отображение s: $[0, +\infty) \to [0, +\infty)$, положив $s(u_i) = v_i$ и продолжив s на интервалы (u_i, u_{i+1}) линейно. При этом расстояние $d(\varphi_t(x), \varphi_{s(t)}(z))$ мало при $t \geqslant 0$. Аналогично можно определить s: $(-\infty, 0] \to (-\infty, 0]$, $s(0) = 0$, так что $d(\varphi_t(y), \varphi_{s(t)}(z))$ мало при $t \leqslant 0$. Далее, $d(\varphi_t(x), \varphi_t\langle x, y\rangle_D)$ мало при $t \geqslant 0$, а $d(\varphi_t(y), \varphi_t\langle x, y\rangle_D)$ мало при $t \leqslant 0$. Значит, $d(\varphi_t\langle x, y\rangle_D, \varphi_{s(t)}(z))$ мало при всех $t \in \mathbb{R}$. При условии, что размер $\mathcal{T}$ очень мал, получаем вследствие леммы 1.5, что $z = \langle x, y\rangle_D$ и, значит, T — прямоугольник.

Далее, $U(T_i, T_j) = \{\pi(\underline{S})\colon \underline{S} \in \Lambda, S_0 = T_i, S_1 = T_j\}$ и $V(T_k, T_l) = \{\pi(\underline{S})\colon \underline{S} \in \Lambda, S_{-1} = T_k, S_0 = T_l\}$. Например, множество в правой части первого равенства совпадает с замыканием множества точек

$$\{\pi(\underline{S})\colon \underline{S} \in Q(\Gamma'(\mathcal{T})), S_0 = T_i, S_1 = T_j\} = \\ = \{x \in \Gamma'(\mathcal{T})\colon x \in T_i, H_{\mathcal{T}}(x) \in T_j\}.$$

Предположим, что $x \in U(T_i, T_j)$ и $y \in W^s(x, T_i)$. Пусть $x = \pi(\underline{S})$, $y = \pi(\underline{P})$, $S_0 = P_0 = T_i$. Построим $\underline{W}$ указанным выше образом. Тогда $W_0 = S_0 = T_i$ и $W_1 = S_1 = T_j$; отсюда $z \in U(T_i, T_j)$. Но

$$z = \langle x, y\rangle_{T_i} = y, \text{ так как } y \in W^s(x, T_i).$$

Отсюда $W^s(x, T_i) \subset U(T_i, T_j)$. Условие (iii) проверяется аналогично, и, значит, семейство $\mathcal{T}$ марковское.

II. Допустим теперь, что $\mathcal{T}$ — марковское семейство. Для $S_0, \ldots, S_N \in \mathcal{T}$ положим

$$A(S_0, \ldots, S_N) = \{x \in \Gamma(\mathcal{T})\colon H^r_{\mathcal{T}}(x) \in S_r \text{ при } 0 \leqslant r \leqslant N\}.$$

Заметим, что $A(S_0, \ldots, S_N) \subset \pi\{\underline{W} \in \Lambda\colon W_r = S_r \text{ при } 0 \leqslant r \leqslant N\}$, так как множество в правой части компактно и содержит $\Gamma'(\mathcal{T}) \cap A(S_0, \ldots, S_N)$, а множество $A(S_0, \ldots, S_N)$ открыто в $\Gamma(\mathcal{T})$ и, значит, $\Gamma'(\mathcal{T})$ плотно в $A(S_0, \ldots, S_N)$. В частности, имеем $A(S_0, S_1) \subset U(S_0, S_1)$.

Лемма. *Пусть* $x \in A(S_0, \ldots, S_N)$ *и* $z \in W^s(x, S_0) \cap \Gamma'(\mathcal{T})$. *Тогда* $z \in A(S_0, \ldots, S_N)$.

Доказательство. Так как $x \in A(S_0, S_1) \subset U(S_0, S_1)$, мы получаем вследствие марковского условия (ii), что $z \in U(S_0, S_1)$. Из того, что $z = \pi(Q(z))$ и π взаимно однозначно на $\Gamma'(\mathcal{T})$ (см. лемму 2.2), следует, что $H_{\mathcal{S}}(z) \in S_1^{\circ}$. Отсюда

$$H_{\mathcal{S}}(z) \in W^s(H_{\mathcal{S}}(x), S_1) \cap \Gamma'(\mathcal{T}).$$

По индукции получаем $H_{\mathcal{S}}(z) \in A(S_1, \ldots, S_N)$, откуда следует, что $z \in A(S_0, \ldots, S_N)$.

Рассмотрим теперь x', $y' \in \Gamma'(\mathcal{T})$ с $S_0 = P_0$, где $\underline{S} = Q(x')$ и $\underline{P} = Q(y')$. Для любого положительного целого N

$$x' \in A(S_0, \ldots, S_N)$$

и

$$y' \in B(P_{-N}, \ldots, P_0) = \{y \in \Gamma(\mathcal{T}): H_{\mathcal{S}}^{-r}(y) \in P_{-r}^{\circ},\ 0 \leqslant r \leqslant N\}.$$

Поскольку $T_i = S_0 = P_0$ — прямоугольник (марковское свойство (i)) и $A(S_0, \ldots, S_N)$, $B(P_{-N}, \ldots, P_0)$ — непустые открытые подмножества T_i, получаем, что

$$C_N(x', y') = \{\langle x, y\rangle_{T_i}: x \in A(S_0, \ldots, S_N), y \in B(P_{-N}, \ldots, P_0)\}$$

— открытое подмножество T_i. Выберем такое

$$z \in C_N(x', y') \cap \Gamma'(\mathcal{T}),$$

что $z \in W^s(x, T_i) \cap \Gamma'(\mathcal{T})$, где $x \in A(S_0, \ldots, S_N)$, и $z \in W^u(y, T_i) \cap \cap \Gamma'(\mathcal{T})$, где $y \in B(P_{-N}, \ldots, P_0)$. По доказанной выше лемме $z \in A(S_0, \ldots, S_N)$. Аналогичным образом получаем $z \in B(P_{-N}, \ldots, P_0)$. Отсюда

$$Q(z)_j = \begin{cases} P_j & \text{при} \quad -N \leqslant j \leqslant 0, \\ S_j & \text{при} \quad 0 \leqslant j \leqslant N. \end{cases}$$

Докажем теперь, что $\Lambda = \Sigma(A_{\mathcal{S}})$. Нужно показать, что если $R_0, \ldots, R_n$ — элементы $\mathcal{T}$ и $A_{\mathcal{S}}(R_i, R_{i+1}) = 1$ при $0 \leqslant i \leqslant n-1$, то можно найти такое $w \in \Gamma'(\mathcal{T})$, что

$$Q(w)_i = R_i \quad \text{при} \quad 0 \leqslant i \leqslant n.$$

Это доказывается индукцией по n. При $n = 1$ это следует из определения $A_{\mathcal{S}}$. При $n > 1$ найдем сначала такую точку $w' \in \Gamma'(\mathcal{T})$, что

$$Q(w')_i = R_{i+1} \quad \text{при} \quad 0 \leqslant i \leqslant n-1.$$

Затем найдем точку $y' \in \Gamma'(\mathcal{T})$, такую, что

$$Q(y')_{-1} = R_0, \qquad Q(y')_0 = R_1.$$

Применив приведенную выше конструкцию к $x' = w'$ и y', получим точку $z \in \Gamma'(\mathcal{T})$, для которой

$$Q(z)_i = R_{i+1} \quad \text{при} \quad -1 \leqslant i \leqslant n-1.$$

Точка $w = H_{\mathcal{G}}(z)$ является искомой.

(2.5) Теорема. *Поток φ_t: $X \to X$ обладает марковским семейством локальных сечений произвольно малого размера.*

Мы отложим утомительное доказательство этой теоремы до § 7. На протяжении оставшейся части статьи $\mathcal{M}$ всегда будет обозначать марковское семейство (малого размера α). Введем обозначения для некоторых границ:

$$\partial^s \mathcal{M} = \bigcup \{\partial^s T\colon T \in \mathcal{M}\},$$
$$\partial^u \mathcal{M} = \bigcup \{\partial^u T\colon T \in \mathcal{M}\},$$
$$\Delta^s \mathcal{M} = \varphi_{[0,\,\alpha]} \partial^s \mathcal{M},$$
$$\Delta^u \mathcal{M} = \varphi_{[-\alpha,\,0]} \partial^u \mathcal{M}.$$

(2.6) Предложение. $\varphi_r \Delta^s \mathcal{M} \subset \Delta^s \mathcal{M}$ *и* $\varphi_{-r} \Delta^u \mathcal{M} \subset \Delta^u \mathcal{M}$ *при* $r \geqslant 0$.

Доказательство. Рассмотрим $x \in \partial^s T$. Пусть $\underline{S} \in \pi^{-1}(x)$. Тогда $y = \varphi_t(x) = \pi(\sigma \underline{S}) \in S_1$, где $t = f(\underline{S}) \leqslant \alpha$. Поскольку $x \in \partial^s S_0 (T = S_0)$, существует такая последовательность точек $x_n \to x$, что $x_n \in W^u_\varepsilon(x) \cap X$, но $x_n \notin \varphi_{[-\zeta,\,\zeta]} S_0$, где $\zeta > 0$ не зависит от n. При этом $\varphi_t(x_n) \in W^u_{\varepsilon'}(\varphi_t(x)) \cap X$ и $\varphi_t(x_n) \to y$. Мы утверждаем, что $y \in \partial^s S_1$. В противном случае для всякого ζ' мы имели бы $\varphi_t(x_n) \in \varphi_{[-\zeta',\,\zeta']} S_1$ при достаточно большом n. При этом $\varphi_{t+\beta_n}(x_n) \in W^u(y, S_1)$, где $|\beta_n| \leqslant \zeta'$. Так как $y = \pi(\sigma \underline{S}) \in V(S_0, S_1)$, получаем вследствие марковского условия (iii), что $\varphi_{t+\beta_n}(x_n) \in V(S_0, S_1)$ и $\varphi_{t+\beta_n}(x_n) = \pi(\sigma \underline{S}^n)$, где $S_0^n = S_0$, $S_1^n = S_1$. Пусть $t_n = f(\underline{S}^n) \in [\beta, \alpha]$. Тогда $z_n = \varphi_{t+\beta_n - t_n}(x_n) \in S_0$. Так как $x_n \notin \varphi_{[-\zeta,\,\zeta]} S_0$, числа $\gamma_n = t + \beta_n - t_n$ удовлетворяют условию $2\alpha \geqslant |\gamma_n| \geqslant \zeta$. Перейдя к подпоследовательности, можно считать, что β_n и t_n сходятся; значит, $\gamma_n \to \gamma \geqslant \zeta > 0$. Поскольку $x_n \to x$, а S_0 замкнуто, заключаем, что $\varphi_\gamma(x) \in S_0$. Это противоречит тому, что S_0 — локальное сечение. Полученное противоречие показывает, что на самом деле $y = \varphi_t(x) \in \partial^s S_1 \subset \partial^s \mathcal{M}$.

Рассуждая таким образом, получаем последовательность $0 < t_1 = t < t_2 < t_3 < \ldots$, такую, что $t_{i+1} - t_i \in [\beta, \alpha]$ и $\varphi_{t_i}(x) \in \partial^s \mathcal{M}$. Так как всякое r лежит в некотором интервале $[t_i, t_{i+1}]$, получаем $\varphi_r(x) = \varphi_{r-t_i} \varphi_{t_i}(x) \in \Delta^s \mathcal{M}$.

3. ТИПЫ ТОЧЕК И СТРУКТУРА ОТОБРАЖЕНИЯ ρ

Для множества T из марковского семейства $\mathscr{M}$ положим

$$T^+ = \rho\{(\underline{S},\ t):\ \underline{S} \in \Lambda(\mathscr{M}),\ S_0 = T \text{ и } t \in [0,\ f(\underline{S})]\}.$$

При этом $x \in T^+$ тогда и только тогда, когда $\varphi_{t_n}(x_n) \to x$ для некоторой последовательности точек $x_n \in T \cap \Gamma'(\mathscr{M})$ и чисел $t_n \in (0,\ l(x_n))$ [$l(x_n)$ было определено в § 1 для $x_n \in \Gamma'(\mathscr{M})$].

Рассмотрим точку $x \in X \setminus \Gamma(\mathscr{M})$, гладкий диск D, являющийся локальным сечением потока φ_t: $M \to M$ и такой, что $x \in \operatorname{int} D$, и маленький прямоугольник $N_x \subset D \cap X$, такой, что $x \in N_x^*$ и $N_x = \overline{N_x^*}$. Пусть $\mathscr{M}_x = \{T \in \mathscr{M}:\ x \in T^+\}$. Тогда $\mathscr{N}_x = \{N_x \cap T^+:\ T \in \mathscr{M}_x\}$ — покрытие N_x прямоугольниками, которые пересекаются только по границам (имеются в виду границы прямоугольников, рассматриваемых как подмножества $D \cap X$). Существуют два важных подмножества в множестве $\mathscr{P}(\mathscr{M}_x)$ ($\mathscr{P}(\mathscr{M}_x)$ — множество подмножеств $\mathscr{M}_x$), с помощью которых описывается положение точки x относительно $\mathscr{M}$:

$$J_s(x) = \{\mathscr{D} \subset \mathscr{M}:\ \forall \varepsilon > 0\ \exists z \in B_\varepsilon(x) \cap W^s(x,\ N_x),$$
$$\text{где } z \notin \partial^u \mathscr{N}_x \text{ и } \mathscr{D} = \mathscr{M}_z\},$$
$$J_u(x) = \{\mathscr{D} \subset \mathscr{M}:\ \forall \varepsilon > 0\ \exists z \in B_\varepsilon(x) \cap W^u(x,\ N_x),$$
$$\text{где } z \notin \partial^s \mathscr{N}_x \text{ и } \mathscr{D} = \mathscr{M}_z\}.$$

Здесь $\partial^u \mathscr{N}_x = \bigcup_{T \in \mathscr{M}_x} \partial^u (N_x \cap T^+)$ и $\partial^s \mathscr{N}_x = \bigcup_{T \in \mathscr{M}_x} \partial^s (N_x \cap T^+)$.

Отметим, что $J_s(x)$ и $J_u(x)$ не зависят от выбора диска D и прямоугольника N_x, а зависят лишь от вида множеств $\{T^+:\ T \in \mathscr{M}\}$ вблизи точки x. Для $x \in \Gamma(\mathscr{M})$ множества $J_u(x)$ и $J_s(x)$ остаются пока не определенными.

(3.1) Определение. Для положительного целого N введем обозначение

$$\mathrm{Des}_N = \{(a_1,\ \ldots,\ a_k):\ 1 \leqslant k \leqslant N,\ a_i \text{ целые}$$
$$\text{и } N \geqslant a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_k \geqslant 1\}.$$

Для $(a_1,\ \ldots,\ a_k)$ и $(b_1,\ \ldots,\ b_n)$ из Des_N положим

$(a_1,\ \ldots,\ a_k) \geqslant (b_1,\ \ldots,\ b_n)$ тогда и только тогда,

$$\text{когда } \begin{cases} k > n, \\ \text{или} \quad k = n \quad \text{и} \quad b_i \geqslant a_i \quad \text{при всех} \quad 1 \leqslant i \leqslant k, \end{cases}$$

Пусть теперь $N=2^{2^{\operatorname{card}\mathcal{M}}}$. Для $J\subset\mathcal{P}(\mathcal{M})\setminus\{\varnothing\}$ определим

$$J^*=(\operatorname{card}\mathcal{D}_1,\ \ldots,\ \operatorname{card}\mathcal{D}_k)\in\operatorname{Des}_N,$$

где $J=\{\mathcal{D}_1,\ \ldots,\ \mathcal{D}_k\}$ и $\mathcal{D}_i$ упорядочены так, что $\operatorname{card}\mathcal{D}_{i+1}\leqslant\leqslant\operatorname{card}\mathcal{D}_i$.

(3.2) Лемма. *Предположим, что* $x,\ \varphi_t(x)\in X\setminus\Gamma(\mathcal{M})$ *и* $t\geqslant 0$. *Тогда*

$$J_s(x)^*\geqslant J_s(\varphi_t(x))^* \quad \text{и} \quad J_u(x)^*\leqslant J_u(\varphi_t(x))^*.$$

Если $\varphi_{[0,\,t]}x\cap\Gamma(\mathcal{M})=\varnothing$, *то имеет место равенство.*

Доказательство. Аналогичное утверждение для марковских разбиений базисных множеств диффеоморфизмов было доказано в [4]. Из марковости семейства $\mathcal{M}$ следует, что при малых t отображение Пуанкаре $P\colon N_x\to N_{\varphi_t(x)}$ и покрытия прямоугольниками $\mathcal{N}_x$ и $\mathcal{N}_{\varphi_t(x)}$ удовлетворяют в соответствующих окрестностях точек x и $\varphi_t(x)$ таким же условиям, каким удовлетворяют ограничение некоторого А-диффеоморфизма на его базисное множество $f\colon\Omega_s\to\Omega_s$ и марковское разбиение в окрестностях точек x и $f(x)$. Отсюда следует, что доказательство из [4] дает нам требуемый результат при малых t. При больших t рассмотрим последовательные моменты $x,\ \varphi_{t_1}(x),\ \ldots,\ \varphi_{t_n}(x),\ \varphi_t(x)$, где $t_{j+1}-t_j>0$ мало, и воспользуемся тем, что отношение $\geqslant$ является частичным порядком.

Если $\varphi_{[0,\,t]}x\cap\Gamma(\mathcal{M})=\varnothing$, то P осуществляет локальный изоморфизм между $(x,\ \mathcal{N}_x)$ и $(\varphi_t(x),\ \mathcal{N}_{\varphi_t(x)})$, и тогда

$$J_s(x)=J_s(\varphi_t(x)) \qquad \text{и} \qquad J_u(x)=J_u(\varphi_t(x)).$$

(3.3) Определение. Для $x\in\Gamma(\mathcal{M})$ положим $J_s(x)=J_s(\varphi_{-\varepsilon}(x))$ и $J_u(x)=J_u(\varphi_\varepsilon(x))$ при малом $\varepsilon>0$ (по предыдущей лемме это определение не зависит от ε, если ε достаточно мало). Для всякой точки $x\in X$ положим

$$L_s(x)=\operatorname{card}J_s(x)=\operatorname{length}J_s(x)^*,$$
$$L_u(x)=\operatorname{card}J_u(x)=\operatorname{length}J_u(x)^*.$$

(3.4) Лемма. *Если* $x\in X$ *и* $t\geqslant 0$, *то* $J_s(x)^*\geqslant J_s(\varphi_t(x))^*$ *и* $J_u(x)^*\leqslant J_u(\varphi_t(x))^*$.

(3.5) Лемма. *Для каждого* k *множества* $E_s(k)=\{x\in X\colon L_s(x)\leqslant k\}$ *и* $E_u(k)=\{x\in X\colon L_u(x)\leqslant k\}$ *открыты в* X. *При* $t\geqslant 0$ *имеем* $\varphi_t(E_s(k))\subset E_s(k)$ *и* $\varphi_{-t}(E_u(k))\subset E_u(k)$.

Доказательство. Свойства инвариантности множеств $E_s(k)$ и $E_u(k)$ следуют из 3.4 и определения частичного порядка $\geqslant$.

Рассмотрим точку $x \in E_s(k)$. Для $x \notin \Gamma(\mathscr{M})$ доказательство того, что $E_s(k)$ является окрестностью x, проводится так же, как для диффеоморфизмов [4, следствие 4]. Для $x \in \Gamma(\mathscr{M})$ имеем $y = \varphi_{-\varepsilon}(x) \in E_s(k)$. Поскольку $E_s(k)$ является окрестностью $\varphi_{-\varepsilon}(x)$, φ_ε — гомеоморфизм и $\varphi_\varepsilon(E_s(k)) \subset E_s(k)$, заключаем, что $E_s(k)$ — окрестность x.

(3.6) Лемма. *Для каждой точки $x \in X \setminus \Gamma(\mathscr{M})$ существует такая окрестность U_x в X, что если $w \in U_x$, $L_s(w) \geqslant L_s(x)$ и $L_u(w) \geqslant L_u(x)$, то $J_s(w) = J_s(x)$ и $J_u(w) = J_u(x)$.*

Доказательство. Лемма доказывается так же, как следствие 5 из [4].

(3.7) Определение. Точка $x \in X$ называется *точкой ветвления*, если либо $J_s(\varphi_{-\varepsilon}(x))^* \neq J_s(\varphi_\varepsilon(x))^*$, либо $J_u(\varphi_{-\varepsilon}(x))^* \neq \neq J_u(\varphi_\varepsilon(x))^*$ для всех малых $\varepsilon > 0$. Обозначим $\mathrm{Br}(\mathscr{M})$ множество всех точек ветвления и положим

$$\mathrm{Br}^*(\mathscr{M}) = \varphi_R \, \mathrm{Br}(\mathscr{M}) = \{\varphi_t(x)\colon\ x \in \mathrm{Br}(\mathscr{M}),\ t \in \mathbb{R}\}.$$

По лемме 3.2 $\mathrm{Br}(\mathscr{M}) \subset \Gamma(\mathscr{M})$. Для $\underline{a}, \underline{b} \in \mathrm{Des}_N$ положим

$$\Phi(\underline{a}, \underline{b}) = \{x \in X\colon\ J_s(\varphi_t(x))^* = \underline{a} \text{ и } J_u(\varphi_t(x))^* = \underline{b} \text{ при всех } t \in \mathbb{R}\}.$$

Отметим, что

$$X = \mathrm{Br}^*(\mathscr{M}) \cup \bigcup_{\underline{a}, \underline{b}} \Phi(\underline{a}, \underline{b}).$$

Для всякой точки $z \in \Lambda(\sigma, f)$ существует единственное представление вида $z = \rho(\underline{T}, t)$, где $\underline{T} \in \Lambda$ и $t \in [0, f(\underline{T}))$. Определим отображение $\beta\colon \Lambda(\sigma, f) \to \Lambda$, положив $\beta(z) = \underline{T}$. Для $x \in X$ определим множество

$$R_x(\mathscr{M}) = \{(S, T) \in \mathscr{M} \times \mathscr{M}\colon\ \exists z \in \rho^{-1}(x), \text{ такое, что}$$
$$\beta(\varphi_{-\varepsilon}(z))_0 = S \text{ и } \beta(\varphi_{+\varepsilon}(z))_0 = T \text{ при малом } \varepsilon > 0\}.$$

(3.8) Лемма. *$x \in \mathrm{Br}(\mathscr{M})$ тогда и только тогда, когда $R_x(\mathscr{M})$ содержит различные пары (S, T) и (S', T'), для которых либо $S = S'$, либо $T = T'$.*

Доказательство. Лемма доказывается так же, как предложение 9 из [4].

(3.9) Предложение. *Существует целое d, такое, что $\operatorname{card} \rho^{-1}(x) \leqslant d$ для всех $x \in X$.*

Доказательство. Пусть c — длина максимальной упорядоченной цепи в $(\mathrm{Des}_N, \geqslant)$. Из 3.4 следует, что существуют такие числа $s_1 < s_2 < \ldots < s_n$, $n \leqslant 2c$, что все точки ветвления на траектории $\varphi_{\mathbb{R}}(x)$ совпадают с $\varphi_{s_i}(x)$. Можно считать что $x \in \Gamma(\mathscr{M})$, так как величина $\operatorname{card}(\rho^{-1}(x))$ постоянна на φ_t-орбите. Пусть $\{t_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$ — возрастающая последовательность действительных чисел, такая, что $\varphi_{t_i}(x) = H^i_{\mathscr{M}}(x)$ при всех $i \in \mathbb{Z}$.

Для $z \in \rho^{-1}(x)$ положим

$$I(z) = \left\{\beta\left(\psi_{t_i}(z)\right)_0\right\}_{i \in \mathbb{Z}} \in \prod_{\mathbb{Z}} \mathscr{M}.$$

Если z_1 и z_2 — различные точки из $\rho^{-1}(x)$, то существует такое $t \in \mathbb{R}$, что одна из точек $\psi_t(z_1)$, $\psi_t(z_2)$ лежит в $\Lambda \times \{0\}$, но

$$\beta(\psi_t(z_1))_0 \neq \beta(\psi_t(z_2))_0.$$

Тогда $\varphi_t(x) = \rho\psi_t(z_j) \in \rho(\Lambda \times \{0\}) \subset \Gamma(\mathscr{M})$, и, значит, t совпадает с одним из t_i. Отсюда $I(z_1) \neq I(z_2)$.

Пусть $J = \{i \in \mathbb{Z}\colon t_i = s_j$ при некотором $j\}$, а $K = J + \{-1, 0, 1\}$; $\operatorname{card} K \leqslant 6c$. Если $I(z_1)_i = I(z_2)_i$ при $i \notin K$, то

$$I(z_1)_{i-1} = I(z_2)_{i-1} \quad \text{и} \quad I(z_1)_{i+1} = I(z_2)_{i+1},$$

так как вследствие 3.8 ни одна из точек $\varphi_{t_{i-1}}(x)$, $\varphi_{t_i}(x)$, $\varphi_{t_{i+1}}(x)$ не содержится в $\operatorname{Br}(\mathscr{M})$. Отсюда получаем, что если $I(z_1) \neq I(z_2)$, то $I(z_1)_i \neq I(z_2)_i$ при некотором $i \in K \cup \{0\}$. Значит,

$$\operatorname{card} \rho^{-1}(x) \leqslant d = (6c + 1)^{\operatorname{card} \mathscr{M}}.$$

(3.10) Следствие. *Если $x = \rho(z_1) = \rho(z_2) \notin \operatorname{Br}^*(\mathscr{M})$ и $\beta(z_1)_0 = \beta(z_2)_0$, то $z_1 = z_2$.*

Доказательство. Так как $\varphi_{\mathbb{R}}(x)$ не содержит точек ветвления, $K = \varnothing$. Из $I(z_1)_0 = I(z_2)_0$ получаем, что $I(z_1) = I(z_2)$ и $z_1 = z_2$.

(3.11) Теорема. *При любых $\underline{a}, \underline{b} \in \operatorname{Des}_N$ ограничение $\rho \mid \rho^{-1}\Phi(\underline{a}, \underline{b})$ является локальным гомеоморфизмом. В частности, множество $\Phi(\underline{a}, \underline{b})$ одномерно или пусто.*

Доказательство. Рассмотрим $z \in \rho^{-1}\Phi(\underline{a}, \underline{b}) \setminus \rho^{-1}\Gamma(\mathscr{M})$ и $T = \beta(z)_0$. Тогда

$$U = \{p(\underline{S}, t)\colon \ \underline{S} \in \Lambda, \quad S_0 = T \quad \text{и} \quad t \in (0, f(\underline{S}))\}$$

— открытое множество в $\Lambda(\sigma, f)$, содержащее z. Согласно следствию 3.10, отображение ρ взаимно однозначно на $V = U \cap \rho^{-1}\Phi(\underline{a}, \underline{b})$. Так как $\overline{U} \cap V = V$ и $\rho\colon \overline{U} \to \rho(\overline{U})$ — непрерывное отображение компактных метрических пространств, причем $\rho \mid V$ взаимно однозначно, то $\rho \mid V$ — гомеоморфизм.

Мы должны показать, что $\rho(V)$ — окрестность $x=\rho(z)$ в $\Phi(\underline{a}, \underline{b})$. Пусть U_x — окрестность x, выбранная согласно лемме 3.6. Предположим, что $y \in U_x \cap \Phi(\underline{a}, \underline{b})$. По лемме 3.6 $J_s(y) = J_s(x)$. Далее, из $T \in \mathcal{M}_x$ следует, что $T \in \mathcal{D}$ при некотором $\mathcal{D} \in J_s(x)$. При этом $\mathcal{D} \in J_s(y)$ и, значит, $T \in \mathcal{M}_y$, т. е. $y \in T^+$. Но $y \in T^+ \setminus \Gamma(\mathcal{M})$, поэтому $y \in \rho(U)$. Так как $y \in \Phi(\underline{a}, \underline{b})$, мы получаем $U_x \cap \Phi(\underline{a}, \underline{b}) \subset \rho(V)$.

Мы не рассмотрели случай $z \in \rho^{-1}(\Phi(\underline{a}, \underline{b}) \cap \Gamma(\mathcal{M}))$. В этом случае точка $z' = \psi_\varepsilon(z)$ удовлетворяет условию $z' \in \in \rho^{-1}\Phi(\underline{a}, \underline{b}) \setminus \rho^{-1}\Gamma(\mathcal{M})$ и, значит, ρ является локальным гомеоморфизмом в точке z'. Из равенства $\varphi_t \circ \rho = \rho \circ \psi_t$ получаем, что ρ является локальным гомеоморфизмом также и в точке z.

4. СВОЙСТВА ВОЗВРАЩАЕМОСТИ

Отображение ρ сохраняет различные свойства возвращаемости траекторий. Мы покажем, что точка $z \in \Lambda(\sigma, f)$ является периодической, всюду плотной, устойчивой по Пуассону или рекуррентной (относительно ψ_t) тогда и только тогда, когда точка $\rho(z)$ обладает соответствующим свойством относительно φ_t: $X \to X$. Отметим, что точка $z = p(\underline{S}, t)$ с $\underline{S} \in \Lambda$ обладает одним из этих свойств возвращаемости тогда и только тогда, когда им обладает последовательность $\underline{S}$ (относительно сдвига σ). Именно по этой причине в названии статьи входят слова «символическая динамика». В этом разделе мы опишем минимальные множества потока φ_t: $X \to X$ и покажем, что они одномерны.

(4.1) Предложение. *Точка $z \in \Lambda(\sigma, f)$ периодическая тогда и только тогда, когда точка $\rho(z)$ периодическая.*

Доказательство. Это непосредственно следует из предложения 3.9.

(4.2) Определение. Для $x \in X$ положим

$$\alpha(x) = \{y \in X:\ \varphi_{t_n}(x) \to y \ \text{ для некоторой последовательности } t_n \to -\infty\},$$

$$\omega(x) = \{y \in X:\ \varphi_{t_n}(x) \to y \ \text{ для некоторой последовательности } t_n \to +\infty\}.$$

Точка x называется *устойчивой по Пуассону*, если $x \in \alpha(x) \cap \omega(x)$.

(4.3) Лемма. *Если $y \in \alpha(x)$, то $L_s(y) \geqslant L_s(x)$. Если $y \in \omega(x)$, то $L_u(y) \geqslant L_u(x)$.*

Доказательство. Вспомним, что множество $\{w \in X\colon L_s(y) \geqslant L_s(w)\}$ открыто. Применив 3.4 (или 3.5), получаем $L_s(y) \geqslant L_s(x)$. Второе утверждение доказывается аналогично.

(4.4) Лемма. *Предположим, что* $y \in \alpha(x) \cap \omega(x)$, $y \notin \Gamma(\mathscr{M})$ *и* $L_s(y) = L_s(\varphi_t(x))$, $L_u(y) = L_u\varphi_t(x)$ *при всех* $t \in \mathbb{R}$. *Тогда* $x \notin \mathrm{Br}^*(\mathscr{M})$, $J_s(y)^* = J_s(x)^*$ *и* $J_u(y)^* = J_u(x)^*$.

Доказательство. Пусть U_y — окрестность точки y, описанная в лемме 3.6. Найдутся сколь угодно большие положительные и отрицательные числа r, при которых $\varphi_r(x) \in U_y$. Из леммы 3.6 получаем $J_s(y) = J_s(\varphi_r(x))$ и $J_u(y) = J_u(\varphi_r(x))$. При этом для всякого t, рассмотрев r, большее, чем t (при $t > 0$), или меньшее, чем t (при $t < 0$), получаем из леммы 3.4, что $J_s(y)^* = J_s(\varphi_t(x))^*$ и $J_u(y)^* = J_u(\varphi_t(x))^*$. Отсюда вытекает, что $x \notin \mathrm{Br}^*(\mathscr{M})$, и другие наши утверждения.

(4.5) Лемма. *Если точка* $x \in X$ *устойчива по Пуассону, то* $x \notin \mathrm{Br}^*(\mathscr{M})$.

Доказательство. Достаточно доказать, что $x' \notin \mathrm{Br}^*(\mathscr{M})$ для устойчивой по Пуассону точки $x' = \varphi_e(x) \notin \Gamma(\mathscr{M})$. При всех t имеем $\varphi_t(x') \in \alpha(x') \cap \omega(x')$ и $x' \in \alpha(\varphi_t(x')) \cap \omega(\varphi_t(x'))$. Из 4.3 получаем при всех t: $L_s(x') = L_s(\varphi_t(x'))$ и $L_u(x') = L_u(\varphi_t(x'))$. Из 4.4 получаем $x' \notin \mathrm{Br}^*(\mathscr{M})$.

(4.6) Лемма. *Предположим, что* $\rho(z_1) = \rho(z_2) \notin \mathrm{Br}^*(\mathscr{M})$. *Тогда* $z_1 \in \alpha(z_2)$ *в том и только в том случае, когда* $z_2 \in \alpha(z_1)$; $z_1 \in \omega(z_2)$ *тогда и только тогда, когда* $z_2 \in \omega(z_1)$.

Доказательство. См. доказательство следствия 14 из [4].

(4.7) Предложение. *Точка* $z \in \Lambda(\sigma, f)$ *устойчива по Пуассону тогда и только тогда, когда этим свойством обладает точка* $x = \rho(z) \in X$.

Доказательство. Легко видеть, что если точка z устойчива по Пуассону, то такой же будет и точка x. Предположим, что $x \in \alpha(x) \cap \omega(x)$. Пусть $\varphi_{t_n}(x) \to x$ при $t_n \to \infty$. Переходя к подпоследовательности, мы можем считать, что $\psi_{t_n}(z) \to z'$. При этом

$$\rho(z') = \lim \rho\psi_{t_n}(z) = \lim \varphi_{t_n}(x) = x.$$

Так как $z' \in \omega(z)$ и $x \notin \mathrm{Br}^*(\mathscr{M})$ (лемма 4.5), мы получаем вследствие леммы 4.6, что $z \in \omega(z')$. Значит, $z \in \omega(z') \subset \omega(z)$. Аналогично $z \in \alpha(z)$.

(4.8) Определение. Пусть $\gamma_t\colon Y \to Y$ — непрерывный поток на компактном пространстве. Множество $A \subset Y$ называется *минимальным*, если

(a) A замкнуто, $A \neq \varnothing$ и $\gamma_t A = A$ при всех $t \in \mathbb{R}$;

(b) в случае когда множество B удовлетворяет условию (a) и $B \subset A$, мы имеем $B = A$.

Эквивалентное определение состоит в том, что

$$\alpha(y) = A = \omega(y) \quad \text{при всех} \quad y \in A.$$

Точка $y \in Y$ называется *рекуррентной*, если множество $\overline{\{\gamma_t(y)\colon t \in \mathbb{R}\}}$ минимально.

(4.9) Теорема. *Точка $\rho(z) \in X$ является рекуррентной относительно потока φ_t тогда и только тогда, когда точка $z \in \Lambda(\sigma, f)$ является рекуррентной относительно потока ψ_t. Минимальными множествами для потока $\varphi_t\colon X \to X$ являются множества вида $\rho(A)$, где A — минимальное множество для ψ_t. Минимальные множества потока $\varphi_t\colon X \to X$ одномерны.*

Доказательство. Легко проверить, что если множество A минимально, то таким же будет и $\rho(A)$. Предположим теперь, что множество $A' \subset X$ минимально относительно φ_t. Рассмотрим точки $x, y \in A'$. Так как $y \in A' = \alpha(x) \cap \omega(x)$ и $x \in A' = \alpha(y) \cap \omega(y)$, из леммы 4.3 получаем $L_u(x) = L_u(y)$ и $L_s(x) = L_s(y)$. Эти равенства останутся справедливыми и в том случае, если точку x заменить на $\varphi_t(x)$, поэтому из леммы 4.4 получаем, что $J_s(x)^* = J_s(y)^*$ и $J_u(x)^* = J_u(y)^*$ при любых $x \in A'$ и $y \in A' \setminus \Gamma(\mathscr{M})$. Значит, множество A' содержится в некотором $\Phi(a, b)$; при этом A' одномерно вследствие теоремы 3.11.

Рассмотрим теперь любое $x \in A'$ и любое $z \in \rho^{-1}(x)$. Пусть $A = \overline{\{\psi_t(z)\colon t \in \mathbb{R}\}}$. Тогда $\rho(A) = \overline{\{\varphi_t(x)\colon t \in \mathbb{R}\}} = A'$, так как A' — минимальное множество. Мы утверждаем, что множество A минимально. Предположим, что это не так, т. е. $\psi_t(B) = B$ для некоторого замкнутого множества $B \subset A$, такого, что $A \neq B \neq \varnothing$. Тогда образ B — множество $\rho(B) \subset A'$ непусто, замкнуто и φ_t-инвариантно. Так как A' минимально, $\rho(B) = A'$. Пусть $x = \rho(z')$ для $z' \in B$. Из $x \notin \mathrm{Br}^*(\mathscr{M})$ и $z' \in A = \overline{\{\psi_t(z)\colon t \in \mathbb{R}\}}$ получаем вследствие леммы 4.6, что $z \in \overline{\{\psi_t(z')\colon t \in \mathbb{R}\}} \subset B$. Но тогда $A \subset B$, и мы приходим к противоречию. Значит, A минимально.

Рассмотрим теперь любую точку $x = \rho(z)$. Тогда

$$\overline{\{\varphi_t(x)\colon t \in \mathbb{R}\}} = \rho\,\overline{\{\psi_t(z)\colon t \in \mathbb{R}\}}.$$

Выше мы показали, что эти множества одновременно являются или не являются минимальными. Значит, точки x и z одновременно являются или не являются рекуррентными.

Замечание. Минимальное множество потока $\varphi_t\colon X \to X$ изоморфно специальному потоку (с непостоянной функцией) над некоторым транзитивным символическим каскадом (вообще говоря, не над топологической цепью Маркова), так как всякий одномерный поток, разделяющий траектории, обладает этим свойством (см. [2]).

Один из основных результатов Морса в символической динамике ([14], [15]) состоял в доказательстве существования непериодических рекуррентных траекторий.

(4.10) Лемма. *Пусть $\sigma\colon \Lambda \to \Lambda$ — топологическая цепь Маркова, причем Λ — бесконечное множество. Тогда непериодические рекуррентные точки плотны в Λ* [1]).

Доказательство. Пусть $\underline{S} \in \Lambda$, а N — положительное целое число. Мы построим непериодическую рекуррентную точку в Λ, координаты которой совпадают с координатами $\underline{S}$ на местах от $-N$ до N. Так как сдвиг σ транзитивен, существует последовательность элементов $T_0, \ldots, T_n$ (при некотором n), такая, что $T_0 = S_N$, $T_n = S_{-N}$ и $A(T_i, T_{i+1}) = 1$. Рассмотрим последовательность $W \in \Lambda$, удовлетворяющую условиям: $W_i = S_i$ при $i \leqslant N$ и $W_i = T_{i-N}$ при $N \leqslant i \leqslant N + n$. Из бесконечности Λ следует, что при достаточно большом N найдется такая последовательность $W' \in \Lambda$, что $W'_{-N} = W_{N+n} = S_{-N}$, но $W'_i \neq W_i$ при некотором $-N < i < N + n$.

Положим $M = 2N + n$ и определим отображение $J\colon \prod_{Z} \{0, 1\} \to \Lambda$ формулой

$$J(\underline{a})_{pM+q-N} = \begin{cases} W_{-N+q} & \text{при} \quad a_p = 0, \\ W'_{-N+q} & \text{при} \quad a_p = 1, \end{cases}$$

где $0 \leqslant q < M$. Легко видеть, что J — непрерывное инъективное отображение и что $\sigma^M J = J\sigma$. Пусть $\underline{a}$ — непериодическая рекуррентная бесконечная в обе стороны последовательность с $a_0 = 0$, например последовательность Морса из [14]. Тогда $J(\underline{a})$ будет непериодической рекуррентной последовательностью для $\sigma^M\colon \Lambda \to \Lambda$, а значит, и для $\sigma\colon \Lambda \to \Lambda$.

(4.11) Теорема. *Непериодические рекуррентные относительно потока $\varphi_t\colon X \to X$ точки плотны в X.*

---

[1]) Напомним, что, согласно определению на стр. 111, ТМЦ обязательно транзитивна. — *Прим. ред.*

Доказательство. Поток ψ_t: $\Lambda(\sigma, f) \to \Lambda(\sigma, f)$ обладает этим свойством, поскольку им обладает сдвиг σ: $\Lambda \to \Lambda$. Из теорем 4.9 и 4.1 вытекает, что оно выполняется и для φ_t: $X \to X$.

(4.12) Предложение. *Траектория точки $z \in \Lambda(\sigma, f)$ относительно ψ_t всюду плотна тогда и только тогда, когда всюду плотна относительно φ_t: $X \to X$ траектория точки $x = \rho(z)$.*

Доказательство. Этот факт доказывается аналогично предложению 18 из [4].

5. ЧИСЛО ПЕРИОДИЧЕСКИХ ТРАЕКТОРИЙ

Символическая динамика может быть использована для подсчета числа периодических траекторий потока φ_t: $X \to X$. Основным инструментом при этом служит введенная Смейлом [24, стр. 166 русского перевода] дзета функция

$$Z_\Phi(s) = \prod_{\gamma \in \Gamma} \prod_{k=0}^{\infty} \left(1 - [\exp \tau(\gamma)]^{-s-k}\right),$$

где Γ — множество периодических орбит потока φ_t: $X \to X$, а $\tau(\gamma)$ — наименьший период орбиты γ. Основная гипотеза состоит в том, что $Z_\Phi(s)$ имеет мероморфное продолжение на всю комплексную плоскость. Это было доказано для геодезического потока φ_t на поверхности постоянной отрицательной кривизны и для специального потока с постоянной функцией над базисным множеством диффеоморфизма [24].

В этом разделе мы сведем гипотезу к случаю символического гиперболического потока, однако и в этом простейшем случае она пока не доказана[1]). Мы воспользуемся модификацией метода, предложенного Энтони Мэннингом в [12]. Он применил символическую динамику, чтобы доказать рациональность дзета-функции диффеоморфизма на базисном множестве.

Асимптотически число замкнутых орбит потока φ_t: $X \to X$ такое же, как у потока ψ_t: $\Lambda(\sigma, f) \to \Lambda(\sigma, f)$ (см. доказательство теоремы 6.1). Причина, по которой это верно асимптотически, а не в точности, состоит в том, что отображение ρ не является взаимно однозначным на $\Delta^s\mathscr{M} \cup \Delta^u\mathscr{M}$. Чтобы описать, как точки X расположены относительно этих границ, мы построим различные символические потоки.

Пусть $\underline{l} = (l_1, \ldots, l_n)$ — набор n положительных целых чисел, а V — конечное множество. Определим

$$Q_{\underline{l}}(V) = \{(V_1, \ldots, V_n)\colon\ V_j \subset V,\ \operatorname{card} V_j = l_j \text{ и } V_j \cap V_{j'} = \varnothing \text{ при } j \neq j'\}.$$

---

1) См. примечание на стр. 108. — *Прим. ред.*

Введем обозначения: $\underline{V}=(V_1, \ldots, V_n)$, $Un(\underline{V})=V_1\cup\ldots\cup V_n$, $l(\underline{i})=n$ и $\operatorname{sum}(\underline{i})=i_1+\ldots+i_n$. Отметим, что $Q_{(1)}(V)=V$ и что $Q_{\underline{i}}(V)=\varnothing$, если $\operatorname{sum}(\underline{i})>\operatorname{card} V$.

Рассмотрим теперь марковское семейство $\mathscr{M}$ очень маленького размера (насколько маленького, будет ясно из дальнейшего). Положим

$$P_{\underline{i}}(\mathscr{M})=\{(\underline{V}, T)\colon \underline{V}\in Q_{\underline{i}}(\mathscr{M}),\ T\in Un(\underline{V}),\ \text{существуют } x\in T \text{ и такое } \varepsilon>0, \text{ что } \varphi_{[0,\varepsilon]}x\subset S^{+} \text{ для всякого } S\in Un(\underline{V})\}.$$

Определим теперь функцию $A_{\underline{i}}\colon P_{\underline{i}}(\mathscr{M})\times P_{\underline{i}}(\mathscr{M})\to\{0, 1\}$, положив $A_{\underline{i}}((\underline{U}, S), (\underline{V}, T))=1$, если

(i) существует такое j^{*}, $1\leqslant j^{*}\leqslant n$, что $U_j=V_j$ при $j\neq j^{*}$;

(ii) $\{T\}=V_{j^*}\setminus U_{j^*}$;

(iii) $A_{\mathscr{M}}(T', T)=1$ для $\{T'\}=U_{j^*}\setminus V_{j^*}$.

Отметим, в частности, что $T\notin Un(\underline{U})$. Пусть

$$\Lambda_{\underline{i}}(\mathscr{M})=\Sigma(A_{\underline{i}})\subset\prod_{Z}P_{\underline{i}}(\mathscr{M}).$$

Заметим, что $\Lambda_{(1)}(\mathscr{M})=\Lambda(\mathscr{M})$.

Для пар $(\underline{U}, S)$ и $(\underline{V}, T)$, определенных выше, существует естественное взаимно однозначное соответствие

$$g=g((\underline{U}, S)\ (\underline{V}, T))\colon Un(\underline{U})\to Un(\underline{V}),$$

заданное равенствами

$$g(T')=T \quad \text{и} \quad g(S)=S \quad \text{при} \quad S\neq T'\ (S\in Un(\underline{U})).$$

Рассмотрим теперь $\underline{K}\in\Lambda_{\underline{i}}(\mathscr{M})$ с $K_j=(\underline{V}_j, T^j)$. Для $S\in Un(\underline{V}_0)$ и $j\geqslant 0$ положим

$$I_j(\underline{K}, S)=g^j(S)=g(K_{j-1}, K_j)\ \ldots\ g(K_0, K_1)S,$$

$$I_{-j}(\underline{K}, S)=g^{-j}(S)=g(K_{-j}, K_{-j+1})^{-1}\ \ldots\ g(K_{-1}, K_0)^{-1}S.$$

Тогда

$$\underline{I}(\underline{K}, S)=\{I_j(\underline{K}, S)\}_{j=-\infty}^{+\infty}\in\prod_{Z}\mathscr{M}.$$

Отметим, что $I_j(\underline{K}, S)=T^j$ тогда и только тогда, когда $I_{j-1}(\underline{K}, S)\neq I_j(\underline{K}, S)$.

(5.1) Лемма. *Существует такое N, не зависящее от $\underline{K}$, что среди любых N последовательных чисел j найдется по крайней мере одно, для которого $I_j(\underline{K}, S)=T^j$.*

Доказательство. Для любого данного j равенство $I_j(\underline{K}, S')=T^j$ выполняется ровно при одном S'. Если N достаточно велико, то для некоторого S' можно найти такие r

и s, $k \leqslant r \leqslant s \leqslant k+N$, что $I_r(\underline{K}, S') = T^r = T^s = I_s(\underline{K}, S')$. Если ни при одном $k \leqslant j \leqslant k+N$ равенство $I_j(\underline{K}, S) = T^j$ не выполняется, то мы имеем $I_j(\underline{K}, S) = I_k(\underline{K}, S)$ и прямоугольники $I_j(\underline{K}, S')$ близки к $I_k(\underline{K}, S')$ при всех $k \leqslant j \leqslant k+N$ (по определению $(\underline{V}_j, T^j) \in P_{\underline{t}}(\mathscr{M})$). Пусть $j_0 = r < j_1 < \ldots < j_p = s$ — это все моменты j от r до s, при которых $I_j(\underline{K}, S') = T^j$. Тогда $A_{\mathscr{M}}(T^{j_m}, T^{j_{m+1}}) = 1$, и если положить $W_{ap+b} = T^{j_b}$, то $\underline{W} \in \Lambda(\mathscr{M})$. Точка $\pi(\underline{W})$ периодическая для φ_t, и ее траектория проходит вблизи $I_k(\underline{K}, S)$. Если размер $\mathscr{M}$ очень мал, то это невозможно (так как X не содержит неподвижных точек).

(5.2) Лемма. *Существует естественное отображение* $\gamma_{\underline{t}}\colon \Lambda_{\underline{t}}(\mathscr{M}) \to \Lambda(\mathscr{M})$.

Доказательство. Рассмотрим последовательность $\underline{K} \in \Lambda_{\underline{t}}(\mathscr{M})$, где $K_j = (\underline{V}_j, T^j)$, и определим последовательность $\underline{I}(\underline{K}, \underline{T}^0) \in \prod_{Z} \mathscr{M}$, как это было сделано выше. При всяком j либо $I_j(\underline{K}, T^0) = I_{j+1}(\underline{K}, T^0)$, либо

$$A_{\mathscr{M}}(I_j(\underline{K}, T^0), \quad I_{j+1}(\underline{K}, T^0)) = 1.$$

Определим $\gamma_{\underline{t}}(\underline{K})$ как последовательность $\{I_j(\underline{K}, T^0)\}_{j=-\infty}^{+\infty}$, из которой удалены все повторяющиеся координаты, т. е. $\gamma_t(\underline{K})_r = T^{j_r}$, где $\ldots < j_{-1} < j_0 = 0 < j_1 < \ldots$ — бесконечная в обе стороны последовательность значений j, при которых $I_j(\underline{K}, T^0) = T^j$.

(5.3) Лемма. *Существует отображение* $f_{\underline{t}}\colon \Lambda_{\underline{t}}(\mathscr{M}) \to [\beta, \alpha]$, *липшицево относительно метрики* d_a *при некотором* $a > 1$ *и удовлетворяющее условию*

$$\varphi_{f_{\underline{t}}(\underline{K})} \pi\gamma_{\underline{t}}(\underline{K}) = \pi\gamma_{\underline{t}}\sigma(\underline{K}).$$

Доказательство. Из свойства разделения траекторий следует (при условии, что размер $\mathscr{M}$ очень мал), что $\varphi_t\pi\gamma_{\underline{t}}(\underline{K}) = \pi\gamma_{\underline{t}}\sigma(\underline{K})$ при некотором малом t. Положим $f_{\underline{t}}(\underline{K}) = t$. Так определенное t — это время, которое требуется точке $x = \pi\gamma_{\underline{t}}(\underline{K})$, чтобы пройти от T^0 до T^1. Как и ранее, убеждаемся в том, что это отображение удовлетворяет условию Липшица по $\underline{K}$ в некоторой метрике d_a.

Мы утверждаем, что $t = f_{\underline{t}}(\underline{K}) > 0$. Предположим, что $t < 0$. Тогда или $A_{\mathscr{M}}(T^0, T^1) = 1$, или $T^0 \in Un(\underline{V}_1)$. В первом случае существуют точка $x' \in T^0$ и время $t' > 0$, такие, что $\varphi_{t'}(x') \in T^1$; это противоречит условию (vi) определения 2.1 правильного семейства, так как $\varphi_t(x) \in T^1$, $x \in T^0$, $t < 0$. В случае $T^0 \in Un(\underline{V}_1)$ из $(\underline{V}_1, T^1) \in \underline{P}_t(\mathscr{M})$ следует, что $T^1 \cap (T^0)^+ \neq \varnothing$ и, значит, $\varphi_{t'}(x') \in T^1$ при некоторых $x' \in T^0$, $t' > 0$ (напомним, что $T^0 \neq T^1$). Мы снова пришли к противоречию.

Так как $t > 0$ — это время, которое требуется некоторой точке, чтобы пройти от одного элемента $\mathscr{M}$ до другого, $t \geqslant \beta$[1]). Из равенства

$$\sigma\gamma_{\underline{t}}(\underline{K}) = \gamma_{\underline{t}}\sigma^{l_t}(\underline{K})$$

получаем

$$f_{\underline{t}}(\underline{K}) + f_{\underline{t}}(\sigma\underline{K}) + \ldots + f_{\underline{t}}(\sigma^{l_t-1}\underline{K}) = f(\gamma_{\underline{t}}(\underline{K})) \leqslant \alpha,$$

откуда $f_{\underline{t}}(\underline{K}) \leqslant \alpha$.

Пусть $\psi_{\underline{t},\,t}$ — специальный поток на $X_{\underline{t}} = \Lambda_{\underline{t}}(\mathscr{M})(\sigma, f_{\underline{t}})$. По предыдущей лемме отображение $\rho_{\underline{t}}\colon X_{\underline{t}} \to X$, определенное равенством $\rho_{\underline{t}}(\underline{K}, t) = \varphi_t\pi\gamma_{\underline{t}}(\underline{K})$, имеет смысл и удовлетворяет условию $\varphi_t \circ \rho_{\underline{t}} = \rho_{\underline{t}} \circ \psi_{\underline{t},\,t}$.

Пусть $N_\tau(\Phi)$ — число замкнутых орбит потока $\Phi = \{\Phi_t\}$, наименьший период которых равен τ.

(5.4) Теорема. $N_\tau(\Phi) = \sum\limits_{\underline{t}} (-1)^{l(\underline{t})+1} N_\tau(\Psi_{\underline{t}})$.

Доказательство. Поскольку отображение $\rho_{\underline{t}}$ переводит замкнутые орбиты в замкнутые орбиты, достаточно проверить, что если $x \in X$ и $N_\tau(\Psi_{\underline{t}}, x)$ — число замкнутых орбит потока $\psi_{\underline{t},\,t}\colon X_{\underline{t}} \to X_{\underline{t}}$ с наименьшим периодом τ, содержащих некоторую точку из $\rho_{\underline{t}}^{-1}(x)$, то

$$\sum_{\underline{t}} (-1)^{l(\underline{t})+1} N_\tau(\Psi_{\underline{t}}, x) = \begin{cases} 1, & \text{если } \tau \text{ — наименьший период для } x, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Очевидно, достаточно проверить это лишь для одной из точек x каждой замкнутой орбиты потока $\varphi_t\colon X \to X$ и для τ, равных целым кратным $m\tau'$ наименьшего периода точки x.

Выберем точку $x \notin \Gamma(\mathscr{M})$ с наименьшим периодом τ'. Пусть $T^1, \ldots, T^n$ — элементы $\mathscr{M}$, которые точка $\varphi_t(x)$ последовательно проходит, когда t изменяется от 0 до τ',

[1]) По этой же причине $t \leqslant \alpha$, так что следующее рассуждение не является необходимым. — *Прим. перев.*

а $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \tau'$ — моменты времени, когда $\varphi_{t_j}(x) \in T^j$. Пусть $x_0 = x_n = x$, $x_j = \varphi_{t_j+\varepsilon}(x)$ при $1 \leqslant j < n$, где $\varepsilon > 0$ мало, и

$$D_j = \{S \in \mathscr{M}:\ x_j \in S^+\}.$$

Тогда $((D_j),\ T^j) \in P_{\underline{i}}(\mathscr{M})$, где $\underline{i} = (\operatorname{card} D_j)$. Из периодичности x следует, что $x \notin \overline{\mathrm{Br}}^*(\mathscr{M})$. По лемме 3.8 существует такое взаимно однозначное соответствие θ_j: $D_j \to D_{j+1}$, что $\theta_j(S) = S$ при $S \in D_j \cap D_{j+1}$ и $\theta_j(S^j) = T^{j+1}$, где S^j — единственный элемент в $D_j \setminus D_{j+1}$. Положим $\theta = \theta_{n-1} \circ \ldots \circ \theta_1 \circ \theta_0$: $D_0 \to D_n = D_0$.

Для $j = pn + s$, где $0 \leqslant s < n$, и $(E_1, \ldots, E_n) \in Q_{\underline{i}}(D_0)$ положим $T^j = T^s$ и

$$\Psi^j(E_1, \ldots, E_n) = \\ = ((\theta_{s-1} \circ \ldots \circ \theta_0) \circ \theta^p E_1, \ldots, (\theta_{s-1} \circ \ldots \circ \theta_0)\,\theta^p E_n) \in Q_{\underline{i}}(D_s).$$

Мы имеем $\Psi^{j-1}(E_1, \ldots, E_n) \neq \Psi^j(E_1, \ldots, E_n)$ тогда и только тогда, когда $T^j \in Un\Psi^j(E_1, \ldots, E_n)$. Пусть $\ldots < j_{-1} < j_0 \leqslant \leqslant 0 < j_1 < \ldots$ — это все j, для которых $T^j \in Un\Psi^j(E_1, \ldots, E_n)$. Определим

$$\underline{K}(E_1, \ldots, E_n) = \left(\Psi^{j_k}(E_1, \ldots, E_n),\ T^{j_k}\right)_{k=-\infty}^{+\infty}.$$

Тогда $\underline{K}(E_1, \ldots, E_n) \in \Lambda_{\underline{i}}(\mathscr{M}) \subset X_{\underline{i}}(\mathscr{M})$. Из леммы 1.5 следует, что существует единственное t, $0 < t < \underline{f_i K}(E_1, \ldots, E_n)$, при котором

$$z(E_1, \ldots, E_n) = \psi_{\underline{i},\, t}\underline{K}(E_1, \ldots, E_n) \in \rho_{\underline{i}}^{-1}(x).$$

Легко видеть, что отображение z: $Q_{\underline{i}}(D_0) \to \rho_{\underline{i}}^{-1}(x)$ взаимно однозначно. Кроме того, если $x = \varphi_t \rho_{\underline{i}}(\bar{K})$, где $0 \leqslant t < f_{\underline{i}}(\underline{K})$, то $\underline{V}_0 \in Q_{\underline{i}}(D_0)$, где $\underline{K} = (K_l)$, $K_l = (\underline{V}_l,\ R^l)$ и $\underline{K} = \underline{K}(\underline{V}_0)$. Следовательно, z: $Q_{\underline{i}}(\bar{D}_0) \to \rho_{\underline{i}}^{-1}(x)$ — взаимно однозначное соответствие. Кроме того, $\psi_{\underline{i},\, m\tau'} z(E_1, \ldots, E_n) = z(E_1, \ldots, E_n)$ тогда и только тогда, когда $\theta^m(E_1, \ldots, E_n) = (E_1, \ldots, E_n)$.

Основной леммой при доказательстве нашей теоремы является лемма Мэннинга из [12].

(5.5) Лемма (Мэннинг). *Пусть* θ: $D_0 \to D_0$ — *перестановка конечного множества, а* $\theta_{\underline{i}}$: $Q_{\underline{i}}(D_0) \to Q_{\underline{i}}(D_0)$ — *индуцированная перестановка. Тогда*

$$1 = \sum_{\underline{i}} (-1)^{l(\underline{i})+1} \operatorname{card} \operatorname{Fix}(\theta_{\underline{i}}),$$

где $\operatorname{Fix}(\theta_{\underline{i}})$ — *множество точек, неподвижных относительно* $\theta_{\underline{i}}$.

Наименьший период точки x есть τ', а наименьший период точки $z \in \rho_{\underline{i}}^{-1}(x)$ есть кратное τ', поэтому z имеет наименьший период $\overline{l}'$ тогда и только тогда, когда $\psi_{\underline{i},\,t'}(z)=z$. Кроме того, орбиты двух таких точек не пересекаются (в противном случае точка x имела бы меньший период). Из леммы Мэннинга получаем

$$\sum_{\underline{i}} (-1)^{l(\underline{i})+1} N_{\tau'}(\Psi_{\underline{i}}, x) = 1.$$

Рассмотрим $m > 1$ и докажем по индукции, что

$$\sum_{\underline{i}} (-1)^{l(\underline{i})+1} N_{m\tau'}(\Psi_{\underline{i}}, x) = 0.$$

Имеем $\operatorname{Fix}\theta_{\underline{i}}^{m} = \bigcup_{d \mid m} \operatorname{Pr}_d(\theta_{\underline{i}})$, где $\operatorname{Pr}_d(\theta_{\underline{i}})$ — множество точек из $Q_{\underline{i}}(D_0)$, наименьший период которых относительно действия $\theta_{\underline{i}}$ равен d. Тогда

$$dN_{d\tau'}(\Psi_{\underline{i}}, x) = \operatorname{card}\operatorname{Pr}_d(\theta_{\underline{i}}),$$

и мы получаем

$$m \sum_{\underline{i}} (-1)^{l(\underline{i})+1} N_{m\tau'}(\Psi_{\underline{i}}, x) = \sum_{\underline{i}} (-1)^{l(\underline{i})+1} \operatorname{card}\operatorname{Fix}\theta_{\underline{i}}^{m} - \sum_{\substack{d \mid m \\ d<m}} d \sum_{\underline{i}} (-1)^{l(\underline{i})+1} N_{d\tau'}(\Psi_{\underline{i}}, x) = 1-1=0$$

вследствие индуктивного предположения и леммы Мэннинга.

(5.6) Следствие. $Z_{\Phi}(s) = \dfrac{\prod_{l(\underline{i})\ \text{нечетно}} Z_{\psi_{\underline{i}}}(s)}{\prod_{l(\underline{i})\ \text{четно}} Z_{\psi_{\underline{i}}}(s)}.$

(5.7) Следствие. *Для того чтобы дзета-функция $Z_{\Phi}(s)$ потока φ_t: $X \to X$ на любом базисном множестве была мероморфна на всей плоскости комплексного переменного, необходимо и достаточно, чтобы дзета-функции $Z_{\Psi}(s)$ удовлетворяли тем же условиям для любых гиперболических символических потоков Ψ.*

Доказательство. $\Psi_{\underline{i}}$ может не быть гиперболическим символическим потоком из-за отсутствия топологической транзитивности. Однако замыкание множества периодических траекторий потока $\Psi_{\underline{i}}$: $X_{\underline{i}} \to X_{\underline{i}}$ является объединением непересекающихся замкнутых множеств $Y_1, \ldots, Y_m$, таких, что на каждом из них $\Psi_{\underline{i}}|Y_j$ является гиперболическим символическим потоком. Заметим, что

$$Z_{\Psi_{\underline{i}}}(s) = \prod_{j=1}^{m} Z_{\Psi_{\underline{i}}|Y_j}(s).$$

Остается вспомнить, что сам гиперболический символический поток реализуется на некотором базисном множестве [6].

6. ИНВАРИАНТНЫЕ МЕРЫ

Пусть $M(X, \Phi)$ обозначает множество всех нормированных φ_t-инвариантных борелевских мер на X. Множество $M(X, \Phi)$, наделенное слабой топологией, является компактным метрическим пространством [17]. Для $\nu \in M(\Lambda(\sigma, f), \Psi)$ и борелевского множества $E \subset X$ определим $\rho^*\nu(E) = \nu(\rho^{-1}(E))$. Поскольку $\varphi_t \circ \rho = \rho \circ \psi_t$, мы получаем отображение

$$\rho^*:\ M(\Lambda(\sigma, f), \Psi) \to M(X, \Phi).$$

Это отображение непрерывно. Положим

$$M^*(X, \Phi) = \{\mu \in M(X, \Phi):\ \mu(\Delta^s\mathscr{M} \cup \Delta^u\mathscr{M}) = 0\},$$

$$M^*(\Lambda(\sigma, f), \Psi) = \{\nu \in M(\Lambda(\sigma, f), \Psi):\ \nu(\rho^{-1}(\Delta^s\mathscr{M} \cup \Delta^u\mathscr{M})) = 0\}.$$

Отображение ρ^* задает взаимно однозначное соответствие между $M^*(\Lambda(\sigma, f), \Psi)$ и $M^*(X, \Phi)$; если $\nu \in M^*(\Lambda(\sigma, f), \Psi)$, то ρ осуществляет метрический изоморфизм потоков (ψ_t, ν) и (φ_t, μ).

Карл Зигмунд [20] показал, что $M^*(\Lambda(\sigma, f), \Psi)$ является бэровским множеством в $M(\Lambda(\sigma, f), \Psi)$, а $M^*(X, \Phi)$ — бэровским множеством в $M(X, \Phi)$[1]. По этой причине типичные эргодические свойства мер $\mu \in M(X, \Phi)$ те же, что типичные свойства мер $\nu \in M(\Lambda(\sigma, f), \Psi)$.

В $M(X, \Phi)$ имеется одна особенно важная мера μ_Φ. Напомним ее определение. Пусть $CO_\varepsilon(t)$ обозначает конечное множество всех замкнутых орбит потока Φ, некоторый период которых содержится в интервале $[t - \varepsilon, t + \varepsilon]$. Равномерно распределяя единичную меру по замкнутой орбите γ, мы получаем меру $\omega_\gamma \in M(X, \Phi)$. При этом если $CO_\varepsilon(t) \neq \varnothing$, то

$$\omega_{\varepsilon, t} = \frac{1}{\operatorname{card} CO_\varepsilon(t)} \sum_{\gamma \in CO_\varepsilon(t)} \omega_\gamma$$

является мерой из $M(X, \Phi)$. Далее, в соответствии с тем, является ли поток (X, Φ) перемешивающим или нет, мы имеем при фиксированном ε

$$CO_\varepsilon(t) \neq \varnothing \quad \text{при всех больших } t$$

(случай перемешивания) или (в случае надстройки) существует такое t_0, что

$$CO_\varepsilon(t) = \varnothing \quad \text{при} \quad t \notin \mathbb{Z}t_0$$

[1] См. также [30]. — *Прим. перев.*

и

$$CO_\varepsilon(t) \neq \varnothing \quad \text{при} \quad t = kt_0, \quad \text{где} \quad k \in Z \text{ велико}$$

В [5] было показано, что существует предел

$$\mu_\Phi = \lim_{t\to\infty} \omega_{\varepsilon,t},$$

принадлежащий $M(X, \Phi)$. В случае надстройки предполагается, что $t = kt_0$, $k \to \infty$.

(6.1) Теорема. $\mu_\Phi = \rho^*\mu_\Psi$. *Отображение* ρ *является метрическим изоморфизмом*:

$$(\psi_t, \mu_\Psi) \approx (\varphi_t, \mu_\Phi).$$

(6.2) Лемма. *Если* $A \subset X$ *замкнуто,* $A \neq X$ *и* $\varphi_t(A) \subset A$ *при* $t \geqslant 0$, *то*

$$h(\varphi_t \mid A) < h(\varphi_t).$$

Доказательство. Здесь h обозначает топологическую энтропию. В случае диффеоморфизмов это утверждение было доказано в [7, теорема 4.7]. Эта теорема является следствием предложения 3.11 из [7]; для случая потоков этот результат требует некоторой модификации по образцу доказательства леммы 1.1 из [8][1]).

Доказательство теоремы. Пусть

$$Z = \{x \in X\colon \operatorname{card} \rho^{-1}(x) = 1\} = \\ = X \setminus \bigcup_{t\in R} \varphi_t(\Delta^s\mathscr{M} \cup \Delta^u\mathscr{M}).$$

---

[1]) В предложении 3.11 из [7] идет речь о диффеоморфизме f на базисном множестве X. Пусть $A \subset X$, $0 \leqslant k_1 < k_2 < \ldots < k_m \in Z$, и точки $w_{k_1}, \ldots, w_{k_m} \in X$ удовлетворяют условиям $f^{k_r}(A) \cap B_\varepsilon(w_{k_r}) = \varnothing$ при $r = 1, \ldots, m$, где $B_\varepsilon(w)$ обозначает ε-шар с центром в w. Если $N(n, \varepsilon)$ и $N(n, \varepsilon, A)$ — мощности максимальных (n, ε)-разделенных множеств в X и A соответственно (см. [31, § 4]), то при малом ε и при $n > k_m$ имеем $N(n, \varepsilon, A) \leqslant c_\varepsilon \cdot \tau_\varepsilon^m \cdot N(n, \varepsilon)$, где $c_\varepsilon > 0$, $0 < \tau_\varepsilon < 1$.

Если $A = \bar{A} = f(A) \subsetneqq X$, то, взяв $w_0 \notin A$, из предыдущего и из формул (см. [34])

$$h(f \mid A) = \lim_{\varepsilon\to 0} \lim_{n\to\infty} \frac{\log N(n, \varepsilon, A)}{n},$$

$$h(f) = \lim_{\varepsilon\to 0} \lim_{n\to\infty} \frac{\log N(n, \varepsilon)}{n}$$

получаем требуемый результат. — *Прим. перев.*

Поскольку $\varphi_t(\Delta^s\mathscr{M})\subset\Delta^s\mathscr{M}$ и $\varphi_{-t}(\Delta^u\mathscr{M})\subset\Delta^u\mathscr{M}$ при $t\geqslant 0$, получаем

$$CO_\varepsilon(t)=(CO_\varepsilon(t)\cap Z)\cup(CO_\varepsilon(t)\cap(\Delta^s\mathscr{M}\cup\Delta^u\mathscr{M})).$$

Далее, $h(\varphi_1)=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log\nu_{\varepsilon,\Phi}(t)$ [5, теорема 4.11][1]). Приведенное в [5] (или в [2, теорема 5]) доказательство показывает также, что

$$h(\varphi_1\,|\,\Delta^s\mathscr{M})\geqslant\overline{\lim_{t\to\infty}}\,\frac{1}{t}\log\nu_{\varepsilon,\Phi|\Delta^s\mathscr{M}}(t)$$

и

$$h(\varphi_{-1}\,|\,\Delta^u\mathscr{M})\geqslant\overline{\lim_{t\to\infty}}\,\frac{1}{t}\log\nu_{\varepsilon,\Phi^{-1}|\Delta^u\mathscr{M}}(t).$$

Поскольку $\varphi_t(\Delta^s\mathscr{M})\subset\Delta^s\mathscr{M}$ и $\varphi_{-t}(\Delta^u\mathscr{M})\subset\Delta^u\mathscr{M}$ при $t\geqslant 0$, мы получаем из леммы 6.2, что

$$\frac{\operatorname{card}(CO_\varepsilon(t)\cap Z)}{\nu_{\varepsilon,\Phi}(t)}\to 1$$

при $t\to\infty$. Если положить $CO_{\varepsilon,\Phi}(t)=CO_\varepsilon(t)$ и

$$\omega'_{\varepsilon,t}=(\operatorname{card}CO_{\varepsilon,\Phi}(t)\cap Z)^{-1}\sum_{\gamma\in CO_{\varepsilon,\Phi}(t)\cap Z'}\omega_\gamma,$$

то

$$\omega'_{\varepsilon,t}\to\mu_\Phi\quad\text{при}\quad t\to\infty.$$

Если мы положим $Z'=\Lambda(\sigma,f)\setminus\bigcup\limits_{t\in R}\psi_t(\pi^{-1}(\Delta^s\mathscr{M}\cup\Delta^u\mathscr{M}))$ и

$$\omega''_{\varepsilon,t}=(\operatorname{card}CO_{\varepsilon,\Psi}(t)\cap Z')^{-1}\sum_{\zeta\in CO_{\varepsilon,\Psi}(t)\cap Z'}\omega_\zeta,$$

то $\omega''_{\varepsilon,t}\to\mu_\Psi$. Так как $\rho\colon Z'\to Z$ — гомеоморфизм, мы получаем $\omega'_{\varepsilon,t}=\rho^*\omega''_{\varepsilon,t}$. Из непрерывности ρ^* следует, что $\mu_\Phi=\rho^*\mu_\Psi$. Утверждение про изоморфизм следует из того, что $\mu_\Phi\in M^*(X,\Phi)$; это доказывается так же, как аналогичное утверждение для диффеоморфизмов [3, теорема 34] (см. также [31, теорема 4.1]. — *Перев.*).

Д. Орнстейн и Б. Вейс в [16] показали, что в случае, когда (φ_t,μ) — геодезический поток на поверхности постоянной отрицательной кривизны, а μ — мера, индуцированная метрикой, динамическая система (φ_t,μ) метрически изоморфна при

---

[1]) Здесь и ниже $\nu_{\varepsilon,\Phi}(t)=\operatorname{card}CO_\varepsilon(t)$; $\nu_{\varepsilon,\Phi|A}(t)=\operatorname{card}(CO_\varepsilon(t)\cap A)$.

По поводу определения топологической энтропии через асимптотику числа периодических орбит см. также добавление, теорема 14.2. — *Прим. перев.*

каждом $t \neq 0$ некоторому сдвигу Бернулли. В этом случае $\mu = \mu_\Phi$ [8].

(6.3) Проблема. Пусть ψ_t: $\Lambda(\sigma, f) \to \Lambda(\sigma, f)$ — перемешивающий гиперболический символический поток. Будет ли динамическая система (ψ_t, μ_ψ) бернуллиевской при каждом t? [1])

(6.4) Определение. Положим

$$M_{\max}(X, \Phi) = \{\mu \in M(X, \Phi)\colon\ h_\mu(\varphi_t) = h(\varphi_t)\}.$$

Если $M_{\max}(X, \Phi) = \{\mu\}$, то μ называется *единственной мерой с максимальной энтропией для потока* Φ: $X \to X$ (здесь через h_μ обозначена энтропия по мере μ).

(6.5) Теорема. μ_Φ — *единственная мера с максимальной энтропией тогда и только тогда, когда такова* μ_Ψ.

Доказательство. Во-первых, $M_{\max}(X, \Phi) \subset M^*(X, \Phi)$ и

$$M_{\max}(\Lambda(\sigma, f), \Psi) \subset M^*(\Lambda(\sigma, f), \Psi).$$

Это доказывается так же, как аналогичное утверждение для диффеоморфизмов: теорема 34 из [3] (здесь и ниже можно обратиться также к доказательству теоремы 4.1 из [31]. — *Перев.*). Так как $h_\mu(\varphi_t)$ — инвариант метрического изоморфизма и $h(\varphi_t) = h(\psi_t)$, ρ^* определяет взаимно однозначное отображение $M_{\max}(\Lambda(\sigma, f), \Psi) \to M_{\max}(X, \Phi)$. Наконец, мы знаем, что $\mu_\Phi \in M_{\max}(X, \Phi)$ и $\mu_\Psi \in M_{\max}(\Lambda(\sigma, f), \Psi)$ [5, теорема 5.1].

(6.6) Проблема. Пусть ψ_t — гиперболический символический поток на $\Lambda(\sigma, f)$. Будет ли μ_Ψ единственной мерой с максимальной энтропией? [2])

Аналоги двух проблем этого раздела решены в случае диффеоморфизмов [3] (см. также [31, § 4]. — *Перев.*).

7. ПОСТРОЕНИЕ МАРКОВСКИХ РАЗБИЕНИЙ

В этом разделе мы докажем теорему 2.5, приспособив конструкцию марковских разбиений для диффеоморфизмов [3] к отображениям Пуанкаре на сечениях. Приведенная ниже лемма 7.2 дает условия, необходимые для этой модификации.

[1]) Положительное решение этой проблемы получено в [27].

[2]) Положительное решение этой проблемы получено в [28], [29]. — *Прим. перев.*

(7.1) Лемма. *Пусть D — маленький гладкий диск, трансверсальный к потоку φ_t. Существует такая константа $c_D > 0$, что если $x \in D \cap X$ и $y \in \left(W^s_\varepsilon(x) \cup W^u_\varepsilon(x)\right) \cap \varphi_{[-\alpha,\,\alpha]}D$, то*

$$d\,(P_D(y),\,x) \geqslant c_D d\,(y,\,x),$$

где P_D: $\varphi_{[-\alpha,\,\alpha]}D \to D$ — проекция.

Доказательство. Достаточно доказать утверждение для очень маленького $\varepsilon > 0$ и любой римановой метрики. Поэтому, используя подходящую локальную карту, можно считать, что $D \subset \mathbb{R}^{m-1} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^m$ и $\varphi_t(z, s) = (z, s+t)$ при $z \in D$ и малых s и t. Далее, каждый локальный слой $W^s_\varepsilon(x)$ — это C^1-диск размерности k, трансверсальный в точке x к потоку φ_t, и существует такое отображение σ: $D \cap X \to \operatorname{Emb}^1(D^k, \mathbb{R}^m)$, что $\sigma(x)(D^k) = W^s_\varepsilon(x)$ и $\sigma(x)(0) = x$ [10], [18] (см. также [32]. — *Перев.*). Здесь $\operatorname{Emb}^1(D^k, \mathbb{R}^m)$ — пространство C^1-вложений стандартного k-диска в $\mathbb{R}^m$, наделенное C^1-топологией [25]. Из трансверсальности $W^s_\varepsilon(x)$ к потоку φ_t следует, что при достаточно малом ε угол $\theta = \theta(x, y)$ между $\overrightarrow{xy}$ и e_m отделен от 0. Отсюда

$$\frac{\|P_D(y) - x\|}{\|y - x\|} = |\sin\theta| \geqslant c > 0.$$

В дальнейшем $\alpha > 0$ будет маленьким числом. Выберем гладкие диски $D_1, \ldots, D_n$, трансверсальные к потоку φ_t, и замкнутые прямоугольники $B_i \subset X \cap \operatorname{int} D_i$ так, что

(a) $\dim D_i = \dim M - 1$;

(b) $\operatorname{diam} D_i < \alpha$;

(c) при $i \neq j$ по меньшей мере одно из множеств $D_i \cap \cap\, \varphi_{[0,\,4\alpha]}D_j$ или $D_j \cap \varphi_{[0,\,4\alpha]}D_i$ пусто;

(d) $X \subset \varphi_{[-\alpha,\,0]} \bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i^*$, где B_i^* — множество внутренних точек B_i, рассматриваемого как подмножество в $X \cap \operatorname{int} D_i$;

(e) если $x \in B_i \cap \varphi_{[-2\alpha,\,2\alpha]}B_j$, то $B_i \subset \varphi_{[-3\alpha,\,3\alpha]}D_j$.

Такие множества D_i и B_i нетрудно найти.

(7.2) Лемма. *Для всякого $0 < \tau < 1$ существует $L > 0$ со следующими свойствами:*

(i) *если $x \in D_i$, $y \in W^s(x, D_i)$ и $\varphi_L(x)$, $\varphi_L(y) \in \varphi_{[-2\alpha,\,2\alpha]}D_j$, то*

$$d\,(P_{D_j}\varphi_L(x),\ P_{D_j}\varphi_L(y)) < \tau \cdot d\,(x,\,y);$$

(ii) *если $x \in D_i$, $y \in W^u(x, D_i)$ и $\varphi_{-L}(x)$, $\varphi_{-L}(y) \in \varphi_{[-2\alpha,\,2\alpha]}D_j$,*

то
$$d\left(P_{D_j}\varphi_{-L}(x),\quad P_{D_j}\varphi_{-L}(y)\right) < \tau \cdot d(x, y).$$

Доказательство. Пусть c_{D_i} — константы, о которых шла речь в 7.1, и $c' = \min c_{D_i} > 0$. Отображения
$$P_{D_i}\colon\ \varphi_{[-3\alpha,\,3\alpha]}D_i \to D_i$$
дифференцируемы. Значит, существует такое K, что
$$d\left(P_{D_i}(z),\ P_{D_i}(z')\right) \leqslant K \cdot d(z, z')$$
при условии, что $z,\ z' \in \varphi_{[-3\alpha,\,3\alpha]}D_i$. Для $y \in W^s(x, D_i)$ имеем
$$y = P_{D_i}y', \quad \text{где} \quad y' \in W^s_\varepsilon(x).$$
Из леммы 7.1 следует, что $d(y, x) \geqslant c'd(y', x)$. При этом $d(\varphi_L(y'), \varphi_L(x)) \leqslant ce^{-\lambda L}d(y', x)$ в соответствии с § 1. Отсюда
$$d\left(P_{D_j}\varphi_L(x),\ P_{D_j}\varphi_L(y)\right) \leqslant \frac{K \cdot c \cdot e^{-\lambda L}}{c'}.$$
При большом L получаем требуемый результат.

Следующая лемма описывает связь между отображением Пуанкаре и структурой прямого произведения.

(7.3) Лемма. *Существует $\varepsilon > 0$, для которого выполняется следующее утверждение. Предположим, что D и D' — маленькие локальные сечения, $x,\ y \in D$ и $\langle x, y\rangle_D$ существует, и задана непрерывная функция $s(t)\colon\ [0, T] \to \mathbb{R}_+$, такая, что $s(0) = 0$,*
$$d\left(\varphi_t(x),\ \varphi_{s(t)}(y)\right) \leqslant \varepsilon$$
при всех $t \in [0, T]$, $\varphi_T(x),\ \varphi_{s(T)}(y) \in D'$ и $\left\langle \varphi_T(x),\ \varphi_{s(T)}(y)\right\rangle_{D'}$ существует. Тогда
$$\left\langle \varphi_T(x),\ \varphi_{s(T)}(y)\right\rangle_{D'} = P_{D'}\varphi_T\langle x, y\rangle_D.$$

Доказательство. См. доказательство предложения 1.6 из [5].

Выберем теперь замкнутые прямоугольники $K_i \subset B_i^*$ и число $\delta > 0$ так, чтобы всякое подмножество X, диаметр которого не больше 3δ, содержалось в одном из множеств $\varphi_{[-2\alpha,\,2\alpha]}K_i$. Покроем каждое K_i таким конечным семейством замкнутых множеств $\mathscr{V}_i$, что для $V \in \mathscr{V}_i$
$$\operatorname{diam}\varphi_t(V) \leqslant \delta \quad \text{при всех} \quad |t| \leqslant 2L.$$
При этом найдутся такие $a(V)$, $b(V) \in [1, n]$, что $B_\delta\varphi_{-L}(V) \subset \subset \varphi_{[-2\alpha,\,2\alpha]}K_{a(V)}$ и $B_\delta\varphi_L(V) \subset \varphi_{[-2\alpha,\,2\alpha]}K_{b(V)}$. Рассмотрим отобра-

жения

$$g_V^- = P_{D_{a(V)}}\varphi_{-L}\colon V \to K_{a(V)} \subset B_{a(V)},$$
$$g_V^+ = P_{D_{b(V)}}\varphi_L\colon V \to K_{b(V)} \subset B_{b(V)}.$$

Определим рекуррентно множества $R_{l,k}$ и $S_{l,k}$, положив $R_{l,0} = S_{l,0} = K_l$ и

$$R_{l,k+1} = \bigcup_{F \in \mathscr{V}_l} \{\langle y, P_{D_l}\varphi_L(z)\rangle_{D_l}\colon y \in K_l,\ z \in W^s(g_V^-(x), R_{a(F),k}),$$
$$\text{где } x \in F\},$$
$$S_{l,k+1} = \bigcup_{F \in \mathscr{V}_l} \{\langle P_{D_l}\varphi_{-L}(z), y\rangle_{D_l}\colon y \in K_l,\ z \in W^u(g_V^+(x), S_{b(F),k}),$$
$$\text{где } x \in F\}.$$

Эта конструкция аналогична конструкции, примененной в [3] для диффеоморфизмов, удовлетворяющих аксиоме A. Если L достаточно велико, то леммы 13—18 из [3] (см. также леммы 10.1—10.4 добавления.— *Ред.*) легко приспособить к нашему случаю (здесь требуется применить лемму 7.2 настоящей работы) и показать, что $R_l = \bigcup_{k=0}^{\infty} R_{l,k}$ и $S_l = \bigcup_{k=0}^{\infty} S_{l,k}$ являются подмножествами B_l и что если положить

$$C_l = (S_l, R_l)_{D_l} = \{\langle p, q\rangle_{D_l}\colon p \in S_l,\ q \in R_l\} \subset B_l,$$

то будет справедлива следующая лемма.

(7.4) Лемма. *Рассмотрим точку $x \in C_i$. Найдется такое j, что $\varphi_L W^s(x, C_i) \subset \varphi_{[-3\alpha, 3\alpha]}C_j$ и $P_{D_j}\varphi_{-L}W^u(P_{D_j}\varphi_L(x), C_j) \subset \subset W^u(x, C_i)$. Найдется такое k, что $\varphi_{-L}W^u(x, C_i) \subset \varphi_{[-3\alpha, 3\alpha]}C_k$ и $P_{D_i}\varphi_L W^s(P_{D_k}\varphi_{-L}(x), C_k) \subset W^s(x, C_i)$.*

Положим теперь $\mathscr{C} = \{C_i\}_{i=1}^n$, и для каждого j пусть $I_j = \{i\colon \exists x \in C_j^*$, такое, что $H_{\mathscr{C}}x \in C_i^*\}$. При $i \in I_j$ вследствие условия (e), которому удовлетворяют выбранные диски D_l, мы имеем $C_i \subset \varphi_{[0,\alpha]}D_j$, и, значит, множество $E_{ji} = C_j \cap \mathrm{Pr}_{D_j}(C_i)$ является прямоугольником с непустой внутренностью. Прямоугольники E_{ji} индуцируют разбиение C_j на четыре замкнутых прямоугольника, пересекающихся только по границам; следует выбрать точку $z \in E_{ji}^*$ и положить

$$E_{ji}^1 = \overline{E_{ji}^*},$$
$$E_{ji}^2 = \overline{\{y \in C_j^*\colon \langle z, y\rangle_{C_j} \in E_{ji}^*,\ \langle y, z\rangle \notin E_{ji}\}},$$
$$E_{ji}^3 = \overline{\{y \in C_j^*\colon \langle z, y\rangle_{C_j} \notin E_{ji},\ \langle y, z\rangle \in E_{ji}^*\}},$$
$$E_{ji}^4 = \overline{\{y \in C_j^*\colon \langle z, y\rangle_{C_j} \notin E_{ji},\ \langle y, z\rangle \notin E_{ji}\}}.$$

Мы получили покрытие $\mathscr{E}_j$ прямоугольника C_j прямоугольниками

$$\mathscr{E}_j = \left\{ \overline{\bigcap_{i \in I_j} E_{ji}^{\alpha_i *}} : 1 \leqslant \alpha_i \leqslant 4 \right\}.$$

Элементы $\mathscr{E}_j$ пересекаются только по границам, и $U_j = \bigcup_{E \in \mathscr{E}_j} E^* -$ это открытое плотное подмножество C_j. Значит, множество

$$\Gamma'(\mathscr{E}) = \left\{ x \in \Gamma(\mathscr{C}) : H_{\mathscr{C}}^k(x) \in \bigcup_{j=1}^{n} U_j \text{ при всех } k \in \mathbb{Z} \right\}$$

является бэровским подмножеством $\Gamma(\mathscr{C}) = C_1 \cup \ldots \cup C_n$.

Для положительного целого N и

$$x, y \in \Gamma'_N(\mathscr{E}) = \left\{ z \in \Gamma(\mathscr{C}) : H_{\mathscr{C}}^k(z) \in \bigcup_{j=1}^{n} U_j \text{ при всех } k \in [0, N] \right\}$$

отношение $x \underset{N}{\sim} y$ будет обозначать, что при всех $k \in [0, N]$ точки $H_{\mathscr{C}}^k(x)$ и $H_{\mathscr{C}}^k(y)$ лежат в одних и тех же C_j и в одинаковых элементах $\mathscr{E}_j$. Это отношение эквивалентности; обозначим $G_1, \ldots, G_m$ классы эквивалентности $(m = m(N) < \infty)$. Выберем различные *очень* маленькие числа $u_1, \ldots, u_m$ и положим $\mathscr{M}_N = \{\varphi_{u_p} \overline{G}_p\}_{p=1}^{m(N)}$.

(7.5) Лемма. *При большом N семейство $\mathscr{M}_N$ является марковским.*

Доказательство. Легко показать, что $\mathscr{M}_N$ — правильное семейство. Мы должны также показать, что каждое множество $\overline{G}_p$ — прямоугольник. Допустим, что $x, y \in G_p$, и рассмотрим $z = \langle x, y \rangle$. Мы утверждаем, что точка $H_{\mathscr{C}}^k(z)$ принадлежит тем же прямоугольникам C_j, что $H_{\mathscr{C}}^k(x)$ и $H_{\mathscr{C}}^k(y)$ при $0 \leqslant k \leqslant N$. Очевидно, это верно при $k = 0$; предположим, что это верно при $0 \leqslant k < k'$, но неверно при k', где $k' \leqslant N$.

Предположим, что все три точки $H_{\mathscr{C}}^{k'-1}(x)$, $H_{\mathscr{C}}^{k'-1}(y)$ и $H_{\mathscr{C}}^{k'-1}(z)$ лежат в C_j; $H_{\mathscr{C}}^{k'}(x)$ и $H_{\mathscr{C}}^{k'}(y)$ лежат в $C_{j'}$; $H_{\mathscr{C}}^{k'}(z)$ лежит в C_i. Тогда $j', i \in I_j$ и $i \neq j'$. Из того, что $H_{\mathscr{C}}^{k'-1}(x)$ и $H_{\mathscr{C}}^{k'-1}(y)$ содержатся в одних и тех же элементах $\mathscr{E}_j$, каждый из которых является прямоугольником, получаем (используя лемму 7.3), что точка

$$H_{\mathscr{C}}^{k'-1}(z) = \left\langle H_{\mathscr{C}}^{k'-1}(x), H_{\mathscr{C}}^{k'-1}(y) \right\rangle_{C_j}$$

также содержится в этих элементах $\mathscr{E}_j$. Из $z' = H_{\mathscr{C}}^{k'-1}(z) \in E_{ji}^1$ следует, что $x' = H_{\mathscr{C}}^{k'-1}(x) \in E_{ji}^1$; это означает, что $\varphi_t(x') \in C_i$

при некотором $0 < l < \alpha$. Из $H_{\mathscr{C}}(x') \in C_{l'}$ следует, что найдется такое s, $0 < s < l$, при котором $\varphi_s(x') \in C_{l'}$. Аналогично из $x' \in E^1_{ll'}$ получаем $z' \in E^1_{ll'}$, и, значит, существуют такие $0 < s' < t' < \alpha$, что

$$\varphi_{s'}(z') \in C_l \qquad \text{и} \qquad \varphi_{t'}(z') \in C_{l'}.$$

Но таким образом мы приходим к противоречию с приведенным выше условием (с). Значит, $H^k_{\mathscr{C}}(z)$ лежит в тех же самых C_l, что $H^k_{\mathscr{C}}(x)$ и $H^k_{\mathscr{C}}(y)$ (при $0 \leqslant k \leqslant N$); $H^k_{\mathscr{C}}(z)$ лежит также в тех же элементах $\mathscr{E}_j$, так как они прямоугольники и по лемме 7.3

$$H^k_{\mathscr{C}}(z) = \langle H^k_{\mathscr{C}}(x), H^k_{\mathscr{C}}(y)\rangle_{C_l}.$$

Отсюда следует, что $\bar{G}_p$ — прямоугольник.

Докажем теперь марковское условие 2.3(iii). Условие 2.3(ii) доказывается аналогично. Предположим, что $M_p = \varphi_{u_p}\bar{G}_p$ и

$$y \in V(M_p, M_q) = \overline{\{w \in T'(\mathscr{M}_N)\colon\ H^{-1}_{\mathscr{M}}(w) \in M_p,\ w \in M_q\}}.$$

Мы должны показать, что $W^u(y, M_q) \subset V(M_p, M_q)$. Поскольку $V(M_p, M_q)$ замкнуто, $\Gamma'(\mathscr{M}) \cap V(M_p, M_q)$ плотно в $V(M_p, M_q)$ и $W^u(y, M_q)$ непрерывно зависит от y, достаточно проверить включение для $y \in \Gamma'(\mathscr{M}) \cap V(M_p, M_q)$. Мы имеем $y = \varphi_{u_q}(y')$ с $y' \in G_q$. Пусть

$$H^k_{\mathscr{C}}(y') \in C_{l_k} \quad \text{при} \quad -1 \leqslant k \leqslant N.$$

Поскольку $W^u(y', \bar{G}_q) \cap G_q$ плотно в $W^u(y', \bar{G}_q)$ (G_q — открытый прямоугольник), достаточно доказать, что $x \in V(M_p, M_q)$ для $x = \varphi_{u_q}(x')$ с $x' \in W^u(y', \bar{G}_q) \cap G_q$.

Пусть $y_1 = H^{-1}_{\mathscr{C}}(y') \in C_{l_{-1}}$ и $x_1 = \Pr_{D_{l_{-1}}}(x')$. Тогда $x_1 \in W^u(y_1, D_{l_{-1}})$. По лемме 7.4 существует такое s, что $\varphi_L(y_1) \in \varphi_{[-\xi, \xi]}C_s$ и

$$P_{D_{l_{-1}}}\varphi_{-L}W^u(P_{D_s}\varphi_L(y_1), C_s) \subset W^u(y_1, C_{l_{-1}}).$$

При большом (по сравнению с L) N мы имеем

$$P_{D_s}\varphi_L(y_1) = H^k_{\mathscr{C}}(y')$$

для некоторого $k \in [0, N]$. Вследствие того, что $x' \underset{N}{\sim} y'$ и $x' \in W^u(y', C_l)$, мы получаем $H^k_{\mathscr{C}}(x') \in W^u(H^k_{\mathscr{C}}(y'), C_s)$ и $x_1 = P_{D_{l_{-1}}}\varphi_{-L}H^k_{\mathscr{C}}(x') \in W^u(y_1, C_{l_{-1}})$.

Мы хотим показать, что $x_1 \underset{N}{\sim} y_1$ (отсюда будет следовать, что $\varphi_{u_{l_{-1}}}(x_1) = H^{-1}_{\mathscr{M}}(x') \in M_p$). Достаточно показать, что x_1

и y_1 содержатся в одних и тех же элементах $\mathscr{E}_{l_{-1}}$ и что $x' = H_{\mathscr{C}}(x_1)$ (так как мы уже знаем, что $x' \underset{N}{\sim} y'$). Если хотя бы одно из этих утверждений не выполняется, то найдется некоторое $i \in I_{l_{-1}}$, при котором x_1 и y_1 лежат в различных $E_{l_{-1}i}$. Выберем $z \in \operatorname{int} E_{l_{-1}i}$. Из $x_1 \in W^u(y_1, C_{l_{-1}})$ следует, что $\langle z, x_1\rangle_{C_{l_{-1}}} = \langle z, y_1\rangle_{C_{l_{-1}}}$. Так как x_1 и y_1 содержатся в различных $E_{l_{-1}i}$, одна из точек $x_2 = \langle x_1, z\rangle_{C_{l_{-1}}}$ и $y_2 = \langle y_1, z\rangle_{C_{l_{-1}}}$ должна лежать в $\operatorname{int} E_{l_{-1}i}$, а другая вне $E_{l_{-1}i}$. Мы можем считать, что $y_2 \in \operatorname{int} E_{l_{-1}i}$.

Далее, $x_2' = \operatorname{Pr}_{D_l}(x_2) \notin C_i$ и $y_2' = \operatorname{Pr}_{D_l}(y_2) \in C_i$. Пусть $x_1' = \operatorname{Pr}_{D_l}(x_1)$ и $y_1' = \operatorname{Pr}_{D_l}(y_1)$. По лемме 7.4 существует такое s, что

$$\varphi_L W^s(y_2', C_i) \subset \varphi_{[-\xi, \xi]} C_s$$

и

$$P_{D_l}\varphi_{-L} W^u(P_{D_s}\varphi_L(y_2'), C_s) \subset W^u(y_2', C_i).$$

Так как N велико, существует такое $k \in [0, N]$, что $H^k_{\mathscr{C}} y' = \operatorname{Pr}_{D_s}\varphi_L(y_1') \in C_s$. Поскольку $y' \sim x'$, имеем $H^k_{\mathscr{C}} x' \in C_s$ и $H^k_{\mathscr{C}} x' \in W^u(H^k_{\mathscr{C}} y', C_s)$. Так как $x_2' = \langle x_1', y_2'\rangle_{D_l}$, по лемме 7.3 имеем

$$\begin{aligned} P_{D_s}\varphi_L(x_2') &= \langle P_{D_s}\varphi_L(x_1'), P_{D_s}\varphi_L(y_2')\rangle_{D_s} = \\ &= \langle H^k_{\mathscr{C}}(x'), P_{D_s}\varphi_L(y_2')\rangle_{C_s} \in W^u(P_{D_s}\varphi_L(y_2'), C_s). \end{aligned}$$

Отсюда

$$x_2' = P_{D_l}\varphi_{-L}(P_{D_s}\varphi_L(x_2')) \in W^u(y_2', C_i) \subset C_i,$$

и мы приходим к противоречию.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Adler R. L., Weiss B., Entropy, a complete metric invariant for automorphisms of the torus, *Proc. of the National Academy of Science*, **57** (1967), 1573—1576.
2. Bowen R., Walters P., Expansive one-parameter flows, *J. of Diff. Equations*, **12** (1972), 180—193.
3. Bowen R., Markov partitions for Axiom A diffeomorphisms, *Amer. J. Math.*, **92** (1970), 725—747.
4. Bowen R., Markov partitions and minimal sets for Axiom A diffeomorphisms, *Amer. J. Math.*, **94** (1970), 907—918. [Русский перевод в настоящем сборнике.]
5. Bowen R., Periodic orbits for hyperbolic flows, *Amer. J. Math.*, **94** (1972), 1—30.
6. Bowen R., One-dimensional hyperbolic sets for flows, *J. of Diff. Equations*, **12** (1972), 173—179.
7. Bowen R., Periodic points and measures for Axiom A diffeomorphisms. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **154** (1971), 377—397.
8. Bowen R., The equidistribution of closed geodesics, *Amer. J. Math.*, **94** (1972), 413—423.

9. Hadamard J., Les surfaces à courbures opposées et leur lignes géodesiques, *J. Math. Pures Appl.*, **4** (1898), 27—73.
10. Hirsch M., Palis J., Pugh C., Shub M., Neighborhoods of hyperbolic sets, *Invent. math.*, **9** (1970), 121—134.
11. Hirsch M., Pugh C., Shub M., Invariant manifolds, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **76** (1970), 1015—1019.
12. Manning A., Axiom A diffeomorphisms have rational zeta functions, *Bull. London Math. Soc.*, **3** (1971), 215—220.
13. Morse M., Representation of geodesics, *Amer. J. Math.*, **43** (1921), 33—51.
14. Morse M., Recurrent geodesics on a surface of negative curvature, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **22** (1921), 84—110.
15. Morse M., Symbolic dynamics, lectures notes, Inst. for Advanced Study, Princeton, 1966.
16. Ornstein D., Weiss B., Geodesic flows are Bernoullian, *Israel J. of Math.*, **14** (1973), 184—197.
17. Parathasarathy K., Probability measures on metric spaces, Academic Press, 1967.
18. Pugh C. C., Shub M., The Ω-stability theorem for flows, *Invent. Math.*, **11** (1970), 150—158.
19. Ратнер М., Об инвариантной мере для У-потока на трехмерном многообразии, *ДАН СССР*, **186**, № 2 (1969), 261—263.
20. Sigmund K., On the space of invariant measures for hyperbolic flows, *Amer. J. of Math.*, **94** (1972), 31—37.
21. Синай Я. Г., Марковские разбиения и У-диффеоморфизмы, *Функц. анализ и его прилож.*, **2**, № 1 (1968), 64—89.
22. Синай Я. Г., Построение марковских разбиений, *Функц. анализ и его прилож.*, **2**, № 3 (1968), 70—80.
23. Smale S., Diffeomorphisms with many periodic points, Differential and Combinatorial Topology, Princeton, 1965, pp. 63—80. [Русский перевод: Смейл С., Диффеоморфизмы с многими периодическими точками, сб. *Математика*, 11 : 4 (1967), 88—106.]
24. Smale S., Differentiable dynamical systems, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73** (1967), 747—817. [Русский перевод: Смейл С., Дифференцируемые динамические системы, *Успехи матем. наук*, **25**, вып. № 1 (1970), 113—185.]
25. Pugh C., Shub M., Ergodicity of Anosov actions, *Invent. Math.*, **15**, 1972), 1—23.
26. Ratner M., Markov partitions for Anosov flows on n-dimensional manifolds, *Israel J. Math.*, **15** (1973), 92—114.
27*. Бунимович Л. А., Об одном классе специальных потоков, *Изв. АН СССР*, Сер. мат., **38**, № 1 (1974), 213—227.
28*. Franco-Sanchez E., Flows with unique equilibrium states, *Amer. J. Math.*, **99**, № 3 (1977), 486—514.
29*. Боуэн Р., Рюэль Д., Эргодическая теория потоков, удовлетворяющих аксиоме А, четвертая статья настоящего сборника.
30*. Гуревич Б. М., Об инвариантной мере с максимальной энтропией для У-диффеоморфизмов, *Функц. анализ и его прилож.*, **4**, № 4 (1970), 21—30.
31*. Боуэн Р., Равновесные состояния и эргодическая теория диффеоморфизмов Аносова, первая статья настоящего сборника.
32*. Нитецки З., Введение в дифференциальную динамику, М., «Мир», 1975.
33*. Алексеев В. М., Символическая динамика, Одиннадцатая математическая школа, Киев, Изд-во Ин-та математики АН УССР, 1976.
34*. Динабург Е. И., Связь между различными энтропийными характеристиками динамических систем, *Изв. АН СССР*, сер. матем., **35**, № 2 (1971), 324—366.
35*. Galavotti G., Funzioni zeta ed insiemi basilari, Rend. Accad. Naz. Lincei, **61**, fasc. 5 (1976), 309—317.

ЭРГОДИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПОТОКОВ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ АКСИОМЕ А[1])

Р. Боуэн и Д. Рюэль

Пусть M — компактное (риманово) многообразие и f^t: $M \to M$ — дифференцируемый поток. Замкнутое f^t-инвариантное множество $\Lambda \subset M$, не содержащее неподвижных точек, называется *гиперболическим*, если

1) ограничение касательного расслоения на Λ можно представить в виде прямой суммы Уитни трех Tf^t-инвариантных непрерывных подрасслоений:

$$T_\Lambda M = E + E^s + E^u,$$

где E — одномерное поле направлений, касательных к траекториям потока;

2) существуют такие постоянные c, $\lambda > 0$, что

(a) $\|Tf^t(v)\| \leqslant ce^{-\lambda t}\|v\|$ для $v \in E^s$, $t \geqslant 0$,

(b) $\|Tf^{-t}(v)\| \leqslant ce^{-\lambda t}\|v\|$ для $v \in E^u$, $t \geqslant 0$.

Можно выбрать такое $t_0 > 0$ и так изменить λ, что приведенные условия будут выполняться при $c = 1$ для $t \geqslant t_0$. Мы можем также предположить, что для таких t отображение Tf^t (соответственно Tf^{-t}) растягивает подрасслоение E с меньшей скоростью, чем оно растягивает любой элемент из E^u (соответственно E^s). В этом случае говорят, что используемая метрика является *ляпуновской* по отношению к диффеоморфизму f^{t_0} [14]. В дальнейшем всегда предполагается, что $t_0 \leqslant 1$; этого можно достичь путем изменения масштаба времени t ($t \to t' = t/t_0$), которое не влияет на наши основные результаты.

Замкнутое инвариантное множество Λ называется *базисным гиперболическим* множеством, если

(a) оно не содержит неподвижных точек и является гиперболическим;

(b) замкнутые орбиты потока $f^t|\Lambda$ плотны в множестве Λ;

---

[1]) Bowen R., Ruelle D., The Ergodic Theory of Axiom A Flows, *Inventiones mathematicae*, 29 (1975), 181—202.

(c) поток $f^t|\Lambda$ топологически транзитивен;

(d) существует такое открытое множество $U \supset \Lambda$, для которого $\Lambda = \bigcap_{t \in \mathbb{R}} f^t U$.

Эти множества являются «строительными кирпичами» в теории потоков, удовлетворяющих «аксиоме А» Смейла [27]. Мы будем изучать главным образом *аттракторы*, т. е. базисные гиперболические множества Λ, для которых окрестность U в условии (d) можно выбрать так, чтобы $f^t U \subset U$ при $t \geqslant T_0$ (T_0 фиксировано), и, следовательно, $\Lambda = \bigcap_{t \geqslant 0} f^t U$.

В этой статье изучается асимптотическое поведение «в среднем» траекторий точек в окрестности U некоторого C^2-аттрактора.

А именно, мы построим такую эргодическую вероятностную меру μ_φ на C^2-аттракторе Λ, что для почти всех (по отношению к лебеговской мере) точек $x \in U$ и для любой непрерывной функции g: $U \to \mathbb{R}$ выполнено соотношение

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T g(f^t x)\, dt = \int g\, d\mu_\varphi \tag{1}$$

(см. теорему 5.1). Мера μ_φ будет описана как единственное равновесное состояние на множестве Λ, порожденное некоторой функцией $\varphi = \varphi^{(u)}$, определенной далее равенством (2) в § 4, т. е. как единственная f^t-инвариантная вероятностная мера μ на множестве Λ, которая максимизирует выражение

$$h_\mu(f^1) + \int \varphi\, d\mu,$$

где $h_\mu(f^1)$ — метрическая энтропия. Этот вариационный принцип (формально идентичный соответствующему принципу статистической механики [21]) полезен в данном случае, поскольку основанное на нем описание меры μ_φ сохраняется при переносе этой меры в пространство символической динамики для более детального изучения ситуации.

В этой статье результаты, касающиеся равновесных состояний [6, 7, 24] и аттракторов [24], полученные ранее для диффеоморфизмов, переносятся на случай потоков. Для У-потоков ($\Lambda = M$) мера μ_φ изучалась в работах [9, 16, 17, 20, 25, 26], а теория гиббсовских состояний (формально несколько отличающаяся от теории равновесных состояний, но приводящая к тем же самым мерам для базисных гиперболических множеств) была развита в работе [26]. Некоторые результаты, полученные здесь для потоков, являются новыми также и для диффеоморфизмов; в частности, это касается теоремы 5.6. Доказательства утверждений, относящихся к диффеоморфизмам, могут быть получены при помощи конструкции надстройки (или прямо путем упрощения соответствующих доказательств, относящихся к потокам).

Выяснение асимптотического поведения траекторий играет большую роль в изучении гладких динамических систем. Особый интерес представляет оно, в частности, в свете физических приложений. В настоящей работе мы рассматриваем только потоки, удовлетворяющие аксиоме A (A-потоки). Известно, что в этом случае траектория $f^t x$ очень чувствительна, или «неустойчива», по отношению к начальному условию x, и соотношение (1), которое дает возможность вычислить временно́е среднее «наблюдаемой» g, является, по-видимому, наилучшим способом описания асимптотического поведения траектории $f^t x$. Естественная проблема состоит в распространении формулы (1) на случай динамических систем, не удовлетворяющих аксиоме A.

Мы покажем, что мера $\mu_{\varphi(u)}$ непрерывно зависит от потока f^t (предложение 5.4). В этом же направлении Я. Г. Синай [26] доказал устойчивость меры μ_φ по отношению к малым стохастическим возмущениям У-потоков[1]). Формула (1) верна для почти всех точек x в области притяжения аттрактора; можно показать, что для A-потоков класса C^2 объединение областей притяжения всех аттракторов (включая стоки, т. е. притягивающие точки) покрывает все многообразие M с точностью до множества лебеговской меры нуль. Эквивалентное утверждение: если базисное множество не является аттрактором, то его устойчивое многообразие имеет меру нуль (теорема 5.6).

Можно показать, что если множество Λ не является замкнутой орбитой, то энтропия потока f^t по мере μ_φ положительна; это свидетельствует о «сильных эргодических свойствах» системы (μ_φ, f^t). Действительно, если ограничение потока f^t на множество Λ является топологическим перемешиванием[2]), то (μ_φ, f^t) — бернуллиевский поток (см. замечание 3.5). С точки зрения физических приложений полезно рассматривать корреляционные функции:

$$\rho_{gg'}(t) = \int (g \circ f^t) \cdot g' \, d\mu_\varphi - \int g \, d\mu_\varphi \cdot \int g' \, d\mu_\varphi.$$

---

[1]) Я. Г. Синай сообщил авторам, что соответствующая проблема для аттракторов диффеоморфизмов, удовлетворяющих аксиоме A, изучалась Ю. И. Кифером. [См. [33]. — *Ред.*]

[2]) То есть неустойчивый слой любой точки $x \in \Lambda$ плотен в Λ, см. теорему 14.1 добавления. — *Прим. перев.*

Для топологически перемешивающего А-потока $\lim_{t\to\infty}\rho_{gg'}(t)=0$, если $g, g'\in L^2(\mu_F)$ (замечание 3.5) [1].

Пусть g и g' — функции класса C^1; верно ли, что функция $\rho_{gg'}(t)$ экспоненциально стремится к 0 при $t\to\infty$?

Методы настоящей работы, по-видимому, не дают возможности ответить на этот вопрос. Для диффеоморфизмов проблема была решена положительно [24], [26].

Термины и обозначения

Многообразие M и риманова метрика на нем принадлежат классу C^∞. Поток f^t называется потоком класса C^r $(r\geqslant 1)$, если он соответствует векторному полю класса C^r на многообразии M; в этом случае базисное гиперболическое множество Λ для потока f^t называется базисным гиперболическим множеством класса C^r. Ограничение потока f^t на множество Λ топологически транзитивно, если в этом множестве содержится всюду плотная траектория.

Для облегчения ссылок мы приводим здесь определения устойчивых многообразий:

$$W_x^s=\{y\in M:\ \lim_{t\to\infty} d(f^t x,\ f^t y)=0\},$$

$$W_x^{cs}=\bigcup_{t\in R} W^s_{f^t x}.$$

Для любого $0\leqslant T\leqslant\infty$ на многообразии M определено расстояние

$$\delta_T(x,\ y)=\sup_{0\leqslant t\leqslant T} d(f^t x,\ f^t y);$$

символом $B_x(\varepsilon, T)$ обозначается замкнутая ε-окрестность точки x относительно этого расстояния и

$$W_x^s(\varepsilon)=W_x^s\cap B_x(\varepsilon,\ \infty).$$

Заменяя t на $-t$ и s на u, мы получаем определение неустойчивых многообразий. Положим также

$$W_\Lambda^s(\varepsilon)=\bigcup_{x\in\Lambda} W_x^s(\varepsilon)\quad \text{и т. д.}$$

Базисное гиперболическое множество Λ называется апериодическим, если для некоторой (и, следовательно, для любой) точки $x\in\Lambda$ множество $W_x^s\cap\Lambda$ плотно в Λ [2].

---

[1]) То есть поток f^t является перемешиванием и с эргодической точки зрения. — *Прим. ред.*

[2]) То есть если ограничение потока f^t на это множество является топологическим перемешиванием, см. теорему 14.1 добавления.— *Прим. ред.*

Через $f^*\mu$ обозначается образ меры μ при непрерывном отображении f.

2. СИМВОЛИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА

Ниже приводятся некоторые факты, касающиеся символической динамики на базисном гиперболическом множестве Λ [4]. Для любой матрицы $A = [A_{ij}]$ порядка n, состоящей из нулей и единиц, рассмотрим пространство двусторонних последовательностей

$$\Sigma_A = \left\{ \mathbf{x} = (x_i)_{i=-\infty}^{\infty} \in \{1, \ldots, n\}^Z : A_{x_i x_{i+1}} = 1 \ \forall i \in Z \right\}$$

и преобразование сдвига $\sigma_A: \Sigma_A \to \Sigma_A$, задаваемое формулой $\sigma_A(\mathbf{x}) = (x'_i)_{i=-\infty}^{\infty}$, где $x'_i = x_{i+1}$. Если снабдить множество $\{1, \ldots, n\}$ дискретной топологией, а множество последовательностей $\{1, \ldots, n\}^Z$ топологией прямого произведения, то множество Σ_A станет компактным метрическим пространством, а преобразование σ_A — гомеоморфизмом. Преобразование σ_A в пространстве Σ_A называется *транзитивной топологической цепью Маркова* (с конечным множеством состояний), если гомеоморфизм σ_A топологически транзитивен (т. е. для любых непустых открытых множеств U и V существует такое $n > 0$, что $f^n U \cap V \neq \varnothing$).

Для любой положительной непрерывной функции $\psi: \Sigma_A \to \to \mathbb{R}$ [1]) можно определить *специальный поток* (или *надстройку* над σ_A) следующим образом. Рассмотрим множество

$$Y = \{(\mathbf{x}, s): s \in [0, \psi(\mathbf{x})], \ \mathbf{x} \in \Sigma_A\} \subset \Sigma_A \times \mathbb{R}.$$

Для любой последовательности $\mathbf{x} \in \Sigma_A$ отождествим точки $(\mathbf{x}, \psi(\mathbf{x}))$ и $(\sigma_A(\mathbf{x}), 0)$. Полученное пространство $\Lambda(A, \psi)$ является компактным метрическим пространством (по поводу метрики см. [8] [2])). На пространстве $\Lambda(A, \psi)$ можно опреде-

---

[1]) Функция ψ в этом определении, вообще говоря, не обязана быть непрерывной. — *Прим. перев.*

[2]) В статье [8] рассматривается специальный поток, соответствующий гомеоморфизму $\varphi: Y \to Y$ компактного метрического пространства Y и положительной непрерывной функции $f: Y \to \mathbb{R}$. Поскольку все пространства надстроек гомеоморфны, достаточно построить метрику в пространстве Y_1, отвечающем функции f, тождественно равной 1. Это делается следующим образом. Пусть ρ — расстояние в Y. На множестве $Y \times \{t\}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, определено расстояние $\rho_t((y, t), (z, t)) = (1 - t)\rho(y, z) + t\rho(\varphi y, \varphi z)$, $y, z \in \in Y$. Для любой пары точек $x_1, x_2 \in Y_1$ рассмотрим всевозможные «ломаные» $x_1 = w_0, w_1, \ldots, w_k = x_2$, для которых любые две соседние точки w_i, w_{i+1} либо принадлежат одному множеству вида $Y \times \{t\}$, либо лежат на одной траектории специального потока. В первом случае расстояние между точками w_i, w_{i+1} равно $\rho_t(w_i, w_{i+1})$, а во втором — расстоянию в обычной

лить поток g^t:

$$g^t(\mathbf{x}, s) = (\mathbf{x}, s + t), \quad \text{если } s + t \in [0, \psi(\mathbf{x})];$$

при этом следует помнить об отождествлениях. Более точно, пусть $z = q(\mathbf{x}, s)$, где q: $Y \to \Lambda(A, \psi)$ — факторотображение; тогда $g^t(z) = q(\sigma_A^k \mathbf{x}, v)$, где число k выбрано так, что

$$v = t + s - \sum_{j=0}^{k-1} \psi(\sigma_A^j \mathbf{x}) \in [0, \psi(\sigma_A^k \mathbf{x})].$$

В дальнейшем рассматривается поток g^t в пространстве $\Lambda(A, \psi)$, построенном по функции ψ, которая удовлетворяет некоторому дополнительному условию. А именно, для любой функции ψ: $\Sigma_A \to \mathbb{R}$ положим

$$\operatorname{var}_n \psi = \sup \{|\psi(\mathbf{x}) - \psi(\mathbf{y})|: \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Sigma_A, x_i = y_i \ \forall |i| \leqslant n\}.$$

Обозначим

$$\mathcal{F}_A = \{\psi \in C(\Sigma_A): \exists b > 0, \ \alpha \in (0, 1), \text{ такие, что } \operatorname{var}_n \psi \leqslant b\alpha^n \text{ для всех } n \geqslant 0\}.$$

2.1 Лемма. *Пусть Λ — базисное гиперболическое множество. Тогда существуют топологически перемешивающая*[1]) *топологическая цепь Маркова σ_A: $\Sigma_A \to \Sigma_A$, положительная функция $\psi \in \mathcal{F}_A$ и непрерывная сюръекция ρ: $\Lambda(A, \psi) \to \Lambda$, для которых коммутативна диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} \Lambda(A, \psi) & \xrightarrow{g^t} & \Lambda(A, \psi) \\ \downarrow \rho & & \downarrow \rho \\ \Lambda & \xrightarrow{f^t} & \Lambda \end{array}$$

Это утверждение, за исключением свойства топологического перемешивания для σ_A, содержится в [4, § 2]. Если гомеоморфизм σ_A: $\Sigma_A \to \Sigma_A$ не перемешивает, то существует такое $m > 0$, что множество Σ_A можно представить в виде объединения непересекающихся замкнутых множеств: $\Sigma_A = X_1 \cup \ldots \cup X_m$, причем $\sigma_A(X_i) = X_{i+1}$ и гомеоморфизм

метрике на прямой $\mathbb{R}$. Если же точки w_i, w_{i+1} принадлежат одной траектории потока и одному горизонтальному сечению $Y \times \{t\}$, то расстояние между ними также равно $\rho_t(w_i, w_{i+1})$. Расстояние между любыми двумя точками $x_1, x_2 \in Y_1$ равно нижней грани длин всех «ломаных», соединяющих эти точки. — *Прим. перев.*

[1]) Гомеоморфизм F: $X \to X$ называется топологически перемешивающим, если для любых двух открытых непустых множеств U, $V \subset X$ существует такое n_0, что $U \cap F^n V \neq \varnothing$ при $n \geqslant n_0$.

$\sigma_A^m | X_l \colon X_l \to X_l$ топологически сопряжен с перемешивающей топологической цепью Маркова (см., например, [2, 2.7][1])).

Отождествим гомеоморфизм $\sigma_A^m \colon X_1 \to X_1$ с некоторой топологической цепью Маркова $\sigma_B \colon \Sigma_B \to \Sigma_B$ [2]) и положим

$$\psi'(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x}) + \psi(\sigma_A \mathbf{x}) + \ldots + \psi(\sigma_A^{m-1}\mathbf{x}).$$

Пространство $\Lambda(B, \psi')$ очевидным образом гомеоморфно пространству $\Lambda(A, \psi)$ и $\psi' \in \mathcal{F}_B$.

Другие свойства отображения ρ мы будем напоминать по мере необходимости. В дальнейшем ψ всегда является положительной функцией, принадлежащей множеству $\mathcal{F}_A$, а σ_A — перемешивающей топологической цепью Маркова.

Для любого гомеоморфизма f множество f-инвариантных вероятностных борелевских мер обозначается через $M(f)$. Если $F = (f^t)_{t \in \mathbb{R}}$ — непрерывный поток, то $M(F) = \bigcap_{t \in \mathbb{R}} M(f^t)$.

3. РАВНОВЕСНЫЕ СОСТОЯНИЯ

Напомним определение топологического давления $P(f, \varphi)$, соответствующего гомеоморфизму $f \colon X \to X$ компактного метрического пространства X и непрерывной функции $\varphi \colon X \to \mathbb{R}$ [23, 28][3]). Для любого $\varepsilon > 0$ и натурального n подмножество $E \subset X$ называется (ε, n)-*разделенным*, если

$$x, y \in E, \quad x \neq y \;\Rightarrow\; d(f^k x, f^k y) > \varepsilon \text{ для некоторого } k \in [0, n].$$

Положим по определению

$$Z_n(f, \varphi, \varepsilon) = \sup\left\{ \sum_{x \in E} \exp \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(T^k x) \colon E \text{ есть } (\varepsilon, n)\text{-разделенное множество} \right\},$$

$$P(f, \varphi, \varepsilon) = \varlimsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log Z_n(f, \varphi, \varepsilon),$$

$$P(f, \varphi) = \lim_{\varepsilon \to 0} P(f, \varphi, \varepsilon).$$

Если $\varphi = 0$, то величина $P(f, \varphi)$ совпадает с топологической энтропией $h(f)$ гомеоморфизма f; теория топологического дав-

---

[1]) См. также следствие в п. 4 добавления. В приведенном выше утверждении индексы l рассматриваются по модулю m. — *Прим. перев.*

[2]) При этом состояниями ТМЦ (Σ_B, σ_B) объявляются всевозможные наборы $(x_1 x_2 \ldots x_m)$, встречающиеся в последовательностях $\mathbf{x} \in \Sigma_A$. — *Прим. ред.*

[3]) А также § 2.B в первой статье настоящего сборника. — *Прим. ред.*

ления обобщает теорию топологической энтропии. Основной результат (доказанный Уолтерсом [28]) состоит в следующем [1]):

$$P(f, \varphi) = \sup_{\mu \in M(f)} \left(h_\mu(f) + \int \varphi \, d\mu \right).$$

Если гомеоморфизм f разделяющий, то существует такая мера $\mu \in M(f)$, что $h_\mu(f) + \int \varphi \, d\mu = P(f, \varphi)$ [2]).

Равновесным состоянием для функции $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$ по отношению к гомеоморфизму $f\colon X \to X$ называется мера $\mu \in M(f)$, для которой $h_\mu(f) + \int \varphi \, d\mu = P(f, \varphi)$, т. е. мера $\mu \in M(f)$, максимизирующая функционал $h_\mu(f) + \int \varphi \, d\mu$.

Рассмотрим теперь случай потоков. Пусть $F = (f^t\colon X \to \to X)$ — некоторый поток и $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Множество $E \subset X$ называется *(ε, T)-разделенным*, если

$$x, \ y \in E, \ x \neq y \ \Rightarrow \ d(f^t x, f^t y) > \varepsilon \text{ для некоторого } t \in [0, T].$$

Положим

$$Z_T(F, \varphi, \varepsilon) = \sup \left\{ \sum_{x \in E} \exp \int_0^T \varphi(f^t x) \, dt\colon \ E \text{ есть } (\varepsilon, t)\text{-разделенное множество} \right\},$$

$$P(F, \varphi, \varepsilon) = \overline{\lim_{T \to \infty}} \frac{1}{T} \log Z_T(F, \varphi, \varepsilon), \quad P(F, \varphi) = \lim_{\varepsilon \to 0} P(F, \varphi, \varepsilon).$$

Определение давления $P(F, \varphi)$ не зависит от выбора метрики в пространстве M. Непосредственно используя определения, можно проверить, что $P(F, \varphi) = P(f^1, \varphi^1)$, где $\varphi^1(x) = \int_0^1 \varphi(f^t x) \, dt$; кроме того, $\int \varphi \, d\mu = \int \varphi^1 d\mu$ для любой меры $\mu \in M(F)$. Поскольку $M(F) \subset M(f^1)$,

$$h_\mu(f^1) + \int \varphi \, d\mu = h_\mu(f^1) + \int \varphi^1 d\mu \leqslant P(f^1, \varphi^1) = P(F, \varphi)$$

для любой меры $\mu \in M(F)$. В статье [28] (см. также [10, стр. 348—349]) приведено рассуждение, которое показывает,

[1]) См. вариационный принцип 2.17 в первой статье настоящего сборника. — *Прим. ред.*

[2]) См. следствие 2.20 в первой статье настоящего сборника. — *Прим. ред.*

что для любой меры $\mu' \in M(f^1)$ существует такая мера $\mu \in \in M(F)$, что

$$h_\mu(f^1) + \int \varphi^1\, d\mu \geqslant h_{\mu'}(f^1) + \int \varphi^1\, d\mu'.$$

Поэтому

$$P(F, \varphi) = \sup_{\mu \in M(F)} \left(h_\mu(f^1) + \int \varphi\, d\mu \right).$$

Равновесным состоянием для функции φ (по отношению к потоку F) называется мера $\mu \in M(F)$, для которой

$$h_\mu(f^1) + \int \varphi\, d\mu = P(F, \varphi).$$

Для специального потока $G = \{g^t\}$ на множестве $\Lambda(A, \psi)$ существует хорошо известное взаимно однозначное соответствие между множествами $M(G)$ и $M(\sigma_A)$. Для любой меры $\nu \in M(\sigma_A)$ и лебеговской меры m на $\mathbb{R}$ мера $\nu \times m$ обладает тем свойством, что отождествления $Y \to \Lambda(A, \psi)$ осуществляются на множестве меры 0. Поэтому мера $\mu_\nu = = (\nu \times m(Y))^{-1} \nu \times m | Y$ является вероятностной мерой на множестве $\Lambda(A, \psi)$. Нетрудно проверить, что если $\nu \in M(\sigma_A)$, то $\mu_\nu \in M(G)$ и отображение $\nu \to \mu_\nu$ множества $M(\sigma_A)$ в множество $M(G)$ взаимно однозначно.

Известно, что для любой функции $\gamma \in \mathcal{F}_A$ существует единственное равновесное состояние ν по отношению к гомеоморфизму σ_A [6, 11, 22, 24][1]) и что мера ν непрерывно зависит от функции γ (слабая топология для мер ν, равномерная топология для функций γ). Ниже приводится соответствующее условие на функцию φ: $\Lambda(A, \psi) \to \mathbb{R}$, которое гарантирует единственность равновесного состояния.

3.1. Предложение. *Пусть* φ: $\Lambda(A, \psi) \to \mathbb{R}$ — *непрерывная функция,* $\Phi(\mathbf{x}) = \int\limits_0^{\psi(\mathbf{x})} \varphi(\mathbf{x}, t)\, dt$ *и* $c = P(G, \varphi)$. *Предположим, что* $\Phi \in \mathcal{F}_A$. *Тогда существует такая мера* $\mu_\varphi \in M(G)$, *что*

(a) *мера* μ_φ — *единственное равновесное состояние для функции* φ *по отношению к потоку* G;

(b) $\mu_\varphi = \mu_{\nu_0}$, *где* ν_0 — *единственное равновесное состояние*[2]) *для функции* $\Phi - c\psi$ *на множестве* Σ_A;

(c) *мера* μ_φ *эргодична и положительна на непустых открытых множествах*;

---

[1]) См. п. 1.4 в первой статье настоящего сборника. — *Прим. ред.*

[2]) Относительно гомеоморфизма σ_A. — Прим. ред.

(d) *для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое* $C_\varepsilon > 0$, *что*

$$\mu_\varphi(B_{x,G}(\varepsilon, T)) \geqslant C_\varepsilon \exp\left(-cT + \int_0^T \varphi(g^t x)\, dt\right)$$

для всех $x \in \Lambda(A, \psi)$, $T \geqslant 0$, *где*

$$B_{x,G}(\varepsilon, T) = \{y \in \Lambda(A, \psi): d(g^t y, g^t x) \leqslant \varepsilon \text{ при } t \in [0, T]\}.$$

Доказательство[1]. Обозначим $\gamma = \Phi - c\psi$. Поскольку $\Phi, \psi \in \mathcal{F}_A$, имеем $\gamma \in \mathcal{F}_A$. Следовательно, этой функции отвечает единственное равновесное состояние ν_0. По теореме Фубини $(\nu \times m)(Y) = \int \psi\, d\nu$ и $\int \varphi d\mu_\nu = \dfrac{\int \Phi\, d\nu}{\int \psi\, d\nu}$ для любой меры $\nu \in M(\sigma_A)$. Из одной теоремы Абрамова [1] следует, что

$$h_{\mu_\nu}(g^1) = \frac{h_\nu(\sigma_A)}{\int \psi\, d\nu}.$$

Следовательно,

$$c = P(G, \varphi) = \sup_{\mu \in M(G)} \left(h_\mu(g^1) + \int \varphi\, d\mu\right) = \sup_{\nu \in M(\sigma_A)} \frac{h_\nu(\sigma_A) + \int \Phi\, d\nu}{\int \psi\, d\nu}.$$

Поэтому $P(\sigma_A, \gamma) = \sup\limits_\nu \left(h_\nu(\sigma_A) + \int (\Phi - c\psi)\, d\nu\right) = 0$, причем верхняя грань по ν достигается (т. е. $\nu = \nu_0$) в точности для такой меры ν_0, для которой μ_{ν_0} — единственное равновесное состояние для функции φ. Отсюда следует, что мера $\mu_\varphi = \mu_{\nu_0}$ обладает свойствами (a) и (b); условие (c) выполнено, поскольку мера ν_0 обладает теми же свойствами (см. [6] или [24, приложение B][2]).

Проверим теперь справедливость утверждения (d). Пусть $x \in \Lambda(A, \psi)$, $x = (\mathrm{x}, t_1)$, $t_1 \in [0, \psi(\mathrm{x}))$ и $g^T x = (\sigma_A^n \mathrm{x}, t_2)$, где $n = n(x)$ таково, что

$$t_2 = T + t_1 - \sum_{k=0}^{n-1} \psi(\sigma_A^k \mathrm{x}) \in [0, \psi(\sigma_A^n \mathrm{x})).$$

---

[1] Другое доказательство пунктов (a), (b) и (d) было найдено Франко-Санчесом (E. Franco-Sanchez, Berkeley thesis, 1974).

[2] А также первую статью настоящего сборника. — *Прим. ред.*

Для любого $\varepsilon > 0$ существуют такое $\delta_\varepsilon > 0$ и такое $s_\varepsilon > 0$ (не зависящее от x или T), что[1])

$$B_{x,O}(\varepsilon, T) \supset \{(\mathbf{y}, t): |t - t_1| \leqslant s_\varepsilon \text{ и } d(\sigma_A^k \mathbf{y}, \sigma_A^k \mathbf{x}) < \delta_\varepsilon \text{ для всех } k \in [0, n-1]\}.$$

Не вдаваясь в подробности, отметим, что если $\psi \in \mathcal{F}_A$, то для любого $\alpha > 0$ при достаточно малом δ

$$d(\sigma_A^k \mathbf{x}, \sigma_A^k \mathbf{y}) \leqslant \delta \ \forall k \in [0, n-1] \Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} |\psi(\sigma_A^k \mathbf{x}) - \psi(\sigma_A^k \mathbf{y})| < \alpha.$$

Тогда

$$\mu_\varphi B_{x,O}(\varepsilon, T) \geqslant \frac{s_\varepsilon}{\int \psi \, d\nu_0} \nu_0 \{\mathbf{y}: d(\sigma_A^k \mathbf{y}, \sigma_A^k \mathbf{x}) \leqslant \delta_\varepsilon \ \forall k \in [0, n-1]\}.$$

В соответствии с леммой 5 из [6][2]) правая часть этого неравенства не меньше чем

$$a_\varepsilon \exp\left(\sum_{k=0}^{n-1} \gamma(\sigma_A^k \mathbf{x}) - nP(\sigma_A, \gamma)\right) = a_\varepsilon \exp \sum_{k=0}^{n-1} \gamma(\sigma_A^k \mathbf{x})$$

для некоторого $a_\varepsilon > 0$. Поскольку

$$\sum_{k=0}^{n-1} \psi(\sigma_A^k \mathbf{x}) + t_2 = T + t_1$$

---

[1]) В этой формуле точку $(\mathbf{y}, t)$ нужно заменить на точку $(\sigma_A^{-1}\mathbf{y}, \psi(\sigma_A^{-1}\mathbf{y}) + t)$ при $t < 0$ и на $(\sigma_A \mathbf{y}, t - \psi(\mathbf{y}))$, если $t > \psi(\mathbf{y})$.

[2]) Лемма 5 из [6] состоит в следующем. Пусть f — разделяющий траектории гомеоморфизм компактного метрического пространства X, обладающий свойством спецификации (в смысле Боуэна) и сохраняющий меру μ, φ — непрерывная функция, $S_n\varphi(x) = \varphi(x) + \varphi(f(x)) + \ldots + \varphi(f^{n-1}(x))$, $P(\varphi)$ — топологическое давление. Обозначим

$$Z_n^{\mathrm{per}}(\varphi) = \sum_{x \in \mathrm{Per}_n(f)} \exp(S_n\varphi(x)),$$

$$\mu_{\varphi, n} = [Z_n^{\mathrm{per}}(\varphi)]^{-1} \sum_{x \in \mathrm{Per}_n(f)} \exp(S_n\varphi(x)) \mu_x,$$

где μ_x — нормированная мера, сосредоточенная в точке x. Так как множество нормированных инвариантных борелевских мер $M_f(X)$ слабо компактно [34], последовательность $\mu_{\varphi, n}$ имеет предельную точку $\mu \in M_f(X)$. Пусть существуют такие $\varepsilon_0 > 0$ и K, что $d(f^k(x), f^k(y)) \leqslant \varepsilon_0$ при $0 \leqslant k < n \Rightarrow |S_n\varphi(x) - S_n\varphi(y)| \leqslant K$ для любого n. Тогда для всякого достаточно малого $\varepsilon > 0$ существует такое $A_\varepsilon > 0$, что для любой точки $y \in X$ и $n \geqslant 1$ выполнено неравенство

$$\mu\{x \in X: d(f^k(x), f^k(y)) \leqslant \varepsilon \ \forall k \in [0, n)\} \geqslant A_\varepsilon \exp(S_n\varphi(y) - nP).$$

Очевидно, что функция $\psi \in \mathcal{F}_A$ (определение пространства $\mathcal{F}_A$ приведено перед леммой 2.1) удовлетворяет условиям леммы. — *Прим. перев.*

и

$$\int_0^{t_1} \varphi(\mathbf{x}, t)\,dt + \int_0^T \varphi(g^t x)\,dt - \int_0^{t_*} \varphi(\sigma_A^n \mathbf{x}, t)\,dt = \sum_{k=0}^{n-1} \Phi(\sigma_A^k \mathbf{x}),$$

то легко видеть, что сумма $\sum_{k=0}^{n} \gamma(\sigma_A^k \mathbf{x})$ отличается от величины $-cT + \int_0^T \varphi(g^t x)\,dt$ не больше чем на $2\|\psi\|(|c| + \|\varphi\|)$. Отсюда следует (d).

3.2. Замечание. Специальные потоки устроены достаточно просто, поэтому справедливость утверждений (a) и (b) можно было бы доказать, не прибегая так часто к общим (и более сложным) результатам, касающимся топологического давления.

3.3. Теорема[1]**).** *Пусть Λ — базисное гиперболическое множество для потока F и функция $\varphi\colon \Lambda \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условию Гёльдера с положительным показателем. Тогда функция φ имеет единственное равновесное состояние μ_φ. Более того, мера μ_φ эргодична и положительна на непустых открытых подмножествах множества Λ, и для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $C_\varepsilon > 0$, что*

$$\mu_\varphi(B_{x,\,F|\Lambda}(\varepsilon, T)) \geqslant C_\varepsilon \exp\left(-P(F|\Lambda, \varphi)\,T + \int_0^T \varphi(f^t x)\,dt\right)$$

для всех $x \in \Lambda$, $T \geqslant 0$.

Доказательство. Применим предложение 3.1 к функции $\varphi^* = \varphi \circ \rho$ на множестве $\Lambda(A, \psi)$. Существуют такие $b_1 > 0$ и $\tau \in (0, 1)$, что

$$d(\rho(\mathbf{x}, 0), \rho(\mathbf{y}, 0)) \leqslant b_1 \tau^N,$$

если $x_i = y_i$ для всех $|i| \leqslant N$ (см. [4, лемма 2.2(i)]).

Поскольку F — дифференцируемый поток, существует такая константа b_2, что

$$d(f^t x, f^t y) \leqslant b_2 d(x, y) \quad \text{при } t \in [0, \|\psi\|].$$

Условие Гёльдера на функцию φ состоит в том, что

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant b_3 d(x, y)^\alpha \quad \text{при некоторых } \alpha > 0 \text{ и } b_3 > 0.$$

---

[1]) Ср. с аналогичной теоремой 4.1 для диффеоморфизмов в первой статье настоящего сборника. — *Прим. ред.*

Объединяя эти неравенства и предполагая, что $x_i = y_i$ при всех $i \in [-N, N]$, получаем следующее неравенство:

$$\left| \int_0^{\psi(\mathbf{x})} \varphi^*(\mathbf{x}, t)\,dt - \int_0^{\psi(\mathbf{y})} \varphi^*(\mathbf{y}, t)\,dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \|\varphi\| \, |\psi(\mathbf{x}) - \psi(\mathbf{y})| + \int_0^{\psi(\mathbf{x})} |\varphi(f^t\rho(\mathbf{x}, 0)) - \varphi(f^t\rho(\mathbf{y}, 0))|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \|\varphi\| \, |\psi(\mathbf{x}) - \psi(\mathbf{y})| + \|\psi\| \, b_3 (b_2 b_1)^n (\tau^\alpha)^N.$$

Поскольку $\psi \in \mathscr{F}$, отсюда следует, что $\Phi^* \in \mathscr{F}$, где $\Phi^*(\mathbf{x}) = \int_0^{\psi(\mathbf{x})} \varphi^*(\mathbf{x}, t)\,dt$. Поэтому функция φ^* имеет единственное равновесное состояние μ_{φ^*}, как и в предыдущем предложении.

Напомним [4], что существуют такие замкнутые подмножества $A_s = \rho^{-1}(\Delta^s \mathscr{M})$ и $A_u = \rho^{-1}(\Delta^u \mathscr{M})$ множества $\Lambda(A, \psi)$, для которых

(a) $A_s \neq \Lambda(A, \psi) \neq A_u$,

(b) $g^t A_s \subset A_s$, $g^{-t} A_u \subset A_u$ $\forall t > 0$,

(c) отображение ρ взаимно однозначно вне множества

$$\bigcup_{t \in R} g^t (A_u \cup A_s) = \bigcup_{n \in Z} g^n (A_u \cup A_s).$$

Поскольку мера μ_{φ^*} положительна на непустых открытых подмножествах, $\mu_{\varphi^*}(A_s) \neq 1 \neq \mu_{\varphi^*}(A_u)$; из эргодичности меры μ_{φ^*} и односторонней инвариантности обоих множеств следует, что $\mu_{\varphi^*}(A_s) = 0 = \mu_{\varphi^*}(A_u)$. Поэтому из (c) вытекает, что отображение ρ является изоморфизмом измеримых потоков (G, μ_{φ^*}) и $(F | \Lambda, \mu_\varphi)$, где $\mu_\varphi = \rho^* \mu_{\varphi^*}$. В частности, $h_{\mu_\varphi}(f^1) = h_{\mu_{\varphi^*}}(g^1)$ и

$$h_{\mu_\varphi}(f^1) + \int \varphi\,d\mu_\varphi = h_{\mu_{\varphi^*}}(g^1) + \int \varphi^*\,d\mu_{\varphi^*} = P(G, \varphi^*).$$

Поскольку поток $F | \Lambda$ является фактором потока G и $\varphi^* = \varphi \circ \rho$, то $P(F | \Lambda, \varphi) \leqslant P(G, \varphi^*)$ (см. Уолтерс [28, теорема 2.2][1]); так как $h_{\mu_\varphi}(f^1) + \int \varphi\,d\mu_\varphi = P(G, \varphi^*)$, то $P(F | \Lambda, \varphi) = P(G, \varphi^*)$

[1]) Для непрерывных отображений это предложение 2.13 в первой статье настоящего сборника. Для потоков можно воспользоваться равенством $P(\{f^t\}, \varphi) = P\left(f^1, \int_0^1 \varphi(f^t x)\,dt\right)$. — *Прим. ред.*

и мера μ_φ является равновесным состоянием для функции φ. Если бы существовало другое равновесное состояние μ для функции φ, то $\mu = \rho^* \mu'$ для некоторой меры $\mu' \in M(G)$ (в этом легко убедиться, применяя теорему Хана — Банаха и Маркова — Какутани) [1]) и

$$h_{\mu'}(g^1) + \int \varphi^* \, d\mu' \geqslant h_\mu(f^1) + \int \varphi \, d\mu = P(F \mid \Lambda, \varphi) = P(G, \varphi^*).$$

Поэтому мера μ' является равновесным состоянием для функции φ^*, $\mu' = \mu_{\varphi^*}$ и $\mu = \mu_\varphi$. Таким образом, мера μ_φ — единственное равновесное состояние. Остальные свойства меры μ_φ вытекают из соответствующих свойств меры μ_{φ^*}, сформулированных в предложении 3.1.

3.4. Замечание. Для функции φ, тождественно равной 0, единственность равновесного состояния означает в точности, что поток $F \mid \Lambda$ имеет единственную инвариантную меру, максимизирующую энтропию. Это было доказано ранее в [5].

3.5. Замечание. В [2] и [24] было доказано, что динамическая система (σ_A, ν_0) [2]), где ν_0 — равновесное состояние для функции $\gamma \in \mathscr{F}_A$, изоморфна сдвигу Бернулли. Соответствующее утверждение для динамической системы $(F \mid \Lambda, \mu_\varphi)$ следует из других результатов. Если ограничение $F \mid \Lambda$ является топологическим перемешиванием (т. е. если для любой точки $x \in \Lambda$ пересечение $W^u(x) \cap \Lambda$ плотно в Λ, где $W^u(x) = \{y : d(f^{-t}x, f^{-t}y) \to 0 \text{ при } t \to +\infty\}$), то поток G также является топологическим перемешиванием; Я. Г. Синай (см. [26, стр. 43]), применив одну теорему Гуревича [12], показал, что динамическая система (G, μ_{φ^*}) является K-потоком. Отметим, что, хотя Я. Г. Синай пользуется формализмом гиббсовских состояний вместо равновесных, построенная им мера является в точности мерой μ_{φ^*}. М. Ратнер [20], а также Л. А. Бунимович [9] доказали, что в случае перемешивания динамическая система (G, μ_{φ^*}) в действительности является бернуллиевской (т. е. при каждом $t \neq 0$ динамическая система (g^t, μ_{φ^*}) изоморфна сдвигу Бернулли). Поскольку $(F \mid \Lambda, \mu_\varphi) \approx (G, \mu_{\varphi^*})$, топологически перемешивающий поток $(F \mid \Lambda, \mu_\varphi)$ является бернуллиевским, если функция φ удовлетворяет условию Гёльдера. В этом случае

$$\lim_{t \to \infty} \int (g \circ f^t) \cdot g' \, d\mu_\varphi = \int g \, d\mu_\varphi \cdot \int g' \, d\mu_\varphi$$

---

[1]) См. лемму 4.3 в первой статье настоящего сборника. — *Прим. ред.*

[2]) См. предложение 3.1. — *Прим. перев.*

для всех g, $g' \in L^2(\mu_\varphi)$[1]). (Это следует из того факта, что при каждом t система (f^t, μ_φ) изоморфна сдвигу Бернулли, а также из непрерывности потока f^t.)

4. АТТРАКТОРЫ

Предположим теперь, что Λ — базисное гиперболическое множество класса C^2. Пусть $x \in \Lambda$; обозначим $\lambda_t(x)$ якобиан линейного отображения $Df^t\colon E_x^u \to E_{f^t x}^u$ (при этом используется скалярное произведение, индуцированное римановой метрикой). Положим

$$\varphi^{(u)}(x) = -\left.\frac{d \ln \lambda_t(x)}{dt}\right|_{t=0} = -\left.\frac{d\lambda_t(x)}{dt}\right|_{t=0}. \tag{2}$$

Если f^t — поток класса C^2, то функция $\varphi^{(u)}(x)$ определена всюду на Λ и дифференцируемо зависит от подпространства E_x^u (следовательно, непрерывно зависит от x). Так как $\lambda_{T+t}(x) = \lambda_t(f^T x)\lambda_T(x)$, то

$$-\ln \lambda_t(f^T x) = -\ln \lambda_{T+t}(x) + \ln \lambda_T(x)$$

и

$$\varphi^{(u)}(f^T x) = -\left.\frac{d \ln \lambda_s(x)}{ds}\right|_{s=T}.$$

Отсюда следует, что

$$\int_0^T \varphi^{(u)}(f^t x)\, dt = -\ln \lambda_T(x).$$

Это как раз тот самый интеграл, который фигурирует в теореме 3.3, если положить $\varphi = \varphi^{(u)}$.

4.1. Лемма. Если Λ — *базисное гиперболическое множество класса* C^2, *то определенная выше функция* $\varphi^{(u)}\colon \Lambda \to \mathbb{R}$ *удовлетворяет условию Гёльдера с положительным показателем.*

Доказательство. Функция $x \to E_x^u$ удовлетворяет условию Гёльдера (см. 3.1 в [19])[2]), а функция $E_x^u \to \varphi^{(u)}(x)$ дифференцируема, поэтому композиция $x \to \varphi^{(u)}(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера.

---

[1]) То есть поток является перемешивающим и с эргодической точки зрения. — *Прим. ред.*

[2]) Для У-потоков этот результат был получен Д. В. Аносовым [29]. — *Прим. ред.*

4.2. Первая лемма об объеме. *Пусть Λ — базисное гиперболическое множество класса C^2, и пусть*

$$B_x(\varepsilon, T) = \{y \in M\colon\ d(f^t x, f^t y) \leqslant \varepsilon \ \text{ для всех } \ t \in [0, T]\}.$$

Тогда для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ существует такая константа $c_\varepsilon > 1$, что

$$m(B_x(\varepsilon, T))\,\lambda_T(x) \in [c_\varepsilon^{-1},\ c_\varepsilon]$$

при любых $x \in \Lambda$ и $T \geqslant 0$. (Здесь m — мера Лебега на M, индуцированная римановой метрикой.)

4.3. Вторая лемма об объеме. *Для любых достаточно малых ε, $\delta > 0$ существует такое $d = d(\varepsilon, \delta) > 0$ (не зависящее от n), что*

$$m(B_y(\delta, n)) \geqslant d \cdot m(B_x(\varepsilon, n))$$

для любых $x \in \Lambda$ и $y \in B_x(\varepsilon, n)$.

Эти две леммы доказаны в приложении.

4.4. Предложение. *Пусть Λ — базисное гиперболическое множество класса C^2.*

(a) *Если*

$$B_\Lambda(\varepsilon, T) = \bigcup_{x \in \Lambda} B_x(\varepsilon, T),$$

то (для достаточно малого ε)

$$P(F \mid \Lambda, \varphi^{(u)}) = \overline{\lim_{T \to \infty}}\ \frac{1}{T} \log m(B_\Lambda(\varepsilon, T)) \leqslant 0. \tag{3}$$

(b) *Для любой точки $x \in \Lambda$ положим*

$$W_x^s(\varepsilon) = \{y \in M\colon\ \lim_{t \to \infty} d(f^t y, f^t x) = 0 \ \text{ и } \ d(f^t y, f^t x) \leqslant \varepsilon \ \ \forall t \geqslant 0\}$$

и $W_\Lambda^s(\varepsilon) = \bigcup_{x \in \Lambda} W_x^s(\varepsilon)$. *Тогда если* $m(W_\Lambda^s(\varepsilon)) > 0$, *то* $P(F \mid \Lambda, \varphi^{(u)}) = 0$ *и*

$$h_{\mu_{\varphi^{(u)}}}(f^1) = -\int \varphi^{(u)}\, d\mu_{\varphi^{(u)}}. \tag{4}$$

В частности, это утверждение имеет место, если Λ — аттрактор.

Доказательство. Пусть $0 < \delta \leqslant \varepsilon$. Если E — максимальное (δ, T)-разделенное множество для потока $F \mid \Lambda$, то

$$\bigcup_{x \in E} B_x(\delta/2, T) \subset B_\Lambda(\varepsilon, T) \subset \bigcup_{x \in E} B_x(\delta + \varepsilon, T).$$

Здесь множества $B_x(\delta/2, T)$ попарно не пересекаются; второе включение следует из того, что $\Lambda \subset \bigcup_{x \in E} B_x(\delta, T)$. Таким образом, при достаточно малом ε из первой леммы об объеме следует, что

$$c_{\delta/2}^{-1} \sum_{x \in E} \lambda_T(x)^{-1} \leqslant m(B_\Lambda(\varepsilon, T)) < c_{\delta+\varepsilon} \sum_{x \in E} \lambda_T(x)^{-1}.$$

Поэтому

$$c_{\delta/2}^{-1} Z_T(F \mid \Lambda, \varphi^{(u)}, \delta) \leqslant m(B_\Lambda(\varepsilon, T)) \leqslant c_{\delta+\varepsilon} Z_T(F \mid \Lambda, \varphi^{(u)}, \delta)$$

и

$$P(F \mid \Lambda, \varphi^{(u)}, \delta) = \overline{\lim_{T \to \infty}} \frac{1}{T} \log m(B_\Lambda(\varepsilon, T)).$$

Переход к пределу при $\delta \to 0$ дает формулу (3), тем самым доказывая (a).

Из теоремы 3.3 и леммы 4.1 следует, что функция $\varphi = \varphi^{(u)}$ имеет единственное равновесное состояние $\mu_{\varphi^{(u)}}$. По определению равновесных состояний равенство (4) эквивалентно тому, что $P(F \mid \Lambda, \varphi^{(u)}) = 0$. Последнее утверждение следует из (3), если

$$m(B_\Lambda(\varepsilon, T)) \geqslant m(W_\Lambda^s(\varepsilon)) > 0.$$

Существует такая окрестность V множества Λ, что

$$W_\Lambda^s(\varepsilon) \supset \{y \in M: f^t y \in V \text{ для всех } t \geqslant 0\}.$$

Действительно, в [13, 5.1] это утверждение доказано для диффеоморфизмов, и там же указано, как изменить доказательство, чтобы оно проходило для потоков. Если Λ — аттрактор, то существует такая окрестность U' множества Λ, что $f^t y \in V$ для всех $t \geqslant 0$, если $y \in U'$. Тогда $U' \subset W_\Lambda^s(\varepsilon)$, и поэтому $m(W_\Lambda^s(\varepsilon)) > 0$.

4.5. Замечание. Изменение масштаба времени t ($t \to t' = t/t_0$) не меняет инвариантных мер; при этом энтропии $h_\mu(f^1)$ соответствует энтропия $h_\mu(f'^1) = t_0 h_\mu(f^1)$ (см. [1]), а функции $\varphi^{(u)}$ — функция $\varphi'^{(u)} = t_0 \varphi^{(u)}$. Поэтому, как это и было отмечено во введении, изменение масштаба времени не оказывает влияния на меру $\mu_{\varphi^{(u)}}$ и на основные результаты, приведенные ниже. Изменение римановой метрики на многообразии M, как легко видеть, сопровождается изменением функции $\varphi^{(u)}$, но не меняет меру $\mu_{\varphi^{(u)}}$ и топологическое давление $P(F \mid \Lambda, \varphi^{(u)})$.

4.6. Следствие. *Пусть Λ — базисное гиперболическое множество класса C^2. Тогда для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ существует такая константа c'_ε, что при всех $x \in \Lambda$ и $T \geqslant 0$*

$$m(B_x(2\varepsilon, T)) \leqslant c'_\varepsilon \mu_{\varphi^{(u)}}(B_x(\varepsilon, T)).$$

Это следует из теоремы 3.3, леммы 4.2 и предложения 4.4 (а) с $c'_\varepsilon = c_{2\varepsilon}/C_\varepsilon$.

5. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

5.1. Теорема. *Пусть Λ — гиперболический аттрактор класса C^2, W^s_Λ — его область притяжения и g: $M \to \mathbb{R}$ — любая непрерывная функция. Тогда для m-почти всех точек $x \in W^s_\Lambda$*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T g(f^t x)\,dt = \int g\,d\mu,$$

(т. е. x — типичная точка[1]*) для меры $\mu_{\varphi(u)}$).*

Доказательство. Мы можем заменить множество W^s_Λ на произвольную окрестность U множества Λ, для которой $f^tU \subset U$ при всех $t \geqslant t_0$ и $\bigcap\limits_{t\geqslant 0} f^tU = \Lambda$. Положим

$$\bar g(T, x) = \frac{1}{T}\int_0^T g(f^t x)\,dt, \qquad \bar g = \int g\,d\mu_\varphi,$$

$$E(g, \delta) = \{x \in U\colon \varlimsup_{T\to\infty} |\bar g(T, x) - \bar g| \geqslant \delta\}.$$

Выберем настолько малое $\varepsilon > 0$, чтобы $|g(f^t x) - g(f^t x')| < \delta/4$ при $d(x, x') < \varepsilon$ и $0 \leqslant t \leqslant 1$. Положим $C_n(g, \delta') = \{x \in U\colon |\bar g(n, x) - \bar g| > \delta'\}$; тогда

$$E(g, \delta) \subset \bigcap_{N=0}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} C_n\left(g, \frac{3\delta}{4}\right) \subset E\left(g, \frac{3\delta}{4}\right).$$

Зафиксируем теперь $N > 0$ и построим последовательно, как указано ниже, конечные подмножества S_N, S_{N+1}, ... множества Λ. Рассмотрим в качестве S_n $(n \geqslant N)$ максимальное подмножество в пересечении $C_n(g, \delta/2) \cap \Lambda$, удовлетворяющее следующим условиям:

(a) $B_x(\varepsilon, n) \cap B_y(\varepsilon, k) = \varnothing$ для $x \in S_n$, $y \in S_k$, $N \leqslant k < n$;

(b) $B_x(\varepsilon, n) \cap B_{x'}(\varepsilon, n) = \varnothing$ для $x, x' \in S_n$, $x \neq x'$.

(Заметим, что все множества S_n конечны.) Выберем такое $\alpha > 0$, чтобы

$$B_\Lambda(\alpha) \subset W^s_\Lambda(\varepsilon) = \bigcup_{z\in\Lambda} W^s_z(\varepsilon)$$

---

[1]) Точка Биркгофа. — *Прим. перев.*

($B_\Lambda(\alpha)$ — замкнутая α-окрестность множества Λ). Из выбора ε следует, что если

$$y \in B_\Lambda(\alpha) \cap C_n\left(g, \frac{3\delta}{4}\right) \qquad (n \geqslant N)$$

и $y \in W_z^s(\varepsilon)$, где $z \in \Lambda$, то $z \in C_n(g, \delta/4)$. Из максимальности множества S_n вытекает, что

$B_z(\varepsilon, n) \cap B_x(\varepsilon, k) \neq \varnothing$ для некоторой точки $x \in S_k$, $N \leqslant k \leqslant n$,

и в этом случае $B_x(2\varepsilon, k) \supset B_z(\varepsilon, n) \supset W_z^s(\varepsilon) \ni y$. Поэтому

$$B_\Lambda(\alpha) \cap \bigcup_{n=N}^{\infty} C_n\left(g, \frac{3\delta}{4}\right) \subset \bigcup_{k=N}^{\infty} \bigcup_{x \in S_k} B_x(2\varepsilon, k).$$

По лемме 4.2

$$m\left(B_\Lambda(\alpha) \cap \bigcup_{n=N}^{\infty} C_n\left(g, \frac{3\delta}{4}\right)\right) \leqslant A'_{2\varepsilon} \sum_{k=N}^{\infty} \sum_{x \in S_k} \exp \int_0^k \varphi(f^t x)\, dt. \qquad (5)$$

В силу определения множества S_n все множества в объединении $V_N = \bigcup_{k=N}^{\infty} \bigcup_{x \in S_k} B_x(\varepsilon, k)$ попарно не пересекаются. Число ε выбрано таким образом, что $B_x(\varepsilon, k) \subset C_k(g, \delta/4)$ для $x \in S_k \subset C_k(g, \delta/2)$, поэтому $V_N \subset \bigcup_{k=N}^{\infty} C_k(g, \delta/4)$. Из эргодичности меры $\mu_{\varphi(u)}$ следует, что

$$0 = \mu_{\varphi(u)}\left(E\left(g, \frac{\delta}{4}\right)\right) \geqslant \mu_{\varphi(u)}\left(\bigcap_{N=0}^{\infty} \bigcup_{k=N}^{\infty} C_k\left(g, \frac{\delta}{4}\right)\right) =$$
$$= \lim_{N \to \infty} \mu_{\varphi(u)}\left(\bigcup_{k=N}^{\infty} C_k\left(g, \frac{\delta}{4}\right)\right)$$

и $\lim_{N \to \infty} \mu_{\varphi(u)}(V_N) = 0$. Из теоремы 3.3 (и того факта, что $P(F \mid \Lambda, \varphi^{(u)}) = 0$; см. также предложение 4.4) получаем неравенство

$$\mu_{\varphi(u)}(V_N) \geqslant C_\varepsilon \sum_{k=N}^{\infty} \sum_{x \in S_k} \exp \int_0^k \varphi(f^t x)\, dt.$$

Следовательно, сумма в правой части стремится к 0 при $N \to \infty$ и ввиду неравенства (5)

$$\lim_{N \to \infty} m\left(B_\Lambda(\alpha) \cap \bigcup_{n=N}^{\infty} C_n\left(g, \frac{3\delta}{4}\right)\right) = 0.$$

Таким образом, $m(B_\Lambda(\alpha) \cap E(g, \delta)) = 0$.

Далее, $f^t E(g, \delta) \subset E(g, \delta)$ для всех $t \geqslant 0$ и $f^t(U) \subset B_\Lambda(\alpha)$ для некоторого $t > 0$. Так как f^t — диффеоморфизм, то из неравенства $m(f^t E(g, \delta)) \leqslant m(B_\Lambda(\alpha) \cap E(g, \delta)) = 0$ вытекает, что $m(E(g, \delta)) = 0$. Пусть $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ — всюду плотная последовательность непрерывных функций $\bar{U} \to \mathbb{R}$. Тогда для любой точки x вне исключительного множества

$$\bigcup_{k,\, m \geqslant 1} E\left(g_k, \frac{1}{m}\right)$$

m-меры нуль выполнено равенство $\lim\limits_{T \to \infty} \bar{g}_k(T, x) = \hat{g}_k$; поскольку последовательность $\{g_k\}$ всюду плотна, отсюда следует, что $\lim\limits_{T \to \infty} \bar{g}(T, x) = \hat{g}$ для любой непрерывной функции $g\colon \bar{U} \to \mathbb{R}$.

5.2. Замечание. В случае У-потока ($\Lambda = M$), обладающего инвариантной (вероятностной) мерой μ', абсолютно непрерывной по отношению к мере Лебега m, из этой теоремы вытекает известный факт: $\mu' = \mu_{\varphi(u)}$.

5.3. Теорема. *Пусть Λ — аттрактор класса C^2, W^s_Λ — его область притяжения, ν — вероятностная мера, абсолютно непрерывная по отношению к мере m, с носителем в множестве W^s_Λ. Если ограничение потока F на множество Λ является топологическим перемешиванием, то*

$$\lim_{t \to \infty} \int (g \circ f^t)\, d\nu = \int g\, d\mu_{\varphi(u)}$$

для любой непрерывной функции $g\colon M \to \mathbb{R}$.

Доказательство. Выберем окрестность U так же, как в доказательстве теоремы 5.1, и предположим, что $\operatorname{supp} \nu \subset U$. Рассмотрим индуцированный оператор f^{*t}

$$(f^{*t}\nu)(g) = \nu(g \circ f^t)$$

и положим $\mu_{\varphi(u)} = \mu$. Нужно показать, что слабый предел $\lim\limits_{t \to \infty} f^{*t}\nu$ совпадает с μ. При доказательстве этого факта можно предположить, что $\nu = r \cdot m$, где $r \geqslant 0$ — ограниченная функция (это следует из плотности ограниченных функций в пространстве L^1).

Так же, как в доказательстве предложения 4.4, для любого $\varepsilon > 0$ существует такая окрестность U' множества Λ, для которой $U' \subset W^s_\Lambda(\varepsilon)$. Выберем такое $t(\varepsilon) > 0$, чтобы $f^{t(\varepsilon)}U \subset U'$ и, следовательно,

$$\operatorname{supp} f^{*t(\varepsilon)}\nu \subset W^s_\Lambda(\varepsilon).$$

Пусть $E \subset \Lambda$ — максимальное (ε, T)-разделенное множество для потока $F|\Lambda$; тогда

$$\operatorname{supp} f^{*t(\varepsilon)}\nu \subset \bigcup_{x \in E} B_x(2\varepsilon, T).$$

Пусть $(\psi_x)_{x \in E}$ — неотрицательное измеримое разбиение единицы на множестве $\operatorname{supp} f^{*t(\varepsilon)}\nu$, подчиненное покрытию множествами $B_x(2\varepsilon, T)$. Обозначим через χ_x характеристическую функцию множества $B_x(\varepsilon, T)$. Положим

$$\nu_{\varepsilon, T} = \sum_{x \in E} \frac{\int \psi_x d(f^{*t(\varepsilon)}\nu)}{\int \chi_x \, d\mu} \cdot \chi_x \mu;$$

$\nu_{\varepsilon, T}$ — нормированная мера, абсолютно непрерывная относительно меры μ, с равномерно ограниченной по T плотностью. Действительно, согласно следствию 4.6,

$$\frac{\int \psi_x d(f^{*t(\varepsilon)}\nu)}{\int \chi_x \, d\mu} \leqslant \| r_{t(\varepsilon)} \|_\infty \frac{m(B_x(2\varepsilon, T))}{\mu(B_x(\varepsilon, T))} \leqslant C'_\varepsilon \| r_{t(\varepsilon)} \|_\infty$$

(здесь $r_{t(\varepsilon)}$ обозначает плотность меры $f^{*t(\varepsilon)}\nu$ по мере m).

Заметим, что мера $\nu_{\varepsilon, T}$ получается перераспределением меры $f^{*t(\varepsilon)}\nu$, причем это перераспределение осуществляется таким образом, что вся масса, перетекающая в множество $B_x(\varepsilon, T)$, приходит из множества $B_x(2\varepsilon, T)$. Поэтому мера $f^{*t}\nu_{\varepsilon, T}$ также получается из меры $f^{*(t+t(\varepsilon))}\nu$ с помощью перераспределения, при котором вся масса, перетекающая в множество $f^tB_x(\varepsilon, T)$, приходит из множества $f^tB_x(2\varepsilon, T)$. Диаметр множества $f^tB_x(2\varepsilon, T)$ не превосходит 4ε, если $0 \leqslant t \leqslant T$; поэтому если $\mathscr{N}$ — замкнутая окрестность (в слабой топологии) начала координат в пространстве вещественных мер на многообразии M, то

$$f^{*(t+t(\varepsilon))}\nu - f^{*t}\nu_{\varepsilon, T} \in \mathscr{N}$$

при $0 \leqslant t \leqslant T$ и достаточно малом ε.

Вспомним теперь, что $\nu_{\varepsilon, T} = s_{\varepsilon, T} \cdot \mu$, где $s_{\varepsilon, T} \in L^\infty(\mu)$ и величина $\| s_{\varepsilon, T} \|_\infty$ ограничена равномерно по T. Поэтому существует такая последовательность $T_n \to \infty$, что $s_{\varepsilon, T_n} \to s_\varepsilon$ в пространстве $L^\infty(\mu)$ со слабой топологией пространства, сопряженного к $L^1(\mu)$. Следовательно,

$$f^{*(t+t(\varepsilon))}\nu - f^{*t}(s_\varepsilon \cdot \mu) \in \mathcal{N} \tag{6}$$

для всех $t \geqslant 0$. Воспользуемся теперь замечанием 3.5: (μ, f^t) — бернуллиевский поток и

$$\lim_{t \to \infty} \int s_\varepsilon \cdot (g \circ f^t)\, d\mu = \mu(g)$$

для любой непрерывной функции g: $\Lambda \to \mathbb{R}$. Поэтому существует такое $t_{\mathcal{N}}$, что

$$f^{*t}(s_\varepsilon \cdot \mu) - \mu \in \mathcal{N} \tag{7}$$

при $t \geqslant t_{\mathcal{N}}$. Из включений (6) и (7) следует, что

$$f^{*t}\nu - \mu \in 2\mathcal{N}$$

при $t \geqslant t(\varepsilon) + t_{\mathcal{N}}$. Следовательно, мера $f^{*t}\nu$ слабо сходится к мере μ при $t \to \infty$.

5.4. Предложение. *Пусть Λ — базисное гиперболическое множество класса C^2. Тогда мера $\mu_{\varphi^{(u)}}$ непрерывно зависит от потока F класса C^2 в смысле слабой топологии мер и C^1-топологии потоков. Кроме того, давление для функции $\varphi^{(u)}$ и энтропия потока F относительно меры $\mu_{\varphi^{(u)}}$ непрерывно зависят от потока F в смысле C^1-топологии потоков.*

Доказательство. Пусть $\mu = \mu_{\varphi^{(u)}}$ и μ' — соответствующая мера для потока F'. Нужно доказать, что $\mu' \to \mu$ в смысле слабой сходимости при $F' \to F$ в C^1-топологии; мера μ' сосредоточена на базисном множестве Λ' потока F', близком к множеству Λ.

Из леммы 2.1 и [4] вытекает существование специального потока G' на множестве $\Lambda'(A, \psi')$ (см. выше) и непрерывной сюръекции ρ': $\Lambda'(A, \psi') \to \Lambda'$. Используя результаты [4] и теорему об Ω-устойчивости [18], можно построить специальный поток на множестве $\Lambda'(A, \psi')$ над той же топологической цепью Маркова σ_A: $\Sigma_A \to \Sigma_A$, которая соответствует потоку $F|\Lambda$ и множеству $\Lambda(A, \psi)$. При $F' \to F$ мы имеем равномерную сходимость $\psi' \to \psi$ и $\rho'(x, t) \to \rho(x, t)$ (равномерно по (x, t) при $0 \leqslant t \leqslant \min\{\psi(x), \psi'(x)\}$). Далее, $E'^u_{\rho'(x, t)} \to E^u_{\rho(x, t)}$, где E'^u — неустойчивое поле направлений для потока F' (это следует из теоремы (6.1) из [15][1])).

Мы знаем, что

$$\Phi(\mathbf{x}) = \int_0^{\psi(\mathbf{x})} \varphi^{(u)}(\rho(\mathbf{x},\ t))\,dt = \int_0^{\psi(\mathbf{x})} \varphi^{(u)}(f^t\rho(\mathbf{x},\ 0))\,dt =$$
$$= -\ln\lambda_{\psi(\mathbf{x})}(\rho(\mathbf{x},\ 0))$$

и соответственно

$$\Phi'(\mathbf{x}) = -\ln\lambda'_{\psi'(\mathbf{x})}(\rho'(\mathbf{x},\ 0)).$$

Поэтому при $F' \to F$ имеет место равномерная сходимость $\Phi' \to \Phi$.

В соответствии с § 3

$$P(F \mid \Lambda,\ \varphi^{(u)}) = P(G,\ \varphi^{(u)} \circ \rho) = \sup_{\nu \in M(\sigma_A)} \frac{h_\nu(\sigma_A) + \int \Phi\,d\nu}{\int \psi\,d\nu}.$$

Следовательно, давление $P(F|\Lambda, \varphi^{(u)})$ непрерывно зависит от потока F. Как и в предложении 3.1, обозначим через ν_0 единственное равновесное состояние для функции $\Phi - P(F|\Lambda, \varphi^{(u)})\cdot\psi$. Из непрерывности равновесного состояния, отмеченной непосредственно перед предложением 3.1, следует, что $\nu'_0 \to \nu_0$ при $F' \to F$. Таким образом, $\mu_{\nu'_0} \to \mu_{\nu_0}$ и $\mu' = \rho'^*\mu_{\nu'_0} \to \mu = \rho^*\mu_{\nu_0}$.

Наконец, энтропия меры $\mu_{\varphi^{(u)}}$ равна

$$P(F \mid \Lambda,\ \varphi^{(u)}) - \int \varphi^{(u)}\,d\mu_{\varphi^{(u)}},$$

где

$$\int \varphi^{(u)}\,d\mu_{\varphi^{(u)}} = \int (\varphi^{(u)} \circ \rho)\,d\mu_{\nu_0} = \int \Phi\,d\nu_0 \Big/ \int \psi\,d\nu_0$$

и правая часть непрерывно зависит от потока F.

5.5. Предложение. *Пусть Λ — базисное гиперболическое множество класса C^1 и $\varepsilon > 0$. Тогда*

(a) *если $W^u_x(\varepsilon) \subset \Lambda$ для некоторой точки $x \in \Lambda$, то Λ — аттрактор;*

(b) *если Λ — не аттрактор, то существует такое $\gamma > 0$, что для любой точки $x \in \Lambda$ найдется точка $y \in W^u_x(\varepsilon)$, для которой $d(y, \Lambda) > \gamma$.*

---

[1]) См. также [30] и [31, стр. 126]. — *Прим. перев.*

Доказательство. Если $W_x^u(\varepsilon) \subset \Lambda$ и $u > 0$, то множество

$$U_x = \bigcup \left\{ W_y^s(\varepsilon):\ y \in \bigcup_{|t| \leqslant u} f^t W_x^u(\varepsilon) \right\} \tag{8}$$

является окрестностью точки x на многообразии M (см. [13, лемма 4.1][1])). Выберем периодическую точку $p \in U_x \cap \Lambda$, и пусть t_0 — ее период. Имеем $W_p^u(\beta) \subset U_x$ для некоторого $\beta \in (0, \varepsilon]$, следовательно,

$$W_p^u(\beta) \subset W_\Lambda^s(\varepsilon) \cap W_\Lambda^u(\varepsilon) = \Lambda$$

(это следует из [18, теорема 3.2.][2])). Далее,

$$W_p^u = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-nt_0} W_p^u(\beta) \subset \Lambda$$

и множество

$$W_p^{cu} = \bigcup_{0 \leqslant t \leqslant t_0} W_{f^t p}^u$$

плотно в множестве Λ (см., например, [3, стр. 11—13][3])).

Для каждой точки $x \in W_p^{cu}$ множество U_x, определенное формулой (8), является окрестностью точки x на многообразии M. Так как локальные слои $W_x^s(\varepsilon)$ и $W_x^u(\varepsilon)$ непрерывно зависят от точки $x \in \Lambda$, то существует такое $\delta > 0$, не зависящее от x, что $U_x \supset B_x(2\delta)$ для любой точки $x \in W_p^{cu}$ (см. [13, лемма 4.1]). Ввиду этого из плотности подмногообразия W_p^{cu} в множестве Λ следует, что

$$B_\Lambda(\delta) \subset \bigcup \{U_x:\ x \in W_p^{cu}\}.$$

Поэтому если $z \in B_\Lambda(\delta)$, то существуют такие точки $x \in W_p^{cu}$ и $y \in \bigcup_{|t| \leqslant u} f^t W_x^u(\varepsilon) \subset W_p^{cu} \subset \Lambda$, что $z \in W_y^s(\varepsilon)$. При $t \to \infty$ расстояние $d(f^t z, f^t y)$ стремится к 0 равномерно по z. Поэтому

$$\bigcap_{t \geqslant 0} f^t B_\Lambda(\delta) = \Lambda,$$

откуда следует, что Λ — аттрактор. Утверждение (а) доказано.

---

[1]) См. примечание на стр. 83. — *Прим. перев.*

[2]) Теорема 3.2 из [18] состоит в том, что множество Ω неблуждающих точек А-потока φ обладает локальной структурой произведения, т. е. $W_\Omega^s(\varepsilon) \cap W_\Omega^u(\varepsilon) = \Omega$. Аналогичное утверждение содержится в [13, предложение 7.2]. — *Прим. перев.*

[3]) См. теорему 14.1 добавления. — *Прим. перев.*

Для того чтобы доказать (b), заметим, что множество
$$V_\gamma=\{x\in\Lambda:\ d(y,\Lambda)>\gamma \text{ для некоторой точки } y\in W_x^u(\varepsilon)\}$$
открыто в Λ, так как локальный слой $W_x^u(\varepsilon)$ непрерывно зависит от x. Множество V_γ увеличивается при уменьшении γ, и в соответствии с утверждением (a) настоящего предложения $\bigcup\limits_{\gamma>0} V_\gamma=\Lambda$. Поэтому из компактности следует, что $V_\gamma=\Lambda$ для некоторого $\gamma>0$.

5.6. Теорема [1]. *Пусть Λ — базисное гиперболическое множество класса C^2. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(a) Λ — *аттрактор*;
(b) $m(W_\Lambda^s)>0$;
(c) $P(F\,|\,\Lambda,\ \varphi^{(u)})=0$.

Доказательство. Так как $W_\Lambda^s=\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} f^{-n}W_\Lambda^s(\varepsilon)$, то условие (b) можно заменить условием $m(W_\Lambda^s(\varepsilon))>0$ для некоторого $\varepsilon>0$. Из предложения 4.4(b) вытекает, что (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c). Для завершения доказательства предположим, что Λ — не аттрактор, и покажем, что $P(F\,|\,\Lambda,\ \varphi^{(u)})<0$.

Для заданного $\varepsilon>0$ выберем γ, как в пункте (b) предложения 5.5. Существует такое $t>0$, что если $x\in\Lambda$, то $f^tW_x^u(\gamma/4)\supset W_{f^tx}^u(\varepsilon)$. Пусть $E\subset\Lambda$ есть (γ, T)-разделенное множество. Для любой точки $x\in E$ и любого $T>0$ существует такая точка $y(x,T)\in B_x(\gamma/4,T)$, что $d(f^{t+T}(y(x,T)),\Lambda)>\gamma$ (так как $f^TB_x(\gamma/4,T)\supset W_x^u(\gamma/4)$, то $f^{T+t}B_x(\gamma/4,T)\supset W_{f^tx}^u(\varepsilon)$). Выберем $\delta\in(0,\gamma/4]$ таким образом, чтобы $d(f^tz, f^ty)<\gamma/2$ при $d(z,y)<\delta$. Тогда
$$B_{y(x,T)}(\delta,T)\subset B_x(\gamma/2,T),$$
$$f^{T+t}B_{y(x,T)}(\delta,T)\cap B_\Lambda(\gamma/2)=\varnothing,$$
следовательно,
$$B_{y(x,T)}(\delta,T)\cap B_\Lambda(\gamma/2,T+t)=\varnothing.$$
Используя вторую лемму об объеме, получаем
$$m(B_\Lambda(\gamma/2,T))-m(B_\Lambda(\gamma/2,T+t))\geqslant\sum_{x\in E} m(B_{y(x,T)}(\delta,T))\geqslant$$
$$\geqslant|3\gamma/2-\delta|\sum_{x\in E} m(B_x(3\gamma/2,T))\geqslant|3\gamma/2-\delta|\,m(B_\Lambda(\gamma/2,T)),$$

---

[1] Некоторые идеи, использованные в доказательстве этой теоремы, были предложены ранее Дж. Фрэнксом и Р. Ф. Уильямсом.

и поэтому

$$m(B_\Lambda(\gamma/2,\ T+t)) \leqslant (1 - |3\gamma/2 - \delta|)\, m(B_\Lambda(\gamma/2,\ T)),$$

так что из предложения 4.4 (a) следует, что

$$P(F \mid \Lambda,\ \varphi^{(u)}) \leqslant \frac{1}{t} \log(1 - |3\gamma/2 - \delta|) < 0.$$

5.7. Следствие. *Пусть F — некоторый А-поток класса C^2 на компактном многообразии M.*

(a) *Замыкания областей притяжения аттракторов покрывают M.*

(b) *Если Λ — базисное гиперболическое множество и $m(\Lambda) > 0$, то Λ — связная компонента многообразия M, а поток $F|\Lambda$ является У-потоком.*

Доказательство. Поскольку поток F удовлетворяет аксиоме А, $M = \bigcup \{W^s_\Lambda$: Λ — базисное гиперболическое множество$\}$. Дополнением к объединению областей притяжения аттракторов является множество $\bigcup \{W^s_\Lambda$: Λ не аттрактор$\}$; оно имеет меру нуль и поэтому не содержит открытых подмножеств. Тем самым утверждение (a) доказано.

Если Λ — базисное множество и $m(\Lambda) > 0$, то $m(W^s_\Lambda) > 0$ и $m(W^u_\Lambda) > 0$, так что множество Λ является аттрактором и для потока F, и для обратного потока F^{-1}. Поскольку Λ — аттрактор для потока F, имеем $W^u_\Lambda = \Lambda$. Так как Λ — аттрактор для потока F^{-1}, множество W^u_Λ открыто. Таким образом, множество Λ открыто и замкнуто. Кроме того, оно связно, так как многообразие W^{cu}_p любой периодической точки p плотно в Λ (см. [3, стр. 11—13][1])). Тем самым доказано (b).

ПРИЛОЖЕНИЕ

В дальнейшем Λ обозначает гиперболическое множество для потока f^t класса C^r на многообразии M $(r \geqslant 1)$.

Напомним, что по предположению риманова метрика является ляпуновской по отношению к диффеоморфизму f^1 (см. введение). Заметим также, что существует такая константа $K > 0$, что $\| Tf^n | E^s \| \leqslant K$ для любого $n \geqslant 0$.

Будем обозначать индексами 0, 1, 2 компоненты касательного вектора из пространства T_xM, лежащие соответственно в подпространствах E_x, E^s_x, E^u_x. В этом приложении используется новое скалярное произведение в касательном

[1]) См. теорему 14.1 добавления. — *Прим. перев.*

пространстве T_xM, задаваемое формулой

$$\langle u, v\rangle_x = \sum_{i=0}^{2} (u_i, v_i). \qquad (\Pi.1)$$

Положим $\|u\| = \|u\|_x = (\langle u, u\rangle_x)^{1/2}$. Для любого подпространства E' касательного пространства T_xM обозначим через $E'(\varepsilon)$ замкнутый ε-шар в подпространстве E' с центром в 0 относительно только что введенной метрики.

П.1. Удобные локальные координаты. *Если $\varepsilon > 0$ достаточно мало, то для каждой точки $x \in \Lambda$ можно построить такую локальную карту φ_x: $T_xM(\varepsilon) \to M$ класса C^r, для которой* [1]

$$\varphi_x\left(E_x + E_x^s\right)(\varepsilon) \subset W_x^{cs}, \qquad \varphi_x\left(E_x + E_x^u\right)(\varepsilon) \subset W_x^{cu}$$

и отображение $F = \varphi_{fx}^{-1} \circ f^1 \circ \varphi_x$ является дифференциалом диффеоморфизма f^1 в точке 0 касательного пространства T_xM.

Пусть множество $\exp_x^{-1} W_x^{cs}$ локально (в окрестности точки 0 пространства T_xM) является графиком некоторого отображения ψ': $E_x \times E_x^s \to E_x^u$; положим

$$\varphi'(u) = u_0 + u_1 + (u_2 + \psi'(u_0, u_1)).$$

Пусть множество $\varphi'^{-1} \exp_x^{-1} W_x^{cu}$ также является графиком некоторой функции ψ'': $E_x \times E_x^u \to E_x^s$; положим

$$\varphi''(u) = u_0 + (u_1 + \psi''(u_0, u_2)) + u_2.$$

Тогда отображение $\varphi_x = \exp_x \circ \varphi' \circ \varphi''$ обладает требуемыми свойствами.

Пусть $u \in T_xM(\varepsilon)$ и ε достаточно мало; по формуле Тейлора

$$\|F_2(u)\| = \|F_2(u_0 + u_1 + u_2) - F_2(u_0 + u_1)\| \geqslant \gamma^{-1}\|u_2\| \qquad (\Pi.2)$$

при некотором $\gamma \in (0, 1)$, не зависящем от x. Аналогично для произвольного $0 < \omega \leqslant 1$ можно выбрать настолько малое ε, что

$$\|F_0(u) + F_1(u) - F_0(v) - F_1(v)\| \leqslant \omega\|F_2(u) - F_2(v)\|, \qquad (\Pi.3)$$

если $\|u_0 + u_1 - v_0 - v_1\| \leqslant \omega\|u_2 - v_2\|$ и $u, v \in T_xM(\varepsilon)$. Введем обозначение

$$D_x(\varepsilon, n) = \left\{u \in T_xM: \|F^k u\|_{f^k x} \leqslant \varepsilon \text{ при } k = 0, 1, \ldots, n\right\}. \qquad (\Pi.4)$$

---

[1] $W_x^{cs} = \bigcup\left\{W_y^s: y \in \bigcup_t f^t x\right\}$, $W_x^{cu} = \bigcup\left\{W_y^u: y \in \bigcup_t f^t x\right\}$.

Пусть $u \in D_x(\varepsilon, n)$; тогда из неравенства (П.2) следует, что

$$\|(F^k)_2(u)\| \leqslant \gamma^{n-k} \|(F^n)_2(u)\| \leqslant \varepsilon\gamma^{n-k}$$

при $k = 0, 1, \ldots, n$. Положим $v = u_0 + u_1$. Можно предположить, что $v \in D_x((K+1)\varepsilon, n)$ и что для достаточно малого ε справедливо неравенство (П.3) с $\omega = 1$. Из этого неравенства следует, что

$$\|(F^k)_0(u) + (F^k)_1(u) - (F^k)_0(v) - (F^k)_1(v)\| \leqslant \|(F^k)_2(u)\| \leqslant \varepsilon\gamma^{n-k},$$

поэтому

$$\|F^k(u) - F^k(v)\| \leqslant 2\varepsilon\gamma^{n-k} \tag{П.5}$$

для $k = 0, 1, \ldots, n$. (В частности, $v \in D_x(3\varepsilon, n)$.)

П.2. Лемма. *Пусть $r = 1$ и ψ: $M \to \mathbb{R}$ — функция класса C^1. Тогда для любого $\theta > 0$ существует такое $\delta > 0$, что если $x \in \Lambda$, $y \in M$, $n > 0$ и $d(f^k y, f^k x) \leqslant \delta$ для $k = 0, 1, \ldots, n$, то*

$$\left| \int_0^n \psi(f^t y)\, dt - \int_0^n \psi(f^t x)\, dt \right| < \theta.$$

Доказательство. Так как ψ — функция класса C^1, существует такая константа $C > 0$, что

$$\left| \int_0^1 \psi(f^t p)\, dt - \int_0^1 \psi(f^t q)\, dt \right| \leqslant C d(p, q).$$

Для любого $\varepsilon > 0$ существует настолько малое δ, что $u = \varphi_x^{-1} y \in T_x M(\varepsilon/2)$ при $x \in \Lambda$, $y \in M$, $d(x, y) < \delta$. Положим $v = u_0 + u_1$ и $z = \varphi_x v \in W_x^{cs}$. Можно считать, что $z \in W_{f^s x}^s(\varepsilon)$, причем $|s| < C_0 \varepsilon$ (константа C_0 не зависит от ε). Тогда

$$d(f^k z, f^{k+s} x) < C_1 \varepsilon \gamma'^k,$$

где $\gamma' \in (0, 1)$. Если

$$d(f^k x, f^k y) \leqslant \delta \quad \text{при} \quad k = 0, 1, \ldots, n,$$

то из неравенства (П.5) получаем

$$d(f^k y, f^k z) < C_2 \varepsilon \gamma^{n-k},$$

где $C_2 > 0$ — некоторая постоянная. Таким образом,

$$\left|\int_0^n \psi(f^t y) - \int_0^n \psi(f^t x)\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_0^1 \psi(f^t f^k y) - \int_0^1 \psi(f^t f^k z)\right| +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_0^1 \psi(f^t f^k z) - \int_0^1 \psi(f^t f^{k+s} x)\right| + \left|\int_0^n \psi(f^{t+s} x) - \int_0^n \psi(f^t x)\right| \leqslant$$

$$\leqslant C\left[\frac{C_2\varepsilon}{1-\gamma} + \frac{C_1\varepsilon}{1-\gamma}\right] + 2C_0\varepsilon\,\|\psi\|.$$

П.3. Лемма. *Пусть π: $G^q M \to M$ — грассманово расслоение q-мерных подпространств в касательном расслоении TM, $G^q f^t$: $G^q M \to G^q M$ — диффеоморфизм, индуцированный дифференциалом Tf^t. Предположим, что $r = 2$, т. е. $G^q f$ — поток класса C^1 на многообразии $G^q M$. Пусть $q = \dim E_x^u$ и $\Lambda^* = \{E_x^u$: $x \in \Lambda\}$. Тогда Λ^* — гиперболическое множество потока $G^q f$.*

Доказательство. Для $x \in \Lambda$ определим многообразия

$$V_x^{*s} = \{E \in \pi^{-1}(W_x^s(\varepsilon)):\ d(E, E_x^u) < \varepsilon\}, \qquad V_x^{*u} = TW_x^u(\varepsilon).$$

Подмногообразие $\pi^{-1}(x)$ содержит E_x^u и $G^q f^t[\pi^{-1}(x)] = \pi^{-1}(f^t x)$. Известно (и легко проверяется), что отображение $G^q f^1$ является сжимающим в окрестности подпространства E_x^u на многообразии $\pi^{-1}(x)$ (см. [19, В.1]). Так как диффеоморфизм f^1 сжимает окрестность $W_x^s(\varepsilon)$, при достаточно малом ε диффеоморфизм $G^q f^1$ сжимает окрестность V_x^{*s}. Значит, касательное отображение $TG^q f^1$ является линейным сжатием подпространства $E^{*s} = TV_x^{*s}$. Очевидно, что диффеоморфизм $G^q f^{-1}$ сжимает подмногообразие V^{*u}, и, следовательно, отображение $TG^q f^{-1}$ является сжимающим на подпространстве $E^{*u} = TV_x^{*u}$. Теперь имеем

$$\dim E^{*s} + \dim E^{*u} = \dim W_x^s(\varepsilon) + \dim \pi^{-1}(x) + \dim W_x^u(\varepsilon) =$$
$$= \dim M - 1 + \dim \pi^{-1}(x) = \dim G^q M - 1.$$

Лемма доказана.

П.4. Лемма. *Пусть $r = 2$. Для любого $\theta > 0$ существует такое $\varepsilon > 0$, что имеет место следующее утверждение.*

Пусть $x \in \Lambda$, $v \in D_x(\varepsilon, n)$ (см. (П.4)) и $E_v^* \in G^q M$ — касательное пространство в точке $\varphi_x(v)$ к подмногообразию

$\varphi_x\left(v+E_x^u(\varepsilon)\right)$. *Тогда*

$$e^{-\theta}\leqslant\frac{\operatorname{Jac}Tf^n\mid E_v^*}{\operatorname{Jac}Tf^n\mid E_x^u}\leqslant e^{\theta},\tag{П.6}$$

$$e^{-\theta}\leqslant\frac{\operatorname{Jac}D_v\left(F^n\mid v+E_x^u\right)}{\operatorname{Jac}D_0\left(F^n\mid E_x^u\right)}\leqslant e^{\theta},\tag{П.7}$$

[Здесь D_0 и D_v — дифференциалы в локальных координатах; якобианы в неравенстве (П.7) вычислены при помощи введенного ранее (см. (П.1)) скалярного произведения.]

Доказательство. Очевидно, что оценка (П.7) отличается от оценки (П.6) на ограниченные множители, поэтому достаточно доказать неравенство (П.6). Чтобы это сделать, применим лемму П.2 к гиперболическому множеству Λ^* потока G^qf класса C^1 (см. лемму П.3), заменив x на E_x^u, а y на E_v^*. Нужно показать, что (для достаточно малого ε)

$$d\left(Tf^kE_x^u,\ Tf^kE_v^*\right)\overline{\leqslant\delta}$$

при $k=0,\ 1,\ \ldots,\ n$. Это неравенство вытекает из (П.3) и (П.4) (при этом следует использовать локальные карты φ_x). Для завершения доказательства достаточно положить

$$\psi(E)=\frac{d}{dt}\ln\left(\operatorname{Jac}Tf^t\mid E\right)|_{t=0}$$

и заметить, что

$$\int_0^n\psi\left(Tf^tE_v\right)dt=\ln\operatorname{Jac}Tf^n\mid E_v.$$

П.5. Доказательство первой леммы об объеме. Покажем, что для достаточно малого $\varepsilon>0$ существуют такие постоянные $b_\varepsilon,\ b'_\varepsilon>0$, для которых

$$b_\varepsilon\leqslant m_x\left(D_x(\varepsilon,\ n)\right)\cdot\operatorname{Jac}D_0\left(F^n\middle|E_x^u\right)\leqslant b'_\varepsilon\tag{П.8}$$

при любых $x\in\Lambda$ и $n>0$. Здесь m_x обозначает меру на касательном пространстве T_xM, индуцированную скалярным произведением (П.1). Тем самым первая лемма об объеме будет доказана, поскольку при использовании локальных карт φ_x все расстояния, меры и якобианы (см. лемму П.4) умножаются на положительные множители, отделенные от 0 и ∞.

Пусть $v\in\left(E_x+E_x^s\right)(\varepsilon)$; положим по определению

$$N_v(\varepsilon,\ n)=\{u\in T_xM\colon\ u_0+u_1=v\quad\text{и}$$
$$\left(F^k\right)_2(u)\in E_{f^kx}^u(\varepsilon)\quad\text{при}\quad k=0,\ 1,\ \ldots,\ n\}.$$

Если ε достаточно мало, то $\| F^k v \| \leqslant (K+1)\varepsilon$ для всех $k \geqslant 0$.

Кроме того, применяя неравенство (П.3) с $\omega \leqslant 1$, индукцией по n можно доказать, что множество $F^n N_v(\varepsilon, n)$ является графиком C^1-функции $g\colon E^u_{f^n x}(\varepsilon) \to \left(E_{f^n x} + E^s_{f^n x}\right)((K+2)\varepsilon)$, для которой $\|Dg\| \leqslant \omega$ [1]). Отсюда, в частности, следует второе включение следующей формулы:

$$D_x(\varepsilon, n) \subset \bigcup_v N_v(\varepsilon, n) \subset D_x((K+3)\varepsilon, n).$$

Таким образом, для того, чтобы доказать оценку (П.8), достаточно показать, что

$$c_\varepsilon \leqslant m_x\left(\bigcup_v N_v(\varepsilon, n)\right) \cdot \operatorname{Jac} D_0\left(F^n \middle| E^u_x\right) \leqslant c'_\varepsilon \qquad \text{(П.9)}$$

для некоторых c_ε, $c'_\varepsilon > 0$.

Так как $\| Dg \| \leqslant \omega$, мера множества $F^n N_v(\varepsilon, n)$ (рассматривается мера, индуцированная скалярным произведением (П.1), на касательном пространстве $T_{f^n x}M$) заключена между некоторыми константами d_ε, $d'_\varepsilon > 0$. Из оценки (П.7) следует, что произведение меры множества $N_v(\varepsilon, n)$ на $\operatorname{Jac} D_0\left(F^n \middle| E^u_x\right)$ заключено между $d_\varepsilon e^{-\theta}$ и $d'_\varepsilon e^{\theta}$.

Наконец, применяя теорему Фубини и интегрируя по $v \in \left(E_x + E^s_x\right)(\varepsilon)$, получаем неравенство (П.9).

П.6. Доказательство второй леммы об объеме. Пусть $w \in D_x(\varepsilon, n)$; положим

$$D_{xw}(\delta, n) = \left\{u \in T_x M\colon \| F^k u - F^k w \|_{f^k x} \leqslant \delta, \quad k = 0, 1, \ldots, n\right\}.$$

Достаточно показать, что существует такое $b_\delta > 0$, для которого

$$m_x(D_{xw}(\delta, n)) \cdot \operatorname{Jac} D_0\left(F^n \middle| E^u_x\right) \geqslant b_\delta \qquad \text{(П.10)}$$

при любых $x \in \Lambda$, $w \in D_x(\varepsilon, n)$, $n > 0$. Более того, неравенство (П.10) достаточно доказать для $\delta < \varepsilon$.

Введем обозначение

$$\Lambda = \left\{u \in T_{f^n x}M\colon u_0 = \left(F^n w\right)_0,\ u_2 = \left(F^n w\right)_2,\ u_1 \in E^s_{f^n x}(3\varepsilon)\right\}.$$

Для каждого вектора $v \in \Lambda$ положим $\Gamma_v = \left\{f^t \varphi_{f^n x} v\colon |t| < \alpha\right\}$, так что множество $\varphi^{-1}_{f^n x}\Gamma_v$ — это «кусок траектории», проходящий через вектор v. Тогда для малого ε и подходящего α

[1]) Это рассуждение является несложным видоизменением первой части доказательства теоремы 2.3 в [14].

подмногообразие класса C^2

$$W = \bigcup_{v \in \Lambda} \left(\varphi_{f^n x}^{-1} \Gamma_v\right)$$

в касательном пространстве $T_{f^n x}M$ является графиком функции ψ, определенной на некотором подмножестве подпространства $E_{f^n x} + E^s_{f^n x}$, со значениями в подпространстве $E^u_{f^n x}$, причем $\| D\psi \| \leqslant \omega$, $\omega \in (0, 1)$.

Можно считать, что область определения функции ψ содержит множество $E_{f^n x}(2\varepsilon) + E^s_{f^n x}(2\varepsilon)$; обозначим через W' график ограничения функции ψ на это множество. Пусть

$$W' = \bigcup_{\tau:\ |\tau| < 2\varepsilon} W'_\tau,$$

где $W'_\tau \subset \{u\colon\ u_0 = \tau\}$. Положим

$$W''_\tau = \{u \in T_x M\colon\ F^n u \in W'_\tau,\ \left(F^k\right)_1(u) \in E^s_{f^k x}(2\varepsilon)$$
$$\text{при } k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n\},$$
$$W'' = \bigcup_{\tau:\ |\tau| < 2\varepsilon} W''_\tau.$$

Применяя неравенство (П.3) и рассуждения из П.5 к паре $F^n W''_\tau$, F^{-1} вместо пары $N_v(\varepsilon, n)$, F, можно показать, что множество W''_τ является графиком некоторой функции $g_\tau\colon E^s_x(2\varepsilon) \to \left(E_x + E^u_x\right)(2(K+1)\varepsilon)$, для которой $\| Dg_\tau \| \leqslant \omega$. С другой стороны, множество W'' является объединением «кусков траекторий», которые представляют собой графики отображений $E_x \to E^s_x + E^u_x$ с производными, не превосходящими ω (для достаточно малого ε). Итак, многообразие W'' класса C^2 является графиком некоторой функции ψ'', определенной на подмножестве подпространства $E_x + E^s_x$ со значениями в E^u, причем $\| D\psi'' \| \leqslant 1$ (для малого ε и, следовательно, малого ω). Многообразие W'' имитирует кусок интегрального многообразия распределения E^{cx}, проходящий через вектор w.

Заметим, что отображение F^k сжимает или растягивает «кусок траектории» из множества W'', умножая векторы на число, отделенное от 0 и ∞ (этот множитель содержится, скажем, в интервале между $(K+1)^{-1}$ и $(K+1)$). Отсюда и из указанных ранее свойств множества W'' следует, что область определения функции ψ'' содержит шар B подпространства $E_x + E^s_x$ достаточно малого радиуса β с центром в точке $w_0 + w_1$. Полагая $\beta < \delta/4(K+1)$, получаем

$$d\left(F^k \psi'' v,\ F^k w\right) \leqslant \delta/2$$

для $k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n$ при $v \in B$, Для каждого вектора $v \in B$ положим

$$N_v^*(\delta/2, n) = \{u \in T_xM:\ u_0 + u_1 = v \quad \text{и}$$
$$\|(F^k)_2(u) - (F^k)_2(\psi''v)\| \leqslant \delta/2, \quad k = 0, 1, \ldots, n\}.$$

Имеем

$$\bigcup_{v \in B} N_v^*(\delta/2, n) \subset D_{xw}(\delta, n)$$

и, рассуждая так же, как в П.5, получаем, что

$$m_x\Big(\bigcup_v N_v^*(\delta/2, m)\Big) \cdot \operatorname{Jac} D_0\big(F^n \,|\, E_x^u\big) \geqslant c_\delta$$

для некоторого $c_\delta > 0$. Тем самым доказаны неравенство (П.10) и, следовательно, вторая лемма об объеме.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абрамов Л. М., Об энтропии потока, *ДАН СССР*, 128 (1959), 873—875.
2. Bowen R., Periodic points and measures for axiom A diffeomorphisms, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 154 (1971), 377—397.
3. Bowen R., Periodic orbits for hyperbolic flows, *Amer. J. Math.*, 94 (1972), 1—30.
4. Bowen R., Symbolic dynamics for hyperbolic flows, *Amer. J. Math.*, 95 (1973), 429—459. [Русский перевод в настоящем сборнике.]
5. Bowen R., Maximizing entropy for a hyperbolic flow, *Math. Systems Theory*, 7, № 4 (1974), 300—303.
6. Bowen R., Some systems with unique equilibrium states, *Math. Systems Theory*, 8, № 3 (1975), 193—202.
7. Bowen R., Bernoulli equilibrium states for Axiom A diffeomorphisms, *Math. Systems Theory*, 8, № 4 (1975), 289—294.
8. Bowen R., Walters P., Expansive one-parameter flows, *J. Diff. Equations*, 12 (1972), 180—193.
9. Бунимович Л. А., Включение сдвигов Бернулли в некоторые специальные потоки, *УМН*, 28, вып. 3 (1973), 171—172.
10. Динабург Е. И., О связи между различными энтропийными характеристиками динамических систем, *Изв. АН СССР*, сер. матем., 35, № 2 (1971), 324—366.
11. Добрушин Р. Л., Аналитичность корреляционных функций в одномерных классических системах с медленно убывающим потенциалом, *Матем. сб.*, 94, № 1 (1974), 16—48.
12. Гуревич Б. М., Некоторые условия существования *К*-разбиений для специальных потоков, Труды ММО, 17 (1967), 89—116.
13. Hirsch M., Palis J., Pugh C., Shub M., Neighborhoods of hyperbolic sets, *Inventiones Math.*, 9 (1970), 121—134.
14. Hirsch M., Pugh C., Stable manifolds and hyperbolic sets, Proc. Symp. in Pure Math., v. 14, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1970, pp. 133—163.
15. Hirsch M., Pugh C., Shub M., Invariant Manifolds, preprint.
16. Лившиц А. Н., Синай Я. Г., Об инвариантных мерах, совместимых с гладкостью, для транзитивных У-систем, *ДАН СССР*, 207, № 5 (1972), 1039—1041.
17. Маргулис Г. А., О некоторых мерах, связанных с У-потоками на компактных многообразиях, *Функц. анализ и его прилож.*, 4, № 1 (1970), 62—76.

18. Pugh C., Shub M., The Ω-stability theorem for flows, *Inventiones Math.*, **11** (1970), 150—158.
19. Pugh C., Ergodisity of Anosov actions, *Inventiones Math.*, **15** (1972), 1—23.
20. Ratner M., Anosov flows with Gibbs measures are also Bernoullian, *Israel J. Math.*, 17 (1974), 380—391.
21. Ruelle D., Statistical Mechanics, New York, Benjamin, 1969. [Русский перевод: Рюэль Д., Статистическая механика. Строгие результаты. М., «Мир», 1971.]
22. Ruelle D., Statistical mechanics of a one-dimensional lattice gas, *Commun. Math. Phys.*, **9** (1968), 267—278.
23. Ruelle D., Statistical mechanics on a compact set with Z^{ν} action satisfying expansiveness and specification, *Trans. Amer. Math Soc.*, **185** (1973), 237—251.
24. Ruelle D., A measure associated with Axiom A attractors., *Amer. J. Math.*, **98** (1976), 619—654.
25. Синай Я. Г., Марковские разбиения и У-диффеоморфизмы, *Функц. анализ и его прилож.*, **2**, № 1 (1968), 64—89.
26. Синай Я. Г., Гиббсовские меры в эргодической теории, *УМН*, **27**, вып. 4 (1972), 21—64.
27. Smale S., Differentiable dynamical systems, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73** (1967), 747—817. [Русский перевод: *УМН*, **25**, вып. 1 (1970), 113—185.]
28. Walters P., A variational principle for the pressure of continuous transformations, *Amer. J. Math.*, **97** (1975), 937—971.
29*. Аносов Д. В., О касательных полях трансверсальных слоений в У-системах, *Матем заметки*, **2**, № 5 (1967), 539—548.
30*. Аносов Д. В., Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны, Труды Матем. ин-та им В. А. Стеклова, т 90, 1967.
31*. Аносов Д. В., Синай Я. Г., Некоторые гладкие эргодические системы, *УМН*, 22, вып. 5 (1967), 107—172.
32*. Алексеев В. М., Символическая динамика, Одиннадцатая математическая школа, Киев, Изд-во Ин-та математики АН УССР, 1976.
33* Кифер Ю. И., О малых случайных возмущениях некоторых гладких динамических систем, *Изв. АН СССР*, сер. матем., 38, № 5 (1974), 1091—1115.
34* Люстерник Л. А., Соболев Л. И., Элементы функционального анализа, изд. 2. М., «Наука», 1965.

ПОДКОВА ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ МЕРЫ [1])

Р. Боуэн

Пусть $f\colon M \to M$ — диффеоморфизм, удовлетворяющий «аксиоме А» Смейла. Для любого базисного множества Ω диффеоморфизма f (см. [2]) положим

$$W^s(\Omega) = \{x \in M\colon f^n(x) \to \Omega \text{ при } n \to \infty\}.$$

Если f принадлежит классу C^2, то мера множества $W^s(\Omega)$ равна 0, за исключением случая, когда множество Ω является аттрактором [1]. Следующая теорема показывает, что предположение о гладкости класса C^2 является необходимым.

Теорема. *Существует подкова* [2]) *класса* C^1 *положительной меры Лебега.*

Доказательство. Во-первых, договоримся о некоторых обозначениях, относящихся к канторовым множествам. Пусть I — некоторый отрезок и $\alpha_n > 0$ — последовательность чисел, для которой $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n \leqslant l(I)$. Обозначим через $\underline{a} = a_1 \ldots a_n$ последовательность нулей и единиц длины $n = n(\underline{a})$; допускается пустая последовательность: $\underline{a} = \varnothing$ и $n(\underline{a}) = 0$. Положим $I_\varnothing = I = [a, b]$, $I^*_\varnothing = \left[\frac{a+b}{2} - \frac{\alpha_0}{2}, \quad \frac{a+b}{2} + \frac{\alpha_0}{2}\right]$; отрезки $I^*_{\underline{a}} \subset I_{\underline{a}}$ определяются рекуррентно следующим образом. Пусть $I_{\underline{a}0}$ и $I_{\underline{a}1}$ — левый и правый отрезки, остающиеся после удаления внутренности отрезка $I^*_{\underline{a}}$ из отрезка $I_{\underline{a}}$; рассмотрим в качестве $I^*_{\underline{a}k}$ $(k = 0, 1)$ отрезок длины $\alpha_{n(\underline{a}k)}/2^{n(\underline{a}k)}$, середина которого совпадает с серединой отрезка $I_{\underline{a}k}$. Тогда канторово

[1]) Rufus Bowen, A Horseshoe with Positive Measure, *Inventiones Mathematicae*, 29 (1975), 203—204 (partially supported by NSF GP-14519).

[2]) То есть локальный диффеоморфизм на плоскости, аналогичный «подкове Смейла» из [2]. — *Прим. ред.*

множество K_I определяется следующим образом:

$$K_I = \bigcap_{m=0}^{\infty} \bigcup_{n(\underline{a})=m} I_{\underline{a}}.$$

Это стандартная конструкция канторова множества, за исключением некоторой свободы в выборе длин выбрасываемых интервалов. Меру множества K_I можно вычислить по формуле

$$m(K_I) = l(I) - \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n.$$

Пусть имеются другой отрезок J и последовательность $\beta_n > 0$, для которой $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \leqslant l(J)$. Тогда, как и выше, можно построить отрезки $J_{\underline{a}}$, $J_{\underline{a}}^*$ и множество K_J. Предположим теперь, что $\beta_n/\alpha_n \to \gamma \geqslant 0$ при $n \to \infty$. Выберем такую последователь-

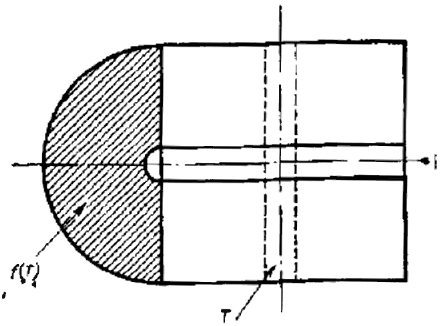


Рис. 1.

ность $\delta_n \to 0$ и найдем для каждого набора $\underline{a}$ такой сохраняющий ориентацию C^1-диффеоморфизм g: $I_{\underline{a}}^* \to J_{\underline{a}}^*$, для которых

(i) $f'(x) = \gamma$, если x — конец отрезка $I_{\underline{a}}^*$,

(ii) множество $f'(J_{\underline{a}}^*)$ содержится в наименьшем отрезке, включающем точки $\gamma \pm \delta_n$ и $\dfrac{\beta_n}{\alpha_n} \pm \delta_n$.

Тогда дифференцируемое отображение g, определенное на множестве $\bigcup_{\underline{a}} I_{\underline{a}}^*$, продолжается по непрерывности до гомеоморфизма g: $\bar{I} \to J$ класса C^1 с производной, равной γ, во всех точках множества K_I.

Построим теперь подкову положительной меры. Выберем последовательность $\beta_n > 0$ таким образом, чтобы $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n < 2$

и $\beta_{n+1}/\beta_n \to 1$ (например, $\beta_n = 1/(n+100)^2$). Положим

$$J=[-1,\ 1],\quad I=[\beta_0/2,\ 1]\quad \text{и}\quad \alpha_n=\beta_{n+1}/2.$$

Тогда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n < l(I) \qquad \text{и} \qquad \gamma = \lim \frac{\beta_n}{\alpha_n} = \lim \frac{2\beta_n}{\beta_{n+1}} = 2.$$

Приведенная выше конструкция дает некоторый диффеоморфизм $g\colon I \to J$ класса C^1. Диффеоморфизм f квадрата $S = J \times J$ в плоскость $\mathbb{R}^2$ определим следующим образом:

(i) $f(x, y) = (g(x), g^{-1}(y))$, если $(x, y) \in I \times J$,
(ii) $f(x, y) = (g(-x), -g^{-1}(y))$, если $(x, y) \in (-I) \times J$, и $f(T) \cap (J \times J) = \varnothing$, где $T = (-\beta_0/2, \beta_0/2) \times J$.

Отображение f можно продолжить до отображения сферы в точности так, как это сделано у Смейла (см. [2, стр. 135—141]). Тогда множество $\Omega = \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} f^n(S) = K_J \times K_J$ имеет положительную меру Лебега $m(\Omega) = m(K_J)^2 = \left(2 - \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n\right)^2 > 0$. Приведенная конструкция дословно повторяет для специального отображения $f\colon J \times J \to \mathbb{R}^2$ пример Смейла.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bowen R., Ruelle D., The Ergodic Theory of Axiom A Flows, *Inventiones Math.*, **29** (1975), 181—202. [Русский перевод в настоящем сборнике.]
2. Smale S., Differentiable Dynamical Systems, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73** (1967), 747—817. [Русский перевод: *УМН*, **25**, вып. 1 (1970), 113—185.]

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ЭНТРОПИЯ ДЛЯ НЕКОМПАКТНЫХ МНОЖЕСТВ[1])

Р. Боуэн

Резюме. Для непрерывного отображения $f: X \to X$ и подмножества $Y \subset X$ определяется топологическая энтропия $h(f, Y)$. Для компактных пространств X обобщаются известные теоремы об энтропии в случае компактного подмножества Y, а также некоторые результаты, касающиеся хаусдорфовой размерности для специальных подмножеств $Y \subset X = S^1$. Предлагается понятие энтропийной сопряженности для гомеоморфизмов.

Топологическая энтропия непрерывного отображения компактного пространства была определена Адлером, Конхеймом и Мак-Эндрю [1]. В настоящей статье для подмножеств компактных пространств энтропия определяется с помощью процедуры, напоминающей конструкцию хаусдорфовой размерности. Это дает возможность обобщить известные результаты о хаусдорфовой размерности квазирегулярных точек некоторых мер и дать определение нового типа сопряженности, промежуточного между топологической сопряженностью и сопряженностью в смысле теории меры.

В [5] было дано определение энтропии для равномерно непрерывных отображений метрических пространств. Оно мотивировано различными примерами (линейные отображения пространства $\mathbb{R}^n$ и вычисление энтропии отображений тора T^n) и в некоторых случаях отличается от определения, данного в этой статье.

Я благодарен Карлу Зигмунду, подсказавшему автору этот путь, а также Бену Вейсу, который помог сформулировать § 4.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Пусть $f: X \to X$ — непрерывное отображение и $Y \subset X$. Топологическая энтропия $h(f, Y)$ будет определена во многом аналогично хаусдорфовой размерности с той разницей, что «размер» множества будет в этом случае в большей степени отражать поведение отображения f на этом множестве, а не

[1]) Rufus Bowen, Topological Entropy for Noncompact Sets, *Transactions of the American Mathematical Society*, 184 (1973), 125—136 (partially supported by NSF Grant GP-14519).

его диаметр. Пусть $\mathscr{A}$ — конечное открытое покрытие пространства X. Условимся писать $E \prec \mathscr{A}$, если множество E содержится в одном из элементов покрытия $\mathscr{A}$, и $\{E_i\} \prec \mathscr{A}$, если $E_i \prec \mathscr{A}$ при каждом i. Пусть $n_{f, \mathscr{A}}(E)$ — наибольшее неотрицательное целое число, для которого

$$f^k E \prec \mathscr{A} \quad \text{при всех } k \in [0, n_{f, \mathscr{A}}(E));$$

$$n_{f, \mathscr{A}}(E) = 0, \quad \text{если } E \nprec \mathscr{A}, \quad \text{и } n_{f, \mathscr{A}}(E) = +\infty, \quad \text{если } f^k E \prec \mathscr{A}$$

при всех k. Положим теперь

$$D_{\mathscr{A}}(E) = \exp(-n_{f, \mathscr{A}}(E)) \qquad \text{и} \qquad D_{\mathscr{A}}(\mathscr{E}, \lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} D_{\mathscr{A}}(E_i)^{\lambda},$$

где $\mathscr{E} = \{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ и $\lambda \in \mathrm{R}$. Определим меру $m_{\mathscr{A}, \lambda}$, полагая

$$m_{\mathscr{A}, \lambda}(Y) = \lim_{\varepsilon \to 0} \inf \{D_{\mathscr{A}}(\mathscr{E}, \lambda) \colon \bigcup E_i \supset Y \text{ и } D_{\mathscr{A}}(E_i) < \varepsilon\}.$$

Заметим, что $m_{\mathscr{A}, \lambda}(Y) \leqslant m_{\mathscr{A}, \lambda'}(Y)$ при $\lambda > \lambda'$ и $m_{\mathscr{A}, \lambda}(Y) \notin \{0, \infty\}$ не более чем при одном значении λ [1]). Положим

$$h_{\mathscr{A}}(f, Y) = \inf\{\lambda \colon m_{\mathscr{A}, \lambda}(Y) = 0\} \text{ и } h(f, Y) = \sup_{\mathscr{A}} h_{\mathscr{A}}(f, Y)\},$$

где верхняя грань берется по всем конечным открытым покрытиям $\mathscr{A}$ множества X. Условимся также писать $h(f, X) = h(f)$.

Замечание. Число $h(f, Y) = h_X(f, Y)$ очень сильно зависит от того, какое пространство X рассматривается в качестве области определения отображения f. Например, функция $f(x) = x + 1$ задает гомеоморфизм вещественной прямой R, который индуцирует гомеоморфизм окружности S^1 [2]). Из приведенного ниже предложения 1 следует, что величина $h_{S^1}(f, S^1)$ совпадает с обычной энтропией гомеоморфизма $f \colon S^1 \to S^1$ и, следовательно, равно 0 (см. [1, стр. 315]); для любого подмножества $Y \subset S^1$ имеем $0 \leqslant h_{S^1}(f, Y) \leqslant h_{S^1}(f, S^1)$, поэтому $h_{S^1}(f, Y) = 0$. С другой стороны, положим $Y = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} (n + A)$, где $A \subset (0, 1)$ — канторово множество. Так как множество Y замкнуто на прямой R, можно показать, что $h_Y(f, Y) = h_{\mathrm{R}}(f, Y)$. Для любого гомеоморфизма $g \colon A \to A$ проекция $\pi \colon Y \to A$, заданная с помощью формулы $\pi(n + a) = g^n(a)$ (где $a \in A$), представляет гомеоморфизм g как фактор гомеоморфизма $f|Y$. Отсюда следует, что $h(g) \leqslant h(f|Y)$;

[1]) См. доказательство предложения 1. — *Прим. перев.*

[2]) Здесь S^1 отождествляется с проективной прямой, т. е. с $\mathrm{R} \cup \{\infty\}$. — *Прим. ред.*

так как энтропия $h(g)$ может быть сделана сколь угодно большой, $h(f|Y)=+\infty$. Следовательно, $h_R(f, Y)=+\infty$, но $h_{S_1}(f, Y)=0$. Этот пример подсказал мне Л. Гудвин.

Предложение 1. *Если пространство X компактно, то энтропия $h(f)$ совпадает с обычной топологической энтропией.*

Доказательство. Напомним сначала обычное определение энтропии для компактного пространства X (см. [1]). Положим

$$\mathscr{A}_{f,n}=\left\{A_{i_0}\cap f^{-1}A_{i_1}\cap \ldots \cap f^{-n+1}A_{i_{n-1}}\colon A_{i_k}\in\mathscr{A}\right\}$$

для любого открытого покрытия $\mathscr{A}$ пространства X. Обозначим через $N(\mathscr{B})$ наименьшую мощность подпокрытия покрытия $\mathscr{B}$; тогда существует предел

$$\underline{h}(f, \mathscr{A})=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log N(\mathscr{A}_{f,n})$$

и топологическая энтропия определяется формулой

$$\underline{h}(f)=\sup_{\mathscr{A}}\underline{h}(f, \mathscr{A}),$$

где верхняя грань берется по всем конечным открытым покрытиям $\mathscr{A}$ пространства X. Пусть $\mathscr{E}_n$ — подпокрытие покрытия $\mathscr{A}_{f,n}$, состоящее из $N(\mathscr{A}_{f,n})$ элементов; тогда

$$D_{\mathscr{A}}(\mathscr{E}_n, \lambda)\leqslant N(\mathscr{A}_{f,n})\,e^{-n\lambda}$$

и

$$m_{\mathscr{A},\lambda}(X)\leqslant\lim_{n\to\infty}\left[\exp\left(-\lambda+n^{-1}\log N(\mathscr{A}_{f,n})\right)\right]^n.$$

Если $\lambda>\underline{h}(f, \mathscr{A})$, то $m_{\mathscr{A},\lambda}(X)=0$. Следовательно, $h_{\mathscr{A}}(f, X)\leqslant$ $\leqslant\underline{h}(f, \mathscr{A})$.

Покажем, что $\underline{h}(f, \mathscr{A})\leqslant\lambda$, если $m_{\mathscr{A},\lambda}(X)=0$; тем самым будет доказано, что $h_{\mathscr{A}}(f, X)\geqslant\underline{h}(f, \mathscr{A})$. Для числа λ, обладающего указанным выше свойством, существует такое счетное покрытие $\mathscr{E}=\{E_i\}$ пространства X, что $D_{\mathscr{A}}(\mathscr{E}, \lambda)<1$. Если $n_{f,\mathscr{A}}(E_i)<\infty$, то можно считать, что множество E_i открыто (существует открытое множество $F_i\supset E_i$, для которого $D_{\mathscr{A}}(F_i)=D_{\mathscr{A}}(E_i)$). Множества E_i, для которых $n_{f,\mathscr{A}}(E_i)=\infty$, можно заменить открытыми множествами таким образом, чтобы величина $D_{\mathscr{A}}(\mathscr{E}, \lambda)$ осталась меньшей 1 (хотя она может при этом возрасти). Поскольку пространство X компактно, покрытие $\mathscr{E}$ имеет конечное подпокрытие

$\mathscr{D}=\{D_1, \ldots, D_m\}$. Тогда

$$\sum_{s=1}^{\infty} \sum_{l_1, \ldots, l_s} \exp\left(-\lambda n_{f, \mathscr{A}}\left(D_{l_1}, \ldots, D_{l_s}\right)\right)=\sum_{k=1}^{\infty} D_{\mathscr{A}}(\mathscr{D}, \lambda)^k<\infty,$$

где $n_{f, \mathscr{A}}\left(D_{l_1}, \ldots, D_{l_s}\right)=\sum_{r=1}^{s} n_{f, \mathscr{A}}\left(D_{l_r}\right)$.

Положим

$$C\left(D_{l_1}, \ldots, D_{l_s}\right)=\left\{x \in X: f^{t_r} x \in D_{l_r} \text{ для любого } r \in[1, s],\right.$$
$$\left.\text{где } t_r=n_{f, \mathscr{A}}\left(D_{l_1}\right)+\ldots+n_{f, \mathscr{A}}\left(D_{l_{r-1}}\right)\right\}.$$

Тогда $C\left(D_{l_1}, \ldots, D_{l_s}\right)<\mathscr{A}_{f, n}$ при $n \leqslant n_{f, \mathscr{A}}\left(D_{l_1}, \ldots, D_{l_s}\right)$. Если $M=\max_i n_{f, \mathscr{A}}\left(D_i\right)$, то набор множеств

$$\left\{C\left(D_{l_1}, \ldots, D_{l_s}\right): s \geqslant 1,\ n_{f, \mathscr{A}}\left(D_{l_1}, \ldots, D_{l_s}\right) \in[n, n+M]\right\}$$

образует покрытие пространства X, подчиненное покрытию $\mathscr{A}_{f, n}$. Следовательно,

$$N\left(\mathscr{A}_{f, n}\right) e^{-\lambda n} \leqslant$$
$$\leqslant e^{M \lambda} \sum\left\{\exp\left(-\lambda n_{f, \mathscr{A}}\left(D_{l_1}, \ldots, D_{l_s}\right)\right): n_{f, \mathscr{A}}\left(D_{l_1}, \ldots, D_{l_s}\right) \in\right.$$
$$\left.\in[n, n+M)\right\}^{\lambda}.$$

Так как правая часть ограничена по n, то $\underline{h}(f, \mathscr{A}) \leqslant \lambda$.

Это доказательство почти совпадает с доказательством Фюрстенберга [10, предложение III. 1] и напоминает доказательство хорошо известной теоремы из теории информации [19].

Сформулируем теперь (без доказательства) несколько простых свойств введенной энтропии.

Предложение 2. (a) *Если отображения $f_1: X_1 \rightarrow X_1$ и $f_2: X_2 \rightarrow X_2$ топологически сопряжены (т. е. существует такой гомеоморфизм $\pi: X_1 \rightarrow X_2$, что $\pi f_1=f_2 \pi$), то $h(f_1, Y_1)= =h(f_2, \pi(Y_1))$ для любого подмножества $Y_1 \subset X_1$.*

(b) $h(f, f(Y))=h(f, Y)$.

(c) $h\left(f, \bigcup_{i=1}^{\infty} Y_i\right)=\sup_i h(f, Y_i)$.

(d) $h(f^m, Y)=m h(f, Y)$ *при* $m>0$.

Рассмотрим пример, который стимулировал появление этой статьи. Определим отображение $f: S^1 \rightarrow S^1$ формулой $f(z)=z^n$. Если Y — замкнутое подмножество окружности и $f(Y) \subset Y$, то хаусдорфова размерность множества Y удовлетворяет соотношению $hd(Y)=h(f|Y)/\log n$. Этот результат был получен Фюрстенбергом [10, предложение III. 1]. Известно, что для эргодической f-инвариантной вероятностной меры μ на окружности S^1 имеет место равенство $hd(G(\mu))=h_\mu(f)/\log n$, где $G(\mu)$ — множество типичных[1]) точек для меры μ (Коулбрук [7]; см. также [3] и [9]). Из приведенных выше двух формул могло бы вытекать равенство $h_\mu(f)=h(f, G(\mu))$, если бы его правая часть была корректно определена для некомпактного множества $G(\mu)$. Промежуточный объект — хаусдорфова размерность — послужил мотивом для введенного выше определения энтропии; из теоремы 3 следует, что желаемое равенство справедливо для любого непрерывного отображения компактного метрического пространства. Отметим, что в другом аспекте результаты статьи Коулбрука [7] были обобщены К. Зигмундом [20].

2. ТЕОРЕМА ГУДВИНА

В этом параграфе мы обобщаем одну теорему Гудвина [13]. Пусть $f\colon X\to X$ — непрерывное отображение. Обозначим через $M(f)$ множество f-инвариантных борелевских вероятностных мер на пространстве X. Определение энтропии $h_\mu(f)$ см. в [4] или [14].

Теорема 1. *Пусть $f\colon X\to X$ — непрерывное отображение компактного метрического пространства и $\mu\in M(f)$. Если $Y\subset X$ и $\mu(Y)=1$, то $h_\mu(f)\leqslant h(f, Y)$.*

Лемма 1. *Пусть α — такое конечное борелевское разбиение пространства X, что любая точка $x\in X$ содержится в замыкании не более чем M элементов разбиения α. Тогда*

$$h_\mu(f, \alpha)\leqslant h(f, Y)+\log M.$$

Доказательство. Для любой точки $x\in X$ положим $I_n(x)=-\log\mu(A)$, где элемент $A\in\alpha_{f,n}$ содержит точку x. Из теоремы Шеннона — Макмиллана — Броймана [14][2]) вытекает существование μ-интегрируемой функции $I(x)$, для которой $I_n(x)/n\to I(x)$ почти всюду и $a=\int I(x)\,d\mu=h_\mu(f, \alpha)$. Для любого $\delta>0$ множество $Y_\delta=\{y\in Y\colon I(y)\geqslant a-\delta\}$ имеет положительную меру. По теореме Егорова существует такое N, что множество

$$Y_{\delta,N}=\{y\in Y_\delta\colon\ I_n(y)/n\geqslant a-2\delta\ \ \forall n\geqslant N\}$$

имеет положительную меру.

[1]) Определение типичной точки приведено ниже в § 3. — *Прим. ред.*

[2]) См. также [4]. — *Прим. ред.*

Пусть $\mathscr{A}$ — конечное открытое покрытие пространства X, каждый элемент которого пересекается не более чем с M элементами разбиения α. Предположим, что система множеств $\mathscr{E}=\{E_i\}$ покрывает множество Y, причем $D_{\mathscr{A}}(E_i)\leqslant e^{-N}$. Если элемент $\beta\in\alpha_{f,\, n_{f,\mathscr{A}}(E_i)}$ пересекается с множеством $Y_{\delta,N}$, то $\mu(\beta)\leqslant\exp((-a+2\delta)n_{f,\mathscr{A}}(E_i))$. Поскольку пересечение $E_i\cap Y_{\delta,N}$ покрывается не более чем $M^{n_{f,\mathscr{A}}(E_i)}$ такими элементами,

$$\mu(E_i\cap Y_{\delta,N})\leqslant\exp(n_{f,\mathscr{A}}(E_i)(\log M-a+2\delta)).$$

При $\lambda=-\log M+a-2\delta$ имеем

$$D_{\mathscr{A}}(\mathscr{E},\lambda)=\sum_i\exp(-\lambda n_{f,\mathscr{A}}(E_i))\geqslant\sum_i\mu(E_i\cap Y_{\delta,N})\geqslant\mu(Y_{\delta,N}).$$

Поскольку это верно для любой системы множеств, $m_{\mathscr{A},\lambda}(Y)\geqslant\mu(Y_{\delta,N})>0$. Следовательно, $h(f,Y)\geqslant h_{\mathscr{A}}(f,Y)\geqslant\lambda=-\log M+a-2\delta$. Устремляя δ к 0, получаем требуемое утверждение.

Лемма 2. *Пусть $\mathscr{A}$ — конечное открытое покрытие пространства X. Тогда для каждого $n>0$ существует такое конечное борелевское разбиение α_n пространства X, что $f^k\alpha_n<\mathscr{A}$ для любого $k\in[0,n)$, причем не более чем $n\cdot\operatorname{card}\mathscr{A}$ замыканий элементов разбиения α_n могут иметь общую точку.*

Доказательство. Идея этой леммы принадлежит Гудвину [13]; приведенная выше формулировка имеется в [15]. Пусть $\mathscr{A}=\{A_1,\dots,A_m\}$, и пусть $g_1,\dots,g_m$ — разбиение единицы, подчиненное покрытию $\mathscr{A}$. Рассмотрим отображение $G=(g_1,\dots,g_m)\colon X\to s_{m-1}\subset\mathbb{R}^m$, где s_{m-1} есть $(m-1)$-мерный симплекс. Множества $U_1,\dots,U_m$, где $U_i=\{\underline{x}\in s_{m-1}\colon x_i>0\}$, образуют открытое покрытие симплекса s_{m-1} и $G^{-1}U_i\subset A_i$. Так как множество $(s_{m-1})^n$ является $(nm-n)$-мерным, существует такое конечное борелевское разбиение α_n^* множества $(s_{m-1})^n$, что не более чем nm замыканий элементов этого разбиения имеют общую точку, причем каждый элемент разбиения α_n^* лежит в некотором множестве вида $U_{i_1}\times\dots\times U_{i_n}$. Утверждению леммы удовлетворяет разбиение $\alpha_n=L^{-1}\alpha_n^*$, где $L=(G,G\circ f,\dots,G\circ f^{n-1})\colon X\to(s_{m-1})^n$.

Лемма 3. *Для любого конечного борелевского разбиения β и для любого $\varepsilon>0$ существует такое открытое покрытие $\mathscr{A}$, что для любого конечного борелевского разбиения $\alpha<\mathscr{A}$ имеет место неравенство $H_\mu(\beta|\alpha)<\varepsilon$.*

Доказательство. Пусть $\beta=\{B_1,\dots,B_m\}$. Существует такое $\delta>0$, что:

если существует борелевское разбиение $\{C_1, \ldots, C_m\}$, которое является укрупнением разбиения α и для которого

$$\sum_{i \neq j} \mu(B_i \cap C_j) < \delta, \text{ то } H_\mu(\beta \mid \alpha) < \varepsilon$$

[4, теорема 6.2][1]). Выберем компактные множества $K_i \subset B_i$ таким образом, чтобы $\mu(B_i \setminus K_i) < \delta/m$. Пусть $\mathscr{A}$ — открытое покрытие, каждый элемент которого пересекается не более чем с одним множеством K_i. Будем считать, что элемент A разбиения $\alpha < \mathscr{A}$ входит в множество C_i, если $A \cap K_i \neq \varnothing$, а если $A \cap \bigcup_j K_j = \varnothing$, то включим его в произвольное множество C_j. При таком определении $C_j \cap K_i = \varnothing$, если $i \neq j$, и

$$\sum_{i \neq j} \mu(B_i \cap C_j) \leqslant \sum_i \mu(B_i \setminus K_i) < \delta.$$

Доказательство теоремы 1. Пусть β — конечное борелевское разбиение пространства X и $\varepsilon > 0$. Пусть $\mathscr{A}$ и α_n — такие, как в леммах 3 и 2 соответственно. Тогда

$$\begin{aligned}
h_\mu(f, \beta) &= n^{-1} h_\mu(f^n, \beta_{f,n}) \leqslant n^{-1} h_\mu(f^n, \alpha_n) + n^{-1} H_\mu(\beta_{f,n} \mid \alpha_n) \leqslant \\
&\leqslant n^{-1}\left[h(f^n, Y) + \log(n \operatorname{card} \mathscr{A})\right] + n^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} H_\mu(f^{-k}\beta \mid \alpha_n) \leqslant \\
&\leqslant h(f, Y) + n^{-1} \log(n \operatorname{card} \mathscr{A}) + n^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} H_\mu(\beta \mid f^k \alpha_n) \leqslant \\
&\leqslant h(f, Y) + n^{-1} \log(n \cdot \operatorname{card} \mathscr{A}) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Здесь были использованы леммы 1 и 2 и некоторые свойства энтропии (см., например, [4] и [14]):

$$h_\mu(f, \eta) \leqslant h_\mu(f, \xi) + H_\mu(\eta \mid \xi),$$
$$H_\mu(\eta \vee \gamma \mid \xi) \leqslant H_\mu(\eta \mid \xi) + H_\mu(\gamma \mid \xi),$$
$$H_\mu(f^{-1}\eta \mid f^{-1}\xi) = H_\mu(\eta \mid \xi).$$

Для завершения доказательства теоремы достаточно перейти к пределу при $n \to \infty$ и $\varepsilon \to 0$.

3. ТИПИЧНЫЕ ТОЧКИ

Множество $M(X)$ всех нормированных борелевских мер на компактном метрическом пространстве X, снабженное слабой топологией, является компактным метризуемым простран-

[1]) Действительно, при достаточно малом δ разбиение, индуцированное разбиением β на каждом элементе разбиения α, близко (в пространстве разбиений) к тривиальному разбиению ν. — *Прим. перев.*

ством (см. [18][1])). Если $\mu_n \to \mu$, то $\underline{\lim}\,\mu_n(V) \geqslant \mu(K)$ для любого открытого множества V и компактного множества $K \subset V$. Для любой точки $x \in X$ обозначим через μ_x нормированную меру, сосредоточенную в точке x. Для любого непрерывного отображения $f\colon X \to X$ положим

$$\mu_{x,n} = n^{-1}(\mu_x + \mu_{fx} + \ldots + \mu_{f^{n-1}x}).$$

Пусть $V_f(x)$ — множество всех предельных точек последовательности $\mu_{x,n}$ в пространстве $M(X)$. Тогда $V_f(x) \neq \varnothing$ и легко проверить, что $V_f(x) \subset M(f)$. Точка x называется *типичной* для меры μ, если $V_f(x) = \{\mu\}$. Наш основной результат состоит в том, что $h(f, G(\mu)) = h_\mu(f)$ для эргодической меры μ и множества $G(\mu)$ ее типичных точек.

Назовем вектор $p = (p_1, \ldots, p_N)$ *N-распределением*, если $\sum_{i=1}^{N} p_i = 1$ и $p_i \geqslant 0$; положим $H(p) = -\sum_i p_i \log p_i$. Пусть $a = (a_1, \ldots, a_m) \in \{1, \ldots, N\}^m$; положим $\operatorname{dist} a = (p_1, \ldots, p_N)$, где $p_i = m^{-1}$ (число тех j, для которых $a_j = i$). Если p и q — два N-распределения, то $|p - q| = \max_i |p_i - q_i|$.

Лемма 4. *Пусть*

$$R(N, m, t) = \{a \in \{1, \ldots, N\}^m\colon H(\operatorname{dist} a) \leqslant t\}.$$

Тогда при фиксированных N и t

$$\overline{\lim_{m\to\infty}}\, \frac{1}{m} \log \operatorname{card} R(N, m, t) \leqslant t.$$

Доказательство. Для любого N-распределения q и числа $\alpha \in (0, 1)$ рассмотрим множество

$$R_m(q) = \{a \in \{1, \ldots, N\}^m\colon |q - \operatorname{dist} a| < \alpha\}.$$

Пусть μ — инвариантная относительно сдвига Бернулли мера в пространстве последовательностей $\Sigma_N = \{1, \ldots, N\}^{\mathbf{Z}}$ со стационарным распределением $q' = (1-\alpha)q + \alpha(1/N, \ldots, 1/N)$. Каждому вектору $a \in R_m(q)$ соответствует некоторый цилиндр $C_a \subset \Sigma_N$. Так как $|q - \operatorname{dist} a| < \alpha$, то число символов i, входящих в вектор a, не превосходит $(q_i + \alpha)m$. Поскольку вероятность символа i равна $q'_i = (1-\alpha)q_i + \alpha/N$, то

$$\mu(C_a) \geqslant \prod_{i=1}^{N} q_i'^{(q_i+\alpha)m}.$$

Учитывая, что цилиндры C_a не пересекаются и суммарная их мера не больше 1, получаем

$$1 \geqslant \operatorname{card} R_m(q) \prod_i q_i'^{(q_i+\alpha)m}.$$

[1]) А также [22, стр. 254] — *Прим. ред.*

Логарифмируя это неравенство, находим, что

$$\frac{1}{m}\log\operatorname{card} R_m(q)\leqslant\sum_i\left[-(q_i+\alpha)\log q_i'\right]\leqslant$$

$$\leqslant H(q')+\sum_i\left(\left|q_i'-q_i\right|+\alpha\right)\left|\log q_i'\right|.$$

Так как $q_i'\geqslant\alpha/N$, то $\left|\log q_i'\right|\leqslant\log N-\log\alpha$; кроме того, $\left|q_i'-q_i\right|=\left|\alpha/N-\alpha q_i\right|\leqslant 2\alpha$. Поэтому

$$m^{-1}\log\operatorname{card} R_m(q)\leqslant H(q')+3\alpha N(\log N-\log\alpha).$$

Функция $H(q)$ равномерно непрерывна по q и $\alpha\log\alpha\to 0$ при $\alpha\to 0$. Следовательно, для любого $\varepsilon>0$ при достаточно малом $\alpha>0$ имеем

$$m^{-1}\log\operatorname{card} R_m(q)\leqslant H(q)+\varepsilon$$

для любых m и q.

Как только α зафиксировано, можно найти такое конечное множество N-распределений Q, для которого

(a) $H(q)\leqslant t$, если $q\in Q$,

(b) если $H(q^*)\leqslant t$, то $|q^*-q|<\alpha$ для некоторого $q\in Q$.

Тогда $R(N,m,t)\subset\bigcup\limits_{q\in Q}R_m(q)$,

$$m^{-1}\log\operatorname{card} R(N,m,t)\leqslant m^{-1}\log\operatorname{card} Q+(t+\varepsilon).$$

Устремляя m к ∞, а затем ε к 0, получаем доказываемое утверждение.

Рассмотрим теперь покрытие $\beta=\{B_1,\ldots,B_N\}$ множества X. Назовем *n-выборкой для точки x* (по отношению к покрытию β и отображению f) набор множеств $\underline{B}=(B_{i_0},\ldots$ $\ldots,B_{i_{n-1}})\in\beta^n$, для которого $f^k(x)\in B_{i_k}$ при $k\in[0,n)$. Любой n-выборке соответствует некоторое N-распределение $q(\underline{B})=\operatorname{dist}(i_0,\ldots,i_{n-1})$. Обозначим множество таких распределений, соответствующих различным n-выборкам для точки x, через $\operatorname{Dist}_\beta(x,n)$.

Лемма 5. *Предположим, что $f\colon X\to X$ — непрерывное отображение топологического пространства, $\mathscr{B}$ — открытое покрытие пространства X, β — конечное покрытие пространства X и M — натуральное число, для которого $f^k\beta\prec\mathscr{B}$ при $k\in[0,M)$. Для любого $t\geqslant 0$ положим*

$$Q(t,\beta)=\{x\in X\colon\ \varliminf_{n\to\infty}(\inf\{H(q)\colon\ q\in\operatorname{Dist}_\beta(x,n)\})\leqslant t\}.$$

Тогда $h_{\mathscr{B}}(f,Q(t,\beta))\leqslant t/M$.

Доказательство. Пусть $N = \operatorname{card}\beta$ и $\varepsilon > 0$. В соответствии с леммой 4 существует такое m_ε, что

$$\operatorname{card} R(N,\ m,\ t+\varepsilon) \leqslant e^{m(t+2\varepsilon)}$$

для любого $m \geqslant m_\varepsilon$. Так как при больших n множество $\operatorname{Dist}_\beta(x,n)$ слабо зависит от нескольких последних образов $f^i(x)$, а функция $H(q)$ непрерывна по q, то

$$\varlimsup_{m\to\infty}\ (\inf\{H(q):\ q \in \operatorname{Dist}_\beta(x,\ mM)\}) \leqslant t$$

для $x \in Q(t,\ \beta)$. Пусть $\underline{B}_n(x) = (B_{i_0},\ \ldots,\ B_{i_{n-1}})$ — некоторая n-выборка с распределением $q(x,n)$, минимизирующим функцию $H(q)$ на множестве $\operatorname{Dist}_\beta(x,n)$. Положим для $k \in [0,M)$

$$q_k(x,\ m) = \operatorname{dist}\{i_{k+rM}:\ r \in [0,\ m)\}.$$

Тогда $q(x,\ mM) = \frac{1}{M}\sum\limits_k q_k(x,\ m)$. Из вогнутости функции $H(q)$ следует, что $H(q_k(x,m)) \leqslant H(q(x,mM))$ для некоторого k (зависящего от x и m).

Зафиксируем теперь любое $m_0 \geqslant m_\varepsilon$. Пусть $m \geqslant m_0$ и $k \in [0,M)$; положим

$$S(m,\ k) = \{x \in X:\ H(q_k(x,\ m)) \leqslant t+\varepsilon\}.$$

Тогда $Q(t,\beta) \subset \bigcup\{S(m,k):\ m \geqslant m_0,\ k \in [0,M)\}$. Предположим, что $x \in S(m,k)$; тогда последовательность $a(x) = (i_k, i_{k+M}, \ldots, i_{k+(m-1)M})$ принадлежит множеству $R(N,m,t+\varepsilon)$. Введем обозначение

$$A_k(x,\ m) = \Big\{y \in X:\ f^j y \in B_{i_j} \text{ при } j \in [0,\ k) \text{ и } f^{k+rM} y \in B_{i_{k+rm}} \text{ при } r \in [0,\ m)\Big\}.$$

Множество $f^j A_k(x,m)$ при каждом $j \in [0,mM)$ содержится в некотором элементе разбиения β. Следовательно, $D_{\mathscr{A}}(A_k(x,\ m)) \leqslant e^{-mM}$. Положим

$$\mathscr{E}(m_0) = \{A_k(x,\ m):\ x \in S(m,\ k),\ m \geqslant m_0,\ k \in [0,\ M)\}.$$

Множества $\mathscr{E}(m_0)$ покрывают множество $Q(t,\beta)$. Поскольку для любой точки $x \in S(m,k)$ существует не более чем $(\operatorname{card}\beta)^k \cdot \operatorname{card} R(N,m,t+\varepsilon)$ различных множеств $A_k(x,m)$, то

$$\begin{aligned} D_{\mathscr{A}}(\mathscr{E}(m_0),\ (t+3\varepsilon)/M) &\leqslant \\ &\leqslant \sum_{\substack{k\in[0,\ M)\\ m \geqslant m_0}} (\operatorname{card}\beta)^k \cdot \operatorname{card} R(N,\ m,\ t+\varepsilon)\, e^{-m(t+3\varepsilon)} \leqslant \\ &\leqslant (\operatorname{card}\beta)^{M-1} \sum_{m \geqslant m_0} e^{-m\varepsilon}. \end{aligned}$$

Эта величина стремится к 0 при $m_0 \to \infty$, поэтому $m_{\mathscr{B},(t+2\varepsilon)/M}(Q(t, \beta)) = 0$ и $h_{\mathscr{B}}(f, Q(t, \beta)) \leqslant (t+3\varepsilon)/M$. Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем требуемый результат.

Теорема 2. *Пусть f: $X \to X$ — непрерывное отображение компактного метрического пространства. Положим*

$$QR(t) = \{x \in X\colon \exists \mu \in V_f(x), \text{ такое, что } h_\mu(f) \leqslant t\}.$$

Тогда $h(f, QR(t)) \leqslant t$.

Доказательство. Пусть $\mathscr{B}$ — конечное открытое покрытие пространства X и α — борелевское разбиение пространства X, замыкания элементов которого содержатся в элементах покрытия $\mathscr{B}$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и введем обозначение

$$W_\varepsilon(M) = \{x \in X\colon \exists \mu \in V_f(x), \text{ такое, что } (1/M)\, H_\mu(\alpha_{f,M}) < t + \varepsilon\}.$$

Пусть $h_\mu(f) \leqslant t$; так как

$$\lim_{M \to \infty} \frac{1}{M} H_\mu(\alpha_{f,M}) = h_\mu(f, \alpha) \leqslant h_\mu(f),$$

то $(1/M)H_\mu(\alpha_{f,M}) < t + \varepsilon$ для некоторого M. Следовательно, $QR(t) \subset \bigcup\limits_M W_\varepsilon(M)$.

Зафиксируем теперь число M и положим $\alpha_{f,M} = \{E_1, \ldots, E_M\}$. Выберем открытые множества $U_i \supset E_i$ таким образом, чтобы $f^k U_i < \mathscr{B}$ при $k \in [0, M)$, и обозначим $\beta = \{U_1, \ldots, U_M\}$. Покажем теперь, что $W_\varepsilon(M) \subset Q(M(t+2\varepsilon), \beta)$. Рассмотрим точку $x \in W_\varepsilon(M)$ и меру $\mu \in V_f(x)$, для которой $(1/M)H(\alpha_{f,M}) < t + \varepsilon$. Обозначим $q' = (\mu(E_1), \ldots, \mu(E_M))$ и выберем такое $\delta > 0$, чтобы из неравенства $|q - q'| < \delta$ следовало неравенство $H(q) \leqslant M(t+2\varepsilon)$. Выберем компактные множества $K_i \subset E_i$ так, чтобы $\mu(E_i \setminus K_i) < \delta/2N$, и такие непересекающиеся открытые множества V_i, что $U_i \supset V_i \supset K_i$. Пусть $B_n(x) \in \beta^n$ — некоторая n-выборка для точки x, так что $B_{i_k} = U_i$, если $f^k x \in V_i$. Так как $\mu \in V_f(x)$, то существует такая последовательность натуральных чисел n_j, что $\mu_{x, n_j} \to \mu$ при $n_j \to \infty$. Для больших j имеем

$$\mu_{x, n_j}(V_i) \geqslant \mu(K_i) - \delta/2N$$

при любом i. Обозначим $q^j = \operatorname{dist} \underline{B}_{n_j}(x) = (q_1^j, \ldots, q_N^j)$; тогда $q_i^j \geqslant \mu(K_i) - \delta/2N \geqslant \mu(E_i) - \delta/N$. Поэтому $|q^j - q'| \leqslant \delta$ и $H(q^j) \leqslant M(t+2\varepsilon)$. Следовательно, $x \in Q(M(t+2\varepsilon), \beta)$.

Из леммы 5 вытекает, что $h_{\mathscr{B}}(f, W_\varepsilon(M)) \leqslant t + 2\varepsilon$. В соответствии с предложением 2(d), $h_{\mathscr{B}}(f, QR(t)) \leqslant t + 2\varepsilon$. Устремляя ε к 0 и меняя покрытие $\mathscr{B}$, получаем доказываемое утверждение.

Следствие. *Пусть f: $X \to X$ — непрерывное отображение компактного метрического пространства. Тогда*

$$h(f) = \sup_{\mu \in M(f)} h_\mu(f).$$

Доказательство. Пусть $t = \sup\limits_{\mu} h_\mu(f)$. Так как $V_f(x) \neq \varnothing$ для любой точки $x \in X$, то $X \subset QR(t)$ и $h(f) = h(f, X) \leqslant t$. С другой стороны, по теореме Гудвина (теорема 1) $h(f) \geqslant t$.

Замечание. Этот результат известен; он был получен раньше в [8] для конечномерного случая и в [12] для компактных хаусдорфовых пространств.

Теорема 3. *Пусть f — непрерывное отображение компактного метрического пространства в себя и $\mu \in M(f)$ — эргодическая мера. Пусть $G(\mu)$ — множество типичных точек меры μ, т. е.*

$$G(\mu) = \{x\colon\ V_f(x) = \{\mu\}\}.$$

Тогда $h(f, G(\mu)) = h_\mu(f)$.

Доказательство. Из эргодической теоремы следует, что $\mu(G(\mu)) = 1$. По теореме 1 $h(f, G(\mu)) \geqslant h_\mu(f)$. Так как $G(\mu) \subset QR(h_\mu(f))$, из теоремы 2 получаем обратное неравенство.

4. НОВЫЙ ТИП СОПРЯЖЕННОСТИ

Два гомеоморфизма f: $X \to X$ и g: $Y \to Y$ назовем *энтропийно сопряженными*, если существуют такие подмножества $X' \subset X$ и $Y' \subset Y$, что

(i) множества X' и Y' являются борелевскими,
(ii) $f(X') \subset X'$, $g(Y') \subset Y'$,
(iii) $h(f, X \setminus X') < h(f)$, $h(g, Y \setminus Y') < h(g)$,
(iv) гомеоморфизмы $f \mid X'$ и $g \mid Y'$ топологически сопряжены.

К сожалению, по-видимому, это не отношение эквивалентности.

Предложение 3. *Если гомеоморфизмы f и g компактных метрических пространств энтропийно сопряжены, то $h(f) = h(g)$.*

Доказательство. Предположим, что $\mu \in M(f)$ и $h_\mu(f) > h(f, X \setminus X')$. Поскольку мера μ является f-инвариантной и $f(X') \subset X'$, существует такое подмножество $B \subset X \setminus X'$, что $\mu(B) = \mu(X \setminus X')$ и $f(B) = B$. По теореме 1 $\mu(B) < 1$. Положим $\mu_{X'}(E) = \mu(E \cap X')/\mu(X')$. Тогда $\mu_{X'} = \mu$ (если $\mu(X') = 1$) или $\mu = \mu(X')\mu_{X'} + \mu(B)\mu_B$. Во втором случае $\mu_{X'}, \mu_B \in M(f)$ и

$$h_\mu(f) = \mu(X') h_{\mu_{X'}}(f) + \mu(B) h_{\mu_B}(f).$$

Из теоремы 1 следует, что $h_{\mu_B}(f) \leqslant h(f, X \setminus X') < h_\mu(f)$, поэтому $h_{\mu_{X'}}(f) \geqslant h_\mu(f)$. Если $\mu_{X'} = \mu$, то, конечно, $h_{\mu_{X'}}(f) \geqslant h_\mu(f)$. Так как $\mu_{X'}(X') = 1$, из топологической сопряженности гомеоморфизмов $f|X'$ и $g|Y'$ вытекает существование такой меры ν на множестве Y', для которой динамические системы (g, ν) и $(f, \mu_{X'})$ сопряжены; в частности,

$$h_\nu(g) = h_{\mu_{X'}}(f) \geqslant h_\mu(f).$$

Из теоремы Гудвина следует, что $h(g) \geqslant h_\mu(f)$. Применяя теорему Динабурга — Гудмана (см. выше следствие теоремы 2), можно сделать величину $h_\mu(f)$ сколь угодно близкой к энтропии $h(f)$ (в этом случае $h_\mu(f) > h(f, X \setminus X')$). Получаем $h(g) \geqslant h(f)$. В силу симметрии аналогичным способом можно показать, что $h(g) \leqslant h(f)$.

Существует естественный класс гомеоморфизмов, для которых могло бы быть справедливо обращение предложения 3. Пусть $\Sigma_n = \prod_{Z} \{1, \ldots, n\}$; определим преобразование сдвига $\sigma_n\colon \Sigma_n \to \Sigma_n$, полагая

$$(\sigma_n x)_i = x_{i+1}; \qquad x = (x_i).$$

Отображение σ_n является гомеоморфизмом компактного метризуемого пространства Σ_n. Пусть A — матрица порядка n, состоящая из нулей и единиц. Обозначим

$$\Sigma_n(A) = \{(x_i) \in \Sigma_n\colon\ A_{x_i x_{i+1}} = 1\ \ \forall i\}.$$

Отображение $\sigma_n|\Sigma_n(A)$ является гомеоморфизмом компактного пространства.

Гипотеза. Предположим, что гомеоморфизмы $\sigma_n|\Sigma_n(A)$ и $\sigma_m|\Sigma_m(B)$ топологически перемешивают [1]) и имеют одинаковую топологическую энтропию. Тогда они энтропийно сопряжены.

Эта гипотеза имеет отношение к символической динамике для диффеоморфизмов (см. [2], [16], [6]). Из результатов

---

[1]) Это условие эффективно проверяется. Оно эквивалентно тому, что некоторые степени матриц A и B состоят из положительных элементов. См. п. 4 добавления. — *Прим. ред.*

работы [6][1]) следует, что ограничение A-диффеоморфизма на множество неблуждающих точек энтропийно сопряжено сдвигу в некотором пространстве $\Sigma_n(A)$ (который называется топологической марковской цепью). Способ кодирования из [2] показывает, что сформулированная гипотеза выполнена для топологических марковских цепей, соответствующих гиперболическим автоморфизмам тора T^2. Это кодирование было использовано в [2] для доказательства того факта, что энтропия является полным инвариантом для классификации таких отображений тора T^2 с точностью до метрического изоморфизма; Фридман и Орнстейн [11] применили это кодирование с той же целью. Введение энтропийной сопряженности — это попытка прояснить топологическое содержание кодирования Адлера — Вейса (см. [21, проблема 3]).

Предложение 4. *Предположим, что f и g — энтропийно сопряженные гомеоморфизмы компактных метрических пространств. Гомеоморфизм f обладает свойством единственности меры максимальной энтропии тогда и только тогда, когда этим свойством обладает гомеоморфизм g.*

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству предложения 3. Свойство единственности меры максимальной энтропии [17] означает, что существует единственная мера $\mu \in M(f)$, для которой $h_\mu(f) = h(f)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Adler R. L., Konheim A. G., McAndrew M. H., Topological entropy, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 114 (1965), 309—319.
2. Adler R. L., Weiss B., Similarity of automorphisms of the torus, *Mem. Amer. Math. Soc.*, № 98 (1970).
3. Billingsley P., Hausdorff dimension in probability theory, *Illinois J. Math.*, 4 (1960), 187—209.
4. Billingsley P., Ergodic Theory and Information, New York, Wiley, 1965. [Русский перевод: Биллингслей П., Эргодическая теория и информация, М., «Мир», 1969.]
5. Bowen R., Entropy for group endo-morphisms and homogeneous spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 153 (1971), 401—414.
6. Bowen R., Markov partitions for axiom A diffeomorphisms, *Amer. J. Math.*, 92 (1970), 725—747.
7. Colebrook C. M., The Hausdorff dimension of certain sets of nonnormal numbers, *Michigan Math. J.*, 17 (1970), 103—116.
8. Динабург Е. И., Соотношения между топологической энтропией и метрической энтропией, *ДАН СССР*, 190, № 1 (1970), 19—22.
9. Eggleston H., The fractional dimension of a set defined by decimal properties, *Quart. J. Math.*, Oxford ser., 20 (1949), 31—36.

[1]) См. также теорему 3.18 первой статьи настоящего сборника. — *Прим. ред.*

10. Furstenberg H., Disjointness in ergodic theory, minimal sets and a problem in Diophantine approximation, *Math. Systems Theory*, **1** (1967), 1—49.
11. Friedman N., Ornstein D., On isomorphism of weak Bernoulli transformations, *Advances in Math.*, **5** (1970), 365—394.
12. Goodman T. N. T., Relating topological entropy and measure entropy, *Bull. London Math. Soc.*, **3** (1971), 176—180.
13. Goodwyn L., Topological entropy bounds measure theoretic entropy, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **23** (1969), 679—688.
14. Parry W., Entropy and generators in ergodic theory, Benjamin, New York, 1969.
15. Ruelle D., Statistical mechanics on a compact set with Z^ν action satisfying expansiveness and specification, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **185** (1973), 237—251.
16. Синай Я. Г., Марковские разбиения и У-диффеоморфизмы, *Функц. анализ и его прилож.*, 2, № 1 (1968), 64—89.
17. Weiss B., Intrinsically ergodic systems, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **76** (1970), 1266—1269.
18. Parathasarathy K., Probability measures on metric spaces, New York, Academic Press, 1967.
19. Ash R., Information Theory, Interscience Tracts in Pure and Applied Math., № 19, Interscience, New York, 1965, pp. 35—36.
20. Sigmund K., On dynamical systems with the specification property, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **190** (1974), 285—299.
21. Weiss B., The isomorphism problem in ergodic theory, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **78** (1972), 668—684.
22*. Люстерник Л. А., Соболев Л. И., Элементы функционального анализа, изд. 2, М., «Наука», 1965.

ДОБАВЛЕНИЕ
СИМВОЛИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА И ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

В. М. Алексеев и М. В. Якобсон

ЧАСТЬ I. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ СИМВОЛИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ

1. Под *символической динамикой* понимают обычно тот специальный раздел общей теории динамических систем, в котором изучаются каскады и потоки, порожденные гомеоморфизмом сдвига σ в различных пространствах Σ последовательностей

$$\tilde{\omega} = \{\omega_n\}_{-\infty}^{+\infty}, \tag{1.1}$$

где ω_n — буквы некоторого алфавита $\mathscr{L}$; $\sigma\{\omega_n\} = \{\omega_{n+1}\}$. Когда же говорят о *методах символической динамики*, то имеют в виду изучение произвольных динамических систем при помощи символических моделей, в которых последовательности (1.1) соответствуют траекториям изучаемой системы, а отображение σ — некоторому сдвигу вдоль этих траекторий. В частности, методы символической динамики оказываются применимыми в качественной теории дифференциальных уравнений, где рассматриваются гладкие системы на гладких многообразиях, хотя сама по себе символическая динамика большей частью имеет дело со вполне несвязными нульмерными пространствами, гомеоморфными канторову множеству.

Наиболее эффективными методы символической динамики оказываются в тех ситуациях, где изучаемые детерминированные системы обнаруживают аналогию со случайными процессами. К настоящему времени накопился ряд примеров и даже целые классы динамических систем, в том числе и с конкретным физическим содержанием, которым присущи черты «квазислучайного» поведения и для описания которых удобно пользоваться топологическими аналогами некоторых понятий вероятностного происхождения. Подчеркнем, что речь здесь вовсе не идет о рассмотрении моделей, в которых эволюция явно или неявно подвержена воздействию Случая (в виде случайных параметров, случайных начальных условий или случайного внешнего шума). Мы по-прежнему остаемся в рамках математического детерминизма, т. е. единственности решения задачи Коши. Каким же образом в строго детерминированной системе может возникнуть аналогия со случайным процессом и, в частности, с марковской цепью?

Начнем со следующего простого рассуждения. Пусть на фазовом пространстве X действует динамическая система с дискретным временем (каскад) $\{f^n;\ n \in \mathbb{Z}\}$, порожденная отображением $f\colon X \to X$. Эта система строго детерминирована: задав точно начальное состояние x_0, мы однозначно определяем траекторию $x_n = f^n x_0$, $n \in \mathbb{Z}$. Предположим теперь, что мы наблюдаем за системой, регистрируя показания некоего прибора, который, обладая ограниченной точностью, может показывать только конечный набор значений $1, \ldots, m$; другими словами, $X = \bigcup\limits_{i=1}^{m} E_i$ и при $x \in E_i$ прибор показывает значение i. Множества E_i могут, вообще говоря, пересекаться («стрелка прибора стоит между делениями»), но эту возможность мы пока не будем принимать во внимание.

Пусть ω_0 — начальное показание прибора, т. е. $x_0 \in E_{\omega_0}$. Через время t образ $f^t E_{\omega_0}$ множества E_{ω_0} может оказаться весьма вытянутым и может пересекаться более чем с одним из множеств E_i. Поэтому результат наблюдения в момент t значением ω_0 определен неоднозначно. Произошла кажущаяся потеря детерминизма, вызванная не вмешательством Случая, а нашим предположением о невозможности точного определения положения фазовой точки.

Регистрируя показания прибора для всех моментов времени, мы получаем отображение $\psi\colon X \to \Sigma$, сопоставляющее точке x последовательность (1.1) так, что

$$\psi(x) = \bar{\omega} = \{\omega_n\} \Leftrightarrow f^n x \in E_{\omega_n} \Leftrightarrow x \in \bigcap_n f^{-n} E_{\omega_n}. \tag{1.2}$$

Это соотношение является ключом к исследованию каскадов методами символической динамики.

Конечно, рассчитывать на то, что ψ будет гомеоморфизмом (в этом случае f и сдвиг σ были бы топологически сопряжены), вообще говоря, не приходится, хотя бы потому, что пространство последовательностей вполне несвязно, а в наиболее интересных случаях X — гладкое многообразие. Все же при удачном выборе «прибора», т. е. множеств E_i, соответствие (1.2) может дать важную информацию о свойствах каскада $\{f^n\}$. В частности, основные результаты данного сборника связаны с тем, что для некоторого класса динамических систем удается выбрать множества $E_1, \ldots, E_m$ так, чтобы они образовали «марковское разбиение». В этом случае рассматриваемая динамическая система обладает свойствами, присущими вероятностным марковским цепям и их топологическим аналогам.

2. Сложность динамической системы и энтропия. Последовательность $\psi(x)$ представляет собой «экспериментальные данные» о системе. Если в ней обнаруживается простая закономерность, например если она оказывается периодической, то мы не склонны считать изучаемую систему или по крайней мере траекторию $\{f^n x\}$ случайной. Если же эта последовательность достаточно сложна и «непредсказуема», то естественно приписать изучаемой системе случайные свойства. Разумеется, одна траектория $\{f^n x\}$ и отвечающая ей запись показаний прибора $\psi(x)$ могут не быть «достаточно представительными». Поэтому в расчет должны приниматься либо вся совокупность траекторий, либо особо примечательные траектории. Сначала мы рассмотрим первую возможность, стараясь охарактеризовать сложность системы, исходя из разнообразия ее запаса фазовых траекторий.

Наряду с бесконечными последовательностями (1.1) мы можем рассматривать также и конечные последовательности (=слова), составленные из букв алфавита $\mathscr{L}$. В соответствии с правилом (1.2) слово $\omega_0\omega_1 \ldots \omega_{N-1}$ длины N отвечает точке x, если $x \in E_{\omega_0} \cap f^{-1}E_{\omega_1} \cap \ldots \cap f^{-N+1}E_{\omega_{N-1}}$; слово называется допустимым, если оно отвечает хотя бы одной точке. Чем больше различных допустимых слов, тем система сложнее. Поэтому простейшую возможность оценить сложность динамической системы дает асимптотика числа допустимых слов при $N \to \infty$.

1) Пусть $\mathscr{E} = \{E_1, \ldots, E_m\}$ — открытое покрытие компакта X; f: $X \to X$ — непрерывное отображение. Обозначим

$$\mathscr{E}^N = \left\{E_{\omega_0 \ldots \omega_{N-1}} = E_{\omega_0} \cap f^{-1}E_{\omega_1} \cap \ldots \cap f^{-N+1}E_{\omega_{N-1}}\right\}. \quad (2.1)$$

Ясно, что совокупность всех множеств из $\mathscr{E}^N$ также образует открытое покрытие, причем непустые множества как раз отвечают допустимым словам. Обозначим через $k(\mathscr{E}^N)$ минимальную мощность подпокрытия, которое можно выбрать из $\mathscr{E}^N$ («минимальный набор допустимых слов»), и пусть

$$h(f \mid \mathscr{E}) = \inf_N \frac{\log k(\mathscr{E}^N)}{N} = \lim_{N\to\infty} \frac{\log k(\mathscr{E}^N)}{N} \quad (2.2)$$

(существование предела обеспечивает известная лемма Пойя [1])). Наконец, пусть

$$h(f) = \sup_{\mathscr{E}} h(f \mid \mathscr{E}). \quad (2.3)$$

[1]) Лемма 1.18 из [Б1].

Эта величина называется *топологической энтропией* отображения $f\colon X \to X$. Введенная в [21], она интенсивно изучалась в последние годы. Обзор некоторых результатов в этом направлении см. в [А], а также в [9]. Предложенное в [1] определение «квазислучайной» динамической системы оказалось [6] эквивалентным неравенству $h(f|X) > 0$.

2) Пусть теперь на пространстве X определена нормированная борелевская мера μ, инвариантная относительно f, а $\mathscr{E}$ — измеримое разбиение. Тогда на множестве $\mathscr{E}^N$ допустимых слов длины N определено распределение вероятностей [1])

$$\mathscr{P}(\omega_0 \ldots \omega_{N-1}) = \mu\left(E_{\omega_0 \ldots \omega_{N-1}}\right) \tag{2.4}$$

и можно оценить разнообразие запаса допустимых слов, а следовательно, и сложность динамической системы при помощи энтропии этого распределения:

$$H(\mathscr{E}^N) = -\sum_{\mathscr{E}^N} \mathscr{P}(\omega_0 \ldots \omega_{N-1}) \log \mathscr{P}(\omega_0 \ldots \omega_{N-1}). \tag{2.5}$$

Теперь в параллель (2.2) — (2.3) полагаем

$$h_\mu(f \mid \mathscr{E}) = \inf_N \frac{H(\mathscr{E}^N)}{N} = \lim_{N \to \infty} \frac{H(\mathscr{E}^N)}{N} \tag{2.6}$$

и

$$h_\mu(f) = \sup_{\mathscr{E}} h_\mu(f \mid \mathscr{E}) \tag{2.7}$$

(ср. начало § 2 в [Б1]) и получаем определение *метрической энтропии* по Колмогорову.

Этот инвариант оценивает сложность системы «в среднем». Допустимым словам, которые встречаются редко, придается здесь малый вес. Впрочем, если вероятности всех допустимых слов равны, то $H(\mathscr{E}^N) = \log k(\mathscr{E}^N)$ и формулы (2.6)—(2.7) превращаются в (2.2)—(2.3). Замечательно, однако, что и в общем случае между метрической и топологической энтропией существует тесная связь, выражаемая ([6], [39]) равенством

$$h(f) = \sup_\mu h_\mu(f), \tag{2.8}$$

где в правой части sup берется по множеству всех нормированных борелевских мер, инвариантных относительно f. Это равенство и связанные с ним вопросы о существовании и единственности меры μ, для которой $h(f) = h_\mu(f)$ (*мера*

[1]) Читатель, несомненно, обратил внимание на появление Случая. Фактически мы предполагаем, что начальная точка x_0 выбрана в X случайно с распределением μ. Показания нашего «прибора» $\ldots \omega_0\omega_1 \ldots \omega_n \ldots$ образуют теперь стационарный случайный процесс.

максимальной энтропии), являются исходной точкой исследований, которым посвящены § 1—2 первой статьи Р. Боуэна в данном сборнике. Другой руководящей идеей послужила аналогия с некоторыми понятиями статистической физики, приведшая к определению так называемых *гиббсовских мер* ([16]). Соотношение (2.8) получается из «вариационного принципа» (теорема 2.10 из [Б1]), если положить $\varphi = 0$.

Замечание. Еще одно определение топологической энтропии можно получить, если мы будем оценивать разнообразие траекторий рассматриваемой динамической системы при помощи понятия ε-энтропии (подробнее см. [6]). Известно также, что асимптотические свойства ε-энтропии связаны с хаусдорфовой размерностью пространства. В этой связи представляет интерес следующее утверждение. Пусть X — замкнутое подмножество в пространстве Σ_m^+ односторонних m-ичных последовательностей, инвариантное относительно гомеоморфизма сдвига σ. Обозначим через M образ X при обычном отображении $\varphi\colon \Sigma_m^+ \to [0, 1]$, определяемом равенством

$$\varphi(\{\omega_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_n}{m^n}.$$

Тогда [38]

$$\operatorname{Dim}_H(M) = \frac{h(\sigma \mid X)}{\log m}$$

(слева здесь стоит хаусдорфова размерность).

Определение топологической энтропии через ε-энтропию множества отрезков траекторий, а также конструкции, употребительные в теории хаусдорфовой размерности, следует иметь в виду в связи с последней статьей данного сборника, где Р. Боуэн распространяет понятие топологической энтропии на случай некомпактного фазового пространства.

3. Сложность индивидуальных траекторий. «Случайные» траектории. Обе энтропии, о которых шла речь выше, характеризуют сложность всей системы в целом. В противоположность этому можно попытаться оценить сложность индивидуальной траектории. Пусть, например, $\{\omega_n, n \geqslant 0\}$ — запись показаний нашего измерительного прибора вдоль некоторой полутраектории рассматриваемой динамической системы. Можем ли мы ответить на вопрос: случайна эта последовательность или нет? И сколь она сложна?

Ответ на эти вопросы можно искать в определении сложности, предложенном А. Н. Колмогоровым ([10], [7]). Ниже приведено неформальное описание этого определения.

Пусть $\mathscr{A}$ — некоторая вычислительная машина (например, машина Тьюринга), в которую мы можем вводить «программы», т. е. некоторые конечные слова из нулей и единиц, и получать на выходе слова x некоторого алфавита; длиной программы будем называть количество знаков в ней. Сложностью $K_{\mathscr{A}}(x)$ слова x относительно машины $\mathscr{A}$ называется минимальная из длин всех тех программ, которые печатают на выходе слово x (если таких программ нет вовсе, то $K_{\mathscr{A}}(x) = +\infty$). А. Н. Колмогоров доказал существование такой машины $\mathscr{B}$, что для всех конечных слов x

$$K_{\mathscr{A}}(x) \leqslant K_{\mathscr{B}}(x) + C_{\mathscr{A}},$$

причем константа $C_{\mathscr{A}}$ зависит лишь от $\mathscr{A}$, но не от x. Величина $K_{\mathscr{B}}(x)$ и называется *сложностью слова x по Колмогорову*. Будем обозначать ее далее просто $K(x)$.

Пусть снова $f\colon X \to X$ — непрерывное отображение, а $\mathscr{E} = \{E_1, \ldots, E_m\}$ — открытое покрытие компакта X. Отображение $\psi\colon X \to \Sigma_m^+$, определяемое формулой (1.2), будет, вообще говоря, многозначным, так как элементы E_i покрытия могут пересекаться. Обозначим через $[\psi(x)]^N$ множество начальных отрезков длины N бесконечных слов, отвечающих точке x, так что

$$\bar{\omega}^N = \omega_0\omega_1 \ldots \omega_{N-1} \in [\psi(x)]^N \Leftrightarrow x \in \bigcap_{n=0}^{N-1} f^{-n} E_{\omega_n}. \tag{3.1}$$

Аналогично определениям (2.2)—(2.3) и (2.6)—(2.7) полагаем теперь

$$\mathscr{K}(x, f \mid \mathscr{E}) = \overline{\lim_{N \to \infty}} \frac{1}{N} \min_{\bar{\omega}^N \in [\psi(x)]^N} K(\bar{\omega}^N) \tag{3.2}$$

и

$$\mathscr{K}(x, f) = \sup_{\mathscr{E}} \mathscr{K}(x, f \mid \mathscr{E}). \tag{3.3}$$

Последняя величина и называется *сложностью траектории точки x* (в динамической системе (X, f)). Это определение и следующие далее теоремы взяты из [2]; близкое ко второй из них утверждение, относящееся к более частной ситуации, анонсировано также в [7].

Теорема 3.1. *Имеют место неравенства*

$$\mathscr{K}(x, f \mid \mathscr{E}) \leqslant h(f \mid \mathscr{E}), \qquad \mathscr{K}(x, f) \leqslant h(f). \tag{3.4}$$

Теорема 3.2. *Пусть X — метрический компакт, а μ — эргодическая инвариантная нормированная борелевская мера. Тогда для почти всех x относительно меры μ имеет место равенство*

$$\mathscr{K}(x, f) = h_\mu(f). \tag{3.5}$$

Таким образом, наше представление об энтропии как о мере сложности подтверждается. Если система обладает мерой максимальной энтропии, на которой достигается sup в (2.8), то в силу (3.5) существуют и траектории максимальной сложности, у которых сложность равна топологической энтропии системы (большей она не может быть в силу (3.4)). Описание всех эргодических инвариантных мер в рассматриваемой ситуации дает теория Крылова — Боголюбова. Теорема 3.2 проливает дополнительный свет на устройство «эргодических множеств».

Обозначим δ_x меру (дельта-функцию), сосредоточенную в точке x, и пусть $V_f(x)$ — множество предельных точек (в слабой топологии) последовательности мер

$$\frac{1}{n}\{\delta_x+\delta_{fx}+\ \dots\ +\delta_{f^{n-1}x}\}.$$

Кроме того, пусть Ω_x — множество ω-предельных точек траектории точки x.

Теорема 3.3. *Имеют место неравенства*

$$\mathscr{K}(x,f)\leqslant \sup_{\mu\in V_f(x)} h_\mu(f)\leqslant h(f\,|\,\Omega_x). \tag{3.6}$$

Следствие. *Если μ — эргодическая инвариантная мера, а M_μ — соответствующее ей эргодическое множество, то для всех $x\in M_\mu$ справедливо неравенство*

$$\mathscr{K}(x,f)\leqslant h_\mu(f). \tag{3.7}$$

Действительно, здесь $V_f(x)$ состоит из одной меры μ. Заметим, что, как указывает сам Боуэн, стимулом к написанию [Б6] явилось желание получить равенство $h_\mu(f)=h(f|M_\mu)$ (M_μ, вообще говоря, не замкнуто).

Т. Камае [42] предложил считать сложностью траектории точки x средний член в (3.6). В частности, если $h_\mu(f)=0$ для любой $\mu\in V_f(x)$, то он называет траекторию детерминированной. Не оспаривая последнего, заметим все же, что левое неравенство в (3.6) может быть строгим. Дело в том, что энтропия выявляет лишь те закономерности, которые связаны с частотными характеристиками траектории (например, с частотами попадания в элементы покрытия $\mathscr{E}$). Однако в траектории могут присутствовать и другие закономерности, благодаря которым она становится простой. Рассмотрим, например, динамическую систему (Σ_2^+,σ) (одностороннюю топологическую схему Бернулли). Построим точку (бесконечное слово) следующим образом:

$$\bar{\omega}=0\,1\,00\,01\,10\,11\,000\,001\,010\,100\,011\,101\,110\,111\ \dots$$

(пробелы оставлены только для удобства). Здесь подряд выписаны конечные слова двоичного алфавита, сначала длины один, затем длины два и т. д. При фиксированной длине слова сначала идет слово $0 \ldots 0$, затем в лексикографическом порядке слова с одной единицей, затем в том же порядке слова с двумя единицами и т. д. Можно показать, что сложность траектории $\{\sigma^n \tilde{\omega}\}$ этой точки равна нулю (его отрезки длины N восстанавливаются программой длины порядка $\log N$). В то же время $V_\sigma(\tilde{\omega})$ состоит из одной меры на Σ_2^+ (бернуллиевой), для которой все вероятности (2.4) равны $1/2^N$. Для этой меры $h_\mu(\sigma) = \log 2$. Попутно мы убеждаемся, что алгоритмическая сложность траекторий действительно дает новый топологический инвариант, не сводящийся к энтропии.

В том же круге идей лежит и вопрос о том, когда траекторию динамической системы следует признать случайной. Ограничимся здесь рассмотрением системы (Σ_m^+, σ) — отображения сдвига в пространстве m-ичных последовательностей.

Пусть на Σ_m^+ задана σ-инвариантная вычислимая (см. [7]) мера μ, например бернуллиева мера. Следуя идее А. Н. Колмогорова, Мартин-Лёф [47] показал, что существует такой «универсальный тест», что если последовательность $\tilde{\omega} = \{\omega_n; n \geqslant 0\}$ удовлетворяет этому тесту, то для нее верны все эффективно проверяемые законы теории вероятностей (например, закон больших чисел и т. п.), которые должны иметь место для распределения вероятностей, задаваемого мерой μ. Последовательность $\tilde{\omega}$, обладающую такими свойствами, он предложил называть *случайной*. Действительно, наблюдая за такой последовательностью нулей и единиц, мы никаким конструктивным способом не сможем признать ее «менее случайной», чем аналогичную последовательность, получаемую подбрасыванием монетки.

Почти каждая (относительно меры μ) последовательность является в этом смысле случайной. Сложность всякой случайной последовательности равна $h_\mu(\sigma)$ (однако обратное неверно).

Можно привести еще одно соображение в пользу такого понятия случайности. Пусть μ — бернуллиева мера на Σ_2^+. Из определений (3.2)—(3.3) можно вывести, что если $\mathscr{K}(\tilde{\omega}, \sigma) = h_\mu(\sigma) = \log 2 = 1$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется подпоследовательность $N_k \to \infty$, такая, что

$$K\left(\tilde{\omega}^{N_k}\right) = K\left(\omega_0, \ldots, \omega_{N_k-1}\right) > N_K(1-\varepsilon).$$

Таким образом, в последовательности $\tilde{\omega} = \{\omega_n\}$ встречаются сколь угодно большие отрезки, которые нельзя закодировать при помощи программы существенно более короткой длины, чем длина их самих. Ясно, что такую последовательность естественно назвать непредсказуемой, хаотичной, случайной.

4. Топологические марковские цепи. Как уже отмечалось выше, методы символической динамики состоят в том, что различные свойства изучаемой динамической системы исследуются исходя из аналогичных свойств некоторой символической ее модели, полученной при помощи соответствия (1.2). Мы приведем здесь некоторые определения и теоремы, относящиеся к символическим системам, знакомство с которыми представляется нам полезным для чтения данного сборника. Доказательства и ссылки, как правило, будут опускаться; большую их часть читатель сможет восстановить сам, руководствуясь краткими указаниями, а кое-что — найти в статьях данного сборника (особенно первой). Более подробное изложение см. в [A] и [9]. Во второй части нашей статьи эти утверждения будут использованы для доказательства аналогичных свойств гораздо более общих систем.

Рассмотрим пространство Σ_m бесконечных в обе стороны m-ичных последовательностей $\{\omega_n\}_{-\infty}^{+\infty}$, где каждая координата ω_n принимает одно из m значений $1, 2, \ldots, m$. Снабдив m-точечное множество $\mathscr{L} = \{1, 2, \ldots, m\}$ дискретной топологией, введем в Σ_m топологию прямого произведения. Эта топология порождается любой из метрик $\rho_a(\{\omega_n^1\}, \{\omega_n^2\}) = \sum_n a^{|n|}\left(1 - \delta_{\omega_n^1\omega_n^2}\right)$, где $0 < a < 1$ и δ_{ij} — символ Кронекера; Σ_m в ней компактно. На Σ_m определен гомеоморфизм сдвига σ: $\tilde{\omega} = \{\omega_n\} \longmapsto \sigma\tilde{\omega} = \{\omega'_n\}$, где $\omega'_n = \omega_{n+1}$, $n \in Z$; его ограничения на различные σ-инвариантные подмножества в Σ_m мы будем обозначать той же буквой.

Определение. *Символической динамической системой* (Λ, σ) называется ограничение σ на замкнутое σ-инвариантное подмножество Λ пространства Σ_m.

Особый интерес для исследования динамических систем, обладающих свойством гиперболичности, представляет специальный класс символических систем — топологические марковские цепи (сокращенно ТМЦ). С одной стороны, топологические и эргодические свойства ТМЦ легко выражаются в алгебраических терминах, что делает их удобным инструментом исследования, а с другой, многие понятия и явления, характерные для общих гиперболических систем, проявляются в ТМЦ в очень прозрачной форме, облегчающей понимание сути дела.

Пусть A — квадратная матрица порядка m, элементы которой a_{ij} суть нули или единицы.

Определение. *Топологической марковской цепью* с матрицей переходов A называется символическая динамическая система (Σ_A, σ), где

$$\Sigma_A = \left\{\bar{\omega} \in \Sigma_m;\ a_{\omega_n \omega_{n+1}} = 1,\ n \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Всегда будет предполагаться, что в каждой строке и в каждом столбце матрицы A содержится хотя бы по одной единице (в [Б1, § 1А] приведено эквивалентное условие: каждый символ из $\mathcal{L} = \{1, 2, \ldots, m\}$ встречается хотя бы в одной допустимой последовательности $\bar{\omega} \in \Sigma_A$). Замкнутость и σ-инвариантность множества Σ_A очевидны. Элементы множества $\mathcal{L}$ в дальнейшем будут называться *состояниями* ТМЦ (Σ_A, σ).

На пространстве состояний вводится транзитивное отношение квазипорядка: $i \prec j$ тогда и только тогда, когда существует такая цепочка состояний $i = i_0, i_1, \ldots, i_n = j$, что

$$a_{i_0 i_1} a_{i_1 i_2} \ldots a_{i_{n-1} i_n} > 0.$$

Состояние i называется *возвратным*, если $i \prec i$, и *невозвратным* в противном случае. Возвратные состояния разбиваются на классы эквивалентности: $i \sim j \Leftrightarrow i \prec j \prec i$. ТМЦ (Σ_A, σ) (а также ее матрица переходов A) называется *неразложимой*, если в ней все состояния возвратные и образуют один класс эквивалентности. ТМЦ (Σ_A, σ) (и ее матрица A) называется *примитивной*, если существует такое n, что все элементы матрицы A^n положительны.

Напомним теперь, что гомеоморфизм $f: X \to X$ называется *топологически транзитивным*, если в X существует всюду плотная траектория, и *топологически перемешивающим*, если для любых двух открытых множеств U и V найдется такое N, что $f^n U \cap V \neq \varnothing$ при всех $n \geqslant N$. Нетрудно показать, что ТМЦ топологически транзитивна (соответственно является топологически перемешивающей) тогда и только тогда, когда она неразложима (соответственно примитивна).

Пусть теперь ТМЦ (Σ_A, σ) разложима, и пусть $\mathcal{L}' = \{i_1, \ldots, i_r\}$ — один из ее классов эквивалентных возвратных состояний. Этому классу отвечает матрица A' порядка r с элементами $a'_{pq} = a_{i_p i_q}$. Допуская некоторую вольность в обозначениях, мы можем отождествить подмножество $\Sigma_{A'} \subseteq \Sigma_r$ с подмножеством

$$\{\bar{\omega} = \{\omega_n\} \in \Sigma_A:\ \omega_n \in \mathcal{L}',\ n \in \mathbb{Z}\}.$$

ТМЦ $(\Sigma_{A'}, \sigma)$ будем называть *неразложимой подцепью ТМЦ* (Σ_A, σ), отвечающей классу эквивалентности $\mathscr{L}'$.

Теорема 4.1 (о спектральном разложении ТМЦ). *Пусть (Σ_A, σ) — топологическая марковская цепь, $\mathscr{L}^{(k)}$, $k=1, \ldots, s$, — ее классы эквивалентных возвратных состояний, $A^{(k)}$ — матрица переходов, отвечающая классу $\mathscr{L}^{(k)}$. Тогда*

(1) *Множество неблуждающих точек $\Omega(\sigma)$ динамической системы (Σ_A, σ) можно представить в виде объединения попарно непересекающихся базисных множеств*

$$\Omega(\sigma) = \Omega^{(1)} \cup \ldots \cup \Omega^{(s)}, \tag{4.1}$$

так что для каждого k

(а) *гомеоморфизм $\sigma\colon \Omega^{(k)} \to \Omega^{(k)}$ топологически транзитивен и является топологически перемешивающим, если $A^{(k)}$ примитивна; $\Omega^{(k)} = \Sigma_{A^{(k)}}$ и $(\Omega^{(k)}, \sigma)$ есть неразложимая подцепь, отвечающая классу эквивалентности $\mathscr{L}^{(k)}$;*

(б) *периодические точки плотны в $\Omega^{(k)}$;*

(в) *на разбиении (4.1) определено отношение частичного порядка $\prec$, индуцированное отношением квазипорядка на $\mathscr{L}$.*

(2) *Множество блуждающих точек $W(\sigma)$ динамической системы (Σ_A, σ) представимо в виде*

$$W(\sigma) = \bigcup_{i,\, j=1}^{s} W_{ij},$$

где

(г) $$W_{ij} \neq \varnothing \Leftrightarrow i \neq j \text{ и } \Omega^{(i)} \prec \Omega^{(j)}; \tag{4.2}$$

(д) *если $\omega \in W_{ij}$, то существуют $\omega' \in \Omega^{(i)}$ и $\omega'' \in \Omega^{(j)}$, такие, что*

$$\rho(\sigma^n\omega,\ \sigma^n\omega') \to 0 \quad \text{при} \quad n \to -\infty,$$

$$\rho(\sigma^n\omega,\ \sigma^n\omega'') \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

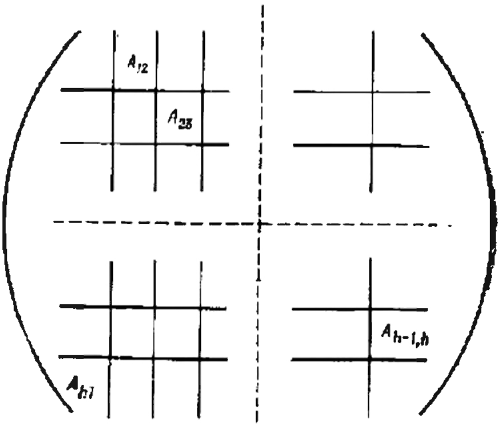
Обратно, если $\Omega^{(i)} \prec \Omega^{(j)}$, то для любых $\omega_1 \in \Omega^{(i)}$ и $\omega_2 \in \Omega^{(j)}$ существуют $\omega \in W_{ij}$ и $s \geqslant 0$, такие, что (д) *имеет место для $\omega' = \omega_1$ и $\omega'' = \sigma^s\omega_2$. Если хотя бы одна из подцепей $(\Omega^{(i)}, \sigma)$ или $(\Omega^{(j)}, \sigma)$ примитивна, то можно считать $s=0$.*

Эта простая теорема является прообразом нетривиальных теорем о спектральном разложении локально максимального гиперболического множества и о спектральном разложении А-диффеоморфизма (теорема 3.5 из [Б1]).

Теорема Фробениуса — Перрона [4]. *Пусть A — неразложимая матрица с неотрицательными элементами. Тогда су-*

ществует положительное $\lambda_0 \in \operatorname{Spec} A$, простое и такое, что $|\lambda_i| \leqslant \lambda_0$ для всех $\lambda_i \in \operatorname{Spec} A$. Этому λ_0 отвечает собственный вектор z, все компоненты которого положительны.

Если на окружности $|\lambda| = \lambda_0$ лежат (вместе с λ_0) h точек из $\operatorname{Spec} A$, то при надлежащей перенумерации строк и столбцов матрица A приводится к виду



(все блоки, кроме выделенных, состоят из одних нулей), а матрица A^h распадается на h примитивных подматриц.

Число h называется *индексом цикличности.*

Следствие (ср. с теоремой 3.5 из [Б1]). *Пусть (Σ_A, σ) — неразложимая ТМЦ с индексом цикличности h. Тогда пространство состояний этой ТМЦ распадается на непересекающиеся подмножества $\mathscr{L}^{(1)}, \ldots, \mathscr{L}^{(h)}$, а Σ_A представимо в виде*

$$\Sigma_A = X_1 \cup \ldots \cup X_h, \tag{4.3}$$

где $X_i = \{\bar{\omega} = \{\omega_n\};\ \omega_0 \in \mathscr{L}^{(i)}\}$; $\sigma X_i = X_{i+1}$, $i < h$, $\sigma X_h = X_1$; гомеоморфизм σ^h: $X_i \to X_i$ топологически сопряжен некоторой примитивной ТМЦ и потому топологически перемешивает.

Пусть f: $X \to X$ — гомеоморфизм, у которого число $N_n(f)$ точек периода n (т. е. число решений уравнения $f^n x = x$) конечно при всех $n \geqslant 1$. Функция (вообще говоря, формальный ряд)

$$\zeta_f(t) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{N_n(f)\, t^n}{n}\right) \tag{4.4}$$

называется *дзета-функцией гомеоморфизма f.*

Как нетрудно проверить, для ТМЦ (Σ_A, σ) число N_n равно $\operatorname{Tr} A^n$. Отсюда и из теоремы Фробениуса — Перрона вытекает

Теорема 4.2 (о числе периодических точек ТМЦ). *Пусть (Σ_A, σ) — неразложимая ТМЦ с индексом цикличности h. Тогда*

$$(1)\qquad N_n(\sigma) = h\lambda^n(A) + \sum_{|\lambda_i| < \lambda(A)} \lambda_i^n \quad \text{для} \quad n = ph; \tag{4.5}$$

$$(2)\qquad N_n(\sigma) = 0 \quad \text{при} \quad n \not\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, h);$$

(3) *дзета-функция произвольной ТМЦ (Σ_A, σ) рациональна:*

$$\zeta_\sigma(t) = \frac{1}{\det(E - tA)}, \tag{4.6}$$

и определяющий ее ряд имеет круг сходимости $|t| < 1/\lambda(A)$. [Здесь $\lambda(A)$ — наибольшее положительное собственное число матрицы A.]

Теперь мы перейдем к описанию энтропийных свойств ТМЦ.

Теорема 4.3 (о топологической энтропии ТМЦ). 1) *Для произвольной ТМЦ (Σ_A, σ)*

$$h(\sigma \mid \Sigma_A) = \log \lambda(A). \tag{4.7}$$

2) *Если ТМЦ (Σ_A, σ) неразложима и $M \subseteq \Sigma_A$ — замкнутое σ-инвариантное подмножество, такое, что $h(\sigma|M) = h(\sigma|\Sigma_A)$, то $M = \Sigma_A$.*

Доказательство первой части теоремы основано на равенстве $h(\sigma|\Sigma_A) = h(\sigma|\Sigma_A|\mathscr{E})$, где $\mathscr{E} = \{E_1, \ldots, E_m\}$ — разбиение на «цилиндры»: $E_k = \{\bar{\omega} = \{\omega_n\} \in \Sigma_A; \omega_0 = k\}$, и на подсчете числа «допустимых слов» $k(\mathscr{E}^N)$, отвечающих разбиению $\mathscr{E}^N$ (ср. (2.2)): $k(\mathscr{E}^N) = (1, A^n 1)$, где 1 — вектор, все компоненты которого равны единице. Остается далее воспользоваться теоремой Фробениуса — Перрона.

Доказательство второй части см. [A, лемма 5.2].

Поскольку по предыдущей теореме $\lambda(A)^{-1}$ является радиусом сходимости дзета-функции, из (4.7), (4.4) и формулы Коши — Адамара получаем

Следствие.

$$\varlimsup_{n \to \infty} \frac{\log N_n(\sigma \mid \Sigma_A)}{n} = h(\sigma \mid \Sigma_A). \tag{4.8}$$

Замечание. Если $f\colon X \to X$ — непрерывное отображение компакта X и динамическая система (X, f) обладает свойством разделяемости траекторий, то имеет место неравенство [31]

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log N_n(f)}{n} \leqslant h(f). \tag{4.9}$$

В [38] приведен пример минимальной символической динамической системы (Λ, σ), у которой $h(\sigma|\Lambda) > 0$, хотя ввиду минимальности $N_n(\sigma|\Lambda) = 0$ для всех $n \geqslant 1$, так что в (4.9) имеет место строгое неравенство.

Перри [50] доказал, что для ТМЦ в (2.8) sup достигается. Рассмотрим сначала неразложимый случай.

Теорема 4.4 (о мере максимальной энтропии для ТМЦ). *Пусть ТМЦ (Σ_A, σ) неразложима. Тогда на Σ_A существует единственная σ-инвариантная нормированная борелевская мера μ_0, положительная на открытых множествах, для которой*

$$h_{\mu_0}(\sigma) = h(\sigma|\Sigma_A) = \log \lambda(A). \tag{4.10}$$

Эта мера совпадает с распределением вероятностей, отвечающим стационарной цепи Маркова с вероятностями перехода

$$p_{ij} = \frac{a_{ij} z_j}{\lambda(A) z_i}, \tag{4.11}$$

где $\lambda(A)$ — максимальное положительное собственное число матрицы A, а $Z = \{z_i\}$ — соответствующий собственный вектор.

Для разложимой ТМЦ эту теорему можно применить по отдельности к базисным множествам спектрального разложения (4.1). Если наибольшее из чисел $\lambda(A^{(k)})$ единственно, то мера максимальной энтропии по-прежнему будет единственной и сосредоточенной на соответствующем $\Omega^{(k)}$. Если же $\max \lambda(A^{(k)})$ достигается на нескольких k, то, как нетрудно видеть, мера максимальной энтропии неединственна.

Поскольку значения меры μ_0 на «цилиндрах»

$$E_{x_0 \dots x_{N-1}} = \{\varpi = \{\omega_n\};\ \omega_k = x_k,\ 0 \leqslant k \leqslant N-1\} \tag{4.12}$$

задаются явными формулами, эта мера вычислима, и потому почти все относительно этой меры последовательности $\varpi \in \Sigma_A$ являются случайными в смысле Мартин-Лёфа (см. п. 3) и имеют сложность $\max \log \lambda(A^{(k)})$. В неразложимом случае множество последовательностей ϖ, обладающих этими двумя свойствами, будет также всюду плотно в Σ_A, поскольку μ_0 положительна на открытых множествах.

Наконец, имеет место следующая

Теорема 4.5 (о распределении периодических точек для ТМЦ). *Пусть* (Σ_A, σ) — *неразложимая ТМЦ с индексом цикличности* h, $N_n(B)$ — *число точек периода* n, *содержащихся в подмножестве* $B \subseteq \Sigma_A$, $N_n = N_n(\Sigma_A)$ — *общее число точек периода* n, μ — *мера максимальной энтропии. Если* $\mu(\partial B) = \mu(\bar{B} \setminus \operatorname{Int} B) = 0$, *то*

$$\lim_{p\to\infty} \frac{N_{ph}(B)}{N_{ph}} = \mu(B) \tag{4.13}$$

(*напомним, что* $N_n = 0$ *при* $n \not\equiv 0 \pmod h$).

Доказательство этой теоремы основано на простых комбинаторных соображениях и теореме Фробениуса — Перрона. Прежде всего заметим, что число $N_n(\tilde{\omega}^N)$ точек $\tilde{\omega} = \{\omega_n\}$, имеющих период $\omega_0 \ldots \omega_{n-1}$ длины n с фиксированным начальным словом $\tilde{\omega}^N = x_0 \ldots x_{N-1}$, равно числу допустимых слов с началом x_{N-1} и концом ω_{n-1}, которое в свою очередь равно матричному элементу $(e_{\omega_{n-1}}, A^{n-N} e_{x_{N-1}})$ ($e_1, \ldots, e_m$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^m$). Затем, используя теорему Фробениуса — Перрона и формулу (4.11), получаем асимптотику

$$N_{ph}(\tilde{\omega}^N) = h\mathscr{P}_\mu(\tilde{\omega}^N) \cdot \lambda(A)^{ph} + o(\lambda(A)^{ph}),$$

где

$$\mathscr{P}_\mu(\tilde{\omega}^N) = \mu\{\tilde{\omega} = \{\omega_n\};\ \omega_k = x_k,\ 0 \leqslant k \leqslant N-1\} = \mu\left(E_{x_0 \ldots x_{N-1}}\right).$$

Учитывая аналогичную формулу (4.5) для N_{ph}, мы устанавливаем справедливость (4.13) для всех цилиндров (4.12). Остальное получается стандартными рассуждениями.

5. Локально максимальные гиперболические множества. Мы переходим теперь к описанию гладких динамических систем, для которых поведение траекторий напоминает случайное. Как и выше, мы ограничиваемся только формулировками, отсылая читателя к основополагающей монографии [Ан], обзору [С], лекциям [ГДС] и книге [Н] (вместе с приложением [8] к ней).

Пусть $f\colon M \to M$ — диффеоморфизм класса C^r, $1 \leqslant r \leqslant \infty$, риманова многообразия M.

Определение (ср. [Б1, § 3А]). Компактное f-инвариантное множество Λ называется *гиперболическим*, если ограничение $T_\Lambda M$ касательного расслоения TM на Λ разлагается в непрерывную Tf-инвариантную прямую сумму (сумму Уитни) двух подрасслоений: $T_\Lambda M = E^s \oplus E^u$ и существуют такие константы $c > 0$, $0 < \lambda < 1$, что для $n \geqslant 0$ и любых $x \in \Lambda$, $\xi \in E^s_x$, $\eta \in E^u_x$ выполняются неравенства

$$\|Tf^n \xi\| \leqslant c\lambda^n \|\xi\|, \qquad \|Tf^{-n}\eta\| \leqslant c\lambda^n \|\eta\|. \tag{5.1}$$

Из компактности Λ вытекает, что свойство гиперболичности не зависит от выбора римановой метрики на M и последнюю всегда можно выбрать так, чтобы константа c в (5.1) была единицей (*ляпуновская метрика*). Впредь это подразумевается, и $\rho(x, y)$ — расстояние на M, индуцированное ляпуновской метрикой.

Напомним стандартные обозначения:

$$\begin{aligned} W^s_\varepsilon(x) &= \{y;\ \rho(f^n x,\ f^n y) \leqslant \varepsilon,\ n \geqslant 0\}, \\ W^s(x) &= \{y;\ \rho(f^n x,\ f^n y) \to 0,\ n \to +\infty\}, \\ W^u_\varepsilon(x) &= \{y;\ \rho(f^n x,\ f^n y) \leqslant \varepsilon,\ n \leqslant 0\}, \\ W^u(x) &= \{y;\ \rho(f^n x,\ f^n y) \to 0,\ n \to -\infty\}. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Непосредственно проверяется, что

$$fW^s_\varepsilon(x) \subseteq W^s_\varepsilon(fx), \qquad f^{-1}W^u_\varepsilon(x) \subseteq W^u_\varepsilon(f^{-1}x). \tag{5.3}$$

Множества $W^s(x)$ и $W^u(x)$ (соответственно $W^s_\varepsilon(x)$ и $W^u_\varepsilon(x)$) называются *устойчивыми* и *неустойчивыми многообразиями* (соответственно *локальными многообразиями*) точки $x \in \Lambda$.

Теорема 5.1 (об устойчивых многообразиях; ср. с теоремой 3.2 из [Б1, § 3A]). *Пусть* $k(x) = \dim E^s_x$, E^k — *евклидово пространство размерности* k, D^k — *стандартный* k-*мерный диск. Тогда*

(1) *Существуют* $\varepsilon > 0$, *непрерывное по* $x \in \Lambda$ *семейство* C^1-*вложений* $\varphi_{x,\varepsilon}$: $D^{k(x)} \to M$ *и непрерывное (в топологии равномерной сходимости на компактах) по* $x \in \Lambda$ *семейство инъективных* C^1-*иммерсий* φ_x: $E^{k(x)} \to M$, *такие, что*

(а) $\varphi_{x,\varepsilon}(D^{k(x)}) = W^s_\varepsilon(x)$, $\varphi_x(E^{k(x)}) = W^s(x)$;

(б) $T_x W^s_\varepsilon(x) = \operatorname{Im} T\varphi_{x,\varepsilon}(0) = \operatorname{Im} T\varphi_x(0) = E^s_x$.

(2) *Существует* μ, $0 < \mu < 1$, *такое, что для любых* $y \in W^s_\varepsilon(x)$, $z \in W^s_\varepsilon(x)$ *выполняется неравенство*

$$\rho(f^n y,\ f^n z) \leqslant \mu^n \rho(y,\ z). \tag{5.4}$$

(3) $W^s_\varepsilon(x)$ *является содержащей* x *компонентой линейной связности пересечения* $W^s(x)$ *с* ε-*окрестностью точки* $x \in \Lambda$.

Доказательство см. в [H, § 5.4].

Заменяя в формулировке f на f^{-1}, получаем аналогичную теорему о неустойчивых многообразиях.

Теорема 5.2 (об устойчивости гиперболического множества). *Пусть* Λ — *гиперболическое множество диффеоморфизма* f: $M \to M$. *Для любой окрестности* $\mathcal{U}$ *множества* Λ

существует такое $\varepsilon > 0$, что если $f'\colon M \to M$ — диффеоморфизм, удовлетворяющий условию $\rho_{C^1}(f \mid \mathcal{U}, f' \mid \mathcal{U}) < \varepsilon$ (ρ_{C^1} — метрика в пространстве C^1-отображений), то существуют f'-инвариантное гиперболическое относительно f' множество $\Lambda' \subset U$ и гомеоморфизм $h\colon \Lambda \to \Lambda'$, такие, что $f' \circ h = h \circ f \mid \Lambda$.

Эта теорема (см. [H, § 5.1]) может быть доказана с помощью весьма общей и глубокой теоремы Д. В. Аносова о семействах ε-траекторий, упрощенный вариант которой мы сейчас приведем (в полном объеме эту теорему вместе с доказательством и следствиями см. в [8]).

Определение. *ε-траекторией* диффеоморфизма $f\colon M \to M$ называется последовательность точек $\{x_n\}$, таких, что

$$\rho(x_{n+1}, fx_n) < \varepsilon, \qquad n \in Z.$$

Теорема 5.3 (об ε-траекториях). *Пусть Λ — гиперболическое множество диффеоморфизма $f\colon M \to M$. Существует такая окрестность $\mathcal{U} \supset \Lambda$, что для любого $\delta > 0$ найдется такое $\varepsilon > 0$, что любой ε-траектории $\{x_n\} \subset U$ соответствует траектория $\{f^n x\}$, для которой $\rho(x_n, f^n x) < \delta$.*

Существует такое $\delta_0 > 0$, что при $0 < \delta < \delta_0$ точка x, траектория которой аппроксимирует ε-траекторию $\{x_n\}$, определена единственным образом.

Следствие 5.1. *В любой окрестности неблуждающей точки x ограничения $f \mid \Lambda$ найдется периодическая точка диффеоморфизма f.*

Следствие 5.2 (свойство разделения траекторий). *Существует такое $\gamma_0 > 0$ (разделяющая константа), что если $y_1, y_2 \in \Lambda$ и $y_1 \neq y_2$, то для некоторого $n \in Z$*

$$\rho(f^n y_1, f^n y_2) \geqslant \gamma_0. \tag{5.5}$$

В классе всех гиперболических множеств оказывается удобным выделить некоторый подкласс максимальных объектов.

Определение. Инвариантное множество Λ гомеоморфизма $f\colon X \to X$ называется *локально максимальным*, если существует такая его окрестность $\mathcal{U}$, что любое f-инвариантное множество Λ', такое, что $\Lambda \subseteq \Lambda' \subseteq \mathcal{U}$, совпадает с Λ.

Из этого определения немедленно вытекает, что

$$\Lambda = \bigcap_{n \in Z} f^{-n} \mathcal{U}. \tag{5.6}$$

Поэтому теорема 3.9 из [Б1] утверждает, что множество неблуждающих точек диффеоморфизма, удовлетворяющего «ак-

«номе А» Смейла, является локально максимальным. Точно так же будет локально максимальным и каждое базисное подмножество его спектрального разложения. Нетрудно проверить, что свойством локальной максимальности обладают также одноименные объекты, определенные для ТМЦ в п. 4.

Перейдем к другому понятию, играющему существенную роль во всех вопросах, рассматриваемых в настоящем сборнике.

Определение. Гиперболическое множество Λ диффеоморфизма $f\colon M \to M$ обладает *структурой прямого произведения*, если существуют такие $\varepsilon > 0$ и $\gamma > 0$, что

(1) если $x, y \in \Lambda$ и $\rho(x, y) \leqslant \varepsilon$, то

$$\varnothing \neq W^s_\gamma(x) \cap W^u_\gamma(y) \subset \Lambda;$$

(2) отображение

$$[\cdot, \cdot]\colon \{(x, y) \in \Lambda \times \Lambda,\ \rho(x, y) \leqslant \varepsilon\} \to \Lambda,$$

определяемое равенством

$$[x, y] = W^s_\gamma(x) \cap W^u_\gamma(y),$$

однозначно и непрерывно.

Заметим, что наиболее существенным в этом определении является включение $W^s_\gamma(x) \cap W^u_\gamma(y) \subset \Lambda$. Действительно, из теорем об устойчивых и неустойчивых многообразиях следует, что для любого $\gamma > 0$ существует такое $\varepsilon > 0$, что $\rho(x, y) < \varepsilon \Rightarrow W^s_\gamma(x) \cap W^u_\gamma(y) \neq \varnothing$. Если же $\gamma < \gamma_0/2$, где γ_0 — разделяющая константа из следствия 5.2, то это пересечение состоит из единственной точки $[x, y] \in M$, причем непрерывность отображения $[\cdot, \cdot]$ также следует из теорем об устойчивых и неустойчивых многообразиях. Если Λ обладает структурой прямого произведения, то у любой точки $x \in \Lambda$ существует окрестность $\mathcal{U}_x$, такая, что $[\cdot, \cdot]$ устанавливает гомеоморфизм между $(W^u_\gamma(x) \cap \Lambda) \times (W^s_\gamma(x) \cap \Lambda)$ и $\mathcal{U}_x \cap \Lambda$. Это соответствие называется *каноническим изоморфизмом* (ср. 3.3 из [Б1]).

Теорема 5.4. *Следующие свойства гиперболического множества Λ диффеоморфизма $f\colon M \to M$ эквивалентны:*

(1) *Λ локально максимально.*

(2) *Λ обладает структурой прямого произведения.*

(3) *Существует такая окрестность $\mathcal{U} \supseteq \Lambda$, что для любой точки y, для которой $f^n y \in \mathcal{U}(\Lambda)$ при всех $n \geqslant 0$, существует такая точка $x \in \Lambda$, что $y \in W_s(x)$* ([8], § 4).

6. У-системы, А-системы и структурная устойчивость. В большей части этого добавления мы, говоря о динамических системах, имеем в виду системы с дискретным временем (*каскады*), т. е. группы гомеоморфизмов или диффеоморфизмов $\{f^n; n \in Z\}$, порожденные одним отображением f. В случае динамических систем с непрерывным временем (*потоков*) $\{f^t; t \in \mathbb{R}\}$ теория строится аналогично.

Если для диффеоморфизма $f: M \to M$ все многообразие M является гиперболическим множеством, то f называется *У-диффеоморфизмом* (или *диффеоморфизмом Аносова*). Аналогично определяются *У-потоки*. Применив теорему об устойчивости гиперболического множества из предыдущего пункта к случаю $\Lambda = M$, получаем следующую теорему Д. В. Аносова [Ан] о структурной устойчивости, или грубости, У-диффеоморфизмов.

Теорема 6.1. *Пусть $f: M \to M$ — некоторый У-диффеоморфизм. Существует такая C^1-окрестность U_f диффеоморфизма f, что если $f' \in U_f$, то f' также является У-диффеоморфизмом и существует гомеоморфизм $h: M \to M$, такой, что $f' \circ h = h \circ f$.*

Если f является У-диффеоморфизмом, то M — локально максимальное гиперболическое множество. В силу следствия 5.1 периодические точки плотны во множестве неблуждающих точек $\Omega(f)$. Известна следующая нерешенная проблема: верно ли, что $\Omega(f) = M$?

У-диффеоморфизмы и У-потоки (вместе *У-системы*) возникли как естественное обобщение алгебраических автоморфизмов тора и геодезических потоков на многообразиях отрицательной кривизны [Ан]. С другой стороны, «подкова Смейла» [17] и ее разнообразные обобщения [С] послужили стимулом для выделения более широкого класса динамических систем, обладающих гиперболическими свойствами, класса систем, удовлетворяющих так называемой «аксиоме А» Смейла, или класса «А-систем» (диффеоморфизмов и потоков).

Определение. Диффеоморфизм $f: M \to M$ компактного многообразия M *удовлетворяет аксиоме А*, если

(а) $\Omega(f)$ — гиперболическое множество;

(б) периодические точки плотны в $\Omega(f)$.

Мы привели здесь это определение (которое можно найти также в [Б1, § 3А]) для того, чтобы напомнить об известной проблеме: являются ли свойства (а) и (б) независимыми? Если $\dim M = 2$, то (б) следует из (а) [49]. Недавно А. Денкиер [32] закрыл проблему, показав, что если $\dim M \geqslant 3$, то существует f, для которого верно (а), но не верно (б).

Теорема 3.5 и дополняющие ее предложения 3.9 и 3.10 из [Б1] определяют «спектральное разложение»

$$\Omega(f) = \Omega_1 \cup \ldots \cup \Omega_s \tag{6.1}$$

множества неблуждающих точек А-диффеоморфизма f на локально максимальные «базисные множества» Ω_i. Из теоремы 5.2 вытекает, что при малых возмущениях f базисные множества Ω_i могут только увеличиться. Такое увеличение действительно оказывается возможным и известно под названием «Ω-взрыва» (см. [Н]). Чтобы избежать Ω-взрыва, необходимо наложить на диффеоморфизм f дополнительные условия.

Обозначим

$$W^s(\Omega_i) = \{x;\ \rho(f^n x, \Omega_i) \to 0,\ n \to +\infty\} = \bigcup_{x \in \Omega_i} W^s(x)$$

(последнее равенство имеет место в силу теоремы 5.4 (3), поскольку Ω_i локально максимально), аналогично определим $W^u(\Omega_i)$ и рассмотрим бинарное отношение

$$\Omega_i \prec \Omega_j \Leftrightarrow W^u(\Omega_j) \cap W^s(\Omega_i) \neq \varnothing. \tag{6.2}$$

Легко видеть, что в силу (4.2) это определение согласуется с определением отношения порядка на базисных множествах ТМЦ. Однако, если для ТМЦ это отношение оказывается частичным порядком, то для А-диффеоморфизмов это уже не обязательно так, и могут существовать «циклы» вида

$$\Omega_0 \prec \Omega_1 \prec \ldots \prec \Omega_n = \Omega_0, \qquad n > 0. \tag{6.3}$$

Именно наличие таких циклов и приводит к явлению Ω-взрыва. Если циклов вида (4.3) не существует, то говорят, что f обладает «свойством отсутствия циклов».

Теорема 6.2 (об Ω-устойчивости). *А-диффеоморфизм f: $M \to M$, обладающий свойством отсутствия циклов, Ω-устойчив, т. е. существует такая C^1-окрестность U_f, что для любого $f' \in U_f$ найдется гомеоморфизм h: $\Omega(f) \to \Omega(f')$, такой, что $f' \circ h = h \circ f | \Omega(f)$.*

Доказательство этой теоремы см. в [Н, гл. 6].

Свойство Ω-устойчивости является, очевидно, более слабым, чем структурная устойчивость, и для достижения последней приходится наложить на f дальнейшие ограничения.

Определение. А-диффеоморфизм f удовлетворяет *строгому условию трансверсальности*, если для любых двух точек x, $y \in \Omega(f)$ *многообразие* $W^s(x)$ трансверсально $W^u(y)$.

В следующем пункте мы остановимся на том, почему строгое условие трансверсальности влечет за собой свойство отсутствия циклов.

Теорема 6.3. *А-диффеоморфизм f, удовлетворяющий строгому условию трансверсальности, структурно устойчив в классе C^1-диффеоморфизмов.*

Доказательство этой теоремы при дополнительном условии, что f принадлежит классу C^2, приведено в [Н, добавление 2], а в общем случае — в [52]. Аналогичная теорема для А-потоков доказана в [53].

Отметим, что все известные к настоящему времени структурно устойчивые диффеоморфизмы и потоки удовлетворяют аксиоме А.

7. Марковские факторсистемы и марковские подсистемы. Вернемся теперь к общей конструкции символической динамики, описанной в начале этой статьи.

Пусть $f\colon X \to X$ — гомеоморфизм, а $\mathscr{E} = \{E_1, \ldots, E_m\}$ — замкнутое покрытие компакта X; $\mathscr{E}$ называется *топологической образующей, если для любого* $\bar{\omega} = \{\omega_n\} \in \Sigma_m$ пересечение $\bigcap\limits_{n \in \mathbf{Z}} f^{-n} E_{\omega_n}$ состоит не более чем из одной точки. Соответствие (1.2) определяет (многозначное) отображение $\psi\colon X \to \Sigma_{\mathscr{E}} = \psi(X) \subseteq \Sigma_m$, где

$$\Sigma_{\mathscr{E}} = \Big\{ \bar{\omega} = \{\omega_n\} \in \Omega_m;\ \bigcap_{n \in \mathbf{Z}} f^{-n} E_{\omega_n} \neq \varnothing \Big\}. \tag{7.1}$$

Если $\mathscr{E}$ является топологической образующей, то отображение $\pi = \psi^{-1}\colon \Sigma_{\mathscr{E}} \to M$, определяемое формулой

$$x = \pi(\{\omega_n\}) \Longleftrightarrow x \in \bigcap_{n \in \mathbf{Z}} f^{-n} E_{\omega_n}, \tag{7.2}$$

будет не только однозначным, но и непрерывным. Кроме того, в этом случае $\Sigma_{\mathscr{E}}$ замкнуто в Σ_m и σ-инвариантно, так что $(\Sigma_{\mathscr{E}}, \sigma)$ — символическая динамическая система.

Из формулы (7.2) легко вытекает коммутативность диаграммы

$$\begin{tikzcd} \Sigma_{\mathscr{E}} \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\pi"'] & \Sigma_{\mathscr{E}} \arrow[d, "\pi"] \\ X \arrow[r] & X \end{tikzcd} \tag{7.3}$$

Это означает, что динамическая система (X, f) является *факторсистемой* символической динамической системы $(\Sigma_{\mathscr{E}}, \sigma)$. Впрочем, такое представление дает, вообще говоря, мало информации о системе (X, f) ввиду плохой обозримости множества $\Sigma_{\mathfrak{g}}$ и неоднозначности отображения π^{-1}.

Большая часть успехов символической динамики связана с тем, что в диаграмме (7.3) удается заменить $(\Sigma_{\mathfrak{g}}, \sigma)$ топологической марковской цепью, а отображение π сделать гомеоморфизмом или по крайней мере «почти гомеоморфизмом» (обратимым на дополнении к «тощему» множеству первой категории). В этом случае различные свойства, описанные в п. 4, которыми обладает ТМЦ, переносятся на систему (X, f), и тем самым мы получаем богатую информацию о ее топологических и эргодических свойствах.

Один из возможных здесь путей — построение марковского разбиения. Сначала это сделали Адлер и Вейс [22] для автоморфизмов двумерного тора, затем Я. Г. Синай [15] для У-диффеоморфизмов (он же и ввел понятие марковского разбиения) и, наконец, Боуэн [Б1] — для ограничения А-диффеоморфизма на его базисные множества. В [Б1, § 4] приведены эргодические, а в [Б2] — топологические следствия, вытекающие из существования марковского разбиения. В [Б3] и [Б4] аналогичная теория развивается для потоков. Некоторые обобщения будут приведены далее во второй части этой статьи.

В марковском разбиении $\mathscr{E} = \{E_1, \ldots, E_m\}$ множества E_i имеют непересекающиеся внутренности, их границы $E_i \setminus \operatorname{Int} E_i$ нигде не плотны и диаметр достаточно мал. Обсудим вкратце основные идеи конструкции. Прежде всего по $\mathscr{E}$ строится матрица переходов $A_{\mathfrak{g}} = (a_{ij})$ из нулей и единиц, в которой

$$a_{ij} = 1 \Leftrightarrow \operatorname{Int} E_i \cap f^{-1} \operatorname{Int} E_j \neq \varnothing, \tag{7.4}$$

т. е. переход $i \to j$ объявляется допустимым, если внутри E_i найдется точка, которую f переводит внутрь E_j. По общему правилу определяется замкнутое множество

$$\hat{\Sigma}_{\mathfrak{g}} = \Sigma_{A_{\mathfrak{g}}} = \left\{\bar{\omega} = \{\omega_n\};\ a_{\omega_n \omega_{n+1}} = 1,\ n \in Z\right\}. \tag{7.5}$$

По теореме Бэра множество $\hat{X} = \bigcap_{n \in Z} f^{-n}\left(\bigcup_{i=1}^{m} \operatorname{Int} \mathscr{E}_i\right)$ всюду плотно в X. Для точек x из этого множества соответствие $x \leftrightarrow \psi(x) = \{\omega_n\}$ взаимно однозначно и $\psi(x) \in \hat{\Sigma}_{\mathfrak{g}}$. Следовательно, $\pi \hat{\Sigma}_{\mathfrak{g}} \supseteq \operatorname{clos} \hat{X} = X$. Оказывается, что $\hat{\Sigma}_{\mathfrak{g}} \subseteq \Sigma_{\mathfrak{g}}$. Этот факт родствен теореме об ε-траекториях. Действительно, пусть $\operatorname{diam} E_i \leqslant \varepsilon$ для всех i. Если $\bar{\omega} = \{\omega_n\} \in \hat{\Sigma}_{\mathfrak{g}}$, то в силу (7.5) и (7.4) для каждого n найдется такое $x_n \in E_{\omega_n}$, что $fx_n \in E_{\omega_{n+1}}$ и потому

$$\rho(x_{n+1}, fx_n) \leqslant \operatorname{diam} E_{\omega_{n+1}} \leqslant \varepsilon.$$

Значит, $\{x_n\}$ — это ε-траектория, и вблизи нее есть истинная траектория. Включение $\hat{\Sigma}_{\mathfrak{g}} \subseteq \Sigma_{\mathfrak{g}}$ делает возможным говорить о точке $x = \pi(\bar{\omega})$, для которой $f^n x \in E_{\omega_n}$ и $\rho(x_n, f^n x) \leqslant \leqslant \operatorname{diam} E_{\omega_n} \leqslant \varepsilon$. Значит, $\{f^n x\}$ и есть искомая истинная траектория.

Теперь мы можем заменить в (7.3) $\Sigma_{\mathfrak{g}}$ на $\hat{\Sigma}_{\mathfrak{g}}$, и наша цель достигнута: диаграмма показывает, что (X, f) является факторсистемой ТМЦ $(\hat{\Sigma}_{\mathfrak{g}}, \sigma)$, или просто *марковской факторсистемой*. Как мы уже говорили, π^{-1} обычно неоднозначно, хотя эта неоднозначность «сидит» лишь на «тощем» множестве $X \setminus \hat{X}$ и к тому же оказывается, что $\pi^{-1}(x)$ не более чем конечно.

Второй из возможных путей состоит в том, что мы отказываемся от задачи описания действия f на всем X и ищем в X такое инвариантное подмножество X_1 и такую ТМЦ (Σ_A, σ), чтобы существовала коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} \Sigma_A \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\pi"'] & \Sigma_A \arrow[d, "\pi"] \\ X_1 \arrow[r, "f"] & X_1 \end{tikzcd} \tag{7.6}$$

и π было гомеоморфизмом, т. е. чтобы (X_1, f) было *марковской подсистемой* в (X, f). При этом можно не предполагать заранее, что f обладает гиперболическими свойствами на всем X.

«Подкова Смейла» [17] является простейшей нетривиальной реализацией этой идеи. Здесь $f\colon X \to X$ — диффеоморфизм гладкого многообразия размерности $\geqslant 2$, а $\Sigma_A = \Sigma_2$, так что ограничение f на X_1 топологически сопряжено схеме Бернулли с двумя состояниями. Изложенные в п. 3 соображения о случайных последовательностях допускают следующую интерпретацию. Согласно [С], «подкову» можно реализовать на двумерной сфере так, чтобы кроме X_1 было еще две неблуждающие (а на самом деле неподвижные) точки — притягивающая и отталкивающая, — которые можно поместить, скажем, в северном и южном полюсах. Будем наблюдать за траекторией нашей системы и регистрировать наши наблюдения, ставя 0, если $f^n x$ лежит в южном полушарии, и 1, если в северном. При подходящей реализации f такие записи для $x \in X_1$ будут соответствовать диаграмме (7.3). Последовательности из 0 и 1 будут одного из следующих типов:

(а) последовательность из одних нулей (x — южный полюс);

(б) последовательности, в которых, начиная с некоторого места, идут одни единицы (x лежит в области притяжения северного полюса);

(в) последовательности, в которых нули и единицы встречаются неограниченно далеко ($x \in X_1$).

Среди последних имеются, в частности, и случайные по Мартин-Лёфу, никакими эффективными статистическими критериями неотличимые от тех случайных, в которых числа ω_n независимо принимают с равной вероятностью значения 0 или 1. Значит, наши наблюдения не в состоянии отличить рассматриваемую динамическую систему (вполне детерминированную!) от случайной.

Развитием идей, заложенных в «подкове Смейла», является «метод маршрутных схем» [1]. Здесь также основную роль играет такой выбор множеств E_i, который обеспечивал бы включение $\hat{\Sigma}_g \subseteq \Sigma_g$ (т. е. из допустимости при всех n переходов $\omega_n \to \omega_{n+1}$ в смысле (7.3) должна вытекать допустимость всей последовательности $\{\omega_n\}$ в смысле (7.1)). Множество $\pi\hat{\Sigma}_g$ оказывается при этом гиперболическим.

Важно отметить, что условия, которым должен удовлетворять f на E_i, зависят только от самого f и его первых производных, но не от итераций f^n (в частности, они не требуют проверки гиперболичности). Поэтому метод маршрутных схем является также средством обнаружения и локализации гиперболических подмножеств и квазислучайных явлений. В частности, он был применен к задачам небесной механики [1], [ГДС], и, таким образом, на цитированный в предисловии вопрос, заданный Адамаром в 1898 г., был получен утвердительный ответ.

Это направление продолжает развиваться, и за последнее время появился ряд работ, в которых методы символической динамики применяются к анализу конкретных динамических систем. В [30] развивается подход, при котором условия гиперболичности заменяются отчасти некоторыми когомологическими условиями и полученные результаты применяются к гамильтоновым системам с двумя степенями свободы и потенциалами типа «обезьяньего седла», Энона — Эльса и т. п. В [55] изучается «квазислучайное» поведение геодезических на открытых поверхностях, содержащих «рога» с неположительной кривизной. В [41] обнаружено бернуллиевское подмножество в «анизотропной задаче Кеплера» (см. также [34] и [35]).

В заключение остановимся на связи свойства отсутствия циклов с марковскими подсистемами. Пусть A-диффеоморфизм f удовлетворяет строгому условию трансверсальности, но вопреки сказанному в п. 6 в его базисных множествах имеется цикл (6.3). Используя аксиому А (б), мы можем найти цепочку периодических точек $p_k \in \Omega_k$, $0 \leqslant k \leqslant n$, так что $W^u(p_0)$ трансверсально пересекает $W^s(p_1)$ в некоторой точке q_0, $W^u(p_1)$ трансверсально пересекает $W^s(p_2)$ в точке $q_1, \ldots, W^u(p_n)$ трансверсально пересекает $W^s(p_0)$ в точке q_n. Заменив f на f^N, где N — общий период всех p_k, мы можем считать, что p_k неподвижны.

Рассмотрим теперь ТМЦ с матрицей $A(m_k, m)$, в которой допустимыми являются переходы

$$1 \to 2 \to 3 \to \ldots \to m$$

и, кроме того, $m_0 \to m_0$, $m_1 \to m_1, \ldots, m_n \to m_n$, где $1 = m_0 < < m_1 < \ldots < m_n < m$. Эта ТМЦ неразложима, и периодические точки плотны в $\Sigma_{A(m_k, m)}$.

Пусть U — произвольная окрестность множества $\Gamma = \{p_1, \ldots, p_n; q_1, \ldots, q_n\}$. Тогда [А] существуют окрестность V, $\Gamma \subset V \subseteq U$, и такие числа m_k и m, что ограничение f на максимальное инвариантное множество Λ, содержащееся в V, топологически сопряжено ТМЦ $(\Sigma_{A(m_k, m)}, \sigma)$ диаграммой (7.6). Так как периодические точки плотны в $\Sigma_{A(m_k, m)}$, то в силу (7.6) периодические точки плотны в $\pi\Sigma_A = \Lambda \supset \Gamma$. Следовательно, $\Gamma \subset \Omega(f)$ и, в частности, $q_k \in \Omega(f)$. Отсюда легко следует, что базисные множества цикла (6.3) не могут быть различными.

ЧАСТЬ II. ДАЛЬНЕЙШИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

8. Хотя локально максимальные гиперболические множества являются «гладким» объектом, но при построении для них символической динамики дифференцируемая структура многообразия M непосредственно не используется. Это позволяет аксиоматизировать условия, при которых построение марковского разбиения и символической динамики оказывается возможным для гомеоморфизма метрического компакта (обобщение на случай потоков нетрудно извлечь из работы [Б3] настоящего сборника, см. также [28]). Эти условия сформулированы ниже в аксиоме А#.

Отметим, что идея аксиоматизации также принадлежит Р. Боуэну, который в работе [24] рассмотрел класс гомеоморфизмов, удовлетворяющих аксиоме А*, видоизменением которой, приспособленным для марковских разбиений, и является аксиома А#.

Построение марковского разбиения на базисном множестве А-диффеоморфизма, приведенное в [Б1], использует технику ε-траекторий. Такое построение можно провести и на базисном множестве А-потока. Однако в работе [Б3] Р. Боуэн строит марковское разбиение по-другому, модифицируя свою более раннюю конструкцию ([23]). В следующих пп. 9, 10 мы воспроизводим эту конструкцию Р. Боуэна, применяя ее к случаю А$^{\#}$-гомеоморфизмов.

9. А$^{\#}$-гомеоморфизмы. Рассмотрим гомеоморфизм $f: X \to X$ компактного метрического пространства X. Пусть $d(x, y)$ — метрика на X. Обозначим $B_\delta(x)$ шар радиуса δ в метрике d. Определим $W^s_\delta(x)$ и $W^u_\delta(x)$ формулами (5.2).

Аксиома А$^{\#}$. *Существуют такие константы* $0 < \lambda < 1$, ε, $\gamma > 0$, *что*

(1) *если* $z, y \in W^s_\gamma(x)$ $(W^u_\gamma(x))$, *то* $d(f^n(z), f^n(y)) < \lambda^n d(z, y)$ *при* $n \geqslant 0$ (*при* $n \leqslant 0$);

(2) *если* $d(x, y) \leqslant \varepsilon$, *то пересечение* $W^s_\delta(x) \cap W^u_\gamma(y)$ *состоит из единственной точки, которую мы обозначим* $[x, y]$, *и отображение* $[\cdot, \cdot]: \{(x, y) \in X \times X;\ d(x, y) \leqslant \varepsilon\} \to X$ *непрерывно.*

Из определения вытекают следующие свойства:

(1а) $W^u_{\delta_1}(W^u_{\delta_2}(x)) \subset W^u_{\delta_1+\delta_2}(x)$ $\left(\text{где } W^u_\delta(A) = \bigcup\limits_{x \in A} W^u_\delta(x)\right)$;

(1б) если $y \in W^u_\gamma(x)$, то $W^u_\gamma(x) \cap B_\rho(y) \subset W^u_\rho(y)$;

(1в) если $\delta_1 \leqslant \delta_2 \leqslant \gamma$, то $W^u_{\delta_1}(x) = W^u_{\delta_2}(x) \cap B_{\delta_1}(x)$;

(1г) если $Y \subset W^u_\delta(Z)$ при $\delta \leqslant \gamma$, то $f^{-1}Y \subset W^u_{\lambda\delta}(f^{-1}Z)$.

(2) γ *является разделяющей константой для* f.

Из определения разделяющей константы следует, что для всякого $\zeta > 0$ существует такое $D(\zeta) \in Z^+$, для которого из $d(f^n x, f^n y) \leqslant \gamma$ при всех $|n| \leqslant D(\zeta)$ вытекает, что $d(x, y) < \zeta$.

Лемма 9.1. *Для всякого* $0 < \delta \leqslant \gamma$ *существует такое* $\varepsilon(\delta) > 0$, *что если* $d(x, y) \leqslant \varepsilon(\delta)$, *то* $[x, y] \in W^s_\delta(x) \cap W^u_\delta(y)$.

Доказательство. Очевидно, $[x, x] = x$. Так как отображение $[\cdot, \cdot]$ равномерно непрерывно, существует такое $\varepsilon(\delta) > 0$, что $d([x, y], x) > \delta$ и $d([x, y], y) < \delta$, если $d(x, y) \leqslant \varepsilon(\delta)$. Вследствие (1в)

$$[x, y] \in W^u_\gamma(y) \cap B_\delta(y) = W^u_\delta(y).$$

Из аналогичного (1в) утверждения относительно W^s следует, что $[x, y] \in W^s_\delta(x)$.

Определение. Пусть $\alpha_0 = \gamma > \alpha_1 > \alpha_2 > \ldots$ — такая убывающая последовательность положительных чисел, что $\alpha_{n+1} < {}^1/_3 \min({}^1/_3\alpha_n, \varepsilon({}^1/_3\alpha_n))$ и α_{n+1} настолько мало, что из $d(x, y) \leqslant \alpha_{n+1}$ следуют неравенства $d(f(x), f(y)) < \alpha_n$ и $d(f^{-1}(x), f^{-1}(y)) < \alpha_n$. Легко доказывается

Лемма 9.2. (а) *Если* $\operatorname{diam} M < 3\alpha_{n+1}$, *то* $\operatorname{diam}[M, M] < \alpha_n$.
(б) *Если* $\operatorname{diam}\{w, x, y, z\} \leqslant 3\alpha_2$, *то* $[x, z] = [x, [y, z]] = [[x, y], z] = [[x, w], [y, z]]$.

В дальнейшем предполагается, что выбрано некоторое $\alpha \leqslant \alpha_5$. Из леммы 9.2 следует

Лемма 9.3. *Если* $U \subset W^u_\alpha(x)$ *открыто в* $W^u_\gamma(x)$ *и* $V \subset W^s_\alpha(x)$ *открыто в* $W^s_\gamma(x)$, то $[U, V]$ *открыто в* X *и* $[\cdot, \cdot]$: $U \times V \to [U, V]$ — *гомеоморфизм.*

Лемма 9.4. *Если* $d(x, y) \leqslant \alpha$ *и* $U \subset W^u_\alpha(x)$ *открыто в* $W^u_\gamma(x)$, *то* $[U, y]$ *открыто в* $W^u_\gamma(y)$ *и* $[\cdot, y]$: $U \to [U, y]$ — *гомеоморфизм (аналогичное утверждение верно и для* W^s*).*

Доказательство. Пусть V — малая открытая окрестность точки $z = [x, y]$ в $W^s_\gamma(x)$. Вследствие леммы 9.3 $W = [U, V] \cap W^u_\gamma(y)$ открыто в $W^u_\gamma(y)$. Так как $[U, y] \subset W^u_\gamma(y)$, $W \supset [U, y]$. Если $w = [u, v] \in W$, то $[w, y] = W^s_\gamma(w) \cap W^u_\gamma(y) = w$, так как $w \in W^u_\gamma(y)$. Отсюда по лемме 9.2 (б) $w = [w, y] = [[u, v], y] = [u, y] \in [U, y]$. Значит, $W = [U, y]$. Из 9.2 (б) также следует, что непрерывное отображение $[\cdot, x]$: $[U, y] \to U$ обратно к $[\cdot, y]$: $U \to [U, y]$.

Определение. Множество $A \subset X$ называется *прямоугольником*, если $\operatorname{diam} A \leqslant \alpha$, $A = \operatorname{int} A$ и $[x, y] \in A$, когда $x, y \in A$.
Для $x \in A$ определяются

$$W^s(x, A) = W^s_\gamma(x) \cap A;$$

$$W^u(x, A) = W^u_\gamma(x) \cap A.$$

Определение.

$$\partial^s A = \{x \in A\colon\ x \notin \operatorname{int} W^u(x, A) \text{ в } W^u_\gamma(x)\},$$

$$\partial^u A = \{x \in A\colon\ x \notin \operatorname{int} W^s(x, A) \text{ в } W^s_\gamma(x)\}.$$

Используя леммы 9.2 и 9.3 и определение топологии на подпространстве, можно доказать следующую лемму.

Лемма 9.5. $\partial A = \partial^s A \cup \partial^u A$. *Если* $x \in A$, *то* $W^u(x, A) = \operatorname{int} W^u(x, A)$ *в* $W^u_\gamma(x)$ *и* $W^s(x, A) = \operatorname{int} W^s(x, A)$ *в* $W^s_\gamma(x)$.

Стандартный способ построения прямоугольника дает следующая лемма, которая вытекает из лемм 9.2—9.4.

Лемма 9.6. *Пусть $C \subset W^u_\alpha(x)$, $C = \overline{\operatorname{int} C}$ в $W^u_\gamma(x)$ и $D \subset W^s_\alpha(x)$, $D = \overline{\operatorname{int} D}$ в $W^s_\gamma(x)$. Тогда $A = [C, D]$ — прямоугольник с $\partial^s A = [\partial C, D]$ и $\partial^u A = [C, \partial D]$. При $x \in A$ имеем $W^u(x, A) = [C, x]$ и $W^s(x, A) = [x, D]$.*

10. Марковское разбиение для $A^{\#}$-гомеоморфизма f. Мы переходим теперь к построению марковского разбиения.

Определение. Конечное покрытие $\mathscr{E} = \{E_1, \ldots, E_r\}$ множества X прямоугольниками называется *марковским разбиением*, если

(1) $E_i \cap E_j \subset \partial E_i \cap \partial E_j$, $i \neq j$;

(2) при $x \in \operatorname{int} E_i \cap f^{-1} \operatorname{int} E_j$

$$fW^u(x, E_i) \supset W^u(f(x), E_j),$$

$$fW^s(x, E_i) \subset W^s(f(x), E_j).$$

Теорема 10.1. *$A^{\#}$-гомеоморфизм f обладает марковским разбиением.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{A} = \{A^0_1, \ldots, A^0_r\}$ — покрытие X прямоугольниками $A^0_i = [C^0_i, D^0_i]$, $C^0_i \subset W^u_\alpha(x_i)$, $D^0_i \subset W^s_\alpha(x_i)$, о которых шла речь выше.

Лемма 10.1. *Существует такое $a > 0$ и такое отображение $F\colon X \to \{1, \ldots, r\}$, что $W^s_a(z) \subset A^0_{F(x)}$ при всех $z \in W^u(x, A^0_{F(x)})$, $W^u_a(y) \subset A^0_{F(x)}$ при всех $y \in W^s(x, A^0_{F(x)})$.*

Доказательство. Пусть $b > 0$ — число Лебега покрытия $\mathscr{A}$. Воспользовавшись непрерывностью отображения $[\cdot, \cdot]$, выберем настолько малое $a < \gamma$, что $d([x_1, y_1], [x_2, y_2]) < b$ при $\max(d(x_1, x_2), d(y_1, y_2)) \leqslant a$. Для $x \in X$ выберем $F(x)$ так, что $B_b(x) \subset A^0_{F(x)}$. Предположим, что $z \in W^u(x, A^0_{F(x)})$ и $w \in W^s_a(z)$. Тогда $d([x, w], x) = d([x, w], [x, z]) < b$ и, значит, $[x, w] \in A^0_{F(x)}$. Так как $A^0_{F(x)}$ — прямоугольник, получаем $w = [z, [x, w]] \in A^0_{F(x)}$ (вторая часть доказательства проводится аналогично).

Замечание. Достаточно построить марковское разбиение для $g = f^m$, ибо нетрудно проверить, что если $\{T_i\}$, $i = 1, \ldots, k$, — марковское разбиение для g, то $\{T_{i_0} \cap f^{-1} T_{i_1} \cap \ldots \cap f^{-(m-1)} T_{i_{m-1}}\}$ — марковское разбиение для f.

Воспользуемся замечанием и рассмотрим $g = f^m$, где m столь велико, что для $\beta = \lambda^m$ с λ из аксиомы $A^{\#}$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \beta^j < a/\gamma < 1.$$

Рассмотрим образ gC_i^0 стороны $C_i^0 \subset W_\alpha^u(x_i)$ прямоугольника A_i^0. Для всякой точки $z \in gC_i^0$ имеем $z \in \operatorname{int} A^0_{F(z)}$, где $A^0_{F(z)}$ — прямоугольник, выбранный в соответствии с леммой 10.1; значит, можно выбрать конечное покрытие gC_i^0 прямоугольниками $\{A^0_{F(z_j)} = A^0_{ij} = [C^0_{ij}, D^0_{ij}]\}$, $j = 1, \ldots, s_i$. Пусть $y_{ij} = g^{-1}[x_{ij}, z_j]$ (напомним, что x_{ij} — центры исходных прямоугольников A^0_{ij}), где $[x_{ij}, z_j] \in W^s(x_{ij}, A^0_{ij})$. По построению

($\hat{а}$) $g(y_{ij}) \in W^s(x_{ij}, A^0_{ij}) = D^0_{ij}$;

($\tilde{б}$) $gC_i^0 \cap [C^0_{ij}, g(y_{ij})] \neq \varnothing$;

($\tilde{в}$) $gC_i^0 \subset \bigcup\limits_{1 \leqslant j \leqslant s_i} [C^0_{ij}, g(y_{ij})]$;

($\hat{г}$) $W_\alpha^s(z) \subset A^0_{ij}$ при всех $z \in W^u(g(y_{ij}), A^0_{ij})$.

Определим $C_i^1 = \bigcup\limits_{1 \leqslant j \leqslant s_i} g^{-1}[C^0_{ij}, g(y_{ij})]$ и рекуррентно

$$C_i^n = \bigcup_{1 \leqslant j \leqslant s_i} g^{-1}[C^{n-1}_{ij}, g(y_{ij})].$$

Лемма 10.2. *Для любой точки* $y \in W^s_{2\alpha}(x_i)$

$$[C_i^{n-1}, y] \subset [C_i^n, y] \subset W^u_{\beta^n\alpha}[C_i^{n-1}, y] \subset$$
$$\subset W^u_{(1+\beta+\ldots+\beta^n)\alpha}(y) \subset W^u_{2\alpha}(y).$$

Доказательство. Так как $C_i^0 \subset C_i^1$ по построению, $[C_i^0, y] \subset \subset [C_i^1, y]$. Из $[y_{ij}, y] \in W^s_\gamma(y_{ij})$ получаем вследствие выбора m, (г) и (а), что $g([y_{ij}, y]) \in W^s_{\theta\gamma}(g(y_{ij})) \subset W^s_\alpha(g(y_{ij})) \subset W^s(x^0_{ij}, A^0_{ij})$.

Для дальнейшего докажем следующее

Предложение 10.1. (а) *Если* $d(f^jx, f^jy) \leqslant \alpha_2$ *при всех* $0 \leqslant j \leqslant m$, *то* $f^m[x, y] = [f^mx, f^my]$.

(б) *Пусть* $g = f^m$. *Предположим, что* $V \subset W^u_{\alpha_1}(z)$, $y \in W^s_{\alpha_1}(z$ *и* $gV = \bigcup\limits_k V_k$, *где* $V_k \subset W^u_{\alpha_0}(g(z_k))$, $z_k \in W^u_{\alpha_1}(z)$. *Тогда* $g[V, y] = \bigcup\limits_k [V_k, g([z_k, y])]$.

(а) доказывается по индукции исходя из определения последовательности чисел $\alpha_0 > \alpha_1 > \ldots.$

(б) Вследствие того, что $[V, y] = \bigcup\limits_k [g^{-1}V_k, y]$, достаточно показать, что $g[g^{-1}V_k, y] = [V_k, g([z_k, y])]$. Покажем, что для $w \in V_k$

$$g[g^{-1}(w), y] = [w, g([z_k, y])].$$

Так как $w \in W^u_{\alpha_3}(g(z_k))$,

$$d(f^j(g^{-1}(w)),\ f^j(z_k)) \leqslant \alpha_3 \leqslant {}^1/_3\alpha_2$$

при $0 \leqslant j \leqslant m$. Из $d(z_k, y) \leqslant 2\alpha_1 < \varepsilon({}^1/_3\alpha_2)$ следует, что $[z_k, y] \in W^s_{{}^1/_3\alpha_3}(z_k)$ и $d(f^j(z_k), f^j[z_k, y]) \leqslant {}^1/_3\alpha_2$ при $0 \leqslant j \leqslant m$. Таким образом, $d(f^j(g^{-1}(w)), f^j[z_k, y]) < \alpha_2$ при $0 \leqslant j \leqslant m$. Из (а) получаем

$$[w, g([z_k, y])] = g([g^{-1}(w), [z_k, y]]).$$

Но $[g^{-1}(w), y] = [g^{-1}(w), [z_k, y]]$, и предложение доказано.

Из предложения 10.1 следует равенство

$$[C_i^1, y] = \bigcup_{1 \leqslant j \leqslant s_i} g^{-1}[C^0_{ij}, g([y_{ij}, y])].$$

Так как $\operatorname{diam} A^0_{ij} < \alpha$, $[C^0_{ij}, g([y_{ij}, y])] \subset W^u_\alpha(g[C^0_j, y])$. Меняя j, получаем $g[C^1_i, y] \subset W^u_\alpha(g[C^0_i, y])$. Значит, $[C^1_i, y] \subset W^u_{\beta\alpha}([C^0_i, y])$, и так как $[C^0_i, y] \subset W^u_\alpha(y)$, получаем

$$[C^1_i, y] \subset W^u_{(1+\beta)\alpha}(y).$$

Индуктивный переход от $n-1$ к n проводится точно так же, и лемма 10.2 доказана.

Из $C^0_i = \overline{\operatorname{int} C^0_i}$ следует по лемме 9.4, что $[C^0_i, y] = \overline{\operatorname{int}[C^0_i, y]}$. Так как это свойство сохраняется при взятии конечного объединения и при применении g^{-1}, получаем $[C^n_i, y] = \overline{\operatorname{int}[C^n_i, y]}$.

Положим $C_i = \overline{\bigcup_{n \geqslant 0} C^n_i} \subset W^u_{2\alpha}(x_i)$. Отметим, что $C_i = \overline{\operatorname{int} C_i}$ в $W^u_\gamma(x_i)$.

Лемма 10.3. *Если* $z \in [C_{i_0}, W^s_{2\alpha}(x_i)]$, *то для некоторого* $[C_j, D^0_j]$, *содержащего* $g(z)$, $g[C_i, z] \supset [C_j, g(z)]$.

Доказательство. Пусть $y = [x_i, z] \in W^s_{2\alpha}(x_i)$. Тогда $[C_i, z] = [C_i, y]$:

$$g[C_i, y] = \overline{\bigcup_{n>0} g[C^n_i, y]} = \overline{\bigcup_{n>0} \bigcup_{1 \leqslant j \leqslant s_i} [C^{n-1}_{ij}, g([y_{ij}, y])]} =$$

$$= \overline{\bigcup_{1 \leqslant j \leqslant s_i} \bigcup_{n>0} [C^{n-1}_{ij}, g([y_{ij}, y])]} = \bigcup_{1 \leqslant j \leqslant s_i} [C_{ij}, g([y_{ij}, y])].$$

Из $z \in [C_i, y]$ следует, что при некотором j

$$g(z) \in [C_{ij}, g([y_{ij}, y])].$$

Следовательно, $g[C_i, z]=g[C_i, y]\supset[C_{i'}, g([y_{i'}, y])]=[C_{i'}, g(z)]$.

Рассуждая аналогичным образом относительно g^{-1} и D_i^0, мы можем найти такие множества $D_i\subset W^s_{2\alpha}(x_i)$, что $D_i^0\subset D_i=\overline{\operatorname{int} D_i}$, и если $z\in[W^u_{2\alpha}(x_i), D_i]$, то для некоторого $[C_j^0, D_j]$, содержащего $g^{-1}(z)$, $g^{-1}[z, D_i]\supset[g^{-1}(z), D_j]$.

Множества $A_i=[C_i, D_i]$ являются прямоугольниками, и мы получаем для них следующее свойство.

Лемма 10.4. *Пусть $z\in A_i$. Тогда для некоторого A_j, содержащего $g(z)$, $g[C_i, z]\supset[C_j, g(z)]$. Для некоторого A_k, содержащего $g^{-1}(z)$, $g^{-1}[z, D_i]\supset[g^{-1}(z), D_k]$.*

Б. М. Гуревич и Я. Г. Синай [5] назвали покрытие X прямоугольниками (в [5] используется термин параллелограмм), обладающее близкими свойствами, марковским покрытием. Чтобы перейти от марковского покрытия к марковскому разбиению, необходима процедура, аналогичная той, которая используется в [Б1, § 3С].

11. Некоторые следствия. Здесь приведены некоторые результаты, вытекающие из существования марковского разбиения для A#-гомеоморфизма и дополняющие статьи [Б1], [Б2] настоящего сборника.

Как видно из [Б1], основным для построения метрической теории A-диффеоморфизмов и A-потоков является тот факт, что граница марковского разбиения $\partial\mathscr{E}$ на базисном множестве Ω является множеством нулевой μ-меры для всякой гиббсовской меры μ.

Однако изучение динамической системы $f|\Omega$ с топологической точки зрения требует введения на границе $\partial\mathscr{E}$ более тонкой структуры. Такая структура вводится в [Б2] с помощью множеств $J^s(x)$, $J^u(x)$, которые образуют нечто вроде стратификации базисного множества Ω. В [20] показано, что страты $J^s(x)$ высших кратностей обладают такими же марковскими свойствами, что и исходные прямоугольники $E\in\mathscr{E}$, и их можно рассматривать как состояния некоторой ТМЦ $(\hat\Sigma, \hat\sigma)$, для которой исходная ТМЦ (Σ, σ), построенная по марковскому разбиению $\mathscr{E}$, является подцепью. Из свойств ТМЦ $(\hat\Sigma, \hat\sigma)$ вытекает (см. [20]) следующее

Предложение 11.1. *Число топологически различных динамических систем, возникающих при факторизации (Σ, σ) по отождествлениям на границе любого марковского разбиения $\mathscr{E}$, удовлетворяющего условию $\operatorname{card}\mathscr{E}\leqslant n$, конечно.*

Отметим, что предложение 11.1 можно доказать и независимо от построения ТМЦ $(\hat\Sigma, \hat\sigma)$ (см. [56]). А именно, по построению всякий прямоугольник $E_i \in \mathscr{E}$ имеет $\operatorname{diam} E_i < \gamma/2$, где γ — разделяющая константа. Отсюда вытекает, что две последовательности $\mathfrak{S}_1 = \{\ldots E_{-1}^{(1)} E_0^{(1)} E_1^{(1)} \ldots\}$, $\mathfrak{S}_2 = \{\ldots \ldots E_{-1}^{(2)} E_0^{(2)} E_1^{(2)} \ldots\}$ отождествляются тогда и только тогда, когда $E_n^{(1)} \cap E_n^{(2)} \neq \varnothing$ при всех $n \in \mathbb{Z}$. Поэтому если для двух марковских разбиений $\mathscr{E}_1$ на Ω_1 и $\mathscr{E}_2$ на Ω_2 совпадают матрицы переходов соответствующих марковских цепей и матрицы инциденций соответствующих прямоугольников, то динамические системы (Ω_1, f_1) и (Ω_2, f_2) топологически сопряжены.

Отметим, что в работе [36] анонсировано построение клеточного марковского разбиения для всякого У-диффеоморфизма. Как показывает следующая теорема, границы клеток, вообще говоря, не будут гладкими в отличие от марковских разбиений Адлера и Вейса для автоморфизмов двумерного тора (см. [22]).

Теорема 11.1 (см. [27]). *Для гиперболического автоморфизма трехмерного тора не существует марковского разбиения на прямоугольники с кусочно-гладкой границей.*

Отношение частичного порядка, введенное Р. Боуэном в множестве (J^s, J^u), дает оценку сверху числа прообразов точки $x \in \Omega$ при отображении $\pi: \Sigma \to \Omega$. Эту оценку, превышающую 2^{2n}, где $n = \operatorname{card} \mathscr{E}$, можно существенно улучшить (см. [20]). Рассмотрим множество $\operatorname{Set} x$ всех прямоугольников, в пересечении которых лежит точка x. Будем говорить, что прямоугольники $E_1, \ldots, E_k$ принадлежат к одному s-типу (u-типу) в точке x, если $\bigcap_{i=1}^{k} \operatorname{int} W^s(x, E_i) \neq \varnothing$ $\left(\bigcap_{i=1}^{k} \operatorname{int} W^u(x, E_i) \neq \varnothing\right)$. Так как $\operatorname{int} E_i \cap \operatorname{int} E_j = \varnothing$ при $i \neq j$, два прямоугольника не могут одновременно принадлежать к одному s-типу и одному u-типу. Выделим в $\operatorname{Set} x$ максимальное подмножество $\mathscr{E}_1$, состоящее из прямоугольников, относящихся к одному s-типу, затем выделим аналогичное подмножество $\mathscr{E}_2$ в $\operatorname{Set} x \setminus \mathscr{E}_1$ и т. д. Мы получим разбиение $\zeta(x)$ множества $\operatorname{Set} x$. На рис. 1 $\mathscr{E}_1 = \{E_0^{(1)}, E_0^{(2)}\}$, $\mathscr{E}_2 = \{E_0^{(3)}\}$; $\operatorname{card} \zeta(x) = 2$. Отметим, что $J^s(x) = \{(E_0^{(1)}, E_0^{(2)}), (E_0^{(1)}, E_0^{(3)})\}$, $J^u(x) = \{(E_0^{(1)}), E_0^{(2)}, E_0^{(3)})\}$.

Пусть $Q_1 = \max\limits_{x \in \Omega} \{\operatorname{card} \zeta(x)\}$. Обозначим $q(x)$ максимальное число прямоугольников $E \in \operatorname{Set} x$, относящихся попарно к различным u-типам, и положим $Q_2 = \max\limits_{x \in \Omega} q(x)$. Очевидно, $Q_1 \leqslant n$, $Q_2 \leqslant n$.

Предложение 11.2. $\operatorname{card} \pi^{-1} x \leqslant Q_1 \cdot Q_2$.

Пусть $\pi^{-1}(x) = \{\mathfrak{S}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{S}^{(N)}\}$. Так как $\operatorname{card} \pi^{-1}(x) = \operatorname{card} \pi^{-1}(f^{-l} x)$, можно считать, что попарно различные отрезки последовательностей $\mathfrak{E}^{(i)}$ имеют вид $\{E_0^{(i)}, E_1^{(i)}, \ldots \ldots, E_m^{(i)}\}_{i=1}^N$. При этом $x \in E_0^{(i)} \cap f^{-1}E_1^{(i)} \cap \ldots \cap f^{-m}E_m^{(i)} = E_{\bar m}^{(i)}$. Вследствие марковского свойства $W^s(x, E_{\bar m}^{(i)}) = W^s(x, E_0^{(i)})$ (см. рис. 1, где изображено несколько прямоугольников $E_{\bar m}^{(i)}$). Обозначим $\zeta_{\bar m}(x)$ разбиение прямоугольников $E_{\bar m}^{(i)}$ на группы в соответствии с их s-типом. Мы имеем card $\zeta_{\bar m}(x)$=card $\zeta(x) \leqslant \leqslant Q_1$. Прямоугольники $E_{\bar m}^{(i)} = E_0^{(i)} \cap \ldots \cap f^{-m}E_m^{(i)}$, входящие

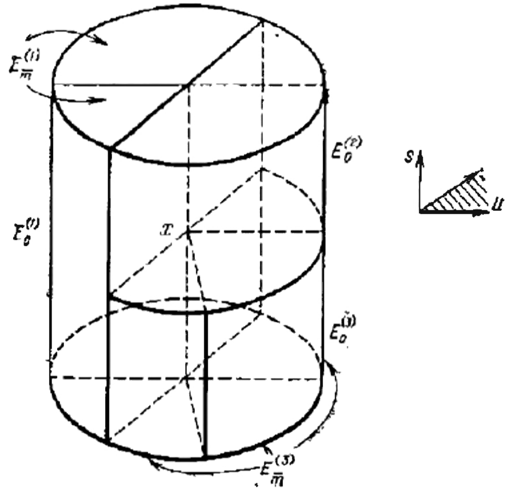


Рис. 1.

в одну группу, принадлежат к попарно различным u-типам. Вследствие марковского свойства $W^u(x, E_{\bar m}^{(i)}) = f^{-m}W^u(f^m x, E_m^{(i)})$, и, значит, прямоугольники $E_{\bar m}^{(i)}$ принадлежат к попарно различным u-типам в точке $f^m x$, т. е. мощность каждой группы в разбиении $\zeta_{\bar m}(x)$ не превосходит Q_2. Отсюда card $\{E_{\bar m}^{(i)}\} = $ $= \operatorname{card} \pi^{-1}(x) = N \leqslant Q_1 \cdot Q_2$.

Как показывают примеры автоморфизма двумерного тора и соленоида Вильямса, полученная оценка card $\pi^{-1}(x) \leqslant \leqslant Q_1 \cdot Q_2$ (но не card $\pi^{-1}(x) \leqslant n^2$) точна (см. [20]).

12. Дзета-функция A#-гомеоморфизма. Доказывая в [Б3], что дзета-функция А-потока на базисном множестве рационально выражается через дзета-функции гиперболических символических потоков, Р. Боуэн использует конструкцию, примененную А. Мэннингом для доказательства рациональности дзета-функции А-диффеоморфизма (см. [46]), Доказательство теоремы Мэннинга переносится также на $A^{\#}$-гомеоморфизмы.

Напомним, что дзета-функция определяется формулой (4.4) части I; для ТМЦ с матрицей переходов A она равна (там же, (4.6))

$$\zeta_A(t) = \frac{1}{\det(E - tA)}.$$

Теорема 12.1. *Дзета-функция $A^{\#}$-гомеоморфизма рациональна.*

Для доказательства теоремы 12.1 достаточно представить $\zeta(t)$ в виде рациональной функции от функций $\zeta_A(t)$. Пусть $\mathscr{E} = \{E_1, \ldots, E_n\}$ — марковское разбиение на X, (Σ, σ) — соответствующая ТМЦ, $\pi: \Sigma \to X$, $\pi(\bar{\omega}) = \{E_{k_i}\}_{i=-\infty}^{+\infty} = \bigcap_{i \in \mathbf{Z}} f^{-i} E_{k_i}$.

Если периодическая точка x принадлежит $\partial\mathscr{E}$, то $\operatorname{card} \pi^{-1}(x) > 1$. Чтобы учесть эту неоднозначность, вводятся вторичные ТМЦ, состояния которых — это наборы прямоугольников E_i, разбитые на поднаборы. Пусть $x = f^n x$, $\operatorname{Set} x = \{E_1, \ldots, E_N\}$. Периодическая траектория $(x, fx, \ldots, f^{n-1}x)$ представляет собой минимальное множество, и, согласно [Б2], $f^i x$ не являются точками ветвления. В частности, это означает, что для каждого прямоугольника $E_i \in \operatorname{Set} x$ найдется ровно одна последовательность $\bar{\omega}^{(i)} \in \pi^{-1}x$ с $\omega_0^{(i)} = E_i$. Кроме того, соответствие t: $\{\omega_k^{(i)}\}_{i=1}^{N} \leftrightarrow \{\omega_{k+1}^{(i)}\}_{i=1}^{N}$, при котором всякому прямоугольнику $E \in \operatorname{Set} f^k x$ сопоставляется такой прямоугольник $F \in \operatorname{Set} f^{k+1}x$, что переход $E \to F$ допустим, взаимно однозначно. При этом

$$t^n: \{\omega_k^{(i)}\}_{i=1}^{N} = \operatorname{Set} f^k x \to \{\omega_{k+n}^{(i)}\}_{i=1}^{N} = \operatorname{Set} f^{k+n} x = \operatorname{Set} f^k x$$

является перестановкой N символов.

Определим ТМЦ $(\Sigma_\alpha, \sigma_\alpha)$ с индексом $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$. Состояния Σ_α — это наборы (e) из $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_r$ прямоугольников $E \in \mathscr{E}$, удовлетворяющих условию $\bigcap_{s=1}^{|\alpha|} E_s \neq \varnothing$, разбитые на r поднаборов e_i с $\operatorname{card} e_i = \alpha_i$. Переход $(e) = (e_1, \ldots, e_r) \to (f) = (f_1, \ldots, f_r)$ допустим, если t взаимно однозначно отображает (e) на (f) и e_i на f_i. Так как $|\alpha|$ не превосходит кратности покрытия $\mathscr{E}$, мы получаем конечное число ТМЦ $(\Sigma_\alpha, \sigma_\alpha)$. Пусть $\{(e)_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ — периодическая последовательность в Σ_α. Каждому прямоугольнику $E \in (e)_0$ однозначно сопоставляется последовательность $\{E_k\}_{k=-\infty}^{+\infty} = \bar{\omega}$ с $E_0 = E$, $E_k \in (e)_k$, причем имеется ровно $|\alpha|$ таких последовательностей $\bar{\omega}^{(i)}$. По определению допустимых состояний прямоугольники $E_k^{(i)} \in (e)_k$ имеют общее пересечение и, согласно свойству разделения траекторий, последовательности $\bar{\omega}^{(i)}$ проектируются в одну точку $x = \pi(\bar{\omega})$. Таким образом, корректно определено отображение φ_α множества периодических точек ТМЦ $(\Sigma_\alpha, \sigma_\alpha)$ на множество периодических точек гомеоморфизма f при всех α.

Для доказательства теоремы 12.1 достаточно показать, что

$$N_n(f) = \sum_{\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)} (-1)^{r+1} N_n(\sigma_\alpha). \tag{12.1}$$

Пусть $f^n x = x$. Обозначим $K_x(\alpha)$ число неподвижных относительно σ_α^n точек в прообразе $\varphi_\alpha^{-1}(x)$. Равенство (12.1) будет доказано, если мы установим, что

$$\sum_{\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)} (-1)^{r+1} K_x(\alpha) = 1. \tag{12.2}$$

Пусть $N = \operatorname{card} \operatorname{Set} x$. Разобьем индексы $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$, для которых $K_x(\alpha) > 0$, на 3 класса:

(1) $|\alpha| < N$, r любое; (2) $|\alpha| = N$, $r > 1$; (3) $|\alpha| = N$, $r = 1$.

Индексы первых двух классов находятся во взаимно однозначном соответствии:

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \longleftrightarrow \hat{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r, N - |\alpha|),$$

а третий состоит из единственного представителя $\alpha = (N)$.

Пусть $\{(e)_k\}_{k=-\infty}^{+\infty} \in \varphi_\alpha^{-1}(x)$ — точка периода n, а α — индекс первого класса. Добавив к $(e)_k$ поднабор из прямоугольников $E \in \operatorname{Set} f^k x$, не входящих в $(e)_k$, получим набор $(\hat{e})_k$. Из однозначности перестановки $\operatorname{Set} f^k x \to \operatorname{Set} f^{k+n} x$ вытекает, что последовательность $\{(\hat{e})_k\}_{k=-\infty}^{+\infty} \in \varphi_{\hat{\alpha}}^{-1}(x)$ также имеет период n.

Из $(-1)^r K_x(\alpha) + (-1)^{r+1} K_x(\hat{\alpha}) = 0$ следует, что сумма в (12.2) сводится к одному слагаемому, отвечающему $\alpha = (N)$. Но в $\Sigma_{(N)}$ прообразом x является ровно одна последовательность с $(e)_0 = \operatorname{Set} x$. Этим доказано (12.2), а значит, и (12.1).

13. Мера максимальной энтропии и распределение периодических точек. В работах данного сборника гиббсовские меры для А-систем строятся с помощью марковских разбиений. Возможен и другой подход, развитый Боуэном в работах [24], [25], [26], для мер с максимальной энтропией. При этом подходе мера с максимальной энтропией получается как предел мер, сосредоточенных на периодических траекториях, с использованием введенного Боуэном понятия «спецификации», близкого к понятию ε-траектории (см. [Б1], а также обзор [9]). Для У-потоков мера с максимальной энтропией была ранее построена Г. А. Маргулисом (см. [12], [13]).

Для А$^{\#}$-гомеоморфизмов меру максимальной энтропии можно связать с периодическими траекториями также и через марковское разбиение с использованием известных результатов про ТМЦ, приведенных выше (см. п. 4). Мы рассмотрим случай А$^{\#}$-гомеоморфизмов, следуя книге [А]. Результаты для А-потоков будут приведены в следующем разделе. Пусть $f\colon X\to X$ — транзитивный А$^{\#}$-гомеоморфизм, $\mathscr{E}=\{E_0,\ldots,E_{m-1}\}$ — марковское разбиение, (Σ_α,σ) — ТМЦ, соответствующая $\mathscr{E}$, $\pi\colon \Sigma_A\to X$ — проекция, индуцированная разбиением $\mathscr{E}$. Согласно [Б1, предложение 3.19], (Σ_A,σ) — неразложимая ТМЦ. Пусть h — ее индекс цикличности, $\Sigma_A=\Sigma_1\cup\ldots\cup\Sigma_h$, $\sigma^h|\Sigma_i$ перемешивает.

Теорема 13.1 (о спектральном разложении транзитивного А$^{\#}$-гомеоморфизма, ср. [Б1, теорема 3.5]). *$X=\pi(\Sigma_A)=X_1\cup\ldots\cup X_h$, где $X_i=\pi(\Sigma_i)$, $f^h|X_i$ перемешивает.*

Теорема 13.2 ([А, теорема 7.3]). *Пусть $f\colon X\to X$ — транзитивный А$^{\#}$-гомеоморфизм, A — матрица соответствующей ТМЦ, h — ее индекс цикличности, λ_0 — максимальное положительное собственное значение. Тогда*

$$(1)\quad \lim_{p\to\infty}\frac{\log N_{ph}(\sigma\mid\Sigma_A)}{ph}=\lim_{p\to\infty}\frac{\log N_{ph}(f)}{ph}=h(f)=h(\sigma\mid\Sigma_A)=\log\lambda_0;$$

(2) $N_n(f)=h\cdot\lambda_0^n+O(\mu^n)$ *при* $n=ph\to\infty$, $0<\mu<\lambda_0$, $N_n(f)=0$ *при* $n=0\pmod h$;

(3) *дзета-функция* $\zeta_f(t)$ *аналитична в круге* $|t|<\lambda_0^{-1}$ *и* λ_0^{-1} — *ее простой полюс;*

(4) *если* $h(f)=0$, *то* X *состоит из одной периодической траектории.*

Доказательство. Пусть $Y=X\setminus\bigcup_{m\in\mathbb{Z}}f^m(\partial^s\mathscr{E}\cup\partial^u\mathscr{E})$. Проекция $\pi\colon\pi^{-1}(Y)\to Y$ является взаимно однозначным отображением. Обозначим $\Gamma=\bigcap_{m\geqslant 0}f^m(\bar\partial^s\mathscr{E})\cup\bigcap_{m\geqslant 0}f^{-m}(\partial^u\mathscr{E})$, $\Delta=\pi^{-1}(\Gamma)$. Множества Γ и Δ замкнуты и инвариантны соответственно относительно f и σ. Если x — периодическая точка f, $x\in\bigcup_{m\in\mathbb{Z}}f^m(\partial^s\mathscr{E}\cup\partial^u\mathscr{E})$, то $x\in\Gamma$.

Пусть N'_m, N''_m, N'''_m — числа точек периода m соответственно в множествах Y, Γ и Δ. Мы получаем

$$N_m(f) = N'_m + N''_m; \qquad N_m(\sigma) = N'_m + N'''_m. \tag{13.1}$$

Из неразложимости матрицы A следует, что для любой подматрицы $B \subsetneq A$ с максимальным собственным значением λ_B имеем $\lambda_B < \lambda_0$ (см. [4]). Отсюда нетрудно вывести, что $h(\sigma|\Delta) < h(\sigma|\Sigma_A) = \log\lambda_0$ (см. [А, лемма 5.2]). Зафиксируем число $\beta_1 = \log\beta$, удовлетворяющее условию $h(\sigma|\Delta) < \beta_1 < \log\lambda_0$.

Как уже отмечалось в части I (формула (4.9)), для любого гомеоморфизма компакта $f\colon X \to X$, разделяющего траектории,

$$h(f) \geqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log N_n(f)}{n}. \tag{13.2}$$

Отсюда

$$\overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{\log N'''_m}{m} \leqslant h(\sigma|\Delta) < \beta_1. \tag{13.3}$$

Так как $N''_m \leqslant N'''_m$,

$$\overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{\log N''_m}{m} < \beta_1. \tag{13.4}$$

Поскольку $\lim\limits_{p\to\infty} \dfrac{\log N_{ph}(\sigma)}{ph} = \log\lambda_0 > \beta_1$, учитывая (13.3), (13.4), получаем

$$\lim_{p\to\infty} \frac{\log N_{ph}(\sigma)}{ph} = \lim_{p\to\infty} \frac{\log N_{ph}(f)}{ph} = \log\lambda_0. \tag{13.5}$$

Так как каскад (X, f) является эквивариантным образом ТМЦ (Σ_A, σ), $h(f|X) \leqslant h(\sigma|\Sigma_A)$ (см. [Б1, предложение 2.13]). Используя (13.2) и (13.5), получаем

$$\log\lambda_0 = \lim_{p\to\infty} \frac{\log N_{ph}(\sigma)}{ph} = \lim_{p\to\infty} \frac{\log N_{ph}(f)}{ph} \leqslant$$
$$\leqslant h(f|X) \leqslant h(\sigma|\Sigma_A) = \log\lambda_0,$$

и утверждение (1) доказано.

Утверждение (2) следует из аналогичного утверждения про ТМЦ (теорема 4.2) и неравенства (13.4). При этом $\mu = \max(\beta_1, \lambda_1)$. Утверждение (3) вытекает из (2) и определения дзета-функции. Наконец, если $h(f) = 0$, то $\lambda_0 = 1$. При этом нетрудно проверить, что ТМЦ (Σ_A, σ), а значит, и каскад (X, f) сводится к одной периодической траектории.

Пусть $f\colon X \to X$ — транзитивный А#-гомеоморфизм, $\mathscr{E}$ — марковское разбиение для f, (Σ_A, σ) — ТМЦ, соответствующая $\mathscr{E}$, π: $\Sigma_A \to X$ — проекция, индуцированная разбиением $\mathscr{E}$, μ_0 — мера с максимальной энтропией для ТМЦ (Σ_A, σ), $\mu = \pi^*\mu_0$. Как показано в [Б1] (теорема 4.1, случай $\varphi \equiv 0$), динамические системы (X, f, μ) и $(\Sigma_A, \sigma, \mu_0)$ метрически изоморфны и μ является единственной мерой с максимальной энтропией для f. Следующая теорема, аналогичная теореме 4.5 для ТМЦ, связывает меру μ с асимптотическим распределением периодических траекторий.

Теорема 13.3 ([А, теорема 7.4]). *Пусть f: $X \to X$ — транзитивный $A^{\#}$-гомеоморфизм, h — индекс цикличности f, μ — мера с максимальной энтропией, $N_n(A)$ — число точек периода n, содержащихся в множестве A. Тогда*

(1) $$\mu(A) = \lim_{p \to \infty} \frac{N_{ph}(A)}{N_{ph}(f)}, \text{ если } \mu(\partial A) = 0; \qquad (13.6)$$

(2) *для любой непрерывной функции* $\Phi(x)$

$$\int_X \Phi(x)\,\mu(dx) = \lim_{p \to \infty} \frac{1}{N_{ph}(f)} \sum_{\{x:\ f^{ph}x = x\}} \Phi(x). \qquad (13.7)$$

Доказательство. Пусть $\mu(\partial A) = 0$. Тогда $\mu(\bar{A}) = \mu(\operatorname{int} A)$ и, следовательно, $\mu_0(\pi^{-1}(\operatorname{int} A)) = \mu(\operatorname{int} A) = \mu(\bar{A}) = \mu_0(\pi^{-1}(\bar{A}))$. Так как $\pi^{-1}(\operatorname{int} A)$ открыто, а $\pi^{-1}(\bar{A})$ замкнуто, имеем $\pi^{-1}(\operatorname{int} A) \subseteq \operatorname{int}(\pi^{-1}A)$, $\overline{\pi^{-1}(A)} \subseteq \pi^{-1}(\bar{A})$ и

$$\mu_0(\partial\pi^{-1}A) = \mu_0(\overline{\pi^{-1}A}) - \mu_0(\operatorname{int}(\pi^{-1}A)) \leqslant$$
$$\leqslant \mu_0(\pi^{-1}\bar{A}) - \mu_0(\pi^{-1}(\operatorname{int} A)) = 0.$$

Отсюда по теореме 4.5

$$\lim_{p \to \infty} \frac{N_{ph}(\pi^{-1}A)}{N_{ph}(\sigma)} = \mu_0(\pi^{-1}A) = \mu(A).$$

Числа $N_m(\pi^{-1}A)$ и $N_m(A)$ отличаются не более чем на N_m''' — число точек периода m, лежащих на прообразе границы марковского разбиения. Отсюда вследствие неравенства (13.3) получаем (13.6).

Утверждение (13.7) выводится из (13.6) и определения интеграла.

14. Распределение периодических орбит А-потоков. На протяжении этого пункта через f_t: $X \to X$ обозначается ограничение А-потока на его базисное множество. Поток (X, f_t) топологически транзитивен (см. [Б3]). Следующую теорему можно рассматривать как обобщение теоремы 13.1 о спектральном разложении транзитивного А$^{\#}$-гомеоморфизма.

Теорема 14.1 (см. [Ан], [51] для У-потоков, [25] для А-потоков). *Поток f_t: $X \to X$ относится к одному из следующих трех типов:*

(а) *X — неподвижная точка;*

(б) *f_t — специальный поток с постоянной функцией над некоторым транзитивным $A^{\#}$-гомеоморфизмом;*

(в) *$X = \overline{W^u(p)}$ для всякой периодической траектории p.*

Доказательство теоремы 14.1 напоминает доказательство теоремы Смейла о спектральном разложении (см. [С]). В случае (в) поток является перемешивающим, а в случае (б) не является. Таким образом, для потоков (X, f_t), не сводящихся к неподвижной точке, условие (в) эквивалентно свойству перемешивания. В случае (б) свойства потока f_t определяются свойствами соответствующего А$^{\#}$-гомеоморфизма, поэтому наиболее интересным представляется случай (в), к которому, в частности, относятся геодезические потоки на римановых многообразиях отрицательной кривизны.

В дальнейшем предполагается, что поток f_t: $X \to X$ перемешивает. Гиббсовская мера μ_0, отвечающая функции $\varphi \equiv 0$, называется мерой максимальной энтропии. Эта мера единственна, и динамическая система (X, f_t, μ_0) при каждом t метрически сопряжена сдвигу Бернулли (см. [Б4], [37], [3]). Как и в случае дискретного времени, периодические траектории потока (X, f_t) равномерно распределены относительно меры μ_0, а топологическая энтропия вычисляется через асимптотику их числа.

Для всякой периодической орбиты γ с минимальным периодом $\tau(\gamma)$ выберем точку $x \in \gamma$ и определим меру (ненормированную) ω_γ, которая является образом меры Лебега на полуинтервале $[0, \tau(\gamma))$ при отображении $t \to f_t(x)$ (аналогичное определение в случае каскада сопоставляет каждой периодической точке меру 1). Обозначим $CO_\varepsilon(t)$ множество периодических орбит, у которых период (не обязательно минимальный) содержится в интервале $(t-\varepsilon, t+\varepsilon)$. Обозначим $N_\varepsilon(t) = \sum_{\gamma \in CO_\varepsilon(t)} \tau(\gamma)$, и для любого борелевского множества E положим $N_{t,\varepsilon}(E) = \frac{1}{N_\varepsilon(t)} \sum_{\gamma \in CO_\varepsilon(t)} \omega_\gamma(E)$.

Обозначим $\nu(t)$, $\nu_\varepsilon(t)$ число периодических орбит, какой-нибудь период которых содержится в интервале $(0, t)$ или $(t-\varepsilon, t+\varepsilon)$ соответственно.

Теорема 14.2 (см. [12], [13] для случая У-потоков и [25], [26] для случая А-потоков). *Имеют место равенства*

$$\lim_{t\to\infty} N_{t,\varepsilon}(E)=\mu_0(E) \ (\textit{при} \ \ \mu_0(\partial E)=0), \tag{14.1}$$

$$h(f)=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log\nu(t), \tag{14.2}$$

$$h(f)=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log\nu_\varepsilon(t). \tag{14.3}$$

При достаточно большом t *справедливы оценки*

$$\frac{Pe^{ht}}{t}\leqslant\nu(t)\leqslant\frac{Qe^{ht}}{t} \tag{14.4}$$

и

$$\frac{P_\varepsilon e^{ht}}{t}\leqslant\nu_\varepsilon(t)\leqslant\frac{Q_\varepsilon e^{ht}}{t}. \tag{14.5}$$

Для У-потоков Г. А. Маргулис получил более сильный результат (см. [13], а также Г. А. Маргулис, О некоторых вопросах теории У-систем, Диссертация, М., 1970). Он доказал существование предела

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\nu(t)\cdot h\cdot t}{e^{ht}}=1. \tag{14.6}$$

15. Необратимые отображения. Метод марковских разбиений может быть использован при изучении с топологической и метрической точек зрения некоторых динамических систем, формально не являющихся А-системами.

В первую очередь это относится к растягивающим отображениям, простейшие из которых — это отображения $z\to z^n$ окружности $S^1=\{|z|=1\}$ в комплексной плоскости. В этом случае марковское разбиение состоит из дуг $\arg z\in\left[\frac{2\pi p}{n},\ \frac{2\pi(p+1)}{n}\right]$, $p=0,\ \ldots,\ n-1$. Адекватной символической моделью для необратимых растягивающих отображений являются односторонние ТМЦ. В указанном примере соответствующая ТМЦ является односторонним сдвигом Бернулли с символами $0,\ \ldots,\ n-1$ и обозначается $(\Sigma_n^+,\ \sigma)$. При отображении $\pi\colon\ \Sigma_n^+\to S^1$ отождествляются последовательности, переходящие в точки границы марковского разбиения и их прообразы:

$$(\alpha,\ \ldots,\alpha,\ i+1,\ 0,\ 0,\ \ldots)\sim(\alpha,\ \ldots,\ \alpha,\ i,\ n-1,\ n-1,\ \ldots)\quad\text{и}$$
$$(0,\ 0,\ \ldots)\sim(n-1,\ n-1,\ \ldots),$$

т. е. две неподвижные точки отображения $\sigma\colon\ \Sigma_n^+\to\Sigma_n^+$ и их соответствующие прообразы. Такое же марковское разбиение строится для всякого растягивающего отображения окружности степени n, откуда следует топологическая сопряженность любых двух таких отображений. Результаты [Б1, § 4] переносятся на этот случай. В частности, для отображения $z \to z^n$ мера Лебега m инвариантна и, следовательно, совпадает с гиббсовской мерой μ_+, отвечающей функции $\varphi^{(u)} = -\log|Df(z)|$. Но $|Df(z)| \equiv n$; значит, $m = \mu_+ = \mu_{\varphi^{(u)}} = \mu_0$, где μ_0 — мера максимальной энтропии. Периодические точки, очевидно, имеют относительно μ_0 равномерное распределение. Для произвольных растягивающих отображений окружности мера μ_+ абсолютно непрерывна относительно лебеговской и при $|df(z)| \not\equiv \mathrm{const}$ меры μ_0 и μ_+ сингулярны.

Инвариантная мера μ_+ оказывается абсолютно непрерывной относительно меры Лебега также для растягивающих кусочно-гладких отображений отрезка в себя (см. [11], [45]).

В общем случае отображение $f\colon M \to M$ называется *растягивающим*, если найдется такое $c > 1$, что $\|Df_x v\| > c\|v\|$ при $v \in T_x M$. Для растягивающих отображений существует марковское разбиение (см. [43]), что позволяет перенести результаты [Б1, § 4] на этот случай. Всякое растягивающее отображение класса C^2 имеет бернуллиевскую инвариантную меру с гладкой плотностью, см. [44]. В [57] методами, аналогичными развитым в [Б1], исследуются инвариантные меры и равновесные состояния для широкого класса кусочно-гладких растягивающих отображений.

Другим естественным обобщением отображения $z \to z^n$ являются произвольные полиномиальные отображения $z \to P(z)$. В [18], [40] рассмотрен широкий класс таких полиномиальных отображений, для которых на множестве $\Omega(P)$ существует марковское разбиение с границей, состоящей из конечного числа точек. При проекции $\pi\colon \Sigma_n^+ \to \Omega(P)$, отвечающей этому марковскому разбиению, склейки происходят в конечном числе периодических последовательностей и их прообразах. Проекция π порождает взаимно однозначное соответствие между неатомическими инвариантными мерами полукаскадов (Σ_n^+, σ) и $(\Omega(P), P)$. Отсюда, в частности, следует равенство топологических энтропий $h_P = h_\sigma = \log n$.

Еще один класс необратимых отображений, при изучении которого оказался полезным метод марковских разбиений, — это дифференцируемые необратимые отображения окружности или отрезка в себя.

Пусть $\mathfrak{M}$ — дополнение в $C^1(S^1, S^1)$ к множеству растягивающих отображений. В [19] доказано, что открытое всюду плотное в $\mathfrak{M}$ подмножество $\mathfrak{N}$ составляют отображения f, для которых $\Omega(f)$ — канторово множество и $f|\Omega(f)$ топологически сопряжено ТМЦ. Отметим, что аналогичная задача в классе

$C^2(S^1, S^1)$ не решена. Для $f \in \mathfrak{R} \cap C^2(S^1, S^1)$ имеем $m(\Omega(f)) = 0$ (см. [29]). Поэтому для отображений $f \in \mathfrak{R} \cap C^2(S^1, S^1)$ не существует инвариантной меры, абсолютно непрерывной относительно меры Лебега.

Если f_t: $I \to I$ — однопараметрическое семейство отображений, то абсолютно непрерывная мера может существовать для отдельных значений параметра. Так, например, в семействе отображений f_b: $x \longmapsto bx(1-x)$, популярном в биологии (см. [48]), при $b = 4$ точка максимума $x = {}^1/_2$ является прообразом отталкивающей неподвижной точки 0. Замена $y = \varphi(x) = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x}$ переводит отображение f_4 в кусочно-линейное отображение $\tilde{f}(y) = \begin{cases} 2y, & 0 \leqslant y \leqslant {}^1/_2, \\ 2(1-y), & {}^1/_2 \leqslant y \leqslant 1. \end{cases}$ Взяв прообраз меры Лебега m, инвариантной относительно $\tilde{f}$, получаем бернуллиевскую инвариантную меру для $f_4(x)$ с плотностью $\left(\pi\sqrt{x(1-x)}\right)^{-1}$. Этот факт допускает следующее обобщение. Существует счетное число значений параметра $\{b_k\}$, при которых критическая точка является прообразом периодической отталкивающей точки $x = f^k x$, и на некотором отрезке $[a, b]$ существует инвариантная относительно f^k мера, абсолютно непрерывная относительно лебеговской меры. Плотность этой меры непрерывна всюду, кроме концов отрезка $[a, b]$, где она имеет особенности типа $1/\sqrt{x}$. При данном k это верно не только для f, но и для всякого отображения g, содержащегося в малой C^2-окрестности f, если только критическая точка g является прообразом периодической (такие отображения образуют поверхность коразмерности 1 в $C^2([0, 1], [0, 1])$); см. [54] для $k = 2$.

По-видимому, для типичного отображения окружности (или отрезка) в себя инвариантная мера, абсолютно непрерывная относительно лебеговской, может существовать только для нигде не плотного множества значений параметра. Представляет интерес вопрос о мере этого множества. В [58] показано, что оно имеет мощность континуума.

Замечание. После того как эта статья была написана, мы получили возможность ознакомиться с препринтом Р. Боуэна [56]. В нем автор дает краткий обзор примерно того же круга результатов, который содержится в этом сборнике.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

А. Алексеев В. М., Символическая динамика, Одиннадцатая математическая школа, Киев, Изд-во Ин-та математики АН УССР, 1976.

Ан Аносов Д. В., Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны, Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 90 (1967).

Б1. Боуэн Р., Равновесные состояния и эргодическая теория диффеоморфизмов Аносова, настоящий сб., стр. 9—91.

Б2. Боуэн Р., Марковские разбиения и минимальные множества для диффеоморфизмов, удовлетворяющих аксиоме А, настоящий сб., стр. 92—105.

Б3. Боуэн Р., Символическая динамика для гиперболических потоков, настоящий сб., стр. 106—143.

Б4. Боуэн Р., Рюэль Д., Эргодическая теория потоков, удовлетворяющих аксиоме А, настоящий сб., стр. 144—177.

Б5. Боуэн Р., Подкова положительной меры, настоящий сб., стр. 178—180.

Б6. Боуэн Р., Топологическая энтропия для некомпактных множеств, настоящий сб., стр. 181—195.

ГДС. Гладкие динамические системы, Девятая летняя математическая школа, Киев, «Наукова Думка», 1976, стр. 50—341.

Н. Нитецки З., Введение в дифференциальную динамику, М., «Мир», 1975.

С. Смейл С., Дифференцируемые динамические системы, *УМН*, 25, вып. 1 (1970), 113—185.

1. Алексеев В. М., Квазислучайные динамические системы, I. Квазислучайные диффеоморфизмы, *Матем. сб.* 76, № 1 (1968), 72—134.
2. Брудно А. А., О сложности траекторий динамической системы, *УМН*, 33, вып. 1 (1978), 207—208.
3. Бунимович Л. А., Об одном классе специальных потоков, *Изв. АН СССР*, Сер. матем., 38, № 1 (1974), 213—227.
4. Гантмахер Ф. Р., Теория матриц, М., «Наука», 1967.
5. Гуревич Б. М., Синай Я. Г., Алгебраические автоморфизмы тора и цепи Маркова, Дополнение к книге П. Биллингслея «Эргодическая теория и информация», М., «Мир», 1969.
6. Динабург Е. И., Связь между различными энтропийными характеристиками динамических систем, *Изв. АН СССР*, Сер. матем., 35, № 2 (1971), 324—366.
7. Звонкин А. К., Левин Л. А., Сложность конечных объектов и обоснование понятий информации и случайности с помощью теории алгоритмов, *УМН*, 25, вып. 6 (1970), 85—127.
8. Каток А. Б., Локальные свойства гиперболических множеств, Добавление 1 к книге [Н], стр. 214—232.
9. Каток А. Б., Синай Я. Г., Стёпин А. М., Теория динамических систем и общих групп преобразований с инвариантной мерой, в сб. Математический анализ, т. 13 (Итоги науки и техники), ВИНИТИ, М., 1975, стр. 129—262.
10. Колмогоров А. Н., Три подхода к определению понятия «количество информации», *Проблемы передачи информации*, 1, № 1 (1965), 3—7.
11. Косякин А. А., Сандлер Е. А., Эргодические свойства одного класса кусочно гладких преобразований отрезка, *Изв. высш. учеб. заведений*, Математика, № 3 (1972), 32—40.
12. Маргулис Г. А., О некоторых применениях эргодической теории к изучению многообразий отрицательной кривизны, *Функц. анализ и его прил.*, 3, № 4 (1969), 80—90.
13. Маргулис Г. А., О некоторых мерах, связанных с У-потоками на компактных многообразиях, *Функц. анализ и его прил.*, 4, № 1 (1970), 62—76.
14. Робин Дж., Теорема о структурной устойчивости, Добавление 2 к книге [Н], стр. 233—289.
15. Синай Я. Г., Марковские разбиения и У-диффеоморфизмы, *Функц. анализ и его прил.*, 2, № 1 (1968), 64—89.
16. Синай Я. Г., Гиббсовские меры в эргодической теории, *УМН*, 27, вып. 4 (1972), 21—64.

17. Смейл С., Диффеоморфизмы с многими периодическими точками, сб. *Математика*, **11** : 4 (1967), 88—106.
18. Якобсон М. В., Структура полиномиальных отображений на особом множестве, *Матем. сб.*, 77, № 1 (1968), 105—124.
19. Якобсон М. В., О гладких отображениях окружности в себя, *Матем. сб.*, **85**, № 2 (1971), 163—188.
20. Якобсон М. В., О некоторых свойствах марковских разбиений, *ДАН СССР*, **226**, № 5 (1976), 1021—1024.
21. Adler R. L., Konheim A. G., McAndrew M. H., Topological entropy, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **114**, № 2 (1965), 309—319
22. Adler R. L., Weiss B., Entropy, a complete metric invariant for automorphisms of the torus, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **57**, № 6 (1967), 1573—1576.
23. Bowen R., Markov partitions for axiom A diffeomorphisms, *Amer. J. Math.*, **92**, № 3 (1970), 725—747.
24. Bowen R., Periodic points and measures for axiom A diffeomorphisms, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **154** (1971), 377—397.
25. Bowen R., Periodic orbits for hyperbolic flows, *Amer. J. Math.*, **94**, № 1 (1972), 1—30
26. Bowen R., The equidistribution of closed geodesics, *Amer. J. Math.*, **94**, № 2 (1972), 413—423.
27. Bowen R., Markov partitions are not smooth, Preprint.
28. Bowen R., Walters P., Expansive one-parameter flows, *J. Diff. Eq.*, **12**, № 1 (1972), 180—193.
29. Brolin H., Invariant sets under iteration of rational functions, *Arkiv Math.*, **6**, № 2 (1965), 103—144.
30. Churchill R., Rod D., Pathology in dynamical systems, I. General theory; II. Applications, *J. Diff. Eq.*, **21**, № 1 (1976), 39—65; 66—112.
31. Conze J. P., Points périodiques et entropie topologique, *Compt. Rend. Acad. Sci.*, **267**, № 3 (1968), 149—152.
32. Dankner A., On Smale's axiom A dynamical systems, Preprint.
33. Denker M., Grillinberger C., Sigmund K., Ergodic theory on compact sets, Lecture Notes in Math., **527**, Springer-Verlag, 1976.
34. Devaney R. L., Collision orbits in the anisotropic Kepler problem, Preprint.
35. Devaney R. L., Non-regularizability of the anisotropic Kepler problem, Preprint.
36. Farrell F., Jones L., Markov cell structures, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **83**, № 4 (1977), 739—740.
37. Franco-Sanchez E., Flows with unique equilibrium states, *Amer. J. Math.*, **99**, № 3 (1977), 486—514.
38. Furstenberg H., Disjointness in ergodic theory, minimal sets and a problem in diophantine approximation, *Math. Systems Theory*, **1**, № 1 (1967), 1—49.
39. Goodman T. N., Relating topological entropy and measure theoretic entropy, *Bull. London Math. Soc.*, **3**, № 2 (1971), 176—180.
40. Guckenheimer J., Endomorphisms of the Riemann sphere, Proc. of Symposia in Pure Math., v. **14**, 1970, pp. 95—123.
41. Gutzwiller M., Bernoulli sequences and trajectories in the anisotropic Kepler problem, *J. Math. Phys.*, **18**, № 4 (1977), 806—823.
42. Kamae T., Normal numbers and ergodic theory, Lecture Notes in Math., **550**, Springer-Verlag, 1976, pp. 253—269.
43. Krzyżewski K., On connection between expanding mappings and Markov chains, *Bull. Acad. Pol. Sci.*, Ser. math., **19**, № 4 (1971), 291—293.
44. Krzyżewski K., Szlenk W., On invariant measures of expanding differentiable mappings, *Studia math.*, **33**, № 1 (1969), 83—92.

45. Lasota A., Yorke J., On the existence of invariant measures for piecewise monotonic transformations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 186 (1973), 481—488.
46. Manning A., Axiom A diffeomorphisms have rational zeta function, *Bull. London Math. Soc.*, 3 (1971), 215—220.
47. Martin-Löf P., The definition of random sequences, *Information and Control*, 9 (1966), 602—619.
48. May R. M., Simple mathematical models with very complicated dynamics, *Nature*, 261, № 5560 (1976), 459—467.
49. Newhouse S. E., Palis J., Hyperbolic Nonwandering sets on two-dimensional manifolds, Dynamical Systems, Acad. Press, N. Y. — London, 1973, pp. 293—302.
50. Parry W., Intrinsic Markov chains, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 112, № 1 (1964), 55—66.
51. Plante J., Anosov flows, *Amer. J. Math.*, 94, № 3 (1972), 729—754.
52. Robinson C., Structural stability of C^1 diffeomorphisms, *J. Diff. Eq.*, 22, № 1 (1976), 28—73.
53. Robinson C., Structural Stability of C^1 flows, Lecture Notes in Math., 468, Springer-Verlag, 1975, pp. 262—277.
54. Ruelle D., Applications conservant une mesure absolument continue par rapport à dx sur [0, 1], *Commun. math. Phys.*, 55 (1977), 47—51.
55. Wojtkowski M., Oscillating geodesics on 2-dimensional manifolds, Preprint.
56. Bowen R., On Axiom A diffeomorphisms, Preprint.
57. Walters P., Invariant measures and equilibrium states for some mappings which expand distances, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 236 (1978), 121—153.
58. Якобсон М. В., Топологические и метрические свойства одномерных эндоморфизмов, *ДАН СССР*, 243, № 4 (1978), 866—869.

СПИСОК РАБОТ [1]) Р. БОУЭНА

1. The sequence $ka^n + 1$ composite for all n. American Mathematical Monthly, vol. 71 (1964), pp 175—176.
2. Generation of triangulations of the sphere (with Stephen Fisk). Mathematics of Computation, vol. 21 (1967), pp. 250—252.
3. The generation of minimal triangle graphs. Mathematics of Computation, vol. 21 (1967), pp. 248—250.
4. On sums of valencies in planar graphs. Canadian Mathematical Bulletin, vol. 9 (1966), pp. 111—113.
5. A new proof of a theorem in utility theory. International Economic Review, vol. 9 (1968), pp. 374—375.
6. Zeta functions of restrictions of the shift transformation (with O. E. Lanford III). Proceedings of the Global Analysis 1968 Summer Institute at Berkeley, pp. 43—49.
7. Topological entropy and axiom A. Proceedings of the Global Analysis 1968 Summer Institute at Berkeley, pp. 23—41.
8. Markov partitions for axiom A diffeomorphisms. American Journal of Mathematics, vol. 92 (1970), pp. 725—747.

*9. Markov partitions and minimal sets for axiom A diffeomorphisms. American Journal of Mathematics, vol. 92 (1970), pp. 907—918.

10. Entropy for group endomorphisms and homogeneous spaces. Transactions of the American Mathematical Society, vol. 153 (1971), pp. 401—414.
11. Periodic points and measures for axiom A diffeomorphisms. Transactions of the American Mathematical Society, vol 154 (1971), pp 377—397.
12. Entropy-expansive maps. Transactions of the American Mathematical Society, vol. 164 (1972), pp. 323—331.
13. Periodic orbits for hyperbolic flows. American Journal of Mathematics, vol. 94 (1972), pp. 1—30.
14. The equidistribution of closed geodesics. American Journal of Mathematics, vol. 94 (1972), pp. 413—423.
15. Expansive one-parameter flows (with Peter Walters). Journal of Differential Equations, vol. 12 (1972), pp. 180—193.
16. One-dimensional hyperbolic sets for flows. Journal of Differential Equations, vol. 12 (1972), pp. 173—179.
17. Symbolic dynamics for hyperbolic systems. Recent Advances in Topological Dynamics, Springer-Verlag Lecture Notes No. 318, pp. 51—58.

*18. Symbolic dynamics for hyperbolic flows. American Journal of Mathematics, vol 95 (1973), pp. 429—460.

*19 Topological entropy for noncompact sets. Transactions of the American Mathematical Society, vol. 184 (1973), pp. 125—136.

20. Entropy versus homology for certain diffeomorphisms. Topology, vol. 13 (1974), pp. 61—67.
21. Maximizing entropy for a hyperbolic flow. Mathematical Systems Theory, vol. 7 (1974), pp. 300—303.

[1]) Звездочкой отмечены работы, переводы которых вошли в настоящий сборник.

22. Some systems with unique equilibrium states. Mathematical. Systems Theory, vol. 8 (1974), pp. 193—202.
23. Bernoulli equilibrium states for axiom A diffeomorphisms. Mathematical Systems Theory, vol. 8 (1975), pp. 289—294.
*24. Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms. Lecture Notes in Mathematics 470, Springer-Verlag, 1975, 108 pp.
25. Mixing Anosov flows. Topology, vol. 15 (1976), pp. 77—79.
*26. A horseshoe with positive measure. Inventiones Mathematicae, vol. 29 (1975), pp. 203—204
27. ω-limit sets for axiom A diffeomorphisms. Journal of Differential Equations, vol. 18 (1975), pp. 333—339.
*28. The ergodic theory of axiom A flows (with David Ruelle). Inventiones Mathematicae, vol. 29 (1975), pp. 181—202.
29. Smooth partitions of Anosov diffeomorphisms are weak Bernoulli. Israel Journal of Mathematics, vol. 21 (1975), pp. 95—100.
30. Symbolic dynamics for hyperbolic flows. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, 1974, Vancouver, pp. 299—302.
31. The periodic points of maps of the disk and the interval (with John Franks). Topology, vol. 15 (1976), pp. 337—342.
32. Weak mixing and unique ergodicity on homogeneous spaces. Israel Journal of Mathematics, vol. 23 (1976), pp. 267—273.
33. Unique ergodicity for foliations. Asterisque 40 (1976), pp. 11—16.
34. Unique ergodicity for horocycle foliations (with Brian Marcus). Israel Journal of Mathematics, vol. 26 (1977), pp. 43—67.
35. Bernoulli maps of the interval. Israel Journal of Mathematics, vol. 28 (1977), pp. 161—168.
36. Anosov foliations are hyperfinite. Annals of Mathematics, vol. 106 (1977), pp. 549—565.
37. Homology for zero-dimensional nonwandering sets (with John Franks). Annals of Mathematics, vol. 106 (1977), pp. 73—92.
38. A model for Couette flow-data. Springer Lecture Notes in Mathematics, No. 615 (1977), pp. 117—133.
39. Entropy for maps of the interval. Topology, vol. 16 (1977), pp. 465—467.
40. On axiom A diffeomorphisms. Conference Board of the Mathematical Sciences Regional Conference Series in Mathematics, No. 35 (1978), vii + 45 pp.
41. Markov partitions are not smooth. Proc. Amer. Math Soc. Vol. 17, No. 1 (1978), pp 130—132.
42. Entropy and the fundamental group.
43. Invariant measures for Markov maps of the interval.
44. Hausdorff dimension of Quasi-Circles.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

СОДЕРЖАНИЕ

УВАЖАЕМЫЙ ЧИТАТЕЛЬ!

Ваши замечания о содержании книги, ее оформлении, качестве перевода и другие просим присылать по адресу: 129820, Москва, И-110, ГСП, 1-й Рижский пер., д. 2, издательство «Мир».

Р. Боуэн

МЕТОДЫ СИМВОЛИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ

Старший научный редактор Н. Плужникова
Младший научный редактор Ю. Андреева
Художник А. Шипов
Художественный редактор В. Шаповалов
Технический редактор Н. Иовлева
Корректор В. Киселева

ИБ № 1481

Сдано в набор 25.05.78. Подписано к печати 26.02.79. Формат $60\times90^1/_{16}$. Бумага типографская № 2. Латинская гарнитура Высокая печать. 7,75 бум. л. 15,50 усл. печ. л. Уч.-изд. л 13,42. Изд. № 1/9740. Тираж 4200 экз. Зак. 1231. Цена 1 руб.

Издательство «Мир»
129820, Москва, И-110, ГСП, 1-й Рижский пер., 2

Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой «Союзполиграфпрома» при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 198052, Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29.

В ИЗДАТЕЛЬСТВЕ «МИР» ГОТОВИТСЯ К ВЫПУСКУ в 1980 г.

Марсден Дж., Мак-Кракен М. **Бифуркации Хопфа и их приложения**: Пер. с англ., 16 л., 1 р. 50 к.

Книга американских специалистов посвящена теории бифуркаций, которую советские читатели связывают с именами А. М. Ляпунова и А. А. Андронова и которая в последние годы находит широкое поле приложений. Эта теория изучает резкие скачкообразные переходы при потерях устойчивости движения, она интересна как с чисто математической стороны, так и в связи с самыми разнообразными применениями. В книге рассматриваются основы теории бифуркаций и ее применения к решению уравнений с частными производными, гидродинамике, биологическим моделям и другим конкретным задачам.

Книга рассчитана на математиков-прикладников, физиков-теоретиков и инженеров-исследователей.

Уважаемые читатели!

Заблаговременно оформляйте заказы на интересующие Вас книги. Заказы принимаются в магазинах, торгующих научно-технической литературой.

ВНИМАНИЮ ЧИТАТЕЛЕЙ ПЕРЕВОДНОЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ ИЗДАТЕЛЬСТВА «МИР»